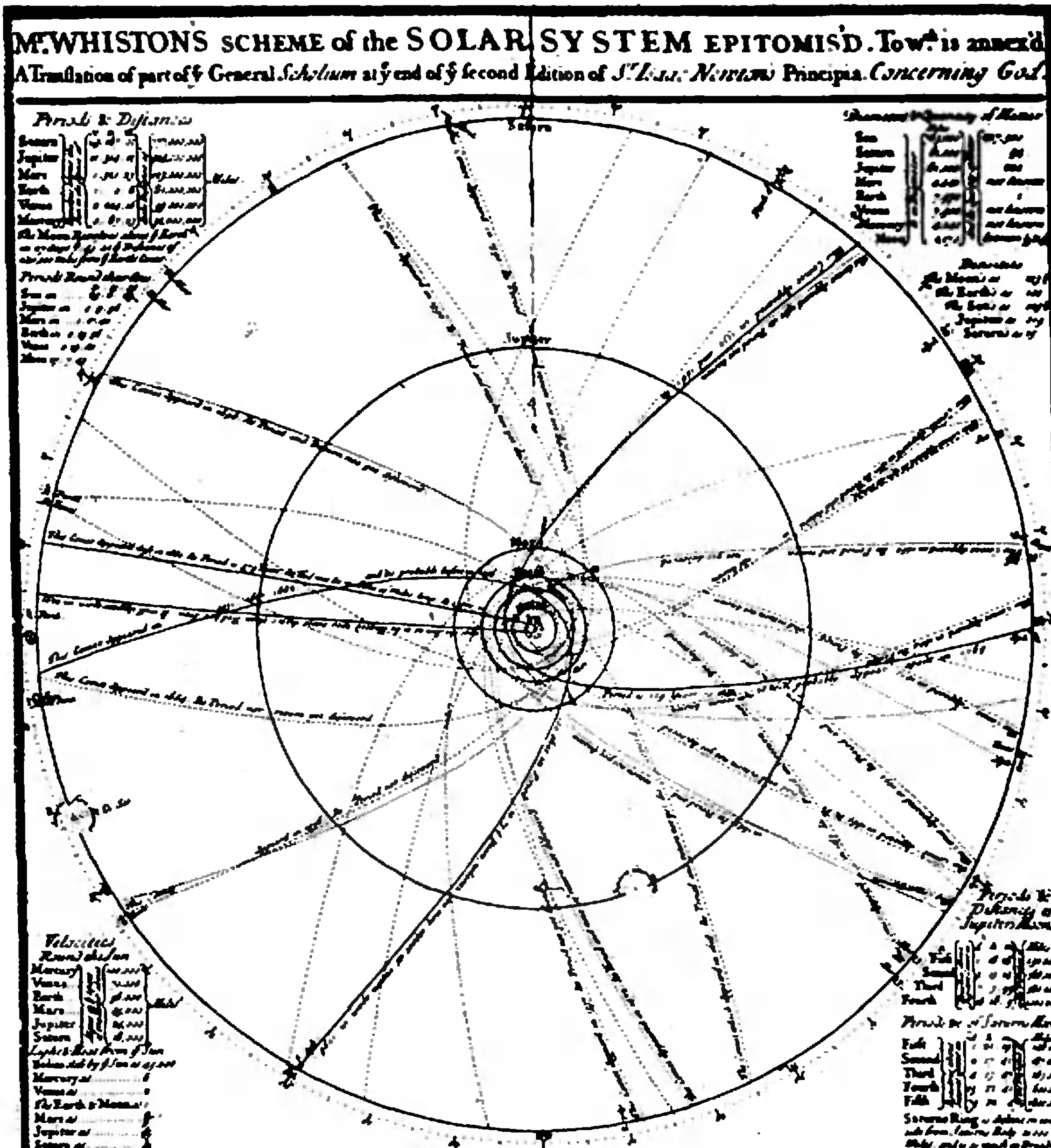
ISSN 0130-2221

Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

1987



В этом номере мы продолжаем знакомство с «Математическими началами натуральной философии» Ньютона (см. статью «Великая книга Ньютона»). Эта книга оказала огромное влияние на развитие науки и человеческой мысли. Построенная Ньютоном механика позволила проанализировать и обобщить многие весьма сложные явления, в том числе и астрономические. Воспроизведенная здесь «Схема Солнечной системы», изданная в 1724 году английским ученым В. Вистоном (который после Ньютона занял профессорскую должность в Кембридже),— попытка представить «ньютоновскую систему мира», основываясь на сформулированных в «Началах» законах движения и законе всемирного тяготения.

Квант

1987

12

Основан в 1970 году

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

Наша обложка

На главной площади вашего города стоит новогодняя елка? Посмотрите на нее в вечернее время издалека, и вы увидите, что она... красная, хотя освещают ее разноцветные лампочки. Почему? На этот вопрос вы сможете ответить, прочитав статью «Как однажды Жак-звонарь головой сломал фонарь...» (с. 32).

Двадцатого октября 1987 года закончился жизненный путь великого ученого, крупнейшего математика современности Андрея Николаевича Колмогорова.

Место А. Н. Колмогорова в истории математики уникально — ему принадлежат фундаментальные открытия почти во всех областях этой науки и ее приложений. Но помимо собственного математического творчества, в жизни Андрея Николаевича огромное значение имело стремление служить Просвещению, служить воспитанию подрастающего поколения.

А. Н. Колмогоров родился 25 апреля 1903 года в Тамбове. Его редкостное и разностороннее дарование проявилось рано: в семь лет он самостоятельно переоткрывает представление квадратов целых чисел в виде суммы простых, в двенадцать начинает изучать высшую математику, затем увлекается историей Новгорода (где делает важное открытие), серьезно интересуется металлургией. Поступив на физико-математический факультет Московского университета в 1920 году, он окончательно связывает свою жизнь с математикой и с университетом. Уже в 19 лет ему удается построить пример «почти всюду расходящегося тригонометрического ряда», принесший ему мировую известность. В 1931 году А. Н. Колмогоров становится профессором Московского университета, где он возглавлял в разное время три кафедры и создал несколько научных школ. Нет возможности даже перечислить здесь те области знания, где Андрей Николаевич сделал важнейшие открытия. Отметим лишь создание основ теории вероятностей и статистики, решение (при участии В. И. Арнольда) XIII проблемы Гильберта.

В те же годы, когда Андрей Николаевич делает свои первые открытия, он становится школьным учителем и несколько лет работает в общеобразовательной школе. Начиная с 30-х годов, он читает многочисленные лекции школьникам и студентам, активно участвует в становлении школьных математических олимпиад, сначала Московских, а затем Всероссийских и Всесоюзных. В шестидесятые годы он создает физико-математическую школу-интернат при МГУ (которую все сразу окрестили «колмогоровской»), много сил вкладывает в усовершенствование школьных программ и учебников. В 1970 г. он вместе с И. К. Кикоиным создает журнал «Квант» и остается до самых последних своих дней его автором и активным руководителем.

Андрей Николаевич как-то сказал одному из своих учеников, что человечество представляется ему в виде блуждающих в тумане огней, которые лишь смутно чувствуют свет, рассеиваемый другими. Но эти слова невозможно отнести к нему самому: он был не только великим ученым, не только великим учителем, но и великим Просветителем. Андрей Николаевич принадлежал к числу тех несравненных гениев, которые высветляют жизнь уже самим фактом своего существования. Человек, обладающий столь совершенным разумом и столь бескорыстной душой, не нуждается в похвале потомства — его труды продолжают воздействовать на нас, его имя не будет забыто.

МЕХМАТОВЦЫ МГУ В БИТВЕ ЗА МОСКВУ

Кандидат физико-математических наук
И. З. ПИРОГОВ,
кандидат физико-математических наук
И. А. ТЮЛИНА

Когда меня спрашивают, что больше всего запомнилось из минувшей войны, я всегда отвечаю: битва за Москву.

Г. К. Жуков

Из тринадцати Героев Советского Союза — воспитанников Московского университета — семь человек — с механико-математического факультета*).

Авторы этой статьи — доценты мехмата (механико-математического факультета) МГУ Иван Зиновьевич Пирогов и Ирина Александровна Тюлина — были в числе тех, кто защищал Москву осенью сорок первого года.

И. З. Пирогов перед войной работал в Восточном Казахстане. Несмотря на «свинцово-цинковую» бронь**) 18 августа 1941 года он получил направление во Фрунзенское пехотное училище, из личного состава которого вскоре была сформирована одна из особых курсантских стрелковых бригад. В конце октября 34-я бригада, где служил И. З. Пирогов, была направлена в Подмосковье. В составе 49-й армии эта бригада вступила в бой под Серпуховом в конце ноября, а в декабре эти части вели бои под Тарусой. 20 декабря Иван Пирогов был тяжело ранен. Пройдя нелегкий путь поэтапной эвакуации, летом 1942 г. он оказался на излечении в Свердловске, где в это время был в эвакуации мехмат МГУ. Еще в госпитале Пирогов стал серьезно готовиться и вскоре поступил на мехмат, с которым неразрывно связана вся его дальнейшая жизнь. И. З. Пирогов награжден орденами Отечественной войны I степени, Красной Звезды и медалями военного и мирного времени.

Студентка 3-го курса мехмата И. А. Тюлина в июне сорок первого года поступила, а к осени окончила двухмесячные курсы медсестер. Ее военная дорога была долгой: началась в Туле, протянулась на тысячи километров через Калужскую область, Белоруссию, Польшу, Померанию до Эльбы (весной сорок пятого). Сначала И. А. Тюлина была санинструктором 330-й стрелковой дивизии, а затем — старшей операционной сестрой и парторгом медсанбата. Возвратилась на мехмат летом 1945 г.; окончив мехмат и его аспирантуру, преподает там же историю механики. Награждена двумя орденами Отечественной войны II степени, медалями, Почетной грамотой Верховного Совета РСФСР.

В конце 1941 г. на Москву была брошена треть всех пехотных и две трети танковых и моторизованных сил Восточного фронта гитлеровской Германии. По Ленинградскому, Рогачевскому, Дмитровскому, Волоколамскому, Минскому, Варшавскому шоссе на Москву обрушились танковые тараны фашистов. Москвичи включились в оборонные работы. К осени сорок первого года были сформированы 15 стрелковых дивизий народного ополчения; из них 12 уже в июле заняли боевые рубежи.

Сотни студентов, аспирантов и сотрудников Московского университета вместе с рабочими Краснопресненского района, студентами консерватории, артистами театра Революции (теперь это театр им. В. Маяковского) и других организаций записывались в 8-ю стрелковую Краснопресненскую дивизию. В отличие от регулярных войск, подавляющее большинство подразделений ополчения было укомплектовано при менее тщательном возрастном и медицинском отборе. Поэтому туда попали люди сугубо мирных профессий, так называемые «белобилетники». Военная учеба ополченцев была очень краткой.

В 8-ю Краснопресненскую дивизию народного ополчения Москвы записалось 213 мехматовцев. Большинство студентов, аспирантов и преподавателей мехмата направили в 975-й артполк этой дивизии.

В августе 8-я Краснопресненская дивизия заняла рубеж на Ржевско-вяземском направлении. Боевая подготовка сочеталась с напряженными оборонительными работами. К сентябрю были созданы противотанковые заграждения, огневые точки, минные поля.

Однако противник внес резкие изменения в ход ожидаемых событий. В начале октября обстановка на Ельнин-

---

*) О Героях Советского Союза, учившихся на механико-математическом факультете МГУ, см.: «Квант», 1977, № 11, с. 38—40 и 1980, № 5, с. 10—17, а также журнал «Математика в школе», 1985, № 2, с. 7—13.

**) Рабочие, занятые в производстве свинца и цинка, освобождались от военной службы.

ском направлении быстро осложнилась: враг бросил сюда свежие войска, во много раз превосходящие наши силы в танках, стволах и в личном составе. В связи с этим командование Резервным фронтом передало 8-ю Краснопресненскую дивизию из 32-й в 24-ю армию, поставив перед краснопресненцами новую боевую задачу. Нужно было молниеносно сняться с подготовленных надежных позиций и передислоцироваться в район деревни Уварово Смоленской области, что несколько южнее Ельни.

В осенней распутице обозы с боеприпасами и продуктами отстали, но бойцы 975-го артполка, как и всей 8-й дивизии, выполнили свою задачу, задержав рвущегося к Москве врага на несколько дней. Ополченцы многих районов Москвы сражались здесь бок о бок с кадровыми частями Советской Армии. Оккупантам эти бои под Ельней стоили больших потерь: около 45 тысяч солдат и офицеров. Наши потери также были велики: более трети ополченцев 8-й Краснопресненской дивизии погибли или попали ранеными в плен. Среди погибших и пропавших без вести было много молодых ученых — аспирантов мехмата: С. С. Кудашев, А. И. Герчиков, С. Я. Карнов, М. Е. Глезерман, М. И. Песин, А. И. Вихров, В. Н. Засухин, М. Д. Брогинский, Х. М. Мильштейн, Г. Н. Алексеев и другие.

Многие выпускники мехмата сорок первого года были распределены в конструкторские бюро и на предприятия оборонного значения, предоставлявшие бронь. Однако и они почти все добровольно пошли на фронт; многие вступили в ополчение. Среди них был и Михаил Иванов, уже имевший тогда несколько рабочих специальностей. Всюду он вел активную комсомольскую и партийную работу. В 1936 г., имея большой трудовой стаж, М. И. Иванов поступил на мехмат Московского университета и в начале войны окончил его с отличием. Михаил Иванович Иванов был зачислен в 975-й артполк в звании капитана. Из кровопролитных боев под Ельней в начале октября сорок первого года он не вернулся. Погибли там же и его товарищи, только что окончившие мехмат: Мстислав Долгов, Олег Сорокин, Евгений Павлов, Петр Соколов и студенты IV курса Александр Сивков, Владимир Муранов, Виктор Подьячев и многие другие.

Среди тех, кто возвратился из этих жесточайших боев под Ельней, был Горимир Горимирович Черный, ныне академик, директор Института механики МГУ.

Вместе со студентами и аспирантами мехмата пошел в ополчение доцент Николай Борисович Веденисов. Любовь к точным наукам привил ему отец Б. Н. Веденисов, выдающийся строитель и ученый, член-корреспондент АН СССР, лауреат Государственной премии. В 1922 г. Н. Б. Веденисов поступил на физико-математический факультет Московского университета. Он учился вместе с А. Н. Тихоновым, В. В. Немыцким, Л. А. Тумаркиным, А. Н. Черкасовым, в будущем известными математиками. Со второго курса эти математики вошли в семинар по топологии, организованный П. С. Урысоном и П. С. Александровым.

По окончании учебы в университете Н. Б. Веденисов преподавал математику в Московском государственном педагогическом институте, одновременно работая в Московском университете. В годы, предшествующие Великой Отечественной войне, он был доцентом военной Артиллерийской академии. Всюду у него были ученики; в топологическом семинаре МГУ он руководил работой дипломников и аспирантов.

Вместе с сотнями студентов механико-математического факультета, десятками аспирантов и сотрудников Н. Б. Веденисов записался в 8-ю Краснопресненскую ополченскую дивизию. За несколько лет до войны он повредил позвоночник и врачи рекомендовали ему остаться в тылу. Николай Борисович отвечал всем лаконично: я должен быть там, где мои ученики — на фронте. Как и большинство ополченцев мехмата, он был направлен в 975-й артполк 8-й Краснопресненской дивизии. В боях под Ельней Н. Б. Веденисов был ранен, захвачен в плен и умер в октябре 1941 г.

Тяжелые испытания выпали на долю тех, кто был захвачен в плен. Об их судьбе можно прочитать в книге «Без вести пропавшие» С. П. Злобина, перенесшего четыре года в лагерях для военнопленных в Германии.

Доброволец с мехмата Владимир Муранов был на IV курсе, когда грянула война. Он записался в народное ополчение и был направлен в 975-й артполк. В октябре 1941 г. пропал без вести. Почти 40 лет искали его следы четыре сестры Володи. И вот наконец пришло сообщение из Общества Красного Креста, что В. П. Муранов погиб 27 декабря 1941 г. в фашистском шталаге № 324 в Гродно. За три года «хозяйничанья» в окрестностях Гродно оккупанты расстреляли и замучили в лагерях смерти 33 тысячи мирных жителей и военнопленных.

Долгие годы ничего не было известно о судьбе Андрея Павлова и его друга — мехматовца Ивана Лепехина. Оба оканчивали аспирантуру; у Андрея была подготовлена большая часть диссертации, когда началась война. По призыву Московского комитета партии Андрей и Иван были направлены на переподготовку под Серпухов (в военкомат Краснопресненского района Москвы оба явились добровольно 28 июня). В июле они были прикомандированы к 48-му полку 38-й стрелковой дивизии на Смоленское направление. Андрей Павлов был назначен командиром взвода 120-мм минометной батареи. Осенью сорок первого он оказался на самом опасном направлении осеннего натиска фашистов — под Ярцево. К. К. Рокоссовский отмечал в своих воспоминаниях 38-ю стрелковую дивизию как самую стойкую. После некоторой стабилизации линии фронта на этом участке обстановка вновь осложнилась в начале октября. Началась операция гитлеровцев «Тайфун». 38-й дивизии пришлось взять на себя сдерживание натиска сильнейших ударных сил фашистов, прикрывая отход 16-й армии. Оставшиеся в заслоне части 30-й дивизии вели бой до последней гранаты. Теперь на месте октябрьского сражения 1941 г. построен грандиозный мемориал в память бойцов и командиров, задержавших стремительный напор танковых и механизированных колонн врага на подступах к Москве.

* * *

С первых дней Великой Отечественной войны Государственный комитет обороны уделял особое внимание защите нашей столицы. В сложнейшей проблеме жизни прифронтового города самое активное участие принимали ученые, студенты, аспиранты и сотрудники МГУ, в том числе механико-математического факультета.

Приказом по МГУ от 12 июля 1941 г. была организована Местная противовоздушная оборона (МПВО) МГУ. В составе 1-й роты рядовыми бойцами были крупнейшие ученые факультета: И. Г. Петровский, П. С. Александров, С. Л. Соболев, Б. В. Булгаков, А. А. Ильюшин, Н. А. Слезкин, А. А. Космодемьянский, Д. Е. Меньшов, А. Г. Курош и другие. Кто не вошел в состав МПВО, использовался по линии МПВО на подсобных и других оборонительных работах.

Занятия в университете начались 1 августа 1941 г.; сроки обучения сокращались, интенсивность обучения сильно возросла, многие студенты были на спецработах. 13 октября, в связи с эвакуацией основного состава МГУ в Ашхабад, занятия в Москве прекратились.

Москва готовилась к отражению наступления врага с воздуха. Ученый-геометр Н. А. Глаголев успешно решал задачу об оптимальном размещении зенитных батарей и аэростатов заграждения вокруг Москвы, С. В. Бахвалов (тоже геометр) в самом начале войны разработал теорию приборов управления артиллерийским огнем (кстати, в годы гражданской войны он был артиллеристом). Специалист по механике Х. А. Рахматуллин проводил теоретические и экспериментальные работы по изучению аэродинамики привязных аэростатов и расчет тросов при поперечном ударе. Он же интенсивно проводил работы по исследованию аэродинамики парашютов.

С первых же дней войны коллектив кафедры теории вероятностей под руководством А. Н. Колмогорова провел ряд исследований по разработке теории артиллерийской стрельбы. За короткое время была решена задача о наивыгоднейшем рассеивании снарядов при стрельбе по площадям. Особо важной в этот начальный период войны была разработка таблиц бомбометания для малых бомбардировщиков типа ПО-2. Эту задачу также решили на кафедре теории вероятностей. Другая важная задача — задача низкого торпедирования с самолетов — была решена учеными кафедры гидромеханики Л. И. Седовым и Н. А. Слезкиным. Задача о влиянии несоосности снаряда и канала ствола орудия на отклонения при стрельбе была решена Н. А. Слезкиным; он же рассматривал вопросы теории бронепробивания и удара снаряда о броню.

В тяжелых оборонительных боях часто приходилось перебазировать самолеты на временные неблагоустроенные аэродромы по земле. При этом возникла проблема устойчивости таких движений. Эту проблему разрешили ученые мехмата А. А. Космодемьянский, Н. Г. Четаев, Н. Д. Моисеев.

При грандиозных масштабах военных действий исключительное значение имела служба времени ГАИШ, обеспечивавшая бесперебойную передачу радиосигналов точного времени для нужд фронта. Этой работой руководил Н. Д. Моисеев.

К началу войны на мехмате было несколько лабораторных установок; часть из них была расположена в подвальных помещениях факультета. На этих установках проводились важные исследования оборонного значения. Особенно интенсивные исследования проводились коллективом кафедры теории упругости под руководством А. А. Ильюшина. Эти исследования велись несмотря на воздушные налеты врага. Лишь после бомбардировки 29 октября, когда фашистский бомбардировщик сбросил 200-килограммовую фугасную бомбу перед зданием мехмата, работы в лабораториях теории упругости были временно прекращены. Но уже в начале 1942 г. работы в этих лабораториях продолжались. Важнейшим результатом этих экспериментально-теоретических исследований явилось доказательство возможности изготовления снарядов из вязких сталей без термообработки и из сталистых чугунов. А это значительно удешевляло и упрощало производство снарядов. Исследуя вопрос об устойчивости вязко-пластических течений, было определено число осколков и их разлет при разрыве снарядов, а эти результаты позволили дать рекомендации об оптимальном проектировании снарядов.

В осажденной Москве и блокадном Ленинграде разрабатывалась фантастическая идея построения дороги по льду Ладожского озера (Дороги жизни). Активнейшее участие в решении задачи о прочности ледового покрытия принял ученый кафедры теории упругости М. М. Филоненко-Бородич.

В предвоенные годы Б. В. Булгаков занимался теорией гироскопов. Накануне войны он интенсивно разрабатывал теорию гироскопических систем, в частности автопилотов. Во время войны А. Ю. Ишлинский, Б. В. Булгаков, Я. Н. Ройтенберг работали над совершенствованием гироскопических приборов и приборов управления артиллерийским огнем на кораблях Военно-морского флота.

В начале 1942 г., после декабрьского разгрома немцев под Москвой, многие ученые стали возвращаться в Москву из эвакуации. В феврале 1942 г. возобновились занятия в Московском университете. Хотя враг был отброшен от Москвы, условия для занятий и научно-исследовательских работ были очень трудными. Как и прежде, работали команды МПВО, студенты заготавливали дрова для столицы и в то же время восстанавливали лаборатории, сдавали зачеты и экзамены. Весной 1943 г. возвратилась из Свердловска большая часть механико-математического факультета и библиотека, особенно ценнейшая ее математическая часть — кабинет математики и механики Московского математического общества. Но здание мехмата было разрушено, занятия проходили в разных помещениях, подчас в далеких от центра города. Усилиями строителей и студентов помещение мехмата на Моховой было восстановлено. Среди студентов появились фронтовики, демобилизованные по ранению, началась кипучая мехматовская жизнь: заработали кружки, семинары — учебная жизнь мехмата входила в свой нормальный ритм.

Самоотверженный труд ученых мехмата был высоко оценен правительством: большинство перечисленных работ было отмечено Государственными премиями, а их авторы награждены орденами и медалями.

Мы попытались отразить лишь небольшую часть значительного вклада в дело обороны столицы и окончательного разгрома врага, который внесли ученые, студенты, аспиранты — весь коллектив механико-математического факультета МГУ.

ЭТА ПРОСТАЯ ТЕПЛОЕМКОСТЬ

Доктор физико-математических наук
В. С. ЭДЕЛЬМАН

Я уверен, что многие читатели, взглянув на заголовок этой статьи, только пожмут плечами: а что в этом интересного? Да, есть такая величина, нужная для того, чтобы подсчитать количество теплоты, затрачиваемой на нагревание того или иного тела. Для техники это, конечно, важно, а посему нашлись люди, которые, потратив уйму времени, измерили удельные теплоемкости разных материалов. Измерения эти в принципе не такие уж и сложные — даже в школьном практикуме есть задача по калориметрии. Потом были составлены справочники, таблицы, любой может ими пользоваться, и нечего больше об этом думать. В общем, казалось бы, дело нехитрое и скучное. Однако...

Если полистать самые солидные научные журналы, то все время будут попадаться работы, в которых исследуется теплоемкость, и вовсе не обязательно теплоемкость новых, только что синтезированных веществ, а зачастую вполне обыденных, разве что в не обыденных условиях. В чем же секрет, почему в эпоху лазеров, физики высоких энергий, микроэлектроники, термоядерного синтеза и т. п. не угасает интерес физиков к такому, казалось бы, рутинному вопросу? Дело в том, что теплоемкость тесно связана со строением вещества и динамикой движения частиц, его составляющих, и иной раз именно измерение теплоемкости позволяет хоть что-то узнать о природе вещей, когда пасуют самые современные методы.

Чтобы воочию убедиться в такой связи, не надо ходить далеко за примерами. Посмотрите на рисунок 1: так меняется теплоемкость обычной воды при изменении температуры. Конечно, первое, что бросается в глаза,— это скачок при 0 °С, т. е. при температуре перехода воды из одного агрегатного состояния в другое. Но это не все: и в твердой фазе, и в жидкой теплоемкость сложным образом зави-

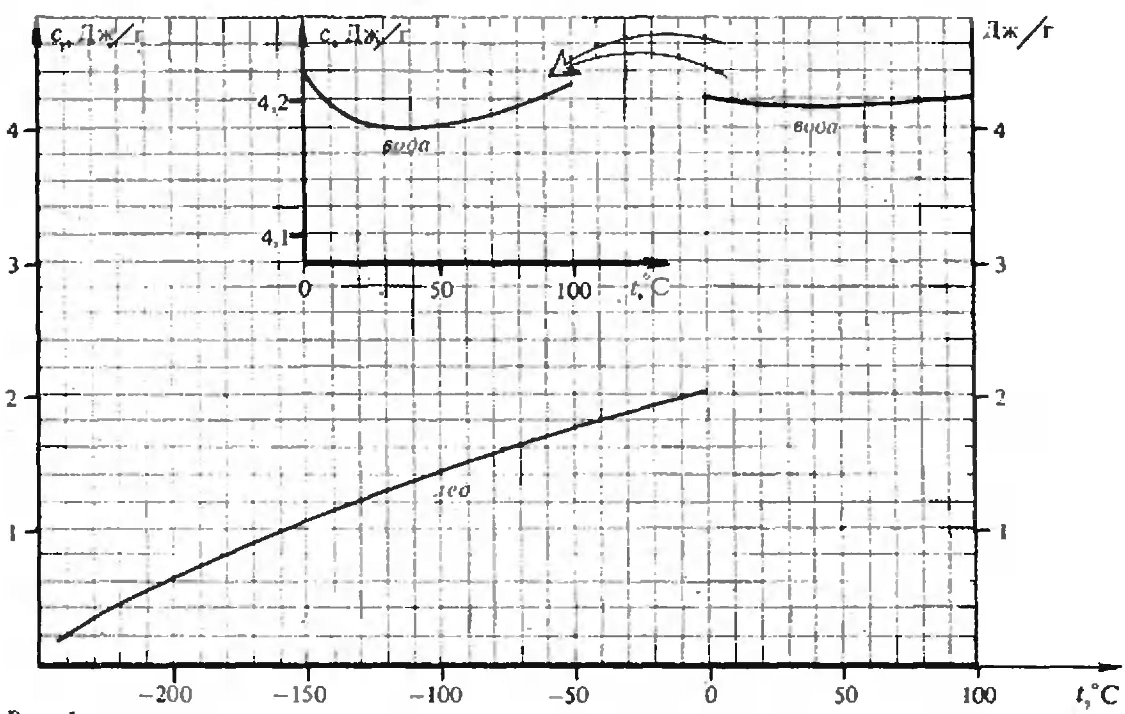


Рис. 1.

Таблица 1

Теплоемкость газов при комнатной температуре и постоянном объеме

Газ	He	Ar	Xe	H_2	N_2	O_2	CO_2	NH_3	CH_4
$c_{уд}$, Дж/(г · К)	3,15	0,31	0,096	10,26	0,74	0,66	0,65	1,62	1,68

сит от температуры. И это у воды, которая еще не так давно служила эталоном теплоемкости!

Современная наука может объяснить, что происходит с водой, но нам за это дело браться не стоит. Лучше начать с самого простого, что известно,— с идеальных газов.

Идеальные газы

Строго говоря, этот заголовок не совсем точен, потому что речь все-таки пойдет о реально существующих газах, идеальных только в одном смысле: для них при комнатной температуре с высокой точностью справедлив закон

$$pV = NkT,$$

и энергия поступательного движения $E_п$ молекулы газа равна

$$E_п = \frac{3}{2}kT$$

(здесь, как и обычно, p, V, T — давление, объем и абсолютная температура газа, N — число молекул, «запертых» в объеме V, а $k = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ Дж/К — константа Больцмана).

Выпишем из справочника значения удельной теплоемкости $c_{уд}$ при постоянном объеме, измеренные для нескольких газов (см. таблицу 1). На первый взгляд, трудно усмотреть в этих числах какую-либо закономерность. Но не будем торопиться, а попробуем представить эти же величины в несколько ином виде. Дело в том, что один грамм разных газов содержит разное количество молекул. А только что приведенная формула для $E_п$ подсказывает, что надо бы сравнивать величины, приходящиеся на одну молекулу. Пересчитать числа в таблице нетрудно. Вспомним, что моль любого вещества содержит одно и то же число молекул — $6{,}02 \cdot 10^{23}$ (это $N_А$ — число Авогадро). Теплоемкость одного моля — молярную теплоемкость — найти нетрудно: $c_\mu = c_{уд}\mu$, где μ — молярная масса вещества. Следовательно, теплоемкость, приходящаяся на одну молекулу,—

$$c_{мол} = c_{уд}\frac{\mu}{N_А}.$$

Эта величина, естественно, очень мала, и нам удобнее будет сравнивать между собой значения $c'_{мол} = c_{мол}/k$ (легко убедиться, что величины $c'_{мол}$ безразмерны — это просто числа).

Вычислим значения $c'_{мол}$ для тех же газов, для которых мы выписали в таблице 1 значения $c_{уд}$, и посмотрим, что получилось (см. таблицу 2). Сразу бросается в глаза, что для всех одноатомных газов $c'_{мол}$ одно и то же. Иными словами, молекулярная теплоемкость $c_{мол}$ всех одноатомных газов одинакова и равна точно $1{,}5k$, т. е. $\frac{3}{2}k$.

Но ведь это очень уж знакомое число: именно коэффициент 3/2 фигурирует в приведенной выше формуле, описывающей среднюю энергию поступательного движения молекул идеального газа. А так как теплоемкость $c = \frac{\Delta E}{\Delta T}$, то и получим $\frac{3}{2}k\frac{\Delta T}{\Delta T} = \frac{3}{2}k = c_{мол}$.

Замечательный получился результат: для гелия, неона, аргона все тепло, подводимое к ним, без остатка преобразуется в энергию поступательного движения атомов. Мысленно можно

Таблица 2

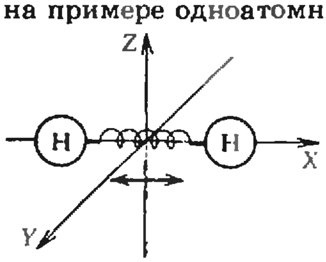
Газ	He	Ar	Xe	H_2	N_2	O_2	CO_2	NH_3	CH_4
$c_{уд}$, Дж/(г · К)	3,15	0,31	0,096	10,26	0,74	0,66	0,65	1,62	1,68
$c'_{мол} = c_{мол}/k$	1,50	1,50	1,50	2,45	2,49	2,53	3,42	3,30	3,23

представить, что атомы могут еще и вращаться, но на это движение, как видно, подведенного тепла уже не остается, и никакой теплоемкости, связанной с вращением, нет. Вывод этот, вообще-то говоря, верен только при умеренных температурах, при которых и получены результаты, представленные в таблицах 1 и 2. При очень высоких температурах (в тысячи градусов) все уже не так просто, и, как показывают опыт и теория, вращение может возбудиться. Но не будем пока усложнять себе жизнь. И без того возникают вопросы, стоит лишь взглянуть на теплоемкость газов, молекулы которых состоят из двух или большего числа атомов. В их теплоемкостях кое-что остается сверх $\frac{3}{2}k$. Любопытно, что для двухатомных газов — водорода, кислорода, азота — остаток, приходящийся на каждый атом, почти точно равен $\frac{1}{2}k$. Но для многоатомных газов ситуация сложнее: соответствующие остатки равны $\sim 0{,}65k$/атом для CO_2 и всего $\sim 0{,}34k$/атом у CH_4. Так что, по-видимому, дело не просто в числе частиц.

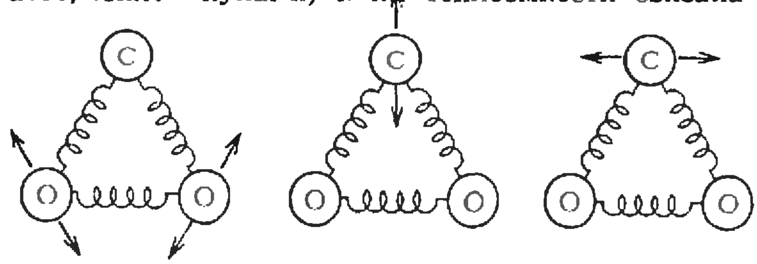
Подойдем к этому вопросу с другой стороны — посмотрим, какие различные типы движений возможны для молекул. Двухатомную молекулу можно представить так, как на рисунке 2а, — атомы, соединенные пружинкой. Поступательное движение молекулы может быть описано как движение ее центра масс по трем взаимно перпендикулярным осям X, Y, Z (см. рисунок 2а). Молекулу можно поворачивать вокруг осей Y и Z, перпендикулярных пружинке, соединяющей атомы. Вращение молекулы вокруг оси X, проходящей вдоль пружинки, надо, пожалуй, исключить — это, по существу, то же самое, что вращение каждого атома самого по себе, а как мы только что видели на примере одноатомных газов, тепло на это не расходуется. Наконец, сами атомы могут колебаться вдоль оси X навстречу друг другу.

Итак, для двухатомной молекулы возможных типов движения — их еще называют «степенями свободы»,— с учетом поступательного движения по трем осям координат, всего шесть. Для трехатомной молекулы типов движения всего девять, так как ее можно поворачивать уже вокруг трех осей и есть три различных типа колебаний (см. рисунок 2б). Если молекула составлена из n атомов и $n>3$, то подобную картинку нарисовать уже трудно, но есть простое правило, позволяющее подсчитать число степеней свободы: их полное количество, включая поступательное движение (три степени свободы) и три поворота вокруг трех взаимно перпендикулярных осей, равно числу координат атомов, составляющих молекулу, т. е. равно $3n$.

Воспользовавшись этим рецептом, сосчитаем число возможных движений для разных газовых молекул и, помня о трех степенях свободы, приходящихся на поступательное движение, добавим к таблице 2 еще пару строк (таблица 3). Присмотримся теперь к многоатомным газам CO_2, NH_3, CH_4. Каждую из этих молекул можно вращать вокруг трех осей, но число возможных типов колебаний для этих молекул разное: для CO_2 — три, для NH_3 — шесть, а для CH_4 — целых девять. А теплоемкости этих газов почти одинаковы! Разумно предположить, что при тепловом движении энергия, сообщаемая молекуле, тратится на поступательные и вращательные движения, а колебания атомов не возбуждаются. Иными словами, колебания не дают вклада в теплоемкость. Но тогда столь же разумно не учитывать колебания и у двухатомных молекул, а считать, что добавка (по сравнению с одноатомными молекулами) к их теплоемкости связана



а)
Рис. 2а.



б)
Рис. 2б.

Таблица 3

Газ	He	Ar	Xe	H_2	N_2	O_2	CO_2	NH_3	CH_4
$c_{уд}$, Дж/(г · К)	3,15	0,31	0,096	10,26	0,74	0,66	0,65	1,62	1,68
$c_{мол}/k$	1,50	1,50	1,50	2,45	2,49	2,53	3,42	3,30	3,23
Число поворотов молекулы	0	0	0	2	2	2	3	3	3
Число возможных колебаний	0	0	0	1	1	1	3	6	9

исключительно с поворотами. Для двухатомных молекул, как видно из таблицы 3, при комнатной температуре эта добавка почти точно равна $\frac{1}{2}k$ на каждый поворот. Если принять такое же правило для многоатомных молекул, то для них полная теплоемкость должна быть равна $3k$. Фактически она несколько больше, но не будем пока обращать на это внимания.

Мы пришли к интересному результату: на каждое из возможных движений молекулы как целого — будь то перемещение по одной из осей координат или поворот вокруг одной из трех осей — приходится одинаковая теплоемкость, равная $\frac{1}{2}k$. Это заключение физики называют «законом равнораспределения».

Колебания — вне закона?

Но если это закон, то почему он не универсален, почему сделано исключение для колебаний? Конечно, можно сказать, что «лишняя» теплоемкость у многоатомных молекул связана с колебаниями, *но вклады от колебаний* для CO_2 ($0{,}15k$ на каждое колебание) и для CH_4 ($0{,}025k$ на колебание) столь различны, что о равнораспределении говорить не приходится.

Еще запутаннее ситуация становится, если посмотреть на громадную «супермолекулу» — частицу твердого тела. В твердых телах все составляющие их молекулы расположены в узлах кристаллической решетки и не могут двигаться поступательно или вращаться. Единственный возможный вид движения, если не считать движения предмета как целого, это колебания атомов около своих положений равновесия. Поэтому вся теплоемкость твердых тел связана с возбуждением колебаний. И теплоемкость эта отнюдь не мала. Так, почти все кристаллы, составленные из атомов, имеют при обычных условиях почти одинаковую молярную теплоемкость, близкую к 25 Дж/(моль · К). Это правило известно как закон Дюлонга и Пти. К примеру, теплоемкость алюминия равна 24,4 Дж/(моль · К), серебра — 25,2 (в тех же единицах), меди — 24,6, золота — 26,5, свинца — 26,6. Легко вычислить, что на каждый атом в твердом теле приходится в среднем теплоемкость $3k$, т. е. на каждое колебание (а их число, напомню, для моля вещества равно $3N_A$) приходится не $\frac{1}{2}k$, а вдвое большее значение! Но попробуйте каждому колебанию в молекуле CH_4 приписать вклад в теплоемкость, равный $1k$, и вы получите громадное расхождение с экспериментом.

Чтобы разобраться, в чем дело, надо посмотреть на результаты опытов. В первую очередь, было бы неплохо узнать, зависит ли от температуры теплоемкость газов, а если зависит, то как? Приведем такую зависимость

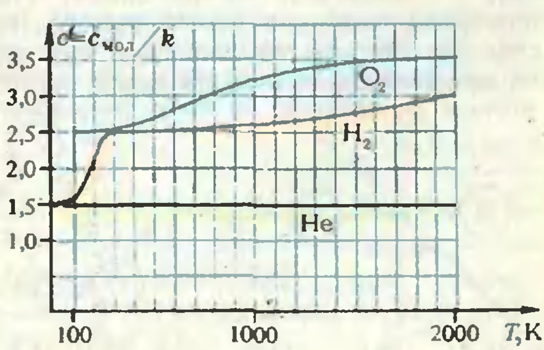


Рис. 3.

для нескольких газов: для гелия, водорода и кислорода (рисунок 3). Первое, что сразу видно,— у одноатомного газа гелия в интервале температур от близких к 4,2 К (температура ожижения гелия) и до тысяч градусов Кельвина теплоемкость неизменна. А вот поведение теплоемкости водорода совершенно иное. При низких температурах она, как и у гелия, равна точно $1{,}5k$ — в этой области температур водород ведет себя как одноатомный газ. При $T \approx 70$ К начинается рост теплоемкости, и при $T \approx 250$ К она выходит на новое, почти постоянное значение $c_{\text{мол}} = 2{,}5k$. Но где-то около 1000 К начинается новый подъем, и при 2000 К теплоемкость водорода становится больше $3k$. При дальнейшем росте температуры теплоемкость продолжает увеличиваться, но не будем забираться в эту область, так как слишком много явлений разыгрывается в газе, когда он сильно нагрет.

Посмотрим лучше, как ведет себя в том же температурном интервале кислород. Для него измерить теплоемкость в газовой фазе при температурах, заметно меньших 100 К, нельзя, так как кислород перестает быть газом. Однако если бы это было не так, то при низких температурах теплоемкость газообразного кислорода тоже была бы равна $1{,}5k$; а так кривая сразу начинается с уровня $2{,}5k$, но зато к 2000 К теплоемкость успевает вырасти до значения $3{,}5k$.

Какие выводы можем мы сделать по приведенным экспериментальным данным?

1. Поступательное движение молекул газа есть всегда, и связанная с ним теплоемкость не зависит от температуры.

2. Вращения и колебания при низких температурах исчезают — они, как говорят, «вымерзают». При этом обычная комнатная температура попадает в такую область, когда вращение уже есть (для молекул водорода, например, оно «вымерзает» при $T \approx 100$ К), а колебания еще «заморожены».

И, наконец,

3. У молекулы кислорода есть только один тип колебаний, а теплоемкость при его «размораживании» вырастает не на $\frac{1}{2}k$, а на $1k$. Значит, теплоемкость, приходящаяся на каждое «размороженное» колебание, равна $1k$.

Но это число мы уже встречали — именно такая теплоемкость приходится на каждое колебание в твердом теле! Как же понять эти результаты?

На помощь приходит квантование

Оказывается, все дело — в квантовании. И показать это нам поможет аналогия с одним из первых ставшим известным квантовым явлением — эмиссией электронов из металла. Фотоэмиссия — испускание электронов из металла под действием света — происходит лишь тогда, когда энергия кванта света $h\nu$ больше работы выхода электрона из металла. Но есть и другое явление — термоэлектронная эмиссия, которая широко используется в технике для создания электронных пучков, например в телевизионных трубках. В этом случае электроны покидают металл, когда он нагрет до высоких температур, таких, что энергия теплового движения $\sim kT$ становится сравнимой с работой выхода. Можно сказать, что эмиссия «заморожена» при низких температурах и «размораживается» при нагревании. Другими словами, «вымораживание» движения происходит тогда, когда для его возбуждения надо приложить какой-то определенный квант энергии. И это верно всегда, а не только для эмиссии электронов.

Отсюда следует: поскольку колебания и вращения «вымораживаются», то, значит, эти движения квантуются! Такое заключение кажется особенно неожиданным, когда речь идет о вращении,— трудно представить, что молекулы нельзя поворачивать с любой, как угодно малой, скоростью. Но в квантовой механике это непреложный факт, и молекулы либо не вращаются вовсе, либо уже сразу так, чтобы их кинетическая энергия, поделенная на постоянную Больцмана k, стала равна примерно десяти — ста градусам Кельвина (точные числа, конечно, зависят от физических характеристик молекул конкретного вещества). Ну, а когда речь идет о газе, содержащем громадное количество молекул, то в нем всегда найдутся такие, которые не вращаются,— их доля подавляюще велика при низких температурах;

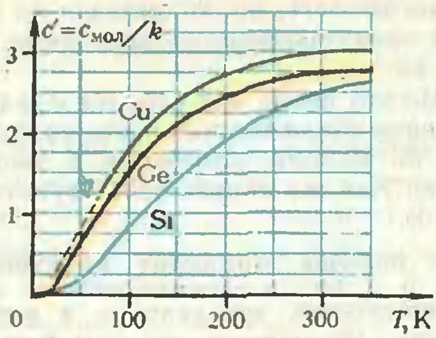


Рис. 4.

есть и такие, которые вращаются, и их становится все больше и больше по мере нагревания газа. Итак, чисто квантовое явление влияет на такую, казалось бы, сугубо классическую величину, как теплоемкость идеального газа.

То же самое, что о вращении, можно сказать и о колебаниях. И теперь понятно, что различие между вкладом колебаний в теплоемкости твердых тел и газов при комнатной температуре не носит принципиального характера, а связано с численным различием характеристик веществ. Для молекулы водорода или кислорода квант колебаний в шкале температур равен тысячам градусов Кельвина, а для твердых тел — только сотням. И действительно, именно при таких температурах теплоемкость твердых тел тоже начинает быстро изменяться (рисунок 4). И это различие чисел тесно связано с тем, что плавление твердых тел происходит при температурах порядка тысячи градусов Кельвина, а заметная диссоциация молекул кислорода и водорода — при десятке тысяч градусов. А ведь механизм обоих процессов один и тот же — это тепловая раскачка колебаний до такой амплитуды, при которой «рвутся» связи, и чем меньше температура, при которой наступают колебания, тем меньше и температура «разрыва» связей.

Вот какая красивая картина теплового движения получена нами из анализа теплоемкости. Для полной гармонии не хватает одного штриха: както надо уложить в одну схему $\frac{1}{2}k$ для теплоемкости, связанной с поступательными или вращательными степенями свободы, и $1k$ — для колебаний. Оказывается, и здесь есть прекрасный выход. В самом деле, обратите внимание, что $\frac{1}{2}$ появляется там, где движение характеризуется только кинетической энергией. Но при колебаниях есть еще и потенциальная энергия, и если полная энергия колебаний равна kT (т. е. теплоемкость равна $1k$), то это значит, что система периодически переходит из состояния с нулевой кинетической и с максимальной потенциальной энергией, равной kT, в состояние с нулевой потенциальной и максимальной кинетической энергией, тоже равной kT. А в среднем по времени кинетическая энергия в точности равна потенциальной и, очевидно, обе они равны $\frac{1}{2}kT$ — и мы вернулись к половинке.

Итак, окончательные выводы: при заданной температуре возбуждаются те виды движения, энергия кванта которых сравнима с kT или меньше этой величины. При этом и кинетическая, и потенциальная энергия (если она есть!), приходящаяся на каждую степень свободы, одна и та же и равна $\frac{T}{2}$. Эти выводы прекрасно согласуются со многими экспериментами и подтверждаются строгой теорией, основанной на квантовой механике.

Конечно же, рассмотренный здесь случай — простейший из возможных. Мы можем заглянуть и глубже: вычисляя степени свободы, мы считали атом единой частицей, но ведь это не так. И у каждого атома есть свои внутренние степени свободы движения электронов атомных оболочек относительно ядер. Однако для их «размораживания» требуются уже десятки и сотни тысяч градусов. Собственно, физика плазмы и изучает газы, в которых «разморожено» движение электронов. Можно пойти и дальше — и ядра составлены из отдельных элементарных частиц, да и сами эти частицы совсем не элементарны. Но чтобы возбудить такие тепловые движения, нужны уже миллионы и миллиарды градусов, а то и много больше, и тут начинается тропа, ведущая в историю рождения звезд, галактик да и самой Вселенной. А первая веха на этой тропе — идеальные газы со своими законами.

ВЕЛИКАЯ КНИГА НЬЮТОНА

(К 300-летию первого издания «Математических начал натуральной философии»)

Кандидат физико-математических наук
С. Р. ФИЛОНОВИЧ

В предыдущем номере журнала мы познакомились с первой книгой «Начал». Сегодня мы откроем вторую книгу. Называется она так же, как и первая,— «О движении тел»— и посвящена, говоря современным языком, механике сплошных сред. В ней рассматриваются задачи, связанные с движением тел в средах с сопротивлением, когда сила сопротивления зависит от скорости. Обсуждаются различные виды движения: прямолинейное, криволинейное, колебания маятников. Наконец, здесь же решаются задачи о распространении движения через жидкости и о движении самих жидкостей в различных условиях.

Может возникнуть вопрос: зачем Ньютону понадобилось так подробно обсуждать задачи, не имеющие столь фундаментального значения, как проблемы небесной механики, составляющие основу первой книги?

Вероятно, Ньютон хотел продемонстрировать эффективность построенной им механики для решения еще одного класса задач. Однако главная причина состояла в том, что Ньютон стремился опровергнуть теорию тяготения Декарта, объяснявшую закономерности движения планет вокруг Солнца с помощью представления о вихрях всепроникающей жидкости — эфира. Рассмотрение Ньютона убедительно показало, что теория Декарта не совместима с законами механики. Наконец, есть и еще одно обстоятельство, которое, возможно, повлияло на выбор задач для второй книги «Начал». Дело в том, что Ньютон был не только гениальным теоретиком, но и блестящим экспериментатором, для которого опыт являлся главным критерием истинности физической теории. Поэтому там, где это было возможно, Ньютон на опыте стремился получить подтверждения своих теоретических выкладок. Применительно к движению тел под действием центральных сил поставить натурный эксперимент очень трудно. Применительно же к задачам второй книги «Начал» открывался широкий простор для опытной проверки, чем Ньютон и воспользовался. Он провел и описал много интересных механических экспериментов, дополняющих теоретическое обсуждение задач.

Приведем в качестве примера отрывок из второй книги.

«Есть мнение, что существует некоторая чрезвычайно тонкая эфирная среда, свободно проникающая через поры и промежутки между частицами всяких тел; от такой среды, при течении ее через поры тел, должно было бы происходить сопротивление, поэтому я произвел испытания, чтобы определить, сосредоточено ли полностью сопротивление, испытываемое телами при движении, на их наружной поверхности или же внутренние части тел претерпевают заметное сопротивление. Опыт, который я придумал, состоял в следующем: к достаточно прочно укрепленному стальному крюку, при помощи стального кольца, я подвесил на нити длиною в 11 футов [1 фут=0,3048 м.— С.Ф.] круглую еловую кадочку, чтобы получить маятник сказанной длины. Крюк сверху был на своей впалой поверхности хорошо заострен, так чтобы кольцо, налегая верхнею своею частью на это острое ребро, могло двигаться совершенно свободно, к нижней же части кольца была привязана нить. Я отклонял маятник таким образом устроенный, приблизительно на 6 футов от

Окончание. Начало см. в «Кванте» № 11, 1987.

отвеса в плоскости, перпендикулярной к заостренному ребру крюка, чтобы кольцо при качаниях маятника не скользило взад и вперед, ибо точка подвеса, в которой кольцо касается крюка, должна оставаться неподвижной. Я точно замечал начальное отклонение, сообщаемое мною маятнику, затем, пустив маятник, я замечал еще три других его отклонения, которые маятник имел после первого, второго и третьего размаха. Я повторял это многократно, чтобы определить эти отклонения как можно точнее. Затем я наполнял кадочку свинцом и более тяжелыми из имевшихся под рукою металлами; перед тем я взвесил порожнюю кадочку вместе с тою частью нити, которою она была обмотана, и половиною остальной части, заключенной между крюком и подвешенной кадочкою, ибо нить, когда маятник отклонен от прямого положения, действует на него половиною своего веса. К этому весу я прибавил вес воздуха, заполнявшего кадочку. Полный вес порожней кадочки составлял приблизительно 1/78 веса кадочки, наполненной металлами. Так как кадочка, наполненная металлами, растягивая нить, увеличивала ее длину, то я укорачивал нить настолько, чтобы при качаниях маятника длина ее была такою же, как и раньше. Отведя затем маятник до первого из замеченных, как сказано, отклонений, я его пускал и насчитывал около 77 качаний, пока маятник имел отклонение, равное второму, затем еще столько, пока оно становилось равным третьему, и наконец, еще столько же, когда оно становилось равным четвертому. Отсюда я заключаю, что все сопротивление заполненной кадочки имеет не большее отношение к сопротивлению порожней, как 78 и 77. Ибо, если бы оба сопротивления были равны, то заполненная кадочка, масса которой в 78 раз больше массы порожней кадочки, должна была бы сохранять и во столько же раз дольше свое колебательное движение и, следовательно, по совершении 78 размахов приходить в замеченные, как сказано выше, положения. Она же приходила в них через 77 размахов... При этих опытах я воспользовался сперва недостаточно прочным крюком, тогда заполненная кадочка замедлялась значительно сильнее; изыскивая причину, я заметил, что крюк, поддаваясь весу заполненной кадочки, следовал за ее колебаниями и гнулся взад и вперед; я изготовил затем более прочный крюк, чтобы точка подвеса оставалась неподвижной, после чего все шло, как описано выше.»

Исаак Ньютон (1643—1727).

На основе полученных результатов Ньютон пришел к выводу, что сопротивление, действующее на внутренние частицы кадочки (т. е. возможное сопротивление эфира), по крайней мере в 6000 раз меньше, чем сопротивление, действующее на внешнюю поверхность кадочки (сопротивление воздуха). Конечно, с позиций современной науки, отрицающей существование эфира, результаты этого опыта объясняются иначе. (Справедливости ради отметим, что и сам Ньютон понимал условность своей интерпретации данных.) Однако из этого примера видны удивительная изобретательность Ньютона в постановке опытов, его внимание к деталям и добросовестность описания результатов, которая не позволяет умолчать... даже о своих исправленных ошибках,— одним словом, все то, что составляет талант экспериментатора. Тщательность описания свидетельствует также о значении, которое Ньютон придавал своим опытам. Стоит подчеркнуть, что повторение опытов Ньютона с маятниками, проведенное в 1915 году по инициативе переводчика «Начал», выдающегося математика и кораблестроителя А. Н. Крылова, показало их высокую точность.

Апофеозом «Начал» является третья книга, озаглавленная «О системе мира». Здесь Ньютон продемонстрировал всю мощь построенной им механики, анализируя многие, в том числе и весьма сложные астрономические явления с помощью сформулированных им законов движения и закона всемирного тяготения, рассмотренного в начале третьей книги. Ньютон строит изложение таким образом, что закон всемирного тяготения как бы выводится на основе обобщения результатов наблюдений. Привычная нам формулировка этого закона следует из теоремы VII (*«Тяготение существует ко всем телам вообще и пропорционально массе каждого из них»*) и следствия 2 из нее (*«Тяготение к отдельным равным частицам тел обратно пропорционально квадратам расстояний мест до частиц»*), а также третьего закона динамики. В этой части Ньютон обсуждает особенности движения планет и Луны, строит теорию приливов и теорию движения комет. Он смело объединяет «земную» и «небесную» механику, демонстрируя тем самым познавательные возможности науки.

Следует отметить, что и в построении, и в содержании этой части «Начал» особенно отчетливо проявилась неприязнь Ньютона к изобретению гипотез (его выражение «Hypothesis non fingo» — «Гипотез не измышляю» — стало почти афоризмом). С этой чертой творчества ученого связано отсутствие каких-либо объяснений механизма передачи тяготения на расстояние. Поэтому в XVIII и XIX веках учение Ньютона о тяготении обычно рассматривалось как образец теории дальнодействия. Однако сам Ньютон прекрасно понимал незавершенность своей теории тяготения. Уже после выхода в свет «Начал» он писал одному из своих корреспондентов: *«Что тяготение должно быть врожденным, присущим и необходимым свойством материи, так что одно тело может взаимодействовать с другим на расстоянии, через пустоту, без участия чего-либо посторон-*

Первое постоянное здание Лондонского королевского общества, приобретенное по настоянию Ньютона в 1710 году.

него, при посредстве чего и через что их действие и сила могли бы передаваться от одного к другому,— это мне кажется столь большим абсурдом, что я не представляю себе, чтобы кто-либо, владеющий способностью компетентно мыслить в области вопросов философского характера, мог к этому прийти.»

Эти соображения Ньютона были известны Фарадею и Максвеллу, они вдохновляли их на разработку важнейших представлений теории электромагнитного поля. Так даже нерешенные Ньютоном проблемы способствовали прогрессу науки.

Завершаются «Начала» подробным анализом астрономических закономерностей, известных в конце XVII века. Здесь Ньютону удалось свести множество разрозненных наблюдений и фактов в единую систему, что явилось наилучшим доказательством достоинств построенной им механики.

«И всюду свет разлился»

Английский поэт А. Поп написал о Ньютоне строки, ставшие хрестоматийными:

«Природы строй, ее закон
В извечной тьме таился,
И бог сказал: «Явись, Ньютон!»
И всюду свет разлился».

Эти строки отражают восхищение гением Ньютона человека XVIII века. А как восприняли книгу кембриджского профессора его современники сразу после ее появления?

Рецензенты в целом высоко оценили «Начала». Однако того восхищения, которого она заслуживала (с нашей, современной точки зрения), не было. Почему? Причин было несколько. Прежде всего, сказалось влияние авторитета Декарта и его теории вихрей. Именно поэтому с бо́льшим вниманием изучали гидродинамику «Начал», чем теорию тяготения.

Значение теории тяготения было осознано позднее, после того как усилиями Эйлера, Клеро, Даламбера, Лагранжа и Лапласа небесная механика была превращена в наиболее развитую отрасль естествознания. Другое обстоятельство, наложившее отпечаток на восприятие «Начал», было связано с «синтетическим» методом изложения, о котором уже говорилось в первой части статьи (см. «Квант» № 11, 1987). Когда-то было сказано: «с легкостью делать то, что затрудняет других,— талант; делать же то, что недоступно таланту,— гениальность». С этих позиций «Начала» — свидетельство гениальности Ньютона. Но ведь у любой научной работы есть и другая задача — помочь последователям пойти дальше автора. Метод решения задач механики, использованный Ньютоном, затруднял продвижение вперед. Это прекрасно пояснил великий Эйлер: «Хотя читатель и убеждается в истинности выставленных положений, но он не получает достаточно ясного и точного их понимания, так что если чуть-чуть изменить те же самые вопросы, он едва ли будет в состоянии разрешить их самостоятельно... Хотя мне казалось, что я достаточно ясно понял решение многих задач, однако задач, чуть отступающих от них, я уже решить не мог». Механика Ньютона начала «работать» в науке после того, как она была переведена на язык дифференциального и интегрального исчисления и дифференциальных уравнений. Основной вклад здесь принадлежит Эйлеру, Даламберу и Лагранжу.

И все же «большое видится на расстоянии». История показала, что ньютоновские «Начала» действительно можно считать началом новой науки. В этой книге впервые была построена система анализа физических (точнее, механических) явлений, основанная не на качественных рассуждениях, а на их математическом описании. Важнейшей чертой «Начал» является последовательное использование данных опыта для построения теории. «Начала» дали пример беспрецедентно широкого охвата явлений — от перемещения тел на Земле до движения планет, их спутников и комет.

Всякая поистине значительная научная книга интересна и важна не только решенными в ней задачами. Она дает направление дальнейшему развитию науки и своими нерешенными проблемами. В «Началах» была намечена целая научная программа, которая осуществлялась учеными XVIII — первой половины XIX века. Упоминание об этой программе можно найти уже в предисловии Ньютона к первому изданию «Начал»:

«Было бы желательно вывести из начал механики и остальные явления природы, рассуждая подобным же образом, ибо многое заставляет меня предполагать, что все эти явления обусловливаются некоторыми силами, с которыми частицы тел, вследствие причин покуда неизвестных, или стремятся друг к другу и сцепляются в правильные фигуры, или же взаимно отталкиваются и удаляются друг от друга. Так как эти силы неизвестны, то до сих пор попытки философов объяснить явления природы и оставались бесплодными. Я надеюсь, однако, что или этому способу рассуждения, или другому, более правильному, изложенные здесь основания доставят некоторое освещение».

Действительно, законы динамики послужили базой для реализации ньютоновской программы. Творению Ньютона предстояла долгая жизнь, полная интересных событий, приведших в середине XIX века к формированию механической картины мира.

ВТОРОЙ ЗАКОН КЕПЛЕРА И ТОПОЛОГИЯ АБЕЛЕВЫХ ИНТЕГРАЛОВ

(по Ньютону)

От редакции. *На страницах книг великих ученых порой встречаются незамеченные современниками и последователями глубокие идеи, значение которых становится понятным лишь много позже. Расшифровку с современных позиций двух таких удивительных страниц книги Ньютона Principia предпринял автор предлагаемой статьи. Редакция понимает, что не всем читателям будет доступна очень смелая трактовка хода мысли Ньютона, написанная современным математическим языком, однако мы надеемся, что эта статья позволит если не понять, то хотя бы прочувствовать связь между идеями Ньютона и современной математикой.*

В. И. АРНОЛЬД

Это учение [о степенных рядах] находится в таком же отношении к алгебре, как учение о десятичных дробях к обыкновенной арифметике.

И. Ньютон, *Метод флюксий*

1. Математика и физика. Перелистывая *Principia* («Математические начала натуральной философии») Ньютона в связи с исполняющимся в этом году трехсотлетием этой великой книги, заложившей основы теоретической и математической физики, я наткнулся на две чисто математические страницы, содержащие удивительно современное топологическое доказательство замечательной теоремы о трансцендентности абелевых интегралов.

Затерянная среди небесно-механических исследований, эта теорема Ньютона, видимо, не обратила на себя внимания математиков. Возможно, это произошло потому, что топологические рассуждения Ньютона обогнали уровень науки его времени на пару сотен лет.

Доказательство Ньютона в сущности основано на исследовании некоторой очень современной по духу конструкции (эквивалента римановых поверхностей для алгебраических кривых), поэтому оно непонятно как с точки зрения его современников, так и для воспитанных на теории множеств и теории функций действительного переменного математиков двадцатого века, боящихся многозначных функций.

2. Формулировка теоремы Ньютона. Кривая на плоскости называется *алгебраической*, если она удовлетворяет уравнению $P(x,y)=0$ (P — ненулевой многочлен). Например, окружность $x^2+y^2=1$ — алгебраическая кривая. Алгебраическими кривыми являются эллипсы, гиперболы, лемниската (*не* Бернулли) $y^2=x^2-x^4$ (рис. 1). Синусоида — неалгебраическая кривая (почему?).

Функция называется *алгебраической*, если ее график — алгебраическая кривая; это определение относится как к обычным (однозначным) функциям, так и к *многозначным* функциям (т. е. таким функциям, как $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ или $y=\operatorname{Arcsin} x$). Например, $y=\pm\sqrt{1-x^2}$ — двухзначная алгебраическая функция.

Рассмотрим *алгебраический овал* (замкнутую выпуклую алгебраическую кривую). Овал называется *алгебраически квадрируемым*, если площадь любого его сегмента выражается алгебраически. Иными словами, площадь S сегмента, отсекаемого прямой

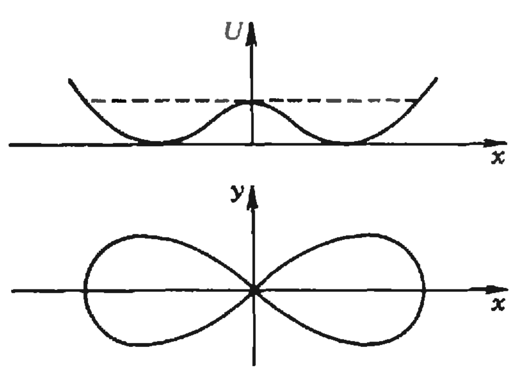


Рис. 1. Лемниската — алгебраическая кривая $y^2=x^2-x^4$. Так выглядит линия уровня энергии на фазовой плоскости частицы, движущейся в силовом поле, задаваемом многочленом третьей степени, с двумя симметричными потенциальными ямами.

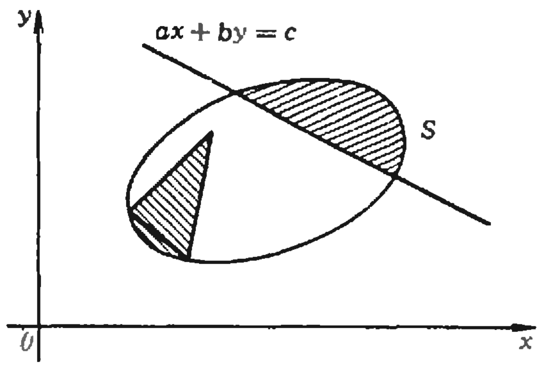


Рис. 2. Площадь S сегмента, отсекаемого от овала прямой $ax+by=c$, является функцией от (a, b, c): площадь сектора — функцией от двух прямых. Такие функции, построенные по алгебраическому овалу, называются абелевыми интегралами.

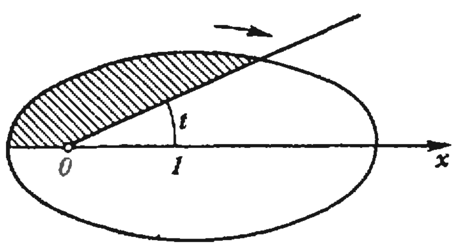


Рис. 3. Заметенная радиус-вектором площадь не может быть алгебраической функцией от тангенса t его угла наклона, так как она принимает при одном и том же t бесконечно много значений.

$ax+by=c$ (рис. 2), должна быть алгебраической функцией от прямой, т. е. должна удовлетворять алгебраическому уравнению $P(S; a, b, c)=0$, где P — ненулевой многочлен от четырех переменных.

Замечание. Если овал алгебраически квадрируем, то и площадь сектора, отсекаемого от него углом с лежащей внутри овала вершиной, является алгебраической функцией от прямых, образующих угол. Ибо площадь треугольника, отличающего сектор от сегмента, алгебраична.

Ньютон поставил себе целью найти все алгебраически квадрируемые овалы. Его результат таков:

Теорема. *Всякий алгебраически квадрируемый овал имеет особые точки*): все гладкие овалы алгебраически не квадрируемы.*

*) Точка кривой называется *особой*, если вблизи этой точки кривая не является графиком бесконечное число раз дифференцируемой функции. Примеры: точка самопересечения (рис. 4), точка возврата (рис. 8).

Пример. Эллипс алгебраически неквадрируем. Отсюда следует, что уравнение Кеплера, определяющее положение планеты на кеплеровом эллипсе как функцию времени (в соответствии со вторым законом Кеплера, по которому площадь, заметенная радиус-вектором, пропорциональна времени) — трансцендентное, т. е. не может быть решено в алгебраических функциях.

Этот пример и привел Ньютона к его общей теореме. Удивительна теорема потому, что на первый взгляд между алгебраической квадрируемостью и особыми точками не видно никакой связи.

Замечание. В современных обозначениях уравнение Кеплера имеет вид $x-e\sin x=t$. Это уравнение сыграло большую роль в истории математики. Со времен Ньютона решение x искали в виде ряда по степеням эксцентриситета e. Ряд сходится при $|e|\leqslant 0,6627434...$.

Исследование происхождения этой загадочной константы привело О. Коши к созданию комплексного анализа. Такие фундаментальные математические понятия и результаты, как функции Бесселя, ряды Фурье, топологический индекс векторного поля и «принцип аргумента» теории функций комплексного переменного, также впервые появились при исследовании уравнения Кеплера.

3. Доказательство Ньютона. Выберем точку O внутри овала и будем поворачивать выходящий из нее луч $y=tx$. Если овал алгебраически квадрируем, то площадь сектора, заметаемая радиус-вектором точки овала (рис. 3) должна быть алгебраической функцией от тангенса t угла наклона луча к оси x.

Заставим луч обегать овал снова и снова. При каждом обороте заметенная площадь будет увеличиваться на всю величину площади, ограниченной овалом. Следовательно, заметенная площадь, рассматриваемая как много-

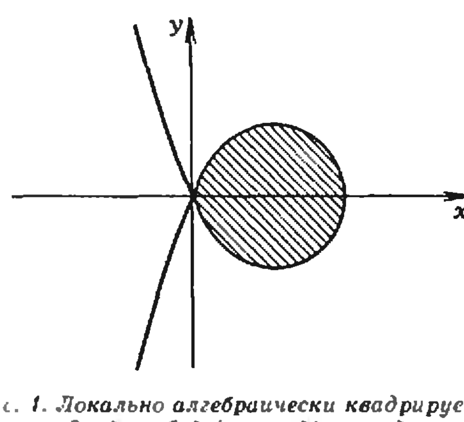


Рис. 1. Локально алгебраически квадрируемый овал с одной особой (угловой) точкой.

значная функция от t, имеет для одного и того же положения луча бесконечно много различных значений.

Но алгебраическая функция не может быть бесконечно многозначной, так как число корней ненулевого многочлена не превосходит его степени.

Следовательно, заметенная площадь — не алгебраическая функция, а потому овал алгебраически не квадрируем.

Ньютон замечает, что такое же рассуждение доказывает и неалгебраичность длины дуги овала.

4. Примеры алгебраически квадрируемых овалов. Итак, алгебраически квадрируемые овалы не существуют? Нет, Ньютону уже были известны примеры овалов, площади сегментов которых выражаются алгебраически, и он упоминает о них при обсуждении своей теоремы в Principia.

Простейший пример доставляет овал на рисунке 4, $y^2=x^2-x^3$. Обозначим через t тангенс угла наклона секущей $y=tx$. Тогда $t^2=1-x$, откуда получается параметрическое представление овала:

$$x=1-t^2,\quad y=t^2-t^3.$$

Из этого представления видно, что интеграл площади, $\int y\,dx$ — многочлен относительно t. Поэтому площадь любого сегмента, отсекаемого от этого овала прямой, вычисляется алгебраически, т. е. овал на рисунке 4 алгебраически квадрируем.

Хотя построенный овал не гладкий, рассуждение Ньютона к нему тоже применимо. Оно показывает, что площадь, заметенная радиус-вектором, не выражается в целом единой алгебраической функцией. Нет ли здесь противоречия? Нет. Дело в том, что каждый раз, когда луч проходит через особую (угловую) точку овала, алгебраическая функция, выражающая заметенную площадь, скачком заменяется на новую алгебраическую функцию.

5. Глобальная и локальная алгебраическая квадрируемость. Предыдущий пример показывает, что функция может быть локально алгебраической, не будучи алгебраической в целом (рис. 5). В этом смысле наш овал (п. 4) можно назвать *локально алгебраически квадрируемым.**)

*) Овал называется локально алгебраически квадрируемым, если площадь сегмента, отсекаемого от него прямой, — локально алгебраическая функция от прямой; иными словами, для любой прямой $ax+by=c$, близкой к данной, площади S всех частей, отсекаемых прямой от овала, удовлетворяют уравнению $P(S;\ a,\ b,\ c)=0$, где P — многочлен.

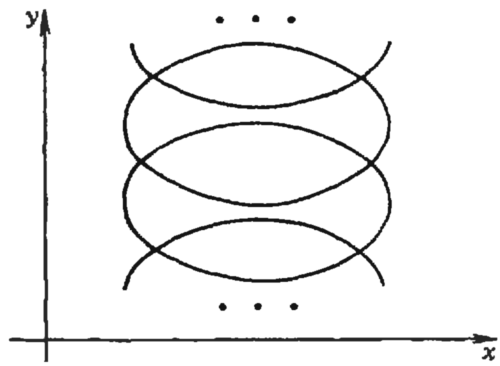


Рис. 5. График локально алгебраической, но неалгебраической функции. Такая функция может иметь в одной точке бесконечное число значений.

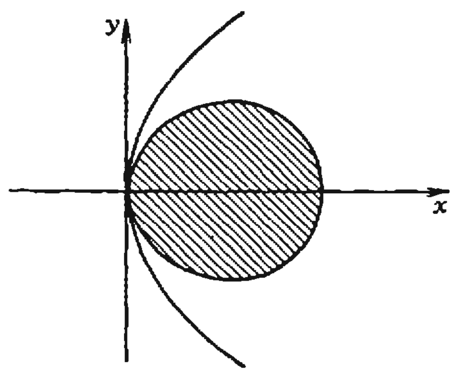


Рис. 6. Локально алгебраически квадрируемый овал. Всякий многочлен, равный нулю в точках овала, обращается в нуль и на бесконечных ветвях.

Практически локальная алгебраическая квадрируемость почти столь же полезна, как и настоящая, глобальная. Поэтому у Ньютона естественно возник вопрос: *может ли гладкий алгебраический овал быть локально алгебраически квадрируемым?* То есть может ли площадь S сегмента, отсекаемого прямой $ax+by=c$, быть алгебраической функцией от $(a,\ b,\ c)$ в окрестности каждой точки?

Чтобы методом п. 4 построить локально алгебраически квадрируемый овал, всюду имеющий касательную, достаточно подобрать подходящую пару многочленов. Например, многочлены $x=(t^2-1)^2$, $y=t^3-t$ задают овал, показанный на рисунке 6, притом соответствующая функция $x=x(y)$ дважды непрерывно дифференцируема в нуле. Таким образом, мы получили совершенно гладкий на вид овал, который локально алгебраически квадрируем (глобальная алгебраическая квадрируемость и здесь исключается рассуждением Ньютона).

З а д а ч а. Постройте локально алгебраически квадрируемый овал с одной особой точкой, являющийся в окрестности особой точки графиком функции, имеющей 1987 непрерывных производных (а в окрестностях остальных точек — графиком неограниченное число раз дифференцируемой функции).

6. Теорема Ньютона о локальной неалгебраичности. Итак, локально алгебраически квадрируемый овал может иметь сколь угодно большую конечную *гладкость* (может всюду задаваться функциями со сколь угодно большим числом производных). Однако во всех наших примерах на овале есть особая точка, где производная некоторого порядка разрывна.

Ньютон считал истинно гладкой кривой лишь такую, которая в окрестности каждой точки является графиком функции, разлагающейся в сходящийся степенной ряд

$$y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

(где начало координат выбрано в рассматриваемой точке). Сейчас такие кривые называются *аналитическими*.

Замечание. Различие в поведении кривых различной конечной гладкости было Ньютону хорошо известно и обсуждается в *Principia*, а разложение всех алгебраических и элементарных функций в быстро сходящиеся степенные ряды было одним из основных его математических достижений.

Из теоремы п. 2 Ньютон выводит гораздо более сильное утверждение:

Теорема. *Любой аналитический овал алгебраически не квадрируем даже и локально.*

7. Доказательство локальной алгебраической неквадрируемости аналитических овалов. Если бы овал был локально, но не глобально алгебраически квадрируемым, то заметенная площадь выражалась бы одной алгебраической функцией по одну сторону от некоторой его точки и другой — по другую. Но для аналитического овала заметенная площадь аналитически зависит от направления луча. Поэтому обе указанные алгебраические функции разлагаются в окрестности этой точки аналитического овала в один и тот же сходящийся степенной ряд. Значит, обе эти алгебраические функции совпадают и в окрестности указанной точки. Но тогда они совпадают вообще всюду (это следует из того, что многочлен, не равный тождественно нулю, не может иметь больше корней, чем его степень).

Итак, если бы существовал локально алгебраически квадрируемый аналитический овал, то он был бы алгебраически квадрируемым и в целом. А поскольку это невозможно (пп. 2, 3), то аналитический овал не может быть алгебраически квадрируемым даже и локально.

8. Как узнать, аналитичен ли овал? Кривая называется *бесконечно-гладкой*, если она локально является графиком функции, дифференцируемой сколько угодно раз.

Теорема. *Бесконечно-гладкая алгебраическая кривая аналитична.*

Этот факт был Ньютону известен, так как Ньютон умел записывать уравнение любой «ветви» алгебраической кривой в окрестности любой ее точки в виде быстро сходящего ряда

$$y = a_1x^{1/n} + a_2x^{2/n} + a_3x^{3/n} + \dots$$

(где начало координат помещено в исследуемую точку).

Теорему о сходимости этого ряда Ньютон формулировал так: «Чем дальше развертывается при достаточно малом x результат, тем более он подходит к истинному значению y, так что разность, на которую он отличается от точного значения y, делается, наконец, меньше всякой данной величины».

Ряд строится при помощи так называемого многоугольника Ньютона. Метод многоугольника Ньютона*), являющийся одним из самых эффективных средства локального анализа, к сожалению, выпал из современного схоластизированного преподавания.

Каждый член ряда с нецелым показателем имеет лишь ограниченное число производных. Если в ряду присутствует хотя бы один такой член нецелой степени, то определенная таким рядом кривая уже не может быть бесконечно-гладкой в окрестности изучаемой точки.

Для бесконечно-гладкой алгебраической кривой в разложении участвуют поэтому только целые степени, а это и значит, что кривая аналитична.

Следствие. *Всякий бесконечно-гладкий алгебраический овал алгебраически неквадрируем даже локально.*

Итак, бесконечно-гладкая замкнутая выпуклая кривая не может быть локально алгебраически квадрируемой, если она алгебраична.

9. Может ли быть алгебраически квадрируемым гладкий неалгебраический овал? Отрицательный ответ следует из уже доказанного, ибо имеет место

Теорема. *Всякий локально алгебраически квадрируемый овал алгебраичен.*

Этот факт Ньютон использует как очевидный. Видимо, он рассуждал так:

Лемма. *Огибающая любого алгебраического семейства прямых алгебраична.*

Иными словами, если касательные к кривой удовлетворяют алгебраическому уравнению, то сама кривая алгебраична.

Доказательство леммы. Рассмотрим две близкие касательные с тангенсами угла наклона к оси x, равными t и $t+h$ (рис. 7). Их точка пересечения пробегает при переменном t и фиксированном h алгебраическую кривую. Степень этой кривой (т. е. степень многочлена, ее задающего) ограничена не зависящей от h постоянной (это следует из того, что условие совместности двух алгебраических уравнений выражается равенством нулю многочлена от их коэффициентов — факт, обсуждающийся Ньютоном все на тех же двух страницах *Principia*, где заодно объясняется, что две алгебраические кривые степеней m и n пересекаются не более чем в mn точках).

При стремлении h к нулю точка пересечения близких касательных стремится к исходной кривой. Будучи, таким образом, пределом алгебраических кривых ограниченной степени, исходная кривая также алгебраична.

Доказательство теоремы. Касательные к овалу отсекают от него сегменты нулевой площади. Поэтому касательные $ax+by=c$ к алгебраически локально квадрируемому овалу удовлетворяют алгебраическому уравнению $P(0; a, b, c)=0$ (см. п. 2). По лемме овал алгебраичен.

10. Алгебраически неквадрируемые кривые с особенностями. Таким образом, все бесконечно гладкие овалы алгебраически неквадрируемы (даже локально). Более того, рассуждения Ньютона доказывают локальную алгебраическую неквадрируемость бесконечно гладких невыпуклых замкнутых несамопересекающихся кривых и многих кривых с особенностями.

Локально алгебраически неквадрируемы все кривые, все особые точки которых являются точками возврата, в частности кривые, заданные уравнениями $y^2=x^3-x^4$ или $y^2=(1-x^2)^3$ (рис. 8), или кривые с особенностями типа $y=x^{p/q}$, где q нечетно, и т. п.

*) См. «Квант», 1977, № 6, с. 13.

Ньютон замечает, что для того, чтобы гарантировать локальную алгебраическую неквадрируемость, достаточно потребовать, чтобы к точкам замкнутой кривой не подходили «сопряженные ветви кривой, уходящие на бесконечность». Видимо, он имел в виду примеры вроде показанных на рисунках 4 и 6.

В действительности, слова «уходящие на бесконечность» употреблены тут по ошибке, нужно обязательно потребовать отсутствия каких бы то ни было самопересечений.

Правильное условие отсутствия самопересечений на замкнутой кривой, удовлетворяющей уравнению $P(x, y)=0$, состоит в том, что многочлен P обращается в нуль ровно в двух точках окружности с центром в любой точке кривой, если радиус достаточно мал.

Методом Ньютона доказывается

Теорема. *Все несамопересекающиеся в указанном смысле алгебраические кривые алгебраически неквадрируемы (даже локально).*

Напротив, самопересекающая замкнутая кривая вполне может оказаться локально алгебраически квадрируемой (эту возможность Ньютон почему-то упустил, когда писал «уходящие на бесконечность»).

Так, для лемнискаты $y^2=x^2-x^4$ (рис. 1):

$$\int y\,dx = \int x\sqrt{1-x^2}\,dx = -(\sqrt{1-x^2})^3/3$$

— алгебраическая функция.

Но и для самопересекающихся кривых алгебраическая квадрируемость — редкость.

Из рассуждений Ньютона видно, что суммарная площадь, ограниченная самопересекающейся замкнутой локально алгебраически квадрируемой кривой (с учетом знаков), равна нулю. Например, лемниската алгебраически квадрируема лишь потому, что обе петли лемнискаты дают в суммарную площадь противоположные вклады. И если продеформировать лемнискату так, чтобы модули площадей петель стали неравными, то она утратит локальную алгебраическую квадрируемость.

Полное описание всех самопересекающихся алгебраически квадрируемых кривых пока не найдено.

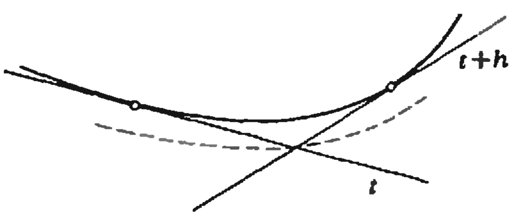


Рис. 7. При стремлении шага h к нулю пунктирная кривая, образованная точками пересечения касательных, стремится к исходной кривой. Отсюда следует, что огибающая алгебраического семейства прямых алгебраична.

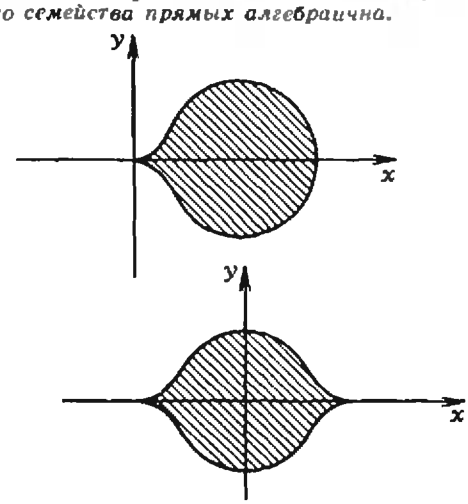


Рис. 8. Несамопересекающиеся кривые с точками возврата. К таким кривым применимо рассуждение Ньютона, и они локально алгебраически не квадрируемы.

11. Доказательство Ньютона и современная математика. Сегодня идеи, на которых основано доказательство Ньютона, называются идеями *аналитического продолжения* и *монодромии*. Они лежат в основе теории римановых поверхностей и ряда отделов современной топологии, алгебраической геометрии и теории дифференциальных уравнений, связанных прежде всего с именем Пуанкаре,— тех отделов, где анализ, скорее, сливается с геометрией, чем с алгеброй.

Современная математика позволяет доказать многомерный аналог теоремы Ньютона о плоских кривых. Сфера в трехмерном пространстве алгебраически квадрируема. Это вытекает из теоремы Архимеда, согласно которой площадь сферического сегмента пропорциональна его высоте. Поэтому все эллипсоиды в трехмерном (и в любом нечетномерном) пространстве алгебраически квадрируемы.

Напротив, в четырехмерном (и вообще четномерном) пространстве алгебраически квадрируемых гладких поверхностей нет (это обобщение теоремы Ньютона принадлежит В. А. Васильеву, 1987 г.).

Забытое доказательство Ньютона алгебраической неквадрируемости овалов было первым «доказательством невозможности» в математике нового времени — прообразом будущих доказательств неразрешимости алгебраических уравнений в радикалах (Абель) и неразрешимости дифференциальных уравнений в элементарных функциях или в квадратурах (Лиувилль), и Ньютон недаром сравнивал его с доказательством иррациональности корней квадратных в «Началах» Эвклида.

Сравнивая сегодня тексты Ньютона с комментариями его последователей, поражаешься, насколько оригинальное изложение Ньютона современнее, понятнее и идейно богаче, чем принадлежащий комментаторам перевод его геометрических идей на формальный язык исчисления Лейбница: двухсотлетие от Ньютона до Римана и Пуанкаре кажется мне математической пустыней, заполненной одними лишь вычислениями...

Задачник „Кванта"

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 марта 1988 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 12 — 87» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1076» или «Ф1088». В графе «... адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи по математике в этом номере предлагались на Международной математической олимпиаде в июле этого года. Мы рады отметить, что две из них принадлежат постоянным авторам нашего журнала.

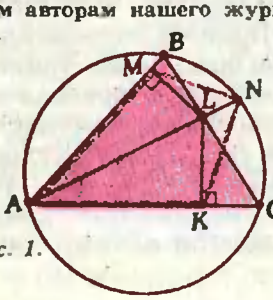


Рис. 1.

Задачи

М1076 — М1080, Ф1088—Ф1092

М1076. Биссектриса угла A остроугольного треугольника ABC пересекает сторону BC в точке L, а описанную окружность треугольника — в точке N (отличной от A); K и M — основания перпендикуляров, опущенных из L на стороны AB и AC (рис. 1). Докажите, что четырехугольник $AKNM$ равновелик треугольнику ABC.

И. А. Кушнир

М1077. Пусть $p_n(k)$ — число перестановок множества из n $(n\geqslant 1)$ элементов, имеющих ровно k неподвижных точек. Докажите, что:

а) $\sum\limits_{k=0}^{n} k\cdot p_n(k)=0\cdot p_n(0)+1\cdot p_n(1)+\ldots+n\cdot p_n(n)=n!$

б) $\sum\limits_{k=0}^{n} (k-1)^2\, p_n(k)=n!$

Примечание. *Перестановкой* конечного множества S называется взаимно однозначное отображение f множества S на себя; число всех перестановок множества из n элементов равно $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$. Элемент a множества S называется *неподвижной точкой* перестановки f, если $f(a)=a$.

М1078. Функция f определена на множестве N_0 всех неотрицательных целых чисел и принимает значения в этом множестве. Докажите, что равенство $f(f(n))=n+1987$ не может выполняться для всех n из N_0.

М1079. Пусть n — натуральное число, $n\geqslant 3$. Можно ли расположить на плоскости n точек так, чтобы расстояние между любыми двумя выражалось иррациональным числом, а площадь треугольника с вершинами в любых трех — рациональным числом (отличным от нуля)?

М1080. Пусть q — натуральное число, $q\geqslant 3$. Докажите, что если k^2+k+q — простое число для всех целых k, где $0\leqslant k\leqslant\sqrt{q/3}$, то k^2+k+q — простое для всех целых k, где $0\leqslant k\leqslant q-2$.

В. Ф. Лев

Ф1088. Невесомая лестница закреплена во вращающемся со скоростью $f=10$ об/мин невесомом подвесе так, что может свободно качаться относительно верхней ступеньки (рис. 2). Обезьяна массой $m=30$ кг начинает спускаться по лестнице. На каком расстоянии l от подвеса она будет находиться, когда вертикальное положение лестницы перестанет быть устойчивым?

А. В. Андрианов

Ф1089. При перелете со станции «Мир» на станцию «Салют-7», которые находились на одной орбите, наши космонавты затормозили свой корабль, перешли на более низкую орбиту и за время $t=30$ часов нагнали «Салют-7», который летел впереди «Мира» на расстоянии $L=3000$ км. Считая орбиты круговыми, определить, на сколько километров промежуточная орбита ниже основной? Высоты обеих орбит много меньше радиуса Земли $R_З\approx 6400$ км.

М. В. Семенов

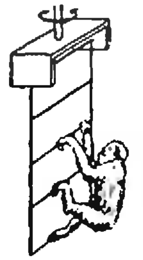


Рис. 2.

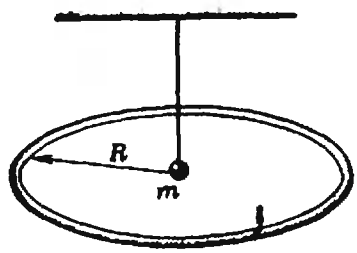


Рис. 3.

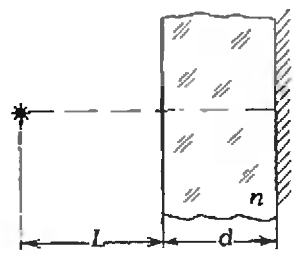


Рис. 4.

Ф1090. Ясной морозной ночью посмотрите на небо. Какие звезды мерцают более заметно: находящиеся высоко над горизонтом или низко, и почему?

А. С. Бутов

Ф1091. Подвешенный на нерастяжимой нити длиной l шарик с массой m и зарядом q находится в центре обруча, вдоль которого равномерно распределен заряд Q (рис. 3). Радиус обруча — R, заряды q и Q — одноименны. Определить частоту малых колебаний шарика, воспользовавшись формулой $(1+x)^{\alpha}\approx 1+\alpha x$ $(x\ll 1)$.

Г. В. Григорьев

Ф1092. Найти положение изображения точечного объекта, расположенного на расстоянии L от передней поверхности толстой плоскопараллельной стеклянной пластины, посеребренной с задней стороны (рис. 4). Изображение рассматривается перпендикулярно к поверхности пластины. Толщина пластины равна d, показатель преломления — n.

В. К. Петерсон

Problems

M1076 — M1080, P1088 — P1092

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than March 1st 1988, to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we

M1076. The bissector of angle A in the acute-angled triangle ABC intersects side BC at the point L and the triangle's incircle at N ($\neq A$); perpendiculars, drawn from L to AB and AC, intersect them at K and M. Prove that the quadrilateral $AKNM$ has the same area as ABC (see figure Рис. 1)

I. A. Kushnir

M1077. Denote by $p_n(k)$ the number of permutations of an n-element set having exactly k fixed points. Prove that

a) $\sum\limits_{k=0}^{n} k\cdot p_n(k)=0\cdot p_n(0)+1\cdot p_n(1)+\dots+n\cdot p_n(n)=n!$

b) $\sum\limits_{k=0}^{n}(k-1)^2 p_n(k)=n!$

Remark. A permutation of a finite set S is any one-to-one map f of S onto itself; the number of all permutations of an n-element set is $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$. The element a of the set S is a fixed point of the permutation f if $f(a)=a$.

M1078. The function f is defined on the set N_0 of all non-negative integers and ranges over N_0. Prove that the relation $f(f(n))=n+1987$ cannot hold for all n from N_0.

M1079. Suppose n is an integer, $n\geqslant 3$. Is it possible to choose n points in the plane so that the distance between any two points is irrational, while the area of a triangle with vertices at any three of those points is rational and positive?

shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

M1080. Suppose q is an integer, $q \geqslant 3$. Prove that if k^2+k+q is simple for all integer k, where $0 \leqslant k \leqslant \sqrt{q/3}$ then k^2+k+q is simple for all integer k satisfying $0 \leqslant k \leqslant q-2$.

V. F. Lev

P1088. A weightless ladder is fixed to a weightless support, rotating with velocity $f=10$ rev/min, so that the ladder can oscillate relatively to the upper step (figure Рис. 2, p. 23). A monkey of mass $m=30$ kg begins to climb down the ladder. At what distance l from the support will it be, when the vertical position of the ladder ceases to be the equilibrium one?

A. V. Andrianov

P1089. In the flight from the station "Mir" to the station "Salut-7", which were on the same orbit, our astronauts slowed down their ship, switched to a lower orbit and in time $t=30$ hours caught up with "Salut-7", which had been flying $L=3000$ km ahead of "Mir". Assuming the orbits circular, find how many kilometers lower the intermediate orbit was than the main one. The altitudes of the orbits are much less than the Earth's radius $R_E=6400$ km.

M. V. Semionov

P1090. Look at the sky on a clear, freezing night. What stars scintillate more noticeably — those high up or those nearer the horizon, and why?

A. S. Butov

P1091. A small ball of mass m and charge q hangs by an unstretchable string of length l in the centre of a hoop, along which the charge Q is uniformly distributed (figure Рис. 3, p. 23). The hoop's radius is R, the charges have the same sign. Determine the frequency of small oscillations of the ball, using the formula $(1+x)^{\alpha} \approx 1+\alpha x$ $(x \ll 1)$.

G. V. Grigoriev

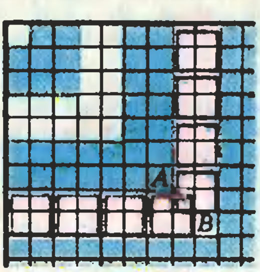
P1092. Find the position of the image of a point-like object, located at the distance L from plane parallel the front surface of a thick glass plate whose back surface is silvered (figure Рис. 4, p. 23). The image is viewed perpendicularly to the plate's surface. The thickness of the plate is d, the refraction index is n.

V. K. Peterson

Решения задач

М1056 — М1060*), Ф1067 — Ф1072

М1056. *В каждой клетке квадратной таблицы 1987×1987 написано число, не превосходящее по модулю 1. В любом квадрате 2×2 данной таблицы сумма чисел равна 0. Доказать, что сумма всех чисел в таблице не превосходит 1987.*



Разобьем квадрат на 994 области, как показано на рисунке: первая область — это угловая клетка, вторая — квадрат 3×3 без угловой клетки, третья — квадрат 5×5 без первых двух областей и так далее. В каждой из 993 областей, начиная со второй, сумма чисел не превосходит 2. Действительно, поместим в такую область квадраты 2×2 (красные квадраты на рисунке). Клетка A будет покрываться ими дважды, а клетка B не будет покрыта ни одним квадратом. Пусть в клетке A стоит число a, в клетке B — число b. По условию сумма чисел в каждом квадрате 2×2 равна 0, так что сумма всех чисел в этой области равна $b-a$ и, следовательно, не превосходит 2. Таким образом, сумма всех чисел таблицы не превосходит $1+2\cdot 993=1987$.

С. Иванов (8 кл., с. ш. № 239, Ленинград)

*) Эти решения составлены на основе работ участников Всесоюзной математической олимпиады этого года.

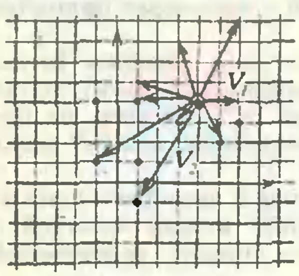
M1057. *Два игрока поочередно выписывают на доске натуральные числа, не превосходящие p. Правилами игры запрещается писать на доске делители уже написанных чисел. Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход.*
а) Выяснить, кто из игроков имеет выигрышную стратегию для $p=10$, и указать ее.
б) Выяснить, кто из игроков имеет выигрышную стратегию для $p=1000$.

а) Ответ: выигрывает начинающий. Первым ходом он должен написать число 6. После этого можно писать только числа 4, 5, 7, 8, 9, 10. Разобьем их на пары: (4, 5), (7, 9), (8, 10). Легко видеть, что в ответ на любое число, написанное вторым игроком, первый всегда сможет написать парное число.

б) Ответ: выигрывает начинающий. Докажем это от противного. Пусть у начинающего нет выигрышной стратегии, т. е. на любой его ход у второго игрока есть ответ, ведущий в конце концов к выигрышу. В частности, если начинающий пишет первым ходом 1, его партнер некоторой стратегией может обеспечить себе выигрыш, написав сначала какое-то число n. Тогда, написав первым ходом n, начинающий той же стратегией обеспечит выигрыш себе, поскольку 1 уже нельзя будет писать. Конечно, это рассуждение годится для любого p.

Д. Иванов (8 кл., с. ш. № 57, Москва)

M1058. *На целочисленной решетке отмечено непустое множество узлов. Кроме того, задан конечный набор векторов с целыми координатами. Известно, что если от любого отмеченного узла отложить все заданные векторы, то среди их концов будет больше отмеченных узлов, чем неотмеченных. Доказать, что отмеченных узлов бесконечно много.*



Введем на плоскости систему координат, поместив ее начало в один из узлов решетки и направив ось абсцисс вправо, а ось ординат вверх. Разобьем данный набор векторов на две части V_1 и V_2. К V_1 отнесем векторы с координатами (x, y), где $y>0$ или $y=0$, а $x>0$. Остальные векторы отнесем к V_2. Если число отмеченных узлов конечно, то среди них можно выбрать узел, имеющий наибольшую абсциссу из всех узлов с наибольшей ординатой (самый правый из самых верхних). Отложим от него все векторы (см. рисунок). Тогда концы векторов множества V_1 попадут в неотмеченные узлы. По условию задачи отсюда следует, что множество V_2 содержит больше векторов, чем V_1. Точно так же, откладывая векторы от самого левого из самых нижних отмеченных узлов, получим, что в множестве V_1 векторов больше, чем в V_2. Это противоречие показывает, что множество отмеченных узлов бесконечно.

Д. Румынин (9 кл., ФМШ № 165 при НГУ, Новосибирск)

M1059. *График функции $y=f(x)$, определенной на всей числовой прямой, переходит в себя при повороте на угол $\pi/2$ вокруг начала координат.*
а) Доказать, что уравнение $f(x)=x$ имеет ровно одно решение.
б) Привести пример такой функции.

а) Покажем сначала, что $f(0)=0$. Пусть $f(0)=a$, т. е. график функции f содержит точку $(0, a)$. После двух поворотов на угол $\pi/2$ вокруг начала координат эта точка перейдет в точку $(0, -a)$ (рис. 1), а поскольку она тоже должна лежать на графике, $a=-a=0$.

Допустим теперь, что уравнение $f(x)=x$ имеет еще одно решение $x=b$ $(b\neq 0)$, т. е. график проходит через точку $(b; b)$. Тогда он проходит и через точку $(b; -b)$, получаемую из $(b; b)$ тремя поворотами на $\pi/2$ (рис. 1). Но это невозможно.

Итак, уравнение $f(x)=x$ всегда имеет единственное решение $x=0$.

б) Искомую функцию можно определить так:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x=0, \\ -x/2 & \text{при } 4^k\leqslant |x|<2\cdot 4^k, \\ 2x & \text{при } 2\cdot 4^{k-1}\leqslant |x|<4^k, \end{cases}$$

где k — произвольное целое число (график на рисунке 2).

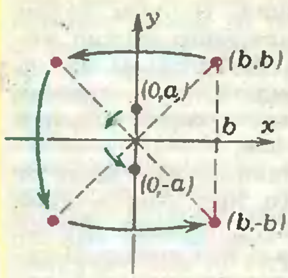


Рис. 1.

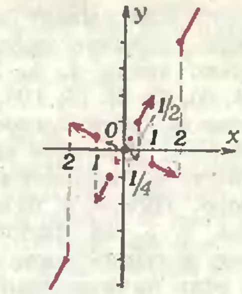


Рис. 2.

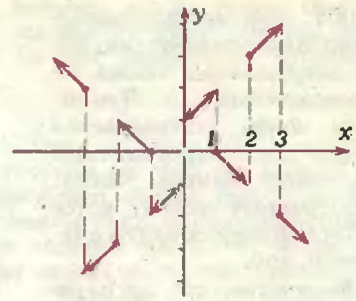


Рис. 3.

Имеются и другие функции, удовлетворяющие условию; см., например, рисунок 3. Эту функцию на олимпиаде предложил К. Апситис (10 кл., ФМШ № 1, Рига); интересно, что ее можно задать при $x \neq 0$ одной формулой

$$f(x)=\frac{x}{|x|}-x\cdot(-1)^{[-|x|]},$$

где $[x]$ — целая часть x.

А. Каринский (10 кл., ФМШ № 18 при МГУ, Москва)

М1060. *На плоскости даны две замкнутые ломаные, каждая с нечетным числом звеньев. Все прямые, содержащие звенья этих ломаных, различны, и никакие три из них не пересекаются в одной точке. Доказать, что из каждой ломаной можно выбрать по одному звену так, чтобы они были противоположными сторонами некоторого выпуклого четырехугольника.*

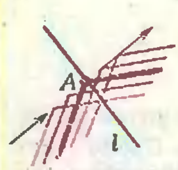


Рис. 1.

Рис. 2.

Если одно из звеньев первой ломаной параллельно некоторому звену второй, то утверждение задачи очевидно (эти два звена — основания трапеции). Поэтому будем в дальнейшем предполагать, что никакие два звена разных ломаных не параллельны.

Прямую, содержащую звено, будем называть несущей прямой этого звена. Поскольку обе ломаные состоят из нечетного числа звеньев, число N точек пересечения несущих прямых одной ломаной с несущими прямыми другой нечетно.

Допустим, что утверждение задачи неверно. Тогда, как бы ни выбрать на каждой ломаной по звену, точка пересечения их несущих прямых будет лежать на одном из этих двух звеньев. Следовательно, число N можно представить как

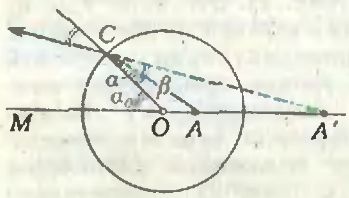
(число пересечений первой ломаной с несущими прямыми второй) + (число пересечений второй ломаной с несущими прямыми первой) — (число пересечений ломаных друг с другом),

поскольку последнее число дважды учитывается в сумме первых. Покажем, что каждое из этих чисел, а значит, и число N, четно, в противоречие со сказанным выше. Тем самым, задача будет решена.

Будем сдвигать одну ломаную в некотором направлении до тех пор, пока она не перестанет пересекаться с другой, и следить за тем, как меняется число их точек пересечения. Ясно, что оно может измениться только в тот момент, когда какая-то вершина A одной из ломаных попадет на некоторое звено l другой. Направление сдвига можно выбрать так, чтобы вершина A не могла совпасть с вершиной или точкой самопересечения другой ломаной. Тогда достаточно рассмотреть два случая: когда два звена, выходящие из вершины A, лежат по разные стороны от l (рис. 1) и по одну сторону (рис. 2). В первом случае число пересечений не меняется, во втором — увеличивается или уменьшается на 2. В любом случае четность его сохраняется, и так как в конце пересечений не будет, число точек пересечения двух замкнутых ломаных четно. Аналогично доказывается четность числа пересечений замкнутой ломаной с прямой, т. е. четность первых двух слагаемых в выражении для N.

Ю. Хохлов (9 кл., с. ш. № 30, Ленинград)

Ф1067. *Внутри прозрачного шара радиусом R, сделанного из материала с показателем преломления n, имеется небольшое вкрапление A. При рассматривании вкрапления кажущееся расстояние от вкрапления до центра шара оказывается не зависящим от α для достаточно больших α (см. рисунок 1). Найдите, на каком расстоянии от центра шара находится вкрапление.*



Покажем, что если вкрапление A находится на расстоянии R/n от центра шара O, то его изображение A' будет лежать на прямой OA на расстоянии Rn от центра шара.

Действительно, рассмотрим произвольный луч AC, выходящий из точки A. При этом введем обозначения: $\angle MOC=\alpha_0$, а угол падения этого луча на сферическую поверхность $\angle ACD=\alpha$. Пусть продолжение преломленного луча AC пересекает прямую OA в точке A'. Тогда для треугольника OAC применима теорема синусов:

$$\frac{\sin\alpha}{OA}=\frac{\sin\alpha_0}{AC}. \qquad (1)$$

(см. рисунок). Кроме того, по теореме косинусов получим

$$(AC)^2=R^2+(OA)^2+2R\cdot OA\cdot\cos\alpha_0. \qquad (2)$$

Аналогично, рассматривая треугольник OCA', можно записать:

$$\frac{\sin\beta}{OA'}=\frac{\sin\alpha_0}{A'C},\ (A'C)^2=R^2+(OA')^2+2R\cdot OA'\cdot\cos\alpha_0. \qquad (3)$$

Учитывая, что по закону преломления $n\sin\alpha=\sin\beta$ (угол преломления луча AC $\angle\beta=\angle OCA'$), из (1) и (3) получим

$$A'C=OA'\frac{AC}{n\cdot OA}. \qquad (4)$$

Из (4) и (2) следует, что

$$(A'C)^2=\frac{(OA')^2}{n^2}\frac{(AC)^2}{(OA)^2}=\frac{(OA')^2}{n^2}\frac{1}{(OA)^2}(R^2+(OA)^2+$$
$$+2R\cdot OA\cdot\cos\alpha_0).$$

откуда, используя (3),

$$\frac{(OA')^2}{n^2}\frac{1}{(OA)^3}(R^2+(OA)^2+2R\cdot OA\cdot\cos\alpha_0)=$$
$$=R^2+(OA')^2+2R\cdot OA'\cdot\cos\alpha_0. \qquad (5)$$

Равенство (5) справедливо для любых $\cos\alpha_0$ при некоторой длине отрезка OA, если слагаемые, в которые входит $\cos\alpha_0$, в левой и правой частях уравнения равны между собой, т. е. $OA'^2/n^2=OA$.

Окончательно равенство (5) преобразуется в выражение

$$n^2(R^2+(OA)^2)=R^2+(OA)^2\cdot n^4, \qquad (6)$$

чье решение $OA=R/n$.

Заменяя в (6) OA на OA', найдем, что $OA'=Rn$.

Таким образом, решения уравнения (6) не зависят от угла α_0.

Если же вкрапление сделано на поверхности сферы, то ответ задачи тривиален: $OA=R$.

С. С. Кротов

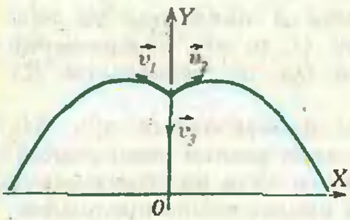
Ф1068. *Снаряд, летящий по вертикали, разрывается в верхней точке траектории на три равных осколка. Один из осколков, двигаясь по вертикали, упал через время T_1 после взрыва, два других упали одновременно через время*

Поскольку разрыв снаряда происходит в течение короткого интервала времени, то можно пренебречь импульсом силы тяжести по сравнению с приращением импульса каждого из осколков. Следовательно,

$$0=\frac{m}{3}\vec{v}_1+\frac{m}{3}\vec{v}_2+\frac{m}{3}\vec{v}_3, \qquad (1)$$

где $\vec{v}_n$ — скорость n-го осколка. Из (1) следует, что величины векторов $|\vec{v}_n|=v$ одинаковы, а углы между ними равны 120°.

T_2 ($T_1<T_2$). Найти высоту H, на которой разорвался снаряд.



На рисунке изображены векторы $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, $\vec{v}_3$, ориентированные в соответствии с условием $T_1<T_2$.

Введем систему координат с началом в точке падения осколка № 3. Тогда зависимость координат первого и третьего осколков от времени имеет вид

$$\begin{aligned} y_1(t)&=H+\frac{1}{2}vt-\frac{gt^2}{2},\\ y_3(t)&=H-vt-\frac{gt^2}{2}. \end{aligned} \qquad (2)$$

Поскольку $y_1(T_2)=0$, $y_3(T_1)=0$, то из уравнений (2)

$$0=H+\frac{1}{2}vT_2-\frac{gT_2^2}{2},\quad 0=H-vT_1-\frac{gT_1^2}{2}$$

находим

$$H=g\,\frac{T_2T_1}{2}\,\frac{T_1+2T_2}{2T_1+T_2}.$$

Ю. Г. Павленко

Ф1069. *На угол величиной α, согнутый из тонкого гладкого стержня, надета легкая петля длиной l с прикрепленным к ней небольшим грузом; угол установлен вертикально. Найдите расстояние от груза до вершины угла в положении равновесия и период малых колебаний груза в плоскости угла.*

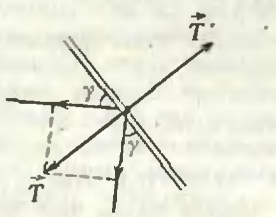


Рис. 1.

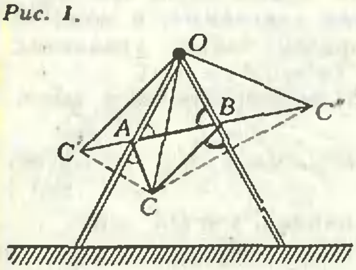


Рис. 2.

Во-первых заметим, что веревка, перекинутая через гладкий стержень, образует с ним равные углы независимо от положения груза (рис. 1). Это ясно уже из того, что сумма $\vec T$ сил натяжения веревки по обе стороны стержня должна быть перпендикулярна стержню, иначе из-за отсутствия силы трения нечем будет компенсировать тангенциальную составляющую $\vec T'$. Во-вторых, совершим следующую операцию: отразим зеркально грузик, отклонившийся от положения равновесия в плоскости угла α в точку C (рис. 2), относительно каждой из сторон угла. Тогда, в силу равенства вышеупомянутых углов, прямая, соединившая точки C' и C'', будет проходить вдоль отрезка AB. При этом, естественно, $OC=OC'=OC''$ так как OC' и OC'' — отражения отрезка OC. Следовательно, построенный нами треугольник $C'OC''$ — равнобедренный, т. е. $\angle OC''C'=\angle OC'C''$, а $\angle C'OC''$, как это легко видеть, равен 2α. Отсюда ясно, что при колебаниях груза треугольник $C'OC''$ в плоскости угла α меняет только свое положение, но сохраняет форму. Это значит, что $OC'=OC''=OC=R$, где R не зависит от положения груза. Легко вычислить R: для этого сместим груз до конца, к любой из сторон угла α. Тогда $R=\dfrac{l/2}{\sin\alpha}$. Движение грузика полностью эквивалентно движению маятника длиной R, так что период колебаний $T=2\pi\sqrt{R/g}=2\pi\sqrt{l/2g\sin\alpha}$.

И. И. Мазин

Ф1070. *Мальчик выдувает из длинной трубки мыльный пузырь. Надув пузырь, он выпускает трубку изо рта, при этом пузырь сдувается обратно в трубку и окончательно исчезает через время τ. За какое время сдуется таким же образом пузырь вдвое большего радиуса? Считать, что воздух движется по трубке достаточно мед-*

Воздух вытекает через трубку медленно, значит, силу вязкого трения можно считать пропорциональной скорости потока воздуха. Избыточное давление в пузыре мало по сравнению с атмосферным давлением, поэтому изменением плотности воздуха в пузыре мы пренебрегаем.

Сила вязкого трения в любой момент почти уравновешивает силу избыточного давления, а Δp обратно пропорционально радиусу пузыря. Тогда можно записать:

$$v\sim\Delta p\sim\frac{1}{r}, \text{ и } \frac{\Delta V}{\Delta t}\sim\frac{1}{r}, \text{ т. е.}$$

ленно, свойства мыльной пленки у обоих пузырей одинаковы.

$$\frac{\Delta V}{V} \sim \frac{\Delta t}{r^4}.$$

Если у нас есть два пузыря радиусами r_1 и r_2, то отношения времен, за которые объем каждого из них уменьшится на одну и ту же малую часть —

$$\frac{\Delta t_1}{\Delta t_2} = \frac{r_2^4}{r_1^4},$$

но при этом отношение радиусов остается тем же, значит, и отношение времен исчезновения пузырей будет таким же. Итак,

$$t_2 = 16t_1.$$

Д. А. Купцов

Ф1071. *В схеме, указанной на рисунке 1, лампочка горит одинаково ярко как при замкнутом, так и при разомкнутом ключе K: $R_1=R_3=90$ Ом, $R_2=180$ Ом, $U=54$ В. Найдите напряжение на лампочке.*

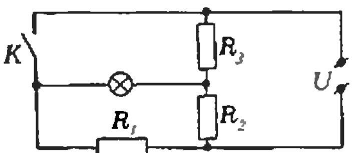


Рис. 1.

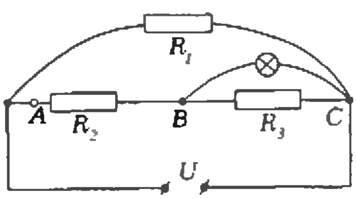


Рис. 2.

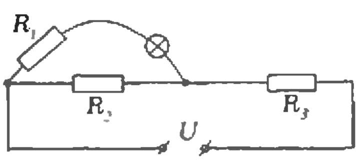


Рис. 3.

Заметим, что сопротивление лампочки зависит от напряжения на ней: с повышением напряжения увеличивается разогрев нити накаливания, и сопротивление лампочки растет. По условию задачи накал нити при замкнутом и разомкнутом ключе одинаков; следовательно, напряжение на лампочке $U_л$ и ее сопротивление R одни и те же в обоих случаях.

На рисунках 2 и 3 показаны эквивалентные схемы при замкнутом и разомкнутом ключе. Сопротивление участков BC и AC —

$$R_{BC} = \frac{RR_3}{R+R_3}, \quad R_{AC} = R_2 + R_{BC}. \qquad (1)$$

Подставив в (1) значения сопротивлений R_2 и R_3 (в омах), получим

$$R_{BC} = \frac{90R}{R+90}, \quad R_{AC} = \frac{270\,(R+60)}{R+90}. \qquad (2)$$

Напряжение на лампочке при замкнутом ключе

$$U_л = \frac{U}{R_{AC}} R_{BC}.$$

С учетом (2) и того, что $U=54$ В, получаем

$$U_л = \frac{18R}{R+60}. \qquad (3)$$

Аналогичный расчет при разомкнутом ключе дает

$$U_л = \frac{36R}{R+150}. \qquad (4)$$

Из уравнений (3) и (4) находим напряжение на лампочке:

$$U_л = 6 \text{ В}.$$

В. И. Чивилев

Ф1072. *Почему наличие ультрафиолетового компонента в спектре ухудшает резкость изображения, получаемого на фотопленке?*

Показатель преломления стекла и, следовательно, фокусное расстояние объектива зависят от длины волны излучения. Выбором формы и материала объектива и оптимального расстояния до фотопленки добиваются практического исключения размытия изображения при фотографировании. Соответствующие ухищрения не касаются длин волн за пределами видимой части спектра. Поэтому попадание ультрафиолетовых лучей на фотопленку приведет к общему размытию изображения. Для борьбы с этим недостатком применяют фильтры, не пропускающие ультрафиолетовое излучение. По той же причине на некоторые объективы наносится отдельная шкала расстояний для съемки в инфракрасном диапазоне.

Л. А. Ашкинази

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М1031—М1045, Ф1043—Ф1057, справились с задачами М1031—М1033, М1036, М1040, Ф1043—Ф1045, Ф1048, Ф1051 и Ф1054. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

А. Адылбаева (Целиноград) **41, 42;** *А. Акимов* (Евпатория) **35, 38, 41, 43;** *Д. Алиевский* (Свердловск) **37—39, 41—45;** *Е. Амдур* (Ленинград) **41;** *А. Андрас* (Румыния) **43, 44;** *И. Аржанцев* (Киев) **42, 44;** *В. Арутюнян* (Ереван) **44;** *А. Бабкин* (Киев) **37, 42;** *Ю. Безгачева* (Красноярск) **37, 38, 41—45;** *А. Березовский* (Киев) **34, 35, 37;** *Ю. Бернштейн* (Иркутск) **41—43;** *А. Билибин* (Боровичи) **42;** *А. Блинова* (Ленинград) **34;** *Р. Бочев* (Враца) **34, 35;** *Ю. Васильев* (Усть-Каменогорск) **37;** *Ю. Великина* (Днепропетровск) **37, 42, 44, 45;** *К. Вербицкий* (Москва) **37, 41—45;** *А. Винницкий* (Калуга) **37;** *Д. Виткуп* (Киев) **44;** *А. Витяев* (Новосибирск) **39, 41—45;** *В. Вологодский* (Омск) **34, 35, 37—39, 42—45;** *В. Волчков* (Шахтерск) **34, 35, 37—39, 41—45;** *Д. Вольпер* (Омск) **38, 39, 42—45;** *М. Выборнов* (Киев) **34, 37, 44;** *С. Гамидов* (п. Борадыгях АзССР) **39, 44;** *Т. Гамидов* (п. Борадыгях АзССР) **39, 44;** *О. Гилязов* (Уфа) **34;** *Ю. Гнатюк* (Каменец-Подольский) **41—45;** *Голомбовский* (г. п. Ивье Гродненской обл.) **39;** *М. Гольдшейд* (Челябинск) **34, 35, 41—45;** *А. Гороховский* (Киев) **37—42, 43, 44;** *В. Гравит* (Северодвинск) **37—39, 42—45;** *Р. Гринив* (Львов) **34, 35, 38, 42—45;** *В. Грищенко* (Киев) **41;** *Б. Гуревич* (Саратов) **34;** *С. Гурский* (Новый Роздол) **42;** *А. Даниленко* (Волгоград) **43;** *С. Деревягин* (Белгород-Днестровский) **42;** *А. Джаббаров* (с. Чинабад Узб. ССР) **39;** *О. Джавадов* (п. Борадыгях АзССР) **39, 44;** *Н. Дохолян* (Тбилиси) **44;** *С. Дронов* (Пущино) **34, 37, 42—44;** *И. Жарков* (Свердловск) **42—45;** *И. Жильцов* (Свердловск) **42, 43;** *Ю. Жуков* (Тула) **45;** *Ю. Журавель* (Киев) **41, 42, 44;** *А. Зайцева* (Новосибирск) **34, 41;** *А. Залеский* (Харьков) **34, 39;** *Н. Зверев* (Москва) **41—43;** *С. Зелик* (Краматорск) **34, 41, 42, 44;** *Е. Зельцер* (Киев) **39;** *И. Зефиров* (Химки Московской обл.) **41—44;** *К. Ибраев* (Целиноград) **41—43;** *А. Калинин* (Саратов) **34, 35, 39, 42, 43;** *В. Калошин* (Харьков) **34, 37, 41—45;** *И. Карп* (Киев) **34, 37, 42, 44;** *К. Касимов* (Целиноград) **41, 42;** *С. Кириллов* (Одесса) **39, 41;** *О. Кирнасовский* (Винница) **42—45;** *В. Кицио* (Черкассы) **44;** *О. Коваленко* (Киев) **39;** *Я. Коваль* (Киев) **41;** *С. Ковальенко* (Винница) **34, 44;** *О. Коврижкин* (Майкоп) **34, 41—44;** *А. Козачко* (Винница) **44;** *И. Кокарев* (Ленинград) **41—45;** *Г. Колесницкий* (Тбилиси) **39, 41—43;** *А. Коляндр* (Харьков) **42;** *А. Коршков* (Мозырь) **37, 38, 41—44;** *Д. Косоня* (Белорецк) **34, 38, 39, 41, 42;** *В. Крепец* (Новосибирск) **34, 41, 42, 44;** *В. Крушкаль* (Новосибирск) **41—45;** *А. Кулик* (Киев) **34, 35, 37—39, 42—44;** *К. Левин* (Киев) **42;** *С. Лесик* (Донецк) **41, 42;** *Н. Локоть* (Киев) **39;** *А. Лосев* (Ленинград) **41—44;** *В. Лысенков* (Белорецк) **37, 42, 45;** *Р. Малендевич* (Болехов) **42;** *А. Мальцев* (п. Медведка Курской обл.) **39, 42, 43, 45;** *В. Мамедов* (п. Борадыгях Аз. ССР) **39;** *И. Марков* (Киев) **22, 23, 25, 42;** *Т. Мартиросова* (Ташкент) **41, 42, 44, 45;** *В. Матвеев* (Москва) **34, 41—44;** *А. Мельник* (Гайворон) **34, 37, 41—43;** *А. Мельников* (Краснодар) **42;** *А. Мельцер* (Ленинград) **34, 35, 37, 38, 41—44;** *Д. Миллер* (Днепропетровск) **41;** *С. Морозов* (Заволжье) **39, 41;** *Ю. Морозов* (Тбилиси) **42;** *А. Морозова* (Одесса) **42, 44;** *Я. Мустафаев* (Баку) **34, 38, 39, 41—44;** *А. Назарян* (Тбилиси) **34, 38, 39, 41—44;** *Е. Недуев* (Одесса) **37, 42—44;** *С. Несторов* (Пловдив, НРБ) **34;** *О. Павлов* (Новосибирск) **41—45;** *А. Павлунин* (Фрунзе) **42, 43;** *В. Павлуник* (Фрунзе) **37;** *З. Петренко* (п. Дружный Минской обл.) **42;** *М. Пискарев* (Баку) **42;** *В. Полищук* (Киев) **34, 35, 37, 42, 44;** *Д. Прокофьев* (п. Сертолово Ленинградской обл.) **34, 35, 37, 38, 42—44;** *В. Рагулин* (Челябинск) **35, 39, 42—45;** *Д. Румынин* (Красноярск) **34;** *П. Рушайло* (Москва) **37;** *Р. Садреев* (Алма-Ата) **42, 44;** *Х. Сайднасимов* (Алма-Ата) **41;** *А. Силкин* (Свердловск) **41—43;** *Д. Синицкий* (Ленинград) **42;** *С. Синяков* (Москва) **37, 42—45;** *М. Скворцов* (п. Черноголовка Московской обл.) **38, 41—44;** *А. Скопенков* (Саратов) **37, 42—45;** *А. Слесарчук* (Киев) **44;** *В. Слитинский* (Киев) **34, 35, 37, 38, 41—45;** *Д. Смиренников* (Подпорожье) **42—44;** *А. Смирнова* (Киров) **38;** *А. Смоляк* (Москва) **39, 41, 44;** *И. Соловьев* (п. Черноголовка Московской обл.) **41—44;** *И. Солтан* (Павлодар) **39, 41;** *Д. Сторожук* (Киев) **44;** *В. Стрижевский* (Одесса) **41;** *В. Стрельников* (Киев) **34, 37;** *А. Строев* (Москва) **41;** *С. Сурин* (Железнодорожный Московской обл.) **34;** *Г. Тер-Сааков* (Баку) **42;** *С. Тер-Сааков* (Баку) **42;** *С. Тихонов* (Воронеж) **38, 41—44;** *А. Толстых* (Днепродзержинск) **42;** *Ю. Томилов* (Киев) **39, 42, 44;** *Д. Туляков* (Жданов) **37, 38, 42, 44,** *А. Тхор* (Червоноград) **39, 42, 44;** *О. Тымченко* (Киев) **39;** *М. Унтершлак* (Одесса) **42;** *Т. Усик* (Харьков) **38;** *Ю. Файзуллаев* (к-з Правда Хорезмской обл.) **41;** *Д. Фельдман* (п. Черноголовка Московской обл.) **34, 35, 37, 39, 42—45;** *В. Фельдшеров* (Алма-Ата) **39, 42, 44;** *В. Филипов* (Киев) **42;** *Ф. Фот* (Томск) **34, 37—39, 41—45;** *М. Фукс* (Москва) **34;** *М. Хараба* (с. Надречное Тернопольской обл.) **42;** *К. Хриневский* (ПНР) **35;** *О. Христенко* (Караганда) **34, 38, 41—44;** *Р. Хусаинов* (Уфа) **42;** *Ж. Хутамова* (к-з Узбекистон Хорезмской обл.) **41;** *К. Худавердиев* (Сиазынь Аз. ССР) **37;** *Д. Цуй* (Павлодар) **34, 41;** *Д. Черников* (Баку) **42;** *А. Шаповал* (Киев) **37, 41, 42;** *Ф. Шейнерман* (Киев) **34;** *З. Шония* (Тбилиси) **34;** *Е. Шубин* (с. Романовка Красноярского края) **42;** *К. Щербаков* (Арзамас) **34, 41—43;** *Я. Эфендиев* (Баку) **34, 37—39, 42—44;** *А. Яврян* (Ереван) **38;** *А. Яхшимуратов* (Шават) **39.**

Физика

А. Агашкова (Баку) **47;** *В. Адамия* (Тула) **50, 55;** *Н. Адигезалов* (Баку) **52;** *А. Амиров* (Уфа) **52;** *А. Андрианов* (Кузнецовск) **47, 52, 56, 57;** *Д. Андриенко* (Калинин) **53;** *О. Армоник* (Гродно) **50;** *С. Артамонов* (Душанбе) **47;** *А. Афонин* (Брест) **46, 50, 53, 56, 57;** *Г. Ахмедов* (Сумгаит) **52;** *А. Бабкин* (Киев) **50;** *С. Белоусов* (Ленинград) **49, 52, 53, 55—57;** *А. Бережной* (Воронеж) **47;** *А. Билибин* (Боровичи) **46, 49, 50, 52, 53, 55, 57;** *С. Бобровник* (Черновцы) **49, 53, 55;** *С. Бобылев* (Березники) **46, 47;** *В. Бодров* (Сасово) **47;** *П. Буко*

(Продолжение см. на с. 35)

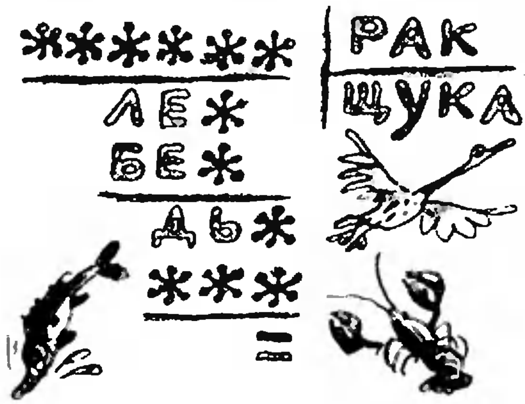
„Квант" для младших школьников

Задачи

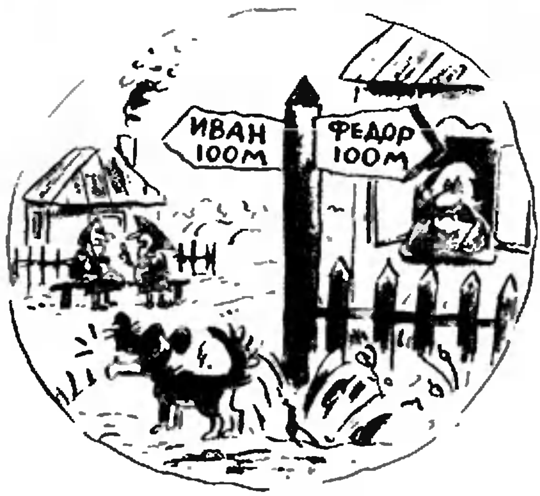
1. Про три простых числа известно, что одно из них равно разности кубов двух других. Какие это числа?

2. В некоторых старинных часах, предназначенных для работы на открытом воздухе, маятник изготовлялся в виде длинной трубки, заканчивающейся сосудом со ртутью. С какой целью это делалось?

3. Решите числовой ребус (см. рисунок). Одинаковым буквам соответствуют одинаковые числа, разным — разные.



4. На хуторе Семидворье семь домов. Любопытно, что какие бы три дома мы ни выбирали, расстояние хотя бы между одной парой из них равняется 100 метрам. Начертите план расположения домов на хуторе.



5. Тартарен, путешествуя по Африке, однажды остановился на ночлег на берегу небольшого озера с чистейшей водой (на дне били ключи). Однако утром к озеру подошло стадо слонов. Тартарен насчитал 183 головы. На следующее утро они ушли, оставив вместо озера грязную лужу. Через несколько лет Тартарен вновь попал на это место. Озеро вновь было полно воды, но утром опять появились слоны. На этот раз в стаде было 37 слонов и воды им хватило на 5 дней. Покидая берега выпитого до дна озера, Тартарен задумался: за сколько дней опустошит озеро один слон?

Эти задачи нам предложили *Н. Я. Антонович, А. С. Бутов, А. М. Домашенко, ученик с. ш. № 15 г. Ставрополя Павел Скучарев, А. П. Савин*

Если все краски радуги вместе смешать,—
то... получится черная грязь.
Вреднюга (из детского мультфильма)

КАК ОДНАЖДЫ ЖАК-ЗВОНАРЬ ГОЛОВОЙ СЛОМАЛ ФОНАРЬ...

Кандидат физико-математических наук
А. И. БУЗДИН.
Кандидат физико-математических наук
С. С. КРОТОВ

Не будем чересчур строгими по отношению к выводу Вреднюги про краски, а рассмотрим все по порядку, поскольку физически чистый эксперимент — это вещь достаточно тонкая...

Сколько существует на свете разных цветов? Откуда вообще берутся разные цвета? Эти и многие другие вопросы издавна занимали любознательных людей. Большой вклад в создание науки о цвете внес великий Ньютон. Он наблюдал разложение солнечного (белого) света при прохождении его через стеклянную призму в так называемый спектр (от латинского spectrum). Получающиеся при этом цвета в точности соответствуют цветам радуги. Призма позволила Ньютону получить радугу в «лабораторных» условиях. Вот они, цвета радуги: красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, синий, фиолетовый. Посмотрите еще раз на заглавие статьи. Мы воспользовались шуточной фразой, помогающей запомнить последовательность цветов в солнечном спектре (как видите, и в нашей шутке есть доля правды). Наверняка кто-то из вас вспомнит еще одно мнемоническое правило — фразу «каждый охотник желает знать, где сидит фазан».

Именно благодаря опытам Ньютона в конце XVII века было установлено, что белый свет представляет собой смесь из различных цветов. (В частности, Ньютон показал, что если разложенный в спектр белый свет смешать, то опять получится белый свет.) Прошло много времени, пока ученые осознали, что свет — это распространяющиеся в пространстве колебания связанных друг с другом электрических и магнитных полей, иначе говоря — электромагнитные волны. Наиболее привычный пример такого рода волн — радиоволны. Было доказано, что природа света и радиоволн — одна и та же, они отличаются лишь частотой колебаний. Частота радиоволн в тысячи раз более низкая, чем у световых. Каждому цвету отвечает определенная частота колебаний. Если воспользоваться аналогией с музыкальными инструментами, то красный цвет отвечает «басам», а фиолетовый — высоким нотам.

Скорость распространения электромагнитных волн $c = 300\,000$ км/с. Она во много тысяч раз больше скорости звука, так что радиослушатель, сидящий дома во Владивостоке около радиоприемника, слышит голос певца на концерте, транслируемом из Москвы, раньше, чем слушатель, сидящий в дальнем ряду концертного зала.

Приведенное значение скорости света ($c = 3 \cdot 10^5$ км/с) относится к вакууму. При распространении света в прозрачном веществе скорость оказывается меньшей. Особый интерес представляет тот факт, что при прохождении через вещество свет разных цветов распространяется с разными скоростями. Это явление называется дисперсией, и именно благодаря дисперсии призма разлагает белый свет в цветной спектр.

Итак, из белого света можно получить все цвета радуги. А что означают разные цвета клякс на этой странице? Стоит вам прихватить с собой эту статью в темную комнату (действительно, а почему бы и нет?), как все цвета вообще пропадут, кляксы станут просто серыми — сами по себе они не «светятся», какого бы цвета ни были. Чтобы видеть их разноцветными, их необходимо освещать. При этом падающий на страницу свет частично поглощается, частично рассеивается, а видим мы именно рассеянные световые лучи.

Очень важно, что разные вещества (в силу особенностей строения их молекул) обладают избирательностью к цвету — они по-разному поглощают и рассеивают свет различных участков спектра. Охра потому нам и кажется желтой, что из падающего на нее белого света поглощаются почти все лучи, кроме желтого цвета. Или вспомните про... помидор. На разных стадиях созревания он преимущественно рассеивает сначала зеленые лучи, потом — красные. В этом проявляются изменения молекулярного строения вещества помидора. Кстати, не случайно в химии цвет — важная характеристика вещества.

Пришло время оставить заботы земные и... воспарить. Действительно, вряд ли найдется человек, которого хоть раз в жизни не увлекла загадочная игра небесных красок. «Цвет небесный — синий цвет...»,— написал замечательный грузинский поэт Нико Бараташвили. Но зададимся вопросом — безупречна ли физически упомянутая строчка?

Обычно голубизну неба объясняют рассеянием света в атмосфере. Однако почему тогда ночное небо даже при полной луне не бывает голубым? Или почему разные участки неба окрашены в синий цвет по-разному — одни более ярко, другие — менее? А если обратиться к заходу солнца? Внимательный физик, наблюдавший заход солнца, отметил, что сначала западная часть неба приобретает желтый или оранжевый оттенок; затем, когда солнце становится огненно-красным, свечение неба меняется от желто-оранжевого до ярко-зеленого; наконец, примерно до высоты 25° над горизонтом небо окрашивается в розовый цвет.

Поскольку причиной всех перечисленных цветовых коллизий является рассеяние солнечного света в атмосфере, остановимся более подробно на этом процессе.

Объяснение особенностей окраски неба принадлежит английскому физику У. Рэлею. В общих чертах суть дела такова. Цвет неба определяется зависимостью рассеяния света от частоты последнего. Приходящая от солнца электромагнитная волна «раскачивает» электроны, входящие в состав молекул воздуха. Наиболее сильное воздействие на электроны оказывают лучи синей части спектра. Таким образом, из пришедшей световой волны электроны молекул воздуха «забирают» колебания синей части спектра. Но, придя в вынужденное колебательное движение, электроны отдают назад взятую у волны энергию. Однако отдают они эту энергию уже во всех направлениях, а не только в направлении падения первоначальной волны от солнца. Этот процесс и представляет собой рассеяние света.

Существенным для объяснения рассеяния света в атмосфере является неравномерность распределения молекул воздуха в атмосфере — постоянно имеющие место флуктуации плотности воздуха. При равномерном распределении молекул в пространстве рассеяние было бы совершенно иным — небо просто-напросто было бы черным.

Итак, сильнее всего молекулы воздуха рассеивают синюю часть спектра, и поэтому участки неба, которые мы видим в рассеянном свете, кажутся нам голубыми.*) Чем сильнее удалены от солнца соответствующие участки небосвода, тем менее яркими они будут нам казаться. Причина состоит в том, что чем больший путь в атмосфере проходят солнечные лучи, тем меньшая в них доля приходится на синюю составляющую. Теперь, наверное, вам понятно, почему говорят «красно солнышко»? Прямые солнечные лучи по пути к нам «теряют» синюю составляющую, и преимущественную долю приходящего к наблюдателю излучения составляет именно красно-желтая часть спектра.

Понятно, что дым, пыль и другие мелкие частицы, содержащиеся в воздухе, существенным образом влияют на рассеяние света в атмосфере. Известно, что после больших извержений вулканов восходы и заходы солнца порой играют удивительными красками — солнце и луна могут даже стать синими. Приведем описание последствий катастрофического извержения вулкана Кракатау в 1883 году, которое дает в своей книге «Занимательная геология» замечательный русский ученый В. А. Обручев: «Мелкий пепел затемнял Солнце в Японии и в других местах на расстоянии свыше 3000 километров. Этот пепел, долго плававший в атмосфере, обусловил синеватый цвет солнца и луны в Африке и на островах Тихого океана и замечательные красные зори в конце 1883 года и в начале 1884 года, наблюдавшиеся по всей Земле».

Синяя окраска солнца и луны в данном случае обуславливается рассеянием света на атмосферных аэрозолях размером 0,4—0,9 мкм, т. е. размером, сравнимым с длиной волны видимого света. Атмосферные аэрозоли указанных размеров образуются путем осаждения на твердых частицах дыма, пепла и т. д. при вулканических извержениях и крупных лесных пожарах. Именно вследствие своего относительно большого размера частицы рассеивают свет красной части спектра сильнее, чем синей. Это рассеяние связывают с именем немецкого ученого Ми. При

---

*) Может возникнуть вопрос: почему голубыми, а не фиолетовыми? Дело в том, что надо еще принимать во внимание специфику восприятия цветов человеческим глазом и тот факт, что в солнечном свете фиолетовых лучей «меньше», чем синих. Подробнее об этом мы обещаем рассказать в другой статье, в одном из следующих номеров журнала.

наблюдении солнца и луны сквозь такой аэрозоль они видятся синеватыми — красная составляющая белого света рассеивается, и до нас доходит только синий свет.

Итак, оттенки цветов, окрашивающих небесный свод, обусловлены в каждой конкретной ситуации комбинацией рэлеевского рассеяния с рассеянием света на мелких частицах.

«Голубые горы, голубые дали, голубые города» — все эти поэтические сочетания слов обычно используют в качестве символов первозданности, необыкновенной чистоты, загадочности. Самое удивительное состоит в том, что и здесь не обошлось без физики.

Так, иногда над покрытой зеленью открытой местностью, не слишком загрязненной вследствие человеческой деятельности, возникает очень красивая таинственная голубая дымка. В литературе часто упоминаются голубые горы Кавказа, Голубые горы в Австралии знамениты именно своей голубой дымкой. Голубой цвет «дымки» обусловлен рассеянием света на мельчайших частицах, размер которых много меньше длины волны видимого света. Такими частицами могут быть органические макромолекулы, испускаемые растительностью, а также мельчайшие частицы, срываемые с острых частей растений электрическим полем земли. Итак, в местах скопления мельчайших частиц возникает добавочный эффект рассеяния синей части спектра.

Завершая статью, предлагаем читателю сюжеты для самостоятельного рассмотрения.

1. Почему издалека новогодняя елка (скажем, стоящая на главной площади вашего города) в вечернее время кажется красной, хотя она освещена огоньками разного цвета?

2. Если вам доведется в новогоднюю ночь сидеть у костра, не забудьте поэкспериментировать и может быть блеснуть перед окружающими, задав им следующий вопрос. Почему внизу на фоне деревьев дым костра кажется синим, однако над верхушками деревьев (на фоне светлого неба) он выглядит желтым?

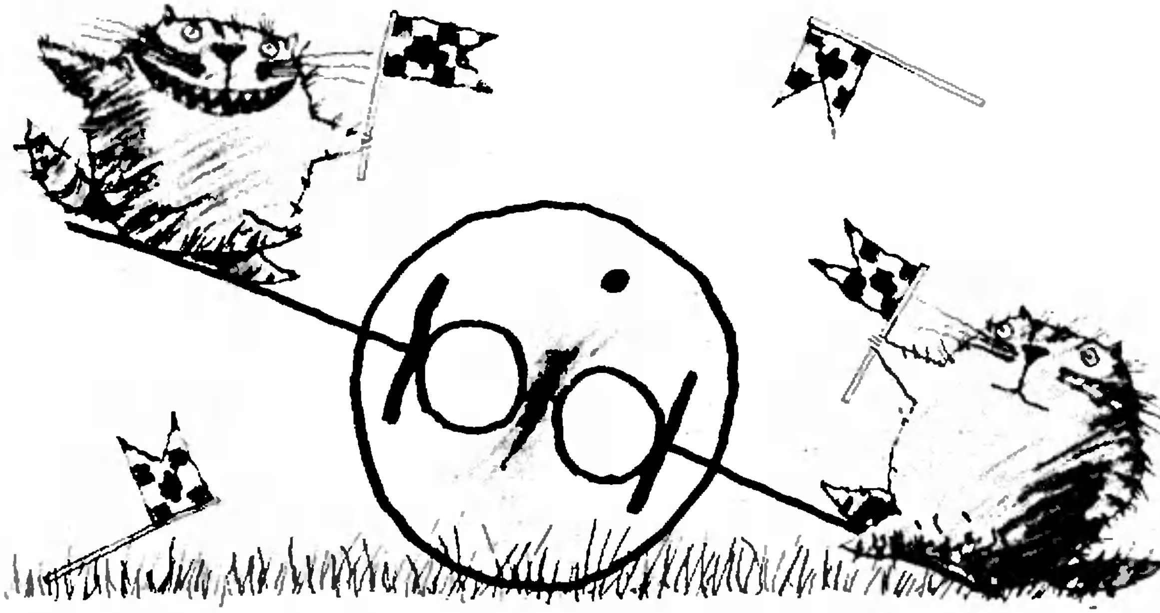
3. Капнув несколько капель молока в стакан с водой, посмотрите сквозь него на светящуюся лампочку. Лампочка покажется красновато-желтоватой. Если же посмотреть на отраженный от стакана свет, он будет голубым. Объясните наблюдаемое различие цветов.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 30)

(Минск) 47; *С. Бураков* (Киев) 47; *С. Бусленко* (Тула) 50, 55; *А. Бучель* (Луцк) 53; *С. Вавринюк* (Брест) 47; *С. Валюх* (Киев) 53; *М. Ванюшов* (Ленинград) 53; *К. Василою* (Крайова, СРР) 47; *К. Вербицкий* (Москва) 55, 57; *Д. Виноградов* (Рига) 57; *А. Винцюк* (Киев) 53; *Д. Виткуп* (Киев) 50, 55, 57; *В. Вовк* (Барвенково) 53, 55; *К. Волошин* (Москва) 49; *П. Вольфбейн* (Киев) 49, 53, 55, 57; *А. Гладышев* (Красноярск) 47; *О. Глазунов* (Москва) 49, 53; *А. Гончаров* (Новосибирск) 50; *М. Гончаров* (п. Черноголовка Московской обл.) 53, 55, 57; *П. Горьков* (п. Черноголовка Московской обл.) 50, 53, 57; *Г. Григорян* (Москва) 50; *Б. Гуревич* (Саратов) 49, 50, 53, 55, 57; *С. Гурский* (Новый Роздол) 47; *С. Гусев* (Лобня) 50; *С. Дворник* (п. Сарыозек Талды-Курганской обл.) 49, 53, 55, 57; *Е. Демлер* (Новосибирск) 50, 53, 55, 57; *Е. Демченко* (Жданов) 55, 57; *К. Демьяненко* (Киев) 46, 47; *С. Дикий* (Черкассы) 53, 55, 57; *С. Дронов* (Пущино) 53, 55; *В. Дядечко* (Винница) 49; *А. Езерский* (Минск) 47, 50, 53, 55, 57; *А. Ельяшевич* (Минск) 47, 49, 50, 57; *Д. Еременко* (Сумы) 47; *П. Забелин* (Куйбышев) 49, 52; *В. Завражний* (Фрунзе) 50; *Ф. Занин* (Старый Оскол) 47; *Е. Зельцер* (Киев) 55; *А. Зискинд* (Винница) 46, 55; *К. Зуев* (Вологда) 49, 57; *Е. Казьмирук* (п. Черноголовка Московской обл.) 50; *У. Каланов* (Фергана) 50; *В. Каменькович* (Харьков) 47, 49, 50, 55—57; *В. Камчатный* (Киев) 52; *А. Капустин* (Москва) 52, 53; *Д. Катков* (Брест) 47; *А. Клочанов* (Алма-Ата) 47; *С. Коваленко* (Винница) 47; *Н. Колачевский* (Долгопрудный) 46; *Е. Колеватов* (Ивано-Франковск) 53; *А. Комник* (Старый Оскол) 47; *А. Коновалов* (Мытищи) 55; *И. Королев* (Старый Оскол) 47; *Е. Корсунский* (Харьков) 49; *А. Коршков* (Мозырь) 53, 57; *Ю. Кравченко* (Москва) 49, 50, 52, 53, 56, 57; *К. Краснов* (Киев) 52, 55, 57; *М. Кудава* (Тбилиси) 49, 53; *О. Кушнир* (Дубляны) 57; *В. Лапко* (п. Курово Калининской обл.) 47; *Ю. Левин* (Харьков) 49, 56; *В. Лендерман* (Киев) 49, 52; *А. Лосев* (Ленинград) 47; *С. Луганский* (Москва) 47; *О. Лугуев* (Махачкала) 50; *А. Лутовинов* (Мичуринск) 47; *А. Львовский* (Москва) 47, 49, 53; *А. Лягузин* (Старый Оскол) 47; *А. Мазуренко* (Минск) 47, 53, 56, 57; *А. Майков* (Старый Оскол) 47, 53, 55—57; *Д. Макунин* (Серпухов) 55; *Р. Малендевич* (Болехов) 55; *Р. Малков* (Саратов) 49, 53, 55; *А. Малышев* (п. Медвянка Курской обл.) 47, 55; *А. Мамаев* (Заволжье) 49, 53; *А. Мамедов* (Одесса) 47;

(Окончание см. на с. 59)



Лаборатория „Кванта"

Наблюдение электростатической индукции

В. В. МАЙЕР,
Р. В. МАЙЕР

Поднесем к проводнику заряженное тело. Пусть, для определенности, проводник металлический, а заряд на теле — положительный. В проводнике возникнет электрическое поле, и свободные электроны, двигаясь против поля, будут собираться в ближайшей к заряженному телу области проводника. Следовательно, эта область приобретет отрицательный заряд, а область, наиболее удаленная от заряженного тела,— положительный заряд (что приведет к исчезновению электрического поля в проводнике). Описанное явление, как вы знаете, и называется электростатической индукцией.

При электростатической индукции в проводнике происходит перераспределение зарядов, значит, в нем возникает кратковременный электрический ток. Попробуем экспериментально доказать это, воспользовавшись неоновой лампочкой.

Такая лампочка (ее можно, например, купить в магазине радиотоваров) представляет собой стеклянный баллон, заполненный неоном при пониженном давлении. В баллон впаяны два электрода — анод и катод. Если на электроды подать соответствующее напряжение, в газе возникнет тлеющий разряд, который сопровождается свечением красновато-оранжевого цвета.*)

Понятно, что неоновая лампочка может служить индикатором электрического тока. Основные преимущества ее заключаются в том, что она компактна и что даже очень слабый ток (порядка нескольких микроампер) вызывает заметное свечение газа в лампе. Идея прибора для нашего опыта почти очевидна: проводник, в котором происходит перераспределение зарядов, нужно разорвать посередине и в его разрыв включить неоновую лампочку. Конкретная конструкция прибора может быть самой различной и определяется в первую очередь типом

*) Более подробно о самой неоновой лампочке, ее свойствах и практическом использовании можно прочитать в статье А. А. Борового («Квант», 1983, № 6).

используемой неоновой лампочки. В принципе подойдет любая, но лучше применить лампочки типа ВМН-1 или ВМН-2, электроды которых равноправны, т. е. в равной степени каждый из них может быть как анодом, так и катодом.

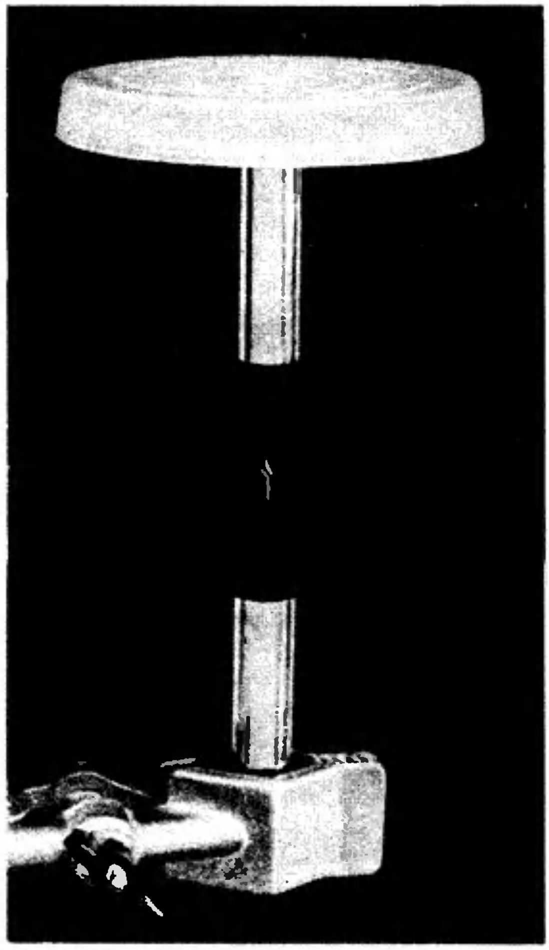
На рисунке приведена фотография одного из возможных вариантов прибора. Проводник образован двумя металлическими стержнями. Между ними в эбонитовом корпусе с окном расположена неоновая лампочка типа ВМН-2, касающаяся своими электродами торцов стержней. На конце верхнего стержня закреплен дюралевый диск, повышающий чувствительность прибора. Диск снабжен полиэтиленовой крышкой, предотвращающей искровой разряд между ним и заряженным телом.

Столь основательный прибор был изготовлен нами лишь потому, что нам часто приходится показывать опыты и нерационально каждый раз терять время на подготовку оборудования. Если вы хотите только пронаблюдать явление, то легко догадаетесь, как в течение получаса сделать прибор из подручных материалов, скажем медной проволоки диаметром 1,5—3 мм, полихлорвиниловой трубки, припоя и т. п.

Теперь о самом эксперименте. Наэлектризуйте трением эбонитовую палочку, пластмассовую расческу или полоску оргстекла. Прибор закрепите на изолированной подставке или возьмите в руку за нижний стержень. При приближении заряженной палочки к диску вы заметите свечение лампочки; следовательно, по проводнику идет ток, обусловленный перераспределением зарядов. Как только палочка окажется неподвижной относительно диска, свечение прекратится: заряды в проводнике перераспределились и вновь находятся в равновесии. При удалении палочки от диска лампочка опять загорается. Чем больше скорость движения палочки, тем ярче свечение лампочки, так как тем значительнее проходящий по проводнику ток.

Заметим, что опыт лучше всего проводить в полумраке, так как яркость свечения неоновой лампочки невелика.

В заключение предлагаем несколько вопросов для размышления.

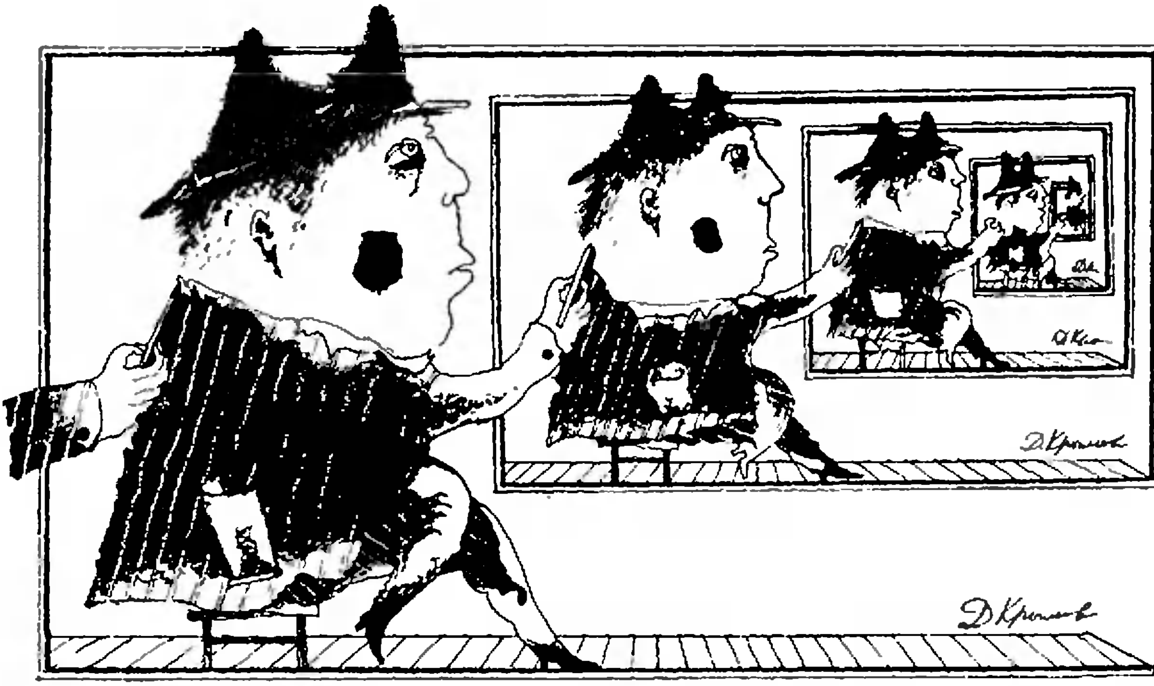


Прибор для демонстрации явления электростатической индукции с помощью неоновой лампочки.

1) Объясните, почему диск на конце проводника увеличивает чувствительность прибора.

2) Не кажется ли вам удивительным, что в описанном опыте электрический ток проходит по незамкнутой цепи? Сформулируйте условия, при которых такое явление действительно может существовать.

3) Проведите еще один опыт — рядом с прибором получите искровой разряд, например, с помощью электрофорной машины. Не возникло ли у вас ощущение, что все наблюдаемые явления имеют некоторое отношение к радиосвязи (см. статью М. П. Бронштейна «Изобретатели радиотелеграфа», опубликованную во втором номере журнала за этот год)?



Искусство программирования

Язык Лого

Урок 3: Рекурсии, функции

А. А. ДУВАНОВ,
Ю. А. ПЕРВИН

Все возвращается на круги своя

Выполняя процедуру ОКРУЖНОСТЬ (см. Урок 2 в прошлом номере «Кванта»), Черепаха обежит один полный оборот и остановится. Приятно наблюдать ее бег на экране дисплея! Поэтому хочется заставить ее покружиться еще и еще. Вот как это можно сделать:

```
ЭТО КАРУСЕЛЬ :R
  ОКРУЖНОСТЬ :R
  КАРУСЕЛЬ :R
КОНЕЦ
```

Эта процедура имеет непривычное описание: в него включен вызов той же самой процедуры. Процедура, вызывающая сама себя, называется *рекурсивной,* а ее вызов — *рекурсией.* С рекурсией часто и неожиданно можно встретиться и вдали от уроков информатики. Художники любят рисунки-шутки: на рисунке изображен зритель, наблюдающий экран телевизора, на котором виден зритель, взирающий на экран ... и т. д. Пример «литературной» рекурсии — знаменитый стишок про попа, у которого была собака.

Вызвав рекурсивную процедуру КАРУСЕЛЬ, можно убедиться в том, что не так уж она и хороша: она заставляет бедную Черепаху безостановочно бегать по кругу, ... пока включена машина.

Чтобы остановить Черепаху, управляемую рекурсивной процедурой, надо уметь отсчитывать число пройденных кругов и сравнивать эту переменную величину с заданным значением. Если в качестве счетчика кругов взять переменную с именем СЧЕТЧИК, то вести отсчет кругов можно с помощью команды

СДЕЛАЙ «СЧЕТЧИК :СЧЕТЧИК+1,

которую следует включить в описание процедуры КАРУСЕЛЬ сразу вслед за вызовом ОКРУЖНОСТЬ :R (вы догадываетесь, по-видимому, что для правильной работы задуманной программы надо будет в самом начале выполнить команду

СДЕЛАЙ «СЧЕТЧИК 0;

почему?).

А вот для того, чтобы сравнивать две величины, потребуется новая команда. *Условная команда* имеет вид

ЕСЛИ условие [список-1 команд] [список-2 команд]

Стоящие в квадратных скобках списки команд представляют собою одно из двух возможных продолжений программы: в том случае, когда условие, записанное после слова ЕСЛИ, истинно, выполняются команды первого списка (и пропускается весь второй список!), и наоборот, если условие ложно, пропускается первый список и выполняются команды второго списка. *Условием* (точнее, *простым условием)* называют два выражения, соединенные знаками отношений «<», «>», «>=» (больше или равно), «<=» (меньше или равно), «=», «/=» (не равно). Определяемое таким образом условие может быть либо истинным, либо ложным. Например, условная команда

```
ЕСЛИ: R/2>3.14*2 [ВПЕРЕД 50] [НАЗАД 50]
```

сначала вычисляет истинность условия при текущем значении R и, получив положительный ответ, посылает Черепаху вперед, а в противном случае — назад.

Допустима сокращенная форма условной команды (с одним списком):

ЕСЛИ условие [список команд]

Тогда в случае истинности условия выполняется команда списка, а если условие ложно, то машина ... ничего не делает, а просто переходит к выполнению следующей команды программы, если она есть. Этой формой условной команды мы и воспользуемся для решения поставленной задачи, заставляя Черепаху гулять по кругу, например, 17 раз. Для этого надо составить описание процедуры

```
ЭТО ПРОГУЛКА :R
  СДЕЛАЙ "СЧЕТЧИК 0
  КАРУСЕЛЬ :R
КОНЕЦ
```

описание процедуры КАРУСЕЛЬ будет иметь вид

```
ЭТО КАРУСЕЛЬ :R
  ОКРУЖНОСТЬ :R
  СДЕЛАЙ "СЧЕТЧИК :СЧЕТЧИК+1
  ЕСЛИ СЧЕТЧИК<17 [КАРУСЕЛЬ :R]
КОНЕЦ
```

На сей раз процедура КАРУСЕЛЬ, хотя и остается *рекурсивной*, все же вызывается не всякий раз, а только если значение переменной СЧЕТЧИК не превосходит 17. Заметьте, что в процедуре ПРОГУЛКА пришлось предусмотреть установку нулевого начального значения счетчика. Такая программа после завершения своей работы оставит переменную СЧЕТЧИК равной 17. Переменные, не являющиеся параметрами процедуры и используемые как внутри процедуры, так и в вызывающей ее программе под одним и тем же именем и с теми же значениями, называются *глобальными* (ср. с определением *локальной переменной* на предыдущем уроке). Переменная СЧЕТЧИК в последнем примере глобальна. Поэтому программист должен помнить, что вызов процедуры ПРОГУЛКА может изменить значение глобальной переменной СЧЕТЧИК, существовавшее до вызова. Уйти от этого ограничения можно, сделав СЧЕТЧИК параметром процедуры: параметры всегда локальны. Такая процедура имеет описание

```
ЭТО КАРУСЕЛЬ :R :СЧЕТЧИК
  ОКРУЖНОСТЬ :R
  СДЕЛАЙ "СЧЕТЧИК :СЧЕТЧИК+1
  ЕСЛИ :СЧЕТЧИК<17 [КАРУСЕЛЬ :R
  :СЧЕТЧИК]
КОНЕЦ
```

Теперь процедура ПРОГУЛКА вовсе не нужна. Вызов

```
КАРУСЕЛЬ 50 0
```

обеспечивает 17-кратное движение по окружности радиусом 50. От присваивания начального значения программист не избавлен, но теперь он делает это не отдельной командой, а установкой нулевого значения фактического параметра.

Задача 1. Перепишите процедуру КАРУСЕЛЬ так, чтобы Черепаха могла обегать любое заданное число кругов.

На прошлом уроке мы видели, что всегда, когда известно число повторяемых одинаковых действий, можно воспользоваться командой ПОВТОРИ. Значит, можно это сделать и в нашем

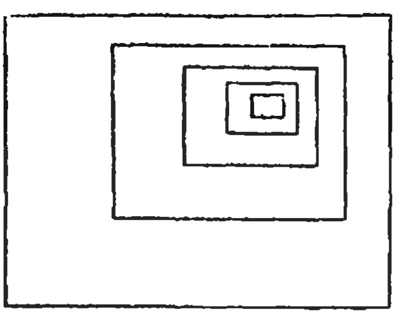


Рис. 1.

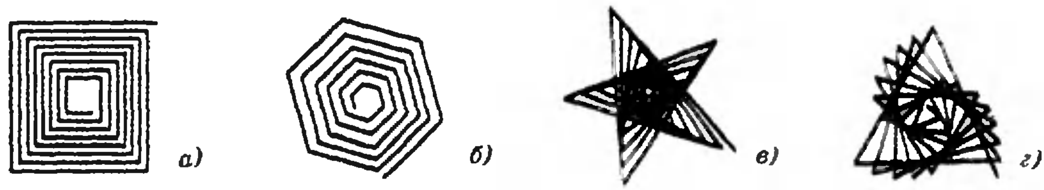


Рис 2

несложном задании — прогулке Черепахи по окружности.

Задача 2. Еще раз перепишите процедуру КАРУСЕЛЬ, исключив рекурсию и воспользовавшись командой цикла.

«Рекурсивный» рисунок на с. 38 программировать мы не будем. Но часть его — прямоугольники внутри прямоугольников (рис. 1) — запрограммировать легко:

```
ЭТО РЕКУРСИЯ :СТОРОНА
   ПОВТОРИ 2 [В :СТОРОНА П 90 В
   1.5 * :СТОРОНА П 90]
   ПР В :СТОРОНА / 2 П 90 В
   1.5 * :СТОРОНА / 2 Л 90 Р
   СДЕЛАЙ «СТОРОНА :СТОРОНА * 0.4
   РЕКУРСИЯ :СТОРОНА
КОНЕЦ
```

Эта процедура будет безостановочно рисовать вложенные прямоугольники. Самым последним (но бесконечно повторяемым!) изображается прямоугольник с минимальным значением СТОРОНА, при котором еще выполняется условие СТОРОНА $>$ 1. А как добиться остановки процедуры?

Рисунки 2, *а—г* выполнены рекурсивной процедурой СПИРАЛЬ с двумя параметрами.

Задача 3. Сделайте описание процедуры СПИРАЛЬ, воспроизводящей рисунки 2, *а—г*.

Процедуры и функции

Введем понятие *предписания* как некоторого приказа, отданного машине в понятной для нее форме. Такие предписания, как ВПЕРЕД, заставляющие машину произвести определенные действия без вычисления результатов, мы будем называть *командами*, а такие, как «+», вычисляющие значения — *операциями*.

Набор встроенных команд в Лого относительно невелик. Описывая процедуры, мы объясняем машине новые команды. Например, можно ввести команду

КВАДРАТ α

рисующую квадрат со стороной α (α — арифметическое выражение). Для этого достаточно занести в память компьютера описание

```
ЭТО КВАДРАТ :А
   ПОВТОРИ 4 [ВПЕРЕД :А ВПРАВО 90]
КОНЕЦ
```

Выполняя команду (или процедуру), ЭВМ осуществляет некоторые действия — передвигает Черепаху, выводит сообщения на экран, организует повторения. Выполняя операцию, машина не только делает предписанные действия, но и (это главное!) вырабатывает в качестве результата некоторое единственное значение (сумму, разность, ...).

Мы уже пользовались арифметическими операциями: сложением, вычитанием, умножением, делением. Для более сложных математических выкладок требуются операции, вычисляющие значения функций. В Лого такие операции записываются в виде

$$\text{имя } \alpha, \tag{1}$$

где «имя» — идентификатор функции, α — выражение, на которое воздействует функция, т. е. операнд операции. Операции и функции могут иметь не один, а несколько операндов.

Вот несколько имен, резервированных в Лого для обозначения элементарных функций: SIN — синус, COS — косинус, TAN — тангенс, ARCTAN — арктангенс, SQRT — квадратный корень, RND — функция, генерирующая случайное число.

Например, выражение

$$\frac{\operatorname{tg} 2+\sqrt{\sin a+2}}{2} \tag{2}$$

перепишется на Лого в виде

$$\text{(TAN 2+SQRT(SIN :}A\text{ + 2))/2.} \tag{3}$$

Выражение RND N можно использовать в качестве датчика случайных целых чисел из интервала (0; N—1).

Для знакомых операций «+», «—», «*», «/» в Лого также предусмотрены имена: СЛОЖИ для «+», ВЫЧТИ для «—», УМНОЖЬ для «*», РАЗДЕЛИ для «/». Эти операции можно тоже записывать в форме (1) с двумя параметрами-операндами:

$$\text{имя } \alpha\, \beta \tag{4}$$

(α и β — арифметические выражения).

Так, выражение $x+1$ можно переписать в виде

СЛОЖИ :x1

Для записи выражения (2) имеется эквивалент:

```
РАЗДЕЛИ СЛОЖИ TAN 2 SQRT
      СЛОЖИ SIN :A 2 2          (5)
```

(рассмотрите внимательно соответствие форм записи (3) и (5)!). Запись выражений в форме (4), когда имя операции ставится перед операндами, называется *префиксной*, в отличие от более привычной, *инфиксной* записи, когда имя (знак) операции ставится между операндами. Например, $2+3$ — инфиксная форма записи,

СЛОЖИ 2 3 — префиксная форма записи той же операции.

Задача 4. Перепишите выражение

$$\frac{\sqrt{\sin^2 a+\cos a}}{a+1}$$

на Лого, используя префиксную форму записи.

Форма записи операций (1) и (4) делает их поразительно похожими на команды и вызовы процедур. Однако программа СЛОЖИ :A :B (равно как и :A+:B) вызовет недоумение ЭВМ — что делать с полученным результатом? Чтобы избежать ошибок, надо помнить, что операции можно использовать только в выражениях; например:

```
ВПЕРЕД СЛОЖИ :A :B
СДЕЛАЙ "X СЛОЖИ :A :B
ПИШИ СЛОЖИ :A :B
```

Рассмотрим пример, связанный с одним красивым математическим фактом. Известно, что предел последовательности

$$x_n=\underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{a}}}}_{n} \qquad (6)$$

равен 1 при любом $a>0$.

Проверим это утверждение экспериментально при помощи Черепахи. Заставим исполнитель вычерчивать на экране отрезки прямых, численно равные членам последовательности (6), под прямыми углами друг к другу. Довольно быстро Черепаха должна выйти на замкнутую квадратную орбиту со стороной 1 (рис. 3). Для большей наглядности введем масштабирующий множитель для отрезков спирали, равный 10:

```
ЭТО ПРЕДЕЛ :A
  ВПЕРЕД :A * 10
  ВПРАВО 90
  ПРЕДЕЛ SQRT :A
КОНЕЦ
```

Процедура ПРЕДЕЛ использует встроенную в Лого функцию квадратного корня SQRT. Однако в Лого можно создавать и свои собственные функции, точно так же, как это делается при описании процедур. Единственное отличие описаний функций от описаний процедуры — это обязательное присутствие в описании функции команды ВЕРНИ α

Эта команда возвращает в вызывающую программу в качестве результата значение выражения α.

Итак, описание *пользовательской* (создаваемой программистом) функции имеет вид

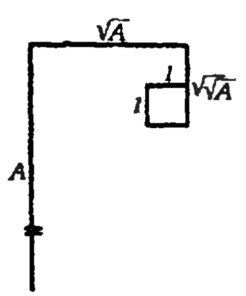


Рис. 3.

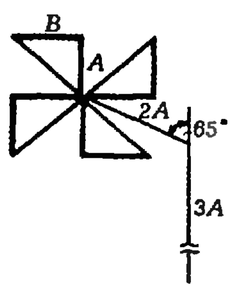


Рис. 4.

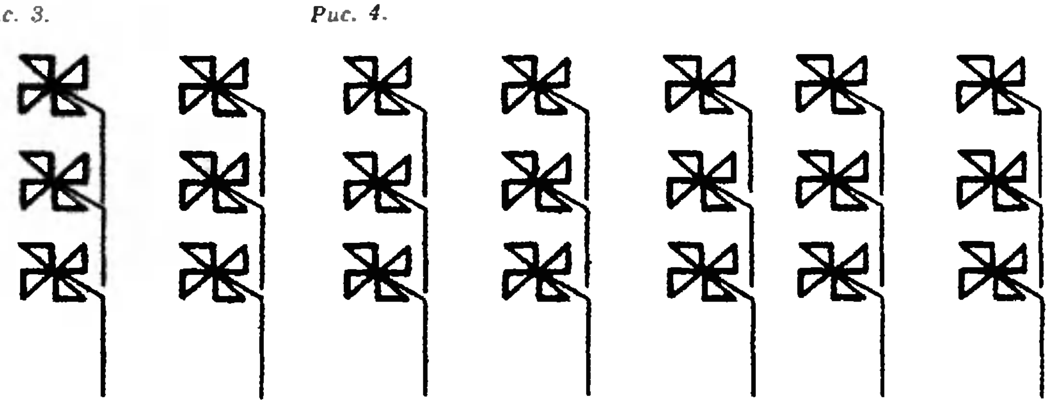


Рис. 5.

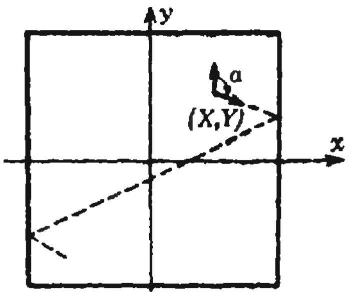


Рис. 6.

```
ЭТО имя параметры
...
  ВЕРНИ α
КОНЕЦ
```

Здесь «имя» — это имя функции, «параметры» — список (возможно, пустой) параметров-операндов, α — выражение.

Проиллюстрируем использование созданных программистом функций при рисовании цветка, имеющего лепестки в форме прямоугольных треугольников с катетами, равными A и B (рис. 4). Сначала опишем процедуру, которая рисует стебель, организует рисование четырех лепестков и возвращает Черепаху в исходное положение:

```
ЭТО ЦВЕТОК :A :B
  (*          РИСУЕМ СТЕБЕЛЬ              *)
  РИСУЙ ВПЕРЕД 3 * :A ВЛЕВО 65
  ВПЕРЕД 2 * :5 ВПРАВО 65
  (*          РИСУЕМ ЦВЕТОК               *)
  ПОВТОРИ 4 ЛЕПЕСТОК :A :B ВПРАВО 90
  (* ВОЗВРАТ В ИСХОДНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ *)
  НЕ РИСУЙ ВЛЕВО :65 НАЗАД 2 * :A
  ВПРАВО 65 НАЗАД 3 * :A
  КОНЕЦ
```

Скобки «(*» и «*)» здесь и в дальнейшем будем использовать для записи комментариев — записанных в программе, но не обрабатываемых машиной сообщений. Лепесток рисует следующая процедура:

```
ЭТО ЛЕПЕСТОК :A :B
  (*          РИСУЕМ КАТЕТЫ               *)
  ВПРАВО :A ВЛЕВО 90 ВПЕРЕД :B
  (* ПОВОРОТ ДЛЯ РИСОВАНИЯ ГИПО-
                            ТЕНУЗЫ *)
  ВЛЕВО УГОЛ :A :B
  (*          РИСУЕМ ГИПОТЕНУЗУ           *)
   ВПЕРЕД ГИПОТЕНУЗА :A :B
   (* ПОВОРОТ В ИСХОДНОЕ ПОЛОЖЕНИЕ *)
   ВЛЕВО УГОЛ :A :B
КОНЕЦ
```

Процедура ЛЕПЕСТОК использует две функции: УГОЛ и ГИПОТЕНУЗА:

```
ЭТО УГОЛ :A :B
ВЕРНИ 180 — ARCTAN (:A/:B)
КОНЕЦ
ЭТО ГИПОТЕНУЗА :A :B
ВЕРНИ SQRT (:A * :A+:B*:B)
КОНЕЦ
```

Задача 5. Используя процедуру ЦВЕТОК, нарисуйте клумбу, изображенную на рисунке 5.

Вот еще два примера описаний функций.

```
ЭТО MAX :A :B
  (* ЭТА ФУНКЦИЯ ВОЗВРАЩАЕТ
     МАКСИМУМ ИЗ ДВУХ ЗНАЧЕНИЙ *)
  ЕСЛИ :A>:B [ВЕРНИ :A] [ВЕРНИ :B]
  КОНЕЦ
ЭТО ФАКТОРИАЛ :N
  (* ВОЗВРАЩАЕТ ЗНАЧЕНИЕ N! *)
  ЕСЛИ :N=0 [ВЕРНИ 1 ]
  [ВЕРНИ :N * ФАКТОРИАЛ (:N—1)]
КОНЕЦ
```

Последняя рекурсивная функция вычисления факториала использует тот факт, что $0!=1$ и $N!=N(N-1)!$

Задача 6. Напишите процедуру, которая моделирует движение «абсолютно упругой» Черепахи в квадратном «ящике», образованном границами экрана (рис. 6). Параметры процедуры — координаты начального положения $(x;\ y)$ Черепахи в системе координат с началом в центре экрана и угол α, отсчитываемый по часовой стрелке между направлением на «север» (ось y) и носиком Черепахи.

Возвращаясь к напечатанному

Как заметили многие читатели, в формулировку задачи М1047 (решение которой было опубликовано в «Кванте» № 10) должно быть внесено уточнение. В задаче требовалось доказать, что если в турнире более 3/4 сыгранных партий закончились вничью, то некоторые два участника набрали поровну очков. Утверждение и решение будут верны, если подразумевать, что все участники сыграли по одинаковому количеству партий, в частности,— все сыграли друг с другом. (Без этого первый шаг решения — переход к системе подсчета очков, при которой за выигрыш дается 1, за ничью 0, и за поражение —1,— не позволяет правильно судить о первоначальной сумме очков, как видно из следующего примера: четыре участника А, Б, В, Г сыграли 5 партий, А выиграл у Г, В и Г не играли между собой, остальные партии закончились вничью.)

Новости «Кванта»

Как обнаружили 30 декабря 1987 года, ровно 70 лет назад в городе Малая Вишера Новгородской области родился член редколлегии журнала «Квант» (со дня его основания) доктор физико-математических наук, профессор, замечательный физик и блестящий популяризатор науки, автор и редактор многих книг и огромного числа статей, чрезвычайно эрудированный, добрый и веселый, молодой и обаятельный человек — Яков Абрамович Смородинский. Мы поздравляем Я. С. с юбилеем и желаем ему здоровья, неиссякаемого жизнелюбия и, конечно, творческих успехов, с которыми обязуемся незамедлительно знакомить читателей нашего журнала.

Редакция
Редакционная коллегия
Редакционный совет

Новости науки

Самый далекий квазар

Поиски новых квазаров содержат элемент соревнований. Астрономы стараются найти квазар, который был бы расположен дальше всех уже известных.

Летом этого года по снимкам, сделанным в Австралии, обнаружен квазар, который находится от нас на расстоянии около $13\cdot10^{9}$ световых лет. Кроме того, что открытый квазар очень далекий, он еще и очень яркий. Энергия его излучения в 10 000 раз превышает энергию излучения средней галактики.

Расстояние до небесного объекта, находящегося на столь большом удалении, можно оценить только по величине смещения линий спектров атомов этого объекта, которое связано с расширением Вселенной. Однако пересчет по современным данным величин смещения в расстояния делается с большими ошибками. Неопределенность в вычислениях возникает здесь из-за того, что до сих пор еще не удается согласовать различные определения постоянной Хаббла, связывающей относительную скорость «разбегания» галактик v с расстоянием R между ними:

$$v=H\cdot R.$$

Способы определения постоянной Хаббла дают для нее два значения — 50 и 100 км/(с · Мпс). Какое из них более точное, не выяснено, но для расчетов берут обычно $H\approx70$ км/(с · Мпс).

Относительное изменение длины волны излучения, или красное смещение, нового квазара —

$$z=\frac{\lambda_{набл}-\lambda_0}{\lambda_0}=4{,}10.$$

Это означает, что линия в ультрафиолетовой части спектра водорода с длиной волны $\lambda_0=1215{,}7$ Å $=0{,}12157$ мкм в спектре излучения квазара находится в середине видимой области. Максимальные красные смещения ранее были 4,04 — для двух квазаров, открытых в этом году, и 4,01 — для квазара, открытого в 1986 году.

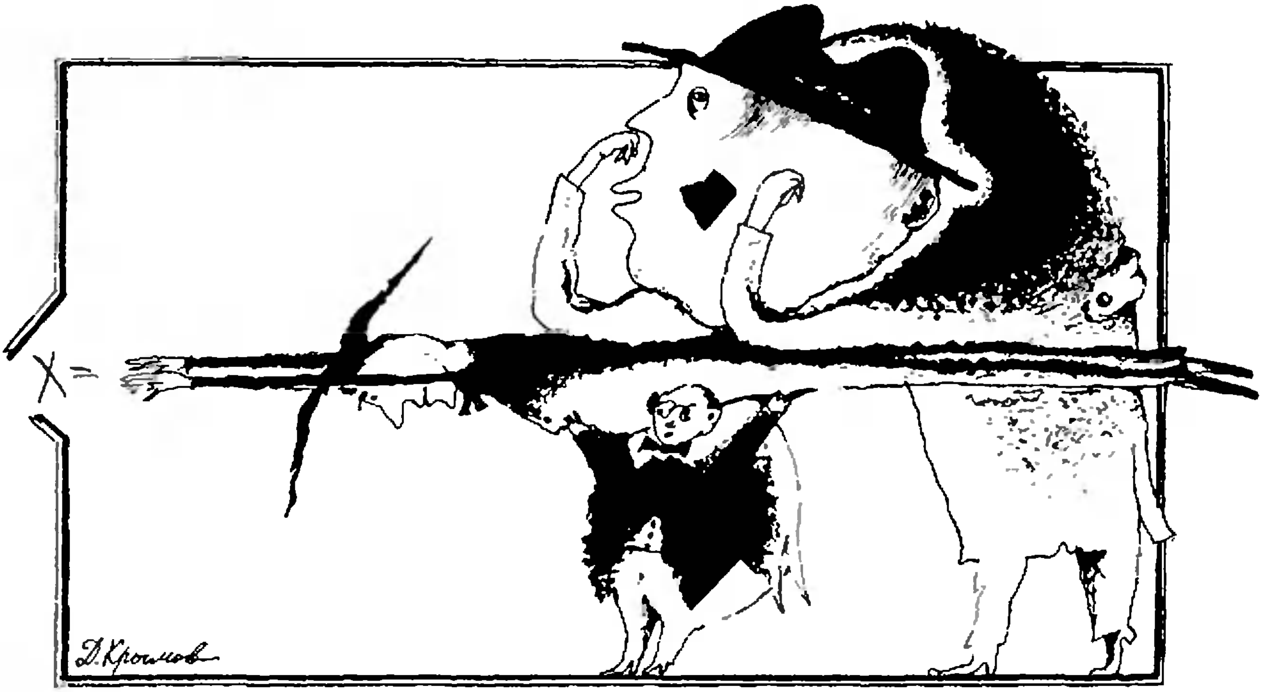
Далее из величины z определяют по формуле Доплера

$$z+1=\frac{\lambda_{набл}}{\lambda_0}=\frac{\sqrt{1+v/c}}{\sqrt{1-v/c}}$$

скорость v, а затем по формуле Хаббла находят расстояние до интересующего нас объекта. Строго говоря, при таком пересчете нужно учитывать эффект кривизны Вселенной, но так как он невелик, то такая поправка не внесет ничего существенного.

Что касается открытого квазара, то остается только сообщить его координаты. Он лежит на небесном меридиане, проходящем через точку весеннего равноденствия (прямое восхождение 00 часов 00 минут), и имеет склонение 26°20′.

Я. С.



Практикум абитуриента

Уравнения думают за нас

В. А. НАХШИН

Решение любой расчетной задачи по физике состоит из двух частей — физической и математической.

Пока мы обдумываем условие задачи, анализируем, в соответствии с какими физическими законами происходит данное явление, и составляем соответствующую систему уравнений, мы — физики. После этого физика временно отходит на задний план. Теперь мы — математики, и перед нами стоят иные проблемы: как наиболее рационально решить полученную систему уравнений и найти ответ? Причем ответ нужно найти в общем (буквенном) виде, чтобы слева от знака равенства стояла только искомая величина (в буквенном обозначении), а справа — комбинация из только известных величин (тоже в соответствующих буквенных обозначениях).

Впервые эта статья была опубликована в сентябрьском номере «Кванта» в 1981 году. (*Примеч. ред.*)

Но вот ответ в общем виде получен, и мы снова обращаемся к физике: прежде чем подставить числовые данные, надо проверить размерность искомой величины и проанализировать ответ с точки зрения его правдоподобности. Если размерность верна и ответ правдоподобен, можно подставлять данные и считать.

Описанные этапы решения присущи практически всем задачам. Однако иногда — а именно о таких случаях и будет рассказано в статье — после расчетов получается неожиданный абсурдный результат, что свидетельствует о неверном решении. Так бывает, например, когда ни условие задачи, ни интуиция, ни здравый смысл не могут подсказать, в какую сторону протекает тот или иной процесс или каким будет конечный результат.

Приступая к решению задачи, мы вынуждены предположить какой-то вариант и в соответствии с ним составить систему уравнений. Если ответ получится абсурдным, отчаиваться не стоит. Просто нам не повезло: наше предположение оказалось неверным. Однако определенную информацию мы все же получили — в предполагаемом направлении процесс не идет.

Что же, допустим другой вариант и так далее. Задача превращается в небольшое исследование, а уравнения — как бы в товарищей по размышлению. В конце концов они нас не подведут (разумеется, если мы их не подведем, т. е. не ошибемся в составлении и решении) и расскажут нам об истинном направлении процесса или о конечном результате.

Рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 1. *На вершине шероховатой наклонной плоскости укреплен блок, через который переброшена нить. К концам нити прикреплены два тела массами $m_1=3$ кг и $m_2=2$ кг. Найдите ускорение системы и силу трения между первым телом и плоскостью, если коэффициент трения $\mu=0.5$ и угол наклона плоскости к горизонту $\alpha=30°$.*

Куда ускоряется система и движется ли она вообще? Из условия задачи не ясно. Между тем, знать это очень важно. Так, если система движется, имеет место трение скольжения и модуль этой силы равен $F_{тр}=\mu N$ (N — модуль силы нормальной реакции). Если же система покоится, на первое тело действует сила трения покоя, про которую известно только, что она не больше силы трения скольжения.

Может быть, поможет интуиция? С одной стороны, первое тело тяжелее второго, но, с другой стороны, второе тело висит в воздухе, а первое лежит на наклонной плоскости, да к тому же есть трение. Нет, интуиция нас не выручит, нужен анализ. Попробуем переложить наши заботы на уравнения.

Предположим, что блок вращается по часовой стрелке, т. е. второе тело опускается с ускорением, а первое — с тем же по модулю ускорением поднимается по плоскости. Изобразим силы, действующие на каждое тело (рис. 1), и запишем систему уравнений второго закона Ньютона в проекциях на соответствующие направления (для первого тела — это направления вдоль плоскости и перпендикулярно к ней, а для второго тела — это вертикальное направление):

$$\begin{cases} T-m_1g\sin\alpha-\mu N=m_1a, \\ N-m_1g\cos\alpha=0, \\ m_2g-T=m_2a. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$a=g\frac{m_2-\mu m_1\cos\alpha-m_1\sin\alpha}{m_1+m_2}\approx-1{,}6\ \text{м/с}^2$$

— проекция ускорения на выбранное направление отрицательна. Значит, наше предположение неверно.

Что же тогда происходит с системой? Движется в противоположном направлении? А с каким ускорением?

В этом месте многие допускают ошибку, считая, что система ускоряется в противоположном направлении с тем же по модулю ускорением ($\approx 1{,}6$ м/с^2). Иногда так действительно можно считать. Например, если бы в данной системе не было силы трения, при изменении выбранного направления движения на противоположное проекции всех сил изменили бы свой знак, и ускорение получилось бы таким же по модулю, но с противоположным знаком. В нашем же случае при новом предположении проекция силы трения по-прежнему отрицательна, поэтому соответствующая система уравнений будет другой (рис. 2):

$$\begin{cases} m_1g\sin\alpha-T-\mu N=m_1a, \\ N-m_1g\cos\alpha=0, \\ T-m_2g=m_2a. \end{cases}$$

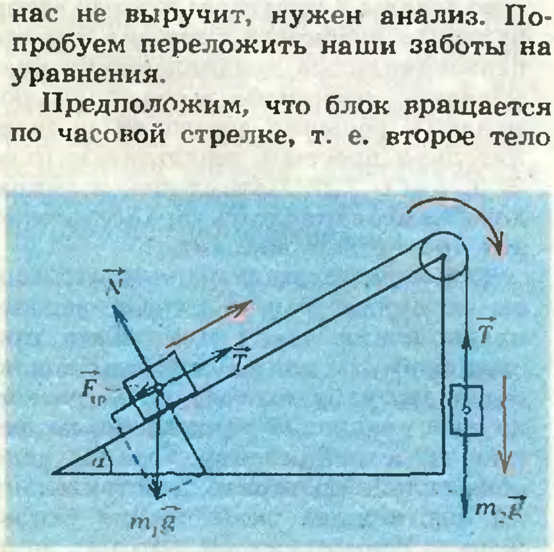


Рис. 1.

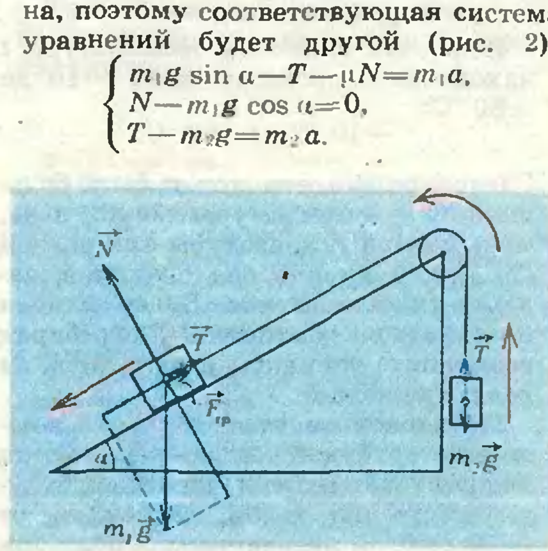


Рис. 2.

Отсюда

$$a=g\,\frac{m_1\sin\alpha-\mu m_1\cos\alpha-m_2}{m_1+m_2}\approx-3{,}6\ \text{м/с}^2.$$

И вновь проекция ускорения оказалась отрицательной; следовательно, новое предположение тоже неверно.

Итак, уравнения, «подумав» за нас, привели к выводу, что система не ускоряется, то есть

$$a=0.$$

Значит, для нахождения силы трения, точнее — силы трения покоя, нельзя пользоваться формулой $F_{\text{тр}}=\mu N$, справедливой для силы трения скольжения.

Для определения искомой силы посмотрим, какие еще силы (или их проекции) действуют на первое тело в направлении вдоль наклонной плоскости. Это — проекция силы тяжести, равная по модулю $m_1g\sin\alpha=15$ Н, и сила натяжения нити, модуль которой можно найти из условия покоя второго тела: $T=m_2g=20$ Н. Следовательно, сила трения покоя направлена вдоль плоскости вниз и равна по модулю

$$F_{\text{тр п}}=T-m_1g\sin\alpha=5\ \text{Н}.$$

Кстати, нетрудно убедиться в том, что в данном случае сила трения $F_{\text{тр п}}=5$Н действительно меньше $\mu N=\mu m_1g\cos\alpha\approx13$ Н.

З а д а ч а 2. *В калориметр, содержащий $m_1=3$ кг льда при температуре $t_1=-10$ °С, вливают $m_2=2$ кг воды при температуре $t_2=80$ °С. Какая температура установится в результате теплообмена? Теплоемкость калориметра не учитывать.*

Ясно, что конечная температура t находится в промежутке от -10 до $+80$ °С:

$$-10\ ^\circ\text{С}<t<80\ ^\circ\text{С}.$$

Следовательно, она может быть больше 0 °С — температуры таяния льда, меньше этой температуры или равной ей. Какой именно она окажется, заранее сказать нельзя. Будем к цели пробираться «на ощупь», перебирая возможные варианты и полагаясь на волю уравнений.

Предположим, что $t>0$ °С, т. е. в калориметре будет только вода. Тогда лед получает тепло в три этапа: будучи собственно льдом, нагреваясь от -10 до 0 °С, превращаясь в воду при 0 °С и, будучи уже водой, нагреваясь от 0 °С до t. При этом вода отдает тепло только при охлаждении от температуры t_2 до t. Запишем соответствующее уравнение теплового баланса:

$$c_1m_1(0-t_1)+\lambda m_1+c_2m_1(t-0)+\\+c_2m_2(t-t_2)=0,$$

где $c_1=2{,}1\cdot10^3$ Дж/(кг·К) и $c_2=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К) — удельные теплоемкости льда и воды, а $\lambda=3{,}4\cdot10^5$ Дж/кг — удельная теплота плавления льда. Отсюда найдем

$$t=\frac{c_1m_1t_1+c_2m_2t_2-\lambda m_1}{c_2(m_1+m_2)}.$$

Подставив числовые данные, получаем $t<0$ °С. Значит, наше предположение неверно.

Теперь допустим, что $t<0$ °С. В таком случае вода отдает тепло в три этапа — охлаждаясь до 0 °С, превращаясь в лед при 0 °С и в качестве льда охлаждаясь до искомой температуры t, а первоначальный лед получает тепло только в один этап — нагреваясь от t_1 до t:

$$c_1m_1(t-t_1)+c_2m_2(0-t_2)-\lambda m_2+\\+c_1m_2(t-0)=0.$$

Решив это уравнение, получаем

$$t=\frac{c_1m_1t_1+c_2m_2t_2+\lambda m_2}{c_1(m_1+m_2)}.$$

Подставим числовые данные и убедимся, что $t>0$ °С. Следовательно, и второе наше предположение было неверным.

Остается единственный вариант: $t=0$ °С. Это и будет ответом задачи.

Здесь мы предвидим некоторое чувство досады у читателя: почему автор нарочито подбирает примеры, где все первоначальные предположения оказываются неверными и оба столь громоздких решения приводят к сравнительно простым результатам ($a=0$, $t=0$ °С)? Почему бы, в самом деле, не предположить заранее именно эти простейшие варианты?

Такой путь возможен, но облегчения он не сулит. Так, в первой задаче, предположив покой и не имея при этом формулы для силы трения покоя, мы должны будем составить систему из трех уравнений равновесия, но, решив ее и найдя силу трения, надо обязательно проверить, действительно ли она меньше силы трения скольжения. Если окажется, что нет, придется все решение, описанное выше, начинать сначала.

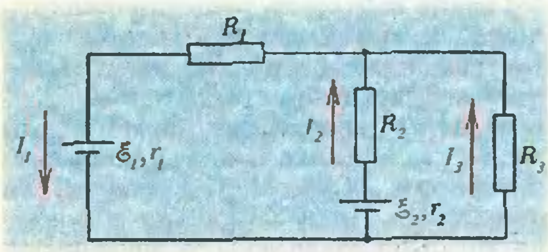


Рис. 3.

Во второй задаче, предположив $t = 0$ °С, мы должны подтвердить это уравнением теплового баланса, но неизвестно, как его составить. Мы не знаем, что́ раньше дошло до нуля: лед «снизу» или вода «сверху», и как следствие — расплавилась ли часть (и какая часть) льда или замерзла часть воды? Можно, конечно, опять что-то предположить, но число вариантов будет не меньше, а даже больше, чем в приведенном выше решении.

З а д а ч а 3. *Найдите токи во всех ветвях схемы, изображенной на рисунке 3. Здесь $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2 = \mathscr{E} = 1$ В, $r_1 = r_2 = r = 1$ Ом и $R_1 = R_2 = R_3 = R = 10$ Ом.*

Предположим, что токи I_1, I_2 и I_3 направлены так, как показано на рисунке 3, хотя мы достоверно этого и не знаем. Если мы ошиблись, соответствующие уравнения нас поправят.*)

Поскольку в точках разветвления (узлах) электрический заряд не накапливается, заряд, поступающий в единицу времени в узел, равен заряду, уходящему из узла за то же время, т. е.

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Выделим в данной схеме два простых замкнутых контура, например левый и правый, и выберем в них направления обхода, например против часовой стрелки. Согласно закону сохранения энергии, алгебраическая сумма ЭДС равна алгебраической сумме падений напряжения:

$$\mathscr{E} - \mathscr{E} = I_1R + I_1r + I_2r + I_2R,$$
$$-\mathscr{E} = -I_2R - I_2r + I_3R.$$

Объединим полученные уравнения в систему и для простоты подставим числовые данные:

$$\left|\begin{aligned} & I_1 = I_2 + I_3, \\ & 10I_1 + I_1 + I_2 + 10I_2 = 0, \\ & 10I_2 + I_2 - 10I_3 = 1. \end{aligned}\right.$$

Решив эту систему, найдем

$$I_1 = -\frac{1}{31}\text{ А}, \quad I_2 = \frac{1}{31}\text{ А}, \quad I_3 = -\frac{2}{31}\text{ А}.$$

Первый и третий токи получились отрицательными. Это означает, что наши предположения об их направлениях оказались неверными. Числовые значения мы нашли верно, а направления этих токов — противоположны предполагаемым.

З а д а ч а 4. *Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 25$ м/с. Через какое время оно будет на высоте $h = 40$ м?*

Запишем известную формулу для координаты тела, брошенного вертикально вверх (положительным считаем направление вверх):

$$h = v_0t - \frac{gt^2}{2}.$$

Решая его относительно t, получим

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}.$$

Однако при подстановке числовых данных выясняется, что выражение под корнем отрицательно. Что это означает?

Оказывается, это уравнение на своем языке подсказывает нам, что данное тело вообще не достигает такой высоты. В самом деле, максимальная высота подъема $h_{max} = v_0^2/2g \approx 31{,}5$ м, что меньше $h = 40$ м.

Так что бывают случаи, когда уравнения «думают» неожиданно, незапланированно.

---

*) О том, как составлять эти уравнения, подробно рассказывается в заметке «Правила Кирхгофа» («Квант», 1985, № 1, с. 26).

Упражнения

1. Однородный рычаг массой $m = 10$ кг опирается на опору, находящуюся на расстоянии $l_1 = 25$ см от его левого конца. Длина рычага $l = 1$ м. К левому концу рычага подвешен груз массой $m_1 = 2$ кг. С какой силой надо действовать на правый конец вниз под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, чтобы рычаг находился в равновесии?

2. В калориметр, где находится $m_1 = 1$ кг льда при температуре $t_1 = 0$ °С, впускают $m_2 = 500$ г водяного пара при температуре $t_2 = 100$ °С. Какая температура установится после того, как произойдет теплообмен? Теплоемкостью калориметра можно пренебречь.

3. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 15$ м/с. Какой путь пройдет оно за $t = 2$ с полета? Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2.

Олимпиады

XXVIII Международная математическая олимпиада

Кандидат физико-математических наук
В. В. ВАВИЛОВ,
кандидат физико-математических наук
Ю. П. СОЛОВЬЕВ,
кандидат физико-математических наук
А. А. ФОМИН

XXVIII Международная математическая олимпиада проходила в Гаване — столице Республики Куба.

В олимпиаде участвовали команды из 42 стран, по 6 человек от страны. В команду школьников СССР были включены призеры Всесоюзных олимпиад последних лет: *Биндер Илья* (Ленинград, с. ш. № 239), *Борисов Лев* (Минск, с. ш. № 19), *Иванов Сергей* (Ленинград, с. ш. № 533), *Пухов Игорь* (Москва, с. ш. № 57), *Смирнов Станислав* (Ленинград, с. ш. № 239), *Стыркас Константин* (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82).

В этом году Международная математическая олимпиада впервые проводилась в Латинской Америке, в первой социалистической стране западного полушария. Центральный Комитет Компартии Кубы и кубинское правительство приложили немало усилий для того, чтобы олимпиада на Кубе превратилась в яркий праздник математики. Организационную работу возглавлял член Политбюро ЦК Компартии Кубы, министр образования Хосе Раус Фернандес; работой жюри руководили известные кубинские математики Мигель Хименес Посо и Гиермо Лопес Лагомасино.

Гавана встречала участников олимпиады 4 июля. В дни олимпиады ребята совершили несколько увлекательных экскурсий по городу и его окрестностям, побывали в историческом музее, в национальном пионерском лагере им. Хосе Марти, совершили поездку на Плая-Хирон, ну и конечно же, познакомились со знаменитыми гаванскими пляжами.

10 и 11 июля были днями математических соревнований. Они проходили в специализированной школе точных наук им. В. И. Ленина, расположенной в живописном пригороде Гаваны. В каждый из дней соревнований участникам олимпиады предлагалось решить по три задачи за 4,5 часа. Любая из шести предложенных задач оценивалась в 7 баллов, так что максимальная оценка, которую мог получить участник олимпиады, равнялась 42. Первое место в этом году присуждалось лишь участникам, набравшим 42 балла.

Итоги выступления советской команды показаны в таблице.

Ф. И. О. \ задачи	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	Сумма	Место
Борисов Л.	7	7	7	7	7	7	42	1
Иванов С	7	7	7	7	7	7	42	1
Смирнов С	7	7	7	7	7	7	42	1
Пухов И.	7	7	6	7	7	7	41	2
Биндер И.	7	7	0	7	7	7	35	2
Стыркас К.	7	7	1	7	7	4	33	2

Таким образом, команда СССР, набрав 235 баллов из 252 возможных, завоевала 3 золотые и 3 серебряные медали.

В неофициальном командном зачете страны-участницы распределились следующим образом: Румыния (250), ФРГ (248), СССР (235), ГДР (231), США (220), Венгрия (218), Болгария (210), КНР (200), Чехословакия (192), Англия (182), Вьетнам (172), Франция (154), Австрия (150), Нидерланды (146), Австралия (143), Канада (139), Швеция (134), Югославия (132), Бразилия (116), Греция (111), Турция (94), Испания (91), Марроко (88), Куба (83), Бельгия (74), Иран (70), Норвегия (69), Финляндия (69), Колумбия (68), Монголия (67), Польша (55), Исландия (45), Кипр (42), Перу (41), Италия (35), Алжир (29), Кувейт (28), Люксембург (27), Уругвай (27), Мексика (17), Никарагуа (13), Панама (7).

Задание соревнующимся формировало жюри, состоящее из руководителей 42 национальных команд. В итоге жарких обсуждений участникам были предложены следующие задачи.

Первый день

1 (ФРГ). Пусть $p_n(k)$ — число перестановок множества из n, $n \geqslant 1$, элементов, имеющих ровно k неподвижных точек. Докажите, что

$$p_n(1)+2\cdot p_n(2)+\ldots+n\cdot p_n(n)=n!$$

Примечание. Перестановкой множества $S=\{1, 2, \ldots, n\}$ называется взаимно однозначное отображение f множества S на S. Число i называется неподвижной точкой перестановки f, если $f(i)=i$.

2 (СССР). Продолжение биссектрисы AL ($L \in BC$) остроугольного треугольника ABC пересекает описанную вокруг него окружность в точке N ($N \neq A$). Из точки L на стороны AB и AC соответственно опущены перпендикуляры LK и LM. Докажите, что площади четырехугольника $AKNM$ и треугольника ABC равны.

3 (ФРГ). Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — действительные числа и $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1$. Докажите, что для любого целого числа $k \geqslant 2$ существуют целые числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, не все равные нулю, $|a_i| \leqslant k-1$, $i=1, 2, \ldots, n$, и такие, что

$$|a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n| \leqslant \frac{(k-1)\sqrt{n}}{k^n-1}.$$

Второй день

4 (Вьетнам). Пусть $\mathbf{N}_0=\{0, 1, 2, \ldots\}$ — множество целых неотрицательных чисел. Докажите, что не существует функции $f\colon \mathbf{N}_0 \to \mathbf{N}_0$ такой, что

$$f(f(n))=n+1987$$

для любого $n \in \mathbf{N}_0$.

5 (ГДР). Докажите, что для каждого натурального числа n, $n \geqslant 3$, можно выбрать на плоскости n точек так, чтобы выполнялись два условия:

а) расстояние между любыми двумя точками было иррациональным числом;

б) любые три точки являлись вершинами невырожденного треугольника, площадь которого выражалась бы рациональным числом.

6 (СССР). Пусть $n \geqslant 2$ — натуральное число. Докажите, что если числа k^2+k+n — простые для каждого целого k, $0 \leqslant k \leqslant \sqrt{n/3}$, то числа k^2+k+n — простые для каждого целого k, $0 \leqslant k \leqslant n-2$.

Во время работы олимпиады состоялось заседание Международного подготовительного комитета по проведению Международных математических олимпиад, возглавляемого его президентом, профессором МФТИ Г. Н. Яковлевым. Было решено, что XXIX ММО состоится в 1988 г. в Австралии, XXX ММО — в 1989 г. в Федеративной Республике Германии, XXXI ММО — в 1990 г. в Китайской Народной Республике.

Олимпиада прошла в атмосфере дружбы и взаимопонимания, способствовала установлению научных контактов молодежи разных стран, делу мира во всем мире.

Редколлегия и редакция журнала «Квант» горячо поздравляют всех членов советской команды с успешным выступлением на XXVIII Международной математической олимпиаде и желают им больших научных успехов.

В заключение предоставим слово самим участникам.

Пухов Игорь, выпускник школы № 57 г. Москвы. Учитель математики — Гордин Р. К. На всесоюзных олимпиадах награждался дипломами II степени в 1986 и 1987 гг. II премия на XXVIII ММО.

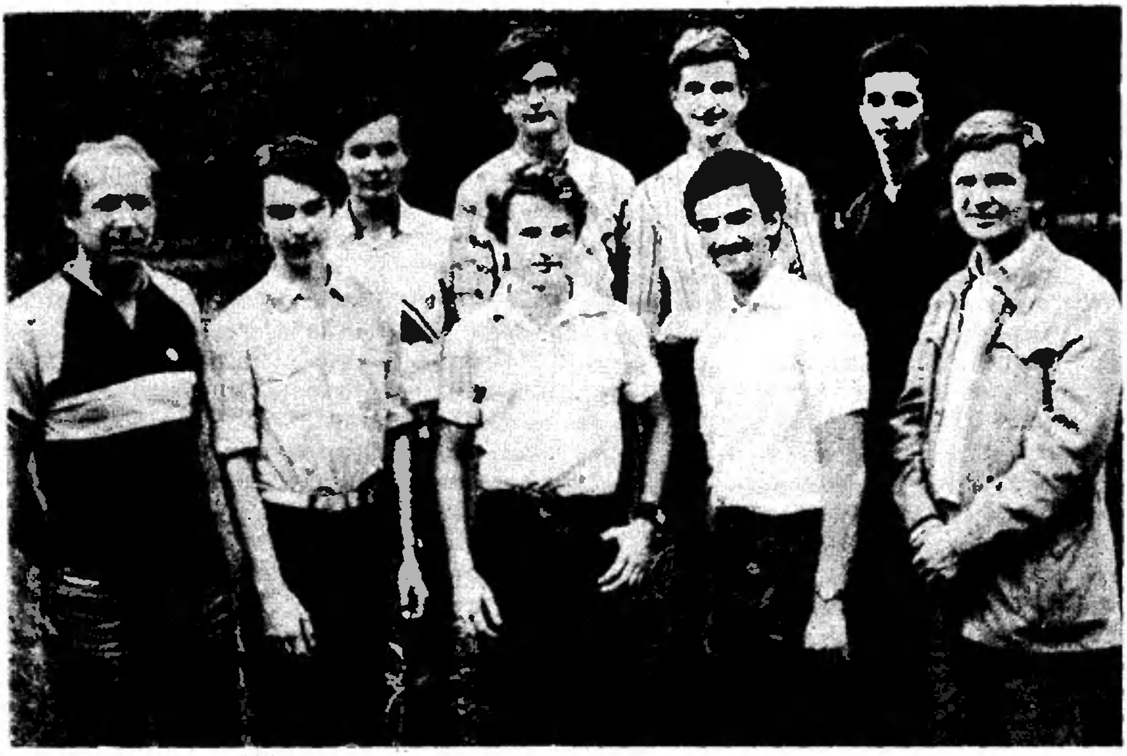
«Хотя задачи нынешней олимпиады не были очень сложными, они мне понравились. На мой взгляд, самая трудная задача — третья, самая интересная — шестая. На Международной олимпиаде я набрал 41 балл — это мой наилучший результат, полученный на различных олимпиадах. Честно говоря, я такого не ожидал. Но больше всего мы не ожидали третьего места нашей команды. Пожалуй, это уже не наша вина, а скорее «вина» румынской команды, установившей рекорд, который вряд ли когда-либо побьют».

Борисов Лев, выпускник школы № 19 г. Минска. Учитель математики — Фельдман А. М. На Всесоюзных олимпиадах награждался дипломом II степени в 1984 г. и дипломами I степени в 1985— 1987 гг. I место на XXVIII ММО.

«Олимпиада была легкой, все задачи, кроме шестой, показались мне неинтересными. Наша команда выступила успешно, но результат мог бы быть гораздо лучше, если бы не сбой в третьей задаче, которая, несмотря на внешнюю сложность, была простой».

Иванов Сергей, окончил 8-й класс школы № 533 г. Ленинграда. Учитель математики — Полуаршинова Н. Г. Занимается в математическом кружке при ЛГПИ. Руководители — Бураго Д. Ю. и Фомин Д. В. На Всесоюзных олимпиадах награждался дипломами I степени в 1986 и 1987 гг. I премия на XXVIII ММО.

«Задачи на олимпиаде были нетрудными. Впрочем, об этом свидетельствует и результат — 22 участника набрали по 42 балла. Выступле-



Команда СССР на XXVIII Международной математической олимпиаде. Первый ряд (слева направо): В. В. Вавилов — научный руководитель команды, С. Смирнов, С. Иванов, И. Биндер А. А. Фомин — педагогический руководитель команды. Второй ряд: А. Черных (запасной участник), И. Пухов, Л. Борисов, К. Стыркас.

ние нашей команды не назовешь вполне удачным. Хотя мы и набрали 235 баллов, повторив мировой рекорд 1984 г., это дало нам всего лишь третье место. Организаторы олимпиады и школа им. В. И. Ленина приложили все усилия для того, чтобы олимпиада удалась — был разработан удобный распорядок дня, хорошо работал транспорт. От олимпиады у меня остались самые приятные впечатления».

Стыркас Константин, выпускник школы № 82 п. Черноголовка Московской области. Учитель математики — Земляков А. Н. На Всесоюзных олимпиадах награждался дипломами I степени в 1985 и 1986 гг. и дипломом III степени в 1987 г. II премия на XXVIII ММО.

«Я выступил на олимпиаде неудачно, несмотря на то, что задачи были нетрудными. Команда Советского Союза выступила неплохо, хотя по своим возможностям могла бы выступить гораздо сильнее».

Смирнов Станислав, выпускник школы № 239 г. Ленинграда. Учитель математики — Кукса Н. М. Занимался в математическом кружке при Ленинградском Дворце пионеров. Руководитель — Рукшин С. Е. На Всесоюзных олимпиадах награждался дипломами I степени в 1985 и 1986 гг. и дипломом III степени в 1987 г. Дважды участвовал в Международных олимпиадах: I место на XXVII ММО и I место на XXVIII ММО.

«Олимпиада в этом году была организована лучше, чем в прошлом. Хуже был лишь подбор задач — они оказались менее интересными, чем задачи других олимпиад. Команда СССР выступила ниже своих возможностей: нам было по силам получить 4—5 первых мест и набрать не менее 245 баллов».

Биндер Илья, выпускник школы № 239 г. Ленинграда. Учитель математики — Кукса Н. М. Занимался в математическом кружке при Ленинградском дворце пионеров. Руководитель — Рукшин С. Е. На Всесоюзных олимпиадах награждался дипломом II степени в 1986 г. и дипломом III степени в 1987 г. II место на XXVIII ММО.

«Своим выступлением я не доволен: ведь олимпиада была очень легкой. А в целом — это были удивительные и впечатляющие дни, которые вряд ли когда-либо забудутся».

XVIII Международная физическая олимпиада

Кандидат физико-математических наук
С. С. КРОТОВ

В этом году Международная олимпиада школьников по физике проходила с 5 по 13 июля в городе Йена (ГДР). По числу участников это была самая представительная олимпиада. В Йену приехали команды из 25 стран: Австралии, Австрии, Болгарии, Великобритании, Венгрии, Вьетнама, ГДР, Голландии, Исландии, Италии, Канады, Китая, Кубы, Кувейта, Норвегии, Польши, Румынии, СССР, США, Турции, Финляндии, ФРГ, Чехословакии, Швеции, Югославии. Кроме того, на олимпиаде присутствовали наблюдатели из Бельгии, Греции и Колумбии. (Как показывает опыт, возможно, уже в будущем году эти страны станут полноправными участниками олимпиады.) В проведении олимпиады приняли участие также представитель ЮНЕСКО, корреспондент журнала «Квант» и корреспонденты молодежных журналов Исландии и ФРГ.

В соответствии со статутом Международной физической олимпиады каждая команда-участник состоит из двух руководителей и пяти участников. Руководители команд вместе с членами оргкомитета страны-устроителя олимпиады образуют Международную комиссию — основной руководящий орган олимпиады. В этом году Международную комиссию возглавил профессор Гумбольдтского университета (г. Берлин) Рудольф Германн — специалист в области физики твердого тела.

В команду СССР по итогам выступлений на Всесоюзных олимпиадах и по результатам зимних и летних сборов вошли

Антон Бибиков — выпускник ФМШ № 18 г. Москвы,

Дмитрий Будько — выпускник с. ш. № 3 г. Белгорода,

Гинтас Вилькялис — выпускник с. ш. № 45 г. Вильнюса,

Дмитрий Глущенков — выпускник с. ш. № 239 г. Ленинграда,

Алексей Гольдин — выпускник ФМШ № 2 г. Киева.

Перед поездкой на олимпиаду все участники летних сборов (включая также Сергея Бобылева — выпускника с. ш. № 9 г. Березники и Павла Карклина — выпускника с. ш. № 49 г. Москвы) были зачислены без экзаменов в выбранные ими вузы.

Руководителями нашей команды были назначены научные сотрудники Научно-исследовательского института содержания и методов обучения АПН СССР О. Ф. Кабардин и В. А. Орлов.

Открытие олимпиады состоялось 6 июля в зале торжественных заседаний Йенского университета им. Фридриха Шиллера. Вечером того же дня прошло официальное заседание Международной комиссии, на котором были представлены задачи теоретического тура, разработанные специальной комиссией. После необходимых корректировок условий задач и уточнений официальных решений комиссия утвердила задание.

7 июля участникам были предложены три задачи: первая — по термодинамике, вторая — по механике и электромагнетизму и третья — на колебания и волны.

Вот условия этих задач.

Теоретический тур

Задача 1

Горный хребет обтекается адиабатически влажным воздухом (рис. 1). Метеорологические станции M_0 и M_1 фиксируют давление воздуха $p_0=100$ кПа, станция M_2 — $p_2=70$ кПа. Температура воздуха в точке M_0 — $t_0=+20$ °С. Когда воздух поднимается, при давлении $p_1=84{,}5$ кПа начинается образование облаков. При дальнейшем поднятии воздух, в котором происходит конденсация водяного пара (масса этого воздухв над каждым квадратным метром поверхности равна 2000 кг), достигает вершины хребта (станция M_2) через 1500 с. При этом он отдает, в расчете на один килограмм воздуха, $m=2{,}45$ г воды в качестве осадков (дождя).

1) Какова температура T_1 на уровне нижней границы облаков?

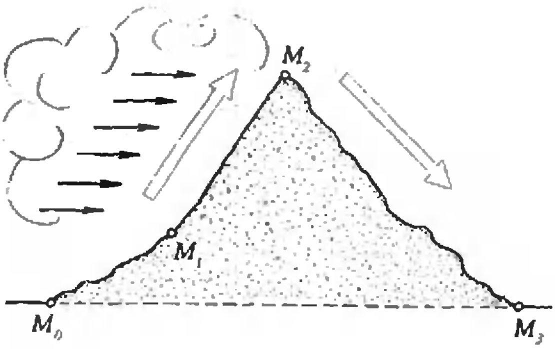


Рис. 1.

2) На какой высоте h_1 над станцией M_0 расположена нижняя граница облаков, если допустить, что плотность воздуха убывает с высотой линейно?

3) Какая температура T_2 будет измерена на вершине хребта?

4) Какой высоты достигает столб воды (высота осадков на единицу площади), выпадающей из потока воздуха в течение 3 часов? Условия конденсации пара считать одинаковыми на участке от M_1 до M_2.

5) Какова температура T_3 на задней стороне хребта у станции M_3? Обсудите состояние воздуха у станции M_3 по сравнению с его состоянием у станции M_0.

Указания и данные:

Воздух следует рассматривать как идеальный газ.

Влиянием присутствия водяного пара на удельную теплоемкость и на плотность воздуха, а также зависимостью удельной теплоты испарения от температуры следует пренебречь. Температуры следует указать с точностью до 1 К, высоту нижней границы облаков — с точностью до 10 м, высоту осадков — с точностью до 0,1 мм.

Удельная теплоемкость воздуха в интересующем нас интервале температур равна $c_p = 1005$ Дж/(кг · К); плотность воздуха у станции M_0 при p_0 и T_0 — $\rho_0 = 1,189$ кг/м^3; удельная теплота испарения воды в области облака — $q_V = 2500$ кДж/кг; $c_p/c_V = \varkappa = 1,4$; $g = 9,81$ м/с^2.

Задача 2

Из точечного источника P вылетает пучок электронов и влетает в магнитное поле $\vec{B}$ кольцевой (тороидальной) катушки вдоль линий поля (рис. 2). Пусть угол раскрытия электронного пучка $2\alpha_0$ очень мал ($\alpha_0 \ll 1$). Инжекция электронов происходит на среднем радиусе R тороида с помощью ускоряющего напряжения U_0. Предполагается, что модуль B постоянен. Электростатическим взаимодействием электронов в пучке пренебречь.

1) Для движения пучка по линии поля тороида необходимо приложить однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}_1$, отклоняющее пучок. Вычислите B_1 для электрона, который движется по круговой траектории радиусом R внутри тороида.

2) Вычислите модуль B индукции тороидального магнитного поля, фокусирующего электронный пучок в четырех точках, сдвинутых на $\pi/2$ относительно друг друга (см. рис. 2). Указание: при исследовании траекторий электронов искривлением линий магнитного поля можно пренебречь.

3) Без отклоняющего поля $\vec{B}_1$ пучок электронов не остается в тороиде, а покидает его дрейфовым движением перпендикулярно к плоскости тороида. Покажите, что радиальное отклонение электронов от радиуса R инжекции конечно. Определите направление дрейфовой скорости. Указание: углом раскрытия электронного пучка следует пренебречь. Используйте законы сохранения энергии и момента импульса.

Данные: $e/m = 1,76 \cdot 10^{11}$ Кл/кг, $U_0 = 3$ кВ, $R = 50$ мм.

Задача 3

При распространении синусоидальных колебаний силы тока и напряжения по бесконечной $L-C$ цепочке (рис. 3) фазы колебаний напряжения на конденсаторах двух последовательных ячеек отличаются на постоянную величину φ.

1) Определите зависимость φ от ω, L и C (ω — циклическая частота колебаний).

2) Определите скорость распространения волн, если каждая ячейка имеет длину l.

3) При каком условии скорость распространения колебаний слабо зависит от ω и каково значение скорости в этом случае?

4) Предложите простую механическую модель, аналогичную описанной выше электрической цепи, и выведите уравнения, которые обосновывают правильность этой модели.

Вспомогательные формулы:

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right),$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right).$$

По итогам проведения теоретического тура лучшую сумму баллов, с большим отрывом от остальных участников, получили два школьника из Румынии: К. Некула — 30 баллов и К. Малуреану — 29 баллов (каждая задача теоретического тура оценивалась в 10 баллов). Лучшим из советских школьников был А. Бибиков, набравший 24 балла (он решил задачи 2 и 3). Остальные участники советской команды получили соот-

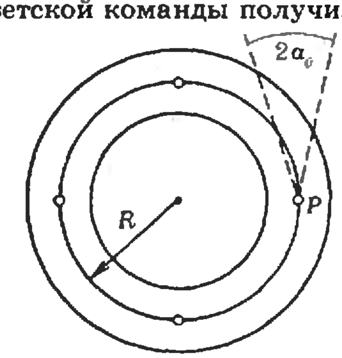


Рис. 2.

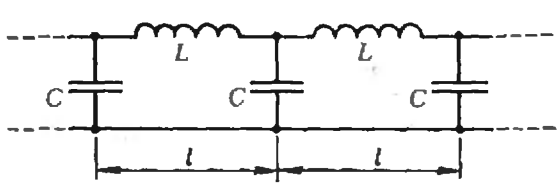


Рис. 3.

Команда Советского Союза на XVIII Международной физической олимпиаде. Слева направо: Д. Глущенков, А. Гольдин, Д. Будько, А. Бибиков, Г. Вилькялис.

ветственно: Д. Будько и А. Гольдин — 19 баллов, Д. Глущенков — 15 баллов, Г. Вилькялис — 13 баллов. Ни один из наших участников не справился полностью с задачей по термодинамике, задачу 3 полностью решил только А. Гольдин.

В целом по результатам теоретического тура команда СССР уступила школьникам из Румынии, набравшим в общей сложности 123 балла (официально командное первенство на олимпиаде не проводится, тем не менее общая сумма баллов, набранная командой, позволяет охарактеризовать ее относительную силу). Для большинства команд теоретический тур оказался достаточно трудным.

На втором заседании Международной комиссии, которое состоялось 8 июля, было рассмотрено и после обсуждения утверждено задание экспериментального тура. По предварительному прогнозу все ждали, что экспериментальное задание будет оптическим — город Йена славится своим крупнейшим оптическим предприятием «Карл Цейс Йена» по производству оптических приборов и оптического стекла. Намек на оптическую тематику многие усматривали и в официальной эмблеме олимпиады (см. заставку к статье). И действительно, экспериментальное задание оказалось по геометрической оптике.

9 июля в помещении одной из лучших школ Йены — в средней школе им. Юлиуса Шахеля II — состоялся экспериментальный тур олимпиады.

Приводим его условие.

Экспериментальный тур

Определите показатели преломления призмы и жидкости.

1) При использовании только одной призмы определите ее собственный показатель преломления n_1 двумя различными способами. Представьте задачу в виде рисунка и выведите по нему формулы для вычисления показателя преломления.

Вспомогательные средства: призма с углами 30°, 60° и 90°, миллиметровая бумага, линейка, белая бумага.

2) Определите с помощью двух таких одинаковых призм показатель преломления жидкости n_2; причем $n_1 > n_2$. Представьте задачу в виде рисунка и выведите по нему формулы для вычисления показателя преломления.

Вспомогательные средства: две призмы с углами 30°, 60° и 90°, миллиметровая бумага, линейка, белая бумага, чашка Петри, круглая подставка, жидкость.

Формулы:

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta.$$

Несколько забегая вперед, отметим, что участников советской команды на эксперименте постигло большое разочарование. Лучший результат в советской команде был у Г. Вилькялиса — 17 баллов (полностью выполненное задание оценивалось в 20 баллов), однако у 25 школьников результат оказался выше, причем восемь из них получили максимальное количество баллов.

Лучше всех с экспериментом справились команды Польши (90 баллов), Голландии (88 баллов) и ГДР (87 баллов), все участники которых выступили достаточно ровно (у школьников из ГДР за эксперимент было три «двадцатки»). Остальные наши участники выступили явно ниже своих возможностей и получили соответственно: А. Бибиков и А. Гольдин — 15 баллов, Д. Будько и Д. Глущенков — 12 баллов. Хотя все они в принципе справились с экспериментальным заданием (получили правильные ответы), очень низкой, по мнению жюри, оказалась культура оформления работ, явно недостаточными были четкость и аккуратность их выполнения. В целом по эксперименту наша команда заняла 10 место.

Заключительное заседание Международной комиссии по подведению итогов XVIII Международной физической олимпиады состоялось 10 июля. Три первых премии получили: К. Малуреану (Румыния) — 49 баллов, К. Некула (Румыния) — 45 баллов и Б. Бэккер (Голландия) — 44 балла.*) Вторые премии были присуждены 10 участникам. Среди них А. Бибиков, лучший в нашей команде, набравший в итоге 39 баллов. Третьи премии получили 29 участников, среди них Д. Будько — 31 балл и А. Гольдин — 34 балла. Еще два участника советской команды — Г. Вилькялис и Д. Глущенков (набравшие 30 и 27 баллов) — получили похвальные отзывы.

В неофициальном командном зачете команда СССР, набрав 161 балл, поделила 5 и 6 места с командой Венгрии, пропустив вперед команды Румынии (208 баллов), ФРГ (181 балл), Китая (175 баллов) и ГДР (162 балла). Сам по себе факт неудачного выступления нашей команды, наверное, можно было бы объяснить внешними причинами — круг участников олимпиады постоянно расширяется, уровень подготовленности команд растет, учащиеся Румынии, например, ходят в школу не 10, а 12 лет, быть всегда первыми просто невозможно и т. п. Однако даже беглый анализ существующей системы подготовки советской команды свидетельствует о том, что в этом вопросе имеется целый ряд недостатков. Например, система отбора в целом требует большей гибкости, необходимы дальнейшее углубление индивидуальной работы со школьниками и существенное укрепление материально-технической базы летних и зимних сборов. Словом, Министерство просвещения СССР, используя весь накопленный опыт работы, должно сказать свое решительное слово.

12 июля на официальном закрытии XVIII Международной олимпиады школьников по физике состоялось вручение премий и специальных призов победителям. А. Бибиков получил спецприз за наиболее оригинальное решение задачи 3 теоретического тура. К. Малуреану (Румыния) получил спецприз за лучшее решение задачи 2 теоретического тура. Еще один спецприз (их было всего три) получила Д. Сербан из Румынии, показавшая наивысший результат среди девочек (42 балла — вторая премия). Много благодарностей прозвучало в адрес организационного комитета, обеспечившего исключительно высокий уровень проведения олимпиады, обстановку радушия, гостеприимства и благожелательности. Участники олимпиады остались очень довольны предложенной им культурной программой.

Заключительное слово на церемонии закрытия произносит руководитель команды Австрии. От имени своего правительства он приглашает XIX Международную олимпиаду в город Зальцбург на период с 23 июня по 2 июля 1988 года. Как бы передавая эстафету проведения олимпиады Зальцбургу, в зале звучит волшебная музыка Вольфганга Амадея Моцарта. До встречи в Австрии, на родине великого композитора!

*) Заметим, что К. Некула выступал на Международной физической олимпиаде второй раз, а К. Малуреану — третий.

По поводу задачи М1065

Редакция получила несколько писем, из которых видно, что не все читатели верно поняли условие задачи М1065. В ней подразумевается, что все образующие в представлениях векторов различны. Мы продлеваем срок отправки решений этой задачи до 1 марта 1988 г. Решению ее будет посвящена специальная заметка.

„Квант" улыбается

После экзаменов

Известно, что на одно и то же событие можно посмотреть с разных точек зрения. На экзамене это точки зрения преподавателей и абитуриентов. Вот какие параллели нам удалось провести между высказываниями экзаменаторов и поступающих, которые мы подслушали в самый разгар приемных экзаменов.

Преподаватели

Запутался у меня один абитуриент, ну да ладно. Сделал вид, что не заметил.

Эх, зря я сегодня одному четверку поставил. Ведь видел же, что ничего не знает. Торопился вот только очень.

А этот, лохматый, ничегошеньки не понимает.

Я ему говорю: «Знать-то вы знаете, но не на пять баллов. Есть люди, которые и лучше знают».

Я ей один вопрос. Не отвечает. Я второй. Не отвечает. Я ей двойку ставить — в слезы!

Абитуриенты

Перехитрил я преподавателя. Сделал ошибку, но так ответил на вопрос, что он и не заметил.

Эх, не повезло! Экзаменатор куда-то торопился, а то бы я взял свои законные пять баллов.

А этот, лысый, ничегошеньки не понимает.

Он мне говорит: «Знаете хорошо, немного найдется ребят, которые знают лучше вас, но ...».

Задает трудный вопрос, я ему сразу ответ. Он второй вопрос — я опять ответ. А он вдруг говорит: «Ничего, вы, девушка, не знаете». Ну тут я ему и сказала, что он не прав.

Из газеты МФТИ «За науку»

Избранные задачи Ленинградской городской олимпиады по математике

1(7). Имеется инструмент для геометрических построений на плоскости, позволяющий делать следующее:

а) если даны две точки, то можно провести проходящую через них прямую,

б) если дана прямая и точка на ней, то можно восставить перпендикуляр к этой прямой в этой точке.

Как с помощью этого инструмента опустить перпендикуляр из данной точки на прямую, не проходящую через эту точку?

Д. Фомин

2(8, 10). Имеется неограниченный запас монет достоинством в 1, 2, 5, 10, 20, 50 коп. и 1 руб. Известно, что А копеек можно разменять при помощи В монет. Докажите, что тогда В рублей можно разменять при помощи А монет.

Ф. Назаров

3(8). На ветвях большого дуба сидит несколько ворон. По сигналу они начинают пересаживаться. Каждую минуту одну из ворон прогоняют соседки, сидящие на той же ветке, и эта ворона перелетает на следующую по высоте (более высокую) ветку; если сверху веток нет, ворона улетает. Все ветки расположены на различной высоте. Докажите, что время, через которое процесс закончится (т. е. на каждой ветке будет не более одной вороны), зависит только от начального расположения ворон, но не от порядка перелетов.

Д. Фомин

4(9). Клетки доски 8×8 раскрашены в шахматном порядке. Разрешается менять местами любые две горизонтали или две любые вертикали. Можно ли при помощи этих операций получить доску, вся левая половина которой окрашена в черный цвет, а правая половина — в белый?

В. Уфнаровский

5(9, 10). В точках A и B пересечения двух окружностей касательные к этим окружностям взаимно перпендикулярны. Пусть M — произвольная точка на одной из окружностей, лежащая внутри другой окружности. Продолжим отрезки AM и BM за точку M до пересечения в точках X и Y с окружностью, содержащей M внутри себя. Докажите, что XY — диаметр этой окружности.

Д. Фомин

6(9, 10). Астроном, наблюдая на небе 50 звезд, обнаружил, что сумма всех попарных расстояний между ними равна S. Набежавшее облако заслонило 25 звезд. Докажите, что сумма попарных расстояний между видимыми звездами меньше $S/2$.

С. Фомин

7(8, 9). Даны положительные числа a, b, c, d. Докажите, что если $cd=1$, то на промежутке с концами ab и $(a+c)(b+d)$ найдется по крайней мере один квадрат целого числа.

Л. Курляндчик

8(8). Плоскость разрезали по нескольким окружностям, среди которых есть пересекающиеся. Докажите, что вырезанные при этом из плоскости кусочки не удастся сложить в виде нескольких непересекающихся кругов.

А. Анджанс

9(9, 10). Восемь неотрицательных вещественных чисел, сумма которых равна 1, расставлены в вершинах куба. Для каждого ребра стоящие в его концах числа перемножили. Докажите, что сумма всех полученных таким образом произведений не больше $1/4$.

Д. Фомин

10(9). Дана последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$, а которой $a_1<1987$ и $a_i+a_{i+1}=a_{i+2}$ для всех натуральных i. Докажите, что если для некоторого n числа a_1-a_n и a_2+a_{n-1} делятся на 1987, то число n нечетно.

С. Генкин

11(10). Дана последовательность действительных чисел $x_1, x_2, \dots$ и натуральное число T. Докажите, что если среди всевозможных упорядоченных T — элементных наборов вида $(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{k+T})$ имеется не более T различных, то последовательность $x_1, x_2, \dots$ периодична.

И. Лифшиц

12(10). Диагонали вписанного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O. Докажите, что

$$\frac{AB}{CD}+\frac{CD}{AB}+\frac{BC}{AD}+\frac{AD}{BC}\leqslant\frac{OA}{OC}+\frac{OC}{OA}+\frac{OB}{OD}+\frac{OD}{OB}.$$

Ф. Назаров

13(10). В n-элементном множестве выделили S подмножеств, содержащих $A_1, A_2, \dots, A_S$ элементов соответственно. Известно, что среди этих подмножеств ни одно не содержится в другом. Докажите, что

$$\frac{1}{C_n^{A_1}}+\frac{1}{C_n^{A_2}}+\dots+\frac{1}{C_n^{A_S}}\leqslant 1,$$

где $C_m^k=\dfrac{m!}{k!(m-k)!}$ — биномиальный коэффициент.

А. Меркурьев

14(10). Непрерывные функции $f, g: [0; 1]\to[0; 1]$ обладают тем свойством, что $f(g(x))=g(f(x))$ для каждого $x\in[0; 1]$. Докажите, что если f возрастает, то $f(a)=g(a)=a$ для некоторого $a\in[0; 1]$.

Д. Фомин

Информация

Заочная физико-техническая школа при МФТИ

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся восьмилетних и средних школ, расположенных на территории РСФСР и УССР, в 8, 9 и 10 классы на 1988/89 учебный год.

Цель школы — помочь ученикам в самостоятельных занятиях по углублению своих знаний по физике и математике. При приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности и рабочих поселках, где такая помощь особенно необходима.

Обучение в школе бесплатное.

Кроме отдельных учащихся, в ЗФТШ принимаются физико-технические кружки, которые могут быть организованы в любой общеобразовательной школе двумя преподавателями — физики и математики. Руководители кружков набирают и зачисляют в них учащихся (не менее 8—10 человек), успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии, имена, отчества руководителей кружка и поименный список членов кружка (с указанием класса в 1988/89 учебном году и итоговых оценок за вступительное задание по физике и математике). Все материалы по организации кружков и конверт для ответа о приеме кружка в ЗФТШ с обратным адресом на имя одного из руководителей кружка следует выслать в адрес ЗФТШ (141700 г. Долгопрудный Московской обл., МФТИ, ЗФТШ, с указанием «Кружок») *до 25 мая 1988 года*. (Тетради с работами членов кружка в ЗФТШ не высылаются.) Работа руководителей заочных физико-технических кружков может оплачиваться школами по представлению ЗФТШ при МФТИ как факультативные занятия.

Учащиеся ЗФТШ и руководители физико-технических кружков будут получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Работы учащихся-заочников проверяют в ЗФТШ и ее филиалах, а членов кружка — его руководители.

С учащимися Москвы проводятся очные занятия по физике и математике два раза в неделю по программе ЗФТШ в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ), набор в которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам очного собеседования по физике и математике (справки по телефону 408-51-45).

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу надо сделать на русском языке и аккуратно переписать в одну школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону тетради. Без этой справки решение рассматриваться не будет. На внешнюю сторону тетради наклейте лист бумаги, заполненный по образцу (все фамилии, имена и отчества в этой анкете должны быть написаны четко печатными буквами в именительном падеже).

Для получения ответа на вступительное задание вложите в тетрадь конверт с вашим домашним адресом.

Срок отправления решения — *не позднее 1 марта 1988 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются. Ре-

1. Область (край или АССР)	Куйбышевская область
2. Фамилия, имя, отчество	БУГАЕВ КОНСТАНТИН НИКОЛАЕВИЧ
3. Класс	седьмой
4. Номер, адрес и телефон школы	Тольяттинская средняя школа № 28, т. 37-28-95
5. Фамилия, имя, отчество вашего преподавателя по физике	Штанге Людмила Михайловна
по математике	Коновалова Людмила Дмитриевна
6. Профессия родителей и занимаемая должность	
отец	слесарь-ремонтник
мать	методист
7. Подробный домашний адрес	445038 Куйбышевская обл., г. Тольятти, б-р Баумана, д. 1, кв. 241.

Внизу начертите таблицу для оценок за вступительное задание:

№ п/п										
Ф.										
М.										

шение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1988 года.

Тетрадь с выполненными заданиями (обязательно и по физике, и по математике) присылайте по адресу: 141700 г. Долгопрудный Московской обл., Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининской, Калининградской, Кировской, Костромской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Пермской, Псковской и Ярославской областей, Карельской, Коми и Удмуртской АССР высылают работы по адресу: 198904 г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, Ленинградский филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Кемеровской, Магаданской, Новосибирской, Омской, Сахалинской, Томской, Тюменской и Читинской областей, Алтайского, Красноярского, Приморского и Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской и Якутской АССР высылают работы по адресу: 660062 г. Красноярск, пр. Свободный, д. 79, Госуниверситет, Красноярский филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Украины высылают работы по адресу: 252680 г. Киев-142, пр. Вернадского, д. 36, институт Металлофизики, Киевский филиал ЗФТШ при МФТИ.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике.

В задании по физике задачи 1—5 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 4—9 — для восьмых классов, задачи 8—14 — для девятых классов.

В задании по математике задачи 1—5 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 3—9 — для восьмых классов, задачи 6—12 — для девятых классов.

Вступительное задание

Физика

1. Автомобиль ехал из одного города в другой t часов со скоростью v_1. Обратно он ехал t часов со скоростью v_2, а остальной путь — со скоростью v_3. Определите среднюю скорость движения на всем пути.

2. Два велосипедиста едут со скоростью 35 км/ч. Один из них увеличивает скорость до 45 км/ч, проходит с этой скоростью 10 км, поворачивает и, не сбавляя скорости, возвращается к другому велосипедисту, который двигался с прежней скоростью. Сколько времени прошло с того момента, когда первый велосипедист ушел вперед, до момента его возвращения к партнеру?

3. Взвешивание тела в воздухе дало значение P. Взвешивание того же тела в жидкости плотностью ρ_0 дало значение P_1. Чему равна плотность вещества, из которого изготовлено тело?

4. В теплоизолированном сосуде находится 1,5 кг льда при температуре 0 °С. В сосуд вливают 1 литр кипятка, имеющего температуру 100 °С. Какая температура установится в сосуде? Удельная теплоемкость воды 4,2 кДж/(кг · °С), удельная теплота плавления льда 335 кДж/кг.

5. В кастрюлю налили холодную (10 °С) воду и поставили на электроплитку. Через 10 минут вода закипела. Через какое время она полностью испарится? Удельная теплоемкость воды 4200 Дж/(кг · °С), удельная теплота испарения $2{,}26 \cdot 10^6$ Дж/кг.

6. Свободно падающее без начальной скорости тело за последнюю секунду пролетело 3/4 всего пути. Сколько времени падало тело?

7. Найдите минимальный период спутника планеты, имеющей плотность 3000 кг/м^3.

8. При параллельном включении в сеть с напряжением U_1 двух нагревателей на них выделяется мощность P_1 и P_2. Какая мощность будет выделяться на каждом из этих нагревателей, если их включить последовательно в сеть с напряжением U_2? Сопротивление нагревателей не меняется.

9. Парашютист массой 80 кг спускается на парашюте с установившейся скоростью 5 м/с. Какой будет установившаяся скорость, если на том же парашюте будет спускаться мальчик массой 40 кг? Сила сопротивления пропорциональна квадрату скорости.

10. Биллиардный шар налетает на точно такой же покоящийся шар. Происходит абсолютно упругое соударение (потерь энергии при ударе нет). Под каким углом могут разлететься шары?

11. При нагревании газа при постоянном объеме на 1 °С давление увеличилось на 0,2 %. При какой начальной температуре находился газ?

12. С какой максимальной скоростью может проехать мотоциклист по закруглению дороги радиусом 80 м, если коэффициент трения между шинами мотоцикла и асфальтом равен 0,5?

13. Некоторое количество идеального газа нагревается от 300 К до 400 К. При этом объем газа изменяется пропорционально температуре: $V = \alpha T$. Начальный объем газа 3 л, давление, измеренное в конце процесса, оказалось равным 1 атм. Какую работу совершил газ в этом процессе?

14. Сосуд объемом 120 л разделен тонкой подвижной перегородкой на две части. В левую помещены два моля воды, в правую — моль азота. Температура поддерживается равной 100 °С. Определите объем правой части сосуда.

Математика

1. В классе 40 учеников, из них первую задачу по физике из вступительного задания ЗФТШ решили 25 человек, по математике — 26, а 9 школьников не решили ни одной из этих задач. Сколько учеников решили обе задачи?

2. Найдите 1988-ю цифру после запятой в десятичной записи числа 2/7.

3. Длины всех сторон прямоугольного треугольника — целые числа. Могут ли длины обоих катетов быть нечетными числами?

4. На окружности по разные стороны от диаметра AB расположены точки C и D. Найдите CD, если известно, что $BC=a$, $AC=b$, $AD=BD$.

5. Какие значения может принимать x, если

$$|x-y| \leqslant 2 \text{ и } |2x-y| \leqslant 1?$$

6. Найдите сумму

$$1^2-2^2+\ldots+1987^2-1988^2.$$

7. Основания трапеции равны a и b. Найдите длину отрезка, проведенного через точку пересечения диагоналей параллельно основаниям и заключенного между боковыми сторонами. Докажите, что его длина не больше $\sqrt{ab}$.

8. При каком значении параметра a сумма квадратов корней уравнения $2x^2+2ax+3a^2-2a=0$ будет наибольшей?

9. В четырехугольнике, вписанном в окружность радиусом R, одна сторона является диаметром, а длины трех других сторон равны a, b и c. Докажите, что $4R^3-R(a^2+b^2+c^2)-abc=0$.

10. Зная, что $\sin\alpha+\cos\alpha=a$, найдите $|\sin\alpha-\cos\alpha|$.

11. Рассмотрим многочлен $P(x)=x^2+px+q$.

а) Докажите, что оба корня $P(x)$ лежат на отрезке $[a; b]$ тогда и только тогда, когда выполнены условия:

$$p^2-4q\geqslant 0,\ a\leqslant -p/2\leqslant b,\ P(a)\geqslant 0,\ P(b)\geqslant 0.$$

б) На координатной плоскости изобразите множество таких точек $(p; q)$, что корни $P(x)$ лежат на отрезке $[-1; 1]$.

12. Четыре туриста идут по различным прямолинейным маршрутам с постоянными и различными скоростями. Известно, что первый турист встретился в пути с каждым из трех остальных, второй — с третьим и четвертым. Докажите, что третий и четвертый туристы также встретятся.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 30)

И. Маньшин (Иваново) 47; *Д. Мартыненко* (Киев) 47; *А. Мацко* (Киев) 55; *А. Мелеховец* (Брест) 47; *О. Мельников* (Красноярск) 55; *Н. Михайловский* (Красноярск) 57; *П. Михеев* (Старый Оскол) 47; *И. Мишенев* (Минск) 47; *В. Молодченко* (Одесса) 52; *А. Молчанов* (Чехов Московской обл.) 47; *Р. Моор* (Алма-Ата) 57; *В. Мороз* (Ленинград) 49, 52; *Р. Москвин* (Раменское) 46, 50; *М. Мостов* (Одесса) 47; *В. Мытько* (Минск) 47, 50, 52; *О. Наумов* (Заволжье) 47; *К. Недбаев* (Брест) 53; *Н. Некрасов* (Москва) 47; *О. Нелялин* (Старый Оскол) 47; *К. Николаев* (п. Черноголовка Московской обл.) 50, 53; *А. Никонюк* (Ровно) 53, 55, 57; *А. Новиков* (Харьков) 47; *А. Новик* (Мозырь) 53, 57; *Д. Ноготков* (Алма-Ата) 46, 57; *С. Ночевный* (Запорожье) 46, 50, 57; *А. Окунев* (Гродно) 50; *П. Орлов* (Ленинград) 47; *С. Павлов* (Владивосток) 49; *В. Павлунин* (Фрунзе) 50, 53; *Д. Пастухов* (Витебск) 47, 55, 57; *Т. Пацаева* (Куйбышев) 47; *К. Пенанен* (Одесса) 50, 56, 57; *Л. Петько* (Минск) 49, 50, 53, 55, 57; *В. Писаренко* (Киев) 47; *А. Подтележников* (Харьков) 53, 55—57; *О. Покрамович* (д. Скоки Брестской обл.) 47, 56, 57; *П. Полынкин* (Тула) 50; *Л. Пономаренко* (Буск) 49, 50; *Д. Почуев* (Харьков) 49, 55, 57; *К. Приходько* (Москва) 55, 57; *М. Пустильник* (Москва) 49; *И. Рассадин* (Минск) 53, 57; *У. Рахманов* (Ташкент) 49, 53; *А. Резуненко* (Харьков) 53, 57; *А. Рожков* (Калининград) 57; *А. Рыбак* (Новосибирск) 47; *А. Рыжов* (Горький) 50, 52, 55, 57; *И. Савельев* (Волгодонск) 47; *Р. Сагайдак* (с. Матусов Черкасской обл.) 46, 52, 55—57; *А. Сагдиев* (Целиноград) 47; *А. Садыков* (Казань) 49, 50, 53; *С. Сазонов* (Климовск) 53, 55; *А. Сапрыгин* (Арзамас) 50, 55; *А. Свердлов* (Ленинград) 50, 57; *В. Свидзинский* (Киев) 46, 52, 57; *М. Сергазин* (Алма-Ата) 49; *В. Свичар* (с. Городковка Винницкой обл.) 47, 52; *А. Сибиряков* (Томск) 49, 50, 52; *М. Соколов* (Одинцово) 47, 52, 53, 55; *А. Стародубов* (Алма-Ата) 55; *А. Степура* (Ивано-Франковск) 49, 50; *А. Субботин* (Алма-Ата) 47; *З. Таварткиладзе* (Тбилиси) 49, 57; *Г. Тартаковский* (Гайворон) 55; *Д. Тильга* (Алма-Ата) 49, 50, 53; *Н. Ткаченко* (Лубны) 47; *А. Тодоров* (Ярославль) 49, 50, *И. Тодощенко* (Пермь) 49, 52, 53, 55, 57; *С. Тозик* (Минск) 47, 53; *А. Тренихин* (Могилев) 55; *А. Тутов* (Рига) 47; *А. Усинский* (с. Птичья Ровенской обл.) 49, 52, 55—57; *Г. Фейгин* (Тула) 50, 55, 57; *Д. Филатьев* (Алма-Ата) 47; *Ф. Фот* (Томск) 53, 55; *И. Фролов* (Москва) 49, 50, 52, 55; *П. Фурсиков* (Куйбышев) 47; *П. Хиль* (п. Овидиополь Одесской обл.) 47; *И. Химон* (Днепропетровск) 55; *А. Хисамов* (Уфа) 49, 53, 55, 56; *Х. Ходжаев* (Касансайский р-н Наманганской обл.) 47; *О. Цодиков* (Артемовск) 53, 55; *А. Цыганок* (Кишинев) 46; *И. Чайка* (Кузнецовск) 52, 53, 55, 57; *О. Чанов* (Брест) 47, 57; *В. Чеботарь* (Дубоссары) 47; *Д. Чикатилов* (Москва) 49, 53; *В. Чуев* (Старый Оскол) 47; *С. Шинкевич* (Березники) 57; *З. Шония* (Тбилиси) 47; *С. Штовба* (Винница) 55, 57; *Р. Юнусов* (Термез) 47; *А. Яблоков* (с. Рождественское Костромской обл.) 50; *И. Ягольницер* (Черновцы) 52, 53, 55; *В. Янкевич* (Витебск) 50, 57; *И. Ясников* (Тольятти) 47, 53, 57.

Ответы, указания, решения

Уравнения думают за нас

1. $F\approx -53{,}3$ Н. Знак «минус» означает, что силу надо направить не вниз, а вверх под тем же углом к горизонту.
2. $t=100\ ^\circ$С.
3. $l=12{,}5$ м.

XXVIII Международная олимпиада по математике

3. Пользуясь неравенством Коши

$$|a_1b_1+a_2b_2+\ldots+a_nb_n|\leqslant\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}\times\sqrt{b_1^2+\ldots+b_n^2}$$

и равенством $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1$, получим

$$|x_1|+|x_2|+\ldots+|x_n|\leqslant\sqrt{n}.$$

Поэтому все суммы вида $\varepsilon_1x_1+\ldots+\varepsilon_nx_n$, где $\varepsilon_i\in(0, 1, 2, \ldots, k-1)$, принадлежат отрезку $I=[0;\ (k-1)\cdot\sqrt{n}]$. Разобьем отрезок I на k^n-1 равных отрезка длины $(k-1)\sqrt{n}/(k^n-1)$. Так как всего существует k^n сумм, какие-то две из них окажутся в одном и том же отрезке разбиения. Для их разности выполнено неравенство.

Решение задач 1, 2, 4, 5, 6 см. в «Кванте» № 4 за 1988 год (задачи М1076—М1080).

XVIII Международная физическая олимпиада

Задача 1

1) $T_1=T_0(p_1/p_0)^{1-1/\varkappa}=279{,}4$ К. Здесь и далее при решении этой задачи используются уравнения адиабатического процесса, которые не входят в программу по физике для нашей средней школы. 2) $h_1=2(p_0-p_1)/(g(\rho_0+\rho_1))=1408$ м, где ρ_1 вычисляется из уравнения состояния $p_0/(\rho_0T_0)=p_1/(\rho_1T_1)$. 3) Изменение температуры определяется двумя процессами: охлаждением до температуры T_c при адиабатическом поднятии и повышением температуры на ΔT в результате конденсации: $T_2=T_c+\Delta T=270{,}9$ К, где $T_c=T_1(p_2/p_1)^{1-1/\varkappa}$, $\Delta T=q_V m/c_p$. 4) $\Delta h=35{,}3$ мм. 5) $T_3=T_2\times\times(p_3/p_2)^{1-1/\varkappa}=300$ К. При обтекании горного массива воздух становится более теплым и сухим.

Задача 2

1) $B_1=(1/R)\sqrt{2(m/e)U_0}=0{,}37\cdot10^{-2}$ Тл. 2) $B=(4/R)\sqrt{2(m/e)U_0}=1{,}48\cdot10^{-2}$ Тл. 3) Для ответа на этот вопрос задачи необходимо воспользоваться полярной системой координат (в плоскости, перпендикулярной оси симметрии тороида) и законом сохранения момента импульса, что не входит в нашу школьную программу по физике.

Задача 3

1) $\varphi=2\arcsin(\omega\sqrt{LC}/2)$, где $0\leqslant\omega<2\sqrt{LC}$. 2) $v=\omega l/\varphi$. 3) Скорость волн слабо зависит от частоты колебаний при условии $\omega\leqslant2/\sqrt{LC}$, и тогда $v_0=l/\sqrt{LC}=l\omega_0$. 4) Возможные модели

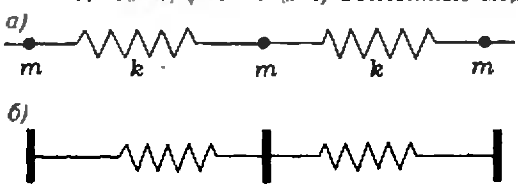


Рис. 1.

представлены на рисунке 1. Аналогия с данной электрической моделью основывается на законе сохранения энергии.

«Квант» для младших школьников

1. Пусть это числа x, y и z, причем $z=x^3-y^3$. Тогда $z=(x-y)(x^2+xy+y^2)$. Чтобы число z было простым, необходимо, чтобы $x-y=1$, а это возможно при условии простоты чисел x и y лишь для $x=3$, а $y=2$. Отсюда $z=19$.

2. При повышении температуры длина маятника увеличивается, но ртуть, увеличиваясь в объеме, поднимается вверх по трубке, что при подборе объема ртути и диаметра трубки дает возможность сохранить постоянным расстояние от точки подвеса маятника до его центра тяжести. Тем самым увеличивается точность хода часов.

3. 331868:163=2036.

4. См. рис. 2.

5. Если обозначить через v объем воды в озере, через w — объем воды, вытекающей в сутки из родников, и через z — количест-

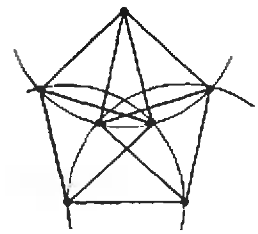


Рис. 2.

во воды, выпиваемой в сутки слоном, то условия задачи запишутся в виде двух уравнений: $v+w=183z$, $v+5w=5\cdot37\cdot z$. Вычитая из второго уравнения первое, получим $4w=2z$ или $z=2w$. Подставляя это соотношение в первое уравнение, получим $v=365w$. Пусть *один* слон выпивает озеро за x дней, тогда $v+xw=xz$. Подставляя $z=2w$, получаем $v=xw$, или $x=\dfrac{v}{w}$. Но мы знаем, что $v=365w$, поэтому слон опустошит озеро за 365 дней, после чего понадобится еще год, чтобы озеро вновь наполнилось от родников.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 11)

1. Нетрудно подсчитать, что всего было 10 партий, т. е. разыгрывалось 10 очков. A — победитель турнира — набрал не более 3 очков, так как одну партию он проиграл; но он не мог набрать и меньшее количество очков, так как $2{,}5+2+1{,}5+1+0{,}5=7{,}5$. Значит, A одну партию проиграл, а остальные выиграл. Выиграть у $Б$ он не мог, так как $Б$ не проиграл ни одной партии; значит, он проиграл $Б$ и выиграл у всех остальных. Заметим также, что $3+2{,}5+2+1{,}5+1=10$, поэтому $Б$ набрал 2,5 очка, $В$ набрал 2 очка, $Г$ набрал 1,5 и $Д$ набрал 1 очко. Значит, $Б$ остальные партии свел вничью. $Г$ набрал 1,5 очка, сделав ничью с $Б$ и выиграв у $В$ или $Д$; но $В$ проиграл $А$, сделав ничью с $Б$ и, если он проиграл $Г$, то он набирает не более 1,5 очков, а он набрал 2 очка; значит, $В$ выиграл у $Г$ и сделал ничью с $Д$, а $Г$ выиграл у $Д$. Турнирная таблица приводится на рисунке 3.

2. В морозный день кристаллы снега разрастаются и ломаются при наступании на снег, что и вызывает потрескивание.

3. Да, можно. Например, так: рассмотрим 18 пар гирек, равноотстоящих от концов: 1+101, 2+100, 3+99, ..., 18+84. Остальные 64 гирьки тоже разобьем на 32 пары, соединяя их по тому же принципу равной суммы: 20+83, 21+82, 22+81, ..., 51+52. Взяв 9 пар гирек из первого набора и 16 пар из второго произвольным образом, мы получим требуемое разбиение.

4. 94950+80850+74350=250150.

5. См. рис. 4.

	А	Б	В	Г	Д
А		0	1	1	1
Б	1		1/2	1/2	1/2
В	0	1/2		1	1/2
Г	0	1/2	0		1
Д	0	1/2	1/2	0	

Рис. 3.

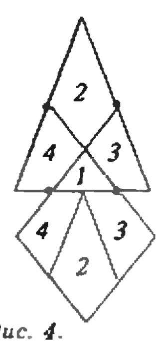


Рис. 4.

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 11)

Вопросы и задачи

1. Сила давления равна нулю.
2. Закон Паскаля справедлив, закон Архимеда — нет, так как и тело, и вытесняемая жидкость невесомы.
3. С востока на запад, причем угловая скорость движения самолета вокруг центра Земли должна быть равна угловой скорости вращения Земли.
4. Скорость тела максимальна при прохождении центра Земли ($r=0$). Принимая, что потенциальная энергия тела равна нулю в центре Земли, получим

$$\frac{mv_0^2}{2}=\Pi,$$

где Π — потенциальная энергия на поверхности Земли, равная работе по перемещению тела из центра на поверхность Земли (см. заштрихованную площадь на рис. 5). Тогда

$$\frac{mv_0^2}{2}=\frac{mgR_0}{2},$$

где R_0 — радиус Земли. Отсюда

$$v_0=\sqrt{gR_0}.$$

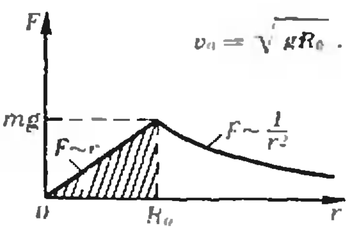


Рис. 5.

5. Нет, так как при этом у силы тяжести будет составляющая, не лежащая в плоскости орбиты.
6. При спуске, поскольку при запуске скорость ракеты в плотных слоях атмосферы мала, а при спуске — велика.
7. а) По касательной к орбите; б) стала бы падать на Землю.
8. Такая же, что и для Земли.
9. Плотность планеты. Воспользовавшись уравнением движения спутника по орбите, можно получить формулу

$$T=\sqrt{\frac{3\pi}{G\rho}}.$$

10. Только пружинными, другие часы в невесомости работать не будут.
11. Включить двигатели.
12. Можно, так как взаимодействие молотка и обрабатываемого материала будет определяться их инерционными, а не гравитационными свойствами.

Микроопыт

Не будет, поскольку и банка, и вода в ней падают с одинаковым ускорением.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 9)

Задание 17 (Б. Брейдер, 1966 г.). 1. Kb5 c2 2. Kd4 c1Ф 3. Kb3+ Kpb1 4. K:c1 Kp:c1 5. Kh7 g4 6. Kf6 g3 7. K:h5 g2 8. Kf4 с ничьей; 2...Kpb1 3. K:c2 Kp:c2 4. Ke6 g4 5. Kg7 g3 (5... h4 6. Kf5 h3 7. Ke3+ и 8. K:g4) 6. Kf5 g2 7. Ke3+.

Задание 20 (Л. Прокеш, 1939 г.). 1. Kd7 d2 2. Cg5 d1Ф 3. C:e3+ Kpa6 4. Kc5+ Kpa5 5. Cd2+ Ф:d2 6. Kb3+ с ничьей; 1...e2 2. Ch4 d2 3. Cf2+ Kpa6 4. Kc5+ Kpa5 5. Kb3+ и 6. K:d2. После 1... C:d7 ничья совсем простая: 2. Cg5 e2 3. Cd2.

Напечатано в 1987 году

Задачник «Кванта»

Искусство программирования

Практикум абитуриента

Варианты вступительных экзаменов

Олимпиады

Информация

«Квант» улыбается

Номер подготовили
А Н Виленкин, А А Егоров, Л В Кардасевич,
И Н Клумова, Т С Петрова, А Л Рябов, А Б Сосинский, В А Тихомирова

Номер оформили
М Б Дубах, С В Иванов, Д А Крымов,
Э В Назаров, Т Н Кольченко, Е К Тенчурина,
И Е Смирнова, В Б Юдин

Заведующая редакцией Л В Чернова
Редактор отдела художественного оформления
С В Иванов
Художественный редактор Т М Макарова
Корректор Н Б Румянцева

Сдано в набор 20 10 87 Подписано к печати 24 11 87
Т 22573 Бумага 70×108/16 Печать офсетная Усл кр отт 23,8 Усл печ л 5,6 Уч изд л 7,28 Тираж 200 828 экз Цена 40 коп Заказ 2883

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г Чехов Московской области

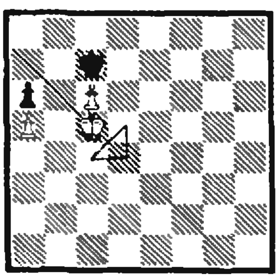
103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Шахматная страничка

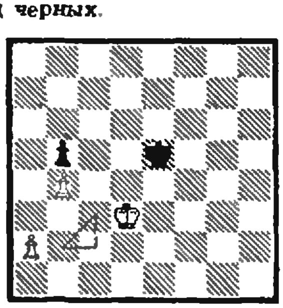
Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

МЕТОД ТРЕУГОЛЬНИКА

В теории окончаний, прежде всего пешечных, можно встретить немало математических и физических терминов: ключевые и критические поля, геометрическая оппозиция, пространство и время, система полей соответствия и т. д. С правилом квадрата знакомы все шахматисты. Сейчас мы расскажем о методе треугольника.



В этом положении после 1. Крd5 Крc8 2. Крd6 Крd8 3. c7+ Крc8 4. Крc6 на доске пат, а 2. Крc5 Крc7 приводит к исходной позиции. Однако при своем ходе черные сразу проигрывают, так как вынуждены пропустить белого короля на поле b6, теряя единственную пешку. Итак, задача белых — передать очередь хода противнику. Эта цель достигается методом треугольника. Король осуществляет маневр по треугольнику d5 — d4 — c4. Черные гибнут после 1. Крd5 Крc8 2. Крd4! Крb8 3. Крc4 Крc8 4. Крd5. Теперь на 4...Крd8 решает 5. Крd6 Крc8 6. c7, а на 4...Крc7 — 5. Крc5, позиция та же, но ход черных.



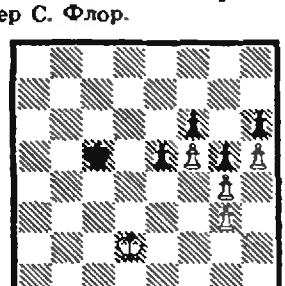
И. Клинг, 1848 г.

1. Крc3 Крd5 2. Крb3 Крc6. Черным нельзя допускать ни противостояния Крd4 — Крd6 из-за наличия темпа a2 — a3, ни Крb3 — Крd6 ввиду a2 — a4 с простым выигрышем. Отсюда следует, что если белый король стоит на d3, c3 или b3, то черный должен находиться на e5, d5 или c6. Пользуясь шахматно - математическим языком, можно сказать, что полям d3, c3 и b3 соответствуют поля e5, d5 и c6. В возникшей позиции белым надо передать очередь хода противнику, для чего их король идет по треугольнику, изображенному на рисунке (маневрирует на тыловых полях b2 и c2). Надежды черных на спасение связаны с построением аналогичного треугольника для своего короля.

При белом короле на c2 (b2) черный не может стоять на c7 (d7) из-за Крc3 и Крd4 с выигрышем, то есть треугольник c7 — d7 — d6 черных не устраивает. Поскольку треугольником c5 — c6 — d6 они вообще не располагают (поле c5 под контролем), остается лишь треугольник d6 — d5 — c6. Но при короле на d5 (c6) белые ставят своего короля соответственно на c3 (b3) и берут верх.

3. Крc2 (можно начать и с b2) Крd6 (3...Крd5 4. Крc3 Крe5 5. Крb3 и 6. a4) 4. Крb2! Крc6 5. Крb3 Крb6 (5...Крd6 6. a4) 6. Крc3 Крc6 7. Крd4 Крd6 8. a3 Крc6 9. Крe5 Крb6 10. Крd5, и все кончено.

Любопытную историю, также связанную с «треугольником», рассказал в своих воспоминаниях гроссмейстер С. Флор.



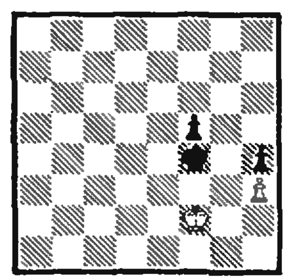
М. Видмар — С. Флор. Блед, 1931 г.

1. Крe3 Крd5 2. Крd3 Крc6 3. Крe4 Крd6 4. Крe3 Крd7 5. Крd3 Крc6 6. Крe4 Крc5.

Здесь Видмар спросил: «Ничья?» Флор задумался и вспомнил, как однажды Видмар предложил ничью Рубинштейну, а тот деликатно ответил: «Если специалисты сочтут нашу позицию ничейной, я согласен». Скоро Видмар сдался.

Флор тоже ответил уклончиво: «Разве эта позиция ничейная?».

«Ну, хорошо, — сказал гроссмейстер Видмар, — ищите, молодой человек, ищите!» Этот призыв подстегнул Флора, и он припомнил, что когда-то читал про треугольник. Через пять минут партия закончилась. 7. Крe3 Крd5 8. Крd3 e4+ 9. Крe3 Крe5 10. Крe2 Крd4 11. Крd2 e3+ 12. Крe1 Крd5. «Вот он — мой треугольник!» — воскликнул Флор. 13. Крf1 Крe5 14. Крe1 Крd4 15. Крd1 Крd3. Белые сдались.



Л. Юдасин — В. Оснос. Ленинград, 1987 г.

Переставив последним ходом короля с e2 на f2, Юдасин предложил ничью, сообщив своему партнеру, что позиция теоретически ничейная. «Уличенный» в элементарных эндшпильных пробелах, опытный Оснос не рискнул спорить с молодым авторитетом и позволил себя уговорить. А между тем после 1...Крe4 2. Крe2 f4 3. Крf2 f3 4. Крf1 Крe5! на доске возникала позиция, симметричная первой рассмотренной (после второго хода белых и с переменой цветов).

Конкурсные задания

23. Белые: Крa2, п. п. b3, c2; черные: Крb4, п. d5. Белые начинают и выигрывают.

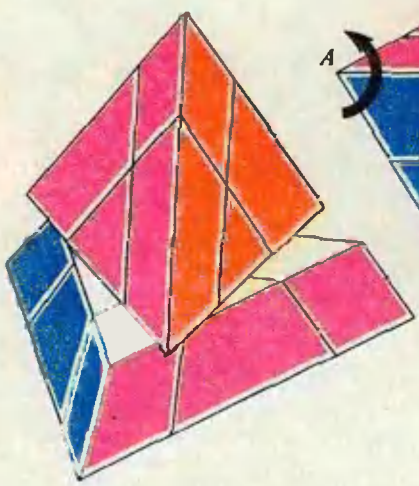
24. Белые: Крf8, п. п. a3, b3, c4; черные: Крc8, п. п. a6, b6, c5. Белые начинают и выигрывают.

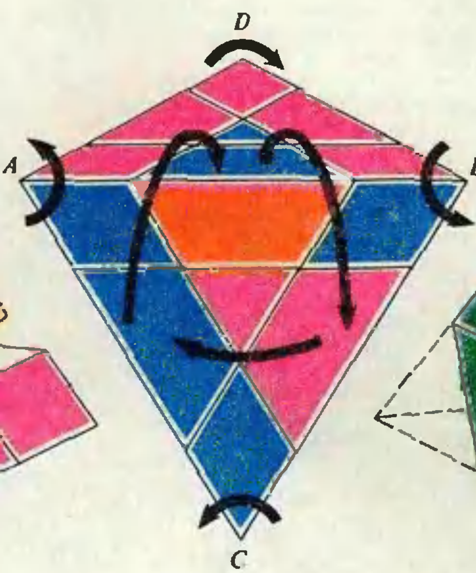
Срок отправки решений — 25 февраля 1988 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 23, 24».

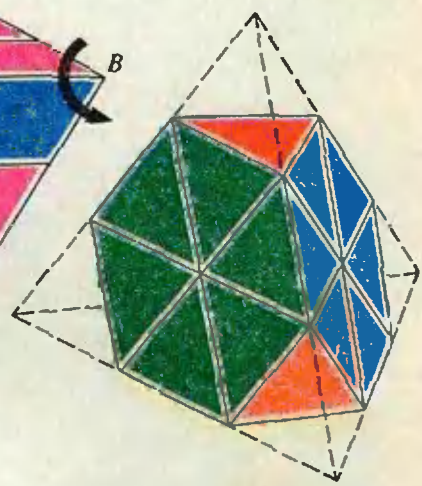
Цена 40 коп.

Индекс 70465

«Волшебная пирамидка» — очередной персонаж наших заметок о головоломках — была придумана до кубика Рубика, но почему-то не была тогда оценена по достоинству. Особенность объемных шарнирных головоломок, пирамидки и кубика в том числе, отличающая их от игрушек из предыдущих номеров, за исключением «перевертышей» (см. «Квант», №№ 1, 2), состоит в том, что их подвижные части могут не только переходить с одного места на другое, но и по-разному «садиться» на данное место. Так, в пирамидке на рисунке слева 3 типа блоков — 4 угловых, 6 реберных и 4 центральных. Первые можно повернуть на том же месте тремя способами, вторые — двумя, третьи — тремя; правда, повороты центральных блоков на вид неразличимы. У нас выпускают несколько вариантов пирамидки. Более распространен тот, что показан справа, причем к его угловым блокам обычно прикреплены пирамидальные макушки, вращающиеся каждая сама по себе. Но гораздо интереснее пирамидка с центральными блоками. Наверное, излишне объяснять, как с ней обращаться: допустимый поворот показан слева; надо перепутать блоки такими поворотами вокруг всех 4 осей, а затем восстановить исходную раскраску — одноцветную на каждой







$K_1 = AB^{-1}A^{-1}B$

грани. Мы уже не раз объясняли, как подступить к решению такой задачи. Сначала рассмотрим коммутаторы двух поворотов (рисунок в центре; на нем видны и обозначения поворотов). Под действием $K_1 = AB^{-1}A^{-1}B$ *циклически переставляются 3 реберных блока:* $AB \to CB \to AC \to AB$ *(порядок букв существен!), а центральные блоки переставляются парами:* $a \leftrightarrow b$, $c \leftrightarrow d$, *где* a, b, ... — *центры граней* BCD, CDA, ... *Аналогично действует* $K_2 = BC^{-1}B^{-1}C$: $AB \to CB \to CA \to AB$, *только 2 блока —* CB *и* AC *— иначе поворачиваются. Поэтому операция* $K_1K_2^{-1}$ *переворачивает эти блоки на своих местах, а остальные реберные блоки не затрагивает. Еще одна полезная операция получится, если трижды повторить* K_1: K_1^3 *переставляет только центральные блоки* $a \leftrightarrow b$, $c \leftrightarrow d$. *Теперь можно расставлять блоки в следующем порядке: 1) угловые (их надо повернуть, чтобы согласовать цвета на каждой грани пирамиды), 2) реберные* DA, DB, DC *— можно ставить их поочередно, пользуясь коммутаторами* $ABA^{-1}B^{-1}$, $B^{-1}A^{-1}BA$ *и т. п., заменяющими по одному из этих блоков 3) реберные* AB, BC, CA *— сначала пользуясь* K_1 *или* K^{-1}, *а затем, если нужно, перевернуть, пользуясь* K_1K^{-1} *и т. п., 4) центральные — с помощью операций типа* K_1^3. *Попробуйте показать, что указанных операций всегда достаточно для полной сборки (это отнюдь не очевидно!). Вам поможет статья «Математика волшебного кубика» («Квант» № 8, 1982 г.). И еще задача: докажите, что, вращая пирамидку, можно получить* $3^4 \cdot 6! \cdot 2^6 = 3732480$ *различных расцветок.*