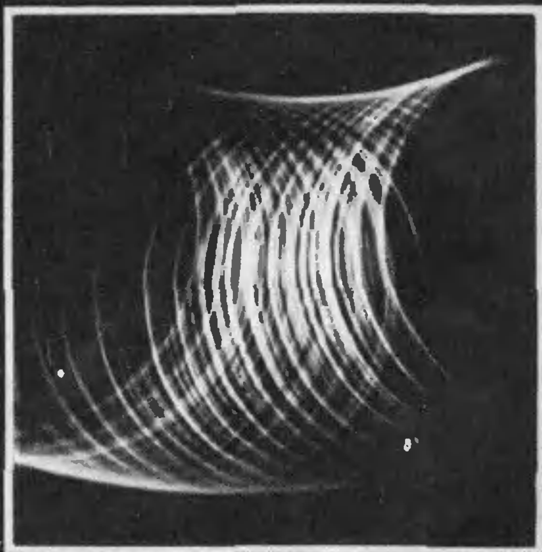
ISSN 0130-2221

Квант

9
1985

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР



Приведенные здесь фотографии получены при стробоскопическом освещении (снимки сделаны в Московском театре-студии на Юго-Западе). О том, в чем заключается стробоскопический эффект, лежащий в основе этого метода фотосъемки, можно прочитать в рубрике «Школа в «Кванте» — в заметке, предназначенной восьмиклассникам.

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант 9 1985

Основан в 1970 году

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ: | IN THIS ISSUE:

... вооружать учащихся знаниями и навыками использования современной вычислительной техники, обеспечить широкое применение компьютеров в учебном процессе, создавать для этого специальные школьные и межшкольные кабинеты...

Основные направления реформы общеобразовательной и профессиональной школы

С новым учебным годом!

Редколлегия и редакция журнала «Квант» поздравляют наших юных читателей с новым учебным годом! А год этот во многом должен быть действительно новым, необычным.

Продолжается осуществление школьной реформы, набирает силу процесс интенсификации народного хозяйства. В соответствии с постановлением партии и правительства во всех средних учебных заведениях страны вводится курс «Основы информатики и вычислительной техники». Начат широкий эксперимент по использованию вычислительной техники в преподавании школьных предметов. Всестороннее и глубокое овладение молодежью вычислительной техникой должно стать важным фактором ускорения научно-технического прогресса в стране.

Хотелось бы, чтобы за новой строкой в школьном расписании вы увидели, какое большое значение придается сегодня этой мере, поднимающей работу школы на качественно иной уровень, соответствующий условиям и потребностям общества развитого социализма.

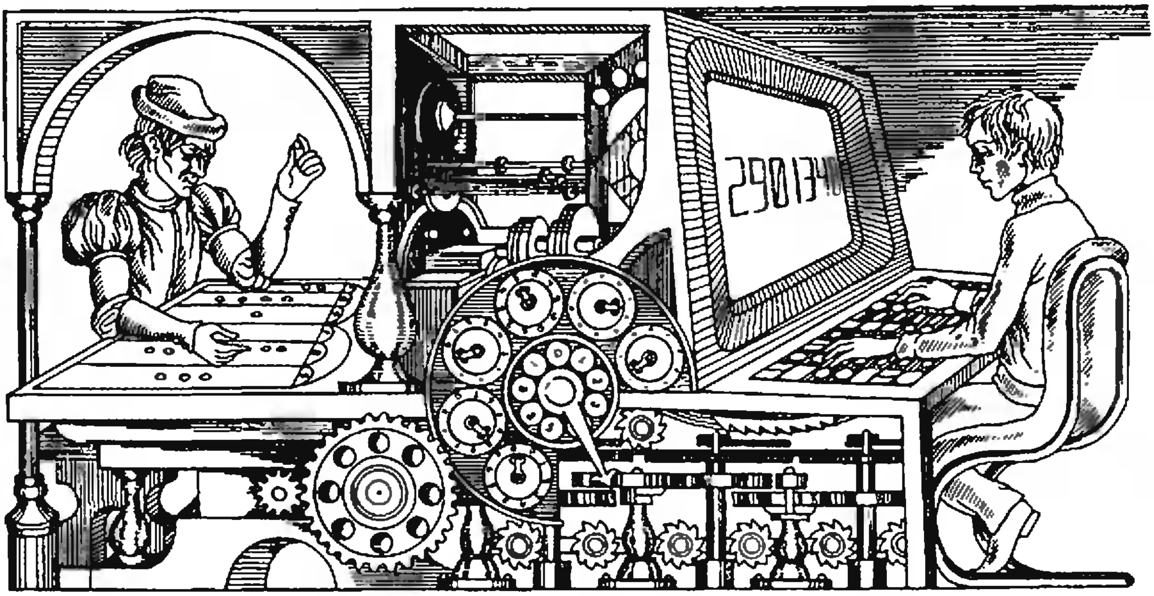
Пройдет немного времени, и вы вольетесь в ряды многомиллионной армии рабочих и инженеров, ученых и техников, преподавателей и конструкторов, механизаторов и служащих. Вы попадете на заводы, где работают станки с числовым программным управлением, в лаборатории, где действуют сотни электронных устройств и приборов, в аудитории, преподавание в которых ведется с применением современных электронно-вычислительных машин. Без преувеличения можно сказать, что мир, в котором вам предстоит жить и работать, будет миром компьютеризированным, насыщенным новейшей техникой. Это не фантастика, вернее, вчерашняя фантастика, обретающая невиданными темпами реальные черты на наших глазах.

Чтобы эта, порой лишь угадываемая сегодня, техника была вам подвластна, готовиться к встрече с ней необходимо загодя, уже за школьной партой. Вот почему такое важное значение приобретает задача вооружить учащихся знаниями и навыками использования современной вычислительной техники.

Помочь решению этой задачи призван и наш журнал. Как всегда, он будет стремиться пробудить интерес к физике и математике — наукам, лежащим в основе современной техники, знакомить вас с достижениями физико-математических наук и применением их в народном хозяйстве. И наряду с этим «Квант» станет всячески содействовать успешному введению нового учебного курса, рассказывать о развитии, сегодняшнем состоянии и перспективах вычислительной техники, о том, как она используется в различных областях, о связанных с ней проблемах математики и физики. Статьи и заметки на эти темы будут регулярно появляться на страницах нашего журнала.

Мы надеемся, что некоторая, как говорят программисты, «доза алгоритмичности» окажется полезной для наших читателей. От вас же редакция ждет отклики на эти публикации и предложения новых тем.

Желаем успехов в новом учебном году!



Предыстория рождения компьютера

*Доктор физико-математических наук Н. Х. РОЗОВ,
академик Болгарской академии наук Бл. Х. СЕНДОВ*

Сейчас, в конце XX века, уже никого нельзя удивить сообщениями о высоких темпах прогресса в различных научных направлениях и отраслях техники, о быстро растущем числе научно-технических новинок в разных сферах нашей жизни. Констатация этого стала общим местом, а подтверждений тому, одно разительнее другого, известно великое множество.

И все же можно думать, что по стремительности своего развития, по интенсивности и широте проникновения буквально во все области деятельности и быта человека вычислительная техника являет собой один из самых уникальных феноменов. Люди даже среднего поколения отчетливо помнят то время, когда об электронных вычислительных машинах говорили как о чем-то абстрактном и далеком, а сама аббревиатура ЭВМ оставалась многим неизвестной.

Сегодня без компьютеров с их огромными разносторонними возможностями многие реалии жизни — высокоэффективные производственные процессы, глобальное экономическое планирование, тончайшие фундаментальные исследования, удовлетворение многообразных потребностей миллионов людей и т. п.— просто не могли бы существовать.

Современная вычислительная техника резко изменила и сильно возвысила возможности математической науки. Мало того, что сейчас оказались «доступными» многие задачи, которые, будучи в прошлом разрешимы лишь «в принципе», теоретически, на практике оставались непреодолимыми из-за фантастически большого объема нужных вычислений. Самое главное в том, что на базе использования компьютеров все более и более возрастает роль и значение математического моделирования. С каждым днем все новые и новые эксперименты удается заменять «обсчетом на машине», а это дает колоссальный выигрыш в средствах и во времени. Недаром получила распространение такая точка зрения: с рождением современных компьютеров математика стала экспериментальной наукой.

Однако речь ниже пойдет не о современном состоянии вычислительной техники и не о перспективах ее будущего развития и использования. Настоящая статья посвящена некоторым аспектам уже прошедшей истории компьютера, событиям минувших дней.

Эта история представляется нам интересным, содержательным и поучительным конкретным примером диалектического процесса формирования человеческого знания. Каждая из основополагающих идей, в своей совокупности приведших к созданию компьютера, с одной стороны, была порождением острого, оригинального ума, а с другой — являлась естественным и неизбежным продуктом исторической эволюции условий жизни человека, его потребностей, развития науки и техники.

Простейший счетный прибор.

«Машина», которая всегда с тобой

Потребность считать была, вероятно, одной из первых потребностей интеллектуального уровня, которые испытывал homo sapiens уже в начале своего исторического пути. Она предопределялась и стимулировалась насущными проблемами самого существования первобытного человека и прежде всего — постоянной необходимостью знать и учитывать меняющееся количество пищи, скота, зерна и других жизненно важных предметов. Однако счетом человечество овладевало очень медленно, ибо формирование абстрактных понятий «один», «два» и т. д. потребовало аккумулирования тысячелетнего практического, житейского опыта.

В длительном и трудном процессе осознания самой *идеи счета* человеку особенно сильно помогли... его пальцы. Так уж устроена природа, что человек рождается с естественной «счетной машиной» — десятью пальцами на руках — и постоянно, всю жизнь носит ее с собой.

Эта простая, удобная и надежная «счетная машина» обладает в миниатюре всеми способностями компьютера: в нее можно вводить числовую информацию, она помогает производить арифметические операции, сообщает получающийся результат и позволяет при необходимости какое-то время его сохранить. Конечно, продолжительность хранения информации и объем памяти такой «машины», ее вычислительные возможности весьма скромны, хотя и не так малы, как кажется.

В некоторых книгах по занимательной математике описаны весьма искусные приемы, позволяющие «на пальцах» проводить счет до довольно больших чисел и выполнять не только сложение и вычитание, но и умножение. Сейчас это просто забава, фокусы, но даже в XIII веке один из творцов средневековой математики в Европе Леонардо Пизанский, больше известный под именем Фибоначчи, рекомендовал использовать пальцы как вспомогательное средство при счете.

Пальцевый счет сыграл особую роль в развитии математики. Представляется достоверным, что именно десять пальцев рук сперва на практике породили, а затем психологически закрепили привычку людей считать десятками, что привело к возникновению *десятичной* (десятиричной) *системы счисления*. Она постепенно вытеснила другие системы счисления (скажем, двенадцатиричную или шестидесятиричную), применявшиеся некоторыми народами, и стала давно уже общепринятой во всем мире.

Поскольку долго оставлять на пальцах числовую информацию, естественно, невозможно, перед человеком со всей практической актуальностью встала задача изобрести способы обозначать и хранить числа. На заре человечества для этого использовались зарубки и насечки на различных предметах, специальные счетные палочки, камешки, бирки и т. п. Но самый надежный и удобный способ обозначения и хранения чисел появился с возникновением письменности. Кстати, некоторые историки утверждают, что люди научились записывать *цифры* даже раньше, чем буквы.

Выдающимся историческим событием, определившим все последующее развитие математики, явилось открытие *позиционной нумерации*. По-видимому, она родилась около 4000 лет тому назад в древнем Вавилоне. Как жаль, что время не донесло до нас имя того гения, который первым высказал идею при записи чисел специальным образом учитывать место каждой цифры! Несравнимые удобства позиционной нумерации обеспечили ей победу над всеми другими способами записи чисел (например, над хорошо всем знакомой римской системой нумерации); именно она в дальнейшем открыла возможность механизации счета и в конечном итоге — создания компьютера.

Созданием привычной нам *десятичной позиционной нумерации* (системы счисления) мы обязаны древним индусам — это произошло приблизительно полторы тысячи лет назад. Из Индии через арабов в период раннего средневековья эта система нумерации вместе с обозначениями цифр (которые до сих пор называются «арабскими») пришла в Европу, а затем распространилась во все страны.

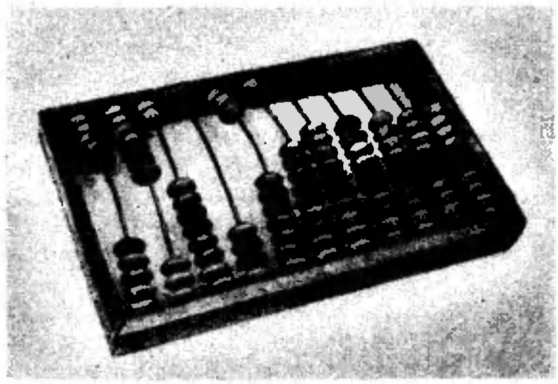
Как считать быстрее и надежнее?

По мере роста разнообразных практических нужд человека, в первую очередь — с расширением внутренней и межгосударственной торговли, увеличивалось и значение различных вычислений в жизни общества, без которых невозможно эти нужды обеспечивать.

Сегодня такие вычисления кажутся совсем простыми — ведь они используют лишь четыре арифметических действия и доступны младшеклассникам! Но не будем забывать, что речь идет об иных временах, когда удобных правил письменного счета «столбиком» еще не существовало, когда люди не знали не только шариковых авторучек, но даже и бумаги.

Великой революцией в математике явилось изобретение *абака*, или, иначе, *счётов*. К сожалению, неизвестно, кто и когда создал этот шедевр, как невозможно и назвать точное число его исторических и национальных разновидностей.

Абак был удобным и простым приспособлением, позволяющим человеку производить арифметические операции над числами путем перемещения по специальным правилам каких-то предметов (счетных марок). Широко известно, что математики древности в геометрии особое значение придавали



Русские счеты.

решению задачи «с помощью циркуля и линейки». Но немногие знают, что аналогичное положение долгое время сохранялось и в арифметике: задача считалась решенной только в том случае, если указано, как соответствующие необходимые вычисления провести на абаке.

В различных странах модификации абака, несмотря на поразительную простоту их устройства (а может быть, именно благодаря такой простоте?), получили широкое признание и использовались в течение столетий. Особенно значительный вклад в распространение абака и методов счета на нем внес известный французский ученый Герберт (950—1003), ставший в конце своей жизни папой римским под именем Сильвестр II.

Лишь в позднее средневековье, после появления в Европе бумаги и по мере распространения и принятия десятичной позиционной системы счисления (в которой легко выполнять письменно арифметические операции), абак утрачивает свое универсальное значение для арифметики. Постепенно он превращается во вспомогательное приспособление, еще какое-то время, так сказать, «технически» обеспечивавшее коммерческие расчеты и т. п. Например, русские счеты до сих пор с успехом помогают в работе кассирам магазинов (в самые последние годы счеты начали уступать свое место, вытесняемые автоматическими кассовыми аппаратами и микрокалькуляторами).

Абак (счеты), конечно, еще нельзя назвать вычислительной машиной. Это всего лишь *счетный прибор*, позволяющий организовать в рациональной форме (альтернативной письменному вычислению «столбиком») выполнение арифметических операций, которые фактически проводит сам человек, в своей голове. Да и перемещение счетных марок, к которым сводится вычисление, человек осуществляет также сам, своей рукой.

Однако с появлением абака была реализована и закреплена основополагающая идея специального устройства, выполняющего неограниченное число операций определенных типов без каких-либо промежуточных записей.

К счетным приборам, помимо абака и счетов, относятся и многие другие приспособления, достаточно оригинальные и интересные. Не будем их здесь все перечислять, а упомянем лишь еще одно, на первый взгляд весьма неожиданное в ряду счетных приборов. Это ... таблицы логарифмов. Не нужно, однако, удивляться! Если подумать, как проводится, скажем, умножение с помощью таблиц логарифмов, то нетрудно убедиться, что их роль в принципе не отличается от роли счетов.

Таблицы логарифмов были опубликованы в 1614 году шотландским математиком Джоном Непером (1550—1617), хотя создал их он много раньше — примерно в начале 90-х годов XVI века. Появившееся вначале как основа своеобразного «счетного прибора», понятие логарифма сыграло особую роль в истории развития всей математической науки.

Первые попытки поручить счет машине

Правила письменного счета в десятичной позиционной системе счисления, несомненно, очень удобны, но от этого вычисления не перестают быть трудоемкими и утомительными, особенно если это длинные вычисления с большими числами. Поэтому с победой десятичной позиционной системы счисления мысль о создании приспособлений, помогающих счету, не потеряла своей притягательности. Более того, дальнейший интенсивный рост потребностей торговли и финансового дела, бурное развитие техники в период становления капиталистического способа производства, астрономические, землемерные, навигационные и прочие расчеты, необходимость конкретного («до числа») решения прикладных математических задач — все это делало задачу освобождения человека от тяжелого бремени счета весьма важной.

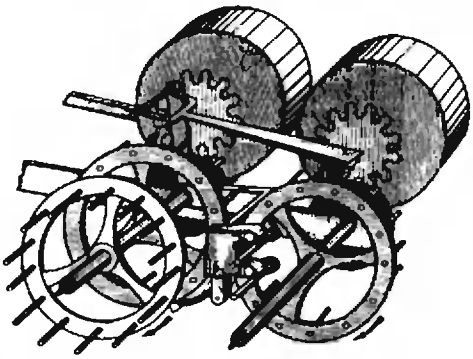
К XVII веку относится следующее чрезвычайно важное событие в истории вычислительной техники — появление считающего устройства.

Долго считалось, что первое такое устройство построил в 1642 году французский математик, физик и философ Блез Паскаль (1623—1662). Однако не так давно было установлено, что впервые, приблизительно в 1623 году, счетный автомат сконструировал немецкий ученый Вильгельм Шиккард (1592—1636), профессор математики и ... восточных языков университета в Тюбингене.

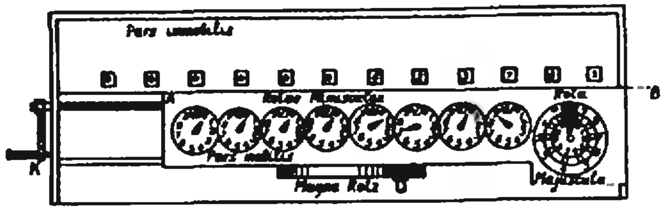
Радикальное отличие *считающего устройства* от счетного прибора состоит в том, что оно само, без участия головы человека, автоматически проводит арифметическую операцию над установленными исходными числами и сообщает получающийся результат. Однако та часть работы, которая связана с составлением плана последовательного проведения различных операций, поэтапного ввода данных перед каждой операцией и списывания промежуточных результатов, остается за человеком.

Важно подчеркнуть и то существенное обстоятельство, что реализация вычислительных операций в считающем устройстве осуществлялась на основе механического движения различных его деталей (например, вращения зацепленных колес) с автоматическим превращением десятка в некотором разряде в единицу следующего разряда (это достигалось за счет различных технических ухищрений).

Изобретение Шиккарда осталось практически никому не известным, а



Деталь машины Паскаля



«Панель управления» машины Лейбница.

автомат Паскаля получил широкую популярность и послужил родоначальником огромного семейства считающих устройств, созданных в течение последующих трех столетий. Интересно отметить, что, хотя само по себе создание таких устройств — проблема скорее инженерная, техническая, в длинном списке имен их создателей значатся многие выдающиеся математики, причем, как правило, именно им принадлежали оригинальные конструктивные решения. Вот лишь несколько примеров.

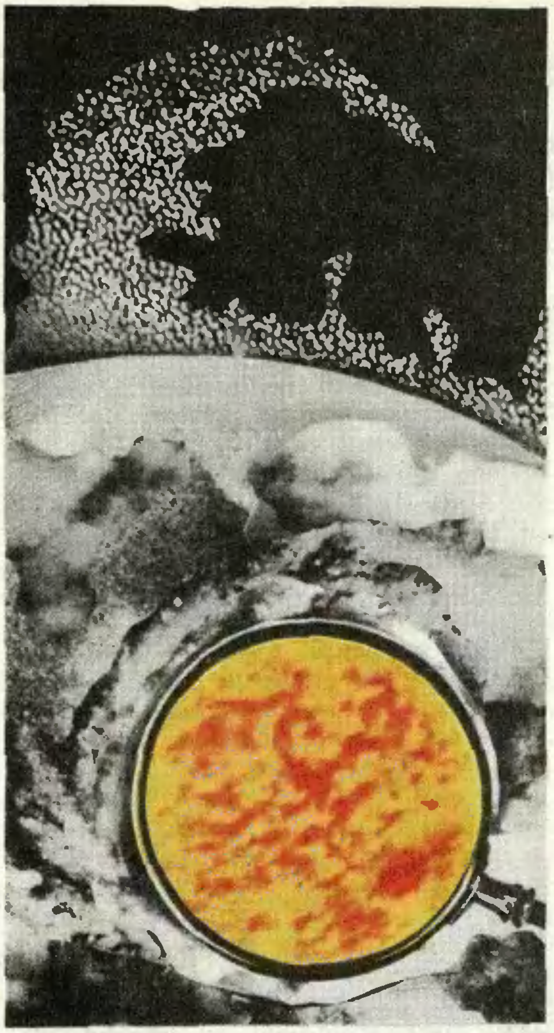
Один из основоположников дифференциального и интегрального исчисления немецкий математик, естествоиспытатель и философ Готфрид Вильгельм Лейбниц (1646—1716) активно занимался созданием и усовершенствованием автоматов для счета на протяжении почти 40 лет своей жизни. Построенное им считающее устройство «умело» выполнять не только сложение и вычитание, как автомат Паскаля, но и умножение и деление. Другими словами, Лейбниц был автором первого в истории *арифмометра* — устройства, позволяющего быстро и удобно совершать все четыре арифметических действия.

Первая *логарифмическая линейка* была придумана в 20-х годах XVII века известным английским математиком Вильямом Оутредом (1574—1660), который, кстати, предложил использовать «крест» $\times$ в качестве знака умножения. Получившая широкую популярность, многократно усовершенствовавшаяся, пережившая века, логарифмическая линейка оказалась верным, удобным и незаменимым помощником в самых разнообразных практических расчетах. Еще сравнительно недавно именно она являлась как бы символом инженерного труда: инженер всегда изображался на снимках и рисунках с неизменной логарифмической линейкой в нагрудном кармане.

Имя русского математика и механика, основоположника петербургской математической школы Пафнутия Львовича Чебышёва (1821—1894) хорошо известно во всем мире: его работы оказали решающее влияние на развитие многих ветвей математики. Заметный след оставил П. Л. Чебышёв и в истории вычислительной техники. Им впервые была высказана (и реализована в его арифмометре) идея *непрерывного* (а не дискретного) преобразования десятка в единицу старшего разряда. Принцип непрерывной передачи десятков приобрел особо важное значение уже в наше время, после возникновения ЭВМ.

XX век ознаменовался дальнейшим резким возрастанием роли вычислений в самых разных областях человеческой деятельности. Считать требовалось многим и считать приходилось много. В первой половине нашего столетия наиболее распространенным в мире считающим устройством был арифмометр. Различные его модификации, выпускавшиеся в разных странах, принципиально не отличались от арифмометра, сконструированного в 1890 году петербургским изобретателем Вильгодтом Теофиловичем Однером (1845—1905). Легкий и небольшой по размерам, простой и удобный в обращении, надежный в работе, арифмометр Однера явился вершиной конструкторского искусства среди многочисленных считающих устройств.

Кому из людей старшего поколения, хоть как-то связанных с вычислениями или обработкой числовых данных, не приходилось иметь дело с классическим арифмометром «Феликс»? Еще так недавно он был основным массовым вычислительным средством, его можно было встретить повсюду. А сегодня «Феликс» — лишь экспонат музея истории науки. Подгоняемая потребностями бытия, вычислительная техника пошла дальше, и нам пришлось проститься с этим верным и привычным помощником. Такие расставания всегда немного грустны, но без них невозможен прогресс науки, они неизбежны...



Конвекция и самоорганизующиеся структуры

Кандидат физико-математических наук
Е. Е. ГОРОДЕЦКИЙ,
В. С. ЕСИПОВ

Ветры и океанские течения, движение материков и потоки солнечной материи... Каждое из этих явлений очень сложно и многообразно. И всё же все они (а также многие другие) имеют характерную общую черту: существенную роль в них играет конвекция — одно из самых красивых явлений в физике макромира.

В последние годы интерес к этому «старому» и, казалось бы, хорошо знакомому явлению резко повысился. Оказывается, конвекция — один из тех процессов, в результате которых системы, первоначально неупорядоченные, приходят в упорядоченное состояние. Рождение порядка из хаоса (или, иначе, самоорганизация) — это фундаментальный механизм эволюции. И понимание конвекции помогает нам продвинуться в понимании этой захватывающей и, в большой степени, все еще таинственной проблемы.

Условия существования конвекции

В узком смысле слова конвекция — это возникновение упорядоченного движения в неравномерно нагретых жидкостях или газах.

При каких условиях возникает такое движение? Обратимся к простому примеру: представим себе, что мы подогреваем снизу плоский горизонтальный слой жидкости. Каким образом может происходить процесс передачи тепла от нижней границы жидкости к верхней?

При малой разности температур ΔT нижнего и верхнего слоев жидкости процесс передачи тепла происходит за счет теплопроводного механизма: более «горячие» молекулы, сталкиваясь с более «холодными», передают им избыток своей энергии, но макроскопическое движение жидкости при этом отсутствует. Однако, когда разность температур достигает определенного критического значения $\Delta T_{кр}$, теплопроводный механизм переноса тепла становится неустойчивым. На смену ему приходит более выгодный для системы конвективный механизм передачи тепловой энергии, связанный с возникновением в жидкости макроскопического движения.

Что значит «неустойчивый»? В каком смысле «более выгодный»?

Давайте разберемся в этих вопросах.

Устойчивость и неустойчивость

Из курса механики мы знаем, как определяется устойчивость равновесия системы: если при отклонении системы от положения равновесия возникают силы, стремящиеся вернуть ее обратно,— равновесие устойчивое (рисунок 1, *а*); если же могут возникнуть силы, стремящиеся увеличить отклонение,— равновесие неустойчивое (рисунок 1, *б*).

Это же утверждение можно сформулировать на другом, энергетическом языке. Для этого заметим, что на рисунках 1,*а* и 1,*б* приведена, в сущности, зависимость потенциальной энергии W ($W=mgh$) от горизонтальной координаты x (от x зависит высота h, на которой находится тело, а следовательно, и его потенциальная энергия). Так вот, положение равновесия механической системы устойчиво, если энергия ее в этом положении минимальна (рисунок 1,*а*), и неустойчиво, если энергия максимальна (рисунок 1,*б*).

Спрашивается: а можно ли непрерывно перейти от ситуации 1,*а* к ситуации 1,*б*? То есть может ли система, первоначально находившаяся в устойчивом состоянии, стать неустойчивой? Ясно, что может. Для этого достаточно, чтобы дно ямы на рисунке 1,*а* «вспучилось». На математическом языке такую ситуацию можно описать, предположив, что зависимость величины W от x имеет вид

$$W(x)=ax^2+bx^4 \qquad (b>0).$$

(Пусть вас не смущает произвольность этого выбора; оказывается, при очень общих предположениях потенциальная энергия вблизи положения равновесия выглядит именно таким образом.) Если $a>0$, функция $W(x)$ имеет минимум в точке $x=0$ (рисунок 2, кривая *I*). Это — точка устойчивого равновесия. Если $a<0$ (кривая *II* на рисунке 2), минимум в точке $x=0$ трансформируется в максимум, и эта точка становится точкой неустойчивого равновесия — система «скатывается» на дно одной из двух образовавшихся ям.

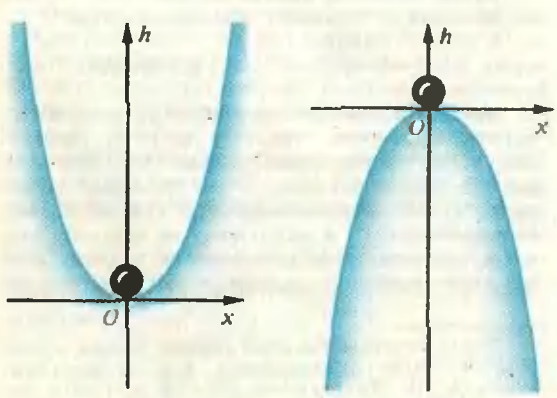


Рис. 1.

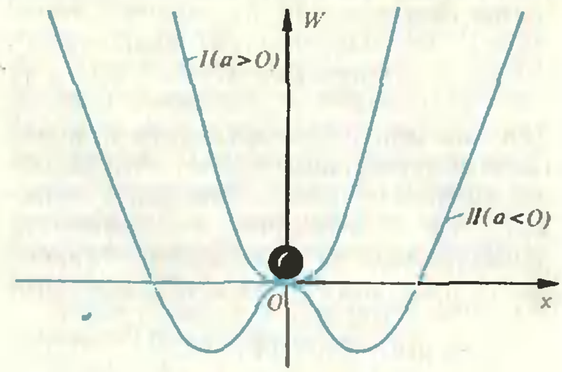


Рис. 2.

При непрерывном изменении коэффициента a мы в точке $x=0$ переходим от ситуации 1,*а* к ситуации 1,*б*.

Приведенный здесь механизм потери устойчивости (изменение знака при x^2 в выражении для W) является совершенно универсальным и с теми или иными изменениями применим к поистине бесконечному числу конкретных ситуаций.

Разумеется, в общем случае потенциальная энергия не сводится к энергии в поле тяготения, а определяется взаимодействием тел, составляющих систему. А для немеханических систем в положении устойчивого равновесия минимум должна иметь не энергия, а некоторая другая величина, в определенном смысле аналогичная энергии.

В каждом конкретном случае найти величину, минимум которой определяет равновесное состояние системы,— задача трудная. Да и правильно выбрать аргумент функции W, относительно которого эта функция минимизируется, совсем не просто. Однако знание общего механизма дает нам путеводную нить. Нам известно теперь, чтó надо искать.

Возникновение конвекции

Вернемся к конвекции. Рассмотрим горизонтальный слой жидкости толщиной L. Пусть на нижней границе поддерживается температура T_1, а на верхней T_2 ($\Delta T=T_1-T_2>0$). Температура внутри слоя линейно зависит от высоты h:

$$T(h)=T_1-\Delta T\,\frac{h}{L}.$$

Так как плотность жидкости при нагревании уменьшается, в нижних, более нагретых, слоях плотность меньше, чем в верхних, — жидкость неоднородна по плотности. Зависимость плотности от высоты имеет вид

$$\rho(h)=\rho_1\left(1+\beta\cdot\Delta T\,\frac{h}{L}\right)$$

(здесь ρ_1 — плотность на нижней границе, β — коэффициент объемного расширения, равный изменению единицы объема тела при изменении температуры на 1 градус). Чем больше ΔT, тем быстрее растет плотность жидкости в слое с ростом h. Иными словами, при увеличении ΔT неоднородность плотности в слое возрастает. И это, в конечном счете, приводит к неустойчивости: более легкая жидкость, находящаяся внизу, стремится всплыть, возбуждая при этом движение во всем слое, — возникает конвекция.

На первый взгляд может показаться странным, что такое движение не начинается сразу, при сколь угодно малом перегреве нижних слоев. Ведь если мы погружаем какое-нибудь тело в жидкость, оно всплывает даже тогда, когда плотность его хотя бы чуть-чуть меньше плотности жидкости.

Чтобы понять, что́ здесь происходит, представим себе, что небольшой элемент жидкости (например, шарик радиуса R) начал двигаться вверх со скоростью v. Обычно можно считать, что объем, а следовательно, и плотность тела по мере подъема не меняются. В рассматриваемом случае выделенный элемент жидкости, поднимаясь и попадая в более холодные слои, уменьшается в объеме, становится более плотным и может потерять плавучесть. В этом все дело!

Прежде чем получить условие потери устойчивости теплопроводного режима в явном виде, сделаем одно очень важное замечание. Имея в виду чисто качественный характер наших оценок, мы совершенно не будем интересоваться в формулах численными коэффициентами, да и вообще какими-либо деталями. Так, мы рассматриваем элемент жидкости в форме шарика, хотя на самом деле он мог бы иметь более сложную форму. Мы будем принимать объем этого шарика равным R^3, а площадь его поверхности — R^2 (вместо $^4/_3\pi R^3$ для объема и $4\pi R^2$ для площади поверхности) и т. д. Этот метод, называемый методом размерных оценок, является важным этапом физического исследования, этапом, на котором проясняется самая суть интересующего нас явления: от каких параметров оно зависит, каковы его пространственные и временны́е масштабы и т. д.*)

Итак, приступим. Введем время τ, в течение которого температура шарика (и, соответственно, его плотность) остается приблизительно постоянной. За это время шарик, двигаясь с приблизительно постоянной скоростью v, успевает подняться с уровня h на уровень $h+\Delta h$, где $\Delta h=v\tau$. Его место на уровне h займет более плотный элемент жидкости, опустившийся с уровня $h+\Delta h$ (рисунок 3). Плотность поднимающегося с уровня h шарика равна $\rho(h)=\rho_1(1+\beta\cdot\Delta T\cdot h/L)$, а плотность опустившегося на уровень h шарика равна $\rho(h+\Delta h)=\rho_1(1+\beta\cdot\Delta T\cdot(h+\Delta h)/L)$. Изменение потенциальной энергии при таком встречном движении равно

$$(\rho(h)-\rho(h+\Delta h))R^3g\cdot\Delta h=$$
$$=-\rho_1\beta\cdot\Delta T\,\frac{\Delta h}{L}\,R^3g\cdot\Delta h=-\rho_1\beta\cdot\Delta T\,\frac{v^2\tau^2}{L}R^3g.$$

Знак «минус» означает, что энергия уменьшается, — значит, такое движение в жидкости выгодно. Надо, однако, учесть еще выделяющееся за счет трения тепло, которое равно работе сил сопротивления $A=F_c\cdot\Delta h$. Сила сопротивления связана с наличием внутреннего трения (вязкости) в жидкости и в случае шарика, движущегося со скоростью v, пропорциональна радиусу шарика и его скорости, а также коэффициенту вязкости жидкости η:

$$F=\eta Rv$$

(здесь мы вновь отбросили несущественный в наших качественных оценках численный коэффициент пропорциональности).

Таким образом, изменение энергии при возникновении в жидкости движения равно

$$\Delta W=\left(-\rho_1\beta\cdot\Delta T\,\frac{v\tau}{L}\,R^3g+\eta Rv\right)v\tau.$$

Оценим время остывания шарика τ. Избыточное количество тепла у шарика (связанное с его перегревом) равно $\Delta Q=\rho R^3c\cdot\Delta T$ (ρR^3 — масса шарика, c — удельная теплоемкость). Количество тепла Δq, перетекающего от горячего тела к холодному за единицу времени через единицу поверхности раздела этих тел (эту величину называют потоком тепла),

*) О методе размерных оценок можно прочитать в главе «Вычисления без вычислений» книги А. Б. Мигдала «В поисках истины» (серия «Эврика» издательства «Молодая гвардия», 1983 год).

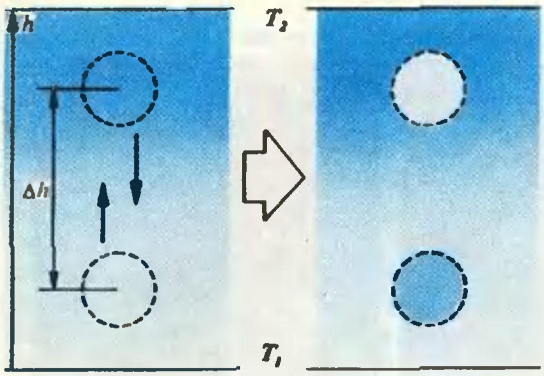


Рис. 3.

пропорционально разности температур ΔT горячего и холодного тела и обратно пропорционально толщине переходного слоя; коэффициент пропорциональности (характеризующий теплопроводные свойства тела) называют коэффициентом теплопроводности и обозначают $\varkappa$. В случае нашего шарика толщина переходного слоя — это радиус шарика, и $\Delta q = \varkappa \cdot \Delta T/R$. Время остывания шарика — это время, за которое все избыточное тепло ΔQ успеет перейти от шарика через его поверхность к окружающей жидкости. Следовательно, время τ определяется условием $\Delta Q = \Delta q \cdot R^2\tau$, откуда

$$\tau = \frac{\Delta Q}{\Delta q \cdot R^2} = R^2\frac{\rho c}{\varkappa}.$$

Комбинацию $\varkappa/(\rho c)$ называют коэффициентом температуропроводности и обозначают χ. Так что $\tau = R^2/\chi$.

Подставив найденное значение τ в выражение для ΔW, получим:

$$\Delta W = R^3\frac{\eta}{\chi}\left(1 - \frac{\rho_1\beta g R^4 \cdot \Delta T}{L\eta\chi}\right)v^2.$$

В соответствии с общим принципом при $\Delta W > 0$ случайно возникшее движение затухает (аналогия с рисунком 1, *а*), а при $\Delta W < 0$ движение продолжается (аналог — рисунок 1, *б*) — состояние покоящейся жидкости (теплопроводный режим) становится неустойчивым. Условие $\Delta W < 0$ выполняется, когда

$$\frac{\rho_1\beta g R^4 \cdot \Delta T}{L\eta\chi} > 1.$$

Обратите внимание на то, как в это неравенство входит размер шарика R: чем больше R, тем охотнее шарик устремляется вверх. Значит, в первую очередь начинает двигаться шарик максимально возможного в данной ситуации размера. Но этот максимально возможный размер, очевидно, по порядку величины равен толщине слоя. Поэтому в последнем неравенстве можно считать $R \approx L$.

Итак, мы получили условие, определяющее начало конвективного движения:

$$\boxed{\frac{\rho_1\beta g L^3 \cdot \Delta T}{\eta\chi} > 1.}$$

Вы видите, что критическая разность температур, при которой происходит срыв теплопроводного режима, определяется параметрами жидкости (вязкостью η, температуропроводностью χ и т. д.), а также толщиной слоя L. Чем больше толщина слоя, тем при меньшей разности температур на нижней и верхней его границах теплопроводный режим сменяется конвективным.

Подставляя в выражение для ΔW значение $R \approx L$, найдем

$$\Delta W = L^3\frac{\eta}{\chi}\left(1 - \frac{\rho_1\beta g L^3 \cdot \Delta T}{\eta\chi}\right)v^2.$$

Наша задача выполнена: мы нашли функцию, минимум которой определяет положение равновесия системы — это $\Delta W(v)$. Когда разность ΔT мала, график $\Delta W(v)$ имеет вид, аналогичный приведенному на рисунке 1, *а*, — минимум реализуется при $v=0$. При ΔT настолько больших, что $\Delta W < 0$, мы переходим к ситуации, изображенной на рисунке 1, *б*, что и означает спонтанный (самопроизвольный) переход жидкости из состояния с нулевой скоростью в состояние со скоростью, отличной от нуля.

Наконец-то структура!

Итак, мы нашли условие потери устойчивости. Но что же произойдет с жидкостью дальше, за порогом неустойчивости?

Прежде всего очевидно, что вся жидкость не может начать одновременно двигаться вверх. Восходящее движение обязательно должно привести к нисходящему. И эти восходящие и нисходящие потоки должны быть как-то распределены в нашем слое.

Оказывается, что система, в которой имеются потоки энергии или вещества (такие системы называются неравновесными), устраивается таким образом, чтобы сделать потери энергии минимальными.*) В рассматриваемом нами случае восходящие и нисходящие потоки жидкости строго упорядочиваются, образуя очень красивую и, что особенно поразительно,

*) Это, по-видимому, весьма общий принцип. Однако в настоящее время строгого доказательства его справедливости не существует.

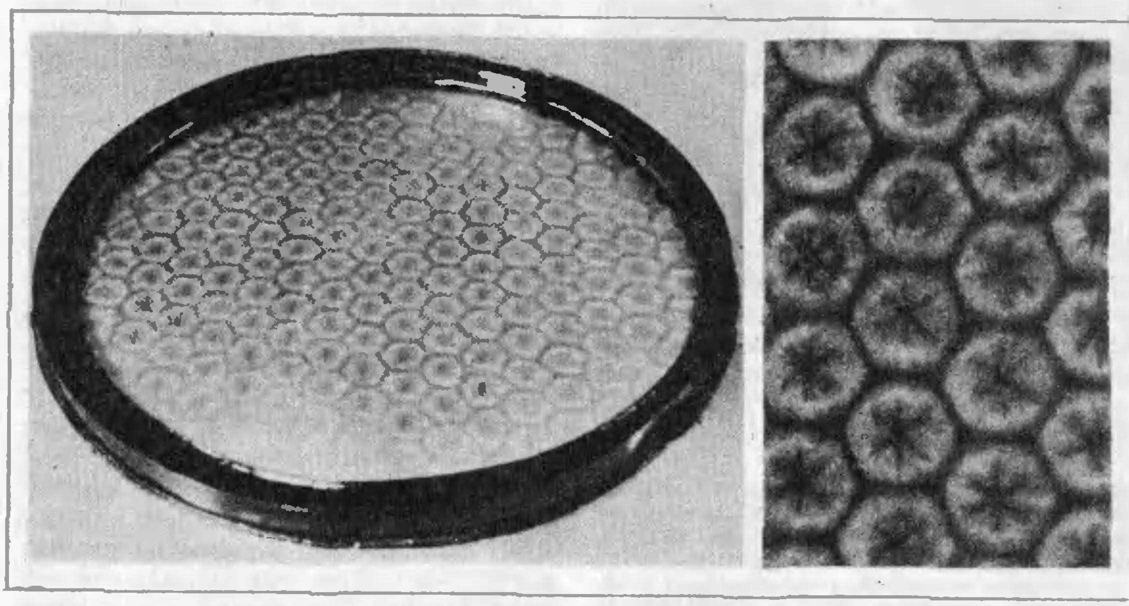


Рис. 4.

очень правильную картину: слой жидкости «разбивается» на призмы (так называемые ячейки Бенара — по имени французского исследователя, впервые наблюдавшего и описавшего это явление), по граням которых жидкость поднимается вверх, а в центре стекает вниз, либо наоборот. Диаметр поперечного сечения призм приблизительно равен L. На рисунке 4 приведена фотография такой структуры (вид сверху; справа — увеличенное изображение тех же ячеек).

Самопроизвольное возникновение структуры, неизменно поражающее всякого, впервые сталкивающегося с этим явлением, — факт, значение которого выходит далеко за рамки проблемы конвекции.

Другие типы неустойчивости

Причиной неустойчивости в рассмотренном нами случае является наличие потока тепла через границы жидкости и неоднородность плотности по высоте. Совершенно аналогичный результат мы получим и в том случае, когда неоднородность плотности вызвана не разностью температур, а различием состава нижних и верхних слоев жидкости. Например, когда вверху находится вода более соленая (а следовательно, более тяжелая), чем внизу. Здесь мы переходим к очень интересному и разнообразному кругу вопросов, связанных с конвекцией в двухкомпонентных жидкостях. Примером такой системы является океан. Реально в океане наряду с неоднородностью по составу существует также и неоднородность по температуре. Комбинация этих факторов приводит ко многим характерным особенностям океана и, в частности, к формированию в нем устойчивых слоев с различной соленостью и температурой (к так называемой стратификации океана).

Чтобы понять, как образуется такая структура, рассмотрим воду, в нижних слоях которой температура и соленость выше, чем в верхних. При этом, даже если плотность воды внизу больше, чем вверху (то есть, казалось бы, равновесие устойчивое, и перенос энергии должен идти обычным теплопроводным способом), тем не менее, возможен срыв устойчивости и переход от теплопроводного режима к конвективному.

Действительно, представим себе, что небольшой элемент жидкости случайно начал двигаться вверх. Предположим, что его температура и соленость не меняются. Так как плотность элемента больше, чем плотность окружающей среды, он вскоре остановится и начнет тонуть, двигаясь обратно к своему положению равновесия. Возникает колебательное движение рассматриваемого элемента, аналогичное колебанию тела, подвешенного на пружине. Такое колебание естественно затухает из-за трения, обусловленного вязкостью жидкости. А теперь учтем, что в процессе подъема выделенный элемент, оказываясь в более холодных слоях, остывает. Это приводит к его «утяжелению», так что, возвращаясь к своему положению равновесия, он имеет скорость бо́льшую, чем та, с которой он начал двигаться (происходит как бы подталкивание грузика, колеблющегося на пружине). Такое подталкивание может скомпенсировать затухание колебаний, и амплитуда колебаний начнет нарастать. Это и есть неустойчивость. (Такую неустойчивость называют колебательной конвекцией.) Размах колебаний растет до некоторого предельного значения, которое и определяет толщину слоя. В результате таких колебаний жидкость внутри слоя активно перемешивается. Температура и соленость воды при этом оказываются в пределах одного слоя почти постоянными. После того как такой слой сформировался, над ним начинает расти другой слой, затем третий и т. д.

Вновь возникает структура. Но на этот раз слоистая.

И еще об одном типе конвективной неустойчивости нам хочется рассказать. Кто из вас не видел, как закручивается вода, выливающаяся из сливного отверстия в раковине.

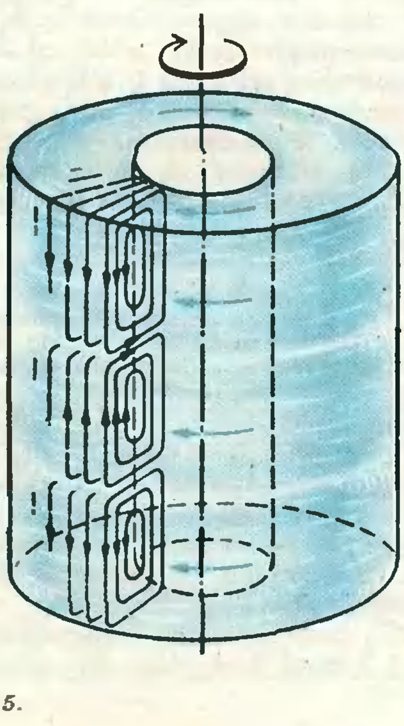


Рис. 5.

Или другой пример: каждый замечал, что чаинки при перемешивании сахара в стакане с чаем всегда собираются к оси стакана. И то и другое является частным проявлением неустойчивости, которая называется неустойчивостью Тейлора (по имени английского ученого Дж. И. Тейлора (1886—1975), занимавшегося исследованиями по аэро- и гидродинамике).

В наиболее чистом виде неустойчивость Тейлора проявляется в жидкости, находящейся между двумя соосными вращающимися цилиндрами. Цилиндры увлекают жидкость за собой, в результате чего она тоже начинает вращаться. Однако при определенной разности угловых скоростей внутреннего и внешнего цилиндров такое чисто вращательное движение жидкости становится неустойчивым, и наряду с вращением появляется движение жидкости в радиальном направлении. Ситуация очень напоминает ту, которую мы рассматривали выше. Разница лишь в том, что в горизонтальном слое «верх» и «низ» были выделены направлением ускорения свободного падения g, здесь же «верх» и «низ» задаются направлением центростремительного ускорения. В первом случае мысленно выделенный элемент жидкости всплывал за счет того, что его плотность не успевала сравняться с плотностью окружающей среды (шарик не успевал остывать). Здесь же скорость вращения элемента жидкости, случайно начавшего двигаться вдоль радиуса, не успевает сравняться со скоростью вращения тех слоев жидкости, в которые он попадает.

В результате развития такой неустойчивости жидкость, вращающаяся между цилиндрами, разбивается на систему «баранок» (рисунок 5; черными стрелками показаны направления течения жидкости внутри вращающихся «баранок»). Вновь возникает упорядоченная структура!

В общем случае можно сказать, что вращение жидкости в одной плоскости, как правило, приводит к ее движению в перпендикулярной плоскости.

(Окончание см. на с. 22)

Введение в стереометрию, или «Аксиоматические игры»

Кандидат педагогических наук
А. Н. ЗЕМЛЯКОВ

Эта статья адресована, главным образом, девятиклассникам, начавшим изучать стереометрию по учебнику академика А. В. Погорелова. Ее можно использовать и учителю при закреплении материала § 14 этого учебника. Суть же рассматриваемых в статье вопросов — о смысле формулировок аксиом, о роли разных аксиом, о логических трудностях, возникающих при доказательстве теорем, — наверное, будет понятна и интересна всем любителям геометрии и логики. Вы как бы совершите прогулку по § 14 книги А. В. Погорелова «Геометрия 6—10» (Г., с. 175—177) и увидите, сколько «разностей» и «интересностей», «хитростей» и «всякостей» заключено всего на трех страницах учебника. Итак, в путь...

1. От планиметрии — к стереометрии

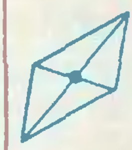
...Думай о смысле, а слова придут сами!
Льюис Кэрролл

Вы уже изучили — прошли — три пространственные аксиомы C_1, C_2 и C_3 (Г., с. 175), а еще, наверное, и три теоремы — 14.1, 14.2 и 14.3 (Г., с. 176—177). Сейчас и мы пройдемся по ним вместе с вами, проверим, хорошо ли и все ли вы поняли на трех первых стереометрических страницах. В доказательстве первой же теоремы —

14.1: Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну

— использовались не только пространственные аксиомы —

C_2: Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой



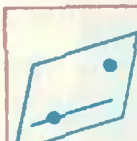
C_3: Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну

— но и две аксиомы, названные в учебнике «планиметрическими», а точнее, «аксиомами планиметрии» (Г., с. 175) — I_1 и I_2:

I_1: Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей

I_2: Через любые две точки можно провести прямую, и только одну

Сразу возникает вопрос: а какой смысл придается этим «аксиомам планиметрии» в стереометрии? Ведь в планиметрии аксиомы I_1 и I_2 описывали основные свойства «принадлежности точек и прямых на плоскости» (Г., с. 4). Полные их формулировки в планиметрии подлиннее, чем приведенные выше:



(I_1): Какова бы ни была прямая (в плоскости), существуют точки (плоскости), принадлежащие этой прямой, и точки (плоскости), не принадлежащие ей

(I_2): Через любые две точки (плоскости) можно провести прямую (в этой плоскости), и только одну (заметьте, что рисуночки к аксиомам мы изменили — «приспособили» к плоскости). Планиметрический ли смысл — справедливость утверждений (I_1) и (I_2) *в каждой плоскости* — имеют аксиомы группы I в стереометрии? Или, может быть, речь в них идет о точках и прямых в пространстве, то есть в только что приведенных формулировках во всех скобках вместо слова «плоскость» нужно поставить слово «пространство» (например, I_1: Какова бы ни была прямая *в пространстве*, существуют точки *пространства*... и т. д.)?

Не торопитесь читать дальше. Попробуйте сами ответить на заданные вопросы, откройте учебник и посмотрите, как применяются аксиомы I_1 и I_2 в доказательстве первой теоремы — 14.1.

Посмотрели? Проследим за ходом доказательства теоремы 14.1 вместе. Вот текст учебника.

> Пусть *a* — данная прямая и *B* — не лежащая на ней точка.

Здесь пока всего лишь введены обозначения к условию теоремы.

> Отметим на прямой *a* какую-нибудь точку *A*. Такая точка существует по аксиоме I_1.

Стоп! Если трактовка аксиомы I_1 планиметрическая, то для ее применения нужно, чтобы прямая *a* лежала в какой-нибудь плоскости. А такой аксиомы — типа «Для каждой прямой существует проходящая через нее плоскость» — в учебнике, увы, нет. Значит, аксиому планиметрии I_1 в стереометрии следует трактовать как «пространственную». Продолжим «расследование». Следующая фраза из доказательства:

> Проведем через точки *A* и *B* прямую *b* (аксиома I_2).

Снова стоп! Планиметрическое толкование требует для применимости аксиомы I_2, чтобы точки *A* и *B* лежали в одной плоскости. Но аксиом, гарантирующих это, у нас нет. Значит, и аксиома I_2 — пространственная, лишь по своей краткой словесной формулировке совпадающая с планиметрической аксиомой I_2 из § 1.

Подведем итог. Аксиомы планиметрии I_1 и I_2 в стереометрии имеют *пространственный смысл* («Думай о смысле!»), а в полную их формулировку нужно включить соответствующие слова («а слова придут сами!»). Вот эти полные формулировки:

I_1: Какова бы ни была прямая *в пространстве*, существуют точки *пространства*, принадлежащие этой прямой, и точки пространства, не принадлежащие ей

I_2: Через любые две точки *пространства* можно провести прямую (*в пространстве*), и только одну

Планиметрические же аксиомы (I_1) и (I_2) в стереометрии уже становятся теоремами:

I_1'. *Какова бы ни была прямая в плоскости, существуют точки этой плоскости, принадлежащие прямой, и точки этой плоскости, не принадлежащие ей (прямой);*

I_2'. *Через любые две точки плоскости можно провести прямую, лежащую в этой плоскости, и притом только одну.*

Теорема I_2', конечно, сразу следует из теоремы 14.2 и пространственной аксиомы I_2. Еще более очевидна справедливость первого утверждения теоремы I_1' (обдумайте!). А вот со вторым утверждением еще нужно повозиться. Сформулируем его как задачу.

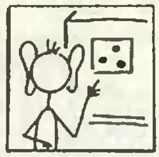
Задача 1. Даны плоскость α и лежащая в ней прямая *a*. Докажите, что существуют точки, принадлежащие плоскости α, но не принадлежащие прямой *a*.

2. От аксиом — к теоремам

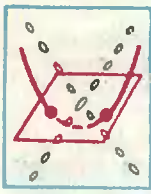
Ты спросишь, кто велит?
— Всесильный бог деталей...
Борис Пастернак

Разобравшись со страницей 175, обратимся к следующим страницам учебника — к доказательствам трех первых теорем стереометрии. Сначала мы предлагаем вам выполнить задание: поставить на схеме (рисунок 1, на котором кружками обозначены аксиомы, квадратиками — теоремы) стрелки, показывающие, какие утверждения используются при доказательстве теорем 14.1, 14.2 и 14.3. Две стрелки, соответствующие использованию в разобранном кусочке доказательства теоремы 14.1 аксиом I_1 и I_2, мы уже обозначили.

Чтобы правильно расставить остальные стрелки, нужно еще раз внимательно просмотреть все детали данных в учебнике доказательств теорем.



А пока вы это делаете, мы разберем доказательство второй теоремы:



14.2. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости

(на рисуночке слева изображено невозможное — прямая не может «проткнуть» плоскость в двух точках!). Итак, даны прямая a и плоскость α, имеющие две общие точки. Рассматривается точка $A \notin a$ (аксиома I_1), а затем плоскость α', проходящая через прямую a и точку A (а это... что?).

Существование такой плоскости гарантируется уже доказанной теоремой 14.1 — и, кстати сказать, именно поэтому на первом шаге доказательства берется точка A вне прямой a (по «аксиоме» I_1), а не вне плоскости α («по аксиоме» C_1). Заметим также, что явной ссылки на теорему 14.1 в учебнике нет — она подразумевается. В соответствии с нашими правилами мы поставим на схеме стрелку от квадратика 14.1 к квадратику 14.2.

В оставшейся части доказательства используются аксиома C_2 (опять неявно — без ссылки) и аксиома I_1, так что всего к квадратику 14.2 на схеме будет проведено четыре стрелки.

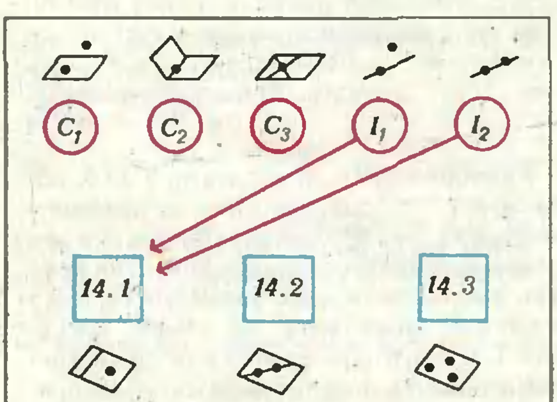
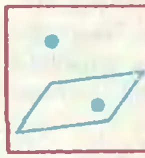


Рис. 1.

А вы уже расставили стрелки? Сверьте свою схему с нашей, данной на с. 18 (см. рис. 4). Выясняется любопытнейшее обстоятельство — от аксиомы C_1:



C_1: Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей

не идет никаких стрелок! Может быть, она совсем и не нужна, раз она не использовалась? Стоп! Подумайте!

Если вы решали все задачи к § 14, то в двух из них вам пришлось использовать эту «странную» аксиому — в каких именно? В действительности аксиома C_1 — самая существенная *именно пространственная* аксиома. Как раз из нее вытекает, что в пространстве есть пересекающиеся плоскости (иначе о чем речь в аксиоме C_2!), существуют не лежащие в одной плоскости точки (см. задачи 1, 5, 10 к § 14), можно рассматривать не лежащие в одной плоскости прямые (см. задачи 2 и 9 к § 14). Сформулируем эти утверждения как задачи:

2. Докажите, что в пространстве существуют две различные пересекающиеся плоскости.

3. Докажите, что в пространстве существуют две прямые, не лежащие в одной плоскости.

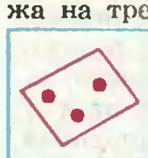
4. Докажите, что в пространстве существуют четыре точки, которые не лежат в одной плоскости.

3. Бег по кругу

Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые: иначе такое бросание будет пустою забавою.

Козьма Прутков

Еще раз рассмотрим теоремы 14.1—14.3. Обратим внимание: первая из них по формулировке (см. п. 1) похожа на третью —



14.3: Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну

В той и другой — по два утверждения: о *существовании* плоскости («можно провести плоскость») и о ее *единствен-*

ности («притом только одну»). Существование плоскости в обоих случаях выводится из аксиомы C_3, причем сначала используются аксиомы группы I (I_1 и I_2 в теореме 14.1, только I_2 — в теореме 14.3). А вот доказательства единственности — совсем несхожи. В теореме 14.1 проводится рассуждение от противного, с использованием аксиомы C_2, а в теореме 14.3 единственность обосновывается прямой ссылкой на аксиому C_3 (единственную из аксиом, говорящую о единственности плоскости).

В связи с этим возникает несколько вопросов. Первый вопрос: нельзя ли в теореме 14.1 тоже сослаться на аксиому C_3? Иначе говоря, для данной прямой a и точки $B \notin a$ мы берем точку $A \in a$, рассматриваем прямую $b = AB$ и плоскость $\alpha = (a, b)$, проходящую через две пересекающиеся прямые a и b. По аксиоме C_3 такая плоскость только одна. Доказана ли тем самым единственность плоскости, проходящей через прямую a и точку B? Ответ: ... — Нет, сначала еще вопрос.

Второй вопрос: нельзя ли доказательство единственности в теореме 14.3 тоже провести рассуждением от противного?

Что же, попробуем. Для не лежащих на одной прямой точек A, B и C мы построили плоскость, их содержащую — это плоскость $\alpha = (AB, AC)$, проходящая через прямые AB и AC (при этом используются аксиомы I_2 и C_3). Допустим, что кроме плоскости α через точки A, B, C можно провести еще одну (отличную от α) плоскость α'. Тогда по аксиоме C_2 плоскости α и α' пересекаются по некоторой прямой a. Значит, точки A, B, C лежат на одной прямой — на a, а это противоречит условию теоремы (сравните с задачей 3 к § 14). Тем самым единственность плоскости ABC, проходящей через точки A, B, C, доказана.

Таким образом, ответ на второй вопрос — положительный. На первый же вопрос ответ отрицательный. Тут нетрудно запутаться и без нашей помощи, поэтому рассмотрим доказательство теоремы 14.1 поподробнее. Указанная ссылка на аксиому C_3 при доказательстве единственности в действительности нужного доказательства не дает — хотя бы потому, что при построении одной плоскости α, содержащей прямую a и точку B, точка A на прямой a была выбрана произвольно. Другой выбор точки — скажем, A' вместо A, — в принципе мог бы дать другую плоскость α', которая «ни с какой стати» не обязана содержать прямую $b = AB$ (это плоскость $\alpha' = (a, b')$, где $b' = A'B$).

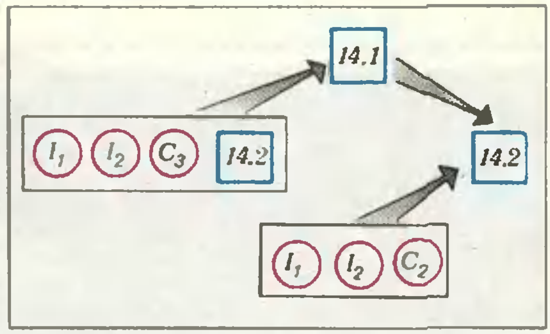


Рис. 2.

Может возникнуть «надежда» повторить при доказательстве теоремы 14.1 в точности то же рассуждение — ссылку на теорему 14.2, — какое применено в доказательстве теоремы 14.3. Именно, если плоскость проходит через прямую a и точку B, то по теореме 14.2 она проходит и через прямую $b = AB$, где A — первоначально взятая на прямой a точка. А по аксиоме C_3 такая плоскость только одна. Доказательство!?

Опять нет. Дело в том, что использованная в приведенном рассуждении теорема 14.2 доказывается с помощью ... как раз теоремы 14.1 (мы это обсуждали в п. 2). Получается, что при доказательстве теоремы 14.1 используется теорема 14.2, а при доказательстве теоремы 14.2 используется теорема 14.1. Если учесть еще и используемые аксиомы, то получится такая «цепочка» следований (рис. 2; см. схему на рисунке 4). Эту цепочку можно замкнуть в «кольцо» (рис. 3). Подобный способ рассуждений, при котором для доказательства какого-то факта «А» используется сам этот факт (возможно, с привлечением какой-то длинной цепочки рассуждений по схеме типа: «А» $\Rightarrow$ «Б» $\Rightarrow \ldots \Rightarrow$ «А», как и выше, замыкаемой в кольцо) — типичная логическая ошибка. В таких случаях говорят, что в доказательстве — «порочный круг».

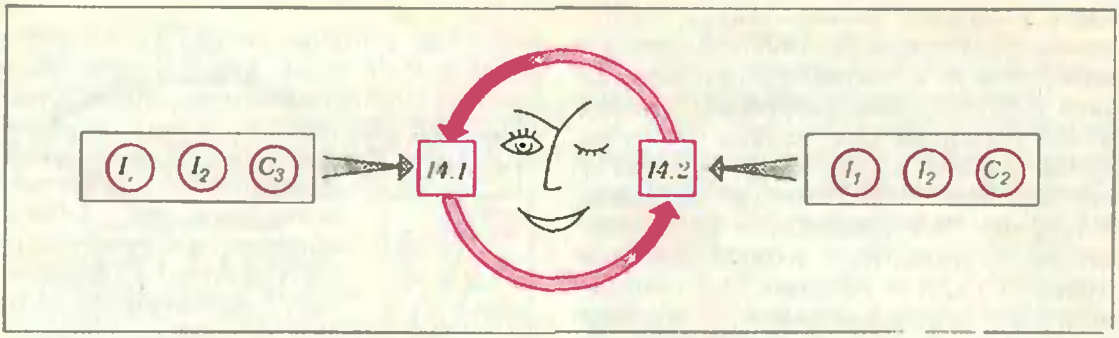


Рис. 3.

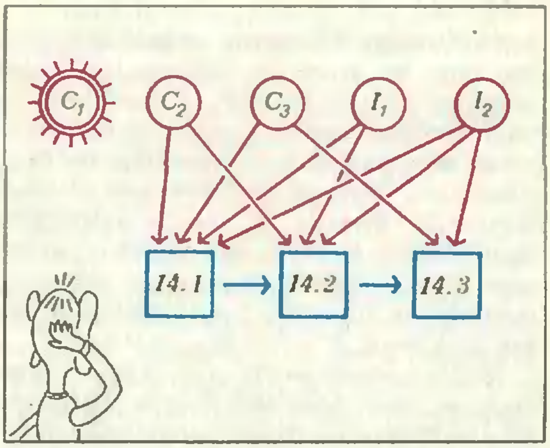


Рис. 4.

Нужно сказать, что ошибка эта — распространенная и коварная; так, в течение многих веков появлялись принадлежащие даже профессиональным математикам «доказательства» аксиомы параллельных (аксиомы V из § 1 учебника А. В. Погорелова, эквивалентной пятому постулату Евклида). Только после тщательного «расследования» в них удавалось обнаружить порочный круг. Но это уже другая тема.

Возможно, у некоторых читателей осталось чувство неудовлетворенности — ощущение, что *«Что-то здесь все-таки есть!»* В самом деле, наш порочный круг можно «разорвать», если разбить теорему 14.1 на две части:

14.1.А. *Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость,* и

14.1.Б. *притом только одну.*

В доказательстве теоремы 14.2 используется только утверждение 14.1.А, так что вполне строгие рассуждения можно провести по схеме, изображенной на рисунке 5.

Как видите, без аксиомы C_2 доказать теорему 14.1 в полном объеме все же не удается.

4. Заключение: вопросы и задачи «напоследок»

В завершение нашей экскурсии по § 14 зададим еще три вопроса к тексту учебника.

I. В приведенном в учебнике решении задачи 5 (с. 176) опущен один логически возможный случай — какой? Как быть в этом случае?

II. В условии разобранной в учебнике задачи 7 (с. 177) говорится о прямых, пересекающих две данные прямые a и b, но не проходящих через их точку пересечения A. Существенно ли это последнее требование? Использовано ли оно в решении?

III. В учебниках А. В. Погорелова (1982—1985 гг. издания) в доказательство теоремы 14.1 попало совершенно лишнее математическое слово — какое? Найдите его.

И «напоследок» — еще четыре задачи близкой тематики.

5. Докажите, что через любую прямую в пространстве можно провести: а) хотя бы одну плоскость; б) хотя бы две различные плоскости; в) бесконечно много плоскостей.

(Окончание см. на с. 28)

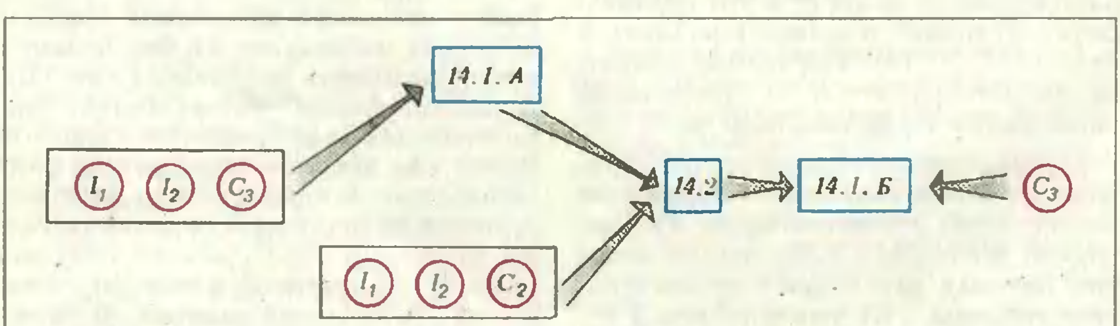
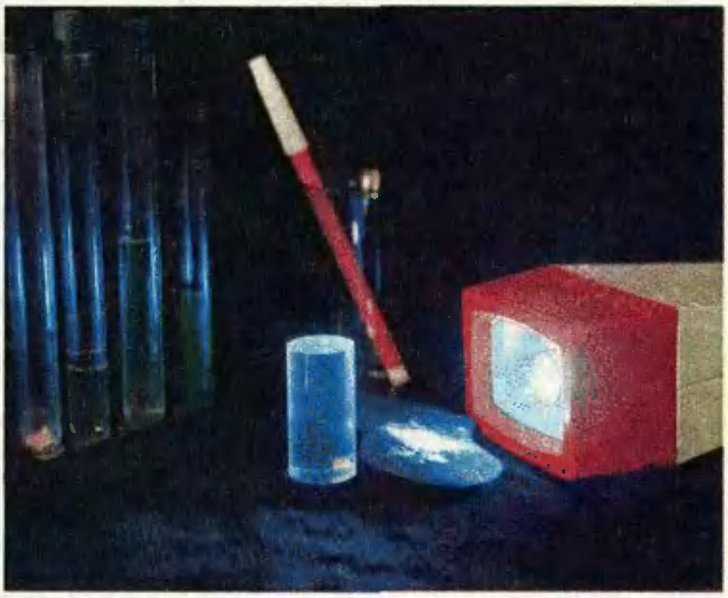


Рис. 5.



Опыты со светящимися веществами

Е. Э. КОЛОМЕЙЦЕВ

Существуют вещества, которые под воздействием света начинают светиться сами, причем, как правило, светом другого цвета (например, при облучении синим светом они испускают желтый или зеленый свет). Явление это называют *фотолюминесценцией* — свечением под действием света (от греческого «фотос» — свет и латинского «люминесценция» — слабое свечение). Основные особенности фотолюминесценции были выявлены благодаря работам известного советского физика С. И. Вавилова и его сотрудников.

Механизм этого явления был выяснен лишь после создания квантовой теории света. Попытаемся очень кратко проиллюстрировать его на примере одной молекулы какого-либо органического люминесцирующего вещества. Такую молекулу можно считать практически самостоятельным «приемником» и «излучателем» света. Сначала она поглощает квант падающего на нее видимого света и переходит в возбужденное состояние. Затем молекула возвращается в исходное состояние, но при этом излучает квант видимого света уже меньшей энергии. Оставшаяся часть поглощенной энергии переходит в энергию теплового движения.

Процесс переизлучения может происходить очень быстро, практически мгновенно. В таких случаях говорят о *флуоресценции*. Стоит прекратить облучение флуоресцирующего вещества светом, и сразу же пропадает его свечение. Так бывает обычно с газообразными и жидкими люминофорами (веществами, способными к люминесценции).

В других случаях вещество может продолжать светиться и после того, как погас возбуждающий источник света (иногда свечение длится до нескольких часов и даже дней). Тогда говорят о *фосфоресценции*. Наибольшее распространение получили кристаллические фосфоресцирующие вещества, называемые кристаллофосфорами.

Впрочем, разделение по длительности послесвечения достаточно условное, поскольку четкой временной границы не существует.

Надо сказать, что люминесценцию можно вызвать не только светом. Энергию, необходимую для излучения света, молекулы вещества могут позаимствовать, например, у электрического поля (электролюминесценция), при химических превращениях (хемилюминесценция), под воздействием проникающей радиации (например, катодолюминесценция, рентгенолюминесценция и тому подобное).

Автор этой статьи — Евгений Коломейцев — сейчас учится в 9 классе специальной (с преподаванием ряда предметов на немецком языке) школе № 57 г. Москвы. Женя принимает активное участие в работе Школы естественных наук при Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова. (*Примеч. ред.*)

Однако мы ограничимся лишь фотолюминесценцией.

Начнем с опытов, в которых исследуются свойства флуоресцирующих жидкостей.

Опыт 1. Нам потребуется источник света и прозрачная кювета. В домашних условиях в качестве источника можно использовать диапроектор, в который вместо диапозитива надо вставить кусочек картона или фольги с вырезанной в центре дырочкой (диаметром 2—3 мм). Это позволит получить слаборасходящийся пучок света. Кюветой может служить флакон из-под одеколона и тому подобное. Если сосуд наполнить чистой водой и посмотреть на него сбоку (как показано на рисунке 1), то луч света в воде практически виден не будет (его видно только на границах вода — стекло). Если же воду заменить керосином, то внутри кюветы мы увидим синевато-белесую полосу. Причина этому — флуоресценция керосина.

Флуоресценцию можно наблюдать и на других растворах: желто-зеленое свечение — для риваноля (продается в аптеке), голубое — для отработанного фотопроявителя. Красивые эффекты переизлучения получаются, если использовать некоторые шампуни (мы испробовали «Яблочный» и «Сосна»), которые содержат флуоресцирующие добавки. Правда, оказалось, что для получения яркой флуоресценции необходимо сильно разбавить шампунь водой. Почему — можно понять, проделав следующий опыт.

Опыт 2. Наполним сосуд раствором шампуня в воде, таким, чтобы яркость флуоресценции была достаточно большой. Затем начнем добавлять понемногу раствор йодистого калия. Яркость свечения будет убывать, пока, наконец, раствор не перестанет флуоресцировать совсем. Явление это носит название тушения люминесценции. Качественно объяснить его можно так. Молекула жидкости, облучаемой светом, находится в возбужденном состоянии в течение ничтожного, по обычным меркам, промежутка времени — порядка 10^{-8}—10^{-9} с. Но и за это малое время она может столкнуться с молекулой тушащего вещества (в нашем случае — йодистого калия) и передать ей часть или всю энергию возбуждения, которая в конечном итоге перейдет в тепло. Таким образом, процесс переизлучения не осуществится.

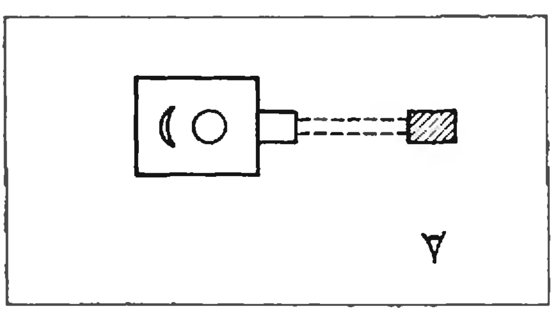


Рис. 1.

Аналогичные события происходят и при большой концентрации флуоресцирующего вещества. Его молекулы интенсивно сталкиваются, и при этом их избыточная энергия (энергия возбуждения) легко переходит в тепло. Именно поэтому растворы с большой концентрацией шампуня слабее излучают свет.

Понятно, что вероятность столкновения между молекулами тем выше, чем выше температура раствора. Значит, повышение температуры тоже оказывает тушащее действие. Это вы можете проверить самостоятельно.

Опыт 3. В предыдущем эксперименте мы тушили флуоресценцию. Теперь попробуем усилить яркость свечения.

Как показывает опыт, в водных растворах довольно сильное тушащее действие оказывают водородные ионы. Попытаемся уменьшить их концентрацию, добавив в раствор шампуня несколько капель раствора щелочи (KOH или $NaOH$) — яркость флуоресценции заметно увеличится.

Опыт 4. Поставим на пути луча от диапроектора синий светофильтр (рис. 2). Раствор риваноля в кювете продолжает светиться характерным для него цветом. То же происходит и при зеленом светофильтре, а вот красный приводит к исчезновению флуоресценции. Почему?

В 1852 году английский физик и математик Дж. Г. Стокс установил, что при фотолюминесценции длина волны излучаемого света больше длины волны возбуждающего света (правило Стокса). Эту закономерность легко понять, если вспомнить объяснение механизма фотолюминесценции, приведенное в начале статьи.

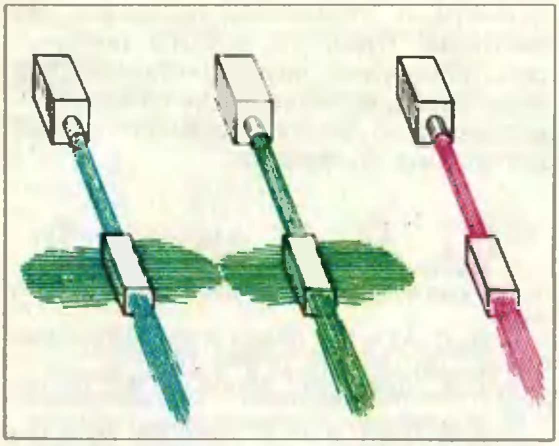


Рис. 2.

Иногда, правда, правило Стокса нарушается, и энергия переизлученного кванта оказывается больше энергии поглощенного кванта. Это означает, что молекула, находясь в возбужденном состоянии, получила дополнительную порцию тепловой энергии, перешла в еще более высокое энергетическое состояние, а затем всю свою избыточную энергию отдала световому кванту.

Вернемся к опыту. Если учесть, что

λ синего света $>\lambda$ зеленого света $>$ $>\lambda$ желтого света $>\lambda$ красного света,

то становится ясным, что в нашем случае закон Стокса выполняется.

* * *

Во всех рассмотренных до сих пор опытах мы наблюдали флуоресценцию жидкостей. Теперь переходим к опытному изучению фосфоресценции кристаллов.

Внешние различия этих разновидностей люминесценции — по длительности послесвечения — обусловлены различиями в протекании самого процесса переизлучения. В первом случае «ячейкой» фотолюминесценции является отдельная молекула. Внутри нее происходят процессы возбуждения и возвращения в невозбужденное состояние, которое и сопровождается излучением света. Во втором же случае в люминесценции участвует не отдельная молекула, а их большое число — практически вся кристаллическая решетка. Объяснение механизма фосфоресценции для этого случая можно найти в литературе, указанной в конце статьи.

К кристаллофосфорам относятся некоторые сульфиды (химические соединения металлов с серой), прежде всего — сульфиды металлов II группы периодической системы элементов: CaS, ZnS, SrS, BaS. Наиболее известный из них — сернистый цинк (ZnS), с которым мы и будем экспериментировать.

Для приготовления сульфида цинка необходимо взять 1 весовую часть порошка серы (серного цвета) и 2 весовые части порошка цинка. Смешав эти вещества, их нагревают. (Из-за резкого запаха выделяющихся газов опыт лучше проводить либо на открытом воздухе, либо в вытяжном шкафу школьного химического кабинета.) Получившийся сернистый цинк перемешивают с клеем и наносят на лист картона — фосфоресцирующий экран готов.*)

Сразу же можно приготовить и другой фосфоресцирующий экран, добавив к первоначальной смеси порошков серы и цинка немного медных опилок.

Затем приступим к опытам.

Опыт 5. Осветим лучом от диапроектора экран с сернистым цинком (сами постараемся на свет не смотреть) и выключим источник. В наступившей темноте в течение нескольких десятков секунд экран будет светиться слабым зеленым светом. Проделаем тот же опыт с экраном, активированным медью. Свечение его будет другим по оттенку, ярче и продолжительнее по времени.

Опыт 6. Оказывается, если фосфóр нагреть, скорость его высвечивания возрастет. Нагреем монету и (после выключения света) приложим ее к обратной стороне экрана. В месте соприкосновения с монетой экран ярко вспыхнет, но зато и быстро погаснет — место монеты в дальнейшем будет отмечено темным пятном на затухающем свете экрана.

Опыт 7. До сих пор мы облучали люминофоры только видимым светом. Интересно, как они поведут себя, если на них подействовать лучами невидимой части спектра, например ультрафиолетовой?

Воспользуемся ультрафиолетовой лампой, продающейся в магазине. В темноте направим пучок ультрафиолетовых лучей на экран из сернистого цинка. Мы увидим, как сернистый цинк ярко вспыхнет.

Способностью люминесцировать в ультрафиолетовых лучах обладают многие вещества, даже те, которые не люминесцируют при обычном освещении.

---

*) Сульфид цинка можно «раздобыть», соскоблив его с елочных игрушек, светящихся в темноте.

Люминесценция нашла свое практическое применение, прежде всего, в лампах дневного света (люминесцентных лампах). В таких лампах, содержащих пары ртути, возбуждается газовый разряд, который сопровождается свечением, содержащим, в основном, ультрафиолетовые лучи. Стенки ламп, покрытые люминофорами специального состава, поглощают ультрафиолетовый свет и превращают его в видимый.

Такие лампы значительно более экономичны, чем лампы накаливания. Кроме того, спектральный состав их света ближе к дневному и поэтому более приятен для глаз.

* * *

Вы познакомились лишь с небольшой частью опытов, которые можно провести с люминесцирующими веществами. Одни из них мы попытались объяснить, другие оставили без объяснения, поскольку оно существенно выходило бы за рамки школьной программы по физике.

В заключение приводим список литературы, которая использовалась при подготовке этой статьи.

1. Н. С. Ахметов. Общая и неорганическая химия.— М.: Высшая школа, 1981.
2. Г. С. Ландсберг. Оптика.— М.: Наука, 1976.
3. С. Э. Фриш и А. В. Тиморева. Курс общей физики, т. III.— М.: Физматгиз, 1961.
4. Элементарный учебник физики/Под редакцией Г. С. Ландсберга, т. III.— М.: Физматгиз, 1958.
5. Журнал «Химия и жизнь»: 1983, № 11 и 1984, № 11.

Конвекция и самоорганизующиеся структуры

(Начало см. на с. 8)

В стакане с чаем, так же как и в рассмотренной нами системе двух цилиндров, вращение в горизонтальной плоскости приводит к вертикальным потокам (рисунок 6). Для выливающейся из раковины воды изменение направления скорости в вертикальной плоскости, возникающее при втекании жидкости в отверстие, приводит к появлению вращения в горизонтальной плоскости (рисунок 7).

Во всех описанных нами примерах мы имели дело с гидродинамической *жидкостной неустойчивостью.* Но упорядоченные структуры возникают и во многих других случаях, когда в системе имеет место достаточно интенсивный поток энергии или вещества.

Условиями возникновения и свойствами таких структур занимается очень молодая и бурно развивающаяся наука — синергетика. Но это — тема для отдельного разговора.

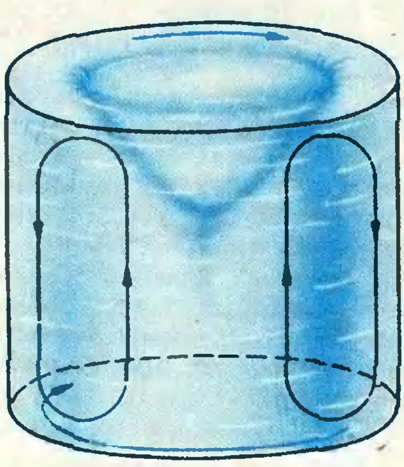


Рис. 6.

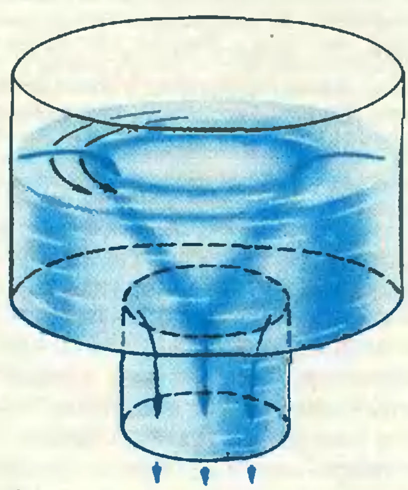


Рис. 7.

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Стробоскопический эффект и измерение ускорения» предназначена восьмиклассникам, «Хаотичность молекулярного движения и тепловые машины» — девятиклассникам, «О музыкальных звуках и их источниках» — десятиклассникам.
Материалы подготовил И. К. Белкин.

Стробоскопический эффект и измерение ускорения

Одной из физических величин, с помощью которой описывается механическое движение тел, является ускорение. Оно показывает, как быстро меняется скорость тела при его неравномерном движении.

Существует много способов опытного определения ускорения. Один из них — так называемый стробоскопический *) метод — связан со стробоскопическим эффектом. Идея этого метода описана в школьном учебнике физики («Физика 8», § 12). Расскажем о нем подробнее. Но сначала — немного о самом эффекте.

Различают два типа стробоскопических эффектов. Первый состоит в том, что при наблюдении быстро сменяющих друг друга отдельных фаз движения (каждая из которых фиксируется в состоянии покоя) возникает иллюзия непрерывного движения. Это связано с инерцией зрения, то есть со способностью клеток сетчатки глаза сохранять зрительный образ объекта в течение некоторого промежутка времени (примерно 0,1 секунды) после исчезновения самого зримого объекта. И если время между появлениями отдельных изображений меньше этого промежутка, образы сливаются и движение воспринимается как непрерывное. На этом, в частности, основано восприятие движения в кинематографе и телевидении.

Стробоскопический эффект второго типа заключается в том, что при определенных условиях возникает, наоборот, иллюзия покоя предмета, который на самом деле движется. Представьте себе, например, какое-то вращающееся тело, скажем колесо со спицами, которое освещается импульсной лампой, дающей короткие, повторяющиеся через равные промежутки времени вспышки. Ясно, что наблюдатель будет видеть колесо только в те моменты, когда оно окажется освещенным. Если частота вращения колеса в точности совпадает с частотой повторения вспышек, колесо будет освещено каждый раз в одном и том же положении. При достаточно большой частоте вращения (и вспышек) глаз будет сохранять это зрительное ощущение в течение промежутков времени между вспышками, и колесо будет казаться неподвижным. Приборы, в которых используется этот эффект, называют стробоскопами *). В современных стробоскопах прерывистое освещение осуществляется с помощью импульсных ламп с регулируемой частотой вспышек.

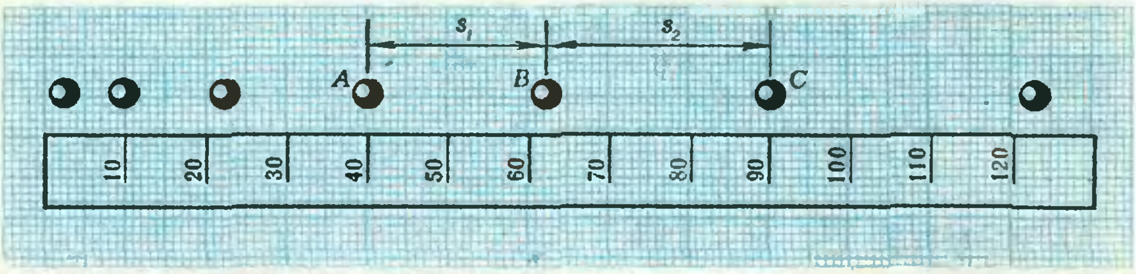
Вернемся к вопросу об измерении ускорений. Если какое-то движущееся тело сфотографировать при стробоскопическом освещении (затвор фотоаппарата должен оставаться открытым во все время движения тела), то на фотоснимке будут видны последовательные положения движущегося тела через равные (и известные) промежутки времени. На этом и основан стробоскопический метод измерения ускорения тел.

Приведенный на с. 24 рисунок сделан с фотографии тела в процессе его прямолинейного равноускоренного движения. Фотоснимок получен при освещении тела импульсной лампой с определенными промежутками времени между вспышками. Как по такому снимку определить ускорение тела?

Пусть в какой-то момент тело находилось в точке A, а через время t,

*) От греческих слов «стробос» — кружение и «скопео» — смотрю.

*) О том, как сделать простейший стробоскоп, можно прочитать в статье С. Л. Гаврилова «Что такое стробоскоп» («Квант», 1983, № 1). (*Примеч. ред.*)



равное промежутку между вспышками, оно переместилось в точку B. Тогда, как известно, перемещение s_1 (по модулю) тела из A в B можно найти по формуле

$$s_1=v_A\tau+\frac{a\tau^2}{2},$$

где v_A — модуль скорости в точке A, a — модуль искомого ускорения. В течение следующего промежутка времени τ тело перемещается из B в C. Его перемещение s_2 определяется аналогичной формулой, в которой начальная скорость $v_B=v_A+a\tau$:

$$s_2=v_B\tau+\frac{a\tau^2}{2}=(v_A+a\tau)\tau+\frac{a\tau^2}{2}=$$

$$=v_A\tau+\frac{3a\tau^2}{2}.$$

Найдем теперь разность перемещений s_2-s_1 за два последовательных равных промежутка:

$$s_2-s_1=\left(v_A\tau+\frac{3a\tau^2}{2}\right)-\left(v_A\tau+\frac{a\tau^2}{2}\right)=a\tau^2.$$

Отсюда для ускорения a получаем

$$a=\frac{s_2-s_1}{\tau^2}.$$

Таким образом, имея стробоскопическую картину движения тела, можно найти его ускорение, измерив длины любых двух соседних отрезков, соответствующих перемещениям тела за одинаковые промежутки времени между вспышками. Нужно, разумеется, знать эти промежутки, а также масштаб снимка.

Для нашего случая время между вспышками равно 0,1 с, а каждой единице длины на рисунке соответствует расстояние в 0,01 м. По этим данным вы, конечно же, сможете определить искомое ускорение тела.

Хаотичность молекулярного движения и тепловые машины

Как известно, тепловые машины отличаются тем, что их коэффициент полезного действия (КПД) огорчительно мал по сравнению с другими машинами. Так, например, КПД паровозов, теперь уже практически не использующихся, не превышал 10 %, а сменившие их тепловозы работают с КПД всего около 25 %. КПД лучших современных тепловых двигателей не превышают 50 %.

Значит, и теперь, через 200 лет после появления первых тепловых машин, половина энергии топлива, сжигаемого в них, расходуется бесполезно? В чем тут дело? Может быть, в том, что ученые и инженеры не сумели придумать и сконструировать «хорошие» *тепловые машины, в которых* энергия топлива использовалась бы более эффективно?

Оказывается, создатели машин в этом не виноваты. Истинного «виновника» низких значений КПД мы найдем, если более внимательно рассмотрим сущность того, что происходит в тепловых машинах.

Беспорядочное и упорядоченное движения. Тепловые машины строят для того, чтобы в них совершалась механическая работа. Делается это обычно так: какой-нибудь газ получает от нагревателя некоторое количество теплоты и расширяется; при этом расширении сила давления газа и совершает работу, например по перемещению поршня или вращению турбины. Другими словами, в тепловой машине происходит преобразование тепловой энергии, то есть энергии *беспорядочного* молекулярного движения, в механическую — энергию *упорядоченного* движения. Это, пожалуй, самое важное, что можно сказать о всякой тепловой машине: на «входе» у нее энергия беспорядочного движения, а на «выходе» — энергия упорядоченного движения.

Возможно ли, чтобы преобразование тепловой энергии в механическую происходило без потерь, то есть с коэффициентом полезного действия, равным единице? Казалось бы, что возможно. Например, если тепло от нагревателя подводится так, что температура газа, а значит и его внутренняя энергия, остается постоянной. Тогда, как это видно непосредственно из первого закона термодинамики

$$Q = \Delta U + A,$$

при условии, что изменение внутренней энергии ΔU равно нулю, работа газа A в точности равна подведенному количеству теплоты Q.

Однако скажем сразу, что так может быть лишь при однократном расширении газа. А любая тепловая машина всегда работает циклически. Но об этом немного позже.

Газ и... упругая пружина. Поведение газа при его расширении очень напоминает поведение сжатой пружины. В самом деле, сжатая пружина всегда готова распрямиться и увеличить свою длину. Точно так же газ всегда готов расшириться и увеличить свой объем. Сила упругости сжатой пружины при ее распрямлении совершает работу. Работу совершает и сила давления расширяющегося газа.

Но есть и существенное различие между газом и пружиной. Пружина может быть не только сжатой, но и растянутой. Растянутая пружина, как и сжатая, всегда стремится вернуться в состояние равновесия. При этом сила упругости тоже совершает работу. Более того, первоначально сжатая пружина, распрямляясь, обычно не сразу возвращается в недеформированное состояние, а сначала превращается в пружину растянутую, которая, в свою очередь, затем становится сжатой, и т. д. (в течение некоторого времени пружина совершает колебания).

А вот газ вести себя подобно растянутой пружине не может. Как бы газ ни расширился, при соответствующих условиях он всегда сможет расшириться еще больше. Газ как бы всегда сжат. Если, например, некоторый газ находится в цилиндре (рис. 1) под давлением p_1, бо́льшим, чем наружное давление p_2, то он будет расширяться, толкая поршень, и это расширение будет продолжаться до тех пор, пока давления слева и справа от поршня не станут равными. Но расширившийся газ не может сам собой сжаться и снова занять тот объем, который он имел до расширения.

Причина такого поведения газа — хаотичный характер движения молекул. Ведь для того чтобы газ самопроизвольно сжался, его молекулы должны «дружно» двинуться в одну сторону, в нашем случае — влево. А этого, как раз, хаотически движущиеся молекулы сделать не могут. Такое «неравноправие» самопроизвольного расширения и сжатия газа — одно из проявлений необратимости молекулярных процессов («Физика 9», § 20).

Почему же низок КПД? Как уже было отмечено, все тепловые машины действуют *циклически*. Это значит, что газ после расширения, при котором сила давления газа совершает работу (в этом и состоит назначение машины), должен быть возвращен в исходное состояние, чтобы снова мог начаться процесс расширения. Если, например, газ, расширяясь, сместил поршень из положения *1* в положение *2*, то теперь его снова нужно вернуть в положение *1*. Для этого расширившийся газ должен быть сжат.

Но, как мы только что видели, сам газ сжаться не может. Значит, это должна сделать внешняя сила, которая совершит определенную работу (сила давления газа совершит такую же работу, но отрицательную). Допустим, что при расширении газа его давление и объем изменяются соответственно кривой *1*—*2* на рисунке 2. Совершенная силой давления газа работа по расширению выражается площадью под этой кривой («Физика 9», § 16). Ясно, что если сжатие

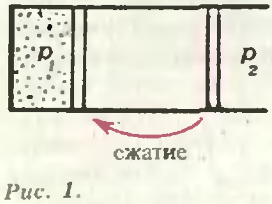


Рис. 1.

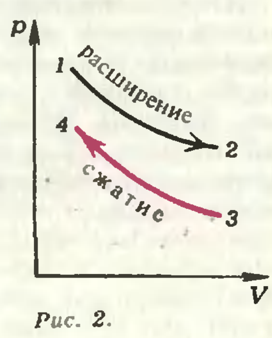


Рис. 2.

газа для возвращения поршня к исходному положению будет проводиться по той же кривой, но в обратном порядке, то и работа будет такой же. Следовательно, работа, совершенная при расширении газа, будет «потрачена» на его сжатие. Такая «машина», конечно, бесполезна.

Для того чтобы тепловая машина все-таки производила полезную работу, нужно, чтобы работа, затрачиваемая на сжатие газа, была меньше работы, полученной при расширении. А для этого сжатие газа надо вести так, чтобы кривая зависимости давления от объема лежала ниже кривой расширения. Например, по линии *3—4* на рисунке 2. Тогда площадь под кривой, а значит и соответствующая ей работа, будет меньше. Разность значений площадей под кривыми *1—2* и *3—4* выразит ту полезную работу, которую можно получить от машины за каждый цикл.

Но если кривая сжатия лежит ниже кривой расширения, то это значит, что газ перед сжатием пришлось охладить. Другими словами, часть количества теплоты, полученного газом от нагревателя, пришлось передать некоторому телу с более низкой, чем у газа, температурой — так называемому холодильнику.

В этом и состоит причина низкого КПД тепловых машин: *все* количество теплоты, полученное газом от нагревателя, нельзя преобразовать в механическую энергию; часть его непременно нужно передать холодильнику. Холодильник для тепловой машины так же необходим, как и нагреватель. Утверждение о том, что невозможен циклический процесс, единственным результатом которого было бы совершение работы за счет тепла, взятого от нагревателя, есть одна из формулировок фундаментального закона природы — второго начала термодинамики.

Итак, вы видите, что истинной причиной низкой эффективности тепловых машин является хаотичный характер молекулярных движений. А эта причина не может быть устранена никакими ухищрениями ученых и инженеров, конструирующих тепловые машины.

О музыкальных звуках и их источниках

Музыкальные звуки, или музыкальные тоны,— это звуки, которые мы слышим тогда, когда их источники совершают гармонические колебания. Амплитуда этих колебаний определяет громкость звука, а частота — его высоту (или высоту тона). Бóльшая амплитуда колебаний соответствует бóльшей громкости, а бóльшая частота — более высокому тону.

Звуки одной и той же высоты можно возбудить множеством разных способов — например, с помощью различных музыкальных инструментов или человеческих голосов. Но интересно, что все эти звуки (даже одинаковые по тону) легко различимы на слух.

В чем здесь дело? Почему звуки, соответствующие колебаниям одной и той же частоты, кажутся нам неодинаковыми? Как нам удается узнать голос знакомого человека среди множества других голосов незнакомых нам людей? Каким образом мы отличаем звучание струны рояля или скрипичной струны, звук аккордеона или флейты? Чтобы это понять, нужно выяснить чтó и как колеблется в источниках музыкальных звуков.

В большинстве музыкальных инструментов колеблющимися элементами являются струны или воздушные столбы. Начнем со струн.

Колебания струны. Что представляют собой колебания струны как целого? Представим себе, что мы возбудили струну так, что по ней побежала поперечная упругая волна. Дойдя до закрепленного конца струны, волна отразится и побежит обратно. Тогда в любой точке струны встречаются две волны, бегущие в противоположных направлениях. Поскольку эти волны когерентны, при их сложении образуется устойчивая интерференционная картина («Физика 10», § 36). В тех точках струны, где колебания, вызываемые обеими волнами, одинаковы по фазе, смещения от положения равновесия будут изменяться с удвоенной амплитудой. Такие точки принято называть пучностями смещения. Точки струны, куда приходят волны, вызывающие колебания с противоположными фазами, остаются в покое. Такие точки называют узлами смещений. Расстояние между ближайшими узлами (или пучностями) равно половине длины волны.

Характерно, что ни узлы, ни пучности вдоль струны не перемещаются во время колебаний. Вот почему установившиеся колебания струны в целом называют *стоячей волной*. Понятно, что стоячая волна может образоваться в струне, закрепленной с двух сторон, только в том случае, если ее длина кратна целому числу полуволн.

Струны в музыкальных инструментах — это проволоки различной длины и толщины, которые могут быть изготовлены из разных материалов. Концы их всегда так или иначе закреплены. Если заставить струну колебаться, то ее колебания будут передаваться окружающему воздуху, в результате чего возникнет звуковая волна. Частота колебаний в звуковой волне такая же, как и частота колебаний струны. От чего и как она зависит?

Опыт показывает (это можно проверить и расчетом), что частота колебаний струны обратно пропорциональна ее длине и диаметру, прямо пропорциональна квадратному корню из силы натяжения струны и обратно пропорциональна корню квадратному из плотности материала струны. Это означает, что длинные, толстые и тяжелые струны колеблются с меньшей частотой, чем короткие, тонкие и легкие.

Рис. 1.

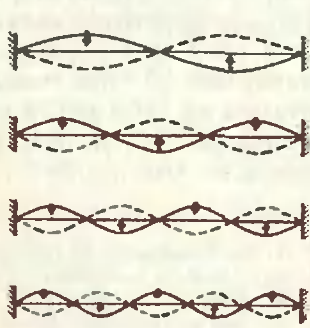


Рис. 2.

Во время игры музыканты не могут, конечно, изменять массу или толщину струн, но в некоторых случаях они могут изменять длину струн, зажимая их в тех или иных местах пальцами. В таких инструментах число струн обычно невелико (у скрипки, например, их всего четыре). В других инструментах длина струн не изменяется, но зато в них достаточно велико число струн различной длины (пианино, арфа).

Тоны и обертоны. Струна, оттянутая строго посередине, будет совершать колебания, показанные на рисунке 1. Через каждые полпериода вся струна оказывается по разные стороны от положения равновесия. При этом на концах струны образуются узлы, а посередине — пучность смещений, так что на длине струны укладывается ровно половина длины волны (не звуковой, а поперечной волны в струне!). Частота таких колебаний и определяет высоту звука, создаваемого струной. Это так называемый *основной тон* струны.

Но это не единственная возможность. Можно возбудить и такие стоячие волны, при которых струна как бы разделяется на две, три и более части (рис. 2), каждая из которых колеблется с частотой, вдвое, втрое и т. д. большей, чем частота, соответствующая основному тону. Такие колебания тоже передаются окружающему воздуху и доходят до слушателя вместе с основным тоном. Называются они *обертонами*. Интенсивность звуков обертонов много меньше интенсивности основного звука, но обертоны как бы окрашивают звук основного тона, придают ему особое качество, называемое тембром. Он-то и позволяет отличить звук одного музыкального инструмента от другого. Зависит тембр от числа возбуждаемых обертонов и от их относительной интенсивности.

Колебания воздушного столба. В духовых музыкальных инструментах (различных трубах) источником звука является колеблющийся столб воздуха, в котором, как и в струне, возникают стоячие волны. Его колебания возбуждаются вдуванием воздуха через узкое отверстие на одном конце трубы. При таком вдувании возникает сжатие воздуха, что и дает начало колебаниям, а затем и волнам (аналогично оттягиванию струны). Прав-

Рис. 3.

да, в отличие от струны, в воздушном столбе возникают не поперечные, а продольные упругие волны.

Труба может быть короткой или длинной, прямой или изогнутой. Другой ее конец может быть открытым или закрытым. Иногда вдуваемый воздух заставляет вибрировать тонкий упругий язычок, который передает колебания воздуху в трубе (кларнет), иногда вибрируют губы исполнителя, вызывая вибрации воздуха в трубе (корнет).

Высота звука здесь, как и в случае струны, зависит от линейных размеров. В открытой трубе основной тон возникает, когда на длине трубы укладывается 1/2 длины волны, а в закрытой — 1/4 длины волны (рис. 3). Высота тона зависит также от того, насколько сильно вдувается воздух, подобно тому как в струне она зависит от силы натяжения струны.

Наряду с основным тоном, в трубе возникают и обертоны с частотами, кратными основной частоте. При этом в открытой трубе возможны только такие обертоны, частоты которых представляют собой четные кратные частоте основного тона, а в закрытых трубах — нечетные кратные. Эти особенности связаны с тем, что на открытых концах трубы (а один из них всегда открытый) возможны только пучности смещений стоячей волны.

Музыкант может изменять действующую длину трубы, закрывая и открывая отверстия, сделанные вдоль трубы, с помощью клапанов или просто зажимая их пальцами (флейта, кларнет, дудка). В тромбоне, например, длина трубы, а вместе с тем и высота звука, изменяется с помощью скользящей U-образной приставки. В орга́не же длины труб неизменны, но зато число труб с самыми разными длинами чрезвычайно велико — до нескольких тысяч.

Введение в стереометрию, или «Аксиоматические игры»

(Начало см. на с. 14)

6. Докажите, что для любой прямой в пространстве можно построить пересекающую ее (в одной точке) плоскость.

7. Докажите, что для любой плоскости в пространстве можно построить пересекающую ее (в одной точке) прямую.

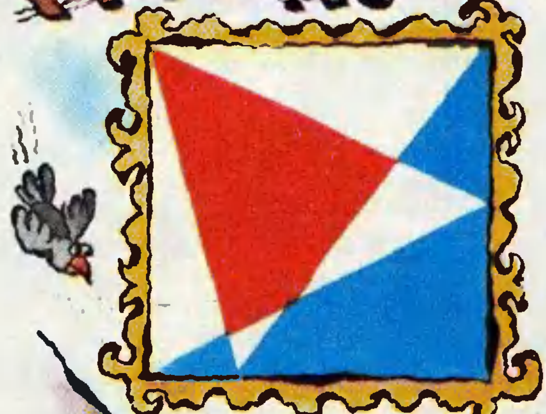
8. Докажите, что для любой прямой в пространстве можно построить не лежащую с ней в одной плоскости прямую.

Сформулированные в статье задачи 1—8 составляют своеобразный «практикум по применению аксиом». Их решение, как решение многих задач из начальных, «вводных», разделов самых разнообразных аксиоматических теорий, можно рассматривать как определенную «игру по правилам». Цель «игры» — все доказать, «правила» состоят в том, что можно использовать только принятые аксиомы (и, конечно, уже выведенные из них факты). Надо сказать, что наши задачи, отчасти сознательно, «перепутаны» так, что относительно трудная задача может предшествовать более легкой и как раз помогающей решать предшествующие. Так что вам есть с чем «повозиться».

Последнее замечание. Не исключено, что в разумной степени педантичный склад ума заставит вас задуматься над весьма примечательным вопросом: а почему вообще существуют прямые (а вслед за ними — и плоскости)??? В аксиомах об этом говорится, но ... все встанет на свои места только после добавления еще одной аксиомы — назовем ее «нулевой»:

✳ ✳	0: *На плоскости* (в планиметрии) *или в пространстве* (в стереометрии) *существуют хотя бы две различные точки.*

Квант для младших школьников



Задачи

1. Петя гостил у бабушки. В субботу он сел в поезд и приехал домой в понедельник. Петя заметил, что в этот понедельник число совпало с номером вагона, в котором он ехал, что номер его места в вагоне был меньше номера вагона и что в ту субботу, когда он садился в поезд, число дня было больше номера вагона. В каком вагоне и на каком месте он ехал?

2. Какая часть площади квадрата больше (см. рисунок): закрашенная красным цветом или закрашенная синим цветом?

3. Сосульки на крышах домов, как правило, висят вертикально, а на ветках деревьев часто образуют такие «веера», как на рисунке. Почему?

4. Расположите в кружках звезды первые 11 натуральных чисел так, чтобы сумма четырех чисел в вершинах каждого из пяти секторов равнялась 25.

5. Докажите, что из 18 последовательных трехзначных чисел хотя бы одно делится на сумму своих цифр.

Эти задачи нам предложили
С. В. Дворянинов, В. В. Произволов, Д. А. Ракчеев, Н. И. Авилов, С. Л. Елисеев.

Криптограмма Жюля Верна

Г. А. ГУРЕВИЧ

Это понимали все. Если документ не удастся расшифровать, положение осужденного безнадежно.
Жюль Верн. Жангада*)

Тайна. Зашифрованный документ. Разгадка шифра, открывающая дорогу к богатству или спасающая человеческую жизнь. Это ли не благодатный сюжет приключенческой повести или романа! Классические образцы этого жанра — рассказы «Золотой жук» Эдгара По и «Пляшущие человечки» Артура Конан Дойла.

Таинственные документы, содержание которых выясняется лишь в конце произведения, — излюбленный прием и Жюля Верна. Достаточно вспомнить его роман «Дети капитана Гранта», «Путешествие к центру Земли». Пожалуй, менее известен роман Жюля Верна «Жангада» (Восемьсот лье по Амазонке)». В «Жангаде» множество любопытных географических, исторических и этнографических фактов, прекрасны описания животного и растительного мира Амазонки. Однако наиболее увлекательны те главы, которые посвящены расшифровке документа, содержащего исповедь одного из участников преступления, совершенного на алмазных рудниках за двадцать три года до описываемых в романе событий.

Роковое стечение обстоятельств приводит на скамью подсудимых Жоама Дакосту. Большой срок прошел с момента совершения преступления, и Жоам не в силах отвести выдвинутое против него обвинение. Только расшифровка документа может спасти ему жизнь. Такова фабула. А вот текст, который должен быть расшифрован:

СГУЧПВЭЛЛЗИРТЕПНЛНФГИНБОРГ
ЙУГЛЧДКОТХЖГУУМЗДХРЪСГСЮДТ
ПЪАРВЙГГИЩВЧЭЕЦСТУЖВСЕВХАХ
ЯФБЬБЕТФЗСЭФТХЖЗБЗЪГФБЩИХХ
РИПЖТЗВТЖЙТГОЙБНТФФЕОИХТТЕ
ГИИОКЗПТФЛЕУГСФИПТЬМОФОКСХ
МГБТЖФЫГУЧОЮНФНШЗГЭЛЛШРУД
ЕНКОЛГГНСБКССЕУПНФЦЕЕЕГГСЖН
ОЕЫИОНРСИТКЦЬЕДБУБТЕТЛОТБФЦ
СБЮЙПМПЗТЖПТУФКДГ.

*) Библиотека приключений.— М.: Детская литература, 1967, т. 9.

За разгадку рьяно берется судья Жаррикес. «Будем действовать по системе, — объявляет он, — без системы нет логики, а без логики нет успеха». А в успехе судья не сомневался. Он решил воспользоваться методом, блестяще описанным Эдгаром По и основанном на сопоставлении частоты использования различных знаков шифра и букв в обычном тексте:

«... расставив по порядку буквы нашего языка от наиболее к наименее употребительным, я составил азбуку и подставил новые буквы в документ, по принципу нашего бессмертного аналитика Эдгара По, а затем попробовал его прочесть... И представьте, у меня ничего не вышло».

Скрупулезный анализ текста приводит судью к уверенности, что ключом к шифру является число. Он подробно объясняет сыну обвиняемого Маноэлю, как был зашифрован документ:

«Давайте возьмем фразу, все равно какую, ну хотя бы вот эту: «У судьи Жаррикеса проницательный ум». А теперь я возьму наудачу какое-нибудь число, чтобы сделать из этой фразы криптограмму. Предположим, что число состоит из трех цифр, например, 4, 2 и 3. Я подписываю число 423 под строчкой так, чтобы под каждой буквой стояла цифра, и повторяю число, пока не дойду до конца фразы. Вот что получится:

У СУДЬИ ЖАРРИКЕСА ПРОНИЦАТЕЛЬНЫЙ УМ
4 23423 423423423 42342342342342 34

Будем заменять каждую букву нашей фразы той буквой, которая стоит после нее в алфавитном порядке на месте, указанном цифрой. Например, если под буквой *А* стоит цифра 3, вы отсчитываете три буквы и заменяете ее буквой *Г*.

Если буква находится в конце алфавита и к ней нельзя прибавить нужного числа букв, тогда отсчитывают недостающие буквы с начала азбуки.

Доведем до конца начатую криптограмму, построенную на числе 423 — взятом произвольно, не забудьте! — и фраза, которую вы знаете, заменится следующей:

Ч У Ц И Ю Л К В У Ф К Н И У Ч У Г С Е К Щ Ц Ф И П Ю Р Я Л Ц Р».

После того как судья приходит к выводу, что криптограмма основана на числе, его уверенность в возможности расшифровки документа сменяется полным пессимизмом. Подсчет, проведенный Жаррикесом, показывает, что поиск ключа перебором всевозможных комбинаций, состоящих не более чем из 10 цифр, потребует более трех веков! Одна попытка сменяется другой, и, наконец, судья из аналитика превращается в игрока, пытающегося наудачу отгадать заветное число.

Наступает день казни. Жоама Дакосту ведут на виселицу...

Все оканчивается благополучно. Выручает счастливый случай. Другу Жоама удается узнать, что автора криптограммы звали Ортега. Поставив буквы *О, Р, Т, Е, Г, А* над последними шестью буквами документа и подсчитав, на сколько эти буквы по алфавиту сдвинуты относительно букв криптограммы, судья, наконец, находит ключ к документу:

О Р Т Е Г А
4 3 2 5 1 3
Т У Ф К Д Г

Жюль Верн — великий писатель, и ни у кого из читателей нет сомнения, что без счастливой случайности отгадать число 432513 — невозможно!*)

Ну, а теперь сообщим читателю, что Жаррикес мог расшифровать криптограмму, и не дожидаясь счастливой случайности. Самое удивительное то, что судья прошел практически весь путь до отгадки. Как говорится, ключ лежал у него в кармане.

Вернемся к тексту романа. Вот рассуждения Жаррикеса, ведущие к решению задачи: «Я уверен, что в документе упоминается Жоам Дакоста. Если бы строчки были разделены на слова, то мы могли бы выделить слова, состоящие из семи букв,

(Окончание см. на с. 34)

*) В послесловии к роману приводится следующий интересный факт: «Писатель ...получил письмо от своего приятеля, профессора Мориса д'Оканя, узнавшего, что одному студенту Политехнической школы удалось прочесть криптограмму, на которой держится весь замысел «Жангады». Роман еще печатался в журнале, и потому было не поздно исправить досадную оплошность. Жюль Верн спешно подготовил для отдельного издания более сложную перестановку букв, гарантирующую от преждевременности прочтения документа... Пожалуй, ни в каком другом произведении Жюля Верна шифрованный документ не составлен столь замысловато».

«Быть может, потомство будет признательно мне за то, что я показал ему, что древние не все знали, и это может проникнуть в сознание тех, которые придут после меня».

П. Ферма

Великий французский математик Пьер Ферма (1601—1655) был юристом, а математике он уделял свое свободное время, занимаясь теорией чисел, геометрией, алгеброй и теорией вероятностей.

Свои открытия Ферма не публиковал. О них мы знаем по его письмам другим математикам того времени: Б. Паскалю, Р. Декарту, Б. Кавальери, а также по записям на полях книг.

Более подробно о П. Ферма и его работах можно прочитать в «Кванте»: 1976, № 8, с. 2; 1978, № 8, с. 18; 1979, № 12, с. 31; 1984, № 3, с. 18.

Натуральный ряд

Легенда повествует, что натуральный ряд — последовательность целых положительных чисел: 1, 2, 3, ... — был подарен людям Прометеем. Но на самом деле изобретение натурального ряда было одним из первых и величайших достижений человеческой мысли, родившихся из практики. История возникновения натурального ряда началась задолго до изобретения письменности. Потребовалось множество веков, чтобы понять, что в этом ряду нет наибольшего числа. Долгое время думали, что счет возможен только в определенных пределах, за которыми начинается «тьма». Вавилоняне верили, например, что существует некое фантастическое число «левиафан», за которым простирается то, что не может быть сосчитано. Только в III веке до нашей эры древнегреческий математик Архимед в книге «Псаммит» («Исчисление песчинок») показал, что сколь угодно большое количество песчинок все равно может быть сосчитано, так как натуральный ряд может быть неограниченно продолжен, и каждое следующее число может быть определенным образом записано и названо. Таким образом пришли к пониманию того, что натуральных чисел бесконечно много. Именно этот факт и подразумевают математики, когда говорят, что множество натуральных чисел бесконечно.

Ну, а что можно сказать относительно простых чисел — конечно или бесконечно их множество? В «Началах» Евклида (III век до н. э.) показано, что не существует наиболь-

Полезные формулы

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{1}{2}\,n(n+1)$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{1}{6}\,n(n+1)(2n+1)$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{1}{4}\,n^2(n+1)^2$$

шего простого числа, откуда следует бесконечность множества простых чисел и, разумеется, множества натуральных чисел. Вот остроумное доказательство этого факта. Пусть p — простое число. Перемножим все простые числа до p, включая само p, и к этому произведению прибавим единицу. Получим число $2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot p+1$. Это число, большее p, будет или простым, или составным. Если оно простое, то тем самым доказано, что существует простое число, большее p. Если же оно составное, то оно должно делиться на некоторое простое число; но ни на одно из простых чисел 2, 3, 5, ..., p оно не делится — при делении на эти числа в остатке получается 1. Значит, оно должно делиться на простое число, большее, чем p. Итак, и в этом случае мы должны признать, что существует простое число, большее p. Но это и означает, что не существует наибольшего простого числа.

Сам термин «натуральное число» впервые был употреблен римским философом Боэцием (ок. 480—524), но стал общеупотребительным после того, как был включен французским математиком Д'Аламбером (1717—1783) в «Энциклопедию».

В XIX веке математики потратили много усилий для уточнения и формализации основных понятий. В 1880 году немецкий математик Дедекинд предложил аксиоматическое определение натурального ряда. Позднее систему аксиом предложил итальянский математик Пеано, в честь которого этот набор аксиом натурального ряда сейчас называется «аксиоматикой Пеано».

В. В. Мадер

Полезные формулы

$$1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

$$1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(2n-1)(2n+1)$$

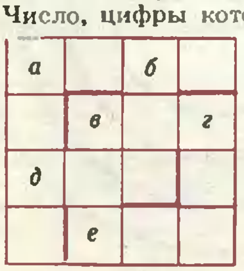
$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

Числовые головоломки

Кросснамбер

По горизонтали: *а*) Число, цифры которого являются последовательными и расположены в порядке возрастания; *в*) число, кратное 9; *д*) полный квадрат; *е*) число, кратное 36.

По вертикали: *а*) Число, цифры которого являются последовательными и расположены в порядке убывания; *б*) квадрат простого числа; *в*) полный куб; *г*) степень числа 2.



Н. К. Антонович

Одинаковые цифры при умножении

Может ли при перемножении двух двузначных чисел получиться четырехзначное число, все цифры которого одинаковы?

Ф. К. Кадаров

Одинаковые цифры при сложении

Можно ли подобрать такое натуральное число A, а затем так переставить в нем цифры, чтобы при сложении полученного числа с числом A суммой оказалось число, записываемое 1985 девятками: 99...999?

М. Байрамов, десятиклассник из Баку

Арифметические ребусы

Н. К. Антонович

(Начало см. на с. 30)
как и фамилия Дакоста, и, пробуя их одно за другим, может быть и отыскали бы число, являющееся ключом криптограммы».

Не ясно, почему отсутствие разделения текста на отдельные слова кажется судье непреодолимым препятствием. На самом деле оно только увеличивает объем необходимого перебора. Маноэль возражает судье: «Ну, что ж! Если имя Дакосты упоминается, тогда, принимая одну за другой каждую букву этих строк за первую из тех семи, что составляют его имя, мы в конце концов найдем его».

Вот он — прямой путь к решению задачи! Перебор не так уж велик. Текст состоит из 252 букв. Следовательно, необходимо перебрать максимум 246 вариантов. В один прекрасный момент, записав над фрагментом *ЙБНТФФЕ* слово *ДАКОСТА*, мы определили бы последовательность цифр 5134325. Естественно предположить, что последняя цифра 5 — начало следующего периода:

Д А К О С Т А
... 5 1 3 4 3 2 5 1 3 4 3 2 5 1 3 4 ...
... *Т Г О Й Б Н Т Ф Ф Е О И Х* ...

Вместо ключа 432513 мы нашли его циклическую перестановку 513432, что ни в коей мере не мешает расшифровке текста.

И, наконец, обсудим следующий вопрос. Мы имели представление о содержании документа и поэтому смогли угадать слово, в него входящее. По этому слову и была проведена расшифровка. А как быть, когда содержание документа неизвестно?

Есть несколько путей. Можно, как и раньше, пытаться отгадать какое-нибудь слово (либо часть слова), входящее в документ. (В текстах часто встречаются слова «который», «тогда», «если», «что» и т. д.; приставки «при», «пре», «под».) Такой поиск может значительно увеличить объем перебора, однако шансов на успех достаточно много. По-видимому, более рациональным путем является проведение анализа частоты использования различных букв в криптограмме. Но как же так?! Ведь Жаррикес прямо говорит, что если ключом к шифру служит число, такой путь неприемлем: «Что же из этого следует? Что значение каждой буквы определяется случайно поставленной под ней цифрой, и буква в криптограмме никогда не обозначает одной и той же буквы текста.»

Рассмотрим следующее устройство для кодирования (рис. 1). Предположим для простоты, что ключом шифра служит трехзначное число. На четырех концентрических кругах, меньший из которых неподвижен, а остальные могут вращаться относительно своего центра, выпишем буквы алфавита. Пусть в качестве ключа выбрано число 259. Повернем первый круг против часовой стрелки на две буквы, второй — на пять букв, а третий — на девять букв (рис. 2). Кодирование производится следующим образом. Первую букву текста находим на неподвижном круге и вместо нее записываем соответствующую ей букву первого круга, вместо второй буквы текста — соответствующую ей букву второго круга и т. д., вместо $3k+i$

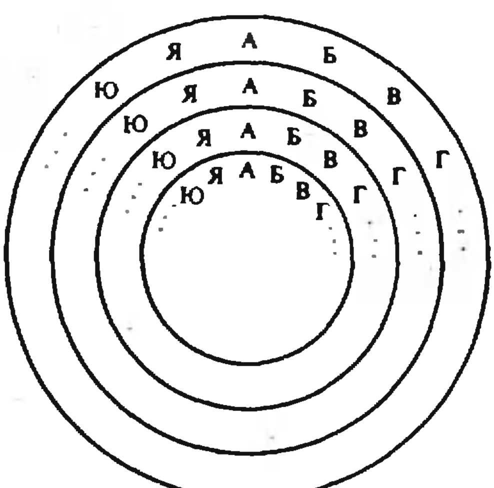


Рис. 1.

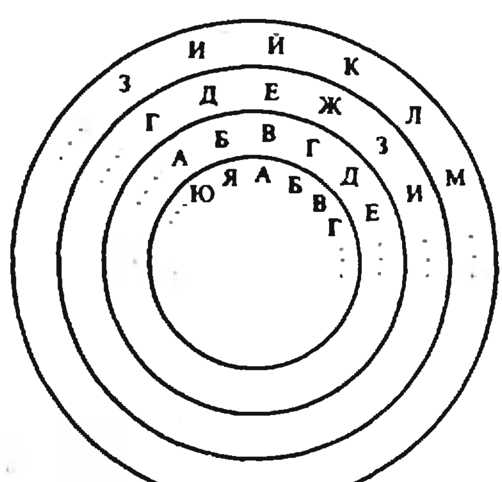


Рис. 2.

Таблица 1

№ набора	А	Б	В	Г	Д	Е	Ж	З	И	Й	К	Л	М	Н	О	П	Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я
1	1	0	0	2	3	0	1	0	3	0	0	0	2	1	1	0	1	4	8	0	4	2	2	1	0	0	1	2	0	2	0	1
2	0	1	0	9	1	3	0	1	2	0	0	4	0	0	1	1	1	4	2	1	5	3	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0
3	0	3	4	0	1	3	2	2	1	1	3	2	1	2	4	2	2	0	2	4	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	2	0	0	0	3	0	3	1	2	3	0	0	4	1	0	0	2	6	5	0	1	1	3	2	0	1	0	1	0	1	0
5	1	6	0	4	1	1	4	1	0	2	0	1	1	0	4	5	2	2	2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	2	2	0	0
6	0	0	2	5	0	5	1	2	3	1	1	2	1	3	1	2	1	2	1	1	3	3	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0

($i=1, 2, 3$; $k=0, 1, 2, \ldots$) буквы текста — соответствующую ей букву i-го круга.

Из самого процесса кодирования следует, что если разница между номерами мест, на которых стоят любые две буквы текста, кратна 3, то при их кодировании используется одна и та же цифра. Поэтому утверждение Жаррикеса о том, что буква в криптограмме никогда не обозначает одной и той же буквы текста — ошибочно.

Теперь перейдем к расшифровке. Предположим, мы знаем, что ключ — трехзначное число. Становится ясно, что для нахождения первой цифры этого числа надо провести анализ набора, состоящего из первой, четвертой, ..., $3k+1$-й, ... букв текста; для определения второй цифры — набора, состоящего из второй, пятой, ..., $3k+2$-й, ... букв; для определения третьей цифры — набора, состоящего из третьей, шестой, ..., $3(k+1)$-й, ... букв.

Остается выяснить вопрос: как быть, когда неизвестно, из какого количества цифр состоит ключ? Здесь уже не обойтись без перебора. Сначала предполагаем, что ключ — двузначное число, затем — трехзначное и т. д., — до тех пор, пока текст не будет расшифрован.

Пропуская промежуточные варианты, сразу рассмотрим последовательность расшифровки нашей криптограммы для случая, когда ключ — шестизначное число.

Весь текст криптограммы разбиваем на шесть наборов букв по правилу, описанному выше*), и подсчитываем, сколько раз буквы алфавита входят в каждый из наборов. Результаты подсчетов приведены в таблице 1.

*) В первый набор входят 1-я, 7-я, ..., $6k+1$-я,... буквы; во второй набор — 2-я, 8-я, ..., $6k+2$-я,... буквы; ...; в шестой набор — 6-я, 12-я, ..., $6(k+1)$-я,... буквы, где $k=0, 1, \ldots, 41$.

В каждом наборе — всего по 42 буквы: этого, конечно, маловато для того, чтобы сделать достоверные выводы о частоте использования каждой из букв криптограммы. Наша задача упрощается тем обстоятельством, что для каждого набора достаточно отгадать цифру, на которую осуществлялся сдвиг букв алфавита при кодировании.

Возьмем четыре наиболее употребительные буквы: *А, Е, И, О* — и подсчитаем общее число их вхождений в первоначальный текст при различных величинах сдвига от 0 до 9. Результаты приведены в таблице 2.

Таблица 2

№ набора	Величина сдвига									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5	1	1	9	13	1	6	4	7	6
2	6	2	2	19	3	4	9	5	4	5
3	8	8	11	3	5	12	11	5	5	5
4	5	4	6	3	8	15	1	4	6	8
5	6	17	3	7	6	1	9	7	2	8
6	9	4	6	12	3	10	7	8	7	4

Поскольку мы выбрали наиболее часто встречающиеся буквы, естественно предположить, что первая цифра ключа — 4, вторая — 3, четвертая — 5, пятая — 1, шестая — 3. Что касается третьей цифры, то ее следует выбирать из цифр 2, 5, 6. Окончательная расшифровка криптограммы теперь уже не представляет никакой трудности.

К нашим читателям

Продолжается подписка на журнал «Квант» на 1986 год. Индекс журнала в каталоге Союзпечати 70465. Подписная цена на год 4 рубля 80 копеек. Подписка принимается без ограничений всеми почтовыми отделениями в течение всего года.

задачник кванта

Вскоре Задачник «Кванта» по физике, а затем и по математике закончит публикацию первой тысячи задач. Мы хотели бы опубликовать под номерами Ф1000 и М1000 особенно оригинальные, красивые задачи и объявляем конкурс на лучшую новую задачу; срок конкурса по физике — до 1 января 1986 года, по математике — до 1 марта 1986 года. Кроме обычного адреса, после слов «новая задача» укажите: «на конкурс Ф1000 (или М1000)».

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 ноября 1985 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9 — 85» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М941, М942» или «Ф953». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. Фамилию, имя и отчество пишите печатными буквами. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи этого номера предлагались на заключительном этапе Всесоюзной олимпиады школьников.

Задачи

М941—М945; Ф953—Ф957

М941. Дан правильный $(4k+2)$-угольник $A_0A_1 \ldots A_{4k+1}$ с центром O. Докажите, что сумма отрезков, высекаемых углом A_kOA_{k+1} на прямых A_1A_{2k}, A_2A_{2k-1}, ..., A_kA_{k+1} (см. рисунок 1 для $k=2$), равна радиусу OA_0 описанной окружности $(4k+2)$-угольника, если а) $k=2$, б) k — любое натуральное число.

И. Ф. Шарыгин

М942. Числа 1, 2, ..., $2n-1$, $2n$ разбиты на две группы по n чисел в каждой. Пусть $a_1<a_2<\ldots<a_n$ — числа первой группы в порядке возрастания, $b_1>b_2>\ldots>b_n$ — числа второй группы в порядке убывания. Докажите, что

$$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\ldots+|a_n-b_n|=n^2.$$

В. В. Произволов

М943. Последовательность $a_1, a_2, \ldots$ задается правилами: $a_{2n}=a_n$ при $n\geqslant 1$ и $a_{4n+1}=1$, $a_{4n+3}=0$ при $n\geqslant 0$. Докажите, что эта последовательность не имеет периода.

Ю. В. Нестеренко

М944*. Правильный шестиугольник разбит на 24 равных треугольника, как на рисунке 2. Во всех 19 узлах образовавшейся фигуры записаны различные числа. Докажите, что среди 24 треугольников разбиения имеется по крайней мере 7 таких, в вершинах которых тройки чисел записаны в порядке возрастания против часовой стрелки.

А. А. Берзиньш

М945*. Дана строго возрастающая неограниченная последовательность положительных чисел a_1, a_2, ... Докажите, что для всех достаточно больших k справедливо неравенство

а) $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-1$;

б) $\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\ldots+\frac{a_k}{a_{k+1}}<k-1985$.

Л. Д. Курляндчик

Ф953. Для точной подстройки частоты вращения диска электропроигрывателя ($33\frac{1}{3}$ оборота в минуту) на его боковую поверхность наносят метки, которые освещают неоновой лампочкой с частотой 100 вспышек в секунду.

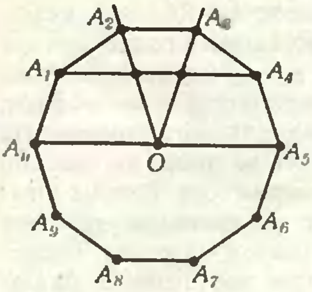


Рис. 1.

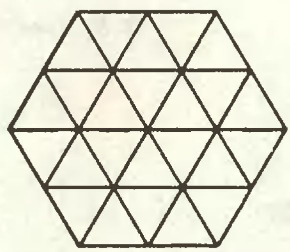


Рис. 2.

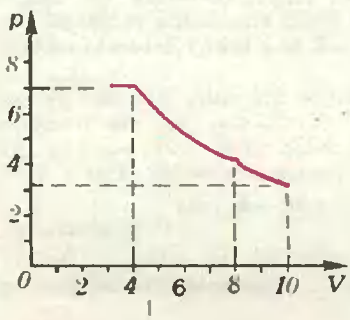


Рис. 3.

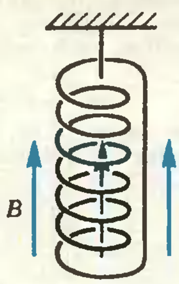


Рис. 4.

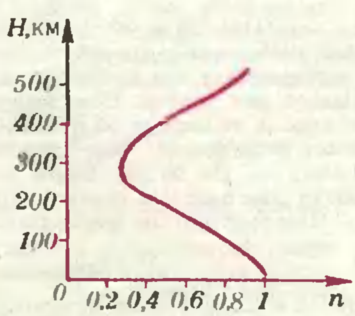


Рис. 5.

Каким должно быть число меток, чтобы при номинальной скорости они казались неподвижными? После отключения двигателя силы сухого трения начинают тормозить диск, и метки «побегут». За первые 4 с мимо точки наблюдения «пробегают» 10 меток. Через какое время диск остановится? Через какой промежуток времени метки «побегут» в другую сторону?

А. Р. Зильберман

Ф954. Декоративная квадратная штора размером $1,5\times1,5$ м висит на карнизе вдоль вертикальной стены. Нижний край шторы поднимают вровень с верхним, так что штора оказывается сложенной вдвое, и отпускают. Найдите зависимость силы, действующей на карниз, от времени. Штора тонкая, гладкая и имеет массу 3 кг.

С. С. Кротов

Ф955. Смесь газов, состоящую из $m_1=100$ г азота и неизвестного количества кислорода, подвергают изотермическому сжатию при температуре $T=74,4$ К. График зависимости давления смеси газов от ее объема приведен на рисунке 3 (в условных единицах). *Определите массу кислорода.* Рассчитайте давление насыщенных паров кислорода при этой температуре.

Примечание. $T=74,4$ К — это температура кипения жидкого азота при нормальном давлении; кислород кипит при более высокой температуре.

А. И. Буздин

Ф956. В одном из вариантов классического опыта, поставленного академиком И. К. Кикоиным, однослойная короткозамкнутая катушка индуктивности $L=3\cdot10^{-5}$ Гн из тонкой сверхпроводящей проволоки подвешивалась на упругой нити в магнитном поле, направленном вертикально вверх вдоль оси катушки (рисунок 4). Нить подвеса в исходном состоянии не закручена, сила тока в катушке равна нулю. Индукция B магнитного поля медленно увеличивалась от нулевого значения до значения $B_0=0,1$ Тл, при котором сверхпроводимость скачком исчезала и проволока переходила в нормальное состояние. Катушка при этом закручивалась. Определите максимальный угол закручивания катушки, считая, что упругий момент нити пропорционален углу закручивания (коэффициент пропорциональности $G=10^{-7}$ Н $\cdot$ м/рад). Число витков катушки $n=100$, радиус витков $R=1$ см, масса катушки $M=10$ г. Отношение заряда электрона к его массе равно $e/m=1,76\cdot10^{11}$ Кл/кг.

С. М. Козел

Ф957. Распространение коротких радиоволн в верхних слоях атмосферы Земли (ионосфере) можно описывать законами геометрической оптики, если принять, что показатель преломления n для радиоволн меньше единицы и изменяется с высотой H от поверхности Земли так, как показано на рисунке 5 (для некоторой частоты ν).

На спутнике, летящем на высоте $h=200$ км, установлен радиопередатчик, излучающий радиоволны частоты ν равномерно по всем направлениям. Пренебрегая поглощением радиоволн в ионосфере, оцените долю излучаемой передатчиком мощности, которая уносится радиоволнами за пределы земной атмосферы. При оценках поверхность Земли считать плоской, а отражение радиоволн от нее зеркальным и без потерь. Примечание. Телесный угол конуса с углом при вершине β равен $\Omega=2\pi\left(1-\cos\frac{\beta}{2}\right)$.

В. И. Чивилёв

Problems

M941 — M945; P953 — P957

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than November 15th, 1985 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

Problems from this issue were proposed at the final round of the All-Union School Olympiad.

M941. The regular $(4k+2)$ vertex polygon $A_0A_1\ldots A_{4k+2}$ of centre O in given. Prove that the sum of the segments of the lines A_1A_{2k}, A_2A_{2k-1}, ..., A_kA_{k+1} inside the angle A_kOA_{k+1} (see Рис. 1 on p. 37 for $k=2$) equals the radius of the circumcircle of the polygon, if a) $k=2$, b) k is any natural number.

I. F. Sharygin

M942. The numbers 1, 2,...$2n-1$, $2n$ are split into two groups of n numbers each. Suppose $a_1<a_2<\ldots<a_n$ are the numbers of the first group in increasing order, and $b_1>b_2>\ldots>b_n$ the numbers of the second one in decreasing order. Prove that

$$|a_1-b_1|+|a_2-b_2|+\ldots+|a_n-b_n|=n^2$$

V. V. Proizvolov

M943. The sequence a_1, a_2, ... is given by the rules: $a_{2n}=a_n$ if $n\geqslant 1$ and $a_{4n+1}=1$, $a_{4n+3}=0$ if $n\geqslant 0$. Prove that this sequence is not periodic.

Yu. V. Nesterenko

M944*. A regular hexagon is split into 24 equal triangles as shown on Рис. 2, p. 37. Different numbers are written at each of the 19 vertices of the figure thus obtained. Prove that among the 24 triangles at least 7 have vertices with counterclockwise increasing numbers.

A. A. Berzinsh

M945*. An unbounded strictly increasing sequence of positive numbers a_1, a_2,... is given. Prove that for all sufficiently large k

a) $\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\ldots+\dfrac{a_k}{a_{k+1}}<k-1$;

b) $\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\ldots+\dfrac{a_k}{a_{k+1}}<k-1985$.

L. D. Kurlyandchik

P953. In order to regulate the turntable of a $33\,^1/_3$ RPM record player with great precision, little evenly spaced marks are made on the disk's outside surface; they are lighted by a neon lamp of frequency 100 flashes per second. How many marks are needed to make them appear motionless at nominal velocity? After the turntable motor is turned off, dry friction forces begin slowing the disk down — the marks begin to „run". In the first 4 seconds 10 marks „run past" the observation point. How soon will the disk stop? How soon will the marks start „running the other way"?

A. R. Zilberman

P954. A designer's drapery 1.5 by 1.5 m hangs from a horizontal crossbar along a vertical wall. The lower end of the drapery is lifted level with the upper one (so that the drapery is folded in half) and then released. Find the force acting on the crossbar as a function of time. The drapery is thin, smooth and weights $3kg$.

S. S. Krotov

P955. A mixture of gases, sonsisting of $m_1=100g$ of nitrogen and an unspecified amount of oxygen, undergoes isothermic compression at temperature $T=74.4K$. The dependence of the mixture' s pressure on volume is plotted on Рис. 3, p. 37 (in conditional units). Determine the mass of the oxygen. Calculate the pressure of saturated vapors of oxygen at the given temperature of saturated vapors of oxygen at the given temperature. Remark. $T=74.4K$ is the boiling temperature of liquid nitrogen at normal pressure; oxygen boils at higher temperature.

A. I. Buzdin

P956. In one of the versions of the classical experiment, due to the late academician I. K. Kikoin, a singlelayer shortcircuited coil of inductivity $L=3\cdot10^{-5}H$, made of thin superconducting wire is hung by an elastic thread in a magnetic field directed vertically upward along the axis of the coil (Рис. 4, p. 37). In the initial state the thread is untwisted and there is no current in the coil. The induction B of the magnetic field is slowly increased from zero to the value $B=0.1\ T$, at which the superconductivity instantaneously disappears and the wire aquires its normal state. The coil then starts spinning, twisting the string. Find the maximal angle of twisting, assuming the elastic moment of the thread proportional to the twist angle (the proportionality coefficient being $G=10^{-7}$ N·m/rad). The number of loops in the coil is $n=100$, their radius is $R=1cm$, the mass of the coil is $M=10g$. The ratio of an electron's charge to its mass is $e/m=1{\cdot}76{\cdot}10^{11}$ C/kg.

S. M. Kozel

P957. The dessimination of short radiowaves in the upper atmospheric layers (the ionosphere) may be described by means of the laws of geometric optics if it is assumed that the refraction index n for radiowaves is less than 1 and varies as a function of altitude above sealevel as shown on Рис. 5, p. 37. A sputnik, flying at altitude $200km$, is supplied with a radiotransmitter, emitting radiowaves uniformly in all directions (isotropically). Disregarding radiowave absorbsion by the ionosphere, estimate the part of the transmitters power carried away by the radiowaves beyond the Earth's atmosphere. In your estimates you may assume the Earth to be flat, and the reflection on it mirrorlike and without losses. Remark. The solid angle of a cone with vertex angle β is $\Omega=2\pi(1-\cos(\beta/2))$.

V. I. Chivilev

Решения задач

М921—М925*); Ф933—Ф937

М921. *В выпуклом четырехугольнике ABCD известны величины двух углов $\angle A=\alpha$ и $\angle B=\beta$, а его удвоенная площадь равна $AB\cdot CD+BC\cdot AD$. Найдите отношение длин всех его сторон, если:*

а) $\alpha=\frac{5\pi}{12}$, $\beta=\frac{7\pi}{12}$, *б)* $\alpha=\frac{\pi}{2}$, $\beta=\frac{\pi}{3}$; *в) выясните, для каких α и β существует такой четырехугольник и выразите через α и β отношение его сторон.*

Ответ: отношение $AB:BC:CD:DA$ в задаче а) равно: $\sqrt{2}:1:\sqrt{2}:\sqrt{3}$, в задаче б) — $\sqrt{3}:\sqrt{3}:1:1$, в задаче в) — $\sin\frac{\varphi_1}{2}:\sin\frac{\varphi_2}{2}:\sin\frac{\varphi_3}{2}:\sin\frac{\varphi_4}{2}$, где

$$\varphi_1=\frac{3\pi}{2}-\alpha-\beta,\ \varphi_2=\frac{\pi}{2}+\alpha-\beta,\ \varphi_3=\alpha+\beta-\frac{\pi}{2},$$

$$\varphi_4=\frac{\pi}{2}-\alpha+\beta; \qquad (1)$$

условия существования четырехугольника:

$$|\alpha-\beta|<\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}<\alpha+\beta<\frac{3\pi}{2}. \qquad (2)$$

*) Решению задачи М925 посвящена заметка А. Л. Тоома «Кляксы на плоскости» на с. 47.

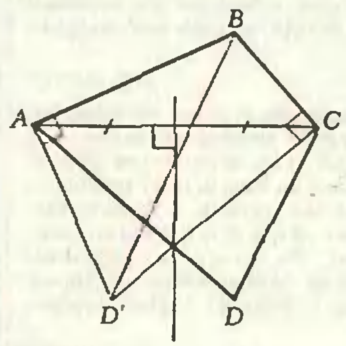


Рис. 1.

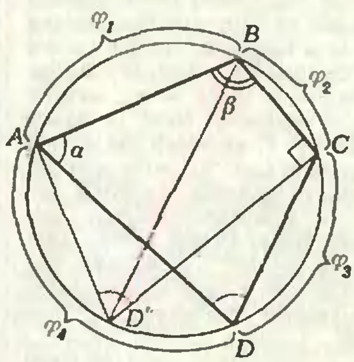


Рис. 2.

Решать задачу будем сразу в общем случае в). Рассмотрим вспомогательный четырехугольник $ABCD'$, где D' — точка, симметричная D относительно серединного перпендикуляра к диагонали AC (рис. 1), и докажем, что *его углы при вершинах A и C — прямые.*

Представляя четырехугольник $ABCD'$ как объединение треугольников ABD' и CBD', получим, что его удвоенная площадь равна

$$AB\cdot AD'\sin\angle BAD'+BC\cdot CD'\sin\angle BCD'.$$

Удвоенная площадь $ABCD$ по условию равна

$$AB\cdot CD+BC\cdot AD.$$

Но эти четырехугольники, очевидно, равновелики, а $AD'=CD$, $CD'=AD$, поэтому $\sin\angle BAD'=\sin\angle BCD'=1$, то есть $\angle BAD'=\angle BCD'=\pi/2$.

Из доказанного следует, что около четырехугольника $ABCD'$ можно описать окружность (с диаметром BD'). На ней лежит и точка D ($\angle ADC=\angle AD'C$). Обозначим через φ_1, φ_2, φ_3, φ_4 угловые величины дуг AB, BC, CD, DA (рис. 2), тогда $AB=BD'\sin\frac{\varphi_1}{2}$, $BC=BD'\sin\frac{\varphi_2}{2}$ и т. д. Остается выразить эти величины через α и β. По теореме о величине вписанного в окружность угла

$2\alpha=\varphi_2+\varphi_3$, $2\beta=\varphi_3+\varphi_4$,

$$2\angle BCD'=\pi=\varphi_1+\varphi_3=2\pi-\varphi_2-\varphi_4$$

(так как дуги CD' и AD равны). Отсюда получаются формулы (1). Для существования четырехугольника необходимо и достаточно, чтобы все числа φ_i ($i=1, \ldots, 4$) были положительны, что эквивалентно неравенствам (2). Ответы к задачам а) и б) находятся после подстановки вместо α и β заданных значений.

Легко показать, что *условию задачи удовлетворяют любые четырехугольники $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями, около которых можно описать окружность, и только они.* Это можно вывести также из одной из версий так называемой теоремы Птолемея: *для любых четырех точек A, B, C, D плоскости верно неравенство*

$$AC\cdot BD\leqslant AB\cdot CD+AD\cdot BC,$$

которое обращается в равенство лишь для точек, лежащих на одной окружности или на одной прямой (см., например, «Квант» № 3 за 1973 г. (с. 27)). В то же время последнее утверждение этой теоремы легко доказывается с помощью перехода к четырехугольнику $ABCD'$.

В. Л. Гутенмахер

◆

M922. *Докажите, что уравнение*

$$\sin^p x+\cos^q x=1,$$

где p и q — положительные числа, имеет решение на ин-

Положим $t=\sin^2 x$ ($\cos^2 x=1-t$), $a=p/2$, $b=q/2$, тогда данное уравнение перепишется в виде

$$f(t)=t^a+(1-t)^b=1. \qquad (*)$$

тервале $0 < x < \pi/2$ *тогда и только тогда, когда* $(p-2)(q-2)<0$ *или* $p=q=2$.

Мы должны доказать, что уравнение (*) имеет решения в интервале $]0;\ 1[$ (области значений функции $y=\sin^2 x$ на интервале $0<x<\pi/2$) тогда и только тогда, когда $(a-1)(b-1)<0$ или $a=b=1$. В дальнейшем будем считать, что $a \geqslant b$ (в противном случае с помощью замены $s=1-t$ мы перейдем к уравнению $s^b+(1-s)^a=1$ на интервале $0<s<1$).

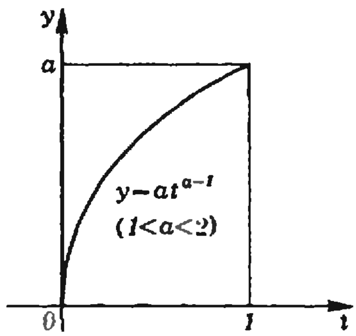


Рис. 1.

Покажем сначала, что если $(a-1)(b-1)>0$ или только одно из чисел a и b равно 1, уравнение (*) решений не имеет. Возможны два случая: $a>b\geqslant 1$ или $1 \geqslant a>b$. В первом случае $t^a<t$, $(1-t)^b \leqslant 1-t$ и $t^a+(1-t)^b<t+(1-t)=1$. Второй рассматривается аналогично.

При $a=b=1$ функция $f(t)$ тождественно равна 1.

Пусть, наконец, $a>1>b$. Покажем, что на интервале $]0;\ 1[$ найдутся две точки, t_1 и t_2, такие, что $f(t_1)>1$, $f(t_2)<1$. Отсюда по теореме о промежуточном значении непрерывной функции будет следовать, что в некоторой точке t на интервале $]t_1;\ t_2[$ $f(t)=1$. Рассмотрим производную функции $f(t)$:

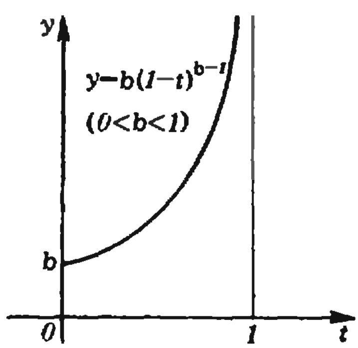


Рис. 2.

$$f'(t)=at^{a-1}-b(1-t)^{b-1}.$$

При $t \to 0$ функция at^{a-1} стремится к нулю, а $b(1-t)^{b-1}$ стремится к $b>0$ (графики этих двух функций — рис. 1 и рис. 2). Поэтому при достаточно малом t_1 на интервале $0<t<t_1$ производная $f'(t)<0$, следовательно, функция $f(t)$ убывает на отрезке $[0;\ t_1]$ и $f(t_1)<f(0)=1$. Аналогично, при $t \to 1$ функция at^{a-1} стремится к a, а $b(1-t)^{b-1}$ неограниченно растет ($b-1<0$). Поэтому $f'(t)<0$ при $t_2<t<1$, где t_2 достаточно близко к 1, следовательно, функция $f(t)$ убывает на отрезке $[t_2;\ 1]$ и $f(t_2)>f(1)=1$. Тем самым наше утверждение доказано полностью.

А. М. Седлецкий

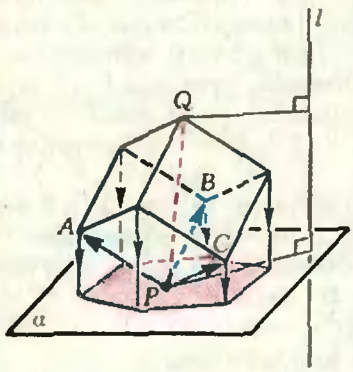
◆

М923. *Докажите, что площадь проекции куба с ребром 1 на любую плоскость равна длине его проекции на прямую, перпендикулярную этой плоскости.*

Обозначим через α и l плоскость и перпендикулярную ей прямую, на которые проектируется куб.

Поскольку любая прямая, проходящая через внутреннюю точку куба, пересекает его поверхность в двух точках, площадь проекции куба на α вдвое меньше суммы площадей проекций на α всех его граней, то есть равна сумме площадей проекций трех попарно перпендикулярных граней.

С другой стороны, проекция куба на прямую l совпадает с проекцией $P'Q'$ какой-то его диагонали PQ. Проведем через точку P плоскость, перпендикулярную l, тогда весь куб и, в частности, точка Q и концы A, B, C трех ребер куба, выходящих из вершины P, лежат по одну сторону от этой плоскости. Поэтому проекции $\overrightarrow{P'Q'}$, $\overrightarrow{P'A'}$, $\overrightarrow{P'B'}$ и $\overrightarrow{P'C'}$ векторов $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{PA}$, $\overrightarrow{PB}$ и $\overrightarrow{PC}$ на прямую l



будут сонаправлены. Но $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}+\overrightarrow{PC}$, следовательно, длина проекции куба на l равна

$$|\overrightarrow{P'Q'}|=|\overrightarrow{P'A'}+\overrightarrow{P'B'}+\overrightarrow{P'C'}|=$$

$$=|\overrightarrow{P'A'}|+|\overrightarrow{P'B'}|+|\overrightarrow{P'C'}|,$$

то есть равна сумме длин проекций трех его попарно перпендикулярных ребер (PA, PB и PC).

Остается заметить, что угол между плоскостью любой грани куба и плоскостью α равен углу между перпендикулярным этой грани ребром и прямой l, а значит, площадь проекции этой грани на α равна длине проекции ребра на l (при ортогональной проекции площадь грани и длина ребра умножаются на косинусы соответствующих углов).

Обобщения этой задачи на случай многомерного пространства рассматриваются в статье английского математика Дж. Мак-Муллена, опубликованной в журнале „Bull. Lond. Math. Soc." № 3 за 1984 год.

С. Л. Табачников

◆

М924. *Каждые две из n точек (никакие три из которых не лежат на одной прямой) соединены отрезком, и на всех отрезках расставляются стрелки. Треугольник ABC с вершинами в данных точках называется ориентированным, если стрелки расставлены в направлениях AB, BC, CA или AC, CB, BA.*

а) Объясните, как расставить стрелки, чтобы не возникло ни одного ориентированного треугольника.

б) Каково наибольшее возможное число ориентированных треугольников (для каждого n)? (Нарисуйте соответствующие примеры для $n=4$, 5 и 6.)*

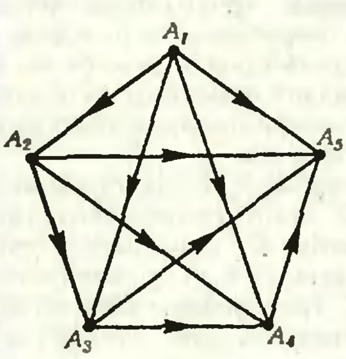


Рис. 1.

Обозначим данные n точек через A_1, ..., A_n.

а) Ответ: надо расставить стрелки по возрастанию номеров точек: от A_i к A_j при $i<j$ (см. рис. 1 для $n=5$). Тогда в любом треугольнике из вершины с наименьшим номером выходят две стрелки, поэтому он не ориентирован.

б) Ответ: наибольшее число ориентированных треугольников равно $n(n^2-1)/24$ при нечетном n и $n(n^2-4)/24$ при четном n (см. рис. 2—4 для $n=4$, 5, 6).

Нам будет удобнее найти наименьшее число неориентированных треугольников, а потом вычесть его из общего числа треугольников, равного $n(n-1)(n-2)/6$ (выбирая последовательно вершины треугольника из данных точек, мы будем иметь для первой вершины n возможностей выбора, для второй — $n-1$, для третьей — $n-2$; при этом каждая тройка вершин в разном порядке будет выбрана 6 раз).

Будем называть пару стрелок (направленных отрезков) *согласованной*, если они имеют общее начало или общий конец. Очевидно, из трех пар сторон любого неориентированного треугольника из стрелок ровно две — согласованные (на рисунке 5 — AB и AC, AC и BC), а любая согласованная пара стрелок принадлежит ровно одному неориентированному треугольнику. Поэтому число неориентированных треугольников равно половине числа согласованных пар. Оценим это число.

Если из некоторой точки A выходит k стрелок, то число образуемых ими пар равно $k(k-1)/2$. При этом в точку A входит $n-1-k$ стрелок, образующих еще $(n-1-k)(n-2-k)/2$ согласо-

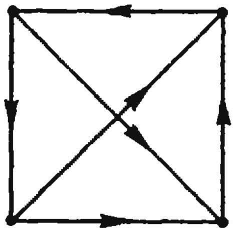


Рис. 2.

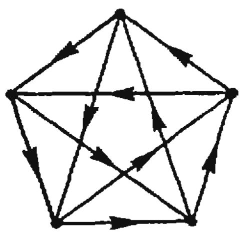


Рис. 3.

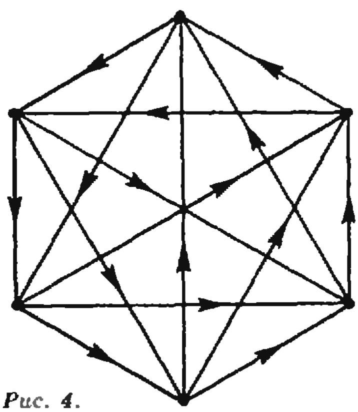


Рис. 4.

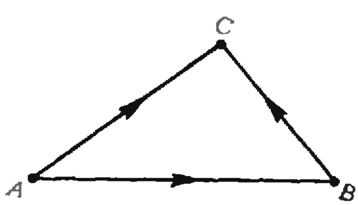


Рис. 5.

ванных пар. Итак, число согласованных пар с общей вершиной в точке A равно

$$\frac{1}{2}(k^2-k+(n-1-k)^2-n+1+k)=$$
$$=\frac{1}{2}((n-1)^2-(n-1))-k(n-1-k).$$

Легко видеть, что наименьшее значение этого выражения достигается при $k=(n-1)/2$, если n нечетно, и при $k=n/2$ или $k=n/2-1$, если n четно, и равно, соответственно, $(n-1)(n-3)/4$ и $(n-2)^2/4$.

Заметим, что стрелки всегда можно расставить так, чтобы из каждой точки выходило указанное «оптимальное» число стрелок. Действительно, представим, что точки $A_1, \ldots, A_n$ образуют правильный n-угольник и расставим стрелки на его сторонах и диагоналях (не проходящих через его центр) так, чтобы они задавали одно и то же направление обхода центра; на диагоналях, проходящих через центр (они имеются только при четных n) стрелки можно поставить произвольно. Тогда число стрелок, входящих в каждую вершину, отличается от числа стрелок, выходящих из нее, не более чем на 1.

Таким образом, наибольшее число ориентированных треугольников при нечетном n равно

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-\frac{n}{2}\cdot\frac{(n-1)(n-3)}{4}=\frac{n(n^2-1)}{24},$$

а при четном n

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{6}-\frac{n}{2}\cdot\frac{(n-2)^2}{4}=\frac{n(n^2-4)}{24}.$$

Приведем набросок другого решения. Пусть k_i — число стрелок, выходящих из точки A_i, тогда число неориентированных треугольников равно сумме

$$\frac{k_1(k_1-1)}{2}+\ldots+\frac{k_n(k_n-1)}{2}=\frac{k_1^2+\ldots+k_n^2}{2}-\frac{n(n-1)}{4} \qquad (*)$$

(число всех стрелок равно $k_1+\ldots+k_n=n(n-1)/2$). Если для некоторого расположения стрелок $k_i\geqslant k_j+2$, для каких-то двух точек, то можно изменить направления (не более чем двух) стрелок так, что k_i уменьшится, а k_j увеличится на 1; при этом сумма квадратов $k_1^2+\ldots+k_n^2$ уменьшится. Следовательно, для «наилучшего» расположения стрелок $|k_i-k_j|\leqslant 1$ при всех i, j, а значит, $k_i=(n-1)/2$ или $k_i=((n-1)\pm 1)/2$ (в зависимости от четности n) при всех i, откуда с помощью (*) легко получить ответ.

И. И. Цаленчук, В. Н. Дубровский

◆

Ф933. *Два куска сахара можно поместить в стакан с чаем различными способами. Можно просто положить сахар на дно (рисунок 1), а можно установить куски «враспор», если стакан имеет коническую форму (рису-*

В первом случае (рисунок 1) по мере растворения сахара на дне стакана образуется слой чая с высокой концентрацией сахара. Выравнивание концентрации по всему объему будет происходить за счет диффузии сахара из нижнего слоя в верхние. С ростом концентрации в нижнем слое скорость растворения уменьшается.

нок 2). В каком случае сахар растворится скорее, если чай не перемешивать?

Рис. 1.

Рис. 2.

Во втором случае (рисунок 2) слой с повышенной концентрацией сахара образуется вверху. Плотность сахарного раствора больше плотности чистого (без сахара) чая и растет по мере увеличения концентрации. Поэтому сахарный «сироп» опускается в нижние слои. Перемешивание происходит за счет диффузии и за счет конвекции. Поскольку сахар из верхних слоев убывает, скорость растворения уменьшается медленнее, чем в первом случае.

Следовательно, во втором случае сахар растворится в чае быстрее.

Л. А. Ашкинази

◆

Ф934. *Теплоизолированный сосуд разделен на две части легким поршнем. В левой части сосуда находится $m_1=3$ г водорода при температуре $T_1=300$ К, в правой части — $m_2=16$ г кислорода при температуре $T_2=400$ К. Поршень слабо проводит тепло, и температура в сосуде постепенно выравнивается. Какое количество тепла отдаст кислород к тому моменту, когда поршень перестанет двигаться?*

По условию задачи тепло передается медленно; значит, давления на поршень с двух сторон практически равны, то есть в любой момент времени

$$\frac{m_1T_1^*}{\mu_1V_1}=\frac{m_2T_2^*}{\mu_2(V-V_1)}, \text{ или } \nu_1\frac{T_1^*}{V_1}=\nu_2\frac{T_2^*}{V-V_1}, \qquad (1)$$

где T_1^*, T_2^* — температуры, соответственно, водорода и кислорода, V_1 и $(V-V_1)$ — объемы, занимаемые газами (V — объем сосуда) в этот момент.

Внутренняя энергия двухатомного газа равна $\frac{5}{2}\nu RT$. Согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{5}{2}\nu_1R(T_1^*-T_1)=\frac{5}{2}\nu_2R(T_2-T_2^*). \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) получаем

$$\frac{T_1^*}{V_1}=\frac{\nu_1T_1+\nu_2T_2}{\nu_1V}=\text{const},$$

иными словами, давление p_1 в левой части сосуда, где находится водород (а значит, и давление p_2 в правой части, где находится кислород), в процессе не меняется, то есть процесс передачи тепла происходит изобарически.

Поршень перестанет двигаться, когда температуры водорода и кислорода станут одинаковыми. К тому моменту, согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{5}{2}\nu_1R(T-T_1)=\frac{5}{2}\nu_2R(T_2-T)$$

(T — установившаяся в сосуде температура), откуда

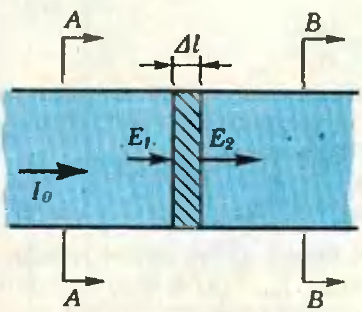
$$T=\frac{\nu_1T_1+\nu_2T_2}{\nu_1+\nu_2}=325 \text{ К}.$$

Количество теплоты, отданное кислородом, равно сумме изменения его внутренней энергии $\frac{5}{2}\nu_2R(T_2-T)$ и совершенной над ним работы $\nu_2R(T_2-T)$:

$$Q=\frac{7}{2}\nu_2R(T_2-T)\approx 1090 \text{ Дж}.$$

А. Р. Зильберман

Ф935. *По длинному прямому проводнику постоянного сечения течет ток I_0. На участке AB проводника (см. рисунок) его удельное сопротивление уменьшается от ρ_1 в сечении A—A до ρ_2 в сечении B—B. Какой по величине и знаку объемный заряд образуется на участке AB?*



Выделим на участке AB нашего проводника в произвольном месте бесконечно малый элемент длиной Δl (см. рисунок) и запишем для этого элемента закон Ома:

$$\Delta U = I_0 \rho \Delta l / S.$$

Здесь ρ — удельное сопротивление проводника в выделенном объеме, а S — сечение проводника. Учитывая, что предел отношения $\Delta U/\Delta l$ при $\Delta l \to 0$ определяет величину напряженности электрического поля ($\lim\limits_{\Delta l \to 0} (\Delta U/\Delta l) = E$), мы можем записать первое равенство в виде

$$E = \rho I_0 / S.$$

Полученное соотношение показывает для любого сечения проводника связь напряженности электрического поля E с удельным сопротивлением проводника в том же сечении.

Пусть в выбранном элементарном объеме образуется объемный заряд ΔQ. Найдем напряженность электрического поля слева (E_1) и справа (E_2) от выбранного элемента. Используя принцип суперпозиции электростатических полей, можно записать

$$E_1 = |\vec{E}_1| = |\vec{E}_l| - \frac{\Delta Q}{2\varepsilon_0 S},$$

$$E_2 = |\vec{E}_2| = |\vec{E}_l| + \frac{\Delta Q}{2\varepsilon_0 S}.$$

Здесь $|\vec{E}_l|$ — напряженность электрического поля в объеме нашего элемента, создаваемая всеми зарядами, кроме заряда ΔQ, а вторые члены учитывают поле заряда ΔQ, которое будет эквивалентно полю вблизи равномерно заряженной поверхности с поверхностной плотностью зарядов $\Delta Q/S$. Изменение поля на границах элемента

$$\Delta E = |\vec{E}_2| - |\vec{E}_1| = \Delta Q / \varepsilon_0 S.$$

С другой стороны,

$$\Delta E = \Delta\rho \cdot I_0 / S,$$

где $\Delta\rho$ — разность удельных сопротивлений проводника справа и слева от выбранного элемента у его границ. Из двух последних равенств мы получаем связь объемного заряда ΔQ с разностью удельных сопротивлений на его границах:

$$\Delta Q = \varepsilon_0 I_0 \cdot \Delta\rho.$$

Объемный заряд на всем участке AB равен сумме подобных элементарных зарядов, то есть

$$Q_{AB} = \Sigma\Delta Q = \varepsilon_0 I_0 \Sigma\Delta\rho = \varepsilon_0 I_0 (\rho_2 - \rho_1).$$

Поскольку разность $\rho_2 - \rho_1$ отрицательна (по условию $\rho_2<\rho_1$), то и объемный заряд на участке проводника AB будет отрицательным.

В. В. Можаев

◆

Ф936. *По длинному сверхпроводящему соленоиду с индуктивностью $L_0=1$ Гн, содержащему $N=200$ витков, течет ток $I_0=0{,}1$ А.*) Издали к соленоиду подносят замкнутый проводящий виток того же радиуса, что и витки соленоида; индуктивность витка $L_1=1\cdot10^{-3}$ Гн. Виток вставляют между витками соленоида соосно с ними. Как изменится ток, текущий по соленоиду? Как изменится энергия системы?*

До внесения витка магнитный поток через соленоид был равен

$$\Phi_0=L_0I_0.$$

Этот поток создается всеми витками; считая, что вклады отдельных витков в общий поток одинаковы (так можно считать, если витков много и соленоид длинный), найдем вклад одного витка (поток, создаваемый одним витком через весь соленоид при токе I_0):

$$\Delta\Phi_0=\frac{L_0}{N}I_0.$$

С другой стороны, общее магнитное поле соленоида создает через каждый из витков поток $\Delta\Phi_0^*$; сумма таких потоков равна Φ_0; поэтому

$$\Delta\Phi_0^*=\frac{\Phi_0}{N}=\Delta\Phi_0.$$

Значит, магнитный поток через один виток, создаваемый соленоидом при токе I_0, такой же, как поток через весь соленоид, создаваемый одним витком при том же токе. (Это — известный факт.)

Внесем виток в соленоид. Пусть I — новый ток в соленоиде, а I_1 — индукционный ток, возникший в витке. Поскольку виток сверхпроводящий, магнитный поток через него должен остаться неизменным и равным нулю. Этот поток складывается из потока Φ, создаваемого через виток всем соленоидом при токе I, и собственного потока Φ_1, создаваемого витком с током I_1:

$$0=\Phi+\Phi_1=\frac{L_0}{N}I+L_1I_1. \qquad (1)$$

Магнитный поток через весь соленоид (сверхпроводящий) также должен остаться неизменным и равным L_0I_0:

$$L_0I_0=L_0I+\frac{L_0}{N}I_1. \qquad (2)$$

Решая совместно (1) и (2), находим токи I и I_1:

$$I=I_0\left(1-\frac{L_0}{L_1N^2}\right)^{-1}\approx0{,}103\ \text{А},$$

$$I_1=-I\frac{L_0}{L_1N}\approx-0{,}510\ \text{А}.$$

Таким образом, ток, текущий по соленоиду, увеличился на $\Delta I=3\cdot10^{-3}$ А. Энергия системы увеличилась на

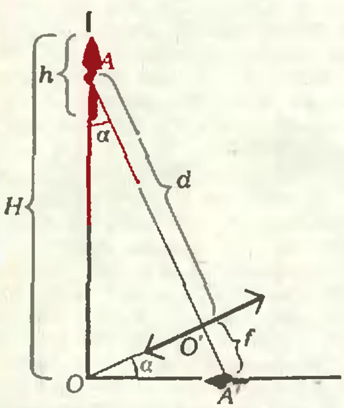
$$\Delta W=L_0\frac{I^2}{2}+L_1\frac{I_1^2}{2}-L_0\frac{I_0^2}{2}\approx1{,}25\cdot10^{-4}\ \text{Дж}.$$

Энергия возросла за счет механической работы, которая была совершена при внесении витка в соленоид (противоположно направленные токи отталкиваются).

А. Р. Зильберман

*) Приведенное в 5-м номере «Кванта» в условии этой задачи значение $L_0=0{,}1$ Гн — опечатка.

Ф937. *На вертикальной стене нарисован человечек «ростом» $h=20$ см, голова человечка находится на высоте $H=2$ м над полом. При помощи линзы с фокусным расстоянием $F=0,1$ м получают изображение человечка на полу. Найти размер наиболее четкого изображения.*



Изображение на полу можно получить при различных положениях линзы, и увеличение будет зависеть от положения линзы. Наиболее четким изображение будет в том случае, когда «центр» источника (точка A на рисунке) и соответствующая точка изображения (точка A') лежат на главной оптической оси линзы. Нетрудно показать, что плоскость, в которой лежит линза, проходит через вершину O прямого угла AOA' (см. рисунок).

Запишем формулу линзы:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{|AO'|}+\frac{1}{|O_1A'|}.$$

Считая, что $|OA|=H-h/2=H_1$, получаем $|AO'|=H_1\cos\alpha$, $|O'A'|=|OA'|\sin\alpha=H_1\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin\alpha$, и

$$\frac{1}{H_1\cos\alpha}+\frac{1}{H_1\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin\alpha}=\frac{1}{F},$$

откуда

$$\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{F}{H_1}=\frac{F}{H-h/2}.$$

Из этого уравнения можно найти угол α. Приближенно можно считать (угол α мал), что $\cos\alpha\approx1$; тогда

$$\sin\alpha\approx\sqrt{\frac{F}{H-h/2}}\approx0{,}233 \text{ и } \alpha\approx0{,}231.$$

Рассчитаем теперь размер изображения. Если бы источник и изображение лежали в плоскостях, перпендикулярных главной оптической оси линзы, то увеличение было бы равно

$$\Gamma=\frac{|O'A'|}{|AO'|}=\frac{H_1\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin\alpha}{H_1\cos\alpha}=\operatorname{tg}^2\alpha.$$

В нашем случае увеличение равно отношению длин проекций изображения и источника на эти плоскости; значит, размер изображения равен

$$h'=h\Gamma\operatorname{tg}\alpha=h\operatorname{tg}^3\alpha\approx0{,}25\text{ см}.$$

А. Р. Зильберман

Кляксы на плоскости

Представьте себе географическую карту, на которой показана территория распространения какого-либо вида растений или эпидемии. Часть карты, соответствующая этой территории, закрашена определенным цветом, остальная оставлена белой. Чтобы изучить динамику распространения вида или эпидемии, составляют последовательность таких карт, соответствующих различным моментам времени, и пытаются понять закономерности изменения закрашенной части. Если речь идет об эпидемии, мы, естественно, хотим, чтобы она угасла. Если же речь идет о каком-то ценном виде, мы хотим, чтобы он сохранился. В обоих случаях нам важно, исчезнет закрашенная часть или нет. Подобные соображения приводят к задачам, аналогичным той, которая была опубликована в 5-м номере нашего журнала за этот год в «Задачнике «Кванта» (М925). Мы приведем ее решение и еще несколько связанных с ней задач.

М925. *На белой плоскости расположена синяя фигура K_0. Из нее получается новая синяя фигура K_1 по следующему правилу, применяемому одновременно ко всем точкам M плоскости: если не менее половины площади круга радиуса 1 с центром в точке M занято синим цветом, то точка M становится синей, а если менее половины — то белой. На следующем шаге из полученной синей фигуры K_1 по тому же правилу получается фигура K_2, затем из нее K_3 и т. д. Докажите, что: а) для произвольной ограниченной фигуры K_0, начиная с некоторого шага, вся плоскость станет белой; б) если K_0 — круг радиуса 100, то это случится не позже чем через миллион шагов.*

Обозначим буквой F то правило, по которому из каждой фигуры получается следующая. Оно монотонно в следующем смысле: из меньшей фигуры по правилу F получается меньшая; более формально это можно записать так:

$$K\subset K'\Rightarrow F(K)\subset F(K').$$

Благодаря этой монотонности, нам достаточно рассматривать в качестве начальных фигур только круги. Действительно, всякая ограниченная фигура лежит в некотором круге, и если уж даже этот круг под действием нашего правила превратится в пустое множество, то содержащаяся в нем фигура — тем более. Круги удобны тем, что под действием F они переходят в круги. Точнее:

а) если K — круг радиуса, большего или равного $1/\sqrt{2}$ (то есть площади большей или равной $\pi/2$), то $F(K)$ — тоже круг (меньшего радиуса);

б) если K — круг радиуса, меньшего $1/\sqrt{2}$, то $F(K)$ — пустое множество.

Рассмотрим функцию $f(R)$, определенную при R, больших $1/\sqrt{2}$, следующим образом: если R — радиус круга K, то $f(R)$ — радиус круга $F(K)$. График функции f показан на рисунке 1. Когда R возрастает от $1/\sqrt{2}$ до бесконечности, функция $f(R)$ монотонно растет от $1-1/\sqrt{2}$ до бесконечности, причем ее график остается все время ниже биссектрисы координатного угла $(R-f(R)>0)$. Нетрудно доказать, что разность $R-f(R)$ есть монотонно убывающая функция от R (стремящаяся к нулю при $R\to\infty$). Ломаная линия на рисунке 1 показывает, как ведут себя радиусы R_0, $R_1=f(R_0)$, $R_2=f(R_1)$, ... (на рисунке 1 уже $R_3<1/\sqrt{2}$, поэтому на следующем, четвертом шаге получится пустое множество). В общем случае из монотонности $R-f(R)$ следует:

$$R_0-R_1<R_1-R_2<R_2-R_3<\ldots$$

Отсюда, обозначая $R_0-R_1=d>0$, получим, что $R_n<R_0-nd$. Значит, при некотором значении n (не большем чем $R_0/d+1$) фигура K_n будет пуста. Тем самым доказано утверждение а). (В этом доказательстве некоторые детали только намечены, но по ходу приводимого далее решения задачи б) мы получим и еще одно решение а).)

Чтобы справиться с пунктом б), надо численно оценить величину, на которую уменьшается радиус R круга K под действием правила F. Если внутри круга K находится меньшая часть нашего «стандартного» круга D радиуса 1 с центром в точке M, то эта точка не входит в $F(K)$, и, следовательно, $f(R)<OM$, где O — центр круга K. Как видно из рисунка 2, так будет, например, когда окружность круга K пересекает диаметр AA_1 круга D в серединах B и B_1 радиусов MA и MA_1: в этом случае площадь сегмента BB_1G меньше суммы площадей криволинейных треугольников ABL и $A_1B_1L_1$, поэтому площадь пересечения кругов D и K меньше половины площади круга D. При этом $OM^2=OB^2-MB^2=R^2-1/4$, таким образом,

$$f(R)^2<OM^2=R^2-1/4$$

(при любом $R>1/\sqrt{2}$), то есть $R_n^2<R_{n-1}^2-\frac{1}{4}$. Отсюда по индукции заключаем, что при $R_{n-1}>1/\sqrt{2}$

$$R_n^2<R_0^2-n/4.$$

Следовательно, круг произвольного радиуса R_0 исчезнет за конечное число шагов (что доказывает утверждение а)), причем это число не больше $4R_0^2+1$. При $R_0=100$ оно заведомо меньше миллиона, что и требуется доказать в задаче б).

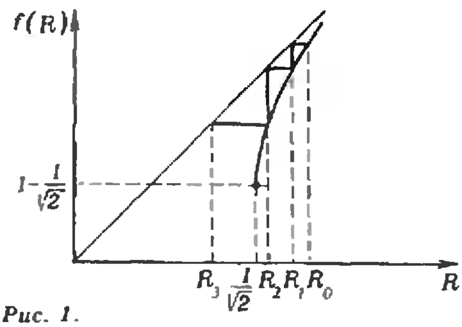


Рис. 1.

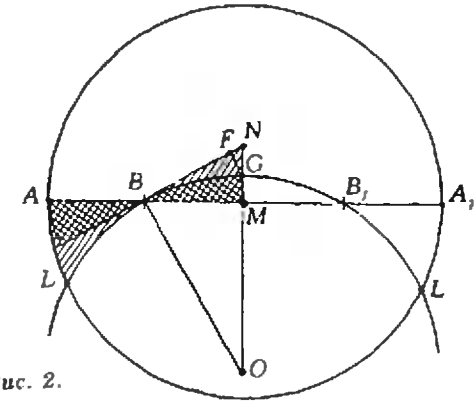


Рис. 2.

Задачи

1. Пусть $N(R)$ — число применений правила F, превращающих круг радиуса R в пустое множество. Мы доказали, что $N\leq 4R^2+1$. Докажите, с другой стороны, что $N\geq cR^2$, где c — некоторая положительная константа.

2. Рассмотрим другое правило H преобразования фигур на плоскости. Введем систему координат Oxy. Если дана фигура K, то новая фигура $H(K)$ состоит из всех точек $T(x;y)$, для которых пересечение K и треугольника с вершинами $(x;y)$, $(x+1;y)$, $(x;y+1)$ имеет площадь, не меньшую половины площади этого треугольника. Докажите, что всякая ограниченная фигура под многократным действием H превращается в пустое множество за конечное число шагов N, причем для круга радиуса R

$$c_1\cdot R\leq N\leq c_2\cdot(R+1),$$

где c_1 и c_2 — некоторые положительные константы.

3. На белой сфере диаметра $d>1$ задана синяя фигура K_0. Сопоставим каждой точке M сферы ее «окрестность» D_M — часть сферы, заключенную в шаре диаметра 1 с центром M, и образуем новую синюю фигуру K_1 из тех и только тех точек M, для которых площадь пересечения D_M и K_0 не меньше половины площади окрестности D_M. Аналогично из K_1 получается K_2 и т. д.

а) Докажите, что если исходная фигура K_0 содержится в шаре диаметра, меньшего d, то через конечное число шагов вся сфера станет белой.

б) Докажите, что для любого $\varepsilon>0$ можно указать такое d и такую синюю фигуру K_0 площади не больше εd^2 на белой сфере диаметра d, что после конечного числа описанных превращений вся сфера станет синей.

в) Существуют ли отличные от полусферы фигуры K_0, для которых K_1 совпадает с K_0?

А. Л. ТООМ

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М896—М910, Ф908—Ф922, справились с задачами М897, М901, М906, М907, Ф910, Ф911, Ф913, Ф914, Ф918—Ф920. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Х. Агаев (с. Тьюркоба Аз. ССР) 03, 10; *М. Александров* (Москва) 96, 03; *Р. Алексеев* (Магнитогорск) 08; *А. Алиев* (с. Каракая Аз.ССР) 10; *Д. Алтаев* (Чимкент) 08; *М. Альт* (Одесса) 02, 10; *Г. Андреева* (Пермь) 96; *Ю. Антимиров* (Рига) 02, 08; *Г. Арвеладзе* (Тбилиси) 03; *А. Арутюнян* (Ереван) 02—05; *А. Архипов* (Москва) 08; *А. Асташкевич* (Томск) 96, 02—05, 09, 10; *Р. Бабаев* (Баку) 96; *В. Балахонцев* (Алма-Ата) 03; *Н. Безденежных* (Нижний Тагил) 96, 02; *И. Биндер* (Ленинград) 02—04, 08; *А. Бирюков* (Саратов) 96; *М. Бойко* (Киев) 03; *В. Бондаренко* (Медвежьегорск) 03; *С. Бондарович* (Жодино) 03; *А. Борисенко* (Харьков) 02—04, 09, 10; *В. Борманис* (Балвы) 02—04; *А. Буриштейн* (Киев) 04; *Я. Варшавский* (Харьков) 02—05, 10; *С. Велесько* (Минск) 96, 99, 00, 02—04, 10; *Л. Вертгейм* (Новосибирск) 96, 02—05; *С. Володин* (Гайворон) 10; *К. Вохалаз—Ыхозов* (Сумгаит) 10; *Т. Газарян* (Ереван) 96, 98, 00, 02—05; *Д. Гамарник* (Тбилиси) 96, 98, 02—04, 08, 10; *Т. Гамбарян* (Баку) 03, 04; *Г. Гевондян* (с. Меликгюх Арм. ССР) 02—05; *О. Гендельман* (Харьков) 02, 03, 05, 09; *Р. Гендлер* (Ташкент) 96, 99, 00, 02—05, 08—10; *А. Глюцюк* (Харьков) 02, 03; *М. Годин* (Ленинград) 08; *В. Годлевский* (Киев) 03—05, 10; *Г. Горбатенко* (Арзамас) 96, 04, 08, 10; *А. Гороховский* (Киев) 02—05; *Н. Григорьева* (Андропов) 02, 03, 05, 08—10; *А. Григорян* (Ереван) 98, 00, 02—05; *В. Гринберг* (Москва) 96, 00, 02, 03; *М. Гринберг* (Харьков) 02—05, 10; *А. Давтян* (Ереван) 96, 00, 02—05; *Ю. Дейкало* (Киев) 03—05, 08, 10; *А. Джафаров* (с. Тьюркоба Аз.ССР) 03, 10; *М. Добрицын* (Москва) 02, 03, 05, 08, 10; *А. Донченко* (Киев) 08, 10; *А. Дынников* (Жуковский) 96, 02, 03, 08—10; *И. Дынников* (Жуковский) 96, 00, 02—05, 08—10; *А. Жаксыбеков* (Алма-Ата) 03; *В. Жданов* (Москва) 96, 10; *В. Журавлев* (Гайворон) 96, 98, 03, 05, 10; *П. Задорожный* (Киев) 02, 03, 09; *Д. Зайцев* (Киев) 96, 03, 04; *Л. Запольский* (Москва) 96, 02, 08; *А. Захаров* (Гатчина) 96; *М. Захаров* (Киев) 03; *А. Зозуля* (Винница) 03; *А. Иванов* (Первомайск Николаевской обл.) 96, 98, 00, 03, 04, 08; 10; *А. Иванов* (Ленинград) 02, *М. Игнатьев* (Саратов) 02—04; *С. Исмаилов* (Баку) 03, 05; *В. и И. Каповичи* (Хабаровск) 96, 98, 00, 02—05, 09, 10; *А. Каринский* (Невинномысск) 96; *Д. Карманов* (Москва) 10; *М. Касьянович* (д. Новый Двор Гродненской обл.) 03; *О. Кирнасовский* (Винница) 96, 00, 02—04; *А. Киселев* (Ленинград) 00, 02—04, 08—10; *И. Кича* (Киев) 03; *А. Кленов* (Тейково) 10; *Т. Кобунков* (Павлодар) 98; *В. Ковалев* (Харьков) 03, 04; *А. Козинский* (Гайворон) 10; *И. Козуля* (Жуковский) 96; *В. Колега* (Червоноград) 10; *А. Кононенко* (Киев) 96, 04; *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) 04; *Ю. Королев* (Казань) 03; *В. Кочетков* (Винница) 02; *А. Кравченко* (Харьков) 00, 02, 04; *Б. Кругликов* (Харьков) 02—05, 09; *Н. Крылов* (Ленинград) 10; *А. Купчишин* (Алма-Ата) 03; *М.Куринной* (Харьков) 96, 02, 03, 09, 10; *А. Кухарский* (Киев) 10; *Н. Кушлевич* (Москва) 02, 03; *С. Карас* (Молетай) 98, 02—05; *А. Лазарев* (Москва) 98, 00; *А. Ларкин* (Армавир) 03; *И. Ларцев* (Донецк) 03; *К. Левин* (Киев) 04; *Л. Леняшин* (Ленинград) 03, 08, 10; *М. Либанов* (Ангарск) 10; *О. Лимешко* (Куйбышев) 04, 10; *А. Литвак* (Ленинград) 96, 02, 03; *М. Литвинов* (Киев) 02, 03; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) 96, 04, 08; *В. Ляндин* (Белорецк) 08, 10; *И. Макаров* (Новокузнецк) 96; *Ю. Маринец* (Львов) 96, 98; *Ю. Махлин* (Москва) 02—04; *Б. Меркулов* (Куйбышев) 04, 08; *З. Мехтиев* (с. Чиликар Даг. АССР) 10; *В. Микщиль* (Ростов-на-Дону) 08; *А. Минасян* (Ереван) 02; *Т. Мисирпашаев* (Москва) 96, 02—04, 08; *Г. Михалкин* (Ленинград) 96, 00, 03, 08, 10; *М. Мунькин* (Алма-Ата) 03, 04; *Д. Муралашвили* (Тбилиси) 96, 98, 02—04, 08; *Т. Мустафаев* (с. Халафли Аз.ССР) 02, 04; *О. Овецкая* (Донецк) 03, 04; *Е. Орлибасаров* (Алма-Ата) 03; *Д. Пастур* (Харьков) 02, 03, 05, 08, 10; *А. Петрунин* (Ленинград) 02—04; *Я. Печатников* (Ленинград) 02—05; *С. Пиунихин* (Москва) 99, 03; *Т. Поликарпова* (Белорецк) 08, 10; *С. Полинов* (Магнитогорск) 96, 98, 08, 09; *И. Половцев* (Ленинград) 04; *М. Померанцев* (Черкассы) 02, 03, 09, 10; *В. Порошин* (Ленинград) 96; *И. Портной* (Одесса) 03; *А. Пришляк* (Киев) 10; *В. Протасов* (Москва) 10; *В. Пушня* (Харьков) 02—05; *Т. Радько* (Корсунь-Шевченковский) 96, 98—00, 03—05, 09, 10; *Е. Растигеев* (Барнаул) 96; *В. Ратнюк* (Евпатория) 02, 04; *Д. Резман* (Севастополь) 02; *А. Решетников* (Бахмач) 03; *М. Рзаев* (Баку) 04; *М. Ровинский* (Москва) 08; *А. Розанов* (Киев) 03, 04, 08, 10; *А. Ройтерштейн* (Ленинград) 96, 02—04; *К. Ромец* (Киев) 03; *Н. Ромец* (Кировоград) 10; *А. Ростов* (Винница) 02, 03; *А. Рудницкий* (Рига) 03; *М. Рябов* (Первомайск Горьковской обл.) 03, 04; *С. Савин* (Донецк) 03, 04; *В. Сакбаев* (Алма-Ата) 03, 04; *И. Самовол* (Гайворон) 96, 98, 03, 05; *Б. Самойлов* (Киев) 03; *И. Секлер* (Москва) 03; *К. Семенов* (Киев) 98; *Р. Сефибеков* (с. Кашкент Даг. АССР) 10; *Р. Сибилев* (Ленинград) 96, 98, 00, 02, 03, 08—10; *И. Симоненко* (Великие Луки) 08; *М. Соколова* (Ленинград) 10; *С. Стасевич* (Брест) 08; *К. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 02—05, 08—10; *В. Судаков* (Тбилиси) 96, 98, 02—04, 10; *Р. Сулейманов* (Алма-Ата) 03; *Д. Тамаркин* (Горький) 09, 10; *В. Тарасов* (Алексин) 08; *К. Тищенко* (Минск) 96, 03, 04, 10; *Ю. Томилов* (Винница) 96, 00, 02—04; *В. Тульчинский* (Киев) 96, 00; *Д. Туляков* (Жданов) 03—05, 09; *М. Фараджев* (Баку) 02; *Н. Федин* (Омск) 96, 04, 10; *С. Ферштерц* (Ташкент) 98, 02, 04, 05; *В. Филимоненков* (Свердловск) 02—04; *Н. Филонов* (Ленинград) 09, 10; *Е. Финк* (Ленинград) 96, 08—10; *П. Халилов* (с. Худжбала Аз.ССР) 10; *Д. Хачатуров* (Харьков) 10; *М. Хованов* (Москва) 96, 00, 03; *М. Холмянский (Москва)* 02, 04; *В. Цапко* (Харьков) 08; *В. Цвиркунов* (Киев) 03, 04; *С. Чебуков* (Симферополь) 96, 98, 00, 02—05; *А. Чевардин* (Челябинск) 10; *Р. Чернявский* (Киев) 02; *В. Чистюхин*

(Продолжение см. на с. 60)

В связи с включением курса «Основы информатики и вычислительной техники» в программу средней школы начиная с 1985—86 учебного года, мы возобновляем регулярные публикации в разделе «Искусство программирования», открытом на страницах «Кванта» еще в 1979 году. Публикуемые нами материалы призваны разъяснять, развивать и углублять школьный курс. Этот учебный год мы начинаем с двух статей члена нашего Редакционного совета академика А. П. Ершова. Основная цель этих статей — научить грамотно записывать алгоритмы. Читая их, следует обратить внимание на слова, набранные курсивом — это специальные термины из информатики, точный смысл которых стоит сверять с учебником.

Компьютер — алгоритм — алгоритмический язык

Академик А. П. ЕРШОВ

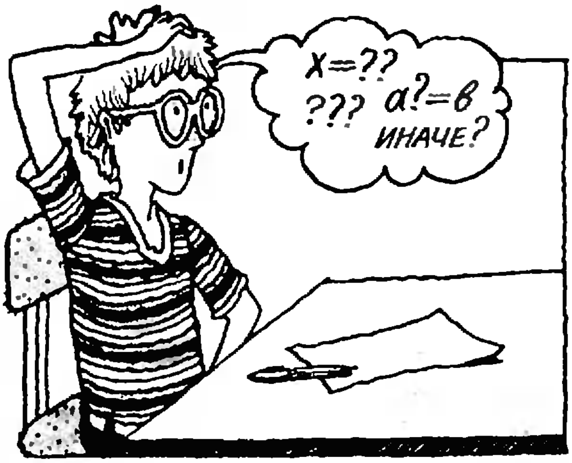
ЭВМ сегодня и завтра

Нет необходимости доказывать, как важны *ЭВМ* в нашей повседневной жизни. Уже сегодня *компьютеры* не только производят всевозможные вычисления, они еще и распределяют авиабилеты, играют в шахматы, рисуют кузовы проектируемых автомашин, сочиняют музыку, судят спортивные соревнования, ставят диагнозы больным, управляют электростанциями. Более того — роль ЭВМ в обществе возрастает все стремительней. Меняется и наше представление о них: это уже не внушительные нагромождения мигающих лампочек в огромных шкафах, а скорее скромные — но элегантные — гибриды телевизора с пишущей машинкой.

А на самом деле ЭВМ — это прежде всего тончайший срез кристалла кремния, размером в почтовую марку, опутанный паутинкой тончайших проводов, который в будущем найдет место практически в каждом промышленном изделии. Научное название такого кристаллика — *микропроцессор*. Промышленный выпуск микропроцессоров, по моему глубокому убеждению,— самое революционное техническое новшество XX века. А по мнению некоторых футурологов в не очень отдаленном будущем оно приведет к тому, что общественное производство будет в основном осуществляться роботами и контролироваться компьютерами, а большая часть населения будет занята составлением программ для их обеспечения.

Так или иначе, люди, трудовая жизнь которых пройдет в основном в двадцать первом веке, не могут быть полноценными членами общества, если они не умеют общаться с компьютером, если они не преодолели порог *второй (компьютерной) грамотности*. Для этой цели в школе введен новый курс «Основ информатики и вычислительной техники».

Сегодня решение научной или практической задачи на ЭВМ — это совместная работа человека и машины. Мы начнем с краткого описания основных этапов.



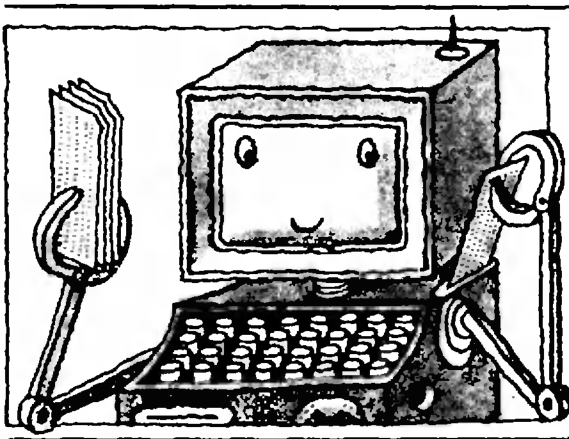
Этапы решения задачи на ЭВМ

1. Создание алгоритма

Прежде всего необходимо найти подходящий алгоритм для решения поставленной задачи. Алгоритмы для серьезных задач обычно придумывают и записывают математики или специалисты по информатике, иногда целые коллективы ученых. А в более простых случаях это сделают *программисты* — профессиональные или ...начинающие. Для многих задач хорошие алгоритмы уже известны — примеры таких алгоритмов имеются в вашем учебнике и будут приводиться на страницах «Кванта», но, как правило, мы будем начинать решение задачи с поиска подходящего алгоритма.

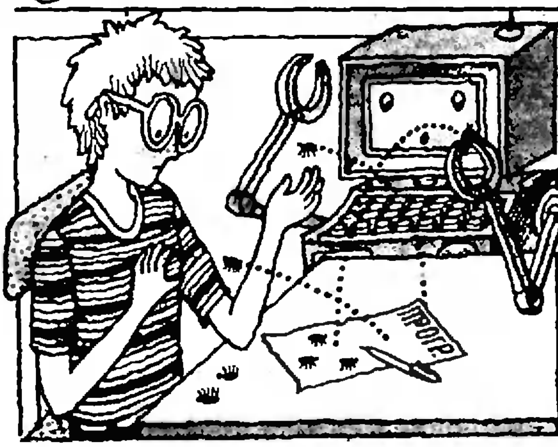
2. Составление программы

Чтобы ЭВМ могла исполнить созданный нами алгоритм, его нужно записать в виде *программы* на одном из тех *языков программирования*, которые понимает данная машина. Программы обычно пишут программисты на таких языках, как *алгол, фортран, бэйсик, паскаль, рапира*. Готовые, часто используемые программы хранятся в *библиотеках стандартных программ*. В «Кванте» на начальных порах мы будем записывать алгоритмы на алгоритмическом языке, основы которого изложены в вашем учебнике.



3. Ввод программы в ЭВМ

На современном этапе есть два основных способа вводить написанную программу в компьютер. Первый, уходящий в прошлое способ используется при работе в *пакетном режиме*: программа записывается (кодируется) в виде перфорации (дырочек) на *перфокартах*, и колода перфокарт вставляется в машину. Второй способ связан с работой в *диалоговом режиме*: программист или оператор набирает программу на *клавиатуре дисплея* и одновременно следит за правильностью ввода на *экране*.

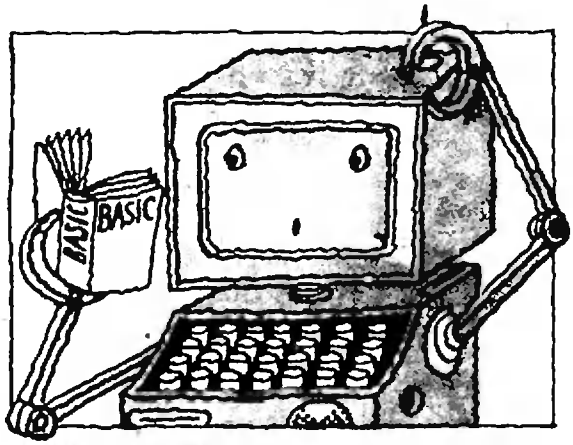


4. Отладка программы

Обычно оказывается, что в программе есть ошибки (так почти всегда бывает в больших программах). О части ошибок (так называемых *синтаксических ошибках*, или *блохах*) сразу сигнализирует компьютер при вводе программы, другие может обнаружить программист при анализе результатов (*тестирование* или *обкатка* программы). *Отладка* программы — это процесс устранения замеченных в ней ошибок. Делать это «вручную» (без помощи ЭВМ) нелегко: для этого нужно себя поставить на место исполнителя и попробовать «прокрутить программу» в простейших ситуациях.

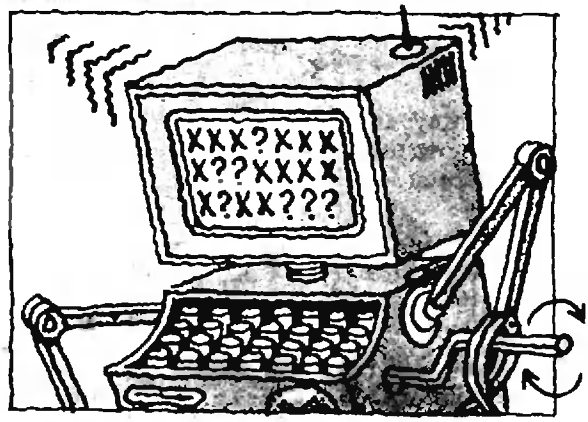
5. Трансляция программы

Чтобы машина могла исполнить введенную в нее программу или найти ошибку, у нее должен быть *транслятор* с того языка программирования, на котором программа написана. Транслятор — как бы электронный переводчик — превращает предписания программы в простейшие операции, непосредственно выполняемые машиной. Хотя создание реальных трансляторов — работа очень сложная, требующая высококвалифицированных *системных программистов*, мы будем делать нечто похожее при работе с микрокалькулятором.



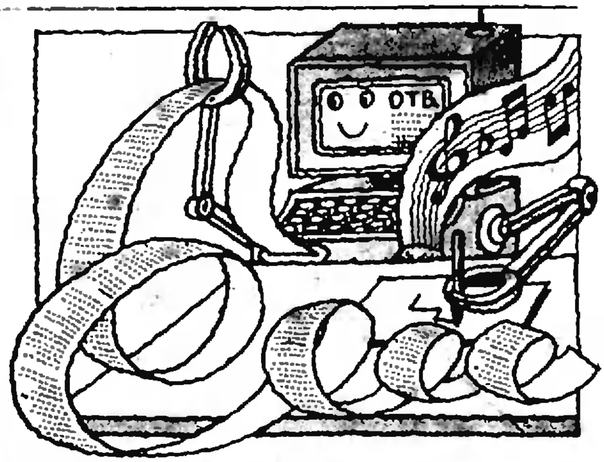
6. Исполнение программы

При традиционном пакетном режиме этот этап работы машина выполняет сама, без помощи человека: с колоссальной скоростью ЭВМ выполняет все операции, предусмотренные оттранслированной программой, одну за другой. В некоторых диалоговых программах в процессе работы компьютер может задавать вопросы пользователю и затем продолжать работу. Так или иначе, на этом этапе хозяйничает машина; здесь сказывается ее преимущество над человеком в скорости, точности, аккуратности.



7. Выдача результата

Современные компьютеры умеют представлять результат исполнения программы в разном виде. Результат (число, текст, таблица, рисунок) может быть высвечен на экране дисплея, напечатан на *АЦПУ (печатающем устройстве)*, нарисован на листе бумаги *графопостроителем*. Некоторые персональные компьютеры снабжены электронным звукомодулятором, на котором они «играют» результат, когда результат — мелодия.



А если нет ЭВМ?

Мы в первую очередь ориентируемся на учащихся, начинающих в этом учебном году заниматься информатикой в школе, еще не оснащенной вычислительными кабинетами. Такие ученики часто спрашивают — зачем же писать программу, если она все равно не будет пропущена на настоящей ЭВМ?

Этот вопрос очень похож на такой — зачем же писать сочинение, если оно все равно не будет отправлено в типографию? И ответ примерно такой же: компьютерной грамотностью можно овладевать и без машины, так же как обычной грамотностью можно овладеть без типографии.

Впрочем, ваши занятия программированием в любом случае не останутся в области чистой теории. Если в вашей школе (или поблизости) нет больших ЭВМ, часть ваших программ можно будет пропускать на *программируемом микрокалькуляторе* (например, на «Электронике БЗ-34» или «МК-52»), который обязательно должен быть у вас в школе.

Однако мы не будем стремиться превратить своих читателей в виртуозов программирования на микрокалькуляторе. Главным для нас будет *поиск алгоритмов*, решающих те или иные задачи, умение записать программу на специальном *алгоритмическом языке*, описанном в вашем учебнике. (Как правило, программировать на микрокалькуляторе мы будем исходя из этой алгоритмической записи, то есть сами будем *транслировать* (переводить) эту запись в коды операций калькулятора.)

Ниже вы ознакомитесь с некоторыми примерами алгоритмов, а в следующей статье мы подробнее поговорим об их записи на алгоритмическом языке.

Алгоритмы

Слово «алгоритм» происходит от имени великого ученого средневековья ал-Хорезми (см. «Квант», 1984, № 8, с. 29), но огромное значение этого понятия прояснилось лишь во второй половине XX века в связи с развитием вычислительной техники и информатики. Определенную роль это понятие играет и в математике (об этом см. «Квант», 1985, № 7, с. 9) — математическая теория алгоритмов примыкает к одной из наиболее изысканных областей математики — математической логике. Однако алгоритмы встречаются и в повседневной жизни, притом на каждом шагу, под такими названиями, как «инструкция», «предписание», «рецепт», «общий способ решений» и тому подобное. Более точно можно сказать, что

> *алгоритм* — это понятное и точное предписание исполнителю совершить последовательность действий, направленных на достижение определенной цели или на решение поставленной задачи.

Исполнителем алгоритма может быть человек или автоматическое устройство (компьютер, калькулятор, робот), способное воспринять предписание и выполнить указанные в нем действия.

Примерами алгоритмов являются не только многие обычные математические приемы, такие, как сложение чисел столбиком или алгоритм Евклида для нахождения Н. О. Д., но также и кулинарные рецепты, указания о проезде по городскому транспорту в определенное место, многие руководства по эксплуатации, такие инструкции, как правила пользования междугородным телефоном, отдельные предписания воинского устава. Не всякое предписание, однако, является алгоритмом. Известное из мира сказок «Поди туда, не знаю куда, принеси то, не знаю что», конечно же, нельзя считать алгоритмом: оно недостаточно точно и понятно, не указывает на конкретную последовательность действий. То же можно сказать об обычном приказе разведчику «Действуй по обстановке!» Алгоритм должен предусмотреть все ситуации, которые могут возникнуть при его исполнении, и четко указать, что делать в каждой из них.

Разберем несколько примеров задач и алгоритмов, доставляющих их решения.

Задача нахождения остатка. Даны натуральные числа x и y; требуется найти остаток от деления x на y.

Первый алгоритм (для исполнителя — школьника 4—10 класса):

— Напиши x и y рядом в одну строчку;

— отдели их уголком;

— выполни деление x на y уголком до цифры единиц делимого (x);

— выдай в качестве решения результат последнего вычитания.

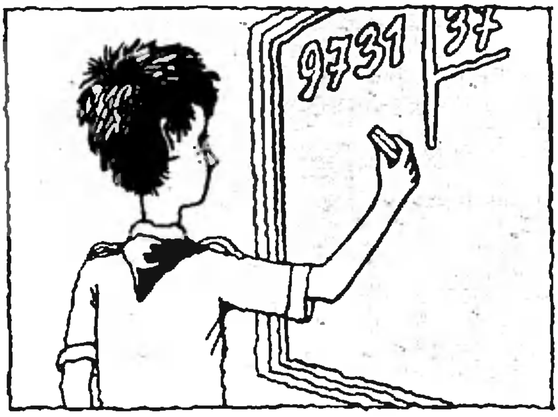
Второй алгоритм (для исполнителя — первоклассника):

— Сравни x и y;

— если $x<y$, выдай x в качестве решения;

— иначе вычти y из x и запомни разность;

— если разность меньше y, выдай ее в качестве решения;



— иначе из разности снова вычти y и продолжай в том же духе, пока очередная разность не окажется меньше y;

— эту очередную разность выдай в качестве решения.

Обсуждение. Первый алгоритм записывается короче и приводит к ответу быстрее, чем второй. Однако первый алгоритм предполагает, что исполнитель владеет делением уголком, и потому не может быть исполнен первоклассником. По этой же причине второй алгоритм лучше, чем первый, как основа программы для компьютера.

Задача о роботе-обходчике. В левом нижнем углу шахматной доски, в некоторых полях которой — ямы, стоит маленький робот-обходчик; с любого поля он может пойти в любое соседнее поле (без ямы), то есть вверх, вниз, вправо, влево; по диагонали робот не ходит; ямы тянутся от левой вертикали, образуя сплошные горизонтальные рвы длиной не более семи полей (см. рисунок); как пройти в ферзи, то есть достичь восьмой горизонтали, не упав в яму?

Первый алгоритм (для слепого робота):

— пойди: вправо; вправо; вправо; вверх; вверх; вправо; вверх; вверх; вправо; вправо; вверх; вверх; вверх; стой.

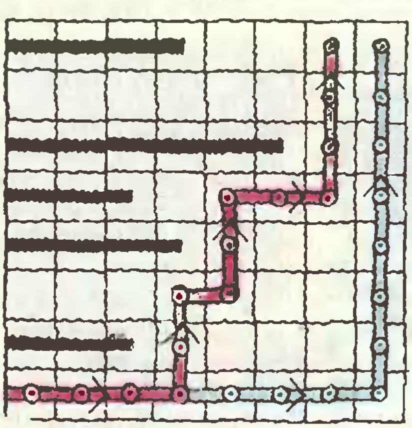
Второй алгоритм (для слепого робота, умеющего считать):

— пойди 7 раз вправо; пойди 7 раз вверх; стой.

Третий алгоритм (для зрячего робота):

— посмотри вверх;

— если сверху свободное поле, сделай ход вверх и вернись к исполнению первой команды;



— иначе сделай ход вправо и вернись к исполнению первой команды.

Обсуждение. Первый алгоритм прост и дает оптимальное решение задачи (по числу ходов), но он специально подобран для данного расположения ям на доске — при другом их расположении робот может упасть в яму! Второй алгоритм универсален в том смысле, что годится для любой системы ям (указанного в задаче типа), но не всегда дает кратчайший по числу ходов ответ; понятно, что второй алгоритм легко переписать для робота, не умеющего считать, — нужно просто повторить слово «вправо» семь раз и слово «вверх» семь раз. Третий алгоритм позволяет достичь восьмую горизонталь за оптимальное число ходов при любой (допустимой по условиям задачи) системе ям, однако после достижения восьмой горизонтали робот еще зачем-то идет вправо, пока не упрется в правый верхний угол доски. Заметим еще следующее: записывая третий алгоритм, мы предполагаем, что при невозможности исполнения команды (в данном случае — команды «шаг вправо» с поля $h8$) робот прекратит работу; если не сделать это предположение, бедный робот *зациклится*, он будет топтаться на месте на поле $h8$ и безуспешно пытаться выполнить первую, вторую, третью команду, а затем снова первую, вторую и т. д.

Упражнения

1. Опишите алгоритм сокращения дробей вида a/b, где a, $b \in \mathbb{N}$. Указание: примените алгоритм Евклида.

2. Опишите алгоритм деления и алгоритм сложения двух дробей a/b и c/d, где a, b, c, $d \in \mathbb{Z}$; ответ должен быть несократимой дробью.

3. Опишите алгоритм, который по количеству этажей в многоэтажном доме, числу квартир на одном этаже и номеру квартиры определяет этаж и номер подъезда этой квартиры, а также определяет необходимость пользоваться лифтом (лифтом пользуются только в том случае, когда квартира находится выше второго этажа).

4. На шахматной доске произвольным образом отмечены некоторые клетки (ямы), на которые ходить нельзя. Опишите алгоритм прохода робота с первой горизонтали на последнюю а) в предположении, что путь существует; б) в общем случае, сообщив «прохода нет», если задача не имеет решения.

5. Робот-обходчик занялся альпинизмом. На шахматной доске на каждой из первых семи горизонталей заштриховано 7 или менее клеток, идущих подряд от правого края. Они изображают гору. Как роботу-альпинисту залезть на гору?

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Вокруг «Алисы»

(после долгих раздумий редакция отвечает на вопросы Алисы из «Кванта» № 6)

I Если Кролик бормотал про себя зпт то не могла зпт если же Он бормотал про Себя зпт то могла тчк

П У всех по-разному тчк У кого бежится быстрее зпт потому что думается зпт у кого – наоборот тчк тчк тчк

Ш Вовсе ниоткуда и никуда это не следует тчк

IУ Неправда тчк Потому что известно зпт что утром все честные люди (и зпт конечно зпт дети) выше зпт чем вечером тчк

У Как правило зпт чем внезапнее топот и страшнее шепот зпт тем больше габариты тчк тчк тчк

УI Потому что большому куску есть на что ломаться зпт а маленькому не на что тчк

УП Если дрожат губы зпт то скорее можно услышать зпт как стучат зубы тчк тчк тчк

В этой новой рубрике будут публиковаться заметки, которые познакомят читателей с полупроводниковыми устройствами, лежащими в основе вычислительной техники.

Первое знакомство

Доктор физико-математических наук М. Е. ЛЕВИНШТЕЙН, кандидат физико-математических наук Г. С. СИМИН

Наверняка мы не ошибемся, если предположим, что большинство наших читателей лучше представляют себе, что могут делать электронно-вычислительные машины, нежели знают, как эти машины устроены. Многие не только расскажут, какие задачи решаются с помощью ЭВМ, но и продемонстрируют навыки работы с ними. Проделать же некоторые вычисления на микрокалькуляторе способны сегодня практически все школьники старших классов. А вот что там, внутри этих устройств? Что лежит в основе их работы?

Электронные цифровые вычислительные машины появились 40 лет назад, вскоре после окончания второй мировой войны. Машины «Эниак» (США), «БЭСМ-1», «Урал-1» (СССР) и др. содержали несколько десятков тысяч электронных ламп и проделывали 5—10 тысяч операций в секунду.

Современные ЭВМ содержат миллионы полупроводниковых приборов и выполняют десятки миллионов операций в секунду.

Колоссальный прогресс ЭВМ решающим образом связан с развитием физики полупроводников и полупроводниковой техники.

Полупроводниковые приборы — основа современной радиоэлектроники; ЭВМ — самое сложное радиоэлектронное устройство, когда-либо созданное человеком. Схема коротковолнового переносного радиоприемника включает 10—15 полупроводниковых элементов (транзисторов и диодов), цветного телевизора на полупроводниках — более 100. Большая ЭВМ содержит десятки миллионов элементов и намного превосходит все другие устройства по сложности своей внутренней структуры.

И в то же время, это сложнейшее радиоэлектронное устройство состоит из простых элементарных ячеек, называемых логическими схемами. В свою очередь их основой, а следовательно, и основой работы всей машины является один-единственный элемент, обладающий главным свойством: способностью находиться в двух хорошо различимых физических состояниях, одно из которых можно условно назвать «нулем», а другое — «единицей». Физикам известны десятки так называемых «ключевых» приборов, обладающих этим свойством, число таких приборов с каждым годом увеличивается, и на основе любого из них можно, в принципе, построить ЭВМ. Но только в принципе! Реальные компьютеры предъявляют к своему основному элементу целый набор весьма жестких требований.

Во-первых, скорость переключения элемента, то есть скорость его перехода из состояния «0» в состояние «1» и обратно, должна быть очень велика, так как она определяет быстродействие всей машины; во-вторых, его размеры должны быть очень малы — ведь элементов в ЭВМ миллионы; в-третьих, по той же причине, потребляемая им мощность и его стоимость должны быть очень низкими; в-четвертых, он должен быть надежен; в-пятых, ..., в-восьмых, ..., в-десятых...

Оказывается, что единственный тип приборов из множества известных сегодня «ключевых» элементов, который удовлетворяет всей совокупности жестких и противоречивых требований современных ЭВМ, — это транзисторы, объединенные в большие и сверхбольшие интегральные схемы (БИС и СБИС).

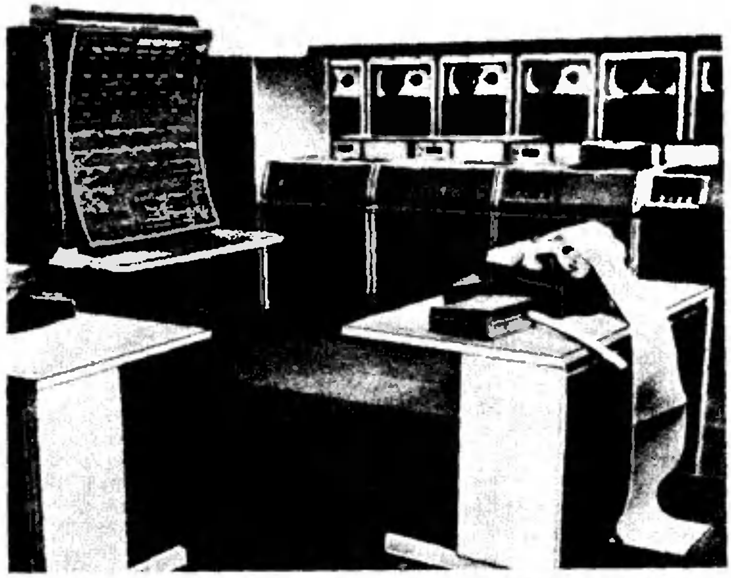
До появления интегральных схем транзисторы создавались следующим образом. На большой кремниевой пластине изготавливалось несколько тысяч транзисторных структур. Далее

Электронные лампы — элементная база ЭВМ первого поколения. Срок службы такой лампы — несколько тысяч часов, объем — несколько см^3. Ламповые ЭВМ весили 20—30 т, потребляли мощность 100—200 кВт.

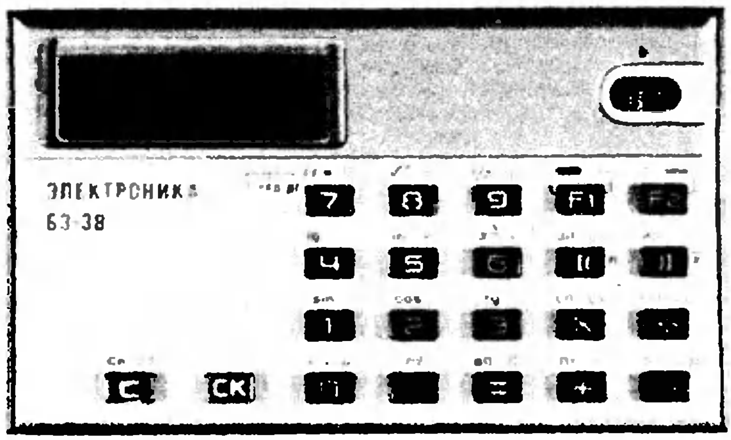
Транзисторы — основа ЭВМ 2-го поколения. Одна из мощнейших машин этого класса — БЭСМ-6; создана в СССР в 1967 году и эксплуатируется до сих пор. Совершает около 1 млн. операций в секунду. Содержит около 60 тысяч биполярных транзисторов и 200 тысяч диодов.

Идея создавать на полупроводниковой пластине готовую схему, содержащую транзисторы и все необходимые соединения, — интегральную схему (ИС) — возникла в 1952 году и была реализована в 1959 году.

Отечественная ЭВМ ЕС-1060 — одна из самых мощных машин 3-го поколения. Элементная база — ИС на основе биполярных транзисторов. Быстродействие — 3 млн. операций в секунду. Содержит более 10 млн. транзисторов.



«Электроника Б3-38» — микрокалькулятор на основе одного кристалла, содержащего 35 тысяч полевых транзисторов. Размер кристалла $\sim 5 \times 5$ мм^2. Содержит микропрограммы 34 математических операций. Потребляет менее 600 мкВт, весит менее 50 г.



Человеческий мозг может вместить приблизительно 10^{13} единиц информации. Чтобы разместить эту информацию в памяти ЭВМ, в 1960 году потребовалось бы помещение объемом 500 млн. м^3.
Если современная скорость сокращения размеров полупроводниковых элементов в ИС сохранится, то в 2050 году эта информация сможет быть размещена в объеме, меньшем, чем объем головы человека.

пластина разрезалась на множество мелких кристалликов, каждый из которых представлял собой один будущий транзистор. Затем начиналась длинная последовательность трудоемких ручных операций. Кристаллик крепился в специальный держатель, под микроскопом с двух сторон к кристаллу приваривались выводы-проволочки, вся конструкция помещалась в специальный корпус, герметизировалась. И в результате транзистор был готов служить элементом любой радиоэлектронной схемы.

Получалось, что сначала транзисторы отделялись один от другого (когда пластина разрезалась), а затем, при изготовлении схемы, снова соединялись друг с другом.

Идея ИС состоит в том, чтобы изготавливать на пластине одновременно и транзисторы, и необходимые соединения между ними. В результате каждая пластина содержит готовые радиоэлектронные схемы. В корпус помещается теперь не один транзистор, а схема, насчитывающая много (до сотен тысяч) транзисторов и имеющая сравнительно небольшое число внешних выводов. Размеры электронных схем очень сильно уменьшаются, их надежность возрастает.

Если бы знакомый всем микрокалькулятор был собран не на ИС, а на обычных дискретных транзисторах, он был бы размером с письменный стол и выходил из строя каждый час. Электронные наручные часы вообще не могли бы существовать. Да и современные ЭВМ, насчитывающие десятки миллионов транзисторов, были бы практически непригодны: они выходили бы из строя каждые несколько секунд.

В ЭВМ используются ИС, содержащие два основных типа транзисторов: биполярные и полевые.

В наших последующих заметках мы расскажем о принципах работы биполярных и полевых транзисторов и о простейших логических схемах, лежащих в основе действия ЭВМ.

Задачи юбилейной Московской городской математической олимпиады

В этом году Московская математическая олимпиада проводилась в 48-й раз; в ней приняли участие более 700 школьников. Хотя ее номер и не «круглый», эту олимпиаду можно с полным правом считать юбилейной — первая олимпиада состоялась ровно 50 лет назад. Заключительный тур олимпиады 1985 года прошел 24 марта в Московском университете. Мы приводим предложенные на нем задачи.

7 класс

1. Найти все значения x и y, удовлетворяющие равенству

$$xy+1=x+y.$$

2. Даны пять различных положительных чисел, которые можно разбить на две группы так, чтобы суммы чисел в этих группах были одинаковыми. Сколькими способами это можно сделать?

3. Длины a, b, c, d четырех отрезков удовлетворяют неравенствам $0<a\leqslant b\leqslant c<d$, $d<a+b+c$. Можно ли из этих отрезков сложить трапецию?

4. В центре квадрата сидит заяц, а в каждом из четырех углов по одному волку. Может ли заяц выбежать из квадрата, если волки могут бегать только по сторонам квадрата с максимальной скоростью в 1,4 раза большей, чем максимальная скорость зайца?

5. В магазин привезли цистерну молока. У продавца имеются чашечные весы без гирь (на чашки весов можно ставить фляги), а также три одинаковые фляги, две из которых пустые, а в третьей налит 1 л молока. Как отлить в одну флягу ровно 85 л молока, сделав не более восьми взвешиваний?

8 класс

1. Найти все значения x, y и z, удовлетворяющие равенству

$$(x-y+z)^2=x^2-y^2+z^2.$$

2. Числа a_1, a_2, ..., a_{1985} представляют собой переставленные в некотором порядке числа 1, 2, ..., 1985. Каждое число a_k умножается на его номер k, а затем среди всех полученных 1985 произведений выбирается наибольшее. Доказать, что оно не меньше чем 993^2.

3. На лист бумаги «в клетку» положен бумажный квадрат, площадь которого равна учетверенной площади клетки. Какое наименьшее число узлов может накрывать этот квадрат? (Узел — это точка пересечения линий бумаги; если узел лежит на границе квадрата, то он считается накрытым.)

4. За дядькой Черномором выстроилось чередой бесконечное число богатырей. Доказать, что он может приказать части из них выйти из строя так, чтобы в строю осталось бесконечно много богатырей и все они стояли по росту (не обязательно в порядке убывания роста).

5. Доказать, что если длина каждой из трех биссектрис треугольника больше 1, то его площадь больше $1/\sqrt{3}$.

9 класс

1. Найти все значения x, y и z, удовлетворяющие равенству

$$\sqrt{x-y+z}=\sqrt{x}-\sqrt{y}+\sqrt{z}.$$

2. В некоторой стране 1985 аэродромов. С каждого из них вылетел самолет и приземлился на самом удаленном от места старта аэродроме. Могло ли случиться, что в результате все 1985 самолетов оказались на 50 аэродромах? (Землю можно считать плоской, а маршруты прямыми.)

3. См. задачу 3 для 8 класса.

4. Доказать, что в любой группе из 12 человек можно выбрать двоих, а среди оставшихся 10 человек еще пятерых, так, чтобы каждый из этих пятерых удовлетворял следующему условию: либо он дружит с обоими выбранными вначале, либо не дружит ни с одним из них.

5. Доказать, что любое число 2^n, где $n=3$, 4, 5, ... можно представить в виде $2^n=7x^2+y^2$, где x и y — нечетные числа.

10 класс

1. Решить уравнение

$$\frac{x-49}{50}+\frac{x-50}{49}=\frac{49}{x-50}+\frac{50}{x-49}.$$

2. См. задачу 3 для 7 класса.

3. Назовем «сложностью» данного числа наименьшую длину числовой последовательности (если такая найдется), которая начинается с нуля и заканчивается этим числом, причем каждый следующий член последовательности либо равен половине предыдущего, либо в сумме с предыдущим составляет 1. Среди всех чисел вида $m/2^{50}$, где $m=1$, 3, 5, ..., $2^{50}-1$, найти число с наибольшей «сложностью».

4. Даны 1985 множеств, каждое из которых состоит из 45 элементов, причем объединение любых двух множеств содержит ровно 89 элементов. Сколько элементов содержит объединение всех этих 1985 множеств?

5. Доказать, что если расстояния между скрещивающимися ребрами тетраэдра равны h_1, h_2, h_3, то объем тетраэдра не меньше чем $h_1h_2h_3/3$.

Публикацию подготовили
С. Б. Гашков, И. Н. Сергеев

Новосибирская областная олимпиада по физике

8 класс

1. Бочку конической формы, частично заполненную водой, закрывают двумя одинаковыми пробками, прикладывая к ним одинаковые силы (рис. 1). Рабочий перенес бочку с одного места на другое, держа ее широким днищем вниз, а затем медленно перевернул бочку узким днищем вниз. После этого пробка вылетела, и вода стала вытекать из бочки. Почему вылетела пробка?

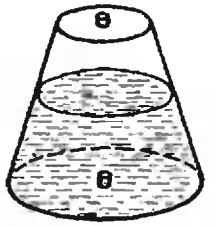


Рис. 1.

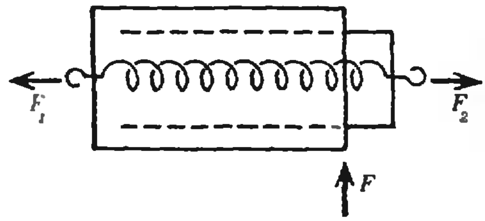


Рис. 2.

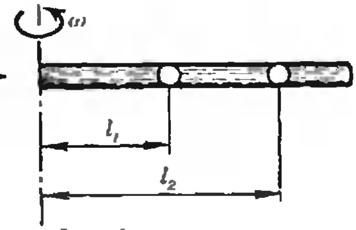


Рис. 3.

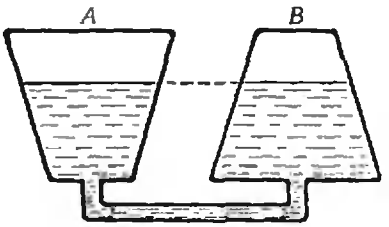


Рис. 4.

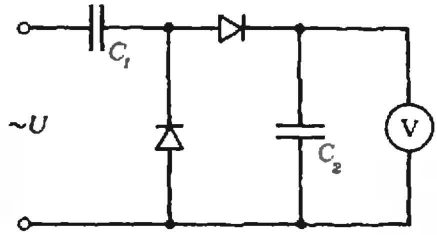


Рис. 5.

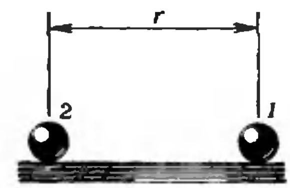


Рис. 6.

2. Гибкая цепочка с мелкими звеньями связывает два небольших шарика, значительно более массивных, чем любое из звеньев цепочки. Один из шариков удерживают в центре гладкого горизонтального стола, имеющего форму круга, а другой вместе с небольшим куском цепочки свешивается с его края. Считая, что высота стола больше длины цепочки, определите, где будут находиться точки первого соприкосновения шариков с полом, если предоставить систему самой себе: 1) внутри круга, имеющего стол своей «крышей»; 2) вне упомянутого круга; 3) на его границе. Трением пренебречь.

3. Тело начинает скользить вниз по шероховатой наклонной плоскости и в нижней точке ударяется об упругую стенку, перпендикулярную направлению его движения. После удара тело поднялось до половины первоначальной высоты. Считая, что при ударе модуль скорости не изменился, определите, что заняло больше времени: подъем или спуск. Во сколько раз?

4. Небольшое тело массой m, подвешенное на невесомой нити, отклоняют от положения равновесия на угол α и отпускают. Определите натяжение нити в первый момент времени.

5. Динамометр представляет собой два цилиндра, соединенных легкой пружиной (рис. 2). Найдите отношение масс этих цилиндров, если при приложенных к ним силах F_1 и F_2 показание динамометра равно F.

9 класс

1. Вагончик монорельсовой дороги имеет двигатель, способный развивать мощность $N=100$ кВт. Вагончик начинает движение с одной станции и останавливается на другой. Найдите минимальное время, необходимое для этого. Коэффициент трения колес о рельс $\mu=0{,}2$. Расстояние между станциями $l=800$ м, масса вагончика 100 кг. Сопротивлением воздуха при движении пренебречь.

2. Во сколько раз изменится подъемная сила воздушного шара, сообщающегося с атмосферой, если в качестве газа первый раз взять водород, а второй раз — гелий? Массой оболочки шара пренебречь.

3. Тонкая закрытая трубка заполнена жидкостью плотности ρ и вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через один из концов трубки (рис. 3). Давление жидкости в трубке измеряют двумя манометрами, расположенными на расстояниях l_1 и l_2 от оси вращения. Какова будет разность $\Delta p=p_2-p_1$ показаний манометров при равномерном вращении трубки с угловой скоростью ω?

4. См. задачу 5 для 8 класса.

5. На некотором участке шоссе автомобили в колонне уменьшают свою скорость от v_1 до v_2. Какова должна быть начальная дистанция между автомобилями, чтобы они не сталкивались? Длина каждого автомобиля l.

10 класс

1. Система состоит из двух сосудов A и B, соединенных между собой длинной тонкой трубкой и заполненных однородной жидкостью (рис. 4). С системой проводят два опыта. В первом опыте нагревают сосуд A, во втором — B. Будет ли при этом перетекать жидкость по трубке? Если да, то в какую сторону? Расширением сосудов и трубки при нагревании, а также теплопроводностью системы пренебречь.

2. Груз массой M был прицеплен к нижнему концу вертикальной недеформированной пружины и отпущен без начальной скорости, после чего стал совершать вертикальные гармонические колебания. Во сколько раз изменится период и амплитуда колебаний, если на груз без толчка сядет жук, масса которого m составляет 96 % массы груза? Посадка без толчка означает, что в момент соприкосновения скорости жука и груза одинаковы. Рассмотреть случаи посадки: 1) в самой верхней и 2) в самой нижней точках траектории.

3. Прибор, схема которого приведена на рисунке 5, подключен к сети переменного тока с напряжением $U=220$ В. Какое напряжение покажет вольтметр по прошествии достаточно большого промежутка времени?

4. См. задачу 5 для 9 класса.

5. Два небольших одинаковых тела массой m каждый заряжены одинаковыми зарядами q и находятся на расстоянии r друг от друга (рис. 6). Сначала отпустили тело 1. Когда оно удалилось на расстояние $2r$, отпустили также и тело 2. Найдите скорости тел на большом расстоянии друг от друга. Трения нет.

Публикацию подготовил *В. Г. Харитонов*

Список читателей, приславших правильные решения.

(Начало см. на с. 49)

(Харьков) 96, 00; *Ю. Шамрук* (д. Новый Двор Гродненской обл.) 96, 03; *С. Шейнин* (Молодечно) 00; *А. Ширинкин* (Березники) 03; *П. Шрабштейн* (Москва) 02; *Б. Шраер* (Ленинград) 96, 02—04; *В. Шульга* (Евпатория) 02, 04; *А. Эфендиев* (п. Маразы Аз ССР) 10; *Е. Юдицкий* (Киев) 96.

Физика

А. Абанов (Красноярск) 12, 21; *А. Абибуллаев* (Ташкент) 21; *И. Абрамчук* (Винница) 15, 17, 21, 22; *М. Албегов* (Москва) 22; *Д. Алтаев* (Чимкент) 21; *С. Анатольев* (Ярославль) 8, 21, 22; *М. Андронов* (Фрунзе) 21; *Ю. Антимиров* (Рига) 21; *В. Апальков* (Харьков) 8, 9, 12, 17, 21; *Т. Ахметов* (Новосибирск) 9; *С. Бакин* (Орел) 21; *А. Барабанов* (Киев) 21; *А. Барабаш* (Канев) 8; *Д. Барц* (Харьков) 15, 22; *К. Баталин* (Нижний Тагил) 12; *А. Башлаков* (Москва) 12, 16, 17, 21, 22; *К. Бедов* (Челябинск) 8, 15, 16, 21, 22; *А. Белопольский* (Киев) 9, 16, 21, 22; *И. Бена* (Васлуй, СРР) 8, 9, 12; *П. Бенедюк* (Пятигорск) 8, 9, 12, 17, 21, 22; *А. Беренгольц* (Кишинев) 21; *В. Березский* (Киев) 8, 9, 21; *О. Бесман* (Алма-Ата) 21; *А. Беспалько* (Сумы) 8; *Н. Блоцкий* (Запорожье) 21, 22; *С. Бобылев* (Березники) 9; *Е. Богомол* (Алма-Ата) 21; *Л. Боднар* (Винница) 21, 22; *С. Бондаренко* (Волгоград) 21; *Э. Бондаренко* (Полтава) 9, 12; *В. Борисов* (Свердловск) 21; *Ю. Боровский* (Киев) 8, 9, 21; *Е. Боширова* (к-з «Победа» Нарынского р-на УзССР) 8; *С. Братченко* (Торез) 8, 12; *Д. Будько* (Белгород) 21; *М. Валиев* (Самарканд) 21; *Ш. Валитов* (Ташкент) 22; *И. Ванин* (Москва) 22; *А. Васильев* (Красноярск) 8; *Д. Вент* (Тула) 9, 22; *И. Верный* (Киев) 8, 9, 21, 22; *С. Винтовкин* (Свердловск) 8, 12, 21, 22; *К. Вохолаз-Ихозов* (Сумгаит) 21, 22; *Г. Габададзе* (Тбилиси) 22; *И. Гаврик* (Часов Яр) 8, 9, 16; *А. Гамаюнов* (Полтава) 22; *О. Гендельман* (Харьков) 21, 22; *С. Гершиков* (п. Першотравневое Донецкой обл.) 15, 21; *М. Гершкович* (Тбилиси) 21; *М. Годин* (Ленинград) 8; *А. Голев* (Пущино) 8; *Л. Гольдштейн* (Киев) 8, 9, 21, 22; *Г. Горбатенко* (Арзамас) 12, 21; *С. Гордеев* (Волгодонск) 22; *С. Горелик* (Челябинск) 21; *М. Готман* (Киев) 8, 12; *В. Гринберг* (Москва) 8, 9, 15, 16, 22; *В. Гурарий* (п. Черноголовка Московской обл.) 22; *А. Гущин* (Астрахань) 21; *Д. Дворников* (Донецк) 8; *О. Денисов* (Хабаровск) 21; *А. Дода* (Корсунь-Шевченковский) 8, 21, 22; *А. Донченко* (Киев) 21; *В. Другаков* (д. Любачин Брестской обл.) 21; *Д. Ежиков* (Минск) 22; *Н. Ершов* (Козьмодемьянск) 21, 22; *С Ефремов* (Запорожье) 9, 16, 17; *А. Жариков* (Киев) 8, 9, 12, 22; *В. Жевлаков* (п. Черноголовка Московской обл.) 21, 22; *К. Жихарев* (Жданов) 22; *В. Заводяный* (с. Калининское Херсонской обл.) 21, 22; *П. Задорожный* (Киев) 22; *Д. Зайцев* (Киев) 8; *Л. Запольский* (Москва) 21; *К. Захаров* (Фрунзе) 21, 22; *К. Зимин* (Запорожье) 22; *Б. Зингерман* (Самарканд) 21, 22; *А. Зозуля* (Винница) 21; *М. Иваницкий* (с. Цвитова Ивано-Франковской обл.) 8; *И. Иванов* (Калуга) 21; *С. Иванов* (Уфа) 8, 18, 21, 22; *А. Игнатов* (Тула) 22; *П. Кадурин* (Киев) 21; *В. Калацкий* (Солигорск) 8; *И. Кальчевский* (Омск) 21, 22; *В. Каменский* (Калинин) 22; *Н. Камнева* (Алма-Ата) 21; *А. Камышанский* (Алма-Ата) 21; *В. Капович* (Хабаровск) 21; *А. Карнаухов* (Устинов) 22; *Д. Кашпер* (Киев) 22; *М. Кельмансон* (Москва) 8, 12, 15, 16, 21, 22; *В. Кибук* (Ровно) 8, 17, 22; *В. Кирьяшкин* (Саратов) 15; *В. Киреев* (Киев) 22; *В. Кирюхин* (п. Черноголовка Московской обл.) 22; *П. Кларк* (Тула) 15, 21; *А. Климачев* (Минск) 8, 9; *А. Климов* (Донецк) 21; *В. Княгницкий* (Крушаны) 8, 12; *Ф. Кожевников* (Ставрополь) 17, 21; *Ю. Кондратенко* (Киев) 8; *В. Корилюк* (п. Сосница Черниговской обл.) 8; *С. Короткий* (Целиноград) 22; *Ю. Костив* (Львов) 21; *А. Краев* (Харьков) 21; *М. Кудряшев* (Москва) 12, 16, 17, 22; *Л. Кулинский* (Киев) 17, 22; *А. Курачев* (Новосибирск) 21; *П. Лаврентьев* (п. Черноголовка Московской обл.) 21, 22; *А. Левенштейн* (Донецк) 8, 21, 22; *М. Ледней* (с. Лопушное Закарпатской обл.) 8, 17; *Л. Лиознов* (Москва) 8, 18, 21; *В. Литвин* (Днепропетровск) 21; *Ю. Литвиненко* (Воронеж) 8; *Ю. Лобзаков* (Киев) 22; *А. Лобковский* (п. Черноголовка Московской обл.) 9; *Е. Лозовой* (Киев) 22; *В. Локтин* (Харьков) 21; *К. Лопин* (Фрунзе) 8, 21; *М. Лутохин* (Куйбышев) 22; *К. Луценко* (Донецк) 15, 21; *П. Лушников* (Москва) 9, 12, 15, 16, 21, 22; *О. Мазяр* (Львов) 8, 9, 21, 22; *А. Максимов* (Ташкент) 9, 21; *М. Маргулис* (Харьков) 22; *О. Марова* (Канев) 8, 21; *Р. Марченков* (Рязань) 22; *А. Мастыкин* (Минск) 8; *Ю. Махлин* (Москва) 8; *З. Мачарадзе* (Тбилиси) 21; *П. Медведев* (Горький) 8, 12; *С. Медников* (Баку) 21; *В. Мелик-Алавердян* (Ереван) 8; *В. Меньков* (Мончегорск) 12; *В. Микщиль* (Ростов) 21; *Т. Мисирпашаев* (Москва) 8; *А. Мищаненко* (Новосибирск) 15, 21; *И. Мороз* (п. Мизоч Ровенской обл.) 22; *К. Мосейчев* (Зеленоград) 8, 17; *С. Мягчилов* (Одесса) 8, 15, 16, 21, 22; *О. Нагаев* (Железнодорожный Московской обл.) 21; *А. Надточий* (Киев) 22; *С. Настенко* (Киев) 21; *А. Недачин* (Киев) 8, 21, 22; *С. Некрасов* (Каменск-Уральский) 8; *Г. Николаишвили* (Тбилиси) 21; *Т. Никольская* (Донецк) 21, 22; *И. Обижаев* (Ташкент) 21, 22; *И. Оводов* (п. Менделеево Московской обл.) 21; *К. Овчаренко* (Днепродзержинск) 8, 12; *В. Овчаров* (Шостка) 21; *А. Онуфриев* (Москва) 8; *О. Осауленко* (Киев) 9, 21; *А. Павленко* (Борисоглебск) 21; *А. Павлыгин* (Киев) 8; *Р. Паламарчук* (Нежин) 17, 21, 22; *А. Парнецкий* (Минск) 21, 22; *Ю. Пастухов* (Омск) 21, 22; *А. Перепеличный* (Владимир) 8, 9; *Е. Петров* (Минск) 22; *Д. Пименов* (Щелковский р-н Московской обл.) 21; *Л. Пилягин* (Вологда) 22; *С. Пиунихин* (Москва) 8, 9, 17, 22; *В. Плотников* (Курск) 22; *И. Погорелов* (Донецк) 21; *А. Поляков* (с. Первомайское ЧувАССР) 22; *В. Поляков* (Кстово) 21; *М. Померанцев* (Черкассы) 21; *О. Посудневский* (Береза) 8, 9; *О. Потапова* (Фрунзе) 21, 22; *А. Прохоров* (Херсон) 21, 22; *А. Пушков* (Москва) 21, 22; *А. Пяллинг* (Новосибирск) 16; *И. Раджабов* (с. Хив Даг.АССР) 21; *Л. Рафаилов* (Баку) 21; *С. Рахамов* (Казань) 8, 12, 17, 22; *А. Розанов* (Киев) 17; *В. Романенко* (Жданов) 22; *Н. Ромец* (Кировоград) 22; *С. Росл* (Минск) 22; *А. Ростов* (Винница) 9, 21, 22; *А. Рудницкий* (Рига) 21, 22; *М. Рудык* (Винница) 8, 9, 15, 17; *Ю. Рыбалочка* (Киев) 8, 9, 21, 22;

(Окончание см. на с. 64)

Физико-математическая конференция школьников

16 марта 1985 года в физико-математической школе-интернате при МГУ состоялась научная конференция школьников.

Участники конференции — ученики 9-х и 10-х классов ФМШ при МГУ, 57-й, 179-й, 444-й школ г. Москвы, а также ЗФШ при МГУ — рассказали о самостоятельных исследованиях, которые они проводили под руководством преподавателей своих школ, а также сотрудников Московского университета, Института прикладной математики АН СССР и других научных институтов.

Конференцию открыл председатель ее жюри директор ФМШ при МГУ кандидат физико-математических наук В. Л. Натяганов, пожелавший участникам конференции успехов и отметивший, что главное в их работе даже не конечные результаты (в наше время трудно ожидать от школьников серьезных научных открытий), а то приобщение к науке, к ее духу и к самостоятельному творчеству, которое очень пригодится им в дальнейшем.

Затем состоялось пленарное заседание, на котором был прочитан доклад М. Ерикова (ФМШ при МГУ, 10-й класс) «О принципе Ферма в оптике». Автор доклада исследовал возможности применения принципа Ферма для анализа оптических систем, изучаемых в школьном курсе физики. Он не только собрал и обобщил материал по этой теме, но и получил новые интересные результаты.

Дальнейшая работа конференции проходила в 3-х секциях. На заседаниях секций было прочитано 22 доклада: 8 по математике и 14 по физике.

Все 8 докладов на секции математики были весьма интересными.

Доклады В. Садова (школа № 57) «О моделировании одного физического эксперимента», М. Кудряшова и И. Балабана (школа № 179) «Полет на Луну» и В. Волокитина (школа № 179) «Об одном методе численного решения уравнения Риккати» выделялись своей прикладной направленностью и были посвящены решению с помощью современных ЭВМ задач, непосредственно связанных с серьезными практическими проблемами. Эти работы были выполнены под руководством сотрудников и на вычислительных машинах ИПМ АН СССР. Приятно отметить, что авторы докладов обнаружили незаурядные для школьников познания в области прикладной математики, а также умение программировать на современных ЭВМ.

Остальные пять докладов, выполненные учениками ФМШ при МГУ, были посвящены различным разделам «чистой» математики.

В. Роганов в своем докладе «О некоторых обобщениях теоремы Эйлера» выяснил условия, которым должны удовлетворять радиусы r и R вписанного и описанного кругов выпуклого n-угольника (разумеется, речь идет о многоугольниках, одновременно вписанных и описанных около окружности) и расстояние d между центрами этих кругов. По теореме Эйлера для треугольника $d^2=R^2-2Rr$. Докладчик получил обобщения этой теоремы для $n>3$.

В докладе О. Басова «Игры и группы» шла речь о задачах, позволяющих разобраться в структуре очень популярных сейчас головоломок типа кубика Рубика. С. Пиртли в докладе «Функциональные корни» выяснил, при каких условиях данная непрерывная функция $f(x)$ может быть представлена в виде $h(h(x))=f(x)$, где h — некоторая непрерывная функция. Оказалось, что достаточным условием здесь является возрастание функции h.

Приведены примеры, когда функции h не существует. В целом же задача о существовании «функциональных квадратных корней» еще далека от своего решения. Например, не ясно, существует ли дифференцируемая функция $h(x)$, для которой $h(h(x))=\sin x$.

С. Чепанов и Н. Шамаров исследовали разрешимость диофантовых уравнений вида $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\ldots+\frac{1}{x_n}=\frac{1}{N}$, где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — попарно различные натуральные числа, а N — натуральное число. В некоторых частных случаях ими получены любопытные результаты.

В докладе А. Слепухина «О преобразовании плоских графов» была доказана, по-видимому, новая теорема из теории графов!

Очень интересными и содержательными были доклады на двух физических секциях.

В докладах А. Солдатова «Оценка энергии связи молекул жидкости по давлению насыщенных паров», Ю. Прохорова «Оценка энергии связи молекул воды в ассоциациях по температурному расширению воды» и В. Лущикова «Об одной безразмерной константе, характеризующей жидкость» авторами получены новые интересные результаты. Следует отметить, что для анализа экспериментальных кривых авторы первых двух докладов использовали ЭВМ, причем во втором докладе программа для ЭВМ была достаточно сложной. Большой интерес участников секции вызвал также доклад В. Костюнина «Проверка законов движения тел на примере планеты Венера». В докладе автор использовал для обработки свои собственные наблюдения, причем для облегчения наблюдений им был сконструирован оригинальный прибор.

Очень интересным был доклад И. Тузова «Экспериментальное изучение ячеек Бенара в жидких средах». Эту работу характеризуют фундаментальность и тщательность проведенного исследования. В докладе С. Козырева «О пределе скорости снарядов, вылетающих из огнестрельного орудия» показано, что при использовании обычных взрывчатых веществ существует некоторая предельная скорость движения снаряда ($v\sim 10$ км/с). Эта скорость велика, но ее недостаточно для отправки снаряда, например, на Луну. В докладе Д. Ищенко «О механической устойчивости башен в поле сил тяжести» автор сравнительно просто получил оценку верхнего предела высоты башен, не используя сложного аппарата, с помощью которого обычно анализируется это явление. Интересен был также доклад М. Кузнецова и О. Фомина «Некоторые вопросы поведения диэлектриков в электрическом поле».

Перечисленные доклады выполнены учениками ФМШ при МГУ под руководством преподавателей школы и сотрудников физического факультета МГУ.

Сильное впечатление произвел доклад Олега Козловского (школа №444) «Баротропная модель атмосферы». В этой работе был теоретически рассмотрен вопрос об образовании атмосферных вихрей — циклонов в атмосфере Земли с учетом ее суточного вращения. Автор проявил хорошее владение аппаратом гидродинамики, причем численные оценки, характеризующие развитие циклона, были проведены на ЭВМ. Полученные результаты, в целом, правильно описывают основные черты развития циклона. Нам кажется, что эта работа представляет научный интерес. Очень интересным был также обзорный доклад С. Фролова (школа № 444) «Возобновляемые источники энергии».

Объем заметки не позволяет нам изложить здесь темы всех докладов. Отметим только, что все они были интересными. Вообще на конференции господствовал дух творчества, увлеченности наукой.

В ее работе приняли участие научные сотрудники ИПМ АН СССР, МГУ, члены редколлегии и сотрудники редакции журнала «Квант».

В дальнейшем эта конференция станет традиционной, и мы надеемся на расширение состава и географии ее участников.

Преподаватели ФМШ при МГУ
А. В. Белов, А. А. Егоров

Введение в стереометрию, или «Аксиоматические игры»

Решения задач (1—8)

1. Возьмем на прямой a две точки A и B, вне плоскости α — точку C, и рассмотрим плоскость $\beta = ABC$. Возьмем точку D вне плоскости β и рассмотрим плоскость $\gamma = BCD$. Плоскости γ и α пересекаются по прямой d, отличной от прямой $a = AB$ — иначе точка D лежала бы в плоскости β. Значит, любая точка E прямой d, отличная от B, удовлетворяет требованиям задачи: $E \in \alpha$, $E \notin a$.

В этом решении последовательно используются аксиомы и теоремы (проследите!): I_1, C_1, I_2, 14.3; C_1, 14.2 (где?!), I_2, 14.3; опять 14.3 (где?!) и C_2; наконец, еще раз 14.3 (или 14.1, но с дополнительными рассуждениями). Конечно, как и в остальных задачах, возможны и другие решения.

В серии задач 2—4 проще начать с последней.

4. Возьмем в пространстве две различные точки A и B («аксиома 0»!). Рассмотрим прямую AB и возьмем точку C вне AB (аксиомы I_2 и I_1). Тогда точки A, B, C не лежат на одной прямой (аксиома I_2). Рассмотрим плоскость ABC (теорема 14.1) и возьмем точку D вне нее (аксиома C_1). Тогда точки A, B, C и D не лежат в одной плоскости (ни в какой плоскости — иначе, согласно теореме 14.3, эта плоскость совпадала бы с ABC и точка D лежала бы в плоскости ABC, в противоречии с ее выбором).

2, 3. Построим точки A, B, C, D так, как в решении задачи 4. Тогда плоскости ABC и ABD различны и пересекаются, а прямые AB и CD не лежат в одной плоскости.

5. а) Пусть a — данная прямая. Возьмем точку B вне a и проведем через a и B плоскость (теорема 14.1). Требуемое доказано.

б) Пусть a — данная прямая, β — только что построенная плоскость. Возьмем точку C вне β — тогда $C \notin a$ и через a и C проходит отличная от β плоскость.

в) Пусть a — данная прямая, а точки B, C и плоскости β, γ — построенные выше, в пп. а) и б). Тогда прямая BC не пересекается с прямой a (иначе a и BC лежали бы в одной плоскости, и плоскости β, γ совпадали бы), поэтому через прямую a и любую точку A прямой BC можно провести плоскость — обозначим ее $\alpha(A)$. Для различных точек A — скажем, A_1 и A_2, соответствующие плоскости — $\alpha(A_1)$ и $\alpha(A_2)$ — *различны*, поскольку в противном случае прямые a и A_1A_2, то есть a и BC, лежали бы в одной плоскости, и плоскости $\beta = \alpha(B)$ и $\gamma = \alpha(C)$ совпадали бы. На любой прямой существует бесконечно много (различных) точек (это следует из аксиомы откладывания отрезков IV и бесконечности множества чисел!), так что через данную прямую a можно провести *бесконечно много* различных плоскостей (это указанные плоскости $\alpha(A)$).

6. Если a — данная прямая, возьмем точки A, B на a, точку C — вне a. Рассмотрим плоскость $\alpha = ABC$ и возьмем точку D вне α. Тогда плоскость $\beta = BCD$ отлична от α и поэтому пересекает прямую $a = AB$ в одной точке — в точке B.

7. Если α — данная плоскость, возьмем точки $A \in \alpha$, $B \notin \alpha$. Тогда прямая $a = AB$ будет пересекать плоскость α в единственной точке — A.

8. Фактически эта задача уже была решена при доказательстве утверждения задачи 5, *в*. Краткое рассуждение: если точки A, B, C и D выбрать как в задаче 6, то прямая $d = CD$ не лежит в одной плоскости с данной прямой $a = AB$, ибо, согласно своему выбору, точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости.

Ответы на вопросы (I—III)

I. Не рассмотрен случай, когда все четыре точки лежат на одной прямой (тогда теорема 14.1 формально не применима). Здесь можно заметить, что через прямую (и наши четыре точки) можно провести плоскость (задача 5,*а*) из статьи), так что в указанном случае также приходим к противоречию с условием задачи.

II. Требование, чтобы прямая c не проходила через точку A пересечения прямых a и b, существенно используется в решении. Из него следует, что точки M и N пересечения c с a и b различны, поэтому можно применить теорему 14.2.

III. В учебнике в доказательстве теоремы 14.1 говорится: «... *любые три общие точки*...» (с. 176). Слово «*три*» здесь ни при чем — оно осталось от прежнего доказательства (из учебника 1981 года издания).

Новосибирская областная олимпиада по физике

8 класс

1. При переворачивании бочки узким днищем вниз уровень воды в бочке повышается; следовательно, повышается и давление на нижнюю пробку.
2. Оба шарика коснутся пола вне упомянутого в условии круга.
3. Время спуска в 2 раза больше времени подъема.
4. $T=mg\cos\alpha$. Указание. В первый момент ускорение тела перпендикулярно нити.
5. $m_1/m_2=(F_1-F)/(F-F_2)$.

9 класс

1. $t_{min}=2\sqrt{l/(\mu g)}=40$ с. Указание. Половину пути вагончик разгоняется с ускорением $a_{max}=\mu g$, а половину — тормозится с тем же (по модулю) ускорением. Такое движение возможно, поскольку $N>F_{тр}v_{max}=\mu mg\sqrt{l\mu g}$.
2. $\dfrac{F_{п1}}{F_{п2}}=\dfrac{M_{возд}-M_{H2}}{M_{возд}-M_{He}}=1{,}08.$
3. $\Delta p=p_2-p_1=\rho(l_2^2-l_1^2)\omega^2/2$.
5. $l_0=l(v_1/v_2-1)$.

10 класс

1. В обоих случаях жидкость будет перетекать из сосуда B в сосуд A.
2. Период колебаний в обоих случаях увеличится в $n=\sqrt{1+m/M}=1{,}4$ раза. Амплитуда колебаний изменится в случае 1) в $n_1=1+m/M=1{,}96$ раза, а в случае 2) — в $n_2=1-m/M=0{,}04$ раза.
3. По прошествии достаточного большого промежутка времени конденсатор емкостью C_2 заряжается до напряжения, равного двум амплитудным значениям напряжения в сети:

$$U_к=2U_ш=2\sqrt{2}\,U\approx 620 \text{ В}.$$

5. Воспользовавшись законами сохранения энергии и импульса, найдем

$$v_1=\frac{\sqrt{3}+1}{4}\sqrt{\frac{q^2}{3\pi\varepsilon_0 mr}},\quad v_2=\frac{\sqrt{3}-1}{4}\sqrt{\frac{q^2}{\pi\varepsilon_0 mr}}.$$

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 8)

1. См. рис. 1.
2. Очевидно, что С=1, а Б=9, отсюда 2А=111—99=12. Таким образом, А=6.
3. Мороженое Маши все время будет окружать воздух, имеющий комнатную температуру, а мороженое Павлика будет окружать воздух, охладившийся от воздействия мороженого. Поэтому мороженое Павлика не растает дольше.
4. Из первого условия следует, что дерево, которое у Вити было первым, у Коли было четырнадцатым; значит, дерево, которое у Вити было последним, у Коли было тринадцатым. Отсюда следует, что разность между девяносто четвертым и последним деревом по счету Вити такая же, как разность между седьмым и тринадцатым деревом по счету Коли. Таким образом, последнее дерево имеет номер 94+13—7=100.
5. См. рис. 2.

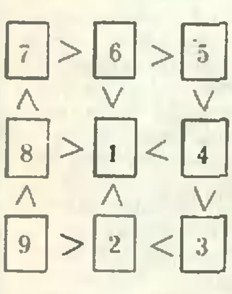


Рис. 1.

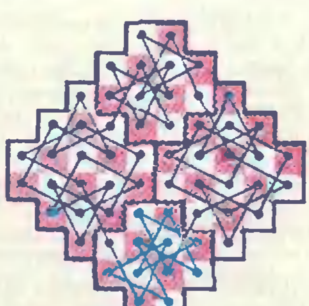


Рис. 2.

Фестиваль задач
(см. «Квант» № 8)

США. «Вашингтон» — это парусник, порт его отправления — Нью-Йорк, плывет он на Бермуды.
«Линкольн» — теплоход, следовавший из Ньюпорта в Галифакс.
«Джефферсон» — пароход, следовавший из Лондона в Бостон.

Австралия. Младшему ребенку 5 лет.

ГДР.
$$\begin{array}{r} 12345678 \\ -\;12325551 \\ \hline 20127 \end{array}$$

Болгария. 150 км.

Австрия. См. рисунок 3.

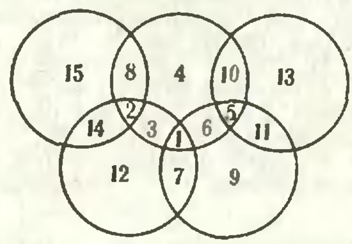


Рис. 3.

Югославия. 1792+8562=10354 и 1753+8493=10246.

Бельгия. Получите соотношение $a^2=b^2+c^2+bc$.

Великобритания. Пусть a — число, стоящее в центре выделенного квадрата. Тогда легко видеть, что каждая из указанных сумм равна $3a$.

Египет. 200.

Греция. 12.

Индия. 16 или 48.

Польша. $7744=(88)^2$.

Чехословакия. 24.

СССР. 1 февраля — в Ленинграде, 8 февраля — в Риге, 1 марта — в Пскове, 8 марта — во Владимире.

Билль вылетает в трубу
(см. «Квант» № 6)

Задачи

1. Разбойнику следует сказать: «Вы меня повесите». Тогда Герцогиня не сможет его казнить, ибо, если его утопят, получится, что он солгал, а если повесят, то сказал правду.
2. Спичку.
3. Первый должен взять 4 пенса, второй — 1 пенс. Указание. Выясните сначала, сколько стоит 1 огурец.
4. 10 м.
5. 20 шагов.
6. 8126+8126=16252.
7. Можно пройти 10 км на север, 10 км на восток и 10 км на юг. При движении по такому маршруту вы обязательно выйдете на границу леса. В самом деле, если весь ваш маршрут целиком лежит в лесу, то и весь квадрат, полученный соединением конечной и начальной точек описанного маршрута, тоже целиком лежит в лесу.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 6)

Задание 11 (Гоблея — Старосек, Невинномысск, 1984 г.). 1.Л1:е5! de 2.Лd7! Неожиданно черный ферзь оказался в ловушке: 2...Фс8 3.Ке7+, 1...Ф:d7 (Фе8) 3.Kf6+. Последовало 2...h5 3. Фg3 Ф:d7 4.Kf6+ Kph8 5.К:d7 Лfd8 6.Фh3 и белые выиграли.

Задание 12 (Туник — Вейнгольц, Львов, 1984 г.). 1...Л:d4! Белые немедленно сдались. На 2.Ф:d4 следует 2...Ле1+! 3.Kpf2 Ф:d4+ 4.Л:d4 Л:а1 и они остаются без фигуры. Чисто геометрическое решение позиции!

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 49)

М. Рябов (Первомайск Горьковской обл.) 8, 22; *Д. Саввичев* (Таганрог) 22; *М. Савченко* (Белгород) 8, 9, 12; *Т. Сагайдак* (Канев) 8, 22; *В. Сакбаев* (Алма-Ата) 22; *Б. Самойлов* (Киев) 8, 9, 17, 21; *Е. Сачкова* (Гулькевичи) 8; *М. Свердлов* (Минск) 17, 22; *Р. Севастьянов* (Челябинск) 15—17; *А. Сенчик* (Киев) 8, 21; *А. Сиваченко* (Москва) 12, 21; *А. Скиртач* (Запорожье) 8, 21, 22; *М. Скоробогатов* (Киев) 8, 9, 12, 22; *В. Смоляр* (Мозырь) 21; *А. Снижко* (Запорожье) 21, 22; *С. Собесский* (Новосибирск) 9; *А. Соляник* (Верхнеднепровск) 22; *А. Сомов* (Киев) 22; *Е. Степанов* (Ленинград) 21, 22; *В. Стрельников* (Салават) 21, 22; *И. Стрешенский* (Киев) 22; *И. Струговщиков* (Киев) 22; *К. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) 17, 21, 22; *Р. Суник* (Киев) 8; *И. Терез* (Симферополь) 9, 21, 22; *С. Толмачев* (Минск) 21; *С. Тужанский* (Винница) 8, 15, 17, 21, 22; *А. Тюрин* (Николаев) 8; *Д. Углов* (Геленджик) 8, 12; *А. Умнов* (Миасс) 9; *С. Ушаков* (Ярославль) 21, 22; *А. Фамов* (Ступино) 21, 22; *Н. Федин* (Омск) 8, 9, 12, 16, 21, 22; *М. Федоров* (Ульяновск) 21; *Г. Финкельштейн* (п. Черноголовка Московской обл.) 21, 22; *В. Фурман* (Ташкент) 9; *А. Хафизов* (п. Красногорский МарАССР) 21; *М. Холмянский* (Москва) 17, 21, 22; *Г. Чевардин* (Челябинск) 22; *О. Чемерченко* (п. Купянск-Узловой Харьковской обл.) 8, 21; *Р. Черныш* (Пермь) 15, 21; *С. Чернышев* (Ташкент) 22; *Е. Чижикова* (Тула) 17; *А. Шаповал* (Киев) 17, 21, 22; *Л. Шаповаленко* (Канев) 8; *В. Шаповалов* (Донецк) 8, 9, 21, 22; *А. Швед* (с. Раздольное Амурской обл.) 8; *Г. Швец* (Киев) 8, 9, 15—17, 22; *Н. Шемелина* (Новосибирск) 22; *И. Шендерович* (Северодвинск) 8, 12, 21, 22; *А. Шехтман* (Минск) 9, 17, 21, 22; *Д. Шкловский* (Ленинград) 16, 17; *С. Школьников* (Ленинград) 21; *Б. Шойхет* (Москва) 9; *З. Шомсутдинов* (Кукморский р-н ТАССР) 22; *Е. Шохов* (Прокопьевск) 22; *О. Юсухно* (Киев) 17, 21, 22; *А. Ястребов* (Севастополь) 17, 22; *А. Ятчени* (Юрьевск) 8, 22.

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, И. Н. Клумова, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Е. В. Виноларова, О. Н. Грачев, Т. А. Доброхотова, М. Б. Дубах, Д. А. Крымов, Ю. Н. Сафонов, Н. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, Н. А. Ящук
Фото представили:
В. Т. Брель, А. М. Орехов, Е. С. Петраченкова

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Е. В. Сидоркина

103006 Москва К-6,
ул. Горького, 32/1, «Квант»
тел. 250-33-54

Сдано в набор 17.07.85. Подписано к печати 20.08.85
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,80
Бумага 70×108 1/16
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 7,24. Т-18805
Тираж 173284 экз. Цена 40 коп. Заказ 1892

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300, г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

РЕЙТИНГИ

Семь лет назад в «Кванте» подробно рассказывалось о рейтингах, приводилось их математическое обоснование. По просьбе читателей еще раз остановимся на этом вопросе.

Рейтинг или, иначе, индивидуальный коэффициент шахматиста — это число, характеризующее его силу в данный момент. Выступление в турнире влияет на рейтинг: в случае успеха он увеличивается, при неудаче — уменьшается.

Впервые попадая в «рейтинговый» турнир, шахматист получает начальный рейтинг 2200. Рейтинг каждого участника турнира после его окончания $K_{нов}$ определяется по формуле

$$K_{нов}=K_{ст}+10(N-N_{ож}),$$

где $K_{ст}$ — «старый» рейтинг, $N_{ож}$ — число «ожидаемых» очков, а N — число фактически набранных.

Если два шахматиста играют между собой одну партию, то «ожидаемое» число очков $n_{ож}$ приведено в таблице, составленной американским математиком профессором Эло. Слева в таблице стоит разница рейтингов партнеров, а справа — число «очков», которые должен соответственно набрать игрок с большим и с меньшим рейтингом.

В случае матча, когда два шахматиста играют m партий, $N_{ож}$ равно произведению $n_{ож}\cdot m$, округленному до полуочка. Например, если два шахматиста с рейтингами 2550 и 2500 играют матч из 12 партий, то $K_б-K_м=50$, $n_{ож.б.}=0{,}57$, после умножения на 12 получаем 6,84 и после округления $N_{ож.б.}=7$; соответственно $N_{ож.м.}=5$.

В случае турнира надо просто сложить все «ожидаемые» числа очков, которые данный игрок должен набрать в партиях с другими участниками турнира, и округлить полученное число до полуочка. Это и будет $N_{ож}$ данного игрока.

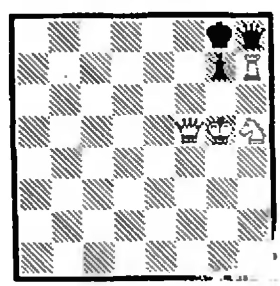
$K_б-K_м$	$n_{ож.\,б.}$	$n_{ож.\,м.}$
0—3	0,50	0,50
4—10	0,51	0,49
11—17	0,52	0,48
18—25	0,53	0,47
26—32	0,54	0,46
33—39	0,55	0,45
40—46	0,56	0,44
47—53	0,57	0,43
54—61	0,58	0,42
62—68	0,59	0,41
69—76	0,60	0,40
77—83	0,61	0,39
84—91	0,62	0,38
92—98	0,63	0,37
99—106	0,64	0,36
107—113	0,65	0,35
114—121	0,66	0,34
122—129	0,67	0,33
130—137	0,68	0,32
138—145	0,69	0,31
146—153	0,70	0,30
154—162	0,71	0,29
163—170	0,72	0,28
171—179	0,73	0,27
180—188	0,74	0,26
189—197	0,75	0,25
198—206	0,76	0,24
207—215	0,77	0,23
216—225	0,78	0,22
226—235	0,79	0,21
236—245	0,80	0,20
246—256	0,81	0,19
257—267	0,82	0,18
268—278	0,83	0,17
279—290	0,84	0,16
291—302	0,85	0,15
303—315	0,86	0,14
316—328	0,87	0,13
329—344	0,88	0,12
345—357	0,89	0,11
358—374	0,90	0,10
375—391	0,91	0,09
392—411	0,92	0,08
412—432	0,93	0,07
433—456	0,94	0,06
457—484	0,95	0,05
485—517	0,96	0,04
518—559	0,97	0,03
560—619	0,98	0,02
620—735	0,99	0,01
свыше 735	1,00	0,00

Сделаем несколько замечаний. Поскольку в системе Эло числа $N_{ож}$ как для матча, так и для турнира округляются до полуочка, рейтинги — всегда числа целые и оканчиваются на 0 или 5. Однако у нас при расчете рейтингов советских шахматистов округление производится до 0,1 очка, и потому рейтинги оказываются просто целыми числами.

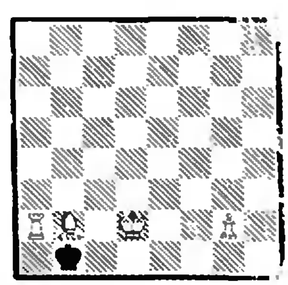
Для расчета $N_{ож}$ в турнирах для простоты вводится «коэффициент турнира» $K_т$, равный среднему арифметическому рейтингов $K_{ст}$ всех участников турнира. После этого $N_{ож}$ для каждого шахматиста находится из приведенной таблицы, где $K_б-K_м$ равно разнице между $K_{ст}$ и $K_т$ (вычитать надо из большего числа меньшее), умножением $n_{ож}$ на число партий, играемых каждым участником, и округлением. Тем самым мы как бы считаем, что участник турнира играет матч с одним «средним» партнером. Впрочем, ввиду большого числа турниров, которые сейчас проводятся, и тысяч шахматистов, играющих в них, для подсчета рейтингов (и международных, и советских) все равно используются ЭВМ.

В СССР рейтинги гроссмейстеров и мастеров публикуются сейчас раз в квартал. На 1 апреля 1985 года рейтинг экстракласса (2600 и выше) имели пять гроссмейстеров: А. Карпов — 2717, Г. Каспаров — 2700, А. Белявский — 2641, Р. Ваганян и Л. Полугаевский — 2614.

Конкурсные задания



17. Мат в 2 хода



18. Мат в 8 ходов

Индекс 70465

Цена 40 коп.

Эти «жучки» со множеством лапок называются интегральными схемами. Внутри каждого из них упрятан крошечный кристалл полупроводника, содержащий десятки и сотни тысяч электронных «деталей». С помощью таких схем создаются электронно-вычислительные машины с мощной памятью и рекордным быстродействием. Новые технологии позволят в ближайшем будущем создавать микроминиатюрные вычислительные устройства на одном кристалле, не уступающие по своим возможностям большой современной ЭВМ.

О том, что представляют собой «кирпичики» этих сложнейших приборов, вы сможете прочитать в заметках новой рубрики «Полупроводниковые элементы вычислительной техники».