

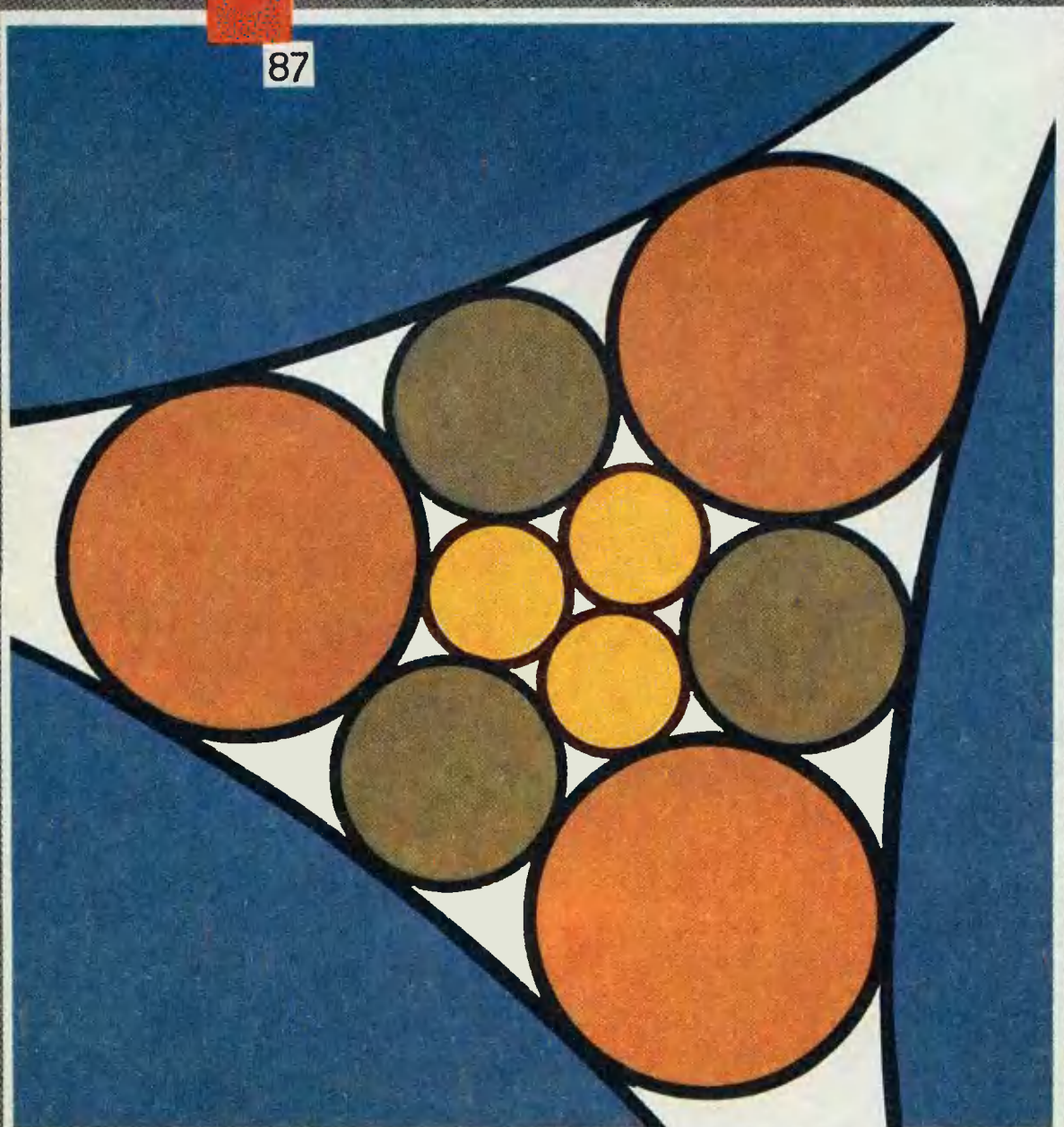
ISSN 0130 - 2221

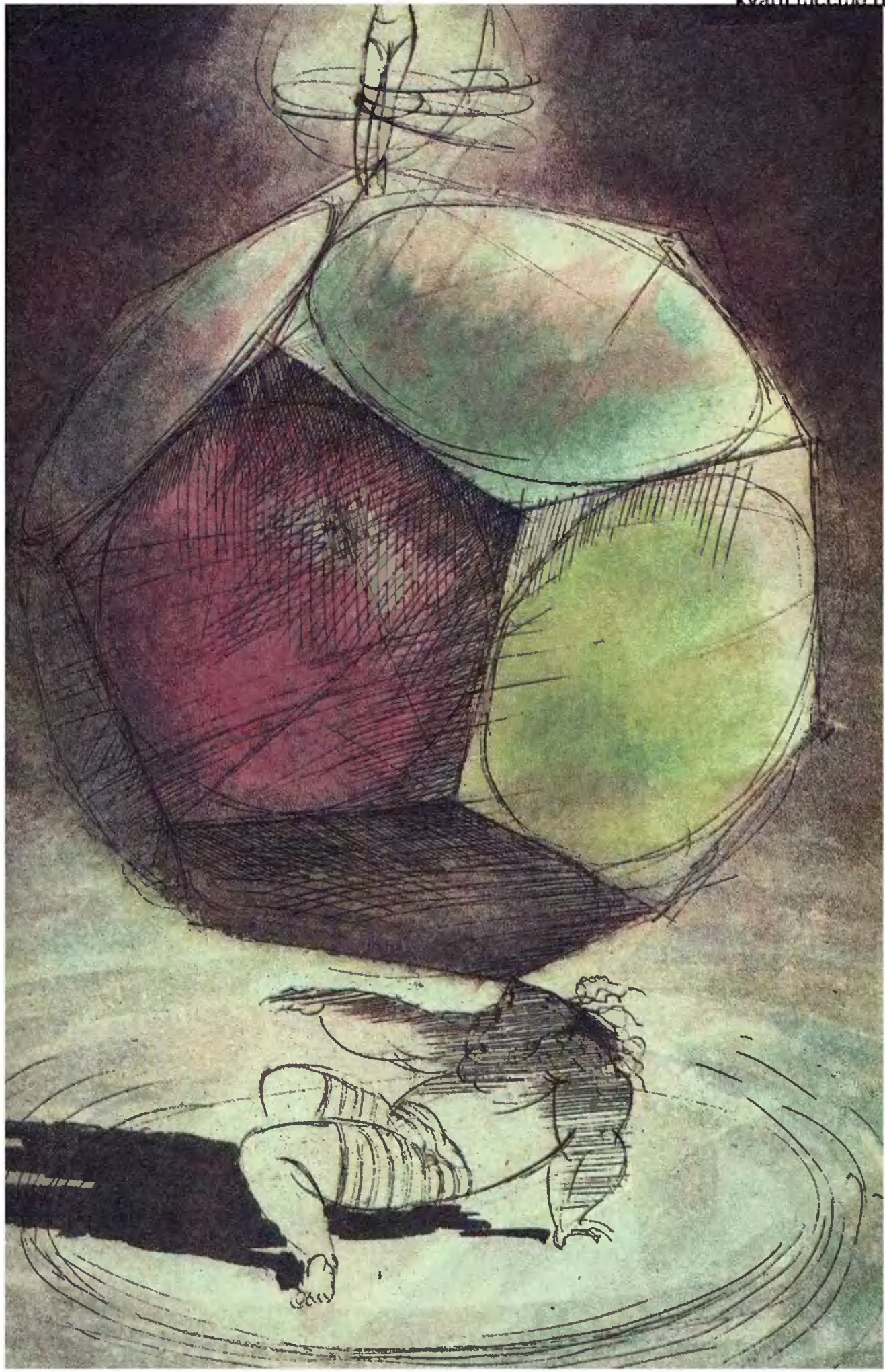
Квант

Научно-популярный
физико-математический
журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

87





Основан в 1970 году

В номере:

Научно-популярный
физико-математический
журнал Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР



Издательство «Наука»
Главная редакция физико-
математической литературы

- | | |
|----|---|
| 2 | В. Г. Болтянский. Огибающая |
| 8 | Л. М. Бреховских, В. М. Куртепов. Акустика в Океане |
| 14 | Д. Г. Крутогин. МК: проблемы общения |
| | Задачник «Кванта» |
| 18 | Победители конкурса «Задачник «Кванта» |
| 19 | Задачи M1031—M1035; Ф1043—Ф1047 |
| 21 | Решения задач M1011—M1014; Ф1023—Ф1027 |
| 29 | Список читателей, приславших правильные решения |
| | «Квант» для младших школьников |
| 31 | Задачи |
| 34 | Ю. П. Соловьев. Старый алгоритм |
| 32 | Калейдоскоп «Кванта» |
| | Школа в «Кванте» |
| 32 | Физика 8, 9, 10 |
| | Математический кружок |
| 44 | М. Б. Балк, Г. М. Ландман. В поисках оптимального раскроя |
| | Практикум абитуриента |
| 49 | А. С. Ярский. Неравенства с параметром |
| 53 | Варианты вступительных экзаменов |
| 59 | Ответы, указания, решения |
| | Шахматная страничка |
| | Рекорды компьютера (3-я с. обложки) |

Наша обложка



Рисунок на первой странице обложки — это ответ к задаче M1012. Он получается «стереографической проекцией» окружностей, вписанных в грани правильного додекаэдра (см. вторую страницу обложки, а также решение задачи M1012).

ОГИБАЮЩАЯ

Член-корреспондент АН СССР
В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

На рисунке 1 изображена замкнутая выпуклая линия L . Эта линия является *гладкой*, т. е. в каждой точке этой линии можно провести к ней касательную. Множество (или, как еще говорят, «семейство») всех касательных к линии L обозначим через T . На рисунке 2 изображены несколько прямых, принадлежащих семейству T (т. е. являющихся касательными к линии L). Эти прямые как бы «оггибают» линию L ; поэтому говорят, что линия L является *оггибающей* семейства прямых T .

Можно поставить и обратный вопрос: дано некоторое семейство прямых T и требуется найти оггибающую этого семейства, т. е. линию, которая касается всех прямых семейства T . Задача о нахождении оггибающей часто встречается в математике и ее приложениях. О решении этой задачи и будет здесь рассказано.

Огибающая семейства прямых

Вернемся к рисунку 2. Линия L разбивает плоскость на две области, внутреннюю и внешнюю. Через каждую точку M_0 , лежащую во внешней области E , проходят две линии семейства T (т. е. касательных к линии L), а через точку M_1 , лежащую во внутренней области J , не проходит ни одной касательной. Через каждую же точку M самой линии L проходит одна прямая семейства T (касательная).

Это обстоятельство и поможет нам найти аналитический прием

отыскания оггибающей. Для этого каждой прямой из семейства T мы сопоставим в качестве ее «номера» (точнее, параметра) некоторое действительное число α . Именно, зафиксировав на линии L начальную точку A , мы сопоставим прямой $l \in T$, касающейся кривой в точке M (рис. 3), число (параметр) α , равный длине дуги AM линии L . Возможны и другие способы сопоставить каждой прямой l семейства T некоторое значение параметра.

Прямую (из семейства T), которой сопоставлено значение параметра α , обозначим через $l(\alpha)$; пусть уравнение этой прямой имеет вид

$$A(\alpha)x + B(\alpha)y + C(\alpha) = 0. \quad (1)$$

Вспомним теперь (см. рис. 2), что через разные точки может проходить разное число прямых семейства T . Как же узнать, сколько прямых семейства T проходит через данную точку $M_0(x_0; y_0)$? Ясно, что это можно сделать так: надо подставить координаты точки M_0 в (1) и узнать, сколько есть значений параметра α , для которых получающееся равенство справедливо. Иначе говоря, надо решить относительно α уравнение

$$A(\alpha)x_0 + B(\alpha)y_0 + C(\alpha) = 0. \quad (2)$$

Например, если бы оказалось, что уравнение (2) является квадратным относительно α , то было бы понятно, почему через некоторые точки проходят две линии семейства T (уравнение имеет два различных действительных корня α_1, α_2), через некоторые точки не проходит ни одной

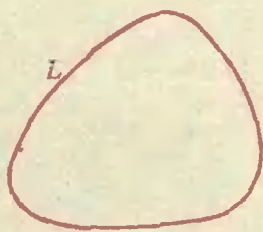


Рис. 1.

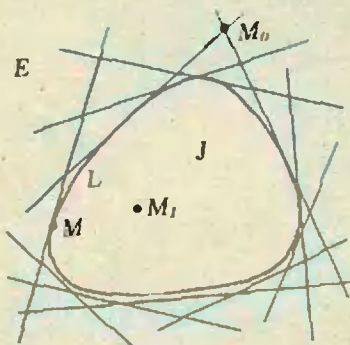


Рис. 2.

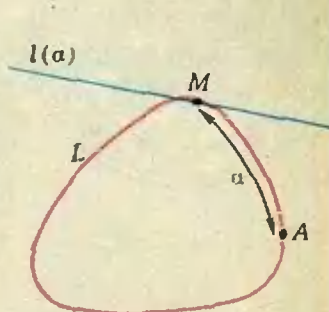


Рис. 3.

прямой семейства T (уравнение не имеет действительных корней), а через некоторые точки — только одна прямая (уравнение имеет два совпадающих действительных корня $\alpha_1 = \alpha_2$). Отсюда ясно, что (в случае, когда уравнение (2) — квадратное относительно α) для нахождения огибающей семейства T надо найти множество всех тех точек $M_0(x_0; y_0)$, для которых уравнение (2) имеет два совпадающих корня. Таким образом, нужно приравнять нулю дискриминант квадратного (относительно α) уравнения (2) (или, что равносильно, уравнения (1)) — это и будет уравнение огибающей.

Пример 1. Семейство T состоит из всех прямых, отсекающих от первого координатного угла треугольник данной площади s . Найти огибающую этого семейства.

Решение. Пусть a — произвольное положительное число. Обозначим через $l(\alpha)$ прямую семейства, которая пересекает ось абсцисс в точке a . Так как площадь отсекаемого треугольника должна быть равна s , то ось ординат эта прямая должна пересекать в точке $2s/a$. Уравнение этой прямой можно записать в виде

$$\alpha^2 \cdot \frac{y}{2s} - \alpha + x = 0. \quad (3)$$

Действительно, это уравнение — первой степени, т. е. описывает прямую, и эта прямая проходит через обе точки $(a; 0)$, $(0; 2s/a)$. Приравняв нулю дискриминант, получаем уравнение огибающей:

$$(-1)^2 - (4y/2s)x = 0, \\ \text{т. е. } y = s/2x \quad (x > 0).$$

Это — одна ветвь гиперболы (рис. 4).

Пример 2. В плоскости даны прямая a и не принадлежащая ей точка F . Через каждую точку $M \in a$ проводится прямая, перпендикулярная

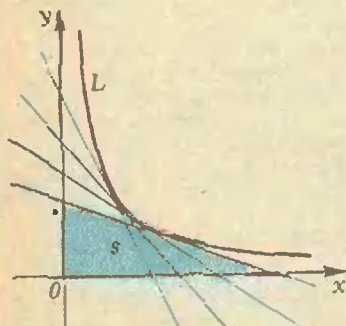


Рис. 4.

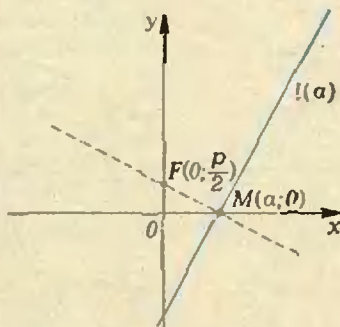


Рис. 5.

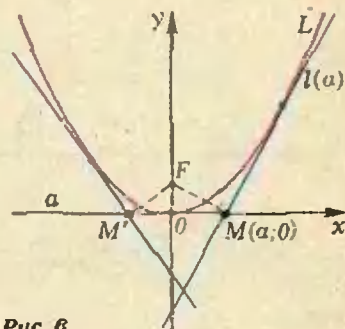


Рис. 6.

FM . Найти огибающую этого семейства прямых.

Решение. Примем a за ось абсцисс и будем считать, что ось ординат проходит через точку F (рис. 5); ординату точки F обозначим через $p/2$. Далее, возьмем на прямой a (т. е. на оси абсцисс) точку M с абсциссой a . Тогда прямая $l(\alpha)$, проходящая через M и перпендикулярная (FM) , задается уравнением

$$y = \frac{2x}{p}(x - \alpha),$$

т. е.

$$\alpha^2 - \alpha x + \frac{py}{2} = 0.$$

Приравнявая нулю дискриминант стоящего в левой части квадратного трехчлена, получаем уравнение огибающей:

$$x^2 = 2py.$$

В данном случае огибающей является парабола (рис. 6).

В обоих рассмотренных примерах в качестве огибающих получились хорошо известные линии (в частности, при $s=2$ и $p=1/2$ получаем $y=1/x$ и $y=x^2$). Это позволяет получить интересные свойства касательных к этим линиям. Пример 1 показывает, что любая касательная к гиперболе $y=k/x$ определяет вместе с осями координат треугольник постоянной площади $s=2k$. Пример 2 дает интересное свойство параболы $x^2=2py$; точка $F(0; p/2)$ называется фокусом этой параболы, точка $(0; 0)$ — ее вершиной, а прямая $y=0$ (ось абсцисс) является касательной, проведенной через вершину. Таким образом, если на произвольную касательную к параболе опустить перпендикуляр из фокуса, то основание этого перпендикуляра принадлежит касательной, проведенной через вершину (рис. 6).

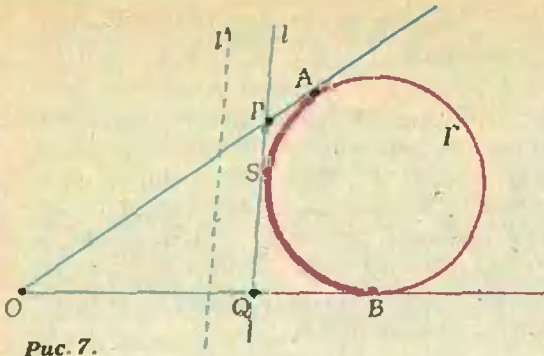


Рис. 7.

В иных случаях, напротив, легче геометрически увидеть, какая линия является огибающей, чем написать уравнение прямой, принадлежащей семейству, и приравнять нулю дискриминант.

Пример 3. Дан угол (меньший развернутого). Семейство T состоит из всех прямых, отсекающих от этого угла треугольник постоянного периметра $2r$. Найти огибающую этого семейства.

Решение. Отложим на сторонах данного угла O отрезки OA и OB , имеющие длину r (рис. 7), и рассмотрим окружность Γ , касающуюся сторон угла в точках A и B . Любая касательная l к окружности Γ (проведенная так, что точка O и окружность Γ находятся по разные стороны от нее) обладает требуемым свойством, т. е. $l \in T$, поскольку

$$OP + OQ + PQ = OP + OQ + PS + SQ = = OP + OQ + PA + QB = OA + OB = 2r.$$

Если же прямая l' не касается дуги AB окружности Γ , то отсекаемый ею треугольник имеет либо меньший, либо больший периметр. т. е. эта прямая не принадлежит семейству T . Итак, семейство T состоит из всех прямых, касающихся дуги AB окружности Γ , а огибающей этого семейства является дуга AB .

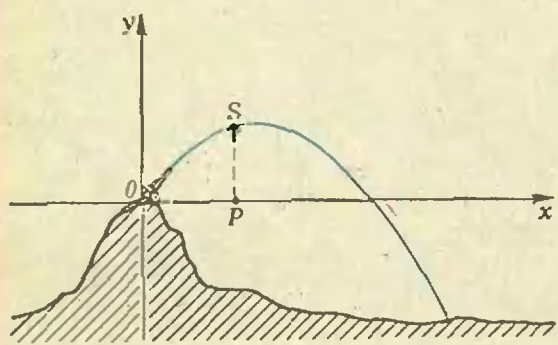


Рис. 8

Огибающая семейства кривых

Заметим теперь, что в проведенных рассуждениях вовсе не использовался тот факт, что семейство T состоит из прямых линий. Важно было лишь то, что линии семейства T зависят от параметра α , относительно которого левая часть уравнения является квадратным трехчленом. Следующий пример подтверждает сказанное.

Пример 4. В точке O расположено зенитное орудие, из которого можно выпускать снаряды (с заданной по величине начальной скоростью v_0) под любым углом к горизонту. Определить зону обстрела (сопротивлением воздуха пренебречь).

Решение. Достаточно рассмотреть точки, находящиеся в одной вертикальной плоскости. Если u — горизонтальная составляющая начальной скорости снаряда, вылетевшего из орудия в момент $t=0$, то вертикальная составляющая равна $\sqrt{v_0^2 - u^2}$. Горизонтальная проекция снаряда S (точка P на рисунке 8) движется равномерно со скоростью u , т. е. в момент t абсцисса снаряда равна $x = ut$. Вертикальная проекция движется по закону $y = \sqrt{v_0^2 - u^2} \cdot t - gt^2/2$, откуда (учитывая, что $t = x/u$) находим траекторию снаряда:

$$y = \sqrt{v_0^2 - u^2} \cdot \frac{x}{u} - \frac{gx^2}{2u^2}.$$

Выделяя слагаемое, содержащее радикал, и возводя в квадрат, получаем (после умножения на u^4):

$$u^4(x^2 + y^2) - u^2x^2(v_0^2 - gy) + g^2x^4/4 = 0.$$

Левая часть зависит от параметра $\alpha = u^2$ и представляет собой квадратный трехчлен относительно α . Приравняв нулю дискриминант этого трехчлена, получаем уравнение огиба-

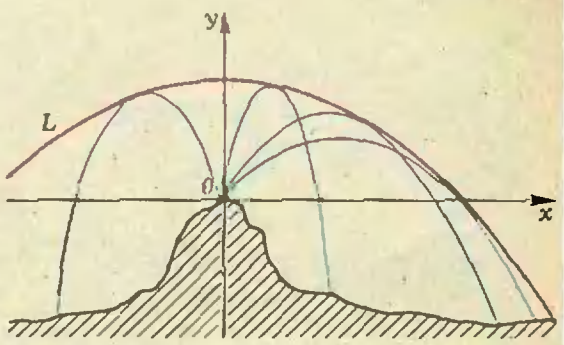


Рис. 9.

ющей семейства T всех траекторий снарядов:

$$x^3(v_0^2 - gy)^2 - (x^2 + y^2) \cdot g^2 x^4 = 0,$$

или, после деления на x^4 и упрощения,

$$y = \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

Эта огибающая называется *параболой безопасности* (выше нее полет безопасен); вершина этой параболы находится в точке $(0; v_0^2/2g)$, а ветви направлены вниз, поскольку коэффициент при x^2 отрицателен (рис. 9).

Важный класс задач, связанный с построением огибающих к семейству окружностей, возникает из принципа Гюйгенса («Физика-10», п. 37, с. 96). Мы здесь не касаемся этих задач (см. «Квант», 1982, № 6, с. 30).

Задачи

1. Рассматриваются всевозможные прямые $ax + by = 1$, где коэффициенты a, b удовлетворяют условию $a^2 + b^2 = 1$. Найдите огибающую этого семейства прямых.

2. Найдите огибающую семейства прямых $y = 2ax - a^2$.

3. В плоскости даны прямая d и не принадлежащая ей точка A . Для каждой точки $M \in d$ рассматривается прямая l_M , являющаяся осью симметрии точек A и M . Найдите огибающую семейства всех прямых l_M .

4. Найдите (алгебраически) огибающую семейства линий $(x-a)^2 + y^2 - 1 = 0$ и дайте геометрическое пояснение результата.

5. Рассматривается семейство окружностей (рис. 10)

$$(x-a)^2 + y^2 = b^2 \left(1 - \frac{a^2}{c^2}\right),$$

где b, c — данные положительные числа, а a — параметр ($|a| \leq c$). Докажите, что огибающей этого семейства окружностей является эллипс, описываемый уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{где } a^2 = b^2 + c^2).$$

6. Рассматривается прямая $l(\alpha)$, определяемая уравнением

$$y - ax + \frac{a}{2\sqrt{2}}(a^2 - 1) = 0,$$

где a — заданное положительное число, а α — параметр ($|\alpha| < 1$).

а) Найдите точки P, Q пересечения этой прямой с биссектрисами первого и второго координатного углов и докажите, что $OP + OQ = a$.

б) Найдите огибающую семейства прямых $l(\alpha)$ и убедитесь, что эта огибающая представляет собой дугу параболы.

в) Дан прямой угол; рассматриваются всевозможные прямые, отсекающие от этого угла треугольники, у которых сумма длин катетов равна a . Докажите, что огибающая этого семейства прямых представляет собой дугу параболы.

7. Рассматривается прямая $l(\alpha)$, определяемая уравнением

$$bx(1 + \alpha^2) + ay(1 - \alpha^2) - 2\alpha ab = 0,$$

где a, b — заданные положительные числа, а α — параметр.

а) Найдите точки P, Q пересечения этой прямой с прямыми $y = bx/a, y = -bx/a$ и докажите, что $OP \cdot OQ = a^2 + b^2, S_{\Delta OPQ} = ab$.

б) Докажите, что огибающей семейства прямых $l(\alpha)$ является гипербола, описываемая уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

в) Прямые $y = bx/a, y = -bx/a$ называются *асимптотами* указанной гиперболы; докажите, что произвольная касательная к гиперболе определяет вместе с асимптотами треугольник постоянной площади $S = ab$.

8. Рассматривается прямая $l(\alpha)$, определяемая уравнением

$$bx(a^2 - 1) + 2\alpha ay + ab(a^2 + 1) = 0,$$

где a, b — заданные положительные числа; а α — параметр. Докажите, что огибающей семейства прямых $l(\alpha)$ является эллипс, рассмотренный в задаче 5.

9. Найдите огибающую семейства парабол $y = a^2 x^2 - 2a$ (где a — параметр). Сделайте чертеж.

10. Найдите огибающую семейства окружностей $x^2 + (y - \alpha)^2 = \alpha$ (где α — параметр). Сделайте чертеж.

11. Найдите огибающую семейства окружностей $(x - a)^2 + y^2 = a^2/5$ (где a — параметр). Сделайте чертеж.

12. Найдите огибающую семейства парабол $y = 2ax^2 - a^2$ (где a — параметр). Сделайте чертеж.

13. Найдите огибающую семейства парабол $y = ax^2 + (1/a - a)$ (где a — параметр); сделайте чертеж.

14. Найдите огибающую семейства парабол $y = -ax^2/4 + (a + 1/a)$ (где a — параметр); сделайте чертеж.

Воспользуемся производной

Теперь мы рассмотрим другой, более общий способ нахождения огибающей, применимый и в том случае, когда левая часть уравнения не является квадратным трехчленом относительно параметра a . Этот способ основан на использовании понятия производной.

Пусть семейство линий задано уравнением

$$f(a, x, y) = 0, \quad (4)$$

где f — некоторое выражение (напри-

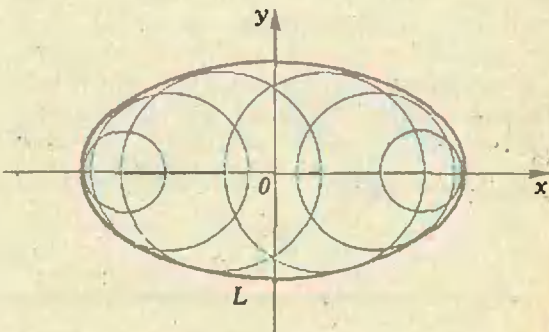


Рис. 10.

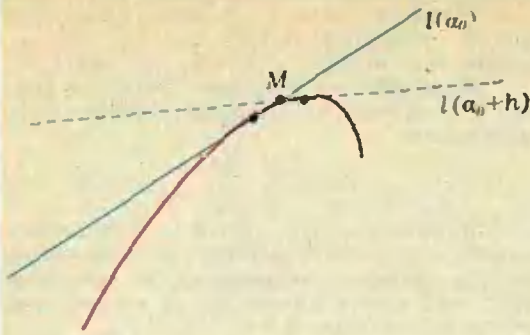


Рис. 11.

мер, многочлен), содержащее буквы α , x и y ; α — параметр, а x , y — координаты. При каждом конкретном значении параметра α получается соотношение между x и y , чем определяется некоторая линия $l(\alpha)$. При разных α будут получаться разные линии $l(\alpha)$, т. е. мы получаем семейство линий. Например, уравнение (1) как раз имело вид (4) (но там левая часть линейна относительно x и y , а в общем случае уравнение (4), определяющее семейство линий, может быть произвольным).

Пусть L — огибающая семейства линий $l(\alpha)$ (рис. 11). Выберем из этого семейства одну линию $l(\alpha_0)$ и пусть $l(\alpha_0+h)$ — «близкая» к ней линия семейства, а M — точка пересечения этих линий. Так как M принадлежит обоим рассмотренным линиям, ее координаты x , y удовлетворяют уравнениям

$$f(\alpha_0, x, y) = 0, \quad f(\alpha_0+h, x, y) = 0.$$

Следовательно, для координат точки M выполнено соотношение

$$\frac{f(\alpha_0+h, x, y) - f(\alpha_0, x, y)}{h} = 0. \quad (5)$$

При $h \rightarrow 0$ точка M будет приближаться к той точке M_0 , в которой линия $l(\alpha_0)$ касается огибающей. Если в выражении (5) перейти к пределу при $h \rightarrow 0$, получим

$$f'_\alpha(\alpha_0, x_0, y_0) = 0 \quad (6)$$

(где в левой части стоит производная по α от выражения f , рассматриваемого как функция от α). Итак, в точке $M_0 \in L$ выполнено, во-первых, соотношение

$$f(\alpha_0, x_0, y_0) = 0 \quad (7)$$

(поскольку M_0 — общая точка линий L и $l(\alpha_0)$) и, во-вторых, соотношение (6). Иначе говоря, огибающей принадлежат те точки $M_0(x_0, y_0)$, которые одновременно удовлетворяют (при некотором α_0) обоим уравнениям (6), (7). Это означает, что для нахождения огибающей можно поступить следующим образом: надо написать два соотношения

$$f(\alpha, x, y) = 0, \quad f'_\alpha(\alpha, x, y) = 0 \quad (8)$$

и исключить из них параметр α (т. е. найти α из одного соотношения и подставить его во второе соотношение). Получится одно уравнение, связывающее x и y ; это и будет уравнение огибающей.

Пример 5. На высоте h по прямой, параллельной поверхности земли, летит со сверхзвуковой скоростью v самолет. Определите в заданный контрольный момент зону слышимости.

Решение. Пусть в заданный момент самолет находился над точкой O земной поверхности; проекцию траектории самолета на поверхность земли примем за ось абсцисс, а за ось ординат — перпендикулярную ей прямую. За α секунд до интересующего нас контрольного момента самолет был в точке A_α , расположенной над точкой $x = -v\alpha$ оси абсцисс. К контрольному моменту звук из точки A_α распространился внутри шара с центром A_α и радиусом $u\alpha$, где u — скорость распространения звука в воздухе. Этот шар пересекается с поверхностью зем-

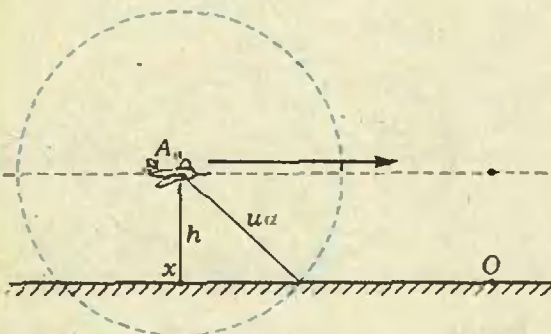


Рис. 12.

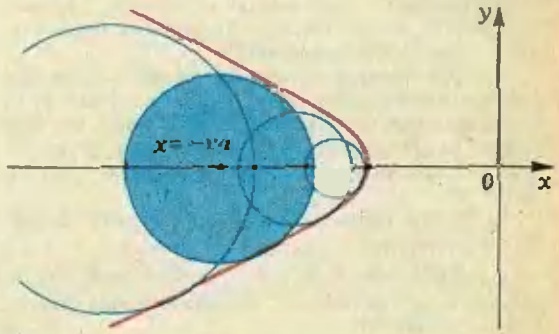


Рис. 13.

ли по кругу, центр которого находится в точке $x = -v\alpha$ оси абсцисс, а радиус равен $\sqrt{(u\alpha)^2 - h^2}$ (рис. 12). Окружность этого круга и ограничивает на земле ту зону, в которой (к контрольному моменту) распространился звук, произведенный самолетом при прохождении точки A_2 . Уравнение этой окружности имеет вид

$$(x + v\alpha)^2 + y^2 = (u\alpha)^2 - h^2. \quad (9)$$

Взяв объединение всех указанных кругов, мы и получим образовавшуюся к контрольному моменту зону слышимости. А чтобы найти границу зоны слышимости, надо найти огибающую (рис. 13) семейства окружностей (9). Уравнение (9) запишем в виде (4):

$$\alpha^2(v^2 - u^2) + 2\alpha xv + (x^2 + y^2 + h^2) = 0. \quad (10)$$

Взяв производную по α , получаем

$$2\alpha(v^2 - u^2) + 2xv = 0.$$

Наконец, определив α из последнего соотношения и подставив в (10), получаем уравнение огибающей:

$$u^2x^2 - (v^2 - u^2)y^2 = h^2(v^2 - u^2).$$

Это уравнение описывает гиперболу; нам надо взять только левую ее ветвь, поскольку окружности (9) мы должны рассматривать лишь при $\alpha > 0$. (Заметим, что то же уравнение огибающей можно получить и прежним приемом, взяв дискриминант квадратного трехчлена (10).)

Задачи

15. Найдите огибающую семейства парабол $y = \alpha^2x^2 - 3\alpha$ (где α — параметр). Сделайте чертеж.

16. Найдите огибающую семейства прямых $y = \alpha^2x - 3\alpha^2/2$.

17. Найдите огибающую семейства прямых $y = 4\alpha^3x - 3\alpha^4$.

18. Найдите такое семейство прямых, огибающей которого служит линия $y = x^6$.

19. Найдите огибающую семейства окружностей $(x - \cos \alpha)^2 + (y - \sin \alpha)^2 = 1/4$. Сделайте чертеж.

20. Решите задачу о зоне слышимости, если самолет летит (со сверхзвуковой скоростью) по прямой, наклоненной к земле под углом φ .

Дискриминантная кривая

Заметим в заключение, что если задано некоторое семейство линий (4), то линия L , получающаяся при исключении параметра α из уравнений (8) (она называется *дискриминантной кривой*), может, кроме точек огибающей, содержать и посторонние точки. Так, в примере 4 дискрими-

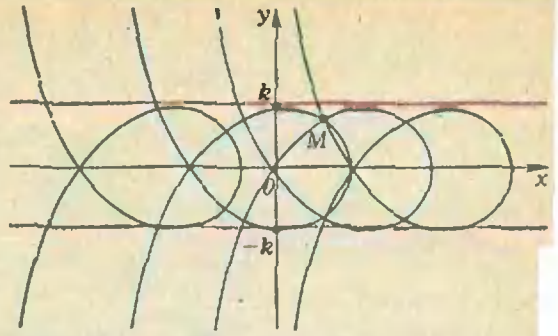


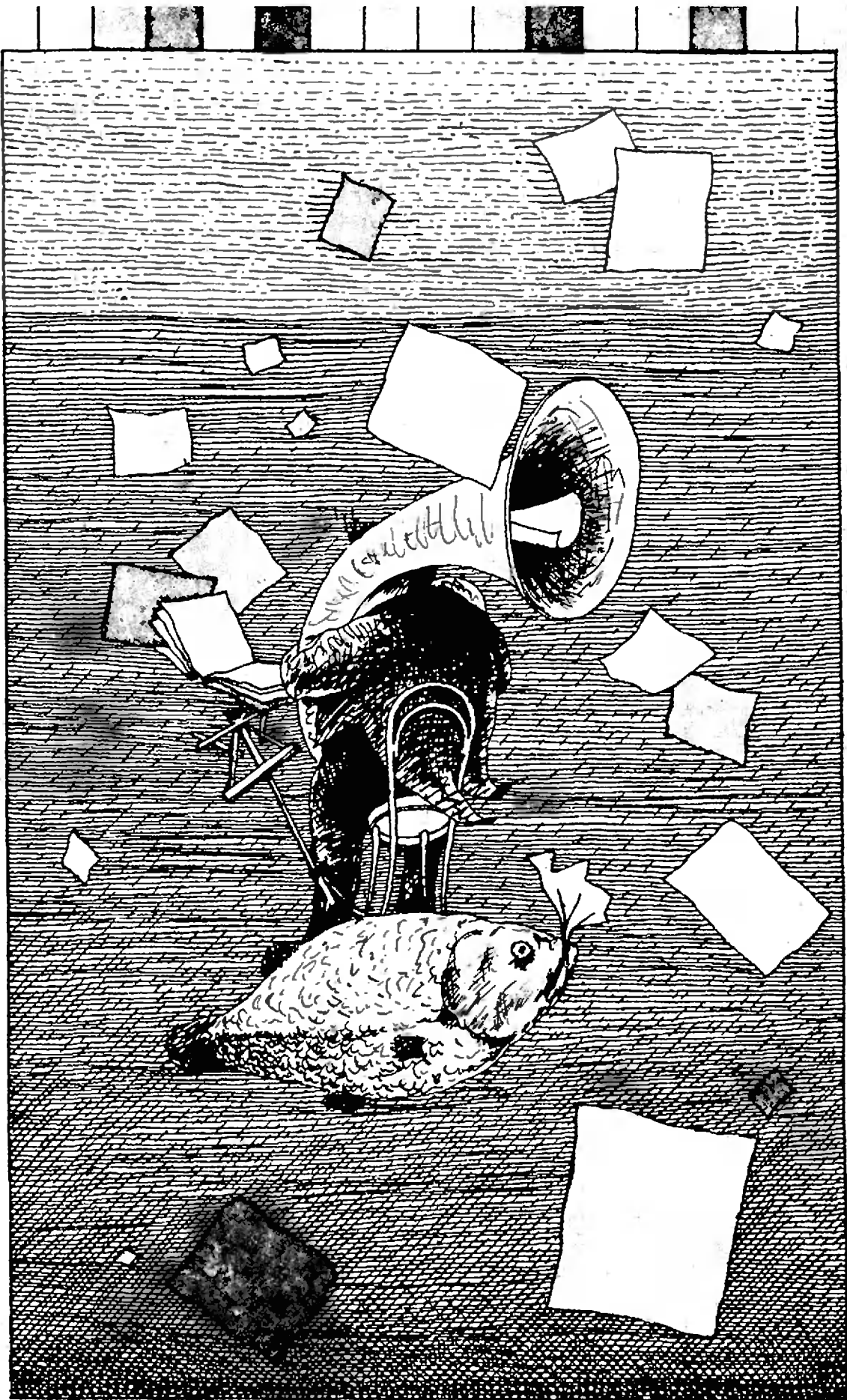
Рис. 14.

нантная кривая, как легко проверить, содержит, кроме параболы безопасности, линию $x = 0$ (ось ординат). Часть этой оси, расположенную ниже точки $y = v_0^2/2g$, можно, в каком-то смысле, считать «касательной» к траектории, получающейся при вертикальном выстреле вверх, но верхняя часть оси ординат (выше этой точки) расположена вне зоны обстрела и никак не связана с траекториями снарядов.

Вообще, дискриминантная кривая (если не считать ее «посторонние куски») отделяет друг от друга области, через которые проходит разное число линий семейства. Кроме огибающей и «посторонних кусков» дискриминантная кривая может содержать *особые точки* линий семейства (например, точки их самопересечения). На рисунке 14 показано семейство линий

$$(x - \alpha)^3 + 3(x - \alpha)y^2 - 3((x - \alpha)^2 - y^2) = 0.$$

Эти линии (называемые *декартовыми листами*) получаются друг из друга параллельными переносами вдоль оси абсцисс. Каждая линия имеет особую точку (точку самопересечения). Дискриминантная кривая в данном случае состоит из трех параллельных прямых: прямой $y = 0$ (множества точек самопересечения всех наших линий) и прямых $y = -k$ и $y = k$, где $k = \sqrt{2\sqrt{3} - 3}$ (огибающих). Через каждую точку вне полосы $-k \leq y \leq k$ проходит одна линия семейства, через каждую точку дискриминантной кривой — две, а через каждую из остальных точек — три.



АКУСТИКА В ОКЕАНЕ

Академик Л. М. БРЕХОВСКИХ.

кандидат физико-математических наук В. М. КУРТЕПОВ

Источник пищевых ресурсов, кладовая полезных ископаемых, «кухня» погоды, главная дорога Земли... Таими словами можно в общем охарактеризовать роль Мирового океана в нашей жизни. И с каждым годом все яснее становится, как велика эта роль, как огромно влияние Океана на все сферы деятельности человека, как важны исследовательская работа в Океане и разработка технических средств освоения его ресурсов.

Человек остро заинтересован в том, чтобы как можно больше знать о состоянии Океана, о движении его вод, о строении океанического дна. Это нужно для надводной и подводной навигации, для определения областей с наибольшей биологической продуктивностью, для учета влияния Океана на погоду и климат нашей планеты и для многих других целей.

Многочисленные исследовательские корабли разных стран находятся все время в Океане и в прилегающих к континентам морях. Они регистрируют состояние водных масс на разных глубинах, состояние атмосферы над Океаном, изучают характеристики дна. Результаты исследований стекаются в Мировые центры данных, главные из которых расположены в Москве и Вашингтоне. Эта информация очень ценна. Однако по своему объему она слишком мала, чтобы сколь-нибудь полно описать текущее состояние всего Мирового океана и прилегающих к нему морей. Для этой цели поток информации должен быть увеличен в тысячи раз. Здесь на помощь приходят средства исследования Океана из космоса. Приборы, установленные на искусственных спутниках Земли и на космических станциях, быстро и сразу с большой площади «собирают» данные о многих характеристиках Океана. Измерения собственного излучения Океана в инфракрасном или сантиметровом диапазоне позволяют регистрировать температуру его поверхности. По рассеянию электромагнитных волн сантиметрового диапазона на поверхности Океана можно определить характери-

стики поверхностных волн, скорости поверхностного течения и приповерхностного ветра. По времени пробега электромагнитного импульса от космической станции до поверхности Океана и обратно можно определить перепады уровня Океана на больших расстояниях. Именно так впервые была обнаружена «ложбина» на поверхности Океана глубиной около 23 метров над Пуэрториканской впадиной на дне океана.

Однако все эти данные, получаемые из космоса, относятся к поверхности Океана. И понятно почему — электромагнитные волны не могут сколь-нибудь значительно проникать в глубь морской воды. В толще вод свет затухает на расстоянии нескольких десятков метров; даже для мощнейшего луча лазера предел — несколько сотен метров.

Инструмент для «просвечивания» глубин Океана дает акустика. Только звуковые волны могут распространяться в воде на значительное расстояние. Так, звук сравнительно небольшого исследовательского взрыва в морских экспериментах ученые регистрировали на расстоянии 22 000 километров.

Здесь нам надо обратиться к открытию сорокалетней давности. В 1946 году советские ученые обнаружили в Японском море очень интересное явление. Звуки взрывов (подрывались противолодочные бомбы на глубине 100 метров) распространялись без заметного ослабления на очень большие расстояния — многие сотни километров. Детальная обработка и анализ экспериментальных материалов показали, что это происходит из-за своеобразной зависимости скорости звука в Океане от глубины. Скорость звука в морской воде, вообще говоря, меняется с изменением температуры, солёности и гидростатического давления. Во время работ в Японском море солёность изменялась с глубиной незначительно, и ее влияние не сказывалось. При удалении от поверхности до глубины примерно 300 метров скорость звука

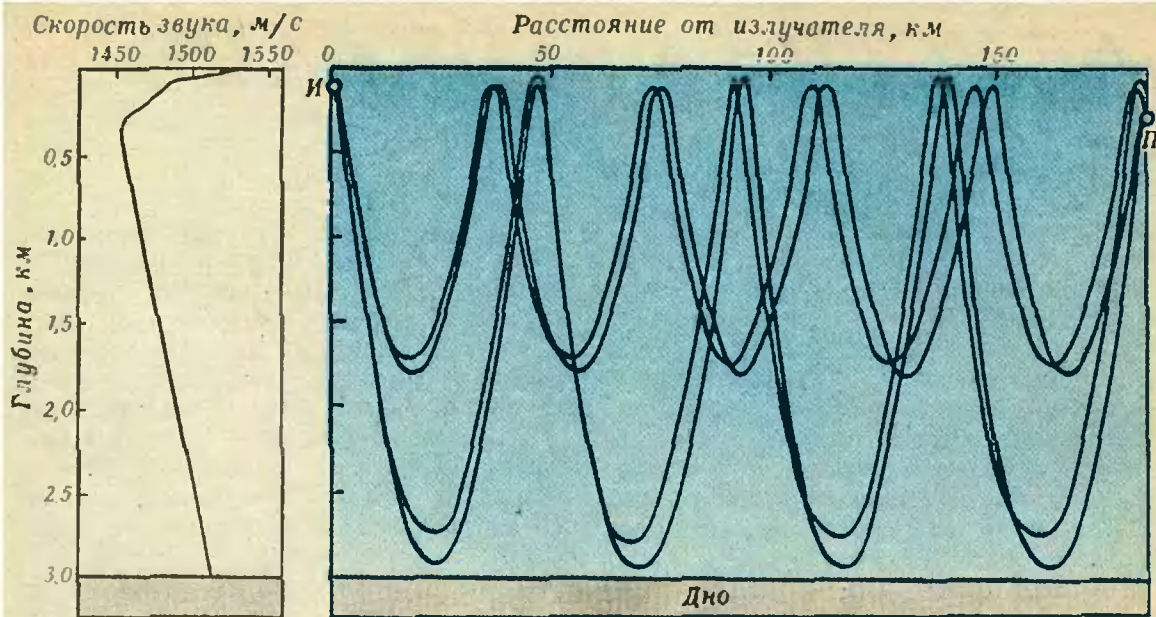


Рис. 1.

Рис. 2.

уменьшалась из-за падения температуры. При дальнейшем углублении температура изменялась мало и составляла 0,3—0,5 °С. Однако по мере увеличения глубины (максимальная глубина в Японском море 3700 м) существенно росло гидростатическое давление. Это приводило к возрастанию скорости звука. В результате формировалась своеобразная зависимость скорости звука от глубины. Пример такой зависимости (профиль скорости звука) приведен на рисунке 1. Минимум скорости звука расположен на глубине 300 м. Выше и ниже этого уровня скорость возрастает. К чему приводит такой профиль скорости звука?

На рисунке 2 изображены звуковые лучи, выходящие из излучателя (И), помещенного на глубине 100 м, и попадающие в приемник (П), который находится на глубине 300 м на расстоянии 184 км от излучателя. Вследствие «преломления» лучи искривляются, и снова и снова они возвращаются к горизонтальной оси, соответствующей минимуму скорости звука. При этом целое семейство лучей (некоторые из них и показаны на рисунке 2) не достигает дна, где звуковые сигналы могли бы поглотиться, и не выходит на поверхность, на неровностях которой они могли бы рассеяться. В результате звук приходит в приемник по чисто водным лучам, или, как говорят, по подводному звуковому каналу —

ПЗК, — почти без затухания. Это позволяет регистрировать звуковые сигналы за многие тысячи километров от их источника.*)

Наличием ПЗК и объясняется явление «сверхдальнего» распространения звука, наблюдавшееся в 1946 году в Японском море. Оказывается, ПЗК имеется в любом море и любом океане при условии достаточной их глубины.

Излученный звуковой сигнал, распространяясь по различным лучам, приходит в точку приема в различные моменты времени. Любые, даже малые изменения профиля скорости звука приводят к смещениям момента прихода звукового сигнала по отдельному лучу. Величины этих смещений, или флуктуаций, — свои для каждого из лучей. Вся последовательность принятых сигналов полностью определяется свойствами среды и является чрезвычайно чувствительным индикатором этих свойств.

В действительности Океан можно считать строго горизонтально-слоистым только в пределах нескольких десятков километров, да и то не всегда. Под воздействием различных процессов, протекающих в Океане, скорость звука изменяется не только по глубине, но и по горизонтали. И особен-

*) Об образовании подводных звуковых каналов, об особенностях распространения звука в ПЗК подробно рассказано в «Кванте» № 2 за 1985 год в статье А. А. Варамова и Л. И. Мальяровского «Переговорная трубка длиной в экватор?».

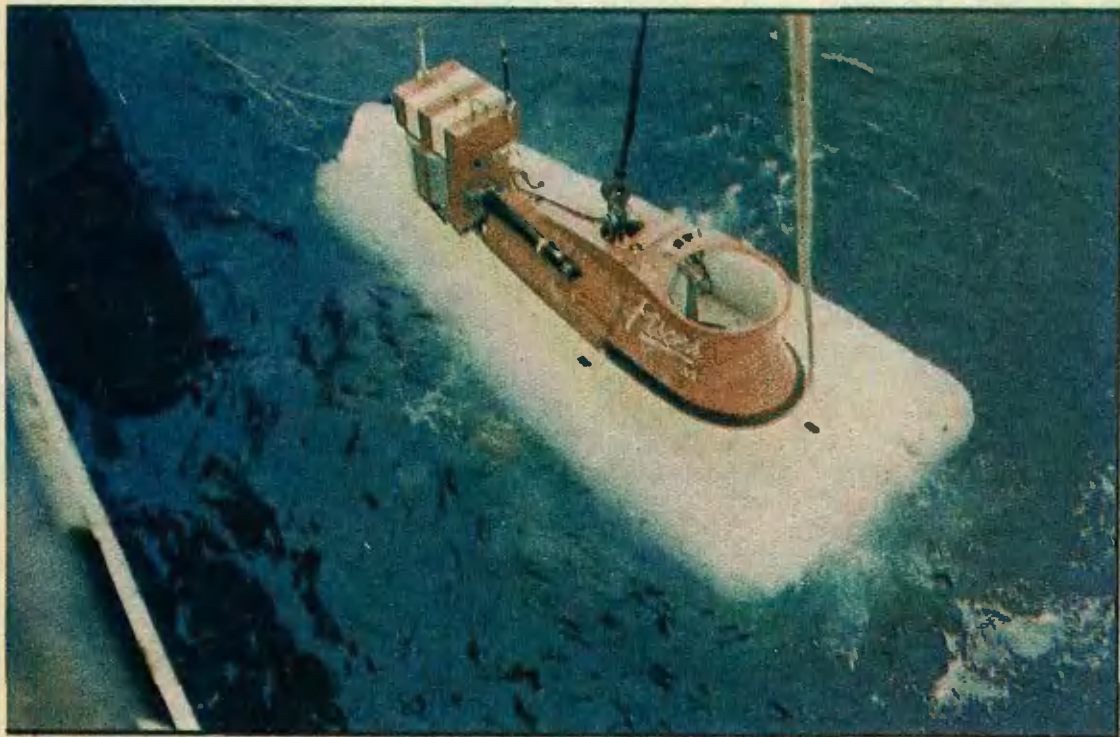
но велика в этом роль океанических вихрей, открытых советскими учеными. Это открытие было основным результатом проводившегося в 1970 году полугодового эксперимента, названного «Полигон». Изучая мощное пассатное течение в Атлантике, считавшееся исключительно постоянным, ученые обнаружили, что в зоне течения существуют гигантские водяные вихри размерами в сотни километров, аналогичные атмосферным циклонам и антициклонам (дальнейшие исследования показали, что подобные вихревые движения охватывают практически весь Океан). Центр вихря перемещается со скоростью до 300 м/ч, но частички воды, участвуя во вращательном движении вихря, движутся раз в 10 быстрее.

Прохождение интенсивного вихря приводит иногда к таким изменениям среды, которые могут полностью нарушить акустическую связь и, напротив, могут, подобно миражам в пустыне, сделать ранее неслышимое — слышимым.

Несколько лет назад возникла идея воспользоваться высокой чувствительностью звуковых сигналов к изменениям водной среды для организации длительных, порядка года, наблюдений за крупномасштабной изменчивостью Океана на акватории

площадью до 10^6 км². Для этого нужно разместить по периметру акватории на разных глубинах систему заякоренных акустических излучателей и приемников и измерить флуктуации времен прихода сигналов по всевозможным «чисто водным» лучам. Эти сигналы, как мы уже говорили, несут информацию обо всех неоднородностях, встретившихся на пути. Таким образом можно осуществить «просвечивание» всей толщи Океана, сделать как бы «послойный снимок» акватории. Никакие флотилии научных судов не в состоянии практически мгновенно произвести измерения в столь большом объеме. Впрочем, за такую оперативность приходится расплачиваться сложностью обработки экспериментальных данных. По временной последовательности принятых сигналов нужно восстанавливать поле скорости звука в различных местах акватории; анализ этих результатов дает информацию о вихрях. Описанный метод и называют акустической томографией Океана (от греческого *τομος* — слой, ломать).

Принципиальная схема восстановления поля скорости звука такова. Исследуемый район условно разбивается на N объемных ячеек, размеры которых — десятки километров по



Обитаемый аппарат «Пайсис» — незаменимый помощник в изучении океанических глубин.



Спуск антенной решетки в эксперименте по акустической визуализации дна океана.

горизонталь и несколько сотен метров по вертикали — малы по сравнению с пространственными масштабами вихрей. Скорость звука внутри n -ой ячейки в момент времени t на глубине z в точке с горизонтальными координатами x, y может быть записана в виде

$$c_n(x, y, z, t) = c_0(z) + \Delta c_n(x, y, z, t),$$

$$n = 1, 2, \dots, N.$$

Здесь $c_0(z)$ — известное значение скорости звука в отсутствие вихрей, а Δc_n — возмущение скорости звука в n -ой ячейке, вызванное вихрями. Его-то, Δc_n , и нужно определить.

Профилю $c_0(z)$ соответствует совокупность из M чисто водных лучей, соединяющих в отсутствие вихрей все источники со всеми приемниками. Назовем эти лучи «опорными», в отличие от «истинных» лучей в реальной среде с вихрями. Траектории опорных лучей, а также времена t_{0m} ($m=1, 2, \dots, M$) распространения по ним звуковых сигналов рассчитываются на электронных вычислительных машинах. При абсолютных значениях $|\Delta c_n|$ много меньших c_0 , что обычно и бывает, истинные лучи бу-

дут мало отличаться от опорных. Если обозначить через t_m время распространения сигнала по m -му истинному лучу, то для флуктуаций времени прихода $\Delta t_m = t_m - t_{0m}$ получится приближенное равенство

$$\Delta t_m = \sum_{n=1}^N E_{mn} \Delta c_n.$$

Перебирая всевозможные лучи, мы получим систему из M уравнений относительно Δc_n ($n=1, 2, \dots, N$). Величины коэффициентов E_{mn} вычисляются, если известна траектория m -го опорного луча и геометрическая форма n -ой ячейки. В ячейках, не «затронутых» m -ым лучом, $E_{mn}=0$. Измерив флуктуации времени прихода звуковых сигналов Δt_m и решая описанную выше систему линейных уравнений, получим значения Δc_n в каждой из ячеек. Именно так и делается на практике, хотя попутно приходится преодолевать немало технических и математических трудностей.

Если распределение скорости звука $c_n(x, y, z, t)$ удалось восстановить, то, пользуясь известными в физике морской воды соотношениями, можно приблизительно восстановить температуру, соленость и плотность воды. Знание температуры на большой акватории позволяет определить тепло-содержание Океана, что важно для прогноза погоды. Но и этим не ограничивается информация, получаемая акустической томографией. По разности времен распространения сигналов туда и обратно между двумя коррелирующими точками можно оценить среднюю вдоль луча проекцию скорости океанских течений на направление звуковой трассы. С этим связывают надежду на измерение крупномасштабной циркуляции Океана, что недоступно традиционным методам. Существуют проекты охвата томографической сетью огромных акваторий Мирового океана, что позволит по-новому подойти к проблемам взаимодействия Океан — атмосфера и формирования климата Земли.

Другой областью применения акустической томографии является исследование океанского дна. Это не просто, если учесть, что исследователь обычно отделен от предмета изучения столбом воды высотой в несколько километров. Имеющиеся в настоящее время способы сейсмопрофи-

лирования дна Океана в сочетании с глубинным бурением громоздки и очень дороги. Между тем существуют и другие подходы.

В арсенал научной гидроакустической аппаратуры все более уверенно входят так называемые акустические автономные донные станции (АДС). Такая станция, снабженная приемниками звука (гидрофонами), специализированными ЭВМ и магнитофонами, может погружаться на дно Океана и там работать. Если научно-исследовательское судно, установив АДС, будет удаляться от нее, то станция зафиксирует шум судовых двигателей. В соответствии с законами распространения звука в Океане и в толще осадочных пород, сигнал, принимаемый АДС, приходит по водному лучу и донному лучу, преломляющемуся в дне Океана (рисунок 3). Кроме того, наблюдается сравнительно слабый фон из сигналов, рассеянных поверхностью и неоднородностями дна Океана, а также собственные шумы Океана. При движении судна «траектории» водного и донного лучей плавно изменяются. При этом

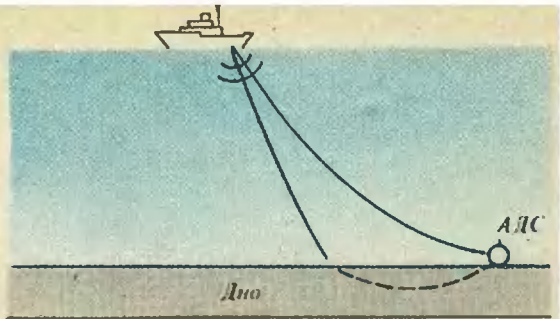


Рис. 3.


меняется и относительная задержка времен прихода шумового сигнала по этим лучам. Разбив условно осадочные породы Океана, граничащие с водой, на слои с пока неизвестными значениями скорости звука, можно для этих скоростей составить такую же систему уравнений, как это было сделано ранее в задаче томографии океанской толщи. При этом в качестве Δt_m будут выступать измеренные станцией задержки приходов шумового сигнала для различных дистанций между судном и станцией. Решая систему уравнений, мы восстановим профиль скорости звука в осадочных слоях. По окончании измерений донная станция вызывается на поверхность, и эксперимент может быть повторен в любом другом месте.

Акустические методы широко применяются и для исследования мелко-масштабных неоднородностей и процессов в Океане. Так, искажения звукового сигнала, рассеянного дном, несут информацию о неровностях границы вода — грунт и о различных неоднородностях в осадочных слоях. В будущем на этом пути предполагается осуществить акустическую визуализацию дна.

Для проведения таких исследований и анализа результатов ведутся теоретические расчеты, разрабатывается специальная экспериментальная техника и методы обработки данных, ориентированные на использование самых современных вычислительных средств. Этими и многими другими проблемами занимаются студенты и выпускники кафедры физики гидрокосмоса МФТИ, в том числе — и в морских экспедициях на исследовательских судах.



Одна из представительниц семейства автономных донных станций. Перед погружением.



МК: ПРОБЛЕМЫ ОБЩЕНИЯ (Путешествие по микрокомпьютеру)

Кандидат технических наук Д. Г. КРУТОГИН

В предыдущем номере мы отправились в прогулку по городу МК, рассмотрели панораму города, представили жителей города, временных и постоянных. Сейчас самое время посмотреть на план города, чтобы оценить его структуру. На схематиче-

ском плане (рисунок 1) вы видите пять крупных районов, связанных друг с другом. Мы пройдем по ним в следующем порядке: районы устройств ввода (УВв) и вывода (УВы), район оперативной памяти (ОЗУ), постоянные запоминающие устройства

(ПЗУ) и, наконец, район микропроцессора (МП). На фотографии внизу — реальный кристалл микрокомпьютера, увеличенный в 10 раз. Так он выглядит незадолго до окончания процесса изготовления схемы и помещения в корпус. На нем не так просто указать границы районов, тем более, что свободного места на кристалле почти не видно. Поэтому нам удобнее двигаться по плану. А теперь в путь...

Площадь тридцати вокзалов

На плане (рисунок 1) внизу расположен центр приема туристов, или система устройств ввода (УВв) (напомним, что туристы в МК — машинные слова, объединенные в программы — делегации). Сюда, в район УВв, прибывают делегации из разных стран, к тому же самым разным транспортом. Например, с клавиатуры дисплея, с магнитофонов внешней памяти (ВЗУ)*, с экрана дисплея или от внешних датчиков. Поэтому район УВв представляет совокупность нескольких вокзалов или портов**. Но УВв не только вокзал, но и образцовое туристское бюро нашего города, а также и таможня, отсекающая неправильные или недопустимые слова программы, словосочетания или команды. Устройства ввода встречают туристские делегации, проверяют туристские документы, снабжают их переводчиками и сопровождающими лицами (адресами). Наконец, те же устройства занимаются и расселением туристов в городе на время пребывания.

Итак: первая задача ввода, еще до анализа и перевода, — разгрузить транспорт, доставивший в город программы, то есть линии ввода информации. Для этого нужно записать полученные сигналы (пока просто записать, без всякой обработки) на том языке, на котором они посланы. Первоначальную запись слов исходной программы выполняют входные порты. Они, собственно, и представ-

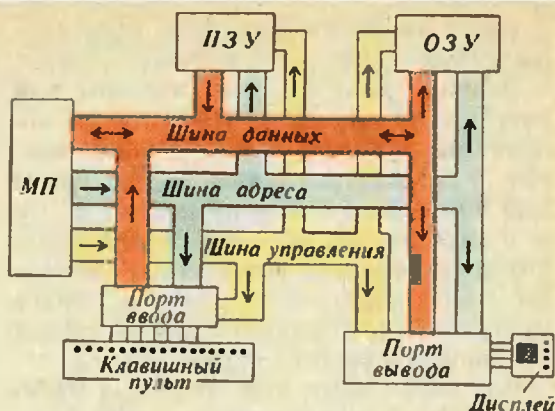


Рис. 1.

ляют собой небольшие блоки оперативной памяти длиной в одно машинное слово, то есть регистры. Каждый регистр снабжен блоком логических элементов*) — буфером, который обеспечивает подключение пустого регистра к внешним линиям информации, а заполненного регистра — к микропроцессору. Микропроцессор время от времени опрашивает входные порты и перегружает содержащиеся в них слова в ОЗУ, после чего порты готовы записать новое слово.

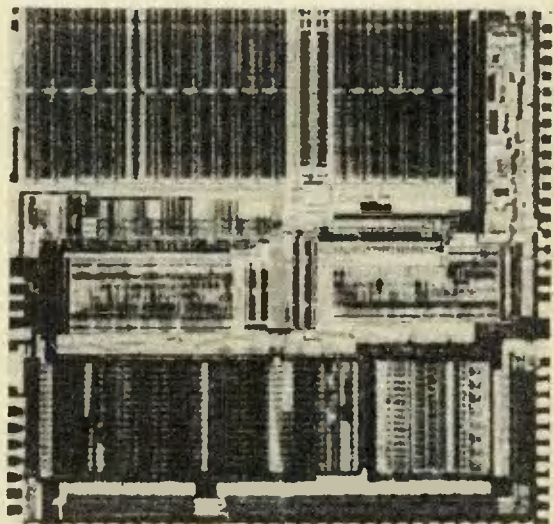
Кто командует парадом?

Надо заметить, что УВв активно участвуют во всех этих мероприятиях, но главным действующим лицом является микропроцессор. Под управлением программы ввода (хранящейся

*) Устройство регистров рассматривалось в рубрике ПЭВТ в «Кванте» № 4 за 1986 год; устройство логических элементов — в «Кванте» № 2 за 1986 год.

*) Устройство систем ВЗУ рассматривалось в статье «Магнитная память ЭВМ» в «Кванте» № 11 за 1984 год.

***) Здесь слово «порт» не только литературный образ, но и технический термин. Так называют часть микросхемы в районах УВв или УВн, обеспечивающую связь МК с внешними устройствами.



в ПЗУ) он сотрудничает с УВв, осуществляя прием туристских групп.

Вообще, давайте отметим, что при рассмотрении работы ЭВМ всегда полезно различать аппаратное обеспечение (скажем, реальные порты ввода или вывода, ячейки памяти и т. п.) и программное, то есть те действия, которые совершают отдельные элементы МК, подчиняясь определенным программам, управляющим машиной на разных стадиях ее работы.

Вот перед вами выключенная ЭВМ. Сейчас вы нажмете кнопку «Вкл», ... что? Какие действия должна предпринять машина, чтобы подготовиться к работе, к вводу программы пользователя? Кто управляет ею до тех пор, пока вы не ввели свою программу? Ответ: собственная, записанная в ПЗУ программа, называемая «монитор». Ей отдается приоритет сразу после «пробуждения» машины. Оживший, но незагруженный МП как бы шлет во все концы вопрос: «что делать? что делать?» И первой отвечает программа-монитор: «приготовься к вводу, очисти ОЗУ, вызови программу ввода, уточни, откуда (с какого порта) последует ввод...» Потом монитор уступит командование программе ввода, а после завершения ввода монитор прикажет МП начинать исполнение программы пользователя. Вот какая это важная программа — монитор! А кроме монитора у МК есть еще несколько служебных программ.

Мы снова говорим на разных языках

Следующая задача, выполняемая при вводе, — перевод текста программы пользователя на машинный язык. Вот тут мы вновь возвращаемся к разговору о переводчиках. Переводчики живут тут же в городе, в районе ПЗУ. Это специальные служебные программы, называемые трансляторами (to translate (англ.) — переводить). Переводчики есть разные: одни больше похожи на переводчиков-синхронистов, другие — на литературных переводчиков.

Синхронисты (или трансляторы-интерпретаторы) переводят одну очередную команду и направляют ее непосредственно на исполнение. В памяти переводчика-синхрониста текст пере-

вода не сохраняется, поэтому при повторной работе с той же программой и той же командой транслятор-интерпретатор снова проделывает ту же самую работу. Но иногда он вдруг отказывается переводить; это значит, что в исходной программе встретилось неточное, неверное выражение. Перевести ошибку интерпретатор не может, ее нет в его «словаре». Поэтому на устройства вывода (УВв) поступает сообщение об ошибке, даже о характере ошибки.

Литературные переводчики (или трансляторы-компиляторы) работают более солидно. Команду за командой они переписывают исходную программу на язык микрокомпьютера и заносят в его оперативную память. В конце этой работы в ОЗУ хранится полный аналог исходной программы, но уже на машинном языке. После окончания работы транслятора программа эта готова к исполнению, в том числе к многократному повторению.

Какой же транслятор нужнее и лучше? Нужны оба. Для тесного общения с машиной, для работы в режиме диалога удобнее интерпретатор, он позволяет поправить, изменить любую команду в любом месте программы. Для МК интерпретатор удобнее и потому, что требует меньшего объема оперативной памяти (для записи) и постоянной памяти (для хранения «словаря»). Зато для длительных, многократных расчетов по большой и сложной программе удобнее компилятор, так как он работает намного быстрее.

Без тесноты и без обиды

Очередная задача приемного района — расселение программ. Для этого служит гостиничный комплекс, называемый ОЗУ — оперативное запоминающее устройство. Мы побываем там несколько позже, а сейчас отметим, что слова-команды и слова-операнды нужно расселить в разных кварталах ОЗУ-района. Как уже говорилось раньше, с «точки зрения» машины они неразличимы, и если при выполнении программы они перепутаются, то исполнение программы нарушится. Чтобы команду или операнд в нужный момент можно было легко найти, устройства ввода снабжают все расселяемые слова адресами, а адреса

необходимо запомнить, занести в своего рода «адресную» книгу. После этого машина работает уже не со словами как таковыми, а с адресами. Например: переслать содержимое ячейки № 95 ОЗУ в МП (допустим, ячейки с номерами от 000 до 199 мы отвели под команды). Еще пример: сравнить содержимое ячейки № 286 с нулем и большее число занести в ячейку № 286.

Ну и наконец, туристские бюро приемного района согласовывают порядок пребывания туристов в городе и заказывают соответствующие услуги. Согласитесь, что для расчета двух коротких уравнений, записанных пятью символами, — например,

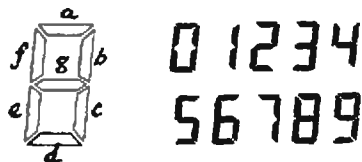
$$\begin{aligned}c &= a + b, \\ c &= \text{tg } a^b\end{aligned}$$

— потребуется совсем разная подготовительная работа. В масштабах городской жизни первая задача проста как покупка газеты, вторая больше похожа на организацию фестиваля народных танцев. Тут нужно отыскать (где? в ПЗУ) программу вычисления степенных функций, а затем уж тангенса произвольного аргумента. Но если туристы хотят побывать на фестивале, то он должен быть организован, таковы условия работы нашего города — туристского центра.

Устройства вывода, расположенные на плане рядом с устройствами ввода, выполняют во многом схожие функции, но, конечно, в обратном порядке. Они преобразуют машинные слова — результаты расчетов — в удобную для потребителя форму (в виде таблиц, графиков, текста, звуковой сигнализации или даже речи) и подают управляющие сигналы на соответствующее выходное устройство: дисплей, печатающее устройство, звуковые генераторы, моделирующие речь.

Даже если выходное устройство представляет собой простой семисегментный цифрознаковый индикатор (рисунок 2), то для управления им на выходе МК должна стоять логическая схема, содержащая около сотни транзисторов. А на табло простого калькулятора обычно не менее 5—8 таких индикаторов, и даже на электронных часах не меньше четырех.

Итак, мы познакомились с задачами двух районов города МК, но по ходу



десятичная цифра	двоичное число	a	b	c	d	e	f	g
0	0000	1	1	1	1	1	1	0
1	0001	0	1	1	0	0	0	0
2	0010	1	1	0	1	1	0	1
3	0011	1	1	1	1	0	0	1
4	0100	0	1	1	0	0	1	1
5	0101	1	0	1	1	0	1	1
6	0110	1	0	1	1	1	1	1
7	0111	1	1	1	0	0	0	0
8	1000	1	1	1	1	1	1	1
9	1001	1	1	1	1	0	1	1

Рис. 2. Таблица включения сегментов, реализуемая логической схемой формирователя, расположенной между портом вывода и цифровым индикатором.

дела упомянули все пять. Мы увидели, что приемный район и район устройств вывода имеют свои определенные функции, но работают они не изолированно, а при активном участии других районов. ПЗУ хранит текстовый словарь и вспомогательные программы, ОЗУ размещает команды и данные в последовательности, необходимой для обработки, наконец, все логические процедуры, связанные с вводом и выводом, выполняет микропроцессор.

Как видите, продвигаясь по городу, мы знакомимся не только с его архитектурой, но и, в некоторой степени, с условиями жизни и работы его обитателей, с правилами поведения, языком и прочими этнографическими деталями.



Победители конкурса «Задачник «Кванта»»

Ежегодно наш журнал проводит конкурс среди школьников по решению задач из Задачника «Кванта». Ниже публикуются списки победителей конкурса «Задачник «Кванта» 1986 года. Награждаются Дипломом и значком журнала «Квант» и получают право участвовать сразу в четвертом (республиканском) туре Всесоюзной олимпиады 1987 года:

По математике

Н. АЗАМОВ — с. Балыкчи Андижанской обл., с. ш. № 14, 10 кл.
 В. АКОПЯН — Ереван, ФМШ при ЕРГУ, 9 кл.
 А. БАРАБАНОВ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
 Д. БЕРЗИН — Калуга, с. ш. № 6, 10 кл.
 Р. ВАЛИЕВ — Фрунзе, с. ш. № 61, 10 кл.
 Я. ВАРШАВСКИЙ — Харьков, с. ш. № 27, 9 кл.
 Т. ГАМИДОВ — п. Борадыгах АзССР, с. ш. № 1, 9 кл.
 О. ГЕВОРКОВ — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 10 кл.
 Р. ГЕНДЛЕР — Ташкент, с. ш. № 110, 10 кл.
 А. ГЛУЦКОК — Харьков, с. ш. № 27, 9 кл.
 М. ГОЛЬДШЕЙД — Челябинск, с. ш. № 31, 9 кл.
 Р. ГРИНИВ — Львов, с. ш. № 62, 9 кл.
 С. ЖЕЛЕЗОВСКАЯ — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.
 Т. КАСУМОВ — Баку, с. ш. № 193, 10 кл.
 А. КОРШКОВ — Мозырь, с. ш. № 8, 8 кл.
 О. ЛИМЕШКО — Куйбышев, с. ш. № 16, 10 кл.
 М. ЛИТВИНОВ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
 В. ЛЯНДИН — Белорецк, с. ш. № 14, 10 кл.
 Г. МИНАСЯНЦ — Ереван, ФМШ при ЕРГУ, 10 кл.
 С. МУШИНСКИЙ — Новосибирск, с. ш. № 130, 10 кл.
 А. НАЗАРЯН — Тбилиси, ФМШ № 42, 9 кл.
 Ю. НИКОНОВ — с. Михайловка Джамбулской обл., с. ш. им. Г. Муратбаева, 9 кл.
 А. ПОКРОВСКИЙ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
 И. ПОРТНОЙ — Одесса, с. ш. № 100, 10 кл.
 А. РОЙТЕРШТЕЙН — Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.
 В. СТОЛИН — Вильнюс, с. ш. № 6, XI кл.
 Д. ТАМАРКИН — Горький, с. ш. № 17, 10 кл.
 И. УСТИЛОВСКИЙ — Москва, с. ш. № 91, 10 кл.
 Е. ЧЕРНАЯ — Днепродзержинск, с. ш. № 11, 10 кл.
 Т. ЧУДИНОВСКИХ — Целиноград, с. ш. № 15, 10 кл.
 Е. ЧУРИКОВА — Целиноград, с. ш. № 15, 10 кл.
 Б. ШРАЕР — Ленинград, с. ш. № 30, 10 кл.
 Я. ЭФЕНДИЕВ — Баку, с. ш. № 82, 9 кл.

По физике

Х. АКИМОВ — Шават, обл. ФМШ, 10 кл.
 А. АНТОНОВ — Москва, с. ш. № 47, 10 кл.
 Ф. АСМАНДЬЯРОВА — Целиноград, с. ш. № 15, 10 кл.
 Г. АХМЕДОВ — Сумгаит, с. ш. № 26, 9 кл.
 Д. БЕРАДЗЕ — Тбилиси, с. ш. № 42, 10 кл.
 А. БЕСОЛОВ — Кишинев, с. ш. № 3, 10 кл.
 Д. ВИСИКАЛО — Винница, с. ш. № 33, 10 кл.
 А. БЫЦКО — Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.
 М. ВАГАНОВ — п. Черноголовка Моск. обл., с. ш. № 82, 10 кл.
 П. ВОЛЬФБЕИН — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.
 А. ГАЕК — Днепрпетровск, с. ш. № 23, 10 кл.
 С. ГЕРАСИМОВ — Харьков, с. ш. № 105, 9 кл.
 Г. ГРИДНЕВ — Тбилиси, ФМШ № 42, 10 кл.
 В. ГУРАРИИ — п. Черноголовка Моск. обл., с. ш. № 82, 10 кл.
 Д. ЕВТУШЕНКО — Донецк, с. ш. № 64, 10 кл.
 Д. ЕЖИКОВ — Минск, с. ш. № 32, 10 кл.
 П. ЗАДОРОВЫЙ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
 А. ИЛЬЕНКОВ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
 В. КИРЮХИН — п. Черноголовка Моск. обл., с. ш. № 82, 10 кл.
 С. КОНАРЕВ — Баку, с. ш. № 167, 10 кл.
 Ю. КРАВЧЕНКО — Москва, с. ш. № 820, 9 кл.
 С. КУРДЮКОВ — Москва, с. ш. № 205, 10 кл.
 А. КУСАИНОВ — Алма-Ата, РОФМШИ, 9 кл.
 Д. КУЧУЛОРЯ — Тбилиси, веч. шк. № 5, XI кл.
 А. ЛОВКОВСКИЙ — п. Черноголовка Моск. обл., с. ш. № 82, 10 кл.
 И. ЛУГАЧ — Винница, с. ш. № 17, 10 кл.
 А. МУРАВЬЕВ — Рига, с. ш. № 46, 10 кл.
 У. РАХМАНОВ — Ташкент, РОФМШ при ТашГУ, 9 кл.
 М. СЕРГАЗИН — Алма-Ата, РОФМШИ, 9 кл.
 А. СТАВИЦКИЙ — Баку, с. ш. № 56, 10 кл.
 А. ТКАЧЕНКО — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
 Г. ФИНКЕЛЬШТЕЙН — п. Черноголовка Моск. обл., с. ш. № 82, 10 кл.
 А. ФУРС — д. Дричин Минской обл., Дричинская с. ш., 10 кл.
 О. ЧЕПИКОВ — Могилев, с. ш. № 5, 10 кл.

(Окончание см. на с. 59)

Задачи

М1031—М1035; Ф1043—Ф1047

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 мая 1987 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3 — 87» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1031, М1032» или «Ф1043». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Фамилию и имя просим писать печатными буквами.

М1031. На плоскости даны прямая l и две точки A и B по одну сторону от нее. На прямой l выбраны точка M , сумма расстояний от которой до точек A и B наименьшая, и точка N , для которой расстояния от A и B равны: $AN=BN$. Докажите, что точки A , B , M и N лежат на одной окружности.

Л. Д. Курляндчик

М1032. Выписаны n чисел $2, 3, \dots, n+1$, их всевозможные произведения по два, по три, и так далее вплоть до произведения всех n этих чисел. Докажите, что сумма чисел, обратных всем выписанным, равна $n/2$.

(Например, при $n=3$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{3}{2}$.)

А. А. Анджанс

М1033. Окружность отсекает от квадрата четыре криволинейных треугольника (граница каждого состоит из дуги окружности и двух отрезков). Выкрасим два из них, примыкающих к противоположным углам квадрата, в голубой цвет, два другие — в красный.

Докажите, что

- суммы красных и голубых дуг равны;
- суммы периметров красных и голубых треугольников равны.

В. В. Произволов

М1034. Прямоугольная шоколадка разбита продольными и поперечными углублениями на 50 квадратных долек. Двое играют в такую игру. Начинаящий разламывает шоколадку по некоторому углублению на две прямоугольные части. Затем играющие по очереди ломают одну из получившихся частей по некоторому углублению на две. Тот, кто первым отломит квадратную дольку (без углублений)

- проигрывает,
- выигрывает.

Кто из играющих может обеспечить себе выигрыш — начинающий или его партнер?

С. В. Фокин

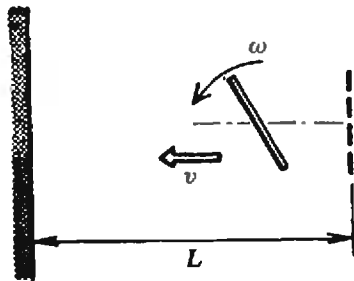
М1035. На отрезке $[0; 1]$ по очереди отмечаются точки $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$. Для каждой точки x_k ($k=1, \dots, n$) измеряется расстояние d_k от нее до ближайшей к ней из поставленных ранее точек. Докажите, что $d_1 + d_2 + \dots + d_n \leq 1 + \frac{\log_2 n}{2}$.

В. С. Гринберг

Ф1043. По гладкой горизонтальной поверхности, вращаясь, скользит со скоростью $v=10$ см/с палочка длиной $l=10$ см. При какой угловой скорости вращения палочка ударится о стену (см. рисунок) плашмя, если на расстоянии $L=50$ см от стены палочка была параллельна стене?

И. Ю. Потеряйко

Ф1044. Парашютист массой $m=80$ кг совершает затяжной прыжок. Перед раскрытием парашюта его скорость $v_0=60$ м/с, после раскрытия парашюта установившаяся скорость $v=6$ м/с. Каково было бы максимальное на-



тяжение строп парашюта, если бы он раскрывался мгновенно? Считать, что сила сопротивления воздуха движущемуся парашюту пропорциональна квадрату скорости. Массу парашюта и строп считать малой по сравнению с массой парашютиста.

Н. Ф. Гинзбург

Ф1045. В Арктике встретились два полярника. Они были одеты в одинаковые с виду комбинезоны, но на самом деле один из комбинезонов был теплее. Когда померили температуру на поверхности комбинезонов, на одном она оказалась выше, чем на другом. Какой из комбинезонов теплее? (Комбинезоны обычные, без подогрева.)

И. И. Мазик

Ф1046. Маленький шарик массой m , имеющий заряд q , подвешен на невесомой нерастяжимой нити. Этот математический маятник помещен в сильное однородное магнитное поле, индукция которого равна B_0 и направлена вертикально. За какое время плоскость качаний маятника повернется на угол 2π ? Явления, связанные с вращением Земли, не учитывать.

Д. А. Купцов

Ф1047. Наблюдатель пускает «солнечный зайчик» при помощи маленького зеркальца, стоя перед большим зеркалом, в котором он видит свое изображение. Что произойдет, если наблюдатель направит «зайчик» на изображение зеркальца в зеркале?

О. В. Фатьянов



Problems

M1031—M1035; P1043—P1047

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than May 15 th 1987, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: «KVANT'S PROBLEMS» and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the

M1031. A straight line l and two points A and B are given in the plane, the points A and B being situated on the same side of l . Let M be the point of l with the least possible sum of distances from A and B , and N be the point of l whose distances from A and B are equal, $AN=BN$. Prove that the points A, B, M, N are on one circle.

L. D. Kurlyandchik

M1032. We have written out the n numbers $2, 3, \dots, n+1$ and all possible products of couples, triples etc. of these numbers up to the product of all n of them. Prove that the sum of all the numbers inverse to the written numbers is equal to $n/2$. (For example, for $n=3$ one has

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 4} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{3}{2}.)$$

A. A. Andjans

M1033. A circle cuts off four curvilinear triangles from a square (the boundary of each of them consists of an arc of the circle and two segments). Color in blue two triangles adjacent to opposite angles of the square, and color in red the two remaining triangles. Prove that a) the sum of the lengths of the blue arcs is equal to that of the red arcs. b) the sum of the perimeters of the blue triangles is equal to that of the red ones.

V. V. Proizvolov

M1034. A rectangular bar of chocolate is divided by longitudinal and transverse hollows into 50 small square portions. Two persons play the following game. The first breaks the bar along some hollow into two rectangular parts. Then the players, taking turns, break one of the resulting parts along a hollow. The player who is first to break off a small portion (without hollows) a) loses, b) wins. Which of the

academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send in to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

players can guarantee winning, the one who begins, or the other one?

S. V. Fomin

M1035. The points $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ are successively chosen in the segment $[0; 1]$. For each point x_k ($k=1, \dots, n$) the distance d_k from it to the nearest of the previously chosen points is measured. Prove that

$$d_1 + d_2 + \dots + d_n \leq 1 + \frac{\log_2 n}{2}.$$

V. S. Grinberg

P1043. A rod of length $l=10$ cm slides, rotating, with velocity $v=10$ cm/s on a smooth horizontal surface. For what angular velocity of rotation will the rod hit the wall along all its length (see figure on p. 19) if it was parallel to the wall at the distance $L=50$ cm from it?

I. Yu. Poteryaiko

P1044. A parachutist of mass $m=80$ kg performs a delayed jump. Just before the parachute opens his velocity is $v_0=60$ m/s, after it opens the established velocity is $v=6$ m/s. What was the maximal tension in the parachute's ropes if it is assumed that it opens instantly? You may assume that air resistance to the moving parachute is proportional to the square of its speed. The mass of the parachute and its ropes may be considered negligible.

I. F. Ginzburg

P1045. Two polar researchers met in the Arctic. They were both wearing special suits which looked the same, although one was actually warmer than the other. When the temperature on the outer surface of the suits was measured, it turned out that it was higher on one of the suits. Which one? (The suits are ordinary: not heated.)

I. I. Mazin

P1046. A small ball bearing of mass m and electric charge q hangs on a weightless inelastic string. This small pendulum is placed in a strong uniform magnetic field of induction B_0 directed vertically. How long will it take for the pendulum's plane of oscillation to rotate through an angle of 2π ? Effects related to the Earth's rotation are to be ignored.

D. A. Kuptzov

P1047. An observer sends reflected flashes by means of a small mirror, standing in front of a big one, in which he sees his own reflection. What will happen if he directs the flash at the reflection of the small mirror in the big one?

O. V. Fatianov

Задачи "Кванта"

Решения задач

M1011—M1014; Ф1023—Ф1027

Приведем два решения задачи.

а) Рассмотрим разность левой и правой части и заменим букву a_3 на x . Полученная функция от x (рис. 1)

$$f_3(x) = a_1^2 - a_2^2 + x^2 - (a_1 - a_2 + x)^2$$

будет линейной (при возведении скобки в квадрат возникает член x^2 и линейные по x члены). Для того чтобы доказать неравенство $f_3(x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq a_2$, достаточно проверить, что $f_3(0) \geq 0$ и $f_3(a_2) \geq 0$. Это сделать легко:

$$\begin{aligned} f_3(0) &= a_1^2 - a_2^2 - (a_1 - a_2)^2 = (a_1 - a_2)2a_1 \geq 0; \\ f_3(a_2) &= a_1^2 - a_2^2 - a_2^2 = 0. \end{aligned} \quad (*)$$

б) Рассуждая аналогично, рассмотрим функцию (рис. 2)

$$f_4(x) = a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - x^2 - (a_1 - a_2 + a_3 - x)^2.$$

Это — квадратный трехчлен от x вида $f_4(x) = -2x^2 + px + q$. Для того чтобы доказать неравенство $f_4(x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq a_3$, достаточно проверить, что $f_4(0) \geq 0$ и $f_4(a_3) \geq 0$.

M1011. Докажите, что для n положительных чисел $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n$ выполнены неравенства:

- а) $a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \geq (a_1 - a_2 + a_3)^2$;
- б) $a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 \geq (a_1 - a_2 + a_3 - a_4)^2$;
- в) $a_1^2 - a_2^2 + \dots - (-1)^n a_n^2 \geq (a_1 - a_2 + \dots - (-1)^n a_n)^2$.

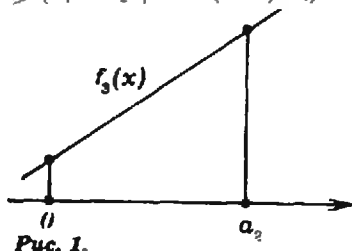


Рис. 1.

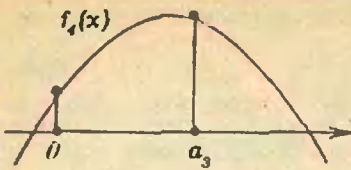


Рис. 2.

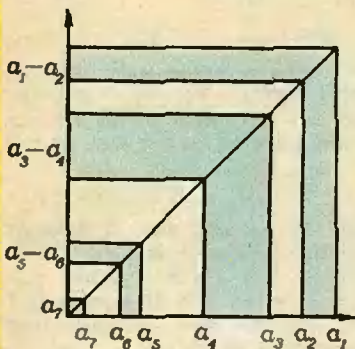


Рис. 3.

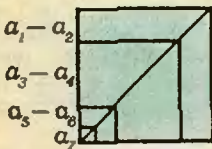


Рис. 4.

Первое из этих неравенств совпадает с неравенством а), а второе — с неравенством (*).

в) Точно так же, рассматривая функцию

$$f_n(x) = a_1^2 - a_2^2 + \dots + (-1)^n a_{n-1}^2 - (-1)^n x^2 - (a_1 - a_2 + \dots + (-1)^n a_{n-1} - (-1)^n x)^2,$$

мы увидим, что при нечетном n она линейна, а при четном является квадратным трехчленом с отрицательным коэффициентом (-2) при x^2 . Поэтому доказательство неравенства $f_n(x) \geq 0$ при $0 \leq x \leq a_{n-1}$ сводится к проверке условий $f_n(0) \geq 0$ и $f_n(a_{n-1}) \geq 0$, а это — в точности утверждение задачи для $n-1$ и $n-2$ первых чисел ряда $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{n-1} \geq a_n$.

Таким образом, общее утверждение вытекает из принципа математической индукции в такой его разновидности: если некоторое утверждение, зависящее от натурального параметра n , справедливо для $n=n_0$ и для $n=n_0+1$ и из его справедливости для значений параметра $n-2$ и $n-1$ вытекает его справедливость для значения параметра n , то оно справедливо при всех n . Мы проверили утверждение задачи для $n=2$, $n=3$ и $n=4$ (это — неравенство (*), пункты а) и б) задачи); и проделали шаг индукции — переход от $n-2$ и $n-1$ к n .

На рисунках 3 и 4 показано другое, очень изящное решение (оно было предложено несколькими участниками олимпиады «Турнир городов», где прошлой весной предлагалась эта задача).

Левая часть доказываемого неравенства $a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 + \dots - a_n^2$ — это сумма площадей голубых трапеций на рисунке 3 (в самом деле, из площади квадрата $a_1 \times a_1$ надо вычесть площадь квадрата $a_2 \times a_2$, добавить площадь квадрата $a_3 \times a_3$, вычесть $a_4 \times a_4$ и т. д.).

Правая часть $(a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots)^2$ — это площадь квадрата, сторона которого равна сумме высот этих трапеций ($a_1 - a_2$, $a_3 - a_4$, ...); его можно разбить на трапеции с такими же высотами, но с меньшими средними линиями (см. рис. 4); поэтому левая часть не меньше правой.

И. Б. Васильев

M1012. Докажите, что
а) на плоскости можно расположить несколько непересекающихся кругов так, чтобы каждый касался ровно 5 других;
б) число 5 в пункте а) нельзя заменить на 6.

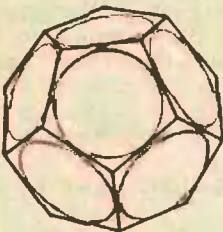


Рис. 1.

а) Искомое расположение кругов показано на 1-й странице обложки этого номера. Но отнюдь не просто доказать строго, что такое расположение действительно существует (т. е. вычислить радиусы кругов или хотя бы доказать, что определяющие их уравнения разрешимы). Самый изящный (и, видимо, самый простой) способ доказательства использует выход в пространство.

Возьмем правильный додекаэдр и впишем в каждую его грань окружность (рис. 1). Мы получим 12 окружностей, каждая из которых касается пяти других, причем все они лежат на одной сфере, а именно, на сфере, касающейся всех ребер додекаэдра. Возьмем на этой сфере любую точку P , не лежащую внутри окружностей, проведем плоскость α , касающуюся сферы в точке Q , диаметрально противоположной P , и спроектируем сферу из центра P на плоскость α (т. е. сопоставим каждой точке $X \neq P$ сферы точку Y пересечения луча PX с плоскостью α ; рис. 2). Такое отображение сферы на плоскость называется *стереографической проекцией*. Ниже мы покажем, что при стереографической проекции окружности переходят в окружности. В нашем случае 12 окружностей на сфере спро-

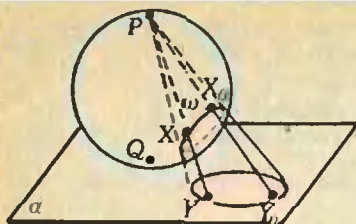


Рис. 2.

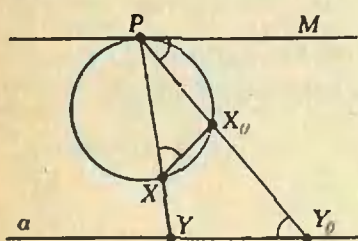


Рис. 3.

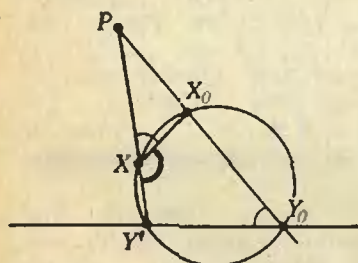


Рис. 4.

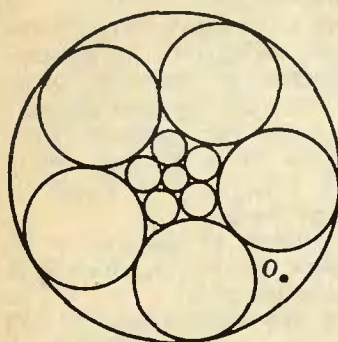


Рис. 5.

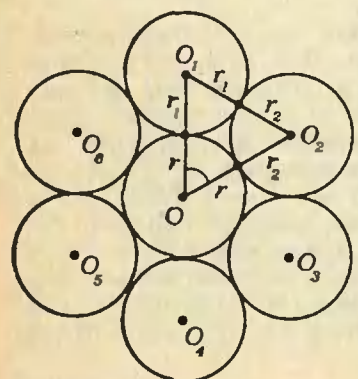


Рис. 6.

ектируются в нужную систему окружностей на плоскости. Если точку P взять на прямой, соединяющей центр додекаэдра с его вершиной, получится конфигурация, изображенная на обложке.

Докажем теперь, что стереографическая проекция любой окружности ω на сфере тоже будет окружностью, если ω не содержит центра проекции P (если ω содержит точку P , то проекцией ω , как легко видеть, будет прямая). Пусть Y_0 и Y — проекции произвольных точек X_0 и X окружности ω . Плоскость PX_0X пересекает сферу по некоторой окружности, а плоскость α — по прямой Y_0Y , которая параллельна касательной MP к этой окружности в точке P (рис. 2, 3). Ясно, что

$$\angle PY_0Y = \angle MPY_0 = \frac{1}{2} \sphericalangle PX_0 = \angle PXX_0.$$

Проведем теперь еще одну, вспомогательную сферу, содержащую окружность ω и точку Y_0 ; пусть прямая PX пересекает ее в точке Y' . Рассматривая сечение этой сферы плоскостью PX_0X (рис. 4), мы убеждаемся, что

$$\angle PY_0Y' = 180^\circ - \angle X_0XY' = \angle PXX_0,$$

т. е. $\angle PY_0Y' = \angle PY_0Y$, следовательно, $Y = Y'$. Таким образом, проекции всех точек окружности ω лежат одновременно в плоскости α и на нашей вспомогательной сфере, т. е. образуют окружность.

Если точку P взять на прямой, соединяющей центр додекаэдра с центром его грани, то стереографическая проекция даст конфигурацию, показанную на рисунке 5. Строгое доказательство существования этой конфигурации легко провести и без выхода в пространство (мы предоставляем это читателю). И хотя сама по себе она нас не устраивает (один ее круг содержит остальные), при инверсии с центром, скажем, в точке O (см. рис. 5) из нее получится то, что нужно. Читатели, не знакомые с преобразованием инверсии и его свойствами, могут обратиться к статье В. М. Уроева «Инверсия» (Квант, 1984, № 5, с. 26); там же рассказано и о стереографической проекции.

б) Допустим, что искомое расположение кругов существует, и не все они равны между собой. Рассмотрим все круги наименьшего радиуса (обозначим его через r) и выберем из них круг, который касается хотя бы одного круга другого радиуса r_1 ($r_1 > r$). Пусть O и O_1 — центры этих кругов, O_2, \dots, O_6 — центры остальных пяти кругов, касающихся круга O (центры занумерованы по часовой стрелке, рис. 6). В треугольнике OO_1O_2 стороны O_1O_2 , O_2O и OO_1 равны $r_1 + r_2$, $r_2 + r$ и $r + r_1$ соответственно, где r_2 — радиус круга O_2 ($r_2 \geq r$), т. е. O_1O_2 — наибольшая сторона, а значит, $\angle O_1OO_2$ — наибольший угол этого треугольника. Следовательно, $\angle O_1OO_2 > 60^\circ$ (неравенство строгое, так как $O_1O_2 > OO_1$). Аналогично доказывается, что углы O_2OO_3 , O_3OO_4 , ..., O_6OO_1 не меньше 60° . Но тогда сумма всех шести углов O_1OO_2, \dots, O_6OO_1 оказывается больше 360° , что, конечно, невозможно.

Итак, все круги должны иметь одинаковый радиус r . В этом случае каждый круг должен быть окружен шестью другими, как круг O на рисунке 6, что возможно лишь для бесконечного числа кругов. (Если O_1 и O_2 — центры двух соседних кругов, то и все точки прямой O_1O_2 , отстоящие от O_1 на расстояния $O_1O_2, 2O_1O_2, 3O_1O_2, \dots$, должны быть центрами кругов нашей конфигурации.)

В. И. Дубровский, Д. В. Фомин

M1013. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты две точки M и N . Три параллельные прямые, проходящие через точки M , B и N , пересекают основание AC в точках K , D и L . Докажите, что площадь трапеции (или параллелограмма) не больше площади одного из треугольников ABD и DNC .

Положим $\angle ADB = \alpha$, $AD = a$, $BD = b$, $CD = c$, $AK : AD = k$, $CL : CD = l$. Тогда $MK : BD = k$, $NL : BD = l$, т. е. $MK = kb$, $NL = lb$, а $KL = KD + DL = (1-k)a + (1-l)c$, и поскольку расстояние между прямыми MK и NL равно $KL \sin \alpha$, площадь четырехугольника $KMNL$ равна

$$\frac{1}{2} (MK + NL) KL \sin \alpha = \frac{1}{2} (kb + lb) ((1-k)a + (1-l)c) \sin \alpha.$$

Пусть для определенности $a \geq c$, тогда последнее выражение не превосходит

$$\frac{1}{2} b (k+l) (2 - (k+l)) a \sin \alpha \leq \frac{1}{2} ab \sin \alpha$$

(так как $x(2-x) \leq 1$ при всех x), т. е. площади треугольника ADB .

В. Н. Дубровский

M1014. Пусть a_1, a_2, \dots, a_n — различные попарно взаимно простые натуральные числа. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных b , что числа $b + a_1, b + a_2, \dots, b + a_n$ также попарно взаимно просты.

Обозначим через P абсолютную величину произведения всех разностей $a_i - a_j$, $1 \leq i < j \leq n$. Тогда при каждом $k = 1, 2, \dots$ числа $kP + a_1, kP + a_2, \dots, kP + a_n$ будут попарно взаимно простыми. Действительно, если d — общий делитель числа $kP + a_i$ и $kP + a_j$, то d делит и их разность $a_i - a_j$, т. е. d делит P , а значит и каждое из чисел a_i и a_j . Но a_i и a_j взаимно просты, следовательно, $d = 1$.

Интересно выяснить, для каких наборов $A = (a_1, \dots, a_n)$ различных натуральных чисел выполняется утверждение задачи, т. е. суммы $a_i + b, \dots, a_n + b$ попарно взаимно просты хотя бы для одного целого b (а значит, и для бесконечного множества чисел b). Если, например, набор A содержит два четных и два нечетных числа, то при «сдвиге» на любое b хотя бы два числа будут четными — такой набор нас не устраивает. Вообще, если среди остатков от деления чисел a_i на некоторое простое q каждый из возможных остатков $0, 1, \dots, q-1$ встречается по крайней мере дважды, то при любом «сдвиге» хотя бы два числа будут делиться на q . Отсюда следует, что набор A должен удовлетворять такому условию:

среди остатков от деления чисел из набора A на каждое простое p хотя бы один остаток r_p , $0 \leq r_p < p$, должен встречаться не более одного раза.

(Для $p > n/2$ это выполняется автоматически, так что проверять его нужно только для $p \leq n/2$.) Оказывается, что это необходимое условие является и достаточным. Доказательство опирается на так называемую «китайскую теорему об остатках», приведенную на полях.

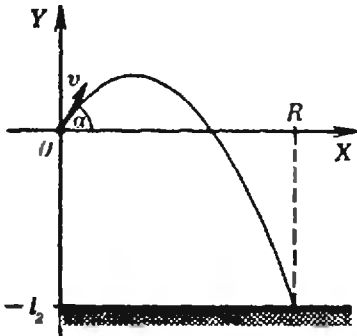
Пусть D — разность между наибольшим и наименьшим числами в наборе A . Для каждого простого $p \leq D$ найдем тот остаток $r_p < p$, который при делении чисел из A и p появляется не более одного раза. Подберем теперь число b , дающее при делении на каждое простое $p \leq D$ дополнительный к r_p остаток r_p^* ($r_p^* = p - r_p$ при $r_p > 0$ и $r_p^* = 0$ при $r_p = 0$). Тогда числа $a_1 + b, \dots, a_n + b$ будут попарно взаимно простыми, поскольку на каждое простое p может делиться не более чем одно из них: при $p \leq D$ это обеспечено выбором b , а при $p > D$ выполняется автоматически, так как все остатки от деления чисел a_1, \dots, a_n на p будут различны.

Н. Б. Васильев,
В. Ф. Лев

Китайская теорема об остатках

Если натуральные числа p_1, p_2, \dots, p_m взаимно просты, то для любого набора натуральных чисел r_1, \dots, r_m , $0 \leq r_i < p_i$ ($i = 1, \dots, m$) найдется число b , дающее при делении на p_i остаток r_i при всех i .

Ф1023. Лампочка висит на расстоянии l_1 от потолка на высоте l_2 от пола. При ее взрыве осколки разлетаются во все стороны с одной и той же по величине скоростью v . Найдите радиус круга на полу, в который попадут осколки. Считать, что удары осколков об потолок абсолютно упругие, а об пол — неупругие; до стен осколки не долетают.



Предположим сначала, что потолок отсутствует, и найдем в этом случае максимальный радиус пятна на полу, в котором лежат осколки.

Введем систему координат с началом в точке нахождения патрона лампочки (см. рисунок). Условия падения на землю через время t осколка, вылетевшего под углом α к горизонту, состоят в следующем:

$$\begin{cases} -l_2 = vt \sin \alpha - \frac{gt^2}{2}, \\ R = vt \cos \alpha. \end{cases} \quad (*)$$

Очевидно, нам необходимо так подобрать угол α , чтобы величина R была максимальной. Преобразуем для этого уравнения (*) к виду

$$\begin{cases} \frac{gt}{2} - \frac{l_2}{t} = v \sin \alpha, \\ \frac{R}{t} = v \cos \alpha. \end{cases} \quad (**)$$

Отсюда для величины R получим неравенство

$$\begin{aligned} R^2 &= (v^2 + gl_2)t^2 - \frac{g^2 t^4}{4} - l_2^2 = \\ &= \left(\frac{v + gl_2}{g}\right)^2 - l_2^2 - \left(\frac{gt}{2} - \frac{v^2 + gl_2}{g}\right)^2 \leq \left(\frac{v^2 + gl_2}{g}\right)^2 - l_2^2. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$R_{\max} = \frac{v}{g} \sqrt{v^2 + 2gl_2}.$$

время полета t^* осколка на такое расстояние

$$t^* = \frac{1}{g} \sqrt{2(gl_2 + v^2)};$$

угол вылета к горизонту найдем из уравнения

$$\cos \alpha^* = \frac{R_{\max}}{vt^*} = \sqrt{\frac{v^2 + 2gl_2}{2(v^2 + gl_2)}}.$$

Высоту h^* этой траектории над уровнем патрона лампочки найдем по формуле

$$h^* = \frac{(v \sin \alpha^*)^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} (1 - \cos^2 \alpha^*) = \frac{v^4}{4g(v^2 + gl_2)}.$$

Вспомним теперь про потолок. Очевидно, если $l_1 \geq h^*$, то

$$R_{\max} = \frac{v}{g} \sqrt{v^2 + 2gl_2}.$$

В случае, когда $l_1 < h^*$, т. е. $l_1 < \frac{v^4}{4g(v^2 + gl_2)}$, мак-

симальный радиус пятна на полу получится от осколков, у которых максимальная высота траектории (над уровнем патрона) равна l_1 (их траектория будет касательной к потолку). Чтобы доказать это, достаточно рассмотреть хотя бы один осколок, отразившийся от потолка в точке A . Уровень патрона после отражения он пересечет под углом вылета. Следовательно, траектория этого осколка будет более крутой по сравнению с «касательной» траекторией, и они никогда не пересекутся. Значит осколок, коснувшийся потолка, пролетит по горизонтали дальше всех остальных, ударившихся о потолок. Осколки, не долетевшие до потолка, при своем движении до земли не могут пере-

Эксперимент "Квант"

сечь «касательной» траектории (докажите это самостоятельно).

Таким образом, если $l_1 > \frac{v^4}{4g\sqrt{v^2+gl_2}}$, то

$$R_{\max} = \frac{v}{g} \sqrt{v^2 + 2gl_2};$$

если $l_1 < \frac{v^4}{4g\sqrt{v^2+gl_2}}$, то

$$R_{\max} = \frac{\sqrt{v^2 - 2gl_1}}{g} \left(\sqrt{2gl_1} + \sqrt{2g(l_1 + l_2)} \right)$$

(последний ответ получается из системы уравнений (*) при условии, что $(v^2 \sin \alpha)/2g = l_1$).

С. С. Крогов

Ф1024. Оцените изменение давления в парной после того как на раскаленные камни плеснули воду из ковша. Предполагается, что вы, хорошо представляя явление, можете сами задать необходимые величины, выбрать достаточно правильно их числовые значения и получить численный ответ.

После испарения воды, которую плеснули из ковша на раскаленные камни, температура в помещении несколько увеличивается (заметим, что она различна наверху у потолка и внизу у пола). Образовавшийся пар распространяется по всему помещению, частично конденсируясь на холодных участках стен, потолка и окон. Меняется влажность, изменяется процесс теплопередачи; потоки пара и воздуха приводят к различным значениям физических параметров в разных местах парной.

Для оценки изменения давления, создаваемого дополнительной порцией пара, будет использовать грубую, но достаточно разумную физическую модель.

Прежде всего, считаем, что двери и окна плотно закрыты (иначе говорить об изменении давления не имело бы смысла: давление внутри и снаружи оставалось бы постоянным). Будем считать, что параметры установились (стали постоянными) и что температура пара по всему помещению одна и та же и равна $T \approx 350$ К. (Изменением температуры в помещении при этой оценке пренебрежем.) Водяной пар будем считать идеальным газом, состояние которого описывается уравнением Менделеева — Клапейрона.

Положив объем парной $V \sim 100$ м³, массу воды в ковше и, соответственно, массу образовавшегося водяного пара $m \sim 1$ кг и учитывая, что молярная масса пара (воды) $\mu = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, а газовая постоянная $R = 8,3$ Дж/(К·моль), из уравнения Менделеева — Клапейрона находим парциальное давление Δp водяного пара, образовавшегося из ковша воды:

$$\Delta p \cdot V = \frac{m}{\mu} RT \Rightarrow \Delta p \sim \frac{mRT}{\mu V} \approx 1,6 \cdot 10^3 \text{ Па} \approx 0,02 \text{ атм.}$$

Считая, что давление в парной обычно $p \sim 1$ атм, приходим к выводу, что изменение давления после подачи пара невелико — всего несколько процентов от нормального давления.

Заметим, что учет изменения давления, обусловленного дополнительным нагревом воздуха в парной, согласно закону Шарля привел бы к соотношению $\Delta p/p \sim \Delta T/T$. Чтобы это дополнительное увеличение давления было сравнимо с приведенной выше оценкой ($\Delta p/p \sim 2\%$), при $T \sim 350$ К прирост температуры должен составлять $\Delta T \sim 10$ К.

Г. В. Меледин

Ф1025. В схеме, приведенной на рисунке 1, сверхпроводящие катушки имеют одинаковые индуктивности L , диод D идеальный, начальный заряд конденсатора емкостью C равен Q_0 . Постройте графики изменения заряда $Q(t)$ конденсатора и токов $I_1(t)$ и $I_2(t)$ через катушки после замыкания ключа.

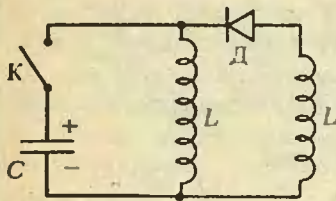


Рис. 1.

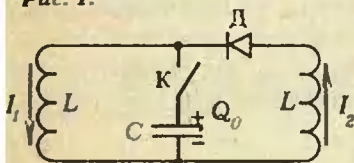


Рис. 2.

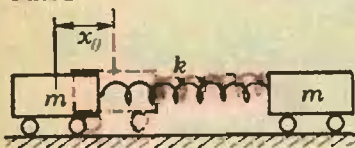


Рис. 3.

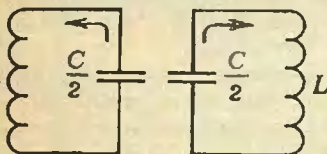


Рис. 4.

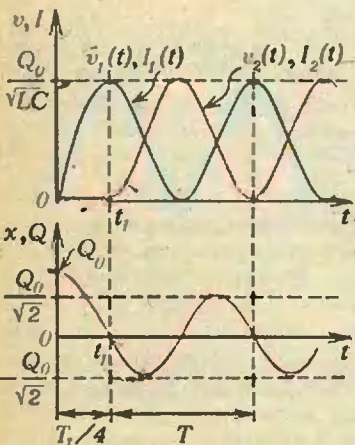


Рис. 5.

Схему данной цепи представим в эквивалентной форме (рис. 2). Будем считать токи в катушках положительными, когда их направления соответствуют обходу внешнего контура против часовой стрелки. Процессы в такой цепи легко проанализировать по аналогии, рассматривая механическую систему, показанную на рисунке 3: одинаковые тележки массой m (аналог катушек) соединены пружиной жесткостью k (аналог конденсатора). Так как ток через правую катушку благодаря диоду D может протекать только в положительном направлении, колеса второй тележки должны быть снабжены устройством, позволяющим ей свободно двигаться только вправо. В этой системе скорости тележек $v_1(t)$ и $v_2(t)$ будут аналогами токов $I_1(t)$ и $I_2(t)$, а деформация пружины $x(t)$ — аналогом заряда конденсатора $Q(t)$.

Пружина сначала растянута на x_0 .

В момент времени $t=0$ левую тележку отпускают без начальной скорости (при замыкании ключа конденсатор начинает разряжаться через левую катушку). До тех пор, пока деформация пружины не обратится в нуль, правая тележка неподвижна ($v_2=0$), ибо пружина тянет ее влево, куда она катиться не может (пока заряд конденсатора не обратится в нуль, ток через правую катушку протекать не может: $I_2=0$). Эта первая фаза движения от $t=0$ до момента t_1 соответствует четверти периода гармонических колебаний тележки массы m на пружине жесткостью k : $t_1=T_1/4=$

$= \frac{2\pi}{4} \sqrt{\frac{m}{k}}$ (для цепи $t_1=T_1/4= \frac{2\pi}{4} \sqrt{LC}$). К моменту t_1 левая тележка разгоняется до скорости v_1 , которую можно найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{kx_0^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} \Rightarrow v_1 = x_0 \sqrt{\frac{k}{m}}$$

(аналогично для цепи $I_1 = \frac{Q_0}{\sqrt{LC}}$). Деформация пружины $x(t)$ (заряд конденсатора $Q(t)$) уменьшается за это время по косинусоидальному закону от начального максимального значения x_0 (Q_0) до нуля.

Затем пружина начинает сжиматься и толкает вторую тележку вправо, т. е., начиная с момента t_1 , колеса правой тележки освобождаются (заряд нижней пластины конденсатора становится положительным, и диод пропускает ток через правую катушку). В дальнейшем центр масс тележек движется вправо со скоростью $v_1/2$, и эта скорость постоянна, так как при $t > t_1$ никакие внешние силы на систему не действуют. На это равномерное движение накладываются колебания тележек относительно центра масс, происходящие в противо-

фазе с частотой $\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ (жесткость «половины» пружины составляет $2k$). Так как при $t=t_1$, когда пружина не деформирована, тележки движутся относительно центра масс навстречу друг другу со скоростью $v_1/2$, то именно такой будет амплитуда колебаний скорости. Амплитуду x_1 колебаний деформации пружины можно найти из закона сохранения энергии, приравняв кинетическую энергию тележек (в системе центра масс) в момент t_1 потенциальной энергии пружины в момент максимальной ее деформации:

$$\frac{2m(v_1/2)^2}{2} = \frac{kx_1^2}{4} = \frac{kx_1^2}{2} \Rightarrow x_1 = \frac{x_0}{\sqrt{2}}$$

В электрической цепи аналогом равномерного движения системы как целого будет постоянный ток $I_1/2$.

Задача "Квант"

Задачи "Квант"

циркулирующий по внешнему контуру. На этот ток накладываются происходящие в противофазе колебания тока в контурах (рис. 4), содержащих по одной катушке и по «половине» конденсатора (по конденсатору емкостью $C/2$), период которых $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{LC}{2}}$. Амплитуда колебаний заряда конденсатора $Q_1 = Q_0/\sqrt{2}$. Графики рассмотренных процессов приведены на рисунке 5.

Е. И. Бутиков

Ф1026. Горизонтальная площадка, на которой лежит брусок, вибрирует по гармоническому закону с частотой $f=10$ Гц в направлении, составляющем угол $\alpha=45^\circ$ с вертикалью (рис. 1). Коэффициент трения бруска о площадку $\mu=0,5$. При какой минимальной амплитуде вибраций брусок «поползет» по площадке?

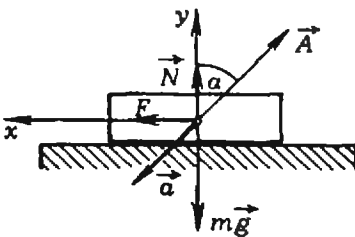


Рис. 1.

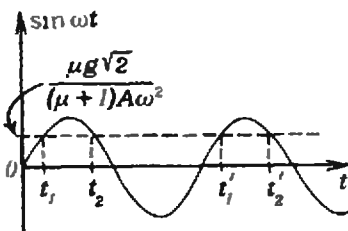


Рис. 2.

Найдем сначала действующие на брусок силы, предполагая, что он движется вместе с площадкой, т. е. по закону $\vec{r}(t) = A \sin 2\pi ft$, где вектор A направлен под углом $\alpha=45^\circ$ к вертикали. По второму закону Ньютона

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a}, \quad (1)$$

где $m\vec{g}$ — сила тяжести, \vec{N} — нормальная сила реакции площадки, \vec{F} — действующая на брусок сила трения покоя, направленная горизонтально (вправо или влево), $\vec{a} = -A\omega^2 \sin \omega t$ ($\omega = 2\pi f$). Запишем (1) в проекциях на горизонтальную x и вертикальную y оси (см. рис. 1):

$$F_x = ma_x = \frac{mA\omega^2}{\sqrt{2}} \sin \omega t, \quad (2)$$

$$N - mg = ma_y = -\frac{mA\omega^2}{\sqrt{2}} \sin \omega t. \quad (3)$$

Учитывая, что сила трения покоя $|F_x| \leq \mu|N|$, из (2) и (3) получаем:

$$\left| \frac{mA\omega^2}{\sqrt{2}} \sin \omega t \right| \leq \left| \mu mg - \frac{\mu mA\omega^2}{\sqrt{2}} \sin \omega t \right|. \quad (4)$$

Правая часть неравенства (4) при $\sin \omega t < 0$ всегда больше, чем при $\sin \omega t > 0$. Поэтому минимальное значение амплитуды вибраций, при которой брусок поползет по площадке, следует искать при $\sin \omega t > 0$.

Знак равенства соответствует предельной ситуации, когда трения покоя едва хватает для того, чтобы сообщить бруску такое же горизонтальное ускорение, с каким движется площадка, и в этом случае (4) можно использовать как уравнение для нахождения того момента времени t_1 , когда брусок поползет по площадке:

$$\sin \omega t_1 = \frac{\mu g \sqrt{2}}{(\mu + 1) A \omega^2}. \quad (5)$$

Такой момент t_1 существует, если уравнение (5) имеет решение. Для этого его правая часть должна быть меньше единицы, т. е. $\mu g \sqrt{2} < (\mu + 1) A \omega^2$, или

$$A > \frac{\mu g \sqrt{2}}{(\mu + 1) \omega^2}. \quad (6)$$

Таким образом, скольжение бруска по площадке возникает тогда, когда амплитуда A ее колебаний удовлетворяет неравенству (6). Графическое решение уравнения (5) приведено на рисунке 2. Начиная с момента t_1 , брусок скользит вправо относительно площадки. В момент времени t_2 сила трения становится в состоянии обеспечить бруску такое же, как у площадки, горизонтальное ускорение, но проскальзывание продолжается еще некоторое время и после t_2 , так как к моменту t_2 скорость бруска относительно площадки не равна нулю.

Итак, брусок «поползет», когда амплитуда колебаний площадки превысит минимальное значение

$$A_{\min} = \frac{\mu g \sqrt{2}}{(\mu - 1) \omega^2} = 1,2 \text{ мм.}$$

Если же амплитуда превышает значение $A_1 = g\sqrt{2}/\omega^2$ ($A_1 = 3A_{\min}$ при $\mu = 0,5$), то брусок не только «ползет», но еще и «подскакивает» (отрывается от площадки), так как при этом в течение некоторой части периода колебаний сила N нормальной реакции площадки обращается в нуль (это легко увидеть из уравнения (3)).

Е. И. Бутиков

Ф1027. Источник света находится на расстоянии $l = 1$ м от экрана. В экране напротив источника сделано отверстие диаметром $d = 1$ см. Как изменится поток света через отверстие, если между экраном и источником поместить прозрачный цилиндр из материала с показателем преломления $n = 1,5$ так, как показано на рисунке 1 (длина цилиндра $l = 1$ м, диаметр $d = 1$ см; источник находится на оси цилиндра)?

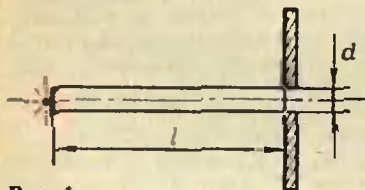


Рис. 1.

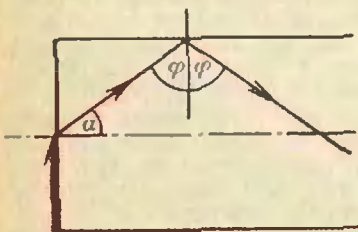


Рис. 2.

Все лучи, идущие от источника в направлении к экрану, после преломления на границе воздух — стекло (материал цилиндра) окажутся «заключенными» внутри цилиндра и после многократного отражения от его боковой поверхности (на границе стекло — воздух) в конце концов пройдут через отверстие в экране.

Действительно, предельный луч, падающий из воздуха на торец цилиндра под углом $\pi/2$, после преломления будет составлять с осью цилиндра угол полного внутреннего отражения α такой, что $\sin \alpha = 1/n$; этот луч попадет на боковую поверхность цилиндра под углом $\varphi = \pi/2 - \alpha$ (рис. 2). Так как

$$\sin \alpha = \frac{1}{n} = \frac{2}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin \frac{\pi}{4},$$

то $\alpha < \frac{\pi}{4}$ и, следовательно, $\varphi > \frac{\pi}{4} > \alpha$. Значит, при падении на боковую поверхность цилиндра этот луч отразится. В дальнейшем луч будет идти внутри цилиндра, отражаясь каждый раз от его поверхности, и в конце концов попадет на его дальний торец.

Любой другой луч от источника, падающий на входной торец цилиндра под углом, меньшим $\pi/2$, преломившись, будет составлять с осью цилиндра угол $\alpha' < \alpha$; на боковую поверхность цилиндра этот луч попадет под углом $\varphi' > \varphi > \alpha$ и заведомо отразится.

Таким образом, прозрачный цилиндр «соберет» в отверстие лучи, испускаемые источником в телесный угол 2π стерadian. В отсутствие цилиндра в отверстие попадал световой поток, сосредоточенный внутри телесного угла $\pi d^2/4l^2$ стерadian. Следовательно, при наличии цилиндра световой поток через отверстие увеличится в

$$n = \frac{2\pi}{\pi d^2/4l^2} = \frac{8\pi l^2}{\pi d^2} = 8 \cdot 10^3 \text{ раз.}$$

А. И. Бутов

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М986—М1000, Ф998—Ф1012, справились с задачами М986, М987, М992, М994, М996—М1000, Ф1000—Ф1002, Ф1006, Ф1010. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

В. Аюпян (Ереван) 91, 93; А. Алексейчук (Одесса) 93; М. Алимбетов (Целиноград) 88, 89; И. Аржанцев (Киев) 93; Д. Ароцкер (Киев) 89, 91, 93, 95; С. Аршава (Северодонецк) 88; С. Астахов (Сокольники Тульской обл.) 93; Т. Ахмедов (п. Борадыгях АзССР) 91; В. Базуткин (Кривой Рог) 91, 93; З. Бандик

(СФРЮ) 91, 93; А. Барабанов (Киев) 89, 91, 93, 95; Р. Безрукавников (Калуга) 91, 93, 95; А. Бейляку (СРР) 91; И. Белозеров (Серпухов) 89, 91, 93; Д. Берзин (Калуга) 89, 91, 93; А. Бимагайбетов (Алма-Ата) 91; П. Бучин (Киев) 93, 95; Р. Валиев (Фрунзе) 91, 93; Я. Варшавский (Харьков) 93, 95; А. Винюк (Киев) 95; А. Витяев (Новосибирск) 93; В. Вологодский (Омск) 88, 91, 93; Т. Гамидов (п. Борадыгях АзССР) 93; Р. Гендлер (Ташкент) 91, 93; И. Георгиева (София, НРБ) 93; О. Геупель (Дрезден, ГДР) 91, 93, 95; А. Глущок (Харьков) 91, 93; М. Гольдштейн (Челябинск) 88, 91, 93, 95; Л. Гороховский (Киев) 89, 91, 93; В. Гравит (Северодвинск) 88, 89, 93, 95; Р. Гринив (Львов) 89, 91, 93; Д. Гринчаров (София, НРБ) 93; А. Давыдов (с. Елфимово Горьковской обл.) 91, 93; Ш. Дадашов (п. Борадыгях АзССР) 91; Д. Добрицын (Москва) 95; А. Донченко (Киев) 89, 91, 93; Ю. Дрозд (Киев) 89; И. Дын-

ников (Жуковский) 88—91, 95; С. Железовская (Саратов) 91, 93, 95; Д. Зайцев (Киев) 89; Б. Зон (Харьков) 91, 93; В. Кальницкий (Калининград) 91, 93; Т. Касумов (Баку) 93; А. Коллинский (Гайворон) 91, 93; А. Корнилов (Ростов-на-Дону) 89, 93; Ю. Королев (Казань) 89, 93; А. Коршков (Мозырь) 91, 93; А. Кошечков (Алма-Ата) 91; Б. Крузликос (Харьков) 89, 93; М. Кукс (Львов) 93; Д. Куцамако (Саратов) 91, 93; И. Кучугурин (Новый Уренгой) 91; О. Лимешко (Куйбышев) 89, 91, 93; М. Литвинов (Киев) 88, 89, 91, 93; А. Лобковский (п. Черноголовка Московской обл.) 88, 91; В. Ландин (Белорецк) 88, 93, 95; М. Макичан (Ереван) 93; А. Мельник (Гайворон) 91, 93; А. Мельцер (Ленинград) 93; А. Мигло (Ленинград) 91, 95; Я. Мустафаев (Баку) 93; С. Мушинский (Новосибирск) 88, 89, 93, 95; А. Назарян (Тбилиси) 88, 89, 93; Д. Недушков (НРБ) 91; Ю. Никоноров (с. Михайловка Каз. ССР) 91; Ю. Ним (п. Черноголовка Московской обл.) 93; О. Ниц (Одесса) 91, 93; П. Пасманик (Москва) 93; Р. Пащенко (Белгород) 89; О. Пелевин (Кострома) 91; Д. Погребинский (Киев) 93; А. Покровский (Киев) 88, 89, 91, 93; В. Помаз (Семеновка) 89, 93; И. Порной (Одесса) 88, 89, 93; В. Поляков (Николаев) 91, 93, 95; В. Пушкин (Харьков) 93; В. Рагулин (Челябинск) 89, 91, 93; С. Резнов (Киев) 89; О. Ринк (Вольск) 93; А. Ройтерштейн (Ленинград) 91, 93; Т. Руденко (Киев) 88; Л. Рябова (Клин) 91; И. Самовол (Гайворон) 91, 93; Д. Семихин (Киев) 91, 93, 95; С. Сильвестров (Киев) 88; В. Слитинский (Киев) 88, 93; Л. Смирнов (Киров) 91, 93; М. Соколова (Ленинград) 91, 93; И. Соловьев (п. Черноголовка Московской обл.) 91, 93, 95; Г. Сралей (Вудапшт, ВНР) 93; А. Ступин (Саратов) 88; К. Стъркас (п. Черноголовка Московской обл.) 88, 91, 93, 95; В. Суклиян (Одесса) 93; Д. Тажаркин (Горький) 88, 91, 93, 95; А. Тарасенко (Днепропетровск) 91, 93, 95; Б. Татиевский (Киев) 87; Е. Теорун (Павлодар) 91, 93; Р. Тодев (НРБ) 91; Ю. Томилов (Киев) 89, 93; С. Тулешов (Москва) 93; Д. Туляков (Жданов) 89, 91, 93, 95; И. Устиловский (Москва) 88, 89, 93, 95; Д. Фалькович (Москва) 91, 93; Д. Фельдман (п. Черноголовка Московской обл.) 89, 93; Ф. Фог (Томск) 93; В. Фрасинич (Гайворон) 91, 93; М. Хованов (Москва) 93; Д. Хосид (Алма-Ата) 89; О. Христенко (Караганда) 93, 95; С. Черенков (Апрелевка) 91; Е. Черная (Днепропетровск) 88—91, 93, 95; Т. Чудиновских (Целиноград) 88, 89, 93; Е. Чурикова (Целиноград) 88, 89; И. Шефтель (Ленинград) 88, 93; И. Шехтман (Киев) 93; А. Шибакос (Свердловск) 87; Б. Шраер (Ленинград) 91, 93; Я. Эфендиев (Баку) 93; А. Яврян (Ереван) 93; А. Язубьянц (Ростов-на-Дону) 91.

Физик

А. Андрианов (п. Кузнецовск Ровенской обл.) 99, 08; А. Анисимов (Киев) 98, 03; А. Антонов (Москва) 98, 08, 09, 11; Ф. Асмандьярова (Целиноград) 98, 03, 11, 12; В. Баргагин (Лидя) 99; А. Белецкий (Канев) 09; И. Белов (Челябинск) 04; С. Беловолов (Новосибирск) 03, 05, 08; С. Белоусов (Ленинград) 09, 11, 12; В. Бензерук (Брест) 05; Д. Берзин (Калуга) 08, 09, 11, 12; А. Билибин (Боровичи) 05, 08, 09, 11; Д. Бисикало (Винница) 03, 05, 09; С. Бобылев (Верезники) 03—05, 09, 11; А. Болотников (п. Кузнецовск Ровенской обл.) 08; В. Болотников (п. Кузнецовск Ровенской обл.) 99; А. Бринь (Донецк) 05; Д. Будько (Белгород) 99, 04; А. Бучель (Луцк) 98; М. Ваганов (п. Чер-

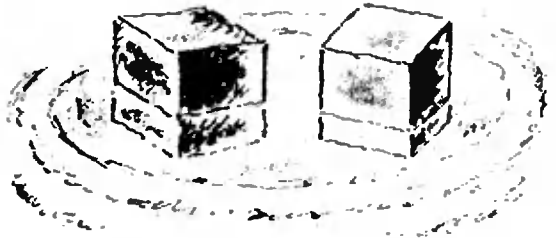
ноголовка Московской обл.) 09; П. Вольфбейн (Киев) 98, 08—12; А. Гаек (Днепропетровск) 05, 09, 11; А. Гамаюнов (Полтава) 08, 09, 11; А. Герашенко (Белорецк) 98, 11; Ю. Гольдбаум (Тбилиси) 03; А. Гольдин (с. Водяное Львовской обл.) 98, 03, 04, 08, 12; Ю. Гордиенко (Винница) 98, 03, 05; В. Гравит (Северодвинск) 98; В. Гурарий (п. Черноголовка Московской обл.) 07—12; Б. Гуревич (Саратов) 98; Л. Гуревич (Кемерово) 98, 11; Д. Гуроров (п. Кузнецовск Ровенской обл.) 03, 07, 08, 11; Г. Дятлов (Новосибирск) 04; Л. Евсеев (Дмитровград) 03, 08, 11; Д. Евтушенко (Донецк) 05, 11; Д. Ежиков (Минск) 05, 08, 09, 12; А. Езерский (Минск) 03, 05, 09; О. Есенков (Новороссийск) 05; Д. Жильцов (Краматорск) 98, 99; Д. Жигний (Киев) 03; П. Задорожный (Киев) 05, 07—12; К. Зарембо (Москва) 05; Е. Зельцер (Киев) 05, 11; Я. Зубкович (Алма-Ата) 99; А. Ильенков (Киев) 98, 04, 05, 08; В. Ильин (Саратов) 05; Д. Исильманова (Целиноград) 03; В. Камелькович (Харьков) 05; С. Канатов (п. Кузнецовск Ровенской обл.) 99, 05, 08, 11; А. Карлов (Киев) 09; В. Кирихин (п. Черноголовка Московской обл.) 03, 07—09, 11; Ш. Кирихин (Чимкент) 05; В. Клименко (Первомайск Николаевской обл.) 03; И. Климчук (п. Кузнецовск Ровенской обл.) 99, 05, 08, 11; А. Коновалов (Мытищи) 11; И. Корсунская (Киев) 04, 05; Е. Корсунский (Харьков) 05; М. Косолапов (п. Черноголовка Московской обл.) 07—09, 11; П. Кохан (п. Новые Санжары Полтавской обл.) 98, 03, 05; В. Кочетков (Винница) 03; В. Крацев (Ставрополь) 05; Г. Кравченко (п. Кузнецовск Ровенской обл.) 99, 08, 11; С. Кравченко (Ростов-на-Дону) 05, 09, 11; Ю. Кравченко (Москва) 03, 07, 09, 11; С. Курдюков (Москва) 98, 05, 07—09, 11; И. Куренной (Глобно) 08; А. Кусаинов (Алма-Ата) 09, 11; Д. Кучулория (Тбилиси) 05, 11; А. Лобковский (п. Черноголовка Московской обл.) 98, 09; И. Лугач (Винница) 03, 05, 09, 11; А. Мазуренко (Минск) 03, 09; О. Миндюк (Киев) 05; Л. Митосерич (СРР) 98; А. Мищенко (Киев) 03, 08, 09; А. Недачим (Киев) 04, 05, 07—12; Д. и П. Николатевы (п. Черноголовка Московской обл.) 03, 07, 09; А. Николюк (Ровно) 09; Ю. Новиков (Великие Луки) 98; Д. Нозтков (Алма-Ата) 11; А. Овчинников (Свердловск) 05; Д. Орел (Воркута) 04, 09; О. Паруш (Выборг) 04; Л. Петько (Минск) 03, 05, 08; Р. Плюсин (Великие Луки) 98; Д. Погребинский (Киев) 03, 09; А. Покровский (Киев) 04; А. Португалов (Киев) 11, 12; В. Родин (Сасово) 05, 09, 11; А. Розенберг (Уфа) 05, 09, 11; А. Розенвайн (Киев) 99; Е. Рознощик (Киев) 07; Н. Рябова (Харьков) 11; Р. Сагайдак (с. Матугов Черкасской обл.) 03, 09, 11, 12; С. Сазонов (Климовск) 11; Д. Самборский (Истра) 98, 99, 03, 08, 09; В. Сафонов (Челябинск) 05; А. Семенов (Брест) 09, 11; М. Сергазин (Алма-Ата) 08, 09, 11; В. Служаев (Дмитровград) 08, 09; В. Смирнов (Тихвин) 05; А. Спринсон (Ленинград) 99; А. Ставицкий (Баку) 08, 09, 11; А. Стародубов (Алма-Ата) 09, 11; А. Степура (Ивано-Франковск) 04, 05, 08, 09; Д. Старожук (Киев) 09, 11; И. Стригунов (Брест) 98, 05; А. Стронев (с. Узун Московской обл.) 98, 99, 09; К. Стъркас (п. Черноголовка Московской обл.) 08, 11; В. Суклиян (Одесса) 98, 99, 03, 07; Б. Татиевский (Киев) 04; А. Ткаченко (Киев) 98, 03, 05,

(Окончание см. на с. 37)

"Квант" для младших школьников

Задачи

1. Имеются два пластмассовых кубика одинаковой величины. Первый плавает в воде, опускаясь в воду на 2 см, а второй — на 1 см. На сколько опустится в воду нижний кубик, если первый кубик поставить на второй? А если второй на первый?

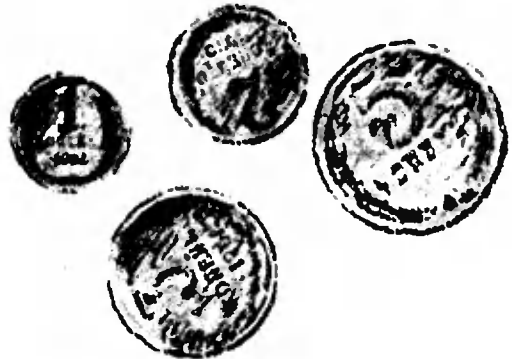


2. Мадемуазель Дюбуа любит домашних животных. Все ее животные, кроме двух, — собаки, все, кроме двух, — кошки, и все кроме двух, — попугаи, а остальные — тараканы. Сколько каких животных у мадемуазель Дюбуа?



3. Два одинаковых бумажных выпуклых четырехугольника разрезали: первый — по одной из диагоналей, а второй — по другой диагонали. Докажите, что из полученных частей можно сложить параллелограмм.

4. Известно, что «медные» монеты в 1, 2, 3 и 5 коп. весят соответственно 1, 2, 3 и 5 г. Среди четырех «медных» монет (по одной каждого достоинства) одна — бракованная: отличается весом от нормальной. Как с помощью взвешиваний на чашечных весах без гирь определить бракованную монету?



5. Замените в неравенствах на рисунке буквы цифрами так, чтобы все неравенства стали верными. (Одинаковые буквы заменяются на одинаковые цифры, разные — на разные.)



Эти задачи нам предложили *Н. П. Долбин, А. И. Рудинская, В. В. Произволов*, ученик 8 класса школы № 5 г. Гайворона *Г. Тартаковский, Л. П. Мочалов*.

Л > Р > О < Е < К < Ж < И < Р > О > В > А > Н < Ш < Е

Квантоскоп "Кванта"



1. В жарких странах напитки помещают в сосуды с пористыми стенками. За чем?



2. Свежеиспеченный хлеб весит больше, чем тот же хлеб остывший. Почему?



3. Для чего, желая скорее высушить пол, на который пролита вода, ее растирают по полу?



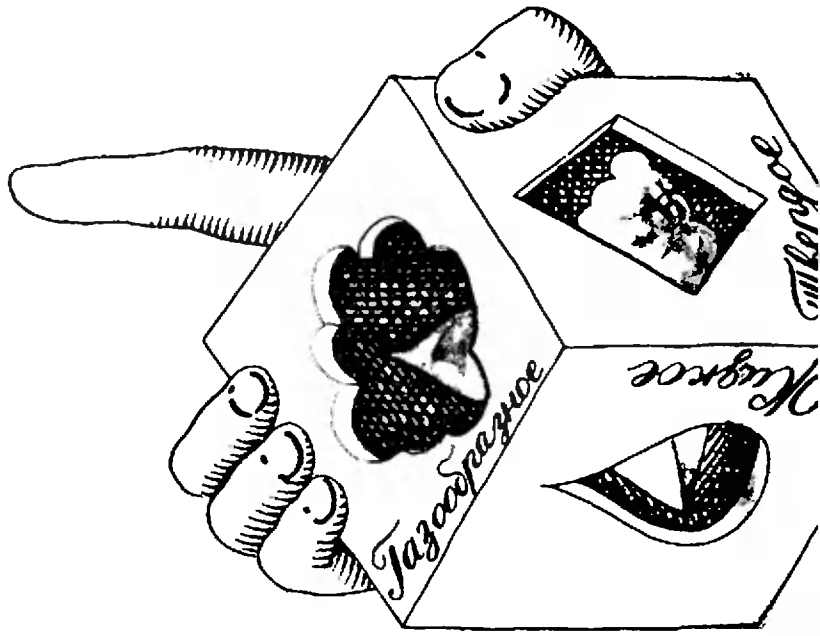
4. Когда, купаясь в жаркий день, вы входите в воду, она кажется холоднее воздуха, а когда выходите, то наоборот. Почему?



5. Пробирка наполнена водой и открытым концом опущена в стакан с водой (см. рисунок). Изменится ли уровень воды в про-

Торрелио и одновременно мальчик послонил палец и, вода, стал медленно поворачивать. С той стороны, откуда медленно талая естерок, в пальце почувствовалась ощущение холода.

А. Серафимович
«Лесная жизнь»



Вопросы и задачи



6. Будет ли кипеть вода в стакане, плавающем в сосуде с кипящей водой?



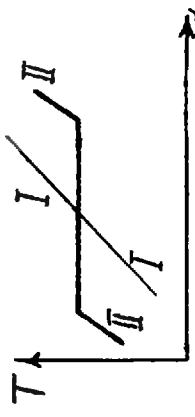
7. Можно ли заставить воду кипеть без нагревания?



8. Люди научились обрабатывать бронзу раньше, чем железо. Чем это можно объяснить?



9. На рисунке показано, как изменятся со временем температуры металла



и стекла. Который из графиков относится к металлу?

Вопросы и задачи



бирке, если установку нагреть до температуры кипения воды?



... существует лед, который обжег бы нам пальцы, если бы до него можно было дотронуться. Получают его под очень большим давлением, при котором вода переходит в твердое состояние при температуре значительно выше 0 °С.

... испаряться, микра жидкое состояние, могут и твердые тела. Наиболее известные примеры — испарение нафталина и йода, высыхание замороженного белья.

... еще в 1754—55 годах шотландский химик Дж. Блэк открыл не только постоянство точки плавления льда, но и то, что термометр показывает одну и ту же температуру, несмотря на приток тепла, до тех пор, пока весь лед не растает. Отсюда Блэк пришел к понятию скрытой теплоты плавления, а позже установил и понятие скрытой теплоты парообразования.

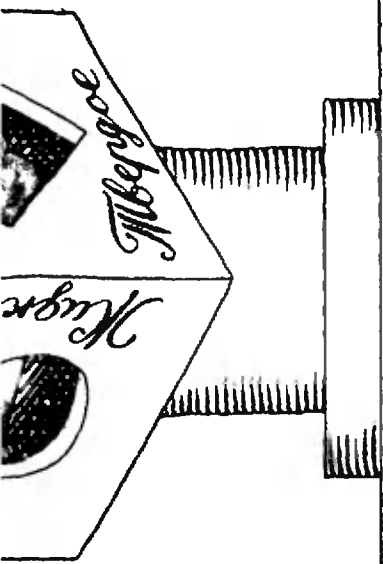
Любопытно, что ...

А хорошо ли знакомы вам процессы

ИСПАРЕНИЕ, КИПЕНИЕ, ПЛАВЛЕНИЕ

?

К ним, разумеется, следует добавить и обратные процессы — конденсацию и кристаллизацию. Все вместе они характеризуют определенные изменения состояний вещества. Состояния эти вам хорошо знакомы: твердое, жидкое, газообразное. Однако ими не исчерпывается все многообразие возможных состояний. Со временем вы узнаете о плазме, о нейтронном состоянии вещества и о том, как к этим состояниям можно перейти. Пока же давайте займемся не экзотическими, а обыденными превращениями вещества, и окажется, что обыкновенные они лишь на первый взгляд.



10. Почему пруды замерзают раньше рек?



11. Можно ли расплавить кусок свинца, лежащий в воде?



12. Кристаллизация вещества сопровождается выделением тепла, хотя температура затвердевающего вещества не понижается. За счет чего выделяется тепло?



Повесьте на брусок льда два одинаковых груза: один на медной проволоке, другой — на капроновой леске того же диаметра. Что перережет лед быстрее? Почему?



1. «Об агрегатных состояниях вещества» — 1984, № 9, с. 20;
2. «Газ превращается в жидкость» — 1984, № 11, с. 25;
3. «Может ли быть невозможное?» — 1986, № 4;
4. «Фазовые превращения» — 1985, № 7;
5. «Приглашение в парную» — 1985, № 8;
6. «Знакомьтесь: металлическое стекло» — 1986, № 11.

Что читать в «Кванте» (публикации последних лет) *Микромир*

СТАРЫЙ АЛГОРИТМ

Кандидат физико-математических наук
Ю. П. СОЛОВЬЕВ

На днях подошел ко мне мой сын Саша (он семиклассник):

— Купи мне калькулятор, как у Вовки!

— Во-первых, у тебя есть калькулятор, но во что ты его превратил? Теперь он вместо цифр показывает какие-то иероглифы! Во-вторых, школьник должен уметь считать и без калькулятора. В-третьих, так и быть, отнесу на этой неделе калькулятор в починку.

— Можешь не носить калькулятор в

мастерскую, — отвечал мне Саша, — складывать, умножать и делить я и сам умею. Мне уравнение квадратное надо решить, а под корнем вон какое число: 16229! В учебнике-то самое большое число в таблице — это 10 000. А у Вовки калькулятор вычисляет квадратные корни.

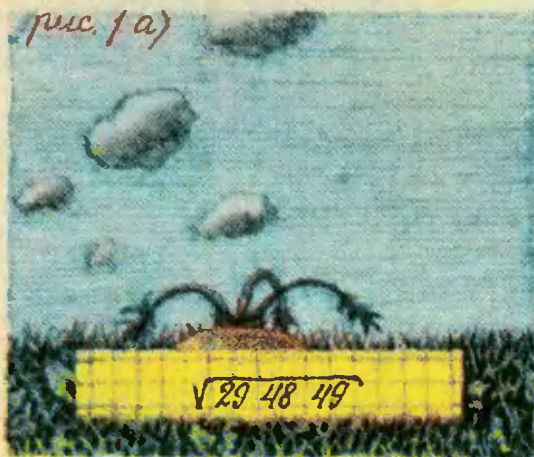
— А хочешь я научу тебя вычислять корни без калькулятора?

— А это трудно?

— Не намного труднее деления. Вот слушай.

Различные способы извлечения квадратных корней «вручную» существуют с древних времен. Я расскажу тебе об одном таком способе, который был создан еще в XV веке и на протяжении долгих лет честно служил и школьникам, и ученым.

Чтобы освоить этот способ, достаточно разобрать несколько примеров.



Сначала рассмотрим случай, когда корень извлекается нацело, т. е. когда число является полным квадратом. Найдем, например, корень из числа 294 849.

Разобьем цифры, входящие в это число, справа налево на группы по две цифры (рис. 1, а). Самую левую группу назовем первой, следующую — второй и т. д. Общее число образовавшихся групп определяет число цифр искомого корня.

Первая цифра находится как целочисленное значение корня из первой группы с недостатком. В нашем случае — это цифра 5. Записываем ее в ответ, затем возводим в квадрат, вычитаем из первой группы и сносим к результату вычитания следующую группу. (Если результат вычитания — нуль, то просто сносим следующую группу.) В рассматриваемом примере получится число 448 (рис. 1, б).

Переходим к определению второй цифры. Для этого слева от полученного числа 448 проводим вертикальную прямую и записываем за ней на место десятков удвоенную первую цифру: $2 \times 5 = 10$ (рис. 1, в).

На место единиц ставим самую большую цифру a , для которой разность $448 - 10a \cdot a$ неотрицательна, т. е. положительна или равна нулю. Ясно, что в нашем случае это цифра 4. Заносим эту цифру в ответ (рис. 1, г).

Умножаем 104 на 4 и записываем результат справа от вертикальной черты. Вычисляем разность $448 - 416 = 32$ и сносим к ней следующую группу. В результате получаем число 3249 (рис. 1, д).

Третья цифра находится так же, как и вторая: умножаем 54 на 2 и полученный результат — число 108 — записываем слева от вертикальной черты на место десятков. На место единиц ставим самую большую цифру b , для которой разность $3249 - 108b \cdot b$ неотрицательна. Подбором убеждаемся, что для $b = 3$ эта разность равна

рис. 1 д)

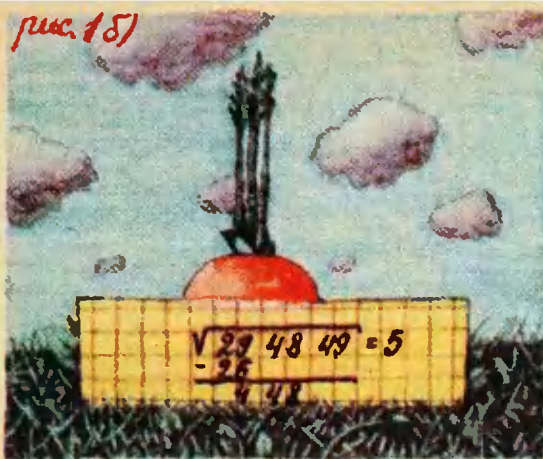


рис. 1 б)

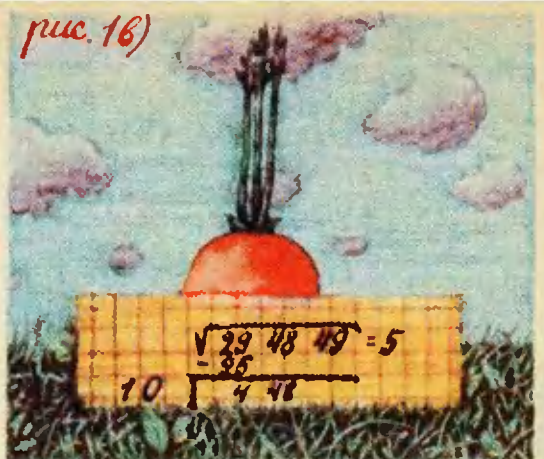


рис. 1 г)

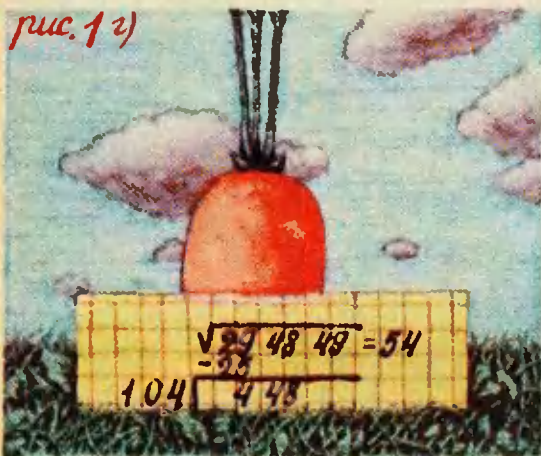


рис. 1 з)

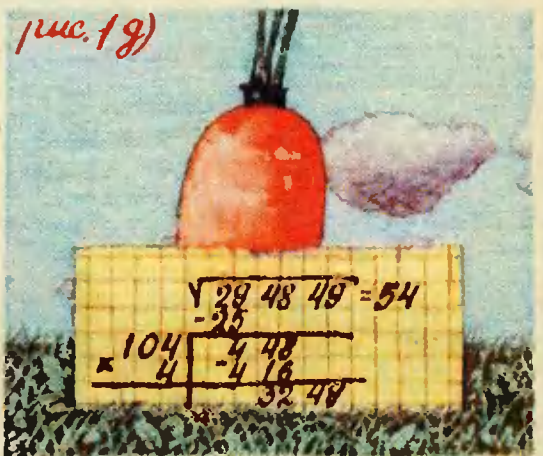


рис. 1 е)

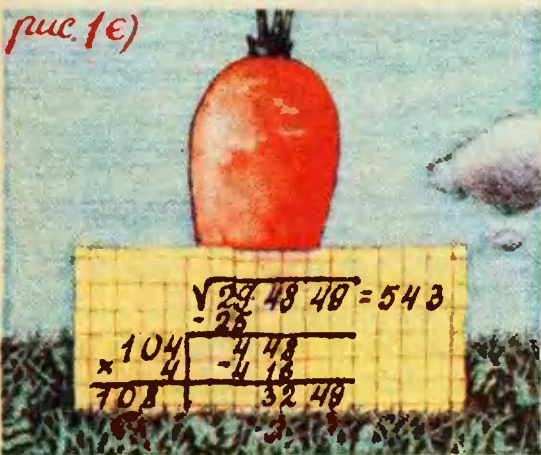
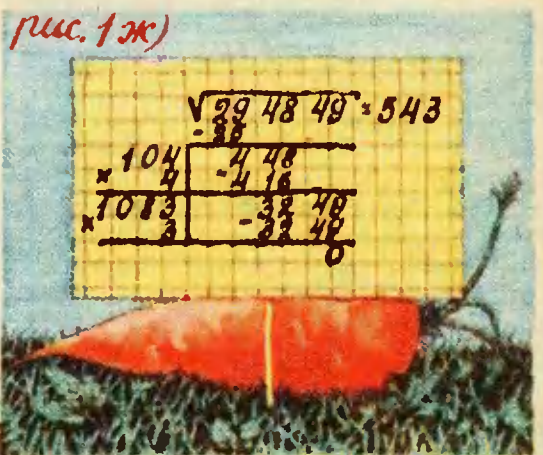


рис. 1 ж)



нулю. Заносим $b=3$ в ответ (рис. 1, е).

Умножаем 1083 на 3, записываем результат справа от вертикальной черты и вычитаем его из 3249 (рис. 1, ж). Так как разность равна нулю, процесс вычисления корня окончен.

А теперь, глядя на рисунки 2 и 3, попробуйте самостоятельно повторить все шаги, необходимые для вычисления квадратных корней $\sqrt{212521}$ и $\sqrt{165649}$.

До сих пор мы рассматривали чис-

ла с четным числом цифр. Если же общее число цифр нечетно, то первая группа слева будет состоять только из одной цифры (рис. 4, 5).

Ну а что же делать, если число не является полным квадратом? Алгоритм в этом случае не меняется, нужно лишь правильно подготовить число. Итак, пусть N — некоторое число (не обязательно целое), представленное десятичной дробью, и мы хотим вычислить корень из него с точностью

рис. 2

$$\sqrt{212521} = 461$$

		212521	
		-18	
*	86	8	-324
*	921	1	-921
*	1	1	-921
*	1	1	0

рис. 3

$$\sqrt{165649} = 407$$

		165649	
		-16	
*	80	0	-56
*	807	7	-5648
*	7	7	-5648
*	7	7	0

рис. 4

$$\sqrt{14841} = 121$$

		14841	
		-1	
*	29	9	-46
*	241	1	-241
*	1	1	-241
*	1	1	0

рис. 5

$$\sqrt{53361} = 231$$

		53361	
		-4	
*	43	3	-33
*	461	1	-461
*	1	1	-461
*	1	1	0

рис. 6

$$\sqrt{2} = \sqrt{2.0000} = 1.414$$

		2.0000	
		-1	
*	24	4	-96
*	281	1	-400
*	2824	4	-11200
*	4	4	-11296
*	4	4	804

рис. 7

$$\sqrt{12.5} = \sqrt{12.5000} = 3.535$$

		12.5000	
		-9	
*	65	5	-325
*	703	3	-2500
*	7080	0	-21000
*	5	5	-35825
*	5	5	3775

до $\frac{1}{10^m}$, т. е. хотим найти цифры в десятичном представлении искомого корня до m -го знака после запятой включительно. Тогда мы поступаем следующим образом. Цифры, входящие в целую часть числа N , разбиваем на группы по две цифры в каждой справа налево, а цифры, образующие дробную часть, разбиваем на такие же группы, но уже слева направо. Если общее число цифр в целой части не-

четно, то первая группа слева будет состоять из одной цифры, если же нечетно число цифр в дробной части, то к последней цифре слева приписываем нуль. Когда число групп в дробной части больше m , мы отбрасываем лишние группы справа, когда оно меньше m , мы составляем недостающие группы из нулей. Теперь все готово, чтобы использовать наш алгоритм. На рисунках 6 и 7 показано вычисление

квадратных корней $\sqrt{2}$ и $\sqrt{12,5}$ с точностью до $\frac{1}{1000}$.

Чтобы проверить, освоили ли вы этот алгоритм, сделайте следующее упражнение: вычислите с точностью до $\frac{1}{1000}$ квадратные корни

$\sqrt{18769}$, $\sqrt{24336}$, $\sqrt{35721}$, $\sqrt{232324}$,
 $\sqrt{243049}$, $\sqrt{104,2441}$, $\sqrt{1867,1041}$, $\sqrt{7}$,
 $\sqrt{10}$.

Мы не будем заниматься обоснованием описанного алгоритма. Заметим лишь, что получение каждой новой цифры связано с возрастающим объемом вычислений, поэтому алгоритм разумно применять тогда, когда требуемая точность не превышает трех-четырёх значащих цифр (чего, как правило, достаточно для практических расчетов).

Точность вычислений с использованием указанного алгоритма можно повысить, если воспользоваться следующим утверждением:

Если после вычисления n значащих цифр корня остаток от извлечения разделить на удвоенное найденное значение корня, то частное дает $n-1$ следующих цифр корня.

Докажем это утверждение. Предположим вначале, что число a , из которого извлекается корень, имеет целую часть из n групп. Пусть найдено n первых цифр корня, образующих число c . Тогда $\sqrt{a} = c + x$, где x — дробная часть корня, которую нужно найти. Следовательно,

$$a = c^2 + 2cx + x^2,$$

$$\frac{a - c^2}{2c} = x + \frac{x^2}{2c}.$$

Разность $a - c^2$ — это и есть остаток, который получается после нахождения n цифр корня. Дробь $\frac{a - c^2}{2c}$ представляет собой то самое частное, о котором говорится в утверждении.

Поэтому

$$x = \frac{a - c^2}{2c} - \frac{x^2}{2c}.$$

Считая $x \approx \frac{a - c^2}{2c}$, мы допускаем погрешность, равную $\frac{x^2}{2c}$. Так как $x < 1$, $a \geq 10^{n-1}$, имеем

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 29)

09, 11; С. Тюрин (п. Правдинск Горьковской обл.) 09, 11; А. Усинский (с. Птичь Ровенской обл.) 09; Д. Фельдман (п. Черногловка Московской обл.) 03, 05; Д. Филатьев (Алма-Ата) 99; Г. Финкельштейн (п. Черногловка Московской обл.) 03—05, 07—12; Ф. Фот (Томск) 03, 05; А. Фурс (п/о Дричин

рис. 8

$$\sqrt{2} = \sqrt{2,000000} = 1,414213$$

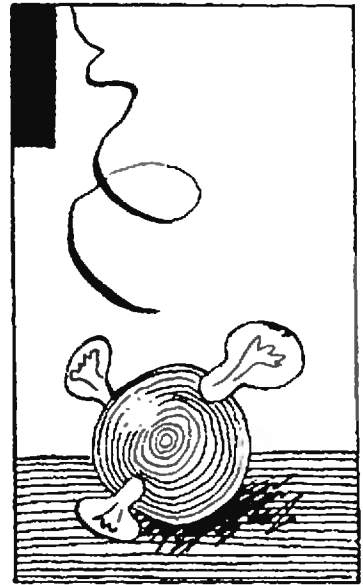
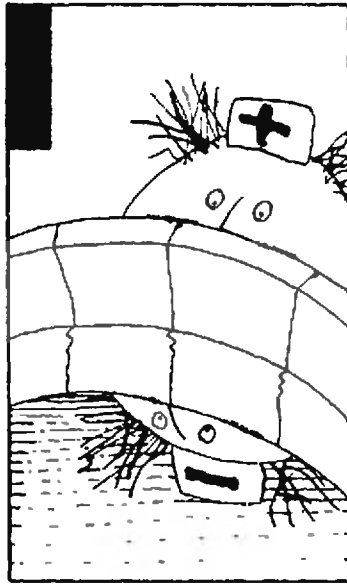
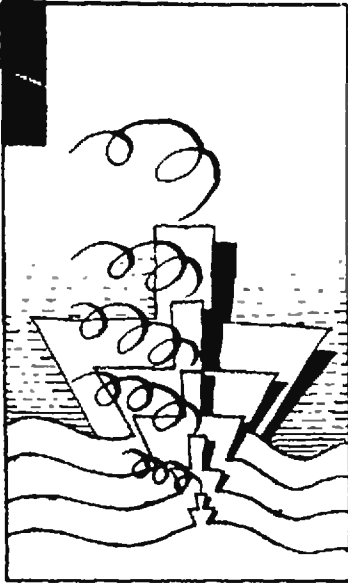
$$\frac{x^2}{2c} < \frac{1}{2 \cdot 10^{n-1}},$$

что и требовалось. Если запятая, отделяющая целую и дробную части в числе a , стоит не там, где мы ее предполагали, то ее всегда можно перенести на надлежащее место, производя умножение или деление числа a на некоторую степень 10 с четным показателем, а потом разделив или умножив найденный корень на степень 10 с показателем, вдвое меньшим.

Рассмотрим пример. Вычислим $\sqrt{2}$ с семью значащими цифрами, т. е. с шестью цифрами после запятой. Ранее мы вычислили $\sqrt{2}$ с тремя знаками после запятой (рис. 6). Деление остатка на удвоенное значение корня даст следующие три (рис. 8).

Конечно, в наше время, когда почти каждый первоклассник носит в портфеле микрокалькулятор, нелегко удивить школьника ручным способом извлечения квадратного корня. Но мы все же надеемся. Известный американский математик академик Грехем вспоминал, что сильный интерес к математике он почувствовал впервые в начальной школе, увидев тот самый алгоритм по извлечению квадратных корней, о котором мы сейчас рассказали. Его заинтересовало, возможно ли сделать что-нибудь похожее для кубических корней и корней более высоких степеней. Он нашел аналогичный способ решения, и с тех пор математика навсегда вошла в его жизнь.

Минской обл.) 09, 11; М. Хараба (с. Надречное Тернопольской обл.) 04; П. Хиль (п. Овидиополь Одесской обл.) 03; Д. Ходсровская (Киев) 04; И. Чайка (п. Кузнецовск Ровенской обл.) 99, 05, 07, 08, 11; О. Чепиков (Могилев) 03, 09, 11; И. Шехтман (Киев) 04, 05, 09; А. Шишкин (Новый Уренгой) 09; А. Шуляк (с. Молодецкое Черкасской обл.) 11; Н. Юдина (п. Майна Ульяновской обл.) 11; В. Яйлиан (Шостка) 03; И. Яковлева (Киев) 04; Ю. Яровой (Канев) 99, 09.



Школа «Кванте» ●

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Вязкое трение» предназначена восьмиклассникам, «Метод электростатических изображений» — девятиклассникам, «Ядерные спектры» — десятиклассникам.

■ Вязкое трение

С трением знакомы практически все. Оно сопровождает любые движения тел и накладывает отпечаток на характер этих движений. В «Кванте» уже рассказывалось о трении, возникающем при относительном движении двух сухих поверхностей трущихся тел, об исследованиях Кулона и Амонтона, относящихся к зависимости силы сухого трения от силы нормального давления, от площади контакта и от относительной скорости движущихся тел*).

Но совершенно сухие тела в природе почти не встречаются, и техника больше имеет дело со смазанными поверхностями. Трение между твердым телом и жидкостью или газом

называется жидким, или вязким, трением. Оно подчиняется своим закономерностям, существенно отличающимся от законов сухого трения. Какое это отличие и чем оно объясняется?

Отличие, прежде всего, — в отсутствии силы трения покоя. Любая сколь угодно малая сила может привести в движение тело относительно жидкости или газа. И наоборот — бесконечно медленно движущееся тело не испытывает в газе или жидкости никакого сопротивления. Причина состоит в том, что «трутся» друг о друга фактически не шероховатые со впадинами и выступами (конечно, микроскопическими) поверхности твердых тел, сцеплением которых и определяется трение покоя, а слои жидкости или газа. Как это происходит, и что вообще означает появление силы, препятствующей движению (силы сопротивления движению) тела?

В основе любых сил трения движения лежит стремление тела сообщить свое движение другим телам, которые с ним соприкасаются, или, другими словами, — тенденция к выравниванию скоростей движения. Силы трения всегда стремятся замедлить движение более быстрых тел и ускорить движение более медленных.

* См., например, статью И. Ш. Слободянского «Сухое трение» («Квант», 1986, № 8), статью А. В. Семёнова «Трение: вредное, полезное, интересное...» («Квант», 1985, № 10), заметку И. К. Белкина «Конус трения» («Квант», 1986, № 1, с. 24). (Примеч. ред.)

В случае сопротивления движению твердого тела в жидкости или газе речь идет о передаче импульса (количества движения) молекул слоя, который движется в каком-то направлении с большей скоростью, чем соседний слой, молекулам этого соседнего слоя.*) И наоборот, молекулы этого медленного слоя, обладая кроме своего хаотического движения еще и медленным направленным движением вдоль границы слоев, разбавляют «быстрый» слой, тем самым замедляя его. Обычно считается, что слой, непосредственно прилегающий к телу, имеет ту же скорость, что и тело. Следовательно, он испытывает ту же силу трения и, в свою очередь, замедляет или ускоряет слой, отстоящий чуть дальше. При этом играет роль то, как быстро нарастает (или убывает) скорость по мере перехода от одного слоя к другому, или, как говорят, сколь велик градиент скорости.

Исследования различных ученых показали, что при небольших скоростях сила вязкого трения пропорциональна скорости относительного движения твердого тела и жидкости или газа. Она зависит также от природы жидкости и от формы и размеров тела. Такую силу сопротивления испытывают, например, частицы тумана и дыма, оседающие в воздухе, маленькие твердые шарики, падающие в вязкой жидкости (например, в глицерине) и т. п.

При любом виде трения движения происходит еще одно крайне важное явление. Это превращение энергии механического движения во внутреннюю энергию (тепловое движение молекул) в соответствии с законом сохранения энергии. Еще Кулон исследовал затухание крутильных колебаний цилиндра в жидкости. В этом опыте механическая энергия цилиндра при колебаниях рассеивается, превращаясь в тепло, и жидкость вместе с цилиндром нагревается. А если бы жидкость была идеальной, т. е. не обладающей вязкостью, то цилиндр мог бы колебаться на упругом подвесе вечно.

*) Более подробно о механизме жидкого трения можно прочитать, например, в заметке Е. Е. Городецкого «О явлениях переноса» («Квант», 1986, № 9, с. 27). (Примеч. ред.)

Итак, вязкое трение приводит к потере механической энергии, к сопротивлению движению тела в жидкости. Но означает ли это, что вязкости жидкости или газа нужно во всех случаях уменьшать, что самолет, например, в таком случае будет летать быстрее? Отнюдь! Самолет в воздухе, лишенном внутреннего трения (в идеальной «жидкости»), вообще не взлетит, так как подъемная сила его крыла будет равна нулю, как и сила тяги воздушного винта. Дело здесь в особом свойстве лишенного вязкости потока идеальной жидкости. Оказывается, на тело любой формы такой поток может действовать только с силами, сумма которых равна нулю. В этом состоит сущность так называемого парадокса Даламбера — Эйлера. Но обсуждение этого вопроса, к сожалению, выходит за рамки данной заметки.

Б. Б. Буховцев

Метод электростатических изображений

В школьном курсе физики вы познакомились с явлением электростатической индукции. Вспомним, в чем оно заключается.

Поднесем точечный заряд $+q$ к какому-либо проводнику, например к незаряженному металлическому шарiku. За очень малое время свободные заряды на шарике перераспределятся так, что напряженность результирующего поля внутри него станет равной нулю. После этого движение зарядов прекратится. Поле внешнего заряда оказывается скомпенсированным полем зарядов, «появившихся» на поверхности шарика. Будем называть их наведенными зарядами.

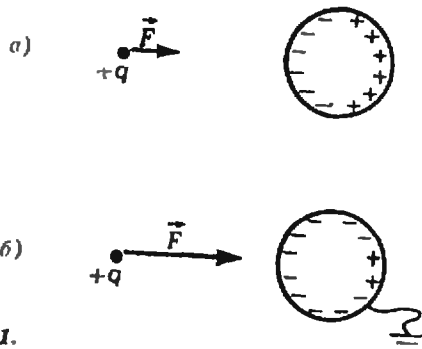


Рис. 1.

Поле наведенных зарядов есть и вне проводника, в частности, оно действует на заряд $+q$ — заряд притягивается к шарiku, хотя полный заряд шарика равен нулю (рис. 1, а). Если бы шарик был заземлен, притяжение было бы сильнее, поскольку на шарике появился бы избыточный отрицательный заряд (рис. 1, б). Этот заряд перетек бы на проводник с земли под действием поля заряда $+q$.*)

Как рассчитать поле наведенных зарядов? Рассмотрим пример. Пусть проводник занимает все правое полупространство (рис. 2). Тогда на его плоской границе OO' соберутся наведенные отрицательные заряды, которые уничтожат поле всюду в проводнике. Вычислит поле вне проводника (слева от OO') нам поможет тот очевидный факт, что поле наведенных зарядов симметрично относительно плоскости OO' . Посмотрите на рисунок 2 — на нем хорошо видно, чему равно поле наведенных зарядов справа от OO' (в проводнике). Раз это поле компенсирует поле заряда $+q$, то очевидно, оно совпадает с полем воображаемого заряда $-q$, помещенного в ту же точку, что и заряд $+q$. Теперь ясно, какое поле создают наведенные заряды слева от OO' (вне проводника). Оно в точности равно полю воображаемого заряда $-q$, но помещенного по другую сторону от плоскости OO' , симметрично по отношению к заряду $+q$. Заряд $-q$ называют изображением заряда $+q$.

*) Поле вне проводника может быть определено, если известен либо полный заряд проводника (как в случае, изображенном на рисунке 1, а), либо его потенциал (как на рисунке 1, б). Первый случай соответствует изолированному проводнику, второй — проводнику, соединенному с удаленным очень большим проводником известного потенциала (например, с землей). Мы, в основном, будем рассматривать второй тип задач. Потенциал бесконечного проводника будем считать равным потенциалу на бесконечности, т. е. нулю.

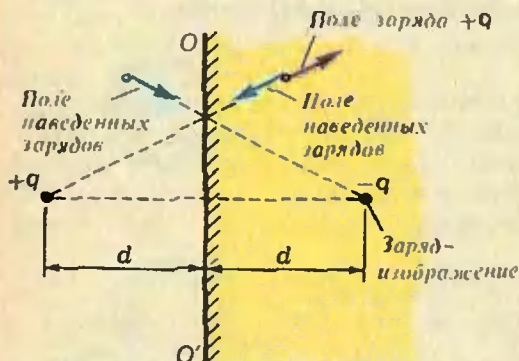


Рис. 2.

Итак, плоская поверхность проводника притягивает точечный заряд $+q$, удаленный от нее на расстояние d , с такой же силой, с какой его притягивал бы заряд $-q$, удаленный на расстояние $2d$:

$$F = kq^2 / (2d)^2.$$

Мы получили удивительный результат: поле, создаваемое зарядом и проводником (рис. 3, а), в пространстве вне проводника совпадает с полем всего двух точечных зарядов (рис. 3, б). Почему оказалась возможной такая подмена? Вспомним, что поверхность проводника представляет собой эквипотенциальную поверхность, причем в нашем примере потенциал проводника равен нулю. Поле же двух зарядов $+q$ и $-q$ обладает следующим свойством: эквипотенциальная поверхность $\varphi = 0$ совпадает с плоскостью симметрии OO' , т. е. точно повторяет форму поверхности рассматриваемого проводника. Именно в этом скрыта причина совпадения полей, изображенных на рисунке 3, а и б. И в других случаях надо стремиться расположить заряды-изображения внутри проводника так, чтобы поверхность проводника совпала с поверхностью постоянного потенциала, равного потенциалу проводника.*)

Возникает резонный вопрос — как это сделать? Как найти заряды-изображения и их положения, если известны форма и потенциал проводника? К сожалению, в общем случае такого

*) Тогда поле внешних зарядов и проводника будет совпадать с полем внешних зарядов и зарядов-изображений (т. е. проводник подменяется изображениями). Дело в том, что граница рассматриваемой области (пространство вне проводника) имеет в этих двух случаях одинаковый потенциал, и расположение зарядов внутри области также одно и то же (все изображения находятся в проводнике, т. е. вне этой области). Выполнения этих условий достаточно, чтобы утверждать, что поля совпадают всюду внутри области. Это утверждение часто называют принципом единственности в электростатике.

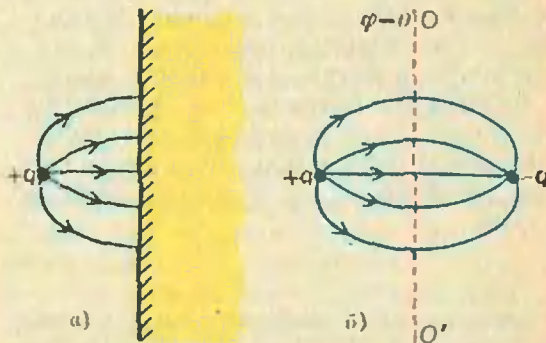


Рис. 3.

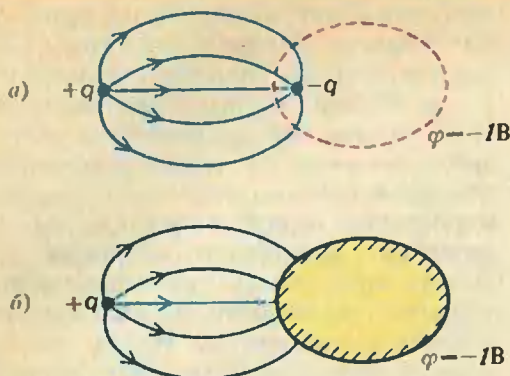


Рис. 4.

рецепта не существует, и обычно приходится действовать, как говорят, «с конца» — от зарядов к проводнику.

Возьмем несколько точечных зарядов, рассчитаем их поле, найдем любую эквипотенциальную поверхность $\varphi = \varphi_0$ и заполним пространство внутри этой поверхности проводником с потенциалом φ_0 . Тогда поле, которое мы уже рассчитали, представляет собой готовое решение для получившегося проводника и тех зарядов, что оказались вне его! Заряды же, которые «погибли» внутри проводника, играют роль зарядов-изображений. Таким способом можно построить много «готовых» решений, но нет гарантии, что среди них найдется проводник заранее заданной формы.

Рассмотрим пример. Возьмем какую-нибудь эквипотенциальную поверхность для тех же зарядов $+q$ и $-q$, например с $\varphi = -1$ В (рис. 4, а). Поле этих двух зарядов вне этой поверхности совпадает с полем заряда $+q$ и проводника, имеющего фиксированный потенциал $\varphi = -1$ В (рис. 4, б).

Еще пример. Поле четырех зарядов $+q$, $+q$, $-q$ и $-q$, размещенных в вершинах прямоугольника (рис. 5, а), имеет эквипотенциальную поверхность $\varphi = 0$ в виде двух взаимно перпендикулярных плоскостей. Значит, часть этого поля, заключенная в первом квадранте, совпадает с полем заряда $+q$, помещенного в двухгранный угол (рис. 5, б). Три других заряда являются изображениями заряда $+q$. Попробуйте сами найти решение для заряда, помещенного в трехгранный угол, — для этого вам придется использовать семь дополнительных зарядов.

Вернемся теперь к примеру с металлическим шариком, о котором шла речь в начале статьи. Возьмем два заряда $+q_1$ и $-q_2$ ($q_1 > q_2$), расположенные на расстоянии l друг от друга. Оказывается, что эквипотенциальная поверхность $\varphi = 0$ представляет собой

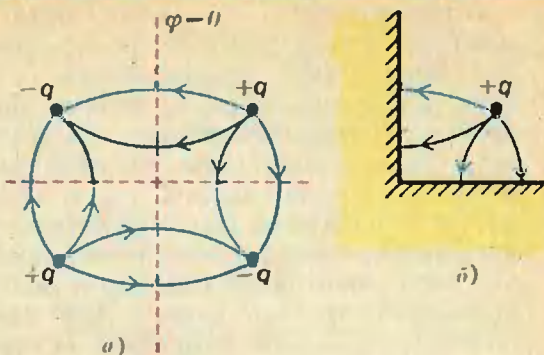


Рис. 5.

сферу (рис. 6, а).*) Чтобы определить радиус этой сферы R и расстояние L от ее центра до заряда $+q_1$, можно приравнять к нулю потенциалы точек A и B (рис. 6, б):

$$k \frac{q_1}{L-R} - k \frac{q_2}{R-(L-l)} = 0, \quad (*)$$

$$k \frac{q_1}{L+R} - k \frac{q_2}{R+(L-l)} = 0.$$

Поле этих двух зарядов в пространстве вне сферы в точности совпадает с полем, которое возникает, если заряд $+q_1$ поместить на расстоянии L от центра заземленного металлического шара радиусом R (рис. 6, б). В этом случае, когда задано положение шара, нам известны R и L , а положение отрицательного заряда-изображения (l) и его величину (q_2) можно найти из той же системы (*):

$$l = L - R^2/L, \quad q_2 = q_1 R/L.$$

Сила, с которой заряд $+q_1$ притягивается к шару, равна

$$F = k \frac{q_1 q_2}{l^2}.$$

* Потенциал точечного заряда q имеет вид: $\varphi = kq/r$. Условие $kq_1/r_1 - kq_2/r_2 = 0$ преобразуется к равенству $r_1/r_2 = q_1/q_2$, т. е. описывает геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до заданных двух точек имеет фиксированное значение. Докажите сами, что это сфера.

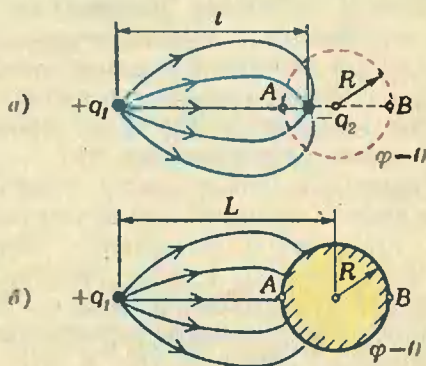


Рис. 6.

А как же найти поле и силу притяжения в случае незаряженного шарика? Тогда кроме изображения $-q_2$ надо поместить в центр сферы еще один воображаемый заряд $+q_2$. Поле этих трех зарядов вне сферы будет совпадать с полем заряда $+q_1$ и незаряженного шарика. Почему? Заметим, что поверхность сферы останется эквипотенциальной поверхностью и после добавления третьего заряда. Зато число силовых линий, входящих внутрь сферы, теперь точно равно числу силовых линий, из нее выходящих, — ведь полный заряд внутри сферы равен нулю. Но такому же условию удовлетворяет поле и в случае незаряженного проводника! Значит, мы нашли правильное поле. Сила притяжения заряда $+q_1$ к шару в этом случае будет заметно меньше — ведь он не только притягивается к изображению $-q_2$, но и отталкивается (с меньшей силой) от другого изображения $+q_2$:

$$F = k \frac{q_1 q_2}{l^2} - k \frac{q_1 q_2}{L^2}.$$

А. И. Черноуцан

■ Ядерные спектры

Как вы знаете, атомные ядра состоят из нуклонов — протонов и нейтронов, между которыми действуют ядерные силы притяжения и кулоновские силы отталкивания. Что может произойти с ядром при его столкновении с другим ядром, частицей или гамма-квантом? Опыты Э. Резерфорда, выполненные в 1919 году, показали, например, что под воздействием альфа-частицы из ядра может быть выбит протон. В экспериментах, проведенных Д. Чедвиком в 1932 году, было установлено, что альфа-частицы могут выбивать из атомных ядер и нейтроны («Физика 10», § 106). Но всегда ли так заканчивается процесс столкновения? Не может ли атомное ядро поглотить энергию, полученную при столкновении, и перераспределить ее между входящими в его состав нуклонами, изменив тем самым свою внутреннюю энергию? Что будет происходить с таким ядром дальше?

Ответы на эти вопросы дали прямые опыты по изучению взаимодействия протонов с атомными ядрами. Их результаты очень похожи на результаты опытов Франка и Герца по изучению столкновений электронов с атомами («Физика 10», § 96). Ока-

зывается, при постепенном увеличении энергии протонов сначала наблюдаются только упругие столкновения с атомными ядрами, кинетическая энергия не превращается в другие виды энергии, а лишь перераспределяется между протоном и атомным ядром как одной частицей. Однако, начиная с некоторого значения энергии протона, могут происходить и неупругие столкновения, при которых протон поглощается ядром и полностью передает ему свою энергию. Ядро каждого изотопа характеризуется строго определенным набором «порций» энергии, которые оно может принять.

Эти опыты доказывают, что ядра обладают дискретными спектрами возможных энергетических состояний. Таким образом, квантование энергии и ряда других параметров является свойством не только атомов, но и атомных ядер. Состояние атомного ядра с минимальным запасом энергии называется основным, или нормальным, состоянием, а состояния с избыточной энергией (по сравнению с основным состоянием) называются возбужденными.

Атомы обычно находятся в возбужденных состояниях примерно



Превращение ядра азота с захватом альфа-частицы и испусканием протона.

10^{-8} секунды, а возбужденные атомные ядра избавляются от избытка энергии за гораздо более короткое время — порядка 10^{-15} – 10^{-16} секунды. Как и атомы, возбужденные ядра освобождаются от избытка энергии, испуская кванты электромагнитного излучения. Эти кванты называются гамма-квантами (или гамма-лучами). Дискретному набору энергетических состояний атомного ядра соответствует дискретный спектр частот излучаемых ими гамма-квантов. Гамма-лучи представляют собой поперечные электромагнитные волны, такие же, как радиоволны, видимый свет или рентгеновские лучи. Они являются самым коротковолновым видом электромагнитного излучения из всех известных, и соответствующие им длины волн лежат в диапазоне примерно от 10^{-11} м до 10^{-13} м.

Энергетические состояния атомных ядер и переходы ядер из одного состояния в другое с поглощением или излучением энергии принято описывать с помощью энергетических диаграмм, аналогичных энергетическим диаграммам атомов («Физика 10», § 94). На рисунке представлена энергетическая диаграмма ядра изотопа железа — $^{56}_{26}\text{Fe}$, полученная на основе опытов по бомбардировке протонами. Заметим, что при качественном сходстве энергетических диаграмм атомов и ядер между ними есть существенные количественные различия. Если для перевода атома из основного состояния в возбужденное требуется энергия в несколько электронвольт, то для возбуждения атомного ядра необходима энергия порядка сотен тысяч или миллионов электронвольт. Это различие обусловлено тем, что ядерные силы, действующие между нуклонами в ядре, в значительной степени превосходят силы кулоновского взаимодействия электронов с ядром.

Способность атомных ядер самопроизвольно переходить из состояний с большим запасом энергии в состояние с меньшей энергией объясняет происхождение не только гамма-излучения, но и радиоактивного распада ядер.

Многие закономерности в ядерных спектрах можно объяснить, если воспользоваться так называемой оболочечной моделью строения атомного

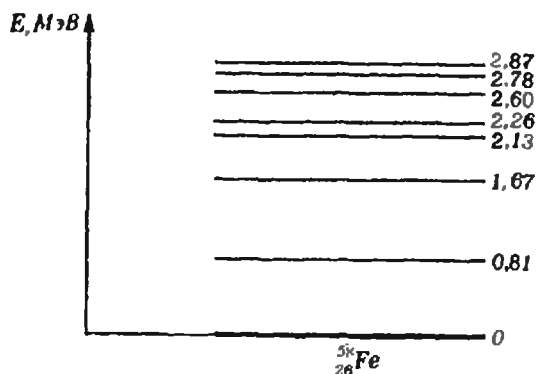


Диаграмма энергетических уровней ядра изотопа железа.

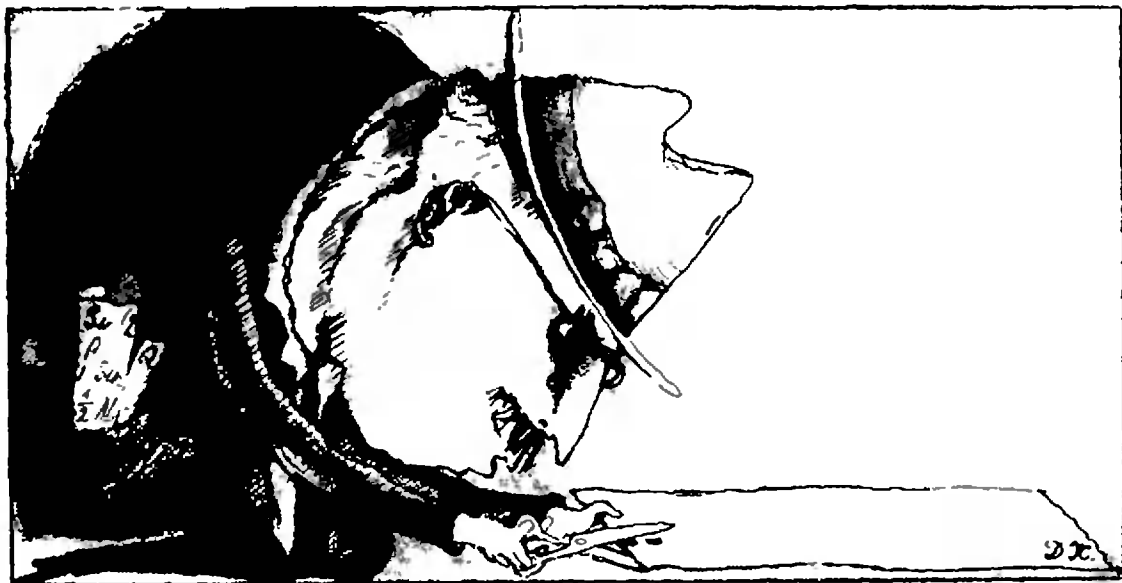
ядра. Согласно этой модели, нуклоны в ядре не перемешаны в беспорядке, а, подобно электронам в атоме, располагаются связанными группами, заполняя разрешенные ядерные оболочки. При этом протонные и нейтронные оболочки заполняются независимо друг от друга. Максимальные числа нейтронов: 2, 8, 20, 28, 40, 50, 82, 126 и протонов: 2, 8, 20, 28, 50, 82 в заполненных оболочках получили название магических. Ядра с магическими числами протонов и нейтронов обладают многими замечательными свойствами: повышенным значением удельной энергии связи, меньшей вероятностью вступления в ядерное взаимодействие, устойчивостью по отношению к радиоактивному распаду и т. п.

Переход ядра из основного состояния в возбужденное и возвращение его в основное состояние, с точки зрения оболочечной модели, объясняется переходом нуклона с одной оболочки на другую и обратно.

При большом числе достоинств оболочечная модель ядра не способна объяснить свойства всех ядер в различных типах взаимодействий. Во многих случаях более плодотворным оказывается представление о ядре как о капле ядерной жидкости, в которой нуклоны связаны ядерными силами, кулоновскими силами и силами поверхностного натяжения.*) Существуют и другие модели, но ни одна из предложенных до сих пор не может считаться универсальной.

О. Ф. Кабардин

*) Более подробно о капельной модели ядра можно прочитать в соответствующей заметке в разделе «Школа в «Кванте», опубликованной в «Кванте» № 5 за 1986 год на странице 23. (Примеч. ред.)



Математический кружок ●

В поисках оптимального раскроя

Кандидат физико-математических наук
М. Е. БАЛК,
Г. М. ЛАНДМАН

Завод детских игрушек приступил к массовому выпуску нового изделия, одна из деталей которого — небольшой многоугольник определенной формы и размеров (рис. 1) из тонкой жести. На заводе имелся станок, на котором легко и быстро можно было нарезать из листа жести прямоугольники любых заданных размеров. Поэтому технологами было принято решение: нарезать сначала одинаковые прямоугольные заготовки надлежащих размеров, а затем уже обрезать каждый такой прямоугольник так, чтобы из него получить требуемую многоугольную деталь. А размеры прямоугольников следует, естественно, выбрать так, чтобы отходы на обрезки были минимальными. Так возникла математическая задача, о решении которой мы расскажем в данной заметке.

Основная задача. Указать алгоритм, который позволяет среди всех

прямоугольников Π , вмещающих в себе данный многоугольник M , выбрать тот, который имеет наименьшую площадь.

Прямоугольник, удовлетворяющий условию этой задачи, мы будем называть *оптимальным*. Если какой-либо прямоугольник вмещает в себе многоугольник M , а на контуре прямоугольника нет ни одной вершины многоугольника, то можно прямоугольник *улучшить*, т. е. заменить его другим прямоугольником меньшей площади, также содержащим в себе многоугольник M . Для этого достаточно перенести параллельно самой себе каждую из четырех прямых, содержащих стороны прямоугольника M так, чтобы они (после переноса) уже проходили через какие-то вершины многоугольника M . На рисунке 1 таким «улучшенным» прямоугольником (по сравнению с Π) является Π' .

Принято называть *опорной прямой* для данного многоугольника M любую прямую, которая содержит хотя бы одну точку контура многоугольника и не содержит ни одной его внутренней точки (например, на рисунке 1 прямые a и b — опорные для многоугольника M , а прямая c — не опорная). Прямоугольник, все четыре стороны которого лежат на опорных прямых для многоугольника M , будем называть *описанным около M* . Таким

является прямоугольник P' на рисунке 1. Как только мы для заданного многоугольника M (рис. 1) выбрали опорную прямую (a), мы тем самым уже однозначно задали прямоугольник, описанный около M . Описанный около M прямоугольник обладает, очевидно, тем свойством, что на каждой его стороне (быть может, в ее конце) помещается хотя бы одна вершина многоугольника (рис. 1). Из двух прямоугольников, описанных около данного многоугольника M , будем называть *лучшим* тот, который имеет меньшую площадь. Оптимальный прямоугольник, о котором говорится в основной задаче, следует, очевидно, искать среди прямоугольников, описанных около M .

Технологи завода высказали две гипотезы:

Гипотеза I. *Оптимальный прямоугольник для многоугольника M — это тот описанный прямоугольник, у которого одна сторона содержит наибольшую сторону многоугольника.*

Гипотеза II. *Оптимальный прямоугольник — тот описанный прямоугольник, у которого одна сторона параллельна наибольшей диагонали многоугольника.*

На этот этап задача была предложена математику.

С чего начал математик

Математик начал с совсем, казалось бы, неинтересного и малосодержательного вопроса: «А существует ли вообще оптимальный прямоугольник?»

Выберем на плоскости какую-нибудь точку O и проведем через нее ось l_0 (рис. 2а). Затем проведем через O произвольно луч $l = l_\varphi$ и пусть он образует угол φ с осью l_0 . Мы можем построить для многоугольника M опорную прямую, параллельную лучу l , и затем — тот (единственный) описанный прямоугольник P , две стороны которого параллельны лучу l ; его площадь обозначим через $S(\varphi)$. Будем изменять угол φ : пусть этот угол растет от 0 до π ; при этом

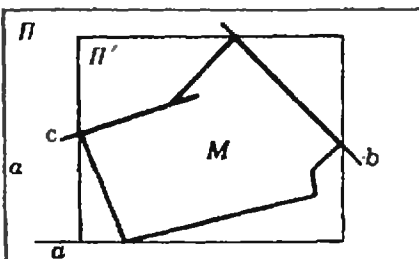


Рис. 1.

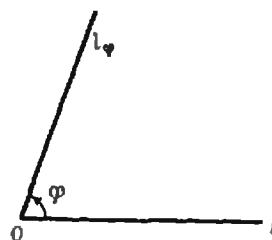


Рис. 2а.

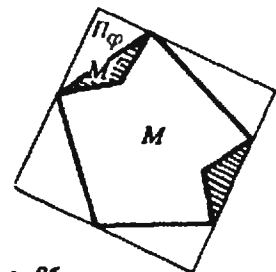


Рис. 2б.

будет меняться и прямоугольник P , и мы получим все возможные прямоугольники, описанные около M ; будет непрерывно изменяться и S (т. е. при малом изменении угла φ мало изменится и величина $S(\varphi)$). Но функция, непрерывная на некотором отрезке (в нашем случае — на отрезке $[0; \pi]$), обязана принимать при каком-то (хотя бы при одном) значении φ из этого отрезка свое наименьшее значение («Алгебра и начала анализа 9—10», с. 89). Значит, найдется такой угол φ , что соответствующий описанный около M прямоугольник будет иметь наименьшую возможную площадь (будет оптимальным). Иначе говоря, среди прямоугольников, описанных около многоугольника M , наверняка имеется (хотя бы один) оптимальный.

Удостоверившись в существовании и решения, математик приступил к его поиску.

Рассмотрим произвольный многоугольник — невыпуклый или выпуклый. Случай невыпуклого многоугольника, однако, легко сводится к случаю выпуклого многоугольника. В самом деле, пусть M — невыпуклый многоугольник. Рассмотрим наименьший выпуклый многоугольник M' , содержащий многоугольник M (M' называют выпуклой оболочкой многоугольника M , рис. 2б). Легко понять, что прямоугольник P содержит в себе многоугольник M в том и только том случае, когда он содержит его выпуклую оболочку M' . Следовательно, задача поиска оптимального прямоугольника для многоугольника M равносильна той же задаче для выпуклого многоугольника M' .

Чтобы освоиться с ней, попытаемся сначала решить ее в простейшем частном случае, когда M — треугольник.

Решение задачи для треугольника

Пусть M — треугольник ABC , а P — какой-либо прямоугольник, описанный около M . На каждой из четырех сторон прямоугольника должна быть хотя бы одна вершина треугольника. Поэтому по крайней мере одна вершина треугольника «обслуживает» две

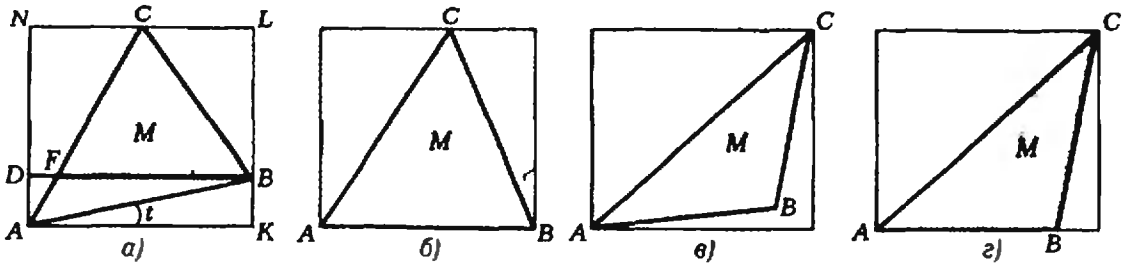


Рис. 3.

стороны прямоугольника Π , являясь их общим концом. Однако остальные две вершины могут располагаться по-разному на сторонах (или внутри) прямоугольника, и возможны 4 принципиально разных случая (рисунки 3, а—г) в зависимости от их расположения.

Обозначим площадь треугольника ABC через σ , а через S — площадь прямоугольника Π .

В случае б) имеем, очевидно: $S = 2\sigma$.

В случаях в) и г): $S > 2\sigma$.

Как обстоит дело в случае а)? Проведем через B параллель к стороне AK прямоугольника и отметим точки F и D ее встречи со стороной треугольника и стороной прямоугольника. Тогда

$$S = S_{AKBD} + S_{BDNL} > 2S_{BFA} + 2S_{BFC} = 2\sigma, \text{ т. е. } S > 2\sigma.$$

Видим, что оптимальный прямоугольник возникает лишь в случае б). Таким образом, среди описанных прямоугольников, вмещающих в себе заданный треугольник M , оптимальным является такой, у которого основание совпадает со стороной треугольника; при этом площадь оптимального прямоугольника ровно вдвое больше площади треугольника. Понятно, что если треугольник — тупоугольный, то такой оптимальный прямоугольник — единственный. В случае разностороннего остроугольного треугольника оптимальных прямоугольников — три. Возможен и тот случай, когда оптимальных прямоугольников два (например, если треугольник прямоугольный).

Алгоритм получения оптимального прямоугольника очевиден.

А как быть в случае четырехугольника?

Рассмотренный выше способ решения настолько прост, что даже в голову не приходит искать другой способ. А между тем наш способ обладает од-

ним крупным недостатком: он не переносится на случай многоугольника, у которого больше трех сторон. Поэтому прикинем, какой другой, более перспективный, подход мог бы — в случае треугольника — привести нас к решению. В случае а) мы могли бы вычислить суммарную площадь отрезаемых треугольников (обозначим ее через T), выразив ее через угол t (угол наклона стороны треугольника AB к опорной прямой AK) и через элементы треугольника; можно показать, что эта сумма имеет вид

$$T = T(t) = A_1 \sin 2t + A_2 \sin (2t + \theta_2) + A_3 \sin (2t + \theta_3),$$

где $A_1, A_2, A_3, \theta_2, \theta_3$ — какие-то числа, которые не зависят от t (а зависят только от элементов треугольника ABC). Затем мы могли бы попытаться отбросить те значения t , для которых эта сумма заведомо не принимает минимального значения. Этот способ в случае треугольника может показаться неоправданно громоздким, но в случае четырехугольника и других многоугольников он приводит к решению — и, как оказывается, не так уж сложно.

Сформулируем в виде задач два простых факта, которые нам потребуются в дальнейшем (решения — в одном из следующих номеров).

Задача 1. Каждую сумму вида $T(t) = A_1 \sin (2t + \theta_1) + A_2 \sin (2t + \theta_2) + \dots + A_n \sin (2t + \theta_n)$

можно всегда привести к виду

$$T(t) = \rho \sin (2t + \theta), \quad (1)$$

где $\rho \geq 0$ и числа ρ и θ зависят только от чисел $A_1, \dots, A_n, \theta_1, \dots, \theta_n$ (но не зависят от t).

Задача 2. Если для всех значений t из некоторого интервала вида $(t_0 - \varepsilon; t_0 + \varepsilon)$ (концы не входят) функция $\sin (2t + \theta)$ неотрицательна, то найдется на этом интервале такое значение t_1 , что верно строгое неравенство:

$$\sin (2t_1 + \theta) < \sin (2t + \theta). \quad (2)$$

Случай произвольного n -угольника

Пусть M — произвольный выпуклый n -угольник ($n \geq 4$), а Π_0 — ка-

кой-нибудь описанный около него прямоугольник. Сначала рассмотрим те случаи, когда ни одна сторона многоугольника M не лежит на стороне прямоугольника P_0 . При таком требовании могут на контуре прямоугольника P_0 оказаться не более четырех вершин многоугольника M . При этом возможны следующие три варианта:

I. Две вершины многоугольника M служат концами диагонали прямоугольника P_0 , а остальные вершины M — внутри P_0 , рис. 4, а).

II. Одна вершина многоугольника M служит вершиной прямоугольника P_0 , две вершины многоугольника M являются внутренними точками двух сторон P_0 , а остальные вершины M — внутри P_0 , рис. 4, б).

III. Какие-то четыре вершины многоугольника M являются внутренними точками четырех сторон прямоугольника P_0 , а остальные вершины многоугольника M лежат внутри P_0 , рис. 4, в).

Все три варианта рассматриваются единообразным приемом: вычисляется площадь описанного прямоугольника и выясняется, нельзя ли его путем «малого шевеления» улучшить, т. е. получить описанный прямоугольник с меньшей площадью; если окажется, что можно, то рассматриваемый прямоугольник P_0 заведомо не оптимальный.*)

Мы рассмотрим здесь вариант I — наиболее простой. Обозначим через A и C те две вершины M , которые служат концами диагонали описанного прямоугольника P_0 ($F_0K_0L_0N_0$). Пусть AB — сторона M , лежащая внутри P_0 (кроме конца A); можно считать, что AB — в $\triangle F_0K_0L_0$. Обозначим величину угла BAK_0 через t_0 , величину угла CAB — через λ . Вычислим площадь S_{P_0} :

$$\begin{aligned} S_{P_0} &= AK_0 \cdot K_0L_0 = \\ &= AC \cdot \cos(t_0 + \lambda) \cdot AC \sin(t_0 + \lambda) = \\ &= \frac{1}{2} AC^2 \sin(2t_0 + 2\lambda). \end{aligned}$$

Теперь, считая все вершины многоугольника M закрепленными на плоскости, пошевелим опорную прямую AK_0 : начнем ее вращать вокруг вершины A (по часовой стрелке или против часовой стрелки). При повороте прямая AK_0 займет некоторое новое положение AK (изменяющееся с течением времени). При этом будет изменяться и соответствующий описанный прямоугольник: он будет поворачиваться вокруг точки A и займет новое положение $П$ (рис. 5), изменив, быть может, свои размеры. Но пока угол поворота достаточно мал, картина качественно меняться не будет. Говоря точнее, можно подобрать настолько малый угол $\epsilon > 0$, чтобы при любом выборе угла t из интервала $(t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon)$ описанный прямоугольник $П$, для которого $BAK = t$, имел концами своей диагонали вершины A и C многоугольника, а все остальные вершины многоугольника были внутри $П$. Площадь его $S_{П}$ вычисляется так же, как площадь S_{P_0} :

$$S_{П} = \frac{1}{2} AC^2 \sin(2t + 2\lambda).$$

В силу задачи 2 существует такой угол t на интервале $(t_0 - \epsilon; t_0 + \epsilon)$, что $\sin(2t + 2\lambda) < \sin(2t_0 + 2\lambda)$, а следовательно, $S_{П} < S_{P_0}$. А это означает, что прямоугольник P_0 , появляющийся в варианте I, — не оптимальный: его можно «улучшить». Разбор оставшихся двух случаев мы оставляем читателю в качестве задач.

Задача 3. Докажите, что в варианте III — прямоугольник P_0 не оптимальный.

Задача 4. Докажите, что и в варианте II — прямоугольник P_0 не оптимальный.

Видим, что пока описанный прямоугольник не содержит ни одной стороны многоугольника M (см. вариан-

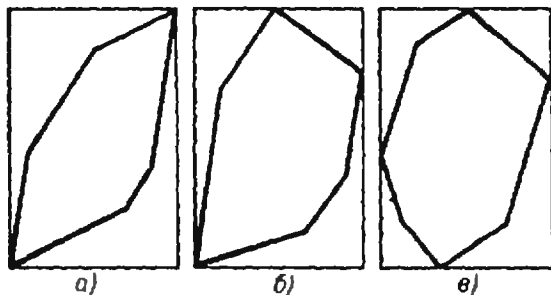


Рис. 4.

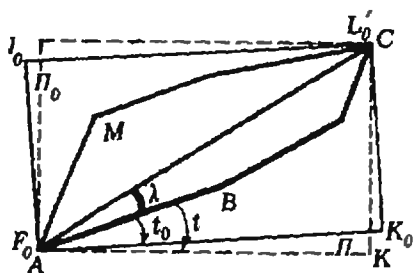


Рис. 5.

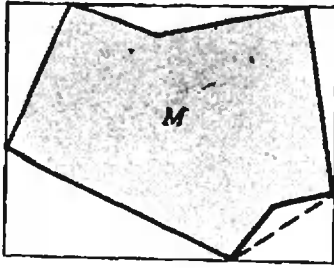


Рис. 6.

ты I, II, III), он не может оказаться оптимальным. Но оптимальный прямоугольник, как мы уже знаем, существует. Таким образом математик получил следующий

Алгоритм решения основной задачи

1) Если данный n -угольник M — выпуклый, то начерти все описанные прямоугольники, содержащие хотя бы одну сторону многоугольника (таких прямоугольников не более n).

2) Вычисли площади этих прямоугольников и выбери среди прямоугольников все такие, чья площадь — наименьшая. Каждый из них является оптимальным прямоугольником для рассматриваемого n -угольника. Других оптимальных прямоугольников не существует.

3) Если многоугольник M невыпуклый, то сначала построй для него выпуклую оболочку M' , а затем найди для многоугольника M' оптимальный прямоугольник — он же будет и оптимальным прямоугольником для многоугольника M .

Когда поиск упрощается

Мы видели, что нахождение оптимального прямоугольника для данного выпуклого n -угольника M сводится к перебору не более, чем n прямоугольников. Имеются важные случаи, когда этот перебор упрощается. Мы их сформулируем в виде задач. Здесь следует учесть, что у выпуклого n -угольника, отличного от прямоугольника, не более трех тупых углов (в противном случае сумма углов не будет равной $180^\circ (n-2)$).

Задача 5. Пусть в некотором выпуклом многоугольнике M имеется лишь одна сторона, к которой прилегают два тупых угла. Докажите, что тогда среди прямоугольников, описанных около M , имеется лишь один оптималь-

ный — таковым будет описанный прямоугольник, одна сторона которого содержит указанную выше сторону многоугольника M .

Задача 6. Пусть в некотором выпуклом n -угольнике M , отличном от треугольника и прямоугольника, имеются две стороны, к каждой из которых прилегают по два тупых угла. Докажите, что тогда каждый описанный около M прямоугольник, построенный на одной из этих двух сторон, является оптимальным; других оптимальных прямоугольников не существует.

Эпилог

Математик передал технологам завода найденный им алгоритм, и еще указал на упрощения, возникающие в случае задач 5 и 6. Это позволило выбрать технологически оптимальное решение задачи для данной конкретной детали: соответствующий прямоугольник показан на рисунке 6. Гипотезы, выдвинутые технологами, оказались ошибочными. В случае, если аналогичные задачи возникнут для других деталей в форме многоугольника, технологи теперь владеют надежным общим алгоритмом и могут к математике больше не обращаться.

По этому вопросу.

Упражнения

1. Начертите какой-нибудь выпуклый четырехугольник, отличный от прямоугольника, у которого два противоположных угла — прямые. Покажите, что для него имеются два оптимальных прямоугольника. Начертите эти прямоугольники.

2. Проверьте гипотезу 1 и гипотезу 2.

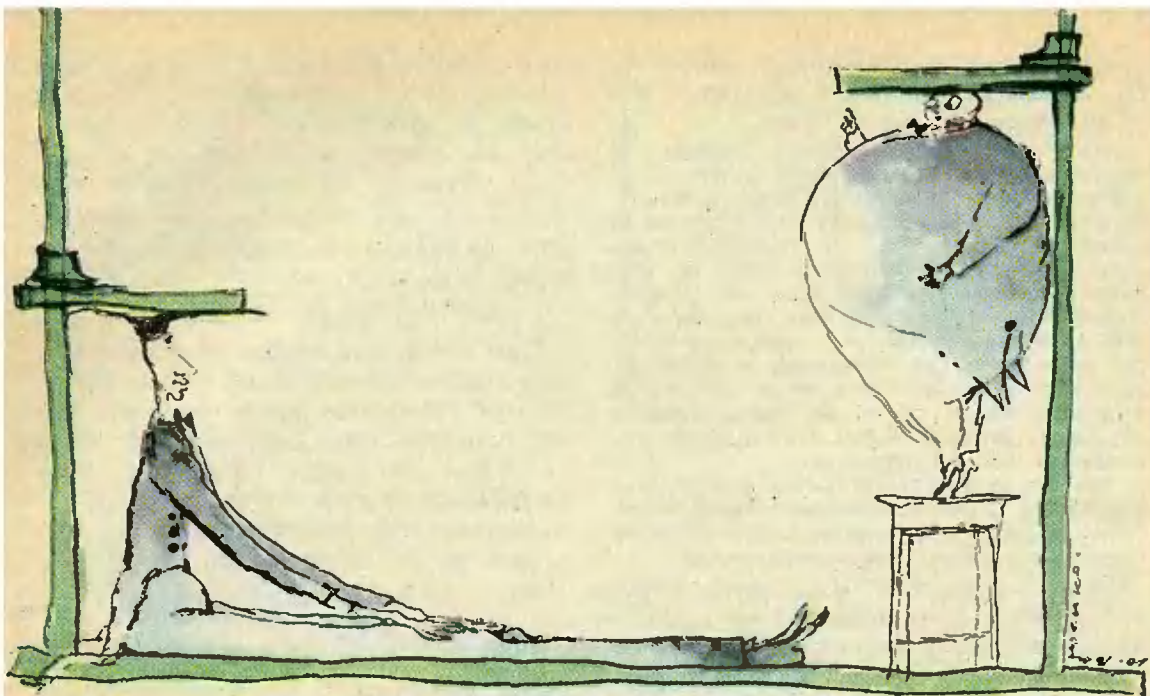
3. Начертите какой-либо выпуклый пятиугольник с тремя последовательными прямыми углами. Постройте для него все оптимальные прямоугольники. Сколько их?

4. Начертите шестиугольник, в котором имеется три пары параллельных сторон и три попарно неравных стороны. Начертите для него оптимальный прямоугольник.

5. Дан правильный треугольник Δ . Рассматриваются всевозможные равнобедренные трапеции, у которых острые углы равны по 60° , описанные около треугольника Δ . Докажите, что среди указанных трапеций нет оптимальной.

6. Дан треугольник Δ . Среди всевозможных выпуклых четырехугольников с заданными углами $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ($\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$), описанных около треугольника Δ , выбрать тот, чья площадь — наименьшая. Если такой существует, то как его найти?

7. Пусть M — заданный выпуклый n -угольник. Пусть $\{A_1, A_2, \dots, A_k\}$ — всевозможные выпуклые k -угольники с заданными углами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ ($\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k = (k-2)\pi$), описанные около n -угольника M . Докажите, что если среди этих k -угольников имеется такой, чья площадь минимальна, то хотя бы на одной его стороне содержится сторона n -угольника M (так что оптимальных k -угольников не более, чем n).



Трактикум абитуриента

Неравенства с параметром

Кандидат физико-математических наук
А. С. ЯРСКИЙ

В настоящей статье читатель найдет общий метод решения встречающихся на вступительных экзаменах неравенств с параметром.

Пример 1 (ЛГУ, мат.-мех., 1965)
Решите неравенство

$$\log_x(x-a) > 2. \quad (1)$$

1. Найдем область определения неравенства (1):

$$x > 0, x \neq 1, x-a > 0.$$

2. Решим соответствующее неравенству (1) уравнение

$$\log_x(x-a) = 2 \Rightarrow x-a = x^2.$$

Изобразим в плоскости Oxa область определения и график последней функции на одном чертеже. Что касается функции, то проще выразить a через x : $a = x - x^2$ — парабола в плоскости Oxa . Нужно выяснить, как расположена эта парабола по отношению к прямой $x = a$ — границе области определения. Оказывается, эти парабола и прямая имеют ровно одну общую точку $(0; 0)$ (проверьте). Все ска-

занное отражено на рисунке 1. Область определения на рисунке 1 закрашена. Красным цветом (на протяжении всей статьи) изображены линии, в точках которых данное неравенство не определено или не выполнено. (Отметим, что следовало изобразить лишь попадающую в область определения часть параболы.)

Итак, область определения разбилась на четыре части D_1, \dots, D_4 .

Оказывается, справедливо следующее

Предложение. Каждая из областей D_1, \dots, D_4 обладает свойством: либо неравенство (1) выполнено во всех точках области, либо не выполнено ни в одной ее точке.

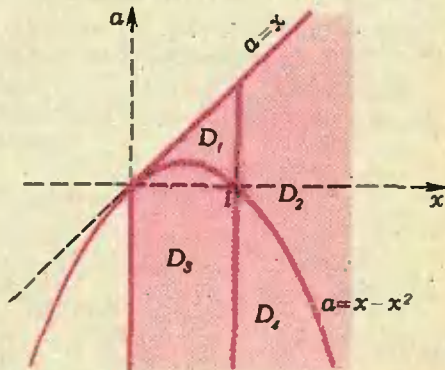


Рис. 1.

Иначе говоря, каждая из областей D_1, \dots, D_4 либо целиком входит, либо целиком не входит в ответ.

Интуитивно это утверждение сомнений не вызывает. Действительно, ясна причина, по которой знак неравенства (1) может измениться в результате перехода из точки области D_1 в точку области D_2 — мы пересечем «красную» линию, т. е. побываем в точке, где входящие в неравенство функции не определены. При переходе из D_1 в D_3 также придется пересечь «красную» линию — побывать в точке, где неравенство (1) обращается в равенство. А при переходе из одной точки области D_1 в другую ее точку — не видно никаких «красных» линий, а значит, нет и причины для изменения знака неравенства!

Все эти верные по существу утверждения нуждаются в доказательстве. К сожалению, такое доказательство требует знаний, выходящих за рамки школьной программы...

Если принять на веру справедливость предложения, то решение неравенства может завершить не сложная

3. Проверка. В каждой из областей D_1, \dots, D_4 произвольно выберем по одной точке, например, $A_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{8}\right) \in D_1$,

$A_2(2; 0) \in D_2$, $A_3\left(\frac{1}{2}; -1\right) \in D_3$,

$A_4(2; -3) \in D_4$ (проверьте, попадают ли эти точки в соответствующие области). Подставляя в неравенство (1) выбранные значения $(x; a)$, получим, что неравенство выполнено только в точках A_1 и A_4 . Это означает, согласно Предложению, что неравенство выполнено во всех точках областей D_1 и D_4 и только в этих точках.

4. Как записать ответ. По традиции x обозначает неизвестную, a — параметр. Поэтому требуется указать, как меняется x в зависимости от значения параметра a . Выберем сначала произвольное $a < 0$. Множество точек на плоскости Oxa с фиксированным a образует горизонтальную прямую. Нужно выяснить, при каких значениях x точки этой прямой находят-

ся в области D_4 . Из рисунка 2 видно, что $x \in]x_1; x_2[$ («красные» границы в ответ не входят), где $x_1 = 1$, а точка $(x_2; a)$ лежит на параболе $a = x - x^2$. Отсюда $x_2^2 - x_2 + a = 0$ и $x_2 = \frac{1 + \sqrt{1 - 4a}}{2}$ (подумайте, почему при радикале выбран знак «+»). Итак, если $a < 0$, то

$$x \in]1; (1 + \sqrt{1 - 4a})/2[.$$

При $a = 0$, как видно из рисунка 1, неравенство решений не имеет. Передвигая горизонтальную прямую выше, увидим (см. рис. 3), что если $a \in]0; 1/4]$, то $x \in]x_1; x_2[\cup]x_3; 1[$; если $a \in]1/4; 1[$, то $x \in]x_1; 1[$; если же $a \geq 1$, то неравенство решений не имеет. Выразим x_1, x_2, x_3, x_4 через a : $x_1 = a$,

$$x_2 = (1 - \sqrt{1 - 4a})/2,$$

$$x_3 = (1 + \sqrt{1 - 4a})/2,$$

$x_4 = a$. И соединив найденные формулы, получим

Ответ: Если $a \in]-\infty; 0[$, то $x \in]1; (1 + \sqrt{1 - 4a})/2[$; если $a = 0$, то $x \in \emptyset$; если $a \in]0; 1/4]$, то $x \in$

$\in]a; (1 - \sqrt{1 - 4a})/2[\cup](1 + \sqrt{1 - 4a})/2; 1[$; если $a \in]1/4; 1[$, то $x \in]a; 1[$; если $a \in [1; +\infty[$, то $x \in \emptyset$.

Изложенное решение содержит серьезный изъян — ссылку на верное, но не доказанное предложение. По поводу такого решения экзаменатор делает вывод: «Ответ верен, но не обоснован!». И задача абитуриенту зачтена не будет. Поэтому для полного решения задачи необходимо дополнительное

5. Обоснование. Неравенство (1) равносильно выполнению одной из двух систем неравенств:

$$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ x - a < x^2, \end{cases} \text{ либо } \begin{cases} x > 1, \\ x - a > x^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 0 < x < 1, \\ a > x - x^2, \end{cases} \text{ либо } \begin{cases} x > 1, \\ a < x - x^2. \end{cases}$$

Первая из двух систем описывает множество на плоскости Oxa , лежащее в полосе между прямыми $x = 0$ и $x = 1$

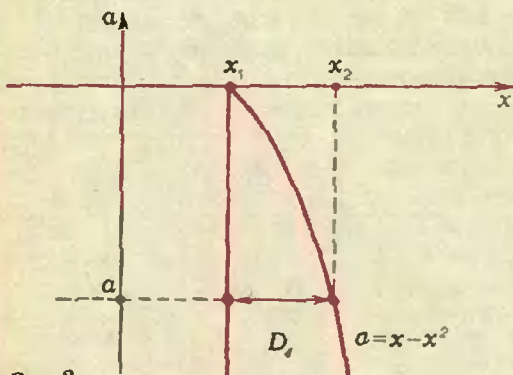


Рис. 2.

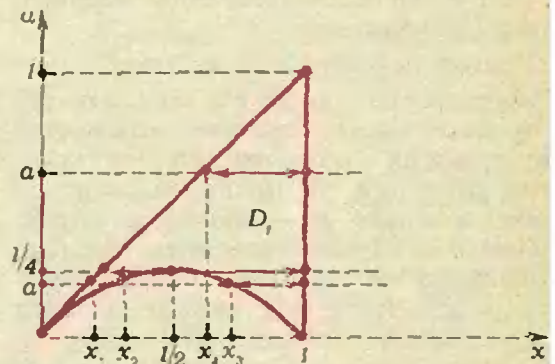


Рис. 3.

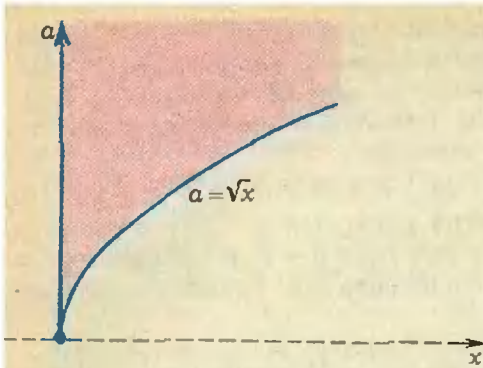


Рис. 4.

и одновременно — выше параболы $a = x - x^2$, т. е. (с учетом области определения) — в точности область D_1 (см. рис. 1). Аналогично вторая система описывает область, лежащую правее прямой $x = 1$ и ниже параболы $a = x - x^2$ — область D_2 . Найденный ранее ответ полностью обоснован.

Легко заметить, что п. 5 сделал излишней проведенную в п. 3 проверку. Однако отказываться от проверки неразумно: она проста, позволяет быстро получить ответ и, что самое главное, делает метод решения существенно более надежным.

При оформлении решения задачи лучше всего оставить сыгравшую свою роль проверку в черновике — она уже не нужна — и вписать на ее место выкладки из п. 5.

Пример 2 (ЛГУ, мат.-мех., 1966).
Решите неравенство

$$\sqrt{a + \sqrt{x}} + \sqrt{a - \sqrt{x}} < \sqrt{2}. \quad (2)$$

1. Найдем и изобразим на плоскости Оха область определения:

$$x \geq 0, \quad a + \sqrt{x} \geq 0, \quad a - \sqrt{x} \geq 0.$$

Получается область, расположенная правее прямой $x = 0$ и выше параболы $a = \sqrt{x}$, что и показано на рисунке 4 (входящие в область определения границы изображены синим цветом).

2. Решим соответствующее неравенству (2) уравнение

$$\sqrt{a + \sqrt{x}} + \sqrt{a - \sqrt{x}} = \sqrt{2}.$$

Так как обе части уравнения неотрицательны, то, возведя в квадрат, получим (с учетом области определения) равносильное уравнение:

$$2a + 2\sqrt{a^2 - x} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - x} = 1 - a \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - x = 1 - 2a + a^2, \\ 1 - a \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2a - 1, \\ a \leq 1. \end{cases}$$

Теперь нужно совместить область определения (рис. 4) и найденную прямую $x = 2a - 1$ на одном чертеже. Несложно проверить, что эта прямая и парабола $a = \sqrt{x}$ имеют только одну общую точку $(1; 1)$ (проверьте). Изобразив ту часть луча $x = 2a - 1$,

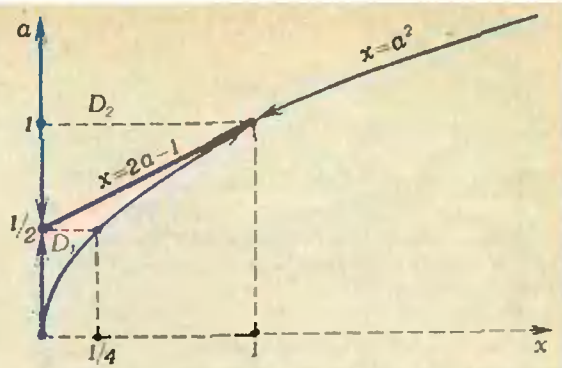


Рис. 5.

$a \leq 1$, которая попадает в область определения, получим рисунок 5. Итак, область определения разбилась на две части D_1 и D_2 . Точно так же, как в примере 1, каждая из этих областей может лишь целиком войти в ответ.

3. Проверка. Выберем точки $A_1(1/25; 1/4) \in D_1$, $A_2(1; 2) \in D_2$. Подставив в неравенство (2) координаты этих точек, получим, что неравенство выполнено только в точке A_1 , а значит, — в области D_1 (и на «синей» части ее границы). Рассматривая пересечение области D_1 со всевозможными горизонтальными прямыми, получим

4. Ответ:
если $a \in]-\infty; 0[\cup [1; +\infty[$, то $x \in \emptyset$;
если $a \in [0; 1/2[$, то $x \in [0; a^2]$;
если $a \in [1/2; 1[$, то $x \in [2a - 1; a^2]$.

Как и в примере 1, полученный ответ нуждается в обосновании.

5. Обоснование. Преобразуем неравенство (2):

$$\begin{aligned} \sqrt{a + \sqrt{x}} + \sqrt{a - \sqrt{x}} < \sqrt{2} &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 2a + 2\sqrt{a^2 - x} < 2 &\Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - x} < 1 - a &\Leftrightarrow \\ \begin{cases} 1 - a \geq 0, \\ a^2 - x < 1 - 2a + a^2, \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} a \leq 1, \\ x > 2a - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Последняя система неравенств описывает область, лежащую ниже прямой $a = 1$ и правее прямой $x = 2a - 1$, т. е. (с учетом области определения) область D_1 . Ответ обоснован.

Пример 3 (МГУ, хим.-фак., 1984). Найдите все a , при которых неравенство

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|a - 2||x + a - 4| + \\ + \left(\frac{a^2 - 4a + 3}{|a - 2|} - |a - 2| \right) |x - 2| + \\ + \frac{1}{2}|a - 2||x - a| \leq 1 \quad (3) \end{aligned}$$

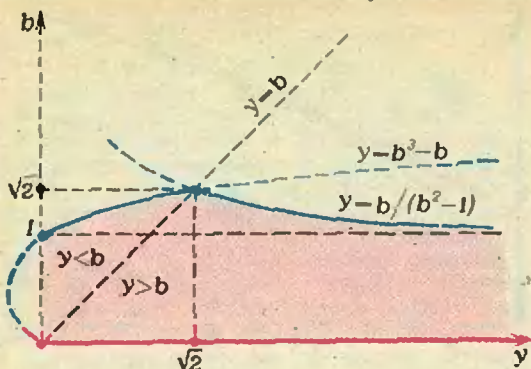


Рис. 6.

выполняется ровно для двух значений x .

Мы сделаем больше, чем требуется в задаче, — решим неравенство. Тогда, конечно, будет получен и ответ на поставленный вопрос.

1. Область определения: $a \neq 2$.

2. Преобразуем неравенство (3).

Умножая обе части на $2|a-2| > 0$ и учитывая равенство $|a-2|^2 = (a-2)^2$, получаем

$$\begin{aligned} (a-2)^2|x+a-4| + 2(a^2-4a+3-(a-2)^2|x-2| + (a-2)^2|x-a|) &\leq 2|a-2| \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (a-2)^2|x-2+a-2| - 2|x-2| + (a-2)^2|x-2-(a-2)| &\leq 2|a-2|. \end{aligned}$$

Теперь напрашивается замена

$$x-2=y, \quad a-2=b \neq 0 \quad (a \neq 2),$$

приводящая последнее неравенство к виду

$$b^2(|y+b| + |y-b|) \leq 2(|b| + |y|). \quad (4)$$

Итак, нам предстоит изобразить множество точек плоскости Oyb , координаты которых удовлетворяют неравенству (4). Заметим, что замена $(y; b)$ на $(y; -b)$ или $(-y; b)$ ничего не меняет в неравенстве (4) (проверьте). Это означает, что искомое множество обладает симметрией относительно обеих осей Oy и Ob . Поэтому достаточно нарисовать лишь расположенную в

первой четверти часть искомого множества и затем воспользоваться симметрией. В первой четверти $|y|=y$, $|b|=b$, $|y+b|=y+b$, и неравенство (4) примет вид

$$b^2(y+b+|y-b|) \leq 2(b+y). \quad (5)$$

Остается раскрыть $|y-b|$. В области $y \geq b$: $|y-b|=y-b$, и соответствующее неравенству (5) уравнение примет вид

$$2b^2y = 2(b+y) \Leftrightarrow y = b/(b^2-1).$$

Теперь несложно нарисовать часть графика этой функции, расположенную в области $y \geq b$ (рис. 6). В области $y < b$: $|y-b|=b-y$, и соответствующее неравенству (5) уравнение примет вид

$$b^2 \cdot 2b = 2(b+y) \Leftrightarrow y = b^3 - b.$$

Остается нарисовать часть графика последней функции, попадающую в область $y < b$ (см. рис. 6).

3. Проверка показывает, что из двух областей, на которые разбилась первая четверть, неравенству (5) удовлетворяет область, закрашенная на рисунке 6. Воспользовавшись симметрией, получим полную картину (рис. 7). Теперь из рисунка 7 видно, что только при $b = \pm\sqrt{2}$ неравенству (4) удовлетворяют ровно два различных значения y . И вернувшись к исходной переменной a , получим $a = b+2 = 2 \pm \sqrt{2}$.

4. Ответ: $a = 2 \pm \sqrt{2}$.

5. Обоснование. Преобразуем неравенство (5) (рассматривается первая четверть $y \geq 0, b > 0$):

$$\begin{aligned} b^2(y+b+|y-b|) &\leq 2(b+y) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow b^2|y-b| &\leq (2-b^2)(b+y) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -(2-b^2)(b+y) &\leq b^2(y-b) \leq \\ &\leq (2-b^2)(b+y). \end{aligned}$$

Эту систему неравенств несложно переписать в виде

$$\begin{cases} y \geq b^3 - b, \\ y(b^2 - 1) \leq b. \end{cases}$$

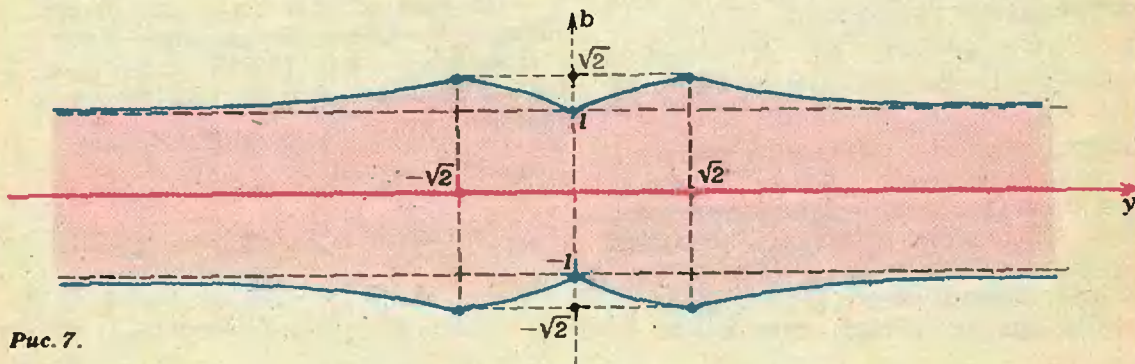


Рис. 7.

Если $0 < b \leq 1$, то второе неравенство будет выполнено при любом y . Если же $b > 1$, то $b^2 - 1 > 0$, и то же неравенство можно привести к виду $y \leq b/(b^2 - 1)$. Таким образом, полученная система неравенств распадается на две:

$$\begin{cases} y \geq b^3 - b, \\ 0 < b \leq 1 \end{cases} \begin{cases} y \geq b^3 - b, \\ y \leq b/(b^2 - 1), \\ b > 1. \end{cases}$$

Первая из двух систем описывает часть закрашенной на рисунке 6 области, расположенную ниже прямой $b = 1$, а вторая — оставшуюся часть той же области. Ответ обоснован.

Изложенный метод решения позволяет быть уверенным: если удастся решить соответствующее неравенству уравнение, то и решение неравенства не вызовет затруднений.

Упражнения

Решите неравенства 1—4:
1 (ЛГУ, 1965). $x + 4a > 5\sqrt{ax}$.

2 (МИФИ, 1982). $2 \log_4(x - a + 1) + \log_{1/2}(x - 3 - 2a) \geq 2$.

3 (ЛГУ, мат.-мех., 1980). $b \log_3 x + \log_{3x} 3 + b \geq 0, b < 0$.

4 (ТашГУ, 1984). $a^{x^2+2} + 8a^{x-1} - 4/a > a - 2$ ($a > 0, a \neq 1$).

5 (МГУ, фил.-фак., 1984). При каких a система неравенств

$$y \geq x^2 + 2a, x \geq y^2 + 2a$$

имеет единственное решение?

6 (МГУ, эконом. фак., 1977). При каких a неравенство

$$3 - |x - a| > x^2$$

имеет хотя бы одно отрицательное решение?

7 (ЛГУ, хим. фак., 1984). Для каких a в множестве решений неравенства $x + \sqrt{x^2 - 2ax} > 1$ содержится промежуток $[1/4; 1]$?

8 (ЛГУ, мат.-мех., 1979). При каких a любое решение неравенства $\frac{\log_3(x^2 - 3x + 7)}{\log_3(3b + 2)} < 1$

будет также решением неравенства $x^2 + (5 - 2a)x \leq 10a$?

9 (МГУ, мех.-мат., 1980). Найдите все a , при каждом из которых неравенство

$$\log_{1/a}(\sqrt{x^2 + ax + 5} + 1) \log_5(x^2 + ax + 6) + \log_a 3 \geq 0$$

имеет ровно одно решение.

**Варианты
вступительных
экзаменов**

**Новосибирский
государственный
университет
им. Ленинского комсомола**

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический и экономический факультеты)

1. Решите уравнение

$$3 \sin^2 x = \cos 2x + 4 \sin 2x.$$

2. Числа $\log_2(3^4 - 1)$, $\log_4(9 + 9^2 - 7 \cdot 3^4)$ и $\log_2(3 - 3^4)$ являются последовательными членами некоторой арифметической прогрессии. Найдите x .

3. Дана трапеция $ABCD$ с основанием AD и диагоналями BD и AC . Известно, что $AC = 3$, $BD = 4$, $\angle CAD = 2\angle BDA$. Найдите площадь трапеции $ABCD$.

4. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} ax + 3y = a^2 + 1, \\ (3a + 14)x + (a + 8)y = 5a^2 + 5 \end{cases}$$

не имеет решений.

5. Точки M и N — соответственно середины ребер AC и SB правильного тетраэдра $SABC$. Ребра тетраэдра имеют длину 1. На прямых AS и CN выбраны точки P и Q так, что прямая PQ параллельна прямой BM . Найдите длину отрезка PQ .

Вариант 2

(геолого-геофизический факультет и факультет естественных наук)

1. Решите уравнение

$$2 \cos 2x + 5 \cos^2 x = 8 \sin 2x - 6.$$

2. Решите уравнение

$$\log_2(2x - 2) + \log_4(x + 1)^2 = 2 + \log_2(x^2 + x - 3).$$

3. Длина стороны BC треугольника ABC равна a , величина угла A равна α . Точка O — центр окружности, вписанной в треугольник ABC . Найдите радиус окружности, проходящей через точки B, C и O .

4. Найдите все значения параметра a , при которых система уравнений

$$\begin{cases} 2ax + y = a^2 - 2a, \\ -10x + (a - 6)y = 10a - 5a^2 \end{cases}$$

не имеет решений.

5. В правильном тетраэдре $SABC$ плоскость α проходит через вершины S, C и середину M ребра AB , плоскость β проходит через вершину B и точки K и L — середины ребер SA и SC соответственно. Плоскости α и β пересекаются по прямой l . Найдите величину угла между прямой l и плоскостью грани ABC .

Вариант 3

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$2 \cos 2x + 1 = 5 \sin^2 x + 6 \cos x.$$

2. Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 6x^2 + 6x + 3$ на отрезке $[1; 6]$.

3. Окружности O_1 и O_2 радиусов 5 и 3 соответственно пересекаются в точках A и B , причем $AB = 4$. Известно, что центр окружности O_2 лежит вне круга O_1 . Точка C — середина дуги AB окружности O_2 , лежащей в круге O_1 . Лучи AC и BC пересекают окружность O_1 в точках M и N . Найдите длину отрезка MN .

4. Решите неравенство

$$\log_{x+1} \frac{3x}{5x-8} > 1.$$

5. В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($AB=BC=1$), длина боковых ребер SA , SB и SC равна 3. Точки K и L — середины ребер AC и BC , точки M и N выбраны соответственно на ребрах SA и SB так, что $SM=1$, $NB=1$. Найдите объем пирамиды $KLMN$.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из пяти задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные числовые значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи величины и их числовые значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

На решение задач давалось пять часов, начиная с завершения демонстраций.

Ниже после текста каждой задачи в скобках указан средний процент решивших ее.

Вариант 1

1. Найдите подъемную силу аэростата, наполненного гелием. Масса гелия равна m . Давления и температуры внутри и вне оболочки аэростата одинаковы. Молярная масса гелия $M_{\text{г}}$, воздуха $M_{\text{в}}$, ускорение свободного падения g . Массой оболочки пренебречь. (80 %)

2. Елочное украшение — тонкостенный шарик — разбивается при падении на каменный пол с минимальной высоты h (рис. 1). С какой минимальной скоростью шарик должен налететь на такой же покоящийся до соударения шарик, чтобы шарики разбились? (49 %)

3. Найдите изображения точечного источника S , создаваемые системой из линзы с фокусным расстоянием F и конического зеркала с углом при вершине, равным 90° (рис. 2). Ось конуса совпадает с осью линзы. Расстояние между вершиной конуса и линзой $2F$, а между источником и линзой $3F/2$. (42 %)

4. Оцените, какую мощность развивает велосипедист на финише. (51 %)

5. Колбу с закипевшей водой снимают с плитки — кипение прекращается. Колбу плотно закрывают резиновой пробкой с протетом

сквозь нее массивным медным стержнем — вода закипает. Объясните явление. (65 %)

Вариант 2

1. Два шарика одинакового радиуса R , — но один из алюминия, а другой деревянный, — соединенные длинной нитью, медленно тонут в воде, двигаясь с постоянной скоростью (рис. 3). Найдите силу сопротивления воды, действующую на каждый из шариков. Плотность алюминия ρ_1 , дерева ρ_2 , воды ρ_0 . Ускорение свободного падения g . (61 %)

2. Пробирка длиной l , содержащая воздух и насыщенный водяной пар, касается открытым концом поверхности воды (рис. 4). Пробирку погружают в воду наполовину, при этом поверхность воды в пробирке оказывается на глубине a . Найдите давление насыщенного водяного пара. Температура постоянная, атмосферное давление p , плотность воды ρ , ускорение свободного падения g . (55 %)

3. Три одинаковые плоские металлические пластины A , B и C площадью S каждая расположены параллельно друг другу на расстояниях d_1 и d_2 (рис. 5). Пластины изолированы; на пластинах B и C находятся заряды $+q$ и $-q$, а пластина A не заряжена. Затем пластины A и C соединили через резистор, замкнув ключ K . Найдите количество теплоты, выделившееся в резисторе. (46 %)

4. Оцените, на каком расстоянии железнодорожные рельсы кажутся слившимися. (65 %)

5. Проводящее колесо может свободно вращаться вокруг своей оси, расположенной вертикально. Между центром колеса и его ободом создается постоянная разность потенциалов. Если к колесу поднести магнит, оно начинает вращаться. При смене полюса магнита направление вращения изменяется на противоположное. Объясните явление. (52 %)

Вариант 3

1. Вдоль главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=5$ см движутся навстречу друг другу два светлячка, находящиеся по разные стороны линзы. Скорость светлячков одна и та же и равна $v=2$ см/с. Через какое время первый светлячок встретится с изображением второго, если в начальный момент они находились на расстояниях $l_1=20$ см и $l_2=15$ см от линзы? (70 %)

2. Две стороны правильного треугольника образованы одинаковыми равномерно заряженными палочками. При этом в центре O треугольника потенциал равен φ_0 , а напряженность электрического поля равна E_0 . Найдите потенциал, а также модуль и направление вектора напряженности, которые будут в точке O , если одну из палочек убрать. (63 %)

3. Два одинаковых упругих шарика A и B движутся навстречу друг другу со скоростями v и $2v$, причем прямые, проходящие через центры каждого из шариков в направлении их движения, касаются другого шарика (рис. 6). Найдите, под каким углом к первоначальному направлению будет двигаться шарик A после соударения. (38 %)

4. Оцените изменение давления в парной после того, как на раскаленные камни плеснули воду из ковша. (При оценке парную считать герметичной.) (58 %)

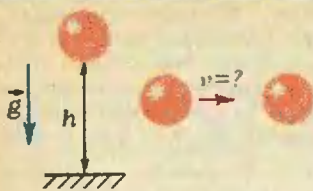


Рис. 1.

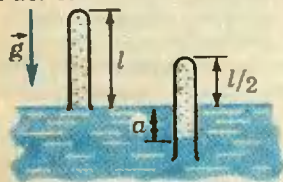


Рис. 4.

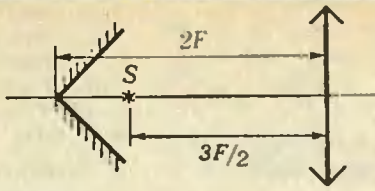


Рис. 2.

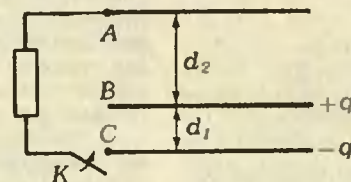


Рис. 5.



Рис. 3.

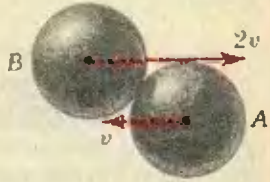


Рис. 6.

5. На наклонной плоскости находится брусок, к которому прикреплена нить, перекинутая через проволочную петлю. На нижнем конце нити закреплен грузик. Свободно висющий грузик не вызывает движения бруска. Если же грузик качнуть, то брусок начинает двигаться. Объясните явление. (71%)

Публикацию подготовили
Г. В. Меледин, М. В. Фокин

Московский инженерно-физический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите неравенство

$$\sqrt{x^3 + x^2 - 2x} > x - 1.$$

2. При каких $a \in \mathbb{R}$ множества решений уравнений

$$4 \cos^2 x = a^2 - 6 \quad \text{и} \quad 1 - \cos 2x = \frac{a}{6}$$

совпадают?

3. Радиус сферы, описанной около прямого кругового конуса с вершиной P , равен R . Прямая, проведенная в плоскости основания конуса, пересекает диаметр AC окружности основания под углом φ ($0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$), а окружность — в точках B и D . Определите объем пирамиды $PABCD$, если известно, что угол в осевом сечении конуса при вершине P равен α , а треугольники APC и DPB равновелики.

4. Из точек A и B , расстояние между которыми равно 1 м, по прямой AB начинают одновременно двигаться два тела. Первое тело начинает движение с постоянной скоростью из точки A по направлению к точке B , а второе — в том же направлении с начальной скоростью 16 м/с и с некоторым постоянным ускорением. Известно, что через 1 с после начала движения второе тело находилось от точки A на расстоянии, не большем, чем 15 м, а еще через 1 с — не меньшем, чем 25 м. Определите скорость первого тела, если через 3 с после начала движения расстояние между телами составляло 2 м.

Вариант 2

1. Решите неравенство

$$\frac{2}{2 + \log_2 x} + \frac{1}{\log_2 2x} \left(\frac{1}{2 + \log_2 x} - 1 \right) \geq 0.$$

2. Три бригады, работая вместе, могут выполнить некоторую работу за a дней. Если сначала будет работать в течение 2 дней одна первая бригада, а затем в течение 1 дня вторая и третья бригады, то выполненной окажется $1/3$ этой работы. За какое время может выполнить всю работу одна первая бригада?

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{\sin x - \cos y} = \cos x, \\ \sin x + \cos y = \sin^2 x. \end{cases}$$

4. Боковое ребро SA правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ имеет длину l и составляет с плоскостью основания угол величины α . В эту пирамиду вписана правильная четырехугольная призма так, что все вершины верхнего основания призмы лежат на боковых ребрах пирамиды, а все вершины нижнего — на основании $ABCD$ пирамиды. Найдите площадь основания призмы, если известно, что площадь полной поверхности этой призмы имеет наибольшее возможное значение.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Шарик массой $m = 0,1$ кг закрепили на полу двумя одинаковыми пружинами жесткостью $k = 15$ Н/м каждая (рис. 1). В исходном состоянии пружины не деформированы и имеют длину $l_0 = 40$ см. Шарик поднимают вертикально на высоту $h = 30$ см и отпускают. Какой импульс передает шарик полу при абсолютно упругом ударе?

2. На гладкой горизонтальной поверхности лежит доска длиной $l = 1,2$ м и массой $M = 1,6$ кг (рис. 2). На край доски положили небольшое тело массой $m = 0,4$ кг. Коэффициент трения между телом и доской $\mu = 0,3$. С какой минимальной скоростью v_0 следует резко толкнуть доску вправо, чтобы тело соскользнуло с нее?

3. Цилиндрический сосуд расположен горизонтально и разделен на две части поршнем площадью $S = 10$ см², прикрепленным к левому торцу сосуда пружиной жесткостью $k = 2 \cdot 10^3$ Н/м. Вначале в обеих частях сосуда находится воздух при атмосферном давлении $p_0 = 10^5$ Па, при этом пружина не деформирована и имеет длину $l_0 = 20$ см. Затем весь

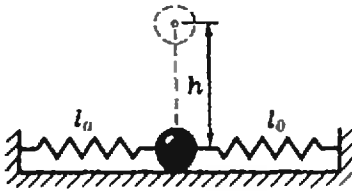


Рис. 1.

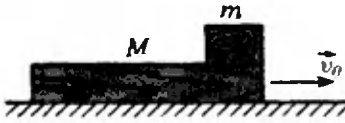


Рис. 2.

воздух из правой части сосуда откачивают. Найдите энергию, запасенную в пружине после откачки, если температура газа в левой части не изменилась.

4. Система из трех шариков, два из которых связаны с третьим изолирующими нитями одинаковой длины $l=3$ см, движется под действием силы \vec{F} , приложенной к шарiku C (рис. 3). Массы всех трех шариков одинаковы, заряды шариков A и B одинаковы и равны $q=10^{-7}$ Кл, а шарик C не заряжен. Определите силу, при которой нити образуют угол $\alpha=60^\circ$. Действие поля тяжести не учитывать.

5. К проводникам AB и CD одинакового сопротивления $R=2,5$ Ом подключены два источника тока (рис. 4). ЭДС и внутренние сопротивления источников: $\mathcal{E}_1=1,5$ В, $r_1=2,0$ В, $r_2=1,6$ Ом. Найдите показания высокоомного вольтметра, включенного между средними точками проводников.

6. Тонкая пружинка жесткостью $k=20$ Н/м закреплена в недеформированном состоянии в точках A и C, расстояние между которыми $l_0=20$ см, и помещена во внешнее магнитное поле с индукцией $B=0,80$ Тл (рис. 5). При пропускании по пружинке тока она приобретает форму дуги окружности радиуса $R=30$ см. Найдите силу тока I .

7. Электрическая цепь содержит источник тока, амперметр, резисторы с сопротивлениями $R_1=2,5$ Ом и $R_2=7,5$ Ом, катушку индуктивности с пренебрежимо малым активным сопротивлением (рис. 6). Сразу после замыкания ключа K через амперметр течет ток $I_1=0,20$ А, а после установления постоянного значения тока в катушке амперметр показы-

вает ток $I_2=0,40$ А. Найдите внутреннее сопротивление и ЭДС источника тока.

8. Контур с источником тока, ЭДС которого $\mathcal{E}=0,4$ В и внутреннее сопротивление $r=0,2$ Ом, находится в однородном магнитном поле с индукцией $B=0,1$ Тл. Вектор \vec{B} перпендикулярен к плоскости контура и направлен так, как показано на рисунке 7. Найдите тепловую мощность, выделяемую в проводнике AC при его движении вправо с постоянной скоростью $v=10$ м/с. Длина проводника $l=10$ см, его сопротивление $R=0,1$ Ом, сопротивление остальных проводников пренебрежимо мало.

9. Колебательный контур состоит из катушки индуктивностью L и конденсатора емкостью C , который представляет собой три металлические пластины, каждая площадью $S=1$ см², разделенных диэлектриком ($\epsilon=4$) толщиной $d=1$ мм. Пластины конденсатора подключены так, как показано на рисунке 8. На сколько нужно изменить индуктивность, чтобы перенастроить контур с длины волны $\lambda_1=25$ м на длину волны $\lambda_2=31$ м?

10. Стальной шарик падает без начальной скорости с высоты $h=0,8$ м на собирающую линзу и разбивает ее. В начальный момент расстояние от шарика до линзы равнялось расстоянию от линзы до действительного изображения шарика. Сколько времени существовало мнимое изображение шарика?

Публикацию подготовили
В. И. Архипов, А. И. Руденко, В. Е. Чижов,
Н. В. Шолохов

Московский институт стали и сплавов

Математика

Вариант письменного экзамена

1. Упростите до числового значения

$$\left(\frac{a+1}{a^3-1} - \frac{1}{a^2+a+1} - \frac{2}{1-a} \right) : \frac{a^2+a+2}{a^3-1}$$

2. Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{\frac{8+2x^2-x^4}{x^2+2x+1}}$$

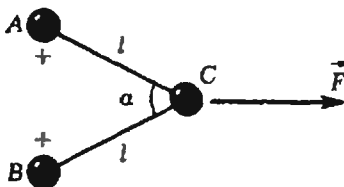


Рис. 3.

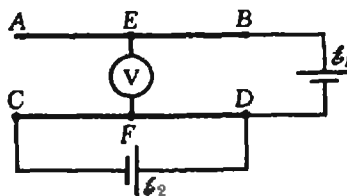


Рис. 4.

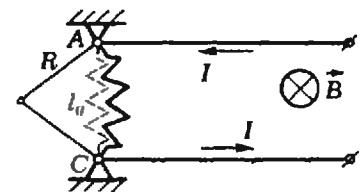


Рис. 5.

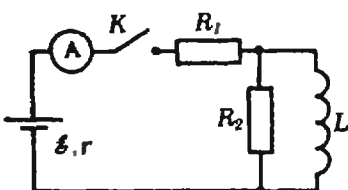


Рис. 6.

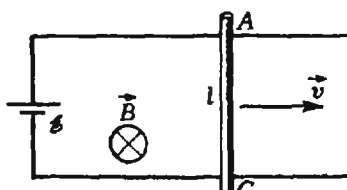


Рис. 7.

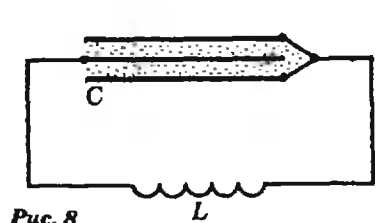


Рис. 8

В ответе запишите количество целых чисел, входящих в область определения.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{x-1} = \frac{2x+4}{x-4}$$

В ответе запишите меньший корень уравнения.

4. Сплав из цинка и меди содержал на 1280 г меди больше, чем цинка. После того, как из сплава удалили 60 % цинка и 30 % меди, его масса стала равной 1512 г. Какова была первоначальная масса сплава (в граммах)?

5. Решите уравнение

$$2\sqrt[3]{256} - \sqrt[3]{3^{2x}} \cdot 16 + 4 = 0.$$

В ответе запишите сумму корней этого уравнения.

6. Решите неравенство

$$\log_{1/2} \log_3 (x-3) > 0.$$

В ответе запишите сумму целых решений этого неравенства.

7. При каком наименьшем значении параметра k график функции

$$y = (k-1)x^2 + 2kx + 3k - 2$$

касается оси абсцисс?

8. Исследуйте функцию $y = 4x^3 + 6x^2 - 24x - 20$ на экстремум. В ответе запишите значение функции в точке максимума.

9. Упростите выражение до числового значения

$$\frac{1 - \cos 4\alpha}{(\cos 2\alpha)^2 - 1} + \frac{1 + \cos 4\alpha}{(\sin 2\alpha)^2 - 1}$$

10. Решите уравнение

$$\operatorname{ctg} x - 2 \cos x = 0.$$

В ответе запишите решение (в градусах), удовлетворяющее условию $90^\circ < x < 180^\circ$.

11. Около окружности с диаметром 20 , описана разноточная трапеция, длина боковой стороны которой равна 25 . Найдите площадь трапеции.

12. Основанием четырехугольной пирамиды является ромб с длиной стороны 6 и острым углом 60° . Вершина пирамиды проектируется в точку пересечения диагоналей ромба. Найдите объем пирамиды, если ребро, проведенное к тупому углу ромба, образует с плоскостью основания угол 60° .

Физика

Вариант письменного экзамена

1. Вычислите, во сколько раз сила давления тела на горизонтальную плоскость больше силы его давления на наклонную плоскость, составляющую угол $\alpha = 60^\circ$ с горизонтом.

2. На какую высоту над поверхностью Земли нужно поднять тело, чтобы его сила тяжести уменьшилась в два раза? Радиус Земли принять равным $R_2 = 6400$ км.

3. В первом сосуде объемом $V_1 = 7$ л газ находится под давлением $p_1 = 50$ кПа, а во втором объемом $V_2 = 15$ л — под давлением $p_2 = 100$ кПа. Температура газа в сосудах одинаковая. Какое давление (в кПа) установится в сосудах после их соединения? Считать, что процесс протекает изотермически.

4. В неподвижном лифте висит маятник, период колебаний которого $T = 2$ с. Лифт начал опускаться вниз с ускорением $a = 2$ м/с². Чему будет равен период колебаний маятника в ускоренно движущемся лифте?

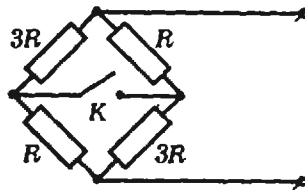


Рис. 1.

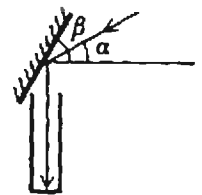


Рис. 2.

5. Стальной лом массой $m = 5$ т расплавляется в электропечи. Определите расход электроэнергии (в кВт·ч), если КПД печи $\eta = 62\%$. Начальная температура лома $t_1 = 16^\circ\text{C}$, температура плавления $t_2 = 1300^\circ\text{C}$, удельная теплоемкость $c = 0,46$ кДж/(кг·К), удельная теплота плавления стали $\lambda = 82$ кДж/кг.

6. Из комнаты в течение суток теряется $Q = 8,7 \cdot 10^7$ Дж тепла. Какой длины надо взять нихромовую проволоку диаметром $d = 10^{-3}$ м для намотки электрической печи, поддерживающей постоянную температуру в комнате? Печь включается в сеть с напряжением $U = 120$ В. Удельное сопротивление нихрома $\rho = 1,1 \cdot 10^{-6}$ Ом·м.

7. В медном сосуде массой $m_1 = 2$ кг нагревается $m_2 = 0,8$ кг олова от $t_1 = 22^\circ\text{C}$ до $t_2 = 232^\circ\text{C}$. Какое количество теплоты требуется для этого, если считать начальную и конечную температуру сосуда и олова одинаковыми? Удельная теплоемкость меди $c_1 = 395$ Дж/(кг·К), олова $c_2 = 230$ Дж/(кг·К).

8. При замкнутом ключе K сопротивление группы резисторов, соединенных, как показано на рисунке 1, равно $R_1 = 30$ Ом. Вычислите сопротивление этой группы резисторов при разомкнутом ключе K .

9. Под каким углом β к горизонту следует расположить плоское зеркало, чтобы осветить дно колодца отраженными от него солнечными лучами, в то время как свет падает под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту (рис. 2)?

10. Батарея гальванических элементов с ЭДС $\mathcal{E} = 15$ В и внутренним сопротивлением $r = 5$ Ом замкнута проводником, имеющим сопротивление $R = 10$ Ом. К полюсам батареи подключен конденсатор емкостью $C = 1$ мкФ. Определите величину заряда на обкладках конденсатора.

11. Максимальная кинетическая энергия электронов, вылетающих из металла при освещении его ультрафиолетовыми лучами с длиной волны $\lambda = 0,225$ мкм равна $E = 4,54 \cdot 10^{-19}$ Дж. Определите работу выхода электронов из металла (в эВ). Постоянная Планка $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж·с, скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

12. Колебательный контур, состоящий из воздушного плоского конденсатора с площадью пластин $S = 10^{-2}$ м² и катушки с индуктивностью $L = 10^{-6}$ Гн, резонирует на электромагнитную волну с длиной $\lambda = 10$ м. Определите расстояние между пластинами конденсатора. Электрическая постоянная $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$ Ф/м, скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Публикацию подготовили
В. А. Карсеев, В. И. Марченко

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sqrt{7x^2+8x+10}-\sqrt{7x^2-8x+10}=2x.$$

2. Решите уравнение

$$\cos 8x - 2 \sin 2x \sin (2x - \pi/2) = 1.$$

3. Решите неравенство

$$\log_2 2 \leq \log_{\sqrt{x+2}} 2.$$

4. В треугольнике ABC на стороне взята точка P , через которую провели две прямые, параллельные сторонам треугольника. Радиусы окружностей, описанных около получившихся двух новых треугольников (с общей вершиной P), равны R_1 и R_2 . Найдите радиус окружности, описанной около треугольника ABC .

5. Расстояние между населенными пунктами A и B составляет 36 км. Из A в B идет пешеход со скоростью 6 км/ч. Одновременно из B в сторону A выезжает велосипедист, максимальная скорость движения которого 15 км/ч, а минимальная — 10 км/ч. После встречи с пешеходом велосипедист еще 20 минут ехал в сторону A , затем повернул и возвратился в B . Найдите минимальную разницу во времени прибытия в B пешехода и велосипедиста.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\sqrt{10x^2+8x+7}+\sqrt{10x^2-8x+7}=8x.$$

2. Решите уравнение

$$\cos 6x + 4 \cos\left(\frac{3}{2}x + \frac{3}{2}x\right) \sin \frac{3}{2}x = 1.$$

3. Решите неравенство

$$\log_3 3 \leq \log_{2x+3} 9.$$

4. Через точку P , взятую внутри треугольника ABC , провели три прямые, каждая из которых параллельна стороне треугольника. Площади получившихся трех треугольников (с общей вершиной P) равны S_1 , S_2 и S_3 . Найдите площадь треугольника ABC .

5. Расстояние между населенными пунктами A и B составляет 220 км. Из B в сторону A выезжает автомобиль, который движется со скоростью 60 км/ч. Одновременно из A в B выезжает автобус, минимальная скорость движения которого 40 км/ч, а максимальная — 50 км/ч. После встречи автомобиль еще 20 минут двигался в сторону A , затем повернул и возвратился в B . Найдите максимальную разницу во времени прибытия в B автобуса и автомобиля.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Под каким углом к горизонту нужно бросить тело, чтобы максимальная высота его

подъема была в три раза больше дальности полета?

2. На одном из концов плавающей доски сидит лягушка. С какой минимальной скоростью должна прыгнуть лягушка, чтобы попасть точно на другой конец доски? Масса доски M , масса лягушки m , длина доски l .

3. Тело массой m_1 , движущееся со скоростью v , налетает на покоящееся тело и после упругого удара отскакивает от него со скоростью $v/2$, направленной под углом 90° к первоначальному направлению движения. Определите массу покоящегося тела.

4. Легкая пружинка жесткостью k и длиной l стоит вертикально на столе. С высоты h над столом на нее падает небольшой шарик массой m . Какую максимальную скорость будет иметь шарик при своем движении вниз?

5. Ядро распадается на два осколка массами $m_1=3 \cdot 10^{-25}$ кг и $m_2=10^{-25}$ кг. Определите скорости осколков ядра, если их суммарная кинетическая энергия $W=6 \cdot 10^{-11}$ Дж. До распада ядро покоилось.

6. В сообщающиеся сосуды с ртутью долили: в один сосуд столб масла высотой $h_m=30$ см, в другой столб воды высотой $h_w=20$ см. Определите разность уровней ртути в сосудах. Плотность ртути $\rho_r=13,6 \times 10^3$ кг/м³, масла $\rho_m=0,9 \cdot 10^3$ кг/м³, воды $\rho_w=10^3$ кг/м³.

7. Мощность, выделяющаяся на резисторах сопротивлением $R_1=10$ Ом и $R_2=3$ Ом, при последовательном и при параллельном соединении этих резисторов одинакова. Найдите внутреннее сопротивление источника, к которому подключены резисторы.

8. Квадратная рамка с током $I=5$ А может свободно вращаться вокруг горизонтально расположенной стороны. При включении вертикального магнитного поля рамка отклонилась на угол $\alpha=30^\circ$. Найдите величину магнитной индукции, если плотность материала, из которого сделана рамка, $\rho=8,6 \cdot 10^3$ кг/м³, а сечение провода $S=2$ мм².

9. Проволочный контур, имеющий форму равностороннего треугольника со стороной $a=20$ см, помещен в однородное магнитное поле с индукцией $B=1$ Тл так, что плоскость контура составляет угол $\alpha=30^\circ$ с направлением поля. В некоторый момент времени магнитная индукция начинает равномерно уменьшаться и через промежуток времени Δt спадает до нуля. Определите этот промежуток времени, если известно, что в контуре возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}=100$ В.

10. На главной оптической оси собирающей линзы на расстояниях $d_1=20$ см и $d_2=40$ см от нее находятся два точечных источника света. Найдите фокусное расстояние линзы, если изображения этих источников оказываются в одной и той же точке.

Публикацию подготовили
В. В. Варфоломеев, М. Н. Данилычева,
И. М. Матусевич

Победители конкурса «Задачник «Кванта»

(Начало см. на с. 18)

Награждаются Дипломом и значком журнала «Квант» и книгами серии «Библиотечка «Квант» за активное участие в конкурсе:

По математике

- Р. БЕЗРУКАВНИКОВ — Калуга, с. ш. № 24, 7 кл.
И. БЕЛОЗЕРОВ — Серпухов, машиностроительный техникум, III курс.
В. ВОЛОГОДСКИЙ — Омск, с. ш. № 91, 9 кл.
А. ГОРОХОВСКИЙ — Киев, с. ш. № 79, 9 кл.
И. ДЫННИКОВ — Жуковский, с. ш. № 1, 10 кл.
Д. ЗАЙЦЕВ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
Б. КРУГЛИКОВ — Харьков, с. ш. № 149, 10 кл.
А. МЕЛЬЦЕР — ФМШ № 45 при ЛГУ, 10 кл.
О. НИЦ — Одесса, с. ш. № 100, 10 кл.
В. РАГУЛИН — Челябинск, с. ш. № 127, 8 кл.
С. СМИРНОВ — Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.
К. СТЫРКАС — п. Черноголовка Моск. обл., с. ш. № 82, 10 кл.
Ю. ШАМРУК — ФМШ № 18 при МГУ, 9 кл.

*Ответы,
указания,
решения*

■ Старый алгоритм
137; 156; 189; 482; 493; 10,21; 43,21; 2,647;
3,162.

- Неравенства с параметром
- $a \in]-\infty; 0[$; $x \in \emptyset$; $a = 0$, $x \in]0; +\infty[$;
 $a \in]0; +\infty[$; $x \in]0; a[\cup]6a; +\infty[$.
 - $a \in]-\infty; -4[$; $x \in \emptyset$; $a \in]-4; +\infty[$; $x \in]2a+3; (7a+13)/3[$.
 - $x \in]0; 3^{-1-\sqrt{-1+2a}} \cup]\frac{1}{3}; 3^{-1+\sqrt{-1+2a}}[$.
 - $a \in]0; 1[$; $x \in]-\infty; -\log_3(a+2)[$; $a \in]1; +\infty[$;
 $x \in]-\log_3(a+2); +\infty[$.
 - $a = \sqrt{2}$.
 - $a \in]-13/4; 3[$.
 - $a < -1$.
 - $a \in]5/2; +\infty[$.
 - $a = 2$.

■ Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Вариант 1

- $x_1 = \arctg\left(1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right) + n\pi$, $x_2 = \arctg\left(1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right) + m\pi$ ($n, m \in \mathbb{Z}$).
- $1 - \log_3 2$.
- $\frac{14\sqrt{5}}{9}$. Указание. Пусть $\angle BDA = \alpha$, $\angle CAD = 2\alpha$. Возьмем на прямой AD точку K так, чтобы было $CK \parallel BD$. По теореме синусов

По физике

- С. БЕЛОВОЛОВ — ФМШ № 165 при НГУ, 10 кл.
С. БЕЛОУСОВ — ФМШ № 45 при ЛГУ, 9 кл.
С. БОБЫЛЕВ — Березники, с. ш. № 3, 10 кл.
А. БРЕЖЕСТОВСКИЙ — п. Черноголовка Моск. обл., с. ш. № 82, 10 кл.
Д. БУДЬКО — Белгород, с. ш. № 3, 10 кл.
А. ГОЛЬДИН — ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
Д. ЖИЛЬЦОВ — Краматорск, с. ш. № 35, 10 кл.
Д. ИГИЛЬМАНОВА — Целиноград, с. ш. № 15, 10 кл.
С. КАНАТОВ — Кузнецовск, с. ш. № 1, 10 кл.
С. КАРДАШ — ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
Д. КОНЦЕВОЙ — Могилев, с. ш. № 5, 10 кл.
А. НЕДАЧИН — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
Д. НОГОТКОВ — Алма-Ата, РОФМШИ, 9 кл.
А. РОЗЕНБЕРГ — Уфа, с. ш. № 91, 10 кл.
Е. РОЗНОЩИК — Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
Р. САГАЙДАК — с. Матусов Черкасской обл., с. ш. № 1, 9 кл.
Т. СОКОЛОВСКАЯ — Целиноград, с. ш. № 15, 10 кл.
В. СУКЛИЯН — Одесса, с. ш. № 100, 9 кл.
В. ТЯГНИРЯДНО — Минск, с. ш. № 23, 10 кл.
М. ЧЕКУШИНА — Алма-Ата, с. ш. № 7, 10 кл.
О. ЮСУХНО — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.

для треугольника ACK : $\frac{CK}{\sin 2\alpha} = \frac{AC}{\sin \alpha}$, откуда

$\cos \alpha = \frac{2}{3}$. Далее остается заметить, что площади трапеции $ABCD$ и треугольника ACK равны, а $\angle ACK = \pi - 3\alpha$.

4. $a = -6$. Указание. Каждое из уравнений системы задает прямую на плоскости xOy . Условие параллельности прямых дает уравнение $a^2 - a - 42 = 0$ для определения a . Один из его корней, $a = 7$, не удовлетворяет условию, так как прямые в этом случае совпадут.

5. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. Указание. Рассмотрим плоскость α , проходящую через точки S , P и Q . Поскольку прямые BM и PQ параллельны, линия пересечения плоскостей SMB и α параллельна BM (и проходит через точку N). Отсюда эта линия — прямая NK , где K — середина SM . Используя подобие треугольников PQC и KNC , докажите, что $PQ = \frac{4}{3}KN$.

Вариант 2

- $x_1 = \arctg\left(2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + n\pi$, $x_2 = \arctg\left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + m\pi$ ($n, m \in \mathbb{Z}$).
- $\sqrt{6} - 1$.
- $\frac{a}{2 \cos \frac{a}{2}}$. Указание. Покажите, что величина

на угла BOC равна $\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}\right)$, и воспользуйтесь теоремой синусов для треугольника BOC .

- $a = 5$.
- $\arctg \frac{\sqrt{2}}{5}$. Указание. Прямая l проходит через данную точку L и пересекает плоскость ABC в точке N , лежащей на луче

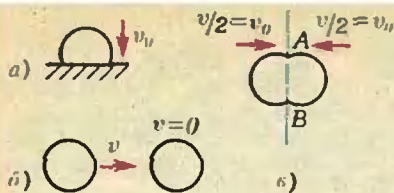


Рис. 1.

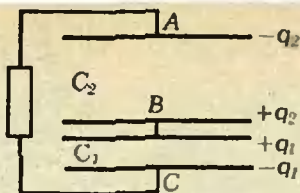


Рис. 2.

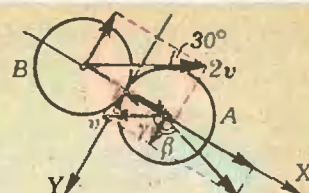


Рис. 3.

CM и такой, что $MN=CM$ (докажите это). Пусть P — основание перпендикуляра, опущенного из точки L на плоскость ABC (P лежит на отрезке CM). Острый угол N прямоугольного треугольника LNP — искомым.

Вариант 3

1. $x \pm \arccos \frac{1-\sqrt{7}}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

2. $y_{\max} = y(6) = 39$.

3. $\frac{4}{3}(\sqrt{5} + \sqrt{21})$. Указание. Пусть K — точка пересечения хорды AB и прямой O_1O_2 , 2γ — величина угла MO_1N , β и α — соответственно углы CAB и BO_1K . Покажите, что $\gamma = \pi - \alpha - 2\beta$. Определяя $\sin \alpha$, $\cos \alpha$, $\sin \beta$, $\cos \beta$ из треугольников O_1BK и ACK , вычислите $MN = 2R_1 \sin \gamma$.

4. $\left] -\frac{4}{5}; 0 \right[\cup \left] \frac{8}{5}; 2 \right[$. Указание. При $x > 0$ данное неравенство эквивалентно неравенству $\frac{3x}{5x-8} > x+1$, при $x \in]-1; 0[$ — системе неравенств $0 < \frac{3x}{5x-8} < x+1$.

5. $\frac{\sqrt{34}}{144}$. Указание. Пусть N_1 — точка на ребре SA такая, что $AN_1=1$. Докажите, что объемы пирамид $KLMN$ и $KLMN_1$ равны; сравивая площади треугольников MN_1K и SAC и соответствующие высоты, докажите, что объем пирамиды $KLMN_1$ составляет $\frac{1}{12}$ объема данной пирамиды $SABC$.

Физика

Вариант 1

1. $F = mg(M_b/M_r - 1)$.

2. Скорость шарика при ударе о пол $v_0 = \sqrt{2gh}$ (рис. 1). Пусть искомая скорость шарика равна v . Перейдем к системе центра масс шариков, где они движутся навстречу друг другу со скоростями $v/2$. Роль непроницаемого каменного пола при их ударе сыграет плоскость симметрии AB . Таким образом, ясно: чтобы шарик разбился, нужно, чтобы $v/2 = v_0 = \sqrt{2gh}$. Отсюда $v = 2\sqrt{2gh}$.

3. Изображение точки в коническом зеркале — кольцо радиусом $R = F/2$ на расстоянии $f_1 = 2F$ от линзы. Изображение этого кольца в линзе дает точечное изображение в зеркале, находящееся на расстоянии $F/2$ слева от вершины зеркала, и получается на расстоянии $f_2 = 5F/3$ от линзы. Изображение точки в линзе без участия зеркала — точка на расстоянии $f_3 = 3F$ от линзы.

4. Пусть скорость велосипедиста на финише равна v , а сила сопротивления воздуха $F \sim \rho v^2 S$, где ρ — плотность воздуха, а S — эффективная площадь велосипедиста, которая встречает набегающий поток воздуха. Тогда мощность $N \sim Fv \sim \rho v^3 S$. Положив $\rho \sim 1 \text{ кг/м}^3$,

$v \approx 60 \text{ км/ч} \approx 16 \text{ м/с}$, $S \approx 0,5 \text{ м}^2$, получаем $N \sim 2 \text{ кВт}$.

5. При внесении в колбу холодного стержня на нем происходит конденсация пара. Масса и температура пара уменьшаются, что приводит к уменьшению давления в закрытой колбе. При этом температура кипения воды также понижается. В результате уже слегка остывшая вода снова начинает кипеть.

Вариант 2

1. $F = \frac{2}{3} \pi R^3 (\rho_1 + \rho_2 - 2\rho_0)g$.

2. Давление p_n насыщенных паров воды при наличии воды остается неизменным:

$$p_n = p - \rho g a \frac{1+2a}{1-2a}$$

3. После замыкания ключа получается эквивалентная схема, изображенная на рисунке 2. Начальная энергия $W_{\text{нач}} = q^2/(2C_1)$, конечная $W_{\text{кон}} = q_1^2/(2C_1) + q_2^2/(2C_2)$, где $C_1 = \epsilon_0 S/d_1$, $C_2 = \epsilon_0 S/d_2$, $C_2/C_1 = d_1/d_2$. Согласно закону сохранения заряда, $q_1 + q_2 = q$. Из равенства разностей потенциалов между пластинами A и B и B и C следует: $q_1/C_1 = q_2/C_2$, откуда $q_1 = q/(1+d_1/d_2)$ и $q_2 = q/(1+d_2/d_1)$. Из закона сохранения энергии выделившееся количество теплоты

$$Q = W_{\text{нач}} - W_{\text{кон}} = \frac{q^2 d^2}{2\epsilon_0(d_1 + d_2)S}$$

4. См. решение задачи Ф1042, которое будет опубликовано позже.

5. Взаимодействие радиального тока и перпендикулярного плоскости колеса магнитного поля создает момент силы Ампера, который и вызывает вращение колеса. При смене полюсов магнита направления силы, момента силы и вращения сменяются на противоположные.

Вариант 3

1. $t = (l_1 + l_2 - 2F - \sqrt{(l_1 - l_2)^2 + 4F^2})/(2v) \approx 3,5 \text{ с}$.

2. Из соображений симметрии каждая из двух палочек в точке O создает одинаковый потенциал ϕ и одинаковую по модулю напряженность \vec{E} , направленную перпендикулярно палочке. Используя принцип суперпозиции, получаем $\phi = \phi_0/2$, $E = E_0$, направление вектора \vec{E} перпендикулярно оставшейся палочке. (Возможно красивое решение с добавлением третьей палочки, создающей полный правильный треугольник с $E=0$ в центре.)

3. Проведем ось X через центры шаров, а ось Y через точку их соприкосновения по касательной (рис. 3). Из-за гладкости шаров y -составляющие скоростей шаров после удара не изменяются, следовательно,

$$v_{Ay} = v_{A0y} = v \sin 30^\circ = v/2$$

Из-за упругости удара и равенства масс шары после удара обменяются x -составляющими скоростей, т. е.

$$v_{Ax} = v_{B0x} = 2v \cos 30^\circ = v\sqrt{3}.$$

Отсюда искомый угол

$$\varphi = \pi/3 + \arctg(v_{Ax}/v_{Ay}) \approx 134^\circ.$$

4. См. решение задачи Ф1024 в этом номере журнала.

5. См. решение задачи Ф1038, которое будет опубликовано позже.

Московский инженерно-физический институт

Математика

Вариант 1

1. $[-2; 0] \cup]1; +\infty[$. Указание. Неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases} x^2 + x^2 - 2x \geq 0, \\ x < 1, \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x \geq 1, \\ x^2 + x^2 - 2x > (x-1)^2. \end{cases}$$

2. $a \in]-\infty; -\sqrt{10}[\cup]-\sqrt{6}; 0[\cup]3[\cup]12; +\infty[$. Указание. Данные уравнения приводятся к виду $\cos 2x = \frac{a^2-8}{2}$; $\cos 2x = \frac{6-a}{6}$. Эти

уравнения эквивалентны тогда и только тогда, когда либо $\frac{a^2-8}{2} = \frac{6-a}{6}$, либо $|\frac{a^2-8}{2}| > 1$

и $|\frac{6-a}{6}| > 1$.

3. $V = \frac{4}{3} R^3 \sin^2 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \varphi$ при $\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$;

$V_1 = \frac{4}{3} R^3 \sin^2 \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \varphi$ и $V_2 = \frac{8}{3} R^3 \times$

$\times \sin \alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2} \sin \varphi$ при $\alpha \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$. Указание.

Пусть O_1 — центр сферы, описанной около конуса, O — центр основания, PE — высота треугольника PBD , H — высота PO конуса, r — радиус окружности основания, $BD = x$, $PE = y$. Тогда $r = R \sin \alpha$, $H = R(1 + \cos \alpha) = 2R \cos^2 \frac{\alpha}{2}$. Объем пирамиды $PABCD$ равен

$V = \frac{H}{6} \cdot AC \cdot BD \sin \varphi$. Из того, что треугольники APC и DPB равнобедренны, следует, что $\frac{1}{2} xy = rH$. Кроме того $(\frac{x}{2})^2 + y^2 = r^2 + H^2$, откуда $x_1 = 2r$, $y_1 = H$; $x_2 = 2H$, $y_2 = r$.

Из того, что $x = BD$ удовлетворяет неравенству $0 < x \leq 2r$, следует, что при $\alpha \in]0; \frac{\pi}{2}[$ существует только одна пирамида, удовлетворяющая условию, а при $\alpha \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$ — две.

4. 11 м/с; 29/3 м/с. Указание. Пусть $v > 0$ — скорость первого тела, a — ускорение второго тела. В момент времени t расстояние

между первым и вторым телами равно $S = |tv - 1 - 16t - \frac{at^2}{2}|$, а расстояние от второго тела до точки A равно

$$S_2 = |1 + 16t + \frac{at^2}{2}|.$$

Из условия задачи следует, что

$$\begin{cases} |17 + \frac{a}{2}| \leq 15, \\ |33 + 2a| \geq 25, \\ |3v - 49 - \frac{9}{2}a| = 2. \end{cases}$$

Откуда $a \in \{-64; -29\} \cup \{-4\}$. Если $a \in \{-64; -29\}$, то $v < 0$ (противоречие!). Если $a = -4$, то либо $v = 11$ м/с, либо $v = 29/3$ м/с.

Вариант 2

1. $]1/4; 1/2[\cup]1/2; +\infty[$. Указание. Выполните замену $y = \log_2 x$ и примените метод интервалов.

2. $3a/(a-3)$ дней при $a \in]3; 6[$. Указание. Если x и y производительности первой бригады и второй и третьей бригад вместе соответственно, а av — работа, то

$$\begin{cases} a(x+y) = v, \\ 2x+y = \frac{1}{3}v, \\ x > 0, y > 0. \end{cases}$$

3. $\{(\pi/6 + 2\pi k; \pm \arccos(-1/4) + 2\pi l)\}$, $k, l \in \mathbb{Z}$.

4. $\frac{l^2 \sin^2 \alpha}{(\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha - 1)^2}$ при $\alpha \in [\arctg \sqrt{2}; \pi/2[$. При

других α — решений нет.

Пусть квадраты $A_1B_1C_1D_1$ и $PQRT$ — соответственно нижнее и верхнее основания призмы, а O и O_1 — центры этих квадратов. Поскольку по условию вписанная призма $A_1B_1C_1D_1PQRT$ — правильная, точка O является центром квадрата $ABCD$. Пусть $A_1B_1 = x$, $A_1P = y$ (рис. 4). Тогда площадь полной поверхности призмы равна $S_{\text{п}} = 2x^2 + 4xy$. Далее, $AO = l \cos \alpha$, $A_1O =$

$= \frac{x\sqrt{2}}{2}$, и $y = l \sin \alpha - \frac{x\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \alpha$.

Отсюда

$$S_{\text{п}} = f(x) = 2x^2(1 - \sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha) + 4x \cdot l \sin \alpha, (*)$$

причем $x \in]0; l\sqrt{2} \cos \alpha[$. Исследуем $f(x)$ на экстремум на отрезке $[0; l\sqrt{2} \cos \alpha]$. Если коэффициент при x^2 в выражении (*) неотрицателен, то $f(x)$ возрастает на отрезке $[0; l\sqrt{2} \cos \alpha]$ и, следовательно, достигает максимума при $x = AD = l\sqrt{2} \cos \alpha$, но в этом случае высота призмы обращается в нуль. Таким образом, при $0 \leq \operatorname{tg} \alpha \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$ призмы, удовлетворяющей условиям задачи, не существует. Если $\operatorname{tg} \alpha > 1/\sqrt{2}$, наша функция f достигает максимума при $x_0 = \frac{l \sin \alpha}{\sqrt{2} \operatorname{tg} \alpha - 1}$, причем $x_0 \in]0; l\sqrt{2} \cos \alpha[$

только при $\operatorname{tg} \alpha > \sqrt{2}$. Искомая площадь основания вписанной призмы при этом равна $S_0 = x_0^2$.

Физика

1. При абсолютно упругом ударе шарик передает полу импульс $\Delta P = 2mv$, где v — скорость шарика перед ударом. Эту скорость найдем, воспользовавшись законом сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = mgh + 2 \frac{k(\Delta l)^2}{2}.$$

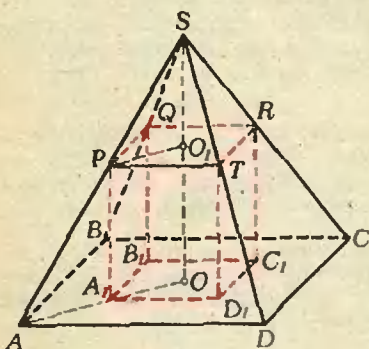


Рис. 4.

где $\Delta l = \sqrt{l_0^2 + h^2} - l_0$ — удлинение каждой из пружин, когда шарик поднят на высоту h . Подставляя найденную скорость в выражение для переданного импульса, получаем

$$\Delta p = 2m\sqrt{2gh + 2k(\sqrt{l_0^2 + h^2} - l_0)^2} / m = 0,6 \text{ кг} \cdot \text{м/с}$$

2. Во время проскальзывания относительно доски на тело действует сила трения $F_{\text{тр}1} = \mu mg$, которая сообщает ему ускорение

$$a_1 = F_{\text{тр}1} / m = \mu g.$$

В это время на доску действует сила трения $\bar{F}_{\text{тр}2}$, равная по модулю силе $\bar{F}_{\text{тр}1}$ и направленная в противоположную сторону. Эта сила сообщает доске ускорение

$$a_2 = F_{\text{тр}2} / M = \mu mg / M.$$

Таким образом, и тело, и доска движутся с постоянными ускорениями. Поэтому для их скоростей v_1, v_2 и перемещений s_1, s_2 можно записать:

$$v_1 = \mu g t, \quad s_1 = \mu g t^2 / 2;$$

$$v_2 = v_0 - \mu mg t / M, \quad s_2 = v_0 t - \mu mg t^2 / (2M).$$

В конце проскальзывания скорости тела и доски становятся одинаковыми ($v_1 = v_2$), откуда найдем время проскальзывания t_1 :

$$t_1 = v_0 M / (\mu g(M + m)).$$

Тело соскальзнет с доски, если

$$s_2(t_1) - s_1(t_1) \geq l.$$

Используя это неравенство, получим

$$v_0 \geq \sqrt{2\mu g l (1 + m/M)} = 3,0 \text{ м/с}.$$

3. Поскольку температура газа в левой части сосуда не изменилась, можно записать закон Бойля—Мариотта

$$p_0 l_0 S = p l_0 + x S,$$

где p — давление в левой части сосуда в конечном состоянии (после того, как был откачан воздух из правой части), x — удлинение пружины. На поршень действуют сила давления газа и сила упругости пружины. Поршень покоится, поэтому имеет место равенство

$$pS = kx.$$

Решая полученную систему уравнений относительно величины x и используя формулу для энергии деформации пружины $W = kx^2 / 2$, получим

$$W = \frac{k}{2} \left(-\frac{l_0}{2} + \sqrt{\frac{l_0^2}{4} + \frac{p_0 l_0 S}{k}} \right)^2 = 1,7 \text{ Дж}.$$

4. Запишем уравнение второго закона Ньютона для шариков A и C в проекциях на направление силы \bar{F} (см. рис. 3 в условии):

$$ma = T \cos \frac{\alpha}{2},$$

$$ma = F - 2T \cos \frac{\alpha}{2},$$

и для шарика A в проекции на направление, перпендикулярное \bar{F} :

$$0 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (2l \sin \frac{\alpha}{2})^2} - T \sin \frac{\alpha}{2}$$

(здесь m — масса, a — ускорение шариков, T — сила натяжения нитей, связывающих шарики). Решение записанной системы для силы F дает

$$F = \frac{3q^2 \cos(\alpha/2)}{16\pi\epsilon_0 l^2 (\sin(\alpha/2))^3} = 0,52 \text{ Н}.$$

5. Поскольку по проводнику AB ток не течет, потенциал точки E равен потенциалу точки B : $\varphi_E = \varphi_B$. По проводнику CD течет ток $I = \mathcal{E}_2 / (R + r_2)$, и потенциал точки F связан с потенциалом точки D соотношением

$$\varphi_F = \varphi_D - I \frac{R}{2} = \varphi_D - \frac{R}{2(R+r_2)} \mathcal{E}_2.$$

Потенциалы φ_B и φ_D отличаются на величину \mathcal{E}_1 :

$$\varphi_B = \varphi_D + \mathcal{E}_1.$$

Записанные соотношения позволяют найти показания вольтметра

$$U = \varphi_E - \varphi_F = \mathcal{E}_1 + \frac{R}{2(R+r_2)} \mathcal{E}_2 = 2,1 \text{ В}.$$

6. Рассмотрим отрезок пружины длиной Δl ($\Delta l \ll R$). На него действует сила Ампера \bar{F}_A и силы натяжения \bar{T} (рис. 5). Запишем для отрезка второй закон Ньютона в проекциях на направление силы \bar{F}_A :

$$0 = F_A - 2T \sin \frac{\alpha}{2} \approx F_A - 2T \frac{\alpha}{2} = IB\Delta l - \alpha T,$$

откуда

$$T = IB \frac{\Delta l}{\alpha} = IRB.$$

С другой стороны, силу натяжения пружины можно найти с помощью закона Гука:

$$T = k\Delta l = k(R\beta - l_0),$$

где $\beta = 2 \arcsin(l_0 / 2R)$ — центральный угол, опирающийся на дугу окружности, образованную пружиной (см. рис. 5 в условии). Приравняв полученные выражения для силы натяжения T , найдем силу тока I :

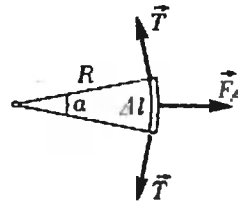


Рис. 5.

$$I = \frac{k}{B} \left(2 \arcsin \left(\frac{l_0}{2R} \right) - \left(\frac{l_0}{R} \right) \right) = 0,32 \text{ А}.$$

7. Ток в катушке индуктивности не может измениться скачком, поэтому сразу после замыкания ключа сила тока в катушке сохраняет нулевое значение. Следовательно, для начального момента времени мы можем записать

$$\mathcal{E} = I_1(r + R_1 + R_2).$$

После установления постоянного значения тока в катушке напряжение на ней становится равным нулю, и через резистор с сопротивлением R_2 ток не течет. Поэтому

$$\mathcal{E} = I_2(r + R_1).$$

Решив полученную систему уравнений, найдем величину r и \mathcal{E} :

$$r = \frac{I_1(R_1 + R_2) - I_2 R_1}{I_2 - I_1} = 5 \text{ Ом}, \quad \mathcal{E} = \frac{I_1 I_2 R_2}{I_2 - I_1} = 3 \text{ В}.$$

8. При движении проводника AC в нем возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_i = Blv$, «включенная» навстречу по отношению к источнику с ЭДС \mathcal{E} . В результате по проводнику течет ток

$$I = \frac{\mathcal{E} - Blv}{R + r}.$$

и в проводнике выделяется тепловая мощность

$$P = I^2 R = \left(\frac{\mathcal{E} - Blv}{R + r} \right)^2 R = 0,1 \text{ Вт.}$$

9. Прежде всего, заметим, что конденсатор с емкостью C представляет собой параллельное соединение двух конденсаторов с емкостью $\epsilon\epsilon_0 S/d$ каждый, и, следовательно,

$$C = 2\epsilon\epsilon_0 S/d.$$

Длина волны λ , на которую настроен контур, связана с собственной частотой колебаний контура $\omega = 1/\sqrt{LC}$ соотношением

$$\lambda = \frac{2\pi v}{\omega} = 2\pi v \sqrt{LC},$$

где $v = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме. Воспользовавшись последней формулой, можно найти величины индуктивности L_1 и L_2 , необходимые для настройки контура на длины волн λ_1 и λ_2 , а также изменение индуктивности ΔL , необходимое для перенастройки:

$$\begin{aligned} \Delta L = L_2 - L_1 &= \frac{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}{4\pi^2 v^2 C} \\ &= \frac{d(\lambda_2^2 - \lambda_1^2)}{8\pi^2 \epsilon\epsilon_0 v^2 S} = 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ Гн.} \end{aligned}$$

10. Применяя формулу линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

где d — расстояние от источника до линзы, f — расстояние от линзы до изображения и F — фокусное расстояние линзы, и учитывая, что $d = f - h$, найдем: $F = h/2$. Мнимое изображение шарика будет существовать в то время, когда шарик находится между фокусом и линзой. Это время Δt можно найти как разность времени падения шарика до линзы $t_1 = \sqrt{2h/g}$ и до фокуса $t_2 = \sqrt{2(h-F)/g}$:

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \sqrt{\frac{h}{g}} (\sqrt{2} - 1) = 0,1 \text{ с.}$$

Московский институт стали и сплавов

Математика

1. 2. 2. 4. 3. 0. 4. 2400. 5. —2. 6. 18. 7. 0,5. 8. 20. 9. 2. 10. 150. 11. 500. 12. 54.

Физика

- $F_{A1}/F_{A2} = 1/\cos \alpha = 2.$
- $h = R_2 (\sqrt{2} - 1) = 2,65 \cdot 10^6 \text{ м.}$
- $p = (p_1 V_1 + p_2 V_2)/(V_1 + V_2) = 84,1 \text{ кПа.}$
- $T' = T \sqrt{g/(g-a)} = 2,24 \text{ с.}$
- $W = m(c(t_2 - t_1) + \lambda) \eta = 1500 \text{ кВт} \cdot \text{ч.}$
- $l = U^2 t \pi d^2 / (4 \rho Q) = 10,2 \text{ м}$ (здесь $t = 1$ сутки = 24 · 3600 с).
- $Q = (c_1 m_1 + c_2 m_2)(t_2 - t_1) = 2 \cdot 10^5 \text{ Дж.}$
- $R_2 = \frac{4}{3} R_1 = 40 \text{ Ом.}$
- $\beta = \pi/4 + \alpha/2 = 60^\circ.$
- $q = C \mathcal{E} R / (R + r) = 10^{-5} \text{ Кл.}$
- $A = (hc/\lambda) - E = 2,68 \text{ эВ.}$
- $d = 4\pi^2 \epsilon^2 \epsilon_0 S h / \lambda^2 = 3,14 \cdot 10^{-3} \text{ м.}$

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Математика

Вариант 1

1. $\{-1; 0; 1\}$. Указание. Воспользовавшись

соотношением $\sqrt{a} - \sqrt{b} = \frac{a-b}{\sqrt{a} + \sqrt{b}}$, приводим уравнение к виду $2x\sqrt{7x^2 + 8x + 10} + \sqrt{7x^2 - 8x + 10} = 16x$, откуда либо $x = 0$, либо $\sqrt{7x^2 + 8x + 10} + \sqrt{7x^2 - 8x + 10} = 8.$

2. $x_1 = \pi k/4, x_2 = (-1)^l \frac{\pi}{24} + \frac{\pi l}{4} (k, l \in \mathbb{Z}).$

3. $|0; 1[\cup]2; +\infty[$. Указание. Неравенство, очевидно, справедливо при $0 < x < 1$. При $x > 1$ оно эквивалентно неравенству $\log_2 \sqrt{x+1} \leq \log_2 x.$

4. $R_1 + R_2$. Решение. Получившиеся треугольники подобны треугольнику ABC . Пусть коэффициенты подобия равны k_1 и k_2 . Тогда $k_1 + k_2 = 1$, и если R искомый радиус, то $R_1 = k_1 R, R_2 = k_2 R.$

5. 40 мин. Решение. Время движения велосипедиста T вычисляется по формуле

$$T = T_0 \left(1 + \frac{v_2}{v_3} \right) + S \cdot \frac{1}{6 + v_1} \left(1 + \frac{v_1}{v_3} \right),$$

где T_0 — время движения в сторону A после встречи, S — расстояние между A и B , v_1 — средняя скорость до встречи, v_2 — средняя скорость движения в сторону A после встречи, v_3 — средняя скорость при возвращении в B . Ясно, что T принимает максимальное значение, если v_2 имеет максимальное возможное значение, v_3 — минимальное, а v_1 такова, что выражение $\frac{1}{6 + v_1} \left(1 + \frac{v_1}{v_3} \right)$ макси-

мально (т. к. $v_3 > 6$, это значит, что v_1 минимальна). Отсюда находим, что максимальное время движения велосипедиста 5 ч 20 мин. Это меньше, чем время движения пешехода 6 ч. Таким образом, искомая минимальная разница во времени прибытия в B составит 40 минут.

Вариант 2

- $|1|.$ 2. $x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}, x_2 = \frac{2\pi l}{3} (k, l \in \mathbb{Z}).$
- $|0; 1[\cup]3; +\infty[$.
- $(\sqrt{S_1} + \sqrt{S_2} + \sqrt{S_3})^2.$ 5. 26 мин.

Физика

- $\alpha = \arctg 12 = 85,2^\circ.$
- $v_{\min} = \sqrt{g l M / (m + M)}$, скорость направлена под углом $\alpha = 45^\circ$ к доске.
- $m_2 = \frac{5}{8} m_1.$
- $v_{\max} = \sqrt{2g(h-l) + mg^2/k}.$
- $v_1 = \sqrt{\frac{2Wm_2}{m_1(m_1 + m_2)}} = 10^7 \text{ м/с;}$
 $v_2 = \sqrt{\frac{2Wm_1}{m_2(m_1 + m_2)}} = 3 \cdot 10^7 \text{ м/с.}$
- $\Delta h_p = (\rho_m h_m - \rho_s h_s) / \rho_p = 0,51 \text{ см}$ (уровень ртути ниже там, где налито масло).
- $r = \sqrt{R_1 R_2} = 5,5 \text{ Ом.}$
- $B = (2\rho g S \tg \alpha) / I = 3,9 \cdot 10^{-2} \text{ Тл.}$
- $\Delta t = Ba^2 \sin 2\alpha / (4\mathcal{E}) = 8,6 \cdot 10^{-5} \text{ с.}$
- $F = 2d_1 d_2 / (d_1 + d_2) = 26,7 \text{ см.}$

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант», № 2)

1. Обозначим объемы ведер через a, b, c . Из

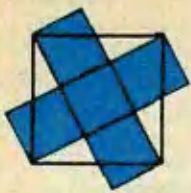


Рис. 6.

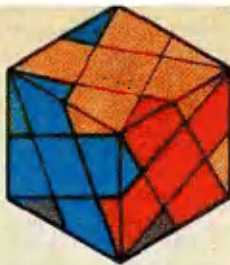


Рис. 7.

условия задачи получаем, что $a=2b/3$, $a=3c/4$. Так как числа a , b , c — целые, то a делится на 2 и на 3, т. е. делится на 6. Если $a=6$, то $b=9$, $c=8$ и $a+b+c=23$, следовательно, в бочку можно долить $30-23=7$ литров воды. Если $a>6$, то $a\geq 12$, $b\geq 18$, $c\geq 16$, $a+b+c\geq 46$, что противоречит условию задачи.

2. Число ПЯТЬ равно 6284 или 6824.

3. Так как обе шкалы равномерные, мы можем написать связь между температурами по Фаренгейту — T_f и по Цельсию — T_c в виде $T_f = aT_c + b$. Подставив $T_c=0$, получаем, что $b=32$, а при $T_c=100$ получаем $212=100a+32$, откуда $a=1.8$. Теперь из уравнения $T_f = 1.8T_c + 32$, получаем, что при -40° Цельсия температура по Фаренгейту также будет равна -40° .

4. Для семи агентов схема слежки такова: $1 \rightarrow 5 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 3 \rightarrow 7 \rightarrow 4 \rightarrow 1$. При восьми агентах соответствующую схему устроить нельзя. Пусть можно; тогда расставим агентов по кругу так, чтобы слева от каждого агента стоял агент, за которым он следит. Тогда первые 4 агента стоят через одного, а между ними остальные 4 агента, но в этом случае получается, что за агентом 001 следит тот, за кем следит агент 004, а по условию за ним следит тот, за кем следит агент 008. Противоречие. Значит, такая схема неосуществима.

5. Можно. На каждую грань кубика наклеивается одна из фигур так, как показано на рисунке 6, а затем все уголки загибаются (рис. 7).

Шахматная страничка

(см. «Квант», 1986, № 11)

Задание 21. 1. Фf5—h7! Теперь в распоряжении черных два ответа. а) 1... Крe8—f8 (поля d1, e1, f1 контролирует белый король с e2 — на торе действуют правила горизонтального цилиндра!) 2. Фh7—g6 Крf8—e7 3. Крe2—e1 Крe7—d7 (поля d8 и f8 держит белый король с e1) 4. Фg6—e8×; 6) 1... Крe8—d8 2. Фh7—c7+ Крd8—e8 3. Кb5—h6! (конь идет по тору как по вертикальному цилиндру!) 3... Крe8—f8 4. Фc7—e1× (поля f7 и g8 около черного короля держит белый конь, а остальные — ферзь).

Задание 22 (Я. Владимиров, 1966 г.). Задача на так называемый «принцип чередования». В различных вариантах циклически чередуются вторые, третьи и четвертые ходы белых при использовании механизма связки. 1. Крb1! с угрозой 2. Лb4+Крc5 3. Лb5+Крc4 4. Лc5×. У черных несколько способов защитить матующее поле c5: 1...Кd7 2. Лc3+! dc 3. Ке3+ fe 4. d3×; 1...Ле5 2. Ке3+! fe 3. d3+ed 4. Лc3×; 1...Кe6 2. d3+! ed 3. Лc3+ dc 4. Ке3×.

Квант

Главный редактор —
академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора:
В. Н. Боровишки, А. А. Варламова,
В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия:
А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков,
В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский,
А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов,
Н. Б. Васильев, С. М. Воронин,
Б. В. Гиедсико, В. Л. Гутенмахер,
Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский,
А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман,
С. М. Козел, С. С. Кротов,
Л. Д. Кудрявцев, А. А. Леонович, С. П. Новиков,
М. К. Потапов, В. Г. Разумовский,
Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин,
Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский,
В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет:
А. М. Балдин, С. Т. Беляев,
Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов,
И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский,
Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева,
А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин,
Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов,
В. В. Можая, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева,
Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко,
И. К. Суриц, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеса,
В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. Н. Вилочкин, А. А. Бсоров, И. Н. Клужова, Т. С. Петрова,
А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов,
Н. С. Кузьмина, Э. В. Назаров, А. М. Пономарева,
П. И. Чернуцкий, В. Б. Юдин

Фото представили:
Ю. Ю. Житковский, Б. И. Клячкин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова
Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов
Художественный редактор Т. М. Макарова
Корректор Т. С. Вайсберг

Сдано в набор 20.01.87. Подписано к печати 10.03.87.
Т-05298. Бумага 70×108/16. Печать офсетная. Усл. кр.-от.
23,8. Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,31. Тираж 206 000 экз.
Цена 40 коп. Заказ 91

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательства, полиграфии и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1.
«Квант»
тел. 250-33-54

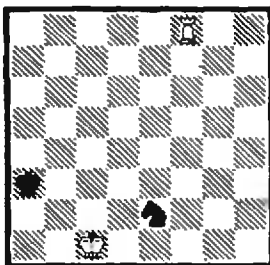
Шахматная страничка

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гук.

РЕКОРДЫ КОМПЬЮТЕРА

В предыдущих номерах журнала мы рассказывали о достижениях ЭВМ в анализе пятифигурных окончаний. Здесь компьютеру еще предстоит работа: не закончено исследование эндшпиля «ферзь с пешкой против ферзя», впереди анализ сложного эндшпиля «два коня против пешки», интересные машинные этюды на тему «ферзь и легкая фигура против ферзя». Что же касается трех- и четырехфигурных окончаний, то можно сказать, что в них все точки над «i» поставлены. Некоторые из рекордов в свое время уже сообщались в «Кванте». Для полноты картины приведем рекордные (по длительности решения) позиции для наиболее интересных типов окончаний.

Эндшпиль «ладья против коня» считается теоретически ничейным, но вопрос, ловится ли конь, иногда решить совсем не просто. В следующей позиции при наилучшей игре обеих сторон белые забирают коня на 27-м ходу.



1. Kpd2 (1. Kpc2 упускает выигрыш!) 1... Kd4 2. Kpc3. Ошибочно 2. Kpd3, впрочем, белые сделают еще немало единственных ходов, и трудно предположить, чтобы их нашел шахматист во время партии, да и в домашнем анализе тоже. А ведь на доске всего четыре фигуры.

2...Kb5 + 3. Kpc4 Kd6 + 4. Kpc5 Kb7 + 5. Kpb6 Kd6 6. Lf4 Kpb3 7. Kpc5 Kb7 + 8. Kpc6 Kd8 + 9. Kpb5 Ke6 10. Lf3 + Kpc2 11. Kpc4 Kpd2

12. Lf5 Kpc2 13. Lf2 + Kpd1 14. Kpd3 Ke5 + 15. Kpd4 Kb3 + 16. Kpc3 Kpe1 17. Lb2! Ke5 18. Kpd4 Ke6 + 19. Kpc3 Kpd1 20. Lb6 Kg5 21. Lc6! Kf7 22. Lc7 Ke5 23. Kpe4 Kg4 24. Lg7! Kf6 + 25. Kpe6 Kh5 26. Lg5. Конь пойман.

Более простым является эндшпиль «ладья против слона». В нем практически нет положений, оценка которых вызывает трудности. Рекорд, установленный ЭВМ, — 18 ходов. Забавно, что все фигуры расположены на одной крайней вертикали.

Белые: Кра4, Ла3; черные: Кра8, Са6.

Исследуя те или иные позиции, где выигрыш очевиден, машине всегда важно выяснить, как долго может продлиться сопротивление обреченная сторона. Доказано, что одинокого короля ферзь матует за 10, а ладья — за 16 ходов. Приведем аторой рекорд.

Белые: Кра1, Лh6; черные: Kpg5.

1. Ла6 Kpf5 2. Ла5 + Kpe4 3. Кра2 Kpd4 4. Kpb3 Kpd3 5. Ла4 Kpd2 6. Ld4 + Kpe2 7. Kpc2 Kpe3 8. Ла4 Kpe2 9. Ла3 Kpe1 10. Kpd3 Kpf2 11. Kpd2 Kpf1 12. Kpe3 Kpg2 13. Kpe2 Kpg1 14. Kpf3 Kph1 15. Kpg3 Kpg1 16. Ла1 ×.

При наилучшей игре обеих сторон в рекордной позиции ферзь справляется с ладьей за 31 ход.

Белые: Kpc8, Фd8; черные: Kpc3, Лс4.

1. Kpb7 Лb4 + 2. Kpc6 Лс4 + 3. Kpb6 Лb4 + 4. Кра5 Ле4 5. Фd6 Ld4 6. Фf6 Kpd3 7. Kpb5 Kpe3 8. Kpc5 Lf4 9. Фа1 Лf8. Ладья иногда покидает своего короля, но так, чтобы не попасть под двойной удар. Этот метод защиты, найденный ЭВМ, усложняет задачу белых. 10. Фd4 + Kpe2 11. Фg4 + Kpe3 12. Фе6 + Kpf3 13. Kpd4 Ld8 + 14. Kpc3 Lf8 15. Фс6 + Kpg4 16. Фg6 + Kpf3 17. Фg5. Ферзь, с одной стороны, стремится ограничить подвижность черных фигур, а с другой, прикрывает тыл, обеспечивая приближение собственного короля. 17... Lf4 18. Kpd3 Ла4 19. Фd5 + Kpf2 20. Фс5 + Kpg3 21. Kpe3 Lg4 22. Фh5 Ла4 23. Фе5 + Kph3 24. Фе6 + Kph4 25. Фе7 + Kpg3 26. Фd6 + Kph4

27. Kpf3 Kph5 28. Фd5 + Kph4 29. Фd8 + Kph5 30. Фе8 + Kpg5 31. Ф:a4 и все кончено.

Для многих шахматистов матование слоном и конем одинокого короля вызывает большие трудности. Машина установила, что мат дается не позднее 33-го хода.

Белые: Кра8, Се8, Kh2; черные: Kpc8.

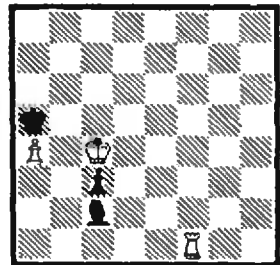
1. Кра7 Kpd8 2. Сс6 Kpc7 3. Се4 Kpd6 4. Kf3 Kpc5 5. Кра6 Kpd6 6. Kpb5 Kpd7 7. Kpc5 Kpe6 8. Kpd4 Kpf6 9. Kpd5 Kpe7 10. Kpe5 Kpf7 11. Kpf5 Kpe7 12. Ке5 Kpd6 13. Kd3 Kpd7 14. Kpe5 Kpe7 15. Cd5 Kpd7 16. Kpf6 Kpd6 17. Се6 Kpc6 18. Kpe5 Kpb5 19. Сb3 Кра5 20. Kpd5 Kpb5 21. Kpd6 Кра6 22. Kpc6 Кра5 23. Kpc5 Кра6 24. Cd5 Кра5 25. Kb2 Кра6 26. Кс4 Кра7 27. Kpc6 Кра6 28. Се6 Кра7 29. Сс8 Кра8 30. Kpc7 Кра7 31. Ка3 Кра8 32. Сb7 + Кра7 33. Kb5 ×.

Матование двумя слонами значительно проще. Здесь достаточно 19 ходов.

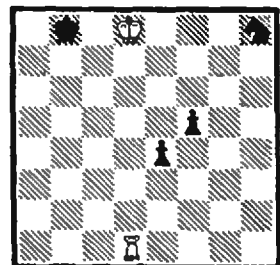
Белые: Кра8, Cd2, Cd7; черные: Kpd6.

Конкурсные задания

В одной позиции ладья борется против слона, а в другой — против коня, правда на доске еще есть пешки.



5. Белые начинают и выигрывают.



6. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 20 мая 1987 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 5.6».

Цена 40 коп.
Индекс 70465

Кубик Рубика словно таран пробил некую брешь, через которую на человечество потоком хлынули десятки, если не сотни, более и менее родственных ему головоломок. Многие из них были придуманы давным-давно, но только сейчас сумели завоевать устойчивую популярность. Среди них — «Волшебные кольца». Вы видите их на нашей картинке. Эта головоломка была запатентована в Англии еще

в конце прошлого века, а возродилась не так давно в Венгрии. У нас ее выпускают в Ленинграде, Брянске (в несколько ином исполнении) и других городах. Двигая шарики четырех цветов по двум пересекающимся кольцевым желобам, вы должны разместить их как на рисунке 1 (предварительно шарики произвольно перемешиваются). Несложно подобрать шарики на внешней дуге одного из

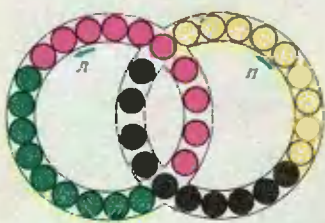


Рис. 1.

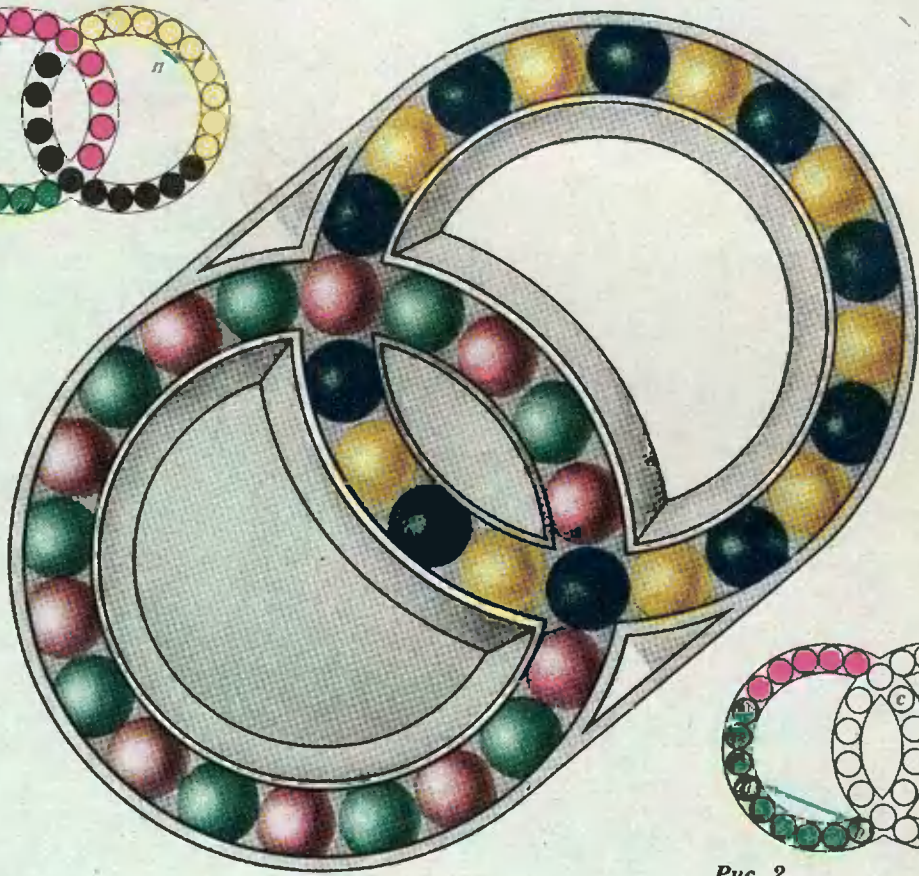


Рис. 2.

колец, скажем левого (рис. 2), но дальше возникают трудности. Для тех, кто не сможет одолеть их сам, — подсказка. Пусть L^n (L^{-n}) — поворот левого кольца на n шариков против (по) часовой стрелки; $P^{\pm n}$ аналогичные повороты правого кольца. Операция $A = L^6 P^5 L^{-6} P^{-5} L^{-1}$ (выполняемая слева направо: L^6, P^5, \dots) меняет места шарика a и b , c и d (рис. 2). Вращая правое кольцо, можно любой его шарик поставить на место d , не

трогая a , b и c . Если a и b одного цвета, то их перестановка фактически ничего не меняет, так что в этом случае операцией A можно с поменять с любым шариком правого кольца. В «волшебных кольцах» всего 4 сорта шариков, но та же операция A позволяет получить произвольную их перестановку и тогда, когда все они помечены по-разному. Подумайте, как это сделать, а также как решать головоломку для произвольного числа шариков в кольцах.