ISSN 0130-22

Квант

3
1986

Научно-популярный физико-математический журнал
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Квант

3 1986

Основан в 1970 году

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ: / **IN THIS ISSUE:**

Красота и изящество сделанных сотни лет назад приборов не перестают удивлять и сегодня. Пример — изображенная на снимке слева армиллярная сфера, служившая для определения положения небесных тел. Изготовлена из бронзы в 1575 году, ныне хранится в Историческом музее в Брюсселе.

«Интуиция подсказывает человеку, что все должно быть связано в природе, что красота окружающего имеет высокий и таинственный смысл. Разгадать загадки Вселенной, познать непознанное призвано научное творчество». Эти слова принадлежат выдающемуся физику-теоретику академику Аркадию Бенедиктовичу Мигдалу, внесшему значительный вклад в развитие квантовой теории, теории ядра, физики элементарных частиц. А. Б. Мигдал уделяет большое внимание популяризации научных знаний. В своих книгах и статьях он рассказывает о достижениях современной физики, вводит читателя в мир научного творчества, дает почувствовать то, что называют «поэзией науки».

Сегодня мы знакомим наших читателей со статьей А. Б. Мигдала, посвященной загадкам пустоты.

Как устроена пустота?

Академик А. Б. МИГДАЛ

Речь пойдет о том, как изменились наши представления о самом распространенном во Вселенной и, быть может, самом важном объекте физических исследований — пустоте.

Что такое пустота: абстрактное понятие, «ничто», вместилище для физических тел?

Что останется, если идеальный насос удалит из замкнутого объема все частицы?

Что находится в межзвездном пространстве, где почти нет вещества?

Развитие физики последних десятилетий показало, что наше физическое пространство — вакуум — не просто геометрический объект, не пространство, в котором ничего нет, а сложная система, обладающая интереснейшими свойствами, совершенно непохожими на свойства твердых сред, жидкостей или газов; его изучение касается самых глубоких понятий, таких, как причинность, связь геометрии с материей, симметрии пространства и времени, связь симметрий с законами сохранения...

Нельзя толкнуть, не прикасаясь

Мы знаем, что тела действуют друг на друга при соприкосновении. Бросим в воду камень — от него побежит волна и всколыхнет плавающие ветки — воздействие передается от точки к точке. Звук распространяется потому, что давление передается от одного объема среды к соседнему, и т. д. Если накрыть звучащий электрический звонок стеклянным колпаком и откачать воздух, то видно, как по-прежнему молоточек ударяет по колокольчику, но звук исчезает — в пустом пространстве звук не распространяется. В то же время период колебаний маятника, помещенного под колпак, не изменяется при удалении воздуха (если пренебречь трением); значит, не изменяется и сила тяжести.

В отличие от сил, возникающих при распространении звука, электрические и магнитные силы, гравитация действуют и в пустоте, в ней распространяется свет, поэтому мы видим Солнце и звезды.

Естественно предположить, что в пространстве вблизи магнита, вблизи заряженного или массивного тела состояние пустоты изменяется. Пространство, окружающее эти тела, находится в «напряженном» состоянии, которое описывается словами: «в пространстве имеется поле». Заряды создают электрическое поле, магнит — магнитное, массивное тело вызывает гравитационное поле. Электрическое поле действует на заряженное тело, магнитное — на магнит, поле силы тяжести — на камень, заставляя их двигаться. Изменение скорости этих тел объясняется действием поля в той области пространства, где в данный момент времени они находятся. Сила передается через пустое пространство от точки к точке с помощью полей, как через невидимую жидкость. Такой механизм передачи воздействия называется близкодействием и принят современной физикой.

Но существовало и другое представление — «дальнодействие»: влияние одного тела на другое мгновенно передается на расстояние. На основе этого взгляда Ньютон построил свою теорию тяготения. Предположение о мгновенной передаче воздействия не помешало ему найти закономерности движения небесных тел, с огромной точностью совпадающие с данными наблюдений. Сейчас мы знаем, почему: небесные тела движутся со сравнительно малыми скоростями, а гравитационное взаимодействие распространяется со скоростью света и может считаться в этом случае мгновенным.

Идею дальнодействия трудно согласовать со свойствами света: было известно, что свет распространяется с конечной скоростью и проходит все промежуточные точки на линии светового луча. Особенно хорошо это видно, когда луч света проходит в тумане — он непрерывен. Ньютон предположил, что светящееся тело испускает частицы, передающие свет,— корпускулы. Тогда конечность скорости не противоречит идее дальнодействия, но остаются без объяснения волновые свойства света, доказанные опытами по интерференции и дифракции. Корпускулярная теория Ньютона так и не смогла справиться с объяснением этих явлений.

Через двести с лишним лет после Ньютона, в 1905 году, появилась замечательная работа Эйнштейна по квантовой природе света. Эйнштейн показал, что обнаруженные экспериментально закономерности фотоэффекта (вырывание электронов из атома при облучении) можно объяснить, только предположив, что свет представляет собой набор частиц — фотонов, которые взаимодействуют с электронами, выбрасывают их из атомов. (О фотонах мы подробнее поговорим позже.) Представление о свете как о волне не могло объяснить главную особенность фотоэффекта — энергия вылетающего электрона не зависит от интенсивности света, а только от его частоты.

В некотором смысле точка зрения Эйнштейна означала возврат к ньютоновской теории корпускул. И снова возник вопрос, на который не смог ответить Ньютон: как объединить оба представления — о волновой и о корпускулярной природе света? Возник важный парадокс, который был разрешен квантовой теорией, доказавшей, что свет — и волна, и частица, так же как электрон — и частица, и волна! Это представление получило название «квантово-волнового дуализма».

Сейчас нам известно, что в пустоте все взаимодействия — электрическое,

Возник важный парадокс, который был разрешен квантовой теорией, доказавшей, что свет — и волна, и частица...

магнитное, гравитационное, ядерное — передаются от точки к точке со скоростью, не превышающей скорость света. Если одно тело передвинуть, должна измениться сила тяготения, действующая с его стороны на другое тело. Но если это другое тело находится далеко от первого, то пройдет заметное время, прежде чем оно получит воздействие. Где же находится возмущение, когда первое тело уже переместилось, а второе еще не имеет сведений о его новом положении?.. На этот вопрос теория дальнодействия не могла ответить, и многие физики отказались от нее еще в прошлом веке.

Для объяснения передачи воздействия на расстояние была придумана специальная среда — эфир, заполняющая все пространство между частицами вещества. Воздействие передается за счет того, что вокруг заряженных или намагниченных тел эфир деформируется, и возникает сила, действующая на другое заряженное или намагниченное тело. Деформация эфира передается последовательно — от точки к точке. Свет распространяется в нем так же, как звук в среде.

Вплоть до начала XX века физики пытались строить эфир по образу и подобию известных твердых и жидких тел, а его нужно было изучать самого по себе. Это — среда особого рода. Следствием неверного представления о природе пустоты было возникновение интереснейших парадоксов, разрешение которых приводило к созданию новых физических теорий.

Электромагнитные свойства пустоты

Джеймс Максвелл своими удивительными уравнениями, найденными в 1865 году, объединил различные разделы физики: оптику, электричество, магнетизм.

Начало на этом пути было положено его могучим предшественником Майклом Фарадеем, открывшим в 1831 году закон электромагнитной индукции. Если изменять магнитное поле, пронизывающее проволочное кольцо, то в проводнике возникает электрический ток — заряды в нем начинают двигаться под действием образующегося в пространстве кольцевого электрического поля. Итак, переменное магнитное поле рождает в пустоте переменное электрическое.

Джеймс Максвелл своими удивительными уравнениями объединил различные разделы физики: оптику, электричество, магнетизм.

Еще в 1820 году другой предшественник Максвелла Ханс Эрстед обнаружил, что ток, текущий по проводнику, создает вокруг себя кольцевое магнитное поле! Если периодически изменять напряженность электрического поля в проводнике, возникает переменный ток и переменное магнитное поле. Максвелл высказал гениальную догадку о том, что не только движущиеся заряды создают магнитное поле, его образует и само переменное электрическое поле.

Из этих двух замечательных свойств пустоты последовало третье, не менее важное — в пустоте распространяются электромагнитные волны. Когда вблизи антенны радиопередатчика возникает переменное электрическое поле, оно образует вокруг себя, согласно Максвеллу, переменное магнитное поле, а магнитное — по закону Фарадея — создает уже в соседнем месте переменное электрическое... Так возмущение передается все дальше и дальше.

Из уравнений Максвелла следовало, что электромагнитные колебания должны распространяться со скоростью света. Существование электромагнитных волн было экспериментально доказано Генрихом Герцем в 1886—1889 годах. Естественно было прийти к заключению, что свет — тоже электромагнитная волна. Это предположение было проверено и подтверждено опытом.

Как абстрактно выглядели эти представления во времена Максвелла!

И как быстро они стали основой почти всех благ современной цивилизации: от телефона и радио до современных средств космической связи — не перечислить всего того, что родилось из опытов в маленьких лабораториях прошлого века, из смутных догадок великих умов!

Теория Максвелла была триумфом близкодействия: все электромагнитные воздействия передаются через среду — эфир. Но тут же возникли новые противоречия.

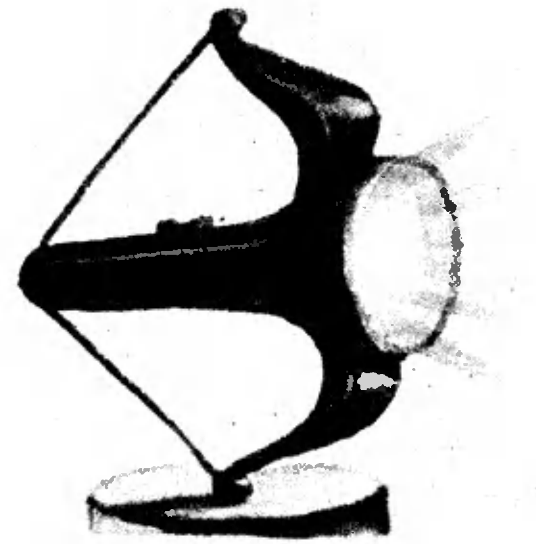
Когда в эфире движется тело, движется ли вместе с ним эфир? Эксперименты дали противоречивые результаты, некоторые опыты показали частичное или полное вовлечение эфира в движение, другие — что эфир вовсе не увлекается движущимся телом. В 1851 году французский физик Арман Физо измерил скорость света в текущей воде и показал, что эфир частично захватывается движущейся средой. Американский физик Альберт Майкельсон в 1881 году измерял скорость света вдоль и поперек направления орбитального движения Земли. Если бы эфир был неподвижен, то скорость света вдоль движения Земли складывалась бы из скорости света в эфире и скорости Земли относительно эфира. Оказалось, что скорость света одна и та же, то есть она не зависит от скорости источника, и если свет действительно распространяется в эфире — значит, эфир полностью увлекается Землей...

Разрешить противоречия эфира предстояло теории относительности.

Эфир умер — да здравствует эфир!

В начале XX века идея близкодействия получила дальнейшее развитие и обоснование в теории относительности и теории тяготения Эйнштейна. Оказалось, что не только электромагнитные, но и гравитационные воздействия распространяются в пустоте со скоростью света. Скорость света вошла не только в электродинамику, но и в механику, и в теорию тяготения.

Противоречие между опытом Физо и опытом Майкельсона было снято новой формулой сложения скоростей, вытекавшей из теории относительности, свойства эфира здесь роли не играли. Отпала необходимость в самом понятии эфира, его заменил вакуум —



Скорость света вошла не только в электродинамику, но и в механику, и в теорию тяготения.

новый непротиворечивый объект. Эфир умер.

Но в науке новое, как правило, не отменяет старого, старые и новые идеи переплетаются и проникают друг в друга. Даже коренная научная революция не отменяет, а только пересматривает, переосмысливает прежнее, устанавливает границы применимости найденных ранее соотношений. Судьба эфира — убедительное подтверждение этому.

В начале XX века казалось, что все свойства пустоты объясняются гравитационными и электромагнитными воздействиями. Но изучение атомных ядер показало, что существуют силы, удерживающие нейтроны и протоны в ядре,— ядерные силы. И с точки зрения близкодействия их тоже нужно рассматривать как особое, напряженное состояние вакуума. Вакуум обогатился еще одним свойством.

Когда к электромагнитному полю и к полям, описывающим, например, пары частиц электрон — позитрон, протон — антипротон и так далее, применили квантовую механику, оказалось, что в пустоте происходят непрерывные колебания этих полей, рождаются и исчезают элементарные частицы... При столкновениях нуклонов (нейтронов и протонов) из пустоты возникает целый сноп различных частиц. Вакуум полон частицами! Удивительно сложную и интересную среду — вакуум — можно было бы снова назвать эфиром, если бы не боязнь путаницы с наивным понятием XIX века.

Квантовая механика вакуумных полей

Без некоторых минимальных сведений о квантовой механике нельзя составить даже грубую физическую картину явлений, происходящих в вакууме. Поэтому, прежде чем говорить об удивительных свойствах вакуумных полей, нам придется немного отвлечься и поговорить о том, к каким результатам приводит применение квантовой механики к системам, колеблющимся около положения равновесия. Такие системы часто встречаются в физике и называются осцилляторами. Как бы ни был конкретно устроен осциллятор — будь то маятник, грузик на пружинке, колебательный контур,— его энергия состоит из двух слагаемых: потенциальной энергии, пропорциональной квадрату некоторой величины, которую можно назвать «обобщенной координатой», и кинетической, пропорциональной квадрату скорости изменения этой «координаты». Для грузика на пружинке «обобщенная координата» — смещение грузика от положения равновесия, для колебательного контура — заряд на обкладках конденсатора. Коэффициент пропорциональности в кинетической энергии определяет «обобщенную массу». Мы называем эти величины обобщенными потому, что они не зависят от реализации осциллятора — «координате», как вы видите, совсем не обязательно иметь размерность длины.

Остановим маятник — в положении равновесия его энергия минимальна: и кинетическая, и потенциальная энергия равны нулю. Так ведет себя классический осциллятор. Но вот что получилось, когда к осцилляторам применили квантовую механику.

Один из важнейших принципов квантовой механики — принцип неопределенности, сформулированный Вернером Гейзенбергом в 1927 году, гласит: некоторые физические величины не могут одновременно принимать определенные значения. Именно такими величинами являются «обобщенная координата» и «обобщенный импульс» — произведение «обобщенной массы» на «обобщенную скорость». Проделывая мысленные эксперименты, Гейзенберг пришел к заключению, что чем точнее измерять координату электрона, тем менее определенным становится его импульс, и наоборот. Это — принципиальное ограничение, которое природа накладывает на понятия координаты и импульса.

Один из важнейших принципов квантовой механики — принцип неопределенности.

Когда квантовая механика была применена к осцилляторам, сразу стало ясно, что кинетическая и потенциальная энергии квантового осциллятора не могут одновременно равняться нулю: если бы это было так, то должны были бы одновременно быть определены и равны нулю и координата, и импульс осциллятора, а это противоречит принципу неопределенности. Квантовый осциллятор, в отличие от классического, даже в состоянии с наинизшей энергией не покоится. Он совершает «нулевые колебания» около положения равновесия.

Это замечательное свойство квантовых осцилляторов хорошо проверено на опыте и чрезвычайно важно для современной физики.

Упругие колебания твердого тела, так же как и колебания струны, описываются набором осцилляторов различных частот. Если учесть, что осцилляторы должны подчиняться квантовой механике, то получится, что при абсолютном нуле температуры происходят нулевые упругие колебания — атомы твердого тела не неподвижны, а участвуют в «нулевых колебаниях». Это подтвердили опыты по рассеянию света в твердых телах при низких температурах.

Электромагнитные волны в пустоте тоже можно рассматривать как результат колебаний набора осцилляторов. Представим себе, что между параллельными металлическими экранами, перпендикулярно им, образовалась стоячая электромагнитная волна,— она получится, если между экранами укладывается целое число полуволн. Стоячая волна возникает в результате сложения бегущих волн, отражающихся от левого и правого экранов. Похожая волна возникнет в обычной струне — дернешь струну, по ней побегут волны, отразятся от мест закрепления, и установится стоячая волна. Подобное же происходит в органной трубе.

Напряженность электрического поля в стоячей электромагнитной волне будет периодически колебаться — перед нами снова осциллятор. В качестве «обобщенной координаты» такого осциллятора можно взять напряженность электрического поля в какой-либо точке (например, в точке, где амплитуда колебаний напряженности максимальна). Импульсом должна быть величина, пропорциональная скорости изменения «координаты»,— именно такая величина — напряженность*) магнитного поля. Но раз «координата» и «импульс» квантового осциллятора не имеют одновременно определенных значений, значит, энергии электрического («потенциальная» энергия) и магнитного («кинетическая» энергия) полей не могут одновременно равняться нулю.

Даже если в пространстве нет ни одной частицы, ни одного кванта, электрические и магнитные поля совершают нулевые колебания. Последовательное применение квантовой механики к электромагнитному полю, взаимодействующему с электронами, было начато в конце 20-х годов в работах Дирака и завершено через 20 лет физиками-теоретиками Фейнманом, Швингером, Томонагой, Дайсоном. Возник раздел теоретической физики — квантовая электродинамика, которая позволила с большой точностью описывать все процессы взаимодействия электронов между собой и с электромагнитным полем.

Нулевые колебания электромагнитного поля заставляют дрожать электрон, движущийся в атоме,— он как бы превращается в шарик с радиусом, равным амплитуде дрожания. Но шарик слабее взаимодействует с ядром, чем точечный электрон. В результате энергетические уровни атома слегка сдвигаются по сравнению со значением, вычисленным без учета дрожания. Это явление называется «лэмбовским сдвигом», по имени впервые наблюдавшего его экспериментатора Лэмба. Квантовая электродинамика позволяет рассчитать «лэмбовский сдвиг» с огромной точностью. Получилось удивительнейшее совпадение с данными, найденными на опыте.

Еще одно свойство квантового осциллятора — его энергия изменяется порциями величины $h\nu$, где h — постоянная Планка, а ν — частота колебаний соответствующего классического осциллятора. В применении к электромагнитному полю это означает, что энергия электромагнитного осциллятора с определенной длиной волны λ и частотой $\nu = c/\lambda$ тоже изменяется порциями $h\nu$. Когда энергия волны изменяется на одну порцию, говорят, что «появился квант электромагнитного поля». В бегущей электромагнитной волне одновременно с увеличением энергии на величину $h\nu$ увеличивается и импульс на величину $h\nu/c$. Таким образом, в бегущей волне каждый квант имеет энергию $h\nu$ и импульс $p = h\nu/c$. Можно сказать, что квантовое поле описывает набор частиц-фотонов (так называются

Вакуум наполнен не вполне родившимися, образующимися и исчезающими частицами, они называются «виртуальными».

*) Школьники знакомы с силовой характеристикой магнитного поля — магнитной индукцией B. (Примеч. ред.)

кванты бегущей электромагнитной волны) с разными энергиями и импульсами. В этом и состояла гипотеза световых квантов, развитая Эйнштейном за 20 лет до того, как она была доказана квантовой электродинамикой.

В результате квантования поля само собой возникло понятие частицы как характеристики возбуждения электромагнитной волны с определенной длиной. Так была решена проблема «дуализма волн-частиц». Удивительная идея — воспринимать частицы как квантовые состояния осцилляторов некоего поля — оказалась на редкость плодотворной. Она пронизывает всю современную теоретическую физику. Поле оказалось первичным понятием. Элементарные частицы возникают в результате его квантования.

Применение квантовой механики к полям, описывающим не фотоны, а другие частицы, например электроны и позитроны или пи-мезоны, приводит к очень похожему результату. В пустоте существуют нулевые колебания электрон-позитронного, пионного и вообще полей всех возможных частиц. Эти нулевые колебания проявляются в том, что в вакууме возникают и исчезают пары «частица — античастица»: электрон — позитрон, нуклон — антинуклон... Вакуум наполнен такими не вполне родившимися, образующимися и исчезающими частицами, они называются «виртуальными» от латинского virtue — «возможность».

Но стоит в вакууме столкнуться двум нуклонам или электрону с позитроном, как виртуальные частицы могут превратиться в реальные — при столкновениях рождаются новые частицы.

* * *

Мы рассказали лишь о малой части удивительных свойств пустоты. В последние годы стало известно, что в пустоте под влиянием внешних полей или высокой температуры могут происходить переходы в другие состояния, подобно плавлению твердых тел. Но самое замечательное — это «нулевые колебания» геометрических свойств пространства, которые, возможно, дадут ключ к пониманию связи сил тяготения с другими силами природы.

Однако об этом — в другой раз.

Наша обложка

В «Кванте» уже не раз появлялись статьи, содержание которых было навеяно картинами замечательных художников. В этом номере мы предлагаем вам еще раз полюбоваться картиной И. И. Левитана «Март» и ...решить две задачи, которые художник «сформулировал» своими изобразительными средствами.

Первую задачу мы привели в Задачнике «Кванта» этого номера — задача Ф987. Ее решение будет опубликовано в июльском номере журнала. А вот вторая задача: какое время дня запечатлел художник?

Доминик Франсуа Араго

Стремясь ревностно к открытиям, он был осторожен в своих выводах и больше всего любил прокладывать новые пути, по которым можно было бы прийти к установлению тождества причин различных явлений.

Александр Гумбольдт

26 февраля 1986 года исполнилось 200 лет со дня рождения Доминика Араго, замечательного французского ученого, одного из самых популярных людей Франции своего времени.

Араго родился в Эстажеле, крохотном городке в Восточных Пиринеях, на границе с Испанией. Никакими особыми способностями в раннем детстве он не отличался. Прилежно посещал начальную школу, мечтая, когда вырастет, стать военным. Затем продолжил обучение в училище соседнего городка Перпиньяна. Порядки в этом училище не отличались большой строгостью, и Араго проводил почти все время за чтением французской классики. Читать он предпочитал сидя на поросшем травой старом городском валу. Здесь-то и произошла встреча, круто изменившая всю его жизнь и положившая начало рождению Араго-ученого.

Однажды Доминик Франсуа увидел офицера инженерных войск, производившего за старым валом какие-то сложные геодезические измерения на местности. Юношу поразила молодость этого офицера (они были чуть ли не ровесниками). Поскольку застенчивостью Араго никогда не отличался, он немедленно подошел к офицеру и спросил, как ему удалось в таком молодом возрасте получить эполеты. Офицер ответил, что получил их по окончании Политехнической школы в Париже.

В тот же день в библиотеке училища Араго разыскал программу экзаменов, которые нужно было сдавать при поступлении в Политехническую школу. Больше всего молодого человека пугала математика — ее он не знал совершенно. Однако страх перед математикой боролся с желанием получить офицерское звание. Мечта стать военным победила, и Араго засел за изучение математики.

Очень скоро он проштудировал все имеющиеся в его распоряжении учебники, но этого было явно недостаточно. Тогда пятнадцатилетний Араго стал читать «взрослые» математические книги. В результате за полтора года он продвинулся в математике настолько, что с блеском сдал длившийся два с половиной часа вступительный экзамен «самому Монжу»*). Знания Араго отдельных вопросов математики соответствовали к тому времени уровню выпускного курса.

Началась студенческая жизнь, которая длилась три года.

Окончив в 1806 году Школу, Араго становится секретарем Бюро долгот в Париже, а с 1809 по 1830 год — он профессор Политехнической школы. В 1809 году, когда Доминику Франсуа Араго было всего 23 года, он избирается членом Парижской Академии наук.

Следующие примерно 20 лет были годами наибольшей творческой активности Араго. В должности профессора Политехнической школы, а позднее на посту директора Парижской обсерватории он успел сделать необычайно много. Широта его научных интересов поражает. Араго занимался астрономией, оптикой, электромагнетизмом. Ему принадлежат важные работы в области метеорологии и физической географии. Наконец, он оставил заметный след как историк науки. В небольшой заметке нет никакой возможности даже вкратце рассказать обо всех проблемах, в решение которых внес вклад Араго. Поэтому мы приведем здесь лишь короткий перечень.

Араго проверил правильность закона Бойля—Мариотта для различных газов и воздуха, провел ряд опытов по изучению упругости водяных паров при высоких температурах и давлениях. Много лет отдал Араго оптическим экспериментам, сделав ряд важных открытий в области поляризации света. Араго первым составил таблицу коэффициентов преломления света в газах в зависимости от их состояния. Как астроном и геофизик Араго прославился тем, что установил связь полярных сияний с магнитными бурями, усовершенствовал телескоп. Он занимался также уточнением формы Земли, измерением диаметров планет, фотометрией звезд и Луны, изучением колец Сатурна, солнечными затмениями. Араго изобрел один из первых актинометров (прибор для измерения интенсивности солнечного излучения) и определил удельный вес воздуха. Он обнаружил намагничивание железных опилок вблизи проводника с электрическим током и исследовал уровни и температуру морей на различных широтах. Поистине не было области современной ему естественной науки, к которой он не приложил бы свои руки, свой ум, свою неистощимую энергию.

Об одном открытии Араго хотелось бы сказать чуть подробнее. В 1826 году он обнаружил явление, названное позднее магнитным явлением Араго. Объяснение этому явлению дал знаменитый английский физик Майкл Фарадей. Вот описание «явления Араго» со слов Фарадея: «Если медная пластинка поворачивается вблизи от магнитной стрелки или от магнита, подвешенного таким образом, что он может вращаться в плоскости, параллельной

(Окончание см. с. 50)

*) Гаспар Монж (1746—1818) — известный французский математик, один из создателей Политехнической школы.

Пик Делоне

Кандидат физико-математических наук
Н. П. ДОЛБИЛИН

Одна из красивейших вершин в массиве Белухи на Алтае называется «Пик Делоне», по имени ее первовосходителя. О жизни и творчестве этого удивительного человека рассказано здесь.

Борис Николаевич Делоне был прежде всего крупным математиком, и математическое творчество было безусловно основным в жизни этого замечательного ученого. Однако говорить о Борисе Николаевиче только как о математике невозможно, точно так же, как невозможно выделить в сложном полифоническом произведении его основную, пусть самую яркую, тему, так неразрывно она связана с другими темами.

Жизнь Б. Н. Делоне, а прожил он 90 лет, можно сравнить с цельным произведением искусства. Она была исключительно насыщена и многогранна. Даже простое перечисление наиболее характерных моментов его биографии потребовало бы слишком много места для одной статьи. В таком перечислении хронологически одним из первых шел бы

1897 год — семилетний мальчик читает в подлиннике «Фауста» Гёте, знает наизусть отдельные главы поэмы, пишет маслом первые свои пейзажи.

Где-то в конце списка был бы отмечен

1975 год, 6 июля — Борис Николаевич на 86-м году жизни проводит при 25° мороза ночь на леднике под вершиной семитысячника Хан-Тенгри на высоте 4200 м. Утром он на вертолете спускается к озеру Иссык-Куль и оттуда перелетает во Фрунзе, где стоит 40-градусная жара. К исходу дня он оказывается в подмосковном аэропорту, откуда ему предстоит добраться до дачи, расположенной в окрестностях Абрамцева. Приехав на станцию последней электричкой, Борис Николаевич с тяжелым рюкзаком идет поздней ночью через лес и сбивается с пути. Проплутав в ночном лесу, он сбрасывает в укромном месте рюкзак и налегке лишь к рассвету находит свой дом.

Эти биографические детали показывают, с одной стороны, что разностороннее дарование Б. Н. Делоне проявилось в очень раннем возрасте. С другой стороны, до преклонных лет он сохранил по-юношески задорный темперамент, а незаурядное физическое здоровье позволяло ему с полной отдачей заниматься на закате жизни как научной работой, так и туризмом. Геометрия чисел, математическая кристаллография, дискретная геометрия — таков спектр научных работ, написанных Борисом Николаевичем, когда ему было уже за восемьдесят. Алтай и Кавказ, Карпаты и Тянь-Шань — такова география путешествий, совершенных Борисом Николаевичем в преклонном возрасте.

* * *

Борис Николаевич Делоне родился в семье профессора механики в 1890 году. Он, как говорили прежде, получил прекрасное воспитание. Его занятия музыкой были основательны. Хорошо знал, любил Баха, Моцарта. Играл все сонаты Бетховена, много сочинял сам. Учитель музыки настаивал на том, чтобы одаренный мальчик поступал в консерваторию по классу композиции. Но ничуть не меньше оснований было и у преподавателя рисования, когда он рекомендовал Борису Делоне продолжить свое образование в Художественной академии. Занятия рисованием, живописью были пронизаны талантом и серьезным отношением.

Пока учителя и родители размышляют о будущем Бориса, мальчик пишет пейзажи и путешествует по горам, занимается музыкой и играет в футбол, воспроизводит в карандаше «Тайную вечерю» Леонардо и лазает по деревьям (с младшей сестрой на плечах для нагрузки), сочиняет музыкальные пьесы и ставит физические опыты. Свою комнату он превратил в физическую лабораторию, в которой немало приборов было сделано им самим. Он часто вспоминал с чувством гордости о тех маленьких хитростях, которые позволили ему получить с помощью лейденской банки «во-о-от такую искру» (красноречивый жест).

Увлекаясь астрономией, он построил телескоп, зеркало для которого шлифовал сам. Рассказывая об этом, Борис Николаевич не забывал добавлять: «шлифовать зеркало из бронзы было глупо — и трудоемко, и быстро тускнело».

Отец Бориса Николаевича — Николай Борисович Делоне — будучи сам известным ученым, дружил со знаменитым ученым, «отцом русской авиации» Н. Е. Жуковским. Под влиянием Жуковского Николай Борисович организовал в 1907 году в Киеве первый в России планерный кружок. Семнадцатилетний Борис активно включается в работу кружка и в течение следующих двух лет строит один за другим, постоянно совершенствуя их конструкции, пять планеров, совершает полеты на них, иногда с риском для жизни. Однажды кинематографисты, приехавшие снять фильм о работе кружка, уговорили его, несмотря на сильный ветер, подняться в воздух. Порыв ветра опрокидывает планер, и Борис падает с 15-метровой высоты, но, к счастью, на глубоко вспаханное поле.

Конечно, с точки зрения современных представлений об авиации достижения членов кружка могут показаться наивными: полеты на несколько десятков метров, запуски при помощи жгута, лошади, зимой при помощи санок, летом — велосипеда. Однако это было время зарождения авиации, и деятельность кружка имела пионерский характер. Работа киевского кружка оказала влияние на развитие отечественного авиастроения. Достаточно сказать, что один из членов кружка — И. Сикорский, заполучив необходимые средства, уже в 1913 году построил огромный по тем временам 4-моторный самолет, ставший хорошо известным в истории отечественного самолетостроения под названием «Илья Муромец». Интересно, что крупнейший советский авиаконструктор Андрей Николаевич Туполев в своих мемуарах, когда писал об исключительном значении, которое имело для него знакомство с Жуковским, отмечал, что познакомил его, тогда еще молодого студента, с Жуковским Б. Н. Делоне.

Пока еще ничего не было сказано о математическом даровании юного Бориса Делоне, а проявилось оно между тем довольно рано. В 12 лет он знал основы анализа, чуть позднее приступил к самостоятельным исследованиям по алгебре, теории чисел. Семейная обстановка безусловно способствовала развитию и этой грани его таланта. Отец, к примеру, взял его с собой на Международный конгресс в Гейдельберг, где 14-летний Борис Делоне видел и слышал Гильберта и Минковского. Нередко Борис присутствовал при беседах отца с его коллегой, замечательным русским математиком Георгием Феодосьевичем Вороным. Работы Вороного оказали огромное влияние на математическое творчество Б. Н. Делоне. Однако личных научных контактов у Бориса Николаевича с Вороным не было. Вороной умер в возрасте 40 лет в 1908 г., в том самом году, когда Борис Делоне поступил на физико-математический факультет Киевского университета.

Получилось так, что почти одновременно на этот же факультет поступили еще несколько очень одаренных молодых людей, ставших впоследствии широко известными учеными: среди них были О. Ю. Шмидт и Н. Г. Чеботарев.

Из семейного альбома — Борис Делоне (справа) с отцом и братом

Н. Г. Чеботарев (1891—1947) стал одним из крупнейших алгебраистов, был избран членом-корреспондентом АН СССР. О. Ю. Шмидт (1891—1956), человек огромного дарования и колоссальной энергии, стал выдающимся ученым и общественным деятелем. Как математик он получил ряд первоклассных результатов в теории групп и основал московскую школу алгебраистов. Имя Героя Советского Союза О. Ю. Шмидта прекрасно знают в нашей стране в связи с легендарной экспедицией на ледоколе «Челюскин», которую он возглавлял. В науке имя академика Шмидта хорошо известно и в связи с тем, что ему принадлежит теория происхождения Солнечной системы.

Делоне, Шмидт, Чеботарев стали участниками алгебраического семинара под руководством профессора Д. А. Граве. Именно в эти годы и на долгое время вперед определилась область научных интересов Бориса Делоне — алгебра и теория чисел. Его студенческая работа «Связь между теорией идеалов и теорией Галуа» была удостоена «Большой золотой медали» университета. В первой своей печатной работе, опубликованной в 1915 году, Б. Н. Делоне предложил гораздо более короткое, чем предыдущее, принадлежавшее Гильберту, доказательство одной важной алгебраической теоремы.

* * *

Вершиной математического творчества Б. Н. Делоне является цикл исследований в теории диофантовых уравнений третьей степени с двумя неизвестными. Остановимся на этом подробнее.

Диофантовы уравнения — это уравнения вида $p(x, y, z, \ldots)=0$, где p — многочлен с целыми коэффициентами, для которых ищутся решения в целых (иногда в рациональных) числах. Например, целые положительные решения диофантова уравнения

$$x^2+y^2=z^2$$

суть не что иное, как известные «пифагоровы тройки» (такие, как (3, 4, 5) или (5, 12, 13)), дающие все решения прямоугольных треугольников с целыми сторонами (подробнее см. «Квант», 1986, № 1 с. 11). Название этих уравнений связано с именем выдающегося древнегреческого математика Диофанта (II век н. э.).

В своем докладе на международном математическом конгрессе 1900 года выдающийся немецкий математик Давид Гильберт сформулировал ряд фундаментальных проблем, адресованных математикам наступающего XX века. В одной из них, десятой по счету, Гильберт поставил вопрос о существовании такого алгоритма, который по коэффициентам конкретного диофантова уравнения позволял бы узнавать, имеет ли оно решение или нет. Сейчас, после работ советского математика Ю. В. Матиясевича, точно известно, что такого алгоритма нет (см. «Квант», 1970, № 7, с. 37). Более того, Ю. В. Матиясевич построил такой многочлен с целыми коэффициентами $p(a, x_1, ..., x_n)$, что не существует алгоритма, позволяющего для каждого целого значения параметра a узнавать, имеет ли целое решение уравнение

$$p(a, x_1, ..., x_n)=0.$$

Простейшим диофантовым уравнением является, пожалуй, *уравнение первой степени с двумя неизвестными*

$$ax+by=1,$$

где a и b — целые числа. Если a и b имеют общие множители, то решений нет. Если же a и b взаимно просты, то решений бесконечно много (подробнее см. «Квант» 1973, № 4, с. 38). Теория таких уравнений, как утверждают историки математики, была изложена еще индийским математиком Ариабхата в V—VI вв. н. э. (кстати, его именем назван первый индийский искусственный спутник Земли).

Следующей по сложности ступенькой после линейного уравнения естественно считать аналогичное *квадратное уравнение*

$$ax^2+bxy+cy^2=1.$$

Важный частный случай уравнений 2-й степени — *уравнение Пелля*

$$x^2-dy^2=1$$

— был изучен Эйлером (подробнее см. «Квант» 1985, № 1, с. 20). Если c (>0) — квадрат целого числа, то, кроме очевидного решения (1; 0), других целых решений нет. Если же c не является квадратом целого, то решений бесконечно много. Исследование общего вида диофантовых уравнений 2-й степени было проведено знаменитым французским математиком Лагранжем (1736—1813).

Что касается решений диофантовых уравнений более высоких степеней, то серьезных успехов в этом вопросе не было вплоть до начала XX века. Это придало вопросу о диофантовых уравнениях 3-й степени авторитет трудной проблемы. На этой проблеме Борис Николаевич, которого всегда отличало стремление браться за трудные, важные задачи, не разменивать свой талант и время на мелочи, и остановил свой выбор.

К сожалению, а, возможно, и нет, Делоне не знал об опубликованной незадолго до этого работе норвежского математика А. Туэ.

Туэ рассматривал диофантовы уравнения вида

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}y+...+a_{n-1}xy^{n-1}+a_ny^n=b \quad (1)$$

и доказал, что при $n\geqslant 3$ они могут иметь лишь к о н е ч н о е число решений, если, разумеется, левая часть уравнения не раскладывается в произведение многочленов с рациональными коэффициентами, содержащее сомножители степени меньше 3. (Если в разложении присутствует многочлен второй или первой степени, то решений может быть бесконечно много.)

Теорема Туэ является одной из наиболее фундаментальных в теории диофантовых уравнений. Однако, утверждая для каждого диофантова уравнения указанного типа конечность числа решений, теорема Туэ ничего не может сказать о том, как найти эти решения. В ней ничего не говорится о верхней оценке значений решений конкретного уравнения. А это важно. Представим себе, что по коэффициентам конкретного диофантова уравнения мы можем вычислить константу c, которая заведомо превосходит абсолютные значения $|x_0|$, $|y_0|$ для любого целого решения (x_0, y_0) этого диофантова уравнения. Тогда, подставляя в уравнение всевозможные пары целых чисел (x, y) с условием $|x|, |y|<c$, можно найти все решения конкретного уравнения. Сама же теорема Туэ в этом отношении неэффективна.

Портрет отца (рисунок Бориса Делоне)

Исследования Б. Н. Делоне относились к уравнениям 3-й степени, но, как мы увидим, дали весьма эффективные и исчерпывающие результаты. Сначала он приступил к исследованию *кубического аналога уравнения Пелля:*

$$ax^3+y^3=1,$$

где целое число a не является кубом целого. (В случае, когда a есть куб целого числа, левая часть уравнения раскладывается в произведение многочленов с целыми коэффициентами, и кубическое уравнение Пелля сводится к решению диофантовых уравнений 1-й и 2-й степеней.)

Кубическое уравнение Пелля всегда имеет по крайней мере одно решение — (0; 1). Имеются ли другие решения, и если да, то какие?

Ответы на эти вопросы связаны с изучением совокупности чисел вида

$$A\sqrt[3]{a^2}+B\sqrt[3]{a}+C \quad (A,\ B,\ C\in Z),$$

где a — коэффициент уравнения Пелля).

Среди этих чисел выделяются *единицы*, то есть такие числа, обратные к которым имеют такой же вид. Например, при $a=2$ число $\sqrt[3]{2}-1$ является единицей, поскольку обратное к нему равно $\varepsilon^{-1}=\sqrt[3]{2^2}+\sqrt[3]{2}+1$. Известно, что для каждого целого a ($\sqrt[3]{a}\notin Z$) среди единиц найдется такая (*основная*) единица ε_0, $0<\varepsilon_0<1$, из которой все остальные (положительные) единицы получаются возведением в целую степень.

Проявив исключительную изобретательность, Б. Н. Делоне доказал трудную теорему: *уравнение* $ax^3+y^3=1$, *где* a *— целое, но не куб целого, может иметь, кроме решения* (0, 1), *еще не более одного решения в целых числах; второе решение существует тогда и только тогда, когда основная единица* ε_0 *двучленна, то есть имеет вид* $\varepsilon_0=X_0\sqrt[3]{a}+Y_0$, *и тогда второе решение есть* $(X_0,\ Y_0)$.

Что касается нахождения основной единицы, то еще лет за двадцать до этого Вороной дал алгоритм ее вычисления.

Например, для уравнения $4x^3+y^3=1$ основная единица трехчленна, поэтому других решений, кроме (0; 1), это уравнение не имеет. А уравнение $37x^3+y^3=1$, для которого основная единица двучленна, $\varepsilon_0=-3\sqrt[3]{37}+10$, имеет два решения (0,1) и (—3, 10).

Затем Б. Н. Делоне перешел к более общему случаю *кубических уравнений с двумя неизвестными отрицательного дискриминанта*

$$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3=1, \qquad \text{(A)}$$

где коэффициенты a, b, c, d — целые числа, а слова «в случае отрицательного дискриминанта» означают, что соответствующий уравнению многочлен at^3+bt^2+ct+d имеет единственный вещественный корень t_0. В противном случае задача также сводится к исследованию двучленных единиц. Посредством созданного им «алгоритма повышения» Б. Н. Делоне получил следующий фундаментальный результат: *в общем случае уравнение вида* (А) *имеет не более трех решений в целых числах. Только в двух случаях уравнение вида* (А) *имеет четыре решения, и еще в одном случае уравнение имеет пять решений. Никакое уравнение вида* (А) *не имеет более пяти решений.* (Так, уравнение $x^3-xy^2+y^3=1$ имеет пять решений: (1; 1), (1; 0), (0; 1), (—1, 1), (4, —3), а то, что других решений нет, следует из теоремы Делоне.

* * *

Работы Б. Н. Делоне по кубическим диофантовым уравнениям обозначили едва ли не первый после Эйлера и Лагранжа серьезный сдвиг в направлении конкретного исследования уравнений более высоких степеней. Успех не был случаен. Тысячи часов напряженнейшей работы — такова цена победы над трудной проблемой. Трудолюбие, воля, целеустремленность и, конечно, любовь к науке — без этих качеств цель не была бы достигнута. Тем более, что работать приходилось в исключительных условиях: деникинцы и петлюровцы, «кайзеровцы» и белополяки, «зеленые» и «жовтоблакитные» — кто только не терроризировал Киев в годы гражданской войны...

Можно сказать, что в определенном смысле результаты Б. Н. Делоне оставались непревзойденными около полувека, до конца 60-х годов. Как писал член-корреспондент АН СССР Д. К. Фаддеев:

«По конкретности анализа, простоте и ясности цикл работ Б. Н. Делоне, посвященных неопределенным уравнениям, является исключительным в математике XX столетия с ее часто громоздким аппаратом и абстрактными построениями. По своему стилю этот цикл близок к лучшим образцам классических работ Гаусса и Чебышева по теории чисел».

* * *

После цикла работ по диофантовым уравнениям у Б. Н. Делоне еще было впереди 60 лет творческой деятельности, которая добавила к авторитету крупного алгебраиста авторитет крупного геометра. Смещение его исследований в сторону геометрии происходило естественно. Определенную роль здесь сыграло соприкосновение в процессе исследований неопределенных уравнений с работами Вороного. Но основная причина геометризации исследований Б. Н. Делоне заключалась в его исключительно образном, художническом восприятии мира.

Б. Н. Делоне перед туристским походом (70-е годы)

Характерно, что Борис Николаевич никогда не жалел сил, времени на то, чтобы довести понимание, казалось бы, уже законченного математического результата до такого уровня, на котором результат оформился бы в зримый геометрический образ. «Что это означает попросту?» — любимый вопрос Бориса Николаевича, который он задавал и себе и коллегам, когда обсуждалась очередная работа. Не случайно в его работах «натягиваются разделенные параллелепипеды», «вытягивают носы», между точками, рассыпанными в пространстве, «летают пустые шары».

Признание научных заслуг не заставило себя долго ждать: в 1929 году Б. Н. Делоне выбирают в члены-корреспонденты АН СССР. К этому моменту он уже семь лет профессорствует в Ленинградском университете. Его предельно ясные, продуманные лекции вызывают большой интерес у студентов. Б. Н. Делоне никогда не упускал возможности рассказать им о трудной, нерешенной проблеме. В своей педагогической практике Б. Н. Делоне руководствовался известным принципом «Ученик — не сосуд, который нужно наполнить, а факел, который нужно зажечь». Высокий научный авторитет, преданное и вместе с тем эстетическое отношение к науке, личное обаяние, артистизм — все это притягивало к нему молодых людей. Неудивительно, что у Бориса Николаевича было много учеников, среди которых несколько выдающихся математиков: академик А. Д. Александров, члены-корреспонденты АН СССР Д. К. Фаддеев и И. Р. Шафаревич.

Весной 1934 года в Ленинграде Б. Н. Делоне организовал для школьников первую олимпиаду по математике, с которой фактически началось олимпиадное движение в нашей стране. Участники ленинградской олимпиады до сих пор вспоминают, какое «ошеломляющее впечатление» произвели на них встречи с Борисом Николаевичем (см. «Квант» 1984, № 9, с. 52).

В 1934 г. в Ленинграде был создан Математический институт им. В. А. Стеклова, где Б. Н. Делоне со дня его основания заведовал отделом алгебры (до 1960 года), а затем отделом геометрии. В 1935 году Математический институт наряду с другими ведущими учреждениями Академии наук СССР переводится в Москву. С этого же года Б. Н. Делоне заведовал кафедрой геометрии в Московском университете. В период работы в МГУ он читает оригинальный курс лекций по аналитической геометрии, который отличался исключительным богатством геометрических идей. Студенты, имевшие счастье слушать лекции Б. Н. Делоне, вряд ли подозревали, что за их великолепием скрывалась тщательная подготовка. Так, в первые годы на подготовку двухчасовой лекции у него уходило два полных дня, в дальнейшем — день. Борис Николаевич не переносил верхоглядства, небрежности, он отшлифовывал каждую идею, выверял каждое слово, оттачивал каждый рисунок. И, как следствие этого, во время лекции на доске легко и быстро появлялись симпатичные «аффинные коты», изящные параболоиды и гиперболоиды, четкие додекаэдры и икосаэдры. Одно время у студентов мехмата МГУ в ходу была серия анекдотов о своих профессорах на тему:

«Кто (из профессоров) в чем варит суп». Согласно студенческой версии, не лишенной иронии, Борис Николаевич варил суп в n-мерной решетке: суп, правда, вытекал, зато оставалась геометрическая наглядность.

О Делоне ходили легенды. Однажды на лекции, для того чтобы вытереть верхнюю часть доски, он начал подпрыгивать, после чего с неподражаемой интонацией обратился к студентам: «А вы знаете, что я не только знаменитый математик, но и известный альпинист. Вот вы, наверное, не только не знаете математики, но даже стойку на руках не умеете делать». И тут же на столе кафедры сделал стойку. Шел ему в то время восьмой десяток...

Борис Николаевич действительно был известным альпинистом. Увлечение альпинизмом зародилось еще в детские годы, когда он поднимался в Альпах на Монблан, Монтроз и другие вершины. Позднее он совершил много восхождений в горах Кавказа, Алтая. В 1931 году Б. Н. Делоне организовал на Кавказе для рабочих ленинградского завода «Красный путиловец» первый в стране альпинистский лагерь. В изданной им книге «Вершины Западного Кавказа» он описал несколько десятков основных вершин этого района. Описание сопровождалось выполненными им же самим рисунками каждой вершины и панорамы района в целом. Б. Н. Делоне разработал принципы технической классификации вершин, действующие и поныне. В соответствии с этой классификацией вершины и маршруты восхождений распределяются по степени трудности на десять категорий. В 1935 г. Б. Н. Делоне был удостоен почетного звания «Мастер советского альпинизма».

С возрастом на смену альпинистским восхождениям пришли туристские походы. Не прогулки на 5—10 километров, а именно настоящие 30—40-километровые походы, иногда очень трудные, и проходившие неизменно по самым красивым местам Подмосковья. Борис Николаевич был физически исключительно закаленным человеком. И все равно было не по себе наблюдать в конце зимы быстро идущего с рюкзаком, обнаженного по пояс пожилого человека. Падающий снег таял и, стекая по седой голове, застывал в виде крупных сосулек.

Борис Николаевич очень любил природу и восторгался ее красотой всегда молча, словно стараясь впитать в себя все и вся. Его восхищение невольно передавалось спутникам. Общение с природой походило на таинство, и ему было неприятно, хотя он и не подавал виду, когда это таинство нечаянно нарушалось чьими-то разговорами. Зато у костра или в электричке его спутники становились слушателями многочисленных историй, одна другой интересней. Рассказчиком Б. Н. был замечательным... «Вы, конечно, не знаете, что моя сестра святая (пауза, лукавый взгляд рассказчика, недоумение слушателей). Да-да, совершенно серьезно, святая...» и начинался интереснейший рассказ о его двоюродной сестре, русской патриотке, монахине и героине французского Сопротивления Е. Кузьминой-Караваевой (ей посвящен фильм «Мать Мария»).

В приветственном адресе по случаю 80-летия, Германская академия естествоиспытателей «Леопольдина» пожелала члену этой академии Б. Н. Делоне «спокойного вечера жизни». «Вечер жизни» продолжался еще 10 лет и не получился таким уж спокойным — он оказался достойным всей жизни.

Но жизнь подходила к своей естественной границе. Я никогда не забуду, как месяца за три до конца Борис Николаевич читал одно замечательное место у Пуанкаре. Голос дрожал: «...жизнь есть лишь беглый эпизод между двумя вечностями смерти и... в этом эпизоде прошедшая и будущая длительность сознательной мысли — не более чем мгновение. Мысль — только вспышка света посреди долгой ночи. Но эта вспышка — все».

О касательной к графику функции

Член-корреспондент АН СССР
Д. К. ФАДДЕЕВ,
И. Ф. СОКОЛОВСКИЙ

Основная цель этой статьи — наглядно пояснить, чем касательная к графику дифференцируемой функции отличается от других прямых, проходящих через точку касания. Оказывается, ответ на этот вопрос не только проясняет геометрический смысл касательной, но позволяет находить ее уравнение, не вычисляя производную функции.

Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0; f(x_0))$ чаще всего определяется как предельное положение секущей MN, когда точка N неограниченно приближается к точке M, двигаясь по графику функции (рис. 1). Из этого определения выводится («Алгебра и начала анализа», п. 23) известное уравнение касательной

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0), \qquad (1)$$

где $f'(x_0)$ — значение производной f' функции f при $x = x_0$. Эта формула верна в предположении, что функция f имеет производную в точке x_0.

Может возникнуть вопрос: «Почему собственно понятию касательной уделяется столько внимания? Чем касательная в точке $(x_0; y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, «лучше» других прямых, проходящих через эту точку?» Ведь в общем случае о касательной к графику функции нельзя даже сказать (по аналогии с касательной к окружности), что она имеет единственную общую точку с графиком функции. Далее, касательная к графику функции может пересекать график, переходя с одной стороны графика на другую, именно в точке касания; например, так ведет себя касательная к графику функции $y = x^3$ в точке (0; 0), или касательная к графику функции $y = x^3 - 3x^2$ в точке (1; —2). А касательная к графику функции $y = x^4 \sin(1/x)$ пересекает график бесконечное число раз.

Итак, чем же примечательна касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; y_0)$? Оказывается, что *в достаточно малой окрестности точки касания касательная прижимается к графику функции плотнее, чем любая другая прямая, проходящая через точку касания.* Разберемся в этом детальнее.

Пусть $y = f(x)$ — данная функция, имеющая производную $f'(x_0)$ в данной точке x_0. Уравнение произвольной наклонной прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$, имеет вид $y = k(x - x_0) + y_0$. При $k = f'(x_0)$ получаем уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0; y_0)$. Ордината точки на графике функции $y = f(x)$ отличается от ординаты соответствующей точки на прямой на величину

$$\varepsilon = f(x) - (k(x - x_0) + f(x_0)) = f(x) - f(x_0) - k(x - x_0) = (x - x_0)\left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - k\right).$$

Вводя обозначения $x - x_0 = \Delta x$ и $f(x) - f(x_0) = \Delta f(x_0)$, это выражение можно записать короче:

$$\varepsilon = \Delta x \cdot \left(\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - k\right).$$

Если $k = f'(x_0)$, то есть в случае касательной, при $\Delta x \to 0$ имеем $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \to f'(x_0)$ и, следовательно, каждый сомножитель в правой части равенства стремится к нулю.

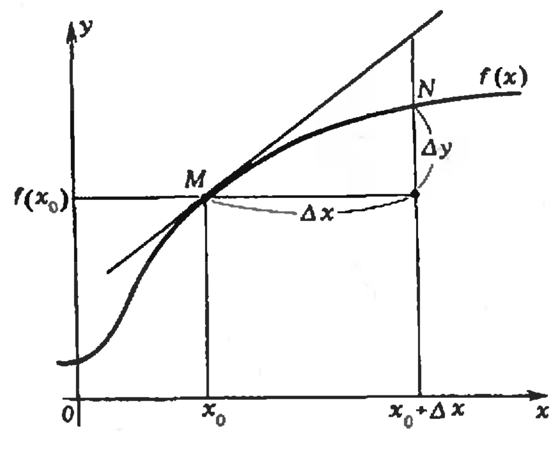


Рис. 1.

Если $k \neq f'(x_0)$, то $k = f'(x_0) + c$, где c — некоторая константа, не равная нулю. Тогда

$$\varepsilon = \Delta x\left(\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) - c\right).$$

При $\Delta x \to 0$ второй сомножитель в правой части равенства стремится к $c \neq 0$. Таким образом, при $\Delta x \to 0$ точка на касательной существенно быстрее приближается к соответствующей точке графика, нежели точка с той же абсциссой, на прямой, отличной от касательной.

Что особенно важно, касательная прижимается к кривой не просто количественно лучше других прямых, а в некотором смысле «на порядок лучше». Поясним это.

Перепишем выражение для ε в случае $k \neq f'(x_0)$ в виде

$$\varepsilon = \Delta x\left(\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)\right) - c\Delta x.$$

Из такой формы записи видно, что в случае, когда прямая отлична от касательной, разность между ординатами соответствующих точек на прямой и на графике функции содержит слагаемое пропорциональное Δx, то есть вида $c \cdot \Delta x$, где c — постоянная, в случае же приближения по касательной расстояние между точкой на прямой и соответствующей точкой на графике уменьшается «на порядок быстрее», чем само Δx, то есть имеет вид $\gamma \cdot \Delta x$, где γ — переменная, стремящаяся к нулю вместе с Δx. Таким образом, *среди всех прямых, проходящих через точку графика функции, только касательная отличается от функции на величину, не содержащую линейного слагаемого относительно Δx.*

Это свойство касательной и составляет ту особенность, которая выделяет ее из всего семейства прямых, проходящих через точку касания. Оно вполне характеризует касательную и поэтому может быть положено в основу определения касательной; тогда производную функции в точке можно о п р е д е л и т ь как угловой коэффициент касательной к графику функции в этой точке. Выведенное свойство касательной обосновывает метод получения уравнения касательной через приближенные равенства, оценивающие значение функции вблизи точки касания. Покажем применение этого метода на примерах. (В дальнейшем Δx будем обозначать буквой α.)

П р и м е р 1. *Напишем уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2 - 3x - 6$ в точке $x_0 = -1$.*

Р е ш е н и е. Пусть $x = -1 + \alpha$, где $|\alpha|$ близок к нулю. Тогда $f(-1+\alpha) = (-1+\alpha)^2 - 3(-1+\alpha) - 6 = 1 - 2\alpha + \alpha^2 + 3 - 3\alpha - 6 = -5\alpha + \alpha^2 - 2$. Пренебрегая α^2, получим $f(-1+\alpha) \approx -5\alpha - 2$. Вернемся к старым обозначениям; получим $f(x) \approx -5x - 7$ вблизи $x_0 = -1$. Прямая $y = -5x - 7$ вблизи $x_0 = -1$ отличается от $f(x)$ на величину, не содержащую линейного относительно α слагаемого, а таким свойством обладает только касательная, значит, $y = -5x - 7$ — уравнение касательной к графику данной функции в точке $x_0 = -1$. (Проверьте этот результат, получив уравнение касательной по формуле (1).)

П р и м е р 2. *Выведем уравнение касательной к графику функции $f(x) = x^2$ в произвольной точке x_0.*

Р е ш е н и е. Пусть $x = x_0 + \alpha$, где $|\alpha|$ близок к 0. Тогда $f(x_0+\alpha) = x_0^2 + 2x_0\alpha + \alpha^2$. Пренебрегаем α^2 и получаем $f(x_0+\alpha) \approx x_0^2 + 2x_0\alpha$. В старых обозначениях $f(x) \approx x_0^2 + 2x_0 \times (x - x_0) = x_0^2 + 2x_0x - 2x_0^2 = 2x_0x - x_0^2$. Прямая $y = 2x_0x - x_0^2$ — касательная к графику функции в точке x_0, угловой коэффициент касательной $2x_0$ — производная функции x^2 в точке x_0.

Особенно простым становится вывод уравнения касательной в случае, когда выражение, задающее функцию $f(x)$, содержит линейные множители вида $(x - x_0)$.

П р и м е р 3. *Напишем уравнения касательных к графику функции*

$$y = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

в точках пересечения графика с осью абсцисс.

Р е ш е н и е. Пусть $x = x_0 + \alpha$, $y = \alpha(x_0 - x_1 + \alpha)(x_0 - x_2 + \alpha)$. Ясно, что при раскрытии скобок слагаемое, линейное относительно α, имеет вид $\alpha(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$, тогда

$$y = (x - x_0)(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$$

— уравнение касательной к графику функции в точке x_0. Аналогично получаем уравнения касательных в точках x_1 и x_2:

$$y = (x - x_1)(x_1 - x_0)(x_1 - x_2),$$
$$y = (x - x_2)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1).$$

Покажем конкретные примеры, в которых надо найти уравнение касательной в точке x_0.

Пример 4. *Напишем уравнение касательной к графику функции*

$$f(x)=(x+2)(x^2-4x-10)$$

при $x_0=-2$.

Решение. Пусть $x=-2+\alpha$, тогда $f(-2+\alpha)=((-2+\alpha)^2-4(-2+\alpha)-10)$. Линейное относительно α слагаемое имеет вид $\alpha((-2)^2-4(-2)-10)$, то есть второй сомножитель $f(x)$ просто заменяется его значением при $x=-2$. Возвращаясь к старым обозначениям, получим

$$y=(x+2)(4+8-10)=(x+2)\cdot 2.$$

Значит $y=2x+4$ — уравнение касательной.

Упражнение 1. *Найдите касательные к графикам функций в указанных точках:*

а) $f(x)=\dfrac{(x-1)(x^3-3x^2+1)}{x^2+1}$, $x_0=1$.

б) $f(x)=x(x+3)(x+2)(x-1)$, $x_0=0$.

Следующий пример — несколько особый случай, и мы остановимся на нем подробнее.

Пример 5. *Найдем уравнение касательной к графику функции* $f(x)=(x-2)^2(x+3)$ *при* $x_0=2$.

Решение. Пусть $x=2+\alpha$, тогда $f(2+\alpha)=\alpha^2(5+\alpha)$. Выражение для $f(2+\alpha)$ не содержит слагаемых, линейных относительно α. Это означает, что угловой коэффициент касательной равен нулю. График функции $y=f(x)$ наиболее плотно примыкает к прямой $y=0$, то есть касательной является ось Ox.

Рассуждения, приведенные выше, в несколько видоизмененной форме дают уравнения касательных в случае, когда функция имеет вид $(x-x_0)g(x)$, где $g(x)$ — произвольная функция. Сначала заметим следующее: на значении произведения двух сомножителей существенно сказывается относительное изменение сомножителей, а не абсолютное. Поэтому, *если один из сомножителей слабо изменяется в относительном смысле, а другой сильно, то при оценке приближенного значения произведения сомножитель, изменяющийся относительно слабо, можно считать постоянным.*

Приведем конкретный числовой пример. Рассмотрим произведение $3\times1000=3000$. Изменим на 1 первый множитель, получим $4\times1000=4000$: произведение выросло на 1000. Изменим на 1 второй множитель, получим $3\times1001=3003$: произведение выросло всего на 3.

Воспользуемся этим свойством произведения для нахождения касательных.

Пример 6. *Найдем уравнение касательной к графику функции* $f(x)=(x-3)\sqrt{7-x}$, $x_0=3$.

Решение. При неограниченном приближении x к числу 3 относительное изменение $\sqrt{7-x}$ стремится к нулю, так что этим изменением можно пренебречь и считать, что $\sqrt{7-x}\approx\sqrt{4}=2$ при $x\to3$. Сомножитель $(x-3)$ при $x\to3$ претерпевает сильное относительное изменение, поэтому оставляем его в неизменном виде. Тогда (при $x\to3$) $f(x)\approx(x-3)\cdot2$; прямая $y=2x-6$ и есть касательная к графику функции $f(x)$ в точке $x_0=3$.

Пример 7. *Найдем уравнение касательной к графику функции*

$$f(x)=\sqrt{5+x^3}$$

в точке $x=-1$.

Решение. Воспользуемся преобразованием, полезным при оценке значения квадратного корня. Заметим, что $\sqrt{5+x^3}\approx\sqrt{4}=2$ при $x\to-1$. Имеем

$$f(x)=\sqrt{5+x^3}-2+2=$$
$$=\frac{(\sqrt{5+x^3}-2)(\sqrt{5+x^3}+2)}{\sqrt{5+x^3}+2}+2=$$
$$=\frac{5+x^3-4}{\sqrt{5+x^3}+2}+2=\frac{(1+x)(1-x+x^2)}{\sqrt{5+x^3}+2}+2.$$

Слабо меняющиеся при $x\to-1$ множители заменим их значениями в точке $x=-1$. Получим

$$f(x)\approx\frac{(1+x)(1+1+1)}{\sqrt{5-1}+2}+2=\frac{3}{4}(x+1)+2;$$

прямая $y=3x/4+11/4$ — искомая касательная.

Пример 8. *Найдем уравнения касательных к графику функции*

$$f(x)=(x-5)(x-4)^2(x+3)$$

в точках а) $x_0=5$; *б)* $x_0=4$; *в)* $x_0=-3$.

Решение. а) $x_0=5$. Слабо меняющиеся множители — второй и третий; считаем их постоянными. Тогда $y\approx(x-5)(5-4)^2(5+3)$; искомая касательная: $y=8x-40$.

б) $x_0=4$. Слабо меняющиеся множители — первый и третий, поэтому здесь $y\approx(4-5)(x-4)^2(4+3)$. Это выражение не содержит $\alpha=x-4$ в первой степени, значит, угловой коэффициент касательной равен нулю и касательной является ось абсцисс $y=0$.

в) $x_0=-3$. Слабо меняются первый и второй множители, поэтому $y\approx$

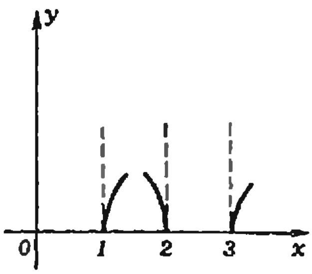


Рис. 2.

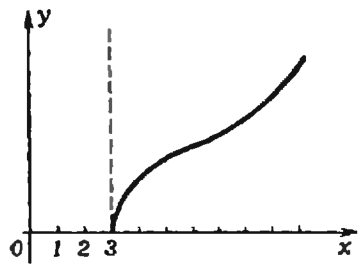


Рис. 3.

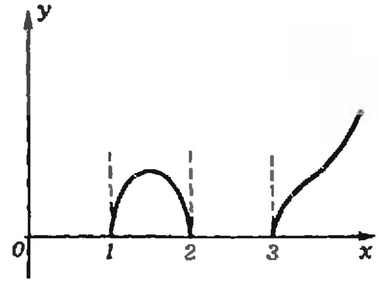


Рис. 4.

$\approx(-3-5)(-3-4)^2(x+3)$; уравнение касательной — $y=-392x-1176$.

Оказывается, совершенно элементарное соображение об оценке величины произведения позволяет иногда получить ответ на довольно сложный вопрос о форме графика вблизи точки x_0. Рассмотрим такой пример.

Пример 9. *Выясним форму графика функции*

$$f(x)=\sqrt{(x-1)(x-2)(x-3)}$$

вблизи точек $x_1=1$; $x_2=2$; $x_3=3$.

Решение. Те же рассуждения, что и в предыдущих примерах дают:

а) около точки $x_1=1$

$$f(x)\approx\sqrt{(x-1)\cdot 12}=\sqrt{12}\cdot\sqrt{x-1};$$

б) около точки $x_2=2$

$$f(x)\approx\sqrt{-(x-2)}=\sqrt{2-x};$$

в) около точки $x_3=3$

$$f(x)\approx\sqrt{2(x-3)}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{x-3}.$$

Следовательно, вблизи точек $x_1=1$, $x_3=3$ график функции $f(x)$ получается из графика функции $\sqrt{x}$ сдвигом на 1 и 3 соответственно, а вблизи точки $x_2=2$ — сдвигом на 2 и отражением относительно прямой $x=2$ (рис. 2).

Аналогичные рассуждения можно применить и в случае, если мы хотим оценить вид графика данной функции при больших значениях x. При неограниченном возрастании x отбрасывание слагаемых -1, -2 и -3 относительно мало меняет сомножители, а значит, слабо сказывается на произведении. Можно считать, что $f(x)\approx$ $\approx\sqrt{x^3}=x\sqrt{x}$ при $x\to\infty$. Ясно, что при больших значениях x функция $y=x\sqrt{x}$ растет быстрее, чем $y=kx$, так как $y/x=\sqrt{x}$, — растет не только y, но и отношение y/x, в то время как у прямой $y=kx$ это отношение постоянно. Таким образом, $y=x\sqrt{x}$ «обгоняет» любую прямую. Отсюда вытекает, что при достаточно больших x график функции все более круто поднимается вверх, то есть имеет форму, выпуклостью обращенную вниз, показанную на рис. 3.

Таким образом, на основе элементарных рассуждений, не использующих производную, мы получили довольно полное представление о форме графика весьма сложной функции. Схематический график функции $f(x)$ показан на рисунке 4.

Замечание. Приближенное равенство $f(x)\approx x\sqrt{x}$ в примере 8 при больших и возрастающих x не означает, что график функции асимптотически, то есть сколь угодно близко, приближается к графику функции $y=x\sqrt{x}$. Знак приближенного равенства в этих случаях означает, что мала лишь относительная погрешность приближения, абсолютная же погрешность неограниченно возрастает вместе с ростом x, но тем не менее она составляет все меньшую долю самого значения функции $f(x)$. Графически это означает, что при любом выборе масштаба графики данных функций и данной функции $y=x\sqrt{x}$ в пределах точности построения станут неразличимы при достаточно больших x.

Упражнение 2. а) *Постройте график функции*

$$f(x)=\sqrt{(x-1)(x-3)^2}.$$

б) *Определите знаки* $g(x)$ *вблизи точки* $x_0=1$, *не прибегая к методу интервалов, если*

$$g(x)=\frac{(x-1)(x^2-14x+8)}{x^2+15x-31}.$$

В заключение заметим, что цель настоящей статьи вовсе не в том, чтобы заменить известные вам из начал анализа методы исследования функций и построения их графиков элементарными приемами решения подобных задач. Нам хотелось показать, что если отвлечься от проблем обоснований и строгости, то основная идея дифференциального исчисления сводится к очень простому соображению: на небольшом участке график «хорошей» функции успевает мало изогнуться и тем меньше, чем меньше рассматриваемый участок. Поэтому малый участок кривой линии почти совпадает с отрезком некоторой прямой — эта прямая и есть касательная — и их различие постепенно исчезает по мере стягивания участка кривой к некоторой точке.

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Вторая космическая скорость» предназначена восьмиклассникам, «Магнитный момент тока» — девятиклассникам, «О ядерном веществе» — десятиклассникам. Материалы подготовил И. К. Белкин.

Вторая космическая скорость

Если некоторому телу сообщить скорость, равную первой космической скорости, то оно не упадет на Землю, а станет искусственным спутником, движущимся по околоземной круговой орбите. Напомним, что эта скорость должна быть перпендикулярна направлению к центру Земли и равна по величине

$$v_I=\sqrt{gR}=7{,}9\ \text{км/с},$$

где $g=9{,}8\ \text{м/с}^2$ — ускорение свободного падения тел у поверхности Земли, $R=6{,}4\cdot10^6$ м — радиус Земли (см. «Физику 8», § 40).

А может ли тело и вовсе порвать цепи тяготения, «привязывающие» его к Земле? Оказывается, может, но для этого его нужно «бросить» с еще большей скоростью. Минимальную начальную скорость, которую необходимо сообщить телу у поверхности Земли, чтобы оно преодолело земное притяжение, называют второй космической скоростью v_{II}. Найдем ее значение.

При удалении тела от Земли сила притяжения совершает отрицательную работу, в результате чего кинетическая энергия тела уменьшается. Одновременно с этим уменьшается и сила притяжения. Если кинетическая энергия упадет до нуля до того, как станет равной нулю сила притяжения, тело вернется обратно на Землю. Чтобы этого не произошло, нужно, чтобы кинетическая энергия сохранялась отличной от нуля до тех пор, пока сила притяжения не обратится в нуль. А это может произойти лишь на бесконечно большом расстоянии от Земли.

Согласно теореме о кинетической энергии (см. «Физику 8», § 55) изменение кинетической энергии тела равно работе действующей на тело силы. Для нашего случая можно записать:

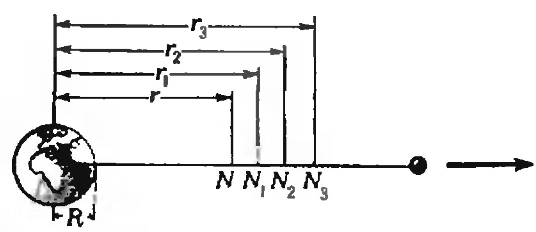
$$0-\frac{mv_{II}^2}{2}=A,$$

или

$$\frac{mv_{II}^2}{2}=-A, \qquad (*)$$

где m — масса брошенного с Земли тела, A — работа силы притяжения. Таким образом, для вычисления второй космической скорости нужно найти работу силы притяжения тела к Земле при удалении тела от поверхности Земли на бесконечно большое расстояние. Как это ни удивительно, но работа эта вовсе не бесконечно большая, несмотря на то, что перемещение тела как будто-бы бесконечно велико. Причина тому — уменьшение силы притяжения по мере удаления тела от Земли. Чему же равна работа силы притяжения?

Воспользуемся той особенностью, что работа силы притяжения не зависит от формы траектории движения тела (см. «Физику 8», § 56), и рассмотрим самый простой случай — тело удаляется от Земли по линии, проходящей через центр Земли. На приведенном здесь рисунке изображен Земной шар и тело массой m, которое движется вдоль направления, указанного стрелкой.



Найдем сначала работу A_1, которую совершает сила притяжения на очень малом участке от произвольной точки N до точки N_1. Расстояния этих точек до центра Земли обозначим через r и r_1 соответственно, так что работа A_1 будет равна

$$A_1=-F(r_1-r)=F(r-r_1).$$

Но какое значение силы F следует подставить в эту формулу? Ведь оно изменяется от точки к точке: в N оно равно GMm/r^2 (M — масса Земли), в точке N_1 — GMm/r_1^2. Очевидно, нужно взять среднее значение этой силы. Так как расстояния r и r_1 мало отличаются друг от друга, то в качестве среднего можно взять значение силы в некоторой средней точке, например такой, что $r_{\text{ср}}^2 = rr_1$. Тогда получаем

$$A_1 = G\frac{Mm}{rr_1}(r - r_1) = GMm\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right).$$

Рассуждая таким же образом, найдем, что на участке N_1N_2 совершается работа

$$A_2 = GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),$$

на участке N_2N_3 совершается работа

$$A_3 = GMm\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_2}\right),$$

а на участке NN_3 работа равна

$$A_1 + A_2 + A_3 = GMm\left(\frac{1}{r_3} - \frac{1}{r}\right).$$

Закономерность ясна: работа силы притяжения при перемещении тела от одной точки к другой определяется разностью обратных расстояний от этих точек до центра Земли. Теперь нетрудно найти и всю работу A при перемещении тела от поверхности Земли ($r = R$) на бесконечно большое расстояние ($r \to \infty$, $1/r = 0$):

$$A = GMm\left(0 - \frac{1}{R}\right) = -\frac{GMm}{R}.$$

Как видно, эта работа и в самом деле не бесконечно велика*).

Подставив полученное выражение для A в формулу (*), найдем значение второй космической скорости:

$$v_{\text{II}} = \sqrt{-\frac{2A}{m}} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = \sqrt{2gR} = 11{,}2\ \text{км/с}.$$

Отсюда видно, что вторая космическая скорость в $\sqrt{2}$ раз больше первой космической скорости:

$$v_{\text{II}} = \sqrt{2}\, v_{\text{I}}.$$

В проведенных расчетах мы не принимали во внимание то, что наше тело взаимодействует не только с Землей, но и с другими космическими объектами. И в первую очередь — с Солнцем. Получив начальную скорость, равную v_{II}, тело сумеет преодолеть тяготение к Земле, но не станет истинно свободным, а превратится в спутник Солнца. Однако если телу у поверхности Земли сообщить так называемую третью космическую скорость $v_{\text{III}} = 16{,}6$ км/с (попробуйте получить это значение самостоятельно), то оно сумеет преодолеть и силу притяжения к Солнцу.

*) Десятиклассникам понятно, что таким способом мы вычислили интеграл.

Магнитный момент тока

Из курса физики девятого класса («Физика 9», § 88) известно, что на прямолинейный проводник длиной l с током I, если он помещен в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$, действует сила $\vec{F}$, равная по модулю

$$F = BIl \sin\alpha,$$

где α — угол между направлением тока и вектором магнитной индукции. Направлена эта сила перпендикулярно и полю, и току (по правилу левой руки).

Прямолинейный проводник — это только часть электрической цепи, поскольку электрический ток всегда замкнут. А как магнитное поле действует на замкнутый ток, точнее — на замкнутый контур с током?

На рисунке 1 в качестве примера показан контур в форме прямоугольной рамки со сторонами a и b, по которой в указанном стрелками направлении течет ток I. Рамка помещена в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ так, что в начальный момент вектор $\vec{B}$ лежит в плоскости рамки и параллелен двум ее сторонам. Рассматривая каждую из сторон рамки по отдельности, мы найдем, что на боковые стороны (длиной a) действуют силы, равные по модулю $F = BIa$ и направленные в противоположные стороны. На две другие стороны силы не действуют (для них $\sin\alpha = 0$). Каждая из сил F относительно оси, проходящей через середины верхней и нижней сторон рамки, создает момент силы (вращающий момент), равный $BIab/2$ ($b/2$ — плечо силы). Знаки моментов одинаковы (обе силы поворачивают рамку в одну сторону), так что общий вращающий момент M равен $BIab$, или, поскольку произведение ab равно площади S рамки,

$$M = BIab = BIS.$$

Под действием этого момента рамка начнет поворачиваться (если смотреть сверху, то по часовой стрелке) и будет поворачиваться до тех пор, пока не станет своей плоскостью перпендикулярно вектору индукции $\vec{B}$ (рис. 2). В этом положении сумма сил и сумма

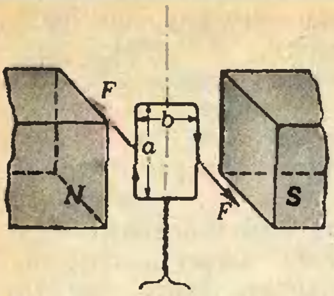


Рис. 1.

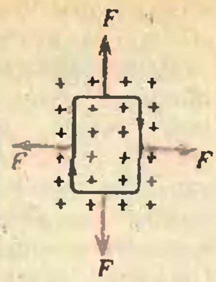


Рис. 2.

моментов сил равны нулю, и рамка находится в состоянии устойчивого равновесия. (На самом деле рамка остановится не сразу — в течение некоторого времени она будет совершать колебания около своего положения равновесия.)

Нетрудно показать (сделайте это самостоятельно), что в любом промежуточном положении, когда нормаль к плоскости контура составляет произвольный угол β с индукцией магнитного поля, вращающий момент равен

$$M = BIS \sin \beta.$$

Из этого выражения видно, что при данном значении индукции поля и при определенном положении контура с током вращающий момент зависит только от произведения площади контура S на силу тока I в нем. Величину IS и называют магнитным моментом контура с током. Говоря точнее, IS — это модуль вектора магнитного момента. А направлен этот вектор перпендикулярно плоскости контура и притом так, что если мысленно вращать буравчик в направлении тока в контуре, то направление поступательного движения буравчика укажет направление магнитного момента. Например, магнитный момент контура, показанного на рисунках 1 и 2, направлен от нас за плоскость страницы. Измеряется магнитный момент в $А \cdot м^2$.

Теперь мы можем сказать, что контур с током в однородном магнитном поле устанавливается так, чтобы его магнитный момент «смотрел» в сторону того поля, которое вызвало его поворот.

Известно, что не только контуры с током обладают свойством создавать собственное магнитное поле и поворачиваться во внешнем поле. Такие же свойства наблюдаются и у намагниченного стержня, например у стрелки компаса.

Еще в 1820 году замечательный французский физик Ампер высказал идею о том, что сходство поведения магнита и контура с током объясняется тем, что в частицах магнита существуют замкнутые токи. Теперь известно, что в атомах и молекулах действительно есть мельчайшие электрические токи, связанные с движением электронов по своим орбитам вокруг ядер. Из-за этого атомы и молекулы многих веществ, например парамагнетиков, обладают магнитными моментами. Поворот этих моментов во внешнем магнитном поле и приводит к намагничиванию парамагнитных веществ.

Выяснилось и другое. Все частицы, входящие в состав атома, обладают также магнитными моментами, вовсе не связанными с какими-либо движениями зарядов, то есть с токами. Для них магнитный момент является таким же «врожденным» качеством, как заряд, масса и т. п. Магнитным моментом обладает даже частица, не имеющая электрического заряда,— нейтрон, составная часть атомных ядер. Магнитным моментом обладают поэтому и атомные ядра.

Таким образом, магнитный момент — одно из самых важных понятий в физике.

О ядерном веществе

В состав атомного ядра входят частицы двух типов: положительно заряженные протоны и нейтральные нейтроны. Они очень близки по массе $m_p \approx m_n \approx 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ кг. Величина эта ничтожна, но, тем не менее, плотность вещества в ядре очень велика. Попытаемся оценить ее.

Опыты Резерфорда, в которых было открыто существование атомного ядра, показали, что размер его $\sim 10^{-14}$—10^{-15} м. Последующие измерения дали для радиуса ядра с массовым числом $A > 10$ значение

$$R_я \approx 1{,}3 \cdot 10^{-15} \sqrt[3]{A} \text{ м}.$$

При этом для объема ядра (считая его сферическим) имеем

$$V_я = \frac{4}{3}\pi R_я^3 \approx 10^{-44} A \text{ м}^3.$$

Масса ядра

$$M_я \approx m_p A,$$

поэтому плотность вещества в ядре

$$\varrho_я = \frac{M_я}{V_я} \approx \frac{m_p A}{V_я} \approx 10^{17}\ кг/м^3.$$

Она оказывается чудовищно большой. Если бы можно было сплошь заполнить ядрами кубик объемом один кубический сантиметр, то масса этого кубика была бы равна примерно 100 миллионов тонн!

Такая грандиозная плотность ядерного вещества свидетельствует, очевидно, о существовании огромных сил притяжения, действующих между частицами, составляющими ядро. (Об основных свойствах ядерных сил рассказывается в § 107 «Физики 10».)

Кроме обычных ядер, физики-теоретики предполагают возможность существования и «необычных»: чисто нейтронных, сверхплотных (в них вещество сжато еще в несколько раз сильнее) и т. п. Экспериментальные поиски их пока не привели к положительным результатам.

Может ли в природе ядерное вещество существовать в виде больших образований? Положительный ответ на этот вопрос был получен, когда астрономы обнаружили (в 1967 году) нейтронную звезду.

Такая звезда может образоваться из обычной при быстром сжатии. В обычной звезде существует равновесие между силами гравитации, стремящимися сжать звезду, и силами давления нагретого звездного вещества, препятствующими этому сжатию. Сжатие начинается, когда внутри звезды термоядерные источники энергии исчерпают свои ресурсы. Звезда остывает, равновесие нарушается,и вещество устремляется к центру звезды. Плотность материи резко возрастает, атомные электроны «вдавливаются» в ядра и начинаются ядерные реакции превращения протонов в нейтроны. Приходит момент, когда вещество внутри звезды будет состоять, в основном, из нейтронов и иметь ядерную плотность. При этом звезда с массой, равной солнечной, должна сжаться до шара радиусом ~ 10 км.

Возможность существования нейтронных звезд предсказал выдающийся советский физик Л. Д. Ландау.

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Решите уравнение
$$x^3-9x^2+27x=19.$$

2. Докажите, что число $1984\cdot1985\cdot1986\times\times1987+1$ является полным квадратом.

3. Докажите, что если у двух выпуклых четырехугольников середины сторон совпадают, то их площади равны*)

4. x, y — целые числа, причем число $6x+11y$ делится на 31. Докажите, что число $x+7y$ также делится на 31.

5. Из пунктов A и B, расположенных на расстоянии 100 км, одновременно выезжают навстречу друг другу два велосипедиста, которые двигаются со скоростью 20 км/ч и 30 км/ч. Вместе с первым велосипедистом из пункта A вылетает муха-слепень со скоростью 50 км/ч и летит по направлению к пункту B до встречи со вторым велосипедистом, затем поворачивает и летит обратно до встречи с первым велосипедистом, снова поворачивает и т. д. Сколько километров пролетит слепень в направлении от пункта A к пункту B до того момента, как велосипедисты встретятся?

Девятый класс

6. Постройте график функции
$$y=\frac{1}{2}\left(\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}-\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}\right).$$

7. Какое число больше: $\lg^2 11$ или $\lg 12$?

8. Докажите, что если отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон выпуклого четырехугольника, равен полусумме двух других его сторон, то это трапеция.

*9. Существуют ли заданные на всей числовой оси функции f и g такие, что для всех x и y выполняется равенство
$$f(x)\cdot g(y)=x+y+1?$$

10. Постройте квадрат по четырем точкам, лежащим по одной на его сторонах.

Десятый класс

11. Какое число больше: $\cos\sin 1$ или $\sin\cos 1$?

12. Сколько у уравнения
$$(x-y)^2=x+y$$
целочисленных решений, удовлетворяющих неравенствам $|x|<100$, $|y|<100$?

13. Диагонали делят трапецию на четыре треугольника. Пусть s — площадь трапеции, s_1 и s_2 — площади двух треугольников, которые примыкают к основаниям трапеции. Докажите, что $\sqrt{s}=\sqrt{s_1}+\sqrt{s_2}$.

14. Действительные числа x, y, a таковы, что $x+y=a-1$, $xy=a^2-7a+14$. При каком значении a сумма x^2+y^2 принимает наибольшее значение?

15. Может ли сечение n-угольной призмы быть правильным $(n+2)$-угольником?

Публикацию подготовил Л. Д. Курляндчик

*) Эту же задачу нам прислал С. Р. Сефибеков. *(Примеч. ред.)*

Квант для младших школьников

Задачи

1. Руслан купил для своей коллекции четыре марки: кубинскую, монгольскую, болгарскую и польскую. Стоимость покупки без кубинской марки — 40 копеек, без монгольской — 45 копеек, без болгарской — 44 копейки, а без польской — 27 копеек. Сколько стоит каждая марка?

2. Если к двадцати прибавить шестнадцать, получится 36 — полный квадрат. Если от двадцати отнять шестнадцать, получится четыре — тоже полный квадрат. Существуют ли еще числа, которые становятся полными квадратами после прибавления и вычитания числа 16?

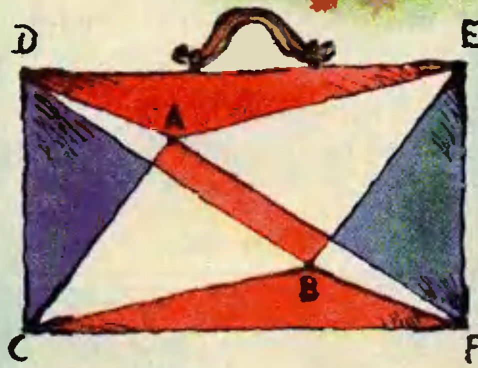
3. Туристы подошли к небольшой речке, через которую переброшено бревно. Им нужно перебраться на другую сторону. Первый турист пошел по бревну и упал в воду, но сумел перебраться на другой берег вплавь. Тогда руководитель быстро перебежал по бревну. За ним перебежали на другую сторону и остальные туристы.

Почему по бревну лучше перебежать, чем перейти?

4. Точки A и B, взятые внутри прямоугольника $CDEF$, соединили с его вершинами. Два из образовавшихся треугольников закрасили в синий цвет, еще два — в красный цвет, так же как и центральный четырехугольник (см. рисунок). Докажите, что площадь красной части прямоугольника равна площади его синей части для любого расположения точек A и B внутри прямоугольника.

5. При каком основании системы счисления имеет решение (и какое) числовой ребус на рисунке? (О системах счисления см. ответ на шуточное стихотворение «Необыкновенная девочка» на с. 60.)

Эти задачи нам предложили В. Д. Вьюн, ученик 7 класса школы № 60 г. Баку Назим Ширинов, С. С. Кротов, Г. А. Гальперин, А. В. Швецов.



Королевский крокет

У входа в сад рос большой розовый куст, розы на нем были белые, но три садовника усердно красили их в красный цвет. Подходя Алиса услышала: — Пятерка! Ты меня забрызгал!

— Это Семерка толкнул меня, — отвечал

Пятерка. Семерка посмотрел на него и сказал:

— Правильно. Всегда сваливай на другого.

— Ты бы лучше помалкивал, — сказал Пятерка. — Вчера я своими ушами слышал, как Королева сказала, что тебе давно пора отрубить голову!

— Ну, знаете,...— но взгляд его упал на Алису. Все трое склонились в низком поклоне. — Скажите, пожалуйста, — робко спросила Алиса, — зачем вы красите эти розы? Двойка

Валету, но тот лишь улыбнулся и поклонился. Потом она обернулась к Алисе и спросила: «Как тебя зовут, дитя?» — Меня зовут Алисой, с позволения Вашего Величества, — ответила Алиса учтиво. — А это кто такие — спросила Королева указывая на валявшихся вокруг куста садовников. Они лежали лицом вниз, и Королева не могла разобрать — садовники это, или придворные. — Переверни их! — приказала она Валету. Валет осторожно перевернул садовников носком сапога. — Встать! —

крикнула Королева. Садовники вскочили и принялись кланяться. — Сию же минуту перестаньте! — завопила Королева. — У меня от ваших поклонов голова закружилась! — И, взглянув на куст роз, прибавила: — А что это вы тут делали? — С позволения Вашего Величества, — смиренно начал Двойка — мы... — Все ясно! — произнесла Королева. — Отрубить им головы! И шествие двинулось дальше. Только три солдата задержались, чтобы привести приговор в исполнение.

ли все сразу, не дожидаясь очереди. В скором времени Королева пришла в бешенство, топала ногами и то и дело кричала: — Отрубить ей голову! Голову ему долой! Алиса забеспокоилась, решив, что у нее с Королевой спор мог возникнуть в любую минуту. «Что со мной будет? — думала Алиса. — Здесь так любят рубить людям головы. Она огляделась, желая незаметно улизнуть, как вдруг над головой у нее появилось что-то непонятное. Алиса никак не могла понять, что же это такое, но через

ется, — сказала Алиса. — Я это где-то читала,

Увидев проходившую мимо Королеву, Король крикнул: — Душенька, вели убрать этого кота! — Отрубить ему голову! — крикнула она, не глядя. Алисин фламинго забрел на другой конец сада и Алиса пошла за ним. Алиса увидела, как он безуспешно пытается взлететь на дерево. Когда она, наконец, поймала его и принесла обратно, ежи уже перестали драться и разбежались.

«Ну и пусть, — подумала Алиса. — Все равно воротца тоже ушли». Она сунула фламинго под мышку и вернулась к Коту. Ей хотелось с ним поговорить. Подойдя к тому месту, где в воздухе парила его голова, она с удивлением увидела, что вокруг образовалась большая толпа. Палач, Король и Королева шумно спорили: каждый кричал свое, не слушая другого, а остальные молчали и только смущенно переминались с ноги на ногу. Завидев Алису, все трое бросились к ней, чтобы еще это кто?

тихо сказал:
— Понимаете, барышня, Королева приказала посадить красные розы, а мы, дураки, посадили белые. Плакали теперь наши головы. В эту минуту Пятерка крикнул:
— Королева! Садовники пали ниц. Алиса обернулась. — Впереди выступали десять солдат с пиками наперевес; они были очень похожи на садовников — такие же плоские и четырехугольные. За ними — десять придворных; их одежды были расшиты крестами. За придворными бежали королевские дети. Их было тоже десять. Одежда у них сверкала червонным золотом. За ними шествовали гости, все больше Короли и Королевы. За гостями шел Валет Червей. Алиса заколебалась: может, и ей броситься ниц? Однако к чему устраивать шествия, если все будут падать ниц? Никто тогда ничего не увидит... И она осталась стоять. Едва шествие поравнялось с Алисой, Королева сурово спросила: «Это еще кто?». Она обращалась к

Несчастные садовники бросились к Алисе за помощью. — Не бойтесь, — сказала Алиса. — Я вас в обиду не дам. И она сунула их в цветочный горшок. Солдаты походили вокруг, поискали и зашагали прочь. — Ну что, отрубили им головы? — крикнула Королева. — Пропали их головы, Ваше Величество. — гаркнули солдаты. — Отлично! — завопила Королева. — Сыграем в крокет? Солдаты молча сделали знак Алисе. — Сыграем! — крикнула Алиса и вошла в толпу гостей.
— Все по местам! — закричала Королева. И все побежали, натыкаясь друг на друга. Через минуту каждый был на своем месте, и игра началась. Алиса в жизни не видала такой странной площадки для игры в крокет: *сплошные* рытвины и борозды. Шарами служили ежи, молотками — фламинго, а воротцами — *солдаты, дела*ющие мостик. Игроки би-

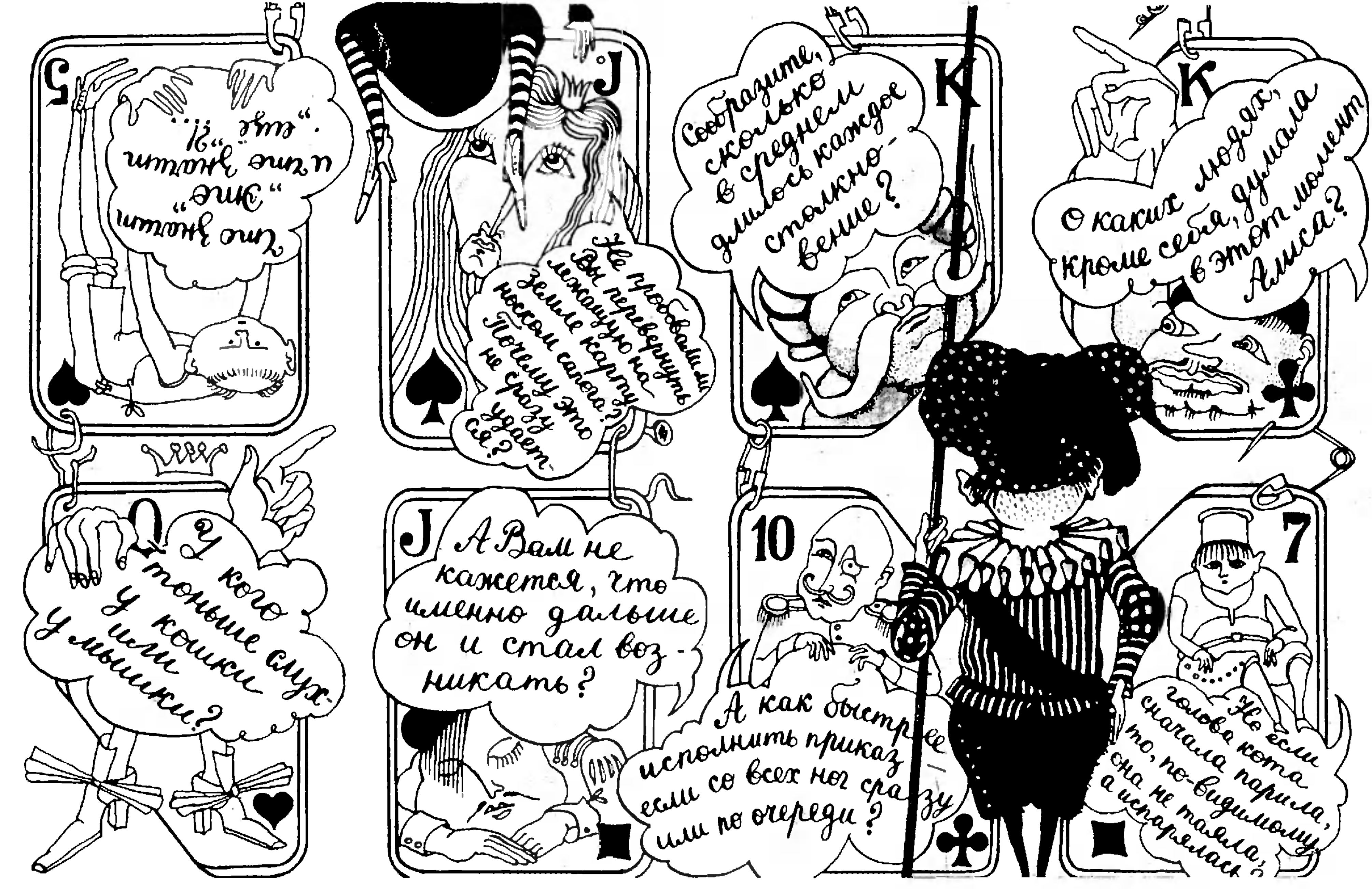
минуту сообразила. — Это Чеширский Кот, — сказала она про себя. — Вот хорошо! Будет с кем поговорить.
— Ну, как дела? — спросил Кот, как только рот его обозначился в воздухе. «Отвечать сейчас все равно бесполезно, — подумала она, — Подожду, пока появятся уши — или хотя бы одно!» Через минуту показалась вся голова. Кот, очевидно, решил, что головы вполне достаточно, и дальше возникать не стал.
— По-моему, они играют совсем не так, — проговорила Алиса. — Справедливости никакой. Правил нет, а если есть, то никто их не соблюдает. — С кем это ты разговариваешь? — спросил Король, подходя к Алисе и с любопытством глядя на парящую голову.
— Это мой друг, Чеширский Кот, — отвечала Алиса. — Он мне совсем не нравится, — заметил Король. — Впрочем, пусть поцелует мне руку, если хочет. — Особого желания не имею, — сказал Кот. — Не смей говорить дерзости, — пробормотал Король. — И не смотри так на меня. — Котам на королей смотреть не возбраня-

это кто еще?

она разрешила их спор. Они громко повторяли *свои доводы*, но так как все говорили разом, она никак не могла понять, в чем дело. Палач говорил, что нельзя отрубить голову, если кроме головы ничего больше нет. Он такого никогда не *делал и* делать не собирается. Стар он для этого, вот что! Король говорил, что раз есть голова, то ее можно отрубить. И нечего нести вздор! А Королева говорила, что если сию же минуту они не *примутся* за дело, она велит отрубить головы. Алиса не нашла ничего лучшего, как сказать: — Кот принадлежит Герцогине. Лучше бы посоветоваться с ней. — Она в тюрьме, — сказала Королева и повернулась к палачу. — Веди ее сюда! Палач со всех ног бросился исполнять приказ. Голова Кота начала медленно таять, так что, когда палач привел Герцогиню, ее уже не было видно.

переверни!


Почему Алиса решила, что это вход, а не выход?
Что легче — красить белые розы красной краской или красные — белой?
Почему, если толкнуть под локоть, то краска с кисти разбрызгается?
Если опрокинуть банку густой краски, то она растечется по земле кругами. Почему?
Какими ушами лучше слышать — своими или чужими, когда речь идет о: а) чужой голове б) своей?
По какому закону падает взгляд?
Разве могли головы плакать, если королева еще ничего не знала?


Что значит „это“ и что значит „ещё“?..
Не пробовали ли Вы перевернуть лежащую на земле карту носком сапога? Почему это не сразу удается?
Сообразите, сколько в среднем длилось каждое столкновение?
О каких модах, кроме себя, думала в этот момент Алиса?
У кого тоньше слух: у кошки или у мышки?
А Вам не кажется, что именно дальше он и стал возникать?
А как быстрее исполнить приказ — если со всех ног сразу или по очереди?
Не если голова кота сначала парила, то, по-видимому, она не таяла, а испарялась?

Победители конкурса «Задачник «Кванта»

Ежегодно наш журнал проводит конкурс среди школьников по решению задач из Задачника «Кванта». Ниже публикуются списки победителей конкурса «Задачник «Кванта» 1985 года. Награждаются Дипломом и значком журнала «Квант» и получают право участвовать сразу в четвертом (республиканском) туре Всесоюзной олимпиады 1986 года:

По математике

А. АКСЕНОВ — Великие Луки, с. ш. № 7, 9 кл.
М. АЛЕКСАНДРОВ — Москва, с. ш. № 542, 10 кл.
Я. АРГЕНТОВ — Алма-Ата, РОФМШ, 10 кл.
Я. ВАРШАВСКИЙ — Харьков, с. ш. № 27, 8 кл.
Т. ГАЗАРЯН — Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 10 кл.
Д. ГАМАРНИК — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 10 кл.
О. ГЕВОРКОВ — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 9 кл.
Р. ГЕНДЛЕР — Ташкент, с. ш. № 110, 9 кл.
Н. ГРИГОРЬЕВА — Андропов, с. ш. № 33, 10 кл.
А. ГРИГОРЯН — Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 10 кл.
А. ДАВТЯН — Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 10 кл.
Д. ДОБРИЦЫН — Москва, с. ш. № 91, 9 кл.
А. ДЫННИКОВ — Жуковский, с. ш. № 1, 10 кл.
Д. ЗАЙЦЕВ — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.
А. ИВАНОВ — Первомайск, с. ш. № 15, 10 кл.
С. ИСМАИЛОВ — Баку, ФМШ № 1, 10 кл.
В. КАПОВИЧ — Хабаровск, с. ш. № 2, 10 кл.
О. КИРНАСОВСКИЙ — Винница, с. ш. № 15, 8 кл.
А. КИСЕЛЕВ — Ленинград, с. ш. № 30, 10 кл.
А. КОНОНЕНКО — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.
Б. КРУГЛИКОВ — Харьков, с. ш. № 149, 9 кл.
М. КУРИННОЙ — Харьков, с. ш. № 27, 10 кл.
Н. КУШЛЕВИЧ — Москва, с. ш. № 91, 9 кл.
С. КЯРАС — Молетай, с. ш. № 2, 10 кл.
О. ЛИМЕШКО — Куйбышев, с. ш. № 16, 9 кл.
К. МАМУРОВ — Душанбе, с. ш. № 53, 10 кл.
В. МЕХРАБОВ — Баку, с. ш. № 20, 10 кл.
Г. МИХАЛКИН — Ленинград, с. ш. № 30, 10 кл.
М. МУНЬКИН — Алма-Ата, РОФМШ, 10 кл.
Д. МУРАЛАШВИЛИ — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 10 кл.
И. РАСКИНА — Витебск, с. ш. № 31, 10 кл.
М. РЗАЕВ — Баку, с. ш. № 94, 9 кл.
И. САМОВОЛ — Гайворон, с. ш. № 5, 9 кл.
Р. СИБИЛЕВ — Ленинград, с. ш. № 30, 10 кл.
И. СИМОНЕНКО — Великие Луки, с. ш. № 1, 10 кл.
Д. ТАМАРКИН — Горький, с. ш. № 17, 9 кл.
К. ТИЩЕНКО — Минск, с. ш. № 65, 10 кл.
Ю. ШАМРУК — д. Новый Двор Гродненской обл., 8 кл.
В. ЭПИКТЕТОВ — Алма-Ата, РОФМШ, 10 кл.

По физике

А. АБАНОВ — Красноярск, с. ш. № 170, 10 кл.
М. АХМЕДОВ — Сумгаит, с. ш. № 23, 10 кл.
К. БЕДОВ — Челябинск, с. ш. № 138, 10 кл.
А. БЕРЕНГОЛЬЦ — Кишинев, с. ш. № 3, 10 кл.
О. БЕСМАН — Алма-Ата, РОФМШ, 10 кл.
А. БЕСПАЛОВ — Тбилиси, с. ш. № 37, 10 кл.
А. БЫЦКО — Ленинград, с. ш. № 239, 9 кл.
А. ВОЛОШИН — Ивановка Кирг. ССР, с. ш. № 2, 10 кл.
А. ГАМАЮНОВ — Полтава, с. ш. № 6, 9 кл.
Б. ДОБРОВОЛЬСКИЙ — Тбилиси, с. ш. № 42, 10 кл.
А. ДОДА — Корсунь-Шевченковский, с. ш. № 4, 10 кл.
Д. ЕЖИКОВ — Минск, с. ш. № 32, 9 кл.
А. ЖАРИКОВ — Киев, с. ш. № 157, 10 кл.
К. ЗАХАРОВ — Фрунзе, с. ш. № 61, 10 кл.
Н. ЗАХАРОВА — Алма-Ата, РОФМШ, 10 кл.
Б. ЗИНГЕРМАН — Самарканд, с. ш. № 51, 10 кл.
С. ИВАНОВ — Уфа, с. ш. № 12, 10 кл.
В. КАЛАЦКИЙ — Солигорск, с. ш. № 2, 10 кл.
М. КЕЛЬМАНСОН — Москва, с. ш. № 47, 10 кл.
П. ЛУШНИКОВ — Москва, с. ш. № 47, 10 кл.
А. МАКСИМОВ — Ташкент, с. ш. № 110, 10 кл.
Ю. МАХЛИН — Москва, с. ш. № 57, 10 кл.
В. МЕЛИК-АЛАВЕРДЯН — Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 10 кл.
Г. НИКОЛАИШВИЛИ — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 10 кл.
И. ОБИЖАЕВ — Ташкент, с. ш. № 50, 10 кл.
А. ПАРЕЦКИЙ — Минск, с. ш. № 23, 10 кл.
С. РАХАМОВ — Казань, с. ш. № 131, 10 кл.
А. РОЗЕНВАЙН — Киев, с. ш. № 206, 9 кл.
Е. РОЗНОЩИК — Киев, с. ш. № 206, 9 кл.
С. РОСЯ — Минск, с. ш. № 76, 10 кл.
Р. САДЫКОВ — Фрунзе, с. ш. № 61, 10 кл.
В. ТАРНЕЦКИЙ — Алма-Ата, РОФМШ, 10 кл.
С. ТУЖАНСКИЙ — Винница, с. ш. № 33, 10 кл.
Р. УЛЬМАСОВ — Душанбе, с. ш. № 8, 10 кл.
Г. ФИНКЕЛЬШТЕЙН — п. Черноголовка Моск. обл., с. ш. № 82, 9 кл.
Г. ШВЕЦ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
А. ШУЛЯК — Черкасская обл., Молодецкая с. ш., 9 кл.

(Окончание см. на с. 59)

задачник Кванта

Задачи

М971 — М975; Ф983 — Ф987

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 мая 1986 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3 — 86» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М971, М972» или «Ф983». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. Фамилию, имя и отчество пишите печатными буквами. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М971. Восемь волейбольных команд провели турнир в один круг (каждая сыграла с каждой один раз). Докажите, что можно выбрать из них такие четыре команды A, B, C, D, что A выиграла у B, C и D, B выиграла у C и D, C выиграла у D.

А. Т. Украинцев

М972. Последовательность x_1, x_2, ... задается условиями $x_1=\frac{1}{2}$, $x_{n+1}=x_n^2+x_n$ ($n=1, 2, \ldots$). Найдите целую часть числа

$$\frac{1}{x_1+1}+\frac{1}{x_2+1}+\ldots+\frac{1}{x_{100}+1}.$$

А. А. Анджанс

М973. В треугольнике ABC проведены высота AH и биссектриса BE. Докажите, что если $\angle BEA=45^\circ$, то и $\angle EHC=45^\circ$.

И. Ф. Шарыгин

М974. Двое играют в шахматы с часами. После того как оба сделали по 40 ходов, часы обоих показывали 2 часа 30 минут.

а) Докажите, что в партии был момент, когда часы одного обгоняли часы другого более чем на 1 минуту 50 секунд.

б) Можно ли утверждать, что в некоторый момент разница показаний часов была не менее 2 минут?

С. В. Фомин

М975. На «шахматной доске» размером $n\times n$ стоит 20 различных фигур. Известно, что каждая фигура с любого поля бьет не более 20 полей.

а) Докажите, что при $n=100$ эти фигуры можно переставить так, чтобы они не били друг друга.

б) Пусть дополнительно известно, что если фигуру сдвинуть, то множество полей, которые она бьет, тоже параллельно сдвинется (на тот же вектор). Докажите, что при $n=30$ эти 20 фигур можно переставить так, чтобы они не били друг друга.

А. К. Толпыго

Ф983. На шероховатом столе лежит брусок массой $m=1$ кг; коэффициент трения покоя бруска о стол $\mu_0=1$ Н/м, коэффициент трения скольжения $\mu=0{,}9$ Н/м. К бруску прикреплена пружина жесткостью $k=1$ Н/м. Пружину начинают тянуть в горизонтальном направлении так, что ее свободный конец движется с постоянной скоростью v (рис. 1). Как будет двигаться брусок?

И. И. Мазин

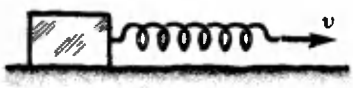


Рис. 1.

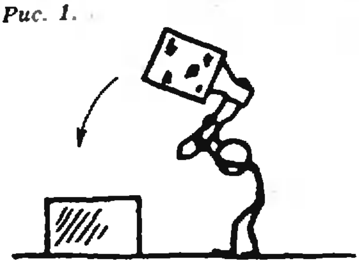


Рис. 2.

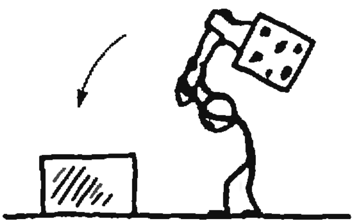


Рис. 3.

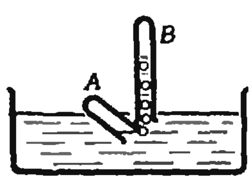


Рис. 4.

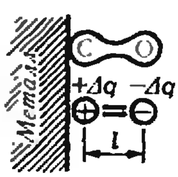


Рис. 5.

Ф984. При колке дров топор иногда застревает в расщелине полена. В таких случаях дальше колют либо так, как показано на рисунке 2, либо — как на рисунке 3. Какой способ более эффективен?

Т. С. Петрова

Ф985. В сосуд, заполненный жидким эфиром, погружают перевернутую пробирку *А*. Из нее сразу же начинают выходить пузырьки. Пузырьки «собирают» в первоначально полностью заполненную эфиром пробирку *В* (рис. 4), длина которой в два раза больше, чем длина пробирки *А*. При этом из пробирки *В* вытесняется $\frac{2}{3}$ первоначального объема эфира. Температура в комнате поддерживается равной 20 °С, давление равно нормальному атмосферному. Объясните происходящее явление и определите по имеющимся в задаче данным давление насыщенных паров эфира при указанной температуре.

А. И. Буздин

Ф986. Две хорошо очищенные пластины, платиновая и вольфрамовая, находятся в вакууме, образуя плоский конденсатор. Пространство между ними заполняют окисью углерода СО. Определите возникающую при этом разность потенциалов между пластинами. Считайте, что молекулы СО осаждаются на поверхности металла с образованием химической связи углерод — металл; молекула СО представляет собой диполь (рис. 5), $|\Delta q|\cdot l = 3{,}3\cdot 10^{-31}$ Кл·м.

Е. Н. Юносов, И. В. Яминский

Ф987. На картине И. Левитана «Март» (см. с. 8 и 1-ю с. обложки) тени на снегу, отбрасываемые деревьями в ясный солнечный день, голубого цвета. Не правильнее ли (с физической точки зрения) было нарисовать их темными бесцветными (черными или серыми)?

А. С. Бутов

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later that May 15th.

Problems

M971—M975; P983—P987

M971. Eight volleyball teams took part in a round robin tournament (each team playing once with each). Prove that it is possible to choose four teams *A*, *B*, *C*, *D* among the eight so that *A* has defeated *B*, *C* and *D*, *B* has defeated *C* and *D*, *C* has defeated *D*.

A. T. Ukraintsev

M972. The sequence x_1, x_2, ... is defined by the conditions $x_1 = 1/2$, $x_{n+1} = x_n^2 + x_n$ ($n = 1, 2, \ldots$). Find the integer part of the number

$$\frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \ldots + \frac{1}{x_{100}+1}.$$

A. A. Andjans

M973. In triangle *ABC*, *AH* is an altitute and *BE* a bissector. Prove that $\angle BEA = 45°$ implies $\angle EHC = 45°$.

I. F. Sharygin

M974. Two players played a chess game, using a standard (double) time-punching clock. After both had made 40 moves, both clocks showed 2 hours 30 minutes.

1986 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

a) Prove that at some stage of the game one of the clocks was more than 1 min. 50 sec. ahead of the other.
b) Can we claim that at some stage the difference between the showings of the clocks was necessarily no less than 2 minutes?

S. V. Fomin

M975. 20 different chess pieces stand on an n by n «chessboard». It is known that each piece, wherever it is located, attacks no more than 20 positions.
a) Prove that all 20 pieces can be placed on a 100 by 100 chessboard without attacking each other.
b) Now suppose that whenever a piece is displaced, the set of positions attacked by it undergoes parallel translation (with the same displacement vector). Prove that these 20 pieces can be placed on a 30 by 30 board without attacking each other.

A. K. Tolpygo

P983. A solid of mass 1 kg is placed on the rough surface of a table; the friction coefficient of the solid (at rest) against the table is $\mu_0 = 1\ N/m$, the sliding friction coefficient is $\mu = 0.9\ N/m$. A spring of rigidity $k = 1\ N/m$ is tied to the solid. The spring is pulled in the horizontal direction so that its free extremity moves with constant velocity v (see figure Рис. 1). How will the solid move?

I. I. Mazin

P984. In the process of splitting logs for firewood, the ax sometimes gets stuck in the log. One can then try to split the log either as shown on figure Рис. 2, or as shown on figure Рис. 3. Which is more efficient?

T. S. Petrova

P985. A test tube A is immersed upside down in a vessel filled with liquid ether. Little bubbles immediately begin to come out of it and are «gathered» in the test tube B (originally filled with ether) whose length is twice that of A (see figure Рис. 4). As a result, 2/3 of the volume of ether originally contained in test tube B is forced out. The temperature in the room is maintained at 20 °C, the pressure is normal atmospheric. Explain the phenomenon described above and use the data of the problem to determine the pressure of saturated vapors of ether at the temperature indicated above.

A. I. Buzdin

P986. Two plates with well finished surfaces, made of platinum and wolfram and placed in vacuum, constitute a plane capacitor. The space between them is filled with carbon monoxide CO. Determine the difference of potential between the plates. You may assume that the CO molecules deposited upon the plates form a chemical bond of the carbonmetal type; each CO molecule is a dipole (see figure Рис. 5), $|\Delta q| \cdot l = 3.3 \cdot 10^{-31}$ C· m.

E. N. Yunosov, I. V. Yaminski

P987. On I. Levitan's famous painting «March» (see the front cover and p. 8) the shadows under the trees on the snow on a clear sunny day are painted blue. Is this correct (from the point of view of physics), or should they have been painted in colourless tones (black or gray)?

A. S. Butov

Решения задач

M951 — M955; Ф963 — Ф967

M951. *Все стороны выпуклого шестиугольника ABCDEF равны 1. Докажите, что радиус описанной окружности одного из треугольников ACE и BDF не меньше 1.*

Обозначим радиусы описанных окружностей треугольников BDF и ACE через r и r_1; условимся, что $r \geqslant r_1$.

Доказательство поведем от противного. Пусть $r < 1$ (значит, и $r_1 < 1$). Оценим сумму углов шестиугольника. Поскольку равнобедренные треугольники ABF и OBF, где O — центр описанной окружности треугольника BDF, имеют общее основание BF и при этом $AB = 1 > OB = r$, угол при вершине

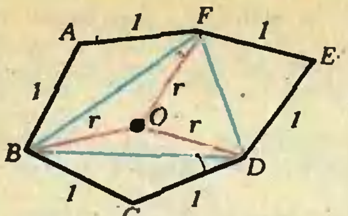


Рис. 1.

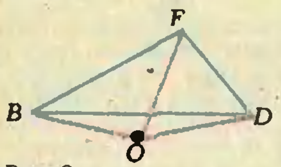


Рис. 2.

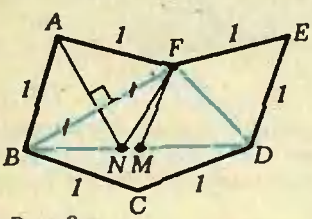


Рис. 3.

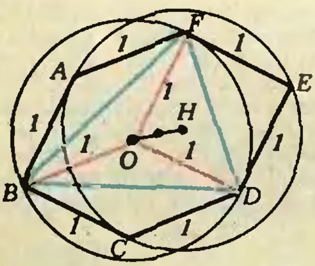


Рис. 4.

у первого треугольника меньше: $\angle A < \angle FOB$. Аналогично, $\angle C < \angle BOD$, $\angle E < \angle DOF$. Следовательно,

$$\angle A + \angle C + \angle E < \angle FOB + \angle BOD + \angle DOF, \quad (*)$$

а сумма в правой части (*) или равна 2π (когда треугольник BDF остро- или прямоугольный; рис. 1), или меньше (когда этот треугольник тупоугольный; рис. 2). Точно так же доказывается, что $\angle B + \angle D + \angle F < 2\pi$ (поскольку $r_1 < 1$), и поэтому сумма всех углов шестиугольника меньше 4π, что невозможно. Таким образом, $r \geqslant 1$.

Справедливо и более сильное утверждение: в наших обозначениях либо $r > 1 > r_1$, либо $r = r_1 = 1$. Для доказательства прежде всего покажем, что треугольники ACE и BDF остроугольные. Допустим, например, что угол BFD не острый. Тогда точка F лежит в круге с диаметром BD, то есть $MF \leqslant MB$, где M — середина BD (рис. 3). Следовательно, точка N пересечения серединного перпендикуляра к BF с отрезком BD лежит между B и M. Равнобедренные треугольники BFA и BFN имеют общее основание BF и при этом $BN \leqslant BM < 1 = BA$ (так как $2BM = BD < BC + CD = 2$), поэтому $\angle AFB > \angle FBD$. Аналогично, $\angle DFE > \angle FDB$. Но тогда угол шестиугольника при вершине F больше π ($\angle F = \angle AFB + \angle BFD + \angle DFE > \angle FBD + \angle BFD + \angle FDB = \pi$), а это противоречит выпуклости шестиугольника.

Тем самым доказано, что правая часть в неравенстве (*) равна 2π и, рассуждая так же, как выше, мы получим, что $r_1 \leqslant 1$ (иначе сумма всех углов шестиугольника оказалась бы больше 4π).

Наконец, если один из радиусов, скажем r, равен 1, то, очевидно, точки A, C и E симметричны центру O описанной окружности треугольника BDF относительно его сторон (рис. 4). Отсюда легко вывести, что $\triangle ACE = \triangle DFB$, значит, и $r_1 = 1$. (Более того, в этом случае треугольники ACE и DFB симметричны относительно середины отрезка OH, где H — точка пересечения высот треугольника BDF, так что противоположные стороны шестиугольника параллельны.)

Е. Хорват, В. Н. Дубровский

M952. *Обозначим через $\{x\}$ дробную часть числа x: $\{x\} = x - [x]$, где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x.*

а) Приведите пример числа a такого, что

$$\{a\} + \{1/a\} = 1.$$

б) Докажите, что такое число a не может быть рациональным.

◆

а) Ответ: один из примеров — $a = 2 + \sqrt{3}$. Действительно, поскольку $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$,

$$\{a\} + \{1/a\} = (\sqrt{3} - 1) + (2 - \sqrt{3}) = 1.$$

Вообще, годится любое число вида $n \pm \sqrt{n^2 - 1}$, где n — целое и больше 1.

б) Допустим, что число a рационально и представим его в виде несократимой дроби: $a = m/n$. Если $\{a\} + \{1/a\} = 1$, то очевидно, $a + 1/a$ — это целое число; обозначим его через k. Итак, $m/n + n/m = k$, то есть $m^2 + n^2 = kmn$. Отсюда следует, что m^2 делится на n, а n^2 — на m, а поскольку m и n взаимно просты, это возможно лишь при $|m| = |n| = 1$, то есть при $a = \pm 1$. Но в этом случае $\{a\} + \{1/a\} = 0$. Следовательно, рассматриваемое уравнение не имеет рациональных решений.

И. Варга

M953. *На плоскости даны шесть точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Проводятся все 15 прямых, соединяющих по-*

◆

Ответ: 10 точек. Пример расположения с 10 точками тройного пересечения прямых показан на рисунке 1: за исходные 6 точек здесь берутся вершины и центр правильного пятиугольника.

парно эти точки. Каково наибольшее число точек (отличных от данных), в которых пересекаются 3 из этих 15 прямых?

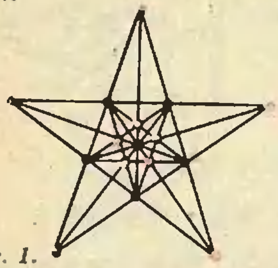


Рис. 1.

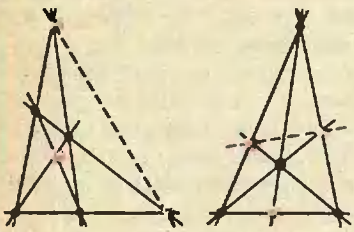


Рис. 2.

Покажем теперь, что на каждой из 15 рассматриваемых прямых лежит не более двух точек тройного пересечения (отличных от данных), то есть что общее их число не превосходит $(15 \cdot 2):3=10$ (при подсчете учитывается, что каждая из этих точек лежит на трех прямых).

Заметим, что 6 прямых, попарно соединяющих любые 4 из данных точек, пересекаются по две в трех точках (если среди этих прямых нет параллельных), причем *эти три точки не могут лежать на одной прямой* (рис. 2). Поэтому на прямой, соединяющей две оставшиеся точки, могут лежать самое большее две точки тройного пересечения, что и требовалось доказать.

Выделенное курсивом утверждение нетрудно доказать строго, пользуясь тем, что прямая, не проходящая через вершины треугольника и пересекающая одну из его сторон, пересекает ровно одну другую сторону *). Интересно, что в некоторых неевклидовых геометриях это утверждение принимают за аксиому («аксиома Фано»), а в некоторых геометриях оно и вовсе не выполняется.

В. В. Прасолов

М954. *а) В треугольник вписан прямоугольник со сторонами a и b так, что все его вершины лежат на сторонах треугольника. Пусть a_1 и b_1 — длины проекций треугольника на прямые, параллельные сторонам a и b прямоугольника. Докажите равенство*

$$\frac{a}{a_1}+\frac{b}{b_1}=1.$$

б) В произвольный тетраэдр вписан прямоугольный параллелепипед с ребрами a, b и c так, что все его вершины лежат на поверхности тетраэдра. Пусть a_1, b_1 и c_1 — длины проекций тетраэдра на прямые, параллельные ребрам a, b и c. Докажите равенство

$$\frac{a}{a_1}+\frac{b}{b_1}+\frac{c}{c_1}=1.$$

◆

а) Очевидно, на одной из сторон треугольника должны лежать две соседние вершины прямоугольника, а на двух других сторонах — еще по вершине (рис. 1). В обозначениях рисунка 1 из гомотетичности треугольников ABC и NMC, ACD и ANK получаем

$$\frac{a}{a_1}+\frac{b}{b_1}=\frac{NM}{AB}+\frac{KN}{DC}=\frac{NC}{AC}+\frac{AN}{AC}=1.$$

Поясним подробнее равенство $a_1=AB$, имея в виду, что в задаче б) аналогичные утверждения не столь очевидны. Проекция точки C на прямую AB лежит на отрезке AB (иначе одна из точек K и L — проекций N и M на AB — должна была бы лежать вне этого отрезка); следовательно, проекция треугольника на прямую $KL=AB$ совпадает с его стороной AB.

б) Ясно, что на одной грани тетраэдра может лежать либо целая грань параллелепипеда, либо одно его ребро, либо одна вершина, либо вовсе ни одной (впрочем, последнее, как мы увидим далее, невозможно). Рассмотрим два случая.

1) Пусть *какая-то грань $KLMN$ параллелепипеда лежит на грани ABC данного тетраэдра $ABCD$.* Тогда параллельная грань $K'L'M'N'$ вписана в сечение $A'B'C'$ тетраэдра плоскостью этой грани (рис. 2). Пусть $KL=a$, $KN=b$, $KK'=c$. Поскольку проекция E вершины D на плоскость ABC лежит в треугольнике ABC (иначе одна из точек K, M, N должна была бы лежать вне его), проекции a_1 и b_1 тетраэдра на прямые KL и KN совпадают с проекциями грани ABC на эти прямые. Проекция же c_1 тетраэдра на прямую KK', очевидно, равна его высоте DE. Треугольник $A'B'C'$ гомотетичен треугольнику ABC с центром D и коэффициентом $k=DE'/DE=(c_1-c)/c_1=1-c/c_1$ (E' — точка пересечения DE и плоскости $A'B'C'$), следовательно, проекции треугольника $A'B'C'$ на $K'L'$ и $K'N'$

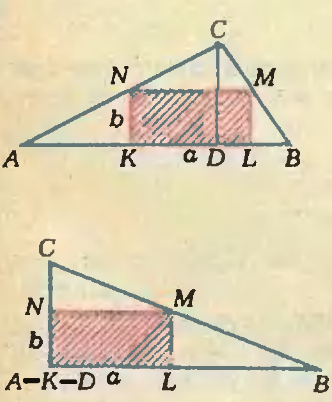


Рис. 1.

*) См. учебник А. В. Погорелова «Геометрия 6—10» (теорема 1. 2).

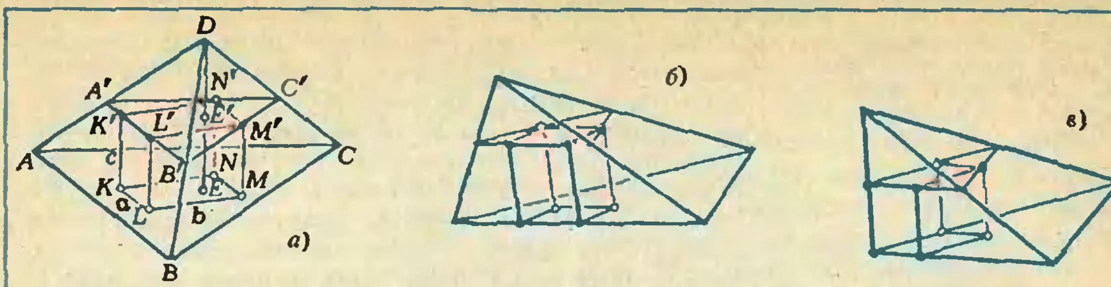


Рис. 2. Показанные здесь три возможных случая рассматриваются совершенно одинаково.

равны ka_1 и kb_1 и в силу задачи а)

$$\frac{a}{a_1}+\frac{b}{b_1}+\frac{c}{c_1}=k\left(\frac{a}{ka_1}+\frac{b}{kb_1}\right)+\frac{c}{c_1}=k+\frac{c}{c_1}=1.$$

2) Пусть *ни одна из граней параллелепипеда не лежит целиком в грани тетраэдра*. Тогда на каждой грани тетраэдра должно лежать по две вершины параллелепипеда, то есть по одному ребру. Легко понять, что среди этих четырех ребер два, скажем KL и MN, обязательно лежат в одной грани параллелепипеда и параллельны, а два других — $K'N'$ и $L'M'$ — в противоположной грани и перпендикулярны первым двум. Поэтому общее ребро AB граней тетраэдра, содержащих отрезки KL и MN, параллельно им, а противоположное ребро тетраэдра CD параллельно $K'N'$ и $L'M'$ (и перпендикулярно AB; рис. 3).

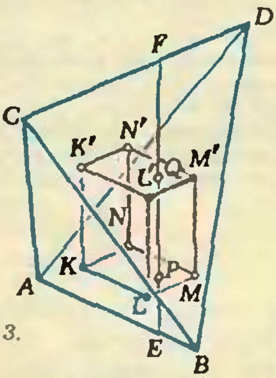


Рис. 3.

Пусть EF — общий перпендикуляр прямых AB и CD, P и Q — точки его пересечения с плоскостями KLM и $K'L'M'$. Проекция c_1 тетраэдра на KK', очевидно, равна EF, а его проекции a_1 и b_1 на прямые AB и CD (которые параллельны KL и KN) совпадают с проекциями треугольника ABF на AB и CDE на CD. Рассмотрим проекции наших многогранников на плоскости ABF (рис. 4, *а*) и CDE (рис. 4, *б*). Рассуждая так же, как в конце пункта а), убеждаемся, что точка E лежит между A и B, а F — между C и D. Следовательно, $a_1=AB$, $b_1=CD$. Теперь, пользуясь гомотетичностью треугольников на рисунках 4, *а* и 4, *б*, получаем

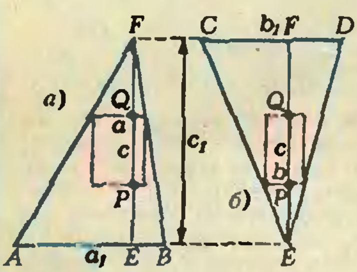


Рис. 4.

$$\frac{a}{a_1}+\frac{b}{b_1}+\frac{c}{c_1}=\frac{FQ}{FE}+\frac{PE}{FE}+\frac{PQ}{FE}=1.$$

Утверждение задачи справедливо и для произвольного параллелепипеда, вписанного в тетраэдр, если под a_1, b_1, c_1 понимать длины параллельных проекций тетраэдра на ребра a, b, c параллелепипеда вдоль плоскостей соответствующих граней параллелепипеда.

В. Н. Дубровский

◆

М955. *За круглым столом сидят n участников «безумного чаепития». Каждую минуту одна пара соседей меняется местами. Через какое наименьшее время все участники чаепития могут оказаться сидящими в противоположном порядке (так что левые соседи у всех станут правыми и наоборот)? Решите эту задачу: а) для $n=4$, 5 и 6; б) для любого $n\geqslant 3$.*

а), б) Ответ: пусть t_n — искомое наименьшее время (в минутах), тогда $t_{2k}=k^2-k$, $t_{2k+1}=k^2$; в частности, $t_4=2$, $t_5=4$, $t_6=6$.

Докажем, что при $n\geqslant 4$

$$t_n\geqslant t_{n-1}+\left[\frac{n-1}{2}\right] \qquad (1)$$

($[a]$ — целая часть числа a). Представим, что участники чаепития сидят в вершинах правильного n-угольника. Тогда их итоговое расположение получается из исходного симметрией относительно некоторой оси. Пусть A — один из участников, наиболее удаленных от оси, B — симметричный ему. Кратчайший путь от A к B по границе много-

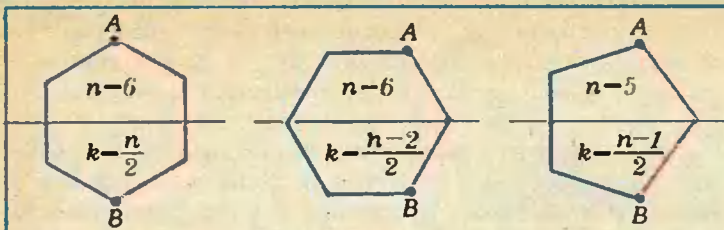


Рис. 1.

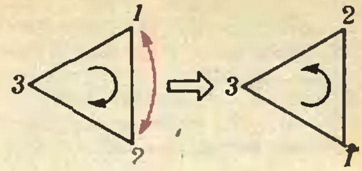


Рис. 2.

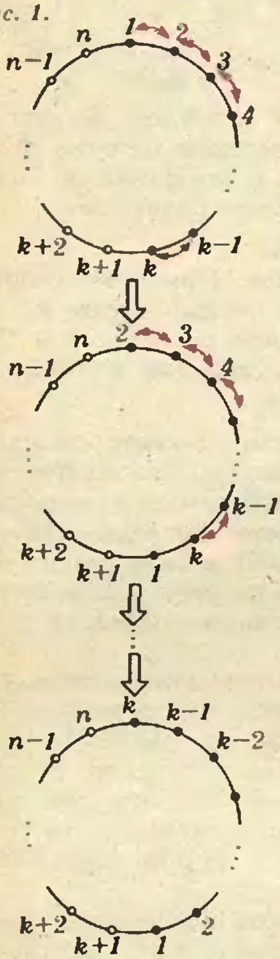


Рис. 3.

угольника (красная ломаная на рисунке 1) содержит $k \geqslant [(n-1)/2]$ сторон (см. рис. 1), поэтому A должен пройти по пути к B не менее k сторон, то есть сделать не менее k пересаживаний. Но при этих пересаживаниях порядок взаимного расположения остальных $n-1$ участников не меняется и им нужно сделать еще по меньшей мере t_{n-1} пересаживаний между собой, чтобы разместиться в противоположном порядке, откуда и следует (1).

Поскольку $t_3=1$ (рис. 2), из оценки (1) получаем, что

$$t_{2k} \geqslant 1+\left[\frac{3}{2}\right]+\left[\frac{4}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{2k-1}{2}\right]=$$
$$=2(1+2+\ldots+(k-1))=k^2-k, \qquad (2)$$
$$t_{2k+1} \geqslant 1+\left[\frac{3}{2}\right]+\ldots+\left[\frac{2k-1}{2}\right]+\left[\frac{2k}{2}\right]=k^2. \qquad (3)$$

Покажем, что найденного здесь числа пересаживаний достаточно, то есть знак $\geqslant$ в (2) и (3) можно заменить на знак $=$. Занумеруем участников чаепития по порядку от 1 до n и разобьем их на две группы — от 1-го до k-го и от $(k+1)$-го до n-го. Чтобы поменять порядок в первой группе, пересадим последовательно 1-го участника со 2-м, 3-м, ..., k-м, затем 2-го — с 3-м, 4-м, ..., k-м и т. д. (рис. 3). На это уйдет $(k-1)+(k-2)+\ldots+1=$ $=(k^2-k)/2$ пересаживаний. Аналогично, за $(n-k)(n-k-1)/2$ пересаживаний мы получим обратный порядок во второй группе. Всего при $n=2k$ или $n=2k+1$ (то есть $k=[(n+1)/2]$ надо будет произвести k^2-k или k^2 пересаживаний, соответственно.

Приведем идею другого вывода оценок (2) и (3). Заметим, что из любых трех участников чаепития хотя бы двое должны поменяться местами (иначе их порядок сохраняется). Соединим двух участников отрезком, если им ни разу не приходилось пересаживаться друг с другом. Мы получим набор отрезков с концами в n точках (или, как говорят, *граф с n вершинами*). В силу сделанного замечания, эти отрезки (*ребра графа*) не образуют ни одного треугольника. Нетрудно доказать по индукции, что граф с n вершинами без треугольников содержит не более $[n^2/4]$ ребер (это частный случай так называемой теоремы Турана; доказательство для четного n было дано в решении задачи М934а в «Кванте» № 11 за 1985 г.). Следовательно, количество пар участников, которые хотя бы раз пересаживались друг с другом, не меньше $n(n-1)/2-[n^2/4]$, что, как легко проверить, совпадает с правой частью (2) или (3) — в зависимости от четности n.

В. Б. Алексеев, В. Н. Дубровский

Ф963. *Плоскости P и Q пересекаются под прямым углом и плоскость P составляет угол α с горизонтом (рис. 1). Из некоторой точки A пространства*

◆

Свободное падение шарика из точки A на плоскость P и дальнейшее его движение по параболическим траекториям удобно представить как суперпозицию движений в двух взаимно перпендикуляр-

на плоскость P свободно падает маленький шарик. Соударения шарика с плоскостями абсолютно упругие. При каком условии шарик вновь окажется в точке A? Изобразите одну из возможных траекторий возвращения.

ных направлениях — вдоль осей X и Y (см. рис. 1). «Составляющие» движения будут равноускоренными с $v_{0x}=v_{0y}=0$ и с ускорениями $g_x=g\sin\alpha$ и $g_y=g\cos\alpha$. Упругие удары шарика о плоскости P и Q делают эти движения периодическими. Обозначим расстояния от точки A до плоскостей Q и P через l и h; времена прохождения этих расстояний («туда» или «обратно») —

$$\tau_x=\sqrt{\frac{2l}{g\sin\alpha}},\quad \tau_y=\sqrt{\frac{2h}{g\cos\alpha}}.$$

Возврат шарика в точку A будет реализован при одновременном его появлении в точке A как в движении по оси X, так и в движении по оси Y, то есть если будет соблюдаться равенство

$$\tau_x=k\tau_y,$$

где k — рациональное число. При этом условии всегда найдутся некоторые четные числа m и n, равные «числу ходов» шарика по осям X и Y от начала движения до его появления в точке A:

$$m\tau_x=n\tau_y.$$

Найдем реальную траекторию, по которой шарик сможет опять попасть в точку A. Используя соотношения отрезков путей, проходимых в равноускоренном движении за равные последовательные интервалы времени (при $v_0=0$), можно графически точно показать места ударов шарика о плоскость P и точки касания его траектории (отрезков парабол) оси X.

На рисунке 1 траектория спуска от точки A до удара о плоскость Q показана синим цветом. Возврат в точку A возможен лишь в том случае, если шарик после «отражения» от плоскости Q где-то опять «сядет» на эту же траекторию и будет двигаться по ней «вверх». Никакая другая траектория не приведет шарик в точку A (в той точке обязательно $v_x=v_y=0$).

В частности, если плоскость Q шарик встретит на линии A_1B_1 ($m=2$, $n=2$), или на линии A_2B_2 ($m=2$, $n=4$), или на A_3B_3 ($m=2$, $n=6$) и т. д., то он сразу же после упругого удара окажется на синей траектории и обязательно вернется в точку A.

Теперь обратим внимание на красную траекторию на рисунке 1. Если после отражения от плоскости Q шарик попадает на эту траекторию, то, двигаясь по ней «вверх», он в точке B отразится от

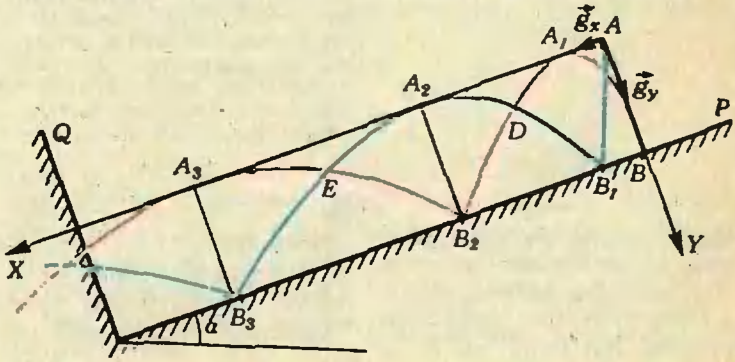


Рис. 1.
$|AA_1|:|A_1A_2|:|A_2A_3|=$
$=|BB_1|:|B_1B_2|:|B_2B_3|=$
$=1:3:5.$

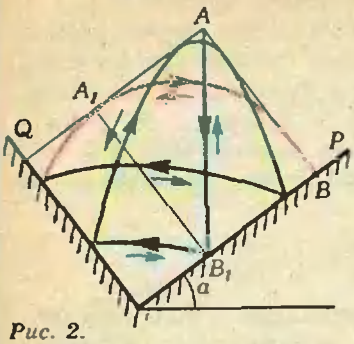


Рис. 2.

плоскости P, вновь окажется на этой же траектории и пойдет по ней в обратную сторону (красная траектория отвечает движению шарика, брошенного из точки B со скоростью v_0 такой, что $v_{0y}=\sqrt{2gh}\cos\alpha$, $v_{0x}=0$).

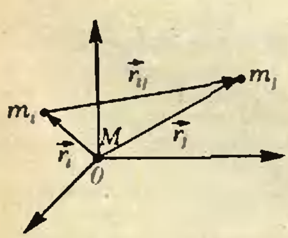
В точках пересечения красной и синей траекторий $|\vec{v}_{x1}|=|\vec{v}_{x2}|$ и $|\vec{v}_{y1}|=|\vec{v}_{y2}|$ согласно закону сохранения энергии, и становится понятным, что если в одной из этих точек (в точке D или в точке E) окажется плоскость Q, то шарик с синей траектории в этой точке «пересядет» на красную траекторию, пройдет по ней до точки B и обратно до плоскости Q и, вторично «пересев» на синюю траекторию, вернется в точку A. При этом для точки D $m_D=4$, $n_D=6$; для точки E $m_E=4$, $n_E=10$.

Но в общем случае пересадки с синей траектории на красную и обратно должны осуществляться через «промежуточные параболы» (они на рисунке 2 показаны зеленым цветом), причем какая-то из них, имея касание с осью X, будет обязательно иметь касание с осью Y. (На рисунке 2 приведена вся траектория движения шарика при $m=8$ и $n=10$.)

Если k — иррациональное число, на плоскости Q зеленые параболы никогда не пересекутся с красной, и шарик никогда не окажется в точке A.

Г. С. Лапидус

Ф964. *Материальные точки образуют замкнутую систему. Между любыми двумя точками системы действует сила притяжения, равная $\vec{F}_{ij}=km_im_j\vec{r}_{ij}$, где m_i, m_j — массы точек, $|\vec{F}_{ij}|$ — сила, действующая на точку i со стороны точки j, $|\vec{r}_{ij}|$ — расстояние между точками (рис. 1), k — постоянный коэффициент. В начальный момент все частицы покоятся. Докажите, что через некоторое время все точки столкнутся. Определите это время, если известны масса всей системы $M=\sum\limits_j m_j$ и коэффициент k.*



◆

Докажем, что частицы одновременно столкнутся в центре масс системы.

По определению центра масс радиус-вектор $\vec{r}$, проведенный из начала координат в центр масс, есть

$$\vec{r}=\sum_j m_j\,\vec{r}_j/M, \qquad (1)$$

где $\vec{r}_j$ — радиус-вектор, проведенный из начала координат в точку с массой m_j.

Поместим начало координат в центр масс системы. Тем самым мы положим $\vec{r}=\vec{0}$. Но согласно (1) это означает, что $\sum\limits_j m_j\vec{r}_j=\vec{0}$. (Это равенство мы в дальнейшем используем.)

Сила, действующая на i-ю точку со стороны точки j, может теперь быть выражена так:

$$\vec{F}_{ij}=km_im_j\vec{r}_{ij}=km_im_j(\vec{r}_j-\vec{r}_i).$$

Со стороны всех точек системы на i-ю точку действует сила

$$\vec{F}_i=km_i\sum_j m_j(\vec{r}_j-\vec{r}_i)=km_i\sum_j m_j\vec{r}_j-km_i\sum_j m_j\vec{r}_i=$$

$$=\vec{0}-km_i\vec{r}_i\sum_j m_j=-km_iM\vec{r}_i \qquad (2)$$

(мы учли, что $\sum\limits_j m_j\vec{r}_j=0$). Перепишем (2) в виде $\vec{F}_i=-\alpha_i\vec{r}_i$, или в скалярной форме

$$F_i=-\alpha_i r_i, \text{ где } \alpha_i=kMm_i.$$

Мы видим, что каждая точка движется так, как если бы она была соединена с центром масс системы пружиной жесткостью $\alpha_i=kMm_i$, и в нерастянутом состоянии длина пружины нулевая.

Так как в начальный момент все точки покоились (и пружины при этом были растянуты), в дальнейшем каждая точка будет двигаться прямолинейно по направлению к центру масс. Время, за которое точка i дойдет до центра масс, — это четверть периода колебаний груза массой m_i на пружине жесткостью α_i:

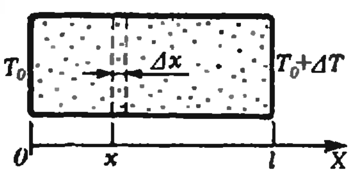
$$t_i = \frac{T_i}{4} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m_i}{\alpha_i}} = \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{kM}}.$$

Как видно, t_i не зависит от параметров конкретной точки; следовательно, все частицы одновременно придут в центр масс через время $\frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{kM}}$.

А. Г. Самосват

◆

Ф965. *Длинный цилиндрический сосуд наполнен идеальным газом до давления p_0. Сначала температура цилиндра поддерживается постоянной и равной T_0. Затем температуру одной из торцевых стенок сосуда повышают на ΔT, а температура противоположной стенки остается прежней. Найти установившееся давление в сосуде и положение центра масс газа. Считать, что $\Delta T \ll T_0$.*



После установления равновесия в разных местах сосуда давление газа будет одним и тем же, а температура будет различной: больше вблизи более теплой стенки и меньше — у противоположной. Если $\Delta T \ll T_0$, то можно считать, что температура меняется по линейному закону

$$T(x) = T_0\left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\frac{x}{l}\right)$$

(см. рисунок). Мысленно разобьем сосуд на тонкие слои толщиной Δx такие, что в пределах каждого слоя можно считать температуру газа постоянной. Для газа в каждом таком слое выполняется условие

$$p = n(x)\cdot k\cdot T(x),$$

где p — давление в сосуде, k — постоянная Больцмана, $n(x)$ — объемная концентрация газа в данном слое. Видно, что концентрация тоже зависит от x

$$n(x) = \frac{p}{kT_0\left(1 + \frac{\Delta T}{T_0}\frac{x}{l}\right)} \approx \frac{p}{kT_0}\left(1 - \frac{\Delta T}{T_0}\frac{x}{l}\right)$$

(мы воспользовались приближенным равенством $\frac{1}{1+\alpha} \approx 1 - \alpha$ при $\alpha \ll 1$) и по линейному закону меняется от $n_0 = \frac{p}{kT_0}$ у «холодной» стенки до $n_l = \frac{p}{kT_0}\left(1 - \frac{\Delta T}{T_0}\right)$ у «теплой». Среднее значение концентрации

$$n_{\text{ср}} = \frac{n_0 + n_l}{2} = \frac{p}{kT_0}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T_0}\right).$$

Выразим через $n_{\text{ср}}$ полное число молекул в сосуде:

$$N = Sln_{\text{ср}} = \frac{pSl}{kT_0}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T_0}\right) \qquad (1)$$

(S — площадь торца цилиндра). С другой стороны,

$$N = Sln_0 = \frac{p_0 Sl}{kT_0}, \qquad (2)$$

где n_0 — концентрация газа в сосуде при p_0, T_0. Из (1) и (2) находим давление в сосуде при установившемся равновесии:

$$p=\frac{p_0}{\left(1-\frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T_0}\right)}\approx p_0\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T_0}\right).$$

Теперь найдем положение центра масс газа:

$$x_{ц.м}=\frac{S}{N}\int_0^L dx\cdot x\cdot n(x)=$$

$$=L\left(1+\frac{1}{2}\frac{\Delta T}{T_0}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\frac{\Delta T}{T_0}\right)\approx L\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{12}\frac{\Delta T}{T_0}\right).$$

Таким образом, центр масс сместился в сторону более холодной стенки на

$$\Delta l=\frac{1}{12}\frac{\Delta T}{T_0}L.$$

Смещение центра масс кажется на первый взгляд парадоксальным, однако естественно объясняется взаимодействием молекул газа со стенками сосуда. Дело в том, что в процессе установления равновесия изменение импульса молекул, сталкивающихся с более теплой стенкой, будет больше, чем у тех, которые сталкиваются с противоположной стенкой. Это приведет к передаче импульса от стенок сосуда газу, а значит, и к смещению центра масс газа.

В. И. Комов

◆

Ф966. *Для иллюстрации поверхностного натяжения одну из мыльных пленок, натянутых на параллельные «направляющие» и разделенных ниткой AB (см. рис. 1), прокалывают; при этом нить AB натягивается. Определите силу натяжения нити. Расстояние между «направляющими» равно d, длина нити l ($l>\pi d/2$), коэффициент поверхностного натяжения мыльного раствора σ.*

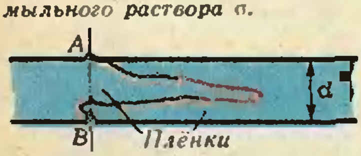


Рис. 1.

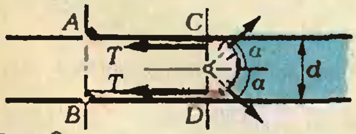


Рис. 2.

Выясним сначала, вид какой кривой примет нить под действием силы поверхностного натяжения. Легко догадаться, что в случае $l<\pi d/2$ это будет дуга окружности, так как, предположив противное (то есть что радиус кривизны нити не постоянен), придем к тому, что равновесие нити невозможно.

С учетом этого найдем, что в случае $l>\pi d/2$ нить будет иметь два прямолинейных участка длиной $x=\frac{1}{2}\left(l-\frac{\pi d}{2}\right)$ и полуокружность (так как точки C и D покоятся) радиусом $d/2$ (рис. 2).

Пусть сила натяжения нити T (см. рис. 2). Рассматривая симметричные участки нити, можно записать:

$$2T=\sum_i \sigma\cdot\Delta l_i\cdot\cos\alpha=\sigma d\ \Rightarrow\ T=\frac{\sigma d}{2}.$$

Л. Г. Маркович

◆

Ф967. *Стопку очень тонких металлических пластин, находящихся на одинаковых расстояниях друг от друга, заряжают от батареи следующим образом. Отрицательную клемму батареи соединяют с самой правой пластиной, а положительную клемму присоединяют по очереди к самой левой пластине, затем ко второй слева, к третьей и т. д. до предпоследней (второй спра-*

Обозначим через S площадь каждой пластины, d — расстояние между пластинами, $\mathscr{E}$ — ЭДС батареи. Найдем, какой заряд соберется на самой правой пластине (1) после того, как зарядили k-ю пластину справа.

Расстояние между этими пластинами равно $(k-1)d$, разность потенциалов равна ЭДС батареи $\mathscr{E}$, и, следовательно, напряженность электрического поля в промежутке между этими пластинами должна быть равна *ва; рис. 1). Найдите отношение заряда на самой правой пластине к заряду на третьей справа пластине. Считать, что толщина стопки много меньше, чем линейные размеры пластин.*

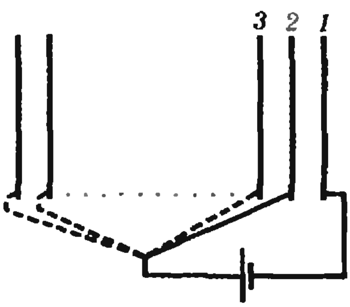


Рис. 1.

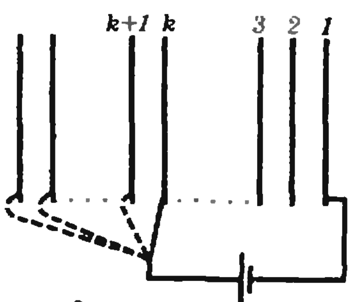


Рис. 2.

$$E=\frac{\mathscr{E}}{(k-1)d}.$$

Это электрическое поле создается отрицательным зарядом, расположенным на пластине *1*, и всеми положительными зарядами, находящимися на уже заряженных пластинах (рис. 2). Так как напряженность поля бесконечной заряженной плоскости не зависит от расстояния до нее и не меняется при ее перемещении, то мы можем мысленно придвинуть все положительно заряженные плоскости к k-й справа. При этом получится плоский заряженный конденсатор с расстоянием между пластинами $(k-1)d$. Так как поле в плоском конденсаторе равно $Q/\varepsilon_0 S$, где Q — заряд каждой пластины, то отрицательный заряд самой правой пластины (*1*) после зарядки k-й справа будет равен

$$Q=\frac{\mathscr{E}\varepsilon_0 S}{(k-1)d}. \qquad (1)$$

Таким же по величине будет суммарный заряд на всех положительно заряженных пластинах.

Заряд само́й k-й пластины можно найти из следующих соображений. До ее зарядки положительный заряд всех пластин слева до $(k+1)$-й включительно был равен $Q'=\frac{\mathscr{E}\varepsilon_0 S}{kd}$, общий положительный заряд после зарядки k-й пластины стал равен $Q=\frac{\mathscr{E}\varepsilon_0 S}{(k-1)d}$. Следовательно, заряд само́й k-й пластины равен

$$Q=\frac{\mathscr{E}\varepsilon_0 S}{d}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right). \qquad (2)$$

Теперь можно ответить на вопрос, поставленный в задаче. Отрицательный заряд, который в конце концов соберется на самой правой пластине, как следует из выражения (1) для $k=2$, будет равен

$$Q_1=\frac{\mathscr{E}\varepsilon_0 S}{d}.$$

Заряд пластины *3* (выражение (2) $k=3$) —

$$Q_3=\frac{\mathscr{E}\varepsilon_0 S}{d}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{\mathscr{E}\varepsilon_0 S}{6d}.$$

Таким образом, искомое отношение зарядов

$$Q_1:Q_3=6.$$

Е. П. Соколов

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М926—М940, Ф938—Ф952, справились с задачами М926, М929, М931, М936, Ф938, Ф941—Ф943, Ф947, Ф951, Ф952. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Х. Агаев (с. Тюркоба Аз. ССР) 33, 37; *Н. Агазарян* (Абовян) 33—35; *Н. Азамов* (С. Балыкчи Андижанской обл.) 37—39; *А. Аксенов* (Великие Луки) 28, 34, 37, 38; *М. Александров* (Москва) 28, 33, 37—40; *А. Алексейчук* (Одесса) 37; *М. Альт* (Одесса) 28, 37, 38; *Я. Аргентов* (Алма-Ата) 32, 33, 37; *В. Асамбаев* (Алма-Ата) 37; *А. Асташкевич* (Томск) 28, 33—35, 37, 38; *В. Балахонцев* (Алма-Ата) 37; *А. Баран* (Киев) 28, 30, 33, 37, 39; *Н. Безденежных* (Нижний Тагил) 30, 32—34; *Р. Безрукавников* (Калуга) 28, 30, 33, 34, 38; *В. Берездивин* (Донецк) 33, 37; *О. Бесман*

(Алма-Ата) 37; *И. Биндер* (Ленинград) 28; *Е. Богомол* (Алма-Ата) 37; *М. Бойко* (Киев) 30, 32, 39; *М. Бона* (Секешфехервар, ВНР) 33, 39; *А. Буга* (Ульяновск) 37; *Я. Варшавский* (Харьков) 28, 32, 33, 35, 37, 38; *М. Векслер* (Ленинград) 28; *И. Вербовский* (Алма-Ата) 37; *Т. Газарян* (Ереван) 32—35, 37—40; *Д. Гамарник* (Тбилиси) 33, 37—40; *Г. Гевондян* (Ереван) 37, 38; *О. Геворков* (Тбилиси) 28, 37, 38; *О. Гендельман* (Харьков) 30, 38; *Р. Гендлер* (Ташкент) 28, 33, 38—40; *О. Геупель* (Дрезден, ГДР) 28, 30, 32—35, 37—40; *А. Глуцюк* (Харьков) 28, 38; *Р. Гой* (Львов) 28, 33; *Г. Горбатенко* (Арзамас) 28; *А. Гороховский* (Киев) 28, 32, 33, 35, 38—40; *Д. Гребнева* (Алма-Ата) 37; *П. Григорьев* (Алма-Ата) 37; *Н. Григорьев* (Андропов) 28, 33, 35, 37—39; *Л. Гринберг* (Алма-Ата) 37; *М. Гринберг* (Харьков) 30; *Р. Гринив* (Львов) 28, 33, 37, 38; *А. Даветян* (Ереван) 32—35, 37—40; *А. Дементьев* (Нальчик) 28; *Г. Дементьев* (Алма-Ата) 37; *А. Джафаров* (с. Тюркоба Аз. ССР) 33, 37; *М. Добрицын* (Москва) 28, 32—35, 37—39; *А. Донченко* (Киев) 28, 32, 33, 35; *С. Дубаденко* (Алма-Ата) 37; *М. Дудник* (Алма-Ата) 33, 37; *А. Дынников* (Жуковский) 28, 32, 33, 35, 37—40; *И. Дынников* (Жуковский) 28, 32, 33, 35, 37—40; *А. Жаксыбеков* (Алма-Ата) 37; *С. Жевноватый* (Алма-Ата) 37; *С. Железовская* (Саратов) 33, 37, 38; *В. Журавлев* (Гайворон) 28, 30, 32, 33, 35, 38; *П. Задорожный* (Киев) 32, 33, 35, 37, 38; *Д. Зайцев* (Киев) 28, 33, 35, 37, 38, 40; *Л. Запольский* (Москва) 37, 38; *А. Захаров* (Гатчина) 28; *Н. Захарова* (Алма-Ата) 37; *А. Иванов* (Первомайск Николаевской обл.) 38, 40; *М. Игнатьев* (Саратов) 28, 32, 33; *И. Кан* (Семипалатинск) 38; *В.* и *И. Каповичи* (Хабаровск) 28, 33, 34, 38; *Х. Каримбердиев* (Ташкент) 28; *О. Кирнасовский* (Винница) 28, 33, 37; *А. Киселев* (Ленинград) 28, 32—34, 37—39; *А. Козинский* (Гайворон) 33, 35; *И. Козуля* (Жуковский) 33, 38; *Д. Коноваленко* (Севастополь) 30; *А. Кононенко* (Киев) 33, 35, 37—39; *Ю. Королев* (Казань) 37; *А. Коршиков* (Мозырь) 33, 38; *Д. Кохманюк* (Киев) 28; *В. Кращенко* (Алма-Ата) 37; *Б. Кругликов* (Харьков) 33, 38; *Н. Крылов* (Ленинград) 32, 33; *О. Крылов* (п. Эльдикан Як. АССР) 35, 39; *М. Кукс* (Львов) 28, 37; *А. Купчишин* (Алма-Ата) 37; *М. Куринной* (Харьков) 28, 32, 33, 37—40; *С. Кутайцев* (Конаково) 28; *Н. Кушлевич* (Москва) 28, 32, 37, 38; *И. Ларцев* (Донецк) 33, 37; *Л. Леняшин* (Ленинград) 28, 32, 33, 37, 38, 40; *О. Лимешко* (Куйбышев) 28, 33, 35, 38; *А. Литвак* (Ленинград) 28, 32, 33, 37—39; *М. Литвинов* (Киев) 28, 32, 37, 38; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) 38; *Н. Лучинин* (Алма-Ата) 37; *М. Макаров* (Севастополь) 28, 30, 32, 34; *К. Мамуров* (Душанбе) 28, 30, 33, 35, 37—39; *В. Матвеев* (Челябинск) 37, 38; *Ю. Махлин* (Москва) 28, 37, 38, 40; *С. Меленцевич* (Минск) 28; *Б. Меркулов* (Куйбышев) 38; *А. Минасян* (Ереван) 33, 35; *Т. Мисирпашаев* (Москва) 28, 32, 33, 37, 38; *Г. Михалкин* (Ленинград) 28, 33, 35, 38, 40; *С. Михно* (Краснодар) 28; *Д. Музаффаров* (п. Герматук Аз. ССР) 30; *М. Мунькин* (Алма-Ата) 28, 32, 33; *З. Мусина* (Алма-Ата) 37; *А. Нагорный* (Слуцк) 32, 33, 38; *Е. Нагорская* (Ереван) 28; *И. Неронов* (Алма-Ата) 33; *Ю. Ним* (п. Черноголовка Московской обл.) 38; *О. Ниц* (Одесса) 28, 30, 32, 33, 37, 38; *А. Новичков* (Жуковский) 33, 35; *О. Овецкая* (Донецк) 33; *Е. Орынбасаров* (Алма-Ата) 37; *Е. Осипова* (Алма-Ата) 37; *О. Падалко* (Уфа) 37; *В. Парьев* (п. Красногвардейское Белгородской обл.) 28; *Д. Пастур* (Харьков) 38, 39; *И. Пачин* (Алма-Ата) 33, 37; *Я. Печатников* (Ленинград) 37, 38; *А. Пинчук* (Киев) 28 ; *А. Покровский* (Киев) 28, 30; *М. Померанцев* (Черкассы) 28, 32, 33, 35, 37—39; *В. Попеня* (Алма-Ата) 37; *В. Попов* (Подольск) 28; *И. Портной* (Одесса) 28, 32, 33, 35, 37, 38; *А. Пришляк* (Киев) 28, 32, 33, 35, 37, 39; *В. Протасов* (Москва) 28, 30; *И. Пухов* (Москва) 28; *Т. Радько* (Корсунь-Шевченковский) 28, 32, 33, 37—39; *А. Райскин* (Алма-Ата) 37; *И. Райскин* (Алма-Ата) 37; *И. Раскина* (Витебск) 33, 35, 37—39; *Е. Растигеев* (Барнаул) 28; *В. Ратнюк* (Евпатория) 32, 38, 39; *С. Рубан* (Днепропетровск) 28; *Т. Руденко* (Киев) 38; *Д. Румынин* (Красноярск) 33; *А. Рывчин* (Киев) 28; *В. Сакбаев* (Алма-Ата) 37; *Э. Салканова* (Алма-Ата) 37; *И. Симовол* (Гайворон) 28, 30, 32, 33, 35, 38; *Р. Сибилев* (Ленинград) 32, 33, 37—39; *И. Симоненко* (Великие Луки) 28, 34, 37, 38; *В. Слободянюк* (Киев) 30; *С. Стафеев* (Петрозаводск) 32; *К. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 28, 30, 37, 38; *В. Судаков* (Тбилиси) 28, 32, 33, 35, 37—40; *Р. Сулейманов* (Алма-Ата) 37; *Ж. Сушинскас* (Вильнюс) 38; *А. Таджибаев* (Пскент) 28, 30; *Д. Тажибаева* (Алма-Ата) 37; *Д. Тамаркин* (Горький) 28, 33, 37—39; *В. Тарнецкий* (Алма-Ата) 37; *А. Тен* (Алма-Ата) 37; *Б. Те* (Алма-Ата) 37; *К. Тищенко* (Минск) 38, 39; *Г. Топровер* (Волгоград) 38; *К. Туз* (Евпатория) 37; *Д. Туляков* (Жданов) 28, 38; *М. Тумаш* (Львов) 35, 38; *А. Тымко* (Алма-Ата) 37; *К. Узких* (Сморгонь) 33; *С. Ферлегер* (Ташкент) 32; *В. Филимоненков* (Свердловск) 33, 37—39; *Л. Филипенко* (Алма-Ата) 37; *М. Фукс* (Москва) 30; *М. Хованов* (Москва) 32, 33, 37, 39; *В. Цвиркунов* (Киев) 28, 30, 32, 38, 39; *А. Чагиров* (Алма-Ата) 33, 35; *Д. Чижов* (Алма-Ата) 37; *К. Чурашев* (Новосибирск) 38; *Шабельников* (Алма-Ата) 37; *И. Шадрин* (Алма-Ата) 33, 37; *Ю. Шамрук* (д. Новый Двор Гродненской обл.) 33; *С. Шейнин* (Молодечно) 28, 33, 37, 38; *И. Шефтель* (Ленинград) 28; *Б. Шойхет* (Москва) 28; *В. Шульга* (Евпатория) 32, 38; *В. Эпиктетов* (Алма-Ата) 28, 32, 33, 37; *Т. Юрьева* (Алма-Ата) 37.

Физика

А. Абанов (Красноярск) 39, 44, 49; *А. Абибуллаев* (Ташкент) 49, 50; *Д. Абсатов* (Алма-Ата) 49; *М. Албегов* (Москва) 44, 45, 50; *С. Анатольев* (Ярославль) 45, 48—50; *В. Апальков* (Харьков) 39, 44, 45; *М. Ахмедов* (Сумгаит) 49; *В. Барарь* (п/о Боровуха Витебской обл.) 45, 50; *Д. Барц* (Харьков) 39; *В. Баширов* (Чебоксары) 45, 48—50; *А. Бегларов* (Тбилиси) 49; *К. Бедов* (Челябинск) 44, 45, 50; *С. Беловолов* (Новосибирск) 49; *А. Белопольский* (Киев) 39, 42, 44—46, 49; *И. Бена* (Васлуй, СРР) 45; *А. Бендерский* (п. Черноголовка Московской обл.) 45; *А. Беренгольц* (Кишинев) 44, 45, 49, 50; *А. Бермус* (Ростов-на-Дону) 39, 45; *О. Бесман* (Алма-Ата) 45, 49; *Л. Блинов* (Черновцы) 45, 48; *С. Бобылев* (Березники) 44, 49; *С. Болдырев* (Мытищи) 49; *Ю. Боровский* (Киев) 48, 49; *Ш. Бреннер* (Хуст) 48—50; *А. Быцко* (Ленинград) 39, 44, 45; *К. Вайнберг* (Тбилиси) 50;

И. Варга (Салонта, СРР) 45; *А. Васильев* (Красноярск) 39; *А. Вилькоцкий* (Минск) 39, 45, 49, 50; *Р. Воливач* (Днепропетровск) 45, 48; *В. Волков* (п. Пограничный Приморского кр.) 45; *С. Волков* (Нижний Тагил) 49; *А. Володько* (Одесса) 39; *А. Волошин* (п. Ивановка Иссык-Атинского р-на) 39; *Г. Габададзе* (Тбилиси) 42; *А. Гаек* (Днепропетровск) 48—50; *О. Гендельман* (Харьков) 49; *А. Глазок* (Киев) 50; *Л. Головань* (Красногорск Московской обл.) 46; *Л. Гольдштейн* (Киев). 39; *С. Гончарик* (Барановичи) 46; *Л. Горкин* (п. Научный Крымской обл.) 49; *А. Гречишников* (Миасс) 49; *В. Гринберг* (Москва) 44, 49; *В. Гурарий* (п. Черноголовка Московской обл.) 45, 48, 50; *Л. Гуревич* (Кемерово) 44; *А. Дементьев* (Нальчик) 46, 49; *Д. Дементьев* (Нальчик) 46, 49; *Б. Добровольский* (Тбилиси) 49, 50; *А. Дода* (Корсунь-Шевченковский) 42, 44, 45, 48, 49; *А. Дынников* (Жуковский) 39, 45, 48, 50; *И. Дьяков* (п. Черноголовка Московской обл.) 49; *Д. Ежиков* (Минск) 39, 48; *М. Ермаков* (Рига) 45; *С. Ефремов* (Запорожье) 39, 45; *А. Жариков* (Киев) 39, 42, 44, 45, 48—50; *В. Жевлаков* (п. Черноголовка Московской обл.) 42, 45, 49, 50; *А. Желудев* (Москва) 44, 45; *А. Жуков* (Киев) 49; *О. Заборонский* (Москва) 49, 50; *Р. Зайнуллин* (Белорецк) 42; *Н. Захарова* (Алма-Ата) 45; *К. Зварич* (Киев) 44, 45, 50; *В. Зелов* (Новосибирск) 49; *Е. Зельцер* (Киев) 48; *К. Зимин* (Запорожье) 45, 48, 49; *Б. Зингерман* (Самарканд) 45, 49, 50; *И. Иванов* (Калуга) 49; *С. Иванов* (Уфа) 44, 45, 48, 49; *О. Игнатьева* (Новополоцк) 44; *В. Калацкий* (Солигорск) 45, 49; *А. Калашников* (Киев) 49; *В. Каменькович* (Харьков) 49; *И. Каплан* (Сумгаит) 49; *А. Карякин* (Тамбов) 39; *М. Кац* (Саратов) 45; *В. Кирьяшкин* (Саратов) 48, 49; *А. Киселев* (Ленинград) 45, 49; *П. Кларк* (Тула) 44, 45, 49; *И. Коваленко* (с. Термаховка Киевской обл.) 49; *Е. Кожевников* (Москва) 49; *Ю. Кондратенко* (Киев) 42, 50; *А. Краковский* (Харьков) 48, 49; *В. Красиков* (Мозырь) 50; *А. Красота* (Киев) 45; *В. Кращенко* (Алма-Ата) 45; *С. Крючков* (Ногинск) 49; *А. Курачев* (Новосибирск) 39, 48—50; *Д. Кушнер* (Мытищи) 48, 50; *П. Лаврентьев* (п. Черноголовка Московской обл.) 45; *А. Ларкин* (Армавир) 49; *А. Левенштейн* (Донецк) 45, 49, 50; *Л. Лиознов* (Москва) 49, 50; *М. Литвинов* (Киев) 39; *Ю. Лобзаков* (Киев) 44—46; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) 49; *И. Луценко* (Донецк) 44, 45, 49, 50; *П. Лушников* (Москва) 42, 44, 45, 50; *А. Максимов* (Ташкент) 45; *М. Маргулис* (Харьков) 45; *Г. Марченков* (Саратов) 45; *С. Маслов* (Москва) 49; *Ю. Махлин* (Москва) 39, 44, 45, 50; *З. Мачарадзе* (Тбилиси) 45; *В. Мелик-Алавердян* (Ереван) 44, 45, 49; *К. Мельников* (Пермь) 45; *А. Мельничук* (Хабаровск) 39; *В. Микизиль* (Ростов-на-Дону) 39; *Т. Мисирпашаев* (Москва) 39; *Е. Михалюк* (Минск) 42, 48—50; *С. Михно* (Москва) 50; *А. Мищаненко* (Новосибирск) 48, 49; *Д. Могилевцев* (Шклов) 39, 45, 49, 50; *А. Мудрик* (Брест) 45; *С. Настенко* (Киев) 39, 48, 49; *А. Недачин* (Киев) 48; *С. Никитенко* (Киев) 48, 49; *И. Никитин* (Горький) 39, 42, 45; *Г. Николаишвили* (Тбилиси) 39, 44, 45, 48, 49; *Т. Никольская* (Донецк) 45, 49, 50; *С. Новиков* (Херсон) 45, 48—50; *А. Нурмагамбетов* (Новосибирск) 45; *А. Оводенко* (Донецк) 45, 49, 50; *В. Овчаров* (Шостка) 45; *О. Осауленко* (Киев) 39, 49, 50; *В. Остроушко* (Кривой Рог) 49; *Р. Паламарчук* (Нежин) 49; *А. Панич* (Ленинград) 45; *А. Панычев* (Магадан) 39; *А. Парецкий* (Минск) 39, 45, 48, 49; *В. Парьев* (п. Красногвардейское Белгородской обл.) 39; *А. Пекарь* (Москва) 49; *В. Песоцкий* (д. Дворец Брестской обл.) 39, 42, 48, 49; *Е. Петров* (Минск) 48—50; *В. Полищук* (Львов) 45; *В. Поляшов* (Кстово) 45, 50; *О. Посудневский* (Береза) 39, 48—50; *К. Пугач* (Ленинград) 45, 48—50; *Т. Пустогова* (Киев) 49; *А. Путилин* (Минск) 45, 49, 50; *А. Пяллинг* (Новосибирск) 44, 45; *И. Раджабов* (с. Хив Даг. АССР) 45; *С. Рахамов* (Казань) 44, 45, 49, 50; *С. Ревков* (Киев) 44, 45; *В. Родин* (Сасово) 49; *А. Розенберг* (Уфа) 48, 49; *А. Розенвайн* (Киев) 39; *Н. Ромец* (Киев) 45; *С. Рося* (Минск) 39, 44, 46, 49; *Ю. Рыбалочка* (Киев) 39, 44, 45, 49, 50; *С. Рыжков* (Москва) 39, 45; *В. Рябуха* (Брест) 45; *Д. Савичев* (Таганрог) 50; *Р. Сагайдак* (с. Матугов Черкасской обл.) 39, 45; *Т. Сагайдак* (Канев) 44; *Р. Садыков* (Фрунзе) 49; *В. Сакбаев* (Алма-Ата) 39, 44, 45; *Д. Самборский* (Истра) 39; *О. Самойленко* (Киев) 49; *Б. Самойлов* (Киев) 39, 44, 45, 50; *В. Сандомирский* (Братск) 48; *М. Свердлов* (Минск) 39; *А. Сенчик* (Киев) 44; *О. Серафимович* (Пинск) 45, 49; *А. Сиваченко* (Москва) 45, 49, 50; *С. Сильвестов* (Москва) 48, 49; *М. Ситников* (Климовск) 39, 48, 49; *А. Скачков* (Тула) 39; *С. Скобаро* (п. Коряжма Архангельской обл.) 39, 44, 50; *А. Снижко* (Запорожье) 45, 49, 50; *А. Сомов* (Киев) 44, 45, 48, 49; *А. Сотников* (Губкин) 39; *С. Сочнев* (Киев) 48—50; *Е. Степанов* (Ленинград) 39; *И. Стрешинский* (Киев) 44, 45, 48, 49; *И. Струговщиков* (Киев) 39, 44, 45; *К. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 44, 50; *Н. Суконников* (Виницца) 39, 44, 48—50; *В. Сысов* (Киев) 44, 45, 49; *В. Тарнецкий* (Алма-Ата) 45, 50; *А. Татаринов* (Тула) 45; *Б. Татиевский* (Киев) 49; *А. Ткаченко* (Киев) 44; *С. Толмачев* (Минск) 39, 45, 48, 49; *В. Троян* (Джанкой) 39; *С. Тужанский* (Винница) 39, 49, 50; *М. Тумаш* (Львов) 49, 50; *Р. Ульмасов* (Душанбе) 49; *С. Ушаков* (Ярославль) 49, 50; *М. Федоров* (Ульяновск) 39, 45, 49; *Г. Финкельштейн* (п. Черноголовка Московской обл.) 44, 45, 49, 50; *А. Фурс* (п/о Дричин Минской обл.) 45; *А. Хафизов* (п. Красногорский Звенигoвского р-на) 39; *Ю. Ходоровская* (Киев) 49; *А. Хонахбеев* (Рига) 49, 50; *В. Черных* (Хабаровск) 48—50; *Р. Черныш* (Пермь) 39, 50; *Ю. Чернявский* (п. Раздольное Крымской обл.) 49, 50; *А. Чунаев* (Волгоград) 50; *Л. Шаповаленко* (Канев) 39, 44, 48—50; *В. Шаповалов* (Донецк) 49; *А. Шарипов* (Сатка) 48, 49; *Г. Швец* (Киев) 39, 44, 45, 48; *А. Шуляк* (с. Молодецкое Черкасской обл.) 39, 45, 49, 50; *М. Юдин* (Запорожье) 44, 45, 49, 50; *О. Юсухно* (Киев) 45, 49, 50; *В. Яковлев* (Киев) 48, 49; *И. Яковлева* (Киев) 50; *А. Янчук* (Дубровица) 45, 50.

Программирование на микрокалькуляторе: ветвление и цикл

В. В. РОЖДЕСТВЕНСКИЙ,
С. Г. ХЛЕБУТИН

Эта заметка предназначается в первую очередь для девятиклассников, изучающих курс «Основы информатики и вычислительной техники» и имеющих доступ к программируемому микрокалькулятору.

В предыдущем номере «Кванта» рассказывалось о том, как простейшие программы, написанные на учебном алгоритмическом языке, можно «транслировать в коды программируемого микрокалькулятора», то есть автоматически превращать такие программы в списки команд для микрокалькулятора (см. статью Л. Ф. Штернберга «Программирование на микрокалькуляторе: простейшие программы»). Здесь мы продолжаем этот рассказ. Речь пойдет о трансляции двух основных конструкций алгоритмического языка: ветвления и цикла. Изложение ведется применительно к микрокалькулятору «Электроника МК-54», но незначительными изменениями может быть приспособлено к другим моделям отечественных программируемых калькуляторов.

Прежде всего, посмотрим как работает калькулятор в автоматическом режиме, то есть когда программа выполняется без вмешательства человека. Для управления выбором команд из памяти служит некоторая специальная ячейка, называемая счетчиком адреса. Эта ячейка может содержать любой адрес программной памяти.

Если в автономном режиме нажать клавишу С/П, то тем самым отдается приказ калькулятору начать автоматическую работу. Это значит, что калькулятор анализирует содержимое ячейки программной памяти, на которую указывает счетчик адреса, выполняет ту или иную операцию и изменяет содержимое счетчика адреса. Такие действия называются *тактом* работы программы. Последовательно выполняя такты, программа считает, пока не встретит команды СТОП.

Если в программе нет операций переходов, то в процессе выполнения одного такта значение счетчика адреса увеличивается на единицу. Операции перехода предназначены именно для того, чтобы менять содержимое счетчика адреса по нашему усмотрению. Как же работают команды перехода?

Рассмотрим команды БП и $Fx \vee 0$, где $\vee$ обозначает один из знаков операции сравнения: $<$, $=$, $\geqslant$, $\neq$. Для работы этих команд необходимо использовать две ячейки памяти: одну для хранения кода команды и следующую для хранения некоторого адреса.

Работа команды БП осуществляется так: калькулятор помещает в счетчик адреса тот адрес, который у нас записан в следующей после кода БП ячейке.

Команда $Fx \vee 0$ делает следующее: если условие $x \vee 0$ выполнено, то старое содержимое счетчика адреса увеличивается на два, если же условие не выполнено, то в счетчик адреса помещается адрес из следующей за кодом команды $Fx \vee 0$ ячейки.

П р и м е р 1. Проследим за изменением счетчика адреса в процессе потактового выполнения следующих программ (см. таблицы ниже).

адрес	команда	код	счетчик
00	7	07	01
01	8	08	02
02	9	09	03
03	F x≥0	59	05
04	06	06	
05	/−/	0L	06
06	С/П	50	07

адрес	команды	код	счетчик
00	7	07	01
01	8	08	02
02	/−/	0L	03
03	F x≥0	59	06
04	06	06	
05	/−/	0L	
06	С/П	50	07

Итак, мы видим, что наличие операций перехода позволяет нарушать естественную (по порядку следования адресов) последовательность команд, а это как раз и необходимо при программировании конструкций «цикл» и «ветвление».

Конструкция «цикл»

На алгоритмическом языке такая конструкция выглядит следующим образом:

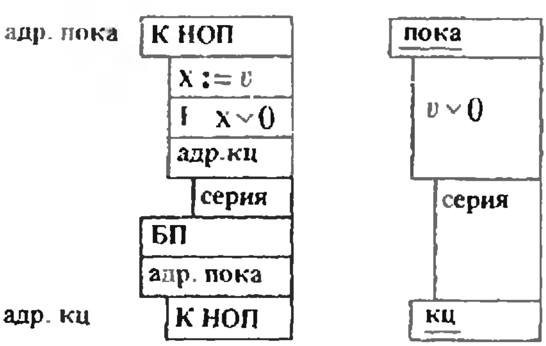
пока условие
нц
серия
кц

Для облегчения перевода конструкции «цикл» на язык калькулятора мы будем записывать ее в несколько ином виде, а именно:

пока
$v \vee 0$
серия
кц

Здесь v — арифметическое выражение, $\vee$ — один из знаков сравнения, описанных выше.

Предлагаем следующую схему перевода оператора цикла с алгоритмического языка на язык калькулятора (здесь X обозначает вершину стека):



Заметим, что команда К НОП (нет операции) хотя и не влечет никакого действия, но удобна для установления соответствия между ключевыми словами (**пока**, **кц**) алгоритмического языка и командами калькулятора, а также облегчает прослеживание логики программы. Выравнивание записей по вертикали удобно для поиска адресов перехода и для чтения программы.

Пример 2. Разработаем программу вычисления $m=n!$

На учебном алгоритмическом языке программа выглядит так:

алг факториал (**цел** m, n)
арг n
рез m
нач цел
ввод n
$m:=1$
$i:=1$
пока $i<n$
нц
$i:=i+1$
$m:=m*i$
кц
вывод m
кон

Обратите внимание на то, что в тело программы мы вставили две дополнительные команды (**ввод** и **вывод**) — они облегчают трансляцию.

Теперь можно транслировать программу. Сначала опишем место хранения переменных в виде таблицы.

Переменные	n	m	i
Память	Rg0	Rg1	Rg2

Оттранслированная программа выглядит так:

Адреса	Команды	Коды	Алгоритмический язык
00	С/П	50	ввод n
01	X → П0	40	
02	1	01	$m:=1$
03	X → П1	41	
04	1	01	$i:=1$
05	X → П2	42	
06	К НОП	54	пока
07	П → X2	62	
08	П → X0	60	
09	−	11	$i-n<0$
10	F x<0	5C	
11	22	22	
12	П → X2	62	
13	1	01	
14	+	10	$i:=i+1$
15	X → П2	42	
16	П → X1	61	
17	П → X2	62	
18	X	12	$m:=m\cdot i$
19	X → П1	41	
20	БП	51	
21	06	06	
22	К НОП	54	кц
23	П → X1	61	вывод m
24	С/П	50	

Конструкция «ветвление»

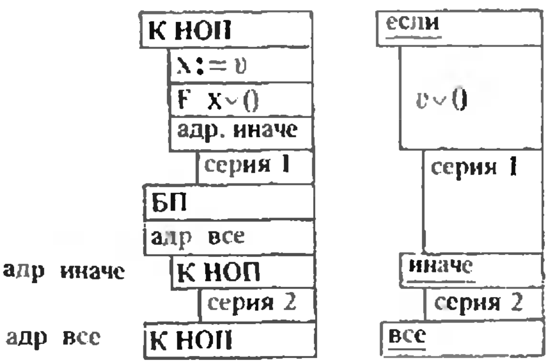
На алгоритмическом языке эта конструкция записывается так:

если условие
  то серия 1
  иначе серия 2
все

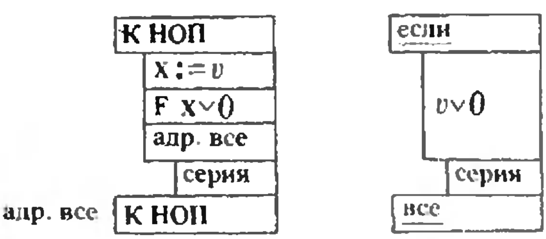
Для удобства перевода на язык калькулятора мы будем записывать ее так:

если
  $v \vee 0$
    серия 1
  иначе
    серия 2
все

Предлагаем следующую схему перевода:



Для «укороченного» оператора ветвления (**если... то... все**) схема перевода может быть такой:



П р и м е р 3. Разработаем программу нахождения большего из двух чисел a и b.

На алгоритмическом языке эту программу можно записать следующим образом (как и выше, для удобства трансляции мы ввели дополнительные команды **ввод** и **вывод**):

алг бид (**вещ** a, b, y)
  арг a, b
  рез y
нач
  ввод a, b
  если $a \geqslant b$
    то $y := a$
    иначе $y := b$
  все
  вывод y
кон

Выпишем в виде таблицы адреса переменных:

Переменные	a	b	y
Память	Rg a	Rg b	Rg 0

Программа транслируется следующим образом:

Адреса	Команды	Коды	Алгоритмический язык
00	С/П	50	
01	X → Пa	4–	ввод a
02	С/П	50	
03	X → Пb	4L	ввод b
04	К НОП	54	если
05	П → Xa	6–	
06	П → Xb	6L	
07	—	11	
08	F $x \geqslant 0$	59	$a-b \geqslant 0$
09	14	14	
10	П → Xa	6–	
11	X → П0	40	$y := a$
12	БП	51	
13	17	17	
14	К НОП	54	иначе
15	П → Xb	6L	
16	X → П0	40	$y := b$
17	К НОП	54	все
18	П → X0	60	вывод y
19	С/П	50	

В заключение заметим, что схемы перевода могут быть лучше или хуже, но само их наличие позволяет осуществлять перевод автоматически и почти без ошибок. Таким образом, если программа на алгоритмическом языке составлена грамотно, то довести ее до калькулятора совсем несложно.

Поправка

В первом номере «Кванта» за этот год допущена опечатка в условии задачи 2 варианта I на стр. 52. Неравенство в условии следует читать так: $\log_{\frac{1}{4}-3x}(1-25x^2)>0$.

VII. Элемент памяти — триггер

*Доктор физико-математических наук М. Е. ЛЕВИНШТЕЙН,
кандидат физико-математических наук Г. С. СИМИН*

Предыдущий раздел, посвященный логическим схемам (см. «Квант», 1986, № 1, 2), мы начали с обсуждения логических задач, которые приходится решать устройству, управляющему движением лифтов в обычном доме. Теперь, наверное, самое время упомянуть о том, что даже такое простое устройство не может функционировать, если в нем не предусмотрены элементы памяти. В «памяти» управляющего устройства лифта постоянно записано несколько данных: сколько секунд должна стоять открытой дверь после того, как лифт освободится; что делать, если автоматически закрывающиеся двери натолкнулись на препятствие; какова последовательность операций при нажатии аварийной кнопки «стоп» и т. д. Кроме этих постоянных данных, в «память» лифта вводят и записывают оперативные данные, меняющиеся в процессе работы — на каких этажах нажаты кнопки; куда движется лифт в данный момент: вверх, вниз, стоит на месте.

В памяти ЭВМ, решающей сложную задачу, зафиксированы сотни тысяч, а иногда и миллионы данных. Эти данные, как уже говорилось, записаны в форме, которую ЭВМ способна воспринимать и обрабатывать, то есть с помощью «нулей» и «единиц» (в двоичной системе счисления).*)

Ясно, что ни рассмотренные нами элементы вычислительной техники — транзисторы, ни логические схемы на их основе сами по себе элементами памяти быть не могут. Все они после прекращения действия входного импульса сразу возвращаются в исходное состояние.

Для элемента памяти нужно устройство, которое под действием входного импульса могло бы переключаться из состояния «0» в состояние «1» и обратно; и при этом, после прекращения действия входного импульса, запоминало бы свое состояние и могло находиться в нем неопределенно долго (до прихода следующего переключающего входного импульса).

Радиотехническая схема, удовлетворяющая этим требованиям, называется триггером (от английского trigger — защелка).

Понять принцип работы триггера легче всего, воспользовавшись уже известным нам свойством логической схемы НЕ (инвертора).

Рассмотрим два последовательно соединенных инвертора (рис. 1). Напряжение на входе первого инвертора $U_{вх}=x$ может равняться либо U^0 (логическому нулю), либо U^1 (логической единице). Напряжение на выходе инвертора всегда равняется $\bar{x}$ (не x), то есть U^1 при $U_{вх}=U^0$ и U^0 при $U_{вх}=U^1$. Выходное напряжение первого

*) Шуточное стихотворение «Необыкновенная девочка» (с. 50) поможет вам разобраться, как связаны двоичная и десятичная системы счисления.

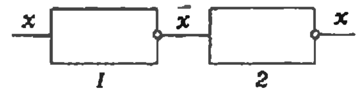


Рис. 1. Последовательное соединение двух логических схем типа «НЕ».

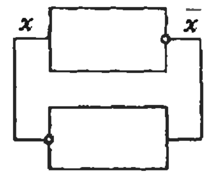


Рис. 2. Кольцо из двух инверторов.

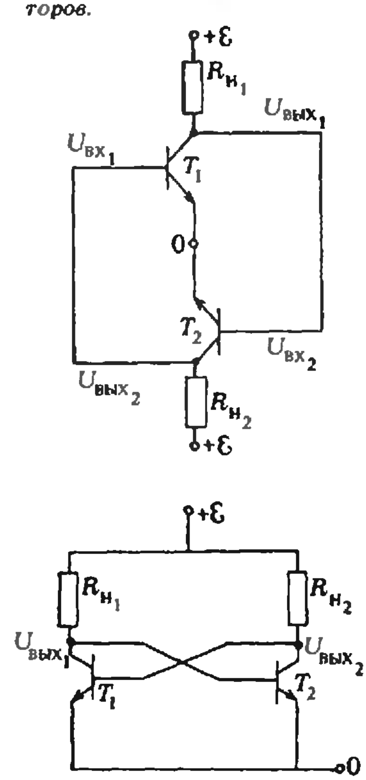


Рис. 3. Триггер на двух БТ. Схемы а) и б) полностью эквивалентны.

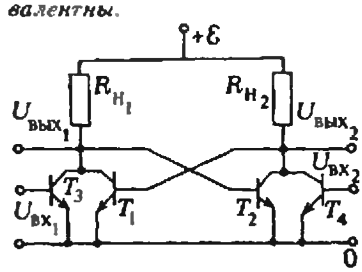


Рис. 4. Ячейка памяти на триггере с двумя входами.

инвертора является входным для второго. Поэтому на выходе второго инвертора напряжение всегда равно $\overline{(\bar{x})}$ (не (не x)), то есть x.

А теперь соединим выход второго инвертора со входом первого (рис. 2). При этом, очевидно, ничего не изменится: ведь напряжение на входе первого инвертора и до присоединения было равно x, и после соединения осталось таким же. Образовавшееся «кольцо» из двух инверторов, очевидно, будет оставаться в равновесии сколь угодно долго. При этом возможны два состояния: либо слева «1», а справа «0», либо, наоборот, слева «0», а справа «1». Схема «запомнит» то состояние, в котором были инверторы в момент образования кольца, и будет находиться в этом состоянии неограниченно долго *).

На рисунке 3, *а* показана принципиальная схема триггера, реализованная на двух биполярных транзисторах (БТ). Каждый из БТ образует инвертор, а соединение инверторов соответствует рисунку 2: выход T_1 соединен со входом T_2, а выход T_2 — со входом T_1.

Схема, представленная на рисунке 3, *б* — это та же схема, что и на рисунке 3, *а*, только несколько иначе нарисованная. Посмотрите внимательно на обе схемы и убедитесь в этом. Симметричное и изящное представление триггера, показанное на рисунке 3, *б*, общепринято, хотя, быть может, оно и не так наглядно поясняет принцип его работы, как первая схема.

Показанный на рисунке 3 триггер не может, однако, служить элементом памяти, поскольку состояние, в котором он находится, нельзя изменить с помощью сигнала.

Схема триггера, дополненная двумя транзисторами (рис. 4), лишена этого недостатка. Под воздействием входных сигналов такой триггер может изменять свое состояние.

Условимся, например, считать, что триггер находится в состоянии «0», если $U_{\text{вых }2}=U^0$ (в этом случае, как мы знаем, $U_{\text{вых }1}=U^1$). Если, наоборот, $U_{\text{вых }2}=U^1$ (а $U_{\text{вых }1}=U^0$), будем считать, что триггер находится в состоянии «1». Можно сказать и так: в первом случае в *ячейку памяти*, показанную на рисунке 4, записан «0», во втором — «1».

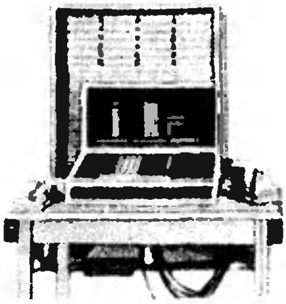
Пусть в ячейке памяти записан «0». Это значит, что транзистор T_1 заперт (напряжение $U_{\text{вых }1}=U^1$), а транзистор T_2 открыт ($U_{\text{вых }2}=U^0$). Если подать на вход транзистора T_3 напряжение $U_{\text{вх }1}=U^1$, то через него потечет большой ток, напряжение на сопротивлении $R_{\text{н}1}$ возрастет, а на транзисторе T_1 — уменьшится и станет равным $U_{\text{вых }1}=U^0$. Но напряжение на T_1 служит входным сигналом для инвертора T_2. Инвертор T_2 «перевернется»: транзистор T_2 «запрется». На его выходе появится напряжение $U_{\text{вых }2}=U^1$. Это напряжение поступит на базу транзистора T_1 и... ничего не изменит. Транзистор T_1 и так открыт; напряжение на его выходе $U_{\text{вых }1}=U^0$. В результате ячейка памяти перейдет во второе возможное стабильное состояние, которому, по условию, соответствует «1».

Это новое состояние будет сохраняться неопределенно долго; пока на вход транзистора T_4 не поступит входной сигнал U^1. После этого триггер вновь «перевернется» и в ячейке памяти снова окажется записанным «0».

Более подробный разговор о записи, хранении и считывании информации в ЭВМ будет продолжен в следующей заметке.

---

*) Это изящное объяснение принципа работы триггера принадлежит известному советскому ученому и педагогу профессору И. П. Степаненко.

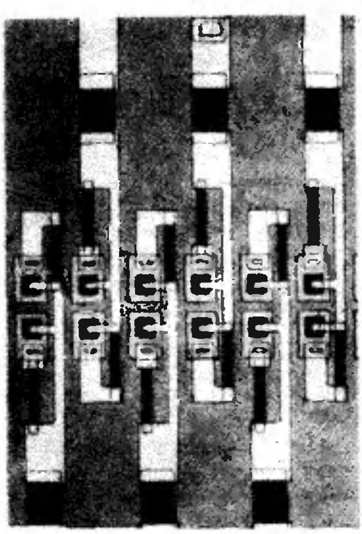


В машине немецкого инженера К. Цузе, часть которой представлена на снимке, программа, то есть последовательность команд, управляющих действиями машины, была задана в виде отверстий, пробитых в обычной киноленте.

Идея представления программы в двоичном коде и хранения ее так же, как и чисел, принадлежит американскому математику Джону Нейману (1946 г.). Он же разработал проект первой ЭВМ с «электронным» хранением программы — «ЭДВАК», — создававшейся с 1945 по 1950 годы. Элементами памяти в этой машине были ламповые триггеры.

* * *

Триггерная память современных быстродействующих ЭВМ выполняется на основе биполярных кремниевых транзисторов. БИС триггерной памяти, фрагмент которой показан на фото, имеет объем до сотен килобит (1 килобит равен тысяче двоичных разрядов). Быстродействие таких БИС порядка нескольких десятков наносекунд, включая и время поиска ячейки с нужной записью.



Доминик Франсуа Араго

(Начало см. на с. 9)

плоскости пластинки, то магнит стремится следовать за движением пластинки; если же поворачивается магнит, пластинка стремится следовать за его движением; и это взаимодействие является настолько сильным, что поворачивает магниты или пластинки весом (массой) в несколько фунтов (1 фунт=454 г.). Если магнит и пластинка неподвижны друг относительно друга, то между ними нельзя наблюдать ни малейшего взаимодействия, ни притяжения, ни отталкивания». Попробуйте самостоятельно объяснить это явление.

Большой интерес представляет литературно-историческое наследие Араго. Это и учебники, и различные популярные книги. А его труд «Биографии знаменитых астрономов, физиков и геометров» до сих пор является одним из фундаментальных исследований по истории науки.

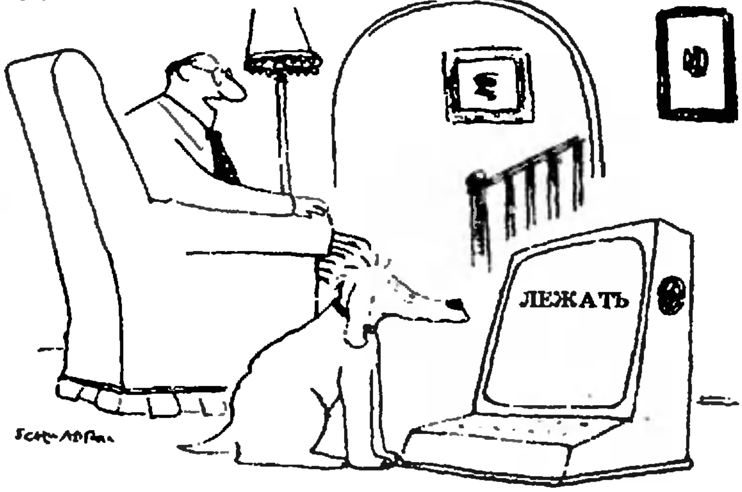
Надо сказать, что наука не была единственным увлечением Араго. Последние 20 лет своей жизни он активно занимался политикой. Избранный в 1831 году в Палату депутатов, в 1848 году он вошел во временное правительство, став военным, а позднее и морским министром. Современники отмечали, что в политике, как и в науке, ему были свойственны честность, беспристрастность, твердость характера, хладнокровие и находчивость в трудных ситуациях.

Девизом жизни Араго были слова, сказанные Даламбером одному молодому человеку, встречавшему трудности при изучении математики: «Идите, идите вперед — и обретете уверенность». Верность этому девизу позволила Доминику Франсуа Араго стать одним из сподвижников развития и совершенствования науки, промышленности и образования во Франции.

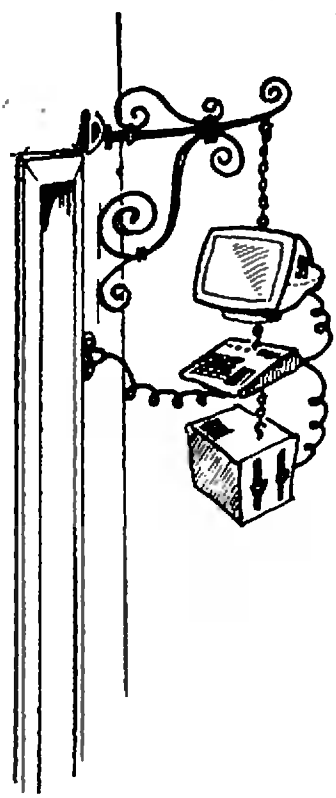
Б. И. Геллер

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Персональные компьютеры в картинках
(по материалам «PERKOMPUTILA INSTRUADO», 1985, № 2 [6] (Венгрия)



Устные команды ты уже выполняешь, попробуй освоить компьютерное управление.



Необыкновенная девочка

А. Н. Стариков

Ей было тысяча сто лет,
Она в сто первый класс ходила,
В портфеле по сто книг носила —
Все это правда, а не бред.
Когда, пыля десятком ног,
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
С одним хвостом, зато стоногий.
Она ловила каждый звук
Своими десятью ушами,
И десять загорелых рук
Портфель и поводок держали.
И десять темно-синих глаз
Рассматривали мир привычно...
Но станет все совсем обычным,
Когда поймете наш рассказ.

Уравнение касательной

Б. М. БЕККЕР,
В. М. ГОЛЬХОВОЙ,
кандидат педагогических наук Ю. И. ИОНИН

В этой статье мы разберем несколько типов задач по теме «Касательная», часто предлагаемых на конкурсных экзаменах по математике.

Напомним, что уравнение прямой, имеющей угловой коэффициент k и проходящей через точку $M(x_0;y_0)$, можно записать в виде $y=k(x-x_0)+y$. Так как угловой коэффициент касательной к графику дифференцируемой функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой x_0 равен $f'(x_0)$, уравнение касательной имеет вид

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0).$$

Таким образом, чтобы написать уравнение касательной, нужно знать три числа: x_0, $f(x_0)$ и $f'(x_0)$. Начнем с задач, в которых из условия легко находится значение x_0, а затем вычисляются $f(x_0)$, $f'(x_0)$.

Задача 1 (МГУ, психологический факультет, 1980). *Вычислите площадь треугольника, ограниченного осями координат и касательной к графику функции $y=\frac{x}{2x-1}$, в точке с абсциссой $x_0=1$.*

Решение. Найдем уравнение касательной. Для этого вычислим последовательно $f(1)$, $f'(x)$, $f'(1)$:

$$f(1)=1,\ f'(x)=-\frac{1}{(2x-1)^2},\ f'(1)=-1.$$

Уравнение касательной имеет вид $y=-(x-1)+1$, то есть $y=-x+2$. Эта прямая пересекает оси координат в точках A (2; 0) и B (0; 2). Таким образом, искомая площадь $S_{AOB}=\frac{1}{2}|OA|\cdot|OB|=2$.

Задача 2 (Красноярский ГУ, математический факультет, 1980). *Хорда параболы $y=-a^2x^2+5ax-4$ касается кривой $y=\frac{1}{1-x}$ в точке $x_0=2$ и делится этой точкой пополам. Найдите a.*

Решение. Напишем уравнение касательной к графику функции $f(x)=\frac{1}{1-x}$ в точке M с абсциссой $x_0=2$:

$$f(2)=-1,\ f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2},\ f'(2)=1,$$

так что уравнение касательной имеет вид $y=x-3$.

Предположим, что эта касательная пересекает данную параболу в точках A и B. Абсциссы точек A и B — это корни уравнения $-a^2x^2+5ax-4=x-3$, или

$$-a^2x^2+(5a-1)x-1=0. \qquad (1)$$

Точка M является серединой отрезка AB в том и только в том случае, если ее абсцисса равна полусумме абсцисс точек A и B. Воспользовавшись теоремой Виета, это условие можно записать в виде равенства $\frac{5a-1}{a^2}=4$, которое выполняется при $a=1$ и при $a=\frac{1}{4}$. Остается проверить, пересекаются ли при этих значениях a данная парабола и прямая $y=x-3$, то есть имеет ли корни уравнение (1). При $a=1$ получаем уравнение $-x^2+4x-1=0$ с положительным дискриминантом, а при $a=\frac{1}{4}$ — уравнение $-\frac{1}{16}x^2+\frac{1}{4}x-1=0$ с отрицательным дискриминантом.

Таким образом, $a=1$.

Задача 3. *Напишите уравнение касательной к параболе $y=2x^2-x-1$ в точке с ординатой 5, если известно, что эта касательная не проходит через точку M (1; —2).*

Решение. В условии задачи задана не абсцисса, а ордината точки касания. Для нахождения абсциссы решим уравнение $2x^2-x-1=5$. Получим два корня $x_1=-\frac{3}{2}$, $x_2=2$. Пусть $f(x)=2x^2-x-1$. Тогда $f'(x)=4x-1$, $f'\left(-\frac{3}{2}\right)=-7$, $f'(2)=7$. Напишем уравнение касательных: $y=-7\left(x+\frac{3}{2}\right)+5$ и $y=7(x-2)+5$, то есть $y=-7x-5{,}5$ и $y=7x-9$.

Подставив координаты точки M в каждое из уравнений, мы обнаружим, что первая касательная не проходит через точку M, а вторая проходит через эту точку.

Итак, ответ: $y=-7x-5{,}5$.

В задачах 4, 5, 6 условие, задающее касательную, позволяет найти значение производной в точке касания, а затем абсциссу и ординату этой точки.

Задача 4 (ЛГУ, биологический факультет, 1977). *К графику функции $y=x^3-x^2-13x+4$ проведена касательная в той точке второй четверти, где угловой коэффициент равен 3. Найдите точки пересечения этой касательной с координатными осями.*

Решение. Пусть a — абсцисса точки касания. По условию $f'(a)=3$. Так как $f'(x)=3x^2-2x-13$, для нахождения a получаем уравнение $3a^2-2a-13=3$, имеющее корни -2 и $8/3$. Значение $a=8/3$ нужно отбросить (по условию задачи точка касания лежит во второй четверти). При $a=-2$ точка касания имеет координаты $(-2;\ 18)$ и лежит во второй четверти. Уравнение касательной имеет вид $y=3x+24$. Эта прямая пересекает оси координат в точках $(-8;\ 0)$ и $(0;\ 24)$.

Задача 5 (ЛГУ, математико-механический факультет, 1977). *При каком значении a касательная к графику функции $y=a-x^2$ отсекает от первой четверти равнобедренный прямоугольный треугольник с площадью, равной $\frac{9}{32}$?*

Решение. Из условия задачи следует, что угол наклона касательной к оси абсцисс равен $135°$. Поскольку $\operatorname{tg} 135°=-1$, абсцисса точки касания — это корень уравнения $-2x=-1$. Следовательно, уравнение касательной имеет вид $y=-x+a+\frac{1}{4}$. Эта прямая пересекает оси координат в точках $A\left(0;\ a+\frac{1}{4}\right)$, $B\left(a+\frac{1}{4};\ 0\right)$.

По условию задачи точки A и B лежат на положительных полуосях, так что $a+\frac{1}{4}>0$. Площадь треугольника, о котором говорится в условии, равна $\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{4}\right)^2$. Решив уравнение $\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{32}$ (с учетом того, что $a+\frac{1}{4}>0$), получим ответ: $a=\frac{1}{2}$.

Если прямая задана уравнением вида $y=kx+b$, то коэффициент k равен тангенсу угла наклона этой прямой к оси абсцисс (мы пользовались этим, решая задачу 5). Отсюда следует, что прямые, заданные уравнениями $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, параллельны в том и только в том случае, если $k_1=k_2$.

Задача 6 (Ереванский ГУ, факультет прикладной математики). *В какой точке кривой $y=\sqrt{1+x^2}$ касательная параллельна прямой $y=\frac{x}{2}+1$?*

Решение. Вычислим производную данной функции: $y'=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

Угловой коэффициент касательной к графику функции в точке с абсциссой a равен значению производной в этой точке. По условию этот угловой коэффициент должен быть равен $\frac{1}{2}$. Таким образом, абсцисса искомой точки — это корень уравнения $\frac{a}{\sqrt{1+a^2}}=\frac{1}{2}$. Решая это уравнение, получаем $a=1/\sqrt{3}$.

Ответ: $(1/\sqrt{3};\ 2/\sqrt{3})$.

Задача 7 (МАИ, 1981). *В каких точках графика функции $y=(1-x)\times(1+x)^2$ надо провести к нему касательные, чтобы они проходили через точку $(-1;\ 0)$?*

Решение. Обозначим через t абсциссу точки касания. Так как $y'=-(1+x)^2+2(1+x)(1-x)=(1+x)\times(1-3x)$, уравнение касательной имеет вид $y=(1+t)(1-3t)(x-t)+(1-t)(1+t)^2$. Условие прохождения касательной через точку $(-1;\ 0)$ запишется теперь в виде уравнения относительно t:

$$0=(1+t)(1-3t)(-1-t)+(1-t)(1+t)^2,$$

которое легко преобразуется к виду $(1+t)^2\cdot 2t=0$. Корни этого уравнения $t=0$, $t=-1$ — абсциссы искомых точек; их ординаты находим, вычисляя соответствующие значения данной функции. Ответ: $(0;\ 1)$, $(-1;\ 0)$.

Задача 8 (Воронежский ГУ, математический факультет). *Найдите уравнение касательной к кривой*

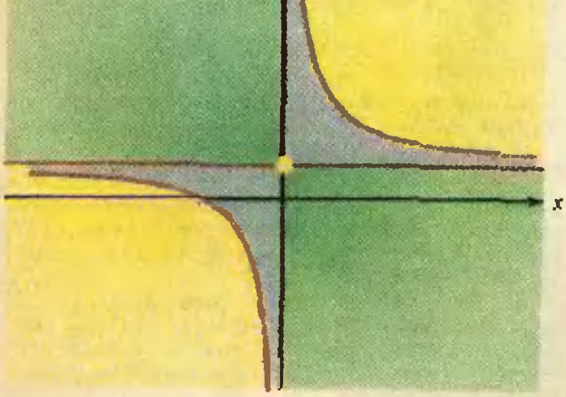
$y=\frac{x+1}{x}$, *если известно, что касательная проходит через точку* $M(a;\ b)$. *Сколько существует решений в зависимости от точки* $M(a;\ b)$?

Решение. Ответ на второй вопрос задачи легко представить себе, если посмотреть на график данной функции. На рисунке красным цветом изображена гипербола $1+\frac{1}{x}$ и ее асимптоты (кроме точки их пересечения). Через каждую красную точку можно провести одну касательную. Синим цветом изображены области, из точек которых можно провести две касательные к одной ветви гиперболы. Через точки зеленых областей также проходят две касательные, но по одной к каждой ветви гиперболы. Из точек же областей, закрашенных желтым цветом, к данной гиперболе касательную провести нельзя.

Обозначим теперь через t абсциссу произвольной точки данной гиперболы и напишем уравнение касательной в этой точке: $y=-\frac{1}{t^2}x+$ $+\frac{2}{t}+1$. Эта прямая проходит через точку $M(a;\ b)$ в том и только в том случае, если $b=-\frac{1}{t^2}a+\frac{2}{t}+1$. Это условие равносильно системе

$$\begin{cases}(b-1)t^2-2t+a=0,\\ t\neq 0.\end{cases}\qquad (2)$$

Прежде всего *рассмотрим случаи* $b=1$ (в этом случае уравнение (2) является линейным) и $a=0$ (это единственный случай, когда уравнение (2) имеет корень $t=0$).



При $b=1$ уравнение (2) имеет единственный корень $t=\frac{a}{2}$, отличный от нуля при $a\neq 0$. Уравнение единственной касательной в этом случае имеет вид $y=-\frac{4}{a^2}x+\frac{4}{a}+1$.

При $a=0$ и $b\neq 1$ уравнение (2) имеет единственный отличный от нуля корень $t=\frac{2}{b-1}$. Уравнение единственной касательной в этом случае имеет вид $y=-\frac{(b-1)^2}{4}x+b$.

Наконец, при $a=0$, $b=1$ уравнение (2) ненулевых корней не имеет.

Пусть теперь $b\neq 1$, $a\neq 0$. Дискриминант квадратного уравнения (2) равен $4(1+a-ab)$. Если $1+a-ab<0$, то уравнение (2) корней не имеет, и, следовательно, через точку $M(a;\ b)$ нельзя провести касательную к графику данной функции. Заметим, что неравенство $1+a-ab<0$ можно при $a>0$ записать в виде $b>\frac{1+a}{a}$, а при $a<0$ — в виде $b<\frac{1+a}{a}$. Таким образом, это неравенство задает желтые области на рисунке.

Если $1+a-ab=0$ (то есть точка $M(a;\ b)$ лежит на гиперболе), то уравнение (2) имеет единственный корень $t=a$, и уравнение касательной имеет вид $y=-\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a}+1$.

Если $1+a-ab>0$, то уравнение (2) имеет два корня $t=\frac{1\pm\sqrt{1+a-ab}}{b-1}$. Подставляя эти корни в уравнение $y=-\frac{1}{t^2}x+\frac{2}{t}+1$, мы получим уравнение двух касательных, проходящих через точку $M(a;\ b)$. Неравенство $1+a-ab>0$ вместе с неравенствами $b\neq 1$, $a\neq 0$ задает области, окрашенные на рисунке в *синий и зеленый* цвета.

Задача 9 (МФТИ, 1982). *Из точки* $M(1;\ 1)$ *проведены касательные к двум ветвям гиперболы* $y=\frac{k}{x}$ $(k<0)$, *касающиеся этих ветвей в точках* A *и* B, *причем треугольник* MAB *правильный. Найдите коэффициент* k *и площадь треугольника* MAB.

Решение. Пусть t — абсцисса произвольной точки данной гиперболы. Касательная в этой точке задается уравнением $y=-\frac{k}{t^2}x+\frac{2k}{t}$ и проходит через точку $M(1;\ 1)$ в том и только в том случае, если $1=-\frac{k}{t^2}+\frac{2k}{t}$ или $t^2-2kt+k=0$. Это уравнение при $k<0$ имеет два корня t_1, t_2 — абсциссы точек A и B. По теореме Виета $t_1+t_2=2k$, $t_1t_2=k$. Поскольку ветви данной гиперболы симметричны относительно прямой $y=x$, а точка M лежит на этой прямой, точки A и B симметричны относительно прямой $y=x$. Впрочем, в этом можно убедиться и так: $t_1t_2=k$, то есть абсцисса точки B равна ординате точки A, а ордината точки B равна абсциссе точки A. Таким образом, точка A имеет координаты $(t_1;\ t_2)$, а точка B — координаты $(t_2;\ t_1)$. Отсюда следует, что $|MA|=|MB|$ при любом $k<0$. Таким образом, k нужно находить из равенства $|MA|=|AB|$. Вычислим $|MA|^2$ и $|AB|^2$:

$$|AB|^2=(t_1-t_2)^2+(t_2-t_1)^2=$$
$$=2(t_1-t_2)^2=2((t_1+t_2)^2-4t_1t_2)=$$
$$=8k^2-8k;$$
$$|MA|^2=(t_1-1)^2+(t_2-1)^2=$$
$$=t_1^2+t_2^2-2(t_1+t_2)+2=$$
$$=(t_1+t_2)^2-2(t_1+t_2)-2t_1t_2+2=$$
$$=4k^2-6k+2.$$

Мы получили относительно k уравнение $8k^2-8k=4k^2-6k+2$, которое имеет единственный отрицательный корень $k=-\frac{1}{2}$. Для нахождения площади правильного треугольника MAB подставим найденное значение k в выражение для $|AB|^2$. Получим $|AB|^2=6$ и, следовательно, $S_{MAB}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

Задача 10 (МИСиС, 1978). *Найдите уравнение общей касательной к параболам $y=x^2+4x+8$ и $y=x^2+8x+4$.*

Решение. Обозначим через u и v абсциссы точек касания. Уравнение касательной к первой параболе в точке с абсциссой u имеет вид $y=(2u+4)x-u^2+8$, а уравнение касательной ко второй параболе в точке с абсциссой v имеет вид $y=(2v+8x-v^2+4$. Так как оба уравнения — это уравнения одной и той же прямой, имеем $2u+4=2v+8$, $-u^2+8=-v^2+4$. Из полученной системы уравнений находим $u=2$, $v=0$. Следовательно, уравнение искомой касательной $y=8x+4$.

Задача 11 (2-й тур Ленинградской математической олимпиады). *Найдите уравнение прямой, касающейся графика функции $f(x)=x^4-2x^3+x^2+x-2$ в двух точках.*

Заметим, что $f(x)-(x-2)=x^2(x-1)^2$. Оказывается, *если многочлен $f(x)$ представляется в виде $f(x)=(x-a)^2g(x)+l(x)$, где $l(x)$ — линейная функция, а $g(x)$ — произвольный многочлен, то прямая $y=l(x)$ является касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке с абсциссой a.* Действительно, в этом случае $f(a)=l(a)$, $f'(a)=l'(a)$, так что прямая $y=l(x)$ проходит через точку $(a;\ f(a))$ и имеет угловой коэффициент $f'(a)$. В нашем случае отсюда сразу же следует, что прямая $y=x-2$ касается графика данной функции в точках с абсциссами 0 и 1. Таким образом, прямая $y=x-2$ касается графика данной функции в двух точках. Докажите самостоятельно, что никакая другая прямая не касается графика данной функции в двух точках. Итак, уравнение искомой касательной $y=x-2$.

Упражнения

1 (ЛГУ, мат.-мех. факультет, 1977). При каком значении k касательная к графику функции $y=kx^2$ образует с осью абсцисс угол, равный $\frac{\pi}{3}$, и отсекает от четвертой четверти треугольник с площадью, равной $\frac{8\sqrt{3}}{3}$?

2 (Казанский ГУ, физический факультет, 1978). На кривой $y=x^3-3x^2+2$ найдите точки, в которых касательная параллельна прямой $y=3x$.

3 (МГУ, факультет выч. мат. и кибернетики, 1978). Найдите уравнение прямой, проходящей через точку с координатами $\left(\frac{1}{2};\ 2\right)$, касающейся графика функции $y=-\frac{x^2}{2}+2$ и пересекающей в двух различных точках график функции $y=\sqrt{4-x^2}$.

4 (МГУ, мех.-мат. факультет, 1980). Касательная к графику функции $y=\sqrt[3]{x^2}$ такова, что абсцисса c точки касания принадлежит отрезку $\left[\frac{1}{2};\ 1\right]$. При каком значении c площадь треугольника, ограниченного этой касательной, осью абсцисс и вертикальной прямой $x=2$, будет наименьшей и чему равна эта наименьшая площадь?

5 (2-й тур Ленинградской математической олимпиады, 1984). Докажите, что если две касательные к параболе $y=x^2$ взаимно перпендикулярны, то расстояние между точками касания не меньше 1.

Московский инженерно-физический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Разность цифр двузначного натурального числа A по модулю не превосходит 3, а сумма цифр числа A равна 9. Найдите A.

2. Решите уравнение

$\log_{1/3}(9^x+a)+\log_3(2\cdot 3^x)=0,\ a\in R.$

3. Решите уравнение

$$\sin\left(b\sqrt{x-1}+\frac{\pi}{6}\right)=0{,}5,\ b\in R.$$

4. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит правильный треугольник ABC. Высоты SD и AF боковой грани ASC имеют длину k и h соответственно, а все плоские углы при вершине S пирамиды имеют одинаковую величину. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через середины ребер AS, AB и BC, если известно, что точки A и C удалены на одинаковое расстояние от плоскости BSD.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\frac{a}{a-3\sin^2 2x}=3.$$

2. Имеются два сосуда с раствором щелочи разных концентраций (по объему). Первый сосуд содержит 4 л раствора, второй — 6 л раствора. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 35 % щелочи. Если же слить вместе по 3 л раствора из каждого сосуда, то получится раствор, содержащий a % щелочи. Сколько литров щелочи содержит второй сосуд?

3. Через вершину S прямого кругового конуса проведена плоскость, пересекающая окружность основания конуса в точках A и B. Медианы AC и SD треугольника ASB имеют длины m_1 и m_2 соответственно. Определите величину угла при вершине S в осевом сечении конуса, если известно, что площадь треугольника ASB имеет наибольшее возможное значение.

4. Функция $f(x)=\dfrac{1}{x^2-4x+a}$ определена на отрезке $[5;\ 7]$. Найдите $f'(x)$ и все значения $a\in R$, при которых наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[5;\ 7]$ не превышает 0,1.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Система состоит из невесомого стержня длиной $l=35$ см, положенного на неподвижную призму, а также невесомого блока с двумя грузами массой m_1 и m_2 и груза массой $M=2$ кг $(m_1+m_2=M)$, прикрепленных к концам стержня (рис. 1). При движении грузов относительно блока равновесие стержня имеет место, если точка опоры стержня сдвинута на расстояние $\Delta l=5$ см влево от середины стержня. Определите массы m_1 и m_2. Трением пренебречь.

2. Плоская шайба массой $m=0{,}2$ кг начинает скользить с начальной скоростью $v_0=12$ м/с вверх по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha=30°$ с горизонтом. Коэффициент трения между шайбой и плоскостью $\mu=0{,}3$. Какую работу совершат над шайбой силы трения в течение времени $t=3{,}5$ с после начала движения?

3. В установке, изображенной на рисунке 2, масса каждого груза (A и B) $m=2$ кг, угол $\alpha=30°$, массы блока и нити пренебрежимо малы, трения нет. Найдите мощность, которую разовьет сила натяжения нити, действующая на груз A, через время $t=2$ с после начала движения.

4. Один моль идеального газа перевели из состояния *1* в состояние *2* изохорически, так, что его давление уменьшилось в $n=1{,}5$ раза, а затем изобарически нагрели до первоначальной температуры T_1. При этом газ совершил работу $A=0{,}83$ кДж. Найдите T_1.

5. Шарик массой $m=2$ г, имеющий заряд $q=2{,}5\cdot 10^{-9}$ Кл, подвешен на нити и движется по окружности радиусом $R=3$ см с угловой скоростью $\omega_1=2\ \text{с}^{-1}$ (рис. 3). В центр окружности поместили шарик с таким же зарядом. Какой должна стать угловая скорость ω_2 вращения шарика, чтобы радиус окружности не изменился?

6. Шар с массой $m=1$ кг и зарядом $q=2\cdot 10^{-4}$ Кл подвешен на изолирующей нити в однородном электрическом поле с напряженностью $E=3\cdot 10^4$ В/м, причем вектор $\vec{E}$ перпендикулярен силе тяжести и направлен влево. Шарик отвели вправо так, что нить отклонилась на угол $\alpha=30°$ от вертикали, и отпустили. Найдите натяжение нити при прохождении ею вертикального положения.

7. Электролампа с вольфрамовой спиралью в момент включения потребляет мощность $P=500$ Вт. Какую мощность она будет потреблять после нагревания спирали от комнатной температуры до температуры $t=2500$ °С, если температурный коэффициент сопротивления вольфрама $\alpha=4{,}5\cdot 10^{-3}\ \text{К}^{-1}$?

8. Пучок протонов, ускоренных разностью потенциалов $U=20$ кВ, падает на заземлен-

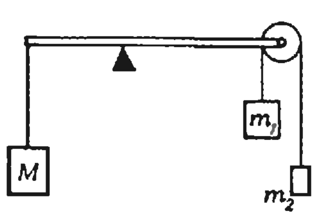


Рис. 1.

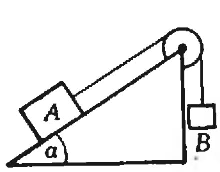


Рис. 2.

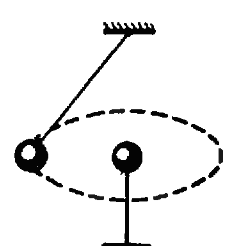


Рис. 3.

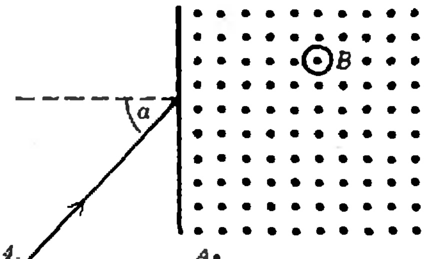


Рис. 4.

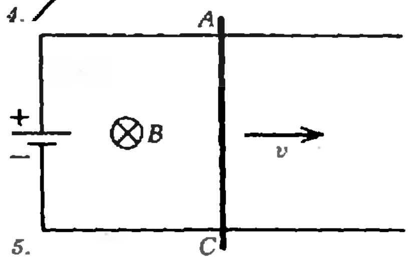


Рис. 5.

ную металлическую пластинку нормально к ее поверхности. Полагая, что все протоны поглощаются пластинкой, определите силу, с которой пучок действует на пластинку, если ток в пучке $I=80$ мА. Отношение электрического заряда протона к его массе $e/m=10^8$ Кл/кг. Силой тяжести пренебречь.

9. Протон влетает в область поперечного к его траектории однородного магнитного поля под углом $\alpha=30°$. Для указанного на рисунке 4 направления индукции магнитного поля $\vec{B}$ время движения протона в области поля составляет $\tau=0{,}5\cdot10^{-6}$ с. Найдите B. Отношение заряда протона к его массе $e/m=10^8$ Кл/кг.

10. Контур с источником тока, имеющим внутреннее сопротивление $r=0{,}2$ Ом, находится в однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}1$ Тл. Вектор $\vec{B}$ перпендикулярен к плоскости контура и направлен так, как показано на рисунке 5. Найдите ток в цепи при движении проводника AC со скоростью $v_1=10$ м/с вправо, если при движении его в том же направлении со скоростью $v_2=40$ м/с ток отсутствует. Сопротивление проводника AC $R=0{,}1$ Ом, его длина $l=10$ см. Сопротивлением направляющих рельсов пренебречь.

Публикацию подготовили
А. И. Руденко, В. Е. Чижов, Н. В. Шолохов

Московский институт стали и сплавов

Вариант письменного экзамена

1. Упростите до числового значения при $a=27$

$$\frac{a^{4/3}-8a^{1/3}b}{a^{2/3}+2(ab)^{1/3}+4b^{2/3}}:\left(1-2\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\right).$$

2. При каком наименьшем целом значении k уравнение

$$(k-1)x^2-2(k+1)x+k-3=0$$

имеет два различных корня?

3. Решите уравнение

$$\sqrt{3x^2+1}+\sqrt{x^2+3}=\sqrt{6x^2+10}.$$

В ответе запишите меньший корень уравнения.

4. Предприятие увеличивало объем выпускаемой продукции ежегодно на одно и то же число процентов. Найти это число, если известно, что за два года объем выпускаемой продукции увеличился на 44 %.

5. Решите неравенство

$$(0{,}2)^{\frac{x+3}{4-x}}\leqslant 0{,}04.$$

В ответе запишите наибольшее целое решение неравенства.

6. Решите уравнение

$$(x^{\lg x})^2-100x^3=0.$$

В ответе запишите больший корень уравнения.

7. Проведена касательная к графику функции $y=x^2-4x-3$ в точке пересечения этого графика с осью ординат. Найдите площадь треугольника, образованного касательной и осями координат.

8. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $f(x)=3x^4+2x^3-18x^2+15$ на отрезке $[-3;\ 1]$.

9. Упростите выражение и вычислите при $\alpha=\frac{7\pi}{6}$

$$\sqrt{3}\,\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}.$$

10. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}(x+1)\cdot\operatorname{ctg}(2x+1)=1.$$

В ответе запишите количество корней уравнения, принадлежащих отрезку $[0;\ 15]$.

11. Длины оснований трапеции равны 10 и 24, длины боковых сторон равны 13 и 15. Найдите площадь трапеции.

12. Объем конуса равен 81. Высота конуса разделена на три равные части и через точки деления проведены плоскости параллельно основанию. Найдите объем части конуса, находящейся между проведенными плоскостями.

Физика

Вариант письменного экзамена

1. Тележка массой $M=20$ кг может катиться без трения по горизонтальному пути. У заднего края тележки лежит брусок массой $m=2$ кг (края бруска и тележки совпадают). Коэффициент трения между бруском и тележкой $\mu=0{,}25$. К бруску приложена горизонтальная сила $F=20$ Н. Через какое время брусок упадет с тележки, если его длина $l=1$ м?

2. Для расплавления $m=1$ т стали используется электропечь мощностью 100 кВт. Сколько времени продолжается плавка, если слиток до начала плавления надо нагреть на $\Delta T=1500$ К? Удельная теплоемкость стали $c=500$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления стали $\lambda=2{,}7\cdot10^5$ Дж/кг.

3. Определите массу меди, выделившейся при электролизе, в ходе которого затрачено $W=8$ кВт · ч энергии. Напряжение на электродах электролитической ванны $U=12$ В, КПД установки $\eta=80$ %. Электрохимический эквивалент меди $k=3{,}3\cdot10^{-7}$ кг/Кл.

4. В стеклянную U-образную трубочку (рис. 1) налита ртуть так, что весь столбик имеет длину $l=20$ см. После заполнения трубочку слегка наклонили и возвратили в вертикальное положение, от чего столбик ртути начал колебаться. Найдите период этих колебаний.

5. Металлическое изделие массой $m_1=0{,}8$ кг было нагрето до температуры $t_1=950$ °C, а затем с целью закалки опущено в ванну, заполненную жидкостью массой $m_2=50$ кг с начальной температурой $t_2=16$ °C. Какую равно-

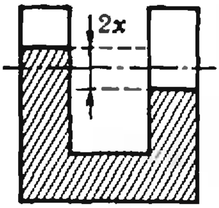


Рис. 1.

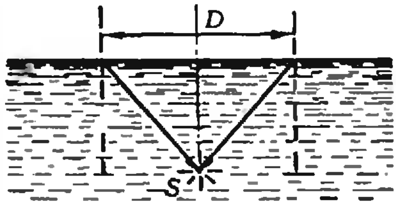


Рис. 2.

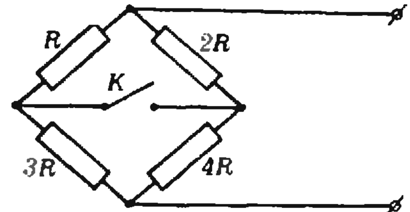


Рис. 3.

весную температуру будут иметь изделие и жидкость в ванне? Потерями тепла пренебречь. Удельная теплоемкость изделия $c_1=460$ Дж/(кг · К), жидкости — $c_2=4100$ Дж/(кг · К).

6. На какой глубине расположен точечный источник света в воде, если с поверхности воды лучи света выходят в воздух из круга диаметром $D=2$ м (рис. 2)? Показатель преломления воды $n=1{,}333$.

7. Воздух в помещении имеет температуру $t_1=24$ °С и относительную влажность $\varphi_1=50$ %. Определите влажность воздуха после его охлаждения до $t_2=20$ °С. Процесс охлаждения считать изохорическим. Давление насыщенного водяного пара при 20 °С и 24 °С равны соответственно $p_{н2}=2330$ Па и $p_{н1}=2943$ Па.

8. До замыкания ключа K сопротивление группы резисторов, соединенных по схеме, изображенной на рисунке 3, $R=504$ Ом. Найдите сопротивление этой группы резисторов после замыкания ключа.

9. Два иона, имеющие одинаковый заряд и одинаковую кинетическую энергию, но различные массы, влетели в однородное магнитное поле. Первый ион описал окружность радиусом $r_1=3$ см, а второй — $r_2=1{,}5$ см. Вычислите отношение масс ионов.

10. Горизонтально расположенный диск вращается вокруг вертикальной оси, делая $n=15$ об/мин. Наибольшее расстояние от оси вращения, на котором тело удерживается на диске в равновесии, равно $r=10$ см. Чему равен коэффициент трения тела о диск?

11. Определите максимальную кинетическую энергию электронов, вылетающих из некоторого металла при его освещении светом с длиной волны $\lambda=0{,}345$ мкм. Работа выхода для этого металла $A=2{,}45$ эВ.

12. Пучок параллельных лучей проходит через две тонкие собирающие линзы, оставаясь параллельным. Расстояние между линзами $l=15$ см. Определите фокусное расстояние первой линзы, если для второй линзы оно равно $F_2=9$ см.

Публикацию подготовили
В. А. Карасев, В. И. Марченко

Московский энергетический институт

Математика

Вариант письменного экзамена

1. Упростите выражение

$$\left[\frac{a+b}{(a+b)^2-4ab}\cdot(a-b)-\frac{a-b}{(a-b)^2+4ab}\times\right.$$
$$\left.\times(a+b)\right]\frac{(a^2-b^2)\cdot 10^{-\lg(a^2+b^2)}}{2ab}.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=\dfrac{21}{8}, \\ \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{37}{6}. \end{cases}$$

3. Разность двух чисел равна наибольшему значению функции $f(x)=\frac{x^3}{3}-x+1$ на отрезке $[0;\ 2]$, а сумма этих чисел в два раза больше наименьшего значения той же функции на указанном отрезке. Найдите эти числа.

4. Найдите все корни уравнения

$$(\sin x-1)[(\sin x+\sqrt{3}\cos x)\sin 4x-2]=0,$$

удовлетворяющие неравенству

$$\lg\left[(x+2\pi)\left(-x-\frac{3\pi}{2}\right)+1\right]\geqslant 0.$$

5. Найдите углы ромба, если известно, что площадь вписанного в него круга вдвое меньше площади ромба.

Задачи устного экзамена

1. Каким свойством должны обладать диагонали параллелограмма, чтобы: а) параллелограмм можно было вписать в окружность? б) в параллелограмм можно было вписать окружность?

2. Каким свойством должны обладать стороны треугольника, чтобы центр вписанной в него окружности совпадал с центром описанной около него окружности?

3. Докажите неравенство

$$\operatorname{tg}^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+1\geqslant\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta$$

при $\alpha,\ \beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi l,\ l\in\mathbb{Z}$.

4. Упростите выражение

$$A=\sqrt{-(a+b+c)^2+\sqrt{ab+bc+ca}}.$$

5. Найдите наименьший период функции

$$y=5\sin x+\sin 2x.$$

6. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=3\cdot\sin^2 x+4\sin x\cdot\cos x+\cos^2 x.$$

7. Сколько действительных корней имеет уравнение

$$1+x-x^2=|x|^3?$$

8. Найдите область определения функции

$$f(x)=\frac{\sqrt[4]{16-x^2}}{1-\sin x\cdot\sin 7x}.$$

9. Постройте графики следующих функций: а) $y=\sqrt{-(1-x^2)^2}$; б) $y=\arcsin x+\sqrt{x^2-1}$.

10. Найдите производную функции

$$y=\left[\left(\sqrt[3]{\frac{1}{9}}-\sqrt[3]{\frac{2}{9}}+\sqrt[3]{\frac{4}{9}}\right)^3+1\right]^{\log_3 x^2}$$

11. При каком значении x функция

$$y=(x-a_1)^2+(x-a_2)^2+\ldots+(x-a_n)^2$$

достигает наименьшего значения?

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Количество теплоты. Единицы измерения. Удельная теплоемкость. Формула подсчета количества теплоты, необходимого для нагревания тела. Первый закон термодинамики.

2. Два тела движутся вдоль оси координат OX. На основании графиков зависимости скорости тела от времени $v(t)$ (рис. 1) запишите формулу скорости для каждого тела. Начертите графики зависимости координат тел от времени $x(t)$, если начальная координата тел $x_0=0$.

3. При температуре $t_1=27$ °C давление газа в замкнутом сосуде было равно $p_1=3\cdot10^5$ Па. Какой будет температура газа при давлении $p_2=2{,}5\cdot10^5$ Па?

4. Какую максимальную скорость могут получить вырванные из калия электроны при облучении его светом с длиной волны $\lambda=0{,}4$ мкм? Работа выхода электрона для калия $A=3{,}2\cdot10^{-19}$ Дж, масса электрона $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, постоянная Планка $h=6{,}63\cdot10^{-34}$ Дж · с.

5. Частица массой $m=10^{-4}$ кг и зарядом $q=10^{-8}$ Кл влетает в область однородного электрического поля шириной $b=0{,}1$ м под углом $\alpha=45°$, а вылетает под углом $\beta=60°$ (рис. 2). Определите первоначальную скорость частицы, если напряженность однородного поля $E=10^6$ В/м. Траектория частицы лежит в плоскости чертежа. Силой тяжести пренебречь.

Вариант 2

1. Два рода электричества. Взаимодействие электрических зарядов. Закон Кулона. Диэлектрическая проницаемость вещества. Единица измерения заряда.

2. Узкую, длинную, запаянную с одного конца стеклянную трубку частично заполнили водой и перевернули закрытым концом вверх. Что находится в образовавшемся объеме?

3. Свеча находится на расстоянии $d=10$ см от тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F=5$ см. На каком расстоянии от линзы находится изображение и какое оно?

4. Напряжение на конденсаторе в идеальном колебательном контуре изменяется по закону $U=50\cos(1\cdot10^5 t)$ (В) и при этом максимальное значение заряда конденсатора равно $q_m=5\cdot10^{-6}$ Кл. Определите индуктивность катушки контура.

5. В цепь, состоящую из аккумулятора и резистора с сопротивлением $R=20$ Ом, подключили вольтметр сначала последовательно, затем параллельно резистору. Показания вольтметра в обоих случаях одинаковы. Сопротивление вольтметра $R_в=500$ Ом. Определите внутреннее сопротивление аккумулятора.

Публикацию подготовили
В. Ф. Сафонов, М. Г. Тимошин

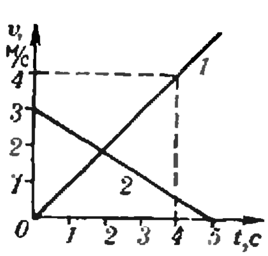


Рис. 1.

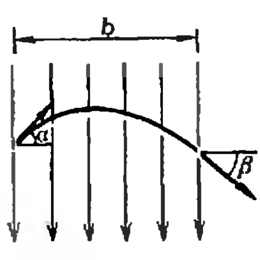


Рис. 2.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{(2+x)^2}+4\sqrt[3]{(2-x)^2}=5\sqrt[3]{4-x^2}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_x\log_3(9^x-6)\geqslant1.$$

3. Найдите наибольший на интервале $]-\pi/2;\ \pi[$ корень уравнения.

$$\sin\frac{3}{2}x\cos\frac{x}{2}\cos=\frac{1}{2}(5x-\pi/2).$$

4. В окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды AB и CD. Найдите радиус этой окружности, если $AC=6$ см, $BD=8$ см.

5. Река имеет ширину 160 м и скорость течения 6 км/час. Лодка, скорость которой в стоячей воде 4,8 км/час, пересекает реку за 2 минуты, высаживает пассажиров и возвращается обратно. На каком минимальном расстоянии от места старта может оказаться лодка?

; **Вариант 2**

1. Решите уравнение

$$\sqrt{\frac{x-4}{x}}+\sqrt{\frac{3x+4}{x}}=2.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{1}{4}\log_{\sqrt{x+1}}9+\log_{3x}3=0.$$

3. Найдите наибольший на интервале $]-\pi/6;\ \pi/2[$ корень уравнения

$$-2\sin x\cos 2x=\cos(5x+\pi/2).$$

4. В окружность вписан треугольник ABC. Расстояние от точек A и C до прямой, касающейся окружности в точке B, равны 4 см и 9 см. Найдите высоту треугольника, проведенную из вершины B.

5. При каких значениях параметра a каждое решение неравенства

$$x^2-3x+2<0$$

будет содержаться среди решений неравенства

$$ax^2-(3a+1)+3>0?$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. На наклонной плоскости, имеющей угол наклона к горизонту $\alpha=30°$, находится цилиндр. Цилиндр удерживается в покое огибающей его нитью, один конец которой закреплен на вершине наклонной плоскости, а другой тянут вертикально вверх. С какой силой нужно тянуть нить, если масса цилиндра $m=30$ г?

2. В сообщающиеся сосуды налили ртуть. Затем в один из сосудов налили еще столб масла высотой $h_1=30$ см, а в другой — столб воды высотой $h_2=20$ см. Определите разность уровней ртути в сосудах. Плотность ртути $\rho=13{,}6\cdot10^3$ кг/м³, масла $\rho_1=0{,}9\cdot10^3$ кг/м³, воды $\rho_2=1{,}0\cdot10^3$ кг/м³.

3. Стеклянный шарик объемом $V=0{,}5$ см³ равномерно падает в воде. Какое количество теплоты выделится при перемещении шарика

на $h=6$ м? Плотность стекла $\rho_1=2505$ кг/м^3, воды $\rho_2=1000$ кг/м^3.

4. Стеклянная трубка, запаянная с одного конца, расположена горизонтально. Воздух, находящийся в трубке, отделен от атмосферного столбиком ртути длиной $l=10$ см. Трубку перемещают вдоль ее оси равномерно с ускорением $a=10$ м/с^2 сначала запаянным концом вперед, затем открытым концом вперед. Определите атмосферное давление, если в первом случае длина воздушного столбика в трубке в $n=1,3$ раза больше, чем во втором. Плотность ртути $\rho=13,6\cdot 10^3$ кг/м^3.

5. Шарик массой m, подвешенный на длинной нити, совершает колебания. Во сколько раз изменится период колебаний, если шарику сообщить положительный заряд q и поместить его в однородное электрическое поле напряженностью $\vec{E}$, силовые линии которого направлены вертикально вниз?

6. Дуговая лампа горит под напряжением $U=80$ В и потребляет мощность $P=800$ Вт. На сколько градусов нагреются подводящие провода через $\tau=1$ мин после включения лампы, если проводка выполнена медным проводом сечением $S=4$ мм^2? Половина выделившегося количества теплоты отдается окружающей среде, удельное сопротивление меди $\rho=1,7\times10^{-8}$ Ом·м, плотность $D=8,9\cdot10^3$ кг/м^3, удельная теплоемкость $c=395$ Дж/(кг·К).

7. В электрическую цепь последовательно включены батарея с ЭДС $\mathcal{E}=12$ В, реостат и катушка с индуктивностью $L=1$ Гн. При сопротивлении реостата $R=10$ Ом в цепи протекал некоторый постоянный ток. Затем сопротивление реостата начали изменять так, чтобы ток в цепи уменьшался с постоянной скоростью $\Delta I/\Delta t=0,2$ А/с. Каким будет сопротивление цепи через $t=2$ с после начала изменения тока? Внутренним сопротивлением батареи и активным сопротивлением катушки пренебречь.

8. Протон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B=0,4$ Тл перпендикулярно вектору магнитной индукции $\vec{B}$. Определите, на какую глубину в область поля может проникнуть протон, если его энергия $W=1,6\times10^{-13}$ Дж. Масса протона $m=1,67\cdot10^{-27}$ кг, его заряд $q=1,6\cdot10^{-19}$ Кл.

9. На главной оптической оси собирающей линзы расположены две светящиеся точки: на расстояниях $d_1=20$ см и $d_2=40$ см от линзы. Зная, что их изображения находятся в одной и той же точке, определите фокусное расстояние линзы.

10. Объектив фотоаппарата изготовлен из двух линз — рассеивающей и собирающей. Рассеивающая линза с фокусным расстоянием $F_1=5$ см находится на расстоянии $l=45$ см от фотопленки. Где необходимо разместить собирающую линзу с фокусным расстоянием $F_2=8$ см, чтобы на пленке получались резкие изображения удаленных предметов?

Публикацию подготовили
В. В. Варфоломеев, М. Н. Данилычева, И. М. Матусевич

Победители конкурса «Задачник «Кванта»

(Начало см. на с. 30)

Награждаются Дипломом и значком журнала «Квант» и книгами серии «Библиотечка «Квант» за активное участие в конкурсе:

По математике

Н. АГАЗАРЯН — Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 10 кл.
М. АЛЬТ — Одесса, с. ш. № 100, 8 кл.
А. АСТАШКЕВИЧ — Томск, с. ш. № 24, 10 кл.
Г. ГЕВОНДЯН — Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 10 кл.
О. ГЕУПЕЛЬ — Дрезден (ГДР)
А. ГОРОХОВСКИЙ — Киев, с. ш. № 79, 8 кл.
И. ДЫННИКОВ — Жуковский, с. ш. № 1, 9 кл.
В. ЖУРАВЛЕВ — Гайворон, с. ш. № 2, 9 кл.
М. ИГНАТЬЕВ — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.
И. КАПОВИЧ — Хабаровск, с. ш. № 2, 10 кл.
А. КОЗИНСКИЙ — Гайворон, с. ш. № 2, 9 кл.
Т. МИСИРПАШАЕВ — Москва, с. ш. № 57, 10 кл.
О. НИЦ — Одесса, с. ш. № 100, 9 кл.
Д. ПАСТУР — Харьков, с. ш. № 146, 10 кл.
М. ПОМЕРАНЦЕВ — Черкассы, с. ш. № 4, 10 кл.
А. ПРИШЛЯК — Киев, с. ш. № 179, 10 кл.
Т. РАДЬКО — Корсунь-Шевченковский, с. ш. № 4, 10 кл.
К. СТЫРКАС — п. Черноголовка Моск. обл., с. ш. № 82, 9 кл.
В. СУДАКОВ — Тбилиси, ФМШ им. В. М. Комарова, 10 кл.
Д. ТУЛЯКОВ — Жданов, с. ш. № 7, 8 кл.
А. ЧАГИРОВ — Алма-Ата, с. ш. № 56, 10 кл.
С. ШЕЙНИН — Молодечно, с. ш. № 7, 10 кл.

По физике

С. АНАТОЛЬЕВ — Ярославль, с. ш. № 33, 10 кл.
А. БЕЛОПОЛЬСКИЙ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
И. БЕНА — Васлуй (СРР)
Ю. БОРОВСКИЙ — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
А. ВИЛЬКОЦКИЙ — Минск, с. ш. № 16, 10 кл.
Л. ГОЛЬДШТЕЙН — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
В. ЖЕВЛАКОВ — п. Черноголовка Моск. обл., с. ш. № 82, 10 кл.
В. ЗЕЛОВ — Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ, 10 кл.
В. КИРЬЯШКИН — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.
П. КЛАРК — Тула, с. ш. № 36, 10 кл.
К. ЛОПИН — Фрунзе, с. ш. № 61, 10 кл.
Д. МОГИЛЕВЦЕВ — Шклов, с. ш. № 4, 10 кл.
С. МЯГЧИЛОВ — Одесса, с. ш. № 16, 10 кл.
А. НЕДАЧИН — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.
О. ОСАУЛЕНКО — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
В. ПЕСОЦКИЙ — Брестская обл., Дворецкая с. ш., 10 кл.
О. ПОСУДНЕВСКИЙ — Береза, с. ш. № 1, 10 кл.
Ю. РЫБАЛОЧКА — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
Т. САГАЙДАК — Канев, с. ш. № 4, 10 кл.
В. САКБАЕВ — Алма-Ата, РОФМШ, 10 кл.
Б. САМОЙЛОВ — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
М. СИТНИКОВ — Климовск, с. ш. № 5, 10 кл.
О. ЮСУХНО — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.

Уравнение касательной

1. $K=\frac{3}{16}$.

2. $(1-\sqrt{2};\ \sqrt{2})$, $(1+\sqrt{2};\ -\sqrt{2})$.

3. $y=-x+\frac{5}{2}$.

4. $\frac{48}{25}\sqrt{\frac{5}{4}}$ при $c=\frac{4}{5}$.

«Квант» для младших школьников

1. Сумма указанных чисел $40+45+44+27=156$ есть утроенная стоимость всех четырех марок. Таким образом, четыре марки стоят 52 копейки. Вычитая из 52 копеек сумму в 40 копеек, получим 12 копеек — стоимость кубинской марки. Аналогично стоимость монгольской марки 7 копеек, болгарской — 8 копеек, польской — 25 копеек.

2. Обозначим искомое число через x. Тогда $x+16=n^2$, а $x-16=k^2$. Отсюда $n^2-k^2=32=1\cdot 32=2\cdot 16=4\cdot 8=(n+k)(n-k)$. Получаем две системы уравнений: $n+k=16$, $n-k=2$ и $n+k=8$, $n-k=4$. (Случай $n+k=32$, $n-k=1$ отпадает, так как числа n и k должны иметь одинаковую четность). В первом случае $n=9$, $k=7$, $x=65$; во втором случае $n=6$, $k=2$, $x=20$. Таким образом, только числа 20 и 65 обладают указанным в задаче свойством.

3. Когда человек бежит по бревну, он просто не успевает упасть.

4. Заметим, что сумма площадей четырех треугольников ADE, ACF, BDE и BCF равна площади прямоугольника. С другой стороны, эта сумма равна удвоенной площади красной части прямоугольника плюс площадь белой его части. Аналогично сумма площадей четырех треугольников BCD, BEF, ACD и AEF равняется площади прямоугольника, и в то же время равна площади белой части плюс удвоенная площадь синей части. Отсюда следует утверждение задачи.

5. Примем за основание системы счисления число n. Из первого справа столбца следует, что буква О равна нулю. Таким образом, переносы единиц будут из второго столбца в третий и из четвертого в пятый. Отсюда получаем соотношения: $2Т=n+И$, $И+1=К$, $К+И=n$, $К+1=Т$. Таким образом, $n=7$, $И=3$, $К=4$, $Т=5$.

Необыкновенная девочка
(см. с. 50)

Когда мы говорим, что у человека две ноги, а у собаки — четыре, мы даже не задумываемся о том, в какой *системе счисления* мы считаем. Говоря, «этой черепахе сто лет», мы подразумеваем, что

$$100=1\cdot 10^2+0\cdot 10^1+0\cdot 10^0.$$

И вообще, если $a_1, a_2, \ldots a_n$ — цифры числа, то само число $A=\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ мы считаем равным $a_1\cdot 10^n+a_2\cdot 10^{n-1}+\ldots+a_n\cdot 10^0$. На самом деле так будет только в *десятичной системе счисления, основание* которой равно *десяти*. Однако в качестве основания системы счисления можно взять любое натуральное число $q>1$; число $\overline{a_1a_2\ldots a_n}$ в такой q-ичной системе счисления будет равно

$$\overline{a_1a_2\ldots a_n}=a_1q^n+a_2q^{n-1}+\ldots+a_n\cdot q^0.$$

В какой же системе счисления у девочки может быть 10 рук, 10 ушей и 10 глаз? Только в такой, в которой 10 будет равно числу 2, то есть $10_q=1\cdot q^1+0\cdot q^0=2$. Таким образом, $q=2$, значит, в этом стихотворении все происходит в двоичной системе счисления. В этой системе

$100=1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+0\cdot 2^0=4$,

$101=1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+1\cdot 2^0=5$,

$1100=1\cdot 2^3+1\cdot 2^2+0\cdot 2^1+0\cdot 2^0=12$.

Девочке было 12 лет, она училась в пятом классе.

Московский инженерно-физический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. 36, 45, 54, 63. **Указание.** Если $A=10x+y$, где x и y — цифры, то по условию

$$\begin{cases} |x-y|\leqslant 3,\\ x+y=9.\end{cases}$$

2. $\{\log_3(1+\sqrt{1-a})\}$ при $a\in]-\infty;\ 0]$; $\{\log_3(1+\sqrt{1-a}),\ \log_3(1-\sqrt{1-a})\}$ при $a\in]0;\ 1]$; $\varnothing$ при $a\in]1;+\infty[$. **Указание.** Уравнение после замены $t=3^x$ приводится к виду $t^2-2t+a=0$ и имеет корни $t_{1,2}=1\pm\sqrt{1-a}$ при $a\leqslant 1$. Необходимо еще учесть, что $t>0$.

3. $x_1=1+\left(\frac{2\pi k}{b}\right)^2$, $x_2=1+\frac{4\pi^2}{9b^2}(3l+1)^2$ $(k,\ l\in\mathbb{Z})$, $k\geqslant 0$, $l\geqslant 0$ при $b\in]0;+\infty[$; $x\in[1;+\infty[$ при $b=0$; $x_1=1+\left(\frac{2\pi k}{b}\right)^2$; $x_2=1+\frac{4\pi^2}{9b^2}(3l+1)^2$ $(k,\ l\in\mathbb{Z})$, $k\leqslant 0$, $l<0$ при $b\in]-\infty;\ 0[$.

Указание. При $b\neq 0$ уравнение приводится к виду $b\sqrt{x-1}=-\frac{\pi}{6}+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n$ при $n\in\mathbb{Z}$. Если $n=2k$, то $b\sqrt{x-1}=2\pi k$. Если $b>0$, то при $k\geqslant 0$ имеем $x_1=1+\left(\frac{8\pi^2k}{b}\right)^2$. Если $b<0$, то $x_1=1+\left(\frac{2\pi k}{b}\right)^2$ при $k\leqslant 0$. Аналогично рассматривается случай нечетного $n=2l+1$.

4. $S_1=\frac{kh^3}{4k^2-h^2}$; $S_2=\frac{kh(k^2-h^2)}{4k^2-h^2}$, если $\frac{h}{k}\in]1;\ \sqrt{2}[$. $S=\frac{kh^3}{4k^2-h^2}$, если $\frac{h}{k}\in]0;\ 1[$.

Указание. Поскольку точки A и C (рис. 1) одинаково удалены от плоскости BSD, $|AD|=|DC|$. Это значит, что $\triangle ASC$ — равнобедренный и $(AC)\perp(BSD)$. Пусть $|AS|=l$, $|AC|=a$, $|SB|=x$, $\widehat{ASC}=\alpha$. Тогда $\begin{cases} ak=hl,\\ k^2+\frac{a^2}{4}=l^2,\end{cases}$ откуда $a=\frac{2kh}{\sqrt{4k^2-h^2}}$, $l=\frac{2k^2}{\sqrt{4k^2-h^2}}$, причем $\frac{h}{k}<2$.

Пусть K, N, M — середины ребер AS, AB и BC соответственно. Сечение пирамиды плоскостью KNM — параллелограмм $KLMN$, так как

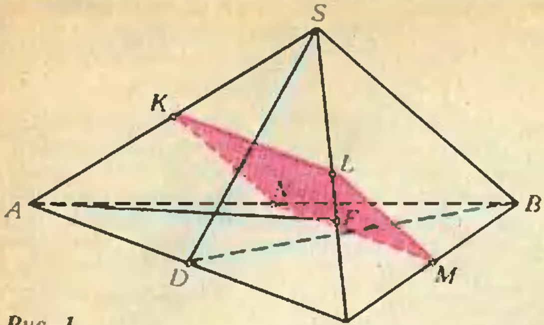


Рис. 1.

$(LM)\parallel(SB)$, $(KL)\parallel(AC)$ и $(SB)\perp(AC)$, параллелограмм $KLMN$ является прямоугольником с площадью $\frac{ax}{4}$. По теореме косинусов $|AC|^2=2l^2-2l^2\cos\alpha=|BC|^2=x^2+l^2-2lx\cos\alpha$, откуда $x_1=l$, $x_2=l(1-2\cos\alpha)$.

Из $\triangle ASC$ получаем $\cos\alpha=\frac{2k^2-h^2}{2k^2}$, поэтому $x_2=l\frac{h^2-k^2}{k^2}$. Если $h\leqslant k$, имеется лишь одна пирамида, удовлетворяющая условию задачи. Если $k<h<k\sqrt{2}$, то имеются две пирамиды (правильная с $x_1=l$ и неправильная с $x_2=l(1-2\cos\alpha)$).

Вариант 2

1. $x=\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{9-4a}{9}+\frac{\pi n}{2}$, $(n\in\mathbb{Z})$ при $0<a\leqslant\frac{9}{2}$. При остальных значениях a решений нет. Указание. При $a=0$ решений нет. При $a\neq0$ воспользуйтесь соотношением $\sin^2 2x=\frac{1-\cos 4x}{2}$.

2. $10{,}5-\frac{6}{25}a$; задача имеет решение при $a\in\left]\frac{175}{6};\ 35\right[\ \cup\ \left]35;\ \frac{175}{4}\right[$. Указание. Пусть в первом сосуде содержится x литров щелочи, а во втором — y литров. Из условия следует система

$$\begin{cases}\dfrac{x+y}{10}=\dfrac{35}{100},\\ \dfrac{\frac{3x}{4}+\frac{3y}{6}}{6}=\dfrac{a}{100},\\ 0<y<6,\ 0<x<4.\end{cases}$$

3. $2\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{4m_1^2-m_2^2}}{3m_2}$ при $\frac{1}{2}<\frac{m_1}{m_2}<\sqrt{\frac{5}{2}}$;

$\varphi\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right[$ при $m_1=\sqrt{\frac{5}{2}}\,m_2$.

Указание. Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ASB. Из $\triangle AOD$ получаем $|AD|=\frac{1}{3}\sqrt{4m_1^2-m_2^2}$. Рассмотрим два случая: а) $\triangle ASB$ — остроугольный, б) $\triangle ASB$ — неостроугольный. В случае а) треугольник ASB является осевым сечением конуса, и поэтому искомый угол $\varphi=2\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{4m_1^2-m_2^2}}{3m_2}$. Этот случай реализуется при $\mathrm{tg}\frac{\varphi}{2}<1$, то есть когда $\frac{1}{2}<\frac{m_1}{m_2}<\sqrt{\frac{5}{2}}$. В случае б) треугольник ASB наибольшей площади должен быть прямоугольным (это следует из того, что площадь всякого сечения ASB конуса, проходящего через вершину S, равна $\frac{1}{2}l^2\sin\alpha$, где α — угол между образующими AS и BS, и поэтому принимает наибольшее значение при $\alpha=\frac{\pi}{2}$. Таким образом, так как при $m_1>\sqrt{\frac{5}{2}}\,m_2$ треугольник ASB тупоугольный, он не может быть сечением конуса, имеющим наибольшую площадь. Если же $m_1=\sqrt{\frac{5}{2}}\,m_2$, треугольник ASB прямоугольный и угол φ осевого сечения конуса может принимать любые значения $\frac{\pi}{2}\leqslant\varphi<\pi$.

4. $f'(x)=\frac{4-2x}{(x^2-4x+a)^2}$; $a\in\,]-\infty;\,-21[\ \cup\ [5;\,+\infty[$.

Указание. Для того чтобы $f(x)$ была определена при всех $x\in[5;7]$, необходимо и достаточно, чтобы уравнение $\varphi(x)=x^2-4x+a=0$ не имело корней на этом отрезке. Это в свою очередь будет тогда и только тогда, когда $\varphi(5)>0$ и $\varphi(7)>0$, или $\varphi(5)<0$ и $\varphi(7)<0$, то есть, когда $\varphi(5)\cdot\varphi(7)>0$. Поскольку $f'(x)<0$, при $x\in[5;7]$ задача сводится к решению неравенства $f(5)\leqslant\frac{1}{10}$.

Физика

1. Запишем условие равновесия стержня:

$$Mg\left(\frac{l}{2}-\Delta l\right)=2T\left(\frac{l}{2}+\Delta l\right),$$

где T — сила натяжения нити, на которой подвешены грузы массой m_1 и m_2. Эту силу можно найти, используя второй закон Ньютона:

$$m_1a=m_1g-T,$$
$$-m_2a=m_2g-T,$$

откуда

$$T=\frac{2m_1m_2g}{m_1+m_2}.$$

Подставляя этот результат в условие равновесия стержня и используя равенство $m_1+m_2=M$, получаем следующее уравнение для масс m_1 и m_2:

$$m_{1,2}^2-m_{1,2}M+\frac{M^2}{4}\left(\frac{l/2-\Delta l}{l/2+\Delta l}\right)=0.$$

Решение этого уравнения даст

$$m_1=\frac{M}{2}\left(1+\sqrt{\frac{4\Delta l}{l+2\Delta l}}\right)=1{,}67\ \text{кг}.$$

$$m_2=\frac{M}{2}\left(1-\sqrt{\frac{4\Delta l}{l+2\Delta l}}\right)=0{,}33\ \text{кг}.$$

2. При движении вверх по наклонной плоскости шайба замедляется силой тяжести и силой трения. При этом ускорение шайбы

$$a_1=g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)$$

и время движения

$$t_1=\frac{v_0}{a_1}=\frac{v_0}{g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}=1{,}6\ \text{с}.$$

Поскольку условия задачи требуют вычисления работы за время $t=3{,}5$ с $(t>t_1)$, необходимо рассмотреть также движение шайбы вниз по наклонной плоскости. В этом случае ускорение шайбы

$$a_2=g(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)$$

и время движения

$$t_2=t-t_1.$$

За время t шайба проходит путь

$$l=\frac{v_0^2}{2a_1}+\frac{a_2t_2^2}{2}.$$

На этом пути сила трения $F_{тр}=\mu mg\cos\alpha$ совершает над шайбой работу

$$A_{тр}=-F_{тр}l=-\frac{\mu m\cos\alpha}{2}\left(\frac{v_0^2}{\sin\alpha+\mu\cos\alpha}+\right.$$

$$\left.+g^2(\sin\alpha-\mu\cos\alpha)\left(t-\frac{v_0}{g(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)}\right)^2\right)=$$

$$=-7{,}2\ \text{Дж}.$$

3. Для нахождения силы натяжения нити T и ускорения грузов a запишем второй закон Ньютона для тел A и B:

$$ma=T-mg\sin\alpha,$$
$$ma=mg-T,$$

откуда получаем

$$a=\frac{g}{2}(1-\sin\alpha);\ T=\frac{mg}{2}(1+\sin\alpha).$$

Мощность N, развиваемая силой натяжения нити, через время t после начала движения можно найти по формуле

$$N=Tat=\frac{mg^2t}{4}(1-\sin\alpha)(1+\sin\alpha)=$$

$$=\frac{mg^2t}{4}\cos^2\alpha=75\ \text{Вт}.$$

4. Давление p_1 и объем V_1 газа в начальном состоянии *1* связаны с давлением p_3 и объемом V_3 в конечном состоянии *3* уравнением состояния

$$p_1V_1=p_3V_3=RT_1.$$

Газ совершает работу только при переходе из промежуточного состояния *2* в конечное состояние *3*:

$$A=p_3(V_3-V_1)=p_3V_3\left(1-\frac{V_1}{V_3}\right)=RT_1\left(1-\frac{1}{n}\right).$$

Отсюда получаем

$$T_1=\frac{nA}{R(n-1)}=300\ \text{К}.$$

5. Запишем второй закон Ньютона для движущегося шарика до и после внесения заряда в центр окружности:

$$m\omega_1^2R=mg\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

$$m\omega_2^2R=mg\,\mathrm{tg}\,\alpha-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0R^2},$$

где α — угол между нитью подвеса и вертикалью. Из этих уравнений находим

$$\omega_2=\sqrt{\omega_1^2-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0R^3m}}=1{,}7\ \text{с}^{-1}.$$

6. В тот момент, когда нить занимает вертикальное положение, второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось запишется в виде

$$F-mg=\frac{mv^2}{l},$$

где F — сила натяжения нити, v — скорость шарика в этот момент, l — длина нити. Скорость v можно найти с помощью закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2}=mgl(1-\cos\alpha)+qEl\sin\alpha.$$

Решая полученную систему уравнений, находим

$$F=mg+2mg(1-\cos\alpha)+2qE\sin\alpha=$$
$$=mg(3-2\cos\alpha)+2qE\sin\alpha=18{,}4\ \text{Н}.$$

7. Мощность, потребляемую лампой сразу ж после ее включения, запишем в виде

$$P=\frac{U^2}{R},$$

где U — напряжение на лампе, $R=R_0\times$ $\times(1+\alpha t_к)$ — сопротивление спирали при ком натной температуре $t_к\approx20\ ^\circ\text{C}$ (R_0 — сопротив ление при $0\ ^\circ\text{C}$). После нагревания сопротив ление спирали увеличивается до значени $R'=R_0(1+\alpha t)$, и лампа потребляет мощност

$$P'=\frac{U^2}{R'}=\frac{PR}{R'}=P\frac{1+\alpha t_к}{1+\alpha t}\approx44\ \text{Вт}.$$

8. Сила, с которой пучок действует на плас тинку, может быть вычислена по формул

$$F=\frac{\Delta P}{\Delta t},$$

где ΔP — импульс пучка протонов, пере данный пластинке за время Δt. Преобразуе эту формулу следующим образом:

$$F=mv\frac{\Delta N}{\Delta t}=\frac{mv}{e}\frac{e\Delta N}{\Delta t}=\frac{mv}{e}\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{mv}{e}I.$$

Здесь v — скорость протонов, ΔN — числ протонов, попадающих на пластинку за врем Δt, Δq — заряд протонов, достигающи пластинку за время Δt. Скорость v найдем с по мощью закона сохранения энергии:

$$\frac{mv^2}{2}=eU,\ v=\sqrt{\frac{2eU}{m}}.$$

Теперь окончательно получаем

$$F=I\sqrt{\frac{2mU}{e}}=1{,}6\cdot10^{-3}\ \text{Н}.$$

9. В области магнитного поля протон движетс по дуге окружности и вылетает под углом — (рис. 2). Время τ движения протона в област магнитного поля связано со временем полног оборота T соотношением

$$\tau=\frac{\pi+2\alpha}{2\pi}T.$$

Для вычисления времени $T=2\pi R/v$ необходим найти отношение скорости протона v к радиус траектории R. Это отношение получим и уравнения движения протона

$$\frac{mv^2}{R}=evB,\ \frac{v}{R}=\frac{eB}{m}.$$

Таким образом,

$$T=\frac{2\pi m}{eB}.$$

Подставив этот результат в формулу для вре мени τ и решив полученное уравнение отно сительно индукции магнитного поля, найде

$$B=\frac{(\pi+2\alpha)m}{e\tau}=8{,}4\cdot10^{-3}\ \text{Тл}.$$

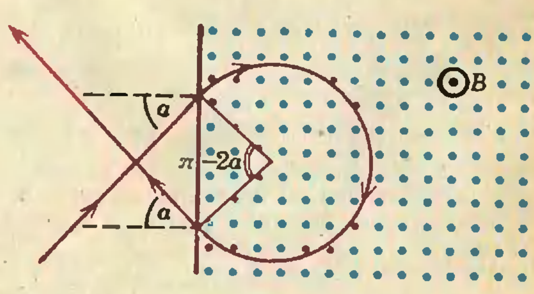


Рис. 2.

10. При движении проводника со скоростью v_2 ЭДС индукции Blv_2 оказывается равной ЭДС $\mathcal{E}$ источника тока:

$$\mathcal{E}-Blv_2=0, \quad \mathcal{E}=Blv_2.$$

Следовательно, при движении проводника со скоростью v_1 по цепи потечет ток

$$I=\frac{\mathcal{E}-Blv_1}{r+R}=\frac{Bl(v_2-v_1)}{r+R}=1{,}0 \text{ А}.$$

Московский институт стали и сплавов

Математика

1. (9). **2.** (2). **3.** (−1). **4.** (20). **5.** (3). **6.** (100). **7.** (1,125). **8.** (67). **9.** (1,5). **10.** (5). **11.** (204). **12.** (21).

Физика

1. $t=\sqrt{\dfrac{2l}{F/m-\mu g(1+m/M)}}\approx 0{,}52$ с.

2. $\tau=m(c\Delta T+\lambda)/P=10\,200$ с.

3. $m=\eta kW/U\approx 0{,}63$ кг.

4. $T=\pi\sqrt{2l/g}\approx 0{,}63$ с.

5. $t=\dfrac{c_1m_1t_1+c_2m_2t_2}{c_1m_1+c_2m_2}\approx 17{,}7\ ^\circ$С.

6. $h=D\sqrt{n^2-1}/2\approx 0{,}885$ м.

7. $\varphi_2=\varphi_1\dfrac{p_{н1}}{p_{н2}}\dfrac{T_2}{T_1}\approx 62\ \%$.

8. $R'=500$ Ом.

9. $m_1/m_2=(r_1/r_2)^2=4$.

10. $\mu=4\pi^2n^2r/g\approx 0{,}025$.

11. $E_k=hc/\lambda-A\approx 1{,}84\cdot 10^{-19}$ Дж $\approx 1{,}15$ эВ (здесь $h=6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка, $c=3\cdot 10^8$ м/с — скорость света, 1 эВ $=1{,}6\cdot 10^{-19}$ Дж).

12. $F_1=l-F_2=0{,}06$ м $=6$ см.

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

1. $2\cdot(a^2+b^2)^{-1}$ при $a\neq 0$, $b\neq 0$, $a\neq\pm b$.

2. $\left\{\left(\dfrac{9}{4};\dfrac{3}{8}\right),\left(\dfrac{3}{8};\dfrac{9}{4}\right)\right\}$.

3. $\left\{\dfrac{7}{6};-\dfrac{1}{2}\right\}$.

4. $x=-\dfrac{3\pi}{2}$.

5. $\left\{\arcsin\dfrac{2}{\pi};\ \pi-\arcsin\dfrac{2}{\pi}\right\}$.

Задачи устного экзамена

1. а) Диагонали параллелограмма должны быть конгруэнтны друг другу; б) диагонали параллелограмма должны быть перпендикулярны друг другу.

2. Воспользуйтесь неравенством Коши: $a+b\geqslant 2\sqrt{ab}$, $a, b\geqslant 0$.

3. 0. Указание. Учтите, что областью определения данного выражения является множество

$$\{(a, b, c) \mid a+b+c=0;\ ab+bc+ca\geqslant 0\}=$$
$$=\{(a, b, c) \mid a+b+c=0;\ ab+bc+ca=0\}.$$

4. $T=2\pi$.

5. $M=2+\sqrt{5}$, $m=2-\sqrt{5}$.

6. Два.

7. $|x|\leqslant 4$. Указание. Докажите, что $\sin x\cdot\sin 7x\neq 1$.

8. Указание. Учтите область определения функций.

9. 1 при $x>0$.

10. $x=\dfrac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n)$.

Физика

Письменный экзамен

2. $v_1(t)=t$; $v_2(t)=3-0{,}6t$; см. рис. 3.

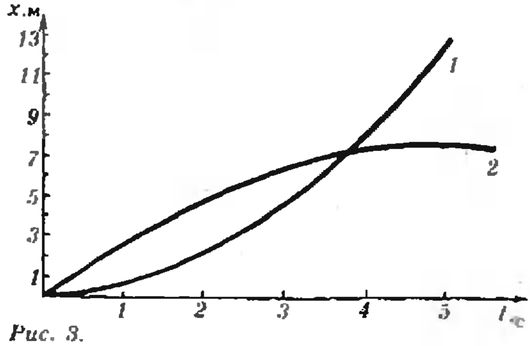


Рис. 3.

3. $T_2=T_1p_2/p_1=250$ К; $t_2=-23\ ^\circ$С.

4. $v_{max}=\dfrac{2hc}{\lambda m}-\dfrac{2A}{m}\approx 6{,}2\cdot 10^5$ м/с.

5. $v=\sqrt{\dfrac{qEB}{m\cos^2\alpha(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)}}=2{,}7$ м/с.

Вариант 2

2. Насыщенный водяной пар.

3. Мнимое, прямое и уменьшенное изображение находится на расстоянии $f=dF/(d+F)=3{,}3$ см от линзы.

4. $L=U_m/(\omega^2q_m)=10^{-3}$ Гн.

5. $r=R^2/R_в=0{,}8$ Ом.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Математика

Вариант 1

1. {0; 126/65}. Указание. Поскольку $x=2$ не является корнем данного уравнения, оно приводится к виду $t^2+4t-5=0$,

где $t=\sqrt[3]{\dfrac{2+x}{2-x}}$.

2. $]\log_5 7;\ 1[\cup]1;\ +\infty[$.

3. $\dfrac{7}{9}$ л.

4. 5 см.

5. 320 м.

Вариант 2

1. {−4/3; 4}. **2.** {($\sqrt{21}-3$)/6}. **3.** $\pi/3$.

4. 6 см. **5.** $\left]-\infty;\ \dfrac{1}{2}\right[$.

Физика

1. $T=mg\dfrac{\sin\alpha}{1+\sin\alpha}=0{,}1$ Н.

2. $\Delta h=(\rho_1h_1-\rho_2h_2)/\rho\approx 0{,}5\cdot 10^{-2}$ м $=0{,}5$ см.

3. $Q=(\rho_1-\rho_2)Vgh=4{,}5\cdot 10^{-2}$ Дж.

4. $p_в=\rho la(n+1)/(n-1)\approx 10^5$ Па.

5. Период колебаний уменьшается в $\sqrt{1+\dfrac{qE}{mg}}$ раз.

6. $\Delta T=\dfrac{\eta P^2\rho\tau}{U^2S^2cD}=0{,}8$ К.

7. $R=\dfrac{\mathcal{E}+L\Delta I/\Delta t}{\dfrac{\mathcal{E}}{R}-\dfrac{\Delta I}{\Delta t}t}=15{,}25$ Ом.

8. $x = 2\sqrt{2Wm/(qB)} \approx 0{,}72$ м.

9. $F = 2d_1d_2/(d_1+d_2) \approx 26{,}7$ см. Указание. Светящиеся точки находятся по разные стороны от линзы.

10. Расстояние от собирающей линзы до фотопленки равно $a_1 = 40$ см либо $a_2 = 10$ см.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 2)

1. 41 год.

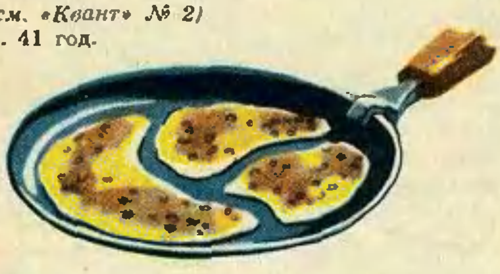


Рис. 4.

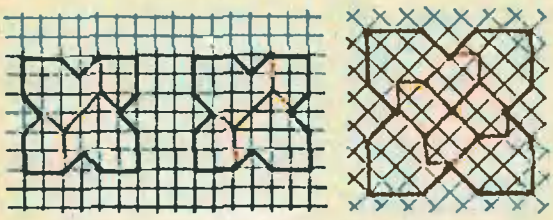


Рис. 5.

2. $17^3 = 4913$, $4+9+1+3 = 17$.

3. Частицы несгоревшего топлива (дым) поднимает вверх поток теплого воздуха, образующийся при горении. После остывания воздуха эти частицы оседают на землю.

4. Возьмем такую же сковороду и перевернем в нее оладьи. Они лягут другой стороной и вновь не будут налезать друг на друга. Пример расположения, когда невозможно перевернуть одну из оладий, изображен на рисунке 4.

5. См. рисунок 5.

Шахматная страничка

(см. «Квант», 1985, № 11, 12)

Задание 21 (Л. Кайев, 1947, г.). **1. c5 h4 2. Ce6 de** 3. c6 h3 4. c7 h2 5. c8Ф h1Ф 6. Фc3+ Крd5 7. Фc5+ Крe4 8. Фc6+.

Задание 22 (А. Селезнев, 1927 г.). **1. Крc4! Кр:f4 2. d5 Крe5 3. Крc5 a4** 4. d6 Крe6 5. Крc6 a3 6. d7 a2 7. d8Ф a1Ф 8. Фe8+ Крf6 9. Фh8+, 3...f4 4. d6 Крe6 5. Крc6 f3 6. d7 f2 7. d8Ф f1Ф 8. Фe8+ и 9. Фf8+.

Задание 23 (Э. Погосянц, 1982 г.). Для решения задачи прежде всего следует повернуть доску на 180°, после чего король переставляется с e1 на c1, завершая длинную рокировку (недостающие полхода!).

Задание 24 (Б. Сидоров, 1981 г.). Вот одна из позиций, где любой шах ферзем ведет к его потере. Белые: **Крb5, Фe8**; черные: **Крb2, Фh2**.

Номер подготовили:
А. А. Варламов, А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Е. В. Винодарова, М. Б. Дубах, Т. Н. Кольченко, Д. А. Крымов, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, Н. И. Чернуский, В. Б. Юдин

Фото представил А. С. Кондратьев

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления С. В. Иванов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Д. Дорохова

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 22.1.86. Подписано к печати 20.2.86
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8
Бумага 70×108 1/16
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,32. Т-06916
Тираж 200 527 экз.
Цена 40 коп. Заказ 91

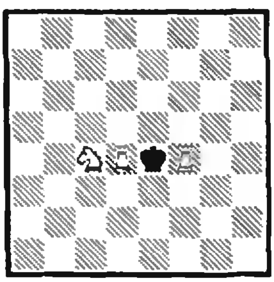
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ГОЛОВОЛОМКИ В ШАХМАТНОЙ ПАРТИИ

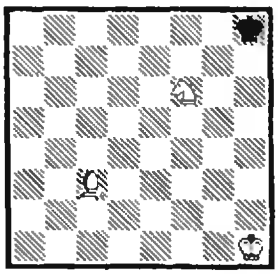
Название очередной «странички» кажется несколько странным. Практическая партия — это настоящие шахматы, а головоломки, шахматно-математическая задача — совсем иной жанр, как будто не имеющий отношения к реальной игре. Но...

Однажды Сэм Лойд, знаменитый шахматный композитор и «гроссмейстер занимательной математики» объявил, что нашел способ заматовать одинокого короля в центре доски двумя ладьями и конем без поддержки собственного короля. Любители шахмат поначалу пришли в ярость, но когда Лойд показал разгадку своей головоломки, они вдоволь насмеялись.



Наверное, вы решили, что такой мат возможен только в головоломке, но вот посмотрите, какая однажды случилась история (рассказал ее мастер О. Сабитов). В одной из партий на турнире в Душанбе возникло такое окончание.

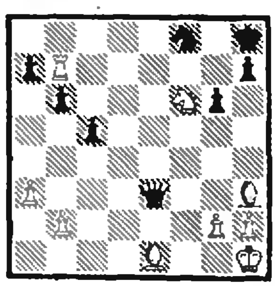
В сильнейшем цейтноте белые потянулись рукой к ладье f2, а черные, успев разглядеть, что после 1.Лe2+ отступать королем нельзя из-за потери ладьи (1...Крf5 2.Лf8+ Крe6 3.Лc8+), схватили свою ладью c3, намереваясь загородиться ею от шаха. И шах действительно последовал, но с другого поля — **1.Лf4+**. Черные в суматохе не обратили внимания на изменение ситуации и молниеносно ответили заготовленным **1...Лe3!?** Флажок белых угрожал вот-вот рухнуть, и, позабыв о шахе, объявленном предыдущим ходом, они окружили неприятельского короля и с другой стороны — **2.Лd4!!**, создав уникальную позицию, подобную которой не сыскать во всей шахматной истории.



Мат в 1 ход.

Чтобы объявить мат в 1 ход, белый конь... встает на дыбы! После такого «маневра» поля g8 и h7 по-прежнему под его охраной (ведь он не покинул поле f6, а только приподнялся над ним), а матует белый слон c3. Эта идея может вызвать вполне реалистическую ассоциацию... Анализируя как-то свою встречу с А. Гипслисом, гроссмейстер Э. Гуфельд пришел к такой позиции.

Поначалу Гуфельд решил, что белые, которыми он играл, проигрывают: материальный перевес на его стороне, но



слон под боем, а отступать им бесполезно ввиду обнаженности первой горизонтали (Фc1+). Но, вспомнив шутку с конем, вздымающимся на дыбы, он нашел выход: 1.Лe7!! Ф:e7 2.Сc3! Сравните это положение с головоломкой, и вы поймете, что разница невелика. Вновь конь готов взметнуться в воздух и нет защиты от потери ферзя — 3.Кd5+ или мата — 3.Кg4+ Крg8 4. Кh6×.

Задача. *Конь стоит на a1. Может ли он обойти всю доску, посетив каждое поле ровно один раз, и завершить свое путешествие на h8?*

Конь на каждом ходу меняет цвет поля, на котором находится. Исходное поле a1 черное, на 63-м ходу конь окажется на белом поле. Но поле h8 — черное, и, стало быть, условие задачи выполнить невозможно.

Подобных головоломок существует немало. Имеют ли они отношение к шахматной игре? Самое непосредственное.

Рассмотрим такую позицию:

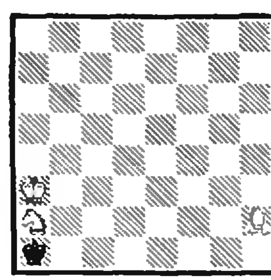
Белые: Крh8, Кb2, п. h7.
Черные: Крf7.

Как ее оценить? Для победы белым нужно освободить своего короля. Если ход их, это возможно: 1.Кd3 Крf8 2.Кe5 и т. д. При ходе черных из угла не выйти: 1...Крf8 2.Кd3 Крf7 3.Кe5+ Крf8. Ход белых, и они вынуждены уступить черному королю поле f7. Ничья.

Для подобных позиций полезно запомнить следующее правило: *слабейшая сторона добивается ничьей, если при своем ходе может поставить короля на поле того же цвета, что и поле, на котором стоит неприятельский конь.*

Конкурсные задания

Первая задача серьезная, а вторая — головоломка.



5. Белые начинают и дают мат в 5 ходов.

6. На доске стоят лишь два короля — белый на a6, черный на a8. Куда следует поставить белого ферзя, чтобы белые не могли дать мат в один ход?

Срок отправки решений — 20 мая 1986 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 5, 6».

Цена 40 коп.
Индекс 70465

На этих четырех фотографиях показаны модели замкнутого сферического купола (слева вверху) и трех куполообразных конструкций, полученных стыковкой частей таких куполов.

Сферический купол реализован в виде сети из тонких плоских колец, жестко скрепленных в местах пересечения. Каждое кольцо параллельно трем кольцам; каждое такое семейство из четырех колец отвечает четырем сечениям сферы равноотстоящими параллельными плоскостями. Сосчитайте число этих семейств и сообразите, как расположены относительно друг друга непараллельные плоскости разных сечений.

Подумайте, какие еще куполообразные формы можно составить из кусков сферического купола.

О. Я. Боднар