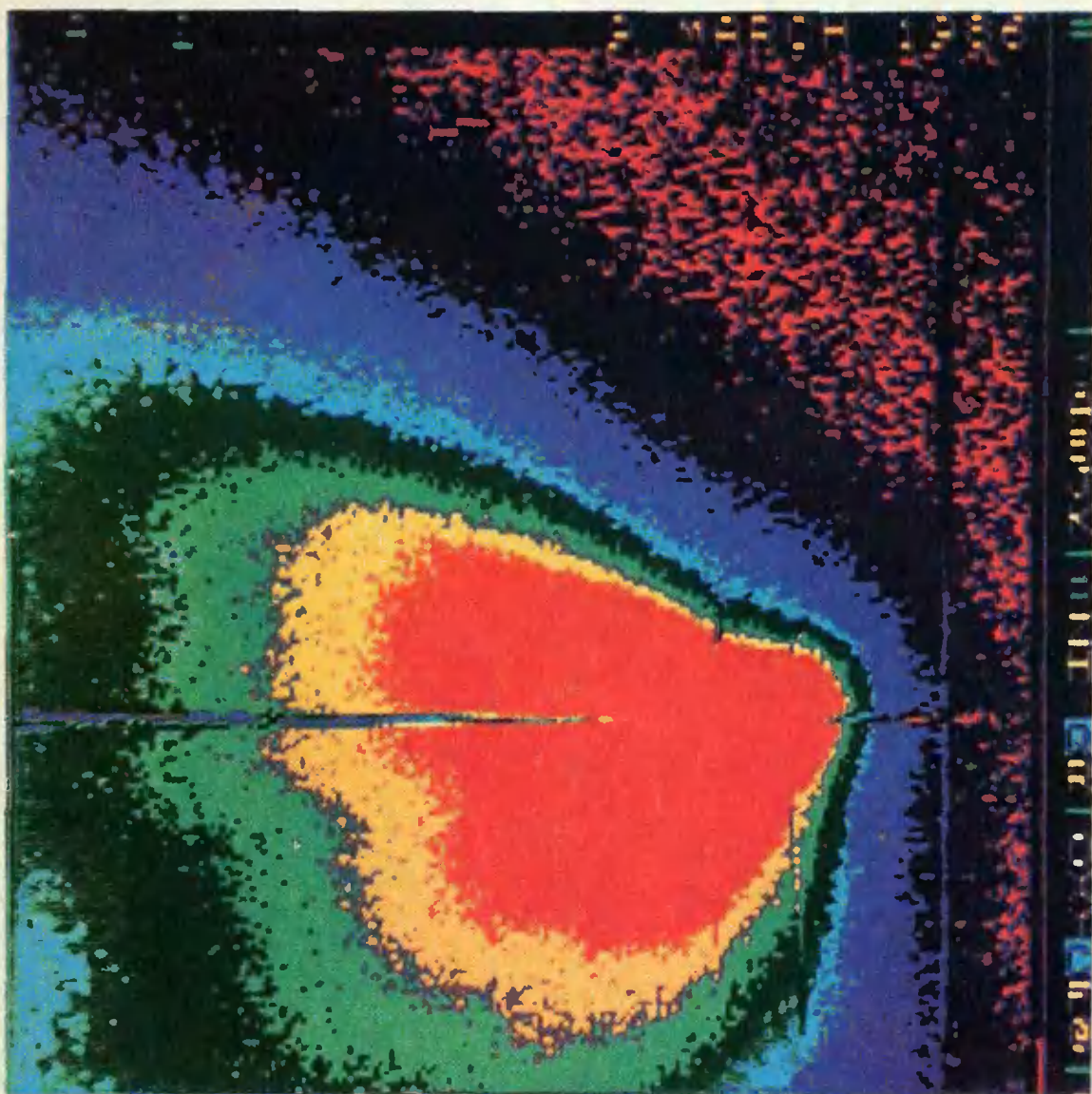


Квант

6
1988

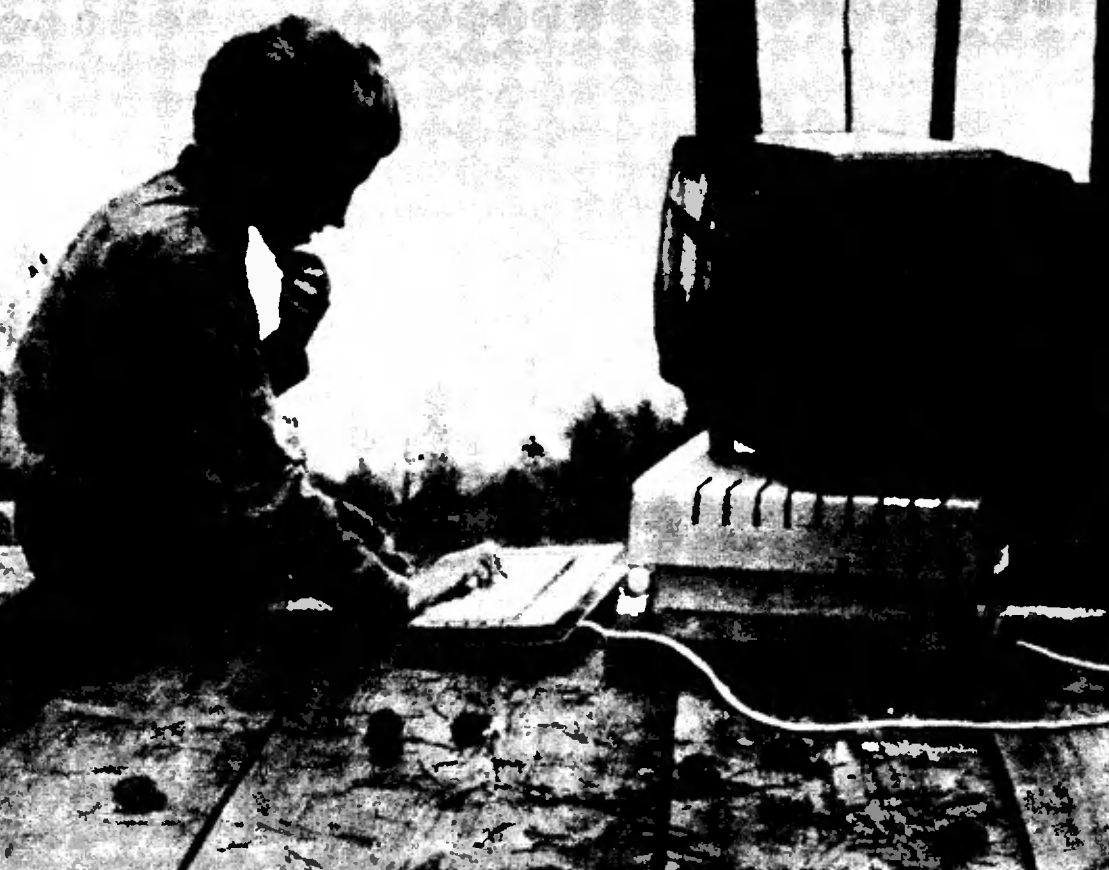
*Научно-популярный физико-математический журнал
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*



**Комета Галлея
вчера,
сегодня, ...**



На X Всесоюзной летней школе юных программистов можно было пообщаться и с компьютером «Агат», и с главным организатором этих школ академиком А. П. Ершовым. Теперь персональный компьютер — не редкость и в обычной средней школе, где уже год проводятся уроки по основам математики и вычислительной техники.





Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы.



В НОМЕРЕ:

IN THIS ISSUE:

- | | | |
|-------|---|---|
| 3 | <i>С. В. Дужин, В. Н. Рубцов.</i> Четырехмерный куб | <i>S. V. Dujhin, V. N. Rubtsov.</i> The four-dimensional cube |
| 8 | <i>С. Р. Филонович.</i> Шарль Кулон и его открытия | <i>S. R. Filonovich.</i> Charles Coulomb and his discoveries |
| 16 | <i>Л. В. Тарасов.</i> Зеленый луч | <i>L. V. Tarasov.</i> Green ray |
| 18 | <i>Ю. П. Соловьев.</i> Вызов Ван Роумена | <i>Yu. P. Soloviev.</i> Van Roomen's challenge |
| 21 | <i>Ф. Недемейер, Я. А. Смородинский.</i> Сопротивление ребер многомерного куба | <i>F. Nedemayer, Ya. A. Smorodinski.</i> Resistance of the edges of multidimensional cubes |
| <hr/> | | |
| 14 | Наш календарь
75-летие открытия сверхпроводимости | Our calendar
75 years since the discovery of superconductivity |
| <hr/> | | |
| 25 | Школа в «Кванте»
Математика 9, 10 | Kvant's school
Mathematics 9, 10 |
| 32 | Избранные школьные задачи | Selected school problems |
| <hr/> | | |
| 27 | «Квант» для младших школьников
Задачи | Kvant for younger school children
Problems |
| 28 | Под-Котик и его повесть (по мотивам Л. Кэрролла) | The Mock Turtle's story (following L. Carroll) |
| <hr/> | | |
| 33 | Задачник «Кванта»
Задачи М986 — М990; Ф998 — Ф1002 | Kvant's problems
Problems M986 — M990; P998 — P1002 |
| 35 | Решения задач М966 — М970; Ф978 — Ф982 | Solutions M966 — M970; P978 — P982 |
| 52 | Список читателей, приславших правильные решения | List of readers who have sent correct solutions |
| <hr/> | | |
| 42 | Искусство программирования
<i>Л. Н. Системский.</i> Программирование на микрокалькуляторе: игры | The art of programming
<i>L. N. Sistemski.</i> Programming your pocket calculator: games |
| <hr/> | | |
| 44 | Полупроводниковые элементы вычислительной техники
<i>Х. Заключение.</i> Полупроводниковые элементы будущих ЭВМ | Semiconducting elements in computers
<i>X. Conclusion.</i> Semiconducting elements of future computers |
| <hr/> | | |
| 47 | Практикум абитуриента
<i>С. М. Козел.</i> Электромагнитная индукция | College applicant's section
<i>S. M. Kozel.</i> Electromagnetic induction |
| <hr/> | | |
| 54 | Варианты вступительных экзаменов | Entrance examination problems |
| 61 | Ответы, указания, решения
«Квант» улыбается (41)
Наша обложка (36)
Шахматная страничка
Шахматные рекорды (3-я с. обложки) | Answers, hints, solutions
Kvant smiles (41)
Our cover page (36)
The chess page
Chess records (3rd cover page) |

Памяти Льва Григорьевича Асламазова

23 апреля 1986 года в расцвете творческих сил трагически погиб известный ученый, профессор, доктор физико-математических наук, заместитель главного редактора журнала «Квант» Лев Григорьевич Асламазов. От нас ушел удивительно активный, трудолюбивый, много-сторонне одаренный человек, сумевший за недолгую жизнь совершить много добрых и нужных людям дел.

Л. Г. Асламазов родился в 1944 году в г. Батуми. В 1960 году поступил в Московский физико-технический институт, а после его окончания в 1966 году — в аспирантуру Института теоретической физики им. П. Д. Ландау АН СССР, где в дальнейшем работал по 1975 год. Основные научные интересы Льва Григорьевича были сосредоточены в области теории сверхпроводимости, в развитие которой он внес существенный вклад. Открытое Л. Г. Асламазовым и А. И. Ларкиным явление флуктуационной сверхпроводимости создало новое направление исследований в физике сверхпроводников. Оно уже вошло в учебники и монографии по теории сверхпроводимости. Одновременно с научной деятельностью Лев Григорьевич вел большую научно-организационную работу, являясь ученым секретарем Института теоретической физики.

С 1976 года Л. Г. Асламазов работал доцентом, а затем профессором кафедры теоретической физики Московского института стали и сплавов. Блестящие лекции, педагогический, научный и организаторский талант принесли ему заслуженное уважение коллег и студентов.

Он успешно совмещал большую педагогическую и общественную работу с научной деятельностью, в значительной степени определяя направление научных исследований на кафедре и в проблемной лаборатории института.

Много сил и времени Лев Григорьевич отдавал популяризации научных знаний, привлечению в науку талантливой молодежи. Еще со студенческих лет он, являясь членом Оргкомитета, активно участвовал в организации и проведении Всесоюзных школьных олимпиад, в подготовке команд СССР к Международным олимпиадам по физике.

Л. Г. Асламазов был одним из инициаторов создания журнала «Квант», постоянным автором, членом редакционной коллегии, а впоследствии заместителем главного редактора журнала. Его неустанная, принципиальная, заинтересованная работа по поиску тем и авторов статей, живое обсуждение всех редакционных проблем порождали мощные творческие импульсы, столь необходимые в издании журнала.

Огромный вклад внес Лев Григорьевич в организацию, формирование и научное редактирование «Библиотечки «Квант», в которой в короткий срок были опубликованы десятки превосходных научно-популярных книг.

К любому делу, за которое брался Л. Г. Асламазов, будь то научная работа, редактирование книги или подготовка лекции, он относился с глубокой ответственностью, выполняя его с неизменной тщательностью, обязательно доводя до конца. Это был отзывчивый, благожелательный и в то же время очень требовательный человек. Он пользовался любовью и уважением товарищей по работе, учеников, всех близко знавших его людей. Светлая память о Льве Григорьевиче Асламазове навсегда сохранится в сердцах тех, кто имел счастливую возможность трудиться и общаться с ним.

Четырехмерный куб

Кандидат физико-математических наук
С. В. ДУЖИН,
кандидат физико-математических наук
В. Н. РУБЦОВ

«Рассмотрим четырехмерный куб...», «Выделим в десятимерном пространстве шестимерное подпространство...» Эти и многие подобные им фразы авторы частенько встречали в научной литературе, слышали на разнообразных семинарах, сами произносили, одним словом, привыкли не удивляться им. Но однажды задумались: «А ведь не так уж далеки те времена, когда слова «четырёхмерный куб», «четвертое измерение» были пугающе непривычны слуху даже большинства математиков, а у неспециалистов вызывали недоумение и любопытство, сродни интересу к «снежному человеку», «летающим тарелкам» и прочим псевдонаучным вещам». Между авторами возник следующий диалог:

А₁: Четырёхмерный куб? Конечно, это тривиально! Его надо задавать просто как подмножество четырёх-

мерного пространства с помощью формул, обобщающих школьные формулы. Только формулами!

А₂: Согласен, это даст возможность формально определить, что такое четырёхмерный куб, но будет непонятно, ненаглядно. Четырёхмерный куб легко описывается геометрически как фигура, аналогичная квадрату на плоскости или кубу в трёхмерном пространстве. Проекция, развертки, сечения — только так!

Недолго спорив, авторы решили попробовать объединить свои точки зрения, начав, правда, с наглядной стороны дела.

Как его «увидеть»

Чтобы представить себе четырёхмерный куб, полезно сначала посмотреть на обычный — трёхмерный — куб, а также на «двумерный куб» (квадрат) и «одномерный куб» (отрезок) в динамике — так, как они показаны на рисунках 1, а, б, в.

Изучив эти рисунки, можно попытаться понять и рисунок 2, изображающий четырёхмерный куб. Так же как (двумерная) грань $ABCD$ трёхмерного куба, двигаясь параллельно самой себе (рис. 1, а) до положения $A'B'C'D'$, замечает трёхмерный куб, «трёхмерная грань» $ABCDEFGH$, двигаясь параллельно самой себе до по-

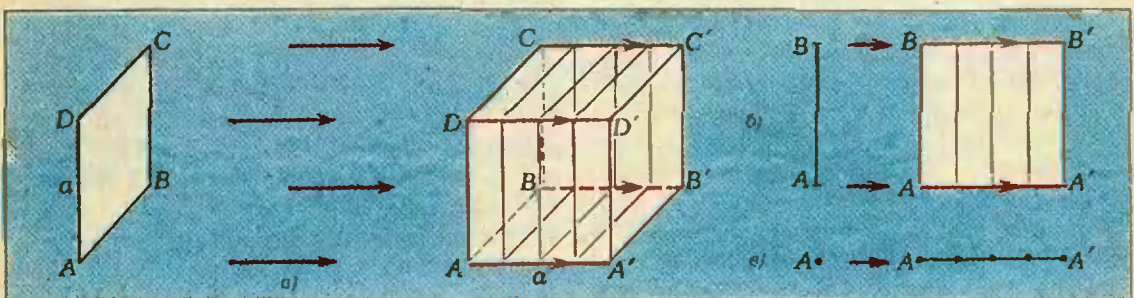


Рис. 1. Так трёхмерный куб получается из квадрата, квадрат — из отрезка, отрезок — из точки.

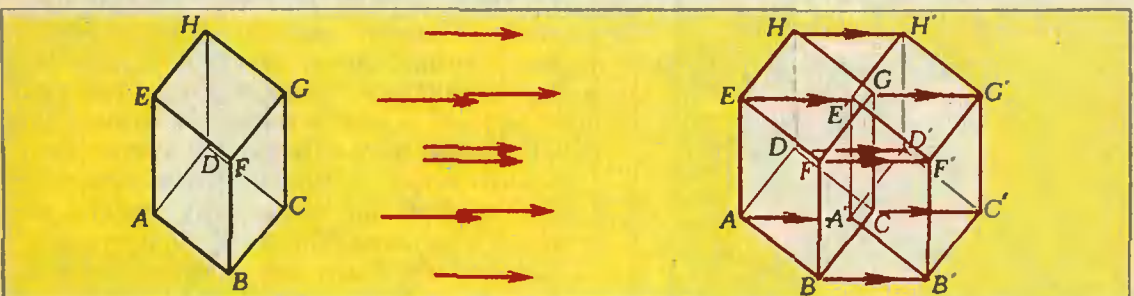


Рис. 2. А так четырёхмерный куб получается из трёхмерного.

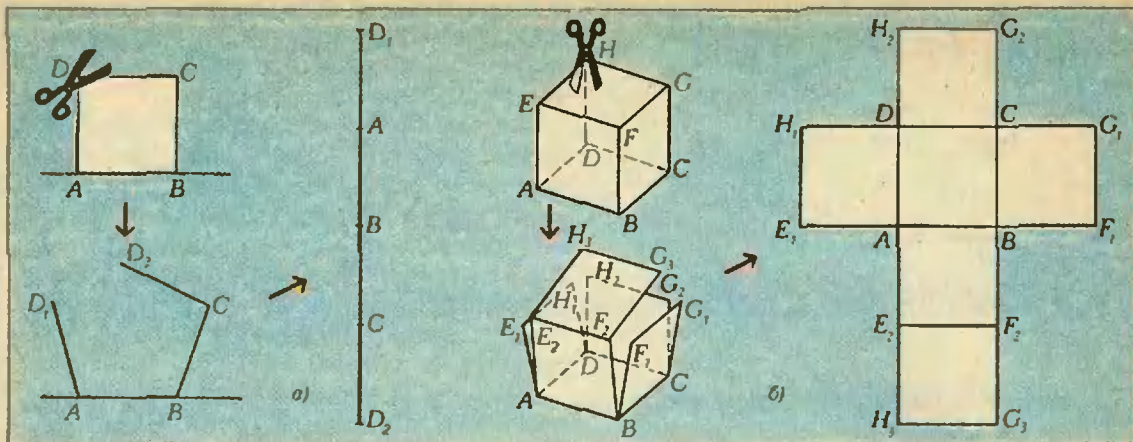


Рис. 3. Развертка квадрата и трехмерного куба.

ложения $A'B'...H'$, «замечает» четырехмерный куб. Увидели ли вы его?

Конечно, полученный чертеж четырехмерного куба условен, он дает его искаженное изображение. Но ведь и рисунок 1,а дает искаженное изображение обычного куба на плоскости. На самом деле оба чертежа имеют одинаковую природу: они показывают образы трехмерного и четырехмерного кубов при параллельной проекции на плоскость.

Разница лишь в том, что нам удастся «приподнять в пространство» плоское изображение трехмерного куба усилием мысли, а такой способностью представить себе «четыремерье» мы уже не обладаем.

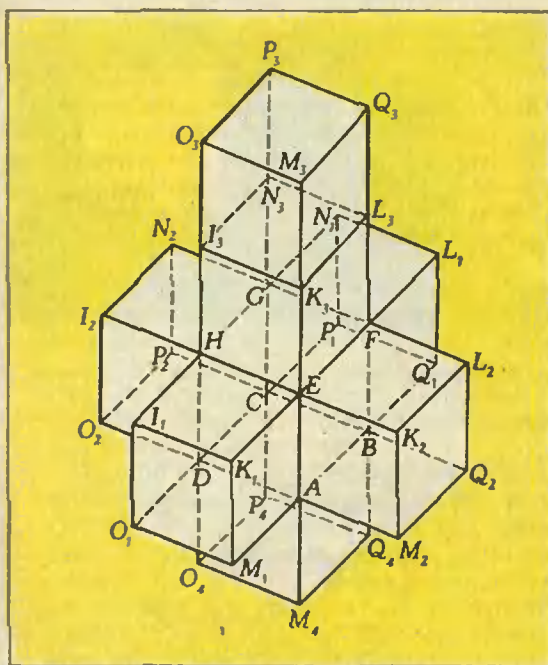


Рис. 4. Объемная развертка четырехмерного куба.

Ну, а если не удалось хорошо увидеть четырехмерный куб в движении — попробуем развернуть его.

Как его развернуть

Чтобы представить себе развертку четырехмерного куба, сначала посмотрим на развертку трехмерного и двумерного кубов (рис. 3). Мы видим, что развертка квадрата одномерна и состоит из четырех отрезков; развертка куба двумерна и состоит из шести квадратов. Аналогично, развертка четырехмерного куба трехмерна и состоит из восьми трехмерных кубов (рис. 4).

Так же как трехмерный куб можно склеить из развертки (см. рис. 3,б), отождествляя вершины $G_1 \equiv G_2 \equiv G_3$, $H_1 \equiv H_2 \equiv H_3$, $E_1 \equiv E_2$ и $F_1 \equiv F_2$ (и соответствующие ребра), четырехмерный куб можно получить из его развертки (см. рис. 4), «склеивая» вершины, обозначенные одинаковыми буквами, но с разными номерами, например $M_1 \equiv M_2 \equiv M_3 \equiv M_4$ или $I_1 \equiv I_2$; при этом склеиваются не только вершины (и соответствующие ребра), но и двумерные грани, например $M_3 O_3 P_3 Q_3 \equiv M_1 O_1 P_1 Q_1$.

Рисунок 4 стоит рассмотреть внимательнее. Можно считать, что на нем показан макет своеобразного восьмикомнатного дома. Этот дом описан американским писателем-фантастом Р. Хайнлайном в рассказе «Дом, который построил Тил». Во время «путешествия», предпринятого героями Хайнлайна по чудесному дому, их поразило следующее обстоятельство. Когда они, двигаясь в определенном направлении, проходили комнату одну за другой, то пятой комнатой на

их пути оказалась та, из которой они вышли. Например, если, двигаясь «снизу вверх», пройти четыре комнаты, образующие центральную башню развертки, то вновь окажешься в комнате «первого этажа». Действительно, «крыша» дома, как это видно из обозначений вершин, склеена с «полом» нижней комнаты. На самом деле всякий раз при пересечении границ комнат маршрут автоматически поворачивает на 90° , так что, например, ломаная $M_1 A E K_3 M_3$ не прямолинейна, но представляет собой контур квадрата. Этот факт легко понять, рассматривая аналогичные пути на развертке трехмерного куба и на поверхности самого куба (рис. 3). Если вы поняли идею склеивания четырехмерного куба из его развертки, вас не удивит то, что один из героев рассказа Хайнлайна, выпрыгнув из окна одной из комнат очутился... снова внутри дома!

Как его спроектировать

Существует еще один популярный способ изображения четырехмерного куба, представленный на рисунке 5, б. Восемь трехмерных граней изображены здесь внутренним (малым) кубом, внешним (большим) кубом и шестью усеченными пирамидами, соединяющими соответственные грани малого и большого кубов. Этот рисунок получается при центральном проектировании четырехмерного куба на некоторую «трехмерную плоскость». Смысл этого рисунка легче понять, если рассмотреть также рисунок 5, а, на котором изображена центральная проекция трехмерного куба на плоскость из некоторой точки.

По рисунку 5 удобнее всего сосчитать количество разного рода составляющих элементов четырехмерного

куба. А именно, он имеет 16 вершин, 32 ребра, 24 двумерных грани (в виде квадратов) и 8 «трехмерных граней» (в виде кубов).

Как его строго определить

Итак, мы получили наглядное представление о четырехмерном кубе. В частности, мы знаем, сколько и каких элементов входит в его состав и как они соединяются между собой. Авторы догадываются, однако, что у многих читателей, особенно у тех, кто предпочитает логическую сторону математики ее наглядной стороне, осталось чувство неудовлетворенности от такого знакомства с четырехмерным миром. Ведь мы ознакомили вас лишь с различными описаниями по аналогии четырехмерного куба, и не дали его строгого математического определения. Между тем сделать это очень просто. Однако прежде, чем давать это определение, мы приведем несколько хорошо известных наблюдений.

Отрезок («одномерный куб») располагается на прямой (в «одномерном пространстве») и в системе координат Ox может быть задан неравенством $0 \leq x \leq 1$ (рис. 6, а).

Квадрат («двумерный куб») располагается на плоскости (в «двумерном пространстве») и в системе координат Oxy может быть задан системой неравенств $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ (рис. 6, б).

Трехмерный куб в системе координат $Oxyz$ трехмерного пространства выделяется системой неравенств $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ (рис. 6, в).

Эти наблюдения делают естественным такое определение.

Четырехмерный куб — это множество всех четверок действительных чисел $(x; y; z; t)$, для которых

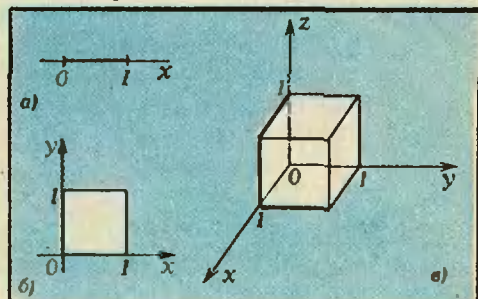
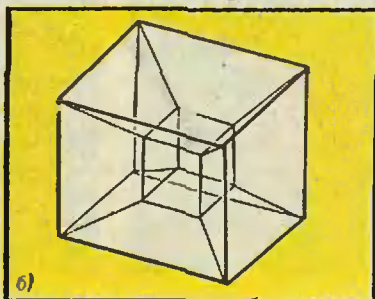
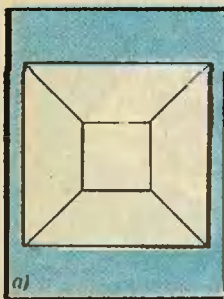


Рис. 5. Изображение обычного и четырехмерного кубов в центральной проекции.

Рис. 6. «Маломерные кубы» в своих системах координат.

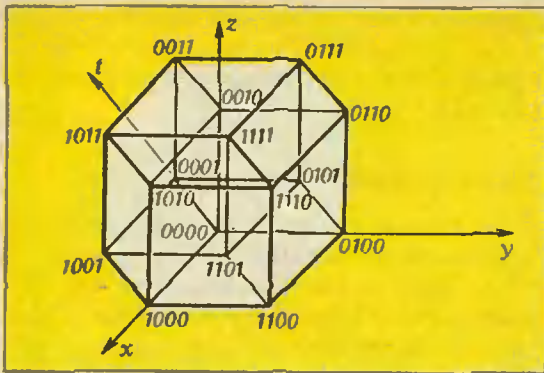


Рис. 7. Четырехмерный куб в четырехмерной системе координат.

$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1, 0 \leq t \leq 1$. Четырехмерный куб в системе координат x, y, z, t четырехмерного пространства изображен на рисунке 7, где у каждой вершины указаны ее координаты (в целях экономии места без скобок и запятых).

Придирчивого читателя не удовлетворит, однако, такое определение. Он спросит: что такое система координат в четырехмерном пространстве? И вообще, что такое четырехмерное пространство?

Чтобы ответить на последний вопрос, мы сначала вспомним — ну, конечно, вы угадали! — что такое трехмерное пространство. Это набор всевозможных троек чисел $(x; y; z)$, где x, y и z — действительные числа (координаты точки), для которых определено расстояние по формуле

$$|MN| = \sqrt{(x_M - x_N)^2 + (y_M - y_N)^2 + (z_M - z_N)^2}$$

(см. учебник А. В. Погорелова «Геометрия 6—10», с. 204). Оказывается, предыдущую фразу можно взять за определение трехмерного пространства: из этого определения можно вывести все основные положения стереометрии с помощью элементар-

ной алгебры. Так, определив плоскость как множество точек, удовлетворяющих линейному уравнению вида

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (1)$$

несложно доказать, например, что через любую тройку неколлинеарных точек M, N, P проходит одна и только одна плоскость, а именно, плоскость с уравнением

$$\begin{aligned} & ((y_P - y_M)(z_N - z_M) - (z_P - z_M)(y_N - y_M)) \times \\ & \times (x_M - x) + ((z_P - z_M)(x_N - x_M) - \\ & - (x_P - x_M)(z_N - z_M))(y_M - y) + \\ & + (x_P - x_M)(y_N - y_M) - \\ & - (y_P - y_M)(x_N - x_M)(z_M - z) = 0 \quad (2) \end{aligned}$$

(см. «Геометрия 6—10», с. 212).

Теперь следующее определение должно прозвучать естественно. **Четырехмерным пространством** называется множество всех четверок чисел $(x; y; z; t)$, где x, y, z, t — действительные числа, для которых определено расстояние по формуле

$$|MN|^2 = (x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2 + (t_N - t_M)^2. \quad (3)$$

С определением плоскости в четырехмерном пространстве дело обстоит не так просто. Дело в том, что здесь бывают как обычные двумерные плоскости, так и трехмерные «плоскости», называемые *гиперплоскостями*. С точки зрения задания плоскостей уравнениями, именно гиперплоскость является точным аналогом обычной плоскости в трехмерном пространстве. В уравнении (1) обычной плоскости двум из трех переменных x, y, z можно придавать произвольные значения, и тогда значение третьей переменной будет определяться из уравнения однозначно. Таким образом,

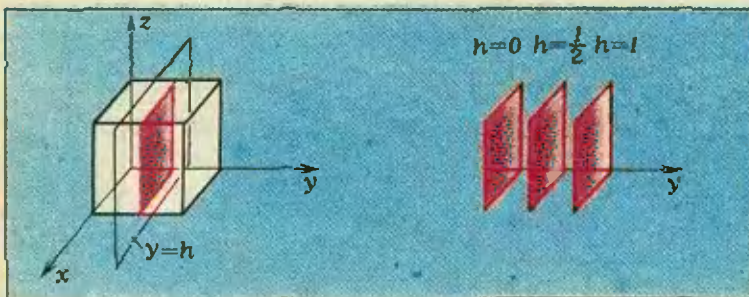


Рис. 8. Сечения куба, параллельные грани.

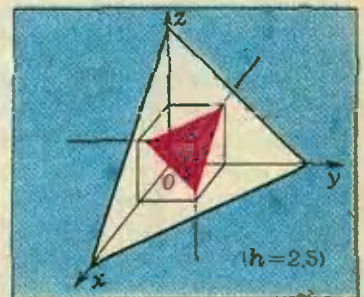


Рис. 9. Сечения куба, перпендикулярные диагонали.

множество всех решений этого уравнения описывается двумя произвольными параметрами, то есть оно двумерно. По той же причине множество всех решений одного линейного уравнения в четырехмерном пространстве $Ax + By + Cz + Dt + E = 0$ само по себе трехмерно. Аналогично трехмерному случаю, вектор с координатами $(A; B; C; D)$ перпендикулярен данной гиперплоскости и называется ее *нормальным вектором*.

Как его обобщить

Читатель, разобравшийся в предыдущем определении, без труда даст теперь определение n -мерного куба для любого $n \geq 1$. Для этого он сначала определит n -мерное пространство как множество наборов из n чисел $(x_1; x_2; \dots; x_n)$, расстояние между которыми задается формулой

$$|AB| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + \dots + (a_n - b_n)^2},$$

а затем и n -мерный куб как множество тех точек n -мерного пространства, для которых выполнены неравенства $0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1, \dots, 0 \leq x_n \leq 1$.

Как его рассечь

Четырехмерные фигуры удобно представлять себе при помощи их сечений некоторым семейством параллельных друг другу гиперплоскостей (гиперплоскости параллельны между собой, если их нормальные векторы коллинеарны). Смысл этой конструкции можно понять, рассматривая сечения трехмерных тел обычными плоскостями (рис. 8, где показано сечение куба плоскостями $y = h$). Аналогично выглядят и сечения четырехмерного куба плоскостями $t = h$ — вспомните рисунок 2!

Для лучшего понимания геометрии четырехмерного куба рассмотрим следующую более трудную задачу: *изобразить семейство его сечений гиперплоскостями, перпендикулярными главной диагонали*. Если взять диагональ, соединяющую вершины $(0; 0; 0; 0)$ и $(1; 1; 1; 1)$, то уравнение этих гиперплоскостей будет иметь вид $x + y + z + t = h$, где h — некоторая константа.

Разберем сначала аналогичную трехмерную задачу. Трехмерный куб

можно представить как пересечение двух октантов, заданных системами неравенств

$$\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ z \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x \leq 1, \\ y \leq 1, \\ z \leq 1 \end{cases}$$

(рис. 9). Всякая плоскость вида $x + y + z = h$ пересекает каждый из этих двух октантов по правильному треугольнику. Проследим за изменением этой конфигурации при изменении h от 0 до $\sqrt{3}$. В начальный момент ($h = 0$) один из треугольников состоит всего из одной точки. Затем его линейные размеры увеличиваются пропорционально h , одновременно с этим второй треугольник постепенно уменьшается, оставаясь гомотетичным первому с отрицательным коэффициентом. Начиная с того момента, когда вершины меньшего треугольника «протыкают» стороны большего, их пересечение дает шестиугольник. Этот шестиугольник становится правильным, когда размеры треугольников сравниваются. Далее описанный процесс повторяется в обратном порядке.

Подобным образом, четырехмерный куб представляет собой пересечение двух частей четырехмерного пространства, выделяемых системами неравенств $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, t \geq 0$ и $x \leq 1, y \leq 1, z \leq 1, t \leq 1$. Нетрудно показать, что гиперплоскость $x + y + z + t = h$ пересекает каждую из этих частей по правильному тетраэдру. Один из этих тетраэдров увеличивается с ростом h , а другой уменьшается. Искомое множество представляет собой пересечение двух таких тетраэдров и может быть точкой, тетраэдром или усеченным тетраэдром (в частности, при совпадении размеров обоих тетраэдров мы получим в пересечении правильный октаэдр; он изображен на рисунке 3 на четвертой странице обложки «Кванта» № 6 за 1985 год).

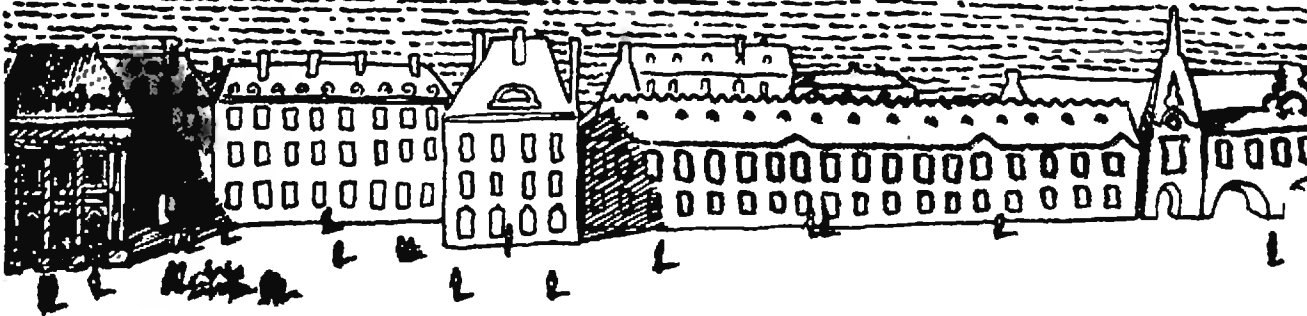
Мы надеемся, что читатели настолько освоились с понятием четырехмерного куба, что сумеют нарисовать эти сечения самостоятельно.



Среди всех людей чести,
привалили слава Франции,
трудно было бы
угадать одного
человека, кто
с точки зрения
развития науки
физики мог бы
хоть как-то
сравниться с Ньютоном.

П. Юнг

COULON



Шарль Кулон и его открытия

Кандидат физико-математических наук С. Р. ФИЛОНОВИЧ

В этом году исполняется 250 лет со дня рождения Шарля Кулона. Это имя известно каждому, кто когда-либо изучал физику. Главным научным достижением Кулона обычно считают экспериментальное подтверждение закона «обратных квадратов» — закона взаимодействия неподвижных точечных зарядов. Однако Кулону принадлежит ряд исследований и в других областях физики, вошедших в золотой фонд науки. Мы публикуем статью о выдающемся французском ученом и отрывки из важнейших работ Кулона, дающие представление о его творчестве.

Шарль Огюстен Кулон родился 14 июня 1736 года в городе Ангулеме, на юго-западе Франции. Его отец, в свое время пытавшийся сделать военную карьеру, к моменту рождения сына был правительственным чиновником. Мать Кулона происходила из знатной семьи. Детство Шарля прошло в Париже, где он получил начальное образование, посещая Коллеж Четырех Наций, основанный по завещанию знаменитого политического деятеля кардинала Мазарини. Коллеж Мазарини славился высоким уровнем преподавания математики, и, видимо, там привили юному Кулону любовь к этому предмету.

После окончания Коллежа Кулон уехал из Парижа на родину отца в Монпелье. Там он принимал участие в работе местного научного общества и даже был принят в него по классу математики. Однако Кулон недолго оставался в провинции. Он понимал, что необходимо выбрать какую-то профессию, которая обеспечила бы средства к существованию. Выбор Кулона пал на профессию военного инженера, дававшую достаточно высокое положение в обществе и в наибольшей степени соответствовавшую склонностям молодого любителя науки.

Для поступления в Военно-инженерный корпус французской армии необходимо было закончить специальную школу, располагавшуюся в Мезьере. В середине XVIII века Мезьерская военно-инженерная школа считалась одним из лучших высших технических учебных заведений Европы. После успешной сдачи вступительных экзаменов Кулон был зачислен в Школу и в течение полутора лет обучался там математике, черчению, основам физики, а также получал практические навыки: учился плотницкому делу, обработке камня, проведению геодезических работ. В 1761 году Кулон закончил Школу и получил чин лейтенанта.

Вскоре Кулон получает приказ о назначении на Мартинику — в заморскую колонию Франции. Там молодой и еще совсем неопытный инженер руководит строительством военного форта — основного оборонительного сооружения острова. На Мартинике Кулон провел восемь лет и был отозван на родину лишь после того, как строительство форта было практически закончено.

После возвращения во Францию Кулон получает последовательно назначения в Бушэн, Шербур, Безансон, Рошфор, Лилль... И все это время, продолжая службу в качестве военного инженера, выполняя множество поручений технического характера, в том числе и очень хлопотных, Кулон находил время для исследований в различных областях техники и физики.

Вести самостоятельную научную работу Кулон начал еще на Мартинике. Его первое исследование было посвящено проблемам сопротивления материалов и строительной механики. Удивительно, но не имевший практически никакого опыта в науке молодой военный инженер сумел подготовить мемуар, во многом определивший пути развития строительной механики. Мемуар, имевший по традиции того времени длинное название «О применении правил максимума и минимума к некоторым вопросам статики, имеющим отношение к архитектуре», был представлен в Парижскую Академию наук, получил одобрение и был опубликован. Учитель Кулона по Мезьерской школе, академик Боссю писал об этой работе: «...Кулон охватил, так сказать, всю архитектурную статику ... Повсюду в его исследовании мы отмечаем глубокое знание анализа бесконечно малых и мудрость в выборе физических гипотез, а также в их применении...» Отмеченное Боссю сочетание тонкой физической интуиции и хорошего знания математики стало впоследствии одной из наиболее характерных черт научных работ Кулона.

Первый успех в Академии окрылил молодого исследователя, и он представляет на ее рассмотрение всё новые и новые работы. Примечательно, что почти во всех технических проблемах, с которыми ему приходится сталкиваться. Кулон видит проблемы научные и стремится изучить их как можно глубже. Так, находясь на службе в Бушэне, он готовит мемуар по строительной механике, в Шербуре он работает сразу над двумя темами: о предельных мускульных усилиях человека и о конструкции чувствительного прибора для исследования магнитного поля Земли (за последнюю работу Кулон получил премию Парижской Академии наук). Во время службы в Безансоне Кулон занимается проблемами проведения подводных работ. Написанный им на эту тему мемуар переиздавался в конце XVIII — начале XIX века четыре раза и даже был переведен на русский язык. В Рошфоре ученый выполнил цикл экспериментов по сухому трению, за что получил еще одну премию Академии. Наконец в Лилле, находящемся в области, где широко использовались ветряные двигатели, он готовит мемуар об эффективности ветряных мельниц и оптимальной форме их крыльев.

Исследовательская активность Кулона получила признание: в 1781 году он был избран членом Парижской Академии наук по классу механики. Тогда же он переехал в столицу. В Париже командование Военно-инженерного корпуса использовало его в основном в качестве консультанта по техническим вопросам. Однако главной для Кулона теперь, безусловно, становится деятельность в Академии наук.

В 80-е годы ученый проводит несколько важнейших исследований в области физики. Конструируя прибор для изучения магнитного поля Земли, предназначенный для установки в знаменитой Парижской Обсерватории, он столкнулся с необходимостью тщательно изучить особенности деформации кручения тонких металлических нитей. С этой целью Кулон ставит цикл экспериментов и на основе проведенных исследований конструирует крутильные весы — прибор для измерения малых сил, характеризовавшийся уникальной для того времени чувствительностью. Принцип измерений с помощью крутильных весов основан на том, что момент упругих сил, возникающих при закручивании нити, оказывается пропорциональным углу закручивания. Именно крутильные весы стали основным инструментом при проведении знаменитого цикла экспериментов Кулона по электричеству и магнетизму (1785—1789 г.г.).

Опыты Кулона, основанные на непосредственном измерении силы электростатического взаимодействия, позволили установить связь между новой физической величиной — количеством электричества (зарядом) — и привычными механическими величинами — силой и расстоянием. Поэтому вполне обоснованно на Международном конгрессе электриков, проходившем в 1881 году в Париже, авторитетная комиссия, в состав которой входили В. Томсон (Кельвин), Г. Гельмгольц, Г. Кирхгоф, А. Г. Столетов и другие известные физики, единодушно назвала именем Кулона единицу количества электричества. С тех пор 1 кулон (1 Кл) живет в физике, постоянно напоминая нам о трудах и днях выдающегося французского ученого.

(Окончание см. на с. 14)



К числу наиболее значительных работ Кулона относится его мемуар «Теория простых машин с учетом трения их частей и жесткости канатов». В нем подробно исследовано явление сухого трения. К началу работы Кулона над этой проблемой в научной литературе можно было найти самые разнообразные утверждения относительно трения. Так, был уже известен закон Амонтона, согласно которому сила трения пропорциональна силе нормального давления и не зависит от площади соприкосновения тел. Однако некоторые исследователи оспаривали его справедливость. Большой раздор царил в суждениях о зависимости силы трения скольжения от относительной скорости движения тел. Наконец, нередко можно было столкнуться с противоречащими друг другу экспериментальными результатами. Причина такого положения состояла в том, что трение — очень сложное явление, зависящее от большого числа факторов, в том числе — от состояния поверхностей. Для получения однозначных результатов следовало провести систематические количественные исследования. С практической точки зрения особенно важна была постановка полномасштабных опытов, когда нагрузки соответствуют используемым на практике.

Исследование Кулона отвечало всем этим требованиям. В его опытах изучалась зависимость силы трения от природы соприкасающихся тел, от площади соприкосновения, силы давления, сжимающей поверхности (Кулон использовал нагрузки массой до 1000 кг), от времени контакта, относительной скорости скольжения и т. д.

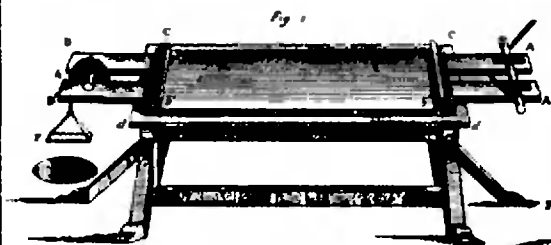
В целом Кулон подтвердил закон Амонтона, но в то же время показал, что это приближенный закон. Оказалось, что сила трения скольжения очень слабо зависит

от площади соприкосновения, и чаще всего этой зависимостью можно пренебречь.

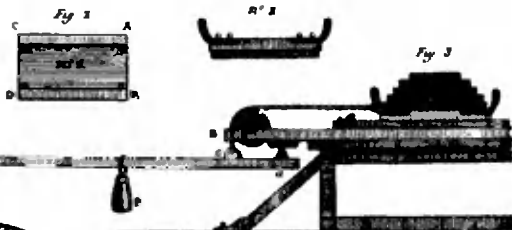
Внизу на рисунке приведена схема экспериментальной установки Кулона для изучения сухого трения. На Fig. 1 изображен стол для изучения силы трения скольжения: груз на салазках (Fig. 2) скользил по поверхности $aab'b'$ под действием силы натяжения троса, перекинутого через блок h ; к концу троса прикреплялась платформа P , на которую устанавливались грузы. На Fig. 3 изображено устройство для изучения силы трения покоя (действие этого устройства основано на принципе рычага). Сравнивая силу трения покоя и силу трения скольжения, Кулон пришел к выводу о существовании явления застоя и описал это явление.

«...При скольжении дерева по дереву без смазки с некоторой скоростью сила трения также пропорциональна нормальному давлению, но по величине она много меньше той, которая требуется, чтобы нарушить связь между поверхностями после некоторого времени их контакта. Установлено, например, что сила, необходимая для нарушения связи между двумя поверхностями дуба после нескольких минут контакта относится к силе, необходимой для преодоления трения, когда поверхности движутся с некоторой скоростью, как 95:22 ...»

В 90-х годах Кулон провел ряд экспериментов по изучению вязкого трения. В этих опытах он использовал крутильный подвес. Эффект трения определялся по скорости затухания крутильных колебаний цилиндра, помещенного в сосуд с жидкостью (этот прибор изображен на рисунке внизу). Ученый пришел к выводу, что при очень малой скорости движения возникающее сопротивление пропорционально скорости, а при больших скоростях — ее квадрату.



Стол для изучения силы трения скольжения.



Устройство для изучения силы трения покоя.

Схема экспериментальной установки Кулона для изучения вязкого трения.





Тщательным изучением электро- и магнитостатических явлений Кулон занялся сразу после завершения опытов по кручению металлических нитей (крутильный подвес был идеальным устройством для количественного исследования слабых по величине взаимодействий). Первый мемуар на эту тему назывался «Конструкция и применение электрических весов, основанных на свойстве металлических проволок иметь силу кручения, пропорциональную углу кручения». Эта работа, в которой был экспериментально обоснован «закон Кулона», в прошлом году отметила двухсотлетие.

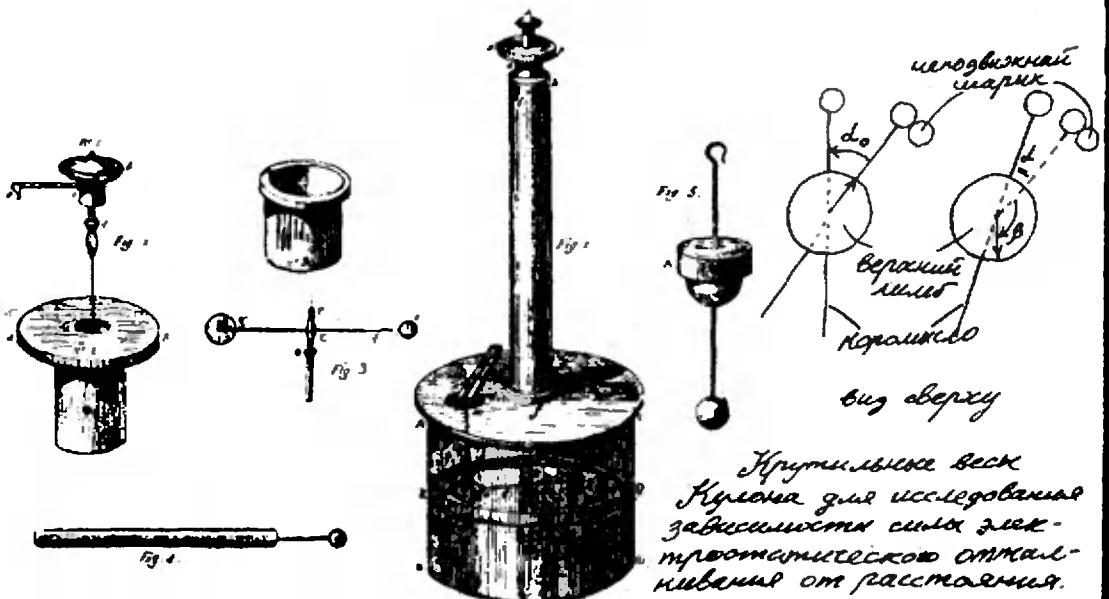
С середины XVIII века многие исследователи пытались определить «закон электрической силы». Некоторые из них предполагали, по аналогии с законом всемирного тяготения, что это должен быть закон «обратных квадратов», однако попытки прямого определения зависимости силы от расстояния затруднялись тем, что еще не было осознано различие между взаимодействием заряженных тел и притяжением или отталкиванием «элементарных» (то есть точечных) зарядов. Вследствие этого некоторые экспериментаторы делали ошибочные выводы из данных измерений.

Достоинство опытов Кулона по электричеству состоит в том, что в них измерялось взаимодействие между зарядами, которые в первом приближении действительно можно было считать точечными. Кулон использовал специальные крутильные «электрические» весы, с помощью которых определялась сила отталкивания между двумя равными и одноименными зарядами.

По традиции того времени Кулон очень тщательно описал устройство весов и методику проведения эксперимента.

• На стеклянный цилиндр $ABCD$ диаметром и высотой 32,5 см помещена стеклянная пластина диаметром 35 см, полностью покрывающая сосуд; в ней просверлены два отверстия примерно по 4,5 см в диаметре, одно из которых f находится в центре; над ним возвышается стеклянная трубка h высотой 65 см ... На верхнем конце трубки h помещен поворотный микрометр, показанный в деталях на Fig. 2 ... Захват q (Fig. 2, № 1) на конце представляет собой нечто вроде рейсфедера ... именно в нем укрепляется конец очень тонкой серебряной нити; другой ее конец сжимается захватом P (Fig. 3) ... Игла, которую видно на Fig. 1 (ag), подвешенная [на нити] горизонтально на половине высоты большого сосуда, ... сделана либо из шелковой нити, натертой сургучом, либо из соломинки ..., на ее конце a помещается маленький бузиновый шарик диаметром от 4,5 до 6,8 мм, а на конце g — небольшой вертикальный кусочек бумаги, пропитанной скипидаром, служащий противовесом шарiku a и замедляющий колебания ...; в крышке A проделано второе отверстие m ; именно через него [внутри сосуда] вводят маленький цилиндр $m\Phi t$..., на конце которого находится такой же бузиновый шарик. Вокруг сосуда на высоте иглы имеется шкала zQ , разделенная на 360° ...»

До начала опыта Кулон устанавливал крутильный подвес так, чтобы указатель io (Fig. 2) стоял на нулевой отметке, нить была не закручена, шары a и t слегка касались друг друга, причем шар a нахо-





дился против нулевого деления шкалы zQ . Дальнейшие действия Кулон описывает так:

«... электризуют маленький проводник (Fig. 4), который представляет собой булавку ..., и вводят его в отверстие m , заставляя коснуться шара t , находящегося в контакте с шаром a . Булавку удаляют; оба шара оказываются наэлектризованными одноименным электричеством, и они взаимно отталкиваются на расстояние, которое измеряется по шкале zQ , когда смотрят по направлению нити и центра шара; поворачивая затем указатель микрометра b в направлении pnO , закручивают нить подвеса IP и создают силу, пропорциональную углу закручивания, которая стремится приблизить шарик a к t . Таким образом наблюдают расстояния, на которые сводятся шары a и t при различных углах кручения, и, сравнивая силы кручения с соответствующими расстояниями между двумя шариками, определяют закон отталкивания.»

Игла ag находилась в равновесии, когда момент силы электростатического отталкивания уравновешивался моментом упругих сил, возникающих при закручивании нити. Поэтому при равновесии сила отталкивания оказывалась пропорциональной углу закручивания, то есть углу $\alpha + \beta$, где α — угловое расстояние между шариками, измеренное по шкале zQ , β — угол поворота головки b . Если закон взаимодействия зарядов — это действительно «закон обратных квадратов», то сила электростатического отталкивания должна быть пропорциональна $1/\alpha^2$ (при не слишком больших α , когда линейное расстояние между зарядами можно считать про-

порциональным угловому расстоянию между ними).

Следовательно, если до закручивания головки b (при $\beta = 0$) шарики расходились на угол α_0 , а после закручивания на угол β равновесие устанавливалось при угловом расстоянии между шариками α , то должно выполняться соотношение $(\alpha_0/\alpha)^2 = (\alpha + \beta)/\alpha_0$. (Кулон приводит данные о чувствительности своих весов. При толщине нити около 40 мкм поворот коромысла весов на 1° требовал приложения силы $F \approx 4 \cdot 10^{-9}$ Н (плечо силы $d \approx 11$ см).)

Из таблицы, в которой приведены данные из мемуара Кулона, видно, что полученные Кулоном результаты в целом подтверждали «закон обратных квадратов». (Для изучения силы притяжения между разноименными зарядами была использована другая установка. Схема ее приведена на рисунке.)

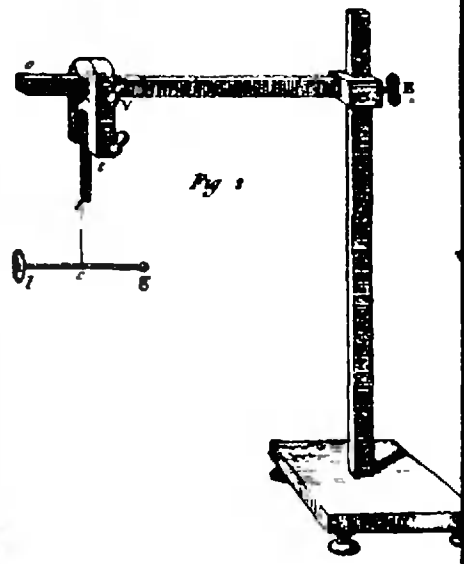
Интересно, что закон взаимодействия точечных зарядов до сих пор подвергается экспериментальной проверке. К настоящему времени закон «обратных квадратов» подтвержден с исключительной точностью: поправка δ в показателе степени расстояния ($F \sim r^{-(2 \pm \delta)}$) не может превосходить фантастически малую величину: $\delta \leq 6 \cdot 10^{-16}$!

Кулон использовал крутильные весы и для изучения магнитных взаимодействий. Однако результаты опытов Кулона по магнетизму с современной точки зрения представляют меньший интерес, чем данные электрических опытов, и мы не будем на них останавливаться.

Таблица

z	β	$z + \beta$	$(z + \beta) / z_0$	$(z_0 / z)^2$
36	0	36	1	1
18	126	144	4	4
8,5	567	575,5	16	17,9

Шкала экспериментальной установки Кулона для измерения сил электростатического притяжения.





Круг исследований Кулона в области электричества был очень широк. Он изучил явление утечки заряда, распределение заряда по поверхности проводников сложной формы, исследовал индукционное действие заряженного проводника на нейтральный и т. д. В целом полученные Кулоном результаты стали экспериментальной основой первой последовательной количественной теории электричества, разработанной французским математиком С. Пуассоном в 1811 году.

В 1789 году началась Великая французская буржуазная революция, которая перевернула весь уклад жизни французского общества. Революционные события затронули и Кулона. В 1791 году он в чине майора вышел в отставку. В 1793 году была распущена королевская Академия наук. Кулон с семьей уезжает из Парижа и полтора года живет вдали от столицы.

Однако столь крупный ученый, как Кулон, не мог долго оставаться вне научной жизни. В 1795 году был образован Институт Франции, заменивший старую Академию. Среди первых членов Института был и Кулон. После избрания в новую Академию и возвращения в Париж ученый продолжил свои исследования, однако их интенсивность постепенно спадала.

В последние годы жизни Кулон много сил отдавал работе в качестве генерального инспектора народного образования, участвуя в коренном преобразовании системы просвещения во Франции.

Ученый умер в Париже в 1806 году.

Наш календарь

75-летие открытия сверх- проводимости

Сверхпроводимость была открыта в 1911 году голландским физиком, профессором Лейденского университета Г. Камерлинг-Оннесом. Каковы обстоятельства этого открытия?

В 1908 году Камерлинг-Оннес, впервые оживив гелий (его температура кипения при атмосферном давлении 4,2 К), сделал доступной для исследований область очень низких температур. Как теперь хорошо известно, в этой температурной области сверхпроводимость обнаруживают множество металлов, сплавов и соединений. Кажалось бы, открытие сверхпроводимости стало неизбежным — на него просто нельзя было не натолкнуться, тем более что измере-

ние электросопротивления — едва ли не самое «ходовое» в экспериментальной физике. Однако голландский ученый пришел к своему открытию не совсем случайно.

В те годы физиков очень занимал вопрос, что будет происходить с сопротивлени-

ем металлов при приближении к абсолютному нулю температуры. Теория тогда еще ответа дать не могла, и существовали два диаметрально противоположных прогноза. Одни — вслед за Кельвином — полагали, что при абсолютном нуле металл станет

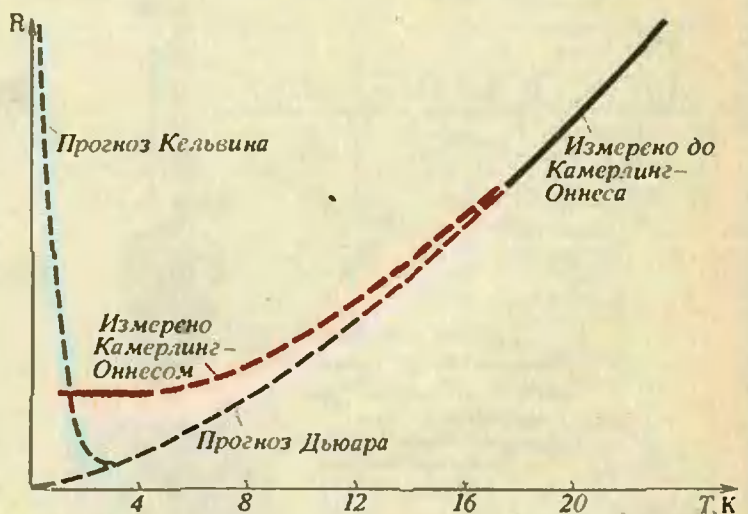


Рис. 1.

изолятором (его сопротивление станет бесконечно большим), другие же разделяли мнение Дьюара, считавшего, что с приближением к нулю сопротивление будет постепенно неограниченно уменьшаться (рис. 1).

Приступить к исследованиям сопротивления металлов при «гелиевых» температурах Камерлинг-Оннес смог только в конце 1910 года. И его сразу же ожидал сюрприз: оба прогноза — и кельвиновский и дьюаровский — оказались ошибочными. Измерения на проволоке из чистой платины показали, что при самом глубоком охлаждении сопротивление перестает зависеть от температуры (см. рис. 1). Составив новый результат со своими более ранними данными, полученными в измерениях при не столь низких температурах, голландский физик пришел к выводу: ордината горизонтального участка зависимости $R(T)$ должна быть тем меньше, чем чище металл. И, таким образом, в случае металла идеальной чистоты R обратится в нуль еще до подхода к $T=0$. С точки зрения классической электронной теории металлов такое падение сопротивления до нуля при ненулевой температуре выглядело абсолютно непонятным, и Камерлинг-Оннес решил привлечь к объяснению квантовую теорию, широкое признание которой начиналось как раз в это время. Таким образом ему удалось вывести зависимость $R(T)$, которую следовало ожидать для идеально чистого металла.

Ясно, что для экспериментальной проверки этой зависимости требовался металл максимальной чистоты. В те времена на эту роль могла претендовать только ртуть, легко поддающаяся эффективной очистке путем дистилляции. Но Камерлинг-Оннес был опытным экспериментатором и прекрасно понимал, сколь неудобно иметь дело со ртутью. Ведь для повышения точности измерений сопротивления должна быть по возможности большой, то есть для экспериментов надо было использовать длинную тонкую проволоку. А ртуть жидкая! Поэтому ученый сначала с помощью своей формулы зависимости $R(T)$ прикинул, чего можно ожидать от такого эксперимента. Расчет показал, что при темпе-

ратуре 4,3 К сопротивление ртути будет еще ощутимым, а при 3 К упадет до неизмеримо низкого уровня. Таким образом, открывалась великолепная возможность проследить в опыте всю картину исчезновения сопротивления, имея перед собой столь заманчивую перспективу, стоило пуститься в нелегкую борьбу с экспериментальными трудностями.

Лишь после ряда неудачных попыток Камерлинг-Оннесу и его помощнику стеклодуву-виртуозу удалось разработать необходимый тип образца для измерений — ажурную зигзагообразную конструкцию из тончайших стеклянных капилляров, внутренний канал которых диаметром порядка 50 мкм заполняла жидкая ртуть, образующая единую «нить» длиной около 1 м (рис. 2). Легко представить, сколько хлопот доставлял такой образец. При малейшем неосторожном движении, при слишком быстром охлаждении или отогреве стеклянные капилляры трескались и обламывались; иногда при замораживании нарушалась непрерывность ртутной нити...

И все же настойчивость и экспериментальное мастерство победили. Весной 1911 года Камерлинг-Оннес торжествовал: опыт — в поразительном согласии с теоретическим предсказанием! — показал, что сопротивление чистой ртути, еще вполне измеримое при температуре 4,3 К, при 3 К действительно становится практически неизмеримым.

Однако дальнейшие более точные измерения поколебали веру ученого в его теорию.



Рис. 2.

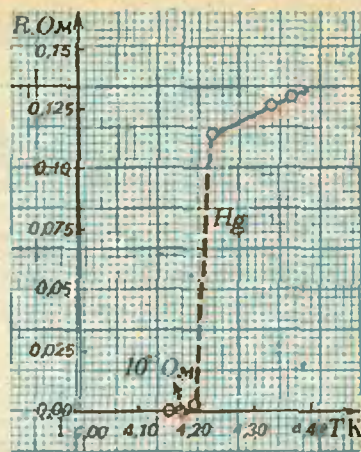


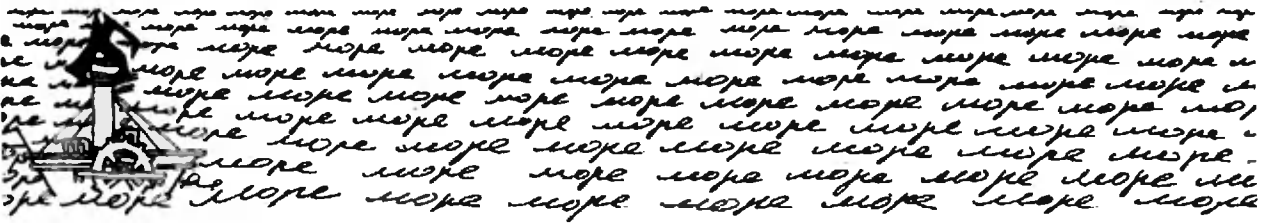
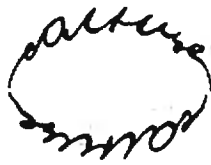
Рис. 3.

Оказалось, что сопротивление исчезает скачком (рис. 3), тогда как формула для $R(T)$ предсказывала хотя и крутое, но все же плавное падение сопротивления. Впоследствии выяснилось, что совпадение теории Камерлинг-Оннеса с опытом вообще чисто случайное. Ученым было открыто принципиально новое явление — сверхпроводимость.

Задача объяснения физической природы сверхпроводимости оказалась исключительно трудной, и решить ее не удавалось около полувека. Теория этого явления была создана лишь в 1957 году американскими учеными Дж. Бардином, Л. Кулером и Дж. Шриффером и советским ученым Н. Н. Боголюбовым.

В наши дни учение о сверхпроводимости превратилось в один из наиболее глубоко разработанных разделов физики твердого тела. Огромные успехи достигнуты и в практическом использовании сверхпроводимости — уже работают базирующиеся на этом явлении сверхчувствительные приборы для электромагнитных измерений; широко применяются сверхпроводящие соленоиды, создающие магнитные поля в таких объемах и такой величины, о которых в случае обмоток из нормальных проводников нельзя и мечтать. В недалеком будущем промышленная энергетика получит обладающие неслышанно высоким КПД сверхпроводящие электрогенераторы и электродвигатели; ведется работа по созданию сверхкомпьютеров, которые должны превзойти теперешние полупроводниковые по быстродействию и объему памяти.

Б. Е. Яв, 100



Зеленый луч

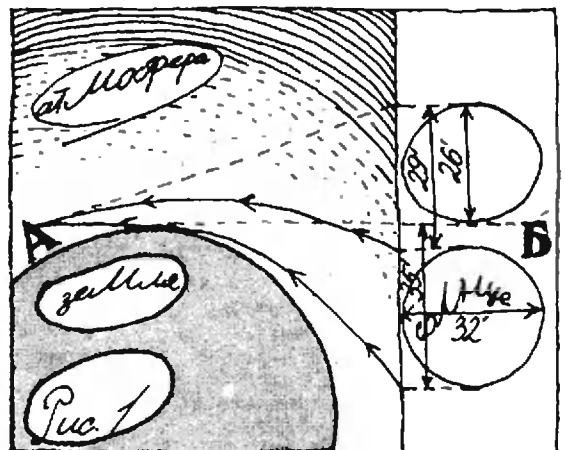
Кандидат физико-математических наук
Л. В. ТАРАСОВ

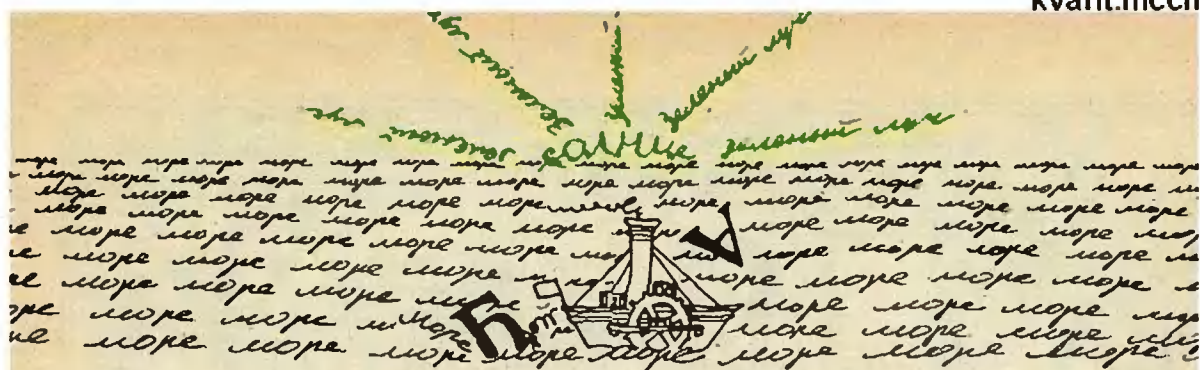
Иногда при заходе солнца можно наблюдать удивительное явление — так называемый зеленый луч. Когда почти весь солнечный диск скрылся за горизонтом, на несколько секунд вдруг вспыхивает яркий зеленый свет. Краешек солнца вместо желто-красного неожиданно превращается в ярко-зеленый, во все стороны от него исходят зеленые лучи. Секунда, другая, третья ..., и красочное зрелище внезапно исчезает. Зеленый луч вероятнее всего увидеть в такой вечер, когда солнце вплоть до самого заката ярко светит и почти не изменяет своего цвета, оставаясь желтым или, в крайнем случае, желтовато-оранжевым. Советский астроном Г. А. Тихов много лет изучал это удивительное явление. Вот что он пишет: «Если солнце при закате красного цвета и на него легко смотреть, то можно с уверенностью утверждать — зеленого луча не будет. Напротив, если солнце не очень изменило свой бело-желтый цвет и садится ярким, то можно предполагать, что зеленый луч появится. Важно, чтобы горизонт имел отчетливую линию, без всяких неровностей: ближнего леса, строений и т. п. Этих условий легче всего достичь на море, вот почему зеленый луч хорошо известен людям моря».

Физика зеленого луча основывается на трех эффектах: 1) эффекте искривления световых лучей в оптически неоднородной среде (в данном случае в земной атмосфере), 2) зависимости степени искривления лучей от длины волны, 3) рассеянии света в ат-

мосфере (точнее, на ослаблении эффекта рассеяния света в достаточно чистой и спокойной атмосфере). Учтем эти эффекты поочередно — сначала первый, а затем последующие.

Известно, что, проходя в атмосфере, световой луч искривляется, причем так, чтобы его траектория всегда была обращена выпуклостью в сторону менее плотных областей воздуха. По этой причине мы видим заходящий солнечный диск немного сплюснутым по вертикали; его вертикальный поперечник виден под углом $26'$, что на $6'$ меньше углового размера горизонтального поперечника. В этом «повинно» уменьшение плотности атмосферного воздуха с высотой, приводящее к соответствующему искривлению лучей (так называемое явление рефракции света в атмосфере). Когда мы, любясь на морском берегу солнечным закатом, видим, как нижний край светила коснулся линии горизонта, мы обычно не сознаем, что в действительности в данный момент этот край светила находится на $2^\circ 35'$ ниже линии горизонта (а значит, и весь солнечный диск находится глубоко за горизонтом). Величина $2^\circ 35'$





складывается из двух слагаемых: 2° объясняются тем, что свет от Солнца до Земли идет чуть больше восьми минут; а вот 35' связаны с рефракцией света в атмосфере. Заметим, что из-за рефракции верхний край солнечного диска «приподнимается» слабее — не на 35', а только на 29' (рефракция уменьшается по мере увеличения высоты объекта над горизонтом). Именно поэтому заходящее солнце и кажется наблюдателю слегка сплюснутым. Сказанное поясняет рисунок 1, где А — наблюдатель, АБ — линия горизонта. (В связи с этим советуем вам прочитать статью А. А. Михайлова «Когда день равен ночи», опубликованную в «Кванте» № 6 за 1980 год.) Рефракцией света в атмосфере объясняются также миражи (см. статью Г. И. Гринёвой и Г. В. Розенберга «Дела и проделки феи Морганы» в «Кванте» № 8 за 1984 год).

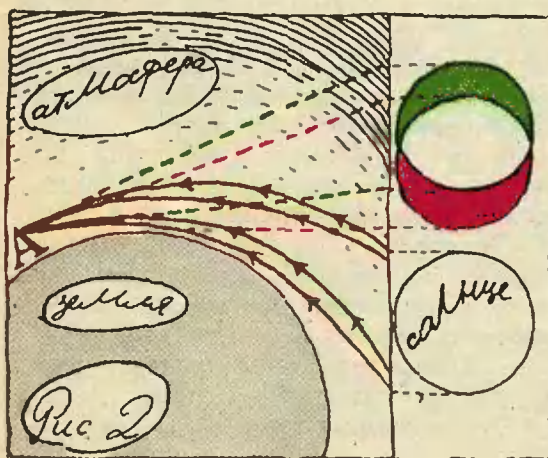
Далее учтем, что чем меньше длина волны света, тем сильнее он преломляется. Именно на этом основано спектральное разложение света в призмах. Указанный эффект приводит к тому, что сине-зеленые лучи претер-

певают в атмосфере более сильную рефракцию, чем красные лучи. Пусть для простоты в спектре солнечного света имеются всего два цвета — зеленый и красный; «белый» солнечный диск можно рассматривать в данном случае в виде наложенных друг на друга зеленого и красного дисков. Рефракция света в атмосфере приподнимает над горизонтом зеленый диск в большей степени, чем красный.

В результате наблюдатель должен был бы увидеть заходящее солнце таким, каким оно показано в правом верхнем углу на рисунке 2. Верхний край диска был бы зеленым, а нижний красным; в центральной же части диска наблюдалось бы смещение цветов (наблюдался бы «белый» цвет).

Описанная картина верна лишь при условии, что атмосфера не рассеивает света. В действительности, однако, она его рассеивает. Это приводит к тому, что из светового пучка, идущего от солнца, наиболее эффективно выбывают лучи с более короткой длиной волны (закон рассеяния был установлен Рэлеем: интенсивность рассеянного света обратно пропорциональна четвертой степени длины световой волны). Поэтому зеленой каемки наверху диска мы не увидим, а весь солнечный диск будет выглядеть не «белым», а красноватым.

Но вот представим себе, что почти весь солнечный диск скрылся за горизонтом, так что остался лишь самый верхний его краешек. И пусть при этом стоит ясная и тихая погода, воздух чист, так что рассеяние света в атмосфере относительно невелико. Вот в этом случае мы и можем увидеть яркозеленый край солнца вместе с россыпью зеленых лучей.





Вызов Ван Роумена

Кандидат физико-математических наук
Ю. П. СОЛОВЬЕВ

В начале октября 1594 года король Франции Генрих IV принимал в Фонтенбло посланника Республики Соединенных Нидерландов, которую по имени самой крупной ее провинции чаще всего называли Голландией. Возникшая в результате длительной и упорной борьбы против испанского владычества, республика была очень молода — ей шел всего второй десяток лет. Война с Испанией не прекращалась — голландское правительство настойчиво искало союзников. А во Франции только что погасли пожары многолетней междоусобицы, и Генрих, преодолев бешеное сопротивление оппозиции, поддерживаемой испанцами, стал французским королем. Генрих не скрывал своего интереса к Голландии как к союзнику в борьбе с

Испанией, но более всего его интересовали бурно развивающиеся голландская промышленность, торговля и мореплавание. Поэтому, прогуливаясь по парку в Фонтенбло, он внимательно слушал рассказ посланника о новых шелковых мануфактурах Роттердама, бумажных фабриках Утрехта, корабельных верфях Зандама.

— В Голландии сейчас много талантливых инженеров и ученых, — говорил посланник. — Математик и механик Симон Стевин разрабатывает новые системы шлюзов и плотин, по проектам математика Лудольфа Цейлена возводятся крепости, математик Андриен Ван Роумен славится своими головоломными вычислениями. Кстати, — продолжал посланник, — не так давно Ван Роумен сделал вызов математикам всего мира. Он разослал во многие страны письмо, в котором предлагает решить придуманную им задачу. Но пока это никому не удалось.

— Победителем непременно будет француз, — засмеялся король.

— Ваше Величество, — заметил посланник, — я привез это письмо, но

по-видимому, Франция не имеет выдающихся математиков, поскольку Ван Роумен среди тех, кому он адресовал свой вызов, не упомянул ни одного француза.

— И все же у меня есть математик, и весьма выдающийся, — ответил Генрих. — Позовите Виета.

Так в этот осенний день столкнулись судьбы двух очень непохожих людей.

Андреас Ван Роумен — родился в 1561 году в г. Лувене в Испанских Нидерландах (ныне Бельгия). Изучал медицину и математику в Лувенском университете. В Лувене же получил степень доктора. Преподавал математику в Лейдене и Вюрцбурге. Занимался исследованиями по геометрии и тригонометрии, а также практическими вопросами астрономии и навигации. Получил ряд частных результатов о разложении функций $\sin px$ и $\cos px$ по степеням $\sin x$ и $\cos x$, определил значение числа π с семнадцатью десятичными знаками, то есть с наибольшей точностью для Европы того времени. При жизни Ван Роумен был очень знаменит в Голландии и Германии, но со временем его работы утратили свое значение, и сейчас упоминания о нем можно разыскать лишь в самых толстых энциклопедиях.

Франсуа Виет — родился в 1540 году в г. Фонтене. С 1559 года занимался адвокатской деятельностью, серьезно интересуясь при этом математикой и астрономией. В 1571 г. переехал в Париж, где продолжал адвокатскую деятельность и завязал знакомства с парижскими математиками. В 1573 году стал советником парламента в Бретани, затем частным советником короля Генриха III. В 1580 году получил должность королевского докладчика по ходатайствам. В последние годы правления Генриха III занимался расшифровкой переписки между противниками короля и испанцами. Нашел ключ к сложному шифру, который использовался испанским королем Филиппом II и его генералами. Филипп II, узнав из перехваченных французских депеш, что его секретную корреспонденцию читают при французском дворе, в гневе принес жалобу Папе Римскому, указывая, что расшифровка явно проводилась с помощью колдовства и черной магии. После убийства Генриха III в августе 1589 г. перешел на службу к Генриху Наваррскому, будущему французскому королю Генриху IV. Автор большого числа работ по алгебре, геометрии, тригонометрии, астрономии. Установил зависимость между корнями и коэффициентами алгебраического уравнения, нашел разложения функций $\sin px$ и $\cos px$ по степеням $\sin x$ и $\cos x$, создал современную алгебраическую символику. Работы Виета, написанные тяжелым, усложненным языком, остались непонятными его современниками и лишь спустя почти полвека после его смерти оказали огромное влияние на развитие алгебры и геометрии.

Но вернемся в Фонтенбло. Когда появился Виет, посланник достал письмо Ван Роумена. В нем предлагалось решить уравнение

$$45x - 3795x^3 + 95634x^5 - 1138500x^7 + 7811375x^9 - 34512075x^{11} + 105306075x^{13} - 232676280x^{15} + 384942375x^{17} - 488494125x^{19} + 483841800x^{21} - 378658800x^{23} + 236030652x^{25} - 117679100x^{27} + 46955700x^{29} - 14945040x^{31} + 3764565x^{33} - 740259x^{35} + 111150x^{37} - 12300x^{39} + 945x^{41} - 45x^{43} + x^{45} = a,$$

в частности, при

$$a = \sqrt{1\frac{3}{4}} - \sqrt{\frac{5}{16}} - \sqrt{1\frac{7}{8}} - \sqrt{\frac{45}{64}}.$$

Для облегчения задачи Ван Роумен сообщал ответы, которые получаются при двух других значениях a (записываемых еще более громоздко).

Виет прочел письмо и сразу же написал решение. Посланник сказал, что в резиденции у него имеется запечатанный конверт с решением самого Ван Роумена. В присутствии нотариуса он вскрыет его и завтра ответит, прав ли Виет. На следующий день голландец подтвердил, что решение Виета верно, а Виет, в свою очередь, прислал еще двадцать два других решения, не известных Ван Роумену. Кроме того, Виет указал на ошибку в условии задачи (сделанную либо переписчиками, либо самим Ван Роуменом).

Попробуем разобраться, как удалось Виету необыкновенно быстро решить столь чудовищное на первый взгляд уравнение. Обратимся для этого к некоторым его математическим работам. Главными тригонометрическими результатами, полученными Виетом, являются выражения для синусов и косинусов кратных дуг. Виет получает эти выражения в форме правила, указывающего, как чисто механически можно получить их. Это правило похоже на то, которое приведено в статье Д. Б. Фукса «Формулы для $\sin px$ и $\cos px$ » на с. 25, разница лишь в том, что вместо треугольника Паскаля Виет пользуется следующей таблицей:

1	1	1	1	1	1	...
1	2	3	4	5	6	...
1	3	6	10	15	21	...
1	4	10	20	35	56	...
1	5	15	35	70	126	...
1	6	21	56	126	252	...
1	7	28	84	210	462	...

• • • • •

Каждое число здесь получается посредством сложения чисел, стоящих перед ним и над ним. Стоит отметить, что Виет выражает не $\sin nx$ и $\cos nx$ через $\sin x$ и $\cos x$, как это делаем мы, а $2\sin nx$ и $2\cos nx$ через $2\sin x$ и $2\cos x$. Если в образованных таким образом выражениях рассматривать величины $2\sin nx$ или $2\cos nx$ как известные, то мы получим уравнения n -й степени относительно неизвестных $2\sin x$ и $2\cos x$.

Первоначальная цель, ради которой Виет выводил формулы синусов кратных дуг, заключалась в вычислении синусов дуг через синусы малых дуг, то есть в составлении таблицы синусов. Затем эти формулы нашли применение в алгебре и геометрии. В частности, геометрическую задачу о трисекции угла α Виет связал с уравнением $3x - x^3 = a$, которому удовлетворяют значения $a = 2\sin \alpha$, $x = 2\sin(\alpha/3)$. Два положительных решения этого уравнения Виет трактует как хорды, отвечающие дугам $2\alpha/3$ и $(360^\circ - 2\alpha)/3$. Отрицательный корень он, по обыкновению своего времени, вообще не принимает во внимание. Точно так же задачу о делении угла на пять равных частей Виет связывает с уравнением $5x - 5x^3 + x^5 = a$, которому удовлетворяют значения $a = 2\sin \alpha$, $x = 2\sin(\alpha/5)$.

Из сказанного ясно, в какой степени был подготовлен Виет, чтобы мгновенно решить задачу Ван Роумена. Он сразу же увидел, что предложенное значение a является длиной стороны правильного пятинадцатигульника, вписанного в единичный круг (проверьте это!), или, что то же самое, хордой, отвечающей дуге 24° . Коэффициенты при первом и предпоследнем членах левой части позволили ему предположить, что левая часть есть не что иное, как выражение $2\sin 45^\circ \alpha$ через $2\sin \alpha$. Но поскольку $a = 2\sin 12^\circ$, то $\alpha = 12^\circ/45 = 4^\circ/15$, и значит, $x = 2\sin(4^\circ/15)$. Именно это решение и передал Виет голландскому посланнику.

После аудиенции Виет проверил свое предположение. Однако, проделав необходимые вычисления, он обнаружил, что левая часть предложенного уравнения не совпадает с разложением $2\sin 45^\circ \alpha$ по степеням $2\sin \alpha$!

Наверное, в этот момент он чувствовал себя не очень уютно, скорее всего, просто скверно.

Что произошло? Может быть, это всего лишь ошибка в весьма утомительных вычислениях? Видимо, в этот момент Виет и сумел найти другой — геометрический — способ выразить $2\sin 45^\circ \alpha$ через $2\sin \alpha$: для того чтобы разделить дугу на 45 частей, нужно разделить ее сначала на пять частей, затем каждую часть на три и снова на три. Другими словами, левую часть уравнения Ван Роумена можно получить из системы

$$\begin{cases} 3z - z^3 = a, \\ 3y - y^3 = z, \\ 5x - 5x^3 + x^5 = y. \end{cases}$$

Лишь проанализировав те ответы, которые сообщал Ван Роумен для двух других значений a , Виет убедился, что речь действительно идет о делении дуги на сорок пять частей и смело исправил ошибку в условии. Но Виет не ограничился этим решением. Двадцать два других решения, сообщенных им на следующий день, имели вид

$$2\sin \frac{360^\circ k + 12^\circ}{45} = 2\sin \frac{120^\circ k + 4^\circ}{15}, \\ k = 1, 2, \dots, 22.$$

Таким образом, Виету удалось найти все положительные корни (напомним, что только они считались решениями в его время).

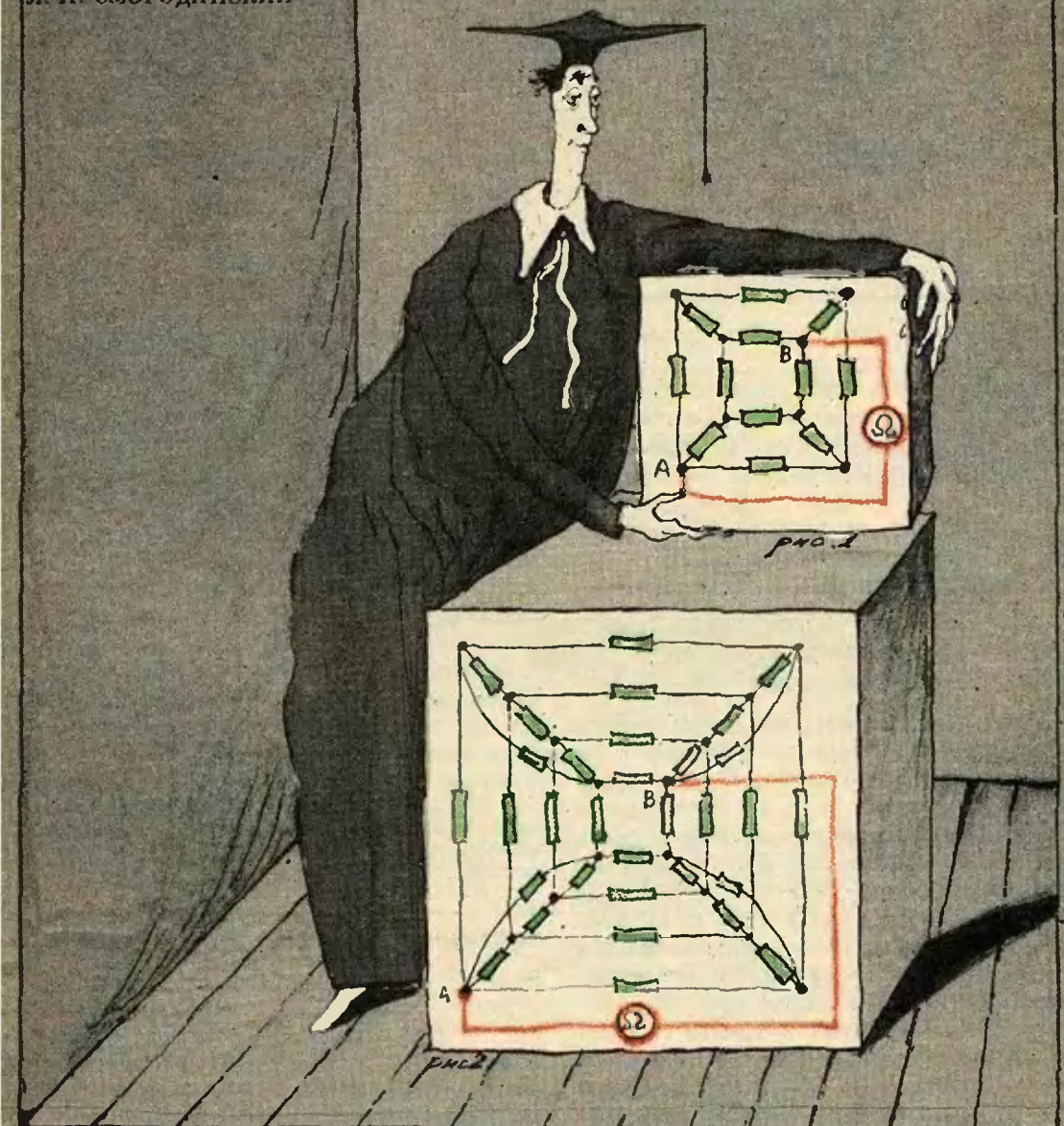
Здесь можно было бы поставить точку, однако математическое соревнование между Виетом и Ван Роуменом на этом не кончилось. Спустя короткое время Виет предложил Роумену построить циркулем и линейкой окружность, касающуюся трех данных окружностей (задача Аполлония). Вскоре Виет указал изящное геометрическое построение, выполнимое только циркулем и линейкой.

Рассказывают, что, потерпев второе поражение, Ван Роумен стал ревностным почитателем Виета и даже приезжал к нему учиться.



Сопротивление ребер многомерного куба

Ф. НЕДЕМЕЙЕР (ВНР),
доктор физико-математических наук
Я. А. СМОРОДИНСКИЙ



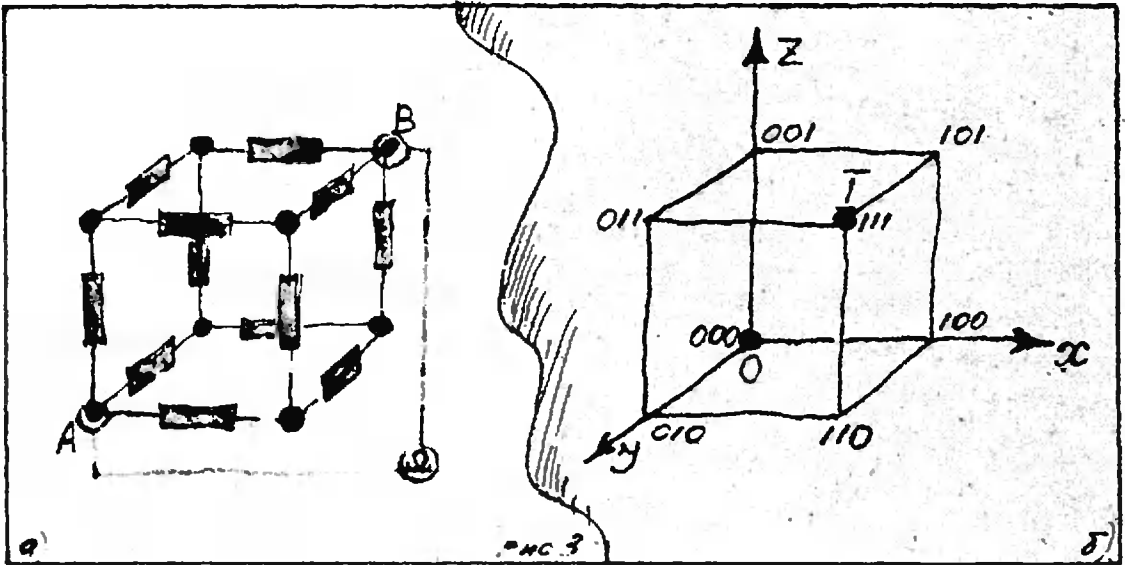
В конце сороковых годов в математических кружках Москвы появилась задача об электрическом сопротивлении проволочного куба. Кто ее придумал или нашел в старых учебниках, мы не знаем. Задача была очень популярной, и о ней быстро узнали все. Очень скоро ее стали задавать на экзаменах, и она перешла в разряд почти тривиальных.

Задачу эту можно сформулировать так: *сосчитайте сопротивление R_2 между*

точками A и B на схеме из рисунка 1, при условии, что все показанные на схеме сопротивления равны 1 Ом.

— Ну и что здесь интересного? — спросит скептический читатель. — Нужно долго и нудно считать по законам Кирхгофа и все получится. В общем — скучная задача по физике.

Если такому читателю предложить сосчитать сопротивление R_1 между точками A и B при том же условии, но уже на схеме с рисунка 2, он и вовсе



рассердится — мыслимо ли проводить такой счет?

Между тем в этих задачах скрыты красивые геометрические и алгебраические закономерности (недаром эта с виду физическая задача рассматривалась на математических кружках), позволяющие их решить без всякого «нудного счета», а также неожиданным образом их обобщить.

Случай трехмерного и четырехмерного кубов

Начнем с очевидного геометрического наблюдения: схема на рисунке 1 — это схема ребер обычного куба (сравните рисунки 1 и 3, а). В качестве модели нашего куба рассмотрим стандартный единичный куб в системе координат $Oxyz$, сопоставив точкам O и I вершины $(0; 0; 0)$ и $(1; 1; 1)$, подразумевая наличие сопротивлений в 1 Ом на всех ребрах куба. Заметим, что координаты вершин куба (и только координаты этих 6 точек) состоят лишь из нулей и единиц. Назовем сумму координат какой-либо вершины ее *рангом*. Если между точками O и I создать разность потенциалов, то потенциал вершин *одинакового ранга одинаков* (это очевидно из соображений симметрии). Поэтому можно, не меняя сопротивления схемы, заколотить вершины одного ранга, получив схему, состоящую из трех последовательно соединенных групп параллельных сопротивлений (рис. 4). Для такой схемы задача решается устно (см. рис. 4): сопротивление R_3 равно $5/6 \text{ Ом}$.

Для подсчета сопротивления второй схемы (см. рис. 2) заметим, что эта схема — схема ребер четырехмерного куба*). Это — уже менее очевидное геометрическое наблюдение. Читатель может произвести его, сравнив рисунок 2 с рисунком 7 на с. 6. Далее подсчет выполняется точно так же, как в случае обычного куба. При подсчете (показанном на рисунке 5) вновь используется то, что *вершины одного ранга имеют одинаковый потенциал* и поэтому могут быть заколочены (без изменения общего сопротивления между точками O и I). Ответ получается такой: $R_4 = 2/3 \text{ Ом}$.

Задача 1. Сосчитайте сопротивление ребер R_5 пятимерного куба между его диаметрально противоположными вершинами при условии, что сопротивление каждого ребра равно 1 Ом .

Сопротивление ребер n -мерного куба

Задачу о сопротивлении ребер куба можно обобщить дальше, рассматривая кубы размерности $n=5, 6, 7, 8$ и т. д. Это можно сделать по той же схеме, что для $n=2, 3, 4$, однако мы не будем в праве считать себя математиками, если не сумеем сразу сосчитать сопротивление R_n n -мерного куба между его противоположными вершинами для любого n (определение n -мерного куба см. на с. 7).

Читатель может спросить — правомерна ли такая постановка задачи, ведь n -мерный куб при $n > 3$ — лишь

*1 С понятием четырехмерного куба можно познакомиться в статье С. В. Дужина и В. Н. Рубцова в этом номере «Кванта».

Ранг	0	1	2	Σ
Число вершин	1	+ 2	+ 1	= 4
Число ребер	2	+ 2	= 4	
Схема				
Сопротивления	$1/2$	+ $1/2$	= 1	

Ранг	0	1	2	3	Σ
Число вершин	1	+ 3	+ 3	+ 1	= 8
Число ребер	3	+ 6	+ 3	= 12	
Схема					
Сопротивления	$1/3$	+ $1/6$	+ $1/3$	= $5/6$	

Рис. 4.

Ранг	0	1	2	3	4	Σ
Число вершин	1	+ 4	+ 6	+ 4	+ 1	= 16
Число ребер	4	+ 12	+ 12	+ 4	= 32	
Схема						
Сопротивления	$1/4$	+ $1/12$	+ $1/12$	+ $1/4$	= $2/3$	

Рис. 5.

Рис. 6.

Ранг	0	1	2	...	$k-1$	k	...	$n-1$	n
Число вершин	1	+ n	+ $\frac{n(n-1)}{2}$	+ ...	+ C_n^k	+ ...	+ n	+ 1	= 2^n
Число ребер	n	+ $n(n-1)$	+ ...	+ $(n-k)C_n^k$	+ ...	+ n	= ?		
Сопротивления	$\frac{1}{n}$	+ $\frac{1}{n(n-1)}$	+ ...	+ $\frac{1}{nC_n^k}$	+ ...	+ $\frac{1}{n}$	= ?		

математическая абстракция, он не существует «на самом деле», так что непонятно, какой смысл в подсчете сопротивления его ребер. Отвечаем. Смысл есть, поставленная задача — вполне реальная физическая задача. Дело в том, что хотя сам n -мерный куб при $n > 3$ нельзя поместить в трехмерное пространство, схема его ребер без труда в обычное пространство помещается. Так, на рисунке 2 (или 5) видно, как это делается для четырехмерного куба, а на обложке журнала даже показана схема ребер восьмимерного куба! В общем случае (n — любое) вложимость схемы ребер n -мерного куба в трехмерное пространство — несложная математическая теорема, на доказательстве которой мы останавливаться не будем.

Интересно отметить, что схему ребер трехмерного куба можно разместить без самопересечений на плоскости (см. рис. 1), однако доказано (это уже трудная теорема), что схему ребер четырехмерного (и вообще n -мерного при $n \geq 4$) куба поместить на плоскость без самопересечений нельзя.

Как читатель наверняка догадался, подсчет R_n проводится в сущности так же, как R_3 и R_4 . Проследить за ним можно по рисунку 6. Ответ таков:

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k) C_n^k}, \quad (1)$$

где C_n^k — биномиальный коэффициент (см. «Квант», 1986, № 1, с. 23).

При подсчете мы вновь пользуемся тем, что вершины одного ранга имеют тот же потенциал, и поэтому все сводится к подсчету числа ребер, соединяющих вершины соседних рангов. Понятно, что число вершин ранга k равно C_n^k (их столько, сколько имеется способов поставить k цифр 1 на n мест), а число ребер, исходящих из каждой вершины ранга k равно $n-k$ (почему?); значит, число ребер между вершинами k -го и $(k+1)$ -го ранга равно $(n-k) C_n^k$. Эти ребра можно считать параллельно соединенными, поэтому получаем (1).

Задачи

2. Проверьте, что $(n-k) C_n^k = n C_{n-1}^k$, обосновав тем самым соотношение

$$R_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{C_{n-1}^k}. \quad (2)$$

3. Пользуясь формулой (2), докажите, что

$$R_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(n-k) 2^k}. \quad (3)$$

4. Установите рекуррентное соотношение

$$R_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{2} R_{n-1}$$

алгебраически (пользуясь формулой (3)) и геометрически. Проверьте наши подсчеты R_3 , R_4 , R_5 , исходя из этого соотношения и равенств $R_1 = R_2 = 1$.

Другие обобщения

Предлагаемые здесь методы подсчета можно применить и к другим задачам, например такой:

Задача 5. Сосчитайте сопротивление проводочного трехмерного куба между соседними вершинами при условии, что сопротивление каждого ребра равно 1 Ом. Обобщите на любое n .

Более интересно менять не точки приложения омметра, а конфигурацию рассматриваемой схемы. Наши рассуждения сохраняют силу для любой схемы, у которой в каждый узел подключено одинаковое количество ребер (сопротивлений в 1 Ом).

Задача 6. Покажите, что сопротивление между соседними узлами схемы из m узлов, в каждой из которых входит s сопротивлений в 1 Ом, равно

$$R = \frac{2}{s} \left(1 - \frac{1}{m} \right).$$

Например, для бесконечной двумерной квадратной сетки получается простой ответ: $R = 1/2$ ($s = 4$, $m = \infty$). Для сетки из треугольников ($s = 6$, $m = \infty$) $R = 1/3$, для сетки из шестиугольников ($s = 3$, $m = \infty$) $R = 2/3$, для тетраэдра ($s = 3$, $m = 4$) $R = 1/2$. Для n -мерного куба получаем ($s = n$, $m = 2^n$):

$$R = \frac{2}{n} \left(1 - \frac{1}{2^n} \right).$$

Еще более интересна (но, увы, не элементарна!) задача о подсчете сопротивления между соседними по диагонали узлами бесконечной квадратной сетки из сопротивлений в 1 Ом. Ответ оказывается равным $2/\pi$ Ом, хотя в схеме нет ни намека на окружность!



Математика 9, 10

Публикуемая ниже заметка предназначена для учащихся и десятиклассникам. Она также будет полезна тем, кто готовится к вступительным экзаменам в вузы.

Формулы для $\sin nx$ и $\cos nx$

Сборники задач для поступающих в вузы пестрят синусами и косинусами «кратных углов», то есть выражениями типа $\sin 7x$, $\cos 9x$ и т. п. Не всегда, но довольно часто бывает полезно записать эти выражения как функции от $\sin x$ и $\cos x$. В принципе это можно сделать совершенно автоматически при помощи формул для синуса и косинуса суммы, но при многократном применении даже самой простой формулы никто не застрахован от ошибок; к тому же может помешать нехватка времени. Ниже приводится простой, легко запоминающийся и надежный способ написания формул для $\sin nx$ и $\cos nx$.

Треугольник Паскаля. Вполне возможно, что читатель знает, что это такое; все же напомним определение. Треугольник Паскаля — это числовая таблица, в n -й строке которой стоят $n+1$ натуральных чисел. При этом в верхней строке стоят две единицы и при каждом n в n -й строке стоят по краям единицы, а на остальных местах — суммы последовательных пар соседних чисел из $(n-1)$ -й строки (рис. 1).

		1		1											
		1	2	1											
		1	3	3	1										
		1	6	10	6	1									
		1	10	20	30	20	10	1							
		1	15	35	70	105	70	35	15	1					
		1	21	56	140	350	700	350	140	56	21	1			
		1	28	84	210	420	1050	2100	3500	2100	840	28	1		
		1	36	126	315	756	1575	3024	5040	7560	3150	126	36	1	
		1	45	180	476	1176	2772	5796	11025	18480	27720	4760	180	45	1

Рис. 1.

Самое замечательное свойство треугольника Паскаля состоит в том, что числа из его n -й строки — это коэффициенты многочлена

$$\begin{aligned} (x+1)^n &= \\ (x+1)^1 &= x+1, \\ (x+1)^2 &= x^2+2x+1, \\ (x+1)^3 &= x^3+3x^2+3x+1, \\ (x+1)^4 &= x^4+4x^3+6x^2+4x+1, \\ (x+1)^5 &= x^5+5x^4+10x^3+10x^2+5x+1 \end{aligned}$$

Когда-то это проходили в школе, но теперь не проходят.

Формулы. Напишите n -ю строку треугольника Паскаля. (Кстати, для того чтобы найти n -ю строку, не нужно считать строки: в n -й строке на втором месте стоит n .) Припишите к числам из этой строки последовательно $\cos^n x$, $\cos^{n-1} x \sin x$, $\cos^{n-2} x \sin^2 x$, ..., $\sin^n x$. Подчеркните в получившейся цепочке выражения, стоящие на четных местах: втором, четвертом и т. д. Выпишите неподчеркнутые выражения и подчеркнутые выражения в две отдельные строчки. В каждой из получившихся двух строчек поставьте перед вторым выражением минус, перед третьим плюс, перед четвертым минус и т. д. Все готово — в верхней строчке вы написали выражение для $\cos nx$, в нижней — для $\sin nx$.

Примеры. При $n=2$ строка треугольника Паскаля имеет вид 1, 2, 1. Пишем:

$$\cos^2 x \quad 2\cos x \sin x \quad \sin^2 x$$

$$\begin{aligned} \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x, \\ \sin 2x &= 2\cos x \sin x. \end{aligned}$$

При $n=3$ пишем:

$$\cos^3 x \quad 3\cos^2 x \sin x \quad 3\cos x \sin^2 x \quad \sin^3 x$$

$$\begin{aligned} \cos 3x &= \cos^3 x - 3\cos x \sin^2 x, \\ \sin 3x &= 3\cos^2 x \sin x - \sin^3 x. \end{aligned}$$

Несколько полученных этим способом формул для $\cos nx$ и $\sin nx$ читатель найдет на рисунке 2; вдоль красных ломаных на этом рисунке можно прочесть строки треугольника Паскаля.

Упражнение. Зная n -ю строку треугольника Паскаля, легко написать формулу, выражающую $\operatorname{tg} nx$ через $\operatorname{tg} x$. Попробуйте это сделать.

Доказательство формул. Вообще-то эти формулы являются следствием «формулы Муавра» («Квант», 1983, № 2, с. 19, статья Л. С. Понтрягина «Комплексные числа»). Но, чтобы не ссылаться на не входящий в програм-

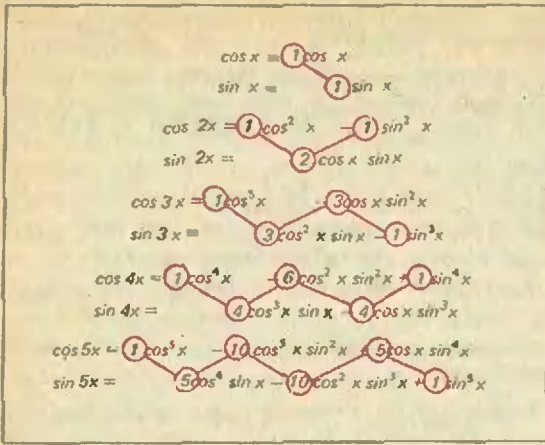


Рис. 2.

му материал, мы приведем их прямое доказательство по индукции.

При $n=2$ формулы общеизвестны. Пусть $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, a_{n+1}$ есть n -я строка треугольника Паскаля. Предположим, что формулы $\cos nx = a_1 \cos^n x - a_3 \cos^{n-2} x \sin^2 x + \dots$, $\sin nx = a_2 \cos^{n-1} x \sin x - a_4 \cos^{n-3} x \sin^3 x + \dots$ уже доказаны. По формуле для косинуса суммы

$$\begin{aligned} \cos(n+1)x &= \cos(nx+x) = \cos nx \cos x - \sin nx \sin x = \\ &= (a_1 \cos^n x - a_3 \cos^{n-2} x \sin^2 x + \dots) \cos x - \\ &- (a_2 \cos^{n-1} x \sin x - a_4 \cos^{n-3} x \sin^3 x + \dots) \sin x. \end{aligned}$$

Раскрывая скобки и перегруппировывая слагаемые, получаем:

$$\begin{aligned} \cos(n+1)x &= \\ &= a_1 \cos^{n+1} x - (a_2 + a_3) \cos^{n-1} x \sin^2 x + \\ &+ (a_4 + a_5) \cos^{n-3} x \sin^4 x - \dots \end{aligned}$$

Аналогично, при помощи формулы $\sin(n+1)x = \sin nx \cos x + \cos nx \sin x$ получается $\sin(n+1)x = (a_1 + a_2) \cos^n x \sin x - (a_3 + a_4) \cos^{n-2} x \sin^3 x + \dots$. Поскольку $a_1, a_1+a_2, a_2+a_3, a_3+a_4, \dots$ есть $(n+1)$ -я строка треугольника Паскаля, мы доказали для $\cos(n+1)x$ и $\sin(n+1)x$ нужные формулы.

Заключение. Построение циркулем и линейкой правильного пятиугольника (читать только любознательным!). Пусть $x=2\pi/5$. Тогда $5x=2\pi$ и $\sin 5x=0$. По нашей формуле $\sin 5x = 5\cos^4 x \sin x - 10\cos^2 x \sin^3 x + \sin^5 x = \sin x(5\cos^4 x - 10\cos^2 x(1-\cos^2 x) + (1-\cos^2 x)^2) = \sin x(16\cos^4 x - 12\cos^2 x + 1)$.

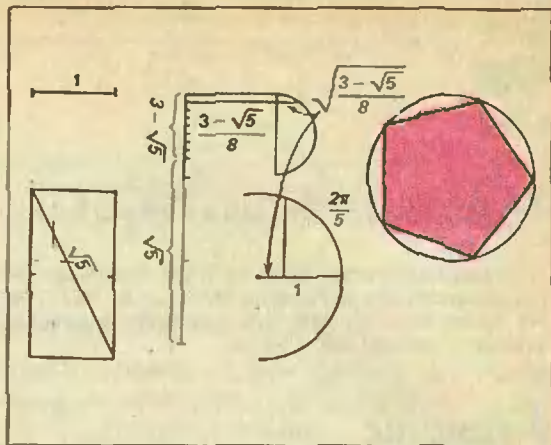


Рис. 3.

Таким образом

$$\begin{aligned} \sin x(16\cos^4 x - 12\cos^2 x + 1) &= 0, \\ \text{откуда либо } \sin x &= 0, \text{ либо } \cos x = \\ &= \pm \sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}}. \text{ Так как } \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}, \text{ нам} \\ \text{подходит только возможность } \cos x &= \\ &= \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}. \end{aligned}$$

Принимая за 1 радиус окружности, в которую вписан наш пятиугольник, мы последовательно строим отрезок длины $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{8}}$, дугу $2\pi/5$ — и вписанный в окружность правильный пятиугольник. Детали построения представлены на рисунке 3.

Замечание. Это построение лишено практической ценности: при помощи общедоступных инструментов трудно достичь сколько-нибудь удовлетворительной точности. Интересен сам факт, что правильный пятиугольник можно построить циркулем и линейкой, в отличие, скажем, от правильного семиугольника (см. статью А. А. Кириллова «О правильных многоугольниках, функции Эйлера и числах Ферма», «Квант», 1977, № 7).

Д. Б. Фукс

Раздел философии, называемый математикой, является самым легким из всех разделов с точки зрения представления и доказательства... Этот

раздел философии сообщает нам гибкость, укрепляет соображение, приучает нас ненавидеть недосказанное, так как его исходные поло-

жения общеизвестны, доказательства легки, в нем воображение помогает разуму и мало противоречиво. Омар Хайям



Задачи

1. Определите угол, который стрелки часов составляют в 9 часов 20 минут.

2. Расшифруйте числовой ребус:

$$\begin{array}{r} \text{КТО} \\ + \text{КОТ} \\ \hline \text{ТОК} \end{array}$$



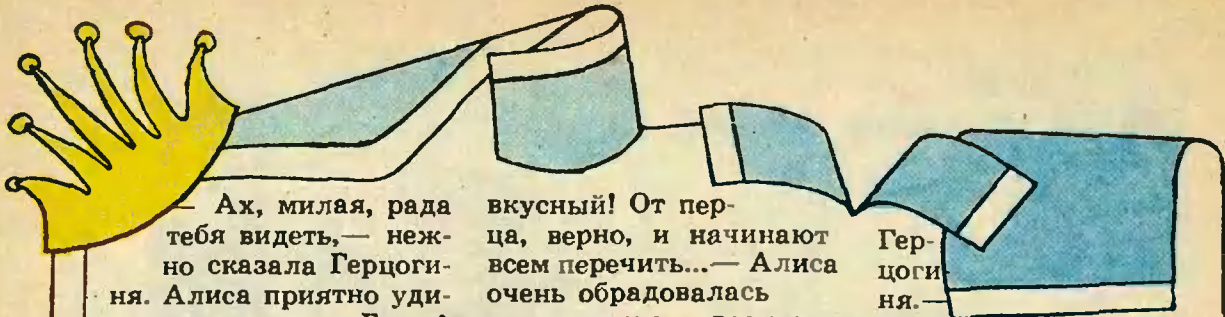
3. В те, еще не столь давние времена, когда неперменной принадлежностью чаепития был пыхтящий самовар с восседающим на нем заварным чайником, накрытым расшитой льняной салфеткой, заварные чайники делались с дырочкой в крышке (такие чайники делают и сейчас). Зачем нужна такая дырочка?

4. Найдите наименьшее число, сумма цифр которого делится на 17, и сумма цифр следующего за ним числа тоже делится на 17.

5. Алик, Боря, Витя и Гена ходили по грибы. Алик с Борей вместе собрали грибов столько же, сколько Витя с Геной вместе, а у Алика с Геной грибов оказалось меньше, чем у Бори с Витей. Гена нашел грибов больше, чем Витя. Расположите имена мальчиков в порядке убывания числа найденных каждым из них грибов.



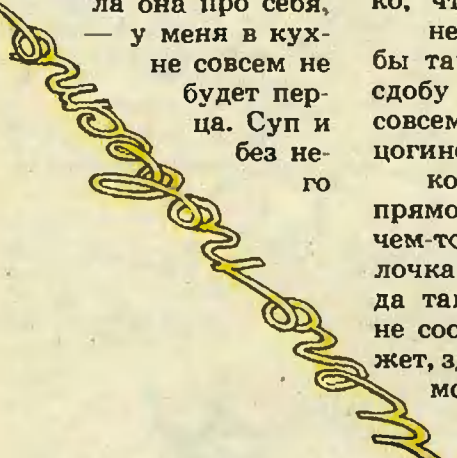
Эти задачи нам предложили А. П. Савин, семиклассник Кашкадаринской школы Масялинского района АзССР Назим Садыгов, А. Г. Самосват, Г. А. Гальперин, Н. Х. Розов.



— Ах, милая, рада тебя видеть, — нежно сказала Герцогиня. Алиса приятно удивилась, увидев Герцогиню в отличном расположении духа, и подумала, что, должно быть, от перца она была такой вспыльчивой. **7** Когда я буду Герцогиней, — сказала она про себя, — у меня в кухне совсем не будет перца. Суп и без него

вкусный! От перца, верно, и начинают всем перечить... — Алиса очень обрадовалась, что открыла новое правило. **8** От укуса кукусят, — продолжала она задумчиво, — от горчицы — огорают, от лука — лукавят, от сдобы — добреют. Как жалко, что никто об этом не знает... Все было бы так просто! Ели бы сдобу и добрели! Она совсем забыла о Герцогине и вздрогнула, когда та сказала ей прямо в ухо: — Ты о чем-то задумалась, милочка. А мораль откуда такова... Нет, что-то не соображу!... — А может, здесь и нет никакой морали, — заметила Алиса. — Как это нет! — возразила

Герцогиня. Во всем есть своя мораль, нужно только уметь ее найти! Тут, к великому удивлению Алисы, Герцогиня умолкла и задрожала. Алиса подняла глаза и увидела, что перед ними, грозно нахмурившись, стоит Королева. — Прекрасная погода, Ваше Величество, — слабо прошептала Герцогиня. — Я тебя честно предупреждаю, — закричала Королева и топнула ногой. — Либо мы лишимся твоего общества, либо ты лишишься головы. Решай сейчас же, нет — в два раза быстрее! — Герцогиня решила и тотчас исчезла. Вернемся к нашей игре, — сказала Алисе Королева. Алиса так была напугана, что, не говоря ни слова, побрела за ней следом к площадке. Гости отдыхали в тени, однако, увидев, что Королева возвращается, поспешили к своим местам. А Королева, подойдя, просто объявила, что минута промедления будет стоить им всем жизни.

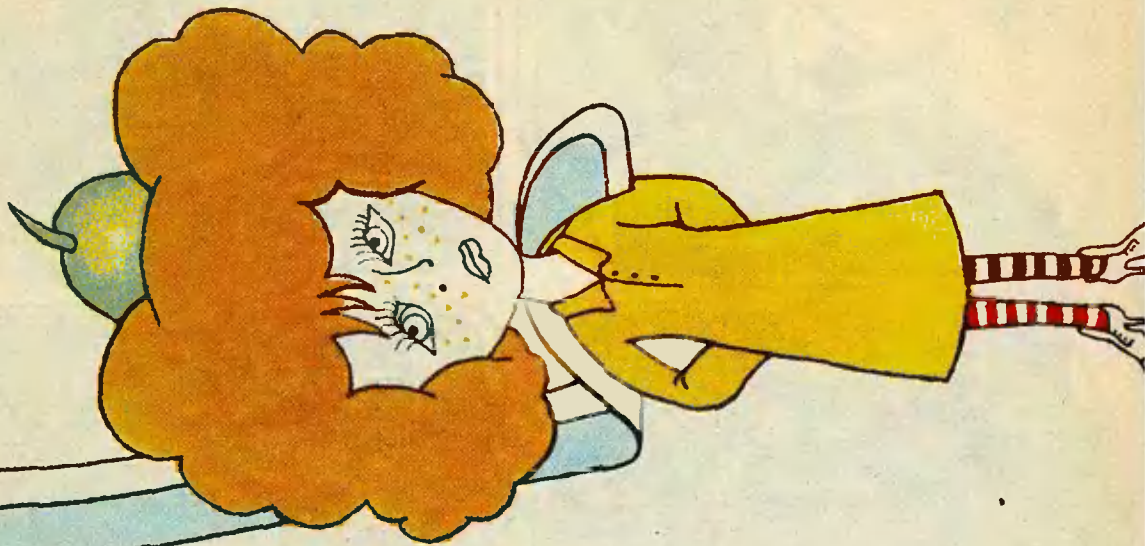


Пока шла игра, Королева беспрепятственно ссорилась с игроками. Наконец она бросила игру и, переводя дыхание, спросила Алису: — А видела ты Под-Котика? — Нет, — сказала Алиса, — Я даже не знаю, кто это такой. — Как же, — сказала Королева, — Это такой зверь. Из него делают шапки и муфты «под котик».

— Пошли. Он тебе сам все расскажет. Вскоре они увидели Грифона, крепко спящего на солнышке. — Вставай, бездельник, — сказала Королева, — отведи эту барышню к Под-Котику. Пусть расскажет ей свою историю. — И она ушла, оставив Алису с Грифоном. — Смех да и только! — пророботал Грифон. — Смех? — переспросила Алиса, рас-
терян-

но. — Ну да, — ответил Грифон. — Все это выдумки. Казнить! Скажет тоже! У них такого отродья не было. Ладно, пошли! «Все здесь только и говорят что «пошли!»», — подумала Алиса. — Никогда в жизни еще мною так не помыкали!» Когда они подошли к Под-Котику, тот взглянул на них большими полными слез глазами. — Эта барышня, — начал Грифон, — хочет послушать твою историю. Вынь да положь ей эту историю! — Что же, я расскажу, — проговорил Под-Котик глухим голосом. — Садись и не открывай рта, пока я не кончу. Грифон и Алиса уселись. Наступило молчание. «Не знаю, как это он

собирается кончить, если никак не может начать», — подумала про себя Алиса. Но делать было нечего — она терпеливо ждала. Наконец Под-Котик немного успокоился и, тяжело вздыхая, заговорил. — Когда мы были маленькие, мы ходили в школу на дне моря. Учителем у нас был старый Котик. Мы звали его Спрутиком. — Зачем же вы звали его Спрутиком? — Мы спросила Алиса. — Мы его звали Спрутиком, потому что он всегда ходил с прутиком, — ответил сердито Под-Котик. — Ты не очень-то догадлива! — Гри-



А что: "теперь"
в два раза быстрее,
чем "сейчас"?

Есть свобода не-
бывающей, есть
тебя, ты и твои
исследования?

— спросила Алиса. — Я тебе показать не могу, — грустно отвечал Подкотик. — Стар я уже для этого. А Грифон ими не занимался. — Времени у меня не было, — подтвердил Грифон. — Зато я лолучил классическое образование. Мы с моим учителем ушли на улицу и целый день играли в классики. Какой был учитель! Сейчас таких уже нет. Настоящий классик! — со вздохом сказал Под-

Котик. — Но я к нему не попал... — И оба повесили головы и вздохнули. ~~Но~~ Долго у вас шли занятия? — спросила Алиса, стремясь перевести разговор. — Это зависело от нас, — отвечал Подкотик. — Как все зайдем, так и кончим. — Займете? — удивилась Алиса. — Занятия почему так называются? — пояснил Грифон. — Потому что на занятиях мы у нашего учителя ум за-

спросила Алиса. — Сначала были четыре действия арифметики: причитание, сколько же мне, умиление и изнеможение. — Я о причитании никогда не слышала, — рискнула заметить Алиса. — Никогда не слыхала о причитании! — воскликнул Грифон. — Что такое «чи-тать», надеюсь, ты знаешь? — Да, — ответила Алиса неуверенно, — посмотреть, что написано в книжке, и... читать. Ну да, — подхватил Грифон, — а если ты читаешь то-

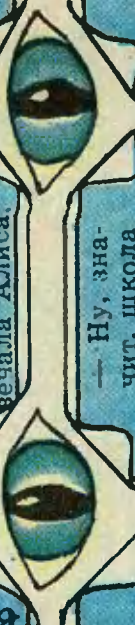
чего нет в книжке, это и значит «причитать». — Алиса повернулась к Подкотику и спросила: — А что еще вы учили? — У нас было много всяких предметов: грязнописание, аналогия, физиология, мимика... А раз в неделю мы записались в мимическом кабинете и ставили мимические опыты... — А что это такое?

ведь мы ходили в школу каждый день... — Я тоже ходила в школу каждый день, — сказала Алиса. — Ничего особенного в этом нет. — А действительно тебя чему-нибудь учили? — спросил Подкотик с тревогой. — Да, — ответила Алиса. — Музыка и французскому. — А стирке? — быстро сказал Подкотик. — Нет, конечно, — с негодованием отвечала Алиса.

— Ну, зна-чит, школа у тебя была неважная, — произнес с облегчением Подкотик. — А у нас в школе к счету всегда приписывали: «Плата за французский, музыку и стирку дополнительно». Правда, я не мог заниматься стиркой, — вздохнул Подкотик. — Мне она была не по карману. Я изучал только обязательные предметы. — Какие?

фон повернулся к Подкотику и сказал: — Давай, старина, поторапливайся! Нельзя же весь день здесь сидеть... — И Подкотик продолжал. — Да, ходили мы в школу, а школа наша была на дне морском... ~~Образование~~ мы получили самое хорошее. И не мудрено —

не мудрено —





3
 Eufe egka rhabure
 (npu) emrpbunee
 Jtauceit: "Egbea omuycum
 hae ueprrobe, kasuapny
 Ee u haeupic bhebe
 Jkor ere nru -
 geumbe?"

8
 Je kare
 Jot qy -
 maame?
 parca ueprabe
 Ee pfrage: "Eo bea
 eme ebe ueprabe?"
 Hecae?

10
 Hecae?
 Je kum?
 Hecae?
 Hecae?
 Hecae?

L

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y+z=3, \\ 2xy-2y-z^2=4. \end{cases}$$

2. а) Известно, что медиана и высота, проведенные из одной вершины треугольника, делят угол при этой вершине на три равные части. Докажите, что этот треугольник — прямоугольный, и найдите его острые углы.

б) Известно, что медиана, биссектриса и высота, проведенные из одной вершины треугольника, делят угол при этой вершине на четыре равные части. Докажите, что этот треугольник — прямоугольный, и найдите его острые углы.

3. Какое из двух чисел больше:

$$\frac{1985^{1986}+1}{1985^{1987}+1} \text{ или } \frac{1985^{1984}+1}{1985^{1985}+1} ?$$

4. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ найдите такую точку O , чтобы площади четырехугольников, получающихся при соединении точки O с серединами сторон четырехугольника $ABCD$, были равны.

5. Докажите, что из любых 100 натуральных чисел можно выбрать несколько чисел так, чтобы их сумма делилась на 100.

Девятый класс

6. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} xy+x+y=1, \\ yz+y+z=5, \\ xz+x+z=2. \end{cases}$$

7. Найдите геометрическое место точек O пересечения диагоналей прямоугольников, вписанных в данный остроугольный треугольник.

8. Решите уравнение

$$\sqrt{3-x} + \sqrt{x-1} = 2\sqrt{2} + (x-y)^2.$$

9. Найдите наибольший общий делитель чисел $A=2^{1986}-1$ и $B=2^{1983}-1$.

10. Известно, что в четырехугольнике можно вписать окружность и около него можно описать окружность. Докажите, что квадрат площади этого четырехугольника равен произведению длин его сторон.

Десятый класс

11. Решите уравнение

$$2a\cos x = a\cos(2x^2 - 1).$$

12. В окружность вписан пятиугольник $ABCDE$. Расстояния от точки E до прямых AB , BC и CD равны соответственно a , b и c . Найдите расстояние от точки E до прямой AD .

13. Найдите все решения уравнения

$$\cos x + \cos y - \cos(x+y) = \frac{3}{2}.$$

14. На плоскости лежат три сферы, попарно касающиеся друг друга. Расстояние между точками касания сфер с плоскостью равны a , b и c . Найдите радиусы сфер.

15. Если в некотором натуральном числе, не оканчивающемся нулем, зачеркнуть одну из цифр, то оно уменьшится в целое число раз. На каком месте может стоять зачеркиваемая цифра?

Публикацию подготовил А. А. Егоров

Наша обложка



На этом рисунке и на обложке журнала — два изображения одного и того же объекта — кометы Галлея. Первое — самое раннее (из сохранившихся в истории), второе — сегодняшнее.

Рисунок сделан с гобелена

«образца» 1066 года, вышитого королевой Матильдой, женой Вильгельма Завоевателя, под предводительством которого иорданцы покорили Англию. На гобелене видна комета и надпись «удивляются звезде». В правой части

гобелена придворный астролог нашептывает последнему англо-саксонскому королю Гарольду II о дурном знаменнии — комете.

На обложке журнала — «гобелен» с изображенным кометы Галлея, «вышитый» современным компьютером. Этот снимок получен при пролете сквозь кометную атмосферу космического аппарата «Вега 2» 9 марта 1986 года. Компьютер раскрасил полученное телекамерой изображение: красный цвет соответствует наиболее плотной и яркой части атмосферы кометы, желтый, зеленый, голубой цвета показывают очертания все менее и менее плотных ее областей. За сближением кометы с Солнцем следили ученые всех стран. В ходе этого грандиозного космического эксперимента были подтверждены многие научные предсказания и... возникли новые вопросы и загадки, над решением которых размышляют ученые.

Задачник Кванта

Задачи

M986 — M990, Ф998 — Ф1002

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 августа 1986 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6—86» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M986, M987» или «Ф998». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», Новая задача по физике» или «...Новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Фамилию, имя и домашний адрес следует писать печатными буквами.

M986. Докажите, что для любых положительных чисел a и b выполняется неравенство

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} > 5\sqrt[5]{ab}.$$

M987. В турнире участвуют $2m$ команд. В первом туре встретились некоторые m пар команд, во втором — другие m пар. Докажите, что после этого можно выбрать m команд, никакие две из которых еще не играли между собой.

М. Бона (ученик гимназии, Венгрия)

M988. Из одной точки O на плоскости проведено n векторов единичной длины. Докажите, что если для некоторого $k < n/2$ по обе стороны от каждой прямой, проходящей через O , лежит не менее k векторов, то длина суммы всех n векторов не превосходит $n - 2k$.

П. А. Калугин

M989. Найдите все натуральные числа a , для которых число $a-1$ является суммой а) двух; б)* трех делителей числа a (не обязательно различных; в число делителей включается 1).

в)* Докажите, что для любого n существует лишь конечное число натуральных a таких, что $a-1$ является суммой n натуральных делителей числа a (не обязательно различных).

В. В. Батырев

M990. В пространстве заданы три попарно скрещивающиеся прямые, не параллельные одной плоскости. Сколько существует различных параллелепипедов, у которых эти три прямые

а) проходят по ребрам?

б) проходят по ребрам или диагоналям граней?

в) содержат 6 вершин параллелепипеда?

В. Н. Дубровский

Ф998. Горнолыжник спускается с высокой горы с установившейся скоростью v . Гора образует угол α с горизонтом и плавно переходит в горизонтальный участок. Как должен наклоняться лыжник, чтобы не упасть в момент перехода? Считать, что переход происходит очень быстро. Масса лыжника равна M . Соппротивление воздуха не учитывать.

А. Н. Семенов

Ф999. По гладкой горизонтальной поверхности стола скользит мешок массой m_1 , связанный жесткой невесомой веревкой с мешком массой m_2 . Веревка, соединяющая мешки, проходит через не-

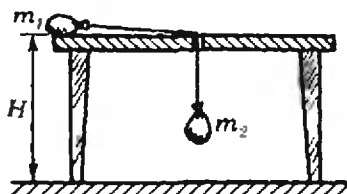


Рис. 1.

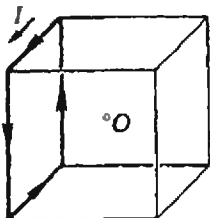


Рис. 2.

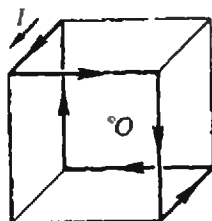


Рис. 3.

большое отверстие в столе (рис. 1). Длина веревки L , высота стола H , причем $H < L$. На какую высоту поднимется мешок m_2 после удара об пол, если в начальный момент вся веревка лежала на столе и мешки не двигались?

Г. Л. Коткин

Из задач, присланных нашими читателями на Конкурс «Ф1000», лучшей признана задача

Ф1000. Ток I , текущий по контуру, образованному четырьмя ребрами куба (рис. 2), создает в центре куба магнитное поле с индукцией B_0 . Найти величину и направление вектора индукции магнитного поля, создаваемого в центре куба током I , текущим по контуру из шести ребер (рис. 3).

М. М. Цыпин

Автор этой задачи — М. М. Цыпин — награждается Дипломом «Кванта».

Ф1001. В однородном электрическом поле находится незаряженный металлический шар. При выключении поля в шаре выделилось количество тепла Q . Какое количество тепла выделится бы в шаре втрое большего радиуса?

С. С. Кротов

Ф1002. Точечный источник света находится на расстоянии L от экрана. Собирающую линзу с фокусным расстоянием $F > (L/4)$, параллельную экрану, перемещают между источником и экраном. При каком положении линзы диаметр пятна, видимого на экране, будет минимальным?

Д. Ю. Григорьев

Problems

M986—M990; P998—P1002

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than August 15th, 1986 to the following address: USSR, Moscow, 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант».

M986. Prove the following inequality for arbitrary positive numbers a and b :

$$2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} > 5\sqrt[5]{ab}.$$

M987. $2m$ teams participate in a tournament. In the first round m pairs of teams meet, in the second — m other pairs. Prove that after that it is possible to choose m teams no two of which have met before.

M. Bona (gymnasium student, Hungary)

M988. n unit vectors in the plane have the common origin O . Prove that if for some $k < n/2$ there are no less than k vectors on both sides of any line passing through O , then the length of the sum of the n vectors is no greater than $n - 2k$.

P. A. Kalugin

M989. Find all the natural numbers a for which the number $a - 1$ is the sum of a) two; b)* three divisors of the number a (not necessarily distinct).

c)* Prove that for any n there exists only a finite number of natural numbers a such that $a - 1$ is the sum of n natural divisors of the number a (not necessarily distinct; the number 1 is counted among the divisors).

V. V. Batyrev

Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write **NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS)**. Please print your name and address in block letters.

M990. Three pairwise skew lines, not simultaneously parallel to any plane, are given in space. How many parallelepipeds are there such that these three lines

- pass through its edges,
- pass through its edges or through diagonals of its faces,
- contain 6 of its vertices?

V. N. Dubrovski

P998. A skier slides downhill from a high mountain at the established velocity v . The mountain forms the angle α with the horizon and then smoothly levels out. How must the skier incline his body so as not to fall as his trajectory levels out? It may be assumed that the levelling out is very rapid. The skier's mass is M . Air friction is negligible.

A. N. Semionov

P999. A sack of mass m_1 tied by an inelastic weightless rope to a sack of mass m_2 slides on a smooth horizontal table. The rope passes through a small hole in the table (see figure Рис. 1). The length of the rope is L , the height of the table is H , where $H < L$. To what height will the sack m_2 rise after colliding with the floor, if at the initial moment the entire rope was on the table and the sacks were motionless?

G. I. Kotkin

P1000. The current I flowing in the circuit constituted by 4 edges of a cube (see figure Рис. 2) creates a magnetic field of induction B_0 at the cube's centre. Find the magnitude and direction of the magnetic induction vector arising at the cube's centre when the same current I flows along the circuit consisting of 6 edges (Рис. 3).

M. M. Tsypin

P1001. An uncharged metallic solid sphere was placed in a uniform electric field. When the field was turned off, the amount of heat Q was liberated in the sphere. How much heat would have been liberated in a sphere of thrice longer radius?

S. S. Krotov

P1002. A point light source is placed at the distance L from the screen. A convergent lens of focal distance $F > (L/4)$ parallel to the screen is moved between the source and the screen. For what position of the lens will the diameter of the luminous spot on the screen be minimal?

D. Yu. Grigoriev

Решения задач

M966 — M970; Ф978 — Ф982

M966. Докажите, что любой треугольник можно разрезать отрезками на четыре куска, из которых можно составить два подобных ему треугольника.

Если сумма площадей двух треугольников, подобных данному с коэффициентами k_1 и k_2 , равна площади данного, то $k_1^2 + k_2^2 = 1$. На рисунке показаны два разрезания для самых известных дробей, удовлетворяющих этому условию — $k_1 = 3/5$, $k_2 = 4/5$ (стороны исходного треугольника разбиты на 5 равных частей).

Н. Б. Васильев



M967. Обозначим через $\sigma(n)$ сумму всех натуральных делителей числа n (включая 1 и n) и через $\varphi(n)$ — количество чисел, меньших числа n и взаимно простых с ним. Докажите, что для любого натурального $n \geq 2$

$$\sigma(n) + \varphi(n) \geq 2n.$$

Пусть $1 = d_1 < \dots < d_k = n$ — все делители числа n . Среди натуральных чисел, не превосходящих n , количество кратных d_i равно n/d_i , поэтому общее количество чисел, не взаимно простых с n , равно $n - \varphi(n)$, не больше суммы

$$\frac{n}{d_2} + \frac{n}{d_3} + \dots + \frac{n}{d_k} = d_{k-1} + d_{k-2} + \dots + d_1 = \sigma(n) - n$$

(ибо $n/d_1 = d_k$, $n/d_2 = d_{k-1}$, ...). Таким образом,

$$n - \varphi(n) < \sigma(n) - n,$$

откуда и следует доказываемое неравенство.

Отметим, что для простого p наша оценка точна:

$$\sigma(p) = p + 1, \quad \varphi(p) = p - 1, \quad \sigma(p) + \varphi(p) = 2p.$$

В. Ф. Лев

M968. Три многоугольника в пространстве расположены так, что их плоскости пересекаются в одной точке O .

а) Докажите, что найдется плоскость, проекции на которую этих трех многоугольников имеют равные площади.
б) Сколько будет таких плоскостей, проходящих через точку O ?

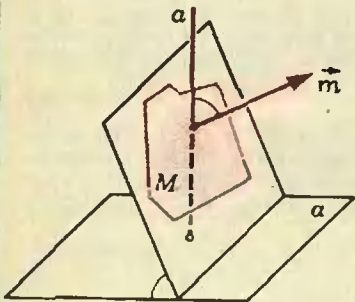


Рис. 1.

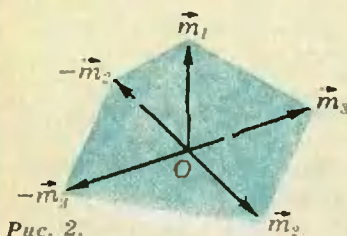


Рис. 2.

Сопоставим многоугольнику M вектор \vec{m} , перпендикулярный плоскости многоугольника и равный по длине площади многоугольника. Тогда площадь проекции M на любую плоскость a равна длине проекции \vec{m} на прямую a , перпендикулярную a (площадь M при проекции умножается на косинус угла между a и плоскостью M , а длина вектора \vec{m} — на косинус угла между вектором и прямой a , но эти углы, очевидно, равны; см. рисунок 1).

Отложим от точки O векторы \vec{m}_1 , \vec{m}_2 и \vec{m}_3 , соответствующие данным многоугольникам; их концы и точка O не лежат в одной плоскости. В силу сказанного выше условию z а д а ч и а) удовлетворяет плоскость, проходящая через концы этих векторов, поскольку их проекции на перпендикулярную ей прямую совпадают. А так как длины проекций двух каких-либо векторов \vec{m} и \vec{n} на прямую равны тогда и только тогда, когда проекция \vec{m} совпадает с проекцией \vec{n} или $-\vec{n}$, мы можем аналогично построить еще 3 такие плоскости, заменяя в тройке векторов \vec{m}_1 , \vec{m}_2 , \vec{m}_3 вектор \vec{m}_2 , или вектор \vec{m}_3 , или оба вместе на противоположные (рис. 2). Ясно, что эти 4 плоскости попарно непараллельны, и при этом любая плоскость, удовлетворяющая условию задачи а), должна быть параллельна одной из них. Таким образом, о т в е т в задаче б) — 4 плоскости.

А. Онукин, Н. М. Седракан

M969. Докажите неравенство для $a, b, c > 0$:

$$\frac{a^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3}{c^2 + ca + a^2} \geq \frac{a + b + c}{3}.$$

Заметим, что

$$\frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 - c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 - a^3}{c^2 + ca + a^2} = (a - b) + (b - c) + (c - a) = 0,$$

поэтому левую часть нашего неравенства можно переписать в виде

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a^3 + b^3}{a^2 + ab + b^2} + \frac{b^3 + c^3}{b^2 + bc + c^2} + \frac{c^3 + a^3}{c^2 + ca + a^2} \right). \quad (*)$$

А поскольку $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ и

$$\frac{a^2 - ab + b^2}{a^2 + ab + b^2} - \frac{1}{3} = \frac{2(a^2 - 2ab + b^2)}{a^2 + ab + b^2} = \frac{2(a - b)^2}{a^2 + ab + b^2} \geq 0,$$

первое слагаемое в (*) не меньше чем $(a+b)/3$; аналогично, второе — не меньше $(b+c)/3$, третье — $(c+a)/3$, то есть все выражение (*) не меньше чем

$$\frac{1}{2} \left(\frac{a+b}{3} + \frac{b+c}{3} + \frac{c+a}{3} \right) = \frac{a+b+c}{3},$$

что и требовалось доказать.

Г. Г. Алиханов

М970. На начальной остановке в автобус вошло 32 пассажира, которым нужно ехать до 32 разных остановок, расположенных на расстоянии 1 км друг от друга. Водитель решил провести голосование: какие остановки отменить, а какие сохранить. Он называет остановки в некотором порядке. Пассажир голосует за отмену остановки, если он собирается ехать дальше, против, если собирается выходить на этой остановке, и воздерживается, если — раньше (не учитывая, что при дальнейшем голосовании могут отменить и его остановку). Если за отмену подано больше голосов, чем против, остановку отменяют, а тот (или те), кто хотел на ней выходить, решают ехать до ближайшей к ней из еще не отмененных (если таких две — до первой из них). Какое а) наименьшее, б) наибольшее число остановок может сохраниться в зависимости от порядка, в котором их называет водитель?

а) Ответ. 2. Две последние остановки сохраняются при любом порядке голосования: против последней никто не голосует, против предпоследней голосует один пассажир, а за нее — не меньше одного. Если водитель называет остановки в следующем порядке номеров: 31, 32, 29, 30, 27, 28, ..., 1, 2, все остальные остановки отменят (см. таблицу).

б) Ответ. 6. Пусть после голосования осталось неотмененными m остановок, и на i -й из них, считая с конца, сошло a_i пассажиров (например, $a_1 = 1$ — на последней, 32-й остановке, очевидно, сходит 1 пассажир). Тогда против отмены этой остановки проголосовало не больше a_i пассажиров (ибо последующее голосование не могло уже изменить решения сойти на ней), а за отмену — не меньше $a_{i-1} + a_{i-2} + \dots + a_1$. Поскольку остановку не отменили, $a_i \geq a_{i-1} + a_{i-2} + \dots + a_1$. Пусть осталось m остановок, тогда

$$\begin{aligned} 32 &= a_m + a_{m-1} + a_{m-2} + \dots + a_1 \geq \\ &\geq 2(a_{m-1} + a_{m-2} + \dots + a_1) \geq \\ &\geq 2^2(a_{m-2} + \dots + a_1) \geq \dots \geq 2^{m-1}a_1 = 2^{m-1}, \end{aligned}$$

и следовательно, $m \leq 6$.

Таблица

Номер остановки	Число голосов	
	за отмену	против отмены
31	1	1
32	0	1
29	3	1
30	2	1
27	5	1
28	3	2
...
$32 - 2k - 1$	$2k + 1$	1
$32 - 2k$	$k + 1$	k



Укажем такой порядок голосования, при котором $m = 6$. Разобьем остановки, начиная с последней, на 6 групп, состоящих из 1, 1, 2, 4, 8, 16 остановок. В каждой группе отметим одну остановку так, чтобы соседние отмеченные остановки были равноудалены от общей границы их групп, то есть остановки с номерами 32, 31, 30, 27, 22, 11 (см. рисунок). Проведем голосование от конца к началу сперва по неотмеченным остановкам (легко видеть, что их все отменяют), потом — по отмеченным (за каждую из них проголосуют все пас-

сажиры ее группы, против — все пассажиры следующих групп; поскольку $2^k = 1 + 1 + 2 + \dots + 2^{k-1}$, число голосов за и против будет одинаковым и остановку не отменяют).

Проведенные рассуждения справедливы для любого числа остановок; ответ в задаче б) в общем случае — $\lceil \log_2 n \rceil + 1$.

С. Л. Елисеев

Ф978. На жестком невесомом стержне ABC длины $3l$ закреплены два одинаковых грузика B и C так, как показано на рисунке 1: $|AB|=l$, $|BC|=2l$. Стержень подвешен за точку A к очень длинной невесомой нити AO. В начальном момент стержень удерживают в горизонтальном положении, и нить при этом вертикальна; затем стержень отпускают. Какой будет скорость точки A в тот момент, когда стержень будет проходить нижнее положение?

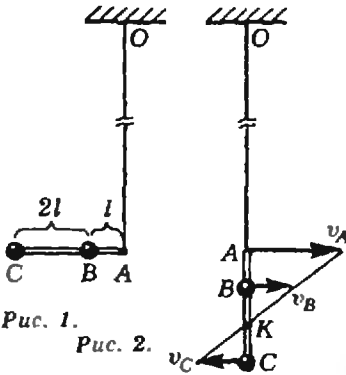


Рис. 1.

Рис. 2.

Ф979. В сосуде, имеющем форму двух «состыкованных» цилиндров одинаковой длины l и с площадями сечений S и αS ($\alpha > 1$), находится идеальный газ. Посредине каждого цилиндра находятся поршни, соединенные жестким стержнем (см. рисунок); при этом давление в отсеке I равно p , в отсеке III давление равно βp , поршни находятся в равновесии. К системе подвели тепло Q так, что температура возросла, оставаясь во всех отсеках одинаковой. Определите, как изменилось давление в отсеке I. Внутренняя энергия одного моля газа равна cT (c — молярная теплоемкость газа). Теплоемкости цилиндров и поршней пренебрежимо малы, трением пренебречь.

К тому моменту, когда стержень будет проходить нижнее положение, нить OA очень слабо отклонится от вертикали (поскольку она очень длинная). Поэтому силу натяжения нити, действующую на стержень, можно считать все время вертикальной (горизонтальной ее составляющей можно пренебречь). Следовательно, горизонтальная составляющая импульса стержня остается неизменной, то есть равной нулю, и в нижнем положении

$$|mv_B| = |mv_C| \Rightarrow |v_B| = |v_C| = v.$$

Значение v найдем из закона сохранения энергии:

$$2\left(\frac{mv^2}{2}\right) = mgl + 3mgl = 4mgl,$$

откуда

$$v = 2\sqrt{gl}.$$

Таким образом, в момент прохождения нижнего положения стержень вращается вокруг центра K отрезка BC (рис. 2).

При этом $|AK| = 2|OB|$, и скорость точки A

$$v_A = 2v_B = 2v = 4\sqrt{gl}.$$

Г. Л. Коткин

Пусть V_i , p_i и v_i — объем i -го отсека, давление и число молей газа в нем. Полное число молей газа в сосуде $v = v_1 + v_2 + v_3$. Так как температура T во всех отсеках одинакова, уравнение Менделеева — Клайперона дает

$$p_1 V_1 + p_2 V_2 + p_3 V_3 = (v_1 + v_2 + v_3)RT = vRT. \quad (1)$$

По этой же причине поршни не сместятся, так как при постоянных объемах отношение давлений в отсеках не меняется и в любой момент времени будет выполнено условие равновесия

$$(p_3 - p_2)\alpha S + (p_2 - p_1)S = 0. \quad (2)$$

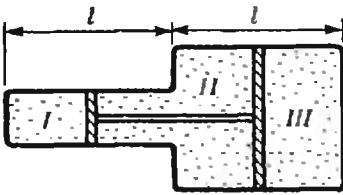
Используя условие $p_3 = \beta p_1$, из (2) находим

$$p_2 = p_1 \frac{\alpha\beta - 1}{\alpha - 1}. \quad (3)$$

Из (3) видно, что задача имеет смысл лишь при $\alpha\beta > 1$, так как давление должно быть положительным. Подставляя p_2 и p_3 в (1), находим связь между давлением в первом отсеке и температурой:

$$p_1 = \frac{vTR(\alpha - 1)}{S(\alpha^2\beta - 1)}. \quad (4)$$

Поскольку разность конечной и начальной тем-



ператур $\Delta T = \frac{Q}{\nu c}$, из (4) для изменения давления Δp имеем

$$\Delta p = \frac{QR(\alpha - 1)}{cSl(\alpha^2 \beta - 1)}$$

В. С. Фадин

Ф980. Четыре одинаковых металлических пластины площади S каждая с зарядами $q_1, -q_1, q_2, -q_2$ установлены параллельно друг другу на расстоянии d одна от другой (рис. 1; d много меньше линейных размеров пластин). Внешние пластины 1 и 4 соединяют проводником. Найти разность потенциалов между пластинами 2 и 3.

После соединения пластин 1 и 4 проводником, разность потенциалов между ними U_{14} будет равна нулю. При этом распределение зарядов на пластинах и электрических полей между ними будет таким, как показано на рисунке 2.

$$U_{14} = E_1 d - E_3 d + E_2 d = \frac{d}{\epsilon_0 S} (q'_1 - q_3 + q'_2) = 0.$$

Из закона сохранения заряда на пластинах 2 и 3 следует:

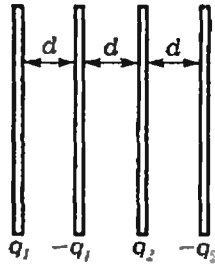


Рис. 1.

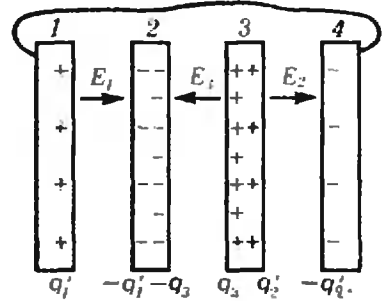


Рис. 2.

$$q'_1 + q_3 = q_1, \quad q'_2 + q_3 = q_2,$$

откуда

$$q_3 = \frac{q_1 + q_2}{3}.$$

Следовательно, разность потенциалов между пластинами 2 и 3 равна

$$U_{23} = -\frac{q_3}{\epsilon_0 S} d = -\frac{q_1 + q_2}{3\epsilon_0 S} d.$$

Г. В. Федотович

Ф981. На груз массы M , висющий на пружине, кладут груз массы m (см. рисунок), удерживая груз M в первоначальном положении, а затем грузы отпускают. Найти максимальную силу, действующую на груз m со стороны груза M .

Для того чтобы определить силу N , действующую на перегрузок m со стороны груза M , воспользуемся вторым законом Ньютона для движения перегрузка:

$$ma = mg - N.$$

После того как грузы отпустили, они совершают гармонические колебания (как один груз массы $M + m$). Значит, ускорение a периодически изменяет свое направление. Сила

$$N = m(g - a)$$

будет максимальна в момент, когда ускорение имеет максимальную абсолютную величину и направлено вверх, то есть в момент наибольшего растяжения пружины. Для определения ускорения используем второй закон Ньютона для движения груза с перегрузком:

$$(M + m)a = (M + m)g - kx. \quad (1)$$

Максимальное значение x_{\max} найдем с помощью закона сохранения энергии (учитывая, что в момент максимального растяжения пружины скорость груза равна нулю):



$$-(M+m)gx_0 + \frac{k}{2}x_0^2 = -(M+m)gx_{\max} + \frac{k}{2}x_{\max}^2, \quad (2)$$

где x_0 — удлинение пружины без перегрузки m . Учитывая, что $kx_0 = Mg$, из (2) получаем: $kx_{\max} = (M+2m)g$. Подставляя это значение в (1), находим максимальное значение ускорения —

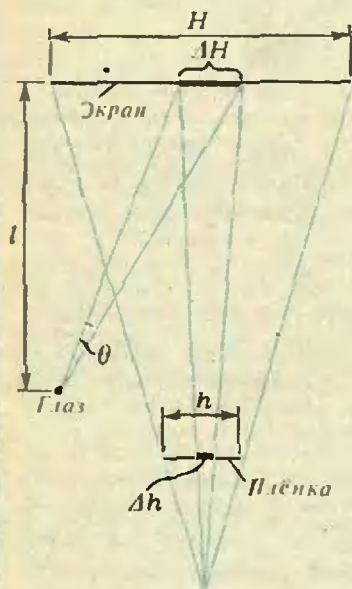
$$|a_{\max}| = \left| -\frac{m}{M+m}g \right| = \frac{m}{M+m}g,$$

и зная a_{\max} , находим N_{\max} :

$$N_{\max} = mg \frac{M+2m}{M+m}.$$

И. И. Зубков

Ф982. Как известно, предельный размер различимой детали изображения на киноплёнке определяется размерами кристалликов светочувствительного слоя. С уменьшением размера кристалликов четкость изображения растёт. Оцените предельный размер кристалликов, при котором зритель перестаёт замечать рост четкости изображения на экране кинозала. Предполагается, что вы хорошо представляете явление, можете сами задать необходимые для решения величины, выбрать достаточно правильные численные значения и получить численный результат.



В случае простейшей проекционной киноустановки изображение на экране создается в результате прохождения через киноплёнку расходящегося светового пучка, обеспечивающего необходимое увеличение кадра. При этом важно отсутствие линейных искажений на экране. Это значит, что отношение размера Δh детали на плёнке к размеру h всего кадра должно быть точно таким же, как и отношение размера ΔH изображения этой детали на экране к размеру H всего изображения кадра на экране, то есть

$$\frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta H}{H}.$$

Пусть ΔH — предельный размер детали, еще различимой глазом зрителя с расстояния l , H — размер экрана, совпадающий с размером изображения кадра на нем, Δh — минимальный размер детали на киноплёнке, совпадающий с размером светочувствительного кристаллика («зерна») фотоэмульсии, h — размер кадра на плёнке (см. рисунок).

Отношение $\Delta H/l$ определяется так называемым «угловым разрешением глаза» зрителя, то есть минимальным углом θ , на границах которого глаз разделяет (видит неслившимися) две точки или две линии. Величину этого угла несложно оценить. Вспомним, например, посещение кабинета врача-окулиста: с расстояния нескольких метров, рассматривая таблицу букв так же, как мы смотрим кино, мы различаем детали букв, не меньшие нескольких миллиметров; то есть по порядку величины угол θ равен

$$\theta \sim \frac{\Delta H}{l} \sim 10^{-3}.$$

Таким образом, $\Delta H \sim l\theta$, и

$$\Delta h = h \frac{\Delta H}{H} \sim \frac{hl\theta}{H}.$$

При $h=1$ см, $l=20$ м, $H=5$ м, $\theta \sim 10^{-3}$ для минимального размера кристалликов фотоэмульсии, за пределами которого зритель перестаёт замечать рост четкости изображения на экране, получаем

$$\Delta h \sim 0,04 \text{ мм.}$$

Эта оценка вполне согласуется с известными параметрами кинофотоматериалов.

Г. В. Меледин

УНИВЕРСИТЕТ
УЛЫБАЕТСЯ

Микрокалькуляторы
в картинках
(Рисунки П. Чернуского)



Программирование на микрокалькуляторе: игры

Л. Н. СИСТЕПСКИЙ

Статья предназначена в первую очередь для девятиклассников, изучающих курс основ информатики и вычислительной техники и имеющих доступ к программируемому микрокалькулятору, но будет интересна также и всем, кто пользуется таким микрокалькулятором.

В течение учебного года вы научились писать программы на алгоритмическом языке. На страницах журнала «Квант» мы объяснили, как транслировать эти программы в коды программируемого микрокалькулятора (см. «Квант», 1985, №№ 2, 3). Эти навыки позволяют вам пользоваться вашим калькулятором и для решения школьных задач из курса математики, например находить корни алгебраических уравнений.

Но это дело будущего. А сейчас, перед летними каникулами, мы предлагаем вам отвлечься от математических задач и поиграть в игры с помощью вашего программируемого микрокалькулятора.

Игра Баше

Из кучи, содержащей p предметов, например спичек, два игрока по очереди берут некоторое количество спичек. За один раз можно взять не менее одной и не более k спичек. Число k (лучше выбрать его намного меньше p) устанавливается игроками заранее. Проигрывает тот, кому придется взять последнюю спичку.

Введите в машинку программу, данную в таблице 1, обзаведясь предварительно набором спичек, пуговиц или других предметов, и, внимательно прочтя инструкцию, начните игру. Можете играть с машиной один на один. Убедившись, что машина —

сильный партнер, позовите на помощь товарища и попробуйте сообща сыграть против машины.

Инструкция

1. Ввести программу В/О.
2. 1 ВП 7 П 7 1, 8 F 1/x П/8.
3. p С/П (p), k С/П (0).
4. Если первый ход делает машина, то С/П (количество спичек, взятых машиной), ввести ваш ход С/П (ход машины) и опять ваш ход и т. д.
5. Если первый ход хотите делать вы, то введите число взятых вами спичек, С/П (ответный ход машины), ваш ход С/П (ход машины) и т. д.
6. Для новой игры: В/О и идти к п. 3 инструкции.

Задачи

1 (для любителей математики). Для данных p и k найдите выигрышную стратегию в игре Баше.

2* (для любителей программирования). Попробуйте расшифровать стратегию машинки.

Баллистическая игра

Изобразите на клетчатой бумаге систему координат, причудливый пейзаж и два города глупцов, враждующих между собой (рисунок). В пределах каждого города установите стартовую площадку и отметьте точками положения орудий (пушек), из которых неразумные жители враждующих городов обстреливают друг друга хлопучками. Введите в машину программу из таблицы 2, нажмите В/О, введите данные согласно инструкции.

Таблица 1

00	П 0	40	24	F В x	0
01	С/П	50	25	—	11
02	↑	0E	26	ИП 1	61
03	1	01	27	/—/	0L
04	+	10	28	×	12
05	П 1	41	29	ИП 0	60
06	0	00	30	+	10
07	С/П	50	31	1	01
08	F x ≠ 0	57	32	—	11
09	15	15	33	F x ≠ 0	57
10	/—/	0L	34	44	44
11	↑	0E	35	П 2	42
12	ИП 0	60	36	/—/	0L
13	+	10	37	↑	0E
14	П 0	40	38	ИП 0	60
15	ИП 0	60	39	+	10
16	1	01	40	П 0	40
17	—	11	41	ИП 2	62
18	ИП 1	61	42	БП	51
19	÷	13	43	07	07
20	ИП 8	68	44	1	01
21	—	11	45	П 2	42
22	ИП 7	67	46	БП	51
23	+	10	47	36	36

Таблица 2

00	ИП 3	63	34	+	10
01	F sin	1Г	35	П 0	40
02	ИП 2	62	36	ИП А	6—
03	×	12	37	ИП 3	63
04	П 0	40	38	+	10
05	ИП 3	63	39	П А	4—
06	F cos	1Г	40	ИП С	6Г
07	ИП 2	62	41	ИП 6	66
08	×	12	42	—	11
09	ИП 8	68	43	П С	4Г
10	×	13	44	ИП 0	60
11	П 3	43	45	ИП 9	69
12	ИП 0	60	46	×	12
13	П 2	42	47	ИП 2	62
14	ИП 6	66	48	+	10
15	F sin	1Г	49	ИП 0	60
16	ИП 5	65	50	×	12
17	×	12	51	ИП 1	61
18	П 0	40	52	+	10
19	ИП 6	66	53	П В	4Г
20	F cos	1Г	54	ИП 0	60
21	ИП 5	65	55	ИП 9	69
22	×	12	56	×	12
23	ИП 8	68	57	ИП 5	65
24	×	12	58	+	10
25	П 6	46	59	ИП 0	60
26	ИП 0	60	60	×	12
27	П 5	45	61	ИП 4	64
28	0	00	62	+	10
29	П 0	40	63	П Д	4Г
30	П В	4Г	64	С/П	50
31	П Д	4Г	65	БП	51
32	ИП 0	60	66	32	32
33	ИП 8	68			

X_1 — абсцисса пушки первого города;
 X_2 — абсцисса пушки второго города.

Запустите программу клавишей С/П. В регистрах А и В будут занесены абсцисса и ордината первой хлопушки через 1 секунду после выстрела, а в регистрах С, Д — абсцисса и ордината хлопушки, выпущенной из второго города. Нажав С/П, вы получите положения хлопушки еще через 1 секунду и т. д. Пока машина вычисляет, отмечайте положения хлопушек на чертеже. Выигрывает тот глупец, кто (первым) поразит стартовую площадку соперника.

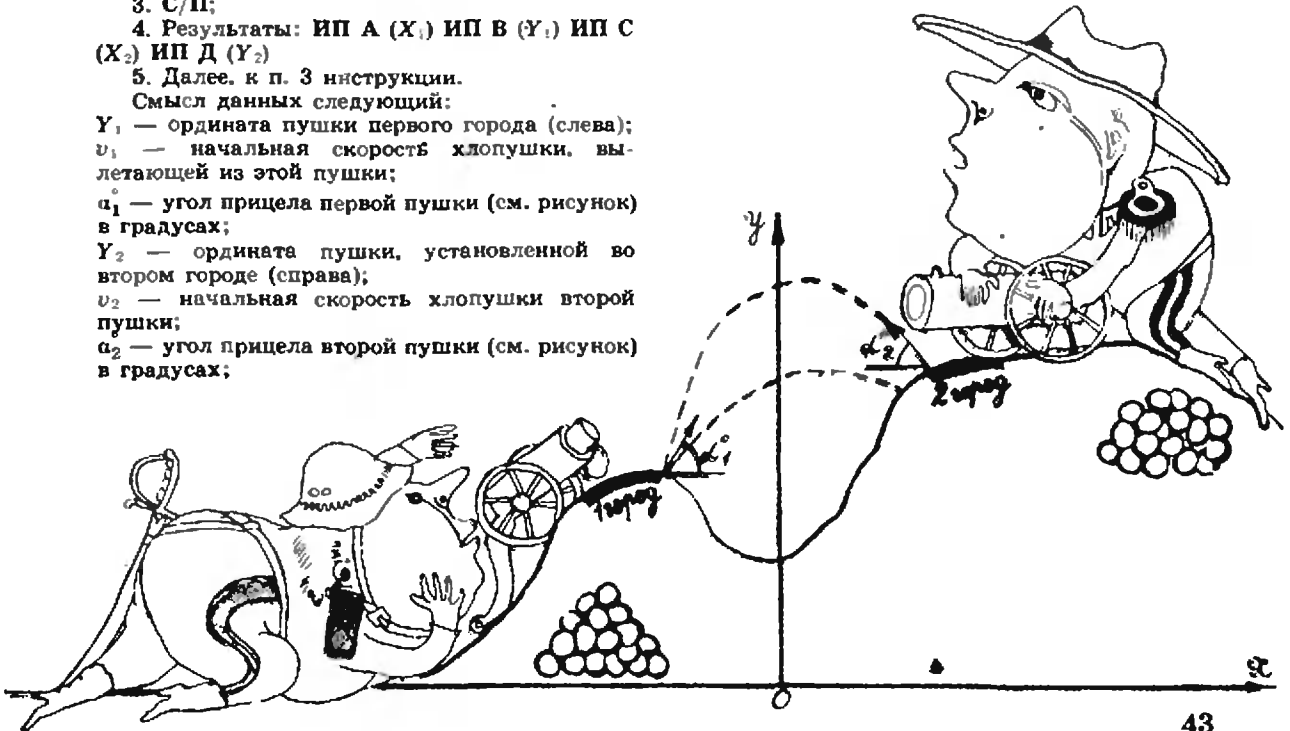
В регистр 8 (см. инструкцию) перед началом игры заносится 1. Вы можете занести любое число t , меняя тем самым промежуток времени между отдельными показаниями машинки (можно интересоваться положениями хлопушек не через каждую секунду, а через 2 секунды или 0,5 секунды и т. д.). В регистр 9 заносится величина — $g/2$, где g — величина ускорения свободного падения в м/сек². Мы положили $g=10$. Если глупцы живут не на Земле, а на Луне, то нужно выбрать g в 6 раз меньше. Короче говоря, вам представляется широкий диапазон для фантазии о возможных безобразиях глупцов. Тот, кто лучше разбирается в физике и усвоил законы движения, получит хорошую возможность моделирования процесса движения тела в поле тяготения.

Инструкция

1. Ввести программу. Переключатель меры угла перевести в положение Г (градусы), В/0;
2. Ввести данные:
 Y_1 ; П 1; v_1 ; П 2; α_1° ; П 3; Y_2 ; П 4; v_2 ; П 5; α_2° ; П 6; 1; П 8; 5; /—/; П 9; X_1 ; П А; X_2 ; П С.
3. С/П;
4. Результаты: ИП А (X_1) ИП В (Y_1) ИП С (X_2) ИП Д (Y_2)
5. Далее, к п. 3 инструкции.

Смысл данных следующий:

- Y_1 — ордината пушки первого города (слева);
- v_1 — начальная скорость хлопушки, вылетающей из этой пушки;
- α_1° — угол прицела первой пушки (см. рисунок) в градусах;
- Y_2 — ордината пушки, установленной во втором городе (справа);
- v_2 — начальная скорость хлопушки второй пушки;
- α_2° — угол прицела второй пушки (см. рисунок) в градусах;





Х. Заключение. Полупроводниковые элементы будущих ЭВМ

Доктор физико-математических наук М. Е. ЛЕВИНШТЕЙН,
кандидат физико-математических наук Г. С. СИМИН

Полупроводниковые элементы, на основе которых работают современные ЭВМ, достигли высокой степени совершенства. Время их переключения составляет стомиллионные доли секунды. Размеры их так малы, что на кремниевой пластинке размером 5×5 мм помещаются сотни тысяч транзисторов — полевых или биполярных.

Современные ЭВМ способны управлять космическими аппаратами и ставить диагноз больному, доказывать математические теоремы и руководить предприятиями, переводить научные тексты и планировать перевозки в масштабах целой страны.

Однако существуют задачи, которые пока что не под силу даже самым мощным из нынешних ЭВМ. Например, чтобы составить удовлетворительный прогноз погоды на завтрашний день, провести очень точный расчет поведения самолета в воздушном потоке или электронов в твердом теле, необходимы ЭВМ с быстродействием порядка 1 триллиона операций в секунду. И для таких ЭВМ, разработка которых ведется уже сейчас, понадобятся новые, более совершенные элементы.

Совершенствование элементов ЭВМ происходит сразу в нескольких направлениях. Улучшаются параметры биполярных и полевых транзисторов, создаются и испытываются новые переключательные элементы, предлагаются и проходят всестороннюю проверку новые способы объединения переключательных элементов в Сверхбольшие и Сверхскоростные Интегральные Схемы.

Совершенствование существующих элементов ЭВМ

Из принципа работы биполярных и полевых транзисторов (см. заметки II и III настоящей серии в «Кванте» № 10, 11, 1985 г.) следует, что скорость переключения этих элементов тем выше, чем меньше их размеры и чем больше подвижность носителей тока в полупроводнике, из которого они изготовлены.

Поэтому совершенствование существующих элементов ЭВМ — биполярных и полевых транзисторов — идет двумя основными путями. Создаются новые технологические процессы, позволяющие получать транзисторы с возможно меньшей толщиной базы (биполярный транзистор) или возможно более коротким каналом (полевой транзистор). Идет поиск новых материалов с большой подвижностью носителей для изготовления транзисторов.

Современные технологические процессы позволяют под контролем ЭВМ наращивать слои полупроводникового материала толщиной в один-единственный атомный слой. Практически созданы и проходят испытания приборы с толщинами рабочих элементов 10—15 Å (рис. 2). Созданы биполярные транзисторы с толщиной базы ~0,1 мкм и полевые — с длиной затвора 0,15 мкм.

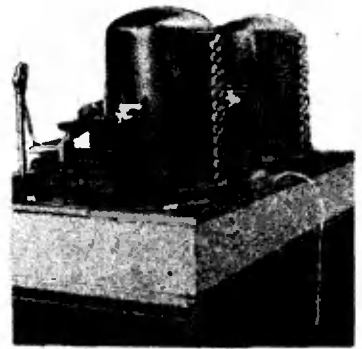


Рис. 1. В таких установках на тонких пленках монокристаллических полупроводников наращиваются очень чистые бездефектные слои толщиной 0,05—10 мкм, обладающие всеми свойствами, необходимыми для создания БИС.

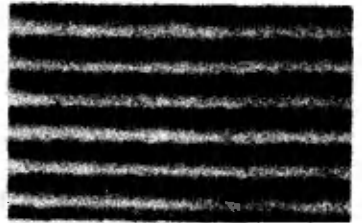


Рис. 2. Структура из чередующихся слоев двух разных полупроводников, выращенных друг на друге. На электронной микрофотографии каждая темная зона состоит из шести атомных плоскостей GaAs, каждая светлая — из четырех атомных плоскостей $Al_{1-x}Ga_xAs$. Обратите внимание на четкие границы между полосками, характеризующие точность, с которой регулируется толщина слоев при выращивании.

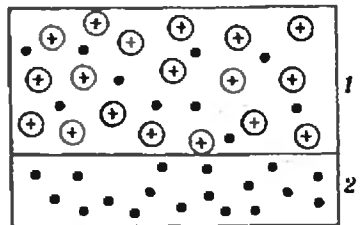


Рис. 3. Селективно-легированная структура. Атомы донорной примеси (обозначены ⊕) вводятся в материал 1 (GaAlAs). Они создают в этом материале свободные электроны (обозначены •). Часть

электронов переходит в полосу материала 2 (GaAs), где создается достаточно большая концентрация электронов с высокой подвижностью.

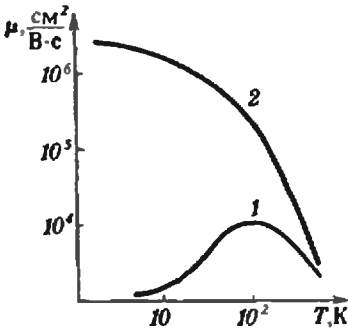


Рис. 4. Зависимость подвижности от температуры: 1 — в GaAs с концентрацией носителей $2 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$; 2 — в селективно-легированной структуре с концентрацией носителей $\sim 2 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$.

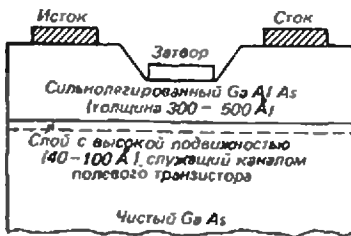


Рис. 5. Полевой транзистор на основе селективно-легированной структуры. На границе сильно легированного GaAlAs и GaAs создается селективно-легированный слой с высокой подвижностью электронов.

Оптическая ИС содержит полупроводниковый лазер и 36 полевых транзисторов, предназначенных для ввода в световой луч логической информации. Сигнал, переданный лазером, улавливается другими кристаллами ЭВМ, где он вновь превращается в электрический. Один луч лазера заменяет сотни проводников, которые необходимо протянуть между БИС, образующими большие ЭВМ.

Новые материалы для изготовления транзисторов разрабатываются сейчас главным образом на основе селективно-легированных структур. За этим новым даже для специалистов термином скрывается такая красивая и плодотворная идея, что мы расскажем об этих структурах подробнее.

Как известно из школьного курса физики, подвижность носителей тока зависит от того, как часто они испытывают столкновения при движении внутри кристалла. Чем эти столкновения реже, тем выше подвижность электронов и дырок.

Важным источником столкновений являются примеси, существующие в полупроводниковом кристалле. Чем меньше примесей содержит полупроводник, тем выше в нем подвижность носителей. Таким образом, казалось бы, ясно, в чем должен состоять главный путь совершенствования полупроводниковых материалов, — в максимальной очистке от примесей.

Дело, однако, обстоит не так просто. Для создания полевых и биполярных транзисторов требуется материал с довольно высокой концентрацией свободных носителей ($\sim 2 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$). А свободные носители в полупроводнике возникают при введении в него примесей. Электроны — при введении донорской примеси, дырки — акцепторной. Получается заколдованный круг: хочешь иметь в полупроводнике желаемую концентрацию носителей — вводи примеси. А введешь примесь, — понижается подвижность.

Идея селективно-легированных структур состоит в том, чтобы пространственно разделить примеси и носители, которые благодаря этим примесям создаются. Примесь (например, донорная) вводится в полосу материала 1 (рис. 3). Возникшие электроны переходят в расположенную в непосредственной близости полосу материала 2, в которую примесь не вводится. И полоска материала 2, содержащая электроны, но не содержащая примеси, служит каналом полевого транзистора. (Такие структуры поэтому иногда называют еще и структурами с пространственным переходом электронов.)

Разумеется, не любые два материала годятся для изготовления такого «бутерброда», или, как часто говорят, «сэндвич-структуры». Заслуга исследователей, предложивших структуру с селективным легированием, и состоит в том, что они поняли, какие именно материалы могут образовать пару с желаемыми свойствами. Ими оказались GaAs и тройное соединение GaAlAs.

На основе селективно-легированных структур, использующих свойства гетероперехода GaAs/GaAlAs уже созданы полевые транзисторы с уникальными свойствами. Время переключения их составляет 0,01 нс, а энергия, потребляемая при переключении, — всего 10 фДж (1 фДж (читается фемтоджоуль) $= 10^{-15} \text{ Дж}$).

Какой большой выигрыш в подвижности позволяет получить использование селективно-легированных структур, можно видеть из рис. 4.

На рис. 5 показан полевой транзистор, выполненный на основе селективно-легированной структуры. При концентрации электронов в канале полевого транзистора $\sim 2 \cdot 10^{17} \text{ см}^{-3}$ подвижность их выше, чем в GaAs-транзисторе примерно в 2 раза при комнатной температуре (300 К) и примерно в 100 раз при температуре 80 К.

Помимо структуры GaAs/GaAlAs, исследуются возможности создания полевых транзисторов на основе других селективно-легированных структур.

Создание новых элементов для ЭВМ будущих поколений

Объемные интегральные схемы. Сегодня на кремниевой пластине размером $5 \times 5 \text{ мм}$ удается разместить до 500 000 транзисторов. Предполагается, что к концу 80-х годов на кремниевой (и арсенид-галлиевой) пластине такого же размера будет размещаться несколько миллионов транзисторов. Однако для ЭВМ будущих поколений даже такая огромная плоскость упаковки окажется недостаточной. Поэтому уже сейчас ведется работа над

созданием интегральных схем нового типа — объемных ИС, каждая из которых должна содержать десятки и сотни миллионов полупроводниковых приборов.

Объемная ИС напоминает слоеный пирог. Каждый слой этого пирога — уже знакомая нам плоская ИС.

После того как заканчивается формирование обычной плоской ИС на полупроводниковой пластине: изготавливаются все транзисторы, соединения между ними, внешние выводы и т. д., сверху наращивается слой диэлектрика. Затем поверх диэлектрика наращивается слой полупроводника. На этом полупроводниковом слое создается вторая ИС и т. д.

В корпус помещается теперь не пластинка, а «кубик», содержащий много ИС. При этом соединения между плоскими ИС выполняются внутри «кубика» сразу в процессе изготовления объемной ИС. В результате число внешних соединений резко уменьшается. Возрастает надежность и уменьшается стоимость схемы.

Полупроводниковые элементы оптических ЭВМ. В ЭВМ информация, как мы знаем, хранится и обрабатывается в виде электрических сигналов. Однако уже с середины 70-х годов начались работы по созданию ЭВМ совсем иного типа — оптических ЭВМ.

В современных ЭВМ «нулю» и «единице» — двум числам, с помощью которых записывается вся хранимая и перерабатываемая машиной информация, условно соответствуют закрытое и открытое состояние транзисторов. В проектируемых оптических ЭВМ «единице» соответствует прохождение света через оптическую ячейку, «нулю» — поглощение света в ячейке.

Предполагается, что луч полупроводникового лазера, введенный в световод (рис. 6), будет направляться к полупроводниковым оптическим ячейкам, прозрачность которых может изменяться десятки миллиардов раз в секунду с малыми затратами энергии.

Удивительные элементы совершенно необычных ЭВМ

Природа подсказывает нам, что увеличение быстродействия — не единственный путь усовершенствования интеллектуальных возможностей ЭВМ. Клетки человеческого мозга — нейроны — переключаются за время, приблизительно в миллион раз большее, чем «клетки» современных ЭВМ. Однако именно Человек изобрел и ЭВМ и очень многие другие замечательные вещи.

Как устроен человеческий мозг, почему он работает с такой замечательной эффективностью — эти вопросы интенсивно изучаются и еще очень далеки от разрешения. Однако уже сегодня сделаны первые шаги по созданию биомолекулярных ИС — основы будущих биологических ЭВМ. Запатентован метод изготовления ИС на основе белкового материала — полилизина. Созданы молекулярные переключатели, белковые полевые транзисторы, биодатчики сигналов, срабатывающих при ядерных, биологических или химических воздействиях. Предполагается, что плотность упаковки элементов в таких биополимерных структурах приблизится к плотности упаковок структур, ответственных за фотосинтез в зеленых листьях растений и составит более миллиарда на 1 мм^2 . Есть основания надеяться, что биомолекулярные ИС будут не изготавливать, а выращивать, как живую ткань.

Впрочем, если эти надежды оправдаются, такие элементы не будут иметь отношения к полупроводникам.

Но в ближайшее десятилетие именно прогресс в области полупроводниковой электроники определит и уровень достижений в разработке современных ЭВМ.



Рис. 6. Полупроводниковый лазер на основе GaAlAs с длиной волны $\sim 1 \text{ мкм}$. Справа — оптическое волокно диаметром примерно 100 мкм , по которому проходит излучение.

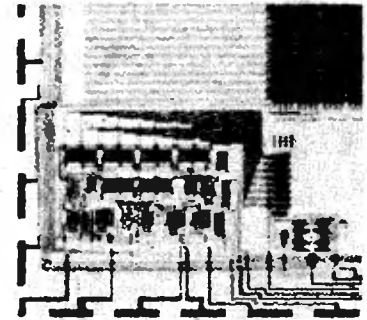
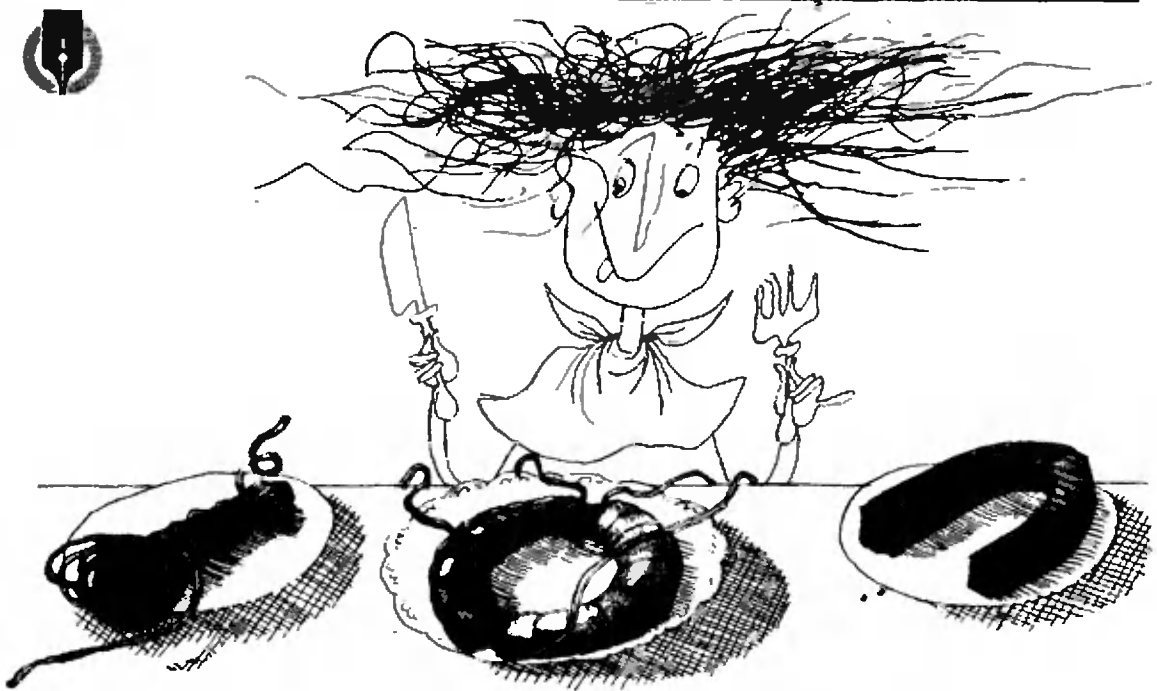


Рис. 7. Одно из перспективных направлений создания ЭВМ следующих поколений основано на использовании явления сверхпроводимости. В структурах из слоев сверхпроводника, разделенных пленкой диэлектрика («сэндвич-структуры»), при очень низких температурах наблюдается эффект Джозефсона. Такие структуры могут находиться в двух устойчивых состояниях — в зависимости от величины протекающего тока на них появляется или исчезает электрическое напряжение. Этим способом удалось создать элементы памяти с быстродействием $\sim 0,01 \text{ нс}$ и фантастически малым тепловыделением $\sim 0,1 \text{ фДж}$. На снимке показана часть интегральной схемы, разработанной в исследовательской лаборатории фирмы «IBM», в которую входят 2048 сверхпроводящих ячеек памяти.



Электромагнитная индукция

Доктор физико-математических наук
С. М. КОЗЕЛ

Явление электромагнитной индукции было открыто Фарадеем в 1831 году. Это открытие показало, что между электрическим и магнитным полями имеется тесная связь — изменяющееся во времени магнитное поле порождает электрическое. Примерно через 30 лет Максвеллу удалось показать, что изменяющееся электрическое поле в свою очередь порождает магнитное. В этих двух великих открытиях прошлого века заключена, по существу, вся современная наука об электромагнитных полях. Они позволили предсказать существование радиоволн, дать объяснение электромагнитной природы света.

В результате многочисленных и разнообразных опытов Фарадей установил количественную связь между ЭДС индукции $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ и скоростью изменения магнитного потока Φ , пронизывающего замкнутый контур (закон Фарадея):

$$\mathcal{E}_{\text{инд}} = - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

В более строгой математической записи $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ выражается через первую производную магнитного потока по времени: $\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\Phi'(t)$.

Опыты по электромагнитной индукции, поставленные Фарадеем, можно разделить на две группы. К первой группе относятся опыты с проводниками, движущимися в магнитном поле. В этом случае возникновение ЭДС индукции объясняется действием силы Лоренца. При движении проводника его свободные заряды движутся вместе с ним. Сила Лоренца, действующая на эти заряды, вызывает их перемещение относительно проводника.

На рисунке 1 изображена схема одного из таких опытов. В магнитном поле постоянного магнита находится замкнутая проволочная рамка, в цепь которой включен гальванометр Г. Рамка удаляется со скоростью v от южного полюса магнита, а ее плоскость остается перпендикулярной оси магнита. При движении в рамке возникает индукционный ток. Формула Фарадея позволяет найти направление индукционного тока.

Вопрос 1. Каков физический смысл знака «—» в формуле для $\mathcal{E}_{\text{инд}}$?

Для определения направления индукционного тока нам необходимо

прежде всего задать положительное направление тока в рамке и направление положительной нормали к плоскости рамки (которая определяет знак магнитного потока). Эти два направления должны быть согласованы по правилу правого винта (буравчика). Так, если на рисунке 1 выбрать направление положительной нормали \vec{n} к плоскости рамки слева направо, то положительное направление тока должно быть выбрано против часовой стрелки (если смотреть на рамку со стороны магнита). При таком выборе магнитный поток, пронизывающий контур рамки, $\Phi > 0$, но при удалении рамки от магнита поток уменьшается и, следовательно, $\Delta\Phi/\Delta t < 0$. Из закона Фарадея следует, что $\mathcal{E}_{\text{инд}} > 0$. Если рамка обладает активным сопротивлением R , то индукционный ток $I = \mathcal{E}_{\text{инд}}/R > 0$. Это означает, что ток будет течь против часовой стрелки.

Разобранное здесь правило знаков часто ускользает от внимания абитуриентов. А между тем знак «—» в законе Фарадея обеспечивает выполнение закона сохранения энергии. В нашем примере на каждый элемент рамки, по которому течет индукционный ток, будет действовать сила Ампера \vec{F} . Горизонтальная составляющая этой силы направлена против движения рамки. Таким образом, в соответствии с законом сохранения и превращения энергии рамка будет испытывать торможение, а в самой рамке будет выделяться джоулево тепло.

Индукционный ток в рамке возникает не только при ее поступательном движении, но и при вращении или деформации рамки в магнитном поле. Важно только, чтобы изменялся магнитный поток, пронизывающий рамку.

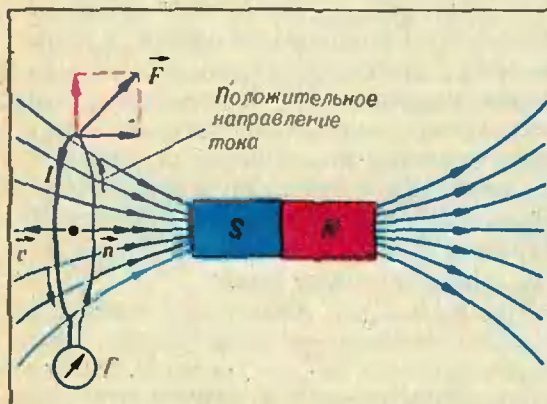


Рис. 1.

Опыт показывает, что если рамку оставить неподвижной, а перемещать магнит, то индукционные явления протекают точно так же, как и при движении рамки. Индукционный ток зависит только от относительного движения рамки и магнита. Закон Фарадея применим и в этом случае, однако объяснение явления теперь оказывается совершенно другим. В неподвижных контурах сила Лоренца не может вызвать движения зарядов по проводникам. Ответственным за возникновение $\mathcal{E}_{\text{инд}}$ в этом случае является электрическое поле, возникающее при изменении магнитного поля. Это поле называют вихревым, потому что, в отличие от электростатического поля, его силовые линии могут быть замкнуты.

Вопрос 2. Какова количественная связь вихревого электрического поля с $\mathcal{E}_{\text{инд}}$?

По определению электродвижущая сила равна работе сил, действующих на единичный положительный заряд при его перемещении по замкнутой траектории. В электростатическом поле эта работа всегда равна нулю (такие поля называют потенциальными). В вихревом электрическом поле она может быть отлична от нуля. Эта работа и равна $\mathcal{E}_{\text{инд}}$.

В качестве примера рассмотрим магнитное поле между полюсами электромагнита (рис. 2). Пусть, для простоты, полюсы цилиндрические, так что магнитное поле в области, близкой к оси, можно считать однородным. Если магнитное поле будет изменяться со временем, то в зазоре электромагнита возникнет вихревое электрическое поле, силовые линии которого представляют собой концен-

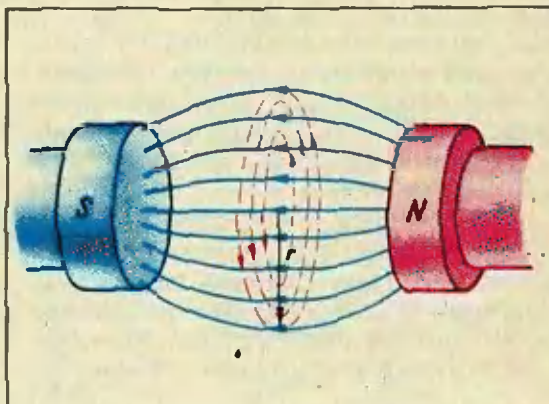


Рис. 2.

трические окружности. Выделим окружность радиусом r . Работу вихревого электрического поля при перемещении единичного положительного заряда по этой окружности можно записать в виде

$$E(r) \cdot 2\pi r = \mathcal{E}_{\text{инд}} = - \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = - \frac{\Delta B}{\Delta t} \pi r^2.$$

Отсюда

$$E(r) = - \frac{r}{2} \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Направление линий напряженности \vec{E} вихревого электрического поля на рисунке 2 показано для случая, когда индукция \vec{B} магнитного поля возрастает со временем.

Представление о вихревом электрическом поле было введено Максвеллом. По Максвеллу, сущность явления электромагнитной индукции состоит в возникновении вихревого электрического поля, которое может возбуждаться не обязательно в проводниках. Оно может возникнуть и в пространстве, где нет никаких проводников. Вихревое электрическое поле, порожденное изменяющимся магнитным полем, может проявиться в действии на отдельные заряженные частицы в вакууме, как, например, в ускорителе электронов — бетатроне (см. задачу 4).

Рассмотрим теперь ряд задач на индукционные явления в движущихся и неподвижных проводниках.

Задача 1. По двум вертикальным параллельным рейкам, замкнутым в верхней части через резистор с сопротивлением $r=1,1$ Ом и батарею с ЭДС $\mathcal{E}=1$ В, без трения скользит стержень CD , длина которого $l=10$ см и масса $m=10$ г (рис. 3). Система находится в однородном магнитном поле с индукцией $B=1$ Тл. Вектор \vec{B} перпендикулярен плоскости чертежа и направлен к читателю. Найдите установившуюся скорость стержня. При каком соотношении между параметрами задачи установившаяся скорость будет направлена вверх?

Рассмотрим контур $ACDK$, заштрихованный на рисунке 3. При движении стержня в нем будет возникать $\mathcal{E}_{\text{инд}}$. За положительное направление тока в этом контуре выберем направление против часовой стрелки. Тогда положительная нормаль к плоскости контура направлена к читателю и, следовательно, магнитный поток

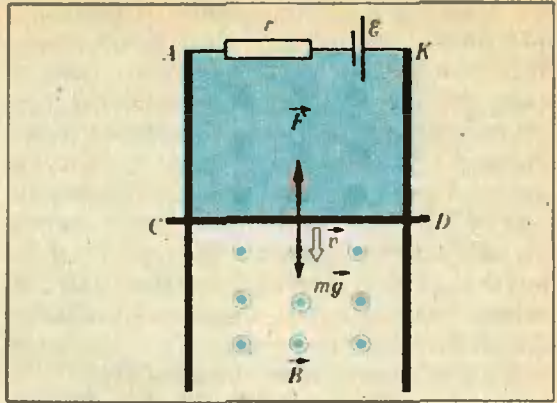


Рис. 3.

$\Phi > 0$. При движении стержня вниз магнитный поток через контур увеличивается: $\Delta\Phi/\Delta t > 0$. Если скорость падения обозначить через v , то $\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\Delta\Phi/\Delta t = -vIB$.

Запишем теперь закон Ома для контура $ACDK$:

$$Ir = -\mathcal{E} + \mathcal{E}_{\text{инд}} = -\mathcal{E} - vIB.$$

К этому уравнению нужно добавить условие постоянства скорости: при установившемся движении сила тяжести $m\vec{g}$ компенсируется амперовой силой \vec{F} , действующей на стержень со стороны магнитного поля. Применяя правило левой руки, легко убедиться, что амперова сила будет направлена вверх тогда, когда ток в стержне течет справа налево, то есть при $I < 0$. Следовательно,

$$mg = F = -IBl.$$

Отсюда

$$v = \frac{1}{Bl} \left(\frac{mgr}{Bl} - \mathcal{E} \right).$$

Подставляя числовые данные, найдем: $v=1$ м/с > 0 — стержень действительно движется вниз.

Для того чтобы установившаяся скорость оказалась направленной вверх, должно выполняться условие

$$\mathcal{E} > \frac{mgr}{Bl} = 1,1 \text{ В.}$$

Обратим внимание на то, что из написанных формул вытекает очень важное энергетическое соотношение:

$$I^2 r = -\mathcal{E}I - vIBl = -\mathcal{E}I + mgv.$$

Джоулево тепло $I^2 r$, выделяющееся в единицу времени на сопротивлении r , равно сумме работ батареи $-\mathcal{E}I$ (эта работа положительна, так как $I < 0$) и силы тяжести mgv за это же время. Магнитное поле работы не совершает!

Задача 2. В однородном магнитном поле с индукцией $B=0,1$ Тл находится плоская проволочная рамка площадью $S=100$ см² так, что ее плоскость перпендикулярна линиям индукции. Рамка замкнута на гальванометр Г. На какой угол повернули рамку, если при повороте через гальванометр протек заряд $q=10^{-5}$ Кл? Полное сопротивление рамки вместе с гальванометром $R=1$ Ом.

При повороте рамки возникает ЭДС индукции $\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\Delta\Phi/\Delta t$, и в рамке появляется ток

$$I = \frac{\mathcal{E}_{\text{инд}}}{R} = -\frac{1}{R} \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}.$$

Вспомним, что знак « \leftarrow » в этом соотношении определяет направление тока.

Заряд, протекший через цепь гальванометра за время Δt , есть

$$\Delta q = I\Delta t = -\frac{1}{R} \Delta\Phi.$$

Отсюда следует, что полный заряд q будет определяться полным изменением магнитного потока при повороте рамки на угол φ :

$$\Phi_2 - \Phi_1 = -BS(1 - \cos\varphi);$$

$$q = -\frac{\Phi_2 - \Phi_1}{R} = \frac{BS}{R}(1 - \cos\varphi).$$

Подставляя числовые данные, получим $\varphi = 90^\circ$.

Заметим, что результат не зависит от того, каким способом была повернута рамка — быстро или медленно, равномерно или нет.

Вопрос 3. Будет ли зависеть от способа поворота рамки работа внешних сил?

Утвердительный ответ на этот вопрос вытекает из того, что силы, действующие на стороны рамки в маг-

нитном поле, пропорциональны индукционному току, то есть скорости изменения магнитного потока $\Delta\Phi/\Delta t$. Таким образом, при быстрых поворотах рамки внешние силы должны совершать большую работу, чем при медленных.

Задача 3. Внутри катушки на расстоянии r от ее оси находится положительно заряженная пылинка, масса которой m и заряд e (рис. 4, а). Вначале ток в катушке равен нулю, и пылинка неподвижна. Затем в катушке включили ток, и индукция магнитного поля в ней достигла величины B_0 . Предполагая, что за время нарастания магнитного поля смещение пылинки пренебрежимо мало, найдите ее скорость и траекторию движения в установившемся режиме. Поле в катушке считать однородным, силой тяжести и сопротивлением воздуха пренебречь.

В этой задаче обсуждается простейшая модель индукционного ускорителя. Заряженная пылинка ускоряется вихревым электрическим полем, возникающим при изменении магнитного поля. Силовые линии электрического поля представляют собой концентрические окружности с центром на оси катушки. Мы показали ранее, что электрическое поле на окружности радиусом r (рис. 4, б) определяется соотношением

$$|E| = \frac{r}{2} \frac{\Delta B}{\Delta t}.$$

Сила, действующая на пылинку, $|F| = e|E|$. Импульс этой силы за время Δt равен $|F|\Delta t = er\Delta B/2$. Обратим внимание на то, что здесь, как и в задаче 2, результат не зависит от характера процесса и определяется только полным изменением магнитного потока. Из второго закона Ньютона найдем изменение импульса пылинки, а значит, и ее скорость в установившемся режиме:

$$v = \frac{|F|\Delta t}{m} = \frac{er}{2m} B_0.$$

Последующее движение пылинки в однородном магнитном поле происходит под действием силы Лоренца. Поскольку скорость пылинки перпендикулярна магнитным линиям, пылинка будет равномерно двигаться по окружности радиуса

$$R = \frac{mv}{eB_0} = \frac{r}{2}.$$

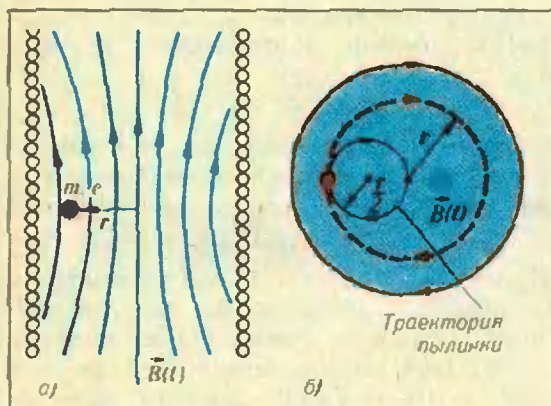


Рис. 4.

Задача 4. В ускорителе электронов — бетатроне — роль ускоряющего поля играет вихревое электрическое поле, возбуждаемое изменением магнитного потока, пронизывающего орбиту электронов. Считая радиус орбиты электронов неизменным, определите необходимое для этого в данный момент времени соотношение между средним магнитным полем B_{cp} , пронизывающим орбиту электронов, и магнитным полем на орбите B . Магнитное поле параллельно оси симметрии вакуумной камеры бетатрона.

Физика этой задачи состоит в том, что вихревое электрическое поле E и сообщаемая этим полем электрону скорость v определяются изменением среднего значения магнитного поля, пронизывающего орбиту, а сила Лоренца, удерживающая электрон, зависит от магнитного поля на самой орбите.

Проводя те же рассуждения, что и при решении предыдущей задачи, запишем

$$|E| = \frac{r}{2} \frac{\Delta B_{cp}}{\Delta t}, \quad v(t) = \frac{er}{2m} B_{cp}(t).$$

Из условия движения электрона по орбите $evB = mv^2/r$ получим

$$B(t) = \frac{mv(t)}{er} = \frac{B_{cp}(t)}{2}.$$

Таким образом, для стабильной работы бетатрона нужно, чтобы среднее магнитное поле внутри орбиты в любой момент времени было в два раза больше поля на орбите. Следовательно, магнитное поле в центральной части орбиты должно быть больше, чем на самой орбите. Это достигается специальным выбором конфигурации магнитов.

В заключение рассмотрим интересное применение закона электромагнитной индукции к сверхпроводящим катушкам. Сверхпроводники широко используются при создании сильных электромагнитов. В замкнутой сверхпроводящей обмотке ток может циркулировать длительное время без источника энергии.

Допустим, что у нас есть короткозамкнутая рамка из сверхпроводника. Пусть ток в рамке равен нулю. Внешем рамку во внешнее однородное магнитное поле с индукцией B , направленной перпендикулярно плоскости рамки.

Вопрос 4. Какой магнитный поток пронизывает рамку?

Надо отметить, что многие абитуриенты отвечают на этот вопрос так: магнитный поток равен произведению BS , где S — площадь рамки. Этот ответ неверен. Правильный ответ состоит в том, что магнитный поток, пронизывающий рамку, по-прежнему будет равен нулю. Этот результат вытекает из закона Фарадея. Действительно, для сверхпроводящей замкнутой цепи закон Ома записывается в виде $0 = -\Delta\Phi/\Delta t$. В левой части этого соотношения стоит падение напряжения на нулевом сопротивлении сверхпроводника, в правой — ЭДС индукции. Отсюда следует, что $\Phi = \text{const}$. Таким образом, замкнутый сверхпроводящий контур является консервативным магнитного потока. Он сохраняет тот магнитный поток, который пронизывал контур в момент перехода в сверхпроводящее состояние. Этот поток нельзя изменить никакими внешними полями (до тех пор, пока сохраняется сверхпроводимость).

Физический механизм, обеспечивающий сохранение потока, состоит в том, что при изменении внешнего магнитного потока в контуре появляется индукционный ток, магнитное поле которого полностью компенсирует изменение внешнего магнитного потока.

Задача 5. На какую величину изменится ток в круговой петле из сверхпроводника, если надеть ее на длинный соленоид, который подключен к батарее с ЭДС \mathcal{E} , как показано на рисунке 5? Полное сопротивление цепи соленоида r , индуктивность петли L , индуктивность соленоида L_0 , его число витков N .

Пусть I_0 и I — начальное и конечное значения тока в петле. Заметим, что ток в соленоиде не изменяется и остается равным \mathcal{E}/r , так что собственный магнитный поток соленоида равен $L_0\mathcal{E}/r$. При этом каждый виток соленоида пронизывает магнитный поток $L_0\mathcal{E}/(rN)$. Такой же поток (внешний по отношению к петле) пронизывает и петлю, надетую на соленоид. Но полный магнитный поток в петле должен остаться неизменным. Поэтому

$$LI \pm L_0\mathcal{E}/(rN) = LI_0,$$

или

$$I_0 - I = \pm L_0\mathcal{E}/(LrN).$$

Двузначность в этих формулах связа-

на с двумя возможностями взаимной ориентации магнитных полей соленоида и петли. Знак «+» соответствует одинаковой ориентации полей, знак «-» — разной. В первом случае ток в петле после надевания ее на соленоид уменьшается, во втором — увеличивается. Картина магнитных линий, изображенная на рисунке 5, соответствует второму случаю.

Упражнения

1. По железнодорожным рельсам, изолированным друг от друга, идет поезд со скоростью $v = 60$ км/ч. Вертикальная составляющая магнитного поля Земли $B = 0,5 \cdot 10^{-4}$ Тл. Что покажет вольтметр, включенный между рельсами, в следующих случаях: а) поезд приближается к прибору; б) поезд проходит над прибором; в) поезд удаляется от прибора? Ширина колеи $l = 1,2$ м.

2. На железный цилиндрический сердечник, через который проходит однородное магнитное поле, создающее магнитный поток $\Phi = \Phi_0 \cos \omega t$, соосно надето тонкое кольцо из диэлектрика радиусом r и площадью сечения S . Определите напряженность электрического поля в диэлектрике. Какой ток протекал бы по кольцу, если бы оно было сделано из проводника с удельным сопротивлением ρ ? Индуктивностью кольца пренебречь.

3. Постоянное напряжение на линии электропровода $\mathcal{E} = 500$ В. При движении электропровода со скоростью $v = 72$ км/ч ток в обмотке элек-

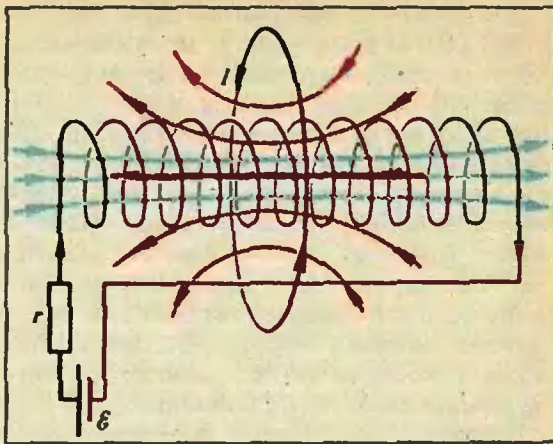


Рис. 6.

тродвигателя $I = 1000$ А, а пусковой ток $I_0 = 2000$ А. Какую силу тяги развивает электровоз при движении с указанной скоростью? Какой при этом КПД электродвигателя? Считать, что разгон происходит без изменения сопротивления цепи электродвигателя (то есть без пуска реостата).

4. Простейшая динамомашинка состоит из прямоугольной рамки площадью S с числом витков n и сопротивлением r . Рамка вращается в однородном магнитном поле с индукцией B . Определите средний момент сил, приложенных к рамке, и среднюю мощность, затрачиваемую на ее вращение. Динамомашинка работает на внешнюю нагрузку с сопротивлением R .

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М941—М955, Ф953—Ф967, справились с задачами М941—М947, М949, М952, Ф953, Ф957, Ф959, Ф961, Ф962, Ф964. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

А. Абанов (Красноярск) 48; Х. Агаев (с. Тюркоба Аз. ССР) 48; Р. Агаширинов (с. Хурай Аз. ССР) 51; В. Акопян (Ереван) 48, 50; М. Александров (Москва) 48, 53, 54; А. Алексеевич (Одесса) 48; М. Альт (Одесса) 51; Ю. Антимиров (Рига) 48, 50; Я. Аргентов (Алма-Ата) 48; Д. Ароцкер (Киев) 51; С. Аршавя (Северодонецк) 51; А. Асташкевич (Томск) 48, 50, 51, 53, 55; А. Барабанов (Киев) 51; А. Баран (Киев) 48, 50, 53; А. Баран (Минск) 48, 50, 51, 53, 55; Р. Безрукавников (Калуга) 48, 50; Д. Бияшев (Алма-Ата) 48, 50; Е. Богомол (Алма-Ата) 48, 50, 51; С. Бондарчук (Винница) 51; Р. Валиев (Фрунзе) 48, 51; Я. Варшавский (Харьков) 48, 50, 51, 53, 55; А. Винничук (Винница) 48, 50; П. Вольфбейн (Киев) 48, 50; Т. Газарян (Ереван) 48, 50, 51, 53; Д. Гамарник (Тбилиси) 48, 50; О. Геворков (Тбилиси) 48; О. Гендельман (Харьков) 48, 50, 54; Р. Гендлер (Ташкент) 48, 50, 51, 54, 55; О. Геупель (Дрезден, ГДР) 48, 50, 51; А. Глуцук (Харьков) 48, 50, 51; Р. Гой (Львов) 51; А. Гороховский (Киев) 48, 51, 54; Д. Гребнева (Алма-Ата) 48, 50; Н. Григорьева (Андропов) 48, 51, 53, 54;

Р. Гринив (Львов) 51, 55; А. Давыдов (с. Елфиново Горьковской обл.) 48, 51; А. Джафаров (с. Тюркоба Аз. ССР) 48; М. Добрицын (Москва) 48, 50, 51, 53—55; М. Дудник (Алма-Ата) 51; А. Дульнев (Киев) 55; А. Дынников (Жуковский) 48, 51, 53; И. Дынников (Жуковский) 48, 51, 53; Д. Ермишин (Мытищи) 51; С. Железская (Саратов) 48, 51; Д. Жигний (Киев) 48; В. Журавлев (Гайворон) 48, 50; П. Задорожный (Киев) 48, 51, 53; Д. Зайцев (Киев) 48, 51, 55; Е. Зельцер (Киев) 50; Б. Зон (Харьков) 51, 55; А. Иванов (Первомайск Николаевской обл.) 48, 50; М. Игнатьев (Саратов) 48, 51; В. Ильных (Алма-Ата) 48, 51; В. Калашников (Москва) 51; И. Кан (Семипалатинск) 51; В. и И. Каповичи (Хабаровск) 48, 50; Н. Капаров (Алма-Ата) 48; А. Каринский (Невинномысск) 48, 50; А. Каткова (Алма-Ата) 51; О. Кирнасовский (Винница) 48, 50; А. Кисилев (Ленинград) 48, 50, 51, 53—55; А. Козинский (Гайворон) 51; Ю. Кондратенко (Киев) 48, 50; А. Кононенко (Киев) 48; А. Коршков (Мозырь) 48, 53; Е. Костюк (Винница) 51; В. Кращенко (Алма-Ата) 48, 50; Б. Кругляков (Харьков) 48, 50, 51; Н. Крылов (Ленинград) 48, 50; М. Кукс (Львов) 48, 51; Е. Култанов (Аркалык) 48; А. Купчишин (Алма-Ата) 48; М. Куринной (Харьков) 48, 50, 51, 53—55; С. Кутайцев (Конаково) 48; Н. Кушлевич (Москва) 48, 50, 51, 53; Д. Лазиков (Киев) 48; А. Ларкин (Конаково) 48, 50; Л. Ляшиин (Ленинград) 48, 50, 51, 53; О. Лимешко (Куйбышев) 48, 51, 53; А. Литвак (Ленинград) 48, 50, 51, 53—55; М. Литвинов (Киев) 48, 51, 53; А. Лобковский (п. Чернооголовка Московской обл.) 48, 51; Н. Малетин (Ангарск) 51; К. Мамуров (Душанбе) 48, 50, 51, 55; Д. Матюхов (Евпатория) 48; Ю. Махлин (Моск-

ва) 48; *А. Мельцер* (Ленинград) 48, 51; *Б. Меркулов* (Куйбышев) 48, 50; *А. Минасян* (Ереван) 48; *Г. Минасянц* (Ереван) 48, 50, 51, 53; *Г. Мисирпашаев* (Москва) 48, 51, 54; *Г. Михалкин* (Ленинград) 48, 50, 51, 53—55; *Е. Мокшин* (Магнитогорск) 48; *М. Мунькин* (Алма-Ата) 48, 50, 51, 53; *А. Нагорный* (Слуцк) 48; *А. Некрасов* (Бельцы) 48, 51; *Ю. Ним* (п. Черноголовка Московской обл.) 48, 51; *О. Ниц* (Одесса) 48, 51, 53; *Е. Орынбасаров* (Алма-Ата) 48, 50; *Е. Осипов* (Алма-Ата) 51; *Д. Пастур* (Харьков) 50, 51, 53—55; *Г. Пельц* (Одесса) 51; *И. Пермякова* (п. Березовка Красноярского края) 54; *А. Петрова* (Ленинград) 48, 51; *Я. Печатников* (Ленинград) 48, 51; *А. Покровский* (Киев) 48, 51, 54, 55; *В. Полинов* (Магнитогорск) 48, 51; *М. Померанцев* (Черкасс) 48, 50, 54; *И. Портной* (Одесса) 48, 51, 53; *А. Португалов* (Киев) 51; *А. Пришляк* (Киев) 48, 50, 51, 53, 55; *В. Протасов* (Москва) 48, 50; *Т. Радько* (Корсунь-Шевченковский) 48, 50; *А. Райскин* (Алма-Ата) 51; *И. Раскина* (Витебск) 48, 53; *В. Ратнюк* (Евпатория) 50, 51; *Б. Ревунец* (Киев) 51, 53; *А. Ройтерштейн* (Ленинград) 48, 50, 51, 53; *С. Рубан* (Днепропетровск) 48, 50, 51; *В. Сакбаев* (Алма-Ата) 48; *З. Салканова* (Алма-Ата) 48; *И. Самовол* (Гайворон) 48, 50, 51; *Р. Сибилев* (Ленинград) 48, 51, 53—55; *И. Симоненко* (Великие Луки) 51, 53; *И. Симочкин* (Херсон) 55; *В. Слободянюк* (Киев) 48; *А. Смирнов* (Алма-Ата) 48; *С. Солянин* (п. Протвино Московской обл.) 55; *С. Стафеев* (Петрозаводск) 51, 55; *Д. Сторожук* (Киев) 50; *К. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 48, 50, 51, 55; *В. Судаков* (Тбилиси) 48, 50, 51, 53, 54; *Ж. Сушинкас* (Вильнюс) 48, 51, 53; *Д. Тажимаева* (Алма-Ата) 51; *Д. Тамаркин* (Горький) 48, 50; *Ю. Теляук* (Павлодар) 48, 50; *В. Тищенко* (Киев) 51; *К. Тищенко* (Минск) 48, 50, 51, 54; *А. Ткаченко* (Киев) 48; *Г. Топровер* (Волгоград) 48, 53; *Д. Трляков* (Жданов) 48, 50, 53; *В. Тумаркина* (Винница) 48, 51; *М. Тумаш* (Львов) 48, 51; *С. Тупаева* (Евпатория) 48; *Ю. Тышко* (Ленинград) 50; *Р. Ульмасов* (Душанбе) 48; *З. Усенова* (Алма-Ата) 48; *И. Устиловский* (Москва) 48, 50, 51, 53—55; *В. Филимонок* (Свердловск) 48, 50, 51, 53; *В. Фрасинич* (Гайворон) 51; *М. Хованов* (Москва) 48; *Ю. Хохлов* (Ленинград) 48, 50, 51, 53, 55; *В. Цвиркунов* (Киев) 48, 50; *А. Чагиров* (Алма-Ата) 48, 50, 51; *К. Чурашев* (Новосибирск) 48, 50, 51; *Ю. Шамрук* (д. Новый Двор Гродненской обл.) 48, 51, 53, 54; *С. Шейнин* (Молодечно) 48; *М. Шефтер* (Москва) 48, 51, 53; *И. Шехтман* (Киев) 50; *П. Шрабштейн* (Москва) 51; *Б. Шраер* (Ленинград) 48, 50, 51, 53; *В. Шульга* (Евпатория) 48, 50; *Т. Юрьева* (Алма-Ата) 48; *Е. Якуб* (Бахчисарай) 48.

Физика

А. Абанов (Красноярск) 54, 66, 67; *И. Абрамчук* (Винница) 58, 60; *С. Анагольев* (Ярославль) 54, 55; *В. Башкиров* (Чебоксары) 55, 65; *К. Бедов* (Челябинск) 54—56, 60, 65, 67; *С. Беловолов* (Новосибирск) 65; *И. Бена* (Васлуй, СРР) 54—56, 58, 66, 67; *А. Беренгольц* (Кишинев) 54; *С. Бобылев* (Березники) 55, 56, 58, 60, 65—67; *С. Болдырев* (Мытищи) 66, 67; *Ю. Боровский* (Киев) 54—56, 58, 60, 66, 67; *Ш. Бреннер* (Хуст) 56; *В. Быков* (Киев) 54, 55; *А. Быцко* (Ленинград) 54, 55, 66; *О. Верцимаха* (Киев) 55; *А. Гаек* (Днепропетровск) 58; *О. Гендельман* (Харьков) 58, 63, 65—67; *В. Гринберг* (Москва) 55; *Д. Дементьев* (Нальчик) 65; *О. Денисов*

(Хабаровск) 55; *А. Дода* (Корсунь-Шевченковский) 56, 66, 67; *В. Душацкий* (Киев) 54, 56, 60, 66; *А. Дынников* (Жуковский) 54, 55, 58, 60, 63, 65—67; *Д. Ежиков* (Минск) 55; *А. Жариков* (Киев) 54—56, 58, 60, 65—67; *Э. Жасина* (Шяуляй) 66, 67; *Д. Зайцев* (Киев) 63; *В. Зелов* (Новосибирск) 54, 55, 58; *Б. Зингерман* (Самарканд) 54—56, 58, 67; *И. Иванов* (Калуга) 55, 56; *С. Иванов* (Уфа) 58, 66, 67; *Р. Исаенко* (Сыктывкар) 55, 63, 67; *П. Кадурич* (Киев) 55, 56; *В. Калацкий* (Солигорск) 55, 56, 58; *В. Каменькович* (Харьков) 56; *В. Кирьяшкин* (Саратов) 54, 56; *П. Кларк* (Тула) 55, 60, 63, 65—67; *Ю. Кондратенко* (Киев) 54; *А. Краковский* (Харьков) 56; *Б. Крутов* (Воронеж) 54; *А. Курачев* (Новосибирск) 55, 63, 66; *Д. Ладиков* (Киев) 54; *В. Литвин* (Днепропетровск) 55; *Ю. Лобзак* (Киев) 58, 60; *А. Лобзовский* (п. Черноголовка Московской обл.) 55, 58, 66; *И. Лугач* (Винница) 66; *И. Луценко* (Донецк) 54—56, 58, 60, 63, 65—67; *П. Лушников* (Москва) 54, 56, 58, 60; *О. Маров* (Канев) 60; *С. Маслов* (Москва) 55, 58, 65; *В. Мелик-Алавердян* (Ереван) 58, 60, 66; *Т. Мисирпашаев* (Москва) 55, 63, 65, 67; *Л. Мигошеру* (СРР) 54, 55; *Е. Михалюк* (Минск) 56; *Д. Могилевцев* (Шклов) 56, 66; *А. Мудрик* (Брест) 66, 67; *С. Настенко* (Киев) 60; *А. Недачин* (Киев) 54; *Г. Николаишвили* (Тбилиси) 54—56, 58, 60, 65—67; *С. Новиков* (Херсон) 56, 66; *А. Оводенко* (Донецк) 56, 58, 60, 66; *В. Овчаров* (Шостка) 55; *О. Осауленко* (Киев) 55, 56, 58, 60; *Р. Паламарчук* (Нежин) 54, 55; *А. Парецкий* (Минск) 55, 56, 58, 60, 66, 67; *Е. Петров* (Минск) 54—56, 58, 60; *А. Покровский* (Киев) 58; *В. Полищук* (Серпухов) 56; *О. Посудневский* (Береза) 54, 55, 58, 60, 66, 67; *Т. Пустогова* (Киев) 54; *А. Пугилин* (Минск) 56; *А. Пяллинг* (Новосибирск) 58, 65—67; *С. Рахамов* (Казань) 54, 55; *С. Ревков* (Киев) 60, 65—67; *А. Розенберг* (Уфа) 58, 65, 66; *Н. Ромец* (Киев) 66, 67; *С. Рося* (Минск) 54—56, 58, 60, 63, 66, 67; *А. Рудницкий* (Рига) 56; *Ю. Рыбалочка* (Киев) 54—65, 58, 60, 65—67; *Р. Сагайдак* (с. Матугов Черкасской обл.) 54, 56, 58, 60, 65, 66; *Т. Сагайдак* (Канев) 58, 66; *В. Сакбаев* (Алма-Ата) 55, 56, 66; *Б. Самойлов* (Киев) 54—56, 58, 60, 65—67; *В. Сандомирский* (Братск) 56, 58, 60; *А. Сиваченко* (Москва) 54; *А. Сидоренко* (Киев) 66; *М. Ситников* (Климовск) 54—56, 58, 66; *С. Скобаро* (п. Коряжма Архангельской обл.) 56, 58; *А. Снежко* (Запорожье) 55, 58, 63, 66, 67; *А. Сомов* (Киев) 58, 60; *С. Сочнев* (Киев) 54, 55; *А. Ставицкий* (Баку) 54, 55, 66; *В. Степурич* (Винница) 65; *И. Стрешинский* (Киев) 58, 60, 65, 66; *И. Струговщиков* (Киев) 58, 60; *К. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 56, 60, 66, 67; *С. Сухов* (Киев) 54; *В. Тарнецкий* (Алма-Ата) 66; *Б. Татиевский* (Киев) 54, 55, 58; *А. Тейтельбойль* (п. Черноголовка Московской обл.) 58; *А. Ткаченко* (Киев) 58; *С. Толмачев* (Минск) 55, 56; *С. Туманский* (Винница) 58, 60; *М. Тумаш* (Львов) 54, 55; *А. Тюрин* (Николаев) 60, 66, 67; *С. Ушаков* (Ярославль) 54, 55; *М. Федоров* (Ульяновск) 65—67; *Г. Финкельштейн* (п. Черноголовка Московской обл.) 56, 63, 65—67; *А. Хохров* (Киев) 66, 67; *Ю. Черняевский* (п. Раздольное Крымской обл.) 67; *Н. Чух* (Киев) 58; *Л. Шаповаленко* (Канев) 58, 65, 66; *В. Шаповалов* (Донецк) 54, 55; *Е. Шаронов* (Уфа) 66, 67; *Г. Швец* (Киев) 54—56, 58, 60, 65—67; *И. Шехтман* (Киев) 63, 66; *А. Шуляк* (с. Молодецкое Черкасской обл.) 54, 55, 65—67; *М. Юдин* (Запорожье) 55, 63, 65—67; *О. Юсухно* (Киев) 54, 55, 58, 63, 66, 67.



Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1985 году

Предлагаем подборку задач вступительных экзаменов по математике и физике в некоторые университеты — Белорусский (1), Горьковский (2), Донецкий (3), Омский (4), Саратовский (5), Уральский (6) и институты — Владимирский педагогический (7), Горьковский политехнический (8), Киевский педагогический (9), Ленинградский педагогический (10), Ленинградский технологический (11), Минский радиотехнический (12), Московский авиационный технологический (13), Московский институт электронной техники (14), Новосибирский институт инженеров железнодорожного транспорта (15), Рижский политехнический (16), Тбилисский педагогический (17), Томский политехнический (18), Ярославский педагогический (19).

Математика

Задачи письменного экзамена

Алгебра

1(4). Дорога от пункта A до пункта B идет сначала по ровному месту, затем в гору. Автомобиль, выехав из A в B , двигался по ровному месту со скоростью 70 км/ч, в гору — со скоростью 60 км/ч. Доехав до B , он тотчас повернул назад и двигался под гору со скоростью 80 км/ч, а по ровному участку — со скоростью 75 км/ч. Найдите длину ровного участка пути, если на весь путь от A до B и назад автомобиль затратил 3 ч 29 м и проехал за это время 250 км.

2(1). На один продукт два раза была снижена цена, каждый раз на 20%. На другой продукт, бывший до снижения в одной цене с первым, снизили цену один раз на $x\%$. Каким должно быть x , чтобы после всех указанных снижений цен оба продукта были вновь в одной цене?

3(2). Шестизначное число начинается слева цифрой 1. Если эту цифру перенести с первого места слева на последнее место справа, то вновь полученное число будет втрое больше первоначального. Найдите первоначальное число.

4(3). Некоторый раствор состоит из двух веществ, входящих в отношении 3:4, а другой содержит те же вещества в отношении 1:3. Из скольких частей обоих растворов можно получить третий, содержащий те же вещества в отношении 1:2?

5(9). Два всадника выезжают одновременно из пунктов A и B навстречу один другому. Первый всадник прибывает в B через 27 мин, а второй в A через 12 мин после встречи. За сколько минут первый всадник проедет весь путь от A до B ?

6(7). Два мотоциклиста выезжают одновременно навстречу друг другу из пунктов A и B . К моменту встречи прошло менее 45 мин и первый мотоциклист проехал $\frac{3}{8}$ расстояния от A до B . Определите, за какое время второй мотоциклист проедет расстояние от B до A , если через 45 мин после начала движения расстояние между мотоциклистами было равно половине расстояния между A и B .

7(3). Двое рабочих могут выполнить некоторую работу за 30 дней. После шестидневной совместной работы первый из рабочих (работая один) может закончить ее за 40 дней. Сколько дней каждый из рабочих, работая один, должен затратить на выполнение всей работы?

8(14). В геометрической прогрессии $a_8=10$. Найдите произведение $a_1 a_2 \dots a_{14} a_{15}$.

9. Вычислите:

$$a) (15) \frac{(0,2 : 0,125 + 1 - \frac{4}{5} : 2 \frac{4}{25} - 0,1) \cdot \frac{3}{7}}{(\frac{3}{8} + 0,5^3) \cdot 625^{-1/4} : 0,3};$$

$$b) (15) 9^{\frac{1}{\log_3 3}} + \frac{1}{2} \log_3 4 + 27^{\frac{1}{\log_3 3}} + 16^{\frac{1}{\log_3 4}}$$

$$в) (4) b^b, \text{ если } a^b=8, b^c=10, a^c=2.$$

$$г) (14) \log_{30} 8, \text{ если } \lg 5=a, \lg 3=b;$$

$$д) (7) \operatorname{tg} a, \text{ если } \cos a = \frac{4}{5}, \frac{3}{2} \pi < a < 2\pi;$$

$$е) (14) \operatorname{tg} \frac{\pi}{10} \cdot \cos \frac{2\pi}{10} \cdot \cos \frac{\pi}{10};$$

$$ж) (14) \cos 10^\circ \cdot \operatorname{tg} 40^\circ + \sin 10^\circ;$$

$$з) (2) \sin 70^\circ \cdot \sin 50^\circ \cdot \sin 10^\circ.$$

10. Упростите выражение:

$$a) (2) \frac{1}{\sqrt{a^2-4}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \times 3a^2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3(a^2-4)}} - \sqrt{3(a^2-4)} \times \frac{1}{a^2(1 + \frac{3(a^2-4)}{a^2})}$$

и найдите допустимые значения a ;

$$б) (10) \sqrt{\frac{1 + \cos(\pi/2 - a)}{1 + \cos(3\pi/2 - a)}} + \sqrt{\frac{1 + \sin(\pi + a)}{1 - \cos(5\pi/2 + a)}}, \text{ если } \pi/2 < a < 3\pi/2.$$

11. Решите уравнения:

$$a) (1) \frac{2x^2 - 3x + 5}{3x + 5} + \frac{2(3x + 5)}{2x^2 - 3x + 5} = 3;$$

$$б) (14) 4 - 5x = |5x - 4|;$$

$$в) (2) |x + 1| + 1 = \frac{x + 1}{|x|};$$

$$г) (9) |x + 7| = |x - 2| + |x - 3|;$$

$$д) (19) |x^2 + x - 2| = x + 2;$$

$$е) (12) \sqrt{x+5} + \sqrt{2x+8} = 7;$$

$$ж) (3) \sqrt{x^2 - 4x} + \sqrt{x - x^2} - \sqrt{x} = 0;$$

$$з) (3) 5x^2 + 35x - \sqrt{x^2 + 7x} - 1 = 4;$$

и) $\sqrt{3-x} + \sqrt{2x-6} = 0$;
 к) (13) $(9-x^2)\sqrt{2-x} = 0$.

12. Решите показательные и логарифмические уравнения:

а) (18) $16 \cdot 2^{3x} = \frac{4^{x-3}}{32}$;

б) (18) $3 \cdot 2^{2(\sqrt{x}-1)} - 2^{\sqrt{x}} = 8$;

в) (3) $(\sqrt[3]{6+\sqrt{35}})^x + (\sqrt[3]{6-\sqrt{35}})^x = 12$;

г) (2) $\lg(x^2+2x+1) = \lg^2(x+1) + 1$;

д) (1) $\lg(2x^2+21x+9) - \lg(2x+1) = 1$;

е) (12) $\frac{\log_3 2x}{\log_3(4x-15)} = 1$;

ж) (10) $\sqrt[3]{\log_2(-x)} = \log_2(-x)$;

з) (3) $4(\log_x \sqrt[3]{3})^2 - 4\log_x 3\sqrt[3]{3} + 5 = 0$.

13. Решите тригонометрические уравнения:

а) (13) $\cos 4x = -2\cos^2 x$;

б) (4) $2(1-\cos 2x) = \sqrt[3]{3} \operatorname{tg} x$;

в) (3) $2\cos 3x = \sqrt{3} \cos x - \sin x$;

г) (10) $\sin^5 x - \sin^4 x = \cos^4 x - \cos^6 x$;

д) (4) $1 + \sin x + \cos x + \sin 2x + \cos 2x = 0$;

е) (19) $3\sin^2 x + \frac{5}{2}\sin 2x = 1 + 6\cos^2 x$;

ж) (13) $\frac{\sin 5x}{\sin 2x \cdot \cos 3x} = 1$;

з) (6) $2(x-3)\sin x = |x-3|$;

и) (7) $2\operatorname{tg}^2 x + 4\cos^2 x = 7$;

к) (13) $\sin^3 x + 1/2\sin 2x = 1 - \cos^3 x$;

л) (3) $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} 2x = \sin 3x \cdot \cos x$.

14 (2). Найдите все целые числа k , при которых уравнение

$$\cos kx = 1 + 2\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

имеет решения, и решите это уравнение.

15. Решите системы уравнений:

а) (9) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}\sqrt{y} + \sqrt{x}\sqrt[3]{y} = 12, \\ xy = 64; \end{cases}$

б) (15) $\begin{cases} 5x - 9y = 0, \\ 3x - 25y = 0; \end{cases}$

в) (1) $\begin{cases} y^{5x^2-51x+10} = 1, \\ xy = 5; \end{cases}$

г) (14) $\begin{cases} \log_2(x^2+y^2) = 2, \\ -2\log_{1/4} + \log_2 y = 1; \end{cases}$

д) (2) $\begin{cases} \frac{1}{2} \lg x + \frac{1}{2} \lg y - \lg(4-\sqrt{x}) = 0, \\ 25\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} - 125 \cdot 5\sqrt{y} = 0; \end{cases}$

е) (4) $\begin{cases} 3^x \log_3 \frac{y}{3} = 3^x + \log_3 y \cdot 5, \\ 3^{x-1} + \log_3 y^{2/3} + 1 = 0. \end{cases}$

16 (6). При каких значениях параметра p наибольший корень уравнения $x^2 - (p+1)px + p^3 = 0$ больше чем $1/2$?

17 (3). При каких значениях a уравнение $2^{2x} - (2a+1)2^x + a^2 + a = 0$

имеет решения? Найдите эти решения.

18 (4). При каких a уравнение

$$4x|x| + (a-7)x + 1 = 0$$

имеет ровно два разных корня.

19. Решите неравенства

а) (3) $\frac{x+1}{x^2-7x+6} > 0$;

б) (14) $4|x+2| < 2x+10$;

в) (14) $(x-1)\sqrt{-x^2+x+6} > 0$;

г) (14) $\sqrt{13-3x} > x-1$;

д) (14) $\sqrt{x^2+x-2} + \sqrt{2} \cos \frac{\pi x}{4} > 2^{1-x} + \sqrt{(1-x)(x+2)}$;

е) (19) $0,3^{\log_4(x-5)} > 1$;

ж) (6) $\log_1(x+7) < \log_1(x+1)$;

з) (3) $\log_{x-5}(x-3) < \log_{x-5}(x-5,5)$;

и) (4) $\log_2(2^x+1) + \log_2 3 > \log_2(2^x-1) + x + 1$;

к) (2) $\frac{\lg^2 x + 2\lg x - 6}{\lg x} < 1$;

л) (9) $\frac{5}{4} \sin^2 x + \frac{1}{4} \sin^2 2x > \cos 2x$;

м) (1) $\frac{m}{mx+1} + \frac{1}{mx-1} < \frac{1}{1-m^2x^2}$, если $m < 0$.

20 (10). Найдите область определения функции

$$f(x) = \lg \sqrt{\frac{x^2-x-20}{14+5x-x^2}}.$$

21 (4). Найдите площадь фигуры, задаваемой на плоскости условиями:

а) (9) $\begin{cases} y > |x|, \\ y < 0,5x + 1,5; \end{cases}$

б) (9) $2|x| + |y| < 2$.

Анализ

1 (13). Решите неравенство $\frac{y'+2}{y'-1} < 2$, если

$$y = e^{-3x} + 2x + 16.$$

2 (3). При каких значениях x производная функции $y = 3(\sin x + \sqrt{3}\cos x) - \sin 3x$ равна 0?

3 (3). Найдите промежутки, на которых функция $f(x) = 4^x - 6 \cdot 2^x + x \ln 16 - 1$ монотонно возрастает.

4 (15). Исследуйте функцию $f(x) = (x+1)e^{-5x}$ на экстремум, найдите ее промежутки монотонности.

5 (13). Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 3x^4 + 4x^3 + 1$ на отрезке $[-2, 1]$.

6 (3). Найдите критические точки функции $y = x^3 - 20x^2$ и исследуйте их на максимум и минимум.

7 (9). Докажите, что уравнение $3^x - 3x - 4 = 0$ не имеет корней в промежутке $[1, 2]$.

8 (13). На параболе $y = 2x^2 - 3x + 8$ найдите точки, касательные в которых проходят через начало координат.

9 (6). Для каждого значения параметра a найдите наибольшее значение функции $y = 1 + ax - x^2$ на промежутке $[1; 2]$.

10 (9). Среди всех равнобедренных трапеций с площадью S и острым углом α найдите ту, периметр которой наименьший. Найдите этот периметр.

11 (1). Объем правильной треугольной призмы равен V . Какова должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?

12 (9). Докажите, что $\ln(1+x) < x$, если $x > 0$.

Геометрия

1 (3). Известно, что точка касания вписанной окружности делит один из катетов прямоугольного треугольника на отрезки длины 3 см и 7 см, считая от вершины прямого угла. Найдите длину второго катета.

2 (3). В прямоугольном треугольнике дан катет a и биссектриса прямого угла α . Найдите гипотенузу.

3 (14). Основание равнобедренного треугольника $\sqrt{32}$, медиана боковой стороны 5. Найдите длины боковых сторон.

4 (15). В равнобедренном треугольнике высота равна 8, а основание относится к боковой стороне как 6:5. Найдите радиус вписанного круга.

5 (14). В треугольнике ABC сторона AB имеет длину 3 м, высота CD , опущенная на сторону AB , имеет длину 3 м. Основание D высоты CD лежит на стороне AB , длина отрезка AD равна длине стороны BC . Найдите длину стороны AC .

6 (2). В треугольнике ABC на стороне AC взята точка M , а на стороне BC — точка N . Отрезки AN и BM пересекаются в точке O . Найдите площадь треугольника ABC , если площади треугольников AMO , ABO , BNO равны соответственно S_1 , S_2 , S_3 .

7 (15). В параллелограмме $ABCD$ величина угла BCD равна $\pi/3$, длина стороны AB равна a . Биссектриса угла BCD пересекает сторону AD в точке N . Найдите площадь треугольника NCD .

8 (10). В выпуклом четырехугольнике длины диагоналей 2 см и 4 см. Найдите площадь четырехугольника, зная, что длины отрезков, соединяющих середины противоположных сторон, равны.

9 (2). В грани двугранного угла, равного α , проведена прямая, составляющая угол β с ребром двугранного угла. Найдите угол наклона между этой прямой и другой гранью.

10 (12). Найдите площадь боковой поверхности правильной треугольной пирамиды, если ее высота 9, а апофема — 18.

11 (10). Найдите объем правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой имеет длину a и образует с боковой гранью угол α .

12 (2). В треугольной пирамиде два непараллельных ребра имеют длины a и b , а каждое из остальных ребер — длину c . Найдите объем пирамиды.

13 (3). В основании пирамиды лежит треугольник, длины сторон которого равны 12 см, 10 см и 10 см. Все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45° . Найдите объем пирамиды.

14 (13). Основанием пирамиды служит треугольник с углами α и β . Высота пирамиды равна h , а боковые ребра образуют с плоскостью основания угол γ . Найдите объем пирамиды.

15 (14). Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды 8, двугранный угол при боковом ребре 120° . Определите площадь боковой поверхности пирамиды.

16 (3). Двугранный угол при основании правильной четырехугольной пирамиды равен α . Найдите величину плоского угла боковой грани при вершине пирамиды.

17 (14). Пирамида, основание которой — прямоугольник со сторонами 6 и 7, вписана

в сферу. Высота пирамиды проходит через вершину основания и равна 6. Определите радиус сферы.

18 (6). Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$. Точка P лежит на ребре CC_1 , причем $|C_1 P| = 2|CP|$. Найдите угол между плоскостями $BD_1 P$ и ABC .

19 (9). В параллелепипеде три ребра, выходящие из одной вершины, имеют одинаковую длину. Два из этих трех ребер взаимно перпендикулярны, а третье образует с каждым из них острый угол. Объем параллелепипеда равен V . Найдите площади диагональных сечений параллелепипеда.

20 (4). Радиус основания конуса равен R . Площадь боковой поверхности конуса в 3л раз больше площади осевого сечения. Найдите объем конуса.

21 (12). Через точку касания двух внешне касающихся шаров проведена плоскость так, что площади полученных сечений равны 144л и 81л. Разность между площадями поверхностей этих шаров равна 700л. Определите радиус меньшего шара.

Задачи устного экзамена

1 (7). Производительность труда в январе оказалась выше плановой на 5%, а в феврале снизилась на 5% по сравнению с январской. Сравните ее с плановой.

2 (9). Является ли рациональным число

$$\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3} + \sqrt{3}}?$$

3. Вычислите:

а) (9) $\lg \operatorname{tg} 1^\circ + \lg \operatorname{tg} 2^\circ + \dots + \lg \operatorname{tg} 89^\circ$;

б) (18) $\cos 20^\circ + \cos 40^\circ + \cos 60^\circ + \dots + \cos 180^\circ$;

в) (18) $49^{1-\log_7 2} - 5^{-\log_5 4}$.

4 (18). Упростите выражение

$$4 + a^{1/2} - \frac{a - a^{-2}}{a^{1/2} - a^{-1/2}} + \frac{1 - a^{-2}}{a^{1/2} + a^{-1/2}} + \frac{2}{a^{3/2}}.$$

5. Решите уравнения:

а) (18) $\frac{x^2}{x-6} + \frac{6x}{6-x} = 0$;

б) (18) $5^{x+1} + 5^x + 5^{x-1} = 155$;

в) (7) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$;

г) (18) $\lg \frac{x+9}{x+1} = \lg x$;

д) (6) $|2 + \log_{1/5} x| + 3 = |1 + \log_5 x|$;

е) (6) $\frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{\sin x} = \sqrt{2} \left(\cos x - \frac{1}{2} \right)$;

ж) (6) $\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x} = 1 + \cos x$.

6. Решите неравенства:

а) (7) $\frac{3-x}{x-4} < \frac{2}{3}$;

б) (6) $x^2 - |3x+2| + x > 0$.

7 (7). Докажите, что $\sqrt{ab} < 0,5(a+b)$, где $a > 0$, $b > 0$.

8 (7). Найдите область определения функции

$$y = \sqrt{x^2 - x - 6} \cdot (100 - x^2)^{-0,5}.$$

9. Постройте графики:

а) (7) $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$; б) (6) $y = \frac{\sin x}{|\sin x|} \cdot x$;

в) (9) $y = \frac{|\sin x|}{\sin x}$; г) (6) $y = 2^{\log_2(x^2 - x - 6)}$;

д) (6) $|y| < \log_2 x$; е) (6) $\begin{cases} x+y < 3, \\ x+y > x^2+2x; \end{cases}$

ж) (9) $\frac{x^2+y^2}{x} > 2$.

10 (9). Исследуйте на четность (нечетность) функции

а) $y = \ln(x + \sqrt{x+1})$; б) $y = \sin \frac{x^3 - x^2}{x-1}$.

11 (9). Докажите, что $\sin x > \frac{2}{\pi} x$, если $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$.

12 (18). Боковая сторона описанной равнобедренной трапеции равна 12 см. Найдите ее периметр.

13 (6). Докажите, что в прямоугольном треугольнике произведение длин отрезков, высекаемых на гипотенузе вписанной окружностью, равно площади треугольника.

14 (6). Две окружности радиусов r и $3r$ касаются внешним образом. Найдите площадь фигуры, заключенной между окружностями и их общей касательной.

Физика

Задачи устного и письменного экзаменов Механика

1 (15). Поезд идет со скоростью $v_1 = 108$ км/ч. Пассажир этого поезда, сидящий у окна, видит в течение $t = 18$ с встречный поезд, длина которого $l = 900$ м. Определите скорость встречного поезда.

2 (17). Эскалатор метро поднимает неподвижно стоящего на нем пассажира в течение $t_1 = 1$ мин. По неподвижному эскалатору пассажир поднимается за $t_2 = 3$ мин. Сколько времени будет подниматься пассажир по движущемуся эскалатору?

3 (17). Мальчик съехал на санках с горы длиной $l_1 = 40$ м за $t_1 = 10$ с, а затем проехал по горизонтальному участку еще $l_2 = 20$ м до остановки (рис. 1). Найдите скорость в конце горы, ускорение на каждом участке, общее время движения и среднюю скорость на всем пути.

4 (19). Тело свободно падало с некоторой высоты H и последние $h = 196$ м прошло за $t = 4$ с. Сколько времени падало тело? Чему равна высота H ?

5 (8). Тело падает с некоторой высоты в течение двух секунд. Найдите скорость, с которой нужно подбросить его вертикально вверх, чтобы оно поднялось на высоту, в два раза превышающую первоначальную.

6 (1). Тело брошено вертикально вверх со скоростью $v_0 = 30$ м/с. Некоторую точку A тело проходит дважды с разницей во времени $\Delta t = 2$ с. Начертите график скорости движения тела и по этому графику определите высоту, на которой находится точка A .

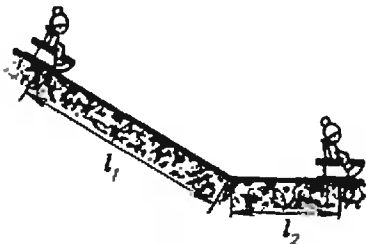


Рис. 1.



Рис. 2.

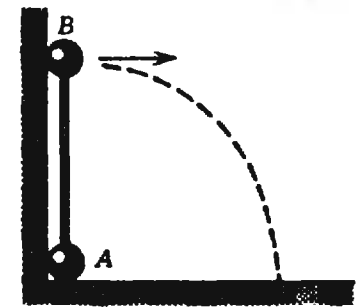


Рис. 3.

7 (8). Определите, на каком расстоянии от цели необходимо сбросить вымпел с самолета, летящего на высоте $h = 123$ м со скоростью $v = 360$ км/ч. Сопротивлением воздуха пренебречь.

8 (17). Минутная стрелка часов в 3 раза длиннее секундной. Найдите отношение линейных скоростей концов стрелок.

9 (18). Тело массой $m = 10$ кг находится на наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha = 30^\circ$ с горизонтом. Коэффициент трения $\mu = 0,6$. Какую силу, направленную вдоль плоскости, нужно приложить к телу, чтобы перемещать его вниз по плоскости с ускорением $a = 2$ см/с²? Результат представьте в единицах СИ и округлите до десятых.

10 (15). Автомобиль массой $m = 5$ т движется с постоянной скоростью $v = 36$ км/ч по выпуклому мосту радиусом $R = 100$ м. Найдите силу давления автомобиля на середину моста.

11 (8). Шарик, подвешенный на нити длиной l , вращается в горизонтальной плоскости так, что нить составляет угол α с вертикалью. Определите скорость вращения шарика.

12 (4). На правом конце стержня длиной $l = 30$ см прикреплен шар радиусом $r = 6$ см. Где находится центр тяжести этой системы, если масса стержня вдвое меньше, чем масса шара?

13 (1). Лестница прислонена к гладкой вертикальной стене под углом $\alpha = 30^\circ$ (рис. 2). Сможет ли человек подняться по лестнице до ее середины прежде, чем лестница начнет скользить, если коэффициент трения между лестницей и горизонтальным полом $\mu = 0,3$? Массой лестницы и трением о стену можно пренебречь.

14 (2). На гладкой горизонтальной поверхности лежит доска массой M . По ней начинает со скоростью v_0 скользить шайба массой $M/2$. Из-за трения между шайбой и доской через некоторое время скольжение шайбы по доске прекратится. Какова при этом будет скорость шайбы?

15 (14). Тело движется равномерно по окружности радиусом $R = 0,5$ м, обладая кинетической энергией $E_k = 10$ Дж. Какова сила, действующая на тело, и чему равна работа этой силы?

16 (13). Санки массой m соскальзывают с горы высотой h и, пройдя некоторое расстояние, останавливаются. Определите работу, которую нужно совершить, чтобы втащить санки обратно на гору.

17 (5). Шарик массой $m = 10$ г падает с высоты $h = 2$ м и упруго отражается от установленного на неподвижной тележке щита, плоскость которого наклонена к горизонту под углом $\alpha = 45^\circ$. Найдите скорость тележки после отражения шарика. Трением качения тележки пренебречь. Масса тележки со щитом $M = 90$ г.

18 (1). Два пластилиновых шара, массы которых относятся как 1:3, подвешены на одинаковых нитях и касаются друг друга. Шары симметрично развели в противоположные стороны и одновременно отпустили. При ударе шары слиплись. Какая часть кинетической энергии шаров при этом превратилась в тепло? Силы трения не учитывайте.

19 (12). Гантелька представляет собой невесомый стержень длиной l с двумя небольшими шариками на концах, масса каждого из которых m (рис. 3). Гантелька стоит в углу, образованном двумя взаимно перпендикулярными гладкими стенками. От содрогания гантелька начинает падать. С какой силой действует шарик A на вертикальную стенку в тот момент, когда стержень составляет угол α с вертикалью?

20 (5). На какой глубине в пресной воде давление в три раза больше атмосферного $p_a = 10^5$ Па?

21 (13). В сообщающиеся сосуды налили воду, а затем в один из сосудов налили масло. Найдите разность уровней воды в сосудах, если высота масла $h = 40$ см. Плотность воды $\rho_1 = 10^3$ кг/м³, плотность масла $\rho_2 = 8 \cdot 10^2$ кг/м³.

22 (19). Определите массу льдины, плавающей в пресной воде, если объем выступающей части льдины $V = 2$ м³.

23 (2). В цилиндрический сосуд радиусом R налита вода. На сколько повысится уровень воды, если в сосуд поместить деревянный брусок массой M ?

24 (4). В воде с глубины $h = 5$ м поднимают до поверхности камень объемом $V = 0,6$ м³. Плотность камня $\rho = 2500$ кг/м³. Найдите работу по подъему камня.

25 (12). Однородный алюминиевый цилиндр подвесили на пружине и отпустили, полностью погрузив его в воду. При этом растяжение пружины уменьшилось в $n = 1,6$ раза. Рассчитайте по этим данным плотность алюминия.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1 (4). Определите число атомов натрия в $V = 1$ см³. Относительная атомная масса натрия $A = 23$, плотность $\rho = 1,5 \cdot 10^3$ кг/м³.

2 (18). Дан график зависимости давления от объема для идеального газа (рис. 4). Постройте график этого же процесса в координатах: объем, температура, измеренная по шкале Цельсия (V, t).

3 (2). На плоскости V, T изображен процесс, который происходит при постоянном давлении и при постоянном объеме (рис. 5). Как при этом изменяется масса газа?

4 (5). Вертикальный закрытый с обоих концов цилиндр высотой $H = 0,6$ м разделен на две равные части подвижным поршнем массой

$m = 20$ кг. В нижней части цилиндра находится $m_1 = 8 \cdot 10^{-5}$ кг водорода. В верхней части цилиндра — кислород. Температура обоих газов $T = 300$ К. Сколько кислорода находится в цилиндре?

5 (11). Из баллона объемом $V_1 = 200$ л, содержащего гелий при температуре $T_1 = 273$ К под давлением $p_1 = 2 \cdot 10^5$ Па, израсходовали часть газа, занявшего при нормальных условиях объем $V_2 = 1000$ л. При измерении давления в баллоне после этого получено значение $p_2 = 1,4 \cdot 10^5$ Па. При какой температуре произведено измерение?

6 (14). В сосуде находится смесь азота и водорода. При температуре T , когда азот полностью диссоциирован на атомы, давление равно p (диссоциацией водорода пренебречь). При температуре $3T$, когда диссоциированы полностью оба газа, давление в сосуде равно $4p$. Каково отношение масс водорода и азота в смеси?

7 (13). Моль идеального газа из состояния с температурой $T = 100$ К расширяется изобарно, а затем изохорно переходит в состояние с начальной температурой (рис. 6). Во сколько раз изменился при этом объем газа, если для перевода газа из начального состояния в конечное к нему подвели количество теплоты $Q = 831$ Дж?

8 (12). Коэффициент полезного действия некоторой тепловой машины составляет $\alpha = 60\%$ от коэффициента полезного действия идеальной машины, работающей по циклу Карно. Температура нагревателя и холодильников этих машин одинакова. Пар поступает в машину при температуре $t_1 = 200$ °С, а температура конденсатора машины $t_2 = 60$ °С. Мощность машины $N = 314$ кВт. Сколько угля расходует машина за $t = 1$ ч работы? Удельная теплота сгорания угля $q = 3,14 \cdot 10^7$ Дж/кг.

9 (1). В герметически закрытом сосуде находится воздух, температура которого $t_1 = 100$ °С, а относительная влажность $\phi_1 = 3,5\%$. Какой станет относительная влажность воздуха, если его охладить до температуры $t_2 = 29$ °С, при которой давление насыщенного водяного пара $p_{n2} = 30,0$ мм рт. ст.? Изменением объема сосуда при его охлаждении можно пренебречь.

10 (19). С какой высоты должны свободно падать дождевые капли, чтобы при ударе о землю испариться? Начальная температура капля $t = 20$ °С.

Основы электродинамики

1 (1). Точки A и B расположены на одной линии напряженности электростатического поля точечного заряда (рис. 7). Напряженность поля в точке A E_1 , в точке B E_2 . Определите напряженность в точке C , расположенной посередине между точками A и B .

2 (19). Шарик массой $m = 50$ мг подвешен на

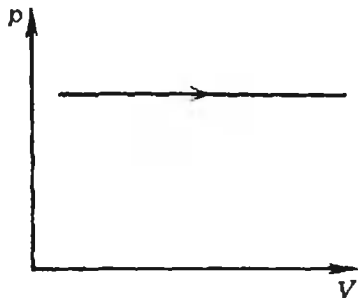


Рис. 4.

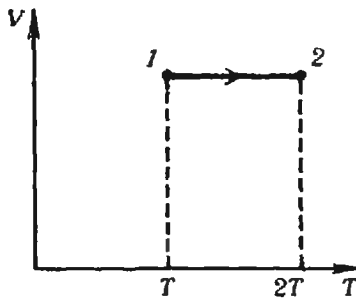


Рис. 5.

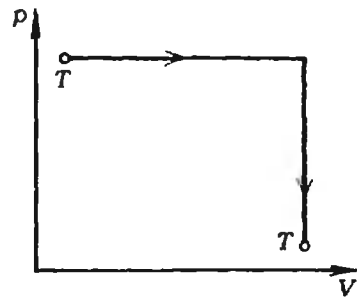


Рис. 6.

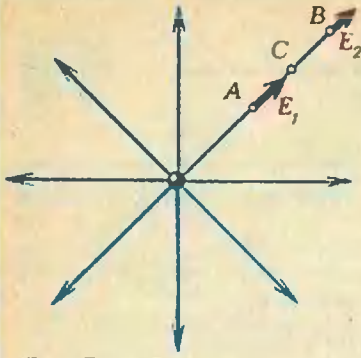


Рис. 7.

непроводящей нити и имеет заряд 10^{-8} Кл. На расстоянии $l=32$ см от него снизу подносится другой маленький шарик. Каким должен быть по величине и знаку его заряд, чтобы натяжение нити увеличилось вдвое?

3 (18). Плоский конденсатор присоединен к источнику постоянного напряжения с ЭДС $\mathcal{E}=200$ В. На сколько уменьшится напряженность электрического поля в конденсаторе, если расстояние между его пластинами увеличить от $d_1=1$ см до $d_2=2$ см? Результат представьте в киловольтах на метр.

4 (2). На рисунке 8 приведена электрическая цепь, в которой $\mathcal{E}=10$ В, $C_1=C_2=10$ мкФ. Какой заряд протечет через батарею после замыкания ключа K ? Изменится ли при этом заряд конденсатора емкостью C_1 ?

5 (4). Конденсатор емкостью C_1 зарядили до напряжения $U_1=500$ В. При параллельном подключении этого конденсатора к незаряженному конденсатору емкостью $C_2=4$ мкФ вольтметр показал $U_2=100$ В. Найдите емкость C_1 .

6 (8). Плоский воздушный конденсатор заполнили керосином (диэлектрическая проницаемость керосина $\epsilon=2$), зарядили, сообщив ему энергию $W=2 \cdot 10^{-5}$ Дж, и отключили от источника питания. Определите, какая энергия будет запасена в конденсаторе, если из него слить керосин.

7 (17). Кабель состоит из двух стальных жил сечением $S_1=0,6$ мм² каждая и четырех медных жил сечением $S_2=0,85$ мм² каждая. Каково падение напряжения на каждом километре кабеля при силе тока $I=0,1$ А? Удельное сопротивление стали $\rho_1=12 \cdot 10^{-8}$ Ом·м, меди $\rho_2=1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

8 (1). При замкнутом ключе K (рис. 9) сила тока, текущего через амперметр, равна $I_1=0,45$ А. Какой ток будет течь через амперметр при разомкнутом ключе? Напряжение на клеммах считайте постоянным.

9 (11). Два соединенных последовательно вольтметра подключены к источнику тока с внутренним сопротивлением r ; их показания $U_1=8$ В и $U_2=4$ В. Если подключить к источнику только второй вольтметр, то он покажет $U_3=10$ В. Чему равна ЭДС источника?

10 (14). Первый аккумулятор имеет КПД η_1 , второй, замкнутый на такое же сопротивление, — η_2 . Каким будет КПД, если замкнуть на это сопротивление оба аккумулятора, соединенные последовательно?

11 (4). Троллейбус массой $M=11$ т движется равномерно со скоростью $v=36$ км/ч. Найдите силу тока в обмотке двигателя, если напряжение $U=550$ В и КПД $\eta=80\%$. Коэффициент сопротивления движению $\mu=0,02$.

12 (16). Спираль электрического чайника изготовлена из нихромовой проволоки сечением

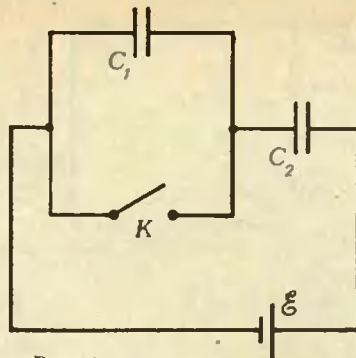


Рис. 8.

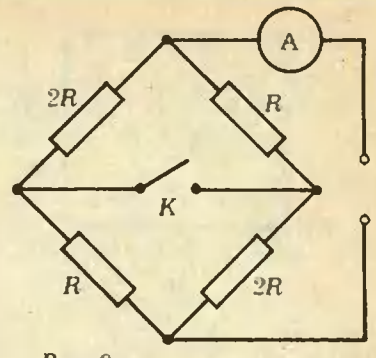


Рис. 9.

$S=0,5$ мм². В чайнике находится $m=3$ кг воды, и он подключен к сети с напряжением $U=220$ В. Вода в чайнике за $t=5$ мин нагревается от $t_1=10^\circ\text{C}$ до $t_2=100^\circ\text{C}$ ($c=4,2 \times 10^3$ Дж/(кг·К)). Какой длины должна быть проволока ($\rho=1,1 \cdot 10^{-6}$ Ом·м), если коэффициент полезного действия чайника $\eta=80\%$?

13 (16). Сколько времени нужно хромировать детали, чтобы покрыть их слоем толщиной $d=40$ мкм при плотности тока $j=1200$ А/м² ($M=52 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, $\rho=7 \cdot 10^3$ кг/м³, $n=6$, $F=9,65 \cdot 10^4$ Кл/моль)?

14 (1). Под каким напряжением передается электроэнергия на расстояние $L=100$ км, если при плотности постоянного тока $j=5,0 \times 10^4$ А/м² потери на нагревание алюминиевых ($\rho=2,8 \cdot 10^{-8}$ Ом·м) проводов двухпроводной линии электропередачи составляют $\alpha=5,0\%$ от передаваемой мощности?

15 (14). С помощью камеры Вильсона, помещенной в магнитное поле с индукцией \vec{B} , наблюдают упругое рассеяние α -частиц на ядрах дейтерия. Найдите начальную энергию α -частицы, если радиусы кривизны начальных участков траекторий ядра отдачи и рассеянной α -частицы оказались одинаковыми и равными r . Обе траектории лежат в плоскости, перпендикулярной линиям индукции магнитного поля. Заряд протона e , его масса m .

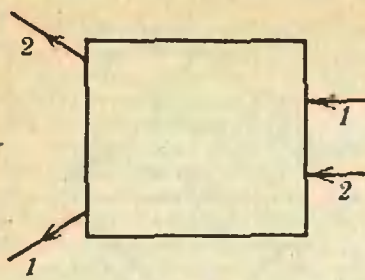
16 (1). Два проволочных кольца разного диаметра расположены в одной плоскости в однородном магнитном поле, индукция которого с течением времени изменяется по закону $B=at$, где a — известная постоянная величина. В каком кольце индуцируется больший ток, если оба они изготовлены из одного и того же материала и массы их одинаковы?

17 (12). Плоская проволочная квадратная рамка со стороной a находится в магнитном поле с индукцией \vec{B} , перпендикулярной ее плоскости. Затем рамку: а) изгибают в прямоугольник с отношением сторон 1:2; б) вытягивают в одну линию. Определите заряды, протекающие по рамке при каждом изменении ее формы. Сопротивление рамки R .

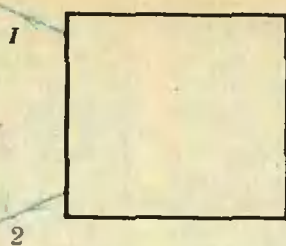
Колебания и волны

1 (14). Часы снабжены маятником в виде шарика на тонкой проволоке. При сравнении показаний этих часов с эталоном оказалось, что при $t_1=0^\circ\text{C}$ они спешат на 8 с в сутки, а при температура $t_2=20^\circ\text{C}$ отстают на 10 с в сутки. Определите коэффициент линейного расширения материала проволоки.

2 (12). Математический маятник длиной l и массой m раскачивают так, что каждый раз, когда маятник проходит положение равновесия, на него в течение короткого промежутка времени t действует сила F , направ-



a)



б)

Рис. 10.

ления параллельно скорости. Через сколько колебаний маятник отклонится на 90° ?

3(5). Волны набегают на берег под углом $\alpha=45^\circ$. Определите скорость перемещения гребня волны вдоль берега, если расстояние между гребнями $l=5$ м, а частота вертикальных колебаний воды $\nu=0,25$ Гц.

4(14). Расстояние между гребнями волны в море $l=5$ м. При встречном движении катера волна за $t=1$ с ударяет о корпус катера 4 раза, а при попутном — 2 раза. Найдите скорости катера и волны.

5(12). Из пункта А в пункт В дважды был послан звуковой сигнал частотой $\nu=50$ Гц, причем во второй раз при температуре на $\Delta T=20$ К выше, чем в первый. Число волн, укладываемых на расстоянии от А до В, во второй раз оказалось, как и в первый, четным, но на две меньше. Определите расстояние между пунктами, если при повышении температуры на $\Delta t=1$ К скорость звука увеличилась на $\Delta c=0,5$ м/с. Скорость звука в первом опыте принять равной $v_1=330$ м/с.

Оптика

1(19). Свая длиной $l=2$ м выступает над поверхностью воды на $h=1$ м. Определите длину тени от сваи на дне озера, если угол падения лучей света $\alpha=30^\circ$. ($n=1,33$.)

2(8). Найдите путем построения ход луча до собирающей линзы, если он вышел из линзы на расстоянии $a=1$ см от главной оптической оси под углом $\alpha=30^\circ$ к ней. Фокусное расстояние линзы $F=5$ см.

3(17). В каком случае линза, находящаяся в ящике (рис. 10), будет собирающей и в каком — рассеивающей? Найдите построением оптический центр и фокус линзы в каждом случае.

4(1). Сходящийся пучок лучей падает на рассеивающую линзу с фокусным расстоянием — F и собирается в точку в главном фокусе линзы. На каком расстоянии от линзы соберется пучок, если рассеивающую линзу заменить собирающей с таким же по модулю фокусным расстоянием?

5(19). При помощи собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=6$ см рассматривают монету диаметром $D=1,25$ см. При этом получают мнимое изображение ее, диаметр которого $D'=5$ см. Найдите расстояние от монеты до линзы и от линзы до изображения монеты.

6(14). Предмет находится перед рассеивающей линзой на расстоянии mF . На каком расстоянии от линзы получится мнимое изображение и во сколько раз оно будет меньше самого предмета?

7(18). Точка А движется с постоянной скоростью $v=2 \cdot 10^{-2}$ м/с в направлении, показан-

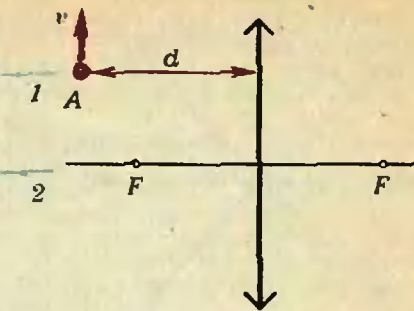


Рис. 11.

ном на рисунке 11. С какой скоростью движется изображение этой точки, если $d=0,15$ м, а фокусное расстояние линзы $F=0,1$ м? Результат представьте в сантиметрах в секунду.

8(11). Машина, движущаяся со скоростью $v=81$ км/ч, фотографировалась с расстояния $L=200$ м. Определите время экспозиции, с которой производилось фотографирование, если изображение на пленке сместилось на $\Delta l=0,01$ мм. Фокусное расстояние объектива фотоаппарата $F=4,5$ см.

9(12). Объектив телевизионного передатчика отбрасывает изображение свободно падающего предмета, находящегося перед ним на расстоянии $d=5$ м, на светочувствительный слой передающей трубки. Определите фокусное расстояние объектива передатчика, если известно, что изображение движется с ускорением $a=0,2$ м/с².

10(17). Вода освещена красным светом, для которого длина волны в воздухе $\lambda=0,7$ мкм. Какой будет длина волны в воде ($n=1,33$)? Какой цвет видит человек, открывший глаза под водой?

11(13). Определите абсолютный показатель преломления среды, в которой свет с энергией кванта $E=4,4 \cdot 10^{-19}$ Дж имеет длину волны $\lambda=3 \cdot 10^{-7}$ м ($h=6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, $c=3 \cdot 10^8$ м/с).

12(5). Монохроматический источник излучает зеленый свет с длиной волны $\lambda=5,3 \cdot 10^{-7}$ м. Определите число световых квантов, излучаемых источником в секунду, если он потребляет мощность $P=100$ Вт, а его КПД $\eta=0,5\%$ ($h=6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с).

13(12). Найдите изменение импульса металлической пластинки при вылете из нее одного электрона. Работа выхода $A=4,5$ эВ, энергия кванта света $E=4,9$ эВ ($1 \text{ эВ}=1,6 \cdot 10^{-19}$ Дж). Считать, что свет падает на пластинку нормально, а фотозлектрон вылетает перпендикулярно пластинке.

Публикацию подготовили
А. А. Егоров, В. А. Тихомирова

Ответы, указания, решения



Формулы для $\sin nx$ и $\cos nx$
(см. с. 25)

Если $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots$ есть n -я строка треугольника Паскаля, то

$$\operatorname{tg} nx = \frac{a_2 \operatorname{tg} x - a_4 \operatorname{tg}^3 x + \dots}{a_1 - a_3 \operatorname{tg}^2 x + a_5 \operatorname{tg}^4 x - \dots}$$

В частности,

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

(хорошо известная формула).

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{tg} 4x = \frac{4 \operatorname{tg} x - 4 \operatorname{tg}^3 x}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}$$

и т. д.

Электромагнитная индукция

1. Во всех случаях вольтметр покажет $U = Blv = 10^{-3}$ мВ.

$$2. E = \frac{\Phi_{0\omega}}{2\pi r} \sin \omega t; I = \frac{\Phi_{0\omega} S}{2\pi r \rho} \sin \omega t.$$

3. При вращении якоря электромотора возникает ЭДС индукции. Поэтому закон Ома для цепи электромотора запишется в виде

$$IR = \mathcal{E} + \mathcal{E}_{\text{инд}} \quad (*)$$

Сопротивление цепи R найдем из условия, что при пуске (то есть при $v=0$) $\mathcal{E}_{\text{инд}}=0$: $R = \mathcal{E}/I$. Умножив обе части равенства (*) на I , можно записать

$$\mathcal{E}I - I^2 R = -\mathcal{E}_{\text{инд}} I.$$

Левая часть этого соотношения представляет собой разность мощности генератора ($\mathcal{E}I$) и мощности джоулевых потерь ($I^2 R$). Отсюда следует, что $-\mathcal{E}_{\text{инд}} I = N$ — это полезная механическая мощность, равная произведению Fv , где F — сила тяги мотора. Таким образом, получаем

$$N = -\mathcal{E}_{\text{инд}} I = \mathcal{E}I(1 - I/I_0) = 250 \text{ кВт},$$

$$F = N/v = 1,25 \cdot 10^4 \text{ Н},$$

$$\eta = N/(\mathcal{E}I) = 50 \text{ \%}.$$

$$4. M_{\text{ср}} = \frac{(BSn)^2 \omega}{2(r+R)}; N_{\text{ср}} = M_{\text{ср}} \omega = \frac{(BSn)^2 \omega^2}{2(r+R)}.$$

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1985 году

Математика

Задачи письменного экзамена

Алгебра

1. 105 км. 2. 36 %. 3. 142 857. 4. 7 : 8.
5. 45 мин. 6. 48 мин. 7. 50 и 75. 8. 10^{15} .
9. а) 3; б) 198; в) 1000; г) $3(1-a)/b+1$;
д) $-3/4$; е) $1/4$; ж) 1; з) $1/8$. 10. а) $\frac{\sqrt{a^2-4}}{a^2-3}$;
 $|a| > 2$; б) $-2/\cos a$. 11. а) $\{-1/2; 0; 3; 5\}$;
б) $]-\infty; 4/5]$; в) $\left\{ \frac{-3+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right\}$;

- г) $\left\{ -\frac{2}{3}; 12 \right\}$; д) $\{-2; 0; 2\}$; е) $\{4\}$; ж) $\{0\}$;
з) \emptyset ; и) $\{3\}$; к) $\{-3; 2\}$. 12. а) $\{-15\}$;
б) $\{4\}$; в) $\{3; -3\}$; г) $\{9\}$; д) $\{1/2\}$; е) $\{7; 5\}$;
ж) $\{-8; -1\}$; з) $\{3; \sqrt[3]{3}\}$. 13. а) $x_1 = \frac{\pi}{4}(2k+1)$,

- $x_2 = \frac{\pi}{3}(3l \pm 1)$ ($k, l \in \mathbb{Z}$); б) $x_1 = k\pi$; $x_2 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \frac{\pi l}{2}$ ($k, l \in \mathbb{Z}$); в) $x_1 = \frac{\pi(12k-1)}{24}$;
 $x_2 = \frac{\pi(12l+1)}{12}$ ($k, l \in \mathbb{Z}$); г) $x = \frac{k\pi}{2}$ ($k \in \mathbb{Z}$);
д) $x_1 = -\frac{\pi}{4} + k\pi$; $x_2 = \pm \frac{2\pi}{3} + 2l\pi$ ($k, l \in \mathbb{Z}$);
е) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$; $x_2 = -\operatorname{arctg} 7/2 + l\pi$ ($k, l \in \mathbb{Z}$);
ж) $x_1 = \frac{\pi}{3}(3k \pm 1)$; $x_2 = \frac{\pi}{4}(2l+1)$; з) $x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 2$, $x_2 = (-1)^{l+1} \frac{\pi}{6} + \pi l$, $l \in \mathbb{Z}$, $l \leq 0$, $x_3 = 3$; и) $x_1 = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$,
 $x_2 = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi l$ ($k, l \in \mathbb{Z}$); к) $x_1 = 2\pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi l$ ($k, l \in \mathbb{Z}$); л) $x_1 = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).

14. $k = 4l$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi m$ ($l, m \in \mathbb{Z}$).

15. а) $\{(64; 1); (1; 64)\}$; б) $\left\{ \left(-2; \frac{1}{225} \right) \right\}$;

в) $\left\{ \left(\frac{1}{5}; 25 \right); (5; 1); \left(10; \frac{1}{2} \right) \right\}$; г) $\{\sqrt{2}; \sqrt{2}\}$;

д) $\{(4; 1); (1; 9)\}$; е) $\left\{ \left(1; \frac{1}{27} \right) \right\}$.

16. $p \in \left] -\infty; -\frac{1}{\sqrt{2}} \right[\cup \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$.

17. $x_1 = \log_2(a+1)$; $x_2 = \log_2 a$ при $a > 0$; $x = \log_2(a+1)$ при $-1 < a \leq 0$; \emptyset при $a \leq -1$.

18. $a = 3$. Указание. При $x < 0$ уравнение имеет вид $-4x^2 + (a-7)x + 1 = 0$ и поэтому имеет один отрицательный корень. При $x \geq 0$ получим $4x^2 + (a-7)x + 1 = 0$. Чтобы полученное уравнение имело один положительный корень, необходимо обращение в нуль его дискриминанта и неравенство $a < 7$.

19. а) $\{-1; 1 \cup \} \cup \} 6; +\infty\}$; б) $\{-3; 1\}$;
в) $\{-2 \cup \} 1; 3\}$; г) $]-\infty; 3\}$; д) $\{1\}$; е) $\} 5; 6\}$;
ж) $\{-1; 2\}$; з) $\} 5,5; 6\}$; и) $\} 0; \log_2 3\}$; к)

$\} 10; 10^{-3} \cup \} 1; 100\}$; л) $\pi/6 + \pi n < x < \frac{5\pi}{6} + \pi n$

$(n \in \mathbb{Z})$; м) $]-\infty; \frac{m-2}{m^2+m} \cup \} \frac{1}{m}; -\frac{1}{m}$ при

$m < -1$; $\} -1$; $\} 1$ при $m = -1$;

$\left[\frac{1}{m}; \frac{m-2}{m^2+m} \cup \right] -\frac{1}{m}; +\infty$ при $-1 < m < 0$;

R при $m = 0$.

20. $\{-4; -2 \cup \} 5; 7\}$. 21. а) 3; б) 4.

Анализ

1. $\} 0$; ∞ . 2. $x_1 = (-1)^k \frac{\pi}{6} + k\pi$; $x_2 = l\pi$

$(k, l \in \mathbb{Z})$. 3. $]-\infty; 0 \cup \} 1; +\infty$. 4. Возрастает при

$x < -\frac{4}{5}$, $x = -\frac{4}{5}$ — точка максимума.

убывает при $x > -\frac{4}{5}$. 5. $y_{\min} = y(-1) = 0$;

$y_{\max} = y(-2) = 17$. 6. $x = 0$ — точка максимума; $x = 2$ — точка минимума. 7. Указание.

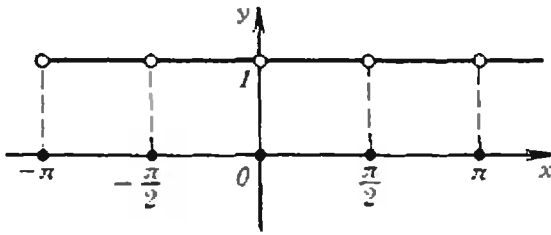


Рис. 1.

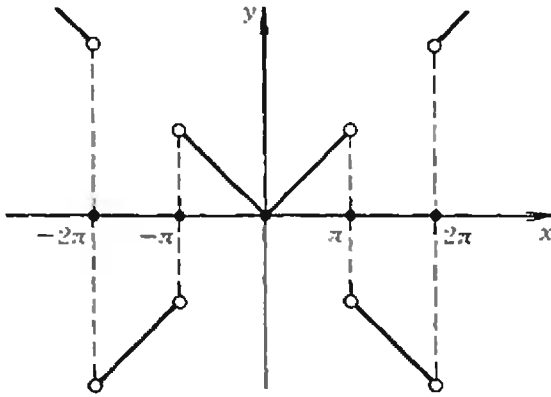


Рис. 2.

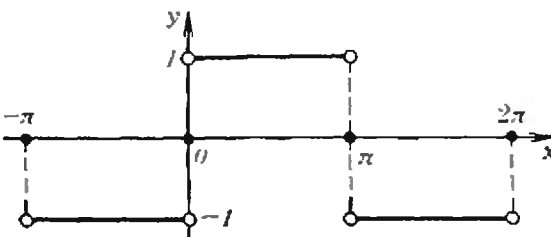


Рис. 3.

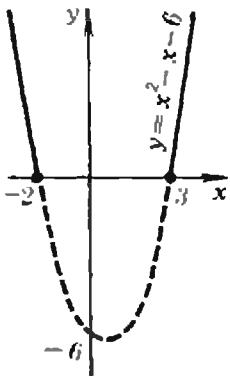


Рис. 4.

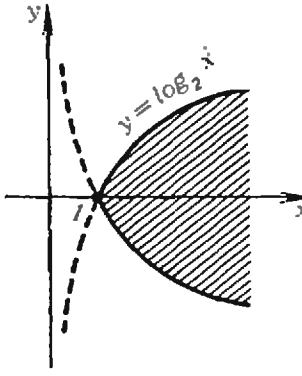


Рис. 5.

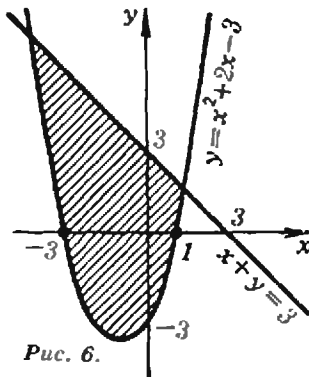


Рис. 6.

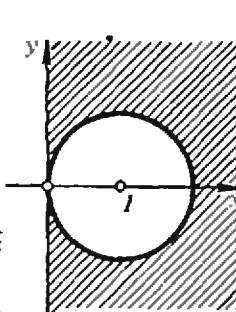


Рис. 7.

Функция, стоящая в левой части уравнения, возрастает при $x \in [1; 2]$, при этом $\varphi(2) = -1 < 0$. 8. $(-2; 22)$, $(2, 10)$. 9. а при $a < 2$; $1 + \frac{a^2}{4}$ при $2 < a < 4$; $2a - 3$ при $a > 4$. 10. $\sqrt{S/\sin a}$. 11. $\sqrt[3]{4V}$. 12. Указание. Докажите, что функция $\varphi(x) = x - \ln(1+x)$ возрастает при $x \geq 0$.

Геометрия

1. $21/2$ см. 2. $\frac{\sqrt{2(a^2+d^2)} - ad\sqrt{2}}{a\sqrt{2}-d}$. 3. 6. 4. 3. 5.
7. 6. $\frac{S_2(S_2^2 + S_1S_2 + S_1S_1 + S_2S_1)}{S_2^2 - S_1S_2}$. 7. $a^2\sqrt{3}/4$. 8. 4 см². 9. $\arcsin(\sin \alpha \sin \beta)$. 10. 1458.
11. $a^3 \sin \alpha / 12\sqrt{3-4\sin^2 \alpha}$. 12. $\frac{ab}{12}\sqrt{4c^2 - a^2 - b^2}$.
13. 100. 14. $2/3k^3 \operatorname{ctg}^2 \gamma \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin(\alpha + \beta)$.
15. $64\sqrt{2}$. 16. $2 \operatorname{arctg} \cos \alpha$. 17. 5,5. 18. $\operatorname{arctg} \frac{\sqrt{5}}{3}$.
19. $\sqrt{2}\sqrt{v^2} \cdot \sqrt{-\cos 2\alpha}$, $-\sqrt{2}\sqrt{v^2}/\cos 2\alpha$. 20. $2\pi R^3/3\sqrt{5}$. 21. 15.

Задачи устного экзамена

1. В феврале производительность труда была ниже плановой. 2. Является. Указание. $26 - 15\sqrt{3} = (2 - \sqrt{3})^3$. 3. а) 0. б) -1 . Указание. $(\cos 20^\circ + \cos 160^\circ = \cos 40^\circ + \cos 140^\circ = \dots = \cos 80^\circ + \cos 100^\circ = 0)$; в) 12. 4. 4. 5. а) 10; б) 12; в) 10; г) 1/2; д) 3; е) 25; ж) $+\infty$; з) $x = 4\pi/3 + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$); и) $x = \pi(1+2k)$, $x_2 = \arccos(\sqrt{5}-2) + 2\pi l$ ($k, l \in \mathbb{Z}$). 6. а) $-\infty$; б) $3,4 \cup \mathbb{N}$; в) $+\infty$; г) $-\infty$; д) $-2 - \sqrt{2} \cup [1 + \sqrt{3}; +\infty)$. 7. Указание. $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$. 8. $|-10; -2| \cup [3; 10]$. 9. а) см. рис. 1; б) см. рис. 2; в) см. рис. 3; г) см. рис. 4; д) см. рис. 5; е) см. рис. 6; ж) см. рис. 7. 10. а) нечетная; б) ни четная, ни нечетная. 11. Указание. Рассмотрите функцию $\frac{\sin x}{x}$ и докажите, что она убывает на интервале $[0; \frac{\pi}{2}]$. 12. 48. 13. Указание.

По известной формуле $S = rp$, где r — радиус вписанной окружности, а p — полупериметр треугольника. Если a и b — длины отрезков, упомянутых в условии, то $p = a + b + r$. Поэтому $S = r(a + b + r)$. С другой стороны, по теореме Пифагора $(a + b)^2 = (a + r)^2 + (b + r)^2$, откуда $ab = r(a + b + r) = S$. 14. $r^2(4\sqrt{3} - \frac{11}{8})$.

Физика

Механика

1. $v_2 = l/t - v_1 = 20$ м/с = 72 км/ч.
2. $t_3 = t_1 t_2 / (t_1 + t_2) = 3/4$ мин = 45 с.
3. $v_1 = 2l_1/t_1 = 8$ м/с; $a_1 = 2l_1/t_1^2 = 0,8$ м/с²; $a_2 = -2l_2^2/(t_1^2 t_2) = -1,6$ м/с²; $t = t_1(1 + t_2/l_1) = 15$ с; $v_{cp} = l_1/t_1 = 4$ м/с.
4. $t_n = h/(gt) + t/2 = 7$ с; $H = gt_n^2/2 = 240,1$ м.
5. $v = \sqrt{2gt} \approx 28$ м/с.
6. $h_A = 40$ м (см. рис. 8).
7. $l = v\sqrt{2h/g} \approx 500$ м.
8. $v_M/v_C = 1/20$.
9. $F = m(a + g(\mu \cos \alpha - \sin \alpha)) = 2,1$ Н.
10. $F_2 = m(g - v^2/R) = 44$ кН.
11. $v = \sqrt{gls \sin \alpha \operatorname{tg} \alpha}$.

*Жирные точки на оси Ox на рисунках 1—4 не принадлежат графикам.

12. $x = (2,5l + 2r)/3 = 29$ см (от левого конца стержня).
13. Сможет.
14. $v = v_0/3$.
15. $F = 2E_k/R = 40$ Н; $A = 0$.
16. $A = 2mgh$.
17. $v_T = \sqrt{\frac{2m^2gh}{M(M+m)}} \approx 0,7$ м/с.
18. $\alpha = 3/4$.
19. $F = mg(3\cos\alpha - 2)\sin\alpha$ при $\alpha < \arccos(2/3)$, $F = 0$ при $\alpha \geq \arccos(2/3)$.
20. $h = 2\rho_a/(\rho g) = 20$ м.
21. $x = h\rho_2/\rho_1 = 32$ см.
22. $m = \rho_a\rho_b V/(\rho_a - \rho_b) = 1,8 \cdot 10^4$ кг = 18 т.
23. $x = M/(\pi R^2\rho_b)$.
24. $A = (\rho - \rho_b)Vgh = 45$ кДж.
25. $\rho = \rho_b n/(n-1) \approx 2,7 \cdot 10^3$ кг/м³.

- Молекулярная физика. Тепловые явления**
1. $N = N_A \rho V/M \approx 4 \cdot 10^{22}$ (здесь $N_A = 6,02 \times 10^{23}$ моль⁻¹, $M = A \cdot 10^{-3}$ кг/моль).
 2. См. рис. 9.
 3. $m_2/m_1 = 1/2$.
 4. $m_2 = m_1 M_2/M_1 - m M_2 g H/(2RT) \approx 5 \cdot 10^{-4}$ кг.
 5. $T_2 = \frac{T_1 \rho_2 V_1}{\rho_1 V_1 - \rho_2 V_2} \approx 255$ К (здесь $\rho_0 = 10^3$ Па).
 6. $m_a/m_b = 14$.
 7. $V_2/V_1 = 1 + Q/(RT) = 2$.
 8. $m = \frac{NT_1\tau}{(\alpha/100\%)q(T_1 - T_2)} \approx 202,7$ кг.
 9. $\varphi_2 = \varphi_1 (\rho_{n1}/\rho_{n2})(T_2/T_1) \approx 72\%$.
 10. $H = c(t_k - t) + \lambda/g \approx 2,65 \cdot 10^5$ м = 265 км (здесь $c = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), $t_k = 100$ °С, $\lambda = 2,3 \cdot 10^6$ Дж/кг).

Основы электродинамики

1. $E_C = \frac{4E_1 E_2}{(\sqrt{E_1} + \sqrt{E_2})^2}$.
2. $q' = -4\pi\epsilon_0 mgl^2/q \approx -5,6 \cdot 10^{-7}$ Кл.
3. $\Delta E = \mathcal{E}(d_2 - d_1)/(d_1 d_2) = 10$ кВ/м.
4. $q = C\mathcal{E}/2 = 5 \cdot 10^{-5}$ Кл; $q_1 = 0$.
5. $C_1 = C_2 U_2/(U_1 - U_2) = 1$ мкФ.
6. $W' = \epsilon W = 4 \cdot 10^{-3}$ Дж.
7. $U = \frac{I\rho_1\rho_2 l}{2(\rho_1 S_2 + \rho_2 S_1)} \approx 0,48$ В.
8. $I_2 = 3/9 I_1 = 0,4$ А.
9. $\mathcal{E} = U_1 U_3/(U_3 - U_2) \approx 13,3$ В.
10. $\eta = \frac{\eta_1 \eta_2}{\eta_1 + \eta_2 - \eta_1 \eta_2}$.
11. $I = \frac{\mu M g v}{(\eta/100\%)U} = 50$ А.
12. $l = \frac{(\eta/100\%)U^2 S_T}{\rho c m (t_2 - t_1)} \approx 4,5$ м.
13. $t = \rho d F n/(Mj) \approx 2600$ с ≈ 43 мин.
14. $U = 2\rho L j/(\alpha/100\%) = 5,6$ кВ.

15. $W = 3(\epsilon r B)^2/(4m)$.
16. Токи в обоих кольцах одинаковы.
17. а) $q = Ba^2/(9R)$; б) $q \approx Ba^2/R$.

Колебания и волны

1. $\alpha = 1,6 \cdot 10^{-5}$ К⁻¹.
2. $n = \frac{m}{2Ft} \sqrt{2gl}$.
3. $v = 2iv \cos\alpha = 1,75$ м/с.
4. $v_k = 3l/t = 15$ м/с; $v_n = l/t = 5$ м/с.
5. $l = \frac{2v_1(v_1 + \Delta v \Delta T/\Delta t)}{v \Delta v \Delta T/\Delta t} \approx 450$ м.

Оптика

1. $x = h \operatorname{tg} \alpha + (l-h) \sin \alpha / \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha} \approx 0,98$ м.
2. См. рис. 10.
3. См. рис. 11.
4. $f = F/3$.
5. $d = F(1 - D/D') = 4,5$ см; $f = dD'/D = 18$ см.
6. $f = Fm/(m+1)$; $k = m+1$.
7. $v' = vF/(d-F) = 4$ см/с.
8. $t \approx \Delta L/(vF) \approx 2 \cdot 10^{-5}$ с.
9. $F = ad/(g+a) = 0,1$ м.
10. $\lambda' = \lambda/n \approx 0,53$ мкм; красный.
11. $n = ch/(\lambda E) \approx 1,5$.
12. $N = (\eta/100\%)P\lambda/(hc) \approx 1,3 \cdot 10^{18}$ с⁻¹.
13. $\Delta P = E/c + \sqrt{2m(E-A)} \approx 3,4 \cdot 10^{-25}$ кг·м/с ($m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг).

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 5)

1. Если Пете x лет, то Пете, его братьям и отцу вместе $x + (x+3) + (x-3) + x/3 + 3x = 95$ лет, откуда $19x/3 = 95$, $x = 15$. Значит, Пете 15 лет, братьям 18, 12 и 15 лет, а отцу 45 лет.
2. $932 + 9338 = 10\ 270$.
3. Давление тела на дно уменьшается за счет увеличения выталкивающей силы.
4. Ответ изображен на рисунке 12. Решение. Обозначим числа, которые надо расставить в образовавшиеся 11 частей, так: $x_1, \dots, x_5, y_1, \dots, y_5, z$, где z — число, поставленное в центр пятиугольника, а $x_1, \dots, x_5, y_1, \dots, y_5$ расставлены, как показано на рисунке 13. Поскольку сумма чисел от 1 до 11 равна 66, сумма чисел в каждом треугольнике, все вершины которого являются вершинами пятиугольника, равна 22. Если обозначить $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = X$, $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = Y$ и рассмотреть все упомянутые треугольники, мы получим соотношения:

$$\begin{cases} 2X + Y = 5 \cdot 22, \\ X + 3Y + 5z = 5 \cdot 22, \\ X + Y + z = 66. \end{cases}$$

Отсюда $X = 45$, $Y = 20$, $z = 1$.

Итак, в центре пятиугольника стоит 1. Далее, поскольку $X = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 45$ и каждое из чисел x_1, \dots, x_5 не больше 11, это равенство возможно лишь в случае $X = 7 + 8 + 9 + 10 + 11$. Ставим на место x_5 число 11. Нетрудно заме-

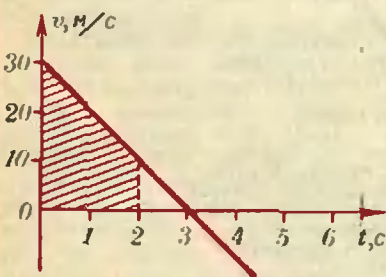


Рис. 8.

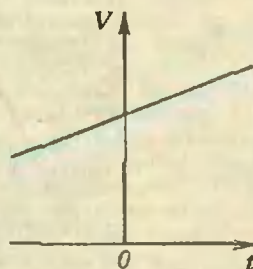


Рис. 9.

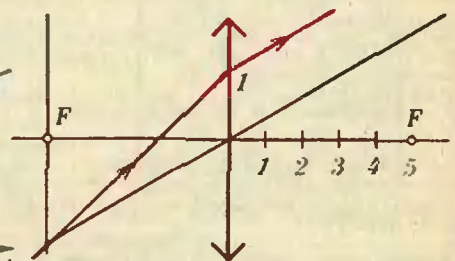


Рис. 10.

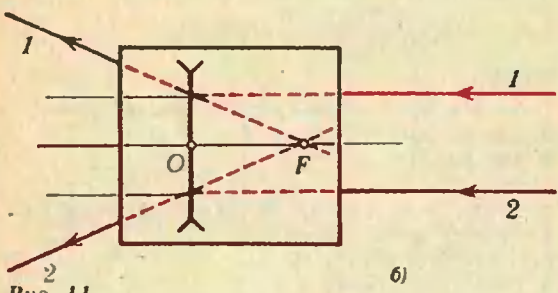
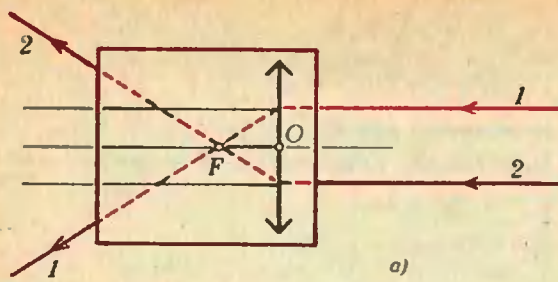


Рис. 11.

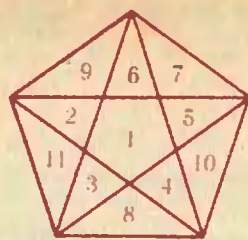


Рис. 12.

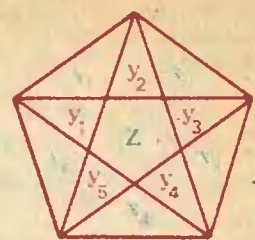


Рис. 13.

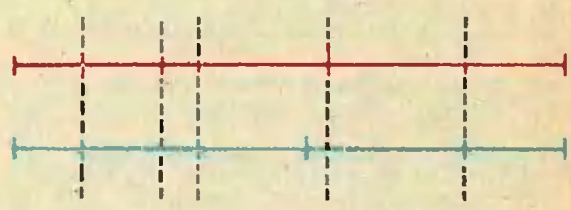


Рис. 14.

Рис. 11. тить, что тогда сумма чисел y_2, z и y_4 равна 11 (сравните треугольники, в которых расставлены числа x_1, y_1, x_5 и x_1, y_1, y_2, z, y_4). Поскольку $z=1$, получаем $y_2+y_4=10$. Так как y_1, y_2, \dots, y_5 — это числа 2, 3, 4, 5, 6, последнее равенство возможно лишь при $y_2=4, y_4=6$ (или $y_4=4, y_2=6$). Точно так же $x_1+y_1=11$ и $x_4+y_5=11$. Постепенно получаем иужную расстановку чисел.

5. Такое распыливание всегда возможно: расположите красные и синие палочки в два ряда, одни под другим (рис. 14), и произведите распылы так, как указано на рисунке.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 3)

Задание 5 (С. Лойд, 1857 г.). 1. Cd6 Kpb1 2. Kpb3 (первые два хода белых можно переставить) 2... Кра1 3. Са3! Kpb1 4. Кс3+ Кра1 5. Сб2×.

Задание 6 (А. Шурыков, 1983 г.). Единственное поле для белого ферзя — b8. Очевидно, в этой позиции ход черных, они берут на b8, и мата нет. При любом другом положении ферзя черным уже мат или первым же ходом белых.

Главный редактор — академик Ю. А. Осипьян

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: Л. Г. Асламазов, А. А. Леонович, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: А. А. Абрикосов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, А. А. Варламов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутеихмахер, Н. Н. Долбилли, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родица, Н. Х. Розов, А. П. Саввин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Ллогунов, В. В. Можяев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасеико, И. К. Сурич, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
А. А. Варламов, А. И. Виленкин, В. И. Дубровский,
А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Со-
синский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Ю. А. Ващенко, М. Б. Дубах, С. В. Иванов, Д. А. Крымов,
Э. В. Назаров, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, П. И. Чер-
нуский, В. Б. Юдин
Фото представили:
В. А. Коновалов, А. М. Орехов, А. Н. Поляков

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Т. С. Вайсберг

103006 Москва К-8,
ул. Горького, 32/1, «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор 17.04.86. Подписано к печати 21.05.86
Т-11522. Бумага 70×108 1/16
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,37
Тираж 202 543 экз.
Цена 40 коп. Заказ 1006

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательства, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Шахматная страничка



Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гук.

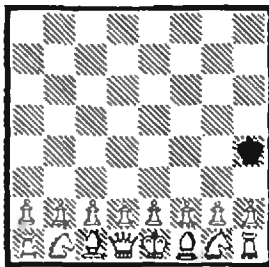
ШАХМАТНЫЕ РЕКОРДЫ

Известно, что на обычной доске можно расставить самое большее 8 ферзей, не угрожающих друг другу, 8 ладей, 14 слонов, 32 коня или 16 королей (см. «Квант» 1983, № 3). Выдающийся мастер головоломок, автор множества занимательных математических задач, в том числе с шахматным сюжетом, Г. Дьюдени придумал такую позицию, в которой на доске в безопасности одновременно находятся 8 ферзей, 8 ладей, 14 слонов (три максимума), 21 конь и 8 королей (одиночные фигуры не бьют друг друга). Итого 59 фигур. Этот рекорд держался с прошлого века и казался неизбежным. Но вот совсем недавно читатель журнала В. Попов из Донецка побил старинный рекорд!



Как мы видим, при 8 ферзях, 8 ладьях, 14 слонах и 21 коне королей теперь 9, и общее число фигур увеличилось на одну — 60! Примечательно, что четыре пустых поля расположены на одной диагонали. Кто сумеет еще улучшить рекорд?

Следующая позиция как бы связывает между собой двух великих изобретателей головоломок — американца С. Лойда и англичанина Г. Дьюдени. Лойд обнаружил, что при исходном расположении белых фигур и одиноком черном короле поле h4 — единственное, на котором он может получить мат в 3 хода: 1.d4 Kpg4 2.e4+ Kph4 3.g3x, 1...Kph5 2.Fd3 Kph4(g4) 3.Fh3x.



Дьюдени заинтересовал другой вопрос: как быстрее всего эта позиция может получиться в настоящей шахматной партии? Поскольку белым нужно съесть 15 черных фигур и пешек, а на первом ходу взятие невозможно, решение содержит не менее 16 ходов. Дьюдени придумал партию, в которой позиция на диаграмме возникает после 16 ходов белых и 16 ходов черных. Рекорд держался очень долго, пока в 1933 году В. Томпсон не улучшил его на полхода!

1.Kc3 d5 2.K:d5 g6 3.K:e7 b5 4.K:g6 a6 5.K:h8 Cd7 6.K:f7 Фg5 7.K:g5 Kf6 8.K:h7 Ke4 9.K:f8 Kc3 10.K:d7 Kb1 11.K:b8 Kpf7 12.K:a6 Kpg6 13.K:e7 Kph5 14.K:b5 Ла3 15.K:a3 Kph4 16.K:b1.

В отличие от предыдущего случая я абсолютным рекордом является невозможным, побить его невозможно.

История помнит невероятные происшествия, когда победа достигалась только одними пешками. Вот две рекордные партии.

Ковардж — Новак (Брно, 1921 г.). Ферзевый гамбит. 1.d4 d5 2.c4 e6 3.Kc3 c5 4.Cf4 cd 5.C:b8 d4:c3 6.Ce5 cb. Белые сдались (7.C:b2 Cb4+).

Борохов — Файн (Пасаде-на, 1932 г.). Защита Алехина. 1.e4 Kf6 2.e5 Kd5 3.c4 Kb6 4.d4 Kc6 5.d5 K:e5 (5...Kb4 6.c5 K6:d5 7.a3, также выигрывая одними пешками) 6.c5 Kbc4 7.f4. Черные сдались.

Спертым матом партия обычно завершается лишь в миттельшпиле или эндшпиле, более короткие партии попадают в коллекцию курьезов. Вот несколько уникальных примеров из практики.

Алехин — Аллис (Польша, 1935 г.). Защита Каро-Канн. 1.e4 e6 2.d4 d5 3.Kc3 de 4.K:e4 Kd7 5.Фe2 Kgf6?? 6.Kd6x! Любопытно, что коллекция коротких и парадоксальных партий содержит десяток точно таких же встреч с матом конем на d6. Выбранный образец примечателен тем, что белыми здесь играл чемпион мира.

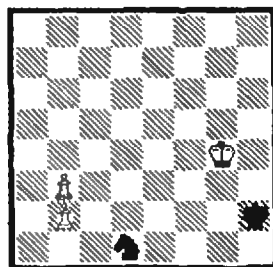
Грантер — Гейли (Шотландия, 1894 г.). Сицилианская защита. 1.e4 c5 2.Kf3 Kc6 3.d4 cd 4.K:d4 e5 5.Kb5 Kge7 6.Kd6x.

Марьянович — Живанов (Панчево, 1946 г.). Сицилианская защита. 1.e4 c5 2.Kc3 Kc6 3.Kge2 g6 4.d3 Cg7 5.Ce3 Kd4 6.g3?? Kf3x.

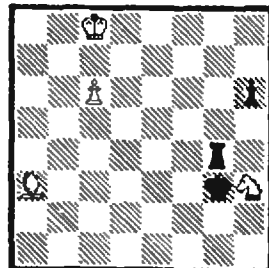
Иванов — Мартынов (Москва, 1973 г.). Французская защита. 1.e4 e6 2.d4 d5 3.Kc3 de 4.K:e4 Ke7 5.Cd3 g6 6.Kf6x.

Официально в шахматах не фиксируются рекорды числа ходов, но в истории соревнований известны парти-марафоны. Самой продолжительной долгое время считалась партия А. Вольф — О. Дурас (Карлсбад, 1907 г.). Игравший белыми Вольф дал мат королю соперника на 168-м ходу. Любопытно, что тот же Дурас однажды проиграл Д. Яновскому на 161-м ходу (Сан-Себастьян, 1911 г.). Но рекордной, по-видимому, является партия Г. Пильник — М. Черняк (Мардель-Плата, 1950 г.). Она продолжалась более 22 часов и завершилась вничью на 191-м ходу. В чемпионатах СССР рекорд держит поединки И. Кан — И. Бондаревский (Ленинград, 1939 г.), в нем ничья была зафиксирована на 142-м ходу.

Конкурсные задания



11. Белые начинают и выигрывают.



12. Белые начинают и выигрывают.

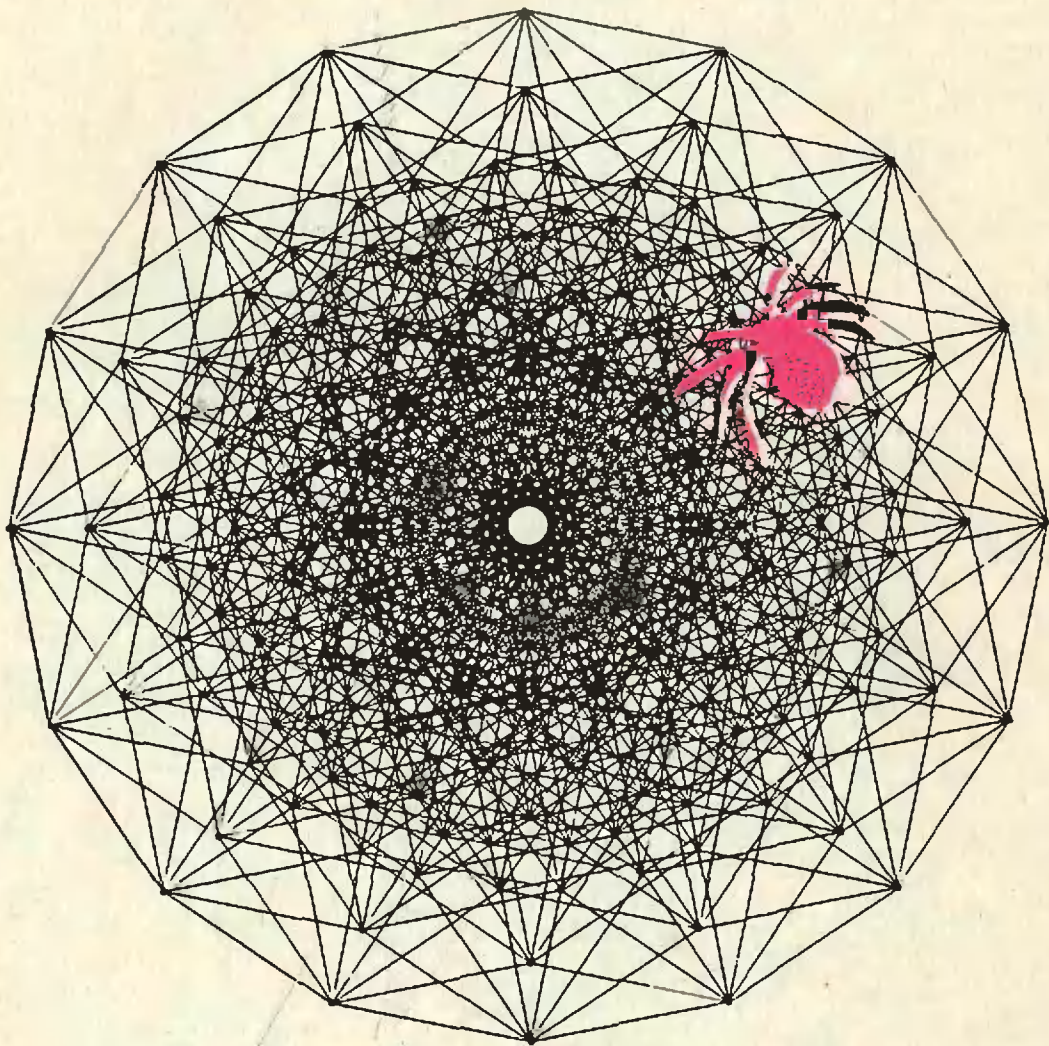
Срок отправки решений — 20 августа 1986 г. с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 11, 12».

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Здесь показана проекция на плоскость «восьми-
мерного куба», построенная компьютером по
программе А. Д. Коршунова. Куб спроекти-
рован из «восьмимерного пространства» на обыч-
ную (двумерную) плоскость параллельно на-

Что такое «многомерный куб» — в частности
восьмимерный — рассказано в статье С. В. Ду-
жина и В. Н. Рубцова в этом номере. Позна-
комившись с этой статьей, вы поймете, что
восьмимерный куб имеет «границы» размерностей



правлению, мало отличающемся от главной
диагонали куба. Получившееся хитросплетение
ребер куба чем-то напоминает паутину. Видимо
поэтому, пока рисунок готовился в редакции,
в паутине завелся паук, которого наш худож-
ник уже не сумел отделить от паутины...

2, 3, 4, 5, 6, 7. Любителям геометрии мы
предлагаем, двигаясь по паутине, указать
несколько граней каждой размерности. А люби-
телям алгебры и арифметики — найти, сколько
граней каждой размерности имеется у восьми-
мерного куба.