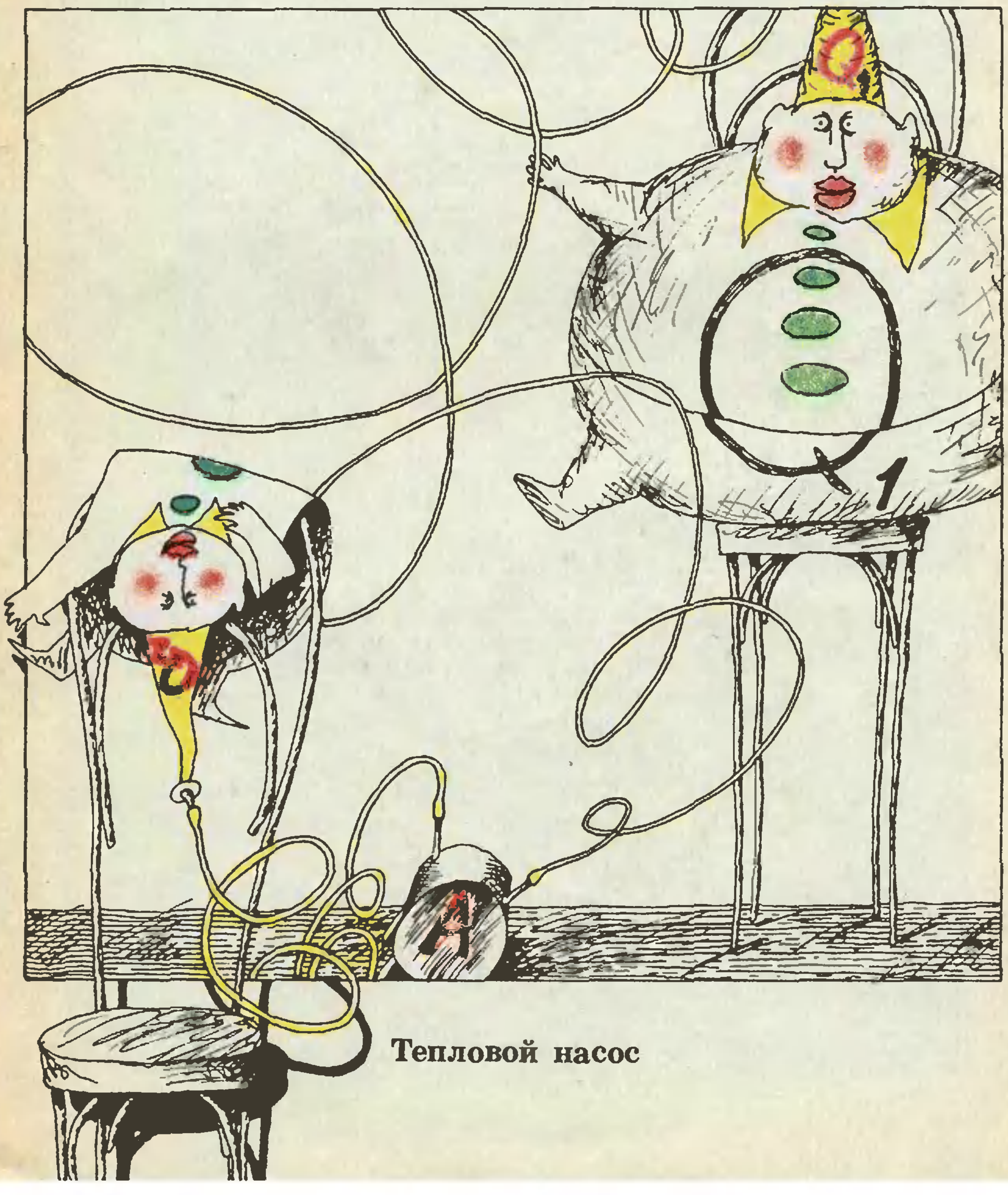
ISSN 0130-2221

Квант

11
1986

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР



Тепловой насос


XX ВСЕСОЮЗНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
ПО ФИЗИКЕ
Алма-Ата, апрель 1986 г.

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант

11 1986

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ: / IN THIS ISSUE:

Сюжет, изображенный художником на первой странице обложки, иллюстрирует одну из заметок раздела «Школа в «Кванте»

«Перейти к формированию специалистов широкого профиля, сочетающих глубокие фундаментальные знания и обстоятельную практическую подготовку, ориентированную на конкретную отрасль.» В этих строках из Проекта ЦК КПСС «Основные направления перестройки высшего и среднего специального образования в стране» суммирован опыт передовых вузов. Один из таких вузов — Московский физико-технический институт. Интерес к нему у школьников не ослабевает уже в течение четырех десятилетий. Истории, сегодняшнему дню и будущему физтеха посвящена беседа с его ректором — лауреатом Ленинской премии академиком О. М. Белоцерковским.

Интервью с академиком О. М. Белоцерковским

— Олег Михайлович, образование физтеха в 1946 году было обусловлено глубокими и сложными процессами, происходящими в науке и производстве. Как сегодня, с позиций, можно сказать, истории вы могли бы прокомментировать их?

— Каждый этап в развитии общества определяет свой уровень среднего и высшего образования. Надо сказать, что еще до войны разрыв между наукой, производством и образованием начал ощущаться все сильнее и сильнее. И идея физтеха как вуза, способного преодолеть этот разрыв, родилась именно в эти предвоенные годы. В 1938 году в «Правде» появилась статья за подписью крупнейших ученых страны[1], где обсуждался вопрос о создании вуза нового типа и где были названы, по существу, все основные черты системы физтеха.

Жизнь требовала рационального и оптимального внедрения научных достижений в производство. В свою очередь наука должна была оперативно откликаться на требования быстро развивающейся промышленности, особенно ее новых отраслей. Для осуществления всего этого нужны были специалисты особого склада: с фундаментальной общей подготовкой и хорошим знанием конкретных проблем.

Идея физтеха была реализована только после войны. Сначала — созданием физико-технического факультета МГУ, а в начале 50-х годов факультет был преобразован в Московский физико-технический институт. У истоков физтеха стояли академики П. Л. Капица, М. А. Лаврентьев. Академик С. А. Христианович был, по существу, первым ректором МФТИ. Принципиальную роль в развитии и становлении нашего института сыграл И. Ф. Петров, который в течение десяти лет был директором института. Я бы сравнил его с мощной ракетой-носителем, которая выводит спутник на орбиту. Считаю, что именно он вывел физтех на орбиту большой науки.

Я лично очень доволен, что пришел на физтех, который теперь стал по-настоящему техническим университетом.

— Вы перешли на физико-технический факультет МГУ с четвертого курса МВТУ имени Баумана. Что определило ваш выбор?

— Из Бауманского в МГУ нас перешло 16 или 17 человек. Мы были приняты на «двухсполовинный» курс. Мне тогда показалось возможным «потерять» два года с тем, чтобы приобрести фундаментальные знания и в то же время работать в прикладной науке. Ведь раньше в академической области работали только выпускники университетов, а выпускники технических вузов шли на производство.

— Расскажите, каким был физтех в годы вашей учебы. Ведь это были первые годы его существования.

— Как и сейчас, в программе было много физики. Очень сильным был преподавательский состав. Лабораторные работы ставили академики

А. И. Шальников и Г. С. Ландсберг. Объединенный курс общей и теоретической физики читали академики П. Л. Капица и Л. Д. Ландау. Читали они этот курс всего год. Их лекции неповторимы и уникальны. Ведь мы обычно тратим много времени на последовательное чтение курсов. А они попробовали совместить их. Очень заманчивая идея! Лекции эти сохранились, и мы попытаемся их издать.

Кафедру математики возглавлял академик М. А. Лаврентьев. Механику читали академик Л. И. Седов и член-корреспондент АН СССР В. В. Соколовский, физику — профессора С. Э. Хайкин и С. Г. Калашников.

Вполне естественно, что многие крупные ученые и академики тогда были еще не крупные ученые и не академики. Наш нынешний заведующий кафедрой высшей математики член-корреспондент Л. Д. Кудрявцев, к примеру, был еще кандидатом наук, а академик С. М. Никольский — доктором.

Лекции по физике великолепно читал член-корреспондент АН СССР С. М. Рытов. Я очень дорожил своими записями этих лекций. А на экзамене по физике получил у него четверку и ужасно огорчился.

— А были ли тогда такие элементы системы физтеха, как вопросы по выбору на экзаменах, базовые институты, шефы, госэкзамен?

— Госэкзамен по физике ввел Л. Д. Ландау. И принимал его очень жестко.

Вопросов по выбору не было, но были суровые письменные контрольные работы. Сложнее, чем сейчас. Если вы набирали 70—80 % от максимального количества очков, то вам практически обеспечивалась пятерка. Шли к лектору, и он не столько спрашивал, сколько беседовал с вами.

Базы и шефы существовали с самого начала. Основной упор делался на физику и инженерное обучение. Базовых институтов было немного: шесть — восемь.

— Какие изменения происходили в системе физтеха в последующие годы?

— Со временем система физтеха эволюционировала, это закономерно. Возникали новые факультеты. У нас появился факультет аэромеханики и летательной техники. За двадцать лет своего существования он прекрасно зарекомендовал себя.

Еще одним новым элементом стал прием абитуриентов во Владивостоке, в Киеве, Красноярске, Челябинске, Хабаровске. Набор наиболее сильных ребят на местах, их обучение в Долгопрудном по специальной программе и распределение после четвертого курса обратно по специальностям, остро необходимым данной республике или региону,— все это отвечает современным требованиям, отвечает, если хотите, мировому уровню подготовки кадров.

Вообще наш институт стал уделять больше внимания «своему» абитуриенту. Были созданы заочная и вечерняя физико-технические школы, проводятся выездные физико-математические олимпиады, выходят рекламные номера нашей институтской газеты «За науку». Чтобы отобрать 700—800 будущих студентов, институт «просматривает» 10—12 тысяч школьников.

— Если сравнить сегодняшних абитуриентов с абитуриентами вашего набора...

— Сейчас требуется более углубленная, интенсивная, даже изощренная подготовка. Молодым людям тяжелее. Иногда к этому обращаюсь и ловлю себя на мысли: смогли бы мы сегодня? И я не уверен.

Сейчас ребята приходят лучше подготовленными. Прием прошлого года, например, был у нас самым сильным среди технических вузов. Два победителя олимпиад на одно место! Это кое о чем говорит. Но, с другой стороны, теперешние студенты более ранимые, менее терпеливые. Мы были упорнее. В то трудное время — еще существовала карточная система — нас переполнял энтузиазм. Впрочем, мне кажется, что он в определенной мере сохранился и сейчас. Специфика нашей профессии такова, что нам нужны в основном энтузиасты.

— Олег Михайлович, каковы главные черты сегодняшнего облика МФТИ?

— Сейчас на физтехе сложился, видимо, довольно удачный союз «трех китов», трех образовательных циклов: общеинститутского, факультетского и базового. В рамках первого из них работают сильнейшие кафедры общей физики, высшей математики, теоретической физики. Факультетские и базовые циклы соответствуют основным направлениям подготовки кадров.

Вообще в институте существуют три крупных «куста» специальностей. Это радиотехника и электроника, физика (теоретическая и прикладная) и управление. В последние годы появились еще два «куста» — информатика и вычислительная физика (общее руководство здесь осуществляет академик Е. П. Велихов), а также новые специальности, связанные с созданием факультета физико-химической биологии (руководитель — академик Ю. А. Овчинников).

Если просмотреть весь путь развития МФТИ, то можно заметить, что в разное время существовали своеобразные приливы: были на подъеме какие-то отрасли науки, и они давали импульс развитию института в целом. В разные годы испытывали подъем ядерная физика, радиотехника, химическая физика, затем появились космические исследования, управление, прикладная математика. Следующий пик надо ожидать в биологии, особенно в физико-химической биологии. Новые специалисты здесь должны быть хорошими физиками, тонкими химиками и одновременно биологами. Иначе нельзя. И мы как раз начали готовить их на новом факультете.

Если раньше в системе физтеха работала цепочка из двух звеньев: вуз — НИИ, то сейчас складывается и крепнет новая цепочка: вуз — НИИ Академии наук — производство. Эта система, как показывает опыт, весьма эффективна. Приведу несколько цифр. На факультете аэромеханики и летательной техники из всех выпускников 45—50 % уже кандидаты наук, а 7—8 % — доктора наук. Примерно такие же цифры на других наших факультетах.

Из специалистов в области химической физики, физики горения и взрыва 328 человек защитили кандидатские диссертации, 52 — докторские, трое избраны членами-корреспондентами АН СССР, один — Ю. Н. Молин — академиком. Кстати, о крепких позициях физтеха говорят и последние выборы в Академию наук: академиками и членами-корреспондентами избраны 33 выпускника и сотрудника МФТИ.

Хорошо работает наша аспирантура. 80—85 % аспирантов защищаются в срок. Это связано с тем, что аспирантура на физтехе строго целевая. Темы диссертаций, как правило, продолжают студенческие курсовые и дипломные работы и входят в научные планы базовых институтов.

Большое место в физтеховском образовании занимают общественные науки, которые преподают сейчас как единый цикл.

«Гуманитаризации» студентов помогает изучение двух иностранных языков. У нас очень хорошая кафедра иностранных языков, она насчитывает около ста преподавателей, имеет прекрасное оборудование в лингафонных кабинетах, в аудиториях.

— Скажите, то, что физтех расположен не в Москве, а в Долгопрудном,— это минус или плюс?

— Плюс, конечно, плюс! Именно это в свое время позволило нам сохранить свою самобытность, когда физико-технический факультет МГУ был организован за городом. Дети должны вовремя уходить от родителей, начинать жить самостоятельно. Ну, и, конечно, близость к природе — это тоже большой плюс.

— И последний вопрос. Будущее физтеха — каким оно видится?

— Могу говорить только о наших ближайших планах. В институте создается один из самых крупных вузовских вычислительных центров. Начнется активное внедрение вычислительной техники в подготовку специалистов всех направлений. В корпусе прикладной математики, который недавно у нас вступил в строй, разместятся несколько лабораторий, научно-учебные центры автоматизации, разработки элементной базы, математического обеспечения высокопроизводительных ЭВМ и САПР (систем автоматизированного проектирования).

Будет проводиться разработка общего и специального матобеспечения, математического моделирования задач большой размерности, автоматизации проектирования. Появятся новые машины от супер-ЭВМ до персональных. Все это станет базой для подготовки и переподготовки кадров, соответствующих нашему времени, времени ускорения научно-технического прогресса.

Интервью вел В. В. Фомин

В этом году в нашей стране широко отмечается юбилей — 275-летие со дня рождения Михаила Васильевича Ломоносова. Часто случается так, что имя выдающегося ученого, посвятившего себя одной области науки, остается неизвестным представителям других специальностей и тем более широкой общественности. Ломоносова же считают одним из основателей своей науки и химики, и физики, и метеорологи, и географы... Он оставил яркий след в русской литературе и в искусстве.

Безнадежно пытаться охватить в одной журнальной статье все многообразие интересов и достижений Ломоносова — об этом написано множество книг. Представление о многогранности таланта Ломоносова дает «мозаика» отрывков из его работ и высказываний о нем выдающихся представителей отечественной науки и культуры, публикацией которой наш журнал отмечает юбилей великого российского энциклопедиста.

О законах сохранения

...все перемены, в Натуре случающиеся, такого суть состояния, что сколько чего у одного тела отнимется, столько присовокупится к другому. Так, ежели где убудет несколько материи, то умножится в другом месте; сколько часов положит кто на бдение, столько же сну отнимет. Сей всеобщий естественный закон простирается и в самые правила движения; ибо тело, движущее своим движением другое, столько же оныя у себя теряет, сколько сообщает другому, которое от него движение получает.

Из «Размышлений о причине теплоты и холода»

Внутреннее движение мы представляем себе происходящим трояким образом: 1) нечувствительные частицы непрерывно изменяют место или 2) вращаются, оставаясь на месте, или, наконец, 3) непрерывно колеблются взад и вперед на нечувствительном пространстве, в нечувствительные промежутки времени. Первое мы назовем поступательным, второе — вращательным, третье — колебательным внутренним движением. Теперь следует рассмотреть, какое же из этих движений производит теплоту. Чтобы это выяснить, мы примем за основу следующие положения. 1) То внутреннее движение не есть причина теплоты, отсутствие которого будет доказано в горячих телах.

Общее культурное влияние Ломоносова огромно. Наш литературный и научный язык, грамматика, поэзия, литература на века определились Ломоносовым. Наша Академия наук с ее неустанным изучением родной страны получила свое настоящее бытие и смысл только через Ломоносова... Современная громадная советская наука и техника стали возможными на почве, подготовленной Ломоносовым. Ломоносов с его широтою задач, простотой и реальностью решений и несокрушимой настойчивостью стал образцом передовых гениев русской науки в ее дальнейшем развитии — Менделеева, Лебедева, Павлова... Ломоносов явился как бы воплощением и символом русской культуры и науки с ее особенностями и своеобразием.

С. И. Вавилов (1891—1951)

2) Не является причиной теплоты и то внутреннее движение, которое имеется у тела, менее горячего, чем другое тело, лишенное этого движения.

...Рассмотрим, во-первых, какой-нибудь серебряный сосуд или другой предмет из этого металла, покрытый золотом и снабженный самыми мелкими вырезанными знаками, нагретый до такой степени тепла, при которой кипит вода. Мы увидим, что золото на поверхности останется незатронутым и знаки нимало не изменившимися; самая твердость сосуда останется прежней, и этим совершенно исключена возможность отделения нечувствительных частиц. Отсюда совершенно очевидно, что тело может быть сильно нагрето без внутреннего поступательного движения ... Отсюда ... следует, что внутреннее поступательное движение связанной материи не есть причина теплоты.

Из определения внутреннего колебательного движения ... ясно видно, что при таком движении частицы тел не могут быть в сцеплении друг с другом. Хотя расстояния, в которых совершаются их крайне малые колебания, весьма незначительны, однако невозможно, чтобы при этом частицы не лишались взаимного касания и по большей части не оказывались вне его. Для ощутимого сцепления частиц тела требуется непрерывное взаимное соприкосновение их; следовательно, частицы тела не могут находиться в ощутительном сцеплении, если они сотрясаются внутренним

Все современники, знавшие Ломоносова,... ожидали от этого самородка совершенно исключительных научных исследований; казалось, что все задатки для такой деятельности счастливо сочетались в его лице: огромный природный талант естествоиспытателя, ясный, независимый ум, широкий кругозор, большой запас знаний, несокрушимая воля, железное здоровье и желание всецело отдаться любимому делу,— но судьба поставила Ломоносова в те чисто русские условия деятельности, при которых никакой талант ученого не мог ему помочь...

П. Н. Лебедев (1866—1912)

Во главу изучения природы Ломоносов ставит опыт — это его характерная черта как ученого. Поэтому он много сил положил, чтобы создать лабораторию, и усердно работал там. Но тогдашнее окружение мало ценило Ломоносова как ученого, его ценили прежде всего как поэта. За одну из своих хвалебных од

колебательным движением. Но так как большинство тел при нагревании до огненного каления сохраняет очень сильное сцепление частиц, то очевидно, что теплота тел не происходит от внутреннего колебательного движения связанной материи.

Итак, после того, как мы отвергли поступательное и колебательное внутреннее движения, с необходимостью следует, что теплота состоит во внутреннем вращательном движении связанной материи — ведь ее необходимо приписать какому-нибудь из трех движений. ⟨...⟩

...невозможна высшая и последняя степень теплоты как движения. Наоборот, то же самое движение может настолько уменьшиться, что тело достигает, наконец, состояния совершенного покоя и никакое дальнейшее уменьшение движения невозможно. Следовательно, по необходимости должна существовать наибольшая и последняя степень холода, которая должна состоять в полном прекращении вращательного движения частиц.

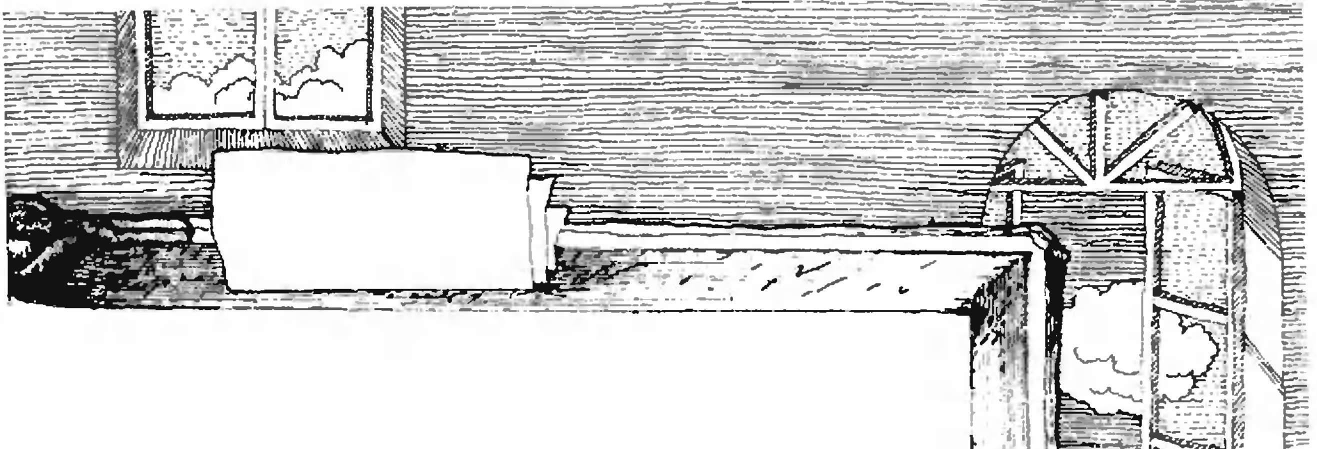
О зажигательном приборе

Вознамерившись ввести в область химии приборы физиков, а также истины, ими открытые, чтобы до известной степени устранить или облегчить трудности, встречающиеся в этой науке, и осветить области темные и скрытые глубоким неведе-

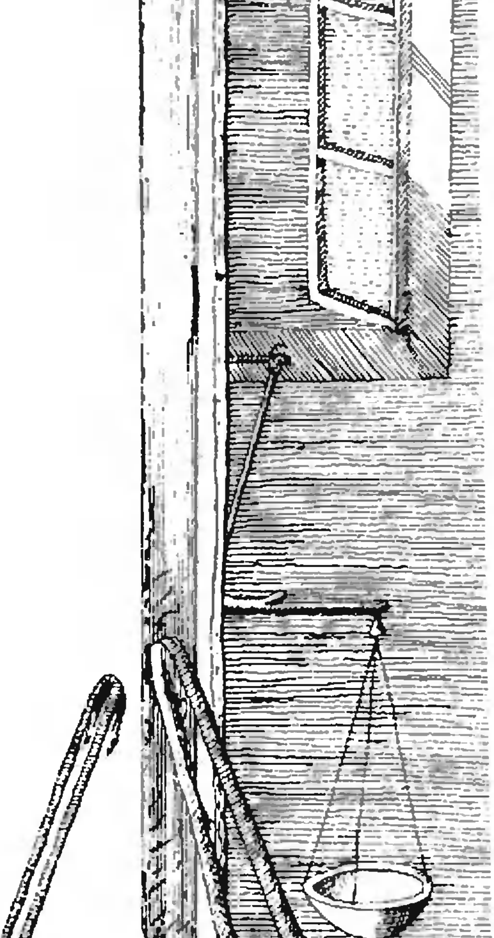
Ломоносов получил от царицы 2000 рублей, что было больше, чем его трехлетнее жалование в Академии наук... Значение его научных занятий в лаборатории не было понятно чиновникам и двору. Чтобы оправдаться в своих лабораторных занятиях, Ломоносов писал в 1753 году графу Шувалову: «...полагаю, что мне позволено будет в день несколько часов времени, чтобы их, вместо бильярду, употребить на физические и химические опыты». ⟨...⟩ Приходится удивляться тому, как много сделал Ломоносов в области экспериментальной базисной науки, несмотря на эти неблагоприятные условия.

П. Л. Капица (1894—1984)

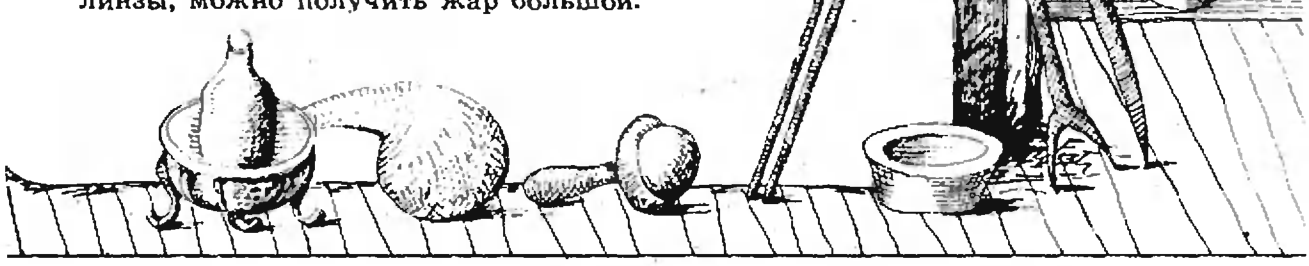
Теоретические и экспериментальные изыскания Ломоносов сочетал с большой работой по созданию самых различных приборов для нужд науки и практики: анемо-



нием, я счел за благо по мере моих сил уничтожить каким-либо способом упомянутые трудности и попытаться увеличить зажигательную силу этих приборов, которые прославлены столькими работниками, двинувшими вперед естествознание, и которые, я не сомневаюсь, придут на помощь в химических работах, требующих сильного огня. ⟨...⟩



И вот, наконец, явилась мысль, что солнечные лучи и после отражения от плоских зеркал все еще сохраняют свою теплотворную силу и, следовательно, должны, будучи собраны выпуклой линзой, увеличить жар. Тотчас же я, торжествуя, взял плоское зеркало и линзу диаметром в два дюйма и, так как день был как раз ясный, собрал линзой солнечные лучи, отраженные зеркалом. Когда, после этого, я подставил кусок дерева, на нем образовалось черное пятно и оттуда пошел дым. Я смотрел на это с восторгом и, с целью идти и далее, соединил фокус линзы, подставленной прямым лучам, с фокусом первой и поднес к ним весьма белую бумагу, которая отказывалась загораться от прямых солнечных лучей, собранных той или другой из названных линз; сразу же пошел дым, на бумаге образовалось черное пятно, бумага вспыхнула, и огонь, разгораясь, начал ее сжигать. Итак, повторив этот опыт несколько раз и устранив всякое сомнение в его правильности, я не колеблюсь заключить, что расставив так, как я упомянул выше, большие зеркала и линзы, можно получить жар большой.



метр, морской барометр, зажигательный оптический прибор, «горизонтоскоп», «ночезрительная труба», отражательный зеркальный телескоп, фотометрическая труба для сравнения силы света звезд и многие, многие другие оригинальные приборы и аппараты — плоды его неутомимой деятельности. Замечательная идея Ломоносова о рефрактометре получила признание и осуществлена только в конце XIX века.

М. В. Келдыш (1911—1978)

...я должен отдать справедливость господину Ломоносову, что он одарен самым счастливым остроумием для объяснения явлений физических и химических. Желать надобно, чтобы все прочие академики были в состоянии показать такие изобретения, которые показал господин Ломоносов...

Л. Эйлер (1707—1783)

О методе научного исследования

Химик требуется не такой, который только из одного чтения книг понял сию науку, но который собственным искусством в ней прилежно упражнялся... Не такой требуется математик, который только в трудных выкладках искусен, но который, в изобретениях и в доказательствах привыкнув к математической строгости, в натуре сокровенную правду точным и непоползновенным порядком вывести умеет... Химия руками, математика очами физическими по справедливости называться может.

О научно-популярной литературе

Всякий, кто берет на себя труд осведомлять публику о том, что содержится в новых сочинениях, должен прежде всего взвесить свои силы. Ведь он затевает трудную и очень сложную работу, при которой приходится докладывать не об обыкновенных вещах и не просто об общих местах, но схватывать то новое и существенное, что заключается в произведениях, создаваемых часто величайшими людьми...

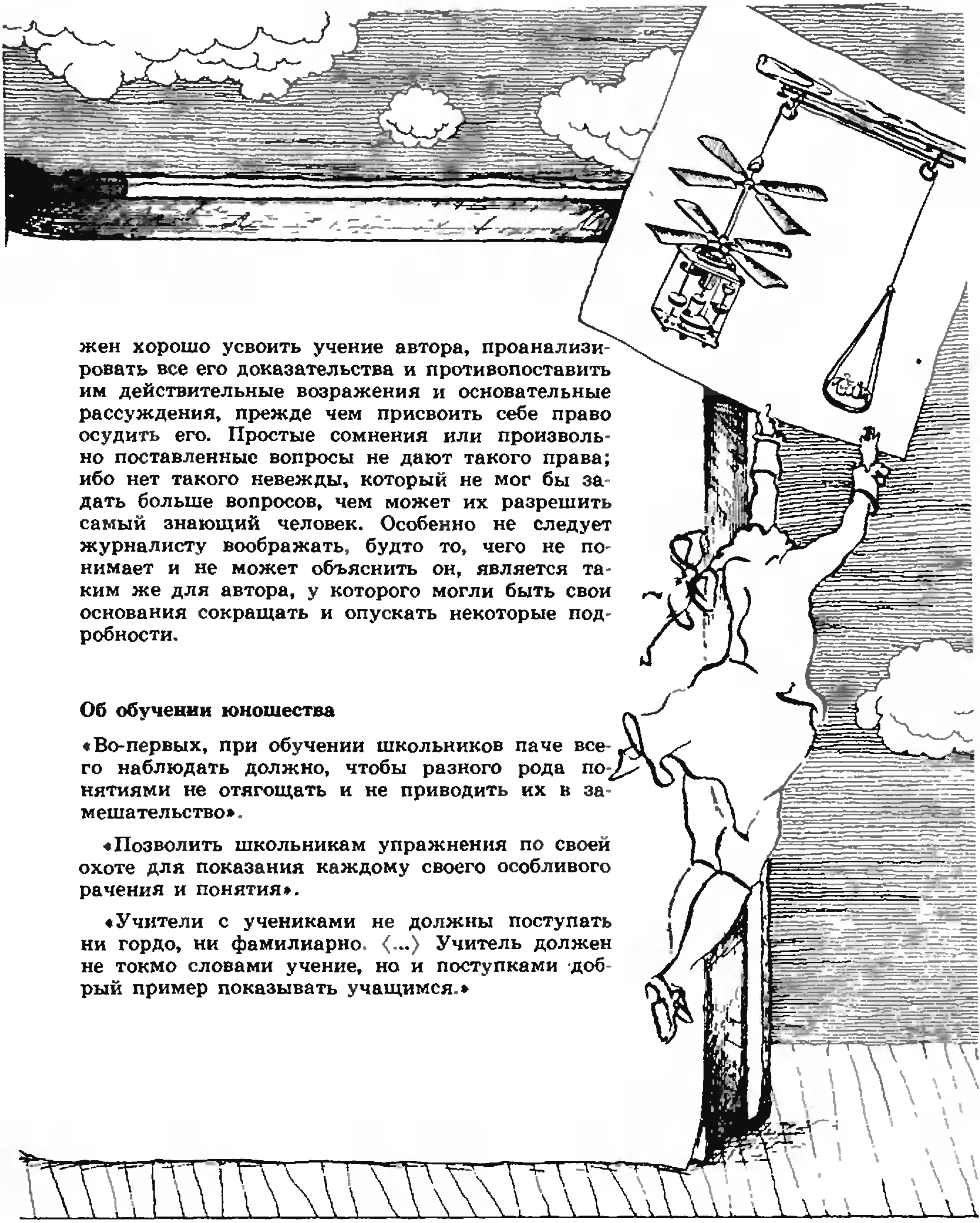
Журналисту позволительно опровергать в новых сочинениях то, что, по его мнению, заслуживает этого,— хотя не в этом заключается его прямая задача и его призвание в собственном смысле; но раз он уже занялся этим, он дол-

Ломоносов страстно любил науку, но думал и заботился исключительно о том, что нужно для блага его родины. Он хотел служить не чистой науке, а только человечеству.

Н. Г. Чернышевский (1828—1889)

Всякое прикосновение любезной сердцу его России, на которую он глядит под углом ее сияющей будущности, исполняет его силой чудотворной... Всю русскую землю озирает он от края до края с какой-то светлой вышины, любуясь и не налюбуясь ее беспредельностью и девственною природою. В описаниях слышен взгляд ученого натуралиста, нежели поэта; но чистосердечная сила восторга превратила натуралиста в поэта.

Н. В. Гоголь (1809—1852)



жен хорошо усвоить учение автора, проанализировать все его доказательства и противопоставить им действительные возражения и основательные рассуждения, прежде чем присвоить себе право осудить его. Простые сомнения или произвольно поставленные вопросы не дают такого права; ибо нет такого невежды, который не мог бы задать больше вопросов, чем может их разрешить самый знающий человек. Особенно не следует журналисту воображать, будто то, чего не понимает и не может объяснить он, является таким же для автора, у которого могли быть свои основания сокращать и опускать некоторые подробности.

Об обучении юношества

«Во-первых, при обучении школьников паче всего наблюдать должно, чтобы разного рода понятиями не отягощать и не приводить их в замешательство».

«Позволить школьникам упражнения по своей охоте для показания каждому своего особливого рачения и понятия».

«Учители с учениками не должны поступать ни гордо, ни фамилиарно. ⟨...⟩ Учитель должен не токмо словами учение, но и поступками добрый пример показывать учащимся.»

Ломоносов был великий человек. Между Петром I и Екатериной II он один является самобытным сподвижником просвещения. Он создал первый университет, он, лучше сказать, сам был первым нашим университетом... Соединяя необыкновенную силу воли с необыкновенною силою понятия, Ломоносов обнял все отрасли просвещения. Жажда науки была сильнейшею страстью сей души, исполненной страстей. Историк, ритор, механик, химик, минералог, художник и стихотворец, он все испытал и все проник.

А. С. Пушкин (1799—1837)

В оформлении статьи использованы авторские рисунки из книг М. В. Ломоносова: морской барометр; крепостной перископ; зажигательный прибор; ночезрительная труба; регистратор грозового разряда; аэродромическая машина (прообраз вертолета).

Неприводимость и иррациональность

В. А. ОЛЕЙНИКОВ

В прошлом номере автор рассказал о многовековой истории иррациональных радикалов и неприводимых многочленов, о признаке Эйзенштейна. Здесь же речь пойдет о достижениях XX века в этой области, но на более наглядном геометрическом языке.

Созданная на рубеже XIX и XX веков теория алгебраических чисел стала новым стимулом для изучения неприводимых многочленов. *Алгебраическое число* α — это просто корень многочлена с целыми коэффициентами:

$$P(\alpha)=a_0+a_1\alpha+\ldots+a_n\alpha^n=0.$$

Все радикалы, которые мы рассматривали в предыдущей статье,— алгебраические числа. Однако понятие алгебраического числа значительно шире: еще в начале прошлого века П. Руффини (1765—1822) и Н. Г. Абель (1802—1829) показали, что не всякое уравнение степени выше четвертой разрешимо в радикалах. Алгебраические числа, таким образом, не исчерпываются иррациональными радикалами и рациональными числами.

Но зато алгебраические числа тесно связаны с неприводимыми многочленами. Именно, *любое алгебраическое число является корнем единственного* (с точностью до числового множителя) *неприводимого многочлена*. Это следует из ТЕОРЕМЫ («Квант» № 10, с. 7).

Свойство неприводимости стало предметом пристального внимания многих выдающихся математиков. Наряду с поисками общих свойств (таких, как в ТЕОРЕМЕ) исследователям не давал покоя признак Эйзенштейна. Чувствовалось, что за этим признаком скрывается какой-то общий принцип, выявление которого позволит получать новые более общие признаки. Так и оказалось на самом деле. Дальнейшее продвижение здесь связано с возможностью перевода свойства неприводимости на язык геометрических образов. Основа этого языка была заложена великим Ньютоном за 200 лет до описываемых событий и носит его имя.

Диаграмма Ньютона

Для построения *диаграммы Ньютона многочлена* $P(x)$ *по заданному простому* p необходимы:

1) координатная плоскость OKM (OK — горизонтальная, а OM — вертикальная оси);

2) линейка, гвозди, молоток;

3) немного терпения.

Потому что сначала наносится *основа* — каждому одночлену a_kx^k из $P(x)$ ставится в соответствие точка с координатами $(k; l)$; l — это наибольшая степень числа p, при которой a_k делится на p^l. Набор всех таких точек ($k=0, 1, ..., n$) и есть основа диаграммы.

На рисунке 1 — основа многочлена $P(x)=$
$$=12+2x+4x^2+x^4+x^5+2x^6+4x^7$$

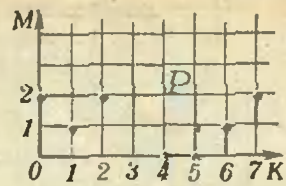


Рис. 1

при $p=2$. Свободный член a_0 делится на p^2, но уже не делится на p^3 — имеем точку (0; 2), a_1 делится на p — точка (1; 1), a_2 дает точку (2; 2).

Внимание! Если $a_k=0$, то точку основы вообще не наносим.

В нашем случае $a_3=0$ не дает точки основы.

Если a_k не делится на p, то $l=0$ и точка $(k; 0)$ попадает на ось OK.

В нашем случае a_4 и a_5 не делятся на p, a_6 делится на p, a_7 делится на p^2 (см. рис. 1).

Будем считать, что вместе со старшим коэффициентом a_n у многочлена $P(x)$ не равен нулю и свободный член a_0. Иначе $P(x)$ всегда приводим (докажите!) и поэтому нам не интересен. На плоскости OKM, таким образом, будут нанесены по крайней мере две точки:

начальная точка основы — у нас (0; 2) и ее *конечная* точка — (7; 2)

А теперь диаграмма (рис. 2). Берем молоток и вбиваем гвозди во все точки основы, затем приставляем линейку вертикально к гвоздю, вбитому в начальную точку. Вращаем ее против часовой стрелки, пока она не упрется в другой гвоздь основы (у нас (1; 1)). Соединяя эти точки отрезком, получаем первое *звено* диаграммы. Для получения следующего звена нужно вращать линейку вокруг второго гвоздя (1; 1) до встречи с новой точкой основы.

Вращаем линейку дальше и наносим остальные звенья, пока, наконец, не доберемся до конечной точки основы и не получим последнее звено.

Диаграмма Ньютона готова и изображена на рисунке 2. Она представляет собой вогнутую вверх ломаную и всегда имеет хотя бы одно звено.

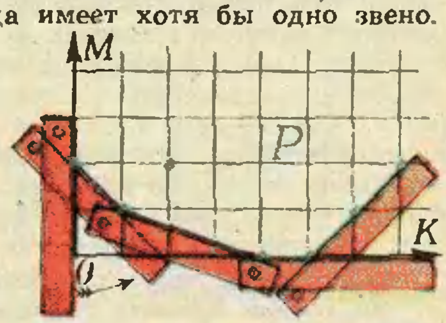


Рис. 2.

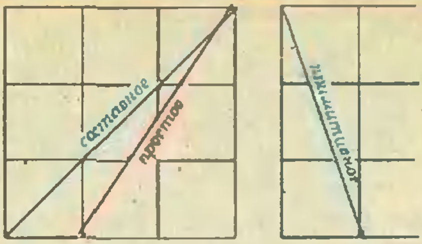


Рис. 3.

Постройте сами диаграмму Ньютона для многочлена

$$Q(x)=16+4x+8x^2+2x^3+8x^6$$

по простому $p=2$.

Лишние точки (у нас — (2; 2)) не должны смущать читателя — во всяком сто́ящем производстве не обойтись без отходов.

О звеньях. Они бывают трех сортов:

Составные, простые, примитивные

Звено диаграммы Ньютона назовем *простым*, если кроме концов на нем нет других точек с целочисленными координатами. В противном случае, если таковые имеются внутри звена, будем называть его *составным* (рис. 3). Далее, простое звено назовем *примитивным*, если длина его проекции на горизонтальную ось OK равна единице.

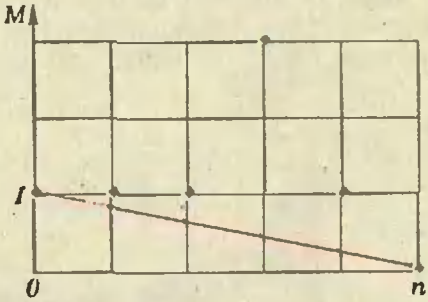
Вот и все. Знакомство с образным языком неприводимости закончено. Пора начать на нем разговаривать. За все труды по изготовлению диаграммы Ньютона нас вознаграждает

Признак Дюма

Если при некотором простом p диаграмма многочлена $P(x)$ состоит ровно из одного простого звена, то такой многочлен неприводим.

Гюстав Дюма жил в Швейцарии и активно занимался задачей о неприводимости в начале нашего столетия. Этот признак получен им в 1906 году.

Признак Дюма позволяет ... нарисовать признак Эйзенштейна,



глубже понять его и запомнить.

По условию признака Эйзенштейна все коэффициенты многочлена $P(x)$, кроме старшего, делятся на p, а свободный член a_0 делится на p и не делится на p^2. Эту ситуацию и отражает рисунок.

XX век не терпит остановок*) и сожалений об упущенных возможностях.

Признаки, признаки, признаки...

На рисунке 4 еще один признак.

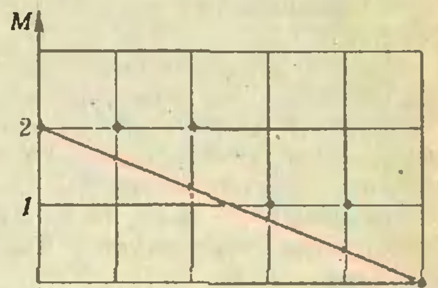


Рис. 4.

Заключенный в словесную форму, он приобретает «больший вес»:

Если для многочлена $P(x)$ нечетной степени $2n+1$ можно указать такое простое число p, что старший коэффициент a_{2n+1} не делится на p,
а все остальные коэффициенты
a_k делятся на p, $k=0, 1, \ldots, 2n$,
но дополнительно коэффициенты
a_k при $k=0, 1, \ldots, n$ делятся и на p^2,
а свободный член
a_0, делясь на p^2, не делится на p^3,
то такой многочлен $P(x)$ неприводим.

Признак Дюма не исчерпан! Каждый желающий может стать обладателем собственного признака, поднимая все выше конец звена и следя за тем, чтобы оно оставалось простым.

Вывод очевиден: массовое производство признаков — перспективное и в то же время абсолютно безопасное дело**).

Снова иррациональность

Среди изобилия признаков неприводимости нашлось место и признаку иррациональности (доказательство в Приложении на с. 16).

Если при некотором простом p диаграмма многочлена $P(x)$ не содержит примитивных звеньев (составные разбиты на простые), то среди его корней не может быть рациональных.

---

*) Кое-что о доказательстве признака Дюма нетороплівый читатель найдет в Приложении на с. 16.

**) Но вряд ли оно доставит нам лавры Эйзенштейна.

Рассмотрим пример

$$P(x)=16+8x+2x^2+2x^3+x^4.$$

Существует верный способ отыскать все рациональные корни любого многочлена $P(x)$. Нужно начать делить его на всевозможные двучлены b_0+b_1x. От целых чисел b_0, b_1 требуется, чтобы они были взаимно просты, и чтобы b_0 делил свободный, а b_1 — старший коэффициент многочлена $P(x)$ (докажите, у вас для этого все есть!).

В нашем случае делить придется на

$$1\pm x,\ 2\pm x,\ 4\pm x,\ 8\pm x,\ 16\pm x.$$

Если $P(x)$ разделится на b_0+b_1x без остатка, то $x=-b_0/b_1$ — его рациональный корень. Если же $P(x)$ не разделится ни на один из указанных двучленов, то рациональных корней нет.

Признак иррациональности и диаграмма Ньютона по простому $p=2$ (рис. 5) избавляет нас от этой утомительной процедуры *), сразу убедив в том, что рациональных корней у многочлена $P(x)$ нет, а значит и искать их не следует.

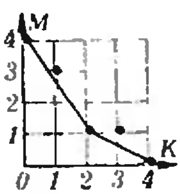


Рис. 5.

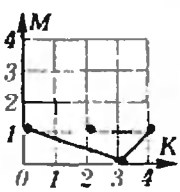


Рис. 6.

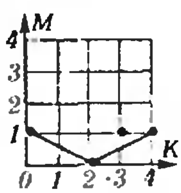


Рис. 7.

Еще пример:

$$P(x)=6+2x^2+3x^3+6x^4,$$

который сначала ни в чем не убеждает, ибо диаграмма $P(x)$ по простому $p=2$ (рис. 6) содержит примитивное звено. На отсутствие рациональных корней указывает другая диаграмма по простому $p=3$ (рис. 7), не содержащая примитивных звеньев.

Докажите сами, что многочлен

$$P(x)=10+5x+10x^2+2x^4,$$

несмотря на изломанную диаграмму при $p=2$, не только не имеет рациональных корней, но даже неприводим**).

Мы снова вернулись к иррациональным числам. Но не с пустыми руками. Теперь у нас есть арсенал средств (он и не снился древним грекам), позволяющий смело смотреть на уравнения высоких степеней.

Поиски новых признаков и новых примеров неприводимых многочленов велись еще долго после появления признака Дюма. Еще более общий признак получил О. Оре (1899—1968) — норвежский математик, известный читателям «Библиотечки «Квант» своим «Приглашением в теорию чисел», вып. 3, 1980 г.

Сильное впечатление (на знатоков) в свое время (в 1929 г.) произвел многочлен Шура*)

$$\frac{P(x)}{n!}=1+a_1\frac{x}{1!}+\ldots+a_{n-1}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+\frac{x^n}{n!}.$$

Этот многочлен неприводим при **любых** целых $a_1, \ldots, a_{n-1}$ и требует для доказательства сразу нескольких диаграмм по различным простым $p_1, \ldots, p_k$.

Значение диаграмм Ньютона не ограничивается одними признаками.

Вместо заключения

Вернемся к началу нашего рассказа («Квант» № 10, с. 6) и вспомним о славном нашествии иррациональных величин по дороге, указанной диагональю единичного квадрата. Вслед за ними в математику пришли *вещественные числа* — фундамент современного математического анализа.

История повторилась в другом геометрическом образе (диаграмме Ньютона). На этот раз он вызвал к жизни новый математический объект, называемый *p-адическими числами*. На языке p-адического анализа, открытого немецким математиком К. Гензелем (1861—1941), и удалось сформулировать тот общий принцип, который лежит в основе всех признаков неприводимости. Скромные на первый взгляд завоевания геометрического образа (о них и был наш рассказ) помогли превратить теорию алгебраических чисел в могучую ветвь современной математики.

А что же неприводимость? Признаки не смогли исчерпать всего богатства неприводимых многочленов, и постепенно интерес к ним стал угасать. Но ненадолго.

В наше время — время ЭВМ и прогресса — интерес к свойству неприводимости разгорелся с новой силой и выразился в *алгоритмическом подходе*. Здесь главная цель — СКОРОСТЬ, с которой методом проб, используя арифметические операции, можно решить вопрос о неприводимости любого, но конкретного, многочлена.

*) Автор слегка преувеличил трудности — можно обойтись и подстановкой чисел ±1, ±2, ±4, ±8, ±16 в $P(x)$. Но это не меняет существа дела.

**) Подсказка: взять $p=?$

*) И. Шур (1885—1941) — немецкий математик.

Зародилось алгоритмическое направление во времена Л. Кронекера (1823—1891) — известного немецкого математика, когда был придуман самый верный (но не самый быстрый) способ узнать — приводим данный многочлен или нет (весьма похожий на тот, о котором шла речь в нашем первом примере: с. 15). Обогащенное идеями полузабытых признаков, это направление набирает темп. В самое последнее время (в 1982 г.) оно выразилось шедевром мастеров Голландской школы (А. Ленстра, Г. Ленстра, Л. Ловас) под названием «Алгоритм приведенного базиса», разрешившим скоростной вопрос в принципиальном плане.

События бурной эпохи гулким эхом отдались в кабинетной тиши и, в конце концов, заставили неприводимый многочлен служить человеку. Он трудится в *алгебраической теории кодирования*, и не исключено, что *коды исправления ошибок* помогали этим летом устранять срывы в изображении телепередач с Мексиканского футбольного чемпионата мира. А в теории и практике *случайных процессов* неприводимый многочлен твердо стоит на страже государственных секретов, превращая их в *псевдослучайные сигналы* и охраняя от чуткого постороннего уха.

В страну неприводимых многочленов сделан первый шаг — мы познакомились с ее признанными лидерами. Но другие ее представители — как известные, так и не исследованные — остались за кадром. Страна неприводимых многочленов полна загадок и каждый новый шаг в нее рождает новые вопросы.

Приложение

Здесь мы приводим обещанное пояснение доказательства признака Дюма. Но сначала

Разборка и сборка. Диаграмма Ньютона несет важную информацию о многочлене $P(x)$. Хранить ее удобно в разобранном виде.

Правило разборки. Разломаем диаграмму на звенья, в концах нарисуем стрелки и перенесем их параллельно себе (как векторы) в начальную точку (рис. 8). Так получается *связка* многочлена по простому p. Если точка основы лежит внутри звена (у нас — точка (6; 1) на последнем звене), то ломать звено в этой точке не следует.

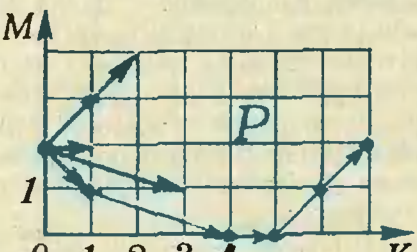


Рис. 8.

Правило сборки. Двигаясь снизу вверх (против часовой стрелки) выкладываем векторы связки друг за другом (см. рис. 8). Итак: *Заданной диаграмме Ньютона соответствует ровно одна связка, и по заданной связке диаграмма восстанавливается однозначно.*

Остается заметить, что местоположение на оси OM точки приложения связки не играет существенной роли. Умножая $P(x)$ на подходящую степень p^l (что не меняет свойства неприводимости), можно произвольно перемещать всю диаграмму, а вместе с ней и начальную точку, вдоль оси OM.

Теорема Дюма. *Связка произведения $P(x)\,Q(x)$ представляет собой объединение связок сомножителей $P(x)$ и $Q(x)$* (рис. 9).

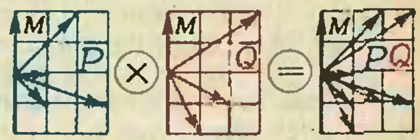


Рис. 9.

Здесь $Q(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m$ — это еще один, какой-нибудь, многочлен (подойдет и $Q(x)$ со страницы 14). Его основа, диаграмма и связка — красные.

Теорема Дюма показывает, как, зная диаграммы многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ по одному и тому же простому p, построить диаграмму их произведения. Для этого следует *наложить друг на друга связки сомножителей, совместив их начальные точки, а затем построить ломаную по правилам сборки* (рис. 10).

Рис. 10.

Добавление. Если в связке произведения $P(x)\,Q(x)$ два звена частично или полностью совпадут, то одно из них следует вытянуть из связки и поставить вслед за другим.

Секрет признака Дюма теперь прост — если $P(x)$ приводим, то по теореме Дюма его связка всегда состоит либо из нескольких звеньев, либо из одного, но тогда непременно составного (см. Добавление еще раз).

Для доказательства признака иррациональности необходимо опять вспомнить ТЕОРЕМУ («Квант» № 10, с. 7), нарисовать диаграмму линейного двучлена (она состоит ровно из одного примитивного звена) и вывести из теоремы Дюма утверждение:

Если все простые звенья связки имеют проекцию на ось OK длины $>k$, то все делители многочлена $P(x)$ имеют степень $>k$.

Доказательство теоремы Дюма основано на том, что умножению многочлена $P(x)$ на одночлен b_kx^k соответствует на плоскости OKM перенос основы $P(x)$ на вектор с координатами $(k;\, l)$, где $(k;\, l)$ — точка основы $Q(x)$, отвечающая одночлену b_kx^k. Дальнейшие рассуждения (вполне элементарные) не вошли в рамки этой статьи и мы их опускаем.

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Кинематика вращательного движения» предназначена восьмиклассникам, «Тепловой насос» — девятиклассникам, «Номограммы в геометрической оптике» — десятиклассникам.

Кинематика вращательного движения

Медленно проехав перекресток, троллейбус стал удаляться по улице, плавно увеличивая свою скорость...

Движение колеса троллейбуса — лишь один из многих примеров сложного механического движения в окружающем нас мире. Оказывается, любое сложное движение можно представить как сумму двух простых движений — поступательного и вращательного. Понимать это следует так: всегда можно подобрать такую поступательно движущуюся систему отсчета, относительно которой движение выглядит только как вращение вокруг некоторой неподвижной оси.

Какую же в нашем случае надо выбрать систему отсчета, чтобы в ней колесо троллейбуса совершало чистое вращение? Какими физическими величинами описывается это вращение, как эти величины связаны друг с другом и как зависят от времени? Такие вопросы могут возникнуть не только на пешеходном переходе, но и на уроке, экзамене, при решении конкретной задачи.

На первый вопрос ответить легко, догадавшись, что поступательно движущуюся систему отсчета можно связать с самим троллейбусом (его корпусом). Перед тем как ответить на остальные вопросы, заметим, что в нашем примере колесо вращается неравномерно — модуль скорости любой точки колеса меняется со временем.

Рассмотрим некоторую точку M колеса, находящуюся на расстоянии r от оси вращения и имеющую в некоторый момент времени скорость $\vec{v}$ и ускорение $\vec{a}$ (рис. 1). Из физических соображений разумно ускорение $\vec{a}$ представить как сумму двух составляющих: одна из них $\vec{a}_ц$ направлена по радиусу к центру окружности — центростремительное ускорение, вторая $\vec{a}_к$ направлена по касательной к окружности — касательное ускорение. Оба эти ускорения имеют определенный физический смысл — касательное ускорение характеризует быстроту изменения модуля скорости, а центростремительное характеризует быстроту изменения направления скорости. Можно показать, что модуль центростремительного ускорения $a_ц = v^2/r$ («Физика 8», § 16), а модуль касательного ускорения $a_к = \Delta v/\Delta t$, где Δv — изменение модуля v скорости точки за сколь угодно малое время Δt.

Линейные и угловые величины. Как уже говорилось, нам надо ввести такие физические величины, которые характеризовали бы неравномерное вращение колеса (в системе отсчета, связанной с троллейбусом). Попробуем это сделать по аналогии с прямолинейным неравномерным движением.

Проследим за точкой M колеса в течение малого промежутка времени Δt. За это время точка пройдет по дуге окружности путь s и будет иметь скорость v и касательное ускорение $a_к$ (рис. 2). Три величины s, v и $a_к$, называемые линейными величинами, характеризуют движение точки M, но не могут служить для описания вра-

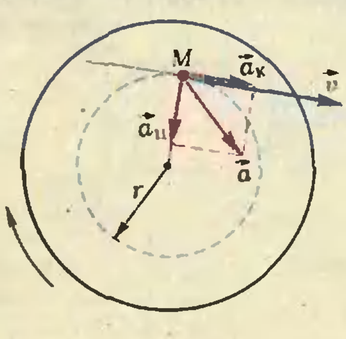


Рис. 1.

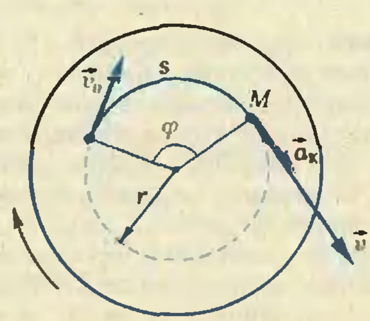


Рис. 2.

щения всего колеса, так как в один и тот же момент времени другие точки, расположенные на других расстояниях от оси вращения, имеют другие линейные скорости, и касательные ускорения и пройденные ими пути тоже не одинаковы. Поэтому кроме линейных вводятся так называемые угловые величины, которые одинаковы для всех точек вращающегося колеса: угол поворота φ радиуса, соединяющего точку M с центром окружности, угловая скорость $\omega=\Delta\varphi/\Delta t$ ($\Delta\varphi$ — изменение угла поворота за время Δt) и угловое ускорение $\varepsilon=\Delta\omega/\Delta t$ ($\Delta\omega$ — изменение угловой скорости).

Очевидно, что введенными здесь угловыми величинами можно описывать вращение не только троллейбусного колеса, но и любого другого тела. При этом с течением времени может изменяться не только угол поворота φ, но и угловая скорость ω и угловое ускорение ε. В частности, если угловое ускорение не зависит от времени, то угловая скорость изменяется равномерно и в таком случае говорят, что имеет место равноускоренное вращение. Когда же угловая скорость остается постоянной, то угловое ускорение оказывается равным нулю и говорят о равномерном вращении тела.

Связь линейных и угловых величин. Понятно, что линейные и соответствующие им угловые величины должны быть определенным образом связаны между собой. Найдем эти связи.

При повороте радиуса, проведенного в точку M (см. рис. 2), на угол φ точка пройдет по дуге окружности путь

$$s=r\varphi. \qquad (1)$$

За малое время Δt точка проходит расстояние $\Delta s=r\varphi_2-r\varphi_1$, где φ_2 и φ_1 — углы поворота в конце и в начале интервала Δt. Разделив последнее равенство на Δt и учитывая, что $\Delta s/\Delta t=v$ и $(\varphi_2-\varphi_1)/\Delta t=\Delta\varphi/\Delta t=\omega$, получим

$$v=r\omega. \qquad (2)$$

Заметим, что соотношение (2) связывает между собой линейную и угловую скорости не только при равномерном движении точки по окружности, но и при неравномерном движении тоже. Изменение модуля скорости точки за время Δt есть $\Delta v=r\omega_2-r\omega_1$, где ω_2 и ω_1 — угловые скорости в конце и в начале промежутка Δt. Разделим последнее равенство на Δt и учтем, что $\Delta v/\Delta t=a_к$ и $(\omega_2-\omega_1)/\Delta t=\Delta\omega/\Delta t=\varepsilon$, тогда касательное ускорение

$$a_к=r\varepsilon. \qquad (3)$$

Соотношения (1), (2) и (3) дают для движущейся по окружности точки простую связь между линейными и угловыми величинами: линейная величина равна произведению радиуса окружности на соответствующую угловую величину. Эти соотношения получены нами для конкретной точки M колеса троллейбуса, но они справедливы и для любой другой точки вращающегося (как равномерно, так и неравномерно) тела.

Формулы кинематики для равноускоренного вращательного движения. Найдем зависимость угловой скорости ω и угла поворота φ колеса троллейбуса от времени t для случая вращения колеса с постоянным угловым ускорением ε.

Пусть начальная угловая скорость равна ω_0. Тогда точка M, имея начальную скорость $v_0=r\omega_0$, будет двигаться с постоянным по модулю касательным ускорением $a_к=r\varepsilon$. По аналогии с прямолинейным равноускоренным движением для линейной скорости v и пути s получим равенства

$$v=v_0+a_кt, \qquad (4)$$

$$s=v_0t+\frac{a_кt^2}{2}, \qquad (5)$$

из которых после исключения времени t следует полезное соотношение:

$$v^2-v_0^2=2a_кs. \qquad (6)$$

Подставив в равенства (4)—(6) $s=r\varphi$, $v=r\omega$, $a_к=r\varepsilon$, $v_0=r\omega_0$ и упростив, получим соотношения

$$\omega=\omega_0+\varepsilon t,$$

$$\varphi=\omega_0t+\frac{\varepsilon t^2}{2},$$

$$\omega^2-\omega_0^2=2\varepsilon\varphi.$$

Это и есть формулы кинематики для вращательного движения любого тела (а не только колеса троллейбуса) с постоянным угловым ускорением.

В. И. Чивилёв

Тепловой насос

Все мы привыкли к электрическим нагревателям. Достаточно включить такой нагреватель в сеть, и через некоторое время в комнате становится теплее — энергия электрического тока в нем превращается в тепло. Электрический нагреватель очень прост в устройстве и по существу представляет собой нагревательную спираль — резистор. Превращение электрической энергии в тепло осуществляется практически полностью, за исключением той небольшой доли энергии, которая идет на световое излучение, если спираль достаточно раскалена и светится. Кстати, с этой точки зрения электрическая лампочка не такой хороший нагреватель, как скажем электрокамин, так как у нее несколько процентов мощности уходит в виде светового излучения. Но все-таки, как ни странно, она скорее нагреватель, чем источник света, то есть она в основном греет, а не светит.

Казалось бы, электрический нагреватель идеально справляется со своей задачей, преобразуя практически всю энергию тока в необходимое тепло. А нельзя ли нам, затратив некоторую энергию, получить тепла, скажем, в два раза больше и тем самым сэкономить расходы на нагревание? На первый взгляд, это абсолютно невозможно и противоречит закону сохранения энергии. Однако не будем торопиться и попробуем разобраться в этом вопросе подробнее. И начнем с ... холодильной машины, а попросту — холодильника.

Холодильник отбирает тепло от внутренней емкости, где поддерживается низкая температура, и отдает его в комнату. Сам по себе такой процесс идти не может. Тепло не может перейти само собой от холодного тела к горячему (это одна из формулировок второго начала термодинамики).

«Обратная» теплопередача требует постоянного подвода энергии — работы компрессора холодильника. Детали устройства холодильника нам не существенны, но заметим, что для его функционирования всегда необходима энергия.

Пусть в результате совершения работы A холодильник отобрал у морозильной камеры количество теплоты Q_2. Тогда, согласно закону сохранения энергии, в комнате выделилось количество теплоты $Q_1 = Q_2 + A$. Понятно поэтому, что при работе холодильника, даже с открытой дверцей, в комнате становится теплее.

Попробуем найти коэффициент полезного действия холодильника. Но прежде вспомним о тепловом двигателе, принцип устройства и работы которого точно такой же, как и у холодильной машины. По существу холодильная машина это тепловой двигатель, работающий по обратному циклу.

Как вы знаете, рабочее тело двигателя (рис. 1) получает от нагревателя количество теплоты Q_1, совершает работу A' и отдает холодильнику (не путайте с холодильной машиной!) количество теплоты $Q_2 < Q_1$. Максимальный коэффициент полезного действия идеального теплового двигателя равен

$$\eta_{max} = \frac{A'}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = \frac{T_1 - T_2}{T_1},$$

где T_1 — температура нагревателя, а T_2 — температура холодильника.

КПД холодильника $\eta_х$ определяется отношением количества теплоты, отбираемого у морозильной камеры, к необходимой для этого работе. Для

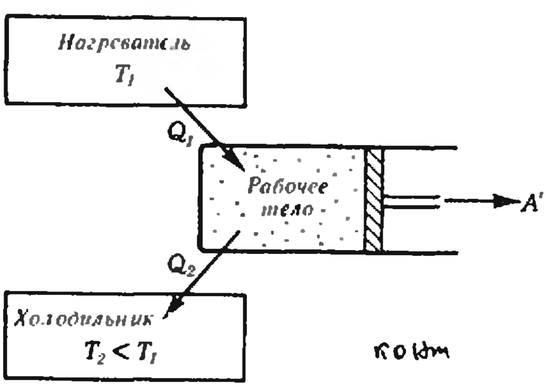


Рис. 1.

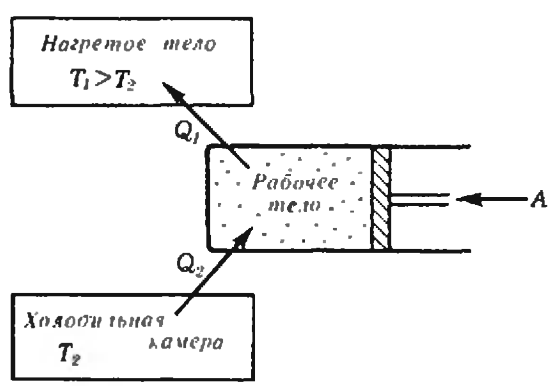


Рис. 2.

идеального холодильника он равен (рис. 2)

$$\eta_{x\,max}=\frac{Q_2}{A}=\frac{Q_2}{Q_1-Q_2}=\frac{T_2}{T_1-T_2}=\frac{1-\eta_{max}}{\eta_{max}}.$$

Заметим, что, как следует из этой формулы, холодильный коэффициент может быть больше единицы.

А теперь нетрудно догадаться, как можно использовать холодильник для отапливания помещения в холодное время года — для этого холодильную камеру нужно вынести на улицу (а все остальные части «агрегата» оставить в комнате)! Тогда, совершив работу A (отобрав энергию у электрической сети) и забрав с улицы количество теплоты Q_2, мы передаем в комнату количество теплоты $Q_1=A+Q_2>A$. Понятно, что никакого противоречия с законом сохранения энергии нет — дополнительная энергия в виде тепла отбирается от холодного наружного воздуха.

Холодильная машина, работающая таким образом, и называется «тепловым насосом», поскольку тепло «перекачивается» снаружи вовнутрь комнаты. В результате работы теплового насоса в помещении становится теплее, а на улице — еще холоднее (последний эффект, конечно же, совершенно ничтожен). КПД теплового насоса $\eta_н$ определяется отношением получаемого помещением количества теплоты к необходимой для этого внешней работе. В идеальном случае он равен

$$\eta_{н\,max}=\frac{Q_1}{A}=\frac{Q_1}{Q_1-Q_2}=\frac{T_1}{T_1-T_2}=\frac{1}{\eta_{max}}$$

и всегда больше единицы.

В качестве примера рассмотрим случай, когда температура наружного воздуха —20 °C ($T_2=253$ К), а внутри дома необходимо поддерживать температуру +20 °C ($T_1=293$ К). Тогда $\eta_н=\frac{293}{40}\approx 7{,}3$, то есть используя электрическую энергию для работы теплового насоса, мы можем получить в семь раз больше тепла, чем пользуясь электронагревательным прибором. Разумеется, реальный КПД всегда ниже, к тому же двигатель теплового насоса также превращает в работу не всю потребляемую энергию. Однако все равно использование теплового насоса оказывается в несколько раз более рентабельным, чем использование электронагревателя.

По сути дела тепловым насосом является обычный кондиционер: он «откачивает» тепло из комнаты. Если поменять его «вход» и «выход» местами, то в холодное время он может использоваться как экономичный обогреватель.

Почему же, несмотря на существенно бо́льшую рентабельность, тепловые насосы еще не заменили электронагревателей? Дело просто в том, что электронагреватель исключительно прост и дешев, а тепловой насос сравнительно сложное, громоздкое и дорогое устройство. Однако со временем тепловые насосы прочно войдут в наш быт и вытеснят расточительные электроотопительные приборы.

А. И. Буздин

Номограммы в геометрической оптике

Из школьного курса физики вы узнали о том, как можно графически решать различные задачи геометрической оптики. Например, чтобы найти положение изображения точечного источника света в тонкой линзе, достаточно построить ход двух произвольных лучей, вышедших из источника и прошедших через линзу.

В этой заметке будет рассказано еще об одном, несколько необычном графическом способе решения подобных задач. При этом на предлагаемых вам рисунках вы не увидите ни световых лучей, ни оптических осей линзы, ни даже самой линзы. О каких же тогда графиках пойдет речь?

В математике существует специальный раздел, называемый номографией (от греческих слов nómos — закон и gráphō — пишу), в котором изучаются методы построения особых чертежей — номограмм. С их помощью можно, например, не производя вычислений, получать приближенные

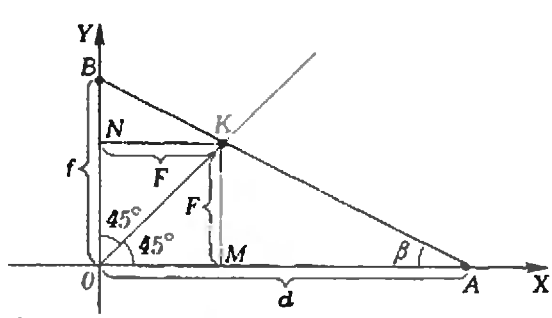


Рис. 1.

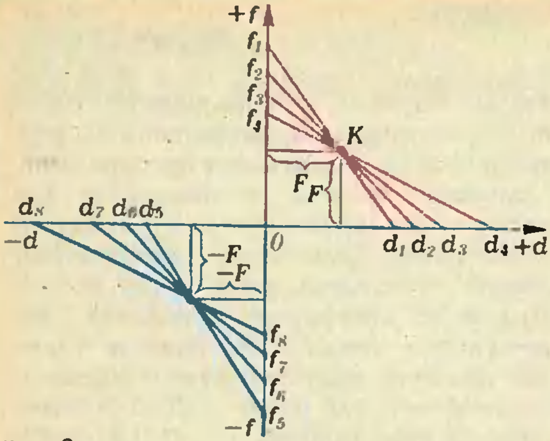


Рис. 2.

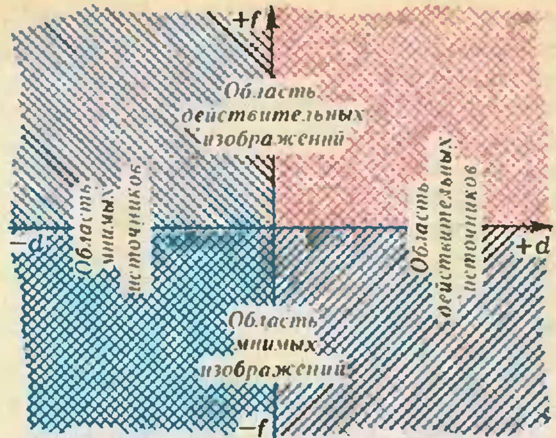


Рис. 3

решения уравнений или находить приближенные значения интересующих нас функций. Воспользуемся и мы такой возможностью.

Пусть светящийся предмет находится на расстоянии d от линзы с фокусным расстоянием F, а его изображение — на расстоянии f. Можно показать (это сделано в § 60 «Физики 10»), что эти три величины связаны простым соотношением — формулой тонкой линзы:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}. \qquad (*)$$

Заметим, что каждое слагаемое, входящее в формулу, может быть как положительным, так и отрицательным. Если предмет, или его изображение, или фокус линзы действительные, величины d, или f, или F берутся со знаком «плюс», в случае же если предмет, или изображение, или фокус линзы мнимые, соответствующие величины считаются отрицательными.

Построим номограмму для формулы линзы и покажем, как с ее помощью можно решать конкретные задачи.

Изобразим на плоскости прямоугольную систему координат XOY (рис. 1). По оси X отложим отрезок OA длиной d, а по оси Y — отрезок OB длиной f. Пока для определенности d и f будем считать положительными. Соединим точки A и B отрезком прямой, проведем биссектрису прямого угла $A\hat{O}B$ и найдем точку K ее пересечения с AB. Из точки K опустим на оси координат перпендикуляры и обозначим длину полученных равных отрезков KM и KN через F. Из подобия треугольников AOB и AMK следует, что $\frac{OB}{OA}=\frac{KM}{MA}$, или $\frac{f}{d}=\frac{F}{d-F}$, откуда легко получается знакомое нам уравнение (*).

Таким образом, мы получили, что длины d, f и F построенных на чертеже отрезков связаны между собой уравнением тонкой линзы (вот почему при построении мы использовали именно такие обозначения длин отрезков). А это, в свою очередь, означает, что мы умеем строить номограмму для формулы линзы. Действительно, если по горизонтальной оси прямоугольной системы координат откладывать расстояния d от предмета до линзы, а по вертикальной оси — расстояния f от линзы до изображения, то все прямые, соединяющие концы соответствующих отрезков, пересекаются в одной точке (рис. 2). Проекции этой точки на оси координат одинаковы и равны фокусному расстоянию F данной линзы.

Как вы знаете, для определения прямой на плоскости достаточно знать всего две принадлежащие ей точки. Поэтому с помощью построенной номограммы по известным двум из трех величин d, f и F всегда можно графически определить недостающую третью. Так, например, при построении, приведенном на рисунке 1, мы фактически определили фокусное расстояние линзы (F) по известным расстояниям от линзы до предмета (d) и от линзы до изображения (f).

Легко убедиться в том, что предложенный способ годится не только для собирающих линз, но и для рассеивающих, а также для любых расположений предмета и изображения относительно линзы. Если, например, предмет или изображение мнимые, то соответствующие значения d или f являются отрицательными и, следовательно, их надо откладывать в отрицательном направлении от начала координат (влево или вниз). Может случиться, что точка K пересечения всех отрезков, соответствующая фокусу линзы, будет иметь отрицательные проекции. Это будет означать, что фокус линзы — мнимый, то есть что линза — рассеивающая. Области расположения действительных и мнимых предметов и изображений показаны на рисунке 3.

Номограммы можно использовать и для определения линейного увеличения линзы — отношения линейного размера H изображения к линейному размеру h предмета: $\Gamma = H/h = f/d$ (см. § 60 «Физики 10»). Из рисунка 1 видно, что

$$\Gamma = \frac{f}{d} = \operatorname{tg}\beta.$$

Таким образом, изображение может быть увеличенным, уменьшенным или такого же размера, как и сам предмет.

Можно решить и обратную задачу — по заданному увеличению и известному фокусному расстоянию линзы определить расстояния d и f. Для этого достаточно построить знакомую нам точку K и провести через нее прямую, наклоненную к горизонтальной оси под углом β. Точки пересечения этой прямой с осями координат и дадут нам искомые значения d и f.

А. И. Шапиро

Число делений

(Задачи на исследование)

Обычная двадцатисантиметровая ученическая линейка (с 19-ю делениями) обладает таким свойством *универсальности:* с ее помощью одним измерением можно отложить любой отрезок длиной 1, 2, 3, ..., 20 см. Это свойство может сохраниться, если стереть часть делений. Какое минимальное число делений необходимо оставить (и как их расположить), чтобы свойство универсальности сохранилось? Этой задаче и ее обобщениям посвящена данная заметка.

Назовем линейку длиной n с k делениями *универсальной* (или *(n, k)-универсальной*), если с ее помощью можно одним измерением отложить любой из отрезков длиной 1, 2, ..., n. Так, обычная ученическая линейка (20, 19)-универсальна, но бывает и (20, 6)-универсальная линейка (см. ниже). Основная задача состоит в том, чтобы *найти минимальное число делений $k = k(n)$, для которого существует (n, k)-универсальная линейка.* Известны (см. «Квант» 1976, № 12, с. 7) следующие оценки для $k(n)$:

$$\frac{\sqrt{8n+1}-3}{2} \leqslant k(n) \leqslant \sqrt{4n+5}-3. \quad (*)$$

Для малых n минимальное число делений $k(n)$ можно найти перебором. При $1 \leqslant n \leqslant 13$ эти числа соответственно равны 0, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4 и достигаются на следующих линейках (числа в квадратных скобках указывают длины отрезков между последовательными делениями): [1]; [1, 1], [1, 2], [1, 2, 1], [1, 1, 3], [1, 3, 2], [1, 1, 3, 2], [1, 1, 3, 3], [1, 1, 4, 3], [1, 1, 3, 3, 2], [1, 1, 3, 3, 3], [1, 1, 4, 3, 3], [1, 1, 4, 4, 3]. Легко доказать, что лишь у двух универсальных линеек с минимальным числом делений ([1, 2] и [1, 3, 2]) отрезки между делениями попарно различны.

Оказывается, оценку сверху (*) для $k(n)$ можно улучшить, воспользовавшись двумя соображениями. Во-первых, маленькие отрезки целесообразно группировать не только с одного конца линейки, но с обоих концов. Во-вторых, можно многократно повторять самый длинный отрезок, создавая тем самым серии линеек, например [1, 3, 2], [1, 3, 3, 2], [1, 3, 3, 3, 2], ... Такие серии мы будем обозначать, заключая повторяемый отрезок в скобки, например, приведенную выше серию мы запишем так: [1, (3), 2]. Комбинируя эти соображения, мы можем выписать следующий набор серий (для случая, когда максимальный отрезок кратен четырем):

[1, 2, 2, 5, (8), 3, 1, 2],
[1, 2, 2, 2, 7, 7, (12), 5, 5, 1, 2],
[1, 2, 2, 2, 2, 9, 9, 9, (16), 7, 7, 7, 1, 2, 2, 2], ...

Если k — число делений, а m — число повторов максимального отрезка, то длина этого отрезка равна $k-m+2$; такова же сумма длин двух смежных с ним отрезков, а число их повторов равно $(k-m-2)/4$; сумма единиц и двоек также равна $k-m+2$, и поэтому длина линейки равна

$$n = (k-m+2)\times\left(\frac{k-m+2}{4}+m\right).$$

Если это выражение проанализировать на максимум при фиксированном k (как это делать, описано в «Кванте» 1976 № 12, с. 8), получается следующая оценка:

$$k(n) \leqslant \sqrt{3n+1}-2. \quad (**)$$

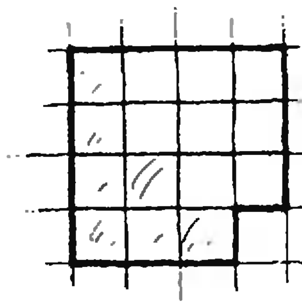
Можно указать несколько следующих значений для $k(n)$: при $14 \leqslant n \leqslant 23$ числа $k(n)$ равны соответственно 5, 5, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 6. Например, при $n=19$ число $k(19)=6$ дает линейка [2, 1, 5, 7, 2, 1, 1], при $n=20$ число $k(20)=6$ дается линейкой [1, 2, 4, 4, 4, 4, 1], число $k(21)=6$ — линейкой [1, 4, 7, 3, 3, 2, 1], $k(29)=7$.

Мы предлагаем вам исследовать такие задачи:

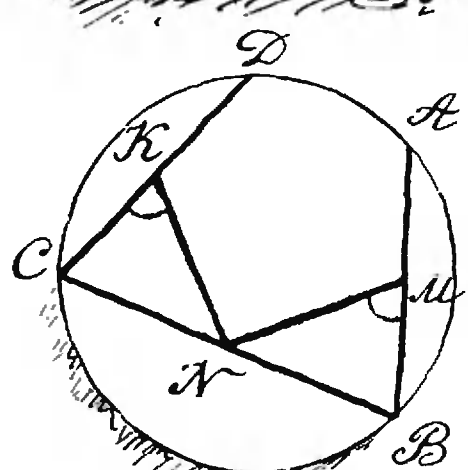
1. Можно ли улучшить оценку снизу (*)?
2. Можно ли улучшить оценку сверху (**)?
3. Является ли функция $k(n)$ монотонной?
4. При каких k окружность длины k^2-k+1 можно разбить k точками на k дуг так, чтобы для любого $m=1, 2, ..., k^2-k$ нашлась бы дуга длиной m (ср. «Квант», 1980, № 3, с. 29).

В. Г. Чванов

Квант для младших школьников



☆☆☆ + ☆☆ = ☆☆☆



Задачи

1. Как разрезать фигуру, изображенную на рисунке, на три одинаковые части?

2. Железнодорожные рельсы закрепляют на шпалах для того, чтобы рельсы не сдвигались в сторону. Какую еще важную роль играют шпалы?

3. В записи ***+**=*** замените звездочки цифрами так, чтобы равенство имело смысл и было правильным после поворачивания листа бумаги (на котором оно записано) на 180°.

4. У продавца, который привез на базар продавать орехи, оказались неправильные рычажные весы и правильная килограммовая гиря. Чтобы отвесить покупателю 2 кг орехов, он один раз уравновесил гирю орехами, положив ее на правую чашку весов, а другой раз уравновесил эту гирю орехами, положив ее на левую чашку весов. Оказалось, что в результате он отвесил больше 2 кг орехов (покажите это). Как продавец должен поступить, чтобы отвесить ровно 2 кг орехов?

5. В круге провели три хорды AB, BC, CD и отметили их середины: M, N, K. Покажите, что углы BMN и NKC равны.

Эти задачи нам предложили *М. Бабиков, А. П. Савин, А. В. Швецов, Н. Х. Розов, Г. А. Гальперин.*

Знакомьтесь: металлическое стекло

Кандидат физико-математических наук
А. С. ШТЕЙНБЕРГ

Вы включаете магнитофон, но вместо музыки раздаются малопонятные хрипы. В мастерской слышите стандартный диагноз: износ магнитной головки. От длительного контакта с лентой она истерлась и не обеспечивает качество воспроизведения. Наверное, многим знакома эта ситуация.

А теперь представьте себе рекламу: «Покупайте магнитофоны с головками из металлического стекла!». Скорее всего, сочетание слов «металлическое стекло» покажется вам странным. Но можете смело довериться совету рекламы — в широком ассортименте полезных свойств металлических стекол (иногда их еще называют аморфными металлами) числится и повышенная сопротивляемость износу. Что же это такое — металлическое стекло?

Стекло (обычное, а не металлическое) известно человеку давно. В огне оказалась подходящая по составу песчаная смесь, расплавилась, затем застыла и... получилось стекло. Произошло это около шести тысячелетий назад, и с тех пор область применения стекла постоянно расширялась.

Но только в нашем веке стали раскрываться его секреты.

Хорошо известны два «плотных» состояния вещества: жидкое и кристаллическое. Их внешней непохожести соответствует не менее серьезное различие в атомном строении. В жидкости атомы расположены друг относительно друга более или менее случайно, а в кристалле их расположение строго упорядочено. Одинаковые атомы расположены наподобие узлов пространственной решетки, которая называется кристаллической. Разные вещества имеют свои характерные формы кристаллических решеток. На рисунке 1 изображен один из возможных вариантов.

Если кристалл нагреть выше точки плавления, он расплавится и превратится в жидкость. Если расплав охладить ниже точки плавления — он вновь закристаллизуется. При этом атомы как будто «чувствуют» приближение критического момента, когда надо перестроиться и из жидкостного беспорядка «организовать» строгий кристалл. Все происходит так, словно дана команда «становись!» и атомы-солдаты по одному занимают свои места, выстраиваясь в определенном порядке. И как бы «исполнительны» ни были атомы, на «построение» все-таки требуется какое-то время. Самый известный пример кристаллизации — образование льда из воды при 0 °С. Точно так же ведут себя при своих температурах плавления все металлы, их сплавы и тысячи других веществ. Но иногда события развиваются по необычному сценарию.

«Жизнь» атомов — это постоянное движение. Но их подвижность быстро падает с понижением температуры. Этим обстоятельством можно воспользоваться. Представим себе, что какой-то многорукий монстр схватил все атомы жидкости и удерживает их на месте, пока расплав не охладится до температуры ниже температуры плавления, и лишь после этого отпускает. Тогда перестроиться в кристалл атомам уже не удастся. Они так и останутся в беспорядке. Сама жидкость при этом загустеет и станет твердой. Такой материал и называется стеклом.*)

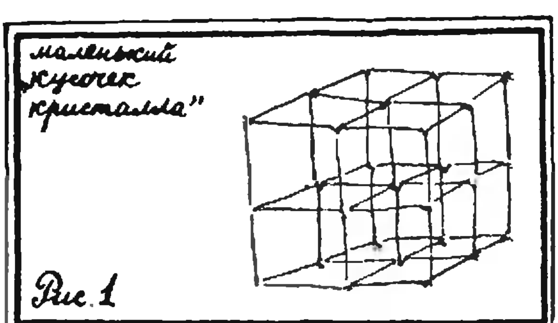


Рис. 1

Держать атомы, конечно, нереально. Но зато можно быстро охладить жидкость. Тогда при высоких температурах (температурах плавления) атомы перестроиться не успеют, а при низких — будет уже поздно. Вспомните одну из детских игр. В ней все играющие должны остаться в положении, в котором их застала команда «замри». Иногда оно бывает мучительно неестественным. Резкое охлаждение — приказ «замереть» для атомов. В отличие от людей атомы могут находиться в «неудобных» положениях годами, веками, тысячелетиями. И если играющих оживляет команда «отомри», то атомы «пробуждаются к жизни» повторным нагревом.

Но что значит «быстро охладить»? Для каждого вещества ответ свой. Для смеси соды и песка «быстро» означает уменьшение температуры на доли градуса в секунду. Такая скорость охлаждения достигается при естественном остывании расплавленной массы. Именно поэтому и сумели наши далекие предки открыть обычное стекло. А вот для металлических сплавов «быстро» — это действительно быстро. Оценки показали: чтобы не дать жидкому металлическому расплаву закристаллизоваться, его надо охлаждать со скоростью миллион градусов в секунду! Разумеется, температура горячего расплава не миллион градусов. Такая скорость понижения температуры означает, что охладить расплав, скажем, от 2000 °С до 1000 °С надо за 10^{-3} с, то есть за одну миллисекунду. Такова цена «остановки» атомов.

Сама идея быстрого охлаждения отнюдь не нова. Под именем закалки она была известна с древности. Свидетельствует великий Гомер: «Как погружает кузнец раскаленный топор иль секиру в воду холодную, и зашипит с клокотаньем железо — крепче железо бывает, в огне и воде зака-

*) Стекла относятся к более общей группе аморфных веществ — так называются твердые тела, не имеющие кристаллической решетки.

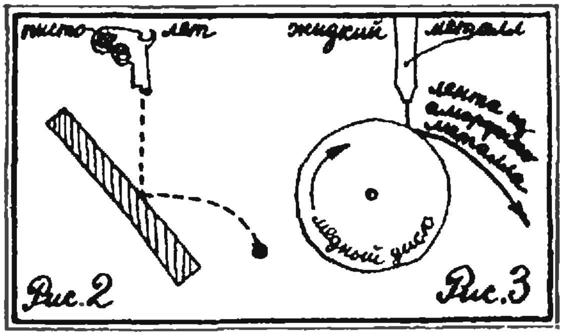


Рис. 2 Рис. 3

ляясь». Однако традиционные способы закалки обеспечивают скорость охлаждения только 100—1000 градусов в секунду. Для наших целей этого слишком мало.

Оставим на время металл и зададимся вопросом: как побыстрее охладить горячий чай? Проще всего — налить его из чашки в блюдце. Тепло отдается в основном окружающему воздуху. Увеличивая поверхность соприкосновения с воздухом, мы увеличиваем скорость охлаждения. Чем более плоское блюдце мы выберем, тем быстрее остынет чай (конечно, при его неизменном объеме!). Наконец, можно просто вылить чай на стол. В результате растекания жидкости площадь ее поверхности еще больше возрастет. Правда, для чаепития этот прием мы рекомендовать не станем, зато в быстром остывании можете не сомневаться.

Итак, первый вывод: для увеличения скорости охлаждения следует максимально увеличить площадь поверхности контакта с теплоотводящей средой, в данном случае — с воздухом.

Но воздух отводит тепло сравнительно медленно. Хорошими проводниками тепла по справедливости считаются металлы, а из них в первую очередь — медь. В этом мы убеждаемся каждый раз, когда прикасаемся к металлическому покрытию,— оно всегда кажется холодным, так как быстро отводит тепло человеческого тела.

Отсюда следует еще одна рекомендация: чай следует разливать не на столе, а на широком металлическом (желательно медном) подносе. Тогда он остынет почти сразу же.

На этом закончим нашу не слишком изысканную «чайную церемонию». Она подсказала конкретный рецепт. Для быстрейшего охлаждения жидкого металла надо создать очень тонкий его слой на медной поверхности (обычно ее называют подложкой).

Первые удачные опыты по сверхбыстрому охлаждению металлической жидкости были произведены в 1960 году. Капля расплавленного металла выстреливалась на подложку из меди. (В ранних работах для этого применялась энергия пороховых газов обычного пистолета.) При ударе о медный экран капля расплющивается, моментально охлаждается (скорость охлаждения достигает 10^8—10^{10} град/с), и с медного «трамплина» в воздух взмывает крохотная лепешка твердого аморфного металла (рисунок 2). В самых тонких местах ее толщина оказывается равной 0,0001 мм.

Существует еще несколько разновидностей метода «расплющивания капли». Главный их недостаток — малая производительность. Да и аморфный металл получается в виде мелкого порошка, а это не всегда удобно для практического использования. Но применение тех же принципов охлаждения позволило создать способы производства непрерывной ленты из аморфного металла. Вот один из возможных вариантов. На вращающийся медный диск льется тонкая струя расплавленного металла. Соприкасаясь с диском, она охлаждается, и с диска сбрасывается уже застывшая аморфная лента (рисунок 3).

Внешне металлическое стекло не имеет ничего общего с обычным прозрачным стеклом и ничем не отличается от обычного (кристаллического) металла. Но это — только внешне. Необычному для комнатных температур беспорядочному расположению атомов соответствуют и необычные свойства. Аморфный металл чрезвычайно тверд и прочен. Изготовленные из него магнитные головки во много раз превосходят по сроку службы своих кристаллических «собратьев.» Да и по чисто магнитным характеристикам преимущество на их стороне. Уже сегодня в разных странах начат выпуск магнитных головок из металлического стекла для видео- и звуковых магнитофонов, памяти компьютеров.

Высокая твердость аморфных металлов подсказала и другую область их применения. Чрезвычайно практично изготовлять из них режущие инструменты.

(Окончание см. на с. 39.)

задачник кванта

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 января 1987 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11—86» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1011, М1012» или «Ф1023». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Фамилию и имя просим писать печатными буквами.

Задачи

М1011—М1015; Ф1023—Ф1027

М1011. Докажите, что для n положительных чисел $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ выполнены неравенства:
а) $a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 \geqslant (a_1 - a_2 + a_3)^2$;
б) $a_1^2 - a_2^2 + a_3^2 - a_4^2 \geqslant (a_1 - a_2 + a_3 - a_4)^2$;
в) $a_1^2 - a_2^2 + \ldots - (-1)^n a_n^2 \geqslant (a_1 - a_2 + \ldots - (-1)^n a_n)^2$.

Л. Д. Курляндчик

М1012. Докажите, что:
а) на плоскости можно расположить несколько непересекающихся кругов так, чтобы каждый касался ровно 5 других;
б) число 5 в пункте а) нельзя заменить на 6.

Д. В. Фомин

М1013. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты две точки M и N. Три параллельные прямые, проходящие через точки M, B и N, пересекают основание AC в точках K, D и L. Докажите, что площадь трапеции (или параллелограмма) $KMNL$ не больше площади одного из треугольников ABD и DBC (рис. 1).

В. В. Рождественский

М1014. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные попарно взаимно простые натуральные числа. Докажите, что существует бесконечно много таких натуральных b, что числа $b + a_1, b + a_2, \ldots, b + a_n$ также попарно взаимно просты.

В. Ф. Лев

М1015. Можно ли разложить на множители с целыми коэффициентами многочлен $x^4 + x^3 + x^2 + x + 12 = 0$?

С. Л. Манукян

Ф1023. Лампочка висит на расстоянии l_1 от потолка на высоте l_2 от пола. При ее взрыве осколки разлетаются во все стороны с одной и той же по величине скоростью v. Найдите радиус круга на полу, в который попадут осколки. Считать, что удары осколков об потолок абсолютно упругие, а об пол — неупругие; до стен осколки не долетают.

Ф1024. Оценить изменение давления в парно́й после того как на раскаленные камни плеснули воду из ковша. Предполагается, что вы, хорошо представляя явление, можете сами задать необходимые величины, выбрать достаточно правильно их числовые значения и получить численный ответ.

Г. В. Меледин

Ф1025. В схеме, приведенной на рисунке 2, сверхпроводящие катушки имеют одинаковые индуктивности L, диод D идеальный, начальный заряд конденсатора емкостью C равен Q_0. Постройте графики изменения заряда $Q(t)$ конденсатора и токов $I_1(t)$ и $I_2(t)$ через катушки после замыкания ключа K.

Е. И. Бутиков

Ф1026. Горизонтальная площадка, на которой лежит брусок, вибрирует по гармоническому закону с частотой $f=10$ Гц в направлении, составляющем угол $\alpha=45°$ с вертикалью (рис. 3). Коэффициент трения бруска о площадку $\mu=0{,}5$. При какой минимальной амплитуде вибраций брусок «поползет» по площадке?

Е. И. Бутиков

Ф1027. Источник света находится на расстоянии $l=1$ м от экрана. В экране напротив источника сделано отверстие диаметром $d=1$ см. Как изменится поток света через отверстие, если между экраном и источником поместить прозрачный цилиндр из материала с показателем преломления $n=1{,}5$ так, как показано на рисунке 4 (длина цилиндра $l=1$ м, диаметр $d=1$ см; источник находится на оси цилиндра)?

А. И. Бутов

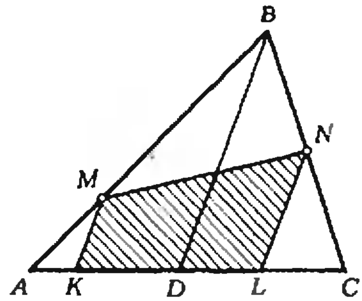


Рис. 1.

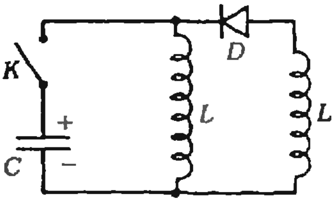


Рис. 2.

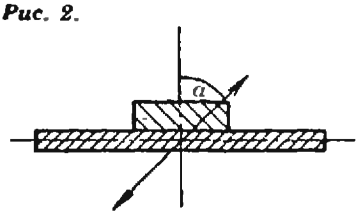


Рис. 3.

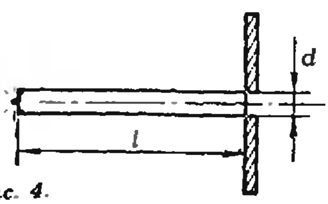


Рис. 4.

Problems

M1011—M1015; P1023—P1027

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. In goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than January 15th 1987, to the following address: USSR, Moscow, 103006. Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S

M1011. Prove the following inequalities for any n positive numbers $a_1 \geqslant a_2 \geqslant a_3 \geqslant \ldots \geqslant a_n$:

a) $a_1^2-a_2^2+a_3^2 \geqslant (a_1-a_2+a_3)^2$;

b) $a_1^2-a_2^2+a_3^2-a_4^2 \geqslant (a_1-a_2+a_3-a_4)^2$;

c) $a_1^2-a_2^2+\ldots-(-1)^n a_n^2 \geqslant (a_1-a_2+\ldots-(-1)^n a_n)^2$.

L. D. Kurlyandchik

M1012. Prove that a) it is possible to choose several disks on the plane so that each touches exactly 5 others and no two disks have common inner points; b) the number 5 in a) cannot be replaced by 6.

D. V. Fomin

M1013. The points M and N are chosen on sides AB and BC of triangle ABC. Three parallel lines, passing through M, B and N intersect AC at points K, D and L. Prove that the area of the trapezoid (or parallelogram) $KMNL$ is larger than that of one of the triangles ABC and DBC (see figure Рис. 1).

V. V. Rojdestvenski

M1014. The natural numbers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ are pairwise relatively prime. Prove that there exists an infinite set of natural numbers b such that the numbers $b+a_1$, $b+a_2$, ..., $b+a_n$ are also pairwise relatively prime.

V. F. Lev

M1015. Can the polynomial $x^4+x^3+x^2+x+12$ be factorized into polynomials with integer coefficients?

S. L. Manukian

PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

P1023. A lamp hangs at the distance l_1 from the ceiling and l_2 from the floor. When it explodes,fragments fly in all directions with the same speed v. Find the radius of the circle on the floor within which they fall. You may assume that the collisions with the ceiling are absolutely elastic and those with the floor absolutely inelastic; no fragments reach the walls.

P1024. Estimate the variation of pressure in a sauna after water from a jar is splashed on very hot rocks placed inside the sauna. It is assumed that you are familiar with the phenomenon and can find the appropriate parameters, choose reasonable numerical values for them, so as to obtain a numerical answer.

G. V. Meledin

P1025. In the circuit shown on figure Рис. 2, the coils with the same inductivity L are superconducting, the diode D is ideal, the initial charge of the capacitor is Q_0. Plot the dependance of the charge $Q(t)$ of the capacitor, and the currents $I_1(t)$ and $I_2(t)$ flowing through the coils, after the switch K in turned on.

E. I. Butikov

P1026. A flat horizontal surface, on which a slab is placed, vibrates according to the harmonic law with frequency $f=10$ Herz in a direction constituting an angle of $\alpha=45°$ with the vertical (see figure Рис. 3). The friction coefficient of the slab against the surface is $\mu=0.5$. For what minimal amplitude of vibration will the slab start to "creep" along the surface?

E. I. Butikov

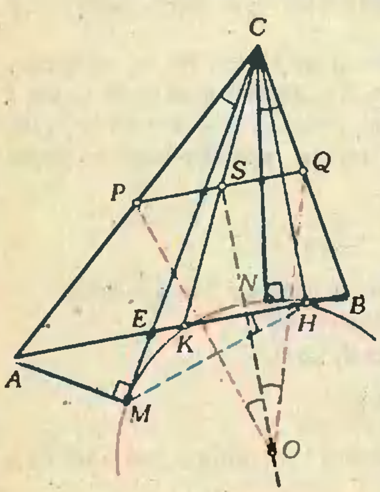
P1027. A light source is placed at the distance of $l=1$ m from a screen. An aperture of diameter $d=1$ cm is made in the screen opposite the source. How will the flow of light through the aperture change, if a smooth transparent cylinder made of material of refraction index $n=1.5$ is placed between the screen and the source as shown on figure Рис. 4 (the length of the cylinder is $l=1m$, its diameter is $d=1$cm; the source is on the cylinder's axis).

A. I. Butov

Решения задач

М991—М995; Ф1003—Ф1007

М991. В треугольнике ABC проведены высота CH и медиана CK. На стороне AB выбраны точки E и F так, что $\angle ACE=\angle BCF$, и на лучи CE и CF опущены перпендикуляры AM и BN. Докажите, что точки M, H, K и N лежат на одной окружности.



Пусть O — центр описанной окружности треугольника MNH. Докажем, что $OK=OH$, то есть что O лежит на серединном перпендикуляре l к отрезку KH. Прямая l проходит через точку S — общую середину медианы CK и средней линии PQ треугольника ABC (см. рисунок), следовательно, является серединным перпендикуляром и к PQ, поэтому достаточно доказать, что $OP=OQ$ или что

$$\angle OPQ=\angle OQP.$$

Точки M и H лежат на окружности ω с диаметром AC и центром P ($\angle AMC=\angle AHC=90°$), поэтому $PM=PH$; кроме того, $OM=OH$. Следовательно, прямая OP перпендикулярна отрезку MH (и делит его пополам), а значит, $\angle OPQ$ — угол между прямыми OP и PQ — равен $90°-\beta$, где β — угол между прямыми MH и PQ или MH и AB ($AB\|PQ$). Возможны два случая: $\beta=\angle AHM$, если $\angle AHM\leqslant 90°$, как на нашем рисунке, или $\beta=180°-\angle AHM$, если $\angle AHM>90°$. Поскольку углы AHM и ACM вписаны в окружность ω и опираются на одну и ту же хорду AM, они равны или дают в сумме $180°$, поэтому либо $\beta=\angle ACM$, либо $\beta=180°-\angle ACM$ — выбирается то из равенств, для которого $\beta\leqslant 90°$. При таком выборе всегда получается, что $\angle OPQ = 90° - \beta = |90° - \angle ACM|$. Аналогично, $\angle OQP = |90° - \angle BCN|$. Но $\angle ACM = \angle BCN$ по условию.

Заметим, что при $E = B$, $F = A$ из доказанного утверждения следует часть известной теоремы об «окружности 9 точек» (см. «Калейдоскоп «Кванта» в 11-м номере за 1985 год): основания высот и середины сторон треугольника лежат на одной окружности.

◆

M992. *Среди 90 выпускников одной математической гимназии у каждого не менее 10 друзей. Докажите, что любой выпускник может пригласить в гости трех других так, что среди четырех собравшихся у каждого будет не менее двух друзей.*

Пусть A — произвольный выпускник. Достаточно показать, что найдется такой выпускник B, который дружит одновременно с двумя друзьями A (тогда A может пригласить B и этих двух друзей).

Если такой выпускник B есть среди друзей A — все в порядке. В противном случае каждый из m ($m \geqslant 10$) друзей A дружит не менее чем с 8 выпускниками (не считая A), которые сами с A не дружат. Если бы все эти выпускники были различны, то получилось бы, что имеется не менее чем $8m \geqslant 80$ выпускников, отличных от A и его друзей; но количество таких выпускников не превосходит $90 - m - 1 \leqslant 79$. Это означает, что какие-то двое друзей A имеют общего друга B, что и требовалось доказать.

◆

M993*. *а) Найдите 11 последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых — квадрат натурального числа.*
б) Докажите, что при $2 < n < 11$ не существует n последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых — квадрат.*

а) Ответ: 18, 19, ..., 28 $(18^2 + 19^2 + \ldots + 28^2 = 77^2)$.
б) Мы должны показать, что уравнение $(x+1)^2 + (x+2)^2 + \ldots + (x+n)^2 = y^2$ или

$$nx^2 + n(n+1)x + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = y^2 \qquad (1)$$

не имеет решений в целых числах x и y, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 1$, при $3 \leqslant n \leqslant 10$. (Здесь использовано известное тождество $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = n(n+1)(2n+1)/6$, доказательство которого мы оставляем читателю; впрочем, достаточно проверить его вычислением для $n \leqslant 10$.)

Если равенство (1) выполнено, то остаток от деления y^2 на n равен остатку от деления $a = n(n+1)(2n+1)/6$ на n. Но при $n = 3$, 4, 9, когда соответствующие остатки равны 2, 2 и 6 ($a = 14$, 30 и $15 \cdot 19$), это невозможно ни при каком y (см. таблицу на полях).

При $n = 5$ и $n = 7$ число a делится на n, поэтому число y^2, а следовательно, и y должно делиться на n (n — простое). Полагая $y = nz$, $t = x + (n+1)/2$, мы можем переписать наше уравнение в виде $t^2 + (n^2-1)/12 = z^2$ или

$$z^2 - t^2 = \frac{n^2-1}{12}.$$

Но это уравнение при допустимых значениях n, t и z не имеет решений, поскольку

$$z^2 - t^2 \geqslant z + t \geqslant 2t \geqslant 6,$$

$$\frac{n^2-1}{12} \leqslant \frac{7^2-1}{12} = 4.$$

При $n = 6$, 8, 10 уравнение (1) удобно переписать в виде

N	остаток от деления N^2 на:			
	3	4	7	9
0	0	0	0	0
±1	1	1	1	1
±2	1	0	4	4
±3	0	1	2	0
±4	1	0	2	7
...	...	...	...	...

$$(n+1)x^2+(n+1)nx+(n+1)\frac{n(2n+1)}{6}=x^2+y^2. \quad (2)$$

Отсюда при $n=6$ получаем, что x^2+y^2 должно делиться на $n+1=7$. Таблица на полях показывает, что это возможно, лишь когда x и y одновременно делятся на 7. Но в этом случае все члены уравнения (2) кроме одного — $(n+1)n(2n+1)/6=$ $=7\cdot 13$ — должны делиться на $(n+1)^2=49$, чего не может быть. Точно так же доказывается, что и при $n=10$ наше уравнение не имеет решений. Наконец, при $n=8$ в левой части (2) стоит число, которое при делении на 9 дает остаток 6 и, как видно из нашей таблицы, не может быть представлено в виде x^2+y^2.

◆

M994*. *При каком наибольшем значении k неравенство*

$$a^4+b^4+c^4+abc(c+b+c)\geqslant k(ab+bc+ca)^2$$

выполнено при всех значениях a, b и c?

Ответ: $k=2/3$. При $a=b=c$ и $k=2/3$ данное неравенство обращается в равенство, поэтому искомое значение k не может быть больше $2/3$. Но при $k=2/3$ можно с помощью тождественных преобразований привести неравенство к виду

$$\frac{1}{6}\Big(\frac{5}{2}((a^2-b^2)^2+(b^2-c^2)^2+(c^2-a^2)^2)+ +(a^2-bc)^2+(b^2-ca)^2+(c^2-ab)^2\Big)\geqslant 0,$$

следовательно, оно справедливо при всех a, b, c и искомое значение k в точности равно $2/3$.

◆

M995. *Функция $y=f(x)$ при всех x определена, непрерывна и удовлетворяет условию*

$$f(f(x))=f(x)+x. \quad (\bullet)$$

а) Найдите две такие функции f (не равные тождественно 0).
б) Докажите, что других таких функций нет.*

а) Ответ: $y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}x$ и $y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}x$. Найти эти функции можно, предположив, что $f(x)=\lambda x$, подставив эту функцию в условие

$$\lambda^2 x=\lambda x+x$$

и решив квадратное уравнение $\lambda^2-\lambda-1=0$ (корни этого уравнения равны $(1\pm\sqrt{5})/2$).

б) Как видно из решения задачи а), достаточно показать, что любая функция f, удовлетворяющая условию задачи, имеет вид $f(x)=\lambda x$. Для этого установим сначала некоторые свойства функции f.

1) $f(0)=0$. (Пусть $f(0)=c$, тогда $f(c)=f(f(0))=$ $=f(0)+0=c$, следовательно, $f(c)=f(f(c))=f(c)+$ $+c$, то есть $c=0$.)

2) *В разных точках функция f принимает разные значения.* (Если $f(x_1)=f(x_2)$, то $f(f(x_1))=f(f(x_2))$, то есть $f(x_1)+x_1=f(x_2)+x_2$ и $x_1=x_2$.) В частности, f имеет единственный корень $x=0$.

Из этих свойств и непрерывности функции f следует, что:

3) *на каждой из полуосей $x>0$ и $x<0$ функция f сохраняет знак, причем при переходе через нуль ее знак меняется* (иначе близкие к нулю значения f будут приниматься по крайней мере дважды — справа и слева от точки $x=0$) и

4) *функция f имеет обратную функцию g* (определённую, конечно, на области значений f; ниже мы увидим, что f принимает все действительные значения).

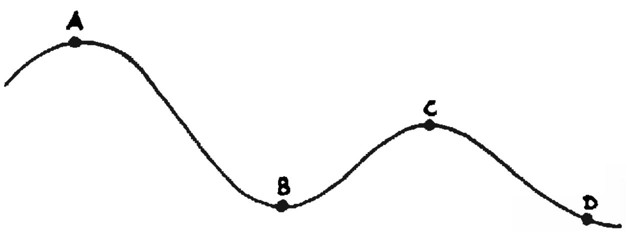
Положим $f_0(x)=x$, $f_1(x)=f(x)$, $f_2(x)=f(f(x))$, ...

1. Можно ли найти равнодействующую сил тяжести, действующих на осколки разорвавшегося снаряда?

2. В опытах с магдебургскими полушариями с каждой стороны впрягали по 8 лошадей. Изменится ли сила тяги, если одно полушарие прикрепить к стене, а с другой стороны впрячь 16 лошадей?

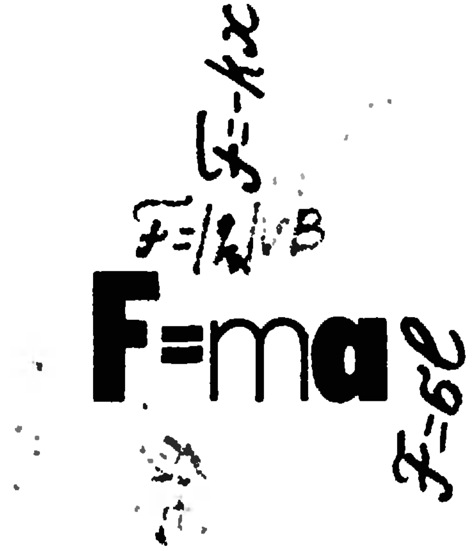
3. Можно ли натянуть веревку строго горизонтально?

4. С искусственной горки, профиль которой изображен на рисунке, не подскакивая, съезжает тележка. В каком месте надо положить наиболее прочные доски?



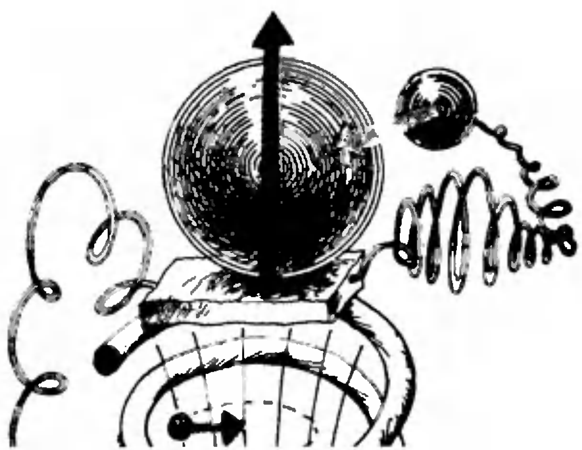
5. Что легче: удержать санки на склоне горки или двигать их по нему равномерно вверх?

Вопросы и задачи
квант 11/86



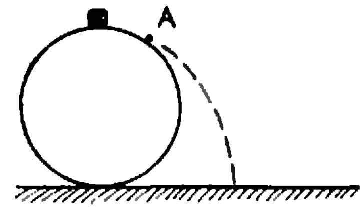
Вся трудность физики состоит, по-видимому, в том, чтобы по явлениям движения распознать силы природы, а затем по этим силам объяснить остальные явления...

И. Ньютон
«Математические начала натуральной философии»



квант 11/86
Вопросы и задачи

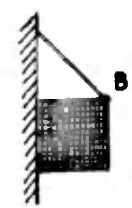
8. Какие силы действуют на тело в точке отрыва A?



9. Каково направление равнодействующей сил, приложенных к грузу маятника, в моменты, когда он: а) находится в крайних положениях; б) проходит положение равновесия?

10. Почему не приближаются друг к другу предметы, находящиеся в комнате, хотя они взаимно притягиваются?

11. Может ли удержаться ящик, показанный на рисунке, при отсутствии сил трения?



6. Грузовик трогается с места. Какая сила действует на груз, поставленный в середину его кузова? Куда она направлена?

●

7. Две одинаковые пружины один раз соединили последовательно, другой — параллельно. Покажите на графике, чем отличаются зависимости силы упругости от абсолютного удлинения в этих случаях.

Любопытно, что...

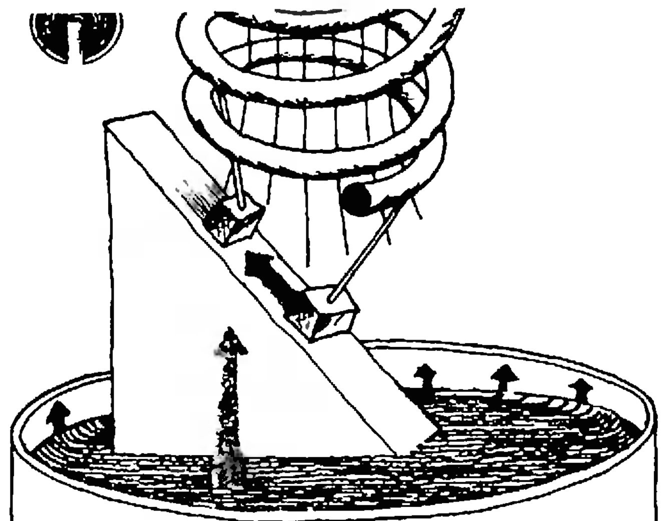
●

...выдающемуся немецкому физику Г. Герцу удалось построить механику, совершенно не используя понятие силы. Однако формулировка основных положений механики настолько усложнилась, что вся схема Герца в целом не получила признания.

●

...великий французский ученый Р. Декарт (1596—1650) предполагал, что существуют только такие силы, которые действуют при столкновениях частиц,— контактные силы.

калейдоскоп



А так ли хорошо знакомо вам понятие

СИЛА ?

В словах, приведенных в эпиграфе, заключена программа, увлекавшая и вдохновлявшая Ньютона и его последователей. Механика, созданная Ньютоном, была основой почти для всей физики вплоть до конца прошлого столетия, а для большинства областей техники эту роль она сохранила и до сих пор.

Ньютоновская механика базируется на трех знаменитых законах, включающих фундаментальное понятие силы — меры взаимодействия материальных тел. Предлагая сегодня поработать над этим понятием, подчеркнем, что законы Ньютона не раскрывают происхождение и свойства сил, но позволяют предсказать поведение тел под их действием.

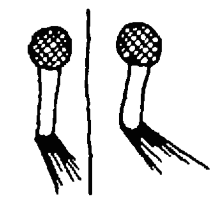
калейдоскоп

12. Двигаясь горизонтально с востока на запад, электрон попадает в область магнитного поля и отклоняется вниз. Найдите направление магнитного поля.

●

Микроопыт

Забейте два одинаковых гвоздя в сухую и в набухшую доски. Сравните усилия, которые необходимо приложить, чтобы выдернуть гвозди. Различаются ли они? Почему?



Что читать о силе в «Кванте» (публикации последних лет)

1. *«Сила и деформация», «О силах поверхностного натяжения» — 1983, № 12;*
2. *«Магнитное поле и магнитные силы» — 1984, № 3;*
3. *«Как вводятся физические величины» — 1984, № 3;*
4. *«Какой из трех законов Ньютона важнее?» — 1985, № 1;*
4. *«Конус трения» — 1986, № 1;*
6. *«Электрическое поле» — 1986, № 5.*

..., $f_n(x)=f(f_{n-1}(x))$; аналогично определим $f_{-1}(x)=g(x)$, ..., $f_{-m-1}(x)=f_{-1}(f_{-m}(x))$ при $m\geqslant 1$. Подставляя в условие $f_{n-1}(x)$ вместо x при любом целом n, получим равенство

$$f_{n+1}(x)=f_n(x)+f_{n-1}(x).$$

Эта формула позволяет выразить $f_n(x)$ при любом n через $x=f_0(x)$ и $y=f(x)=f_1(x)$; как показано на полях,

$$f_n(x)=a_ny+a_{n-1}x,$$

$$f_1(x)=y=1\cdot y+0\cdot x,$$
$$f_2(x)=y+x=1\cdot y+1\cdot x,$$
$$f_3(x)=(y+x)+y=2\cdot y+1\cdot x,$$
$$f_4(x)=(2y+x)+(y+x)==3\cdot y+2\cdot x.$$

где последовательность a_n задается соотношением $a_{n+1}=a_n+a_{n-1}$ и «начальными условиями» $a_0=0$, $a_1=1$ при всех целых n (мы снова обходим пока вопрос об области определения f_n при $n<0$). Последовательность a_n хорошо известна: при $n\geqslant 1$ это знаменитые числа Фибоначчи*); нам достаточно знать, что $|a_n|$ неограниченно возрастает при $n\to\pm\infty$ (при $n>0$ это очевидно; при $n<0$ достаточно заметить, что $a_n=(-1)^{n+1}a_{-n}$ и $|a_{-n}|=|a_n|$).

По выведенному выше свойству 3 возможны два случая: знак $f(x)$ либо при всех x совпадает со знаком $-x$, либо — со знаком x.

В первом случае $f_n(x)$ и $f_{n-1}(x)$ имеют при любом $x\neq 0$ разные знаки, поэтому для $n\geqslant 2$

$$|f_{n+1}(x)|=|f_n(x)+f_{n-1}(x)|\leqslant$$
$$\leqslant|f_n(x)|\leqslant\ldots\leqslant|f_2(x)|=|f(x)+x|\leqslant|x|.$$

Следовательно, $|y+(a_{n-1}/a_n)x|\leqslant|x/a_n|$. Поскольку правая часть этого неравенства стремится к нулю при $n\to\infty$, последовательность a_{n-1}/a_n должна иметь некоторый предел μ (равный $-y/x$); при этом $y=-\mu x$.

Во втором случае $f_n(x)$ при всех n имеет один и тот же знак (знак x). Поскольку f — непрерывная функция и $|f(f(x))|=|f(x)+x|\geqslant|x|$, область значений f или область определения обратной функции f_{-1} — это все действительные числа и наши формулы для f_n определены и справедливы при всех x и всех целых n. Теперь для любого $n<0$ имеем

$$|f_n(x)|=|f_{n+1}(x)-f_{n-1}(x)|\leqslant|f_{n+1}(x)|\leqslant\ldots$$
$$\ldots\leqslant|f_{-1}(x)|\leqslant|x|,$$

следовательно, $|y+(a_{n-1}/a_n)x|\leqslant|x/a_n|$. Переходя здесь к пределу при $n\to-\infty$, получим, как и в первом случае, что $y=\mu_1x$, причем $\mu_1=-\lim\limits_{n\to-\infty}(a_{n-1}/a_n)$.

Заметим, что $\mu_1=\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+1}/a_n)=\mu^{-1}$; как следует из пункта а),

$$\mu=(\sqrt{5}-1)/2,\quad \mu^{-1}=(\sqrt{5}+1)/2.$$

Эти числа участвуют и в общей формуле Бинэ для чисел Фибоначчи, приведенной на полях.

Формула Бинэ

$$a_n=\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

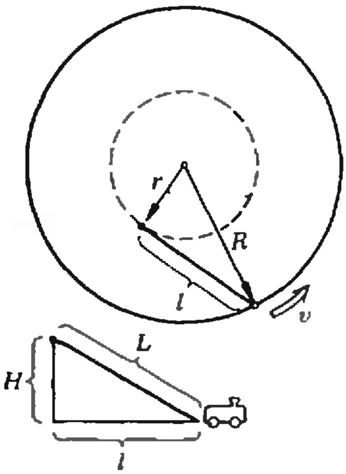
◆

Ф1003. *Локомотив движется по круговому пути радиусом R со скоростью v. К нему на тросе длиной L прикреплен легкий воздушный шар, который движется с постоянной по*

Надутый воздухом шарик имеет очень небольшую массу, поэтому уже при скоростях движения порядка нескольких м/с его практически можно счи-

*) Им посвящена, например, книжка Н. Н. Воробьева «Числа Фибоначчи» (М.: Наука, 1978).

величине скоростью на высоте Н. Определите траекторию установившегося движения шара.



тать безмассовым, сильное трение о воздух подавляет влияние инерционности шарика (попробуйте, например, бросить его существенно дальше нескольких метров).

Следовательно, из второго закона Ньютона получаем, что сумма сил, действующих на шар, равна нулю. При установившемся движении вектор скорости шара направлен горизонтально и лежит в одной вертикальной плоскости с тросом, поскольку сила трения о воздух направлена противоположно скорости, и кроме нее горизонтальную проекцию имеет лишь сила натяжения троса. Наконец, из соображений симметрии ясно, что установившаяся траектория движения шара — окружность, радиус которой просто найти, если учесть, что горизонтальная проекция троса — касательная к ней (скорость шара направлена вдоль проекции троса). Дважды используя теорему Пифагора (см. рисунок), находим, что длина проекции троса равна $l=\sqrt{L^2-H^2}$ и радиус окружности, по которой движется шар,

$$r=\sqrt{R^2-l^2}=\sqrt{R^2-L^2+H^2}\,.$$

Д. Ю. Григорьев

◆

Ф1004. *Тонкий однородный стержень, который может свободно вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через конец стержня, неподвижно висит над водой (рис. 1); длина стержня l, плотность материала ρ (ρ меньше плотности воды ρ_0). Медленно опуская ось, стержень погружают в воду. Найдите зависимость между углом отклонения стержня от вертикали и расстоянием от оси до поверхности воды; постройте график этой зависимости.*

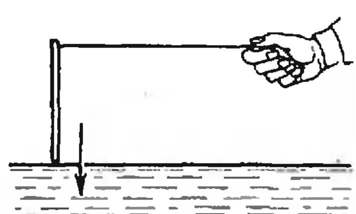


Рис. 1.

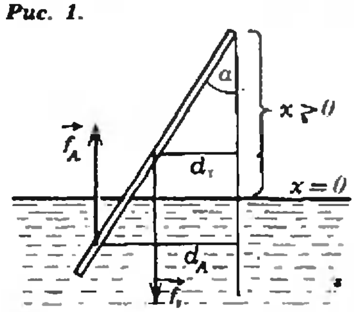


Рис. 2.

В процессе погружения на стержень действуют три силы: сила тяжести, сила Архимеда и сила реакции со стороны оси. При медленном погружении при любом значении расстояния x от оси до поверхности воды стержень будет находиться в положении равновесия.

В качестве условия равновесия воспользуемся равенством нулю суммарного момента сил относительно оси вращения. Поскольку момент $M_А$ силы Архимеда до начала погружения оси ($x>0$) и после него ($x<0$) выражается разными формулами, следует рассмотреть эти стадии отдельно.

I. $x>0$ (см. рис. 2). Момент силы тяжести равен

$$M_т=f_т\cdot d_т=\rho Slg\cdot\frac{l}{2}\sin\alpha=\frac{1}{2}\rho Sl^2g\sin\alpha$$

(S — площадь поперечного сечения стержня); момент силы Архимеда —

$$M_А=f_А\cdot d_А=\rho_0S\left(l-\frac{x}{\cos\alpha}\right)g\cdot\frac{1}{2}\left(l+\frac{x}{\cos\alpha}\right)\sin\alpha=$$

$$=\frac{1}{2}\rho_0S\left(l^2-\frac{x^2}{\cos^2\alpha}\right)g\sin\alpha.$$

Будем считать момент силы тяжести положительным; тогда момент силы Архимеда отрицателен (поскольку он стремится повернуть стержень в противоположном направлении). Тогда условие равновесия запишется в виде

$$M=M_т+M_А=\frac{1}{2}\rho Sl^2g\sin\alpha-$$

$$-\frac{1}{2}\rho_0S\left(l^2-\frac{x^2}{\cos^2\alpha}\right)g\sin\alpha=0\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \sin\alpha\left(\frac{x^2}{\cos^2\alpha}-\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)l^2\right)=0.$$

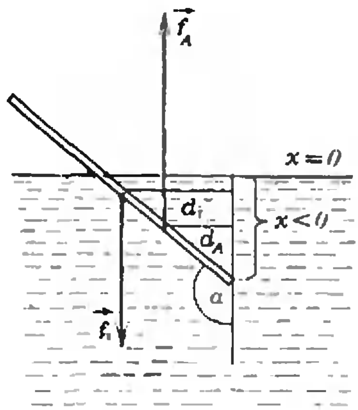


Рис. 3.

Это условие выполняется при

1) $\sin\alpha=0$,

2) $\cos\alpha=\frac{x}{l}\frac{1}{\sqrt{1-\rho/\rho_0}}$.

Физический смысл при заданных в задаче условиях имеют решения:

1) $\alpha=0$ — существует при любых $x\geqslant 0$,

2) $\alpha=\arccos\left(\frac{x}{l}\frac{1}{\sqrt{1-\rho/\rho_0}}\right)$ — существует при $l\sqrt{1-\rho/\rho_0}\geqslant x\geqslant 0$.

Исследуем на устойчивость первое положение равновесия $\alpha=0$, соответствующее вертикальному положению стержня. При малом отклонении от этого положения (угол α мал, так что $\sin\alpha\approx\alpha$ и $\cos\alpha\approx 1$) момент сил равен

$$M\approx\frac{1}{2}\rho Sl^2g\alpha-\frac{1}{2}\rho_0S(l^2-x^2)g\alpha=$$
$$=\frac{1}{2}\rho_0Sg\alpha\left(x^2-l^2\left(1-\frac{\rho}{\rho_0}\right)\right).$$

При $x>l\sqrt{1-\rho/\rho_0}$ этот момент положителен, то есть поворачивает стержень в том же направлении, что и момент силы тяжести, — силы возвращают стержень в положение равновесия. Следовательно, пока $x>l\sqrt{1-\rho/\rho_0}$, равновесие при $\alpha=0$ устойчиво. При $x<l\sqrt{1-\rho/\rho_0}$ момент $M<0$ — положение равновесия $\alpha=0$ становится неустойчивым. Ясно, что в этом случае будет устойчиво второе положение равновесия (2)), поскольку существование устойчивого равновесия очевидно, а иных положений равновесия, кроме 1) и 2), нет.

Таким образом, по мере погружения стержень сначала будет оставаться в вертикальном положении ($\alpha=0$) вплоть до $x=l\sqrt{1-\rho/\rho_0}$, после чего начнет отклоняться от вертикали $\left(\alpha=\arccos\frac{x}{l\sqrt{1-\rho/\rho_0}}\right)$ до горизонтального положения при $x=0$.

II. $x<0$ (рис. 3). После погружения оси суммарный момент сил равен

$$M=\rho Slg\cdot\frac{l}{2}\sin(\pi-\alpha)-\rho_0S\frac{x}{\cos(\pi-\alpha)}g\cdot\frac{x}{2}\operatorname{tg}(\pi-\alpha)=$$
$$=\rho_0Sg\sin\alpha\left(\frac{\rho}{\rho_0}l^2-\frac{x^2}{\cos^2\alpha}\right),$$

и условие $M=0$ принимает вид

$$\sin\alpha\left(\frac{\rho}{\rho_0}l^2-\frac{x^2}{\cos^2\alpha}\right)=0.$$

Анализ, аналогичный проведенному выше (для $x>0$), показывает, что устойчивыми положениями равновесия будут:

3) $\alpha=\arccos\frac{x}{l}\sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}$ при $-l\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}<x<0$,

4) $\alpha=\pi$ при $x<-l\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}$.

Таким образом, после погружения оси стержень начнет приближаться к вертикали и при $x=-l\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}$ вновь примет вертикальное положение ($\alpha=\pi$).

График зависимости $\alpha(x)$ представлен на рисунке 4.

Д. В. Белов

◆

Ф1005. *Имеется печь, в которой постоянно поддерживается температура T_1, и холодильник, температура в котором $T_0<T_1$. В холодильнике установлена катушка с намотанной на ней длинной проволокой. Конец проволоки выходит из холодильника, входит в печь и закреплен на катушке, установленной там. Катушки вращаются так, что проволока сматывается с холодной катушки на горячую, двигаясь со скоростью v. Сечение проволоки s, объемная теплоемкость c. Чтобы температуры T_1 и T_0 не изменились, пришлось увеличить на ΔE_x мощность печи и на столько же уменьшить холодопроизводительность холодильника. Найдите ΔE_x. Считать, что теплообмен проволоки с окружающей средой не зависит от скорости движения проволоки.*

Поскольку ни температура печи, ни температура холодильника не изменились, потери тепла из печи в окружающую среду и приток тепла в холодильник из окружающей среды (не по проволоке) остались прежними. После того как на участке проволоки между печью и холодильником установится некоторое новое распределение температуры, отличающееся от того, которое было в состоянии покоя, количество тепла, запасенное в каждый момент времени в этом участке, также будет постоянным. Полная же тепловая энергия всей проволоки за время Δt возрастает на

$$\Delta Q=csv\,(T_1-T_0)\,\Delta t$$

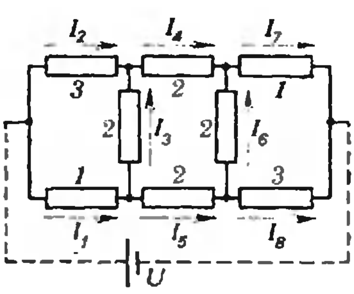
(такое количество тепла надо сообщить отрезку длиной $v\Delta t$, чтобы нагреть его от T_0 до T_1). Эта добавочная мощность берется, конечно, от печи, но $\Delta Q/\Delta t$ не совпадает с искомым ΔE_x. Отличие связано с тем, что вследствие изменения распределения температуры изменится и тепловой поток по проволоке. Тепло, уносимое неподвижной проволокой из печи, частично терялось в окружающую среду, частично поглощалось в холодильнике. Поскольку первая часть по условию не изменилась, полная тепловая мощность, уносимая проволокой, уменьшилась на ΔE_x, так как на эту величину снизили холодопроизводительность холодильника. Значит, мощность, поглощаемая проволокой из печи, увеличилась не на $\Delta Q/\Delta t$, а на $\Delta Q/\Delta t-\Delta E_x$. Но по условию увеличение мощности печи равно ΔE_x, откуда

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t}-\Delta E_x=\Delta E_x,\ \text{или}\ \Delta E_x=\frac{1}{2}\,\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{1}{2}\,csv\,(T_1-T_0).$$

Д. В. Павлов

◆

Ф1006. *Определите сопротивление схемы из резисторов, показанной на рисунке. Значения сопротивлений указаны в омах.*



Подадим на схему напряжение U. Обозначим токи, которые потекут по отдельным участкам цепи, I_1, I_2, ..., I_8 (см. рисунок). В силу симметрии схемы $I_1=I_7$, $I_2=I_8$, $I_3=I_6$, $I_4=I_5$. Действительно, если полярность поданного напряжения изменить на противоположную, то направления всех токов тоже изменятся, но по величине токи останутся прежними. Таким образом, число неизвестных токов уменьшилось до четырех.

Запишем теперь закон сохранения заряда —

$$I_1=I_3+I_4, \qquad (1)$$

$$I_4=I_2+I_3 \qquad (2)$$

и условие независимости напряжения от пути обхода —

$$I_2\cdot 3r=I_1\cdot 1r+I_3\cdot 2r, \qquad (3)$$

$$U=I_1\cdot 1r+I_2\cdot 3r+I_4\cdot 2r, \qquad (4)$$

где r — сопротивление в 1 Ом. Из уравнений (1)—(3) получаем

$$I_2=\frac{1}{2}I_1,\ I_3=\frac{1}{4}I_1,\ I_4=\frac{3}{4}I_1.$$

Подставив в (4) токи I_2 и I_4, выраженные через I_1, получим

$$U=I_1\cdot 4r.$$

С другой стороны, сопротивление R всей схемы равно

$$R=\frac{U}{I_1+I_2}=\frac{U}{I_1+I_1/2}=\frac{2}{3}\frac{U}{I_1}.$$

Следовательно,

$$\frac{3}{2}I_1R=I_1\cdot 4r,\ \text{откуда}\ R=\frac{8}{3}r=\frac{8}{3}\ \text{Ом}.$$

С. С. Кротов

◆

Ф1007. *На шар, составленный из двух полушарий, которые сделаны из стекол с показателями преломления n_1 и n_2 ($n_1>n_2$), падает луч света. Шар начинают вращать с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной направлению луча (рис. 1). Найдите максимальное отклонение светового пятна на экране, установленном непосредственно за шаром.*

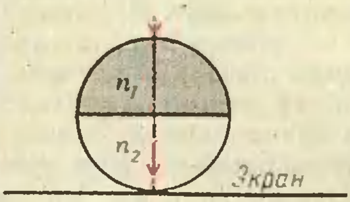


Рис. 1.

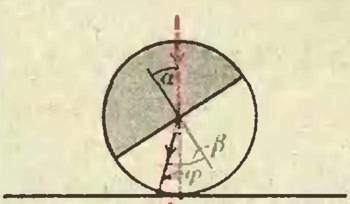


Рис. 2. $0<\Omega<\alpha_0$; $\varphi=\beta-\alpha$.

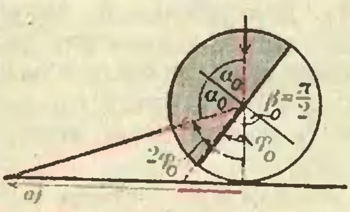


Рис. 3. а) $\Omega=\alpha_0$; $\varphi=2\varphi_0=\pi-2\alpha_0$; б) $\alpha_0<\Omega<\frac{\pi}{2}$; $\alpha(>\alpha_0)\to\frac{\pi}{2}$, $\varphi(<2\varphi_0)\to 0$.

Поскольку луч проходит через центр шара, на поверхности шара (на входе и на выходе) луч не преломляется.

В течение времени $0\leqslant t<\frac{\pi}{2\omega}$ падающий луч первую «половину» пути проходит в оптически более плотной среде. При этом, пока угол поворота Ω меньше угла α_0 полного внутреннего отражения от границы полусфер — $\alpha_0=\arcsin\frac{n_2}{n_1}$, — луч, преломляясь на границе, переходит в менее оптически плотную среду (рис. 2) и $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=\frac{n_2}{n_1}$. С ростом угла поворота при $\alpha\to\alpha_0$ преломленный луч «прижимается» к границе сред, то есть $\beta\to\frac{\pi}{2}$. С того момента, когда Ω проходит значение α_0, луч отражается от границы раздела и выходит из полусферы с показателем преломления n_1. Так что в момент $t=\frac{\alpha_0}{\omega}$ происходит скачок луча на экране (рис. 3, *а*).

В дальнейшем $\left(\frac{\alpha_0}{\omega}<t<\frac{\pi}{2\omega}\right)$ $\alpha\to\frac{\pi}{2}$, то есть отраженный луч «прижимается» к границе сред (см. рисунок 3, *б*), которая приближается к вертикали.

С того момента, когда граница проходит вертикальное положение $\left(t=\frac{\pi}{2\omega}\right)$, луч падает в оптически менее плотную среду, преломляется на границе и выходит из более плотной среды. Угол падения δ и угол преломления γ связаны соотношением $\frac{\sin\delta}{\sin\gamma}=\frac{n_1}{n_2}$. При переходе границы сред через вертикаль $\left(\delta=\frac{\pi}{2}\right)$ $\gamma_0=\arcsin\frac{n_2}{n_1}=\alpha_0$ — происходит «скачок» луча на экране (рис. 4). В дальнейшем ($\delta\to 0$) луч «прижимается» к нормали к границе сред (рис. 5), и при $\delta=0$ проходит через сферу без преломления.

Из свойства обратимости световых лучей ясно, как будет меняться ход луча при дальнейшем

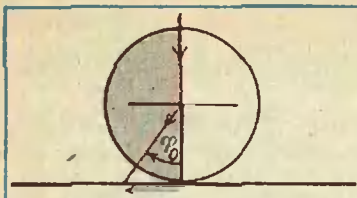


Рис. 4. $\Omega=\frac{\pi}{2}$, $\varphi_0=\alpha_0$.

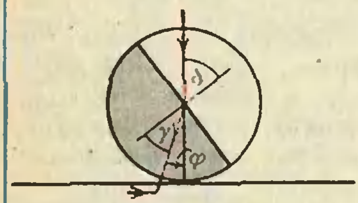


Рис. 5. $\frac{\pi}{2}<\Omega<\pi$;

$\delta\ (<\frac{\pi}{2})\to 0$, $\varphi(<\varphi_0)\to 0$.

повороте ($\pi<\Omega\leqslant 2\pi$; рис. 6).

Как видно из рисунков, максимальное отклонение луча на экране определяется углом

$$2\varphi_0=\pi-2\alpha_0=\pi-2\arcsin\frac{n_2}{n_1}.$$

При $\alpha_0\leqslant\frac{\pi}{4}\left(\frac{n_2}{n_1}\leqslant\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ $2\varphi_0\geqslant\frac{\pi}{2}$ — луч на экране «уходит на бесконечность».

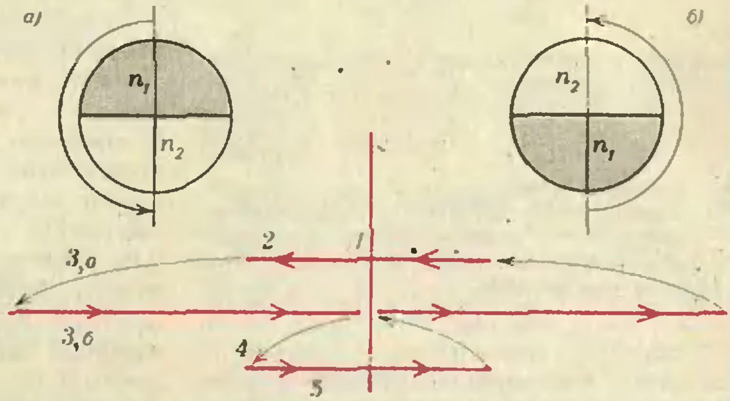


Рис. 6. а) $0<\Omega<\pi$; б) $\pi<\Omega<2\pi$. (Цифры соответствуют номерам рисунков.)

Знакомьтесь: металлическое стекло

(Начало см. на с. 24)

Нетупящиеся лезвия бритв или не знающие износа наконечники буров — таковы первые шаги на этом пути.

Не менее перспективным представляется и другое замечательное свойство аморфного металла — исключительно высокая коррозионная стойкость. У некоторых стекол она превосходит стойкость нержавеющей стали. Что такое ржавчина — знают, наверное, все. А вот как с ней эффективно бороться — куда более трудный вопрос. Им заняты десятки лабораторий многих стран мира. Один из возможных вариантов решения — создавать на металлической поверхности тонкие аморфные слои. Такая защита будет намного эффективней использующихся сегодня для этой цели лаков, красок и т. д. Правда, и создать такой слой намного труднее. В настоящее время это направление активно разрабатывается.

Вероятно, очень скоро изделия из аморфного металла в виде магнитных головок или лезвий появятся в наших домах. Пока их широкое распространение сдерживается тем, что аморфный металл производится в виде тонкой ленты, а не массивных образцов. Те просто не удается охладить с нужной скоростью. Но исследования продолжаются...

Построение диалоговых алгоритмов

Кандидат технических наук
В. А. КАЙМИН

Эта заметка предназначена в первую очередь десятиклассникам, изучающим курс «Основы информатики и вычислительной техники», но будет полезна и всем тем, кто имеет дело с персональными ЭВМ.

Диалог человека с ЭВМ во многом схож с диалогом между двумя лицами. Диалог двух лиц — это обмен сообщениями, фразами, жестами и восклицаниями. Диалог людей с ЭВМ больше похож на разговор между людьми по телефону или, более точно, по видеотелефону. Сообщения (информация) от ЭВМ обычно выводятся на экран телевизора, подсоединенного к вычислительной машине. В ответ на сообщения ЭВМ человек вводит команды, ответы или запросы через клавиатуру, схожую с клавиатурой пишущих машинок. В ответ на действия человека ЭВМ выводит на экран новые сообщения и ожидает ввода новых команд, данных или запросов.

Диалоговые программы в зависимости от назначения можно подразделить на *игровые, учебные, деловые* и *инструментальные*. Игровые программы служат для развлечения в свободное от работы или учебы время. Учебные программы применяются для обучения школьников или студентов. Деловые программы используются для решения производственных задач, накопления и обработки информации. Инструментальные программы используются для создания новых программ.

В основе любых диалоговых программ лежат определенные правила и алгоритмы ведения диалога. Обязательными правилами для ведения любого диалога являются *вежливость, понятность* и *логическая связность* сообщений.

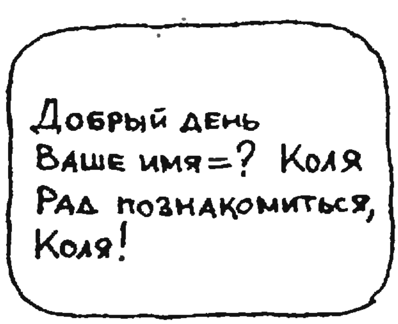
Для построения простейших диалоговых алгоритмов нам достаточно от исполнителя умения выполнять команды трех типов, которые проиллюстрированы примерами в скобках:

1. **сообщи** («Добрый день»)
2. **запрос** («Ваше имя», имя)
3. **вывод** («2 · 2=», x, «?»)

В команде «сообщи» указывается стандартная фраза, сообщаемая партнеру по диалогу; в приведенном примере — это фраза «Добрый день». В команде «запрос» содержатся два аргумента: первый аргумент — *фраза-запрос*, которая передается партнеру, а второй аргумента — это *имя переменной*, куда будет записан ответ (фраза или число, в зависимости от типа переменной). Команда типа «вывод» может содержать один или несколько аргументов — это либо фразы, либо имена переменных, из которых образуется *сообщение* — «вывод». Эти три команды мы прибавим к алгоритмическому языку из учебника. Приведем пример простейшего диалогового алгоритма. (Для экономии места здесь и ниже часть заголовка программ опущена.)

```
алг знакомство
нач
  сообщи («Добрый день»)
  запрос («Ваше имя =», имя)
  вывод («Рад познакомиться,» имя»!»)
кон
```

Пример диалога:



В качестве следующего примера рассмотрим простейший диалоговый алгоритм для игры «угадай-ка». В игре участвуют два лица: первое действующее лицо загадывает некоторое целое число x в интервале от 1 до 100, а второе пытается угадать его, указывая числа: p_1, p_2,... В ответ на предъявляемые числа первое лицо сообщает:

«отлично», «мало» или «много» в зависимости от соотношений между указанным и задуманными числами. Игры заканчиваются словами «молодец», «умница» сразу после отгадывания задуманного числа.

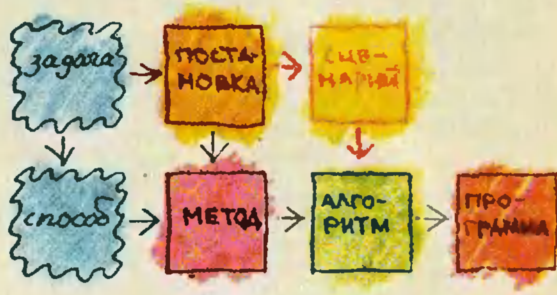
Алгоритм ведения диалога для первого лица (им будет ЭВМ) и пример диалога приводятся ниже. В алгоритме используется специальная функция «$x :=$ случайное (a, b)», которая дает некоторое случайное целое число между a и b.

```
алг игра: угадай-ка
нач
   x: = случайное (1, 100)
   сообщи («угадай число»)
   сообщи («от 1 до 100»)
   запрос («число =», p)
   пока p≠x
     нц
     если p<x,
     то сообщи («мало»)
     иначе сообщи («много»)
     все
     запрос («число =», p)
     кц
     сообщи («отлично»)
     сообщи («молодец, умница»)
кон
```

Пример диалога (загадано $x = 67$):

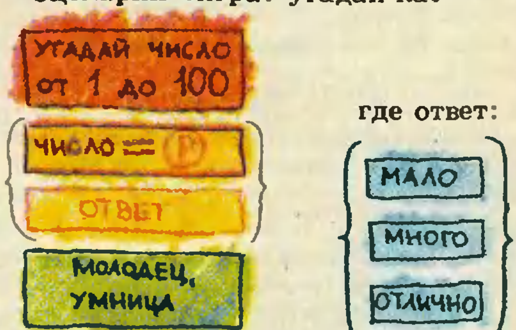
Второе лицо может подбирать числа-гипотезы многими способами. Лучший способ гарантирует угадывание чисел для данного диапазона от 1 до 100 за 7 шагов. В основе этого способа лежит принцип деления интервала пополам (см. «Квант» № 10, с. 49).

Составление алгоритмов ведения диалога и конструирование диалоговых программ для ЭВМ можно систематизировать (ср. «Квант» № 10, с. 47). Дополнительным этапом при систематическом конструировании диалоговых алгоритмов и программ является предварительное составление *сценария диалога*.



Сценарий ведения диалога — это описание совокупности всех сообщений, которые предоставляются партнеру по диалогу, и системы реакций в ответ на его сообщения. Для единого описания совокупности сообщений в информатике используется специальная, но несложная система обозначений. Рассмотрим ее на примере описания сценария «игра: угадай-ка».

Сценарий «игра: угадай-ка»

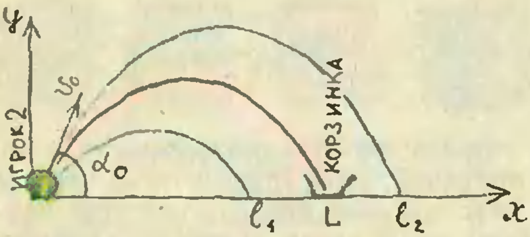


Здесь p — целое число

Здесь в красный кружок обведен переменный элемент текста (сообщения второго лица). В красную рамку помещена переменная часть текста, описывающая ответы первого лица на очередное число-гипотезу. В фигурных скобках справа указываются ответы, которые выбираются в зависимости от определенных условий (сравнения загаданного и указываемых чисел). В фигурных скобках слева указываются части текстов, которые повторяются (здесь — это повторения «запрос — ответ» при угадывании чисел).

Составление алгоритмов и программ с предварительным описанием сценария позволяет заранее продумать понятность, логическую связность и тактичность в ведении диалога, поскольку это свойство не столько алгоритма, а сценария. Более того, наличие полного описания сценария и описаний методов решения поставленных задач позволяет систематическим образом проверять наличие — отсутствие ошибок в алгоритмах.

В качестве иллюстрации приведем построение диалогового алгоритма решения задачи «бросание мяча в корзину», которая превращается в игру двух лиц.



Первый игрок держит корзину и сообщает второму игроку расстояние до корзины. Второй игрок выбирает начальную скорость и угол бросания мяча и сообщает эти данные первому лицу. В ответ первый игрок сообщает «попал», либо «недолет» или «перелет» с величиной в метрах.

Задача: Бросание мяча в корзину
Дано:
L — расстояние до корзины (*м*)
V_0 — начальная скорость (*м/с*)
α_0 — угол бросания (*град*)
D — диаметр корзины (*м*)
Требуется: попал — признак попадания
r — остаток расстояния (*м*)
Связь:
$r = |L - l|$ (остаток расстояния)
попал $= \{r < D/2\}$ (условие попадания)
$l = V_{x_0} \cdot t$ (дальность полета)
$0 = V_{y_0} \cdot t - gt^2/2$ (условие падения)
$V_{x_0} = V_0 \cdot \cos(\alpha_0 \cdot \pi/180)$ (горизонтальная скорость ($t = 0$))
$V_{y_0} = V_0 \cdot \sin(\alpha_0 \cdot \pi/180)$ (вертикальная скорость ($t = 0$))
$g = 9{,}81$ (ускорение свободного падения)
При
$D > 0$ (положительность ширины корзины)
$V_0 > 0$ (положительность скорости)
$0^\circ < \alpha_0 < 90^\circ$ (допустимость угла)
Метод
попал $= \{|L - l| < D/2\}$ (условие попадания)
$r = |L - l|$ (остаток расстояния)
$l = v_0^2 \cdot \sin(2\alpha_0 \cdot \pi/180)/g$ (дальность полета)
$g = 9{,}81$ (ускорение свободного падения)

В приводимом ниже сценарии игры может быть сыграно несколько партий. В каждой партии первое лицо задает расстояние до корзинки, запрашивает у второго лица данные о начальной скорости и угле бросания и сообщает результаты. Если данные физически бессмысленны — отрицательная или нулевая скорость, либо отрицательный или слишком большой угол, то первое лицо сообщает «странная скорость» либо «невероятный угол» и запрашивает данные еще раз.

Сценарий «Игра с мячом»

Ниже приводится алгоритм ведения диалога для первого игрока. Этот алгоритм состоит из трех частей: первая часть обеспечивает разыгрывание партий, вторая часть организует отдельную партию, третья часть организует проведение математических расчетов.

Стратегия второго игрока может строиться многими способами. Простейший из них — способ «проб и ошибок». Однако наилучшей стратегией является проведение математических расчетов, основанных на знании физических законов, позволяющих в данной задаче достигать победы с первой попытки.

```
алг «бросание мячей в корзину»
нач лит игра
вещ L, D
сообщи («бросание мячей в корзину»)
D: =случайное (0.1; 0.5)
  вывод (диаметр корзины=»; D)
  игра:=да
  пока игра=да
  нц
    L:=случайное (10; 250)
    вывод («расстояние до корзины=»; L)
    бросание мяча в корзину
    запрос («поиграем еще? [да/нет]», игра)
  кц
  сообщи («спасибо за игру»)
кон
```

(Окончание см. на с. 48.)

Задачи на координатной плоскости

Кандидат физико-математических наук
А. А. БОЛИБРУХ,
кандидат физико-математических наук
В. М. УРОЕВ,
профессор
М. И. ШАБУНИН

На вступительных экзаменах в МФТИ встречаются задачи, в которых требуется провести вычисления, построения, найти множества точек на координатной плоскости. В этой статье рассматривается несколько таких задач и приводятся их решения.

Треугольники и четырехугольники

1 (1983 г.). *На координатной плоскости дана точка M (2; 4). Рассматриваются треугольники, у которых две вершины симметричны относительно оси Oy и лежат на дуге параболы $y=3x^2$, выделяемой условием $-1\leqslant x\leqslant 1$, а точка M является серединой одной из его сторон. Среди этих треугольников выбран тот, который имеет наибольшую площадь. Найдите эту площадь.*

Решение. Эта задача естественным образом распадается на две: сначала нужно понять, о каком треугольнике говорится в условии, и записать его площадь как функцию от какого-нибудь аргумента, а затем найти наибольшее значение этой функции. Пусть у треугольника ABC вершины B и C симметричны относительно оси Oy и лежат на дуге параболы $y=3x^2$ (рис. 1). Очевидно, точка M не может быть серединой стороны BC, поскольку середина стороны BC должна лежать на оси Oy. Поэтому точка M является либо серединой стороны AC, либо серединой стороны AB (оба эти случая изображены на рисунке 1). В обоих случаях высота h соответствующего треугольника ABC, проведенная из вершины A, равна удвоенной разности ординат точек M и C, то есть $h=2(4-3x^2)$. Легко видеть, что абсциссы точек B и C отличаются только знаком, так что точки B и C имеют координаты $B(-x; 3x^2)$ и $C(x; 3x^2)$. Следовательно, площадь $S(x)$ треугольника ABC записывается

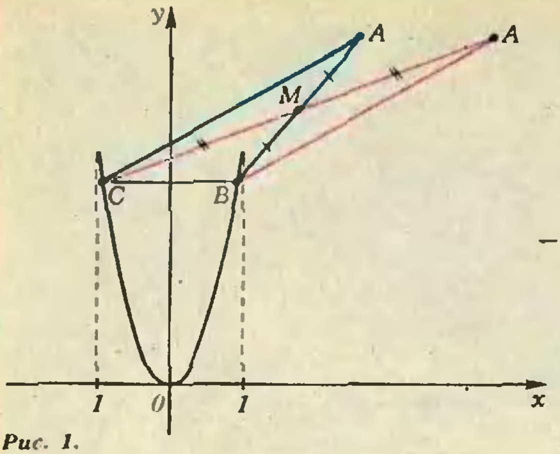


Рис. 1.

в виде

$$S(x)=2|x|(4-3x^2).$$

Нужно найти наибольшее значение функции $S(x)$ на отрезке $[-1; 1]$.

Функция $S(x)$ — четная, поэтому достаточно рассмотреть ее на отрезке $[0; 1]$. На этом отрезке $S'(x)=2(4-9x^2)$, $S'(x)=0$ при $x=2/3$. Следовательно, наша функция достигает на отрезке $[0; 1]$ максимума в одной из точек 0, 1, 2/3. Подсчет показывает, что $S(0)=0$, $S(1)=2$, $S(2/3)=32/9$, так что наибольшее значение $S(x)$ на отрезке $[0; 1]$ равно $S(2/3)=32/9$.

Ответ: 32/9.

2 (1978 г.). *Вершины A, B, C параллелограмма ABCD имеют соответственно координаты (—2; —3), (1; 3), (6; 1). Найдите:*

1) все значения a, для которых координаты вершины D являются решением системы неравенств

$$\begin{cases} 3x+2y+2a\leqslant 0, \\ 6x-2y+7a\geqslant 0; \end{cases}$$

2) все значения a, для которых координаты хотя бы одной точки отрезка AC являются решениями этой системы.

Решение. В задаче 1) нужно, по существу, знать только координаты вершины D, которые моментально находятся из условия $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}$, где $\overrightarrow{AB}=(3; 6)$, $\overrightarrow{DC}=(6-x_D; 1-y_D)$ — см. рисунок 2. Отсюда $x_D=3$, $y_D=-5$, и, подставляя эти значения x и y в данную систему, получаем ответ: $a\in[-4; 1/2]$.

Перейдем к более серьезной задаче 2). Уравнение прямой AC записывается в виде $y+3=k(x+2)$, где k — угловой коэффициент прямой AC, равный тангенсу угла наклона вектора $\overrightarrow{AC}$ к

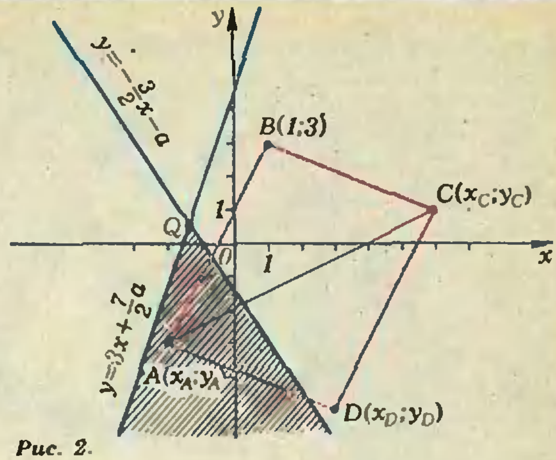


Рис. 2.

оси Ox, то есть $k=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{1}{2}$. Таким образом, уравнение прямой AC имеет вид $y=\frac{1}{2}x-2$. Перепишем данную в условии систему в виде

$$\begin{cases} y\leqslant -\frac{3}{2}x-a, \\ y\leqslant 3x+\frac{7}{2}a, \end{cases}$$

и пусть l_1 и l_2 — прямые, задаваемые уравнениями $y=-\frac{3}{2}x-a$ и $y=3x+\frac{7}{2}a$ соответственно (см. рис. 2). Каждая из прямых l_1 и l_2 делит плоскость на две части, причем неравенствам данной системы удовлетворяют точки, лежащие в нижних полуплоскостях. Теперь ясен геометрический смысл задачи 2): *требуется найти все значения параметра a, при которых хотя бы одна точка диагонали AC принадлежит заштрихованной на рисунке 2 области.* Для этого необходимо и достаточно одновременно выполнение следующих трех условий:

а) точка Q пересечения прямых l_1 и l_2 лежит выше прямой AC;

б) точка A лежит ниже прямой l_1;

в) точка C лежит ниже прямой l_2.

Легко найти координаты $(x_Q; y_Q)$ точки Q: $x_Q=-a$, $y_Q=a/2$. Условие а) сводится к неравенству $y_Q\geqslant\frac{1}{2}x_Q-2$, откуда $a\geqslant-2$. Из условия б) получаем, что $a\leqslant 6$, а из условия в) — что $a\geqslant-\frac{34}{7}$. Таким образом, нужные нам значения параметра a находятся на отрезке $[-2; 6]$.

Ответ: 1) $-4\leqslant a\leqslant 1/2$; 2) $-2\leqslant a\leqslant 6$.

3 (1977 г.). *На координатной плоско-*

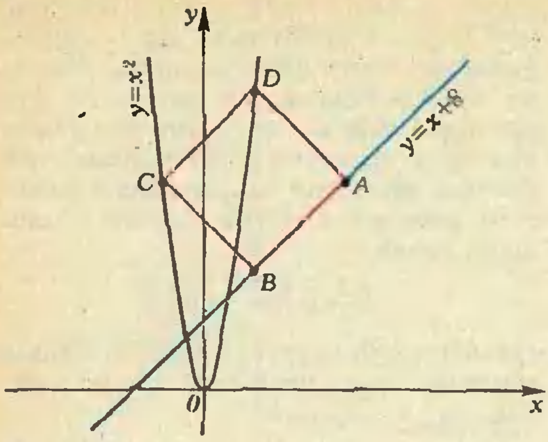


Рис. 3.

сти расположен квадрат ABCD. Сторона AB квадрата лежит на графике функции $y=x+8$, а вершины C и D — на графике функции $y=x^2$. Определите длину стороны квадрата.

Решение. Поскольку прямая $y=x+8$ пересекает ось под углом 45°, диагонали квадрата параллельны координатным осям. Будем считать для определенности, что диагональ AC параллельна оси Ox, а диагональ BD — оси Oy. Тогда $x_B=x_D$, $y_A=y_C$. Положим $x_B=x_D=x$ и выразим координаты всех вершин через x.

Из условий задачи следует, что $y_B=x+8$, $y_D=x^2$, $y_C=x_C^2$, $x_A=y_A-8=x_C^2-8$. Вектор DC наклонен к оси Ox под углом 45°, поэтому $y_C-y_D=x_C-x_D$, то есть $x_C^2-x^2=x_C-x$. Так как $x_C-x\neq 0$, получаем, что $x_C+x=1$. Поэтому $x_C=1-x$.

Диагональ AC делится диагональю BD пополам, поэтому $x_D=(x_A+x_C)/2$ и мы приходим к уравнению относительно x:

$$2x=(1-x)^2-8+(1-x),$$

или

$$x^2-5x-6=0.$$

Корни этого уравнения $x_1=6$, $x_2=-1$.

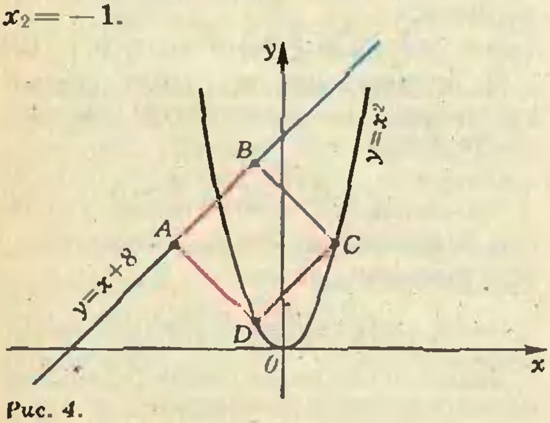


Рис. 4.

Если $x=6$, то $x_B=x_D=6$, $x_C=1-x=-5$, $x_A=x_C^2-8=17$, $y_B=x+8=14$, $y_C=x_C^2=25$, $y_A=y_C=25$, $y_D=x^2=36$. Квадрат расположен, как показано на рисунке 3. В этом случае $DB=y_D-y_B=22$, $AB=\frac{DB}{\sqrt{2}}=11\sqrt{2}$.

Если $x=-1$, то $x_B=x_D=-1$, $x_C=2$, $x_A=-4$, $y_B=7$, $y_C=4$, $y_A=4$, $y_D=1$. Квадрат расположен, как показано на рисунке 4. В этом случае $DB=y_B-y_D=6$, $AB=\frac{DB}{\sqrt{2}}=3\sqrt{2}$.

Ответ: $11\sqrt{2}$ или $3\sqrt{2}$.

Множества точек на координатной плоскости

Пусть $Ax+By+C=0$ — уравнение прямой l. Тогда множества точек, координаты которых удовлетворяют неравенствам $Ax+By+C>0$ и $Ax+By+C<0$, — это две полуплоскости, на которые прямая l делит координатную плоскость. *Две точки $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ лежат в одной полуплоскости тогда и только тогда, когда выражение $Ax+By+C$ принимает в них значения одного знака, то есть когда*

$$(Ax_1+By_1+C)(Ax_2+By_2+C)>0.$$

Рассмотрим две пересекающиеся прямые l_1 и l_2, заданные соответственно уравнениями $A_1x+B_1y+C_1=0$, $A_2x+B_2y+C_2=0$.

Прямые l_1 и l_2 разбивают координатную плоскость на четыре части E_1, E_2, G_1, G_2 (рис. 5). Теперь нетрудно доказать, что *неравенству*

$$(A_1x+B_1y+C_1)(A_2x+B_2y+C_2)>0 \quad (*)$$

удовлетворяют точки, принадлежащие одному из множеств $E_1\cup E_2$ или $G_1\cup G_2$ (для ситуации, изображенной на рисунке 5, — множеству $E_1\cup E_2$).

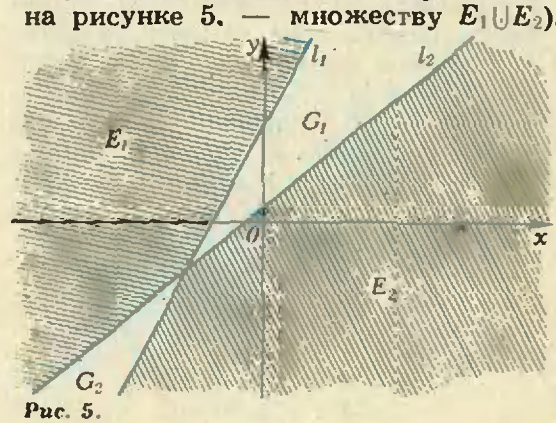


Рис. 5.

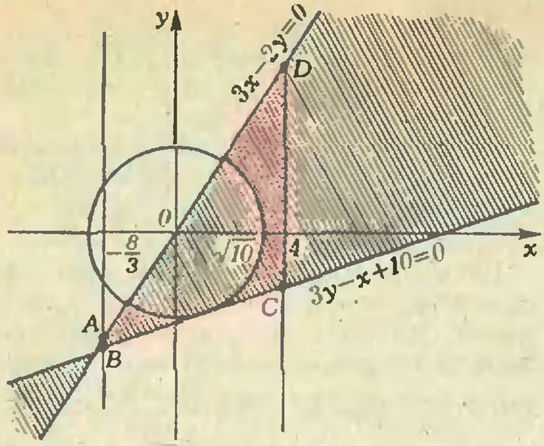


Рис. 6.

Эти два замечания оказываются полезными при решении многих задач.

4 (1982 г.). *Найдите площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости системой неравенств*

$$\begin{cases} x^2+y^2 \geqslant 10, \\ 3x^2-4x-32 \leqslant 0, \\ (3x-2y)(3y-x+10) \geqslant 0. \end{cases}$$

Решение. Прежде всего надо определить, какая фигура задается условиями задачи. Для этого рассмотрим каждое неравенство системы.

Первому неравенству удовлетворяют точки, лежащие вне (и на границе) круга радиусом $\sqrt{10}$ с центром в начале координат (рис. 6). Решая второе неравенство, получаем $x \in [-8/3;\ 4]$. Следовательно, второе неравенство задает вертикальную полосу, лежащую между прямыми $x=-8/3$ и $x=4$ (включая и точки этих прямых). Третье неравенство системы имеет вид (*), и в данном случае ему удовлетворяют точки внутри двух вертикальных углов, образованных прямыми $3x-2y=0$ и $3y-x+10=0$ (включая и точки, лежащие на прямых). Это множество заштриховано на рисунке 6; граничные прямые будем обозначать l_1 и l_2 соответственно. Чтобы понять, как устроена интересующая нас фигура, найдем координаты точек A, B, C, D, в которых прямые l_1 и l_2 пересекают прямые $x=-8/3$ и $x=4$: $A(-8/3;\ -4)$, $B(-8/3;\ -38/9)$, $C(4;\ -2)$, $D(4;\ 6)$. Мы видим, что точка B лежит ниже точки A, так что прямые l_1 и l_2 пересекаются вне полосы $-8/3 \leqslant x \leqslant 4$. Далее, прямая l_2 касается окружности $x^2+y^2=10$, поскольку система

$$\begin{cases} x^2+y^2=10, \\ 3y-x+10=0 \end{cases}$$

имеет единственное решение ($x=1$, $y=-3$). Прямая же l_1 проходит через центр данного круга. Поэтому интересующая нас фигура — это трапеция $ABCD$, из которой удален полукруг радиусом $\sqrt{10}$ (граница этой фигуры выделена на рисунке 6 красным цветом), так что искомая площадь равна

$$\frac{(AB+CD)\,h}{2}-5\pi,$$

где $AB=2/9$, $CD=8$, $h=20/3$. Таким образом, мы получаем ответ: $\frac{740}{27}-5\pi$.

5 (1980 г.). *На координатной плоскости рассматривается множество M всех точек, координаты $(a;\ b)$ которых удовлетворяют условиям $-3<a<0$, $0<b<9$ и таковы, что уравнение*

$$(b+2a)\,x^4+(b+7a)\,x^2+b-a=0$$

имеет четыре различных корня. 1) Принадлежит ли точка $N\ (-2;\ 3)$ множеству M? 2) Найдите площадь многоугольника, внутренней областью которого является множество M.

Решение. Алгебраически-геометрическая формулировка задачи говорит о том, что и решение должно быть алгебраически-геометрическим. Мы начнем с алгебраического анализа условий, после чего используем результаты этого анализа для определения геометрической природы множества M.

Данное биквадратное уравнение имеет четыре различных корня тогда и только тогда, когда уравнение

$$(b+2a)\,z^2+(b+7a)\,z+b-a=0 \quad (1)$$

имеет *два различных положительных* корня. Для этого необходимо и достаточно одновременное выполнение следующих условий:

а) уравнение (1) — квадратное ($b+2a \neq 0$) и его дискриминант положителен:

$$(b+7a)^2-4\,(b+2a)(b-a)>0; \quad (2)$$

б) произведение и сумма корней уравнения (1) — положительные числа, то есть

$$\frac{b-a}{b+2a}>0, \quad -\frac{b+7a}{b+2a}>0$$

(мы использовали теорему Виета), что эквивалентно системе

$$\begin{cases} (b-a)(b+2a)>0, & (3) \\ -(b+7a)(b+2a)>0. & (4) \end{cases}$$

Левую часть неравенства (2) можно рассматривать как квадратный трех-

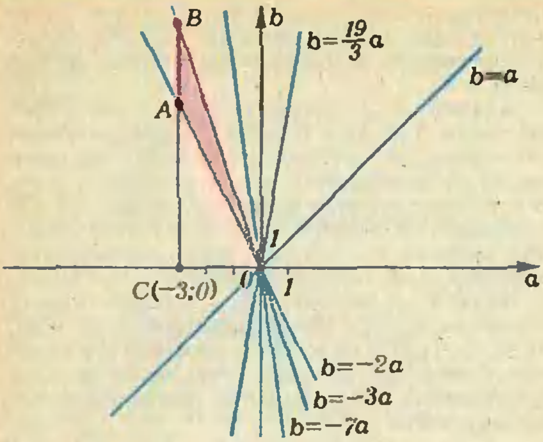


Рис. 7.

член относительно переменной a с коэффициентами, зависящими от параметра b. Корни этого трехчлена $a_1=-b/3$, $a_2=3b/19$, так что неравенство (2) можно переписать в виде

$$57(a+b/3)(a-3b/19)>0. \quad (2')$$

Переходя к координатной плоскости $(a;\ b)$, мы видим, что все полученные неравенства (2′), (3) и (4) имеют вид неравенства (∗). Рассмотрим на плоскости $(a;\ b)$ соответствующие прямые (рис. 7). Используя замечание, сделанное относительно множества точек, удовлетворяющих неравенству (∗), и учитывая ограничения $-3<a<0$, $0<b<9$, получим в пересечении множество M — треугольник ABO (см. рис. 7). Теперь легко видеть, что точка $N(-2;\ 3)$ множеству M не принадлежит, поскольку она лежит ниже прямой $b=-2a$. Найдя координаты точек A и B: $A(-3;\ 6)$, $B(-3;\ 9)$, получим искомую площадь:

$$S=\frac{AB\cdot OC}{2}=\frac{9}{2}.$$

Ответ: 1) не принадлежит; 2) 9/2.

6 (1977 г.). *Найдите площадь фигуры, которая задается на координатной плоскости системой неравенств*

$$\begin{cases} \sqrt{3x^2+3y^2+3}\geqslant 2y+1, & (5)\\ y+4\geqslant 2\sqrt{3}\,|x|. & (6)\end{cases}$$

Решение. Область определения неравенства (5) и всей системы находится из условия $3x^2+3y^2-3\geqslant 0$, то есть $x^2+y^2\geqslant 1$. Это — внешность круга (вместе с границей) радиусом 1 с центром в начале координат. В полуплоскости $y<-\frac{1}{2}$ неравенство (5) выполняется для всех $(x;\ y)$ из области определения. В полуплоскости $y\geqslant-\frac{1}{2}$ неравенство (5) равносильно неравенству $3x^2-(y+2)^2\geqslant 0$, или

$$(\sqrt{3}\,x-y-2)(\sqrt{3}\,x+y+2)\geqslant 0. \quad (5')$$

Пусть L — окружность $x^2+y^2=1$, l_1 и l_2 — прямые, задаваемые уравнениями $y-\sqrt{3}x+2=0$ и $y+\sqrt{3}x+2=0$ соответственно (рис. 8). Прямые l_1 и l_2 касаются окружности L в точках $A(\sqrt{3}/2;\ -1/2)$ и $A_1(-\sqrt{3}/2;\ -1/2)$ (проверьте это, рассмотрев соответствующие системы уравнений). Учитывая то, что неравенство (5′) имеет вид неравенства (∗), а также предыдущие замечания, получаем, что неравенство (5) выполняется в области, заштрихованной на рисунке 8. Но мы еще не учли ограничений, задаваемых неравенством (6).

Два луча, задаваемые уравнением $y+4=2\sqrt{3}|x|$, выходят из точки $C(0;\ -4)$ и пересекаются с прямыми l_1 и l_2 в точках $B(2/\sqrt{3};\ 0)$ и $B_1(-2/\sqrt{3};\ 0)$, лежащих на оси абсцисс. Неравенству (6) удовлетворяют точки, находящиеся внутри угла B_1CB. Поэтому множеством точек, удовлетворяющих одновременно неравенствам (5) и (6), является фигура, граница которой выделена на рисунке 8 красным цветом (D — точка пересечения окружности L с осью Oy). Обозначая через S_1, S_2 и S_3 соответственно площади треугольников CB_1B, OAB и сектора ODA, получаем, что искомая площадь равна $S_1-2(S_2+S_3)$. Поскольку

$$S_1=OC\cdot OB=8/\sqrt{3},$$

$$S_2=\frac{1}{2}OB\cdot OA\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}/6$$

(угол DOA равен $\pi/3$, так как $\cos DOA=1/2$),

$$S_3=\frac{1}{2}(OA)^2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6},$$

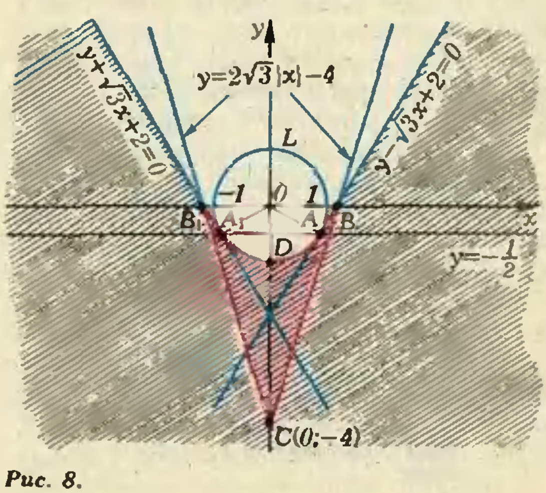


Рис. 8.

получаем ответ: искомая площадь равна $(7\sqrt{3}-\pi)/3$.

Конечно, приведенные шесть задач далеко не исчерпывают все типы задач на координатной плоскости, предлагавшихся (в последние 10 лет) на вступительных экзаменах в МФТИ. Мы постарались разобрать наиболее интересные и трудные из них. При этом мы совершенно не коснулись еще одного очень важного раздела — задач на касательные к графикам функций — по той причине, что совсем недавно в «Кванте» была опубликована большая статья, посвященная именно таким задачам (см. «Квант», 1986, № 3, с. 51). Чтобы у читателей составилось более полное представление, мы предлагаем им самостоятельно решить следующие упражнения:

1 (1984 г.). Через точку M (5; 6) проведена касательная к параболе $y=6x^2/25$, пересекающая ось абсцисс в точке N, а ось ординат в точке P. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник NOP (O — начало координат).

2 (1979 г.). К параболе $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{2}$ в двух ее точках проведены касательные, пересекающиеся в точке A и пересекающие ось абсцисс в точках B и C. Треугольник ABC — равнобедренный, и его угол ABC равен $2\pi/3$. Найдите площадь этого треугольника.

3 (1978 г.). На координатной плоскости даны две прямые $y=-x$ и $y=5x-6$. Найдите: 1) значения a и b, при которых обе данные прямые касаются параболы $y=x^2+ax+b$; 2) координаты точек касания.

4 (1982 г.). В точках A и B параболы $y=x^2-3x+1$ проведены касательные, угловой коэффициент одной из касательных равен 1. Парабола $y=4x^2+ax+1$ $(a>0)$ также касается каждой из этих прямых. Найдите значение параметра a и расстояние между точками A и B.

5 (1983 г.). На координатной плоскости даны точки B (3; 1) и C (5; 1). Рассматриваются трапеции, для которых отрезок BC является одним из оснований, а вершины другого основания лежат на дуге параболы $y=(x-1)^2$, выделяемой условием $0\leqslant x\leqslant 2$. Среди этих трапеций выбрана та, которая имеет наибольшую площадь. Найдите эту площадь.

6 (1978 г.). Вершины A, B, C треугольника имеют соответственно координаты (—2; —1), (0; 9), (8; 1). Найдите: 1) все значения a, для которых координаты точки пересечения медиан треугольника ABC являются решением системы неравенств

$$\begin{cases} 2x-y+a\leqslant 0, \\ 6x+3y+5a\geqslant 0; \end{cases}$$

2) все значения a, для которых координаты хотя бы одной точки отрезка BC являются решением этой системы.

7 (1977 г.). Графики функций $y=\frac{1}{2x}$ и $y=\frac{17}{3}-2x$, рассматриваемые в первой координатной четверти ($x>0$, $y>0$), пересекаются в точках A и B. Гипотенуза равнобедренного прямоугольного треугольника перпендикулярна оси Ox, две его вершины лежат на первом графике, а третья — на отрезке AB. Найдите длины сторон треугольника.

8 (1985 г.). Найдите все значения параметра a, при которых вершины двух парабол $y=4x^2-8ax-a$ и $y=4ax^2-8x+a-2$ лежат по одну сторону от прямой $y=-5$ (но не лежат на этой прямой).

9 (1980 г.). На координатной плоскости рассматривается множество M всех точек, координаты $(a; b)$ которых удовлетворяют условиям $b>2a$, $|b|<5$, $|a|<5$ и таковы, что уравнение

$$x^4/(2a+b)+(2a-3b)x^2+8a^3+b^3=0$$

не имеет корней. 1) Принадлежит ли точка P (2; —3) множеству M? 2) Найдите площадь многоугольника, внутренней областью которого является множество M.

Построение диалоговых алгоритмов

(Начало см. на с. 40.)

```
алг «бросание мяча в корзину»
арг вещ L, D
нач лит попал
   вещ v0, a0, l
   попал:=нет
   пока попал=нет
   нц
     запрос («угол бросания=», a0)
     запрос («начальная скорость=», v0)
     выбор
       при v0≤0
         попал:=нет
         вывод («странная скорость»)
       при a0≤0 или a0≥90
         попал:=нет
         вывод («страннный угол»)
       иначе
         расчет попаданий
         выбор
           при попал=да
             вывод («молодец, попал»)
           при l<L
             вывод («недолет», r, «метров»)
           при l>L
             вывод («перелет», r, «метров»)
         все
       все
   кц
кон
алг «расчет попаданий»
арг: вещ D, L, v0, a0
рез: лит попал
   вещ r
нач вещ g, l
   g:=9,81
   l:=(v0)²·sin(2·a0·π/180)/g
   r:=L−l
   если r<D/2
     то попал:=да
     иначе попал:=нет
   все
кон
```

XX Всесоюзная олимпиада по математике

Кандидат физико-математических наук
В. В. ВАВИЛОВ,
кандидат физико-математических наук
С. В. РЕЗНИЧЕНКО,
кандидат физико-математических наук
И. Н. СЕРГЕЕВ

С 24 по 29 апреля на родине В. И. Ленина в г. Ульяновске проходил заключительный тур XX Всесоюзной математической олимпиады школьников, посвященной 275-летию со дня рождения М. В. Ломоносова. В 1982 году Ульяновск был организатором заключительного тура Всероссийской физико-математической и химической олимпиады школьников, и вот теперь город удостоен чести провести юбилейную Всесоюзную математическую олимпиаду. В заключительном туре XX олимпиады приняли участие команды 14 союзных республик, по одной команде от четырех зон РСФСР, команды Москвы и Ленинграда, школ Министерства путей сообщения, семи специализированных республиканских физико-математических школ, а также команда г. Ульяновска — организатора олимпиады. Всего в олимпиаде участвовало 163 школьника: 46 восьмиклассников, 58 девятиклассников и 59 десятиклассников, в том числе 27 призеров XIX Всесоюзной олимпиады.

С момента прибытия в Ульяновск члены и руководители команд были окружены заботой и вниманием хозяев олимпиады. На регистрации участников олимпиады тепло приветствовали члены оргкомитета, на память об олимпиаде каждому члену команды и руководителю были вручены юбилейная медаль, традиционный значок, программа олимпиады, сувениры. От Академии педагогических наук СССР каждому участнику вручалась библиотечка литературы по математике. На всех мероприятиях олимпиады команды сопровождали комиссары — ученики 9-х классов школ города, работники областного отдела народного образования, учителя школ и преподаватели вузов.

Торжественное открытие XX Всесоюзной математической олимпиады состоялось 24 апреля на территории Ленинского мемориала. Сначала у памятника В. И. Ленину была проведена торжественная линейка, участники олимпиады возложили цветы. С приветствием и пожеланиями успехов к юным математикам обратился зав. отделом науки и учебных заведений при Ульяновском обкоме КПСС А. Л. Кругликов. Затем под звуки оркестра колонна участников олимпиады направилась в Ленинский мемориал, где в Большом зале состоялась торжественная церемония открытия олимпиады. Перед участниками выступили секретарь Ульновского областного комитета партии В. Н. Сверкалов, зам. председателя Центрального оргкомитета Всесоюзной олимпиады М. Н. Тамбиева, зам. председателя жюри олимпиады, доктор физико-математических наук А. В. Штраус. С пожеланиями успехов к своим друзьям-соперникам обратились победители XVIII и XIX Всесоюзных олимпиад. Завершилось торжественное открытие концертом художественной самодеятельности, который в честь участников олимпиады, руководителей команд и членов жюри дали лучшие творческие коллективы школ города.

Следующие два дня — 25 и 26 апреля — были самыми трудными для участников олимпиады, ведь в каждый из этих дней они должны были решить по 4 конкурсные задачи. Приятно отметить, что участники олимпиады в целом успешно справились с предложенными задачами.

Нелегкими оказались дни олимпиады для членов жюри, работавшего под руководством академика АН УССР Б. В. Гнеденко. Ведь в сжатые сроки нужно было организовать проверку большого числа работ, провести анализ предложенных решений (многие из которых были весьма оригинальны и часто неизвестны жюри) и разбор задач с обсуждением типичных ошибок для участников олимпиады и руководителей команд. В каждом классе жюри провело конкурс на лучшую задачу. По мнению участников олимпиады лучшими, т. е. наиболее интересными и содержательными, были в 8-м классе — задача № 8, в 9-м и 10-м классах — задача № 7. Приятно отметить, что при определении лучшей задачи участники олимпиады исходили из соображений математической красоты и изящества, а вовсе не из коньюнктурных соображений типа «лучшая задача — это та, которая принесла мне больше зачетных очков».

На своем заключительном заседании жюри утвердило итоги олимпиады по классам. Торжественное закрытие олимпиады и награждение победителей состоялось 29 апреля в городском Дворце пионеров и школьников.

Особенно следует отметить выступление *Антона Лунина* (с. ш. № 57, г. Москва) — победителя трех последних всесоюзных олимпиад! Успешно выступили на олимпиаде самые юные участники: среди восьмиклассников — ученики 6-го класса *Роман Безрукавников* (с. ш. № 24, г. Калуга) и *Борис Дубров* (с. ш. № 107, г. Минск); среди девятиклассников — занявший III место *Савва Павлов* (с. ш. № 4, г. Черновцы, УССР).

Стал уже традиционным математический бой между командой жюри, составленной на этот раз из бывших участников Международных математических олимпиад, и школьниками, участниками олимпиады. Соревнования, как раньше, проводились по задачам раздела «Квант» для младших школьников». С минимальным преимуществом на этот раз победили школьники.

Интересно прошла встреча с редакцией журнала «Квант» в актовом зале школы, в которой учился Володя Ульянов. Членам редколлегии были заданы десятки вопросов о журнале и математике, было высказано много интересных предложений по содержанию и оформлению журнала.

Обширной была культурная программа олимпиады: обзорная экскурсия по ленинским местам Ульяновска, посещение музея Центра гражданской авиации стран — членов СЭВ, посещение Краеведческого и Художественного музеев, участие в митинге-концерте «Сердце матери», посвященном М. А. Ульяновой, встречи со школьниками города. Четко, оперативно работал пресс-центр олимпиады, ежедневно выпускались стенгазеты, были подготовлены 4 радиопередачи. Итоги и ход олимпиады освещали областное телевидение и радиовещание.

Надолго запомнятся участникам олимпиады напряженные, заполненные встречами, увлекательной борьбой, творческими дискуссиями дни, которые они провели в Ульяновске. Новых успехов вам, ребята!

Задачи

Первый день

8 класс

1. Корни уравнения $x^2+ax+1=b$ являются натуральными числами. Докажите, что a^2+b^2 — составное число.

В. Федотов

2. Два одинаковых квадрата в пересечении образуют восьмиугольник. Стороны одного квадрата синие, а другого — красные. Докажите, что сумма длин синих сторон восьмиугольника равна сумме длин его красных сторон.

В. Произволов

3. Точка M лежит на стороне AC остроугольного треугольника ABC. Вокруг треугольников ABM и CBM описываются окружности. При каком положении точки M площадь общей части ограничиваемых ими кругов будет наименьшей?

С. Долматов

4. В одном государстве король хочет построить n городов и $n-1$ дорог между ними так, чтобы из каждого города можно было проехать в любой другой. (Каждая дорога соединяет два города, дороги не пересекаются и не проходят через другие города.) Король хочет, чтобы кратчайшие расстояния по сети дорог между парами городов равнялись соответственно 1 км, 2 км, 3 км, ..., $\frac{n(n-1)}{2}$ км. Возможно ли это, если: а) $n=6$; б) $n=1986$?

А. Анджанс

9 класс

1. Докажите, что на координатной плоскости нельзя нарисовать выпуклый четырехугольник, у которого одна диагональ вдвое длиннее другой, угол между диагоналями равен 45°, а координаты каждой вершины являются целыми числами.

Л. Купцов

2. Докажите, что прямоугольную таблицу размером $n\times m$ можно заполнить квадратами различных натуральных чисел так, чтобы суммы чисел в каждой строке и каждом столбце были также квадратами натуральных чисел.

Н. Агаханов, О. Ляшко

3. Две окружности, расстояние между центрами которых равно l, пересекаются в точках M и N. Через точки M, N и точку A первой окружности (отличную от M и N) проведены прямые, пересекающие вторую окружность в точках B и C соответственно. а) Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен l. б) Какое множество

точек образуют центры окружностей, описанных около треугольника ABC, если точка A пробегает первую окружность?

Б. Чиник

4. На плоскости дан правильный шестиугольник. Каждая его сторона разделена на 1000 равных частей, и точки деления соединены отрезками, параллельными сторонам шестиугольника. Выберем какие-либо три узла получившейся сетки, являющиеся вершинами правильного треугольника, и окрасим их. Будем продолжать окрашивать таким способом тройки узлов до тех пор, пока это возможно. Докажите, что если неокрашенным останется один узел, то он не может быть вершиной исходного шестиугольника.

С. Дужин

10 класс

1. Найдите все натуральные числа, каждое из которых равно квадрату числа всех своих делителей.

Б. Ивлев

2. Докажите, что для любых положительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\frac{3}{a_1+a_2+a_3}+\ldots+\frac{n}{a_1+a_2+\ldots+a_n}<4\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_n}\right).$$

Л. Курляндчик

3. Через вершину A треугольника ABC, в котором $AB\neq AC$, проводятся различные прямые. Докажите, что любая из них может содержать не более одной точки M, отличной от вершин треугольника и удовлетворяющей условию $\angle ABM=\angle ACM$. Определите, какие из рассматриваемых прямых не содержат ни одной такой точки.

О. Мусин

4. Куб с ребром длиной n, $n\geqslant 3$, состоит из n^3 единичных кубиков. Докажите, что в каждом из этих кубиков можно записать по целому числу так, чтобы все n^3 чисел были различными, а суммы чисел в любом ряду, параллельном какому-либо ребру куба, равнялись нулю.

Ю. Нестеренко, И. Сергеев

Второй день

8 класс

5. Десятичная запись натурального числа a состоит из n одинаковых цифр x, числа b — из n одинаковых цифр y, а числа c — из $2n$ одинаковых цифр z. Для любого $n\geqslant 2$ найдите все такие цифры x, y, z, для которых $a^2+b=c$.

В. Вавилов

6. Внутри выпуклого двенадцатиугольника даны две точки, расположенные на расстоянии 10 см друг от друга. Для каждой из этих точек нашли сумму расстояний от нее до вершин двенадцатиугольника. Докажите, что полученные суммы различаются менее чем на 1 м.

Н. Нецветаев

7. Молоко разлито по 30 стаканам. Мальчик пытается добиться, чтобы во всех стаканах молока стало поровну. Для этого он берет любые два стакана и отливает молоко из одного в другой до тех пор, пока количество молока в них не уравняется. Можно ли разлить молоко по стаканам так, чтобы мальчик не смог добиться своей цели, сколь бы долго он ни занимался переливанием?

Ю. Нестеренко, И. Сергеев

8. Некоторый прямоугольник разделен прямыми, параллельными сторонам, на квадраты со стороной 1, которые раскрашены в шахматном порядке в белый и черный цвет. Диагональ прямоугольника разбилась на белые и черные отрезки. Найдите отношение суммы длин белых отрезков к сумме длин черных отрезков, если размер прямоугольника: а) 100×99; б) 101×99.

А. Берзиньш

9 класс

5. На плоскости дан правильный n-угольник $A_1A_2\ldots A_n$. а) Докажите, что если n — четное число, то для произвольной точки M плоскости в выражении $\pm\vec{MA_1}\pm\vec{MA_2}\pm\ldots\pm\vec{MA_n}$ можно так выбрать знаки «плюс» и «минус», что полученная сумма будет равна $\vec{0}$. б) Докажите, что если n — нечетное число, то указанное выражение с помощью выбора знаков «плюс» и «минус» можно обратить в $\vec{0}$ только для конечного числа точек M плоскости.

С. Рукшин

6. См. задачу № 8, пункт б) для 8 класса.

7. Клетки квадратной таблицы размером $n\times n$ заполняются числами ± 1 по следующим правилам:

1) во все граничные клетки таблицы помещаются числа -1;

2) число, помещаемое в очередную незаполненную клетку таблицы, равно произведению ближайших к этой клетке чисел, расположенных по разные стороны от нее и лежащих или в одной строке с ней, или в одном столбце с ней. Так делается до тех пор, пока все пустые клетки таблицы не будут заполнены.

а) Какое наибольшее количество $+1$ может получиться в таблице?

б) Какое наименьшее количество $+1$ может получиться в таблице?

Н. Агаханов

8. Докажите, что для каждого натурального n справедливо неравенство $|\sin 1|+|\sin 2|+\ldots+|\sin(3n-1)|+|\sin 3n|>\frac{8}{5}n$.

В. Берник

10 класс

5. Докажите, что сумма всех чисел вида $\frac{1}{mn}$, где m, n — натуральные числа и $1\leqslant m<n\leqslant 1986$, не является целым числом.

Д. Митькин

6. Около окружности радиусом 1 описаны квадрат и треугольник. Докажите, что площадь общей части квадрата и треугольника больше 3,4. Можно ли утверждать, что эта площадь больше 3,5?

К. Букин

7. Многочлен $p(x)$ назовем *допустимым*, если все его коэффициенты равны 0, 1, 2 или 3. Для данного натурального n найдите число всех допустимых многочленов, удовлетворяющих условию $p(2)=n$.

Д. Флаас

8. Рассмотрим все тетраэдры $AXBY$, описанные около данной сферы. Докажите, что при фиксированных точках A и B сумма углов пространственного четырехугольника $AXBY$, то есть величина

$$\angle AXB+\angle XBY+\angle BYA+\angle YAX,$$

не зависит от выбора точек X и Y.

И. Шарыгин

XX Всесоюзная олимпиада по физике

А. Р. ЗИЛЬБЕРМАН, В. В. КАШКАРОВ

В этом году состоялась XX Всесоюзная олимпиада школьников по физике, посвященная 275-летию со дня рождения М. В. Ломоносова. Заключительный этап олимпиады проходил с 16 по 22 апреля в столице Казахстана — городе Алма-Ате.

17 апреля участники олимпиады возложили цветы к памятнику В. И. Ленину и Мемориалу Славы, после чего состоялось торжественное открытие олимпиады. Собравшихся приветствовали члены оргкомитета и победители прошлогодней олимпиады. Был показан документальный фильм о Советском Казахстане. В заключение был дан большой концерт.

Утром следующего дня прошел теоретический тур олимпиады. Восьмиклассникам предлагалось решить 4 задачи (на решение отводилось 4 часа), а девятиклассникам и десятиклассникам — по 5 задач (в течение 5 часов). Одна из задач этого тура — задача 2 для девяти- и десятиклассников (см. ниже) — была не совсем обычной: участникам показали опыт и попросили объяснить наблюдаемое явление, а также провести необходимые расчеты. (Для тех, кто захочет повторить этот красивый опыт, подскажем — нужно как следует подсолить воду и подкрасить ее чернилами. После двух-трех циклов опыт лучше прервать и сказать, что дальше будет то же самое. Впрочем, если подобрать несмешивающиеся жидкости, то опыт можно и продолжить.)

Вот задачи, которые были предложены участникам олимпиады (как обычно, часть этих задач опубликована в Задачнике «Кванта» в двух предыдущих номерах журнала):

8 класс

1. Блок радиусом R плотно насажен на цилиндр радиусом r. Получившийся двойной блок укреплен на оси O (рис. 1). Нитка, привязанная к стене, переброшена через блок, а второй ее конец намотан на цилиндр. Диаметр нижнего свободного блока, к оси которого подвешен груз массой M, равен $R+r$, так что свешивающиеся части нити вертикальны. Вся система находится в равновесии. Чему равна сила натяжения нити в точке A? Трение в оси O пренебрежимо мало.

2. Собрана схема, содержащая 50 разных амперметров и 50 одинаковых вольтметров (рис. 2). Показания первого вольтметра $U_1=9{,}6$ В, первого амперметра $I_1=9{,}5$ мА, второго амперметра $I_2=9{,}2$ мА. Определите по этим данным сумму показаний всех вольтметров. Не задавайте никаких вопросов — больше ничего не задано.

3. Мощный транзистор, выделяющий тепло, закреплен на теплоотводящей пластине, обдуваемой ветром, температура которого равна 30 °С. На рисунке 3 показано распределение температур на пластине. Определите рассеиваемую мощность. Известно, что равномерно нагретая до +70 °С пластина рассеивает мощность $P=10$ Вт при температуре воздуха 20 °С. Теплоотдача пропорциональна разности температур пластины и воздуха.

4. Катер, привязанный у берега большого озера (береговая линия — прямая), неожиданно отвязался, и ветер погнал его с постоянной скоростью $v_0=2{,}5$ км/ч под углом $\alpha=15°$ к берегу. Ваша скорость на берегу $v_1=4$ км/ч, в воде $v_2=2$ км/ч. Сможете ли вы догнать катер? При какой скорости катера это вообще возможно?

9 класс

1. Два спортсмена держат натянутый шнур $AБ$ (рис. 4). По сигналу спортсмен A начинает двигаться на восток со скоростью $v_0=1$ м/с, а спортсмен $Б$ — на юг с постоянным ускорением. Найдите это ускорение, если известно, что узел B, завязанный на шнуре, при движении прошел через точку $Г$. Масштаб изображен на рисунке 4.

2. В большой сосуд с жидкостью плотностью ρ_1 опущен маленький цилиндрический сосуд площадью S, в дно которого вставлена трубочка длиной l (рис. 5). Стенки сосудов скреплены жестко между собой. В маленький сосуд нали-

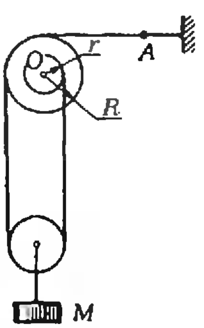


Рис. 1.

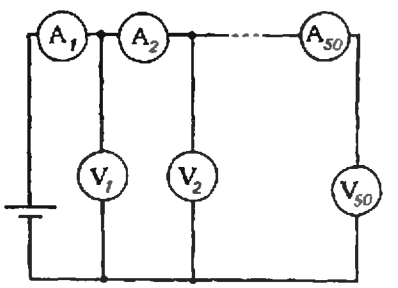


Рис. 2.

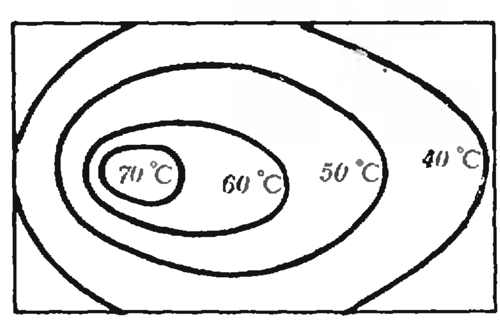


Рис. 3.

вают подкрашенную жидкость плотности ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$) до высоты H, так, что уровни жидкостей в большом и малом сосудах совпадают. В некоторый момент времени отверстие в трубочке открывают, и тяжелая жидкость начинает вытекать в большой сосуд. Затем через некоторое время легкая жидкость втекает в маленький сосуд, после чего процесс повторяется. Какая масса тяжелой жидкости вытечет из малого сосуда в первый раз? Найдите, какая масса легкой жидкости будет втекать в маленький сосуд и какая масса тяжелой жидкости будет из него вытекать за каждый цикл в дальнейшем. Считать, что жидкости не смешиваются, поверхностным натяжением пренебречь.

Примечание. В аудитории был показан соответствующий опыт.

3. Под поршнем в высоком цилиндрическом сосуде находится некоторое количество гелия. Газ нагревают, и поршень скользит вверх. При какой мощности нагревателя скорость поршня будет постоянна и равна $v=1$ м/с? Масса поршня $m=2$ кг, сила трения его о стенки сосуда $F_{тр}=10$ Н. Атмосферное давление отсутствует.

4. Ключ K периодически замыкают на время $\tau_1=1\cdot10^{-3}$ с и размыкают на $\tau_2=20\cdot10^{-3}$ с (рис. 6). При какой частоте переключений стрелка амперметра практически не дрожит? Какой ток показывает амперметр магнитоэлектрической системы? Внутренне сопротивление батареи и сопротивление амперметра пренебрежимо малы, $R=100$ Ом, $C=10$ мкФ, $U_0=10$ В.

5. Мощный транзистор, выделяющий тепло, закреплен на теплоотводящей пластине, обдуваемой воздухом. На рисунке 3 показано распределение температур на пластине. Определите температуру воздуха, если известно, что рассеиваемая мощность $P=7$ Вт. Известно также, что равномерно нагретая до $+70$ °С пластина рассеивает мощность $P_0=10$ Вт при температуре воздуха $+35$ °С. Теплоотдача пропорциональна разности температур пластины и воздуха.

10 класс

1. Крупнейший в мире советский телескоп имеет в качестве объектива зеркало диаметром $D=6$ м. Какое время потребуется, чтобы сравнивая полученные на этом телескопе фотоснимки, можно было заметить взаимное вращение нашей Галактики и туманности Андромеды вокруг общего центра масс? Расстояние до туманности Андромеды $R=1{,}42\cdot10^{11}\,R_0$, где R_0 — радиус орбиты Земли. Массы Галактики и туманности Андромеды равны соответственно $M_Г=2{,}5\cdot10^{11}\,M_0$ и $M_А=3{,}6\cdot10^{11}\,M_0$, где M_0 — масса Солнца. Фотографирование ведется в видимом свете на длине волны $\lambda=5\cdot10^{-7}$ м.

2. См. задачу 2 для 9 класса.

3. Подвижный поршень делит цилиндр на две одинаковые части объемом $V_0=10^{-3}$ м^3 (рис. 7). В одной части находится сухой воздух, а в другой — водяной пар и вода. Масса воды $m=4$ г. При медленном нагревании цилиндра поршень приходит в движение. После смещения поршня на 1/4 длины цилиндра движение прекратилось. Какая масса паров воды находилась в сосуде до нагревания? Определите массу воздуха в цилиндре и его начальную температуру. При какой температуре цилиндра поршень перестал двигаться? Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К). Зависимость

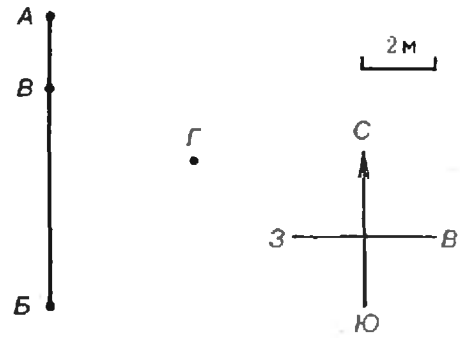


Рис. 4.

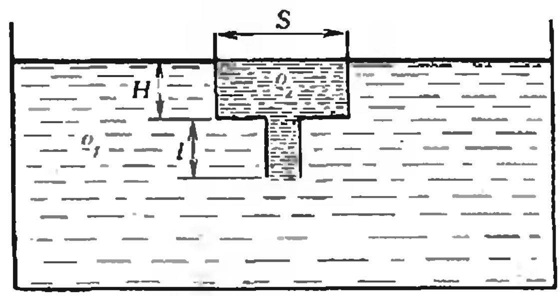


Рис. 5.

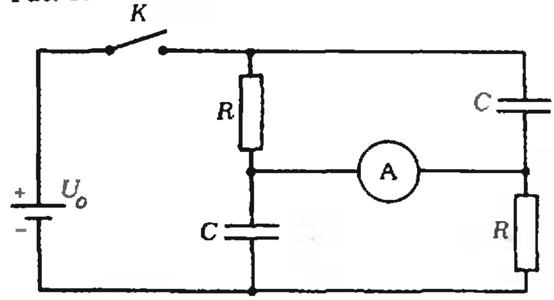


Рис. 6.

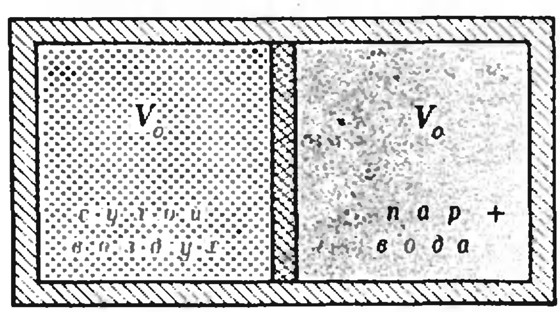


Рис. 7.

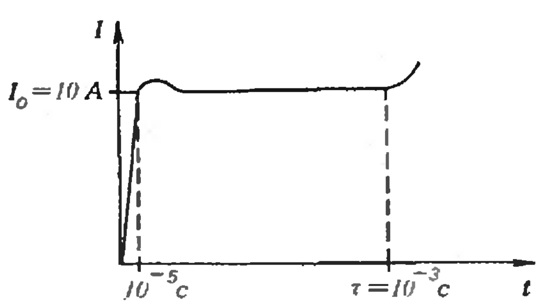


Рис. 8.

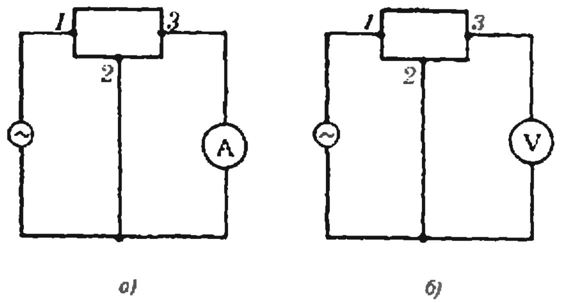


Рис. 9.

давления насыщенных паров от температуры $p_н(t)$ приведена в таблице:

t, °C	100	120	133	152	180
$p_н \times 10^5$ Па	1	2	3	5	10

4. В катушку может свободно втягиваться ферромагнитный сердечник массой $M = 0{,}01$ кг. Катушку подключили к источнику с напряжением $U = 100$ В, и через катушку протек ток (показанный на графике на рисунке 8). Оцените начальную индуктивность катушки. Пренебрегая потерями, найдите скорость сердечника в момент времени $\tau = 10^{-3}$ с.

5. «Черный ящик» содержит катушку, резистор и конденсатор и имеет три вывода. При его исследовании были получены следующие результаты. В схеме, изображенной на рисунке 9, *а*, амперметр показал $I_1 = 0{,}1$ А при частоте генератора $\nu_1 = 1000$ Гц, а ток через него отставал от входного напряжения на $\pi/6$. Частоту генератора уменьшили в 100 раз, при этом ток возрос менее чем в 2 раза. Частоту генератора вернули к прежнему значению, а вместо амперметра подключили вольтметр, как показано на рисунке 9, *б*. Он показал $U_1 = 20$ В, а сдвиг фаз между напряжением на вольтметре и входным напряжением опять составил по величине $\pi/6$. Найдите по этим данным параметры элементов «черного ящика». Во сколько раз нужно изменить частоту генератора, чтобы в схеме на рисунке 9, *б* сдвиг фаз составил $\pi/2$? Измерительные приборы можно считать идеальными. Напряжение на выходе генератора неизменно, его внутреннее сопротивление пренебрежимо мало.

После того как участники закончили работу, жюри олимпиады приступило к проверке. В числе проверяющих были представители Москвы, Ленинграда, Новосибирска, Еревана, Куйбышева, Алма-Аты. Как обычно, проверка была организована так, что каждая работа внимательно просматривалась не менее двух раз. Вначале работы «проходили по конвейеру», на котором каждая задача проверялась двумя членами жюри (они проверяли данную задачу во всех работах). Затем обсуждались и утверждались председателем жюри критерии оценок каждой из задач, и после этого проводилась вторая проверка — в этот раз члены жюри просматривали всю работу участника. Возможные расхождения в оценках при первой и второй проверках обсуждались тут же. По установившейся традиции авторы работ «раскрывались» только после полного окончания проверки.

В то время, когда участники решали задачи, были проведены разбор задач и их обсуждение с руководителями команд. Еще раз разбор задач теоретического тура для участников с изложением критериев оценки проводился после экспериментального тура. Участники, недовольные своими результатами, могли прийти на апелляцию и обсудить свою работу с членами жюри.

19 апреля участники олимпиады и члены жюри приняли участие во Всесоюзном коммунистическом субботнике — работали в Ботаническом саду. После работы осмотрели большую коллекцию тропических растений — интереснейших экспонатов этого сада.

На следующий день проходил экспериментальный тур. Каждому участнику было предложено 2 задачи (на выполнение которых отводилось 4 часа).

В 8 классе первая задача относилась к цепям постоянного тока. Были даны две батарейки, в одну из которых (это сообщалось в условии) был последовательно впаян резистор с неизвестным сопротивлением. При помощи авометра нужно было определить напряжения батареек и величину неизвестного сопротивления. Тут достаточно было провести несколько измерений в различных схемах, например, соединяя батарейки последовательно и навстречу друг другу. Определить «препарированную» батарейку можно было таким способом: подключить вольтметр к одной из батареек, а затем вторую батарейку присоединить к первой параллельно, в противоположной полярности (подумайте — почему непременно в противоположной). Если показания вольтметра сильно не изменятся, значит, вначале мы подключились к обычной батарейке.

Во второй задаче для восьмиклассников нужно было определить массу груза, пользуясь своеобразной пружиной — часть ее витков была охвачена тонкой ниткой, которая не мешала при небольших растяжениях, а при больших изменяла жесткость пружины, «отключая» часть витков. Еще были даны несколько грузов известной массы (50 г), штатив, сосуд с водой и линейка. При помощи грузов известной массы можно было проградуировать «нелинейную» пружину, но дело усложнялось тем, что неизвестный груз был слишком тяжелым для обычного взвешивания, так что приходилось прибегать к так называемому гидростатическому взвешиванию.

В первой задаче для 9 класса нужно было определить плотности двух веществ — оргстекла и пластилина при помощи двух сосудов с водой, миллиметровой бумаги и линейки. Если бы один из материалов был легче воды, все было бы очень просто, однако и оргстекло, и пластилин тонут в воде. Нужно было догадаться сделать из пластилина лодочку (или что-то вроде нее), чтобы она могла плавать в воде.

Вторая задача для девятиклассников была посложнее. Участникам давалась кнопка — переключатель с тремя выводами. При нажатии на кнопку в ней происходит размыкание одной цепи и почти одновременное замыкание другой. Требовалось измерить «мертвое» время — время, в течение которого одна цепь уже разомкнута, а вторая еще не замкнута. Для этого можно было использовать батарейку, набор резисторов с известными сопротивлениями (0,1 кОм, 1 кОм, 10 кОм и 100 кОм), конденсатор большой емкости (500 мкф), полупроводниковый диод (типа Д9Е), авометр («Школьный») и провода. Идея измерения состояла в том, чтобы конденсатор заряжался от батарейки через резистор только тогда, когда одна из цепей переключателя уже разомкнута, а вторая еще не замкнута, то есть в продолжении «мертвого» времени, — именно для этого и нужен диод (рис. 10). Для калибровки прибора конденсатор следовало зарядить до некоторого известного напряжения (для этого можно было сделать делитель напряжения батарейки с помощью резисторов) и измерить его заряд гальванометром. Таким способом можно довольно точно измерять небольшие отрезки времени.

В первой задаче для 10 класса нужно было с помощью простых приборов (пробирка, стеклянная трубочка с тонким отверстием известного диаметра, мерная мензурка, миллиметровая бумага, линейка, пластилин, лед с водой в стакане, кусок жесткой проволоки и марлевый тампон для протирания оборудования от влаги) измерить температуру и давление в комнате. Для этого было достаточно из пробирки, стеклянной трубочки и пластилина сделать «газовый термометр», отделив объем внутри системы от наружного при помощи капли воды, пущенной в трубочку. Заметим, что получившийся прибор — это не только термометр, но и барометр. Положив его набок, а затем поставив вертикально и рассчитав изменение объема, можно найти давление в комнате. При этом очень важно, чтобы пробирка изнутри была сухой, а опыт проводился довольно быстро — пока незаметно испарение капли. Температуру можно найти, отградуировав «термометр» при 0 °С в стакане с водой и льдом, а потом рассчитав изменение объема при нагревании до комнатной температуры.

Интересно отметить, что точность полученных таким способом результатов оказалась довольно хорошей — результаты практически совпадали с показаниями «настоящих» термометра и барометра.

Вторая задача для десятиклассников была вполне традиционной — определение электрической схемы «черного ящика» с тремя выводами и измерение величин сопротивлений резисторов, помещенных внутри. Все оборудование состояло из этого «ящика» и авометра. Трудность заключалась в том, что кроме обычных в таких случаях диодов и резисторов внутри был еще и конденсатор большой емкости (500 мкФ), из-за чего показания омметра в процессе зарядки конденсатора изменялись. Разряжался этот конденсатор тоже не сразу, так что методику измерений нужно было тщательно продумать.

Участники олимпиады не только решали различные задачи, но и активно отдыхали. Они побывали в научно-исследовательских лабораториях, где встретились с учеными Казахского государственного университета, для них была проведена встреча с преподавателями и сотрудниками Московского государственного университета. Гостеприимные хозяева организовали для участников олимпиады вечера отдыха, походы в театр, цирк, поездку в горы — на знаменитый спортивный комплекс Медео. В республиканской физико-математической школе (РФМШ), где проходила олимпиада, был устроен вечер занимательной физики. Во время физбоя были продемонстрированы интересные опыты, а члены жюри этого вечера, одетые в средневековые мантии, благосклонно выслушали объяснения, данные соревнующимися командами, и с некоторыми из них согласились. Остальные объяснения были даны устроителями вечера, и теперь с некоторыми из них согласились участники физбоя. Вечер прошел весело и интересно.

В спортивном зале школы можно было хорошо отдохнуть физически. Там была даже проведена встреча по баскетболу между командами жюри и участников. Несмотря на то, что к моменту встречи итоги олимпиады уже были подведены, победила команда жюри, правда с небольшим перевесом.

На олимпиаде была прекрасно организована служба информации. По свежим следам событий буквально сразу появлялись фотогазеты. Вдоль коридоров школы были развешаны стенные газеты, мимо которых нельзя было пройти равнодушно. Рядом с участниками всегда были люди, готовые ответить на любой вопрос, например — куда пойти учиться после окончания школы.

Во время торжественного закрытия олимпиады состоялось награждение победителей дипломами и различными призами. В целом олимпиада прошла успешно, на ней были победители, но не было побежденных.

Мы желаем всем участникам XX Всесоюзной физической олимпиады больших творческих успехов.

Призеры XX Всесоюзной олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Анисов С. (Харьков, с. ш. № 142),
Вологодский В. (Омск, с. ш. № 91),
Иванов С. (Ленинград, с. ш. № 533),
Туляков Д. (Жданов, с. ш. № 7);

по 9 классам —
Борисов Л. (Минск, с. ш. № 19),
Борисов А. (Минск, с. ш. № 19),
Стыркас К. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82);

по 10 классам —
Глущенко Г. (Запорожье, с. ш. № 91),
Крикис М. (Рига, с. ш. № 1),
Лунин А. (Москва, с. ш. № 57),
Порошин В. (Ленинград, с. ш. № 239),
Радько Т. (Корсунь-Шевченковский, с. ш. № 4),
Роганов В. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Баран А. (Минск, с. ш. № 6),
Безрукавников Р. (Калуга, с. ш. № 24),
Берлов С. (Ленинград, с. ш. № 536),
Гороховский А. (Киев, с. ш. № 79),
Процак В. (Киев, с. ш. № 90),
Сарканс У. (Алуксне, с. ш. № 1);

по 9 классам —
Апситис К. (Рига, с. ш. № 1),
Баран А. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Биндер И. (Ленинград, с. ш. № 239),
Дынников И. (Жуковский, с. ш. № 1),
Зайцев Д. (Киев, с. ш. № 145),
Зудилин В. (Бельцы, с. ш. № 16),
Озалс Д. (Рига, с. ш. № 1),
Пухов И. (Москва, с. ш. № 57),
Смирнов С. (Ленинград, с. ш. № 239),
Тульбович А. (Харьков, с. ш. № 27),
Черных А. (Краснодар, с. ш. № 4);

по 10 классам —
Бендорфа К. (Рига, с. ш. № 1),
Гиль А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Кярас С. (Молетай, с. ш. № 2),
Петрунин А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Судаков В. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Дубров Б. (Минск, с. ш. № 107),
Жарков И. (Свердловск, с. ш. № 130),
Макогон А. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Петровский Р. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Румынин Д. (Красноярск, с. ш. № 10);

по 9 классам —
Енукидзе Н. (Тбилиси, с. ш. № 42),
Каринский А. (Невинномысск, с. ш. № 6),
Меркулов Б. (Куйбышев, с. ш. № 11),
Павлов С. (Черновцы, с. ш. № 4),
Уусталу Т. (Таллин, с. ш. № 44),
Чувелев М. (Горький, с. ш. № 4),
Шанько Ю. (Красноярск, с. ш. № 10);

по 10 классам —
Асташкевич А. (Томск, с. ш. № 24),
Вайсбурд М. (Томск, с. ш. № 6),
Газарян Т. (Ереван, ФМШ при Ер. ГУ),
Калинин Г. (Ленинград, с. ш. № 239),
Капович В. (Хабаровск, с. ш. № 2),
Раскина И. (Витебск, с. ш. № 31),
Селяво Л. (Рига, с. ш. № 1).

Как проверить ЭВМ?

Действительно, как, если ЭВМ выдала в качестве ответа лист бумаги, заполненный строками цифр? Оказывается, проверить можно, если учитывать следующее обстоятельство: если уж ЭВМ врет, то, как говорится, «капитально» — она не может ошибиться лишь в одном знаке из 20, зато способна «недопечатать» последнюю сотню цифр или сделать еще что-нибудь подобное. (Виноват в таких вещах, конечно, программист, который пропустил какой-то «подводный камень», о который ЭВМ и спотыкается). Поэтому результат, выданный ЭВМ, обычно проверяют «на правдоподобие» — по порядку числа, согласованности его с другими числами и т. п. И если результат правдоподобен, то он обычно верен. А такую проверку нередко можно сделать и на микрокалькуляторе, что и проделал наш читатель десятиклассник Артур Рощин из Тамбова с числом 1985^{1986}, напечатанным в «Кванте» № 5 за 1986 год на с. 58. И обнаружил, что распечатка неверна: первые цифры должны быть 22 509 698, а не 6 060 536... К тому моменту у нас уже была исправленная распечатка (опоздавшая к подписанию номера в печать). Оказывается, в первый раз ЭВМ пропустила первые 10 цифр: 2 250 997 656, лишь за ними идет 6 060 536... (У Рощина последние цифры неточны из-за погрешностей округления, но первые 5 верны — отличный результат). Читателям приносим извинения, Рощина награждаем дипломом.

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Мазуренко А. (Минск, с. ш. № 50),
Медведев М. (Горький, с. ш. № 40),
Пушкин А. (Москва, с. ш. № 57),
Сагайдак Р. (Черкасская обл., Матусовская с. ш. № 1);

по 9 классам —
Белиц А. (Гомель, с. ш. № 24),
Бобылев С. (Березники, с. ш. № 9),
Будько Д. (Белгород, с. ш. № 3),
Карклин П. (Москва, с. ш. № 47);

по 10 классам —
Волков О. (Горький, с. ш. № 23),
Гущин А. (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Княшко К. (Коммунарск, с. ш. № 6),
Леготин В. (Курган, с. ш. № 48),
Малкин А. (Ленинград, с. ш. № 30),
Михайловский Н. (Красноярск, с. ш. № 20),
Сибиряков А. (Томск, с. ш. № 3),
Степанов С. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Тодощенко И. (Пермь, с. ш. № 16);

по 9 классам —
Анисимов А. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Бибиков А. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Винкялис Г. (Вильнюс, с. ш. № 45),
Глущенков Д. (Ленинград, с. ш. № 239),
Гольдин А. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Карасев Д. (п. Тучково Московской обл., с. ш. № 1),
Третьяков Г. (Новгород, с. ш. № 21),
Штепа В. (Чугуев, с. ш. № 1),
Янович А. (Челябинск, с. ш. № 32);

по 10 классам —
Белопольский А. (Киев, с. ш. № 145),
Боровский Ю. (Киев, ФМШ № 2 при КГУ),
Булатов О. (Ставрополь, с. ш. № 1),
Гегжна Г. (Вильнюс, с. ш. № 7),
Карповец Э. (Рига, с. ш. № 9),
Лебедев Д. (Гатчина, с. ш. № 3),
Матыцин А. (Москва, с. ш. № 91),
Мягчилов С. (Одесса, с. ш. № 16),
Николаишвили Г. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Свердлов М. (Минск, с. ш. № 50),
Тотров М. (Ленинград, с. ш. № 30),
Эрд Ю. (Таллин, с. ш. № 1).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Белоусов С. (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),
Билибин А. (Боровичи, с. ш. № 1),
Головин Д. (Тамбов, с. ш. № 29),
Езерский А. (Минск, с. ш. № 50),
Журков В. (Магадан, с. ш. № 1),
Кяэрамеэс М. (Пярну, с. ш. № 1),
Сазонов С. (Климовск, с. ш. № 5);

по 9 классам —
Васильев Ю. (Ангарск, с. ш. № 10),
Ефремов Д. (Баку, с. ш. № 6),
Ивашкевич Е. (Прокопьевск, с. ш. № 72),
Комаров О. (Алма-Ата, РФМШ),
Курзенков А. (Ковров, с. ш. № 1),
Наяков Ю. (Саратов, с. ш. № 13),
Пигарев А. (Улан-Уде, с. ш. № 9),
Розенберг А. (Уфа, с. ш. № 91),
Сизоненко Ю. (Львов, с. ш. № 4),
Степурин В. (Винница, с. ш. № 17),
Терпугов В. (Томск, с. ш. № 150),
Щербаков А. (Обнинск, с. ш. № 10);

по 10 классам —
Бакарян Т. (Ереван, ФМШ № 1 при Ер. ГУ),
Бедов К. (Челябинск, с. ш. № 138),
Жариков А. (Киев, с. ш. № 157),
Зингерман Б. (Самарканд, с. ш. № 51),
Иртегов Д. (Иркутск, с. ш. № 19),
Калацкий В. (Солигорск, с. ш. № 2),
Кларк П. (Тула, с. ш. № 36),
Курачев А. (Новосибирск, с. ш. № 9),
Никитин И. (Москва, ФМШ № 18 при МГУ),
Сенаторов П. (Москва, с. ш. № 52),
Чернышев А. (Кимры, с. ш. № 1).

Геометрический вывод формулы косинуса суммы

Чтобы найти выражение для косинуса суммы углов α и β, где $\alpha+\beta<180°$, поступим следующим образом. Рассмотрим треугольник ABC, где $\hat{A}=\alpha$, $\hat{B}=\beta$, $\hat{C}=\gamma=180°-(\alpha+\beta)$. По теореме косинусов

$$c^2+a^2+b^2-2ab\cos\gamma. \qquad (1)$$

По теореме синусов

$$c=2R\sin\gamma,\ a=2R\sin\alpha,\ b=2R\sin\beta,$$

где R — радиус окружности, описанной вокруг треугольника.

Подставляя эти выражения в (1) и деля на $4R^2$, получим

$$\sin^2\gamma=\sin^2\alpha+\sin^2\beta-2\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$$

Заменив $\sin^2\gamma$ на $1-\cos^2\gamma$, получим квадратное уравнение относительно $\cos\gamma$. Решая его, находим

$$\cos\gamma=\sin\alpha\sin\beta\pm$$
$$\pm\sqrt{\sin^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\alpha+1-\sin^4\beta}=$$
$$=\sin\alpha\sin\beta\pm\sqrt{\cos^2\beta-\cos^2\beta\sin^2\beta}=$$
$$=\sin\alpha\sin\beta\pm\cos\alpha\cos\beta.$$

Вспоминая, что $\gamma=180°-(\alpha+\beta)$, то есть $\cos\gamma=-\cos(\alpha+\beta)$, мы получаем

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta.$$

Второй корень (знак +) — посторонний (подумайте, почему), и мы получили формулу косинусв суммы.

Г. Г. Самедов

Научно-техническая конференция школьников в МФТИ

Знаете ли вы, как сконструировать космический аппарат многоразового использования или доказать теорему Эйлера? Если хотите узнать, то вам непременно надо побывать на научно-технической конференции школьников, которую проводит МФТИ.

В год сорокалетия МФТИ по инициативе комитета ВЛКСМ под председательством проректора МФТИ профессора Д. А. Кузьмичева была проведена I Научно-техническая конференция школьников, задача которой — стимулировать у учащихся, интересующихся физикой и математикой, желание выйти за рамки школьной программы, глубже вникнуть в изучаемую проблему, самостоятельно провести научный поиск и решить интересную задачу.

В одно из воскресений апреля Большая физическая аудитория МФТИ вместе с демонстрационным кабинетом была предоставлена в распоряжение школьников. К услугам докладчиков помимо доски и мела были проекционный аппарат и диапроектор, всевозможное оборудование для проведения физических экспериментов. Так, например, для иллюстрации доклада киевлянина Ю. Кротова (шк. № 145) «Пластинка зон Френеля» потребовался лазер, а москвички М. Аксенова (шк. № 780) и Н. Сергеенок (шк. № 2 г. Троицка), воспроизводя опыт Плато по уравновешиванию капли анилина в растворе соли для исследования сил поверхностного натяжения, проявили незаурядное экспериментаторское мастерство.

В другой аудитории внимание школьников было поглощено математикой. Все с удовольствием ознакомились с беспроигрышной стратегией в известной математической игре, в которой играющие по очереди берут камешки из трех кучек, и узнали, что делать, если кучек не три, а n. Решение этой задачи представили М. Тарасюк (шк. № 789) и Д. Столяров (шк. № 80). Живо школьники откликнулись и на введение в школе основ информатики и вычислительной техники. В ряде докладов для решения задач и создания математических игр ребята активно использовали программирование на ЭВМ. Так, А. Шишов и К. Сафонов (шк. № 179) разработали алгоритм нахождения всех вещественных корней многочлена с помощью ЭВМ.

Вторая научно-техническая конференция школьников состоится в МФТИ в апреле 1987 года. Участником ее может стать любой школьник. Для этого надо написать реферат, в котором самостоятельно разобран интересный вопрос по физике, технике, математике или программированию; описан интересный эксперимент или технический аппарат. Один экземпляр реферата надо до 1 марта 1987 года отправить по адресу: 141700 г. Долгопрудный Московской области, МФТИ, оргкомитет II Научно-технической конференции школьников. Все вопросы по темам рефератов и организации конференции можно выяснить по телефону ЗФТШ: 408-51-45. Ждем вас, молодые физики и математики!

А. В. Сапожников, студент МФТИ, член оргкомитета конференции.

Научная конференция школьников в ФМШ при МГУ

С 27 по 29 марта 1986 года в ФМШ № 18 при МГУ проходила Вторая физико-математическая конференция школьников. Если в первой конференции принимали участие лишь московские школьники, то в этот раз в Москву приехали школьники из шести городов: Еревана, Киева, Ленинграда, Новосибирска, Свердловска и Ставрополя.

Открывая конференцию, директор ФМШ при МГУ кандидат физико-математических наук В. Л. Натяганов пожелал участникам конференции успехов в их первых творческих шагах. О перспективах развития математики и физики говорили известный советский математик академик АН УССР Б. В. Гнеденко и профессор физического факультета МГУ, выпускник ФМШ при МГУ Н. И. Коротеев. От журнала «Квант» участников конференции приветствовал зам. главного редактора Ю. П. Соловьев.

Работа конференции проходила в восьми секциях, где были заслушаны более 50 докладов. Хотя доклады были различны по своему уровню, практически все они были интересными и свидетельствовали о большой работе, проделанной докладчиками.

В результате работы двух математических секций лучшими были признаны доклады учеников ФМШ № 18 при МГУ *В. Парьева, С. Пяршли, В. Роганова, В. Кулиманова* и ленинградской школьницы *Н. Карегиной* (ФМШ при ЛГУ).

Треть всех докладов была заслушана на двух секциях информатики. Лучшими были признаны доклады ученика ФМШ при КГУ *В. Мобарского*, ленинградца *А. Каныгина* (с. ш. 470) и московских школьников *Д. Крюнова* (с. ш. 179), *А. Согомоняна* (с. ш. 179), *Н. Зимпинова* (с. ш. 444).

На 4-х физических секциях лучшими были признаны доклады *К. Ильинского* (ФМШ при ЛГУ), *В. Любарского* (ФМШ при КГУ), *москвичей С. Колиниченко* и *Н. Копысова* (с. ш. 542), а также учеников ФМШ при МГУ *А. Иванова, Ю. Прохорова, В. Саханенко, И. Никитина.*

Доклады всех участников были отмечены почетными грамотами, а лучшие из докладчиков были награждены дипломами журнала «Квант».

Большой интерес вызвали заседание «круглого стола», встреча с редколлегией журнала «Квант».

Как всегда, весело и интересно прошел математический КВН, в котором «сражались» команды гостей и хозяев конференции.

Конференция в целом была очень хорошо и четко организована, прошла на высоком научном уровне.

А. А. Егоров

улыбается

Почитатель — посетитель библиотеки.
Арифмометр — измеритель нескладных стихов.
Нагоняй — выдача водительских прав.

Задачник

1. В бассейн втекает вода из трубы A со скоростью C_1 и вытекает из трубы B со скоростью C_2. С вышки высотой H в этот бассейн прыгает студент. Рассмотреть все случаи.

Объявления

Всем! Всем! Всем срочно постричься!

Кто забыл на столе в Большой физической тетрадь по теоретической физике? У тебя там две ошибки.

Давайте жить по солнечным часам.
Часовая мастерская

Не стой под стрелой!
Робин Гуд

Без спецобуви не работай!
Кот в сапогах

2. При уборке комнаты студент уронил на ногу кирпич. Оценить массу кирпича, если у соседей заложило уши.

Информация

В нашей картинной галерее сегодня проходит выставка следующих картин:

— Федотов, «Завтрак аристократа». Масло, хлеб. 32×64 см.
— Репин, «Турецкий султан читает письмо запорожских казаков».
— Пикассо, «Девочка на горе».
— Репин, «Иван Грозный объявляет строгий выговор своему сыну».
— Петров-Кефиров, «Покупание красного коня».
— Суриков, «Вечер стрелецкой казни».
— Перов-Решетников, «Опять тройка».
— Серов, «Персики без девушки».

Новости

Группе французских физиков - экспериментаторов во главе с доктором де Матотом удалось измерить число «пи» с точностью до одной миллионной процента. Они измерили постоянные Планка «аш» и «аш с чертой», определив таким образом два «пи». Остальное было делом техники.

Однажды физик долго сидел на скучнейшем заседании. Наконец он не выдержал и вышел в холл отдохнуть. И тут, где ему никто не мешал, он открыл новый эффект. И от радости назвал его эффектом Холла.

Крупицы

Котомка — измеритель сопротивления кота.
Истина — лягушка.
Изгородь — студенческий сельхозотряд.
Назад — ярлык.
Параметр — рост баскетболиста.
Ступень — студент-двоечник.

Как известно, бозоны подчиняются распределению Бозе, фермионы — распределению Ферми. Недавно открыты новые частицы, которые подчиняются распределению Гиббса,— гиббоны.

По страницам газеты МФТИ «За науку»

Задачи на координатной плоскости

1. 1.
2. $3\sqrt{3}$.
3. 1) $a=0$, $b=1/4$. 2) $(-1/2; 1/2)$, $(5/2; 13/2)$.
4. $a=9$, $AB=40\sqrt{2}$.
5. $32/27$.
6. 1) $-21/5\leqslant a\leqslant -1$; 2) $-9\leqslant a\leqslant 9$.
7. Катеты равны по $7/(3\sqrt{2})$; гипотенуза равна $7/3$.
8. $a\in]-\infty; -4[\cup]-5/4; 0[$.
9. 1) принадлежит; 2) $75/2$.
10. $(24+6\sqrt{3}-12\sqrt{2}-\pi)/12$.

XX Всесоюзная олимпиада по математике

8 класс

1. Пусть x_1 и x_2 — корни данного уравнения. По теореме Виета $x_1+x_2=-a$, $x_1x_2=1-b$, и поэтому $a^2+b^2=(x_1+x_2)^2+(1-x_1x_2)^2=x_1^2+x_2^2+1+x_1^2x_2^2=(x_1^2+1)(x_2^2+1)$, где числа x_1^2+1 и x_2^2+1, очевидно, больше 1.

2. См. решение задачи М996 («Квант», 1986, № 12).

3. Пусть O и O_1 — центры окружностей, описанных около треугольников ABM и CBM соответственно. Общей частью кругов, ограниченных этими окружностями, является объединение двух сегментов с общей хордой BM. Так как величины углов $\angle BOM=2\angle BAC$ и $\angle BO_1M=2\angle BCA$ постоянны, то площадь каждого из сегментов тем меньше, чем меньше хорда BM. Следовательно, площадь общей части кругов минимальна, когда BM — высота в треугольнике ABC.

4. а) Ответ. Можно. Пример приведен на рисунке 1.

б) Ответ. Нельзя. Решение. Докажем, что, если в стране n городов, то требуемую сеть дорог можно построить лишь тогда, когда одно из чисел n или $n-2$ является квадратом целого числа. Из условия (n городов и $n-1$ дорог) следует, что из любого города в любой другой город ведет единственный путь. Выберем какой-нибудь город A и назовем его «хорошим». Назовем город B «хорошим», если длина пути от A до B — четное число, и «плохим», если длина этого пути нечетна. Нетрудно убедиться в том, что длина пути между двумя городами четна тогда и только тогда, когда эти города либо оба «хорошие», либо оба «плохие». Обозначим число «хороших» городов через x, число «плохих» — через y. Тогда $x+y=n$. Всего имеется xy пар городов, в которых один город «хороший», а другой «плохой». Следовательно, среди чисел $1, 2, 3, \ldots, \frac{n(n-1)}{2}$ имеется xy нечетных чисел. Если $\frac{n(n-1)}{2}$ — четное число, то $xy=\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}$ и поэтому $n=n^2-4xy=(x-y)^2$. Если $\frac{n(n-1)}{2}$ — нечетное число, то $xy=\frac{1}{2}\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right)$ и, следовательно, $n=(x-y)^2+2$.

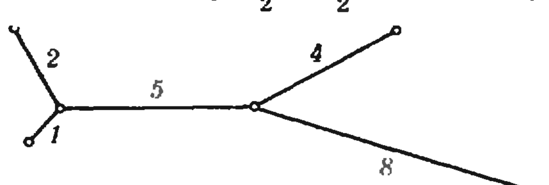


Рис. 1.

Так как ни 1986, ни 1984 не являются квадратами целых чисел, то при $n=1986$ требования короля не могут быть выполнены.

5. Ответ: $x=3$, $y=2$, $z=1$, $n\geqslant 2$; $x=6$, $y=8$, $z=4$, $n\geqslant 2$; $x=8$, $y=3$, $z=7$, $n=2$. Указание. Задача сводится к нахождению цифр x, y, z, для которых $x^2\cdot\underbrace{11\ldots1}_{n}+y=z\cdot 1\underbrace{00\ldots0}_{n-2}1$. Положив здесь $x^2=\overline{uv}$, где u и v — цифры, получим, сравнивая число десятков, что $u+v=9$ либо $u+v=10$.

6. Заметим сначала, что для любой точки D, лежащей внутри или на сторонах треугольника ABC и отличной от вершины C, справедливо неравенство $AD+DB<AC+CB$.

Пусть $A_1A_2\ldots A_{12}$ — данный 12-угольник, O и O' — данные точки и (для определенности) точка O' лежит внутри или на сторонах треугольника OA_1A_2. Тогда в силу замечания и неравенства треугольника имеем

$$O'A_1+O'A_2<OA_1+OA_2,$$
$$O'A_i-OA_i\leqslant 10 \text{ для } i=3, 4, \ldots, 12$$

и поэтому

$$(O'A_1+\ldots+O'A_{12})-(OA_1+\ldots+OA_{12})=$$
$$=(O'A_1+O'A_2-OA_1-OA_2)+$$
$$+(O'A_3-OA_3)+\ldots+(O'A_{12}-OA_{12})<$$
$$<10\cdot 10 \text{ см}=1 \text{ м}.$$

Поменяв ролями точки O и O', получим, что

$$|(OA_1+\ldots+OA_{12})-(O'A_1+\ldots+O'A_{12})|<1 \text{ м}.$$

7. Ответ: можно. Решение. Нальем во все стаканы, кроме одного, по 100 г молока, а в оставшийся — 200 г. Общее количество молока равно 3100 г, и при разделе поровну в каждом стакане должно содержаться по $\frac{310}{3}$ г. После n-го переливания количество молока в каждом стакане, умноженное на 2^n, будет выражаться целым числом граммов. Поэтому число $2^n\cdot\frac{310}{3}$ должно быть целым, что невозможно ни при каком n.

8. а) Ответ: 1. Указание. При повороте прямоугольника относительно его центра на 180° диагональ переходит в себя, а раскраска меняется на противоположную.

б) Ответ: 5000/4999. Решение. Расположим данный прямоугольник $ABCD$ на координатной плоскости так, чтобы точка A совпала с началом координат, B имела координаты $(0; 101)$, C — $(99; 101)$, D — $(99; 0)$. Пусть, для определенности, угловой квадрат при вершине A — белый. Так как числа 99 и 101 взаимно просты, то диагональ AC не проходит через узлы сетки в точках, отличных от A и C. Поэтому при каждом пересечении AC с линиями сетки происходит перемена цвета. Отношение длин отрезков равно отношению длин проекций этих отрезков на ось Ox. Проекцией AC на ось Ox является отрезок AD, проекциями точек пересечения AC с горизонтальными линиями сетки являются точки вида $\left(\frac{99}{101}m; 0\right)$, $m=0, 1, \ldots, 101$, с вертикальными линиями — точки вида $(n; 0)$, $n=0, 1, \ldots, 99$. Из неравенств

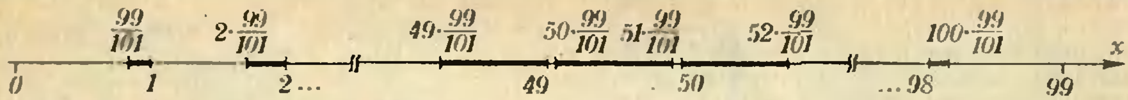


Рис. 2.

$m-1<\frac{99}{101}m<m$ при $1\leqslant m\leqslant 50$ и $m-2<\frac{99}{101}m<m-1$ при $51\leqslant m\leqslant 100$ следует, что точки $\left(\frac{99}{101}m;0\right)$ и $(m;0)$ при $m=1, 2, ..., 49$ будут чередоваться, затем встретится точка $\left(\frac{99}{101}\cdot 50;0\right)$, после чего снова поочередно пойдут точки $\left(\frac{99}{101}m;0\right)$ и $(m-1;0)$ при $m=51, 52, ..., 100$ (рис. 2). Сумма длин проекций белых отрезков равна

$$\frac{99}{101}+\left(2\cdot\frac{99}{101}-1\right)+...+\left(50\cdot\frac{99}{101}-49\right)+$$
$$+\left(50-51\cdot\frac{99}{101}\right)+...+\left(99-100\cdot\frac{99}{101}\right)=$$
$$=-\frac{99}{101}\cdot 50^2+50^2=\frac{5000}{101},$$

сумма длин проекций черных отрезков равна $99-\frac{5000}{101}=\frac{4999}{101}$. Искомое отношение, следовательно, равно $\frac{5000}{4999}$.

9 класс

1. Указание. Из условия следует, что $\vec{AC}\cdot\vec{BD}=2|AC|\cdot|BD|\cos\frac{\pi}{4}=|BD|^2\sqrt{2}$. Числа $\vec{AC}\cdot\vec{BD}$ и $|BD|^2$ — целые, $\sqrt{2}$ — иррациональное число. Противоречие.

2. Любое нечетное натуральное число, большее 1, можно представить в виде разности квадратов двух натуральных чисел: $2k+1=(k+1)^2-k^2$. Запишем произвольную возрастающую последовательность натуральных чисел: $a_1<a_2<...<a_{n-1}$, где $a_1\geqslant 3$ — нечетное число, а остальные числа — четные. Сумма квадратов этих чисел $a_1^2+a_2^2+...+a_{n-1}^2=2k+1$ — нечетное число, причем $k>\frac{a_{n-1}^2}{2}>a_{n-1}$. Положим $a_n=k$, тогда $a_1^2+a_2^2+...+a_n^2=(a_n+1)^2$. Аналогично построим последовательность $b_1<b_2<...<b_m$, где $b_1>2a_n$ — нечетное число, $b_2, ..., b_{m-1}$ — четные, причем $\frac{b_{i+1}}{b_i}>a_n$, $i=1, 2, ..., m-1$, и $b_1^2+b_2^2+...+b_m^2=(b_m+1)^2$. Заполним таблицу, вписав в клетку, стоящую в i-й строке и j-м столбце, число $b_i^2a_j^2=(b_ia_j)^2$.

Полученная таблица удовлетворяет условию задачи.

3. а) Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей и пусть точка O_3 такова, что $AO_1O_2O_3$ — параллелограмм. Тогда O_3 — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Действительно, обозначим через P, L, Q проекции на прямую AB точек O_1, O_2, O_3 соответственно. Пусть, для определенности, Q лежит между P и L (см. рис. 3). Тогда $AQ=AM+MQ$, $BQ=BM-MQ$. Так как $AO_1=O_2O_3$, то $AP=QL$ и поэтому $BM=2ML=2MQ+2QL=2MQ+2AP=2MQ+AM$. Следовательно, $BQ=MQ+AM=AQ$, т. е. O_3 лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Аналогично доказывается, что O_3 лежит на серединном перпендикуляре к отрезку AC. Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, равен $AO_3=O_1O_2=l$.

б) Так как $O_3O_2=AO_1$, то при любом выборе точки A точка O_3 лежит на окружности, центром которой является центр O_2 второй окружности, а радиус равен радиусу первой окружности. Все точки указанной окружности, кроме точек M^* и N^*, получающихся из точек M и N параллельным переносом, при котором точка O_1 переходит в O_2, принадлежат искомому множеству точек.

4. Расставим в узлах сетки, описанной в условии задачи, числа 0, 1, 2 следующим образом: у левого нижнего угла шестиугольника — как на рисунке 4, далее во все стороны числа периодически повторяются.

Поскольку 1000 при делении на 3 дает в остатке 1, в остальных вершинах шестиугольника и в его центре числа расположатся так, как показано на рисунке 5. Если вершины правильного треугольника расположены в узлах сетки, то сумма стоящих в них чисел делится на 3.

Для доказательства этого удобно «продолжить» полученную сетку до разбиения всей плоскости (см. рис. 4) и заметить, что при повороте на 60° (по или против часовой стрелки) вокруг любого из узлов решетки множество узлов, занумерованных той же цифрой, что и центр поворота, переходит в себя, а множество узлов, занумерованных двумя остальными цифрами

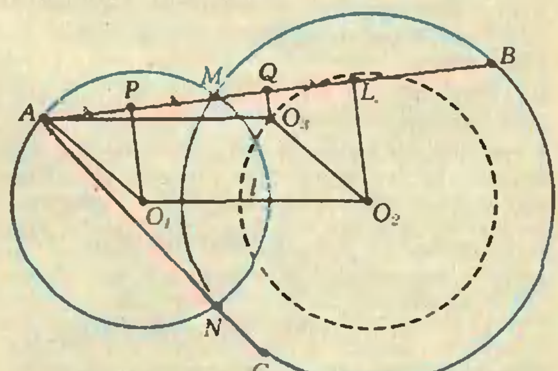


Рис. 3.

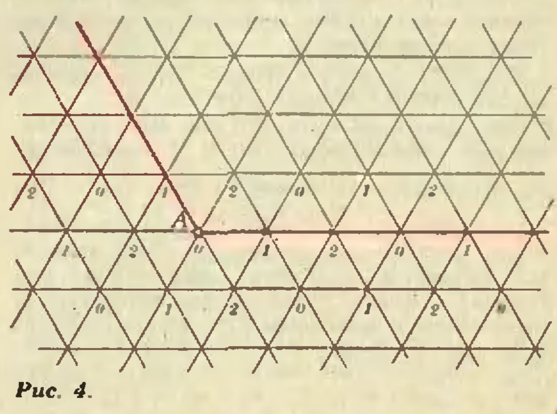


Рис. 4.

«меняются местами»: например, при повороте на угол 60° с центром в точке A, занумерованной цифрой 0, любой узел с номером 0 переходит в узел с номером 0, любой узел с номером 1 переходит в узел с номером 2, узел с номером 2 — в узел с номером 1.

Возьмем теперь произвольный правильный треугольник PQR с вершинами в узлах решетки. Если его вершины P и Q занумерованы одинаковыми цифрами, то и вершина R будет занумероаана той же цифрой (она получается из точки Q поворотом на угол 60° вокруг точки P). Аналогично, если в вершинах P и Q — две разные цифры, то в вершине R стоит третья цифра.

Таким образом, всегда сумма чисел, стоящих в вершинах произвольного правильного треугольника, делится на 3.

Легко проверить, что сумма всех чисел, стоящих в узлах сетки, при делении на 3 дает в остатке 2. Поэтому у последнего неокрашенного узла должно стоять число 2. Согласно рисунку 5 этот узел не может совпадать с вершиной шестиугольника.

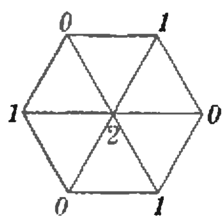


Рис. 5.

5. а) Пусть O — центр описанной около n-угольника $A_1A_2\ldots A_n$ окружности. Так как $\vec{MA_k}=\vec{MO}+\vec{OA_k}$, $k=1, 2, \ldots, n$, то рассматриваемое выражение принимает вид $(\pm\vec{MO}\pm\vec{MO}\pm\ldots\pm\vec{MO})+(\pm\vec{OA_1}\pm\vec{OA_2}\pm\ldots\pm\pm\vec{OA_n})$. Достаточно взять знак плюс у векторов $\vec{MA_k}$ с нечетными номерами k и знак минус — у остальных.

б) Пусть векторы $\vec{OA}_{i_1}, \vec{OA}_{i_2}, \ldots, \vec{OA}_{i_k}$ входят в рассматриваемое выражение со знаком плюс, а векторы $\vec{AO}_{j_1}, \vec{AO}_{j_2}, \ldots, \vec{OA}_{j_{n-k}}$ — со знаком минус. Тогда выражение принимает вид $k\vec{MO}-(n-k)\vec{MO}+(\vec{OA}_{i_1}+\vec{OA}_{i_2}+\ldots+\vec{OA}_{i_k})-(\vec{OA}_{j_1}+\ldots+\vec{OA}_{j_{n-k}})$ и будет равно $\vec{0}$, если

$$\vec{MO}=\frac{1}{n-2k}\left((\vec{OA}_{i_1}+\vec{OA}_{i_2}+\ldots+\vec{OA}_{i_k})-(\vec{OA}_{j_1}+\vec{OA}_{j_2}+\ldots+\vec{OA}_{j_{n-k}})\right).$$

Этим равенством точка M определяется однозначно, если заданы наборы номеров: $i_1, i_2, \ldots, i_k$ и $j_1, j_2, \ldots, j_{n-k}$. Число таких наборов конечно, поэтому при нечетном n конечным будет и число точек M.

7. Ответ: а) $(n-1)^2-1$; б) $n-2$. См. решение задачи М1005 («Квант», 1987, № 1).

8. Достаточно доказать, что для всех действительных чисел выполняется неравенство $|\sin x|+|\sin(x+1)|+|\sin(x+2)|>\frac{8}{5}$. Так как функция $f(x)=|\sin x|+|\sin(x+1)|+|\sin(x+2)|$ — периодическая с периодом π, то достаточно доказать неравенство для $x\in[0;\pi]$. Сначала докажем, что при $x\in[0;\pi]$ выполняется неравенство $f(x)>2\sin 1$. Пусть $0\leqslant x<\pi-2$. Тогда $f(x)=\sin x+\sin(x+1)+\sin(x+2)=2\cos 1\cdot\sin(x+1)+\sin(x+1)$. Так как $1\leqslant x+1<\pi-1$, то $\sin(x+1)\geqslant\sin 1$, $\sin 2>\sin 1$, поэтому $f(x)\geqslant\sin 2+\sin 1>>2\sin 1$. Случаи $\pi-2\leqslant x<\pi-1$ и $\pi-1\leqslant x\leqslant\leqslant\pi$ рассматриваются аналогично. Остается доказать, что $2\sin 1>\frac{8}{5}$. Имеем $\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin 1\right|=$

$$=2\left|\sin\frac{\frac{\pi}{3}-1}{2}\right|\cdot\left|\cos\frac{\frac{\pi}{8}+1}{2}\right|\leqslant 2\left|\sin\frac{\frac{\pi}{3}-1}{2}\right|\leqslant$$

$\leqslant\frac{\pi}{3}-1<0{,}05$. Отсюда $2\sin 1\geqslant 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-0{,}05\right)=$ $=\sqrt{8}-0{,}1>\frac{8}{5}$.

10 класс

1. Ответ: 1 и 9. Проверка показывает, что числа 1 и 9 удовлетворяют условию задачи. Докажем, что других таких чисел нет. Пусть число $n=m^2$ имеет $m>1$ различных делителей. Все отличные от m делители числа n можно разбить на пары так, чтобы произведение чисел в каждой паре равнялось n. Пусть количество таких пар равно k. Тогда $m=2k+1$, а число n нечетно и имеет ровно k делителей, меньших m. Поэтому n делится на все нечетные числа меньше $2k+1$. Число $2k-1$ является делителем числа $n=(2k+1)^2$, а значит, и числа

$$4=(2k+1)^2-(2k-1)(2k+3),\ \text{откуда}\ k=1.$$

2. См. решение задачи М999 («Квант», 1986, № 12).

3. См. решение задачи М1004 («Квант», 1987, № 1).

4. Указание. Назовем расстановку целых чисел во всех единичных кубиках пригодной, если их суммы в любом ряду равны нулю. Например, пригодной является расстановка одних нулей. Докажите, что с помощью следующих двух операций:

а) перестановка местами двух слоев единичных кубиков, параллельных какой-либо грани куба,

б) прибавление к числам, стоящим у красных вершин исходного куба (см. рис. 6), и одновременное вычитание из чисел, стоящих у синих вершин, одного и того же числа, можно добиться того, что количество различных чисел увеличится. Повторяя несколько раз описанные операции, добьемся того, что все числа будут различны.

5. См. решение задачи М997 («Квант», 1986, № 12).

6. Заметим (рис. 7), что любая касательная, не параллельная стороне квадрата, отсекает от него прямоугольный треугольник с периметром 2, острым углом φ и площадью

$$S_\varphi=1-\frac{2}{\sin\varphi+\cos\varphi+1}\leqslant 1-\frac{2}{\sqrt{2}+1}=$$
$$=(\sqrt{2}-1)^2$$

(равенство достигается при $\varphi=45^\circ$). Тогда площадь S общей части квадрата и треугольника удовлетворяет неравенству

$$S\geqslant 4-3(\sqrt{2}-1)^2=6\sqrt{2}-5>3{,}4.$$

Неравенство же $S>3{,}5$, вообще говоря, не выполнено. Действительно (рис. 8), пусть две стороны описанного треугольника пересекают стороны квадрата под углом 45°, а третья сторона проведена с таким расчетом, чтобы площадь S_φ отсекаемого ею треугольника удовлетворяла неравенствам

$$0{,}5-2(\sqrt{2}-1)^2<S_\varphi<(\sqrt{2}-1)^2.$$

Тогда для площади S общей части имеем

$$S=4-2(\sqrt{2}-1)^2-S_\varphi<4-2(\sqrt{2}-1)^2-0{,}5+$$
$$+2(\sqrt{2}-1)^2=3{,}5.$$

7. Ответ: $\left[\frac{n}{2}\right]+1$. Решение. Поставим в соответствие каждому значению $m=$

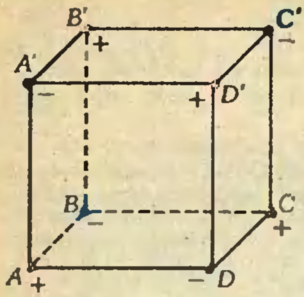


Рис. 6.

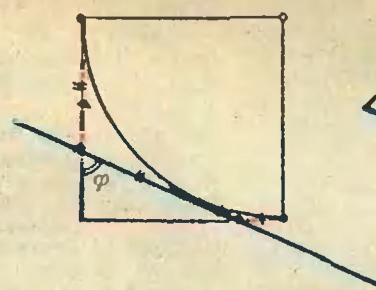


Рис. 7.

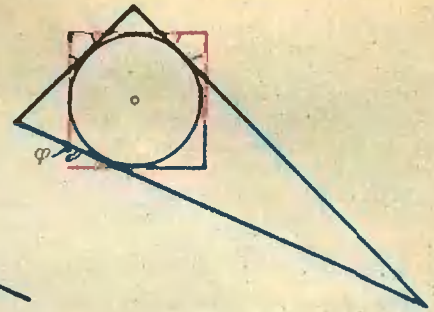


Рис. 8.

$=0, 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$ многочлен

$$P_m(x)=\sum (a_i+2b_i)\,x^i,$$

где коэффициенты a_i, $b_i \in \{0; 1\}$ суть «цифры» двоичной записи чисел $n-2m$, m соответственно, т. е. определяются из разложений

$$\begin{aligned} n-2m&=a_0\cdot 2^0+a_1\cdot 2^1+a_2\cdot 2^2+\ldots,\\ m&=b_0\cdot 2^0+b_1\cdot 2^1+b_2\cdot 2^2+\ldots \end{aligned} \qquad (*)$$

(индекс суммирования i здесь и ниже пробегает некоторое конечное множество целых неотрицательных значений). Проверка показывает, что многочлен $P_m(x)$ допустим и

$$P_m(2)=\sum (a_i+2b_i)\cdot 2^i=(n-2m)+2m=n.$$

Любой многочлен

$$P(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots,$$

удовлетворяющий условию задачи, совпадает ровно с одним многочленом из списка $P_0(x)$, $P_1(x)$, ..., $P_{\left[\frac{n}{2}\right]}(x)$. Действительно, каждый из его коэффициентов c_i представляет собой двузначное (ибо $c_i \leqslant 3$) число в двоичной записи, т. е. имеют место разложения

$$c_i=a_i\cdot 2^0+b_i\cdot 2^1,$$

в которых коэффициенты a_i, $b_i \in \{0;1\}$ определяются однозначно. Поэтому справедливо тождество $P(x)\equiv P_m(x)$, где число m задается равенством (*) и не превосходит $\left[\frac{n}{2}\right]$, так как

$$n=P(2)=\sum (a_i+2b_i)\cdot 2^i \geqslant 2\sum b_i\cdot 2^i=2m.$$

8. См. решение задачи М998 («Квант», 1986, № 12).

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. В данном случае, как следует из определения равнодействующей силы, ее просто не существует.
2. *Сила тяги стала бы вдвое больше.*
3. Реальную (обладающую массой) веревку строго горизонтально натянуть нельзя.
4. В точке B, так как здесь вогнутая поверхность дороги и сила давления наибольшая.
5. Тело на наклонной плоскости легче удержать, чем двигать вверх (учтите действие силы трения).
6. На груз действует сила трения, направленная по скорости движения автомобиля.
7. См. рис. 9. I — пружины соединены последовательно, II — параллельно.
8. Сила тяжести.
9. В крайних положениях груза равнодействующая сила направлена по касательной к траектории, в нижнем положении — к точке подвеса маятника.

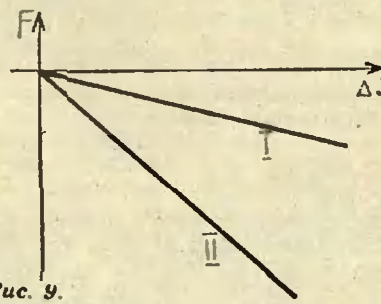


Рис. 9.

10. Силам взаимного притяжения препятствуют силы трения.
11. Нет, ящик станет поворачиваться относительно ребра B.
12. Линии индукции магнитного поля направлены с севера на юг.

Микроопыт

Сила трения зависит от прижимающей силы, которая в случае набухшей доски значительно больше, чем в случае сухой.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 10)

1. Точку D следует поставить так, чтобы отрезок CD был равен 1/5 отрезка AC (рис. 10); тогда площадь треугольника DBC будет равна 1/5 площади треугольника ABC. Аналогично точка E ставится так, чтобы $BE=AB/4$, точка F так, чтобы $FD=AD/3$, и точка G так, чтобы $EG=AE/2$.
2. Ответ: 1 999 999 999. Решение. Если среди данных чисел есть два числа a и b, большие единицы, то, заменив одно из них на ab, а второе на 1, получим, что произведение всех чисел не изменится, а сумма увеличится, так как из очевидного неравенства $(a-1)(b-1)>0$ следует, что $ab+1>a+b$. Таким образом, сумма будет максимальной, если одно из чисел равно миллиарду, а остальные — единицам.
3. *Нет, так как всякое такое число меньше, чем* $(10\,000)^2$, но больше, чем $(9999)^2=99\,980\,001$.
4. Из рисунка к условию задачи видно, что во втором чайнике большая часть пара выходит

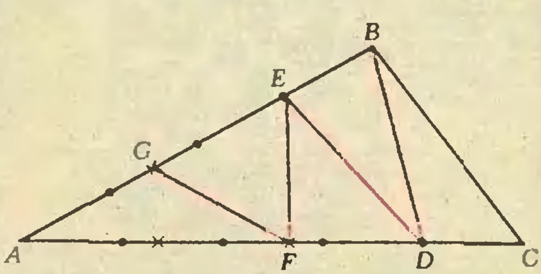


Рис. 10.

через носик, а в первом чайнике пар в основном выходит через крышку. Из этого можно сделать вывод, что во втором чайнике уровень воды ниже нижнего отверстия носика, а в первом чайнике нижнее отверстие носика перекрыто водой. Значит, во втором чайнике воды было меньше, и поэтому она закипела раньше.

5. Обозначим расстояния, пройденные Винни-Пухом и Пятачком до встречи, через a и b, а время в пути до встречи — через x. Тогда скорость Винни-Пуха можно выразить двумя способами: $\frac{a}{x}=\frac{b}{1}$. Отсюда $x=\frac{a}{b}$. Скорость Пятачка также можно выразить двумя способами: $\frac{b}{x}=\frac{a}{4}$, откуда $\frac{a}{b}=\frac{4}{x}$. Сравнивая полученные выражения для $\frac{a}{b}$, находим $x=\frac{4}{x}$, откуда $x=2$. Следовательно, Пятачок шел 6 минут, а Винни-Пух шел 3 минуты.

Шахматная страничка

(См. «Квант» № 8)

Задание 15 (А. Кузовков, 1982 г.). **1. Фс3** с угрозой 2. Кb3, 3. Фd3+ К:d3 4. cd×, 2... Фf4 3. Фе5+ Ф:е5 4. Кd2×, 2... Сf4 3. Кd2+ С:d2 4. Фе5×; **1... Сb8! 2. Ке2! Фf4 3. Кg3+** Ф:g3 4. Фе3×, 2... Сf4 3. Фе3+ С:е3 4. Кg3×; **1... Фс1! 2. К:е6! Фf4 3. Фе5+ Ф:е5 4. Кg5×**, 2... Сf4 3. Кg5+ С:g5 4. Фе5×; **1... Сf4 2. Кb5!** с угрозой 3. Фе3+ С:е3 4. Кd6×, 2... Ф:h5 3. Кd6+ С:d6 4. Фе3×. Одни фигуры перекрывают линии другим — сплошная геометрия!

Задание 16 (Я. Владимиров, 1982 г.). **1. Фg8!** с угрозой 2. Ф:h7+ Кр:е5 3. Кh5+ Лf4 4. С:f4×. **1... Лaa4 2. Фg4!** d4 3. **Ф:е6! Ла6** 4. Кс6×. **1... Фа4 2. Ф:е6!** Кd4 3. **Фg4** Фd7 4. Ке6×.

Эти две задачи были признаны лучшими на последнем чемпионате СССР по шахматной композиции по разделу многоходовых задач.

Отметим, что читатели журнала опровергли этюды, предложенные в качестве конкурсных заданий в «Кванте» № 6 за 1986 г. В задании № 11 после 1. Кpf3 К:b2 2. Кре2 Кpg3 3. Кpd2 Кpf4 4. Крс2 черные спасаются этюдным способом: 4... Ка4! 5. bа Кре5 6. Крс3 Кpd6 7. Крс4 Крс7 8. Крс5 Кpb8. В задании № 12 после 1. Кg1 Лс4! 2. Ке2+ Кpf3 (но не 2... Кpf2? 3. Кd4!) 3. Кg1 Кpg2 на доске позиционная ничья.

Участники конкурса, указавшие опровержения, получают дополнительные очки.

Автор этюдов Э. Погосянц предлагает следующие переработки. Вместо № 11 такой этюд. **Белые: Кра8, Са6, Ка4; черные: Кра5, Се8, пп. g6, g7. Ничья. 1. Кс5 Кpb6 2. Ке6! Кр:а6** (2... Сс6+ 3. Кpb8 Кр:а6 4. Крс7 и т. д.) **3. Кс7+ Кpb6 4. К:е8 Крс6 5. К:g7 Кpd7 6. Кpb7 Крс7 7. Крс6 Кpf7 8. Кh5! gh 9. Кpd5**, и король в квадрате.

№ 12 исправляется, как говорят, снятием первого хода. Белого коня надо переставить с h3 на g1, а черного короля с g3 на g2. Задание — то же самое, белые начинают и выигрывают. Данный этюд получается из № 12 после 1. Кg1 Кpg2. В переработанном виде авторский замысел уже не опровергается: **1. Ке2 Ле4 2. Кс3! Лс4 3. Кd5! Л:с6+ 5. Кpb7**, и черная ладья в капкане.

Номер подготовили:
А. А. Варламов, А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Т. Н. Кольченко, Д. А. Крымов, Э. В. Назаров, И. Е. Смирнова, В. Б. Юдин
Фото представили:
А. М. Горнинский, В. В. Рыжиков

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Л. С. Сомова

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 17.09.86. Подписано к печати 23.09.86
Т-19637 Бумага 70×108/16
Печать офсетная. Усл. кр.-от. 23,8
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,36
Тираж 195 674 экз.
Цена 40 коп. Заказ 2538

Ордена Трудового Красного Знамени Чеховский полиграфический комбинат ВО «Союзполиграфпром» Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

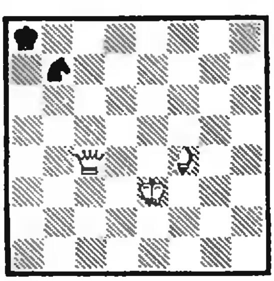
НА ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ДОСКЕ

После того как в «Кванте» № 7 за 1985 год появилась «Шахматная страничка» под названием «Цилиндрические шахматы», в редакцию пришло немало писем — необычный шахматно-геометрический сюжет вызвал у читателей живой интерес. Особого внимания заслуживают материалы читателя из Донецка В. Попова. Поводом послужила следующая задача.

Ф. Бондаренко. Мат в 1 ход: а) на обычной доске; б) на вертикальном цилиндре (приклеены друг к другу линии «а» и «h»); в) на горизонтальном цилиндре (склеены линии «1» и «8»).

На обычной доске решает **1.Фе2—е8×**; на вертикальном цилиндре этот ход не матует из-за ответа 1...Кра8—h7!, а к цели ведет только **1.Фе2—g8×** (белый ферзь проходит по маршруту е2—а6—h7—g8); на горизонтальном цилиндре решает лишь **1.Фе2—а2×!**

В. Попов задался целью улучшить внешнее оформление задачи. Взглянем еще раз на позицию-первоисточник. Черный король стеснен несколько грубоватым способом, у него нет ни малейшей свободы. Поиск более тонкого исходного построения привел сначала к такой позиции.



Мат в 1 ход: а) на обычной доске; б) на вертикальном цилиндре; в) на горизонтальном цилиндре.

Достоинства задачи по сравнению с оригиналом очевидны — король черных чувствует себя вольготнее, а пешку b7 заменил более динамичный конь.

Дальнейшие «цилиндрические» размышления позволили обнаружить, что конь b7 вообще лишний.

В. Попов, 1986 г. Белые: Kре3, Фс4, Сf4; черные: Кра8. Мат в 1 ход: а) на обычной доске; б) на вертикальном цилиндре; в) на горизонтальном цилиндре.

Вот позиция, которая представляется нам идеальным воплощением темы Бондаренко. Действительно, на доске всего четыре фигуры, причем построение очень легкое, изящное — белые фигуры удалены от короля, и поначалу кажется, что об одноходовом мате не может быть и речи.

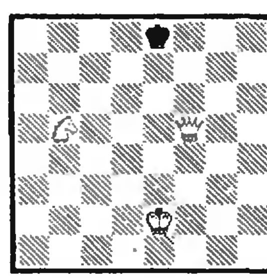
а) На обычной доске к цели ведет единственное **1.Фа6×**.

б) На вертикальном цилиндре линии «а» и «h» приклеены друг к другу и матует **1.Фс4—а2—h1×!** (1.Фа6(е4)+ Кра8—h8!, 1.Фс8(h7)+ Кра8—h7(:h7)). Ферзь взял под контроль сразу четыре поля в районе черного короля (включая занятое им) — b7, а8 по диагонали h1—а8 и h7, h8 по вертикали «h». Любопытно, что с более близкого расстояния отнять столько полей у короля, не становясь ферзем под бой, невозможно — ни на цилиндрической, ни тем более на обычной доске. Поля а7, b8 держит слон по диагонали с1—h6—а7—b8.

в) На горизонтальном цилиндре друг к другу приклеены первая и восьмая линии и решает только **1.Фс4—f1—g8—h7×!** (1.Фа6+ Кра8—b1!). Вновь ферзь отнял у короля четыре поля: а8, b1 по диагонали h7—b1—а8 и а7, b7 по седьмой горизонтали. Поля b8, а1 держит слон по диагонали h2—b8—а1. И здесь другие шахи ферзем не матуют,— король уходит на а7 или b7. Если белого короля убрать с дороги слона, то шахи 1.Фс8(е4, h1)+ становятся матами, поскольку поле а7 оказывается недоступным для короля. Странно, но белый король, будучи в тылу своих фигур, мешает белым матовать! В этом же специфика цилиндра — то, что белый король бесполезен, ясно было сразу, но то, что он вреден, неожиданно...

Конкурсные задания

Если (мысленно) склеить одновременно и вертикали «а» и «h», и горизонтали «1» и «8», то получается тороидальная доска. Первая четырехходовка — на тороидальной доске, вторая — на обычной.



21. Мат в 4 хода на тороидальной доске.

22. Мат в 4 хода.

Срок отправки решений — 20 января 1987 г. с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 21, 22».

М. В. ЛОМОНОСОВ В ОТЕЧЕСТВЕННОЙ ФИЛАТЕЛИИ

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Первые советские почтовые марки, посвященные отечественной науке, были выпущены в 1925 году, к 200-летию Академии наук. На них изображен портрет М. В. Ломоносова на фоне здания Академии наук в Ленинграде. Аналогичная композиция воспроизведена на марке, посвященной 220-летию Академии наук. 5 января 1949 года в Ленинграде открылся музей М. В. Ломоносова. Это событие было отмечено выпуском марок с его портретом. Портрет М. В. Ломоносова воспроизведен также на марке и почтовом блоке, посвященном 200-летию МГУ. В 1956 году вышла серия марок с портретами писателей нашей Родины. Одна из них посвящена М. В. Ломоносову. В 1961 году, к 250-летию со дня рождения М. В. Ломоносова, была выпущена серия из трех марок — две с его портретами и одна с изображением памятника М. В. Ломоносову на фоне нового здания МГУ.

В. Рудов