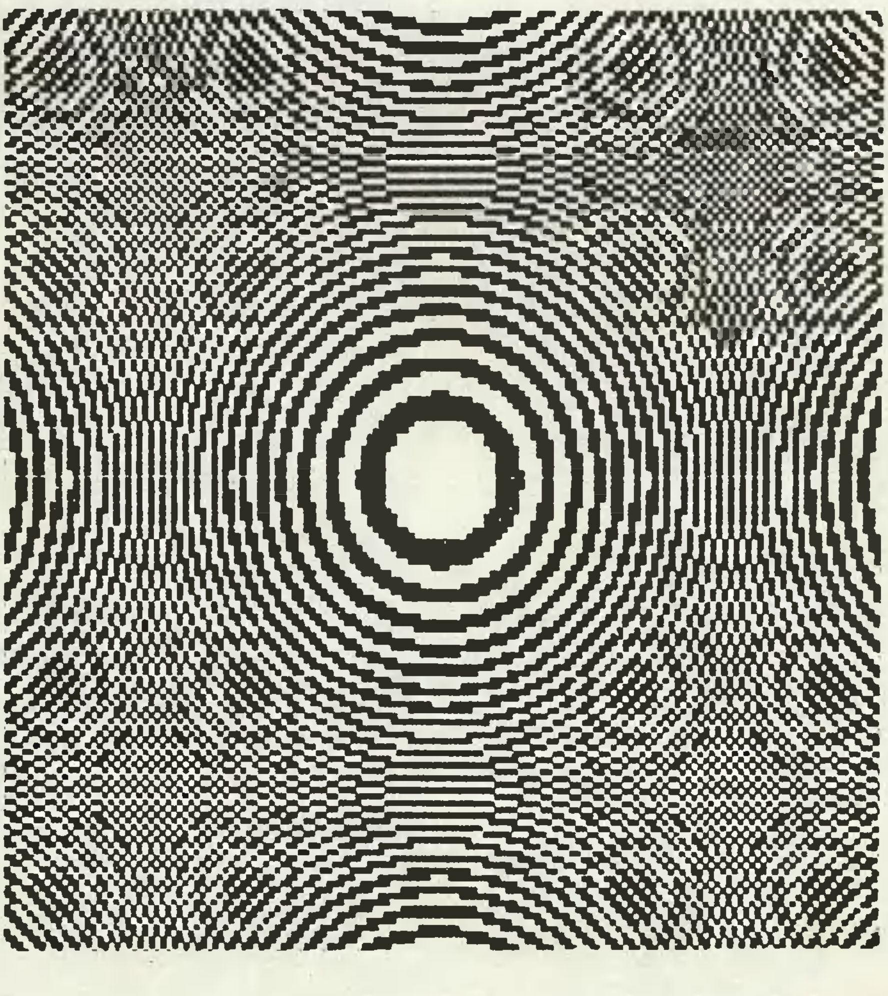
ISSN 0130-2221

Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

1987



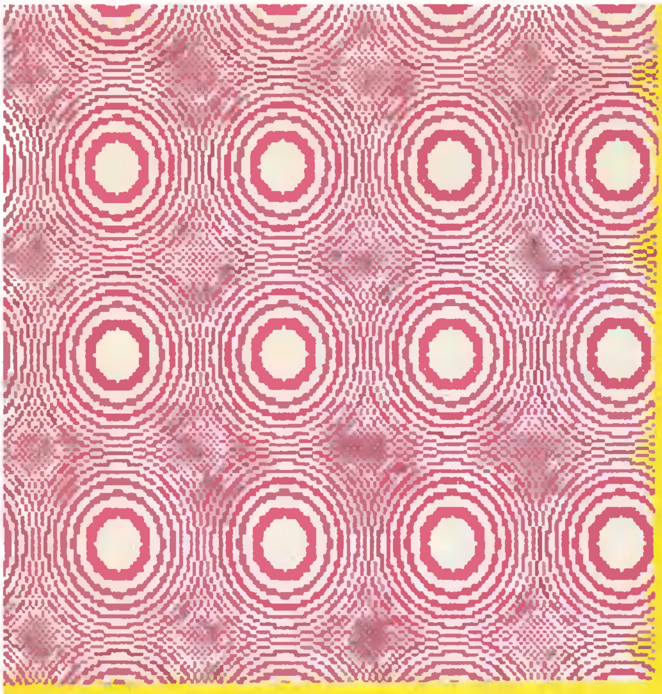


Рис. 1а.

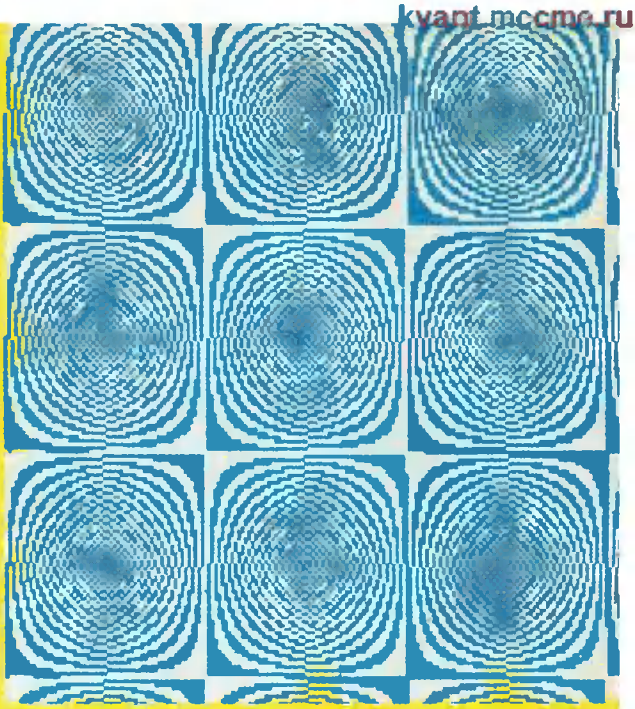


Рис. 2а

Рис. 1б.

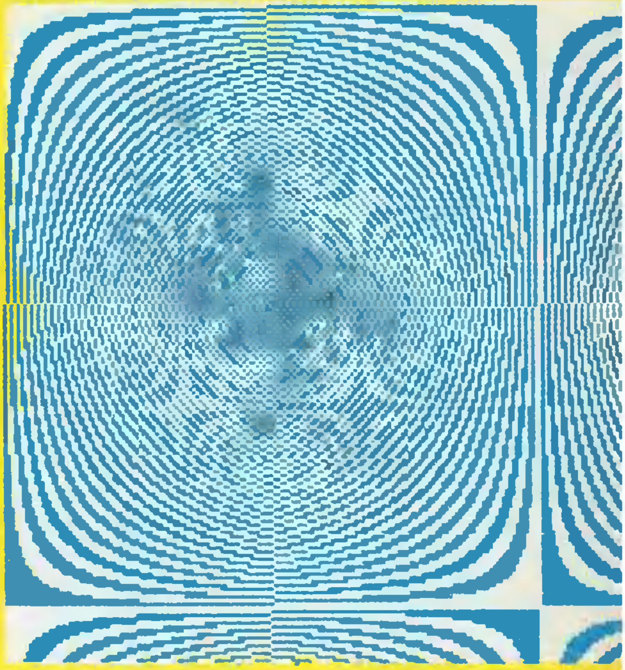


Рис. 2б

Рис. 1в.

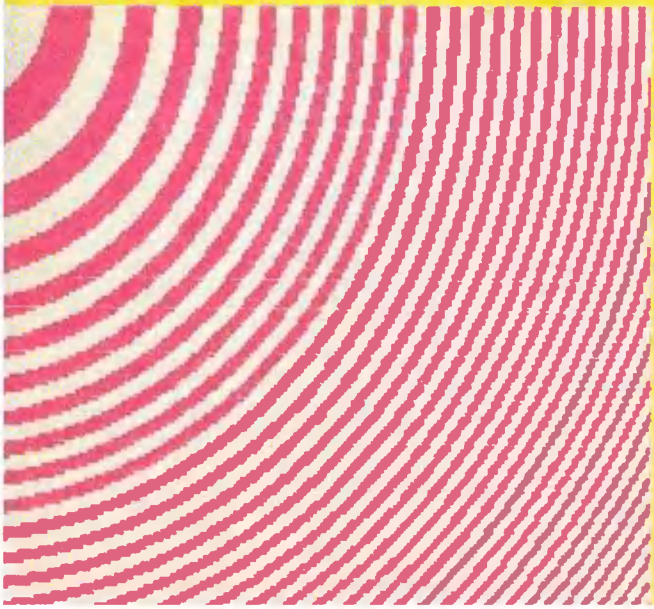


Рис. 2в

Квант

1987 11

Основан в 1970 году

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

Наша обложка

Картинки на первой и второй страницах обложки нарисованы компьютером по программе школьника из Черноголовки А. Лобковского. Подробности — на с. 21.

Всенародный праздник

«Комсомольцы! Юноши и девушки! Овладевайте наследием великого Ленина! Учитесь работать высокоэффективно, творчески, активно!»

Из призывов ЦК КПСС к 70-летию Великой Октябрьской социалистической революции

Прошло 70 лет с того дня, когда вся власть в нашей стране перешла в руки народа. Трудно представить себе более тяжелые условия, чем те, в которых начиналось строительство нового общества. Разруха, голод, неграмотность, враждебное окружение... Но Ленин и партия большевиков сумели сплотить народ на героическую борьбу. Советский Союз, первая в мире страна социализма, стал могучей индустриальной державой.

Вместе со всей страной развивалась и крепла наша наука. И если, по словам выдающегося советского физика академика Л. А. Арцимовича, «всех крупных физиков царской России можно было бы свободно усадить на одном диване», то сегодня у нас более сотни только физических научных центров. Советские физики, математики, астрономы и представители других естественных наук пользуются международным признанием. Физика и математика являются лидерами научно-технической революции, и наши ученые внесли фундаментальный вклад в развитие этих наук. Большую роль в строительстве социализма сыграла советская школа.

Юбилей, как учил В. И. Ленин, это повод к критическому анализу прошлого. Проводя такой анализ, мы видим, что построенный в нашей стране социализм еще несовершенен, у него есть огромные резервы, которые необходимо до конца раскрыть и реализовать в короткий срок. Молодежи иногда кажется, что время революционных преобразований давно ушло в прошлое. Но жизнь опровергает эти представления. Революция продолжается. Именно она требует от нас громадного ускорения и грандиозной перестройки во всех сферах деятельности. Предстоит упорная борьба, и участвовать в ней вам придется еще в школьные годы.

Каждому из вас, дорогие читатели, необходимо еще раз внимательно изучить материалы XXVII съезда КПСС и пленумов ЦК КПСС, документы XX съезда ВЛКСМ, вдумчиво перечитать ленинские работы, созданные после победы революции. Сколько замечательных мыслей в одной только речи В. И. Ленина на III Всероссийском съезде комсомола! И далеко не все они воплощены в жизнь. А ведь работы Ленина — это верный компас в сложном и длительном процессе всесторонних преобразований, которые ждут вас как в школе, так и за ее порогом.

К 70-летию Великого Октября

О МАТЕМАТИКЕ СТРАНЫ СОВЕТОВ

Академик АН УССР Б. В. ГНЕДЕНКО

Великая Октябрьская социалистическая революция явилась мощным толчком к прогрессу математики в нашей стране, создала исключительно благоприятные условия для развития абстрактных ее направлений и применения математических методов в естествознании, инженерном деле, организации производства.

Так, в 1918 г. был издан декрет об организации ЦАГИ — Центрального аэрогидродинамического института и о назначении Н. Е. Жуковского его директором. В том же году была создана Нижегородская радиолаборатория.

В 1921 году — разгар разрухи — по инициативе В. А. Стеклова был организован Физико-математический институт Академии наук. Впервые в истории нашей страны развитием теоретической и прикладной математики стало заниматься специальное научное учреждение.

Даже краткое описание того, что сделали советские математики за истекшие семьдесят лет, потребовало бы многотомного сочинения и работы большой группы специалистов. Поэтому здесь мы вынуждены ограничиться лишь беглым обзором небольшой доли важных направлений научных исследований.

Пожалуй, самым крупным явлением в математической жизни нашей страны следует считать возникновение Московской математической школы теории функций и теории множеств. У ее истоков стояли два выдающихся математика и педагога — Д. Ф. Егоров и Н. Н. Лузин. С их именами связано широкое привлечение студенческой молодежи к научным исследованиям. Многочисленные результаты, красивые построения, постановка большого числа новых задач для дальнейших исследований, живое изложение — все это сумело увлечь математическую молодежь идеями Лузина. Его первые ученики — Д. Е. Меньшов, П. С. Александров и А. Я. Хинчин. Первые их самостоятельные работы были в кругу идей учителя — теория интеграла, сходимость тригонометрических рядов, строение так называемых борелевских множеств. Эти первые работы в значительной степени определили дальнейшие интересы названных исследователей. Д. Е. Меньшов основные свои работы посвятил теории тригонометрических рядов и рядов ортогональных функций; А. Я. Хинчин — метрической теории функций и ее применениям в теории чисел, теории вероятностей и статистической физике; П. С. Александров — теории множеств, а позднее — топологии.

Уже первые приемы студентов в Московский университет после 1917 года дали второе поколение активных учеников Лузина. Лузин организовал семинар, на котором каждому участнику предлагалось прореферировать определенную монографию, затем устраивалось обсуждение реферата с постановкой вопросов, с выявлением возможности упрощения и обобщения доказательств.

В двадцатые годы ученики Лузина называли свой коллектив «Лузитанией»*). Этим подчеркивалось восхищение своим учителем, его научными идеями, лекциями. Ученики Лузина гордились своей причастностью к группе, разрабатывающей его идеи, и стремились дать максимум того, на что они способны в науке.

Конечно, каждое чрезмерное увлечение несет в себе и отрицательное начало. Лузитанцы были чрезмерно заняты лишь одним направлением математического развития и некоторые из них несколько свысока относились к классическим областям

*) См. «Квант», 1977, № 10, с. 13.

В. А. Стеклов.

И. Г. Петровский.

О. Ю. Шмидт.

математики. Это нашло отражение в шуточных названиях ряда дисциплин: теория вероятностей называлась у них теорией неприятностей, уравнения в частных производных — уравнениями с несчастными производными, конечные разности — разными конечностями и т. п. Однако эта недооценка других областей математики продолжалась недолго, поскольку внутри самой Лузитании начался процесс расширения интересов. П. С. Александров и П. С. Урысон увлеклись проблемами теоретико-множественной топологии и вскоре положили начало существованию Московской топологической школы. А. Я. Хинчин в двадцатые годы начал интересоваться проблемами метрической теории чисел, от нее подошел к вопросам теории вероятностей и к концу двадцатых годов целиком направил свою энергию на эти два направления исследований. Теория вероятностей вскоре стала одной из существенных частей интересов Московской математической школы. Создание Московской школы теории вероятностей является заслугой двух выдающихся ученых — А. Я. Хинчина и А. Н. Колмогорова.

Далее интересы московских математиков обратились к классическому анализу. При этом выяснилось, что идеи теории функций дают возможность серьезного продвижения. Качественная теория дифференциальных уравнений, дифференциальные уравнения в частных производных становятся объектом исследований москвичей. Среди представителей этого направления следует назвать В. В. Степанова и И. Г. Петровского.

Не следует думать, что только Москва была центром математической мысли того времени. Первоклассные исследования в это время проводились на Украине — в Киеве и Харькове. В Киеве следует отметить, в первую очередь, исследования по абстрактной алгебре, культивируемые Д. А. Граве и его учениками. В начале революции один из его учеников О. Ю. Шмидт — разносторонний ученый и превосходный лектор — начал пропаганду новых алгебраических идей в Москве. О. Ю. Шмидт явился создателем Московской алгебраической школы. В Харькове С. Н. Бернштейн развивал идеи П. Л. Чебышева в области наилучшего приближения функций полиномами и успешно работал в области теории вероятностей.

В Ленинграде успешно развивались исследования в области математической физики и теории чисел. Оба эти направления исследований были традиционными для ленинградцев и берут свое начало от Л. Эйлера, М. В. Остроградского и П. Л. Чебышева. По аналитической теории чисел замечательные результаты были получены И. М. Виноградовым. В 1934 г. И. М. Виноградову удалось почти полностью решить знаменитую задачу Гольдбаха: всякое нечетное натуральное число представимо в виде суммы не более трех простых чисел.

Новые университеты, образованные в ряде городов страны в первые годы революции, быстро превратились в значительные математические центры. В первую очередь мы должны назвать здесь Тбилиси и Ташкент, которые славились своими исследованиями по математической физике (Тбилиси), нелинейным дифференциальным уравнениям и математической статистике (Ташкент). Организаторами Грузинской математической школы были Н. И. Мусхелишвили, Г. Н. Николадзе, А. М. Размадзе и А. К. Харадзе*). Создателем Ташкентской математической школы был В. И. Романовский.

К началу Великой Отечественной войны советская математика завоевала огромный научный авторитет во всем мире. Своими исследованиями она охватила практически все направления математической мысли. Многие математики принимали участие в решении задач естествознания, техники и организации производства.

Особенно значительными были результаты математиков в связи с проблемами, выдвигаемыми развитием авиации. Именно задачами полета в сжижаемой жидкости было вызвано построение теории квазиконформных отображений М. А. Лаврентьевым. Крупный успех накануне Великой Отечественной войны был достигнут в построении математической теории «шимми» и «штопора», явившихся причиной гибели многих самолетов. Из математической теории, построенной М. В. Келдышем, удалось сделать практические выводы, которые позволили радикально бороться как с «шимми», так и со «штопором». Позднее М. В. Келдыш занимался ракетной техникой, стал Главным теоретиком советской космонавтики.

Великая Отечественная война не прошла мимо советских математиков: тысячи из них пошли на фронт, многие переключились на решение задач, необходимых для победы. На фронтах сражались такие крупные ученые, как Ю. В. Линник, А. А. Ляпунов, М. В. Бебутов. К сожалению, не все вернулись с полей войны, и советская математика потеряла многих талантливых ученых.

Уже первые дни войны показали, что советская наука может быть действенным орудием борьбы. Были созданы таблицы бомбометания с самолетов, обладавших малыми скоростями («кукурузников»). А. Н. Колмогоров создал теорию искусственного рассеивания для увеличения вероятности поражения цели. Эта теория нашла применение при минных атаках судов военного флота, а также при стрельбе зенитной артиллерии. М. А. Лаврентьев создал теорию действия кумулятивного заряда, идея которого была известна горнякам и использовалась при подрыве горных пород. Эта теория широко используется в мирной практике при строительстве плотин, каналов, разного типа насыпей.

В период Великой Отечественной войны не прекращались и теоретические исследования в области математики. В ту пору было выполнено много превосходных исследований в области алгебры, топологии, теории вероятностей, функционального анализа, теории функций и геометрии. Развитие теоретической математики было абсолютно необходимо для послевоенного развития как науки, так и всего народного хозяйства. Это создало прекрасную базу для послевоенного развития атомной физики, создания электронной вычислительной техники, первых побед в освоении космического пространства.

*) См. «Квант», 1975, № 9, с. 12.

И. М. Виноградов.

А. Н. Колмогоров.

М. В. Келдыш.

С. Л. Соболев.

И. М. Гельфанд.

Л. В. Канторович.

Огромной важности математические задачи возникли и в связи с обеспечением высокого качества массовой промышленной продукции. Индивидуальная проверка качества каждого изготовленного изделия требовала огромного числа контролеров. На это идти было нельзя, поскольку и без того был катастрофический недостаток рабочей силы. Именно в это время возникла идея построения теории статистического контроля качества продукции. В ее создании активное участие принял А. Н. Колмогоров. В настоящее время эта теория энергично развивается по двум путям: 1) проверка качества уже изготовленных партий (приемочный контроль) и 2) управление качеством изделий в процессе изготовления (текущий или оперативный контроль).

Послевоенные годы характерны стремительным процессом математизации знаний и практической деятельности. Математика потребовалась для решения задач организации производства и для исследования биологических процессов, для продвижения в области физики и при создании технических систем, для изучения экономических вопросов и при рациональном размещении производственных предприятий. Но этого мало. Оказалось, что математические методы оказывают помощь археологу и историку, лингвисту и медику. Появились новые направления математической мысли. Математическая логика приобрела несравненно бóльшее значение, чем до войны. В этом большую роль сыграли электронные вычислительные машины и вызванная ими потребность в тщательном логическом анализе процессов при программировании для ЭВМ, а также при составлении математических моделей явлений. В теории вероятностей появились новые ветви, тесно связанные с экономикой и организацией производства, а также с задачами физики.

Если прежде физика свободно обходилась привычным для математики общим понятием функции, то теоретическим построениям современной физики в этих рамках стало тесно. В конце сороковых годов физики все чаще и чаще стали допускать операции с объектами, которые не укладывались в классическое понятие функции. В самом начале пятидесятых годов появились работы С. Л. Соболева и французского математика Л. Шварца, в которых было положено начало широкому и продуктивному обобщению понятия функции — было введено понятие обобщенной функции и разработаны правила действий с этими функциями. Несколько позднее И. М. Гельфанд ввел в рассмотрение обобщенные случайные процессы, использовав для этой цели идеи обобщенных функций. Упомянем большое направление исследований, связанное с отысканием экстремальных решений. Важность этого рода исследований выявилась в полной мере только в последнее время: при нынешних масштабах народного хозяйства неудачное использование материальных ресурсов приводит к огромному перерасходу, неудачный выбор направления движения замедляет доставку пассажиров и грузов; неудачное распределение работы с оборудованием влечет неполное использование станков и аппаратуры. Первые задачи такого рода появились давно и были известны еще в Древней Греции.

Непосредственно перед Великой Отечественной войной Л. В. Канторович рассмотрел ряд новых задач на разыскание максимального и минимального значений, связанных с распределением работ, раскроем материалов, организацией перевозок и т. п. Эти задачи послужили началом создания новой математической теории — линейного программирования, получившей после войны быстрое развитие. Теперь эти первичные постановки задач получили общие формулировки, для них предложены методы решения, построена интересная теория, эти результаты распространены на более общие случаи (нелинейное программирование).

Большое направление исследований, вызванное необходимостью поручать автоматам управление технологическими процессами, движением самолетов, космических аппаратов и т. д., было разработано Л. С. Понтрягиным и его учениками. Это направление получило наименование теории оптимального управления. Теория и выдвинутые в ней принципы немедленно получили многочисленные практические применения.

К новым задачам в теории случайных процессов привели такие задачи практики, как управление качеством продукции и определение момента наладки оборудования. На эти задачи обратил внимание А. Н. Колмогоров, направивший на них внимание ряда своих учеников.

Один из крупнейших математиков современности Н. Н. Боголюбов, начав работать под руководством академика Н. М. Крылова, свой первый результат опубликовал в семнадцатилетнем возрасте. Его научные интересы быстро расширялись, охватив математический анализ, дифференциальные уравнения, вариационное исчисление, теорию функций, математическую физику, теорию вероятностей. Совместно с Н. М. Крыловым им были разработаны математические методы нелинейной механики. После Великой Отечественной войны Н. Н. Боголюбов перешел почти исключительно на решение задач современной физики и в этой области добился крупных успехов.

Нельзя не упомянуть о математике исключительно широкого профиля, результаты которого относятся к топологии, теории дифференциальных уравнений, математической физике, геофизике, вычислительной математике, электродинамике — А. Н. Тихонове. В первую половину нашего столетия под влиянием взглядов замечательного французского математика Адамара сложилось убеждение, что для физики и практики интересны только так называемые корректные задачи, решения которых, полученные при близких начальных данных, не могут расходиться между собой слишком сильно. Постоянный интерес к задачам практики убедил А. Н. Тихонова в ошибочности этой точки зрения. Оказалось, что много естественных задач физики, экономики и других областей знания по существу являются некорректно поставленными. Тихоновым был разработан подход к решению такого типа задач.

Конец пятидесятых годов и шестидесятые годы явились периодом ин-

Л. С. Понтрягин.

Н. Н. Боголюбов.

А. Н. Тихонов.

тенсификации математической жизни в СССР. В это время ещё активно и плодотворно работают математики старшего поколения, о которых сказано выше, но теперь к ним присоединяется целая плеяда их одаренных учеников.

Эта связь поколений наиболее ярко проявилась, пожалуй, при исследовании знаменитой XIII проблемы Гильберта о представлении функций многих переменных через функции одной переменной, полное решение которой было получено совместными усилиями А. Н. Колмогорова и его ученика, тогда еще аспиранта, В. И. Арнольда.

Из математиков молодого поколения наибольшее признание получили москвичи С. П. Новиков, В. П. Маслов и ленинградец Л. Д. Фаддеев. Сергей Петрович Новиков, происходящий из семьи профессиональных математиков (его отец — академик П. С. Новиков, логик и алгебраист, мать — Л. В. Келдыш, доктор физико-математических наук, тополог), очень рано получил ряд выдающихся результатов по одной из наиболее важных в то время дисциплин — дифференциальной топологии. Эти результаты были высоко оценены не только у нас в стране, но и за рубежом: С. П. Новиков стал первым советским лауреатом премии Филдса, наиболее престижной международной математической премии.

В. П. Маслов начинал как физик, но его первые значительные результаты связаны с развитием идей современного математического анализа. Для его работ характерна, с одной стороны, глубина чисто математических обобщений, и, с другой — внимание к прикладным вопросам, в частности, к математической физике.

Л. Д. Фаддеев, тоже начинавший как физик и тоже происходящий из математической семьи (его отец — Д. К. Фаддеев — алгебраист, член-корреспондент АН СССР), известен своими фундаментальными работами по математической физике. Международный авторитет его работ значителен: в настоящее время Л. Д. Фаддеев — президент Международного союза математиков.

За эти годы советская математическая школа заняла ведущие позиции во многих направлениях современной математической науки, получила широкое международное признание. Это выразилось, в частности, в проведении Международного конгресса математиков в Москве в 1966 году, прошедшего с большим успехом, в частности, для наших докладчиков.

Другая характерная черта этого периода — существенные изменения в математическом образовании молодежи. Меняются школьные программы (1968 г.), возникают математические школы и классы, физико-математические интернаты (1965 г.), появляется и быстро завоевывает признание журнал «Квант» (1970 г.). Ярким примером результатов этих изменений может служить решение X проблемы Гильберта, полученное в начале семидесятых годов Ю. Матиясевичем, аспирантом ЛГУ, выпускником Московской ФМШ.

Отсутствие места лишает нас возможности остановиться на чрезвычайно важном аспекте последних десятилетий: большом значении математических приложений в науке и технике, в частности, в создании и эксплуатации ЭВМ, в космических полетах, экспериментальной физике, экономике, оборонной промышленности. Назовем лишь несколько созданных в эти годы и быстро завоевавших ведущие позиции академических институтов — Институт прикладной математики, Институт проблем управления, Центральный экономико-математический институт, Институт кибернетики, — и несколько фамилий выдающихся ученых-прикладников — С. А. Лебедев, А. А. Мельников, А. П. Ершов, Г. И. Марчук, Н. Н. Моисеев.

Прогресс страны требует непрерывного развития науки как в теоретическом, так и прикладном плане. Важно подготовить себя психологически к тому, что основным источником математических теорий является практика, и что задача математики состоит не только в доказательстве новых теорем, но и в изучении явлений окружающего нас мира. Как правило, случается так, что явления природы и процессы экономики шире уже имеющихся средств математики. Это является вечным стимулом для развития самой математики, ее понятий и теорий.

К 70-летию Великого Октября

ДОСТИЖЕНИЯ СОВЕТСКИХ ФИЗИКОВ

Советская физика очень молода. Но успехи, достигнутые за столь короткие сроки, убедительно свидетельствуют о ее огромной научной зрелости, способности решать сложнейшие проблемы современного естествознания.

В настоящее время в нашей стране имеется более сотни специальных физических институтов Академии наук СССР, республиканских академий, а также некоторых ведомств. Среди них — всемирно известные Физический институт имени П. Н. Лебедева, Физико-технический институт имени А. Ф. Иоффе, Институт физических проблем имени С. И. Вавилова, Институт атомной энергии имени И. В. Курчатова, Объединенный институт ядерных исследований в Дубне. Советская наука имеет выдающиеся достижения во многих областях современной физики. К ним принадлежат, например, ядерная физика, физика плазмы и управляемых термоядерных реакций, физика полупроводников, физика низких температур, квантовая электроника, физика высоких давлений. Наши ученые успешно работают и в многочисленных пограничных областях современной науки. Химическая и биологическая физика, физика Земли, атмосферы, космического пространства, физика Мирового океана и астрофизика представлены в нашей стране многими учеными с мировыми именами.

Советские физики выполнили так много фундаментальных научных исследований, что всякая попытка даже кратко рассказать о каждой из этих работ неизбежно привела бы к сухому перечню огромного количества отдельных фамилий и малопонятных для широкого круга читателей фактов. Поэтому мы расскажем здесь лишь о некоторых крупнейших достижениях наших физиков.

Краткая хроника выдающихся открытий советских физиков включает, в основном, «именные» открытия. Конечно, не каждое крупное открытие непременно приобретает впоследствии имена сделавших его ученых. Поэтому приведенный здесь список не охватывает даже самых крупных открытий, сделанных нашими учеными в области физики. Но мы надеемся, что и краткий перечень «именных» открытий позволит нашим читателям почувствовать, как велик вклад советских ученых в сокровищницу мировой науки.

●

Общая теория относительности, созданная Эйнштейном, содержит уравнения, характеризующие состояние Вселенной. Эйнштейн нашел стационарное (не зависящее от времени) решение, описывающее замкнутую неразвивающуюся Вселенную. Вскоре профессор Александр Александрович Фридман получил два новых решения основного уравнения общей теории относительности. Оба они описывают Вселенную, которая непрерывно расширяется. В дальнейшем **«модель расширяющейся Вселенной Фридмана»** получила экспериментальное подтверждение и теперь является общепризнанной.

●

Известно, что прочность твердого тела, определяемая на опыте, во много раз меньше ее значения, вычисленного теоретически. Причину этой разницы первым раскрыл академик Абрам Федорович Иоффе. Оказалось, что в преждевременном разрушении материалов повинны различные дефекты кристаллической структуры, которые не учитывались теоретиками, например микроскопические трещины на поверхности кристаллов. Погрузив кристалл каменной соли в воду и растворив поверхностный слой, Иоффе достиг увеличения прочности в сотни раз. Упрочение кристаллов при растворении поверхностного слоя получило название **«эффекта Иоффе»**.

А. Ф. Иоффе.

Л. И. Мандельштам.

П. Л. Капица.

Академик Владимир Александрович Фок с момента возникновения квантовой механики работал над ее развитием. Он обобщил основное уравнение этой теории на случай наличия магнитного поля и получил релятивистское уравнение квантовой механики, известное физикам как **«уравнение Фока — Клейна»**. В дальнейшем академик В. А. Фок независимо от английского физика Хартри создал метод расчета спектров атомов, содержащих большое количество электронов, и даже спектров сложных молекул. Этот метод вошел в историю физики под именем **«метода Хартри — Фока»**. До создания этого метода расчет сложных атомов был совершенно недоступной задачей для квантовой механики.

●

Академик Леонид Исаакович Мандельштам теоретически показал, что микроскопические неоднородности плотности вещества, возникающие в результате теплового движения молекул, изменяют спектр рассеянного света, добавляя в него новые спектральные линии, которые очень трудно наблюдать. (Эти линии впервые были обнаружены членом-корреспондентом АН СССР Евгением Федоровичем Гроссом.) Явление, в результате которого они возникают, было названо **«эффектом Мандельштама — Бриллюэна»**, так как несколько позднее аналогичное предсказание было сделано французским физиком Бриллюэном.

Исследуя рассеяние света в кристаллах кварца, академики Леонид Исаакович Мандельштам и Григорий Самуилович Ландсберг обнаружили в спектре рассеянного света дополнительные спектральные линии, не принадлежащие падающему на кристалл свету. Эти спектральные линии возникают в результате взаимодействия падающего света с отдельными молекулами, образующими кристаллическую решетку. Несколько позднее аналогичное явление было обнаружено индийским физиком Раманом при изучении рассеяния света в жидком бензоле. Оно получило название **«эффекта Мандельштама — Ландсберга — Рамана»** или **«комбинационного рассеяния света»**. Комбинационное рассеяние стало мощным средством изучения строения молекул.

●

Академик Петр Леонидович Капица при помощи сконструированной им оригинальной установки для создания сверхсильных магнитных полей установил, что в таких полях изменение электрического сопротивления металлов растет не пропорционально квадрату магнитной индукции, как ожидалось на основе существовавших тогда теорий, а является линейной функцией магнитной индукции. Это неожиданное явление, которое не удавалось объяснить около 30 лет, называют **«законом Капицы»**.

С именем академика П. Л. Капицы связано еще одно открытое им явление. Изучая свойства жидкого гелия, он обнаружил, что при температуре ниже 2,19 К гелий течет сквозь узкую щель практически без всякой вязкости. В дальнейшем это явление было названо сверхтекучестью. Теорию этого явления создал академик Лев Давидович Ландау. В 1978 году за фундаментальные исследования в области физики низких температур П. Л. Капица был удостоен Нобелевской премии.

●

Профессор Лев Васильевич Шубников, работая в лаборатории голландского физика де Гааза, обнаружил, что электрическое сопротивление висмута, помещенного в магнитное поле при температуре жидкого гелия, по мере увеличения магнитной индукции поля то возрастает, то убывает (как говорят, сопротивление висмута осциллирует). Этот **«эффект Шубникова — де Гааза»** широко используется для исследования энергетического спектра электронов в металле.

●

Профессор Московского университета Анатолий Александрович Власов первым вывел уравнение, описывающее поведение разреженного ионизованного газа (плазмы), в котором не происходит столкновений заряженных частиц. Оно вошло в науку под именем **«уравнения Власова»**.

●

Академик Лев Давидович Ландау теоретически показал, что свободные электроны в металле под действием внешнего магнитного поля могут двигаться только по строго определенным (как говорят физики — квантовым) траекториям. Это означает, что в магнитном поле возникают особые энергетические уровни, получившие наименование **«уровней Ландау»**.

Из этой же теории следовало, что действие магнитного поля на свободные электроны в металле приводит к возникновению дополнительного магнитного момента, направленного в сторону, противоположную внешнему магнитному полю. Такой момент называется диамагнитным, а описанное явление **«диамагнетизмом Ландау»**. Заметим, что эта же теория объяснила и эффект Шубникова — де Гааза.

Лев Давидович Ландау показал также, что даже при отсутствии столкновений частиц плазмы распространяющиеся в ней электромагнитные волны испытывают затухание. Это явление играет существенную роль в поведении плазмы. Физики всего мира называют его **«затуханием по Ландау»**.

Вместе с чехословацким физиком Плачеком академик Л. Д. Ландау вывел формулу для определения отношения интенсивностей спектральных линий рассеянного света, которую называют **«формулой Ландау — Плачека»**.

В 1962 году за разработку основополагающей теории конденсированных сред, в частности жидкого гелия, Л. Д. Ландау была присуждена Нобелевская премия.

●

Член-корреспондент АН СССР Яков Ильич Френкель первым ввел в обиход физиков особую «квазичастицу», которую теперь называют **«экситоном Френкеля»**. Он указал на то, что возбужденное состояние атома или молекулы в кристаллической решетке не локализовано. Возникнув в какой-либо ячейке кристалла, это возбуждение перемещается по нему, подобно своеобразной частице, которую Френкель назвал экситоном. Существование экситонов было впервые доказано в экспериментах члена-корреспондента АН СССР Евгения Федоровича Гросса. Экситоны играют большую роль в физике твердого тела и в современной химии.

Яков Ильич Френкель разработал электрокапиллярную теорию тяжелых атомных ядер, в которой ядра рассматриваются как капли заряженной жидкости. Независимо от Френкеля аналогичную теорию построил датский физик Нильс Бор. В историю физики она вошла под названием **«капельной модели ядра Бора — Френкеля»**.

●

Некоторые металлы и сплавы при охлаждении до очень низких температур полностью утрачивают сопротивление протекающему по ним току. Это явление названо сверхпроводимостью. Академики Лев Давидович Ландау и Виталий Лазаревич Гинзбург первыми построили феноменологическую теорию сверхпроводимости, учитывающую квантовые эффекты в сверхпроводниках. Пользуясь этой теорией, члены-корреспонденты АН

Л. Д. Ландау.

И. К. Кикоин.

И. Е. Тамм.

СССР Алексей Алексеевич Абрикосов и Лев Петрович Горьков создали теорию сверхпроводящих сплавов. Эта теория известна во всем мире как **«теория ГЛАГ»** (Гинзбург — Ландау — Абрикосов — Горьков).

Микроскопическая теория сверхпроводимости, детально объяснившая механизм этого загадочного явления, была создана американскими физиками Бардином, Купером и Шриффером и независимо от них академиком Николаем Николаевичем Боголюбовым. Она так и называется **«теорией сверхпроводимости Бардина — Купера — Шриффера — Боголюбова»**.

●

Академик Исаак Константинович Кикоин совместно с М. М. Носковым открыл фотоэлектромагнитный эффект, показав в экспериментах, что при освещении полупроводника, находящегося в магнитном поле, в нем возникает электродвижущая сила. Кванты света приводят к появлению носителей тока — свободных электронов и дырок, которые диффундируют вдоль направления падения света, а магнитное поле разводит их в противоположных направлениях. Это явление давно уже называют **«эффектом Кикоина — Носкова»**.

●

Академик Игорь Евгеньевич Тамм дал строгий вывод формулы, которая описывает рассеяние света на свободных электронах. Она сыграла важную роль в разработке квантовой электродинамики. В историю физики она вошла под названием **«формулы Тамма — Клейна — Нишины»**.

И. Е. Тамм развил метод расчета взаимодействия частиц, движущихся со скоростями, близкими к скорости света (релятивистских частиц), который вошел в теоретическую физику как метод **«Тамма — Данкова»**.

Академик Игорь Евгеньевич Тамм теоретически предсказал существование на поверхности полупроводниковых кристаллов своеобразных энергетических состояний («ловушек»). Они вошли в науку под названием **«поверхностных уровней Тамма»**.

●

Академики Сергей Иванович Вавилов и Павел Алексеевич Черенков открыли эффект «сверхсветового электрона». Оказалось, что в жидких и твердых средах электроны могут двигаться со скоростью большей, чем скорость света в этих средах (но, конечно, не большей скорости света в пустоте!). Электроны могут обгонять испускаемый ими свет. Этот эффект, получивший название **«эффекта Вавилова — Черенкова»**, нашел ряд ценных практических применений, в частности для регистрации быстрых заряженных частиц (так называемые черенковские счетчики частиц). Теория, объяснившая эффект Вавилова — Черенкова, была создана академиками Игорем Евгеньевичем Таммом и Ильей Михайловичем Франком. За открытие и объяснение этого явления П. А. Черенкову, И. Е. Тамму и И. М. Франку в 1958 году была присуждена Нобелевская премия.

С. И. Вавилов.

Академик Владимир Иосифович Векслер открыл носящий его имя принцип автофазировки частиц, ускоряемых в циклических ускорителях. На нем основана работа всех современных циклических ускорителей — синхротронов, фазотронов и синхрофазотронов. Несколько позже, независимо от Векслера, этот же принцип открыл американский физик Мак-Миллан. За это открытие оба они были удостоены международной научной премии.

●

Сложные молекулы органических веществ имеют спектры, состоящие из широких сплошных спектральных полос. Профессор Эдуард Владимирович Шпольский показал, что, растворяя органические вещества в специально подобранных растворителях и охлаждая полученные растворы до очень низких температур, можно получить спектры поглощения, состоящие из очень тонких спектральных линий, однозначно связанных со строением и свойствами молекул. Так была создана новая область молекулярной оптики. Это явление в научной литературе повсеместно называют **«эффектом Шпольского»**.

●

Полупроводники, так же как и другие вещества, могут поглощать свет, длины волн которого заключены в определенных пределах. Для света с бо́льшими длинами волн они прозрачны. Таким образом, существует граница для длин волн, при которой полупроводник перестает поглощать свет. Академик Леонид Вениаминович Келдыш теоретически предсказал, что под действием внешнего электрического поля эта граница должна смещаться в сторону бо́льших длин волн. Аналогичное предсказание сделал немецкий физик Франц. Вскоре профессор Виктор Сергеевич Вавилов получил экспериментальное подтверждение этого явления, известного теперь как **«эффект Келдыша — Франца»**.

●

Академик Сергей Николаевич Вернов и американский физик Ван Аллен при помощи научной аппаратуры, установленной на первых искусственных спутниках, независимо открыли существование радиационных поясов Земли. Оказалось, что Земля окружена несколькими слоями с повышенной плотностью заряженных частиц. Эти зоны называют **«радиационными поясами Вернова — Ван Аллена»**.

●

Академики Александр Михайлович Прохоров и Николай Геннадиевич Басов разработали основы новой области физики — квантовой электроники и создали первый квантовый молекулярный генератор на молекулах аммиака. За эти выдающиеся работы в 1964 году им, совместно с американским физиком Таунсом, была присуждена Нобелевская премия.

●

Ученые всего мира, исследующие физические процессы в горячей плазме, широко используют установки, названные необычным русским словом **«ТОКАМАК»**. Так сокращенно называют «тороидальные камеры в магнитном поле» — советские термоядерные установки, разработанные и построенные в Институте атомной энергии имени И. В. Курчатова под руководством академика Льва Андреевича Арцимовича.

Хроника подготовлена *В. А. Лешковцевым*

ВЕЛИКАЯ КНИГА НЬЮТОНА

(к 300-летию первого издания «Математических начал натуральной философии»)

Кандидат физико-математических наук
С. Р. ФИЛОНОВИЧ

Юбилей «Математических начал натуральной философии» Исаака Ньютона отмечается во всем мире как важнейшее событие культурной жизни. Такой чести удостаиваются лишь немногие научные произведения, и один этот факт говорит об огромном значении сочинения Ньютона для развития не только науки, но и всей цивилизации.

Как создавались «Начала»? Каково содержание этой книги? Какую роль сыграла она в развитии естествознания? Этим вопросам посвящена предлагаемая читателю статья.

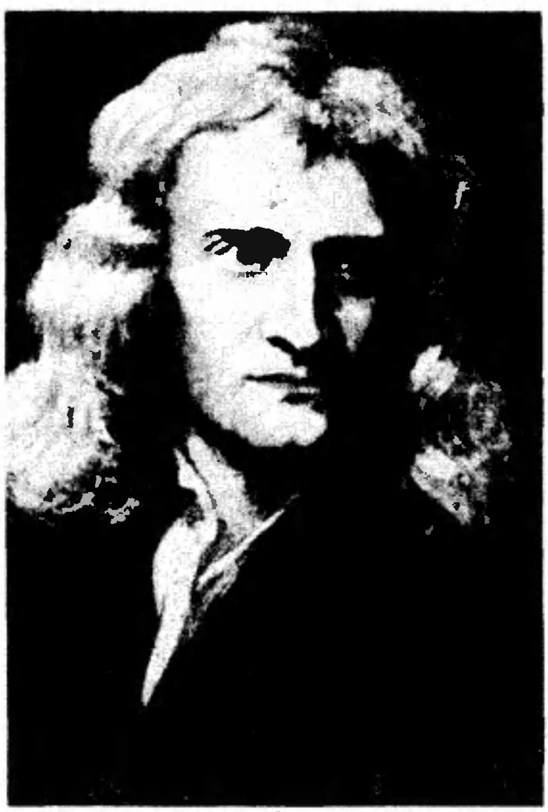
Начало «Начал»

Историкам науки очень редко удается установить, когда именно и при каких обстоятельствах у ученого возник замысел конкретной статьи или книги. «Начала» составляют счастливое исключение. Мы знаем о создании этой книги очень многое и даже можем указать событие, послужившее отправной точкой в работе Ньютона над ней.

Время: август 1684 года. Место: Кембридж, Англия. Действующие лица: Исаак Ньютон — член Лондонского королевского общества (Академия наук Англии), профессор математики и член Тринити-колледжа Кембриджского университета, и Эдмунд Галлей — астроном и математик, один из секретарей Лондонского королевского общества.

В 1684 году, к моменту посещения его Галлеем, Ньютон занимал видное положение в научном сообществе Англии. Он — признанный авторитет в вопросах оптики и математики. Однако он жил и работал изолированно от других ученых, изредка обмениваясь с ними письмами.

Молодой Галлей (ему было в это время 28 лет) приехал к Ньютону за советом. Его волновала задача, которую не могли решить многие искусные математики: по какой траектории будет двигаться планета, если со стороны Солнца на нее будет постоянно действовать сила, обратно пропорциональная квадрату расстояния? Галлей уже обсуждал эту проблему со своими коллегами по Лондонскому королевскому обществу Р. Гуком и К. Реном, и Гук даже утверждал, что знает ее решение. Однако Гук знал (точнее, предчувствовал) не решение, а ответ — траектория будет эллипсом, но представить соответствующее доказательство не смог. Гук, видимо, рассказал Галлею, что несколько лет назад он перепи-



Исаак Ньютон в возрасте 46 лет.

сывался на эту тему с Ньютоном. Может быть, Ньютон может доказать эту заколдованную теорему? И вот Галлей в Кембридже. На его прямой вопрос Ньютон дал столь же прямой ответ: он уже доказал, что траекторией планеты будет эллипс. Правда, Ньютону не удалось тут же найти в своих бумагах доказательство, но он пообещал Галлею прислать его через некоторое время в Лондон. Вскоре короткая работа Ньютона была передана с оказией Галлею. Прочитав ее, Галлей пришел в сильнейшее возбуждение и вновь отправился в Кембридж, на этот раз — чтобы убедить Ньютона опубликовать результаты, содержавшиеся в этой короткой работе. Дипломатический дар, которым, по словам современников, обладал Галлей, сделал свое дело: Ньютон согласился подготовить работу к печати. Королевское общество обещало помочь в издании книги.

«... я стоял на плечах гигантов»

Называя Ньютона творцом классической механики, мы отдаем должное его гению, но одновременно допускаем некоторое преувеличение. В действительности Ньютон выполнил сложнейший труд по обобщению и систематизации открытий своих предшественников, дополнив их множеством оригинальных результатов. Стоит перечислить хотя бы основные факты, которыми располагал Ньютон.

В начале XVII века Кеплер установил главные закономерности движения планет, поставив тем самым задачу их рационального объяснения. Примерно в это же время Галилей проводил исследования движения тел по наклонной плоскости и при свободном падении. Важнейшими итогами его работы стали принцип относительности движений и идея о возможности движения тел без внешних воздействий (по инерции). В трудах Декарта и других ученых эта последняя идея приобрела форму современного представления о прямолинейном и равномерном движении по инерции. Важные результаты были получены Гюйгенсом при изучении колебаний маятников, а также при исследовании проблемы удара. Им же было изучено равномерное движение тел по окружности. Догадки о характере силы, действующей на планеты со стороны Солнца, о ее зависимости от расстояний высказывались Реном, Гуком и Галлеем. Таким образом, Ньютон был во многом прав, когда писал: «Если я видел дальше других, то потому, что стоял на плечах гигантов».

На долю Ньютона выпала очень сложная задача приведения в систему накопленного к тому времени теоретического и экспериментального материала. Он блестяще справился с этой задачей, обогатив механику своими собственными достижениями.

Подготовка «Начал»

Подготовка первого издания «Начал» длилась примерно два с половиной года. Если учесть, что часть этого времени заняли поездки в Вулсторп и что было написано несколько вариантов работы, то нельзя не удивиться огромной работоспособности Ньютона. Сохранились воспоминания молодого человека, однофамильца ученого, служившего у него секретарем, о том, как работал создатель «Начал»:

«В это время [1685—1686 гг.— *С. Ф.*] он писал свои "Principia", по его распоряжению я переписывал это великолепное произведение, прежде чем послать его в печать. После напечатания сэр Исаак послал меня с книгами для подарков начальствующим лицам в колледж и своим знакомым; кое-кто из них ... сказал, что надо лет семь учиться, прежде чем что-нибудь поймешь в этой книге.

Сэр Исаак в это время был очень любезным, спокойным и очень скромным, и, по-видимому, никогда не впадал в раздражение; за исключением одного случая я никогда не видел, чтобы он смеялся ... Занятиями он увлекался настолько, что часто забывал обедать ... Спал он всегда 4 или 5 часов ... Думаю, его немало печалила необходимость тратить время на сон и еду. Хотя у него была большая библиотека, он редко справлялся в книгах ...

Он не позволял себе никакого отдыха и передышки, не ездил верхом, не гулял, не играл в кегли, не занимался спортом; он считал потерянным всякий час, не посвященный занятиям. Редко уходил он из своей комнаты, за исключением тех случаев, когда ему надо было читать лекции...»

Интересно, что при подготовке «Начал» Ньютон многие результаты, к которым он пришел, используя дифференциальное и интегральное исчисление (в терминологии Ньютона — метод флюксий), получил заново, применяя так называемый «синтетический» метод, основанный на комбинации геометрических построений и динамических соображений. Для читателей XX века такая форма представления материала очень затрудняет чтение книги. Сделано же это было ... чтобы облегчить понимание ее содержания современниками. Даже много лет спустя после первого издания «Начал» Ньютон писал, что «в наше время для неискушенных людей восприятие Анализа [т. е. метода флюксий — *С. Ф.*], с помощью которого были найдены эти положения, затруднительно».

Большую помощь в подготовке «Начал» к печати оказал все тот же Галлей. Он не только устранил множество описок, но и позаботился о том, чтобы улучшить оформление книги. По традиции того времени, если в книге было много иллюстраций, то они выносились из текста на отдельные листы — так было проще изготавливать клише для печати. Галлей настоял на том, чтобы рисунки помещались прямо в тексте, что, конечно, облегчало чтение. Заметим, что это повысило стоимость издания, а ведь Галлею пришлось печатать «Начала» на свои средства, поскольку Королевское общество испытывало в это время финансовые затруднения.

Наконец, в середине 1687 года великая книга Ньютона "Philosophia naturalis principia mathematica" увидела свет.

Познакомимся вкратце с ее содержанием.

По страницам «Начал»

«Начала» открывались предисловием автора, в котором он пояснил стоявшую перед ним цель: применение математики к натуральной философии, т. е. к физике. Далее шли Определения величин и понятий, на которых строится последующее изложение. Заметим, что выработка этих определений была делом совсем не простым. Так, например, Определение III звучит следующим образом:

Эдмунд Галлей (1656—1742).

«Врожденная сила материи есть присущая ей способность сопротивления, по которой всякое отдельно взятое тело, поскольку оно предоставлено самому себе, удерживает свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения».

С одной стороны, очевидно, что здесь Ньютон говорит о важнейшем свойстве тел — инертности, и следовательно, это определение отражает реальность. С другой стороны, в этом месте Ньютон приписывает всем телам «врожденную» силу инерции, существующую независимо от системы отсчета. Такой взгляд на силы инерции в дальнейшем не был принят физиками. Мы же привели это определение для того, чтобы показать, с каким трудом рождались основные представления механики: даже великий Ньютон при их формулировке допускал неточности.

В Поучении к Определениям Ньютон говорит о понятиях абсолютного пространства и абсолютного времени:

«Абсолютное, истинное математическое время само по себе и по са-

мой своей сущности, без всякого отношения к чему-либо внешнему, протекает равномерно ...

Абсолютное пространство по самой своей сущности, безотносительно к чему бы то ни было внешнему, остается всегда одинаковым и неподвижным».

Введение понятий об абсолютном пространстве и абсолютном времени было связано с общими взглядами Ньютона на устройство мира: он считал, что существует неподвижный центр Вселенной и даже предлагал эксперименты для доказательства этого предположения. В то же время использование этих понятий позволило в первом приближении правильно и, что немаловажно, просто решать многие задачи механики. Стоит отметить, что при первой формулировке последовательной теории движения тел такие представления о пространстве и времени были неизбежны. Лишь спустя два столетия, в результате развития физики, ученые в рамках теории относительности пришли к представлениям о пространстве и времени, более полно отражающим реальность.

Далее идут «Аксиомы или законы движения». Вот как формулирует их Ньютон:

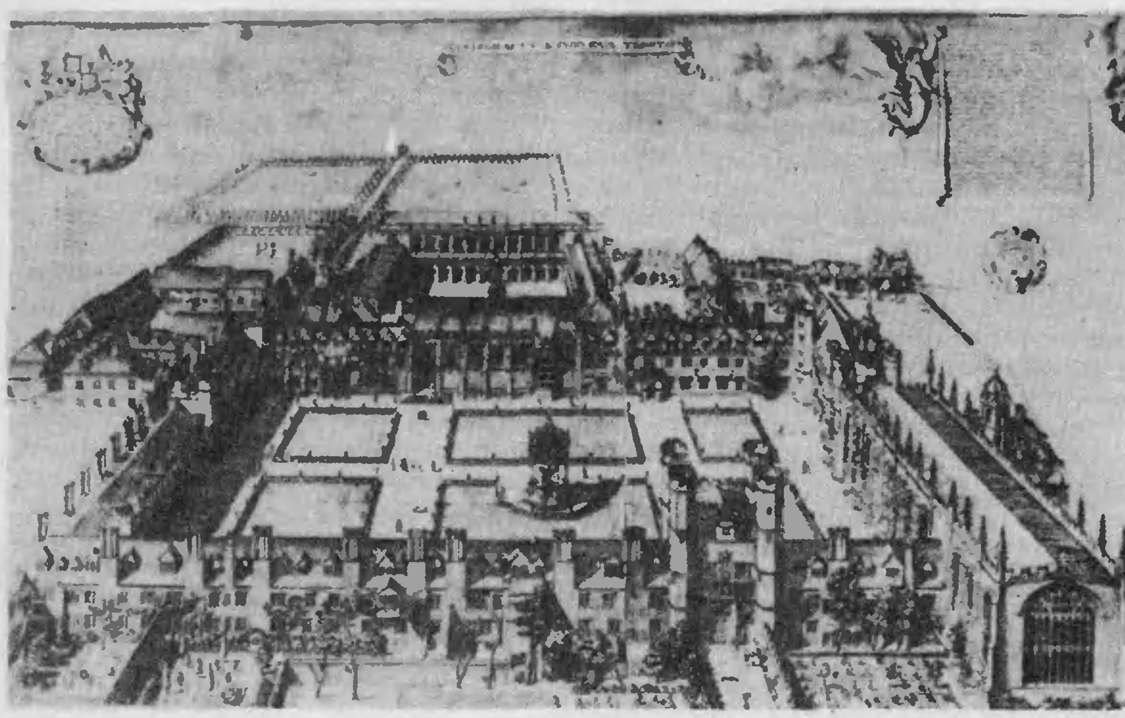
«ЗАКОН I. Всякое тело продолжает удерживаться в своем состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения, пока и поскольку оно не понуждается приложенными силами изменять это состояние.

ЗАКОН II. Изменение количества движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.

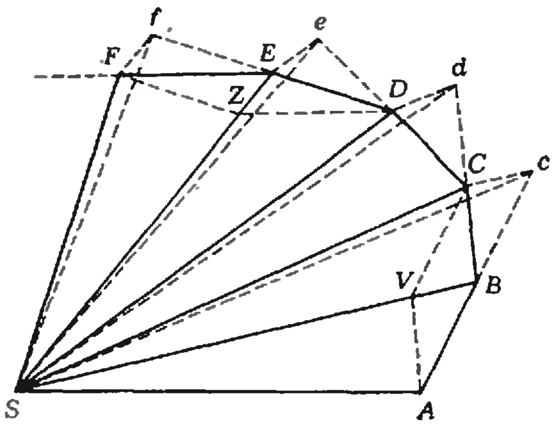
ЗАКОН III. Действию всегда есть равное и противоположное противодействие; иначе: действия двух тел друг на друга между собою равны и направлены в противоположные стороны».

На этом заканчивается вводная часть «Начал» и начинается изложение основного материала. Он разделен на три книги (части).

Книга первая под названием «О движении тел» начинается с рассмотрения математических теорем, на основе которых строится дальнейшее изложение. Вслед за математическим введением приводятся решения множества задач, связанных с движением тел под действием так называемых центральных сил, т. е. сил, действующих по прямой, соединяющей тело с некоторым центром. Боль-



Тринити-колледж Кембриджского университета (гравюра XVII в.). Комнаты Ньютона располагались между Главными воротами и церковью Св. Троицы (справа внизу).



шинство задач имеет самое непосредственное отношение к небесной механике. Задачи рассматриваются в строгой последовательности, так что результаты, полученные ранее, используются при решении следующих задач. Из-за этого трудно проследить за рассуждениями Ньютона, выбрав какую-нибудь теорему из середины книги. Это относится, например, к задаче IX, которую Ньютон обсуждал с Галлеем: *«Предполагая, что центростремительная сила обратно пропорциональна квадратам расстояний мест до центра и что абсолютная величина этой силы известна, требуется найти кривую, которую опишет тело, выходящее из заданного места с заданной скоростью»*.

Чтобы читатель мог составить представление о методе изложения, использованном Ньютоном, мы приведем доказательство теоремы I из отдела II «О нахождении центростремительных сил», важной для обоснования второго закона Кеплера (закона площадей). Ее формулировка такова: *«Площади, описываемые радиусами, проводимыми от обращающегося тела к неподвижному центру сил, лежат в одной плоскости и пропорциональны временам описания их»*.

Доказательство теоремы.

«Разделим время на равные промежутки, и пусть в течение первого из них тело по инерции описывает прямую AB. Если бы оно не подвергалось никакому действию, то, продолжая идти по прямой, оно пришло бы в c (по закону I), пройдя путь Bc, равный AB, и тогда описанные радиусами AS, BS, cS, проведенными к центру сил S, площади ASB и BSc равны. В действительности же, когда тело пришло в B, то пусть на него подействовала центростремительная сила одним, но зато большим натиском, вследствие которого тело отклонится от прямой Ac и будет продолжать свой путь по прямой BC. Проведем прямую cC параллельно BS до встречи в точке C с BC, тогда к концу второго промежутка времени тело (по следствию I законов)) придет в точку C, лежащую в одной плоскости с треугольником ASB. Проведем SC; по параллельности SB и Cc площади треугольников SBC и SBc будут равны между собою, а следовательно, они равны и площади треугольника SAB.*

Рассуждая подобным же образом, увидим, что если центральная сила действует последовательно в точках C, D, E и т. д. и заставляет тело описывать прямые CD, DE, EF и т. д., то все эти прямые будут лежать в одной плоскости, и площади треугольников SCD и SBC, SDE и SCD, SEF и SDE будут между собою равны. Следовательно, в равные времена описываются равные площади, расположенные в неподвижной плоскости. Слагая, получим, что какие угодно суммы этих площадей, как SADS и SAFS, будут относиться как времена их описания. Увеличивая затем число треугольников и уменьшая их высоту бесконечно, получим, что в пределе периметр ADF будет кривою линией и центральная сила, которою тело отклоняется все время от касательной к этой кривой, действует непрестанно, площади же SADS и SAFS, описываемые радиусом, оставаясь постоянно пропорциональными временам их описания, будут и в пределе этим временам пропорциональны.»

В таком стиле рассматривается задача за задачей. В последнем разделе первой книги представлены элементы корпускулярной оптики, в частности, на основе законов механики обсуждается закон преломления света.

Вторая книга «Начал» называется, как и первая, «О движении тел». Знакомство с ней мы отложим до следующего номера журнала.

---

*) Это следствие гласит: *«При силах совокупности* [т. е. при действии двух сил — С. Ф.] *тело описывает диагональ параллелограмма в то же самое время, как его стороны — при раздельных»*.

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ШКОЛЬНИКОВ

Здесь приводятся две небольшие заметки, написанные десятиклассниками Ярославом Карповым из Ленинграда (школа № 239) и Александром Лобковским из Черноголовки Московской области (школа № 82) на совершенно разные темы. Их объединяет то, что обе статьи — «компьютерно-математические»: в них математические рассуждения позволяют получить интересные наблюдения только после подключения к работе ЭВМ.

Оптимальная кодировка почтового индекса

Я. Ю. КАРПОВ

Передо мной встал вопрос: почему на конвертах используется именно такой набор цифр (рис. 1) — ведь эти кодировки можно заменить другими. Посмотрим, сколько различных наборов можно придумать (таблица 1). Всего $2\times4\times3\times2\times2\times2\times3\times2=1152$ вариантов.

Чтобы из этих наборов отобрать лучший, нужно сначала выбрать критерий, по которому мы будем сравнивать наборы. Как известно, коды, используемые на конвертах, проверяются машиной. Поэтому критерий оптимальности набора должен заключаться именно в том, что при этом наборе машина будет делать меньше ошибок в сортировке, чем при других наборах.

Для характеристики различий кодировки цифр введем термин — *расстояние* между двумя кодировками. Расстояния должны удовлетворять таким условиям:

1) Чем больше расстояние между двумя кодировками, тем меньше вероятность того, что автомат примет одну кодировку за другую.

2) Расстояние от кодировки A до кодировки B должно быть равно расстоянию от кодировки B до кодировки A.

Этим условиям удовлетворяет *расстояние Хемминга*. В нашем случае — это количество «несовпадающих» символов в кодировках, т. е. количество несовпавших палочек.

П р и м е р: Найдем расстояние между кодировками 5 и 2 (рис. 2). Расстояние между этими кодировками равно 5, так как у этих кодировок 5 несовпадающих палочек.

Обозначим через p *базовую вероятность ошибки*, т. е. вероятность принятия автоматом палочки за «непалочку» или наоборот. Тогда вероятность правильного распознавания одной палочки равна $1-p$.

Найдем, например, вероятность принятия цифры 6 за 0 (рис. 3). Для этого нужно, чтобы 8 палочек и два пробела были поняты автоматом правильно, а одна палочка была принята за пробел. Вероятность этого события равна $p(1-p)^8$.

Вообще, при распознавании автоматом любой цифры вероятность того, что эта цифра будет принята за другую, равна $p^r(1-p)^{9-r}$, где r — расстояние между этими двумя кодировками по Хеммингу.

При распознавании автоматом одной конкретной цифры i вероятность того, что ее ошибочно примут за любую другую, равна

$$\sum_{j\neq i} p^{r_{i,j}}(1-p)^{9-r_{i,j}},$$

где $r_{i,j}$ — расстояние между цифрами i и j.

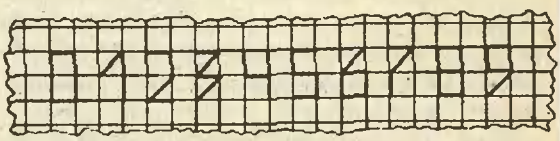


Рис. 1.

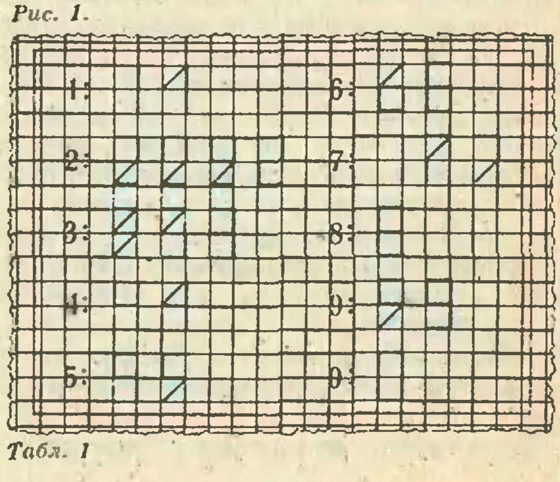


Табл. 1

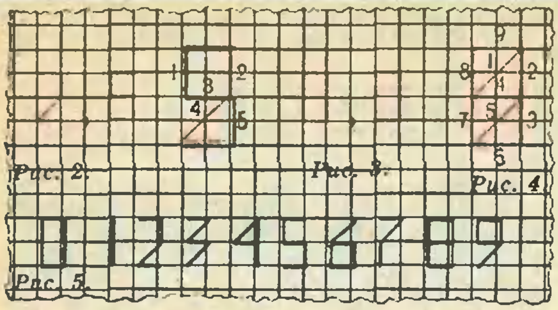


Рис. 2 Рис. 3 Рис. 4 Рис. 5

Предположим, что все цифры встречаются одинаково часто на любом из мест. Тогда средняя вероятность неправильного распознавания какой-то цифры равна

$$P=\frac{1}{10}\sum_{i=0}^{9}\sum_{j=0} p_{j\neq i}^{r_{i,j}}(1-p)^{9-r_{i,j}}. \qquad (*)$$

Эту вероятность мы и будем использовать в качестве критерия качества набора: чем она меньше, тем «лучше» набор.

Основанный на этом критерии перебор всех 1152 вариантов кодов был получен на ЭВМ ЕС-1035. Программа перебора была составлена на языке Фортран. В программе все варианты записей цифр кодировались в виде массивов, состоящих из 1 и 0, по следующему принципу (рис. 4): если в записи цифры присутствует палочка на данном месте, то в кодировке на месте с номером, указанном на схеме, будет записана 1, если нет — то 0.

Пример: Закодируем цифру 2, заданную в обычном виде (как на конвертах):

0, 1, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1.

Варианты кодировок цифры i записывались в матрице ki, где количество строк равно 9, а количество столбцов совпадало с количеством вариантов кодировок.

Для каждого значения базовой вероятности ошибки p перебирались все 1152 варианта наборов, их качество оценивалось по формуле (*), из них выбирался лучший и второй по качеству. Для этого для каждого набора формировалась матрица расстояний, которая выводилась для лучшего набора. Так как кодировки 8 и 0 имеют только по одному варианту, эти цифры не перебирались, и в выводе не участвовали.

Получились следующие результаты. При вероятности базовой ошибки в пределах

$$0<p\leqslant 0{,}3$$

наилучшей кодировкой оказалась та самая, которая используется на конвертах (см. рис. 1). Так как реальная вероятность ошибки распознающего автомата на почте заведомо лежит в этом пределе, то данный набор является наилучшим.

Второй по качеству в этом промежутке является набор, показанный на рисунке 5. Второй набор отличается от первого всего в двух местах, и вероятность ошибки при этом наборе ненамного больше, чем при лучшем.

При $p=0{,}4$ эти наборы меняются местами.

При увеличении вероятности до 0,5 все вероятности становятся равными, поэтому очевидно, что все наборы станут одинаковыми.

Конечно, мне было бы приятнее, если бы моя программа выявила не принятый на почте набор, а другой: я тогда смог бы предложить заменить принятый набор на свой — лучший.

Увы! Наверное, когда на почте отбирали оптимальный набор, задачу оптимизации решали так же, как и я.

От редакции. К своим материалам, опубликованным выше, Я. Карпов приложил распечатки программ (на языке Фортран), реализующие алгоритмы, описанные в статье. Распечатки дают представление о достаточно высокой программистской культуре автора статьи. К ним имеются ясно сформулированные комментарии, позволяющие легко читать программы. Однако недостаток места, а также неудачный выбор языка (Фортран не входит в школьный курс информатики) не позволили нам опубликовать эту часть материала.

Авторов статей, рассчитанных на использование ЭВМ, мы просим обязательно присылать свои листинги; желательно, чтобы программы были составлены на языке Бейсик (или Рапира).

Математические узоры на плоскости

А. Э. ЛОБКОВСКИЙ

В последнее время в прикладной математике появились работы, связанные с исследованием картин, возникающих на экране дисплея, если каждую точку плоскости по некоторому правилу окрасить в тот или иной цвет. Правила окрашивания могут быть самые разнообразные.

Алгоритм, рассмотренный здесь, до того прост, что его легко может реализовать на компьютере начинающий программист. Выглядит он так: для точки плоскости $(x; y)$ вычисляется величина $c=[f(x, y)]$, где $f(x, y)$ — выбранная функция координат, а квадратные скобки обозначают целую часть числа; если число c нечетное, точка закрашивается, если четное, то нет.

Вся плоскость при этом разобьется на конечные одноцветные области. Размер областей уменьшается при удалении от начала координат. Поэтому на компьютере, у которого размеры точки на экране могут быть больше размеров таких областей, не всегда можно точно воссоздать реальную картину. На самом деле в нашем алгоритме вся плоскость разбивается на клетки, и каждая клетка закрашивается тем же цветом, что и ее центр. Поэтому, если на территории клетки было несколько различных областей, то полученный рисунок будет отличаться от истинного. Уменьшая размер клетки, т. е. увеличивая масштаб изображения, мы улучшаем точность воспроизведения. Соответствующая программа на языке Бейсик для экрана $X\times Y$ выглядит так:

```
10 INPUT S
20 FOR x=0 TO X
30 FOR y=0 TO Y
40 IF (INT(f(x,y)/S)) mod 2=1 THEN
   PLOT (x, y)
50 NEXT y
60 NEXT x
```

Роль масштаба здесь играет величина S.

На рисунках, показанных на второй странице обложки, вы видите узоры, получившиеся при разных S для $f(x, y)=x^2+y^2$ (рис. 1, а—в), $f(x, y)=xy$ (рис. 2, а—в), $f(x,y)=x^2-y^2$ (рис. 3, а—в).

Ярко выраженная периодичность, которую можно увидеть при малых S на всех графиках, как ни странно,— издержка нашего метода воспроизведения. Период на всех картинках равен S при четном S и $2S$ — при нечетном. Докажем это на примере $f(x, y)=x^2+y^2$. Действительно, цвет точки

$$(x_1; y_1)=(x+kS; y+lS)$$
$(k, l$ — целые числа)

определяется выражением:

$$\frac{x_1^2+y_1^2}{S}=\frac{(x+kS)^2+(y+lS)^2}{S}=$$
$$=\frac{x^2+y^2}{S}+S(2k+2l+k^2S+l^2S).$$

Видно, что дробные части чисел $(x_1^2+y_1^2)/S$ и $(x^2+y^2)/S$ совпадают, и поэтому при четном S цвет точки $(x_1; y_1)$ (т. е. четность выражения $[(x_1^2+y_1^2)/S]$) совпадает с цветом точки $(x; y)$ при любых k и l, а при нечетном S только при k и l одной четности. Тот факт, что этот период наименьший, мы предлагаем доказать читателю.

На всех представленных графиках число S — четное. Вы можете сами убедиться, что при нечетном S черные и белые круги будут чередоваться.

Можно без конца любоваться разнообразием, возникающим при таком, казалось бы, примитивном методе построения рисунка. Для $f(x, y)=x^2+y^2$, кроме ярко выраженного семейства окружностей с периодом T, можно увидеть еще много (более 10) менее контрастных семейств окружностей, расположенных в узлах квадратной решетки с периодом $T/2$, $T/3$, $T/4$, $T/5$, $T/7$, $T/9$ и даже $T/11$. Интересно было бы ответить на такие вопросы: почему возникают «вторичные» окружности, каковы периоды их решеток (если они вообще периодичны) и т. п.

Все сказанное относится также и к графикам с $f(x, y)=xy$ и $f(x, y)=x^2-y^2$, с той разницей, что на этих рисунках мы видим семейства гипербол.

В заключение хотелось бы пожелать читателям успеха в исследовании этой интересной проблемы, экспериментировании с различными $f(x, y)$, например x^3+y^3 или $\operatorname{arctg}(x+y)$.

Задачник «Кванта»

Задачи

M1071—M1075, Ф1083—Ф1087

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 февраля 1988 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11 — 87» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1071» или «Ф1084». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи M1071 — M1075 предлагались в 1987 году на Ленинградской городской олимпиаде.

M1071. На доске нарисовано поле для игры в «цифры»:

((((((((__*__)*__)*__)*__)*__)*__)*__)*__)*__)

Двое играющих ходят по очереди. Первый игрок начальным ходом записывает на месте первого (самого левого) пробела (__) какую-нибудь цифру. Каждый дальнейший ход состоит в том, чтобы записать цифру на месте очередного пробела и заменить стоящую слева звездочку (*) на знак сложения или умножения; при этом ни одна цифра не должна встречаться дважды. В конце игры вычисляется значение полученного выражения. Если это четное число, то выигрывает первый игрок, нечетное — второй. Кто выигрывает при правильной игре?

С. А. Генкин

M1072. Разложите на простые множители число

$$989 \cdot 1001 \cdot 1007 + 320.$$

С. В. Фомин

M1073. В шестиугольнике $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ нашлась точка O, из которой все стороны видны под углом 60°. Докажите, что если $OA_1 > OA_3 > OA_5$ и $OA_2 > OA_4 > OA_6$, то $A_1A_2 + A_3A_4 + A_5A_6 < A_2A_3 + A_4A_5 + A_6A_1$.

А. С. Меркурьев

M1074. Дана стопка из $2n+1$ карточек, с которой разрешается производить следующие две операции:

(А) сверху снимается часть карточек и перекладывается вниз с сохранением порядка;

(Б) верхние n карточек с сохранением порядка выкладываются в n промежутков между нижними $n+1$ карточками.

Докажите, что с помощью указанных операций из исходного расположения карточек в стопке нельзя получить более $2n(2n+1)$ различных расположений карточек.

Д. В. Фомин

M1075. Найдите наибольшее натуральное число, в десятичной записи которого каждая цифра (кроме крайних) строго меньше полусуммы двух соседних с ней цифр.

С. Е. Рукшин

Ф1083. Однородный кирпич $ABCDA'B'C'D'$ (рис. 1) обладает следующим свойством: если разрезать его произвольной плоскостью, проходящей через ребро AA', то каждая из двух частей кирпича, поставленная на новую грань $AEE'A'$ (рис. 2), не падает. Найти соотношения между размерами кирпича, при которых это возможно.

С. Б. Шлосман

Ф1084. Если к обмерзшему стеклу на незначительное время прижать пятак, то вдоль края пятака на стекле протаивает кружок. Почему?

Л. А. Ашкинази

Ф1085. На рисунке 3 изображен процесс, совершаемый над идеальным газом и переводящий его из состояния A в состояние B. Найдите на графике участки процесса, где температура газа повышается (понижается).

И. Ю. Потеряйко

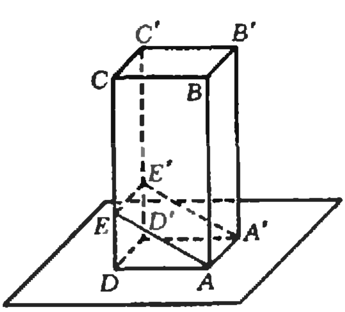


Рис. 1.

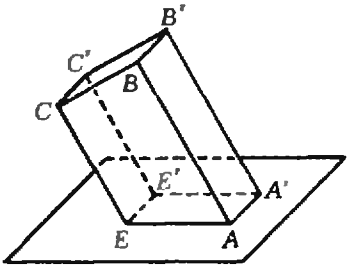


Рис. 2.

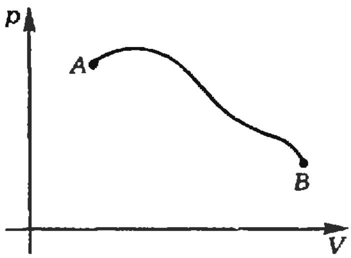


Рис. 3.

Ф1086. Суммарная напряженность электрического поля, создаваемого двумя точечными зарядами, в точке A равна нулю, а в точке B модули напряженностей полей этих зарядов одинаковы. Показать, что в точке B напряженность результирующего поля направлена вдоль прямой AB.

В. Т. Карапетян

Ф1087. Математический маятник совершает колебания. Угол максимального отклонения от положения равновесия $\alpha_0 \leqslant \pi/2$. Укажите углы α_1 и α_2, при которых ускорение груза принимает наименьшее и наибольшее значения. Нарисуйте графики зависимости α_1 и α от α_0.

О. А. Седлецкий

Problems

M1071—M1075, P1083—P1087

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than February 1st 1988, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write

M1071. The board for playing the game called "digits" looks like this: ((((((((__*__)*__)*__)*__)*__)*__)*__)*__)
The two players make their moves in turn. The first player begins by writing the digit of his choice in the first space (__) from the left. In the following moves the empty spaces are successively (from left to right) replaced by digits and the stars (*) by addition or multiplication signs (each move consists in writing a sign and the digit immediately to its right); no digit may appear twice. At the end of the game the expression obtained is calculated. If the result is an even number, the first player wins, otherwise the second one does. Who wins if both players do their best?

S. A. Genkin

M1072 Express the following number as a product of primes

$$989 \cdot 1001 \cdot 1007+320.$$

S. V. Fomin

M1073. All the sides of the hexagon $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ are seen from its inner point 0 under an angle of 60°. Prove that

$$OA_1 > OA_3 > OA_5 \text{ and } OA_2 > OA_4 > OA_5$$

imply $A_1A_2+A_3A_4+A_5A_6 < A_2A_3+A_4A_5+A_6A_1$.

A. S. Merkuriev

M1074. The following operations may be performed on a stack of $2n+1$ cards:
(A) a certain number of cards are removed from the top of the stack and placed under it, order being preserved;
(B) the top n cards are slipped back into the stack, in order, between the $n+1$ bottom cards.
Prove that no more than $2n(2n+1)$ different arrangements of cards in the stack may be obtained from a given one using these operations.

D. V. Fomin

M1075. Find the largest natural number in whose decimal expansion each digit (except the first and the last) is strictly less than the half-sum of its two neighbours.

S. E. Rukshin

P1083. A uniform brick has the following property (see figure рис. 1): if it is cut by any plane $ABCDA'B'C'D'$ passing through the edge AA' then each of the two parts obtained does not fall if placed on the new face $AEE'A'$ (see рис. 2). Find the relations between the measurements of the brick for which this is possible.

S. B. Shlosman

NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

P1084. If a five kopeck coin is held briefly against frost covered glass, a circle appears along the rim of the coin. Why?

L. A. Ashkinazi

P1085. Figure рис. 3 (p. 23) shows a process which brings the ideal gas from state A to state B. Locate the parts of the graph where the gas temperature increases (decreases).

I. Yu. Poteryaiko

P1086. The resulting tension of the electric field created by two point charges at the point A is zero, while at the point B the absolute values of the fields of the two charges are equal. Show that the resulting field at the point B is directed along the line AB.

V. T. Karapetyan

P1087. A mathemetical pendulum oscillates. The maximum angle away from the equilibrium position is $\alpha_0 \leqslant \pi/2$. Find angles α_1 and α_2 where the weight's acceleration assumes its largest and its smallest values. Plot the dependances of α_1 and α_2 on α_0.

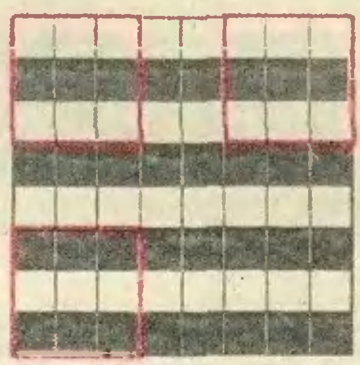
O. A. Sedletski

Решения задач

М1051 — М1055, Ф1063 — Ф1066

М1051. *В левый нижний угол шахматной доски 8×8 клеток поставлено в форме квадрата 3×3 девять фишек. Фишка может перепрыгнуть через любую другую фишку, симметрично отразившись от нее, если соответствующее поле свободно. Можно ли несколькими такими ходами собрать все фишки в виде квадрата 3×3*
а) в левом верхнем углу?
б) в правом верхнем углу доски?

В обоих случаях о т в е т отрицательный. Чтобы убедиться в этом, окрасим доску по горизонталям: первую горизонталь — в черный цвет, вторую — в белый, третью — снова в черный и т. д. (см. рисунок). Очевидно, что при прыжке фишка всегда попадает на поле того же цвета, поэтому в начальном и конечном квадрате 3×3 должно быть одинаковое число, скажем, черных полей. Но в нижнем квадрате их 6, а в верхнем — левом или правом — 3.



Задачу а) можно точно так же решить и с обычной шахматной раскраской.

Я. Е. Брискин

М1052. *Докажите, что из n четырехугольников, отсекаемых от выпуклого n-угольника диагоналями, не более $n/2$ могут оказаться описанными около окружности. Приведите пример 8-угольника, у которого таких четырехугольников 4.*

Если бы можно было отсечь больше $n/2$ описанных четырехугольников, то среди них нашлось бы два соседних, — имеющих две общие стороны. Обозначим их $ABCD$ и $BCDE$ (рис. 1). У каждого из них суммы противоположных сторон равны:

$$AB+CD=BC+AD, \quad BC+DE=CD+BE.$$

Отсюда получаем, что

$$AB+DE=AD+BE. \qquad (*)$$

Исходный n-угольник выпуклый, поэтому его диагонали AD и BE пересекаются в некоторой точке P. По

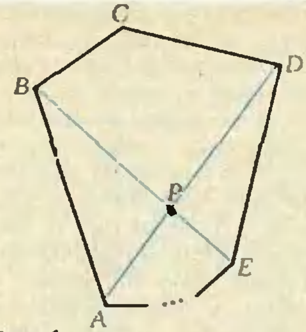


Рис. 1.

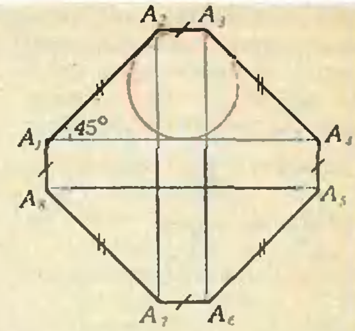


Рис. 2.

неравенству треугольника

$$AD+BE=AP+BP+PD+PE>AB+DE,$$

что противоречит (*).

Чтобы построить нужный 8-угольник, опишем около окружности равнобокую трапецию $A_1A_2A_3A_4$ с углами в 45° при основании A_1A_4, а затем достроим ее до 8-угольника $A_1A_2...A_8$ как показано на рисунке 2. Аналогично строится n-угольник, от которого можно отсечь диагоналями $[n/2]$ описанных четырехугольников.

Н. М. Седракян

М1053. *Докажите, что в последовательности чисел Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., где каждое число равно сумме двух предыдущих, при $m\geqslant 2$ встретится не менее 4 и не более 5 m-значных чисел.*

$u_n=\dfrac{\tau^{n+1}-(-1/\tau)^{n+1}}{\sqrt{5}}$,

где $\tau=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Пусть u_n — последовательность Фибоначчи: $u_0=1$, $u_1=1$,

$$u_{n+1}=u_n+u_{n-1}. \qquad (1)$$

Нам понадобится следующая простая оценка отношения $r_n=u_{n+1}/u_n$ соседних чисел Фибоначчи: начиная с $u_3/u_2=3/2$, отношение r_n не меньше $3/2=1{,}5$ и не больше $5/3=1{,}66...<1{,}7$.

Ее легко доказать методом математической индукции. В силу (1)

$$r_n=\frac{u_{n+1}}{u_n}=1+\frac{u_{n-1}}{u_n}=1+\frac{1}{r_{n-1}}.$$

Поэтому, если

$$\frac{3}{2}\leqslant r_{n-1}\leqslant\frac{5}{3}, \qquad (2)$$

т. е. $2/3\geqslant 1/r_{n-1}\geqslant 3/5$, то r_n оценивается сверху числом $1+2/3=5/3$, а снизу — числом $1+3/5=8/5>3/2$. А поскольку оценка (2) верна для $n=3$, она верна и для всех $n\geqslant 3$.

Пусть u_k — наименьшее m-значное число Фибоначчи, $m\geqslant 2$. Тогда $u_k\geqslant 10^{m-1}$, $u_{k+1}\geqslant 1{,}5u_k$,

$$u_{k+2}=u_{k+1}+u_k\geqslant 2{,}5u_k,$$
$$u_{k+3}\geqslant(2{,}5+1{,}5)\,u_k=4u_k,$$
$$u_{k+4}\geqslant(4+2{,}5)\,u_k=6{,}5u_k,$$

и потому $u_{k+5}\geqslant 10{,}5u_k>10^m$ — уже не менее, чем $(m+1)$-значное число. Таким образом, m-значных чисел Фибоначчи не более 5.

С другой стороны, $u_{k-1}<10^{m-1}$, $u_k<1{,}7u_{k-1}$ и аналогично предыдущему мы получим, что $u_{k+3}<7{,}1u_{k-1}<10^m$. Следовательно, m-значных чисел Фибоначчи не менее 4.

Можно решить эту задачу иначе, воспользовавшись явной формулой для чисел Фибоначчи *), приведенной на полях.

Н. Б. Васильев

*) См., например, книгу «Заочные математические олимпиады», М.: Наука, 1987, задача 6-11.

M1054. *Докажите, что шесть точек попарного касания четырех сфер всегда лежат на одной сфере или на одной плоскости.*

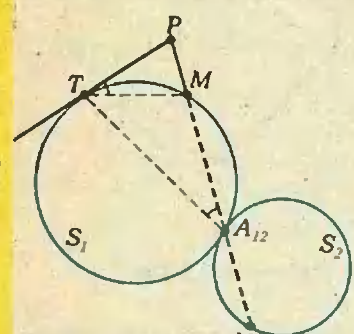


Рис. 1.

Если PT — касательная к S_1, то $\angle PTM=\angle PA_{12}T$, следовательно, $\triangle PTM \sim \triangle PA_{12}T$ и $PM:PT=PT:PA_{12}$.

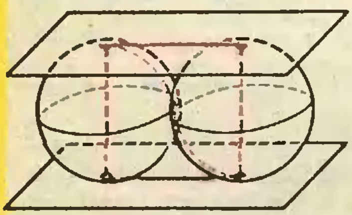


Рис. 2.

Если центры сфер лежат в одной плоскости, то и все точки их попарного касания лежат в этой плоскости.

Пусть центры не лежат в одной плоскости. Обозначим сферы через S_1, S_2, S_3, S_4, точку касания сфер S_i и S_j — через A_{ij}, а их общую касательную плоскость, проведенную через A_{ij}, — через α_{ij} $(1\leqslant i<j\leqslant 4)$. Достаточно доказать, что точка O, в которой пересекаются три из этих плоскостей, касающиеся сферы S_4, α_{14}, α_{24} и α_{34} — лежит и на трех других плоскостях (существование точки O вытекает из того, что центры данных сфер не лежат в одной плоскости). Действительно, в таком случае каждый отрезок OA_{ij} лежит в плоскости α_{ij}, т. е. касается сфер S_i и S_j. Следовательно, точка O равноудалена от всех точек A_{ij} и является центром проходящей через них сферы: например, отрезки OA_{14} и OA_{24} равны как касательные к S_4, OA_{14} и OA_{13} — как касательные к S_1 и т. д.

Докажем, что через точку O проходит плоскость α_{12} (α_{23} и α_{13} рассматриваются аналогично). Заметим, что касательные из O к S_1 и S_2 равны ($OA_{14}=OA_{24}$). Теперь остается воспользоваться тем, что

Геометрическое место точек, касательные из которых к сферам S_1 и S_2 равны, есть плоскость α_{12}.

(Очевидно, что все касательные из любой точки P плоскости α_{12} к S_1 и S_2 равны PA_{12}. Если же P не лежит в этой плоскости, и прямая PA_{12} пересекает сферы S_1 и S_2, кроме A_{12}, еще в некоторых точках M и N, то касательные к S_1 и S_2 равны $\sqrt{PA_{12}\cdot PM}$ и $\sqrt{PA_{12}\cdot PN}$, но $PM\neq PN$ — см. рис. 1).

Наше рассуждение годится и в случае, когда все сферы лежат одна вне другой, и когда три из них лежат внутри четвертой. Нетрудно убедиться, что в первом случае сфера, проходящая через точки A_{ij}, «полувписана» в тетраэдр с вершинами в центрах данных сфер, т. е. касается всех его ребер (в точках A_{ij}). Аналогичное верно и во втором случае.

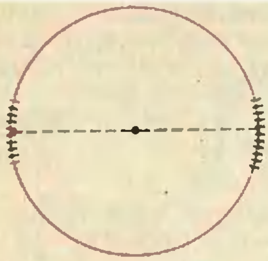
Упомянем еще одно решение, использующее инверсию в пространстве (см. статью В. М. Уроева «Инверсия» в «Кванте» № 5 за 1984 г.). При инверсии с центром A_{12} сферы S_1 и S_2 перейдут в параллельные плоскости, а S_3 и S_4 — в сферы, касающиеся этих плоскостей и друг друга (рис. 2). Очевидно, что 5 точек касания, возникающие на преобразованной конфигурации, лежат в одной плоскости. Рассматриваемая инверсия превращает эту плоскость в сферу (или плоскость), проходящую через A_{12}.

В. Н. Дубровский, Ю. К. Коба

M1055. *На окружности имеется 21 точка. Докажите, что среди дуг с концами в этих точках не менее 100 дуг, не превосходящих 120°.*

Очевидно, что среди трех дуг с концами в любых трех точках окружности хотя бы одна не превосходит 120°. Поэтому, если соединить отрезком каждую пару данных точек, определяющую дугу величиной не больше 120°, получится граф, в котором *среди любых трех точек хотя бы две соединены*. Этой информации уже достаточно, чтобы доказать утверждение задачи, т. е. на языке графа, что число проведенных отрезков не меньше 100.

Пусть A_1 — точка, из которой выходит наименьшее число отрезков; обозначим их A_1A_2, A_1A_3, ..., A_1A_k. Из каждой точки A_i, $i=1, ..., k$ выходит не менее $k-1$ отрезков, поэтому число всех таких отрезков не меньше $k(k-1)/2$ (при подсчете каждый отрезок может быть учтен дважды). Любые две из остальных $21-k$ точек должны быть соединены, иначе между этими двумя точками и A_1 вообще *не будет* отрезков, что противо-



речит нашему условию. Это дает еще не меньше чем $(21-k)(20-k)/2$ отрезков. Итак, общее число отрезков в графе не меньше

$$\frac{k(k-1)}{2}+\frac{(21-k)(20-k)}{2}=k^2-21k+210\geqslant 100$$

(при целых k); минимум достигается при $k=10$ или $k=11$. Эта оценка неулучшаема, как видно из расположения, показанного на рисунке: 10 точек вблизи одного конца диаметра и 11 — вблизи другого.

В общем случае n точек на окружности число 100 нужно заменить на $n(n-2)/4$ при четном n и $(n-1)^2/4$ — при нечетном; доказательство сохраняется.

В. Н. Дубровский, А. Ф. Сидоренко

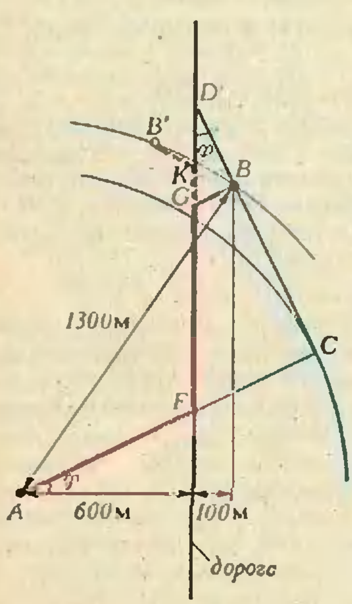
Ф1063. *Пешеходу необходимо в кратчайшее время попасть из точки поля A в точку поля B, расстояние между которыми 1300 м. Поле пересекает прямолинейная дорога так, что точка A находится от нее на расстоянии 600 м, а точка B — на расстоянии 100 м. Скорость перемещения пешехода по полю равна 3 км/ч, а по дороге — 6 км/ч. Какой путь должен избрать пешеход? Чему равно минимальное время? Рассмотреть случаи, когда точки A и B лежат по одну сторону от дороги и когда они лежат по разные стороны от дороги.*

Для решения задачи построим фронт области достижимости — границу той области, в любой точке которой можно оказаться за данный промежуток времени.*)

Будем строить эту границу для того момента времени, когда она проходит через точку B (рассмотрим случай, когда точки A и B лежат по разные стороны от дороги). Для этого случая проведем через точку B (см. рисунок) прямую, образующую с дорогой угол φ такой, что $\sin\varphi=v/u$, где v — скорость движения по полю, u — скорость движения по дороге. Из данных задачи следует, что $\sin\varphi=1/2$, $\varphi=\pi/6$. Пусть эта прямая пересекает дорогу в точке D. Из точки A проведем окружность, касающуюся прямой BD. Из данных задачи следует, что точка B лежит между точкой касания C и точкой D.

Итак, в момент прохождения фронтом точки B интересующий нас участок фронта представляет собой часть окружности радиусом AC и отрезок касательной CD.**) Теперь легко понять, что оптимальной траекторией из A в B будет ломаная $AFGB$, причем $\widehat{CFD}=\widehat{BGD}=\pi/2-\varphi=\pi/3$.

Аналогично, если точки A и $B\,(B')$ лежат по одну сторону от дороги, то оптимальной траекторией будет ломаная $AFKB'$, причем $\widehat{B'KD}=\pi/2-\varphi=\pi/3$. Отметим, что при другом взаимном расположении точек A, B и дороги (при других расстояниях) оптимальная траектория может представлять собой отрезок прямой без участков дороги (в этом случае точка B лежит на участке фронта, являющемся частью окружности радиусом AC).



Теперь найдем минимальное время движения из точки A в точку B. Если точки лежат по разные стороны от дороги —

$$t_{\min}=\frac{AF}{v}+\frac{FG}{u}+\frac{GB}{v}\approx 23{,}5\text{ мин.}$$

Если точки A и $B\,(B')$ лежат по одну сторону от дороги —

$$t_{\min}=\frac{AF}{v}+\frac{FK}{u}+\frac{KB'}{v}\approx 24{,}6\text{ мин.}$$

С. С. Кротов

*) О принципе построения фронта области достижимости подробно рассказывалось в статье «Об оптимальных траекториях движения» в «Кванте» № 6 за 1982 год.

**) Весь фронт симметричен относительно перпендикуляра к дороге, проходящего через точку A; левая верхняя его часть — прямолинейный участок от точки D до пересечения с окружностью радиусом AC, составляющий угол $\varphi=\pi/6$ с дорогой, и часть окружности радиусом AC.

Ф1064. *Нить прикреплена к ободу тяжелого обруча и намотана на него. Если другой конец нити прикрепить к потолку и отпустить обруч, то он, вращаясь и разматывая нить, будет двигаться вниз. Пусть три таких обруча соединены «последовательно», т. е. конец нити следующего обруча прикреплен к оси предыдущего (рис. 1). Все обручи одновременно отпустили, и они пришли в движение. Определить, с каким ускорением движется верхний обруч.*

С каким ускорением будет двигаться верхний обруч, если число последовательно соединенных обручей очень велико?

Считать, что масса обруча равномерно распределена по его ободу, спицы невесомы, нити невесомы и нерастяжимы, трение отсутствует.

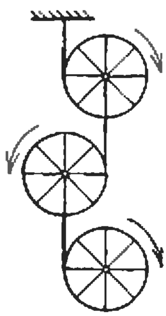


Рис. 1.

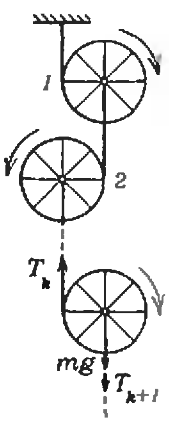


Рис. 2.

Пусть система содержит N последовательно соединенных обручей, как это показано на рисунке 2. Пронумеруем их сверху вниз. На обруч под номером k вверх действует сила натяжения k-й нити, а вниз — сила тяжести и сила натяжения $(k+1)$-й нити. Запишем для k-го обруча уравнение движения:

$$mg + T_{k+1} - T_k = ma_k, \qquad (1)$$

где a_k — проекция ускорения центра масс обруча на направление движения, m — масса обруча, T_k и T_{k+1} — силы натяжения нитей.

Аналогичное уравнение можно записать для любого обруча. При этом $T_{N+1}=0$, так как нити $(N+1)$ просто нет. Таким образом, уравнения (1), записанные для $k=1\div N$, представляют собой систему N уравнений с $2N$ неизвестными a_k и T_k.

Еще N уравнений можно получить, воспользовавшись законом сохранения энергии.

За время t после начала движения k-й обруч, двигаясь с ускорением a_k, опустился на расстояние s_k, приобретя скорость поступательного движения v_k и угловую скорость вращения вокруг оси обруча ω_k. Эти величины связаны соотношениями

$$s_k = a_k t^2/2,\ v_k = a_k t,\ \omega_k R = v_k - v_{k-1}, \qquad (2)$$

где R — радиус обруча. Вычислим кинетическую энергию обруча, которую он приобрел к моменту времени t. Для этого выберем два маленьких кусочка обруча одинаковой массы Δm, расположенных на одном диаметре (рис. 3). Скорость каждого из кусочков складывается из скорости $\overline{v_k}$ его поступательного движения и линейной скорости вращательного движения вокруг центра обруча ($\bar u$ и $-\bar u$, $u=\omega_k R$). Суммарная кинетическая энергия этих кусочков равна

$$\Delta m\,(\overline{v_k}+\bar u)^2/2 + \Delta m\,(\overline{v_k}-\bar u)^2/2 = 2\,(\Delta m v_k^2/2 + \Delta m u^2/2).$$

Кинетическая энергия всего обруча равна сумме энергий всех таких пар, т. е. равна

$$mv_k^2/2 + m\,(\omega_k R)^2/2.$$

Эта энергия равна работе всех сил, действующих на обруч. Работа сил mg и T_{k+1} положительна и равна $(mg+T_{k+1})\,s_k$. Работа силы T_k отрицательна и равна $(-T_k)\,s_{k-1}$ (так как точка приложения силы переместилась вниз на расстояние s_{k-1}). Поэтому

$$mv_k^2/2 + m\,(\omega_k R)^2/2 = (mg + T_{k-1})\,s_k - T_k s_{k-1}.$$

Из этого уравнения с учетом (1) и (2) после преобразований получим:

$$T_k = m\,(a_k - a_{k-1}),\ k=1\div N. \qquad (3)$$

Уравнение (3), выражающее силу натяжения нити через ускорения, справедливо для любой нити, и следовательно, (3), как и (1), представляет собой систему N уравнений с $2N$ неизвестными. Подставив из этой системы выражения для сил натяжения в систему уравнений (1), окончательно получим:

$$-a_{k-1} + 3a_k - a_{k+1} = g,\ k=1\div N. \qquad (4)$$

В этой системе уравнений следует считать $a_0=0$, так как это ускорение точки подвеса первого обруча, $a_{N+1}=a_N$, так как $T_{N+1}=0$ ($(N+1)$-й нити нет).

Запишем теперь в развернутом виде систему уравнений (4) для трех обручей ($N=3$):

$$\begin{cases} 3a_1 - a_2 = g, \\ -a_1 + 3a_2 - a_3 = g, \\ -a_2 + 2a_3 = g. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим

$$a_1 = \frac{8}{13}g;\ a_2 = \frac{11}{13}g;\ a_3 = \frac{12}{13}g.$$

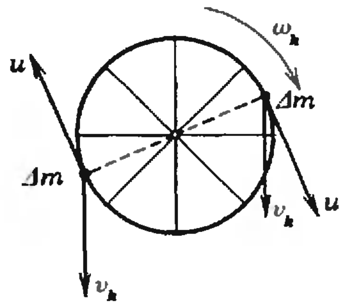


Рис. 3.

Заметим, что система (4) может быть решена при любом конечном значении N. Ясно, что при увеличении N «трудность» вычислений нарастает. Как же быть, если $N \to \infty$? Вот тут мы проведем рассуждения, которые справедливы именно для случая $N \to \infty$.

Предположим, что ускорение первого обруча равно

$$a_1 = \varkappa g, \qquad (5)$$

где $\varkappa$ — некоторое число, которое нам и нужно определить. Перейдем теперь в систему отсчета, движущуюся с ускорением a_1. В этой системе описание движения всех обручей, начиная со второго, — задача, аналогичная нашей исходной, с той лишь разницей, что движение происходит в поле тяготения с

$$g' = g - a_1 = g(1-\varkappa)$$

и общее число обручей уменьшилось на единицу. Так как обручей по-прежнему очень много, естественно считать ускорение верхнего (второго) обруча равным

$$a_1' = \varkappa g'.$$

Следовательно, в неподвижной системе отсчета ускорение второго обруча равно

$$a_2 = a_1' + a_1 = \varkappa g' + \varkappa g = \varkappa(g' + g) = \varkappa(g(1-\varkappa) + g) = g(2-\varkappa). \qquad (6)$$

Подставив выражения (5) и (6) для a_1 и a_2 в первое уравнение системы (4), найдем $\varkappa$:

$$\varkappa^2 + \varkappa - 1 = 0 \Rightarrow \varkappa = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Таким образом, ускорение первого обруча при достаточно большом N равно

$$a_1 = \frac{\sqrt{5}-1}{2} g. \qquad (7)$$

Заметим, что уже при $N = 3$ выражение (7) справедливо с точностью 0,5 %, а для $N = 10$ — с точностью 10^{-6} %.

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

Ф1065. *Кастрюлю, в которую налит 1 л воды, никак не удается довести до кипения при помощи нагревателя мощностью 100 Вт. Определить, за какое время вода остынет на один градус, если отключить нагреватель.*

Это совсем простая задача — из условия ясно, что мощность нагревателя равна мощности, уходящей от кастрюли с водой в окружающее пространство (температура воды со временем не меняется). Значит, если нагреватель выключить, то отдаваемая мощность составит 100 Вт и на один градус вода остынет за время

$$\tau = \frac{cm \cdot \Delta T}{P} = 4{,}2 \cdot 10^3 \ \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot \text{К}} \cdot 1 \ \text{кг} \cdot \frac{1\text{К}}{100 \ \text{Вт}} = 42 \ \text{с}.$$

А. Р. Зильберман

Ф1066. *Предположим, что в результате сильных пожаров в верхних слоях атмосферы возникнет слой сажи, поглощающий практически все падающее на него солнечное излучение. Какой станет при этом средняя температура Земли, если сейчас она составляет 300 К?*

Приближенно можно считать, что современное значение средней температуры Земли является результатом равновесия двух тепловых потоков: от Солнца к Земле и от Земли в окружающее пространство. В случае образования слоя сажи поток солнечной энергии останется прежним, но сам слой, обладая двумя поверхностями, будет излучать половину этого потока наружу — в космос, а половину — внутрь. Следовательно, поверхность Земли станет получать тепла вдвое меньше, чем сейчас, и после установления равновесия вдвое меньше тепла будет излучать обратно, в сторону слоя; т. е. $q_1 = 2q_2$, где q_1 и q_2 — потоки испускаемого Землей тепла соответственно до и после пожара.

Учитывая тот факт, что излучаемый нагретым телом поток тепла q пропорционален четвертой степени температуры тела: $q \sim T^4$ (закон Стефана — Больцмана), получаем, что средняя равновесная температура Земли, окутанной тонким слоем сажи, равна

$$T_2 = T_1/\sqrt[4]{2} = 300/\sqrt[4]{2} \simeq 250\ \text{К} \simeq -20\ ^\circ\text{С}.$$

Такого порядка температура установится по всей планете спустя некоторое время после возникновения ядерной войны — наступит так называемая «ядерная зима».

А. Л. Стасенко

Информация

I Всесоюзная олимпиада школьников по информатике

В 1988 году Министерство просвещения СССР совместно с ЦК ВЛКСМ, Министерством высшего и среднего специального образования СССР, Государственным Комитетом СССР по вычислительной технике и информатике, Академией наук СССР и Всесоюзным обществом «Знание» проводит Всесоюзную олимпиаду школьников по информатике.

Всесоюзная олимпиада школьников по математике, физике и химии в 1988 году будет проводиться в 22-й раз, формы ее проведения и примерная тематика задач устоялись. Олимпиада по информатике проводится впервые. Поэтому при ее организации целесообразно использовать формы, опробованные в соревнованиях по другим предметам (насколько это возможно), и тематику задач, опробованную в различных соревнованиях школьников по информатике.

В тех союзных республиках, где имеются соответствующие условия, могут проводиться районный (городской) и областной этапы олимпиады. К соревнованиям допускаются учащиеся всех возрастов, творчески освоившие школьный курс информатики.

Республиканские олимпиады будут проводиться в мартовские каникулы. Пакеты заданий рекомендательного характера для олимпиад республиканского этапа будут составлены методической комиссией по информатике Центрального оргкомитета. Эта комиссия будет осуществлять функции, аналогичные функциям предметных методических комиссий Центрального оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьников по математике, физике и химии, т. е. методическое обеспечение олимпиад республиканского, союзного и международного уровней (составление, отбор и разбор задач олимпиадного характера).

По итогам республиканской олимпиады формируется команда школьников на Заключительный этап олимпиады по информатике.

Заключительный этап олимпиады будет проведен в Свердловске с 15 до 22 апреля 1988 г. Выбор Свердловска в качестве места проведения Заключительного этапа не случаен — там объединенными усилиями местных партийных и советских органов, областного и городского органов народного образования, Института математики и механики Уральского отделения АН СССР и вузов во всех школах города реализован машинный вариант (в объеме 102 ч.) курса основ информатики и вычислительной техники. Это стало возможным благодаря энергии и энтузиазму многих людей, в первую очередь — члена Президиума Уральского отделения АН СССР академика Н. Н. Красовского и заведующего кафедрой информатики и вычислительной техники Свердловского пединститута В. Г. Житомирского.

Заключительный этап Олимпиады, в котором примут участие команды от каждой союзной республики и городов Москвы, Ленинграда и Свердловска (как города — устроителя Олимпиады), будет проводиться в два тура.

В первом (теоретическом) туре будут предложены 2—3 задачи, решение которых не предполагает использования вычислительной техники. Во втором (машинном) туре будут предложены два задания, для выполнения которых обязательно использование компьютеров.

В заключение приведем задачи, предлагавшиеся на I Международной олимпиаде по программированию, которая состоялась в ЧССР в августе 1987 г. (В ней участвовали и советские школьники, подробно об этой олимпиаде будет рассказано в журнале «Информатика и образование».)

(Окончание см. на с. 56)

„Квант" для младших школьников

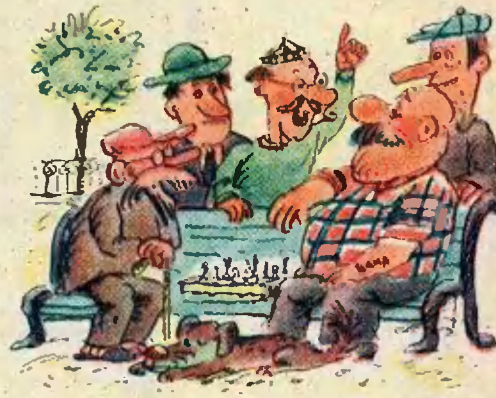
Задачи

1. После окончания шахматного турнира в один круг (каждый сыграл друг с другом по одному разу) все пять его участников *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д*, перечисленные здесь в порядке занятых мест, обменивались впечатлениями.

— Не думал, что лишь я один не испытаю горечи поражения, — сказал *Б*.

— А вот мне единственному не удалось одержать ни одной победы, — заметил *Д*.

Попробуйте по этим данным восстановить турнирную таблицу: как каждый сыграл с остальными участниками.



2. Почему в морозный день снег скрипит под ногами?

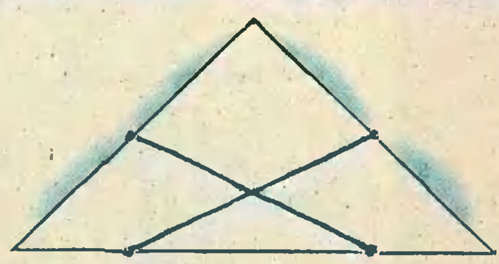
3. Расшифруйте числовой ребус

ДЕДКА+БАБКА+РЕПКА=
=СКАЗКА,

в котором одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные и ДЕДКА>БАБКА>>РЕПКА.

4. Из набора гирек с массами в 1 г, 2 г, ..., 101 г потерялась гирька массой 19 г. Можно ли оставшиеся 100 гирек разложить на две кучки по 50 штук в каждой так, чтобы массы кучек были одинаковы?

5. В равнобедренном треугольнике отмечены середины боковых сторон и их проекции на основание. Через отмеченные точки проведены две прямые (см. рисунок). Покажите, что из полученных частей можно сложить ромб.



Эти задачи нам предложили
С. Г. Губа, А. П. Савин, А. М. Домашенко, В. В. Произволов, В. Д. Вьюн

Калейдоскоп „Кванта"

... я вывел, что силы, удерживающие планеты на их орбитах, должны быть в обратном отношении квадратов их расстояний от центров, вокруг коих они вращаются.

Исаак Ньютон

Вопросы и задачи

1. Человек прыгает со стула, держа в руке тяжелую гирю. С какой силой давит она на руку человека в то время, когда он находится в воздухе?

2. Справедливы ли в условиях невесомости законы Паскаля и Архимеда?

3. В каком направлении и с какой сторостью должен лететь вдоль экватора самолет, чтобы скомпенсировать уменьшение своего веса, обусловленное вращением Земли?

4. Чему равна максимальная скорость тела, падающего в гипотетическую шахту, пробуренную по оси вращения земного шара? Сопротивление не учитывать.

5. Может ли спутник двигаться по орбите, плоскость которой не проходит через центр Земли?

Вопросы и задачи

8. Чему равна первая космическая скорость для планеты, масса и радиус которой в три раза больше, чем у Земли?

9. Спутник движется по круговой орбите, радиус которой примерно равен радиусу шарообразной планеты. Какая физическая характеристика планеты определяет период обращения спутника по орбите?

10. Какими часами следует измерять время в космическом корабле в условиях невесомости: маятниковыми, песочными или пружинными?

11. Что должен предпринять командир космического корабля, если пассажиры просят его создать состояние весомости?

6. В каком случае и почему космическая ракета нагревается при трении о воздух сильнее: при ее запуске или при спуске на Землю?

7. Как стала бы двигаться Луна, если бы а) исчезло тяготение между Луной и Землей; б) прекратилось движение Луны по орбите?

Любопытно, что ...

...знаменитый Иоганн Кеплер, помимо установления законов движения планет, очень близко подошел к выводу о взаимном притяжении всех тел в природе. С гениальной прозорливостью Кеплер писал, что приливы и отливы в земных океанах объясняются действием Луны.

...наблюдая у себя дома по телевизору высадку астронавтов на Луну, преподаватель одного из американских колледжей заметил, что у одного из отсеков спускаемого аппарата свисал рядом с астронавтом, качаясь на чем-то вроде каната, какой-то тяжелый предмет. Посмотрев на часы, преподаватель сумел довольно точно определить ускорение свободного падения на Луне. Кстати, как он сделал это?

А так ли хорошо знакомо вам

ТЯГОТЕНИЕ ?

Три века назад Ньютон размышлял о том, существует ли общая причина для движения Луны и падения яблока. Тогда это было дерзкой идеей, поскольку вековая мудрость гласила, что небесные тела движутся по своим «совершенным» законам, а земные объекты подчиняются «мирским» правилам. Ньютон предположил, что единые законы справедливы во всей Вселенной.

Впечатляющие открытия Ньютона оказали сильнейшее влияние на развитие науки. Многолетние раздумья ученых над природой гравитации увенчались построением теории, которая успешно объясняет тяготение и расширение Вселенной,— общей теории относительности.

12. Можно ли в состоянии невесомости забить молотком гвоздь?

Микроопыт

Пробейте гвоздем три-четыре отверстия в консервной банке. Закрыв их пальцами, наполните банку водой, затем отпустите ее. Будет ли выливаться вода через отверстия при падении банки?

Что читать в «Кванте» о тяготении
(публикации последних лет)

1. «Черные дыры» — 1983, № 2;
2. «Вращение Земли и ускорение свободного падения» — 1984, № 1, с. 32;
3. «О всемирном тяготении, приливах и отливах» — 1985, № 8;
4. «Вторая космическая скорость» — 1986, № 3, с. 21;
5. «Парадокс спутника» — 1986, № 5;
6. «Маневрирование в космосе» — 1987, № 2;
7. «Прямое измерение расстояния до квазара» — 1987, № 4;
8. «Лунный тормоз» — 1987, № 8;
9. «Великая книга Ньютона» — 1987, № 11;
10. «Закон всемирного тяготения» — 1987, № 11.

«ВСЕ», «НЕКОТОРЫЕ» И ОТРИЦАНИЕ

А. И. ОРЛОВ

Был у меня недавно интересный разговор с шестиклассником Аликом, центральным нападающим футбольной команды нашего двора.

— Что, Алик, бежишь на тренировку? Зимой, небось, сменишь свой футбол на хоккей?

— Ни за что на свете! — воскликнул Алик обиженно.— Зимой надо заниматься, а не бегать за шайбой. Все хоккеисты плохо учатся,— футболисты учатся гораздо лучше!

— Почему ты так решил?

— А что? Все так считают в нашей команде, не я один.

— А не кажется ли тебе, что ты рассуждаешь сейчас, как печально известные обезьяны из книги Киплинга «Маугли»? Помнишь, они кричали на весь лес: «Мы велики! Мы свободны! Мы достойны восхищения! Мы все так говорим, значит, это правда! ...»

— Это кто же обезьяна?! — возмутился Алик.

— Я не хотел обидеть тебя, Алик, но ссылкой на мнение многих нельзя ничего доказать. Земля круглая, а в древности почти все думали, что она плоская. Индейцы племени сиу, как пишет их вождь Мато Нажин, считали даже, что Земля четырехугольная, а было это уже в XIX веке ... Так почему же все хоккеисты плохо учатся?

— Ну-у, вот Сережа Кукушкин. Он все время играет в хоккей и все время получает двойки.

— Ты рассуждаешь, как один француз, который говорил: «Все англичане низенькие, толстенькие и чернявые»,— только потому, что так выглядел единственный англичанин, с которым он встречался. И вы, как этот француз, нарушаете законы логики.

Алик задумался, а я решил помочь ему. Для начала рассказал такую историю.

— В одном городе я видел на доме табличку: «В нашем доме нет двоечников». На соседнем доме такой таблички не было. Как по-твоему, Алик, значит ли это, что в соседнем доме все были двоечники?

— Н-нет,— пробормотал Алик неуверенно. Не обязательно. Это значит только, что там есть двоечники ... Хотя бы один двоечник ... А может быть, и все там учатся на двойки. Нет, не знаю, я ведь не был там!

— А что же означает такая фраза: *«Неверно, что среди ребят есть двоечники»*?

— Это как в первом доме — все учатся без двоек.

— Значит, одно из двух,— сказал я удовлетворенно.— Либо все учатся без двоек, либо в доме есть хотя бы один двоечник. А что можно сказать о любителях шайбы?

И тут выяснилось, что Алик может, подумавши, рассуждать правильно.

— Верно одно из двух: либо все хоккеисты плохо учатся, либо не все,— есть хоккеисты, которые учатся хорошо.

— Но даже в твоем классе, Алик, я знаю троих отличников, которые любят гонять шайбу. Значит, верно второе: бывают хоккеисты, которые хорошо учатся.

— Ну, конечно!

— А что же тогда означает твой

пример с Сережей Кукушкиным?

Алик задумывается.

— Что не все хоккеисты хорошо учатся ...

Итак, попробовав рассуждать логично, Алик сам пришел к правильному выводу.

С двоечниками и хоккеистами мы разобрались сравнительно быстро. Попробуем понять, как следует рассуждать в более сложных случаях. Первый пример — с разноцветными шарами. Представим себе, что в урне (небольшом ящике) могут лежать, скажем, белые и красные шары. Все шары одинакового размера и неразличимы на ощупь. Кто-то опускает руку в урну и вынимает шар. Шар оказывается, к примеру, красным. Что можно сказать о цвете шаров, лежащих в урне?

Некоторые скажут: «Все шары красные». На самом деле это неверно: можно лишь утверждать, что **некоторые** (необязательно все) шары красные. Могут быть и белые шары. Может быть и так, что вынутый шар — единственный красный среди белых.

Был вынут красный шар. Значит, неверно утверждение: «Все шары белые». А что верно? — «Некоторые (по крайней мере один) шары красные». Давайте потренируемся. Пусть каждое из следующих утверждений неверно.

1. *Все шары в урне красные.*
2. *Некоторые шары в урне красные.*
3. *Некоторые шары в урне белые.*
4. *Все равнобедренные треугольники являются прямоугольными.*
5. *Все ученики класса были на собрании.*
6. *Некоторые девочки были на собрании.*

Сформулируйте верные утверждения.

А теперь общая схема решения всех подобных задач — наше «волшебное средство». Пусть у нас есть множество M каких-то объектов (это может быть несколько шаров, или несколько книг, или все ученики какого-то класса). Каждый из элементов этого множества может обладать, а может и не обладать некоторым свойством A. Например, шар может быть красным, а может и не быть, хоккеист — быть или не быть двоечником.

Закон такой: *верно может быть либо утверждение, либо его отрицание.* Одно и только одно из двух! (В логике этот закон называется *законом исключенного третьего.*) *Каждое утверждение, которое мы используем, либо верно, либо неверно.*

Либо верно утверждение B, либо его отрицание (т. е. утверждение: «Утверждение B неверно»). Либо все хоккеисты плохо учатся (*обладают свойством A*). Если же это неверно, то хотя бы один хоккеист учится хорошо (*не обладает свойством A*).

Итак, вот наша схема:

Утверждение

1. Все предметы из M обладают свойством A.
2. Некоторые предметы из M обладают свойством A.

Его отрицание

1. Хотя бы один предмет из M не обладает свойством A.
2. Все предметы из M не обладают свойством A.

Обратите внимание на то, что утверждения *«некоторые предметы обладают свойством A»* и *«хотя бы один предмет* (а может быть, и все) *обладает свойством A»* означают в нашей схеме одно и то же.

А теперь — **задачи.**

Постройте отрицания следующих утверждений:

7. Все углы данного шестиугольника тупые.
8. Для любого x из множества A выполнено неравенство $x^2>4$.
9. Некоторые люди — дети.
10. По крайней мере для одного x из множества A будет $x^2-2x+1=0$.
11. Все мужчины выше 2-х метров.
12. Все простые числа — нечетные.
13. Для любого простого p число 2^p-1 тоже простое.

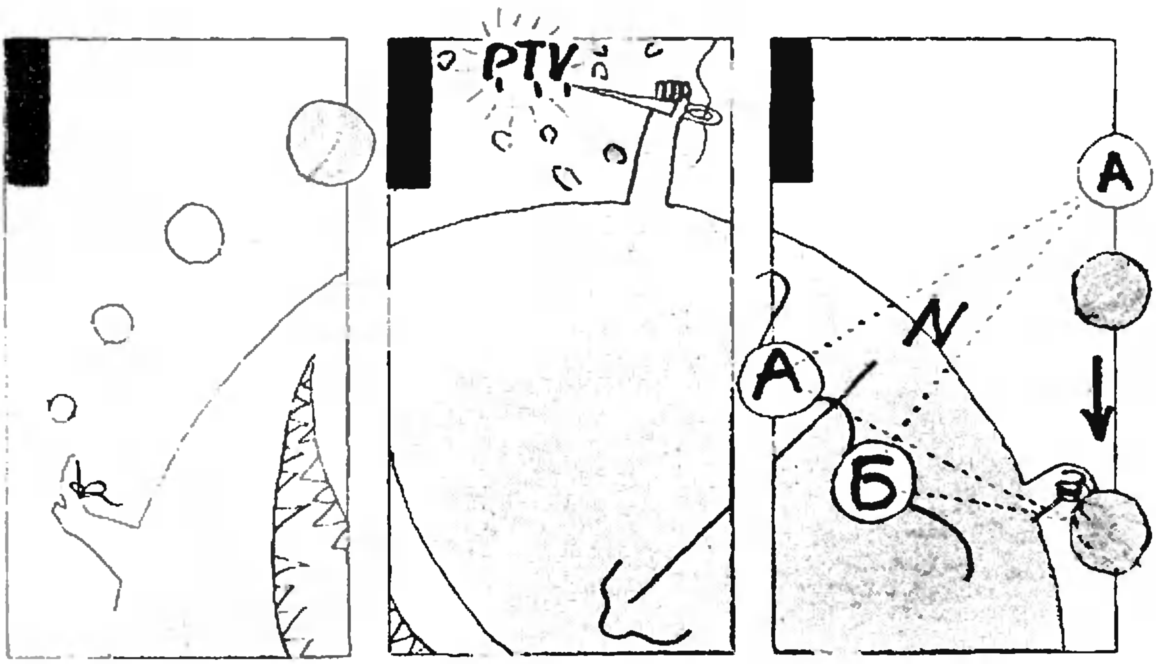
Вернемся к урне, в которой лежат шары, неразличимые на ощупь. Шары могут быть белого, красного, синего, черного цветов.

14. Известно, что не все шары в урне белые. Верно ли, что там есть красный шар?
15. Известно, что не все шары одного цвета. Верно ли, что в урне есть хотя бы один не белый шар?
16. В урне 10 белых, 8 красных, 11 черных шаров. Сколько из них надо вынуть, чтобы наверняка попался белый шар? Чтобы попались шары всех трех цветов?

И еще одна задача — чуть посложнее.

17. В классе 5 отличников, 20 «хорошистов» и 10 троечников. Отличник может получить за ответ только 5, «хорошист» — 4 или 5, троечник — 3, 4 или 5. В класс пришел новый учитель, он не знает никого из учеников. Сколько человек ему достаточно вызвать к доске, чтобы наверняка была поставлена хотя бы одна пятерка?

Впервые эта статья была опубликована в февральском номере «Кванта» в 1976 году.



Школа в „Кванте"

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Закон всемирного тяготения» предназначена восьмиклассникам, «Расширение газа в пустоту» — девятиклассникам, «Электромагнитная индукция и принцип относительности» — десятиклассникам.

Закон всемирного тяготения

Есть люди, чья жизнь и деятельность служат настоящим водоразделом в истории человечества. Именно таким человеком был великий английский мыслитель Ньютон, открывший в 1667 году закон всемирного тяготения. Попробуем воспроизвести соответствующие рассуждения Ньютона.

Сначала несколько слов о том, что предшествовало открытию. Кеплер, изучая на протяжении ряда лет таблицы движения планет, завещанные ему его учителем Тихо Браге, в начале XVII века формулирует три необыкновенно компактных и изящных закона (которые теперь называют законами Кеплера):

1. Все планеты движутся вокруг Солнца по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.
2. Радиус, проведенный от Солнца до планеты, «заметает» равные площади в равные промежутки времени.
3. Квадраты периодов двух планет (T_1 и T_2) относятся как кубы больших полуосей их орбит (R_1 и R_2): $T_1^2/T_2^2 = R_1^3/R_2^3$ (или, иначе, $T_1^2/R_1^3 = \text{const}$ для всех планет).

Уже из этих законов чувствуется, что Солнце играет какую-то особую роль в «планетной жизни». Однако сам Кеплер, несмотря на мучительные попытки, не смог до конца понять эту роль.

Приблизительно в то же время, когда Кеплер открывает законы движения планет, Галилей формулирует закон инерции, утверждающий, что, если на тело ничего не действует, оно будет двигаться с постоянной скоростью и по прямой.

Вот с этого уровня и стартовал Ньютон. Прежде всего, развивая идеи Галилея, он задается вопросом: если телам внутренне присуще свойство сохранять свою скорость, то за счет чего же все-таки она может меняться? Отвечая на этот вопрос, он формулирует закон, известный сегодня любому школьнику (второй закон Ньютона): для того чтобы изменить скорость тела, надо подействовать на него силой. При этом изменение скорости за единицу времени (т. е. ускорение a) прямо пропорционально силе (F) и обратно пропорционально массе (m) тела: $a=F/m$. Из закона, открытого Ньютоном, видно, что чем больше масса тела, тем неохотнее оно меняет свою скорость. В этом смысле говорят, что масса тела — это мера его инертности.

Гениальность Ньютона состояла, в частности, в том, что, рассматривая какое-то конкретное физическое явление (например, движение тела под действием силы), он всегда имел в виду весь мир в целом. Естественно поэтому, что Ньютон пытается применить сформулированные им законы динамики к описанию движения планет. Вывод напрашивается сам собой: никакой силы, подгоняющей планеты в их движении по орбите, не нужно. Наоборот, нужна сила, не позволяющая планетам улететь по прямой линии (в соответствии с законом инерции) и заворачивающая их каждый раз на круговые или близкие к круговым орбиты. Другими словами, на планеты должна действовать сила, направленная не вдоль, а поперек движения. А раз так, то не остается ничего другого, как предположить, что источником этой силы является Солнце.

Дальше все было просто. Ускорение планеты при ее движении по круговой орбите равно $a=\omega^2 R=4\pi^2R/T^2$ (обычное центростремительное ускорение). Подставляя это выражение в свой собственный закон ($a=F/m$), Ньютон получает

$$\frac{4\pi^2}{T^2}R=\frac{F}{m}.$$

Здесь F — та самая сила, которая действует на планету со стороны Солнца, а m — масса планеты. Используя третий закон Кеплера, Ньютон приходит к выводу, что величина $F/m\sim 1/R^2$ и не зависит от характеристик планеты, т. е. сила, действующая на планету со стороны Солнца,

$$F=\mathrm{const}\cdot\frac{m}{R^2}.$$

Размышляя о том, от чего бы могла зависеть величина входящей в это выражение константы, Ньютон постулирует, что она определяется только массой Солнца (M). (Почему? Да просто так ему казалось естественным.) Вот так и возникло знаменитое и одновременно столь привычное сегодня выражение

$$F=G\frac{Mm}{R^2}.$$

Величина коэффициента G ни от чего не зависит и является мировой константой (она получила название гравитационной постоянной).

Дальнейший анализ движения планет показал, что при такой силе автоматически выполняются и первые два закона Кеплера. Это уже был большой успех. Воодушевленный им, Ньютон пытается описать движение Луны вокруг Земли и, хотя и с некоторыми приключениями, получает превосходное согласие своих расчетов с экспериментом.

И тут Ньютон решается на потрясающее по своей силе обобщение. Он утверждает, что открытая им сила никоим образом не связана со спецификой небесных тел, а является универсальным свойством любых объектов природы. Так был сформулирован закон всемирного тяготения: сила, действующая между двумя любыми телами с массами m_1 и m_2,

$$F=G\frac{m_1m_2}{R^2}.$$

Вопрос о том, почему те самые массы, которые характеризуют стремление тел сохранять свое движение (т. е. являются мерой их инертности), одновременно определяют и взаимное притяжение тел друг к другу, волновал много поколений ученых и явился впоследствии отправной точкой для построения Эйнштейном общей теории относительности.

Коль скоро закон всемирного тяготения применим к любым телам, появилась возможность экспериментально измерить величину гравитационной постоянной G. Она оказалась невероятно малой:

$$G=6{,}67\cdot10^{-11}\ \text{Н}\cdot\text{м}^2/\text{кг}^2.$$

Это означает, что гравитационные силы очень слабые. Именно поэтому мы совершенно не замечаем гравитационного притяжения между окружающими нас телами. Эта сила становится заметной только тогда, когда хотя бы одно из тел очень большое (такое, как Земля, Солнце и т. п.).

Строго говоря, выражение для силы тяготения в написанном нами виде справедливо только для материальных точек (т. е. для тел, размеры которых много меньше расстояния между ними). Ну, а если это не так? Тогда каждое из тел надо мысленно разбить на маленькие элементики (приблизительно точечные), вычислить силу взаимодействия между такими элементиками, а потом все силы геометрически сложить. (В общем случае это довольно громоздкая процедура, а выражение для результирующей силы может оказаться столь сложным, что его попросту невозможно записать в виде конечной формулы.)

Дальнейшие 150 лет были годами настоящего триумфа ньютоновской картины мира. Стали понятны причины океанских приливов и связь ускорения свободного падения с плотностью залегающих в данном месте пород. Были объяснены тончайшие детали в движении планет, их спутников, да и любых других небесных тел. На настоящее чудо было похоже чисто теоретическое предсказание существования восьмой планеты Солнечной системы — Нептуна (1846 г.). Причем англичанин Адамс и француз Леверрье не просто предсказали ее существование, но и вычислили, в какое время и куда надо направить телескопы, чтобы ее увидеть. И все произошло в точном соответствии с их расчетами. Такая же история произошла и с открытием девятой планеты — Плутона (1930 г.) Движение двойных звезд и форма звездных скоплений, структура галактик и их взаимодействие друг с другом — все подчиняется открытому Ньютоном закону всемирного тяготения.

Успехи были столь велики, что возникла иллюзия, будто все в мире описывается с помощью законов Ньютона. К сожалению (а может, наоборот, к счастью), действительность оказалась гораздо богаче. Научная революция XX века привела к созданию новой картины мира, в которой законы Ньютона нашли свое точное место среди других фундаментальных законов природы.

Е. Е. Городецкий

Расширение газа в пустоту

Спросите кого угодно, что́ произойдет с температурой идеального газа, который расширяется в замкнутом сосуде без теплообмена с окружающей средой, и почти все вам ответят, что газ охладится. Не верьте! Это не всегда так.

Вообразим такой мысленный эксперимент. Пусть одна половина теплоизолированного сосуда занята идеальным газом с давлением p_1 и температурой T_1, а другая — пуста (рис. 1). В некоторый момент уберем перегородку между половинами сосуда. Газ, естественно, будет расширяться, причем в пустоту, и после многочисленных столкновений его молекул со стенками и между собой установится новое равновесное состояние. Ясно, что теперь объем газа вдвое больше: $V_2=2V_1$. А каковы его давление p_2 и температура T_2?

С одной стороны, так как процесс адиабатический, точки, соответствующие начальному и конечному состояниям газа, должны лежать на адиабате *1—2′* (рис. 2). Адиабата, как известно, падает круче изотермы, поэтому температура газа должна уменьшаться: $T_2'<T_1$.

С другой стороны, посмотрим, что́ говорит первый закон термодинамики. Количество теплоты Q, подведенное к газу, идет на увеличение его внутренней энергии ΔU и на работу по расширению A:

$$Q=\Delta U+A.$$

В нашем случае $Q=0$ (по условию адиабатичности). А какая работа совершается газом? Да никакой, потому, что он расширяется в вакуум, со стороны которого не встречает противодействия. Значит, и сила, и работа равны нулю: $A=0$. Следовательно, и изменение внутренней энергии тоже равно нулю: $\Delta U=0$. Но поскольку в случае идеального газа внутренняя энергия зависит только от температуры, температура не изменится: $T_2=T_1$, и давление станет равным $p_2=p_1/2$. Это означает, что точки, соответствующие начальному и конечному состояниям, будут лежать на изотерме *1—2*.

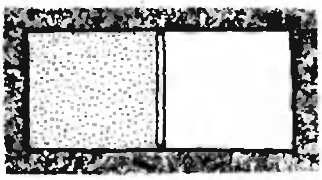


Рис. 1.

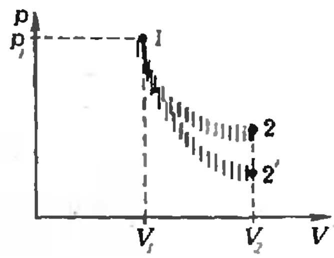


Рис. 2.

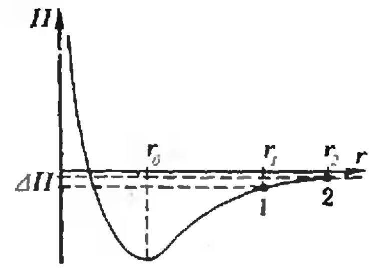


Рис. 3.

А что происходит между этими состояниями? К сожалению, школьная термодинамика ничего об этом сказать не может. Почему? Да потому, что вся она верна только для очень медленных (так называемых квазистатических) процессов, которые происходят со скоростями, много меньшими тепловой скорости движения молекул. В нашем же случае как только мы уберем перегородку, газ буквально бросится в вакуум со скоростью порядка тепловой скорости молекул и даже еще быстрее, потому что в газе есть отдельные молекулы, скорость которых намного больше тепловой. А тут термодинамика просто неверна. Вот почему на рисунке 2 мы изобразили неизвестный нам процесс штрихами, а не сплошной линией.

Все наши рассуждения справедливы для случая идеального газа. А если газ не идеальный? Тогда его молекулы взаимодействуют друг с другом, и внутренняя энергия газа складывается из кинетической энергии движения молекул и потенциальной энергии их взаимодействия.

На рисунке 3 изображена зависимость потенциальной энергии $П$ взаимодействия двух молекул от расстояния r между ними. Там, где потенциальная энергия минимальна (точка r_0), вещество конденсируется, т. е. переходит в жидкое состояние. Так как, по условию, мы имеем в начальный момент газ, то среднее расстояние между молекулами соответствует точке $r_1 \gg r_0$. После удвоения объема среднее расстояние между молекулами станет равным $r_2 = r_1 \sqrt[3]{2} > r_1$. Получилось, как будто в результате расширения газ слегка «вытащили» наверх, по склону потенциальной ямы. Но кто поработал над тем, чтобы увеличить потенциальную энергию на $\Delta П$? Никто. И сам газ тоже ни над кем не работал. Поэтому остается признать, что увеличение потенциальной энергии произошло за счет уменьшения кинетической энергии движущихся молекул. Значит, и температура — мера средней кинетической энергии молекул газа — в результате расширения слегка упадет. Но это верно только в случае реального газа.

А. Л. Стасенко

Электромагнитная индукция и принцип относительности

В 1831 году Фарадей открыл явление электромагнитной индукции. Он обнаружил, что изменение магнитного потока через поверхность, ограниченную замкнутым контуром, приводит к возникновению в нем электрического тока. Опыты Фарадея убедительно доказали, что сила индукционного тока (а значит, и величина ЭДС индукции) совершенно не зависит от того, по какой причине меняется магнитный поток. Можно менять внешнее магнитное поле, оставляя контур неподвижным, — для этого надо либо перемещать источник поля (катушку с током, постоянный магнит), либо менять силу тока в катушке, создающей поле (например, как Фарадей, размыкать и замыкать цепь катушки). Но можно поступить иначе: не меняя магнитного поля, добиться изменения магнитного потока перемещением самого контура или его деформацией (как, например, в генераторе переменного тока, где ЭДС индукции возникает в проволочной рамке при ее вращении в неизменном магнитном поле). В любом случае индуцированная ЭДС оказывается пропорциональной скорости изменения магнитного потока (закон Фарадея), а направление индукционного тока определяется правилом Ленца («Физика 9», § 92, 93).

Самому Фарадею казалось совершенно естественным, что оба варианта описываются одним и тем же законом. Однако внимательный анализ показывает, что такая ситуация является далеко не очевидной. Попробуем разобраться в этом вопросе поподробнее.

При перемещении контура в магнитном поле, которое не изменяется со временем, роль сторонней силы, порождающей ток в цепи, играет сила Лоренца, которая действует со стороны магнитного поля на любой движущийся заряд. Напомним известный вам пример («Физика 9», § 95). Пусть в однородное магнитное поле с индукцией B помещен прямоугольный контур, плоскость которого перпендикулярна линиям индукции (рис. 1). Одна из сторон контура представляет собой перемычку со скользящими контактами. Если перемещать перемычку со скоростью v, то в ней возникнет ЭДС индукции $\mathscr{E} = Bvl$ (l — длина перемычки). Действительно, на свободный заряд q в движущейся перемычке действует сила Лоренца $F = qvB$ (направление силы указано стрелкой); соответствующая этой сторонней силе ЭДС

$$\mathscr{E} = \frac{A}{q} = \frac{Fl}{q} = \frac{qvBl}{q} = Bvl,$$

где A — работа сторонней силы на длине перемычки. Сравним этот результат со скоростью изменения магнитного потока:

$$\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = \left|\frac{\Delta(BS)}{\Delta t}\right| = \left|\frac{\Delta(Bxl)}{\Delta t}\right| = Bvl.$$

Легко также проверить, что знак возникшей ЭДС соответствует правилу Ленца.

Разобранный пример показывает, что в случае движения проводников в постоянном магнитном поле возникновение индукционного тока не представляет собой принципиально нового физического явления.

Совсем другая картина получается в случае неподвижного контура, по-

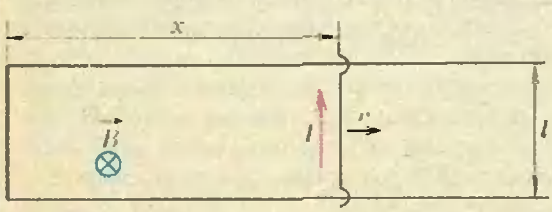


Рис. 1.

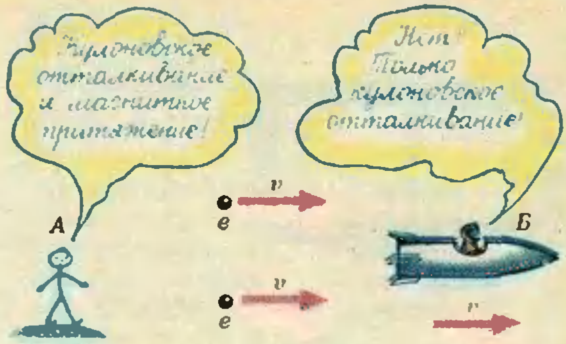


Рис. 2.

мещенного в изменяющееся со временем магнитное поле. Так как свободные заряды в проводнике изначально неподвижны (разумеется, хаотичное тепловое движение мы не учитываем), магнитное поле на них не действует и поэтому не может вызвать их направленного перемещения. Следовательно, индукционный ток может появиться только под действием электрического поля. Как оно возникает и какими свойствами обладает?

Ясно, что во многом это электрическое поле отличается от известного электростатического поля. Например, оно создает ЭДС в замкнутом контуре, значит, его работа по перемещению зарядов по замкнутому пути не равна нулю. Это поле вихревое, т. е. его силовые линии имеют вид замкнутых линий. И т. д.

Мы видим, что анализ ситуации, возникающей в случае неподвижного контура в переменном магнитном поле, приводит к широкому кругу совершенно новых физических явлений, указывающих на прямую взаимосвязь электрического и магнитного полей. Так Максвелл в 1860 году пришел к выводу, что переменное во времени магнитное поле всегда порождает вихревое электрическое поле. Далее, следуя внутреннему ощущению симметрии физических законов, он постулирует факт, не подкрепленный в то время никакими экспериментами: переменное во времени электрическое поле всегда, в свою очередь, порождает магнитное поле. Придав этим физическим утверждениям математически симметричную форму (уравнения Максвелла), он завершил построение единой теории электромагнитного поля.

После всех этих рассуждений может показаться, что закон электромагнитной индукции описывает два

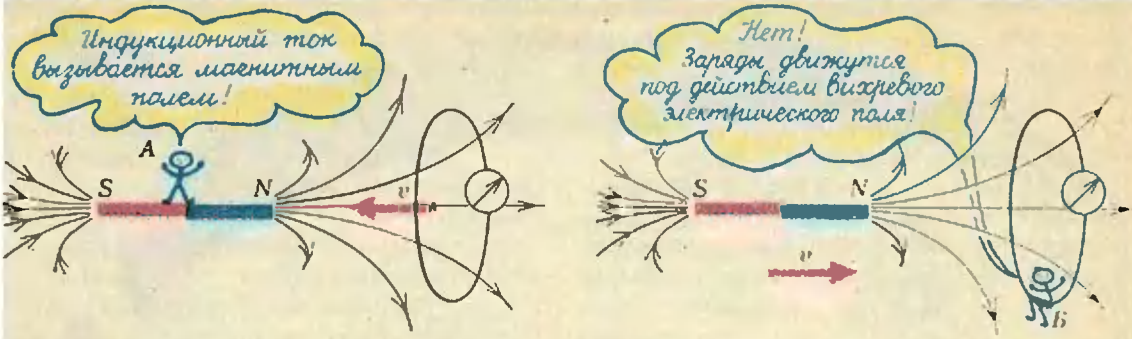


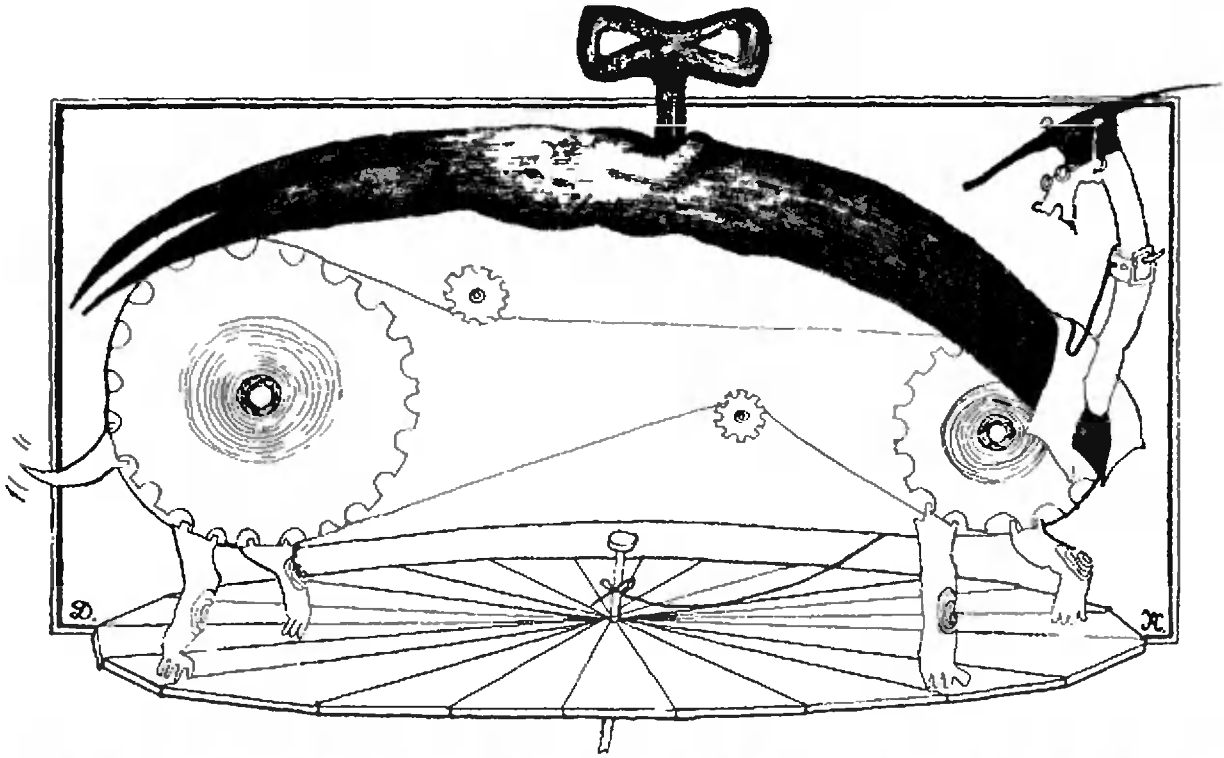
Рис. 3.

совершенно разных физических явления. В постоянном магнитном поле индукционный ток в движущемся контуре вызывается самим магнитным полем, а изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, которое и заставляет заряды двигаться вдоль неподвижного контура. Так почему же закон электромагнитной индукции для этих случаев один и тот же? Что это — удивительное совпадение? Оказывается, в этом «совпадении» проявляется глубокая связь теории электромагнитного поля со специальной теорией относительности, в основе которой лежит принцип относительности Эйнштейна. (Основные идеи специальной теории относительности были сформулированы Эйнштейном в 1905 году.) Согласно этому принципу все явления природы (не только законы механики, как это следует из принципа относительности Галилея) должны происходить одинаково во всех инерциальных системах отсчета. Важное следствие этого принципа заключается, в частности, в том, что нельзя однозначно, вне зависимости от системы отсчета, сказать, какие поля существуют в окружающем пространстве.

Рассмотрим в качестве примера взаимодействие двух электронов с точки зрения двух наблюдателей (рис. 2). Наблюдатель *А* утверждает, что движущиеся заряды создают вокруг себя как электрическое, так и магнитное поле, и кроме кулоновского отталкивания между ними действует магнитное притяжение (как между параллельными токами). Наблюдатель *Б* не согласен с ним и утверждает, что магнитного поля нет, раз заряды покоятся, и между электронами действует только кулоновское отталкивание. Принцип же относительности примиряет обоих наблюдателей, утверждая, что оба они правы, поскольку понятия электрического и магнитного полей являются относительными, зависящими от системы отсчета. Оба эти поля выступают как части единого целого — электромагнитного поля.

Вернемся, однако, к закону Фарадея и представим себе следующий мысленный эксперимент. Будем сближать постоянный магнит и замкнутый проводящий контур (рис. 3). Гальванометр, включенный в контур, зафиксирует индукционный ток. Отклонение стрелки гальванометра увидят как наблюдатель *А*, который стоит на магните, так и наблюдатель *Б*, сидящий на контуре. «Все ясно, — скажет наблюдатель *А*, — контур движется в постоянном поле моего магнита, на заряды в контуре действует сила Лоренца — вот и течет ток!». Наблюдатель *Б* скажет иное: «Магнит приближается к моему неподвижному контуру. Изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле — оно и создает ток в контуре!». Но, по Эйнштейну, оба наблюдателя правы. Оба они видят одно и то же отклонение стрелки гальванометра, т. е. один и тот же результат проявления закона Фарадея. А это означает, что и сам закон Фарадея, конечно же, должен быть одинаковым для обоих рассмотренных случаев.

А. И. Черноуцан



Искусство программирования

Язык Лого

Урок 2: Черепашья академия

А. А. ДУВАНОВ, Ю. А. ПЕРВИН

Арифметика Лого.

ЭВМ, конечно же, должна уметь вычислять. Мы можем набрать на клавиатуре команду ВПЕРЕД 10+20. Машина сложит 10+20 и пошлет Черепаху на 30 шагов вперед. Во всех ранее введенных командах вместо конкретного числа шагов или градусов поворота можно использовать арифметическое выражение. Машина выполнит указанные в нем действия, округлит результат до ближайшего целого числа и будет использовать это число как параметр команды. Так, движения исполнителя будут совершенно одинаковы при выполнении команд

НАЗАД (100+20)/5 и НАЗАД 24
ВПРАВО 30—200/(2+3) и ВПРАВО —10
ВЛЕВО 20/3 и ВЛЕВО 7.

В языке Лого в качестве знаков арифметических операций используются:

+ операция сложения;
— операция вычитания;
* операция умножения;
/ операция деления.

Круглые скобки служат, как обычно, для управления порядком действий. Выражения должны быть «вытянуты» в строку: (2+7)/5, а «многоэтажные» записи типа $\frac{2+7}{5}$ недопустимы. Это ограничение связано с тем, что на клавиатуре ЭВМ все символы выражения можно набирать только последовательно. Все знаки в арифметическом выражении должны быть явно указаны. Запись вида ВПЕРЕД (3+7) (40+30) заставит машину признаться:

НЕПОНЯТНО ЧТО ТАКОЕ (3+7) (40+30)

Правильно следует писать: ВПЕРЕД (3+7)*(40+30). Десятичные дроби в Лого записываются как обычно, но вместо запятой для отделения дробной части используется точка.

Черепаха одинаково среагирует на команды:

ВПЕРЕД 2*(48+3)/2.5 и ВПЕРЕД 40
ВПРАВО 180/3.14 и ВПРАВО 57

Все эти, не совсем привычные, правила записи арифметических выражений не имеют никакого отношения к самому предмету программирования и связаны лишь с несовершенством нынешних машин, но в силу этого становятся суровой необходимостью, когда действительно нужно задать программу реальной ЭВМ.

Коль скоро ЭВМ может считать, естественно, что она умеет выводить на экран результаты своих вычислений. Для того, чтобы заставить машину напечатать на экране результат деления 25 на 4, достаточно дать ей команду:

```
ПИШИ 25/4
```

Выполняя команду, ЭВМ зажигает на экране результат: 6.25. Заметьте, без округления! Дело в том, что округляются только параметры команд, заставляющих Черепаху перемещаться. И в самом деле, ведь единицей перемещения является число «шагов» — точек экрана, которое должно быть целым. Машина же умеет вычислять (и выдавать) результат с весьма высокой точностью.

Задача 1 (на тренировку записи выражений). а) Запишите команду НАЗАД без знаков операций, выполняющую то же действие, что и команда НАЗАД (42*5/7—15)/7; б) Заставьте машину сосчитать арифметическое выражение

$$\frac{5}{6}\left(\frac{21}{0{,}56}+\frac{6}{19}\cdot 21{,}31\right).$$

Так необходимые имена

... Мою подругу зовут Валентина. Правда, красивое имя?

... Кис-кис! Феропонт, котик, иди сюда.

... Величина, именуемая x, не может принимать нулевое значение, когда она является знаменателем дроби $1/x$.

Имена служат удобным средством для идентификации людей, животных, предметов, понятий, явлений, т. е. для выделения конкретного объекта среди других, однотипных с ним. В языках программирования имена так и называются — *идентификаторы*. Как и в математике, они обозначают переменные величины. Идентификатором в Лого может быть произвольное слово, такое как $x1$, СТОРОНА или ВАСЯ. Идентификатором, как ярлыком, помечается некоторая область в памяти ЭВМ, где хранится значение переменной. Чтобы различить, когда идет речь об именуемой области памяти, а когда о ее содержимом, в Лого в первом случае перед идентификатором переменной ставят кавычку, а во втором — двоеточие. Так, запись "X означает имя переменной X, а запись :X — значение этой переменной.

В Лого существует специальная команда СДЕЛАЙ, называемая *командой присваивания*, при помощи которой переменным можно присваивать значения. Например, при выполнении команды

```
СДЕЛАЙ "X 1
```

ЭВМ запишет в область памяти, отведенную переменной X, числовое значение 1, а выполнение следующей за ней команды

```
СДЕЛАЙ "X :X+1
```

приведет к увеличению значения переменной X на 1, так что X получит значение 2.

Итак, в команде присваивания — три части: обязательное (ключевое) слово СДЕЛАЙ, идентификатор переменной и выражение. По этой команде сначала вычисляется арифметическое выражение. Если в нем есть переменные, то эти значения извлекаются из соответствующих областей памяти и подставляются в выражение. Результат вычислений становится значением переменной, идентификатор которой располагается непосредственно за словом СДЕЛАЙ. Вот пример:

```
СДЕЛАЙ "ВАСЯ 2
СДЕЛАЙ "ВАСЯ :ВАСЯ * :ВАСЯ +1
```

(переменная ВАСЯ получает значение 5). Рассмотрим другой пример, связанный уже с геометрией.

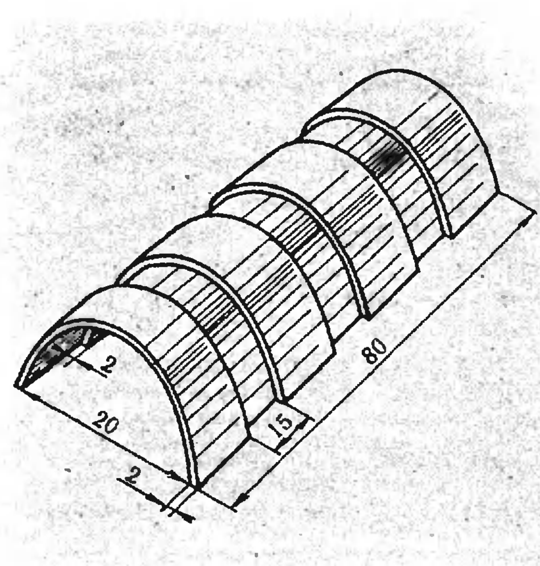


Рис. 1.

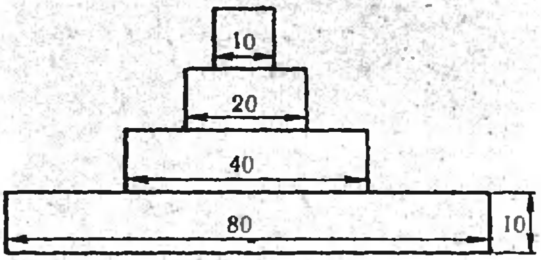


Рис. 2.

```
СДЕЛАЙ •СТОРОНА 100 СДЕЛАЙ •УГОЛ 180
ПОВТОРИ 4 [В :СТОРОНА П :УГОЛ/2]
ПОВТОРИ 4 [В :СТОРОНА/2 П :УГОЛ/2]
```

(нарисованы два вложенных друг в друга квадрата, с совмещенным левым нижним углом).

Задача 2. Составьте программу, вычисляющую объем ангара, изображенного на рисунке 1.

Процедуры с параметром

Занимаясь арифметикой и рассуждая об именах, мы совсем забыли нашу Черепаху, которая весьма умело чертит ... если ею правильно управлять. Давайте научим Черепаху рисовать вот такую «пирамиду» (рис. 2).

Задача решается при помощи вызова процедуры ПИРАМИДА, описание которой имеет вид

```
ЭТО ПИРАМИДА
    ПРЯМОУГОЛЬНИК1
    НР В 10 П 90 В 20 Л 90 Р
    ПРЯМОУГОЛЬНИК2
    НР В 10 П 90 В 10 Л 90 Р
    ПРЯМОУГОЛЬНИК3
    НР В 10 П 90 В 5 Л 90 Р
    ПРЯМОУГОЛЬНИК4
КОНЕЦ
```

Здесь использованы четыре «прямоугольных» процедуры:

```
ЭТО ПРЯМОУГОЛЬНИК1
    ПОВТОРИ 2 [В 10 П 90 В 80 П 90]
КОНЕЦ
ЭТО ПРЯМОУГОЛЬНИК2
    ПОВТОРИ 2 [В 10 П 90 В 40 П 90]
КОНЕЦ
ЭТО ПРЯМОУГОЛЬНИК3
    ПОВТОРИ 2 [В 10 П 90 В 20 П 90]
КОНЕЦ
ЭТО ПРЯМОУГОЛЬНИК4
    ПОВТОРИ 2 [В 10 П 90 В 10 П 90]
КОНЕЦ
```

Они очень похожи друг на друга.

В таком случае можно записать всего одну процедуру с параметром, вынесенным в заголовок описания процедуры и названным, например, СТОРОНА. Тогда в описании процедуры вместо размера стороны прямоугольника будет фигурировать имя СТОРОНА, обозначающее значение из таким образом поименованной области памяти.

```
ЭТО ПРЯМОУГОЛЬНИК :СТОРОНА
    ПОВТОРИ 2 [В 10 П 90 В :СТОРОНА
    П 90]
КОНЕЦ
```

Параметр процедуры, представляющий собой имя переменной, называется параметром описания процедуры, или ее *формальным параметром*.

Наша процедура вызывается к исполнению при помощи команды

ПРЯМОУГОЛЬНИК a,

где a — арифметическое выражение (в частности, число), называемое *фактическим параметром* процедуры, или параметром вызова. Вызов происходит так: формальному параметру СТОРОНА выделяется область свободной памяти (возможно при каждом вызове разная); вычисляется фактический параметр и его значение помещается в выделенную для формального параметра область; выполняются команды тела процедуры; после этого область памяти, временно отведенная под параметр, объявляется свободной.

Переменная, для которой место в памяти отводится каждый раз заново в момент вызова процедуры, называется *локальной переменной* этой процедуры. Формальные параметры процедуры в Лого — это локальные переменные.

Даже если несколько процедур используют одинаково поименованные формальные параметры, это не опасно для программы, вызывающей эти процедуры. Действительно, формальные параметры локальны, и значит, будучи занятыми во время выполнения некоторой процедуры, соответствующие области памяти освобождаются к ее завершению и могут быть использованы под любым (и в том числе, тем же самым) именем в других процедурах. Таким образом, локальность формальных параметров позволяет распределять составление сложной программы, включающей несколько процедур, между целым коллективом программистов. В следующем примере

```
ЭТО A :X :Y
    ВПЕРЕД :X ВПРАВО :Y ВПЕРЕД :X
КОНЕЦ
СДЕЛАЙ •T 45
A :T :T*2
```

переменные X, Y — формальные, а выражения $:T$ и $:T*2$ — фактические параметры процедуры A. Соот-

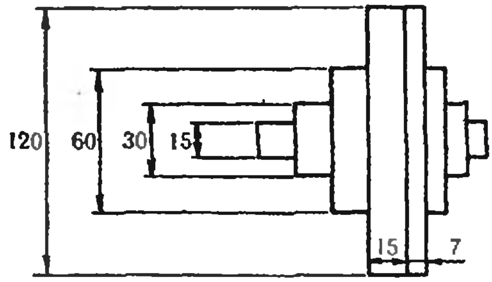


Рис. 3.

ветствие между формальными и фактическими параметрами — позиционное: первый формальный параметр соответствует первому фактическому, второй — второму и т. д.

Вернемся теперь к нашей пирамиде.

```
ЭТО ПИРАМИДА
     ПРЯМОУГОЛЬНИК 80
     НР В 10 П 90 В 20 Л 90 Р
     ПРЯМОУГОЛЬНИК 40
     НР В 10 П 90 В 10 Л 90 Р
     ПРЯМОУГОЛЬНИК 20                    (1)
     НР В 10 П 90 В 5 Л 90 Р
     ПРЯМОУГОЛЬНИК 10
КОНЕЦ
```

Задача 3. В программе (1) четырежды повторяется вызов процедуры ПРЯМОУГОЛЬНИК, правда, с разным, но закономерно изменяющимся фактическим параметром. Проанализировав закономерности программы, составьте описание процедуры с параметром ПИРАМИДА :ОСНОВАНИЕ, где вызов процедуры ПРЯМОУГОЛЬНИК осуществлялся бы внутри цикла. Предложите, по крайней мере, два варианта такой программы. Объясните, какой из них и почему, по вашему мнению, лучше. Используйте вашу программу для рисования пирамиды с основанием 120.

Программисты стараются всегда, когда это возможно, сделать свои программы универсальными.

Задача 4. Расширьте возможности предыдущей программы, описав процедуру, которая рисует пирамиду с произвольной высотой кольца. Нарисуйте с помощью вашей новой программы рисунок, составленный из двух пирамид (рис. 3).

Правильные многоугольники

Рисуя правильные многоугольники с тремя, четырьмя, пятью, ... сторонами (рис. 4), легко убедиться, что с возрастанием числа сторон фигура становится все более «круглой». На правильном шестиугольнике уже вполне можно ехать, как на колесе, если он достаточно мал (рис. 5)!

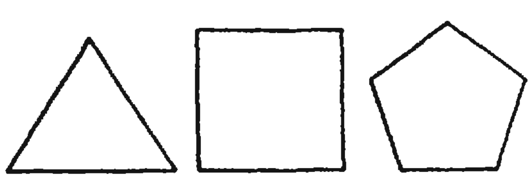


Рис. 4.

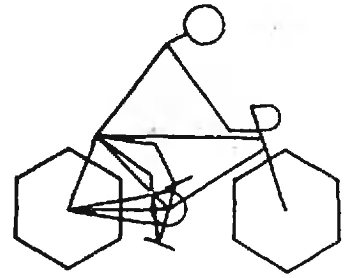


Рис. 5.

Угол правильного n-угольника равен $180—360/n$ градусов. Значит, Черепаха после отрисовки каждой стороны должна поворачиваться на дополнительный угол, равный $360/n$ градусов. Вот описание процедуры для построения произвольного правильного n-угольника:

```
ЭТО ПРАВИЛЬНЫЙ :N :СТОРОНА
     ПОВТОРИ :N [В :СТОРОНА П 360/:N]
КОНЕЦ
```

Вызов

```
     ПРАВИЛЬНЫЙ 4 100
```

нарисует на экране квадрат со стороной 100, а вызов

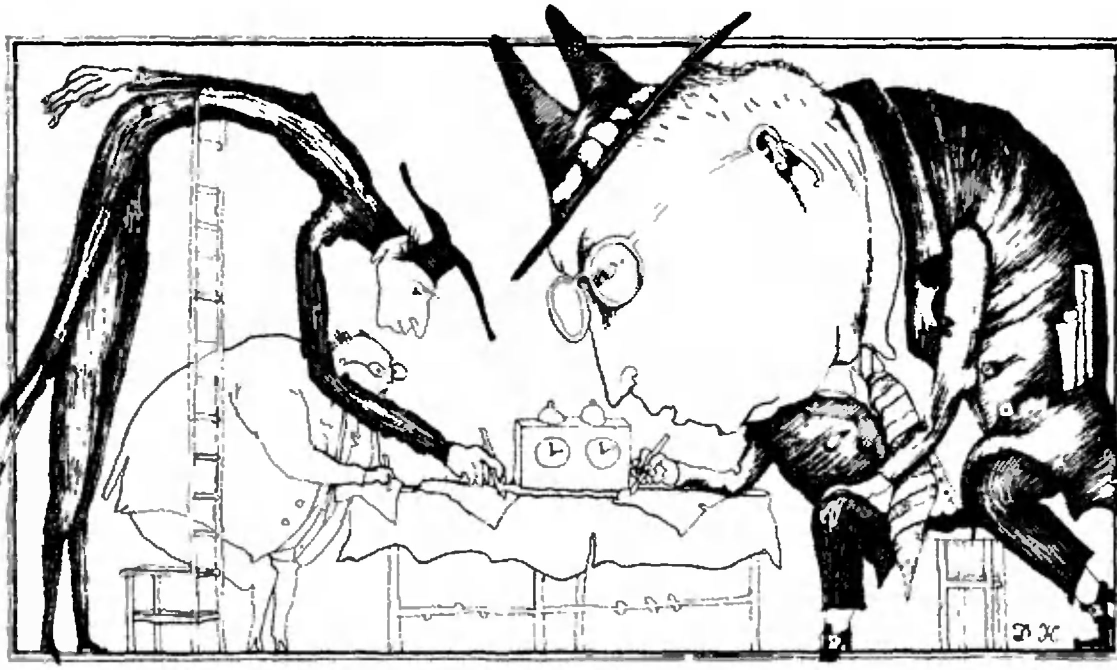
```
     ПРАВИЛЬНЫЙ 8 20
```

— правильный восьмиугольник со стороной 20. Наконец, рисунок правильного 360-угольника со стороной 1 — это вызов

```
     ПРАВИЛЬНЫЙ 360 1
```

Это наилучшее приближение окружности, создаваемое Черепахой, которая не умеет поворачиваться на углы, меньше 1 градуса, и перемещаться на расстояния, меньше 1 черепашьего шага. Длина этой окружности 360 шагов, а радиус $R = 360/2\pi$, т. е. приблизительно 57 шагов. Увеличить ее радиус можно, если при обращении к процедуре ПРАВИЛЬНЫЙ будет увеличена сторона. А вот уменьшить радиус можно, только уменьшив число сторон многоугольника.

Задача 5. Придумайте процедуру ОКРУЖНОСТЬ с одним параметром РАДИУС. Она должна рисовать наилучшее возможное приближение к окружности заданного радиуса. Точку расположения Черепахи на экране используйте в качестве центра окружности, в которую исполнитель должен вернуться после завершения рисования.



Практикум абитуриента

Решение систем тригонометрических уравнений

Кандидат физико-математических наук
А. А. БОЛИБРУХ,
кандидат физико-математических наук
В. М. УРОЕВ,
профессор М. И. ШАБУНИН

В данной заметке на примерах задач, предлагавшихся в разные годы на вступительных экзаменах в МФТИ (письменных и устных), приведены некоторые способы решения систем тригонометрических уравнений.

Напомним определения, относящиеся к любым, не обязательно тригонометрическим, системам. Если каждое решение одной системы является решением другой системы, то вторая система называется *следствием* первой. Если первая система является следствием второй, а вторая — следствием первой, то такие системы называются *равносильными*.

Укажем некоторые преобразования систем, в результате которых получаются системы, равносильные исходной.

1. Любое уравнение системы можно заменить равносильным ему уравнением.

2. Любое уравнение системы можно заменить уравнением, которое получается сложением данного с другим уравнением системы.

3. Значение неизвестного, найденное из некоторого уравнения системы, можно подставить в любое другое уравнение той же системы.

4. К системе можно добавить уравнение, являющееся следствием данной системы.

5. Если система содержит уравнение $f \cdot g = 0$, где функции f и g определены на одном и том же множестве, то она равносильна совокупности двух систем, в одной из которых уравнение $f \cdot g = 0$ заменено уравнением $f = 0$, а в другой — уравнением $g = 0$.

Приступая к решению системы тригонометрических уравнений, целесообразно вначале проверить, нельзя ли непосредственно из какого-либо уравнения системы выразить одно из неизвестных через другие.

Задача 1 (МФТИ, 1983). *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y, & (1) \\ \sin 2y - \sqrt{2} \sin x = 1. & (2) \end{cases}$$

Решение. Исходная система имеет смысл лишь в случае, когда определены функции $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{tg} y$, т. е. выполняются условия

$$\cos x \neq 0, \quad \cos y \neq 0. \qquad (3)$$

Рассмотрим первое уравнение. Естественно было бы разделить обе его части на $1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y$ и воспользоваться формулой тангенса суммы. Тогда уравнение (1) можно было бы переписать в виде

$$\operatorname{tg}(x + y) = 1; \qquad (4)$$

но при этом мы можем потерять те решения системы (1), (2), для которых

$$1 - \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = 0. \qquad (5)$$

Однако легко убедиться в том, что система (1), (2), (5) не имеет решений. В самом деле, если бы существовали решения этой системы, то из уравнения (1) следовало бы, что $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 0$. Но тогда уравнение (5) приняло бы вид $1 + \operatorname{tg}^2 y = 0$, и следовательно, оно бы решений не имело.

Таким образом, исходная система при условии (3) равносильна системе (2), (4).

Из уравнения (4) находим $x + y = \pi/4 + \pi n$, т. е.

$$y = \pi/4 + \pi n - x, \quad n \in \mathbf{Z}. \qquad (6)$$

Теперь найденное для y выражение подставим в уравнение (2) исходной системы:

$$\sin(\pi/2 - 2x + 2\pi n) - \sqrt{2}\sin x = 1.$$

Полученное уравнение приводится к виду $\sin x(2\sin x + \sqrt{2}) = 0$, откуда

а) $\sin x = 0, \quad x = \pi m, \quad m \in \mathbf{Z}$,

б) $\sin x = -\sqrt{2}/2$,

$x = (-1)^{k+1}\pi/4 + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}$.

По формуле (6) определяем соответствующие значения y. Для серии а)

$$y = \pi/4 + \pi(n - m), \quad n, m \in \mathbf{Z}; \qquad (7)$$

для серии б)

$$y = \pi/4 - (-1)^{k+1}\pi/4 + \pi(n - k), \quad n, k \in \mathbf{Z}. \qquad (8)$$

Значения (x, y) из формулы (7) удовлетворяют условию (3). Для серии (8) требуется дополнительное исследование. Если $\sin x = -\sqrt{2}/2$, то $\cos x \neq 0$, так что первое неравенство условия (3) заведомо выполнено. Второе неравенство $\cos y \neq 0$ выполняется не всегда.

Если k — четное число, т. е. $k = 2p$, где $p \in \mathbf{Z}$, то по формуле (8) находим $y = \pi/2 + \pi(n - 2p)$. Для этих значений y условие (3) не выполняется. Если же k — нечетное число, т. е. $k = 2p - 1$, где $p \in \mathbf{Z}$, то $y = \pi(n - 2p + 1)$ и условие (3) выполнено. Соответствующие значения x находим по формуле б): $x = -3\pi/4 + 2\pi p$.

Ответ: $(\pi m;\ \pi/4 + \pi(n - m))$, $(-3\pi/4 + 2\pi p;\ \pi(n - 2p + 1))$, $m, n, p \in \mathbf{Z}$.

Целочисленные параметры, входящие в запись решений системы, нельзя обозначать одной буквой. Это означало бы, что они обязаны принимать одинаковые значения, в то время как в действительности они принимают какие-угодно целые значения — одинаковые или разные.

В дальнейшем k, l, m, n, p, r, s, t, если не оговорено противное, принимают все целые значения.

Задача 2. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = -1/2, \\ \cos x \cdot \sin y = 1/2. \end{cases} \qquad (9)$$

Решение. Сложив уравнения системы (9), а затем вычтя из второго уравнения первое, получим систему, равносильную системе (9):

$$\begin{cases} \sin(x + y) = 0, \\ \sin(y - x) = 1, \end{cases}$$

откуда последовательно находим

$$x + y = \pi n, \quad y - x = \pi/2 + 2\pi k,$$
$$x = \pi(n/2 - k - 1/4),$$
$$y = \pi(n/2 + k + 1/4).$$

Ответ: $(\pi(n/2 - k - 1/4);\ \pi(n/2 + k + 1/4))$.

Так же, как систему (9), можно решить любую систему вида

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = a, \\ \cos x \cdot \cos y = b. \end{cases}$$

К таким системам приводятся, например, системы

$$\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = a, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y = b, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y = a, \\ \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} y = b. \end{cases}$$

Если система содержит только две комбинации тригонометрических функций либо приводится к таковой, то, обозначив эти комбинации функций за новые неизвестные, можно свести исходную систему к алгебраической.

Задача 3. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} \cos x - \sin x = 1 + \cos y - \sin y, \\ 3\sin 2x - 2\sin 2y = 3/4. \end{cases} \qquad (10)$$

Решение. Воспользуемся тождеством

$$(\sin x - \cos x)^2 = 1 - \sin 2x$$

и обозначим

$$\cos x - \sin x = u, \quad \cos y - \sin y = v; \tag{11}$$

тогда

$$\sin 2x = 1 - u^2, \quad \sin 2y = 1 - v^2,$$

и система (10) сводится к алгебраической системе

$$\begin{cases} u = 1 + v, \\ 3u^2 - 2v^2 = 1/4. \end{cases} \tag{12}$$

Система (12) имеет два решения:

$$u_1 = -9/2, \ v_1 = -11/2 \ \text{ и } \ u_2 = 1/2, \ v_2 = -1/2.$$

Рассмотрим вначале значения u_1, v_1. Возвращаясь к исходным переменным, по формулам (11) получаем:

$$\begin{cases} \cos x - \sin x = -9/2, \\ \cos y - \sin y = -11/2. \end{cases} \tag{13}$$

Но уже первое уравнение системы (13) решений не имеет, так как

$$\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos(x + \pi/4) \geqslant \geqslant -\sqrt{2} > -9/2.$$

Следовательно, система (13) решений не имеет.

Рассмотрим теперь значения u_2 и v_2. Вновь по формулам (11) получим

$$\begin{cases} \cos x - \sin x = 1/2, \\ \cos y - \sin y = -1/2. \end{cases}$$

Для первого уравнения находим

$$\cos x \cdot 1/\sqrt{2} - \sin x \cdot 1/\sqrt{2} = 1/2\sqrt{2}, \ \cos(x + \pi/4) = 1/2\sqrt{2},$$

$$x + \pi/4 = \pm\arccos(1/2\sqrt{2}) + 2\pi n,$$

$$x = -\pi/4 \pm \arccos(1/2\sqrt{2}) + 2\pi n.$$

Точно так же получаем

$$y = -\pi/4 \pm \arccos(-1/2\sqrt{2}) + 2\pi m.$$

Таким образом, найдем следующие решения исходной системы:

$$(-\pi/4 \pm \arccos(1/2\sqrt{2}) + 2\pi n; \ -\pi/4 \pm \arccos(-1/2\sqrt{2}) + 2\pi m)$$

(знаки выбираются независимо друг от друга).

В некоторых случаях систему удается привести к виду

$$\begin{cases} \sin x = f(y), \\ \cos x = g(y), \end{cases} \tag{14}$$

откуда в силу основного тригонометрического тождества $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ получаем уравнение $f^2(y) + g^2(y) = 1$, содержащее лишь одно неизвестное.

Если система приведена к виду

$$\begin{cases} \operatorname{tg} x = f(y), \\ \operatorname{ctg} x = g(y), \end{cases}$$

то неизвестное x исключается перемножением уравнений: $\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$, откуда $f(y) \cdot g(y) = 1$.

При таких способах решения необходимо внимательно следить за тем, чтобы не потерять решений и не приобрести посторонних решений.

Задача 4 (МФТИ, 1978). *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} 4\sin x - 2\sin y = 3, \\ 2\cos x - \cos y = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Решение. Систему (15) можно привести к виду (14). Сделав это, получим равносильную систему

$$\begin{cases} \sin x = 3/4 + 1/2 \cdot \sin y, \\ \cos x = 1/2 \cdot \cos y. \end{cases} \tag{16}$$

Возводя почленно уравнения системы (16) в квадрат и складывая, получаем уравнение, являющееся следствием системы (16):

$$1 = \frac{9}{16} + \frac{3}{4}\sin y + \frac{1}{4}\sin^2 y + \frac{1}{4}\cos^2 y,$$

или

$$\sin y = 1/4, \tag{17}$$

откуда

$$y = (-1)^n \arcsin 1/4 + \pi n. \tag{18}$$

Из первого уравнения системы (16) с учетом (17) находим $\sin x = 7/8$,

$$x = (-1)^m \arcsin 7/8 + \pi m. \tag{19}$$

Поскольку при решении системы (15) могли появиться посторонние решения (использовалась операция возведения в квадрат), необходимо произвести отбор, подставив найденные значения (18), (19) во второе уравнение этой системы.

Легко видеть, что при четных m и n в формулах (18), (19) соответствующие значения $\cos x$ и $\cos y$ положительны, а при нечетных m и n эти значения отрицательны. Таким образом, $|\cos x| = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \sqrt{15}/8$, $|\cos y| = \sqrt{15}/4$, так что для выполнения второго уравнения системы (16) требуется только, чтобы знаки $\cos x$ и $\cos y$ совпадали. Отсюда получаем

$$\begin{cases} x = \arcsin \frac{7}{8} + 2\pi k, \\ y = \arcsin \frac{1}{4} + 2\pi l, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -\arcsin \frac{7}{8} + (2k+1)\pi, \\ y = -\arcsin \frac{1}{4} + (2l+1)\pi. \end{cases} \tag{20}$$

Обе полученные серии (20) можно объединить и ответ записать в следующем виде.

Ответ:

$$((-1)^p \arcsin \frac{7}{8} + \pi p,$$
$$(-1)^p \arcsin \frac{1}{4} + \pi (p + 2r)).$$

При решении тригонометрических систем часто бывает непросто сделать первый шаг, найти «ключ» к решению задачи. Какие-то общие рекомендации здесь дать нельзя. Можно лишь посоветовать стараться применять такие преобразования уравнений системы, которые приводят к появлению тригонометрических функций одного аргумента или хотя бы не увеличивают число функций с разными аргументами.

Задача 5 (МФТИ, 1982). *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} 3\cos 3x = \sin(x + 2y), & (21)\\ 3\sin(2x + y) = -\cos 3y. \end{cases}$$

Решение. Если выразить члены уравнений через синусы и косинусы аргументов x и y, то получится довольно сложная система. Поэтому следует избрать другой способ решения.

Заметим, что сумма аргументов косинусов в уравнениях системы, равная $3x + 3y$, совпадает с суммой аргументов синусов. Учитывая это, перемножим уравнения системы (21) «крест-накрест», т. е. умножим левую часть одного уравнения на правую часть другого. Получим уравнение

$$-\cos 3x \cos 3y = \sin(x + 2y) \sin(2x + y), \quad (22)$$

являющееся следствием системы (21).

Заменим в уравнении (22) произведения тригонометрических функций соответствующими суммами (разностями); получим после приведения подобных $\cos(x - y) + \cos(3x - 3y) = 0$, откуда $2\cos(x - y) \cdot \cos(2x - 2y) = 0$. Это уравнение распадается на два уравнения:

$$\cos(x - y) = 0, \quad (23)$$
$$\cos(2x - 2y) = 0. \quad (24)$$

Следовательно, система (21) равносильна совокупности систем (21), (23) и (21), (24).

а) Из уравнения (23) следует, что

$$x = y + \pi/2 + \pi n. \quad (25)$$

Подставляя x из (25) в систему (21), получаем:

$$\begin{cases} 3\cos(3y + 3\pi/2 + 3\pi n) = \\ = \sin(3y + \pi/2 + \pi n), \\ 3\sin(3y + \pi + 2\pi n) = -\cos 3y. \end{cases}$$

Оба уравнения этой системы приводятся к виду $3\sin 3y = \cos 3y$, откуда $y = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \frac{\pi m}{3}$. Из (25) находим соответствующие значения x.

б) Рассмотрим теперь систему (21), (24). Из уравнения (24) находим $x = y + \pi/4 + \pi k/2$. Подставляя это значение в систему (21), получаем:

$$\begin{cases} 3\cos(3y + 3\pi/4 + 3\pi k/2) = \\ = \sin(3y + \pi/4 + \pi k/2), & (26)\\ 3\sin(3y + \pi/2 + \pi k) = -\cos 3y. \end{cases}$$

Далее воспользуемся формулами приведения. Из второго уравнения системы (26) следует, что $\cos 3y = 0$, т. е. $y = \pi/6 + \pi p/3$. Подставляя это значение в первое уравнение, получаем

$$3\cos(\pi p + \pi/2 + 3\pi/4 + 3\pi k/2) = \\ = \sin(\pi p + 3\pi/4 + \pi k/2),$$

откуда $(3(-1)^k + 1)\sin(3\pi/4 + \pi k/2) = 0$. Последнее равенство не выполняется ни при каких целых k, поэтому система (26) несовместна, и в случае б) решений нет.

Ответ: $\left(\frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi m}{3} + \pi n;\ \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \frac{\pi m}{3}\right)$.

Упражнения

Решите системы уравнений:

1 (МФТИ, 1982).
$$\begin{cases} \operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x = 1 + \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y, \\ \cos 2y + \sqrt{3}\cos 2x = -1. \end{cases}$$

2 (МФТИ, 1978).
$$\begin{cases} 6\cos x + 4\cos y = 5, \\ 3\sin x + 2\sin y = 0. \end{cases}$$

3 (МФТИ, 1982).
$$\begin{cases} 2\cos(3x + y) = \sin(x - y), \\ 2\sin(x + y) = \cos(3x - y). \end{cases}$$

4 (МФТИ, 1982).
$$\begin{cases} \sin(2x + y) + \sin(2x - y) = \sqrt{2}\cos y, \\ \operatorname{tg}(x + \pi/8) + \cos y = \operatorname{tg}^2 y. \end{cases}$$

5 (МФТИ, 1981).
$$\begin{cases} \cos 2y + 1/2 = (\cos y - 1/2)(1 + 2\sin 2x), \\ \sin y(\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{ctg}^3 x) = 3\operatorname{ctg} y. \end{cases}$$

6 (МФТИ, 1976).
$$\begin{cases} \sin^2 x + \cos y \cdot \sin x = \cos 2y, \\ \cos 2x + \sin 2y = \sin^2 y + 3\cos y \cdot \sin x. \end{cases}$$

7 (МФТИ, 1978).
$$\begin{cases} \sqrt{1 + \sin x \cdot \sin y} = \cos x, \\ 2\sin x \cdot \operatorname{ctg} y + 1 = 0. \end{cases}$$

8 (МФТИ, 1986).
$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \sin y + 2\operatorname{ctg} x \cos y = \sqrt{5/2}, \\ 2\operatorname{ctg} x \cdot \sin y - \operatorname{tg} x \cdot \cos y = \sqrt{5/2}. \end{cases}$$

9 (МФТИ, 1982). Найдите все решения системы уравнений
$$\begin{cases} \operatorname{tg} x \cdot \sin y + 2\operatorname{ctg} x \cdot \cos y = \sqrt{5/2}, \\ 2\operatorname{ctg} x \cdot \sin y - \operatorname{tg} x \cdot \cos y = \sqrt{5/2}. \end{cases}$$

Олимпиады

XXI Всесоюзная олимпиада по математике

Кандидат физико-математических наук
В. В. ВАВИЛОВ,
кандидат физико-математических наук
С. В. РЕЗНИЧЕНКО,
кандидат физико-математических наук
А. М. СЛИНЬКО

Заключительный этап XXI Всесоюзной математической олимпиады школьников проходил в апреле 1987 года во Фрунзе. В нем приняли участие 29 команд: 14 команд союзных республик, команды четырех зон РСФСР, Москвы и Ленинграда, а также 8 команд специализированных физико-математических школ и команда Фрунзе. Всего в олимпиаде участвовало 162 школьника: 3 семиклассника, 43 восьмиклассника, 58 девятиклассников и 58 десятиклассников (семиклассники решали задачи, предложенные для восьмиклассников).

Торжественное открытие олимпиады состоялось 12 апреля в здании филиала музея В. И. Ленина, а незадолго до него участники олимпиады возложили цветы к памятнику В. И. Ленину. С теплыми словами приветствия, пожеланиями успешного выступления и честного соперничества к участникам олимпиады при ее открытии обратились министр просвещения Киргизской ССР М. Б. Базаркулов, заведующий отделом школ, науки и учебных заведений ЦК КП Киргизии А. А. Акаев, старший методист Ученого методического совета Минпроса СССР Т. А. Сарычева, заведующая отделом школьной молодежи ЦК ЛКСМ Киргизии Л. М. Скудина, председатель жюри академик АН УССР Б. В. Гнеденко, зам. председателя жюри зам. директора института математики АН Киргизии доктор физико-математических наук А. Н. Боташев и другие. С письменным приветствием к участникам олимпиады обратился министр просвещения СССР С. Г. Щербаков.

С первых минут пребывания на гостеприимной земле Киргизии и на протяжении всей олимпиады участники были окружены теплотой и вниманием хозяев, превративших олимпиаду в настоящий праздник юных математиков. В программу олимпиады входили ставшие традиционными вечер дружбы народов СССР, встреча с учеными и передовиками предприятий республики, посещения театров и экскурсии. Надолго запомнится участникам экскурсия в Ала-Арчинское ущелье, где находится Всесоюзный альплагерь.

Заключительный этап олимпиады по традиции проводился в два тура, состоявшиеся 13 и 14 апреля. На каждом из них школьникам было предложено по четыре задачи, на решение которых отводилось по пять часов. Ниже приводятся условия всех задач олимпиады с указанием автора, предложившего задачу (звездочкой отмечены задачи, наиболее понравившиеся участникам и вошедшие в Задачник «Кванта»).

После проверки работ жюри олимпиады оценило каждую задачу в

№ задачи / Класс	1	2	3	4	5	6	7	8
8	5	7	8	10	8	6	6	10
9	6	7	7	10	5	7	8	10
10	6	7	10	7	9	7	8	6

Таблица 1

Класс	I премия	II премия	III премия
8	3 (54—60)	9 (30—46)	14 (20—28)
9	3 (46—49)	15 (39—45)	10 (31—37)
10	5 (60)	6 (54—56)	8 (45—50)
Итого:	11	30	32

Таблица 2

баллах (см. таблицу 1); наивысший балл получала задача, с которой справилось наименьшее число участников. Затем на итоговом заседании жюри были выработаны критерии, на основании которых присуждались I, II и III премии участникам олимпиады (см. таблицу 2, в которой в скобках указано число баллов). Наиболее трудными задачами оказались задачи второго дня в 9 классе: последнюю (восьмую) задачу не решил полностью ни один участник олимпиады.

В программу олимпиады входили также Математический бой между командой участников и командой, составленной из членов жюри. На этот раз в упорной борьбе победила команда членов жюри, которую возглавлял победитель многих школьных олимпиад преподаватель МГУ С. В. Конягин. Очень интересно и увлекательно прошли «компьютерные игры».

13 апреля состоялась встреча участников олимпиады с членами редколлегии журнала «Квант»: зам. главного редактора журнала Ю. П. Соловьевым, членами редколлегии А. П. Савиным и В. В. Вавиловым и членом редакционного совета Г. Н. Яковлевым. На этой встрече участники получили ответы на интересующие их вопросы и высказали соображения о содержании уже опубликованных в журнале материалов, а также некоторые предложения по тематике статей и оформлению журнала в будущем.

Быстро и незаметно пролетели восемь дней олимпиады, но добрую память о ней ребята сохранят на долгие годы.

Задачи

Первый день

8 класс

1. Десять спортсменов участвовали в турнире по настольному теннису. Каждые два из них сыграли между собой ровно одну партию. Первый игрок одержал в ходе турнира x_1 побед и потерпел y_1 поражений, второй одержал x_2 побед и потерпел y_2 поражений и так далее. Докажите, что

$$x_1^2+\ldots+x_{10}^2=y_1^2+\ldots+y_{10}^2.$$

А. Анджанс

2. Известно, что с помощью набора из 6 гирь можно уравновесить 63 груза, веса которых являются последовательными натуральными числами. Найдите все такие наборы.

А. Слинько

3. Дан правильный семиугольник $A_1A_2\ldots A_7$. Докажите, что

$$\frac{1}{A_1A_2}=\frac{1}{A_1A_3}+\frac{1}{A_1A_4}.$$

М. Розенберг

4. Игра «Морской бой» происходит в квадрате 7×7 клеток. Какое наименьшее число выстрелов необходимо сделать, чтобы наверняка ранить четырехпалубный корабль, если известно, что он

а) имеет вид ?

б) состоит из четырех клеток, примыкающих друг к другу сторонами?

А. Холодов

9 класс

1. Докажите, что ни при каком натуральном n число

$$1^{1987}+2^{1987}+\ldots+n^{1987}$$

не делится на $n+2$.

Д. Митькин

2. Какое наименьшее число фигур вида  нужно разместить в квадрате 8×8 клеток, чтобы в него нельзя было больше поместить без наложения ни одной такой фигуры?

А. Берзиньш

3. Параллельно сторонам треугольника проведены три прямые. Каждая из прямых удалена от стороны, которой они параллельны, на расстояние, равное длине этой стороны. При этом для каждой стороны треугольника параллельная ей прямая и противолежащая этой стороне вершина расположены по разные стороны от нее. Докажите, что точки пересечения продолжений сторон треугольника с тремя проведенными прямыми лежат на одной окружности.

Б. Чиник

4.* На плоскости даны две замкнутые ломаные, каждая с нечетным числом звеньев. Все прямые, содержащие звенья этих ломаных, различны, и никакие три из них не пересекаются в одной точке. Докажите, что из каждой ломаной можно выбрать по одному звену так, чтобы они были противоположными сторонами некоторого выпуклого четырехугольника.

А. Сердюков, Д. Флаас

10 класс

1. Найдите такой набор из пяти различных натуральных чисел, в котором любые два числа взаимно просты, а любые несколько чисел дают в сумме составное число.

Н. Агаханов

2. Докажите, что если в выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ имеют место равенства $\angle ABC=\angle ADE$ и $\angle AEC=\angle ADB$, то $\angle BAC=\angle DAE$.

Н. Сергеев

3. Найдите все значения α, для каждого из которых последовательность

$$\cos\alpha,\ \cos 2\alpha,\ \cos 4\alpha,\ \cos 8\alpha,\ \ldots$$

состоит только из отрицательных чисел.

В. Салихов

4. В квадрате из 1987×1987 клеток вырезана одна произвольная клетка. Докажите, что оставшуюся часть всегда можно разрезать на трехклеточные «уголки» вида .

Р. Стадья

Второй день

8 класс

5. Положительные числа a, b, c, A, B, C удовлетворяют условиям $a+A=b+B=c+C=k$. Докажите, что

$$aB+bC+cA<k^2.$$

Д. Фляас

6.* В каждой клетке квадратной таблицы 1987×1987 написано число, не превосходящее по модулю 1. В любом квадрате 2×2 данной таблицы сумма чисел равна 0. Докажите, что сумма всех чисел в таблице не превосходит 1987.

А. Меркурьев

7. Вершина B угла ABC лежит вне окружности, а лучи BA и BC ее пересекают. Из точки K пересечения луча BA и окружности перпендикулярно биссектрисе угла проведена прямая, пересекающая окружность в точках K и P, а луч BC — в точке M. Докажите, что отрезок PM вдвое длиннее перпендикуляра, опущенного из центра окружности на биссектрису угла ABC.

С. Дужин

8.* Два игрока поочередно выписывают на доске натуральные числа, не превосходящие p. Правилами игры запрещается писать на доске делители уже выписанных чисел. Проигрывает игрок, который не может сделать очередной ход.

а) Выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию для $p=10$, и укажите ее.

б) Выясните, кто из игроков имеет выигрышную стратегию для $p=1000$.

Д. Фомин

9 класс

5. Дядька Черномор каждый вечер из 33 богатырей назначает на дежурство 9 или 10 по своему усмотрению. Через какое наименьшее число дней может оказаться, что каждый из богатырей выходил на дежурство одинаковое число раз?

Б. Ивлев

6.* На целочисленной решетке отмечено непустое множество узлов. Кроме того, задан конечный набор ненулевых векторов с целыми координатами. Известно, что если от любого отмеченного узла отложить все заданные векторы, то среди их концов будет больше отмеченных узлов, чем неотмеченных. Докажите, что отмеченных узлов бесконечно много.

Д. Фляас

7. Выпуклый p-угольник ($p\geqslant5$) разрезан по всем диагоналям. Докажите, что среди получившихся при этом частей найдутся части разной площади.

А. Анджанс

8. Множество T_0 состоит из всех чисел вида $(2^k)!$, где $k=0, 1, 2, \dots$ При каждом значении $p=1, 2, \dots, 1987$ множество T_p получается добавлением к множеству T_{p-1} всех чисел, представимых в виде суммы нескольких различных чисел из T_{p-1}. Докажите, что хотя бы одно натуральное число не принадлежит множеству T_{1987}.

С. Конягин

10 класс

5. См. задачу 8 для 8 класса.

6.* График функции $y=f(x)$, определенной на всей числовой прямой, переходит к себе при повороте на угол $\pi/2$ вокруг начала координат.

а) Докажите, что уравнение $f(x)=x$ имеет ровно одно решение.

б) Приведите пример такой функции.

А. Клюшин

7. Все грани выпуклого многогранника являются треугольниками. Докажите, что каждое ребро этого многогранника можно покрасить в красный или синий цвет так, чтобы в итоге из любой его вершины в любую другую можно было попасть, двигаясь только по красным ребрам, а также только по синим.

О. Ляшко

8. Докажите, что при любом натуральном значении n справедливо неравенство

$$(2n+1)^n\geqslant(2n)^n+(2n-1)^n.$$

Ю. Нестеренко

XXI Всесоюзная олимпиада по физике

А. Р. ЗИЛЬБЕРМАН

В этом году заключительный этап Всесоюзной олимпиады школьников по физике проходил в городе Таллине с 15 по 21 апреля. Торжественное открытие олимпиады состоялось 16 апреля, а уже на следующий день участники писали теоретический тур. Вот условия теоретических задач (как обычно, часть этих задач опубликована в Задачнике «Кванта» в двух предыдущих номерах журнала):

8 класс

1. Маленький упругий мячик отпускают с высоты $H=1$ м над полом, а на его пути закрепляют твердую пластинку, от которой он отскакивает. Какая скорость будет у мячика в момент удара о пол? Как нужно расположить пластинку, чтобы мячик ударился о пол как можно дальше от начальной точки? Чему равно это максимальное расстояние?

2. Папа Карло сделал для Буратино колпак из тонкой жести. Колпак имеет форму конуса высотой $H=20$ см с углом $\alpha=60^\circ$ при вершине. Будет ли этот колпак держаться на голове у Буратино, если его голова — гладкий шар диаметром $d=15$ см?

3. Выполняя лабораторную работу, студент опустил в сосуд с водой кипятильник, включил его в сеть и стал каждые 3 минуты записывать температуру. Данные этого опыта таковы:

25,2° — 26,4° — 27,6° — 28,7° — 29,7° — 30,6° — 31,5° — 32,3° — 33,1°.

Затем он охладил воду, положив в сосуд небольшой металлический образец, и вновь провел опыт. Вот результаты этого опыта:

$$22{,}6^\circ - 23{,}8^\circ - 25{,}0^\circ - 26{,}0^\circ - 27{,}0^\circ -$$
$$28{,}0^\circ - 28{,}9^\circ - 29{,}8^\circ - 30{,}6^\circ.$$

Определите по этим данным теплоемкость образца. Напряжение сети $U=35$ В, ток через кипятильник $I=0{,}2$ А, температура в комнате $t=+20$ °С.

4. Для исследования солнечной батареи используется многопредельный вольтметр (он состоит из чувствительного микроамперметра и набора добавочных резисторов). Подключив его к батарее на пределе 1 В, мы получаем показание $U_1=0{,}7$ В. Переключив вольтметр на предел 10 В, мы получим $U_2=2{,}6$ В. Что получилось бы на пределе 100 В? Известно, что при неизменном освещении солнечная батарея ведет себя как обычный источник, последовательно к которому подключен резистор большого сопротивления.

9 класс

1. Длинная тонкая нить с грузом на конце переброшена через блок и привязана к носу модели лодки, которая может плыть по длинному прямолинейному каналу с водой (рис. 1). Лодку отпускают, а ее скорость (в см/с) записывают каждую секунду. К сожалению, сохранился только конец этой записи:

$$5{,}65-6{,}44-6{,}96-7{,}31-7{,}54-7{,}70$$
$$-7{,}80-7{,}86-7{,}91-7{,}94-7{,}96-7{,}97.$$

Определите по этим данным скорость лодки через 0,1 секунды после того, как ее отпустили.

2. Если полностью открыт кран холодной воды, а кран горячей воды закрыт (рис. 2), то ванна наполняется за $\tau_1=8$ мин, а если при этом на выходное отверстие насадить шланг с душем на конце, то это время увеличится до $\tau_2=14$ мин. Когда кран холодной воды закрыт, а кран горячей открыт полностью, время наполнения ванны $\tau_3=12$ мин. То же, но с душем на конце, дает $\tau_4=18$ мин. За какое время наполнится ванна, если полностью открыты оба крана? А если при этом насажен шланг с душем?

3. Тонкостенный сосуд непрерывно откачивают насосом, однако из-за наличия микротрещин в стенке сосуда в нем устанавливается неизменное давление $p_у=0{,}001$ мм рт. ст. Снаружи атмосферное давление нормальное — $p_0=760$ мм рт. ст., относительная влажность воздуха $\varphi=80$ %. Найдите давление паров воды в сосуде. Давление насыщенных паров воды при данной температуре $p_н=17{,}5$ мм рт. ст.

4. Для очистки воздуха от пыли, которая в обычных условиях оседает очень медленно, можно использовать тот факт, что пылинки заряжены. В первом опыте стеклянный цилиндр (высотой $H=1$ м и радиусом основания $R=0{,}1$ м) с пыльным воздухом помещают в электрическое поле напряженностью $E_1=1\cdot10^4$ В/м, направленное вдоль оси цилиндра. Через время $\tau=2$ мин вся содержавшаяся в цилиндре пыль осела на дно. Во втором опыте вдоль оси цилиндра натягивают тонкую проволоку и соединяют ее с источником высокого напряжения. Известно, что в этом случае напряженность поля $E\sim1/r$, где r — расстояние до оси. Напряжение источника подбирают так, чтобы напряженность электрического поля у стенок цилиндра была, как и в первом опыте, E_1. Считая пылинки одинаковыми, а заряды пылинок равными, определите время оседания всей пыли на стенки цилиндра во втором опыте. Пыли в воздухе немного, так что объемным зарядом можно пренебречь.

5. В схеме, приведенной на рисунке 3, амперметр показывает $I_1=20$ мА. Если батарейку $\mathcal{E}_x$ включить наоборот, ток увеличится до $I_2=35$ мА. Какой ток потечет в исходной схеме, если лампочку замкнуть накоротко? Вольтамперная характеристика лампочки приведена на рисунке 4.

10 класс

1. По одной из гипотез звезды образуются из межзвездной среды (космическая пыль) путем сжатия под действием гравитационных сил. Оцените время образования звезды из гигантского сферического облака космической пыли плотностью $\rho=2\cdot10^{-20}$ г/см^3. Можно считать, что при сжатии частицы не обгоняют друг друга. Гравитационная постоянная $G=6{,}67\cdot10^{-11}$ Н·м^2/кг^2.

2. В одном из научно-фантастических романов описана ситуация, когда фотонная ракета полностью потеряла скорость в окрестностях массивной звезды. Запас горючего достаточен лишь для того, чтобы при однократном запуске двигателя выйти на круговую орбиту вокруг звезды. Но космонавтов это не устраивает. Они применяют такой маневр: за малое время расходуют три четверти горючего и раз-

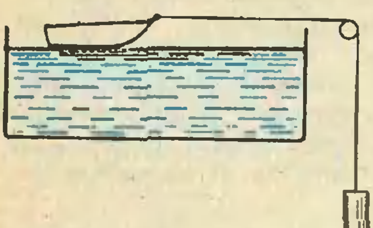


Рис. 1.

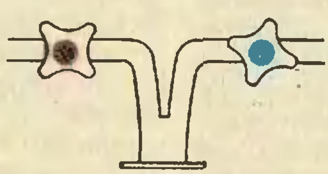


Рис. 2.

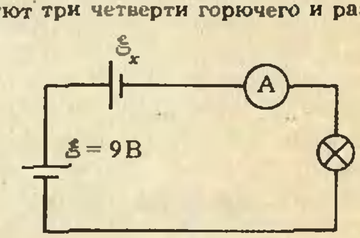


Рис. 3.

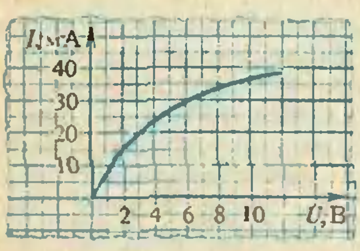


Рис. 4.

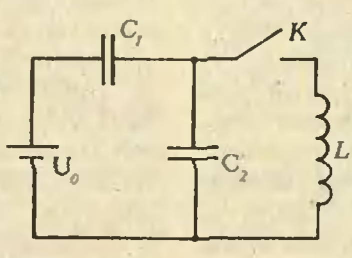


Рис. 5.

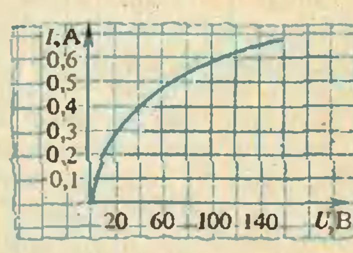


Рис. 6.

гоняют корабль, переходя на орбиту, которая касается поверхности звезды. Затем они еще раз включают двигатель на короткое время. На каком расстоянии от центра звезды корабль находится в момент начала маневра, если горючего в обрез хватило для выхода из поля тяготения звезды? Радиус звезды R.

3. См. задачу 3 для 9 класса.

4. В схеме, приведенной на рисунке 5, замыкают ключ K. Найдите максимальный ток через катушку L. Найдите также максимальное напряжение на конденсаторе C_1. Неидеальностью элементов схемы можно пренебречь.

5. Лампочку накаливания подключают к сети переменного напряжения (220 В, 50 Гц) последовательно с резистором сопротивлением $R = 100$ Ом, а параллельно лампочке присоединяют диод. Считая диод идеальным, нарисуйте график зависимости тока через лампочку от времени. Найдите мощность, выделяемую на лампочке. Вольтамперная характеристика лампочки, снятая на постоянном токе, приведена на рисунке 6.

При подборе задач методическая комиссия обычно старается сделать так, чтобы вариант содержал задачи различной трудности — от довольно простых до весьма сложных. (Не всегда это в полной мере удается — мнения участников по поводу сложности задач порой не совпадают с мнением комиссии, причем комиссия чаще склонна преувеличивать сложность задач. Впрочем, бывает и наоборот.)

На этот раз, как и предполагалось, более сложными для участников оказались задачи 8.2, 9.2, 9.4, 10.1, 10.4 и 10.5. Относительно простыми были задачи 8.1, 8.4, 9.1, 9.5 и 10.3.

Порядок проведения олимпиады практически не изменился по сравнению с прошлым годом, поэтому мы не будем подробно описывать работу жюри (прочесть об этом можно в 11 номере «Кванта» за прошлый год).

В воскресенье 19 апреля состоялся экспериментальный тур. Участникам были предложены задачи, подготовленные хозяевами олимпиады — учеными Эстонии. Хочется отметить две из них, не требующие сложного оборудования. Их можно повторить не только в физическом кабинете, но и дома.

Первую делали восьмиклассники. Им были даны вырезанные из листа металла неправильные многоугольники, и нужно было без весов определить отношение их масс. Пользоваться можно было линейкой (деревянной), бумагой и карандашом. Попробуйте это сделать сами. Любопытно, что точность можно получить очень хорошую — до 1—2 %.

Вторая задача была предложена девятиклассникам. Довольно широко известна задача о длинной веревке, переброшенной через блок и сложенной бухтами по обе стороны от блока на подставках, расположенных на различных высотах. В этой задаче требуется определить скорость установившегося «перетекания» веревки через блок. Экспериментаторам же было предложено определить не только эту скорость (и зависимость ее от перепада высот), но и минимальную длину веревки, при которой движение успевает установиться, и время установления. Если вы будете делать работу самостоятельно, то возьмите тонкую бельевую веревку длиной 5—10 метров, блок не обязателен — стальной стержень вполне его заменит, если трение невелико. Самое интересное в этой задаче — объяснить большие расхождения между теоретически выведенным ответом $v = \sqrt{gH}$ и результатами эксперимента.

Кроме решения задач теоретического и экспериментального туров, участникам было предложено множество интересных мероприятий: очень веселый концерт после церемонии открытия олимпиады (он наверняка запомнился многим участникам и членам жюри), театральное представление, концерт ансамбля «Машина времени», вечера отдыха в школах, интересные экскурсии по городу и окрестностям, спортивные состязания, встреча с выпускниками и студентами МГУ и МФТИ, которые сами в прошлом были участниками и победителями таких олимпиад (известно, что участники всесоюзных олимпиад становятся, как правило, хорошими студентами — а хорошие студенты нужны всем, отсюда и интерес к ним со стороны солидных вузов), и еще многое — в том числе церемония закрытия олимпиады и награждение победителей.

Список призеров олимпиады, получивших дипломы I, II и III степени, вы можете прочесть в этом номере журнала. Но призы получили не только они — жюри присудило также немало специальных призов. По давней традиции приз получил участник, прибывший из самой отдаленной (от Таллина) точки нашей страны — Э. Ермолов из Сахалинской области. Специальный приз получил и самый молодой из участников — В. Ким из города Ангрен. Было еще много призов, среди которых отметим специальный приз имени академика И. К. Кикоина — его получил семиклассник из города Березняки С. Шинкевич, занявший I место среди восьмиклассников. Еще один специальный приз — подшивку журнала «Квант» за 1986 год с автографами членов редколлегии — получил самый молодой среди участников-хозяев олимпиады Л. Тоомет из города Тарту.

Мы желаем успехов всем участникам XXI Всесоюзной олимпиады школьников по физике.

Призеры XXI Всесоюзной олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Виро А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Иванов Д. (Москва, с. ш. № 57),
Иванов С. (Ленинград, с. ш. № 533);

по 9 классам —
Берлов С. (Ленинград, с. ш. № 239),
Румынин Д. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Хохлов Ю. (Ленинград, с. ш. № 30);

по 10 классам —
Апситис К. (Рига, ФМШ № 1),
Борисов Л. (Минск, с. ш. № 19),
Каринский А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Озолс Д. (Рига, ФМШ № 1),
Черных А. (Краснодар, с. ш. № 40).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Гольднер В. (Кишинев, с. ш. № 40),
Дубнов Б. (Минск, с. ш. № 107),
Звайгзне В. (п/о Зелтыни Алуксненского района ЛатвССР, с. ш. № 1),
Кулик А. (Киев, с. ш. № 145),
Рагулин В. (Челябинск, с. ш. № 127),
Рогинская М. (Ленинград, с. ш. № 344),
Семенцов В. (Смоленск, с. ш. № 26),
Симановскис Р. (Рига, ФМШ № 1),
Скопенков А. (Саратов, с. ш. № 13);

по 9 классам —
Анисов С. (Харьков, с. ш. № 142),
Баран А. (Минск, с. ш. № 6),
Валиуллин М. (Казань, с. ш. № 94),
Гороховский А. (Киев, с. ш. № 79),
Гравит В. (Северодвинск, с. ш. № 27),
Грынив Р. (Львов, с. ш. № 62),
Жарков И. (Свердловск, с. ш. № 130),
Кокорев И. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Никоноров Ю. (с. ш. им. Муратбаева с. Михайловка Джамбульской области КазССР),
Пелевин О. (Кострома, с. ш. № 32),
Процак В. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Слитинский В. (Киев, с. ш. № 206),
Туляков Д. (Жданов, с. ш. № 7),
Филонов Н. (Ленинград, с. ш. № 30),
Христенко О. (Караганда, с. ш. № 63);

по 10 классам —
Борисов А. (Минск, с. ш. № 19),
Гринберг М. (Харьков, с. ш. № 27),
Дынников И. (Жуковский, с. ш. № 1),
Павлов С. (Черновцы, с. ш. № 4),
Пухов И. (Москва, с. ш. № 57),
Шанько Ю. (Красноярск, с. ш. № 10).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Бачурин А. (Стерлитамак, с. ш. № 2),
Бутвина С. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Вержбицкий П. (Устинов, с. ш. № 11),
Верченко М. (Армавир, с. ш. № 12),
Доброва Д. (Абакан, с. ш. № 20),
Калустов Г. (Ашхабад, с. ш. № 15),
Кожевников А. (Калуга, с. ш. № 24),
Лаба М. (Львов, с. ш. № 79),
Лапуста Н. (Терасполь, с. ш. № 3),
Межиров А. (Калинин, с. ш. № 37),
Подобряев А. (Волгоград, с. ш. № 31),
Сапрыкин А. (Новосибирск, с. ш. № 110),
Хасидовский М. (Ташкент, с. ш. № 110),
Яконский В. (с. ш. с. Бабин Гощанского района Ровенской области);

по 9 классам —
Бессолицын М. (Киров, с. ш. № 30),
Вайвадс А. (Рига, ФМШ № 1),
Варшавский Я. (Харьков, с. ш. № 27),
Вологодский В. (Омск, с. ш. № 91),
Вольфович Л. (Бельцы, с. ш. № 16),
Мищейките Р. (Вильнюс, с. ш. № 41),
Мороз В. (Гродно, с. ш. № 1),
Степанянц А. (Ереван, ФМШ при ЕрГУ),
Сарканс (Алуксне, с. ш. № 1),
Терехов А. (Алма-Ата, РФМШ);

по 10 классам —
Биндер И. (Ленинград, с. ш. № 239),
Когон Л. (Новокузнецк, с. ш. № 11),
Мельцер А. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Меркулов Б. (Куйбышев, с. ш. № 11),
Пушня В. (Харьков, с. ш. № 27),
Райтумс И. (Рига, ФМШ № 1),
Смирнов С. (Ленинград, с. ш. № 239),
Стыркас К. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Шинкевич С. (Березники, с. ш. № 3);
по 9 классам —
Головин Д. (Тамбов, с. ш. № 29),

Дробышев М. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ),
Кравченко Ю. (Москва, с. ш. № 820),
Малкин А. (Ленинград, с. ш. № 30),
Мороз В. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ);

по 10 классам —
Глущенков Д. (Ленинград, с. ш. № 239),
Гольдин А. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ).

Дипломы II степени
по 8 классам получили
Жданов А. (Ленинград, с. ш. № 30),
Мороз М. (Киев, с. ш. № 145),
Павлов С. (Владивосток, с. ш. № 58),
Фалькович Д. (Москва, с. ш. № 57);

по 9 классам —
Кияшко К. (Коммунарск, с. ш. № 7),
Мазуренко А. (Минск, с. ш. № 50),
Новоселов А. (Минск, с. ш. № 137),
Панафидин С. (Ленинград, с. ш. № 30),
Пенанен К. (Одесса, с. ш. № 63),
Пушкин А. (Москва, с. ш. № 57),
Сагайдак Р. (Черкасская обл., Матусовская с. ш.),
Тодощенко И. (Пермь, с. ш. № 16);

по 10 классам —
Анисимов А. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Гурарий В. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Оводов И. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ).

Дипломы III степени
по 8 классам получили
Дубина Ю. (Каменец-Подольский, с. ш. № 9),
Коршиков А. (Мозырь, с. ш. № 8),
Кузьма Н. (п. Протва Калужской обл., с. ш. № 1),
Самборский Д. (Истра, с. ш. № 12),
Свинаренко А. (ст. Калининская Краснодарского кр., с. ш. № 1),
Теревитс Г. (Рига, с. ш. № 1),
Терещенко В. (Киев, с. ш. № 145),
Тоомет Л. (Тарту, с. ш. № 1);

по 9 классам —
Анспер А. (п. Ныо ЭССР, с. ш. № 1),
Афонин А. (Брест, с. ш. № 14),
Вихорев А. (Калинин, с. ш. № 17),
Вольфбейн П. (Киев, с. ш. № 145),
Гапоненко А. (ст. Динская Краснодарского кр., с. ш. № 4),
Жуков В. (Магадан, с. ш. № 1),
Зароченцев А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Кириллов Э. (Комсомольск, с. ш. № 6),
Мамаев А. (Заволжье, с. ш. № 13),
Медведев М. (Горький, с. ш. № 40),
Смирнов А. (Челябинск, с. ш. № 31),
Смирнов Р. (школа МПС),
Степанов С. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Шакенов К. (Алма-Ата, РФМШ),
Шиховцев С. (Верхняя Салда, с. ш. № 1);

по 10 классам —
Белиц А. (Гомель, с. ш. № 24),
Бибиков А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Будько Д. (Белгород, с. ш. № 3),
Вилькялис Г. (Вильнюс, с. ш. № 45),
Карасев Д. (Москва, ФШМ № 18 при МГУ),
Пащенко В. (Черновцы, с. ш. № 2),
Рейаль А. (Таллин, с. ш. № 1).

I Всесоюзная олимпиада школьников по информатике

(Начало см. на с. 30)

I Международная олимпиада по программированию

Братислава, 23—30 августа 1987 г.

1 тур

Задача 1 (СССР). Для натуральных чисел X и Y будем говорить, что X входит в Y, если двоичную запись X можно получить из двоичной записи Y вычеркиванием нулевого, единичного или большего количества цифр. (Например: X=1010 входит в Y=1001100). Постройте алгоритм, который для двух данных натуральных чисел A и B найдет максимальное число C, входящее как в A, так и в B.

Задача 2 (ЧССР). Даны n карточек, занумерованных числами 1, 2, 3, ..., n (каждый номер встречается только один раз). Постройте алгоритм, который для произвольной последовательности $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_n$ из этих карточек найдет наименьшее число перестановок, необходимых для того, чтобы расположить карточки в порядке возрастания их номеров. Под перестановкой понимается единичный обмен местами любых двух карточек. Пример: Для последовательности 1, 5, 3, 2, 4 необходимы две перестановки: № 5 и № 2, а затем № 4 и № 5, после чего получается упорядоченная последовательность 1, 2, 3, 4, 5.

2 тур

Задача 3 (НРБ). Постройте алгоритм, который распределяет первые N^2 натуральных чисел ($N > 2$) в N групп так, что одновременно выполняются следующие три условия:

1) каждая группа содержит ровно N чисел;

2) каждое число принадлежит только одной группе;

3) сумма чисел в каждой группе одинакова для всех групп.

Задача 4 (ЧССР). Рассмотрим следующую игру. Для заданного фиксированного натурального числа $N > 1$ игрок A выбирает натуральное число X, не превосходящее N. Цель игрока B — угадать число X при помощи вопросов вида «Число X больше или равно K?», где K — некоторое натуральное число. На каждый вопрос игрока B игрок A отвечает честно и не меняет числа X. Игрок B платит игроку A за каждый ответ: 2 руб. за ответ «ДА» и 1 руб. за «НЕТ». Определите для данного N наименьшую сумму денег P(N), достаточную для гарантированного угадывания любого числа X от 1 до N. Постройте алгоритм, по которому игрок B задаст вопросы таким образом, что угадает число X и при этом заплатит не более P(N) рублей (т. е. алгоритм, который определяет значения K в задаваемых вопросах).

Р. М. Шакиров,
Ученый секретарь секции по основам информатики и вычислительной техники Ученого методического совета при Министерстве просвещения СССР.

Ответы, указания, решения

«Все», «некоторые» и отрицание

1. Есть хотя бы один белый шар.
2. Все шары — белые.
3. Все шары — красные.
4. Некоторые равнобедренные треугольники не являются прямоугольными.
5. Некоторые ученики класса не были на собрании.
6. Ни одной девочки не было на собрании.
7. Некоторые углы данного шестиугольника — прямые или острые.
8. По крайней мере для одного x из A x^2 не превосходит 4.
9. Все люди — не дети.
10. Для всех x из A $x^2-2x+1\neq 0$.
11. Некоторые мужчины не выше 2-х метров.
12. Некоторые простые числа четны.
13. По крайней мере для одного простого числа p число 2^p-1 не является простым.
14. Неверно. Может быть один белый шар, а остальные — синие.
15. Верно.
16. Чтобы наверняка попался белый шар, надо вынуть, по крайней мере 20 шаров. Меньшего числа может не хватить, ибо первыми могут быть вынуты красные и черные шары — их 19. Чтобы наверняка попались шары всех трех цветов, надо вынуть как минимум 22 шара; 21 может на хватить, если первыми вынуты все белые и черные шары: их как раз 21.
17. Надо вызвать 31 человека. Меньше нельзя — может случиться, что к доске выйдут лишь троечники и хорошисты (их 10+20=30) и каждый ответ не более, чем на 4. Если же вызвать 31 человека, то, по крайней мере, один из них окажется отличником и ответит на 5.

Решение систем тригонометрических уравнений

1. $(-5\pi/12+\pi k;\ -\pi/6+\pi n)$.

2. $\left(\pm\arccos\frac{3}{4}+2\pi k;\ \mp\arccos\frac{1}{8}+2\pi n\right)$.

3. $(\pi/4+\pi k/2;\quad \pi/4+\pi k/2+\operatorname{arctg}2+\pi n)$.

4. $(\pi/8+\pi k;\ \pi+2\pi n)$, $(\pi/8+\pi k;$ $\pm\arccos\frac{\sqrt{5}-1}{2}+2\pi n)$.

5. $(\pi/4+\pi k;\ \pm\pi/3+2\pi l)$,

$\left((-1)^m 1/2\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}+\pi m/2;\ \pm\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}+2\pi n\right)$, $\left((-1)^{p+1}\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}+\pi p/2;\right.$ $\left.\pm\left(\pi-\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+2\pi q\right)$.

6. $((-1)^{n+k+1}\pi/4+\pi k;\ -\pi/4+\pi n)$,
$\left((-1)^{n+k}\arcsin\frac{1}{\sqrt{5}}+\pi k;\ \operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\pi n\right)$.

7. $(\pi(6n+1)/3;\ \pi(6m-1)/3)$,
$(\pi(6n-1)/3;\ \pi(6m+1)/3)$.

8. $(\pm\pi/24+\pi n/4+2\pi k;\ \pm\pi/48+\pi n/8)$.
(Одновременно берутся либо верхние, либо нижние знаки.)

9. $\left(5\pi/4;\ \arccos\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

$\left(\pi+\operatorname{arctg}2;\ \pi-\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$.

XXI Всесоюзная олимпиада по математике

8 класс

1. Указание. Воспользуйтесь тем, что $x_1+y_1=x_2+y_2=\ldots=x_{10}+y_{10}=9$, причем $x_1+x_2+\ldots+x_{10}=y_1+y_2+\ldots+y_{10}$.

2. Ответ: 1, 2, 4, 8, 16, 32. Указание. Если $x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_6$ — массы гирь, то каждая масса, которую можно уравновесить с помощью этих гирь, записывается в виде $\varepsilon_1x_1+\varepsilon_2x_2+\ldots+\varepsilon_6x_6$, где $\varepsilon_i=0,1$ и не все $\varepsilon_i=0$. Таких сумм всего 63. Поэтому все они должны быть различны. Ясно, что $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=4$. Пусть доказано, что $x_k=2^{k-1}$, тогда наибольшая масса, уравновешиваемая с помощью гирь $x_1,\ldots,x_k$, равна $x_1+x_2+\ldots+x_k=2^k-1$. Поэтому $x_{k+1}=2^k$.

3. Пусть $A_1A_2A_3\ldots A_7$ — данный семиугольник, B — точка пересечения прямых A_1A_2 и A_3A_4, $A_1A_2=x$, $A_1A_3=y$, $A_1A_4=z$. Треугольник BA_3A_1 — равнобедренный ($\angle A_1BA_3=\angle BA_3A_1=3\pi/7$), а треугольники A_2BA_3 и A_1BA_4 подобны ($A_2A_3\parallel A_1A_4$). Отсюда сразу получаем, что $\frac{y-x}{y}=\frac{x}{z}$, или $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$.

4. а) Ответ: 12 выстрелов. Решение. В квадрате 7×7 корабль может стоять в одной из 12 позиций, показанных на рисунке 1, поэтому необходимо сделать не меньше 12 выстрелов. На рисунке 2 показано, что 12 выстрелов достаточно.

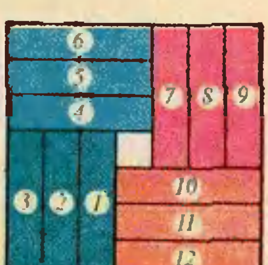


Рис. 1.

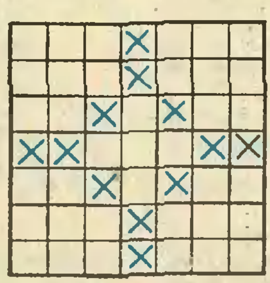


Рис. 2.

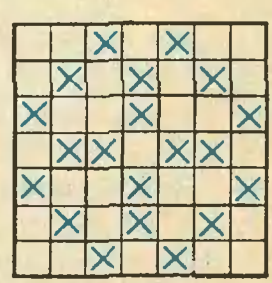


Рис. 3.

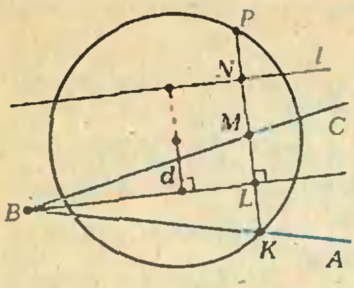


Рис. 4.

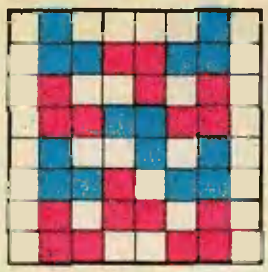


Рис. 5.

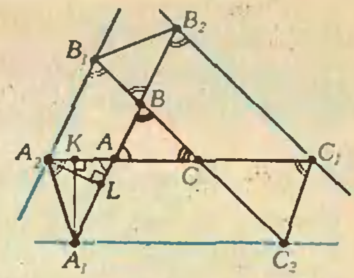


Рис. 6.

б) **О т в е т**: 20 выстрелов. **У к а з а н и е**. Как следует из рисунка 3, 20 выстрелов достаточно. С другой стороны, так как в квадрате 7×7 можно без наложений расположить четыре прямоугольника размером 3×4 (см. рис. 1), достаточно доказать, что в каждый такой прямоугольник необходимо сделать по крайней мере 5 выстрелов.

5. Решение следует из равенства

$$k^3 = (a + A)(b + B)(c + C) = = abc + ABC + k(aB + bC + cA).$$

6. См. решение задачи М1056 («Квант», 1987, № 12).

7. Пусть L — точка пересечения отрезка KP с биссектрисой угла ABC (рис. 4). Очевидно, что $KL = LM$. Обозначим длину перпендикуляра, опущенного из центра окружности на биссектрису угла ABC, через d. Параллельно этой биссектрисе и на таком же расстоянии от центра, но по другую сторону от него, проведем прямую l и пусть N — точка ее пересечения с KP. Тогда $NP = KL = LM$ и $PM = LN = 2d$. Если лучи BA и BC поменять местами, получится картина, немного отличная от рисунка 6. Мы рекомендуем разобрать этот случай самостоятельно.

8. См. решение задачи М1057 («Квант», 1987, № 12).

9 к л а с с

1. **У к а з а н и е**. Пусть $a_k = 1^{1987} + 2^{1987} + \ldots + n^{1987}$. Тогда $2a_n = 2 + (2^{1987} + n^{1987}) + \ldots + (n^{1987} + 2^{1987}) = 2 + b_n$, но b_n делится на $n + 2$.

2. **О т в е т**: 11 фигур. В каждом квадрате 2×2 должно быть покрыто по крайней мере две клетки. Разбивая квадрат 8×8 на 16 квадратов 2×2, получаем, что надо покрыть по крайней мере $2 \times 16 = 32$ клетки, для чего понадобится по крайней мере 11 фигур. Требуемое размещение 11 фигур в квадрате 8×8, показано на рисунке 5.

3. Пусть A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 — точки пересечения продолжений сторон с данными прямыми. Тогда (рис. 6) $\dfrac{c}{AA_2} = \dfrac{b}{AA_1} = \sin\alpha$. Это значит, что $\triangle AA_2A_1 \backsim \triangle ABC$, причем $A_1A_2 = \dfrac{a}{\sin\alpha} = 2R$, где R — радиус окружности, описанной около $\triangle ABC$. Аналогично, $C_1C_2 = B_1B_2 = 2R$, так что трапеция $A_1A_2C_1C_2$ равнобедренная. Поскольку $\angle A_2B_1C_2 = \angle A_2C_1C_2 = \angle A_1B_2C_1 = \angle A_1A_2C_1 = \beta$, точки B_1 и B_2 лежат на окружности, описанной около трапеции $A_1A_2C_1C_2$.

4. См. решение задачи М1060 («Квант», 1987, № 12).

5. **О т в е т**: 7 дней. Пусть k — число дней, когда дежурили 9 богатырей, а l — число дней, когда дежурили 10 богатырей, и каждый из богатырей дежурил m раз. Тогда $9k + 10l = 33m$. При $m = 1$ это уравнение решений не имеет, а при $m = 2$ имеет единственное решение $k = 4$, $l = 3$. Итак, $k + l \geqslant 7$. Заметим, что организовать дежурство в течение 7 дней так, чтобы каждый отдежурил 2 раза, можно: для этого следует занумеровать богатырей и отправить на дежурство в первый день всех с номерами с 1 по 9, во второй — с 10 по 17, в третий — с 18 по 27, в четвертый — с 28 до 33 и с 1 до 3. В оставшиеся 3 дня отправлять по 10 богатырей, начиная с 4-го.

6. См. решение задачи М1058 («Квант», 1987, № 12).

7. Предположим противное: выпуклый p-угольник разрезан по всем диагоналям на части одинаковой площади. Проведем диагонали A_1A_3, A_1A_4, A_2A_p, A_2A_{p-1} и обозначим через B_1, B_2, B_3, B_4 точки их попарных пересечений (рис. 7); в случае $p = 5$ точки B_4 и A_4 совпадают). Рассмотрим треугольники $A_1B_1B_2$ и $A_1B_2A_2$. По предположению их площади равны, значит, $B_1B_2 = B_2A_2$. Аналогично получаем, что $A_1B_2 = B_2B_3$. Следовательно, четырехугольник $A_1A_2B_3B_1$ является параллелограммом, и поэтому прямые A_1A_4 и A_2A_{p-1} параллельны. Получили противоречие.

8. Пусть n — натуральное число. Рассмотрим множество $T_p(n) \subset T_p$ и состоящее из всех чисел, меньших $(2^n)!$ Так, множество $T_0(n)$ состоит из n чисел $(2^0)!$, $(2^1)!, \ldots, (2^{n-1})!$, а множество $T_1(n)$ состоит из чисел вида

$$a_0(2^0)! + a_1(2^1)! + \ldots + a_{n-1}(2^{n-1})!,$$

где $a_i \in \{0;\ 1\}$.

Пусть далее $N_p(n)$ — количество чисел в $T_p(n)$. Мы должны доказать, что $N_{1987}(n) < (2^n)! - 1$.

Образуя суммы чисел из множества $T_{p-1}(n)$ и приводя подобные члены при $(2^i)!$ мы можем всякое число из $T_p(n)$ записать в виде $\beta_0(2^0)! + \beta_1(2^1)! + \ldots + \beta_{n-1}(2^{n-1})!$ Пусть $A_p(n) - 1$ — максимальное значение коэффициентов среди *всех* чисел из $T_p(n)$. Тогда для любого $(2^i)!$ коэффициент при $(2^i)!$ принимает не более, чем $A_p(n)$ *различных* значений. Поэтому $N_p(n) \leqslant (A_p(n))^n$.

Теперь доказательство можно получить из следующих лемм.

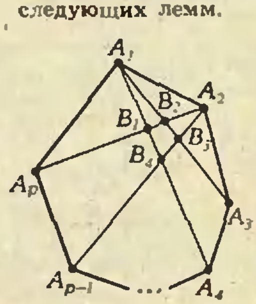


Рис. 7.

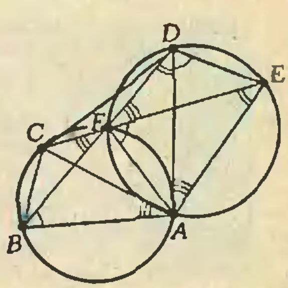


Рис. 8.

Рис. 9.

Лемма 1. $A_{p+1}(n) \leqslant A_p(n) \cdot N_p(n) \leqslant (A_p(n))^{n+1}$.

Лемма 2. $A_{1987}(n) \leqslant 2^{(n+1)^{1987}}$.

Лемма 3. $2^{(n+1)^{1987}} < (2^n)!$ при некотором n.

Лемма 4. $(2^n)! > 2^{2^n}$ при $n \geqslant 2$.

Лемма 5. $2^n > (n+1)^{1987}$ при некотором n.

10 класс

1. Рассмотрим набор из n чисел: $a_i = i \cdot n! + 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Тогда сумма любых k чисел из этого набора имеет вид $m \cdot n! + k$ $(m \in N)$ и делится на k, так как число $n! = 1 \ldots k \ldots n$ кратно k. Любые два числа a_i и a_j при $i > j$ не могут иметь общих простых делителей, отличных от простых делителей из разности $a_i - a_j = (i - j)\, n!$, т. е. от делителей числа $n!$ (ибо $0 < i - j < n$), взаимно-простого с числами a_i. Положив $n = 5$, получаем набор: 121, 241, 361, 481, 601, удовлетворяющий всем условиям задачи.

2. Пусть F — точка пересечения диагоналей BD и CE (рис. 8). Так как $\angle AEF = \angle ADF$, точки A, F, D, E лежат на одной окружности. Следовательно, $\angle ABC = \angle ADE = \angle AFE$ и $\angle ABC + \angle AFC = 180°$, поэтому точки A, B, C, F также лежат на одной окружности. Таким образом, $\angle BAC = \angle BFC = \angle DFE = \angle DAE$, что и требовалось доказать.

3. Ответ. $\alpha = \pm \dfrac{2k}{3} + 2k\pi$. Если α удовлетворяет условию задачи, то $\cos\alpha \leqslant -\dfrac{1}{4}$ (иначе $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 < -\dfrac{7}{8}$ и $\cos 4\alpha = 2\cos^2 2\alpha - 1 > 0$.

По той же причине для любого натурального n имеем $\cos 2^n\alpha \leqslant -\dfrac{1}{4}$, откуда получаем оценку

$$\left|\cos 2^n\alpha - \frac{1}{2}\right| \geqslant \frac{3}{4}.$$

Учитывая, что

$$\left|\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\right| = 2\left|\cos\alpha - \frac{1}{2}\right| \left|\cos\alpha + \frac{1}{2}\right| \geqslant \frac{3}{2}\left|\cos\alpha + \frac{1}{2}\right|$$

получим

$$\left|\cos\alpha + \frac{1}{2}\right| \leqslant \frac{2}{3}\left|\cos 2\alpha + \frac{1}{2}\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^2 \left|\cos 4\alpha + \frac{1}{2}\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^n \left|\cos 2^n\alpha + \frac{1}{2}\right| \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

при любом $n \in N$. Отсюда следует, что $\cos\alpha = -\dfrac{1}{2}$.

4. $1987 = 6 \cdot 331 + 1$. Докажем утверждение задачи для квадратов размером $(6n+1)(6n+1)$ индукцией по n. Сначала заметим, что утверждение справедливо при $n = 1$, т. е. для квадрата 7×7. Действительно, из соображений симметрии следует, что достаточно рассмотреть только случаи, когда вырезанная клетка лежит в одном из квадратов размером 2×2, заштрихованных на рисунке 9, где показано, как разрезать оставшуюся часть. Пусть утверждение уже доказано при некотором значении n. Докажем его для квадрата размером $(6n+7) \times (6n+7)$. Для этого в одном из углов данного квадрата поместим квадрат размером $(6n+1) \times (6n+1)$, покрывающий вырезанную клетку и удовлетворяющий предположению индукции. Оставшуюся же часть разрежем на прямоугольники размером 2×3, а затем и на уголки.

6. См. решение задачи М1059 («Квант», 1987, № 12).

7. Возьмем какую-нибудь вершину и все грани многогранника при этой вершине. Раскрасим ребра этой части многогранника так, как показано на рисунке 10 (ребра одинакового цвета изображены сплошными линиями одинаковой толщины). Тогда для вершин раскрашенной части требуемое в задаче условие будет выполнено.

Будем последовательно добавлять к раскрашенной части по одной грани, имеющей с этой частью общее ребро, и раскрашивать ее ребра следующим образом: если у добавляемой грани уже покрашены два ребра, то ее третье ребро красим в любой цвет (на рисунке 10 пунктирное ребро грани α), а если уже покрашено только одно ребро, то два остальных ребра красим в разные цвета (см. на рисунке 10 пунктирные ребра грани β). В любом случае для вершин раскрашенной части требуемое условие будет выполнено, причем в конечном счете все ребра будут раскрашены.

8. Докажем равносильное неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \geqslant 1 + \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n.$$

Из тождеств $(1 \pm x)^n = 1 \pm nx + a_2x^2 \pm a_3x^3 + \ldots$,

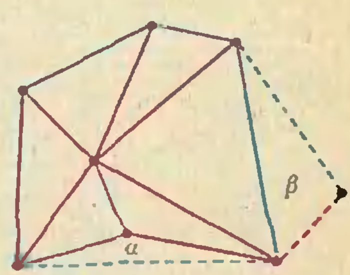


Рис. 10.

где $a_i \geqslant 0$, при $x = \frac{1}{2n}$ следует, что

$$(1+x)^n + (1-x)^n - 2nx = 2a_3x^3 + 2a_5x^5 + \ldots \geqslant 0.$$

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 10)

Головоломки

1. См. рис. 11.
2. См. рис. 12 и 13.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 10)

1. Соединим две соседние вершины звезды, например A и E (рис. 14). Так как у треугольника AME и BMD углы при вершине M равны, сумма углов при вершинах B и D треугольника BMD равна сумме углов при вершинах A и E треугольника AME; но тогда сумма углов при вершинах звезды равна сумме углов треугольника ACE, т. е. 180°.
2. Таких чисел два: 41312432 и 23421314.
3. Решение, единственное с точностью до симметрии, изображено на рисунке 15. Сначала определяется, что в центральных кружках стоят числа 1 и 8, так как они соединены с 6 кружками каждый; затем однозначно определяются положения чисел 2 и 7; затем — числа 3 и всех остальных.
4. Часы идут точно, но минутная стрелка плохо закреплена на своей оси. Она может свободно отклоняться от правильного положения на ±2 минуты. Часы висят на стене и под действием силы тяжести стрелка располагается ниже своего нормального положения. В правой части циферблата это приводит к опережению на две минуты а в левой — к отставанию. Нужно закрепить минутную стрелку.
5. Если провести через выбранную точку еще три прямые, параллельные сторонам треугольника, то образуются пары равных разноцветных треугольников (рис. 16).

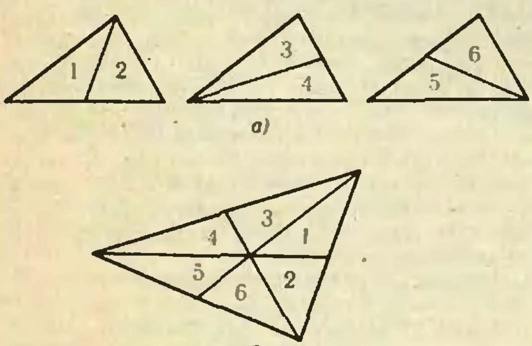


Рис. 11.

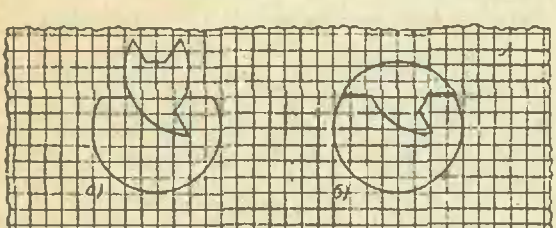


Рис. 12.

Рис. 13.

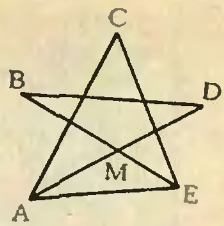


Рис. 14.

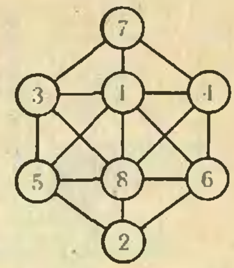


Рис. 15.

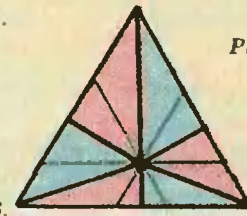


Рис. 16.

XIII Всероссийская олимпиада школьников
(см. «Квант», № 10)

Математика

8 класс

1. Ответ: (2; 14), (0; −20), (18; −2), (−16; −4). Указание. Данное уравнение равносильно уравнению $(x-1)(y+3)=17$, поэтому либо $x-1=\pm1$, $y+3=\pm17$, либо $x-1=\pm17$, $y+3=\pm1$.
2. Указание. Достаточно рассмотреть множество M, являющееся объединением трех отрезков единичной длины: $\Delta_1=[a_1; b_1]$, $\Delta_2=[a_2; b_2]$, и $\Delta_3=[a_3; b_3]$. Если точки x и y принадлежат какому-нибудь из этих отрезков $[a_i, b_i]$, то и точка $(x+y)/2$ тоже принадлежит этому отрезку, если же точка $x\in[a_i, b_i]$, а $y\in[a_k, b_k]$, то

$$\frac{a_i+a_k}{2} \leqslant \frac{x+y}{2} \leqslant \frac{b_i+b_k}{2}$$

и отрезок

$$\Delta_{ik}=\left[\frac{a_i+a_k}{2}; \frac{b_i+b_k}{2}\right]$$

имеет единичную длину. Поэтому все множество M покрывается шестью отрезками Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_{12}, Δ_{13}, Δ_{23}.
Если $M=[1; 2]\cup[5; 6]\cup[17; 18]$, то M' покрывается в точности шестью отрезками [1; 2], [3; 4], [5; 6], [9; 10], [11; 12], [17; 18].
3. Четырехугольник $BPMR$ вписан в окружность, поэтому $\angle BPM+\angle BRM=180°$ (рис. 17). Отсюда и из равенства $\angle BPM+\angle MPA=180°$ следует, что $\angle BRM=\angle MPA$. Аналогично получаем, что $\angle CRM=\angle MQA$. Так как четырехугольник $APMQ$ вписан в окружность, то $\angle MPA+\angle MQA=180°$. Следовательно, $\angle BRM+\angle CRM=180°$ и, значит, точки B, C и R лежат на одной прямой.
Замечание. Утверждение задачи остается верным и при других расположениях окружности и выборе точки A (разберите возможные случаи самостоятельно).
4. Каждая цифра встречается в записи данной десятичной дроби либо конечное, либо бесконечное количество раз. Возьмем все цифры, встре-

чающиеся конечное число раз и выпишем их перед запятой в любом порядке. После запятой сначала запишем по одной все цифры, встречающиеся бесконечное количество раз, затем опять выпишем по одной и в том же порядке те же цифры и т. д. Получится бесконечная периодическая дробь.

5. Пусть A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 точки пересечения диагоналей пятиугольника, α — величина угла при вершине «звезды» $ACEBDA$ (рис. 18). Тогда $\angle DA_1B_1=\angle DB_1A_1=2\alpha$ как внешние углы треугольников BA_1E и AB_1C. Следовательно, сумма углов треугольника A_1DB_1 равна 5α и, значит, $\alpha=36^\circ$.

Если $\beta=\angle BCA$, $\gamma=\angle DCE$, то $\alpha+\beta+\gamma=\angle BCD=108^\circ$, т. е. $\beta+\gamma=72^\circ$. С другой стороны, $\gamma+\angle A_1DC=2\alpha=72^\circ$. Следовательно, $\angle A_1DC=\beta$. Аналогично получаем, что $\angle DEC=\angle EAD=\angle ABE=\beta$ и, значит, $\angle ADE=\angle BEA=\angle CAB=\angle DBC=\gamma$.

Таким образом, треугольники ABC, BCD, CDE, DEA и EAB подобны. Из подобия этих треугольников следует, что

$$\frac{AB}{BC}=\frac{BC}{CD}=\frac{CD}{DE}=\frac{DE}{AE}=\frac{AE}{AB}=k.$$

Перемножая эти отношения, получим, что $k^5=1$, то есть $k=1$, это означает равенство всех сторон пятиугольника.

9 класс

1. **Ответ:** 2 и 3. **Указание.** Если $N=\underbrace{14\ldots4}_{n}$, где $n\geqslant 4$, то $N/4=36\underbrace{11\ldots1}_{n-2}$ не может быть квадратом ни четного, ни нечетного числа.

2. **Указание.** Из условия легко следует, что число фальшивых монет четно. Отложим любую из монет и разделим остальные 98 на 2 группы по 49 монет и положим эти группы на чашки весов. Если стрелка весов покажет четное число граммов, то отложенная монета настоящая, если нечетное, то фальшивая.

3. Преобразуя данное неравенство, получим равносильное ему неравенство $4\cos(\alpha+\beta)\times\times(1-\cos(\alpha-\beta))<1$.

Так как $4xy\leqslant(x+y)^2$ при любых x и y, то $4\cos(\alpha+\beta)(1-\cos(\alpha-\beta))\leqslant(1-2\sin\alpha\sin\beta)^2$, но $0<2\sin\alpha\sin\beta<2$ и поэтому $(1-2\sin\alpha\sin\beta)^2<1$.

Замечание. Данное неравенство точное: левую часть можно сделать сколь угодно близкой к 3/4: достаточно взять $\gamma=2\pi/3$, а α близким к $\pi/3$.

4. **Указание.** Через точку N проведем прямую $l_3\parallel l_1$. Возможны два случая: 1) точки K и L лежат по разные стороны от точки N (рис. 19); 2) точки K и L лежат по одну сторону от точки N (рис. 20). В обоих случаях четырехугольник $ABLK$ параллелограмм (для доказательства этого воспользуйтесь тем, что $AMNK$ и $MBLN$ — равнобедренные трапеции). Поэтому $AB=KL$. Осталось заметить, что прямые l_2 и l_3 симметричны относительно линии центров данных окружностей.

5. **Указание.** Докажите, что биллиардный шар, пущенный из какой-либо точки, может двигаться после отражений от сторон треугольника лишь по шести направлениям, зависящим, конечно, от направления, по которому он начал двигаться. Поэтому, если шар через некоторую точку пройдет 7 раз, то по крайней мере дважды он прошел в одном направлении. С этого момента его движение станет периодическим.

10 класс

1. 376 и 625. **Указание.** Если A число, удовлетворяющее условию, то $A^2-A=A(A-1)$ делится на $1000=8\cdot125$. Числа A и $A-1$ взаимно просты. Поэтому одно из них делится на 125, а другое — на 8. Осталось разобрать возможные случаи.

2. Назовем функцию $f(x)$ пилой длины n и высоты h, если ее график имеет вид, показанный на рисунке 21 (все прямолинейные участки образуют угол 45° с осью абсцисс). Если $f(x)$ — пила длины n и высоты h, то $|f(x)-h|$ — пила длины $n+1$ и высоты h, а $\left|f(x)-\frac{h}{2}\right|$ — пила длины $2n$ и высоты $\frac{h}{2}$. Заметим, что $||x|-a|$ — пила длины 2 и высоты a. Определим функции

$$P_n(x)=\underbrace{|\ldots||}_{n\ \text{раз}}x|-1|-1|\ldots-1| \quad \text{и} \quad Q_{n,a}(x)=\underbrace{|\ldots||}_{n+2\ \text{раз}}x|-a|-\frac{a}{2}|\ldots-\frac{a}{2^n}|.$$

После сделанных замечаний легко доказать по индукции, что $P_n(x)$ — пила длины n и высоты 1, $Q_{n,a}(x)$ — пила длины 2^{n+1} и высоты $\frac{a}{2^n}$.

Отсюда следует, что функция, стоящая в левой части тождества (это $Q_{n,2}(x)$) — пила длины 2^{n+1} и высоты 1. Также и правая часть тождества (это $P_{2^{n+1}}(x)$) — пила длины 2^{n+1} и высоты 1. Поскольку графики обеих функций симметричны относительно оси Oy, они совпадают.

3. **Указание.** Складывая одинаково отстоящие от концов суммы слагаемые (их число четно), получаем дроби, числители которых делятся на 1987. Сумма таких дробей также будет дробью, числитель которой делится на 1987 (1987 — простое число!). Утверждение

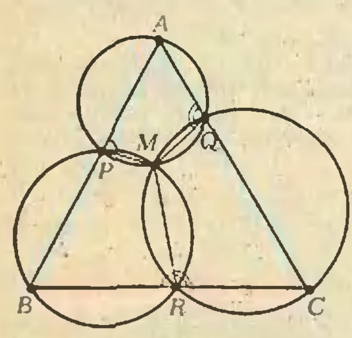


Рис. 17.

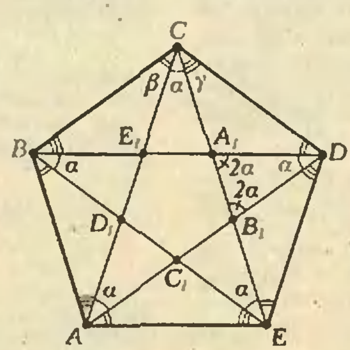


Рис. 18.

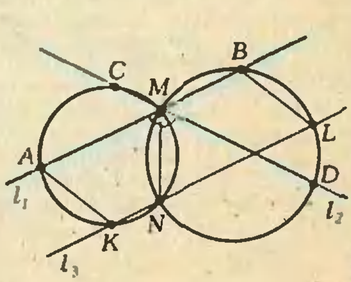


Рис. 19.

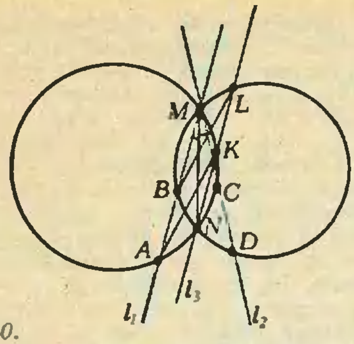


Рис. 20.

задачи верно для любой суммы

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}+\ldots+\frac{1}{(p-3)(p-2)(p-1)},$$ где $p=6k+1$ — простое число.

4. а) Пусть x_i, y_i, z_i, a_i, b_i, c_i — проекции i-го звена ломаной соответственно на оси координат Ox, Oy, Oz и координатные плоскости Oyz, Oxz, Oxy соответственно, а l_i — длина этого звена.

Тогда $a_i^2=y_i^2+z_i^2$, $b_i^2=x_i^2+z_i^2$, $c_i^2=x_i^2+y_i^2$, $l_i^2=x_i^2+y_i^2+z_i^2=\frac{1}{2}(a_i^2+b_i^2+c_i^2)$, но $(a_i+b_i+c_i)^2 = a_i^2+b_i^2+c_i^2+2a_ib_i+2a_ic_i+2b_ic_i \leqslant 3a_i^2+3b_i^2+3c_i^2=6l_i^2$.

Итак, $a_i+b_i+c_i\leqslant l_i\sqrt{6}$.

Сложив все полученные неравенства, получим требуемое.

б) Замкнутая ломаная, для которой $a+b+c=l\sqrt{6}$ существует. Для этого достаточно, чтобы каждое ее звено было параллельно одной из диагоналей единичного куба, причем проекции различных звеньев на координатные плоскости не должны иметь общих отрезков. Примером может служить шестизвенная ломаная с вершинами $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(2, 2, 0)$, $(3, 1, -1)$, $(2, 0, -2)$, $(1, -1, 1)$.

5. Пусть $A_1A_2A_3A_4$, $B_1B_2B_3B_4$ и $C_1C_2C_3C_4$ — такие три четырехугольника на плоскости, что

$$\overrightarrow{A_1A_2}=\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2},\quad \overrightarrow{A_2A_3}=\overrightarrow{B_2B_3}+\overrightarrow{C_2C_3},$$
$$\overrightarrow{A_3A_4}=\overrightarrow{B_3B_4}+\overrightarrow{C_3C_4},\quad \overrightarrow{A_4A_1}=\overrightarrow{B_4B_1}+\overrightarrow{C_4C_1}. \quad (1)$$

Тогда справедливо следующее утверждение: если два из данных четырехугольников являются квадратами, вершины которых перечислены по (против) часовой стрелке, то и третий четырехугольник также является квадратом, вершины которого перечислены по (против) часовой стрелке. Действительно, если, например, $A_1A_2A_3A_4$ и $B_1B_2B_3B_4$ — квадраты, причем векторы $\overrightarrow{A_2A_3}$ и $\overrightarrow{B_2B_3}$ получаются, соответственно, из векторов $\overrightarrow{A_1A_2}$ и $\overrightarrow{B_1B_2}$ поворотом на угол 90° по часовой стрелке, то вектор $\overrightarrow{C_2C_3}=\overrightarrow{A_2A_3}-\overrightarrow{B_2B_3}$ получается из вектора $\overrightarrow{C_1C_2}=\overrightarrow{A_1A_2}-\overrightarrow{B_1B_2}$ указанным поворотом. Аналогично, последующими поворотами на угол 90° по часовой стрелке получаются векторы $\overrightarrow{C_3C_4}$ и $\overrightarrow{C_4C_1}$.

Пусть теперь $B_1B_2B_3B_4$ — квадрат, образованный центрами часов, перечисленными, для определенности, по часовой стрелке, $A_1A_2A_3A_4$ — квадрат, образованный в указанный момент времени концами минутных стрелок соответствующих часов (также перечисленными по часовой стрелке). Перенесем все часы параллельно так, чтобы их центры совпали. Пусть C_1, C_2, C_3, C_4 — концы их минутных стрелок в этом положении. Тогда, очевидно, соотношение (1) выполнено. Следовательно, четырехугольник $C_1C_2C_3C_4$ — квадрат. Так как все данные часы являются правильно идущими, отсюда следует, что концы их минутных стрелок в их новом положении будут образовывать квадрат и в любой другой момент времени. Но тогда из тех же соображений концы их минутных стрелок и в первоначальном положении в любой момент времени образуют квадрат.

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. $v'\approx 3{,}2$ м/с. Указание. Задачу удобно решать в системе отсчета, связанной с лентой транспортера.
2. См. решение задачи Ф1065 из «Задачника «Кванта», которое будет опубликовано позже.
3. См. решение задачи Ф1071 из «Задачника «Кванта», которое будет опубликовано позже.
4. $s=(mv_0^2\sin\alpha)/F$; $\vec{s}\perp\vec{F}$. Указание. Движение данной частицы аналогично движению тела, брошенного под углом $\alpha/2$ к горизонту (рис. 22).

9 класс

1. Судя по всему, гантелька за ширмой сталкивается одним из своих шариков с очень тонкой абсолютно упругой стенкой, поворачивается на 180° вокруг остановившегося центра масс O (рис. 23) с угловой скоростью $\omega=v_0/(l/2)$ и сталкивается со стенкой во второй раз другим шариком, после чего продолжает двигаться практически в прежнем (в меру малости шариков) направлении в перевернутом виде. Время нахождения за ширмой

$$t=\frac{L}{v_0}+\frac{\pi l}{2v_0}.$$

2. Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{C(2\mathscr{E})^2}{2}+(-C\mathscr{E}^2)=\frac{C\mathscr{E}^2}{2}+2Q,$$

где $C(2\mathscr{E})^2/2$ — энергия конденсатора 2 до переключения ключа, $(-C\mathscr{E}^2)$ — работа источника 2, $C\mathscr{E}^2/2$ — энергия конденсатора 2 после переключения, Q — количество теплоты, выделившееся на каждом резисторе. Отсюда

$$Q=C\mathscr{E}^2/4.$$

3. Мощность насоса $N=\rho Vgh+\rho Vv^2/2$ (скорость потока жидкости v можно найти из условия $vS\Delta t=V\Delta t$). Для воды $N\approx 11{,}6$ кВт, для цементного раствора $N'\approx 10{,}4$ кВт.

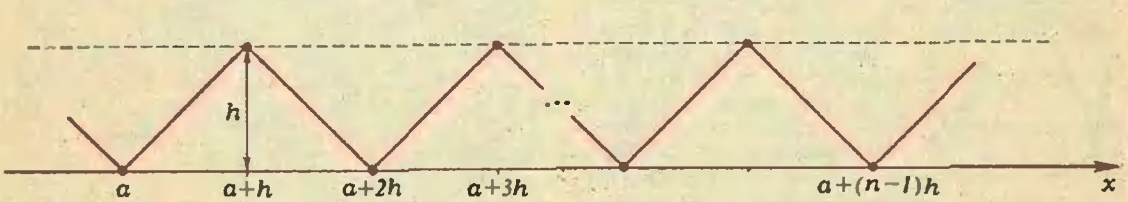


Рис. 21.

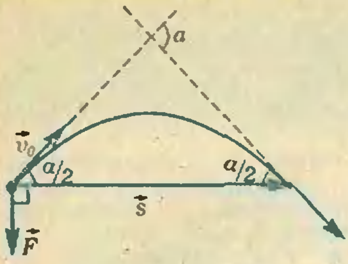


Рис. 22.

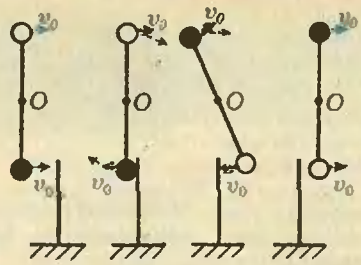


Рис. 23.

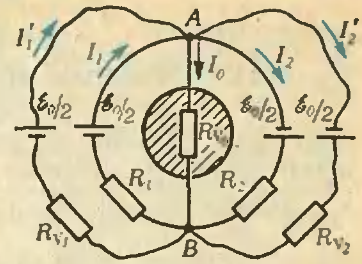


Рис. 24.

4. Сосуд теплоизолирован, поэтому изменение внутренней энергии газа равно совершенной поршнем работе:

$$\frac{3}{2}R(\nu_1+\nu_2)T-\frac{3}{2}R(\nu_1T_1+\nu_2T_2)=A,$$

где

$$A=\nu_1R(T_1-T)=Mg\Delta h.$$

Отсюда находим

$$\Delta h\approx 0{,}08\ \text{м}.$$

10 класс

1. См. решение задачи Ф1066 из «Задачника «Кванта», которое будет опубликовано позже.

2. При испытании первым должен лопнуть шар радиусом $3R$. Если изменять толщину шаров таким образом, чтобы $d_i/R_i=\text{const}$ ($i=1, 2, 3$), то шары будут выдерживать одинаковое предельное давление.

3. Так как в соленоиде протекает переменный ток, возникающая в контурах ЭДС индукции также переменная. Однако можно ограничиться рассмотрением мгновенных значений ЭДС, напряжений и токов в некоторый фиксированный момент времени.

Прежде всего нужно учесть, что ЭДС индукции, наводимая в любом замкнутом контуре, складывается из ЭДС, возникающих на отдельных участках контура. Пусть ЭДС индукции, наведенная в обруче, имеет в рассматриваемый момент времени величину $\mathscr{E}_0$ и положительна по отношению к обходу по часовой стрелке. Тогда из соображений симметрии ясно, что на участках $B-R_1-A$ и $A-R_2-B$ ЭДС одинаковы и равны $\mathscr{E}_0/2$ (рис. 24). Рассмотрим далее контур $A-V_1-B-R_1-A$. Полная ЭДС в этом контуре равна нулю, т. к. отсутствует изменяющийся магнитный поток через площадь контура. Отсюда следует, что на участке $B-V_1-A$ возникает ЭДС, также равная $\mathscr{E}_0/2$. Аналогично, на участке $A-V_2-B$ ЭДС также равна $\mathscr{E}_0/2$. На участке $A-V_0-B$, лежащем в плоскости симметрии соленоида, ЭДС индукции не возникает. Запишем закон Ома для всех участков цепи между точками A и B:

$\varphi_A-\varphi_B=I_0R_{V_0}$, $\varphi_A-\varphi_B=\mathscr{E}_0/2-I_1R_1$,

$\varphi_B-\varphi_A=\mathscr{E}_0/2-I_2R_2$, $\varphi_A-\varphi_B=\mathscr{E}_0/2-I_1'R_{V_1}$,

$\varphi_B-\varphi_A=\mathscr{E}_0/2-I_2'R_{V_2}$.

Учитывая, что $I_1'R_{V_1}=u_1$, $I_2'R_{V_2}=u_2$, $I_0R_{V_0}=u_0$, получим

$$u_2=2u_0+u_1=20\ \text{В}.$$

Из системы уравнений вытекает, что

$$u_1=I_1R_1,\quad u_2=I_2R_2.$$

Найденное решение получено в предположении, что в рассматриваемый момент времени потенциал φ_A больше φ_B (ток I_0 течет от A к B). Это имеет место, если $R_2>R_1$ (в нашем случае $R_2/R_1=(u_2I_1)/(u_1I_2)\geqslant 2$).

Если же окажется, что K_2 меньше K_1, то при указанных на рисунке 24 знаках ЭДС ток I_0 должен быть направлен в другую сторону — от B к A, а $\varphi_A<\varphi_B$. Система уравнений для этого случая дает

$$u_2=u_1-2u_0=0.$$

Так как $u_2=I_2R_2$, то этому решению отвечает условие $R_2=0$ ($R_1\neq 0$).

Поскольку в условии задачи величины R_1 и R_2 не оговорены, то необходимо учитывать оба решения:

$$1)\ u_2=20\ \text{В},\quad 2)\ u_2=0.$$

4. Обозначим разность высот нижней точки гармошки (см. рис. 7, *а* и *б* в статье) через h и найдем его значение:

$$h=6l_0\left(\sin\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right). \qquad (1)$$

Если подвесить груз к нижней точке гармошки и отпустить его, то возникнут колебания с амплитудой, равной h. Скорость груза максимальна в момент прохождения положения равновесия и равна

$$v_m=h\omega. \qquad (2)$$

Работа равнодействующей силы над грузом при перемещении из положения *а)* в положение *б)* равна $mgh/2$ (сила линейно изменяется от значения mg до 0). Приравняв эту работу максимальной кинетической энергии, находим

$$v_m=\sqrt{gh}. \qquad (3)$$

Решив совместно уравнения (1), (2) и (3), получим

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=6\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{l_0}{g}\left(\sin\frac{\beta}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 8)

Задание 15 (Л. Куббель, 1896 г.). 1. **Фс4+ Крс5 2. d3 Фе6 3. d4+ Крс4 (b4) 4. d5+ Крс5 5. Фс2+** (5. de? пат) **5...Кр:d5 6. Фb3** (а2)+ и 7. Ф:е6. Любопытно, что вскрытое нападение, отражаемое черными посредством патовой ловушки, привело к геометрическому выигрышу ферзя.

Задание 16 (Г. Каспарян, 1969 г.). **1. Фh1! Кра7 2. Фg1+ Кра8 3. а6 Лb2 4. Фd4 Лb8 5. Фс5!** И в этом этюде белые избегают патовой комбинации. Если 5. а7?, то 5...Лb4+! 6. Кр:b4 с5+ 7. Ф:с5 Се7 8. Ф:е7 пат, или 7. Кр:с5 Сb6+ 8. Кр:b6 пат. **5...с6! 6. а7! Лс8 7. Фf5 Лс7 8. Фе5 Лс8 9. Фе6 Лс7 10. Фd6 Лс8 11. Фd7**, и ферзь справился с двумя фигурами соперника.

Вниманию наших читателей

Принимается подписка на фундаментальное научно-справочное издание в пяти томах «Физическая энциклопедия» (издательство «Советская энциклопедия»).

Энциклопедия рассчитана на научных сотрудников, инженеров, преподавателей и аспирантов, работающих в различных областях физики; может быть полезной студентам старших курсов физических и инженерно-физических факультетов университетов и втузов, учителям физики средней школы, ею заинтересуются также астрономы, химики, биологи, математики. 6000 расположенных в алфавитном порядке статей содержат обзоры по отдельным разделам физики, материалы о важнейших физических теориях, физических законах, явлениях и понятиях, основных объектах исследований в физике, методах исследования, важнейших установках, приборах, единицах физических величин. Главный редактор — один из основоположников квантовой электроники, лауреат Ленинской, Государственной и Нобелевской премий, дважды Герой Социалистического Труда академик А. М. Прохоров. Первый том выйдет в 1988 году. Ориентировочная стоимость тома 7 руб. 80 коп.

Подписка принимается книжными магазинами, распространяющими подписные издания. *При подписке вносится задаток 5 руб., который засчитывается при получении последнего тома.*

Квант

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Л. Рябов, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили
М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов, С. Ф. Лухин, Э. В. Назаров, П. И. Чернуский, В. В. Юдин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Редактор отдела художественного оформления С. В. Иванов
Художественный редактор Т. М. Макарова
Корректор Н. Б. Румянцева

Сдано в набор 17.09.87. Подписано к печати 21.10.87.
Т-19435 Бумага 70×108/16. Печать офсетная
Усл. кр.-от. 23,8. Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,30
Тираж 200 802 экз. Цена 40 коп. Заказ 2589

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300, г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

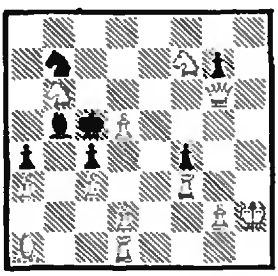
Шахматная страничка

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ТЕМЫ

Многие шахматные задачи имеют геометрическую основу, все как бы строится на пересечении линий.

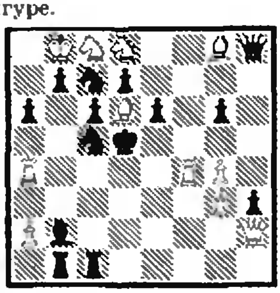
Бристольская тема (тема прокладки пути). Эта тема открыта английским проблемистом Хили и заключается в освобождении линии.



Ф. Хили, 1861 г.
Мат в 3 хода.

1. Лh1! Черные в цугцванге, конь неподвижен из-за 2. Фd6×, на любой ход слона следует **2. Фb1!** и, поскольку ладья заблаговременно уступила место ферзю, **3. Фg1×**.

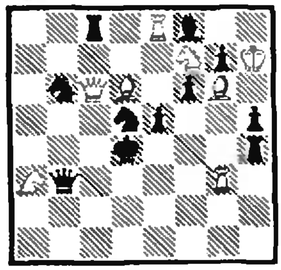
Антибристольская тема. На сей раз дальнобойная фигура закрывает путь другой фигуре.



П. Коппинг, 1961 г.
Мат в 3 хода.

1. Фe2! с угрозой 2. Фf3+ Кe4 3. Ф:e4×. Черные вынуждены привлечь своего ферзя: 1...Фc3 2. К:b7, 1...Фd4 2. Кр:c7, 1...Фe5 2. Кf7 — всякий раз с неизбежным матом 3. Кb6× *или* 3. Кe7×. От обоих матов в исходной позиции защищало 2...Сf6, теперь мешает свой ферзь.

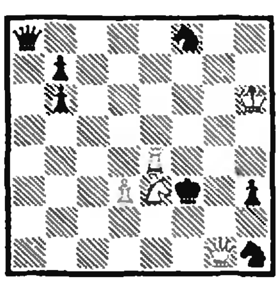
Клапан (тема ближе к физике) образуется двумя черными фигурами, одна из которых, открывая линию действия второй, одновременно перекрывает ее по другой линии. Если одна из фигур, открывая линию действия второй, одновременно перекрывает третью, то это — двойной клапан.



Л. Исаев, С. Левман, 1928 г.
Мат в 2 хода.

После **1. Кg5**, защищаясь от угрозы 2. Кe6×, черный конь d5 должен отступить (1...fg 2. С:e5×), открывая дорогу своему ферзю. В трех вариантах конь перекрывает ферзя по другим линиям: 1...Кb4 2. Кb5×, 1...Кc3 2. Лd3×, 1...Кe3 2. Кf3× — простой клапан; в трех других вариантах перекрывается путь другим фигурам: 1...Кe7 2. Сc5×, 1...Кc7 2. Фc5×, 1...Кf4 2. Фe4× — двойной клапан.

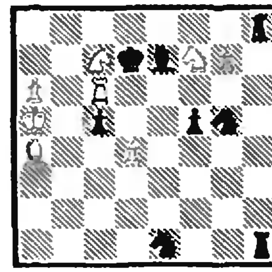
Коневое колесо — механизм восьмикратной игры одного из коней, расположенного в центральной части доски.



К. Мэнсфилд, 1958 г.
Мат в 2 хода.

В распоряжении белого коня восемь возможностей, но семь из них тонко опровергаются ходами черного ферзя: 1. Кf1 Фa2! 1. Кd1 Фc8! 1. Кc2 Фa1!, 1. Кc4 Фa5!, 1. Кd5 Фe8!, 1. Кf5 Фd8! и 1. Кg4 Фb8! Решает самый странный ход **1. Кg2!** с неизбежным матом. Тема коневого колеса оригинально воплощена в ложных следах.

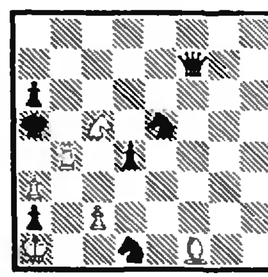
Крест — механизм четырехкратной игры короля, ферзя или ладьи на одинаковые расстояния по горизонтали и вертикали, **звездочка** — аналогичная игра по диагоналям.



В. Руденко, 1980 г.
Мат в 3 хода.

1. Кd5! с угрозой 2. Кb6+ Крe8 3. Лf6×. 1...Сd6 2. Л:c5+ Крe6 3. К:g5×, 1...Сd8+ 2. Лb6+ Крc8 3. Кd6×, 1...Сf8 2. Лd6+ Крc8 3. Лd8× и 1...Сf6 2. Лc7+ Крe6 3. Кf4×. Ладейный крест в ответ на звездочку слона!

Фокальная тема — устранение контроля черного ферзя (ладьи) над одним из двух защищаемых им по разным линиям полей, называемых фокальными.



В. Гольцгаузен, 1909 г.
Мат в 3 хода.

Белый конь готов объявить мат с b7 или b3. 1. Сc4 опровергается путем 1...Фf3! — ферзь вновь берет под прицел оба фокальных поля. Белые предварительно играют 1. c4! и только после 1...dc (1...Фf3 2. Сd3!) проводят основную идею 2. Сc4!

Конкурсные задания

21. Белые: Крa1, Лd3, Лd8, Кe7, Сf3 Сh4; черные: Крe5, Лa7, Кb5, *пп.* a3, b7, c7, e6, f4, f5, h7. Мат в 3 хода.

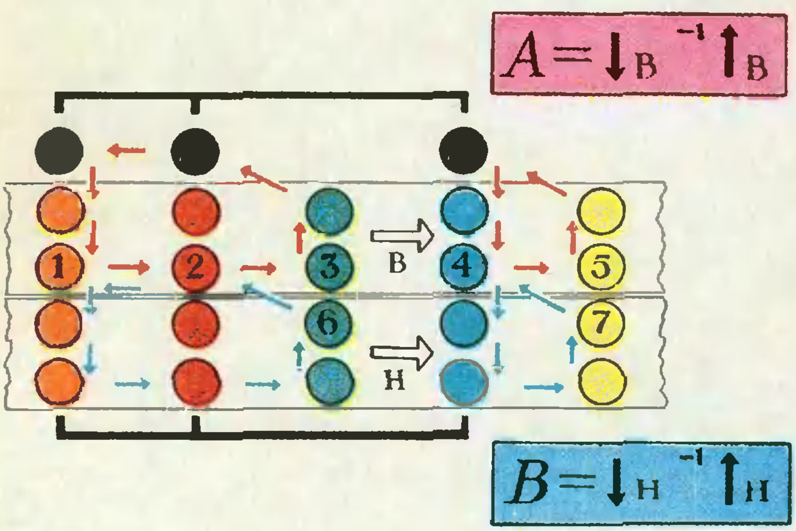
22. Белые: Крh8, Лe8, Лh7, Кa4, Кb3, Сh1, пп. b5, c2; черные: Крd6, Лb4, пп. a5, b6, d3, f5. Мат в 3 хода.

Срок отправки решений — 25 января 1988 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 21, 22».

Цена 40 коп.
Индекс 70465

«Чертову бочку» изобрел Гумпей Иокои — менеджер японской фирмы, производящей игральные автоматы. Ее общий вид показан справа, слева — схематическая развертка. Эта головоломка внешне напоминает хорошо известные «варикон» и «вавилонскую башню» (см. «Квант» № 6), но перемещение шариков осуществляется здесь иначе. Разрешается: 1) с помощью двух барабанов поворачивать сразу по два «слоя» шариков; поворот нижнего барабана на 1/5 полного оборота по стрелке на схеме обозначим н, *верхнего —* в; *2) сдвигать сразу три длинных вертикальных ряда шариков (по 5 штук) на один шарик — вниз, если три «лишних» шарика вверху, и вверх, если они внизу; эти сдвиги будем обозначать стрелками $\downarrow$ и $\uparrow$. К этому описанию остается добавить, что расположение шариков, показанное слева, считается «правильным». Его и нужно научиться получать из произвольной расстановки.*

Поищем операции, помогающие решить эту задачу. В прошлых номерах мы не раз уже видели, что особенно удобны «пары обменов» (устроенные так: $a \leftrightarrow b$, $c \leftrightarrow d$) и «3 – циклы» ($a \to b \to c \to a$), а искать их надо среди коммутаторов — операций вида $XYX^{-1}Y^{-1}$. Действие двух простейших коммутаторов — $A = \downarrow$в$^{-1}\uparrow$в и $B = \downarrow$н$^{-1}\uparrow$н — показано, соответственно, красными и синими стрелками слева. Каждый из них порождает два независимых



цикла (из 7 и из 5 элементов), т. е. перемещает одновременно 12 шариков. Это много. Но из них составляются более простые перестановки. BAB^{-1} Например, коммутатор $K = A^{-1}$ передвигает только 7 шариков: он порождает 3-цикл $5 \to 4 \to 7 \to 5$ и пару обменов $1 \leftrightarrow 2$, $3 \leftrightarrow 6$ (цифры — это номера шариков на схеме). Теперь самое время познакомиться еще с одним полезным приемом конструирования хороших операций — повторением. Если выполнить K дважды, то, очевидно, обмены $1 \leftrightarrow 2$ и $3 \leftrightarrow 6$ исчезнут, а останется только 3-цикл $4 \to 5 \to 7 \to 4$. А при тройном повторении, наоборот, исчезнет 3-цикл, пара обменов же останется. Аналогично мы могли бы избавиться от одного из двух циклов в операции A или B: проверьте, что A^5 — это 7-цикл, а A^7 — 5-цикл и посмотрите, как действуют коммутаторы $A^5B^5A^{-5}B^{-5}$, $A^7B^7A^{-7}B^{-7}$.

Внимательный читатель мог заметить, что операции A и B по существу совпадают с одноименными операциями из прошлого номера «Кванта», которые использовались для плоской головоломки, аналогичной «чертовой бочке» (сравните их схемы!). Но «бочка» все-таки предмет круглый и образовать циклы в ней можно просто крутнув барабан. Это не слишком хитроумное соображение «работает» в следующих двух операциях:

$$\downarrow\text{н}\uparrow\text{в}\downarrow\text{н}^{-1}\uparrow\text{в}^{-1}$$

($1 \leftrightarrow 2$, $5 \leftrightarrow 7$, $3 \to 6 \to 4 \to 3$; ср. с K) и

$$\downarrow\text{в}^2\uparrow\text{н}^2\downarrow\text{в}^{-2}\uparrow\text{н}^{-2}$$

($1 \leftrightarrow 4$, $5 \leftrightarrow 7$). Как видим, экономия в числе ходов немалая!