

ISSN 0130 - 2221

Квант

Научно-популярный
физико-математический
журнал

1 2 3 4 5 6 **7** 8 9 10 11 12

In Quadrante Orientali, circa F. et Limus Bor.




20

Лето

1987



В номере:

- | | | |
|--|-------------------------------------|---|
| <p>Научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР</p> | <p>2
8
14
20
26</p> | <p>Ю. П. Соловьев. Арифметика эллиптических кривых
А. А. Панов. Генеалогические деревья
Б. С. Ашаевский. Поверхность кристалла
С. И. Валянский. Единицы: от системы к системе
С. С. Хилькевич, О. А. Зайцева. Как построить траекторию?</p> |
| <p> Издательство «Наука»
Главная редакция физико-
математической литературы</p> | <p>19
32</p> | <p>Новости науки
Туннельный микроскоп</p> <p>Калейдоскоп «Кванта»</p> |
| | <p>34</p> | <p>Наш календарь
Ван-дер-Ваальс и его уравнение</p> |
| | <p>36
38</p> | <p>Задачник «Кванта»
Задачи М1051—М1055, Ф1063—Ф1067
Решения задач М1031—М1035, Ф1043—Ф1045, Ф1047</p> |
| | <p>43
44</p> | <p>«Квант» для младших школьников
Задачи
А. П. Савин. Задачи на разрезание</p> |
| | <p>48</p> | <p>Математический кружок
О. Т. Ижболдин, Л. Д. Курляндчик. Разбиение единицы</p> |
| | <p>54</p> | <p>Игры и головоломки
В. Н. Дубровский. Перевертыши</p> |
| | <p>59
61
62</p> | <p>Информация
Компьютеры на берегу Оби
Юные программисты в Ленинграде
Заочная школа при НГУ</p> |
| | <p>64</p> | <p>Ответы, указания, решения
Наша обложка (с. 53)
«Квант» улыбается (с. 58)
Шахматная страничка
Фигуры возвращаются домой (3-я с. обложки)</p> |

Наша обложка



На первой странице обложки воспроизведена одна из лунных карт выдающегося польского астронома Яна Гевелия, опубликованных в его знаменитом труде «Селенография» в 1647 году. Рассказ о Гевелии вы найдете в разделе «Наша обложка».

На второй странице обложки представлен фрагмент современной карты Луны, составленной Государственным астрономическим институтом им. П. К. Штернберга и Топогеодезической службой СССР.

АРИФМЕТИКА ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Кандидат физико-математических наук
Ю. П. СОЛОВЬЕВ

Античная математика оставила в наследство несколько великих сочинений. Одно из них — «Арифметика» Диофанта Александрийского. Удивительна судьба этой книги. Написанная в III веке н. э., она исчезла более чем на тысячелетие и считалась утраченной. Лишь в 1464 г. немецкий ученый Региомонтан случайно обнаружил 6 из 13 книг «Арифметики». В первый раз она была напечатана в латинском переводе в 1575 г. После ее издания 1621 г., подготовленного Баше де Мезириаком, она стала настольной книгой многих математиков, например, П. Ферма (1601—1665) и Р. Декарта (1596—1650).

За тысячелетие книга совсем не устарела — она сильно опережала уровень лучших алгебраических исследований XVI века. Посудите сами: в отличие от европейских алгебраистов этого времени, Диофант свободно оперировал отрицательными и рациональными числами, владел буквенной нотацией для уравнений, а самое главное — умел находить решение в целых и рациональных числах линейных, квадратных, кубических уравнений и систем с двумя и более неизвестными с целыми коэффициентами. Решение таких уравнений — они теперь называются *диофантовыми* — с

тех пор находится в центре внимания математиков.

О решении некоторых диофантовых уравнений — по-моему, самых красивых — я и собираюсь рассказать вам. Для этого придется не только бросить пристальный взгляд на сочинения великого Диофанта, но и коснуться самых последних событий современной математической жизни.

Метод секущих Диофанта

Проиллюстрируем этот метод на конкретном примере — частном случае одного из тех, которые Диофант разбирает в своей «Арифметике». Пусть дано уравнение

$$x^2 - y^2 = 1 \quad (1)$$

и требуется найти все его рациональные решения, т. е. найти все пары

$$(x; y) = \left(\frac{a}{b}; \frac{c}{d}\right), \quad a, b, c, d \in \mathbb{Z},$$

обращающие уравнение (1) в числовое тождество.

Уравнение (1), как и любое уравнение от переменных x, y , можно рассматривать как кривую на плоскости Oxy . В данном случае это гипербола (рис. 1). Сразу бросается в глаза решение $(1; 0)$ — точка пересечения P кривой с осью Ox . Проведем через эту точку секущую

$$y = k(x - 1) \quad (2)$$

и найдем ее вторую точку пересечения с кривой (1). Для этого подставим выражение (2) для y в уравнение (1) и решим получившееся квадратное уравнение относительно x . Получим

$$x_{1,2} = \frac{-k^2 \pm 1}{1 - k^2}.$$

Корень $x_1 = 1$ нам и так известен (он относится к точке $(1; 0)$), а второй корень $x_2 = (k^2 + 1)/(k^2 - 1)$ дает нам искомую вторую точку

$$(x_2; y_2) = \left(\frac{k^2 + 1}{k^2 - 1}; \right). \quad (3)$$

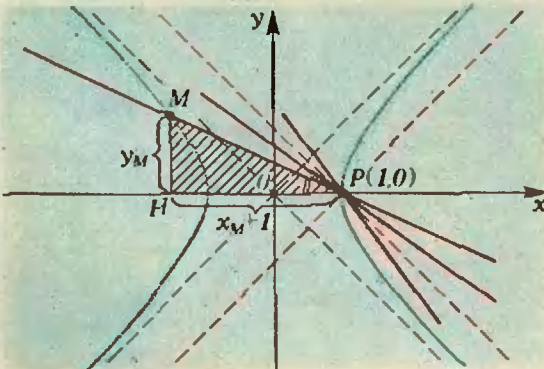


Рис. 1.

Для любого рационального k ($k \neq \pm 1$ эта формула определяет точку на нашей кривой, а значит и рациональное решение данного уравнения. (При $k = \pm 1$ секущая пересекает кривую только в точке P (см. рис. 1).) Обратное, для любого рационального решения, т. е. рациональной точки M на кривой, секущая PM задается уравнением (2) с рациональным k (ибо тогда катеты прямоугольного треугольника PMH рациональны).

Таким образом, формула (3) при всевозможных рациональных $k \neq \pm 1$ дает все решения в рациональных числах уравнения (1).

Сам Диофант, конечно, не вводил в рассмотрение систему координат Oxy , не рассматривал кривую данного уравнения — метод координат появился лишь в работах Декарта в XVII веке. Диофант делал подстановку (1) чисто алгебраически и получил — разумеется, в другой записи — формулу (3). Более того, он понимал, что продемонстрированный метод с успехом применим не только к многочлену $x^2 - y^2 - 1$, но и вообще к многочлену второй степени от двух переменных общего вида:

$$p(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f,$$

где a, b, \dots, f целые (или рациональные) числа, при условии, что y многочлена удалось найти хотя бы один рациональный корень.

Не на всякой кривой второй степени имеются рациональные точки; например, их нет на окружности $x^2 + y^2 = 3$ или на эллипсе $x^2 + 82y^2 = 3$ *. Задача о существовании хотя бы одной рациональной точки на кривой второй степени оказалась очень трудной. Первые нетривиальные продвижения в ее решении получили индийские математики Брахмагупта (VII век) и Бхаскара (XII век), а окончательный ответ был найден лишь в 1768 г. французским математиком Ж.-Л. Лагранжем (1736—1813).

Диофант не ограничился уравнениями второй степени. Он с успехом

* Рациональные точки $(a/b; b/c)$ имеются, однако, на окружности $x^2 + y^2 = 1$. Для таких точек тройка целых чисел (a, b, c) называется *пифагоровой* — она удовлетворяет соотношению $a^2 + b^2 = c^2$. Все пифагоровы тройки могут быть найдены методом секущих («Квант», 1987, № 1, с. 12), а также другими приемами (см. статью А. А. Паюва в этом номере).

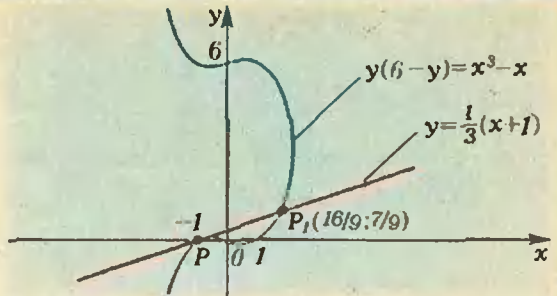


Рис. 2.

берется и за третью степень, демонстрируя общий прием в одной конкретной задаче. Это

Одна задача «Арифметики» Диофанта. Касательная

В этой задаче требуется найти рациональное решение уравнения

$$y(6-y) = x^3 - x. \quad (4)$$

Короткое решение, содержащее в зародыше замечательную идею, Диофант излагает с незаурядным мастерством. Попробуем, пишет он, замену $x = 2y - 1$ (разумеется, его обозначения совсем другие). Тогда получим

$$6y - 6y^2 = 8y^3 - 12y^2 + 4y.$$

Если бы 6 равнялось 4, как хорошо бы сократились члены с y в первой степени! Но число 4 взялось из двойки в замене $x = 2y - 1$. Так, заменим его тройкой, т. е. возьмем $x = 3y - 1$. Тогда линейные члены сокращаются, и мы находим

$$y^2(9y - 7) = 0, \quad (5)$$

откуда $y = 7/9$ и $x = 16/9$. Получено рациональное решение $(16/9; 7/9)$ кубического уравнения (4).

На первый взгляд здесь нет ничего особенного — просто удачная замена $x = 3y - 1$ позволила найти решение. В чем же «глубокая идея»? Чтобы ответить на этот вопрос, вновь воспользуемся методом координат и построим график кривой (4) — см. рис. 2 *. На этом рисунке красным показана прямая $x - 3y + 1 = 0$. Она касается нашей кривой в точке $P(-1; 0)$ (действительно, уравнение (5) имеет, кроме корня $y = 7/9$, еще и «два слившихся корня» $y^2 = 0$).

По этому пути можно было бы пойти дальше: через полученную рацио-

* О том, как строить графики подобных кривых, мы подробно расскажем ниже.

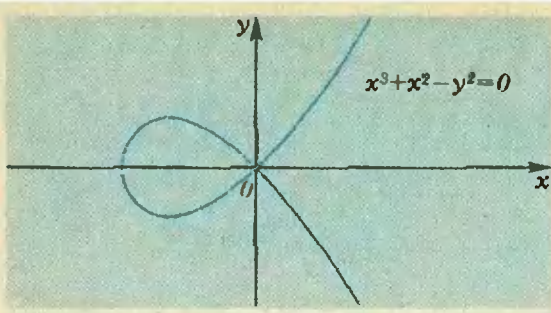


Рис. 3.

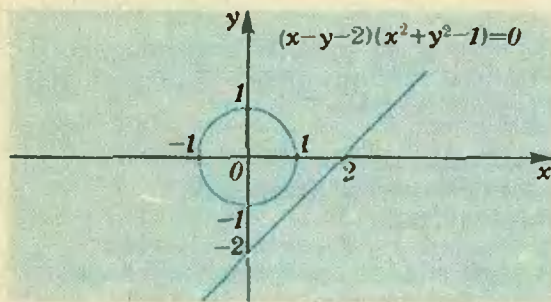


Рис. 4.

нальную точку (16/9; 7/9) построить еще одну касательную к кривой (4) до пересечения с ней в третьей рациональной точке и т. д. Но Диофант не сделал этого шага. И потребовалось более 1500 лет, прежде чем математики сумели до конца воспользоваться идеями Диофанта.

Кривые третьей степени

Оставаясь верными геометрическому подходу, рассмотренному выше, мы сосредоточим наше внимание не на решении уравнений третьей степени, а на следующем эквивалентном вопросе: *каковы рациональные точки кривой на плоскости, задаваемой уравнением третьей степени*

$$f(x, y) = ax^3 + bx^2y + \dots + hx + iy + j = 0$$

с целочисленными коэффициентами?

Все такие кривые можно разбить на два больших класса. К первому классу отнесем те кривые, у которых имеются точки заострения (как точка (0; 0) кривой $y^2 = x^3$), самопере-

сечения (рис. 3), а также кривые, для которых $f(x, y)$ представляется в виде $f(x, y) = f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)$,

где $f_1(x, y), f_2(x, y)$ — многочлены меньших степеней (рис. 4). Назовем такие кривые *вырожденными*. Второй класс образуют невырожденные кривые третьей степени с целочисленными коэффициентами — такие кривые называются *эллиптическими*. Именно этот (наиболее общий) класс и будет нас интересовать. Мы будем рассматривать эллиптические кривые, заданные в так называемой *канонической форме*, т. е. уравнением

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c \quad (6)$$

с целыми коэффициентами a, b и c , в котором многочлен $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ не имеет кратных корней.

Это не нарушает общности: любую неособую кривую $f(x, y) = 0$ третьей степени можно некоторым преобразованием привести к виду (6); при этом, если коэффициенты $f(x, y)$ были целыми, задачу отыскания рациональных точек на кривой $f(x, y) = 0$ можно свести к аналогичной задаче для кривой (6) с целыми a, b и c .

Графическое изображение эллиптических кривых

Прежде всего выясним, как выглядит кривая (6). Чтобы получить ее графическое изображение, нужно нарисовать график функции $y = \sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c}$ и симметрично отразить его на оси Ox . Для построения графика $y = \sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c}$ построим вначале график функции $y = x^3 + ax^2 + bx + c$. Известно, что у многочлена третьей степени (без кратных корней) могут быть либо один, либо три вещественных корня. По предположению все эти корни различны. Поэтому график $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ выглядит так, как показано на рисунке 5, а и б. А теперь уже нетрудно получить график функции

$$y = \sqrt{x^3 + ax^2 + bx + c}$$

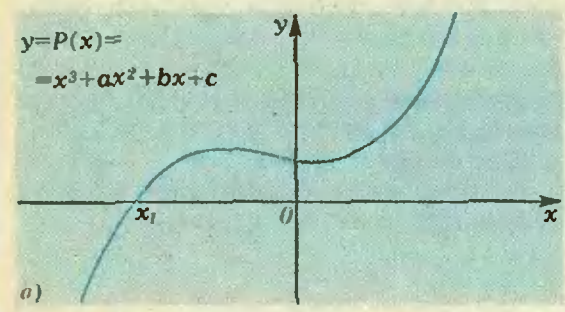
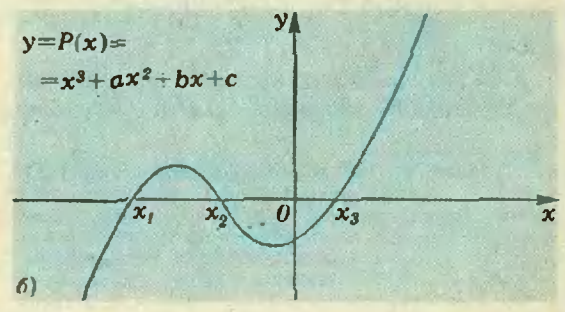


Рис. 5. а)



б)

(рис. 6, а) и, тем самым, вид эллиптической кривой $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$ (рис. 6, б) для случая кривой 5, а. Случай кривой 5, б мы оставляем читателю; результирующая кривая состоит из двух кусков (см. рис. 9).

Отметим следующее обстоятельство. Графики функций $y = \sqrt{P(x)}$ и $y = -\sqrt{P(x)}$ «склеиваются» в точках x_1, x_2, x_3 «гладко», т. е. без углов. Это происходит потому, что касательная к графику $y = \sqrt{P(x)}$ в точках x_1, x_2, x_3 вертикальная; другими словами, ее угловой коэффициент обращается в бесконечность. Это легко доказать подсчетом производной функции $y = \sqrt{P(x)}$.

Сложение точек на эллиптической кривой

Метод секущих, примененный к эллиптической кривой C , приводит к неожиданному результату: оказывается, точки на ней можно «складывать». Мы определим операцию сложения точек на C , отправляясь от ее графического изображения (см. рисунок 7). Возьмем на C две точки P и Q и проведем через них прямую. Эта прямая имеет третью точку пересечения с кривой C . Отразим эту точку от оси Ox и назовем получившуюся точку суммой P и Q (обозначение $P+Q$, рис. 7). Не всегда прямая, проходящая через две точки, пересекает кривую C в третьей — например, вертикальная прямая. Далее мы более подробно рассмотрим эту ситуацию.

Исследуем свойства сложения точек на эллиптической кривой. За образец примем свойства операции сложения чисел. Эта операция коммутативна, т. е. $a+b=b+a$, и ассоциативна, т. е. $(a+b)+c=a+(b+c)$. Кроме того, у этой операции существует нуль, т. е. такое число O , что $a+O=a$ для любого a , и, наконец, для каждого числа a имеется противоположное ему, т. е. такое число $(-a)$, что $a+(-a)=0$.

А как обстоит дело на эллиптической кривой? Прежде всего, операция сложения точек коммутативна. В самом деле, для вычисления $Q+P$ мы используем ту же самую прямую, что и для $P+Q$. Следовательно, $Q+P=P+Q$.

Ассоциативность для сложения точек на эллиптической кривой также выполняется, но доказать это не просто. Этот замечательный факт — попробуйте его осмыслить геометри-

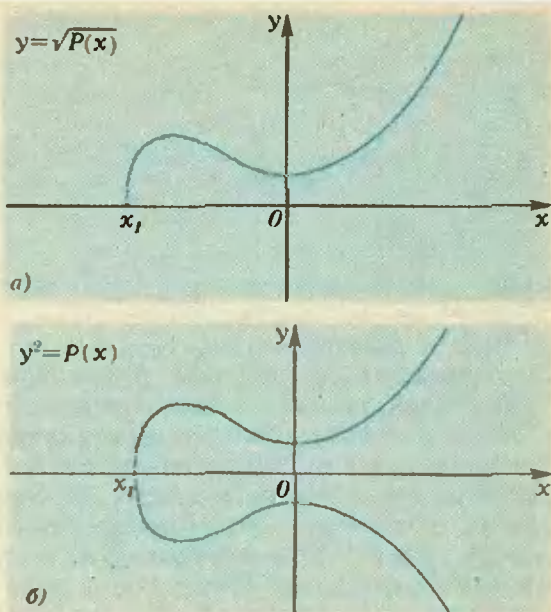


Рис. 6.

чески, сделав чертеж — будет доказан в одном из следующих номеров «Кванта».

Займемся теперь существованием нуля. Нуль — это такая точка E на кривой, что $P+E=P$. Как ее найти? Посмотрим на рисунок 8. Пусть на кривой дана точка P . Мы хотим найти что-то такое, что если провести прямую через P и это «что-то такое», пересечь получившуюся прямую с кривой, а потом отразить точку пересечения от оси Ox , то вновь получится P . Обозначим через R точку, симметричную P относительно оси Ox . Из сказанного вытекает, что прямая должна проходить через точки P и R , т. е. должна быть вертикальной. Следовательно, если имеется точка E , для которой $P+E=P$, то эта точка не может находиться в плоскости, поскольку она должна лежать и на кривой и на вертикальной прямой.

Раз точки E в плоскости нет, а она нам очень нужна, то мы добавим ее

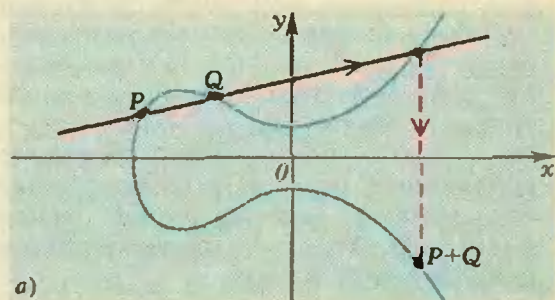


Рис. 7.

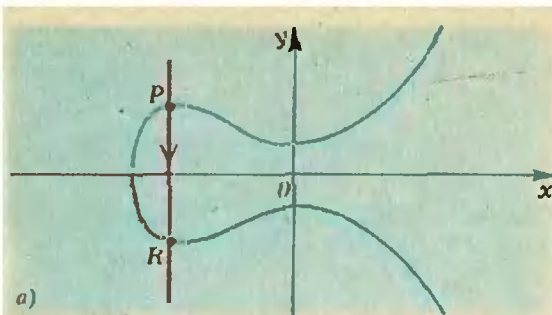


Рис. 8.

к плоскости и назовем *бесконечно удаленной точкой*. Каким требованиям она должна удовлетворять? Любая вертикальная прямая стремится к бесконечности сверху и снизу. Потребуем, чтобы все эти бесконечности были одной и той же точкой E , т. е. будем считать, что E есть точка пересечения всех вертикалей. Это требование корректно определяет точку E — нулевую точку относительно нашей операции сложения. В силу нашего соглашения вертикальная прямая, проходящая через точку P , проходит через P и E . Поэтому точка R пересечения этой прямой с эллиптической кривой удовлетворяет соотношению $P+R=E$, т. е. является противоположной к P . А с другой стороны, R — это точка, симметричная к P относительно оси Ox . Значит, любая точка P имеет противоположную — $P=R$. Тем самым мы убедились, что сложение точек на эллиптической кривой обладает теми же свойствами, что и сложение чисел.

Как вычислить точку $P+P$? Когда точки были различны, мы проводили секущую. Раз они слились, понятно, что нужно провести касательную (рис. 9).

А что делать, чтобы найти $3P$? Очень просто, берем сумму $2P$ и P . Подобно этому $4P=3P+P$, $5P=4P+P$ и т. д.

Поиск рациональных точек

Вооружившись операцией сложения, займемся теперь рациональными точками. Пусть $P=(x_1, y_1)$, $Q=(x_2, y_2)$ — две рациональные точки на эллиптической кривой $y^2=x^3+ax^2+bx+c$, где a, b, c — целые числа, и прямая, проходящая через P и Q , пересекает эту кривую еще в одной точке $R=(x_3, y_3)$. Тогда R также является рациональной точкой.

Доказывается это утверждение довольно просто. Если

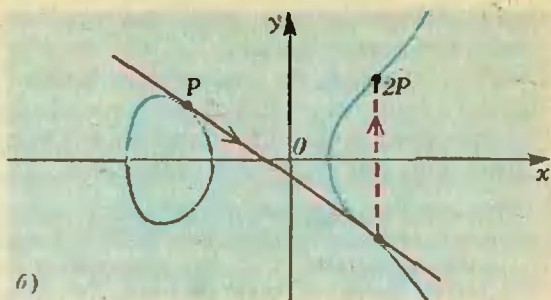


Рис. 9.

$$y=kx+d \quad (7)$$

— уравнение прямой, проходящей через точки P и Q , то k и d — рациональные числа, поскольку их можно выразить через координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) точек P и Q по формулам

$$k = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}, \quad d = y_1 - kx_1 = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_1 - x_2}.$$

Подставив (7) в уравнение эллиптической кривой, получим для x уравнение третьей степени с рациональными коэффициентами

$$(kx+d)^2 = x^3 + ax^2 + bx + c,$$

т. е.

$$x^3 + (a - k^2)x^2 + (b - 2kd)x + c - d^2 = 0.$$

По теореме Виета

$$x_1 + x_2 + x_3 = k^2 - a.$$

Так как x_1 и x_2 рациональны, то рациональным будет x_3 , а значит, и $y_3 = kx_3 + d$.

Из этого доказательства сразу же следует формула для вычисления координат точки $P+Q$. По определению $P+Q$ получается из R отражением от оси Ox , значит, координаты $(u; v)$ точки $P+Q$ могут быть найдены по формулам

$$u = k^2 - a - x_1 - x_2,$$

$$v = -ku - d = -[k(u - x_1) + y_1].$$

Подставив сюда значения k и d , получим

$$u = \frac{(y_1 - y_2)^2}{(x_1 - x_2)^2} - (a_1 + x_1 + x_2), \quad (8)$$

$$v = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} (x_1 - u) - y_1.$$

Ясно, что если $x_1 = x_2$, эти формулы не имеют смысла. В этом случае уравнение секущей (7) нужно заменить уравнением касательной и действовать по прежней схеме. В результате получим

$$u = -2x_1 + a - \left(\frac{3x_1^2 + 2ax_1 + b}{2y_1} \right)^2, \quad (9)$$

$$v = y_1 + \frac{3x_1^2 + 2ax_1 + b}{2y_1} (u - x_1).$$

Таким образом, зная хотя бы одну рациональную точку P на эллиптической кривой, мы можем найти по указанным формулам точки $2P, 3P$ и т. д. Рассмотрим пример. Пусть кри-

вая задана уравнением $y^2 = x^3 - 2$ и $P = (3; 5)$. Тогда $2P = \left(\frac{129}{100}; -\frac{383}{1000}\right)$ — новая рациональная точка. Теперь можно вычислить $3P$, $4P$ и т. д. Заметим, что объем вычислений с каждым шагом стремительно растет. Если обозначить через u_n первую координату точки nP , то

$$u_1 = 3, u_2 = \frac{129}{100}, u_3 = \frac{164323}{29241},$$

$$u_4 = \frac{2340922881}{58675600}, u_5 = \frac{307326105747363}{160280942564521}.$$

Далее еще быстрее. Например, у u_{11} в числителе 71 знак.

В настоящее время неизвестно никакой общей процедуры для нахождения всех рациональных решений уравнения $y = x^3 + ax^2 + bx + c$. В разобранным примере $y^2 = x^3 - 2$ одно решение $(3; 5)$ мы просто подобрали; в общем же случае неизвестно никакого метода, который позволил бы найти это первое решение. Нахождение рационального решения эллиптического уравнения с помощью эффективной процедуры является одной из крупнейших проблем теории чисел. Однако, если одно решение есть, можно найти другие по формулам (8) и (9).

Порядок точек

на эллиптической кривой

При получении точек nP из данной точки P возможны два случая. В первом случае на шаге n получается нуль, т. е. существует такое число n , что $nP = E$. Если для всех $m < n$ $mP \neq E$, то говорят, что точка P имеет *конечный порядок* n . Например, на кривой $y^2 = x^3 + 4$ точка $P = (0; 2)$ имеет порядок 3, на кривой $y^2 = x^3 + 1$ точка $P = (2; 3)$ имеет порядок 6, на кривой $y^2 = x^3 - 43x + 166$ точка $P = (3; 8)$ имеет порядок 7. Можно поставить вопрос: сколько существует рациональных точек конечного порядка и каковы эти порядки?

В 1976 году американский математик Б. Мазур получил выдающийся результат, показав, что если P — рациональная точка порядка n , то $n \leq 10$ или $n = 12$; с другой стороны, на эллиптической кривой существует самое большее 16 рациональных точек конечного порядка.

Второй случай — это когда все точки $2P$, $3P$, $4P$ и т. д. различны. В 1901 году французский мате-

матик А. Пуанкаре (1854—1912) высказал гипотезу о том, что *всегда можно найти такое конечное число рациональных точек P_1, \dots, P_r , что всякая рациональная точка P выражается через них, т. е. представляется в виде*

$$P = n_1 P_1 + \dots + n_r P_r + Q,$$

где n_1, \dots, n_r — целые числа, однозначно определяемые точкой P , а Q — точка конечного порядка. Сами же точки P_1, \dots, P_r не выражаются друг через друга. Число r называется *рангом* кривой.

Гипотезу Пуанкаре в 1922 году доказал англичанин Л. Морделл, но его доказательство не дает никакого способа для вычисления ранга. До сих пор неясно, существуют ли эллиптические кривые сколь угодно большого ранга. Известно лишь, что ранг оценивается через коэффициенты a, b, c уравнения $y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$, поэтому кривые большого ранга должны иметь большие коэффициенты. Например, к числу кривых ранга $r \geq 8$ относится недавно найденная кривая, у которой

$$a = -3^2 \cdot 1487 \cdot 1873,$$

$$b = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 151 \cdot 14551 \cdot 33353, \\ c = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 151^2 \cdot 193 \cdot 273 \cdot 156307.$$

Заключение: кривые произвольных степеней

Мы здесь ограничились кривыми (а значит, диофантовыми уравнениями) степеней 2 и 3. А как обстоит дело со степенями $n \geq 4$? В этом случае тоже естественно выделить класс «невырожденных» кривых степени n (типичный представитель — кривая $x^n + y^n = 1$). При $n > 3$ картина разительно меняется. Еще в 1931 году английский математик Л. Морделл выдвинул гипотезу — на таких кривых *число рациональных точек всегда конечно*. Гипотеза Морделла более полувека была в центре внимания ведущих математиков всего мира. Существенный вклад в ее решение внесли советские математики И. Р. Шафаревич, Ю. И. Манин, С. Ю. Аракелов, А. Н. Паршин, Ю. Г. Зархин, но честь ее решения в 1983 г. выпала молодому ученому из ФРГ Герду Фальтингсу. За это в 1986 г. на Конгрессе математиков в Беркли (США) он был награжден медалью Филдса — высшей наградой для математиков.

ГЕНЕАЛОГИЧЕСКИЕ ДЕРЕВЬЯ

А. А. ПАНОВ

В этой статье пойдет речь о математической классике — алгоритме Евклида и пифагоровых тройках. Алгоритм Евклида описан в евклидовых «Началах» (около 300 г. до н. э.) и наверняка был известен задолго до этого. История пифагоровых троек прослеживается еще дальше. Замечательным памятником человеческой культуры является древневавилонская глиняная табличка, содержащая пятнадцать пифагоровых троек. Она датируется 1700 годом до н. э.

Мы здесь попытаемся стряхнуть пыль с этих древних понятий, поговорить о них на наглядном «языке деревьев». Этот язык оказывается полезным при решении некоторых уравнений и укажет, какая связь существует между алгоритмом Евклида и методом построения пифагоровых троек, недавно предложенным английским математиком А. Холлом.

Алгоритм Евклида

Алгоритм Евклида служит для нахождения наибольшего общего делителя (НОД) двух натуральных чисел.

Пусть (m, n) — пара положительных целых чисел:

1) если $m=n$, то число $d=m=n$ и есть наибольший общий делитель исходной пары чисел, если $m \neq n$, то перейти к 2);

2) большее число заменить на его разность с меньшим и перейти к 1).

Возможно, вы больше привыкли к следующему варианту шага 2:

2') большее число заменить на его остаток от деления на меньшее и перейти к 1),

но это дело вкуса.

Задача 0. Докажите, что оба алгоритма 1), 2) и 1), 2') приводят к одному и тому же результату.

У к а з а н и е. Вспомните, что деление — это многократное вычитание.

Во всяком случае, сам Евклид говорит о своем алгоритме как о «постоянном отнятии меньшего от большего» («Начала», Книга 7, Предложение II, перевод Д. Д. Мордухай-Болтовского). Именно этот алгоритм, основанный на многократном вычитании, и будет объектом нашего исследования.

Продемонстрируем работу алгоритма на конкретном примере. Пусть $(m, n) = (20, 12)$. Тогда, записывая действия алгоритма справа налево, получим следующую цепочку:

$$(4, 4) \leftarrow (8, 4) \leftarrow (8, 12) \leftarrow (20, 12).$$

Значит, НОД $(20, 12) = 4$. Прделаем то же самое для пары $(5, 3)$, получим цепочку

$$(1, 1) \leftarrow (2, 1) \leftarrow (2, 3) \leftarrow (5, 3).$$

Ясно, что каждое число во второй цепочке получается из соответствующего числа в первой цепочке делением на 4.

Разобравшись с этим примером, ответьте на следующий вопрос.

Задача 1. Пусть $d = \text{НОД}(M, N)$. Положим $m = M/d$, $n = N/d$. Чему равен НОД (m, n) и в чем сходство между действием алгоритма Евклида на пару (M, N) и на пару (m, n) ?

В дальнейшем мы ограничимся только парами (m, n) , для которых НОД $(m, n) = 1$. Такие пары будем называть *простыми* парами.

Генеалогия простых пар

Рассмотрим еще один пример. Применим алгоритм Евклида к простой паре $(3, 4)$:

$$(1, 1) \leftarrow (2, 1) \leftarrow (3, 1) \leftarrow (3, 4).$$

Эта цепочка имеет общую часть с цепочкой для пары $(5, 3)$, и потому их можно объединить:

$$(1, 1) \leftarrow (2, 1) \begin{array}{l} \swarrow (3, 1) \leftarrow (3, 4) \\ \searrow (2, 3) \leftarrow (5, 3) \end{array}$$

Можно добавить еще одну простую пару $(3, 2)$, и картинка усложнится:

$$(1, 1) \leftarrow (2, 1) \begin{array}{l} \swarrow (3, 1) \leftarrow (3, 4) \\ \searrow (2, 3) \leftarrow (5, 3) \\ \swarrow (1, 2) \leftarrow (3, 2) \end{array}$$



Создается впечатление, что должна существовать общая картина, объединяющая все простые пары. Чтобы выяснить ее строение, можно было бы добавить еще несколько простых пар. Так или иначе, в какой-то момент времени нам должен прийти в голову правильный вопрос: пусть имеется простая пара (m, n) ; от каких пар к ней могут идти стрелки?

Задача 2. Докажите, что если от пары (M, N) в алгоритме Евклида идет стрелка к паре (m, n) , то либо $M=m+n$, $N=n$, либо $M=m$, $N=m+n$.

Эта задача подсказывает, что нужно ввести два преобразования t_1 и t_2 , переводящих пару (m, n) в пары

$$\begin{aligned} t_1(m, n) &= (m+n, n), \\ t_2(m, n) &= (m, m+n). \end{aligned} \quad (1)$$

Теперь мы можем двигаться в обратном порядке. Начнем с пары $(1, 1)$ и применим к ней оба преобразования t_1 и t_2 (t_1 действует по стрелке, идущей вверх, t_2 — по стрелке, идущей вниз). Получим две новые пары — $(2, 1)$ и $(1, 2)$. К каждой из них снова применим t_1 и t_2 и т. д.

Каждая пара здесь порождает две новые пары, и этот процесс продолжается вправо до бесконечности. Как и следовало ожидать, рисунок 1 содержит в качестве фрагментов все предыдущие картинки, только стрелки здесь обращены в другую сторону.

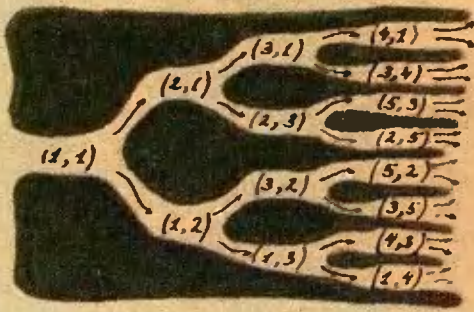


Рис. 1.

Задача 3. Докажите, что любая пара (m, n) на рисунке 1 простая.

Задача 4. Докажите, что каждая простая пара содержится на рисунке 1 и притом только один раз.

После этих задач то, что изображено на рисунке 1, естественно назвать генеалогическим деревом простых пар.

Задача 5. Пусть пара (m, n) лежит на генеалогическом дереве на рисунке 1. Существует единственный путь, соединяющий ее с начальной парой $(1, 1)$. Покажите, что движение по этому пути против стрелок соответствует применению к паре (m, n) алгоритма Евклида.

Итак, генеалогическое дерево на рисунке 1 содержит все простые пары. Применение алгоритма Евклида к паре (m, n) эквивалентно движению по дереву против стрелок.

Уравнение $XY=Z^2$

Изменим теперь тему разговора и попытаемся найти все целочисленные решения (X, Y, Z) уравнения

$$XY=Z^2. \quad (2)$$

Ограничимся лишь положительными X, Y, Z . Пример: $X=3, Y=12, Z=6$.

Казалось бы, о чем говорить? Для заданного Z отыскание решений уравнения сводится к разложению числа Z^2 на два сомножителя, и для каждого Z можно даже подсчитать число решений.

Задача 6. Зафиксируем Z и пусть $Z=p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_k^{a_k}$ — разложение Z на простые сомножители. Докажите, что число решений уравнения (2) равно $(2a_1+1)(2a_2+1)\dots(2a_k+1)$.

Однако я хочу предложить другую точку зрения.

Задача 7. Пусть (X, Y, Z) — решение уравнения (2); докажите, что при $d>0$ тройка (dX, dY, dZ) — тоже решение. Пусть (X, Y, Z) — решение уравнения (2) и $\text{НОД}(X, Y)=d$; докажите, что $(X/d, Y/d, Z/d)$ тоже решение уравнения (2) и при этом $\text{НОД}(X/d, Y/d)=1$.

Таким образом, при отыскании всех решений (X, Y, Z) уравнения (2) мы можем ограничиться только теми, для которых $\text{НОД}(X, Y)=1$; будем называть их *примитивными*. Все остальные получаются из примитивных простым умножением.

Задача 8. Пусть (X, Y, Z) — примитивное решение уравнения (2). Докажите, что найдется такая простая пара (m, n) , что $X=m^2, Y=n^2, Z=mn$.

Теперь ясно, что соотношения

$$X=m^2, Y=n^2, Z=mn \quad (3)$$

осуществляют взаимно однозначное соответствие между простыми парами (m, n) и примитивными решениями (X, Y, Z) уравнения (2).

Это значит, что мы в полной мере можем воспользоваться нашими предыдущими результатами о простых парах. Например, используя соотношения (3), заменим на рисунке 1 каждую простую пару (m, n) соответствующим ей примитивным решением (X, Y, Z) . Получившееся дерево естественно назвать генеалогическим деревом примитивных решений уравнения (2). Оно содержит все без

следующий способ построения генеалогического дерева для примитивных пар и примитивных пифагоровых троек. Вводятся три преобразования t_1, t_2 и t_3 :

$$\begin{aligned} t_1(m, n) &= (2m - n, m), \\ t_2(m, n) &= (2m + n, m), \\ t_3(m, n) &= (m + 2n, n). \end{aligned}$$

При помощи этих преобразований, начиная с пары (2, 1), строится генеалогическое дерево. Здесь направление вверх соответствует преобразованию t_1 , горизонтальное направление — преобразованию t_2 , направление вниз — преобразованию t_3 .

Задача 10. Пусть пара (m, n) порождает при помощи соотношений (4) пифагорову тройку (X, Y, Z) . Пифагорову тройку, порожденную парой $t_1(m, n)$, обозначим через $T_1(X, Y, Z)$; тройку, порожденную парой $t_2(m, n)$, — через $T_2(X, Y, Z)$; наконец, тройку, порожденную парой $t_3(m, n)$, — через $T_3(X, Y, Z)$. Докажите, что

$$\begin{aligned} T_1(X, Y, Z) &= \\ &= (X - 2Y + 2Z, 2X - Y + 2Z, 2X - 2Y + 3Z), \\ T_2(X, Y, Z) &= \\ &= (X + 2Y + 2Z, 2X + Y + 2Z, 2X + 2Y + 3Z), \\ T_3(X, Y, Z) &= \\ &= (-X + 2Y + 2Z, -2X + Y + 2Z, -2X + 2Y + 3Z). \end{aligned}$$

Теперь при помощи преобразований T_1, T_2, T_3 построим еще одно генеалогическое дерево, но уже начинающееся с тройки (3, 4, 5).

Замечательный результат Холла заключается в том, что генеалогическое дерево на рисунке 3 содержит все без исключения примитивные пары; значит, генеалогическое дерево на рисунке 4 содержит все без исклю-

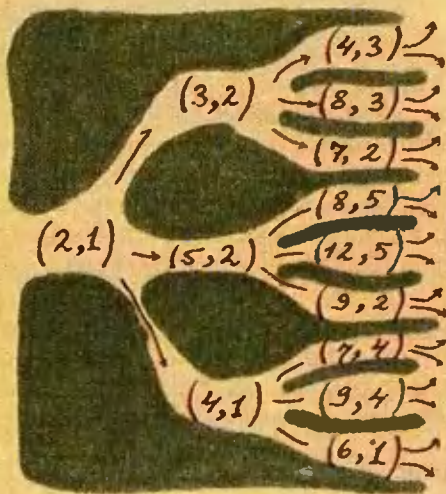


Рис. 3.

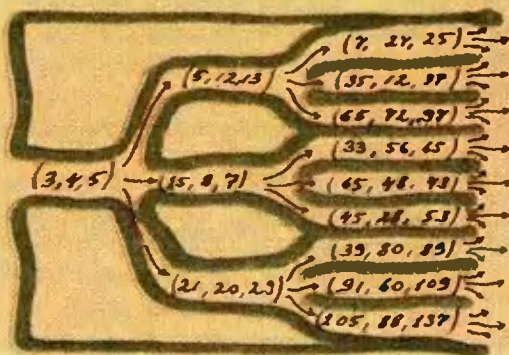


Рис. 4.

чения примитивные пифагоровы тройки.

В следующей серии задач проводится доказательство этого факта.

Задача 11. Докажите, что все пары на рисунке 3 примитивны. Эта задача показывает, в частности, что все тройки на рисунке 4 являются примитивными пифагоровыми тройками.

Преобразования t_1, t_2, t_3 позволяют двигаться на рисунке 3 по стрелкам. Сейчас мы выясним, как осуществлять движение против стрелок.

Задача 12. Пусть $(M, N) = t_i(m, n)$, где t_i — одно из преобразований t_1, t_2, t_3 . Докажите, что тогда $(m, n) = u_i(M, N)$, где u_i — соответствующее из преобразований

$$\begin{aligned} u_1(M, N) &= (N, -M + 2N), \\ u_2(M, N) &= (N, M - 2N), \\ u_3(M, N) &= (M - 2N, N). \end{aligned}$$

Преобразования u_1, u_2, u_3 позволяют двигаться по рисунку 3 против стрелок. Они осуществляют своеобразный алгоритм Евклида для примитивных пар, позволяя спуститься от произвольной примитивной пары (m, n) к начальной паре (2, 1).

К каждой паре (m, n) на рисунке 3 подходит ровно одна стрелка. Для преобразований u_1, u_2, u_3 это соответствует следующему факту.

Задача 13. Пусть пара (M, N) примитивна и $(M, N) \neq (2, 1)$. Докажите, что тогда только одна из трех пар $(m, n) = u_i(M, N)$, $i = 1, 2, 3$, будет примитивной. При этом $m + n < M + N$.

И, наконец, завершающая

Задача 14. Докажите, что каждая примитивная пара содержится на генеалогическом дереве на рисунке 3 и притом только один раз (а также каждая примитивная пифагорова тройка на рисунке 4).

Другие генеалогии

В 1978 году в скандинавском математическом журнале «Normat» была опубликована статья Е. Сельмера, в которой установлено, что существуют

еще два генеалогических дерева, содержащих все без исключений и повторений примитивные пифагоровы тройки (рис. 5).

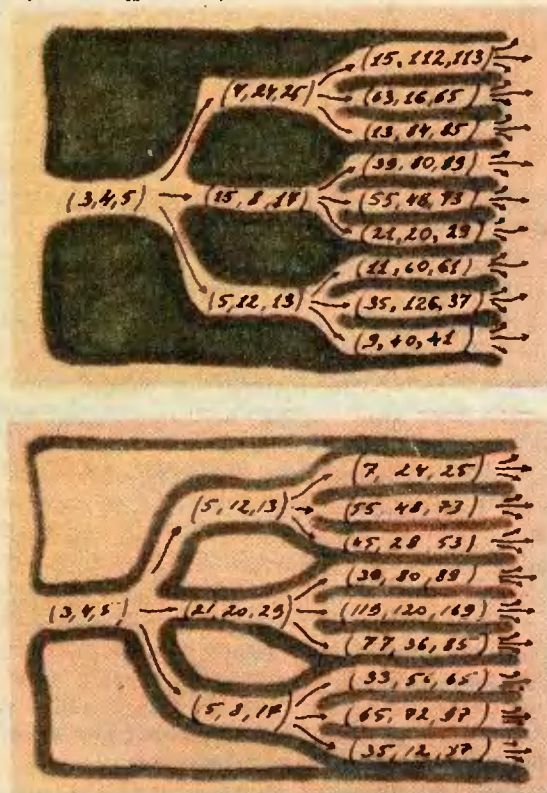


Рис. 5.

Первое из них строится при помощи преобразований

$$T_1(X, Y, Z) = (2X - Y + Z, 2X + 2Y + 2Z, 2X + Y + 3Z),$$

$$T_2(X, Y, Z) = (2X + Y + Z, 2X - 2Y + 2Z, 2X - Y + 3Z),$$

$$T_3(X, Y, Z) = (2X + Y - Z, -2X + 2Y + 2Z, -2X + Y + 3Z).$$

Второе — при помощи преобразований

$$T_1(X, Y, Z) = (X - 2Y + 2Z, 2X - Y + 2Z, 2X - 2Y + 3Z),$$

$$T_2(X, Y, Z) = (2X + Y + Z, 2X - 2Y + 2Z, 2X - Y + 3Z),$$

$$T_3(X, Y, Z) = (-2X + 3Y + 3Z, -6X + 2Y + 6Z, -6X + 3Y + 7Z).$$

Пифагоровы тройки неизменно, на протяжении тысячелетий привлекают внимание математиков. Но мы видим, что эта тема не исчерпала себя, и тут до сих пор продолжают обнаруживаться новые интересные факты.

Подводя итоги

В связи с тем, что было рассказано, имеется несколько вопросов, которые необходимо если не решить, то по крайней мере задать. Например, по-

чему на генеалогическом дереве для уравнения $XY=Z^2$ от каждого решения отходят две стрелки, а на генеалогическом дереве для $X^2+Y^2=Z^2$ — три? Далее, почему для уравнения $X^2+Y^2=Z^2$ построено три генеалогических дерева, а для $XY=Z^2$ — только одно, и существуют ли для этих уравнений другие деревья? Наконец, как были найдены преобразования T_1, T_2, T_3 , позволяющие строить генеалогические деревья для пифагоровых троек?

Наше построение генеалогического дерева для уравнения $XY=Z^2$ напрямую связано с алгоритмом Евклида и выглядит достаточно мотивированным, чего нельзя сказать об уравнении $X^2+Y^2=Z^2$. Однако между этими уравнениями имеется связь, оправдывающая попытки сделать для одного из них то, что было сделано для другого. Действительно, запишем уравнение $X^2+Y^2=Z^2$ в виде $Z^2 - X^2 = Y^2$ и разложим левую часть на множители: $(Z-X)(Z+X) = Y^2$. Сделав замену $U=Z-X, V=Z+X, W=Y$, приходим к уравнению $UV=W^2$. Таким образом, существует замена, переводящая уравнение $X^2+Y^2=Z^2$ в уравнение $XY=Z^2$.

Имеется еще целый ряд уравнений, допускающих замену, переводящую их в $XY=Z^2$. Такими уравнениями будут, скажем, $X^2+Y^2=2Z^2$ и $X^2+3Y^2=Z^2$. Вы можете попытаться построить генеалогические деревья и для этих уравнений.

Необходимо сказать еще об одном замечательном уравнении — уравнении Маркова:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 3XYZ.$$

Оно обладает уже привычным для нас свойством — все его решения, кроме двух очевидных — $(1, 1, 1)$ и $(2, 1, 1)$, организуются в генеалогическое дерево. Об этом подробно рассказано в увлекательной статье М. Г. Крейна («Квант», 1985, № 4, с. 13). Это дерево вполне аналогично генеалогическому дереву для уравнения $XY=Z^2$. Существует ли какая-то связь между этими уравнениями? Какие еще уравнения обладают подобными свойствами?

Так что тут есть о чем еще подумать.

ПОВЕРХНОСТЬ КРИСТАЛЛА

Кандидат физико-математических наук
Б. С. АШАВСКИЙ

1915 год. Уже год идет первая мировая война. Германия первой из воюющих держав применила химические боевые вещества. Когда стало известно об этом преступлении, выдающийся ученый Николай Дмитриевич Зелинский разработал специальный прибор, защищающий людей от боевых отравляющих веществ. Этот прибор — угольная противогазовая маска — спас жизни тысяч русских солдат.

Разработанное Зеленским устройство является прототипом современного противогаза. Главная часть противогаза — коробочка, заполненная угольным порошком. Попытаемся понять, на чем основано действие такого порошка и почему он может защитить от действия ядовитых газов.

Маленькие гиганты

Представьте себе, что в коробке противогаза вместо угольного порошка находится просто кусок угля той же массы. Что, если с таким противогазом попасть в зону газовой атаки? Защитит ли он от ядовитых газов? Оказывается, нет. Все дело именно в порошке.

Что же отличает порошок от сплошного куска угля?

В противогазе используется специально подготовленный уголь, который называют активированным. Такой уголь отличается от обычного тем, что имеет гораздо большую поверхность на единицу массы. Его частицы пронизаны порами и чем-то напоминают изъеденное червями дерево. Площадь поверхности активированного угля на единицу массы, называемая удельной поверхностью, оказывается в миллионы раз больше удельной поверхности сплошного куска. Один грамм активированного угля обладает поверхностью, превышающей 1000 м^2 . Вдумайтесь: маленький кусочек-лилипуп, специальным образом подготовленный и размолотый в порошок,

приобретает гигантскую поверхность! В таком порошке существенная часть молекул и атомов оказывается на поверхности. И этот факт определяет защитное действие противогаза: именно поверхностные атомы угля «задерживают» атомы ядовитых газов, очищая от них воздух, проходящий в дыхательную маску.

Почему атомы на поверхности могут поглощать ядовитый газ, а в объеме — нет? Чем жизнь атома на поверхности отличается от его жизни в объеме? Попробуем разобраться.

Почему атому неудобно на поверхности?

Хорошо известно, что кристалл имеет упорядоченную и симметричную решетку, в которой каждый атом занимает строго определенное место. Атомы кристалла взаимодействуют друг с другом, и у каждого атома в результате такого взаимодействия образуются устойчивые «связи» с его соседями. Число ближайших соседей у атома в данной кристаллической решетке называется координационным числом и является характеристикой кристалла. В каком бы месте внутри кристалла мы ни выбрали атом, у него всегда будет количество соседей, равное координационному числу. А если атом находится на поверхности?

Представим себе кристалл, находящийся в вакууме. У поверхностных атомов соседи есть не со всех сторон —

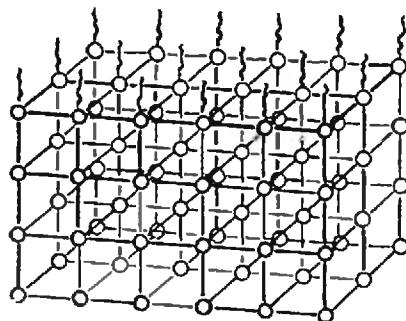


Рис. 1.

с одной стороны атомы вообще отсутствуют (рисунок 1). Иными словами, у атома на поверхности иное координационное число, чем у атома внутри кристалла. Например, у атома внутри кристалла с кубической решеткой (такой, как на рисунке 1) шесть соседей, а у атома на поверхности — лишь пять. Следовательно, часть возможных связей у поверхностного атома остается незадействованной, и энергия такого атома больше, чем атома, живущего внутри кристалла. Существование поверхности энергетически невыгодно, так как это увеличивает энергию кристалла в целом. Атомы поверхности стремятся уйти внутрь кристалла, окружить себя своими родными атомами, задействовать все возможные связи и тем самым уменьшить свою энергию. Однако любой реальный кристалл занимает ограниченную область пространства, поверхность существует, и кому-то надо на ней находиться. Причем атомы оказываются на поверхности не за какие-либо «провинности», а случайно. Как в известной песне: «Пусть кому-то повезет, а кому-то нет».

Таким образом, мы видим, что образование поверхности связано с определенными энергетическими затратами, и основной характеристикой поверхности является поверхностная энергия — энергия, необходимая для создания поверхности единичной площади.

Известно, что механические, электрические и другие свойства кристаллов могут зависеть от направления. Это явление называется анизотропией и является следствием упорядоченности структуры кристаллов. Поверхностная энергия — анизотропное свойство. Как видно из рисунка 2, создать поверхность можно многими способами. Например, расколов кристалл по плоскостям 1—1, 2—2 или 3—3, мы получим поверхности, весьма существенно различающиеся по структуре — количество атомов на единицу площади на поверхности 1—1 больше, чем на поверхности 2—2. Разное количество атомов — разная поверхностная энергия. Значения поверхностной энергии, приходящейся на единицу площади, для различных поверхностей одного и того же кристалла могут различаться очень сильно, на несколько десятков процентов.

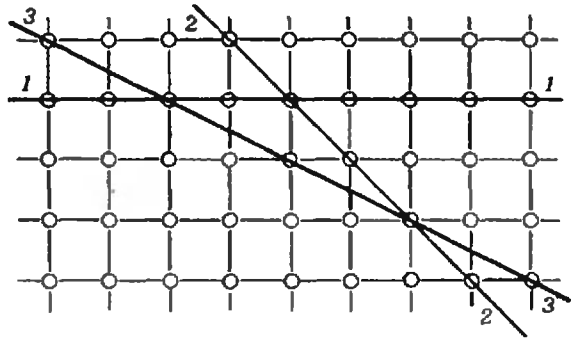


Рис. 2.

(В отличие от кристалла, для каждой жидкости существует свое значение удельной поверхностной энергии — поверхностное натяжение, — которое не зависит от направления. Это — одно из проявлений изотропности жидкостей.)

До сих пор мы говорили о кристалле в вакууме. Однако обычно вещества находятся в реальной среде, и взаимодействие с окружающей средой начинается именно с поверхности.

Адсорбция

Пример с противоголом, с которого мы начали разговор, служит наглядной иллюстрацией явления, называемого адсорбцией. Адсорбция (от латинских слов *ad* — «на» и *sorbeo* — «поглощать») — это поглощение вещества из газовой или жидкой среды поверхностным слоем твердого тела или жидкости. Именно на этом явлении основано защитное действие противогола.

Что же происходит на гигантской поверхности угольного порошка в коробочке противогола?

У атома на поверхности остаются свободные связи, которые он использует для взаимодействия с атомами и молекулами окружающей среды. Активированный уголь, помещенный в газовую атмосферу, является адсорбентом — на его поверхности располагаются (адсорбируются) частицы окружающей среды, и они оказываются связанными с поверхностью. Конечно, на угле адсорбируются кислород, азот и другие составные части воздуха. Поверхность угля насыщается этими газами еще в процессе приготовления — ведь уголь все время находится в соприкосновении с атмосферой, и молекулы составляющих воздух газов уже постарались занять все доступные для них места на поверх-

ности. Однако не все молекулы одинаково прочно на ней удерживаются. Одни связываются накрепко, другие при малейшем воздействии уже не могут удержаться и покидают свои места, уступая место более «привязчивым» молекулам. Когда через уголь проходит воздух, содержащий ядовитые газы, между молекулами начинается настоящая борьба за территорию. Каждый газ стремится занять место на поверхности и вытеснить с нее другие газы. Побеждает в этой борьбе тот, кого поверхность «любит» больше, кого она сильнее к себе притягивает.

Своих друзей поверхность выбирает очень осмотрительно. Заполнение свободной связи чужеродным атомом или молекулой уменьшает поверхностную энергию кристалла. Изменение энергии зависит от того, какой именно атом (или молекула) занял свободную связь. Чем больше уменьшается поверхностная энергия от присоединения данного атома, тем прочнее связывается этот атом с поверхностью. Если газы связываются поверхностью примерно одинаково, то они будут удерживаться на поверхности приблизительно в равных количествах. Если же один из них гораздо «привязчивей» остальных, то он займет практически всю поверхность, вытеснив с нее молекулы другого газа. К счастью, многие ядовитые газы так сильно связываются поверхностью угля, что роль воздуха даже не принимается в расчет — настолько малые его количества адсорбируются углем. Молекулы отравляющего вещества остаются на поверхности угля, а молекулы кислорода проходят, позволяя дышать.

Формула Ленгмюра и активированный уголь

Значительный прогресс в изучении адсорбции был достигнут благодаря работам американского физико-химика И. Ленгмюра (1881—1957). В 1932 году за свои работы по исследованию поверхностных явлений он был удостоен Нобелевской премии. Ленгмюр получил формулу, позволяющую рассчитывать количество адсорбирующегося вещества в зависимости от его давления в окружающей среде. Получить эту формулу совсем несложно.



Микрофотографии поверхности активированного угля.

При выводе формулы Ленгмюра мы будем считать, что все атомы поверхности одинаковые и каждый из них может адсорбировать строго определенное количество молекул (или атомов) окружающей среды и что между адсорбированными молекулами отсутствует взаимодействие, т. е. адсорбированная молекула не влияет на адсорбцию остальных. Для того чтобы молекула газа адсорбировалась на поверхности, должны произойти два независимых события: молекула газа должна попасть на поверхность адсорбента и в данном месте поверхности должна оказаться свободная связь. Вероятность w_1 первого события пропорциональна числу ударов молекул газа о поверхность адсорбента за единицу времени, а это число пропорционально давлению газа p ; так что $w_1 \sim p$. Вероятность w_2 второго события пропорциональна числу незанятых связей на поверхности адсорбента. Если в данный момент доля θ всех свободных связей занята адсорбированными молекулами, то $w_2 \sim (1 - \theta)$. Вероятность W сложного события — адсорбции — равна произведению вероятностей этих двух независимых событий, т. е. $W \sim p(1 - \theta)$. Если обозначить количество частиц, адсорбирующихся на поверхности за единицу времени, через N_1 , то

$$N_1 = \alpha p(1 - \theta),$$

где α — некоторая постоянная, зависящая от температуры.

Молекула улетаёт с поверхности, когда ее энергия окажется достаточной для того, чтобы оторваться. Вероятность такого простого события пропорциональна общему числу адсорбированных на поверхности молекул. Следовательно, число молекул, улетающих с поверхности в единицу времени, —

$$N_2 = \beta \theta,$$

где β — постоянная, также зависящая от температуры.

При равновесии количества молекул, приходящих на поверхность и уходящих с нее в единицу времени, должны быть равны ($N_1 = N_2$):

$$\alpha p(1 - \theta) = \beta \theta.$$

Отсюда находим долю связей на поверхности, занятых адсорбированными молекулами:

$$\theta = \frac{bp}{1 + bp},$$

где коэффициент $b = \alpha/\beta$ зависит от температуры (поскольку α и β зависят от T). Если число свободных мест на поверхности адсорбента z (обычно берется число свободных связей на единицу массы адсорбента), то число адсорбированных молекул

$$\Gamma = z \frac{bp}{1 + bp}.$$

Это и есть формула Ленгмюра.

Постоянная z является величиной, характеризующей поверхность. Именно в z заключена высокая адсорбирующая способность активированного угля — ведь чем больше удельная поверхность, тем больше z . Для адсорбента с удельной поверхностью $1000 \text{ м}^2/\text{г}$ значение z равно примерно 10^{22} г^{-1} .

На рисунке 3 приведены графики зависимости Γ от p для двух различных адсорбентов. Это — так называемые изотермы адсорбции Ленгмюра (изотермы — потому что процесс адсорбции предполагается идущим при постоянной температуре). При относительно малых давлениях ($bp \ll 1$) Γ прямо пропорционально p ; при больших давлениях ($bp \gg 1$) наступает насыщение — все связи на поверхности, которые были свободными, заняты, и для новых атомов и молекул окружающей среды уже не остается места — ведь поверхность не бесконечна. Очевидно, что вещество 1 является лучшим адсорбентом, чем вещество 2.

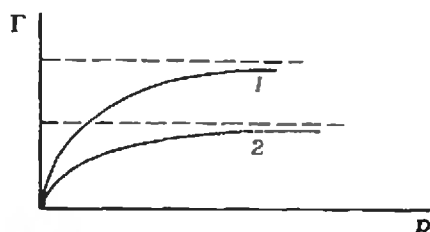


Рис. 3.

Из формулы Ленгмюра видно, что количество адсорбирующегося вещества Γ зависит от температуры — ведь от температуры зависит величина b . Не вдаваясь в подробности, скажем лишь, что при нагревании количество адсорбированного на поверхности вещества уменьшается. Это вполне естественно: с повышением температуры молекулы начинают двигаться быстрее, и хотя адсорбированные молекулы удерживаются поверхностью довольно сильно, при нагревании увеличивается число молекул с энергией, достаточной для отрыва от поверхности.

Зависимость адсорбции от температуры широко используется в промышленности. При низких температурах поверхность угольного порошка может адсорбировать большое количество вещества, равное уровню насыщения при этой температуре. Если потом нагреть уголь, то многие адсорбированные молекулы уйдут с поверхности (понижится уровень насыщения). Таким путем на заводах из отходящих газов собирают ценные органические вещества: бензин, эфир, ацетон и другие.

Теперь ясен принцип работы противогоза. Воздух, отравленный ядовитыми газами, проходит через коробочку противогоза с активированным углем. Ядовитые газы из воздуха адсорбируются на поверхности угольных частиц, концентрация этих газов в воздухе уменьшается в миллионы раз. Человек вдыхает уже относительно чистый воздух. Конечно, адсорбция происходит и на сплошном куске угля, но так как площадь его поверхности в миллионы раз меньше площади поверхности активированного угля той же массы, то и в миллионы раз меньше будет количество адсорбированных ядовитых газов.

Существует множество способов получения большой удельной поверхности. Это можно сделать, например, путем прокаливания. При этом сжигается часть самого угля, благодаря чему его поверхность разрыхляется, увеличивается число пор и их размеры. Другим примером может служить производство извести: при прокаливании мела или известняка летучие компоненты удаляются, и образуется множество пор с большой поверхностью.

Вездесущая поверхность

Во многих процессах поверхность играет решающую роль. Один из самых ярких примеров этого — процессы катализа (от греческого *κατάλυσις* — «разрушение»).

Катализаторы — вещества, которые могут влиять на скорость химической реакции, не участвуя в ней сами. Активность твердых катализаторов в первую очередь определяется свойствами их поверхности. В связи с этим хотелось бы упомянуть об одном интересном явлении.

Атомы, понижающие поверхностную энергию, могут приходить на поверхность не только из окружающей среды, но и из внутренней области кристалла. Представим себе кристалл, состоящий из атомов двух сортов (из двух компонентов). Условия существования атомов на поверхности и в объеме, как мы уже знаем, различны. Поэтому вполне возможно, что относительные концентрации атомов на поверхности и в объеме также различны. Атомы, уменьшающие поверхностную энергию, стремятся выйти на поверхность, и их относительное количество на поверхности увеличивается. Этот процесс называется сегрегацией (от английского *segregation* — «отделение»). Концентрация атомов одного из компонентов на поверхности может в тысячи раз превышать его концентрацию в объеме. Например, в сплаве, состоящем из атомов Fe и V, концентрация V на поверхности составляет десятки процентов при его концентрации в объеме всего 0,1 %. Сегрегацию необходимо учитывать в процессах катализа, так как скорость химической реакции на поверхности твердого катализатора очень сильно зависит от поверхностных концентраций веществ.

Поверхность является полномочным представителем и защитником материала при его взаимодействии с окружающей средой. Ведь воздействию окружающей среды в первую очередь подвергается поверхность. Злейший враг поверхности металла — коррозия. Первейшая задача поверхности — устоять перед натиском этого врага. Ничтожные количества примесей, в сотни раз меньшие, чем это необходимо для покрытия поверхности мономолекулярным слоем, могут значительно повысить коррозионную стойкость поверхности металла.

«Поверхность придумал дьявол», — сказал как-то выдающийся физик, один из создателей квантовой механики, В. Паули (1900—1958). Эти слова связаны, по-видимому, с огромными трудностями исследования поверхности.

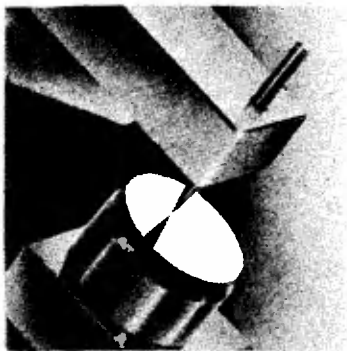
Методы, позволяющие получить информацию о поверхности — ее структуре, химическом составе и т. п., очень сложны, и основные успехи в этой области были сделаны лишь в последнее десятилетие. Приведем простой пример: необходимо определить концентрацию какого-либо вещества в кристалле. Для проведения такого измерения традиционными химическими методами необходимо минимум 0,001 г вещества. Если площадь поверхности анализируемого образца 1 см² (большую площадь получить, не разрушив образец, практически невозможно), то удается определить среднюю концентрацию вещества в слое толщиной около 1000 межатомных расстояний.

Современные методы позволяют исследовать слой вблизи поверхности толщиной всего в одно межатомное расстояние! Они дают возможность видеть атомы, изучать их взаимное расположение, взаимодействие друг с другом. С помощью этих методов удалось установить, что при сегрегации все отличие поверхностной концентрации от объемной сосредоточено в очень тонком слое вблизи поверхности — толщиной всего в несколько межатомных расстояний.

Прогресс в исследовании поверхности за последнее десятилетие связан в первую очередь с успехами микроэлектроники и созданием новых приборов. Ответ на самый важный вопрос — из каких элементов состоит поверхность? — нельзя было получить еще буквально несколько лет назад, а сегодня с помощью туннельного микроскопа можно различить на поверхности отдельные атомы, находящиеся друг от друга на расстоянии всего в несколько ангстрем.

«Поверхности очень интересны, но ведь их так мало», — говорил великий итальянский физик Энрико Ферми (1901—1954). Действительно, поверхность принадлежит лишь очень малая часть вещества. Но значение ее в жизни вещества огромно.

Новости науки



Туннельный микроскоп

В 1986 году Нобелевской премии по физике были удостоены швейцарские физики Г. Бинниг и Г. Рорер, изобретатели сканирующего туннельного микроскопа — прибора, о котором пойдет речь в этой заметке.

Один из самых «продуктивных» эффектов квантовой механики — туннельный эффект. В частности, он состоит в том, что электроны оказываются способными «просачиваться» из одного проводника в другой, отделенный от первого тонкой диэлектрической или вакуумной прослойкой.*¹ Явление обязано своим происхождением волновым свойствам электронов,



Фотография вольфрамового острия, используемого в туннельном микроскопе. Снимок сделан с экрана электронного микроскопа; масштаб левой части изображения 400 нм, правой — 40 мкм.

* В общем случае туннельный эффект заключается в преодолении частицей потенциального барьера, когда ее энергия меньше высоты барьера. Это явление существенно квантовой природы, невозможное в классической механике.

благодаря которым электрон с некоторой вероятностью можно обнаружить вне проводника.

Известный уже более полувека туннельный эффект дал жизнь многим полезным приборам и устройствам. Один из них — туннельный диод — стал привычным радиотехническим элементом. А теперь туннельный эффект лег в основу микроскопа нового типа, швыгнувшего в мир размеров, составляющих доли поперечника атома. (Напомним, что диаметр атома — порядка одного ангстрема: $1 \text{ \AA} = 10^{-10} \text{ м}$.) Туннельный микроскоп имеет беспрецедентное увеличение, превосходящее 100 миллионов, и позволяет изучать детали атомной структуры поверхностей твердых тел.

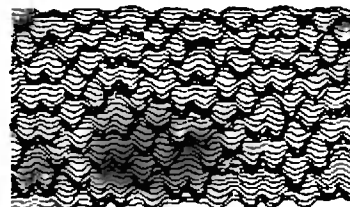
До недавнего времени рекордсменом был электронный микроскоп с увеличением до 1 миллиона. В нем, в отличие от обычного оптического микроскопа, роль светового луча играет поток электронов, управляемый электронной оптикой — аналогом системы оптических линз. В туннельном микроскопе вы не найдете традиционных для микроскопа элементов. В нем нет устройств, подобных по назначению линзам, и работает он не по принципу «видения», а по принципу «осознания».

Чувствительным элементом, буквально «ощущающим» поверхность, служит тончайшее вольфрамовое острие, столь тонкое, что на конце его умещается всего лишь несколько атомов. Острие с помощью высокоточных механизмов подводится перпендикулярно к исследуемой поверхности до появления заметного (10^{-9} А) тока туннелирующих электронов через зазор «острие — поверхность». Затем начинают свою работу так называемые пьезоэлементы — пластины из специальной керамики, меняющие свою длину при приложении электрического поля.*¹

* Действие такого пьезоэлемента основано на обратном пьезоэлектрическом эффекте — возникновении в некоторых кристаллах механических деформаций под действием электрического поля.

Электромеханическая система из пьезоэлементов автоматически поддерживает расстояние от острия до поверхности постоянным и равным 10 \AA . Изменение расстояния на небольшую величину вызывает отклонение туннельного тока от заданного значения, и электронная схема обратной связи подает электрический сигнал на пьезоэлемент, приближающий или удаляющий острие относительно поверхности таким образом, чтобы туннельный ток, а значит, и расстояние острие — поверхность оставались неизменными. Эффективная работа системы автоматики обеспечивается чрезвычайно резкой зависимостью туннельного тока от величины зазора. Так, изменение зазора «острие — поверхность» на 2 \AA увеличивает туннельный ток в 1000 раз.

Подачей электрических сигналов на другие пьезоэлементы системы острие перемещается по двум координатам в плоскости поверхности. Таким образом поверхность последовательно «просматривается», или, как



Изображение атомного рельефа участка поверхности кремния. Выпуклости высотой $1,3 \text{ \AA}$ соответствуют «поверхностям» отдельных атомов.

говорят, сканируется (от английского scan — поле зрения). Поэтому туннельный микроскоп называется еще сканирующим.

В результате действия всей системы острие будет своим осевым перемещением отслеживать с высокой точностью в $0,01 \text{ \AA}$ рельеф изучаемой поверхности. Информация о рельефе поверхности в различных ее точках записывается в память ЭВМ и после обработки, состоящей в фильтрации, т. е. устранении шумовых и паразитных сигналов, выводится на дисплей ЭВМ в виде «топографической карты» поверхности.

(Окончание см. на с. 52)

ЕДИНИЦЫ: ОТ СИСТЕМЫ К СИСТЕМЕ

С. И. ВАЛЯНСКИЙ

15 декабря 1832 года Геттингенскому научному обществу была представлена для обсуждения работа всемирно известного математика Карла Фридриха Гаусса. Она называлась «Напряжение земной магнитной силы, приведенной к абсолютной мере» и была небольшой, всего 37 страниц. Однако этот скромный труд сыграл огромную роль в развитии естествознания. Чтобы почувствовать эту роль, нам придется обратиться к истории, вспомнить некоторые моменты «биографии» магнита.

стрелка устанавливается не горизонтально, и угол, который она составляет с вертикалью, тоже зависит от места наблюдения.

Чем объясняется ориентация магнитных стрелок? Что такое магнитные силы? Первым попытался ответить на эти вопросы английский физик Уильям Гильберт (1544—1603). Будучи тонким экспериментатором, Гильберт заложил основы науки о магнетизме и, в частности, о земном магнетизме. Он высказал предположение, что Земля — это большой



О существовании «камня», притягивающего железо, узнали еще древние, и попытки объяснить притягательную силу этого камня предпринимались еще более 2000 лет назад. Первым же практическим применением магнита стал компас. По поводу места и времени изобретения компаса однозначного мнения нет. Но по крайней мере с XIII века компас известен в Европе. С его появлением начались открытия, связанные с природой земного магнетизма. Сразу же было обнаружено, что магнитная стрелка указывает отнюдь не строго направление на север; что отклонение стрелки от этого направления (магнитное склонение) изменяется в зависимости от места наблюдения; что

магнит, и в этом смысле она подобна шару из магнитного материала. В подтверждение этой гипотезы ученый изготовил маленькую модель Земли — железный шар — и показал, что при движении по поверхности такого шара магнитная стрелка ориентируется как раз так, как это имеет место в реальности.

Проблема навигации поставила перед естествоиспытателями новую задачу: стало понятно, что для успешного пользования компасом (компас был одним из основных навигационных инструментов) необходимо иметь карту магнитных склонений. Для составления такой карты Лондонское Королевское общество (Академия наук Англии) в 1698 году снарядило

специальную морскую экспедицию под руководством астронома и геофизика Эдмунда Галлея (того самого Галлея (1656—1742), чьим именем названа знаменитая комета). Три года кропотливой работы — и вот результат: Галлеем издана «магнитная» карта Атлантического и Тихого океанов. (На ней исследователь впервые соединил точки с одинаковыми значениями склонения одной линией. Теперь этот способ широко используется для наглядного представления различных характеристик земной поверхности, особенно в метеорологии.)

Как развивались события дальше? Понимая важность магнитных измерений для развития наук, путешествий, военного дела, сразу три Академии наук — Петербургская, Парижская и Берлинская — объявляют конкурс на лучшую работу, объясняющую явление земного магнетиз-

щества Кулон использовал понятие магнитных зарядов и показал, что сила взаимодействия между намагниченными телами зависит от расстояния между ними и от величин их магнитных зарядов так же, как сила электростатического взаимодействия в случае электрически заряженных тел.*) Таким образом, благодаря экспериментам Кулона появилась возможность измерять абсолютное значение магнитной силы.

С открытием законов Кулона начался новый этап в изучении земного магнетизма. По почину знаменитого немецкого ученого — геолога, географа, путешественника — Александра Гумбольдта с 1800 года почти все экспедиции одним из пунктов программы имели измерение магнитного поля в различных точках Земли. Такими измерениями, кстати, занимались и знаменитые русские море-



ма. Это было в середине XVIII века. Многие видные ученые откликнулись на призыв Академий. Ряд фундаментальных работ по изучению земного магнетизма был выполнен именно в это время. И среди них — работы французского физика и инженера Шарля Огюста Кулона по точному измерению электрических и магнитных сил.

Проведя серию удивительно точных для того времени экспериментов, Кулон доказал, что сила взаимодействия между заряженными телами обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними и прямо пропорциональна их зарядам. По аналогии с электрическими зарядами, для характеристики магнитных свойств ве-

плаватели — Иван Федорович Крузенштерн, Юрий Федорович Лисянский, Федор Петрович Литке.

Все эти измерения имели большое значение для физики. Их результаты должны были быть достоверными. Вот какое значение придавал им, например, известный французский ученый Жан Батист Био. В своих лекциях по физике в Парижской политехнической школе в 1816 году он говорил так: «Для будущих успехов физики было бы важно определять с точностью теперешнее напряжение земного магнетизма... Повторив те же

* Сегодня мы знаем, что магнитных зарядов в природе не существует. Но в свое время введение этого понятия оказалось очень плодотворным для развития представлений о магнетизме.

наблюдения через несколько столетий, можно было бы узнать, изменяют ли магнитные силы свою величину, подобно тому, как установлено, что изменяется их направление. Для повышения надежности измерений Био предлагал иметь несколько стрелок и проводить независимые измерения, всякий раз намагничивая стрелки заново, до насыщения. Но даже в его время понимали, что это не выход из положения. Вопрос о достоверности результатов измерений оставался открытым. Хотелось бы найти способ, не зависящий от «капризов» стрелок, от их намагниченности.

В 1828 году произошла встреча Гаусса с А. Гумбольдтом. Длительная беседа двух величайших ученых своего времени закончилась тем, что Гаусс заинтересовался явлениями земного магнетизма и решил попытаться

того, как «король математиков» занялся этой проблемой.

Что же такое измерение? Это последовательность операций, осуществляемых для нахождения значения физической величины, характеризующей некоторый объект или явление. Например, мы можем произвести измерение, сравнив интересующую нас физическую величину с некоторой однородной с ней, принятой за эталон. Хорошо, если такая эталонная величина у нас есть. Однако очень часто для того, чтобы определить значение физической величины, приходится произвести измерение нескольких других величин, связанных с искомой некоторым соотношением. Например, для измерения скорости тела нам надо измерить пройденный им путь и время, за которое этот путь пройден. Если некоторая величина измеряется путем сравнения



создать теорию этого явления. Но прежде, чем приступить к решению задачи, нужно было разработать точные научные определения характеристик земного магнетизма — склонения, наклонения и напряженности. А для этого необходимо разработать основания магнитных измерений. Приступить же к намеченной работе Гаусс смог лишь осенью 1831 года, когда в Геттингенский университет был приглашен 27-летний физик из Галле Вильгельм Вебер. Гаусс познакомился с ним в доме Гумбольдта еще в 1828 году, и с приходом молодого ученого в университет у него появился единомышленник и талантливый помощник.

Вот какие события произошли до

с однородным ей эталоном, это называют прямым измерением, в противном случае — измерения косвенные. Используя разные зависимости между физическими величинами, мы можем некоторые величины принять за основные, а остальные — производные — получать комбинацией выбранных основных величин. Поэтому, прежде чем приступить к косвенному измерению магнитных величин через измерение сил и движений взаимодействующих намагниченных тел, Гауссу предстояло разобраться, какие величины в механике можно выбрать в качестве основных, а какие будут производными.

Исходя из законов и определений механики, Гаусс показал, что в этом

разделе физики достаточно ввести всего три основных величины, а все остальные механические величины могут быть измерены с их помощью (т. е. выражены через основную тройку). Перебирая различные тройки величин, которые могли бы претендовать на роль основных, он установил, что в механике наиболее удобно в качестве основных величин выбрать длину, массу и время. Кроме того, для этих величин существовали эталоны и простые методы измерений.

Далее необходимо было сконструировать прибор, измеряя механические параметры которого можно было бы определить магнитные характеристики намагниченных объектов. Для этого Гаусс воспользовался следующим обстоятельством. Период колебаний намагниченной стрелки в магнитном поле Земли зависит от силы земного магнетизма, а также от магнитных

целью которой было создание единой системы мер. (В комиссии работали такие ученые, как Лаплас, Лагранж, Монж, Лавуазье). Комиссия предложила использовать в качестве эталонов природные объекты и явления. В качестве единицы длины была выбрана одна десятиллионная доля четверти парижского географического меридиана — «метр подлинный и окончательный» (поэтому предложенная комиссией система мер и называется метрической). Единицей массы назначили килограмм — массу кубического дециметра дистиллированной воды при 4°C . В качестве единицы времени была узаконена секунда, равная $1/86400$ среднесолнечных суток. Эти эталоны можно было воспроизвести в любом месте Земли и с их помощью — проградуйровать измерительные инструменты.

Гаусс оценил рациональность мет-

и механических свойств стрелки. Поэтому, измеряя и сравнивая периоды колебаний разных стрелок с известными механическими свойствами, можно, зная закон взаимодействия магнитных зарядов, определить силу земного магнетизма. Итак, процесс измерений магнитных величин сводился к измерению механических величин, которые, в свою очередь, можно выразить через основные — длину, массу и время.

В качестве основных единиц измерения Гаусс предлагал использовать миллиграмм, миллиметр и секунду среднесолнечных суток. Эти единицы он выбрал не случайно. Во времена Великой Французской революции была образована специальная комиссия,

Однако при магнитных измерениях ему было удобно пользоваться миллиграммами и миллиметрами — дольными единицами метрической системы. Поэтому он предложил в качестве основных единиц измерений миллиграмм, миллиметр и секунду. Предложенную Гауссом систему стали называть «абсолютной» *).

* С этим названием связано недоразумение. Заглавие работы Гаусса — «Напряжение земной магнитной силы, приведенное к абсолютной мере». Но «абсолютное» относится не к трем основным единицам, через которые Гаусс выразил магнитные величины, а означает лишь, что магнитная величина измерена абсолютно, с использованием лишь трех основных эталонов механических величин, а не относительно некоторой магнитной силы, взятой за эталон. Заметим, что уже в этой работе Гаусс предложил свести и электрические единицы к механическим. Практически эту задачу выполнил В. Вебер.

В 1862 году «Британская ассоциация для продвижения наук», членами которой были такие ученые, как лорд Кельвин, Дж. Клерк Максвелл, поставила задачу: выработать для различных областей физики основные и производные единицы измерения. Но... она не нашла ничего лучшего, чем идея Гаусса о выборе в качестве основных величин длины, массы и времени. Вот только единицы их измерений предлагалось несколько изменить, «назначив» основными сантиметр, грамм и секунду. И еще: именно этой авторитетной Комиссией были предложены единица силы — дина и единица энергии — эрг. По сути дела, была разработана известная система единиц СГС. Для электрических и магнитных единиц была использована идея Гаусса о связи механических и электромагнитных еди-

Ведь электрические и магнитные явления стали находить все большее и большее применение в технике и в быту, значит, надо было иметь удобные способы сравнения различных результатов, получаемых разными исследователями, чтобы потом их точно воспроизводить. Вот почему решение Британской комиссии было в центре обсуждения I Конгресса электриков в Париже в 1881 году. Так как Конгресс был международным, то и принятые им решения имели международное значение. А в основу этих решений были положены предложения Британской ассоциации по развитию наук, т. е. идеи Гаусса.

Сейчас мы пользуемся так называемой системой СИ. В отличие от существовавших ранее систем, количество основных величин в ней увеличено. Дело в том, что прежние системы

ниц через процедуру измерения (системы СГСЭ и СГСМ).

Комиссия впервые внесла некоторую ясность в систему электрических и магнитных единиц, но, к сожалению, на практике пользоваться такой системой было очень неудобно, потому что одни величины получались слишком большими, а другие слишком маленькими. Поэтому наряду с абсолютной системой было решено ввести так называемую практическую систему единиц. Здесь уже можно было в качестве основных использовать единицы, кратные 10^n основным единицам абсолютной системы, где n могло быть целым положительным или отрицательным числом. Это было большим шагом вперед.

единиц были удобны для измерений в тех конкретных областях физики, для которых они, собственно, и создавались. А система СИ призвана быть универсальной, единой для всех разделов физики. Поэтому, чтобы избежать совпадения размерностей у различных физических величин, пришлось увеличить число основных. Таким образом, в системе СИ появилось уже 6 основных единиц — три механических, одна электромагнитная, одна термодинамическая и одна оптическая. В октябре 1971 года к ним была добавлена еще одна — единица количества вещества — моль.

Следует отметить, что законы физики не зависят от того, в какой системе мы производили измерения, но выбор

удобной системы единиц существенно упрощает различные расчеты. Здесь можно провести аналогию с различными системами счисления. Так, в вычислительной технике до недавнего времени наиболее удобной системой счисления была двоичная, так как один из основных элементов ЭВМ — триггер — имеет два устойчивых состояния: нет напряжения на выходе — 0, есть напряжение — 1. Где-то может быть удобным счисление по основанию 3, 4, 5, и т. д. Но есть система, которая понятна всем, — десятичная. И если результат предназначен для большого числа различных специалистов, то его надо переводить в десятичную систему, хотя в рамках отдельной специальности может быть предпочтительной своя система. Так и с системами единиц измерения. Например, в США ряд специалистов,

стей точных наук и техники, а может быть, и более широкий круг людей (ведь с измерением температуры, например, с сообщениями об атмосферном давлении и т. п. имеют дело практически все) могли легко разобраться, а не размышляли о том, в какой системе измерялась данная величина и как это будет выглядеть в привычной им системе. Вместе с тем, наверное, не следует требовать, чтобы во внутренних расчетах и измерениях, а также в сообщениях о проделанной работе, предназначенных для узкого круга специалистов данной области, делались пересчеты в систему СИ. Если же результаты предназначены для широкого круга, то такой пересчет необходим. Здесь опять можно провести некоторую аналогию. В свое время для научных работ существо-



работающих над проектированием различных газопроводов, водопроводов и т. п., в качестве единицы площади используют не площадь единичного квадрата, а площадь единичного круга. В астрономии иногда в уравнении Ньютона для гравитационного взаимодействия двух масс $F = Gm_1m_2/r^2$ полагают гравитационную постоянную G равной 1. Это приводит к изменению системы единиц. В частности, к уменьшению числа основных единиц.

И все-таки наиболее общепринятой на сегодняшний день является Интернациональная Система — СИ. В чем ее преимущества?

Система СИ необходима для того, чтобы специалисты из разных обла-

вал интернациональный язык — латынь. Работы, предназначавшиеся для внутреннего пользования, можно было писать и на родном языке, но то, что предназначалось для всего научного сообщества, следовало писать на латыни, тогда работы становились удобными для всеобщего ознакомления. (Кстати, работа Гаусса также написана на латыни.) Система СИ — это своеобразная «латынь», доступная всем, но никто не обязан говорить на этом языке в своем доме.

Вот так завершилась история 37 страниц, написанных более 150 лет назад.

КАК ПОСТРОИТЬ ТРАЕКТОРИЮ?

С. С. ХИЛЬКЕВИЧ, О. А. ЗАЙЦЕВА

С необходимостью рассчитать траекторию того или иного движения человек сталкивается очень часто. Такая задача возникает и перед австралийским аборигеном, подкрадывающимся с бумерангом к стае птиц, и перед математиком, вычисляющим место приземления космического корабля.

В этой статье мы хотим рассказать об одном методе приближенного построения траекторий сложных движений, проиллюстрировать его на конкретных примерах и предложить вниманию читателей несколько игр, в основе которых лежит этот метод.

Начнем с начала

Не бойся начала, а жди конца.

Не бочитай сказки, не кидай указки.

В. Даль. Пословицы русского народа

Основная идея метода очень проста и основана на известном соотношении, связывающем вектор перемещения материальной точки с вектором ее средней скорости. Напомним, что средней скоростью $\vec{v}_{\text{ср}}$ неравномерного движения называется физическая величина, равная отношению перемещения \vec{s} тела за некоторый промежуток времени Δt к длительности этого промежутка:

$$\vec{v}_{\text{ср}} = \frac{\vec{s}}{\Delta t}.$$

Отсюда

$$\vec{s} = \vec{v}_{\text{ср}} \Delta t.$$

И средняя скорость, и перемещение — величины векторные, поэтому на рисунках они изображаются направленными отрезками. При этом направления обоих векторов одинаковые, а длины отличаются в Δt раз. Очевидно, что соответствующим выбором масштаба можно сделать так, чтобы направленные отрезки, изображающие среднюю скорость и перемещения, совпадали

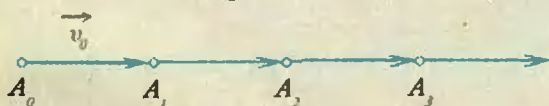


Рис. 1.

полностью — и по направлению, и по длине. Именно это обстоятельство и дает возможность быстро и несложно строить, разумеется приближенно, различные траектории.

Рассмотрим сначала простейший случай — равномерное прямолинейное движение. Пусть в начальный момент времени тело находится в точке A_0 и имеет скорость v_0 (рис. 1). Поскольку (как мы договорились) вектор перемещения за промежуток времени Δt совпадает с вектором скорости, то по истечении этого интервала тело окажется в точке A_1 , в которой оканчивается отложенный из A_0 вектор начальной скорости v_0 . Отложив из точки A_1 еще один вектор v_0 , получим точку A_2 , в которой тело окажется по истечении двух интервалов времени Δt . Продолжая эту процедуру, мы получим последовательность точек A_n , в которых тело будет находиться по истечении n выбранных промежутков времени от начала движения. Прямая, проходящая через эти точки, и есть траектория равномерного прямолинейного движения.

Идея обобщения метода

Они впервые рассмотрели обобщение игры на случай «многорукого игрока», т. е. игрока, имеющего более двух рук.

Из сборника «Математический цветник»

Рассмотренный выше случай равномерного прямолинейного движения является простейшим, однако основная идея метода остается неизменной и в более сложных ситуациях.

Идея метода в следующем.

Для приближенного построения траектории все время движения тела разобьем на малые промежутки*),

*) В зависимости от условий движения длительность «малого» промежутка может измеряться как долями микросекунды, так и миллиардами лет. Важно только, чтобы она была намного меньше времени протекания рассматриваемого процесса.

такие, что на каждом из них движение можно считать равномерным, и определим, где будет находиться тело в моменты времени, кратные выбранному промежутку. При этом предполагается, что в течение каждого такого промежутка скорость тела остается постоянной и изменяется только при переходе от одного промежутка к другому.

Перейдем теперь к построению траекторий ускоренных движений.

Как вы знаете, средним ускорением $\bar{a}_{\text{ср}}$ называется физическая величина, равная отношению изменения скорости $\Delta \vec{v}$ к промежутку времени Δt , в течение которого это изменение произошло:

$$\bar{a}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}.$$

Подобно скорости и перемещению, ускорение тоже является векторной величиной и на рисунках изображается направленным отрезком. При этом вектор ускорения по направлению совпадает с вектором изменения скорости, а по модулю отличается от него в Δt раз.

Если, например, время движения из точки A в точку B (рис. 2) равно Δt , то среднее ускорение тела на участке AB

$$\bar{a}_{\text{ср}} = \frac{\vec{v}_B - \vec{v}_A}{\Delta t},$$

или

$$\vec{v}_B = \vec{v}_A + \bar{a}_{\text{ср}} \Delta t.$$

Следовательно, зная начальную скорость и ускорение тела, можно найти скорость в конце движения. Обратите внимание на то, что на рисунке 2 масштаб опять выбран так, чтобы длины векторов ускорения и изменения скорости были одинаковы.

Таким образом, зная положение и скорость тела в начальный момент времени, мы можем по известному

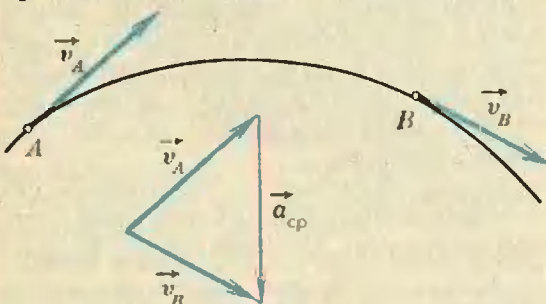


Рис. 2.

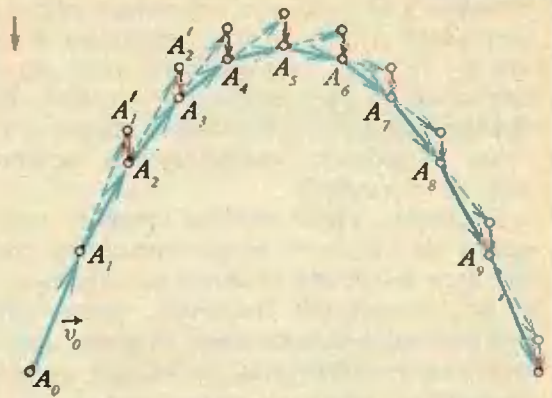


Рис. 3.

ускорению определить скорости и положения тела в моменты времени, кратные выбранному интервалу. А зная положения тела в некоторые моменты времени, мы можем приближенно построить и траекторию его движения.

Для того чтобы идея метода стала более понятной, проиллюстрируем ее на нескольких примерах.

Полет тел в поле сил тяжести

И мы тронулись в путь, провожаемые криками «ура» и ликованием толпы, а также морковкой, которую мальчик от Биггса запустил в нас «на счастье».

Джером К. Джером.
Трое в одной лодке...

В качестве первого примера построим траекторию, по которой будет двигаться тело, брошенное под углом к горизонту, при отсутствии сопротивления воздуха. Пусть в начальный момент времени тело находится в точке A_0 и имеет скорость \vec{v}_0 (рис. 3). Спустя малый интервал времени Δt оно окажется в точке A_1 . Если бы ускорение тела было равно нулю, то еще через один интервал времени тело оказалось бы в точке A'_1 , которую можно построить, отложив вектор \vec{v}_0 из точки A_1 . В действительности же движение тела является ускоренным — вектор ускорения \vec{g} направлен вертикально вниз. Отложим вектор \vec{g} из точки A'_1 и получим точку A_2 — в нее и будет направлен новый вектор скорости тела. Очевидно, что спустя еще один интервал времени Δt после того, как тело побывало в точке A_1 , оно окажется в точке A_2 . Затем процедура повторяется: из точки A_2 откладываем такой же вектор скорости, как из точки A_1 , прибавляем к нему вектор \vec{g} и получаем

точку A_1 . В ней тело окажется спустя интервал Δt после прохождения точки A_2 и т. д. Построение дает приближенную траекторию — ломаную, которая похожа на хорошо известную всем параболу, являющуюся истинной траекторией.

Решение этой задачи особой ценности не представляет, поскольку ответ был известен заранее из школьного курса физики. Впрочем, сравнение полученного результата с известным позволяет проверить метод, а такая проверка всегда полезна.

Теперь мы готовы к рассмотрению более сложной и не изучаемой в школе задачи о движении тела в поле тяжести при наличии сопротивления воздуха. Пусть в начальный момент времени тело находится в точке A_0 и имеет скорость v_0 (рис. 4), а сила сопротивления воздуха \vec{F}_c связана с вектором скорости тела \vec{v} соотношением $\vec{F}_c = -\alpha v$ (α — постоянный коэффициент). Требуется установить, какой будет траектория тела в этом случае.

Ускорение \vec{a} , вызываемое двумя силами — тяжести и сопротивления, можно определить из второго закона Ньютона. Однако для построения удобнее ускорение \vec{a} представить как сумму двух составляющих: ускорения $a_\tau = g$, сообщаемого силой тяжести, и ускорения $\vec{a}_c = \vec{F}_c/m = -(\alpha/m)v$. Если изобразить зависимость a_c от v в виде графика, то по нему легко определить величину ускорения \vec{a}_c для любого значения скорости тела. Направление же этого ускорения всегда противоположно направлению вектора скорости v .

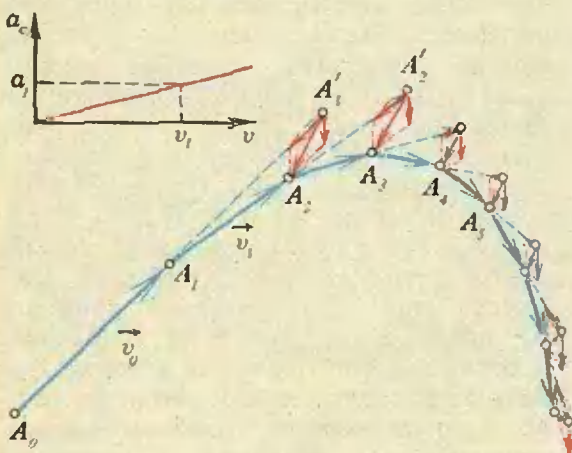


Рис. 4.

Приступим к построению траектории. Спустя малый промежуток времени Δt после того, как тело начало движение из точки A_0 (см. рис. 4), оно окажется в точке A_1 . Для построения вектора скорости на следующем шаге нужно из точки A_1 отложить вектор начальной скорости v_0 и прибавить к нему вектор ускорения $\vec{a} = \vec{g} + \vec{a}_c$ (как построить векторы \vec{g} и \vec{a}_c по отдельности, мы уже знаем). В результате построения получим точку A_2 — в нее и будет направлен новый вектор скорости. Таким образом, спустя два промежутка времени после начала движения тело окажется в точке A_2 . Повторяя эту процедуру, мы получим точку A_3 , в которой тело окажется еще через один промежуток, затем точки A_4 , A_5 и т. д. Заметим, что ускорение $\vec{a} = \vec{g} + \vec{a}_c$ по истечении каждого промежутка времени необходимо определять заново, поскольку составляющая \vec{a}_c зависит от скорости и поэтому в процессе движения не остается постоянной.

Ломаная, проходящая через точки A_0, A_1, A_2, \dots , представляет собой приближенную траекторию полета тела при наличии сопротивления воздуха. Особенность этой кривой состоит в том, что, в отличие от параболы (см. рис. 3), она не симметрична относительно вертикали, проходящей через наивысшую точку полета: нисходящая ветвь траектории круче восходящей. Посмотрите теперь на заимствованный нами из учебника по бадминтону*) рисунок 5, на котором изображены траектории полета волана при различных подачах. Видите? Почти все траектории обладают отчетливой особенностью — они явно несимметричны. В спортивном бадминтоне этим пользуются очень широко. Высокую подачу, например, подают обычно настолько высоко, насколько позволяют высота потолка и силы игрока, — при этом на задней линии поля противника волан падает почти вертикально, а по отвесно падающему волану нельзя нанести ответного сильного удара, так как мешает оперение.

Теперь естественно усложнить ситуацию, добавив, например, еще одну действующую на тело силу. Оказы-

*) Рыбаков Д. Н., Штильман М. И. Основы спортивного бадминтона. (М., Физкультура и спорт, 1978.)

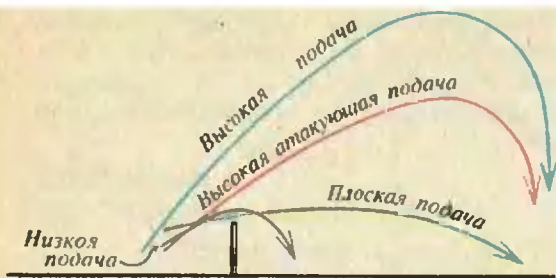


Рис. 5.

вается, что это позволит нам рассмотреть очень красивую задачу о...

Здесь мы советуем читателю на несколько минут прервать чтение, сложить из листка бумаги «самолетик» и понаблюдать за теми выкрутасами, которые он вытворяет в воздухе, когда его запускают с различными скоростями и под разными углами к горизонту. Во-первых, это даст возможность немного отдохнуть, а во-вторых, после таких экспериментов вам будет намного интереснее читать то, что написано дальше.

Как летает бумажный самолетик?

Заранее тут ничего сказать нельзя. И это, конечно, самое интересное!

А. А. Милн. Винни-Пух и все-все-все

Проведенные эксперименты, вероятно, убедили вас в том, что бумажный самолетик ведет себя в полете гораздо сложнее и интереснее, чем брошенный камень или волан для бадминтона. Даже если бросать его все время строго горизонтально, то в зависимости от начальной скорости он то почти отвесно пикирует на пол, то взмывает под потолок. Угадать заранее траекторию его полета практически невозможно, однако это вовсе не означает, что поведение кувыркающегося в воздухе самолетика не поддается никакому анализу.

Задача о полете бумажного самолетика является частным случаем более общей задачи о неуправляемом полете безмоторного летательного аппарата. Эту задачу впервые поставил и решил замечательный русский ученый, основоположник аэродинамики Н. Е. Жуковский (1847—1921). Здесь мы разберем только тот вариант задачи, который сам Жуковский называл «задачей о планере».

Пусть в воздушной среде летит симметричный планер (рис.6). На него действуют три силы: сила тяжести

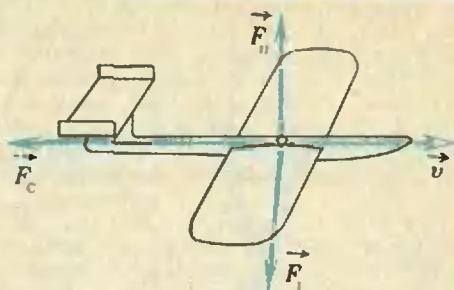


Рис. 6.

\vec{F}_g , сила лобового сопротивления \vec{F}_c и подъемная сила \vec{F}_n . Сила тяжести $\vec{F}_g = mg$ постоянна по величине и всегда направлена вертикально вниз. Сила лобового сопротивления связана со скоростью \vec{v} соотношением $\vec{F}_c = -\alpha\vec{v}$, т. е. точно так же, как и в предыдущем случае. Подъемная сила лежит в вертикальной плоскости и направлена перпендикулярно вектору скорости, а величина ее, согласно т. н. теореме Жуковского, связана со скоростью соотношением $F_n = \beta v^2$. Все три силы приложены в центре масс, который находится в вертикальной плоскости симметрии планера. Спрашивается, какой будет траектория полета, если планер запускают из точки A_0 с начальной скоростью \vec{v}_0 под углом φ к горизонту (рис. 7)?

Траектория строится в точности так же, как и раньше, только теперь для нахождения полного ускорения придется складывать не два вектора, а три: \vec{g} , \vec{a}_c и \vec{a}_n , где вызываемое подъемной силой ускорение $\vec{a}_n = \vec{F}_n/m$ направлено перпендикулярно вектору скорости \vec{v} и равно $(\beta/m)v^2$ по величине. Для упрощения построения полезно воспользоваться приведенными на рисунке 7 графиками зависимости a_c и a_n от v .

Построение траектории планера, как видите, хотя и громоздкое, но не сложное. Зато посмотрите, какую изумительную кривую мы получили! Наш планер описал самую настоящую «мертвую петлю»! В данном случае петля одна, но в принципе планер может описать несколько таких петель, после чего он переходит в режим характерного «порхающего» полета: он то проваливается вниз, то снова набирает высоту и, постепенно уменьшая амплитуду таких «провалов», выравнивает свой полет и движется равномерно по некоторой наклонной прямой.

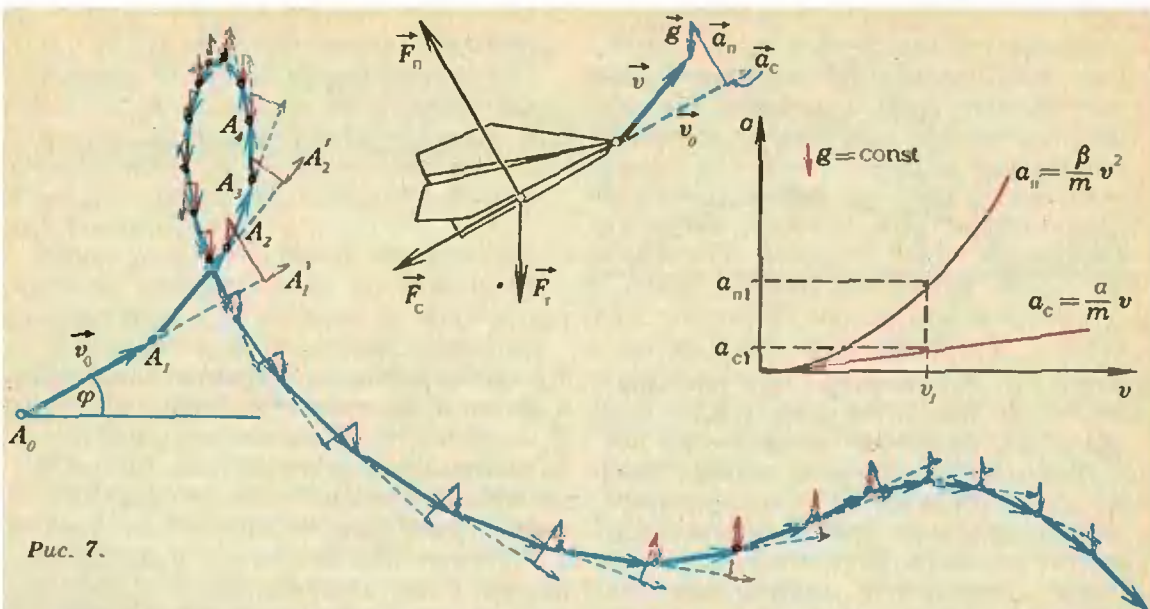


Рис. 7.

Итак, мы построили траекторию и получили описание наиболее характерных особенностей полета симметричного планера, несмотря на то, что точное решение задачи о планере (решение сложной системы дифференциальных уравнений) перевести на понятный школьнику язык совершенно невозможно.

Наблюдательный читатель, вероятно, заметил, что бумажный самолетик в некоторых отношениях отличается от рассмотренного нами идеального планера. Например, самолетик может не быть идеально симметричным: у него могут быть разными сила тяжести, подъемная сила и сила сопротивления воздуха, действующие на правое и левое крылья. Это приведет к тому, что в полете одно крыло самолетика будет располагаться выше другого, и самолетик начнет, как по наклонной плоскости, «соскальзывать» в сторону опущенного крыла. При таком поперечном «скольжении» носовая и хвостовая части самолетика будут испытывать неодинаковые силы сопротивления воздуха, поэтому самолетик начнет поворачиваться вокруг вертикальной оси, т. е. будет лететь не прямо вперед, а поворачиваясь вправо или влево. Короче говоря, к рассмотренному нами «кувырканию» и «порханию» планера в вертикальной плоскости добавятся повороты вправо или влево.

Поскольку разные типы сил, действующих на самолетик, по-разному зависят от скорости, то радиус поворота и даже его направление тоже

будут зависеть от скорости. Поведение самолетиков, которые на больших скоростях поворачивают вправо, а на малых влево, оказывается особенно интересным. Позапускайте несколько таких самолетиков разных типов, присмотритесь к их полету — и вы увидите, что многое в их поведении будет вам теперь более понятным.

В принципе, с помощью изложенного метода можно рассматривать и еще более сложные задачи, связанные с поведением летательных аппаратов. Например, полет самолета. Для этого достаточно вспомнить, что самолет — это тот же планер, только с двигателем. Поэтому добавив к рассмотренным в задаче о планере трем силам постоянную по величине силу тяги двигателя \vec{F} , направленную вдоль вектора скорости, мы сможем построить траекторию полета самолета. Если представить, что в кабине этого самолета сидит пилот, который может управлять двигателем и рулем высоты (т. е. изменять величину \vec{F} и параметр β), то можно моделировать даже поведение самолета в управляемом полете. Периодически включая и выключая двигатель такого самолета, терпеливый читатель сравнительно легко сможет добиться того, что самолет перейдет в волнообразный режим полета, напоминающий полет синиц, стрижей и других небольших птиц. А уменьшив в этом режиме массу m и увеличив параметры a и β , можно получить траектории, которые будут достаточно точно воспроизводить хаотический воздушный танец

бабочек. Размеры статьи не позволяют остановиться на этих случаях подробно, и мы рекомендуем читателям рассмотреть их самостоятельно.

Заключение, или Еще раз о самом главном

Это такая штука, которую вы спокойно можете объяснить два раза, не опасаясь, что кто-нибудь поймет, о чем вы говорите.

А. А. Милн, Винни-Пух и все-все-все

Итак, в этой статье мы рассказали о методе приближенного построения траекторий и продемонстрировали его на нескольких примерах, начиная с простейших и кончая уже довольно сложными. Главное, что следует усвоить из этой статьи, — это основную идею метода, которая состоит в замене непрерывного движения последовательностью отдельных равномерных и прямолинейных шагов. В научной литературе этот метод называется методом конечных разностей. Основное достоинство его состоит в том, что он позволяет простыми средствами исследовать очень сложные виды движений и находить приближенные решения сложнейших уравнений, которые плохо поддаются другим методам решений. В настоящее время этот метод получает все большее распространение, поскольку является основным методом решения соответствующих задач с помощью электронно-вычислительных машин.

Приложение Несколько слов об играх

И вот однажды Пух, и Пятачок, и Кролик, и Крошка Ру играли в Пустяки...

А. А. Милн, Винни-Пух и все-все-все

Поскольку игра — вещь очень интересная и полезная, то играть в те или иные игры любят все. Авторы статьи не являются исключением и поэтому не смогли удержаться от соблазна придумать игры на основе описанного выше метода.

Игра 1. «Автомобильные гонки». Поставьте на листе бумаги точку и представьте, что это автомобиль. Если он движется равномерно и прямолинейно, то с построением его траектории, как вы знаете, никаких проблем не возникает. Попробуем теперь управлять движением автомобиля, разрешив вектору его скорости изменяться после каждого шага. При этом будем иметь в виду, что вектор ускорения автомобиля может иметь произвольное направление, но ограничен по величине некоторым максимальным значением a_m . Что можно сказать о движении автомобиля в этом случае?

Пусть в начальный момент времени автомобиль находится в точке A_0 , имея скорость v_0 (см. рис. 7). Спустя первый интервал времени он окажется в точке A_1 , а еще через один интервал, если бы движение было равномерным, он попал бы в точку A'_1 . Однако в нашем случае к концу второго промежутка он может оказаться в любой точке круга радиуса a_m с центром в A'_1 .

Теперь понятно, что может, а чего не может сделать наш автомобиль. Так, например, он не может слишком быстро разогнаться и тормозить, а также совершать слишком крутые повороты на большой скорости. Мы рекомендуем читателю сначала поупражняться в езде на таком автомобиле просто на чистом листке, затем нарисовать дорогу и попытаться по ней проехать, а уже потом можно соревноваться с товарищами в скорости езды по извилистым трассам с мостами и туннелями (врезавшийся в ограждение автомобиль из дальнейших соревнований, естественно, выбывает).

Как показал опыт, эта игра несложная, но, попытавшись сыграть в нее, вы тут же убедитесь, что она требует крепких нервов и хорошего глазомера — накал страстей может оказаться соизмеримым с остротой борьбы в настоящих гонках.

Игра 2. «Принцесса и чудовище». Известно, что излюбленным занятием всех чудовищ является охота за принцессами. Принцессы же, как правило, чудовищ не любят, боятся их и стремятся от них убежать. Такое поведение принцесс вполне понятно, однако справедливости ради следует отметить, что иногда они делают это совершенно напрасно, поскольку, догнав их, чудовища расколдовываются и превращаются в прекрасных принцев — вспомните хотя бы «Аленький цветочек».

Итак, пусть принцесса и чудовище представляют собой материальные точки, ускорения которых ограничены величинами $a_{пт}$ и $a_{чм}$. Предположим далее, что чудовище имеет руки длиной l , т. е. оно может схватить все, что находится от него на расстоянии, меньшем или равном l . Задача чудовища состоит в том, чтобы схватить принцессу, а задача принцессы состоит в том, чтобы убежать. Варьируя соотношения между величинами $a_{пт}$, $a_{чм}$ и l , читатели могут по своему желанию усложнять задачу либо чудовищу, либо принцессе.

Чудовище может быть несколько, они могут ловить принцессу в пещере сложной формы или в лабиринте дворца, где имеются двери, через которые может пройти принцесса, но не может пролезть чудовище, и т. д. Простор для построения новых вариантов, как видите, здесь безграничен.

14. Верно ли, что «ночью все кошки серы»?

17. Почему верхние спицы катящегося колеса иногда сливаются для глаз, в то время как нижние видны раздельно?

8. Верда ли в жаркую погоду ветер приносит прохладу?

9. Почему жужжит пчела?

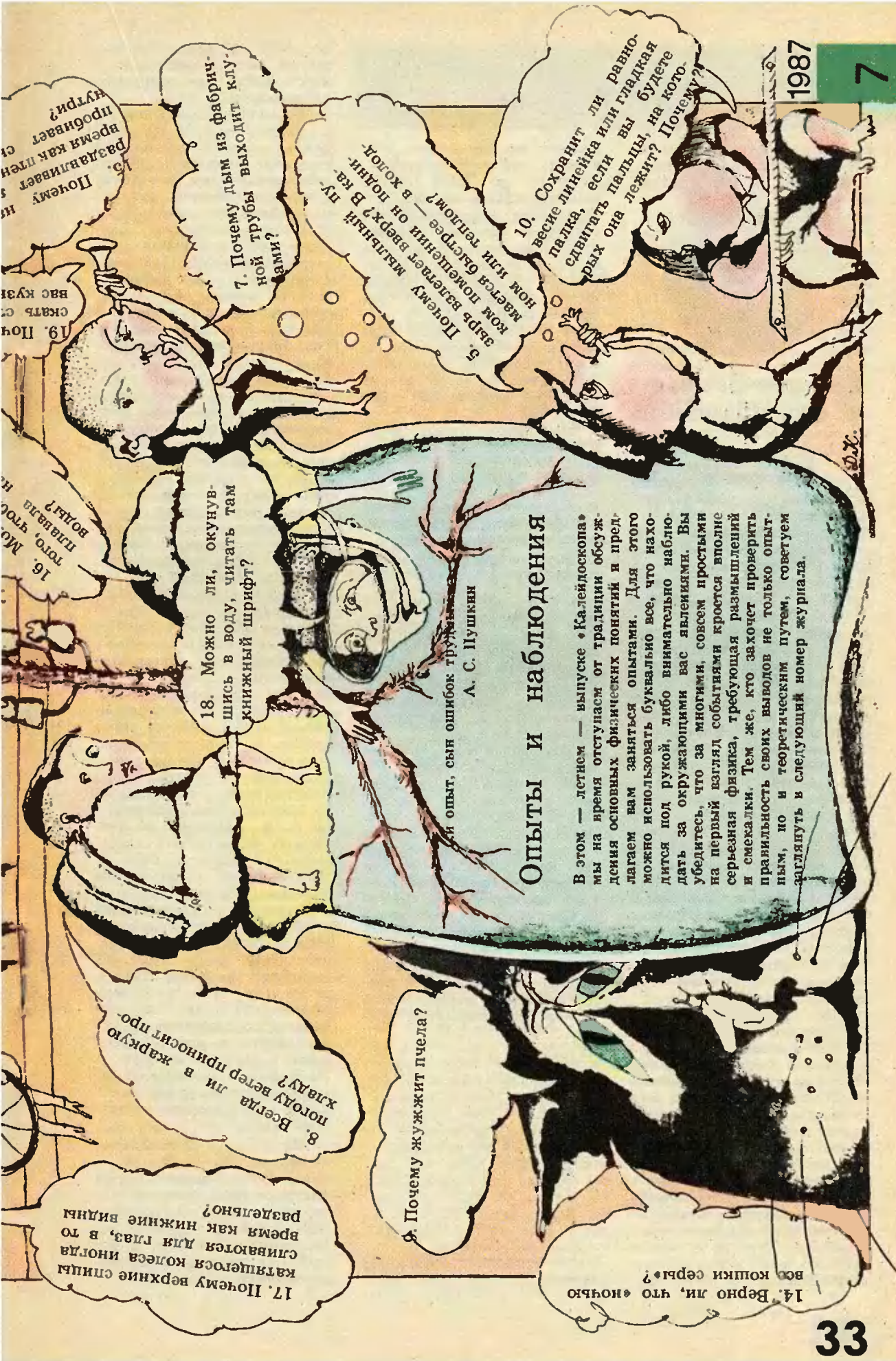
18. Можно ли, окунувшись в воду, читать там книжный шрифт?

Опыты и наблюдения

А. С. Пушкин

Мой опыт, сын ошибок трудных

В этом — летнем — выпуске «Калейдоскопа» мы на время отступаем от традиции обсуждения основных физических понятий и предлагаем вам заняться опытами. Для этого можно использовать буквально все, что находится под рукой, либо внимательно наблюдать за окружающими вас явлениями. Вы убедитесь, что за многими, совсем простыми на первый взгляд событиями кроется вполне серьезная физика, требующая размышлений и смекалки. Тем же, кто захочет проверить правильность своих выводов не только опытным, но и теоретическим путем, советуем заглянуть в следующий номер журнала.



19. Почему не раздается звук, когда вы ударяете по стеклу?

7. Почему дым из фабричной трубы выходит клубками?

5. Почему маленький пыльник вылетает из комка шерсти — в комки или в тонкую нить?

10. Сохранит ли равновесие линейка или гладкая палка, если вы будете сдвигать пальцы, на которых она лежит? Почему?

Наш квантер



Ван-дер-Ваальс и его уравнение

(к 150-летию со дня рождения ученого)

23 ноября 1837 года в семье лейденского плотника Якобуса Ван-дер-Ваальса появился на свет первый из девяти детей — Иоганнес Дидерик Ван-дер-Ваальс, будущий знаменитый голландский ученый, один из основоположников современной молекулярной физики.

Скромный достаток столь многочисленной семьи не позволял и мечтать о высшем образовании, так что после начальной школы весь долгий и нелегкий путь в науку Ван-дер-Ваальс прошел самостоятельно и, как сказали бы сейчас, без отрыва от производства, ибо только в 40 лет он расстался с профессией школьного учителя. Правда ему все же удалось, хотя и с многолетним перерывом, прослушать в старинном Лейденском университете с десятком лекционных курсов по математике, астрономии и физике.

Но 14 июня 1873 года Ван-дер-Ваальс — в это время он еще преподавал физику в одном из реальных училищ Гааги — приехал в Лейденский университет не для того, чтобы пополнить знания еще одной лекцией. На этот день была назначена защита его докторской диссертации «О непрерывности жидкого и газообразного состояний». Защита прошла успешно, но особым восторгом диссертация гаагского учителя у членов ученого совета не вызвала. Миновало десять лет, и евро-

пейские ученые начали осознавать, что этой работой — заметим, это было первое самостоятельное научное исследование Ван-дер-Ваальса, его первая научная публикация! — ее автор вписал свое имя в число классиков науки. В 1910 году Ван-дер-Ваальс был удостоен Нобелевской премии по физике.

В чем же сущность этой классической работы голландского ученого? На языке формул ответ на этот вопрос выглядит следующим образом:

до Ван-дер-Ваальса было известно уравнение состояния идеального газа

$$pV = RT, \quad (1)$$

в «Непрерывности» же впервые появилось уравнение состояния реального газа

$$\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT, \quad (2)$$

где V — объем моля газа при температуре T и давлении p , R — универсальная газовая постоянная, a и b — экспериментальные константы, характеризующие соответственно межмолекулярное притяжение и собственный объем молекул.

Идеальный газ — это хотя и чрезвычайно полезная в физике, но предельно упрощенная теоретическая модель. Она соответствует газу, плотность которого настолько низка, что взаимодействие между его молекулами и размер молекул практически никакой роли не играют. Уравнению Ван-дер-Ваальса (так называют уравнение состояния реального газа) отвечает гораздо более реалистическая модель: молекулы — абсолютно твердые шарики очень малого, но конечного диа-

метра, между которыми действуют быстро спадающие с расстоянием силы взаимного притяжения.

Переход от уравнения (1) к уравнению (2) Ван-дер-Ваальс охарактеризовал как «введение поправки». И это действительно так. Во-первых, а нем учитывается, что помимо внешнего давления p действует «внутреннее» давление a/V^2 , возникающее за счет межмолекулярного притяжения и «стремящееся» стать мечущиеся в беспрепятственном тепловом движении молекулы в один тесный сгусток. Во-вторых, принимается во внимание тот факт, что для теплового движения молекул доступен не весь объем V , а лишь пространство, остающееся за вычетом собственного объема молекул. (На самом деле Ван-дер-Ваальс обнаружил, к своему немалому удивлению, что константа b в первом приближении равна учетверенному значению суммарного собственного объема молекул, содержащихся в одной моле вещества.)

Обычно слово «поправка» ассоциируется с чем-то не слишком важным, во всяком случае, не принципиальным, не связанным с коренными изменениями. Однако в физике эта привычная ассоциация очень часто не оправдывается. И ярчайший тому пример — ван-дер-ваальсовские поправки, приводящие к чудесному превращению уравнения (1), справедливое лишь для не существующего в природе теоретического объекта под названием «идеальный газ», в уравнение (2), описывающее поведение реального вещества в диапазоне плотностей, простирающемся от значений, соответствующих разреженному газу, до величин, отвечающих жидкому состоянию. При этом из самих выражений для ван-дер-ваальсовских поправок можно определить и молекулярные силы, и размеры молекул — совершенно реальные параметры, о которых даже не заходит речь в модели идеального газа.

На рисунке 1 показаны изотермы, рассчитанные по уравнению Ван-дер-Ваальса для различных значений температуры. Ясно, что большие значения V относятся к газообразному состоянию, а малые — к жидкому. Как свидетельствуют изотермы 1, 2, 3,

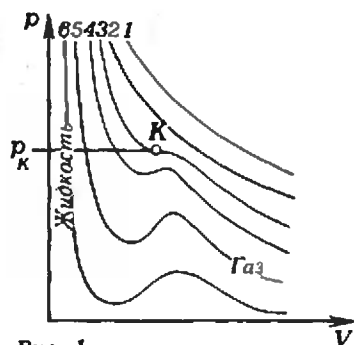


Рис. 1.

при температурах $T > T_k$ каждому значению p отвечает одно значение V . Это означает, что переход от газообразного состояния к жидкому непрерывен, и поэтому при таких температурах само подразделение на газ и жидкость теряет смысл. Иное дело температуры $T < T_k$. В этом случае каждому значению p отвечают три различных значения V , так что на изотермах (см. изотермы 4, 5, 6 на рис. 1) появляется волнообразный сегмент.

Рассмотрим подробнее одну изотерму для некоторой температуры $T < T_k$ (рис. 2). Участок ec ее волнообразного сегмента, проведенный пунктиром, соответствует противояснественному положению: при сжатии давление падает, чего в природе не бывает. Наличие нереализуемого участка ec означает, что при постепенном изменении объема вещество не может все время оставаться однородным — в некоторый момент должно произойти его расщепление на газ и жидкость. Таким образом, истинная изотерма имеет вид ломаной линии $abfg$ с прямолинейным отрезком bf в области волнообразного сегмента, соединяющим ветвь ab , соответствующую газообразному состоянию, и ветвь fg , соответствующую жидкому состоянию. Сам горизонтальный участок bf соответствует переходу газа в жидкость (и наоборот), происходящему при заданной температуре и при определенном постоянном давлении. На какой «высоте», т. е. при каком давлении, возникает прямолинейный участок, из уравнения Ван-дер-Ваальса определить невозможно. Ответ на этот вопрос дает правило, установленное Дж. Максвеллом (1831—1879) и Р. Клаузиусом (1822—1888): ордината участка bf должна быть такой, чтобы обеспечивалось равенство площадей «полуовна» bcd и def , лежащих сверху и снизу от него.

По мере повышения давления прямолинейный участок укорачивается и при $T = T_k$ стягивается в «критическую точку» K . По уравнению Ван-дер-Ваальса $T_k = 8a / (27bR)$ и ей отвечает критическое давление $p_k = a / (27b^2)$. Для воды, например, $T_k = 647,3$ К и $p_k = 22,13$ МПа, откуда $b = RT_k / (8p_k) = 30,4 \cdot 10^{-6}$ м³/моль, и для «диаметра» мо-

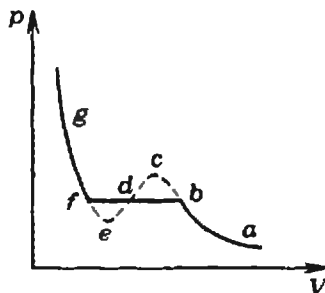


Рис. 2.

лекулы воды, уподобляемой абсолютно твердому шарикю, получается значение $d = 2,9 \cdot 10^{-10}$ м, что по порядку величины вполне соответствует действительности.

Уравнение Ван-дер-Ваальса чрезвычайно широко используется физиками и инженерами, и понятно почему. Ведь оно описывает всю картину поведения вещества от газообразного состояния до жидкого, оно несложно и потому с ним удобно работать, и, наконец, что очень важно, оно основано на простой, но реалистической модели вещества, допускающей наглядную интерпретацию.

А насколько точно уравнение Ван-дер-Ваальса согласуется с экспериментальными данными? В области высоких температур и низких давлений имеется хорошее количественное согласие, но при плотностях, близких к тем, которые характеризуют жидкое состояние, речь может идти лишь о качественном соответствии.

С появлением уравнения состояния реального газа родилась и загадка этого уравнения. Дело в том, что, с одной стороны, сам Ван-дер-Ваальс не дал его строгого вывода — он, скорее, угадал ответ, угадал, основываясь на правдоподобных, но отнюдь не строгих рассуждениях. С другой стороны, строгий математический вывод уравнения не получался ни у кого. Но как же может быть столь удачным уравнение, не имеющее под собой твердой теоретической почвы? Некоторые физики склонны были даже усматривать здесь какую-то мистику.

Вывести ван-дер-ваальсовское уравнение удалось только в 1966 году. Однако полного решения загадка все же не получила вплоть до наших дней. Речь идет о следующем. Уравнение было строго выведено для модели, в которой абсолютно жесткие шарики-молекулы связаны

между собой очень слабыми, но обладающими бесконечным радиусом действия силами взаимного притяжения. Сам Ван-дер-Ваальс настаивал на том, что учитываемые его уравнением силы притяжения отнюдь не дальнедействующие, а простираются на расстояние, ограниченное всего лишь несколькими молекулярными диаметрами. Это обстоятельство не представляло бы особого интереса — так ли уж важно, какая картина рисовалась голландскому ученому столетие назад! — если бы в конце концов не оказалось, что физическая интуиция ученого все еще не превзойдена даже самыми изощренными математическими методами. Действительно, сопоставление экспериментальных данных с результатами компьютерных численных расчетов показало, что уравнение Ван-дер-Ваальса может быть справедливым и при короткодействующем характере межмолекулярного притяжения, причем оно не обязательно должно быть очень слабым.

Как сложилась судьба Ван-дер-Ваальса после защиты его знаменитой диссертации?

В 1875 году он был избран академиком, а спустя два года получил должность профессора физики Амстердамского университета. Этот пост он занимал до 1908 года, когда, согласно незыблемому правилу, вышел в отставку в связи с достижением 70-летнего возраста. Помимо уравнения состояния реальных газов, Ван-дер-Ваальс получил еще целый ряд важных научных результатов, причем значение некоторых из них было по достоинству оценено только в наше время. Его научная деятельность продолжалась до 1916 года, затем творческие и физические силы стали ослабевать. Ученый умер в 1922 году, в эпоху, когда занимавшие его всю жизнь проблемы молекулярной физики были вытеснены на периферию науки бурно развивавшимися квантовой теорией, физикой атома и атомного ядра. Но прошло полвека, эти проблемы снова переместились в центр внимания физиков, и работы Ван-дер-Ваальса получили новое и чрезвычайно плодотворное развитие.

Б. Е. Явлов



Задачи

M1051 — M1055, Ф1063 — Ф1067

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 сентября 1987 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7—87» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1051» или «Ф1063». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

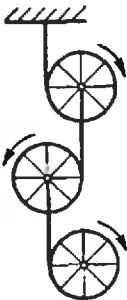


Рис. 1.

M1051. В левый нижний угол шахматной доски 8×8 клеток поставлено в форме квадрата 3×3 девять фишек. Фишка может перепрыгнуть через любую другую фишку, симметрично отразившись от нее, если соответствующее поле свободно. Можно ли несколькими такими ходами собрать все фишки в виде квадрата 3×3 :

- а) в левом верхнем углу?
- б) в правом верхнем углу доски?

Я. Е. Брискин

M1052. Докажите, что из n четырехугольников, отсекаемых от выпуклого n -угольника диагоналями, не более $n/2$ могут оказаться описанными около окружности. Приведите пример 8-угольника, у которого таких четырехугольников 4.

Н. М. Седракан

M1053. Докажите, что в последовательности чисел Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., где каждое число равно сумме двух предыдущих, при $m > 3$ встретится не менее 4 и не более 5 m -значных чисел.

M1054. Докажите, что шесть точек попарного касания четырех сфер всегда лежат на одной сфере или на одной плоскости.

Ю. К. Коба

M1055. На окружности имеется 21 точка. Докажите, что среди дуг с концами в этих точках не менее 100 дуг, не превосходящих 120° .

А. Ф. Сидоренко

Ф1063. Пешеходу необходимо в кратчайшее время попасть из точки поля A в точку поля B , расстояние между которыми 1300 м. Поле пересекает прямолинейная дорога так, что точка A находится от нее на расстоянии 600 м, а точка B — на расстоянии 100 м. Скорость перемещения пешехода по полю равна 3 км/ч, а по дороге — 6 км/ч. Какой путь должен избрать пешеход? Чему равно минимальное время? Рассмотреть случаи, когда точки A и B лежат по одну сторону от дороги и когда они лежат по разные стороны от дороги.

С. С. Крогов

Ф1064. Нить прикреплена к ободу тяжелого обруча и намотана на него. Если другой конец нити прикрепить к потолку и отпустить обруч, то он, вращаясь и разматывая нить, будет двигаться вниз. Пусть три таких обруча соединены «последовательно», т. е. конец нити следующего обруча прикреплен к оси предыдущего (рисунок 1). Все обручи одновременно отпустили, и они пришли в движение. Определить, с каким ускорением движется верхний обруч.

С каким ускорением будет двигаться верхний обруч, если число последовательно соединенных обручей очень велико?

Считать, что масса обруча равномерно распределена по его ободу, спицы невесомы, нити невесомы и нерастяжимы, трение отсутствует.

Е. Н. Юносов. И. В. Яминский

Ф1065. Кастрюлю, в которую налит 1 л воды, никак не удается довести до кипения при помощи нагревателя

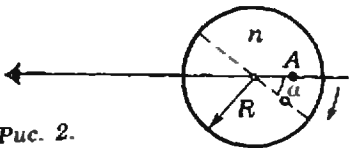


Рис. 2.

мощностью 100 Вт. Определить, за какое время вода остынет на один градус, если отключить нагреватель.

А. Р. Зильберман

Ф1066. Предположим, что в результате сильных пожаров в верхних слоях атмосферы возникает тонкий слой сажи, поглощающий практически все падающее на него солнечное излучение. Какой станет при этом средняя температура Земли, если сейчас она составляет 300 К?

А. А. Стасенко

Ф1067. Внутри прозрачного шара радиусом R , сделанного из материала с показателем преломления n , имеется небольшое вкрапление A (рисунок 2). При рассмотрении вкрапления кажущееся расстояние от вкрапления до центра шара оказывается не зависящим от α для достаточно больших α (см. рисунок 2). Найдите, на каком расстоянии от центра шара находится вкрапление.

Г. В. Григорьев

Problems

M1051 — M1055, P1063 — P1067

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than September 15, 1987, to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write **NEW PROBLEM IN PHYSICS** (or **MATHEMATICS**). Please print your name and address in **BLOCK LETTERS**.

M1051. The lower left hand corner of an 8×8 chessboard is occupied by nine pawns forming a 3×3 square. A pawn can jump over any other pawn, landing symmetrically, if the corresponding little square is empty. Using such moves, is it possible to reassemble the 3×3 square
 a) in the upper left hand corner?
 b) in the upper right hand corner?

Ya. E. Briskin

M1052. Prove that no more than $n/2$ out of n quadrilaterals cut out from an n -sided polygon by its diagonals can be circumscribed to a circle. Give an example of an octagon with 4 such quadrilaterals.

N. M. Sedrakyan

M1053. Prove that in the Fibonacci sequence 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., where each number is the sum of the two previous ones, there are no more than 5 and no less than 4 m -digit numbers for any $m > 3$.

M1054. Prove that the six pairwise tangency points of four spheres always lie on one sphere or on one plane.

Yu. K. Koba

M1055. There are 21 points on a circle, arbitrarily chosen. Prove that among the arcs with extremities at these points no less than 100 are no greater than 120° .

A. P. Sidorenko

P1063. A hicker must walk in the shortest possible time from point A to point B . The points are in a field, and the distance between them is 1300 m. The field is crossed by a rectilinear road whose distances from the points A and B are respectively 600 m and 100 m. The hicker walks in the field at the speed of 3 km per hour and along the road at 6 km per hour. What trajectory should the hicker choose? What is the minimal time? Consider two cases: when the points are on opposite sides of the road or on the same side.

S. S. Krotov

P1064. A string is fixed to the outside of a wheel and wrapped around it. If the other end of the string is fixed to the ceiling and the wheel is released, it will move down, rotating and unwrapping the string. Imagine that three such wheels are connected in sequence, i. e. the end of the string of each succeeding wheel is fixed to the axis of the previous one (see figure Рис. 1). If all the wheels are released simultaneously, what will the acceleration of the upper wheel be? Same question

Задачи Кванта

if the number of successively connected wheels is very large. Assume that the wheel's mass is uniformly distributed along the circumference, the strings are weightless and unstretchable and there is no friction.

E. N. Yunosov, I. V. Yaminshi

P1065. A pot containing 1 liter of water refuses to come to a boil on a 100 watt heater. How long can it take for the water to cool by 1 degree when the heater is turned off?

A. R. Zilberman

P1066. Imagine that a thin layer of soot, absorbing practically all the Sun's emissions, is formed in the upper atmosphere as the result of massive forest fires. What will the Earth's mean temperature become, if it is now 300 K?

A. L. Stasenko

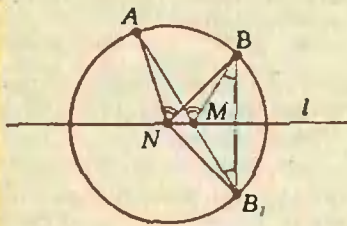
P1067. A transparent solid sphere of radius R made out of material with refraction index n contains a small incrustation A (figure Рис. 2 on p. 37). When looking at the incrustation the apparent distance from it to the centre of the sphere does not depend on α for sufficiently large α (see the figure). Find the true distance from the incrustation to the sphere's centre.

G. V. Grigoriev

Решения задач

M1031 — M1035, Ф1043 — Ф1045, Ф1047

M1031. На плоскости даны прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. На прямой l выбраны точка M , сумма расстояний от которой до точек A и B наименьшая, и точка N , для которой расстояния от A и B равны: $AN=BN$. Докажите, что точки A , B , M и N лежат на одной окружности.



M1032. Выписаны n чисел 2, 3, ..., $n+1$, их всевозможные произведения по два, по три и т. д. вплоть до произведения всех n этих чисел. Докажите, что сумма чисел, обратных всем выписанным, равна $n/2$. (Например, при $n=3$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{3}{2}$.)

Построим точку B_1 , симметричную B относительно прямой l , тогда M лежит на пересечении прямых AB_1 и l (см. рисунок), так как для любой точки P на прямой l , отличной от M ,

$$AP + PB = AP + PB_1 > AB_1 = AM + MB.$$

Покажем, что $\angle AMB = \angle ANB$, — из этого равенства вытекает утверждение задачи.

Угол AMB как внешний угол равнобедренного треугольника MBB_1 равен $2\angle AB_1B$. С другой стороны, точки A , B и B_1 лежат на окружности с центром N , поэтому и $\angle ANB = 2\angle AB_1B$ (центральный угол ANB и вписанный в эту окружность угол AB_1B опираются на одну дугу AB).

Л. Д. Курьяндчик

Очевидно, что рассматриваемая в задаче сумма на 1 меньше произведения

$$\left(1 + \frac{1}{2}\right) \left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n+1}\right).$$

Следовательно, она равна

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \dots \cdot \frac{n+2}{n+1} - 1 = \frac{n+2}{2} - 1 = \frac{n}{2},$$

что и требовалось доказать.

А. В. Анджанс

M1033. Окружность отрезает от квадрата четыре криволинейных треугольника (граница каждого состоит из дуги окружности и двух отрезков). Выкрасим два из них, прилегающих к противоположным углам квадрата, в голубой цвет, два других — в красный. Докажите, что: а) суммы красных и голубых дуг равны; б) суммы периметров красных и голубых треугольников равны.



Рис. 1.

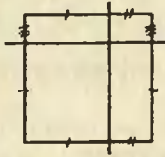


Рис. 2.

M1034. Прямоугольная шоколадка разбита продольными и поперечными углублениями на 50 квадратных долек. Двое играют в такую игру. Начинающий разламывает шоколадку по некоторому углублению на две прямоугольные части. Затем играющие по очереди ломают одну из получившихся частей по некоторому углублению на две. Тот, кто первым отломит квадратную дольку (без углублений), а) проигрывает, б) выигрывает. Кто из играющих может обеспечить себе выигрыш — начинающий или его партнер?

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

12 13 14 15 16 17 18

19 20 21 22 23 24 25

а) Проведем в окружности диаметры, параллельные сторонам квадрата. Они делят пополам дуги, находящиеся вне квадрата (рис. 1). Чтобы получить сумму красных дуг, нужно из двух четвертей окружности вычесть по половинке от каждой из выступающих за квадрат дуг; точно так же получается сумма голубых дуг.

б) С учетом утверждения а) нам достаточно доказать, что сумма длин красных отрезков сторон квадрата, выступающих за окружность, равна сумме длин голубых отрезков. Диаметры, которые мы рассмотрели в решении задачи а), делят пополам хорды, отсекаемые на сторонах квадрата окружностью. При этом внутри каждой пары вертикальных углов, определяемых этими диаметрами, заключена половина периметра квадрата (это следует из равенства отрезков, отмеченных на рисунке 2). Следовательно, и сумма длин красных уголков, и сумма длин голубых уголков равны полупериметру квадрата минус полусумма хорд.

Верно и чуть более сильное утверждение: сумма горизонтальных красных отрезков равна сумме горизонтальных голубых отрезков, аналогично — для вертикальных. Кроме того, квадрат в условии задачи можно заменить на прямоугольник.

В. В. Произволов

Ответ: в обоих вариантах игры побеждает начинающий. Это справедливо и для любой шоколадки из mn долек (размером $m \times n$), где mn четно (за исключением случая шоколадки $2 \times n$ с нечетным n в варианте б) — здесь ответ зависит от n .) Мы рассмотрим сразу общий случай. Интересно, что выигрышные стратегии в «противоположных» вариантах а) и б) почти совпадают.

а) Стратегия, обеспечивающая выигрыш начинающему, такова. Хотя бы одно из чисел m и n четно — пусть это будет $m(m=2k)$. Первым ходом начинающий разламывает шоколадку на две одинаковые половины (по $n \times k$ долек). Затем каждый ход второго он дублирует на другой половине шоколадки. Таким образом, после каждого хода первого игрока обе половины будут разломаны совершенно одинаковым образом. Ясно, что при этом первый не отломит дольку 1×1 раньше, чем это сделает второй.

б) Здесь при четном $m > 2$ и $n > 1$ начинающий может использовать ту же «симметричную» стратегию до тех пор, пока второй не отломит полосу шириной 1; первый тут же отламывает от нее дольку 1×1 и выигрывает.

При публикации задачи мы по недоразумению не поместили рядом с условием рисунок, изображающий шоколадку из 5×10 долек; поэтому строго говоря, нужно рассмотреть еще случай шоколадки 2×25 (хотя, по-видимому, в жизни таких не бывает). В варианте б) игры «симметричная» стратегия для шоколадки $2 \times n$ не годится — отламывать полосу шириной 1 нельзя (это немедленно ведет к проигрышу), так что шоколадку можно ломать только «поперек». Возникает такая игра в «разбиение». На доске написано вначале число n ; затем при каждом ходе одно из чисел стирается и пишутся некоторые два натуральных числа, в сумме дающих стертое. Проигрывает тот, кто вынужден написать 1 (то есть проигрышная позиция — это набор чисел 2 и 3). Вопрос о том, кто выигрывает в подобных играх, оказывается далеко не простым; об интересной теории, позволяющей найти ответ без большого перебора, будет рассказано в одном из номеров

Загадки Ханна

«Кванта» в будущем году. Пока сообщим лишь ответ: при $n=25$ выигрывает начинающий (один из правильных первых ходов: $25=13+12$).

Ответ для нечетного m в общем случае нам неизвестен ни для варианта а), ни для варианта б) игры.

С. В. Фомин, Н. Б. Васильев

M1035. На отрезке $[0; 1]$ по очереди отмечаются точки $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. Для каждой точки x_k ($k=1, \dots, n$) измеряется расстояние d_k от нее до ближайшей к ней из поставленных ранее точек. Докажите, что $d_1 + d_2 + \dots + d_n \leq 1 + \frac{\log_2 n}{2}$.

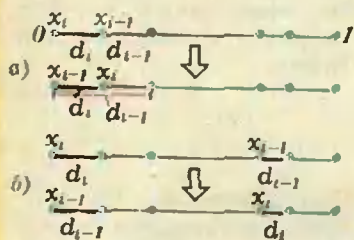


Рис. 1.

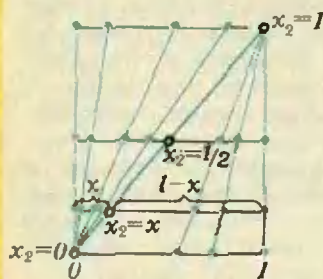


Рис. 2. Преобразование набора x_0, x_1, \dots, x_n при сдвиге точки x_2 : каждому значению $x_2, 0 \leq x_2 \leq 1$, отвечает горизонтальный отрезок, на пересечении которого с синими линиями расположены точки x_i .

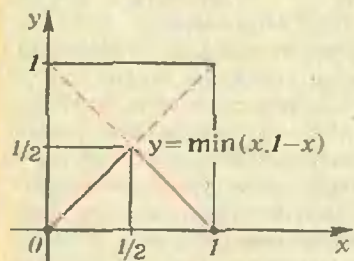


Рис. 3.

Покажем сначала, что любой набор точек x_0, x_1, \dots, x_n на отрезке $[0; 1]$ можно, не уменьшая суммы

$$s = d_1 + d_2 + \dots + d_n,$$

преобразовать в набор, две первые точки которого — 0 и 1, а каждая следующая — середина одного из отрезков, на которые предыдущие точки разбивают $[0; 1]$. Ясно, что можно ограничиться наборами различных точек (если точка x_i совпала с одной из предыдущих, ее можно просто вычеркнуть — $d_i=0$ — и добавить новую точку в конце). Но нам будет удобно допустить совпадения.

Пусть x_i — самая левая, x_n — самая правая точка набора. Очевидно, s не уменьшится, если заменить x_0 на 0, а x_n — на 1. Кроме того, при $i \geq 1$ можно поменять $x_i=0$ и x_{i-1} друг с другом местами — при этом сумма $d_{i-1} + d_i$ может только возрасти (рис. 1), а остальные слагаемые суммы s не изменятся. Поэтому впредь можно считать, что $x_0=0$, а $x_1=1$. Будем «улучшать» набор x_0, \dots, x_n дальше. Рассмотрим точку x_2 . Если $x_2=x_0$ или $x_2=x_1$, пропустим ее и перейдем к x_3 . Пусть теперь $x_2=x$, $0 < x < 1$. Будем двигать точку $x_2=x$ по отрезку $[0; 1]$ и при этом один из отрезков $[0; x]$ или $[x; 1]$ вместе со всеми попавшими на него точками x_i растягивать, а другой — сжимать (рис. 2). Ясно, что тогда сумма чисел d_i для точек x_i отрезка $[0; x]$ будет изменяться пропорционально x , а для отрезка $[x; 1]$ — пропорционально $1-x$, поэтому общая сумма, как функция x , будет равна

$$s = 1 + \min(x, 1-x) + lx + r(1-x)$$

($d_1=1$, $d_2=\min(x, 1-x)$, l и r — постоянные). Эта функция линейна на отрезках $[0; 1/2]$ и $[1/2; 1]$ и имеет излом в точке $x=1/2$ (рис. 3), поэтому ее максимум достигается в одной из точек $0, 1/2, 1$. Сдвинем x_2 в точку максимума и одновременно соответствующим образом растянем (или сожмем) набор точек x_i на отрезках $[0; x_2]$ и $[x_2; 1]$. Мы получим набор точек, у которого сумма s не меньше первоначальной, а точка x_2 находится либо в середине отрезка $[x_0; x_1]$ ($x_2=1/2$), либо на краю этого отрезка. Если, далее, x_3 не совпадает ни с одной из точек x_0, x_1, x_2 , рассмотрим тот из отрезков $[x_0; x_2]$ и $[x_2; x_1]$, на котором лежит x_3 . Как и выше, мы можем так изменить набор точек x_i на этом отрезке, чтобы точка x_3 стала его серединой или концом, и при этом сумма s не уменьшилась. Поступая так же со следующими точками, мы придем к набору, в котором $x_0=0$, $x_1=1$, а каждая следующая точка совпадает либо с серединой отрезка, соединяющего две соседние ранее поставленные точки, либо с одной из этих точек. Все точки, совпадающие с предыдущими, можно вычеркнуть, после чего останется набор из k точек ($k \leq n$), удовлетворяющий сформулированному в начале решения условию.

Для такого набора точек $d_1=1$, $d_2=1/2$, $d_3=1/4$, $d_4=1/4$ или $1/8$ при $i \geq 2$ каждое число d_i равно 2^{-m} с некоторым натуральным m , причем чисел, равных 2^{-m} , имеется не более 2^{m-1} . Ясно, что наибольшее значение суммы первых n таких чисел принимает при

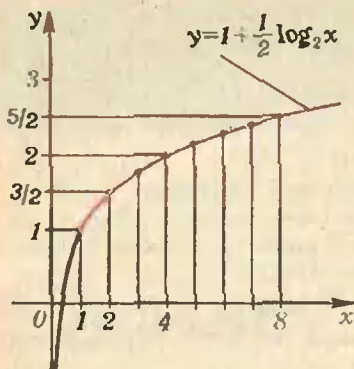


Рис. 4. Красные точки — значения $s(n)$.

$d_1 = 1, d_2 = 1/2, d_3 = d_4 = 1/4, d_5 = \dots = d_8 = 1/8, \dots$ (1)
 ($d_i = 2^{-m}$ при $2^{m-1} < i \leq 2^m$), т. е. для последовательности точек

$$0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \frac{1}{16}, \dots \quad (2)$$

(дроби с одинаковыми знаменателями в этой последовательности можно переставлять). Остается оценить сумму $s(n) = d_1 + \dots + d_n$ для последовательности (1). При $n = 2^m + k, 0 \leq k < 2^m, m \geq 0$,

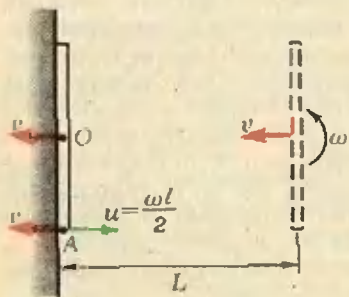
$$s(n) = 1 + \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \frac{1}{8} + \dots + 2^{m-1} \cdot \frac{1}{2^m} + \frac{k}{2^{m+1}} = 1 + \frac{m}{2} + \frac{k}{2^{m+1}},$$

т. е. $s(n) = 1 + (\log_2 n)/2$ при $n = 2^m$, а на участках от 2^m до 2^{m+1} функция $s(n)$ меняется линейно. Поскольку $\log_2 x$ — выпуклая функция, $s(n) \leq 1 + (\log_2 n)/2$ при всех натуральных n (рис. 4).

Интересно, что оптимальное расположение точек (2) дается «жадным» алгоритмом (это вполне официальный термин): на каждом шагу достаточно обеспечивать максимум очередного слагаемого, не заботясь о дальнейшем.

В. С. Гринберг

Ф1043. По гладкой горизонтальной поверхности, вращаясь, скользит со скоростью $v = 10$ см/с палочка длиной $l = 10$ см. При какой угловой скорости вращения палочка ударится о стену (см. рисунок) плашмя, если на расстоянии $L = 50$ см от стены палочка была параллельна стене?



Время, за которое центр палочки пройдет расстояние L до стены, —

$$\tau = \frac{L}{v} = 5 \text{ с.}$$

Чтобы палочка ударилась о стену плашмя, необходимо, чтобы за это время она совершила целое число полуоборотов вокруг оси вращения. Следовательно,

$$\omega_n \tau = n\pi, \text{ где } n = 1, 2, 3, \dots$$

откуда

$$\omega_n = n \frac{\pi}{\tau}. \quad (*)$$

Но не все полученные значения ω будут являться ответом в задаче. При достаточно больших ω палочка при движении «зацепится» одним из своих концов за стену, не успев удариться об нее плашмя. Для того чтобы найти условие, которому удовлетворяют искомые значения ω , заметим, что во время удара палочки скорость ее конца A (см. рисунок) не может быть направлена от стены (в противном случае в предшествующие моменты времени точка A «находилась» в стене, что невозможно). Скорость точки A складывается из скорости движения центра палочки и линейной скорости вращения палочки:

$$v_A = u - v = \frac{\omega l}{2} - v > 0.$$

Отсюда получаем условие для ω :

$$\omega < \frac{2v}{l} = 2 \text{ с}^{-1}.$$

Сопоставляя это условие с формулой (*), мы увидим, что подходящими значениями ω_n являются лишь значения

$$\omega_1 = 0,63 \text{ с}^{-1}, \omega_2 = 1,26 \text{ с}^{-1}, \omega_3 = 1,89 \text{ с}^{-1}.$$

И. Ю. Потеряйко

Загадки «Кванта»

Задачи "Квант"

Ф1044. Парашютист массой $m=90$ кг совершает затяжной прыжок. Перед раскрытием парашюта его скорость $v_0=60$ м/с, после раскрытия парашюта установившаяся скорость $v=6$ м/с. Каково было бы максимальное натяжение строп парашюта, если бы он раскрывался мгновенно? Считать, что сила сопротивления воздуха движущемуся парашюту пропорциональна квадрату скорости. Массу парашюта и строп считать малой по сравнению с массой парашютиста.

При раскрытии парашюта установившаяся скорость парашютиста (когда сумма всех действующих на него сил равна нулю) — 6 м/с. При этом сила сопротивления воздуха F_c равна силе натяжения строп T_0 , которая, в свою очередь, равна силе тяжести mg , т. е.

$$F_c = mg.$$

В первый момент после раскрытия парашюта сила сопротивления F_c в $(60/6)^2=100$ раз больше. Таким образом, сила сопротивления становится равной $100mg$. Такова же и сила натяжения строп:

$$T = 100mg = 80\,000 \text{ Н}.$$

Примечание. При такой силе T парашютист приобрел бы ускорение $a = \frac{1}{m}(T - mg) = 99g$, т. е. перегрузка a/g была бы неприемлемо большой. В действительности купол раскрывается не мгновенно, и натяжение строп не бывает столь громадным. Реальные значения перегрузок a/g никогда не превышают 6—7. Поэтому при расчете прочности строп можно считать, что всегда $T \ll 100 mg$.

И. Ф. Гинзбург

Ф1045. В Арктике встретились два полярника. Они были одеты в одинаковые с виду комбинезоны, но на самом деле один из комбинезонов был теплее. Когда померили температуру на поверхности комбинезонов, на одном она оказалась выше, чем на другом. Какой из комбинезонов теплее? (Комбинезоны обычные, без подогрева.)

Температура на внутренней поверхности комбинезонов одинакова — она равна температуре человеческого тела. Поток тепла через комбинезон тоже примерно одинаков (если только не предполагать, что один из полярников занимается тяжелой физической работой, а другой в это время бьет баклуши). Значит, материал того комбинезона, температура поверхности которого ниже, имеет более низкую теплопроводность, а именно такую одежду мы называем теплой. Предельный случай данной задачи описывает человека в тонкой рубашке — температура ее поверхности лишь немного отличается от нормальных 36 градусов (пока, конечно, человек не очень замерз).

И. И. Мазин

Ф1047. *) Наблюдатель пускает «солнечный зайчик» при помощи маленького зеркальца, стоя перед большим зеркалом, в котором он видит свое изображение. Что произойдет, если наблюдатель направит «зайчик» на изображение зеркальца в зеркале?

«Зайчик», который наблюдатель может увидеть в большом зеркале, это изображение того «зайчика», который образовался на «экране», стоящем перед большим зеркалом. Экраном может быть сам наблюдатель, стена, которую он видит в зеркале, и т. п. В экране есть «дырка» — это маленькое зеркальце: если прямые солнечные лучи, отразившись сначала от маленького зеркальца, а затем от большого, вновь попадут на маленькое, то «зайчика» не будет. Но при таком ходе лучи после первого отражения от маленького зеркальца идут перпендикулярно плоскости большого зеркала и, значит, попадают на изображение маленького зеркальца в большом зеркале.

Следовательно, если наблюдатель направит «солнечный зайчик» на изображение зеркальца, то он нигде не увидит изображения «зайчика».

С. С. Кротов

*) Решению задачи Ф1046 будет посвящена заметка в одном из следующих номеров журнала.

„Клант“ для младших школьников.

Задачи

1. Дядя Алеша вдвое старше меня, а цифры числа, выражающего мой возраст, равны сумме и разности цифр его возраста. Сколько мне лет?

2. Двери в салоне электрички движутся на роликах по направляющим, расположенным не горизонтально, а наклонно. Почему?

3. Во время новогоднего карнавала Антон забежал в свой класс и увидел оставшийся на доске пример на возведение числа в пятую степень. Он стер три цифры у результата и получил $**198*7$. Какое число возводилось в пятую степень?

4. Зашнуровать спортивные туфли так, как изображено на рисунке, можно многими способами за счет различий в шнуровке изнутри. А сколько таких способов?

5. Однажды на лестнице я нашел странную тетрадь. В ней было написано сто следующих утверждений:

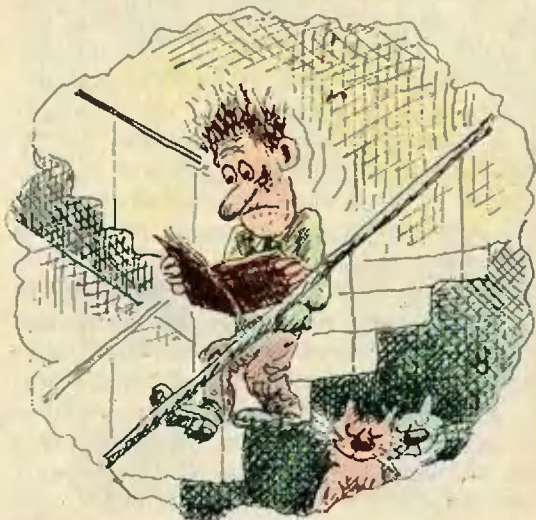
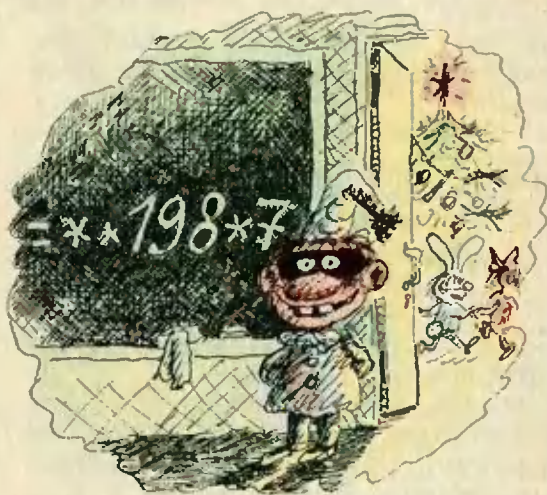
«В этой тетради ровно одно неверное утверждение».

«В этой тетради ровно два неверных утверждения».

«В этой тетради ровно сто неверных утверждений».

Какое из этих утверждений верное?

Эти задачи нам предложили А. К. Толпыго, С. В. Дворянинов, И. П. Нагель, Н. И. Зильберберг, А. П. Савин.



ЗАДАЧИ НА РАЗРЕЗАНИЕ

Кандидат физико-математических наук
А. П. САВИН

О ремесле, искусстве, спорте и науке
Те, кто интересовался шахматами, знают о давнем споре: что же такое шахматы — спорт, искусство или наука? По этому поводу написано много статей и книг, в которых сталкиваются различные точки зрения на эту увлекательную игру.

О математике вроде бы не поспоришь подобным образом. Это — наука! Даже «наука всех наук», как утверждают многие авторитеты. Но давайте немного подумаем.

Чему вы учитесь в школе на уроках математики? Составлять и решать уравнения, обращаться со степенями, логарифмами, производными и т. п. А чему учат, скажем, на курсах кройки и шитья? Кроить и шить платья, обращаться со швейными машинами, материалами и инструментами и т. п. Тут учат ремеслу, и на уроках математики учат ремеслу, умению проводить математические выкладки, что является составной частью подготовки технически образованного человека.

Ремеслу принято противопоставлять искусство. Заметим, что в Древней Греции математика относилась к числу искусств, наряду с музыкой, живописью и архитектурой (технику счета, взвешивания, измерения к математике не относили). И это было естественно, поскольку рассматривавшиеся задачи решались каждая отдельно, своим методом. Отношение к математике как к искусству сохранилось и в средние века. Тогда наряду с рыцарскими турнирами, состязаниями поэтов и трубадуров проводились и турниры математиков, где они демонстрировали свое искусство в решении задач.

Стоп, стоп! А где же наука математика? Какова ее роль? Математики открывают новые связи между математическими объектами. В результате этой работы находятся общие методы для решения различных классов задач. И эти задачи получают «стандартные» методы решения, пе-

реходя из разряда «творческих» задач в разряд «технических», т. е. требующих для своего решения применения уже известных методов.

Конечно, я не утверждаю, что обучение математике в школе и применение полученных знаний на практике полностью лишено элементов творчества. Наоборот, и ремесленник может создать произведение искусства, по-новому осмыслив производимые им изделия; и школьник, решая «стандартную» задачу в школе, может найти новый, красивый способ ее решения. Все сказанное имело целью подчеркнуть следующее: задачи делятся на те, для которых уже созданы специальные методы решения, и те, для которых таких методов нет. К последним относятся в большинстве своем задачи на разрезание. Действительно, сравним две задачи.

Первая задача — *решить уравнение**)

$$1 + \frac{2}{1+32} = 1987.$$

$$\frac{1+1024}{1+32}$$

$$\frac{1+2}{1+2}$$

$$\frac{1+2}{1+2}$$

$$\frac{1+2}{1+2}$$

$$\frac{1+2}{1+2}$$

$$\frac{1+2}{1+x}$$

Выглядит страшновато, не правда ли? По поводу таких уравнений даже существует старый школьный анекдот:

Учитель вызывает Петю к доске (на которой написано похожее уравнение) и говорит: «Найди *икс*!». Петя долго смотрит на доску, наконец, тычет в доску пальцем и радостно восклицает: «Вот он!».

Хотя здесь и не сразу разберешь, где же *икс*, но, последовательно упрощая выражение слева, шаг за шагом избавляясь от многоэтажности

*) Это уравнение пришло в редакцию наш читатель из Стерлитамака А. Сливак.

по известным правилам, мы приведем это уравнение к виду $x = -2$.

А вот другая задача: как разрезать правильный треугольник на четыре части, из которых можно было бы сложить равновеликий ему квадрат? Тут наши знания оказываются почти бесполезными.

Теперь собственно о разрезаниях

Решение задачи о разрезании равностороннего треугольника дано на рисунке 1, хотя, если вы пробовали найти его самостоятельно, у вас могло возникнуть сомнение в возможности такого разрезания даже на большее



Рис. 1.

число кусков. Но еще в начале прошлого века венгерский математик Ф. Больяи и австрийский любитель математики П. Гервин почти одновременно доказали, что любые два равновеликих многоугольника можно разрезать на попарно одинаковые части.

Любопытно, но для этого достаточно доказать, что любой многоугольник можно разрезать на части, из которых можно сложить равновеликий ему квадрат. Действительно, пусть мы можем разрезать каждый из двух равновеликих многоугольников на части, из которых можно сложить равновеликие им (и, следовательно, одинаковые) квадраты. Нанесем на одном таком квадрате границы уложенных на нем кусков первого многоугольника, а потом — границы кусков второго многоугольника (например, как на рисунке 2). Разрезав квадрат по всем полученным линиям, из образовавшихся кусков можно будет сложить как первый, так и второй многоугольник.

Преобразования параллелограмма и прямоугольника в квадрат, изображенные на рисунке 2, очень полезны как при конкретных разрезаниях, так и при доказательстве теоремы Больяи—Гервина, о которой мы говорили.

На рисунке 3 показано еще одно полезное преобразование параллелограмма в другой равновеликий ему



Рис. 2.



Рис. 3.

параллелограмм. Вначале мы проводим разрез AB , равный по длине стороне второго параллелограмма, а потом прикладываем часть C к противоположной стороне DE . У преобразованного таким образом параллелограмма сторона AB и высота, опущенная на AB , имеют уже нужную нам длину, однако углы могут еще не совпадать с углами требуемого параллелограмма. Поэтому мы проводим второй разрез DF (равный другой стороне искомого параллелограмма) и прикладываем часть G к противоположной, верхней стороне. Конечно, при этом у полученного параллелограмма ни одна из сторон и ни один из углов не совпадают со сторонами и углами исходного параллелограмма.

А на рисунке 4 показан «ступенчатый» способ разрезания, позволяющий некоторые прямоугольники «перекраивать» в квадраты с помощью разрезания всего на две части. Попробуйте сами выяснить, для каких прямоугольников это возможно.

Все эти приемы сродни приемам экономного раскроя ткани, которым обучают на уже упоминавшихся курсах кройки и шитья. Правда, там задача обратная — квадратный или прямоугольный кусок ткани следует разрезать так, чтобы в результате сшивания полученных кусков образовалось заданное изделие: рубашка, брюки или кепка. Там допускаются

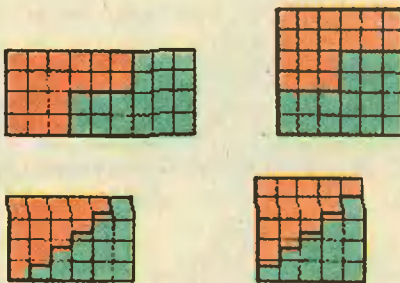


Рис. 4.



Рис. 5.



Рис. 6.

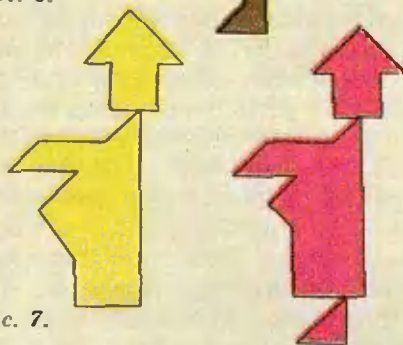


Рис. 7.

отходы, но, естественно, хочется, чтобы их было меньше. Неудивительно, что многие математики, в частности, замечательный русский математик Панфнутий Львович Чебышев, занимались задачами оптимального раскроя ткани.

Говоря о превращениях квадратного куска ткани в брюки, рубашку или чехол для автомобиля, нельзя не упомянуть о древней игре «Танграм», возникшей 4000 лет назад в Китае. Здесь квадрат уже разрезан на 7 частей (рис. 5), и из них нужно сложить заданные фигурки, такие, как, например, на рисунке 6. Сделать это не всегда просто. Посмотрите на рисунок 7. Вы видите два силуэта, сложенных из всех семи танграмов. У одного силуэта есть нога, у другого — нет*). Откуда взялась нога у правой фигуры?

А теперь предлагаем вам попробовать свои силы в задачах на разрезание. Все они формулируются однотипно: «Разрезать данную фигуру

на сколько-то частей так, чтобы из них можно было сложить равновеликий ей квадрат».

Указание на количество частей существенно: при отсутствии ограничения на число частей разрезание можно провести стандартными методами, вроде тех, о которых мы говорили, но на большее число кусков.

Если вам удастся уменьшить в какой-либо из задач число частей по сравнению с указанным — присылайте свои решения к нам в редакцию.

Задачи *)

1. Елочка. Разрежьте «елочку» на 4 части так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

2. Из двух — один. Разрежьте квадрат с дыркой двумя прямыми на 4 части так, чтобы из них и второго квадрата можно было сложить новый квадрат.

3. Из трех — один. Разрежьте большой квадрат на три части так, чтобы из полученных пяти фигур можно было сложить один квадрат.

4. Две фигуры. Из двух фигур, разрезав их, сделайте пять так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

5. Квадрирование фигуры. Изображенную фигуру разрежьте на 4 части, из которых потом можно было бы сложить квадрат.

6. Продырявленный квадрат. Разрежьте продырявленный квадрат на 8 частей, из которых можно сложить целый квадрат.

7. Зубчатый квадрат. Превратите зубчатый квадрат в обыкновенный, разрезав его на 5 частей.

8. Дырявый зубчатый квадрат. Разрежьте дырявый зубчатый квадрат на 5 частей так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

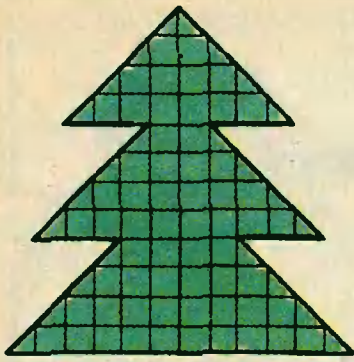
9. Лесенка. Превратите «лесенку» в квадрат, разрезав ее на три части.

10. Ступеньки. Сделайте ступенчатый разрез «ступеньки» на две части, из которых можно сложить квадрат.

11. Мальтийский крест. Разрежьте «мальтийский крест» на 5 частей так, чтобы из них можно было сложить квадрат.

*) Эту задачу мы взяли из сборника Я. И. Перельмана «Веселые задачи» (Начатки знаний, Петроград, 1919).

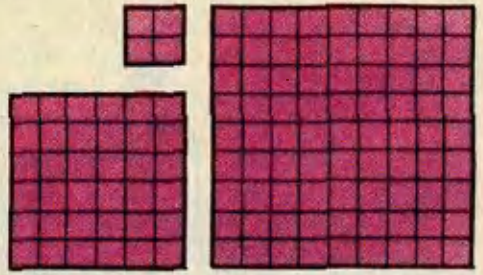
*) Задачу «Елочка» предложил П. И. Авилов, задачу «Из двух — один» — Н. К. Антонович, остальные задачи предложил Л. П. Мочалов.



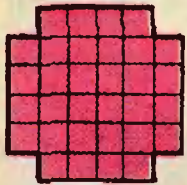
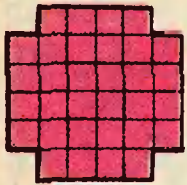
Елочка



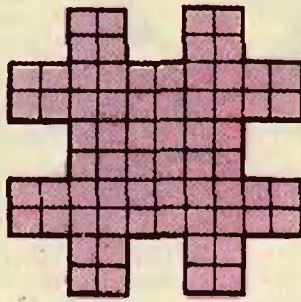
Из двух – один



Из трех – один



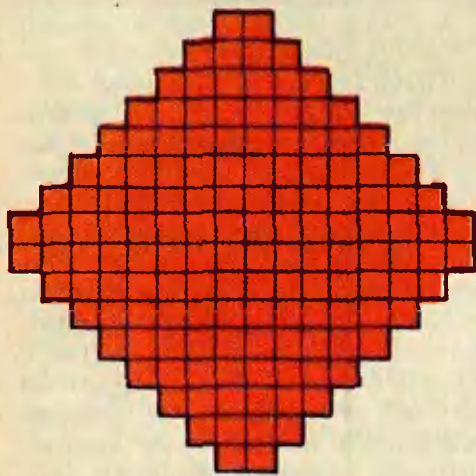
Две фигуры



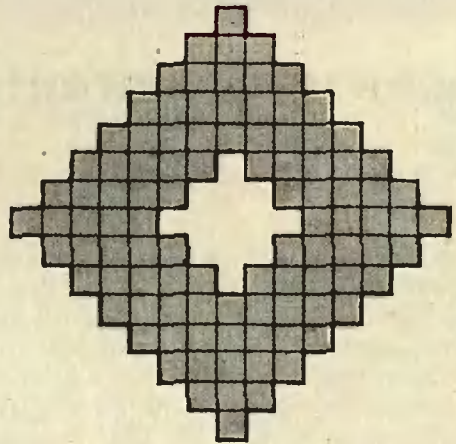
Квадрирование фигуры



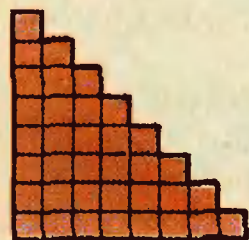
Продырявленный квадрат



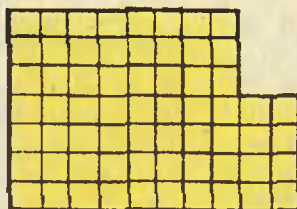
Зубчатый квадрат



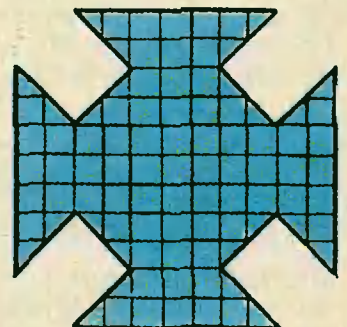
Дырявый зубчатый квадрат



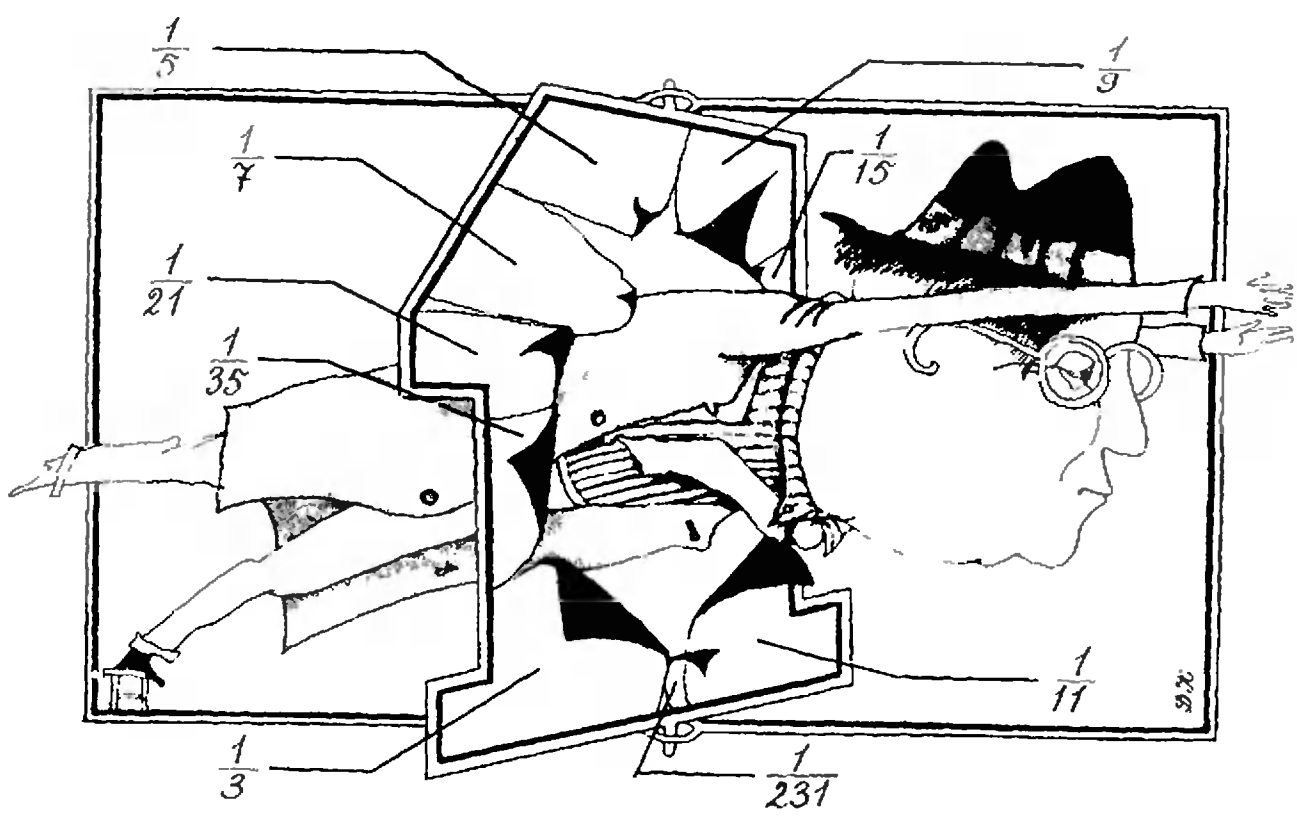
Лесенка



Ступеньки



Мальтийский крест



Математический кружок ●

Разбиение единицы

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n} \text{ *)}$$

О. Т. ИЖБОЛДИН, Л. Д. КУРЛЯНДЧИК

Существует много задач, связанных с суммами чисел, обратных натуральным. Неоднократно обращался к этой теме и наш журнал: в прошлом году в «Задачнике «Кванта» были помещены две такие задачи — М989 и М1010 (в «Кванте» № 6 и № 10). Решение первой из них было опубликовано (см. «Квант» № 10 за 1986 г.); решению второй и еще нескольким близким задачам посвящена эта заметка. Напомним формулировку задачи.

Последовательность r_1, r_2, r_3, \dots определяется условиями

$$r_1 = 2, r_{n+1} = r_1 r_2 \dots r_n + 1,$$

так что $r_2 = 3, r_3 = 7, r_4 = 43, \dots$

а) Докажите, что при любом n

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n} < 1.$$

б)* Пусть n натуральных чисел таковы, что сумма их обратных величин меньше 1. Докажите, что эта сумма не больше

По существу здесь требуется найти наилучшее приближение единицы снизу суммами дробей вида $1/n$ (кстати, такие числа носят название аликвотных, или египетских, дробей). Эта задача принадлежит американскому математику Келлогу. В 1915 году профессор Кармайкл, которому Келлог сообщил о ней, привел ее в своей книге «Диофантов анализ». В 1922 году она была решена американским математиком Кертисом. Мы приведем другое, гораздо более короткое решение. (Говоря об истории задачи, упомянем и о том, что она была опубликована под номером 70 в сборнике «400 избранных задач», выпущенном издательством «Мир» в 1977 г., но фактически без решения.)

Последовательность
2, 3, 7, 42, 1807, 3263443, ...

Равенство, определяющее последовательность r_n в условии задачи, можно переписать в виде

$$r_{n+1} = (r_n - 1)r_n + 1$$

*) В задаче был и третий пункт — лемма к решению задачи б) Мы приведем его позже

или

$$\frac{1}{r_{n+1}-1} = \frac{1}{(r_n-1)r_n} = \frac{1}{r_n-1} - \frac{1}{r_n}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \dots + \frac{1}{r_n} &= \\ &= \left(\frac{1}{r_1-1} - \frac{1}{r_2-1}\right) + \left(\frac{1}{r_2-1} - \frac{1}{r_3-1}\right) + \dots \\ &\dots + \left(\frac{1}{r_n-1} - \frac{1}{r_{n+1}-1}\right) = 1 - \frac{1}{r_{n+1}-1} < 1 \end{aligned}$$

(поскольку $r_1-1=1$). Тем самым доказано утверждение а) нашей задачи. Попутно мы доказали, что $1/r_{n+1}$ — наибольшее из чисел, обратных натуральным, которое можно добавить к сумме $1/r_1 + \dots + 1/r_n$ так, чтобы она осталась меньше 1 (добавив $1/(r_{n+1}-1)$, мы получили бы уже ровно 1). Таким образом, при построении последовательности $1/r_n$ нужно каждый раз «откусывать наибольший возможный кусок».

Отметим, кстати, что числа r_n появляются и в другой задаче, внешне очень далекой от нашей: «описать все наборы из n натуральных чисел, таких, что произведение любых $n-1$ из них в сумме с единицей делится на оставшееся». Проверьте самостоятельно, что числа r_1, \dots, r_n удовлетворяют этому условию. Полное решение этой задачи неизвестно; подробности обсуждались в статье А. Гейна «На пути к решению» (Квант, 1978, № 7, с. 9).

Но вернемся к задаче M1010 и объясним,

Почему последовательность $1/r_n$ наилучшая

Пусть сумма $1/a_1 + \dots + 1/a_n$, где a_1, \dots, a_n — натуральные числа, $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n$, — наилучшее приближение к единице снизу; существование такого приближения для каждого натурального $n > 1$ было доказано в решении задачи M989, в) (см. «Квант» № 10, 1986 г., с. 36). Положим $a_k = 1/a_k$ при $k=1, 2, \dots, n-1$, $a_n = 1 - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_{n-1}$. Мы покажем, что набор чисел a_1, \dots, a_n удовлетворяет следующим условиям:

$$a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n \geq 0, \quad (1)$$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1, \quad (2)$$

$$a_1 \dots a_k \leq a_{k+1} + \dots + a_n \quad \text{при } k=1, 2, \dots, n-1. \quad (3)$$

Это условия леммы, составляющей пункт в) задачи M1010. Согласно этой лемме, которая доказана ниже, число a_n , т. е. погрешность нашего приближения единицы, не меньше $1/(r_n-1)$, причем $a_n = 1/(r_n-1)$ только для набора $a_k = 1/r_k$, $k=1, \dots, n-1$. Следова-

тельно, $a_k = r_k$, что эквивалентно утверждению пункта б).

Итак, проверим условия (1)–(3) для a_1, \dots, a_n . Условие (2) очевидно; ясно также, что $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n-1}$. Покажем, что $a_{n-1} \geq a_n$. Поскольку рассматриваемое приближение единицы снизу наилучшее,

$$\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_{n-2}} + \frac{1}{a_{n-1}-1} \geq 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \alpha_n &= 1 - \frac{1}{a_1} - \dots - \frac{1}{a_{n-2}} - \frac{1}{a_{n-1}} \leq \\ &\leq \frac{1}{a_{n-1}-1} - \frac{1}{a_{n-1}} = \frac{1}{a_{n-1}(a_{n-1}-1)} \leq \\ &\leq \frac{1}{a_{n-1}} = a_{n-1}. \end{aligned}$$

Остается проверить неравенства (3). Они вытекают из следующих соотношений:

$$\begin{aligned} \alpha_{k+1} + \dots + \alpha_n &= 1 - \alpha_1 - \dots - \alpha_k = \\ &= 1 - \frac{1}{a_1} - \dots - \frac{1}{a_k} = \frac{N}{a_1 \dots a_k} = \\ &= N \cdot \alpha_1 \dots \alpha_k, \end{aligned}$$

где N — некоторое натуральное число, и поэтому последнее выражение не меньше $a_1 \dots a_k$.

Доказательство леммы

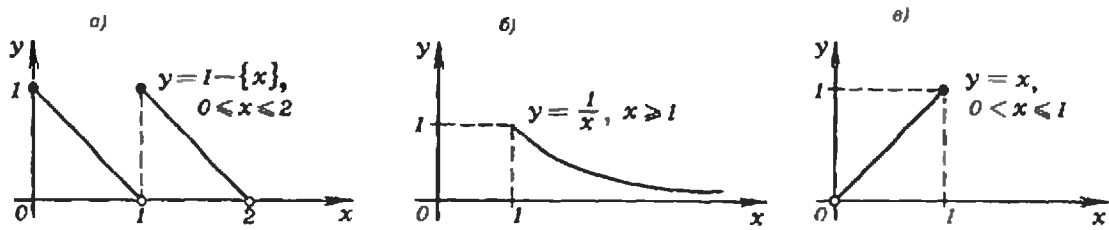
Мы должны доказать, что тот из наборов (a_1, \dots, a_n) , удовлетворяющих условиям (1)–(3), для которого a_n минимально, совпадает с набором $(1/r_1, \dots, 1/r_{n-1}, 1/(r_n-1))$.

Удобнее будет искать набор с минимальным произведением элементов; мы увидим, что у него будет минимален и последний элемент.

Итак, пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ — тот из наборов, удовлетворяющих условиям (1)–(3), для которого произведение $\beta_1 \dots \beta_n$ минимально (вопрос о том, почему такой набор вообще существует, мы обсудим позже). Заметим сразу, что $\beta_n > 0$, и следовательно, в силу (2) $\beta_1 < 1$. (Если $\beta_n = 0$, то из неравенства (3) последовательно получим: при $k=n-1$ — что $\beta_n = 0$, при $k=n-2$ — что $\beta_{n-2} = 0$ и т. д.; но все числа β_i не могут равняться 0, так как они в сумме дают 1.)

Докажем теперь, что для набора β все неравенства (3) обращаются в равенства.

При $n=2$ из (1)–(3) мы сразу получаем, что $\beta_1 \geq \beta_2 \geq 0$, $\beta_1 + \beta_2 = 1$ и $\beta_1 \leq \beta_2$, т. е. $\beta_1 = \beta_2 = 1/2$. Пусть $n > 2$.



Примеры функций, которые не принимают своего наименьшего значения на заданном промежутке: а) $y=1-\{x\}$ ($\{x\}$ — дробная часть числа x), $0 \leq x \leq 2$ — эта функция не непрерывна; б) $y=1/x$, $x \geq 1$ — область определения не ограничена; в) $y=x$, $0 < x \leq 1$ — область определения не замкнута.

Предположим, что среди неравенств (3) есть строгие. Тогда можно найти такие i и j , $1 \leq i \leq j \leq n$, что они строгие при $i \leq k < j$, а при $k=i-1$ и при $k=j$ обращаются в равенство (естественно, о случаях $k=i-1$ и $k=j$ надо говорить только при $i > 1$ и $j < n$ соответственно). Покажем, что можно «пошевелить» числа β_i и β_j так, чтобы условия (1)—(3) сохранились, произведение $\beta_1 \dots \beta_n$ уменьшилось. Поскольку это противоречит выбору β , предположение будет опровергнуто.

Заменим β_i на $\beta'_i = \beta_i + \varepsilon$, а β_j — на $\beta'_j = \beta_j - \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$. Произведение элементов нового набора β' будет меньше, чем у β , так как

$$\beta'_i \beta'_j = \beta_i \beta_j - \varepsilon(\beta_i - \beta_j) - \varepsilon^2 < \beta_i \beta_j.$$

Ясно, что набор β' удовлетворяет условию (2). Очевидно также сохранение неравенств (3) при $k < i$ и $k \geq j$ для любого $\varepsilon > 0$. При $i \leq k < j$ левая часть каждого из этих неравенств увеличивается в $(\beta_i + \varepsilon)/\beta_i$ раз, а правая уменьшается на ε и, поскольку для набора β они были строгими, при достаточном малом ε они не нарушаются.

Из неравенства (2) при нашей замене могут нарушаться только неравенства $\beta_{i-1} \geq \beta_i$ и $\beta_j \geq \beta_{j+1}$ (или $\beta_n \geq 0$ при $j=n$), но в действительности при достаточном малом ε этого не случится, так как все эти неравенства строгие. (Например,

$$\beta_{i-1} \geq \beta_i \dots \beta_{i-1} = \beta_i + \dots + \beta_n \geq \beta_n,$$

причем при $n > 2$ хотя бы одно из двух неравенств здесь строгое, потому что $\beta_i < 1$, а $\beta_n > 0$. Аналогично, $\beta_j > \beta_{j+1}$ при $j < n$.)

Подведем итоги. Выяснилось, что последовательность чисел β_1, \dots, β_n удовлетворяет системе уравнений

$$1 = \beta_1 + \dots + \beta_n,$$

$$\beta_1 = \beta_2 + \dots + \beta_n,$$

$$\beta_1 \beta_2 = \beta_3 + \dots + \beta_n,$$

.....

$$\beta_1 \dots \beta_n = \beta_n.$$

Вычитая из первого уравнения второе, из второго — третье и т. д., получим систему из $n-1$ уравнений

$$1 - \beta_1 = \beta_1,$$

$$\beta_1(1 - \beta_2) = \beta_2,$$

$$\beta_1 \beta_2(1 - \beta_3) = \beta_3,$$

.....

$$\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{n-2}(1 - \beta_{n-1}) = \beta_{n-1}$$

Ее первое уравнение дает $\beta_1 = 1/2$. Далее, мы можем переписать k -е уравнение ($2 \leq k \leq n-1$) в виде

$$\frac{1}{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_{k-1}} = \frac{1 - \beta_k}{\beta_k}$$

или

$$\frac{1}{\beta_k} = \frac{1}{\beta_1} \dots \frac{1}{\beta_{k-1}} + 1.$$

Поскольку $1/\beta_1 = 2 = r_1$, откуда следует, что $1/\beta_k = r_k$ при всех $k = 1, \dots, n-1$, а $1/\beta_n = 1/\beta_1 \cdot \dots \cdot 1/\beta_{n-1} = r_n - 1$.

Остается показать, что для любого набора $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, удовлетворяющего условиям (1)—(3) и не совпадающего с β , $\alpha_n > \beta_n$. Имеем:

$$\alpha_n^2 \geq \alpha_1 \dots \alpha_{n-1} \alpha_n \geq \beta_1 \dots \beta_{n-1} = \beta_n^2$$

(первое неравенство следует из условия (3) для α при $k=n-1$, второе — из выбора последовательности β). Таким образом, $\alpha_n \geq \beta_n$. Если $\alpha_n = \beta_n$, то $\alpha_1 \dots \alpha_n = \beta_1 \dots \beta_n$. Но тогда набор α удовлетворяет условиям (1)—(3) и имеет минимальное произведение элементов; мы видели, что в этом случае он совпадает с β .

Надо признать, что до сих пор наши рассуждения были в некотором роде построены на песке, а точнее — на недоказанном предположении о существовании набора с наименьшим произведением элементов. На более формальном языке оно звучит так: функция $f(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \alpha_1 \dots \alpha_n$ на множестве A наборов $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, удовлетворяющих условиям (1)—(3), принимает наименьшее значение. На рисунке показаны типичные ситуации, когда это утверждение не имеет места (для функций одной переменной). В курсах математического анализа доказывается, что непрерывная функция (одной или нескольких переменных), определенная на ограниченном и замкнутом множестве, принимает на нем наименьшее значение.

Поясним эту теорему на примере нашей функции f и множества A . Во-первых, ясно, что функция f непрерывна, т. е. ее значения для двух наборов, соответственные элементы которых достаточно мало отличаются друг от друга, будут сколь угодно близки. Во-вторых, множество A ограничено, т. е. элементы α_i любого входящего в него набора по абсолютной величине не превосходят некоторого фиксированного числа; у нас $|\alpha_i| \leq 1$. Наконец, множество A замкнуто; это означает, что если произвольная последовательность наборов из множества A сходится к $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ (т. е. первые элементы этих наборов образуют последовательность, сходящуюся к α_1 , вторые — к α_2 и т. д.), то и набор α принадлежит множеству A . Замкнутость множества A обеспечивается тем, что все неравенства в условиях (1)–(3) нестрогие.

Таким образом, теорема о достижении наименьшего значения подводит прочный фундамент под возведенную нами конструкцию и тем самым завершает решение задачи M1010. Довольно необычно, что в такой целочисленной задаче пришлось применить методы анализа. Впрочем, первоначальное решение, упомянутое в начале статьи, было чисто арифметическим.

В знаменателе — арифметическая прогрессия

Обсудим еще две задачи о представлениях целых чисел суммами чисел, обратных натуральным.

Задача 1. *Может ли целое число быть представлено в виде суммы $1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n$, где натуральные числа a_1, a_2, \dots, a_n образуют арифметическую прогрессию с ненулевой разностью?*

Начнем с наиболее простого случая, когда разность прогрессии равна 1. Итак, может ли число

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \dots + \frac{1}{a+n}$$

быть целым?

Нет, не может! Выберем из знаменателей те, которые делятся на максимальную степень двойки. Все дело в том, что если сумма целая, их по крайней мере два. (Иначе после приведения суммы к наименьшему обще-

му знаменателю получится дробь с нечетным числителем и четным знаменателем.) Пусть $p \cdot 2^k$ и $q \cdot 2^k$ — два таких знаменателя, где $p < q$, и p, q — нечетны. Тогда в сумму входит дробь со знаменателем $(p+1)2^k$, который делится на большую, чем 2^k , степень двойки. Противоречие.

Одновременно решена и известная задача о том, что сумма

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

не может быть целой.

Совершенно так же доказывается, что рассматриваемая в задаче сумма не может быть целой, если разность d прогрессии a_1, \dots, a_n нечетна — между двумя знаменателями $p \cdot 2^k$ и $q \cdot 2^k$ с максимальным k вставляется $(p+d) \cdot 2^k$.

Пусть теперь разность прогрессии равна 2. Случай, когда первый член a_1 четен, сразу сводится к случаю прогрессии $a_1/2, a_2/2, \dots, a_n/2$ с разностью 1. Если же a_1 — нечетное число, то в духе проведенных выше рассуждений можно доказать, что среди знаменателей есть ровно два, $p \cdot 3^k$ и $(p+2) \cdot 3^k$, делящихся на максимальную степень тройки 3^k . Значит, все знаменатели заключены между числами $(p-2) \cdot 3^k$ и $(p+4) \cdot 3^k$. Это позволяет оценить нашу сумму и показать, что она меньше 1. Так что и при $d=2$ она не может быть целой. Возникает желание перейти от разности 2 к произвольной четной разности так же, как мы перешли от разности 1 к произвольной нечетной. К сожалению, это принципиально невозможно, ведь в прогрессии может вовсе не быть чисел, кратных 3. Не помогает и замена степеней 3 на степени 5 или любого другого фиксированного числа. Тем не менее ответ на задачу 1 отрицательный. Быть может, наши читатели найдут достаточно простое доказательство этого; известное нам слишком сложно, чтобы привести его здесь.

Задача 2. *Из любой ли арифметической прогрессии натуральных чисел можно выбрать несколько различных чисел a_1, a_2, \dots, a_n таких, что $1/a_1 + \dots + 1/a_n = 1$?*

Ответ здесь утвердительный, но, как и в задаче 1, мы ограничимся только подбором нескольких примеров.

Проще всего придумать нужное разложение единицы для прогрессии четных чисел 2, 4, 6...; например:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12}.$$

Несколько сложнее обстоит дело с нечетными числами: одно из возможных разложений —

$$1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} + \frac{1}{35} + \frac{1}{231}.$$

И еще одна конструкция более общего характера — для произвольной прогрессии с разностью 1: $a, a+1, a+2, \dots$. Пусть k — такое натуральное число, что $2^k > a$. Если записать числители дробей в правой части равенства

$$1 = \frac{1}{2^k} + \frac{3}{3 \cdot 2^k} + \dots + \frac{2^{k+1} - 1}{(2^{k+1} - 1)2^k}$$

в виде сумм различных степеней двоек: $2^{l+1} - 1 = 1 + 2 + \dots + 2^l$, мы получим представление единицы сум-

мой дробей вида $2^s / (2m + 1)2^k$, где $s < k$. После сокращения на 2^s они примут вид $1/n$.

Задачи

3. Всякое ли положительное рациональное число представимо в виде суммы различных чисел, обратных натуральным?

4. а) На какое число различных слагаемых, обратных натуральным, можно разбить единицу?

б) Докажите, что это число не меньше 9, если знаменатели в разбиении нечетны.

5. Приведите пример разбиения из задачи 4, в котором все знаменатели кратны 3.

Решения следующих задач авторам неизвестны.

6. Назовем множество натуральных чисел массивным, если единица представляется в виде суммы нескольких различных чисел, обратных числам этого множества. Докажите, что при любом разбиении множества всех натуральных чисел а) на 2, б) на n , где $n > 2$, множеств хотя бы одно из них массивно.

7. Пусть $1/a_1 + 1/a_2 + \dots + 1/a_n = 1$ ($n > 3$), где $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ — натуральные числа. Докажите, что $a_n > 2n$.

Массу других интересных задач на эту тему можно найти в книге P. Erdős, R. L. Graham. Old and new problems and results in combinatorial number theory, Imprimerie Kundig, Genève, 1980.

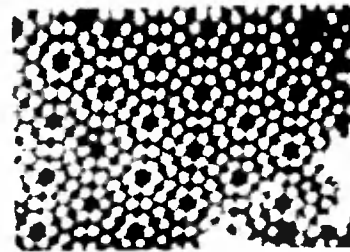
Туннельный микроскоп

(Начало см. на с. 19)

Пример такой карты поверхности кристалла кремния, полученной американскими учеными, приводится на рисунке справа. Отчетливо видны положения отдельных атомов кремния в периодической кристаллической структуре.

Сканирующий туннельный микроскоп построен и в нашей стране. Он отличается огромной, в атомном масштабе, областью сканирования — 10×10 мкм и возможностью работы в жидкой непроводящей среде. Второе важно вот почему. Обычно при экспериментах на туннельном микро-

скопе исследуемый образец, ради чистоты поверхности, помещается в высокий вакуум. Однако для достижения той же цели может оказаться выгодной и плотная среда. Так, жидкий углеводород, который используется в советском туннельном микроскопе, предохраняет поверхность об-



«Топографическая карта» участка поверхности кремния размером 175×115 А. Светлые места соответствуют положениям отдельных атомов кристаллической решетки.

разца от окисления и других воздействий атмосферы, а на работу микроскопа никак не влияет. Дело в том, что в зазоре «острие — поверхность» большая молекула жидкости поместиться не может, и условия работы туннельного микроскопа те же, что и в хорошем вакууме.

Сканирующий туннельный микроскоп в настоящее время представляет не только средство исследования поверхности, но и инструментом для воздействия на нее. Предполагается, что острием туннельного микроскопа можно «рисовать» на поверхностном слое структуры микросхем с размерами в сотни и даже десятки атомных. Не исключено, что скоро мы станем свидетелями нового этапа миниатюризации электроники. И поможет в этом сканирующий туннельный микроскоп.

А. П. Володин

Наша обложка



Ян Гевелий

1987 год по инициативе ЮНЕСКО (Организация Объединенных Наций по вопросам образования, науки и культуры) провозглашен годом Гевелия. Кто же он и чем заслужил такую высокую честь?

Ян Гевелий — выдающийся польский астроном XVII века. Он родился в Гданьске 28 января 1611 года и умер в том же городе 28 января 1687 года, прожив ровно 76 лет. На средства, унаследованные от отца — пивовара, он построил и оборудовал обсерваторию, которая долгое время была лучшей в Европе. Гевелий обладал необычайно острым зрением и превосходной зрительной памятью. И хотя в его обсерватории находились сделанные им телескопы, большинство наиболее точных наблюдений положения звезд он выполнил, не прибегая к их помощи.

Первым научным трудом Гевелия, изданным в 1647 году, была знаменитая «Селенография», в которой содержалось детальное описание видимой части поверхности Луны. Гевелий отпечатал эту книгу в своей типографии, изготовив для нее 133 искусных гравюры, из которых 60 изображали разные участки лунной поверхности и вид Луны в различных ее фазах.

Одна из этих карт воспроизведена на первой странице обложки нашего журнала.

Описывая Луну, Гевелий правильно объясняет детали рельефа ее поверхности, отмечает долины и горные цепи, которые отбрасывают изменяющиеся со временем тени. Ему удастся даже правильно оценить высоты лунных гор. До сих пор сохранились названия многих лунных хребтов — Альпы, Алтай, Кавказ, Карпаты, Апеннины, предложенные Гевелием. «Селенография» оставалась непревзойденной в течение целого столетия.

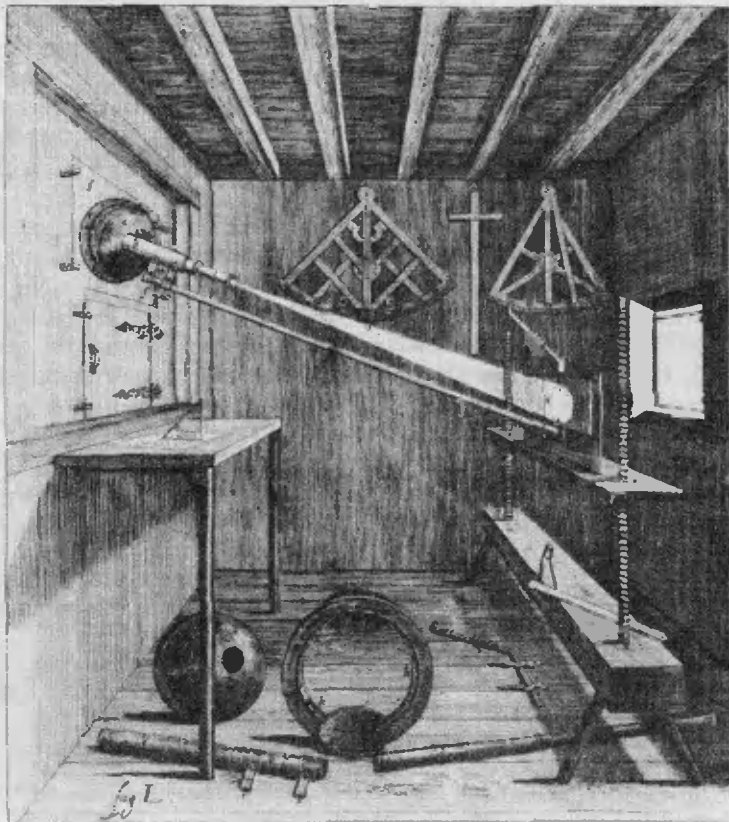
Любопытно отметить, что рукописный перевод «Селенографии» на русский язык был выполнен по заказу царя Алексея Михайловича и находился в его личной библиотеке. Именно по нему и знакомился с астрономией его сын, царевич Петр, будущий российский император. Экземпляр этот сохранился и находится в библиотеке Литов-

ской академии наук в Вильнюсе.

Гевелию принадлежит так много астрономических исследований, что трудно поверить в то, что все они сделаны одним человеком. Он правильно оценил расстояние от Земли до Луны, размеры Луны и ее период вращения, а также период собственного вращения Солнца. Он был одним из первых наблюдателей двойных и переменных звезд, довольно точно определял периоды обращения спутников Юпитера, открытые Галилеем. В изданной им в 1668 году «Кометографии» приведено систематическое описание и история наблюдения всех известных в то время комет, четыре из которых он открыл сам; впервые показано, что некоторые кометы движутся по параболическим орбитам. Составленный им каталог постоянных звезд содержал данные о 1564 звездах, которые видны над горизонтом Гданьска.

Жизнь преподнесла ему суровое испытание — в 1679 году сгорела его обсерватория вместе с находившимися там рукописями, книгами,

(Окончание см. на с. 57)



Прибор Гевелия для картографирования Луны.

Перевертыши

Кандидат физико-математических наук
В. Н. ДУБРОВСКИЙ

Раскрывать секрет решения головоломки — занятие столь же нечестное, как сообщать заядлому болельщику счет ночного футбольного матча перед его телевизионной трансляцией на другой день. Поэтому в нашем рассказе о двух головоломках-«перевертышах», знакомых читателю по обложкам 1-го и 2-го номеров «Кванта» за этот год, вопросов будет больше, чем ответов. Но прежде чем задавать вопросы и отвечать на них, напомним, как эти головоломки устроены.

В одной головоломке 8 одинаково раскрашенных в шесть цветов кубиков размером $1 \times 1 \times 1$ стоят вплотную друг к другу в квадратной коробке размером 3×3 (рис. 1). В другой головоломке вместо кубиков берутся 23 одинаковых пирамидки (правильных тетраэдра) с раскрашенными в четыре цвета вершинами (рис. 2,а), которые размещаются в коробке, имеющей форму правильного шестиугольника со стороной, в два раза большей ребра пирамидки (рис. 2,б). В обеих головоломках одно место пусто — «дырка», что позволяет переставлять элементы (кубики и пирамидки), *перекатывая их через ребро*. Задачи, которые мы будем обсуждать, звучат для двух головоломок по-разному. Пирамидки надо научиться переводить в «правильное», или «начальное», положение, показанное на рисунке 2,б, после

того, как оно было разрушено произвольными перекатываниями. У кубиков много правильных положений (что это такое — ясно из рисунка 1; проверьте, что имеется 24 правильных положения); требуется одно из них превратить в другое. Но обе эти задачи — частные случаи общей для всех «перестановочных» головоломок задачи: для любых двух размещений элементов *выяснить, переводится ли одно в другое, а если да, то каким образом*.

Кубики

Попробуем придумать операции, которые бы поворачивали кубик, оставляя его на месте, — тогда можно будет повернуть все кубики поочередно. Поставим в коробку только один кубик и прокатим его по квадрату 2×2 вокруг одной из вершин основания A (рис. 3). Когда он вернется на место, мы увидим, что он повернулся относительно исходного положения на 120° около диагонали, выходящей из вершины A . Точно так же можно катать по квадрату 3 кубика — цепочкой: после четырех ходов дырка вернется на место, а кубики циклически переставятся (рис. 4) — эту операцию, когда перестановка происходит против часовой стрелки вокруг точки A , обозначим C_A . Ясно, что операция C_A^3 (тремякратно повторенная C_A) возвращает все 3 кубика на исходные места, причем каждый из них поворачивается на 120° вокруг своей диагонали, выходящей из A (см. рис. 4). Чтобы повернуть эти же кубики в обратном направлении, нужно выполнить обратную операцию $C_A^{-3} =$

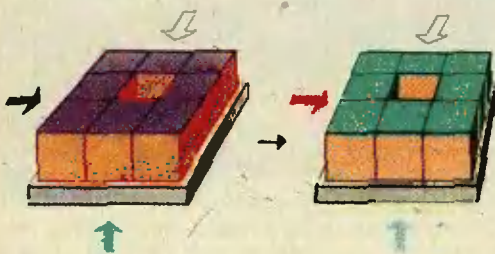


Рис. 1.

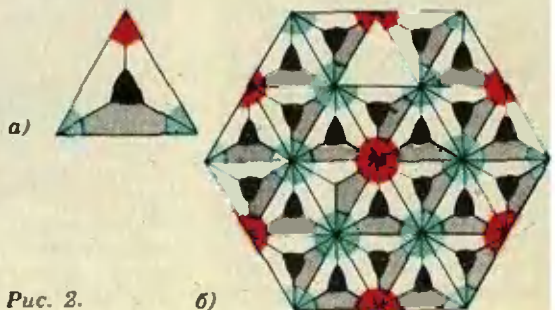


Рис. 2.

б)



Рис. 6.

Другой изъян нашего решения в том, что оно неполно: мы указали только два варианта поворота кубиков (на 180° вокруг осей, параллельных бортам коробки), но, как следует из задачи 2, таких вариантов, даже если оставлять кубики на своих местах, может быть 11.

Задачи

3. Придумайте операции, поворачивающие на месте только один кубик на 120° вокруг его диагоналей.

4. Найдите как можно более короткие решения головоломки «кубики-перевертыши» для всех 23 «правильных» расстановок, отличных от исходной.

5. Как узнать по двум данным расстановкам кубиков, переводится ли одна в другую? Каково максимальное число попарно непереводимых друг в друга расстановок?

Пирамидки

Правила действий с пирамидками-перевертышами как будто такие же, как с кубиками. Но сходство между ними оказывается чисто внешним. Дело в том — и это очень существенно, — что в отличие от куба ориентация правильного тетраэдра после нескольких перекатываний однозначно определяется его исходным положением и полем, на которое он попал, и не зависит от его маршрута.

Это легко доказать с помощью рисунка 6. Нашу пирамидку можно

поставить любой гранью на один из треугольников сетки, изображенной на этом рисунке, так, чтобы цвета ее вершин совпали с цветами соответствующих узлов сетки. Более того, если цвета вершин и узлов совпали, то независимо от того, на каком треугольнике сетки оказался тетраэдр, они будут совпадать и после перекатывания через любое ребро. Следовательно, каким бы путем ни прикатить пирамидку на заданную ячейку, итоговое расположение цветов ее нижних вершин, а значит и цвет верхней вершины, будет одним и тем же.

Доказанное свойство пирамидок вынуждает нас отказаться от прежней стратегии — поворачивать элементы по отдельности, каждый на своем месте, — ведь если прокатить пирамидку по замкнутому пути, она вернется точно в начальное положение. Наоборот, для каждой пирамидки придется искать место, куда ее надо прикатить, а тогда уж нужная ориентация установится автоматически.

Возьмем одну пирамидку в «правильном» положении (рис. 7) и обойдем ею все поля нашей шестиугольной коробки. Мы увидим, что только на двух полях ее ориентация будет «правильной»: на исходном поле и на поле, симметричном ему относительно центра шестиугольника. (Это легко проверить, «накладывая» рисунок 6 на рисунок 7: при любом наложении только на двух парах полей совпадут цвета вершин.) Заномеруем числами от 1 до 12 поля головоломки (рис. 8) так, чтобы симметричные поля получили одинаковые номера, а каждой пирамидке дадим номер поля, на котором она стоит в «правильном» положении. Наша цель — перевести каждую пирамидку на поле с ее собствен-

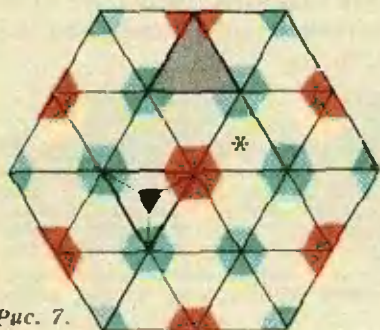


Рис. 7.

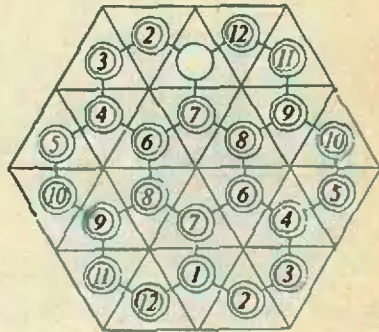


Рис. 8.

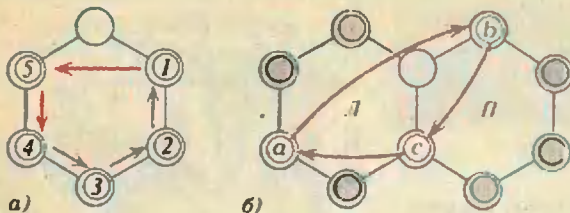


Рис. 9. а) Если последовательно передвинуть фишки 1, 2, 3, 4, 5, 1, получится циклическая перестановка, показанная красными стрелками. б) Пусть Л и П — циклические перестановки рисунка а) для левого и правого шестиугольников рисунка б); тогда операция $П^2Л^3П^{-2}Л^{-2}$ циклически переставляет три фишки а, б и с.

ным номером. Полного решения этой задачи мы не даем. Заметим лишь, что она упростится, если заменить 24 треугольника нумерованными кружками, а пирамидки — 23 фишками (см. рис. 8), которые разрешается передвигать на пустой кружок по голубым линиям. (Они соединяют кружки, отвечающие соседним треугольникам.) Головоломки этого

типа подробно обсуждались в статье Д. Вакарелова «Путешествия по графам» («Квант», 1986, № 7, с. 50).

Здесь мы подскажем только одну, но очень полезную операцию — циклическую перестановку 3 фишек — см. рисунок 9 (заметьте, это снова коммутатор!).

Итак, эта игра, в отличие от кубиков-перевертышей, оказалась очень близка к знаменитой «игре 15», хотя с виду должно быть как раз наоборот. Но в «игре 15» все фишки действительно пронумерованы, поэтому сразу ясно, где место каждой; пирамидки сами по себе абсолютно одинаковые, различаются они только своим расположением относительно коробки, и нужны известные усилия и тренировка, чтобы научиться безошибочно определять, куда какую пирамидку ставить.

Задача 6. При каком условии некоторую расстановку пирамидок можно перевести в правильную? Каково максимальное число попарно непереводаемых друг в друга расстановок?

Ян Гевелий

(Начало см. на с. 53)

астрономическими инструментами. Пожар уничтожил также все его имущество. Но он мужественно перенес это несчастье и при первой же возможности возобновил свои исследования.

Сегодня мы знаем о Луне намного больше, чем во времена Гевелия. Сфотографирован и детально изучен рельеф ее обратной стороны. Космические аппараты исследовали ее поверхность и принесли нам образцы лунного грун-

та. На Луне побывали и первые астронавты.

На второй странице обложки воспроизведен фрагмент карты Луны, на котором изображен участок обратной стороны, прилегающий к Моря Москвы (диаметр этого моря составляет 460 км). Оно впервые было обнаружено на фотографиях, полученных советской автоматической межпланетной станцией «Луна-3» в 1959 году. В 1961 году Международной астрономической союз утвердил восемнадцать наименований объектов обратной стороны Луны, и среди них — Море Москвы. Позднее к ним было добавлено еще более пятисот наименований деталей лунного рельефа обратной стороны Луны. Международной астрономической союз увековечил имена выдающихся деятелей науки и техники — Ломоносова, Циолковского, Королева, Лебедева,

Мандельштама, Курчатова, Арцимовича, Пастера, Кюри, Ферми и многих других. В лунную номенклатуру вошли также имена погибших космонавтов — Комарова, Волкова, Добровольского, Пацаева, Грессома, Уайта, Чаффи. Вокрестностях Моря Москвы расположены кратеры, названные именами советских космонавтов Титова, Николаева, Терешковой, Беляева, Леонова, Шаталова, Феоктистова. Они хорошо видны на фрагменте лунной карты, изображенном на второй полосе обложки. В районе бассейна Аполлон и Моря Спокойствия шесть кратеров носят имена американских астронавтов — участников лунных экспедиций. Это кратеры Армстронг, Олдрин, Коллинз, Андерс, Борман и Ловелл.

Ж. Ф. Родионова,
В. А. Лешковцев

„Квант“ улыбается

Математика в жизни

В городе Долгопрудном, где расположен Московский физико-технический институт, имеется всего два автобусных маршрута: № 368 (связывающий город с Москвой) и № «К» (кольцевой). Однако одному из студентов МФТИ удалось доказать следующее утверждение.

По городу Долгопрудному ходят автобусы со всеми маршрутными номерами n , большими или равными 368.

Доказательство проводится по индукции. Для этого нужно проверить справедливость следующих двух высказываний.

1. Утверждение справедливо при $n=368$.

2. Из справедливости утверждения при $n=k-1$ следует его справедливость при $n=k$.

Первое высказывание справедливо, т. к. маршрут № 368 в г. Долгопрудном есть.

Второе тоже справедливо, т. к. маршрут № «К» тоже есть.

Таким образом, утверждение доказано.

А. П.



Вести с экзаменов

Газы можно сжать сильнее потому, что воздух — это небесное пространство, а жидкость — это вода, которую когда сожмешь, то она вытечет.

Почему газы можно сжать больше, чем жидкость? Потому, что газ невидим, а жидкость видна.

Пришла С. Байбулатова

Сверхпроводимость — это когда проводимость осуществляется с большой скоростью и силой.

Сверхпроводимость — это когда сопротивление исчезает вдруг вообще. То оно есть, а то его нет.

Металлами называются твердые сплавы.

Металлы при маленькой температуре ржавеют, а при высокой плавятся.

Металл — это сплав железа.

Твердые тела — плотная и сильно порядочная среда.

Температура металла зависит от его сопротивления.

Пришла Б. И. Геллер

Ученые — свет, а

— Вы мне нравитесь, — сказала окружность треугольнику.

— Но мы с Вами не пара, милочка. Ведь я такой разносторонний, к тому же у меня целых три вершины, а Вы однообразно круглая, — последовал ответ.

По своей простоте он не знал, что окружность вписывается в любой треугольник.

Я. Ф. Шкляр



Компьютеры на берегу Оби

Летом нынешнего года в нашей стране будут проведены четыре региональные летние школы юных программистов: в Новосибирске, Вильнюсе, Переславле-Залесском и Симферополе. В «Кванте» № 6 мы писали о переславской летней школе 1986 года, в этом номере рассказываем о Всесоюзной летней школе, состоявшейся в Новосибирске.

Волны Обского моря плещутся у высокого берега, к которому вплотную подступили стройные сосны. Здесь в молодежном туристском центре «Сибиряк» во второй половине августа необычная смена — «Сибиряк» отдал Всесоюзной летней школе юных программистов. Такие Школы стали традицией: с 14 по 28 августа 1986 года недалеко от новосибирского Академгородка проходила уже одиннадцатая Школа. Со всех концов страны — от Владивостока до Кишинева — приехали ее 225 участников. В числе участников Школы и зарубежные гости — школьники из Чехословакии и ГДР.

Немецкую делегацию сформировали учащиеся математических спецшкол из разных городов ГДР, а школьники Словакии прибыли из Братиславы, которая является признанным центром школьной информатики в ЧССР.

В традициях Школы и молодежный лекторский состав — разработчики учебно-производственного языка программирования Рапира, и современная вычислительная техника, и костры на берегу моря, и веселые песни о программистах. Бесмеинный научный руководитель новосибирских летних Школ — академик А. П. Ершов. Он торжественно открыл Школу, вместе с руководством Школы и туристского центра провел а «Сибиряк» пресс-конференцию для корреспондентов центральных и сибирских газет, принял участие в методиче-

ском семинаре преподавателей, вручил награды победителям и активистам на торжестве окончания Школы. Гостями Школы были секретарь новосибирского Обкома ВЛКСМ Т. Н. Абрамова и проректор Новосибирского университета им. Ленинского Комсомола профессор, доктор физико-математических наук В. Н. Врагов. Ряд обзорных лекций прочитали известные ученые специалисты А. Н. Терехов (Ленинград, ЛГУ), В. И. Нифонтов (Новосибирск, Институт ядерной физики СО АН СССР), А. Ю. Кривцов (Москва, НИИ Вычислительных комплексов), А. Г. Марчук (Новосибирск, ВЦ СО АН СССР).

В учебную программу Школы были включены различные языки программирования — Рапира, Паскаль, Си, Бейсик, операционные системы и отдельные их модули, различные аспекты системного и прикладного программирования, технологические проблемы программирования.

Интерес к информатике у школьников растет с каждым годом. Неудивительно поэтому, что в Новосибирск приехали сильнейшие из юных программистов. Вместе с тем уровень знаний и практический опыт у школьников сильно различались. Поэтому учащиеся были распределены на несколько учебных потоков, каждый из которых характеризовался как силой учащихся, так и тяготением к одной из двух основных моделей вычислительных машин, представленных на Школе — советским «Агатом» или японским «Ямахам». Внутри каждого потока было сделано еще одно разбиение школьников — побригадное. Бригада — это небольшой коллектив учащихся из двух-четырех человек. Во время Школы бригада работала над отдельным заданием — программой или пакетом программ. Тематика пакетов заданий определялась в первую очередь пожеланиями школьников. Не-

которые из них привезли с собой постановки задач, но большинство заданий было предложено учебным сектором Школы. При всем разнообразии тем пакетов выделяются два главных тематических направления: игровые программы на младших потоках и учебно-ориентированные пакеты прикладных программ, предназначенных для использования ЭВМ в ходе школьных уроков — на старших. Интересные игровые программы создали немецкие школьники Штефан Эйрлих и Александр Шаков, Александр Матрос из Петропавловска, Владимир Гофлин из Алма-Аты, красноярец Алексей Федотов, рижанин Миндаугас Плукас и другие. И хотя на Школе было предложено немало готовых игр-программ (в течение полутора часов ежедневно на цветных экранах дисплеев можно было выбрать любую из полусотни увлекательных игр), многие с гораздо большим интересом работали над собственными, оригинальными игровыми проектами.

И все же главная забота школьников — учеба. Поэтому много хороших работ было сделано в помощь школе. Для уроков математики могут быть рекомендованы программы построения графиков функций, над которыми трудились И. Комаров, М. Базинов, Р. Хмелевский из Новосибирска, программы вычисления арифметических выражений с обыкновенными дробями, которые сделали одесситы О. Ниц и М. Альт, работа А. Хасанова из Свердловска «Операционная среда для обучения построению сечений геометрических тел», пакеты обучения по геометрии-8 (К. Обжерин, Новосибирск), алгебре-8 (А. Тюрин, Новосибирск), программа обучения алгоритму Евклида, предложенная коллективом юных томичей, несколько разных по своим возможностям программ для уроков стереометрии, написанных красноярцами, новосибирцами, немецкими гостями.

Резаята, которые делили свои интересы между информатикой и физикой, представили на конференцию школьных научных работ доклад по моделированию броуновского движения молекул (Ю. Левин, Харьков) и А. Воробьев, Новосибирск), по расчету электрических цепей (Н. Бурученко, Е. Шостак, Е. Баранова, Красноярск), по

способам регистрации частиц высоких энергий (А. Ляшенко, Москва).

Хорошо сделан химический пакет «Титрование», позволяющий провести (или, точнее, промоделировать) на экране школьного дисплея убедительные и красиво оформленные опыты по химии. Сами за себя говорят названия докладов юных программистов, второе увлечение которых — биология: «Экологическая система» (коллектив школьников Ангарска), «Биомоделирование» (М. Ямпольский, Харьков). Но если школьники аплодировали своим сверстникам, рассказывавшим о проектах применения ЭВМ на уроках физики и математики, то легко понять тех, кто решил помочь учителю родного предмета — информатики. Ленинградки С. Иванова, А. Обловатская и А. Матвеева показали программу, демонстрирующую поведение структур данных — деков, стеков и очередей. Такая программа поможет учителю на уроке информатики интересно и наглядно рассказать о весьма сложных понятиях информатики. А. Хасанов (Свердловск) разработал строковый редактор для языка программирования Лого, москвичи В. Гурарий, О. Покровский и Д. Петрова — средства графики в языке программирования Си.

Далеко не все работы школьников можно вписать в рамки этих двух направлений. Так, сформировавшийся на Школе дуэт Д. Соколова (Горький) и Г. Нишанова (Фрунзе) был увлечен практической задачей полуавтоматического составления расписания школьных занятий; не менее важна в практическом отношении программа проверки знания правил дорожного движения (Д. Бугучану, Кишинев, К. Курочкин, Новосибирск); харьковчанин М. Ямпольский улеялся более абстрактной, но не менее сложной проблемой построения множеств Мандельброта.

Целая серия интересных программ была посвящена обработке музыкальной информации. Важнейшим фактором успеха в этой области была квалифицированная постановка задач сотрудником новосибирской консерватории им. М. И. Глинки С. А. Чельдиевым. Под его руководством выполнили свои работы учащиеся А. Гершун, Д. Измал-

ков (Москва) «Тренажер» «Музыкальный диктант», Н. Никогдина (Петропавловск) «Начальное обучение музыке», А. Гераськин, А. Черников и О. Никандров (Ульяновск) «Обучающий музыкальный пакет для начинающих». Эти программы найдут свое применение на уроках сольфеджио в музыкальных школах.

По-настоящему интернациональным проектом оказалась достаточно сложная задача по машинному синтезу речи. Бригада школьников, составленная из представителей всех трех стран, участвовавших в Школе, успешно завершила программу, которая по набранному на клавиатуре тексту (слову или целой фразе) воспроизводила голосом «Ямаки» достаточно четко и внятно подавляющее большинство заданий — тестов.

Главные участники Школы — девятиклассники, однако в целом возрастной спектр школьников очень широк. Среди многочисленных школьников, награжденных призами, грамотами и сувенирами, трое получили почетные грамоты «Пионерской правды»: М. Белопицкий (Красноярск), Б. Кардаков (Новосибирск) и Д. Рафиков (Ленинград).

С интересом и пользой провели время на Школе самые младшие ее участники: впервые в Школе приняла активное участие экспериментальная группа из шести младших школьников (1 второклассник, 3 третьеклассника, 2 четвероклассника). Этой группе был специально выделен кабинет, представляющий собой локальную сеть из 7 французских ПЭВМ «Томсон». Все «малыши» были награждены почетными грамотами за активную работу на Всесоюзной летней школе юных программистов и успешное овладение языком программирования Лого. И недаром: им пришлось управлять роботом-черепашкой на экране дисплея, рисовать красивые многоцветные узоры, составлять программы, по которым компьютер «пел» знакомые и незнакомые песенки. Дети с удовольствием знакомились с мечтой А. Н. Скрябина о цветомузыке и сами с увлечением реализовали на своих экранах эту мечту. С неисчерпаемым весельем наблюдали они за результатами собственных программ, которые, рабо-

тая со списками заданных подлежащих и дополнений (имена школьников), сказуемых и обстоятельств (забавно сочетаемые глаголы и наречия) и датчиком случайных чисел, писали «сочинения». Программы рассказывали такие «истории», что на хохот малышей сбегались старшие ребята из соседних домиков. Понятно, что картинки и песенки не были самоцелью этих уроков — школьники научились свободно оперировать фундаментальными понятиями информатики — циклами и процедурами с параметрами, рекурсиями и списками, файловой системой и редактором процедур. Для младших школьников был подготовлен (специально для новосибирской летней Школы) рукописный учебник «Уроки информатики на Лого».

Учеба — утром, практические занятия — днем, встречи с учеными Академгородка и гостями Школы — вечером. Кандидат физико-математических наук Ю. М. Брук из Москвы провел на Школе «Физические вечера». Это были рассказы о пульсарах, нейтронных звездах, о том, как радиоастрономы наблюдают Вселенную, как физики делают оценки. А. А. Берс (ВЦ СО АН СССР, Новосибирск) рассказывал собиравшимся на берегу Оби ученикам свои вечерние сказки о программировании — непринужденные беседы о технологиях программных проектов.

Четырнадцать дней Школы — это две недели лета. И хотя умы и сердца школьников были заполнены компьютерами, ребята находили время для спортивных встреч между отрядами, для экскурсий в Вычислительный центр СО АН СССР, в Институт ядерной физики, в музей Института геологии и Института истории СО АН, на выставку художественной галереи Новосибирска, на автордео. Гостем Школы был симфонический оркестр школьников Академгородка. И, как всегда на берегу Обского моря звучали гитары и сочиненные здесь же песни о любимых компьютерах и дорогах учителях.

Л. В. Городняя,
Ю. А. Первин

Юные программисты в Ленинграде

В середине марта весна в Ленинграде еще только вступала в свои права. Яркое солнышко уже напоминало о приближающихся школьных каникулах. Программистам же, собравшимся в эти дни во Дворце культуры работников просвещения Ленинграда, было явно не до каникул. Настроение у всех было очень рабочее. Здесь проходила научно-техническая конференция по школьной информатике. Шестой год подряд собираются на такие конференции школьники и студенты, учащиеся профессионально-технических училищ, учителя и преподаватели аузов. О своей работе рассказывали ребята из Таллина и Ленинграда, Москвы и Йошкар-Олы, Новосибирска и Ульяновска, Свердловска и Владивостока, Тбилиси и Вильнюса...

То, что столь представительные конференции юных программистов проходят в Ленинграде, конечно, не случайно. Еще в 1979 году ленинградцы принимали активное участие в работе Всесоюзной заочной школы юных программистов, организованной журналом «Квант» вместе с ВЦ Сибирского отделения АН СССР. Тогда же в Ленинграде появилась и очная школа юных программистов. В 1986 году уже 45 % ленинградских школьников получили выход на ЭВМ. Большую помощь в этом оказали школам вузы и предприятия Ленинграда,

предоставившие школьникам возможность работать на своей вычислительной технике. Многие программы ленинградских школьников внедрены в школьный учебный процесс. А ленинградские предприятия заказывают и оплачивают разработки юных программистов.

Опыт, накопленный в школьной информатике в разных городах страны, показывает, что ребятам многое по силам. Они делают содержательные и интересные пакеты обучающих программ по курсам физики, математики, русского и иностранных языков, химии, музыки, вполне успешно «конкурируя» с профессиональными разработчиками таких программ.

Оргкомитет конференции возглавляли академик А. П. Ершов и лауреат Государственной премии профессор М. В. Игнатьев. Всего на конференцию было заявлено около трехсот докладов. Жюри конференции, оценивавшее доклады, отметило специальными дипломами 68 работ. В состав жюри входили ленинградские ученые и организаторы конференции — представители Межотраслевого комитета Ленинградского областного совета научно-технических общества по работе с молодежью, областного правления научно-технического общества радиотехники, электроники и связи им. А. С. Попова, Ленинградского инсти-

тута авиационного приборостроения, Главного управления народного образования Ленинграда и других организаций.

Не только об успехах, но и о проблемах и перспективах широкого внедрения вычислительной техники в школы рассказывали на пленарных заседаниях академик А. П. Ершов, ученые и методисты из различных научных центров и вузов. Была у участников конференции возможность продемонстрировать свои разработки и программы непосредственно на ЭВМ, установленных в залах Дворца культуры и в расположенном неподалеку от него Центре школьной информатики Октябрьского района Ленинграда.

Основная же работа проходила по секциям: «Обучающие программы», «Системное программное обеспечение», «Прикладное программное обеспечение», «Информационные системы», «Игровые программы», «Целевые игры». На каждой из них было чему поучиться, что позаимствовать. И, увы, был очень жесткий лимит времени — конференция продолжалась всего два дня. А проводить и расширять такую работу безусловно нужно, она очень полезна и школьникам, и преподавателям основ информатики и вычислительной техники. Пожалуй, не будет преувеличением сказать, что обмен опытом и личные контакты юных и взрослых программистов — существенный фактор успешного развития школьной информатики.

Гости Ленинграда побывали в музеях и школах города, вместе с ленинградскими школьниками посетили исторические места и театры Ленинграда. Расставались, конечно, с грустью. До встречи в будущем году. Творческих вам всем удач, ребята!

Г. Н. Бровина



Учащиеся в кабинете вычислительной техники Центра школьной информатики.

Заочная школа при НГУ

При Новосибирском ордена Трудового Красного Знамени государственном университете им. Ленинского комсомола работает Заочная школа (ЗШ) для учащихся 8—10 классов общеобразовательных школ Сибири, Дальнего Востока, Средней Азии и Урала.

Основная задача ЗШ — оказывать помощь в формировании и развитии у учащихся интереса к естественным наукам.

В ЗШ 5 отделений: математическое, физическое, химическое, биологическое и экономическое. На математическое, физическое и химическое отделения принимаются учащиеся 8—10 классов, на биологическое — только учащиеся 9 классов, на экономическое — только учащиеся 10 классов.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ могут быть приняты также математические, физические, химические, биологические и экономические кружки и факультативы, которые работают в школе под руководством учителя. Руководители кружков набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших первое задание по соответствующему предмету. Кружок принимается в ЗШ, если руководитель сообщает в ЗШ свою фамилию, имя, отчество и высылает поименный список членов кружка (с указанием итоговых оценок за первое задание), подписанный директором школы и заверенный печатью. После этого члены

кружка считаются учащимися ЗШ.

Учащиеся, принятые в ЗШ, и руководители кружков будут получать задания ЗШ, а также дополнительные материалы. Работы учащихся-заочников проверяют в ЗШ, а работы членов кружков — его руководители (по желанию руководителя часть работ членов кружка может быть проверена и в ЗШ).

Чтобы стать учеником Заочной школы при НГУ, необходимо выслать на имя директора ЗШ заявление, написанное на почтовой карточке, с просьбой прислать первое задание. Срок отправки заявления — не позднее 20 сентября (по почтовой карточке места отправления). В заявлении необходимо также указать следующие сведения о себе:

Ваша фамилия, имя, отчество (полностью, печатными буквами)

Класс, в котором вы учитесь в своей школе

Отделение ЗШ, на котором Вы желаете учиться (можно указать два)

Подробный домашний адрес с обязательным указанием индекса почтового отделения

дится по результатам первого задания. В тех случаях, когда число желающих учиться в ЗШ превышает возможности нашей школы, предпочтение может быть отдано школьникам из села или из малых городов и поселков.

Заявление о приеме на математическое или на физическое отделение ЗШ можно выслать вместе с решениями соответствующего первого задания, публикуемого ниже, не позднее 10 октября.

Решения задач нужно записать в простую ученическую тетрадь в клетку, оставляя поля для замечаний преподавателя. На обложке тетради укажите те же сведения о себе, что и в заявлении. Работы отсылайте вместе с заявлением только простой бандеролью (тетрадь не перегибайте и не сворачивайте в трубочку). В тетрадь с решениями вложите листок размером 6×10 см с написанным на нем вашим адресом (его

НИКОЛАЕВ ИГОРЬ
ИВАНОВИЧ

8 «а»

математическое (и физическое)

632149 Новосибирская обл.,
с. Мезениха, ул. Андрианова,
д. 28 «а», кв. 5, Николаеву
Игорю Ивановичу

Руководитель кружка должен прислать на имя директора ЗШ письмо с просьбой выслать первое задание и дополнительные материалы к нему. Зачисление в ЗШ произво-

наклеят на конверт, когда будут отсылать ответ).

Наш адрес: 630090 Новосибирск, ул. Пирогова, 11. Заочная школа при НГУ.

Первое (вступительное) задание по математике

8 класс

1. В некоторой книге для нумерации страниц понадобилось напечатать всего 1422 цифры. Сколько в книге страниц?

2. Две противоположные стороны прямоугольника удлиннили на 20%, а две другие укоротили на 20%. Как в результате изменилась площадь прямоугольника?

3. Докажите, что любое нечетное число и половина следующего за ним четного числа являются взаимно простыми числами.

4. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты которых $(x; y)$ удовлетворяют условию

$$|2x - y| > x + 1.$$

5. Как с помощью циркуля и линейки построить трапецию по основаниям и углам?

9 класс

1. Кузнечик может прыгать ровно на 0,5 м в любом направлении. Может ли он за несколько прыжков переместиться ровно на 7,3 м?

2. Существуют ли такие целые числа, которые уменьшаются в 57 раз при зачеркивании их первой (слева) цифры?

3. Длины катетов прямоугольного треугольника равны a и b . На его гипотенузу во внешнюю сторону построен квадрат. Найдите расстояние от центра квадрата до вершины прямого угла треугольника.

4. Докажите, что, число n^p , где n и p — натуральные числа, $p > 1$, является суммой n последовательных нечетных чисел.

5. Решите уравнение

$$\frac{x^2}{4} + 1 - \frac{4}{x} = 0.$$

6. Окружность с центром в точке O вписана в угол и касается его сторон в точках A и B .

Через произвольную точку X на отрезке AB проводится прямая, перпендикулярная OX . Эта прямая пересекает стороны угла в точках M и N . Докажите, что $MX = XN$.

10 класс

1. На координатной плоскости изобразите множество точек, координаты которых $(x; y)$ удовлетворяют условию

$$|y - 1| \geq y - |x| + x.$$

2. Имеется 1987 гирь весом 1 г, 2 г, 3 г, ..., 1987 г. Можно ли разложить их на три равные по весу кучи?

3. Докажите, что для любого треугольника справедлива формула

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r},$$

где h_a, h_b, h_c — длины его высот, а r — радиус вписанного круга.

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 2 \sin x - x$ на интервале $[0; 4]$.

5. В пространстве заданы четыре точки, не лежащие в одной плоскости. Сколько имеется плоскостей, равноудаленных от этих точек? (Плоскость называется равноудаленной от заданных точек, если расстояния от этих точек до нее равны.)

6. Найдите сумму квадратов трех действительных корней уравнения $x^3 - 6x^2 + 8x + 0.1 = 0$ (не находя корней уравнения).

Первое (вступительное) задание по физике
 Экспериментальная задача 1 предназначена для учащихся всех классов. Кроме того, задачи 2—5 предназначены для поступающих в 8 класс, задачи 2, 6—9 — для поступающих в 9 класс, задачи 6, 10—14 — для поступающих в 10 класс.

Для поступления на физическое отделение ЗШ может оказаться достаточным полностью решить одну-две задачи. Однако после разбора задач своего класса полезно (и мы вам рекомендуем) ознакомиться с задачами и для других классов, а понравившиеся вам задачи — попробовать решить (чем больше, тем лучше). При поступлении в ЗШ вам будут высланы решения всех задач. Познакомьтесь с ними, даже если вы их все решили.

1. Экспериментальное задание: измерьте скорость струи из водопроводного крана.

2. Шар массой m свободно плавает, погружившись на четверть своего объема. С какой силой надо надавить на него сверху, чтобы он погрузился наполовину?

3. Две плитки мощностью 600 Вт и 1000 Вт включены последовательно. Считая, что сопротивление плиток не зависит от температуры, определите реальную мощность, выделяющуюся на каждой из них.

4. В солнечный день возьмите тонкий прут и, удаляя его от земли, наблюдайте за его тенью — по мере удаления тень становится все менее резкой. Объясните это явление. Воспользовавшись этим объяснением, ответьте также на вопрос, почему обычно на земле не видна тень от небольших облаков.

5. Четыре одинаковых проводника заключены в трубу, соединяющую третий и четвертый этажи здания. Провода выступают на одном и на другом концах на несколько сантиметров. Концы проводов на третьем этаже пронумерованы. Как узнать номера концов на четвертом этаже, имея в своем распоряжении ба-

тарейку, лампочку и короткий кусок провода и совершив наименьшее число операций? (Бумагой и карандашом тоже можно воспользоваться.)

6. Летящая тарелка начинает удаляться от вас с ускорением 10 м/с^2 , начальные скорость и расстояние до нее нулевые. В течение какого времени имеет смысл подавать тарелке звуковые сигналы? Скорость звука 330 м/с .

7. Из проводящего пустотелого цилиндра радиусом R и толщиной стенки a ($a \ll R$) изготовили проволоку квадратного сечения ($a \times a$). Определите отношение сопротивлений проволоки и цилиндра.

8. В двухлитровую банку сечением 1 дм^2 налили хорошо перемешанную смесь керосина с водой (1:1 по объему). Какое количество теплоты выделится при разделении жидкостей? Поверхностное натяжение не учитывать. Плотность керосина $0,8 \text{ г/см}^3$.

9. Два мальчика с тяжелыми шариками в руках уравновешены на весах с медленным установлением равновесия. Один из мальчиков начинает жонглировать шариками. Останутся ли весы в равновесии? Ответ подтвердите расчетами.

10. Определите плотность гремучего газа при нормальных условиях.

11. На воду массой 30 г, налитую в блюдце, осторожно поставили вверх дном тонкостенный нагретый сухой стакан высотой 10 см с площадью дна 20 см^2 . После остывания стакана в него оказалась втянутой вся вода из блюдца. Давление окружающего воздуха 10^5 Па , его температура 300 К, плотность воды 1 г/см^3 . Найдите начальную температуру воздуха в стакане.

12. На гладком столе находилась система из двух брусков и свободной пружины между ними. Массы брусков m и $2m$, длина пружины l_0 , жесткость k . К брускам приложили постоянные силы F и $2F$, как показано на рисунке 1. Какой станет длина пружины после затухания колебаний системы?

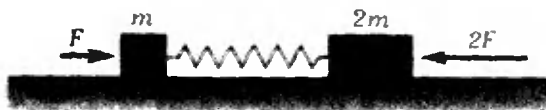


Рис. 1.

13. Между пластинами конденсатора емкостью C вставляют изогнутую металлическую незаряженную пластину (рис. 2). Как изменится при этом емкость конденсатора?

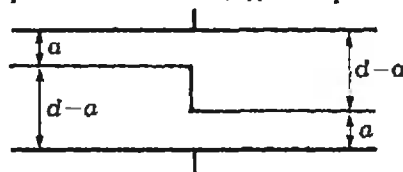


Рис. 2.

14. Электрон вылетает с катода лампы, выполненной в виде плоского конденсатора, со скоростью v_0 . Потенциал анода через равные интервалы времени T меняет знак на противоположный, оставаясь в течение интервала постоянным и равным $\pm U$. За какое время электрон долетит до анода? Известно, что электрон вылетел в тот момент, когда напряжение переключилось и стало положительным. Можно считать, что расстояние L между электродами достаточно велико, и ограничиться лишь приближенным решением.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 6)

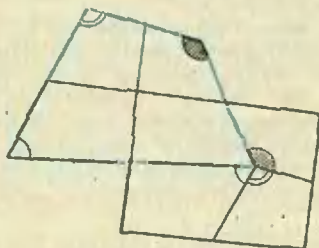
1. $2 \times 1 = 8 - 6 = 2:1 = 8:4 = 3 - 1$.

2. Из надписи на красной коробочке следует, что ключик лежит в синей или зеленой коробочке. Из надписи на синей коробочке следует, что в зеленой коробочке лежит гадука или ключик, а из надписи на зеленой коробочке уже вытекает, что там лежит золотой ключик.

3. У Коли 22 ореха, у Вити 14, у Юры — 12 орехов.

4. Хлопок впитывает влагу, поэтому при транспортировке по морю вес хлопка увеличивается. Капитаны загружали хлопок с учетом будущего увеличения его веса.

5. См. рисунок.



Шахматная страничка

(см. «Квант» № 4)

Задание 7. Превращенный белополюсный слон при «обезьяньей» игре ставит мат на ход быстрее чернополюсного: 1. f4 f5 2. g4 g5 3. fg fg 4. g6 g3 5. gh gh 6. hgC! hgC 7. Ch7 Ch2 8. Cg6X.

Задание 8 (Л. Прокош, 1951 г.). Белые выигрывают в двух симметричных вариантах: 1... h2+ 2. Kp:h2 f2 3. Ла6+ Kp:g5 4. Ла5+ Kpg6 5. Лf5! Kp:f5 6. g4+ Kpf4 7. Kpg2 Kpe3 8. Kpf1 и т. д.; 1... f2+ 2. Kp:f2 h2 3. Ла6+ Kp:g5 4. Ла5+ Kpg4 5. Лh5! Kp:h5 6. g4+ Kp:g4 7. Kpg2 Kpf5 8. a5 и т. д.

Номер подготовили:

А. И. Вилскин, А. А. Егоров, И. П. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:

Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов, Н. С. Кузьмина, Э. В. Назаров, А. М. Пономарева, И. Е. Смирнова, Л. А. Тишков, П. И. Чернуцкий, В. В. Юдин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова
Корректор Т. С. Вайсберг

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламов,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:

А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук,
В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин,
Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер,
П. П. Долбилин, В. Н. Дубровский,
А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел,
С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович,
С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский,
И. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин,
Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский,
В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:

А. М. Балдин, С. Т. Беляев, **Б. В. Буховцев**,
Е. П. Велихов, И. Я. Верченко,
Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев,
Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов,
В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин,
А. А. Логунов, В. В. Можаяев, В. А. Орлов,
Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев,
А. Л. Стаценко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков,
Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Редакционный совет, редакционная коллегия и редакция журнала «Квант» с глубоким прискорбием извещают читателей о том, что 11 июня 1987 года скончался член редакционного совета, кандидат физико-математических наук, доцент Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова Буховцев Борис Борисович.

Сдано в набор 20.5.87. Подписано к печати 27.87. Т-12188
Бумата 70×108/16.
Печать офсетная. Усл. кр.-от. 23,8. Усл. печ. л. 5,60.
Уч.-изд. л. 7,31. Тираж 199 478 экз. Цена 40 коп. Заказ 1320

Орден Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательства полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К. 6, ул. Горького, 32, 1. «Квант»

тел. 250-33-54

Шахматная страничка

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гук.

ФИГУРЫ ВОЗВРАЩАЮТСЯ ДОМОЙ

Однажды мы уже рассказывали о головоломках, в которых все белые фигуры, присутствующие на доске, в начальной позиции занимают исходные места («Квант», 1985, № 4). Пожалуй, стоит еще раз вернуться к этой увлекательной теме.

Г. Ибулаев, 1986 г.

а) Белые: Kpe1, Cf1, Kg1; черные: Kph2.

б) Белые: Kpe1, Cf1, Kg1; черные: Kph1.

Мат в 3 хода.

а) 1. Kpf2 Kph1 2. Cg2+ Kph2 3. Kf3×.

б) 1. Kpf2 Kph2 2. Kf3+ Kph1 3. Cg2×.

Более тонкие позиции с двумя легкими фигурами принадлежат известному советскому проблемисту.

Р. Таварьяни, 1986 г.

а) Белые: Kpe1, Kbl, Cf1; черные: Kpg1.

б) Белые: Kpe1, Cc1, Cf1; черные: Kpg1.

Мат в 4 хода.

а) 1. Kd2 Kph1 2. Kpf2 Kph2 3. Kf3+ Kph1 4. Cg2×. 1...Kph2 2. Kpf2 Kph1 3. Cg2+ Kph2 4. Kf3×.

б) 1. Kpe2 Kph1 2. Kpf2 Kph2 3. Cf4+ Kph1 4. Cg2×, 1...Kph2 2. Kpf2 Kph1 3. Cg2+ Kph2 4. Cf4×. К сожалению, вступительный ход во второй задаче — не единственный.

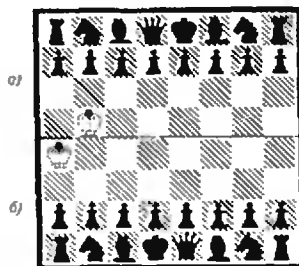
Напомним знаменитую головоломку С. Лойда. Все фигуры белых — на своих местах, у черных один король на h4. Белые ставят мат в 3 хода. 1. d4 Kph5 2. Фd3 и 3. Фh3×, 1...Kpg4 2. e4+ Kph4 3. g3×. Любопытно, на котором одинокий черный король получает мат так быстро. «Надежнее» всего находится на e8, тогда раньше шестого хода короля не пленить. Если же король сам помогает, то мат ставится

вдвое быстрее — та же скорость, что и в рекорде Лойда.

А. Коротаев, 1986 г. У белых все фигуры и пешки как в начале игры, у черных один король на поле e8. Кооперативный мат в 3 хода.

1. Kpf7! (в «кооперативах» начинают черные) d3 (d4) 2. Kpg6! Фd2! 3. Kph5 Фg5×.

А теперь еще более необычные задания. Вновь перед вами две задачи-близнецы на двух полудосках.



Р. Таварьяни, 1986 г.

а) За какое (наименьшее) число ходов белый король может попасть с b5 на d8?

б) Белый король переставлен с b5 на h5 и доска повернута на 180°. За какое наименьшее число ходов белый король может попасть с a4 на e1?

а) Достаточно восьми ходов: 1. Kpc5 h5 2. Kpd5 c5! 3. Kpe5 Фa5 4. Kpf5 f6! 5. Kpg6 Kpd8 6. Kpf7 Kpc7 7. Kpe8 Kpb6 8. Kpd8!

б) Это путешествие на четыре хода длиннее: 1. Kpb3 Kf3 2. Krc4 g1K! 3. Kpb4 Ka3! 4. Krc3 Cg2 5. Kpd3 b1Ф6 6. Krc3 Cb2 7. Krc4 Kpc1 8. Kpf4 d1C! 9. Kpg4 Фc3 10. Kpg3 f1C! 11. Kpf2 Kd2 12. Kpe1!

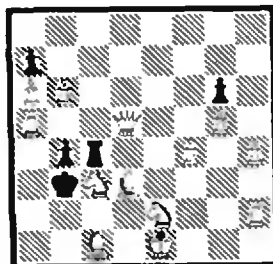
Чтобы скорее пропустить белого короля к цели, черные трижды осуществили слабое превращение!

Л. Соколов, 1986 г. Белые: Kpe1, Cf1, п. h2; черные: Kpb8, Lh1, Kgl. Кооперативный мат в 6 ходов.

Здесь ладья и конь черных тоже занимают привычные для них места, правда, в лагере соперника. 1. Krc7! h4 2. Kpd6 h5 3. Krc5 h6 4. Kpf4 h7 5. Kpg3 h8C!! Пропуская короля к намеченному пункту маршрута. 6. Kph2 Ce5×.

«Ай пешка! Знать, она сильна, коль превращается в слона!» — так прокомментировал эту задачу ее автор.

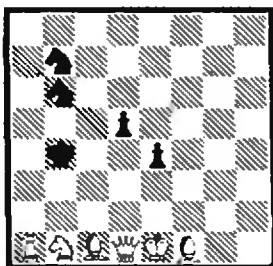
До сих пор белые войска занимали исходные рубежи еще до выполнения боевого задания, а вот уникальный пример противоположного рода — все белые фигуры (пешки не в счет) в процессе решения возвращаются домой.



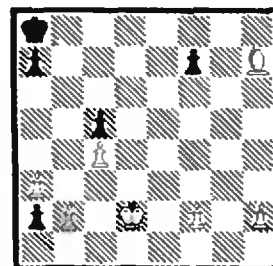
Т. Сабо, 1963 г. Обратный мат в 7 ходов.

В отличие от кооперативных задач, где черные помогают белым, в задаче на обратный мат белые заставляют черных объявить мат вопреки их желанию. 1. Kbl ab 2. La1 b5 3. f5 gf 4. Kg1 f4 5. Cf1 f3 6. Фd1+ Lc2 7. Lh1! Вся первая горизонталь приобрела привычный вид, и черные вынуждены поставить мат — 7...f2×.

Конкурсные задания



13. Белые начинают и дают мат в 2 хода.



14. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 20 сентября 1987 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Квант», задания 13, 14».

Цена 40 коп.

Индекс 70465

На рисунке 1 вы видите «цветную головоломку» — так незатейливо назвали ее на заводе-изготовителе (г. Львов). Кажется, что это просто чуть-чуть измененная игра «15» Сэма Лойда, но в действительности коробка с фишками закрыта прозрачной крышкой и передвигать их по одиночке, как в игре «15», нельзя. Для перемещения фишек предусмотрено два способа. Можно тряхнуть коробочку, и тогда один из горизонтальных рядов (тот, у которого левое или правое крайнее место свободно) целиком сдвинется на одну

фишку (соответственно, влево или вправо — движению по вертикали препятствуют барьеры между горизонтальными рядами). Кроме того, с помощью рычажков по бокам головоломки можно сдвигать крайние вертикальные ряды, опять же целиком, на одну фишку вверх или вниз; эти ряды могут находиться в трех положениях каждый. Расстановка на рисунке 1 считается «правильной» и надо научиться возвращаться к ней после произвольного перемещения фишек.

Читатели, которые следят за нашими

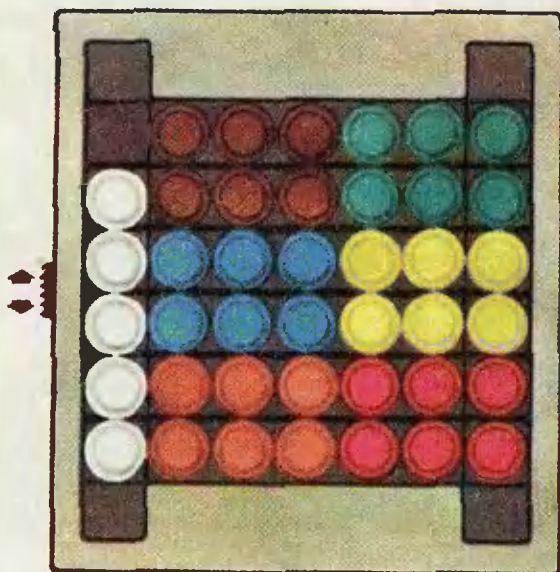


Рис. 1.



Рис. 2.

публикациями о перестановочных головоломках знают, что ключ к их решению часто дают циклические перестановки и их коммутаторы (см. обложку «Кванта» № 5 или статью «Перевертыши» в этом номере), а исследовать такие головоломки удобно с помощью графа. Граф «цветной головоломки» приведен на рисунке 2. Линии на нем указывают допустимые передвижения фишек. Например, если в правильной позиции сдвинуть левый ряд вниз, а правый вверх, «тряхнуть коробочку влево» и вернуть крайние ряды на место, то переместятся 6 фишек — по зеленым стрелкам на графе. Легко сообразить и как устроить циклические перестановки фишек, например, по красному или синему замкнутому контуру (звездочкой на графе помечено свободное

место, через которое фишка как бы перескакивает — это показано пунктиром). Коммутатор $ABA^{-1}B^{-1}$, где A и B — циклические перестановки фишек по красному и синему контурам по часовой стрелке, одновременно меняет местами две пары фишек, как указывают черные стрелки на рисунке 2, а остальные фишки не перемещает. В изображенной на рисунке ситуации он почти завершает сборку трех нижних рядов — остается только заслать белую фишку на пустое место. Полезны и другие коммутаторы — $AB^{-1}A^{-1}B$, $AB^2A^{-1} \times \times B^{-2}$ и т. д. Но разобраться, как они действуют и составить полный алгоритм решения мы, как всегда, предлагаем любителям поломать голову в качестве домашнего задания.