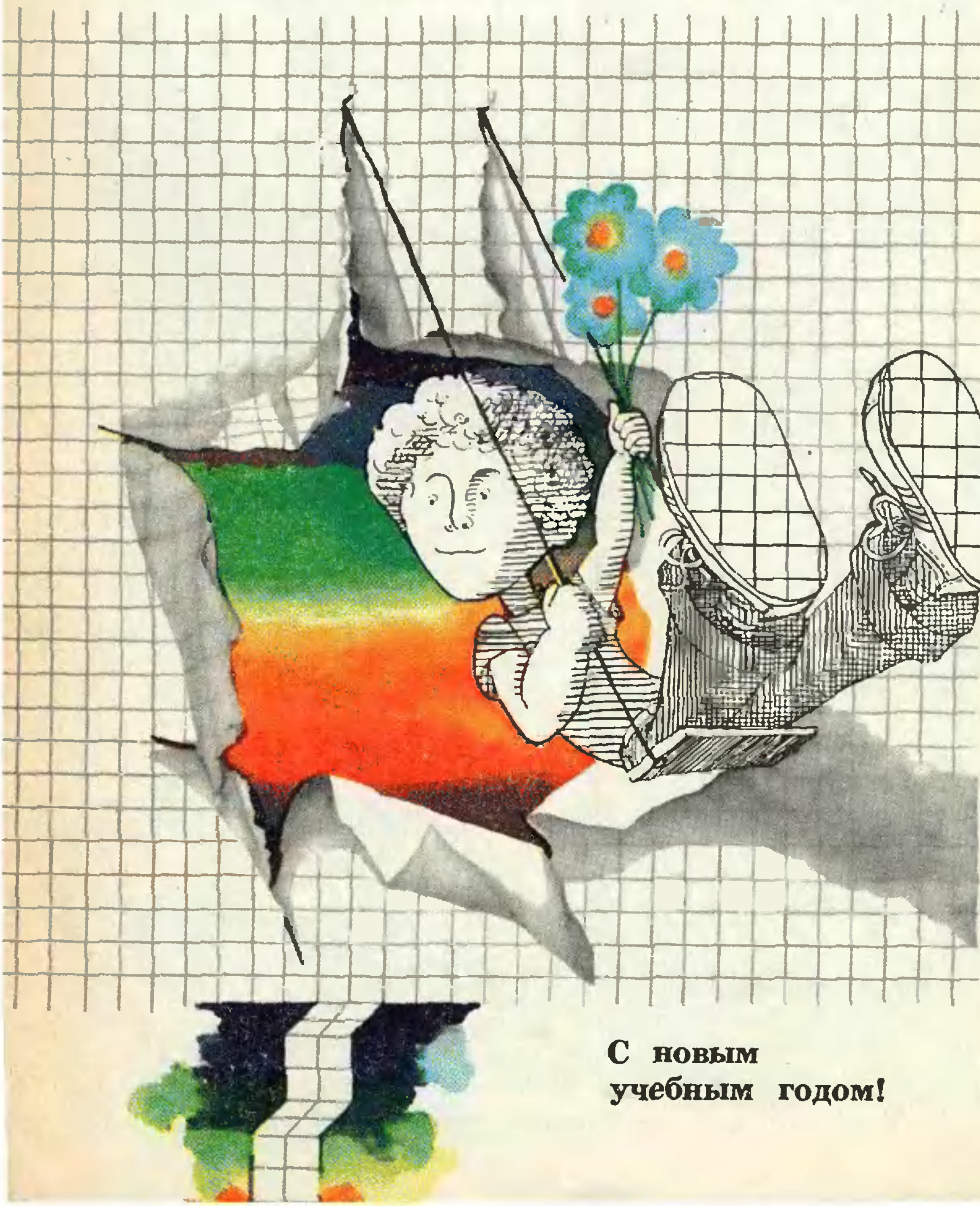
ISSN 0130-2221

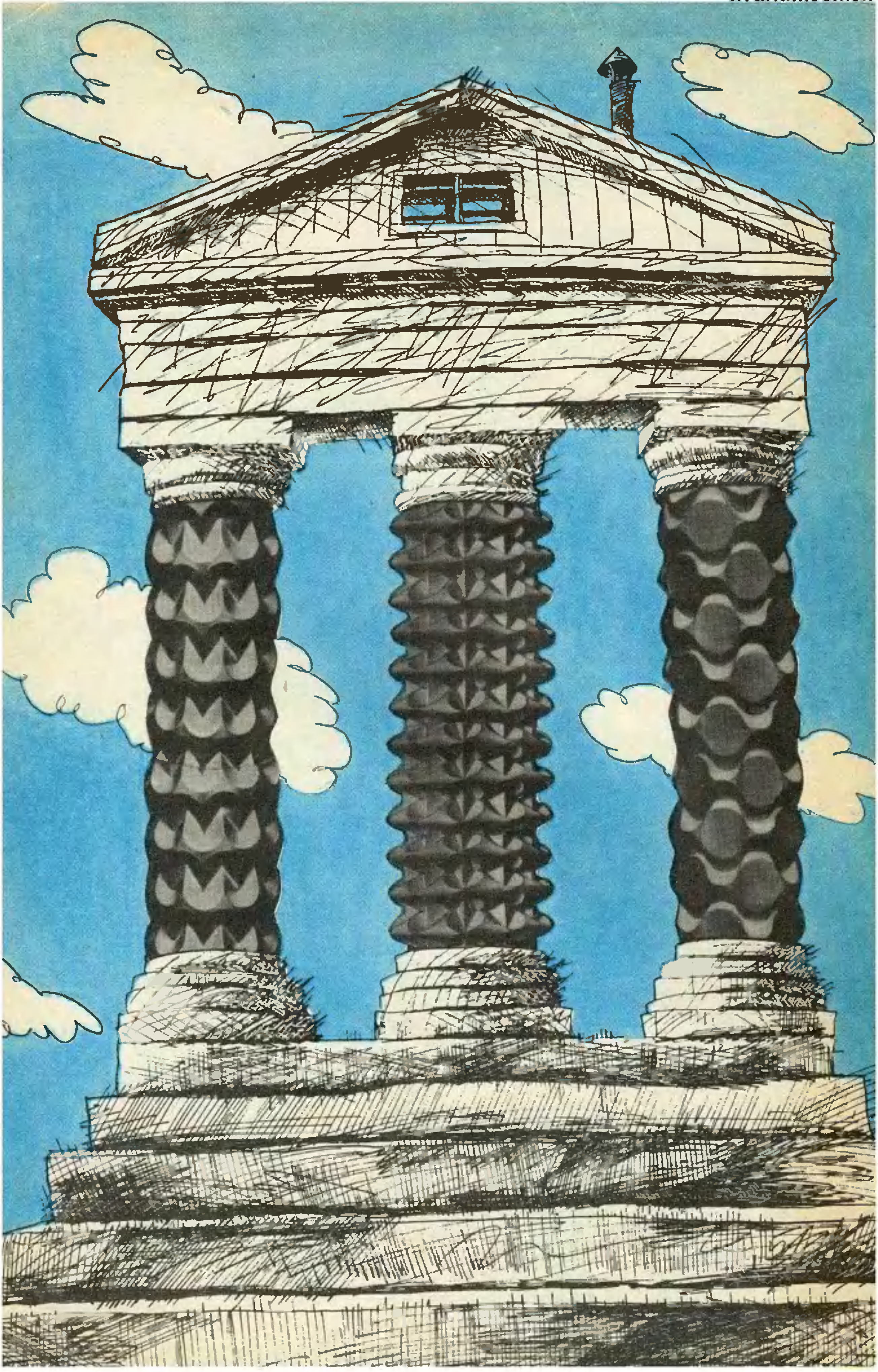
Квант

9
1986

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР



С новым учебным годом!



Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Квант 9 1988

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ: / IN THIS ISSUE:

Прекрасные летние каникулы позади. И теперь уже радуга — не просто радуга, а оптическое явление в атмосфере, качели — не просто качели, а пример параметрического резонанса (разобраться с этим примером вам поможет статья на с. 29)... С новым учебным годом!

О конструкциях, изображенных на второй странице обложки, рассказывается на с. 10.

День знаний — всенародный праздник

В этом году в третий раз отмечается всенародный праздник — День знаний.

В. И. Ленин на заре Советской власти говорил, что коммунистом можно стать, лишь обогатив свою память знанием всех тех богатств, которые выработало человечество. В обращении к молодежи на III съезде комсомола он призывал: «Учиться, учиться и еще раз учиться». Эти ленинские заветы нашли воплощение в политике нашей партии и советского государства, которые создали невиданные по своим историческим аналогам возможности для расцвета образования и культуры в нашей стране.

Почему на данном этапе развития нашего общества делу получения знаний уделяется столь большое внимание? Реализация намеченного XXVII съездом партии курса на ускорение социально-экономического развития страны связана с научно-техническим прогрессом, с превращением науки в непосредственную производительную силу общества. Специальные исследования убедительно доказывают высокую экономическую эффективность образования. Есть данные о том, что от 30 до 40 процентов прироста национального дохода в развитых странах обеспечиваются за счет образования. Рост образованности молодежи положительно сказывается на улучшении ее производственной квалификации, качестве труда, рационализации и новаторстве, на быстроте овладения новейшей техникой, смежными профессиями, на усвоении приемов научной организации труда, экономии времени и материалов.

КПСС и советское правительство уделяют постоянное внимание делу совершенствования образования. Подтверждение этому — новая реформа школы. Срок обучения продлевается в ближайшие годы с 10 до 11 лет; начальная школа становится четырехлетней. Принимаются меры к улучшению трудового обучения и воспитания. В 12 пятилетке будет построено вдвое больше школ, чем в 11 пятилетке. Будет также воздвигнуто 800 новых комплексов профтехучилищ. Намечено открыть сотни новых станций юных техников, юных натуралистов, спортивных школ. Расширяется сеть научных обществ учащихся, кружков, детских клубов.

Изменится и само содержание школьных знаний. Будет лучше обеспечено знакомство с новыми технологиями, компьютерами, робототехникой. Ученики получат более глубокие политические знания, ознакомятся с новыми социальными процессами в стране и мире в целом. Начнет издаваться новый политический журнал для старшеклассников. Расширяется цикл факультативных занятий по гуманитарному, физико-математическому, техническому и биохимическому профилям с целью развития талантов и способностей учащихся.

В День знаний вся страна сердечно приветствует учителей и учеников и желает им новых больших успехов.

Вице-президент Академии педагогических наук СССР

Ю. К. Бабанский

Жозеф Луи Лагранж

К 250-летию со дня рождения

Кандидат физико-математических наук *С. Г. ГИНДИКИН*

Письмо из Турина. В августе 1755 г. великий Эйлер (1707—1783) получил из Турина письмо от 19-летнего Лагранжа, который и прежде писал ему. У Эйлера, несомненно, уже успело сложиться мнение, что его корреспондент является талантливым сформировавшимся математиком, несмотря на его молодость. И все же содержание последнего письма поразило ученого.

С конца XVII века внимание математиков все более привлекали задачи, которые сейчас принято называть *вариационными*, а тогда обычно называли *изопериметрическими*. Все началось с задачи о *брахистохроне* — кривой наибыстрейшего спуска между двумя точками. Эту задачу поставил Иоганн Бернулли (1667—1748). Впрочем, задачи о кривых, обладающих теми или иными свойствами максимума-минимума, возникали и раньше: окружность при заданной длине ограничивает фигуру наибольшей площади (изопериметрическое свойство, отсюда и название класса задач), прямая — кратчайшее расстояние между точками и т. д. Число таких задач росло, математики с удовольствием решали их, подбирая свой «ключ с секретом» к каждой из них.

Однако стиль эпохи расцвета дифференциального и интегрального исчисления требовал попытаться найти общий метод, сформировать исчисление для решения изопериметрических задач. Такой метод нащупал в 1732 г. сам Эйлер. Его основное наблюдение состояло в том, что кривые, являющиеся решением этих задач, отвечают решениям некоторых дифференциальных уравнений. В выводе этих уравнений он видел основную задачу. Трудность здесь состояла в том, что речь шла о поиске экстремальной кривой (а не экстремальной точки) и поэтому известные приемы поиска экстремума были неприемлемы. Лишь окольным путем, заменив кривые на ломаные, Эйлеру удалось преодолеть эту трудность.

Но Лагранж, с решительностью, присущей молодости, отважился применить именно к кривым основную схему поиска экстремума из обычного анализа. Эта схема, как знает сейчас любой девятиклассник, состоит в замене функции $y=f(x)$ на ее главную часть $dy=f'(x)dx$ (ее *дифференциал*) с последующим решением уравнения $dy=0$ (то есть $f'(x)=0$). Лагранж придумал соответствующее понятие для кривой l, обозначил его δl (по аналогии с dy); позже δl стали называть *вариацией*. Уравнение $\delta l=0$ и привело его сразу к тем дифференциальным уравнениям — их теперь называют *уравнениями Эйлера-Лагранжа*,— к которым Эйлер шел кружным путем.

Короткой информации Эйлеру было достаточно, чтобы оценить все преимущества усовершенствований Лагранжа. Письмо Лагранжа возродило и у самого Эйлера интерес к экстремальным задачам. Уже в 1756 г. он делает в Берлинской академии два сообщения, связанные с методом Лагранжа. В том же году Лагранж по представлению

Эйлера был избран иностранным членом этой академии — редкая честь для молодого ученого, который еще не успел опубликовать своих трудов.

Эйлер не торопится публиковать свои новые результаты, предоставляя своему молодому коллеге, не торопясь, подготовить к печати свою работу. Он разъясняет свою позицию в письме от 10 октября 1759 г.:

«Твое аналитическое решение изопериметрической проблемы содержит, насколько я вижу, все, чего только можно желать в этой области, и я чрезвычайно рад, что эта теория, которой после первых моих попыток я занимался едва ли не один, доведена тобой до величайшего совершенства. Важность вопроса побудила меня к тому, что я с помощью твоего освещения сам вывел аналитическое решение. Я, однако, решил скрывать это, пока ты не опубликуешь свои результаты, так как я никоим образом не хочу отнимать у тебя часть заслуженной тобой славы».

Замечательный пример научной этики!

Письмо Эйлера добавило решимости Лагранжу опубликовать сделанное, и во II томе «Туринских записок» за 1761—1762 гг. появляется его мемуар «Опыт нового метода для определения максимумов и минимумов неопределенных интегральных формул». В 1764 г. публикует свои результаты и Эйлер, предваряя публикацию словами:

«После того как я долго и бесплодно трудился над решением этого вопроса, я с удивлением увидал, что в «Туринских записках» задача эта решена столь же легко, как и счастливо. Это прекрасное открытие вызвало у меня тем большее восхищение, что оно значительно отличается от данных мною методов и значительно их превосходит по простоте».

Заметим, что Эйлер не упоминает предшествовавшей переписки. Эйлер предлагает называть новый метод «вариационным исчислением» по аналогии с дифференциальным исчислением.

Таким был научный дебют Лагранжа. В одном отношении он уникален. Известны и другие примеры, когда великие математики получали первые крупные результаты в том же возрасте, что и Лагранж. Однако при этом речь шла обычно о решении конкретных задач. Интерес же к совершенствованию метода как такового приходит с годами. Мы же видим, что уже в первой работе Лагранжа проявилось то, что будет всегда отличать его в дальнейшем: полное прояснение ситуации, совершенствование метода, поиск первопричины ценится выше конкретных задач.

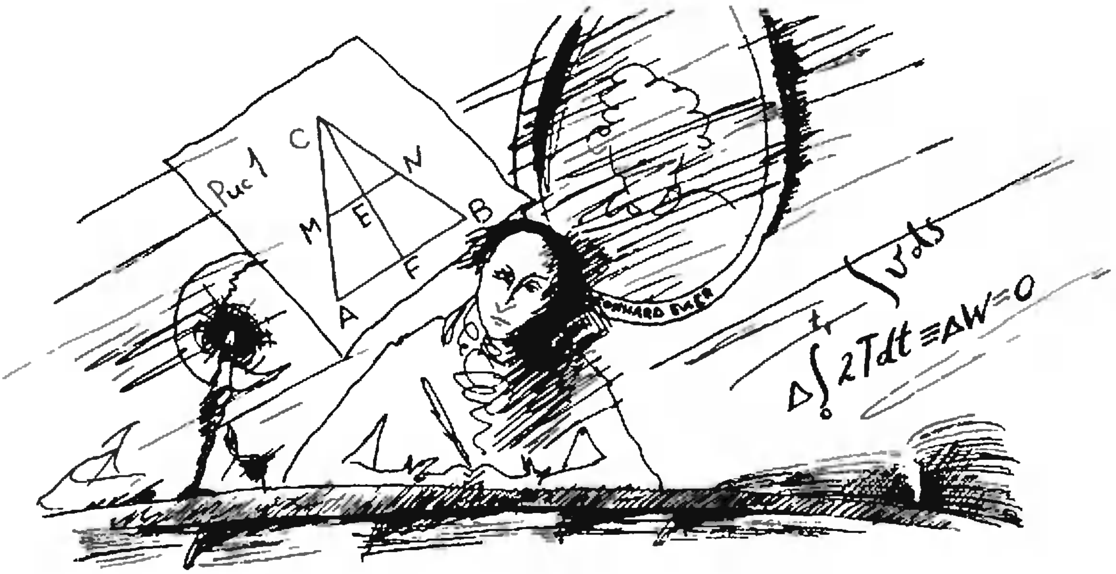
Джузеппе Луиджи. Мы рассказали о первой великой работе Лагранжа, но все же стоит сказать несколько слов о более ранних событиях его жизни. Жозеф Луи Лагранж родился 25 января 1736 г. в Турине, в Италии. Впрочем, на родине его называли Джузеппе Луиджи. Его прадед приехал из Франции и поступил на службу к герцогу Савойскому, а дед и отец продолжали служить в должности казначея фабрик и строений. К рождению будущего математика семья разорилась.

«Если бы я был богат, я, вероятно, не достиг бы моего положения в математике; а в какой другой деятельности я добился бы тех же успехов?» — говорил впоследствии ученый.

Впрочем, поначалу семейные планы предназначали Жозефу Луи карьеру адвоката, и в 14 лет он определяется в Туринский университет. Однако вскоре он перешел в Артиллерийскую школу, что было связано с усилившимся интересом к математике. В 19 лет он — профессор математики в этой школе (по некоторым сведениям, еще раньше).

Вокруг Лагранжа сложился кружок молодых математиков и физиков, который позднее преобразовался в Туринскую академию наук. С 1759 г. начинают выходить «Философско-математические сборники частного Туринского научного общества», которые привыкли называть просто «Туринскими записками». Мы уже говорили, что во II томе записок появился мемуар Лагранжа о вариационном исчислении, а I том содержал две его работы, в том числе статью «Исследование о природе распространения звука».

Основания статики. Лагранж был душой Туринского кружка. Опубликованные в «Туринских записках» статьи его товарищей несут отчетливый след сильного влияния Лагранжа. Особенно это относится к статье Фонсене, который был, по-видимому, лишь соучастником предпринятого Лагранжем систематического продумывания основ механики. Потом с сюжета этой статьи начнется его знаменитая «Аналитическая механика». Речь здесь идет о сопоставлении двух важнейших начал статики: принципа рычага и принципа сложения сил, приложенных к одной точке. Архимед положил в основу этой теории рычага аксиому о равновесии рычага с равными плечами и грузами и о двойной нагрузке на точку опоры в этой ситуации. Многие авторы пытались уточнить и дополнить рассуждения Архимеда, но они, по словам Лагранжа, «нарушив простоту ...почти ничего не выиграли с точки зрения точности». Лагранж отмечает, что первую часть аксиомы естественно считать очевидной из соображений симметрии: «нельзя усмотреть основания, в силу которого один груз перетянул бы другой». Он, однако, не видит никаких логических оснований к тому, что нагрузка на точку опоры при этом должна быть равна обязательно сумме весов грузов:



«по-видимому, все механики рассматривали это допущение как результат повседневного наблюдения, которое учит нас, что тяжесть тела зависит только от его массы, но ни в какой мере не зависит от его формы».

Лагранж предлагает вывод второй половины аксиомы Архимеда из первой. Он рассматривает однородную треугольную пластину ABC, где основание AB равнобедренного треугольника горизонтально. Вершины A, B нагружаются равными грузами p, а вершина C грузом $2p$. Пластина опирается на среднюю линию MN, параллельную AB (рис. 1). Она будет находиться в равновесии, что следует из рассмотрения пары рычагов AC, CB с точками опоры M, N в силу первой части аксиомы Архимеда. Но тогда в равновесии будет и рычаг CF, где F середина AB с точкой опоры E — серединой CF (в ней пересекаются MN и CF). Следовательно, нагрузка в точке F должна быть равна грузу $2p$ в точке C (строго говоря, здесь применяется обращение первой части аксиомы Архимеда, которое легко выводится), а это в точности нагрузка на точку опоры в рычаге AB. Лагранж аккуратно отмечает, что прием с рассмотрением равновесия плоской пластины относительно стержня он почерпнул у Гюйгенса.

Далее, Лагранж рассматривает принцип сложения сил, приложенных к одной точке, который легко обосновывается при помощи рассмотрения сложения движения. Существенная разница в принципах состоит в том, что в одном случае силы прикладываются к разным точкам, а в другом — к одной. Тем не менее многие утверждения статики можно выводить как из одного принципа, так и из другого. Возникает желание вообще отказаться от принятия принципа рычага за аксиому, но Лагранжа настораживает, что все известные выводы аксиомы Архимеда из закона сложения сил весьма искусственные:

«...хотя, строго говоря, оба принципа рычага и сложения движений всегда приводят к одним и тем же результатам, интересно отметить, что наиболее простой случай для одного из этих принципов становится наиболее сложным для другого».

Интуиция позволила Лагранжу безошибочно обнаружить тонкое место, хотя он и не смог до конца объяснить его. Оно связано с взаимоотношением механики и геометрии. Дело в том, что закон сложения сил, приложенных к одной точке, не зависит от аксиомы параллельных, в то время как в пространстве Лобачевского нагрузка на точку опоры рычага всегда превышает сумму весов приложенных грузов. В выводе второй половины аксиомы Архимеда используется утверждение о том, что высота равнобедренного треугольника пересекается со средней линией в ее середине; а это опирается на аксиому параллельных и не справедливо в геометрии Лобачевского. По-видимому, Лагранж еще не знал этого, хотя известно, что он размышлял над проблемой V постулата.

Принцип наименьшего действия. Во II томе «Туринских записок» вслед за мемуаром о вариационном исчислении была помещена статья Лагранжа «Приложение метода, изложенного в предыдущем мемуаре, для решения различных задач динамики». И здесь Лагранж следует по стопам Эйлера. В 1744 г. Мопертюи (1698—1759) сформулировал очень общий и туманный принцип, согласно которому все в природе, включая механическое движение, происходит так, чтобы некоторая величина — действие — достигала своего минимального значения. Эйлер для случая движения точки в центральном поле превратил это неопределенное утверждение в совершенно точное, определив действие в этом случае как интеграл скорости по пути $\int v\, ds$. Лагранж обобщил принцип Эйлера на случай произвольной системы точек, между которыми имеются связи и которые взаимодействуют произвольным образом. Определив действие в этой общей ситуации, Лагранж, пользуясь разработанной им техникой вариационного исчисления, решает разнообразные задачи динамики, включая гидродинамику. Как пишет Фурье (1768—1830):

«Он сводит все законы равновесия и движения к одному принципу и, что не менее удивительно, он их подчиняет одному методу исчисления, изобретателем которого он сам является».

Посещение Парижа. В 1766 г. Лагранжу исполнилось 30 лет. Это был важный рубеж в его жизни. Он признан в научном мире: в 1764 и 1766 гг. он удостаивается премий Парижской академии за исследование движения Луны и спутников Юпитера. Провинциальный Турин становился тесен для научной деятельности Лагранжа. В личной жизни он был непритязателен, отличался слабым здоровьем, его скромность в общении с людьми нередко приобретала форму застенчивости и даже нелюдимости. Он вел обширную переписку, но как много дает непосредственное общение с учеными, Лагранж имел возможность убедиться во время поездки в Париж в 1755 г. Лагранж сопровождал своего друга Карачиоли, назначенного посланником в Лондон. Впрочем, до Лондона Лагранж не доехал.

«Опасно заболев после обеда у аббата Нолле, на котором Нолле угощал его кушаньями, приготовленными на итальянский лад, Лагранж не мог поехать в Лондон, а остался для лечения в Париже и по выздоровлении поспешил вернуться в Турин»,— вспоминал его друг и биограф Деламбр.

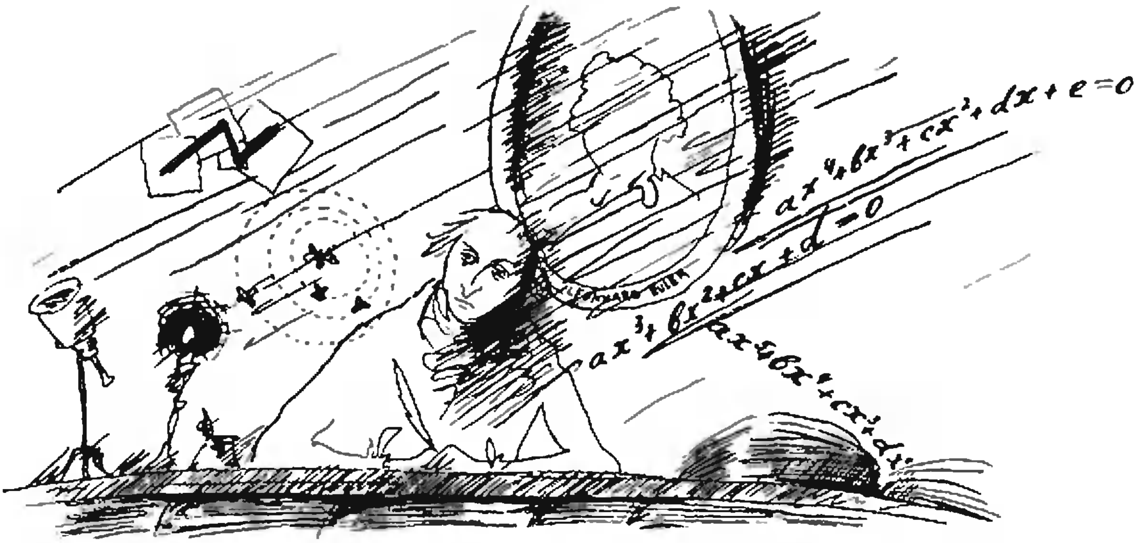
Дело было в том, что в северной Италии для приготовления пищи используют касторовое масло, предварительно сильно прожаренное. На кухне у Нолле, где решили приготовить обед «на итальянский лад», воспользовались касторовым маслом без необходимой подготовки, и оно в полной мере проявило свои известные лекарственные свойства. Однако в научном плане болезнь была плодотворной. Лагранж много общается с крупнейшими французскими математиками Даламбером (1717—1783), Клеро (1713—1765), Кондорсе (1743—1794), но и среди менее знаменитых ученых были такие, которые остались его друзьями на всю жизнь. Лагранж неоднократно повторял, что эти полгода, проведенные в Париже, были самым счастливым периодом в его жизни.

Лагранж в Берлине. В 1766 г. Эйлер уезжает из Берлина в Петербург, освободив место директора физико-математического класса Берлинской академии наук. Он предлагает Фридриху II в качестве своего преемника Лагранжа. Эта кандидатура была энергично поддержана Даламбером, с мнением которого король считался в еще большей степени. Уже в ноябре 1766 г. Лагранж в Берлине, хотя король Сардинии неохотно расстался с ученым. Лагранж оказался в академии не в лучшие ее дни. Здесь не было ни Эйлера, ни Даламбера, ни Мопертюи. Однако здесь работал очень оригинальный математик Ламберт (1728—1777), доказавший в частности, иррациональность числа π. У Лагранжа и Ламберта много точек соприкосновения в математике, чем-то они напоминают друг друга и по-человечески. Их дружба продолжалась десять лет до смерти Ламберта и была очень существенна для них обоих. Нелегко было замкнутому Лагранжу приспособиться к жизни прусского двора. Но он, в отличие от Эйлера, смог это сделать и избежать конфликтов. Лагранж ведет размеренную жизнь: внешние обязанности, встречи, переписка занимают большую часть дня, но весь вечер после обязательной прогулки отдан занятиям наукой в тишине, за закрытыми дверями.

«Аналитическая механика». Лагранж провел в Берлине чуть больше двадцати лет. Это была пора его зрелости, самый продуктивный период его жизни. Есть несколько великих ученых, в наследии которых есть одна главная книга («Начала» у Ньютона, «Маятниковые часы» у Гюйгенса). У Лагранжа такой книгой была «Аналитическая механика». Она вышла в 1788 году, когда Лагранж был уже в Париже. Но она вобрала в себя то главное, что было сделано в Берлине, а задумано еще в Турине. Замысел книги лучше всего усвоить из слов самого автора:

«Имеется уже несколько руководств по механике, но план этого сочинения совершенно новый. Я имел в виду привести всю теорию этой науки и искусство решения относящихся к ней задач к общим формулам, простое развитие которых давало бы все необходимые для решения всякой задачи уравнения».

Итак, коротко говоря, Лагранж собирается показать, что чисто аналитических процедур достаточно для решения механических задач (чтобы подчеркнуть это, Лагранж демонстративно не пользуется чертежами), что можно предложить «однообразные» (как мы бы сказали сегодня, алгоритмические) правила рассмотрения таких задач и что имеются простые общие принципы, на которых вся механика



может быть построена. Цель дальнейшего — продемонстрировать, что из основного уравнения (одной формулы!) может быть выведена вся механика.

Разработанный Лагранжем метод оказался прямо приспособленным к решению задач техники, от которых он также полностью отвлекался при создании аналитической механики. А. Н. Крылов перечисляет непосредственно последовавшие применения лагранжевой механики: теория механизмов Понселе, инженерный расчет сооружений, в частности, больших железных мостов, потребовавшихся в связи с развитием железных дорог, баллистические задачи, возникающие с переходом от гладкоствольных к нарезным орудиям (после Крымской войны), теория гироскопов. Он заканчивает:

«Таких примеров из техники и физики можно привести неисчислимое множество, но и сказанного достаточно, чтобы видеть то значение, которое имеет знаменитое сочинение Лагранжа в общем развитии науки и техники во всех их областях, и то, насколько Лагранж был прав, что, не останавливаясь на частностях, придал своему изложению самую общую аналитическую форму; поэтому его методы одинаково приложимы и к расчету движения небесных тел, и к качаниям корабля на волнении, и к расчету гребного винта на корабле, и к расчету полета 16-дюймового снаряда, и к расчету движения электронов в атоме. Отсюда можно судить о необыкновенной гениальности создателя этих методов — Жозефа Луи Лагранжа».

Эти строки были написаны в 1936 г.

Небесная механика. Среди нескольких типов механических задач, рассмотренных Лагранжем, несомненный приоритет имели задачи небесной механики. Такова была система ценностей в математике XVIII века, что ни один крупный математик не мог пройти мимо задач, связанных с согласованием закона всемирного тяготения и результатами непосредственных астрономических наблюдений. Лагранж видит свою роль лишь в решении математической задачи, после чего метод передается в руки вычислителей. Лагранж начинает систематически разрабатывать математическую теорию возмущений, основы которой уже были заложены его великими предшественниками. Этими проблемами он занимался параллельно с более молодым, но уже зарекомендовавшим себя Лапласом (1749—1827). Они чрезвычайно отличались по стилю занятий наукой. Для Лапласа ориентирами были совершенно конкретные задачи небесной механики, и метод для него был лишь средством достижения конкретных целей. При работе над близкими задачами выявлялись сильные и слабые стороны каждого из великих ученых, и они удачно дополняли друг друга.

Арифметические работы. Хотя механика во весь берлинский период была главным делом Лагранжа, в его поле зрения попадают и другие математические вопросы, в том числе несколько арифметических задач. Он занимался ими под несомненным влиянием Эйлера. Арифметике посвящено всего 9 небольших работ. Они носят характер самостоятельных этюдов, это маленькие шедевры, за которыми не просматривается намерения создать большое полотно (что было характерно для его занятий механикой). Быть может, это были упражнения в часы отдыха от главного дела жизни. Мы назовем здесь лишь наиболее известный арифметический результат Лагранжа: *любое натуральное число можно представить в виде суммы не более четырех квадратов.*

Алгебраические размышления. Проблемы алгебраических уравнений и их систем занимали Лагранжа в разных аспектах. В 1770—71 гг. вышел мемуар «Размышления об алгебраическом решении уравнений», несомненно задуманный еще в Турине. Собственно, это целая книга, занимающая более 200 страниц, которая, по словам Коши, знаменовала начало новой эры в алгебре. Наряду с «Аналитической механикой» это вершина творчества Лагранжа.

Лагранж стремится разрешить следующую задачу: почему не удается получить формулу для корней алгебраических уравнений степени, большей 4. Он подвергает анализу выражения, стоящие под радикалами в формулах для квадратного и кубического уравнений, приведя убедительные аргументы в пользу того, что для уравнений 5-й степени аналогичные выражения, а значит, и формулы существовать не могут. Это доказал позднее Абель, а общие глубокие идеи о перестановках корней послужили Галуа (1811—1832) отправной точкой для построения его великой теории.

Кризис. Математика была единственной страстью Лагранжа и ее было достаточно, чтобы заполнить всю его жизнь, доставить ему немало счастливых минут. Все остальное было подчинено занятиям наукой. Деламбр передает отношение Лагранжа к музыке:

«Я ее люблю, поскольку она меня изолирует: я слышу первые три такта, на четвертом такте не различаю ничего, я предаюсь своим размышлениям, ничто меня не прерывает, и тогда я решаю наиболее трудные из проблем».

Для Лагранжа было характерно, что великие цели познания истины, мировой гармонии не переплетались у него с личными амбициями, с желанием соревноваться, обгонять современников. Если он узнавал, что кто-то успешно занимается проблемой, над которой он сам думал, он немедленно прекращал размышления с искренним ощущением «освобождения от обязанности». Благодаря всему этому Лагранжу было присуще необычайное душевное равновесие, дававшее силы стойко переносить тяготы жизни, не прекращать напряженных занятий.

Лишь одно могло поколебать Лагранжа — потеря ориентиров, неуверенность в выборе правильных целей. И это ощущение начинает появляться вскоре после переезда в Берлин. В 1772 г. он пишет Даламберу: «Не кажется ли Вам, что высшая геометрия близится отчасти к упадку, ее поддерживаете только Вы и Эйлер». Это пишет ученый, который находится в расцвете сил (ему 36 лет), у которого начинает складываться его «Аналитическая механика» и который только что опубликовал алгебраический мемуар, определивший развитие алгебры на 100 лет вперед!

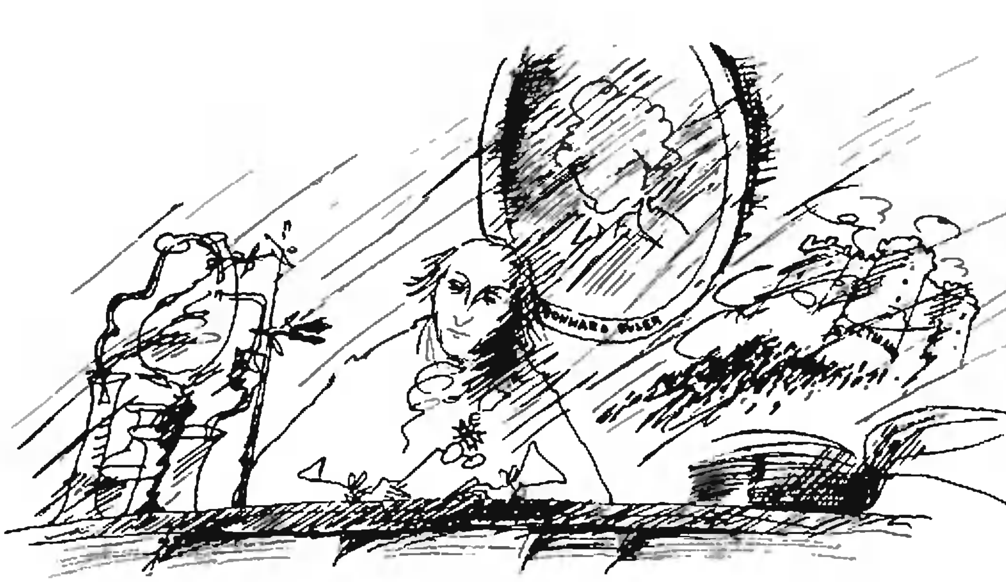
Ощущение заката математики не покидает Лагранжа. 21 сентября 1781 г. он опять пишет Даламберу:

«Я начинаю чувствовать силу моей инерции, которая понемногу увеличивается, и я не могу сказать с уверенностью, что в течение будущего десятилетия я еще буду заниматься математикой. Я думаю также, что шахта становится слишком глубока и что ее придется рано или поздно бросить, если не будут открыты новые рудоносные жилы».

В Париже. Предчувствие не обмануло Лагранжа. В 1787 году, вскоре после смерти Фридриха II, он переехал в Париж и, по существу, прекратил активные занятия математикой. Лагранжу 51 год. В один 1783 год мир лишился и Эйлера, и Даламбера. Лагранжа восторженно встречают французские ученые, теперь он несомненно «первый геометр Европы», и лишь Лаплас может всерьез конкурировать с ним. К Лагранжу неравнодушны при дворе. Он необычно легко отвлекается от геометрии в пользу занятий философией, химией, историей, медициной, активно участвует в опытах великого химика Лавуазье (1743—1794). Но вскоре наступило время, когда большинство французских ученых прервали свои обычные занятия. Франция вступила в период революции, в которой ученые приняли самое активное участие. Никогда прежде не представлялась для них возможность непосредственно влиять на жизнь страны. Они входят в муниципалитет, Учредительное и Законодательное собрания; астроном Байи становится мэром Парижа, математик Лазар Карно возглавляет оборону Франции (его называли «организатором побед»), а Монж морским министром. Резко активизировалась и деятельность ученых, направленная на решение практических задач.

Лагранж держится в стороне от политики. Закон 1793 г. предписывает иностранцам покинуть Францию, но специальный декрет Комитета общественного спасения делает для Лагранжа исключение. В самые трудные дни он не покидает Франции, разделяя судьбу своих коллег. Участие в политической жизни стоило жизни Байи, Кондорсе. Лавуазье был казнен как откупщик. Лагранж пристально наблюдает за происходящим. Деламбр сохранил слова Лагранжа, сказанные после гильотинирования Лавуазье:

«Нужен был один момент, чтобы снести эту голову, и, может, будет недостаточно ста лет, чтобы появилась подобная».



Как ученый, Лагранж добросовестно выполняет все поручения. Постепенно размножились многочисленные комиссии и бюро, в которые было принято включать ученых. Он занимается проблемами ремесленных промыслов, измерением долготы на море, оценивает запасы хлеба и мяса в стране, чтобы оценить вероятность возникновения голода. Пишет работу с расчетом взрывной силы пороха в орудийном стволе (она не было опубликована при жизни автора, возможно, это была одна из первых засекреченных научных работ).

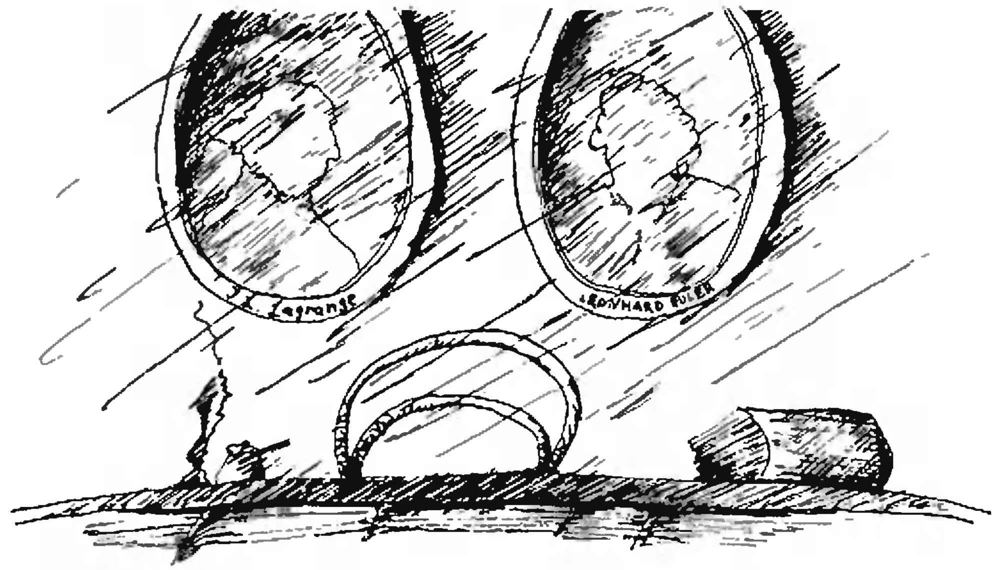
Педагогическая деятельность. Революционная Франция в бурные, богатые переменами 93—95 гг. много внимания уделяла реформе образования. «После хлеба просвещение есть важнейшная потребность народа» — провозгласил Дантон. О народном образовании думали не меньше, чем о снабжении народа хлебом. Организуются Нормальная школа для подготовки учителей и Политехническая школа (первоначально она называлась Центральная школа общественных работ) для подготовки военных инженеров. Никогда прежде не занимавшийся преподаванием Лагранж с увлечением читает лекции в обеих школах. При его интересе к продумыванию основ, лекции — повод заново осмыслить современную математику, ее фундаментальные понятия, связи между различными областями. Из лекций родились его книги: «Теория аналитических функций» в 1797 г. и «Лекции по исчислению функций» в 1801 г.

Последние годы. При директории и консулате положение Лагранжа упрочилось. В годы империи он становится графом, сенатором, кавалером ордена Почетного Легиона. Наполеон не был равнодушен к математике и хорошо понимал истинную цену Лагранжу. Будни императора оставляли ему мало времени для покровительства наукам. Он ограничивался раздачей наград да короткими характеристиками, непосредственно предназначавшимися для истории. Лагранжа он назвал «Хеопсовой пирамидой науки».

10 апреля 1813 г. Лагранж умер. Деламбр вспоминает, с каким удивительным умиротворением встретил он свой последний час:

«Я почувствовал, что умираю; мое тело ослабело мало-помалу, мои духовные и физические способности незаметно угасают; я с любопытством наблюдаю постепенный прогресс уменьшения сил, и я достигну конца без сожаления, без печали, ибо спуск очень отлогий... Я завершил свой путь; я снискал некоторую известность в математике. Я не питал к кому-либо злобы, я никому не сделал плохого, и я хочу кончить свой путь...»

В свой бурный век Лагранж смог прожить размеренную жизнь. Современники затруднялись припомнить детали, которые могли бы оживить его биографию. Про него не рассказывали анекдоты, как про Лапласа. А. Н. Крылов замечает, что история с обедом на итальянский лад в Париже (рассказанная выше), возможно, была единственным приключением в жизни Лагранжа. Вспоминали, что Лагранж помог улучшить положение Ламберта в Берлине, что он не побоялся в грозном 1793 году заступиться за Деламбра, которого хотели выгнать из комиссии мер, что он трогательно заботился о Пуассоне, когда тот был его учеником в Политехнической школе, что он умел удивительно слушать собеседника. А иногда возникает маленький, но выразительный штрих: все существо Лагранжа «было проникнуто тихой



иронией». И неожиданно именно этот скромный человек стал восприниматься как образец великого ученого и человека, причем не только математиками. Гёте писал:

«Математик совершенен лишь постольку, поскольку он является совершенным человеком, поскольку он ощущает в себе прекрасное, присущее истине; только тогда его творчество становится основательным, чистым, ясным, одухотворенным, действительно изящным. Все это требуется, чтобы уподобиться Лагранжу».

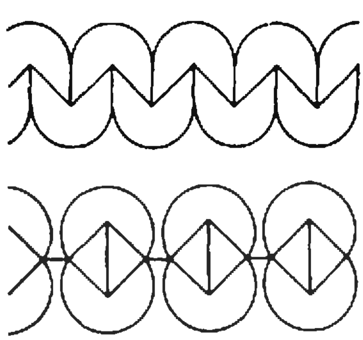
И в другом месте:

«Лагранж был безупречным человеком и именно поэтому и великим. Если безупречный человек наделен талантами, то он всегда становится благом человечества, носителем счастья и благородства, будь то художник, исследователь природы, поэт или кто-либо другой».

Эйлер и Лагранж воспринимаются сегодня как величайшие математики XVIII века, учитель и ученик, дарования которых поразительно дополняли друг друга. Эйлер, стремившийся заглянуть как можно дальше вперед, говорить о вещах, для которых еще нет подходящего языка, оставить потомкам задачи, которые долго будут служить ориентирами, и Лагранж, во всем добиравшийся до глубинных структур, стремившийся создать картину, лишенную белых пятен, передать последующим поколениям язык и методы, которые долгое время будут достаточны для решения новых задач.

Наша обложка

На второй странице обложки показаны три фотографии складчатых моделей, изготовленных из плоских листов ватмана без разрывов и склеиваний. Такие конструкции мы назовем *структурными пространствами с направляющими поверхностями*. Их можно получить из плоского листового материала (ватмана, тонкого картона, металла или пластмассы), складывая его по линиям в надлежащую сторону в соответствии со схемами, две из которых показаны на рисунке, а затем изгибая лист со складками, чтобы придать ему общую форму цилиндра. Для трех показанных моделей «направляющей поверхностью» служит цилиндр, но можно построить подобные структурные пространства и с другими направляющими поверхностями, например, коническими, гиперболическими и эллиптическими.



В качестве основы сети линий, по которым производятся складки, используются элементы различных паркетов (см. «Квант», 1979, № 2, с. 9) и решеток на плоскости. При этом здесь примеряются не только прямые или ломаные, но и кривые линии складок, что придает полученным моделям бо́льшую эстетическую выразительность.

Кроме эстетических достоинств, структурные пространства обладают различными интересными механическими свойствами (статическими и динамическими), вследствие которых они перспективны для поиска новых архитектурных и конструктивных форм.

А. И. Волков

Покатаемся на виндсерфере

Кандидат физико-математических наук
А. А. ЛАПИДЕС

Виндсерфинг — один из самых молодых видов спорта. Изобретенный в 1967 году, он через 15 лет завоевывает олимпийское гражданство, число его поклонников (и не просто болельщиков, а именно людей, активно им занимающихся) возрастает с каждым годом. Виндсерфинг завоевал мир!

Подобно громадной бабочке, виндсерфер грациозно парит над водной гладью в тихую погоду. В сильный ветер он дарит ни с чем не сравнимое ощущение полета, когда спортсмен практически лежит, касаясь спиной воды, а доска скользит по водной поверхности со скоростью несколько десятков километров в час. Те же, кто катался на виндсерфере в настоящий морской шторм, благодарны ему за великолепную возможность единоборства с разъяренной стихией.

Многие из вас наверняка наблюдали за виндсерфингом, а кое-кто пробовал и кататься. Не правда ли, удивительно, как вообще можно удержаться на такой узкой (60 сантиметров), легкой (20 килограммов) доске, управляя парусом (площадью 6 м^2), соединенным с доской с помощью шарнира?

Чтобы научиться кататься, необходимо, конечно же, располагать определенными физическими данными (хорошей координацией движений, нормальным вестибулярным аппаратом), уметь плавать, не бояться вынужденных купаний. Но в первую очередь надо хорошо понимать физику его движения. Как показывает опыт, поговорка «сила есть — ума не надо» для занятий виндсерфингом не годится.

И, разумеется, как и в любом другом деле, нужен большой запас настойчивости.

* * *

Прежде чем знакомиться с основами техники виндсерфинга, поговорим об одном из его прародителей — серфинге. Этот вид спорта, как известно, представляет собой катание по океанским волнам на «серфе» — узкой доске из легких пород дерева или из пластика.

Движение серфа происходит в так называемом режиме глиссирования, реализуемом только при высоких скоростях. В этом режиме также движутся суда на воздушных крыльях, скутера и воднолыжники. Он определяется гидродинамической силой F. Она возникает при обтекании специальных подводных крыльев, днища скутера, водных лыж или серфа, наклоненных к вектору скорости под некоторым углом атаки α, и направлена перпендикулярно обтекаемой плоскости. Эту силу можно разложить на два направления — параллельно вектору скорости движущегося судна и перпендикулярно ему. Первая составляющая называется силой сопротивления, вторая — подъемной силой. При движении судов сила сопротивления уравновешивается силой тяги, в то время как серф по ровной поверхности воды движется лишь замедленно. Набрать скорость он может только на волнах, о чем мы расскажем чуть позже. Отметим, что угол атаки α создается смещением спортсмена к корме доски. Нос доски высовывается из воды, подъемная сила приложена к задней части доски, а смещение спортсмена к корме таково, что сумма возникающих моментов относительно любой поперечной оси равна нулю (рис. 1).

Появление подъемной силы в режиме глиссирования приводит к тому, что судно массы m_0 приподнимается над поверхностью воды. Из-за уменьшения погруженной в воду части судна уменьшается сила Архимеда $F_А$ до величины $m_0g - F_{под}$; при этом уменьшается угол атаки α. На больших скоростях $F_{под}$ практически достигает величины m_0g, в воду погружена малая часть судна, и резко уменьшена сила сопротивления.

В этом режиме плавный поворот серфа осуществляется креном глиссирующей поверхности, когда спортсмен смещается на ее край (говорят: «изменением поперечной загрузки доски»). На рисунке 2 изображен поворачивающийся серфист, но все рассуждения применимы для воднолыжника и скутера. Здесь m — масса доски, M — масса спортсмена. Силы приложены к разным точкам. Поэтому, чтобы скомпенсировать опрокидывающий момент, спортсмен отклоняется внутрь поворота.

Горизонтальная составляющая $F_{под}$ приводит к появлению центростремительного ускорения $a_ц$, а так как вертикальная составляющая $F_{под}$ уменьшилась по сравнению со случаем прямолинейного движения, то доска опускается чуть глубже в воду. Сила Архимеда F_A возрастает, так что по вертикальной оси выполняется условие равновесия.

Теперь рассмотрим движение серфа не по ровной, а по наклонной поверхности воды — по волне. На рисунке 3 все силы приложены в одной точке. На самом деле это, конечно, не так: силы приложены в разных точках, и приходится, смещаясь к корме или к краю серфа, создавать дополнительный момент силы Mg, компенсирующий внешние моменты. Спортсмен вынужден постоянно балансировать, его центр тяжести все время смещается от некоего среднего равновесного положения.

На систему (серф+спортсмен) действуют три силы — тяжести $(M+m)g$, сила Архимеда F_A и гидродинамическая сила F (которую и здесь можно представить как сумму $F_{сопр}$ и $F_{под}$). Спортсмен неподвижен относительно ската волны, то есть перемещается вместе с ней с постоянной скоростью (волна как бы несет спортсмена). Поэтому условие равновесия состоит в равенстве нулю векторной суммы этих трех сил.

Однако гидродинамическая сила возникает лишь при движении относительно воды с некоторой скоростью. В данном же случае мы только что приняли, что спортсмен покоится относительно ската волны. Но откуда же тогда берется эта сила?

Все дело в том, что покой относительно волны вовсе не означает покоя относительно воды. Когда распространяется волна, элементы водной поверхности движутся практически лишь по вертикали. Колебания вверх — вниз различных элементов поверхности воды, расположенных вдоль прямой, по которой распространяется волна, «скоординированы» таким образом, что наблюдатель, рассматривающий всю поверхность целиком, видит бегущую со скоростью v вдоль горизонтали волну (на рисунке 4 изображена поверхность воды в два близких момента времени, стрелки показывают скорости w отдельных элементов поверхности жидкости).

Это означает, что на неподвижного относительно ската волны спортсмена «набегает» вода со скоростью $\vec{v}'$ (рис. 3), являющейся векторной суммой скоростей $(-\vec{v})$ и $\vec{w}$ (знак минус перед горизонтальной составляющей скорости возникает из-за перехода в движущуюся систему отсчета). Эта скорость и приводит к появлению гидродинамической силы.

У спортсмена есть возможность подняться выше на скат, обычно и используемая на практике,— она состоит в ориентации серфа не вдоль направления распространения волны, а под углом γ к ней (рис. 5). Разворачивая серф боком, спортсмен резко увеличивает силу сопротивления. Собственно, только этой возможностью и пользуются, чтобы подняться достаточно высоко на волну, так как при ориентации серфа параллельно скорости v точка равновесия находится при достаточно малых $\varkappa$.

Одна из фигур, выполняемых мастерами серфинга, такова.

Развернув серф боком, спортсмен поднимается по скату, затем резко разворачивает серф параллельно v и начинает глиссировать вниз. Затем, продолжая глиссировать по ровной воде, плавно разворачивается на 180° (физика поворота описана ранее). Теперь он движется на волну, скорость серфа падает, спортсмен въезжает на волну (можно в принципе и прекратить глиссирование, остановившись или уменьшив угол атаки α, и просто подождать, когда волна, с которой он съехал, его догонит и поднимет наверх, как поплавок). Затем, не достигнув гребня (в точке ската с достаточно большим $\varkappa$), спортсмен вновь разворачивает доску на 180°, и все повторяется.

Обычно серфингисты едут не вниз по скату, а под некоторым углом γ к линии ската. Это позволяет им двигаться со скоростью в $1/\cos\gamma$ раз большей, чем скорость волны. Действительно, из рисунка 5 видно, что если спортсмен за время t проходит путь AB со скоростью u, даже оставаясь все время в точках ската волны с одинаковым значением $\varkappa$, то волна проходит за это время путь $AC=vt$. Отсю-

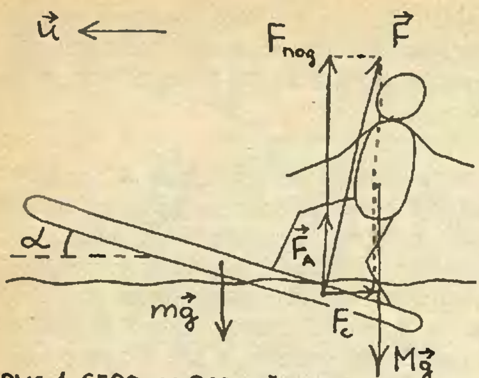


РИС. 1. СЕРФ НА РОВНОЙ ВОДЕ

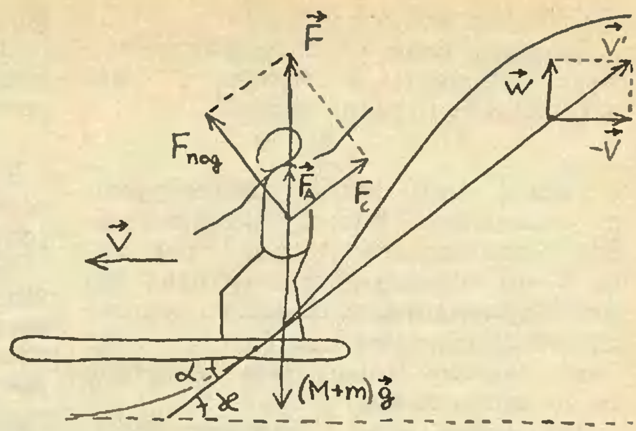


РИС. 3. СЕРФ НА ВОЛНЕ

Для простоты рассмотрения точки приложения сил $\vec{F}$ и $\vec{F}_A$ совмещены

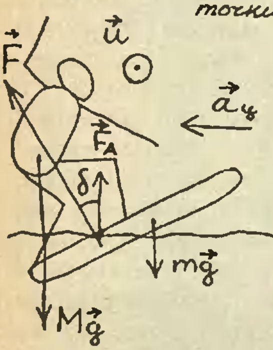
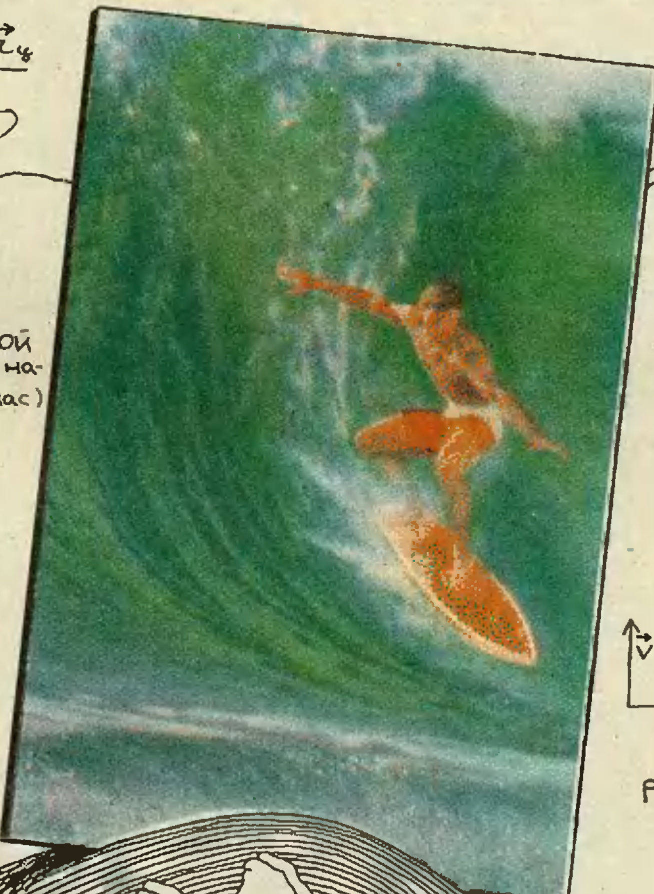


РИС. 2. ПОВОРОТ СЕРФА НА РОВНОЙ ВОДЕ (скорость направлена на нас)



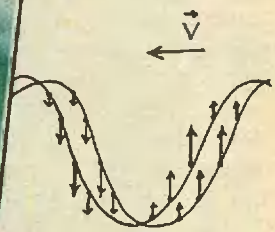


РИС. 4.

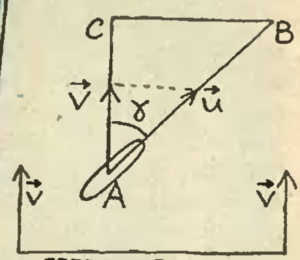
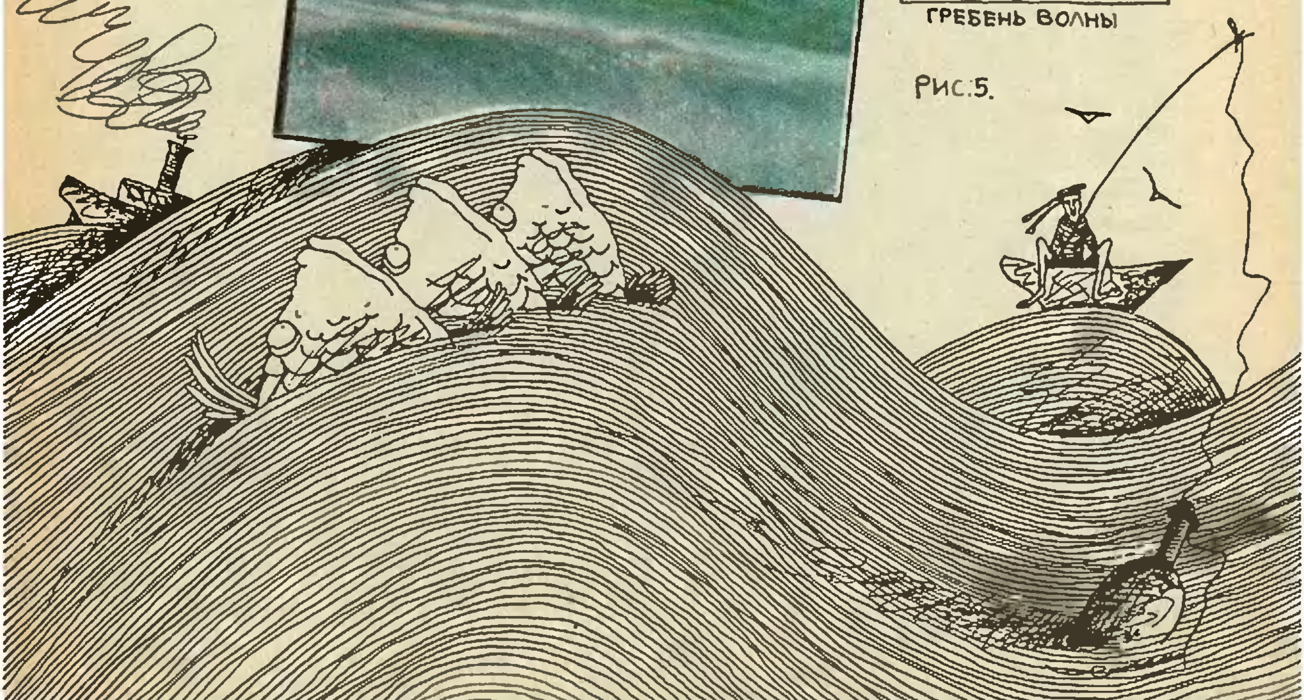


РИС. 5.



да следует, что $u=v/\cos\gamma$.

Высшим классом в серфинге считается проехать в «трубе» — завихряющемся гребне волны.

* * *

Второй прародитель виндсерфинга — парусный спорт. Ведь виндсерфер — это миниатюрная парусная яхта. В его конструкции сохранены основные элементы яхты, позволяющие двигаться ей против ветра.

За счет чего может яхта двигаться не по направлению ветра?

Для ответа на этот вопрос рассмотрим рисунок 6, на котором схематично изображена яхта с парусом. Направление ветра (жирная стрелка) образует угол δ с осью яхты и угол β с плоскостью паруса. Ветер действует на парус силой давления T перпендикулярно плоскости паруса (касательная составляющая скорости ветра не приводит к появлению силы, то есть трением воздуха о парус пренебрегаем). Казалось бы, яхта должна идти по направлению силы T. Однако ...

Рассмотрим движение яхты по двум направлениям — вдоль ее оси и перпендикулярно ей. На яхту со стороны воды действует сила сопротивления. Корпус яхты конструируется таким образом, чтобы лобовое сопротивление (зависящее от поперечного сечения при движении лодки вдоль ее оси) было много меньше ее бокового сопротивления сносу (зависящего от поперечного сечения при движении лодки в боковом направлении). Поэтому скорость движения яхты вдоль оси x может быть много больше скорости бокового сноса (дрейфа) вдоль оси y.

Большое боковое сопротивление легкой яхты — швербота — достигается с помощью шверта — тонкой пластины, расположенной под днищем яхты вдоль ее оси. Выбор оптимального режима движения — взаимной ориентации паруса, яхты, ветра и т. д. и т. п.— и составляет искусство яхтсмена.

Эти рассуждения показывают, что за счет взаимодействия корпуса яхты с водой можно идти против ветра. Отметим, что строго против ветра не может плыть ни одно парусное судно. Поэтому, если яхте необходимо продвигаться строго против ветра, она производит маневр, называемый лавировкой (рис. 7). Изменение курса (направления движения) достигается поворотом руля яхты в нужную сторону.

* * *

Теперь, наконец, обратимся к виндсерфингу — симбиозу серфинга и парусного спорта, детищу XX века.

Подобно любой парусной лодке, виндсерфер может двигаться против ветра и идти в лавировку. Однако, хотя он имеет шверт, у него нет руля, поэтому техника изменения курса здесь иная, нежели в парусном спорте.

Особенность виндсерфера состоит в том, что его мачта скреплена с доской не жестко, а с помощью шарнира, поэтому она может быть наклонена спортсменом в любую сторону. При наклоне паруса вперед или «на ветер» возникает момент сил, который приводит к повороту яхты по ветру, а при наклоне паруса назад или «по ветру» — момент, приводящий к повороту против ветра. На этом и основан принцип управления виндсерфером.

В слабый ветер виндсерфер проявляет все свойства яхты. Однако в сильный ветер он способен развить очень большую скорость и при катании по волнам (даже небольшим, высотой до 0,5 метра) демонстрирует свойства серфа.

При катании в сильный ветер необходимо как можно сильнее откренивать — наклонять — парус на ветер. В этом случае сила давления на парус направлена под углом вверх. Ее вертикальная составляющая, складываясь с подъемной силой, как бы вытягивает виндсерфер из воды. Доска начинает глиссировать. Спортсмен при этом висит, держась руками за парус. У него возникает ощущение, что он держится за ветер.

* * *

Мы рассмотрели лишь принципы управления виндсерфером. Как вы убедились, в их основе лежит ясное понимание действующих на него сил. Для лучшего закрепления теоретического материала советуем вам сделать лабораторную работу — записаться в секцию виндсерфинга и почувствовать все силы своими руками.

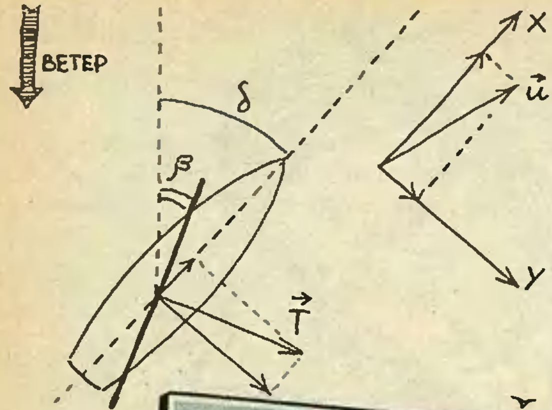
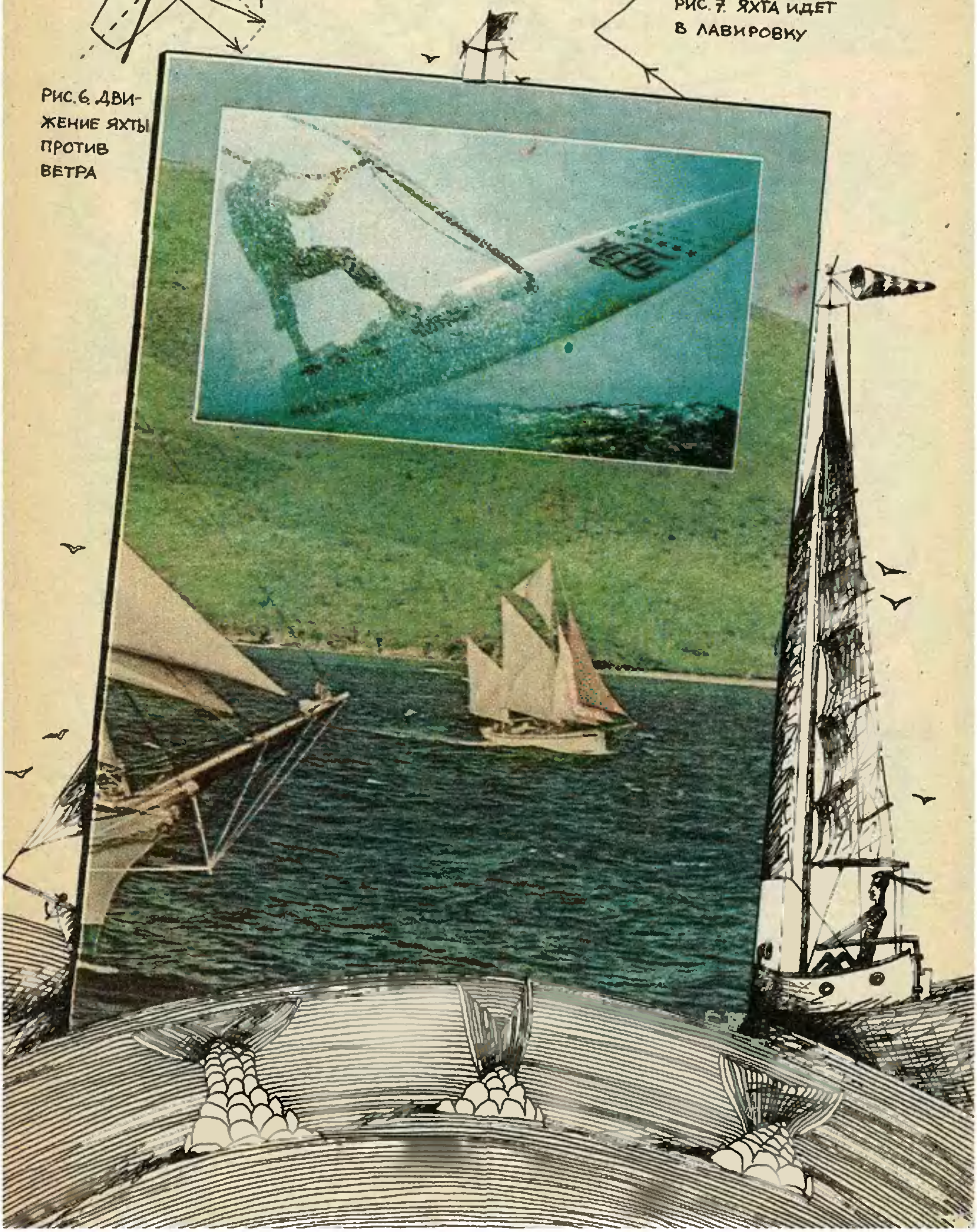
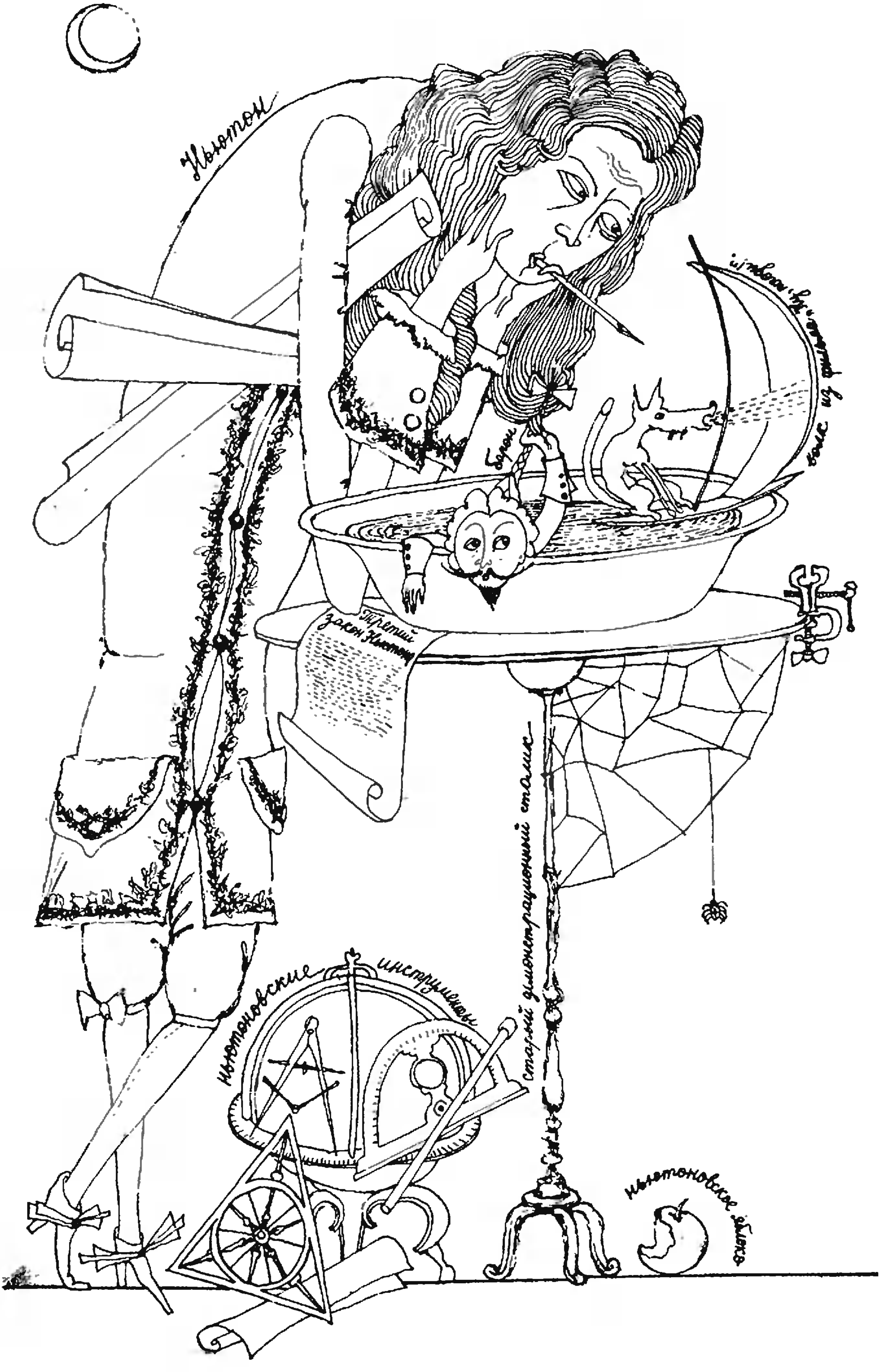


Рис. 6. Движение яхты против ветра

Рис. 7. Яхта идет в лавировку




Ньютон
Барон
Третий закон Ньютона
старый демонстрационный столик
ньютоновские инструменты
ньютоновское яблоко

Волк, барон и Ньютон

(О фильме «Ну, погоди!», романе Сирано де Бержерака и лазерном термоядерном синтезе)

Академик АПН СССР
В. А. ФАБРИКАНТ

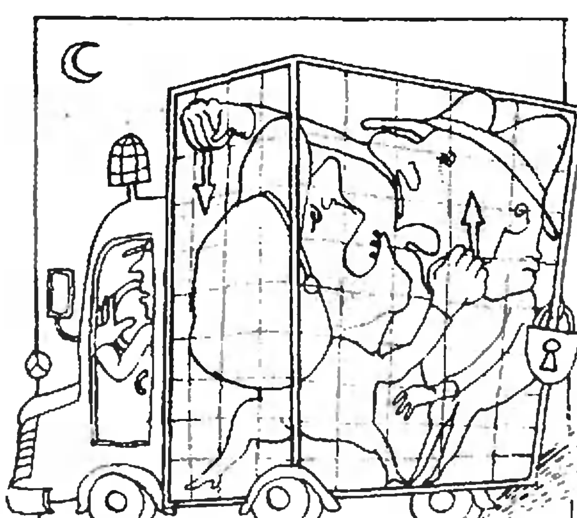
В этой статье пойдет речь о физическом явлении, которое можно было наблюдать в седьмой серии мультфильма «Ну, погоди!». Помните, как волк на парусной яхте старается догнать зайца, плывущего на пароходе? Для ускорения хода яхты волк дует в парус. На первый взгляд может показаться, что ситуация, в известном смысле, сходна с той, что была описана бароном Мюнхгаузеном: попав в болото, барон сам себя вытащил за волосы. Однако имеется существенное различие в этих двух случаях. Волк не нарушил один из основных законов механики — третий закон Ньютона, тогда как барон его «нарушил», что, конечно, невозможно.

В «Началах»*) Ньютона третий закон сформулирован так: «Действию всегда есть равное и противоположное противодействие, иначе — действия двух тел друг на друга между собой равны и направлены в противоположные стороны». Ньютон пояснил: «Если что-либо давит на что-нибудь другое или тянет его, то оно само этим последним давится или тянется. Если кто нажимает пальцем на камень, и палец его также нажимается камнем». Из третьего закона Ньютона следует, что никакое взаимодействие тел внутри замкнутой системы (из которой ничего не вылетает наружу) не может изменить движения системы в целом. В частности, взаимодействие отдельных частей организма барона Мюнхгаузена (рук и волос) не могло вызвать изменение скорости его погружения в болото, а тем более вытащить его оттуда.

Чтобы хотя бы замедлить погружение, барон должен был начать раздеваться и бросать с силой предметы своего туалета вниз в болото, то есть нарушить замкнутость системы. Здесь особенно полезны были бы тяжелые ботфорты. Наконец, барон мог стать на седло и прыгнуть за пределы болота. Но при этом он толкнул бы вниз коня и тем самым ускорил бы погружение бедного животного в болото.

Однако вернемся к «Ну, погоди!». Предположим, что парус яхты сделан из материи, которая поглощает струю воздуха, испускаемую Волком. Тогда яхта с Волком на ней представляла бы замкнутую систему, и при отсутствии ветра она не смогла бы сдвинуться с места, как бы Волк ни старался. Так же бесплодны были бы попытки Волка ускорить дутьем ход яхты: давление на парус воздушной струи, испускаемой Волком, уравновешивалось бы действием когтей Волка на палубу яхты. Дело в том, что дующий вперед Волк испытывает отдачу, направленную назад (действие и противодействие).

Здесь имеется аналогия с выстрелом из ружья или орудия, когда пуля или снаряд вылетают в одном направлении, а ружье или орудие начинают двигаться в противоположном направлении. Каждый охотник и артиллерист знает это. Еще ближе — аналогия с ракетой, из хвоста которой



Взаимодействие тел внутри замкнутой системы не может изменить движение системы в целом.

*) «Математические начала натуральной философии» — так назвал Ньютон свой главный труд, в котором изложил результаты исследований по механике (этот труд вышел в свет в 1687 году). В «Началах» (так коротко называют эту работу Ньютона) содержатся основные понятия классической механики, три закона движения (законы Ньютона) и закон всемирного тяготения.

вырываются продукты сгорания, а она сама летит в противоположном направлении.

В фильме «Ну, погоди!» на яхте стоит обыкновенный парус, который, конечно, отражает струю воздуха, испускаемую Волком. Струя после отражения уходит назад, выходит из системы «яхта с Волком». Иными словами, система перестает быть замкнутой. Возникает явление отдачи, ускоряющее движение яхты.

Вся реактивная авиация использует явление отдачи, возникающее при испускании двигателями назад газовых струй. Созданные советскими конструкторами во время Великой Отечественной войны «катюши», нагонявшие панический ужас на фашистов, использовали тот же эффект.

Возвращаясь к Волку, надо признать, что он оказался более сведущ в механике, чем барон. Вместе с тем можно внести рационализаторское предложение. Волку было бы выгоднее стать спиной к пароходу и дуть в обратную сторону — ведь парус не является идеальным отражателем для воздушной струи, струя от паруса уходит ослабленной.

Сирано де Бержерак

Эффект отдачи, как известно, лежит в основе применения ракет для космических путешествий. Вот тут мы подошли к французскому писателю Сирано де Бержераку (1619—1655). Это очень своеобразная фигура в истории мировой литературы. Сирано происходил из захудалого дворянского рода и всю жизнь очень нуждался. В ту эпоху процветали только поэты, поступавшие на службу в свиту кого-либо из богатых аристократов. Для Сирано такой путь был закрыт из-за его крайне независимого и вспыльчивого характера. Сирано писал стихотворные листовки, направленные против всесильного первого министра Франции кардинала Мазарини («мазаринады»). Он пытался разбогатеть за счет картежной игры, но безуспешно. Природа наградила Сирано огромным карикатурным носом, вызывавшим постоянные насмешки, что служило поводом для бесконечного числа дуэлей. И вот этот картежник и дуэлянт был глубоким мыслителем, последователем философа-материалиста Гассенди*) и создателем замечательного научно-фантастического романа «Иной Свет, или Государства и империи луны», изданного в 1657 году, уже после смерти автора. Роман носит явно атеистический характер, и в нем Сирано остроумно высмеивает библейские легенды.

Для нас интересно то, что в романе Сирано описывает свой полет на Луну... с помощью ракет! Есть старинная гравюра, изображающая Сирано, летящего к Луне в корзине, к которой прикреплены ракеты, испускающие огненные струи по направлению к Земле и тем самым поднимающие корзину. Таким образом, Сирано за триста лет предвидел применение ракет для космических путешествий. Любопытно также, что в романе, написанном более чем за тридцать лет до выхода в свет «Начал» Ньютона, Сирано утверждает, что притяжение Луной пересилит притяжение Землей на расстоянии, меньшем от Луны, чем от Земли, так как масса Луны меньше массы Земли, и даже вычисляет отношение этих расстояний (получает, конечно, неверный численный результат — 3 вместо примерно 9).

Сирано иронически описывает Луну как место, где находится земной рай. Он там якобы встречает пророка Илью и выясняет у него, как тот добрался до Луны. И пророк описывает свой способ путешествия, проти-

*) Пьер Гассенди (1592—1655) — французский философ и ученый. Занимался исследованиями по механике, акустике, оптике, теплоте.

воречащий третьему закону Ньютона. Пророк Илья построил железную колесницу (есть поверье, что гром во время грозы — это громыхание колесницы пророка Ильи при его поездках по небесам) и, сев в нее, стал подбрасывать вверх намагниченный железный шар. Шар подтягивал за собой каждый раз колесницу, и таким образом пророк достиг Луны. Пророк не учел отдачи, которую будет испытывать колесница при каждом броске шара, и оказался предшественником «правдолюбивого» барона Мюнхгаузена.

Во второй половине девятнадцатого века французский драматург Эдмон Ростан написал пьесу «Сирано де Бержерак», пользующуюся до сих пор большим успехом. Пьеса названа автором героической комедией, что точно отражает ее характер — веселый и одновременно романтически возвышенный. Максим Горький написал специальную статью, в которой очень высоко оценил благородный образ Сирано, обрисованный Ростаном.

Ростан приписал Сирано способ полета на Луну, «изобретенный» пророком Ильей, и не упомянул о ракетах. Вот соответствующее место из пьесы:

«Лечь на железный лист
и сильными рывками
Магнит подбрасывать,
он лист железный с вами
Подтянет кверху. Вы опять.
Так до Луны и упражняйтесь».

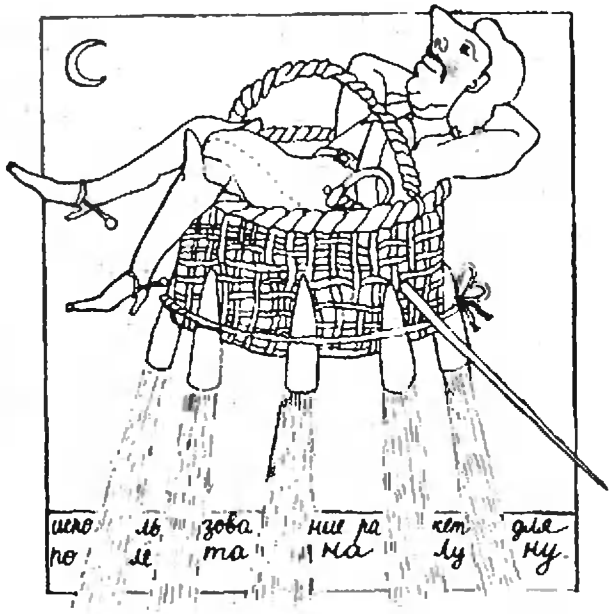
Почему Ростан колесницу превратил в железный лист, неясно.

Сравнительно недавно имя Сирано присвоено одному из лунных кратеров, что, безусловно, вполне справедливо.

Несколько слов о Жюле Верне

«С Земли на Луну прямым путем за 97 часов 20 минут» — так называется научно-фантастический роман Жюля Верна (1828—1905), который был написан в 1865 году. Жюль Верн описывает полет на Луну в снаряде, выпущенном гигантской пушкой. Надо признать, что это гораздо менее рациональный способ, чем полет с помощью ракет, придуманный Сирано.

А ведь прошло более двухсот лет! Правда, в другом романе Жюля Верна — «Вокруг Луны» — запасливый француз Мишель Ардан захватил с собой ракеты, но только для смягчения удара о Луну за счет явления отдачи. Зато в обоих романах Жюля Верна дана более точная координата точки пути, где притяжение Земли уравновешивается притяжением Луны — 47/52 расстояния между Землей и Луной. Это естественно, так как уже было известно отношение масс Луны и Земли, а также закон тяготения Ньютона. Спутники Мишеля Ардана — президент пушечного клуба Барбикен и капитан Николь — использовали алгебру для соответствующих вычислений, за что Мишель Ардан их дразнил «иксоедами». Между прочим, согласно Жюлю Верну невесомость должна наблюдаться только в одной точке траектории — в той самой, где результирующая сила тяготения равна нулю. Жюль Верн неправ. Для появления невесомости вовсе не требуется обращение в нуль силы тяготения. Не говоря уже об опыте космонавтов, каждый спортсмен-прыгун находится в состоянии невесомости во время прыжка (если не учитывать сопротивление воздуха).



Управляемый термоядерный синтез и явление отдачи

Теперь мы перенесемся в наше столетие и даже в первую половину будущего, двадцать первого века. Речь пойдет о новейшей технике, создание которой еще далеко не завершено. Мы имеем в виду управляемый термоядерный синтез (УТС) с инерционным удержанием плазмы. УТС такого типа ведет свое начало с работы советских физиков Н. Г. Басова и О. Н. Крохина, предложивших в 1962 году применить лазеры для поджига термоядерной реакции. При этом лучи многих мощных лазеров фокусируются со всех сторон на небольшую мишень. Интенсивность лазерных лучей меняется по определенному закону со временем. Сначала лучи вызывают быстрое испарение поверхностного слоя мишени. Это приводит к сильному сжатию (в сотни, тысячи раз) внутренних частей мишени за счет эффекта отдачи, возникающего при испарении поверхностного слоя. Сжатие необходимо для сближения ядер атомов, вступающих в термоядерную реакцию. Подчеркнем, что преждевременное нагревание внутренних частей мишени помешало бы сжатию. Поэтому их нагрев производится уже после сжатия. Для эффективности сжатия надо достаточно равномерно «осветить» со всех сторон мишень, что представляет далеко не простую задачу. Только тогда «ветры», возникающие за счет испарения наружного слоя мишени, приобретут должную структуру, необходимую для сильного сжатия. Иначе произойдет выпячивание слабоосвещенных частей мишени. Советская лазерная установка «Дельфин» создает 216 пучков для освещения мишени размером меньше горошины.*) Приведем еще одну интересную цифру. Недавно опубликованная советская работа по лазерному УТС имеет в заголовке 28 авторов.

Для автоматизированного управления сложной установкой лазерного УТС приходится широко применять быстродействующие ЭВМ и последние достижения нелинейной оптики.

Появились конкуренты лазерному УТС — установки, использующие мощные электронные или ионные пучки. Но все они предполагают сжатие за счет испарения ее поверхностного слоя и возникающего при этом явления отдачи.

*) На обложке февральского номера «Кванта» была помещена фотография, на которой видна центральная часть установки «Дельфин».

Новости науки

На пути к рентгеновскому лазеру

Несмотря на то, что первые в мире лазеры были созданы всего лишь четверть века назад, сегодня без этих замечательных приборов не могут обойтись не только научные лаборатории, но и производственные цеха, больницы, службы охраны окружающей среды. (Подробно о мирных профессиях лазерного луча можно прочитать в статье Л. В. Тарасова, опубликованной в первом номере «Кванта» за 1985 год, а также в книге того же автора, вышедшей в Библиотечке «Квант». — *Примеч. ред.*)

Созданы лазеры, работающие как в непрерывном, так и в импульсном режимах, их мощность варьируется от долей милливатт до десятков тераватт. При этом длины волн лазерного излучения охватывают не только область видимого света ($0,8$ мкм $> \lambda > 0,4$ мкм), но и выходят в инфракрасный (до $\lambda \lesssim 10$ мкм) и ближний ультрафиолетовый (от $\lambda \gtrsim 0,1$ мкм) диапазоны.

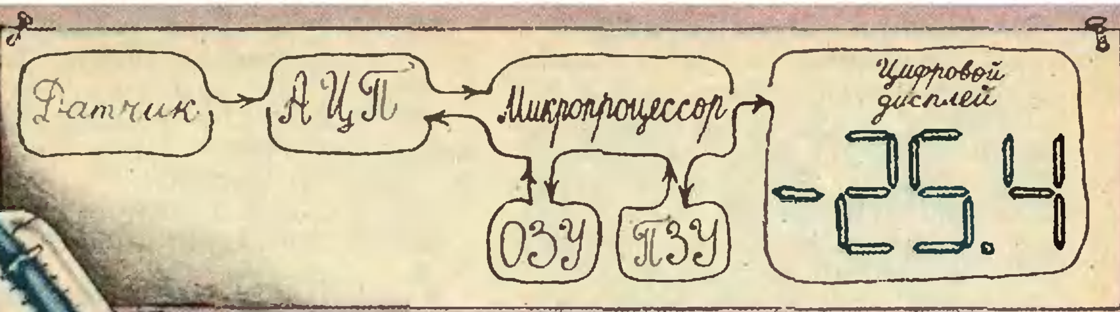
Влияние лазерного луча на свойства вещества в большой степени зависит от энергии излучаемых квантов $E = h\nu = hc/\lambda$. С уменьшением длины волны λ (с ростом частоты ν) энергия квантов и их воздействие на вещество увеличиваются. В качестве одного из примеров возможного применения коротковолновых лазеров укажем на их использование в микроэлектронике для изготовления печатных плат, интегральных схем и т. п. Чем меньше длина волны лазерного излучения, тем дальше можно продвинуться по пути миниатюризации электронных схем.

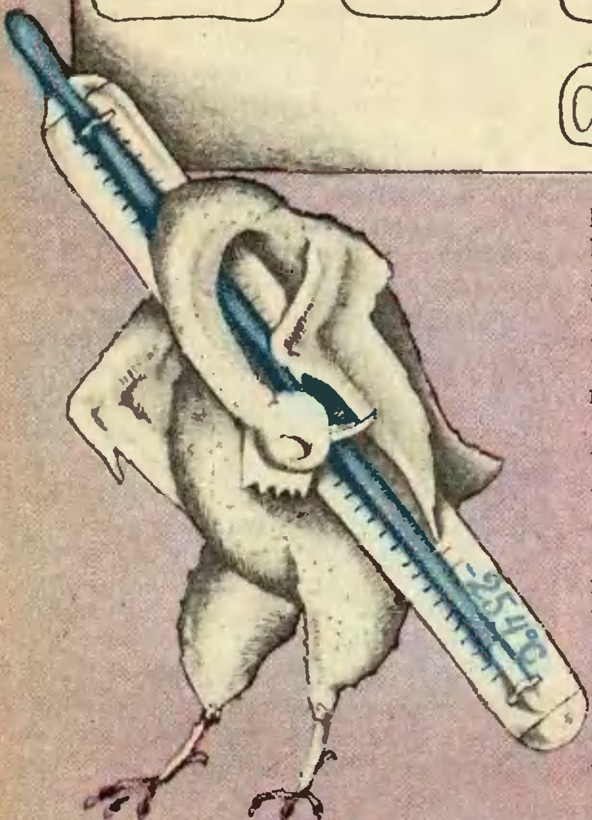
Несмотря на усилия физиков многих лабораторий мира, пока еще не удалось создать лабораторный лазер, работающий в еще более коротковолновом диапазоне — рентгеновском (50 нм $> \lambda > 0,005$ нм). Однако сравнительно недавно американские физики сумели получить лазерное излучение с длиной волны $\lambda = 15,5$ нм, что уже относится к области мягких рентгеновских лучей.

Это излучение возникало в результате воздействия на иттриевую мишень зеленого излучения «вспомогательного» сверхмощного лазера. Для того чтобы представить сложность этих экспериментов, достаточно сказать, что использованный в них «вспомогательный» лазер был длиной... с футбольное поле! Импульс его был столь мощным, что приводил к полному испарению иттриевой мишени, однако именно в процессе этого испарения (как зарегистрировала измерительная аппаратура) и возникало рентгеновское лазерное излучение.

Конечно, пока еще рано говорить о создании рентгеновского лазера. Установка американских ученых весьма громоздка и несовершенна, а КПД ничтожно мал. Однако ее создатели надеются, что путем использования других мишеней и совершенствования технологии им удастся достичь желаемого результата.

Б. В.





Микропроцессор измеряет...

М. Д. КОВАЛЕНКО

Каким прибором можно измерить температуру мороженой курицы? Конечно, термометром! Сделать в тушке надрез, ввести термометр, подождать немного... А если это необходимо сделать быстро, да еще не испортив товарного вида? Вы спросите, какое отношение эти вопросы имеют к теме статьи? Самое непосредственное, в чем читатель сможет убедиться, ознакомившись с устройством термометра микропроцессорной эры.

Начнем с датчика температуры. Для того чтобы измерять быстро, термометр делают в виде полой иглы, которую можно вонзать в тушку, почти не испортив ее. Внутри полой иглы размещается датчик — металлическая проволока, сопротивление которой в небольшом интервале температур линейно зависит от температуры*). Если такую проволоку подключить к источнику заданного по величине постоянного тока, то падение напряжения U на ней будет также линейно зависеть от температуры t:

$$U=a+bt.$$

Измеряя падение напряжения на проволоке, можно с помощью этой формулы рассчитать температуру. Быстро? Не очень, даже если иметь под рукой микрокалькулятор. Значительно ускорить процесс измерения позволяет использование микропроцессора.

Упрощенная блок-схема микропроцессорного термометра изображена на рисунке. *Микропроцессор (МП) — это* вычислительно-управляющая электронная схема, роль которой, в сущности, аналогична роли мозга в живом организме. Конструктивно МП, содержащий десятки тысяч транзисторов, представляет собой одну микросхему. МП работает с цифрами, поэтому непрерывный, или, как говорят, аналоговый сигнал с датчика (напряжение) должен поступать на вход МП преобразованным в цифровую форму. Эту работу выполняет аналого-цифровой преобразователь (АЦП). Микропроцессорный термометр содержит запоминающие устройства (ЗУ) двух видов: оперативные (ОЗУ) и постоянные (ПЗУ). В ОЗУ числа и программы могут свободно записываться и считываться, *но после выключения питания* все содержимое ОЗУ стирается. В ПЗУ информация записывается только один раз, но она хранится «вечно».

Как работает термометр? Предварительно, при градуировке, определяют постоянные коэффициенты a и b и записывают их в ПЗУ. МП работает

---

*) Такой датчик называется термометром сопротивления и применяется редко. Обычно используют термопарные или полупроводниковые датчики, но на принцип измерений это мало влияет.

по программе, также записанной в ПЗУ. Программа — это последовательность команд-шагов, которые МП выполняет по очереди со скоростью в сотни тысяч или даже миллионы шагов в секунду. Условная программа измерения температуры может выглядеть примерно так (в реальной программе каждый из этих шагов выполняется несколькими командами):

Шаг 1. Вызвать из ПЗУ числа a и b.

Шаг 2. Ввести в МП число из АЦП (это число — значение напряжения U).

Шаг 3. Вычислить температуру по формуле $t=(U-a)/b$ (результат записывается в ОЗУ).

Шаг 4. Отобразить записанное в ОЗУ число на цифровом дисплее.

Шаг 5. Перейти к выполнению шага 2. В результате работы этой программы на дисплее с частотой в тысячи измерений в секунду будет отображаться значение температуры. Вот теперь мы можем узнавать температуру быстро (даже слишком!). На практике же эту частоту уменьшают во много раз — для удобства наблюдения. (Подобную картину вы могли наблюдать на табло электронных весов.)

Рассмотрим более сложный прибор — цифровой вольтметр со встроенным МП. Блок-схема его примерно такая же, как и у термометра. Предположим, нас интересуют колебания напряжения в сети. Требуется узнать, насколько часто в течение 1 часа действующее значение напряжения выходит за пределы 210—230 В. Можно было бы решить эту задачу так: взять обычный цифровой вольтметр с цифропечатающим устройством (ЦПУ) и запустить вольтметр на измерения с интервалом в 1 секунду. Через час мы получим бумажную ленту длиной 3—4 м с 3600 числами и, вооружившись терпением, начнем подсчитывать количество чисел на ней, выпадающих из интервала 210—230 В. Вам хотелось бы заняться такой работой? Вряд ли. Так давайте заставим работать МП! Для этого составим программу (как и в первом примере, это условная программа):

Шаг 1. Очистить ячейки памяти ОЗУ с номерами (адресами) N_1 и N_2, то есть записать в них нули.

Шаг 2. Измерить действующее значение напряжения сети U.

Шаг 3. Если $U<210$ или $U>230$, то к содержимому ячейки памяти с адресом N_1 прибавить единицу.

Шаг 4. Если $210\leqslant U\leqslant 230$, то к содержимому ячейки памяти с адресом N_2 прибавить единицу.

Шаг 5. Ждать 1 секунду.

Шаг 6. Перейти к выполнению шага 2.

В результате работы этой программы в ячейке ОЗУ с адресом N_1 будет накапливаться количество выходящих за пределы 210—230 В результатов измерений, а в ячейке N_2 — количество попавших в этот интервал результатов измерений. Эти данные могут непрерывно отображаться на цифровом дисплее, так что достаточно через 1 час после запуска остановить программу и взглянуть на дисплей, чтобы узнать, насколько часто происходят колебания напряжения в сети. Можно, изменив программу, сделать так, чтобы она сама останавливалась после выполнения заданного числа измерений.

«Меню» микропроцессорного вольтметра обычно содержит десятки различных программ: статистической обработки результатов измерений, поиска максимальных и минимальных значений среди измеренных напряжений, анализа формы периодических сигналов и т. д. Эти программы, которые могут содержать сотни шагов, записаны в ПЗУ, поэтому для работы с прибором нет необходимости самостоятельно составлять программы. Необходимо лишь ознакомиться с назначением 2—3 десятков кнопок.

На этих двух простейших примерах видно огромное преимущество приборов со встроенными микропроцессорами: они выдают не «сырые» первичные данные, а обработанные, то есть пересчитанные в конечные величины. Применение таких приборов приводит к большой экономии труда людей, к росту его производительности. Однако наиболее полно преимущества МП проявляются в управляющих системах, в которых имеется обратная связь, то есть воздействие со стороны МП на управляемый объект. К таким системам относятся, например, промышленные роботы. Но это уже тема для особого разговора. А пока, покупая в магазине мороженую курицу, не забудьте ее ощупать. Если тушка мягкая, то, конечно, и без МП все ясно.

Урок одной задачи

И. А. КУШНИР

— Сегодня, — начал занятие математического кружка Иван Петрович, — наш урок посвящен одной задаче.

— Такая трудная? — удивились мы.

— Нет. Особенность этой задачи в том, что она поможет нам решить другие задачи. Вот ее условие:

Задача 1. *В трапеции, основания которой a и b, проведена через точку пересечения диагоналей прямая, параллельная основаниям. Найдите длину отрезка этой прямой, отсекаемого от нее боковыми сторонами.*

Иван Петрович вызвал одного из нас к доске, и на доске появился чертеж (рис. 1). Мы сразу заметили подобие треугольников AMO и ABC, MBO и ABD и на доске написали формулы

$$\frac{x}{b}=\frac{h_2}{h},\quad \frac{x}{a}=\frac{h_1}{h},$$

в которых h, h_1, h_2 — высоты треугольников ABD, MBO, AMO, а $x=MO$. Сложив эти равенства, мы получили

$$\frac{x}{a}+\frac{x}{b}=\frac{h_1+h_2}{h}=1,$$

то есть $x=ab/(a+b)$. Аналогично $ON=ab/(a+b)$, откуда и ответ:

$$MN=\frac{2ab}{a+b}.$$

— Иван Петрович, — послышалось из класса, — я уже вижу, как из этой задачи можно составить новую задачу. На доске появилась такая запись:

Задача 2. *Докажите, что в трапеции отрезок прямой, параллельный основаниям, которому принадлежит точка пересечения диагоналей и концы которого находятся на боковых сторонах трапеции, делится в этой точке пополам.*

— Хорошая задача, — похвалил Иван Петрович, — а теперь я изменю рисунок, — и он, продлив боковые стороны трапеции до пересечения в точке E (рис. 2), провел через точки O и E прямую. Точки пересечения прямой с основаниями учитель обозначил F и H.

— Обращаю ваше внимание, — продолжал он, — на такую задачу:

Задача 3. *Докажите, что в произвольной трапеции середины оснований, пересечение боковых сторон и пересечение диагоналей принадлежит одной прямой.*

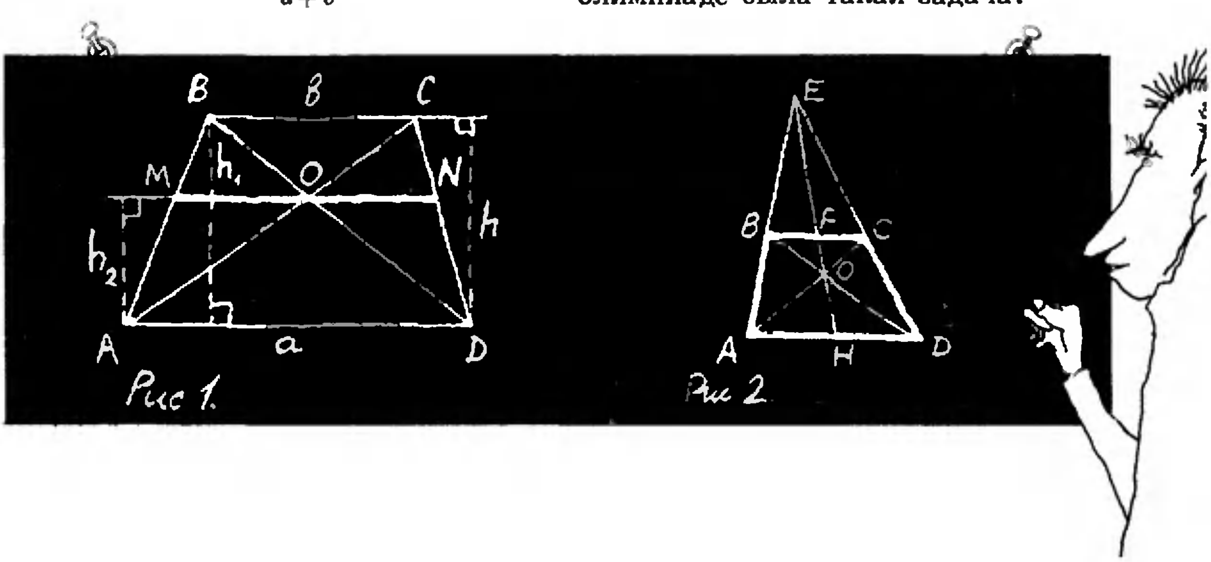
Решение получилось сразу: ведь оно следует из предыдущей задачи, так как EH — медиана в треугольниках EBC, EMN, EAD.

— Правильно, — заметил Иван Петрович. — А как решить эту задачу другим способом?

Мы задумались...

— Тогда пусть это будет ваше домашнее задание. Подсказываю: примените гомотетию.

— Иван Петрович, а я знаю, почему вы обращаете внимание на эту задачу, — ведь с ее помощью можно решать задачи на построение с одной линейкой. Вот, например, на районной олимпиаде была такая задача:



Задача 4. *На прямой даны три точки A, B, C, из которых B находится посредине между A и C. Через произвольную точку K, не принадлежащую отрезку AC, с помощью одной линейки проведите n прямых, параллельных AC.*

— Тоже хорошая задача, — согласился Иван Петрович, — но о ней мы поговорим в следующий раз, а сегодня рассмотрим более сложную задачу:

Задача 5. *На каждой из двух параллельных прямых расположены по одному отрезки длиной a и b. С помощью одной линейки построить отрезок:*

$$x=\frac{ab}{a+b}.$$

Сами мы бы быстро не справились, если бы не помощь Ивана Петровича:

— Продлим стороны трапеции $ABCD$, у которой основания — заданные отрезки a и b (рис. 3). Точки пересечения диагоналей AC и BD и отрезков AB и DC обозначим O и E. Проведем прямую EO, которая пересечет основания трапеции в точках F и H. Соединим точки D и F, A и F, B и H, C и H, получим точки K и L. Отрезок KL — искомый.

Действительно, треугольники BKF и AKH, CFL и LHD подобны, поэтому

$$\frac{BK}{KH}=\frac{BF}{AH};\quad \frac{FL}{LD}=\frac{FC}{HD}.$$

Но $BF=FC$ и $AH=HD$ (задача 2), значит,

$$\frac{BK}{KH}=\frac{FL}{LD},$$

следовательно, отрезок KL параллелен основаниям BC и AD. А поскольку точка O принадлежит отрезку KL и $MK=KO$, а $OL=LN$ (задача 2), получаем

$$OL=\frac{1}{2}\frac{ab}{a+b},\quad KL=\frac{ab}{a+b}.$$

— А чтобы вы глубже разобрались в таких задачах, дома сделайте еще и такие задачи:

6. Отрезки длиной a и b принадлежат одной из параллельных прямых, а отрезок длиной c — другой из них. При помощи одной линейки построить отрезок длиной x, чтобы

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}.$$

7. Даны параллельные отрезки. Разделите с помощью одной линейки один из них пополам.

8. С помощью одной линейки разделите трапецию на две равновеликие фигуры.

9. Даны две параллельные прямые. Проведите через данную точку третью прямую, параллельную данным, с помощью одной линейки.

10. Увеличьте данный отрезок, лежащий на одной из двух параллельных прямых, с помощью одной линейки в 2, 3, ..., n раз.

11. Найдите половину, треть, ..., n-ю часть такого отрезка.

— И все эти задачи, — напомнил учитель, — решаются с помощью той первой задачи, с которой мы познакомились сегодня.

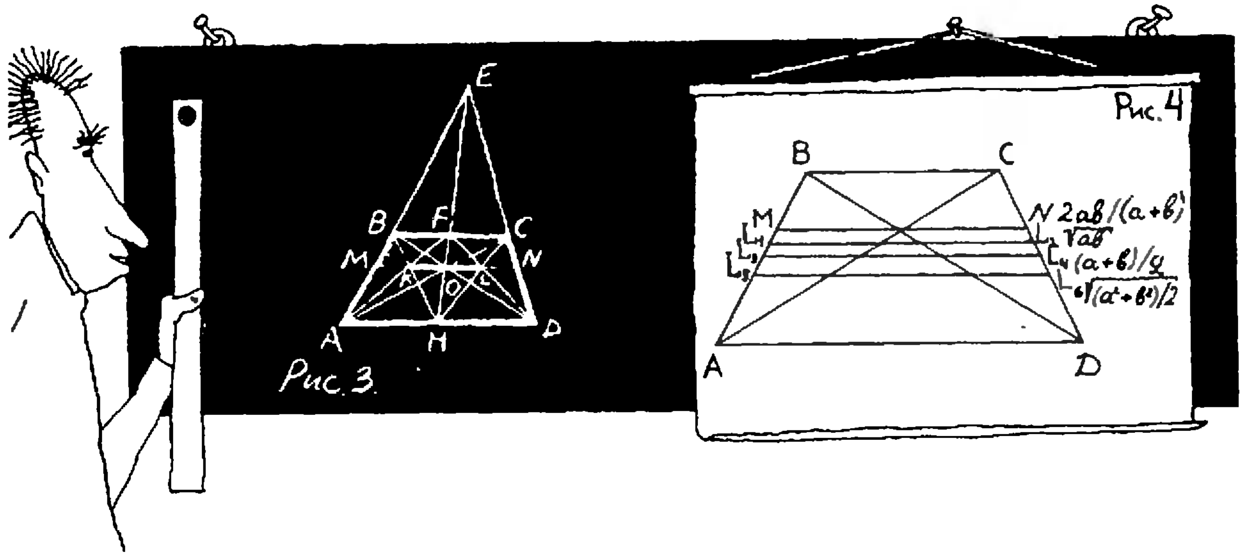
— Кто же придумал эту задачу?

— Первого автора задачи я вам назвать не могу, — сказал Иван Петрович, — но известно, что она встречается в трактате XII века индийского математика Бхаскары «Венец астрономического учения» в таком виде:

Задача 12. *Зная длины a и b двух палок бамбука, вертикально воткнутых в землю на известном расстоянии, вычислить длину перпендикуляра к земле, опущенного из точки пересечения прямых, соединяющих верхний конец одной палки с основанием другой, и длины между основанием этого перпендикуляра и основаниями палок.*

— И, наконец, — заканчивая занятие, развернул таблицу с чертежом Иван Петрович (рис. 4), — наша задача связана с неравенствами: отрезок MN является геометрической интер-

(Окончание см. на с. 35)



Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Поговорим о средней скорости» предназначена восьмиклассникам, «О явлениях переноса» — девятиклассникам», «Что такое параметрический резонанс?» — десятиклассникам.

Поговорим о средней скорости

Когда мы говорим о скорости движения различных тел в окружающем нас мире, то чаще всего подразумеваем *среднюю скорость*. Именно она позволяет оценить пройденное расстояние, зная время движения, или, наоборот, помогает найти время движения по пройденному пути. Так, например, отправляясь на вокзал с другого конца города, вы рассчитываете свое время, исходя из известной по опыту средней скорости передвижения городского транспорта. При этом для вас совсем неважно, как меняется мгновенная скорость автобуса или троллейбуса от одной остановки до другой.

Для определения средней скорости мы истинное сложное неравномерное движение мысленно заменяем некоторым простым равномерным движением, при котором тело проходит тот же путь (или совершает то же перемещение) за то же время, что и в процессе истинного движения.

Обратим внимание на то, что в «Физике 8» (§ 11) введены два различных понятия средней скорости: *векторная средняя скорость*, вычисляемая по вектору перемещения $\vec{s}$ тела за определенное время t, и *скалярная средняя скорость*, определяемая по пути l, пройденному телом вдоль траектории:

$$\vec{v}_{ср}=\frac{\vec{s}}{t},\quad v_{ср}=\frac{l}{t}.$$

Средняя скалярная скорость, вообще говоря, не совпадает с модулем векторной средней скорости. Так, $v_{ср}$ для Земли при ее орбитальном движении вокруг Солнца составляет примерно 30 км/с, в то время как средняя векторная скорость, взятая за промежуток времени, равный одному году, очевидно, равна нулю. Равенство средних скоростей выполняется только в случае прямолинейного движения тела в одном направлении. Ниже мы будем говорить только о скалярной средней скорости. Начнем с такого примера.

Представьте себе, что вы едете в автомобиле по пустынному загородному шоссе, устроившись рядом с водителем. В руках у вас секундомер, за окном отчетливо видны встречающиеся километровые столбики, и вы проводите небольшой эксперимент. В первом опыте водитель по вашей команде «скачком» меняет скорость каждую минуту: $v_1=40$ км/ч, $v_2=60$ км/ч, $v_3=80$ км/ч, $v_4=20$ км/ч. Затем опыт ставится иначе: водитель последовательно проходит тот же набор скоростей, но команды вы даете ему не по секундомеру, а в те моменты, когда автомобиль проезжает мимо очередного километрового столбика. Одинаковы ли средние скорости в этих двух опытах?

В первом случае движение построено так, что на каждом участке, где скорость была постоянна, автомобиль двигался в течение одного и того же промежутка времени Δt (рис. 1). Поэтому

$$v_{ср1}=\frac{l}{t}=\frac{v_1\Delta t+v_2\Delta t+v_3\Delta t+v_4\Delta t}{4\Delta t}=$$
$$=\frac{1}{4}(v_1+v_2+v_3+v_4)=50\text{ км/ч}.$$

Во втором случае одинаковы не времена движения на каждом участке, а пройденные пути Δl (рис. 2). Таким образом,

$$v_{ср2}=\frac{l}{t}=\frac{4\Delta l}{\Delta t_1+\Delta t_2+\Delta t_3+\Delta t_4}=$$

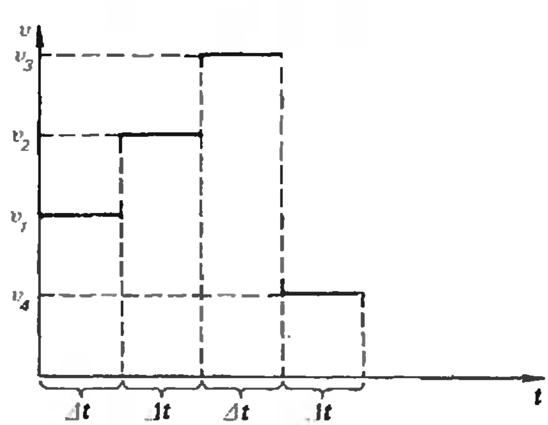


Рис. 1.

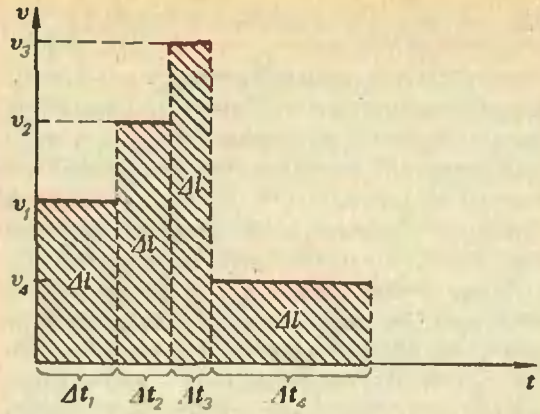


Рис. 2.

$$= \frac{4\Delta l}{\frac{\Delta l}{v_1}+\frac{\Delta l}{v_2}+\frac{\Delta l}{v_3}+\frac{\Delta l}{v_4}} = \frac{4}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}+\frac{1}{v_4}} = 38\ \text{км/ч}.$$

Как видно, в первом случае средняя скорость определяется средним арифметическим от скоростей на каждом участке движения. К сожалению, многие учащиеся ошибочно полагают, что среднюю скорость так можно вычислять всегда, для любого типа движения. Это неверно. Уже во втором из рассмотренных примеров мы убедились, что при движении, в котором на каждом участке тело проходит одинаковый путь (но с различными скоростями), средняя скорость выражается гораздо более сложно:

$$\frac{1}{v_{ср}} = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\ldots+\frac{1}{v_n}\right).$$

Поэтому при вычислении средней скорости лучше всего пользоваться общим определением, которое справедливо всегда.

Часто среднюю скорость находят по графику зависимости модуля мгновенной скорости от времени (рис. 3). Площадь под кривой $v(t)$ определяет пройденный телом путь, поэтому в соответствии с определением средней скорости по графику можно подобрать такое значение неизменной скорости, которое позволит пройти то же расстояние и за то же время, что и при истинном движении с меняющейся скоростью.

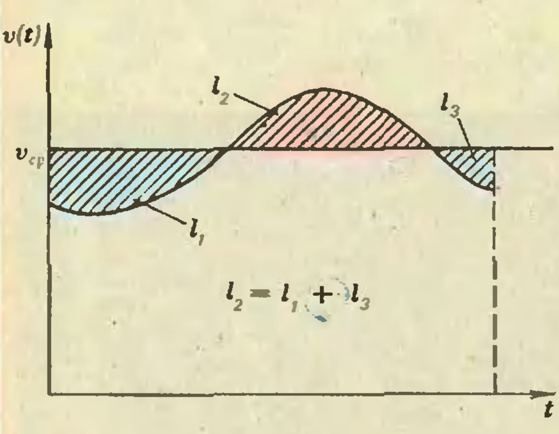


Рис. 3.

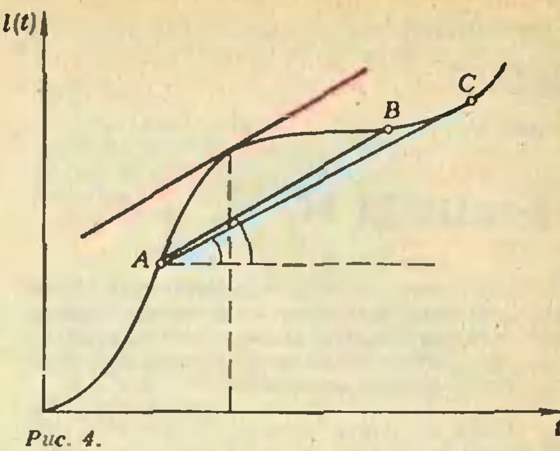


Рис. 4.

Среднюю скорость можно определять и по графику зависимости пути от времени ($l(t)$). Поскольку $v_{ср}=l/t$, то на этом графике средняя скорость определяется тангенсом угла наклона прямой, соединяющей начальную и конечную точки рассматриваемого участка движения, к оси времени (рис. 4). По этому графику легко судить и об изменении средней скорости в зависимости от выбора промежутка времени, на котором проводится усреднение. Достаточно изобразить соответствующие отрезки прямых и сравнить углы их наклона к оси времени. Такой графический анализ наглядно убеждает, что понятие средней скорости имеет смысл только на определенном отрезке пути (или времени).

Зависимость пути от времени при прямолинейном неравномерном движении позволяет, например, легко отыскать тот момент времени, в который модуль мгновенной скорости совпадает с величиной средней скорости на рассматриваемом участке движения. Для этого нужно соединить отрезком прямой начальную и конечную точки графика $l(t)$ на рассматриваемом участке и параллельным переносом полученного отрезка до касания с графиком найти искомую точку (или точки).

Величина средней скорости иногда позволяет оценить предельно возможные значения скоростей тела на отдельных участках его движения. Так, зная, что средняя скорость движения на двух одинаковых участках пути равна 12 м/с, мы сразу же можем сказать, что значение скорости равномерного движения ни на одном из них не может быть меньше 6 м/с (убедитесь в этом самостоятельно).

А. И. Шапиро

О явлениях переноса

Все окружающие нас тела, даже самые маленькие по размерам, состоят из огромного числа молекул. Движение каждой молекулы описывается законами механики, однако поведение большого числа молекул подчиняется качественно иным закономерностям. Можно ли установить эти закономерности, зная характер движения отдельных молекул? В принципе — да, но на практике это очень сложная задача.

К счастью, оказывается, что для изучения некоторых свойств макроскопических тел совсем не обязательно интересоваться каждой молекулой в отдельности. Вполне достаточно общего представления о внутренней структуре тел как о системе движущихся и сталкивающихся друг с другом частиц. При этом поведение макроскопических тел можно характеризовать специальными физическими величинами, которые относятся ко всей совокупности молекул, слагающих тела, то есть являются средними характеристиками. Так, например, плотность вещества определяется средним числом молекул в единице объема, температура тела — их средней кинетической энергией, и т. п.

В состоянии равновесия любые средние характеристики тела одинаковы во всех его точках. Но легко представить ситуацию, когда равновесия нет. Рассмотрим пример.

Если поставить сосуд с водой на горячую плиту, то сначала температура воды у дна будет выше, чем на поверхности. Лишь по истечении довольно большого промежутка времени вода прогреется равномерно по всему объему. Как же происходит этот прогрев?

Мы уже говорили, что вещество — это система движущихся и взаимодействующих друг с другом молекул, средняя кинетическая энергия которых тем больше, чем выше температура. Но в нашем примере это означает, что энергия молекул, «стартующих» после очередного столкновения из области жидкости с повышенной температурой и попадающих в область, температура которой ниже, оказывается больше, чем энергия окружающих молекул. Сталкиваясь с молекулами этого более холодного слоя, «горячие» молекулы передают им часть своей избыточной энергии. Те, в свою очередь, передают часть полученной энергии в еще более холодные области и т. д. Другими словами, в системе возникает поток энергии от горячих областей к холодным. Этот процесс называют *теплопроводностью*. Существенно, что из-за столкновений молекул характерные расстояния, на которые они смещаются, порядка расстояния между молекулами (в жидкости, например, это 10^{-10} м), то есть перенос вещества при таком процессе отсутствует.

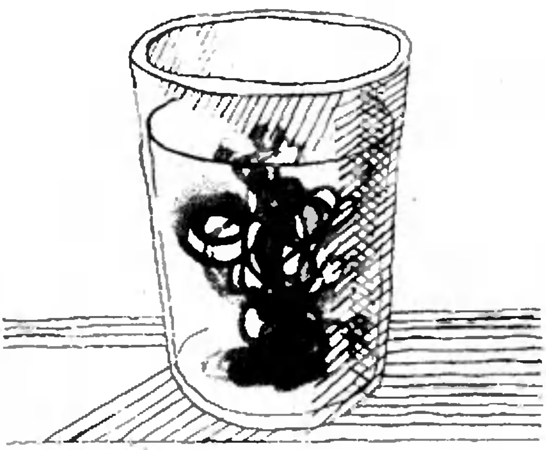
Итак, при чистой теплопроводности поток энергии есть, а потока вещества нет. Конечно, можно спросить: «А в каком смысле «чистой»? Значит, бывает и «грязная» теплопроводность?». В определенном смысле — да. В некоторых случаях разность температур может привести к направленному течению жидкости (конвекции), и тогда тепло будет переноситься не только за счет столкновения молекул, но и в результате перемешивания жидкости. Это случай специальный, и рассматривать его здесь мы не будем.

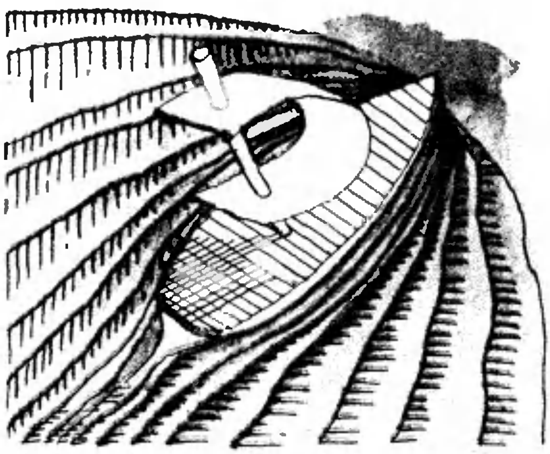
В случае чистой теплопроводности оказывается, что поток энергии в системе пропорционален перепаду тем-

ператур в ней, то есть зависит прежде всего от внешних условий. А вот коэффициент пропорциональности определяется исключительно внутренним устройством вещества (тем, как движутся молекулы внутри него и как они взаимодействуют (сталкиваются) друг с другом). Этот коэффициент называется *коэффициентом теплопроводности* (λ). Он различен у разных веществ. Так, теплопроводность любого металла на несколько порядков больше теплопроводности дерева. Именно поэтому трудно прикоснуться к металлической ложке, опущенной в стакан с горячим чаем, но ничего не стоит держать в руке горящую спичку.

Другой пример. Рассмотрим смесь двух веществ, например воду и каплю чернил в ней. Очевидно, что капля будет расплываться, стремясь равномерно растечься по всему объему воды, то есть будет происходить процесс *диффузии*. В отличие от первого примера здесь возникает поток вещества — чернил, направленный из области, где чернил много, в область, где их мало. Этот поток пропорционален разности концентраций чернильных молекул в различных областях пространства. Коэффициент пропорциональности между потоком вещества и разностью концентраций называется *коэффициентом диффузии* (D). Коэффициент диффузии так же, как и коэффициент теплопроводности, различен у разных веществ и определяется их внутренним устройством (способностью молекул одного сорта «протискиваться» сквозь толщу других молекул).

Наконец, последний пример. Представьте себе твердое тело, движущееся в жидкости. Как показывает опыт, слои жидкости, непосредственно при-





мыкающие к движущемуся телу, как бы прилипают к нему и вовлекаются в направленное движение. За счет обмена молекулами между слоями это движение передается соседним слоям, от них — следующим и т. д. Таким образом возникает поток импульса от слоев, обладающих большей скоростью, к слоям с меньшей скоростью. Именно в этом и состоит механизм *жидкого трения*, или *вязкости*. Действительно, увеличение импульса жидкости означает, что на нее со стороны тела действует какая-то сила (изменение импульса системы равно импульсу внешних сил, действующих на нее). Следовательно, согласно третьему закону Ньютона со стороны жидкости на тело действует сила, направленная в противоположную сторону. Это и есть сила жидкого трения.

Поток импульса от слоев, движущихся быстро, к слоям, движущимся с меньшей скоростью, пропорционален разности скоростей этих слоев. Коэффициент пропорциональности между потоком импульса и разностью скоростей называется *коэффициентом вязкости* жидкости (η).

Все рассмотренные примеры характеризуются общим свойством — переносом некоторого признака (энергии в первом примере, вещества во втором и импульса в третьем) из одних областей системы в другие. Неслучайно поэтому, что явления такого рода называются *явлениями переноса*. Каждое из них характеризуется своим коэффициентом переноса, и задача теории — уметь их вычислять. В общем случае это очень трудная задача, до сих пор полностью не решенная. Однако для газа рассчитать коэффициенты переноса рассмотренных трех конкретных процессов большого труда не представляет.

Оказывается, все три коэффициента (теплопроводности, диффузии и вязкости) пропорциональны длине свободного пробега молекул (l) и средней скорости их теплового движения (v): $\lambda \sim D \sim \eta \sim lv$. Такая зависимость коэффициентов переноса от характеристик молекулярного движения очень естественна. Ведь средняя скорость молекул v определяет скорость переноса того или иного признака в процессе установления равновесия. Длина же свободного пробега l появляется в формуле потому, что после каждого столкновения параметры движения молекулы определяются параметрами системы в тех местах, где эти столкновения происходят, то есть в точках, отстоящих друг от друга на расстояние l. Так, в нашем примере с теплопроводностью величина энергии, передаваемой молекулой при очередном столкновении, определяется разностью температур в тех точках среды, где произошло это и предыдущее столкновение.

Е. Е. ГОРОДЕЦКИЙ

Что такое параметрический резонанс?

Из школьного курса физики (см. «Физику 10», § 9 и 20) вы знаете о резонансе в колебательной системе, который возникает в результате воздействия периодической внешней силы, изменяющейся с частотой, равной частоте свободных колебаний системы (в действительности из-за трения резонанс наступает при несколько меньшей частоте). Оказывается, наличие такой силы — не единственная возможность возникновения резонансных явлений. Вот наглядный пример. Раскачиваясь на качелях, вы можете значительно увеличить амплитуду их колебаний только благодаря тому, что будете периодически приседать и распрямляться, то есть изменять положение своего центра тяжести.

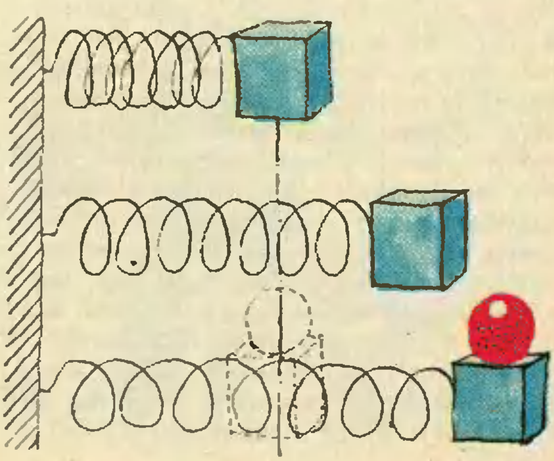
Из этого примера видно, что причиной резкого возрастания амплитуды колебаний может служить не только периодическая внешняя сила, но и периодическое изменение одного из параметров колебательной системы при условии, что частота этих изменений определенным образом связана с частотой собственных колебаний системы. Такой резонанс называют *параметрическим*.

Для выяснения механизма этого способа усиления колебаний обратимся к хорошо знакомой вам системе — грузику на пружине («Физика 10», § 2). Однако вместо того чтобы возбудить обычные свободные колебания грузика, сделаем следующее.

В момент, когда грузик массой m проходит положение равновесия с максимальной скоростью v_m, положим на него некоторый дополнительный грузик массой Δm, скажем, пластилиновый шарик. Для того чтобы скорость грузика в этот момент не изменилась, предварительно разгоним шарик до той же скорости v_m. Отметим, что в процессе разгона шарика мы совершаем работу, которая в конечном счете идет на увеличение полной энергии системы до величины $(m+\Delta m)v_m^2/2$. Это увеличение энергии приводит к большему, по сравнению с прежним, максимальному растяжению пружины x'_m, величину которого можно найти из закона сохранения энергии

$$\frac{(m+\Delta m)v_m^2}{2} = \frac{k(x'_m)^2}{2}.$$

В момент, когда пружина максимально растянута, а скорость грузика равна нулю, мы мгновенно снимем шарик. Так как в этот момент вся энергия системы заключена только в растянутой пружине, уменьшение массы грузика никак не изменит полной энергии системы. Таким образом, нам удалось ввести в систему дополнительную энергию $\Delta m v_m^2/2$. При этом



энергия системы увеличилась в

$$n=\frac{(m+\Delta m)v_m^2/2}{mv_m^2/2}=1+\frac{\Delta m}{m}\text{ раз.}$$

Дадим нашей системе «отдохнуть» и, когда грузик будет снова проходить (в обратном направлении) положение равновесия, повторим ту же процедуру с пластилиновым шариком. Однако теперь благодаря предыдущему вмешательству максимальная скорость у грузика оказывается равной $v_m'=\sqrt{(m+\Delta m)/m}\,v_m$, и, разгоняя шарик, прежде чем положить его на грузик, нам придется совершить работу бо́льшую, чем в первый раз $(\Delta m(v_m')^2/2>\Delta mv_m^2/2)$.

Итак, каждые полпериода мы будем увеличивать энергию системы, и, понятно, что это увеличение энергии приводит к возрастанию амплитуды колебаний (будем считать массу шарика столь малой по сравнению с массой грузика, что изменением частоты колебаний системы можно пренебречь).

Подчеркнем тот факт, что в отличие от обычного резонанса, при котором частота внешней силы должна быть равна собственной частоте колебаний системы, в случае параметрического резонанса усиления колебаний происходят наиболее эффективно, когда частота изменения того или иного параметра системы вдвое превышает ее собственную частоту колебаний.

Рассмотрим еще один пример, иллюстрирующий общий принцип возникновения параметрического резонанса. Представим колебательный контур, состоящий из конденсатора и катушки, в котором могут происходить свободные электрические колебания («Физика 10», § 13). Будем периодически изменять емкость конденсатора. Для этого в момент, когда заряд на конденсаторе максимален, быстро раздвинем его пластины, когда же заряд на пластинах равен нулю, так же быстро вернем их в прежнее положение. Продолжая этот процесс, можно убедиться в том, что амплитуда колебаний в такой системе будет неограниченно возрастать, хотя в контуре и отсутствует внешняя ЭДС. Дело в том, что при раздвигании заряженных пластин мы каждый раз совершаем положительную работу, а сдвигая незаряженные пластины, никакой работы не совершаем вовсе. Легко видеть, что и в этом процессе частота внешнего воздействия вдвое превышает собственную частоту колебаний системы.

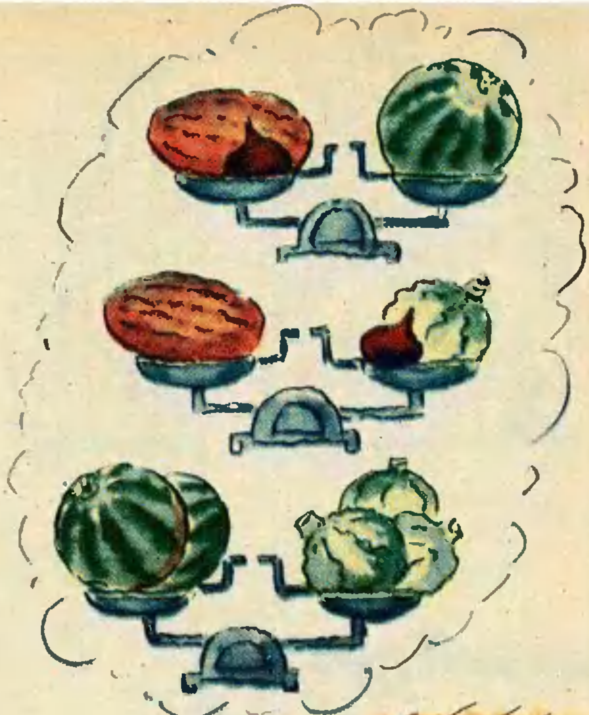
А что произойдет, если мы возьмем колебательный контур, в котором изначально отсутствуют явно выраженные колебания, и начнем чисто механически (меняя расстояние между пластинами или их площадь) с частотой, вдвое превышающей собственную, изменять емкость конденсатора? Оказывается, и в этом случае будет происходить процесс нарастания колебаний! Дело в том, что на пластинах конденсатора всегда есть некоторый малый, случайно образовавшийся, заряд. Этот заряд даст «начальный толчок» быстрому росту колебаний по схеме, описанной выше. На этом принципе устроены генераторы и усилители электромагнитных колебаний, получившие название параметрических машин. Первая параметрическая машина была сконструирована в 1933 году на основе исследований советских физиков — академиков Л. И. Мандельштама и Н. Д. Папалекси.

Ну, а если система не идеальна, то есть в ней есть потери энергии?

При обычном резонансе потери энергии определяют максимальную амплитуду колебаний. В случае же параметрического резонанса роль этих потерь принципиально иная. Как мы уже обсуждали, при параметрическом резонансе за каждые полпериода энергия системы возрастает в определенное число раз, но при этом часть энергии безвозвратно теряется (выделяется в виде тепла). Если возрастание энергии превышает потери, то колебания, хотя и медленнее, чем в отсутствие потерь, но будут неуклонно нарастать. Понятно, что для возбуждения колебаний в системе с трением следует в бо́льшей степени изменять соответствующий параметр системы — на грузик класть шарик большей массы, пластины конденсатора раздвигать на большее расстояние. Качающемуся же на качелях придется приседать глубже, однако если удастся начать раскачку, то, не изменяя глубины приседания, можно будет раскачаться очень сильно.

А. А. Варламов, А. И. Черноуцан

Квант для младших школьников



Задачи

1. Был уже вечер, покупатели разошлись по домам, а до конца работы у Наташи — молодой продавщицы овощного магазина — оставалось еще полчаса. На прилавке лежали три кочана капусты, два арбуза, дыня и свекла. Чтобы скоротать время, Наташа стала взвешивать эти овощи и с удивлением обнаружила, что все три кочана капусты весят одинаково, и у обоих арбузов равный вес. Более удивительным было равновесие еще в трех случаях, изображенных на рисунках. А теперь ответьте: во сколько раз дыня тяжелее свеклы?

2. Восстановите цифры, замененные звездочками (см. рисунок).

3. Предшественница электрической лампочки — керосиновая лампа — временами коптила, поэтому над ней на потолке образовывалось черное пятно. Но и над светильниками с электрическими лампочками иногда возникает темное пятно на потолке. Неужели и электрические лампы коптят?

4. При каком наименьшем количестве монет можно уплатить без сдачи любую сумму от 1 копейки до 1 рубля?

5. В момент, когда мы выключаем газ под кипящим чайником, из-под его крышки вырываются клубы пара. Почему?

Эти задачи предложили *В. Д. Вьюн, А. А. Никаноренков, Н. П. Долбилин, А. П. Савин, Э. С. Парилис*

Калейдоскоп

$\vec{a} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ $\vec{a}$ $\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$

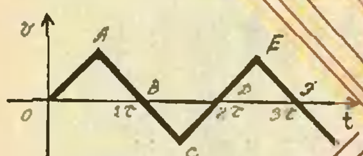
Ускорение

Вопросы и задачи

1. Два поезда идут навстречу друг другу: один — ускоренно на север, другой — замедленно на юг. Как направлены ускорения поездов?

2. С помощью графика скорости равноускоренного движения с начальной скоростью, равной нулю, покажите, что пути, пройденные телом за последовательные равные промежутки времени, пропорциональны ряду нечетных чисел.

3. На рисунке приведен график скорости тела, движущегося прямолинейно.



Постройте график его ускорения.

4. Два тела, массы которых M и m ($M > m$), подняты на одинаковую высоту над землей и одновременно отпущены. Одновременно ли они приземлятся, если сила сопротивления воздуха для обоих тел одинакова и постоянна?

«...теперь же перейдем к движению ускоренному.
Прежде всего необходимо будет подыскать этому естественному явлению
соответствующее точное определение и дать последнему объяснение.
...равномерно —
или единообразно — ускоренным движением
называется такое, при котором после выхода из состояния покоя в равные промежутки времени прибавляются и равные моменты [приращения] скорости.»

Г. Галилей

Калейдоскоп

Ускорение

Любопытно, что...

...даже Тартарен из Тараскона, знаменитый своей меткой стрельбой по фуражкам, почувствовал бы, по-видимому, смущение, если бы ему предложили выпустить пулю, которая, пролетев несколько десятков тысяч километров, должна была бы попасть в копейку. А ведь подобная задача решена физиками в гигантских ускорителях элементарных частиц.

Микроопыт

Трогаясь со станции, поезд некоторое время движется практически равноускоренно. Определите величину ускорения в этот период с помощью нити, гирьки и линейки.

Вопросы и задачи

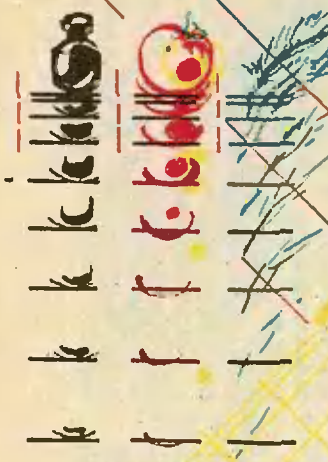
6. Ускорение ракеты возрастает даже в том случае, когда равнодействующая приложенных к ней сил остается неизменной. Почему?

7. Отчего мы не замечаем движения Земли вокруг Солнца, хотя скорость этого движения — 30 км/с?

8. Легче ли побить спортивные рекорды на экваторе, нежели в более высоких широтах?

9. С каким минимальным ускорением можно пройти верхнюю точку «мертвой петли»?

5. Кабина лифта движется с ускорением a. Пассажир, находящийся в ней, роняет книгу. Чему равно ускорение книги относительно лифта, если он движется вверх? вниз?



?????????????????

...примером сообщения телу центростремительного ускорения может служить эпизод похищения двухпудовых гирь, описанный в «Золотом теленке» И. Ильфа и Е. Петрова: «Паниковский нес свою долю обеими руками, выпятив живот и радостно пыхтя... Иногда он никак не мог повернуть за угол, потому что гиря по инерции продолжала тащить его вперед. Тогда Балаганов свободной рукой придерживал Паниковского за шиворот и придавал его телу нужное направление».

Любопытно, что...

Ускорение

квант 9/86

А так ли хорошо знакомо вам понятие

УСКОРЕНИЕ?

Это понятие ввел Галилей, проводя опыты по установлению связи между скоростью падения тел и силой тяжести. Оно оказалось чрезвычайно важным и плодотворным для дальнейшего развития механики, так как именно ускорение характеризует результат воздействия одного тела на другое. Понятие «ускорение» позволило в принципе описать любые механические движения тел, в том числе неравномерные и криволинейные. Поэтому практически всякий раз, рассчитывая, как движутся тела, мы не можем обойтись без законов и соотношений, в которых основным «действующим лицом» предстает ускорение.

квант 9/86

10. Какой продолжительности T должны быть сутки на Земле, чтобы тела на экваторе не имели веса?

11. Как меняется период маятниковых часов, установленных на космическом корабле, при выводе его на орбиту?

Что читать об ускорении в «Кванте»

(публикации последних лет)
1. «Как решается основная задача механики» — 1984, № 2;
2. «Движение по окружности» — 1984, № 6;
3. «Как вводятся физические величины» — 1984, № 10
4. «Закон нечетных чисел для свободного падения тел» — 1984, № 12;
5. «Стробоскопический эффект и измерение ускорения» — 1985, № 9.

Ускорение

Сколько велосипедов?

С. Н. ОЛЕХНИК

Подняв облако пыли, по проселочной дороге промчалась ватага ребят на двухколесных велосипедах, а вслед за ними — ребята на трехколесных велосипедах. Самые маленькие вовсю крутили педалями, стараясь не отставать от больших.

Семиклассники Саша и Наташа, пропустив велосипедистов, снова зашагали по дороге.

«Я насчитал всего 30 колес»,— сказал Саша. «А я насчитала 12 ребят»,— сказала Наташа.

Через некоторое время Саша, обращаясь к Наташе, сказал: «Я знаю, сколько было двухколесных и трехколесных велосипедов!».

«Наверное, это нетрудно посчитать»,— ответила Наташа.— Если ты дашь мне листок бумаги и карандаш, я тоже скажу, сколько было двухколесных и трехколесных велосипедов».

Наташа обозначила число двухколесных велосипедов через x, число трехколесных велосипедов — через y, записала систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=12, \\ 2x+3y=30 \end{cases}$$

и, решив ее, получила, что $x=y=6$.

«Это верный ответ — сказал Саша.— Но задача решается в уме. Слушай! Если бы мы посадили всех ребят на двухколесные велосипеды, то двухколесных велосипедов было бы 12, а колес всего было бы 24».

«А мы насчитали 30 колес: значит, разница в 6 колес получилась за счет трехколесных велосипедов»,— перебила Сашу Наташа.

«Верно: значит, трехколесных велосипедов 6; а тогда и двухколесных также 6».

«Смотри, как просто! Такую задачу может решить и первоклассник. Давай-ка предложим ее на математическом кружке для младших классов да подберем еще несколько подобных задач. Я, например, вспомнила такую:

В клетке находятся кролики и фазаны. Известно, что всего в клетке 35 голов и 94 ноги. Требуется узнать, сколько фазанов и сколько кроликов в клетке.»

«А я знаю несколько старинных задач:

Купил 112 баранов старых и молодых, дал 49 рублей и 20 алтын. За старого платил по 15 алтын и по 2 деньги, а за молодого по 10 алтын; и ведательно есть, колико старых и молодых баранов купил он. (1 алтын=3 копейки=6 денег; 1 рубль=100 копеек.)

Некто купил 64 рулона сукон. Из них 20 рулонов белых, 13 рулонов черных, 5 красных, 19 зеленых, 7 лазоревых, и дал за них 486 рублей. Цена же их была не одинакова: за черный рулон он платил четырьмя рублями дороже белого, за красный — тремя рублями дешевле черного, за зеленый — двумя рублями дешевле красного, и за лазоревый — одним рублем дороже зеленого. Ведательно есть, колико денег он платил за каждый рулон.

Двенадцать человек несут 12 хлебов: каждый мужчина несет по 2 хлеба, женщина — по половине хлеба, а ребенок — по четверти хлеба. Сколько было мужчин, женщин и детей?»

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. а) Пусть $a>0$, $b>0$, $c>0$. Докажите неравенство
$$abc\geqslant(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a).$$
б) Пусть r и R — соответственно радиусы окружности, вписанной в треугольник, и окружности, описанной около него. Докажите, что $R\geqslant 2r$. Выясните, в каком случае это неравенство превращается в равенство.

2. Найдите наименьшее значение многочлена
$$x^6+2x^4+2x^3+x^2+2x-1.$$

3. Докажите, что число n^4+64 является составным.

4. Докажите, что уравнение
$$x^2+y^3+z^5=t^7$$
имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

5. На сторонах AB и BC треугольника ABC даны точки M и N такие, что $AM:MB=BN:NC$. Пусть Q — точка пересечения прямых AN и CM. Докажите, что площадь четырехугольника $MBNQ$ равняется площади треугольника ACQ.

Девятый класс

6. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} x^2-yz=y-x,\\ y^2-xz=z-y,\\ z^2-xy=x-z.\end{cases}$$

7. Углы A, B, C треугольника ABC равны соответственно α, β, γ; стороны, лежащие против соответствующих углов, равны a, b, c.
а) Докажите неравенство
$$a\cos\alpha+b\cos\beta<c.$$
б) Найдите наибольшее значение произведения
$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$
Для какого треугольника это наибольшее значение достигается?

8. Найдите все целые k, при которых k^5+3 делится на k^2+1.

9. В треугольник ABC вписан треугольник MNP ($M\in AB$, $N\in BC$, $P\in AC$) так, что сторона MN перпендикулярна стороне BC, а сторона MP перпендикулярна стороне AC. Найдите положение точки M (на стороне AB), при котором сторона PN будет наименьшей.

10. Докажите, что уравнение
$$x^{10}-x^7+x^2-x+1=0$$
не имеет решений.

Десятый класс

11. Решите уравнение
$$x^2+2x\sin xy+1=0.$$

12. Вычислите сумму
$$\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

13. Докажите равенство ($n\geqslant 2$)
$$\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{tg}2x+\operatorname{tg}2x\cdot\operatorname{tg}3x+\ldots+\operatorname{tg}(n-1)x\operatorname{tg}nx=\frac{\operatorname{tg}nx}{\operatorname{tg}x}-n.$$

14. Решите уравнение
$$\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}-1=0.$$

15. На сторонах остроугольного треугольника, как на диаметрах, во внешнюю сторону построили полуокружности. Высоты треугольника продолжили до пересечения с построенными полуокружностями, после чего эти точки пересечения соединили с ближайшими вершинами треугольника. Докажите, что из получившегося шестиугольника можно склеить тетраэдр.

В подготовке публикации использовались задачи, предложенные *С. Р. Сефибековым*, а также *А. А. Егоровым*, *В. Н. Дубровским* и *Э. А. Ясиновым*.

Урок одной задачи

(Начало см. на с. 23)

претацией среднего гармонического чисел a и b (здесь они основания трапеции). Отрезок MN меньше отрезка L_1L_2 — среднего геометрического чисел a и b, который изображается отрезком, параллельным основаниям и расположенным так, что трапеции BL_1L_2C и L_1L_2AD подобны. Отрезок MN меньше отрезка L_3L_4 — средней линии трапеции, — он является интерпретацией среднего арифметического двух чисел, и, наконец, отрезок MN меньше отрезка L_5L_6 — среднего квадратичного двух чисел a и b — отрезка, разбивающего трапецию на две равновеликие части и параллельного основаниям, то есть
$$\frac{2ab}{a+b}<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}.$$

задачник кванта

Задачи

M1001 — M1005; Ф1013 — Ф1017

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 ноября 1986 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9 — 86» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M1001, M1002» или «Ф1013». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Фамилию и имя пишите печатными буквами.

Задачи M1004 и M1005 предлагались на Всесоюзной олимпиаде школьников в 1986 году (об этой олимпиаде будет рассказано в «Кванте» № 11), задачи M1001 и M1003 предлагались на ленинградской, M1002 б) — на московской городских олимпиадах. Среди других задач этих олимпиад (см. стр. 57—58 этого номера) также немало интересных, и мы предла-

M1001. В куче 1001 камень. Она произвольно делится на две кучи, подсчитывается число камней в них и записывается произведение этих двух чисел. Затем с одной из этих куч (в которой больше одного камня) проделывается та же операция: она делится на две и записывается произведение чисел камней в двух вновь образовавшихся кучах. Затем та же операция повторяется с одной из трех получившихся куч и так далее, пока во всех кучах не станет по одному камню. Чему равняется сумма 1000 записанных произведений?

А. С. Меркурьев

M1002. а)*Рассеянный математик, забыв трехзначный код своего подъезда, нажимает кнопки (с цифрами 0,1,...,9) по одной в секунду. Дверь откроется, если три цифры кода в нужном порядке будут набраны подряд. Математик уверен, что даже в случае «крайнего невезения» (если нужная комбинация встретится последней) он сможет войти в подъезд не позже чем через 16 мин. 42 сек (1002 сек). Прав ли он? Как он должен действовать, чтобы попасть домой за наименьшее время?

Ответьте на последний вопрос, если

б) исправны только кнопки с цифрами 1, 2, 3 (другие цифры в код не входят);

в)*исправны все кнопки, но математик помнит, что все три цифры кода различны.

M1003. В треугольнике ABC проведены три высоты AH, BK, CL. Докажите равенства

$$AK \cdot BL \cdot CH = AL \cdot BH \cdot CK = HK \cdot KL \cdot LH$$

С. А. Генкин

M1004. Через вершину A треугольника ABC, в котором $AB \neq AC$ проводятся всевозможные прямые. Докажите, что

а) на каждой их них найдется на более одной точки M, отличной от вершин треугольника, для которой $\angle ABM = \angle ACM$;

б) имеется не более пяти из этих прямых, на которых нет ни одной такой точки M.

О. Р. Мусин

M1005. Клетки квадратной таблицы размером $n \times n$ ($n \geqslant 3$) заполняются числами ± 1 по следующим правилам:

1) во все граничные клетки таблицы помещаются числа -1;

2) число, помещаемое в очередную незаполненную

гаем нашим читателям (кроме москвичей и ленинградцев) присылать их решения до 1 декабря — они также будут учитываться в конкурсе «Задачника Кванта». Напоминаем, что при определении победителей конкурса, приглашаемых на республиканские олимпиады, мы сможем учесть письма, полученные не позже 10 декабря.

клетку таблицы, равно произведению ближайших к этой клетке чисел, расположенных по разные стороны от нее и лежащих или в одной строке с ней, или в одном столбце с ней. Так делается до тех пор, пока все пустые клетки таблицы не будут заполнены.

а) Какое наибольшее количество $+1$ может получиться в таблице?

б) Какое наименьшее количество $+1$ может получиться в таблице?

Н. Х. Агаханов

Ф1013. Два спортсмена стоят в точках A и $Б$ и держат резиновый шнур. По сигналу спортсмен A начинает двигаться на восток со скоростью $v_0=1$ м/с, а спортсмен $Б$ — на юг с постоянным ускорением. Найдите это ускорение, если известно, что узел $В$, завязанный на шнуре, при движении прошел через точку $Г$ (рис. 1; масштаб указан на рисунке).

С. С. Кротов

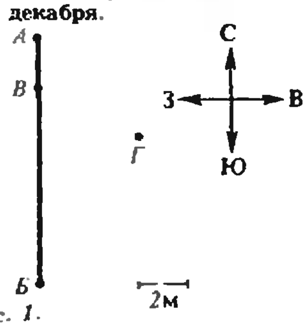


Рис. 1.

Ф1014. Мощный транзистор, выделяющий тепло, закреплен на теплоотводящей пластине, обдуваемой воздухом, температура которого равна 30 °С. На рисунке 2 показано распределение температур на пластине. Определите рассеиваемую мощность. Известно, что равномерно нагретая до 70 °С пластина рассеивает мощность $P=10$ Вт при температуре воздуха 20 °С. Теплоотдача пропорциональна разности температур пластины и воздуха.

А. Р. Зильберман

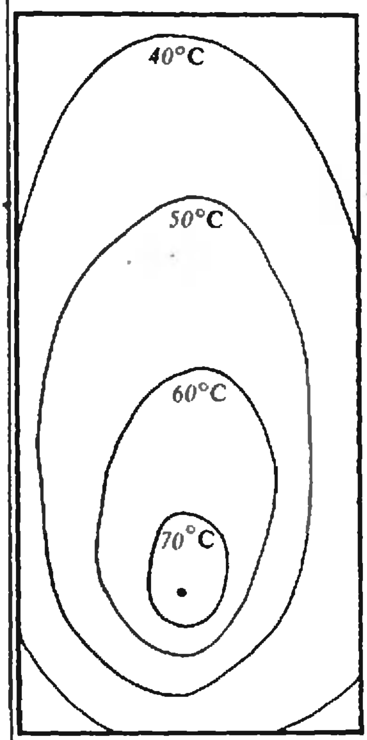


Рис. 2

Ф1015. Схема, приведенная на рисунке 3, содержит 50 разных амперметров и 50 одинаковых вольтметров. Показания первого вольтметра $U_1=9{,}6$ В, первого амперметра — $I_1=9{,}5$ мА, второго амперметра — $I_2=9{,}2$ мА. Определите по этим данным сумму показаний всех вольтметров.

А. Р. Зильберман

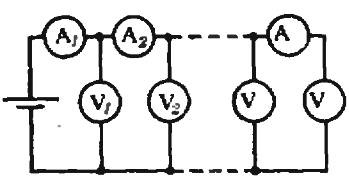


Рис. 3.

Ф1016. В катушку может свободно втягиваться ферромагнитный сердечник массой $M=0{,}01$ кг. Катушку подключили к источнику с напряжением $U=100$ В, и через нее протек ток, показанный на графике на рисунке 4. Оцените начальную индуктивность катушки. Пренебрегая потерями, найдите скорость сердечника в момент $\tau=10^{-3}$ с.

В. Е. Скороваров

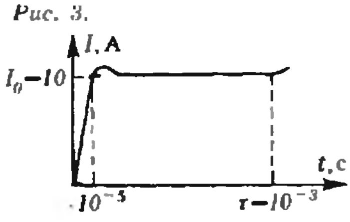


Рис. 4.

Ф1017. Крупнейший в мире советский телескоп имеет в качестве объектива зеркало диаметром $D=6$ м. Какое время потребуется, чтобы, сравнивая полученные на этом телескопе фотоснимки, можно было заметить взаимное вращение нашей Галактики и туманности Андромеды вокруг общего центра масс?

Расстояние до Андромеды $R=1{,}42\cdot10^{11}\ R_0$, где R_0 — радиус орбиты Земли. Массы Галактики и Андромеды равны, соответственно, $M_Г=2{,}5\times\times10^{11}\ M_☉$, $M_А=3{,}6\cdot10^{11}\ M_☉$, где $M_☉$ — масса Солнца. Фотографирование ведется в видимом свете на длине волны $\lambda=5\cdot10^{-7}$ м.

В. Е. Белонучкин

Problems

M1001—M1005; P1013—P1017

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than November 15th, 1986 to the following address: USSR, Moscow, 103006.
Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Please print your name and address in BLOCK LETTERS.

M1001. There are 1001 pebbles in a heap. The heap is divided into two, the number of pebbles in each counted and the product of these two numbers written down. Then the same procedure is carried out with one of the two heaps (containing more than one pebble): it is divided in two, their pebbles counted, the two numbers multiplied and written down. Then this operation is continued with one of the three heaps obtained and so on until all the heaps contain only one pebble. Find the sum of the 1000 products written down.

A. S. Merkuriev

M1002a)* An absent-minded mathematician, having forgotten the three-digit code number of the lock to his apartement house's front door, pushes the buttons (with the digits 1,2,...,9), one each second. The door will open if the three digits of the code (in the correct order) are pressed successively. The mathematician is sure that even if he has the "worst luck" (the required combination appears last) he will open the front door no later than in 16 min 42 sec (1002 sec). Is he right? What must he do to get home as soon as possible?
Answer the last question if
b) only the buttons with the digits 1, 2, 3 work (the other digits do not appear in the code number);
c)* all the buttons work, but the mathematician remembers that the three digits in the code number are all different.

M1003. The altitudes of triangle ABC are AH, BK, CL. Prove that

$$AK \cdot BL \cdot CN = AL \cdot BH \cdot CK = HK \cdot KL \cdot LH.$$

S. A. Genkin

M1004. All the straight lines passing through vertex A of triangle ABC, where $AB \neq AC$, are considered. Prove that
a) each of these lines contains no more that one point M which is not a vertex of ABC and satisfies $\angle ABM = \angle ACM$;
b) no more than five of these lines contain no such point M.

O. R. Musin

M1005. The little squares of an n by n table ($n=3$) are filled with the numbers ± 1 according to the following rules:
1) the number -1 is put in all the little squares along the boundary;
2) any new number put in an empty little square must equal either the product of the two nearest numbers to it on opposite sides in the same column or to that for the same row; this is continued until all the empty little squares have been filled.
a) What greatest amount of «plus ones» may be obtained in the table?
b) What least amount of «plus ones» may be obtained in the table?

N. H. Agakhanov

P1013. Two athletes standing at the points A and B hold an elastic string. Then they simultaneously begin running, the athlete at A to the east with velocity $v_0 = 1$ m/s, the one at B to the south with constant acceleration. Find this acceleration if it is known that the little knot B tied on the string passes through the point Γ (see figure Рис. 1, p. 37; the scale is indicated on the figure).

S. S. Krotov

P1014. A powerful transistor giving out heat is fixed on a heatconducting plate which is ventilated by air at temperature 30 °C. The figure Рис. 2 shows the temperature distribution on the plate. Determine the dispersed power. It is known that the plate heated uniformly to 70 °C disperses a power of $P = 10$ W when the air temperature is 20 °S. The heat loss is proportional to the temperature difference between the plate and air.

A. R. Zilberman

P1015. The circuit shown on figure Рис. 3 contains 50 different ammeters and 50 identical voltmeters. The first voltmeter shows $U_1 = 9.6$ V, the first ammeter $I_1 = 9.5$ mA, the second ammeter $I_2 = 9.2$ mA. Use this data to determine the sum of showings of all the voltmeters.

A. R. Zilberman

P1016. A ferromagnetic core of mass $M = 0.01$ kg can freely move into a coil. The coil is connected to a source of voltage

$U=100$ V and current flows through it as plotted on figure Рис. 4, p. 37. Determine the original inductivity of the coli. Assuming losses negligible, find the velocity of the core at time $\tau=10^{-3}$ s.

V. E. Skorovarov

P1017. The world's largest (Soviet-made) telescope has a mirror of diameter $D=6$ m for a lens. How much time is required to register the relative rotation of our Galaxy and Andromeda about their common centre of mass by comparing photographs obtained by this telescope? The distance to Andromeda is $R=1.42\cdot10^{11}$ R_0, where R_0 is the radius of Earth's orbit. The masses of our Galaxy and Andromeda equal, respectively, $M_G=2.5\cdot10^{11}$ M_0 and $M_A=3.6\cdot10^{11}$ M_0, where M_0 is the Sun's mass. The photographs are taken in visible light of wavelength $\lambda=5\cdot10^{-7}$ m.

V. E. Belonuchkin

Решения задач

М981 — М985; Ф993 — Ф997

М981. *Докажите, что число 11...1 (1986 единиц) имеет по крайней мере а) 8, б) 28 различных делителей.*

а) Ясно, что если число a записывается n единицами, число b записывается k единицами и n делится на k, то и a делится на b. А поскольку $1986=2\cdot3\cdot331$, число $A=11...1$ из 1986 единиц имеет кроме числа 1 и самого A еще по крайней мере 6 делителей из одних единиц:

$$11,\ 111,\ 111\,111,\ \underbrace{11...1}_{331},\ \underbrace{11...1}_{662},\ \underbrace{11...1}_{993}.$$

б) Мы укажем не 28, а сразу 128 делителей числа A. Заметим, что 111111 раскладывается на 5 простых множителей:

$$111111=1001\cdot111=3\cdot7\cdot11\cdot13\cdot37.$$

$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+...+1)$

$x^{2k+1}+1=(x+1)(x^{2k}-x^{2k-1}+...+1)$

Учитывая, что $10^{993}+1$ делится на $10^3+1=1001$, а $10^{993}-1$ — на $10^3-1=999$ (см. тождества на полях, где $n=2k+1=331$, $x=10^3$) и полагая $a=10^{331}$, получим

$$A=\frac{a^6-1}{9}=(a^3+1)\frac{a^3-1}{9}=$$

$$=3\cdot7\cdot11\cdot13\cdot37\cdot\frac{a^3+1}{1001}\cdot\frac{a^3-1}{999}.$$

Произведение любого набора из этих 7 множителей будет делителем A («пустому набору» отвечает делитель 1). Таким образом, мы нашли $2^7=128$ делителей, причем все они различны. Чтобы убедиться в этом, докажем, что все 7 множителей в выписанном разложении A попарно взаимно просты. В самом деле, *остаток от деления числа a на $m=10^6-1$ равен* 10, поскольку $10^{331}-10=10(10^{6\cdot55}-1)$ делится на m; поэтому $a^3\pm1$ при делении на m дает остаток $10^3\pm1$, то есть числа $(a^3+1)/1001$ и $(a^3-1)/999$ взаимно просты с m и, очевидно, взаимно просты друг с другом.

Малая теорема Ферма: *Для любого целого числа n и простого p число n^p-n делится на p.*

(См., например, статью Н. Виленкина «Сравнения и классы вычетов», Квант, 1978, № 10, с. 7.)

Нетрудно продолжить разложение A на взаимно простые множители:

$$A=3\cdot7\cdot11\cdot13\cdot37\,\frac{a+1}{11}\cdot\frac{a^2-a+1}{91}\cdot\frac{a-1}{9}\cdot\frac{a^2+a+1}{111}$$

(из выделенного выше курсивом утверждения следует, что сомножители здесь целые); отсюда видно, что A имеет не менее $2^9=512$ делителей. Продолжить это разложение «вручную» уже трудно. Однако из малой теоремы Ферма (приведенной на полях) следует, что $9A=10^{1986}-1$ делится на простое число 1987. Таким образом, один из 4 последних сомножителей должен делиться на 1987, а значит, A имеет не менее $2^{10}=1024$ делителей. Может быть, кому-то из читателей удастся поднять эту оценку еще выше?

Н. Б. Васильев, Л. Д. Курляндчик

◆

М982. *На сторонах AB, BC и CA треугольника ABC построены во внешнюю сторону квадраты ABB_1A_2, BCC_1B_2, CAA_1C_2. Докажите, что перпендикуляры к отрезкам A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2, восставленные в их серединах, пересекаются в одной точке.*

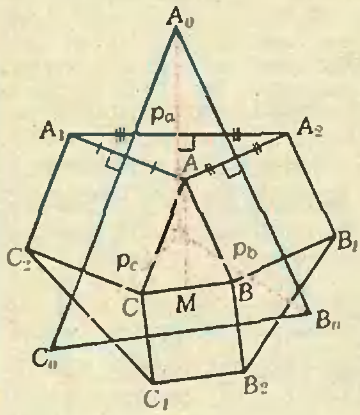


Рис. 1.

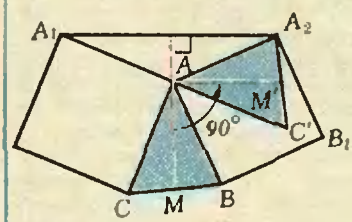


Рис. 2.

Мы докажем, что рассматриваемые в задаче перпендикуляры содержат медианы некоторого треугольника, гомотетичного данному треугольнику ABC. Утверждение задачи следует тогда из того, что медианы любого треугольника пересекаются в одной точке.

Проведем через центры квадратов прямые, параллельные сторонам треугольника ABC (см. рис. 1); они ограничивают гомотетичный ему треугольник $A_0B_0C_0$. Поскольку прямые A_0B_0 и A_0C_0 — серединные перпендикуляры к отрезкам AA_2 и AA_1, точка A_0 их пересечения — это центр описанной окружности треугольника AA_1A_2 и, следовательно, лежит на серединном перпендикуляре p_a к отрезку A_1A_2. Аналогично серединные перпендикуляры p_b и p_c к отрезкам B_1B_2 и C_1C_2 проходят через точки B_0 и C_0 соответственно.

Остается доказать, что прямые p_a, p_b, p_c содержат медианы треугольника $A_0B_0C_0$. Для этого достаточно проверить, что они параллельны медианам треугольника ABC; например, что прямая p_a параллельна медиане AM, или что $AM\perp A_1A_2$. Повернем треугольник ABC на 90° вокруг точки A так, чтобы вершина B перешла в A_2 (рис. 2). Пусть точки M и C перейдут при этом в M' и C'; тогда M' — середина A_2C', а A — середина A_1C' ($A_1A=AC=AC'$, $\angle A_1AC=\angle CAC'=90^\circ$). Поэтому AM' — средняя линия треугольника $A_1C'A_2$, то есть $AM'\parallel A_1A_2$; в то же время $AM\perp AM'$.

Другое решение можно получить из следующего соображения: пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC; если параллельно перенести отрезки A_1A_2, B_1B_2 и C_1C_2 на векторы $\vec{AO}$, $\vec{BO}$ и $\vec{CO}$ соответственно, то эти три отрезка сомкнутся в треугольник, причем прямые p_a, p_b и p_c будут его серединными перпендикулярами.

В. Н. Дубровский

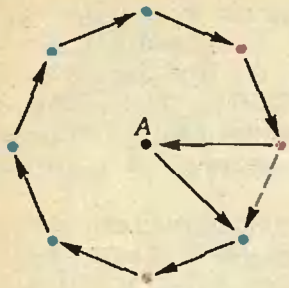
◆

М983. *В турнире с участием 16 теннисистов каждые двое играют одну партию.*
а) Приведите пример распределения результатов партий, при котором любых 10 участников можно расставить по кругу так, чтобы каждый выиграл у своего левого соседа.
б) Докажите, что если условие из пункта а) выполнено, то и любых 11 участников можно расставить по кругу таким образом.

а) Пусть 16 теннисистов стоят по кругу и каждый выиграл у 7 следующих за ним по часовой стрелке (как сыграли между собой теннисисты, отстоящие на 8 мест, несущественно). Такое распределение результатов удовлетворяет условию задачи: если произвольно отметить в круге 10 теннисистов — A_1, A_2, ..., A_{10} (по часовой стрелке), — то между A_1 и A_2, A_2 и A_3, ..., A_{10} и A_1 будет не более чем по 6 теннисистов, поэтому в каждой из этих пар первый выиграл у второго.

Число 16 в условии задачи можно заменить на любое $n\geqslant 3$, а 10 — на любое k такое, что $(n+3)/2\leqslant k\leqslant n$, — пример строится точно так же. Если $k<(n+3)/2$, такого примера построить нельзя.

б) Докажем, что если любых k $(2<k<n)$ из n теннисистов, сыгравших друг с другом по одной



партии, можно расставить в соответствии с условием, то любых $k+1$ — тоже.

Рассмотрим некоторую группу из $k+1$ теннисистов и удалим из нее одного — A, а остальных k расставим по циклу (так, чтобы каждый выиграл у следующего). Отметим тех из k, которым A проиграл, красным, а тех, у кого он выиграл — синим (см. рисунок); хотя бы один красный и хотя бы один синий заведомо найдутся, потому что A вместе с любыми $k-1$ теннисистами можно расставить по циклу (то есть даже среди любых $k-1$ из наших k найдется и красный, и синий теннисист). Теперь выберем в нашем цикле любое место, где за красным по часовой стрелке стоит синий, и вставим между ними A.

Заметим, что при $n=16$, $k=10$ утверждение задачи останется верным, даже если не требовать, чтобы все теннисисты сыграли друг с другом. Чтобы убедиться в этом, достаточно из условия, что любых 10 теннисистов можно расположить по циклу, вывести такие следствия:

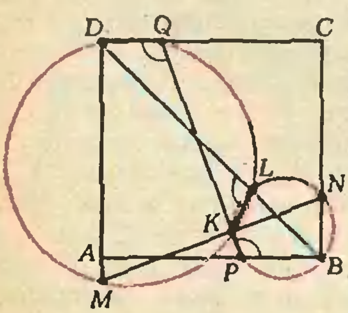
1) каждый выиграл не более 7 и проиграл не менее 7 партий;

2) среди любых 11 найдется такой, который сыграл со всеми 10 остальными.

К. П. Кохась, Н. Б. Васильев

◆

M984. *Через произвольную точку K квадрата ABCD проведена прямая, пересекающая его противоположные стороны AB и CD в точках P и Q. Доказать, что отличная от K точка пересечения окружностей, проходящих через точки K, B, P и K, D, Q, лежит на диагонали BD.*



Пусть L — точка пересечения диагонали BD с окружностью DQK. Докажем, что эта точка лежит и на второй окружности — BPK. Для определенности предположим, что точки K и Q лежат по разные стороны от BD, а P и K — по одну сторону (см. рисунок). Тогда, поскольку углы DQK и DLK вписаны в одну окружность и опираются на одну и ту же дугу DK,

$$\angle BPK = \angle PQD = \angle KLD = 180^\circ - \angle KLB,$$

то есть четырехугольник $PKLB$ вписан в окружность.

Приведем еще одно решение, использующее поворот. Пусть M и N — точки пересечения окружностей KQD и KPB с прямыми AD и BC соответственно (см. рисунок). Ясно, что $\angle MKQ = \angle PKN = 90^\circ$, то есть отрезок MN перпендикулярен PQ и проходит через точку K. Рассмотрим поворот на 90°, который переводит точку Q в M (а луч QC — в луч MD). Легко видеть, что при этом повороте прямая QP перейдет в MN, а прямая AB — в BC. Следовательно, точка P перейдет в N. Поскольку отрезки QM и PN видны из центра поворота под прямыми углами, этот центр лежит на пересечении данных окружностей. С другой стороны, он равноудален от прямых AB и BC (так как первая из них переходит во вторую) и, следовательно, лежит на диагонали BD.

В. Н. Дубровский

◆

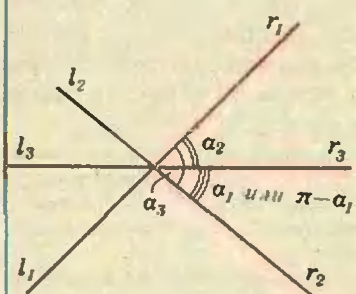
M985. *Углом между двумя прямыми, пересекающимися в точке O, называется угол между их лучами с вершиной O, не превосходящий 90°. Сколькими способами через точку O в пространстве можно провести три прямые l_1, l_2, l_3 так, чтобы углы между l_2 и l_3, l_3 и l_1, l_1 и l_2 соответственно равнялись данным числам α_1, α_2, α_3? (Две тройки прямых*

Ответ: двумя способами, если все числа α_1, α_2, α_3 меньше 90° и удовлетворяют обеим системам неравенств (1) и (2), приводимым на полях; ни одним способом, если ни одна из этих систем не выполняется; одним способом в остальных случаях (в частности, для $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=30^\circ$ имеется 1 способ, а для $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=70^\circ$ — 2 способа).

Напомним сначала необходимые и достаточные условия существования трехгранного угла с заданными плоскими углами. Они состоят в том, что

l_1, l_2, l_3 и l'_1, l'_2, l'_3 считаются одинаковыми, если они «конгруэнтны», то есть если существует поворот или симметрия относительно плоскости, переводящие l_i в l'_i для всех $i=1, 2, 3$.)

Предостережение: ответ зависит от величин α_1, α_2, α_3: например, для $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=30°$ он не такой, как для $\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=70°$



$$(1)\quad \begin{cases} \alpha_1 \leqslant \alpha_2+\alpha_3, \\ \alpha_2 \leqslant \alpha_1+\alpha_3, \\ \alpha_3 \leqslant \alpha_1+\alpha_2, \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \leqslant 360°, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} 180° \leqslant \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3, \\ \alpha_1+\alpha_2 \leqslant 180°+\alpha_3, \\ \alpha_1+\alpha_3 \leqslant 180°+\alpha_2, \\ \alpha_2+\alpha_3 \leqslant 180°+\alpha_1. \end{cases}$$

каждый из плоских углов должен быть меньше суммы двух других, а сумма всех трех углов должна быть меньше 360° (см., например, учебное пособие: Геометрия 9—10 / Под ред. З. А. Скопеца — М.: Просвещение, 1981, с. 224). При этом трехгранный угол определяется своими плоскими углами однозначно (с точностью до конгруэнтности).

Пусть l_1, l_2, l_3 — прямые, удовлетворяющие условию задачи. Выберем на прямой l_1 один из лучей с началом O — обозначим его r_1, — а на прямых l_2 и l_3 — лучи r_2 и r_3, составляющие с r_1 углы величиной α_2 и α_3 (см. рисунок). Поскольку угол между прямыми l_2 и l_3 равен α_1, угол между лучами r_2 и r_3 может быть равен α_1 или $180°-\alpha_1$. Из сказанного о трехгранных углах следует, что существует не более двух различных (с точностью до конгруэнтности) троек прямых с заданными углами α_1, α_2, α_3 между ними. Они получаются при продолжении ребер двух трехгранных углов T и T' с плоскими углами α_1, α_2, α_3 и $180°-\alpha_1$, α_2, α_3 соответственно, причем для их существования необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия (1) — в первом случае, (2) — во втором.

Заметим, что при $\alpha_1=90°$ все наши тройки прямых одинаковы ($T \cong T'$, так как $\alpha_1=180°-\alpha_1$). Разумеется, это верно и тогда, когда $\alpha_2=90°$ — в рассуждениях можно просто поменять нумерацию прямых. Итак, если хотя бы один из углов α_1, α_2, α_3 равен 90° и выполнены условия (1) (или совпадающие с ними в этом случае условия (2)), то наша задача имеет единственное решение.

Наконец, пусть все углы α_1, α_2, α_3 острые и удовлетворяют обеим системам (1) и (2). Покажем, что тогда тройки прямых, построенные по трехгранным углам T и T', различны. Для того чтобы две такие тройки оказались конгруэнтны, надо, чтобы угол T' был конгруэнтен углу T или вообще любому из 8 трехгранных углов с вершиной O, ребра которых лежат на тех же прямых l_1, l_2, l_3, что и ребра угла T. Легко видеть, что плоские углы этих трехгранных углов могут равняться (α_1, α_2, α_3) (для угла T и «вертикального» к нему угла), ($180°-\alpha_1$, $180°-\alpha_2$, α_3), (α_1, $180°-\alpha_2$, $180°-\alpha_3$) или ($180°-\alpha_1$, α_2, $180°-\alpha_3$). Но у угла T' ровно 2 острых угла (α_2 и α_3), а во всех выписанных тройках их число равно 3 или 1.

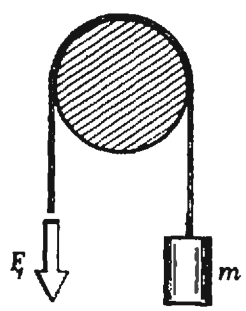
А. Б. Гончаров, В. Н. Дубровский

◆

Ф993. *Через неподвижное, горизонтально закрепленное бревно переброшена веревка. Чтобы удерживать груз массой $m=6$ кг, подвешенный на этой веревке, необходимо тянуть второй конец веревки с минимальной силой $F_1=40$ Н (см. рисунок). С какой минимальной силой F_2 надо тянуть веревку, чтобы груз начал подниматься?*

Вес груза $P=mg=60$ Н существенно больше силы F_1, с которой надо тянуть веревку. Такая ситуация нам хорошо знакома из жизни и связана с наличием трения между веревкой и бревном.

В первом случае (веревка неподвижна) силы трения направлены против действия веса груза и помогают удерживать веревку с грузом. Полный расчет распределения сил трения довольно сложен, так как абсолютное значение силы натяжения веревки (которая определяет силу реакции опоры в



точках соприкосновения веревки с бревном) меняется от F_1 (условие равновесия левого конца веревки) до $P=mg$ (условие равновесия правого конца). Однако для решения задачи нам достаточно заметить, что сила трения $F_{тр}$, пропорциональная в каждой точке силе реакции опоры, будет пропорциональна силе натяжения веревки; для определенности будем считать, что $F_{тр}$ пропорциональна бóльшей силе натяжения, то есть $F_{тр}=kP$. Это означает, что $F_1=P-kP$, и отношение бóльшей силы натяжения P к меньшей F_1 есть величина постоянная: $P/F_1=1/(1-k)=\text{const}$.

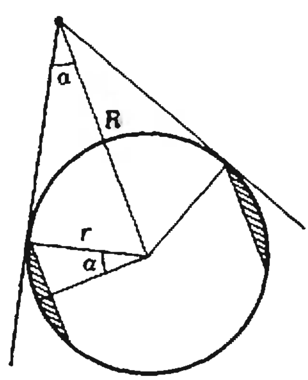
Во втором случае, когда мы хотим поднять груз, концы веревки как бы меняются местами. Сила трения оказывается направленной против действия силы F_2 и уже не помогает, а мешает. Отношение бóльшей силы натяжения F_2 к меньшей P должно быть таким же, как и в первом случае $F_2/P=P/F_1$. Отсюда находим:

$$F_2=\frac{P^2}{F_1}=90\text{ Н}.$$

А. И. Буздин

◆

Ф994. *Спутник исследует планету, плотность которой ρ, двигаясь по круговой орбите с периодом обращения T и фотографируя ее поверхность. Какая часть площади планеты останется неисследованной?*



Со спутника видна лишь часть поверхности планеты, попадающая внутрь конуса, вершина которого — точка, в которой в данный момент находится спутник, а образующие — касательные к поверхности планеты, проведенные из этой точки (см. рисунок). Таким образом, неисследованными остаются два сферических сегмента, площадь которых

$$s=2\cdot 2\pi rh=4\pi r^2(1-\cos\alpha)=4\pi r^2\left(1-\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}\right),$$

где r — радиус планеты, R — радиус орбиты спутника. Отношение этой площади к площади поверхности планеты —

$$\frac{s}{S}=1-\sqrt{1-\left(\frac{r}{R}\right)^2}. \qquad (*)$$

Выразим отношение r/R через приведенные в условии задачи данные.

Запишем уравнение движения спутника:

$$G\frac{Mm}{R^2}=ma, \text{ или } a=G\frac{M}{R^2}=G\cdot\frac{4}{3}\pi r^3\rho\cdot\frac{1}{R^2}.$$

С другой стороны, $a=(2\pi/T)^2R$. Следовательно,

$$\frac{4}{3}G\pi\rho\frac{r^3}{R^2}=\frac{4\pi^2}{T^2}R,$$

откуда

$$\frac{r}{R}=\sqrt[3]{\frac{3\pi}{G\rho T^2}}.$$

Подставляя это значение в (*), находим, какая часть площади поверхности планеты остается неисследованной:

$$\frac{s}{S}=1-\sqrt{1-\left(\frac{3\pi}{G\rho T^2}\right)^{2/3}}.$$

В. В. Дорин

Ф995. *В запаянном капилляре находится жидкость плотности ρ. При нагревании капилляра на малое ΔT оказалось, что граница AB между жидкостью и ее паром (см. рисунок) не сдвигается. При этом давление пара возросло на Δp. Как изменилась плотность жидкости?*

Из условия задачи следует, что состояния системы до и после нагревания отвечают равновесному сосуществованию жидкости и ее пара. Это означает, что на $p-T$-диаграмме оба состояния попадают на кривую сосуществования. Эта кривая, как известно, представляет собой зависимость давления p насыщенного пара от температуры T, причем зависимость эта монотонная. Касательные к кривой $p\ (T)$ составляют разные углы с осью T. Выберем ту точку на кривой, касательная в которой составляет угол $\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\Delta p}{\Delta T}$ с осью T. Значения p и T, отвечающие этой точке, однозначно определяют начальные давление и температуру газа.

При нагревании жидкость должна была бы расширяться, то есть граница AB должна была бы двигаться вправо. Неподвижность границы означает, что при нагревании испаряется такая масса Δm жидкости, что оставшаяся жидкость плотностью $\rho - \Delta\rho$ занимает прежний объем. Как видно из рисунка, этот объем равен объему, занимаемому паром. Таким образом,

$$\Delta\rho = \frac{\Delta m}{V}. \qquad (*)$$

Изменение давления насыщенного пара связано с увеличением его температуры на ΔT. Из уравнений состояния пара при температурах T и $T+\Delta T$ —

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

$$(p+\Delta p)\, V = \frac{m+\Delta m}{\mu} R\, (T+\Delta T)$$

— получаем:

$$\Delta p \cdot V = \frac{\Delta m}{\mu} RT + \frac{m}{\mu} R \cdot \Delta T + \frac{\Delta m}{\mu} R \cdot \Delta T.$$

Пренебрегая членом $\frac{R}{\mu}\ (\Delta m \cdot \Delta T)$, отсюда с учетом $(*)$ находим:

$$\Delta\rho = \frac{\mu}{R}\, \frac{\Delta p \cdot T - p \cdot \Delta T}{T^2}.$$

Л. Г. Маркович

◆

Ф996. *В пролетном масс-спектрометре источник испускает сгусток заряженных частиц, которые сначала летят свободно (рис. 1) и пролетают через первый датчик ($Д_1$), на-*

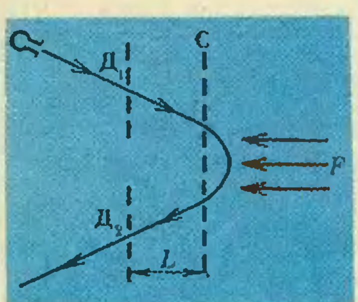


Рис. 1.

Пусть частица массы m вылетает из источника со скоростью v. Обозначим $v_\parallel$ проекцию этой скорости на направление, параллельное сетке С, а $v_\perp$ — проекцию v на направление, перпендикулярное сетке. При движении частицы за сеткой (справа от нее) $v_\parallel$ остается неизменной, а $v_\perp$ меняется от $+v_\perp$ до $-v_\perp$. Согласно закону сохранения импульса (в проекциях на направление, перпендикулярное сетке), $F \cdot \Delta t = m \cdot \Delta v_\perp = 2mv_\perp$, где Δt — время движения частицы за сеткой; отсюда $\Delta t = 2mv_\perp / F$. Полное время пролета — это

$$T = t + \Delta t = \frac{2L}{v_\perp} + \frac{2mv_\perp}{F} \qquad (*)$$

(t — суммарное время пролета от датчика $Д_1$ до входа за сетку и от выхода из сетки до датчика $Д_2$).

ходящийся на расстоянии L от сетки (С). За сеткой по нормали к ней на частицы действует электрическая сила F. Частицы поворачиваются, вылетают через сетку назад и пролетают через второй датчик (Д$_2$), находящийся на том же расстоянии L от сетки. Меняя режим работы источника, измеряют время между срабатываниями датчиков и находят наименьшее время пролета τ. Какова масса частиц? (Начальная скорость зависит от напряжения источника, но точное значение ее неизвестно.) Как можно найти массы частиц, если источник испускает одновременно несколько сортов частиц с разными массами?

На рисунке 2 приведен график зависимости $T(v_\perp)$. Видно, что одно и то же время пролета получается при двух значениях $v_\perp$ и только минимальному значению $T_{min}=\tau$ соответствует единственное значение $v_\perp$. Это означает, что если рассматривать (*) как уравнение для скорости, то при $T=\tau$ оно имеет единственное решение. Иными словами, уравнение

$$\frac{2m}{F}v_\perp^2-\tau v_\perp+2L=0$$

имеет единственное решение; значит, дискриминант уравнения равен нулю —

$$\tau^2-\frac{16Lm}{F}=0,$$

откуда и находим массу частицы:

$$m=\frac{F\tau^2}{16L}.$$

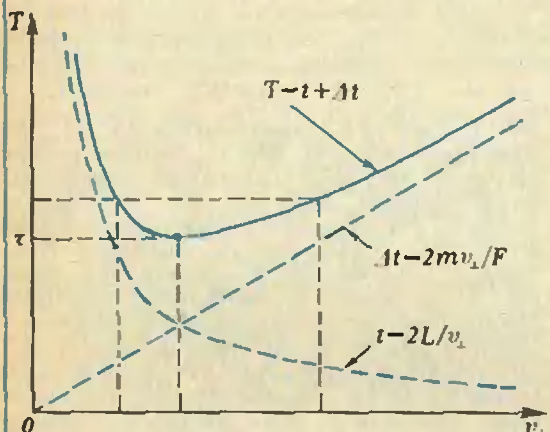


Рис. 2.

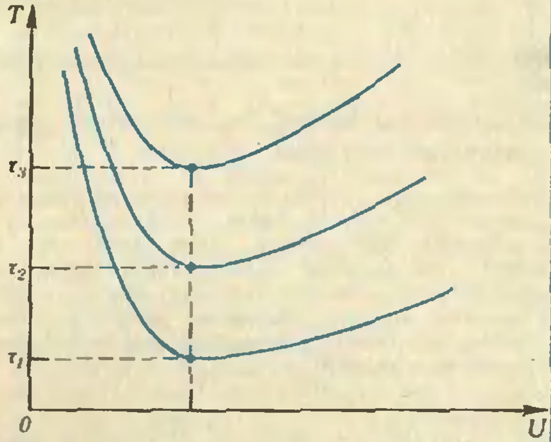


Рис. 3.

При наличии частиц различных масс и при одновременном пролете ими первого датчика (короткий сгусток при датчике Д$_1$, расположенном вблизи источника) второй датчик будет срабатывать не однократно. При фиксированном напряжении источника получится несколько времен пролета. Будем плавно менять напряжение и откладывать для каждого фиксированного напряжения источника U соответствующий набор времен пролета (рис. 3). Получившиеся на графике точки укладываются на несколько плавных кривых, каждая из которых отвечает частицам определенной массы со своим значением минимального времени пролета τ.

И. И. Воробьев

◆

Ф997. *Известно, что светящийся след падающего метеорита по мере приближения к земле становится ярче. Однако в верхних слоях атмосферы он сохраняется значительно дольше, чем у земли. Почему?*

Свечение следа метеорита — это результат его столкновений с атомами атмосферы. Благодаря большой скорости метеорита при столкновениях его с атомами происходит ионизация, так что след метеорита представляет собой плазму, состоящую из электронов и положительно заряженных ионизованных атомов. При рекомбинации, когда электрон вновь занимает свое место в атоме, энергия, затраченная на ионизацию, выделяется в виде квантов света.

Легко понять, что яркость свечения нарастает по мере приближения метеорита к земле, поскольку растет плотность атмосферы и, следовательно, большее число молекул в единицу времени сталкивается с метеоритом. Когда метеоритная частица находится за пределами земной атмосферы, она вообще не светится.

С разной плотностью атмосферы на больших и малых высотах связано и различие во времени свечения следа. На больших высотах плотность плазмы мала, столкновения между ее частицами редки, и проходит значительное время, пока все ее частицы рекомбинируют. Свечение следа может при этом продолжаться в течение нескольких секунд. На малых же высотах благодаря большой плотности атмосферы рекомбинация проходит очень быстро.

А. С. Бутов

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М956—М970, Ф968—Ф982, справились с задачами М956, М961, М966, М969, Ф971, Ф976, Ф977, Ф979, Ф981, Ф982. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

П. Абакумов (д. Коренево Московской обл.) 62; *А. Абдрахманов* (Алма-Ата) 65; *Н. Азамов* (с. Балыкчи Андижанской обл.) 65, 67, 68; *В. Акопян* (Ереван) 60, 62, 63, 65, 67; *А. Алексейчук* (Одесса) 65, 67; *М. Альт* (Одесса) 62, 63, 65, 67; *Д. Ароцкер* (Киев) 60, 65, 67, 68; *И. Арсова* (Враца, НРБ) 60, 62, 65; *С. Аршава* (Северодонецк) 62, 67; *А. Асташкевич* (Томск) 60, 63, 65; *Н. Ахметов* (п. Янаул БАССР) 65; *В. Базуткин* (Кривой Рог) 62; *Балог* (СРР) 62; *А. Барабанов* (Киев) 60, 62, 65, 67, 68; *Р. Безрукавников* (Калуга) 58, 62, 64, 65; *И. Белозеров* (Серпухов) 65, 67, 70; *В. Беринде* (Вайя Маре, СРР) 65; *В. Борманис* (Бальск Латв. ССР) 64, 65; *А. Бреусов* (Днепропетровск) 65; *С. Брызгалов* (Смоленск) 67; *И. Бугрий* (Киев) 65; *И. Вайнштейн* (Калинин) 60; *Я. Варшавский* (Харьков) 62, 64, 65, 67; *А. Васильев* (Ульяновск) 65; *Э. Вассерман* (Москва) 65; *В. Берзаков* (Рудный) 68; *А. Винцюк* (Киев) 65; *В. Волошин* (Киев) 62, 65; *П. Вольфбейн* (Киев) 62, 64; *Ю. Выменец* (Ленинград) 67; *Н. Гайбеков* (Алма-Ата) 65; *Т. Гамидов* (п. Борадыгях Аз. ССР) 62, 67; *А. Гарбарук* (Ленинград) 64, 65, 67; *О. Геворков* (Тбилиси) 57, 60, 62, 64, 65, 68; *Р. Гендлер* (Ташкент) 62—65, 67, 68, 70; *С. Герасимов* (Харьков) 67; *О. Геупель* (Дрезден, ГДР) 58, 62—65, 67, 68, 70; *О. Гилязов* (Уфа) 65; *А. Глуцюк* (Харьков) 62, 64, 65; *Ю. Гнатюк* (Каменец-Подольский) 67; *Г. Гокадзе* (с. Барисахо ГССР) 67; *М. Гольдштейн* (Челябинск) 67, 68; *А. Гороховский* (Киев) 62, 64, 65, 67, 68; *П. Григорук* (Хмельницкий) 65; *Н. Григорьева* (Андропов) 60; *Р. Гринив* (Львов) 62, 64, 67, 68, 70; *В. Гурарий* (п. Черноголовка Московской обл.) 62, 65; *Б. Гуревич* (Саратов) 62, 65; *Э. Даваадоржийн* (Мурен, МНР) 67; *А. Давыдов* (с. Елфимово Горьковской обл.) 62, 67; *Т. Демьяненко* (Киев) 65; *О. Джавадов* (п. Борадыгях Аз. ССР) 62; *В. Дмитриев* (Горький) 65; *М. Добрицын* (Москва) 59, 60; *А. Донченко* (Киев) 67, 68, 70; *Д. Древаль* (Москва) 57; *И. Дынников* (Жуковский) 57, 60, 62—65, 67; *Л. Евсеев* (Димитровград) 67; *И. Ежов* (п. Черский ЯАССР) 63; *С. Железовская* (Саратов) 64, 67, 68; *Е. Жумабеков* (Алма-Ата) 65; *Д. Зайцев* (Киев) 62, 64, 65, 67; *П. Иванов* (Ленинград) 62, 65; *Р. Иванов* (Габрово, НРБ) 57, 58; *С. Исаев* (Тамбов) 65; *А. Кадач* (Усть-Каменогорск) 60, 62; *В. Кальницкий* (Калининград) 63; *В. Карибьянц* (Астрахань) 65; *Р. Керимов* (с. Азадкенд Аз. ССР) 60; *И. Киризий* (Ленинград) 65; *А. Козинский* (Гайворон) 60, 67; Г. Колесников (Магнитогорск) 57; А. Кононенко (Киев) 64, 65, 67, 68; *Ю. Королев* (Казань) 67; *А. Коршков* (Мозырь) 62, 65, 67; *Е. Костюк* (Виниица) 62; *Б. Кругликов* (Харьков) 60, 62, 64, 65, 67; *О. Крылов* (п. Эльдикан ЯАССР) 58; *М. Кукс* (Львов) 67; *М. Куринной* (Харьков) 59, 60; *Н. Кушлевич* (Москва) 59, 60, 62, 64, 65; *Д. Ладиков* (Киев) 60, 62, 65, 67, 68; *С. Лаусмаа* (Кохтла-Ярве) 65; *Ю. Лесной* (Смела) 63; О. *Лимешко* (Куйбышев) 60, 62, 63, 67; *А. Литвак* (Ленинград) 57, 58, 60; *М. Литвинов* (Киев) 67, 68, 70; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) 64; *Е. Лойченко* (Киев) 63; *Н. Лопата* (Гайворон) 60, 67; *В. Ляндин* (Белорецк) 57, 60; *В. Лянусин* (Белорецк) 62, 64, 65; *С. Майоров* (Химки) 65; *М. Макаров* (Севастополь) 60; *М. Макачян* (Ереван) 67; *А. Макагон* (Киев) 65; *К. Мамуров* (Душанбе) 57, 59, 60; *И. Маресин* (Москва) 60, 65; *И. Мартинес* (Киев) 62, 63, 65; *А. Махнин* (Алма-Ата) 65; *А. Мельник* (Гайворон) 60, 67; *А. Мельцер* (Ленинград) 57, 60, 62, 67; *Г. Минасянц* (Ереван) 62, 65; *Н. Миров* (Актюбинск) 65;

Т. Мисирпашаев (Москва) 60; *К. Мортиси* (Тирговисте, СРР) 62; *Я. Мустафаев* (Баку) 64; *С. Мушинский* (Новосибирск) 57, 59, 62, 63, 65, 67, 68; *Т. Нарбеков* (Алма-Ата) 65; *Б. Нефф* (Донецк) 65; *Ю. Никоноров* (с. Михайловка Каз. ССР) 62, 65; *О. Ниц* (Одесса) 60, 62, 63, 65, 67, 68; *С. Окуловский* (Ленинград) 62, 64, 65; *М. Панков* (Львов) 62, 65, 67; *Ю. Панчул* (Киев) 62, 65; *П. Пасманик* (Москва) 65, 67; *Д. Пастур* (Харьков) 60; *М. Пасуманский* (Ленинград) 64; *О. Пелевин* (Кострома) 62; *А. Петрова* (Ленинград) 57, 60; *В. Пикман* (Киев) 65; *А. Покровский* (Киев) 57, 60, 62, 65, 67, 68; *В. Полинов* (Магнитогорск) 57, 60; *В. Помаз* (Семеновка) 65; *М. Померанцев* (Черкассы) 57; *И. Портной* (Одесса) 62—65, 67, 70; *В. Процак* (Киев) 62, 64, 65, 67; *В. Пушня* (Харьков) 62, 64, 65, 67; *В. Рагулин* (Челябинск) 67, 68; *А. Райскин* (Алма-Ата) 65; *И. Раскина* (Витебск) 62, 65; *С. Резнов* (Киев) 62, 65, 67, 68; *М. Рзаев* (Баку) 62; *А. Ройтерштейн* (Ленинград) 62—64; *К. Рубцов* (Киев) 62, 65; *Т. Руденко* (Киев) 65; *Д. Румынин* (Красноярск) 57, 64; *В. Сакбаев* (Алма-Ата) 65; *З. Салканова* (Алма-Ата) 65; *И. Самовол* (Гайворон) 60; *Д. Семинихин* (Киев) 62, 65, 68; *С. Сильвестров* (Киев) 62, 64, 65, 67; *И. Симоненко* (Великие Луки) 60; *К. Сингалевич* (Ленинград) 65; *В. Слитинский* (Киев) 65, 70; *В. Служаев* (Димитровград) 67; *С. Смирнов* (Ленинград) 62—65, 67, 68, 70; *В. Столин* (Вильнюс) 62, 63, 67; *А. Струнин* (Ярославль) 64, 65, 67, 68; *К. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 62, 64, 67; *Д. Субботин* (Алма-Ата) 65; *В. Судаков* (Тбилиси) 57, 60; *Д. Тамаркин* (Горький) 58, 60, 62; *А. Тарасенко* (Днепропетровск) 67; *Б. Татиевский* (Киев) 62, 64, 65, 67, 68; *А. Терехов* (Алма-Ата) 65; *Г. Топровер* (Волгоград) 67; *Д. Туляков* (Жданов) 64, 65; *В. Тумаркина* (Винница) 62; *М. Тумаш* (Львов) 60; *И. Устиловский* (Москва) 59, 60, 62—65, 67, 68, 70; *В. Филимоненков* (Свердловск) 57; *Л. Финкельштейн* (Воронеж) 65; *В. Фокин* (Хабаровск) 62, 65, 67; *Д. Хаджиев* (Стара Загора, НРБ) 62; *Л. Христов* (Силистра, НРБ) 67; *А. Чагиров* (Алма-Ата) 60; *Е. Черная* (Днепродзержинск) 67, 70; *К. Чурашев* (Новосибирск) 62, 65, 67; *Е. Чурикова* (Целиноград) 62; 67; *Ю. Шамрук* (д. Новый Двор Гродненской обл.) 67; *И. Шехтман* (Киев) 67, 68; *С. Шехтман* (Киев) 65; *Б. Шмуклерман* (Одесса) 62; *Н. Шолев* (Стара-Загора, НРБ) 65; *И. Шор* (Киев) 65; *Н. Шор* (Киев) 65; *П. Шрабштейн* (Москва) 67; *Б. Шраер* (Ленинград) 62—65; *П. Штейнберг* (Пущино) 62, 65; *Г. Шугай* (Запорожье) 65; *О. Щелоков* (Навои) 62, 67; *И. Щепеткова* (Москва) 67; *В. Элькин* (Харьков) 62, 65; *Я. Эфендиев* (Баку) 62; *О. Юсухно* (Киев) 62, 63, 65; *А. Яврян* (Ереван) 67.

Физика

А. Абанов (Красноярск) 68, 69, 74; *У. Адбакиров* (Алма-Ата) 75; *О. Азикова* (Целиноград) 73—75, 78, 80; *А. Анисимов* (Киев) 78, 80; *Ф. Асмандьярова* (Целиноград) 73—75, 78, 80; *Т. Ахметов* (Новосибирск) 78, 80; *К. Бедов* (Челябинск) 68—70, 72; *А. Белецкий* (Канев) 78; *Ю. Белобородов* (Челябинск) 80; *С. Беловолов* (Новосибирск) 68, 69, 78; *Д. Белоногов* (Свердловск) 70; *В. Березский* (Киев) 69; *А. Бермус* (Грозный) 75; *О. Бесман* (Алма-Ата) 68, 69; *И. Биндер* (Одесса) 78; *Д. Бисикало* (Винница) 69, 70, 74, 75; *Л. Блинов* (Черновцы) 75; *С. Бобылев* (Березники) 68, 69, 74; *С. Болдырев* (Мытищи) 78, 80; *Ш. Бреннер* (Хуст) 68—70; *А. Брежестовский* (п. Черноголовка Московской обл.) 78, 80; *Д. Будько* (Белгород) 73, 75, 78, 80; *А. Быцко* (Ленинград) 69, 72, 78, 80; *М. Ваганов* (п. Черноголовка Московской обл.) 73—75, 78, 80; *К. Вайнберг* (Тбилиси) 69; *В. Верзаков* (Рудный) 78; *Ю. Викторович* (Минск) 78, 80; *Е. Винтелер* (Клуж-Напока, СРР) 75; *П. Вольфбейн* (Киев) 68, 73, 74, 78; *А. Вороненко* (Баку) 80; *А. Гаек* (Днепропетровск) 68—70, 73, 78; *Д. Галактионов* (Алма-Ата) 78, 80; *О. Гендельман* (Харьков) 69; *С. Герасимов* (Харьков) 75; *А. Гольдин* (с. Водяное Львовской обл.) 73, 75, 78, 80; *Д. Горелик* (Электросталь) 80; *С. Григоренко* (Москва) 70; *В. Гурарий* (п. Черноголовка Московской обл.) 68, 69, 78, 80; *Н. Даминов* (Братск) 78; *С. Данилкина* (Домодедово) 80; *Ю. Даценко* (Киев) 68—70, 78; *Д. Дементьев* (Нальчик) 69; *А. Денисюк* (с. Стрижавка Винницкой обл.) 78, 80; *А. Дода* (Корсунь-Шевченковский) 68, 73, 75; *Л. Дорофеев* (Канев) 75, 78; *Л. Евсеев* (Димитровград) 80; *В. Евтушенко* (Киев) 70; *Д. Евтушенко* (Донецк) 75, 78, 80; *И. Евтушенко* (Амурск) 74; *Д. Ежиков* (Минск) 69, 70; *В. Ефремова* (Горький) 75; *А. Жариков* (Киев) 68, 69, 72; *А. Жарков* (Канев) 78; *Ю. Жданов* (Димитровград) 69, 70; *В. Жевлаков* (п. Черноголовка Московской обл.) 68, 70; *Д. Жильцов* (Краматорск) 73; *Д. Житный* (Киев) 68; *А. Жуков* (Кривой Рог) 80; *О. Заблуда* (Киев) 73, 78; *П. Задорожный* (Киев) 73—75, 78, 80; *К. Зварич* (Киев) 74; *Е. Зельцер* (Киев) 68; *С. Иванов* (Уфа) 68, 70; *Д. Игильманова* (Целиноград) 73—75, 78, 80; *А. Ильенков* (Киев) 75, 78; *Р. Исаенко* (Сыктывкар) 68, 69; *В. Калацкий* (Солигорск) 68, 69, 74, 75; *В. Каменькович* (Харьков) 68, 69; *С. Канатов* (п. Кузнецовск Ровенской обл.) 78; *С. Карадаш* (Лида) 78; *А. Карлов* (Канев) 78; *Ш. Кирюхин* (Чимкент) 78, 80; *А. Кишкин* (Тольятти) 70; *П. Кларк* (Тула) 68, 70, 72, 73, 75; *С. Ковальчук* (Киев) 68, 69; *Е. Кожевников* (Москва) 78; *А. Коновалов* (Мытищи) 73; *Д. Концевой* (Могилев) 69, 73, 78, 80; *А. Корытько* (Киев) 68; *М. Косолапов* (п. Черноголовка Московской обл.) 80; *В. Кравцов* (Ставрополь) 75, 80; *А. Краковский* (Харьков) 68, 69; *Б. Крутов* (Воронеж) 73—75; *К. Купцов* (Саратов) 69; *С. Курдюков* (Москва) 74, 75, 78, 80; *К. Курлаев* (Новосибирск) 78, 80; *А. Кусаинов* (Алма-Ата) 78; *Д. Ладиков* (Киев) 68, 70, 78; *А. Лебедев* (Киев) 68; *Ю. Левин* (Харьков) 73, 78; *К. Литвиненко* (Херсон) 68, 69; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) 69, 73, 74, 78, 80; *И. Лугач* (Винница) 73, 74, 78, 80; *И. Луценко* (Донецк) 68, 72; *К. Майоров* (Канев) 75; *А. Максимов* (Ташкент) 68, 69; *Н. Малетин* (Ангарск) 73; *С. Маматкулов* (Нарынский р-н УзССР) 78, 80; *М. Маргулис* (Харьков) 68, 69, 80; *Г. Марченков* (Саратов) 75; *Р. Марченков* (Рязань) 68, 69; *С. Маслов* (Москва) 73, 75; *А. Мацко* (Киев) 75; *С. Мельников* (Пермь) 78, 80; *М. Мирошниченко* (Куйбышев) 68; *Т. Мисирпашаев* (Москва) 69; *Н. Михайловский* (Красноярск) 78, 80; *Д. Могилевцев* (Шклов)

(Окончание см. на с. 56)

Математика и программирование

(Беседа с академиком А. П. Ершовым)

Эта беседа состоялась в конце июня в санатории «Узкое» под Москвой, где в это время известный советский ученый, академик Андрей Петрович Ершов находился «на отдыхе». Кавычки здесь вполне уместны: нагромождение бумаг, книг, оттисков, рукописей, журналов в светлой просторной комнате говорит о непрекращающейся работе, о характере ученого, для которого научный труд является органической потребностью. Беседа проходила не в виде формального интервью, а скорее в виде оживленного, но обстоятельного разговора. Здесь представлены фрагменты этого разговора, записанного на магнитофон, лишь с минимальными редакционными изменениями.

— Андрей Петрович, когда и как у Вас возник интерес к математике? Участвовали ли Вы в кружках, олимпиадах?

— С 1943 года я учился в Кемерово: сибирский областной город, там в то время никакой заметной кружковой или олимпиадной работы не было. В военное время, да и потом, в первые послевоенные годы, олимпиадная математика так далеко от Москвы не распространялась. Поэтому дополнительной затравки по математике в виде кружков или олимпиад я не получал. К тому же в сфере дополнительных интересов, внеклассного чтения у меня тогда на первом месте стояла физика.

Пожалуй, единственный мой вклад в дополнительное изучение математики состоял в том, что, перейдя в восьмой класс, я отважился перерешать все доступные мне задачи по математике — все, попавшие в мое поле зрения. Кроме школьных учебников и задачников в этом мне помог журнал «Математика в школе», который я впервые открыл в десятом классе (ничего похожего на журнал «Квант» тогда еще не было). Там я познакомился с олимпиадными задачами; с задачами повышенной трудности. Но серьезных, предельных задач по математике я перед собой не ставил.

Если говорить честно, то настоящий интерес к математике, к ее развитию как науки, к математической мысли, к истории ее идей у меня появился значительно позже, в аспирантские годы.

— В 1949 году Вы поступили в Московский университет на физико-технический факультет, но окончили механико-математический, притом специализировались не по математике, а по программированию. Когда, каким образом, под чьим влиянием произошла эта переориентация?

— Мое поступление на физтех было выражением моего преобладающего интереса к физике, который, впрочем, носил довольно поверхностный характер. Он проистекал не столько от углубленного изучения физики или, скажем, многочасовой работе в физическом кабинете (которого у нас по существу и не было), а возник в результате воздействия работ по атомной энергии. На меня тогда сильное впечатление произвел отчет Смита по проекту «Манхаттан»*) и популярная книга по физике М. П. Бронштейна «Атомы, электроны, ядра». Уже тогда меня интересовали, даже волновали, тайны строения вещества. И эти тайны — ощущение предельности, столь характерное для атомной теории,— меня не оставляли всю жизнь. Так или иначе, желание учиться в Москве, моем родном городе, интерес к физике привел меня на физико-технический факультет Московского университета, новое здание которого тогда строилось на Ленинских горах. Окончательным стимулом для поступления была трехступенчатая система отбора — первый тур экзаменов, второй тур экзаменов, собеседование. Спортивный азарт здесь сыграл известную роль.

В определенном смысле, первый знак моей дальнейшей судьбы я получил на первом же экзамене. Это была письменная работа по алгебре. Я ее закончил раньше всех в своей аудитории. Мне очень хотелось работу проверить, но я озирался по сторонам — не отдает ли кто другой работу раньше меня? Работу у меня взял молодой преподаватель — первый, которого я запомнил и с которым я впоследствии работал — Владимир Михайлович Курочкин, ныне знаменитый программист, ветеран информатики, заве-

*) Проект Манхаттан — научный, промышленный и военный проект, приведший к созданию атомной бомбы в США. (*Прим. ред.*)

дующий лабораторией в Вычислительном центре АН СССР. В этой встрече сейчас можно усмотреть перст судьбы, а тогда это был лишь эпизод моего поступления.

Я год проучился на физтехе, слушал лекции П. Л. Капицы, но в конце года, при окончательном отборе студентов, по причинам понятным моим ровесникам и совсем не интересным нынешнему поколению, мне и нескольким другим студентам было предложено выбрать другой факультет для продолжения образования. Так я оказался на мехмате.

Некоторое время я колебался между механикой и вычислительной математикой, которую изучали тогда на только что созданной кафедре вычислительной математики, возглавляемой академиком С. Л. Соболевым. Решающее влияние на выбор занятий по программированию, однако, оказали блестящие и содержательные лекции Алексея Андреевича Ляпунова, который стал моим учителем. Поворот в сторону вычислительной техники помог сделать разговор со старшим товарищем, Евгением Андреевичем Жоголевым, происшедший... после соревнований по легкой атлетике*).

Коротко на Ваш вопрос можно ответить так: изначальный интерес к физике — конкретная цепь разных событий — прямое воздействие старшего товарища — появление учителя; вот как складывался мой путь к информатике.

— А где сегодня можно учиться информатике?

— Вопрос уже поставлен парадоксально, поэтому я на него и отвечу парадоксально: везде и нигде. В том смысле, что курс информатики в школе еще только ставится, содержание курса представляет лишь небольшой фрагмент информатики, а в вузе специальности с таким названием вообще нет, вузовский курс по этому предмету еще пока не поставлен. В вузах, правда, имеется некоторое семейство курсов, пока еще довольно разрозненное, в основном это элементы программирования и ЭВМ, но они еще не охватывают предмет. Можно рекомендовать две книги, это «Наука программирования» Д. Гриса и «Информатика» Ф. Л. Бауера и Г. Гооза. Поэтому, если и учиться информатике, это следует делать на отделениях прикладной математики, АСУ, кибернетики. Лучше всего это сделать в Московском университете, на мехмате, благодаря в первую очередь базовому курсу программирования А. Г. Кушниренко, затем на факультете вычислительной математики и кибернетики, неплохо это дело поставлено в МФТИ, МИЭМе и в некоторых других московских вузах, в университетах Ленинграда, Киева, Казани, Еревана, Минска, Латвии, Эстонии, да и в других центрах.

— В прошедшем учебном году девятиклассники начали изучение нового курса «Основы информатики и вычислительной техники». Нынешние десятиклассники будут продолжать изучение информатики по только что поступившему в школы учебнику. На какие разделы этого курса нужно обращать наибольшее внимание в десятом классе?

— Учебник информатики для десятого класса в некотором смысле политехнический, в нем есть сведения из разных областей знания, на разные вкусы: дальнейшее развитие алгоритмического языка, языки программирования, архитектура ЭВМ, физическое устройство компьютера, разнообразные применения. Поэтому мой первый совет — выбрать себе для более углубленного изучения то, что вам больше по душе. Все же можно сказать, что наиболее важная часть курса — это раздел о языках программирования (*Бейсик* и *Рапира*), но этим следует углубленно заниматься дополнительно, только если есть доступ к вычислительной технике.

Если говорить о «вечных истинах», содержащихся в курсе, я бы выделил три момента. Во-первых, понятие об архитектуре ЭВМ. Во-вторых, понимание о представлении данных на всех стадиях их обработки (задача, данные, таблица, элемент таблицы, число, строчка, слово, цифра, литера, бит). В-третьих, понятие о физических принципах хранения и обработки данных. Кстати, для тех, кто интересуется этим последним аспектом (и вообще физикой) очень рекомендую прочитать в «Кванте» посвященный этим вопросам сериал*).

— Как определить Вашу нынешнюю специальность — программирование, информатика?

— Постановка этого вопроса дает мне повод разворчаться. Противопо-

*) Этот эпизод описан в сборнике «Пути в неизведанное» (М.: Советский писатель), 1986, № 19, с. 90. (*Прим. ред.*)

*) «Квант» 1985, №№ 9—12; 1986, №№ 1—6; «Полупроводниковые элементы вычислительной техники». (*Прим. ред.*)

ставление программирования и информатики — одно из текущих недоразумений. Есть немало «умников», я позволю себе сказать так, иронически, от которых можно услышать «это де никакая не информатика, это чистое программирование». Такое высказывание, с моей точки зрения, свидетельствует либо о некомпетентности, либо о методологически неверной позиции. Ведь программирование — неотъемлемая часть информатики.

Попробую разъяснить это, натянув вопрос на себя. Мне конечно проще всего сказать, что моя научная специальность — программирование. Потому что я занимался программированием в широком смысле бóльшую часть своей сознательной жизни. При этом я настаиваю на таком расширенном понимании слова «программирование», оно охватывает не только написание конкретных программ. Но теперь, когда наша компьютерная наука имеет название — информатика — я должен сказать, что информатика тоже является моей научной специальностью. Есть у меня работы и размышления, которые касаются предмета информатики, ее связей с другими науками, с математикой и с философией, ее содержания в школьном курсе. Поэтому коротко отвечаю на вопрос так: моя нынешняя научная специальность — информатика, более узкая — программирование.

Как Вы представляете себе взаимоотношения между математикой и информатикой?

— Прежде всего хочу подчеркнуть, что информатика расширяет сферу деятельности математики. Например, такие аспекты информатики, как теория алгоритмов и теоретическое программирование, структура данных, информационные модели, вычислительный эксперимент создают почву для математических исследований. В дополнение к этому, именно ЭВМ позволяют наиболее эффективно применять математические методы практически во всех сферах человеческой деятельности. Можно сказать, что информатика — это способ, с помощью которого математики завоевывают мир.

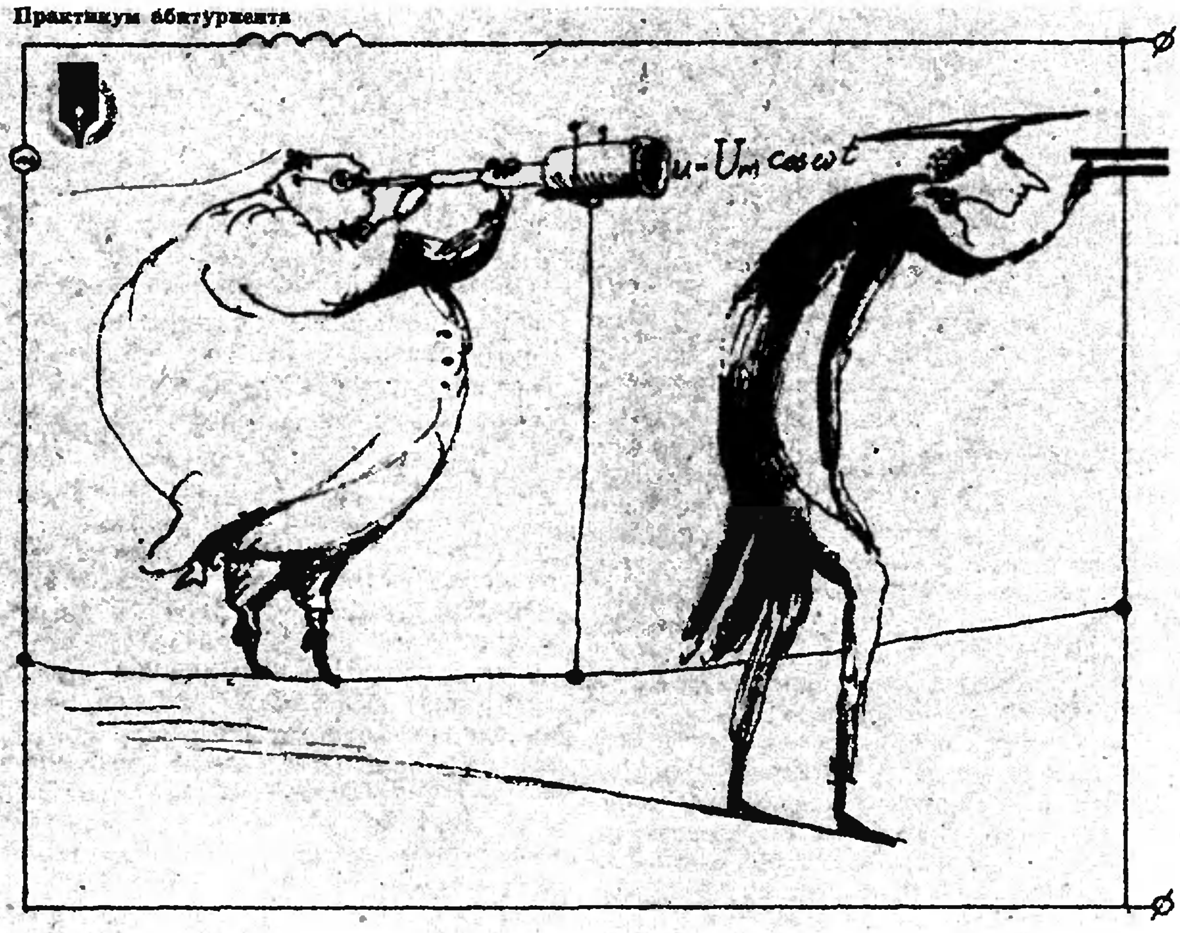
Для специалистов по информатике математические науки служат основным рабочим аппаратом. Но сама информатика — синтезирующая наука, она берет не только от математики, но и от феноменологических наук, от лингвистики, психологии. Информатика занимает особое положение в сонме других наук: ее цель — вскрыть и преподнести на блюдечке основные принципы единства обработки информации во Вселенной. (Замечу в скобках, что кибернетика имеет схожую, но не совпадающую сферу применения: изучить основные принципы обработки информационных потоков, но не во «всей Вселенной», а лишь в сфере управления.)

Можно сказать и так: если физика пытается ответить на «роковой вопрос» — почему мир устроен так, что в нем можно жить, информатика отвечает на свой «роковой вопрос» — почему мы можем познать окружающий нас мир, овладеть объективно существующей в природе информацией. Информатика как наука исходит из существования натуральных знаковых систем — носителей информации в природе, и сама создает знаковые системы, выявляет единство законов обработки информации в природе, в технике.

Создание искусственного интеллекта — одна из задач информатики. В промышленности, в технике автоматизация освобождает человека от физического труда. Информатика же решает проблему устранения человека из процесса обработки информации, что достигается доскональным объяснением его функций, перелагаемых затем на компьютер. Таким образом, здесь для познания информационного процесса надо выявить алгоритм его обработки. Поэтому часто говорят: мы это знаем, если мы можем это запрограммировать.

Я не буду вдаваться глубже в обсуждение предмета информатики. Скажу лишь, что информация — это и не вещество, и не энергия, а нечто третье. Любая наука изучает некоторые структуры природы. В каком-то смысле, информатика изучает структуру структуры, это не менее увлекательно и волнующе, чем исследование строения вещества,— мое юношеское увлечение,— о котором я говорил в начале нашей беседы.

Беседу записал А. Б. Сосинский



Цепи переменного тока

А. Р. ЗИЛЬБЕРМАН

Переменный ток (или напряжение) представляет собой вынужденные электрические колебания. Величина тока изменяется со временем по гармоническому закону

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi_0),$$

где I_m — амплитуда, ω — круговая (циклическая) частота (она измеряется в радианах за секунду, а пишут просто $с^{-1}$), φ_0 — начальная фаза колебаний. Аналогичное выражение можно записать и для переменного напряжения.

Пример. Запишем зависимость от времени напряжения сети: 220 В, 50 Гц. В этом случае амплитуда $U_m = U\sqrt{2} = 220\sqrt{2}$ В ≈ 311 В (напомним, что $U = 220$ В — это действующее значение напряжения), круговая частота $\omega = 2\pi\nu \approx 6{,}28 \cdot 50$ $с^{-1} \approx$ ≈ 314 $с^{-1}$. Пусть еще нам известно, что в момент начала отсчета ($t = 0$) напряжение было равно $u_0 = 50$ В и убывало. Тогда мы сможем найти начальную фазу φ_0:

$$u_0 = U_m \cos\varphi_0,$$

$$\text{откуда } \varphi_0 = \arccos\frac{u_0}{U_m} \approx 1{,}4 \text{ рад}$$

(подумайте сами — где мы учли убывание напряжения). Итак,

$$u = 311 \cos(314t + 1{,}4).$$

Видно, что надлежащим выбором начала отсчета времени — а это в нашей власти — можно сделать φ_0 каким угодно, в частности нулем. Этим часто пользуются и без специальных оговорок записывают

$$u = U_m \cos\omega t.$$

Расчет цепей переменного тока обычно сводится к тому, чтобы при заданном напряжении источника определить токи. Совсем просто рассчитывать токи в цепях, содержащих только резисторы. В любом месте такой цепи ток изменяется «в такт» с

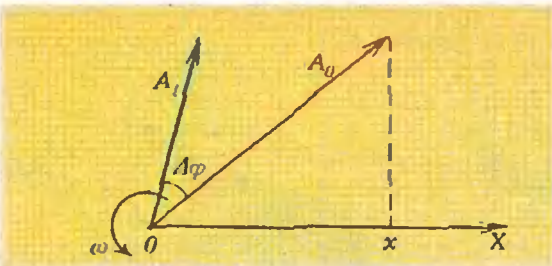


Рис. 1.

приложенным напряжением, то есть отсутствует сдвиг фаз между током и напряжением. Сложнее обстоит дело, если в цепи есть накопители энергии — катушки и конденсаторы. В этом случае моменты максимумов напряжений и токов могут и не совпадать — появляются соответствующие сдвиги фаз. Известно, например, что при включении в сеть катушки максимумы тока отстают от максимумов напряжения на четверть периода (сдвиг фаз $\pi/2$), а при подключении конденсатора — наоборот, опережают на четверть периода.

При расчетах в цепях постоянного тока можно просто складывать величины напряжений на последовательно соединенных элементах и величины токов на разветвленных участках цепи. В случае переменного тока все сложнее — амплитуда суммы не всегда равна сумме амплитуд. Например, амплитуда суммы двух токов по 1 А каждый может оказаться любой — от 0 до 2 А, нужно обязательно учитывать сдвиги фаз. Для расчета цепей переменного тока часто применяют удобный графический метод — *метод векторных диаграмм*. Он основан на простой идее.

Пусть вектор $\vec{A}_0$ (длиной A_0) вращается вокруг одного из своих концов против часовой стрелки с угловой скоростью ω. Тогда проекция второго конца на ось X, начало которой находится в центре вращения (рис. 1), равна

$$x = A_0 \cos(\omega t + \varphi_0).$$

То есть получается именно та функция, которая нас интересует. (Собственно говоря, круговую частоту обозначают той же буквой, что и угловую

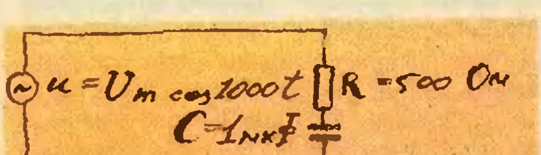


Рис. 2.

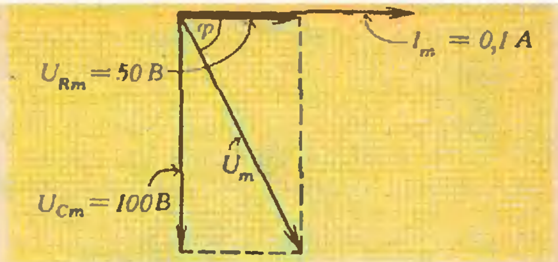


Рис. 3.

скорость, как раз имея в виду эту модель.) На этом же рисунке можно изобразить еще один вектор $\vec{A}_1$, соответствующий другой функции с амплитудой A_1 и начальной фазой φ_1. При $\varphi_1 > \varphi_0$ вектор $\vec{A}_1$ «опережает» вектор $\vec{A}_0$ на угол $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0$. Важно, что A_0 и A_1 могут иметь и различную размерность (например, A_0 может измеряться в вольтах, а A_1 — в амперах).

Теперь о самóм методе. Что такое «векторная диаграмма»? Это чертеж, на котором изображены в виде векторов (в заранее выбранном масштабе и с учетом сдвигов фаз) напряжения и токи исследуемой цепи. В рассматриваемом нами случае гармонических колебаний (в других случаях это неверно!) все эти векторы вращаются в одну сторону с одинаковой угловой скоростью ω, и углы между ними остаются постоянными, поэтому о вращении можно не говорить и рисовать «неподвижную» картинку. Если чертеж построен — задача уже решена, ведь он содержит все необходимые сведения о напряжениях и токах интересующей нас цепи. Метод построения векторных диаграмм — это и есть способ получения таких чертежей.

Рассмотрим несколько конкретных примеров.

Задача 1. *На рисунке 2 изображена простая электрическая цепь, содержащая последовательно соединенные конденсатор и резистор. Амплитуда тока в цепи составляет $I_m = 0{,}1$ А. Найдите амплитуду напряжения источника и сдвиг фаз между этим напряжением и током в цепи.*

Выберем подходящие масштабы для изображения токов и напряжений. Нарисуем произвольно (так, как нам удобно!) вектор $\vec{I}_m$ (рис. 3). Теперь мы можем нарисовать вектор $\vec{U}_{Rm}$, изображающий напряжение на резисторе (изобразим его другим цветом, чтобы не путать векторы напряжений и токов). Его модуль

$$U_{Rm}=I_mR=50\text{ В}.$$

По направлению вектор $\vec{U}_{Rm}$ совпадает с вектором $\vec{I}_m$ (ведь сдвиг фаз между током и напряжением резистора равен нулю). Вектор напряжения на конденсаторе $\vec{U}_{Cm}$ равен по модулю $U_{Cm}=I_mX_C=100$ В, где $X_C=1/(\omega C)=$ $=1$ кОм — емкостное сопротивление, и отстает на $\pi/2$ по фазе от тока. Нарисуем и этот вектор. Напряжение на источнике $\vec{U}_m$ соответствует сумме векторов $\vec{U}_{Rm}$ и $\vec{U}_{Cm}$:

$$U_m=\sqrt{U_{Rm}^2+U_{Cm}^2}\approx 112\text{ В}.$$

Заметим, что мы уже нашли (нарисовали!) угол между током $\vec{I}_m$ и напряжением всей цепи $\vec{U}_m$. Этот угол можно просто измерить транспортиром или посчитать тригонометрически:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{U_{Cm}}{U_{Rm}}=2,$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}2\approx 1{,}1\text{ рад}\approx 64^\circ.$$

Эту задачу можно сформулировать немного по-другому: задать амплитуду напряжения источника, например $U_m'=220$ В, а найти амплитуду тока в цепи. Такая задача сложнее — ведь мы должны начать рисовать диаграмму, не зная амплитуды тока I_m'. Тут есть две возможности. Первая — решить вспомогательную задачу о нахождении амплитуды напряжения U_m при заданном токе I_m (мы только что такую задачу обсудили), а затем записать очевидное соотношение

$$\frac{U_m'}{U_m}=\frac{I_m'}{I_m}$$

и найти из него амплитуду тока I_m':

$$I_m'=I_m\frac{U_m'}{U_m}\approx 0{,}18\text{ А}.$$

Вторая возможность — рисовать диаграмму не в конкретном численном масштабе, а в общем виде. При этом отношения длин всех векторов остаются теми же, а значит, и углы между ними не изменяются. Полученную из диаграммы формулу

$$U_m'=\sqrt{(U_{Rm}')^2+(U_{Cm}')^2}=$$
$$=\sqrt{(I_m'R)^2+(I_m'X_C)^2}$$

мы используем для нахождения I_m':

$$I_m'=\frac{U_m'}{\sqrt{R^2+X_C^2}}\approx 0{,}18\text{ А}.$$

Способы эти по сложности примерно равноценны.

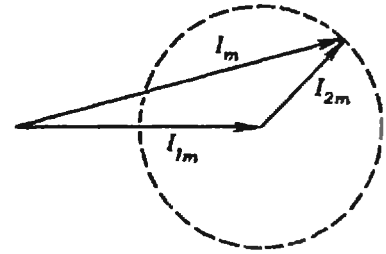


Рис. 4.

Задача 2. *К источнику переменного напряжения подключены две параллельные ветви. Амплитуда тока в первой $I_{1m}=1$ А, во второй $I_{2m}=0{,}3$ А. В каких пределах может находиться амплитуда тока, протекающего через источник? Каким может быть максимальный сдвиг фаз между полным током и током в первой ветви?*

Решение ясно из рисунка 4, на котором изображена векторная диаграмма для данной цепи (вектор $\vec{I}_{2m}$ нарисован так, чтобы его удобнее было складывать с вектором $\vec{I}_{1m}$):

$$I_{1m}-I_{2m}\leqslant I_m\leqslant I_{1m}+I_{2m},$$
$$0{,}7\text{ А}\leqslant I_m\leqslant 1{,}3\text{ А}.$$

Максимальный угол между $\vec{I}_m$ и $\vec{I}_{1m}$ соответствует касанию $\vec{I}_m$ с окружностью:

$$\sin\varphi_{\max}=\frac{I_{2m}}{I_{1m}}=0{,}3,$$

$$\varphi_{\max}\approx 0{,}31\text{ рад}\approx 18^\circ.$$

При этом $I_m=\sqrt{I_{1m}^2-I_{2m}^2}\approx 0{,}95$ А. Угол между $\vec{I}_m$ и $\vec{I}_{2m}$ может быть любым (от $-\pi$ до $+\pi$).

Задача 3. *В схеме, изображенной на рисунке 5, найдите ток, текущий через источник, и сдвиг фаз между этим током и напряжением источника.*

Начнем рисовать диаграмму, задавшись током через катушку. Положим, например, $I_{Lm}=0{,}1$ А. Тогда напряжение на катушке $\vec{U}_{Lm}$ равно по модулю $U_{Lm}=I_{Lm}X_L=100$ В, где $X_L=$ $=\omega L=1$ кОм — индуктивное сопротивление, и опережает ток $\vec{I}_{Lm}$ по фазе

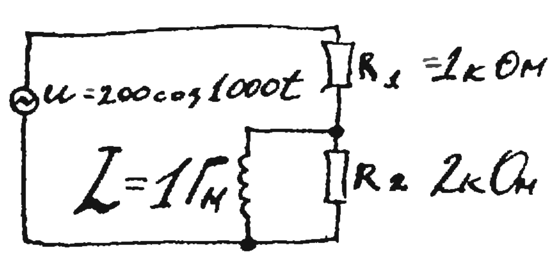


Рис. 5.

на $\pi/2$ (рис. 6). Ток через резистор с сопротивлением R_2 определяется этим напряжением и совпадает с ним по фазе:

$$I_{R_2m}=\frac{U_{Lm}}{R_2}=0{,}05\ \text{А}.$$

Тогда общий ток

$$I_m=\sqrt{I_{Lm}^2+I_{R_2m}^2}\approx 0{,}112\ \text{А}.$$

Напряжение $\vec{U}_{R_1m}$ на резисторе с сопротивлением R_1 совпадает с этим током по фазе:

$$U_{R_1m}=I_mR_1\approx 112\ \text{В}.$$

Затем найдем суммарное напряжение $\vec{U}_m$ (сумму векторов $\vec{U}_{R_1m}$ и $\vec{U}_{Lm}$). После простых вычислений (это можно сделать и графически, если аккуратно строить диаграмму!) получаем

$$U_m\approx 180\ \text{В},\quad \varphi\approx 0{,}52\ \text{рад}\approx 30^\circ.$$

Теперь можно уточнить масштаб и найти общий ток в цепи при заданном напряжении источника:

$$I'_m=I_m\frac{U'_m}{U_m}\approx 0{,}112\,\frac{200}{180}\ \text{А}\approx 0{,}124\ \text{А}.$$

Все остальные токи и напряжения тоже увеличатся в $U'_m/U_m\approx 1{,}1$ раза, а сдвиги фаз при этом останутся теми же.

Реактивные элементы — катушки, конденсаторы — часто используются для получения определенного сдвига фаз между напряжением и током в цепи. Рассмотрим конкретный пример.

Задача 4. *Электродвигатель переменного тока содержит две одинаковые обмотки (индуктивность каждой $L=1$ Гн). Для нормальной работы необходимо, чтобы токи в обмотках были одинаковыми, но сдвиг фаз между ними составлял $\Delta\varphi=\pi/2$. При включении в сеть ($U=220$ В, $\nu=50$ Гц) одну из обмоток подключают к сети непосредственно, а другую — через последовательно соединенные конденсатор емкостью C и резистор сопротивлением R. Рассчитайте необходимые величины C и R. Потерями в обмотках пренебречь.*

Ток в катушке, которая подключена к сети непосредственно, отстает по фазе на $\pi/2$ от напряжения сети. Его модуль

$$I_1=\frac{U}{X_L}=\frac{U}{2\pi\nu L}\approx 0{,}7\ \text{А}.$$

Обратите внимание: мы нашли действующее значение тока, так как заданное значение U — действующее. Ясно, что векторные диаграммы можно строить и для амплитудных, и для действующих значений — лишь бы на одной диаграмме были либо амплитуды, либо действующие значения.

Построим векторную диаграмму для последовательной цепи RCL (рис. 7). Будем рисовать все в общем виде. Нарисуем вектор $\vec{I}_2$, соответствующий току в цепи. Напряжение $\vec{U}_R$ ($U_R=I_2R$) совпадает по фазе с током, $\vec{U}_C$ ($U_C=I_2X_C$) — отстает на $\pi/2$, $\vec{U}_L$ ($U_L=I_2X_L$) — опережает на $\pi/2$. Общее напряжение $\vec{U}$ должно совпадать по фазе с током $\vec{I}_2$, при этом токи $\vec{I}_1$ и $\vec{I}_2$ и будут сдвинуты по фазе на $\pi/2$. Из диаграммы видно, что для этого нужно, чтобы

$$X_C=X_L,\quad \frac{1}{\omega C}=\omega L,$$

$$C=\frac{1}{\omega^2L}=10^{-5}\ \Phi=10\ \text{мкФ}.$$

При этом $I_2=I_1=U/R$, откуда

$$R=\frac{U}{I_1}\approx 314\ \text{Ом}.$$

Отметим, что расчет такой цепи в реальном случае намного сложнее, так как сдвиги фаз между напряжением и током в обмотках у нагруженного двигателя не равны $\pi/2$, как у идеальной катушки, а зависят от нагрузки на вал двигателя.

Энергетические расчеты в цепях переменного тока осложняются тем,

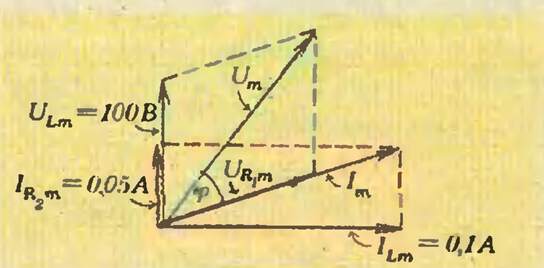


Рис. 6.

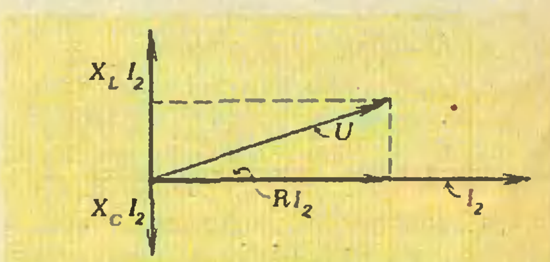


Рис. 7.

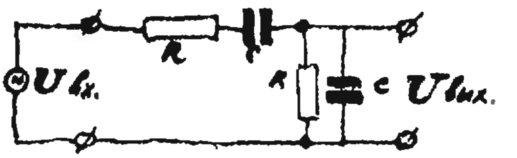


Рис. 8.

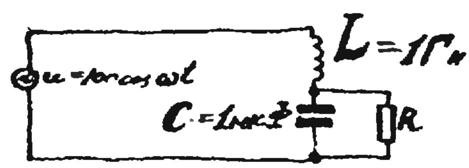


Рис. 9.

что мгновенная мощность меняется со временем. Нас может интересовать как среднее значение мощности — для расчета работы источника или выделяющегося в цепи тепла, так и максимальное значение мгновенной мощности.

Задача 5. *Амплитуда напряжения источника U_m, амплитуда тока, протекающего через него I_m, сдвиг фаз между напряжением и током φ. Найдите работу источника за большой отрезок времени T и максимальное значение мгновенной мощности.*

Запишем выражение для мгновенной мощности и приведем его к более удобному виду:

$$p = ui = U_m I_m \cos \omega t \cos (\omega t + \varphi) =$$
$$= \frac{1}{2} U_m I_m \cos (2\omega t + \varphi) + \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi.$$

Среднее значение первого слагаемого за большой (гораздо больше периода колебаний) промежуток времени равно нулю. Тогда среднее значение мощности

$$\bar{P} = \frac{1}{2} U_m I_m \cos \varphi$$

и работа источника

$$A = \bar{P}T = \frac{1}{2} U_m I_m T \cos \varphi.$$

Максимальное значение первого слагаемого по модулю равно $1/2\, U_m I_m$ и

$$P_m = \frac{1}{2} U_m I_m (1 + |\cos \varphi|).$$

Видно, что при $|\varphi| \approx \pi/2$ максимальная мощность может во много раз превышать среднюю. Это связано с тем, что электрическая цепь то накапливает энергию, то отдает ее назад источнику. Такой режим очень плох для питающей сети — увеличиваются потери на тепло в подводящих проводах. Пример такой цепи — лампа дневного света. Ток ее ограничивается при помощи катушки с большой индуктивностью, и сдвиг фаз получается близким к $\pi/2$. Выход несложен — подключить параллельно цепи конденсатор. Если правильно выбрать его емкость (подумайте — как), то катушка и конденсатор будут обмениваться энергией между собой, а от сети будет отниматься только полезная мощность.

Задача 6. *Действующее значение напряжения сети в вечерние часы может падать от 220 до 190 В. Для поддержания мощности кипятильника на прежнем уровне последовательно с ним рекомендуется включать регулируемый источник постоянного напряжения. Каким должно быть его напряжение $U_и$ при минимальном напряжении сети?*

Напряжение, приложенное к кипятильнику,

$$u_к = U_{2m} \cos \omega t + U_и,$$

где $U_{2m} = 190\sqrt{2}$ В — наименьшее амплитудное значение напряжения сети. Сдвиг фаз между напряжением на кипятильнике и током равен нулю (кипятильник — резистор). Тогда средняя мощность

$$\bar{P} = \frac{\overline{u_к^2}}{R} = \frac{\overline{U_{1m}^2}}{2R},$$

где $U_{1m} = 220\sqrt{2}$ В. Но

$$\overline{u_к^2 = U_{2m}^2 \cos^2 \omega t + U_и^2 + 2U_и \cdot U_{2m} \cos \omega t} = \frac{U_{2m}^2}{2} + U_и^2.$$

Отсюда

$$U_и = \sqrt{\frac{U_{1m}^2}{2} - \frac{U_{2m}^2}{2}} \approx 110 \text{ В}.$$

Упражнения

1. Изображенная на рисунке 8 схема носит название «мост Вина». На какой частоте сдвиг фаз между выходным и входным напряжениями равен нулю? Во сколько раз выходное напряжение на этой частоте меньше входного?

2. Докажите, что в схеме, изображенной на рисунке 9, при частоте $\omega = 1/\sqrt{LC}$ ток через резистор не зависит от величины его сопротивления. Найдите этот ток.

Список читателей, приславших правильные решения

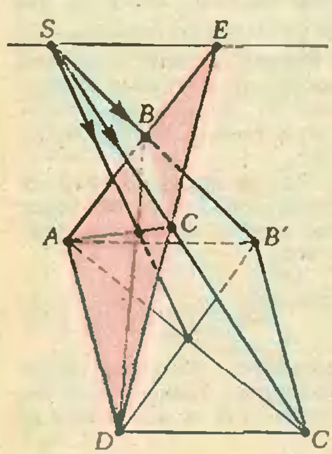
(Начало см. на с. 46)

69; *А. Мудрик* (Брест) 69; *Е. Муляров* (Москва) 78, 80; *М. Нагуманов* (Целиноград) 70; *А. Недачин* (Киев) 69, 75, 78, 80; *Г. Николаишвили* (Тбилиси) 69—75, 78, 80; *С. Новиков* (Херсон) 68—70, 72; *Д. Ноготков* (Алма-Ата) 74; *А. Нургалеев* (Днепродзержинск) 68; *Х. Нурекелов* (Алма-Ата) 78, 80; *В. Орепер* (Киев) 75; *Д. Пашко* (Запорожье) 73, 75, 78, 80; *В. Першин* (Мелитополь) 75; *В. Песоцкий* (д. Дворец Брестской обл.) 69—72; *Р. Плюснин* (Великие Луки) 78; *Д. Погребинский* (Киев) 68; *А. Покровский* (Киев) 68, 78; *С. Полищук* (Канев) 75; *А. Португалов* (Киев) 75, 78; *М. Постельник* (Белгород) 78; *О. Посудневский* (Береза) 69, 70; *Я. Пшеничка* (Черновцы) 78; *С. Ревков* (Киев) 68, 70; *С. Резнов* (Киев) 78; *М. Рзаев* (Баку) 74; *В. Родин* (Сасово) 73; *А. Розенберг* (Уфа) 70, 78; *Е. Розонощик* (Киев) 68, 75; *Т. Рокицкая* (Винница) 78, 80; *В. Рубман* (Одесса) 73, 75; *Ю. Рыбалочка* (Киев) 68, 69; *С. Рыжков* (Москва) 68, 72; *Й. Савчук* (Киров) 75; *Р. Сагайдак* (с. Матугов Черкасской обл.) 68, 70, 73, 75, 78, 80; *Т. Сагайдак* (Канев) 69, 70, 72; *В. Сакбаев* (Алма-Ата) 68; *Б. Самойлов* (Киев) 74; *В. Сандомирский* (Братск) 68; *М. Сергазин* (Кутаиси) 74; *А. Сибиряков* (Томск) 68, 78; *А. Сидоренко* (Киев) 68, 69, 75; *М. Ситников* (Климовск) 68, 69; *И. Скляров* (Киев) 75; *В. Служаев* (Димитровград) 80; *А. Снижко* (Запорожье) 68, 69, 73; *А. Соболев* (Харьков) 78; *И. Соколов* (Минск) 68, 70, 72; *Т. Соколовская* (Целиноград) 73—75, 78, 80; *С. Солянин* (п. Протвино Московской обл.) 68; *А. Ставицкий* (Баку) 68, 75, 80; *Д. Сторожук* (Киев) 73, 78; *А. Струнин* (Ярославль) 73, 78, 80, *К. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 68, 69, 78, 80; *Д. Тальга* (Алма-Ата) 78; *Х. Тарасов* (Новосибирск) 69; *А. Татаринов* (Тула) 78, 80; *Б. Татиевский* (Киев) 78; *А. Ткаченко* (Киев) 73, 78, 80; *Ф. Тринчук* (Москва) 78, 80; *М. Тумаш* (Львов) 68; *В. Тягнирядно* (Минск) 78, 80; *Р. Ульмасов* (Душанбе) 68; *М. Федоров* (Ульяновск) 75; *Г. Финкельштейн* (п. Черноголовка Московской обл.) 68—70, 73—75, 78, 80; *И. Химони* (Днепропетровск) 68, 69, 78, 80; *И. Чайка* (п. Кузнецовск Ровенской обл.) 78; *М. Чекумина* (Алма-Ата) 78, 80; *О. Чеиков* (Могилев) 69, 73, 75, 78, 80; *А. Чернов* (Воронеж) 74; *И. Шехтман* (Киев) 69; *С. Шехтман* (Киев) 73; *А. Шуляк* (с. Молодецкое Черкасской обл.) 68, 78, 80; *А. Щербаков* (Харьков) 69, 70; *М. Щупак* (Тбилиси) 68; *М. Юдин* (Запорожье) 68—70, 73, 75, 78, 80; *С. Юсухно* (Киев) 78, 80; *В. Яйлиян* (Киев) 68—70; *Е. Якуб* (Бахчисарай) 70; *В. Яковлев* (Киев) 70; *А. Янчук* (Дубровица) 68, 78; *Ю. Яровой* (Канев) 75, 78; *В. Ясюченя* (Минск) 75, 80.

С выходом в пространство

Для девятиклассников и десятиклассников приведем доказательство утверждения задачи 3 из статьи И. А. Кушнира (см. с. 23) с помощью центральной проекции в пространстве.

Поместим трапецию $ABCD$ в наклонной плоскости так, чтобы прямая AD располагалась горизонтально, а центр проекции S выберем так, чтобы прямая SE также была горизонтальной (и перпендикулярной AD). Тогда проекцией трапеции $ABCD$ на горизонтальную плоскость p, проходящую через прямую AD, будет прямоугольник $AB'C'D$, проекциями диагоналей трапеции — диагонали прямоугольника, проекцией середины оснований BC — середина отрезка BC, так что утверждение задачи 3 следует из того очевидного факта, что середины двух противолежащих сторон прямоугольника и точки пересечения его диагоналей лежат на одной прямой.



Тот же прием помогает и в решении других задач из статьи И. А. Кушнира.

Н. Б.

Признак делимости на 8, 16, 32

Всем известен признак делимости на 4. Он гласит: *число делится на 4 тогда и только тогда, когда число, образованное его последними двумя цифрами, делится на 4*. Будем рассматривать только числа, делящиеся на 4, так как иные числа не могут делиться на 8, 16, 32. Разделим на 4 число, образованное последними двумя цифрами исходного числа, и прибавим частное к числу, образованному оставшимися цифрами. Тогда *исходное число делится на 8, 16, 32 в том и только в том случае, когда полученное число делится соответственно на 2, 4, 8.* (Чтобы узнать, делится ли оно на 8, можно повторить над ним эту процедуру.)

Пример:

$$\begin{array}{r|l} 13930 & 56 \\ +\ \ \ 14 & \\ \hline 139 & 44 \\ +\ \ 11 & \\ \hline 150 & \end{array}$$

делится на 32, потому что делится на 8, потому что делится на 2.

И действительно, 1393056 : :32=43533.

Подумайте над тем, как доказать этот признак.

Светлана Рубинштейн,
ученица 10 класса

Задачи XLIX Московской городской математической олимпиады

Заключительный тур 49-й Московской городской математической олимпиады состоялся 16 февраля в Московском университете. В нем участвовало 608 школьников 7—10 классов. Ниже приводятся задачи этого тура, предложенные С. Б. Гашковым, М. Пентусом, А. В. Рябининым, И. Н. Сергеевым, И. Г. Царьковым.

7 класс

1. На листе прозрачной бумаги нарисован четырехугольник. Укажите способ, как сложить этот лист (возможно, в несколько раз), чтобы определить, является ли исходный четырехугольник ромбом.

2. Докажите, что ни для каких чисел x, y, t не могут одновременно выполняться три неравенства: $|x|<|y-t|$, $|y|<|t-x|$, $|t|<|x-y|$.

3. Три гнома живут в разных домах на плоскости и ходят со скоростями 1, 2 и 3 км/ч соответственно. Какое место для ежедневных встреч нужно им выбрать, чтобы сумма времен, необходимых каждому из гномов на путь от своего дома до этого места (по прямой), была наименьшей?

4. Произведение некоторых 1986 натуральных чисел имеет ровно 1986 различных простых делителей. Доказать, что либо одно из этих чисел, либо произведение нескольких из них является квадратом натурального числа.

5. Известно, что в кодовом замке исправны только кнопки с номерами 1, 2, 3, а код этого замка трехзначен и не содержит других цифр. Написать последовательность цифр наименьшей длины, наверняка открывающую этот замок (замок открывается, как только подряд и в правильном порядке нажаты все три цифры его кода).

8 класс

1. См. задачу 1 за 7 кл. с заменой ромба квадратом.

2. Найдите все натуральные числа, не представимые в виде разности квадратов каких-либо натуральных чисел.

3. Докажите, что если $a_1=1$, $a_n=1/2\,(a_{n-1}+2/a_{n-1})$ при $n=2, \ldots, 10$, то $0<a_{10}-\sqrt{2}<10^{-370}$.

4. Квадратное поле разбито на 100 одинаковых участков, 9 из которых поросли бурьяном. Известно, что бурьян за год распространяется на те и только те участки, у каждого из которых не менее двух соседних участков уже поражены бурьяном (участки соседние, если они имеют общую сторону). Докажите, что полностью все поле бурьяном не зарастет.

5. Докажите, что система неравенств

$$\begin{cases} |x|>|y-z+t|, \\ |y|>|x-z+t|, \\ |z|>|x-y+t|, \\ |t|>|x-y+z| \end{cases}$$

не имеет решений.

9 класс

1. На листе бумаги отмечены точки A, B, C, D. Распознающее устройство может абсолютно точно выполнять два типа операций: а) измерять в сантиметрах расстояние между двумя заданными точками; б) сравнивать два заданных числа. Какое наименьшее число операций нужно выполнить этому устройству, чтобы наверняка определить, является ли четырехугольник $ABCD$ прямоугольником?

2. Из точки M по плоскости с постоянной скоростью ползет муравей. Его путь представляет собой спираль, которая наматывается на точку O и гомотетична некоторой своей части относительно этой точки. Сможет ли муравей пройти весь свой путь за конечное время?

3. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} |x|<|y-z+t|, \\ |y|<|x-z+t|, \\ |z|<|x-y+t|, \\ |t|<|x-y+z|. \end{cases}$$

4. Произведение некоторых 48 натуральных чисел имеет ровно 10 различных простых делителей. Докажите, что произведение некоторых четырех из этих чисел является квадратом натурального числа.

5. На координатной плоскости нарисованы круги радиусом 1/14 с центрами в каждой точке, у которой обе координаты — целые числа. Докажите, что любая окружность радиусом 100 пересечет хотя бы один нарисованный круг.

10 класс

1. См. задачу № 1 за 9 кл. с заменой прямоугольника $ABCD$ квадратом.

2. Биссектриса угла A треугольника ABC продолжена до пересечения в D с описанной вокруг него окружностью. Докажите, что $AD>1/2\,(AB+AC)$.

3. Решите уравнение $x^{x^4}=4$ $(x>0)$.

4. Докажите, что ни для каких векторов a, b, c не могут одновременно выполняться три неравенства

$$\sqrt{3}|a|<|b-c|,\ \sqrt{3}|b|<|c-a|,\ \sqrt{3}|c|<|a-b|$$

5. Найдите минимум по всем α, β максимума функции

$$y(x)=|\cos x+\alpha\cos 2x+\beta\cos 3x|.$$

Избранные задачи Ленинградской городской олимпиады по математике

Заключительный тур (по традиции — устный) Ленинградской городской олимпиады по математике состоялся 16 февраля. Задачи 1—4 и 5а) входили в число 7 задач, предлагавшихся восьмиклассникам, задачи 1, 2, 6—8 — девятиклассникам, задачи 5б), 9—12 — десятиклассникам. Задачи предложили члены жюри С. Генкин, А. Гольберг, Л. Курляндчик, А. Меркурьев, Н. Нецветаев, А. Плоткин, Д. и С. Фомины.

1. Докажите, что в любом многоугольнике найдутся сторона BC и вершина A, отличная от B и C, такие, что основание перпендикуляра,

опущенного из A на прямую BC, лежит на отрезке BC.

2. Марсианин рождается в полночь и живет ровно сто суток. Известно, что за всю историю марсианской цивилизации (ныне вымершей) родилось нечетное число марсиан. Докажите, что было по крайней мере 100 дней, в каждый из которых число жителей Марса было нечетным.

3. В Швамбрании закрыли одну беспосадочную авиалинию. Известно, что после этого от любого швамбранского аэропорта до любого другого можно долететь, быть может, с пересадками. До закрытия линии это можно было сделать, совершив не более чем N посадок. Докажите, что теперь можно долететь из любого аэропорта в любой другой не более чем с $2N$ посадками. (При подсчете числа посадок учитывается и посадка в пункте назначения.)

4. Докажите, что на плоскости можно провести несколько прямых и отметить несколько точек так, чтобы на любой прямой лежало ровно 4 отмеченных точки и через каждую отмеченную точку проходило бы ровно 4 прямых.

5. Имеется лист клетчатой бумаги размером: а) 30×45, б) 30×80 клеток. Двое играют в следующую игру. За один ход (ходят по очереди) производится разрез по линии, соединяющей два соседних узла сетки. Первый игрок начинает резать от края листа. Каждый следующий разрез должен продолжать линию, образованную предыдущими разрезами. Выигрывает игрок, после хода которого лист распадается на два куска. Кто выигрывает при правильной игре?

6. Множество A состоит из вещественных чисел. Известно, что сумма любых двух его элементов также является его элементом, и любой отрезок $[a, b]$, $a<b$ содержит отрезок, целиком состоящий из элементов множества A. Докажите, что A содержит все вещественные числа.

7. Рассмотрим следующий алгоритм:

Шаг 0. Положить $n=m$.

Шаг 1. Если n четно, уменьшить n в два раза. Если n нечетно, увеличить n на 1.

Шаг 2. Если $n>1$, перейти к шагу 1. Если $n=1$, закончить выполнение алгоритма.

Сколько существует натуральных чисел m, для которых при выполнении этого алгоритма шаг 1 будет выполняться ровно 15 раз?

8. Король обошел доску 9×9, побывав ровно один раз на каждом ее поле. (Маршрут короля незамкнутый и, возможно, самопересекающийся.) Какова максимально возможная длина такого маршрута, если длина хода по диагонали равна $\sqrt{2}$, а длина ходов по вертикали и по горизонтали равна 1?

9. Диаметром множества на плоскости называется наибольшее из расстояний между двумя его точками. (Если такое существует.) Известно, что сумма диаметров многоугольников $M_1, M_2, \ldots, M_n$ меньше, чем диаметр их объединения. Докажите, что существует прямая, не пересекающая ни один из этих многоугольников, по каждую сторону от которой лежит хотя бы один из них.

10. Докажите, что

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{9997}+\sqrt{9999}}>24.$$

11. Вычислите интеграл

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{1+x^3+\sqrt{1+x^6}}.$$

12. Дано: $u_1=ax+by+cz$, $v_1=ax+bz+cy$,
$u_2=ay+bz+cx$, $v_2=az+by+cx$,
$u_3=az+bx+cy$, $v_3=ay+bx+cz$,

где a, b, c, x, y, z — вещественные числа. Известно, что $u_1u_2u_3=v_1v_2v_3$. Докажите, что перестановкой чисел в тройке (u_1, u_2, u_3) можно получить тройку (v_1, v_2, v_3).

Публикацию подготовил *С. В. Фомин*

Задачи Ленинградской городской олимпиады по физике

8 класс

1. Определите радиус орбиты спутника Земли, который все время находится над одной и той же точкой земной поверхности. Радиус Земли $R=6400$ км, ускорение свободного падения на ее поверхности $g=10$ м/с^2.

2. На наблюдательной станции на планете X местное солнце никогда не поднимается над горизонтом выше $\alpha=75°$. Найдите широту, на которой находится станция, если ось планеты наклонена под углом $\beta=50°$ к плоскости ее вращения.

3. Чтобы вытащить пробку из горлышка термоса, вы втыкаете в нее шило (рис. 1). Под каким углом можно втыкать шило, не опасаясь, что пробка провалится внутрь термоса? Коэффициент трения о стенки $\mu=0{,}5$.

Рис. 1.

4. На краю тележки массой M и длиной l, стоящей на гладком горизонтальном столе, находится груз массой m. Вы толкаете груз с постоянной силой $\vec{F}$, направленной горизонтально, к противоположному краю тележки (рис. 2). Через какое время груз достигнет противоположного края тележки? Коэффициент трения между грузом и тележкой μ. Считать, что вся масса тележки сосредоточена в доске.

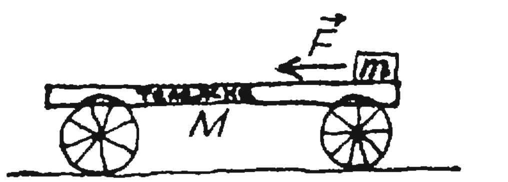


Рис. 2.

5. Два велосипеда — складной и обычный — выполнены так, что усилия, необходимые для движения, в обоих случаях одинаковы. Известно, что у обычного велосипеда радиус колес в 1,2 раза, а радиус большой шестерни (связанной с педалями) в 1,5 раза больше, чем у складного. Найдите соотношение между радиусами маленьких шестеренок (связанных с ведущим колесом). Педали считать одинаковыми у обоих велосипедов, потерями на внутреннее трение пренебречь.

6. На гладкой наклонной плоскости с углом $\alpha=30°$ к горизонту установлено устройство, стреляющее маленьким шариком. Началь-

ная скорость шарика направлена горизонтально вдоль плоскости. По плоскости свободно скользит шайба. Ее положение относительно стреляющего устройства в момент вылета шарика показано на рисунке 3; скорость $v_0 = 10$ м/с и направлена под углом $\beta = 60°$ к горизонтали. Какую начальную скорость должен иметь шарик, чтобы попасть в шайбу?

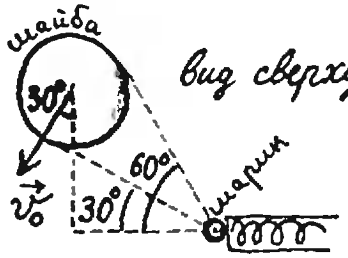


Рис. 3.

7. Автомобиль едет по мосту, имеющему форму параболы. Высота моста $h=5$ м, длина по горизонтали $l=60$ м. Найдите отношение силы давления автомобиля на дорогу на вершине моста к его весу на ровной дороге, если по мосту он едет с постоянной скоростью $v=54$ км/ч.

8. Система из трех одинаковых сосудов показана на рисунке 4. Два крайних сосуда заполнены водой, в среднем сосуде и в трубке — воздух, высота левого колена трубки в 3 раза меньше высоты сосудов H. Начальное давление в среднем сосуде $p_0 \gg \rho g H$ (ρ — плотность воды). В какое состояние перейдет система после открывания кранов?

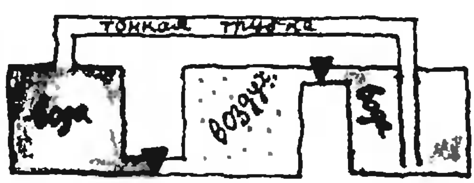


Рис. 4.

9 класс

1. Легкая пружина длиной l с жесткостью k одним концом прикреплена к вертикальной оси, вокруг которой может свободно вращаться, а другим — к маленькому грузу массой m. Вся система находится на горизонтальном гладком столе, пружина не растянута. Грузу ударом сообщают скорость v, направленную перпендикулярно пружине. Найдите минимальное и максимальное расстояния груза от оси.

2. См. задачу 7 для 8 класса.

3. Если столкнуть два стеклянных шара, то один из них разобьется. Почему не разбиваются сразу оба шара?

4. В ванночке с водой (глубина воды h, площадь ванночки S, $\sqrt{S} \gg h$) образовался раствор тяжелых ионов (заряд иона $+q$, масса m, масса всех ионов M). Раствор перемешали. Опишите качественно и дайте количественные оценки распределения ионов в ванночке после установления равновесия. Как это распределение зависит от температуры раствора?

5. В кастрюле находится вода при температуре $t_1=60$ °C. Кастрюлю закрывают крышкой массой $m=5$ кг и площадью $S=100$ см^2 и медленно нагревают до $t_2=70$ °C. Сколько раз подпрыгнет крышка кастрюли за это время, если давление насыщенных паров при t_1 равно $p_1=2{,}0 \cdot 10^4$ Па, при t_2 — $p_2=3{,}1 \cdot 10^4$ Па, атмосферное давление $p_0=10^5$ Па.

6. В большую бочку с водой бросают раскаленные металлические шарики одинаковой температуры. Известно, что шарик радиусом $r_1=0{,}5$ см нагревает воду на $\Delta t_1=0{,}1$ °C, а радиусом $r_2=1$ см — на $\Delta t_2=1{,}2$ °C. Оцените изменение температуры воды при броске шарика радиусом $r_3=1{,}5$ см.

7. В схеме, изображенной на рисунке 5, на металлическом шаре A имеется заряд q. Каким будет заряд на шаре, если поменять местами резисторы с сопротивлениями r_1 и r_2?

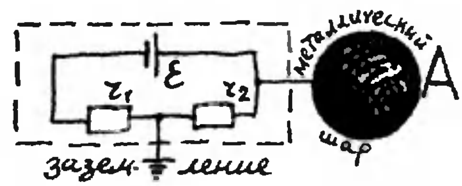


Рис. 5.

10 класс

1. См. задачу 1 для 9 класса.

2. Тонкую легкую резину натянули на горизонтальный обруч радиусом r; в центре обруча к резине приклеили маленькую гирю массой m. Если обруч поднять, гиря опустится вниз на расстояние d ($d \ll r$). Оцените величину периода малых горизонтальных колебаний гири при закрепленном на горизонтальном гладком столе обруче (прогиба нет).

3. См. задачу 4 для 9 класса.

4. В кристалле существует выделенная ось X, вдоль которой удельная проводимость равна σ_1 (то есть если вырезать из кристалла прямой провод с осью, параллельной оси X, то сопротивление такого провода будет равно $R=l/(S\sigma_1)$, где l и S — длина и площадь сечения провода). Удельная проводимость по осям Y и Z равна σ_2, $\sigma_2 \neq \sigma_1$. Чему будет равна удельная проводимость прямого провода, вырезанного из этого кристалла под углом α к оси X?

5. Квадратная проволочная рамка (длина стороны a, сопротивление единицы длины проволоки ρ) вращается вокруг одной из своих сторон с угловой скоростью ω в постоянном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, перпендикулярной оси вращения. Как изменится мощность, выделяемая в рамке, если середины противоположных сторон замкнуть проволокой из того же материала и длиной a?

6. У электромобиля четыре скорости, переключающиеся при помощи коробки передач (то есть двигатель может быть соединен с колесами с четырьмя различными коэффициентами передачи). Рекомендованные скорости, при которых следует изменять коэффициент передачи (для того чтобы двигатель потреблял минимальную мощность), такие: 10 км/ч, 20 км/ч, 45 км/ч. Максимально возможная скорость электромобиля 180 км/ч. Найдите соотношение между коэффициентами передачи (то есть между радиусами шестеренок, соединяющих двигатель с колесами) на различных скоростях. Для простоты можно считать, что в двигателе электромобиля ротор вращается в постоянном магнитном поле.

7. Как бы мы стали видеть, если бы скорость света возросла в 10^5 раз?

Публикацию подготовил *А. Ю. Алексеев*

Избранные задачи зарубежных математических олимпиад: Олимпиады США

Математические олимпиады и конкурсы имеют долгую историю. В некоторых странах, например в СССР и Венгрии, математические олимпиады имеют традицию, исчисляющуюся многими десятилетиями, другие страны стали проводить такие олимпиады совсем недавно. Но где бы ни проводились математические олимпиады, предлагаемые на них задачи всегда вызывают живой интерес у всех любителей математики.

В последние годы у нас в стране появились книги, знакомящие с задачами математических олимпиад Польши и Венгрии. Однако это — «капля в море»: ведь только в международных олимпиадах по математике участвуют 34 страны. Учитывая пожелания наших читателей, мы начинаем публиковать избранные задачи математических олимпиад зарубежных стран.

1 сентября 1971 года Американское математическое общество приняло решение о ежегодном проведении национальных математических олимпиад. Отбор участников национальной олимпиады США — двухступенчатый. В последние годы первым туром служат ежегодные «Экзамены по математике американской средней школы» (*EHSME*), проводимые на местах и доступные всем учащимся. Так, в 1985 году эти экзамены проводились в феврале, и в них приняли участие более 380 000 человек. Вторым туром служит «Американский математический экзамен по приглашению» (*AIME*). Этот экзамен состоит из пятнадцати вопросов и длится $2^1/_2$ часа. В 1985 году на этот экзамен были приглашены 932 учащихся, получившие на *EHSME* более 95 баллов из 150 возможных. Лучшие участники *AIME* (в 1985 году — это 64 человека, правильно ответившие более, чем на 10 вопросов) и допускаются на заключительный тур национальной олимпиады США.

Участники, занявшие первые восемь мест, приглашаются в Вашингтон на торжественное трехдневное заседание, проводимое под эгидой Национальной академии наук США.

Первая национальная математическая олимпиада была проведена 9 мая 1972 года.

Задачи первых трех национальных олимпиад США приведены в книге: Морозова Е. А., Петраков И. С., Скворцов В. А. Международные математические олимпиады. М.: Просвещение, 1976.

Ниже мы приводим несколько задач последующих олимпиад.

1 (1973 г.). Девять отмеченных точек расположены внутри единичного квадрата. Докажите, что среди них найдутся три, которые либо лежат на одной прямой, либо являются вершинами треугольника с площадью, не превосходящей 1/8.

2 (1975 г.). Пусть A, B, C, D — четыре точки в пространстве. Докажите, что

$$AC^2+BD^2+AD^2+BC^2\geqslant AB^2\cdot CD^2.$$

3 (1976 г.). Найдите решения уравнения в целых числах a, b, c:

$$a^2+b^2+c^2=a^2b^2.$$

4 (1978 г.). Целое число n назовем *хорошим*, если его можно представить в виде $n=a_1+a_2+\ldots+a_k$, где $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — натуральные числа (не обязательно различные), удовлетворяющие соотношению $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}=1$. Известно, что натуральные числа 33, 34, ..., 73 — хорошие. Докажите, что все натуральные числа, не меньшие 33, являются хорошими.

5 (1979 г.). В некоторой организации имеется n человек ($n\geqslant 5$), а также $n+1$ комитетов, состоящих из трех человек, причем в разных комитетах составы участников не одинаковы. Докажите, что найдутся два комитета с ровно одним общим участником.

6 (1980 г.). Найдите максимальное число трехчленных арифметических прогрессий, которые могут быть выбраны из последовательности чисел $a_1<a_2<\ldots<a_n$.

7 (1980 г.). В тетраэдр вписана сфера, которая касается граней тетраэдра в их центрах тяжести (то есть в точках пересечения медиан). Докажите, что тетраэдр — правильный.

8 (1980 г.). Найдите все числа a_0, для которых бесконечная последовательность (a_n), определенная равенствами $a_n=2^{n-1}-3a_{n-1}$ при $n=1, 2, 3, \ldots$, строго возрастает, то есть $a_{n-1}<a_n$ при всех n.

9 (1981 г.). Дан угол, величина которого равна $\frac{180^\circ}{n}$, где n — натуральное число, не делящееся на 3. Докажите, что (зная n) можно разделить этот угол на три равных угла только с помощью циркуля и линейки.

10 (1981 г.). Даны n точек, никакие четыре из которых не лежат в одной плоскости. Пусть A — множество всех тетраэдров с вершинами в этих точках. Плоскость α не содержит ни одной из данных точек. Докажите, что среди всех сечений тетраэдров из множества A плоскостью α четырехугольников не более чем $\frac{n^2(n-2)^2}{64}$.

11 (1982 г.). В обществе, состоящем из 1982 человек, среди любой группы из четырех человек есть по крайней мере один, кто знаком с остальными тремя. Каково наименьшее количество людей, которые знакомы со всеми?

12 (1984 г.). Математическая олимпиада проходила в два дня. Всего за два дня было 28 задач. Для любой пары задач нашлось ровно два участника, решивших эти задачи. Каждый участник решил семь задач. Докажите, что один из участников в первый день либо не решил ни одной задачи, либо решил не менее четырех.

13 (1985 г.). В пространстве даны четыре точки такие, что из шести попарных расстояний между ними не более двух превышают 1. Найдите максимальное возможное значение суммы всех этих шести расстояний.

Публикацию подготовили *М. Л. Ситников, Г. А. Тонoян*

Урок одной задачи

3. Поскольку векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ сонаправлены, существует гомотетия с центром в точке E (см. рис. 2 с. 23) и коэффициентом $k_1 = BC:AD$, при которой

$$H_E^{k_1}: BC \to AD,\ B \to A,\ C \to D,\ F \to H.$$

Следовательно, точки E, F, H лежат на одной прямой EF. Поскольку векторы $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{DA}$ противонаправлены, существует гомотетия с центром O и коэффициентом $k_2 = -OB:OD$, при которой

$$H_O^{k_2}: BC \to DA.$$

Следовательно, точки O, F, H принадлежат прямой OH. Прямые EF и OH имеют две общие точки (F, H), следовательно, они совпадают.

4. На прямой AK выберем произвольную точку X (рис. 1), соединим ее с точкой C и с точкой B. Прямая KC пересекает XB в точке O, через точки A и O проведем прямую AO, которая пересечет отрезок XC в точке E. Отрезок KE — искомый.

6. Учитывая построения, рассмотренные в задаче 5, найдем отрезок длиной y, чтобы

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{a} + \frac{1}{c}.$$

Затем строим отрезок длиной x, чтобы

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + \frac{1}{b}.$$

9. Пусть m и n — данные параллельные прямые, P — данная точка. Произведем построения, показанные на рисунке 2: проводим через точку P — произвольную прямую, которая пересечет параллельные прямые в точках D и A, X — произвольная точка, принадлежащая прямой AP. Проводим через эту точку произвольную прямую — получаем точки C и B. Затем проводим AC и BD — получаем точку K, проводим KX, получаем точку H — середину AB, затем проводим CP — получаем точку E, прямая DE пересечет BX в точке L, прямая PL искомая.

10. Построение показано на рисунке 3, на котором номера указывают порядок построения.

11. Построение — оно называется построением *Бриансона* — показано на рисунке 4.

Избранные школьные задачи

1. а) Воспользуйтесь очевидными неравенствами:

$$a^2 \geqslant a^2 - (b-c)^2,$$
$$b^2 \geqslant b^2 - (c-a)^2,$$
$$c^2 \geqslant c^2 - (a-b)^2.$$

б) Воспользуйтесь формулами $R = \dfrac{abc}{4S}$, $r = \dfrac{2S}{a+b+c}$, где

$$S = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)},$$

и задачей 1, а).

Равенство достигается в случае равностороннего треугольника.

2. $x^6 + 2x^4 + 2x^3 + x^2 + 2x - 1 = (x^3 + x + 1)^2 - 2$. Отсюда наименьшее значение данного многочлена равно -2 (когда $x^3 + x + 1 = 0$). (Интерес представляет тот факт, что наименьшее значение определить можно, а соответствующее значение x — нельзя.)

3. $n^4 + 64 = (n^2+8)^2 - 16n^2 = (n^2 + 4n + 8)(n^2 - 4n + 8)$.

4. Одно решение находим подбором: $100 + 27 + 1 = 128$, то есть $x = 10$, $y = 3$, $z = 1$,

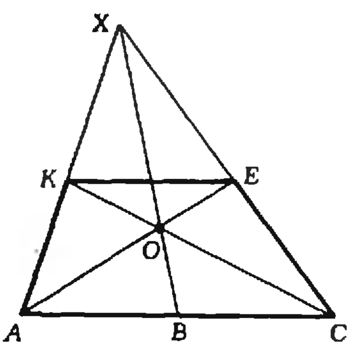


Рис. 1.

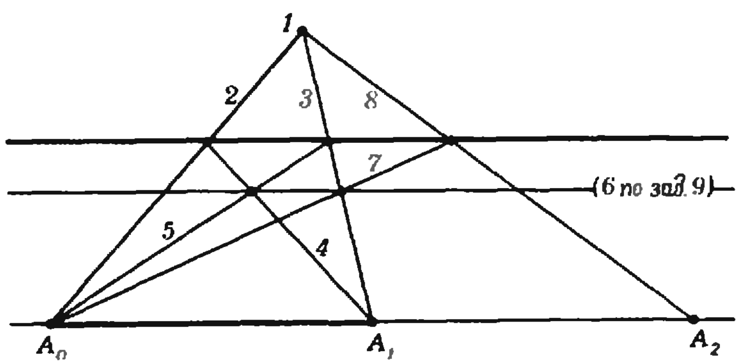


Рис. 3.

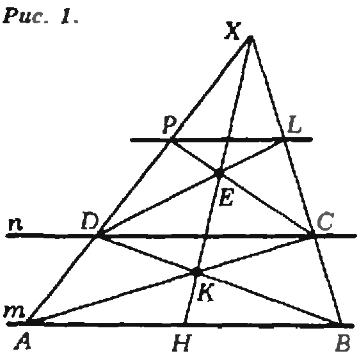


Рис. 2.

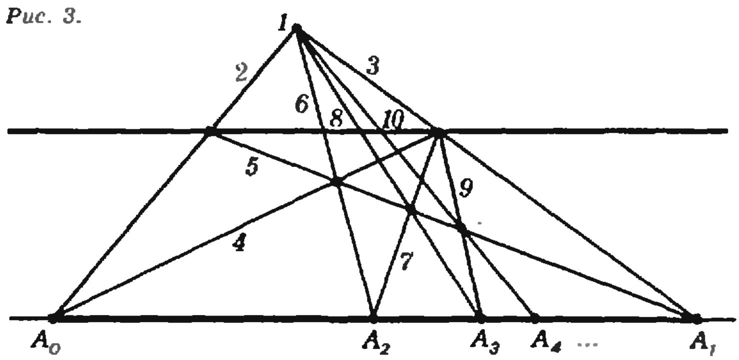


Рис. 4.

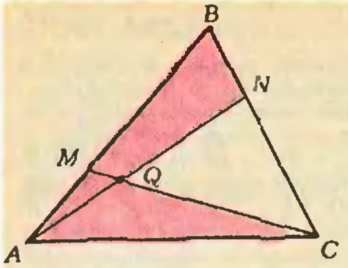


Рис. 5.

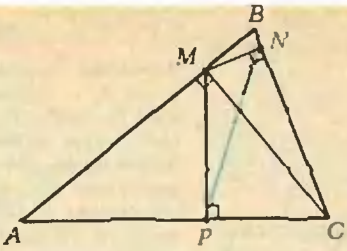


Рис. 6.

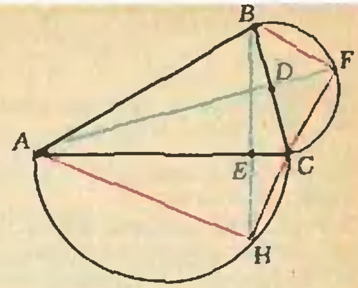


Рис. 7.

$t=2$. После этого найденные x, y, z, t умножаем соответственно на n^{105}, n^{70}, n^{42} и n^{30} (n — любое натуральное число). Таким образом, любой набор $\{10n^{105};\ 3n^{70};\ n^{42};\ 2n^{30}\}$, $n\in N$, дает решение данного уравнения.

5. Утверждение задачи вытекает из равенства площадей треугольников ABN и AMC (рис. 5):

$S_{ABN}=S_{AMC}=\dfrac{1}{k+1}S_{ABC}$, где $k=AM:MB$.

6. Сложив почленно уравнения системы, после несложных преобразований получим

$$(x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2=0.$$

Отсюда находим решения: $x=y=z$.

7. а) Воспользуйтесь формулами:

$$a=2R\sin\alpha,\ b=2R\sin\beta,\ c=2R\sin\gamma$$

(R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC) и тем, что $\sin(\alpha+\beta)=\sin\gamma$.

б) $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}=$

$$=\sqrt{\frac{1-\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}}{2}}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{a}{2\sqrt{bc}}.$$

Аналогично

$$\sin\frac{\beta}{2}\leqslant\frac{b}{2\sqrt{ac}},\quad \sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{c}{2\sqrt{ab}}.$$

Таким образом,

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant\frac{1}{8}.$$

Наибольшее значение равно $\dfrac{1}{8}$ и достигается в случае равностороннего треугольника.

8. Поскольку $k^5+3=(k^3-k)(k^2+1)+k+3$, k^5+3 делится на k^2+1, когда $k+3=0$, то есть $k=-3$. Однако при небольших k может получиться, что на k^2+1 делится и $k+3$. Поэтому необходимо проверить, что будет при $|k|<-3$ ($k\in Z$). Нетрудно убедиться, что подходят также значения $k=-1$, 0, 1 и 2. Ответ: $\{-3;\ -1;\ 0;\ 1;\ 2\}$.

9. *Поскольку углы P и N — прямые, вокруг* четырехугольника $MPCN$ можно описать окружность диаметром MC (рис. 6). Поэтому $PN=MC\cdot\sin C$, так что отрезок PN будет иметь минимальную длину тогда, когда будет минимальным отрезок MC, то есть когда MC — высота треугольника ABC. Поэтому искомое положение точки M на AB — это основание высоты, опущенной из вершины C.

10. Убедитесь, что на каждом из промежутков $]-\infty;\ 0]$, $]0;\ 1[$, $[1;\ \infty[$ функция $f(x)=x^{10}-x^7+x^2-x+1$ *положительна.*

11. Поскольку дискриминант уравнения равен $\sin^2 xy-1$, уравнение имеет решение только в случае $\sin^2 xy=1$, то есть $\sin xy=\pm1$. Поэтому $x=\pm1$, $y=\pi/2+\pi k$, $k\in Z$.

12. Воспользовавшись представлением

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=$$
$$=\frac{A}{k}+\frac{B}{k+1}+\frac{C}{k+2}+\frac{D}{k+3},$$

докажите равенство

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}=$$
$$=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{k}-\frac{3}{k+1}+\frac{3}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right).$$

Искомая сумма равна $\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{2}{n+2}-\right.$ $\left.-\dfrac{1}{n+3}\right)$.

13. Воспользуйтесь тождеством

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}-1.$$

14. Положив $\sqrt[3]{2-x}=a$, $\sqrt{x-1}=b$, получите *равносильную систему:*

$$2-x=a^3,\ x-1=b^2,\ a=1-b,\ b\geqslant0,$$

откуда

$$b^2+1=2-(1-b)^3.$$

Корни этого уравнения $b_1=0$, $b_2=1$, $b_3=3$. Корни данного уравнения $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=10$.

15. Из подобия треугольников ADC и BEC (рис. 7; BE и AD — высоты)

$$DC:AC=EC:BC. \qquad (1)$$

Из подобия треугольников CEH и CHA (H и E — *точки пересечения продолжений высот* с соответствующими полуокружностями)

$$HC:EC=AC:HC. \qquad (2)$$

Наконец, из подобия треугольников CDF и CFB

$$CF:CD=BC:CF. \qquad (3)$$

Поэтому

$$HC^2\overset{(2)}{=}EC\cdot AC\overset{(1)}{=}DC\cdot BC\overset{(3)}{=}CF^2.$$

Равенство остальных пар отрезков устанавливается аналогично.

Сколько велосипедов?

1. 12 кроликов и 23 фазана.
2. 100 старых баранов и 12 молодых.
3. Рулон белого сукна стоит 7 р., черного — 11 р., красного — 8 р., зеленого — 6 р., лазоревого — 7 р.
4. *5 мужчин, 1 женщина, 6 детей.*

Цепи переменного тока

1. $\nu=1/(2\pi RC)$; $U_{вых}/U_{вх}=1/3$.
2. $I_m=U_m/(\omega L)=U_m\sqrt{C/L}=0{,}1$ А.

Избранные задачи зарубежных математических олимпиад: олимпиады США

1. Разобьем данный квадрат на четыре квадрата средними линиями. Хотя бы один из получившихся квадратов будет содержать по меньшей мере три отмеченные точки, и любые три точки, лежащие в одном маленьком квадрате, удовлетворяют условию задачи.

2. Обозначим векторы $\vec{AB}$, $\vec{AC}$, $\vec{AD}$ через $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$. Тогда доказываемое неравенство принимает вид

$$\vec{c}^2+(\vec{d}-\vec{b})^2+\vec{d}^2+(\vec{c}-\vec{b})^2\geqslant\vec{b}^2+(\vec{d}-\vec{d})^2;$$

после раскрытия скобок и перегруппировки слагаемых получаем

$$(\vec{c}+\vec{d}-\vec{b})^2\geqslant 0.$$

3. Очевидно, что $a=b=c=0$ — решение. Покажем, что других решений нет. Квадрат любого числа имеет остаток 0 или 1 от деления на 4. Из нашего равенства поэтому следует, что числа a^2, b^2, c^2 делятся на 4; значит, числа a, b, c делятся на 2. Положим $a=2a_1$, $b=2b_1$; $c=2c_1$. Имеем

$$a_1^2+b_1^2+c_1^2=4a_1^2b_1^2.$$

Теперь видно, что числа a_1^2, b_1^2, c_1^2 делятся на 4; полагаем $a_1=2a_2$, $b_1=2b_2$, $c_1=2c_2$, получаем

$$a_2^2+b_2^2+c_2^2=16a_2^2b_2^2.$$

Продолжая такие рассуждения, находим, что a, b и c делятся на 2^n при любом n.

4. Достаточно доказать, что если число n хорошее, то хорошими являются числа $2n+2$ и $2n+9$. Доказательство первого: если $\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_k}=1$, то $\frac{1}{2a_1}+\ldots+\frac{1}{2a_k}+\frac{1}{2}=1$. Доказательство второго: если $\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}=1$, то

$$\frac{1}{2a_1}+\ldots+\frac{1}{2a_k}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1.$$

5. *Основная лемма*: если из нескольких комитетов, охватывающих не менее пяти человек, любые два комитета имеют д в у х общих членов, то существуют два человека, входящие во все эти комитеты.

6. Число a_k может быть средним членом не более чем $\min(k-1,\ n-k)$ трехчленных арифметических прогрессий. Поэтому общее число трехчленных арифметических прогрессий не может быть больше чем сумма

$$0+1+2+\ldots+\left[\frac{n-1}{2}\right]+\ldots+2+1+0.$$

Эта сумма равна $\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)$ при четном n и $\left(\frac{n-1}{2}\right)^2$ при нечетном n. Это и есть о т в е т, поскольку именно столько трехчленных арифметических прогрессий содержится в последовательности 1, 2, 3, ..., n.

7. Расстояния от вершины трехгранного угла тетраэдра до точек касания сферы с гранями этого угла равны; в то же время эти расстояния равны 2/3 длины соответствующих медиан. Поэтому медианы граней тетраэдра, выходящие из одной вершины, равны. Расстояния от середины ребра тетраэдра до двух точек касания сферы с гранями, прилегающими к этому ребру, равны; в то же время эти расстояния равны 1/3 длины соответствующих медиан. Поэтому медианы граней тетраэдра, опущенные на одно ребро, равны.

Из этих двух утверждений о равенстве медиан следует, что все медианы всех граней тетраэдра равны. Из этого вытекает, что грани тетраэдра — одинаковые правильные треугольники.

8. Из условия следует, что

$$a_n=2^{n-1}-3\cdot 2^{n-2}+9\cdot 2^{n-3}-\ldots=$$
$$=\frac{2^n+(-1)^{n+1}\cdot 3^n}{5}+(-1)^n3^na_0,$$

откуда

$$a_n-a_{n-1}=\frac{2^{n-1}}{5}\left[1+4\cdot(-1)^{n+1}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\times\right.$$
$$\left.\times(1-5a_0)\right].$$

Ясно, что если $1-5a_0\neq 0$, то знак этого выражения при достаточно большом n будет одним при четных n и другим при нечетных n; таким образом, последовательность (a_n) не будет возрастающей. Если же $1-5a_0=0$, то есть $a_0=\frac{1}{5}$, то $a_n-a_{n-1}=\frac{2^{n-1}}{5}$ и последовательность будет возрастающей. (Заметим, что если $a_0=\frac{1}{5}$, то $a_n=\frac{2^n}{5}$.)

9. Если $n=3k+1$, то $\frac{60^\circ}{n}=60^\circ-k$; если $n=3k-1$, то $\frac{60^\circ}{n}=k\cdot\frac{180^\circ}{n}-60^\circ$.

10. В сечении тетраэдра плоскостью α получится четырехугольник, только если две вершины тетраэдра лежат по одну сторону от плоскости α и две — по другую. Предположим, что по одну сторону лежат k точек и по другую $n-k$ точек. Из k точек можно составить $\frac{k(k-1)}{2}$ пар, из $n-k$ точек $\frac{(n-k)(n-k-1)}{2}$ пар. Поэтому общее число четырехугольных сечений будет равно $\frac{k(k-1)(n-k)(n-k-1)}{4}$, а это число меньше $\frac{n^2(n-2)^2}{64}$ при любом $k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n$ (докажите!)

11. О т в е т: 1979. Чтобы доказать, что их не может быть меньше, достаточно заметить, что не может быть двух непересекающихся пар незнакомых людей и не может быть человека, незнакомого с тремя людьми.

13. $4+2\sqrt{2}$.

Признак делимости на 8, 16, 32
(см. с. 56)

Представим исходное число в виде $100a+4b$, где $4b$ — число, образованное его последними двумя цифрами. Разделив его на 4, получим b, а прибавив частное к числу, образованному оставшимися цифрами, получим $a+b$. Между тем исходное число можно представить в виде $100a+4b=96a+4a+4b=32\cdot 3a+4(a+b)$, то есть исходное число делится на 8, 16, 32 тогда и только тогда, когда $4(a+b)$ делится на 8, 16, 32, а это бывает тогда и только тогда, когда $a+b$ делится соответственно на 2, 4, 8.

«Квант» для младших школьников
(см. Квант № 8)

1. Обозначим через x вес сухого вещества в грибах. Тогда вначале грибы весили $10x$ кг, а вода в них весила $9x$ кг. После высыха-

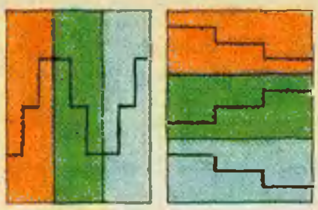


Рис. 8.

ния сухое вещество стало составлять 4/10 веса грибов. Отсюда вес грибов равен $10x/4$, а вес воды равен $6x/4$. Из условия $9x - 6x/4 = 15$, откуда $x = 2$. Следовательно, первоначальный вес грибов равен 20 кг.

2. См. рисунок 8.

3. Пусть n — количество этажей в доме, l — количество подъездов до подъезда, в котором живет Коля, k — количество подъездов до подъезда, в котором живет Витя. Тогда из условия получаем систему

$$\begin{cases} 83 = 4nl + 16 + 3, \\ 169 = 4nk + 8 + 1. \end{cases}$$

Из первого уравнения следует, что $nl = 16$, из второго уравнения — что $nk = 40$. У чисел 16 и 40 четыре общих делителя: 1, 2, 4, 8. Поскольку известно, что Коля живет на 5-м этаже, $n > 5$; следовательно, $n = 8$.

4. Звук, отражаясь от стволов деревьев, меняет направление и поэтому приходит к нам с разных сторон.

5. Заметим, что если лист бумаги покрывает больше половины другого такого же листа, то центр первого листа расположен в пределах второго. Отсюда следует, что если мы воткнем булавку в центр верхнего листа, то она проткнет и все остальные листы.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 6)

Задание 11 (Э. Погосянц). 1. Kpf3! Kpg1 2. Kpe2 K:b2 (2...Kf2 3. b4 Ke4 4. b5 Kd6 5. b6 Kpg2 6. Kpd3 Kpf3 7. Kpd4 и т. д.) 3. Kpd2 Kpf2 4. Kpc2 Kpe3 5. Kp:b2 Kpd4 6. Kpa3 Kpc5 7. Kpa4 Kpb6 8. Kpb4 и оппозиция завоевана.

Задание 12 (Э. Погосянц). 1. Kg1 Kpg2 (1...Kpf2 2. Cc5+) 2. Ke2 (2. Cc5 Лс4 с ничьей) 2...Лe4 (2...Kpf3 3. Kc1 h5 4. c7 h4 Kd3 Лg8+ 6. Kpd7 h3 7. Cd6 Лg7+ 8. Kpc6 Лg8 9. Kpb7 Kpg2 10. Kf4+ Kpg3 11. Kg6+ Kpg2 12. Kh4+ и пешка черных обезврежена) 3. Kc3 (3. Kc1? h5 4. Kd3 h4 5. Cd6 h3 6. Kf4+ Kpg3 7. Kg6+ Kpg2 с ничьей) 3...Лc4 4. Kd5! Л:c6+ 5. Kpb7. Доминация! Черная ладья поймана почти на пустой доске. 5...Лc4(c2) 6. Ke3+; 5...Лe6(g6) 6. Kf4+.

Номер подготовили:
А. А. Варламов, А. Н. Виленкин, А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. В. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов, Н. С. Кузьмина, Э. В. Назаров, А. М. Пономарева, И. Е. Смирнова, П. И. Чернуский

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Т. С. Вайсберг

103006 Москва К-6,
ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

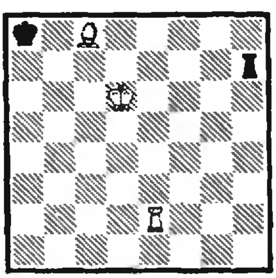
Сдано в набор 18.07.86. Подписано к печати 18.08.86.
Т-11649 Бумага 70×108/16
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 7,30
Тираж 195 427
Цена 40 коп. Заказ 1920

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

НОВЫЕ УСПЕХИ КОМПЬЮТЕРА

В «Кванте» № 2 за 1986 год подробно рассказывалось об эндшпиле «ладья и слон против ладьи». Он считается теоретически ничейным, однако на практике сильнейшая сторона часто берет верх. Мы писали, что точку в анализе должен поставить компьютер. И вот недавно был опубликован анализ одной американской ЭВМ, которая, в частности, обнаружила следующую рекордную позицию.



При наилучшей игре обеих сторон белые выигрывают, причем победа достигается в 59 ходов! Приведем оптимальный вариант игры. 1. Cf5 Лh4 2. Cd3 Лf4 3. Ce4+ Крa7 4.Cc6 Лg4 5. Крc7 Лg7+ 6. Cd7 Лg6 7. Ce6 Лg7+ 8. Крc6 Лg1 9. Лa2+ Крb8 10. Лb2+ Крa8 11. Крb6 Лc1 12. Cf5 Лc3 13. Лb1 Крb8 14. Лb4 Лa3 15. Cd7 Лa2 16. Лh4 Лb2+ 17. Cb5 Лc2 18. Cc4 Лb2+ 19. Крc6 Лf2 20. Лh8+ Крa7 21. Лh7+ Крb8 22. Лb7+ Крa8 23. Лb4 Лg2 24. Cd3 Лg3 25. Лd4 Лf3 26. Cc4 Лh3 27. Лd8+ Крa7 28. Cd5 Лh2 29. Лd7+ Крb8 30. Лb7+ Крa8 31. Лb1 Лc2+ 32. Крb6+ Крb8 33. Ce6 Лe2 34. Крc6+ Крa8 35. Лa1+ Крb8 36. Cd5 Лh2 37. Лb1+ Крa7 38. Ce4 Лh6+ 39. Крc5 Лb6 40. Лh1 Лa6 41. Лh8 Лa5+ 42. Крc6 Лg5 43. Лh7+ Крa6 44. Cd5 Крa5.

Белые добились «филидоровской позиции», дальнейшее известно. 45. Крc5 Лg6 46. Лh2 Лg4 47. Лb2 Лh4 48. Лb7 Лh6 49. Cf7 Лf6 50. Cc4 Лf5+ 51. Cd5 Лf6 52. Лb5+ Крa6 53. Лb2 Крa7 54. Лb7+ Крa6 55. Лe7 Крa5 56. Ce6 Крa6 57. Cc8+ Крa5 58. Лa7+ Лa6 59. Л:a6×.

Многие ходы белых единственные: играя иначе, белые упускают победу или отдаляют ее. Черные тоже защищались весьма тонко; при малейшей неточности они проигрывали быстрее. Нет сомнений, что такой анализ не в состоянии провести ни один из гроссмейстеров. Кстати, он наводит на мысль, что окончания такого вида, вопреки теории, следует считать выигранными для сильнейшей стороны (хотя имеются исключения).

Итак, правило 50 ходов в шахматном кодексе было изменено для этого эндшпиля не зря. Теперь сильнейшей стороне предоставляется 100 ходов, чтобы поставить мат или выиграть ладью.

Напомним теперь об одном достижении компьютера в решении шахматно-математических задач. Американский математик С. Ким придумал интересное обобщение знаменитой задачи о 8 ферзях.

Расставить на доске (8×8) наибольшее число ферзей так, чтобы каждый из них нападал ровно на p других ферзей.

Условие $p=0$ означает, что ферзи не угрожают друг другу, то есть мы приходим к классической задаче, которой интересовался еще великий Гаусс. Искомое число ферзей на доске 8×8 равно восьми. Для $p=1$ максимум равен десяти, для $p=2$ — четырнадцати. Полное решение задачи получили молодые киевские математики С. Белый и Е. Ровенский. Они доказали, что для $p=3$ максимум равен восемнадцати, а для $p=4$ — двадцати одному (для $p>4$ необходимых расстановок не существует).

Эти результаты были впервые опубликованы в «Кванте» № 8 за 1985 г. И вот совсем недавно С. Белый и Е. Ровенский прислали нам оттиск своей статьи, опубликованной в серьезном научном издании, где рассмотрено обобщение задачи на все квадратные доски $n\times n$ для $n\leqslant 8$. Максимальное число ферзей для различных значений n, p приведено в следующей таблице. Существенно, что она была получена при помощи ЭВМ!

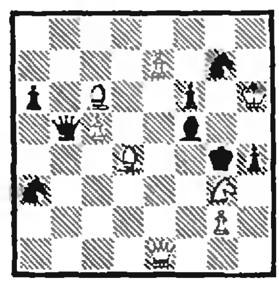
n \ p	0	1	2	3	4
1	1				
2	1	2	3	4	
3	2	2	4	6	
4	4	4	6	8	8
5	5	4	8	10	11
6	6	8	10	12	14
7	7	8	12	14	18
8	8	10	14	18	21

Авторы сообщают, что алгоритм решения основан на «поиске с возвращением» и вполне доступен школьникам, знакомым с программированием переборных задач.

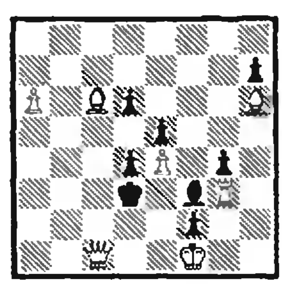
В заключение отметим, что задача Кима, как и многие другие математические задачи на шахматной доске, имеет прямое отношение к теории графов, и ее решение важно для этого раздела математики и кибернетики.

Конкурсные задания

Основным действующим лицом в обеих позициях также является ферзь.



17. Белые начинают и дают мат в 3 хода.



18. Белые начинают и дают мат в 3 хода.

Срок отправки решений — 20 ноября 1986 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 17, 18».

Цена 40 коп.
Индекс 70465

Для проверки вашего пространственного воображения предлагаем выполнить следующее задание: изобразить три урезанных кубика, показанных внизу, в девяти ракурсах так, как это сделано в верхней части рисунка (образец решения). Ответы — в следующем номере журнала.

В. Ф. Канев