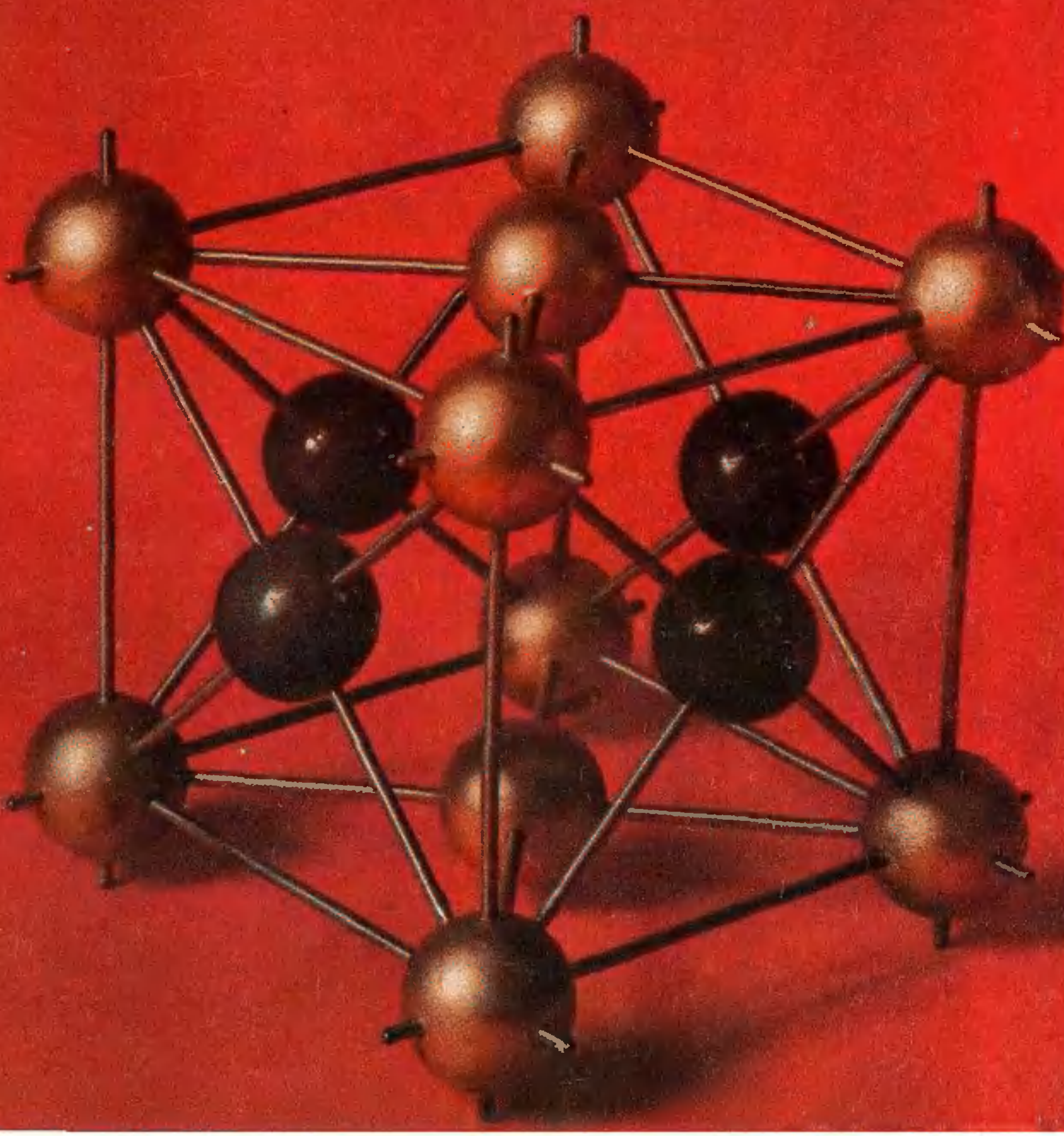
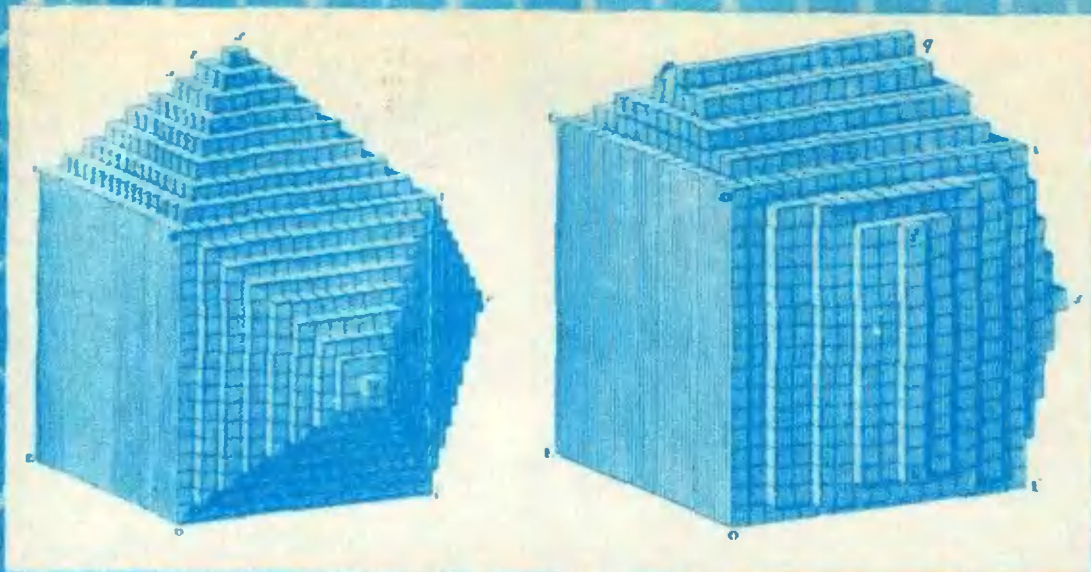
ISSN 0130-2221

КВАНТ

1
1986

Научно-популярный физико-математический журнал
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР





В природе часто встречаются симметричные объекты. Свойством симметрии обладают и пчелиные соты, и колонии вирусов (фотография слева, сделанная с помощью электронного микроскопа), и кристаллы (вверху приведены рисунки из атласа к трактату Р. Ж. Гаюи, изданного в начале XIX века).
Но почему пчелы строят шестиугольные соты, а вирусы предпочитают пятиугольники? Из каких повторяющихся частей можно составить кристалл? Эти вопросы обсуждаются в статье «Следы на песке и... строение вещества».

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант

1 1986

Основан в 1970 году

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ: / IN THIS ISSUE:

2	Нашим новым читателям	To our new readers
3	Интервью с академиком Ю. А. Осипьяном	Interview with academician Yu. A. Ossipyan
7	*И. Г. Башмакова, А. И. Лапин.* Пифагор	*I. G. Bashmakova, A. I. Lapin.* Pythagoras
13	*Л. Г. Асламазов.* Следы на песке и ... строение вещества	*L. G. Aslamazov.* Footsteps in the sand ... and the structure of matter
	Математический кружок	**Mathematics circle**
19	*Н. Б. Васильев, В. Л. Гутенмахер.* Комбинаторика — многочлены — вероятность	*N. B. Vasiliev, V. L. Gutenmakher.* Combinatorics — polynomials — probability
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
24	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
28	Избранные школьные задачи	Selected school problems
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
29	Задачи	Problems
30	*Н. Н. Иванова.* Восстанови стертую фигуру!	*N. N. Ivanova.* Recovering erased figures
32	**Калейдоскоп «Кванта»**	**Kvant's kaleidoscope**
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
34	Задачи М961—М965; Ф973—Ф977	Problems M961—M965; P973—P977
36	Решения задач М941—М945; Ф953—Ф957	Solutions M941—M945; P953—P957
42	Из писем читателей	From our mail
	Полупроводниковые элементы вычислительной техники	**Semiconducting elements in computers**
44	V. Элементарные логические операции	V. Elementary logical operations
	Искусство программирования	**The art of programming**
46	*С. А. Абрамов.* Поиск в упорядоченной совокупности и упорядочение	*S. A. Abramov.* Search in an ordered set and ordering
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
49	*И. Г. Габович.* Основные углы в правильной пирамиде	*I. G. Gabovich.* The principal angles of regular pyramids
52	**Варианты вступительных экзаменов**	**Entrance examination problems**
	Информация	**Information**
56	Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу (ВЗМШ)	Entrance requirements to the All-Union mathematics correspondence school
57	Новый прием на заочное отделение Малого мехмата	Entrance requirements to the Maly Mekhmat correspondence school
58	Заочная физико-техническая школа при МИСиСе	The MISIS physico-technical correspondence school
59	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Смесь (*23, 58*)	**Miscellaneons** (*23, 58*)
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Новое в кодексе (3-я с. обложки)	New rules *(3rd cover page)*

Модель кристаллической решетки сплава медь — золото, воспроизведенная на первой странице обложки,— характерный пример наших представлений о строении твердого тела. О том, как развиваются эти представления, каково состояние дел в физике твердого тела сегодня, читайте в интервью с академиком Ю. А. Осипьяном

Нашим новым читателям

Дорогие читатели! Перед вами научно-популярный физико-математический журнал для школьников. Ежемесячно он будет приносить в ваш дом квант новых знаний. Чтобы вы лучше ориентировались в помещаемых материалах, представляем вам основные рубрики и разделы журнала.

Открывают журнал статьи о достижениях науки и ее практических применениях; о фундаментальных понятиях физики и математики; статьи, посвященные истории науки и замечательным ученым.

Новости науки. В этом разделе помещаются небольшие заметки о новейших научных достижениях.

Лаборатория «Кванта». Опыты, которые описываются в статьях под такой рубрикой, вы можете выполнить самостоятельно. Это поможет вам развить наблюдательность, научиться делать простые приборы.

Математический кружок. В этом разделе публикуются циклы задач, объединенные единой темой или общими методами решения.

Школа в «Кванте». Статьи этого раздела связаны со школьной программой, они разъясняют наиболее трудные для понимания вопросы школьного курса.

Калейдоскоп «Кванта». Мы надеемся, что этот разворот, посвященный, как правило, какому-либо физическому или математическому понятию, может быть использован для оформления школьных кабинетов физики и математики.

«Квант» для младших школьников. Под этой рубрикой публикуются занимательные задачи, требующие не столько конкретных знаний, сколько сообразительности, внимательности, умения мыслить логически. Статьи, помещаемые в этом разделе, интересны, как правило, и старшеклассникам.

Задачник «Кванта». Мы предлагаем читателям задачи, решение которых требует умения мыслить самостоятельно, творчески. Журнал ежегодно проводит конкурс на лучшее решение задач из «Задачника «Кванта». Победители конкурса получают право участвовать в республиканских турах Всесоюзной физико-математической олимпиады школьников.

Искусство программирования. Полупроводниковые элементы вычислительной техники. Материалы этих разделов должны помочь вам лучше освоить школьный курс «Основы информатики и вычислительной техники».

Практикум абитуриента. Статьи этого раздела адресованы, в первую очередь, тем, кто готовится к вступительным экзаменам в вузы. Читатели найдут здесь подробное разъяснение многих вопросов школьных курсов математики и физики.

Варианты вступительных экзаменов. Содержание этого раздела — задания по математике и физике, которые предлагали своим абитуриентам университеты, технические и педагогические институты.

Олимпиады. Задачи, предлагавшиеся на различных этапах Всесоюзных олимпиад школьников и учащихся ПТУ, на Международных олимпиадах, рассказы о том, как проходят эти олимпиады,— таково содержание этого раздела.

Информация. Под такой рубрикой помещаются материалы, в которых рассказывается о научных обществах учащихся, о физико-математических турнирах и праздниках; регулярно публикуется информация о заочных и вечерних школах при различных вузах страны.

Ответы, указания, решения. Название этого раздела говорит само за себя.

Мы стараемся, чтобы в каждом номере появлялась страница «Квант» улыбается». Под рубрикой «Наш календарь» мы помещаем небольшие заметки о юбилейных датах в физике и математике. Довольно часто появляются в журнале «Задачи наших читателей», «Задачи для исследования», математические головоломки, кроссворды; эти материалы мы объединяем рубрикой «Смесь».

Интервью с академиком Ю. А. Осипьяном

Главный редактор нашего журнала академик Ю. А. Осипьян — известный ученый-физик, директор Института физики твердого тела АН СССР, профессор Московского физико-технического института. В беседе, проведенной с Ю. А. Осипьяном корреспондентом «Кванта» и предлагаемой сегодня нашим читателям, речь пойдет о становлении молодого ученого, о роли личности в науке, о стремительно развивающемся новом направлении — дислокационной физике, об особенностях работы современного исследователя.

— Юрий Андреевич, каким был ваш путь в науку?

— Я закончил школу в 1949 году. Но уже раньше, в 8—9 классах, мне было ясно, что я буду заниматься физикой. Меня очень интересовала физика металлов. Где же учиться дальше?

Тогда только возникали факультеты, где комбинировалось университетское — широкое — физическое образование с реальными знаниями в конкретных областях. И я узнал, что наукой о металлах смогу заниматься на инженерно-физическом факультете Московского института стали и сплавов (сейчас он называется физико-химическим факультетом). Решил пойти туда, поступил и был очень доволен, поскольку в институте подобралась целая плеяда хороших учителей как в теоретической, так и в экспериментальной областях физики. Мне удалось почерпнуть там довольно много полезных знаний, что сказывается на протяжении всей моей научной жизни.

Когда подошло время дипломной работы, жизнь свела меня с академиком Г. В. Курдюмовым, признанным лидером нашей физики металлов. В Институте металлофизики, который он возглавлял, под руководством профессора Б. Я. Любова я делал диплом.

Поначалу я стал было заниматься экспериментом. Но, анализируя условия опытов, столкнулся с теоретическими задачами. Почувствовал вкус к теории; мне думалось, что и как теоретик смогу кое-что сделать. Те знания физики и математики, что накопились к тому времени, позволили решить интересную, как мне кажется, задачу — о механизме низкотемпературных фазовых превращений в металлах.

— Это была фактически ваша первая научная работа?

— Да. С фазовыми превращениями, связанными с изменениями агрегатного состояния, мы сталкиваемся часто — это плавление, кристаллизация, конденсация. Однако и в уже затвердевших металлах могут происходить фазовые превращения. Проблема состояла в том, как объяснить, что некоторые из них идут при низких температурах очень быстро. По законам, которым подчиняются обычные фазовые переходы, эти превращения должны идти годами — концы с концами не сходились...

Возникла идея: не оказывают ли влияние при таких температурах на эти явления квантовые эффекты? Надо отметить, что применение квантово-механических представлений к фазовым переходам тогда было еще в диковинку. Однако, когда я провел расчеты с учетом этого нового фактора, оказалось, что «все хорошо сходится». Работа, честно говоря, мне очень нравилась, и она стала довольно быстро известной среди металловедов.

И вот, защитив диплом, я получил квалификацию теоретика. Правда, меня к тому времени уже не удовлетворяли мои познания в математике и теоретической физике. Я решил продолжить образование, углубить, увеличить эти знания и — поступил на механико-математический факультет МГУ. На первый курс! Работал в институте Курдюмова, вновь уклонился в экспериментальную физику, но математики не бросал, продолжал учиться по вечерам и прошел весь курс мехмата. И хотя жизнь сложилась так, что занимаюсь я экспериментальной физикой твердого тела, математическая «подкованность» чрезвычайно мне помогает...

— Известно, что организатором нового института — физики твердого тела — вы стали в 30 лет. Не отвлекло ли это вас от непосредственной научной работы?

— Отвлекло, и еще как! Но меня успокаивала и обнадеживала мысль о том, что как только институт будет сформирован, сразу же многократно увеличатся возможности для проведения экспериментов. Есть еще одна сторона дела: при создании института и во время дальнейшей работы в нем мне довелось сотрудничать со многими выдающимися учеными, оказавшими огромное влияние на нашу деятельность. Судите сами.

Конечно же, среди них был мой научный руководитель академик Г. В. Курдюмов, сформулировавший научные направления нового учреждения и поручивший мне возглавить его. Это и тогдашний президент АН СССР М. В. Келдыш. Он тоже не побоялся моей молодости и решительно поддержал мое назначение. Академик Н. Н. Семенов, директор Института химической физики, активно мне помогал и предоставил возможность создать наш институт в недрах своего. И когда еще не было даже здания, мы могли сколачивать научный коллектив.

На научную проблематику сильнейшим образом влияли сотрудники Института физических проблем во главе с академиком П. Л. Капицей. С ним мне тогда приходилось много раз беседовать и пользоваться его советами. Я счастлив, что в то время мне довелось общаться с Л. А. Арцимовичем, академиком-секретарем Отделения общей физики и астрономии...

Отрадно вспомнить, что тогда нам помогали многие физики, работавшие в других институтах,— ныне академики Б. К. Вайнштейн, А. И. Шальников, член-корреспондент АН СССР Ю. В. Шарвин. Ведь долгое время я был единственным штатным сотрудником нового института, ездил по проектным организациям, рисовал, как все будет расположено. Не было абсолютно ничего — лес и болото в Черноголовке под Москвой.

— И вот институт был создан и действует почти четверть века. Оправдались ли ваши надежды?

— Да, сейчас я с удовлетворением могу сказать, что коллектив у нас неплохой, работоспособный, и мы приобрели довольно хорошую репутацию физического института в системе Академии наук, получили интересные и значимые результаты. Но наши успехи обязательно надо поделить с другими институтами, расположенными в Черноголовке, с которыми мы тесно взаимодействуем. Разумеется, это Институт химической физики. Его сотрудники, очень хорошо зная химию, развивают новые методы воздействия на твердое тело, синтезируют новые материалы. Без контакта с ними нам было бы трудно.

Не можем мы обойтись и без каждодневного общения с учеными из Института теоретической физики имени Л. Д. Ландау. Кстати, это научное подразделение возникло за счет части сотрудников теоротдела Института физических проблем, которых я в свое время «вербовал» к нам в институт. Но тогда же родилась более широкая идея — не ограничиваться решением задач теории твердого тела, а заняться также теоретическими проблемами гидродинамики, взрыва, ядерной физики, то есть создать в Черноголовке некий «мозговой центр» теоретической физики. Это и было сделано. И вот рядом с нами стали работать выходцы из школы академика Л. Д. Ландау — ныне академики и члены-корреспонденты АН СССР А. А. Абрикосов, Л. П. Горьков, И. Е. Дзялошинский, И. М. Халатников. В этот институт затем пришли крупные ученые — академики А. Б. Мигдал, С. П. Новиков, член-корреспондент АН СССР А. И. Ларкин, профессора В. Л. Покровский, Я. Г. Синай и другие. Конечно, это уникальное собрание физиков-теоретиков и математиков в одном месте.

Я думаю, что такой «концентрации» теоретической мысли, в том числе и по теории твердого тела, нет нигде в мире. Вот видите, говоря о науке, нельзя не сказать о личностях.

А почему я так подробно остановился на теоретиках? Да просто многие проблемы без них вообще невозможно решать. Кроме того, общение с теоретиками специфично, оно носит характер стимуляции. Если вы хотите пойти к теоретику, чтобы что-то спросить, вам надо подрасти до уровня конкретной постановки вопроса, разговаривать с ним на особом языке. Все это требует предварительной работы и осмысливания. Считаю, что контакты с теоретиками повышают квалификацию экспериментаторов.

— Юрий Андреевич, а чем занимались именно вы в новом институте? Как реализовались ваши личные научные планы?

— Пока строительство института продвигалось, я продолжал размышлять о некоторых аспектах физической природы прочности твердых тел.

Известно, что кристаллов идеальной структуры практически нет. Они всегда имеют дефекты, в частности так называемые дислокации — одномерные нарушения кристаллической решетки, линии обрыва атомных плоскостей в кристалле. Так вот, теория дислокаций служила объяснением процессов пластической деформации и прочности, таково было основное назначение этой теории. А хотелось выяснить, влияют ли дислокации не только на механические, но и на физические свойства твердого тела? На его электрические, оптические, магнитные свойства? Я попытался выяснить, взаимодействуют ли дислокации с электронами? И как это взаимодействие выражается в поведении электронов и дислокаций? Оказалось, что здесь кроется ответ на многие вопросы, которые стояли тогда в физике твердого тела.

Например, был открыт фотопластический эффект, перевернувший, в общем, представления о природе прочности кристалла. Считалось, что для того чтобы осуществить пластическую деформацию кристалла, надо что-то «сотворить» с кристаллической решеткой, что изменения в состоянии электронов не могут повлиять на пластические свойства.

Но вот мне вместе с моей сотрудницей И. Б. Савченко удалось наблюдать следующее. При включении света прочность некоторых кристаллов возрастала, их сопротивление пластической деформации увеличивалось на 30—40, а иногда и на 100 процентов. Выключали свет — прочность падала до исходного значения. Это было очень странно, поскольку, как мы знали, тот свет, который мы включали, с решеткой ничего не делает, только — с электронами, а они-то на прочность не должны влиять!

Десять лет кропотливой — и экспериментальной, и теоретической — работы позволили установить природу этого, теперь широко известного, эффекта. Свет возбуждал электроны, их состояние влияло на дислокации, а уж дислокации — на пластичность.

С другой стороны, присутствие в кристалле дислокаций сказывается на его электрическом сопротивлении и других электрических свойствах. И тут мы набрели на множество новых явлений. В общем, возникла довольно обширная область, которую мы называем дислокационной физикой. Это и есть до сих пор предмет моей — и многих моих учеников — научной деятельности. И надо сказать, что работы нашего института в значительной мере определяют состояние этой научной области.

— А каково на сегодня состояние дел в физике твердого тела вообще?

— Сегодняшний день характерен тем, что роль и объем исследований по физике твердого тела заметно растут. Ее, так сказать, удельный вес внутри всей физики увеличивается. Это выражается в том, что ею занимается все больше научных сотрудников, в нее направляется больше ассигнований, больше выделяется оборудования, соответственно и она дает больше «продукции».

В физике твердого тела много фундаментальных проблем. Это только может показаться, что она занята частными вопросами. Ничего подобного! Например, недавно удалось провести такой эксперимент, который дает возможность определить с большой точностью значение мировой константы — отношения заряда электрона к его массе. Такого в твердотельных экспериментах раньше не было. Показателем общественной оценки работ по физике твердого тела служит и то, что каждые пару лет ученым, занимающимся ею, присуждается Нобелевская премия.

Если же коснуться приложений этой научной области к практике, то я осмелюсь сказать, что физика твердого тела дает больше, чем всякая другая область. Ну вот, смотрите, я назову лишь три направления.

Первое. Конструкционные материалы — все, из чего построены здания и машины, все материаловедение. Ученым необходимо «подложить» физические знания под понимание происходящих здесь процессов.

Второе. Регулирование и автоматика. Здесь всякий раз в «сердце» приборов — датчик какого-либо сигнала. Как правило, это твердое тело — кусочек полупроводника, металла. А дальше вся система «занята» усилением или переработкой полученного сигнала.

И третье. В основе научно-технической революции, связанной с вычислительной техникой, компьютеризацией, лежит физика твердого тела. Без ее достижений в принципе не были бы возможны современные ЭВМ, потому что только твердотельные электронные схемы — при разумных габаритах — могут переработать громадный необходимый объем информации.

Так что физика твердого тела — фундамент для решения очень многих прикладных задач, с ней связано немало вопросов интенсификации производства, технической реконструкции народного хозяйства. Этим вопросам сегодня уделяется огромное внимание. В осуществление планов ускорения научно-технического прогресса, которые намечает партия, наша наука призвана внести весомый вклад.

— Зачастую школьники представляют себе, что заниматься физикой можно, лишь будучи «винтиком» в громадном коллективе научных сотрудников. Так ли это?

— И да и нет. Скажем, работы по ядерной физике, физике элементарных частиц требуют одновременных усилий большого числа людей, особенно в эксперименте. Необходимы огромные машины — ускорители, ядерные реакторы. И чтобы создать их, и чтобы обслуживать и ставить опыты, нужны действительно большие коллективы.

В нашем же деле, в физике твердого тела, многие эксперименты проводятся, подчас, как в классической физике — одним-двумя исследователями. Например, те опыты, о которых я рассказал. И поэтому разумная постановка эксперимента нередко играет не менее важную роль, чем уникальные технические возможности его реализации. Еще есть место для остроумных, я бы сказал, индивидуальных опытов.

Вот эта манера работы отразилась на том, что наш институт построен как коллектив в значительной мере самостоятельно работающих сотрудников. Мы всегда, правда, приветствуем взаимодействие, но не иерархическое, а как людей равных, соратников.

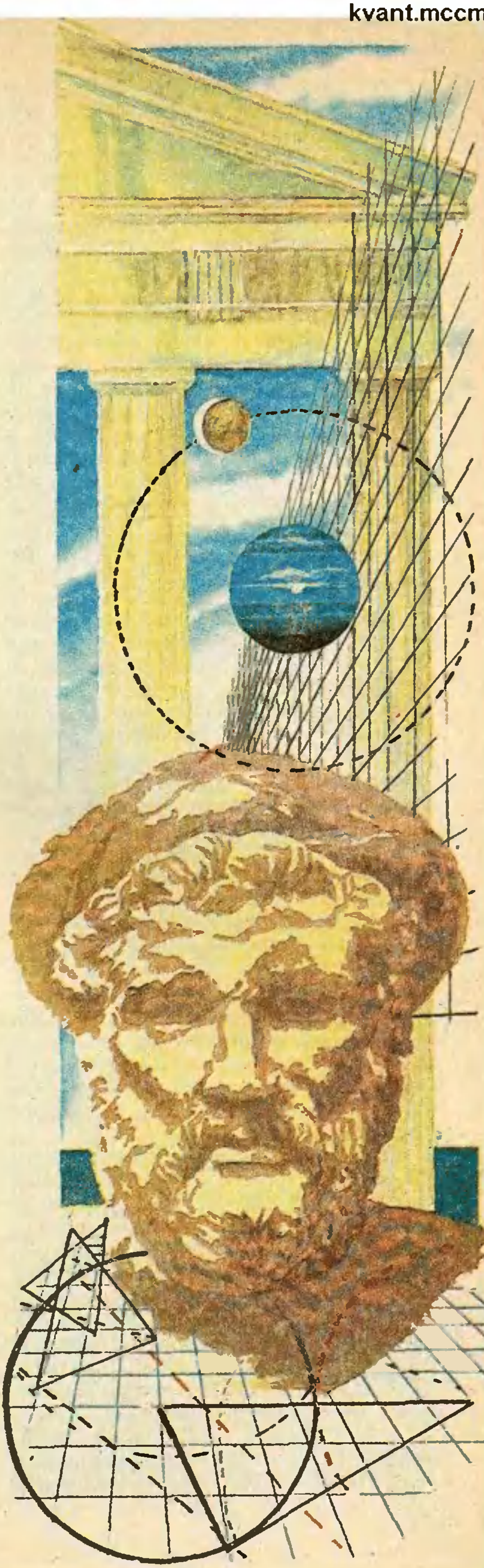
Не в первый раз я говорю сегодня о личности в науке. Наверное, потому, что на меня оказали большое влияние два человека — академики Г. В. Курдюмов и П. Л. Капица. Оба известны как люди, сделавшие в науке сами что-то конкретное, хотя, конечно, это и руководители, и организаторы научной работы целых коллективов. Мне хотелось бы воспитать своих сотрудников и учеников так, чтобы они ни в коей мере не забывали этого и всячески старались проявить свою индивидуальность. Говоря же о физике твердого тела, я хочу подчеркнуть, что это такая область физики, где просто необходимы творческие люди.

— Можно ли это рассматривать как приглашение читателям «Кванта»?

— Конечно, но я не хотел, чтобы в данном случае речь шла лишь о физике твердого тела. Вообще заниматься физикой — очень интересно. Я просто сочувствую тем людям, которые не интересуются физикой, они просто не подозревают, как это увлекательно. Способность «переварить» одновременно большое количество информации, построение логических схем, проверка гипотез, определенность получаемых результатов — всем этим богата физика. И сколько еще областей, в которых можно приложить свои силы, сколько романтики в занятиях этой наукой! Только, думаю, не надо ждать, когда знания о том, где учиться и чем заниматься, придут к вам сами. Эти знания надо искать, добывать. А соприкосновение с ними, безусловно, поможет обретению дополнительного интереса к нашей области деятельности, а именно — к науке, конкретно — к физике.

Пифагор

Доктор физико-математических наук
И. Г. БАШМАКОВА,
кандидат физико-математических наук
А. И. ЛАПИН



В списке величайших математиков от древности до наших дней на первом месте, безусловно, должен стоять Пифагор. Не только потому, что он — первый известный нам великий математик. С именем Пифагора и с его эпохой связано возникновение математики как науки, ее превращение из набора полезных правил и рецептов в абстрактную дедуктивную науку.

Абстрактная дедуктивная наука... Что это значит? Прежде чем ответить на этот вопрос, остановимся на жизни Пифагора и его эпохе.

Эпоха. Время, в которое жил этот величайший ученый,— VI век до н. э.,— было особой эпохой не только в Греции, но и почти во всей ойкумене — известном грекам обитаемом мире. Как весной, не сговариваясь, сразу зацветают все яблони, точно так же в это время в различных местах тихой заводи Старого мира поднимаются могучие волны: возникают новые идеи и учения. В Греции того времени появляются первые натурфилософы: Фалес, Анаксимандр, Пифагор, Парменид, Гераклит, Эмпедокл; величайшие лирические поэты: Архилох и Сапфо; первые создатели трагедий: Фриних и Эсхил. Жизнь повсюду бьет ключом, возникают многочисленные научные и философские школы, религиозные секты,— все они стремятся осмыслить и объяснить строение Вселенной и место в ней человека. В это же время в Греции рождается новый государственный строй — демократия,— которого не знало ни одно предшествующее государство.

Жизнь. О жизни Пифагора сохранились самые отрывочные сведения. По наиболее распространенной версии, он родился около 570 года до н. э. на ионийском острове Самосе, славившемся замечательными художественными и техническими сооружениями. Назовем храм Геры и знаменитый водопровод, проходивший через туннель, который строители начали копать с обеих сторон горы, причем расчеты были настолько точными, что оба хода аккуратно сошлись в глубине. Отцом Пифагора называют Мнесарха, известного камнереза. По словам античного биографа, будучи юношей, жаждущим знаний, Пифагор покинул родной остров, чтобы объехать мир, и побывал почти во всех эллинских и во многих чужеземных странах. Пифагор слушал знаменитых греческих ученых и восторгался чудесами Востока. Рассказывали, что он был в сокровенных святилищах Египта, посетил халдейских мудрецов и персидских магов, спускался в таинственную пещеру Крита, с которой был связан миф о сотворении богов.

Вернувшись на Самос, Пифагор нашел свою родину под тиранией Поликрата. Увидев, как говорит античный биограф, что тирания слишком сильна, чтобы «свободный человек мог с достоинством переносить произвол и деспотизм», он решил удалиться в Южную Италию, где тогда находились знаменитые эллинские колонии. Он поселился в италийском городе Кротоне, для граждан которого он составил законы. Рассказывают, что жители Кротона чтили Пифагора как полубога.

Вот и все более или менее достоверные сведения о жизни Пифагора. Кроме того, уже при жизни его окружал ореол легенд. Рассказывали, что, обходя чужеземные города, Пифагор исцелял больных, дикие звери позволяли ему гладить их, реки приветствовали его человеческими голосами, что его одновременно могли видеть в двух различных местах. Этим слухам способствовала как необыкновенная личность философа, так и его религиозно-мистическое учение.

Пифагорейский союз. Вскоре вокруг Пифагора возник многочисленный кружок преданных ему учеников, «ибо он настолько превзошел славой всех остальных, что вся молодежь хотела быть его учениками». Вскоре из них был организован пифагорейский союз или братство, которое было одновременно научным обществом, религиозным союзом и политическим клубом. Доступ в него был открыт не для всех. Испытуемый должен был пройти длительный искус; говорили даже, что ему предписывалось хранить молчание в течение пяти лет. Хотя через столетие после смерти Пифагора союз уже распался, почти все великие математики древности называли себя пифагорейцами.

Математическое доказательство. Мы говорили уже, что Пифагор был создателем математики как науки. Но разве до него люди не умели считать, складывать и умножать дроби, вычислять простейшие площади и объемы? Конечно, умели. Они умели даже решать квадратные уравнения! И все-таки математики как науки тогда еще не было. Математические знания, которые передавались почти без изменения из поколения в поколение на протяжении тысячелетий, не были организованы в систему — они походили скорее на собрание рецептов, в правильности которых можно было убедиться при решении конкретных задач.

Пифагор понял, что основой математики является доказательство. Где нет его — нет и математики. Что же такое доказательство и для чего оно нужно?

Допустим, мы хотим установить, что сумма углов треугольника равна 180°. Как это сделать? Поступим так: аккуратно нарисуем треугольник (тушью в тетради или мелом на доске) и измерим его углы с помощью транспортира. Сложив их, мы получим число, близкое к 180°. Что же мы выяснили? Только то, что нарисованный нами треугольник имеет сумму углов, равную, скажем, 180°01′. Мы можем продолжить наши измерения, рассматривая другие нарисованные треугольники, и будем всякий раз получать результат, близкий к тому, который мы хотим установить. Результаты будут приближенными, во-первых, потому, что линейка, которой мы пользовались, не будет абсолютно прямой (в чем можно убедиться, посмотрев на нее в лупу). Во-вторых, и углы, измеренные транспортиром, будут найдены не вполне точно. Но даже если бы нам удалось достать идеально точную линейку и транспортир, мы бы все-таки не установили наше предложение, потому что треугольников бесконечно много и мы никогда не сможем для всех них найти сумму углов.

Пифагор, видимо, первый пришел к мысли, что математика рассматривает абстрактные объекты (то есть идеально прямые линии без ширины, точки, не имеющие размеров, и т. д.) и что свойства их следует устанавливать не с помощью измерений, а с помощью рассуждений. Например, для доказательства теоремы о сумме углов треугольника нарисуем, как это делал Пифагор, произвольный треугольник (его можно рисовать от руки, не пользуясь линейкой) и проведем через его вершину B прямую LM, параллельную основанию AC (рис. 1). Тогда $\angle LBA = \angle BAC = \alpha$, а $\angle MBC = \angle BCA = \gamma$ (как накрест лежащие углы). Но сумма $\angle LBA + \angle ABC + \angle MBC$ составляет развернутый угол, то есть равна 180°. Значит, сумма углов любого треугольника будет равной 180°.

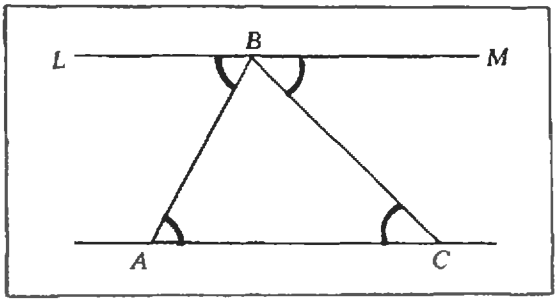


Рис. 1.

Однако при доказательстве мы опирались на свойства параллельных прямых, которые тоже нуждаются в доказательстве. Их доказательство будет опираться на какие-то другие свойства и так далее. Итак, избежав рассмотрения бесконечного числа треугольников, мы «попали в лапы» другой бесконечности — пришли к необходимости провести бесконечно много доказательств. Предложение A мы свели к предложению B, которое сведется к предложению C, то есть $A \Leftarrow B \Leftarrow C \Leftarrow ..$

Как же быть? Ясно, что на каком-то месте надо остановиться, какие-то предложения надо принять без доказательства. Но ведь так мы можем получить бесконечно много «недоказуемых» предложений, иными словами, снова «попасть в лапы» бесконечности! И вот следующая гениальная мысль Пифагора (или его современников) состояла в том, что в геометрии можно выбрать конечное число недоказуемых предложений (названных впоследствие аксиомами), из которых уже можно будет вывести все остальные.

Итак, математика, по Пифагору, изучает свойства абстрактных объектов; средством установления истины является доказательство, которое проводится, исходя из конечного числа отобранных предложений, принятых без доказательства.

Не надо думать, что эти идеи были восприняты сразу. На Пифагора и его последователей обрушился поток нападок, насмешек; некоторые ученые называли его неумным многознайкой и шарлатаном, говорили, что никто не видел линий без ширины или кругов, касающихся прямой только в одной точке. Однако Пифагор и его ученики продолжали развивать науку на новом прочном фундаменте.

«Математа». Так пифагорейцы называли свою систему знаний. «Математа» состояла из четырех частей: арифметики, геометрии, астрономии и учении о гармонии (теории музыки). Первые две из них были чисто теоретическими — мы и теперь относим их к математике, другие две были приложением арифметики и геометрии к изучению небесных тел и законов созвучий — мы бы отнесли их к математической физике.

Мы мало знаем об арифметике пифагорейцев. Достоверно известно, что в ней изучались целые числа и их отношения, то есть рациональные числа. Платон в своих диалогах называет арифметику «учением о четных и нечетных числах». Мы можем восстановить это учение по книге IX «Начал» Евклида, в конце которой (предложение 21-34) оно воспроизводится. Пифагор разделил все целые числа на четные (делящиеся на 2) и нечетные (не делящиеся на 2) и доказал фундаментальную теорему: *произведение двух чисел четно тогда и только тогда, когда по крайней мере один из сомножителей четен.* Это была первая теорема теории делимости, послужившая моделью для формулировки и доказательства более общей теоремы: *произведение двух целых чисел делится на простое число p тогда и только тогда, когда на него делится по крайней мере один из сомножителей.* Из этой последней теоремы следует закон однозначности разложения целого числа на простые множители. Аналогично из теоремы Пифагора следует, что каждое целое число однозначно представимо в виде $N=2^kN_1$, где N_1 — нечетное, а k — целое неотрицательное числа. Учение о четных и нечетных позволило пифагорейцам доказать ряд чрезвычайно важных теорем, к которым мы еще вернемся.

В геометрии Пифагора привлекали правильные фигуры и тела. Так, он знал, что плоскость можно «замостить» правильными треугольниками, квадратами и шестиугольниками. Он умел строить правильный пятиугольник — как выпуклый, так и звездчатый. Пятиконечная звезда считалась символом здоровья, а вскоре вообще стала опознавательным знаком для пифагорейцев, разбросанных по всему древнему миру. Венчала геометрию теорема Пифагора, которая имеет фундаментальное значение и в самой математике, и в ее приложениях. Как доказывал ее Пифагор? Нам это, увы, неизвестно.

Пифагор развил также учение о подобии, причем первоначально он, по-видимому, считал, что все отрезки соизмеримы, а значит, их отношение можно выразить рациональным числом, то есть в основе его теории подобия лежала арифметика рациональных чисел.

Открытие несоизмеримости. Обратимся теперь к величайшему открытию Пифагора, которое доставило ему немеркнущую славу и означало триумф математики. Мы говорим об открытии несоизмеримых отрезков, или, иначе — иррациональности.

Но что это такое? Пусть нам дан квадрат со стороной 1. Тогда, по теореме Пифагора, квадрат его диагонали равен

$$c^2=1^2+1^2=2.$$

Чему же равна сама диагональ c? Попробуем узнать это, извлекая корень из 2.

Если вы приметесь за эту работу, то получите сначала $c_1=1$, затем $c_2=1{,}4$, затем $c_3=1{,}41$ и т. д. Наконец, вы дойдете до 10-й цифры, и это занятие вам надоест. Вы скажете: «Хватит! Этот ряд никогда не кончится». Но мы возразим вам: «Продолжайте! А вдруг он закончится на 11-й или 20-й цифре?». Увы, мы снова «попали в лапы» бесконечности!

Но и здесь находит выход Пифагор. Он рассуждал так: пусть c можно выразить рациональной дробью p/q. Предполагаем, что p и q не могут быть оба четными (иначе мы бы сократили дробь на 2). Возводя равенство $\sqrt{2}=p/q$ в квадрат, получим $2p^2/q^2$ или

$$p^2=2q^2 \qquad (1)$$

значит, p^2 делится на 2. Отсюда Пифагор на основании основной теоремы о четных и нечетных заключает, что и число p четно. Значит, q нечетно (иначе мы сократили бы дробь p/q на 2). Итак, $p=2p_1$. Подставляя в равенство (1), получим $q^2=2p_1^2$, то есть q^2 делится на 2, тогда по предыдущему и $q=2q_1$, значит, q четно. Мы пришли к противоречию, так как число q должно быть одновременно и четным, и нечетным, что невозможно.

Открытие несоизмеримых величин глубоко поразило всех эллинов. Это было теоретическое предложение, которое, как казалось, противоречило всей измерительной практике! Ведь на практике все величины соизмеримы: мы мерим их с точностью до сантиметра, миллиметра, микрона, но всегда получаем в результате рациональные числа. Открытие несоизмеримости можно сравнить с открытием Коперника, которое также противоречит нашим повседневным наблюдениям восходов и заходов Солнца, или с открытием геометрии Лобачевского. По преданию, пифагорейцы держали это открытие в тайне, желая, по-видимому, найти ему достойное место в своей «математа», а пифагореец Гиппас, который разгласил тайну, был за это покаран богами: он утонул, потерпев кораблекрушение. Знаменитый философ древности Платон (конец V — начало IV в. до н. э.) писал, что поздно узнал о несоизмеримости и что до этого он был подобен неразумному животному. Другой великий философ, ученик Платона, Аристотель, рассуждая о том, как возникла наука, писал: «все начинают с удивления (...), удивляются ли, например, загадочным самодвижущимся игрушкам, или солнцеворотам, или несоизмеримости диагонали, ибо всем, кто еще не усмотрел причину, кажется удивительным, если что-то нельзя измерить самой малой мерой» (Метафизика, книга 1, гл. 2).

Ученики и последователи Пифагора вскоре обнаружили, что кроме $\sqrt{2}$ имеется еще целый ряд иррациональных чисел: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, ..., $\sqrt{15}$, или, как они говорили, что стороны квадратов с площадью 3, 5, 6, ..., 15 несоизмеримы со стороной единичного квадрата. В диалоге Платона «Теэтет» рассказывается, что пифагореец Феодор из Кирены прочел афинским юношам лекцию, где провел соответствующие доказательства, причем остановился на $\sqrt{17}$. Случайна ли была эта остановка? Мы приведем сейчас реконструкцию доказательства Феодора, из которой увидим, что «методом четных и нечетных» он и не мог провести доказательство для $\sqrt{17}$.

Будем действовать методом Пифагора: пусть нам надо доказать иррациональность $\sqrt{d}$, где d — целое неквадратное число. Если d четно, то доказательство проводится дословно так же, как и для $\sqrt{2}$. Пусть d нечетно, и предположим, что $\sqrt{d}=p/q$; тогда

$$p^2=dq^2. \qquad (2)$$

Можно показать, что в этом случае p и q будут нечетными, то есть будут иметь вид $2n+1$, тогда квадраты их будут вида $4(n^2+n)+1$ или $8\frac{n(n+1)}{2}+1$, где $\frac{n(n+1)}{2}$ — целое. Подставляя эти значения в формулу (2) и группируя члены, получим

$$8\left(\frac{n(n+1)}{2}-d\frac{m(m+1)}{2}\right)=d-1.$$

Левая часть равенства делится на 8, значит, и правая должна иметь вид $8k$, то есть должно быть $d=8k+1$. Если число d не имеет такого вида, как, например, 5, 7, 11, 13, 15, то придем к противоречию, которое и опровергает сделанное предположение. Если же d имеет вид $8k+1$, то этот метод доказательства отказывается служить. Так будет для числа 9, но оно — полный квадрат, и для 17. Вот почему, вероятно, Феодор и остановился на этом числе.

Среди слушателей Феодора был молодой талантливый математик Теэтет.

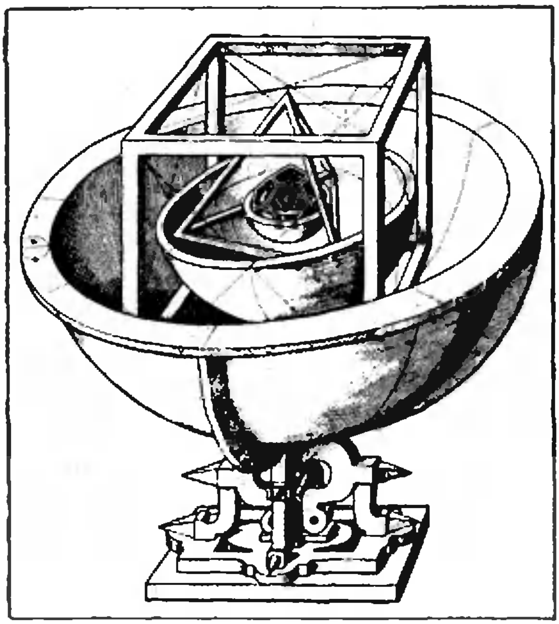


Рис. 2

Он-то и придумал, как можно провести доказательство иррациональности $\sqrt{d}$ для любого неквадратного числа d.

«Пифагоровы тройки». Так называются тройки целых чисел, удовлетворяющие неопределенному уравнению

$$x^2+y^2=z^2. \qquad (3)$$

Уже древние вавилоняне и египтяне умели находить некоторые из этих троек, например: (3, 4, 5), (5, 12, 13), (7, 24, 25). Однако задача состояла в том, чтобы найти все такие тройки. Пифагор (или кто-нибудь из его ближайших учеников) нашел формулы для определения бесконечного множества таких троек (правда, не все!), а именно:

$$x=a,\ y=\frac{a^2-1}{2},\ z=\frac{a^2+1}{2},$$

где a — целое нечетное число. Вышеприведенные тройки отвечают значениям $a=3$, 5, 7.

И все же первый шаг, сделанный пифагорейцами, был настолько значителен, что тройки (x, y, z), удовлетворяющие уравнению (3), до сих пор называются *пифагоровыми*.

Правильные тела. Правильные тела или многогранники — это пространственный аналог правильных многоугольников на плоскости. Но в то время как на плоскости существует бесконечно много правильных многоугольников, в пространстве имеется только п я т ь правильных тел: тетраэдр, куб, додекаэдр, октаэдр и икосаэдр. Первые три из этих многогранников были известны Пифагору, который дал способ вписать их в сферу, последние два открыл уже знакомый нам Теэтет. Он же доказал, что других правильных тел не существует.

Пифагорейцы высоко оценили тот факт, что правильных тел существует только пять, и положили его в основу атомистической теории строения материи: они считали, что атомы четырех «стихий» или «начал», из которых состоит все сущее, а именно, Земли, Воды, Воздуха и Огня имеют соответственно форму куба, октаэдра, икосаэдра и тетраэдра. Оставалось еще одно правильное тело — додекаэдр. Ему отводилась особая роль: он определял форму Вселенной. Эта удивительная концепция математического атомизма оказала огромное влияние на двух великих ученых нового времени: Кеплера и Гейзенберга. Первый из них был одним из создателей научной астрономии, второй — квантовой механики. Еще до открытия трех законов движения планет (а именно в 1595 г.), Кеплер построил остроумную модель Солнечной системы с помощью правильных многогранников: шесть сфер, соответствующих шести планетам — Сатурну, Юпитеру, Марсу, Земле, Венере и Меркурию,— разделяются вписанными в эти сферы кубом, тетраэдром, додекаэдром, октаэдром и икосаэдром (рис. 2). О Плутоне, Нептуне и Уране во времена Кеплера известно не было, поэтому они не могли участвовать в его модели. В современной физике направление, идущее от Гейзенберга и продолжающее активно развиваться, связывает теорию элементарных частиц с изучением различных видов симметрий. В этом смысле можно считать, что элементарные частицы являются неким аналогом правильных тел.

Мы изложили, да и то очень кратко, главнейшие математические работы Пифагора. Но Пифагор, как и Ньютон, был не только великим математиком, но и гениальным физиком и астрономом. Именно он положил начало математической физике. До него астрономия и другие области естествознания носили скорее описательный характер. Так, хотя вавилонские астрономы составляли подробные таблицы, характеризующие движение Солнца, Луны и планет, но до Пифагора никто не пытался построить модель Солнечной системы. Пифагорейцы впервые построили математическую модель мира, они считали, что выразить закономерности природы можно с помощью числа, что «все есть число». Всю Вселенную, как писал Аристотель, он «признал гармонией и числом».

Гармония. Идея о возможности построения числовой модели мира была положена Пифагором в основу его теории музыки. Пифагор обнаружил, что качественные отличия в звучании струн обуславливаются чисто количественными различиями, а именно длиной струн. Одновременное звучание двух срун будет приятно для слуха, если длины их относятся как 1:2, или 2:3, или 3:4, что соответствует музыкальным интервалам в октаву, квинту и кварту. Оценивая открытие Пифагора, крупнейший немецкий физик Зоммерфельд писал, что день, когда оно было сделано, можно назвать днем рождения математической физики. И действительно, гармонически колеблющиеся системы сыграли огромную роль в физике. В 20-х годах нашего века аналогия между колеблющейся струной, издающей тоны определенной частоты, и атомом, испускающим излучения определенной частоты, которые также определялись отношениями целых чисел, послужила ключом для создания квантовой механики. Это обстоятельство было отмечено А. Эйнштейном:

«Таким образом,— писал он,— мы открыли некоторое подобие между колебанием струны и атомом, испускающим излучение... Атом каждого элемента состоит из элементарных частиц: из тяжелых, составляющих ядро, и из легких — электронов. Такая система частиц ведет себя подобно маленькому акустическому инструменту, в котором производятся стоячие волны» (А. Эйнштейн, Л. Инфельд. *Эволюция физики*. М.: Наука, 1963, с. 224).

Астрономия. Пифагор полагал, что Земля имеет форму шара и что она находится в центре Вселенной. Вокруг нее располагаются восемь концентрических сфер — это сферы Луны, Солнца, пяти планет и неподвижных звезд. Внешняя сфера — сфера неподвижных звезд — делает за сутки полный оборот вокруг Мировой оси, увлекая в своем движении все семь остальных сфер. Однако Луна, Солнце движение, которое происходит в направлении, обратном суточному вращению сфер. Впоследствии пифагорейцы пришли к выводу, что и Земля не остается неподвижной, а вращается вместе с другими планетами вокруг Центрального огня. Эта мысль более чем на 2000 лет предвосхитила идею Коперника о том, что Земля не занимает центрального положения в Солнечной системе.

Замечательно, что Пифагор сразу же попытался соединить свои астрономические воззрения с теорией музыки. Он считал, что каждая планета, двигаясь по своей орбите, издает определенный звук, причем тона́ таковы, что при движении всех семи планет звучит «музыка сфер». Пифагор называл даже Солнечную систему семиструнной лирой. Он уверял, что может слышать эту дивную музыку, которую остальные люди услышат только после смерти.

Мы уже говорили, что идеи Пифагора неожиданно получили новую жизнь в нашем веке, но уже в применении к миру атомов. Зоммерфельд, о котором мы уже упоминали, писал:

«То, что нам сегодня удается понять на языке спектров,— это истинная музыка атомных сфер, созвучие целочисленных отношений, все возрастающие порядок и гармония при всем их многообразии.

...Все целочисленные закономерности спектральных линий и атомистики в конце концов вытекают из квантовой теории. Она представляет собой тот полный таинства инструмент, на котором природа исполняет спектральную музыку и ритмом которого она управляет строением атома и атомных ядер» (А. Зоммерфельд. *Пути познания в физике*. М., Наука, 1973, с. 255).

Говорят, что наука отличается от искусства тем, что в то время как создания искусства вечны, великие творения науки безнадежно стареют. К счастью, это не так, и творчество Пифагора — лучший тому пример. Он был не только величайшим, но и счастливейшим гением, так как его идеи и теории не сошли со сцены, продолжая до сих пор волновать умы. Ни одна из его научных идей не умерла. С каждым новым этапом науки они меняли свой облик, чтобы вновь будить и волновать ум и сердце ученых.

Следы на песке и...строение вещества

Доктор физико-математических наук
Л. Г. АСЛАМАЗОВ

Изо всех двухсот миллиардов мужчин, женщин и детей, которые когда-либо прошли по влажному песку с сотворения мира до собрания Британской Ассоциации в Абердине в 1885 г., сколько найдется таких, которые на вопрос «Сжался ли песок под вашей ногой?» ответили бы иначе, чем «да»!

Лорд Кельвин, Балтиморские лекции, 1904 г.

А задумывались ли вы над ответом на этот вопрос? На первый взгляд кажется, что, утрамбовывая песок, мы всегда делаем его более плотным, заставляем песчинки теснее прижаться друг к другу. Но в действительности дело может обстоять иначе. И доказательство этому — следы, которые остаются на некоторое время сухими, когда ступаешь по мокрому песку у берега моря или реки. Вот что говорил по этому поводу О. Рейнольдс — ученый, известный своими работами по гидродинамике,— в докладе на собрании Британской Ассоциации в 1885 г.: «Когда нога надавливает на песок, плотный после ушедшего прилива, участок, находящийся вокруг ноги, тотчас же становится сухим... Надавливание ноги разрыхляет песок, и чем сильнее оно, тем больше воды уходит... Оно делает песок сухим до тех пор, пока снизу не прибудет достаточное количество воды».

Так почему же в результате надавливания увеличивается пространство между песчинками, и имеющейся воды уже недостаточно, чтобы заполнить его? Этот вопрос не случайно волновал ученых XIX века. Ответ на него имеет самое прямое отношение к атомному строению вещества. Давайте и мы попробуем разобраться в этом вопросе.

Плотная упаковка шаров

Можно ли заполнить твердыми шарами все пространство? Разумеется, нет — между ними всегда остаются свободные промежутки. Доля пространства, занимаемого шарами, называется плотностью их упаковки. Чем теснее расположены шары, чем меньше свободного места между ними, тем больше плотность упаковки. Когда же достигается максимальная плотность упаковки одинаковых твердых шаров? Ответ на этот вопрос дает ключ к разгадке «тайны» следов на песке.

Исследуем вначале более простой случай — упаковки одинаковых кругов на плоскости. Плотной упаковки кругов можно достичь, вписывая их в мозаики, составленные из правильных многоугольников, заполняющих всю плоскость. Существуют только три способа построения таких мозаик — из правильных треугольников, квадратов и правильных шестиугольников. Упаковки кругов с использованием квадратной и шестиугольной мозаик показаны на рисунке 1. Даже «на глаз» видно, что второй способ более экономичен. Точный расчет (вы вполне сможете провести его сами) показывает, что в этом случае кругами заполнено примерно 90,7 % плоскости, в то время как в первом случае — только около 78 %. Шестиугольный способ упаковки на плоскости — самый плотный. По-видимому, из-за этого его и используют пчелы при построении сот.

Плотную упаковку шаров в пространстве можно осуществить следующим образом. Расположим на плоскости первый слой шаров уже известным нам наиболее плотным способом. Затем можно положить на них

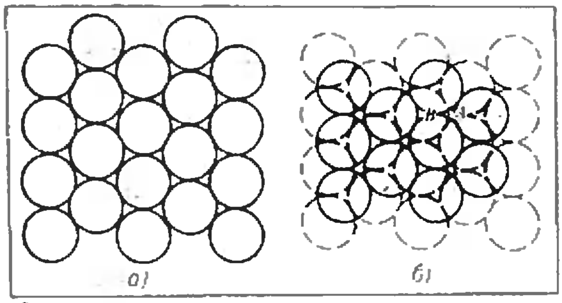


Рис. 2. Плотная упаковка шаров в пространстве (пунктиром показан нижний слой).

второй точно такой же слой. Если располагать каждый шар верхнего слоя в точности над нижним, так что все шары окажутся вписанными в кубические соты, то слишком много пространства окажется неиспользованным. При таком способе укладки шаров заполняется только 52 % пространства.

Ясно, как можно упаковать шары плотнее. Для этого верхний шар надо располагать в лунке, образованной тремя соседними нижними шарами. Но при этом верхние шары не смогут заполнить все лунки — одно из двух соседних углублений всегда остается свободным (рис. 2). Поэтому, когда мы укладываем третий слой шаров, сделать это можно будет двумя способами: либо расположить шары третьего слоя над теми углублениями в первом слое, которые шары второго слоя оставили свободными (центр одного из шаров на рисунке 2, *б* будет находиться в точке *A*), либо — как раз над шарами первого слоя (при этом центр одного из шаров третьего слоя окажется в точке *B*). Для последующих слоев порядок расположения шаров сохраняется. В результате получаем два способа плотной упаковки шаров, показанные в пространстве на рисунке 3. В обоих случаях шарами заполнено около 74 % пространства.

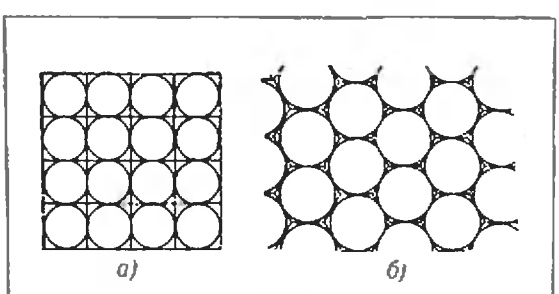


Рис. 1. Упаковка равных кругов на плоскости в ячейки правильных мозаик.

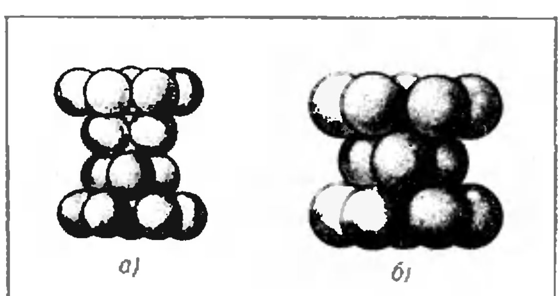


Рис. 3. Пространственная картина, показывающая 2 способа плотной упаковки шаров.

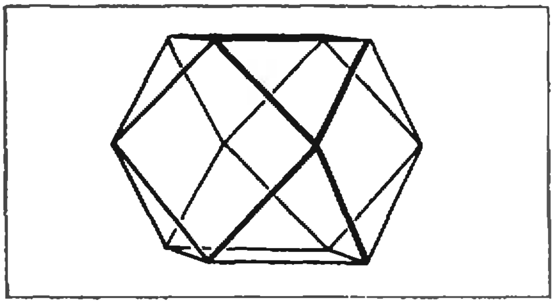


Рис. 4. Кубоктаэдр Кеплера.

Легко подсчитать, что при таком способе упаковки каждый шар соприкасается с 12 соседними шарами. Точки соприкосновения образуют вершины четырнадцатигранника. Его грани — чередующиеся квадраты и равносторонние треугольники. Так, при втором способе плотной упаковки получается кубоктаэдр Кеплера, показанный на рисунке 4.

До сих пор мы рассматривали лишь такие способы упаковки шаров, при которых они вписываются в периодические «соты». А можно ли достичь плотной упаковки, отказавшись от этого условия? Один из способов показан на рисунке 5. Шары в каждой плоскости расположены по сторонам правильных пятиугольников (пентагонов). В каждом пентагоне соседние шары касаются друг друга, но шары, относящиеся к разным пентагонам одной плоскости, разделены в пространстве. Стороны пентагонов чередующихся слоев попеременно содержат четное и нечетное число шаров. Коэффициент заполнения пространства в такой структуре равен 72 % и лишь немного уступает случаю плотной упаковки, показанному на рисунке 2. Можно упаковать шары, не образуя из центров решетку, более плотно, достигнув коэффициента заполнения 74 %, однако существуют ли еще более плотные упаковки — этот вопрос остается открытым до сих пор.

Вернемся к следам на песке. Мы теперь знаем, что существуют особые упаковки шаров, при которых остается очень мало пустого пространства между ними. Если нарушить такое расположение, выведя, например, шары одного слоя из лунок другого слоя, то промежутки между шарами увеличатся. Ясно, однако, что песчинки никто не упаковывает специальным образом. Как же достичь плотной упаковки песчинок?

Вспомним житейский опыт. Вам надо заполнить сосуд крупой так, чтобы в него вместилось максимальное ее количество. Что вы при этом делаете? Потряхиваете сосуд или постукиваете по нему, добиваясь желаемого эффекта. Даже после плотной утрамбовки крупы в сосуде можно с помощью такого приема уместить еще какое-то дополнительное ее количество.

Научное исследование этого вопроса предпринял в 50-х годах английский ученый Г. Скотт. Он заполнял шариками от подшипников сферические бутылки разных размеров. Если заполнять бутылки без потряхивания так, чтобы шарики располагались случайным образом, экспериментально наблюдается следующая зависимость плотности упаковки от числа шариков:

$$\varrho_1=0{,}6-0{,}37/\sqrt[3]{N},$$

где N — полное число шариков. Если число шариков очень велико (а в опытах N достигало нескольких тысяч), то видно, что плотность упаковки стремится стать постоянной и соответствующей заполнению 60 % пространства. А вот если потряхивать бутылку по мере ее заполнения, плотность упаковки возрастает:

$$\varrho_2=0{,}64-0{,}33/\sqrt[3]{N}.$$

Правда, и в этом случае она получается гораздо меньшей 74 %, соответствующих регулярному расположению шариков.

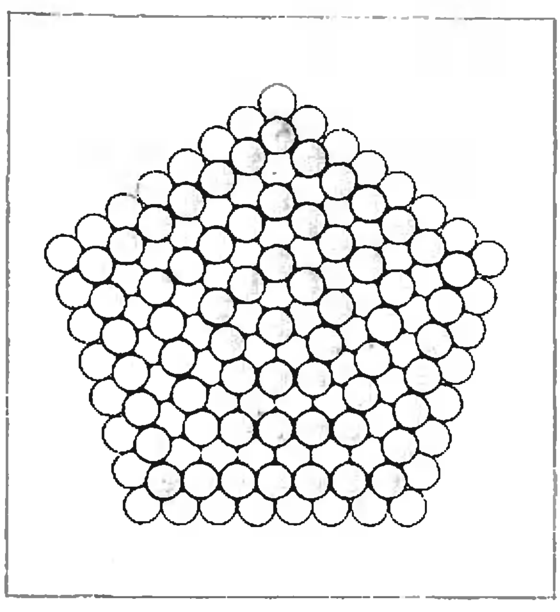


Рис. 5. Пентагональная упаковка шаров.

Стоит задуматься над приведенными здесь зависимостями. Почему поправка обратно пропорциональна $\sqrt[3]{N}$? Шарики, расположенные у стенок сосуда, находятся в особом положении по сравнению с шариками в объеме и влияют на плотность упаковки. Величина их вклада пропорциональна отношению площади поверхности $\sim R^2$ к объему сосуда $\sim R^3$ и убывает обратно пропорционально размеру системы R (под объемом системы мы понимаем полный объем пространства, занимаемого шариками вместе со свободными промежутками). Размер $R \sim \sqrt[3]{N}$, так как объем системы пропорционален полному числу шариков. Такие зависимости часто возникают в физике, когда надо учитывать поверхностные эффекты.

Таким образом, точные эксперименты подтверждают житейский опыт и показывают, что, потряхивая зернистую среду, можно достичь большей плотности упаковки. Но почему же все-таки это происходит? Дело в том, что устойчивому положению равновесия всегда соответствует минимум потенциальной энергии. Шарик может устойчиво лежать в ложбинке, но с вершины горки он обязательно скатится. Нечто подобное происходит и здесь. Шарики при потряхивании скатываются в свободные промежутки, плотность упаковки увеличивается, а общий объем системы уменьшается. В результате понижается уровень заполнения сосуда шариками, а следовательно, опускается центр тяжести и уменьшается потенциальная энергия системы.

Теперь, наконец, можно с достаточной ясностью представить себе, что происходит с песком. Волнение воды встряхивает песок, и в результате достигается плотная упаковка песчинок. Сдавливая песок ногой, мы нарушаем эту упаковку и увеличиваем размер пор. Вода из верхних слоев песка уходит вглубь, заполняя эти увеличившиеся промежутки. В результате песок «высыхает». Когда ногу убирают, деформация исчезает, плотная упаковка восстанавливается, а вытесненная из вновь уменьшившихся промежутков вода заполняет след, оставленный ногой. Может случиться и так, что после сильного нажатия плотная упаковка не восстановится. Тогда след станет снова мокрым, лишь когда вода поднимется из нижних слоев и заполнит увеличившиеся поры.

Любопытно, что это свойство сыпучих сред знали еще индийские факиры. Один из их трюков состоял в том, что в сосуд с узким горлышком, доверху наполненный рисом, многократно втыкали узкий длинный нож. В какой-то момент нож застревал в рисе, а сосуд можно было поднять вместе с ножом. Ясно, что фокус состоял в том, что сосуд при заполнении рисом встряхивали, достигая плотной упаковки. Втыкание ножа нарушало эту упаковку и увеличивало объем пространства между рисинками. Так как объем сосуда не менялся, то возрастали силы, сдавливающие рисинки, а следовательно, и трение между ними и ножом. В какой-то момент оно оказывалось достаточным, чтобы помешать вытянуть нож из сосуда.

Дальний и ближний порядок

Атомы, из которых состоят все тела, конечно, нельзя считать твердыми шарами. И тем не менее простые геометрические соображения помогают разобраться в строении вещества.

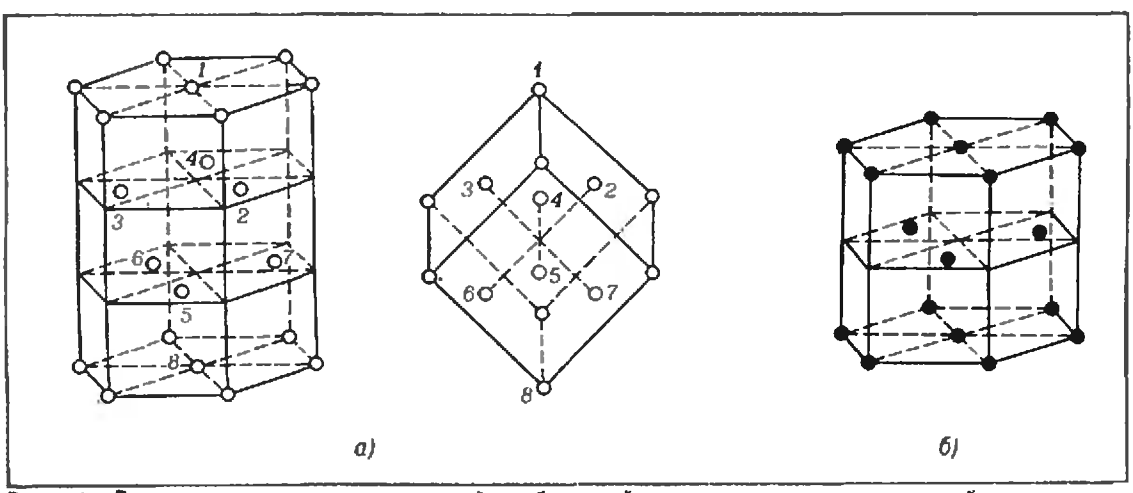


Рис. 6. Элементы гранецентрированной кубической решетки и гексагональной решетки с плотной упаковкой.

Впервые геометрический подход использовал еще в 1611 году немецкий ученый И. Кеплер, высказавший предположение о связи шестиугольной формы снежинок с плотнейшими способами упаковки шаров. М. В. Ломоносов дал в 1760 году первое изображение плотнейшей кубической шаровой упаковки и объяснил таким образом форму кристаллических многогранников. А французский аббат Р. Ж. Гаюи в 1783 году заметил, что любой кристалл можно составить из множества повторенных частей (рисунок на 2-й странице обложки). Правильную геометрическую форму кристаллов он объяснил тем, что кристаллы построены из одинаковых маленьких «кирпичиков». Наконец, в 1824 году немецкий ученый А. Зибер предложил составлять кристаллы из регулярно расположенных маленьких сфер, взаимодействующих подобно атомам. Плотная упаковка таких сфер соответствует минимуму потенциальной энергии их взаимодействия.

Описанием структуры кристаллов занимается специальная наука — кристаллография. В наше время периодическое расположение атомов в кристаллах — твердо установленный факт. Электронные микроскопы позволяют нам просто увидеть это своими глазами. Тенденция к плотной упаковке несомненно имеется в атомном мире. Около 35 химических элементов кристаллизуются таким образом, что их атомы располагаются в пространстве подобно шарам, показанным на рисунке 3. Центры атомов (а точнее, атомные ядра) образуют в пространстве так называемую кристаллическую решетку, которая состоит из повторяющихся частей.

Например, в случае, показанном на рисунке 3, *а*, всю решетку можно составить повторением куба, у которого атомы-шары расположены не только в вершинах, но и в центрах граней (рис. 6, *а*, точки соответствуют центрам атомов). Поэтому соответствующую решетку называют гранецентрированной кубической. Таким образом устроены многие металлы (Ag, Au, Cu, Al и др.), а также кристаллы инертных газов (всего около 20 элементов).

«Скелет» кристалла, соответствующий расположению атомов, показанному на рисунке 3, *б*, состоит из шестигранных призм (рис. 6, *б*). Понятно,

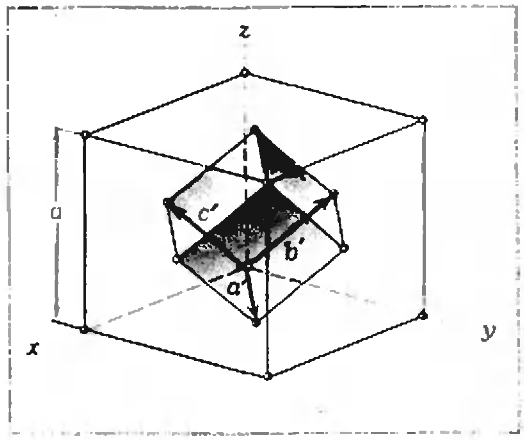


Рис. 7. Гранецентрированную кубическую решетку можно получить, периодически сдвигая в трех направлениях всего один атом.

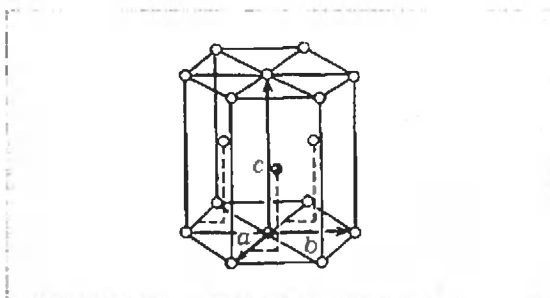


Рис. 8. Гексагональная решетка с плотной упаковкой получается периодическим сдвигом 2 разных атомов.

почему такой способ называют гексагональной плотной упаковкой. Этой решеткой обладают около 15 элементов (Mg, Cd, Zn, Ni и др.).

У решеток, показанных на рисунке 6, *а* и *б*, имеется важное различие. Гранецентрированную кубическую решетку, как видно из рисунка 7, можно получить, периодически сдвигая в пространстве в трех направлениях всего лишь один атом, а для гексагональной плотной упаковки такого сделать нельзя — приходится использовать 2 атома (рис. 8). Ее можно представить как совокупность двух простейших решеток, вставленных одна в другую. Простейшие решетки, которые можно составить периодическим сдвигом в пространстве только одного атома, называются решетками Браве (по имени французского морского офицера О. Браве, впервые построившего в XIX веке теорию пространственных решеток).

Решеток Браве существует не так много — всего 14 разных типов. Это связано с тем, что далеко не все элементы симметрии могут встречаться

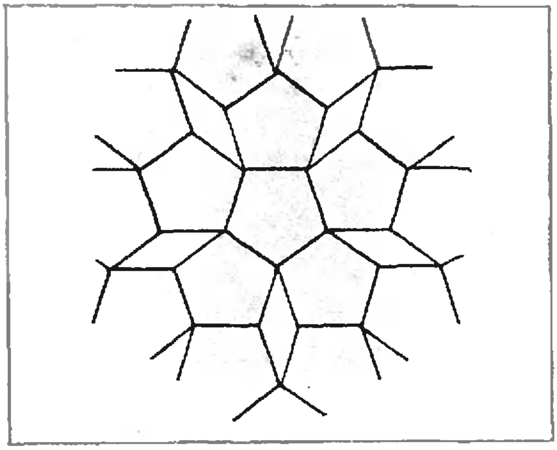


Рис. 9. С помощью правильных пятиугольников невозможно заполнить всю плоскость без просветов.

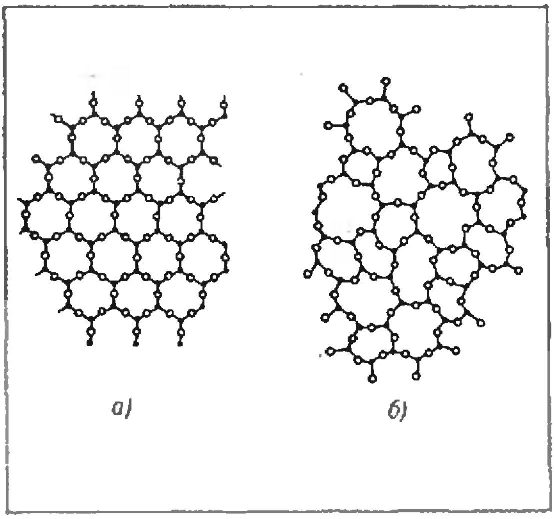


Рис. 10. Строение кварца (а) и стекла (б).

в периодических решетках. Отдельный правильный пятиугольник можно, например, поворачивать вокруг оси, проходящей через центр, и он при этом 5 раз совместится сам с собой. В таком случае говорят, что имеется ось симметрии 5-го порядка. Но в решетке Браве такой оси быть не может. Это означало бы, что имеется плоскость, усеянная узлами, образующими правильные пятиугольники. А заполнить целиком плоскость правильными пятиугольниками невозможно (рис. 9)!

Однако типы решеток Браве не исчерпывают разнообразия свойств симметрии реальных кристаллов. Ведь, как вы уже убедились на примере гексагональной плотной упаковки, решетки Браве можно вставлять одна в другую! В результате элементы симметрии объединяются в различных комбинациях, образуя так называемые пространственные группы. Всего имеется 230 различных групп. Все они были найдены в 1890 году русским ученым Е. С. Федоровым.

Итак, любой кристалл можно составить из повторяющихся частей. Это свойство кристаллов называют трансляционной симметрией (трансляция — перенос в пространстве). Иначе еще говорят, что в кристаллах имеется дальний порядок. Это, пожалуй, самое характерное свойство кристаллов, которое отличает их от всех других тел.

Есть, однако, не менее важный класс веществ — аморфные тела, в которых дальнего порядка нет. В аморфном состоянии находятся жидкие тела. Но и твердое тело может быть аморфным. Самый простой пример — обычное стекло. На рисунке 10 показано строение стекла и кварца, который имеет тот же химический состав, что и стекло. Кварц — кристалл, а стекло — аморфное тело. Хотя дальнего порядка в стекле явно нет, это, однако, не означает, что в расположении атомов царит полный хаос. Определенная структура в расположении ближайших соседей, как видно из рисунка, сохраняется и в стекле. Говорят, что в аморфных телах имеется ближний порядок.

Аморфные материалы нашли в последнее время важные применения в технике. Уникальными свойствами обладают аморфные металлические сплавы (металлические стекла). Их получают, очень быстро охлаждая жидкий металл — со скоростью порядка нескольких тысяч градусов в секунду. Достичь этого можно, например, разбрызгивая мелкие капли металла на поверхность быстровращающегося холодного диска. Капля «размазывается» по диску очень тонким слоем (толщиной в несколько микрометров), и хороший теплоотвод позволяет металлу остыть столь быстро, что его атомы просто не успевают расположиться правильным образом. Оказалось, что аморфные сплавы обладают повышенной твердостью, высокой коррозийной стойкостью, оптимальным сочетанием электрических и магнитных свойств. Область применений таких материалов быстро расширяется.

(Окончание см. на с. 48)

Комбинаторика — многочлены — вероятность

Кандидат физико-математических наук
Н. Б. ВАСИЛЬЕВ,
кандидат физико-математических наук
В. Л. ГУТЕНМАХЕР

Для чтения этой статьи достаточно знания курса математики в объеме первых шести классов, но мы уверены, что и старшеклассники найдут для себя здесь интересное — речь пойдет о комбинаторных формулах и их применениях. Одни и те же комбинаторные рассуждения и формулы пронизывают разные области математики и ее приложений. Цель статьи — показать одну такую связывающую линию: комбинаторика — алгебра многочленов — теория вероятностей.

Факториал

Для вычисления суммы первых n натуральных чисел есть удобная формула

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Для произведения первых n натуральных чисел такой формулы нет, но зато эта часто встречающаяся в комбинаторике и других разделах математики величина имеет специальное обозначение: $n!$ (читается «эн факториал»). Выбор для обозначения восклицательного знака, возможно, связан с тем, что даже для сравнительно небольших значений n число $n!$ очень велико: чтобы продемонстрировать, как быстро растет $n!$ с ростом n, выпишем эти числа для n от 1 до 10:

$1!=1,\quad 2!=1\cdot2=2,\quad 3!=1\cdot2\cdot3=6,$
$4!=3!\cdot4=24,\ 5!=4!\cdot5=120,$
$6!=720,\ 7!=5040,\ 8!=40\,320,$
$9!=362\,880,\quad 10!=3\,628\,800.$

Из определения $n!$ видно, что факториалы двух соседних натуральных чисел n и $n+1$ связаны формулой

$$(n+1)!=n!\cdot(n+1), \qquad (*)$$

—чтобы получить произведение чисел от 1 до $n+1$, надо произведение от 1 до n умножить еще на $(n+1)$.

Заметим, что если в это равенство подставить $n=0$, то получится $1!=0!\cdot1$, поэтому полагают $0!=1$; это соглашение часто оказывается удобным в различных общих формулах.

Задачи

1. Найдите число $n!$ для $n=11$, 12.
2. Может ли $n!$ кончаться ровно на пять нулей? (При каком наименьшем n число $n!$ будет кончаться на шесть нулей?).
3. Докажите формулу $(n+1)!-n!=n!\cdot n$.
4. Найдите сумму $1\cdot1!+2\cdot2!+3\cdot3!+\ldots+9\cdot9!$. (Замените каждый член на разность по формуле из предыдущей задачи.)
5. Проверьте равенство (где $0<k\leqslant n$)
$$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}=\frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!}$$
при $n=7$ и $k=3$ и докажите, что оно верно при любых натуральных числах n и k.
6. Найдите четыре тройки чисел x, y, z, для которых верно равенство $x!\cdot y!=z!$. (Подставьте в формулу $(*)$ $n=k!-1$.)

Перестановки

Факториал возникает самым естественным образом, когда мы подсчитываем количество перестановок из разных предметов.

Возьмем 4 буквы: К, О, Р, Т и посмотрим, сколькими способами их можно расположить в один ряд, то есть сколько существует слов из этих букв. Оказывается, что число этих способов равно $4!=4\cdot3\cdot2\cdot1=24$. В самом деле, на первое место можно поставить любую из 4 букв, на второе — любую из 3 оставшихся, на третье — любую из 2 неиспользованных на первых двух местах букв, и, наконец, на четвертом месте окажется оставшаяся буква. Все эти перестановки выписаны в алфавитном порядке на рисунке 1. Перестановки букв некоторого слова называют его *анаграммами.*

Еще один пример. Рассмотрим все перестановки 10 цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Их можно рассматривать как десятизначные числа, если они не начинаются с нуля, и как девятизначные числа, если они начинаются с нуля. Количество всех таких чисел равно 10!.

Эти примеры иллюстрируют общее утверждение:

> Количество перестановок из n различных предметов равно $n!$.

Часто требуется среди всех перестановок выбрать все те, которые обладают определенным свойством. Например, из выписанных на рисунке 1

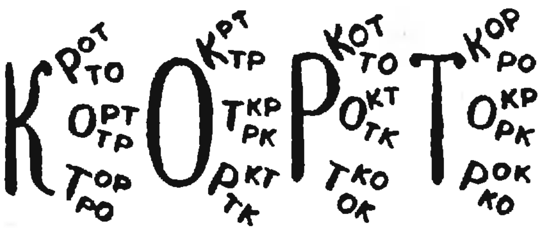


Рис. 1.

анаграмм слова КОРТ только одна (не считая самого слова корт) имеет смысл в русском языке: крот; а среди 10! указанных чисел мы знаем четыре числа, которые делятся одновременно на все числа от 2 до 18: 2 438 195 760, 3 785 952 160, 4 753 869 120, 4 876 391 520. Для того чтобы найти осмысленные анаграммы или найти указанные числа среди 10! чисел, нужно произвести перебор многих случаев. Подобные задачи постоянно возникают на производстве и в экономике, когда надо найти наилучшие варианты.

Перебор 10! перестановок труден не только для человека, но даже для современной вычислительной машины. По этому поводу автор замечательного многотомного труда «Искусство программирования» Д. Кнут пишет: «Стоит помнить, что 10! — это примерно 3,6 миллиона. В некотором смысле число 10! является приблизительно границей между тем, что можно сосчитать на компьютере, и тем, что нельзя. Если алгоритм требует испытания более чем 10! случаев, то счет может занять слишком много машинного времени, чтобы быть практически осуществимым. С другой стороны, если мы должны проверить 10! случаев, и каждый случай требует, скажем, одной миллисекунды машинного времени, то общее время счета составит примерно один час». Поэтому интересно находить такие соображения, которые позволяют существенно сократить или вообще избежать полный перебор.

Задачи

7. а) Сколько анаграмм у слова НИСЕЛЬАП?

б) Найдите среди них два слова, одно — название фрукта, другое — породы собаки.

8. Найдите два девятизначных числа, составленных из всех цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, чтобы одно из них было больше другого в 8 раз.

9. а) Вершины нарисованного на плоскости правильного шестиугольника нужно обозначить буквами A, B, C, D, E, F. Сколькими способами это можно сделать?

б) Сколько среди этих способов таких, что в результате получится шестиугольник $ABCDEF$? (Буквы могут идти по часовой стрелке, а могут идти и против часовой стрелки.)

10. Сколькими способами можно расставить на шахматной доске восемь ладей так, чтобы они не били друг друга?

Перестановки с повторениями

Отношения факториалов возникают при подсчете перестановок с повторениями. Например, число анаграмм слова БАОБАБ равно $\frac{6!}{3!2!1!}=60$.

Поясним, почему это так. В этом слове 3 раза повторяется буква Б, 2 раза буква А и один буква О. Представим себе, что все буквы в этом слове разные: три буквы Б и две буквы А можно раскрасить разными цветами. Итак, мы имеем 6 разных знаков, и количество их перестановок равно 6!. Но тогда каждой анаграмме слова БАОБАБ: ОААБББ, БОААББ, ААОББА, ... соответствует 3!2! перестановок (рис. 2), ведь мы можем в ней 3! способами переставить 3 разноцветные буквы Б и 2! способами переставить разноцветные буквы А.

Оказывается, что для числа перестановок с повторениями имеется общая формула.

Рис. 2.

> Если слово имеет n_1 букв A_1, n_2 букв A_2, ..., n_r букв A_r, то количество его анаграмм равно
> $$\frac{(n_1+n_2+\ldots+n_r)!}{n_1!\,n_2!\ldots n_r!}.$$

Конечно, эта формула применима для перестановок с повторениями любых предметов. Например, количество перестановок цифр 0, 0, 0, 0, 1, 1, 3 равно

$$\frac{7!}{4!\,2!\,1!}=\frac{4!\,5\cdot 6\cdot 7}{4!\,2}=5\cdot 3\cdot 7=105.$$

Задачи

11. Сколько различных анаграмм у слов: а) реестр; б) анаграмма?

12. Сколькими способами мама может в течение недели выдать дочке 3 банана, 2 груши и 2 апельсина, если каждый день будет давать ей по одному фрукту?

13. Расшифруйте приведенную на рисунке на с. 19 фразу, в которой вместо каждого слова стоит его анаграмма.

14. Сколькими способами можно составить ожерелье из одной черной, двух белых, трех красных и пяти голубых бусинок?

Степень суммы

Комбинации букв — анаграммы — естественно возникают при перемножении двух или нескольких многочленов, а комбинаторные коэффициенты — количества анаграмм — при приведении подобных членов.

Хорошо известна формула квадрата суммы двух чисел:

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2.$$

Похожую формулу можно получить и для квадрата суммы трех и большего числа слагаемых. Возведем, например, сумму $a+b+c$ в квадрат:

$$(a+b+c)(a+b+c)=aa+ab+ac+ba+bb+bc+ca+cb+cc=$$
$$=a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac.$$

Аналогичная формула верна и для $(a+b+c+d)^2$ (на рисунке 3 каждый одночлен выражает площадь своего прямоугольника); вообще, квадрат суммы n чисел вычисляется так: надо сложить все квадраты этих n чисел и прибавить удвоенную сумму всевозможных попарных произведений этих чисел.

Если аккуратно перемножить $a+b+c$ три раза на себя, получится такая формула:

$$(a+b+c)^3=a^3+b^3+c^3+$$
$$+3(a^2b+a^2c+b^2a+b^2c+c^2a+c^2b)+$$
$$+6abc.$$

Объясним, как можно получить возникающие здесь коэффициенты 1, 3 и 6 без утомительного умножения и собирания подобных членов. Это — уже знакомые нам количества анаграмм. Член a^3 может получиться только одним способом — когда из каждой скобки

$$(a+b+c)(a+b+c)(a+b+c)$$

берется буква a. Чтобы получить коэффициент при a^2b, нужно из одной скобки взять b, а из двух других a, то есть этому члену соответствуют анаграммы aab, aba, baa из двух букв a и одной буквы b: их количество равно $(2+1)!/(2!1!)=3$. Наконец, коэффициент при abc равен числу $3!/(1!1!1!)=6$ анаграмм (перестановок) слова из трех различных букв a, b, c.

Аналогичная формула получится и для куба суммы большего числа слагаемых, например

$$(a+b+c+d+e)^3=$$
$$=(a^3+\ldots)+3(a^2b+\ldots)+6(abc+\ldots). \qquad (**)$$

Здесь многоточием в каждой скобке обозначены члены, получаемые из первого выписанного члена всевозможными заменами букв.

Укажем теперь общую формулу.

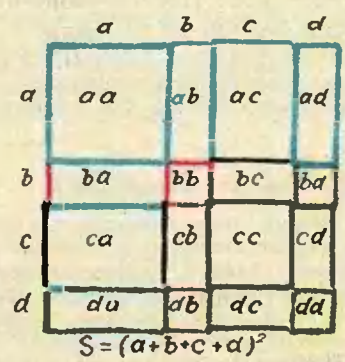


Рис. 3.

	abcde
a^2b	21000
b^2c	02100
b^2a	12000
...	.....

	abcde
a^3	30000
b^3	03000
c^3	00300
...	.....

	abcde
dbc	11100
abd	11010
abe	11001
...	.....

Рис. 4.

> Коэффициент при $a_1^{n_1}a_2^{n_2}\ldots a_r^{n_r}$, получающийся при возведении в n-ю степень суммы $a_1+a_2+\ldots+a_r$ из r слагаемых (здесь $n=n_1+n_2+\ldots+n_r$, $n_1\geqslant 0$, $n_2\geqslant 0$, ..., $n_r\geqslant 0$), равен числу анаграмм слова из n_1 букв A_1, n_2 букв A_2, ..., n_r букв A_r, то есть $\dfrac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_r!}$.

(Разумеется, если некоторое число n_j равно 0, то $a^{n_j}=1$, значит, буква a_j в таком одночлене отсутствует; напомним, что $0!=1$.)

Вернемся к формуле (**). Интересно, что вопрос: «сколько членов будет в каждой скобке?» также сводится к подсчету перестановок с повторениями. Выпишем в строчку все наши 5 букв и под каждой будем писать показатель, с которым она входит в соответствующий одночлен. (Если буква не входит в одночлен, то пишем показатель 0). Тогда каждому одночлену в скобке $(a^2+\ldots)$ соответствует «слово» из 5 чисел: одной двойки, одной единицы и трех нулей, поэтому их общее количество равно $5!(3!1!1!)=20$; в скобке $(a^3+\ldots)$ будет столько же членов, сколько анаграмм у «слова» 30000, то есть $5!/(4!1!)=5$; наконец, членов вида $(abc+\ldots)$ будет $5!/(3!2!)=10$ (рис. 4).

Можно проверить, что мы не ошиблись, подсчитав общее число всех одночленов до приведения подобных — иными словами, подставив в формулу (**) вместо всех букв число 1; при этом слева получится 5^3, а справа $5+3\cdot 20+6\cdot 10$.

Задачи

15. Сколько членов получится после умножения:

$$(a+b+c+d)(x+y+z)(u+v)?$$

(Указание. Подставьте вместо букв единицы.)

16. Найдите наибольший коэффициент многочлена:

а) $(a+b+c+d+e)^5$; б) $(a+b+c+d)^5$.

17. В формуле $(a+b+c+d+e)^4=K_1(a^4+\ldots)+K_2(a^3b+\ldots)+K_3(a^2b^2+\ldots)+K_4(a^2bc+\ldots)+K_5(abcd+\ldots)$ найдите коэффициенты K_1, K_2, K_3, K_4, K_5. Сколько членов в каждой круглой скобке?

Один способ подсчета вероятностей

Из повседневного опыта известно, что бутерброд падает маслом вниз с вероятностью 1/2 и маслом вверх — тоже 1/2. Правда, некоторые считают, что вероятность первого исхода 0,9, а второго — 0,1. Но, наверное, никто не сомневается, что вероятность выпадения шестерки при бросании игрального кубика равна 1/6, а двух шестерок подряд — 1/36.

Эти примеры поясняют, что вероятность — это некоторое число между 0 и 1, количественно выражающее шанс наступления того или иного исхода (маслом вниз или вверх) случайного события (падения бутерброда), причем сумма вероятностей всех возможных исходов равна 1.

После того, как каждому исходу приписана некоторая вероятность, интересно находить вероятности более сложных событий. Эта задача заключает в себе большие математические трудности. Один из способов подсчета вероятностей сложных событий связан с таким простым наблюдением: если сумма нескольких положительных чисел равна 1, то степень этой суммы тоже равна 1. Оказывается, что каждому одночлену, возникающему при возведении суммы в степень, можно придать вероятностный смысл. Как это делается — покажем на таком искусственном примере.

В магазине лежит большая куча перцев, причем 1/3 из них — красные, 1/2 — желтые, 1/6 — зеленые. Если продавец, не глядя, выбирает из кучи один перец, то мы полагаем вероятность, что он окажется красным (*к*), равной 1/3, желтым (*ж*) 1/2, зеленым (*з*) 1/6.

Если продавец выбирает, не глядя, два перца, то возможны такие случаи: *кк*, *кж*, *кз*, *жк*, *жз*, *жж*, *зк*, *зж*, *зз*. Вероятность каждого из них считается равной произведению вероятностей появления отдельных букв, составляющих пару:

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2,\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6},\ \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3},\ \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$
$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6},\ \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3},\ \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2},\ \left(\frac{1}{6}\right)^2.$$

Сумма всех 9 чисел равна 1, так как они появляются при возведении в квадрат числа $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=1$.

Чтобы найти вероятность того, что среди двух взятых перцев есть красный и зеленый, надо сложить вероятности случаев *кз* и *зк*:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{9}.$$

Обратим внимание на то, что это действие соответствует следующему: надо возвести $(к+з+с)$ в квадрат и привести подобные члены *кз* и *зк* — в результате получится $2кз$, а затем подставить вместо букв *к* и *з* их вероятности.

Пользуясь правилом нахождения коэффициента при возведении в степень, можно определять и вероятности более длинных комбинаций. Например, если продавец, не глядя, выбирает один за другим пять перцев, то вероятность, что среди них окажется 3 красных, 1 желтый и 1 зеленый, вычисляется так:

$$\frac{5!}{3!1!1!}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{81},$$

ведь $\frac{5!}{3!1!1!}к^3жз$ — это одночлен, который получится в многочлене $(к+ж+з)^5$ после возведения в степень и приведения подобных членов, то есть сумма вероятностей анаграмм слова *кккжз*.

Интересно, что случаи «2 красных и 3 желтых», а также «2 красных, 2 желтых и 1 зеленый» имеют одинаковую вероятность

$$\frac{5!}{2!3!}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5!}{2!2!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)=\frac{5}{36}.$$

(Это — наиболее вероятные комбинации 5 перцев при выбранных нами вероятностях.)

З а д а ч и

18. Все три ребра куба $6\times6\times6$, исходящие из вершины A, поделили в отношении $3:2:1$, считая от вершины A, и через точки деления провели плоскости, параллельные граням, разрезающие кубик на 21 кусок (рис. 5).

а) Сколько из них будут брусками $3\times2\times1$?

б) Сколько еще и каких будет кусков? Каковы их объемы?

в) Имеется ли связь между этой задачей и задачей про перцы?

19. Автомат составляет ожерелья из 6 бусинок, выбирая их случайно из большой кучи черных, белых, красных и голубых бусинок, смешанных в соотношении $1:2:3:4$. С какой вероятностью в таком ожерелье

а) все бусинки голубые;

б) все — одного цвета;

в) не будет ни одной красной бусинки;

г) встретятся бусинки всех четырех цветов?

д) Какие ожерелья будут попадаться чаще всего?

е) Каким нужно взять соотношение бусинок в большой куче, чтобы чаще всего встречались ожерелья с 2 красными, 2 черными, одной белой и одной голубой бусинками?

20. Пусть вероятность падения бутерброда маслом вниз равна $3/4$. Произошло случайное событие: поднос с семью бутербродами опрокинулся. Какова вероятность, что ровно k бутербродов упадут маслом вниз (для каждого $k=0, 1, 2, \ldots, 7$)?

Возведите в степень $(p+q)^7$ и подсчитайте каждый одночлен при $p=3/4$, $q=1/4$. Для вычислений коэффициентов можно воспользоваться микрокалькулятором. (См. Приложение.)

Биномиальные коэффициенты

Выше мы почти не затрагивали самый простой и, пожалуй, самый важный случай двух букв. Коэффициенты многочлена $(a+b)^n$ имеют специальное обозначение C_n^k, а формула

$$(a+b)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}b+\\+\ldots+C_n^ka^{n-k}b^k+\ldots+C_n^nb^n$$

называется формулой *бинома Ньютона*. Мы знаем, что C_n^k — количество слов из n букв, среди которых k букв b и $n-k$ букв a — можно найти по формуле

$$C_n^k=\frac{n!}{(n-k)!k!}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}.$$

Например,

$$(a+b)^4=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4,$$

поскольку

$$C_4^0=C_4^4=\frac{4!}{4!0!}=1,$$

$$C_4^1=C_4^3=\frac{4!}{3!1!}=4,\quad C_4^2=\frac{4!}{2!2!}=6.$$

Биномиальные коэффициенты — числа C_n^k — возникают в самых различных задачах комбинаторики, алгебры, геометрии, математического анализа, теории вероятностей. Они связаны многочисленными красивыми тождествами; например, из равенства $C_n^k+C_n^{k-1}=C_{n+1}^k$ (см. задачу 5) следует, что при всех натуральных n и k, $0\leqslant k<n$,

$$C_k^k+C_{k+2}^k+\ldots+C_n^k=C_{n+1}^{k+1}$$

(для $k=1$ это — формула, с которой мы начали статью). Более подробно об этих замечательных числах будет рассказано в одном из следующих номеров журнала.

Литература

1. В. А. Успенский. *Треугольник Паскаля.* М.: Наука, 1979.

2. М. И. Башмаков, Б. М. Беккер, В. М. Гольховой. *Задачи по математике: Алгебра и анализ.* М.: Наука, 1982.— (Серия: Библиотечка «Квант», вып. 22)

3. А. Н. Колмогоров, И. Г. Журбенко, А. В. Прохоров. *Введение в теорию вероятностей.* М.: Наука, 1982.— (Серия: Библиотечка «Квант», вып. 23)

4. Д. Кнут. *Искусство программирования для ЭВМ.* М.: Мир, 1976, т. 1.

5. Ф. Мостеллер. *Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями.* М.: Наука, 1985.

Приложение: Вычисление биномиальных коэффициентов на калькуляторе БЗ-34.

При больших n вычисление биномиальных коэффициентов вручную — весьма трудоемкая задача. Ниже приводится программа для калькулятора БЗ-34*), позволяющая вычислить коэффициенты C_n^k для любого $n\leqslant334$ и всех $k\leqslant n$ (при этом точные ответы получаются при $n\leqslant28$; при больших n программа дает приближенные ответы**)).

*) Небольшие модификации позволяют приспособить программу к модели МК-54 и МК-61.

**) Верхняя граница 28 для n и точность приближенных значений коэффициентов много лучше, чем для программы из известных справочников В. П. Дьяконова или А. Н. Цветкова и В. А. Епанечникова. (*Прим. ред.*)

После внесения программы в память следует перейти в автоматический режим (FАВТ), внести число n в регистр X и нажать кнопки В/О, С/П. После остановки высвечивается 1 — первый коэффициент. Затем нажатием кнопки С/П последовательно получаем остальные коэффициенты $n=C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^{n-1}$, 1.

FПРГ	07 —	15:
00 ПА	08 1	16 ПВ
01 ПО	09 +	17 С/П
02 1	10 П1	18 FL1
03 ПВ	11 ИПВ	19 20
04 С/П	12 ИПО	20 FL0
05 ИПА	13 ×	21 05
06 ИПО	14 ИП1	

А. И. Тулайков

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Конус трения» предназначена восьмиклассникам. «Первый источник электрического тока» — девятиклассникам. «Дифракция волн» — десятиклассникам.

Публикацию подготовил И. К. Белкин.

Конус трения

Если рассмотреть условия равновесия тела на наклонной плоскости, угол наклона которой можно изменять, то легко получить (сделайте это самостоятельно), что тело начнет соскальзывать с плоскости при угле φ таком, что

$$\operatorname{tg}\varphi=\mu,$$

где μ — коэффициент трения тела о плоскость. Не кажется ли вам удивительным, что этот угол не зависит от массы тела?

То же самое выражение для угла φ можно получить и другим, пожалуй, более простым способом. Но для этого надо предварительно познакомиться с понятием «конус трения».

Пусть тело, которое можно считать материальной точкой, находится на шероховатой горизонтальной плоскости. Сила тяжести $m\vec{g}$ прижимает тело к поверхности, и поверхность «откликается», действуя на тело силой нормального давления $\vec{N}$. Если же к телу приложена также и некоторая горизонтальная сила, то со стороны поверхности появляется еще одна сила — сила трения. Пока величина горизонтальной силы не превышает максимального значения силы трения покоя $F_{\text{тр.п max}}=\mu N$, тело покоится. При достижении этого значения тело начинает двигаться, причем поверхность действует на него препятствующей движению силой трения скольжения

$$F_{\text{тр.ск.}}=F_{\text{тр.п. max}}=\mu N.$$

Как сила нормальной реакции, так и сила трения порождаются поверхностью, поэтому можно говорить о полной силе реакции поверхности. В случае, когда тело под действием внешней силы (конечно, включающей в себя силу тяжести) движется вдоль поверхности (рис. 1), полная сила реакции есть

$$\vec{R}=\vec{N}+\vec{F}_{\text{тр.ск.}}$$

Эта сила направлена под углом φ к нормали, который легко определить:

$$\operatorname{tg}\varphi=\frac{F_{\text{тр.ск.}}}{N}=\mu,\quad \varphi=\operatorname{arctg}\mu.$$

Угол φ называют углом трения.

Будем теперь мысленно вращать вектор $\vec{R}$ вокруг нормали к поверхности, не меняя угла φ между ними. При этом вектор опишет конус (с углом 2φ при вершине), называемый *конусом трения*. Он обладает следующим замечательным свойством. Какая бы большая по величине внешняя сила не прикладывалась к телу, если она лежит внутри конуса трения, тело остается в покое. Если же эта сила выходит за пределы конуса трения, то, какой бы малой она не была, тело начинает двигаться.

В справедливости этого утверждения убедиться нетрудно. Действительно, пусть внешняя сила $\vec{F}$ (см. рис. 1) приложена к телу так, что ее линия действия составляет угол α с нормалью к поверхности. Тогда «сдвигающая» тело вдоль поверхности сила равна $F\sin\alpha$, а сила нормальной реакции равна $F\cos\alpha$. Таким образом, предельно возможная сила трения покоя, удерживающая тело на месте, есть

$$F_{\text{тр.п.max}}=\mu N=\mu F\cos\alpha=F\operatorname{tg}\varphi\cos\alpha.$$

Пока сила $\vec{F}$ лежит внутри конуса трения, $\alpha<\varphi$ и, следовательно, $F\sin\alpha<$

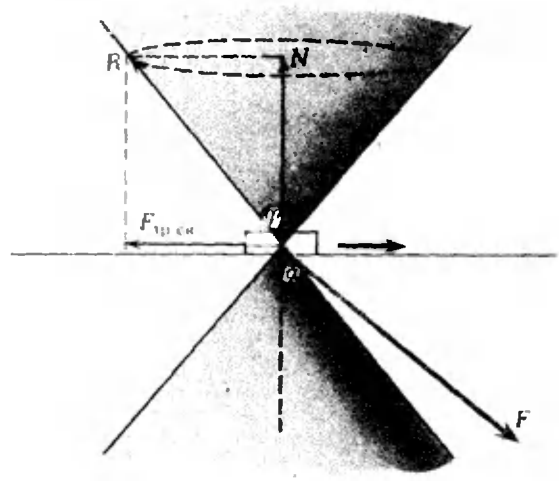


Рис. 1.

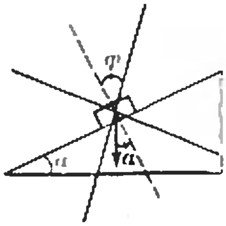


Рис. 2.

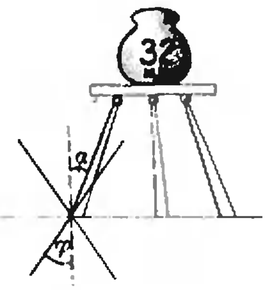


Рис. 3.

$<F\,\mathrm{tg}\varphi\cos\alpha$. Тело при этом покоится. Однако как только угол α становится больше угла трения φ, последнее неравенство нарушается. Теперь трение уже не в состоянии удержать тело на месте, и оно начинает скользить.

Вернемся к телу, оставленному в начале статьи на наклонной плоскости, и построим для него конус трения (рис. 2). Внешней силой здесь служит сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз. Пока $\alpha<\varphi$, согласно сказанному выше, тело будет покоиться. Но как только угол α превысит угол φ — начнется движение. Поэтому мы сразу же получаем условие начала соскальзывания тела с наклонной плоскости:

$$\mathrm{tg}\alpha>\mu,\ \alpha>\mathrm{arctg}\mu.$$

Заметим, что понятием конуса трения пользуются инженеры при расчете той или иной конструкции. Так, например, даже при проектировании табуретки следует помнить о конусе трения.

Представьте себе табуретку, ножки которой соединены с сидением шарнирами (рис. 3). Конечно, в действительности никто не станет так делать, однако такая система крепления позволит нам легче разобраться с ролью конуса трения. Поставим такую табуретку на пол так, чтобы угол α, который ножки составляют с нормалью к полу, был меньше угла трения φ. В этом случае как бы мы не нагружали табуретку, ножки ее не разъедутся — сила, с которой каждая ножка действует на пол, лежит в пределах соответствующего конуса трения. Если же угол α сделать больше угла φ, то сила, с которой ножка действует на пол, выйдет за пределы конуса трения, ножки разъедутся и табуретка упадет.

У реальной табуретки ножки соединены с сидением не с помощью шарниров, а вклеены или вкручены в него. Однако если сделать так, чтобы угол α превысил угол трения φ, то в месте соединения ножек табуретки с сидением могут возникнуть значительные напряжения и табуретка сломается.

Первый источник электрического тока

Электрический ток даже в простейшей электрической цепи может показаться несколько загадочным явлением. В самом деле, ток — это упорядоченное движение электрических зарядов, например электронов в металлическом проводнике. Упорядоченно двигаться их заставляет электрическое поле. Но, как известно, работа электростатического поля по замкнутой траектории равна нулю (а электрические цепи, в которых протекает постоянный электрический ток, всегда замкнуты). Тем не менее в цепи при прохождении тока совершается работа. За счет этой работы, например, нагреваются проводники.

Почему же в цепи существует электрический ток и почему при его прохождении совершается работа?

И то и другое возможно только потому, что где-то в цепи действуют какие-то неэлектростатические силы, которые могут создать и поддерживать в цепи электростатическое поле и работа которых не равна нулю. Силы эти получили название *сторонних* сил. То место в цепи, где они действуют, носит название (не совсем удачное) *источника тока*.

Что это за сторонние силы и как они действуют? В качестве примера рассмотрим первый в истории химический источник постоянного тока. Его придумал в самом конце XVIII века итальянский физик Алессандро Вольта (1745—1827). Теперь этот источник называют элементом Вольта. Он состоит из цинкового и медного электродов, погруженных в раствор серной кислоты.

Заметим, что медь и цинк состоят не из нейтральных атомов, а из положительных ионов соответствующего металла и электронов, оторвавшихся от атомов и ставших, как говорят, свободными. Следует иметь в виду, что и раствор кислоты состоит не из нейтральных молекул воды (H_2O) и серной кислоты (H_2SO_4). Значительная часть молекул H_2SO_4 в воде превращается в три иона — два положительно заряженных иона водорода H^+ и отрицательно заряженный ион SO_4^{2-} с двойным зарядом:

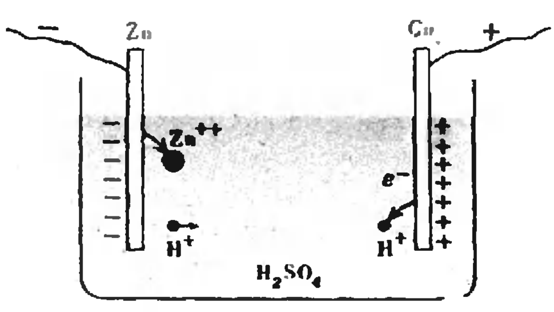
$$H_2SO_4 \rightarrow 2H^+ + SO_4^{2-}.$$

Посмотрим, что происходит, когда в такой раствор погружают электроды (см. рисунок). Начнем с цинка.

При погружении цинка в раствор кислоты начинается химическая реакция взаимодействия ионов SO_4^{2-} и Zn^{2+}, в результате чего ионы цинка отрываются от электрода и переходят в раствор. При этом на электроде оказывается избыток электронов, и он становится отрицательно заряженным. По мере накопления ионов Zn^{2+} в растворе некоторая их часть, притягиваемая электродом, возвращается обратно. В конце концов устанавливается динамическое равновесие: число ионов, покидающих цинк, равно числу ионов, возвращающихся в него. Но электрод остается заряженным отрицательно, а раствор вблизи электрода (за счет ионов цинка) получает положительный заряд.

Появление дополнительных положительных ионов около цинкового электрода вызывает перераспределение уже имеющихся ионов внутри раствора. Часть отрицательных ионов из соседнего слоя перемещается ближе к электроду, а часть положительных ионов оттесняется в более удаленный слой. Подобные перемещения происходят во всех слоях раствора, вплоть до слоя, прилегающего к медному электроду. Здесь происходит следующий процесс.

В отличие от цинка медь почти не растворяется в кислоте, то есть не посылает в раствор своих ионов. Наоборот, положительные ионы водорода из раствора, попадая на медный электрод, отбирают у него свободные электроны и нейтрализуются. Медь становится положительно заряженной, а раствор около нее приобретает отрицательный заряд.



Таким образом, медный электрод в элементе Вольта образует положительный полюс, а цинковый электрод — отрицательный. Разность потенциалов между ними составляет приблизительно 1,1 В.

Посмотрим теперь, что произойдет, если электроды соединить металлическим проводником. Свободные электроны во внешней части цепи (в проводнике) начнут двигаться от цинка, где они имеются в избытке, к меди, где их недостает. Это означает, что во внешней части цепи возникнет электрический ток, направленный от меди к цинку.

А что же в самóм элементе Вольта? Из-за ухода электронов с цинка равновесие между цинковым электродом и раствором нарушается, в результате чего дополнительное число ионов цинка будет переходить в раствор, поддерживая тем самым отрицательный заряд электрода. А из-за прихода электронов на медный электрод большее число положительных ионов водорода из раствора сможет нейтрализоваться на этом электроде. При этом положительный заряд меди тоже будет поддерживаться.

Мы видим, таким образом, что в то время, как во внешней части цепи от цинкового электрода к медному движутся свободные электроны, внутри источника движутся ионы: положительные от цинка к меди и отрицательные от меди к цинку. Так в замкнутой цепи осуществляется непрерывный круговой процесс перемещения электрических зарядов, то есть электрический ток.

Какие же силы совершают работу по поддержанию постоянной разности потенциалов между медным и цинковым электродами? Это так называемые химические силы, действующие внутри элемента Вольта. Другими словами можно сказать, что источником энергии электрического тока служит энергия, выделяющаяся при химических реакциях между электродами и раствором кислоты.

Отсюда получается, что «источник тока» в действительности есть источник энергии, за счет которой и совершается работа по перемещению зарядов по цепи, проявляющаяся, в частности, в нагреве проводников. Энергию, приходящуюся на единицу заряда, обходящего цепь, называют электродвижущей силой источника.

В других источниках происходят другие процессы, действуют другие силы, но роль их всегда такая же как и в рассмотренном нами элементе Вольта.

Дифракция волн

Дифракцией называется огибание волнами препятствия, их проникновение в область геометрической тени. Это одно из характерных явлений для волн любой природы.

Особенно заметно дифракция проявляется тогда, когда размеры препятствия сравнимы с длиной волны. Звуковые волны, например, имеют длину порядка метров, и их дифракцию обнаружить легко — звук можно услышать из-за угла. А вот у света длина волны составляет всего лишь доли микрометра, и в обычных условиях наблюдать дифракцию света трудно. Долгое время считалось даже, что свет *всегда* распространяется прямолинейно.

Качественно явление дифракции волн объясняется с помощью принципа Гюйгенса («Физика 10», § 38). Первую количественную теорию дифракции света построил французский инженер Огюстен Френель. В 1818 году он представил свой «Мемуар о дифракции света» на конкурс, объявленный Парижской академией наук. В следующем году этот мемуар был премирован, а позже напечатан в трудах Академии.

Среди членов комиссии, которой было поручено рассмотреть мемуар Френеля, был известный ученый С. Пуассон. Основываясь на теории Френеля, Пуассон проделал расчет для двух частных случаев дифракции на различных препятствиях, не разобранных Френелем, и получил парадоксальные результаты. В первом случае расчет показывал, что в центре геометрической тени от небольшого шарика, поставленного на пути света, должно наблюдаться светлое пятно. Во втором случае получалось, что после прохождения света через круглое

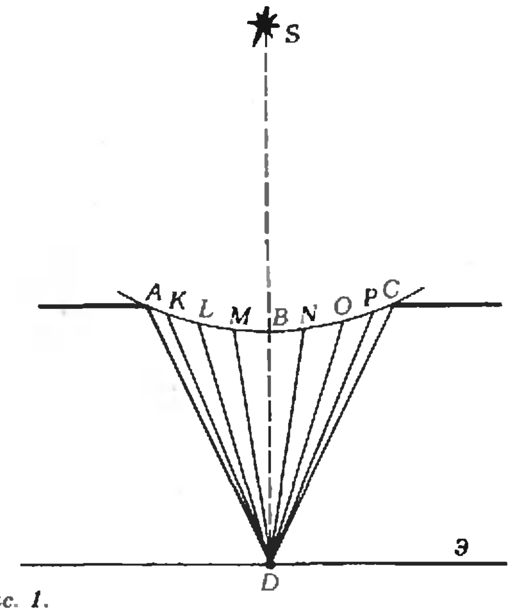


Рис. 1.

отверстие в центре дифракционной картины может появиться темное пятно. Расчеты Пуассона были представлены как доказательство несостоятельности теории Френеля. Однако соответствующие эксперименты блестяще подтвердили все выводы френелевской теории. Этот факт сыграл немаловажную роль для начала широкого признания волновой природы света.

Давайте и мы разберемся в явлении дифракции поподробнее. Рассмотрим дифракцию света на круглом отверстии в непрозрачной ширме. На рисунке 1 дуга ABC показывает фронт волны, испущенной точечным источником света S, в момент достижения волной препятствия. Каждая точка фронта является, согласно принципу Гюйгенса, источником вторичных волн, а их интерференция, по теории Френеля, объясняет дифракционную картину на экране $Э$.

Чтобы рассчитать результат интерференции вторичных волн, например, в точке D в центре экрана, применим метод, предложенный Френелем. Разобьем волновой фронт на зоны (зоны Френеля) по такому принципу: разность расстояний от крайних точек каждой зоны до экрана должна отличаться ровно на половину длины волны света:

$$AD-KD=KD-LD=LD-MD=MD-BD=\lambda/2.$$

Для чего так поступают? Это позволяет воспользоваться известным свойством: волны, имеющие разность хо-

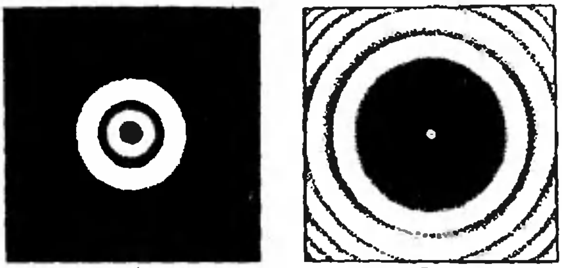


Рис. 2. *а)* *б)*

да в половину длины волны (находящиеся в противофазе), при сложении гасят друг друга. Каждой точке одной зоны найдется соответствующая точка в соседней зоне, от которой волны придут в точку D в противофазе, а площади всех зон почти одинаковы. Поэтому действия соседних зон в точке D (например, первой и второй, второй и третьей и т. д.) практически уничтожают друг друга.

Теперь легко понять, при каких условиях можно наблюдать «парадокс Пуассона». Если в отверстии умещается точно четное число зон, то в центре экрана мы увидим темное пятно. За ним располагается светлое кольцо, затем темное и т. д. (рис. 2, *а*). На экране мы будем наблюдать систему чередующихся темных и светлых колец (но центральное пятно будет темным!). Если же в отверстии укладывается нечетное число зон, то результат будет обратным — в центре будет наблюдаться светлое пятно, окруженное чередующимися темными и светлыми кольцами. Дифракционную картину от небольшого шарика (рис. 2, *б*) попробуйте объяснить самостоятельно.

Ясно, что наблюдаемая дифракционная картина будет четкой, если число зон Френеля невелико. Так, для видимого света с длиной волны $5\cdot 10^{-7}$ м при диаметре препятствия ~ 1 мм и расстояниях от препятствия до источника света и экрана ~ 1 м на препятствии укладывается всего несколько зон. В таком случае на экране хорошо различимы чередующиеся светлые и темные кольца. При бо́льших размерах препятствия (при меньших расстояниях) картина становится менее четкой.

В наше время удается наблюдать дифракцию не только световых волн, но и более коротковолнового рентгеновского излучения, длина волны которого составляет десятки ангстрем (1 ангстрем $=1$ Å $=10^{-10}$ м). Создать препятствия такого размера искусственно очень трудно. Но вот если на пути рентгеновских лучей расположить кристалл, в котором межатомные расстояния имеют как раз такой порядок, то возникнет дифракционная картина — лауэграмма (по имени немецкого ученого М. Лауэ, предложившего впервые в 1912 году использовать для наблюдения дифракции рентгеновских лучей кристалл). Лауэграмма состоит из пятен разной интенсивности, расположенных регулярным образом вокруг центрального пятна. Ее вид определяется характером «упаковки» атомов в кристалле. Опыты по дифракции рентгеновских лучей не только доказали волновую природу рентгеновского излучения, но и позволили выяснить геометрическую структуру различных кристаллов.

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Четырехзначное число, записанное последовательно стоящими слева направо цифрами x, y, u, v, будем обозначать символом $\overline{xyuv}$. Докажите, что если A и B — произвольные цифры, отличные от 0, то

$$\overline{ABBA}-\overline{BABA}=\overline{ABAB}-\overline{BAAB}.$$

2. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} 2x+ay=a+2, \\ (a+1)x+2ay=2a+4 \end{cases}$$

не имеет решений?

3. Найдите все тройки целых чисел x, y, z, удовлетворяющие системе неравенств

$$x^2\leqslant y,\ y^2\leqslant z,\ z^2\leqslant x.$$

4. Докажите, что произвольный треугольник разбивается своими медианами на 6 равновеликих треугольников.

5. Докажите, что в выпуклый четырехугольник тогда и только тогда можно вписать окружность, когда суммы длин противоположных сторон одинаковы.

Девятый класс

6. Найдите все целые n, при которых модуль трехчлена $n^2-7n+10$ является простым числом.

7. Докажите, что уравнение $\sin x=x^2+x+1$ не имеет решений.

8. Положительно или отрицательно число $\sin 10\,000$?

(Окончание см. на с. 55)

Квант для младших школьников

Задачи

1. Однажды я решил проехаться по кресельной канатной дороге. В некоторый момент я обратил внимание, что идущее мне навстречу кресло имеет номер 95, а следующее — номер 0, дальше 1, 2 и т. д. Я взглянул на номер своего кресла. Он оказался равным 66. Проехал ли я половину пути? При встрече с каким креслом я проеду половину пути?

2. Вот очень простая

Г+О=Л—О=В×О=Л—О=М—К=А

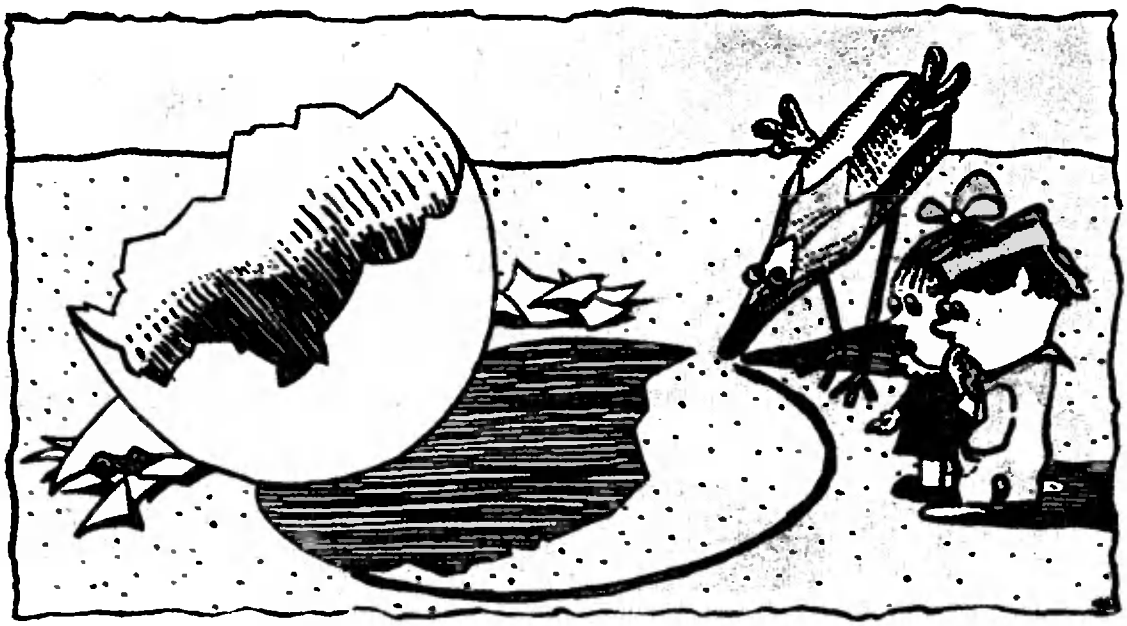
Замените буквы цифрами так, чтобы получились верные равенства; при этом одинаковым буквам должны соответствовать одинаковые цифры, а разным — разные.

3. Во флакон неправильной формы налили некоторое количество жидкости. Как, не имея никаких измерительных инструментов и других сосудов, узнать, занимает ли жидкость больше или меньше половины объема флакона?

4. Как найти центр нарисованной окружности, если в вашем распоряжении лишь карандаш и обычная линейка с параллельными краями (ширина линейки меньше диаметра окружности)?

5. Дедушка с тремя внуками вышел прогуляться в парк. Встретившийся им дедушкин знакомый спросил, сколько каждому из них лет. Ваня сказал: «Я младше Пети и мне больше пяти лет». Петя произнес: «Я младше Саши на 3 года». А Саша сказал: «Нам всем вместе в 3 раза меньше лет, чем дедушке, а вместе с дедушкой нам ровно 100 лет». Сколько лет каждому из внуков?

Эти задачи нам предложили: *А. П. Савин, Л. П. Мочалов, М. И. Лобак, А. И. Демидов, Н. К. Антонович.*



Восстанови стертую фигуру!

Кандидат педагогических наук
Н. Н. ИВАНОВА

«Очередное занятие нашего кружка посвящено решению геометрических задач»,— сказал учитель.— «Эти задачи не совсем обычны — мы будем восстанавливать фигуры по некоторым известным элементам. С подобными задачами люди встречались еще в глубокой древности, когда им приходилось восстанавливать границы участков, смытые в результате разлива Нила».

Учитель показал ребятам осколок разбитой патефонной пластинки и предложил определить радиус этой пластинки (центр пластинки не сохранился, но сохранилась некоторая часть ее края).

Ребята вспомнили, что центр окружности, описанной около треугольника, находится в точке пересечения серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника. Зная центр окружности, легко найти ее радиус. Поэтому для решения задачи с пластинкой можно использовать треугольник ABC, вершины которого лежат на дуге окружности пластинки (рис. 1).

«Вторая задача более сложная»,— сказал учитель и нарисовал на доске треугольник ABC. Он провел в нем медианы и отметил их основания D, E, F, потом стер треугольник, оставив только основания медиан. Ребятам же учитель предложил восстановить треугольник.

Первым поднял руку Петя. Он подошел к доске и соединил данные точки отрезками. Отрезки DE, DF и EF — средние линии в треугольнике ABC. А средняя линия параллельна стороне треугольника. Это и дает ключ к решению задачи: через каждую из данных точек нужно провести прямую, параллельную непроходящей через нее средней линии, и в результате пересечения этих прямых мы получим искомый треугольник (рис. 2).

«Хорошо!»,— сказал учитель. «Теперь — третья задача». Учитель нарисовал на доске остроугольный треугольник ABC, провел в нем две высоты AE и BF. Затем снова стер треугольник, оставив точки E, F и часть основания — отрезок MN. «Восстановите стертый треугольник»,— сказал учитель. Ребята задумались. Сережа соединил точки E и F. Как быть дальше? Если бы определить положение точек A и B — концов основания треугольника — задача была бы решена. «Что вы можете сказать об углах AFB и BEA?»,—

обратился учитель к кружковцам. «Эти углы прямые»,— ответили ребята. Сережа догадался, что точки E и F принадлежат геометрическому месту точек, из которых отрезок AB виден под прямым углом. Таким геометрическим местом точек является окружность*), диаметр которой и есть AB. Необходимо найти центр этой окружности. Он лежит на прямой MN и на серединном перпендикуляре, проведенном к отрезку EF, то есть является точкой пересечения MN и этого перпендикуляра (рис. 3). Определив точки A и B, ребята легко нашли точку C. Задача решена!

«Четвертая задача — самая трудная: нужно восстановить треугольник *по основаниям трех его высот*».

К доске снова вышел Петя. Он нарисовал треугольник ABC, провел в нем высоты, отметил их основания: H_1, H_2, H_3. Стер треугольник, соединил точки H_1, H_2, H_3 и задумался. Учитель посоветовал ему сделать от руки набросок, считая, что задача уже решена, и подсказал, что биссектрисы треугольника $H_1H_2H_3$ принадлежат высотам треугольника ABC. Петя подумал и доказал это утверждение. Он построил две окружности: с диаметрами AC и AB — и воспользовался свойством вписанных в окружность углов (рис. 4; как рассуждал Петя?). После этого Петя снова все стер, быстро построил в треугольнике $H_1H_2H_3$ биссектрисы и через вершины H_1, H_2, H_3 провел прямые, перпендикулярные построенным биссектрисам. В пересечении он получил искомый треугольник ABC.

*) Кроме точек A и B.

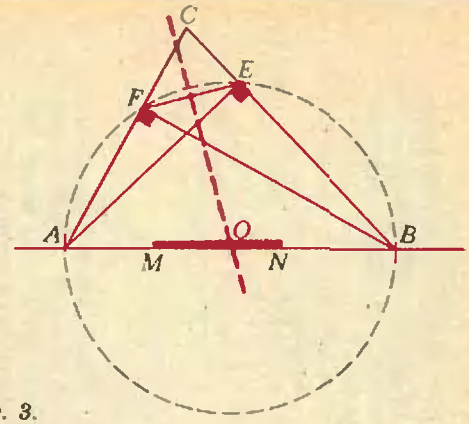


Рис. 3.

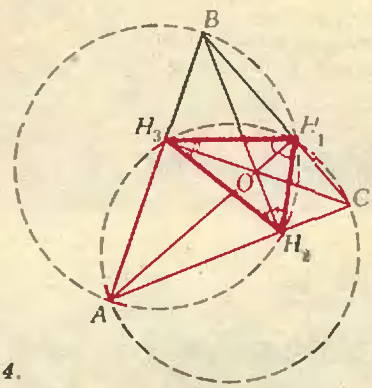


Рис. 4.

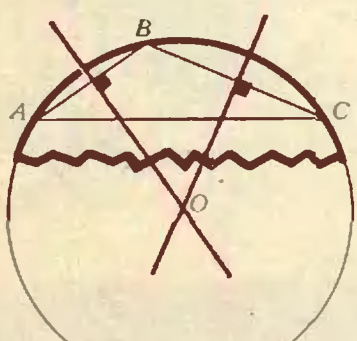


Рис. 1.

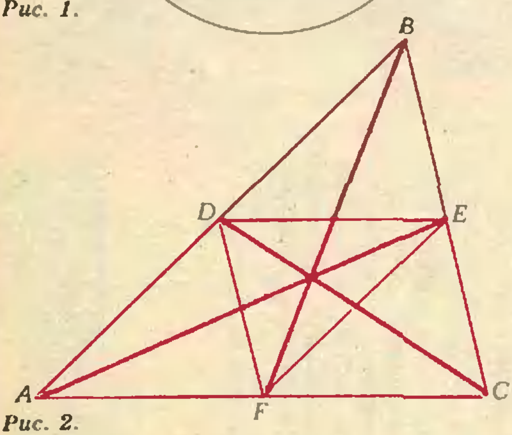


Рис. 2.

В конце занятия учитель предложил еще четыре задачи для домашнего решения.

1. *В треугольнике ABC из вершины A были проведены медиана AD и высота AH, а из вершины B — медиана BF. Треугольник стерли, оставив только три точки D, F и H. Восстановите треугольник.*

2. *Нарисовали параллелограмм. Затем его стерли, оставив середины трех его сторон. Восстановите параллелограмм.*

3. *Даны точки M, N, K — середины трех равных сторон выпуклого четырехугольника. Восстановите четырехугольник.*

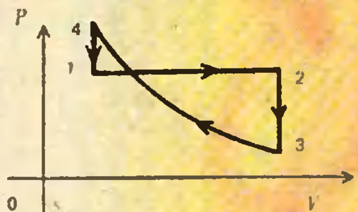
4. *Восстановите треугольник, если известны середины двух его сторон и прямая, на которой лежит биссектриса, проведенная к одной из этих сторон.*

Давление, объем, температура

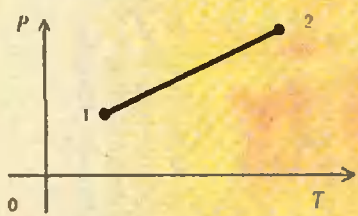
калейдоскоп

Вопросы и задачи

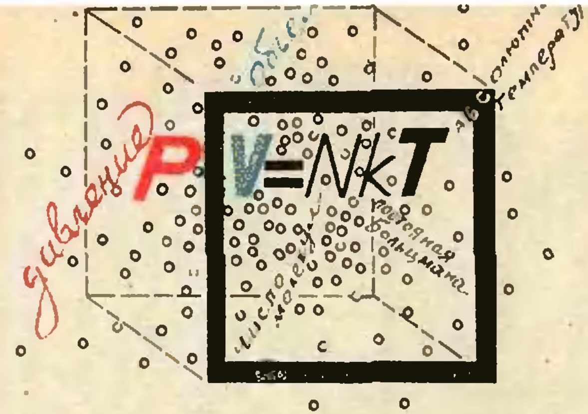
1. Дан график изменения состояния газа в координатах p, V. Представить этот процесс графически в координатах V, T и p, T.



2. При нагревании газа была получена зависимость давления от температуры, показанная на графике. Сжимали или расширяли газ?

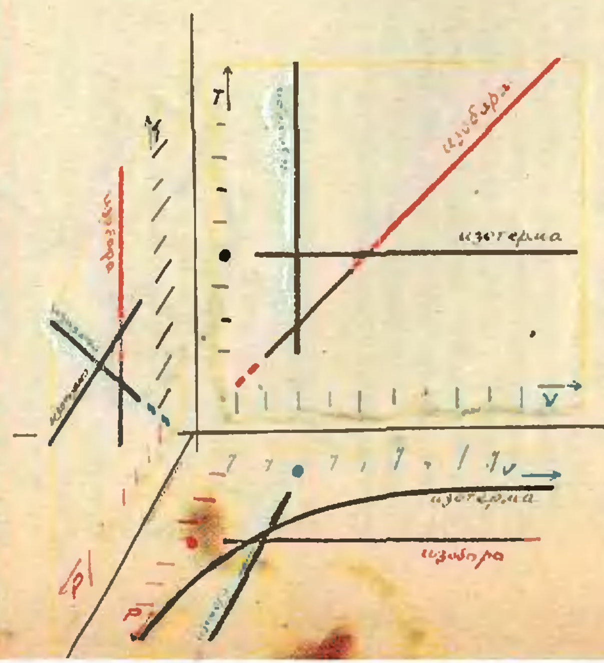


3. Два полых стеклянных шарика соединены трубкой, посередине которой находится капелька ртути. Можно ли по положению капельки судить о температуре окружающего воздуха?



«... из законов Ньютона следует, что в равных объемах любых газов при одинаковых температуре и давлении содержится равное число молекул. Вот какой неожиданный вывод!»

Р. Фейнман



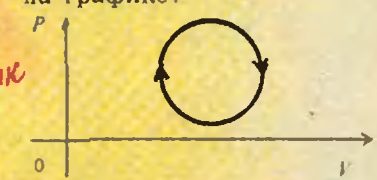
калейдоскоп

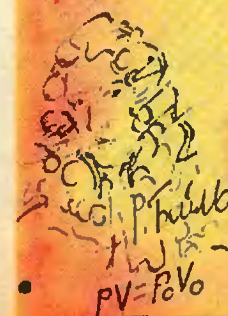
Вопросы и задачи

5. Определите по графику, какая из кривых — изотерма, а какая — адиабата.

6. Объем газа уменьшили в 2 раза, а температуру увеличили в 1,5 раза. Как изменилось давление?

7. Как менялась температура газа при проведении процесса, изображенного на графике?





8. Объем воздушного пузырька удваивается при подъеме со дна озера на поверхность. Какова глубина озера?

9. Почему электрическая лампочка заполняется инертным газом при давлении, значительно меньшем атмосферного?

4. При значительном повышении температуры газа, состоящего из многоатомных молекул, может начаться их диссоциация. К каким отклонениям от закона Шарля может это привести?

Любопытно, что...

... повышение давления от одной до двух атмосфер при постоянной температуре влечет за собой уменьшение объема газа вдвое, в то время как объем воды меняется при этом лишь на одну двадцатитысячную. Однако сжимаемость воды не так уж и мала: если бы удалось освободить от сжатия во́ды Мирового океана, то его уровень поднялся бы на 35 м и огромные территории оказались бы затопленными.

... Бойль, экспериментируя с газами, не пытался установить новый закон, а хотел лишь доказать, что воздух обладает упругостью. Записи Бойля внимательно просматривал его ученик Тоунли. Он-то и обнаружил, что давление и объем обратно пропорциональны друг другу. 14 лет спустя Мариотт, проведя многочисленные опыты, вывел тот же закон.

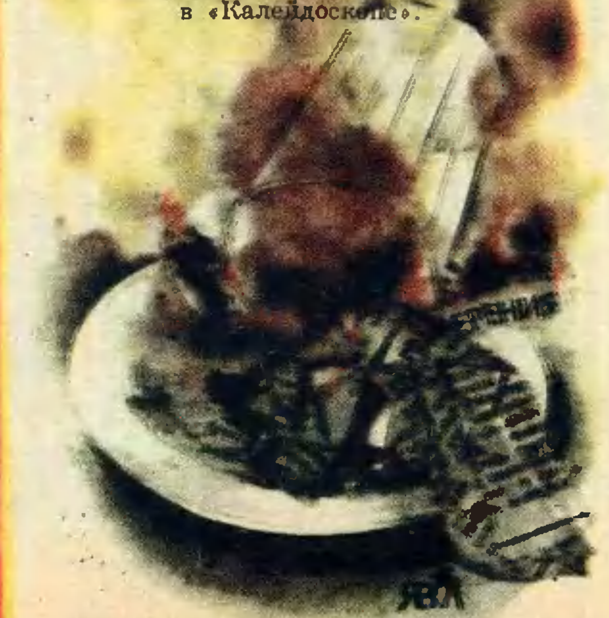
Квант 1/86

А так ли хорошо знакомы вам понятия

Давление, объем, температура?

Применив законы Ньютона к описанию теплового движения атомов идеального газа, можно вывести уравнение состояния газа, из которого следует сделанное в эпиграфе утверждение. Однако многие свойства вещества можно понять, не вдаваясь в детали его внутреннего строения. Так впервые опытным путем пришли к газовым законам, связывающим давление, объем и температуру газа.

Эти законы «работают» уже более 200 лет, позволяя исследовать поведение газа в различных условиях. Они помогут и вам разобраться в задачах, собранных сегодня в «Калейдоскопе».



Квант 1/86

Что читать о газовых законах в «Кванте» (публикации последних лет)

10. Повышается или понижается температура в процессе расширения, показанном на графике?

Микроопыт

Налейте в большую тарелку воду, зажгите бумажку и опустите ее горящей внутрь стакана. Быстро переверните стакан и поставьте его на тарелку. Что произойдет с водой? Почему?

1. *«Закон Дальтона» — 1981, № 11.*
2. *«Уравнение газового состояния» — 1983, № 2.*
3. *«Физический смысл универсальной газовой постоянной» — 1983, № 10.*
4. *«Масса и количество вещества...» — 1984, № 10.*
5. *«Газ превращается в жидкость» — 1984, № 11.*

Задачник Кванта

Задачи

М961—М965; Ф973—Ф977

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 марта 1986 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1 — 86» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М961, М962» или «Ф973». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М961. На стороне AB квадрата $ABCD$ взята точка E, а на стороне CD — точка F, причем $AE:EB=1:2$, $CF=FD$. Будут ли голубой и розовый треугольники (рис. 1) подобны?

А. П. Савин, Н. А. Паравян

М962. Докажите, что ни для какого многочлена $P(x)$ с целыми коэффициентами не могут найтись такие различные целые числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n\geqslant 3)$, для которых выполнялись бы равенства $P(x_1)=x_2$, $P(x_2)=x_3, \ldots, P(x_{n-1})=x_n$, $P(x_n)=x_1$.

Думитру Раду (Румыния)

М963. Три пары противоположных сторон шестиугольника параллельны. Докажите, что отрезки, соединяющие их середины, пересекаются в одной точке.

Т. Газарян (уч. 10 класса)

М964. Докажите, что в последовательности (a_n) различных натуральных чисел, удовлетворяющих условию $a_n<100n$, найдется число, в десятичной записи которого

а) встречается цифра 1;

б) встречается 1986 единиц подряд.

А. А. Столин

М965. Дано шесть чисел $a_1, a_2, \ldots, a_6$. Чтобы подсчитать «в лоб» сумму их попарных произведений $a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_5a_6$, нужно затратить 15 умножений и 14 сложений. Покажите, как можно найти сразу сумму этих чисел, сумму их произведений по два, по три, по четыре и по пять, затратив всего 15 сложений и 14 умножений.

Н. Б. Васильев

Ф973. Тело начинает двигаться прямолинейно из точки A и через время T попадает в точку B а) с максимально возможной скоростью, б) с минимально возможной скоростью; расстояние $|AB|$ равно l. Найти скорости тела в этих двух случаях, если скорость в точке A $v_0=0$ и ускорение тела $-a_0<a<a_0$.

Д. А. Акопян

Ф974. Определите период малых колебаний системы, изображенной на рисунке 2; масса груза m, упругость пружины k, $\widehat{AOB}=\alpha$. Стержень и блок считать гладкими, пружину невесомой. Пружина закреплена в точке A. Изменится ли период колебаний, если в точке O также закрепить груз m?

Л. Г. Маркович

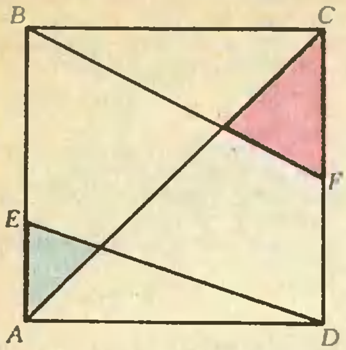


Рис. 1.

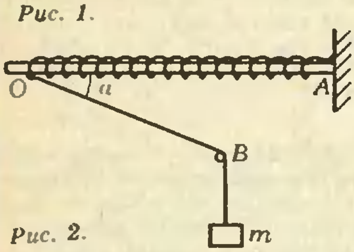


Рис. 2.

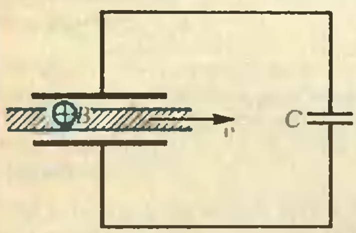


Рис. 3.

Ф975. Между пластинами плоского конденсатора площадью S, расстояние между которыми d, движется со скоростью $\vec{v}$ плоскопараллельная протяженная проводящая пластина толщиной $d/2$. Вдоль пластины перпендикулярно $\vec{v}$ действует постоянное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. Определите напряжение на конденсаторе емкостью C, соединенном с пластинами так, как показано на рисунке 3.

Е. А. Ромишевский

Ф976. Моль идеального одноатомного газа переводится из начального состояния в конечное, как показано на рисунке 4. Определите подведенное газу тепло, если разность начальной и конечной температур равна $\Delta t = 100\ °C$.

С. М. Коршунов

Ф977. На стене, плоскость которой отклонена от вертикали на 4,87° (рис. 5), укреплено зеркало. С какого максимального расстояния человек, рост

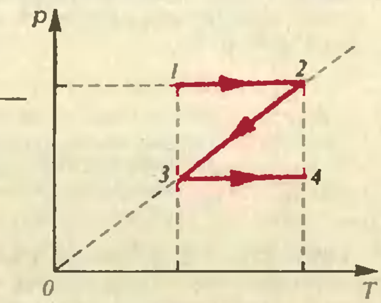


Рис. 4.

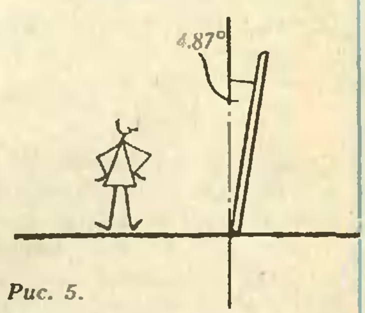


Рис. 5.

которого 170 см, сможет увидеть в зеркале хотя бы часть своего изображения?

Е. П. Кузнецов

Problems

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than March 15th, 1986 to the following address: USSR, Moscow, 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант».

M961—M965; P973—P977

M961. Points E and F are chosen on sides AB and CD of the square $ABCD$ respectively so that $AE:EB=1:2$, $CF=FD$. Will the blue and pink triangles on Fig. 1 be similar?

A. P. Savin, N. A. Paravyan

M962. Prove that there is no polynomial $P(x)$ with integer coefficients for which one can find distinct integers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \geq 3$) satisfying the relation

$$P(x_1)=x_2,\ P(x_2)=x_3,\ \ldots,\ P(x_{n-1})=x_n,\ P(x_n)=x_1.$$

Dumitru Radu (Rumania)

M963. The opposite sides of a hexagon are parallel. Prove that the lines joining their midpoints intersect at one common point.

T. Gazarian (10th form pupil)

M964. Prove that it is possible to find, in any sequence $\{a_n\}$ of distinct natural numbers satisfying the condition $a_n < 100\ n$, a number whose decimal expansion contains

a) the digit 1;

b) 1986 digits 1 in a row.

A. A. Stolia

M965. Six numbers $a_1, a_2, \ldots, a_6$ are given. In order to compute the sum of their pairwise products $a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_5a_6$ in the direct way, 15 multiplications and 14 additions are required. Show

Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: «KVANT'S PROBLEMS» and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the and of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have and original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russianor in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

how it is possible to find the sum of these numbers, the sum of their pairwise products, of all their triple, quadruple, quintuple products, using only 15 additions and 14 multiplications.

N. B. Vasiliev

P973. A solid body begins to move rectilinearly from the point A and after time T reaches point B a) at maximal possible velocity, b) at minimal possible velocity; the distance between A and B is l. Find the velocity of the body in these two cases, if the velocity at the point A is $v_0=0$ and the acceleration a of the body satisfies $-a_0<a<a_0$.

D. A. Akopyan

P974. Determine the period of small oscillations of the system shown on Fig. 2, p. 35; the mass of the body is m, the elasticity of the spring is k, $\angle AOB=\alpha$. The rod and the pulley are assumed smooth, the spring is weightless. The spring is attached to the point A. Will the period of oscillations change if another weight m is fixed at the point O?

L. G. Markovich

P975. A flat conducting plate of thickness $d/2$ moves with velocity v between two plane plates of area S, located at a distance of d from each other. A constant magnetic field of induction B acts along the plates perpendicularly to $\vec{v}$. Determine the voltage on a capacito of capacity C connected to the plates as shown on Fig 3, p. 35.

E. A. Romishevski

P976. One mole of ideal monoatomic gas changes from its initial state to its terminal one as shown on Fig 4. Determine the amoun of heat given to the gas, if the difference between the initial and terminal temperature is $\Delta t=100$ °C.

S. M. Korshunov

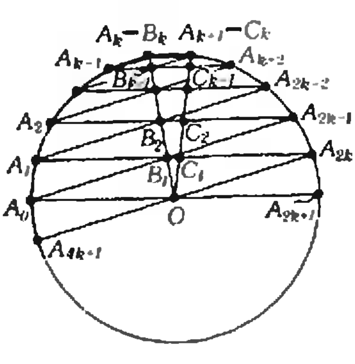
P977. A mirror is fixed on a wall which forms an angle of 4.87° with the vertical (Fig. 5). At what maximal distance from the wall will a person of height 170cm be able to see at least part of his mirror image?

E. P. Kuznetsov

Решения задач

М941 — М945; Ф953 — Ф957

М941. *Дан правильный $(4k+2)$-угольник $A_0A_1\ldots A_{4k+1}$ с центром O. Докажите, что сумма отрезков, высекаемых углом A_kOA_{k+1} на прямых A_1A_{2k}, A_2A_{2k-1}, ..., A_kA_{k+1}, равна радиусу OA_0 описанной окружности $(4k+2)$-угольника, если а) $k=2$, б) k — любое натуральное число.*



а, б) Приведем решение сразу для общего случая.

Обозначим рассматриваемые в задаче отрезки хорд через B_iC_i, $i=1, 2, \ldots, k$ ($B_k=A_k$, $C_k=A_{k+1}$; см. рисунок). Поскольку точки A_{k-i} и A_{k+i}, $i=1, 2, \ldots, k$, а также A_{4k+1} и A_{2k+1} симметричны относительно прямой OA_k, хорды $A_{4k+1}A_{2k}$, A_0A_{2k-1}, A_1A_{2k-2}, ..., $A_{k-1}A_k$ соответственно симметричны данным хордам A_0A_{2k+1}, A_1A_{2k}, ..., A_kA_{k+1} относительно прямой OA_k и поэтому пересекают ее в точках O, B_1, B_2, ..., B_k и параллельны между собой. Следовательно, четырехугольники $OA_0B_1A_{2k}$, $B_1A_1B_2A_{2k-1}$, ..., $B_{k-1}A_{k-1}B_kA_{k+1}$ — параллелограммы и радиус данной окружности равен

$$\begin{aligned}OA_0&=B_1A_{2k}=B_1C_1+C_1A_{2k}=B_1C_1+A_1B_1=\\&=B_1C_1+B_2A_{2k-1}=B_1C_1+B_2C_2+A_2B_2=\ldots\\&\ldots=B_1C_1+B_2C_2+\ldots+B_{k-1}A_{k+2}=\\&=B_1C_1+B_2C_2+\ldots+B_{k-1}C_{k-1}+B_kC_k,\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

И. Ф. Шарыгин,
В. Н. Дубровский

M942. *Числа $1, 2, \ldots, 2n-1, 2n$ разбиты на две группы по n чисел в каждой. Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ — числа первой группы в порядке возрастания, $b_1 > b_2 > \ldots > b_n$ — числа второй группы в порядке убывания. Докажите, что $|a_1 - b_1| + |a_2 + b_2| + \ldots + |a_n - b_n| = n^2$.*

Заметим, что из двух чисел a_k и b_k одно всегда не превосходит n, а другое — больше n. Действительно, если, например, $a_k \leqslant n$ и $b_k \leqslant n$, то и все числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и $b_k, b_{k+1}, \ldots, b_n$ не превосходят n. Всего мы получаем $k+(n-k+1)=n+1$ различных натуральных чисел, не превосходящих n, что невозможно. Аналогично доказывается, что оба числа a_k и b_k не могут быть больше n.

Таким образом, каждое из слагаемых $|a_k - b_k|$ в нашей сумме равно разности числа, большего n, и числа, не превосходящего n. Раскрывая модули и переставив слагаемые, получим

$$|a_1 - b_1| + |a_2 - b_2| + \ldots + |a_n - b_n| = \\ = (n+1) + (n+2) + \ldots + (n+n) - (1+2+\ldots+n) = n^2.$$

В. В. Произволов

◆

M943. *Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ задается правилами: $a_{2n} = a_n$ при $n \geqslant 1$ и $a_{4n+1} = 1$, $a_{4n+3} = 0$ при $n \geqslant 0$. Докажите, что эта последовательность не имеет периода.*

Доказательство проведем от противного. Пусть последовательность имеет период $T = 2^p \cdot q$, где q нечетно. Если $q = 4m+3$, то при $k \geqslant p+2$

$$a_{2^k} = a_{2^k+T} = a_{2^p(2^{k-p}+q)} = a_{2^{p-1}(2^{k-p}+q)} = \ldots \\ \ldots = a_{2^{k-p}+4m+3} = a_{4(2^{k-p-2}+m)+3} = 0,$$

но в то же время

$$a_{2^k} = a_{2^{k-1}} = \ldots = a_1 = 1.$$

Противоречие.

Если же $q = 4m+1$, то в проведенном рассуждении число T надо заменить на число $3T = 2^p(4 \cdot 3m + 3)$, которое также должно быть периодом нашей последовательности.

С последовательностью (a_n) связана замечательная бесконечная ломаная $A_0A_1A_2\ldots$ с равными звеньями, каждое из которых (начиная с A_1A_2) составляет угол 90° с предыдущим, причем в вершине A_n ($n \geqslant 1$) ломаная поворачивает налево, если $a_n = 1$, и направо, если $a_n = 0$. Эта ломаная называется «главной ломаной дракона» (см. статью Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Кривые дракона» в «Кванте» № 2 за 1970 г.).

Ю. В. Нестеренко

◆

M944. *Правильный шестиугольник разбит на 24 равных треугольника, как на рисунке 1. Во всех 19 узлах образовавшейся фигуры записаны различные числа. Докажите, что среди 24 треугольников разбиения имеется по крайней мере 7 таких, в вершинах которых тройки чисел записаны в порядке возрастания против часовой стрелки.*

От каждой из сторон треугольников проведем стрелку, направленную влево от стороны, если двигаться по ней от вершины с меньшим числом к вершине с бо́льшим числом (рис. 2). Если числа, записанные в вершинах некоторого треугольника, возрастают при обходе вершин против часовой стрелки, то внутри этого треугольника находятся ровно две стрелки; если по часовой — то ровно одна (рис. 3). Пусть треугольников первого типа — n, второго — m ($n+m=24$). Поскольку общее число N стрелок внутри шестиугольника равно $2n+m$, нам достаточно доказать, что $N \geqslant 31$ (тогда $n = N-(n+m) \geqslant 31-24 = 7$).

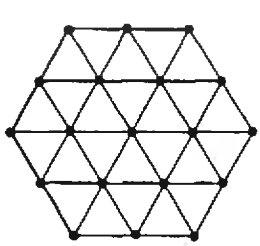


Рис. 1.

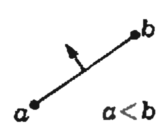


Рис. 2.

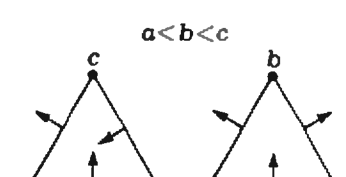


Рис. 3

Стрелки, отвечающие 30 внутренним отрезкам разбиения, заведомо лежат внутри шестиугольника. Из 12 остальных стрелок, расположенных по контуру шестиугольника, хотя бы одна должна быть направлена внутрь. (В противном случае, обходя границу шестиугольника по часовой стрелке, мы каждый раз встречали бы все большее число.) Итак, $N \geqslant 30+1=31$.

А. А. Берзиньш

◆

М945. *Дана строго возрастающая неограниченная последовательность положительных чисел $a_1, a_2, \ldots$ Докажите, что для всех достаточно больших k справедливо неравенство*

а) $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-1$;

б) $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-1985$.

а), б) Положим

$$s_k=\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_k}{a_{k+1}}.$$

и докажем, что *при любом достаточно большом k*

$$s_k<k-1/2.$$

Поскольку последовательность $a_1, a_2, \ldots$ неограниченно возрастает, найдется такое K, что $a_1/a_K<1/2$, тогда при всех $k \geqslant K$

$$k-s_k=\left(1-\frac{a_1}{a_2}\right)+\left(1-\frac{a_2}{a_3}\right)+\ldots+\left(1-\frac{a_k}{a_{k+1}}\right)$$

$$>\frac{a_2-a_1}{a_{k+1}}+\frac{a_3-a_2}{a_{k+1}}+\ldots+\frac{a_{k+1}-a_k}{a_{k+1}}=1-\frac{a_1}{a_{k+1}}>1-\frac{a_1}{a_K}>\frac{1}{2}$$

Применяя это утверждение к последовательности $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$, получим, что при всех достаточно больших k, $k>m$,

$$s_k-s_m=\frac{a_{m+1}}{a_{m+2}}+\ldots+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-m-\frac{1}{2}.$$

Выберем теперь такое k_1, что $s_{k_1}<k_1-1/2$, затем $k_2>k_1$ так, что $s_{k_2}-s_{k_1}<k_2-k_1-1/2$, затем $k_3>k_2$ так, что $s_{k_3}-s_{k_2}<k_3-k_2-1/2$, и т. д. Тогда при любом $k \geqslant k_n$

$$s_k=(s_k-s_{k_n})+(s_{k_n}-s_{k_{n-1}})+\ldots+(s_{k_2}-s_{k_1})<$$

$$<(k-k_n)+\left(k_n-k_{n-1}-\frac{1}{2}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(k_2-k_1-\frac{1}{2}\right)+k_1-\frac{1}{2}=k-n/2.$$

Отсюда вытекают оба утверждения задачи: а) — при $n=2$, б) — при $n=2\cdot 1985$.

Л. Д. Курляндчик

◆

Ф953. *Для точной подстройки частоты вращения диска электропроигрывателя ($33\frac{1}{3}$ оборота в минуту) на его боковую поверхность наносят метки, которые освещают неоновой лампочкой с частотой 100 вспышек в секунду. Каким должно быть число меток, чтобы при номинальной скорости они казались неподвижными? После отключения двигателя силы сухого трения начинают тормозить диск, и метки «побегут». За*

За время $\frac{1}{100}$ с $=\frac{1}{6000}$ мин диск успевает повернуться на $\frac{1}{6000}\cdot 33\frac{1}{3}=\frac{1}{180}$ оборота. Для того чтобы картина казалась неподвижной, нужно, чтобы за время между вспышками одна метка успевала встать на место другой. Значит, в нашем случае нужно взять $n=180$ меток. (Строго говоря, можно было бы взять и 360 меток, и 540, и т. д., однако этого делать не нужно. Подумайте сами — почему. Подсказка: точность определения номинальной скорости диска $\sim 0{,}5 \div 1$ %. И еще вопрос: как бы выглядела картина, если бы мы нанесли 90, 60 или 45 меток?)

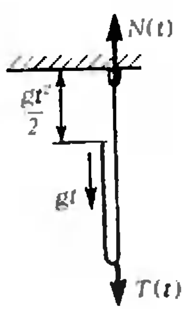
первые 4 с мимо точки наблюдения «пробегают» 10 меток. Через какое время диск остановится? Через какой промежуток времени метки «побегут» в другую сторону?

После отключения двигателя диск начинает равномерно тормозиться (при сухом трении силы при торможении не изменяются по величине). За 4 секунды при номинальной скорости должно пройти 400 меток, а диск «отстал» на 10 — значит, за это время скорость диска упала на $2\cdot\frac{10}{400}=\frac{1}{20}$ от номинальной величины. Следовательно, диск остановится через $4\cdot 20=80$ секунд, а через 40 секунд метки «побегут» в первый раз в другую сторону.

А. Р. Зильберман

◆

Ф954. *Декоративная квадратная штора размером $1{,}5\times\times1{,}5$ м висит на карнизе вдоль вертикальной стены. Нижний край шторы поднимают вровень с верхним, так что штора оказывается сложенной вдвое, и отпускают. Найдите зависимость силы, действующей на карниз, от времени. Штора тонкая, гладкая и имеет массу 3 кг.*



Рассмотрим положение шторы спустя время t после начала ее падения. Так как штора мягкая, то левая ее часть свободно падает, а правая неподвижна (см. рисунок). При этом в момент времени t левая часть движется со скоростью gt. Так как штора мягкая и тонкая, пренебрежем размером области перегиба и ее импульсом. Спустя небольшой интервал времени Δt затормозится еще часть шторы массой

$$\Delta m=\frac{m}{d^2}\,gt\frac{d\cdot\Delta t}{2}$$

(d — сторона шторы), которая до торможения имела импульс

$$\Delta p=\Delta m\cdot gt=\frac{m}{d}\,(gt)^2\,\frac{\Delta t}{2}.$$

Применим к этому куску шторы закон изменения импульса, чтобы определить силу $T(t)$, действующую на него со стороны висящей части шторы (по третьему закону Ньютона точно такая же по величине сила будет действовать вниз на висящую часть шторы). Итак,

$$T(t)-\Delta m\cdot g=\frac{\Delta p}{\Delta t}=\frac{m}{2d}(gt)^2,$$

откуда

$$T(t)\Big|_{\substack{\Delta t\to 0\\(\Delta m\to 0)}}=\frac{m}{2d}\,(gt)^2.$$

Поскольку правая часть шторы неподвижна, сумма сил, действующих на нее, в любой момент времени равна нулю. Следовательно, в момент времени t получим

$$T(t)+\frac{m}{2}\,g+\frac{m}{2d^2}\,d\,\frac{gt^2}{2}\,g-N(t)=0,$$

где $N(t)$ — сила, действующая со стороны карниза на штору в момент времени t.

Таким образом,

$$N(t)=\frac{m}{2d}(gt)^2+\frac{m}{2}\,g+\frac{m(gt)^2}{4d}=$$

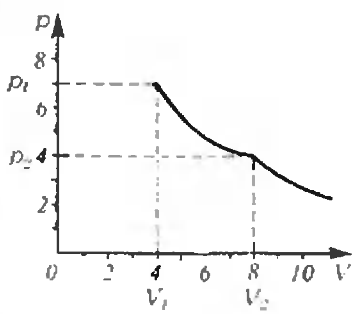
$$=\frac{mg}{2}\left(1+\frac{3}{2}\,\frac{gt^2}{d}\right)=15\,(1+10t^2)\ \text{Н}$$

$$\left(t\leqslant\sqrt{\frac{2d}{g}}\approx 0{,}3\ \text{с}\right).$$

С. С. Кротов

Ф955. *Смесь газов, состоящую из $m_1=100$ г азота и неизвестного количества кислорода, подвергают изотермическому сжатию при температуре $T=74{,}4$ К. График зависимости давления смеси газов от ее объема приведен на рисунке (в условных единицах). Определите массу кислорода. Рассчитайте давление насыщенных паров кислорода при этой температуре.*

Примечание. $T=74{,}4$ К — это температура кипения жидкого азота при нормальном давлении; кислород кипит при более высокой температуре.



Обозначим характерные точки на графике, как показано на рисунке. При $V<V_1$ давление смеси газов не меняется — это означает, что и кислород, и азот конденсируются, и давление равно сумме давлений насыщенных паров кислорода $p_{нас.\,к}$ и азота $p_{нас.\,а}$ при $T=74{,}4$ К. Так как данная температура является температурой кипения жидкого азота, то $p_{нас.\,а}=p_0$ — атмосферному давлению (10^5 Па). Изломы на графике в точках (V_1, p_1) и (V_2, p_2) свидетельствуют о фазовых переходах — конденсации газов: если при $V<V_1$ сконденсировались оба газа, то при $V_1<V<V_2$ лишь один, а при $V>V_2$ конденсации нет. Предположим, что в точке (p_1, V_1) конденсируется азот. Тогда кислород сконденсировался в точке (V_2, p_2), и мы можем записать систему уравнений

$$p_1=p_{нас.\,к}+p_0,\qquad p_2=p_{нас.\,к}+p_а, \tag{1}$$

где $p_а$ — парциальное давление азота в точке (V_2, p_2). Поскольку на участке V_1-V_2 азот находится лишь в газообразном состоянии, то из закона Бойля — Мариотта следует, что $p_а=p_0\frac{V_1}{V_2}$. Подставляя это значение в (1) и поделив уравнения друг на друга (используя соотношения $p_1/p_2=7/4$, a $V_1/V_2=1/2$), находим

$$p_{нас.\,к}=\frac{1}{6}p_0\approx17\ кПа.$$

Предположив, что в точке (V_1, p_1) конденсируется кислород, мы получили бы, как нетрудно проверить, $p_{нас.\,к}=6p_0$. Это противоречит тому, что кислород кипит при более высокой температуре — давление насыщенных паров кислорода при $T=74$ К должно быть меньше p_0.

Найдем теперь массу кислорода m_2. Точка (p_2, V_2) соответствует началу конденсации кислорода, то есть его давление равно $p_{нас.\,к}$ и весь кислород при этом находится в газообразном состоянии. В соответствии с законом Менделеева — Клапейрона,

$$p_{нас.\,к}V_2=\frac{m_2}{\mu_к}RT, \tag{2}$$

где $\mu_к$ — молярная масса кислорода. Для азота конденсация начинается в точке (p_1, V_1), значит,

$$p_0V_1=\frac{m_1}{\mu_а}RT, \tag{3}$$

где $\mu_а$ — молярная масса азота. Поделив уравнение (2) на (3) и учитывая, что $\mu_1/\mu_2=\frac{7}{8}$ и $p_{нас.\,к}=\frac{1}{6}p_0$, определим массу кислорода

$$m_2=(8/21)m_1\approx38\ г.$$

А. И. Буздин

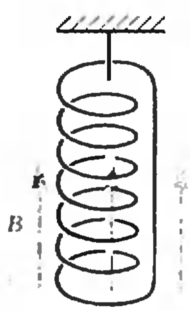
◆

Ф956. *В одном из вариантов классического опыта, поставленного академиком И. К. Кикоиным, однослойная короткозамкнутая катушка индук-*

Ток I в катушке в момент разрушения сверхпроводимости найдем из условия сохранения магнитного потока:

$$\Phi+\Phi_{вн}=0.$$

тивности $L=3\cdot10^{-4}$ Гн из тонкой сверхпроводящей проволоки подвешивалась на упругой нити в магнитном поле, направленном вертикально вверх вдоль оси катушки (см. рисунок). Нить подвеса в исходном состоянии не закручена, сила тока в катушке равна нулю. Индукция B магнитного поля медленно увеличивалась от нулевого значения до значения $B_0=0{,}1$ Тл, при котором сверхпроводимость скачком исчезала и проволока переходила в нормальное состояние. Катушка при этом закручивалась. Определите максимальный угол закручивания катушки, считая, что упругий момент нити пропорционален углу закручивания (в радианах); коэффициент пропорциональности $G=10^{-9}$ Н·м. Число витков катушки $n=100$, радиус витков $R=1$ см, масса катушки $M=10$ г. Отношение заряда электрона к его массе равно $e/m=1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг.



Ф957. *Распространение коротких радиоволн в верхних слоях атмосферы Земли (ионосфере) можно описывать законами геометрической оптики, если принять, что показатель преломления n для радиоволн меньше единицы и изменяется с высотой H от поверхности Земли так, как показано на рисунке 1 (для некоторой частоты ν). На спутнике, летящем на высоте $h=200$ км, установлен радиопередатчик, излучающий радиоволны частоты ν равномерно по всем направлениям. Пренебрегая поглощением радиоволн в ионосфере, оцените долю излучаемой передатчиком мощности, которая уносится радиоволнами за пределы земной атмосферы. При оценках поверхность Земли считать плоской, а отражение радиоволн от нее — зеркальным и без потерь. Примеча-*

где $\Phi=LI$ — собственный магнитный поток, $\Phi_{вн}$ — поток, созданный внешним полем. Отсюда

$$I=\frac{|\Phi_{вн}|}{L}=\frac{SnB_0}{L}=\frac{\pi R^2 nB_0}{L}.$$

Пусть этот ток создан движением N электронов по виткам катушки. Тогда

$$I=\frac{N}{2\pi Rn}ev,$$

где e — заряд электрона, v — скорость упорядоченного движения электронов.

Суммарный импульс всех электронов

$$p=Nmv=2\pi RnI\,\frac{m}{e}.$$

Этот импульс при исчезновении тока передается катушке. Обратим внимание на то, что в данном случае задача о передаче вращательного импульса сводится к задаче о передаче линейного импульса. В приведенной формуле под p нужно понимать арифметическую сумму импульсов всех электронов, равную (после исчезновения тока) арифметической сумме импульсов всех элементов катушки. Катушка приобретает после исчезновения тока кинетическую энергию

$$E_к=p^2/2M.$$

Угол закручивания нити найдем из закона сохранения энергии:

$$\frac{p^2}{2M}=\frac{G\varphi_{max}^2}{2},$$

откуда

$$\varphi_{max}=\frac{p}{\sqrt{MG}}=\frac{2\pi^2R^3n^2B_0}{L\,\dfrac{e}{m}}\cdot\frac{1}{\sqrt{MG}}\approx 1{,}2\cdot10^{-4}\ \text{рад}.$$

С. М. Козел

◆

Среду, в которой показатель преломления зависит только от высоты, можно разбить на тонкие плоские слои, в пределах каждого из которых показатель преломления можно считать постоянным. Рассмотрим ход луча в двух соседних слоях с показателями преломления n_i и n_{i+1}. Пусть в одном слое угол падения луча на границу раздела слоев равен α_i, а в другом — α_{i+1} (рис. 2). По закону преломления

$$\frac{n_{i+1}}{n_i}=\frac{\sin\alpha_i}{\sin\alpha_{i+1}},$$

откуда

$$n_{i+1}\sin\alpha_{i+1}=n_i\sin\alpha_i.$$

Таким образом, произведение показателя преломления на синус угла падения при переходе от слоя к слою не меняется и остается постоянным для всех слоев, через которые идет луч.

На рисунке 3 сплошными линиями показан ход лучей, уходящих за пределы атмосферы, а пунктирными — отражающихся от ионосферы.

Рассмотрим сначала луч, испущенный со спутника вверх под углом α к вертикали. Обозначим *ние. Телесный угол конуса с углом при вершине β равен* $\Omega=2\pi\left(1-\cos\frac{\beta}{2}\right)$.

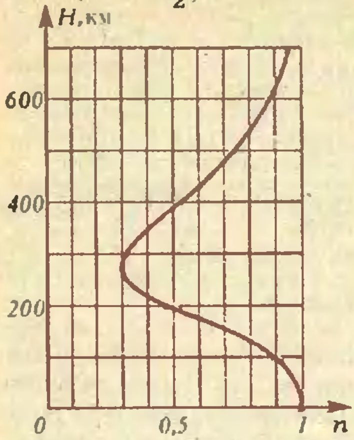


Рис. 1.

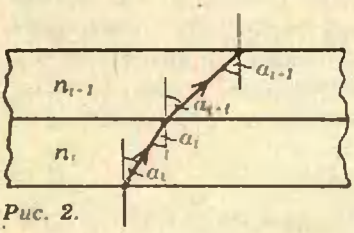


Рис. 2.

через $n(H)$ и $\alpha(H)$ показатель преломления и угол падения для произвольной точки траектории луча. Этот луч уйдет за пределы атмосферы, если во всех точках его траектории угол падения будет меньше 90°, то есть

$$\sin\alpha(H) < \sin 90° = 1.$$

Так как $n_0 \sin\alpha = n(H)\cdot\sin\alpha(H)$, то

$$\frac{n_0\cdot\sin\alpha}{n(H)} < 1$$

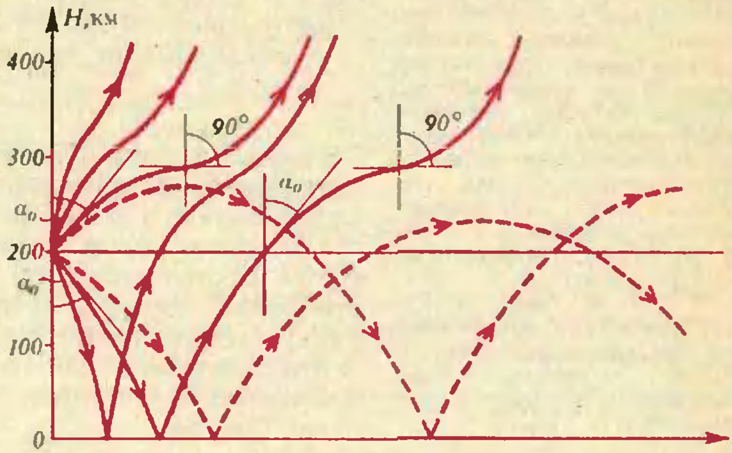


Рис. 3.

($n_0 \approx 0{,}5$ — показатель преломления на высоте 200 км (см. рис. 1)).

Поскольку минимальное значение $n(H)$ равно $n_{min} \approx 0{,}3$ (см. рис. 1), то луч выйдет за пределы атмосферы, если

$$\sin\alpha < \frac{n_{min}}{n_0} = 0{,}6.$$

Итак, при углах, меньших $\alpha_0 = \arcsin 0{,}6$, лучи выйдут за пределы атмосферы. Углу α_0 соответствует телесный угол

$$\Omega = 2\pi(1-\cos\alpha_0).$$

С учетом отражения от Земли за пределы атмосферы уходит излучение в телесном угле 2Ω. Доля излучаемой мощности, которая уносится за пределы атмосферы,

$$\eta = \frac{2\Omega}{4\pi} = 1-\cos\alpha_0.$$

Так как $\cos\alpha_0 = 0{,}8$, то $\eta = 0{,}2$.

В. И. Чивилёв

Из писем читателей

«Задачник Кванта» по математике получает много писем от читателей журнала с решениями задач, комментариями и дополнениями к опубликованным решениям, новыми задачами. Мы стараемся отвечать всем нашим корреспондентам, прежде всего школьникам; с большим интересом мы изучаем также письма учителей, руководителей математических кружков, преподавателей вузов, студентов, научных сотрудников, всех любителей математики, увлекающихся решением математических задач и их созданием. К сожалению, далеко не все интересное в этих письмах может уместиться в публикациях «Задачника»; ниже мы упомянем лишь несколько писем, пришедших за последний год,— а всего их было несколько тысяч.

* * *

Пожалуй, первая задача 1984 года М841 — в ней требовалось доказать, что *произведение длин отрезков, на которые гипотенуза прямоугольного треугольника делится точкой касания вписанной в него окружности, равно площади этого треугольника*,— оказалась не только одной из самых простых, но и получила наибольшее число различных решений. Кроме опубликованного в «Кванте» № 4 за 1984 г., приведем еще одно, присланное Л. А. Штейнгарцем (руководителем математического кружка Тбилисского дворца пионеров),— по принципу древних «смотри!» (рис. 1); площадь треугольника ABD равна площади прямоугольника $OEDF$, поскольку треугольники одинакового цвета равны, то есть $AT\cdot TB=OE\cdot OF=S_{\triangle ABD}=S_{\triangle ABC}$.

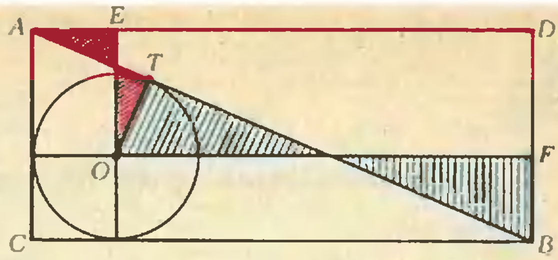


Рис. 1.

* * *

В связи с поставленными в решении задачи М810 (Квант, 1983, № 9, с. 46) вопросом об *оценке площади наибольшего прямоугольника, вписанного в произвольную выпуклую фигуру площади S*, Е. М. Гольберг (Ленинград) заметил, что сравнительно нетрудно поместить в такую фигуру два прямоугольника, сумма площадей которых не меньше $S/2$ (рис. 2); для этого достаточно описать вокруг данной фигуры прямоугольник $KLMN$, стороны KL и MN которого касаются ее в наиболее удаленных друг от друга точках A и B фигуры (отрезок AB называется «диаметром» фигуры), и провести параллельные AB отрезки L_1M_1 и K_1N_1 так, что $AL_1=L_1L$, $AK_1=K_1A$ (докажите, что площадь каждого из розовых прямоугольников не меньше половины соответствующей части фигуры, разделенной диаметром AB). А. Б. Ходулев (Москва) доказал, что *в любую выпуклую фигуру площади S можно вписать прямоугольник площади не меньше S/2*, но его доказательство не вполне элементарно и слишком длинно, чтобы привести его здесь,— мы предлагаем любителям геометрических неравенств поискать простое доказательство этой теоремы и возможных ее вариантов или обобщений, прежде чем публиковать заметку на эту тему.

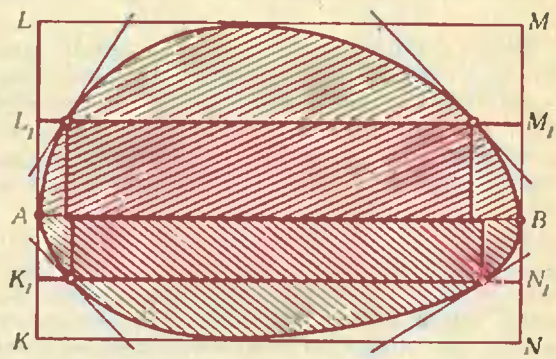


Рис. 2.

* * *

В связи с задачей М839 (Квант, 1983, № 12, с. 35) десятиклассник (теперь уже студент) Л. Вертгейм из Новосибирска прислал нам ряд интересных результатов о последовательности a, определяемой условиями: $a_1=1$, $a_2=2$, a_k — наименьшее из натуральных чисел, не образующих тройку членов арифметической прогрессии с предыдущими и большее a_{k-1} (при $k>2$): 1, 2, 4, 5, 10, 11, 13, 14, 28, 29, ... В частности: $a_{2^m+1}=2a_{2^m}=3^m+1$; $a_{2k}=a_{2k-1}+1$; если n нечетно, то чтобы найти a_n, достаточно записать n в двоичной системе, а прочитать — в троичной (например, $11_{10}=1011_2$, $a_{11}=1011_3=31$); любое натуральное число можно получить как сумму двух (не обязательно различных) чисел a_n.

Правда, все это не решает более трудный вопрос: каково наименьшее (для данного n) число b_n такое, что из отрезка натурального ряда от 1 до b_n можно выбрать n чисел, не содержащих тройки членов арифметической прогрессии,— получается лишь оценка сверху: $b_n\leqslant a_n\leqslant c\cdot n^{\log_2 3}$.

* * *

Новый результат в похожей на М839 задаче «о разновесах» (Квант, 1981, № 12, с. 34) сообщил нам В. Д. Яковлев из Сыктывкара: ему удалось построить пример, улучшающий известный (считавшийся кандидатом в «абсолютные чемпионы»), приведенный в «Кванте». Вот этот пример: последовательность β_n задается для $n\geqslant 0$ так: 0, 2, 3, 4, 8, 14, 25, 47, 86, 164, 314, 603, 1159: тогда числа $\beta_{12}-\beta_n$, $n=0$, 1, ..., 11, образуют «систему разновесов» — любые две подсуммы этих 12 чисел различны. Так что и в этой задаче окончательного результата пока нет.

* * *

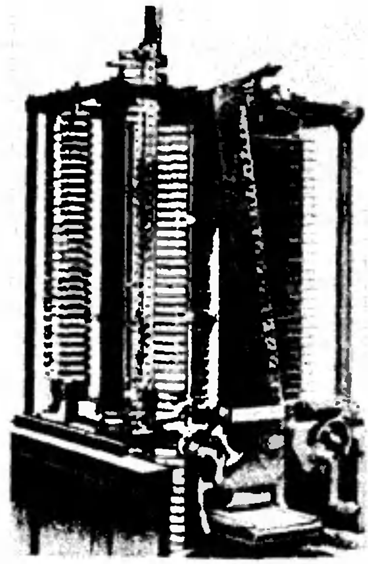
Пожалуй, наиболее интересным из писем, связанных со старыми задачами, разобранными в «Кванте», было в этом году письмо В. В. Производова (Москва), которому удалось найти значительно более короткое, чем опубликованное в статье «Задача о числах в таблице» (Квант, 1971, № 12, с. 24), доказательство следующей теоремы: *в таблице $n\times n$ клеток, где расставлены числа 1, 2, ..., n^2, найдутся две соседние (граничащие по стороне) клетки, разность чисел в которых не меньше n.* Вот это доказательство.

Пусть k — наибольшее из n наименьших чисел в строках таблицы, m — наибольшее из n наименьших чисел в ее столбцах; будем считать, что $k\leqslant m$. В каждой строке найдется число, не превосходящее k, и число, большее k (иначе нашлась бы строка, в которой все числа не больше k, самого k в ней быть не может, а тогда было бы $m>k$). Возьмем в i-й строке пару соседних чисел a_i и b_i такую, что $a_i\leqslant k<b_i$. Среди них мы найдем нужную, поскольку хоть одно из чисел b_1, b_2, ..., b_n не меньше $n+k$.

Н. Б. Васильев

V. Элементарные логические операции

Доктор физико-математических наук М. Е. ЛЕВИНШТЕЙН, кандидат физико-математических наук Г. С. СИМИН



Самые первые идеи создания программируемой автоматической цифровой вычислительной машины выдвинуты более 150 лет назад. Они принадлежат англичанину Ч. Бэббиджу, человеку феноменальных способностей, чьи идеи на сто лет опередили время. Более 30 лет, начиная с 1812 года, Бэббидж работал над изготовлением такой машины. «Элементной базой» машины Бэббиджа служили «цифровые» колеса с различным числом зубьев. Часть машины Бэббиджа хранится в научном музее в Лондоне. (Подробно о Ч. Бэббидже можно прочесть в «Кванте», 1985, № 10 в статье «История рождения компьютера».)

В предыдущих заметках этой рубрики (см. «Квант», 1985, № 9—12) мы рассмотрели устройство, принципы действия и способы изготовления транзисторов — основы современных ЭВМ. Для того чтобы понять, как с помощью транзисторов в ЭВМ осуществляются простейшие действия, нам потребуется сегодня разговор об элементарных логических операциях.

...Вы входите в вестибюль современного 16-этажного дома. Перед вами двери двух лифтов и одна-единственная кнопка в стене. Вы ее нажимаете и по световому табло над дверью видите, как один из лифтов начинает к вам спускаться. По дороге кабина останавливается — слышен шум открывающихся и закрывающихся дверей — в лифт кто-то вошел. Кабина возобновляет движение. Наконец, двери лифта открываются. Кто-то выходит... Все это так привычно, что практически не задерживает внимания.

А теперь представьте себя на месте инженера, который должен спроектировать электронную схему, управляющую движением лифта. Эта схема должна уметь решать множество задач.

«Если кабины не заняты и нажата только одна кнопка — послать к данному этажу ту кабину, которая ближе. Если обе кабины на одном этаже — послать ту, которая потребляет меньше энергии.»

«Если в кабине пассажир и он нажал кнопку данного этажа, а на другом этаже также нажата кнопка, причем лифт едет не вверх, а вниз, а второй лифт не занят, или, если во втором лифте также пассажир...»

Попробуйте представить себе всю совокупность логических задач, которые могут быть поставлены перед электронной схемой при наличии 16 этажей и двух лифтов, и вы убедитесь, что даже такой простенький «процессор» должен уметь справляться с очень непростыми проблемами.

Попытавшись такой процессор спроектировать, вы рано или поздно убедитесь в следующем. Составляя логическую схему, удобно на время забыть о свойствах того прибора, который служит элементной базой вашего процессора, и считать, что в вашем распоряжении имеются элементарные логические ячейки — элементарные схемки, умеющие реализовывать логические функции «И», «НЕ», «ИЛИ».

Чем сложнее функция процессора, который должен быть спроектирован, тем более эффективен такой подход. Для ЭВМ, которая должна решать задачи в тысячи раз более сложные, чем устройство управления лифтом, только он является оправданным.

Английский философ и математик Дж. Буль разработал в 1854 году алгебру логики, которая впоследствии стала теоретическим фундаментом современных ЭВМ.

Разумеется, совсем забыть о свойствах элементной базы не удается. Рано или поздно встанет множество вопросов, решение которых определяется именно параметрами того конкретного элемента,— электромагнитного реле, транзистора, выключателя и т. д.,— на котором построены логические схемы. Как быстро срабатывают логические ячейки? Какую мощность они

Основой этой алгебры, которая теперь называется «булевой», являются любые величины, принимающие только два значения: «да» — «нет», «0» — «1», «включено» — «выключено» и т. д.

Глубокую и принципиальную взаимосвязь булевой алгебры и двоичного характера ключевых электронных элементов установил известный американский математик Дж. фон Нейман. Идеи Неймана заложили основы однородных ЭВМ, состоящих из большого числа идентичных элементарных логических схем, действующих по двоичному принципу. Нейман доказал, что, используя схемы «НЕ», «ИЛИ», «И», можно создать все основные узлы ЭВМ.

Крупный вклад в алгебраическую теорию автоматов внес известный советский математик академик В. М. Глушков. Важные результаты получены им в теории цифровых автоматов, в области приложений вычислительной техники, в разработке новых принципов построения малых ЭВМ.

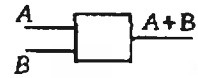
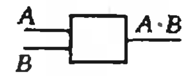
Операции булевой алгебры	Соответствующие логические схемы
Логическое сложение $C = A + B$ (A или B)	 Схема „ИЛИ”
Логическое умножение $C = A \cdot B$ (A и B)	 Схема „И”
Логическое отрицание $B = \bar{A}$ (не A)	 Схема „НЕ”

Таблица логических операций.

потребляют? Сколько стоит логическая схема? Насколько надежно она защищена от помех? И т. д.

Но пока вы проектируете логику процессора, обо всех этих вопросах можно не думать. Логическая схема, построенная с использованием логических ячеек типа «И», «ИЛИ», «НЕ», является универсальной; она не зависит от того, на каких элементах реализованы логические ячейки.

Что же представляют собой логические ячейки?

Это электронные схемы, на входах и выходах которых напряжения могут принимать только два вполне определенных значения. Одно из этих значений называется логическим нулем, второе — логической единицей. Эти два значения напряжения обозначают, соответственно, U^0 и U^1 («0» и «1»).

Логические ячейки типа «ИЛИ» (схемы логического сложения) имеют два или более входов и один выход. Если хотя бы на один из входов поступает сигнал «1», на выходе также появляется «1». Условное обозначение схемы «ИЛИ» показано в первой строке таблицы логических операций. Входы схемы обозначены буквами A и B. Сигнал на выходе обозначается $(A+B)$.

Логические ячейки типа «И» (схемы логического умножения) также имеют один выход и два или более входов. Сигнал «1» на выходе ячейки появляется в том и только в том случае, если на всех входах ячейки также действуют сигналы «1». Если хотя бы на одном из входов действует сигнал «0», то на выходе устанавливается сигнал «0».

Логические ячейки типа «НЕ» (их называют также инверторами или схемами «логического отрицания») имеют один вход и один выход. Если на вход поступает сигнал «1», на выходе появляется «0», и наоборот, если на входе действует «0», на выходе устанавливается «1».

Логические операции сложения, умножения и отрицания подчиняются определенным правилам, устанавливаемым так называемой алгеброй логики или булевой алгеброй.

Манипулируя только логическими операциями «И», «ИЛИ», «НЕ» (иногда в очень сложных сочетаниях), можно, оказывается, осуществить любые действия, позволяющие ЭВМ принимать решения, управлять, перерабатывать информацию и т. п.

Примеры простейших логических схем, построенных на транзисторах, мы рассмотрим в следующей заметке нашей рубрики.

Поиск в упорядоченной совокупности и упорядочение

Доктор физико-математических наук
С. А. АБРАМОВ

Выигравшие номера упорядочены в лотерейных таблицах по возрастанию. Упорядоченность облегчает проверку билетов: если бы номера не были упорядочены, то проверка могла бы потребовать сравнения номера вашего билета со всеми номерами, содержащимися в таблице. Точно так же словарный порядок облегчает поиск слова в словаре или в справочнике.

Нас будет интересовать *алгоритм наиболее быстрого поиска элемента b в упорядоченной совокупности* $a_1, \ldots, a_n$. Прежде чем заниматься этим алгоритмом, примем три соглашения. Во-первых, мы предположим, что $a_1, \ldots, a_n, b$ — это целые числа. Работая со словарем, мы имеем дело не с числами, а со словами, но это не играет принципиальной роли: меняется только техника каждого сравнения, а не число сравнений. Во-вторых, мы считаем, что найти элемент совокупности $a_1, \ldots, a_n$, обладающий некоторым свойством, — значит определить индекс $1, \ldots, n$ этого элемента. В-третьих, мы не будем использовать никакие другие исследования значений $a_1, \ldots, a_n, b$, кроме проверок справедливости неравенств вида

$$x<y \qquad (x, y \in \{a_1, \ldots, a_n, b\}). \qquad (1)$$

Эти проверки будем называть *сравнениями*.

Пусть $a_1 < \ldots < a_n$. Для b имеется $n+1$ возможность: $b \leqslant a_1$, $a_1 < b \leqslant a_2$, ..., $a_{n-1} < b \leqslant a_n$, $a_n < b$. *Решением* задачи поиска места числа b среди $a_1, \ldots, a_n$ будем соответственно считать одно из чисел $1, 2, \ldots, n, n+1$. Заметим, что по результату любого сравнения $a_s < b$ $(1 \leqslant s \leqslant n+1)$ мы сразу определяем, лежит ли решение в диапазоне от 1 до s или же в диапазоне от $s+1$ до $n+1$. Если само s находится примерно посередине между 1 и $n+1$, то сравнение $a_s < b$ сужает диапазон поиска примерно вдвое. Этот прием можно применять многократно. Получается следующий алгоритм A_1, который иногда называют *алгоритмом деления пополам*:

> **Алгоритм A_1**: взять первоначально 1 и $n+1$ в качестве границ поиска; далее, до тех пор, пока границы не совпадут, шаг за шагом сдвигать эти границы следующим образом: сравнить b с a_s, где s — целая часть среднего арифметического границ; если $a_s < b$, то заменить прежнюю нижнюю границу на $s+1$, оставив верхнюю без изменения, иначе, оставить без изменения нижнюю границу, а верхнюю заменить на s. Когда границы совпадут, став равными некоторому числу t, выполнение алгоритма закончится с результатом t.

Смысл результата t можно выразить так: если среди чисел $a_1, \ldots, a_n$ есть равное b, то выполняется равенство $a_t = b$; если равного b нет, то t указывает, на какое место следует поставить b, коль скоро мы хотим включить его в упорядоченную совокупность $a_1, \ldots, a_n$.

Пусть $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 5$, $a_4 = 9$, $a_5 = 17$, $a_6 = 23$, $a_7 = 28$. При поиске с помощью A_1 места числа 16 границы поиска будут меняться следующим образом: 1,8; 5,8; 5,6; 5,5. Решением задачи поиска места будет число 5.

Задача 1. Предположим, что среди чисел $a_1, \ldots, a_n$ могут быть равные между собой, то есть $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$. Каков смысл результата применения алгоритма A_1 к $a_1, \ldots, a_n$ и b?

Теорема 1. *Число сравнений, требуемое алгоритмом A_1 для поиска места числа b среди $a_1, \ldots, a_n$, есть $\lceil \log_2 (n+1) \rceil$ — наименьшее целое число, большее или равное $\log_2 (n+1)$.*

Доказательство. В ходе выполнения алгоритма A_1 каждое сравнение влечет изменение верхней или нижней границы. Рассмотрим изменение количества целых чисел, лежащих в пределах этих границ. Если до изменения границ это количество было равно N и для некоторого $m > 0$ выполнялось $2^m < N \leqslant 2^{m+1}$, то после изменения границ оно при четном N станет равным $N/2$, а при нечетном — $(N-1)/2$ или $(N+1)/2$. Легко проверить, что для нового количества будет иметь место $2^{m-1} < N' \leqslant 2^m$. Это показывает, что $\lceil \log_2 N' \rceil = \lceil \log_2 N \rceil - 1$. Если $\lceil \log_2 N' \rceil > 0$, то границы еще не совпадают и выполнение алгоритма продолжится; если же $\lceil \log_2 N' \rceil = 0$, то выполнение закончится. В пределах первоначальных границ 1 и $n+1$ лежит $n+1$ целое число. Следовательно, общее число сравнений есть $\lceil \log_2 (n+1) \rceil$.

Теорема 2. *Для произвольного алгоритма A_1 поиска места элемента* *можно подобрать такие начальные данные $a_1, \ldots, a_n$, b, что применение к ним алгоритма A потребует не менее $\lceil \log_2(n+1) \rceil$ сравнений.*

Доказательство. В качестве $a_1, \ldots, a_n$ возьмем любые целые числа такие, что $a_1 < \ldots < a_n$, в качестве b будем поочередно брать $a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}$. Применение A_1 к этим вариантам начальных данных должно давать соответственно числа $1, \ldots, n+1$. Результаты сравнений, выполненных в ходе применения A_1 к любому из этих вариантов, могут быть записаны в виде последовательности слов «да» и «нет». Для исследования значений $a_1, \ldots, a_n$ и различных b используются только сравнения вида (1). Поэтому, если применение A_1 к начальным данным $a_1, \ldots, a_n, b$ потребовало ровно k сравнений, притом k первых сравнений в ходе применения A_1 к другим начальным данным $a_1, \ldots, a_n, b'$ дали те же самые результаты, то дальнейшее применение A_1 к $a_1, \ldots, a_n, b'$ уже не потребует сравнений, и итог будет тем же самым, что и для начальных данных $a_1, \ldots, a_n, b$. Следовательно, среди получившихся последовательностей слов «да» и «нет» нет совпадающих и ни одна не является началом другой. Пусть l — число элементов в самой длинной из этих последовательностей. Общее число последовательностей, то есть $n+1$, не превосходит числа всех последовательностей длины l, то есть 2^l. Итак, $n+1 \leqslant 2^l$ и $l \geqslant \log_2(n+1)$. Так как l — целое число, то $l \geqslant \lceil \log_2(n+1) \rceil$.

Сопоставление двух доказанных теорем показывает, что не существует такого алгоритма поиска места элемента, который для любых начальных данных требовал бы меньше сравнений, чем алгоритм A_1. В этом смысле A_1 *является оптимальным (наилучшим) алгоритмом.*

Задача 2. Пусть $a_1 < \ldots < a_n$ и среди чисел $a_1, \ldots, a_n$ есть число, равное b. Требуется найти i, для которого $a_i = b$. Приведите такой алгоритм решения задачи, который требует $\lceil \log_2 n \rceil$ сравнений. Докажите, что этот алгоритм оптимален.

Задача 3. Рассмотрим два алгоритма выбора наименьшего из неравных чисел. Первый алгоритм: найти меньшее из первых двух чисел и, сравнив его с третьим, опять взять меньше, сравнить с четвертым и т. д. Второй алгоритм («кубковая» или «олимпийская» система): разбить числа на пары, меньшее из каждой пары пропустить в следующий тур. Если одному числу не нашлось парного, то это число тоже проходит в следующий тур. В следующем туре повторить то же самое и т. д., пока не останется одно число. Какой из этих алгоритмов требует меньше сравнений?

Задача 4. Докажите, что не существует алгоритма выбора наименьшего из n неравных чисел, который требовал бы менее $(n-1)$-го сравнения. (Прием, использованный в доказательстве теоремы 2, позволяет доказать лишь то, что число сравнений в худшем случае не меньше $\lceil \log_2 n \rceil$.)

* * *

Перейдем теперь к задаче упорядочения, то есть к *задаче расположения в ряд по возрастанию неравных чисел* $a_1, \ldots, a_n$. Ответ важен, в частности, для решения на ЭВМ задач, связанных с поиском информации (мы уже видели, что упорядоченность обеспечивает быстрый поиск). Эту задачу решает

> **Алгоритм A_2**: упорядочивать по очереди начальные группы чисел данной совокупности: a_1; a_1, a_2; a_1, a_2, a_3; ...; $a_1, \ldots, a_n$ — последняя группа совпадает со всей совокупностью; для перехода от упорядоченной группы из i чисел к упорядоченной группе из $(i+1)$-го числа надо поместить a_{i+1} на его место в имеющейся упорядоченной группе из i чисел — это место определяется при помощи алгоритма A_1.

Обозначим через $B(n)$ число сравнений, требуемое A_2. Имеем

$$B(n) = \lceil \log_2 2 \rceil + \ldots + \lceil \log_2 n \rceil \leqslant \leqslant \log_2 2 + \ldots + \log_2 n + (n-2) = \qquad (2)$$
$$= \log_2 n! + (n-2) \leqslant n(\log_2 n + 1) - 2.$$

Задача 5. Определите число сравнений, требуемое следующим алгоритмом упорядочения $a_1, \ldots, a_n$: найти наименьшее число и поместить его на первое место, затем найти наименьшее среди оставшихся и поместить его на второе место и т. д. (см. задачи 3, 4).

Задача 6. Допускается, что в неупорядоченной совокупности $a_1, \ldots, a_n$ могут быть равные числа. Покажите, что в этом случае алгоритм A_2 обеспечивает расположение данных чисел в порядке неубывания.

Прием, использованный при доказательстве теоремы 2, позволяет установить, что для любого алгоритма упорядочения можно подобрать совокупность $a_1, \ldots, a_n$, применение к которой этого алгоритма потребует не менее $\lceil \log_2 n! \rceil$ сравнений (такой совокупностью будет одна из $n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$ перестановок n произвольных чисел). Вместе с (2) это показывает, что, во всяком случае, A_2 не далек по числу сравнений от оптимального (чего нельзя сказать об алгоритме из задачи 5): так, например, $\lim\limits_{n\to\infty} (B(n)/\lceil \log_2 n! \rceil) = 1$. Различными авторами предпринимались попытки доказать оптимальность A_2 и даже печатно сообщалось о якобы найденном доказательстве. Позднее выяснилось, что A_2 не оптимален: этот алгоритм требует восемь сравнений для упорядочения пяти чисел, а на самом деле достаточно семи сравнений. Это непростой факт, хотя он допускает формулировку в виде задачи на взвешивания.

Задача 7*. Имеются весы без гирь и пять различных грузов. На каждую из двух чашек весов можно класть по одному грузу. Расположите грузы по убыванию веса, использовав семь взвешиваний.

Вопрос о том, чему в общем случае равно $S(n)$ — минимальное число сравнений, достаточное для упорядочения любой совокупности из n неравных чисел (или число взвешиваний для сортировки n грузов), открыт до сих пор. Выяснено, что для некоторых n имеет место $S(n) > \lceil \log_2 n! \rceil$ и что наименьшее такое n равно 12. Привлечение ЭВМ для разбора вариантов при различных конкретных n позволило вычислить $S(n)$ лишь для небольшого числа значений n. До сих пор, видимо, не известно значение S (13).

* * *

С практической точки зрения небольшое отклонение числа сравнений, требуемых алгоритмом A_2, от $S(n)$ не является существенным и этот алгоритм довольно часто применяется в решении задач на ЭВМ. Но заметим, что у этого алгоритма есть ощутимый недостаток: он требует слишком много перемещений чисел. Эти перемещения скрываются в приведенном выше описании A_2 за словами «поместить a_{i+1} на его место в имеющейся упорядоченной группе из i чисел». Если a_{i+1} должно занять первое место, то потребуется $i+1$ перемещение чисел. В целом алгоритм A_2 может потребовать $2+3+...+n=(n+2)\times(n-1)/2$ перемещений. Последнее число значительно превышает число сравнений, требуемых этим же алгоритмом. Известны алгоритмы упорядочения, для которых число сравнений и число перемещений примерно равны $n \log_2 n$. Эти алгоритмы, однако, описываются не столь просто, как алгоритм A_2.

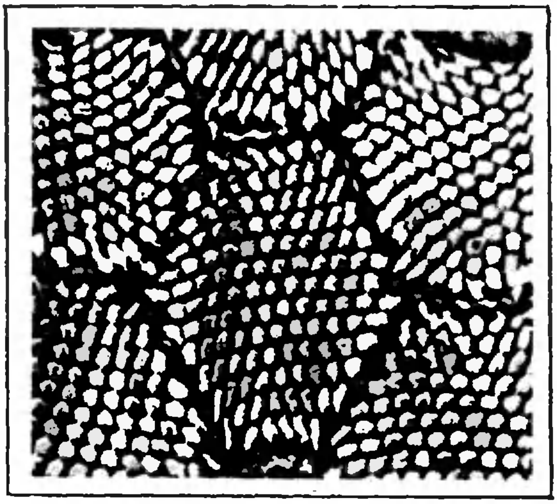
Задача 8. Опишите A_1, A_2 и алгоритм из задачи 5, используя для этого алгоритмический язык, который изложен в статьях А. П. Ершова в «Кванте», 1985, № 10, 11 и в вашем учебнике.

Следы на песке и... строение вещества

(Начало см. на с. 13)

Интересные опыты по выяснению структуры аморфных тел проделал в 1959 году английский ученый Дж. Бернал. Одинаковые шарики из пластилина были беспорядочно сложены и спрессованы в сплошной ком. Когда их потом разобрали, оказалось, что многогранники, в которые превратились шарики, обладают преимущественно пятиугольными гранями. Такие же опыты проделывали и с круглыми свинцовыми пулями. Если пули до сжатия укладывались наиболее плотным образом, то после деформации образовывались почти точные ромбододекаэдры, а если их насыпали случайно, получались неправильные 14-гранные тела. При этом встречались четырехугольные, пятиугольные и шестиугольные грани, но преобладали пятиугольные.

Симметрия 5-го порядка очень распространена в биологических объектах. На 2-й странице обложки представлена электронно-микроскопическая фотография колонии вирусных частиц. Не правда ли, имеется полное сходство с пентагональной упаковкой шаров, показанной на рисунке 5? Палеонтологи даже используют наличие осей 5-го порядка в ископаемых объектах для доказательства их биологического (а не геологического) происхождения... Видите, как далеко увели нас следы на песке.



Здесь представлена фотография сечения сверхпроводящего кабеля — одного из последних достижений современной технологии. Он состоит из множества сверхпроводящих жил, расположенных в медной оболочке. Первоначально жилы имели цилиндрическую форму, но после обжатия превратились в шестигранные призмы. Чем плотнее, регулярнее упакованы жилы, тем более правильные шестиугольники видны в сечении. Это — свидетельство высокого качества изготовления кабеля.

Основные углы в правильной пирамиде

И. Г. ГАБОВИЧ

Среди углов, которые можно рассматривать в правильной пирамиде, наиболее часто в задачах встречаются следующие четыре: угол наклона бокового ребра к плоскости основания пирамиды; угол наклона боковой грани к плоскости основания; плоский угол при вершине пирамиды; двугранный угол при боковом ребре пирамиды. Условимся обозначать величины названных углов буквами α, β, γ и δ соответственно. Все эти углы, называемые иногда основными, лежат в разных плоскостях. В этой статье мы объясним, как, зная величину любого из основных углов, можно определить величины всех остальных основных углов. Мы отдельно рассмотрим случаи правильных четырехугольной, треугольной и n-угольной пирамид.

В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ (рис. 1) $\angle SCO = \angle SDO = \alpha$, $\angle CSD = \gamma$, $\angle SFO = \beta$.

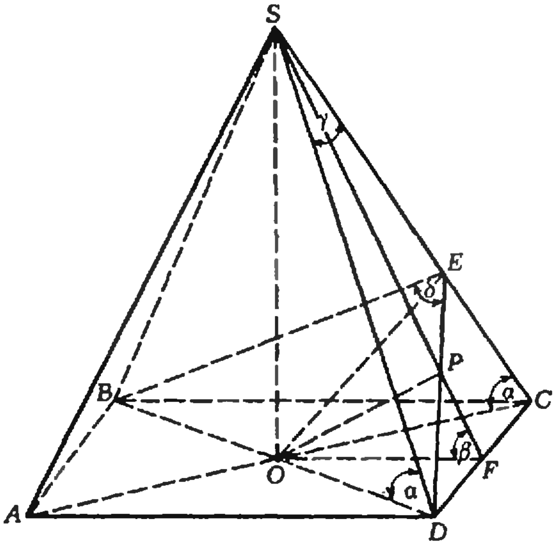


Рис. 1.

В грани SCD проводим $[DE] \perp [SC]$ и соединяем точку E с вершиной основания B. Нетрудно доказать, что $\triangle BEC$ конгруэнтен $\triangle DEC$. Из этого следует, что $|BE| = |ED|$ и $\angle BEC = \angle DEC = \pi/2$. Таким образом, $\angle BED$ — линейный угол двугранного угла при ребре SC, то есть $\angle BED = \delta$. Отрезок OE — медиана равнобедренного треугольника BED, следовательно, и биссектриса, высота этого треугольника. Поэтому $\angle OED = \delta/2$.

Отрезок OP принадлежит линии пересечения плоскостей линейных углов: $\angle BED$ и $\angle SFO$. Плоскость линейного угла перпендикулярна граням двугранного угла, поэтому каждая из плоскостей BED и SFO перпендикулярна плоскости SCD. Линия пересечения двух плоскостей, каждая из которых перпендикулярна третьей плоскости, перпендикулярна этой третьей плоскости (докажите это самостоятельно). Поэтому $[OP] \perp (SCD)$. Таким образом треугольники OPF и OPD — прямоугольные и $\angle DOP = \delta/2$.

Перейдем теперь к выводу формул.

Мы будем пользоваться следующим общим приемом. Обозначим через x длину отрезка в правильной пирамиде, который входит как в прямоугольный треугольник, содержащий данный угол, так и в треугольник, содержащий искомый угол; выразим, далее, через x и функции данного угла одну из двух других сторон в том треугольнике, который содержит искомый угол, затем найдем функцию искомого угла.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \beta. \qquad (1)$$

Доказательство. Положим $|SO| = x$. Из $\triangle SOF$ имеем $|OF| = x \operatorname{ctg} \beta$; из $\triangle OFD$ имеем $|OD| = x\sqrt{2} \operatorname{ctg} \beta$; из $\triangle SOD$ имеем $\operatorname{tg} \alpha = \frac{x}{x\sqrt{2} \operatorname{ctg} \beta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{tg} \beta$.

$$\cos \alpha = \sqrt{2} \sin \frac{\gamma}{2}. \qquad (2)$$

Доказательство. Положим $|SD| = x$. Из $\triangle SDF$ имеем $|DF| = x \sin \frac{\gamma}{2}$; из $\triangle OFD$ имеем $|OD| = x\sqrt{2} \sin \frac{\gamma}{2}$; из $\triangle SOD$ имеем $\cos \alpha =$

$$=\frac{x\sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{x}=\sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}.$$

$$\sin\alpha=\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}. \qquad (3)$$

Доказательство. Положим $|OE|=x$. Из $\triangle OED$ имеем $|OD|=x\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}$; поскольку $|OC|=|OD|=x\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}$, из $\triangle EOC$ имеем $\sin\alpha=\frac{x}{x\operatorname{tg}\frac{\delta}{2}}=\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}$.

Вывод трех следующих формул мы предоставляем читателю.

$$\cos\beta=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}. \qquad (4)$$

$$\sin\beta=\sqrt{2}\cos\frac{\delta}{2}. \qquad (5)$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}. \qquad (6)$$

Для правильной треугольной пирамиды мы выпишем аналогичные формулы, опустив их доказательства.

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\beta. \qquad (7)$$

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{\gamma}{2}. \qquad (8)$$

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}. \qquad (9)$$

$$\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}. \qquad (10)$$

$$\sin\beta=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\frac{\delta}{2}. \qquad (11)$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}=\frac{1}{2}. \qquad (12)$$

Формулы для правильной n-угольной пирамиды требуются реже, но мы приведем и их, снова опустив доказательства.

$$\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta\cos\frac{\pi}{n}. \qquad (13)$$

$$\cos\alpha=\frac{\sin\frac{\gamma}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}. \qquad (14)$$

$$\sin\alpha=\operatorname{ctg}\frac{\delta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}. \qquad (15)$$

$$\cos\beta=\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{n}. \qquad (16)$$

$$\sin\beta=\frac{\cos\frac{\delta}{2}}{\sin\frac{\pi}{n}}. \qquad (17)$$

$$\cos\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\delta}{2}=\cos\frac{\pi}{n}. \qquad (18)$$

Нетрудно убедиться в том, что формулы (1)—(12) получаются из формул (13)—(18), если в последние подставить вместо n соответственно 4 и 3.

Покажем, как полученные формулы применяются к решению задач.

Задача 1 (КГУ, 1980). *Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, высота которой равна H, и двугранный угол при боковом ребре в 3 раза больше двугранного угла при ребре основания.*

Решение. Согласно условию $|SO|=H$ (см. рис. 1). Из $\triangle SFO$ получаем $|OF|=H\operatorname{ctg}\beta$. Следовательно, $|AD|=2H\operatorname{ctg}\beta$. Находим объем пирамиды:

$$V=\frac{1}{3}(2H\operatorname{ctg}\beta)^2H=\frac{4}{3}H^3\operatorname{ctg}^2\beta.$$

Заменив в формуле (5) угол δ углом 3β, получаем уравнение

$$\sin\beta=\sqrt{2}\cos\frac{3\beta}{2}\Leftrightarrow 2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{2}\left(4\cos^3\frac{\beta}{2}-3\cos\frac{\beta}{2}\right)\Leftrightarrow 2\sin\frac{\beta}{2}=4\sqrt{2}\cos^2\frac{\beta}{2}-3\sqrt{2}\Leftrightarrow 4\sin^2\frac{\beta}{2}+\sqrt{2}\sin\frac{\beta}{2}-1=0,$$

откуда $\sin\frac{\beta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ (отрицательный корень не годится), так что $\operatorname{ctg}\beta=\frac{3}{\sqrt{7}}$ и, наконец,

$$V=\frac{4}{3}H^3\cdot\frac{9}{7}=\frac{12}{7}H^3.$$

Задача 2 (МИСиС, 1980). *Плоский угол при вершине правильной шестиугольной пирамиды равен углу между боковым ребром и плоскостью основания. Найти этот угол.*

Решение. Положив в формуле (14) $n=6$ и $\gamma=\alpha$, получаем тригонометрическое уравнение, из которого находим искомый угол:

$$\cos\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\Leftrightarrow 2\sin^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}-1=0;\ \sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

(отрицательный корень, разумеется, посторонний). Следовательно,

$$\alpha=2\arcsin\frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Задача 3 (МИФИ, 1979). *В правильной треугольной пирамиде радиус окружности, вписанной в основание, равен r, а угол между плоскостями боковых граней равен φ. Опреде-*

лить длину ребра куба, объем которого в $\sqrt{3}$ раза больше объема данной пирамиды.

Решение. Если a — сторона основания, то $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$, то есть $a=2r\sqrt{3}$. Тогда площадь основания пирамиды

$$S_{осн}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=3r^2\sqrt{3}.$$

Радиус окружности, описанной около правильного треугольника, в 2 раза больше радиуса окружности, вписанной в этот треугольник, так что $|OB|=2r$. Из $\triangle SBO$ получаем $|SO|=2r\operatorname{tg}\alpha$ (рис. 2). Объем пирамиды

$$V=\frac{1}{3}\cdot 3r^2\sqrt{3}\cdot 2r\operatorname{tg}\alpha=2r^3\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha.$$

Обозначив искомую длину ребра куба через x, составляем уравнение

$$x^3=\sqrt{3}\cdot 2r^3\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha,$$

откуда

$$x=r\sqrt[3]{6\operatorname{tg}\alpha}.$$

Выразим теперь $\operatorname{tg}\alpha$ через функции угла φ с помощью формулы (9):

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2},$$

так что

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sqrt{\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}}.$$

Поэтому

$$x=r\sqrt[3]{6\frac{\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sqrt{\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}}}=$$

$$=r\frac{\sqrt[3]{3\cos\frac{\varphi}{2}}}{\sqrt[6]{\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}}.$$

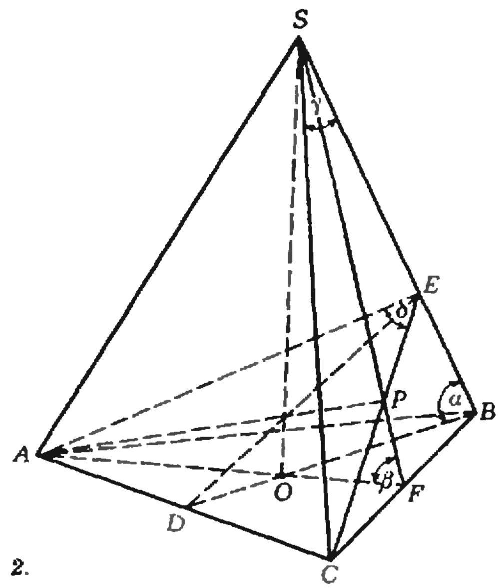


Рис. 2.

Упражнения

1 (ЛГУ, 1979). Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, угол между смежными боковыми гранями равен α. Найти площадь боковой поверхности пирамиды.

2 (Киевск. политехн. ин-т, 1980). Найти объем правильной треугольной пирамиды со стороной основания a и плоским углом при вершине, равным углу наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания.

3 (КГУ, 1980). Найти величину двугранного угла между смежными боковыми гранями правильной шестиугольной пирамиды, вписанной в сферу, зная, что она равна величине угла, под которым видно из центра сферы боковое ребро пирамиды.

4 (МАИ, 1980). В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ угол между перпендикулярами AL и AM, опущенными из точки A на боковые грани SBC и SCD, равен α. Найти объем пирамиды, если объем куба, ребро которого равно стороне основания пирамиды, равен v.

5 (Киевск. политехн. ин-т, 1980). Найти объем правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро равно l, а угол наклона боковых граней к плоскости основания равен α.

6 (ТашГУ, 1981). Объем конуса, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, равен Q. Двугранный угол, образованный смежными боковыми гранями, равен α. Найти длину стороны основания пирамиды.

7 (КГУ, 1981). Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, двугранный угол между боковыми гранями равен α. Вычислить объем и боковую поверхность пирамиды.

8 (Киевск. ин-т инж. гражд. авиации, 1981). Полная поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна S, а плоский угол при вершине боковой грани равен α. Найти высоту пирамиды.

9 (КГУ, 1983). В правильной четырехугольной пирамиде сумма величин двугранных углов между смежными и противоположными боковыми гранями равна 180°. Найти эти углы.

10. В правильной n-угольной пирамиде сторона основания равна a и двугранный угол при боковом ребре равен α. Найти объем пирамиды.

Московский физико-технический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$10\cdot 4^{\frac{1}{\sin^2 x}}-16=4^{2\,\mathrm{ctg}^2 x+2}.$$

2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{4}-3x}(1+25x^2)>0.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y^4+19=20(x+y), \\ \sqrt{x}+\sqrt{x+2y}=\sqrt{2}. \end{cases}$$

4. Основание AD трапеции $ABCD$ ($AD \parallel BC$, $|AD|>|BC|$) является диаметром окружности, которая касается прямой CD в точке D и пересекает сторону AB в точке L так, что $|AB|=4/\sqrt{3}\cdot|AL|$. Радиус окружности равен R, угол $\widehat{CAD}=45°$. Найдите площадь трапеции.

5. Точка D лежит на ребре BC правильной треугольной пирамиды $SABC$ (S — вершина), $|BD|:|DC|=2:3$. Цилиндр касается боковой поверхностью плоскостей SAB и SBC, одно из оснований цилиндра проходит через точку D, второе основание имеет общую точку с ребром SC. Боковая поверхность цилиндра имеет единственную общую точку с ребром AC. Найдите отношение объемов цилиндра и пирамиды.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\frac{1}{1-\sqrt{1-x}}+\frac{1}{1+\sqrt{1-x}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{1-x}}.$$

2. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{9}\right)^{x-\frac{x^2}{2}}>3^{|3x-12|+2x}.$$

3. Решите уравнение

$$9\log_{\sin 2x}4\cos^2 x+8\log_{2\cos x}\sin x=16.$$

4. В окружности проведены хорды AB и AC, причем $|AB|=2$ см, $|AC|=1$ см, угол $\widehat{CAB}=120°$. Найдите длину той хорды окружности, которая делит угол $\widehat{CAB}$ пополам.

5. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ (S — вершина) вписана сфера. Длина ребра основания пирамиды равна 8, а длина высоты пирамиды равна 3. Точка M — середина ребра SD, точка K является ортогональной проекцией точки M на плоскость $ABCD$. Через точку M проведена касательная к сфере, пересекающая плоскость ASC в точке N так, что $\widehat{NMK}=\arccos(-1/3)$. Найдите $|NM|$.

Вариант 3

1. Решите уравнение

$$(\log_4(2x+9)+1)\log_{x+2}2=1.$$

2. Решите уравнение

$$1-12\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)-12\cos\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)=\sqrt{2\cos^2 x+\mathrm{tg}\,\frac{7\pi}{4}}.$$

3. Найдите все значения параметра a, при которых вершины двух парабол $y=4x^2+8ax-a$ и $y=4ax^2-8x+a-2$ лежат по одну сторону от прямой $y=-5$.

4. В трапеции $MNPQ$ ($MQ \parallel NP$) угол $\widehat{NPM}$ в 2 раза больше угла $\widehat{NQM}$. $|NP|=|MP|=13/2$, $|MQ|=12$. Найдите площадь трапеции.

5. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ (S — вершина). Точки K и L выбраны на ребрах ES и AF соответственно так, что $|EK|=1/5|ES|$, $|FL|=1/2|FA|$. Точки R и T расположены на прямых DK и SL так, что прямая RT перпендикулярна плоскости SAD. Длина высоты пирамиды равна 18, $|RT|=4$.

Найдите объем пирамиды.

Физика

Письменный экзамен

На решение задач каждого варианта отводилось пять часов. Для получения удовлетворительной оценки было достаточно сделать любые две задачи.

Вариант 1

1. На гладкую неподвижную наклонную плоскость с углом наклона α налетает стальной шарик под углом β (рис. 1). При каких β шарик сможет вернуться в точку его первого удара о плоскость? Все соударения считать упругими.

2. При изотермическом сжатии $m=9$ г водяного пара при температуре $T=373$ К его объем уменьшился в 3 раза, а давление возросло вдвое. Найдите начальный объем пара.

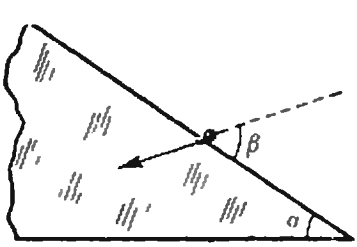


Рис. 1.

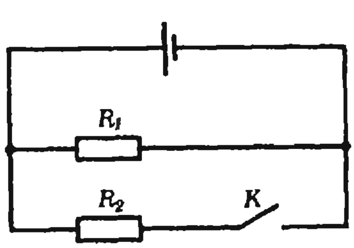


Рис. 2.

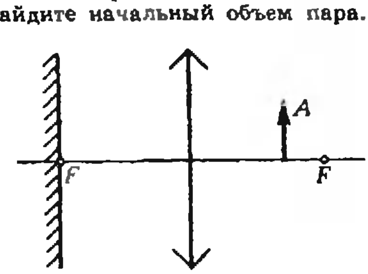


Рис. 3.

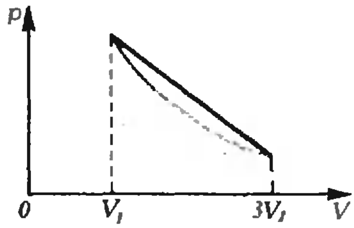


Рис. 4.

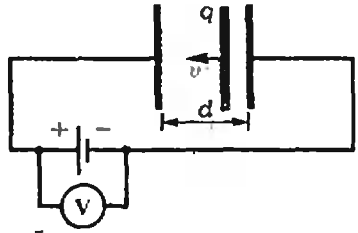


Рис. 5.

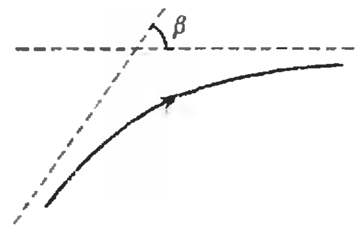


Рис. 6.

3. В цепи, изображенной на рисунке 2, тепловая мощность, выделяемая во внешней цепи, одинакова при замкнутом и разомкнутом ключе K. Определите внутреннее сопротивление батареи r, если $R_1=12$ Ом, $R_2=4$ Ом.

4. В фокальную плоскость тонкой собирающей линзы помещено плоское зеркало (рис. 3). Предмет A расположен между фокусом и линзой. Оптическая система создает действительное изображение предмета. Как изменится увеличение, с которым изображается предмет, если расстояние между линзой и предметом уменьшить вдвое?

Вариант 2

1. Вблизи дороги образовалась ледяная горка с выездом на проезжую часть. Поверхность горки составляет угол α с горизонтальной плоскостью. Проезжающей мимо дорожной машине удалось до половины высоты посыпать горку снизу песком. Коэффициент трения скольжения полозьев санок о лед с песком $\mu=0{,}5$. Пренебрегая трением санок о лед без песка, найдите максимальное значение угла α, при котором санки не смогут достичь основания горки, съехав с ее вершины без начальной скорости.

2. Моль идеального одноатомного газа с начальной температурой $T_1=600$ К адиабатически увеличивает свой объем в 3 раза. Какую работу совершает при этом газ, если в тепловом процессе, при котором давление линейно изменяется с температурой (рис. 4), газу при расширении из того же начального в то же конечное состояние было подведено количество теплоты $Q=1{,}9$ кДж? ($R=8{,}3$ Дж/(моль · К).)

3. В плоский конденсатор, подключенный к источнику с постоянной ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r, помещена плоская пластина, имеющая заряд q (рис. 5). Что будет показывать идеальный вольтметр, подключенный к клеммам источника, если двигать пластину с постоянной скоростью v? Расстояние между обкладками конденсатора d.

4. Широкий пучок параллельных лучей падает перпендикулярно на экран. На пути света параллельно экрану установили отрицательную (рассеивающую) линзу. Расстояние между линзой и экраном втрое больше фокусного расстояния линзы. Площадь области на экране, где после установки линзы возросла освещенность, оказалась равной $S=15\pi$ см^2. Определите диаметр линзы.

Вариант 3

1. α-частица, пролетая мимо первоначально покоившегося ядра химического элемента с массовым числом, равным 12, потеряла 20 % своей скорости. На какой угол β отклонилась α-частица (рис. 6)?

2. В тепловом процессе объем идеального газа изменяется с давлением по закону $V=\beta p$, где β — некоторая постоянная. Во сколько раз изменяется давление газа при уменьшении температуры от $T_1=450$ К до $T_2=200$ К?

3. Два удаленных проводящих шара радиусом R соединены участком цепи, содержащим конденсатор емкостью C, катушку с индуктивностью L и ключ K (рис. 7). В начальный момент времени конденсатор заряжен до напряжения U_0, заряды на шарах отсутствуют. Определите максимальную величину силы тока в цепи после замыкания ключа K. Активным сопротивлением катушки пренебречь.

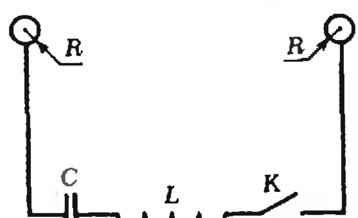


Рис. 7.

4. Линза с фокусным расстоянием 3 см создает перевернутое изображение предмета. Расстояния от предмета до линзы и от линзы до изображения отличаются на 8 см. С каким увеличением изображается предмет?

Публикацию подготовили
К. Л. Самаров, А. В. Шелагин

Московский институт электронного машиностроения

Математика
Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение
$$\sin x+\cos x=\sqrt{1+\operatorname{tg} x}.$$

2. Вычислите сумму корней уравнения
$$x^2-2(a^2-4a)x-(8a^3-26a^2+9)=0$$
и найдите значения a, при которых она принимает наименьшее значение.

3. Дан куб $ABCDA'B'C'D'$. Верно ли, что плоскости ABC' и CDA' перпендикулярны? Дайте обоснование ответу.

4. Найдите расстояние между точкой A (5; 2) и точкой B с абсциссой 1, лежащей на параболе $y=x^2+2x$. Является ли точка B ближайшей к A точкой параболы?

5. Какие из следующих функций
$$3+\cos^2 x;\ 2\cos 2x-3\sin x;\ \sin\frac{x}{2};\ \sin 2x$$
могут быть представлены в виде многочлена от $\sin x$ (то есть в виде $a_0\sin^n x+a_1\sin^{n-1}x+\ldots+a_n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — действительные числа)?

Вариант 2

1. Решите неравенство

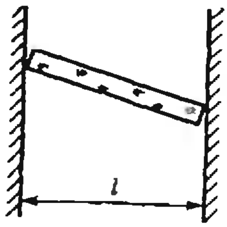


Рис. 1.

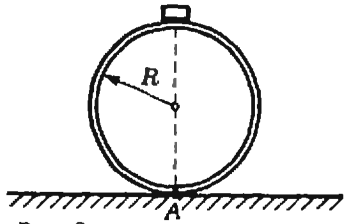


Рис. 2.

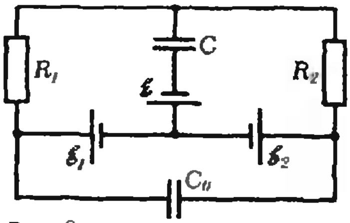


Рис. 3

$$a^2-2\cdot 4^{x+1}-a\cdot 2^{x+1}>0.$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{5\sin 2x-2}=\sin x-\cos x.$$

3. В кубе $ABCDA'B'C'D'$ с ребром a точка K — центр грани $A'B'C'D'$, точка L — центр грани $ADD'A'$. Найдите периметр треугольника CKL. Какая из двух частей, на которые разбивается куб плоскостью CKL, имеет больший объем?

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=\frac{|x-1|-1}{x^2-4}$$

на каждом из промежутков $[-1;\ 1]$ и $[1;\ 2[$.

5. Найдите расстояние между ближайшими точками графиков функций:

$$y=-3x^2+8x-9,\quad y=x^2+8x+13.$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. Доска какой наибольшей длины может быть забита между двумя вертикальными стенками, расположенными на расстоянии $l=2$ м друг от друга (рис. 1), если коэффициент трения между доской и стенками $\mu=0{,}2$? Доску считать недеформирующейся и массой ее пренебречь.

2. Тело начинает соскальзывать без начальной скорости с вершины установленного в вертикальной плоскости обруча радиуса R (рис. 2). Пренебрегая трением, определите, на каком расстоянии от точки A тело упадет на землю. Во время движения тела обруч неподвижен.

3. Рабочий забивает гвоздь массой $m=50$ г в доску и ударяет $n=20$ раз молотком, масса которого $M=0{,}5$ кг. Импульс молотка непосредственно перед ударом $P=6$ Н · с. На сколько градусов нагреется гвоздь, если все выделившееся количество теплоты при ударах пошло на его нагревание? Удельная теплоемкость железа $c=0{,}45$ кДж/(кг · К).

4. Определите подъемную силу воздушного шара объемом $V=100$ м^3, наполненного горячим воздухом при температуре $t_1=147$ °С. Шар сообщается с атмосферой. Температура наружного воздуха $t_2=27$ °С, его давление $p=0{,}9\cdot 10^5$ Па.

5. В цилиндре под невесомым поршнем площадью $S=100$ см^2 находится $M=1$ кг воды при температуре $t_0=0$ °С. В цилиндре включают нагреватель мощностью $W=500$ Вт. На сколько поднимется поршень за $\tau=15$ мин работы нагревателя, если атмосферное давление $p=10^5$ Па, а удельная теплота парообразования воды $L=2{,}3$ МДж/кг? Считать, что все джоулево тепло идет на нагревание воды.

6. Определите заряды конденсаторов емкостью $C=4$ мкФ и $C_0=2$ мкФ (рис. 3), если $R_1=100$ Ом, $R_2=300$ Ом, $\mathscr{E}_1=10$ В, $\mathscr{E}_2=15$ В, $\mathscr{E}=5$ В. Внутренние сопротивления источников равны нулю.

7. Электромотор питается от батареи с ЭДС $\mathscr{E}=12$ В. Какую механическую работу совершает мотор за $\tau=1$ с при протекании по его обмотке тока $I=2$ А, если при полном затормаживании якоря в цепи течет ток $I_0=3$ А?

8. Электроэнергия передается от генератора к потребителю по проводам, общее сопротивление которых $R_{пр}=400$ Ом. Коэффициент полезного действия линии передачи $\eta=0{,}95$. Определите сопротивление нагрузки, если внутреннее сопротивление генератора $r=100$ Ом.

9. Найдите соотношение между расстоянием x от источника до переднего фокуса линзы, расстоянием x' от изображения до заднего фокуса линзы и фокусным расстоянием линзы F (выведите формулу Ньютона). Найдите увеличение, даваемое линзой с фокусным расстоянием $F=10$ см, если $x=2$ см.

10. Некоторый металл освещается светом с длиной волны $\lambda=0{,}25$ мкм. Пренебрегая импульсом фотона, найдите максимальный импульс, передаваемый поверхности металла при вылете каждого электрона, если красная граница фотоэффекта для этого металла $\lambda_{кр}=0{,}28$ мкм. Масса электрона $m=9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг.

Публикацию подготовили
Г. В. Ефашкин, В. А. Тонян

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(математический факультет)

1. Из пункта A в пункт B вышел пешеход. Одновременно с ним из пункта B в пункт A выехал велосипедист, который встретил пешехода через 50 мин после своего выезда из B. Сколько времени потребовалось бы пешеходу для того, чтобы пройти весь путь из A в B, если известно, что велосипедист проделал бы тот же путь на 4 часа быстрее пешехода.

2. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 3,5 см, а диагональ боковой грани равна 2,5 см. Найдите объем призмы.

3. Решите уравнение

$$1+\cos x+\cos 2x=0.$$

4. Решите неравенство

$$\log_x 9<2.$$

5. Определите промежутки возрастания и убывания функции

$$y=2x^3+3x^2-1.$$

Вариант 2
(физический факультет)

1. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, у которой ребро равно l и составляет угол α с плоскостью основания.

2. Решите уравнение

$$\cos x+\frac{1}{\cos x}=2.$$

3. Решите неравенство

$$|x^2-4x|<5.$$

4. Решите уравнение

$$\frac{\log_2(9-2^x)}{3-x}=1.$$

5. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y=x^3-3x^2+5$ на отрезке $[0;\ 3]$.

Вариант 3
(географический факультет)

1. Теплоход проплыл 9 км по озеру и 20 км по течению реки за 1 ч. Найдите скорость теплохода при движении по озеру, если скорость течения реки равна 3 км/ч.

2. Основанием призмы служит правильный треугольник, вписанный в круг радиуса 2 м, боковые грани ее — квадраты. Определите объем этой призмы.

3. Решите уравнение

$$\sin x-\sqrt{3}\cos x=0.$$

4. Решите неравенство

$$3^{\frac{x}{2}}>9.$$

5. Найдите промежутки возрастания функции $y=4+x-3x^3$.

Вариант 4
(индустриально-педагогический факультет)

1. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, у которой площадь основания равна S, а ребро составляет угол α с плоскостью основания.

2. Решите уравнение

$$\operatorname{tg}(2x+4)=1.$$

3. Решите уравнение

$$x-3=(5+x)\cdot 4.$$

4. Решите неравенство

$$x^2-14x-15>0.$$

5. Постройте график функции, задаваемой уравнением $y-3x+3=0$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. На невесомом стержне висит груз массой M. Груз отклоняют на угол $\alpha=90°$ и отпускают. Найдите натяжение стержня в момент прохождения им положения равновесия.

2. Пуля, летящая с определенной скоростью, углубляется в дощатый барьер на $l=10$ см. На сколько углубится в тот же барьер пуля, имеющая вдвое большую скорость?

3. Какую работу нужно совершить, чтобы поднять груз массой $m=30$ кг на высоту $h=10$ м с ускорением $a=0{,}5$ м/с^2?

4. Определите наименьшую площадь плоской льдины толщиной $d=40$ см, способной удержать на воде человека массой $m=75$ кг. Плотность льда $\rho_л=900$ кг/м^3.

5. Баллон емкостью $V=50$ л содержит $m=2{,}2$ кг углекислого газа. Баллон выдерживает давление не выше $p=4\cdot10^6$ Па. При какой температуре баллон может разорваться? Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К).

6. На шелковой нити подвешен маленький шарик массой $m=300$ мг. Шарику сообщен заряд $q=3\cdot10^{-8}$ Кл. Как близко надо поднести к нему равный ему заряд, чтобы сила натяжения нити уменьшилась втрое?

7. Напряжение на участке цепи $U_1=5$ В, сила тока $I_1=3$ А. После изменения сопротивления этого участка напряжение стало $U_2=8$ В, а сила тока $I_2=2$ А. Каковы ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока?

8. Под каким углом должен упасть луч на стекло, чтобы преломленный луч оказался перпендикулярным к отраженному? ($n_{ст}=1{,}6$.)

9. Проекционный аппарат дает на экране увеличенное в $\Gamma=20$ раз изображение диапозитива. Найдите расстояние между объективом проекционного фонаря и изображением, если фокусное расстояние объектива $F=20$ см.

10. Человеческий глаз может воспринимать световой поток мощностью $P=2\cdot10^{-17}$ Вт. Какому это соответствует числу фотонов света с длиной волны $\lambda=0{,}5$ мкм, попадающих в глаз в 1 секунду? Постоянная Планка $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с.

Публикацию подготовили
О. Ю. Овчинников, В. А. Смирнов

Избранные школьные задачи

(Начало см. на с. 28)

9. а) Найдите уравнения прямых, касающихся одновременно двух парабол

$$y=x^2+x-2 \text{ и } y=-x^2+7x-11.$$

б) Сколько общих касательных имеют две параболы

$$y=a_1x^2+b_1x+c_1 \text{ и } y=a_2x^2+b_2x+c_2?$$

10. В пространстве дано $n\geqslant4$ точек, причем известно, что для каждых четырех из них найдется плоскость, в которой эти четыре точки лежат. Верно ли, что и все n точек лежат в одной плоскости?

Десятый класс

11. Нарисуйте график функции $y=e^{\ln|x|}$.

12. Решите уравнение $3\sin x-4\cos x=\cos 5x-7$.

13. Из таблиц известно, что $\lg\pi=0{,}4972$. Сколькими знаками записывается число $[\pi^{100}]$?

14. Дан двугранный угол величиной φ, $0<\varphi<\pi/2$. На одной его грани лежит прямая, составляющая угол α, $0<\alpha<\pi/2$, с ребром двугранного угла. Вычислите угол, который эта прямая составляет с другой гранью двугранного угла.

15. Может ли в сечении параллелепипеда плоскостью получиться пятиугольник? А может ли пятиугольник, получающийся в сечении параллелепипеда плоскостью, быть правильным?

Публикацию подготовил И. Х. Розов

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу (ВЗМШ)

Во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при Московском университете им. М. В. Ломоносова принимаются на индивидуальное обучение учащиеся седьмых классов общеобразовательных школ и СПТУ, за исключением проживающих в Москве и в Ленинграде.

Для поступления в ВЗМШ надо выполнить первое задание.

Задание 1. Изучите статью Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «Комбинаторика — многочлены — вероятность» в этом номере журнала (см. с. 19) и постарайтесь решить задачи № 1—16. Решить все задачи вовсе не обязательно; при этом отдельные пункты засчитываются как самостоятельные задачи.

Решения задач должны быть выполнены на русском языке в ученической тетради в клетку. Эта тетрадь высылается простой бандеролью, не надо сворачивать ее в трубку. На обложку тетради надо наклеить листок бумаги, разграфив его и заполнив по следующему образцу:

Область	*Московская*
Фамилия, имя ученика	*Иванов Петр*
Год рождения	*1972*
Класс и школа	*7 класс «Б» школы № 2*
Фамилия, и. о. учителя математики	*Орлов Борис Петрович*
Место работы и должность родителей	*Отец — шофер автобазы № 3; мать — медсестра.*
Полный почтовый адрес (с указанием почтового индекса)	*123456, г. Клин, ул. Строителей, д. 1, кв. 1*

Задачи в решениях должны идти в том же порядке, как они даны в статье, сначала условие, затем — решение.

Срок отправки задания № 1 — не позднее 5 апреля 1986 г. (по почтовому штемпелю).

Для того чтобы задание было зачтено, нужно решить бо́льшую часть задач. Если вы успешно выполните это задание, то, начиная с сентября 1986 г., вы будете получать все дальнейшие задания, содержащие теоретический материал и задачи для самостоятельного решения, а также контрольные задачи. Все контрольные работы проверяются и подробно рецензируются преподавателями ВЗМШ — студентами, аспирантами и преподавателями Московского университета и других вузов, в которых имеются филиалы ВЗМШ.

Предполагается, что часть заданий будет даваться по статьям журнала «Квант», поэтому рекомендуем на него подписаться (это можно сделать с любого месяца без ограничений в любом отделении связи; подписной индекс 70465; журнал распространяется только по подписке).

Первое задание надо выслать по адресу: «119823, Москва, ГСП, МГУ, ВЗМШ. На прием» или по адресу соответствующего филиала. Филиалы ВЗМШ при университетах имеются в следующих городах: Воронеж, Гомель, Донецк, Душанбе, Иваново, Казань, Краснодар, Красноярск, Куйбышев, Махачкала, Одесса, Ростов-на-Дону, Свердловск, Устинов, Чебоксары, Челябинск, Черновцы, Элиста, Ярославль; филиалы при педагогических институтах в городах: Абакан, Бирск, Благовещенск, Брянск, Витебск, Киров, Ленинабад, Луцк, Магадан, Орел, Павлодар, Смоленск, Тернополь, Ульяновск, Уральск, Целиноград, Череповец, Чита, Южно-Сахалинск; работают также филиалы в Дубне при Объединенном институте ядерных исследований, в Могилеве при областном дворце пионеров и школьников и Заочная физико-техническая школа при Московском институте стали и сплавов (см. с. 58 этого номера «Кванта»).

Учащиеся, проживающие на северо-западе РСФСР (в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областях, Карельской и Коми АССР), в прибалтийских республиках и в Белоруссии (кроме Витебской, Гомельской и Могилевской областей), должны присылать работы по адресу: «193130, Ленинград, 8-ая Советская ул., 3. С—З ЗМШ. На прием».

Школьники и учащиеся СПТУ, не успевшие или не сумевшие поступить в ВЗМШ на индивидуальное обучение, имеют возможность заниматься в группах «Коллективный ученик ВЗМШ». Каждая такая группа — это математический кружок, работающий под руководством учителя математики по программе ВЗМШ и по ее пособиям. Прием в эти группы проводится до 1 октября 1986 г. на два потока: для тех, кто с сентября 1986 г. начнет учиться в 8 классе, и для тех, кто начнет учиться в 9 классе (соответственно — для учащихся I и II курса СПТУ). Прием в группы проводится без конкурса. Для зачисления достаточно заявления учителя математики, руководящего кружком, с указанием списка учащихся и класса, в котором они будут учиться с сентября 1986 г. Заявление должно быть заверено директором школы (СПТУ) и печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик ВЗМШ» может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия. Заявления следует направлять в адрес ВЗМШ.

Вне конкурса принимаются на индивидуальное обучение участники Всесоюзных олимпиад по математике для школьников и учащихся СПТУ.

Новый прием на заочное отделение Малого мехмата

Малый механико-математический факультет — математическая школа при механико-математическом факультете МГУ — объявляет прием на заочное отделение учащихся седьмых классов общеобразовательных школ. Зачисление на Малый механико-математический факультет (МММФ) производится по результатам решения задач вступительной работы, опубликованной ниже.

Основной задачей Малого мехмата является приобщение к математике, углубление знаний в рамках школьной программы, а также расширение математического кругозора учащихся средних школ.

Занятия на заочном отделении зачинаются в сентябре. Обучение на Малом мехмате бесплатное. Срок обучения три года. Учащиеся заочного отделения, особо успешно закончившие 8-й или 9-й классы, рекомендуются для поступления в физико-математическую школу-интернат № 18 при МГУ. Учащиеся, успешно выполнившие все задания, получают удостоверения об окончании МММФ.

Преподавателями на заочном отделении МММФ работают аспиранты и студенты механико-математического факультета. Разработку тематических брошюр осуществляет методический Совет МММФ, состоящий из профессоров и преподавателей механико-математического факультета.

Желающие поступить на Малый мехмат должны не позднее 15 апреля выслать в адрес МММФ решения задач вступительной работы (при этом не обязательно должны быть решены все задачи). Работу необходимо выполнить в школьной тетради в клетку. На обложку тетради наклейте тетрадный лист бумаги со следующими данными:

1) республика, край, область;
2) фамилия, имя учащегося;
3) школа и класс (полное название);
4) полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения);
5) фамилия, имя и отчество родителей, место их работы и должность.

В работу вложите листок бумаги 4×6 см, на котором напишите полный домашний адрес (с указанием индекса почтового отделения) и пришлите по адресу: 119899 Москва, МГУ, Малый мехмат.

Примечания:

1. Для школьников 7—10 классов Москвы и ближнего Подмосковья работает вечернее отделение МММФ. Справки по телефону: 139-39-43.

2. Для школьников Казахстана и Молдавии действуют филиалы МММФ МГУ: при математическом факультете Казахского государственного университета и при факультете математики и кибернетики Кишиневского государственного университета. Их адреса:

480012 Алма-Ата, ул. Кирова-Масанчи, 47/39, Каз.ГУ, математический факультет, филиал МММФ МГУ;

277003 Кишинев, ул. Садовая, 60, КГУ, факультет математики и кибернетики, филиал МММФ МГУ.

Задачи вступительной работы на Малый механико-математический факультет в 1986 году

1. Какое из чисел больше: $\sqrt{5}$ или $\sqrt[3]{11}$?

2. Докажите числовое равенство

$$\underbrace{22\dots2}_{n\text{ цифр}}+(\underbrace{33\dots3}_{n\text{ цифр}})^2=\underbrace{11\dots1}_{2n\text{ цифр}}.$$

3. Через точку пересечения диагоналей трапеции проведена прямая, параллельная основаниям и пересекающая боковые стороны в точках M и N. Найдите длину отрезка MN, если известно, что длины оснований трапеции равны соответственно a и b.

4. На продолжении наибольшей стороны AC треугольника ABC отложен отрезок CM так, что $CM=BC$. Докажите, что угол ABM не является острым.

5. Середины соседних сторон выпуклого пятиугольника соединены отрезками. Докажите, что периметр пятиугольника, образованного этими отрезками, больше половины периметра исходного пятиугольника.

6. Найдите все целые положительные решения уравнения $xy=2x+3y$.

7. Пусть $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$ — положительные числа. Докажите, что сумма

$$\frac{x_1}{x_1+1}+\frac{x_2}{(x_1+1)(x_2+1)}+\frac{x_3}{(x_1+1)(x_2+1)(x_3+1)}+\dots+\frac{x_{n-1}}{(x_1+1)(x_2+1)\dots(x_{n-1}+1)}+\frac{x_n}{(x_1+1)(x_2+1)\dots(x_{n-1}+1)(x_n+1)}$$

меньше 1.

8. На столе лежат 100 спичек. Каждый из двух играющих при своем ходе может взять от 1 до 5 спичек. Ходят по очереди. Проигрывает тот, кто возьмет последнюю спичку. Как должен действовать начинающий игру, чтобы выиграть при любых ходах противника?

9. На доске написаны все натуральные числа от 1 до 1986. Разрешается стереть любые два числа и вместо одного из них написать их разность, а вместо другого — нуль. Можно ли, совершив достаточно много таких операций, получить набор, состоящий из одних нулей?

10. На каждой из 7 планет находится астроном, который наблюдает ближайшую к ней планету. Докажите, что если расстояния между планетами попарно различны, то имеется планета, которую не наблюдает ни один из астрономов.

Заочная физико-техническая школа при МИСиСЕ

Филиал Всесоюзной заочной математической школы — Заочная физико-техническая школа при Московском ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени институте стали и сплавов — объявляет набор учащихся в восьмые, девятые и десятые классы на 1986/1987 учебный год.

Цель работы школы — оказание помощи учащимся в углубленном изучении программного материала средней школы по физике и математике.

Программа обучения по математике полностью соответствует курсу ВЗМШ. Курс физики разработан преподавателями кафедры общей физики и кафедры теоретической физики Московского института стали и сплавов и соответствует требованиям на вступительных экзаменах в вузы, прежде всего — в МИСиС.

Работа школы организована следующим образом. Четыре-пять раз в год учащимся рассылаются контрольные задания по физике и математике вместе с краткими сведениями по теории и примерами решения задач. Присланные учащимися контрольные работы проверяются и вместе с оценками и комментариями отправляются учащимся. В качестве годового задания учащимся десятых классов посылаются материалы вступительных экзаменов в МИСиС за прошлые годы. Учащиеся, успешно окончившие ЗФТШ, пользуются преимуществом при поступлении в МИСиС.

Занятия в ЗФТШ (МИСиСа) начнутся с 1 октября 1986 года. Для зачисления в школу необходимо прислать заявление с указанием фамилии, имени, отчества, полного домашнего адреса, профессии и занимаемой должности родителей, а также приложить справку из школы с указанием класса и годовых оценок по физике и математике. Заявление и справку вместе с решением первого задания по математике, о котором написано в статье «Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу» в этом номере журнала, нужно выслать не позднее 5 мая по адресу: 117049 Москва, Ленинский пр., 4, МИСиС, ЗФТШ.

Заочная олимпиада по программированию

В «Кванте» № 6 за прошлый год были опубликованы задачи Заочной олимпиады по программированию для немосковских школьников. (Москвичи могли решать те же задачи, участвуя в Московской городской олимпиаде по программированию.) В заочной олимпиаде приняли участие 150 школьников, приславших 900 решений предложенных задач. В некоторых городах университеты, учебные институты и учебные центры профессионального обучения провели эту олимпиаду среди руководимых ими учащихся и прислали в «Квант» лучшие работы. Комсомольцы ИНЭУМа*) взяли на себя труд по проверке поступивших работ и написали всем учвстникам письма с разбором их решений.

Жюри Олимпиады присудило следующие премии:

I премию получили: В. Казначеев (Ленинград), Е. Финк (Ленинград);

II премию — Ю. Васильев (Ленинград), Г. Глущенко (Запорожье), О. Матюшкина (Ленинград), К. Стыркас (п. Черноголовка Московской обл.);

III премию — А. Асташкевич (Томск), В. Гладков (Пермь), Б. Каюров (Одинцово), М. Ногоновский (Ленинград), Рахлин (Мончегорск), Федоренко (Таганрог), А. Черных (Краснодар).

Кроме того, еще 14 участников получили похвальные отзывы.

Подведем общие итоги. Почти все участники старательно выполнили большую работу. Средний участник решал все 7 или 6 задач, зная, что в зачет пойдут только три. Как правило, программы написаны аккуратно, без синтаксических ошибок программирования. Некоторые участники пропустили свои программы на машинах и приложили листинги. Многие участники описали алгоритмы решений кратко и ясно.

Выяснились и два недостатка, присущие большому числу работ. Некоторые участники не были изобретательны в поисках эффективных алгоритмов: они заводили массивы чисел, без которых можно обойтись, и тратили больше действий, чем нужно, и это несмотря на то, что нужное число действий было указано в условиях задач. Некоторые участники плохо графически оформили свои программы, не позаботились о том, чтобы программа легко читалась.

В целом итоги олимпиады нас порадовали. Решено ее проводить ежегодно.

А. Л. Брудно,
председатель Жюри олимпиады

*) Институт электронных управляющих машин Минприбора СССР.

Избранные школьные задачи

1. Указание. Используйте представление $\overline{xyuv}=1000x+100y+10u+v$.

2. $a=0$. Решение. Вычтем из второго уравнения удвоенное первое; получим $(a-3)x=0$. Таким образом, если $a\neq3$, то $x=0$ и для y получается уравнение $ay=a+2$, которое имеет решение в том и только в том случае, если $a\neq0$. Если же $a=3$, то наша система превращается в пару равносильных уравнений $2x+3y=5$, $4x+6y=10$, которая, очевидно, имеет бесчисленное множество решений.

3. $\{0, 0, 0\}$ и $\{1, 1, 1\}$. Указание. Из неравенств видно, что числа x, y, z неотрицательны. Используя это, выводим из наших неравенств неравенства $x^8\leqslant x$, $y^8\leqslant y$, $z^8\leqslant z$. Из них вытекает, что каждое из чисел x, y, z равно 0 или 1. Но тогда $x^2=x$, $y^2=y$, $z^2=z$, и, следовательно, $x\leqslant y$, $y\leqslant z$, $z\leqslant x$, то есть $x=y=z$.

4. Указание. Обозначим площади наших 6 треугольников через $s_1,\ldots,s_6$ в соответствии с рисунком 1. Поскольку медиана всегда разбивает треугольник на две равновеликие части, имеют место равенства $s_1=s_2$, $s_3=s_4$, $s_5=s_6$, $s_1+s_2+s_3=s_1+s_5+s_6$, $s_2+s_3+s_4=s_5+s_6+s_1$, $s_1+s_4+s_5=s_6+s_1+s_2$. Из этих равенств следует, что $s_1=s_2=s_3=s_4=s_5=s_6$.

5. Указание. Воспользуйтесь тем, что отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, заключенные между этой точкой и точками касания, имеют одинаковую длину.

6. $n=3$, $n=4$. Указание. Произведение $|n-2|\,|n-5|$ является простым числом тогда и только тогда, когда один из сомножителей равен единице, а другой является простым числом.

7. Указание. Если x не принадлежит отрезку $[-1, 0]$, то $x^2+x+1>1$, а если x принадлежит этому отрезку, то $\sin x\leqslant0$, а $x^2+x+1>0$. Таким образом, правая часть всегда больше левой.

8. Отрицательно. Решение. Так как $3{,}1415<\pi<3{,}1416$, то $10\,000/3{,}1416<10\,000/\pi<10\,000/3{,}1415$. Но $10\,000/3{,}1416=3183{,}0\ \ldots$ и $10\,000/3{,}1415=3183{,}1\ \ldots$; значит, $3183<10\,000/\pi<3184$, то есть $3183\pi<10\,000<3184\pi$. (Неправильное решение: $\pi\approx3{,}14$, следовательно, $10\,000/\pi\approx10\,000/3{,}14=3184{,}7\ \ldots$, следовательно, $3184\pi<10\,000<3185\pi$ и $\sin 10\,000$ положительно.)

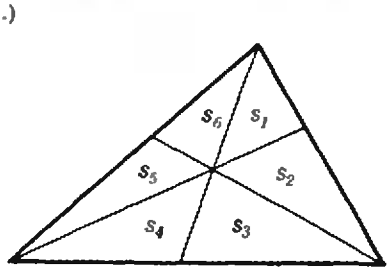


Рис. 1.

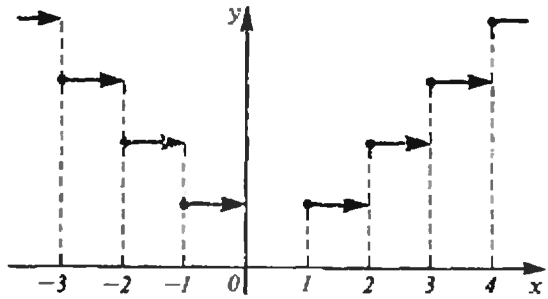


Рис. 2.

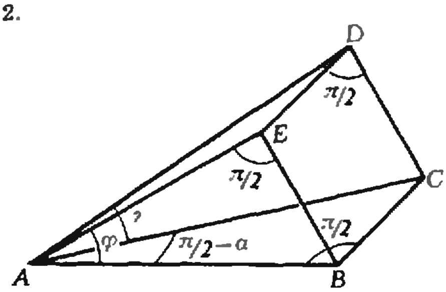


Рис. 3.

9. а) $y=x-2$ и $y=7x-11$. Указание. Пусть прямая $y=kx+b$ касается первой параболы в точке $(x_1;\ y_1)$ и второй параболы в точке $(x_2;\ y_2)$; всего имеется, таким образом, 6 неизвестных.

Запишите: условия принадлежности точек $(x_1;\ y_1)$ и $(x_2;\ y_2)$ соответствующим параболам (два соотношения); условия прохождения прямой через эти точки (два соотношения); условия равенства углового коэффициента прямой значению производной первой параболы при $x=x_1$ и значению производной второй параболы при $x=x_2$ (два соотношения).

б) Две. Указание. Если a_1 и a_2 — числа одного знака, то параболы $y=a_1x^2+b_1x+c_1$ и $y=a_2x^2+b_2x+c_2$ имеют две общие касательные тогда и только тогда, когда они пересекаются; если же a_1 и a_2 — числа разных знаков, то эти параболы имеют общую касательную тогда и только тогда, когда они не пересекаются (докажите!). У нас $a_1=1$ и $a_2=-1$ имеют разные знаки и уравнение $x^2+x-2=-x^2+7x-11$ решений не имеет.

10. Верно. Указание. Раздельно рассмотрите случаи, когда среди наших точек найдутся три, не лежащие на одной прямой, и когда таких трех точек нет.

11. См. рисунок 2. Указание. Если $[x]\neq0$, то $e^{\ln|[x]|}=|[x]|$, а если $[x]=0$, то функция $e^{\ln|[x]|}$ не определена.

12. Уравнение решений не имеет. Указание. Рассмотрите функцию $3\sin x-4\cos x$ и убедитесь в том, что ее наибольшее значение равно $+5$, а наименьшее значение равно -5. (Покажите, что точками экстремума являются те значения x, в которых $\operatorname{tg} x=-\frac{3}{4}$; выведите отсюда, что в точках экстремума либо $\sin x=\frac{3}{5}$, $\cos x=-\frac{4}{5}$, либо $\sin x=-\frac{3}{5}$, $\cos x=\frac{4}{5}$.

Другой способ — введение вспомогательного угла:

$$3\sin x-4\cos x=5\left(\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}\sin x-\right.$$
$$\left.-\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}\cos x\right)=5(\cos\varphi\sin x-\sin\varphi\cos x)=$$
$$=5\sin(x-\varphi),$$

где $\cos\varphi=\frac{3}{5}$, $\sin\varphi=\frac{4}{5}$.) Далее исследуйте множество значений функции $\cos 5x-7$.

13. 50. Указание: $49<\lg(\pi^{100})<50$.

14. $\arcsin[(\sin\alpha)(\sin\varphi)]$. Решение (см. рисунок 3). Пусть AC — наша прямая, причем точка A лежит на ребре двугранного угла. Пусть, далее, AB — отрезок, перпендикулярный ребру и лежащий в той же грани, в которой лежит AC, причем $BC\perp BA$. Пусть, наконец, D и E — проекции точек C и B на другую грань угла. Нам дано, что $\angle EAB=\varphi$ и $\angle CAB=\frac{\pi}{2}-\alpha$, и мы должны найти $\angle DAC$. Имеем:

$$\sin\angle DAC=\frac{|DC|}{|AC|}=\frac{|EB|}{|AC|}=\frac{|AB|\sin\varphi}{|AB|/\sin\alpha}=(\sin\alpha)(\sin\varphi).$$

15. Пятиугольник получиться может, правильный пятиугольник получиться не может. Указание. У пятиугольника, являющегося сечением параллелепипеда плоскостью, всегда существует по крайней мере одна пара параллельных между собой сторон (почему?), тогда как в правильном пятиугольнике никакие две стороны между собой не параллельны.

Восстанови стертую фигуру!

1. В точке H восстановите перпендикуляр к прямой DH, затем постройте отрезок AC так, чтобы один его конец лежал на перпендикуляре HP, другой — на прямой DH, а серединой была бы точка F. Длина стороны AB равна $2DF$ (рис. 4).

3. Постройте серединные перпендикуляры для отрезков MN и NK. Постройте отрезок, концы которого принадлежат серединным перпендикулярам, а середина находится в точке N (рис. 5).

4. Для точки M постройте симметричную ей точку M' относительно прямой l, на которой лежит биссектриса, и через M' проведите прямую, параллельную MN (рис. 6).

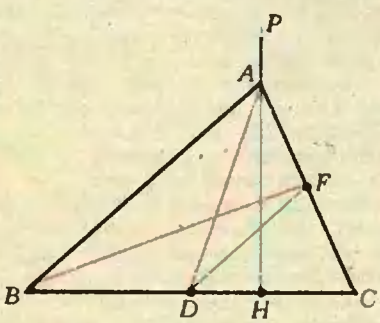


Рис. 4.

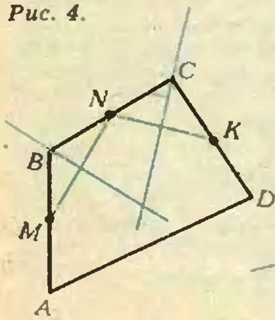


Рис. 5.

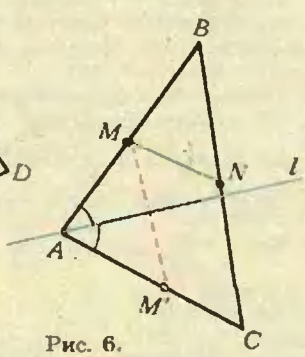


Рис. 6.

Калейдоскоп «Кванта»

Вопросы и задачи

1. См. рисунок 7 (а, б).
2. Расширяли.
3. При горизонтальном положении трубки давления справа и слева на капельку будут уравновешены; устройство не может служить термометром.

При вертикальном положении трубки давление в нижнем шарике больше давления в верхнем на постоянную величину. При неизменном объеме давление с ростом температуры увеличивается тем быстрее, чем выше начальное давление (см. рис. 8). Для поддержания постоянной разности давлений в шариках капелька станет перемещаться вверх; устройство может служить термометром.

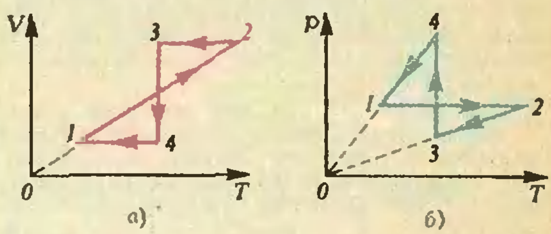
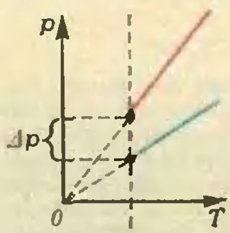


Рис. 7.



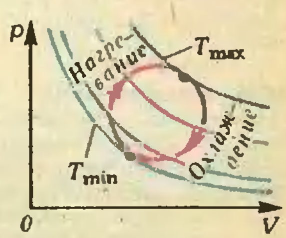


Рис. 8. *Рис. 9.*

4. Рост давления по мере повышения температуры ускорится по сравнению с ростом, предсказываемым законом Шарля.
5. При адиабатическом расширении давление падает быстрее, чем при изотермическом. Кривая 1—1 — адиабата.
6. Увеличилось в 3 раза.
7. См. рисунок 9.
8. Если считать, что температура пузырька не менялась при подъеме, то $h\approx 10{,}3$ м.
9. В рабочем режиме, когда газ в баллоне нагрет, его давление не должно превышать атмосферное.
10. Повышается.

Микроопыт

Часть нагретого воздуха в стакане, расширяясь, вышла наружу. Когда бумажка погасла, воздух остыл, давление его упало, и под стакан вошла вода под действием атмосферного давления.

Основные углы в правильной пирамиде

1. $\frac{a^2}{\sqrt{-\cos\alpha}}$.

2. $\frac{a^3}{24}\sqrt{4+2\sqrt{7}}$.

3. $\pi-\arccos(\sqrt{21}/4)$.

4. $\dfrac{v\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}{6\sqrt{\cos\alpha}}$.

5. $\dfrac{4l^3\operatorname{tg}\alpha}{3(2+\operatorname{tg}^2\alpha)^{3/2}}$.

6. $\sqrt[3]{\dfrac{12Q}{\pi\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{-2\cos\alpha}}$.

7. $\dfrac{a^3\cos\frac{\alpha}{2}}{24\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}}$, $\dfrac{3a^2}{8\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{6}\right)}}$.

8. $\sqrt{\dfrac{S\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}}$.

9. $2\operatorname{arctg}\sqrt{2}$, $\operatorname{arctg}2\sqrt{2}$.

10. $\dfrac{na^3\cos\alpha\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{n}}{\sqrt[3]{-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{n}\right)}}$.

Московский физико-технический институт

Математика

Вариант 1

1. $x=\pm\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}+k\pi$ $(k\in Z)$.

2. $]-1/5;\ 0[\cup]0;\ 1/12]$.

3. $\{(0;\ 1);\ (2;\ -1)\}$. Указание. Из второго уравнения следует, что $x=\left(\frac{1-y}{2}\right)^2$.

4. $2R^2\left(\frac{2\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}\right)$. Указание. Пусть $BE\perp AD$ и $\widehat{ABE}=\alpha$. Из условия задачи следует, что (см. рис. 10), $|AB|=\frac{2R}{\cos\alpha}$, $|AL|=2R\sin\alpha$. Поэтому $\frac{2R}{\cos\alpha}=\frac{4}{\sqrt{3}}\times$ $\times 2R\sin\alpha$, то есть $\sin 2\alpha=\frac{\sqrt{3}}{2}$, откуда $\alpha=30^\circ$.

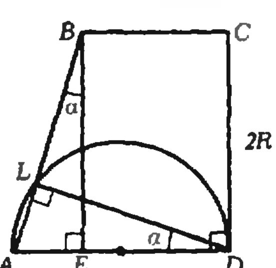


Рис. 10.

5. $27\pi/80$. Указание. Ось цилиндра параллельна ребру SB. Пусть $|BC|=1$. Проведем через ребро AC сечение пирамиды плоскостью, перпендикулярной SB. В сечении получится $\triangle ANC$ $(N\in SB)$. В $\triangle ANC$ $|AN|=|NC|=5/6$, $|AC|=1$. Из симметрии конфигурации тел вытекает, что точка касания цилиндра с ребром AC — середина AC. В $\triangle ANC$ вписана окружность с радиусом $1/4$. Поэтому $\widehat{SBC}=\arcsin\frac{5}{6}$, высота цилиндра — $\frac{9}{5\sqrt{11}}$, $|SB|=\frac{3}{\sqrt{11}}$, высота пирамиды — $\frac{4}{\sqrt{33}}$. Окончательно, объем цилиндра равен $\frac{9\pi}{80\sqrt{11}}$, объем пирамиды — $\frac{1}{3\sqrt{11}}$.

Вариант 2

1. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$. Указание. Выполните замену $t=\sqrt{1-x}$.

2. $]-\infty;\ -3]\cup[4;\ +\infty[$.

3. $x=\arccos(\sqrt{2}-1)+2k\pi$ $(k\in Z)$.

4. 3. Указание. Пусть x — длина искомой хорды. По теореме косинусов, $x^2+4-2\cdot2\cdot x\times$ $\times 1/2=x^2+1-2\cdot x\cdot 1\cdot 1/2$.

5. $72/23$. Указание. Пусть L — точка касания прямой MN со сферой, O — центр сферы. N_1, L_1, O_1 — ортогональные проекции точек N, L, O на плоскость ABC соответственно. Воспользовавшись тем, что длины отрезков касательных, проведенных из какой либо точки к сфере равны, получим, что $|LM|=5/2$. Далее имеем: $|L_1K|=\frac{5\sqrt{2}}{3}$, $|L_1L|=\frac{7}{3}$, $|O_1O|=\frac{4}{3}$, $|L_1O_1|=\frac{\sqrt{7}}{3}$, $|O_1K|=2\sqrt{2}$, $L_1\widehat{K}O_1=\arccos\frac{23}{24}$, $|N_1K|=\frac{48\sqrt{2}}{23}$.

Вариант 3

1. $\{8\}$.

2. $x=\pm\frac{1}{2}\arccos\frac{1}{16}+k\pi$ $(k\in Z)$.

3. $a\in]-\infty;\ -4[\cup\left]-\frac{5}{4};\ 0\right[$. Указание. Вершина первой параболы — точка $M_1(-a,\ -4a^2-a)$, вершина второй — точка $M_2\left(\frac{1}{a};\ -\frac{4}{a}+a-2\right)$.

Эти точки лежат по одну сторону от прямой $y=-5$ тогда и только тогда, когда

$$(-4a^2-a+5)\left(-\frac{4}{a}+a-2+5\right)>0.$$

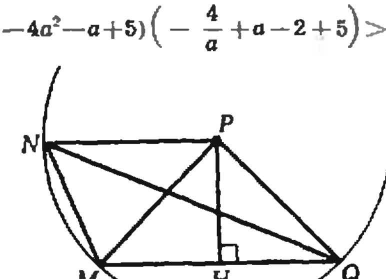


Рис. 11.

4. 185/8. Указание. Проведем окружность с центром в точке P и радиусом, равным $|NP|$ (см. рис. 11). Поскольку $\widehat{NPM}=2\widehat{NQM}$, точка Q лежит на этой окружности. Значит, $|PQ|=\frac{13}{2}$. Отсюда следует, что $|PH|=5/2$.

5. $75\sqrt{3}$. Указание. Пусть O — центр шестиугольника $ABCDEF$, а B_1 — середина отрезка $[AO]$. Положим $\vec{BC}=\vec{a}$, $\vec{BB_1}=\vec{b}$, $\vec{OS}=\vec{c}$. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ некомпланарны. Поэтому всякий вектор $\vec{x}$ однозначно раскладывается по векторам $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$: $\vec{x}=x_1\vec{a}+x_2\vec{b}+x_3\vec{c}$, где x_1, x_2, x_3 — числа. Поставим в соответствие вектору $\vec{x}$ — тройку чисел $(x_1; x_2; x_3)$ и будем писать $\vec{x}=(x_1, x_2, x_3)$. Тогда проводя необходимые вычисления, получим:

$$\vec{DE}=\left(-\frac{1}{2}; 1; 0\right),\ \vec{EO}=\left(-\frac{1}{2}; -1; 0\right),$$

$$\vec{ES}=\left(-\frac{1}{2}; -1; 1\right),\quad \vec{EK}=\left(-\frac{1}{10}; -\frac{1}{5}; \frac{1}{5}\right),$$

$$\vec{DK}=\left(-\frac{3}{5}; \frac{4}{5}; \frac{1}{5}\right),\ \vec{DR}=\left(-\frac{7}{5}; \frac{28}{15}; \frac{7}{15}\right),$$

$$\vec{DS}=(-1; 0; 1),\ \vec{OF}=\left(-\frac{1}{2}; 1; 0\right),$$

$$\vec{SF}=\left(-\frac{1}{2}; 1; -1\right),\ \vec{FA}=\left(-\frac{1}{2}; -1; 0\right),$$

$$\vec{FL}=\left(-\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; 0\right),\quad \vec{SL}=\left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; -1\right),$$

$$\vec{ST}=\left(-\frac{2}{5}; \frac{4}{15}; -\frac{8}{15}\right),\quad \vec{DT}=\left(-\frac{7}{5}; \frac{4}{15}; \frac{7}{15}\right),$$

$$\vec{RT}=\left(0; -\frac{8}{5}; 0\right),\ |B_1B|=\frac{5}{2},\ |BC|=\frac{5}{\sqrt{3}}.$$

Физика

Вариант 1

1. Удобнее всего систему отсчета связать с наклонной плоскостью и направить оси координат так, как показано на рисунке 12. Рассмотрим движение шарика между двумя последовательными ударами о плоскость.

Поскольку проекция ускорения шарика на ось OY величина постоянная: $a_y=g\cos\alpha=\text{const}$, проекции скорости на эту же ось сразу после первого удара и непосредственно перед вторым ударом по модулю равны. Из-за того что удары упругие, проекции скоростей до ударов такие же, как и после. Таким образом, для всех ударов $|v_y|=v_0\sin\beta$, где v_0 — скорость шарика в момент первого соударения с плоскостью.

Время τ между двумя последовательными ударами находим из уравнения движения шарика по оси OY — $y=|v_y|t-g\cos\alpha\cdot t^2/2$, полагая $y=0$ при $t=\tau$:

$$\tau=\frac{2|v_y|}{g\cos\alpha}=\frac{2v_0\sin\beta}{g\cos\alpha}.$$

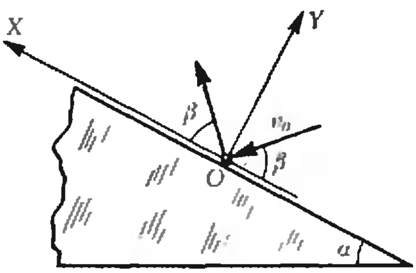


Рис. 12.

Движение по оси OX описывается уравнением $x=|v_x|t-a_xt^2/2$ (где $|v_x|=v_0\cos\beta$, $a_x=g\sin\alpha$), а условие возврата есть $x=0$ при $t=n\tau$ ($n=1, 2, 3, \ldots$). Отсюда для угла β получаем

$$\beta=\operatorname{arctg}(n\operatorname{tg}\alpha),\ n=1, 2, 3, \ldots$$

2. То, что давление пара возросло не втрое, а вдвое, означает, что в результате сжатия пар стал насыщенным и его давление $p=10^5$ Па. Тогда для параметров пара в начальном состоянии имеем уравнение

$$\frac{p}{2}V=\frac{m}{M}RT,$$

откуда для начального объема получаем

$$V=2\frac{m}{M}\frac{RT}{p}\approx31\cdot10^{-3}\text{м}^3=31\ \text{л}.$$

3. Обозначим через $\mathcal{E}$ электродвижущую силу батареи и через $R=R_1R_2/(R_1+R_2)$ сопротивление внешней цепи при замкнутом ключе. Из условия задачи $\mathcal{E}^2R_1/(R_1+r)^2=\mathcal{E}^2R/(R+r)^2$ получаем

$$r=\sqrt{R_1R}=\sqrt{\frac{R_1^2R_2}{R_1+R_2}}=6\ \text{Ом}.$$

4. Действие оптической системы линза — зеркало в данном случае заключается в следующем. Линза создает мнимое изображение предмета A на расстоянии $f_1=d_1F/(F-d_1)$ (d_1 — расстояние предмета от линзы) с увеличением

$$\Gamma_1=\frac{f_1}{d_1}=\frac{F}{(F-d_1)}.$$

Это изображение отражается в зеркале (без изменения размеров), а полученное отражение является новым предметом для линзы, находящимся от нее на расстоянии $d_2=2F+f_1$. Линза создает изображение этого предмета на расстоянии $f_2=Fd_2/(d_2-F)$ с увеличением

$$\Gamma_2=\frac{f_2}{d_2}=\frac{F}{d_2-F}=\frac{F-d_1}{F}.$$

Общее увеличение системы

$$\Gamma=\Gamma_1\Gamma_2=1$$

— оно не зависит от начального расстояния между предметом и линзой.

В этом можно убедиться также построением хода лучей в данной оптической системе.

Вариант 2

1. $\alpha_{max}=\operatorname{arctg}(\mu/2)\approx14°$.
2. $A=3/11\ (4RT_1-3Q)\approx3{,}9$ кДж.
3. $U=\mathcal{E}+qvr/d$.
4. $d_л=\sqrt{4S/(15\pi)}=2$ см.

Вариант 3

1. $\beta=\arccos(7/20)\approx69°$.
2. $p_2/p_1=\sqrt{T_1/T_2}=1{,}5$.
3. $I_m=\sqrt{\frac{2\pi\nu_0RC}{(2\pi\nu_0R+C)L}}U_0$.
4. $\Gamma=3$, если расстояние от предмета до линзы меньше расстояния от линзы до изображения; $\Gamma=1/3$ в противном случае.

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Вариант 1

1. $x_1=2\pi k$; $x_2=\frac{\pi}{4}+2\pi l$; $x_3=-\frac{\pi}{4}+\pi m$ ($k, l, m\in Z$).

2. $a=1$, $a=3$. Указание. Корни существуют при $\frac{D}{4}=a^4-10a^2+9\geqslant 0$. Сумма их при $D/4>0$ равна $2(a^2-4a)$. Если при $D/4=0$ считать, что уравнение имеет два совпадающих корня ($x_1=x_2$), то и в этом случае сумма корней равна $2(a^2-4a)$.

3. Верно. Плоскость (ABC') содержит $(BC')\perp(CDA')$.

4. $\sqrt{17}$; является. Указание. Квадрат расстояния от точки (5, 2) до точки $(x,\ x^2+2x)$ равен $d^2=(x-5)^2+(x^2+2x-2)^2$. Вычисляя производную, получим, разложив на множители $(d^2)'=(x-1)(4x^2+16x+18)$. Из этого следует, что ближайшей к точке (5, 2) точкой параболы является точка (1, 3).

5. Две первые. Указание. $\sin\frac{x}{2}\neq p(\sin x)$, где p — многочлен, так период функции $p(\sin x)$ равен 2π, а период $\sin\frac{x}{2}$ — 4π. Предположим, что $\sin 2x=a_0\sin^n x+a_1\sin^{n-1}x+\ldots+a_n$ при всех $x\in R$. Подставляя $x=0$, получаем $a_n=0$. Поэтому $2\sin x\cdot\cos x=\sin x(a_0\sin^{n-1}x+\ldots+a_{n-1})$. Отсюда следует, что

$$2\cos x=a_0\sin^{n-1}x+\ldots+a_{n-1} \qquad (*)$$

при всех $x\in R$. (При $\sin x\neq 0$ это равенство очевидно, а при $\sin x=0$ получается из непрерывности левой и правой частей.)
Подставляя в (*) $x=0$ и $x=\pi$, получим $a_{n-1}=2$ и $a_{n-1}=-2$. Противоречие.

Вариант 2

1. $]-\infty;\ \log_2(a/4)[$ при $a>0$, $\varnothing$ при $a=0$, $]-\infty;\ \log_2(-a/2)[$ при $a<0$. Указание. После замены $y=2^x$ задача сводится к решению системы

$$\begin{cases}(y+a/2)(y-a/4)<0,\\ y>0.\end{cases}$$

2. $x_1=\frac{13\pi}{12}+2n\pi$; $x_2=\frac{5\pi}{12}+2l\pi$ $(k,\ l\in Z)$.

Указание. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}5\sin 2x-2=(\sin x-\cos x)^2,\\ \sin x>\cos x.\end{cases}$$

3. $a(\sqrt{2}+2\sqrt{6})/2$; больший объем имеет часть куба, содержащая точку B. Указание. Пусть M — точка пересечения прямой KL с плоскостью $ABCD$, N — точка пересечения прямых AD и CM, P — точка пересечения NL и A', D', Q — точка пересечения прямых PK и $B'C'$ (рис. 13). Тогда $CNPQ$ есть сечение куба плоскостью CKL. Это сечение делит куб на две части — «ближнюю» и «дальнюю». Проекция точки K на плоскость $ABCD$ лежит в «ближней» части, поскольку отрезок DN является четвертью ребра куба. Поэтому весь отрезок RK (исключая точку K) лежит в «ближней» части куба. Но тогда, перенеся плоскость CKL параллельно самой себе так, чтобы новая плоскость прошла через центр куба, мы уменьшим объем «ближней» части и увеличим объем «дальней» части. Однако после переноса объемы частей сравняются, и, следовательно, до переноса объем «ближней» части был больше объема «дальней» части.

4. При $x\in[-1;\ 1]$: $f_{\min}=f(-1)=-1/3$; $f_{\max}=f(1)=1/3$. При $x\in[1;\ 2[$: $f_{\max}=f(1)=1/3$; наименьшего значения нет.

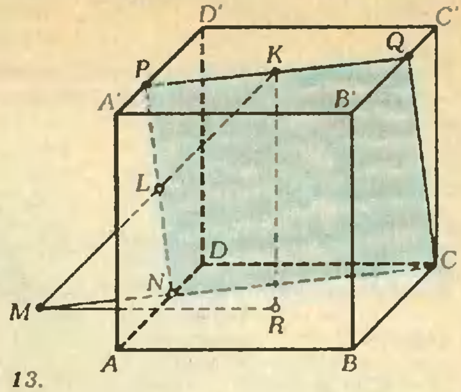


Рис. 13.

5. $2\sqrt{5}$. Указание. Пусть $y=f(x)=ax^2+bx+c$ и $y=g(x)=a_1x^2+b_1x+c_1$ — две непересекающиеся параболы и $t\in R$ произвольно. Рассмотрим параллельный перенос (на вектор $(k,\ l)$), переводящий вторую параболу в параболу, проходящую через точку $(t,\ f(t))$ первой параболы и имеющую с ней в этой точке общую касательную. Искомое расстояние будет равно наименьшей длине вектора $(k,\ l)$.
Выясним, каковы условия на вектор $(k,\ l)$ в нашем случае. Параллельный перенос переводит параболу $y=(x+4)^2-3$ в параболу $y-l=(x-k+4)^2-3$. Потому для данной точки должны выполняться соотношения:

$$\begin{cases}(t-k+4)^2-3+l=-3t^2+8t-9,\\ 2(t+4-k)=-6t+8,\end{cases}$$

откуда $k=4t$, $l=-12t^2+32t-22$. Осталось найти наименьшее значение функции

$$d^2=(4t)^2+(12t^2-32t+22)^2.$$

Физика

1. $L_{max}=l\sqrt{1+\mu^2}\approx 2{,}02$ м.
2. $x=5(\sqrt{5}+4\sqrt{2})R/27$.
3. $\Delta t=nP^2/(2cmM)=32$ К.
4. $F=\frac{MpVg}{R}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)\approx 300$ Н, где $M=29\cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса воздуха.
5. $h=\frac{(W\tau-cM(t_к-t_0))RT_п}{LMpS}\approx 2{,}5$ м, где $t_к=100\ ^\circ C$ — температура кипения воды, равная температуре насыщенного пара ($T_п=373$ К), $M=18\cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса воды.
6. $q=C\left(\frac{\mathscr{E}_1R_2+\mathscr{E}_2R_1}{R_1+R_2}+\mathscr{E}\right)=6.5\cdot 10^{-5}$ Кл;

$$q_0=C_0(\mathscr{E}_2-\mathscr{E}_1)=10^{-5}\ Кл.$$

7. $A_{мех}=\mathscr{E}I(I_0-I)\tau/I_0=8$ Дж.
8. $R=\eta(R_{пр}+r)/(1-\eta)=9{,}5$ кОм.
9. $xx'=F^2$; $\Gamma=F/x=5$.
10. $P=\sqrt{\frac{2mhc(\lambda_к-\lambda)}{\lambda_к\lambda}}\approx 4\cdot 10^{-25}$ кг·м/с, где $h=6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка, $c=3\cdot 10^8$ м/с — скорость света.

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

Математика

Вариант 1

1. 5. 2. 3 см^3. 3. $x_1=\frac{\pi}{2}(2k+1)$; $x_2=$

$= \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi l$ ($k, l \in Z$).

4.]0; 1[$\bigcup$]3; $+\infty$[. 5. Промежутки возрастания]$-\infty$; -1] и [0; $+\infty$[. Промежуток убывания [-1; 0].

Вариант 2

1. $\frac{2}{3} l^3 \sin\alpha \cos^2\alpha$. 2. $x = 2\pi k$ ($k \in Z$). 3.]-1; 5[.
4. {0}. 5. $y_{max} = y(0) = y(3) = 5$; $y_{min} = y(2) = 1$.

Вариант 3

1. 27 км/ч. 2. 18 м³. 3. $x = \frac{\pi}{3} + \pi k$ ($k \in Z$).
4.]4; $+\infty$[. 5. $\left[\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$.

Вариант 4

1. $\frac{S\sqrt{S}}{6}\operatorname{tg}\alpha$. 2. $x = \frac{\pi}{8}(4k+1) - 2$, ($k \in Z$).
3. {$-23/3$}. 4.]$-\infty$; -1[$\bigcup$]15; $+\infty$[.

Физика

1. $T = 3Mg$.
2. $l' = 4l = 40$ см.
3. $A = m(g+a)h \approx 3150$ Дж.
4. $S = m/(d(\varrho_в - \varrho_л)) \approx 1{,}9$ м² (здесь $\varrho_в = 10^3$ кг/м³ — плотность воды).
5. $T = pVM/(mR) \approx 480$ К.
6. $l = \sqrt{3q^2/(8\pi\varepsilon_0 mg)} \approx 6{,}4 \cdot 10^{-2}$ м$=6{,}4$ см (здесь $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная).
7. $\mathcal{E} = (U_2 I_1 - U_1 I_2)/(I_1 - I_2) = 14$ В; $r = (U_2 - U_1)/(I_1 - I_2) = 3$ Ом.
8. $\alpha = \operatorname{arctg} n \approx 58°$.
9. $f = (1+\Gamma)F = 4{,}2$ м.
10. $n = P\lambda/(hc) \approx 50$ (здесь $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света).

Шахматная страничка

(см. «Квант», 1985, № 10)

Задание 19 (А. Хильдебранд, 1958 г.). 1. Kd8+ Kpf6 (1... Kpf8 2. Ke6+ и 3. Kg5+) 2. Фh4+ Kpe5 3. Kf7+ Kpd5 4. Фd8+ Kpc5 5. Фa5+ Kpd4 6. Фa7+, и следующим ходом белые выигрывают ферзя.

Задание 20 (Г. Ринк, 1926 г.). 1. Лc7+ Лd7 2. Фc5+ Kpd8 3. Kph6! Л:c7 (Фa8) 4. Фf8+; 3... Ф:c7 4. Фf8×.

Номер подготовили:
А. А. Варламов, А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Е. В. Винодарова, М. В. Дубах, М. Н. Ермолов, С. Г. Захаров, С. В. Иванов, В. Ф. Лактионов, П. П. Лахтунов, Ю. П. Мартыненко, Ю. Н. Сарафанов, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, В. П. Храмов, В. Б. Юдин, Н. А. Ящук
Фото представили:
Л. Д. Шварц

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор М. Л. Медведская

103006 Москва К-6,
ул. Горького, 32/1. «Квант»,
тел. 250-33-54

Сдано в набор. 22.11.85. Подписано к печати 23.11.85.
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8
Бумага 70×108 1/16
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,36. Т-22389
Тираж 197 601 экз.
Цена 40 коп. Заказ 3087

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Консультирует — экс-чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

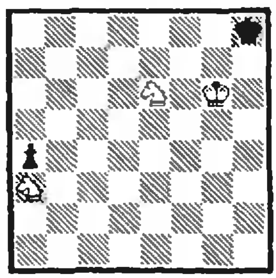
НОВОЕ В КОДЕКСЕ

Забавный случай произошел в 52-м чемпионате страны в Риге. В партии Чернин — Эйнгорн после **1. d4 Kf6 2. Kf3 e6 3. c4 b6 4. g3 Ca6 5. b3 Cb4+ 6. Cd2 Ce7 7. Cg2 0—0** белые сделали совершенно немыслимый ход **8. Лg1??** Такой ход, наверное, не придет в голову и начинающему шахматисту, а что говорить о Чернине, участнике турнира претендентов!?

Разгадка проста. По новым правилам **ФИДЕ**, принятым в прошлом году, рокировку теперь надо обязательно начинать с перемещения короля и лишь затем через него переносить ладью. Если же сначала взята ладья — ходи ладьей.

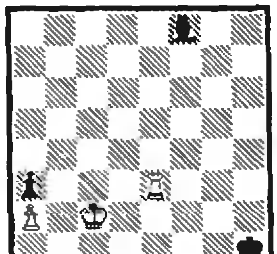
Важные поправки к шахматному кодексу касаются «правила 50 ходов»: если в течение 50 ходов на доске не произошло ни одного размена, и ни одна из пешек не сдвинулась с места, партия заканчивается вничью. Это правило, кстати, ограничивает продолжительность шахматной партии, не дает играть до бесконечности. Правило верное, но оно имеет исключения. Ведь существуют позиции, в которых для выигрыша требуется более 50 ходов. Для них число 50 в кодексе увеличивается до 100. Вопрос в том, на какие позиции должно распространяться это исключение. До сих пор в кодексе упоминалось лишь два вида окончаний: «король и два коня против короля и пешки» и «король, ладья и пешка а2 против короля, чернопольного слона и пешки а3». Теперь правило ста ходов касается и окончания: король, ладья и слон против короля и ладьи.

Все три упомянутых окончания относятся к числу наиболее сложных в теории. Как известно, два коня не могут дать мат одинокому королю противника: если тот будет играть правильно, он неизбежно будет запатован. Но если у слабейшей стороны (обычно черных) имеется пешка, то в некоторых случаях она может быть использована с выгодой для противника. Предположим, что пешка заблокирована конем. Тогда, оттеснив короля противника в угол с помощью своего короля и второго коня, белые могут в подходящий момент распатовать пешку. Далее, подводя второго коня к черному королю, удается, в отдельных случаях, пока пешка движется в ферзи, заматовать его.



На этой диаграмме черный король лишен свободы и попадает в матовую сеть: **1. Kc4! a3 2. Ke5 a2 3. Kf7+ Kpg8 4. Kh6+ Kph8 5. Kg5 a1Ф 6. Kgf7×**. Но попробуйте загнать черного короля в угол доски! Для этого может не хватить и ста ходов! Рассмотренный эндшпиль в начале века фундаментально проанализировал выдающийся советский этюдист А. Троицкий. Он создал поистине математическую теорию окончаний «два коня против пешки», определил, на каких полях наличие пешки ведет к безусловному проигрышу — ведь степень ее продвижения имеет решающее значение. Он установил также, при каком положении королей и «свободного» коня выигрыш достигается против любой пешки и даже нескольких пешек.

Рассмотрим пример второго окончания, упомянутого в кодексе.



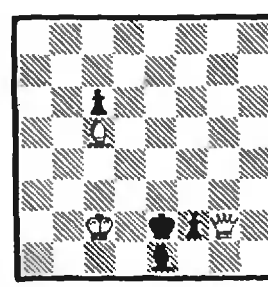
В этой позиции белые выигрывают: **1. Kpb3 Kpg2 2. Kpa4 Kpf2 3. Л:a3 C:a3 4. Kp:a3 Kpe3 5. Kpb4 Kpd4 6. a4 Kpd5 7. Kpb5**, и пешка проскакивает в ферзи. Все просто? Попытайтесь во время игры достичь подобной позиции. Сначала нужно оттеснить неприятельского короля в угол доски (или на край), после чего быстро устремиться к пешке, чтобы король противника не успел подтянуться к центру.

Возникает другой вопрос, почему этот эндшпиль нельзя играть, не обращая внимания на пешки? Но эндшпиль «король и ладья против короля и слона» теоретически ничейный. Даже в тех случаях, когда выигрыш есть, он совсем не прост. С помощью ЭВМ найдены рекордные позиции, в которых при наилучшей игре обеих сторон цель достигается за 18 ходов. Одна из них приведена в «Кванте», 1981, № 11 (задание № 2, решение — в «Кванте», 1982, № 1).

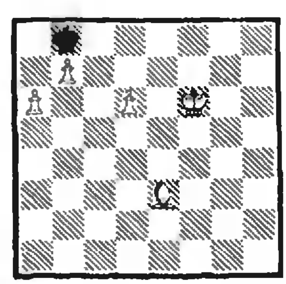
Эндшпиль «ладья со слоном против ладьи» мы рассмотрим в следующий раз.

Конкурсные задания

Сегодня мы начинаем новый шахматный конкурс. Его победители будут награждены шахматной литературой с автографом А. Карпова и дипломом журнала «Квант». Решившим 20 заданий из 24 присваивается I разряд, 16 заданий — II разряд.



1. Мат в 2 хода.



2. Мат в 3 хода.

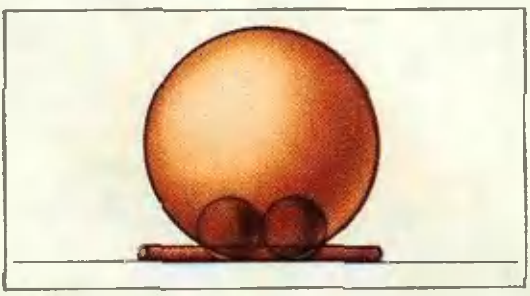
Срок отправки решений — 20 марта 1986 г. с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 1, 2».

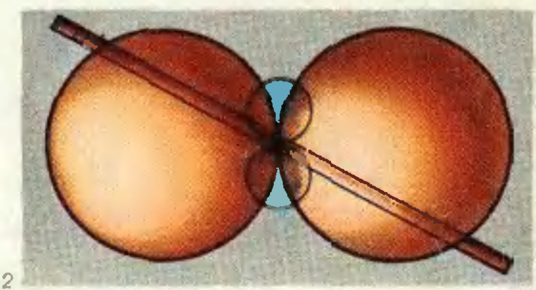
Цена 40 коп.

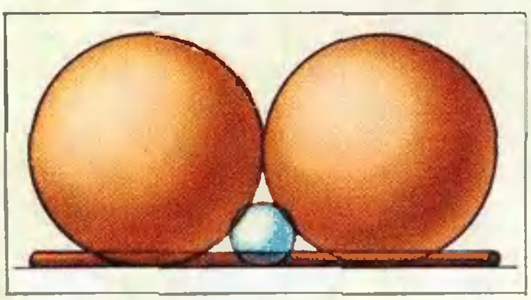
Индекс 70465

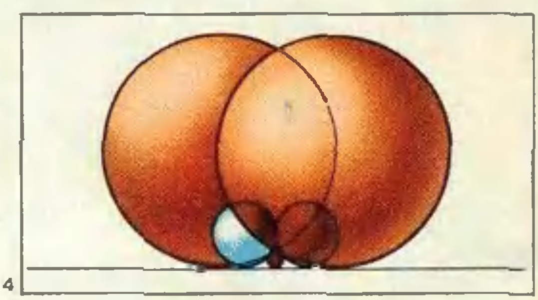
На этой странице обложки помещены условие одной стереометрической задачи и чертеж к ней (общий вид и четыре проекции по разным направлениям). Очень советуем читателям, которые еще не рассмотрели чертеж как следует, сначала порешать задачу самостоятельно, не глядя на нашу картинку (возможно, кое-кто уже успел это сделать — условие задачи печаталось в «Кванте» № 10 за прошлый год). Мы надеемся, что публикация таких «многофигурных» задач с чертежами, начатая в прошлом году (см. «Квант», №№ 2, 3, 5, 6, 11) поможет читателям развить пространственное воображение — качество, которого, увы, так не хватает некоторым абитуриентам на конкурсных экзаменах. Решение приводимой задачи вы найдете в следующем номере журнала.

Задача. Имеется шесть предметов: два одинаковых шара радиуса R_1, еще два одинаковых шара радиуса R_2, очень длинный цилиндр с радиусом основания r и плоскость. Они расположены в пространстве так, что каждый из них касается пяти остальных (цилиндр касается остальных предметов боковой поверхностью). Выразить R_1 и R_2 через r.


1


2


3


4