kvant.mccme.ru

ISSN 0130—2221

Квант

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

87

kvant.mccme.ru

kvant.mccme.ru

Квант

1987
4

Основан в 1970 году

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

Наша обложка

Первая и вторая страницы обложки — иллюстрации к статье А. В. Бялко «Тепло твоих рук». Из этой статьи вы узнаете, почему при одной и той же температуре мрамор на ощупь холоднее дерева, почему в мороз руки «прилипают» к металлическим предметам; узнаете, с какой скоростью распространяется в теле тепловая волна и как можно объяснить «чудо» хождения босиком по раскаленным углям...

© Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1987

kvant.mccme.ru

12 апреля — День космонавтики

Время неумолимо движется вперед, отдаляя нас от того памятного дня, когда впервые житель Земли поднялся в космос. Полет Ю. Гагарина был не только его личным подвигом. Это был подвиг многих советских людей, которые рассчитывали, проектировали, строили и испытывали космический корабль «Восток-1», готовили космонавта к полету. С тех пор наша страна успешно продолжает работу по исследованию и использованию космического пространства в мирных целях.

20 февраля 1986 года впервые выведена в космос орбитальная научная станция «Мир». Она оснащена шестью стыковочными узлами и представляет собой базовый блок для создания многоцелевого пилотируемого комплекса со специальными орбитальными модулями — настоящего орбитального научно-технического института. Сейчас на станции «Мир» работают космонавты Ю. Романенко и А. Лавейкин.

Выдающимся успехом советской космонавтики явилось исследование кометы Галлея автоматическими станциями «Вега-1» и «Вега-2». Советская космическая орбитальная обсерватория «Астрон», оснащенная рентгеновским телескопом, в конце февраля 1987 года исследовала уникальное небесное явление — вспышку сверхновой звезды в соседней с нами галактике — Большом Магеллановом облаке. А впереди — новые проекты.

Летом 1988 года планируется запуск двух космических аппаратов, предназначенных для исследования Марса и его спутника Фобоса. Ведется подготовка к полету совместных космических экипажей с участием болгарских, сирийских и французских космонавтов.

Советский Союз активно расширяет рамки международного сотрудничества в космосе. На станциях «Вега» использовалась аппаратура, разработанная учеными Болгарии, Венгрии, ГДР, Польши, Чехословакии, Австрии, Франции и ФРГ.

Мы — активные противники милитаризации космоса. Поэтому мы настаиваем на ликвидации американской программы «звездных войн», которая ставит под угрозу само существование человечества. И в этой борьбе нас поддерживает большинство жителей Земли.

kvant.mccme.ru

ТЕПЛО ТВОИХ РУК

Кандидат физико-математических наук
А. В. БЯЛКО

Что мы делаем, когда хотим оценить температуру какого-либо предмета, заведомо не раскаленного и не очень холодного? — Мы прикасаемся к нему пальцами. Через доли секунды нервные окончания сообщают, теплее или холоднее этот предмет, чем наша кожа (ее обычная температура 34—36 °C).

Однако не только температурой тел определяется наше ощущение. При комнатной температуре деревянные предметы кажутся нам более теплыми, чем стекло или камень, еще более холодными представляются нам металлы, несмотря на то, что температура в комнате у всех материалов одинакова. Так что же именно чувствуют пальцы? Что происходит при контакте с предметом иной температуры? Рассмотрим сначала наиболее простой случай. Известно, что на ощупь можно определить, болен ли человек, повышена ли у него температура. Мамы, как правило, определяют так даже 37 °C; так что чувствительность нервных окончаний равна примерно градусу. Понять, что происходит при этом с точки зрения физики, помогает тот факт, что свойства соприкасающихся тел в данном случае одинаковы, различна только их температура.

При соприкосновении тел с разными температурами распределение температуры вблизи области контакта начинает изменяться: прилежащие слои холодного тела согреваются, теплого — охлаждаются. Очевидно, что температура непосредственно в точках контакта равна средней температуре тел: $t_0=\frac{1}{2}(t_1+t_2)$. В коже имеется несколько видов нервных окончаний (рецепторов), расположенных на глубине 0,3—0,5 мм. Они передают информацию о тепле и холоде, о давлении на кожу, о боли и т. д. (Разделение рецепторов по «специальности» не очень четкое.) Поскольку нас интересуют ощущения тепла и холода, примем упрощенную модель: терморецепторы чувствуют — «измеряют» — не саму температуру, а именно разность между начальной температурой тела и той, которая установилась после соприкосновения. Для нашего ощущения температуры предметов наиболее важны самые первые мгновения прикосновения, когда температура кожи, а вместе с ней и нервных окончаний только начинает изменяться. Вспомните свои ощущения: после прикосновения проходит небольшое, но заметное время, в течение которого меняется чувство теплоты. Оценим это время, за которое изменение температуры дойдет до терморецепторов.

Предварительно напомним основные понятия физики теплоты и определения теплоемкости и теплопроводности. Удельная теплоемкость вещества c показывает, на сколько возрастает внутренняя энергия единицы массы тела, когда тело нагревается на один градус. При нагревании тела массой m на Δt градусов его энергия увеличивается на

$$\Delta Q=cm\cdot\Delta t.$$

Размерность теплоемкости — Дж · кг$^{-1}$ · град$^{-1}$.

При контакте тел с разными температурами начинается теплообмен. При этом всегда часть внутренней энергии более горячего тела передается более холодному. Физическая величина, показывающая, как интенсивно происходит перенос тепловой энергии, называется тепловым потоком. Тепловой поток q по определению есть тепловая энергия, проходящая в единицу времени через единичное сечение, перпендикулярное направлению теплопередачи. Размерность теплового потока — Дж · м$^{-2}$ · с$^{-1}$. В процессе теплопроводности тепловой поток тем больше, чем больше перепад температур и чем резче он происходит, т. е. чем большим оказывается перепад температур при смещении на единицу длины. Если при смещении на Δx температура возрастает на Δt, то тепловой поток — энергия, проходящая еже-

kvant.mccme.ru

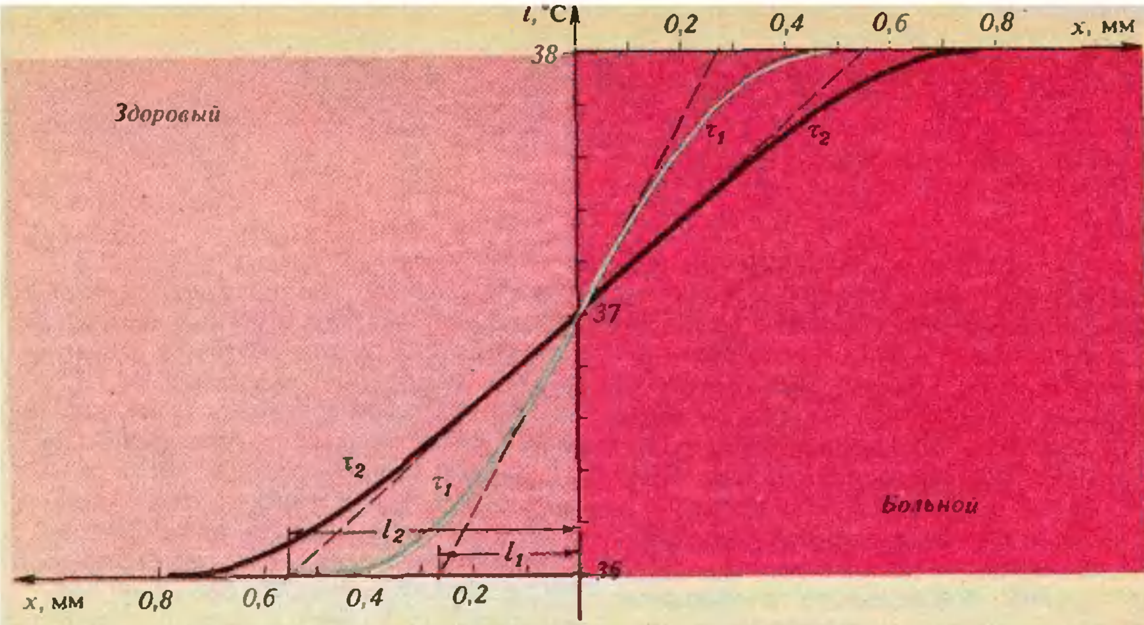


Рис. 1. Распределения температуры в «приграничных» участках тел при контакте здоровый — больной через времена $\tau_1=0{,}5$ с и $\tau_2=2$ с после касания; l_1, l_2 — глубины проникновения тепловых волн за времена τ_1 и τ_2 ($l_1\sim\sqrt{\tau_1}$, $l_2\sim\sqrt{\tau_2}$).

секундно через единичную площадку, перпендикулярную отрезку Δx,— равен

$$q=-\varkappa\frac{\Delta t}{\Delta x}$$

(знак минус показывает, что поток тепла направлен в сторону уменьшения температуры). Коэффициент пропорциональности $\varkappa$ называется коэффициентом теплопроводности. Размерность $\varkappa$ — Дж $\cdot$ м$^{-1}\cdot$ с$^{-1}\cdot$ град$^{-1}$.

Процесс теплопередачи определяется теплоемкостью и теплопроводностью веществ, а также их плотностями.

Проведем приближенную оценку скорости изменения температуры при соприкосновении одинаковых по свойствам, но по-разному нагретых тел. Посмотрите на рисунок 1. На нем показано распределение температуры (по «глубине») в приконтактных слоях соприкасающихся тел спустя время τ после начала контакта. Как видно из рисунка, за время τ в обоих телах температура успевает существенно измениться в слое толщиной l (понятно, что l зависит от времени). Величина теплового потока q в данный момент составляет примерно $\varkappa\frac{t_2-t_1}{l}$. Это означает, что через сечение контакта S за время $\Delta\tau$ проходит энергия

$$\Delta Q=qS\cdot\Delta\tau\approx\frac{\varkappa(t_2-t_1)S\cdot\Delta\tau}{l}.$$

Эта энергия и уходит на нагревание слоя с массой $m\sim\rho lS$ на разность температур $\Delta t\sim t_2-t_1$, т. е. $\Delta Q\sim\sim c\rho lS\cdot\Delta t$. Итак,

$$\frac{\varkappa S\cdot\Delta\tau\cdot\Delta t}{l}\approx c\rho lS\cdot\Delta t.$$

Сечение контакта и разность температур сокращаются, а приращение времени $\Delta\tau$ с точностью этого рассмотрения можно положить равным времени τ, прошедшему с начала соприкосновения. Из записанного соотношения мы и получаем зависимость $l(\tau)$:

$$l(\tau)=\sqrt{\frac{\varkappa}{c\rho}\tau} \qquad (1)$$

Знак равенства мы поставили не случайно: хотя оценки были приближенными, полученная зависимость $l(\tau)$ точная (как и графики на рисунке 1).

Время, в течение которого температура на глубине l сравняется с температурой контакта, зависит от величин $\varkappa$, c и ρ, определяемых только свойствами материала соприкасающихся тел. Стоящая под корнем в равенстве (1) комбинация этих величин $\chi=\varkappa/c\rho$ называется коэффициентом температуропроводности и является характеристикой материала. Например, у воды $\chi=1{,}5\cdot10^{-7}$ м^2/с. Для дальнейшего нам понадобятся тепловые свойства некоторых материалов — они приведены в таблице на с. 6.

kvant.mccme.ru

Ткани кожи устроены достаточно сложно: они неоднородны, и их тепловые свойства, строго говоря, зависят от глубины. Примем, однако, во внимание, что живые ткани более чем на 90 % состоят из воды. Поэтому в дальнейших оценках мы будем считать, что тепловые свойства живых тканей близки к свойствам воды.

Теперь мы можем оценить время продвижения температуры контактта, или, как говорят, время распространения тепловой волны, до рецепторов кожи ($l_0 = 4 \cdot 10^{-4}$ м). В течение этого времени происходит выравнивание температуры нервных окончаний:

$$\tau_0 = \frac{l_0^2}{\chi_0} \approx 1 \text{ с}.$$

Но почему же все-таки разные материалы при одной и той же температуре так различны на ощупь?

Посмотрите на рисунок 2. На нем изображены распределения температуры при прикосновении к мрамору спустя разные времена с момента контакта. Обратите внимание, что температура самого контакта постоянна, не зависит от времени. Она определяется только тепловыми свойствами того материала, которого вы касаетесь. Попробуем это объяснить и найти, чему равна эта граничная температура для разных веществ.

В каждый момент времени глубины проникновения тепловых волн в теле и в материале равны $l_0 = \sqrt{\chi_0 \tau}$ и $l_м = \sqrt{\chi_м \tau}$. На бо́льших глубинах, как видно из рисунка, температуры $t_т$ и $t_м$ можно считать неизменными. Непосредственно в области контакта тепловой поток, естественно, одинаков для обеих соприкасающихся сторон. Найдем его из уравнения теплопроводности, считая, что на границе температура равна t_0:

$$q = \varkappa \frac{t_0 - t_т}{\sqrt{\chi_0 \tau}} = \varkappa_м \frac{t_м - t_0}{\sqrt{\chi_м \tau}}.$$

А вот и ответ на вопрос, почему материалы даже при одной температуре различают на ощупь:

$$t_0 = \frac{t_т + \nu t_м}{1 + \nu}, \qquad (2)$$

где $\nu = \frac{\varkappa_м}{\varkappa_0} \sqrt{\frac{\chi_0}{\chi_м}} = \sqrt{\frac{\varkappa_м c_м \rho_м}{\varkappa_0 c_0 \rho_0}}$.

Заметьте, мы не предполагали при выводе, что температура t_0 на границе не зависит от времени — она оказалась постоянной потому, что время τ сократилось.

Величины ν для разных материалов выписаны в таблице (см. с. 6). Там же приведены и температуры ощущений t_0 для материалов, находящихся изначально при комнатной температуре ($t_м = 20$ °С). Температура тела $t_т$ считалась равной 36 °С.

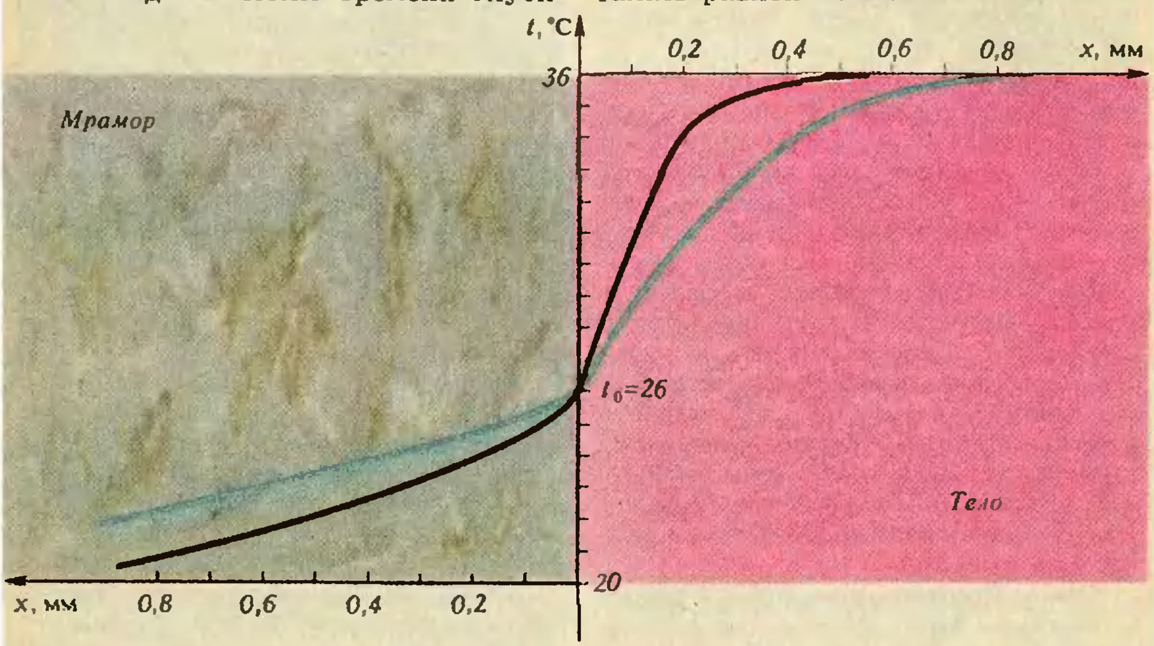


Рис. 2. Распределения температуры при контакте тело — мрамор через 0,5 с (черная кривая) и 2 с (синяя кривая) после касания. Температура t_0 непосредственно в месте контакта не зависит от времени.

Тепловые свойства вещества

Материал	Теплоемкость c, Дж/(кг·К)	Теплопроводность $\varkappa$, Дж/(м·с·К)	Плотность ρ, кг/м^3	Температуропроводность χ, м^2/с	Параметр $\nu=\sqrt{\frac{c\rho\varkappa}{c_0\rho_0\varkappa_0}}$	Температура контакта t_0, °C
Вода	$4{,}18\cdot10^3$	0,63	$1{,}0\cdot10^3$	$1{,}5\cdot10^{-7}$	1,0	28
Воздух	$1{,}01\cdot10^3$	0,026	1,2	$2{,}1\cdot10^{-5}$	0,0035	35,9
Древесина	$9\cdot10^2$	0,13	$5\cdot10^2$	$3\cdot10^{-7}$	0,15	34
Стекло	$8\cdot10^2$	0,65	$2{,}6\cdot10^3$	$3\cdot10^{-7}$	0,72	29
Гранит	$8{,}2\cdot10^2$	1,4	$2{,}7\cdot10^3$	$6{,}3\cdot10^{-7}$	1,1	28
Мрамор	$9{,}0\cdot10^2$	3,0	$2{,}7\cdot10^3$	$1{,}2\cdot10^{-6}$	1,7	26
Алюминий	$3{,}8\cdot10^1$	236	$2{,}7\cdot10^3$	$2{,}3\cdot10^{-3}$	3,0	24
Железо	$4{,}4\cdot10^2$	74	$7{,}9\cdot10^3$	$2{,}1\cdot10^{-5}$	10	21,5
Золото	$1{,}3\cdot10^2$	310	$19{,}3\cdot10^3$	$1{,}2\cdot10^{-4}$	17	20,9

Приведенные в таблице значения t_0 соответствуют нашим ощущениям: неподвижный воздух почти не ощутим, деревянные предметы лишь ненамного холоднее тела, стекло и камень на ощупь прохладны, а металлы — холодны. Золото — рекордсмен по величине ν; при соприкосновении с массивным слитком температура контакта окажется гораздо ближе к температуре золота, чем к температуре тела.

Не касались ли вы случайно металлических предметов морозным зимним днем? При этом кожа пальцев иногда слегка прилипает, как бы приклеивается к металлу. Это замерзает тонкий слой влаги на коже пальцев. Следовательно, температура контакта отрицательна — $t_0<0$ °C. Можно вычислить, как низка должна быть температура на улице, чтобы такое примерзание было возможным. Из формулы (2) следует, что опасен мороз с температурой $t<-t_т/\nu$. Конкретно, прилипание кожи пальцев к железу возможно при температурах ниже $-3{,}5$ °C, к алюминию — при температурах ниже -12 °C, к золоту — ниже -2 °C.

Кое у кого здесь может возникнуть вопрос. Известно, что до революции в обращении были золотые монеты. При довольно суровом климате России было, наверное, весьма неудобно иметь в обиходе предмет, примерзающий к пальцам даже при небольшом морозце. Но что-то не вспоминается описания таких эпизодов в русской литературе.

Верно. Примерзания монет к рукам и не может быть. Дело в том, что наше рассмотрение относилось только к массивным предметам. Тонкие монеты очень быстро прогреваются теплом рук даже при сильном морозе. Так, золотая монета толщиной l около 2 мм, если брать ее двумя пальцами, прогреется очень быстро, за время $l^2/4\chi_{Au}\approx10^{-2}$ с. (То же самое, конечно, относится и к современным монетам из менее благородных металлов.)

Законами теплопередачи и простыми численными оценками объясняется и ряд парадоксальных на первый взгляд явлений. Некоторые кузнецы удивляют непосвященных тем, что могут схватить рукой докрасна раскаленные железные детали. В Болгарии, на островах Полинезии и в некоторых других странах есть люди, демонстрирующие хождение босиком по раскаленным углям. И в том, и в другом случае на коже не остается ожогов, она не обугливается. Конечно, кожа рук у кузнецов по-рабочему толстая, а по углям тоже ходят профессионалы, но одной только толщиной кожи эти феномены не объяснить. Еще один парадокс — из области низких температур. Физикам-экспериментаторам хорошо известно, что попадание капель жидкого азота на кожу безболезненно. На короткое время можно даже налить немного жидкого азота в ладонь. Температура кипения азота -196 °C; с жидкостью такой температуры соприкасается кожа в этом эксперименте.

И сверхгорячие, и сверххолодные контакты с благополучным исходом имеют по сути общее объяснение. Оно состоит в том, что в течение первых мгновений контакта на поверхности кожи образуется тонкий слой газа с низкой теплопроводностью. В опытах с жидким азотом этот газ есть испарившийся при контакте с кожей азот. В «эксперименте» кузнеца и при «босохождении» по углям — это пар и газы, образовавшиеся при нагревании верхних слоев кожи. Толщина этого газового промежутка по порядку величины составляет десятые доли миллиметра. Давление газа оказывается настолько большим, что газовый слой может выдержать большие нагрузки — даже вес человеческого тела. *Но основное его достоинство* — высокая тепловая изоляция.

Оценим, какое время может выдержать человек контакт со сверхгорячими (и сверххолодными) предметами, если толщина газового слоя равна $l = 10^{-4}$ м. (Поверхностный слой кожи выдерживает без ожогов и обморожения охлаждение до 0 °С и нагрев почти до 100 °С.)

Ошеломляющее зрелище, «чудо» — человек идет босиком по светящимся раскаленным камням.

Внутри газовой прослойки температура распределена линейно — от температуры раскаленного предмета (или жидкого азота) t_1 до температуры контакта t_0. Поэтому тепловой поток равен $q = \varkappa_{газа} \frac{t_0 - t_1}{l}$. Распределение температуры в коже зависит от *времени так же, как и при обычных* контактах. Приравняем тепловые потоки:

$$\varkappa_0 \frac{t_т - t_0}{\sqrt{\chi_э \tau}} = \varkappa_{газа} \frac{t_0 - t_1}{l}.$$

Вы видите, в данном случае температура контакта t_0 зависит от времени — она растет при касании раскаленных предметов и падает при касании сверххолодных.

Ткани кожи не разрушаются при $0\ °С < t < 100\ °С$, следовательно, в этих пределах может изменяться температура контакта. Подсчитаем теперь, за какое время поверхностная температура кожи достигает этих пределов:

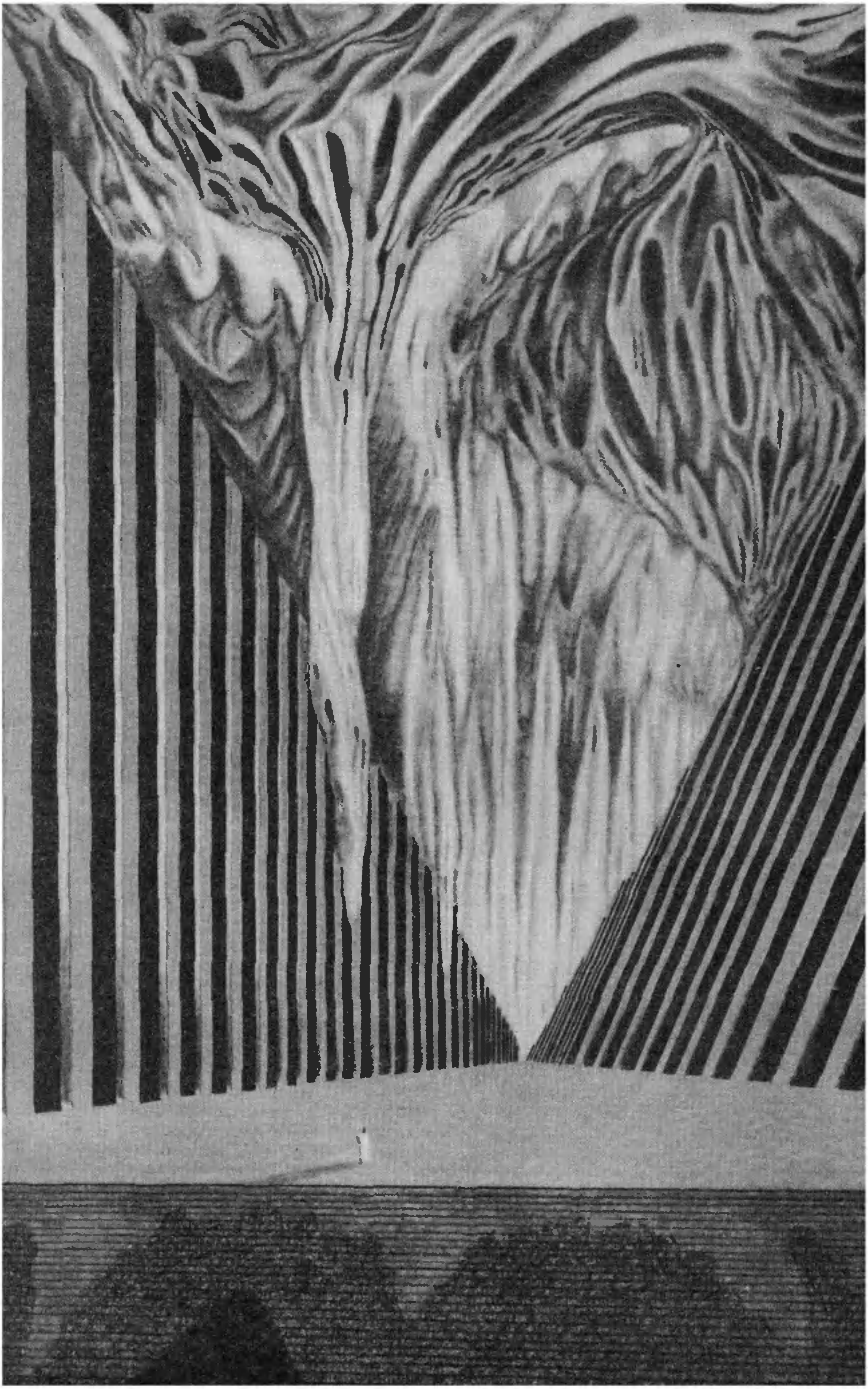
$$\tau_{макс} = \frac{1}{\chi} \left(\frac{\varkappa_0}{\varkappa_{газа}} \frac{t_т - t_0}{t_0 - t_1} l \right)^2.$$

Теплопроводности различных газов близки между собой. Поэтому для численной оценки $\tau_{макс}$ возьмем значение коэффициента теплопроводности воздуха $\varkappa_{возд} = 0{,}026$ Дж/(м · с × × град). Расчет показывает, что при контакте с раскаленным предметом, температура которого 600 °С, время разогрева кожи через паро-газовый промежуток до 100 °С равно половине секунды — вполне достаточно, чтобы переложить раскаленную болванку или сделать следующий шаг по горящим углям, припорошенным пеплом.

При контакте кожи с жидким азотом ($t_1 = -196$ °С, $t_0 = 0$ °С) время охлаждения кожи равно 1,3 секунды. Этого тоже вполне достаточно, чтобы удивить непосвященных или просто сбросить на пол каплю жидкого азота. При наливании сжиженного газа в ладонь кипящую каплю надо движением руки перегонять с места на место.

Человеческие руки — чудный инструмент, данный нам природой. Берегите их от повреждений! Теория — теорией, но хватать раскаленные болванки голыми руками дано отнюдь не каждому.

kvant.mccme.ru



kvant.mccme.ru

ПРОСТО О ПРОСТЫХ ЧИСЛАХ

Кандидат физико-математических наук
Г. А. ГАЛЬПЕРИН

Бесконечность множества простых чисел

Все знают, что большинство натуральных чисел раскладываются на множители: $10=2\cdot5$, $60=3\cdot4\cdot5$, $111=3\cdot37$, $144=3\cdot3\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2$ и так далее. Такие числа называются *составными*. Но среди натуральных чисел есть и такие, которые подобным образом на множители на раскладываются: например, 11 нельзя представить в виде произведения двух меньших натуральных чисел, оба из которых больше 1. Поэтому 11 называется простым числом. Вообще, *простыми* числами (или «первоначальными» — по выражению древних греков) называются такие натуральные числа, которые нельзя разложить на два сомножителя, больших 1 (саму единицу не относят к простым числам). Вот несколько первых простых чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41,... . Среди них ровно одно четное — 2, остальные числа нечетные.

Задача 1. Найдите все пары простых чисел, отличающихся: а) на 1, б) на 17.

С первого же взгляда видно, что ряд простых чисел несколько причудлив; никакого простого закона в его строении не обнаруживается.

Имеет ли этот ряд конец? Этот вопрос поставлен в IX книге «Начал» Евклида и там же дается ответ на него: *за каждым простым числом может быть указано еще одно, большее простое число — ряд простых чисел бесконечен.*

Доказательство этого утверждения, данное Евклидом, необычайно остроумно. Евклид рассуждал так: если простых чисел лишь конечное число и p — наибольшее из них, то число $N=2\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot p+1$, поскольку оно больше p,— не простое, а поэтому делится на какое-то простое число из имеющихся простых от 2 до p (ведь других простых чисел, по предположению, нет!). Однако N не делится ни на одно из этих чисел, так как остаток от деления N на любое из них равен 1. Полученное противоречие доказывает, что простых чисел не конечное количество, а бесконечное.

Это доказательство «методом от противного» говорит о существовании сколь угодно больших простых чисел, но не говорит, как явно найти хотя бы одно простое число, большее p. Впрочем, это сделать не сложно: для этого достаточно проверить на простоту натуральные числа на отрезке от $p+1$ до N — среди них обязательно есть простое. Действительно, если само N не простое, то оно делится на простое число, притом (как мы видели) большее p, но меньшее N, т. е. расположенное на отрезке $[p; N]$.

Отрезки с простыми числами

Разбиение числовой прямой на отрезки, в каждом из которых содержится простое число, можно производить и по-другому. Докажем предварительно следующее утверждение: *наименьший делитель числа $N=n!+1$ (где $n!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$) является простым числом, большим n.*

Обозначим этот наименьший делитель через p. Так как $n!+1$ не делится ни на одно из чисел 2, 3, 4, ..., n, получаем $p>n$. С другой стороны, если предположить, что p — составное число, т. е. p делится на некоторое число, меньшее p, то p не будет наименьшим делителем $n!+1$, что противоречит предположению. Итак, p — простое число, большее n, что и требовалось доказать.

Из этого доказательства вытекает, что на любом отрезке $[n; n!+1]$ находится хотя бы одно простое число. А тогда числа 2, $2!+1$, $(2!+1)!+1$,

---

Композиция доктора физико-математических наук А. Т. Фоменко, открывающая эту статью, подчеркивает не столько простоту, сколько величие таинственного здания математической науки.

kvant.mccme.ru

$((2!+1)!+1)!+1$ и т. д. разбивают всю числовую прямую на бесконечное число отрезков, в каждом из которых содержится не менее одного простого числа; мы вновь доказали, что простых чисел бесконечно много.

Оказывается, что уже в каждом из отрезков [2; 4], [4; 8], [8; 16], [16; 32], ... содержится не менее одного простого числа. Но это — трудная теорема, известная под названием «постулат Бертрана»*), которая звучит так: *между числами n и $2n-2$ при $n>7$ всегда расположено простое число.* Постулат Бертрана доказал в 1852 г. известный русский математик Пафнутий Львович Чебышев (1821—1894 гг.).

Задача 2. Докажите, что если $(p-1)!+1$ делится на p, то p — простое число. Указание. Используйте доказательство утверждения.

Задача 3. Докажите, используя постулат Бертрана, что для любого натурального n существует по крайней мере: а) одно простое n-значное число; б) 3 простых n-значных числа. Указание. Числа 10^{n-1}, $2\cdot 10^{n-1}$, $4\cdot 10^{n-1}$ и $8\cdot 10^{n-1}$ — n-значные.

Заметьте, что доказательство Евклида дает вовсе не ближайшее следующее за p простое число, а лишь некоторое число, лежащее обычно весьма далеко от p. Например, в качестве простого числа, заведомо превышающего 11, доказательство дает не 13, а 2311; за 13 оно дает не 17, а 59 — простой делитель числа 30 031.

Отрезки без простых чисел

Чтобы дать конкретное представление о сложности структуры множества простых чисел покажем, что *в ряду простых чисел встречаются сколь угодно большие пробелы*; так, например, среди миллиона идущих подряд чисел может не оказаться ни одного простого числа. В самом деле, обозначим число *миллион* буквой N и рассмотрим миллион следующих чисел:

$$(N+1)!+2,\ (N+1)!+3,\ \ldots,\ (N+1)!+(N+1).$$

Первое из этих чисел делится на 2, второе — на 3, третье — на 4 и так далее; произвольное, k-е число $(N+2)!+k$ делится на k, так как оба слагаемых делятся на k. Итак, *все N (миллион) указанных чисел составные.* Конечно, нам пришлось зайти довольно далеко в ряду простых чисел, прежде чем встретить пробел длиной в миллион последовательных чисел; совершенно ясно, что можно точно так же отыскивать пробелы сколь угодно большой величины.

Интересно, что вопрос о сколь угодно больших пробелах в ряду простых чисел, очень близкий к вопросу о бесконечности множества простых чисел как по характеру постановки, так и по методу доказательства, не встречается ни у кого из греческих математиков. Вот еще один вопрос, выдвинутый новой математикой.

Арифметические прогрессии и простые числа

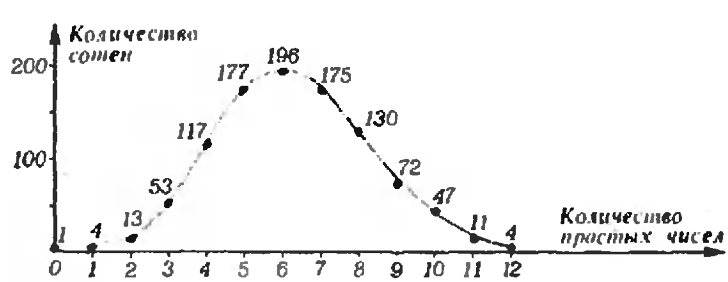
Рассмотрим все натуральные числа, дающие при делении на 3 остаток 2: 2, 5, 8, 11, 14, ...; общий вид таких чисел $3n+2$. Докажем, что и *среди них бесконечно много простых чисел.* Для этого придется несколько видоизменить доказательство Евклида,

*) М. И. Башмаков. Постулат Бертрана. «Квант», 1971, № 5, с. 4.

Таблица 1. Фрагмент распределения простых чисел.

В таблице показано, как меняется число простых чисел на интервале от 8 900 000 до 9 000 000, разбитом на 1000 сотен. В каждом столбце таблицы нижнее число указывает количество тех сотен рассматриваемого интервала, в которых число простых чисел равно соответствующему верхнему числу столбца. Например, в одной сотне вообще нет простых чисел, в 117 сотнях встречается по 4 простых числа, в 130 сотнях — по 8 простых чисел.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4	13	53	117	177	196	175	130	72	47	11	4



kvant.mccme.ru

Таблица 2. Частота распределения простых чисел в натуральном ряде.

A_n — количество простых чисел среди первых n натуральных чисел. Отношение A_n/n тем ближе к $1/\ln n$, чем больше n (частное $A_n/n:1/\ln n$ практически не отличается от 1 при $n=10^9$).

n	A_n/n	$1/\ln n$	$A_n/n:1/\ln n$
1000	0,168	0,145	1,159
1 000 000	0,078498	0,072382	1,084
1 000 000 000	0,050847478	0,048254942	1,053

а именно, вместо числа $N=2\cdot3\times\times5\cdot\ldots\cdot p+1$ рассматривать число $M=2\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot p-1$, которое, будучи на 1 меньше кратного 3, принадлежит к последовательности 2, 5, 8, 11, 14, ..., $3n+2$, ...

Задача 4. Приведите полное доказательство того, что M имеет вид $3n+2$.

Число M, так же как и N, не делится ни на одно из простых чисел 2, 3, 5, ..., p. Является ли M простым или же раскладывается на несколько простых множителей — в обоих случаях эти простые числа будут больше p. Но имеется ли среди полученных множителей такой, который имел бы вид $3n+2$, т. е. содержался бы в последовательности 2, 5, 8, 11, ...? Допустим, что нет, т. е. предположим, что все простые множители M имеют вид $3k+1$. Но тогда и их произведение имеет вид $3k+1$ (см. задачу 5, а), а это противоречит тому, что M имеет вид $3n+2$ (см. задачу 4). Следовательно, наше допущение неверно, и хотя бы один простой множитель числа M имеет вид $3k+2$. Поэтому простых чисел вида $3k+2$ бесконечно много.

Задача 5. а) Докажите, что произведение любого количества чисел вида $3k+1$ также имеет вид $3k+1$. б) Докажите аналогичное утверждение для чисел вида $4k+1$, в) для чисел вида $6k+1$.

Приведенное рассуждение (с небольшим видоизменением) дает инструмент для доказательства бесконечности множества простых чисел вида $4k+3$ и $6k+5$. Предварительно предлагаем читателям подумать над следующей задачей.

Задача 6. Докажите, что любое простое число, большее 3, имеет: а) вид $4k+1$ или вид $4k+3$; б) вид $6k+1$ или вид $6k+5$.

Здесь мы докажем только *бесконечность множества простых чисел вида* $6k+5$. Доказательство проведем «от противного» в духе, присущем первоначальному доказательству Евклида. Предположим, что простых чисел этого вида лишь конечное число: $p_1, p_2, \ldots, p_n$. Рассмотрим число $K=6p_1p_2\ldots p_n-1=6(p_1p_2\ldots p_n-1)+5$. Одно из двух: либо число K само простое, либо оно разлагается на конечное число простых множителей, среди которых нет ни одного из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_n$ (почему?), и не все из которых имеют вид $6k+1$, поскольку само k не имеет этого вида (см. задачу 5, в). Значит, один из простых множителей числа k, не совпадая с $p_1, p_2, \ldots, p_n$, имеет вид $6k+5$, что противоречит сделанному нами предположению. Это противоречие показывает, что список простых чисел вида $6k+5$ бесконечен.

Задача 7. Проведите доказательство бесконечности множества простых чисел вида $6k+5$, указав явный способ для нахождения этих чисел.

Задача 8. Проведите подробное доказательство бесконечности множества простых чисел вида $4k+3$. Указание. Учетверите произведение чисел этого вида и вычтите из произведения 1.

Задача 9. Докажите, что простых чисел, не оканчивающихся на 1 (т. е. оканчивающихся на 3, на 7 и на 9), бесконечно много. Указание. Рассмотрите все простые числа вида $10k+a$, где $a\neq1$, и проведите рассуждения, аналогичные изложенным выше.

Обобщением рассмотренных вопросов является следующая теорема, сформулированная в 1788 г. французским математиком Лежандром и доказанная немецким математиком Дирихле в 1837 г.

Теорема. *В любой бесконечной арифметической прогрессии a_1, $a+d$, $a+2d$, $a+3d$, в которой первый член a взаимно прост с разностью d, содержится бесконечно много простых чисел. Иными словами, функция $y=dx+a$, где d и a — взаимно простые целые числа, принимает бесконечно много простых значений, когда x пробегает последовательно ряд натуральных чисел.*

Доказательство Дирихле не элементарно, и в течение долгих лет не было видно никаких элементарных подходов к доказательству этой замечательной теоремы. Элементарное доказательство было впервые получено в 1949 г. (через 161 год после Лежандра!) видным датским математиком А. Сельбергом, доказавшим многие очень трудные теоремы теории чисел элементарно, без использования высшей математики.

Близнецы

Вспомним первую задачу, сформулированную в самом начале статьи. Как вы, наверное, догадались, если два простых числа отличаются на нечетное число p (на 1 или 17, как в задаче 1), то одно из этих простых чисел четно, и стало быть равно 2. Поэтому другое простое число q отличается от p на 2. Если к тому же и p — простое число (как $p=17$ в задаче 1), то простые числа p и q называются *числами-близнецами*; в задаче 1 это числа 17 и 19.

Задача 10. Докажите, используя теорему Дирихле, что существует бесконечно много простых чисел, не принадлежащих ни к одной паре простых чисел близнецов. Указание. Все эти простые числа следует брать, например, из арифметической прогрессии $\{15k+7\}$.

Возникает вопрос: сколько существует пар чисел-близнецов? Например, на отрезке от 0 до 100 000 таких пар 1225, а в интервале от 8 000 000 до 8 100 000 их всего 518. Прекратятся ли когда-нибудь такие пары в бесконечно далеко простирающемся ряде простых чисел? Ни на этот, ни на более общий вопрос, поставленный великим немецким математиком Давидом Гильбертом на 2-м Международном конгрессе математиков в Париже в 1900 г., — *всегда ли разрешимо в простых числах x и y линейное уравнение $ax+by=c$ с целыми коэффициентами a, b, c, где a и b взаимно просты?* — ответа до сих пор не получено.

Основная теорема арифметики

Любое натуральное число больше единицы допускает одно и только одно (с точностью до порядка множителей) разложение на простые множители.

Доказательство. Если существует хотя бы одно число, допускающее два разложения на различные простые множители, то существует непременно и наименьшее число N, обладающее этим свойством:

$$N=p_1p_2\ldots p_n=q_1q_2\ldots q_m,$$

где через p и q обозначены простые числа. Меняя, если потребуется, порядок этих множителей, мы можем допустить, что $p_1\leqslant p_2\leqslant\ldots\leqslant p_n$, $q_1\leqslant q_2\leqslant\ldots\leqslant q_m$. Заметим, что $p_1\neq q_1$, так как в случае $p_1=q_1$ натуральное число $N/p_1=N/q_1$, меньшее N, имело бы два разных разложения на простые множители, что противоречит предположению о минимальности N. Предположим, что $p_1<q_1$, и рассмотрим число $N'=N-p_1q_2\ldots q_m$. Легко видеть, что число

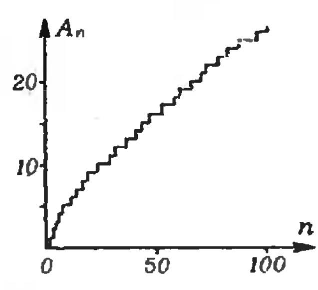
$$N'=p_1(p_2p_3\ldots p_n-q_2q_3\ldots q_m)=\\=(q_1-p_1)q_2q_3\ldots q_m$$

положительно и меньше N. Значит, по нашему предположению, N' име-

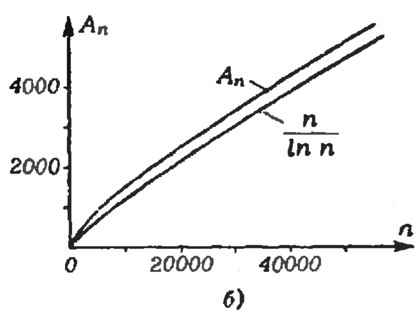
Таблица 3. Простые числа и числа-близнецы в восьми интервалах длины 150 000.

Интервал	Число простых	Число простых близнецов
$10^8\div10^8+150\,000$	8154	601
$10^9\div10^9+150\,000$	7242	466
$10^{10}\div10^{10}+150\,000$	6511	389
$10^{11}\div10^{11}+150\,000$	5974	276
$10^{12}\div10^{12}+150\,000$	5433	276
$10^{13}\div10^{13}+150\,000$	5065	208
$10^{14}\div10^{14}+150\,000$	4643	186
$10^{15}\div10^{15}+150\,000$	4251	161

На рисунках а) и б) изображены графики функции A_n — количества простых чисел на отрезке $[1;n]$. Из графика рис. а) видно, что A_n растет довольно регулярно, несмотря на локальные колебания. Если же увеличить область изменения n до 50 000, то регулярность A_n рисунка а) на рисунке б) становится настолько очевидной, что захватывает дух. Плавность, с которой поднимается эта кривая, следует отнести к числу удивительнейших фактов математики. Отметим, что A_n при очень больших n примерно равно $\dfrac{n}{\ln n-1{,}08366}$.



а)



б)

kvant.mccme.ru

ет единственное разложение на простые множители. Но так как простое число p_1 входит в разложение N', то p_1 входит в q_1-p_1 или в $q_2q_3...q_m$. Из неравенств $p_1<q_1\leqslant\leqslant q_2\leqslant...\leqslant q_m$ следует, что p_1 не входит множителем в $q_2q_3...q_m$. Поэтому p_1 входит множителем в q_1-p_1, т. е. q_1-p_1 делится на p_1. А тогда и q_1 делится на простое число p_1. Этого, однако, быть не может, так как q_1 — число простое. Противоречие, к которому мы пришли, показывает несостоятельность первоначально сделанного допущения, чем и заканчивается доказательство.

Замечание. Из доказательства основной теоремы арифметики становится понятным, почему *единицу* не относят к простым числам. Если ее включить в число простых, то любое натуральное число начинает разлагаться на простые множители многими способами, поскольку в разложение можно добавлять произвольное число единиц.

Вот одно важное следствие основной теоремы арифметики: *если простое число p входит множителем в произведение ab, то оно входит множителем или в a, или в b.* Действительно, если бы p не входило множителем ни в a, ни в b, то, перемножив разложения на простые множители чисел a и b, получили бы разложение на простые множители числа ab, не содержащее множителя p. С другой стороны, справедливо равенство $ab=pt$, где t — некоторое натуральное число. Поэтому, перемножая p и разложение на простые множители числа t, получаем разложение числа ab на простые множители, уже содержащее множитель p. Таким образом, получаются два разложения ab на различные простые множители, что противоречит основной теореме.

Из основной теоремы вытекает, что число N представляется в виде

$$N=p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_s^{k_s},$$

где $k_1,...,k_s$ — количества различных простых делителей $p_1, ..., p_s$ соответственно в разложении N. Все делители N имеют вид $a=p_1^{r_1}p_2^{r_2}...p_s^{r_s}$, где $0\leqslant r_1\leqslant k_1$, $0\leqslant r_2\leqslant k_2$, $0\leqslant r_s\leqslant k_s$.

Еще раз о бесконечности простых чисел

Единственность разложения на множители позволяет дать новое доказательство бесконечности множества простых чисел. Это доказательство принадлежит Леонарду Эйлеру.

Предположим, что $2, 3, 5, ..., p$ — все существующие простые числа. Тогда из формулы для суммы геометрической прогрессии со знаменателем, меньшим 1, следует, что для любого натурального n $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}<\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$, $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+...+\frac{1}{3^n}<\frac{1}{1-\frac{1}{3}}$, ..., $1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+...+\frac{1}{p^n}<\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$.

Перемножим эти неравенства почленно:

$$\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^n}\right)\left(1+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{3^n}\right)...\left(1+\frac{1}{p}+...+\frac{1}{p^n}\right)<\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)...\left(1-\frac{1}{p}\right)}.$$

Справа стоит вполне конкретное число; обозначим его A. Произведение слева после раскрытия всех скобок превращается в сумму S чисел, обратных всем делителям числа $N=2^n3^n5^n...p^n$ (в этом месте и используется основная теорема арифметики — убедитесь!). Поэтому левая часть неравенства больше суммы $A_n=1+1/2+1/3+1/4+1/5+...+1/2^n$, в которую входит лишь часть слагаемых суммы S. Итак, для любого n $A_n<A$. Но

$$A_n=1+1/2+(1/3+1/4)+(1/5+1/6+1/7+1/8)+...+(1/(2^{n-1}+1)+...+...+1/2^n)>1+1/2+2\cdot 1/4+4\cdot 1/8+...+2^{n-1}\cdot 1/2^n=1+n/2,$$

что сразу приводит к противоречию: $A>1+n/2$ при всех n. Стало быть, простые числа не могут ограничиваться никаким конечным списком, что и требовалось доказать.

Проверка простоты

При разложении N на множители или проверке его на простоту следует проверять делимость N на последовательные простые числа $2, 3, 5, 7, ...$. *При проверке числа N на простоту достаточно ограничиться испытанием простых делителей, не превосходящих $\sqrt{N}$.* Действительно, если $N=ab$, то меньшее из чисел a, b не больше $\sqrt{N}$ (если оба были бы больше $\sqrt{N}$, то их произведение было бы больше N), и из делимости N на a автоматически следует, что N делится и на N/a (так что делимость на N/a проверять уже не нужно). Первым математиком, указавшим на это, был Фибоначчи (Леонардо Пизанский).

Примеры. а) Если $N=91$, то $\sqrt{91}<10$; проверив простые числа $2, 3, 5, 7$, находим, что $91=7\cdot 13$.

kvant.mccme.ru

б) Если $N=1987$, то $\sqrt{N}<45$, ..., и так как N не делится ни на одно из простых чисел до 43, то 1987 — простое.

В некоторых случаях при определении простоты числа N можно не производить указанных делений на простые числа. Следующее несложное утверждение, сформулированное Эйлером еще в XVIII веке, позволяет определять простоту числа N совсем другим способом.

Первый критерий Эйлера. *Если нечетное число $N>1$ может быть представлено в виде разности квадратов двух натуральных чисел более чем одним способом, то N — составное; если же такой способ только один, то N — простое.*

Доказательство. Считаем N не точным квадратом, поскольку точный квадрат всегда составное число. Пусть $N=m^2-n^2=(m-n)(m+n)$. Отсюда следует, что $m-n$ и $m+n$ — делители N. Если N простое, то $m-n=1$, $m+n=N$ и числа $m=(N+1)/2$, $n=(N-1)/2$ определяются числом N однозначно, а поэтому N не может быть представлено еще и другим способом в виде разности двух квадратов.

Если же N составное, т. е. $N=ab$, причем $a>b>1$ — нечетные числа, то, взяв $x=(a+b)/2$ и $y=(a-b)/2$, получаем: $a=x+y$, $b=x-y$, откуда $N=ab=x^2-y^2$: получено еще одно представление N в виде разности квадратов.

Отсюда вытекает, что если N представляется более чем одним способом в виде разности квадратов, то N не может быть простым: для простого N такое представление единственно. Если же N представляется ровно одним способом в виде разности квадратов, то N не может быть составным (по доказанному выше), стало быть, оно простое. Критерий установлен.

Этот критерий дает возможность вместо испытания делителей N пользоваться таблицей квадратов, и, прибавляя последовательно к N квадраты n^2 целых чисел, проверять, получается ли в сумме при $n<(N-1)/2$ точный квадрат или нет.

Разложим, например, 3551 на множители этим способом. Добавляя к 3551 последовательно числа 1^2, 2^2, 3^2, ..., проверяем каждый раз, является ли полученная сумма точным квадратом. Проверка (с помощью таблицы квадратов) показывает, что $3551+7^2=60^2$. Значит, $3551=60^2-7^2=53\cdot 67$.

Задача 11. Разложите указанным способом на множители числа 6557, 19 019, 209 209.

Несложно также доказывается

Второй критерий Эйлера. *Если натуральное число может быть представлено в виде суммы двух квадратов натуральных чисел более чем одним способом (считается, что перестановка слагаемых не дает нового способа), то N — составное число.*

Из второго критерия Эйлера следует, что если простое число представляется в виде суммы двух квадратов натуральных чисел, то только одним способом. Но какие простые числа представляются в таком виде?

Задача 12. Докажите, что числа вида $4k+3$ не могут быть представлены в виде суммы двух квадратов. Указание. Квадрат четного числа делится на 4, а квадрат нечетного дает в остатке 1.

Претендентами остаются простые числа вида $4k+1$, и, как доказал Пьер Ферма, все такие числа представляются в виде суммы двух квадратов. Поэтому нетрудно ответить, например, на такой вопрос: какие из трех простых чисел 1973, 1979 и 1987 представимы в виде суммы двух квадратов?

Задача 13. а) Докажите, что при всех натуральных n число $N=n^4+4$ — составное (теорема Софи Жермен). б) Докажите, что при всех натуральных m и n число $N=n^4+4m^4$ составное. Указание. $N=(n^2-2m^2)^2+(2mn)^2$; примените второй критерий Эйлера.

Многочлены, выдающие простые числа

С простыми числами все было бы просто, если бы существовала общая формула для их нахождения. Попытки сконструировать такую формулу велись издавна. Эйлер, например, придумал замечательный трехчлен n^2+n+41, который при $n=0, 1, ..., 39$ принимает только простые значения. Но уже при $n=40$ его значение равно 41^2. Несложно доказать, что *никакой многочлен от одной переменной не может принимать только простые значения.*

Совсем недавно был найден многочлен, все положительные значения

(Окончание см. на с. 38)

kvant.mccme.ru

ПО СТОЛБОВЫМ ДОРОГАМ МК

(Путешествие по микрокомпьютеру)

Кандидат технических наук Д. Г. КРУТОГИН

От рассмотрения панорамы и изучения плана города МК (см. «Квант» № 2, 3) перейдем к экскурсии по нему. Сегодня наша цель — побывать в «жилых» районах города — ОЗУ и ПЗУ. Мы попадем туда по главной улице города, которая обычно называется «общей шиной» и связывает все районы города. В принятых масштабах*), двигаясь по шине, мы увидим под ногами десятки прямоугольных металлических полосок с размерами 1×2 м (рисунок 1). На вид они неразличимы, но по плану мы знаем, что эти полоски образуют три системы дорог, или три отдельных шины. Наиболее широкая шина — адресная. Она предназначена для распределения машинных слов по ячейкам памяти при записи и вызова их оттуда при считывании. Ячейки памяти организованы в матрицу (рисунок 2); выбор нужной ячейки производится при по-

*) Напоминаем, что для путешествия мы договорились уменьшиться в миллион раз.

kvant.mccme.ru

мощи адресных сигналов. Матричная организация запоминающих устройств наиболее рациональна с точки зрения простоты управления и числа необходимых проводов.

Две другие шины — шина данных и шина управления — обычно содержат меньшее количество проводников. По шине данных, в отличие от других, организовано двухстороннее движение (к процессору или от него).

Скорость движения на городских улицах весьма высокая. Но улиц мало, а желающих пройти по ним довольно много, так что шина данных оказывается надолго занятой. Чтобы избежать встречных потоков и аварий, около выходов на главную улицу во всех районах располагаются своеобразные «посты ГАИ» — буфера, которые согласованно задают режим уличного движения. Буфера же препятствуют движению слов рыхлой неорганизованной толпой, они формируют их в плотные колонны и пересылают в пункт назначения. Наиболее активный обмен происходит между районами Процессор — ОЗУ.

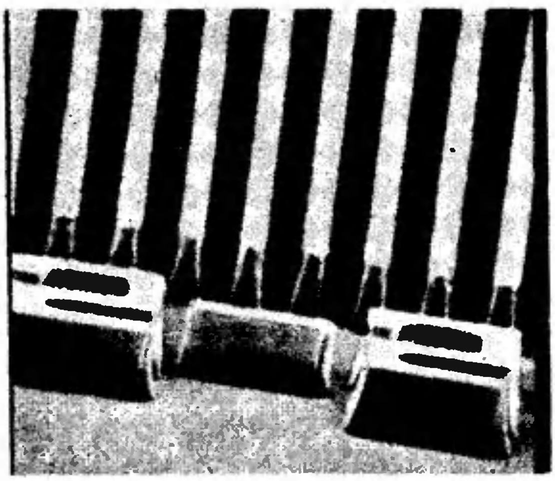


Рис. 1. Фрагмент шины. Фотография сделана с увеличением примерно 2000.

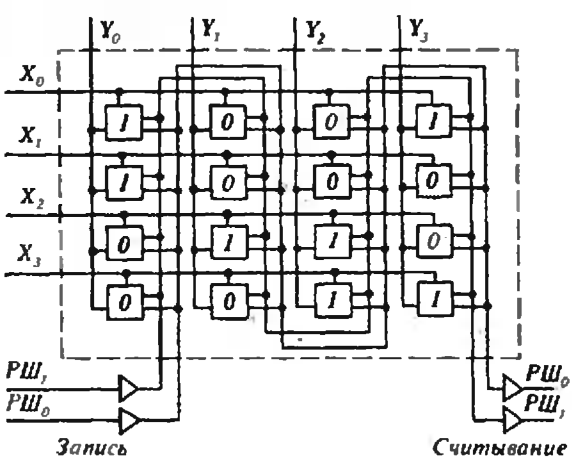


Рис. 2. Схема организации матричного ОЗУ 4×4 бит. Квадратами обозначены ячейки ОЗУ, треугольниками — входные буфера, устанавливающие режим записи или считывания; X и Y — провода адресной шины, $РШ_0$, $РШ_1$ — разрядные провода шины данных.

Допустим, что из Процессора в ОЗУ направлен запрос на некое слово, содержащееся в определенной ячейке памяти. Это значит, что в провода адресной шины посланы импульсы, соответствующие координатам этой ячейки, в то же время по шине управления послана команда считывания. На входе в район ОЗУ эта команда обычно записывается в ячейки памяти буферного регистра*). После этого начинается расшифровка и исполнение команды. Ответные сигналы ячеек памяти (по одной на каждый разряд запрашиваемого слова) поступают, как правило, не сразу в шину данных, а опять-таки в буферный регистр этой шины. Когда он заполняется, т. е. слово-ответ сформировано, переключатель буфера направляет все содержимое этого регистра к Процессору. Одновременно в буферном регистре шины управления стирается ненужная более команда-запрос. Прибывшее к месту назначения (допустим, в процессор) слово — ответ ОЗУ — вновь размещается в «приемной», собственном буферном регистре процессора.

Мы говорили уже, что эффективная работа Процессора обеспечивается быстрой и достаточно большой памятью. Чтобы скорее отыскивать требуемые сведения, проектировщики разбили район ОЗУ на кварталы — страницы. Одна страница — это матрица ячеек размером 16×16, т. е. 256 ячеек, способных хранить двоичную информацию. Если и страниц у нас 256, то полный объем ОЗУ — 256^2.

На входе в каждый квартал-страницу размещаются транзисторные логические элементы. Как бдительные вахтеры или, вернее, как домовые кодовые замки, они пропускают в квартал только команды, снабженные кодовым номером данной страницы. Как вы понимаете, для этого требуется, чтобы в адресе присутствовал код страницы и код ячейки. Поэтому адрес сам по себе является машинным словом.

Город для гостей

Ячейка, хранящая бит информации в ОЗУ, является триггером и содержит, как правило, четыре транзистора. Ранее мы считали один транзистор домом, теперь уместнее будет считать его одним из корпусов

---

*) Здесь и далее термином «регистр» мы будем обозначать небольшое оперативное ЗУ, объемом в одно — два машинных слова.

kvant.mccme.ru

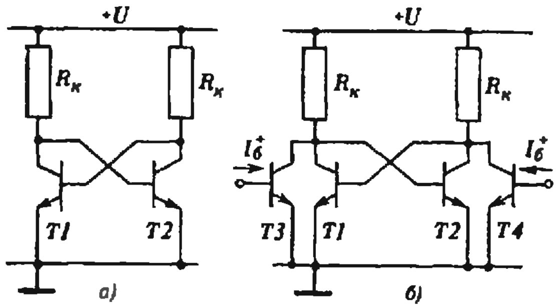


Рис. 3. Ячейка статического ОЗУ емкостью 1 бит: а) — неуправляемая ячейка с двумя равноустойчивыми состояниями, б) — триггер с двумя входами на основе такой ячейки.

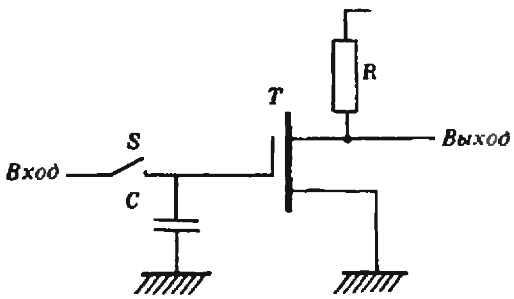


Рис. 4. Принцип действия динамической памяти.

дома-ячейки*). Схема триггера описана русским радиоинженером М. А. Бонч-Бруевичем почти 70 лет назад. Простейший триггер из двух транзисторов показан на рисунке 3, *а*. Из двух транзисторов один всегда закрыт, другой открыт. Подав извне короткий сигнал на закрытый транзистор, положение можно изменить на симметричное и противоположное. Такая конструкция называется бистабильной ячейкой. Для гибкого управления нужно добавить к ней еще два транзистора-выключателя. Та схема, которую вы видите на рисунке 3, *б*, практически и есть триггерная ячейка памяти на 1 бит. Это типовой элемент застройки ОЗУ-района. Такая память на триггерах называется статической. Работает она быстро и надежно, но... Сооружать для каждого бита «домик» из четырех транзисторов становится очень уж обременительно, когда счет идет на сотни тысяч бит (ОЗУ современного микрокомпьютера должно иметь емкость минимум 64 кбайт). Главное, не хватает площадей для ОЗУ.

Поэтому для больших ОЗУ используется другая система памяти, принцип которой поясняется на рисунке 4. Если через ключ S зарядить конденсатор C, то после размыкания ключа конденсатор будет поддерживать режим работы транзистора T, заданный начальным зарядным сигналом. Таким образом, режим транзистора (открытый или закрытый) как бы хранит один бит информации; но до каких пор? Пока не разрядится конденсатор C*). Выключателем S служит, как всегда в микроэлектронике, транзистор, а его сопротивление велико, но не бесконечно.

Чтобы конденсатор не разрядился и хранимый бит не пропал, емкость C надо периодически (около 500 раз в секунду!) подзаряжать, как бы «освежая» память. Такая зыбкая, утекающая память называется динамической. С учетом систем поддержания общая схема ОЗУ оказывается намного сложнее, чем на рисунке 4, но все-таки проще и экономнее, чем на триггерах. В динамических ОЗУ удается сократить расход «жилплощади» до 2,5 транзистора на один бит. На сегодня динамические схемы достигают емкости 1 мегабит на кристалле кремния размером 7×9 мм. Это рекорд плотности застройки.

Покидая район ОЗУ, можем констатировать, что архитектура его, хотя и рациональна, все-таки очень однообразна. Это часто свойственно новым жилым районам и в наших городах. Заметим, что не весь район ОЗУ предоставляется клиенту микрокопьютера; частью страниц, иногда до 50 %, пользуется сам Процессор для сохранения результатов промежуточных вычислений, хранения программ обслуживания и т. п.

Город для хозяев

Перейдем теперь в район ПЗУ, благо он расположен неподалеку. В структуре ОЗУ и ПЗУ есть много общего, например матричная организация памяти, входные логические и буферные устройства и т. д. Однако есть и различия. Ну, прежде всего, здесь размещаются постоянные жители нашего города. Они настолько постоянны, что никогда не покидают свой жилой район. Кто читал повесть А. и Б. Стругацких «Понедельник начинается в субботу», возможно помнит, что ее герои, увлеченные работой научные сотрудники Института Чародейства и Волшебства (НИИЧАВО), для выполнения разных рутинных дел создавали свои личные копии-дубликаты, или «дублей». Команды, размещенные в ПЗУ, без всякого чародейства и без ущерба для себя многократно создают своих «дублей» по запросу Процессора. Попав в шину данных, «дубли» ничем не отличаются от других командных сигналов. Матрица стра-

*) В вычислительной технике термином «ячейка» пользуются для триггерной цепочки, способной запомнить 1 байт=8 бит или одно машинное слово. Мы несколько упрощаем структуру ОЗУ для первого знакомства.

*) Никаких специальных конденсаторов C в микросхеме нет. Мы ранее указывали («Квант», 1986, № 2), что транзистор в СБИС часто используется в роли диода или конденсатора.

kvant.mccme.ru

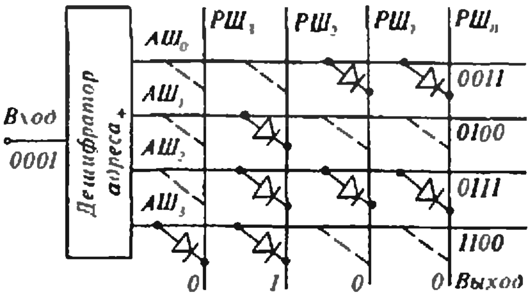


Рис. 5. ПЗУ на диодной матрице. Пунктиром обозначены пережженные перемычки схемы. Входной дешифратор по команде 0001 выбрал адресную шину АШ1 (+). В результате на разрядных шинах РШ3 — РШn появился выходной сигнал 0100.

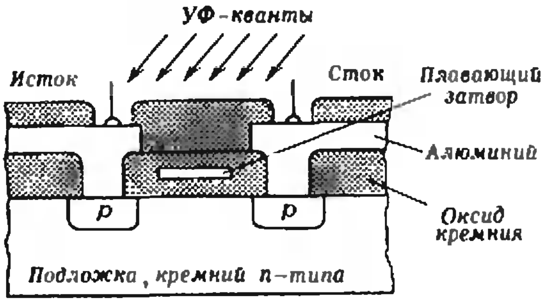


Рис. 6. МОП-транзистор (металл — оксид — полупроводник) с «плавающим» затвором.

ницы ПЗУ может быть организована из диодов и проводящих перемычек (рисунок 5). Запись постоянной информации производится пользователем после изготовления матрицы; для этого часть перемычек пережигают, пропуская через них большой ток по адресным проводам. Последовательность сохранившихся и выжженных перемычек эквивалентна чередованию единиц и нулей в двоичном машинном слове. Таким образом, в отличие от ОЗУ, по существу ПЗУ — это неуправляемая электрическая схема. Она более компактна, чем ОЗУ; в среднем расходуется один транзистор на бит.

«Материалом» для формирования команд-дублей служит непрерывная последовательность импульсов, поступающих от специального генератора, размещенного в районе Процессора.

Постоянная, но заменяемая...

Содержимое диодной матрицы ПЗУ нельзя изменить, и это является определенным неудобством. ПЗУ с пережигаемыми перемычками нельзя перепрограммировать. А в ОЗУ можно записать целую программу (это позволяют даже калькуляторы последних моделей), но при отключении электропитания сведения, записанные в ОЗУ, исчезают. И это тоже неудобство! Но все-таки недавно появилась возможность изготовления перепрограммируемых ПЗУ (ППЗУ). Специальные МОП-транзисторы*) с «плавающим» затвором (рисунок 6) «запоминают» поданный на них сигнал на годы (и даже десятилетия!). Плавающий затвор не соединен с выводами транзистора. На него попадают и застревают только высокоэнергичные, ускоренные электроны.

Разрядить затвор, т. е. удалить с него накопленные электроны, можно в потоке ультрафиолетовых лучей (УФ). УФ-кванты повышают энергию электронов, застрявших на затворе, и помогают им прорваться через тонкий слой диэлектрика. «Очищенные» затворы можно снова зарядить, подав на исток МОП-транзистора напряжение, значительно превышающее обычное рабочее (например, 30 вольт вместо 5). По этим причинам микросхему ППЗУ нужно делать в отдельном корпусе с герметичным окном, прозрачным для УФ, и размещать неподалеку ртутно-кварцевую лампу. Этот способ перепрограммирования достаточно эффективен, хотя и сложен. Недавно появились и более удобные ППЗУ, которые можно «очищать» электрическими сигналами.

Что же хранится в ПЗУ? Кроме упомянутых ранее программ — монитора, трансляторов и служебных математических подпрограмм, там же размещаются программа управления дисплеем, программа связи с печатающими устройствами, программа-редактор, программа-отладчик, указывающая ошибки неопытного программиста, и наконец, если МК специализирован, в ПЗУ имеется несколько самых необходимых программ по специализации (математика, экономика, управление и т. п.). По общему объему район ПЗУ часто не уступает, а то и сильно превосходит ОЗУ.

А не может ли случиться так, что в нашем городе окажется больше туристов, чем мест для них?

Да, для современных МК это вполне возможная ситуация! Если введенные программы слишком объемны или сложны, то район ОЗУ может оказаться переполненным. Ситуация будет сходной с курортным городом в разгар сезона при бесконтрольном заезде отдыхающих. Сначала ухудшится качество обслуживания, а затем может наступить полный «паралич». Экстренный выход тут один — всех выселить, т. е. стереть содержимое ОЗУ, и повторить ввод задачи снова, возможно по частям, или уменьшить точность расчетов, количество обрабатываемых данных. Другой выход — расширить емкость памяти, подключив к МК дополнительную микросхему ОЗУ.

*) Об устройстве и работе МОП-транзисторов рассказывалось в статье М. Е. Левинштейна и Г. С. Симина «Полевые транзисторы» в «Кванте» № 10 за 1985 год.

Новости науки

Прямое измерение расстояния до квазара

Одна из самых трудных задач астрономии — определение расстояний до небесных тел, особенно далеких, таких, как, например, квазары и скопления галактик. Чтобы лучше понять, как это можно сделать, обсудим сначала несколько конкретных вопросов.

Разбегание галактик. Вселенная расширяется — галактики, квазары, скопления галактик удаляются от нас и друг от друга. Скорость удаления v пропорциональна расстоянию R и связана с ним простой формулой

$$v=HR,$$

где H называют постоянной Хаббла.

Скорость можно определить по эффекту Доплера: изменение длины волны излучения, наблюдаемое при движении источника относительно наблюдателя. Так, при удалении источника от наблюдателя спектр излучения смещается в красную сторону, так что относительное увеличение длины волны $\Delta\lambda/\lambda_0$ связано со скоростью разбегания v формулой

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}=\left(1+\frac{v}{c}\right)\gamma=\left(1+\frac{v}{c}\right)\frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

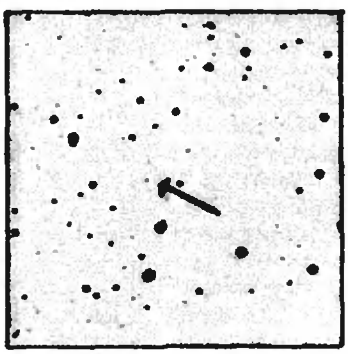
Множитель γ обязан специальной теории относительности и обусловлен изменением хода часов в движущейся системе отсчета.

Постоянная Хаббла. Величина H показывает, на сколько километров в секунду увеличивается скорость разбегания при увеличении расстояния на один мегапарсек (1 парсек $=3{,}6$ светового года $=3\times\times10^{13}$ километров). Эту постоянную измерить очень трудно. Для этого опять-таки надо знать расстояние до источника.

Существуют разные методы оценок расстояний. Например, зная абсолютную и видимую звездную величину объекта (об этом можно прочитать в § 23 школьного учебника по астрономии). Абсолютной звездной величиной принято называть ту видимую звездную величину, которую имел бы светящийся объект, если бы он находился от нас на стандартном расстоянии 10 парсек. Чтобы вычислить эту величину, нужно знать строение источника, а об этом можно лишь высказывать предположения, которые проверить невозможно.

Две разные группы астрофизиков (основывающиеся, очевидно, на различных предположениях о светящемся объекте) дают для H два значения: 50 и 100 км/с на мегапарсек. Возможны и другие, промежуточные, оценки.

Гравитационная линза. Если на пути световых лучей от далекого объекта к нам находится тело с очень большой массой, так что его гравитационное поле способно отклонить свет, как линза, то вместо одного светящегося объекта на небе появляются два его изображения.



Помеченная стрелкой звездочка на снимке на сегодня для нас — самый далекий, равно как и самый яркий, квазар.

Таким массивным телом может быть, например, галактика. Если она находится точно на линии, соединяющей Землю и источник света, то наблюдатель увидит светящееся кольцо. Если же галактика несколько сдвинута в сторону, то кольцо превращается в два светящихся пятна, лежащих в плоскости, в которой находятся источник, галактика и наблюдатель.

Явление раздвоения изображения гравитационной линзой впервые было обнаружено в 1979 году. С тех пор найдено несколько таких линз. Самая «мощная» среди них, открытая весной прошлого года, дает два изображения далекого квазара. Они расположены друг от друга на угловом расстоянии примерно две с половиной минуты и дают тождественные спектры излучения.

Расстояние. Фантастическое зрелище удвоения квазара (а возможно и утроение!) для астрономов оказалось очень полезным. Выяснилось, что звездная величина такого квазара непостоянна и с течением времени изменяется. Изображения «мигают», но не в унисон — одно отстает от другого примерно на 1,5 года. Это можно понять, поскольку свет, идущий в космическом пространстве по разным путям — с разных сторон галактики, доходит до Земли за разное время. Разность хода и определяет запаздывание «мигания». Зная угловое расстояние между изображениями и величину запаздывания, можно вычислить расстояние от источника, а затем и постоянную Хаббла. Вычисления дали значение $H=84$ км/с на мегапарсек — значение, лежащее между принятыми сейчас пределами (50 и 100).

Так была решена первая задача так называемой космической тригонометрии, и в космосе начала строиться абсолютная шкала расстояний. Если вспомнить еще о необычайно точных часах — пульсарах (см., например, «Квант», 1983, № 12, с. 12 и «Квант», 1985, № 2, с. 12), то слова о геометрии космоса — о пространстве и времени — приобретают ясное значение.

Все, что здесь рассказано, конечно, требует проверки. Помогут ли гравитационные линзы сколь-нибудь точно измерить постоянную H, покажет время. Пока даже самое существование таких линз скептиками подвергается сомнению. Ясно только, что потребуется еще немало идей и мастерства наблюдателей, чтобы решить задачу «о нахождении расстояния от пункта A до пункта B», если эти пункты отделены друг от друга расстоянием в миллионы парсек.

Я. С.

kvant.mccme.ru

В феврале — марте будущего года планируется совместный советско-канадский трансарктический переход СССР — Северный полюс — Канада. С советской стороны в этом переходе примет участие полярная научно-спортивная экспедиция газеты «Комсомольская правда».

Своеобразной подготовкой к этому переходу для участников экспедиции «Комсомольской правды» был прошлогодний лыжный поход по льду Северного Ледовитого океана в условиях полярной ночи. Было пройдено свыше 700 км. О необычных трудностях арктических переходов рассказывает один из участников экспедиции заслуженный тренер СССР кандидат технических наук старший научный сотрудник Московского института стали и сплавов Ф. Н. Склокин.

С РЮКЗАКОМ ПО АРКТИКЕ

Кандидат технических наук
Ф. Н. СКЛОКИН

Тридцать восемь суток в условиях полярной ночи продолжался лыжный переход по Арктике одиннадцати участников полярной экспедиции газеты «Комсомольская правда». Движение по льдам, преодоление торосов, трещин, каналов с открытой водой или покрытых тонким льдом — все это было знакомо по предыдущим переходам. Но отсутствие света создавало совершенно непривычные условия. Помню, как на старте перехода, когда ушли провожавшие нас полярники, было психологически трудно двинуться в ночь, а не к людям, к видневшимся огням дрейфующей станции «Северный полюс-26». Но прошло несколько дней (вернее, ночей), и глаза стали привыкать к минимальной освещенности.

Первые две недели не было луны. Помогал свет звезд, но частая облачность лишала нас и этого света. Фонарик, а в палатке еще и обычная свечка — только эти источники создавали возможность эффективной деятельности. Без фонарика невозможно было разобрать или собрать свой собственный рюкзак — на ощупь в перчатках нельзя было понять, что попадается под руки в расфасованных пакетах, а снять перчатки можно было лишь на очень короткое время — мороз.

Непривычные условия ночного перехода породили любопытный зрительный эффект. Во время ходьбы окружающая местность проглядывалась в пределах нескольких десятков метров, а линия горизонта угадывалась чисто интуитивно на уровне горизонтального взгляда вдаль, где, представлялось, ледяная пустыня смыкается с ночным небом. Из-за минимальной (почти отсутствующей) контрастности освещенности даже близкие детали ландшафта едва различались, глубина резкости была очень мала, глаз слабо воспринимал перспективу. Создавалось впечатление, что идешь по дну узкой траншеи. Особенно реальным это впечатление было, когда путь пролегал по относительно ровным ледяным полям.

Как-то на привале возник разговор об этом зрительном эффекте, и выяснилось, что каждый участник считал его личным ощущением, чисто психологическим; а на самом деле оно было общим для всех. Даже после бурного обсуждения этого эф-

kvant.mccme.ru

фекта он не пропал — по-прежнему каждый лыжник шел как бы по дну траншеи.

Отсутствие видимости делало путь по льдам ночной Арктики несравненно более трудным, чем путь на Северный полюс весной 1979 года. Юрий Хмелевский, один из самых опытных участников экспедиции, вспоминал, что из-за плохого зрения он вообще едва-едва различал местность и ориентировался в основном по впереди идущему, все время следя за концами его лыж; по этой же информации он оценивал рельеф лыжни. При ходьбе у него создавалось впечатление, что лыжня идет в подъем, что впереди идущий лыжник уже забрался на небольшой пригорок. Причиной этому также было отсутствие привычной оценки перспективы из-за слабой общей освещенности.

Финишировали мы на дрейфующей станции «СП-27» в марте, когда на смену полярной ночи уже спешил полярный день.

Иногда в ясную солнечную погоду в Центральных районах Арктики можно наблюдать необычный оптический эффект: торосы на линии горизонта вдруг выросли в своих размерах в несколько раз. В среднем высота торосов один—три метра, а торосы, которые находятся на линии горизонта, выглядят как десяти-, двадцатиметровые валы. Когда видишь это в первый раз, то немного пугаешься: ведь валы торосов являются

основными препятствиями, а тут куда ни глянь — всюду просто горы. Но все это лишь оптический эффект. Поглядев назад, неожиданно замечаешь, что и там тоже выросли огромные валы, а ведь ты только что прошел этот путь сквозь обычные торосы.

Объясняется этот эффект неоднородным распределением плотности воздуха по высоте. Как известно, чистый белый снег слабо поглощает солнечные лучи, в основном солнечный свет отражается от него. И все же воздух у поверхности ледяного покрова прогревается и поднимается немного вверх. В этом мы не раз убеждались, измеряя температуру воздуха на снегу и на уровне головы,— они различались: приповерхностный воздух имел температуру на несколько градусов ниже. А на высоте в несколько десятков и сотен метров воздух по-прежнему оставался холодным (разумеется, если не было ветра, который мог бы легко смешать эти разные слои). Так что теплый (относительно) воздух оказывался между слоями холодного. Плотность теплого воздуха, как известно, меньше, и соответственно показатель преломления света в слое теплого воздуха меньше, чем в холодном, более плотном. Неоднородность плотности приводит к оптической неоднородности воздуха, при которой возможно возникновение миражей. Ледяные горы, вырастающие на горизонте на месте обычных торосов, и есть миражи.

Во времена освоения Арктики первопроходцами — в конце XIX и в начале XX веков — бытовало мнение о существовании в Северном Ледовитом океане больших участков суши, островов. Фредерик Кук, известный американский полярный путешественник, одним из первых побывавший в районе Северного полюса, отмечал в своих дневниках, что в ясную солнечную погоду в апреле 1907 года он видел вдалеке, на линии горизонта, сушу, покрытую снегом с цепочками ледяных гор. Эту сушу он видел неоднократно. В первый раз он назвал свое видение Землей Бредли, во втором — Землей Крокера...

Только с развитием авиации в тридцатых годах нашего века был развеян миф о неоткрытой земле в районе Северного полюса. Суша, которую неоднократно видели арктические путешественники прошлых времен,— всего лишь оптическая иллюзия. Возможно, иногда это были айсберги — они очень редко, но все же встречаются в Северном Ледовитом океане. А оптический эффект усиливает впечатления путешественников, помогая принимать желаемое за действительное — каждому хотелось открыть неизвестную землю.

kvant.mccme.ru

Задачник „Кванта“

Задачи

М1036 — М1040; Ф1048 — Ф1052

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 июня 1987 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4—87» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1036» или «Ф1048». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

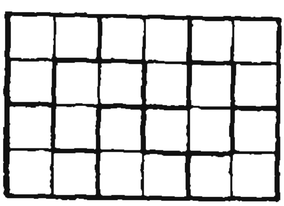


Рис. 1.

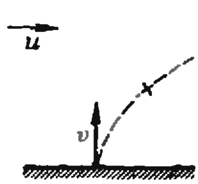


Рис. 2.

М1036. Существует ли такой (невыпуклый) пятиугольник, который можно разрезать на два равных пятиугольника?

С. М. Хосид

М1037. Найдите все решения в натуральных числах x, y уравнения $x^y - y^x = x + y$.

А. И. Зайчик

М1038. а) Докажите, что если произведение mn делится на 6 (где m и n — целые числа, большие 1), то прямоугольник $m \times n$ клеток можно разрезать на уголки из трех клеток.

При каких m и n это можно сделать так, чтобы линии раздела не вырезали (рис. 1)

б) ни одного прямоугольника 2×3 клетки?

в) ни одного прямоугольника (меньшего $m \times n$)?

М. Хованов (ученик 9 класса), *А. П. Савин*

М1039. Точки A, B, C, D — вершины тетраэдра. Докажите, что

а) если $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{DC} \cdot \overrightarrow{AB}$, то все три эти скалярные произведения равны 0;

б) если три угла между противоположными ребрами тетраэдра равны, то они прямые.

В. Э. Матизен

М1040*. Числа 1, 2, ..., $3n$ произвольным образом разбиты на три группы по n чисел в каждой. Докажите, что можно выбрать по одному числу из каждой группы так, что одно из них равно сумме двух других.

В. Е. Алексеев, С. Савчев (НРБ)

Ф1048. Киномеханик по ошибке вставил киноленту так, что все события на экране «потекли в обратном направлении», при этом автомобили поехали назад. Как изменились скорость и ускорение автомобиля в результате такой ошибки?

А. С. Бутов

Ф1049. Деревянный плот оттолкнули от берега реки так, что в начальный момент его скорость была равной $\vec{v}$ и направлена перпендикулярно берегу. Траектория плота показана на рисунке 2. Крестиком на траектории отмечено место, в котором плот находился через время T после начала движения. Считая скорость реки постоянной и равной $\vec{u}$, найти графически точки траектории, в которых плот находился в моменты времени $2T$, $3T$, $4T$.

И. Ю. Потеряйко

Ф1050. Небольшая частица массой m, несущая положительный заряд q, с очень большого расстояния приближается к конденсатору по направлению, перпендикулярному его пластинам, и пролетает сквозь конденсатор через небольшие отверстия в серединах пластин. Считая, что на большом расстоянии от конденсатора скорость частицы равна v, найти ее скорость: 1) в точке A внутри конденсатора (рис. 3); 2) в точке B сразу после вылета из конденсатора. Конденсатор заряжен до разности потенциалов U, расстояние между его пластинами много меньше размеров пластин; заряд конденсатора много больше q.

Г. В. Григорьев

Ф1051. В магнитном поле, индукция которого горизонтальна и равна B, катится без проскальзывания со скоростью v тонкое металлическое кольцо, в котором

kvant.mccme.ru

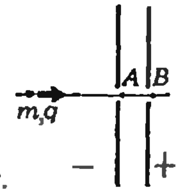


Рис. 3.

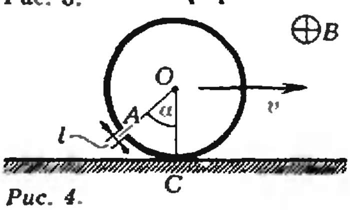


Рис. 4.

имеется очень маленький разрыв длиной l; вектор $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости кольца (рис. 4). Найти ЭДС индукции в момент, когда угол AOC (см. рисунок) равен α.

Л. Г. Маркович

Ф1052. Известно, что освещенность, создаваемая на земле лунным диском в полнолуние, примерно в 10 раз больше, чем освещенность от «ущербной» луны в половину лунного диска. Как это объяснить?

Problems

M1036—M1040; P1048—P1052

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than June 15th, 1987, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

M1036. Does there exist a (non convex) pentagon which can be cut into two equal pentagons?

S. M. Khosid

M1037. Find all the natural solutions (x, y) of the equation
$$x^y - y^x = x + y.$$

A. I. Zaichik

M1038. a) Prove that if the product mn is divisible by 6 (where m and n are integers greater than 1), then the $m \times n$ rectangle can be cut into "corners" made out of three little squares. For what m and n can this be done so that the cutting lines do not cut out (see figure Рис. 1)
a) any 2×3 rectangle?
b) any rectangle smaller than $m \times n$?

M. Khovanov (9th form student), *A. P. Savin*

M1039. The points A, B, C, D are the vertices of a tetrahedron. Prove that
a) if $\vec{DA} \cdot \vec{BC} = \vec{DB} \cdot \vec{CA} = \vec{DC} \cdot \vec{AB}$, then all three scalar products are 0;
b) if the three angles between opposite edges of the tetrahedron are equal, then they are right angles.

V. E. Matizen

M1040.* The integers $1, 2, \ldots, 3n$ are arbitrarily partitioned into three groups consisting of n integers each. Prove that an integer may be chosen in each group so that one of them is the sum of the two others.

V. E. Alekseev, S. Savchev (Bulgaria)

P1048. The projector operator in a movie house incorrectly introduced the film into the projector so that all the events on the screen were shown "flowing in reverse", e. g. automobiles moved backwards. How did the velocity and acceleration of automobiles change as the result of this mistake?

A. S. Butov

P1049. A wooden raft was pushed away from the shore so that its initial velocity v was directed perpendicularly to the shore. The trajectory of the raft is shown on figure Рис. 2. The cross on the trajectory marks the spot where the raft was located in time T after it began its motion. Assuming the velocity of flow of the river to be constant and equal to $\underline{u}$, find a graphic method for constructing the points of the trajectory where the raft will be at time $2T$, $3T$, $4T$.

I. Yu. Poteryaiko

P1050. A small particle of mass m, carrying a positive charge q, approaches a capacitor from very far away along a trajectory perpendicular to its plates and flies through small holes in the centre of the plates. Assuming that at a long distance

kvant.mccme.ru

from the capacitor the velocity of the particle was v, find its velocity 1) at the point A inside the capacitor (see figure Рис. 3). 2) at the point B immediately after flying out of the capacitor. The capacitor is charged to a difference of potential U and the distance between its plates is much smaller than the size of the plates; the charge of the capacitor is much greater than q.

G. V. Grigoriev

P1051. A thin metallic ring, possessing a small discontinuity of length l, rolls without sliding with velocity v in a magnetic field whose induction is horizontal and equal to B; the vector $\vec{B}$ is perpendicular to the plane of the ring (see figure Рис. 4). Find the EMF of induction at the moment when the angle AOC (see the figure) equals α.

L. G. Markovich

P1052. The luminosity on the Earth's surface from a full moon is nearly 10 times greater than that from a half moon. Why?

Решения задач

M1015—M1020; Ф1028—Ф1031

M1015. *Можно ли разложить на множители с целыми коэффициентами многочлен $x^4+x^3+x^2+x+12$?*

Ответ: можно. Искомое разложение получается так:

$$x^4+x^3+x^2+x+12=\frac{1}{8}(8x^4+8x^3+8x^2+8x+96)=$$
$$=\frac{1}{8}((3x^2-x+10)^2-(x^2-7x+12)^2)=$$
$$=\frac{1}{8}(4x^2-8x+12)(2x^2-6x+8)=$$
$$=(x^2-2x+3)(x^2-3x+4).$$

Найти это разложение нам помогла догадка. Но существуют и более надежные способы решения таких задач. Можно было бы действовать «в лоб»: предположить, что данный многочлен разлагается в произведение $(x^2+ax+b)(x^2+cx+d)$ двух квадратных трехчленов с целыми коэффициентами, раскрыть скобки и сравнить получающийся многочлен с данным. После приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x возникает система, приведенная на полях; решить ее в целых числах нетрудно — требуется лишь небольшой перебор. Для многочленов более высокой степени такой «метод неопределенных коэффициентов» приводит к громоздким системам уравнений.

$$\begin{cases} a+c=1, \\ ac+b+d=1, \\ ad+bc=1, \\ bd=12. \end{cases}$$

Для $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+12$,
$f(-1)=12$, $f(0)=12$, $f(1)=16$.
Делители 12: ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12.
Делители 16: ±1, ±2, ±4, ±16.
Одной из троек $g(-1)=6$, $g(0)=3$, $g(1)=2$ отвечает многочлен $g(x)=x^2-2x+3$, — делитель $f(x)$.

Имеются и общие правила-алгоритмы, позволяющие любой многочлен с целыми коэффициентами разложить в произведение многочленов с целыми коэффициентами или убедиться, что это невозможно, т. е. доказать, что многочлен *неприводим* *).

Один из алгоритмов для отыскания квадратичного множителя $g(x)=ax^2+bx+c$ данного многочлена $f(x)$ был указан еще Ньютоном (1707 г.) Возьмем любые три целых точки, скажем $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=-1$. Если $f(x)=g(x)h(x)$, где g и h — многочлены с целыми коэффициентами, то числа $g(x_0)$, $g(x_1)$, $g(x_2)$ делят числа $f(x_0)$, $f(x_1)$, $f(x_2)$. Последние три числа имеют лишь конечное число делителей. Для каждой тройки их делителей d_0, d_1, d_2 можно составить единственный квад-

*) О неприводимых многочленах с целыми коэффициентами рассказывалось в 10-м и 11-м номерах «Кванта» за 1986 г.

kvant.mccme.ru

ратный трехчлен $g(x)$ такой, что $g(x_i)=d_i$, и проверить, являются ли его коэффициенты целыми, делится ли на него $f(x)$ и будут ли целыми коэффициенты частного (последняя проверка при $a=1$ не нужна). Этим способом можно искать и делители $g(x)$ любой степени: нужно вместо трех точек взять $k+1$ целых точек. Правда, такой алгоритм (предложенный в 1793 г. астрономом Фридрихом фон Шубертом и переоткрытый уже в конце XIX века Леопольдом Кронекером) требует очень большого перебора. Об отыскании более эффективных алгоритмов рассказано, в частности, во 2-м томе книги Д. Кнута «Искусство программирования на ЭВМ» (М., 1977, разделы 4, 6, 2).

Н. Б. Васильев, С. Л. Манукян

М1016. *Многоугольник описан около окружности с центром O. Пусть P — центр масс многоугольника, K — центр масс его контура. Докажите, что точки P, O и K лежат на одной прямой, причем PO=2PK. (При определении центра P мы рассматриваем многоугольник как однородную пластину, центра K — как контур из однородной проволоки.)*

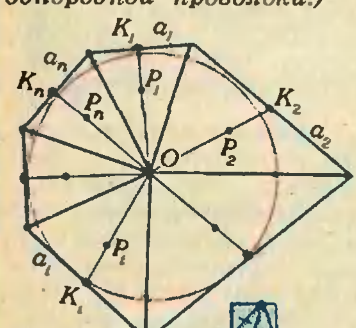


Рис. 1.

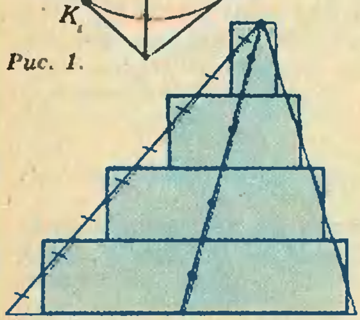


Рис. 2.

Заменим каждую сторону многоугольника ее центром масс (т. е. серединой) и поместим в эту точку массу, численно равную длине стороны. Ясно, что точка K совпадает с центром масс полученной системы материальных точек (K_1, a_1), ..., (K_n, a_n) (здесь n — число сторон многоугольника, K_i — их середины, a_i — их длины). Чтобы найти центр масс P многоугольника как пластины, разобьем его на треугольники отрезками, проведенными из центра O окружности в его вершины (рис. 1), найдем центры масс P_1, ..., P_n этих треугольников (P_i — центр масс треугольника, примыкающего к стороне a_i), и поместим в эти точки массы, равные площадям S_1, ..., S_n треугольников. Тогда P совпадает с центром масс системы материальных точек (P_1, S_1), ..., (P_n, S_n). Центр масс треугольной пластины лежит в точке пересечения медиан. (Для доказательства рассмотрим ступенчатую фигуру из k прямоугольников равной высоты, приближающую наш треугольник — см. рис. 2 для $k=4$. Их центры лежат на медиане треугольника, следовательно, центр масс всей фигуры тоже лежит на этой медиане. Переходя к пределу при $k\to\infty$, получим, что и центр масс треугольника лежит на его медиане.) Таким образом, точка P_i при $i=1$, ..., n лежит на отрезке OK_i, причем $OP_i/OK_i=2/3$, т. е. система точек K_1, ..., K_n переходит в систему P_1, ..., P_n при гомотетии с центром O и коэффициентом $2/3$. А поскольку и массы в точках P_i пропорциональны a_i ($S_i=a_iR/2$, где R — радиус окружности), точка K при указанной гомотетии переходит в P, что равносильно утверждению задачи.

Аналогичное утверждение справедливо и для многогранника, описанного около сферы с центром O: если P — центр масс такого многогранника (как тела), а K — центр масс его поверхности, то $\vec{OP}=(3/4)\vec{OK}$.

И. З. Вайнштейн

М1017*. *Каждой вершине правильного пятиугольника приписано некоторое целое число так, что сумма всех пяти чисел положительна. Разрешается проделать следующую операцию: если трем последовательным вершинам приписаны числа x, y, z и y<0,*

Ответ. Да. В решении этой задачи используется прием, ставший уже стандартным: подбирается целочисленная функция от рассматриваемых 5 чисел, значения которой монотонно меняются, скажем, уменьшаются при каждой операции и в то же время ограничены снизу; такая функция не может изменяться сколь угодно долго (ведь каждый раз она уменьшается по крайней мере на 1), поэтому после конечного числа шагов дальнейшие операции будут невозможны.

В качестве такой функции можно взять величину

kvant.mccme.ru

то эти числа заменяются соответственно на $x+y$, $-y$ и $z+y$. Такие операции выполняются, пока хотя бы одно из пяти чисел отрицательно. Обязательно ли этот процесс закончится через конечное число шагов?

$$(x-z)^2+(z-v)^2+(v-y)^2+(y-u)^2+(u-x)^2,$$

где x, y, z, u, v — числа, стоящие в последовательных вершинах пятиугольника. Действительно, эта величина неотрицательна, а если при $y<0$ произвести замену x на $x+y$, y на $-y$ и z на $y+z$, ее новое значение будет равно

$$(x-z)^2+(y+z-v)^2+(v+y)^2+(y+u)^2+(x+y-u)^2,$$

т. е., как показывает вычисление, будет меньше исходного на $-2y(x+y+z+u+v)$. Это число положительно (и следовательно, не меньше 2), поскольку сумма всех 5 чисел при рассматриваемой операции не меняется и положительна с самого начала.

На полях приведена еще одна функция, удовлетворяющая условию задачи (сумма модулей всех чисел, их последовательных пар, троек и четверок).

$$|x|+|y|+|z|+|u|+|v|+|x+y|+|y+z|+\ldots+|v+x|+|x+y+z|+|y+z+u|+\ldots+|v+x+y|+|x+y+z+u|+|y+z+u+v|+\ldots+|v+x+y+z|.$$

А. П. Савин

M1018. *Пусть A и B — соседние вершины правильного n-угольника с центром O. Треугольник XYZ, равный треугольнику OAB, вначале совпадает с ним, а потом движется в плоскости n-угольника так, что точки Y и Z остаются на контуре, а X — внутри n-угольника. Какую фигуру опишет точка X, когда Y и Zсовершат полный оборот по границе n-угольника?*

Ответ. Искомое множество — это правильная «звездочка», составленная из n равных отрезков длины kR, где $k=\dfrac{1}{\cos(\pi/n)}-1$, а R — радиус описанной окружности данного n-угольника (см. рис. 1 для $n=5$); эти отрезки получаются из отрезков, соединяющих центр O многоугольника с его вершинами, при гомотетии с коэффициентом $-k$ и центром O.

Рассмотрим две последовательные стороны AB и BC данного многоугольника (рис. 2); пусть Y лежит на AB, Z — на BC. При повороте с центром X на угол $2\pi/n$ (равный углу YXZ) точка Y перейдет в Z, а прямая AB — в прямую, проходящую через Z и составляющую с AB угол $2\pi/n$, т. е. в прямую BC. Следовательно, прямые AB и BC одинаково удалены от центра поворота X, а это значит, что X лежит на биссектрисе угла ABC. При движении точки Y от A до B точка X будет двигаться по прямой BO от точки O до некоторого положения B_1 и обратно до O, причем B_1 — это наиболее удаленное от прямой AB положение X, поэтому при $X=B_1$, отрезок XY перпендикулярен AB. Отсюда находим, что $BB_1=XY/\sin\angle ABO=R/\cos(\pi/n)$. При движении Y по стороне BC точка X пройдет (туда и обратно) следующий луч звездочки — OC_1 и т. д.

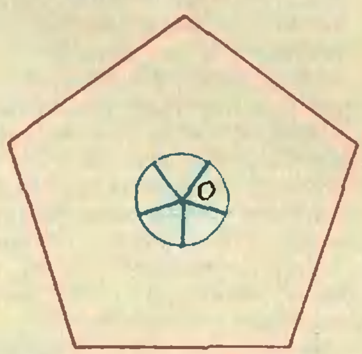


Рис. 1.

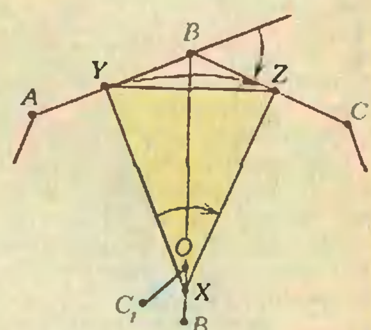


Рис. 2.

В. П. Дубровский

M1019. *На листе клетчатой бумаги отмечено некоторое конечное множество M узлов (точек пересече-*

Доказательство проведем по индукции. Для множества из одной точки утверждение очевидно. Докажем его для множества M из n точек, считая, что оно верно для любого множества из $n-1$ точек. Выбросим из *ния линий сетки). Докажите, что всегда можно окрасить некоторые точки множества M в белый цвет, а остальные — в красный так, чтобы на каждой линии сетки разность между числом белых и красных узлов по модулю не превосходила 1.*

M одну точку A, причем если хотя бы на одной линии сетки имеется нечетное число точек множества M, возьмем A на этой линии. Пользуясь предположением индукции, раскрасим остальные точки, как требуется по условию. Теперь надо доказать, что точку A можно окрасить так, что на двух линиях l и m, проходящих через A, это условие не нарушится.

После предварительной раскраски на каждой из линий l и m будет либо поровну красных и белых точек, и тогда наше условие не нарушится при любой раскраске A, либо точек одного цвета будет на 1 больше, чем другого, и тогда A нужно окрасить недостающим цветом. Это было бы неосуществимо, только если бы на одной линии, скажем на l, оказалось больше белых точек, а на другой — больше красных. Но тогда на каждой из линий l и m находится четное число точек множества M (включая A), и, следовательно, в силу выбора A на всех линиях сетки находится четное число точек из M. В таком случае на всех линиях, отличных от l и m, число белых точек равнялось бы числу красных. Подсчитывая общее число белых и красных точек по линиям, параллельным линии l (включая l), мы получили бы, что белых точек на 1 больше, чем красных; при подсчете по линиям, параллельным m, получилось бы, что красных точек больше. Это противоречие показывает, что единственный неприятный вариант встретиться не может, и точку A всегда можно окрасить в соответствии с условием.

А. П. Савин

M1020*. *На сфере радиуса 1 проведена*
а) кривая, длина которой меньше π;
б) замкнутая кривая, длина которой меньше 2π.
Докажите, что найдется плоскость, проходящая через центр сферы, не пересекающая проведенной кривой. (Можно считать, что кривая на сфере — это «ломаная», состоящая из дуг больших кругов.)

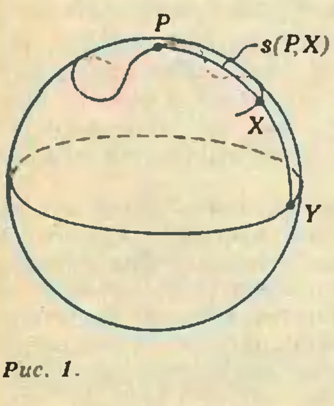


Рис. 1.

Решение этой задачи становится короче и яснее, если излагать его на языке сферической геометрии. Познакомимся с некоторыми словами этого языка.

Большая окружность, или, как чаще говорят, *большой круг* — это окружность ω, по которой сфера пересекается с произвольной плоскостью α, содержащей ее центр O; концы диаметра сферы, перпендикулярного плоскости α, называются *полюсами* окружности ω, *сферическое расстояние* $s(A, B)$ между двумя точками сферы A и B определяется как длина меньшей дуги большого круга, соединяющей A и B; если радиус сферы равен 1, то, очевидно,

$$s(A, B)=\angle AOB.$$

Известно, что каждый из плоских углов трехгранного угла меньше суммы двух других (доказательство можно найти, например, в учебном пособии: Геометрия 9—10 / под ред. З. А. Скопеца. — М.: Просвещение, 1981, с. 224), поэтому сферическое расстояние удовлетворяет «неравенству треугольника»*):

$$s(A, B)<s(A, C)+s(C, B).$$

В планиметрии из аналогичного неравенства выводится, что отрезок — кратчайшая из линий на плоскости, соединяющих две данные точки; в сферической геометрии точно так же доказывается, что *кратчайшей линией между двумя точками на сфере является дуга большого круга.*

Теперь перейдем непосредственно к задаче.

а) Первое решение. Возьмем на данной кривой точку P, которая делит ее на две части равной длины. Для любой точки X кривой сферическое расстояние $s(P, X)$ не превосходит длины участка кривой от P до X,

*) Если точки A и B диаметрально противоположны, знак $<$ в нем надо заменить на $=$.

Задачник „Кванта"

kvant.mccme.ru

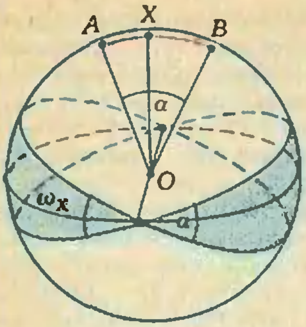


Рис. 2.

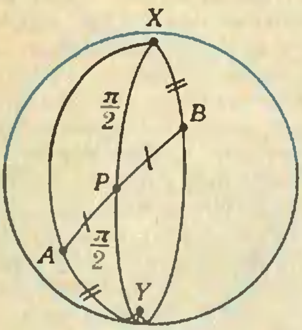


Рис. 3.

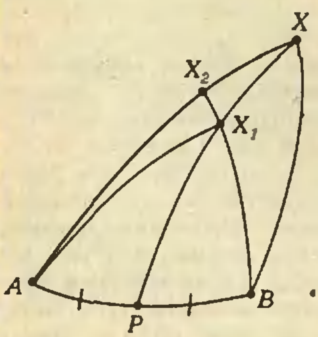


Рис. 4.

т. е. меньше $\pi/2$. Следовательно, наша кривая не пересекает большой круг с полюсом P (для любой его точки Y сферическое расстояние $s(P, Y)=\pi/2$; рис. 1). Плоскость, содержащая этот круг, и является искомой.

Во втором решении мы только докажем, что нужная плоскость существует, не указывая ее конкретно. Преимущество этого решения в том, что оно годится для *любого набора кривых на сфере, суммарная длина которых меньше* π.

Рассмотрим множество всех больших кругов, пересекающих нашу кривую, и для каждого отметим его полюсы. Докажем, что площадь множества M всех отмеченных полюсов меньше площади сферы, т. е. 4π. Это будет означать, что найдется большой круг, полюсы которого не принадлежат множеству M, т. е. не пересекающий нашу кривую.

Ясно, что полюсы всех больших кругов, проходящих через некоторую точку X, сами образуют большой круг ω_X с полюсом X. Когда точка X пробегает дугу AB большого круга, окружности ω_X «заметают» на сфере два равных двуугольника (рис. 2): вершины этих двуугольников являются полюсами большого круга AB, а «угол раствора» двуугольников равен длине $s(A, B)$ дуги AB. Площадь двуугольника с углом α на сфере радиуса 1 равна 2α (очевидно, она пропорциональна α и равна 2π при $\alpha=\pi$). Следовательно, площадь множества полюсов больших кругов, пересекающих дугу AB, равна $4s(A, B)$, а площадь всего множества M не превосходит $4(\alpha_1+\ldots+\alpha_n)<4\pi$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ — длины дуг, составляющих данную кривую (или несколько кривых).

б) Выберем на данной кривой две точки A и B, разбивающие ее на части равной длины. Проведем через A и B большой круг и на меньшей из его двух дуг с концами A и B возьмем середину P. Теперь, как и в первом решении задачи а), надо доказать, что для любой точки X нашей кривой $s(P, X)<\pi/2$. А это неравенство следует из леммы, которая приводится ниже (сумма длин дуг AX и XB не превосходит длины участка кривой AXB и потому меньше π).

Лемма. *Пусть P — середина стороны AB сферического треугольника ABX (на сфере радиуса 1). Тогда длина его «медианы» $s(P, X)$ меньше, равна или больше $\pi/2$, если сумма длин заключающих ее сторон $s(A, X)+s(B, X)$ соответственно меньше, равна или больше π.*

Доказательство. Пусть сначала $s(P, X)=\pi/2$ и Y — точка сферы, диаметрально противоположная X (рис. 3). Сферические треугольники PXB и PYA равны (они «сферически симметричны» относительно центра P), поэтому $s(X, B)=s(Y, A)$ и

$$s(A, X)+s(X, B)=s(A, X)+s(Y, A)=\pi.$$

Если $s(P, X)>\pi/2$, отложим на дуге PX точку X_1 такую, что $s(P, X_1)=\pi/2$ (рис. 4), тогда по доказанному сумма $s(A, X_1)+s(X_1, B)=\pi$, но из неравенства треугольника следует (см. рис. 4), что она меньше $s(A, X)+s(X, B)$. Аналогично рассматривается случай $s(P, X)<\pi/2$.

$$s(A, X_1)+s(X_1, B)<\\ <s(A, X_2)+s(X_2, X_1)+\\ +s(X_1, B)=s(A, X_2)+\\ +s(X_2, B)<s(A, X)+s(X, B).$$

Задача б) допускает и решение, аналогичное второму решению задачи а). Пусть множество M образовано полюсами всех больших кругов, пересекающих данную кривую. Любой из этих кругов пересекает кривую не менее 2 раз (так как она замкнута), поэтому двуугольники, рассмотренные в решении задачи а), покрывают M по крайней мере в 2 слоя, и следовательно, площадь множества M меньше, чем $4\cdot 2\pi/2=4\pi$, т. е. меньше площади сферы.

Г. А. Гальперин, В. Н. Дубровский, В. В. Произволов

kvant.mccme.ru

Ф1028. *Легкий стержень с массивным шариком на верхнем конце начинает падать из вертикального положения без начальной скорости. Нижний конец стержня упирается в уступ на горизонтальной плоскости (рис. 1). Какой угол с вертикалью будет составлять скорость шарика в момент удара о плоскость?*

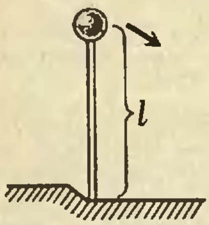


Рис. 1.

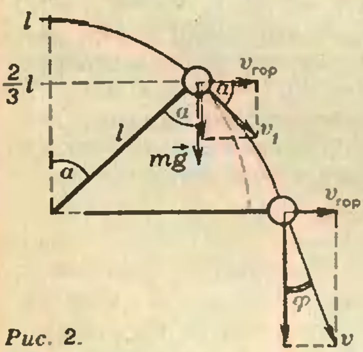


Рис. 2.

Шарик движется по дуге окружности до тех пор, пока действующая на него сила реакции стержня не обратится в нуль. Дальнейшее движение до удара о горизонтальную плоскость происходит по параболе, так как на шарик действует только сила тяжести.

Найдем сначала угол α, который стержень образует с вертикалью в тот момент, когда сила реакции обращается в нуль. Запишем уравнение второго закона Ньютона в проекциях на направление к центру окружности (рис. 2):

$$\frac{mv_1^2}{l}=mg\cos\alpha \qquad (1)$$

(l — длина стержня). Входящую в (1) скорость шарика v_1 можно выразить через угол α с помощью закона сохранения энергии:

$$mgl(1-\cos\alpha)=\frac{mv_1^2}{2}. \qquad (2)$$

Подставляя v_1^2 из (2) в (1), получим уравнение для определения α, которое дает $\cos\alpha=2/3$. Таким образом, свободное движение шарика начинается на высоте $2l/3$ со скоростью $v_1=\sqrt{2gl/3}$. Горизонтальная проекция скорости шарика $v_{гор}=v_1\cos\alpha=(2/3)\sqrt{2gl/3}$ в дальнейшем остается неизменной.

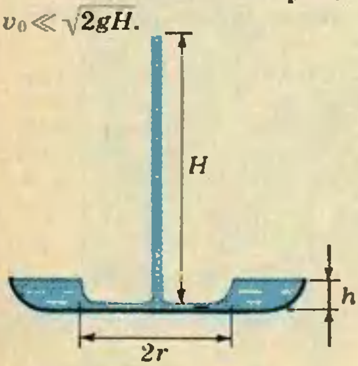
Рассмотрим теперь момент удара шарика о горизонтальную плоскость. Модуль скорости v в этот момент будет таким же, как при свободном падении с высоты l: $v=\sqrt{2gl}$. Направление скорости проще всего найти, выражая синус угла φ, образуемого вектором скорости с вертикалью (см. рис. 2), как отношение $v_{гор}/v$:

$$\sin\varphi=v_{гор}/v=\frac{3}{3\sqrt{3}}=0{,}385,$$

откуда $\varphi=22°40'$.

Е. И. Бутиков

Ф1029. *При стационарном падении струи воды на плоское блюдце можно наблюдать такую картину: в некотором радиусе r от места падения струи уровень воды очень низок, а на расстоянии r уровень испытывает скачок (см. рисунок). Оцените радиус r, если расход воды q, высота падения H, высота водяной ступени h. Считать, что начальная скорость истечения воды из крана $v_0 \ll \sqrt{2gH}$.*



Масса воды, вытекающей из крана за единицу времени, равна $q\rho$, где ρ — плотность воды. Поскольку скорость истечения воды из крана $v_0 \ll \sqrt{2gH}$, можно считать, что при падении на блюдце любая порция воды имеет скорость $v=\sqrt{2gH}$.

Будем считать, что при ударе о блюдце скорость v остается по абсолютной величине прежней и меняется только ее направление. При этом после удара каждая малая порция воды массой μ переносит (по радиальному направлению) импульс $\mu v=\mu\sqrt{2gH}$, который теряется при столкновении с «водяной стенкой». Пусть время соударения со «стенкой» равно Δt. Тогда

$$f\cdot\Delta t=\mu v=\mu\sqrt{2gH}, \qquad (1)$$

где f — сила, действующая на порцию μ воды со стороны «стенки» в том месте, где эта порция налетает на «стенку». Эта сила есть сила гидростатического давления неподвижной воды, образовавшей «ступеньку» высотой h, т. е.

$$f=\frac{1}{2}\rho gh\cdot\Delta s, \qquad (2)$$

где Δs — площадка на стенке, на которую попадает порция μ воды. Следовательно, суммарная сила, действующая со стороны «стенки» на ударяющуюся в нее воду, по абсолютной величине равна (см. (2)).

$$F=\sum f=\frac{1}{2}\rho gh\sum\Delta s=\frac{1}{2}\rho gh\cdot 2\pi rh=\pi\rho gh^2r.$$

С другой стороны (см. (1)),

kvant.mccme.ru

$$F=\sum\frac{\mu v}{\Delta t}=\frac{v}{\Delta t}\sum\mu=\frac{M}{\Delta t}v=q\rho v=q\rho\sqrt{2gH}$$

(масса M равна массе воды, вытекающей из крана за время Δt, и следовательно, $M/\Delta t=m=q\rho$). Таким образом, $\pi\rho g h^2 r=q\rho\sqrt{2gH}$, откуда получаем оценку r:

$$r=\frac{q}{\pi h^2}\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

А. А. Алабугин, А. В. Уманский

Ф1030. *На невесомой нити жесткостью k висит тело массой m. Максимальное натяжение, которое выдерживает нить, равно T. Тело приподнимают на высоту x от положения равновесия и отпускают. При каком минимальном x нить порвется?*

Заметим, что $T>mg$, — иначе было бы невозможно равновесие. В положении равновесия нить растянута на

$$\Delta l_0=mg/k. \qquad (1)$$

После того как груз был поднят на высоту x от положения равновесия и отпущен, он будет двигаться вниз. Пройдя положение, соответствующее длине свободной нити, груз начнет растягивать нить. Пусть Δl — максимальное растяжение нити. Тогда условие обрыва нити —

$$k\cdot\Delta l=T\ \Rightarrow\ \Delta l=T/k. \qquad (2)$$

В зависимости от соотношения параметров T и m возможны два случая: 1) $x<\Delta l_0$, 2) $x>\Delta l_0$. Рассмотрим их отдельно.

1) $x<\Delta l_0$. Запишем закон сохранения энергии, приняв за нулевой уровень потенциальной энергии тела в поле тяжести положение, когда нить не растянута:

$$-mg(\Delta l_0-x)+\frac{k}{2}(\Delta l_0-x)^2=-mg\cdot\Delta l+\frac{k}{2}(\Delta l)^2.$$

Подставляя значения Δl_0 и Δl из (1) и (2), находим x:

$$x=\frac{T-mg}{k}.$$

Легко видеть, что $x\leqslant l_0$ эквивалентно условию $T\leqslant 2mg$.

2) $x>\Delta l_0$. Из закона сохранения энергии —

$$mg(x-\Delta l_0)=-mg\cdot\Delta l+\frac{k}{2}(\Delta l)^2$$

— с учетом (1) и (2) находим:

$$x=\frac{mg}{2k}\left(\left(\frac{m}{mg}-1\right)^2+1\right)\ (\text{при } T\geqslant 2mg).$$

В. Г. Харитонов

Ф1031. *Проводящая сфера разбилась на несколько осколков, разлетающихся на большие расстояния друг от друга. Осколки в произвольном порядке соединяют тонкими проводами. Что больше: электроемкость получившейся системы осколков или электроемкость сферы? Емкостью проводов пренебречь.*

Сообщим системе осколков заряд q (пусть для определенности $q>0$). Начнем собирать осколки, соединенные проводами (емкостью которых мы пренебрегаем), в сферу. Понятно, что поверхностная плотность заряда на любом уже собранном участке сферы будет положительна. Поэтому при сближении осколков между ними все время будут действовать силы отталкивания, и для того чтобы собрать осколки в сферу, нужно совершить работу $A>0$.

Заряд собранной сферы будет равен q, электростатическая энергия ее $W_{сф}=q^2/2C_{сф}$, где $C_{сф}$ — эффективность сферы. Энергия же системы осколков была $W_{ос}=q^2/2C_{ос}$, где $C_{ос}$ — электроемкость системы. Ясно, что $A=W_{сф}-W_{ос}$, и так как $A>0$, $W_{сф}>W_{ос}$, т. е.

$$\frac{q^2}{2C_{сф}}>\frac{q^2}{2C_{ос}}.$$

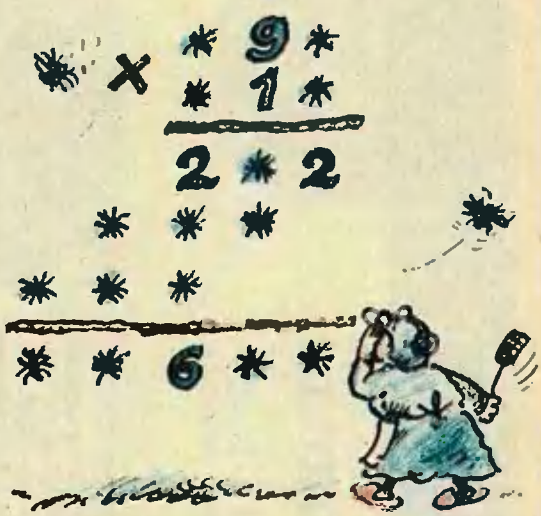
Это означает, что $C_{сф}<C_{ос}$ — электроемкость сферы меньше электроемкости системы осколков, соединенных проводами.

И. М. Луценко

kvant.mccme.ru

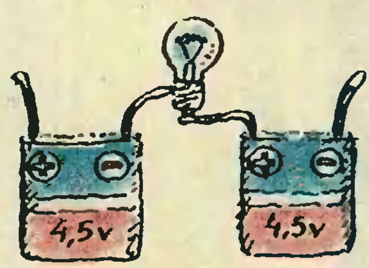
Задачи

1. Замените на рисунке звездочки цифрами так, чтобы равенство оказалось верным.



2. В 1987 году возраст старшего из двух братьев стал равен сумме цифр года рождения младшего, а возраст младшего — сумме цифр года рождения старшего брата. Сколько им лет, если один старше другого на 7 лет?

3. Однажды Петя попробовал подключить лампочку к двум батарейкам так, как показано на рисунке. Однако лампочка не загорелась, хотя от каждой из батареек она зажигалась. Почему?



4. Шофер автобуса установил в одной кассе катушку билетов с номерами от 537000 до 537999, а в другой — с номерами от 462000 до 462999. В какой из катушек «счастливых» билетов больше (т. е. таких, что сумма первых трех цифр равна сумме следующих трех цифр)?

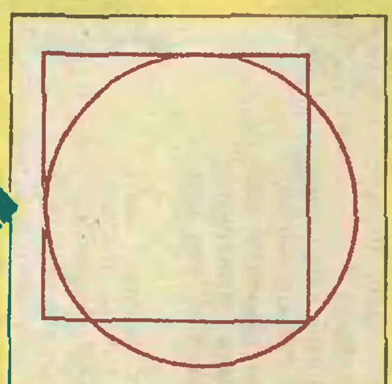
5. Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, разделил его на два четырехугольника, имеющих равные площади. Докажите, что эти стороны параллельны.

Эти задачи нам предложили ученица 7 класса из Мурома *Оля Зевалева*, ученик 10 класса из Пушкинского района АзССР *Натич Ширинов*, *С. В. Дворянинов*, *А. Г. Самосват*, *В. В. Произволов*.

Калейдоскоп „Кванта"

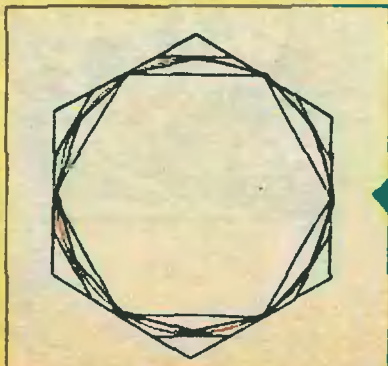
Замечательные числа

Письменная история числа π начинается с египетского папируса, датируемого примерно 2000 годом до н.э., где оно принимается равным $(16/9)^2 = 3{,}1604\ldots$ Древние греки пытались с помощью циркуля и линейки построить квадрат, равновеликий данному кругу, т. е. получить аппроксимацию числа π.



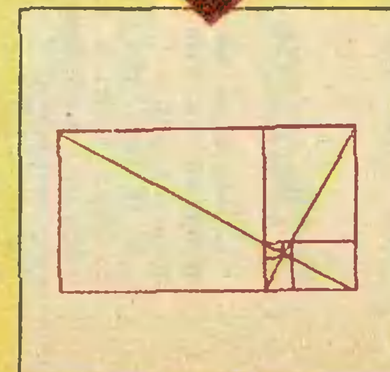
Число $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ называют отношением «золотого сечения». В таком отношении точка C делит отрезок AB, если $AB:AC = AC:CB$. (Положив $AB = x$, а $AC = 1$, получаем, что $x:1 = 1:(x-1)$, откуда $x^2 - x - 1 = 0$. Положительный корень этого уравнения равен $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$.)

Из приведенного уравнения следует, что $\tau^2 = \tau + 1$, а $1/\tau = \tau - 1$. Если от прямоугольника, отношение неравных сторон которого равно τ (такой прямоугольник называется «золотым»), отрезать квадрат, получим подобный ему прямоугольник с коэффициентом подобия $1/\tau$. Этот процесс можно продолжать бесконечно.



Архимед для оценки числа π вычислял периметры вписанных и описанных многоугольников от шестиугольника до 96-угольника. Ему принадлежит приближенное значение $\pi \approx 22/7 = 3{,}1428\ldots$ Индусы в V—VI веках пользовались числом $\sqrt{10} = 3{,}1611\ldots$, китайцы — числом $22/7$, а также числом $355/113 = 3{,}1415929\ldots$

Любопытно, что τ равно радиусу окружности, описанной вокруг правильного десятиугольника со стороной 1. Но периметр такого десятиугольника приблизительно (с хорошей точностью) равен длине описанной окружности, т. е. $2\pi\tau \approx 10$ или $\pi\tau \approx 5$. Еще точнее соотношение $5\pi \approx 6\tau^2$. Отсюда $\pi = \sqrt[3]{30} = 3{,}1072\ldots$ Точнее $\pi = \sqrt[3]{31} = 3{,}14138\ldots$



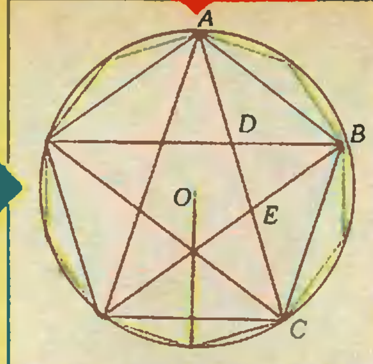
kvant.mccme.ru

В 1596 году голландский математик Ван Цейлен представил число π с 32 верными знаками. В 1719 году французский математик Ланьи вычисляет π со 140 верными знаками. В 1844 году немец Дазе нашел π с 200 верными знаками; в конце XIX века было уже известно более 500 верных знаков числа π.

В правильном пятиугольнике имеется много пар отрезков, отношение которых равно τ: $AC:AB=AE:EC=AE:AD=\tau$ и т. д. Любопытны следующие представления числа τ:

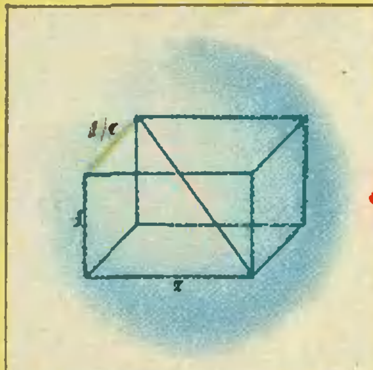
$$\tau=\sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}};$$

$$\tau=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}.$$

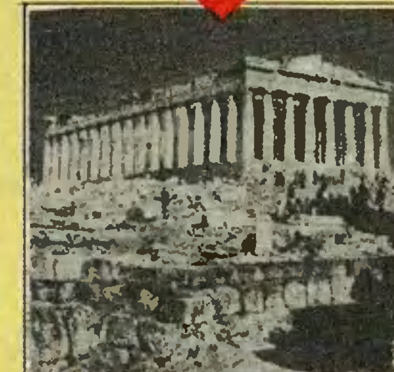


Пропорция золотого сечения часто использовалась художниками и архитекторами. Леонардо да Винчи находил τ в пропорциях человеческого тела. Древнегреческий скульптор Фидий использовал золотое сечение при оформлении Парфенона. В честь Фидия золотое сечение иногда обозначают буквой φ.

Недавно Джонатан и Питер Борвейны (США) нашли π с 29 360 128 верными знаками. Это число хранится в памяти вычислившей его ЭВМ. Если его распечатать, оно займет 30 томов по 400 страниц. Японские математики обещают вычислить π со 100 000 000 верных знаков.



Золотым кубоидом называют прямоугольный параллелепипед с ребрами τ, 1, $1/\tau$. Его полная поверхность равна 4τ, а диагональ равна 2. Отсюда следует, что поверхность сферы, описанной около «золотого кубоида», равна 4π. Таким образом, отношение этой поверхности к поверхности самого кубоида равно $\pi:\tau$.

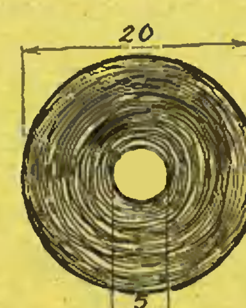


Головоломки

1. Уложите на стол семь монет: три однокопеечные, три трехкопеечные и одну двухкопеечную так, чтобы каждая из них касалась не менее трех других.

2. Переложите одну спичку так, чтобы изображенное на рисунке равенство выполнялось с точностью до 0,002.

3. Магнитофонная лента длиной 500 м намотана на катушку диаметром 5 см; в результате получилась катушка диаметром 20 см. Какова толщина ленты?



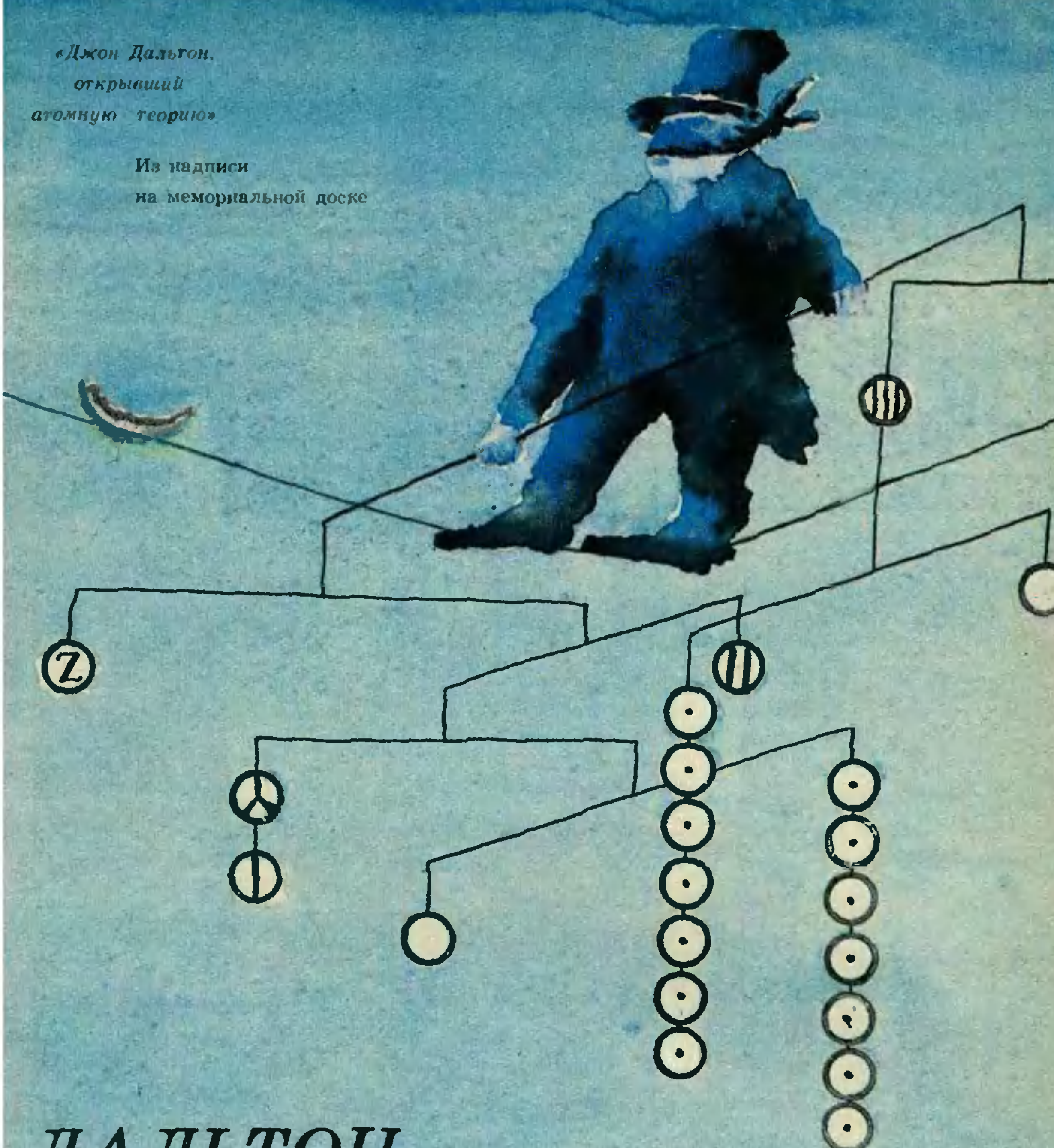
1987 4

kvant.mccme.ru

kvant.mccme.ru

«Джон Дальтон, открывший атомную теорию»

Из надписи на мемориальной доске



ДАЛЬТОН ВЗВЕШИВАЕТ АТОМЫ

Кандидат физико-математических наук
А. С. ШТЕЙНБЕРГ

В 90-х годах XVIII века в не слишком серьезном английском журнале «Календарь для леди и джентельменов» стал сотрудничать молодой человек по имени Джон Дальтон. В его обязанности входило информировать читателей о погодных наблюдениях. Новый сотрудник выказывал весьма похвальное усердие. В частности, он начал вести дневник метеорологических наблюдений... А спустя много лет на страницах этого дневника появилась первая в мире таблица атомных весов элементов, которая прославила имя автора.

Идея о существовании «первокирпичика» вещества — атома — зародилась более двух тысяч лет назад. Но, как утверждает восточная пословица, «сколько ни говори «халва, халва», во рту сладко не станет». Если атомы — реальность, у них должны быть размеры и вес. А задача физики — их измерить. Но как?

Поставьте себя на место физика или химика конца XVIII века. В вашем распоряжении имеются данные о составе ряда веществ, накопленные за столетия алхимических и химических опытов. Например, известно, что вода состоит из кислорода и водорода, углекислый газ — из углерода и кислорода и т.д. Известно также, что существуют «простые вещества», которые невозможно разложить на более элементарные; это водород, кислород, азот, углерод, сера и т. д. Каковы ваши возможности в области измерений? Можно определять веса и объемы тел, в случае газа — измерять давление. Правда, из-за несовершенства аппаратуры все количественные данные большой точностью не отличаются, ошибки до 10 % — в порядке вещей...

Теперь подумайте, как на такой основе можно измерить что-либо, относящееся к мельчайшим атомам (само существование которых к тому же было под вопросом). Дальтон придумал и со столь скромным багажом приступил к «взвешиванию» атомов.

Он принял, что каждое из неразложимых, «простых», веществ состоит из атомов одного сорта. Дальтон понимал, что определить их абсолютный вес (скажем, в граммах) *) ему не под силу. Следовало поступить по-другому: принять вес самого легкого атома за единицу и в этих единицах выразить веса остальных. Самым легким из «простых» веществ был водород, и вес его атома Дальтон приравнял к 1. Далее он решил опираться на данные по химическим реакциям. Допустим, что, вступая в реакцию, два простых вещества A и B образует новое вещество. Тогда, поскольку A и B состоят из неделимых атомов, образование нового вещества может быть связано только с их соединением (рисунок 1). Вот как свою гипотезу формулировал сам Дальтон:

«Если имеются два тела A и B, склонные соединяться между собой, то реакции могут протекать в следующем порядке, начиная с простейшей, а именно:

1 атом A + 1 атом B = 1 атом C двойной,
1 атом A + 2 атома B = 1 атом D тройной,
2 атома A + 1 атом B = 1 атом E тройной,
1 атом A + 3 атома B = 1 атом F четверной,

...» и т. п.*)

(Отсюда сразу следовал знаменитый закон кратных отношений: если два элемента образуют друг с другом более одного соединения, то массы одного элемента, приходящиеся на одну и ту же массу другого, относятся как небольшие целые числа. Например, в двойном (AB) и тройном (AB_2) атомах (по терминологии Дальтона) массы вещества B, приходящиеся на одну и ту же массу вещества A, относятся друг к другу как 1:2.)

Теперь можно было сделать решительный шаг в определении атомных весов. Как? Разберем один из расчетов Дальтона.

При соединении кислорода с углеродом в зависимости от весовых соотношений реагентов образуется либо окись углерода, либо углекислый газ.

*) Понятно, что на самом деле речь идет о массе; но мы сохраняем терминологию, принятую в то время.

*) Комплекс из нескольких атомов Дальтон называл сложным (двойным, тройным и т. д.) атомом. Сейчас для него принято наименование «молекула».

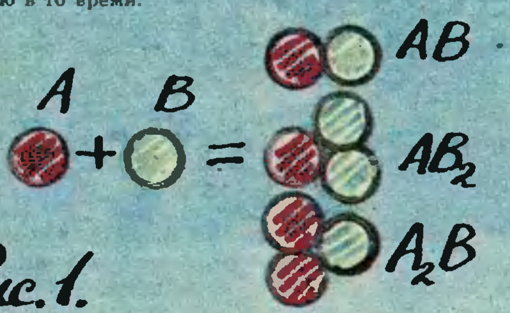


Рис. 1.

Рис. 2.

Вот какими численными данными располагал Дальтон:

44 % углерода $+$ 56 % кислорода $=$ $=$ окись углерода,

28,1 % углерода $+$ 71,9 % кислорода $=$ углекислый газ.

В такой записи никаких закономерностей не видно. Но давайте определим, сколько приходится кислорода на одно и то же количество углерода в разных реакциях. В первой на 44 весовые части углерода — 56 весовых частей кислорода. А сколько потребуется кислорода на 44 весовые части углерода во второй реакции? Ответ дает простая пропорция:

$$44 \cdot \frac{79{,}9}{28{,}1} \approx 112{,}6.$$

Почти точно в два раза больше, чем в первой! Дальтон объяснил этот факт, предложив соответствующие атомные модели обоих веществ (см. рисунок 2):

1 атом углерода $+$ 1 атом кислорода $=$ $=$ 1 атом двойной окиси углерода,

1 атом углерода $+$ 2 атома кислорода $=$ $=$ 1 атом тройной углекислого газа.

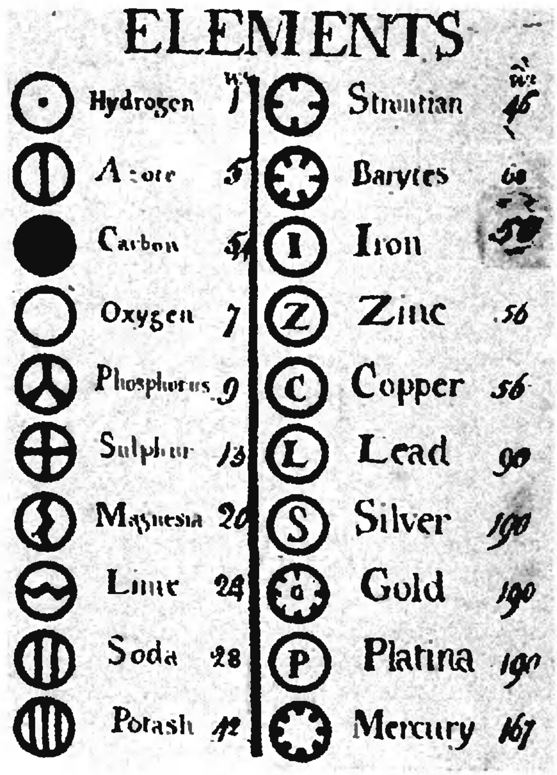
Из такого объяснения (совершенно верного!) следовало, что вес атома кислорода относится к весу атома углерода как 56:44 (в хорошем согласии с современными данными).

План Дальтона по определению атомных весов был предельно ясен: сначала по реакции образования воды подсчитать вес атома кислорода, а затем по реакциям окисления — веса остальных простых веществ.

6 сентября 1803 года в дневнике Дальтона появилась первая таблица атомных весов ряда веществ. Мы приведем часть этой таблицы вместе с современными данными (в тех же единицах измерения):

Атом	Атомный вес	
	по Дальтону	современные данные
Водород (H)	1	1
Кислород (O)	5,66	15,37
Азот (N)	4	14
Углерод (C)	4,5	11,9
Вода (HO) (сложный атом)	6,66	17,87 (молекула H_2O)

Казалось бы, ничего похожего. Но это не совсем так. Например, отношение весов кислорода и углерода по данным Дальтона равно 1,26. Современные методы дают очень близкое значение — 1,25. Не стоит также забывать, что это — лишь первая версия таблицы. Впоследствии Дальтон не раз уточнял ее. В частности, вес кислорода «вырос» до 7. К сожалению, один серьезный дефект оставался во всех вариантах: Дальтон неверно определял атомный вес кислорода. А поскольку атомные веса других веществ определялись в основном по реакциям окисления, ошибка автоматически переносилась и на них.



Эта таблица символов различных атомов и атомных весов была опубликована в первом томе книги Дальтона «Новая система химической философии» (1808 год).

Из таблицы видно, что химическому составу воды, по Дальтону, соответствует формула HO, т. е. на каждый атом кислорода приходится один атом водорода. Именно здесь и крылась неточность. Сегодня химическая формула воды известна всем — H_2O. Но Дальтон этой формулы не знал, а без этого не мог двигаться дальше. Поэтому он ввел следующий принцип: в тех случаях, когда известно лишь одно соединение атомов *A* и *B*, оно является простейшим, т. е. по терминологии Дальтона двойным атомом *AB*. Поэтому формула воды и приняла вид HO.

kvant.mccme.ru

Вероятно, этот принцип не очень удовлетворял Дальтона. Буквально через несколько строк после определения состава воды он пишет: «В конце концов надо допустить возможность того, что вода может быть тройным соединением. В этом случае, если два атома водорода соединяются с одним атомом кислорода, атом кислорода должен весить в 14 раз больше атома водорода»...

Дальше этого Дальтон не пошел. Более того, ко всем попыткам других исследователей пересмотреть или уточнить его результаты он относился крайне враждебно. Но научных занятий не оставлял до самого конца жизни. 27 июля 1844 года, за несколько часов до смерти и уже чувствуя ее приближение, Джон Дальтон в последний раз взобрался на метеовышку и дрожащей рукой сделал последнюю из 200 000 записей в своем дневнике...

Ошибки Дальтона еще при его жизни исправил замечательный шведский химик Якоб Берцелиус. Будучи убежденным сторонником атомистической теории Дальтона, Берцелиус в то же время писал: «Числа Дальтона лишены той точности, которая необходима для практического применения его теории». В 1826 году, следуя идеям английского ученого, Берцелиус составил таблицу атомных весов, которая по существу не отличается от современной.

Наш календарь

Дифракционной решетке — 200 лет

Едва ли какому-либо прибору современная физика обязана столь же многим, как дифракционной решетке, позволяющей точно и надежно определять длины световых волн.

Спектральные приборы с использованием дифракционных решеток впервые начал строить выдающийся немецкий оптик Й. Фраунгофер (1787—1826) в двадцатых годах прошлого века. И в течение более ста лет считалось, что именно он изобрел дифракционную решетку. Но когда в 1932 году в США готовились отметить юбилей одного из зачинателей физики и астрономии в Новом Свете Д. Риттенхауза (1732—1796), неожиданно обнаружилось, что этот ученый изготовил и исследовал дифракционную решетку еще в 1786 году.

Биография Дейвида Риттенхауза довольно хорошо известна. С детства он увлекался конструированием различных механизмов и приборов. Позже к этим увлечениям добавилась «натуральная философия», которую он постигал, штудируя сочинения великого Ньютона. Изготовление физических и астрономических приборов, исследования и наблюдения с их помощью стали делом всей его жизни. Оригинальные по замыслу и отличные по техническому исполнению хронометры, термометры, планетарии, оптические системы и другие приборы Риттенхауза принадлежали к наиболее совершенным исследовательским средствам его эпохи. Риттенхауз изучал сжимаемость воды и тепловое расширение дерева, занимался усовершенствованием громоотводов и экспериментировал с магнитами. Кстати сказать, оказалось, что в своем понимании природы магнетизма твердых тел он чуть ли не на сто лет опередил современников.

Научные заслуги Риттенхауза не остались без признания — он занимал пост профессора и ректора Пенсильванского университета, состоял почетным членом Лондонского королевского общества, после смерти знаменитого Б. Франклина (1706—1790) его избрали президентом Американского философского общества, а в конце жизни он был назначен управляющим Монетным двором.

Как-то в марте 1785 года Риттенхауз получил от одного знакомого юриста письмо, которое его необычайно заинтересовало. «Дорогой сэр! — говорилось в письме. — Позволю себе привлечь Ваше внимание к следующему вопросу из оптики. Я полагаю, вопрос этот совершенно нов, и ответ на него составит удовольствие для Вас и будет поучительным для меня. В один из вечеров прошлого лета, сидя у двери моего дома, я вынул из кармана шелковый носовой платок и, сильно растянув его обеими руками, стал смотреть через него на уличный фонарь ярдах в ста (примерно 90 м) от дома. Я ожидал, что увижу крупным планом нити ткани платка. И дей-

Дифракционная картина, полученная в монохроматическом свете с помощью дифракционной решетки.

ствительно, в согласии с ожиданием я увидел шелковые нити, выглядевшие как толстая проволока. Но я был чрезвычайно удивлен, когда обнаружил, что при движении платка вправо и влево темные полосы как будто вовсе не сдвигались, а оставались перед глазами неподвижными». В заключение юрист писал, что будет чрезвычайно признателен Риттенхаузу за объяснение явления, основанное на «философских принципах».

Через год на заседании Американского философского общества было оглашено ответное письмо Риттенхауза. Начиналось оно так: «Дорогой сэр! Эксперимент, о котором Вы писали, ...гораздо более любопытен, чем это могло бы показаться на первый взгляд. Ибо то, что Вы видите, не ткань платка в крупном плане, а нечто совсем иное...» И далее описывались эксперименты, в которых вместо шелкового носового платка использовалось то, что оптики называют плоской прозрачной дифракционной решеткой.

Риттенхауз изготовил эту решетку из 50—60 отрезков волоса диаметром около 0,1 мм и длиной приблизительно 10 мм, натянутых параллельным рядом на равных расстояниях порядка 0,2 мм один от другого между двумя латунными проволочками с тонкой резьбой, в углублениях которой закреплялись их концы. Исследователь проделал в затемнявшем помещение оконном ставне узкую щель ($0{,}8\times75$ мм) и взглянул на нее через свою рамку с волосками, расположенную так, что волоски были параллельны щели. Он увидел картину, состоящую из яркой бесцветной линии в центре и пяти-шести радужных полосок — спектров — слева и справа от нее. Порядок цветов в спектрах был обратный тому, который наблюдается при разложении белого света призмой, т. е. в каждом из спектров наименьшее отклонение от центра испытывали фиолетовые лучи, а наибольшее — красные.

Риттенхауз измерил углы отклонения различных лучей в своих спектрах. Если пересчитать его данные на длины волн, то для красного света получается значение 620 нм, а для синего — 460 нм. Эти значения близки к действительным (как известно, видимый спектр простирается приблизительно от 800 нм в красной части до 400 нм в синей части), что явно свидетельствует о хорошей точности опытов Риттенхауза. Сам ученый, конечно, ни о каких световых волнах не помышлял. Следуя Ньютону, он был твердо убежден, что свет — это поток каких-то частиц, поэтому осмыслить наблюдаемое явление Риттенхауз не смог и продолжать эксперимент не стал. Но, видимо, важность их он интуитивно вполне сознавал, поскольку в конце своего сообщения об исследованиях пророчески отметил, что «продолжение этих опытов может привести к новым интересным открытиям, касающимся свойств этой удивительной субстанции, называемой светом».

Уже в первых опытах Риттенхауз выяснил, что по мере возрастания числа щелей в решетке спектральные полоски (линии) становятся более узкими и резкими. В его решетках на один миллиметр приходилось около 5 волосков и соответственно столько же щелей. Фраунгофер вместо волосков использовал штрихи, наносимые на стекло алмазным острием; число штрихов у него доходило до 300 на 1 мм. В 80-х годах прошлого века американский физик Г. Роуланд (1848—1901) построил специальную делительную машину и стал изготовлять дифракционные решетки с числом штрихов до 1000 на 1 мм. В наше время промышленным способом изготовляются решетки, в которых на миллиметр приходится до 6000 штрихов.

Б. Е. Явелов

Просто о простых числах

(Начало см. на с. 8)

которого в целых точках совпадают с множеством всех простых чисел. Этот многочлен имеет степень 25 и для его записи нужно использовать **все** буквы английского алфавита — переменных всего 26:

$$\begin{aligned}P=(k+2)\{1&-[wz+h+j-q]^2-\\&-[(gk+2g+k+1)(h+j)+h-z]^2-\\&-[2n+p+q+z-e]^2-\\&-[16(k+1)^3(k+2)(n+1)^2+1-f^2]^2-\\&-[e^3(e+2)(a+1)^2+1-o^2]^2-[(a^2-1)y^2+\\&+1-x^2]^2-[16r^2y^4(a^2-1)+1-u^2]^2-\\&-[((a+u^2(u^2-a))^2-1)(n+4dy)^2+1-\\&-(x+cu)^2]^2-[n+l+v-y]^2-[(a^2-1)l^2+\\&+1-m^2]^2-[ai+k+1-l-i]^2-[p+\\&+l(a-n-1)+s(2ap+2a-p^2-2p-2)-x]^2-\\&-[z+pl(a-p)+t(2ap-p^2-1)-pm]^2\}\end{aligned}$$

Появился он в результате исследований диофантовых уравнений и связан с решением 10-й проблемы Гильберта советским математиком Ю. А. Матиясевичем (см. «Квант», 1970, № 7, с. 39).

В заключение предлагаем заинтересовавшимся читателям еще несколько задач.

Задачи

14. Найдите все простые числа, являющиеся одновременно суммами и разностями двух простых чисел.

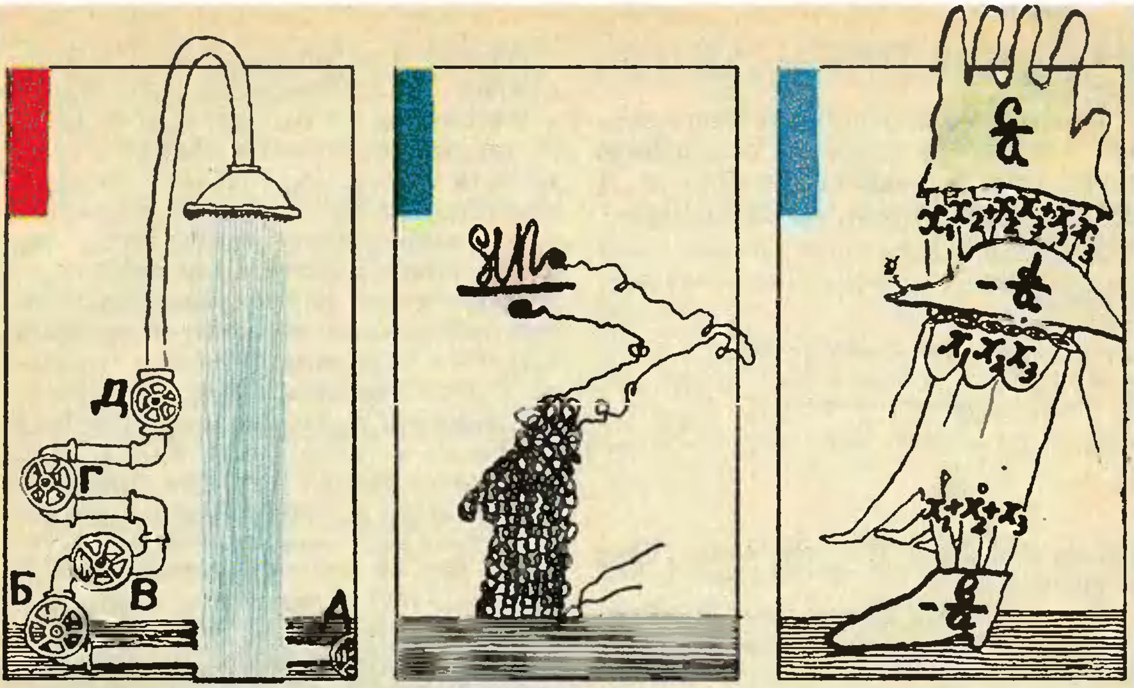
15. Докажите, что квадрат любого простого числа $p>3$ при делении на 12 дает в остатке 1.

16. Докажите, что если p и p^2+2 — простые числа, то p^3+2 — тоже простое число.

17. Какие простые числа представляются в виде суммы двух кубов натуральных чисел?

18. Каково n, если $n+1$, $n+3$, $n+7$, $n+9$, $n+13$, $n+15$ — простые?

kvant.mccme.ru



Школа в „Кванте"

Математика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Признак делимости на числа вида $10n \pm 1$» предназначена восьмиклассникам, заметка «Первый замечательный предел» — девятиклассникам и десятиклассникам, заметка «Формулы Виета» — учащимся восьмых — десятых классов.

Признак делимости на числа вида $10n \pm 1$

В 1884 году в одном из номеров издававшегося в Киеве «Журнала элементарной математики» была помещена статья основателя журнала профессора В. П. Ермакова «Признаки делимости чисел». В статье были показаны описываемые ниже признаки делимости на числа вида $10n \pm 1$.

Чтобы узнать, делится ли данное число N на число $m = 10n + 1$, нужно:

А. отбросить от числа N последнюю цифру;

Б. вычесть из полученного числа произведение отброшенной цифры на n;

В. с полученным числом проделать операции **А** и **Б**;

Г. делать это до тех пор, пока (после применения операции **Б**) не останется число, меньшее или равное 0;

Д. если оставшееся число есть 0, то N делится на $m = 10n + 1$; в противном случае N не делится на m.

Докажем это. Если k — последняя цифра числа N, то операции **А** и **Б** превращают число N в число

$$\frac{N-k}{10} - kn = \frac{N-k-10kn}{10} = \frac{N-km}{10}.$$

Очевидно, что это число делится на m тогда и только тогда, когда N делится на m. Дальнейшие операции уменьшают число, не меняя его делимости на m, откуда и следует **Д**.

Примеры

$\boxed{N = 11934, \quad m = 51:}$

$$11934 \xrightarrow{\text{А}} 1193 \xrightarrow{\text{Б}} 1173 \xrightarrow{\text{А}} 117 \xrightarrow{\text{Б}} 102 \xrightarrow{\text{А}} 10 \xrightarrow{\text{Б}} 0$$

$\boxed{N = 15314, \quad m = 61:}$

$$15314 \xrightarrow{\text{А}} 1531 \xrightarrow{\text{Б}} 1507 \xrightarrow{\text{А}} 150 \xrightarrow{\text{Б}} 108 \xrightarrow{\text{А}} 10 \xrightarrow{\text{Б}} -38$$

Мы видим, что 11 934 делится на 51, а 15 314 не делится на 61.

Заметим, что если в *случае делимости* записать отброшенные цифры в обратном порядке, то получится частное; например, 11 934:51=234 (докажите!).

Чтобы получить признак делимости на $m=10n-1$, нужно в Б заменить вычитание сложением, в Г и в Д вместо 0 написать m, а вместо $10n+1$ написать $10n-1$.

Пример

$$\boxed{N=9246\,,\quad m=69}$$

$$9246\xrightarrow{\text{А}}924\xrightarrow{\text{Б}'}966\xrightarrow{\text{А}}96\xrightarrow{\text{Б}'}138\xrightarrow{\text{А}}13\xrightarrow{\text{Б}'}69$$

(здесь операция Б— это измененная операция Б).

Значит, 9246 делится на 69. Придумайте, как в этой строчке прочесть частное 9246:69.

Заметим, наконец, что если записывать числа в двоичной системе счисления, то любое из наших правил дает признак делимости на любое нечетное число (признак делимости на 2 в двоичной системе самоочевиден).

В. Г. Столяр

Первый замечательный предел

В учебном пособии «Алгебра и начала анализа 9—10» (М.: Просвещение, 1986) в п. 20 (с. 94) доказывается *теорема о производной синуса:* функция синус имеет производную в любой точке и $(\sin x)'=\cos x$. При доказательстве этой формулы существенно используется то, что отношение $\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}$ стремится к единице, когда Δx стремится к нулю:

$$\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\to 1 \quad \text{при } \Delta x\to 0.$$

Иными словами, используется теорема о пределе отношения $\frac{\sin x}{x}$ при $x\to 0$:

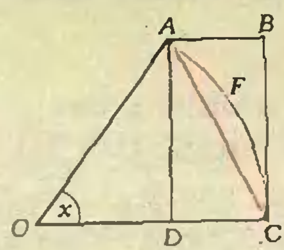
$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.}$$

Математики называют этот предел *первым замечательным пределом.*

В этой заметке мы докажем теорему о пределе отношения $(\sin x)/x$ при $x\to 0$ (в школьном учебнике соответствующее доказательство опирается на геометрическую наглядность, см. с. 95). При доказательстве нам понадобится более формальное определение предела, чем то, которое дается в «Алгебре и началах анализа 9—10» на с. 76. Именно, мы будем говорить, что *функция $f(x)$ стремится к пределу L при $x\to a$ $(x\neq a)$, если для любого положительного ε найдется такое положительное δ, что для всех x, таких, что $|x-a|<\delta$ выполняется неравенство $|f(x)-L|<\varepsilon$.* Другими словами, *функция $f(x)$ стремится к пределу L при $x\to a$, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такую окрестность точки a, что при всех x из этой окрестности, $x\neq a$, будет выполняться неравенство $|f(x)-L|<\varepsilon$.* (Продумайте самостоятельно эквивалентность всех трех определений предела: наших двух и определения, данного в школьном учебнике.)

Итак, переходим к доказательству теоремы.

Предположим вначале, что $0<x<\frac{\pi}{2}$. Рассмотрим единичную окружность с центром O и сравним площадь сегмента AFC с площадью прямоугольника $ABCD$ (см. рисунок).



Площадь сегмента AFC равна разности площадей сектора OAC и треугольника OAC, т. е.

$$S_{AFC}=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x>0,$$

откуда

$$\sin x<x.$$

Оценим теперь площадь прямоугольника $ABCD$. Так как $AD=\sin x$, $DC=1-\cos x$,

$$S_{ABCD}=\sin x\,(1-\cos x)=$$
$$=2\sin^2\frac{x}{2}\cdot\sin x<2\cdot\frac{x^2}{4}\cdot x=\frac{x^3}{2}.$$

kvant.mccme.ru

Поскольку сегмент AFC лежит внутри прямоугольника, мы получаем цепочку неравенств:

$$0<S_{AFC}<S_{ABCD},$$

$$0<\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\sin x<\frac{x^3}{2}, \qquad (*)$$

$$0<1-\frac{\sin x}{x}<x^2$$

(в промежутке $0<x<\frac{\pi}{2}$).

Заметим теперь, что функция $\frac{\sin x}{x}$ четная, поэтому неравенство (*) справедливо и в промежутке $-\frac{\pi}{2}<x<0$, т. е. оно справедливо для всех x, удовлетворяющих условию $0<|x|<\frac{\pi}{2}$.

Так как $x^2\to 0$ при $x\to 0$, то для любого $\varepsilon>0$ можно указать такую окрестность, что при всех x из этой окрестности, $x\neq 0$, будет выполняться неравенство $x^2<\varepsilon$. Учитывая (*), получим, что для всех x из этой окрестности, $x\neq 0$, будем иметь

$$1-\frac{\sin x}{x}=\left|1-\frac{\sin x}{x}\right|<\varepsilon.$$

Это и означает, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ — наша теорема доказана.

Г. А. Сорокин

Формулы Виета

В школьном курсе алгебры (см. «Алгебру 7», п. 23) доказывается *теорема Виета* для приведенных квадратных уравнений. Однако аналогичная теорема справедлива и для кубических уравнений, и для уравнений четвертой степени, и вообще для произвольных алгебраических уравнений степени n, причем старший коэффициент (при x^n) вовсе не обязательно равен единице.

При $n=1$ мы получаем линейное уравнение $ax+b=0$ и если x_1 — его корень, то $ax_1+b=0$, откуда

$$\boxed{x_1=-\frac{b}{a}.}$$

Пусть есть квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$, и пусть x_1 — его корень. Тогда

$$ax_1^2+bx_1+c=0.$$

Вычитая из уравнения $ax^2+bx+c=0$ тождество $ax_1^2+bx_1+c=0$, получим

$$a(x-x_1^2)+b(x-x_1)=0,$$

откуда

$$(x-x_1)(ax+ax_1+b)=0.$$

Так как x_1 корень уравнения $x-x_1=0$, то второй корень квадратного уравнения x_2 удовлетворяет уравнению

$$ax_2+ax_1+b=0.$$

Значит,

$$\boxed{x_1+x_2=-\frac{b}{a}}$$

Это — п е р в а я формула Виета для квадратного уравнения. Далее,

$$x_1^2+\frac{b}{a}x_1+\frac{c}{a}=0,$$

или

$$x_1^2-(x_1+x_2)x_1+\frac{c}{a}=0,$$

откуда получаем в т о р у ю формулу Виета

$$\boxed{x_1x_2=\frac{c}{a}.}$$

Заметим, что при выводе обеих формул Виета нам вовсе не понадобились формулы для корней квадратного уравнения. (Кстати, они из формул Виета легко находятся.)

Используя формулы Виета, мы можем доказать полезную т е о р е м у: *если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $f(x)=ax^2+bx+c$, то $f(x)=$ $=a(x-x_1)(x-x_2)$*. В самом деле,

$$f(x)=ax^2+bx+c=a\left(x^2-\left(-\frac{b}{a}\right)x+\right.$$
$$\left.+\frac{c}{a}\right)=a(x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2)=$$
$$=a((x^2-x_1x)-(x_2x-x_1x_2))=$$
$$=a(x-x_1)(x-x_2).$$

Для корней кубического уравнения формулы Виета выводятся совершенно аналогично, но чтобы читатели лучше усвоили технические приемы, мы еще раз проделаем всю последовательность шагов.

Для общего случая алгебраического уравнения степени n читатели, знакомые с методом полной математической индукции, смогут вывести формулы Виета самостоятельно. Здесь мы эти формулы только выпишем.

Пусть дано уравнение

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0.$$

Тогда

$$\boxed{\begin{gathered} x_1+x_2+x_3+\ldots+x_n=-\frac{a_1}{a_0}, \\ x_1x_2+\ldots+x_1x_n+x_2x_3+ \\ +x_2x_4+\ldots+x_{n-1}x_n=\frac{a_2}{a_0}, \\ x_1x_2x_3+\ldots+x_{n-2}x_{n-1}x_n=-\frac{a_3}{a_0}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1x_2\ldots x_{n-1}+\ldots+x_2x_3\ldots x_n=(-1)^{n-1}\frac{a_{n-1}}{a_0}, \\ x_1x_2\ldots x_n=(-1)^n\frac{a_n}{a_0}. \end{gathered}}$$

Итак, пусть у нас есть кубическое уравнение

$$ax^3+bx^2+cx+d=0 \quad (a\neq 0),$$

и пусть x_1 — его корень.

Значит, $ax_1^3+bx_1^2+cx_1+d=0$, и поэтому

$$a(x^3-x_1^3)+b(x^2-x_1^2)+c(x-x_1)=0,$$
$$(x-x_1)(a(x^2+xx_1+x_1^2)+ +b(x+x_1)+c)=0,$$
$$(x-x_1)(ax^2+(ax_1+b)x+ax_1^2+ +bx_1+c)=0.$$

Поскольку x_1 — корень уравнения $x-x_1=0$, два других корня x_2 и x_3 нашего кубического уравнения являются корнями квадратного уравнения

$$ax^2+(ax_1+b)x+ax_1^2+bx_1+c=0.$$

Следовательно, для x_2 и x_3 справедливы уже выведенные нами формулы Виета для квадратных уравнений:

$$x_2+x_3=-\frac{ax_1+b}{a}=-x_1-\frac{b}{a}, \quad (*)$$

$$x_2x_3=\frac{ax_1^2+bx_1+c}{a}=x_1^2+\frac{b}{a}x_1+\frac{c}{a}. \quad (**)$$

Равенство (*) сразу же дает нужную нам первую формулу Виета для корней кубического уравнения

$$\boxed{x_1+x_2+x_3=-\frac{b}{a}.}$$

Подставляя эту формулу в равенство (**), получим

$$x_2x_3=x_1^2-(x_1+x_2+x_3)x_1= =-(x_1x_2+x_1x_3)+\frac{c}{a},$$

откуда

$$\boxed{x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=\frac{c}{a}.}$$

Это — вторая формула Виета для корней кубического уравнения.

Подставляя теперь в тождество

$$x_1^3+\frac{b}{a}x_1^2+\frac{c}{a}x_1+\frac{d}{a}=0$$

вместо b/a и c/a их выражения через корни x_1, x_2, x_3 по формулам Виета, получим

$$x_1^3-(x_1+x_2+x_3)x_1^2+(x_1x_2+x_2x_3+ +x_1x_3)x_1+\frac{d}{a}=0.$$

Отсюда

$$\boxed{x_1x_2x_3=-\frac{d}{a}.}$$

— это и есть нужная нам третья формула Виета.

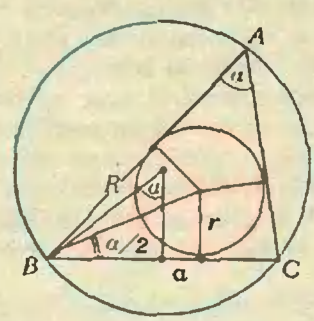
Знание формул Виета облегчает решение многих задач. Найдите, например, зависимость между коэффициентами кубического уравнения $ax^3+bx^2+cx+d=0$, если известно, что сумма двух его корней равна произведению этих корней. Мы выпишем ответ:

$$(c+d)(b+c+d)=ad.$$

Геометрическое приложение: тождества в треугольнике

Формулы Виета могут быть использованы как средство получения целых серий *тождеств* для элементов треугольника.

Общий метод состоит в том, что три «однотипных» элемента (три стороны, или три угла или три высоты и т. д.) оказываются тремя корнями некоторого кубического уравнения, коэффициенты которого могут выражаться, например, через радиусы R и r описанной и вписанной окружностей, полупериметр треугольника p, площадь S и т. д. Приведем пример.



Пусть a, b, c — стороны треугольника, α, β, γ — его соответствующие углы. Очевидно, справедливы соотношения (см. рисунок):

$$\text{(I)} \begin{cases} p-a=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}, \\ a=2R\sin\alpha, \end{cases}$$

kvant.mccme.ru

$$\text{(II)} \begin{cases} p-b=r\operatorname{ctg}\dfrac{\beta}{2}, \\ b=2R\sin\beta, \end{cases}$$

$$\text{(III)} \begin{cases} p-c=r\operatorname{ctg}\dfrac{\gamma}{2}, \\ c=2R\sin\gamma. \end{cases}$$

Исключая α из системы (I), получим для a тождество

$$a^3-2pa^2+(p^2+r^2+4Rr)a-4pRr=0.$$

Исключая же углы β и γ соответственно из второй и третьей систем, получим в точности такие же соотношения для b и c. Это означает, что числа a, b, c являются корнями кубического уравнения

$$x^3-2px^2+(p^2+r^2+4Rr)x-4pRr=0,$$

из которого и вытекает целая серия тождеств, опирающихся на формулы Виета. Например,

$$ab+ac+bc=p^2+r^2+4Rr,$$

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=\frac{1}{2Rr}.$$

С. Ц. Копрински

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Самая длинная сторона треугольника имеет длину 5 см, самая короткая имеет длину 1 см. Какую наибольшую площадь может иметь такой треугольник?

2. Найдите геометрическое место точек пересечения высот треугольников, вписанных в данную окружность.

3. Шесть различных прямых на плоскости не все параллельны и не все проходят через одну точку. Каково наименьшее возможное количество точек пересечения этих прямых?

4. Найдите все пары целых положительных чисел x, y такие, что $2x+1$ делится на y и $2y+1$ делится на x.

5. Каких чисел больше среди целых чисел от 1 до 1 000 000 включительно:

а) делящихся на 11, но не делящихся на 5 или делящихся на 12, но не делящихся на 7?

б) делящихся на 13, но не делящихся на 6 или делящихся на 15, но не делящихся на 26?

Девятый класс

6. В угол α вписали окружность радиуса 1. Затем вписали вторую окружность, касающуюся первой окружности изнутри угла. Затем вписали третью окружность, касающуюся второй окружности изнутри угла и так далее. Найдите радиус 1000-й окружности.

7. На плоскости дан выпуклый многоугольник P. Обозначим через P_a фигуру, составленную из точек, отстоящих от P на расстоянии a (т. е. точек A, для которых внутри или на границе многоугольника найдется точка B такая, что $AB\leqslant a$). Площадь фигуры P_1 равна S_1, площадь фигуры P_2 равна S_2; найдите площадь многоугольника P.

8. На листе клетчатой бумаги проведена окружность, радиус которой в 10 раз больше стороны клетки. Известно, что окружность не проходит через узлы сетки и не касается ее линий. Через сколько клеток она проходит (укажите все возможности)?

9. При каких a и b уравнение $x^3+ax+b=0$ имеет три (различных) решения, составляющие арифметическую прогрессию?

10. Круг радиуса R расположен в верхней полуплоскости и касается оси Ox в точке O. При каких R этот круг целиком содержится в части плоскости, ограниченной параболой $y=x^2$?

Десятый класс

11. В пространстве дан выпуклый многогранник P. Обозначим через P_a пространственную фигуру, составленную из точек, отстоящих от P на расстоянии a (т. е. точек A, для которых внутри или на границе многогранника найдется точка B такая, что $AB\leqslant a$). Объем фигуры P_1 равен V_1, объем фигуры P_2 равен V_2, объем фигуры P_3 равен V_3; найдите объем многогранника P.

12. Найдите наибольшую площадь треугольника, содержащегося в квадрате со стороной 1.

13. Положим $P(x)=x^3-ax$. При каких x существует $y\neq x$ такое, что $P(y)=P(x)$?

14. Расположите в порядке возрастания числа $100^{100!}$, $100!^{100}$, $100^{100}!$. (Напомним, что символ $n!$ обозначает произведение $1\cdot 2\cdot \ldots\times\times n$.)

15. Вы выливаете воду из цилиндрического стакана, постепенно наклоняя его. Показалось дно. Вы остановились в тот момент, когда открылась ровно половина дна. Сколько воды осталось в стакане — меньше четверти или больше?

Публикацию подготовил *Д. Б. Фукс*

kvant.mccme.ru

Информация

Заочная физическая школа при МГУ

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова объявляет прием учащихся в 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме школьной программы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в высшие учебные заведения. При поступлении на физический факультет МГУ удостоверение об окончании ЗФШ учитывается приемной комиссией на собеседовании.

Прием в ЗФШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать до *1 сентября* по адресу: 119899, Москва, ГСП, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ. В письмо вложите два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 7×12 см и заполненной по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество	*Кузнецов Сергей Владимирович*
Класс ЗФШ	*9-й*
Профессия родителей	*мать — врач, отец — инженер*
Подробный домашний адрес	*240816, г. Калуга, ул. К. Либкнехта, д. 4, кв. 73*
Номер и адрес школы	*школа № 10, ул. Пушкина, д. 3.*

Решение приемной комиссии о зачислении в ЗФШ будет сообщено до 20 октября. Проверенные вступительные задания обратно не высылаются.

Зачисленным в ЗФШ в течение года высылаются методические разработки и контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решенное задание оценивается, рецензируется и высылается обратно. Учащиеся 9 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 10 класс на основании оценок, полученных за решение контрольных заданий. Успешно окончившие обучение получают удостоверение об окончании ЗФШ.

Вступительное задание

Поступающим в 9 класс ЗФШ нужно решить задачи 1—4, а поступающим в 10 класс — задачи 4—7.

1. «Несчастный случай». Тело выпало из гондолы воздушного шара, поднимающегося вверх с постоянной скоростью $v_0=10$ м/с. На какой высоте будет находиться шар в тот момент, когда тело достигнет земли, если в момент выпадения тела шар находился на высоте $H=240$ м? Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

2. «Пузырек». В сосуде, наполненном водой плотностью ϱ, всплывает пузырек воздуха объемом V с ускорением a. Найдите силу давления со стороны сосуда на опору. Масса сосуда вместе с водой равна M.

3. «Возвращение». Материальная точка начинает двигаться по прямой с постоянным ускорением. Спустя время T после начала движения знак ускорения меняется на противоположный, а величина его остается неизменной. Определите, через какое время t после начала движения точка вернется в исходное положение?

4. «Металлический дождь». На трехгранную призму, левая грань которой образует с горизонтом угол $\alpha<45°$, а верхний угол призмы прямой, падают однородным потоком с одной и той же высоты металлические шарики. В какую сторону будет двигаться призма? Учитывать только один удар каждого шарика. Считать удары упругими. Трением пренебречь.

5. «Встреча». Две точки движутся по прямой навстречу друг другу с начальными скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ и постоянными ускорениями $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$, направленными противоположно соответствующим скоростям в данный момент времени. При каком максимальном начальном расстоянии между точками они встретятся в процессе движения?

6. «Заряды в поле». В однородном электрическом поле находятся отрицательно заряженное тело массой m и зарядом $-q$ и положительно заряженное тело массой M и зарядом $+Q$. Заряды точечные, линия, их соединяющая, совпадает с направлением поля, напряженность которого равна $\vec{E}$. На каком расстоянии друг от друга и в какой последовательности по отношению к направлению поля должны находиться заряды, чтобы они могли двигаться с одинаковым ускорением?

7. «Рулон». Рулон бумаги раскручивается так, что скорость конца бумажной ленты постоянна и равна v. В начальный момент радиус рулона R. Какова угловая скорость вращения рулона спустя время t? Толщина бумажной ленты d.

Советуем прочесть

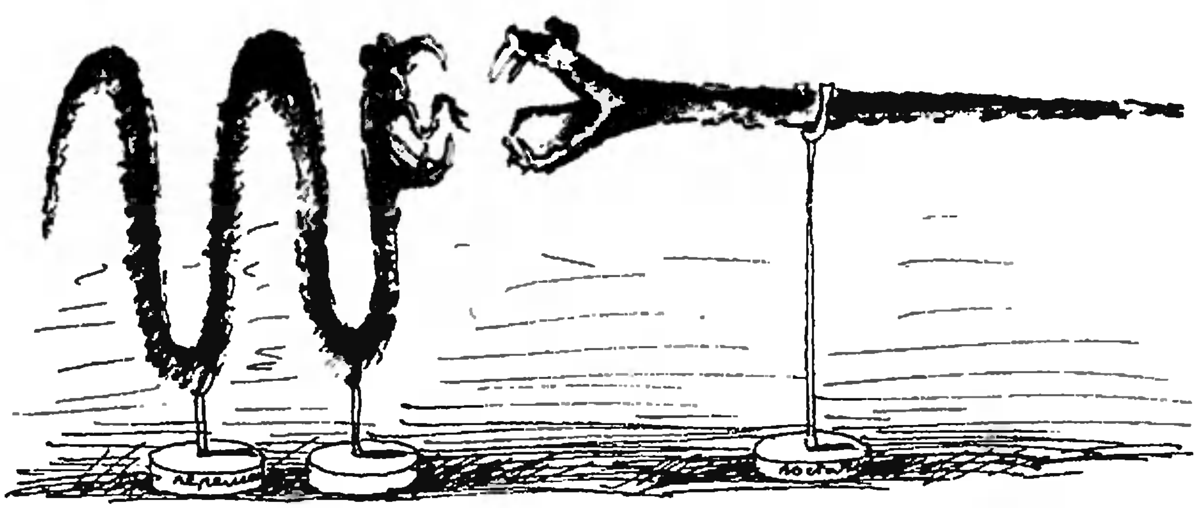
В 1986 году в издательстве «Наука» в серии Библиотечка «Квант» вышли следующие книги:

Данилов И. Д. *Секреты программируемого микрокалькулятора.*

Липунов В. М. *В мире двойных звезд.*

Тихомиров В. М. *Рассказы о максимумах и минимумах.*

kvant.mccme.ru



Лаборатория „Кванта"

Постоянный или переменный?

С. Л. ГАВРИЛОВ

Сегодня все мы привыкли к тому, что ток постоянный и ток переменный мирно соседствуют в технике и быту, дополняя и «выручая» друг друга. А сто лет назад, в восьмидесятых годах прошлого столетия, в Америке, например, развернулась отчаянная борьба между сторонниками одного и другого тока.

Предыдущая история электричества — от изобретения А. Вольтой первого гальванического элемента в 1800 году и до разработки Т. Эдисоном целой системы электрохозяйства в 1880 году — была историей развития постоянного тока. К этому времени, в частности, Эдисоном была одержана победа над сторонниками газового освещения, которые делали все возможное, чтобы не допустить внедрение электрического освещения.

В 1886 году после создания первых работоспособных трансформаторов у постоянного тока появился сильный конкурент — ток переменный. Его напряжение с помощью трансформатора можно преобразовывать в очень широких пределах, что особенно важно при передаче электроэнергии по проводам на большие расстояния. Вырабатывать переменный ток тоже проще и дешевле, чем постоянный.

Тем не менее сторонники постоянного тока вели борьбу всеми средствами. Если с кем-нибудь из персонала, обслуживающего системы переменного тока, происходил несчастный случай, в газетах появлялись статьи с громкими заголовками: «Убийство электрическим проводом», «Новое тело на проводах» и т. п. Когда комиссия, назначенная конгрессом США для выбора способа казни более «гуманного», чем повешение, рекомендовала использовать переменный ток, это послужило еще одним аргументом в борьбе против переменного тока.

Но преимущества переменного тока во многих областях были настолько очевидны, что Эдисон, будучи в первую очередь изобретателем и инженером, прекратил борьбу. И со временем возникшая из эдисоновской компании «Всеобщая компания электричества» («Дженерал Электрик») стала одной из основных фирм, производящих трансформаторы.

Давайте разберемся, какие же преимущества переменного тока помогли ему одержать победу? Но прежде — немного о нем самом.

В цепи переменного тока его направление и численное значение периодически изменяются. Эти изменения можно описать формулой

$$i=I_m\cos\omega t=I_m\cos 2\pi\nu t=I_m\cos(2\pi t/T),$$

kvant.mccme.ru

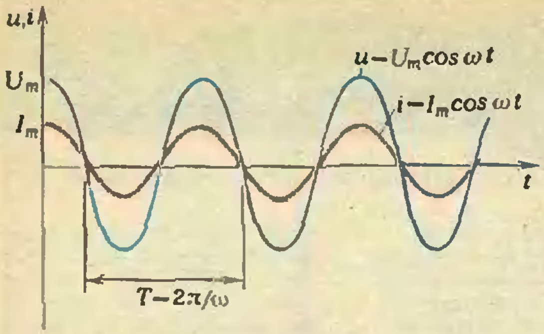


Рис. 1. Графики изменения тока и напряжения в цепи переменного тока.

где i — мгновенное значение переменного тока, I_m — его амплитуда, ν — частота, $\omega=2\pi\nu$ — циклическая частота, T — период изменения тока. Аналогичное выражение можно записать и для напряжения:

$$u=U_m\cos\omega t=U_m\cos 2\pi\nu t=$$
$$=U_m\cos(2\pi t/T).$$

Графики этих функций представлены на рисунке 1, но их можно увидеть и непосредственно — на экране школьного осциллографа. Для этого ко входу осциллографа нужно подсоединить отрезок провода длиной около метра (рис. 2). Провод будет выполнять роль антенны, и на нем возникнет сигнал, наведенный от электропроводки. Измерив с помощью осциллографа период синусоиды, можно убедиться, что частота наведенного сигнала $\nu=50$ Гц, что соответствует частоте переменного тока в электросети.

Генератор переменного тока можно смоделировать, если вращать рамку с проволочной обмоткой между полюсами постоянного магнита, как изображено на рисунке 3. Можно поступить и по-другому — вращать постоянный магнит внутри неподвижной обмотки. Кстати, именно по этому принципу работает большинство промышленных генераторов, только вместо постоянного магнита в них используют электромагнит.

Удобства переменного тока в электротехнике очевидны. С помощью такого тока можно создать так называемое вращающееся магнитное поле, которое и будет приводить в движение валы электродвигателя. Для передачи электроэнергии на большие расстояния с наименьшими потерями напряжение в начале линии передачи нужно повысить, а в конце (перед потребителем)— понизить. В случае переменного тока это легко сделать с помощью повышающего и понижающего трансформаторов (рис. 4).

Радиотехника и электроника тоже, как правило, имеют дело с сигналами переменного тока различной частоты и напряжения. Так, радиопередатчик преобразует ток высокой частоты в радиоволны, которые в радиоприемнике опять превращаются в переменный ток высокой частоты. Микрофон превращает звук в переменный ток низкой частоты, совпадающей с частотой звука. И, наоборот, громкоговоритель преобразует ток звуковой частоты в звук. Если собрать схему, изображенную на рисунке 5, можно наблюдать работу микрофона с помощью осциллографа. Для усиления сигнала можно использовать любой готовый усилитель звуковой частоты (который, безусловно, есть в школьном физическом кабинете).

Приведенные примеры хотя и не исчерпывают, но наглядно иллюстрируют многообразные применения переменного тока. Тем не менее и для постоянного тока тоже находится немало дел. Постоянным током, например, питают электронные схемы, электродвигатели (трамваи и электропоезда приводятся в движение постоянным током), бортовые системы самолетов, автомобилей и т. д. Даже

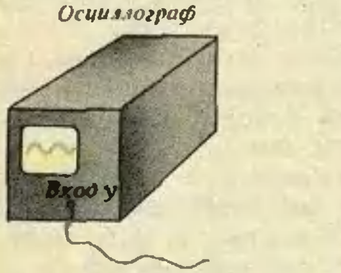


Рис. 2. Переменный ток на экране осциллографа.

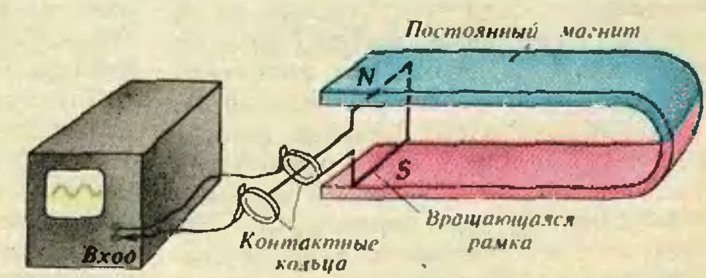


Рис. 3. Модель генератора переменного тока.

kvant.mccme.ru

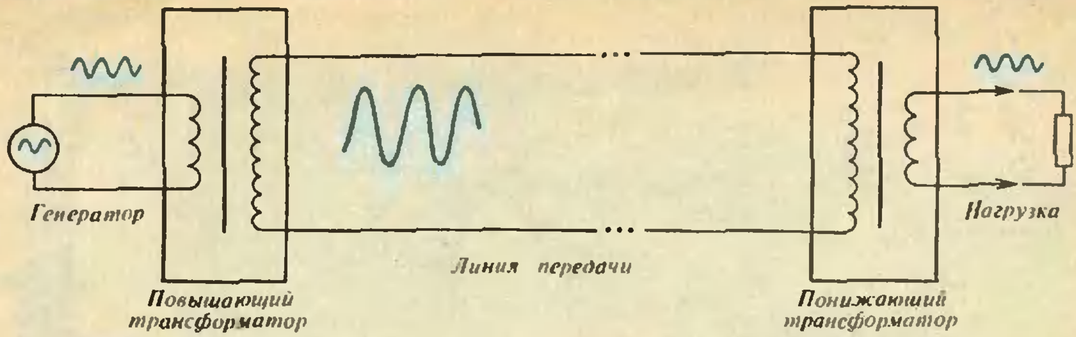


Рис. 4. Схема линии электропередачи.

для передачи электроэнергии на большие расстояния сейчас наряду с переменным током применяется также и постоянный ток. Это объясняется, во-первых, тем, что при передаче больших электрических мощностей становятся заметными потери на электромагнитное излучение, свойственное переменному току, что, конечно же, нежелательно. А во-вторых, теперь научились и постоянный ток преобразовывать в достаточно широком диапазоне. У нас в стране используются линии электропередач как переменного тока (с напряжением до 750 тыс. вольт), так и постоянного тока (с напряжением до 800 тыс. вольт).

Иногда приходится иметь дело с постоянным током очень низкого напряжения — миллионные доли вольта и даже менее. Для преобразования таких напряжений в напряжения, доступные для измерения и работы, применяют специальные приборы — усилители постоянного тока. Они используются в системах автоматического регулирования, в электронных моделирующих вычислительных машинах, в стабилизаторах постоянного тока и т. д.

Усилителю постоянного тока свойственно явление, получившее название «дрейф нуля». Оно состоит в том, что уровень потенциала на выходе усилителя может изменяться даже в отсутствие сигнала на входе (рис. 6). Обычно это связано с температурной нестабильностью элементов усилителя, особенно транзисторов. Дрейф нуля может вносить искажения в работу схемы, и, как правило, этим и определяется минимальная величина входного сигнала, доступная для усиления.

Наименьшим дрейфом обладает балансная схема, изображенная на рисунке 7. Работает она следующим образом. Входной сигнал подается на базы транзисторов T, а выходной сигнал снимается с их коллекторов. При поступлении сигнала ток через один транзистор увеличивается, а через другой — на столько же уменьшается, общий же ток через сопротивление эмиттера $R_э$ остается практически неизменным. Падение напряжения на сопротивлении $R_к$ в цепи коллектора одного транзистора увеличивается, а в цепи другого — уменьшается. Разность напряжений на коллекторах транзисторов пропорциональна входному сигналу — оно в несколько раз его больше. Замечательно, что при абсолютной идентичности плеч балансной схемы дрейф нуля можно было бы исключить полностью, а в реальных условиях его удается свести к минимуму.

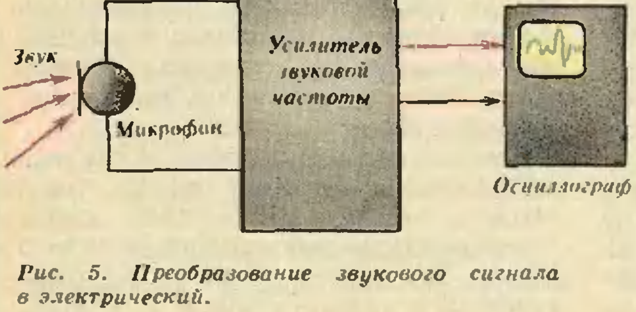


Рис. 5. Преобразование звукового сигнала в электрический.

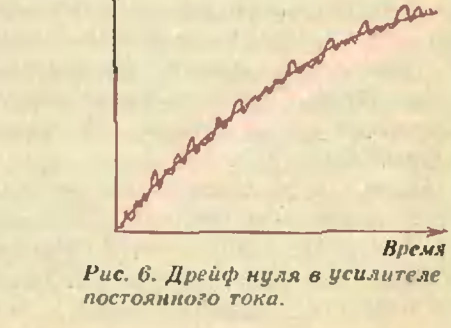


Рис. 6. Дрейф нуля в усилителе постоянного тока.

kvant.mccme.ru

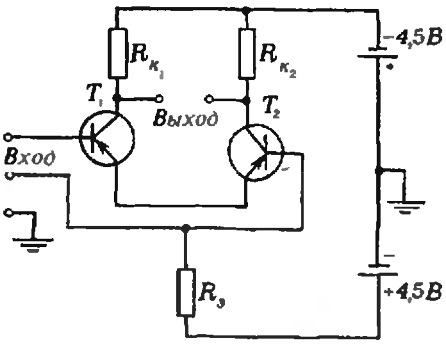


Рис. 7. Балансный усилитель постоянного тока: T_1, T_2 — МП 41; $R_э$=5,1 кОм; $R_{к1}=R_{к2}$=3,3 кОм.

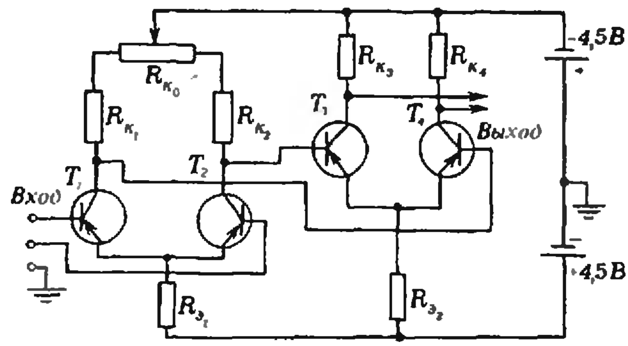


Рис. 8. Двухкаскадный усилитель постоянного тока: T_1, T_2, T_3, T_4 — МП 41; $R_{э1}$=5,1 кОм; $R_{э2}$=1 кОм; $R_{к1}=R_{к2}$=3,3 кОм; $R_{к3}=R_{к4}$=510 Ом.

На основе такой схемы можно построить многокаскадный усилитель с достаточно большим усилением. На рисунке 8 представлена схема двухкаскадного усилителя постоянного тока, которую можно собрать и испробовать в работе. Ее, например, можно использовать для измерения температуры с помощью термопары.

Принцип работы термопары основан на следующем явлении. Если два спая различных металлов, включенные в электрическую цепь, находятся при разных температурах, то в цепи возникает ток. Он обусловлен так называемой термо-ЭДС, появляющейся в местах спаев. Иными словами, спай двух различных металлов может преобразовывать тепловую энергию в электрическую. Термопары обычно используют для измерения очень высоких или очень низких температур.

Напряжение, вырабатываемое термопарой, очень мало́, обычно не более нескольких десятков микровольт на градус. Поэтому термопару часто подключают к усилителю постоянного тока, а усиленный сигнал подают на измерительное устройство или на прибор, регулирующий температуру. Хорошие термопары получаются из соединений сплавов хромель (сплав хрома с никелем) и копель (сплав меди с никелем и марганцем) или алюмель (сплав алюминия, никеля, марганца и кремния) и копель. Но можно сделать термопару и из более доступных материалов, например из железа и алюминия.

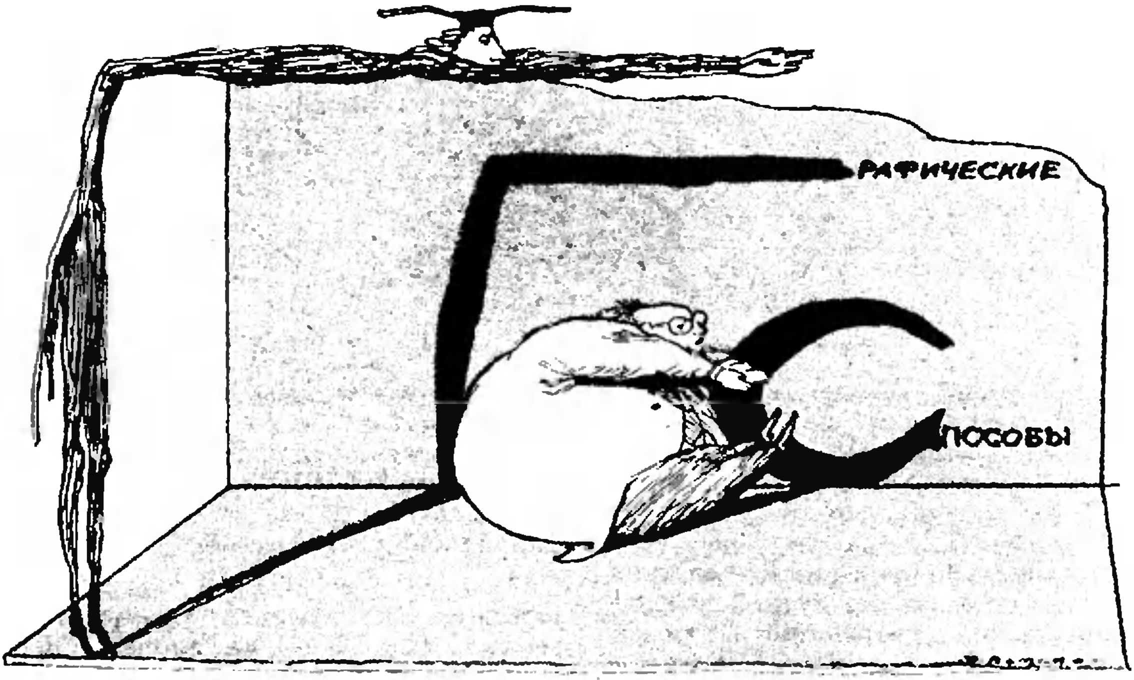
Металлы в месте контакта должны быть надежно сварены. Это можно сделать так. Графитовый стержень из батарейки для карманного фонаря нужно аккуратно заточить и подключить к одному выводу лабораторного автотрансформатора. Проволочки из разных металлов надо сложить концами и скрутить, а свободные концы проволочек надо подключить ко второму выводу автотрансформатора. Если теперь графитовый стерженек приблизить к скрученным концам проволочек, то при достаточном напряжении (оно подбирается опытным путем) возникнет вольтова дуга, и проволочки сварятся. Чтобы спай получился чистым, без окалины, концы проволочек лучше смочить спиртом или тройным одеколоном (соблюдая меры предосторожности, чтобы вспыхнувший при сварке спирт ничего не поджег!). Очевидно, что места графита и проволочек, за которые приходится при сварке браться руками, должны быть надежно заизолированы, так как напряжение может потребоваться достаточно большое — до 100 вольт.

Изготовленную термопару подключают ко входу усилителя постоянного тока, а к его выходу можно подключить милливольтметр. Для того чтобы проградуировать прибор, термопару можно поместить сначала в сосуд с кипящей водой, а затем в сосуд со льдом. Показания вольтметра будут соответствовать 100 °С и 0 °С.

Бывают еще усилители постоянного тока с использованием переменного. В них сигнал постоянного тока преобразуется в сигнал переменного тока, усиливается, а затем опять превращается в постоянный ток.

Из всего сказанного можно сделать вывод, что начавшаяся сто лет назад «война между постоянным током и переменным» закончилась не только миром, но и очень тесным и плодотворным сотрудничеством.

kvant.mccme.ru



Практикум абитуриента

О графическом способе решения некоторых физических задач

В. А. БОДИК, И. Я. СТРЕШИНСКИЙ

Часто графическое представление физического процесса делает его более наглядным и тем самым облегчает понимание рассматриваемого явления. Позволяя порой значительно упростить расчеты, графики широко используются на практике для решения различных научно-технических и народно-хозяйственных задач. Умение строить и читать графики сегодня является обязательным для многих специалистов.

В данной статье мы рассмотрим вопрос об использовании графиков для решения некоторых типов физических задач.

§ 1. Легко и красиво решаются графически многие кинематические задачи.

Задача 1. *Заданы уравнения движения двух тел: $x_1=20t$, $x_2=250-5t$. Требуется найти: а) место и время встречи; б) где было второе тело, когда первое проходило 100-й метр своего пути; в) в какой момент расстояние между телами составляло 125 м. Тела начали двигаться одновременно.*

На одних осях координат построим графики зависимости координаты x от времени t для обоих тел (рис. 1).

а) Ордината и абсцисса точки пересечения графиков есть соответственно место и время встречи: $x=200$ м, $t=10$ с.

б) С помощью первого графика узнаем момент времени, в который первое тело проходило 100-й метр: $t=5$ с. Теперь, зная это время, по второму графику находим координату второго тела: $x=225$ м.

в) Расстояние между телами в начальный момент было равно 250 м. Следовательно, расстояние 125 м — это длина средней линии в треугольнике ABC, и искомый момент времени $t=5$ с. Из симметрии видно, что такое же расстояние будет между телами и через $t=15$ с после начала движения.

Задача 2. *Найдите время и место соударения частиц, движущихся по*

kvant.mccme.ru

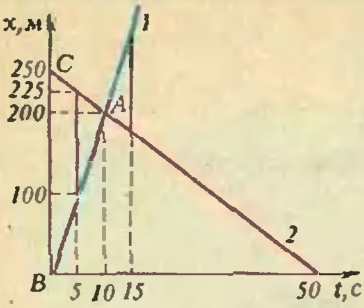


Рис. 1.

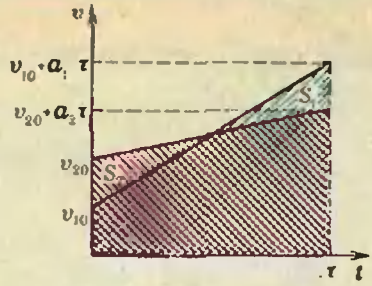


Рис. 2.

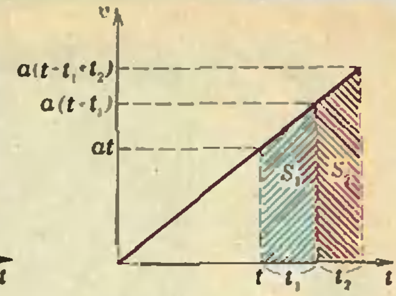


Рис. 3.

одной прямой. Начальная скорость первой частицы v_{10}, ее ускорение a_1, начальная скорость второй частицы v_{20}, ее ускорение a_2. В момент времени $t=0$ обе частицы имели координату $x_0=0$, $v_{20}>v_{10}$, $a_2<a_1$.

К моменту встречи обе частицы пройдут одинаковые пути l, поэтому условием их соударения будет равенство площадей S_1 и S_2, заштрихованных под графиками зависимости скорости v от времени t (рис. 2):

$$S_1=\frac{2v_{10}+a_1\tau}{2}\tau,\quad S_2=\frac{2v_{20}+a_2\tau}{2}\tau.$$

Учитывая, что $S_1=S_2$, находим

$$\tau=\frac{2(v_{20}-v_{10})}{a_1-a_2},$$

$$x=l=\frac{2(v_{20}-v_{10})(v_{20}a_1-v_{10}a_2)}{(a_1-a_2)^2}.$$

Задача 3. *Пассажир, опоздавший к поезду, заметил, что предпоследний вагон прошел мимо него за время $t_1=10$ с, а последний — за $t_2=8$ с. Считая движение поезда равноускоренным, определите время опоздания пассажира.*

На рисунке 3 представлен график зависимости скорости поезда v от времени t. Обозначим длину одного вагона через l. Тогда $S_1=S_2=l$. Приравнивая S_1 и S_2, находим искомое время опоздания пассажира:

$$\frac{at+a(t+t_1)}{2}t_1=\frac{a(t+t_1)+a(t+t_1+t_2)}{2}t_2,$$

$$t=\frac{t_2^2+2t_1t_2-t_1^2}{2(t_1-t_2)}=31\text{ с}.$$

§ 2. Использование площади под графиком часто позволяет значительно упростить решение задачи.

Задача 4. *Длинные сани, скользящие по очень гладкому льду, въезжают на асфальт и останавливаются, не пройдя и половины своей длины. После этого саням резким толчком сообщают первоначальную скорость, и через некоторое время они вновь останавливаются. Как относятся пути торможения в обоих случаях?*

Сила трения скольжения $F_{тр}$ в данном случае зависит, прежде всего, от того, какова длина x части саней, находящейся на асфальте:

$$F_{тр}=\mu mgx/L$$

(здесь μ — коэффициент трения, m — масса саней, L — их длина). График зависимости $F_{тр}$ от x (рис. 4) дает возможность найти работу по преодолению силы трения. Начальные кинетические энергии саней в обоих случаях равны, значит, равны и работы по преодолению сил трения. Таким образом, записывая равенство работ — площадей S_1 и S_2, находим искомое отношение путей торможения:

$$\frac{\mu mgx_1}{2L}x_1=\frac{\mu mgx_1+\mu mgx_2}{2L}(x_2-x_1),$$

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{x_1}{x_2-x_1}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}.$$

§ 3. Часто в задачах, где встречаются изменяющиеся величины, мы делаем усреднения. Понять методику усреднения могут помочь графики.

Задача 5. *На покоящееся тело массой M налетает со скоростью v_0 тело массой m. Сила, возникающая при взаимодействии, сначала линейно растет от 0 до значения F_0 в течение промежутка времени τ, а затем линейно убывает до 0 за то же время. Определите скорости тел после соударения, считая его центральным.*

Изобразим график зависимости силы взаимодействия F от времени t и заменим переменную силу $F(t)$ постоянно действующей силой f (рис. 5). Поскольку результатом действия сил является изменение импульсов взаимодействующих тел, импульсы обеих сил должны быть равны.

Импульс силы есть площадь под данным графиком, поэтому, записы-

kvant.mccme.ru

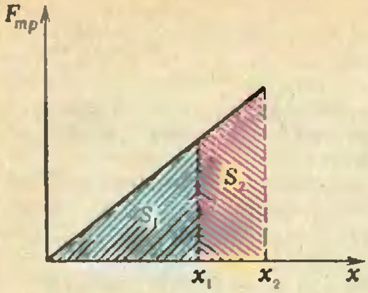


Рис. 4.

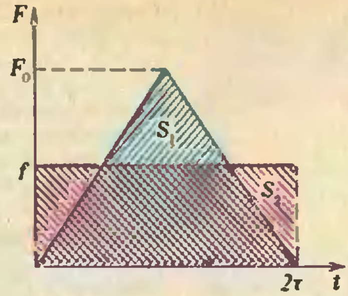


Рис. 5.

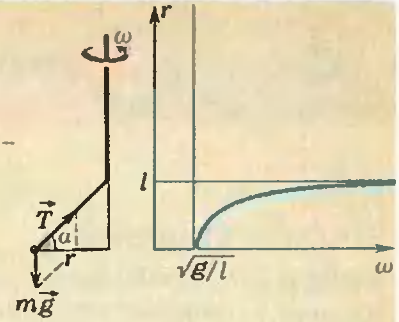


Рис. 6.

вая равенство площадей S_1 и S_2, найдем силу f:

$$F_0\tau=2f\tau, \text{ откуда } f=F_0/2.$$

Теперь запишем для каждого из соударяющихся тел второй закон Ньютона и найдем соответствующие изменения скоростей тел:

$$m(v_0-v)=2f\tau, MV=2f\tau,$$

откуда

$$v=v_0-2f\tau/m=v_0-F_0\tau/m,$$
$$V=2f\tau/M=F_0\tau/M.$$

§ 4. В заключение рассмотрим еще одну область применения графиков — для более глубокого понимания физических процессов.

Задача 6. *К вертикально вращающемуся стержню прикреплена нить длиной l (рис. 6). На другом конце нити подвешен шарик. Как зависит расстояние r между шариком и стержнем от угловой скорости вращения стержня ω? Считать, что угловая скорость меняется настолько медленно, что при любом ее значении движение шарика успевает установиться.*

Запишем второй закон Ньютона для шарика массой m:

$$m\omega^2r=mg\operatorname{ctg}\alpha.$$

Так как $\operatorname{ctg}\alpha=r/\sqrt{l^2-r^2}$, получаем

$$r=\sqrt{l^2-g^2/\omega^4}.$$

Изобразим график зависимости расстояния r от угловой скорости вращения ω (см. рис. 6). Из графика видно, что при $\omega\leqslant\sqrt{g/l}$ шарик по окружности не движется, а при неограниченном увеличении ω ($\omega\to\infty$) расстояние r асимптотически приближается к длине нити l.

Упражнения

1. Почтовая связь между пристанями M и K осуществляется двумя катерами. В установленное время катера отплывают от своих пристаней, встречаются, обмениваются почтой и возвращаются обратно. Если катера отплывают от своих пристаней одновременно, то катер, выходящий из M, тратит на путь в оба конца 3 часа, а катер из K — 1,5 часа. Скорости обоих катеров относительно воды одинаковы. Определите, на сколько позже должен отплыть катер из K, чтобы оба катера находились в пути одно и то же время.

2. Конькобежец проходит дистанцию длиной L с постоянной скоростью, а затем тормозит с постоянным ускорением a. При какой скорости время движения до остановки будет наименьшим?

3. Глубина проникновения частиц массой m в область действия тормозящей силы прямо пропорциональна импульсу частиц: $l=aP$. Найдите зависимость тормозящей силы от глубины проникновения.

4. В длинном цилиндрическом сосуде находится вещество, плотность которого увеличивается с глубиной по закону $\rho\sim x^2$. Как относятся длины частей сосуда, имеющих одинаковые массы? Оболочка сосуда невесома.

Поправка

В «Кванте» № 1 за этот год была опубликована статья «О столкновении шаров и «серьезной» физике». В начале этой статьи рассматривался вопрос о нецентральном соударении шаров с произвольным соотношением масс. В полученном выражении для скорости первого шара после соударения был потерян один корень: в формуле для v_1' вместо «$-$» должно стоять «$\pm$». Правило выбора знака при этом оказывается следующим. В случае $m_1\leqslant m_2$ при любых углах θ имеется только одно решение, соответствующее знаку «$+$» перед радикалом. В случае $\frac{m_2}{\sin\theta}\geqslant m_1>m_2$ и $\frac{\pi}{2}>\theta>0$ оба знака перед радикалом дают физически реализующиеся решения. Рассеяние на углы $\theta>\frac{\pi}{2}$ невозможно.

Учет знаков «$\pm$» в v_1' приводит к тому, что в формуле для $\frac{|\Delta T|}{T_1}$ — для относительного изменения кинетической энергии налетающего шара — перед радикалом вместо «$+$» должно стоять «$\mp$». Соответствующие изменения следует внести в рисунок 2.

Редакция приносит извинения за допущенную неточность.

kvant.mccme.ru

Варианты вступительных экзаменов

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультеты: математико-механический, физический, прикладной математики — процессов управления)

1. Двое рабочих изготавливают вместе за 8 часов 136 деталей. Если бы первый рабочий делал на 2 детали в час меньше, а второй — на одну больше, то на изготовление одной детали второй рабочий тратил бы на 4 минуты меньше, чем первый. Сколько деталей в час изготавливает первый рабочий?

2. Решите неравенство $3x+\sqrt{5x+9}<-5$.

3. При каких a большее из двух чисел $5a-1$ и $|2a|$ равно квадрату меньшего?

4.1 *(для математико-механического факультета).* Расстояние от основания высоты, опущенной из вершины A треугольника ABC, до вершины B в два раза меньше, чем до вершины C. Найдите угол A, если известно, что $\frac{AC}{AB}=a$.

4.2 *(для физического факультета).* На стороне AB длины c треугольника ABC выбрана точка D. Через точку D проведены две прямые, параллельные соответственно AC и BC и пересекающие сторону AC в точке F и сторону BC в точке E. Найдите BD, если известно, что $AC=b$, $BC=a$, $\frac{BE}{AF}=\alpha$.

4.3 *(для факультета прикладной математики — процессов управления).* В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания с гипотенузой делит гипотенузу в отношении a. В каком отношении точки касания делят катеты?

5. Шар радиусом R вписан в треугольную пирамиду, в основании которой лежит равнобедренный треугольник с углом α при основании. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β. Найдите объем пирамиды.

Вариант 2

(химический факультет)

1. Если к смеси двух веществ A и B добавить 3 кг вещества A, то его процентное содержание увеличится вдвое. Если же к исходной смеси добавить 3 кг вещества B, то процентное содержание вещества A уменьшится вдвое. Определите вес A и его процентное содержание в смеси.

2. Решите неравенство $x<\sqrt{\frac{5x+2}{3}}$.

3. Решите уравнение

$$\cos x+\sin x=\frac{0{,}5+\sqrt{\frac{3}{8}}}{\cos x}.$$

4. Найдите отношение радиусов вписанной и описанной окружности равнобедренного треугольника с углом α при основании.

5. Найдите площадь сечения правильной треугольной пирамиды, проходящего через вершину пирамиды и середины двух сторон оснований, если известно, что длина стороны основания равна a, а угол между плоскостью сечения и основанием равен α.

Вариант 3

(географический и геологический факультеты)

1. Из города A в город B, расстояние между которыми 100 км, выехал велосипедист. Через час после этого из A выехал второй велосипедист, который, нагнав первого, с той же скоростью двинулся обратно и возвратился в A в тот момент, в который первый достиг B. Какова скорость первого велосипедиста, если скорость второго 30 км/ч?

2.1 *(для географического факультета).* Решите систему уравнений

$$\begin{cases}4^x+2^y=12,\\ \sqrt{3x-2y}=\sqrt{5+x-3y}.\end{cases}$$

2.2 *(для геологического факультета).* Решите уравнение

$$\sqrt{x^2-7x}-\sqrt{x-3}=0.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{-\frac{3}{2}\cos 2x}=\sin x.$$

4. Решите неравенство

$$(\log_{x+1}x)\cdot\log_{\frac{1}{x}}(x-2)>1.$$

5. На плоскости даны две окружности радиусов r_1 и r_2 ($r_1>r_2$). Найдите расстояние между центрами окружностей, если известно, что оно в k раз больше расстояния между точками касания общей внешней касательной.

Вариант 4

(биолого-почвенный факультет, отделение математической лингвистики филологического факультета)

1. Из города A в город B, расстояние между которыми 270 км, отправился путешественник. Первую часть пути длиной 120 км он преодолел на автомобиле, вторую — на мотоцикле. Оставшуюся третью часть пути он проехал на автомобиле за 1 час. Скорость мотоцикла на 15 км/ч меньше скорости автомобиля. Найдите скорость автомобиля, если известно, что средняя скорость путешественника равна 54 км/ч.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{6x+4}=1.$$

3.1 *(для отделений почвоведения и математической лингвистики).* Решите уравнение

$$\sin x+2\sin^3x+\sqrt{2}\sin 2x=0.$$

3. 2. Решите неравенство

$$\frac{1-\sin x}{\sin 2x}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

4.1 *(для отделения почвоведения).* В прямоугольный треугольник площади 24 вписана окружность. Точка касания с гипотенузой делит гипотенузу в отношении 2:3. Найдите длины сторон треугольника.

kvant.mccme.ru

4.2. Окружность касается сторон AB и AD квадрата $ABCD$ и проходит через вершину C. В каком отношении эта окружность делит сторону BC?

5. Основание треугольной пирамиды — прямоугольный треугольник с гипотенузой c и острым углом α. Найдите объем пирамиды, если известно, что все двугранные углы при основании пирамиды равны β.

Вариант 5
(факультеты психологии и экономический)

1. Два путешественника отправились из пункта A в пункт B на велосипедах. Каждый через некоторое время пересел на мотоцикл: первый, проехав $1/8$ пути, а второй — $3/4$ пути. Во сколько раз скорость мотоцикла больше скорости велосипеда, если известно, что первый путешественник затратил на весь путь из A в B в два раза меньше времени, чем второй?

2.1 *(для факультета психологии и отделения экономической кибернетики).* Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x+3\cdot 2^y=7, \\ x+2y=2. \end{cases}$$

2. 2 *(для отделений политэкономии и прикладной социологии).* Решите уравнение

$$2\lg(x^3)=\lg(x^6+x^2-x-2).$$

2. 3. Решите неравенство

$$3x+2+\sqrt{5x+4}<0.$$

3. 1 *(для факультета психологии).* Решите уравнение

$$2\sin^3 x\cdot\cos^3 2x=\sin^2 x+\cos^2 2x.$$

3.2 *(для отделений экономической кибернетики, политэкономии и прикладной социологии).* Решите уравнение

$$1+2\sin x\cdot\sin 3x=4\sin x+4\sin 3x+\cos 2x.$$

3. 3. Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\cos x}=\sqrt{6}.$$

4.1 *(для факультета психологии и отделения экономической кибернетики).*

Найдите периметр равнобедренного треугольника площади S, если известно, что длина высоты, опущенной на основание, равна h.

4.2 *(для отделений политэкономии и прикладной социологии).* Решите неравенство

$$\log_2\left(\frac{x+2}{x+1}\right)\leqslant -1.$$

4.3. Решите уравнение

$$\log_x 4+\log_2(x^2)=5.$$

5. Основанием четырехугольной пирамиды $OABCD$ является прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB=2$, $BC=\sqrt{3}$. Боковые грани OAB, OBC и OCD наклонены к основанию соответственно под углами $45°$, $60°$ и $45°$. Найдите угол наклона грани OAD к основанию.

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Из одной точки одновременно бросают два тела — горизонтально и вертикально вверх с одинаковыми скоростями v_0. На каком расстоянии будут тела через заданный промежуток времени t?

2. Сплошной однородный шар объемом V и плотностью ρ плавает на границе двух несмешивающихся жидкостей с плотностями

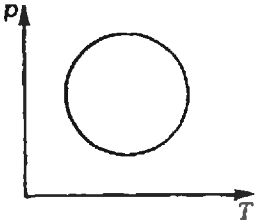


Рис. 1.

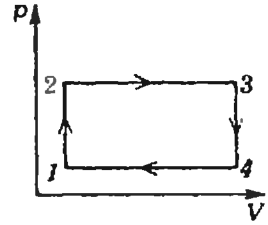


Рис. 2.

ρ_1 и ρ_2 ($\rho_1<\rho<\rho_2$). Какая часть объема шара будет находиться в верхней и какая в нижней жидкости?

3. На какую высоту может подняться автомобиль с работающим мотором по ледяной горе ($\mu<\operatorname{tg}\alpha$), если у начала подъема он имел скорость v_0?

4. На $p-T$-диаграмме (рис. 1) показан процесс, проводимый с идеальным газом. Объем газа постоянен. Найдите точки, где масса газа максимальна и минимальна.

5. Над одним молем газа совершают замкнутый цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар (рис. 2). Температуры в точках *1* и *3* равны T_1 и T_3. Определите работу, совершаемую за цикл, если точки *2* и *4* лежат на одной изотерме.

6. Два заряженных шарика, подвешенные на нитях одинаковой длины, опускают в керосин. Найдите плотности шариков, если угол расхождения нитей в воздухе и керосине одинаков. Шарики одинаковые.

7. Электрон влетает в плоский конденсатор посередине между пластинами. Расстояние между пластинами d, длина пластин l, напряжение между ними U. Какова должна быть скорость электрона, чтобы он попал в круглую мишень радиусом R, расположенную на расстоянии L от конденсатора? Краевыми эффектами пренебречь.

8. Электромотор питается от источника с напряжением $U=24$ В. Чему равна мощность на валу мотора при протекании по обмотке тока $I_1=8$ А, если известно, что при полностью заторможенном якоре течет ток $I_2=16$ А?

9. При падении на плоскую границу двух сред с показателями преломления n_1 и n_2 луч преломился таким образом, что угол между отраженным и преломленным лучами составил $\gamma=90°$. Найдите угол падения луча.

10. Человек посмотрел по вертикальному направлению на дно водоема и оценил его кажущуюся глубину в $h=0{,}9$ м. Определите истинную глубину водоема. Показатель преломления воды $n=1{,}33$.

Публикацию подготовили
А. С. Меркурьев, А. С. Чирцов

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(физико-механический факультет)

1. Найдите все решения уравнения $\cos x\sin 2x=3\sin^2 x$, удовлетворяющие условию $-12<x<-10$.

2. Решите неравенство

$$\log_{1/2}(\sqrt{x+1}-x)<2.$$

3. Решите уравнение

$$7^{x-0{,}125x^2}=7^{1-x}\cdot(\sqrt[8]{7})^{x^2}+6.$$

4. Найдите все значения a, при каждом из которых существует единственная пара целых чисел x, y, удовлетворяющая уравнению $12x^2+41xy+35y^2=5$ и двум неравенствам $y+1<x$, $a^2x-3ay<6$.

5. В правильную четырехугольную пирамиду со стороной основания и высотой, равными 1, вписан прямоугольный параллелепипед, основание которого расположено в плоскости основания пирамиды, а вершины противоположной грани — на боковой поверхности пирамиды. Площадь основания параллелепипеда равна $\frac{1}{18}$. В каких пределах может меняться диагональ параллелепипеда?

Вариант 2
(*факультет технической кибернетики*)

1. Решите уравнение

$$3^{2x+1}=3^{x+2}+\sqrt{1-6\cdot 3^x+3^{2(x+1)}}.$$

2. Решите уравнение

$$\log_3\left(\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right)^3-\sqrt{1-9\log_3(1+x+2\sqrt{3})}=$$
$$=1{,}5\log^3\left(\frac{1}{\sqrt[3]{9}}\right).$$

3. При каких значениях параметра a каждое решение неравенства $4x^2+8x+3<0$ будет содержаться среди решений неравенства $2ax^2-(7a-4)x-14>0$?

4. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\cos 2\alpha\geqslant-\frac{1}{8}$ и $\sin\alpha\geqslant\frac{3}{4}$.

5. Про тетраэдр известно, что все его грани подобные, но не все равные между собой треугольники, причем у любых двух граней есть по меньшей мере одна пара равных ребер, не считая общего ребра. Докажите, что длины сторон каждой грани образуют геометрическую прогрессию, и найдите объем этого тетраэдра, если длины двух ребер, лежащих в одной грани, равны $\sqrt{2+2\sqrt{5}}$ и $2\sqrt{2+\sqrt{5}}$.

Вариант 3
(*радиофизический факультет*)

1. Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_5(3-2x)}-\frac{1}{4-\log_5(3-2x)}<0.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x+2^y=-1, \\ -20x+3{,}5\cdot 2^{y+1}=146. \end{cases}$$

3. Найдите все решения уравнения $\cos x+(1+\cos x)\operatorname{tg}^2 x-1=0$, удовлетворяющие неравенству $\operatorname{tg} x>0$.

4. Прямоугольник $ABCD$ расположен на координатной плоскости так, что сторона AB лежит на оси ординат, вершины C и D лежат соответственно на параболе $y=-x^2+2x-2$ и на прямой $y=3-3x$, причем абсцисса вершины D принадлежит отрезку [0,12; 1,2]. Какое значение должна иметь абсцисса вершины D, чтобы площадь прямоугольника $ABCD$ была наименьшей?

5. В пространстве даны точки A, B, C, D, причем $AB=BC=CD=5$. Найдите угол между прямыми AC и BD.

Физика

Задачи устного экзамена

1. При распаде неподвижного ядра образуется три осколка массами m_1, m_2 и m_3 с общей кинетической энергией E_0. Найдите скорости осколков, если направления скоростей составляют друг с другом угол $\alpha=120°$.

2. Параллельный пучок молекул азота, имеющих скорость $v=400$ м/с, падает на стенку под углом $\alpha=30°$ к ее нормали. Концентрация молекул в пучке $n=0{,}9\cdot10^{19}$ см$^{-3}$. Найдите давление молекул пучка на стенку, считая, что молекулы ударяются о нее абсолютно упруго.

3. Гелий массой $m=10$ г нагрели на $\Delta t=100$ °С при постоянном давлении. Определите количество теплоты, переданное газу, приращение внутренней энергии и работу по расширению газа.

4. Два удаленных сферических проводника радиусов R_1 и R_2 были заряжены до потенциалов φ_1 и φ_2 соответственно. Затем их соединили тонким проводником. Чему равно изменение энергии системы? Объясните полученный результат.

5. Плоский конденсатор заполнили диэлектриком и на пластины подали некоторую разность потенциалов. Его энергия при этом равна $W=2\cdot10^{-5}$ Дж. После того как конденсатор отключили от источника напряжения, диэлектрик вынули из конденсатора. Работа, которую надо было совершить для этого, равна $A=7\cdot10^{-5}$ Дж. Найдите диэлектрическую проницаемость диэлектрика.

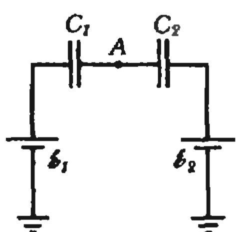


Рис. 1.

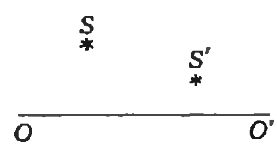


Рис. 2.

6. Два конденсатора и два источника соединены по схеме, изображенной на рисунке 1. Определите потенциал в точке A (по отношению к земле), если $C_1=0{,}1$ мкФ, $C_2=0{,}4$ мкФ, $\mathscr{E}_1=1{,}5$ В, $\mathscr{E}_2=3$ В.

7. Протон влетает в однородное магнитное поле ($B=40$ мТл) со скоростью $v=4{,}5\times10^5$ м/с под углом $\alpha=60°$ к направлению вектора $\vec{B}$. Найдите путь и перемещение протона за время $\Delta t=2{,}45$ мкс его движения в магнитном поле. Масса протона $m_p=1{,}67\times10^{-27}$ кг, его заряд $q_p=1{,}60\cdot10^{-19}$ Кл.

8. На прозрачный шар, имеющий радиус R и показатель преломления n, падает в направлении одного из диаметров узкий параллельный пучок световых лучей. На каком расстоянии от центра шара лучи будут сфокусированы?

9. На дне ручья лежит камешек. Мальчик хочет дотронуться до него палкой. Прицеливаясь, он держит палку под углом $\alpha=45°$. На каком расстоянии от камня палка воткнется в дно ручья, если его глубина $h=50$ см? Показатель преломления воды $n=1{,}33$.

kvant.mccme.ru

kvant.mccme.ru

10. Задана оптическая ось линзы OO', светящаяся точка S и ее изображение в линзе S' (рис. 2). Найдите построением с помощью линейки и карандаша положение фокуса линзы.

Публикацию подготовили
В. А. Опарин, С. П. Преображенский, И. Б. Русанов, Ю. А. Хватов

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\log_{x+1}(x-0{,}5)=\log_{x-0{,}5}(x+1).$$

2. Найдите $\cos 2\alpha$, если известно, что $2\operatorname{ctg}^2\alpha+7\operatorname{ctg}\alpha+3=0$ и угол α удовлетворяет неравенствам:

а) $\frac{3\pi}{2}<\alpha<\frac{7\pi}{4}$; б) $\frac{7\pi}{4}<\alpha<2\pi$.

3. Решите систему неравенств

$$\sqrt{x^2-9x+20}\leqslant\sqrt{x-1}\leqslant\sqrt{x^2-13}.$$

4. В треугольник вписана окружность радиуса 3. Вычислите длины сторон треугольника, если одна из них разделена точкой касания на отрезки с длинами 4 и 3.

5. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины находятся на апофемах пирамиды и четыре в плоскости основания. Все ребра пирамиды равны a. Вычислите полную поверхность и объем куба.

Вариант 2

(физический факультет)

1. Упростите выражение

$$\frac{\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}-\sqrt{a+1}}{\dfrac{1}{\sqrt{a+1}}-\dfrac{1}{\sqrt{a-1}}}:\frac{\sqrt{a+1}\cdot\sqrt{a^2-1}}{(a-1)\cdot\sqrt{a+1}-(a+1)\cdot\sqrt{a-1}}.$$

2. Два тела начали движение одновременно и движутся прямолинейно навстречу друг другу. Одно из них проходит в каждую минуту 7 м, другое в первую минуту прошло 24 м, а в каждую последующую проходит на 4 м меньше, чем в предыдущую. Через сколько минут оба тела встретятся, если первоначальное расстояние между ними было равно 100 м?

3. Решите уравнение

$$1+\sin 2x=\sin x+\cos x.$$

4. Решите неравенство

$$3^{\lg x+2}<3^{\lg x^2+5}-2.$$

5. Основание прямой призмы — треугольник со сторонами 5 и 3 и углом 120° между ними. Наибольшая из площадей боковых граней равна 35. Найдите объем призмы.

Вариант 3

(химический факультет)

1. Проверьте равенство

$$\frac{\sin 20^\circ\cdot\cos 10^\circ+\cos 160^\circ\cdot\cos 100^\circ}{\sin 21^\circ\cdot\cos 9^\circ+\cos 159^\circ\cdot\cos 99^\circ}=1.$$

2. Решите уравнение

$$3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x.$$

3. При каких значениях p оба корня уравнения $x^2+2(p+1)x+9p-5=0$ отрицательны?

4. Смешали 30 %-ный раствор соляной кислоты с 10 %-ным и получили 600 г 15 %-ного раствора. Сколько граммов каждого раствора было взято?

5. В цилиндр вписана прямая призма, основанием которой служит равнобедренный треугольник с тупым углом, равным α. Найдите объем цилиндра, если известно, что боковая сторона основания призмы равна b, а диагональ бо́льшей боковой грани равна l.

Вариант 4

(индустриально-педагогический факультет)

1. Докажите тождество

$$\frac{\cos\alpha\cdot\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin\beta}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta.$$

2. Решите уравнение

$$\log_2(2x-1)+\log_2(x+5)=\log_2 13.$$

3. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{5}\right)^{x^2+5x}>25^{-1}.$$

4. Упростите и вычислите значение выражения

$$\sqrt[6]{4x\cdot(11+4\sqrt{6})}\cdot\sqrt[3]{4\sqrt{2x}-2\sqrt{3x}}\ \text{ при } x=50.$$

5. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 10 и 18, а площадь равна 90. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна 6. Определите боковую поверхность этой пирамиды.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Чтобы покинуть Землю, ракета должна развить скорость $v=11{,}2$ км/с. На какой высоте и через какой промежуток времени при вертикальном подъеме это произойдет, если ракета будет двигаться с постоянным ускорением $a=30g$? Каково на этой высоте ускорение свободного падения? Радиус Земли $R=6{,}37\cdot10^6$ м. Расчет удобно проводить с помощью микрокалькулятора.

2. Если бы через центр Земли удалось прорыть сквозной канал, то сколько времени понадобилось бы свободно падающему камню, чтобы достичь противоположного конца канала? Радиус Земли $R=6{,}37\cdot10^6$ м. Считать, что действующая на камень сила тяжести меняется по закону $F=mgr/R$, где r — расстояние от камня массой m до центра Земли.

3. Найдите зависимость модуля силы трения скольжения тела массой m о поверхность наклонной плоскости от угла наклона плоскости α в интервале $0\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$. Коэффициент трения скольжения равен μ.

4. Можно ли достать воду из колодца глубиной $h=12$ м с помощью насоса, расположенного на поверхности Земли и способного создавать в опущенной в колодец трубе сколь угодно низкое давление воздуха?

kvant.mccme.ru

5. Две сферы объемом V_1 и V_2 соединены короткой трубкой, в которой имеется изолирующая пористая перегородка. С ее помощью в сосудах устанавливается равенство давлений, но не температур. Система находится при температуре T_0 и содержит газ под давлением p_0. Затем температура первой сферы изменяется до T_1, а второй — до T_2. Какое давление установится в системе? Тепловым расширением сфер пренебречь.

6. Из колодца глубиной H качают воду насосом мощностью N. КПД насоса η. За какое время откачается объем воды V?

7. Как должны соотноситься расстояния между двумя точечными зарядами в керосине и в вакууме, чтобы сила взаимодействия зарядов была одинаковой в обоих случаях?

8. Какова сила взаимодействия между протоном и электроном на первой орбите в модели атома Бора? Расчет удобно проводить с помощью микрокалькулятора.

9. Электрон, находясь в однородном магнитном поле, движется по окружности радиусом r. Индукция магнитного поля $\vec{B}$. Направление вектора индукции перпендикулярно плоскости окружности. Найдите кинетическую энергию электрона.

10. Считая радиус атомного ядра равным $R=1{,}2\cdot10^{-15}\cdot A^{1/3}$ м, где A — массовое число, определите плотность ядерного вещества, выраженную в числе нуклонов в 1 м^3 и в кг/м^3. Масса нуклона $m_0=1{,}67\cdot10^{-27}$ кг. Какова будет масса 1 см^3 вещества, состоящего из одних ядер?

Публикацию подготовили
М. И. Каликина, В. В. Лаптев

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Дана функция $f(x)=\mathrm{tg}^2\,x+16\cos^2 x$.

а) Найдите наименьший период функции f.

б) Решите уравнение $f(x)=9$.

в) Найдите минимум функции f.

2. Дана функция $f(x)=\log_2\dfrac{x(x+1)}{x+2}$.

а) Найдите область определения функции f.

б) Решите уравнение $f(x)=1$.

в) Решите неравенство $f(x)>0$.

г) При каких значениях a уравнение $f(x)=\log_2(x+a)$ имеет решение?

3. Окружности радиусов 1 и R с центрами в точках A и B касаются друг друга внешним образом. Прямая l касается этих окружностей в двух различных точках C и D соответственно.

а) Докажите, что отношение $\dfrac{AB}{CD}$ равно $k(R)=\dfrac{R+1}{2\sqrt{R}}$.

б) Найдите величину R, если $k(R)=\dfrac{5}{3}$.

в) Докажите, что $k(R)\geqslant 1$.

Вариант 2

1. Дана функция $f(x)=Ax^2+x+B\cdot\ln x$.

а) Найдите A и B, если известно, что $f(1)=2$, $f'(1)=4$.

б) При каких A и B точки $x=1$ и $x=2$ являются точками экстремума для функции f?

в) При каких A и B функция возрастает на всей своей области определения?

2. Дана функция $f(x)=\log_2 x+\log_x 2$.

а) Найдите область определения функции f.

б) Решите уравнение $f(x)=\dfrac{5}{2}$.

в) При каких значениях аргумента функция f принимает экстремальные значения?

г) При каких значениях a уравнение $f(x)=a$ имеет хотя бы одно решение?

3. Дан треугольник ABC, в котором $CB=1$, $\widehat{C}=\pi/2$, $\widehat{B}=\beta$, CH — высота треугольника, точка D лежит на отрезке AH, $DH=HB$.

а) Какие значения может принимать угол β?

б) Докажите, что $AD=\dfrac{1}{\cos\beta}-2\cos\beta$.

в) Какие значения может принимать угол β, если известно, что отрезки AD и CD равны?

Вариант 3

1. Дана функция $f(x)=9^x-2\cdot3^x-3$.

а) Решите уравнение $f(x)=60$.

б) Решите неравенство $f(x)\geqslant 0$.

в) Найдите наименьшее значение функции f.

г) Сколько решений имеет уравнение $f(x)=a$ в зависимости от величины a?

2. Дана функция $f(x)=x^4-(x-1)^4$.

а) Имеет ли функция f экстремумы?

б) Решите уравнение $f(x)+1=0$.

в) Решите неравенство $f(x)>1$.

3. В единичную окружность вписан треугольник ABC такой, что $AB=AC$, $\widehat{A}=2\alpha$, AD — высота треугольника. Обозначим $H(\alpha)=AB-AD$.

а) Докажите, что $H(\alpha)=2(\cos\alpha-\cos^2\alpha)$.

б) Найдите все такие α, что $H(\alpha)=4/9$.

в) Найдите наибольшее значение величины H.

Физика

Задачи письменного экзамена

1. Тело брошено с некоторой высоты в горизонтальном направлении со скоростью v_0. Найдите скорость тела через t секунд после бросания. Приведите два способа решения.

2. К концам однородного стержня приложены две противоположно направленные силы $F_1=40$ Н и $F_2=100$ Н. Определите силу натяжения стержня в поперечном сечении, которое делит стержень на две части в отношении 1:2.

3. Тело массой m поднимают по наклонной плоскости высотой h. Угол у основания наклонной плоскости β, коэффициент трения между телом и плоскостью μ. Определите работу силы трения и работу силы тяжести.

4. Металлический шарик массой $m=20$ г, падающий со скоростью $v=5$ м/с, ударяется упруго о стальную плиту и отскакивает от нее в прямо противоположном направлении с такой же по модулю скоростью. Найдите импульс, приобретенный шариком, и среднюю силу, сообщившую шарику этот импульс, если соударение длилось $t=0{,}1$ с.

5. Резиновую камеру накачали на берегу до нормального давления. На какую глубину нужно опустить камеру в воду, чтобы ее объем уменьшился вдвое? Температура воздуха $T_1=300$ К, температура воды $T_2=277$ К, плотность воды $\rho=1000$ кг/м^3.

6. На расстоянии R от точечного заряда $+q$ расположен проводящий шар радиусом r,

kvant.mccme.ru

соединенный тонкой длинной проволокой с землей. Определите величину отрицательного заряда, индуцированного на шаре. Влиянием проволочки пренебречь.

7. Электрическую плитку, рассчитанную на напряжение $U_1 = 220$ В, требуется переделать, не меняя и не укорачивая спирали, на напряжение $U_2 = 110$ В так, чтобы ее мощность осталась прежней. Что нужно сделать? Дайте аналитическое решение и эскиз схемы плитки после переделки.

8. Электрон влетает во взаимно перпендикулярные электрическое ($E = 1000$ В/м) и магнитное ($B = 0{,}01$ Тл) поля. Каковы должны быть направление и скорость движения электрона для того, чтобы он двигался прямолинейно?

9. В однородном магнитном поле ($B = 0{,}01$ Тл), линии индукции которого вертикальны, соскальзывает с наклонной плоскости металлическая палочка длиной $l = 1$ м. Определите разность потенциалов на концах палочки, если угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 30°$.

10. Оптическая система состоит из двух собирающих линз с фокусными расстояниями $F_1 = 20$ см и $F_2 = 10$ см. Между линзами расстояние $l = 30$ см. Предмет находится на расстоянии $d_1 = 30$ см от первой линзы. На каком расстоянии от второй линзы получится изображение?

Публикацию подготовили А. Н. Коточигов, М. А. Марамзин, С. В. Фомин

Ответы, указания, решения

Избранные школьные задачи

1. $\sqrt{99}/4$. **Указание.** Не забудьте, что длина третьей стороны не превосходит 5.

2. Круг без границы, концентричный данной окружности и имеющий втрое больший радиус. **Указание.** Если угол A треугольника ABC равен α, то угол между высотами, проведенными из вершин B и C, равен $\pi - \alpha$. Поэтому точка пересечения высот лежит на окружности, равной данной и пересекающейся с ней в точках B и C.

3. 5. **Решение.** Если одна из данных шести прямых l проходит только через одну точку пересечения A, то остальные пять прямых либо проходят через A (пусть таких m_1), либо параллельны l (пусть таких m_2). Имеем: $m_1 + m_2 = 5$, $m_1 > 0$, $m_2 > 0$ и число точек пересечения равно $1 + m_1 m_2$; последнее есть 5 или 7. Предположим, что каждая прямая проходит по крайней мере через две точки пересечения. Если точек пересечения меньше чем 5, то их 4. Обозначим их через A, B, C, D; тогда наши прямые — это прямые AB, AC, AD, BC, BD и CD. Эти прямые не должны иметь точек пересечения, отличных от A, B, C, D, поэтому $AB \parallel CD$, $AC \parallel BD$ и $AD \parallel BC$. Из первого и третьего следует, что $ABCD$ — параллелограмм, но диагонали AC и BD параллелограмма не могут быть параллельны. Противоречие.

4. (1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 7), (7, 3). **Решение.** $2x+1$ нечетно и делится на y, поэтому y нечетно; аналогично x нечетно. Числа x и y взаимно просты: если x и y делятся на p, то $2x$ и $2x+1$ делятся на p, и, значит, 1 делится на p. Число $2x+2y+1$ делится на x и на y; значит, оно делится на xy, следовательно, $2x+2y+1 \geqslant xy$. Пусть $x \leqslant y$; тогда либо $2x+2y+1 < 5y$, либо $x = y = 1$. В обоих случаях $xy < 5y$ и $x < 5$. Остаются две возможности: $x = 1$ и 3 делится на y или $x = 3$ и 7 делится на y.

5. а) Первых больше. б) Первых больше. **Решение.** Если p и q взаимно просты и N делится на pq, то среди чисел $1, \ldots, N$ имеется ровно N/p, делящихся на p, и ровно N/pq, делящихся на pq. Значит, среди чисел $1, \ldots, N$ имеется ровно $(N/p) - (N/pq) = N(q-1)/pq$ чисел, делящихся на p, но не делящихся на q. Теперь обратимся к вопросам а) и б).

а) Число 997 920 делится на $11 \cdot 5$ и на $12 \cdot 7$. В силу сказанного среди чисел $1, \ldots, 997\,920$ имеется $997\,920 \cdot 4/55 = 72\,576$, делящихся на 12, но не делящихся на 7. Первых больше, и оставшиеся до миллиона 2080 чисел этого баланса не изменят: среди них делящихся на 12 менее 200.

б) Аналогично предыдущему среди чисел $1, \ldots, 999\,960$, делящихся на 13, но не делящихся на 6, есть 64 100, а делящихся на 15, но не делящихся на 26 — столько же (потому что $5/13 \cdot 6 = 25/15 \cdot 26$). Поскольку вычитание числа 999 960 не меняет делимости ни на одно из чисел 13, 5, 15, 26, среди оставшихся до миллиона чисел интересующих нас столько же, сколько среди чисел $1, \ldots, 40$. А среди этих чисел первых имеется три (13, 26, 39), а вторых — два (15, 30).

6. $\left(\dfrac{1-\sin(\alpha/2)}{1+\sin(\alpha/2)}\right)^{999}$. **Указание.** Гомотетия с центром в вершине угла, переводящая 1-ю окружность во 2-ю, переводит 2-ю окружность в 3-ю, 3-ю в 4-ю и т. д. Простой подсчет показывает, что коэффициент этой гомотетии равен $\dfrac{1-\sin(\alpha/2)}{1+\sin(\alpha/2)}$.

7. $2S_1 - S_2 + 2\pi$. **Решение.** P_a состоит из P, нескольких прямоугольников общей площадью ap, где p — периметр многоугольника P, и нескольких секторов, составляющих круг радиуса a (рис. 1). Следовательно, $S_a = S + ap + \pi a^2$. Решая относительно S и p систему $S_1 = S + p + \pi$, $S_2 = S + 2p + 4\pi$, получаем: $S = 2S_1 - S_2 + 2\pi$ (и $p = S_2 - S_1 + 3\pi$).

8. 79 или 80. **Решение.** Окружность пересекает 20 горизонтальных линий и 20 вертикальных, каждую по 2 раза. Поэтому за один полный оборот она 80 раз переходит из клетки в клетку. У нее есть 4 возможности дважды

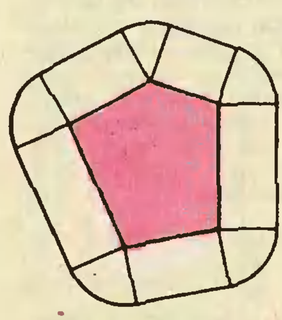


Рис. 1.

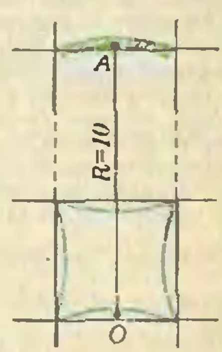


Рис. 2.

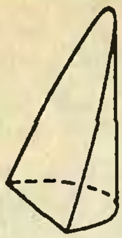


Рис. 3.

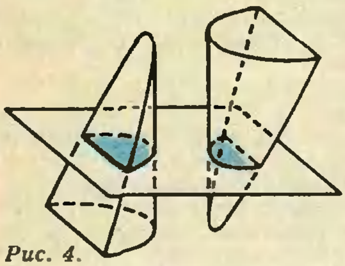


Рис. 4.

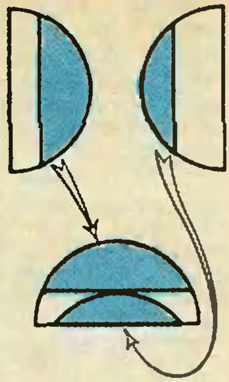


Рис. 5.

побывать в одной клетке: в самом верху, в самом низу, на левом крае и на правом крае. Но из этих четырех возможностей может реализоваться не более одной. В самом деле, если, скажем, вблизи своей крайней верхней точки A окружность дважды пересекает сторону одной клетки, то точка A лежит в сегменте, указанном на рисунке 2, а центр O окружности лежит точно в таком же сегменте на 10 клеток ниже. В аналогичных сегментах должен находиться центр окружности, чтобы она дважды пересекала сторону одной клетки слева, внизу и справа. Но ясно, что никакие два из этих сегментов не имеют общих точек, так что центр может находиться не более чем в одном из них.

9. $a<0$, $b=0$. Указание. Подставьте $c-d$, c и $c+d$ ($d\neq 0$) в наше уравнение и из суммы первого и третьего полученных равенств вычтите удвоенное второе. (Другой способ: если вы знаете формулы Виета для кубического уравнения, воспользуйтесь ими. Кроме того, задачу можно решить, исследовав функцию $y=x^3+ax+b$ с помощью производной.)

10. $R\leqslant 1/2$. Решение. Найдем точки параболы $y=x^2$, отстоящие от точки $(0;R)$ на расстоянии R. Для x получаем уравнение $x^2+(x^2-R)^2=R^2$, т. е. $x^2(x^2+1-2R)=0$. Оно не имеет решений, отличных от 0, если $1-2R\geqslant 0$, т. е. если $R\leqslant 1/2$.

11. $3V_1-3V_2+V_3-8\pi$. Решение аналогично решению задачи 7. P_a состоит из: 1) нашего многогранника P; 2) объединения прямоугольных параллелепипедов с высотой a, построенных на гранях многогранника P; 3) объединения цилиндрических секторов, расположенных около ребер многогранника P; 4) объединения шаровых секторов, расположенных около вершин. Объем части 1) есть V, объем части 2) есть Sa, где S — полная поверхность многогранника P, объем части 3) есть la^2, где l — число, не зависящее от a (найдите его), а секторы части 4) составляют полный шар радиуса a, т. е. имеют суммарный объем $\frac{4}{3}\pi a^3$. Итак, $V_a=V+Sa+la^2+\frac{4}{3}\pi a^3$. Остается подставить $a=1, 2, 3$, решить полученную систему трех уравнений относительно V, S, l и взять значение V.

12. $1/2$. Решение. Наибольшую площадь имеет треугольник, вершины которого лежат в вершинах квадрата. В самом деле, пусть ABC — треугольник, лежащий в квадрате, и пусть C — не вершина квадрата. Проведем через C прямую, параллельную AB. Часть, отсекаемая этой прямой от квадрата и не содержащая A и B, содержит хотя бы одну вершину квадрата C' (может случиться, что C' лежит на нашей прямой). Площадь треугольника ABC' больше или равна площади треугольника ABC.

13. Если $a>0$, то при $|x|\leqslant\sqrt{4a/3}$; если $a\leqslant 0$, то ни при каких x. Решение. Пусть $x^3-ax=y^3-ay$, $x\neq y$. Тогда $y^3-x^3=a(y-x)$, $y^2+xy+x^2=a$, $y^2+xy+(x^2-a)=0$. Последнее равенство, рассматриваемое как уравнение относительно y, имеет решение при $x^2-4(x^2-a)\geqslant 0$, т. е. при $|x|\leqslant\sqrt{4a/3}$, причем это решение единственно и равно x только при $x=0$, $a=0$. (Другое решение можно получить, исследуя при помощи производной график функции $y=x^3-ax$.)

14. $100!^{100}<100^{100!}<100^{100}!$. Решение. Очевидно, $100!<10^{10}\cdot 100^{90}=10^{190}$, т. е. в числе $100!$ не больше 190 знаков, а в числе $100!^{100}$ не больше 19 000 знаков. В числе $100^{100!}$ знаков $2\cdot 100!$, т. е. явно больше, чем в предыдущем числе, но не больше чем 10^{191}. Наконец,

$$100^{100}! > (100^{99})^{100^{100}-100^{99}} > (100^{99})^{\frac{1}{2}100^{100}} = 10^{99\cdot 100^{100}} > 10^{10^{201}},$$

т. е. в этом числе по крайней мере 10^{201} знаков.

15. Меньше четверти. Решение. Нас интересует объем фигуры, изображенной на рисунке 3. Возьмем две такие фигуры, вторую перевернем и поставим рядом с первой. Сечение того, что получится, горизонтальной плоскостью состоит из двух секторов (рис. 4), которые можно расположить в половине основания цилиндра так, чтобы они не пересекались (рис. 5). Поэтому их суммарная площадь меньше половины площади горизонтального сечения цилиндра, а суммарный объем двух (одинаковых) фигур меньше половины объема цилиндра.

Замечание. Объем нашей фигуры ничего не стоит вычислить при помощи интеграла: он равен $\frac{2}{3\pi}\approx 21{,}2\%$ от объема цилиндра.

О графическом способе решения некоторых физических задач

1. $\Delta t=45$ мин.
2. $v=\sqrt{La}$.
3. $F=l/(a^2m)$.
4. $a=1/(\sqrt[3]{2}-1)$.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. 8 деталей.
2. $\left[-\frac{9}{5}; -\frac{16}{9}\right[$.
3. $\left\{1, \frac{6-\sqrt{11}}{25}\right\}$. Указание. Рассмотрите два случая: $5a-1\geqslant|2a|$ и $|5a-1|<2a$.

4.1. $\arccos\left(\frac{2-a^2}{a}\right)$, $\arccos\left(\frac{a^2+2}{3a}\right)$ $(1<a<2)$.

kvant.mccme.ru

Указание. Рассмотрите случаи тупого и острого угла B.

4.2. $\frac{abc}{a+ab}$. Воспользуйтесь подобием треугольников ABC, BDE и ADF.

4.3. $\frac{-a-1+\sqrt{a^2+6a+1}}{2}$, $\frac{-a-1+\sqrt{a^2+6a+1}}{2a}$.

5. $\frac{1}{3}R^3\cdot\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}$.

Вариант 2

1. 1 кг; $33\frac{1}{3}$ %.
2. $\left[-\frac{2}{5};\ 2\right[$.
3. $x=-\frac{\pi}{8}+(-1)^k\frac{\pi}{6}+\frac{k\pi}{2}$; $(k\in\mathbb{Z})$.
4. $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\sin 2\alpha$.
5. $\frac{a^2\sqrt{3}}{48\cdot\cos\alpha}$.

Вариант 3

1. 20 км/ч
2.1. $x=1{,}5$, $y=2$.
2.2. $4+\sqrt{13}$.
3. $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+k\pi$; $(k\in\mathbb{Z})$.
4. $\left]\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ 2\right[$. **Указание.** Преобразуйте левую часть неравенства к виду $\log_{x+1}\left(\frac{1}{2-x}\right)$.
5. $\frac{k\cdot(r_1-r_2)}{\sqrt{k^2-1}}$ $(k>1)$.

Вариант 4

1. 60 км/ч.
2. $-1/2$.
3.1. $x_1=k\pi$, $x_2=\pm\frac{3}{4}\pi+2l\pi$; $k,\ l\in\mathbb{Z}$.
3.2. $\left]-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ 2k\pi\right[\ \cup\ \left[\frac{\pi}{6}+2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right[\ \cup\ \left]\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \pi+2k\pi\right[$. $(k\in\mathbb{Z})$.
Указание. Выполните замену $y=\sin x$.
4.1. 10,8 и 6 см.
4.2. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$.
5. $\frac{c^3}{6}\cdot\frac{\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}{1+\sin\alpha+\cos\alpha}$. **Указание.** Докажите, что основание высоты пирамиды — центр окружности, вписанной в основание пирамиды.

Вариант 5

1. В 3 раза.
2.1. $\{(2;\ 0),\ (0;\ 1)\}$.
2.2. 2.
2.3. $\left[-\frac{4}{5};\ -\frac{7}{9}\right[$.
3.1. $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$; $(k\in\mathbb{Z})$. **Указание.** Используйте очевидные неравенства $\sin^2 x\geqslant\sin^4 x\times\cos^3 2x$ и $\cos^2 2x\geqslant\sin^3 x\cdot\cos^3 2x$.
3.2. $x=\frac{k\pi}{2}$; $k\in\mathbb{Z}$.
3.3. $x=\pm\frac{\pi}{8}+2k\pi$; $(k\in\mathbb{Z})$.

4.1. $\frac{2(S+\sqrt{h^4+S^2})}{h}$.
4.2. $[-3;\ -2[$. 4.3. $\{4,\ \sqrt{2}\}$.
5. 30°. **Указание.** Проведите перпендикуляры из основания высоты пирамиды к сторонам основания.

Физика

1. $l=\sqrt{2}\,v_0t$.
2. В верхней жидкости (плотностью ϱ_1) находится $(\varrho_2-\varrho)/(\varrho_2-\varrho_1)$ часть объема шара, а в нижней — $(\varrho-\varrho_1)/(\varrho_2-\varrho_1)$ часть.
3. $h_{max}=v_0^2/(2g(1-\mu\operatorname{ctg}\alpha))$.
4. В точке A масса газа максимальна, а в точке B — минимальна (рис. 6).

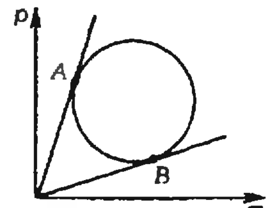


Рис. 6.

5. $A=RT_1(\sqrt{T_3/T_1}-1)^2$.
6. $\varrho=\varrho_к\varepsilon/(\varepsilon-1)$ ($\varrho_к$ — плотность керосина).
7. а) Электрон не пролетит мимо мишени, если
$$v_0\geqslant\sqrt{\frac{eUl(L+l/2)}{mdR}}\ \text{при}\ \frac{l+2L}{2R}>\frac{l}{d};$$
б) электрон не упадет на положительную пластину, если
$$v_0\geqslant\frac{l}{d}\sqrt{\frac{eU}{m}}\ \text{при}\ \frac{l+2L}{2R}<\frac{l}{d}.$$
8. $P_{мех}=I_1U(1-I_1/I_2)=96$ Вт.
9. $\alpha=\operatorname{arctg}(n_2/n_1)$.
10. $H=nh=1{,}2$ м.

Ленинградский политехнический институт им. М. И. Калинина

Математика

Вариант 1

1. Таких решений нет. 2. $\left[-1;\ \frac{5}{4}\right[$.
3. $\{4-2\sqrt{2};\ 4+2\sqrt{2}\}$.
4. $a\in\left]-2;\ \frac{-17-3\sqrt{41}}{20}\right]\cup\left[\frac{-17+3\sqrt{41}}{20};\ \frac{1}{6}\right[$.
Указание. Исходное уравнение приводится к виду $(3x+5y)(4x+7y)=5$. Если пара целых чисел $(x,\ y)$ является решением этого уравнения, то числа $3x+5y$ и $4x+7y$ целые, поэтому пара $(3x+5y;\ 4x+7y)$ совпадает с одной из четырех пар: $(5;\ 1)$; $(1;\ 5)$; $(5;\ -1)$; $(-1;\ -5)$.
5. $d\in\left[\frac{\sqrt{5}}{3};\ \frac{\sqrt{17}}{3}\right[$. **Указание.** Рассмотрим плоскость, в которой лежит верхнее основание параллелепипеда. Сечение пирамиды этой плоскостью — квадрат, в который вписан прямоугольник площади 1/18. Если этот прямоуголь-

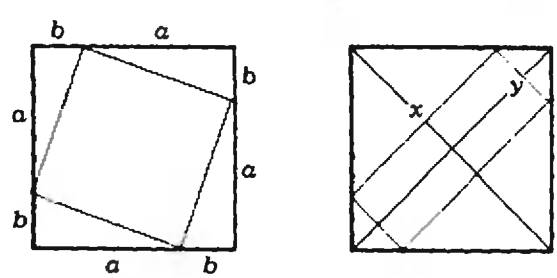


Рис. 7. а) б)

kvant.mccme.ru

ник является квадратом со стороной $\frac{1}{3\sqrt{2}}$ (рис. 7, *а*), то для стороны сечения $a+b$ из равенства $a^2+b^2=\frac{1}{18}$ получаем оценку $\frac{1}{18}=$ $=a^2+b^2=(a+b)^2-2ab\geqslant(a+b)^2-\frac{(a+b)^2}{2}=$ $=\frac{(a+b)^2}{2}$, откуда $a+b\leqslant\frac{1}{3}$. Отсюда следует, что параллелепипеды с «квадратными» основаниями могут быть вписаны в пирамиду лишь тогда, когда секущая плоскость удалена от плоскости основания на расстояние h, не меньшее чем $\frac{2}{3}$ и не большее, чем $1-\frac{1}{3\sqrt{2}}$. Квадрат длины диагонали параллелепипеда при этом равен $d^2=\frac{1}{9}+h^2$.

Если основание параллелепипеда — прямоугольник со сторонами x и y (рис. 7, *б*), то $xy=\frac{1}{18}$, а сторона сечения пирамиды плоскостью, в которой лежит верхнее основание, равна $\frac{x+y}{\sqrt{2}}\geqslant\sqrt{2}\cdot\sqrt{xy}=\frac{1}{9}$; отсюда следует, что все такие сечения удалены от плоскости основания на расстояние h, не превосходящее $\frac{2}{3}$.

При $0<h\leqslant\frac{2}{3}$ квадрат длины диагонали равен

$$d^2=h^2+x^2+y^2=\left(1-\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2+x^2+y^2=$$

$$=\frac{3}{2}\ (x+y)^2-(x+y)\sqrt{2}+\frac{8}{9}.$$

Наименьшее значение d^2 достигается при $x+y=\frac{\sqrt{2}}{3}$, то есть при $h=\frac{2}{3}$.

Наибольшее значение функции d^2 достигается при $x+y=\sqrt{2}$, но при этом «пропадает» параллелепипед ($h=0$).

Вариант 2

1. $\left\{\log_3\frac{6+\sqrt{33}}{3}\right\}$.
2. $\{0\}$.
3. $a\in[4;\ \infty[$.
4. $\sin 2a=\pm\frac{3}{8}\sqrt{7}$.
5. Таких тетраэдров два. $V_1=\frac{2}{3}(1+\sqrt{5})$; $V_2=\frac{2}{3}\sqrt{22+10\sqrt{5}}$. **Указание.** Из условия следует, что тетраэдры, описанные в условии задачи, «устроены» так, как показано на рисунке 8. (Здесь d — наибольшее ребро, $0<k<1$ — коэффициент подобия треугольников.) Поскольку $\sqrt{2+2\sqrt{5}}\,/\,2\sqrt{2+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, постольку либо $k=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, либо $k^2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Первый случай невозможен (не существует треугольника со сторонами d, kd, k^2d). Во втором случае $\left(k=\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}\right)$ получаем 2 тетраэдра с $d=$ $=\sqrt{2+2\sqrt{5}}$ и с $kd=2\sqrt{2+\sqrt{5}}$. Для вычисления объема полезно заметить, что треугольник со сторонами d, kd и k^2d — прямоугольный ($k^4=k^2+1$).

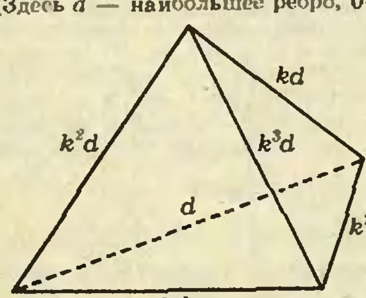


Рис. 8.

Вариант 3

1. $\left]-311;\ -11\right[\cup\left]1;\ \frac{3}{2}\right[$.
2. $\{(-4,5);\ 3)\}$.
3. $x=\frac{\pi}{3}+(2n+1)\pi,\quad n\in Z$.
4. $x_D=1,2$.
5. $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{6}$. **Указание.** По теореме синусов радиус окружности, описанной около треугольника ADC, равен радиусу окружности, описанной около треугольника ABC, поэтому угол CAD может принимать значения $5\pi/12$ и $7\pi/12$. В первом из них $BD\perp AC$. Во втором случае через точку D проведите прямую, параллельную AC, а через точку B — плоскость, перпендикулярную AC. Эта плоскость пересечет l в точке K. Найдите отношение $DK/BD=\cos\widehat{BDK}$.

Физика

1. $v_1=\sqrt{\dfrac{E_0m_2m_3}{m_1(m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3)}}$;

$v_2=\sqrt{\dfrac{E_0m_1m_3}{m_2(m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3)}}$;

$v_3=\sqrt{\dfrac{E_0m_1m_2}{m_3(m_1m_2+m_1m_3+m_2m_3)}}$.

2. $p=2\mathrm{M}v^2n\cos^2\alpha/N_A=1,01\cdot10^5$ Па (здесь $\mathrm{M}=28\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса азота, $N_A=6,02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро).
3. $\Delta U=(3/2)(m/\mathrm{M})R\,\Delta T=3,11\cdot10^3$ Дж; $A=(m/\mathrm{M})R\,\Delta T=2,08\cdot10^3$ Дж; $Q=\Delta U+A=5,19\cdot10^3$ Дж.
4. $\Delta W=-\dfrac{2\pi\varepsilon_0R_1R_2(\varphi_1-\varphi_2)^2}{R_1+R_2}$; уменьшение энергии связано с выделением джоулева тепла при перераспределении зарядов на проводниках.
5. $\varepsilon=(A+W)/W=4,5$.
6. $\varphi_A=\mathscr{E}_2-\dfrac{(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1)C_1}{C_1+C_2}=2,7$ В.
7. $l=v\,\Delta t=1.1$ м;

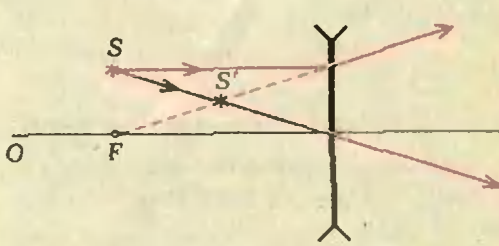


Рис. 9.

kvant.mccme.ru

$$s=\sqrt{\left(\frac{2m_p v\sin\alpha}{q_pB}\right)^2+(v\cos\alpha\,\Delta t)^2}=0{,}59\text{ м}.$$

Указание. Протон движется по винтовой линии и за время Δt он сделает 1,5 оборота.

8. $x\approx R/(n-1)$.

9. $x=h\left(\operatorname{tg}\alpha-\frac{\sin\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}\right)=0{,}19$ м.

10. См. рис. 9.

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Вариант 1

1. $\{1\}$. 2. а) $-3/5$; б) $4/5$.
3. $\{4\}\cup[5;\ 7]$.
4. 7, 24, 25.
5. $3a^2/4$, $a^3\sqrt{2}/32$.

Вариант 2

1. $\sqrt{a^2-1}$. 2. 4 мин. 3. $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi n$; $x_2=\pi/2+2\pi k$, $x_3=2\pi l$ $(k,\ l,\ n\in\mathbb{Z})$.
4. $]1/100;\ \infty[$.
5. $75\sqrt{3}/4$.

Вариант 3

2. $\{0;\ 1/2\}$. 3. $]5/9;\ 1]\cup]6;\ \infty[$.
4. 150 г; 450 г;
5. $\pi b^2\sqrt{e^2-4b^2\sin^2\alpha/2}/4\cos^2\alpha/2$.

Вариант 4

2. $\{3/2\}$. 3. $]-6;\ 1[$.
4. $\{10\}$. 5. 192.

Физика

1. $H=v^2/(60g)=2{,}13\cdot 10^5$ м$=213$ км; $t=v/(30g)=38$ с; $g_H=gR^2/(R+H)^2=9{,}19$ м/с^2.
2. $t=\pi\sqrt{R/g}=2{,}53\cdot 10^3$ с$=42{,}2$ мин.
3. $F_{\text{тр п}}=mg\sin\alpha$, где $0\leqslant\alpha<\operatorname{arc\,tg}\mu$; $F_{\text{тр ск}}=\mu mg\cos\alpha$, где $\operatorname{arc\,tg}\mu\leqslant\alpha\leqslant\pi/2$.
4. Нет, нельзя.
5. $p=\frac{p_0T_1T_2(V_1+V_2)}{T_0(V_1T_2+V_2T_1)}$.
6. $t=\varrho VgH/(\eta N)$.
7. $r_\text{к}/r_\text{в}=\sqrt{1/\varepsilon_\text{к}}$.
8. $F=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0r_1^2}=\frac{m^2e^6}{(4\pi\varepsilon_0)^3\hbar^4}=8{,}3\cdot 10^{-8}$ Н

(здесь $r_1=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2}$ — радиус первой боровской орбиты, $\varepsilon_0=8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная, $\hbar=1{,}05\cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка, $m=9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг — масса электрона, $e=1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл — его заряд).
9. $E_k=e^2r^2B^2/(2m)$.
10. $N=1{,}38\cdot 10^{44}$ м$^{-3}$; $\varrho=m_0N=2{,}3\cdot 10^{17}$ кг/м^3; $m=\varrho V_0=2{,}3\cdot 10^{11}$ кг (здесь $V_0=1$ см^3).

Ленинградский электротехнический институт им. В. И. Ульянова (Ленина)

Математика

Вариант 1

1. а) π.
б) $x_1=\frac{\pi}{4}(2k+1)$, $x_2=\pm\arccos\frac{\sqrt{2}}{4}+\pi l$ $(k,l\in\mathbb{Z})$.
в) 7. Указание. Сделайте замену переменной $v=\cos^2 x$.
2. а) $]-2;\ -1[\cup]0;\ \infty[$;
б) $x\in\left\{\frac{1-\sqrt{17}}{2};\ \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}$;
в) $]-\sqrt{2};\ -1[\cup]\sqrt{2};\ \infty[$;
г) $a\in]-1;\ 0[\cup]1;\ \infty[$. Указание. Решение существует, если величина $x=\frac{-2a}{a+1}$ удовлетворяет условиям $x>-a$, $x\in]-2;\ -1[\cup]0;\ \infty[$.
3. б) $R\in\{1/9;\ 9\}$.
в) Указание. Гипотенуза всегда больше катета.

Вариант 2

1. а) $A=B=1$.
б) $A=-1/6$, $B=-2/3$.
в) $A\geqslant 0$; $B\geqslant 0$. Указание. Надо найти A и B такие, что $2Ax+1+\frac{B}{x}\geqslant 0$ при $x>0$.
2. а) $]0;\ 1[\cup]1;\ \infty[$;
б) $x\in\{\sqrt{2};\ 4\}$;
в) $x\in\{1/2;\ 2\}$;
г) $a\in]-\infty;\ -2]\cup[2;\ \infty[$. Указание. Сделайте замену переменной $v=\log_2 x$ и исследуйте соответствующую функцию аргумента v.
3. а) $\beta\in\left[\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right[$. Указание. При $\beta<\frac{\pi}{4}$ точка D не попадает на гипотенузу.
б) Указание. Используйте равенство $AD=AB-2BH$.
в) $\beta=\frac{\pi}{3}$. Указание. Фактически надо найти β такое, что $AD=1$.

Вариант 3

1. а) $x=2$;
б) $x\in]1;\ \infty[$;
в) -4. Указание. Сделайте замену переменной $v=3^x$ и найдите минимум выражения v^2-2v-3.
г) при $a\in]-\infty;\ -4[$ нет решений; при $a\in\{-4\}\cup[-3;\ \infty[$ одно решение, при $a\in]-4;\ -3[$ два решения. Указание. В обозначениях п. в) задача равносильна нахождению числа положительных корней уравнения $v^2-2v-3=a$.
2. а) Экстремумов нет.
б) $x=0$;
в) $x\in]1;\ \infty[$. Указание. Из п. а) видно, что функция f возрастает и $f(1)=1$.
3. б) $\alpha_1=\arccos\frac{1}{3}$, $\alpha_2=\arccos\frac{2}{3}$. Указание. По условию задачи $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$; в) $1/2$.

Физика

1. $v=\sqrt{v_0^2+g^2t^2}$; вектор $\vec{v}$ составляет с горизонтом угол $\alpha=\operatorname{arctg}((gt)/v_0)$.
2. $T=(F_1+2F_2)/3=80$ Н.
3. $A_1=-\mu mgh\operatorname{ctg}\beta$; $A_2=-mgh$.
4. $P=2mv=0{,}2$ кг·м/с; $F=2mv/t=2$ Н.
5. $h=\frac{p_0}{\varrho g}\left(2\frac{T_2}{T_1}-1\right)=8{,}7$ м (здесь $p_0=101\,325$ Па — нормальное давление).
6. $Q=qr/(R+r)$.
7. Две половины спирали следует соединить параллельно.
8. $v=E/B=10^5$ м/с; $\vec{v}\perp\vec{E}$ и $\vec{B}$.
9. $\Delta\varphi=0{,}02$ В.
10. $f_2=7{,}5$ см.

В поисках оптимального раскроя

(см. «Квант» № 3)

1. Для доказательства достаточно каждое выражение вида $\sin(2t+\theta_k)$ разложить по формуле для синуса суммы; собрав отдельно слагаемые, содержащие $\sin 2t$, и слагаемые, содержащие $\cos 2t$, мы представим сумму $T(t)$ в виде

kvant.mccme.ru

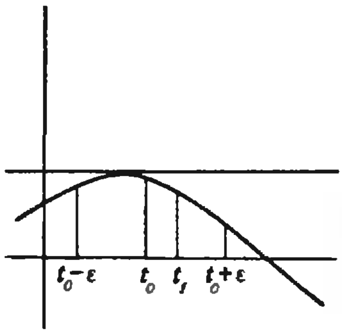


Рис. 10.

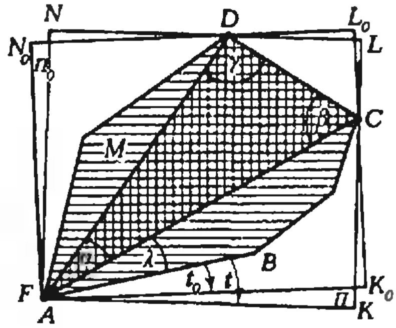


Рис. 11.

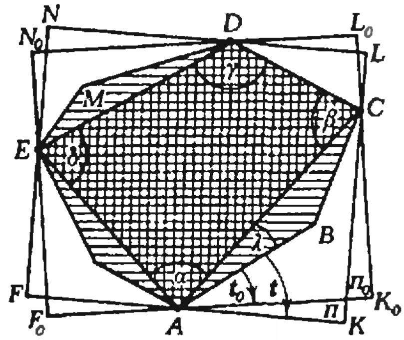


Рис. 12.

$T(t)=P\sin 2t+Q\cos 2t$, где числа P и Q от t не зависят. Затем, пользуясь приемом введения вспомогательного угла, представим $T(t)$ в требуемом виде.

2. Если функция $f(t)=\sin(2t+\theta)$ (рис. 10) на некотором интервале имеет точку минимума, то в такой точке значение $f(t)$ обязано быть равным -1. Но на интервале $(t_0-\varepsilon;\ t_0+\varepsilon)$ функция нигде не принимает значения -1 (она там по условию неотрицательна). Поэтому для функции $\sin(2t+\theta)$ нет на интервале $(t_0-\varepsilon;\ t_0+\varepsilon)$ никаких точек минимума. Следовательно, найдется там такое значение аргумента t_1, для которого верно требуемое неравенство.

3. Применим ту же идею «малого шевеления» к варианту II. Вводя обозначения: $\widehat{BAK_0}=t_0$, $S_{ACD}=\sigma$, видим, что $S_{\Pi_0}=\sigma+T(t_0)$, где

$$T(t_0)=S_{AK_0C}+S_{CL_0D}+S_{DN_0A}=$$
$$=\frac{1}{2}AC^2\cdot\sin(2t_0+2\lambda)-$$
$$-\frac{1}{2}CD^2\sin(2t_0+2\lambda-2\beta)+$$
$$+\frac{1}{2}AD^2\sin(2t_0+2\lambda+2\alpha).$$

В силу задачи 1 эту сумму можно представить в виде

$$T(t_0)=\varrho\sin(2t_0+\theta). \qquad (*)$$

где ϱ и θ от t_0 не зависят, $\varrho>0$. Поворачивая опорную прямую AK_0 (рис. 11) вокруг точки A на малый угол, убеждаемся, что при этом описанный прямоугольник будет по-прежнему иметь на своем контуре точки A, C, D. Говоря точнее, можно выбрать настолько малый интервал $(t_0-\varepsilon;\ t_0+\varepsilon)$, что пока угол t ($t=\widehat{BAK}$) принадлежит этому интервалу, соответствующий опорный прямоугольник $\Pi(FKLN)$ будет иметь вершину F в точке A, а внутри сторон KL и LN — соответственно точки C и D. Понятно, что

$$S_\Pi=\sigma+T(t),\quad T(t)=\varrho\sin(2t+\theta), \qquad (**)$$

где ϱ и θ — те же, что и в формуле (*). Но в силу утверждения из задачи 2 возможно подобрать такой угол t в интервале $(t_0-\varepsilon;\ t_0+\varepsilon)$, что $\sin(2t+\theta)<\sin(2t_0+\theta)$.

Для соответствующего описанного прямоугольника будет $T(t)<T(t_0)$, $S_\Pi<S_{\Pi_0}$, т. е. прямоугольник Π_0 и в варианте II не является оптимальным.

4. Пусть на контуре описанного прямоугольника Π_0 (рис. 12) расположены вершины A, C, D, E многоугольника M; пусть AB — сторона M, а t_0 — угол ее наклона к стороне AK_0. Пошевелим немного опорную прямую AK_0, повернув ее вокруг вершины A на малый угол. В результате прямая AK_0 займет новое положение AK, а угол t_0 немного увеличится (или уменьшится); его новое значение обозначим через t. Соответственно повернется немного (и, быть может, несколько деформируется) прямоугольник Π_0; новый описанный прямоугольник обозначим через Π. Однако если угол поворота достаточно мал (т. е. если t достаточно мало отличается от t_0), то картина качественно не изменится: четыре вершины A, C, D, E останутся внутренними точками четырех различных сторон опорного прямоугольника Π, а остальные вершины M будут внутри Π. Так будет обстоять дело, пока угол t будет оставаться внутри некоторого достаточно малого интервала $(t_0-\varepsilon;\ t_0+\varepsilon)$. Обозначим углы и площадь вспомогательного четырехугольника $ACDE$ через α, β, γ, δ, σ; пусть $\widehat{CAB}=\lambda$. Нетрудно подсчитать, что $S_{\Pi_0}=\sigma+T(t_0)$, где

$$T(t_0)=S_{K_0AC}+S_{CL_0D}+S_{DN_0E}+S_{EF_0A}=$$
$$=\frac{1}{2}AC^2\sin(2t_0+2\lambda)-\frac{1}{2}CD^2\sin(2t_0\alpha+$$
$$+2\lambda-2\beta)+\frac{1}{2}DE^2\sin(2t_0+2\lambda-2\beta-2\gamma)-$$
$$-\frac{1}{2}AE^2\sin(2t_0+2\alpha+2\lambda).$$

Учитывая задачу 1, можем $T(t_0)$ представить в виде

$$T(t_0)=\varrho\sin(2t_0+\theta).$$

где ϱ и θ — числа, не зависящие от t_0 (а зависящие только от элементов многоугольника M (точнее, от длин отрезков AC, CD, DE, EA и от углов α, β, γ, δ, λ). Аналогично найдем, что

$$S_\Pi=\sigma+T(t),\ \text{где}\ T(t)=\varrho\sin(2t+\theta).$$

Рассуждая, как в предыдущих двух вариантах, заключаем, что прямоугольник Π_0 не является оптимальным.

5. Пусть AB (рис. 13) — сторона многоугольника, причем A и B — нетупые углы; пусть F — вершина многоугольника M, наиболее уда-

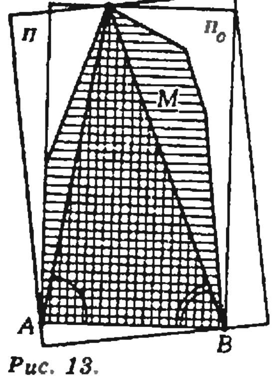


Рис. 13.

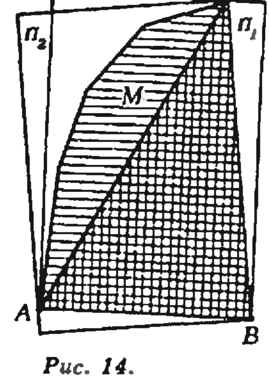


Рис. 14.

kvant.mccme.ru

ленная от прямой AB, и $S_{ABF}=\sigma$. Описанный около M прямоугольник Π_0, чей контур содержит в качестве своей стороны отрезок AB, имеет площадь 2σ. Пусть Π — произвольный другой описанный прямоугольник. Тогда он накрывает $\triangle ABF$, причем отрезок AB уже не является для Π стороной. Если BF или AF (для определенности — BF) — сторона M, то угол при вершине F в многоугольнике тупой, и поэтому описанный прямоугольник Π, построенный на прямой BF, не имеет своей стороной отрезок BF, так что $S_\Pi>2\sigma$. Если же ни BF, ни AF, ни AB не служат стороной для описанного прямоугольника Π, то — как мы уже видели (случай треугольника) — $S_\Pi>2\sigma$. Значит, только один описанный прямоугольник, а именно Π_0, имеет наименьшую возможную площадь (2σ).

6. Так как у M не может быть более трех нетупых углов, то в нашем случае две стороны многоугольника M, к которым прилегают нетупые углы, — смежные. Пусть это будут AB и BC (рис. 14). Описанный около M прямоугольник Π_1, имеющий своей стороной отрезок AB, будет, очевидно, иметь площадь 2σ, где $\sigma=S_{ABC}$. То же верно для прямоугольника Π_2, для которого стороной служит BC. Всякий же другой описанный прямоугольник Π будет содержать треугольник ABC, причем ни одна сторона этого треугольника не окажется стороной прямоугольника Π. Поэтому $S_\Pi>2\sigma$. Тем самым показано, что только Π_1 и Π_2 — оптимальные прямоугольники для M.

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 3)

Вопросы и задачи

1. Наличие пор в стенках сосуда приводит к увеличению свободной поверхности жидкости, и большее число высокоэнергичных молекул могут покинуть ее, тем самым «охлаждая» содержимое сосуда.
2. Хлеб черствеет, часть влаги испаряется, и вес хлеба уменьшается.
3. Увеличение свободной поверхности жидкости увеличивает скорость ее испарения.
4. Вода из-за большой теплоемкости прогревается медленнее воздуха, поэтому она холоднее. При выходе из воды капельки ее, оставшиеся на теле, испаряются, кожа охлаждается, и воздух кажется холоднее воды.
5. При кипении в пробирке будет насыщенный пар, вода в стакане и в пробирке будет на одном уровне.
6. Поскольку в обоих сосудах температура 100 °С, из внешнего сосуда во внутренний энергия передаваться не будет, и вода в стакане не закипит.
7. Можно, если понижать в сосуде с водой давление до давления насыщенного пара при данной температуре.
8. Температура плавления бронзы ниже, чем железа.
9. График I—I относится к стеклу, II—II — к металлу.
10. Движение воды в реке постоянно выносит со дна на ее поверхность более теплую воду.
11. Да, если вода нагревается в герметически закупоренном сосуде. В этом случае ее температура может достигнуть 374 °С, температура же плавления свинца 327 °С.
12. За счет потенциальной энергии взаимодействия молекул, убывающей при их перестройке в процессе кристаллизации.

Микроопыт

Медная проволока перережет лед быстрее. Одна из причин, обуславливающих это явление,— хорошая теплопроводность меди, обеспечивающая подвод тепла из окружающей среды к месту контакта лед — медь.

Задачи XLIX Московской городской математической олимпиады
(см. «Квант», 1986, № 9, с. 57)

Подробные указания и решения этих задач включены в сборник «Московские математические олимпиады», выпущенный в конце прошлого года издательством «Просвещение».

Избранные задачи Ленинградской городской олимпиады по математике
(см. «Квант», 1986, № 9, с. 57)

1. Рассмотрите проекции вершин на самую длинную сторону.
2. Рассмотрите номера дней, дающие фиксированный остаток при делении на 100.
3. Пусть минимальные пути из A в B до и после закрытия одной авиалинии (ребра) различны и состоят соответственно из $a+p+b$, $a+q+b$ ребер; a и b ребер — общие, p и q образуют цикл, $1\leqslant p<q$. Рассмотрим пути от A и B до самых далеких от них точек цикла. Можно доказать что $a+(p+q-1)/2\leqslant N$ и $b+(p+q-1)/2\leqslant N$, откуда (поскольку $p\geqslant 1$) $a+q+b\leqslant 2N$.
4. В качестве этих точек M можно взять $4^4=256$ концов векторов $\overrightarrow{OM}=k_1\vec{v}_1+k_2\vec{v}_2+k_3\vec{v}_3+k_4\vec{v}_4$, где k_i принимают значения 0, 1, 2 и 3 ($1\leqslant i\leqslant 4$); векторы v_i «общего положения» (так что все 256 точек M различны), а прямые — их тоже 256 — переходят через все точки M параллельно векторам v_i. (Аналогичное решение задачи с заменой 4 на 3 — проекция на плоскость проволочного куба $2\times2\times2$, разделенного на клетки $1\times1\times1$; наш пример — проекция «4-мерного куба $3\times3\times3\times3$».)
5. а) Ответ: первый. Выигрышная стратегия: идти по биссектрисе угла прямоугольника к вершине. б) Ответ: второй. Одна из выигрышных стратегий: двигаться параллельно диагоналям и, обойдя прямоугольник, заставить первого вернуться к исходной точке.

Если первый ход на четном расстоянии от параллельной ему стороны квадрата, есть более простая стратегия: продолжить отрезок, проведенный первым.
6. Легко доказать «от противного».
7. Ответ: 987 (16-е число ряда 1, 1, 2, 3, 5, ... чисел Фибоначчи). Если a_k — количество четных чисел, для которых шаг 1 алгоритма выполняется k раз, то $a_{k+1}=a_k+a_{k-1}$.
8. Ответ: $16+64\sqrt{2}$. Пример строится легко. Для доказательства оценки удобно клетки доски 9×9 раскрасить в шахматном порядке в черный и белый цвета (углы — белые) и затем еще 16 белых клеток покрасить в красный цвет тоже в «шахматном порядке» (углы остаются белыми). Тогда среди $50-2=48$ ходов из 25 белых клеток лишь 32 хода могут вести в красные клетки.
9. Рассмотрите проекции на диаметр объединения; нужная прямая перпендикулярна диаметру.
10. Добавьте сумму $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}}+\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{9}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9999}+\sqrt{10\,001}}$ (меньшую исходной) и

запишите $\dfrac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}$ как $\dfrac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2}$.

11. Ответ: 1. Подынтегральная функция f такова, что $f(x)+f(-x)=1$ (то есть ее график симметричен относительно точки (0; 1/2)).

12. Убедитесь, что многочлены $(t-u_1)(t-u_2)\times\times(t-u_3)$ и $(t-v_1)(t-v_2)(t-v_3)$ совпадают.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 1)

Задание 1 (А. Домбровский, Л. Ломинский, 1975 г.). Задача на геометрическую тему Новотного.

1. Кс4 (с угрозой 2. Фс3×) 1... С:с4 (дорога ладье к полю с3 перекрыта) 2. Фс3×, 1... Л:с4 (дорога слону к полю d3 перекрыта) 2. Фd3×, 1... Ф:с4 2. Ф:f2×, 1... Фе3 2. Фd5×, 1... Се3 2. Ке2×.

Задание 2 (А. Грин, 1968 г.). 1. Лb4! (Неожиданное вступление, смысл которого — отрезать слона от поля с3 (1. Ф:f6 Сс3!) 1... cb 2. Ф:f6 g5 3. Фg7×, 1... С:b4 2. Ф:с7+ Kph6 3. Фh2×, 1... g3 2. Фh6+! Kp:h6 3 Лh4×.

Шахматная страничка
(см. «Квант», 1986, № 12)

Тема «симметрия и асимметрия» довольно популярна в шахматной композиции, иногда даже проводятся специальные конкурсы. Этюд № 23 завоевал первый приз на конкурсе Скандинавских стран, который назывался «Симметричные начальные положения с асимметричной игрой». Этюд № 24 получил одну из наград на конкурсе пешечных этюдов, посвященном 90-летию со дня рождения Н. Григорьева, «короля пешечных этюдов».

Задание 23 (У. Мутоваара, 1967 г.). **1. Kpd3!** После 1. Kpe3 (f3)? b6! 2. Kpf4 Kpf8 3. Kpg5 Kpg8 4. Kph6 Kph8 5. Kpg5 Kpg8 6. Kpf5 Kpf8 7. Kpe5 Kpe8 8. Kpd5 Kpd8 9. Kpc4 Kpc8 10. Kpb5 Kpb7 11. h5 h6 выигрывают черные. **1 ... b5 2. Kpe3 Kpd8 3. Kpf4 Kpe8 4. Kpg5 Kpf8 5. Kph6.** Но не 5. Kph5? Kpg8 6. Kph6 Kph8 7. h5 Kpg8 с ничьей. **5 ... Kpg8 6. h5! Kph8 7. Kpg5 Kpg8 8. Kpf5 Kpf8 9. Kpe5 Kpe8 10. Kpd5 Kpd8 11. Kpc5 Kpc8 12. Kpb6!** (выпускает победу 12. Kp:b5? Kpb7 с ничьей) **12 ...Kpb8 13. h6** и белые выигрывают.

Задание 24 (А. Ботоканов, 1985 г.) **1. Kpe1!** (убедитесь сами, что не годится 1. Kpg1?) 1 ...Kp:g3 2. Kpe2 Kp:g4 3. Kpf2 Kp:g5 4. Kpg3 Kph5 5. Kph3! g5 6. Kpg3 g4 7. Kpf4! Kph4 — пат № 1. 1 ...Kp:e3 2. Kpd1! Kp:e4 (любопытно 2 ...Kpf3 3. Kpd2! Kp:g3 4. Kpc3! Kpf3 5. Kpd3! Kp:g4 6. Kpc4! Kpf4 7. Kpd4 Kp:g5 8. Kpc5 с ничьей) 3. Kpe2! (но не 3. Kpd2? Kpf3! 4. Kpd3 Kp:g3, и черные берут верх) 3 ...Kp:e5 4. Kpe3! Kpd5 5. Kpd3 e5 6. Kpe3 d4 7. Kpf4! Kpd4 — пат № 2.

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: В. Н. Боровишки, А. А. Варламов, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили: А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили: Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов, Э. В. Назаров, А. М. Пономарева, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, П. И. Чернуский, В. Б. Юдин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Редактор отдела художественного оформления С. В. Иванов
Художественный редактор Т. М. Макарова
Корректор М. Л. Медведская

Сдано в набор 18.02.87. Подписано к печати 27.03.87. Т-09673. Бумага 70×108/16. Печать офсетная. Усл. кр.-от. 23,8. Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,38. Тираж 207 430 экз. Цена 40 коп. Заказ 393.

Ордена Трудового Красного Знамени Чеховский полиграфический комбинат ВО «Союзполиграфпром» Государственного комитета СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли 142300, г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54

kvant.mccme.ru

Шахматная страничка

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ОБЕЗЬЯНЬИ РЕКОРДЫ

Шахматные «поединки», в которых черные полностью копируют ходы белых, пока не получат мат, называются «обезьяньими» партиями. Вот две известные миниатюры, предложенные С. Лойдом: 1. c4 c5 2. Фa4 Фa5 3. Фc6 Фc3 4. Ф:c8×; 1. d4 d5 2. Фd3 Фd6 3. Фh3 Фh6 4. Ф:c8×. В этих примерах дело заканчивается матом, который объявляет белый ферзь. Рекорды Лойда являются абсолютными — побить их невозможно. А каковы рекорды обезьяньих партий, в которых мат дается другими фигурами?

В начале века этим вопросом интересовался выдающийся шахматный композитор К. Трайклер. Он составил симметричные партии, где ладья ставила мат за 9 ходов, слон — за 8, конь — за 7 и пешка — за 15 ходов. В дальнейшем многие любители математических головоломок на шахматной доске не раз улучшали «обезьяньи» рекорды. Приведем самые короткие партии, известные на сегодняшний день.

Матует ладья: 1. Кf3 Кf6 2. Кg5 Кg4 3. К:h7 К:h2 4. К:f8 К:f1 5. Кg6 Кg3 6. Л:h8×; чернопольный слон: 1. d4 d5 2. Крd2 Крd7 3. Крd3 Крd6 4. Сe3 Сe6 5. c3 c6 6. Фd2 Фd7 7. Сf4×; белопольный слон: 1. e4 e5 2. f4 f5 3. ef ef 4. f6 f3 5. fg fg 6. Сe2 Сe7 7. Сh5×; конь: 1. Кc3 Кc6 2. Кe4 Кe5 3. e3 e6 4. Кe2 Кe7 5. g3 g6 6. Кf6× (или 5. c3 c6 6. Кd6×); пешка: 1. g4 g5 2. h4 h5 3. Кf3 Кf6 4. Кe5 Кe4 5. hg hg 6. g6 g3 7. gf×. Наконец, на девятом ходу мат может объявить король: 1. d3 d6 2. Крd2 Крd7 3. Крc3 Крc6 4. Крb3 Крb6 5. Крa3 Крa6 6. Сe3 Сe6 7. Сb6 Сb3 8. ab ab 9. Крb4×.

До сих пор речь шла о матовании фигурами, которые имеются на доске в начальный момент. А за сколько ходов при симметричной игре могут объявить мат превращенные фигуры? Быстрее всего матуют превращенные ферзь или ладья: 1. c4 c5 2. d4 d5 3. dc dc 4. c6 c3 5. c7 c2 6. cdФ(Л)×.

Н. Скляр предлагает партии, в которых мат объявляют превращенные конь или слон. Матует превращенный конь: 1. e3 e6 2. Кe2 Кe7 3. g4 g5 4. h4 h5 5. hg hg 6. g6 g3 7. g7 g2 8. g8К g1К 9. Кf6×; превращенный чернопольный слон: 1. d4 d5 2. c3 c6 3. Крd2 Крd7 4. Крc2 Крc7 5. e4 e5 6. de de 7. e6 e3 8. e7 e2 9. edС×.

Н. Скляр придумал еще две интересные головоломки на тему симметрии. Какое наименьшее число симметричных ходов надо сделать, чтобы получить следующую позицию?

Белые: Крd1, Сa8, Сh8; черные: Крd8, Сa1, Сh1.

Автору головоломки удалось выполнить задание за 19 ходов: 1. d4 d5 2. e4 e5 3. ed ed 4. Ф:d4 Ф:d5 5. Ф:a7 Ф:a2 6. Ф:a8 Ф:a1 7. Ф:b8 Ф:b1 8. Ф:c7 Ф:c2 9. Ф:b7 Ф:b2 10. Крd1 Крd8 11. Ф:f7 Ф:f2 12. Ф:g8 Ф:g1 13. Ф:h8 Ф:h1 14. Ф:h7 Ф:h2 15. Ф:g7 Ф:g2 16. С:g2 С:g7 17. Сa8 Сa1 18. Сb2 Сb7 19. Сh8 Сh1.

То же самое задание и для следующей позиции, но с дополнительным условием: взятие разрешается только фигурами одного наименования: пешка бьет пешку, конь коня и т. д.

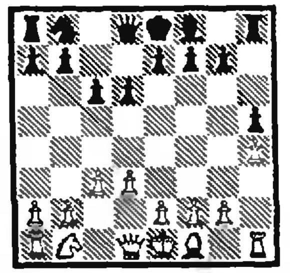
Белые: Крe1, Фd1, Сc1, Кb1, Лa1; черные: Крe8, Фd8, Сc8, Кb8, Лa8.

1. g4 g5 2. h4 h5 3. hg hg 4. f3 f6 5. gf gf 6. fe fe 7. Крf2 Крf7 8. a4 a5 9. b4 b5 10. ab ab 11. c3 c6 12. bc bc 13. cd cd 14. Фc2 Фc7 15. e8Л e1Л 16. Сa6 Сa3 17. С:a3 С:a6 18. Кf3 Кf6 19. Кd4 Кd5 20. Кc6 Кc3 21. К:c3 К:c6 22. Л:a8 Л:a1 23. Л:a1 Л:a8 24. Кb1 Кb8 25. Сc1 Сc8 26. d8Ф d1Ф 27. Ф:d1 Ф:d8 28. Крe1 Крe8. Кто побьет рекорд?

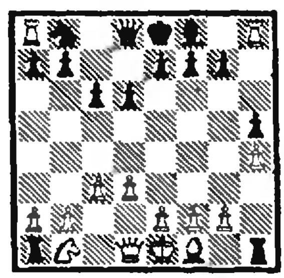
Кажется невероятным, но при полном копировании ходов противника (пока это возможно) черные могут даже выиграть. Белые (шутки ради) матуют сами себя, причем обратный мат ставится уже на восьмом ходу. Вот этот забавный рекорд: 1. e4 e5 2. Крe2 Крe7 3. Крe3 Крe6 4. Фf3 Фf6 5. Кe2 Кe7 6. b3 b6 7. Сa3 Сa6 8. Кd4+! ed×.

В заключение — две удивительные симметричные позиции, которые придумал международный гроссмейстер по шахматной композиции Г. Каспарян.

Обе они должны получиться из начальной расстановки фигур как можно быстрее. Первая возникает при симметричной игре за 7 ходов: 1. d3 d6 2. c3 c6 3. h4 h5 4. Кh3 Кh6 5. С:h6 С:h3 6. Л:h3 Л:h6 7. Лh1 Лh8.

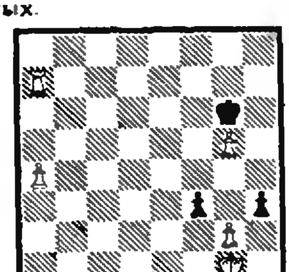


Вторая получается после 24-го хода белых (и игра не всегда «обезьянья»): 1. h4 h5 2. Кf3 Кf6 3. Кe5 Кe4 4. Кc6 Кc3 5. dc dc 6. Фd4 Фd5 7. Фa4 Фa5 8. Сf4 Сf5 9. Кa3 Кa6 10. Лd1 Лd8 11. Лd6 Лh6 12. Лe6 Лd2 13. Лh3 Лg6 14. Лd3 Лg3 15. Лh6 Лh3 16. Лb8 Лh1 17. Лd7 Сd3 18. Сd6 cd 19. cd Фd8 20. Фd1 Лc2 21. Лc7 Лe1 22. Лc8 Лa1 23. Лa8 Кb8 24. Кb1.



Конкурсные задания

7. Придумать самую короткую обезьянью партию, в которой мат объявляет превращенный белопольный слон белых.



8. Ход черных. Белые выигрывают.

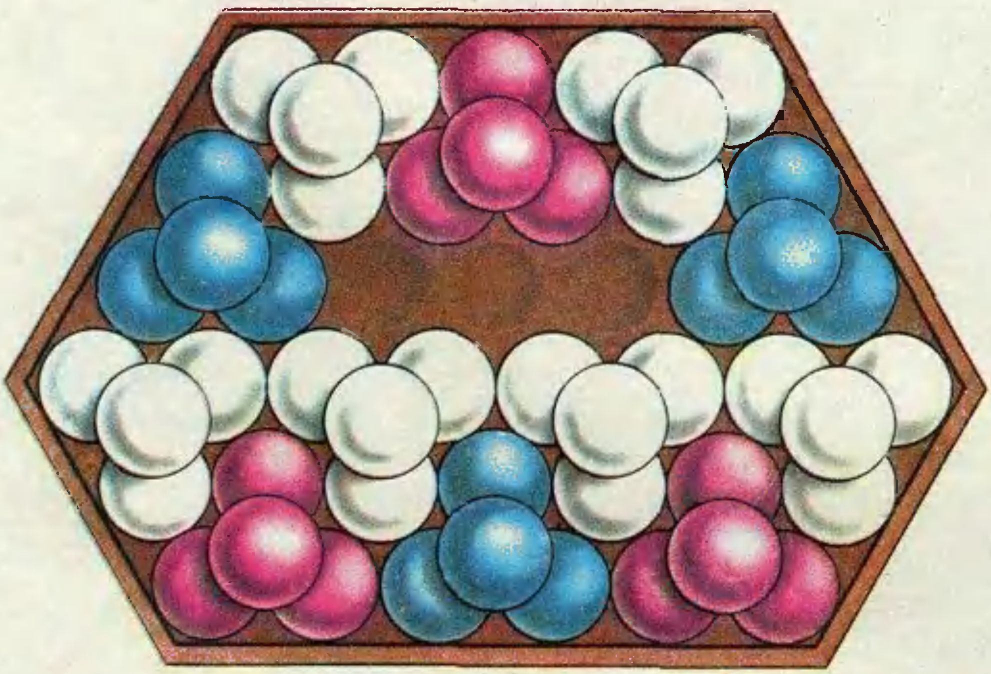
Срок отправки решений — 20 июня 1987 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 7, 8».

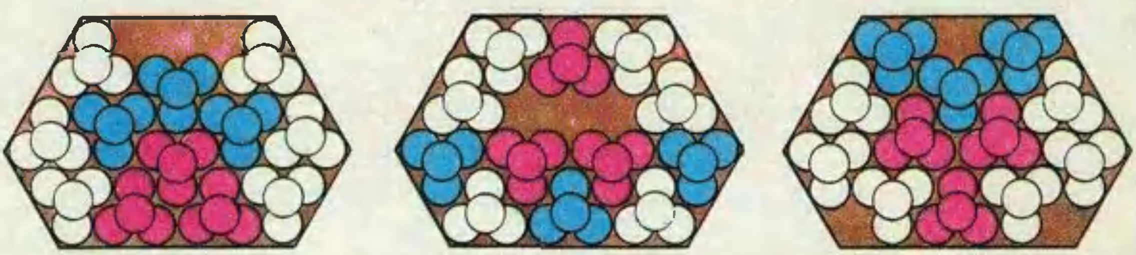
kvant.mccme.ru

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Те, кто следят за головоломками на последних страницах обложек нашего журнала, уже знакомы с «перевертышами» («Квант» № 1 и № 2) и «волшебными кольцами» («Квант» № 3). А теперь представляем своего рода гибрид этих двух типов головоломок, выведенный авторами «перевертышей» А. Дремовым и Г. Шевцовой (его идею предложил А. Калинин). Родство показанной здесь головоломки с «перевертышами» очевидно. Она состоит из фигурок — 12 пирамидок, склеенных из шариков,— которые можно перекатывать в шестиугольной коробочке. Для удобства на ее дне расположены по треугольной решетке $3 \times 13 = 39$ круглых лунок, три из них пустые. (Важное пояснение: для перекатывания пирамидки из шариков нужна только одна пустая лунка рядом с ней — в эту лунку попадает верхний шарик пирамидки; два «опорных» шарика остаются в старых лунках). Как и в других перестановочных головоломках надо одно данное расположение превратить в другое; несколько вариантов расположений вы видите на рисунках. Заметьте, однако, что эта головоломка





существенно отличается от перевертышей-пирамидок хотя бы тем, что по ходу игры пустые лунки способны разбредаться по всей коробке, и уже поэтому передвижения пирамидок из шариков нельзя заменить перекатываниями обычных тетраэдров. (Подумайте попутно, можно ли переставить пирамидки из шариков так, чтобы пустые лунки образовали основание одной такой пирамидки.) Итак, сходство нашей головоломки с «перевертышами» довольно поверхностное. Связь же ее с «волшебными кольцами» глубже и обнаруживается не сразу. Оказывается, существует последовательность ходов, в результате которой 7 пирамидок переставляются по циклу,— так образуется одно кольцо. Аналогично возникает и второе, пересекающееся с первым,— тоже из 7 пирамидок. Попробуйте найти эти кольца! Сделать это в уме или на бумаге очень не просто. Советуем изготовить головоломку и занумеровать пирамидки (см. рисунок), иначе путаница неизбежна. Таким образом, решение «перевертышей из семи шариков» сводится к нахождению циклических перестановок (ответ см. в «Кванте» № 5) и решению «волшебных колец» (о котором рассказано на обложке «Кванта» № 3).