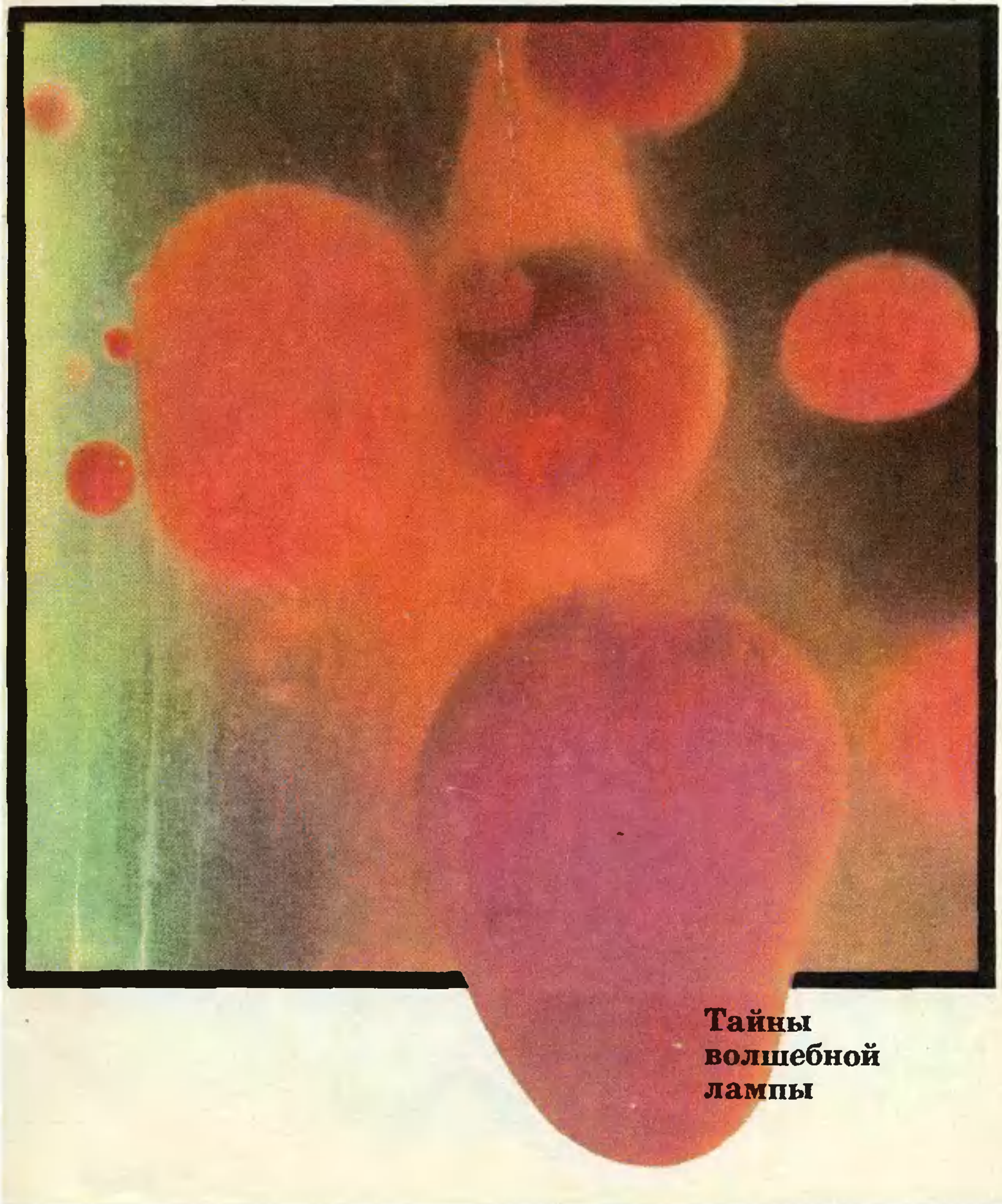
ISSN 0130-2221

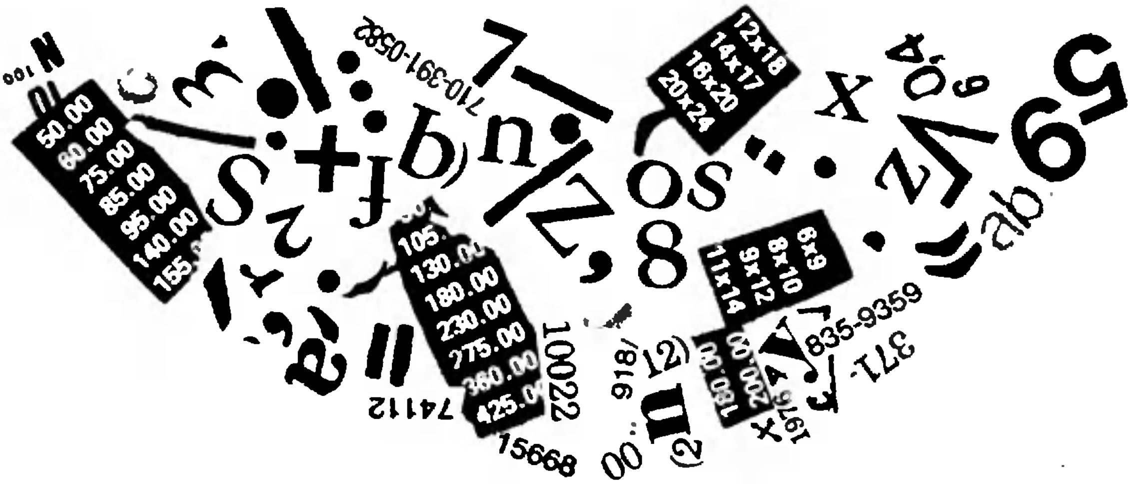
Квант

7
1986

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР



Тайны волшебной лампы



Сегодня у нас в гостях болгарский научно-популярный математический журнал для школьников «Математика». Об этом замечательном издании, о его истории расскажет на первых страницах «Кванта» главный редактор журнала «Математика» Р. Русев. Задачи и статьи по математике на следующих страницах номера написаны нашими болгарскими коллегами.

Большие достижения болгарской школьной математики — призовые места на двух последних Международных математических олимпиадах, победа города Ямбола на только что закончившемся Турнире городов, заметные успехи НРБ по компьютеризации школьного образования — специалисты связывают с несомненным влиянием журнала «Математика». Насколько интересны и полезны материалы наших друзей из Болгарии, читатели «Кванта» смогут представить, прочитав этот номер.

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Квант

7 1986

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

На фотографии, помещенной на первой странице обложки, запечатлен момент из «жизни» светильника «Радуга». Замечательные физические явления, которые протекают в этом светильнике, обсуждаются в статье «Тайны волшебной лампы».

Мате
мати
ка

Журнал ЦК Коммунистического союза молодежи им. Димитрова «Математика» и его развитие

Народная Республика Болгария — страна зрелого социалистического общества. Ее гражданин — творческая личность, борец и преобразователь. Он ищет и анализирует, открывая новые пути в науке и практике. Поэтому ему мало просто получить современные знания, он должен научиться самостоятельно и действенно мыслить, творчески относиться к проблемам жизни. Отсюда необходимость в подготовке кадров, которые были бы способны быстро ориентироваться в изменяющихся условиях, в новейших достижениях науки и техники, самостоятельно решать назревшие проблемы. Мы должны так подготовить подрастающее поколение, чтобы оно могло органически соединить достижения научно-технической революции с преимуществами социалистической системы, создавать и внедрять новое в науке и производстве.

Математика всегда лежала в основе технического прогресса, поэтому Болгарская коммунистическая партия и правительство рассматривают как жизненно важный вопрос о повышении математической культуры молодежи.

В 1962 году Секретариат ЦК БКП принял решение о создании журнала «Математика» для учащихся средних школ. Журнал должен был выходить шесть раз в год и на него возлагались следующие задачи:

— знакомить школьников в популярной и привлекательной форме с крупными достижениями математики, ее историей и ее творцами;

— более глубоко и подробно разъяснять вопросы, изучаемые в школьном курсе математики;

— подчеркивать практические приложения математики и ее воспитательное значение;

— помогать во внеклассной математической работе учащихся;

— отражать интересные события международной математической жизни;

— знакомить учащихся с ведущими отечественными математиками;

— помещать материалы по занимательной математике.

Эти задачи наш журнал начал решать в своих научно-популярных статьях и рубриках: «Из истории математики», «Знаменитые математики», «Конкурсные задачи», «Задачи», «Задачи на аттестат зрелости», «Занимательная математика» и др.

«Школьные» темы

Научно-популярные статьи связаны с учебными программами; с одной стороны, они относятся к темам, которые расширяют познания школьников в данном вопросе, а с другой — к темам, углубляющим их познания. Среди этих тем назовем следующие:

1. Основные виды отображений множеств и числовые отображения.
2. Определенный интеграл и его приложения.
3. Принципы непрерывности.
4. Векторы и их приложения.
5. Свойства треугольников и четырехугольников.
6. Правильные пирамиды.
7. Уравнения и системы уравнений.
8. Неравенства и системы неравенств.
9. Алгебраические операции и их свойства.

В журнале рассматриваются не только темы из классических разделов математики, но также такие разделы, как комбинаторный анализ, математическая логика, теория решеток и графов, математическая лингвистика, многие главы вычислительной математики, то есть те разделы, которые можно объединить под общим названием.

Дискретная математика

Цели, которые преследуют статьи этого направления, следующие:

1. Усиление прикладной направленности. Связь между дискретной математикой, использованием ЭВМ и вычислительной математики, с одной стороны, и приложениями к экономическим и гуманитарным дисциплинам, с другой, делают изучение дискретной математики необходимым для большей части специальностей средних учебных заведений.
2. Ознакомление с математическим моделированием. Дискретные модели имеют свои особенности, которые позволяют их специально выделить (линейное программирование, математические модели языков и др.).
3. Раскрытие существенной роли дискретной математики для повышения вычислительной культуры учащихся.
4. Ознакомление с комбинаторным анализом, приобретающим в наше время все большее значение в прикладной математике. С комбинаторикой также связаны многие разделы теории вероятностей и других дисциплин.
5. Повышение логической грамотности учащихся.

Какие именно темы этого направления должны быть освещены — трудный вопрос. Но редколлегия журнала считает, что ими должны быть в первую очередь статьи, которые можно связать с темами школьного курса.

Научное мировоззрение

В связи с одной из основных задач средней школы — воспитанием научного мировоззрения — журнал «Математика» публикует статьи, показывающие происхождение математических понятий, разъясняющие роль математических абстракций, силу математических методов, которые позволяют просто и в определенных условиях исчерпывающе решать сложные вопросы естествознания — физики, биологии, астрономии и других наук. Акцентируя специальным образом внимание на философских основах математики, мы способствуем более глубокому осмыслению предмета и его методов, более широкому взгляду на сам предмет и его место в системе научных знаний, на его роль как движущую силу прогресса. Вот примеры статей этого направления: «Математика и объективная реальность», «Математический способ мышления», «Математика как профессия», «Талант и эстетика в научном творчестве», «Музыка математики», «Математический подход при физических рассмотрениях».

История математики

Огромную роль в становлении научного мировоззрения молодежи играет ознакомление с историей науки и научных открытий. На необходимость научного подхода указывают и классики марксизма-ленинизма. Изучая сложный путь, пройденный наукой, в известной степени приближаешься к пониманию ее роли сегодня. Приведем несколько примеров статей, преследующих эту цель: «Идеи Н. И. Лобачевского», «Из истории математики», «Первые шаги из истории счета», «Математика древних народов Месопотамии», «Из истории логарифмов», «От числа до цифры».

Отметим также специальное место, которое мы отводим на рассказы о развитии болгарской математики.

В рубрике «Знаменитые математики» читатели знакомятся с жизнеописанием крупных ученых в области математики и, с учетом уровня подготовки читателей, с обзорами научного творчества этих ученых. Мы помещаем и биографии видных болгарских математиков и некоторые их первые работы.

Журнал «Математика» стимулирует исследовательскую работу учеников посредством рубрик «Ученическое творчество» и «Конкурсные задачи». Еще в самом первом номере журнала в рубрике «Ученическое творчество» была помещена статья ученика 9-го класса «Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим некоторых чисел». В течение первых лет существования журнала под этой рубрикой выходили преимущественно статьи, содержащие оригинальные решения задач с международных олимпиад. Позже редколлегия журнала стала более активно руководить ученическим творчеством, и на страницах журнала стали появляться рефераты со школьных теоретических конференций по математике.

Рубрика «Конкурсные задачи»

Эта рубрика, созданная с самого рождения журнала «Математика», ставила своей целью привлечение наиболее способных учащихся к самостоятельной творческой работе на уровне задач международных олимпиад. В известной степени здесь были реализованы прогрессивные концепции Дьёрда Пойа, состоящие в том, что в классе можно создавать такую обстановку, что ученики сами стремятся к определенной исследовательской работе.

В период от 1962 по 1967 мы публиковали задачи (и затем их решения) и списки учеников, наилучшим образом решающих эти задачи. После 1968 года публикуются оригинальные решения и обобщения задач самих школьников, а с 1969 года также и составленные школьниками задачи. При этом большое значение придается способности ставить и решать задачи, возникающие при изучении реального мира, природы.

Разделы для младших школьников

С 1980 года журнал «Математика» выпускает 10 номеров ежегодно. Основные цели и задачи журнала не изменились, но он расширился за счет материалов для младших школьников (4—6 классы). Созданы рубрики «Статьи для младших» и «Задачи для младших». В статьях для младших изучаются прежде всего ситуации, близкие к практике и к интуитивным представлениям, дается предпочтение занимательному элементу, диалогу. Главная их роль, однако, состоит в том, чтобы с раннего возраста прививать учащимся вкус к красоте математических рассуждений и, в рамках возможного, навыки самостоятельной работы. Особенно тщательно подбираются задачи для младших школьников. Учащиеся 5, 6 и 7 классов имеют возможность участвовать в заочно-очном конкурсе по решению этих задач. Двадцать лучших семиклассников получают право без конкурсных экзаменов продолжить свое образование в математической гимназии.

Информатика

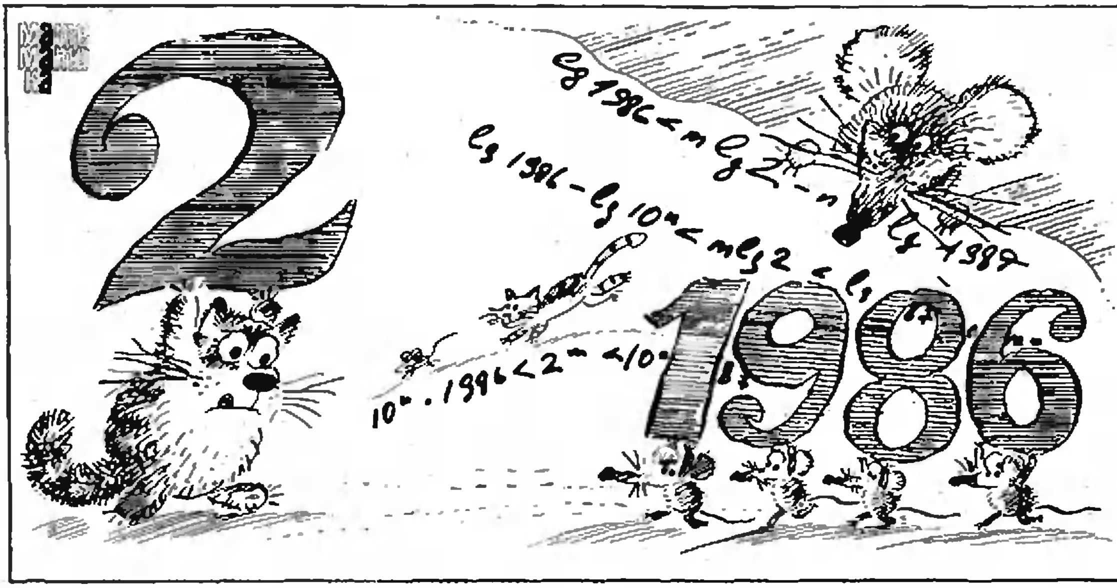
Начиная с первого номера 1985 года наш журнал увеличил свой объем. При этом дополнительный объем отводится теперь под новую рубрику, посвященную вопросам информатики. Ее цели, определенные экономической жизнью страны, следующие:

1. Развивать интеллектуальные способности учащихся, знакомить их с такими математическими понятиями, как система, модель, информация, алгоритм, программное управление, формальные языки и т. п.
2. Расширять и углублять понятие о математическом моделировании на примере реальных устройств и технологий, управленческих и обслуживающих процессов, знакомить с их исследованием, оптимизацией и алгоритмизацией.
3. Раскрывать возможности информатики и математики для решения научно-технических и экономических задач и на их основе знакомить с количественными методами решения.

В заключение отметим, что вот уже более 20 лет журнал «Математика» является добрым помощником учащихся средней школы. Об этом говорит хотя бы тираж журнала, который возрос от 15.000 (в 1962 году) до 78.000 (в 1986 году).

Коллектив редакции стремится максимально полно удовлетворять интересы читателя, помогать в подготовке кадров с широкими математическими познаниями. Вот почему мы постоянно ищем разнообразные формы контактов с читателями.

Главный редактор журнала
«Математика»
Р. Русев



Об одной теореме Кронекера

К. Г. БАНКОВ (НРБ)

Теорема, о которой здесь пойдет речь, играет заметную роль в теории чисел. Однако нам она интересна по другой причине: с ее помощью удается просто решать элементарно формулируемые, но по существу трудные задачи. Прежде чем привести саму теорему, мы рассмотрим две такие задачи.

Задача 1. *Докажите, что существует степень числа 2, десятичная запись которой начинается с цифр 1986.*

Чтобы решить эту задачу, нужно найти такую степень $m \in N$, чтобы

$$10^n \cdot 1986 < 2^m < 10^n \cdot 1987$$

для некоторого n. Логарифмируя по основанию 10, получаем

$$\lg 1986 + \lg 10^n < m \lg 2 < \lg 1987 + \lg 10^n,$$

или

$$\lg 1986 < m \lg 2 - n < \lg 1987.$$

Задача будет решена, если мы сумеем найти такие натуральные n и m, чтобы одно из чисел вида

$$m \lg 2 - n, \quad m, n \in \mathrm{N} \qquad (1)$$

попало в маленький интервал $(\lg 1986, \lg 1987)$.

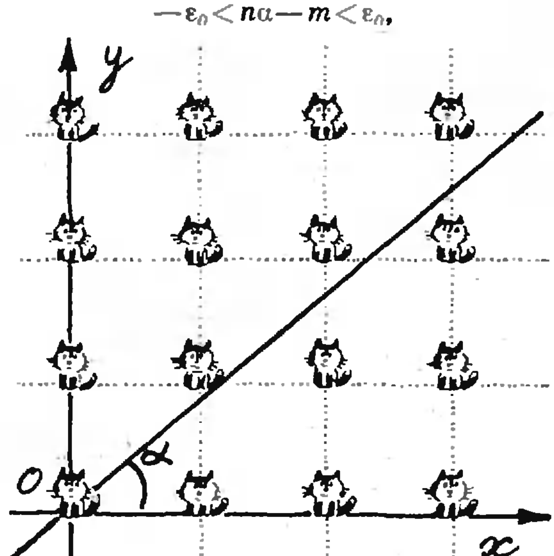
Задача 2. *В вершинах целочисленной квадратной сетки нарисованы одинаковые маленькие коты* (рис. 1). *Докажите, что луч $y = kx$, $x \geqslant 0$ пересечет, кроме центрального, хотя бы еще одного кота, если число k — иррационально.*

Пусть $2\varepsilon_0$ — «ширина кота», иначе говоря, пусть центральный кот пересекает ось Ox по отрезку $[-\varepsilon_0; \varepsilon_0]$. Для определенности предположим, что луч расположен в первом квадранте (остальные случаи аналогичны). Тогда луч пересекает прямые $y = 1, 2, \ldots, n, \ldots$ по точкам с абсциссами $\alpha, 2\alpha, \ldots, n\alpha, \ldots$, где $\alpha = 1/k$. Задача будет решена, если мы найдем такие натуральные n и m, что

$$m - \varepsilon_0 < n\alpha < m + \varepsilon_0,$$

или

$$-\varepsilon_0 < n\alpha - m < \varepsilon_0,$$



то есть сумеем установить, что одно из чисел вида

$$n\alpha - m, n, m \in \mathbf{N}, \qquad (2)$$

попадает в маленький интервал $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$.

Замечательная идея теоремы Кронекера*) состоит в том, что такие множества, как (1) и (2), содержат числа, лежащие вообще в **любом** интервале. Чтобы дать точную формулировку этой теоремы, нам потребуется одно определение.

Числовое множество $A \subset \mathbf{R}$ называется *всюду плотным* (в $\mathbf{R}$), если любой интервал содержит элемент этого множества. Иными словами, *A всюду плотно* в $\mathbf{R}$, если для любых чисел $x, y \in \mathbf{R}$, $x<y$ существует $a \in A$, такой что $x<a<y$.

Упражнения

1. Укажите, какие из следующих множеств всюду плотны в $\mathbf{R}$: а) все рациональные числа; б) все иррациональные числа; в) все числа вида $n+5m/17$ ($n, m \in \mathbf{Z}$); г) все числа вида $n+k/m$ ($n, k, m \in \mathbf{Z}$).

2. Пусть множество A всюду плотно в $\mathbf{R}$ и $r \neq 0$ — действительное число. Докажите, что тогда множества

$$B=\{a+r;\ a \in A\},\ C=\{ra,\ a \in A\}$$

тоже всюду плотны в $\mathbf{R}$.

Теорема Кронекера. *Для произвольного иррационального числа $\alpha \neq 0$ множество*

$$\{m\alpha+n;\ m,\ n \in \mathbf{Z}\} \qquad (3)$$

всюду плотно в $\mathbf{R}$.

Доказательство. Нужно установить, что для любых двух чисел x, y, для которых $x<y$, существует число вида $m\alpha+n$, где m, $n \in \mathbf{Z}$ такое, что $x<m\alpha+n<y$. Обозначим через δ длину интервала $\Delta=(x;\ y)$ и разделим интервал $[0;\ 1]$ на конечное число интервалов $\Delta_1, \Delta_2, ..., \Delta_n$, каждый из которых имеет длину меньше, чем δ. Отметим теперь, что для любого целого числа m, очевидно, существует целое n, для которого число $m\alpha+n$ лежит на отрезке $[0;\ 1]$. Так как целых чисел бесконечно много, а отрезок $[0;\ 1]$ разделен на конечное число интервалов, существуют целые числа m_1, m_2, n_1, n_2, для которых $m_1 \neq m_2$ и числа $m_1\alpha+n_1$ и $m_2\alpha+n_2$ лежат в одном и том же интервале Δ_i. Это означает, что число $a=(m_1-m_2)\alpha+(n_1-n_2)$ по абсолютному значению меньше, чем δ. Кроме того, равенство $a=0$ не может быть верно, потому что из него вытекает, что $\alpha=\dfrac{n_2-n_1}{m_1-m_2}$ — рациональное число. Из сказанного следует, что некоторое число, кратное a, которое также имеет вид $m\alpha+n$, где m, n — целые числа, будет принадлежать $\Delta=(x;\ y)$; теорема доказана.

Замечание. Теорема остается верной, если множество (3) заменить на множество

$$\{m\alpha-n;\ m,\ n \in \mathbf{N}\}. \qquad (4)$$

Это легко выводится из доказанной теоремы; вывод мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Возвращаясь теперь к множествам (1) и (2), мы видим, что они удовлетворяют условиям теоремы: задачи 1 и 2 тем самым решены. (Мы считаем известным, что число $\lg 2$ иррационально; впрочем, это несложно доказать.)

Упражнение 3. Покажите, что в задаче о котах условие иррациональности k нельзя опустить.

Рассмотрим еще несколько задач, решения которых используют теорему Кронекера.

Задача 3. *Докажите, что существует квадрат натурального числа, десятичная запись которого начинается с любых предварительно заданных цифр.*

Решение. Найдем квадрат натурального числа, первые цифры десятичной записи которого — $a_0a_1...a_S$. Обозначим через A число $A=\overline{a_0a_1...a_S}$. Будем теперь искать такое натуральное число n, чтобы для некоторого натурального числа k были верны неравенства

$$A \cdot 10^k<n^2<(A+1) \cdot 10^k,$$

или $\lg A<2\lg n-k<\lg (A+1)$. Если мы выберем число n равным $n=2^m$, а число k — четным, $k=2t$, то

$$\lg A<2m\lg 2-2t<\lg (A+1). \qquad (5)$$

Согласно теореме, замечанию (см. (4)) и упражнению 2, множество

$$\{2m\lg 2-2t;\ m,\ t \in \mathbf{N}\}$$

является всюду плотным, и, следовательно, существуют числа m и t, для которых верно (5). Задача решена.

Для решения следующих задач нам потребуется еще такое утверждение:

Лемма. *Если две непрерывные функции принимают одинаковые значения, когда аргументами являются элементы одного и того же всюду плотного множества, то они совпадают всюду.*

Эта лемма «геометрически очевидна»; ее формальное доказательство малопривлекательно (хотя и нетрудно), поэтому мы его не приводим.

Задача 4. *Докажите, что функция*

$$f(x)=\sin \pi x+\sin \pi\sqrt{2}x$$

непериодическая.

Решение. Допустим, что функция f периодическая, и обозначим через $T \neq 0$ один из

*) Леопольд Кронекер (1823—1891) — выдающийся немецкий математик, специалист по алгебре и теории чисел.

ее периодов. Тогда равенство

$$\sin \pi(x+T)+\sin \pi\sqrt{2}(x+T)= = \sin \pi x+\sin \pi\sqrt{2}x \quad (6)$$

верно для любого действительного числа x. Если в этом равенстве мы заменим x произвольным четным числом $2m$, то получим

$$\sin \pi T+\sin \pi\sqrt{2}(2m+T)=\sin (\pi\sqrt{2}\cdot 2m).$$

Используя снова периодичность функции sin, получаем равенство

$$\sin \pi T+\sin \pi\sqrt{2}\left(2m+\frac{2n}{\sqrt{2}}+T\right)= =\sin \pi\sqrt{2}\left(2m+\frac{2n}{\sqrt{2}}\right),$$

которое верно для любых двух целых чисел m и n. Согласно теореме упражнения 2 множество

$$\left\{2m+\frac{2n}{\sqrt{2}};\ m,\ n \text{ — целые числа}\right\}$$

является всюду плотным. Это означает, что функции $\sin \pi T+\sin \pi\sqrt{2}(x+T)$ и $\sin \pi\sqrt{2}x$ принимают одинаковые значения, когда их аргументами являются элементы одного и того же всюду плотного множества и, следовательно (по лемме), совпадают всюду, то есть равенство

$$\sin \pi T+\sin \pi\sqrt{2}(x+T)=\sin \pi\sqrt{2}x \quad (7)$$

верно для любого действительного числа x. Вычитая (7) из (6), получаем

$$\sin \pi(x+T)-\sin \pi T=\sin \pi x.$$

В последнем равенстве полагаем $x=T$; получим

$$\sin 2\pi T-\sin \pi T=\sin \pi T,$$

или

$$\sin \pi T(\cos \pi T-1)=0.$$

Из последнего равенства следует, что T — целое число. Тогда из (7) следует

$$\sin \pi\sqrt{2}(x+T)-\sin \pi\sqrt{2}x=0,$$

или

$$\sin \pi\sqrt{2}\,\frac{T}{2}\cos \pi\sqrt{2}\left(x+\frac{T}{2}\right)=0.$$

Так как существуют значения x, для которых $\cos \pi\sqrt{2}\left(x+\frac{T}{2}\right)\neq 0$, то $\sin \pi\sqrt{2}\,\frac{T}{2}=0$; отсюда вытекает, что $\sqrt{2}\,\frac{T}{2}$ — целое число. Но, с другой стороны, T — также целое число и $T\neq 0$, значит $\sqrt{2}$ — рациональное число, что неверно. Полученное противоречие доказывает, что функция f непериодична.

Вот еще одна задача, связанная с рассмотренной выше функцией.

Задача 5. *Докажите, что функция*

$$f(x)=\sin \pi x+\sin \pi\sqrt{2}x$$

не может принять значения 2, но принимает значения, сколь угодно близкие к числу 2.

Решение. Если мы допустим, что $f(x)=2$ для некоторого x, то будут выполнены одновременно равенства $\sin \pi x=1$ и $\sin \pi\sqrt{2}x=1$, откуда непосредственно следует, что число $\sqrt{2}$ рационально, а это неверно. Следовательно, $f(x)<2$ для любого числа.

Если x — произвольное число вида $2m+\frac{1}{2}$, где m — целое число, функция f принимает вид

$$f(x)=1+\sin \pi\sqrt{2}\left(2m+\frac{1}{2}\right).$$

Покажем, что можно найти такое целое число m, для которого $\sin \pi\sqrt{2}\left(2m+\frac{1}{2}\right)$ сколь угодно близко к числу 1. Имея в виду непрерывность функции sin, достаточно найти такие целые числа m и n, что число $\sqrt{2}\left(2m+\frac{1}{2}\right)$ произвольно близко к числу $2n+\frac{1}{2}$. Поэтому достаточно доказать, что для любого положительного ε существуют целые числа m и n, для которых

$$2n+\frac{1}{2}-\varepsilon<\sqrt{2}\left(2m+\frac{1}{2}\right)<2n+ +\frac{1}{2}+\varepsilon.$$

Преобразуем последнюю цепочку неравенств к виду

$$1-2\varepsilon-\sqrt{2}<4m\sqrt{2}-4n<1+2\varepsilon-\sqrt{2}.$$

Теперь все следует из теоремы и упражнения 2.

Задача 6. *Найдите все непрерывные действительные функции f, для которых $f(x)=f(x+1)=f(x+\sqrt{2})$.*

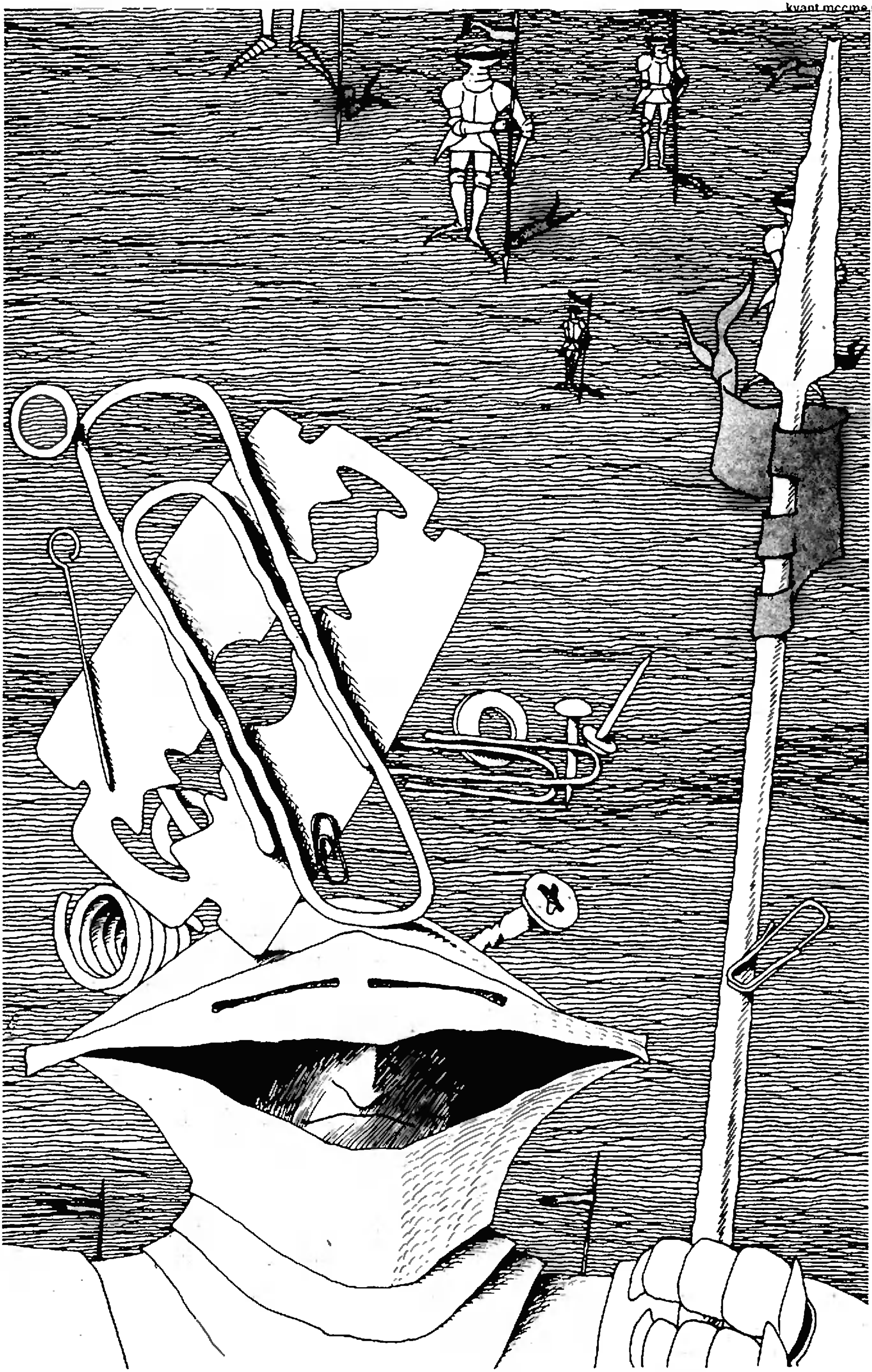
Решение. Пусть f — непрерывная функция, для которой $f(x)=f(x+1)=f(x+\sqrt{2})$. Это означает, что числа 1 и $\sqrt{2}$ — периоды функции f. Тогда периодами функции f являются также все числа вида $m+n\sqrt{2}$, где m и n — целые числа, то есть для любых двух целых чисел m и n верно равенство $f(x+m+n\sqrt{2})=f(x)$. Последнее равенство означает, что $f(x+y)$ и $f(x)$ принимают одинаковые значения, когда y принадлежит всюду плотному множеству

$$\{m+n\sqrt{2};\ m,\ n \text{ — целые числа}\}.$$

Тогда согласно лемме получаем, что равенство $f(x+y)=f(x)$ верно для каждого числа y, то есть каждое (действительное) число является периодом функции f. Теперь, если x_1 и x_2 — два различных числа, мы положим $y=x_2-x_1$, и тогда

$$f(x_1)=f(x_1+(x_2-x_1))=f(x_2).$$

Следовательно, решением задачи 6 будут все функции вида $f(x)=a$, где a — постоянная.



Намагниченный атомарный водород

Доктор физико-математических наук
И. П. КРЫЛОВ

Водород — самое распространенное вещество во Вселенной. Пылающие звезды и холодный межзвездный газ на 90 % состоят из водорода — элемента № 1 периодической системы. Остальные 10 % почти полностью составляет гелий — элемент № 2. На долю всех более тяжелых элементов, столь важных у нас на Земле, в космических масштабах приходится всего лишь 1/1000 часть общего количества вещества. Водород на Земле существует в молекулярном виде, в то же время в космосе водород — в основном атомарный. В чем тут дело? Можно ли создать и сохранить атомарный водород на Земле? Как это сделать? Ответы на эти вопросы вы получите, прочитав эту статью. Межзвездный газ чрезвычайно разрежен: в среднем 1 атом водорода в 1 см^3. Какие максимальные плотности атомарного водорода можно получить в лаборатории? Ответ на этот вопрос меняется изо дня в день, ибо сейчас ученые в передовых физических лабораториях усердно работают над увеличением этой плотности.

Все земные газы при понижении температуры становятся жидкими, а потом твердеют. Наиболее упорно превращению газа в жидкость сопротивлялся гелий. Лишь при понижении температуры до нескольких градусов вблизи абсолютного нуля (—273,15 °С) гелий стал жидким. Впервые это удалось сделать почти 80 лет назад. Но элемент № 2 не сдался полностью: в отличие от остальных элементов он не твердеет при нормальном давлении даже при абсолютном нуле. Становится ли жидким атомарный водород? Уверенного ответа на этот вопрос ученые сейчас дать не могут. Есть основание считать, что элемент № 1 в атомарном виде еще более капризен, чем элемент № 2, и не только не затвердеет, но даже и не превратится в жидкость. Но лучше давайте по порядку.

«Земной» и «космический» водород: молекулы и атомы

В учебнике читаем: «водород — легкий бесцветный газ, превращающийся в жидкость при —253 °С и затвердевающий при —259 °С». Все это говорится про обычный «земной» водород, или, выражаясь точным языком, про молекулярный водород H_2. Свойства «космического», атомарного водорода H, совсем другие. Начнем с самого начала. Вспомним, как устроен атом водорода — простейший атом в природе.

Атом водорода образован двумя элементарными частицами: протоном и электроном. Их электрические заряды равны по величине и противоположны по знаку. Протон заряжен положительно, в 1836 раз тяжелее электрона и служит ядром атома с размером менее 10^{-12} см. Электрон движется вокруг ядра. Однако его движение подчиняется особым квантовым законам. По современным представлениям нельзя считать, что электрон движется по какой-то определенной орбите. Он как бы «размазан»: предпринимая независимые попытки определить местонахождение электрона в абсолютно одинаковых атомах водорода, мы будем обнаруживать электрон в самых разных точках вокруг ядра.*) Так возникает образ электронного облака, плотность которого указывает, где более, а где менее вероятно обнаружить электрон (рис. 1). Электронное облако в атомах не имеет четкой границы; однако при превышении некоторого расстояния плотность спадает очень быстро. Это расстояние можно принять за радиус атома. Для атома водорода эта величина называется боровским радиусом и равна $a=0{,}53\cdot10^{-10}$ м$=$ $=0{,}53$ Å (здесь использована единица длины ангстрем — 1 Å$=10^{-10}$ м).

Электрон, а вместе с ним и весь атом водорода, обладает магнитными свойствами: в магнитном поле он ведет себя как магнитная стрелка. Как будто электрон «намагничен», у него есть северный и южный полюса. Это свойство наглядно изображают с помощью стрелки, показывающей на-

*) См. статью «Соотношение неопределенностей» в «Кванте» № 7 за 1985 год

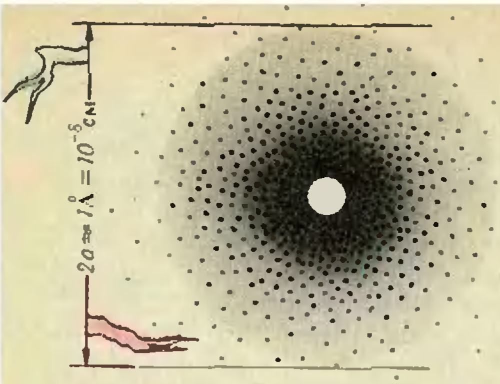


Рис. 1. Протон в центре электронного облака — простейший атом в природе.

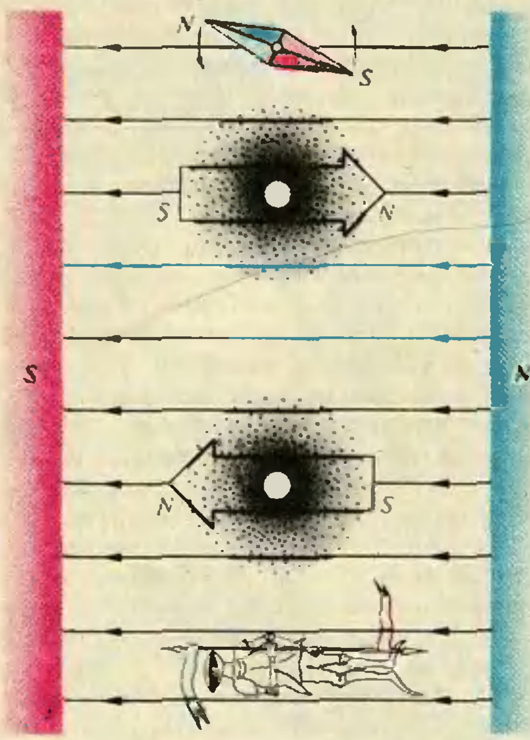


Рис. 2. Атом водорода в магнитном поле ведет себя как магнитная стрелка — он ориентируется вдоль силовых линий поля. Однако в отличие от стрелки электронный магнитик не может занимать промежуточных положений: он имеет только две ориентации: против поля или по полю.

правление магнитного момента*) (рис. 2).

Как известно, магнитная стрелка в магнитном поле поворачивается вдоль силовых линий, изменяя свою ориентацию непрерывно. В отличие от нее электронный магнитик не может занимать промежуточных положений. Квантовые законы позволяют ему иметь только две ориентации: по полю и против поля. К такому необычному квантовому поведению электрона надо просто привыкнуть. В микромире многое происходит совсем иначе, чем в обычной жизни.

*) В «Кванте» № 3 за этот год в разделе «Школа в «Кванте» была опубликована статья, посвященная магнитному моменту.

Молекула водорода

Рассмотрим теперь, что происходит при сближении двух атомов водорода. Атомы в целом нейтральны, так что на больших расстояниях электрические силы отсутствуют. При уменьшении расстояния электронные облака начинают перекрываться (рис. 3). Из законов квантовой механики следует, что характер деформации облаков определяется взаимной ориентацией магнитных моментов электронов. Если стрелки, показывающие направление магнитных моментов, смотрят в одну сторону (см. рис. 3), то электронные облака между ядрами разрежены. В этом случае преимущество имеют силы отталкивания, действующие между одноименными зарядами. Во втором случае электронные облака в области между ядрами более плотны, чем в удаленных точках. При этом одерживают верх силы притяжения. Подчеркнем, что силы взаимодействия между атомами — электрические силы; силы магнитного взаимодействия в этом случае очень малы.

Взаимодействие атомов удобно описывать с помощью графика зависимости потенциальной энергии взаимодействия U от расстояния между атомами r. На рисунке 4 приведены эти графики для параллельной ($\uparrow\uparrow$) и антипараллельной ($\uparrow\downarrow$) ориентаций магнитных моментов атомов водорода. Положительный знак потенциальной энергии, как обычно, соответствует отталкиванию, отрицательный — притяжению. Как видно из рисунка, на малых расстояниях даже в случае антипараллельной ориентации ($\uparrow\downarrow$) атомы начинают отталкиваться. Это происходит потому, что притяжение электронных облаков к «чужим» ядрам уже не может компенсировать оттталкивание положительно заряженных ядер. Устойчивому положению равновесия соответствует минимум потенциальной энергии. При этом два атома водорода в состоянии $\uparrow\downarrow$ расположатся на расстоянии $r_0 = 0{,}7\,\AA$.

Образуется устойчивая система — молекула водорода. Энергия образования молекулы — «глубина ямы» на графике $U(r)$ — составляет $E_0=4,5$ эВ. При «слиянии» атомов в молекулу, называемом рекомбинацией, эта энергия — энергия рекомбинации — должна быть отдана окружающим телам. При обратном процессе, называемом диссоциацией, эта энергия — энергия диссоциации — должна быть доставлена из внешнего источника. Заметим еще раз, что в состоянии ↑↑ атомы водорода вообще не могут образовать молекулу.

Графики потенциальной энергии обладают большой наглядностью: система стремится двигаться так, как двигались бы санки на скользкой горе, склон которой изображен на графике. Для графика ↑↑ санки уехали бы вправо, в область больших расстояний. Это означает, что атомы отталкиваются и удаляются друг от друга. На графике ↑↓ имеется склон, по которому санки двигались бы влево, к началу координат, что соответствует притяжению атомов водорода.

Как происходят столкновения

Обычно магнитные моменты атомов ориентированы случайно. Половина столкновений происходит в состоянии ↑↑, а другая половина — в состоянии ↑↓.

Интересно, что далеко не каждое столкновение двух атомов водорода в состоянии ↑↓ приведет к образованию молекулы, то есть к рекомбинации. Обращаясь к нашей иллюстрации с санками, мы легко себе представим, что, прикатившись на совершенно скользкую гору откуда-то справа, санки соскользнут вниз, в яму, но по инерции вылетят на противоположный склон и остановятся на высоте, с которой они начали скатываться на правом склоне. Затем санки опять поедут вниз, опять проскочат дно ямы и уедут вправо с той же кинетической энергией, с какой приехали. Ясно, что это обратимое движение происходит в силу закона сохранения энергии при условии полного отсутствия трения. Для реальных гор часть кинетической энергии всегда уходит на работу против сил трения, то есть в тепло, и санки рано или поздно остановятся на дне ямы. При сближении атомов водорода также справедлив закон сохранения энергии. И здесь уже нет никаких трущихся поверхностей. Если сталкиваются только два атома, то им нечему передать свою энергию. При столкновении атомы сблизятся, проскочат по инерции устойчивое положение, сойдутся до полной остановки, а потом опять разлетятся, как абсолютно упругие шарики. Для образования же молекулы необходимо столкновение сразу трех тел: двух атомов водорода и еще чего-нибудь. Третьим телом может быть любой

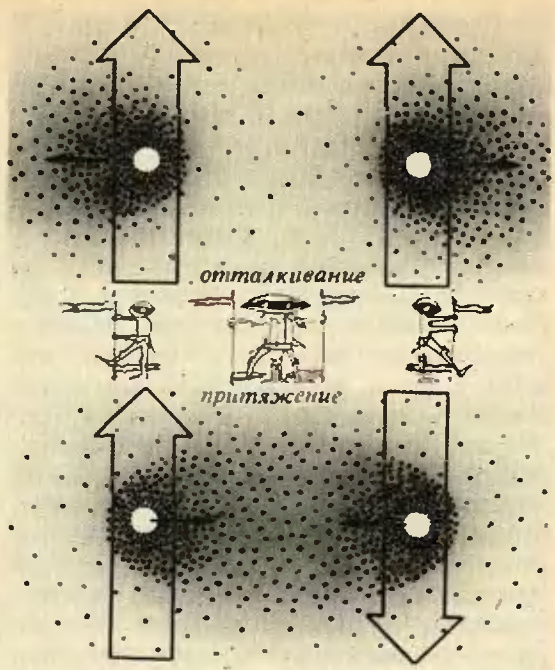


Рис. 3. При параллельной (↑↑) ориентации магнитных моментов электронное облако между ядрами разрежено, при антипараллельной (↑↓) — сгущено.

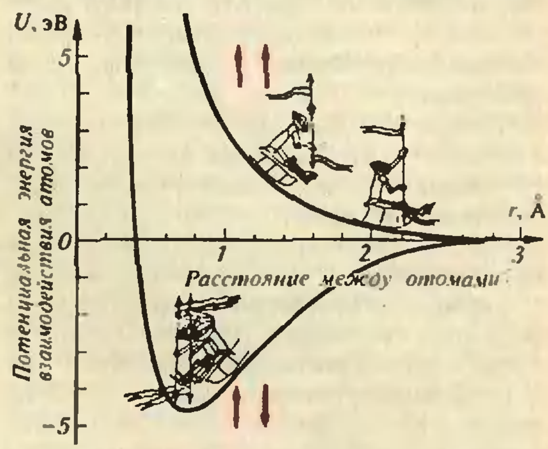


Рис. 4. «Горка» потенциальной энергии двух атомов водорода в состоянии ↑↑. Минимум для графика ↑↓ — «яма» глубиной 4,5 эВ: дно «ямы» соответствует расстоянию $r_0=0,7$ Å.

атом или молекула или их скопление — в общем, что-нибудь, способное унести излишек кинетической энергии двух атомов водорода, слипшихся в молекулу, то есть энергию рекомбинации. Для сталкивающихся атомов водорода, состоящих из заряженных частиц и обладающих магнитными моментами, в принципе существует возможность отдать энергию рекомбинации, излучив свет ультрафиолетового диапазона. Однако эта возможность очень маловероятна. Согласно оценкам, при обычных тепловых скоростях движения атомов водорода на десятки миллиардов столкновений лишь в одном случае произойдет излучение света и образование молекулы. Раз свет может излучаться при образовании молекулы, то возможен и обратный процесс — разрушение молекулы за счет поглощения энергии ультрафиолетового света — так называемая фотодиссоциация. Хотя этот процесс тоже маловероятен, но молекула как стабильное образование может ждать сколько угодно и в конце концов при облучении ультрафиолетовым светом будет разрушена.

Теперь мы можем понять, почему в космических условиях разреженный межзвездный газ — водород — находится в атомарном состоянии. В разреженном газе преимущественно происходят парные столкновения частиц, а тройные столкновения чрезвычайно редки. Рекомбинация происходит лишь при тройных столкновениях атомов и идет очень медленно. В то же время ультрафиолетовое излучение звезд пронизывает все космическое пространство и с достаточной скоростью производит фотодиссоциацию образовавшихся молекул. Реальное соотношение скоростей рекомбинации и диссоциации таково, что доля молекул в межзвездном водороде мала.

Напротив, в газе высокой плотности, соответствующей давлению в земной атмосфере, вероятность тройных столкновений достаточно велика, и рекомбинация быстро приводит к исчезновению атомарного водорода.

Атомарный водород в лаборатории

Как получить и сохранить атомарный водород в земных условиях? Получать его из молекулярного газа довольно просто в газоразрядных трубках; это научились делать уже около сотни лет назад. Сохранить атомарный водород в течение длительного промежутка времени очень трудно, и лишь совсем недавно, несколько лет назад, удалось увеличить время хранения до нескольких часов. Начнем с методики получения атомарного водорода.

Современная промышленность широко использует водород. Наиболее распространенным способом его получения (конечно, в молекулярной форме) является электролиз воды. Но как обеспечить диссоциацию молекулы водорода, то есть разделить ее на атомы? Еще в начале нашего столетия знаменитый физик Ленгмюр заметил, что часть молекул водорода разлагается на атомы при соприкосновении с раскаленной вольфрамовой нитью. Однако эта термическая диссоциация малоэффективна. Гораздо лучше молекулы разваливаются в электрическом разряде. Если стеклянную трубку длиной 10÷30 см заполнить газом под низким давлением $p = 10^{-3} \div 10^{-4}$ атм, укрепить на концах трубки электроды и приложить к столбу газа постоянное напряжение $U = 1 \div 3$ кВ (рис. 5, *а*), то газ начнет светиться и через него пойдет ток. Говорят, что в трубке загорелся разряд. При этом часть атомов ионизируется, то есть электроны отрываются от ядер и разгоняются электрическим полем. Такие ускоренные электроны сталкиваются с молекулами и разрушают их. При столкновениях между собой атомы опять рекомбинируют в молекулы. Особенно часто это происходит на поверхности стекла, которое служит третьим телом и принимает часть энергии рекомбинации. Поверхностная и объемная рекомбинации определяют динамическое равновесие: за любой промежуток времени число молекул, диссоциированных электронным ударом, равно числу молекул, образовавшихся за счет рекомбинации атомов. При этом число атомов держится на стационарном уровне. Отношение $N_{атомов}/(N_{атомов} + N_{молекул})$ называется степенью диссоциации и может достигать 90 % и более.

Разряд можно устроить более удобным и еще более эффективным способом, если взять высокочастотный генератор (рис. 5, *б*).

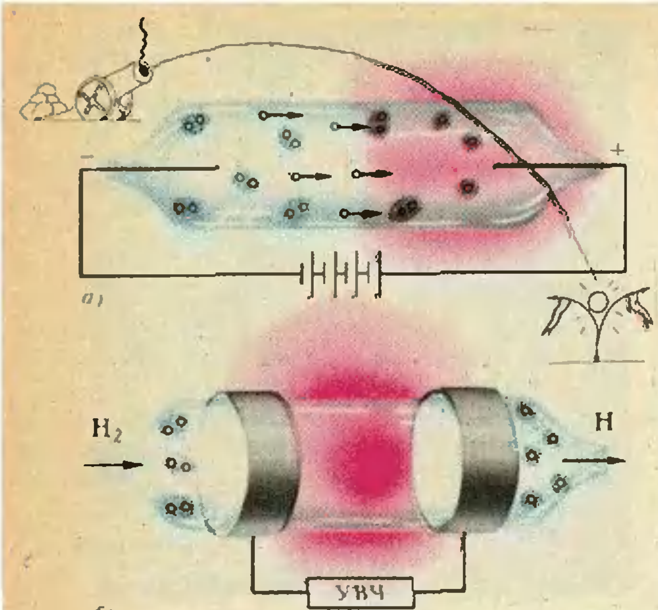


Рис. 5. а) Электроны разгоняются в разрядной трубке сильным электрическим полем и, сталкиваясь с молекулами H_2, разваливают их на атомы.
б) В безэлектродной разрядной трубке переменное поле от высокочастотного генератора мощностью ~ 100 Вт производит почти 100 %-ую диссоциацию. Трубка ярко светится малиновым светом.

Подавая с одного конца трубки молекулярный газ, с другого конца мы можем забирать поток атомарного водорода.

К сожалению, это лишь частичный успех. После выключения разряда за тысячные доли секунды все атомы рекомбинируют. Перед нами встает более сложная задача: как сохранить атомарный водород?

Магнитная ловушка вблизи абсолютного нуля

Внимательно прочитав предыдущие страницы и немного подумав, вы догадаетесь, как в принципе решить поставленную задачу. В самом деле, достаточно устроить так, чтобы все атомы сталкивались в состоянии $\uparrow\uparrow$. Как показывает верхний график на рисунке 4, при таких столкновениях молекула вообще не может образоваться. Но как перевести атомарный водород в такое состояние? Ясно: надо включить магнитное поле. Во внешнем поле все атомы водорода — элементарные магнитики — повернутся вдоль поля и не смогут образовывать молекулы. Это все правильно, но... есть много помех. Если по стрелке компаса слегка ударить, то она начнет колебаться, и вы не сможете узнать направление на север, пока стрелка не успокоится. Элементарные магнитики атомов все время подвергаются ударам со стороны других атомов в результате никогда не прекращающегося теплового движения. Поэтому даже в самых сильных магнитах, которые создают поля $B \approx 30$ Тл, при комнатной температуре ($T = 300$ К) магнитные моменты атомов водорода ориентируются по полю и против поля практически с равной вероятностью 1/2. Лишь создав поле в тысячи тесла, мы смогли бы ориентировать атомы при комнатной температуре. Но таких магнитных полей мы создавать не умеем. Зато мы легко можем понизить температуру! Техника получения низких температур $T \lesssim 1$ К сейчас доступна многим лабораториям. К тому же при этих температурах магнит можно сделать из сверхпроводящего провода. Небольшие сверхпроводящие магниты позволяют получать магнитные поля $B \approx 10$ Тл. Наконец мы пришли к правильному техническому решению проблемы хранения атомарного водорода: камера в поле сверхпроводящего магнита при температуре не выше $T \approx 1$ К.

Сверхпроводящий магнит проще всего изготовить, намотав сверхпроводящую проволоку на цилиндрический каркас. Такую катушку еще иначе называют соленоидом. Пропустив по проволоке электрический ток, мы получим магнитное поле, максимальное внутри катушки, где и следует разместить водородную камеру. Помимо ориентации атомов соленоид сыграет еще одну важную роль: он втянет атомные магнитики в область сильного поля (так же, как притягивает стрелку компаса). Поэтому вблизи центра соленоида концентрация ориентированных атомов будет гораздо больше, чем вдали от магнита (рис. 6).

Поляризованный атомарный водород — самый летучий

В первых опытах, поставленных несколько лет назад в Амстердамском университете, была получена и сохранялась в течение нескольких часов концентрация n около 10^{15} атомов

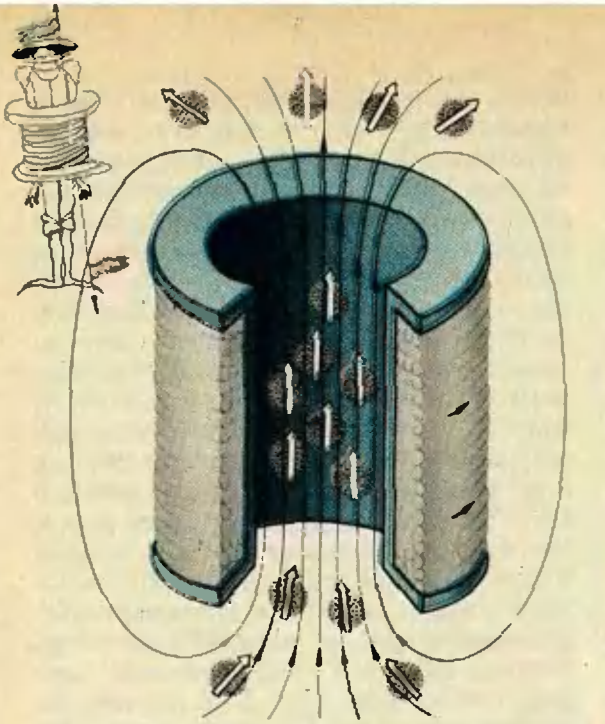


Рис. 6. Цилиндрическая катушка с током (соленоид) создает магнитное поле, которое втягивает магнитные атомы в область сильного поля внутри катушки и поворачивает их магнитные моменты вдоль поля.

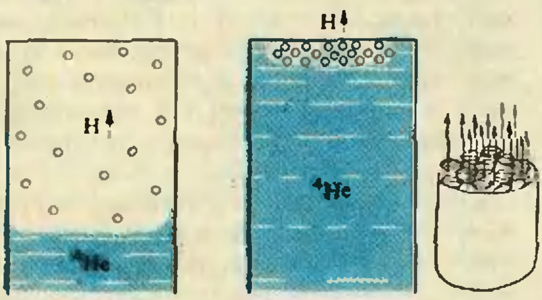


Рис. 7. Сжатие атомарного водорода «поршнем» из жидкого гелия. При очень низких температурах паров гелия практически нет.

водорода в 1 кубическом сантиметре ($n \sim 10^{15}$ см$^{-3}$). Много это или мало? По сравнению с межзвездным газом ($n = 1 \div 10$ см$^{-3}$) это очень много. По сравнению с обычным газом при нормальных условиях это довольно мало. Напомним, что при 0 °С и давлении 1 атм в 1 см^3 газа содержится около $2{,}7 \cdot 10^{19}$ частиц. Так что в первых опытах атомарный водород был весьма разрежен.

Но по мере совершенствования техники концентрация быстро возрастала. Наибольший успех принес простой и хорошо известный прием — сжатие. Все знают, как сжимают воздух в цилиндре с подвижным поршнем. Так же можно сжать и атомарный водород. Но при соприкосновении с поверхностями всех веществ, кроме жидкого гелия, атомы очень быстро рекомбинируют. Поэтому внутреннюю поверхность камеры, в том числе и поршень, покрывают пленкой жидкого гелия. Можно обойтись и без поршня; вернее, использовать в качестве поршня поверхность жидкого гелия. В начале водород заполняет почти весь объем камеры. Поднимая уровень жидкого гелия, газ можно сжать в маленький пузырек и повысить концентрацию Н в сотни и тысячи раз (рис. 7). Таким способом год назад удалось достичь рекордной величины $n = 5 \cdot 10^{18}$ см$^{-3}$. Это значение уже сравнимо с плотностью газа при нормальных условиях. Получить больше мешает все та же рекомбинация.

Однако правильно ли сравнивать теплый комнатный воздух с очень холодным атомарным водородом? Конечно, чтобы лучше оценить достигнутое, надо сравнить свойства различных газов при низкой температуре. Эксперименты с атомарным водородом проводились при $T = 0{,}5$ К. Эту температуру мы и выберем для сравнения. Манометрический датчик непосредственно измерял давление p, а концентрация n подсчитывалась по формуле идеального газа. Так, приведенное выше значение для n было получено по измеренной величине давления $p = 35$ Па. Давайте посмотрим, каких давлений можно достичь с другими газами.

Как известно, если сжимать газ при постоянной достаточно низкой температуре, то максимальное давление равно давлению насыщенных паров $p_{н.п.}$ данного вещества. Дальнейшее сжатие не будет увеличивать давление газа, а будет приводить к переходу в жидкую или твердую фазу. При $T = 0{,}5$ К давление насыщенных паров для всех веществ, за исключением гелия, практически равно нулю. Для природного изотопа ^{4}He оно очень мало: $p_{н.п.} = 0{,}002$ Па; для искусственного ^{3}He оно существенно выше: $p_{н.п.} = 21$ Па, но все же меньше рекорда давления атомарного водорода. При таком сравнительном анализе еще большее впечатление производят данные, полученные при понижении температуры. Самая низкая температура, при которой до настоящего времени проводились

(Окончание см. на с. 21)

> ...„Симметриады" появляются внезапно. Их образование напоминает извержения. Океан вдруг начинает блестеть, как будто несколько десятков квадратных километров его поверхности покрыты стеклом. Через некоторое время стекловидная оболочка выбрасывается вверх в виде чудовищного пузыря, в котором, искажаясь и преломляясь, отражается весь небосклон, солнце, тучи, горизонт...
>
> Станислав Лем. „Солярис"

Тайны волшебной лампы

Кандидат физико-математических наук
А. А. ВАРЛАМОВ

Фотография, помещенная рядом с эпиграфом, сделана не на Солярисе, не из космического корабля, погружающегося в мрачные глубины атмосферы Юпитера, и не из иллюминатора батискафа, рискнувшего подобраться к извергающемуся подводному вулкану. На ней изображен работающий светильник «Радуга», который, хотя и не всегда, можно купить в магазинах «Подарки». Он таит в себе множество непростых и красивых явлений.

Устройство светильника весьма несложно. Он представляет собой прозрачную цилиндрическую колбу, в основание которой, под стеклянным дном, вмонтирована обычная электрическая лампа. Стекло у дна прикрыто цветным светофильтром, а по его периметру идет металлическая спираль (рис. 1). Колба примерно на 1/6 часть своего объема заполнена воскообразным веществом (о котором мы в дальнейшем будем говорить как о «веществе А»), а затем почти доверху залита прозрачной жидкостью (о ней мы будем говорить как о «веществе Б»). По каким соображениям выбираются эти вещества и какими свойствами они должны обладать, мы выясним чуть позднее, изучая явления, происходящие в светильнике.

Наблюдения лучше всего проводить в темноте, когда «Радуга» служит единственным источником света. Включим же ее в сеть и наберемся терпения. Как мы увидим, события, происходящие в светильнике, можно разбить на несколько фаз. Первую из них мы условно назовем фазой покоя и накопления сил.

Вещество А аморфно, то есть не имеет строго упорядоченной структуры. С повышением температуры оно размягчается и постепенно переходит в жидкое состояние. Отметим важное различие между переходом

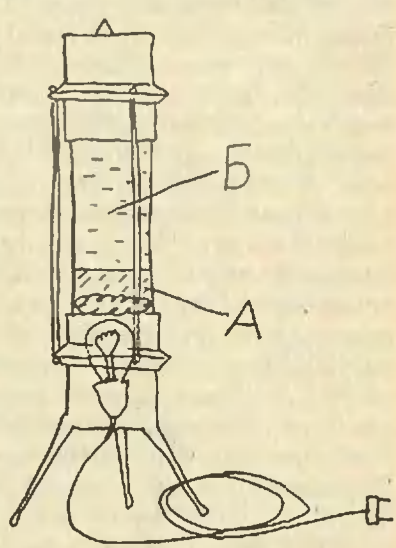
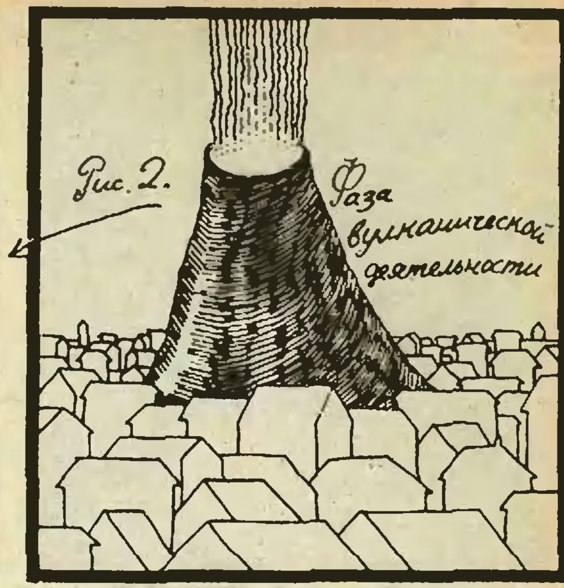


Рис. 1.

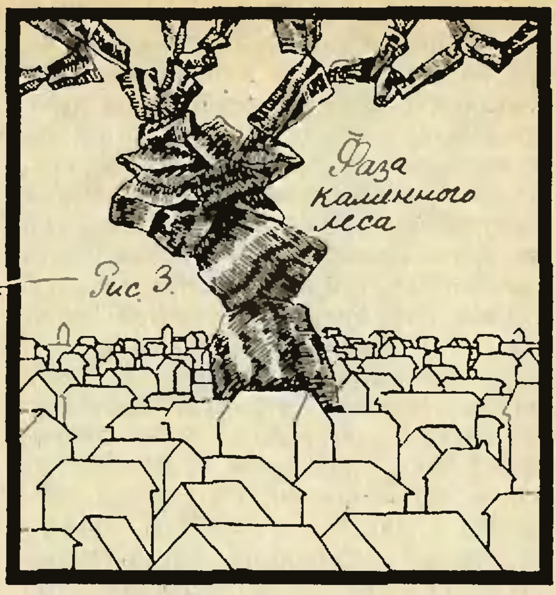


в жидкость кристаллического и аморфного веществ. Для первого этот переход происходит лишь при определенной температуре и требует затраты энергии — теплоты плавления, которая расходуется на разрушение кристаллической структуры вещества. Для аморфного же вещества твердое и жидкое состояния принципиально не различаются. Просто с повышением температуры вязкость аморфного вещества уменьшается, и оно становится все более и более текучим.

Включенная в сеть лампочка, освещающая снизу, сквозь светофильтр, красновато-зеленым светом внутренность цилиндра, служит также и источником тепла. На дне возле лампы образуется «горячее пятно» (область повышенной температуры). В этой области вещество А начинает размягчаться, в то время как ни верхняя корка, ни, тем более, жидкость Б прогреться еще не успевают и пока остаются холодными. По мере нагревания все бо́льшая часть вещества А становится жидкой, его твердая корка становится все тоньше и тоньше. Вследствие теплового расширения объем расплавившихся нижних слоев вещества А стремится возрасти, давление под коркой увеличивается, и в какой-то момент жидкость А проламывает твердую корку и пузырями вырывается вверх. На дне как бы заработал вулкан. Фаза покоя и накопления сил завершена — ее сменяет фаза вулканической деятельности (рис. 2).

Вещества А и Б подобраны так, что плотность разогретого жидкого вещества А, вырывающегося из трещины в корке, оказывается несколько меньше плотности еще холодного вещества Б. Поэтому порции вещества А одна за другой всплывают вверх. По дороге в холодной жидкости Б они остывают и, достигая поверхности, отвердевают, принимая самые причудливые формы. При застывании плотность вещества А становится несколько больше плотности жидкости Б, и «осколки» начинают медленно опускаться. Однако некоторые из них надолго зависают у поверхности. Причиной плавания мелких осколков на поверхности может служить сила поверхностного натяжения. Дело в том, что жидкость Б не смачивает вещество А, поэтому действующая на полузатопленные осколки сила поверхностного натяжения направлена вверх и стремится вытолкнуть их из жидкости. Благодаря этому же эффекту удерживаются на поверхности воды водомерки, плавает смазанная жиром стальная игла.

Между тем избыточное давление в нижней части сосуда, под коркой, уже сброшено, края трещины оплавились, и сквозь этот кратер с небольшой скоростью продолжают вытекать очередные порции расплавленного вещества А. Однако теперь они не отрываются ото дна, а медленно вытягиваются из кратера в форме удлиняющейся вверх струи. Поверхность этой струи, соприкасаясь с хо-



лодной жидкостью Б, быстро отвердевает, образуя подобие ствола. Посмотрев на этот ствол «напросвет», вы наверняка удивитесь: он тонкостенный и заполнен внутри ... жидкостью Б. Дело в том, что, когда струя расплавленного вещества А выходит из кратера и устремляется вверх, в какой-то момент для дальнейшего роста ей не достает вещества А. Внутри струи создается разрежение, и где-то на границе образующегося ствола и кратера возникает разлом, в который устремляется холодная жидкость Б. Верхняя же часть струи еще продолжает свое движение вверх. Так жидкость Б заполняет ствол изнутри, охлаждая и формируя его внутренние стенки, после чего они окончательно отвердевают.

В нижней части светильника тем временем по-прежнему идет процесс плавления, и очередной шар расплавленного вещества А выходит из кратера. Он поднимается вверх уже внутри образовавшейся трубки. Поднявшись до ее верхнего конца, он за счет своей еще разогретой массы удлиняет ее. С каждой новой порцией вещества А трубка удлиняется, образуя растущий вверх гофрированный ствол (рис. 3). Рядом с ним, раздвинув опавшие осколки вулканической деятельности, через некоторое время может вырасти еще один или несколько таких стволов. Стволы причудливо переплетаются, подобно стеблям экзотических растений, среди каменных глыб, усеивающих дно, и продолжающих опускаться по мере нагревания жидкости Б осколков. Картина на время замирает. Эту фазу можно назвать фазой каменного леса.

Если в этот момент выключить светильник, то «окаменевший лес» останется в нем неизменным — к первоначальному состоянию светильник сам вернуться не сможет. Однако, несмотря на фейерверк происшедших событий, до рабочего режима мы еще не дошли, поэтому оставим светильник включенным и продолжим наблюдения.

Время идет, жидкость Б прогревается, лежащие на дне осколки начинают оплавляться, а уходящие вверх стволы постепенно оседают вниз. Однако среди бывших осколков вы не увидите расплющенных капель — все они постепенно принимают сферическую форму. В обычных условиях расплющивание капель на несмачиваемой поверхности происходит благодаря силе тяжести. Она противодействует силам поверхностного натяжения, стремящимся придать капле форму шара — тела, поверхность которого при заданном объеме минимальна. В светильнике на каплю кроме силы тяжести и поверхностного натяжения действует сила Архимеда, которая почти полностью компенсирует силу тяжести. Поэтому капля оказывается как бы в состоянии невесомости, и уже ничто не мешает ей принять сферическую форму.

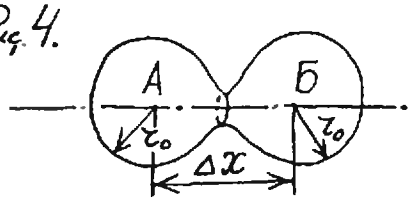
Для одной капли сферическая

форма в состоянии невесомости является энергетически наиболее выгодной. Для двух же или нескольких лежащих рядом и касающихся друг друга капель выгоднее было бы слиться воедино — поверхность одного большого шара меньше, чем общая поверхность нескольких малых с той же полной массой (рассчитайте это самостоятельно), и следовательно, поверхностная энергия у одной большой капли меньше. Однако, взглянув вновь на светильник, вы убедитесь, что там все еще спокойно сосуществуют несколько почти сферических капель вещества А, и пока, кажется, они вовсе не собираются сливаться в одну. А ведь вы, наверное, не раз наблюдали, как ртутные или водяные капли на несмачиваемой поверхности сливаются почти мгновенно. От чего же зависит время слияния двух капель?

Над этим вопросом ученые задумывались довольно давно. Тем более, что он совсем не праздный, а, как оказалось, имеет огромное практическое значение. Так, он непосредственно связан с пониманием физических процессов, происходящих в порошковой металлургии, где спрессованные металлические зерна «спекают» в вещества, обладающие уникальными свойствами. В 1944 году замечательный советский физик Я. И. Френкель предложил простейшую модель такого процесса, в результате чего появилась его пионерская работа, заложившая физические основы порошковой металлургии. Идея, лежащая в основе этой работы, позволит нам оценить время слияния.

Пусть две одинаковые жидкие капли начинают соприкасаться. В месте касания образуется перешеек (рис. 4),

Рис. 4.



который постепенно, по мере слияния капель, растет. Для оценки времени слияния τ проще всего воспользоваться энергетическими соображениями. Всего в «активе» у системы двух капель имеется энергия $\Delta E_п$, равная разности поверхностных энергий начального и конечного состояний (то есть двух отдельных капель радиуса r_0 и одной «общей» радиуса r): $\Delta E_п = 8\pi\sigma r_0^2 - 4\pi\sigma r^2$. Так как при слиянии капель их полный объем не меняется, то $\frac{4}{3}\pi r^3 = 2 \cdot \frac{4}{3}\pi r_0^3$, откуда $r = r_0 2^{1/3}$. Таким образом, $\Delta E_п = 4\pi\sigma(2 - 2^{2/3})r_0^2$. Согласно идее Френкеля, этот избыток энергии должен быть израсходован на работу против сил вязкого трения, возникающих в процессе перемещения вещества капель и окружающей среды при их слиянии. Оценку этой работы мы проведем по порядку величины. Для силы вязкого трения мы воспользуемся выражением Стокса, справедливым для случая шара радиуса R, движущегося со скоростью v в жидкости с вязкостью η: $F = 6\pi\eta R v$. Будем считать, что вязкость $\eta_А$ вещества, из которого состоят капли, гораздо больше вязкости окружающей среды, поэтому в формулу Стокса подставим именно $\eta_А$. Далее, вместо R подставим r_0. Эта же величина характеризует и масштаб перемещения массы жидкости при слиянии капель: $\Delta x \sim r_0$. Таким образом, для работы сил вязкого трения находим:

$$\Delta A \sim 6\pi\eta_А r_0^2 v.$$

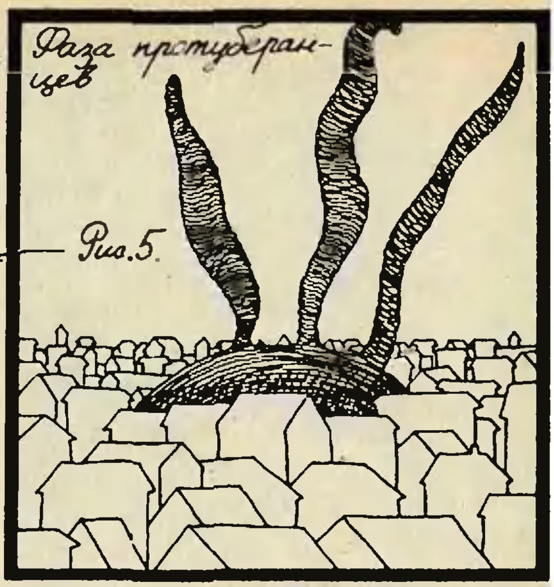
Видно, что чем быстрее капли сливаются, тем больше энергии на это требуется (из-за возрастания сил вязкого трения). Но запас энергии у нас ограничен: $\Delta E_п = 4\pi\sigma(2 - 2^{2/3})r_0^2$. Этим и определяется искомое время слияния капель $\tau_Ф$ (так называемое френкелевское время слияния). Оценивая скорость процесса как $v \sim (r_0/\tau_Ф)$, находим:

$$\Delta A \sim 6\pi\eta_А r_0^3/\tau_Ф \sim 4\pi\sigma(2 - 2^{2/3})r_0^2,$$

откуда

$$\tau_Ф \sim (r_0\eta/\sigma).$$

Для капель воды с $r_0 \sim 1$ см, $\sigma \sim 0{,}1$ Н/м и $\eta \sim 10^{-3}$ кг/(м · с) это время составляет всего лишь 10^{-4} с. Однако для значительно более вязкого глицерина (при 20 °С $\sigma_{гл} \sim 0{,}01$ Н/м, а $\eta \sim 1$ кг/(м · с)) соответствующее время $\tau_Ф$ составит уже ~ 1 с. Для различных жидкостей, в зависимости от их вязкости и поверхностного натяжения, $\tau_Ф$ может меняться в весьма широких пределах.



Важно, что благодаря сильной зависимости вязкости от температуры это время может существенно меняться и для одной и той же жидкости. Так, вязкость глицерина при изменении температуры от 20 °С до 30 °С уменьшается в 2,5 раза. Поверхностное натяжение от температуры зависит гораздо слабее (в указанном диапазоне температур $\sigma_{гл}$ уменьшается всего лишь на несколько процентов). Поэтому можно считать, что зависимость френкелевского времени слияния от температуры определяется именно температурной зависимостью вязкости.

Вернемся теперь к шарам, лежащим на дне светильника. Пока температура жидкости Б не высока, вязкость аморфного вещества А большая. Теперь понятно, что именно по этой причине шары и не сливаются. Точно так же не сольются два восковых шарика, если их при комнатной температуре привести в соприкосновение или даже сдавить. Однако стоит их подогреть, как вязкость воска резко уменьшится, и жидкие шары сольются довольно быстро. Отметим и важную роль состояния поверхности шаров: если она неровная и сильно загрязнена, то перемычке между шарами образоваться трудно.

Слияние капель необходимо для дальнейшего функционирования светильника, и в его конструкции предусмотрен специальный механизм «перелива» вещества А из отдельных капель в уже расплавившуюся основную массу. Это — упоминавшаяся выше металлическая пружина, идущая по периметру дна светильника. Она хорошо разогрета, и при соприкосновении с ней капли вещества А прогреваются, вязкость их падает и они «охотно» втекают в основную массу.

Итак, на дне сосуда образовалась единая жидкая масса вещества А. Однако, благодаря продолжающемуся нагреву, спокойной она оставаться не может. Начинается фаза протуберанцев.

Оторвавшийся от поверхности протуберанец под действием выталкивающей силы медленно уходит вверх (рис. 5), постепенно принимая форму шара. Поднявшись в верхнюю часть светильника, где жидкость Б из-за своей низкой теплопроводности до сих пор не прогрелась, этот шар несколько охлаждается (оставаясь все же жидким) и медленно опускается вниз, на вздувающуюся поверхность. Однако, как мы уже выяснили, влиться в нее ему не так-то просто, и он довольно долго подпрыгивает на ней, постепенно скатываясь к периферии; здесь пружинка «вскрывает» его поверхность, и бывший протуберанец завершает свое путешествие, возвратившись в породившую его стихию.

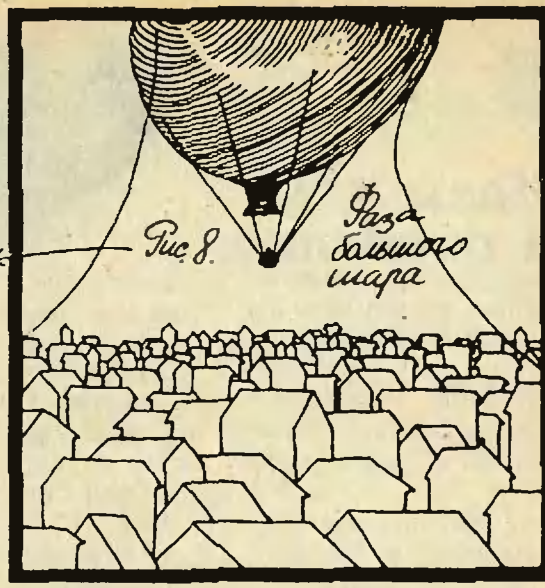
Лампочка в основании цилиндра продолжает греть систему, и процесс рождения протуберанцев продолжается. По мере повышения температуры темп его нарастает. Отрываясь от поверхности, протуберанцы оставля-

ют висеть «между небом и землей» одинокие капли, которые никак не решат — то ли им устремиться вдогонку, то ли вернуться в родную стихию. И вот уже в цилиндре одновременно находится до десятка жидких шаров, одни из которых поднимаются вверх, другие опускаются вниз (рис. 6) — начинается фаза столкновений и катастроф. Именно эта, наиболее длительная и зрелищная фаза, рассматривается создателями как рабочий режим светильника.

Шары в светильнике сталкиваются, меняют направление своего движения, но вам не удастся наблюдать их слияние в процессе такого соударения. Как мы уже выяснили, шарам выгоднее (с энергетической точки зрения) слиться воедино. Но на это нужно время. Понятно, что время, которое им «отпущено»,— это время соударения t. Если $\tau_ф$ больше t — шары не успеют слиться и разойдутся. Чем же определяется время соударения? В светильнике в основном происходят ко-

сые удары (рис. 7), при которых размягченные шары, легко деформируясь, скользят один по другому. В этом случае характерное время соударения $t \sim (r_0/v)$. Скорость шаров в светильнике всего несколько сантиметров в секунду, радиусы шаров — несколько сантиметров. Так что $t \sim 1$ с, и за такое время шары слиться не успевают. Вот и приходится им «бродить» в светильнике, на время залегая на дне, повисая вверху, сталкиваясь, но не сливаясь.

Фаза столкновений и катастроф длится очень долго, 5—7 часов. По прошествии этого времени инструкция рекомендует выключить светильник. Однако при определенных (достаточно высоких) температурах окружающего воздуха эта фаза может оказаться не последней. После того как в светильнике устанавливается стационарное распределение температуры по высоте (вся жидкость Б окончательно прогревается), плотности веществ А и Б практически сравниваются. Все вещество А собирается в один большой шар, который зависает у дна, оголив светофильтр. Со временем этот шар, из-за касания со стенками цилиндра, несколько остывает, его плотность немного увеличивается и он медленно опускается на дно. Коснувшись дна, шар получает дополнительную порцию тепла и возвращается на прежнее место. Здесь он замирает до тех пор, пока снова не остынет, после чего описанный процесс повторяется. Эту, не предусмотренную инструкцией, фазу можно назвать фазой большого шара (рис. 8).



Давайте теперь, разобравшись во многих деталях поведения светильника, взглянем на это явление в целом. Напрашивается вопрос: почему вообще возникают эти непрерывно сменяющие друг друга, повторяющиеся процессы рождения, столкновений и гибели шаров? Понятно, что вся «движущая сила» процесса заключена в разности температур между верхним и нижним концами лампы («нагревателем» и «холодильником»). Если предположить, что поток тепла распространяется благодаря теплопроводности жидкости Б, то ее температура будет просто плавно меняться по высоте и ничего необычного в системе происходить не будет. Появление шаров, так же как и конвекция, является следствием неустойчивостей, возникающих при определенных условиях в системах, в которых из-за разности температур на границах распространяются потоки тепла.*) Отысканием общих закономерностей таких явлений занимается новая, бурно развивающаяся наука — синергетика.

*) Рассмотрению подобных вопросов посвящена статья «Конвекция и самоорганизующиеся структуры», опубликованная в «Кванте» № 9 за 1985 год.

Намагниченный атомарный водород

(Начало см. на с. 8)

эксперименты с атомарным водородом, была $T \approx 0{,}2$ К. При этой температуре было достигнуто давление атомарного водорода лишь $p=4$ Па. Но для очень холодного газа это огромная величина. В самом деле, при столь низкой температуре ^{4}He имеет пренебрежимо малое давление $p_{н.п.} \approx 10^{-14}$ Па, да и наиболее летучий ^{3}He уже практически весь вымерз и дает всего лишь $p_{н.п.} \approx 0{,}001$ Па.

Итак, экспериментальная физика достигла большого успеха. Получено новое вещество — газ, создающий сравнительно высокое давление при очень низких температурах. Это вещество получило обозначение H↓, где стрелка у символа водорода напоминает, что атомы находятся в сильном магнитном поле и их магнитные моменты направлены вдоль поля. Вещество полностью намагничено. Сравнение цифр для давления показывает, что намагниченный атомарный водород H↓ — самое летучее вещество в природе. Теория предсказывает, что при не очень больших давлениях H↓ останется газом вплоть до абсолютного нуля. Лишь при давлениях в несколько десятков атмосфер он может сконденсироваться. Так ли это, покажут будущие эксперименты.

Ионы в растворах

Е. Э. КОЛОМЕЙЦЕВ

Я в течение всей моей жизни не забуду, когда я впервые узнал имя Сванте Аррениуса. Это было в июне 1884 года, когда мне попала в руки его работа. Было слишком трудно ее сразу одолеть, и я провел лихорадочную ночь со скверными снами. То, что было написано в работе, настолько отличалось от привычного и известного, что я сначала был склонен все в целом принять за бессмыслицу.

В. Оствальд

Слова, приведенные в эпиграфе, относятся к одной из первых работ по электролитической диссоциации известного шведского физико-химика С. Аррениуса. Несколько позже за создание теории этого явления Аррениус был удостоен Нобелевской премии.

Под электролитической диссоциацией понимают распад молекул растворяемого вещества на положительные и отрицательные ионы под влиянием электрического поля молекул растворителя. Растворы, в которых такой процесс произошел и потому они способны проводить электрический ток, называют электролитами.

На рисунке 1 изображен простейший прибор, с помощью которого можно определить, является данный раствор электролитом или нет. Прибор состоит из батарейки, лампочки для карманного фонаря и двух электродов, например графитовых стержней. Если при опускании электродов в раствор лампочка загорается, значит, исследуемый раствор — электролит.

О п ы т 1. Приготовим растворы

Автор этой статьи Евгений Коломейцев — ученик 10 класса московской средней школы.

поваренной соли, сахара, уксуса и соды в воде. Исследуем каждый из них на проводимость электрического тока. Мы увидим, что растворы соли и соды хорошо проводят ток, уксус проводит гораздо хуже, а раствор сахара совсем не проводит электрический ток.

Теперь повторим один из опытов Аррениуса по электропроводности растворов. Для этого нам понадобится уксусная эссенция (Осторожно! Берегитесь ожога!) и прибор, с которым мы проводили предыдущий опыт. Только вместо одной батарейки лучше взять две, соединенные последовательно.

Опыт 2. Нальем в стакан немного уксусной эссенции и замкнем цепь. Лампочка не горит. Теперь будем наливать в стакан воду, одновременно следя за лампочкой. Мы увидим, что в какой-то момент лампочка загорится и затем будет светиться все ярче и ярче. Наблюдая это явление, Аррениус пришел к выводу, что молекулы воды «разрывают» молекулы растворенного вещества на ионы, и чем больше первых (то есть чем разбавленней раствор), тем больше носителей электричества появляется в растворе.

Говоря о ионах, мы должны хорошо представлять их поведение в растворах. Попробуем, например, установить на опыте скорость перемещения ионов.

Опыт 3. Возьмем блюдце или мелкую тарелку. Положим на дно промокашку, смоченную в растворе поваренной соли, и поверх промокашки насыплем кристаллики марганцовокислого калия. На противоположных концах укрепим два графитовых электрода и подключим их к источнику (к двум батарейкам, соединенным последовательно). Кристаллики начнут растворяться, и мы увидим, что в сторону положительного электрода потянутся малиновые язычки. Измерив скорость их передвижения, что нетрудно сделать с помощью часов и линейки, можно оценить скорость перемещения ионов в растворе. Понятно, что она будет зависеть от многих факторов, и прежде всего — от напряжения источника. Для сравнения приведем несколько значений средней скорости движения ионов под действием электрического поля, напряженность которого равна единице (такую скорость называют подвижностью ионов):

ионы	подвижность (в $м^2/(В \cdot с)$)
H^+	$32 \cdot 10^{-8}$
Na^+	$4{,}5 \cdot 10^{-8}$
Cl^-	$6{,}5 \cdot 10^{-8}$
NO_3^-	$6{,}4 \cdot 10^{-8}$

Скорость ионов зависит также от температуры и от концентрации раствора. Попробуйте убедиться в этом самостоятельно.

Действие электрического тока не проходит для электролита бесследно. Оно вызывает необратимые химические изменения в нем.

Опыт 4. Приготовим раствор поваренной соли, добавим в него несколько капель фенолфталеина и опустим концы электродов, соединенных с полюсами батарейки. Через некоторое время у отрицательного электрода раствор окрасится в малиновый цвет. Это свидетельствует о том, что в растворе появилась щелочь, то есть произошла химическая реакция.

Действительно, при замыкании цепи положительные ионы натрия Na^+ начали двигаться к катоду, а отрицательные ионы хлора Cl^- — к аноду. На катоде происходит реакция восстановления натрия

$$Na^+ + e^- = Na_0,$$

который тут же реагирует с водой, в результате чего и образуется щелочь:

$$2Na + 2H_2O = 2NaOH + H_2\uparrow.$$

На аноде в это время происходит другой процесс — образование газообразного хлора:

$$2Cl^- - 2e^- = Cl_2\uparrow.$$

Вот почему этот опыт надо проводить в хорошо проветриваемом помещении

Рис. 1.

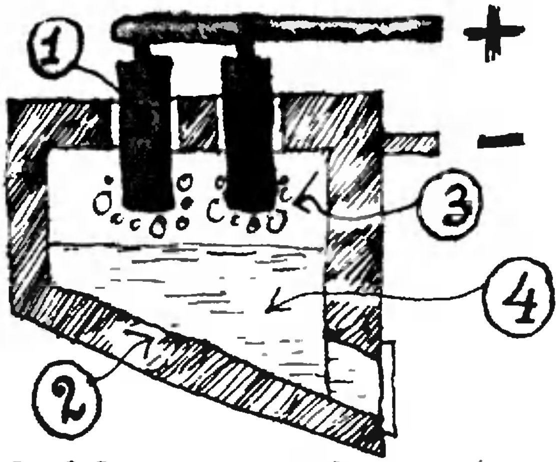


Рис. 2. Схема промышленной установки (электролизера) для получения чистого алюминия: 1 — графитовый анод, 2 — железный с графитовой обкладкой катод, 3 — расплав оксида алюминия и криолита, 4 — чистый алюминий.

и стараться закончить его как можно быстрее.

Итак, при прохождении электрического тока через электролиты (их называют также проводниками второго рода, в отличие от проводников первого рода, например металлов, в которых носителями тока являются свободные электроны) в них происходят химические превращения. В результате вещества, входящие в состав электролита, могут выделяться в свободном виде. Такое явление называют электролизом.

Электролиз находит большое практическое применение. Прежде всего — для получения чистых металлов. Так, например, можно получать магний, натрий, алюминий. В настоящее время весь промышленный алюминий получают в специальных установках — электролизерах (рис. 2) — электролизом расплава смеси оксида алюминия (Al_2O_3) и криолита (Na_3AlF_6). При этом на катоде происходит следующая реакция:

$$Al^{3+} + 3e^- = Al^0.$$

Понятно, что алюминий мы получать не будем, но немного меди получить попробуем.

Опыт 5. Приготовим концентрированный раствор сульфата меди ($CuSO_4$) и опустим в него два графитовых электрода, подключенных к полюсам батарейки. Через некоторое время на катоде появится красный налет меди:

$$Cu^{2+} + 2e^- = Cu^0.$$

Давайте станем на несколько минут алхимиками и попробуем один металл «превратить» в другой. Для этого повторим предыдущий опыт, только вместо отрицательного электрода опустим в раствор алюминиевую пуговицу (например, от школьной формы). В процессе электролиза вместо алюминиевой «получится» медная пуговица.

Покрытие предметов слоем металла при помощи электролиза называется гальваностегией. Металлизовать можно не только металлические предметы, но и предметы из дерева, ткани. При достаточной аккуратности вы сможете изготовить изделие, не уступающее по красоте ювелирному. Так, например, можно покрыть слоем меди листья растений, кружева, мертвых насекомых. Для того чтобы сделать их жесткими, надо подержать их несколько минут в расплавленном воске. Затем равномерно покрыть слоем графита, чтобы сделать их проводящими, и опустить в гальваническую ванну.

Теперь займемся другой, не менее интересной работой — изготовлением гальванопластических копий. В качестве оригинала можно взять какое-нибудь рельефное изображение, например из гипса, или изготовить его самим из парафина. Чтобы получить медную копию, надо сначала тщательно натереть поверхность оригинала графитовым порошком, а потом обмотать его тонкой медной проволокой так, чтобы она касалась графитового слоя. Проволоку нужно присоединить к отрицательному полюсу батарейки и заготовленную форму погрузить в 20-процентный раствор медного купороса. Дальше процесс происходит так же, как и при получении медного покрытия. Когда толщина слоя меди достигнет 1—2 миллиметров, форму из раствора следует вынуть и осторожно отделить от нее металлическую копию.

Способ электролитического получения металлических копий открыл русский ученый Б. С. Якоби. Гальванопластика сразу же нашла широкое практическое применение. В частности — в полиграфической промышленности, что позволило значительно повысить качество печати текста и иллюстраций. Сам Якоби много сделал для внедрения гальванопластики в типографское и монетное дело, а также для производства художественных изделий. И в настоящее время области применения гальванопластики в технике обширны и разнообразны.

Об одном способе задания окружности

И. Б. ТАБОВ (НРБ)

Как известно, окружность определяется как геометрическое место точек, одинаково удаленных от фиксированной точки O. Но существует и много других способов задания окружности. Мы рассмотрим здесь один из них.

Пусть P — точка, l — исходящий из нее луч. Отметим на луче m, также исходящем из точки P и образующем с лучом l острый или прямой угол φ, точку M, находящуюся от P на расстоянии $a \cos \varphi$, где a — фиксированное положительное число (рис. 1).

Теорема. *При изменении угла φ в промежутке от $-\pi/2$ до $\pi/2$ точки M составляют окружность диаметра a, проходящую через точку P и симметричную относительно луча l.*

(Со знаком «плюс» мы откладываем углы в направлении против часовой стрелки, со знаком «минус» — в направлении по часовой стрелке.)

Доказательство. Пусть R — точка нашей окружности, диаметрально противоположная точке P, и пусть M — произвольная точка нашей окружности (рис. 2). Тогда $\angle PMR=\pi/2$, и значит,

$$PM=PR \cdot \cos(\angle MPR)=a \cos \varphi.$$

(Случаи $M=R$ ($\varphi=0$) и $M=P$ ($\varphi=\pm\pi/2$) требуют, строго говоря, отдельного рассмотрения, которое мы оставляем читателю.) Таким образом, все точки окружности принадлежат нашему геометрическому месту, а так как окружность пересекает каждый луч m, то никаких других точек рассматриваемое геометрическое место не содержит. Теорема доказана.

Заметим, что если в описании геометрического места выражение $a \cos \varphi$ заменить выражением $a \cos(\varphi+\delta)$ (и, конечно, условие, что угол φ — острый или прямой, заменить условием, что $\cos(\varphi+\delta) \geqslant 0$), мы получим окружность диаметра a, проходящую через точку P и симметричную относительно луча, составляющего с l угол δ (рис. 3).

Наконец, если вместо выражения $a \cos \varphi$ написать выражение $a \sin \varphi$ (и условие $\sin \varphi \geqslant 0$), то мы получим окружность диаметра a, касающуюся луча l в точке P (рис. 4).

Продемонстрируем полезность нашего наблюдения на решении одной нестандартной задачи.

Задача 1. *Дан равнобедренный прямоугольный треугольник $A_0A_1A_2$ с прямым углом при вершине A_0. Для произвольной точки C на описанной вокруг треугольника $A_0A_1A_2$ окружности отметим на луче A_0C такую точку M, что*

$$A_0M=A_1C+A_2C-A_0C.$$

Найдите геометрическое место точек M.

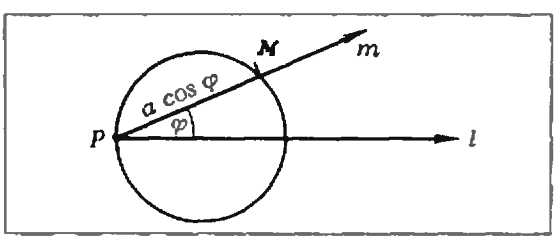


Рис. 1.

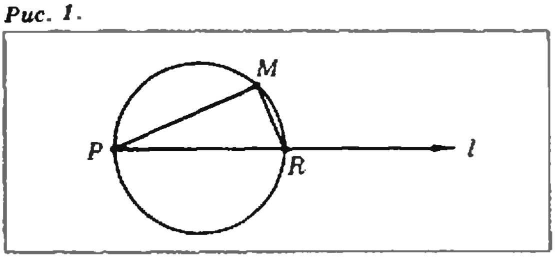


Рис. 2.

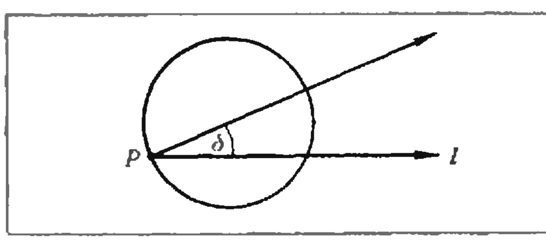


Рис. 3.

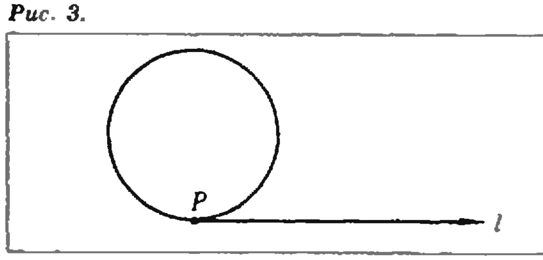


Рис. 4.

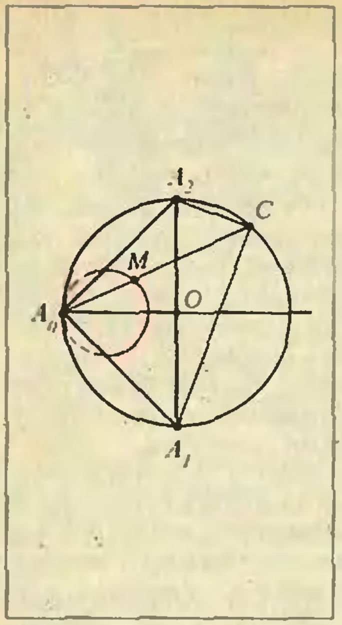


Рис. 5.

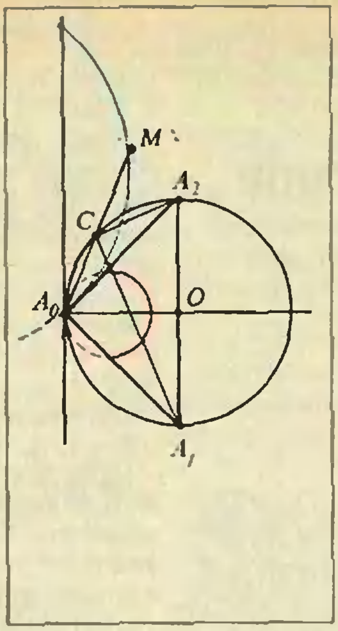


Рис. 6.

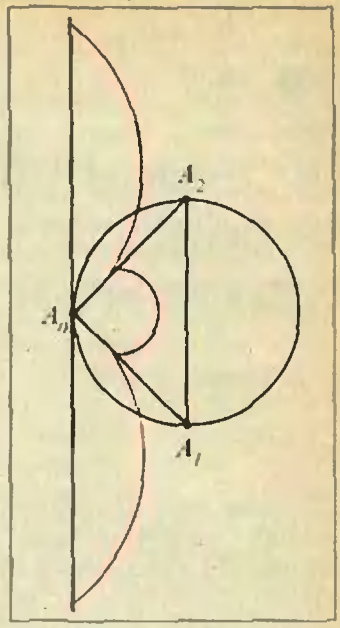


Рис. 7.

Решение. Примем диаметр нашей окружности за 1 и обозначим через φ угол CA_0O, где O — центр окружности. Тогда, очевидно (рис. 5),

$$A_0C=\cos\varphi,$$
$$A_1C=|\sin(\varphi+\pi/4)|,$$
$$A_2C=|\sin(\varphi-\pi/4)|.$$

Рассмотрим три случая.

1. $-\pi/4\leqslant\varphi\leqslant\pi/4$. Тогда

$$A_0M=\sin(\varphi+\pi/4)-\sin(\varphi-\pi/4)-\cos\varphi=\sqrt{2}\cos\varphi-\cos\varphi=(\sqrt{2}-1)\cos\varphi.$$

Таким образом, соответствующая часть геометрического места будет *дугой окружности диаметра* $\sqrt{2}-1$, *проходящей через точку* A_0 *и симметричной относительно луча* A_0O (рис. 5). Поскольку угол φ пробегает промежуток $[-\pi/4;\ \pi/4]$ длин $\pi/2$ (а не π, как выше), мы получаем, что эта дуга равна полуокружности диаметра $\sqrt{2}-1$ (на рисунке 5 она выделена красным цветом).

2. $\pi/4<\varphi<\pi/2$. Тогда

$$A_0M=\sin(\varphi+\pi/4)+\sin(\varphi-\pi/4)-\cos\varphi=\sqrt{2}\sin\varphi-\cos\varphi=\sqrt{3}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\sin\varphi-\sqrt{\frac{1}{3}}\cos\varphi\right)=\sqrt{3}\cos(\varphi+\delta),$$

где $\delta=\arccos\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$. Таким образом, соответствующая этим значениям φ часть геометрического места будет *дугой окружности диаметра* $\sqrt{3}$, *проходящей через точку* A_0 *и симметричной относительно луча, проходящего через* A_0 *и образующего с лучом* A_0O *указанный угол* δ. Впрочем, для построения этой окружности можно этот угол и не вычерчивать: достаточно заметить, что нужная нам окружность проходит через ту же точку луча A_0A_2, что и предыдущая окружность (рис. 6). Поскольку в данном случае длина промежутка изменения φ равна $\pi/4$, нужная нам дуга составляет четверть вышеупомянутой окружности диаметра $\sqrt{3}$ (мы показали ее на рисунке 6 синим цветом), причем точка этой окружности, соответствующая значению $\varphi=\pi/2$, нашему геометрическому месту не принадлежит.

3. $-\pi/2<\varphi<-\pi/4$. Этот случай симметричен случаю 2, и ответ симметричен предыдущему ответу относительно луча A_0O.

Окончательный ответ к задаче 1 изображен на рисунке 7.

Задача 2. Дан многоугольник $A_0A_1A_2\ldots$ $\ldots A_n$, вписанный в окружность c. Для произвольной точки C окружности c отметим на луче A_0C такую точку M, что

$$A_0M=|x_0\cdot A_0C+x_1\cdot A_1C+\ldots+x_n\cdot A_nC|,$$

где $x_0, x_1, \ldots, x_n$ — некоторые числа.

Найдите множество, которое описывает точка M, когда C пробегает окружность c.

Задача 3 (это — задача М853 из «Задачника «Кванта», см. «Квант», 1984, № 3). Квадрат $ABCD$ вращается вокруг своего неподвижного центра. Найдите множество, которое описывает середина отрезка PQ, где P — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на неподвижную прямую l, а Q — середина стороны AB.

Квант для младших школьников

Задачи

1. Решите в целых числах уравнение

$$xy+3x-5y=-3.$$

2. Все точки некоторой окружности произвольным образом окрашены в два цвета. Докажите, что найдется равнобедренный треугольник с одноцветными вершинами, вписанный в эту окружность.

3. К сумме цифр двузначного числа A прибавили квадрат этой суммы и получили число A. Найдите, чему равно A.

4. Пусть CM — медиана треугольника ABC. Известно, что $\angle CAB+\angle MCB=90°$. Докажите, что треугольник ABC — прямоугольный или равнобедренный.

5. На окружности радиуса 10 расположены несколько непересекающихся дуг общей длины 32. Докажите, что для любой прямой найдется хорда окружности, параллельная этой прямой, концы которой принадлежат двум таким дугам.

Эти задачи нам предложили *А. П. Савин* и болгарские авторы *К. Коларов, И. Тонов, С. Савчев, И. Проданов.*

Морская кадриль

① Если морская кадриль — это что-то вроде: „Под-Котик к подставил под ножку подушку; Под-Котик подбросил Под-Кошку-подружку, Под-Мышку, подложку, подкову, поднос Под-Котик Под-Кошке в подарок поднёс", то на что она больше похожа — на морское танго или морской вальс? И вообще, от какого из этих танцев бегут самые сильные волны?

② Обязательно ли идентичные симметрии состояния Под-Котика при застрявшей в горле кости и при удушении рыданиями требуют аналогичного способа выхода из него — битья по спине?

Под-Котик глубоко вздохнул и вытер глаза. Он, видно хотел что-то сказать, но его душили рыдания. — Ну, прямо словно кость у него в горле застряла,— сказал Грифон. И принялся трясти Под-Котика и бить его по спине. Наконец Под-Котик заговорил: — Ты, должно быть, никогда не видала живого омара... — За-то я его пробова...—начала Алиса, но спохватилась и покачала головой. — Нет, не видала.— Значит, ты не имеешь понятия, что такое морская кадриль с омарами.— Нет, не имею,— вздохнула Алиса.— А что это за танец? — Прежде всего,— начал Грифон,— все выстраиваются в ряд на морском берегу...— В два ряда! — закричал Под-Котик.— Тюлени, лососи, морские черепахи и все остальные. И как только очистишь берег от медуз... — А это не так-то просто,— вставил Грифон.— Делаешь сначала два шага вперед...— продолжал Под-Котик.— Взяв подручку омара! — закричал Грифон.— Конечно,— подтвердил Под-Котик.— Делаешь два прохода вперед, кидаешься на партнеров...— Меняешь омаров и возвращаешься назад тем же порядком,— закончил Грифон.— А потом,— продолжал Под-Котик,— швыряешь...— Омаров! — крикнул Грифон. — Подальше в море...— Плывешь за ними! — завопил Грифон. — Кувыркаешься разок в море! — воскликнул Под-Котик и прошелся колесом по песку. Вот и вся первая фигура,— сказал Под-Котик внезапно упавшим голосом. Это, должно быть, очень красивый танец,— заметила Алиса.— Вставай,— приказал Грифону Под-Котик.— Покажем ей первую фигуру.— И они заплясали. Под-Котик затянул грустную песню про треску.— Большое спасибо,— сказала Алиса.— Очень интересно было посмотреть.

— Кстати, о треске,— заметил Под-Котик.— Ты ее видала?

— Да,— сказала Алиса.— Она иногда бывала у нас на обед.— Ты, видно, хочешь сказать, что она бывала у вас на обедах,— поправил Под-Котик Алису.— Ну, раз вы так часто встречались, ты, конечно знаешь, как она выглядит...

— Да,— сказала задумчиво Алиса.— Хвост во рту, и вся в сухарях.— Под-Котик широко зевнул и закрыл глаза.— Объясни ей про хвост,— сказал он Грифону.— Дело в том, — сказал Грифон,— что она очень любит танцевать с омарами. Вот они и швыряют ее в море. Вот она и летит далеко-далеко. Вот хвост у нее и застревает во рту,— да так крепко, что не вытащишь. Все.— Большое спасибо,— сказала Алиса.— Это очень интересно. Я всего этого и не подозревала.— Это что, — сказал Грифон.— Я такое могу про треску рассказать! Если хочешь, конечно... Знаешь, почему ее называют треской?

— Треску много,— сказал значительно Грифон. Алиса растерялась.

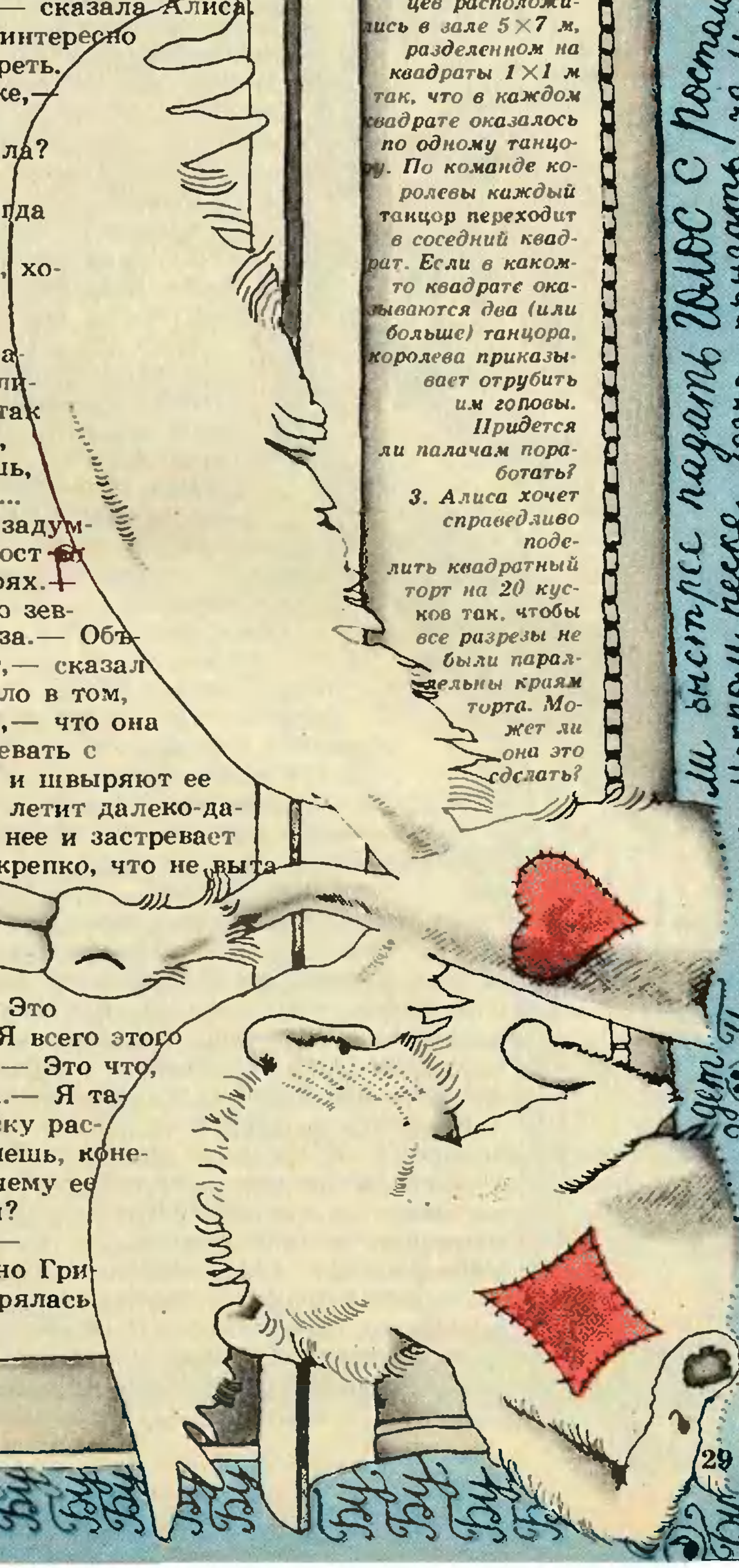
— Много треску?

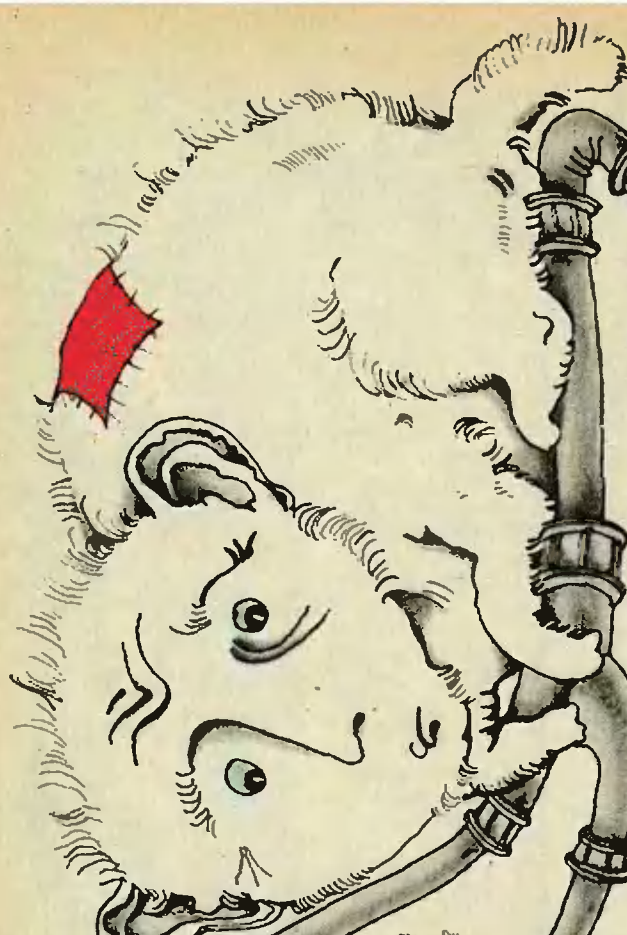
1. Отгадайте числовой ребус

ФОН²-ГРИФОН

2. Участники танцев расположились в зале 5×7 м, разделенном на квадраты 1×1 м так, что в каждом квадрате оказалось по одному танцору. По команде королевы каждый танцор переходит в соседний квадрат. Если в каком-то квадрате оказываются два (или больше) танцора, королева приказывает отрубить им головы. Придется ли палачам поработать?

3. Алиса хочет справедливо поделить квадратный торт на 20 кусков так, чтобы все разрезы не были параллельны краям торта. Может ли она это сделать?

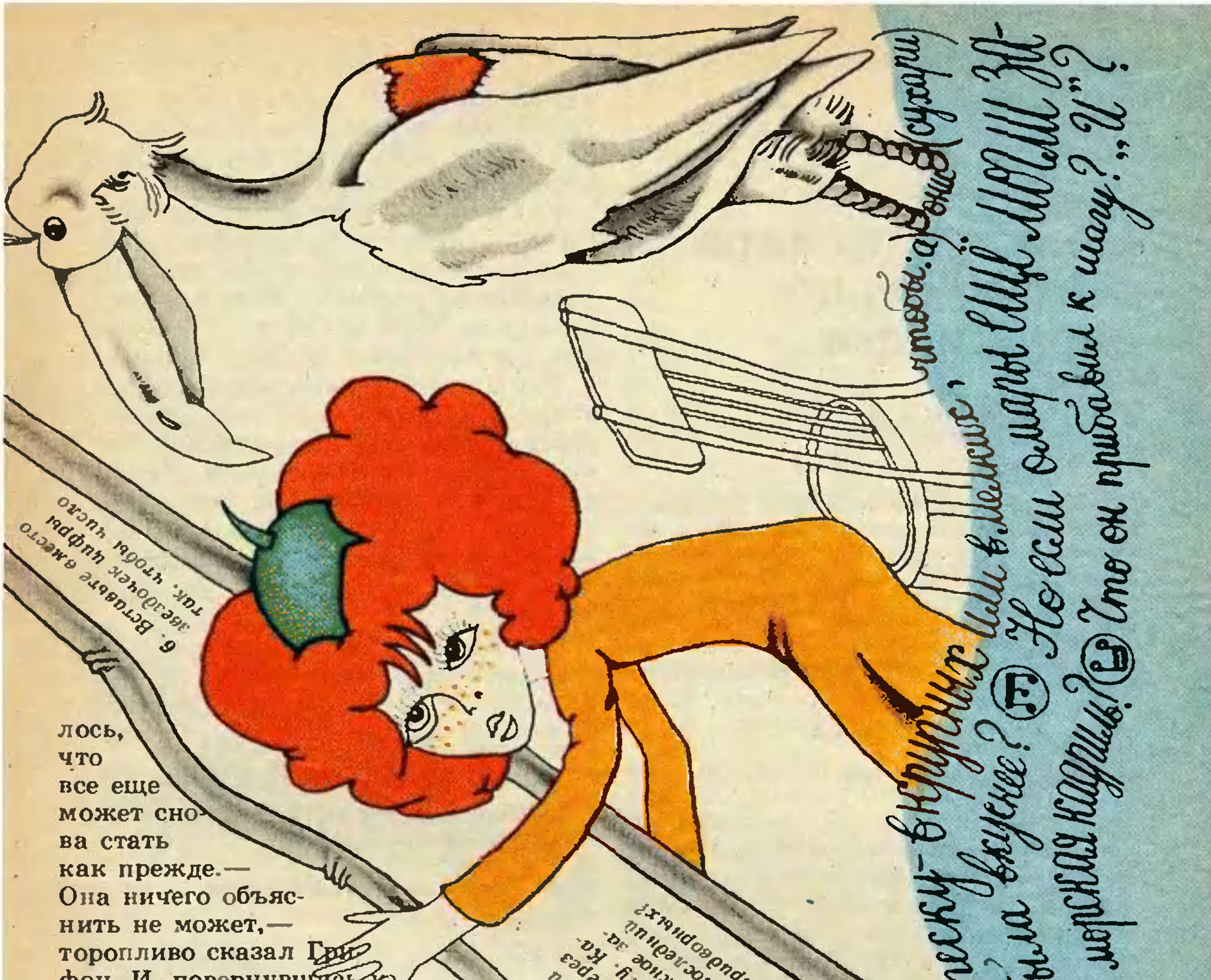




— переспросила она с недоумением.— Ну да,— подтвердил Грифон.— Рыба она так себе, толку от нее мало, а треску много. — Очень любит поговорить, — продолжал Грифон.— Другой такой трещотки не сыщешь! И друзей себе таких же подобрала. Ходит к ней один старичок Судачок. С утра до ночи судачит. А еще Щука забегает — так она всех щучит. Бывает и Сом — этот во всем сомневается... А как соберутся все вместе, такой подымут шум, что голова кругом идет.— Тут Под-Котик открыл глаза.— Ну, хватит об этом,— проговорил он.— Расскажи теперь ты про свои приключения.— Я с удовольствием расскажу все, что случилось со мной сегодня с утра,— сказала неуверенно Алиса.— А про вчера я рассказывать не буду, потому что тогда я была совсем другая.— Объясни, какая,— сказал Под-Котик.— Нет, сначала приключения,— нетерпеливо перебил его Грифон.— Объяснять очень долго.— И Алиса начала рассказывать все, что с нею случилось с той минуты, как она увидела Белого Кролика. Сначала ей было немножко не по себе: Грифон и Под-Котик придвинулись к ней так близко и так широко раскрыли глаза и рты. Но потом она осмелела. Грифон и Под-Котик молчали, пока она не дошла до встречи с Синей Гусеницей и попытки прочитать ей «Папу Вильяма». Тут Под-Котик глубоко вздохнул и сказал: — странно! — Страннее некуда! — подхватил Грифон.— Все слова не те,— задумчиво произнес Под-Котик. — Хорошо бы она нам что-нибудь почитала. Вели ей начать. И он посмотрел на Грифона, словно тот имел над Алисой власть.— Встань и читай «Это голос Лентяя»,— приказал Алисе Грифон. Она встала и начала читать. Но мысли ее были так заняты омарами и морскою кадрилью, что она и не знала, что говорит. Слова получились, действительно, странные. Это голос Омара. Вы слышите крик? — Вы меня разварили! Ах, где мой парик? И поправивши носом жилетку и бант, он идет на носочках, как лондонский франт. Если отмель пустынна и тихо кругом, он кричит, что акулы ему нипочем. Но лишь только вдали заприметит акул, он забьется в песок и кричит караул? — Совсем не похоже на то, что читал я в школе, — заметил Грифон — это ужасный вздор! — Алиса ничего не сказала; она села и закрыла лицо руками; ей уж и не [illegible]

*12*4* делилось на 72.*

4. Алиса однажды сказала Грифону: «Когда Под-Котику было столько, сколько нам с тобой вместе, то тебе было столько, сколько мне сейчас. А когда ему было столько, сколько тебе сейчас, то тебе тогда было...» Сколько лет тогда было Грифону?



лось, что все еще может снова стать как прежде.— Она ничего объяснить не может,— торопливо сказал Грифон. И, повернувшись к Алисе, прибавил: Читай дальше.— А почему он идет на носочках? — спросил Под-Котик. Объясни мне хоть это. — В балет готовится, должно быть,— сказала Алиса. Она и сама не понимала. Ей не хотелось больше об этом говорить.— Читай же,— торопил ее Грифон.— «Шел я садом однажды...» *Алиса не посмела ослушаться,* хоть и была уверена, что все опять получится не так, и дрожащим голосом продолжала: Шел я садом однажды и вдруг увидал, как делили коврижку Сова и Шакал. И коврижку Шакал проглотил целиком, а Сове только блюдечко дал с ободком. А потом предложил ей: «Закончим дележ — ты возьми себе ложку, я — вилку и нож». И, наевшись, улегся Шакал на траву, но сперва на десерт проглотил он...— Пожалуй, хватит, — сказал он к радости Алисы.— Хочешь мы еще станцуем? — продолжал Грифон.— Или пусть лучше Под-Котик споет тебе песню? — Пожалуйста, песню, если можно,— отвечала Алиса с таким жаром, что Грифон только пожал плечами. Под-Котик открыл было рот, но в эту минуту вдалеке послышалось: — Суд идет! — Побежали! — сказал Грифон, схватил Алису за руку и потащил за собой.— А кого судят? — спросила, задыхаясь, Алиса. Но Грифон только повторял: — Побежали, побежали! И он прибавил шагу.

Полюс и поляра относительно окружности

С. Ц. ХАРАЛАМПИЕВ (НРБ)

От редакции. В этой заметке рассказано об очень красивых задачах, решаемых с помощью понятий полюса и поляры относительно окружности. Болгарские школьники знакомы с этими понятиями, которые, однако, не входят в программы школ в СССР. Поэтому редакция предпослала заметке небольшое введение об основных свойствах полюса и поляры.

Введение: полюс, поляра и их свойства

Две точки P и Q называются *сопряженными* относительно окружности (k), если окружность с диаметром PQ ортогональна окружности (k) (рис. 1). Множество всех точек, сопряженных точке P относительно окружности $k(O;\ r)$, называется *полярой* точки P относительно (k). Далее мы зафиксируем окружность $k(O;\ r)$, и поэтому будем опускать слова «относительно (k)».

Свойство I (*построение поляры*). Поляра точки P является прямой; она может быть построена так, как показано на рисунке 2. Если прямая l служит полярой для точки P, говорят еще, что P является *полюсом* прямой l.

Свойство II (*построение полюса*). У любой прямой, не проходящей через центр окружности, имеется единственный полюс; он может быть построен так, как показано на рисунке 3.

Свойство III (*взаимность*). Поляра l_P любой точки P, принадлежащей поляре l_Q точки Q, проходит через Q.

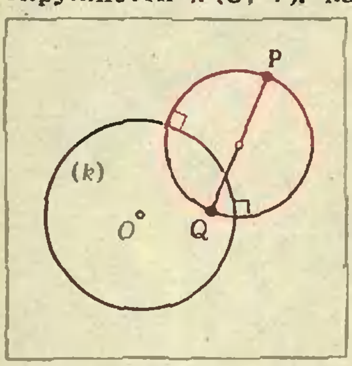
Свойство IV (*характеристическое свойство*). Для точек M поляры l_P точки P и только для них выполняется соотношение

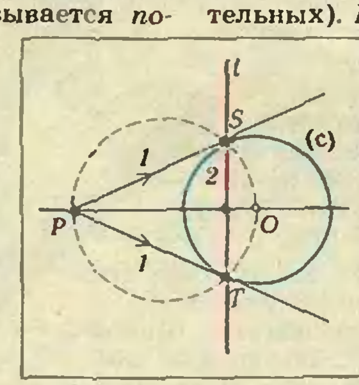
$$\boxed{OM^2-PM^2=2r^2-OP^2.} \qquad (1)$$

Доказательства этих свойств мы оставляем читателям.

Применения понятий полюса и поляры

Пример 1 (полярное свойство касательных). *Если из точки P проводить*





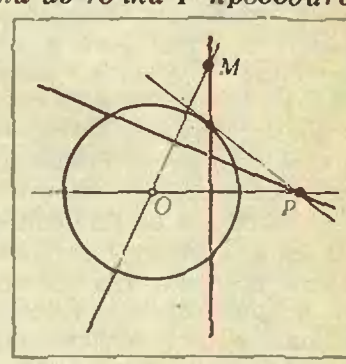


Рис. 3.

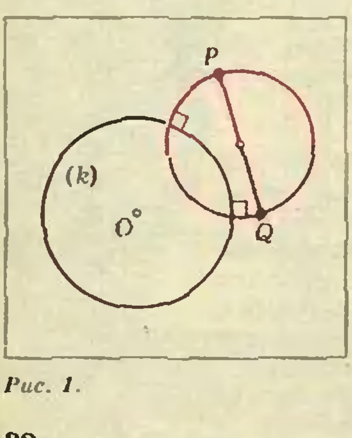


Рис. 1.

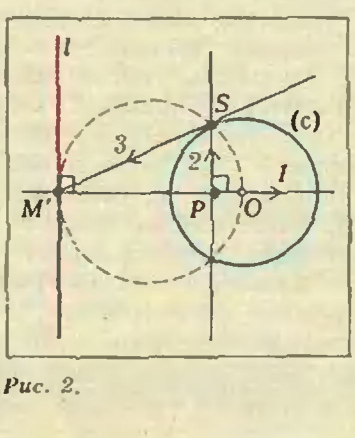


Рис. 2.

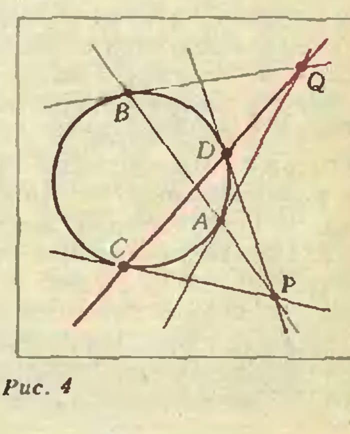


Рис. 4

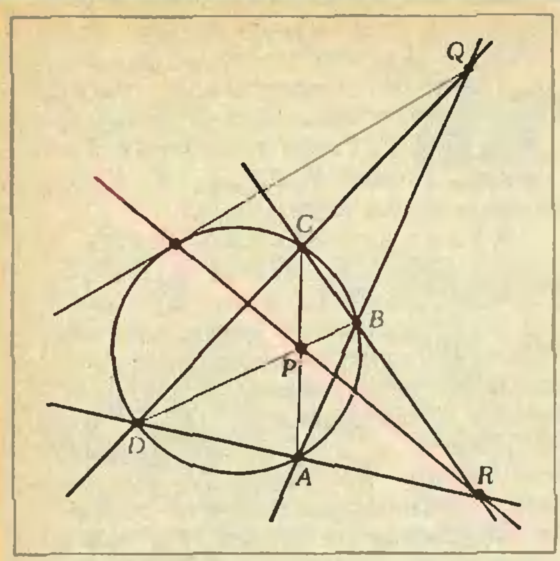


Рис. 5.

секущие окружности (k), *а через пары точек сечения строить касательные к окружности, то точки пересечения пар касательных все лежат на одной прямой.*

Доказательство. Покажем, что этой прямой будет поляра точки P относительно (k). Для этого проведем касательные PC и PD к окружности и соединим C и D: прямая CD и будет полярой P относительно (k) по свойству 1. Пусть PAB — секущая, Q — точка пересечения касательных к (k) в точках A и B (рис. 4; мы пока не знаем, что $Q \in CD$!). Прямая AB является (по тому же свойству) полярой Q относительно (k). Но P лежит на AB, значит (по свойству взаимности), Q лежит на CD.

Пример 2 (полярное свойство секущих). *Если из точки Q проводить пары секущих окружности (k), то точки пересечения диагоналей получающихся вписанных четырехугольников, так же, как точки пересечения противоположных сторон, все лежат на одной прямой.*

Доказательство. Покажем, что этой прямой будет поляра точки Q относительно (k) (рис. 5). Пусть $P=(AC)\cap(BD)$, $Q=(AB)\cap(CD)$, $R=(AD)\cap(BC)$. Мы докажем, что *поляры точек P, Q и R относительно (k) являются соответственно QR, PR и PQ*, откуда, в частности, следует и утверждение примера 2.

Около треугольников QBC, QAC и RAC опишем окружности (k_1), (k_2) и (k_3), пересекающие QR, QP и PR соответственно в точках M, N и S (рис. 6). Так как

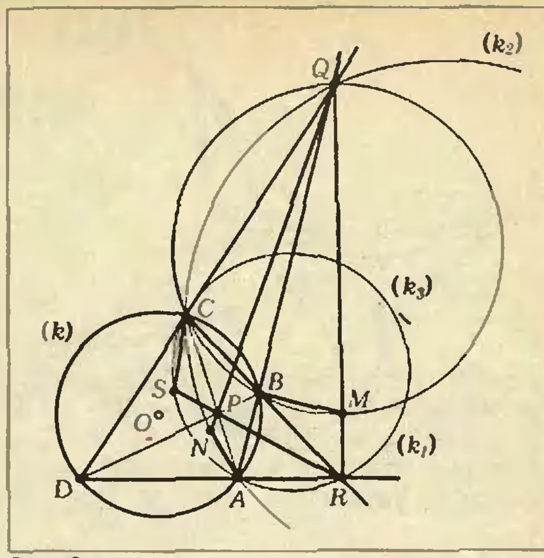


Рис. 6.

$\angle BMR=\angle BCQ=\angle BAD$, $\angle ANP=$
$=\angle ACQ=\angle PBQ$, $\angle RAP=\angle RSC$, (2)

четырехугольники $MBAR$, $NABP$ и $SCBP$ вписаны в окружности. Тогда по свойству секущей

$$QM\cdot QR=QB\cdot QA=OQ^2-r^2, \qquad (3)$$
$$RM\cdot QR=RB\cdot RC=OR^2-r^2, \qquad (3')$$
$$QN\cdot QP=QA\cdot QB=OQ^2-r^2, \qquad (4)$$
$$NP\cdot QP=AP\cdot PC=\quad r^2-OP^2, \qquad (4')$$
$$RS\cdot RP=RC\cdot RB=OR^2-r^2, \qquad (5)$$
$$PS\cdot RP=AP\cdot PC=\quad r^2-OP^2. \qquad (5')$$

Если неравенства (3) и (3′) сложить, из (4) вычесть (4′) и из (5) вычесть (5′), получим

$$RQ^2=OQ^2+OR^2-2r^2 \qquad (6)$$
$$PQ^2=OP^2+OQ^2-2r^2 \qquad (7)$$
$$PR^2=OP^2+OR^2-2r^2 \qquad (8)$$

Равенства (7) и (8), (6) и (7), (6) и (8) показывают, что точки

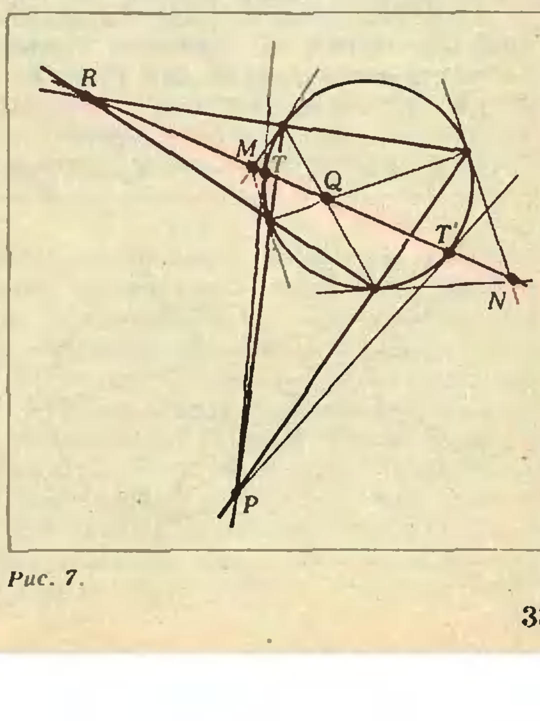


Рис. 7.

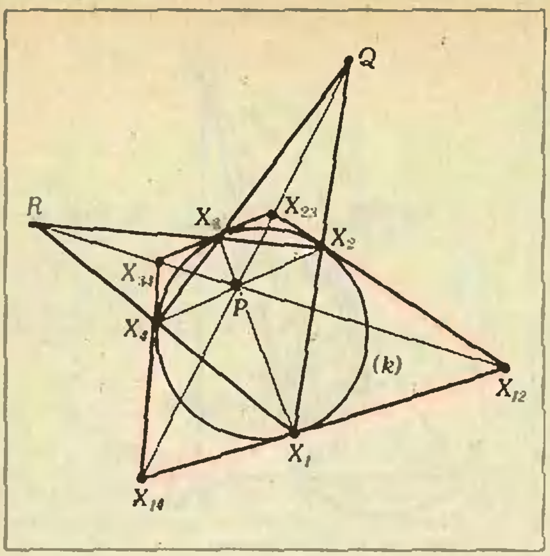


Рис. 8.

Q и R, P и R, P и Q лежат соответственно на полярах точек P, Q и R, что и утверждалось.

Своеобразным итогом разобранных примеров служит рисунок 7. На нем показано, сколько разных замечательных точек лежит на поляре: точки касания (T и T'), пересечение диагоналей (Q), противоположных сторон (R) и касательных (M, N).

Пример 3 (теорема Брюкара). *Пусть P, Q и R являются соответственно точками пересечения диагоналей и противоположных сторон вписанного в окружности $k(O;\ r)$ четырехугольника $ABCD$. Тогда ортоцентр треугольника PQR совпадает с центром O.*

Доказательство. Из предыдущей задачи следует, что точки $P=(AC)\cap(BD)$, $Q=(AB)\cap(CD)$ и $R=(AD)\cap(BC)$ относительно окружности (k) имеют в качестве поляр соответственно прямые QR, PR и PQ. Тогда $OP\perp QR$, $OQ\perp PR$, $OR\perp PQ$, то есть O является ортоцентром.

Пример 4. *Пусть $X_1X_2X_3X_4$ является четырехугольником, вписанным в окружность (k), а X_{ij} является точкой пересечения касательных (k) в точках X_i и X_j ($i\neq j$, i, $j=1, 2, 3, 4$). Тогда у диагоналей четырехугольников $X_1X_2X_3X_4$, $X_{12}X_{23}X_{34}X_{14}$ общая точка пересечения.*

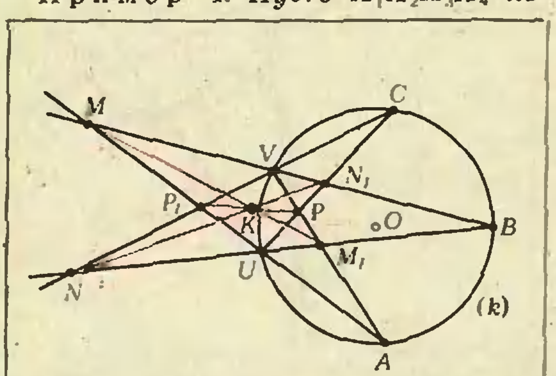


Рис. 9.

Доказательство. Пусть $P=(X_1X_3)\cap(X_2X_4)$, $Q=(X_1X_2)\cap(X_3X_4)$ и $R=(X_1X_4)\cap(X_2X_3)$ (рис. 8). Но X_1X_2 и X_3X_4 являются секущими окружности (k), проходящими через точку Q, поэтому точки пересечения X_{12} и X_{34} пар касательных к (k) в точках (X_1, X_2) и (X_3, X_4) будут находиться на поляре PR точки Q. По аналогии устанавливается, что точки X_{23} и X_{14} лежат на поляре PQ точки R, вследствие чего $(X_{14}X_{23})\cap(X_{12}X_{34})=(PR)\cap(PQ)=P$.

Пример 5. *На окружности даны пять точек: U, V, A, B, C. Построены три пары точек: $M=(UA)\cap(VB)$ и $M_1=(UB)\cap(VA)$, $N=(UB)\cap(VC)$ и $N_1=(UC)\cap(VB)$, $P=(UC)\cap(VA)$ и $P_1=(UA)\cap(VC)$. Тогда прямые MM_1, MN_1 и PP_1 имеют общую точку или параллельны* («Математика в школе», 1982, № 2, задача 2480).

Доказательство. Пусть $K=(MM_1)\cap(NN_1)$ и $K_1=(MM_1)\cap(PP_1)$. Четырехугольники $ABVU$ и $BCVU$ вписаны в (k) (рис. 9), поэтому поляра точки K проходит через точки пересечения пар прямых UV, AB и UV, BC, то есть поляра K является прямой UV. По аналогии четырехугольники $ABVU$ и $ACVU$ вписаны в (k), поэтому поляра точки K_1 проходит через точки пересечения пар прямых UV, AB и UV, AC, то есть поляра K_1 — это прямая UV. Точки K и K_1 имеют одну и ту же поляру, поэтому $K\equiv K_1$. Если прямые MM_1 и MN_1 параллельны (их точка пересечения K — «бесконечно удаленная» точка), то тогда UV — диаметр окружности (k), поэтому $PP_1\parallel MN_1$.

Задачи

1. Даны окружность (k) и прямая p. Построена окружность (k_1) с центром $O_1\in p$ и радиусом, равным длине касательной от O_1 к (k), пересекающая (k) в точках P и Q. Докажите, что когда O_1 описывает p, хорды PQ параллельны или проходят через постоянную точку.

2. Окружности $k_1(O_1;\ r_1)$ и $k_2(O_2;\ r_2)$ пересекаются в точках A и B так, что $\angle O_1AO_2=\angle O_1BO_2=90°$. Построена окружность с центром $O\in AB$ и радиусом, равным отрезку касательной от O к одной из окружностей (k_1) и (k_2), пересекающая (k_1) и (k_2) соответственно в точках P_1, Q_1 и P_2, Q_2. Докажите, что хорды P_1Q_1 и P_2Q_2 проходят через точки O_2 и O_1.

задачник кванта

Задачи

М991—М995; Ф1003—Ф1007

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 октября 1986 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7 — 86» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М991, М992» или «Ф1003». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Фамилию и имя пишите печатными буквами.

Задачи М991—М995 нам предложила редакция журнала «Математика» (НРБ).

М991. В треугольнике ABC проведены высота CH и медиана CK. На стороне AB выбраны точки E и F так, что $\angle ACE=\angle BCF$, и на лучи CE и CF опущены перпендикуляры AM и BN (рис. 1). Докажите, что точки M, H, K и N лежат на одной окружности.

М992. Среди 90 выпускников одной математической гимназии у каждого не менее 10 друзей. Докажите, что любой выпускник может пригласить в гости трех других так, что среди четырех собравшихся у каждого будет не менее двух друзей.

М993. а) Найдите 11 последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых — квадрат натурального числа.

б)* Докажите, что при $2<n<11$ не существует n последовательных натуральных чисел, сумма квадратов которых — квадрат.

М994.* При каком наибольшем значении k неравенство

$$a^4+b^4+c^4+abc(a+b+c)\geqslant k(ab+bc+ca)^2$$

выполнено при всех значениях a, b и c?

М995. Функция $y=f(x)$ при всех x определена, непрерывна и удовлетворяет условию

$$f(f(x))=f(x)+x.$$

а) Найдите две такие функции f.

б)* Докажите, что других таких функций нет.

Ф1003. Локомотив движется по круговому пути радиуса R со скоростью v. К нему на тросе длиной L прикреплен легкий воздушный шар, который движется с постоянной по величине скоростью на высоте H. Определите траекторию установившегося движения шара.

Д. Ю. Григорьев

Ф1004. Тонкий однородный стержень, который может свободно вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через конец стержня, неподвижно висит над водой (рис. 2); длина стержня l, плотность материала ρ (ρ меньше плотности воды). Медленно опуская ось, стержень погружают в воду. Найдите зависимость между углом отклонения стержня от вертикали и расстоянием от оси до поверхности воды; постройте график этой зависимости.

Д. В. Белов

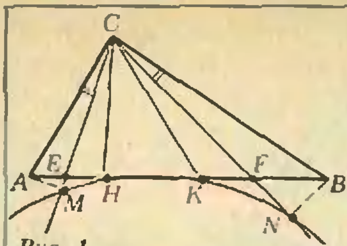


Рис. 1.

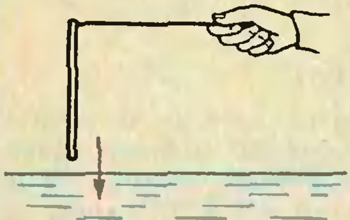


Рис. 2.

Рис. 3.

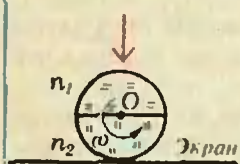


Рис. 4.

Ф1005. Имеется печь, в которой постоянно поддерживается температура T_1, и холодильник, температура в котором $T_0 < T_1$. В холодильнике установлена катушка с намотанной на ней длинной проволокой. Конец проволоки выходит из холодильника, входит в печь и закреплен на катушке, установленной там. Катушки вращаются так, что проволока сматывается с холодной катушки на горячую, двигаясь со скоростью v. Сечение проволоки s, объемная теплоемкость c. Чтобы температуры T_1 и T_0 не изменились, пришлось увеличить на ΔE_x мощность печи и на столько же уменьшить холодопроизводительность холодильника. Найдите ΔE_x. Считать, что теплообмен проволоки с окружающей средой не зависит от скорости движения проволоки.

Д. В. Павлов

Ф1006. Определите сопротивление схемы из резисторов, показанной на рисунке 3. Значения сопротивлений указаны в омах.

С. С. Кротов

Ф1007. На шар, составленный из двух полушарий, которые сделаны из стекол с показателями преломления n_1 и n_2 ($n_1 > n_2$), падает луч света. Шар начинают вращать с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной направлению луча (рис. 4). Найдите максимальный размер светового пятна на экране, установленном непосредственно за шаром.

Л. Г. Маркович

Problems

M991 — M995; P1003 — P1007

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than October 15th to the following address: USSR, Moscow, 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelo-

M991. CH and CK are the altitude and the median of triangle ABC. The points E and F are chosen on the side AB so that $\angle ACE = \angle BCF$, and perpendiculars AM and BN are lowered on the rays CE and CF (see figure Рис. 1). Prove that M, H, K and N lie on one circle.

M992. Each of the 90 alumni of a mathematical gymnasium has at least 10 friends. Prove that any alumnus can invite three other alumni so that among the four each has at least two friends.

M993. a) Find 11 successive natural numbers whose sum of squares is the square of a natural number.
b)* Prove that if $2 < n < 11$, then it is impossible to find n successive natural numbers whose sum of squares is a square.

M994.* For what largest value of k the inequality

$$a^4 + b^4 + c^4 + abc(a+b+c) \geq k(ab+bc+ca)^2$$

holds for all values of a, b and c?

M995. The function $y = f(x)$ is, for all x, defined, continuous and satisfies the condition

$$f(f(x)) = f(x) + x.$$

a) Find two such functions f.
b)* Prove that there are no others.

P1003. A locomotive moves along a circular track of radius R with velocity v. An aerostat is tied to the locomotive pe write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

Problems M991—M995 were proposed to us by the Bulgarian magazine «Matematika».

by a rope of length L and moves with constant speed at the altitude H. Determine the trajectory of the aerostat's established motion.

D. Yu. Grigoriev

P1004. A thin uniform rod which can rotate freely in the vertical plane about a horizontal axis passing through its upper extremity hangs motionless above water (see figure Рис. 2); the length of the rod is l, its density ϱ (ϱ is less than the density of water). Slowly lowering the axis, the rod is immersed in water. Find and plot the dependence between the angle formed by the rod with the vertical and the distance from the axis to waterlevel.

D. V. Belov

P1005. A heater in which a constant temperature T_1 is maintained and a refrigerator with inner temperature $T_0<T_1$ contain coils of wire. The wire from the coil in the refrigerator comes out of it and goes into the heater to the other coil. The coils rotate so that the wire from the cold coil moves toward the hot coil with velocity v. The wire section area is s, the volume specific heat is c. In order to keep the temperatures T_0 and T_1 constant, it was necessary to increase the power of the heater by ΔE_x and decrease the production of cold by the refrigerator by the same magnitude. Find ΔE_x.

D. V. Pavlov

P1006. Determine the resistance of the resistor circuit schown on figure Рис. 3. The resistances are given in ohms.

S. S. Krotov

P1007. A light ray falls on a solid sphere made out of two glass hemisheres of refraction indices n_1 and n_2 ($n_1>n_2$). The sphere is rotated with angular velocity ω about an axis perpendicular to the ray (see figure Рис. 4). Find the maximal size of the spot obtained on a screen placed directly behind the sphere.

L. G. Markovich

Решения задач

М971—М975; Ф983—Ф987

М971. *Восемь волейбольных команд провели турнир в один круг (каждая сыграла с каждой один раз). Докажите, что можно выбрать из них такие четыре команды A, B, C, D, что A выиграла у B, C и D, B выиграла у C и D, C выиграла у D.*

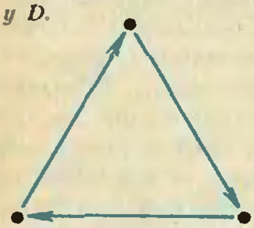


Рис. 1.

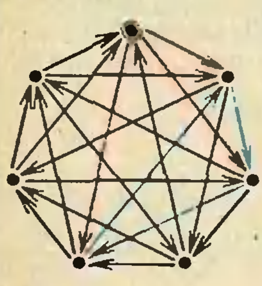


Рис. 2.

Поскольку суммарное число выигрышей всех команд равно числу проигрышей и каждая команда провела 7 матчей, среднее число выигрышей, приходящееся на команду, равно 3,5. Следовательно, хотя бы одна из команд — назовем ее A — выиграла не менее 4 матчей. Аналогично на каждую из 4 команд, проигравших A, приходится в среднем 1,5 выигрыша в матчах между ними, поэтому одна из них — назовем ее B — выиграла не менее чем у двух. Из этих двух команд одна (C) выиграла у другой (D). Команды A, B, C, D образуют искомую четверку.

Легко видеть, что утверждение задачи можно обобщить: *если в турнире участвовало 2^{n-1} команд, то всегда можно выбрать n команд A_1, ..., A_n так, что каждая из них выиграла у всех команд с большими номерами.*

Интересно выяснить, при каком наименьшем N (в зависимости от n) выделенное условие выполняется для любого турнира с участием N команд. Схемы турниров, изображенные на рисунках 1 и 2 (где стрелки проведены от выигравших команд к проигравшим), показывают, что при $n=3$, $N=3$ и $n=4$, $N=7$ наше условие уже не выполнено. (Заметим, что на обоих рисунках все команды равноправны, причем на рисунке 2 три команды, проигравшие какой-то одной, образуют такую же схему, как на рисунке 1.) Следовательно, в этих двух случаях наименьшее допустимое значение N равно 2^{n-1}. Читателям предлагается ответить на вопрос, верно ли это для $n=5$, 6, ...

А. Т. Украинцев

М972. *Последовательность $x_1, x_2, \ldots$ задается условиями $x_1=1/2$, $x_{n+1}=x_n^2+x_n (n=1, 2, \ldots)$. Найдите целую часть числа*

$$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\ldots+\frac{1}{x_{100}+1}.$$

Ответ: 1. Ясно, что

$$\frac{1}{x_n+1}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_n(x_n+1)}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}},$$

поэтому рассматриваемая сумма равна $1/x_1-$ $-1/x_{100}=2-1/x_{100}$. Последовательность x_n, очевидно, возрастает и $x_2=3/4$, $x_3=(3/4)^2+3/4>1$, следовательно, и $x_{100}>1$, то есть $1<2-1/x_{100}<2$.

А. А. Анджанс

М973. *В треугольнике ABC проведены высота AH и биссектриса BE. Докажите, что если $\angle BEA=45^\circ$, то и $\angle EHC=45^\circ$.*

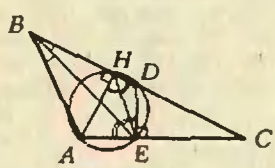


Рис. 1.

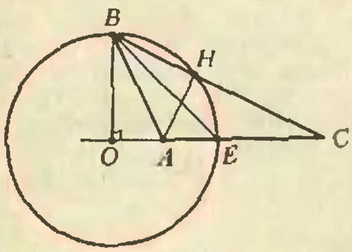


Рис. 2.

◆

Достаточно доказать, что HE — биссектриса угла AHC.

Проведем из точки E перпендикуляр к AC; пусть D — точка его пересечения с BC (рис. 1). Треугольники BEA и BED равны по стороне BE и прилежащим к ней углам ($\angle BEA=\angle BED=45^\circ$), поэтому $AE=ED$. А поскольку точки A, E, H и D лежат на одной окружности (ибо сумма углов AHD и AED равна $90^\circ+90^\circ=180^\circ$), углы AHE и EHD равны как вписанные углы, опирающиеся на равные хорды AE и ED.

Другое решение опирается на известную теорему о биссектрисе: *если BE — биссектриса треугольника ABC, то $AE:EC=$ $=AB:BC$* (см., например, «Квант», 1985, № 2, с. 29). Легко видеть, что справедлива и обратная к ней теорема, поэтому достаточно доказать, что $AH:HC=AB:BC$. Обозначая углы треугольника при вершинах A, B, C через α, β, γ, получим, что $AH:HC=\operatorname{tg}\gamma$ и по теореме синусов $AB:BC=\sin\gamma:\sin\alpha$. Но $\sin\alpha=\sin(\beta+\gamma)=\sin(90^\circ-\gamma)=\cos\gamma$ (так как $\beta/2+\gamma=\angle AEB=$ $=45^\circ$), то есть $\sin\gamma:\sin\alpha=\operatorname{tg}\gamma$.

Заметим еще, что рассматриваемый в задаче треугольник можно охарактеризовать тем, что центр O окружности, проходящей через точки B, H и E, совпадает с проекцией точки B на прямую AC (рис. 2). (Эта окружность является так называемой окружностью Аполлония для точек A и C, то есть для ее точек X отношение $AX:XB$ постоянно.) Отсюда можно получить еще одно решение.

И. Ф. Шарыгин, В. Н. Дубровский

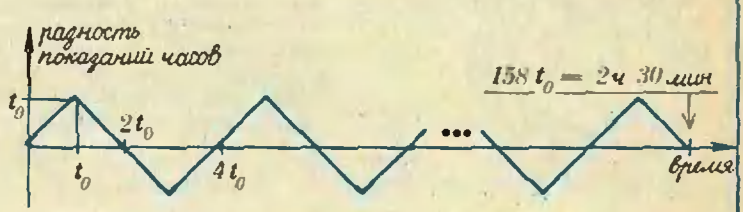
М974. *Двое играют в шахматы с часами. После того как оба сделали по 40 ходов, часы обоих показывали 2 часа 30 минут.*

а) Докажите, что в партии был момент, когда часы одного обгоняли часы другого более чем на 1 минуту 50 секунд.

б) Можно ли утверждать, что в некоторый момент разница показаний часов была не менее 2 минут?

◆

а) Пусть абсолютная величина разности показаний часов ни в какой момент не превышает $t=1$ мин 50 с. Тогда время, затраченное первым шахматистом на первый ход, не превышает t, а время, затраченное на любой из следующих ходов, не превышает $2t$ (если время обдумывания какого-либо хода больше $2t$, то в начале или в конце этого отрезка времени разность показаний часов будет больше t). Таким образом, общая длительность партии, равная 5 ч$=300$ мин, не превышает $80\cdot 2t-t=159t$, то есть $t\geqslant 300/159$ мин >1 мин 50 с. Полученное противоречие показывает, что в



некоторый момент разность показаний часов превысит 1 мин 50 с.

б) Ответ: нельзя. Если на самый первый ход (точнее, по шахматной терминологии, «полуход») в партии было затрачено время $t_0=300/158$ мин, на каждый из 78 следующих — $2t_0$, а на 80-й, последний — t_0, то общее время обдумывания для каждого шахматиста равно $39\cdot 2t_0+t_0=$ $=79t_0=2$ ч 30 мин, а разность показаний часов в любой момент не превосходит $t_0<2$ мин; график изменения разности приводится на странице 38.

С. В. Фомин

◆

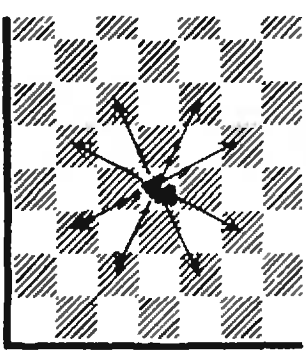
М975. *На «шахматной доске» $n\times n$ полей стоит 20 различных фигур. Известно, что каждая фигура с любого поля бьет не более 20 полей.*
а) Докажите, что при $n=100$ эти фигуры можно переставить так, чтобы они не били друг друга.
б) Пусть дополнительно известно, что если фигуру сдвинуть, то множество полей, которые она бьет, тоже параллельно сдвинется (на тот же вектор). Докажите, что при $n=30$ эти 20 фигур можно расставить так, чтобы они не били друг друга.

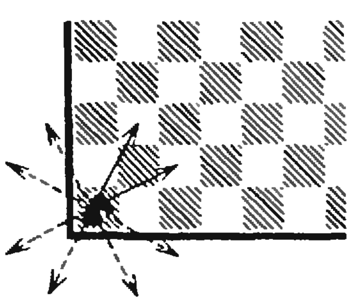
а) Рассмотрим всевозможные расстановки наших 20 фигур на доске 100×100 и оценим долю p тех расстановок, при которых хотя бы одна фигура бьет какую-то другую. Легко оценить долю расстановок, при которых данная фигура A бьет данную фигуру B: при любом положении A для фигуры B имеется $100^2-1=9999$ свободных полей, из них не более 20 находятся под ударом фигуры A; следовательно, эта доля не превосходит $20/9999$. А поскольку число (упорядоченных) пар фигур (A, B) равно $20\cdot 19=380$,

$$p\leqslant 380\cdot\frac{20}{9999}<1,$$

поэтому существуют позиции, в которых ни одна фигура не бьет другую (их доля равна $1-p>0$).

Отметим, что наша оценка довольно грубая — позиции, в которых несколько фигур бьют другие, мы учли столько раз, сколько в них таких пар фигур.





б) Будем ставить фигуры на доску последовательно. Если первая фигура уже поставлена, то вторую нельзя ставить на 1) поле, занятое первой фигурой, 2) поля, находящиеся под ударом первой (их не более 20), 3) поля, с которых вторая фигура бьет первую. Покажем, что в 3-й группе также не более 20 полей.

Пусть $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ — векторы, соединяющие центр поля, занятого 2-й фигурой, с центрами полей, которые она бьет. Этот набор векторов не меняется при сдвиге фигуры, однако некоторые из них могут выходить за края доски (на рисунках показаны такие векторы для двух положений шахматного коня). Поля, с которых 2-я фигура бьет 1-ю, получаются, если отложить от поля, занятого 1-й фигурой, векторы $-\vec{v}_1$, $-\vec{v}_2, \ldots, -\vec{v}_k$ — их не более 20.

Таким образом, для 2-й фигуры число запретных полей не превосходит 41. Поставим ее на одно из оставшихся полей, тогда для 3-й фигуры будет не более $2\cdot 41=82$ запретных полей и т. д. Для 20-й фигуры число запретных полей не превосходит $19\cdot 41=779<900$, поэтому и ее можно будет поставить на доску с соблюдением условий задачи.

Обратите внимание на принципиальную разницу решений двух пунктов нашей задачи: в отличие от решения задачи б) решение задачи а) никак не помогает найти нужную расстановку — это, как говорят, «чистое доказательство существования».

А. К. Толпыго

Ф983. *На шероховатом столе лежит брусок массой $m=1$ кг; коэффициент трения покоя бруска о стол $\mu_0=1$, коэффициент трения скольжения $\mu=0{,}9$. К бруску прикреплена пружина жесткостью $k=1$ Н/м. Пружину начинают тянуть в горизонтальном направлении так, что ее свободный конец движется с постоянной скоростью $v=1$ м/с (рис. 1). Как будет двигаться брусок?*

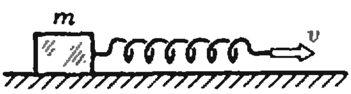


Рис. 1.

Будем рассматривать движение системы поэтапно.

Первый этап: брусок неподвижен, пружина растягивается. Это происходит до тех пор, пока в некоторый момент времени t_1 сила натяжения пружины ($|kx_1|$) не достигнет значения максимальной силы трения покоя ($\mu_0 mg$); с этого момента брусок начнет двигаться.

Найдем t_1: $kx_1=\mu_0 mg$, или $k(vt_1)=\mu_0 mg$, откуда

$$t_1=\mu_0\frac{mg}{kv}\approx 10\text{ с}.$$

Введем обозначение $k/m=\omega^2$. Тогда

$$t_1=\mu_0 g/v\omega^2.$$

В этот момент растяжение пружины

$$x_1=vt_1=\mu_0\frac{g}{\omega^2}.$$

Второй этап. С момента времени t_1 брусок начинает двигаться. Рассмотрим это движение в системе координат, которая движется со скоростью $\vec{v}$. В этой системе (обозначим ее c) в момент времени t_1 брусок имеет скорость $-\vec{v}$ и координату $x=0$, пружина растянута на $x_1=vt_1$. Дальнейшее движение бруска происходит под действием силы упругости $f_{\text{упр}}=kx_1$ и силы трения скольжения $f=\mu mg$, направленной в сторону, противоположную направлению вектора $\vec{v}$ (так направлена скорость бруска относительно стола, который в системе c имеет постоянную скорость $-\vec{v}$). Вспомним, что под действием упругой силы и постоянной силы (в данном случае — трения) тело совершает гармонические колебания:

$$x_c=x_{c\,\max}\sin(\omega t+\varphi)+x_0\ \left(\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\right),\qquad (1)$$

где x_0 — положение равновесия, которое определяется условием

$$k(x_1-x_0)-\mu mg=0\Rightarrow$$

$$x_0=x_1-\frac{\mu mg}{k}=x_1-\mu\frac{g}{\omega^2}=\Rightarrow\Delta\mu\frac{g}{\omega^2},$$

где $\Delta\mu=\mu_0-\mu$.

Скорость бруска при этом изменяется по закону

$$v_c=x_c'=x_{c\,\max}\,\omega\cos(\omega t+\varphi).\qquad (2)$$

Найдем значение $x_{c\,\max}$ и φ. Для этого подставим в (1) и (2) значения $t=t_1$, $x_c=x(t_1)=0$, $x'(t_1)=-v$:

$$0=x_{c\,\max}\sin(\omega t_1+\varphi)+\Delta\mu\frac{g}{\omega^2},$$

$$-v=x_{c\,\max}\,\omega\cos(\omega t_1+\varphi).$$

Перепишем эти уравнения в такой форме:

$$x_{c\,\max}\sin(\omega t_1+\varphi)=-\Delta\mu\frac{g}{\omega^2},\qquad (3)$$

$$x_{c\,\max}\cos(\omega t_1+\varphi)=-\frac{v}{\omega}.\qquad (4)$$

Возведя (3) и (4) в квадрат и сложив получившиеся выражения, найдем:

$$x_{c\,\max}^2=\frac{(\Delta\mu)^2g^2}{\omega^4}+\frac{v^2}{\omega^2}\approx 2\text{ м}^2,\ x_{c\,\max}\approx 1{,}4\text{ м}.$$

Поделив (3) на (4), получим:

$$\operatorname{tg}(\omega t_1+\varphi)=\Delta\mu\frac{g}{v\omega}$$

$$(\sin(\omega t_1+\varphi)<0,\ \cos(\omega t_1+\varphi)<0)$$

откуда

$$\varphi=\pi+\operatorname{arctg}\frac{\Delta\mu\cdot g}{v\omega}-\omega t_1\approx\frac{5\pi}{4}.$$

Перейдем теперь в неподвижную систему отсчета (в момент времени t_1 начала координат в обеих системах совпадают):

$$x=x_c+v(t-t_1)=x_{c\,\max}\sin(\omega t+\varphi)+v(t-t_1)+$$

$$+\Delta\mu\frac{g}{\omega^2}=\sqrt{2}\sin\left((t-10)+\frac{5\pi}{4}\right)+(t-10)+1\ (\text{м}),$$

$$x'=x_{c\,\max}\omega\cos(\omega t+\varphi)+v=$$

$$=\sqrt{2}\cos\left((t-10)+\frac{5\pi}{4}\right)+1\ (\text{м/с}).$$

Эти уравнения описывают движение бруска от момента времени t_1 до момента t_2, когда скорость бруска станет равной 0 и силу трения скольжения заменит сила трения покоя. В момент t_2

$$x'=x_{c\,\max}\omega\cos(\omega t_2+\varphi)+v=0.$$

Вспомним, что угол $\theta=\omega t_1+\varphi$ находится в третьей четверти. При дальнейшем росте t ($t>t_1$) угол этот будет расти, $\cos(\omega t+\varphi)$ также будет расти, следовательно, и скорость будет расти, оставаясь положительной. Когда $(\omega t+\varphi)$ окажется во второй (шестой) четверти, $\cos(\omega t+\varphi)$ будет отрицательным, и когда он станет равным $\cos(\omega t_1+\varphi)$, скорость бруска станет равной нулю. Таким образом,

$$t_2=t_1+\frac{2\left(\pi-\operatorname{arctg}\frac{\Delta\mu\cdot g}{v\omega}\right)}{\omega}\approx 15\text{ с},$$

$$x(t_2)\approx 7\text{ м}.$$

Заметим, что силы натяжения пружины в моменты t_2 и t_1 связаны соотношением

$$f(t_1)-\mu mg=-(f(t_2)-\mu mg)\Rightarrow f(t_2)=2\mu mg-f(t_1).$$

Но $f(t_1)=\mu_0 mg$; поэтому

$$f(t_2)=mg(2\mu-\mu_0)<\mu_0 mg.$$

Значит, в момент t_2 брусок остановится и не будет двигаться до момента t_3, когда $f(t_3)$ станет равной

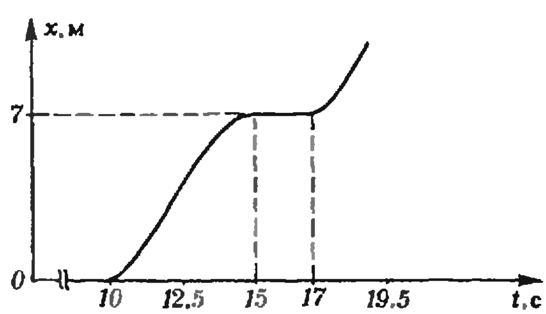


Рис 2

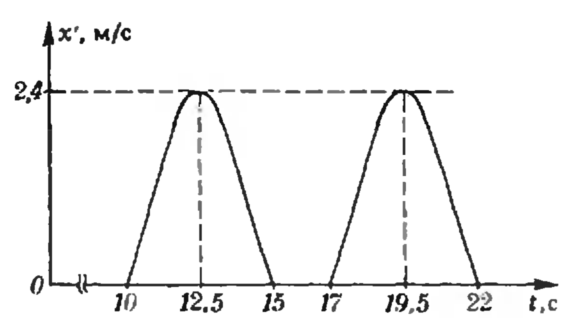


Рис 3.

по модулю $\mu_0 mg$. Интервал времени t_3-t_2, очевидно, равен

$$t_3-t_2=\frac{f(t_3)-f(t_2)}{kv}=\frac{2(\mu_0-\mu)g}{v\omega^2}\approx 2\text{ с.}$$

Затем цикл повторяется, так что $t_4-t_3=t_2-t_1$, и т. д. Графики функций $x(t)$ и $x'(t)$ приведены на рисунках 2 и 3 (см. с. 41).

И. И. Мазин

Ф984. *При колке дров топор иногда застревает в расщелине полена. В таких случаях дальше колют либо так, как показано на рисунке 1, либо — как на рисунке 2. Какой способ более эффективен?*

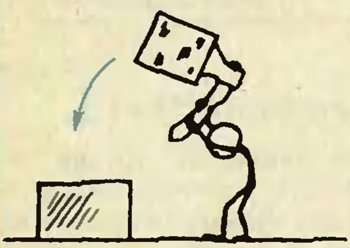


Рис. 1.

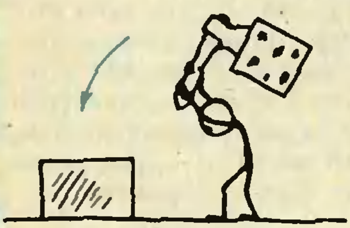


Рис. 2.

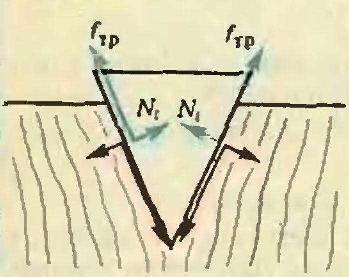


Рис. 3.

◆

По мере того как топор входит в полено, увеличивается расщелина между половинами полена по обе стороны от топора: эти половины испытывают сжатие в направлениях, перпендикулярных «щекам» топора; происходит накопление упругой деформации в дереве. Разрыв (раскол) полена происходит в момент, когда эта деформация достигнет определенного «максимально выдерживаемого» значения.

Будем считать, что перед ударом о «наковальню» в первом и во втором случаях система топор + полено имеет одну и ту же энергию. При ударе о наковальню часть этой энергии переходит в тепло. В первом случае (дерево внизу) удар неупругий, во втором — упругий. Значит, в первом случае потери энергии при ударе (ΔE_1) больше, чем во втором (ΔE_2). Оставшаяся энергия расходуется на работу против сил трения при взаимном перемещении топора и полена и на увеличение энергии упругой деформации в полене. Запишем этот энергетический баланс:

$$E'_1=E-\Delta E_1=A_1+U_1,$$
$$E'_2=E-\Delta E_2=A_2+U_2.$$

Из сказанного выше ясно, что $E'_2>E'_1$, то есть

$$A_2+U_2>A_1+U_1.$$

Понятно, что если $U_2>U_1$, то второй способ более эффективен.

При одном и том же перемещении топора относительно полена из одинаковых начальных положений, то есть при одном и том же значении A ($A_1=A_2$), очевидно, $U_2>U_1$. Покажем, что величины A и U пропорциональны друг другу.

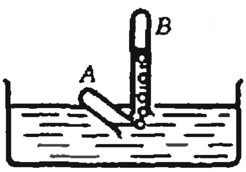
Работа A совершается против силы трения, которая меняется при смещении топора относительно полена, поскольку меняется сила нормальной реакции N_t (рис. 3). Энергия U_t равна работе, совершаемой силой нормального давления топора на дерево. Эта сила в любой момент времени численно равна силе нормальной реакции N_t. Из всего сказанного ясно, что условие $A_2+U_2>$ $>A_1+U_1$ означает, что и $A_2>A_1$, и $U_2>U_1$, и следовательно, второй способ — удар о наковальню топором — более эффективен.

Т. С. Петрова

Ф985. *В сосуд, заполненный жидким эфиром, погружают перевернутую пробирку А. Из нее сразу же начинают*

◆

Сразу же, как только пустую пробирку A опустили в сосуд с эфиром, началось испарение эфира внутрь пробирки. Этот процесс и приводит к появлению *выходить пузырьки. Пузырьки «собирают» в первоначально полностью заполненную эфиром пробирку B (см. рисунок), длина которой в два раза больше, чем длина пробирки A. При этом из пробирки B вытесняется 2/3 первоначального объема эфира. Температура в комнате поддерживается равной 20 °С, давление равно нормальному атмосферному. Объясните происходящее явление и определите по имеющимся в задаче данным давление насыщенных паров эфира при указанной температуре.*



пузырьков, выходящих из пробирки A,— ведь суммарное давление воздуха и паров эфира в ней должно поддерживаться равным атмосферному давлению p_0 (можно пренебречь увеличением давления из-за погружения пробирки в эфир — оно не превосходит нескольких мм рт. ст.). Пузырьки перестанут выходить, когда прекратится испарение эфира внутрь пробирки A, то есть когда давление паров эфира там станет равным давлению насыщенных паров $p_н$ и суммарное давление будет равно $p_н+p_в=p_0$, где $p_в$ — давление воздуха.

Аналогичное условие должно выполняться и в пробирке B. При этом воздух, занимавший в пробирке A объем V_0, в пробирке B будет занимать объем $\frac{4}{3}V_0$. Пользуясь законом Бойля — Мариотта, можем записать:

$$p_0V_0=p_в\left(V_0+\frac{4}{3}V_0\right)=\frac{7}{3}p_вV_0,$$

откуда находим $p_в=\frac{3}{7}p_0$. Теперь легко определить давление насыщенных паров эфира:

$$p_н=p_0-p_в=\frac{4}{7}p_0\approx 430 \text{ мм рт. ст.}$$

А. И. Буздин

◆

Ф986. *Две хорошо очищенные пластины, платиновая и вольфрамовая, находятся в вакууме, образуя плоский конденсатор. Пространство между ними заполняют окисью углерода CO. Определите возникающую при этом разность потенциалов между пластинами. Считайте, что молекулы CO осаждаются на поверхности металла с образованием химической связи углерод — металл; молекула CO представляет собой диполь (рис. 1), $|\Delta q|\cdot l=3{,}3\times\times10^{-31}$ Кл·м.*

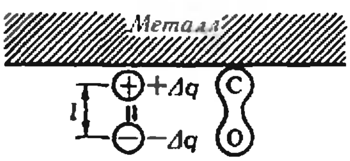


Рис. 1.

У атомов металла (вольфрама и платины), находящихся на поверхности пластины, и у атомов углерода в молекуле окиси углерода CO имеются ненасыщенные химические связи. Взаимодействие окиси углерода с чистой поверхностью металла приводит к возникновению сильной химической связи между атомом C и поверхностным атомом металла. Эта реакция сопровождается выделением тепла. При этом окись углерода осаждается на поверхности металла, образуя монослой, причем на каждый атом металла, расположенного на поверхности пластины, приходится одна молекула CO и ось молекулы перпендикулярна поверхности металла (рис. 1).

Вблизи поверхности платиновой пластины можно выделить две плоскости P_1 и P_1', находящиеся на расстоянии l друг от друга и проходящие через центры атомов углерода и кислорода соответственно. Будем считать, что положительные заряды (дипольные заряды $+\Delta q$) расположены в плоскости P_1 с поверхностной плотностью заряда $+\sigma_1$, а отрицательные — в плоскости P_1' с поверхностной плотностью заряда $-\sigma_1$ (рис. 2).

Аналогично, вблизи поверхности вольфрамовой пластины расположены две разноименно заряженные плоскости P_2 и P_2' с поверхностной плотностью заряда $+\sigma_2$ и $-\sigma_2$ соответственно.

Таким образом, расчет разности потенциалов U между пластинами вольфрама и платины сводится к определению разности потенциалов между двумя парами разноименно заряженных плоскостей:

$$U=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}l-\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}l=\frac{\sigma_1-\sigma_2}{\varepsilon_0}l. \qquad (1)$$

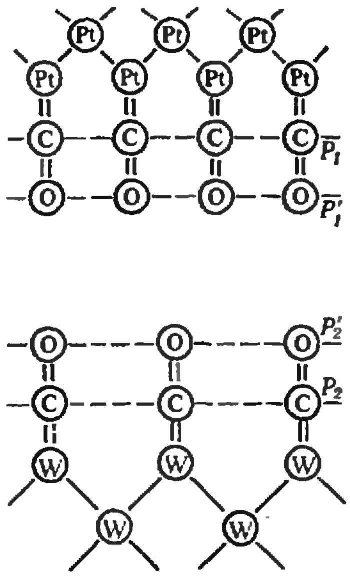


Рис. 2.

Среднее число атомов металла, находящихся на единичной площади его поверхности (поверхностная плотность атомов γ), определяется через объемную плотность атомов соотношением

$$\gamma = n^{2/3}, \qquad (2)$$

где n — объемная плотность атомов металла. В свою очередь объемная плотность атомов равна

$$n = \frac{\rho N_A}{M}, \qquad (3)$$

где ρ — плотность металла, N_A — число Авогадро, M — молярная масса металла. Ясно, что

$$\sigma = \Delta q \cdot \gamma. \qquad (4)$$

Учитывая соотношения (2)—(4), искомую разность потенциалов представим в виде

$$U = \frac{\Delta q \cdot l}{\varepsilon_0} N_A^{2/3} \left(\left(\frac{\rho_W}{M_W} \right)^{2/3} - \left(\frac{\rho_{Pt}}{M_{Pt}} \right)^{2/3} \right).$$

Подставив численные значения ($\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ Ф/м, $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$, $\rho_W = 19{,}1 \times 10^3$ кг/м^3, $\rho_{Pt} = 21{,}5 \cdot 10^3$ кг/м^3, $M_W = 0{,}184$ кг/моль, $M_{Pt} = 0{,}195$ кг/моль), получим $U = 24$ мВ.

В заключение следует заметить, что в решении задачи допущено упрощение — мы не учли, что в кристаллической структуре атомы вольфрама и платины расположены в определенном порядке и, следовательно, при различных срезах различное число атомов металла оказывается на его поверхности. Поэтому формула (2) требует уточнения для каждого конкретного случая расположения атомов на поверхности металла. Кроме того, в различных плоскостях поверхностные атомы обладают различной валентностью, и это тоже надо учитывать.

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

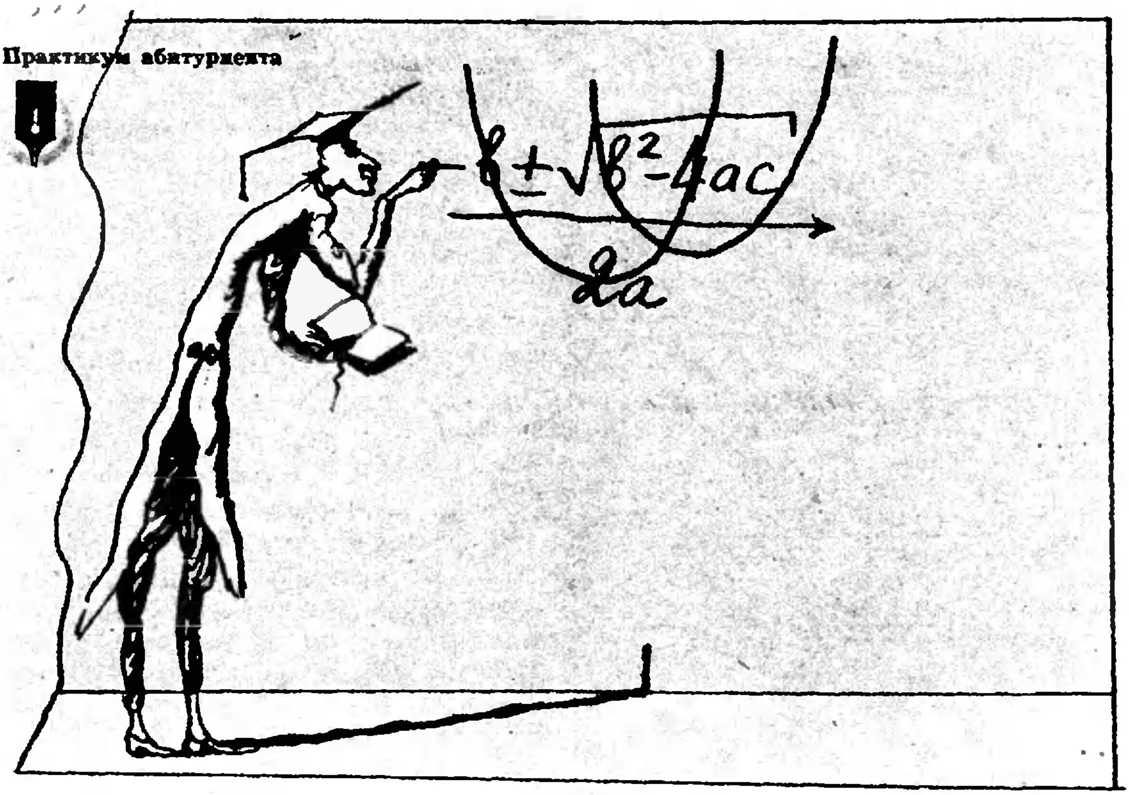
◆

Ф987. *На картине И. Левитана «Март» тени на снегу, отбрасываемые деревьями в ясный солнечный день, голубого цвета. Не правильнее ли (с физической точки зрения) было нарисовать их темными, бесцветными (черными или серыми)?*

Освещенность любого участка поверхности земли создается как прямыми солнечными лучами, так и рассеянным в атмосфере солнечным светом. Как известно, граница тени задает область, куда не попадают прямые солнечные лучи. Если бы вообще никакие лучи в эту область не попадали, то соответствующие участки были бы бесцветными (черными).

В ясный солнечный день (когда на небе почти нет облаков) рассеянный солнечный свет, приходящий на землю, «имеет синюю окраску» (цвет неба). Попадая в область «прямой» тени, этот свет отражается от белого снежного покрова без существенного поглощения (таково свойство белого снега) и придает тени синий цвет. Описанный эффект тем более нагляден, чем чище снежный покров.

А. С. Бутов



Как расположены корни трехчленов?

Доктор физико-математических наук
Г. В. ДОРОФЕЕВ

Эта статья посвящена решению задач, в которых так или иначе ставится вопрос о взаимном расположении корней (как правило, иррациональных) двух квадратных трехчленов. По своему математическому содержанию эти задачи достаточно просты, однако с вычислительной точки зрения большинство из них представляет серьезные трудности. Попробуйте, например, ответить на вопрос.

При каких значениях a корни уравнений

$$x^2+\frac{8}{a}x-2a=0 \quad \text{и} \quad x^2+\frac{6}{a}x-a=0$$

различны и перемежаются (то есть между двумя корнями одного уравнения находится ровно один корень другого уравнения)?

Вы убедитесь, что выписывание корней этих трехчленов требует кропотливого сравнения их друг с другом при различных значениях параметра a.

В то же время из графических соображений ясно, что *корни двух квадратных трехчленов $f(x)$ и $g(x)$ с одинаковыми положительными коэффициентами при x^2 (и положительными дискриминантами) перемежаются тогда и только тогда, когда точка пересечения графиков функций $f(x)$ и $g(x)$ находится ниже оси абсцисс.* На алгебраическом языке это означает, что *общее значение функций $f(x)$ и $g(x)$ отрицательно.* В нашем случае $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x=\frac{a^2}{2}$ и $f\left(\frac{a^2}{2}\right)=\frac{a^4}{4}+2a$; поэтому условию задачи удовлетворяют решения неравенства $a^4+8a<0$, или $-2<a<0$.

Этот пример показывает, что взаимное расположение корней двух квадратных трехчленов зависит от их поведения в точке x_0, в которой эти трехчлены принимают одинаковое значение (существенно, что точка x_0 — единственная!).

Шесть критериев для различных случаев расположения корней

Пусть квадратные трехчлены $f(x)=ax^2+px+q$ и $g(x)=ax^2+rx+s$ имеют каждый два различных корня (x_1, x_2 и x_3, x_4 соответственно, $x_1>x_2$,

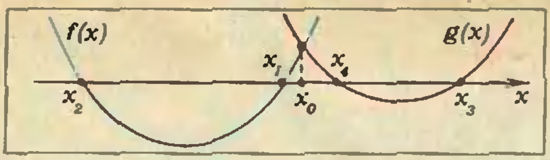


Рис. 1.

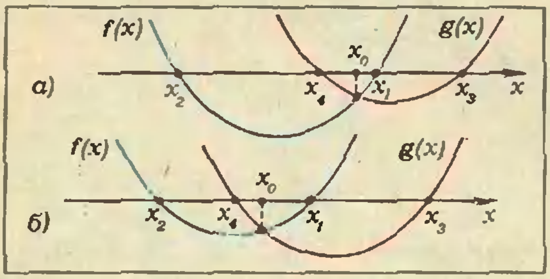


Рис. 2.

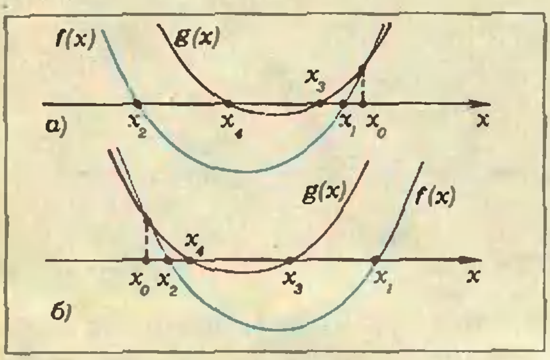


Рис. 3.

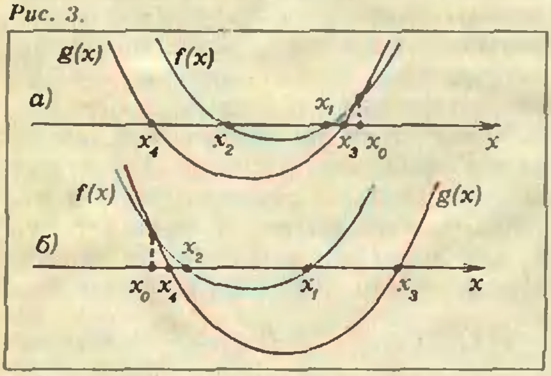


Рис. 4.

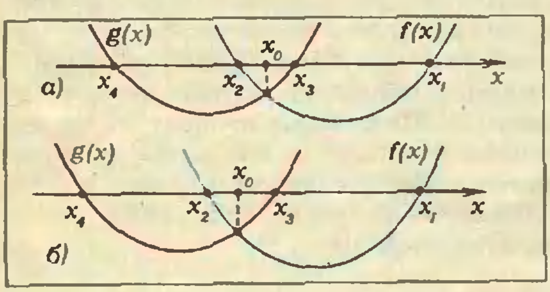


Рис. 5.

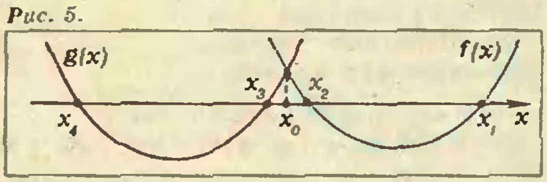


Рис. 6.

$x_3 > x_4$), причем у $f(x)$ и $g(x)$ нет общих корней и $p \neq r$. Пусть x_0 — корень (единственный) уравнения $f(x) = g(x)$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. $x_2 < x_1 < x_4 < x_3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (f(x_0) > 0,\ f'(x_0) > 0,\ g'(x_0) < 0)$;

2. $x_2 < x_4 < x_1 < x_3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (f(x_0) < 0,\ f'(x_0) > g'(x_0))$;

3. $x_2 < x_4 < x_3 < x_1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (f(x_0) > 0,\quad g'(x_0)\,[f'(x_0) - g'(x_0)] > 0$;

4. $x_4 < x_2 < x_1 < x_3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (f(x_0) < 0,\quad f'(x_0)\,[g'(x_0) - f'(x_0)] > 0)$;

5. $x_4 < x_2 < x_3 < x_1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (f(x_0) < 0,\ f'(x_0) < g'(x_0))$;

6. $x_4 < x_3 < x_2 < x_1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (f(x_0) > 0,\ f'(x_0) < 0,\ g'(x_0) > 0)$.

Перечисленные утверждения проиллюстрированы на рисунках 1—6. Если вы забудете формулировку какого-нибудь критерия, это не страшно: ее всегда можно восстановить, пользуясь такими рисунками. Также нетрудно заметить, что критерии 4, 5, 6 получаются из критериев 3, 2, 1 переменой местами $f(x)$ и $g(x)$ (это видно и из сравнения соответствующих рисунков). Поэтому мы докажем только первые три критерия.

Нам понадобятся следующие известные (весьма полезные) свойства квадратного трехчлена:
если $f(x)$ — квадратный трехчлен с положительными старшим коэффициентом и дискриминантом, x_1 и x_2 — его корни, а x_0 — некоторое значение переменной, то

$$x_0 < x_2 < x_1 \Leftrightarrow (f(x_0) > 0,\ f'(x_0) < 0);$$
$$x_2 < x_1 < x_0 \Leftrightarrow (f(x_0) > 0,\ f'(x_0) > 0);$$
$$x_2 < x_0 < x_1 \Leftrightarrow f(x_0) < 0,$$

(см. рисунок 7).

Пусть теперь $h(x) = f(x) - g(x)$. Легко видеть, что $h(x)$ — линейная функция, отличная от константы ($p \neq r$). Поэтому она монотонна (убывает или возрастает). Это означает, что если для некоторых $a < b$ выполняется неравенство $h(a) < h(b)$ (или $h(a) > h(b)$), то и для любых $c < d$ справедливо неравенство $h(c) < h(d)$ (или $h(c) > h(d)$).

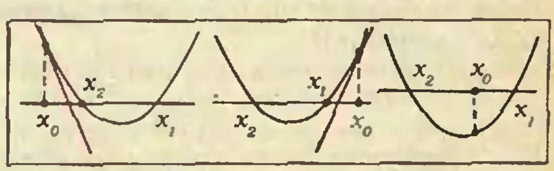


Рис. 7.

Доказательство критерия 1

Необходимость ($\Rightarrow$). Пусть $x_2 < x_1 < x_4 < x_3$. Тогда $f(x_1) > 0$, $h(x_4) = f(x_4) - g(x_4) = f(x_1) > 0$. Точно так же $g(x_1) > 0$, и поэтому $h(x_1) < 0$. Из неравенств $x_1 < x_4$ и $h(x_1) < h(x_4)$ получаем, что $h(x)$ — возрастающая функция.

Так как $h(x_0) = 0$, имеем $h(x_1) < h(x_0) < h(x_4)$, откуда $x_1 < x_0 < x_4$. Итак, оба корня $f(x)$ меньше x_0, откуда $f(x_0) > 0$, $f'(x_0) > 0$. Аналогично оба корня $g(x)$ больше x_0, откуда $g'(x_0) < 0$. Необходимость критерия 1 доказана. Достаточность ($\Leftarrow$). Пусть $f(x_0) > 0$, $f'(x_0) > 0$, $g'(x_0) < 0$. Из первых двух неравенств вытекает, что оба корня $f(x)$ меньше x_0, а из неравенств $g(x_0) > 0$, $g'(x_0) < 0$ следует, что оба корня $g(x)$ больше x_0, и таким образом, $x_2 < x_1 < x_0 < x_4 < x_3$.

Доказательство критерия 2

Необходимость ($\Rightarrow$). Пусть $x_2 < x_4 < x_1 < x_3$. Тогда $f(x_4) < 0$, $g(x_1) < 0$, так что $h(x_4) < 0 < h(x_1)$, и поскольку $x_4 < x_1$, получаем, что $h(x)$ — возрастающая функция. Следовательно, $h'(x) > 0$ при любом x; в частности, $h'(x_0) > 0$, откуда $f'(x_0) > g'(x_0)$.

С другой стороны, из условий $h(x_4) < h(x_0) < h(x_1)$ получаем, что $x_4 < x_0 < x_1$, так что $x_2 < x_0 < x_1$, откуда $f(x_0) < 0$. Достаточность ($\Leftarrow$). Пусть $f(x_0) < 0$, $f'(x_0) > g'(x_0)$. Тогда $h'(x_0) > 0$, и поскольку $h'(x)$ — постоянная функция, $h'(x) > 0$ при любом x, то есть $h(x)$ — возрастающая функция.

Из условия $f(x_0) = g(x_0) < 0$, получаем $x_2 < x_0 < x_1$, $x_4 < x_0 < x_3$, и так как $h(x)$ возрастает, $0 = h(x_0) < h(x_1)$, $h(x_4) < h(x_0) = 0$, откуда

$$g(x_1) = f(x_1) - h(x_1) < 0,$$
$$f(x_4) = h(x_4) + g(x_4) < 0;$$

следовательно, $x_4 < x_1 < x_3$, $x_2 < x_4 < x_1$, то есть $x_2 < x_4 < x_1 < x_3$.

Доказательство критерия 3

Необходимость ($\Rightarrow$). Пусть $x_2 < x_4 < x_3 < x_1$. Тогда $g(x_1) > 0$, $g(x_2) > 0$, откуда $h(x_1) < 0$, $h(x_2) < 0$, и поэтому на отрезке $[x_2; x_1]$ линейная функция $h(x)$ не обращается в нуль, так что либо $x_0 < x_2 < x_1$, либо $x_2 < x_1 < x_0$.

Если $x_0 < x_2 < x_1$, то x_0 лежит в промежутке убывания обоих трехчленов, так что $f'(x_0) < 0$, $g'(x_0) < 0$. Кроме того, $h(x_0) > h(x_2)$, так что $h(x)$ — убывающая функция, $h'(x) < 0$ для любого x, и в частности, $h'(x_0) < 0$, то есть $f'(x_0) - g'(x_0) < 0$. Поэтому произведение $g'(x_0)[f'(x_0) - g'(x_0)]$ положительно.

Аналогично рассматривается случай $x_2 < x_1 < x_0$.

Достаточность ($\Leftarrow$). Пусть $f(x_0) > 0$, и предположим сначала, что $g'(x_0) > 0$, $f'(x_0) - g'(x_0) > 0$. Тогда оба корня $g(x)$ меньше x_0, то есть $x_4 < x_3 < x_0$. Кроме того, $h(x)$ — возрастающая функция, так что $h(x_4) < x_3 < h(x_0)$, откуда $f(x_4) < 0$, $f(x_3) < 0$. Поэтому $x_2 < x_4 < x_1$, $x_2 < x_3 < x_1$, то есть $x_2 < x_4 < x_3 < x_1$.

Аналогично рассматривается случай $g'(x_0) < 0$, $f'(x_0) - g'(x_0) < 0$.

Решение неравенств

Применение доказанных критериев во многих случаях облегчает решение неравенств. Переходя к конкретным примерам, заметим, что выражение $f'(x_0) - g'(x_0)$, фактически фигурирующее в критериях 2—5, равно разности $p - r$. Поэтому на практике, например, критерием 2 удобно пользоваться в виде ($f(x_0) < 0$, $p > r$).

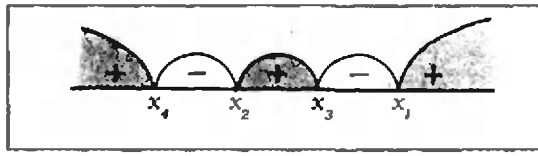


Рис. 8.

Решим теперь несколько неравенств.

1. $(x^2 + 13x - 49)(x^2 + 14x - 50) > 0$. Обозначая $f(x) = x^2 - 13x - 49$, $g(x) = x^2 + 14x - 50$, мы легко находим, что $x_0 = 1$, $f(1) = -35$, и так как $13 < 14$ (см. критерий 5), корни этих трехчленов связаны неравенствами $x_4 < x_2 < x_3 < x_1$. Применяя *метод интервалов* (см. «Квант», № 12, 1985, с. 18 и рисунок 8), находим решения данного неравенства: $x < x_4$, $x_2 < x < x_3$, $x > x_1$, или, выписывая корни,

$$x < -7 - 3\sqrt{11},\ -\frac{13 + \sqrt{365}}{2} < x < -7 + 3\sqrt{11},\ x > \frac{\sqrt{365} - 13}{2}.$$

2. $|x^2 + 6x - 11| < -2x^2 - 13x + 24$. Перепишем это неравенство в виде $2x^2 + 13x - 24 < x^2 + 6x - 11 < -2x^2 - 13x + 24$. Мы должны, следовательно, решить систему неравенств $f(x) < 0$, $g(x) < 0$, где

$$f(x) = 3x^2 + 21x - 39,$$
$$g(x) = 3x^2 + 19x - 35$$

(мы умножим трехчлен $f(x)$ на 3, чтобы уравнять старшие коэффициенты $f(x)$ и $g(x)$).

Имеем: $x_0 = 2$, $f(2) > 0$, $g'(2) > 0$, $p - r > 0$ и (см. критерий 3) $x_2 < x_4 < x_3 < x_1$. Следовательно, решениями системы $f(x) < 0$, $g(x) < 0$, а значит, и исходного неравенства являются значения $x_4 < x < x_3$, то есть

$$-\frac{19 + \sqrt{781}}{2} < x < \frac{\sqrt{781} - 19}{2}.$$

3. $|x^2 + 6x - 11| \leqslant |2x^2 + 13x - 26|$.

Поскольку обе части неравенства неотрицательны, после возведения в квадрат его можно записать в виде

$$(x^2 + 6x - 11)^2 \leqslant (2x^2 + 13x - 26)^2,$$

и, перенося все в правую часть и разлагая разность квадратов на множители, получаем неравенство $f(x)g(x) \geqslant 0$, где

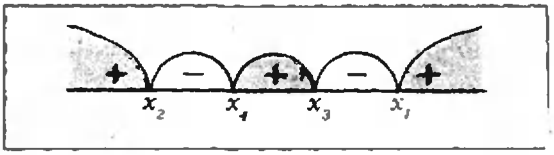
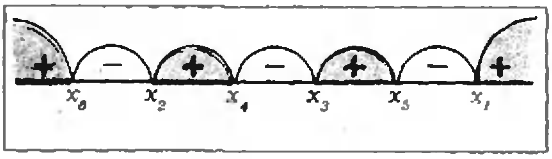


Рис. 9.



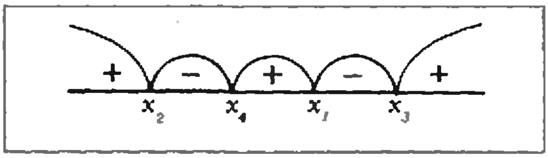


Рис. 11.

$$f(x)=3x^2+21x-45,$$
$$g(x)=3x^2+19x-37.$$

Тогда $x_0=4$, $f(4)>0$, $g'(4)>0$, $p-r>0$ и снова по критерию 3 $x_2<x_4<x_3<x_1$. Применяя метод интервалов, получаем решения исходного неравенства (см. рис. 9):

$$x\leqslant-\frac{7+\sqrt{109}}{2},\quad -\frac{19+\sqrt{805}}{6}\leqslant x\leqslant\frac{\sqrt{805}-19}{6},\quad x\geqslant\frac{\sqrt{109}-7}{2}.$$

4. $\dfrac{x^2-x-4}{4-|3x^2-2x-7|}\leqslant 0.$

Умножим обе части этого неравенства на положительное выражение $(4+|3x^2-2x-7|)^{-1}$. Разложив на множители разность квадратов в знаменателе, после упрощений получим неравенство

$$\frac{x^2-x-4}{(3x^2-2x-3)(3x^2-2x-11)}\geqslant 0.$$

Положив $f(x)=3x^2-3x-12$, $g(x)=3x^2-2x-3$, $h(x)=3x^2-2x-11$, будем выяснять взаимное расположение их корней $x_{1,2}$, $x_{3,4}$, $x_{5,6}$.

Коэффициенты при x у трехчленов $g(x)$ и $h(x)$ равны, так что наши критерии неприменимы. Однако это обстоятельство даже упрощает решение. Действительно, $h(x)=g(x)-8$, так что $h(x_{3,4})=g(x_{3,4})-8=-8<0$, и следовательно, корни $g(x)$ расположены между корнями $h(x)$, то есть

$$x_6<x_4<x_3<x_5.$$

Для трехчленов $f(x)$ и $g(x)$ имеем $x_0=-9$,

$$f(-9)>0,\quad f'(-9)<0,\quad g'(-9)<0,\quad -3<-2,$$

и по критерию 3

$$x_2<x_4<x_3<x_1.$$

Для трехчленов $f(x)$ и $h(x)$ имеем $x_0=-1$, $f(-1)<0$, $-3<-2$, и по критерию 5

$$x_6<x_2<x_5<x_1.$$

Таким образом, $x_6<x_2<x_4<x_3<x_5<x_1$, и следовательно, решениями данного неравенства (см. рис. 10) являются

$$x<\frac{1-\sqrt{34}}{3},\quad \frac{1-\sqrt{17}}{2}\leqslant x<\frac{1-\sqrt{10}}{3},$$
$$\frac{1+\sqrt{10}}{3}<x<\frac{1+\sqrt{34}}{3},\quad x\geqslant\frac{1+\sqrt{17}}{2}.$$

5. $(x^2+2x+4-a)(x^2-2x-a)<0.$

Положим $f(x)=x^2+2x+4-a$, $g(x)=x^2-2x-a$. Заметим, что если дискриминант одного из этих трехчленов отрицателен, то этот трехчлен положителен при всех x, и для соответствующих значений a данное неравенство сводится к квадратному. Рассмотрение этих случаев мы предоставляем читателям и будем считать, что оба дискриминанта положительны, что выполняется при $a>3$. Тогда $f(x)$ и $g(x)$ имеют по два различных корня $x_{1,2}$ и $x_{3,4}$. При этом $x_0=-1$, $f(-1)=3-a<0$, $2>-2$ и по критерию 2 $x_2<x_4<x_1<x_3$. Поэтому при $a>3$ решениями данного неравенства являются (см. рис. 11)

$$-1-\sqrt{a-3}<x<1-\sqrt{a+1},$$
$$-1+\sqrt{a-3}<x<1+\sqrt{a+1}.$$

Полное решение неравенства с учетом «особых» значений параметра $a=3$ и $a=-1$ (когда один из дискриминантов равен 0) записывается в виде: при $a\leqslant-1$ решений нет; при $-1<a<3$ получаем $1-\sqrt{a+1}<x<1+\sqrt{a+1}$; при $a>3$ получаем $-1-\sqrt{a-3}<x<1-\sqrt{a+1}$, $-1+\sqrt{a-3}<x<1+\sqrt{a+1}$.

6. *При каких значениях a система неравенств*

$$2x^2-3ax-9\leqslant 0,\quad x^2+ax-2\geqslant 0$$

имеет решение?

Заметим, что каждый из квадратных трехчленов

$$f(x)=2x^2-3ax-9 \text{ и}$$
$$g(x)=2x^2+2ax-4$$

имеет два различных корня, и

$$f(x)\leqslant 0\Leftrightarrow x_2\leqslant x\leqslant x_1,$$
$$g(x)\geqslant 0\Leftrightarrow x\leqslant x_4 \text{ или } x\geqslant x_3.$$

Для того чтобы данная система имела решение, необходимо и достаточно, чтобы отрезок $[x_2;\ x_1]$ имел хотя бы одну общую точку с одним из лучей $]-\infty;\ x_4]$ и $[x_3;\ +\infty[$. Это выполняется (без учета возможности совпадения корней) во всех наших критериях, кроме четвертого: система не имеет решений тогда и только тогда, когда $x_4 < x_2 < x_1 < x_3$.

Так как $f(x) = g(x) \Leftrightarrow ax = -1$, то при $a \neq 0$ имеем $x_0 = -\frac{1}{a}$,

$$f\left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{2}{a^2} - 6,\quad f'\left(-\frac{1}{a}\right) = -\frac{4}{a} - 3a,$$

$$g'\left(-\frac{1}{a}\right) = -\frac{4}{a} + 2a$$

и по критерию 4 должна выполняться система неравенств

$$2 - 6a^2 > 0,\quad -\left(\frac{4}{a} + 3a\right) 5a > 0.$$

Легко убедиться, что эта система не имеет решений, так что «плохих» значений $a \neq 0$ не существует, то есть при любых $a \neq 0$ данная система имеет решение. Поскольку при $a = 0$ она также имеет решение, решениями задачи 6 являются все значения a.

7. *При каких значениях a множество решений системы неравенств*
$x^2 + 2x + a + 1 \geqslant 0,\ x^2 + x + 2a - 1 \leqslant 0$
представляет собой отрезок длины 1?

Дискриминанты трехчленов

$$f(x) = x^2 + 2x + a + 1 \text{ и}$$
$$g(x) = x^2 + x + 2a - 1$$

равны соответственно $-4a$ и $5 - 8a$, поэтому при $a > 5/8$ заданная система не имеет решений, а при $0 < a < 5/8$ она равносильна неравенству $g(x) \leqslant 0$ и выполняется на отрезке $[x_4;\ x_3]$. Из условия

$$x_3 - x_4 = 1 \Leftrightarrow \sqrt{5 - 8a} = 1 \Leftrightarrow a = 1/2$$

и так как $0 < 1/2 < 5/8$, получаем, что $a = 1/2$ является решением задачи.

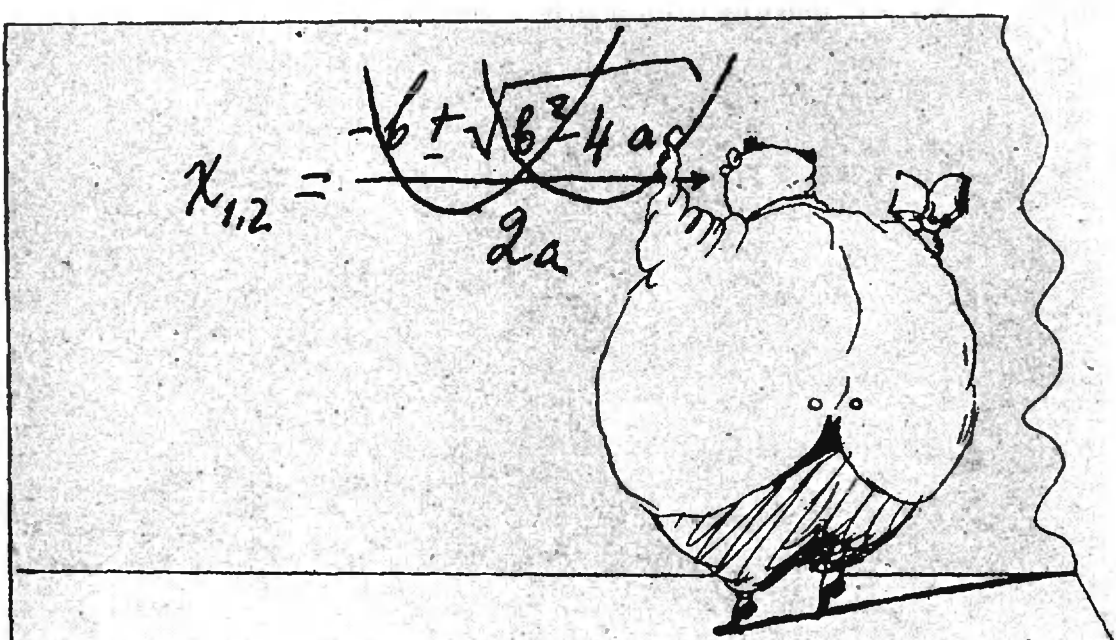
При $a = 0$ и при $a = 5/8$ решениями системы являются соответственно $-(1 + \sqrt{5})/2 < x < (\sqrt{5} - 1)/2$ и $x = -1/2$, так что $a = 0$ и $a = 5/8$ не являются решениями задачи.

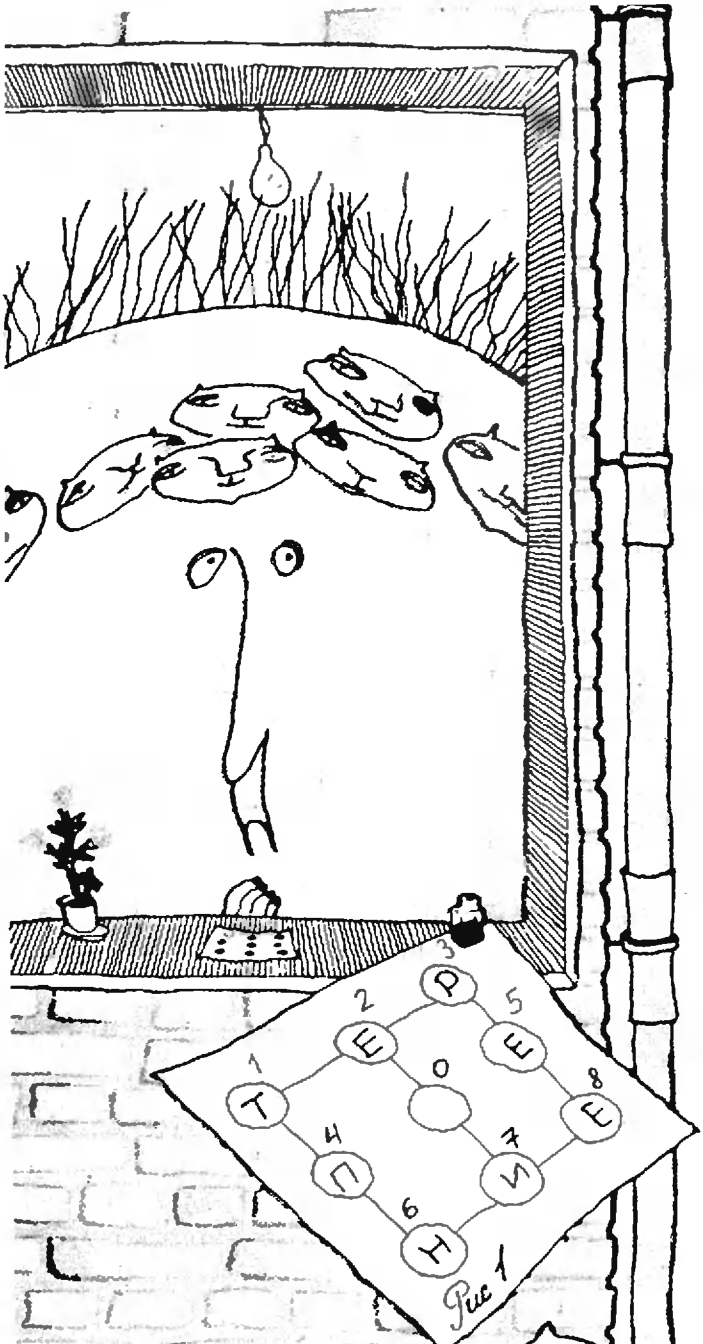
Далее считаем, что $a < 0$. Находим $x_0 = a - 2$, $f(a-2) = a^2 - a + 1 > 0$, $f'(a-2) = 2a - 2 < 0$ и $2 > 1$, так что (см. критерий 4) $x_4 < x_2 < x_1 < x_3$. Поэтому условие задачи выполняется при $x_1 - x_2 = 1$, откуда находим $a = -1$. Ответ: $a = -1$ и $a = 1/2$.

Заметим, что критерии 1—6 не предусматривают случая, когда трехчлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют общий корень. На практике, как правило, случай совпадения корней лучше рассматривать отдельно, как «особый».

Упражнения.
Решите неравенства:

1. $|x^2 + 10x + 5| < |2x^2 + 21x + 8|$.
2. $|x - a| < 3x - x^2 - 1$.
3. $16a^2x^4 - 8a^2x^2 + 16x + a - 4 \geqslant 0$ $(a > 0)$.
4. Решите систему неравенств
$3x^2 + 2kx - k - 1 \leqslant 0$ $(k = 1, 2, \ldots, 10)$.





Путешествия по графам

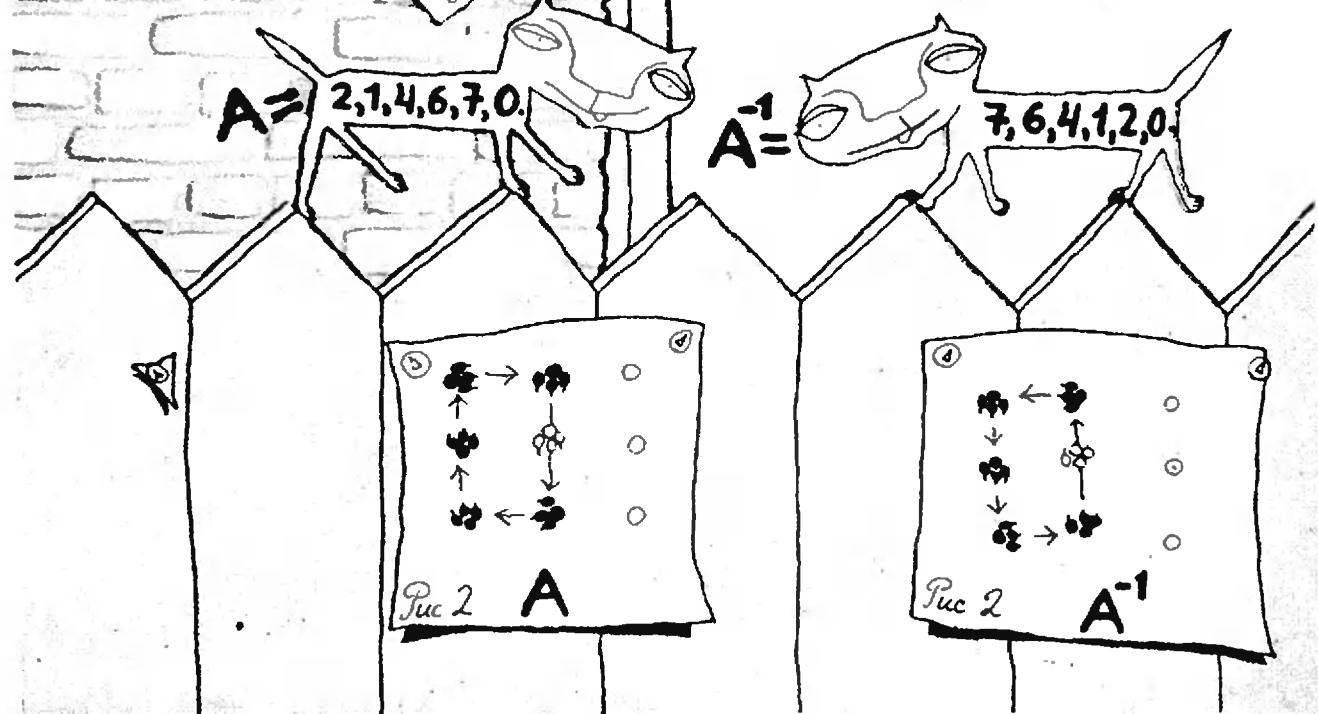
Д. И. ВАКАРЕЛОВ (НРБ)

Появление знаменитого кубика Рубика вызвало большой интерес к головоломкам и играм, основанным на перестановках каких-либо предметов. Для математика такие головоломки интересны прежде всего потому, что поиск их решения подчас представляет собой весьма непростую математическую задачу, требующую большого интеллектуального напряжения и остроумия.

Мы предлагаем вам широкий класс игр, обобщающих знаменитую игру в «пятнадцать» Сэма Ллойда. Некоторые из них по трудности не уступают кубику Рубика, причем, в отличие от него, очень просты в изготовлении, так что каждый может придумать и изготовить сколько угодно таких головоломок. Мы расскажем о двух играх этого класса, а затем дадим их общее описание.

Головоломка ТЕРПЕНИЕ

Вырежьте из картона восемь кружков с пятикопеечную монету и напишите



на каждом из них одну из букв слова ТЕРПЕНИЕ. На листе бумаги начертите схему, изображенную на рисунке 1, которую будем называть *игровым полем*. Кружки игрового поля будем называть *ячейками*, а написанные около них числа — *номерами* ячеек. Ячейки, соединенные отрезками, будем называть *соседними*. Расположите кружки-фишки в произвольном порядке в ячейках игрового поля так, чтобы центральная ячейка (№ 0) осталась свободной. Под *ходом* будем понимать перемещение некоторой фишки в соседнюю с ней свободную ячейку. Первым ходом игры может быть перемещение фишки из ячейки с номером 2 или 7 в ячейку с номером 0. Цель игры состоит в том, чтобы посредством серии ходов привести произвольно расставленные фишки в конфигурацию, показанную на рисунке 1.

А пока попробуйте, не читая статью дальше, вооружиться терпением и самостоятельно решить головоломку ТЕРПЕНИЕ. Для этого сначала решите более легкую задачу.

Задача 1. *Из произвольной конфигурации фишек на игровом поле посредством серии ходов получите конфигурацию, в которой буквы* Т, П, Н *и* И *оказываются на своем месте.*

В результате мы получим либо стандартную конфигурацию, либо одну из следующих трех:

	Т	Р	Е		Т	Е	Е		Т	Е	Е
$a=$	П		Е	$b=$	П		Р	$c=$	П		Е
	Н	И	Е		Н	И	Е		Н	И	Р

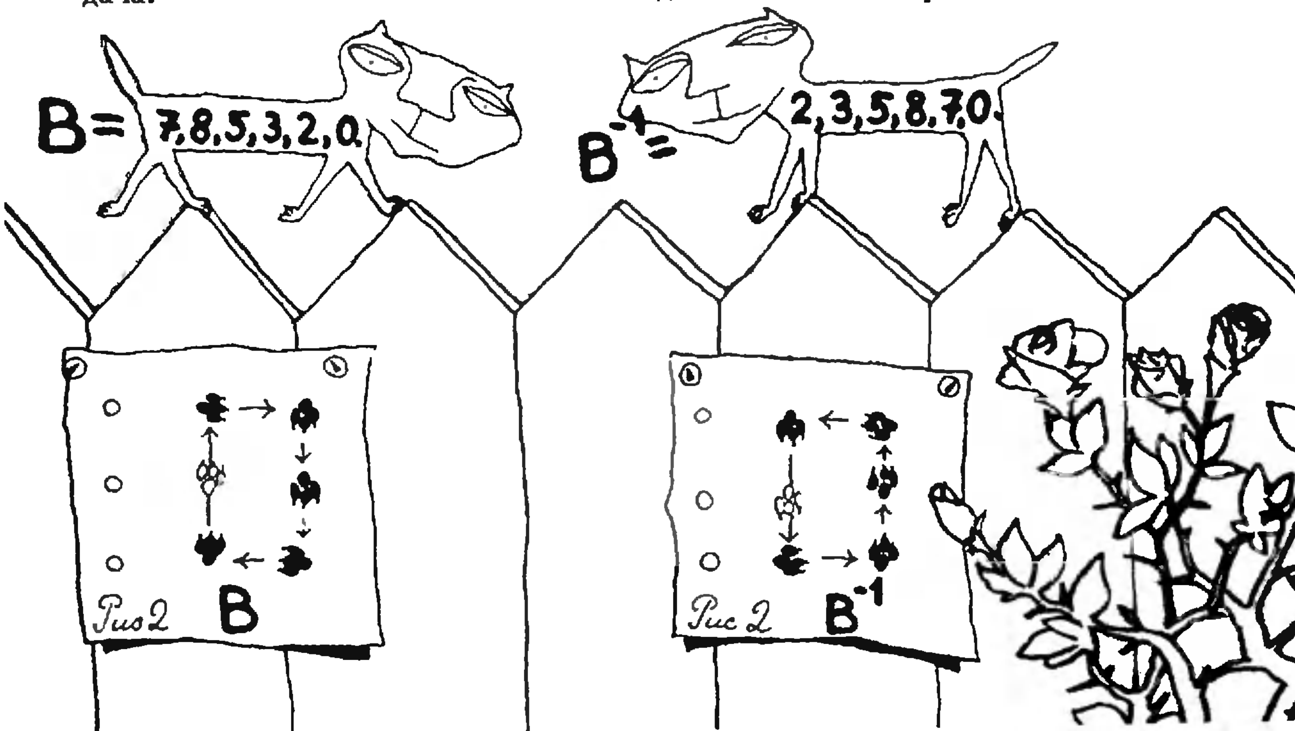
Поэтому возникает следующая задача.

Задача 2. *Найдите три последовательности ходов, X, Y и Z, которые соответственно преобразуют конфигурации a, b и c в стандартную.* Последовательность ходов будем записывать последовательностью номеров ячеек, занимаемых фишками, которыми делается очередной ход.

Вот одно из решений задачи 2, дающее вместе с решением задачи 1 алгоритм решения игры ТЕРПЕНИЕ.
X = 2,3,5,8,7,0,2,1,4,6,7,8,5,3,2,0,7,8,5,3,2,0,7,6,4,1,2,3,5,8,7,0,2,1,4,6,7,0,2,3,5,8,7,6,4,1,2,3,5,8,7,0 (52 хода);
Y = 7,8,5,3,2,0,7,8,5,3,2,0,7,6,4,1,2,3,5,8,7,0,2,1,4,6,7,0,2,3,5,8,7,6,4,1,2,0,7,8,5,3,2,0,7,8,5,3,2,1,4,6,7,0 (54 хода);
Z = 7,6,4,1,2,3,5,8,7,0,2,3,5,8,7,0,2,1,4,6,7,8,5,3,2,0,7,6,4,1,2,0,7,8,5,3,2,1,4,6,7,0,2,3,5,8,7,0,2,3,5,8,7,0 (54 хода).
Любителям рекордов предлагаем найти более короткие алгоритмы.

Алгебра и геометрия допустимых преобразований

Предложенный выше алгоритм имеет существенный недостаток: его трудно запомнить. Кроме того, неясно, каким образом получены последовательности X, Y и Z. Трудно рассчитывать, что только с помощью метода проб и ошибок можно получать столь длинные последовательности ходов, осуществляющих подходящие преобразования. Попробуем поэтому более пристально разобраться в «устройстве» последовательностей X, Y и Z. Нетрудно заметить, что определенные серии ходов в них повторяются. Это наводит на мысль выбрать несколько та-



ких серий, действие которых обозримо и легко запоминается, а затем составлять из них любую последовательность ходов. При этом оказываются полезными следующие четыре серии (ячейка с номером 0 свободна перед их выполнением):
$A=2,1,4,6,7,0$, $A^{-1}=7,6,4,1,2,0$, $B=$ $=7,8,5,3,2,0$, $B^{-1}=2,3,5,8,7,0$. Обозначения A^{-1} и B^{-1} показывают, что действия этих серий обратны действиям серий A и B.

Условимся A, A^{-1}, B и B^{-1} называть *элементарными сериями*, а преобразования, которые они производят — *элементарными* (*допустимыми*) преобразованиями. На рисунке 2 изображены наглядные *схемы-графики*, демонстрирующие действия этих серий на фишки игрового поля.

Элементарные серии имеют одно полезное свойство: после их выполнения центральная ячейка снова становится свободной, что дает возможность выполнять их в произвольном порядке одну за другой. Конечную последовательность элементарных серий, например A, AB, $A^{-1}BA$, будем называть *допустимой серией* или *формулой*, а ее действие на фишки игрового поля — *допустимым преобразованием*. При исследовании действия различных формул условимся использовать фишки, на которых вместо букв написаны цифры от 1 до 8. Тогда *стандартной конфигурацией* фишек будем считать ту, при которой каждая фишка находится в ячейке с соответствующим ей номером.

Опишем «алгебру допустимых серий», которая нам поможет производить алгебраические преобразования допустимых серий с целью их упрощения.

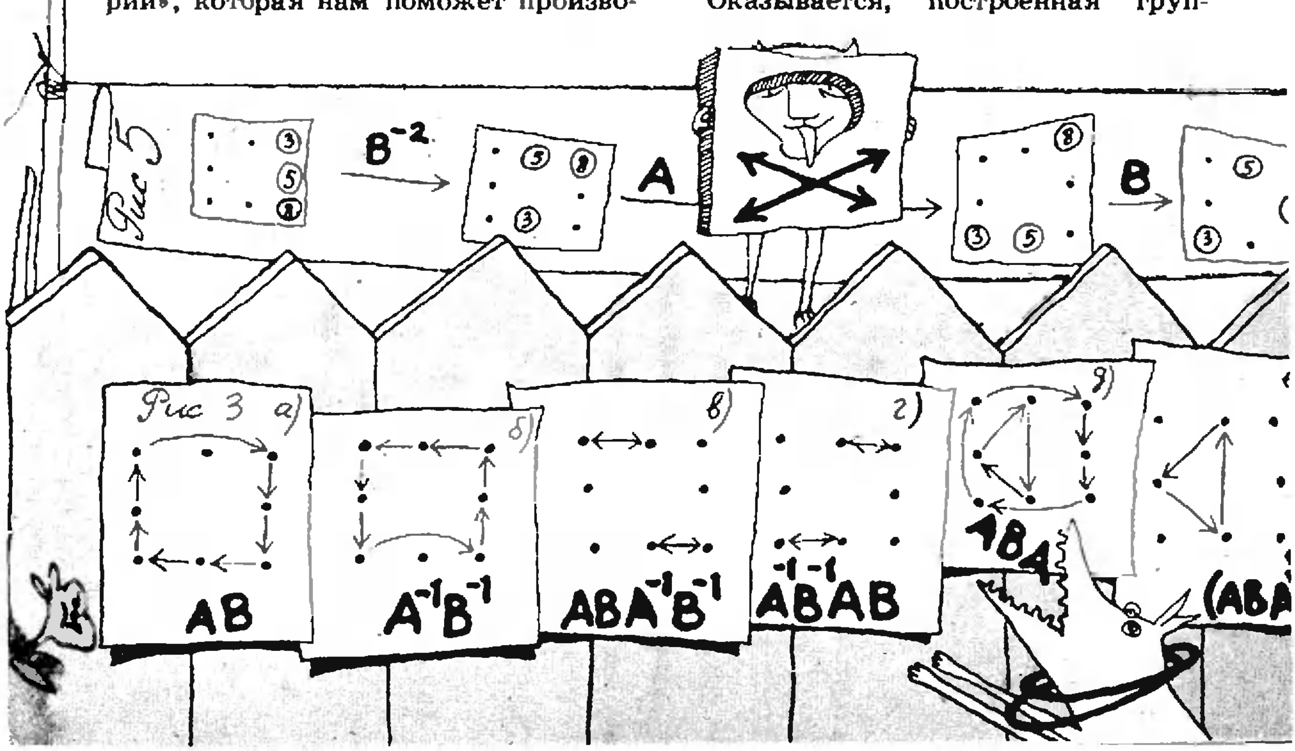
Если две формулы X и Y производят одинаковые преобразования, то будем писать $X=Y$. Пустую серию ходов, которая не изменяет конфигурацию будем обозначать символом 1. Если X и Y — две допустимые серии, то произведение XY тоже является допустимой серией, действие которой состоит в последовательном выполнении X и Y. Нетрудно видеть, что $A^{-1}A=$ $=AA^{-1}=1$, $B^{-1}B=BB^{-1}=1$. Аналогично, для любого допустимого преобразования X имеется *обратное*, то есть такое, что $X^{-1}X=XX^{-1}=1$.

Пусть G_1 — множество всех допустимых преобразований. В этом множестве определена операция *умножения*, то есть для любых X и Y из G_1 определено *произведение* XY, состоящее в последовательном выполнении преобразования X, а затем — преобразования Y.

Это умножение обладает следующими свойствами: 1) $(XY)Z=X(YZ)$; 2) существует преобразование 1 такое, что $X\cdot 1=1\cdot X=X$; 3) для любого X существует X^{-1} такое, что $X^{-1}X=$ $=XX^{-1}=1$.

В математике произвольное множество G, в котором введена операция умножения, обладающая свойствами 1—3, называется *группой*. Мы показали, что построенная нами совокупность допустимых преобразований G_1 является группой. Можно при этом добавить, что группа G_1 *порождается* преобразованиями A и B.

Оказывается, построенная груп-



па G_1 обладает достаточным набором преобразований для решения головоломки ТЕРПЕНИЕ.

Задача 3. *Пусть дана произвольная конфигурация фишек игры ТЕРПЕНИЕ со свободной центральной ячейкой. Докажите, что существует формула X из G, которая дает решение игры ТЕРПЕНИЕ.*

Решение этой задачи будет получено после того, как мы найдем алгоритм решения игры ТЕРПЕНИЕ.

Мы выясним также, какие конфигурации фишек, на которых написаны номера от 1 до 8, могут быть приведены к стандартной конфигурации.

Упражнения

1. Пусть некоторое преобразование $X \in G_1$ допускает запись $X = X_1 X_2 \dots X_n$, где $X_i \in G_1$. Докажите, что $X^{-1} = X_n^{-1} \cdot X_{n-1}^{-1} \cdot \ldots \cdot X_1^{-1}$.

2. Нарисуйте графики действия преобразований A^2, A^3, B^2, B^3, $ABAB^{-1}A^{-1}$.

3. Пусть некоторая фишка неподвижна при выполнении преобразования X. Докажите, что она останется неподвижной и при преобразовании $P^{-1}XP$, где P — допустимое преобразование.

4. Докажите тождества $A^5 = B^4 = 1$, $A^4 = A^{-1}$, $A^3 = A^{-2}$, $(ABA^{-1})^4 = AB^{-1}A^{-1}$.

Тождества, подобные приведенным в упражнении 4, помогают упрощать формулы, делая их запись более компактной, а в некоторых случаях — устанавливать тождественность формул.

«Программирование формул»

При поисках алгоритма решения головоломки наиболее трудным делом является описание формул с заранее заданными графиками. Это немного напоминает программирование, при котором команды — это элементарные преобразования, а программы — формулы, то есть последовательности команд.

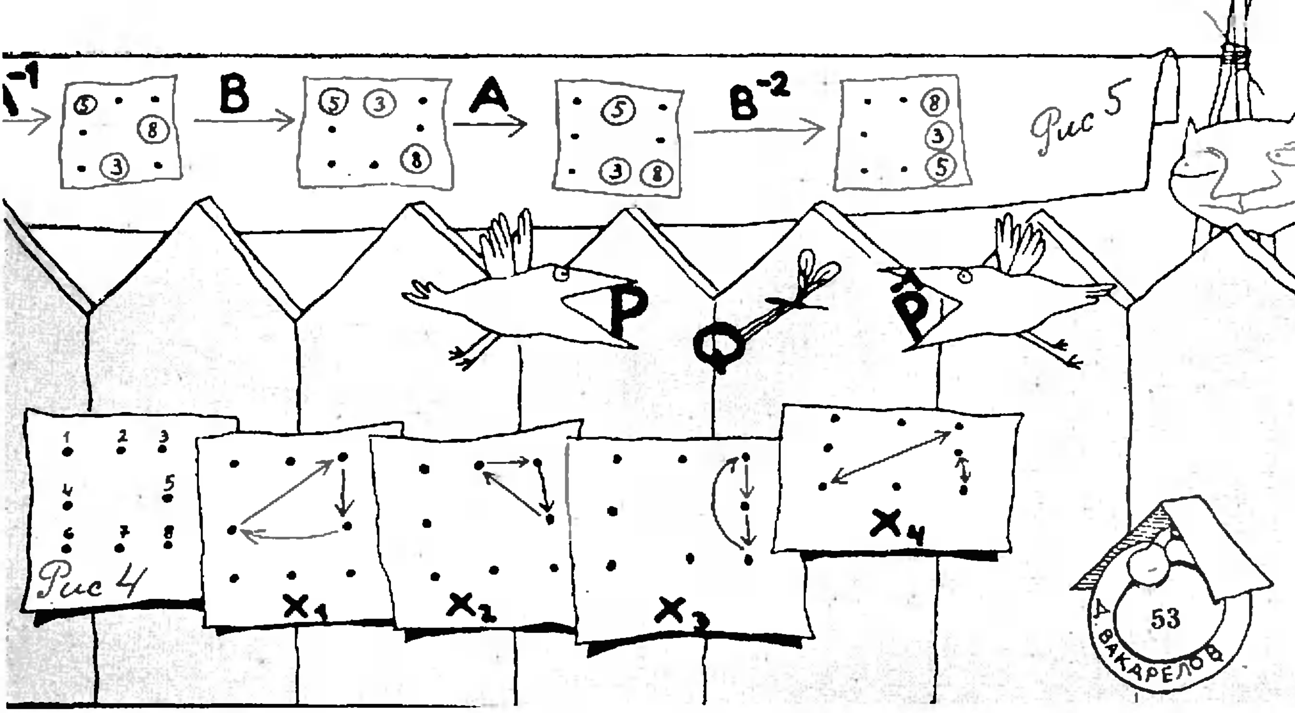
Рассмотрим некоторые практические приемы этого своеобразного программирования.

А. Преобразования $ABA^{-1}B^{-1}$ и $A^{-1}B^{-1}AB$, действие которых показано на рисунках 3, *в*, *г*, называются *коммутаторами*. Они интересны тем, что переставляют некоторые пары точек, оставляя остальные точки неподвижными.

Б. Очень интересно преобразование ABA (рис. 3, *д*), распадающееся на два цикла. Для него $(ABA)^5$ — это цикл, показанный на рисунке 3, *е*.

В задаче 2 для преобразования конфигурации *а* к стандартному виду нужно было найти последовательность ходов, при которой буквы P и E оказываются на своих местах. Легко видеть, что этого можно добиться с помощью преобразования X_2, график которого показан на рисунке 4, *б*.

В. Рассмотрим операцию, которая в теории групп называется *сопряжением*. С ее помощью можно действие некоторого преобразования перенести на другую зону игрового поля. Например, найдем формулу для преобразования X_1 (см. рис. 4, *б*). Для этого с помощью преобразования B^{-2} перемещаем фишку 3 на место фишки 7, а фишку 5 — на место фишки 2. Затем применяем цикл $(ABA)^5$ и, наконец, преобразованием B^2 возвращаем фишки 2 и 7 на старые места.



Получился цикл 4→3→5→4 с формулой $B^{-2}(ABA)^5B^2$.

В общем случае операция сопряжения имеет вид $Q_1=PQP^{-1}$. При этом говорят, что преобразование Q *сопряжено* с преобразованием Q_1. В нашем случае $Q=(ABA)^5$, $P=B^{-2}$.

Аналогично $X_2=A^{-2}X_1A^2$ и $X_3=B^{-1}X_2B$. Отметим, что X_2 и X_3 осуществляют такое же действие, как преобразования X и Z из задачи 2, но имеют значительно большую длину. Преобразование Y, как легко понять, допускает запись $Y=Z^2$.

Сопряжением коммутатора $A^{-1}B^{-1}AB$ с B^{-2} получаем формулу для $X_1=B^{-2}(A^{-1}B^{-1}AB)B^2=B^{-2}A^{-1}B^{-1}AB^{-2}$ (мы воспользовались тем, что $B^3=B^{-2}$).

Г. При построении формул с нужными свойствами можно действовать и иначе. Осуществим для примера цикл 3→5→8→3. Будем выполнять перемещения фишек 3, 5, 8, не интересуясь судьбой остальных фишек, так, как показано на рисунке 5. В результате мы получим нужную перестановку с формулой $B^{-2}ABA^{-1}BAB^{-2}$. Теперь нужно проследить, что же происходит с остальными фишками. Для этого строим график полученного преобразования (рисунок 6, *а*). Получился еще один цикл длины 5, который можно уничтожить, даже не возведя в 5-ю степень, а с помощью предварительного выполнения операции A^{-1}. Итак, $X_3=A^{-1}B^{-2}ABA^{-1}BAB^{-2}$.

Упражнение 5. Запишите формулы для преобразований, заданных графиками на рисунках 6 *в*, *г*.

Алгоритм решения игры ТЕРПЕНИЕ

Мы будем пользоваться формулой для X_4 и операцией сопряжения. Решение осуществляется в два этапа.

Первый этап. *Установка на свои места трех букв* Е. Для этого специальные формулы не нужны, хотя при желании можно их выписать для каждой конкретной позиции.

Второй этап. *Установка на свои места остальных букв.* Она осуществляется в зависимости от содержимого ячейки 3 преобразованиями, показанными в следующей таблице:

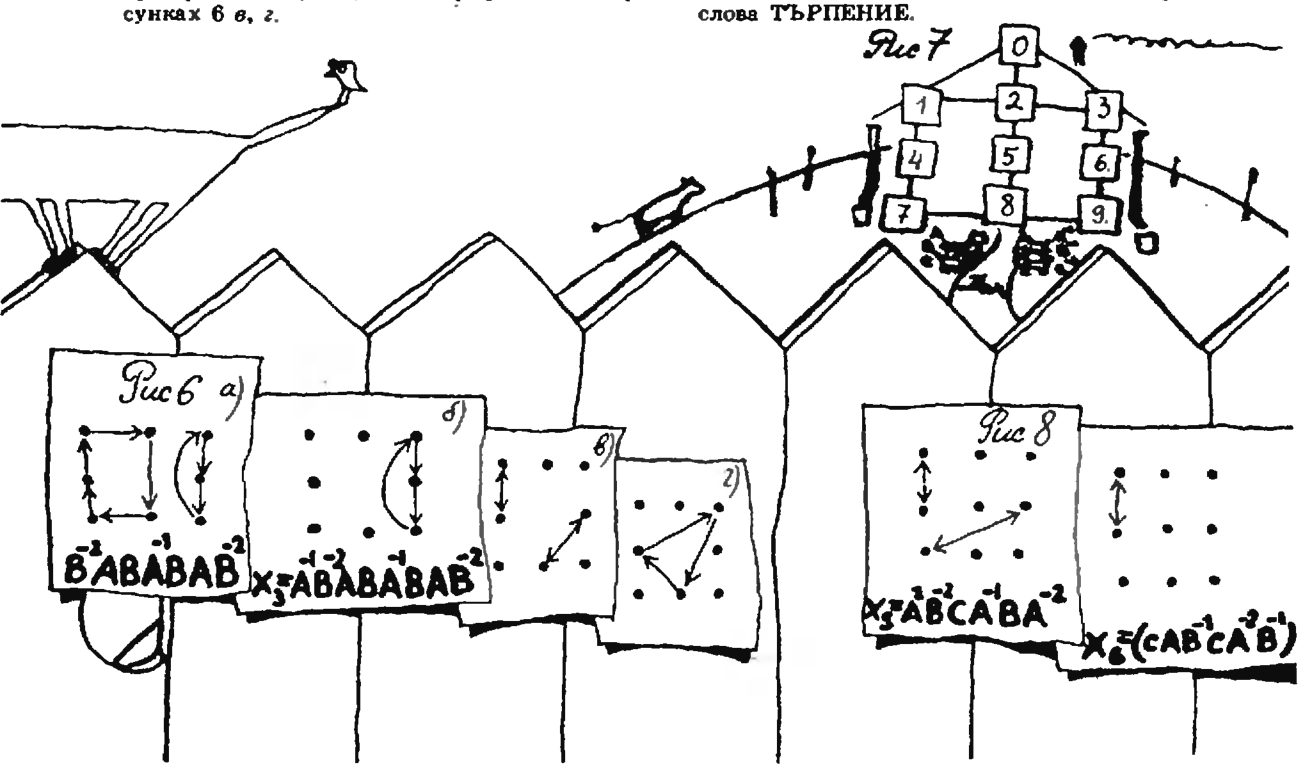
Буква в ячейке 3	Преобразование, ставящее ее на место
Т	$A^{-2}X_4A^2=A^{-2}B^{-2}A^{-1}B^{-1}AB^{-2}A^2$
П	$A^{-1}X_4A=A^{-1}B^{-2}A^{-1}B^{-1}AB^{-2}A$
Н	$X_4=B^{-2}A^{-1}B^{-1}AB^{-2}$
И	$AX_4A^{-1}=AB^{-2}A^{-1}B^{-1}AB^{-2}A^{-1}$
Р	X_4 — если стандартная конфигурация еще не достигнута

В приведенном алгоритме существенно используется то, что в слове ТЕРПЕНИЕ две буквы Е.

Найденный алгоритм решения игры ТЕРПЕНИЕ полностью решает задачу 3. Но мы еще не знаем, какие конфигурации приводятся к стандартной. В следующих упражнениях игровое поле совпадает с полем игры ТЕРПЕНИЕ.

Упражнения

6. Получите алгоритмы решения игр для английского слова PATIENCE и болгарского слова ТЪРПЕНИЕ.



7. Постройте теорию игр УПОРСТВО, ВЕРЕНИЦА, СМЕКАЛКА — в этих словах есть по две повторяющиеся буквы, но стоят они не на тех местах, как в игре ТЕРПЕНИЕ.

Группа игры ТЕРПЕНИЕ

Каждый элемент α группы G_1 переставляет фишки. Пусть $\alpha(i)$ — номер фишки, на место которой переходит фишка из ячейки i. Набор чисел $\alpha(1)$, $\alpha(2), \ldots, \alpha(8)$ называется *перестановкой* из чисел 1,2,...,8. Итак, каждому элементу группы G_1 соответствует некоторая перестановка.

Множество S_n всех перестановок множества из n элементов образует группу (произведение $\alpha\beta$ перестановок α и β заключается в их последовательном выполнении, то есть $(\alpha\beta)(i) = \beta(\alpha(i))$). Эта группа называется *симметрической* группой. Мы убедились, что группу G_1 можно считать частью группы S_8.

Пусть теперь $f = f(x_1, x_2, \ldots, x_8)$ — некоторый многочлен от восьми переменных и $\alpha \in S_8$ — некоторая перестановка. Заменим теперь в многочлене f переменную x_1 на $x_{\alpha(1)}$, переменную x_2 — на $x_{\alpha(2)}$, ..., переменную x_8 — на $x_{\alpha(8)}$. Мы получим новый многочлен

$$\alpha f = f(x_{\alpha(1)}, x_{\alpha(2)}, \ldots, x_{\alpha(8)}).$$

Понятно, что для двух перестановок α и β будет $(\alpha\beta)f = \beta(\alpha f)$.

Рассмотрим многочлен

$$P_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1 - x_2)(x_1 - x_3)\ldots(x_1 - x_n)\ldots (x_2 - x_3)\cdot\ldots\cdot(x_2 - x_n)\cdot\ldots\cdot(x_{n-1} - x_n).$$

Перестановка $\alpha \in S_n$ называется *четной*, если $\alpha P_n = P_n$, и *нечетной*, если $\alpha P_n = -P_n$.

Упражнения

8. Докажите, что при перестановке любых двух переменных x_i и x_j многочлен P_n переходит в $-P_n$.

9. Любая перестановка либо четна, либо нечетна.

10. Если α и β — перестановки одинаковой четности, то $\alpha\beta$ — четная перестановка.

11. Если α и β — перестановки разной четности, то $\alpha\beta$ — нечетная перестановка.

12. Перестановки α и α^{-1} имеют одинаковую четность.

13. Перестановки, соответствующие элементарным сериям A, A^{-1}, B, B^{-1}, — четные.

Из упражнений 8—12 следует, что множество A_n всех четных перестановок образует группу. Эта группа называется *знакопеременной группой порядка n*.

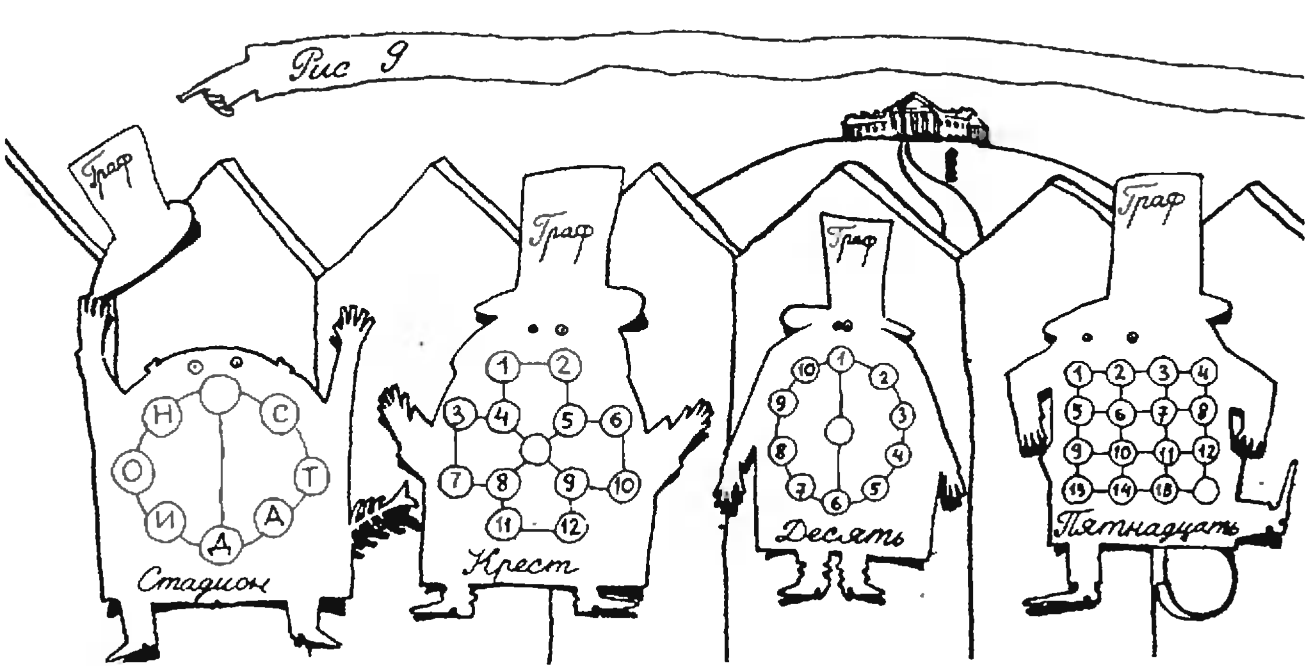
Из упражнения 13 следует, что $A_8 \supset G_1$. Пользуясь существованием алгоритма решения игры ТЕРПЕНИЕ и результатами упражнений 10—12, можно доказать, что $A_8 = G_1$. Следовательно, с помощью G_1 можно осуществить любую четную перестановку фишек 1,2,...,8 и нельзя осуществить никакую нечетную перестановку.

Упражнение 14. Докажите, что любую позицию можно перевести либо в стандартное положение, либо в такое, которое отличается от стандартного перестановкой фишек 5 и 8.

Головоломка ДОМ

Игровое поле этой игры изображено на рисунке 7. Фишки для игры занумерованы цифрами от 1 до 9. В качестве элементарных серий игры используются следующие:

$A = 1,4,7,8,5,2,0$; $A^{-1} = 2,5,8,7,4,1,0$;
$B = 2,5,8,9,6,3,0$; $B^{-1} = 3,6,9,8,5,2,0$;
$C = AB = 1,4,7,8,9,6,3,0$; $C^{-1} = 3,6,9,8,7,4,1,0$.



Алгоритм решения использует следующие две формулы:

$$X_5 = A^2B^{-2}(ABA^{-1}B^{-1})B^2A^{-2} = A^2B^{-2}CA^{-1}BA^{-2};$$

$$X_6 = (ABAB^{-1}ABA^{-2}B^{-1})^3 = (CAB^{-1}CA^{-2}B^{-1})^3.$$

Эти формулы можно получить с помощью описанных выше приемов.

Этап 1. *Установка на места фишек 1,4,7 и 8.* Для этого специальных формул не требуется.

Этап 2. *Установка на места фишек 2,3,5,6 и 9.* Для этой цели используется формула X_5 (аналогично тому, как использовалась формула X_4 на этапе 2 алгоритма игры ТЕРПЕНИЕ). Отметим, что при каждом использовании формулы X_5 меняют свои места фишки 1 и 4. Поэтому в конце этапа они могут оказаться переставленными. Тогда с помощью формулы X_6 ставим их на свои места. Пусть G_2 — группа игры ДОМ.

Упражнение 15. Докажите, что группа G_2 совпадает с симметрической группой S_9. Указание. Доказательство следует из существования описанного выше алгоритма решения.

Путешествия по графам

Читателю уже должно быть ясно, как можно самостоятельно придумать новые игры типа ТЕРПЕНИЕ и ДОМ. На рисунке 9 приведены еще несколько примеров таких игр.

Упражнения

16. Найдите алгоритмы решения игр ПЯТНАДЦАТЬ, ДУМАЙ БЫСТРЕЕ, КОМБИНАТОР и КУБОЛОГИЯ. Докажите, что соответствующие им группы — знакопеременные (типа A_n).

Обратите внимание, что все игры из упражнения 16 содержат по две одинаковые фишки (в первой из них — это фишки 6 и 9).

17. Найдите алгоритмы решения игр СТАДИОН, КРЕСТ, ДЕСЯТЬ. Покажите, что соответствующие им группы симметрические (типа S_n).

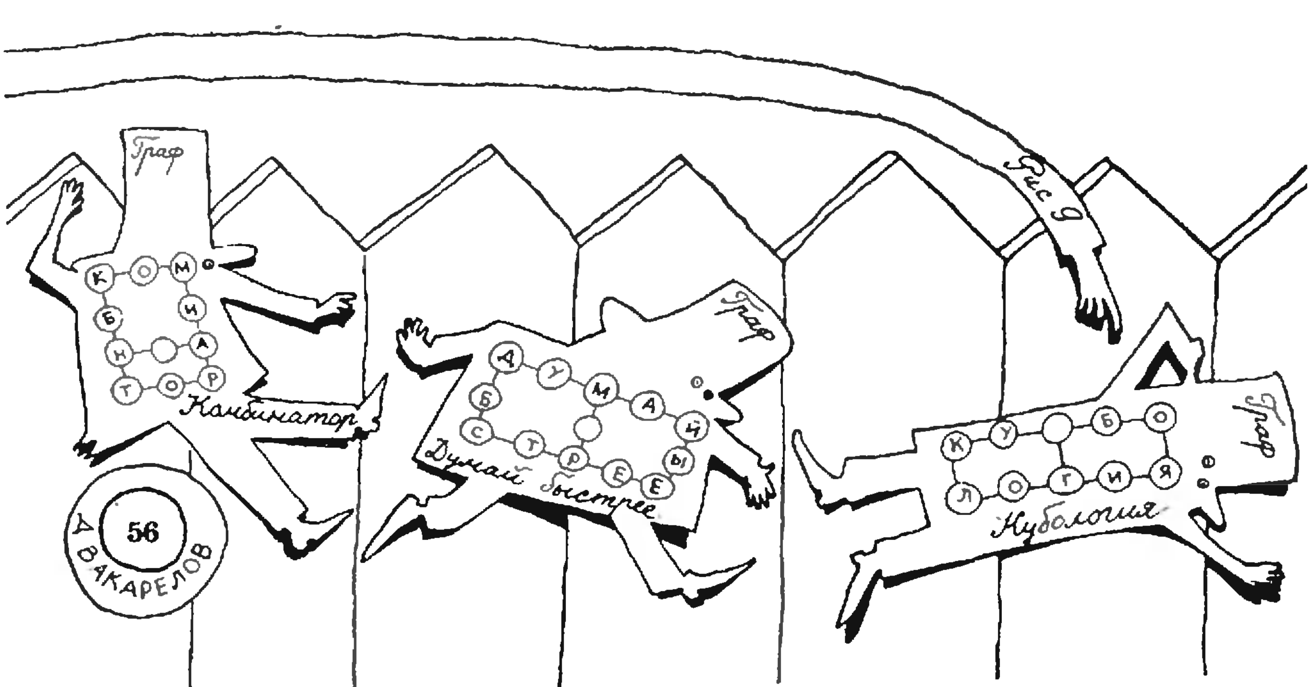
18. Докажите, что группы S_n и A_n содержат соответственно $n! = 1,2...n$ и $\frac{1}{2}\,n!$ элементов.

Фигуры, подобные игровым полям рассмотренных головоломок, называются *графами*. Отсюда их общее название — «путешествия по графам». Более точно, *граф* — это конечное множество точек, называемых *вершинами*, некоторые из которых соединены дугами, называемыми *ребрами графа*. Очевидно, что любой граф можно связать с одной или несколькими играми и группами перестановок, которые им соответствуют. Читатель, может быть, уже заметил, что группы рассмотренных игр являются либо знакопеременными (типа A_n), либо симметрическими (типа S_n). Оказывается, что это не случайно: при некоторых весьма общих ограничениях на структуру графов им всегда будут соответствовать группы либо типа A_n, либо типа S_n. Чтобы сформулировать более точно эту удивительную закономерность, нам понадобятся следующие определения.

Под *простым циклом длины k* ($k \geqslant 3$) будем понимать последовательность вершин графа $P_1,...,P_k$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $P_1 = P_k$ (то есть начальная и последняя вершина цикла совпадают);

2) P_i и P_{i+1} связаны ребром ($i = 1,...,k-1$),



3) $P_i \neq P_j$ при $i \neq j$ $(i,\ j=1,...,k-1)$.

Граф будем называть *циклическим*, если любые две вершины этого графа принадлежат некоторому простому циклу.

Теорема. *Пусть Г произвольный циклический граф с вершинами P_0, $P_1,...,P_n$, а G (Г) — группа игры «путешествие по Г» с фишками 1,..., n. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если все простые циклы Г имеют четную длину, то G (Г) совпадает с группой A_n;*

2) *если граф Г отличен от графа Γ_6, изображенного на рисунке 10, и содержит хотя бы один простой цикл нечетной длины, то G (Г) совпадает с группой S_n.*

Доказательство этого утверждения мы опускаем. Заметим, что частные случаи этой теоремы уже доказаны ранее. Интерес представляет исключение, связанное с графом Γ_6 (рис. 10). На ЭВМ были вычислены все перестановки группы $G(\Gamma_6)$ и было установлено, что она является собственным подмножеством группы S_6, состоящим из 120 элементов. Если мы хотим, чтобы игра «путешествие по графу Γ_6» всегда имела решение, то необходимо использовать по крайней мере три одинаковые фишки. Это — единственный граф с таким свойством.

Модификации игр

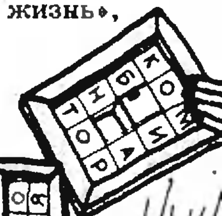
Рассмотрим теперь некоторые модификации «путешествий по графам», связанные с переворачиванием фишек и ограничениями на «правила движения».

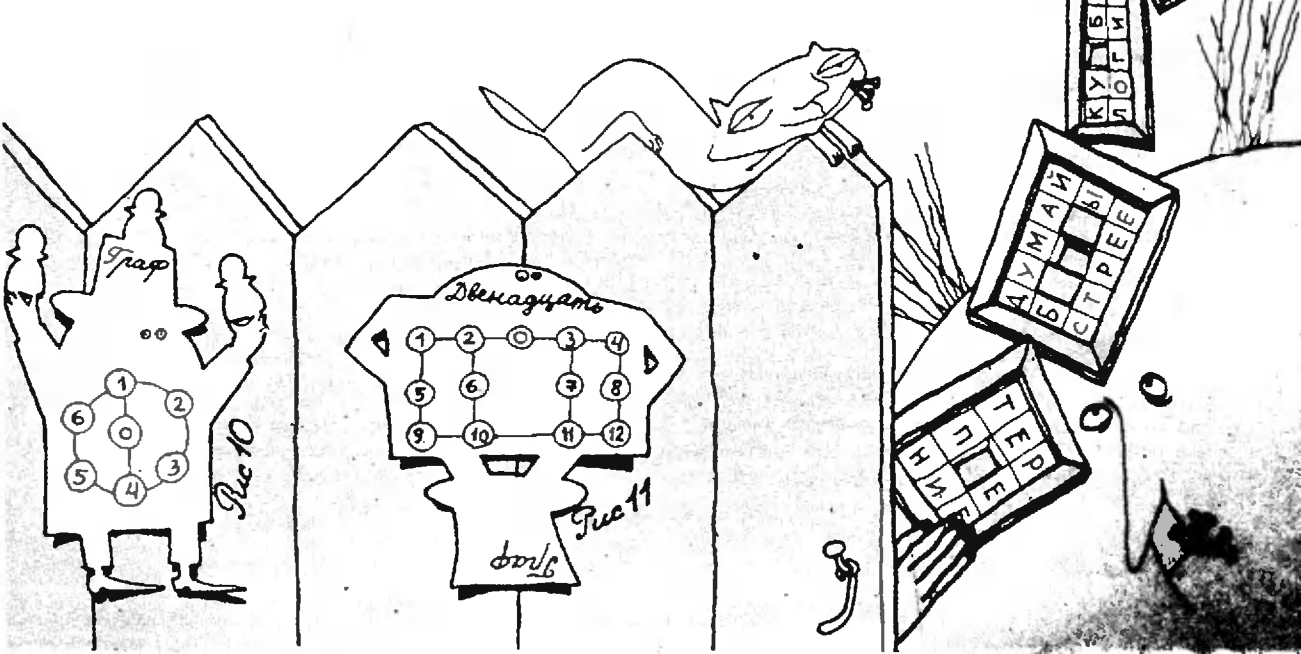
Пусть фишки для игры ДОМ имеют квадратную форму и окрашены с двух сторон: одна сторона — в белый, а другая — в черный цвет. Поместим фишки на игровое поле, изображенное на рисунке 7, причем некоторые из них поместим белой стороной вверх, а некоторые — черной. Кроме старых правил передвижения фишек по игровому полю, введем одну новую операцию R: если ячейка с номером 0 свободна, то можно перевернуть одновременно все фишки, находящиеся в ячейках 4, 5 и 6. Цель игры — с помощью допустимых преобразований и операции R перевернуть все фишки белой стороной вверх («зажигание света в окнах»). Задача усложняется, если на белой стороне каждой фишки написать соответственно цифры от 1 до 9 и потребовать, чтобы в конце игры каждая фишка была не только белой стороной вверх, но и занимала ячейку с соответствующим ей номером. Эту игру будем называть СВЕТЯЩИЕСЯ ОКНА.

Упражнение 19. Найдите алгоритмы решения для обоих вариантов игры СВЕТЯЩИЕСЯ ОКНА.

Конечно же, это далеко не единственный прием введения эффекта переориентации фишек в играх типа «путешествие по графу». Например, в статье А. Калинина «Сначала был только кубик» («Наука и. жизнь»,

(Окончание см. на с. 60)





Заочная школа при НГУ

При Новосибирском Ордена Трудового Красного Знамени государственном университете им. Ленинского комсомола работает заочная школа (ЗШ) для учащихся 8—10 классов общеобразовательных школ Сибири, Дальнего Востока, Средней Азии и Урала.

Основная задача ЗШ — оказывать помощь в формировании и развитии у учащихся интереса к естественным наукам.

В ЗШ 5 отделений: математическое, физическое, химическое, биологическое и экономическое. На математическое, физическое и химическое отделения принимаются учащиеся 8—10 классов, на биологическое — только учащиеся 9 классов, на экономическое — только учащиеся 10 классов.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ могут быть приняты также математические, физические, химические, биологические и экономические кружки и факультативы, которые работают в школе под руководством учителя. Руководитель кружка набирает и зачисляет в них учащихся, успешно выполнивших первое задание по соответствующему предмету. Кружок принимается в ЗШ, если руководитель сообщает в ЗШ свою фамилию, имя, отчество и высылает поименный список членов кружка (с указанием итоговых оценок за первое задание), подписанный директором школы и заверенный печатью. После этого члены кружка считаются учащимися ЗШ.

Учащиеся, принятые в ЗШ, и руководители кружков будут получать задания ЗШ, а также дополнительные материалы. Работы учащихся-заочников проверяют в ЗШ, а работы членов кружка — его руководитель (по желанию руководителя часть работ членов кружка может быть проверена и в ЗШ).

Ежегодно часть учащихся 8—9 классов ЗШ приглашается в Летнюю школу при НГУ (которая работает с 1 по 22 августа). Здесь они вместе с победителями Всесибирской олимпиады слушают лекции крупных ученых, решают интересные задачи на семинарах, знакомятся с университетом и научно-исследовательскими институтами Академгородка, отдыхают и развлекаются. На период зимних каникул учащиеся ЗШ из близлежащих областей приглашаются в Зимнюю школу при НГУ.

Чтобы стать учеником Заочной школы при НГУ, необходимо *до 30 сентября* прислать на имя директора ЗШ заявление, написанное на почтовой карточке, с просьбой выслать первое задание. Заявление необходимо оформить по следующему образцу:

1. Фамилия, имя, отчество (полностью, печатными буквами)	НИКОЛАЕВ ИГОРЬ ИВАНОВИЧ
2. Класс, в котором вы учитесь в своей школе	8 «а»
3. Отделение ЗШ, на котором вы желаете учиться (можно указать два отделения)	математическое (математическое и физическое)
4. Подробный домашний адрес с обязательным указанием индекса почтового отделения	632149, Новосибирская обл., с. Мезениха, ул. Андрианова, д. 28 «а», кв. 5.

Руководитель кружка должен прислать на имя директора ЗШ письмо с просьбой выслать первое задание и дополнительные материалы к нему.

Заявление о приеме на математическое или на физическое отделение ЗШ можно выслать вместе с решениями соответствующего первого задания, публикуемого ниже, *не позднее 15 октября*.

Решения задач нужно записать в простую ученическую тетрадь в клетку, оставляя поля для замечаний преподавателя. На обложке тетради укажите те же сведения о себе, что и в заявлении. Работы отсылайте вместе с заявлением *только простой бандеролью* (тетрадь не перегибайте и не сворачивайте в трубочку). В тетрадь с решениями вложите листок размером 6×10 см с написанным на нем вашим адресом (его наклеят на конверт, когда будут отсылать ответ).

Наш адрес: 630090, Новосибирск-90, ул. Пирогова, 11,
Заочная школа при НГУ.

Первое задание по математике

8 класс

1. Вес сосновой шпалы 27,8 кг, а дубовой — 45,5 кг. Вес десяти шпал равен 384,2 кг. Сколько среди них сосновых?

2. Гаечный ключ имеет отверстие в форме квадрата со стороной 1 см. В каких пределах могут быть заключены размеры квадратной гайки, чтобы ее можно было отвинчивать этим ключом?

3. Изобразите на координатной плоскости множество точек, координаты $(x;\ y)$ которых удовлетворяют условию
$$x<y-|2x-2|.$$

4. Сколько действительных решений имеет уравнение
$$3\sqrt{x}+x+2=0?$$

5. Докажите, что произведение четырех последовательных натуральных чисел делится на 24.

6. Найдите сумму чисел

$100^2-99^2+98^2-97^2+...+4^2-3^2+2^2-1^2$.

9 класс

1. В двух неодинаковых банках с водой растворили по килограммовой пачке сахара. Известно, что в одной из них содержание сахара составляет 40 %, а в другой — 30 %. Сколько процентов сахара будет в рвстворе, если содержимое банок слить вместе и перемешать?

2. В треугольнике ABC точка M — середина медианы, проведенной к стороне BC. Выразите вектор $\vec{MC}$ через векторы $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

3. Три числа являются последовательными членами геометрической прогрессии. Если ко второму из них прибавить 2, то они будут образовывать арифметическую прогрессию, а если после этого к третьему числу прибавить 16, то они снова будут образовывать геометрическую прогрессию. Найдите эти числа.

4. Как с помощью циркуля и линейки построить треугольник по высоте и двум сторонам? Разберите все возможные случаи.

5. В четырехзначном числе $\overline{aabb}$ первые две цифры одинаковые и последние две цифры одинаковые. Известно, что это число — квадрат целого числа. Найдите его (нужно найти все решения и обосновать это).

6. Докажите, что среди любых шести человек найдутся трое, которые либо попарно знакомы друг с другом, либо попарно незнакомы между собой.

10 класс

1. Исследовать функцию $f(x)=x^3+3x^2+2x$.

2. Больше или меньше нуля значение числовой функции $f(x)=\sin x$ в точке $x=30$?

3. Гаечный ключ имеет отверстие в форме квадрата со стороной 1 см. В каких пределах могут быть заключены размеры шестиугольной гайки, чтобы ее можно было отвинчивать этим ключом?

4. В трапеции $ABCD$ точка M — середина боковой стороны AB, а точка N — середина боковой стороны CD. Средняя линия MN пересекается с диагональю AC в точке O. Известно, что площадь треугольника AMO равна 1 см^2, а площадь треугольника CNO — 5 см^2. Какова площадь трапеции $ABCD$?

5. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ большая диагональ AC' и плоскость, проходящая через ребра $A'D'$ и BC, пересекаются в точке K. Найдите длину отрезка AK, если длина ребра — 1 см.

6. Как с помощью одного только циркуля с фиксированным раствором в 1 см отметить две точки, расстояние между которыми равно $\sqrt{7}$ см?

Первое задание по физике

Экспериментальная задача 1 предназначена для учащихся всех классов. Кроме того, задачи 2—6 предназначены для восьмиклассников, 7—11 — для девятиклассников, 12—16 — для десятиклассников.

Для поступления на физическое отделение ЗШ может оказаться достаточным полностью решить одну — две задачи. Однако после разбора задач своего класса полезно (и мы вам рекомендуем) ознакомиться и с другими задачами, а понравившиеся вам задачи — попробовать решить (чем больше, тем лучше).

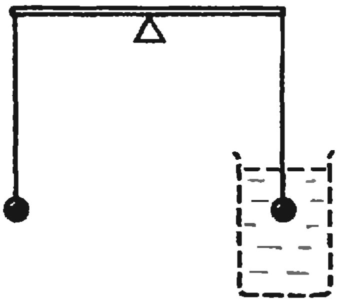


Рис. 1.

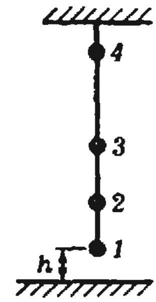


Рис. 2.

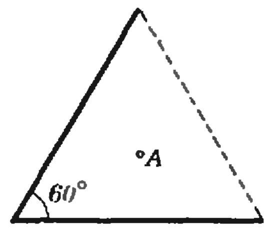


Рис. 3.

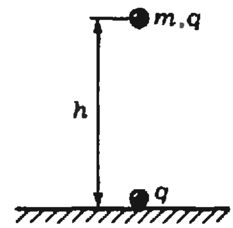


Рис. 4.

1. Проведите следующий опыт. Из пипетки осторожно капните каплю воды на сковородку, находящуюся при комнатной температуре. Засеките время полного испарения капли. Затем поставьте сковородку на плиту, включите ее. Через две минуты капните вторую каплю и засеките время ее испарения. Не выключая плитку, продолжайте с двухминутным интервалом измерение времени испарения капель в течение 20—40 минут. Постройте график зависимости времени испарения капли от ее номера и объясните его. Рекомендуется проводить опыт на не слишком большом жару, но так, чтобы в конце концов температура стала заметно выше, чем 100 °С.

2. Найдите сопротивление включенной в сеть электрической лампочки по указанным на ней параметрам.

3. Два одинаковых шарика плотностью ϱ подвешены на стержне длиной L, который покоится в равновесии на опоре (рис. 1). Один из шариков поместили в стакан с водой. На сколько нужно сдвинуть точку опоры, чтобы система осталась в равновесии? Массой стержня пренебречь.

4. В сосуде с водой плавает пустой стакан. Как изменится уровень воды в сосуде, если часть воды из сосуда влить в стакан так, чтобы он продолжал плавать?

5. В комнате на предварительно разогретую электроплитку постоянной мощности поставили кастрюлю с водой. На нагрев воды от 10 до 20 °С было затрачено время τ_{10}, а от 80 до 90 °С — время τ_{80}. Что больше: τ_{10} или τ_{80}?

6. Как известно, 2/3 поверхности Земли занято океаном. Приняв среднюю глубину океана $h=4$ км, найдите, во сколько раз увеличилось бы среднее атмосферное давление, если бы вода в океанах Земли полностью испарилась. Высота столба воды, уравновешивающего атмосферное давление, $h_0=10$ м.

7. На нить нанизаны 4 маленьких шара; нижний находится на расстоянии h от пола (рис. 2). Нить вверху пережигают. Какими должны быть расстояния между шариками, чтобы интервалы времени между их ударами о пол были одинаковы?

8. Из круглого крана радиусом R течет вниз струя воды. Как уменьшается радиус струи с увеличением расстояния h от крана до тех пор, пока струя не начнет рваться? Скорость струи считать одинаковой по всему ее сечению.

9. Груз свободно подвесили к динамометру внутри ящика. После этого ящик поставили на горку с углом наклона α и плавно отпустили. При каком угле α показание динамометра в скользящем ящике уменьшится вдвое? Трением пренебречь. Считать, что колебания груза затухли и он не касается стен ящика.

10. Тонкий обруч радиусом R положили на горизонтальный пол, придав ему вращение вокруг его оси с начальной линейной скоростью v. Коэффициент трения обруча о пол μ, ускорение свободного падения g. Сколько оборотов сделает обруч до полной остановки?

11. При падении на каменный пол елочного стеклянного шарика он разбивается, если высота падения не меньше, чем h. Два таких шарика подвесили рядом. Один из них отклонили и толкнули так, что он подлетает к другому со скоростью v. При какой наименьшей скорости v шарики разобьются?

12. Какая масса воздуха выйдет из комнаты объемом $V=100$ м^3, если температура в ней, равная вначале $T=290$ К, увеличится на $\Delta T=10$ К? Давление воздуха нормальное: $p=10^5$ Па; молярная масса воздуха $M=29\cdot10^{-3}$ кг/моль; газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль·К).

13. Кубический бак объемом $V=1$ м^3 заполняют водой из крана сечением $S=10$ см^2 за время $\tau=1$ мин. На сколько изменится температура воды? Кран находится на уровне верхнего края бака. Отводом тепла в окружающую среду пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c=4{,}18\cdot10^3$ Дж/(кг·К).

14. В центре A равностороннего треугольника, две стороны которого образованы одинаково и равномерно заряженными тонкими палочками (рис. 3), потенциал электрического поля φ, а напряженность поля $\vec{E}$. Какими станут потенциал и напряженность в этой точке, если одну палочку убрать?

15. Маленький шарик массой m с зарядом q удерживают на высоте h над закрепленным зарядом q (рис. 4). Какой максимальной скорости достигнет верхний шарик после того, как его отпустят? Силу тяжести учитывать.

16. Как известно, масса Солнца много больше массы Земли. Во сколько раз изменилась бы продолжительность года на Земле, если бы ее масса была равна массе Солнца, а расстояние между ними осталось бы прежним?

Путешествия по графам

(Начало см. на с. 50)

1984, № 9) описаны игры-«перевертыши», которые можно рассматривать как варианты игр «путешествие по графу» с переориентацией фишек.

Особенно трудные обобщения игр типа «путешествие по графу» можно получить, задавая дополнительные ограничения на правило движения фишек по графу. В качестве примера рассмотрим игру ДВЕНАДЦАТЬ, игровое поле которой изображено на рисунке 11. В этой игре допускаются только такие последовательности ходов, которые получаются с помощью следующих элементарных серий:

$A=3, 7, 11, 10, 9, 5, 1, 2, 0;$

$A^{-1}=2, 1, 5, 9, 10, 11, 7, 3, 0;$

$B=2, 6, 10, 11, 12, 8, 4, 3, 0;$

$B^{-1}=3, 4, 8, 12, 11, 10, 6, 2, 0.$

Если игру ДВЕНАДЦАТЬ рассматривать как обыкновенное «путешествие по графу», то к этому набору элементарных серий необходимо было бы добавить серии $C=2, 1, 5, 9, 10, 11, 12, 8, 4, 3, 0$, $D=2, 6, 10, 11, 7, 3, 0$ и им обратные.

Упражнение 20. Найдите алгоритм решения игры ДВЕНАДЦАТЬ и покажите, что ее группа совпадает с группой S_{12}.

Основной трудностью при решении этой задачи является нахождение формулы, которая переставляет только фишки 7 и 8. Существует ли формула для этой цели с длиной меньше чем 39 букв?

Советы по изготовлению игр

Удобнее всего прикрепить игровое поле к прямоугольному железному листу, а в качестве фишек использовать кусочки магнита (например, фишки от магнитных шашек).

Некоторые варианты игр типа «путешествие по графу» можно осуществить, устанавливая дополнительные перегородки. На странице 57 изображены игры ТЕРПЕНИЕ, ДУМАЙ БЫСТРЕЕ, КУБОЛОГИЯ и КОМБИНАТОР в таком исполнении.

В общеизвестной игре ПЯТНАДЦАТЬ, изготовленной таким же образом, не всякую позицию можно привести к стандартной, а только такую, которая соответствует четной перестановке фишек (фишки 6 и 9 в этой игре — разные).

Как расположены корни трехчленов?

1. $x < -\dfrac{11+\sqrt{103}}{2}$, $\quad -\dfrac{31+\sqrt{805}}{6} < x <$ $< \dfrac{-31+\sqrt{805}}{6}$, $x > \dfrac{-11+\sqrt{109}}{2}$.

2. Записав неравенство в виде

$$x^2-3x+1<x-a<3x-x^2-1,$$

получим систему неравенств $f(x)<0$, $g(x)<0$, где $f(x)=x^2-4x+1+a$, $g(x)=x^2-2x+1-a$. Эта система может иметь решение только при положительных дискриминантах трехчленов $f(x)$ и $g(x)$, то есть при $0<a<3$.

При $0<a<\dfrac{3-\sqrt5}{2}$, $\quad \dfrac{3-\sqrt5}{2}<a<\dfrac{3+\sqrt5}{2}$, $\dfrac{3+\sqrt5}{2}<a<3$

корни трехчленов $f(x)$ и $g(x)$ расположены соответственно в следующем порядке:
$x_2<x_4<x_3<x_1$; $x_4<x_2<x_3<x_1$;
$x_4<x_2<x_1<x_3$.
В случае $f(a)=0$ (a — общий корень трехчленов) найдите вторые корни трехчленов $f(x)$ и $g(x)$ по теореме Виета и покажите, что при $a=\dfrac{3-\sqrt5}{2}$ и $a=\dfrac{3+\sqrt5}{2}$ соответственно $x_2=x_4<x_3<x_1$ и $x_4<x_2<x_1=x_3$.

3. Умножив неравенство на a и сделав замену $y=2ax$, получим неравенство, которое может быть представлено в виде

$$(y^2+2y-a)(y^2-2a+4)>0.$$

Обозначим через $y_{1,2}$ и $y_{3,4}$ корни трехчленов y^2+2y-a и $y^2-2y-a+4$. При $0<a\leqslant3$ получаем $x\leqslant\dfrac{y_2}{2a}$, $x\geqslant\dfrac{y_1}{2a}$. При $a>3$ получаем $x\leqslant\dfrac{y_2}{2a}$, $\dfrac{y_4}{2a}\leqslant x\leqslant\dfrac{y_1}{2a}$, $x\geqslant\dfrac{y_3}{2a}$.

4. Положив $f_k(x)=3x^2+2kx-k-1$, получим

$$f_k(x)=f_n(x)\Leftrightarrow x_0=\frac12,$$

причем $f_k(x_0)=-\dfrac14$ при всех $k=1, 2, \ldots, 10$, то есть все $f_k(x_0)<0$. Обозначив корни трехчлена $f_k(x)$ через q_k, p_k, $(q_k<p_k)$, получим следующее расположение корней:

$$q_{10}<\ldots<q_2<q_1<p_{10}<p_9<\ldots<p_1,$$

так что решением данной системы является промежуток $q_1\leqslant x\leqslant p_{10}$, заключенный между меньшим корнем первого трехчлена и большим корнем десятого трехчлена.

Ответ: $-\dfrac{\sqrt7+1}{3}\leqslant x\leqslant\dfrac{\sqrt{133}-10}{3}$.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 6)

1. В 9 часов угол между стрелками равен 90°. За час часовая стрелка проходит 1/12 часть окружности, то есть 30°, так что за 20 минут часовая стрелка проходит $\frac13$ от этой части, то есть 10°. Аналогично минутная стрелка, проходящая за час 360°, за 20 минут пройдет 120°. Поэтому к 9 часам 20 минутам угол между стрелками в 90° уменьшится на 10° и увеличится на 120°, став равным 200°. Дополнительный к нему угол равен 160°.

2. $495+459=954$.

3. Во-первых, из чайника без дырочки плохо разливать заварку, так как образующееся в нем разрежение препятствует вытеканию жидкости из чайника. Во-вторых, при подогревании заварного чайника, наоборот, возникает повышенное давление пара в чайнике, которое приводит к самопроизвольному выливанию жидкости из носика чайника.

4. Если число не оканчивается на 9, то сумма цифр следующего за ним числа больше его суммы цифр на 1, поэтому такое число не может быть искомым. Если число оканчивается на 9 (но не на 99), то сумма цифр следующего за ним числа меньше его суммы цифр на 8, что опять не соответствует условию задачи. Если же число оканчивается на 99 (но не на 999), то сумма цифр у следующего за ним числа будет меньше суммы цифр рассматриваемого числа на 17. Поэтому, если сумма цифр такого числа делится на 17, то и сумма цифр следующего за ним числа тоже делится на 17.
Найдем наименьшее число, оканчивающееся на два нуля, у которого сумма цифр делится на 17. Очевидно, это 8900. Предыдущее же число 8899 является искомым, так как числа, оканчивающиеся на 999 и на 9999, не удовлетворяют условию задачи — сумма цифр при переходе к следующему числу в первом случае уменьшается на 26, а во втором случае — на 35.

5. Обозначим число грибов, найденных каждым мальчиком, первой буквой его имени. Тогда по условию задачи

$$А+Б=В+Г,\ А+Г<Б+В,\ Г>В.$$

Складывая первые два соотношения, получаем, что В>А, а вычитая из второго соотношения первое, находим, что Б>Г. Итак, Б>Г>В>А, то есть имена нужно расположить в следующем порядке: Боря, Гена, Витя, Алик.

Избранные школьные задачи
(см. «Квант» № 6)

1. (3; 2; —2). Указание. Выразите x из первого уравнения и подставьте это выражение во второе уравнение. После этого приведите второе уравнение к виду

$$(y-2)^2+(y+z)^2=0.$$

2. а) 30° и 60°; б) 22,5° и 67,5°. Указание. Опишите около треугольника ABC окружность (рис. 1, с. 62) и продолжите медиану AM, биссектрису AL и высоту AH до пересечения с окружностью в точках N, E и D соответственно. Докажите, что треугольник MAE равнобедренный. Значит, $MA=ME$. Кроме того, $MB=MC$, откуда легко вывести, что M — центр нашей окружности. Следовательно, треугольник ABC прямоугольный.

3. Второе. Указание. Воспользуйтесь равенством

$$\frac{a+1}{1985a+1}-\frac{b+1}{1985b+1}=\frac{1984(b-a)}{(1985a+1)(1985b+1)}.$$

4. Искомая точка O — это точка пересечения двух прямых, каждая из которых про-

ходит через середину одной из диагоналей четырехугольника и параллельна другой его диагонали. Указание (рис. 2). Поскольку $QP = MN = \frac{1}{2}AC$, получаем, что $S_{DQOP} = S_{MBNO} = \frac{1}{2}h \cdot QP$, где h — сумма высот треугольников MBN и OMN. Таким образом, точки D и B одинаково удалены (на расстояние h) от прямой, параллельной AC и проходящей через середину BD.

5. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ — данные числа. Рассмотрим числа a_1, a_1+a_2, $a_1+a_2+a_3$, ..., ...,$a_1+a_2+\ldots+a_{100}$. Если ни одно из этих чисел не делится на 100, то среди них найдутся два дающие при делении на 100 одинаковые остатки. Остается из большего из этих чисел вычесть меньшее.

6. $(0;\ 1;\ 2)$; $(-2;\ -3;\ -4)$. Указание. Прибавляя по 1 к левым и правым частям всех трех уравнений, получаем систему

$$\begin{cases} (x+1)(y+1)=2, \\ (y+1)(z+1)=6, \\ (x+1)(z+1)=3, \end{cases}$$

откуда $((x+1)(y+1)(z+1))^2=36$, то есть

$$(x+1)(y+1)(z+1)=\pm 6.$$

7. Три отрезка, соединяющие середины сторон с серединами соответствующих высот. Указание. На рисунке 3 BM — медиана треугольника ABC, BH — его высота, K — точка пересечения отрезков BM и PQ. Центр O прямоугольника совпадает с серединой перпендикуляра KL к стороне AC. Поэтому прямая MO проходит через середину N высоты BH.

8.*) $x=y=2$. Решение. Так как

$$(\sqrt{3-x}+\sqrt{x-1})^2=2+2\sqrt{-x^2+4x-3},$$

левая часть уравнения достигает наибольшего значения там, где его достигает квадратный трехчлен $-x^2+4x-3$, то есть в точке $x=2$. Это значение равно 2. Но этому же числу равно наименьшее возможное значение правой части уравнения, которое достигается при $x=y$.

9.7. Решение. Поскольку $A-B=2^{1986}-2^{1983}=7\cdot 2^{1983}$ и числа A и B нечетны, их наибольший общий делитель равен 7 или 1. Но $A=2^{1986}-1=(2^3-1)(2^{1983}+2^{1980}+\ldots+2^3+1)$ (мы воспользовались формулой сокращенного умножения) делится на 7, а значит, и $B=A-(A-B)$ делится на 7.

10. Указание. Пусть a, b, c, d — длины отрезков, на которые стороны четырехугольника разбиваются точками касания вписанной окружности, и r — радиус вписанной окружности (рис. 4,а). Приложим друг к другу два заштрихованных треугольника, как показано на рисунке 4,б. Из того, что вокруг данного четырехугольника можно описать окружность, следует, что сумма острых углов получившегося треугольника равна 90°, то есть этот треугольник прямоугольный. Следовательно, $r=\sqrt{ac}$. Аналогично, $r=\sqrt{bd}$ и, значит, $ac=bd$. Площадь четырехугольника равна $(a+b+c+d)r$, и остается, воспользовавшись равенством $ac=bd$, доказать, что

$$(a+b+c+d)^2ac=(a+b)(b+c)(c+d)(d+a).$$

11. $0\leqslant x\leqslant 1$. Указание. Косинусы левой и правой частей уравнения равны.

12. ac/b. Указание. Пусть M, N, P, Q — основания перпендикуляров, опущенных из точки E на прямые AB, BC, CD и AD соответственно (рис. 5). Докажите, что треугольники EMQ и ENP подобны.

13.
$$\begin{cases} x_1=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi m, \\ y_1=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi(m+4n); \end{cases}$$

*) В условии задачи была допущена опечатка: вместо $2\sqrt{2}$ должно быть 2.

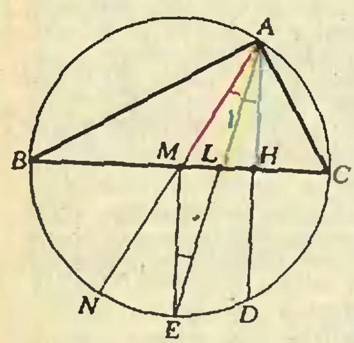


Рис. 1.

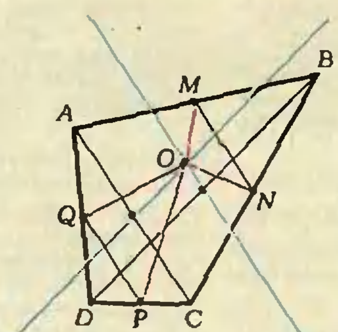


Рис. 2.

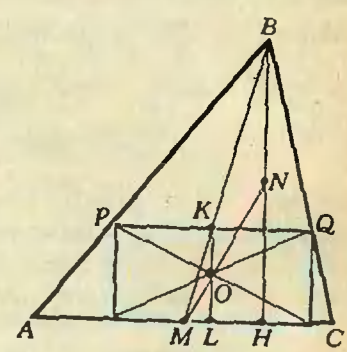


Рис. 3.

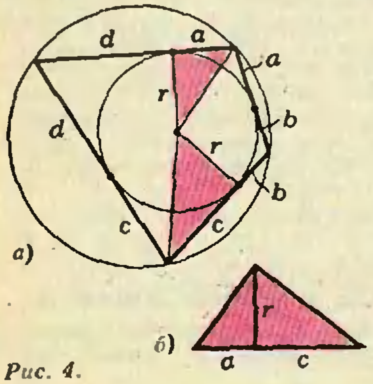


Рис. 4.

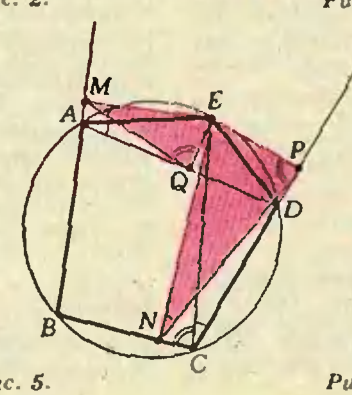


Рис. 5.

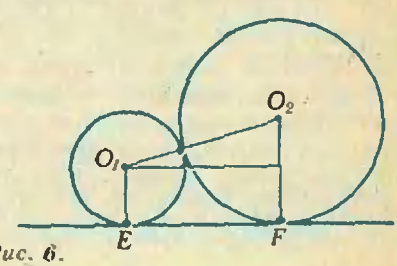


Рис. 6.

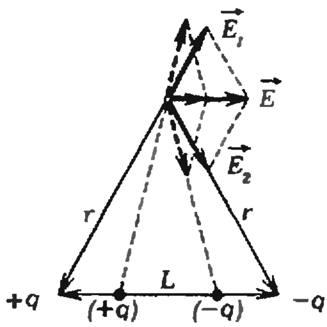


Рис. 7.

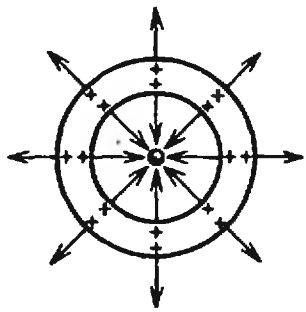


Рис. 8.

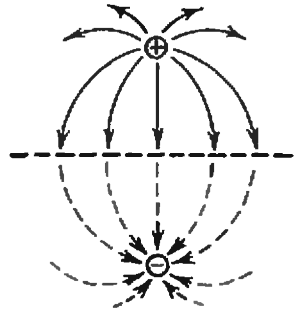


Рис. 9.

$$\begin{cases} x_2=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi m, \\ y_2=\pm\dfrac{\pi}{3}+\pi(m+4n+2) \end{cases}$$

(m, $n\in\mathbb{Z}$). Указание. Уравнение приводится к виду

$$\left(2\cos\frac{x+y}{2}-\cos\frac{x-y}{2}\right)^2=\cos^2\frac{x-y}{2}-1,$$

откуда либо $\cos\frac{x-y}{2}=1$, $\cos\frac{x+y}{2}=\frac{1}{2}$, либо $\cos\frac{x-y}{2}=-1$, $\cos\frac{x+y}{2}=-\frac{1}{2}$.

14. $\frac{bc}{2a}$, $\frac{ac}{2b}$, $\frac{ab}{2c}$. Указание. Пусть сферы с центром O_1 и O_2 и радиусами r, R касаются плоскости в точках E и F и касаются между собой. Проведя плоскость через точки O_1, O_2, E и F, мы получим картину, показанную на рисунке 6. Из этого рисунка видно, что $|EF|^2+(R-r)^2=(R+r)^2$, откуда $|EF|=2\sqrt{Rr}$. Для радиусов наших сфер мы получаем систему уравнений $2\sqrt{r_1r_2}=c$, $2\sqrt{r_1r_3}=b$, $2\sqrt{r_2r_3}=a$.

15. На 1-м и 2-м (с начала). Решение. Пусть число Y получается из числа X выбрасыванием m-й цифры. Примеры показывают, что m может равняться 1 или 2 (можно взять $X=66$, $Y=6$). Предположим, что $m\geqslant 3$. Запишем:

$$X=A\cdot 10^{n+1}+b\cdot 10^n+C,$$
$$Y=A\cdot 10^n+C.$$

Здесь $C<10^n$, $b\leqslant 9$, и если $m\geqslant 3$, то $A\geqslant 10$. Имеем

$$X-10Y=b\cdot 10^n-9C,$$
$$-9\cdot 10^n<-9C\leqslant b\cdot 10^n-9C\leqslant$$
$$\leqslant b\cdot 10^n\leqslant 9\cdot 10^n,$$

откуда $|X-10Y|<Y$, $9Y<X<11Y$. Поэтому, если X делится на Y, то $X:Y=10$, а это противоречит тому, что X не оканчивается нулем.

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 5)

Вопросы и задачи

1. Кольцо и маленький шарик, движущийся по оси кольца.

2. См. рис. 7;

$$E_1=k\frac{q}{r^2},\quad \frac{E}{E_1}=\frac{L}{r},\quad E=k\frac{Lq}{r^3}.$$

3. См. рис. 7.

4. Положительно заряженный шар во всех полях будет двигаться вправо. Незаряженный шар в поле I будет двигаться вправо, в поле II — влево, в поле III — останется в покое.

5. Электрические заряды скапливаются на внешней поверхности проводника. Внутри цилиндра напряженность электрического поля стала равной нулю, у внешней поверхности — увеличилась по сравнению с плоскостью.

6. См. рис. 8.

7. См. рис. 9; $F=k\frac{q^2}{4r^2}$.

8. Нет. При передвижении заряда по замкнутому контуру работа поля не будет равна нулю.

Микроопыт

Близлежащие и отдаленные от палочки капли электризуются под ее влиянием разноименно и, притягиваясь, сливаются.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 4)

Задание 7. 1. Крс15! Единственный ход. Предположим теперь, что черный король движется по вертикали «а». 1... Кра9 2. Крс14 Кра10 3. Крс13 Кра11 4. Крс12. Приходится менять направление (4... Кра12 5. Ла16×). 4... Крb10 5. Крb12 (оппозиция!) Кра10 6. Крс11! Короли сдвинулись на вертикаль ниже, дальнейшее ясно.

Если 1... Крb9, то решает 2. Крb15!, сохраняя дальнюю оппозицию (нечетное расстояние между королями) 2... Крb10 3. Крb14! Крb11 4. Крb13! Кра11 5. Крс12! и т. д.

На 2... Кра9 следует 3. Крс14 — пока черный король находится на крайней вертикали, белый может позволить себе встать на одну вертикаль с ладьей. 3... Крb10 4. Крb14! Легко найти и другие варианты. Важно, что после 1. Крс14? выигрыш уже упущен — 1... Кра9 2. Крс13 (2. Крb13 Крb9 и оппозиция у черных) 2. Кра10 3. Крс12 Кра11 4. Крс11 Кра12, и черный король неуязвим.

Задание 8 (И. Моравец, 1908 г.). 1. Крb1 Лg2 2. Лс4 Лh2 3. h4 Лg2 4. Лс5! Лh2 5. h5 Лg2 6. Лс6! Лh2 7. h6 Ле2 8. h7 Лh2 9. Ла6 Кр:с7 10. Ла8 Л:h7 11. Ла7+, забирая ладью.

Ньютон — ученик, Ньютон — ученый

Имя Ньютона, нацарапанное им самим на стене Королевской школы в Грантеме.

When Newton saw an apple fall, he found
In that slight startle from his contemplation —
'Tis said (for I'll not answer above ground
For any sage's creed or calculation) —

A mode of proving that the earth turn'd round
In a most natural whirl, called "gravitation";
And this is the sole mortal who could grapple,
Since Adam, with a fall, or with and apple.

Lord Byron.

Поэтическая иллюстрация к известной истории о том, что к открытию закона всемирного тяготения Ньютона привело зрелище падающего яблока.

Ньютон, заметив яблока падение,
Познал один сей тайны объяснение —
Молва гласит. (Но есть сомнение:
То был расчет иль озарение?)

И доказал Ньютон Земли вращение,
Введя тогда понятье тяготения.
Он первый от Адама, без сомнения,
И плод вкусил, и объяснил паденне.

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов, Н. С. Кузьмина, Э. В. Назаров, А. М. Пономарева, И. Е. Смирнова, П. И. Чернуский, В. Б. Юдин
Фото представили:
Е. А. Артемов

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Б. Румянцева

103006 Москва К-6,
ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

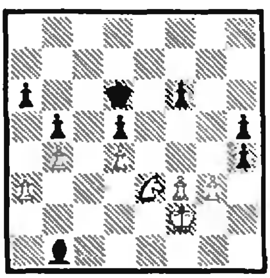
Сдано в набор 21.05.86. Подписано к печати 18.06.86
Т-11574 Бумага 70×108/16
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 7,37
Тираж 194 267 экз.
Цена 40 коп. Заказ 1317

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ЗАГАДОЧНЫЕ МАНЕВРЫ

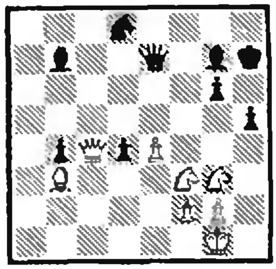
75 партий сыграли между собой Анатолий Карпов и Гарри Каспаров перед началом своего третьего матча за шахматную корону, в котором должны быть проведены 24 встречи. Еще одна — и юбилей: 100 партий. Общий счет между двумя лидерами современных шахмат пока ничейный — каждый одержал по 8 побед.



А. Карпов — Г. Каспаров. Перед вами позиция из девятой партии первого матча. Черные только что побили пешку — g5:h4 (лучше было Сg6), полагая, что размен упростит им достижение ничьей. Действительно, после g3:h4 у белых лишь один пункт проникновения в неприятельский лагерь — f4, и одновременно две фигуры, король и конь, пробраться через него не могут. Но Карпов находит поистине загадочный маневр конем.

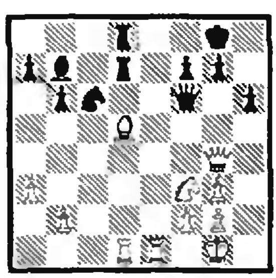
1. Кg2!! Психологически такой ход даже не приходит в голову.

1...hg+ 2.Кр:g3 Кре6 3. Кf4+ Крf5 4.К:h5 Кре6 5.Кf4+ Крd6 6.Крg4 Сc2 7.Крh5 Сd1 8.Крg6 Кре7 9.К:d5+ Кре6 10.Кс7+ Крd7 11.К:а6 С:f3 12.Кр:f6 Крd6 13.Крf5 Крd5 14.Крf4! Стало ясно, что черным не устоять в этом эндшпиле. **14...Сh1 15.Кре3 Крс4 16.Кс5 Сс6 17.Кd3 Сg2 18.Ке5+ Крс3 19.Кg6 Крс4 20.Ке7 Сb7 21.Кf5 Сg2 22.Кd6+Крb3 23.К:b5 Кра4 24.Кd6.** Черные сдались.



Г. Каспаров — А. Карпов. В этой позиции, возникшей при доигрывании девятой партии второго матча, все ожидали 1.К:d4 С:е4 2.К:е4 Ф:е4 3.Ке6 Фе1+ 4.Фf1 с трудной позицией у белых.

1.е5! Вскрывая диагональ b1 — h7, белые создали угрозу 2.К:h5! gh 3.Фg8+ Крh6 4. Сс2. Продумав полчаса, Карпов нашел форсированный путь к ничьей. **1...С:f3 2.gf С:е5 3.f4!** Ходы е4 — е5 и f3 — f4 носят геометрический характер. Благодаря им белые вынуждают черного слона покинуть большую диагональ. Действительно, отступать по диагонали а1 — h8 весьма опасно ввиду 4.f5!, подбираясь к черному королю. **3...С:f4 4.Фg8+ Крh6 5.Сс2 Фg7!** Как и полагается в этюде, тонкую игру демонстрируют обе стороны. После 5...Фf6 6.Ке4! белые выигрывали, не годится и 5...d3 6.С:d3 Фf6 7.Ке4 Фа1+ 8.Крg2 Кс6 9.Фf8+ с победой. **6.Ф:d8 С:g3 7.fg Фе5 8.Фf8+ Крg5 9.Крg2.** Буря, пронесшаяся на доске, утихла, и соперники согласились на ничью.

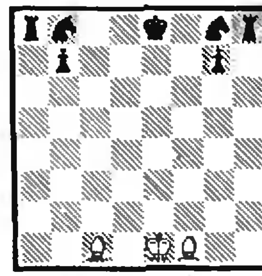


Г. Каспаров — А. Карпов. Черные легкомысленно переставили ладью с с8 на d8.

1.Ф:d7!! Л:d7 2.Ле8+ Крh7 3.Се4+. Черные сдались, после 3...g6 4.Л:d7 их положение безнадежно.

Изящно выиграв эту партию, 11-ю в матче, Каспаров сравнял счет и перехватил инициативу. Вторая половина протекала при его превосходстве, и в результате шахматная корона обрела нового владельца.

Читатель журнала Л. Соколов посвятил интересную серийную задачу гроссмейстерам А. Карпову и Г. Каспарову.

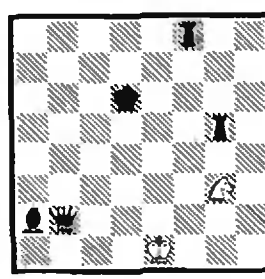


Серийный кооперативный мат в 7 ходов при черном короле на а7 и h7.

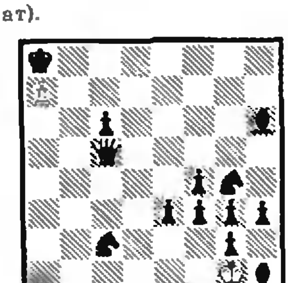
Здесь сразу две задачи: одна получается при перестановке черного короля на а7 (А. Карпов — 12-й шахматный король!), другая — при перестановке черного короля на h7 (Г. Каспаров — 13-й шахматный король!).

Вот решение задачи при короле на а7: **1—7.b7—b5—b4—b3—b2—b1С! — Се4 — Сb7.** На поле b7 вместо пешки появился слон, и теперь следует **Сс1—е3×**. При короле на h7: **1 — 7.g7—g5—g4—g3—g2—g1С!—Сd4—Сg7** и **Сd3×**.

Конкурсные задания



13. Кооперативный мат в 6 ходов (черные начинают и помогают белым поставить мат).



14. Кооперативный мат в 8 ходов.

Срок отправки решений — 10 сентября 1986 г. с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 13, 14».

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Как устроена пустота?

Кто такие кватернионы?

Сколько площадей у многоугольника?

Как создавалась физика низких температур?

Почему поет водопровод?

Какая молекула самая главная?

Часто ли степени двойки начинаются с единицы?

Существует ли бесконечная шахматная партия?

Как родился компьютер?

Чем живет современная математика?

Над чем думают физики?

Если вы хотите узнать ответы на эти вопросы —

ПОДПИСЫВАЙТЕСЬ НА «КВАНТ»!