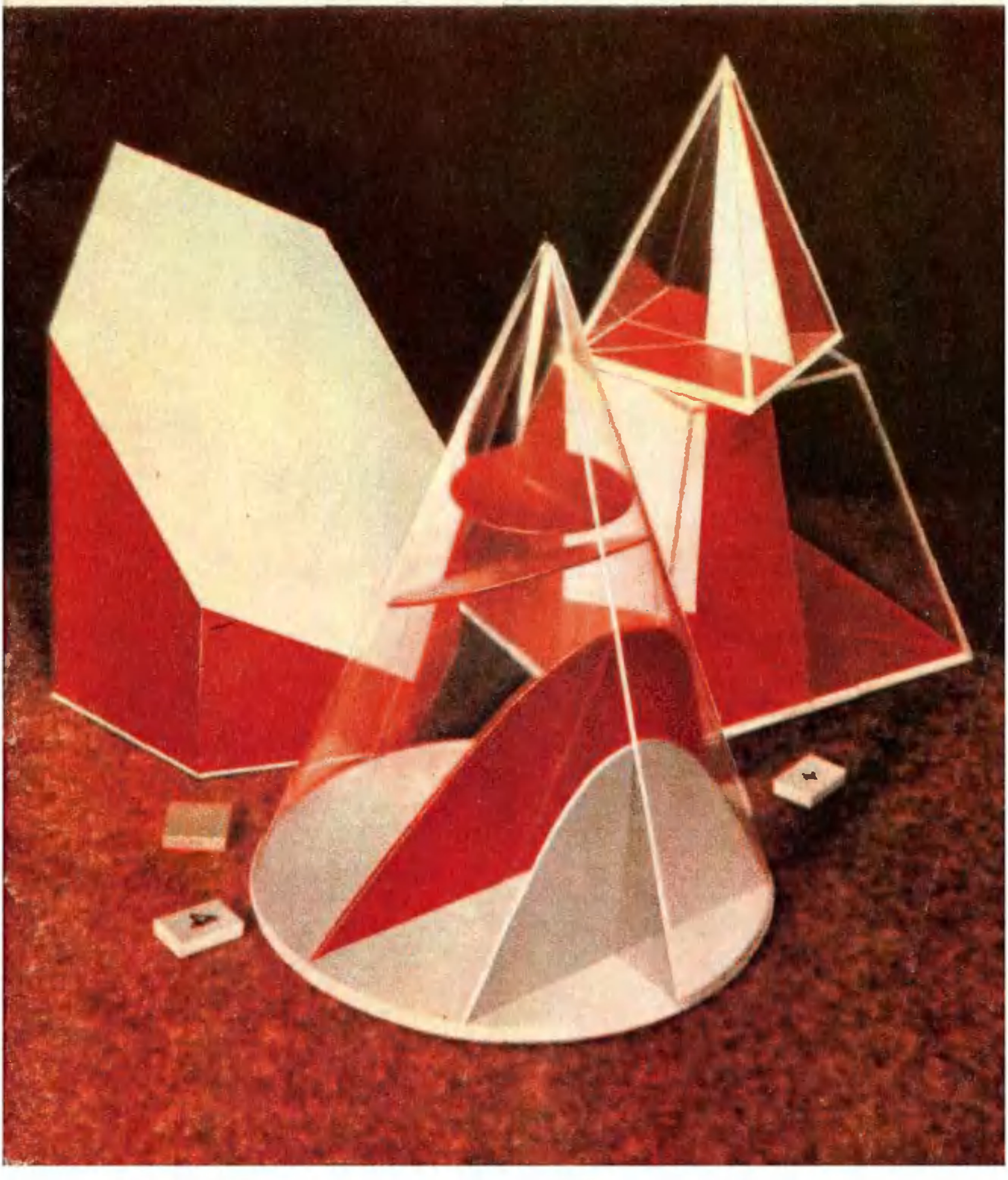
ISSN 0130-2221

Квант

7
1985

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР



в самом начале научной деятельности Гука —
ханика и химика, физика и биолога,
нома и архитектора... Статью, посвящен-
чательному ученому-энциклопедисту,
ем в этом номере журнала.

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

КВАНТ

7 1985

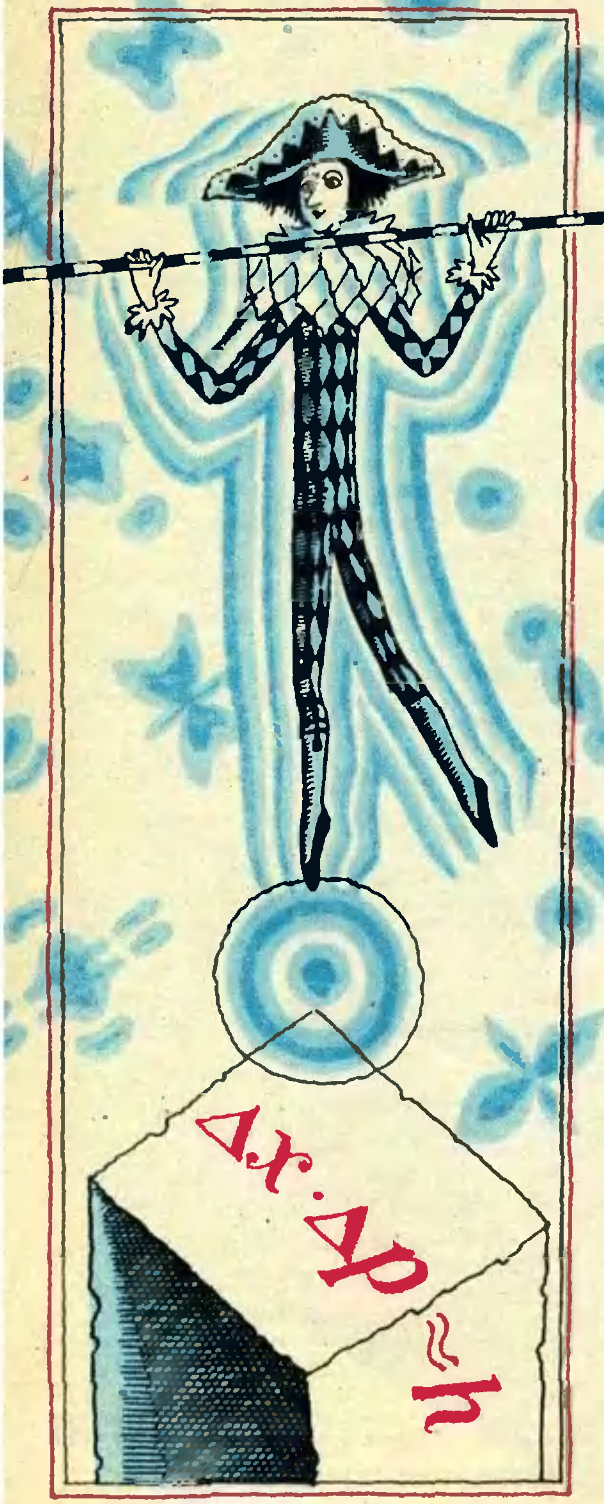
Основан в 1970 году

Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

Модели стереометрических фигур (фирмы VEB MANTISSA, ГДР), показанные на первой странице обложки, демонстрировались прошлым летом в Москве на выставке школьного оборудования; на переднем плане — конические сечения.

Соотношение неопределенностей

Доктор физико-математических наук
Л. Г. АСЛАМАЗОВ



С квантовой механикой в школе сталкиваются совсем немного. Но даже такая краткая встреча оставляет глубокий след — уж слишком необычен квантовый мир. И хочется, чтобы вы сразу увлеклись этой наукой, лежащей в основе современной физической картины мира. Поэтому давайте устроим здесь еще одно свидание. Будем надеяться, что для некоторых из вас оно послужит поводом к более глубокому знакомству с квантовой механикой в будущем.

1. Импульс и координата

Немецкий физик Вернер Гейзенберг, открывший соотношение неопределенностей в 1927 году, сформулировал его следующим образом: если, исследуя какое-то тело, нам удается определить проекцию импульса тела с неопределенностью Δp_x, то мы не сможем одновременно определить соответствующую координату тела с точностью, большей чем $\Delta x \approx \hbar/\Delta p_x$, где $\hbar = h/2\pi = 1{,}054 \cdot 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка.

Поначалу это соотношение может вызвать чувство недоумения. Ведь законы Ньютона, которые изучают в школе, позволяют найти закон движения тела, то есть рассчитать зависимость координат от времени. Зная закон движения, можно найти проекции скорости тела $\vec{v}$ (производные от координат по времени) и проекции его импульса $\vec{p} = m\vec{v}$. Получается, что можно одновременно определять координату и импульс, и никакого соотношения неопределенностей нет. Действительно, в классической физике все происходит именно так, а вот в микромире дело обстоит иначе (рис. 1).

Представьте себе, что надо следить за движением электрона. Как это сделать? Глаз — инструмент для этих целей неподходящий. Его разрешающей силы недостаточно, чтобы разглядеть электрон. Ну что ж, посмотрим на электрон в микроскоп. Разрешающая способность микроскопа определяется длиной волны света, в котором ведется наблюдение. Для обычного видимого света эта величина порядка 1000 ангстрем ($\approx 10^{-5}$ см), и частицы меньших размеров в микроскоп не разглядишь. Атомы имеют размеры порядка ангстрема, так что надеяться различить их, а тем более отдельные электроны, не приходится.

Но давайте пофантазируем.

Предположим, что нам удалось сконструировать микроскоп, использующий не видимый свет, а электромагнитные волны с меньшей длиной волны, например рентгеновское или даже γ-излучение. Чем жестче γ-излучение мы будем применять, то есть чем короче соответствующая длина волны, тем меньшие объекты можно наблюдать. Казалось бы, такой воображаемый γ-микроскоп был бы идеальным инструментом для наблюдения за электроном. С его помощью можно было бы измерить координату электрона сколь угодно точно. При чем же тут соотношение неопределенностей?

Вдумаемся глубже в этот мысленный эксперимент. Для того чтобы мы получили информацию о положении электрона, от него должен отразиться хотя бы один γ-квант — носитель минимальной порции энергии $\hbar\omega$*). Чем меньше длина волны, тем больше частота излучения ω и тем больше порция энергии, которой обладает квант. А импульс кванта пропорционален его энергии. Сталкиваясь с электроном, γ-квант обязательно передает ему часть своего импульса. Таким образом, измеряя координату, мы всегда вносим неопределенность в импульс электрона, и чем точнее мы хотим провести измерение, тем большей будет неопределенность. Подробный анализ этого процесса показывает, что произведение неопределенностей $\Delta x \times \Delta p_x$ нельзя сделать меньшим, чем постоянная Планка.

Может создаться впечатление, что мы рассмотрели только частный случай, придумали «плохой» прибор для измерения координаты, и можно провести измерение гораздо тоньше, не «толкая» электрон, не изменяя его состояние. Но увы это не так.

Лучшие умы (среди них и А. Эйнштейн) пытались придумать такой прибор, который смог бы измерить координату тела и его импульс одновременно с точностью, большей, чем позволяет соотношение неопределенностей. Но никому не удалось это сделать. Сделать это просто нельзя. Таков закон природы.

Все это может показаться несколько туманным, и трудно сразу построить какую-то четкую мысленную модель. Настоящее понимание приходит только в результате серьезного изучения квантовой механики, но это для наших читателей еще впереди. А пока, согласитесь, похоже, что природа в микромире ведет себя таким необычным способом.

Для первого знакомства, будем считать, этого достаточно.

Чтобы понять, где лежит граница между макро- и микромиром, сделаем небольшую оценку. Например, в опытах по броуновскому движению используются очень маленькие частички — размером около 1 мкм и массой всего 10^{-10} г. Но все-таки это кусочки вещества, содержащие огромное количество атомов. Из соотношения неопределенностей в этом случае имеем $\Delta v_x \cdot \Delta x \sim (\hbar/m) \sim 10^{-17}$ см^2/с*). Если, скажем, определять положение частички с точностью до одной сотой ее размера ($\Delta x \sim 10^{-6}$ см), то $\Delta v_x \sim \sim 10^{-11}$ см/с. Получилась очень маленькая величина и причина этому — малое значение постоянной Планка.

Скорость броуновского движения такой частички $\sim 10^{-4}$ см/с. Как видно, погрешность в скорости, связанная с соотношением неопределенностей, пренебрежимо мала (одна десятимиллионная доля!) даже у такого небольшого тела. Тем более она не играет роли для бо́льших тел (ведь в правой части соотношения стоит $\hbar/m$!). А вот если мы будем уменьшать массу частицы (возьмем, например, электрон) и увеличивать точность

*) Энергия кванта $E = h\nu = \hbar\omega$, где $\omega = 2\pi\nu$ угловая частота.

*) Знак «$\sim$» означает оценку по порядку величины.

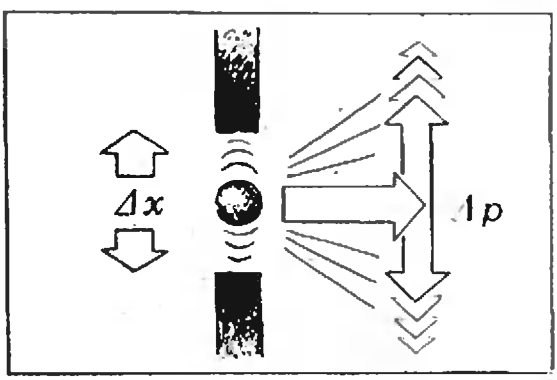


Рис. 1. Измерение координаты частицы с точностью Δx, определяемой шириной щели, через которую частица пролетает, приводит к неопределенности соответствующей проекции импульса частицы Δp.

определения координаты ($\Delta x \sim \sim 10^{-8}$ см — атомные размеры), то неопределенность в скорости становится сравнимой с самой скоростью микрочастицы. При описании электронов в атоме соотношение неопределенностей уже работает в полной мере, с ним не считаться нельзя. И это приводит к удивительным следствиям.

2. Волны вероятности

В простейшей модели атома — модели Резерфорда — электроны кружатся по орбитам вокруг ядра подобно тому, как планеты движутся вокруг Солнца. Но электроны — заряженные частицы, и при их вращении обязательно создаются переменные электрические и магнитные поля — возникает излучение, приводящее к потери энергии. Вот почему в планетарной модели электроны ждет незавидная судьба — они обязательно упадут на ядро, и атом разрушится. Но ведь стабильность атомов — это твердо установленный экспериментальный факт.

Нужно было «подправить» модель Резерфорда, и сделал это Нильс Бор в 1913 году. Электронам в модели Бора разрешается вращаться только по определенным орбитам, где они обладают строго заданными энергиями. Изменять эту энергию электроны могут только скачком, излучая и поглощая кванты при переходе с одной орбиты на другую. Такое «квантовое» поведение электронов в атоме позволяет объяснить многое — в частности, устойчивость атома и атомные спектры, но оно противоречит соотношению неопределенностей. Ведь при движении даже по квантовой орбите импульс и координата могут быть определены одновременно, а в микромире, как мы теперь знаем, такого быть не может.

Пришлось отказаться и от этой модели атома. Картина, описывающая поведение электрона в атоме, оказалась еще более сложной.

Представьте себе, что нам удалось определить положение электрона в атоме в какой-то момент времени. Сможем ли мы точно сказать, где он будет в следующий момент (для определенности, скажем, через одну секунду)? Нет, измерение координаты,

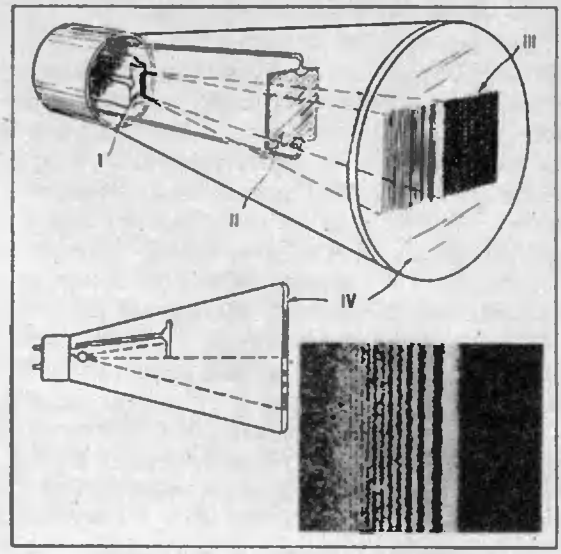


Рис. 2. Такая картина возникает в опыте по дифракции электронов: I — электронная пушка; II — препятствие; III — область тени; IV — флуоресцентный экран.

как мы знаем, всегда вносит неопределенность в импульс электрона, и, пользуясь даже самыми лучшими экспериментальными устройствами, нельзя точно предсказать, куда попадет электрон. Что же нам остается в таком случае делать?

Давайте отметим точкой то место в пространстве, где мы обнаружили электрон. Результат еще одного измерения координат электрона в точно таком же атоме снова изобразим точкой в пространстве. Еще измерение — опять точка и т. д. Оказывается, что хотя и нельзя сказать заранее, где точно будет находиться следующая точка, в характере расположения точек в пространстве имеется определенная закономерность. В некоторых областях точки располагаются гуще, в других — реже, указывая на то, где с большей, а где с меньшей вероятностью может встретиться электрон.

Нам пришлось отказаться от точного описания движения электрона, но мы в состоянии предсказывать шансы обнаружить его в разных точках пространства. Поведение электрона в микромире описывается вероятностно! Такая картина поведения частиц в микромире читателю может не понравиться — уж больно она непривычна, уж больно противоречит нашей интуиции, нашему опыту. Но ничего не поделаешь — так устроена природа. В микромире действуют совсем другие законы, нежели те, к которым мы привыкли в обычной жизни. По образному выражению А. Эйнштейна, приходится «играть в кости» для того, чтобы предсказывать поведение электронов. Без этого, увы, обойтись нельзя.

Итак, в микромире состояние электрона определяется заданием вероятности его обнаружения в разных точках пространства. В нашей наглядной модели мерой вероятности будет плотность меток, и можно представить себе, что эти метки образуют некое подобие облака, определяющего образ жизни электрона.

Как устроены облака вероятности? Аналогично тому, как в классической механике законы Ньютона определяют движение тел, в квантовой механике имеется свое уравнение, из которого можно найти «размазку» электрона в пространстве. Такое уравнение придумал в 1925 году австрийский физик Эрвин Шредингер (заметьте, раньше, чем было открыто соотношение неопределенностей, то есть раньше, чем прояснилась причина размазки микрочастиц — такое в физике бывает). Уравнение Шредингера количественно, точно и подробно описывает атомные явления. Но рассказать об этом без сложной математики нельзя. Мы приведем здесь просто ответы — покажем точные портреты размазки электрона в некоторых случаях.

На рисунке 2 показана схема опыта по дифракции электронов и фотография системы полос, возникающей на экране. Картина совершенно аналогична той, которая возникает при дифракции света. Если считать, что элек-

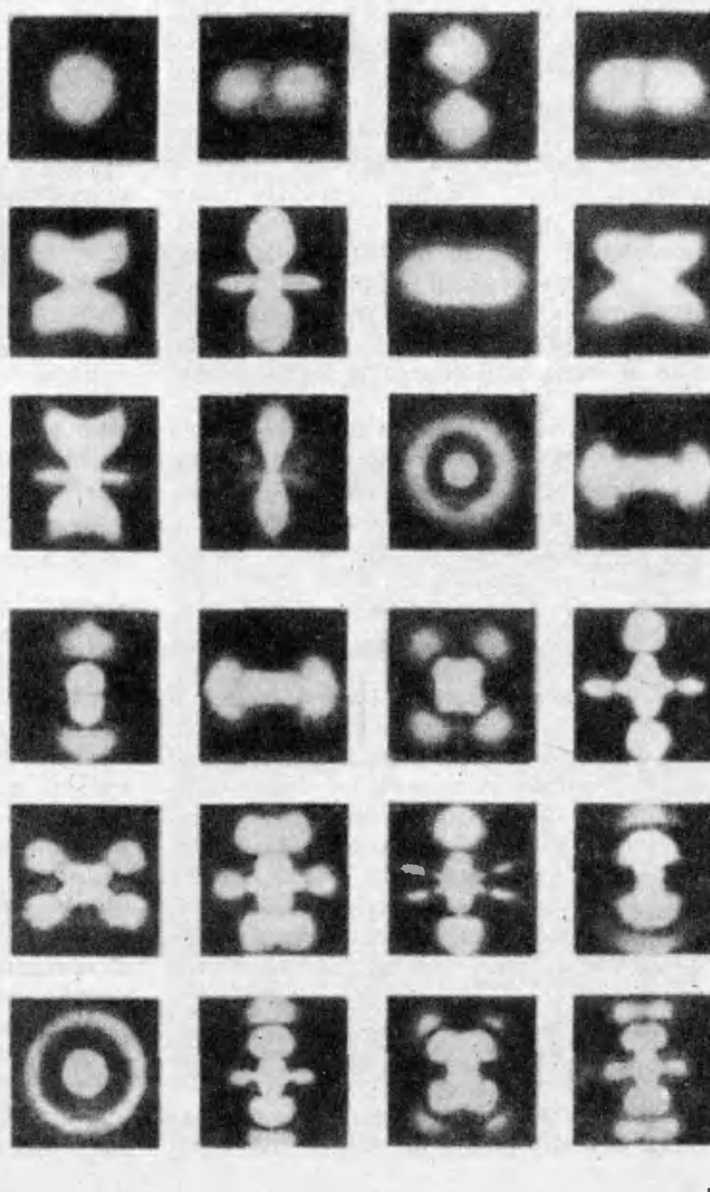


Рис. 3. Это, конечно, не фотографии реальных электронов, а результаты расчетов, показывающих, как «размазаны» электроны в атоме. Симметрия этих картинок во многом определяет симметрию молекул и кристаллов. Можно даже сказать, что здесь находится ключ к пониманию красоты упорядоченных форм живой природы.

троны движутся по прямолинейным траекториям, как им положено в данном случае по законам классической физики, объяснить этот опыт нельзя. А вот если они размазаны в пространстве, то результат опыта можно понять. Более того, из опыта следует, что облако вероятности обладает волновыми свойствами. С волнами вероятности мы встречаемся и в обычной жизни — например, волны эпидемии, рождаемости, преступности и т. п. В том месте, где амплитуда волны максимальна,— наибольшая вероятность чему-то произойти. В нашем случае в этих местах с наибольшей вероятностью можно обнаружить электрон, и такие области на фотографии получаются более светлыми.

На рисунке 3 представлена размазка электрона в различных состояниях атома водорода, найденная на основе точных математических расчетов. Чем светлее область, тем вероятнее встретить в ней электрон. Рисунки напоминают картины стоячих волн, возникающих, когда волновой процесс происходит в ограниченной области пространства. Какие удивительные формы могут принимать облака вероятности! И эти красивые абстрактные картинки действительно определяют поведение электронов в атоме и объясняют, например, уровни энергии и все, что касается химической связи.

Не вдаваясь в детали устройства облаков вероятности, можно с помощью соотношения неопределенностей оценить их характерный размер. Если облако вероятности имеет размер порядка Δx, то бессмысленно говорить о большей, чем Δx, неопределенности в координате частицы. Следовательно, неопределенность импульса частицы Δp_x не может быть меньшей, чем $\hbar/\Delta x$. По порядку величины это же выражение определяет и минимальное значение импульса частицы.

Чем меньше размер облака вероятности, тем бо́льшим становится импульс и, следовательно, тем быстрее движется частица внутри области локализации. Оказывается, что уже этих общих рассуждений достаточно, чтобы правильно оценить размер атома.

Электрон в атоме обладает кинетической и потенциальной энергиями. Кинетическая энергия электрона — это энергия его движения. Она связана с импульсом по известной формуле $E_к=(mv^2/2)=(p^2/2m)$. Потенциальная энергия — это энергия кулоновского взаимодействия с ядром. Для нее также имеется формула: $E_п=(-Ke^2/r)$, где знак минус соответствует притяжению, e — заряд электрона, r — расстояние от электрона до ядра, K — коэффициент, зависящий от выбора единиц измерения.

В каждом состоянии у электрона имеется определенное значение полной энергии E. Состояние с минимальной энергией называется основным (невозбужденным) состоянием. Оценим размер атома в основном состоянии.

Пусть электрон размазан в некоторой области размером $\sim r_0$. Притяжение электрона к ядру стремится уменьшить r_0, «схлопнуть» облако вероятности. Этому соответствует уменьшение потенциальной энергии электрона, которая по порядку величины равна $-Ke^2/r_0$ (при уменьшении r_0 растет модуль отрицательной величины). Если бы электрон не обладал кинетической энергией, то он упал бы на ядро. Но, как вы уже знаете, кинетическая энергия у локализованной частицы всегда имеется вследствие соотношения неопределенностей. Оно и «мешает» электрону упасть на ядро! При уменьшении r_0 увеличивается минимальный импульс частицы $p_0\sim\hbar/r_0$, а, следовательно, растет кинетическая энергия $\sim\hbar^2/2mr_0^2$. Из условия равенства нулю производной от полной энергии частицы получаем, что ее минимуму соответствует значение

$$r_0\sim\hbar^2/Kme^2,$$

которое определяет характерный размер области локализации электрона в основном состоянии, то есть размер атома. Величина $(\hbar^2/Kme^2)$ равна 0,5 ангстрем, а мы знаем, что таковы по порядку величины размеры атомов в действительности. Ясно, что соотношение неопределенностей, позволяющее правильно оценить размер атомов,— один из самых глубоких законов микромира.

Для сложных атомов существует определенная закономерность, также непосредственно вытекающая из соотношения неопределенностей. Экспериментально довольно точно определяется работа, которую надо совершить, чтобы вырвать электрон из атома (она равна энергии ионизации $E_и$).

Так вот, для самых разных атомов произведение $\sqrt{E_и}$ на размер атома d с точностью до 10—20 % одинаково. Читатель, наверное, догадался, в чем тут дело: импульс электрона $p \approx \approx \sqrt{2mE_и}$, а постоянство произведения pd следует из соотношения неопределенностей.

3. Нулевые колебания

Весьма впечатляющие результаты получаются при исследовании с помощью соотношения неопределенностей колебаний атомов в твердых телах. Атомы (или ионы) совершают колебания в узлах кристаллической решетки. Обычно такие колебания связаны с тепловым движением атомов — чем выше температура, тем сильнее колебания. А что будет, если температуру понизить? С классической точки зрения амплитуда колебаний будет уменьшаться, и при абсолютном нуле атомы вовсе остановятся. Но возможно ли это с точки зрения квантовых законов?

Уменьшение амплитуды колебаний на квантовом языке означает уменьшение размера облака вероятности (области локализации частицы). А за это, как мы уже знаем, приходится, в силу соотношения неопределенностей, расплачиваться увеличением импульса частицы — попытка остановить микрочастицу не приводит к успеху. Оказывается, что даже при абсолютном нуле температур атомы в твердом теле совершают колебания. Их называют нулевыми колебаниями, и проявляются они в целом ряде красивых физических эффектов.

Попробуем прежде всего оценить энергию нулевых колебаний. В колебательной системе при отклонении тела на малую величину x от положения равновесия на него действует возвращающая сила $F = -kx$ (в случае пружины k — ее жесткость; у атома в твердом теле величина k определяется силами межатомного взаимодействия). Соответственно, у тела появляется потенциальная энергия

$$E_п = \frac{kx^2}{2} = \frac{m\omega^2 x^2}{2},$$

где $\omega = \sqrt{k/m}$ — частота колебаний.

Отсюда следует, что амплитуда колебаний x_{max} связана с запасом энергии тела E формулой

$$E = \frac{m\omega^2 x_{max}^2}{2}; \quad x_{max} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}.$$

Но амплитуда колебаний на квантовом языке как раз определяет характерный размер области локализации частицы, который в силу соотношения неопределенностей связан с минимальным импульсом частицы. Получается, с одной стороны, чем меньше энергия колебаний, тем меньшей должна быть амплитуда; с другой стороны, уменьшение амплитуды приводит к увеличению импульса, а следовательно, и энергии частицы. Минимальная энергия, которой может обладать частица, определяется из оценки

$$E_0 \sim \frac{p_0^2}{2m} \sim \frac{\hbar^2}{mx_0^2} \sim \frac{\hbar^2}{m}\frac{m\omega^2}{E_0}.$$

Сравнивая здесь первое и последнее выражения, находим $E_0 \sim \hbar\omega$. Точный расчет дает вдвое меньшее значение. Энергия нулевых колебаний равна $\hbar\omega/2$. Она максимальна у легких атомов, которые колеблются с большей частотой.

Пожалуй, самое яркое проявление нулевых колебаний — это существование жидкости, которая вообще не замерзает, даже при абсолютном нуле температур. Ясно, что жидкость не замерзает, если кинетической энергии колебаний атомов достаточно для того, чтобы разрушить кристаллическую решетку. При этом совершенно

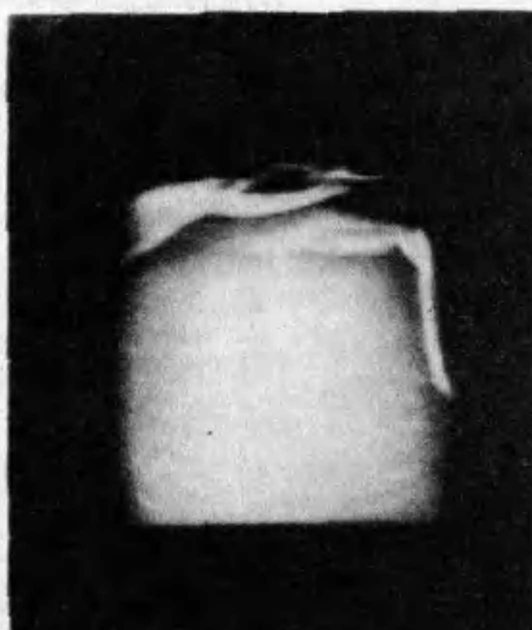


Рис. 4. Волны на границе между твердым (светлая область) и жидким гелием.

неважно происхождение кинетической энергии — связана ли она с тепловым движением атомов или с нулевыми квантовыми колебаниями. Наиболее вероятные кандидаты в незамерзающие жидкости — водород и гелий. В этих легчайших веществах энергия нулевых колебаний максимальна. Но гелий к тому же — инертный газ. Его атомы взаимодействуют друг с другом очень слабо, и расплавить кристаллическую решетку гелия сравнительно легко. Оказывается, что энергии нулевых колебаний в гелии для этого достаточно, и он не замерзает даже при абсолютном нуле. А вот водород, хотя его атомы и обладают большей, чем у гелия, энергией нулевых колебаний, все-таки замерзает, так как взаимодействие атомов водорода гораздо более сильное.

Все остальные вещества также замерзают при абсолютном нуле температур. Так что гелий — единственное вещество, которое при нормальном давлении всегда остается жидким. Можно даже сказать, что именно соотношение неопределенностей не позволяет ему замерзнуть. Физики называют жидкий гелий квантовой жидкостью. Она обладает таким удивительным свойством, как сверхтекучесть. Академик Л. Д. Ландау говорил, что жидкий гелий — это окно в квантовый мир.

При давлении около 30 атмосфер жидкий гелий все-таки затвердевает. Твердый гелий, правда, тоже совсем необычный кристалл. В нем нулевые колебания определяют, например, кинетическую энергию атомов на границе, и вследствие этого поверхность кристалла может совершать гигантские колебания, словно граница между двумя неперемешивающимися жидкостями (рис. 4). Твердый гелий физики назвали квантовым кристаллом, и его свойства сейчас интенсивно исследуются.

* * *

Наш рассказ о соотношении неопределенностей подошел к концу. Надеемся, что читатель постепенно стал привыкать к удивительному квантовому миру, где частицы нельзя остановить, жидкости не замерзают, а электроны размазаны вокруг ядра самым причудливым образом. Такой мир трудно себе представить. Но его можно понять, и именно в этом, как считал Ландау, состоит главная заслуга современной теоретической физики.

Советуем прочесть

В 1984 году издательство «Детская литература» выпустило книгу профессора М. М. Колтуна «Мир физики».

В книге показан сложный, многообразный и противоречивый, но вместе с тем единый мир неразрывно связанных физических явлений и процессов, популярно и занимательно рассказано об основных законах, управляющих этим миром, и об истории их открытия. Автору удалось проследить внутреннюю логику развития физики и вскрыть связь этой науки с различными сферами человеческой деятельности — с другими областями науки, техники и даже с искусством. Книга прекрасно оформлена, в ней много интересных иллюстраций — редких исторических фотографий, красочных схем, репродукций картин, изображений современных приборов и экспериментальных установок. Словом, это — превосходная книга для чтения по физике, способная увлечь любого читателя.

Решимые и нерешимые алгоритмические проблемы

Профессор
В. А. УСПЕНСКИЙ,
доктор физико-математических наук
А. Л. СЕМЕНОВ

Алгоритмы

Все мы умеем складывать многозначные числа — этому учат в детстве. Давайте задумаемся, в чем состоит наше умение? Когда в пьесе Э. Ионеско «Урок» ученица демонстрирует замечательные способности к перемножению десятизначных чисел, потрясенный учитель узнает, что ее способ очень прост — она выучила (бесконечную!) таблицу умножения всех чисел. По-видимому, наш способ — иного рода. Мы знаем единый конечный способ, позволяющий решать бесконечное множество задач. В нашем случае бесконечное множество образуют задачи о нахождении суммы: для каждой пары чисел — своя задача. Способ единый, поскольку он один и тот же для всех задач. Способ конечный в том смысле, что он может быть изложен конечным числом слов (а если бы это было не так, то ведь этому способу нельзя было бы и научить!). Как известно, способ этот называется «сложение столбиком» и состоит в том, что одно число (например, 8257) подписывается снизу под другим (например, 64) с выравниванием правого края (то есть так: $\begin{array}{r}64\\8357\end{array}$, а не, скажем, так: $\begin{array}{l}64\\8357\end{array}$) и далее начинается последовательное применение таблицы сложения однозначных чисел (которую нужно заранее выучить) с переносом, где надо, в следующий разряд. В результате этого постепенно будет сформировано число 8421.

Здесь мы не столько изложили способ, сколько напомнили его, будучи уверены, что он известен. Однако читателю было бы полезно записать этот способ на бумаге полностью — так, чтобы его мог понять и использовать человек, не знавший ранее, как складывать многозначные числа. Упражнение, которое мы предложили читателю, на научном языке формулируется так: записать алгоритм, решающий проблему сложения чисел. Эту и другие проблемы построения алгоритмов мы будем далее формулировать, указывая, что от алгоритма требуется, примерно в таком виде:

Проблема. Дано: два произвольных натуральных числа. Требуется: найти их сумму.

Такая форма записи будет служить для нас сигналом, что решение проблемы состоит не в том, чтобы для каждых двух чисел найти свой отдельный способ вычисления результата, а в том, чтобы найти единый общий способ, годящийся для всех пар чисел, то есть найти алгоритм (в данном случае — алгоритм сложения).

В этой статье под *алгоритмом* мы будем понимать всякую конечную систему правил, которая задает вычислительный процесс. Этот процесс начинается с предъявления (*подачи на вход* алгоритма) произвольного (но выбранного из фиксированной для данного алгоритма совокупности) *исходного данного*. Процесс может завершиться получением полностью определенного этим исходным данным результата; тогда говорят, что результат образуется *на выходе* алгоритма. Однако процесс может продолжаться и неограниченно, у алгоритма результат существует не всегда. Например, алгоритм, выписывающий частное двух чисел в виде десятичной дроби, может никогда не кончить работу (так $1:3=0{,}33333...$).

Понятие алгоритма принадлежит к числу основных понятий математики. Теория алгоритмов вместе с математической логикой образует фундаментальную теоретическую базу построения и использования вычислительной техники. Именно наличие алгоритмов для тех или иных задач позволяет решать эти задачи на ЭВМ.

Замечателен сам термин «алгоритм». В самом деле, много ли терминов науки, в состав которых входит географическое название? Подобное название не сразу разглядишь в слове «алгоритм», однако оно там есть — это название города «Хорезм». Ведь в основе термина «алгоритм» лежит имя аль Хорезми (что значит «из Хорезма») — великого математика IX века. Крупнейшие математики и алгоритмисты всего мира воздали дань основополагающей роли аль Хорезми, съехавшись в сентябре 1979 года в Хорезмскую область Узбекистана, в город Ургенч, где они обсудили насущные вопросы теории алгоритмов и ее приложений на современном этапе. Подробнее об этой встрече в Ургенче рассказал один из ее организаторов, академик А. П. Ершов (см. «Квант», 1984, № 8, с. 29).

Мы собираемся продемонстрировать читателю наиболее знаменитые и наглядные примеры *нерешимых* алгоритмических проблем, то есть таких алгоритмических проблем, для которых не существует решения. Для контраста, эти примеры будут соседствовать с такими, где алгоритм есть (хотя, иногда, и очень сложен) или вопрос о наличии алгоритма еще не решен.

Решение алгебраических уравнений

Выпишем уравнение

$$x^2+2=y^3 \qquad (1)$$

и будем интересоваться его решениями. Решение в данном случае — это пара чисел $(a;\ b)$, подчиненная условию $a^2+2=b^3$, например, пара $(5;\ 3)$.

Решая какое-либо уравнение, надо всегда точно знать, какие числа дозволяется брать в качестве его решений. Если, к примеру, решением уравнения должен служить прирост количества коз в таком-то стаде за такой-то срок, вряд ли нас устроит ответ «две трети» (но ответ «минус десять» будет осмыслен: он означает, что количество коз в стаде, к сожалению, не возросло, а уменьшилось). Для уравнения (1) можно интересоваться его действительными решениями, то есть парами действительных чисел, рациональными решениями, то есть парами рациональных чисел, целыми решениями, то есть парами целых чисел. Уравнение (1) имеет бесконечно много действительных решений: достаточно взять любое a и положить $b=\sqrt[3]{a^2+2}$, тогда пара $(a;\ b)$ будет решением (вопрос к читателю: можно ли взять любое b и положить $a=\sqrt{b^3-2}$?). Нетрудно доказать, что (1) имеет бесконечно много рациональных решений; вот одно из них: $(0{,}383;\ 0{,}129)$. Целых же решений только два: $(5;\ 3)$ и $(-5;\ 3)$. Однако доказать это нелегко.

Решение уравнений в целых числах представляет собой очень древнюю (ею занимался еще сам Пифагор в VI в. до н. э.) и — в общем случае — очень трудную задачу. Основная трудность состоит в том, чтобы выяснить, имеет ли данное уравнение хотя бы одно целочисленное решение. Например, неизвестно (во всяком случае было неизвестно до сравнительно недавнего времени) имеют ли решения в целых числах уравнения $x^3+y^3+z^3=30$ и $x^4+y^4+z^4=u^4$.

Задача для читателей. Для каждого из уравнений $x^4+y^4=5z^2$, $3x^2-y^2=1$, $x^2+y^3=z^4$ найдите какое-нибудь решение в целых числах или докажите, что такого решения не существует.

Указание. Об этих и других уравнениях в целых числах можно прочесть в популярных брошюрах: Гельфонд А. О. «Решение уравнений в целых числах», М., 1952. (серия «Популярные лекции по математике», вып. 8); Серпинский В. «О решении уравнений в целых числах», М., 1961.

Задача «уметь по произвольному алгебраическому уравнению с целыми коэффициентами выяснять, имеет ли оно решение в целых числах» составляет одну из двадцати трех так называемых *проблем Гильберта*. Что это за проблемы?

Когда Давид Гильберт (1862—1943), один из величайших математиков XX века, готовил свой доклад на Всемирном математическом конгрессе в Париже в 1900 г., он выбрал 23 проблемы из различных областей математики. Эти проблемы были его попыткой «проникнуть в предстоящие успехи нашей науки и тайны ее развития в начинающемся столетии». Попытка эта оказалась необычайно успешной и ценной. И по сей день решение (даже частичное) какой-либо проблемы Гильберта расценивается во всем мире как высшее математическое достижение. Обязательным требованием, предъявляемым к действительно фундаментальной проблеме, Гильберт считал «возможность изложить ее содержание первому встречному». Задача о выяснении наличия целочисленных решений составляет десятую проблему из списка Гильберта. Читатель может сам судить, в какой степени ее формулировка является общедоступной. Сейчас мы сформулируем десятую проблему Гильберта в соответствии с принятыми здесь стандартами.

Проблема 1 (десятая проблема Гильберта). Дано: произвольное алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами. Требуется: выяснить, существует ли у данного уравнения решение в целых числах.

Искомый алгоритм: в 1970 г. советский математик Ю. В. Матиясевич доказал невозможность алгоритма, решающего эту проблему (см. «Квант», 1970, № 7, с. 39).

В связи со сформулированной проблемой уместно сделать замечание, применимое не только к ней, но, с соответствующими изменениями, и в других случаях. Алгоритм отыскания какого-нибудь решения любого уравнения, о котором известно, что у него есть решение, существует! Действительно, вот такой алгоритм: надо просто подставлять в уравнение все наборы натуральных чисел. В конце концов будет найден набор, удовлетворяющий уравнению.

Приведем несколько естественных модификаций первой проблемы.

Проблема 2. Дано: произвольное алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами. Требуется: выяснить, существует ли у данного уравнения решение в действительных числах.

Искомый алгоритм: существует! Решение проблемы 2 было получено известным польским логиком и математиком Альфредом Тарским в 40-е годы XX века. О применении этого результата будет говориться дальше. В действительности, Тарский построил более общий алгоритм, позволяющий выяснить наличие решений у систем равенств и неравенств.

Чтобы оценить степень нетривиальности алгоритма Тарского, попытайтесь решить следующую задачу. По произвольному алгебраическому уравнению с целыми коэффициентами и одной неизвестной требуется выяснить, существует ли у него решение в действительных числах. (Ясно, что эта задача — простой частный случай проблемы 2). Если степень уравнения нечетна, сразу можно ответить, что корень уравнения существует. А что, если четна?

Проблема 3. Дано: произвольное алгебраическое уравнение с целыми коэффициентами. Требуется: выяснить, существует ли у данного уравнения решение в рациональных числах.

Искомый алгоритм: существует он или нет — неизвестно.

Посмотрите, как близки друг к другу формулировки наших проблем 1, 2 и 3: эти формулировки различаются лишь в одном слове. И как, тем не менее, различны ответы на вопрос, существует или нет соответствующий алгоритм. Поистине, удивительное рядом!

Преобразование слов

В математике *словами* называются любые конечные последовательности символов. Например, 1985 — слово длины 4. Слова не только не обязаны обладать каким-либо смыслом, но даже быть произносимыми. Так, БРДРОЬЫЩ — слово из русских букв (и притом длины 8), хотя и не слово русского языка. Как правило, исходные данные для алгоритмов — это слова. Когда алгоритм задан, определено и множество *букв*, то есть символов, из которых составляются слова, подаваемые ему на вход. Такое множество называется *алфавитом*. Алфавиты, в которых пишутся тексты на естественных языках и языках программирования, печатаются книги, содержат не более нескольких сот букв. Многозначные числа, участвующие в «школьных» алгоритмах — это слова в десятибуквенном алфавите, состоящем из букв 0, 1, 2, ..., 9; эти буквы, как известно, называются цифрами; а для записи десятичных дробей, помимо этих десяти цифр, используется еще одна буква — запятая.

Современные вычислительные машины работают с двоичными словами, состоящими из букв 0 и 1. Чтобы проиллюстрировать гибкость и емкость понятия «слово», заметим, что пару слов можно закодировать одним словом, например, поставив между членами пары букву, не входящую в алфавит, в котором эти члены записаны. Таким образом, в качестве исходных данных для алгоритмов достаточно рассматривать слова, а рассматривать в этом качестве пары, тройки и т. д. слов нет нужды. Заметим еще, что часто бывает удобно рассматривать слово длины ноль; оно называется *пустым словом*, так как вовсе не содержит букв.

Многие из вас играли в следующую игру. Дается задание, например, «переделать волка в козу». Решение:

ВОЛК→ПОЛК→ПОЛА→ПОЗА→КОЗА

В чем состоит один шаг переделки? — В замене любой буквы уже полученного слова на любую другую букву русского алфавита, причем так, чтобы получаемый объект (слово в математическом смысле этого слова) оказывался снова осмысленным словом русского языка.

Теперь упростим игру — забудем о том, что среди всех последовательностей букв выделены слова русского языка. Будем считать все (в математическом понимании, то есть как осмысленные, так и бессмысленные) слова в русском алфавите равноправными. Можно ли тогда переделать волка в козу? Ну, теперь это совсем легко:

ВОЛК→КОЛК→КОЗК→КОЗА

Может быть, теперь любое слово можно переделать в любое? Конечно нет — слова должны быть одинаковой длины. Но этого условия и достаточно!

Проблема. Дано: два слова в русском алфавите. Требуется: узнать, получается ли одно из другого последовательностью замен буквы на букву.

Искомый алгоритм: сравнить длины слов, если они совпадают, то ответ ДА, если не совпадают, то ответ — НЕТ.

Заметим, что первоначальная проблема — переделать одно заданное слово русского языка, также очевидно решима — для ее решения нужно только иметь (конечный!) словарь всех слов русского языка, которые можно использовать в игре, и достаточный запас времени и бумаги. Несложный подсчет показывает, что эта задача может быть практически решена на сегодняшних ЭВМ.

Теперь, опять забыв о русском языке (но не о русском алфавите) и под словами понимая произвольные конечные последовательности русских букв, усложним задачу в другом отношении. Вместо того, чтобы разрешать заменять (в любом месте слова) любую букву на любую, выберем некоторый конечный список разрешенных замен. Этот список может выглядеть, например, так:

$$\begin{array}{ccc} \text{А} & \text{БББ} & \text{БА} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ \text{Б} & \text{АА} & \text{АБА} \end{array}$$

Преобразование слова за один шаг будет, как и раньше, состоять в том, что в любом месте слова мы заменяем участок, который разрешено заменять, на то, на что его разрешено заменять. При этом все разрешенные замены двусторонние: если участок X разрешено заменять на участок Y, то и участок Y разрешено заменять на участок X. Например, если список разрешенных замен таков, какой мы только что выбрали, то преобразование за один шаг может быть таким: БААБ — БББББ, или таким: БАБ — АБАБ, или таким: БАБА — БААА.

Проблема. Д а н о: два слова в русском алфавите. Т р е б у е т с я: узнать, можно ли переделать одно в другое, пользуясь следующей системой разрешенных замен:

АВ ↕ ВА БВ ↕ ВБ АУ ↕ УА БУ ↕ УБ ДВА ↕ ВД ДУБ ↕ УД ВВА ↕ ВВАД

Искомый алгоритм: не существует. Это доказал советский математик Г. С. Цейтин, придумавший указанную систему замен.

Подобную проблему в общем виде (то есть любой системы разрешенных замен) впервые поставил известный норвежский математик Аксель Туэ в 1914 году. Сам он доказал существование алгоритма в ряде частных случаев.

Туэ особо выделил случаи, когда во всякой разрешенной замене один из членов — пустое слово, и, таким образом, всякая разрешенная замена состоит в том, что можно в любое место имеющегося слова вставить указанное в замене слово или вычеркнуть его. Например, вставляя и вычеркивая слова АБ и БА, можно из слова АБББА получить БАБАБ. Попытайтесь построить требуемый алгоритм для вставок и вычеркиваний АБ и БА, то есть для такого списка разрешенных замен:

АБ ↕ *пустое слово* БА ↕ *пустое слово*

(Уже этот простейший пример важен для раздела алгебры, называемого «теория групп».)

Для любого набора разрешенных вставок-вычеркиваний алгоритм, устанавливающий, можно ли переделать одно слово в другое, существует. Показал это советский математик С. И. Адян в 1966 году.

Элементарная геометрия

Мы не имеем здесь возможности дать детальное определение, что такое элементарная геометрия в строгом смысле, уточняемом с помощью математической логики. Постараемся, однако, дать приблизительное описание. Исходными понятиями элементарной геометрии служат точки, прямые, плоскости, отрезки, окружности, сферы, отношения «лежать на», «лежать между», «быть конгруэнтными» и т. п. Допускается образование новых понятий — но без использования многоточий и оборота «и так далее» (в этом пункте строгое математико-логическое представление об элементарной геометрии расходится с расплывчатым традиционным). Например, понятие треугольника принадлежит элементарной геометрии: ведь треугольник можно определить как такие три отрезка A_1A_2, A_3A_4, A_5A_6, что $A_2=A_3$, $A_4=A_5$, $A_6=A_1$. А вот общее понятие ломаной не принадлежит элементарной геометрии, потому что в его определении участвуют многоточие и слова «и так далее»: ломаная — это набор отрезков в A_1A_2, A_3A_4,... (здесь многоточие!), A_{n-1}, A_n, таких, что $A_2=A_3$, $A_4=A_5$ и т. д.

Проблема. Д а н о: утверждение элементарной геометрии. Т р е б у е т с я: проверить, истинно ли оно.

Искомый алгоритм: существует. Существование алгоритма было, по существу, установлено Тарским в 40-е годы нашего века. Оно достаточно просто вытекает из существования того алгоритма Тарского, о котором говорилось ранее. Связь проблем алгебры и геометрии была открыта уже давно (аналитическая геометрия), естественно, что она распространилась и на алгоритмические проблемы.

Результат Тарского выглядит, и действительно является, крайне сильным и даже парадоксальным. Оказывается, существует весьма обширная область классической математики (именно — элементарная геометрия), о которой традиционно считается, что она требует тонкого интеллекта и уж никак не сводится к тупым подсчетам, и в то же время имеется алгоритм, который может проверять истинность теорем этой области (а если нужно, то и искать их доказательства). Утешиться можно лишь тем, что алгоритм Тарского не является реальным: он требует неслыханно большого времени для своего осуществления.

Полезно представить себе: насколько «близко» начинаются те геометрические утверждения, для которых, несмотря на существование общего алго-

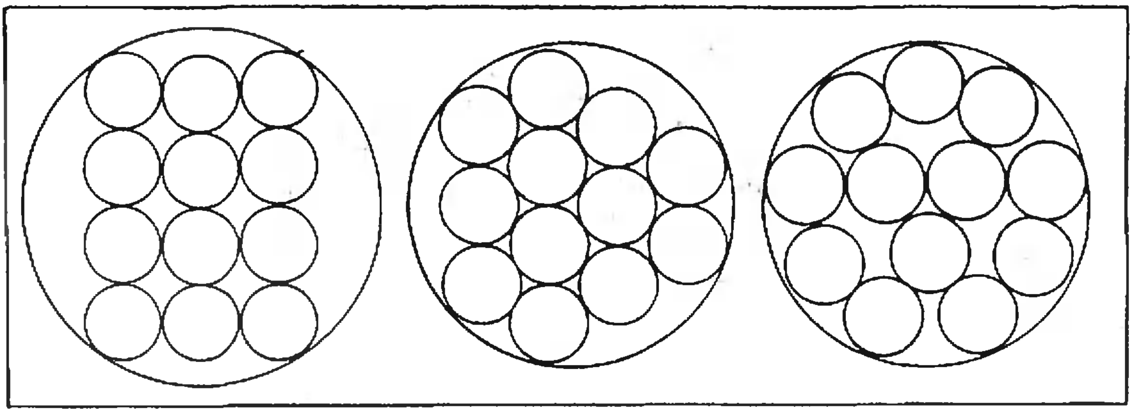


Рис. 1. *Рис. 2.* *Рис. 3.*

ритма, сейчас неизвестна их истинность или ложность.

Вот один наглядный пример. Возьмем двенадцать круглых банок одинакового диаметра (равного, скажем, 10 см). Мы хотим упаковать их, поставив стоймя, в круглую коробку. Это можно сделать, например, так, как показано на рисунке 1). Однако можно расположить банки и более тесно — так, чтобы понадобилась коробка меньших размеров. Например так, как показано на рисунке 2. Наконец, упаковка, показанная на рисунке 3, позволяет использовать еще меньшую коробку. Спрашивается, можно ли найти круглую коробку еще меньшего диаметра, в которую бы влезли все наши банки? Ответа на этот вопрос никто не знает, хотя этот ответ и может быть получен с помощью алгоритма Тарского: надо применить этот алгоритм к утверждению, что третья упаковка — наилучшая, и посмотреть, что получится в результате. ДА или НЕТ. Однако этот способ нереален, поскольку для получения результата работы алгоритма требуется астрономически большое время.

Пример доказательства нерешимости

Предположим, что мы работаем в Вычислительном Центре. В этом центре имеется замечательная Вычислительная Машина. Она может производить вычисления по любой программе p, написанной на неком Языке Программирования, то есть по входному данному m находить результат $p(m)$ программы p (если, конечно, он определен).

Программы можно перенумеровать (например, в алфавитном порядке, ведь каждую программу можно считать словом в символах Языка Программирования), составив Библиотеку **всех** программ:

$$p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n, \ldots$$

Лучше всего иметь дело с такими программами p, которые при любом входном данном m **дают результат** $p(m)$. Такова, например, стандартная программа для вычисления функции $y=m^2+5m-6$. К сожалению, встречаются и такие программы, которые при некоторых значениях входного данного никогда не заканчивают работы, «зацикливаются», как говорят программисты. Так, программа для вычисления десятичной записи значения функции $y=m/3$ не дает результата, скажем, при $m=10$.

Это очень неприятное обстоятельство. Ведь если мы такую программу введем в Вычислительную Машину вместе с таким «плохим» исходным данным, работа Вычислительной Машины никогда не окончится, и мы будем только зря тратить дорогостоящее Машинное Время.

Чтобы это избежать, хорошо бы иметь некоторую процедуру (алгоритм!), которая по номеру программы заранее говорила бы, даст программа с этим номером при выбранном входном данном результат, или нет.

Проблема. Дано: произвольная пара натуральных чисел (n, m). Требуется: построить алгоритм, выясняющий, заканчивает ли работу n-ная программа p_n при входном данном m.

Искомый алгоритм: не существует, и мы сейчас это докажем.

Доказательство. (*Диагональ Кантора*). Предположим, что искомый алгоритм A существует. Составим таблицу всех программ и исходных данных:

$$
\begin{matrix}
p_1(1), p_1(2), \dots, p_1(m), \dots \\
p_2(1), p_2(2), \dots, p_2(m), \dots \\
\dots\dots\dots\dots\dots \\
p_m(1), p_m(2), \dots, p_m(m), \dots
\end{matrix}
$$

и выделим на ней диагональ.

Рассмотрим программу $\bar{p}$, результат которой «не такой, как на диагонали», то есть определяется правилом

$$\bar{p}(m) = \begin{cases} p_m(m)+1, & \text{если } p_m(m) \text{ определено,} \\ 0 & \text{, если } p_m(m) \text{ не определено.} \end{cases}$$

Это действительно программа, то есть p вычисляется с помощью алгоритма. (А именно, такого: проверяем условие «$p_m(m)$ определено» по алгоритму A, если оно выполнено, вычисляем $p_m(m)$ и прибавляем единицу, если нет, полагаем $\bar{p}(m)=0$). Но тогда $\bar{p}$ входит в список всех программ Библиотеки, под каким-то номером. Обозначим этот номер через k и рассмотрим $p_k(k)$ (элемент по диагонали!).

Если $p_k k$ не определено, то $\bar{p}(k)=0$ и поэтому $\bar{p}(k) \neq p_k(k)$.

Если $p_k(k)$ определено, то $\bar{p}(k)=p_k(k)+1 \neq p_k(k)$.

В обоих случаях $\bar{p}(k) \neq p_k(k)$, что невозможно, ибо $\bar{p}$ и p_k — одна и та же программа. Это противоречие завершает доказательство.

Читатель, возможно, хотел бы узнать, почему приведенное выше доказательство называется «диагональю Кантора». Дело в том, что изящный метод доказательства, использованный здесь, был придуман немецким математиком Георгом Кантором (1845—1918), основателем теории множеств. Правда, Кантор устанавливал совсем другое утверждение. Именно, что *множество действительных чисел нельзя занумеровать натуральными числами*, то есть составить *список* всех действительных чисел: $d_1, d_2, d_3, \dots$ (Читателю, которому этот результат показался очевидным — «ведь действительных чисел гораздо больше, чем натуральных»,— мы советуем доказать, что все рациональные числа можно занумеровать — хотя их тоже «гораздо больше, чем натуральных).

Следуя Кантору, мы докажем (от противного), что даже множество действительных чисел на отрезке $[0,1]$ нельзя занумеровать. Предположим, что нам удалось это сделать. Расположим наши числа, представленные в виде десятичных дробей, в порядке номеров:

$$
\begin{matrix}
0{,}a_1\, a_2\, a_3 \dots \\
0{,}b_1\, b_2\, b_3 \dots \\
0{,}c_1\, c_2\, c_3 \dots \\
\dots\dots
\end{matrix}
$$

(Здесь буквы a, b, c,... с индексами обозначают цифры 1, 2, ..., 9, 0 десятичной записи). А теперь мы предъявим число на отрезке $[0, 1]$, которого нет в нашем списке. Именно, таким будет число, чьи разряды «не такие, как на диагонали», то есть, например, число $0{,}abc$ где a — любая цифра, отличная от a_1; b — любая цифра, отличная от b_2; c — любая цифра, отличная от c_3, и т. д. Противоречие!

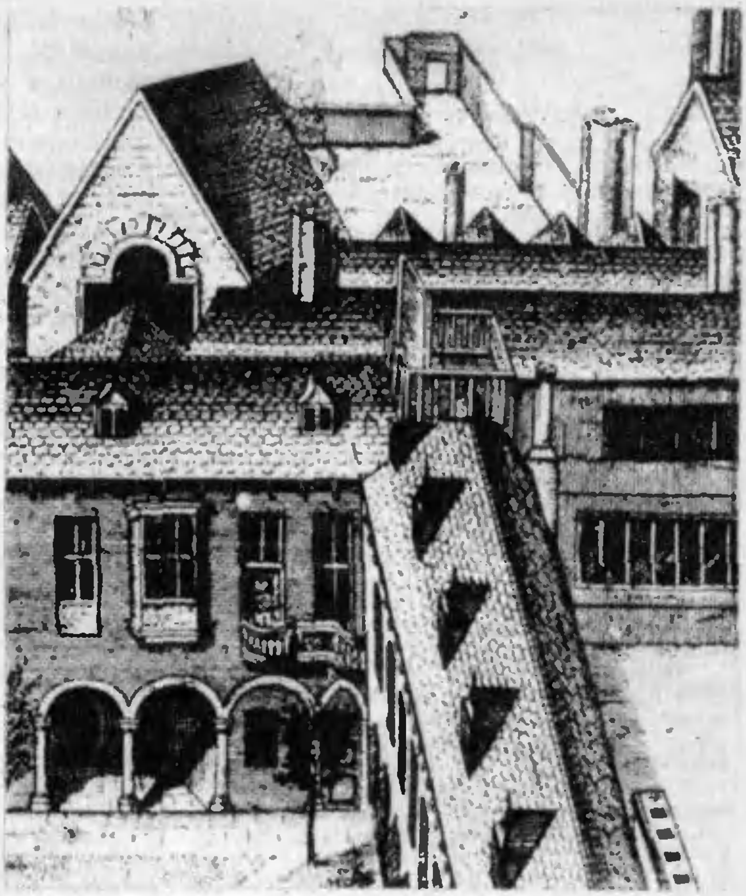
Давайте подведем некоторые итоги. Мы познакомились с понятием алгоритма — важнейшим понятием современной математики и информатики. Разумеется, многие конкретные алгоритмы (например, алгоритм сложения столбиком или алгоритм Евклида нахождения общей меры) были известны очень давно, однако общее представление об алгоритме сформировалось только в первой половине XX века. Всякая попытка использовать вычислительные машины для решения каких-либо задач начинается с построения алгоритма, решающего эти задачи. Пока нет такого алгоритма, нельзя составлять программу для вычислительной машины. А если оказывается, что нужного алгоритма и не может быть, то бессмысленно и пытаться составлять программу. Поэтому результаты о невозможности тех или иных алгоритмов имеют очевидный практический смысл. Кроме того, рассуждения, приводящие к установлению такой невозможности, позволяют глубже проникнуть в природу самого понятия «алгоритм».

У читателя может возникнуть вопрос: всякий ли алгоритм можно запрограммировать, то есть превратить в программу для вычислительной машины? Ответ: теоретически — да. Слово «теоретически» означает здесь, что ответ утвердителен, если допускать программы сколь угодно длинные (для написания которых заведомо не хватит бумаги, чернил и карандашей на всей Земле) и сколь угодно долго работающие (триллионы лет). Отметим, что подобного рода допущения глубоко коренятся в математике. (Мы допускаем многоугольники с любым числом сторон. Мы верим, что алгоритм сложения столбиком позволяет складывать числа любых размеров, хотя и осознаем, что если в слагаемых больше знаков, чем атомов в Земном шаре, то не вполне ясно, как такие слагаемые записать, да и число шагов при их сложении окажется астрономически велико...) К тому же и возможности вычислительной техники непрерывно растут. Если первые вычислительные машины совершали сотни операций в секунду, и управлялись программами, составленными из десятков команд, то быстродействие современных машин доходит до сотни миллионов операций в секунду, а размер их программ — до сотен тысяч команд. Принято считать, что возможности машин удесятеряются за каждое пятилетие. Разумеется, тем не менее, оценки и размера записи алгоритма и числа шагов его работы имеют первостепенную важность. Но это — тема отдельных серьезных обсуждений.

Роберт Гук

(к 350-летию со дня рождения)

Кандидат физико-математических наук
С. Р. ФИЛОНОВИЧ



Здание Грешем-колледжа. В этом доме Гук жил и работал почти пятьдесят лет.

«Моделью» для этого портрета Роберта Гука послужило одно из изображений ученого, которое было создано по описаниям его внешности, оставленным современниками. Подлинного портрета ученого до сих пор не удалось обнаружить.

Тому, кто захочет подробнее познакомиться с жизнью этого замечательного ученого, мы рекомендуем прочитать книгу А. Н. Боголюбова «Роберт Гук» (М.: Наука, 1984).

В истории науки есть периоды, когда происходила крутая ломка представлений о природе и методах ее исследования. Такие периоды принято называть научными революциями. Одна из них относится к XVII столетию, в течение которого были заложены основы многих разделов классической физики. Характер революции в физике XVII века определялся, прежде всего, обращением ученых к эксперименту как средству познания законов природы. Одним из величайших экспериментаторов той эпохи был Галилей. Его простые, остроумные и очень убедительные опыты вдохновили многих ученых на исследования в разных областях физики. XVII столетие чрезвычайно расширило круг изучаемых физических законов и явлений. При этом научная специализация еще не зашла в то время очень далеко, и многие выдающиеся ученые успешно работали сразу в нескольких областях физики. К таким ученым-универсалам относятся Галилей, Кеплер, Гюйгенс, Ньютон. К этому перечню следует добавить и имя выдающегося английского естествоиспытателя Роберта Гука, который по широте научных интересов и разнообразию полученных им результатов занимает одно из самых заметных мест в блестящей плеяде ученых XVII века.

О жизни этого ученого, о его научной деятельности и о судьбе его работ мы расскажем в этой статье.

* * *

Роберт Гук родился 18 июля 1635 года в местечке Фрешуотер на английском острове Уайт в семье настоятеля местной церкви. Отец хотел, чтобы Роберт тоже стал священником, но от этих планов пришлось отказаться. У мальчика было такое слабое здоровье, что он даже не мог ходить в начальную школу вместе со сверстниками. (Болезни преследовали Гука всю жизнь, и это сказалось на его характере: современники часто отмечали его вспыльчивость, резкость и раздражительность.)

Имея большой досуг, юный Гук много времени посвящал конструированию и моделированию различных устройств и механизмов. Можно сказать, что страсть к изобретательству проявилась у него еще в раннем детстве. Однако безмятежная жизнь в семье была рано прервана трагическим событием. Когда Роберту было 13 лет, умер его отец, и Гуку пришлось задуматься о своем будущем. Стремясь с пользой истратить оставшиеся ему в наследство 100 фунтов стерлингов, Гук поступает учеником к одному лондонскому живописцу. Однако вскоре он убеждается, что и без специальной подготовки достаточно хорошо рисует, а запах масляной краски вызывает у него головную боль. Отсюда и решение уйти от живописца и поступить в школу известного педагога Р. Башби. В школе Роберт изучил латинский и греческий языки, познакомился с геометрией Евклида, одним словом, получил подготовку, достаточную для поступления в университет.

В 1653 году Гук становится студентом знаменитого Оксфордского университета. К тому времени деньги, оставленные ему отцом, были исчерпаны, и молодому человеку надо было искать средства для продолжения учебы. Роберт устраивается хористом в церковь. Однако петь ему пришлось недолго, поскольку очень скоро он находит место, лучше отвечающее его склонностям: молодого человека берет к себе в качестве ассистента химик Т. Уиллис. Видимо, Гук работал добросовестно, и Уиллис рекомендовал его в том же качестве молодому аристократу, увлеченному наукой, имя которого вошло во все учебники физики,— Роберту Бойлю.

Бойль, человек столь же знатный, сколь и богатый, не желая участвовать в сложной политической борьбе, раздиравшей Англию в середине XVII века, удалился в Оксфорд, где на свои средства организовал химическую лабораторию. Ранее он получил прекрасное образование во Франции, Италии и Швейцарии и занимался научными исследованиями не как дилетант, а вполне профессионально. К тому времени, когда Гук стал его ассистентом, Бойль был заинтересован изобретенным О. Герике воздушным насосом и опытами, произведенными немецким естествоиспытателем с помощью этого устройства. Понимая, что конструкция насоса Герике далека от совершенства и что для проведения количественных экспериментов

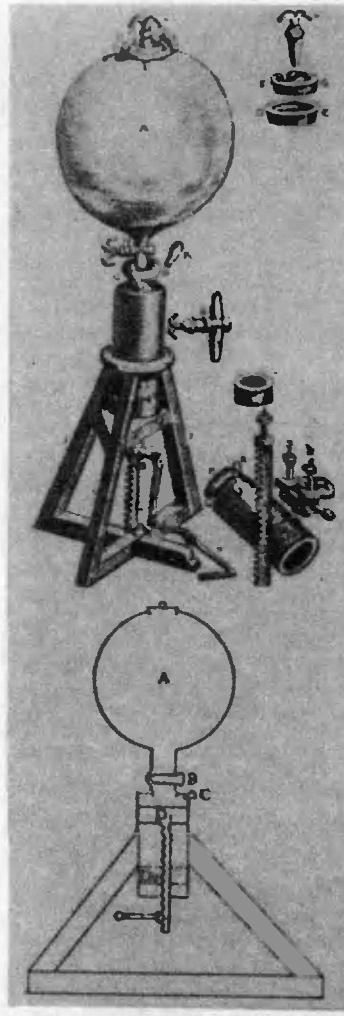
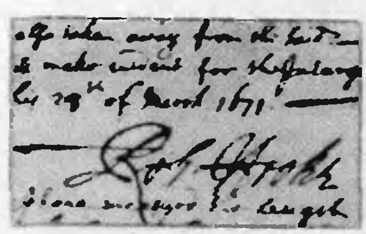


Рис. 1. Внешний вид и схема сечения насоса Бойля — Гука. Для создания в сосуде А давления меньше атмосферного требовалось несколько раз последовательно выполнить такие действия: открыть клапан В, перевести поршень из положения $Д_1$ в положение $Д_2$, открыть клапан С, вернуть поршень в положение $Д_1$, закрыть клапан С. Для повышения давления в сосуде А перечисленные действия надо было провести в обратном порядке.



Фрагмент служебной записки Гука с его автографом.

Отрывки из сочинений Гука

Без обращения к первоисточникам невозможно составить правильное представление о том, как излагали свои взгляды ученые прошлого. Иногда современная формулировка закона, носящего имя того или иного ученого, в действительности очень сильно отличается от той, которую давал ему автор. Но чаще знакомство с работами классиков естествознания вызывает восхищение именно тем, как точно ученым прошлого удавалось представлять свои идеи: высказанные ими несколько столетий назад суждения звучат вполне современно. Последнее относится ко многим работам Р. Гука. Мы предлагаем читателю несколько отрывков из произведений ученого, касающихся природы света и закона упругости.

Публикацию подготовил С. Р. Филонович.

О свете

«Свет — колебательное или дрожательное движение в среде..., происходящее из подобного же движения в светящемся теле, подобно звуку, который обычно объясняется дрожательным движением среды, проводящей его, вызванным дрожательным движением звучащего тела. И так же как в звуке пропорциональные колебания производят различные гармоники, так и в свете различные странные и приятные цвета создаются при смешении пропорциональных и гармонических движений. Первые воспринимаются ухом, а вторые — глазом.»

В следующем отрывке речь идет о возбуждении световой волны и, по существу, вводится понятие о сферическом волновом фронте.

«...свет распространяется с одинаковой скоростью, откуда необходимо, чтобы каждый импульс или колебание светящегося тела возбуждал сферу, которая непрерывно увеличивалась бы так же, хотя и намного быстрее, как волны или круги на поверхности воды расходятся вокруг точки,

(Продолжение см. на с. 20)

требуется ее серьезное усовершенствование, Бойль поручил Гуку заняться этим вопросом. Новый ассистент блестяще справился с заданием.

На рисунке 1 изображен внешний вид устройства, которое вошло в историю физики под названием «насос Бойля — Гука». Используя этот насос, Бойль выполнил цикл экспериментов, которые привели к установлению одного из основных газовых законов, впоследствии названного «законом Бойля — Мариотта» *).

Итак, еще во время учебы в университете Гук приобщился к научным исследованиям. Знакомство с Уиллисом и Бойлем имело для начинающего ученого особое значение еще и потому, что они ввели Гука в кружок любителей естествознания, регулярно собиравшийся в Оксфорде, многие члены которого несколько лет спустя (в 1660 году) стали основателями Лондонского Королевского общества (Академии наук Англии). Члены кружка были хорошо осведомлены о талантах Гука, и когда в 1662 году встал вопрос о кандидатуре на должность демонстратора Королевского общества, они без колебаний обратились к Гуку. Гук принял это предложение. В его обязанности входила подготовка трех-четырех экспериментов, которые демонстрировались на еженедельных заседаниях Королевского общества.

Середина XVII века — это время, когда экспериментальные исследования только входят в практику ученых. Поэтому Гуку приходилось очень много работать, чтобы удовлетворить требования членов Общества: ведь он должен был не только ставить опыты, придуманные им самим, но и повторять эксперименты, сообщения о которых дошли до Англии, проводить астрономические наблюдения и т. д. И Гук с честью справлялся с этими обязанностями в течение нескольких десятилетий.

С 1665 года Гук становится профессором геометрии в Грешем-колледже и читает там лекции. В 1666 году меценат Кутлер предлагает Гуку за довольно большое вознаграждение начать чтение лекций для членов Лондонского Королевского общества по различным проблемам науки. Гук, нуждавшийся в средствах, принимает и это предложение, и в течение многих лет регулярно выступает с лекциями на разнообразные темы.

Кажется, что дел, которыми занимался Гук, хватило бы на нескольких людей. Но он находит все новые применения своему таланту. В 1666 году произошло трагическое событие: в результате страшного пожара была уничтожена значительная часть английской столицы (он вошел в историю как Большой Лондонский Пожар — с большой буквы). Сразу после трагедии отцы города обратились в Королевское общество с просьбой предста-

*) Результаты независимых исследований французского физика Э. Мариотта были опубликованы спустя 14 лет после выхода в свет основной работы Р. Бойля.

вить проекты перестройки Лондона. Гук за несколько недель подготовил оригинальный проект. По его плану улицы нового Лондона должны были пересекаться строго под прямыми углами. Хотя этот план не был принят (идея ученого была воплощена в жизнь лишь значительно позже, при застройке Нью-Йорка), проект Гука оценен по достоинству, и он был привлечен к работе по перестройке Лондона в качестве смотрителя. В конце 60-х — начале 80-х годов под руководством Гука в городе было возведено множество зданий. Получили известность и работы Гука как архитектора. В частности, по его проекту было возведено здание печально знаменитой больницы Марии Вифлеемской, превращенной впоследствии в дом для умалишенных. Ее второе название — «Бедлам» — стало нарицательным и обозначает хаос, неразбериху. К сожалению, ни одно из зданий, построенных по проекту Гука, до наших дней не сохранилось.

Вот так, в непрерывной, неустанной деятельности проходили дни Роберта Гука. Однако среди множества его занятий основное место, безусловно, принадлежит научным исследованиям. Какими же открытиями и изобретениями обогатил Гук науку?

Как уже говорилось, свою научную работу Гук начал с участия в экспериментах Бойля. Одно из открытий Бойля послужило темой и первого самостоятельного исследования Гука. Бойль заметил, что жидкость в тонких трубках (капиллярах) не подчиняется закону сообщающихся сосудов: вода в стеклянном капилляре поднимается выше уровня воды в широком сосуде. Гук тщательно исследовал явления подобного рода, которые получили названия капиллярных. Выяснить их причину он не смог, но им было сделано несколько важных наблюдений и обобщений. В частности, он установил связь между капиллярностью и движением соков в стволах деревьев.

Важной особенностью творчества Гука была глубокая взаимосвязь проблем, которыми он занимался. На это обстоятельство надо обратить особое внимание, поскольку широта интересов Гука необычайна. Ярким примером разнообразия занимавших его вопросов является «Микрография» — самое известное произведение Гука, изданное в 1665 году.

В этой относительно небольшой книге Гук описывает множество наблюдений, произведенных с помощью усовершенствованного им микроскопа. На рисунке 2 показан внешний вид этого микроскопа, а на рисунке 3 — изображения микроскопических объектов, исследованных Гуком. (Эти и другие рисунки для книги «Микрография» Гук выполнил сам.)

Усовершенствование микроскопа позволило Гуку провести уникальные по систематичности и разнообразию наблюдения. Исследование глаза мухи было настоящим научным открытием — Гуку удалось объяснить, почему поле зрения этого насекомого очень велико. «... ряды глаз располо-

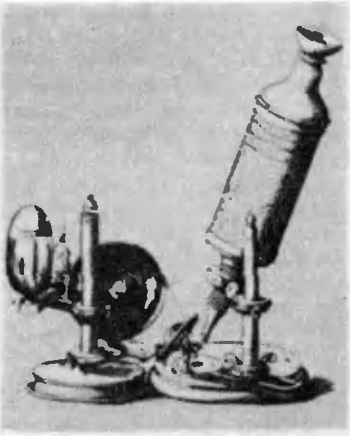


Рис. 2. Микроскоп Гука. Длина тубуса около 7 дюймов (~18 см): перемещение объектива осуществлялось микрометрическим винтом; наблюдаемый предмет помещался на кончике булавки. При работе с искусственным освещением свет (от свечи) фокусировался на предмет с помощью шара, наполненного водой, и плоско-выпуклой линзы.

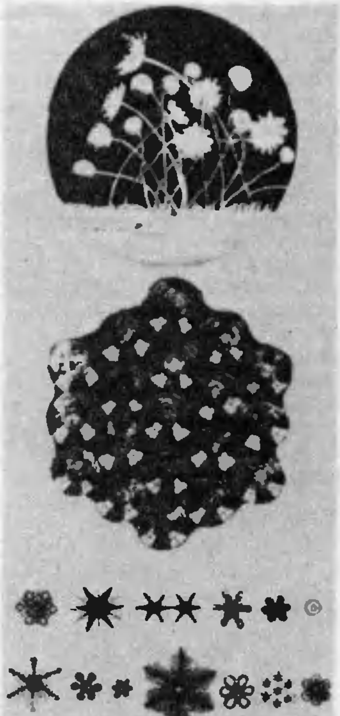


Рис. 3. Изображения микроскопических объектов, исследованных Гуком: грибница плесени; «мозаичный» глаз мухи; различные типы снежинок.

где от упавшего камня началось движение. Из этого следует, что все части этих сфер волнообразно распространяются через однородную среду, пересекая лучи под прямыми углами.»

Гук одним из первых исследовал цвета тонких пленок. Он пытался объяснить их возникновение сложением «импульсов» — волн, отраженных от различных поверхностей пленки. По поводу этого объяснения Т. Юнг, впервые сформулировавший закон интерференции, писал, что среди ученых, занимавшихся оптикой, только у Гука есть намеки на принцип интерференции.

«После двух преломлений и одного отражения распространяется род ослабленного луча, который ослаблен не только вследствие двух преломлений, но и вследствие потери времени, необходимого для прохождения луча туда и обратно между двумя поверхностями... Ослабленный импульс подходит к первому отраженному импульсу так, что смешанный или удвоенный таким образом импульс, передняя часть которого более сильная..., вызывает на сетчатке ощущение желтого цвета. Если немного удалить поверхности друг от друга, то ослабленный импульс совпадает со вторым или следующим импульсом, отраженным от первой поверхности, отставая от него, затем с третьим, четвертым, пятым, шестым, седьмым или восьмым... Таким образом, если есть тонкое прозрачное тело, толщина которого возрастает..., то цвета будут повторяться столь же часто, на сколько ступеней отстает ослабленный импульс от первоначального или первого импульса, совпадая с последующими.»

(Окончание см. на с. 22)

жены таким образом, что нет ни одного направления, видимого от головы, на которое не были бы направлены несколько этих полусфер, так что справедливо говорят, что муха имеет глаза во всех направлениях и что она действительно обозревает все вокруг себя. Замечено также, что когда муха подвигает свое тело назад, эти поверхности поднимаются над поверхностью ее плечей и спины, так что она может смотреть назад над своей спиной»,— так Гук описывал действие глаза мухи.

Среди других биологических наблюдений в первую очередь надо отметить описание клеточного строения растений. Сам термин «клетка», прочно вошедший в язык науки, был введен Гуком.

Хотя «Микрография» в основном посвящена описанию микроскопических наблюдений, в ней немало страниц, где обсуждаются вопросы из разных областей естествознания. Так, Гук касается вопросов, связанных с пневматическими и барометрическими опытами; вновь обсуждает явление капиллярности; излагает оригинальную теорию тепла и горения; описывает свои астрономические наблюдения. Среди астрономических проблем, которые затрагивает Гук, особый интерес представляет вопрос о происхождении лунных кратеров. Для ответа на него ученый ставил модельные опыты; он наблюдал за образованием неровностей, похожих на кратеры, на поверхности кипящего алебастра и на поверхности размягченной глины, в которую падают небольшие ядрышки. Эти модельные эксперименты можно рассматривать как косвенное обоснование двух основных современных гипотез о происхождении кратеров на Луне: вулканической и метеоритной.

Среди обилия наблюдений и гипотез, касающихся самых разных проблем, особое значение для развития физики имела та часть книги, в которой Гук обсуждал вопрос о природе света. Заинтересовавшись явлением цветов тонких пленок и выполнив целый ряд оригинальных наблюдений, он сформулировал гипотезу о природе света, которую считают истоком волновой теории света.*) Гук приобрел такой авторитет в этом вопросе, что именно ему руководство Лондонского Королевского общества поручило в 1672 году высказать суждение о работе по теории цветов, представленной в Общество И. Ньютоном. В работе Ньютона были высказаны некоторые соображения, касающиеся природы света, с которыми Гук не согласился. Будучи человеком решительным, он выступил с резкой критикой точки зрения Ньютона. С этого времени в течение ряда лет Гук и Ньютон полемизировали по вопросам оптики.

В истории физики имя Гука наиболее прочно связано с формулировкой закона упругости, известного каждому старшекласснику как «закон Гука». Исследованиями упругих свойств веществ Гук

*) Читателю, желающему составить представление о том, как Гук формулировал свои научные представления, мы предлагаем отрывки из работ Гука по оптике (с. 18) и механике (с. 22).

заинтересовался еще в юности, когда принимал участие в опытах Бойля. Затем он столкнулся со сходными проблемами, занявшись конструированием хронометра со спиральной пружиной. Итогом работ Гука в этой области стала его лекция «О восстановительной способности, или об упругости», изданная отдельной брошюрой в 1678 году, в которой сформулирован закон упругости.

В своей лекции Гук описал множество опытов с упругими телами, обобщением результатов которых и стал знаменитый закон. На рисунке 4, заимствованном из указанной брошюры, показаны схемы опытов Гука по исследованию различных видов деформаций. Характерно, что Гук подходил к этим исследованиям, с одной стороны, как практик, изучая, например, деформации часовых пружин или изгиб деревянных балок, использовавшихся в строительной практике, а с другой — как ученый-естествоиспытатель, проводящий точные количественные эксперименты и делающий глубокие обобщения. (Отметим также, что закон упругости — это один из немногих научных результатов, приоритет на который всегда признавался за Гуком.)

Наконец, еще одна проблема физики, вклад Гука в решение которой весьма значителен,— это теория гравитации. Как и многими другими вопросами, гравитацией Гук заинтересовался еще в начале своей научной карьеры. В первые годы деятельности Лондонского Королевского общества он проводил опыты, в которых пытался выяснить, меняется ли сила притяжения, действующая на тело со стороны Земли, при изменении расстояния от центра Земли. Ожидаемых результатов Гук не получил, но не потерял интереса к этой проблеме.

Занятия астрономией, в частности попытка обнаружить параллакс неподвижных звезд — явление, которое непосредственно доказывает движение Земли вокруг Солнца, побудили Гука изложить свои взгляды на движение и взаимодействие тел. В 1674 году он опубликовал работу «Попытка доказать движение Земли наблюдениями», где, в частности, указал на существование универсальной силы гравитации. Однако найти функцию, определяющую зависимость этой силы от расстояния между взаимодействующими телами, Гук не смог. Некоторое время спустя он обратился к Ньютону с вопросом о возможном виде этой функции, а затем высказал предположение, что сила гравитации подчиняется закону обратных квадратов. Ньютон в своей знаменитой книге «Математические начала натуральной философии», где он изложил основные законы динамики, даже не упомянул о заслугах Гука в изучении гравитации, чем глубоко его оскорбил. Между Гуком и Ньютоном, как и в случае дискуссии о природе света и цветов, резко обострились отношения. Известный советский физик и историк науки С. И. Вавилов в научной биографии Ньютона по этому поводу писал: «Ньютон был, очевидно, неправ:

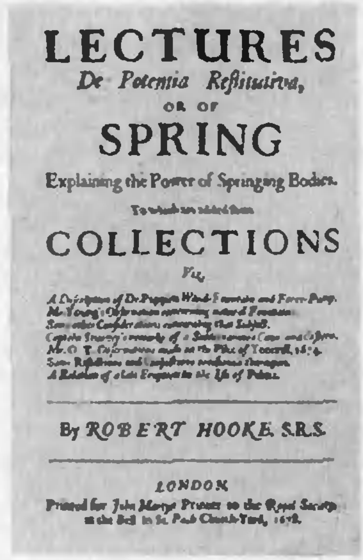
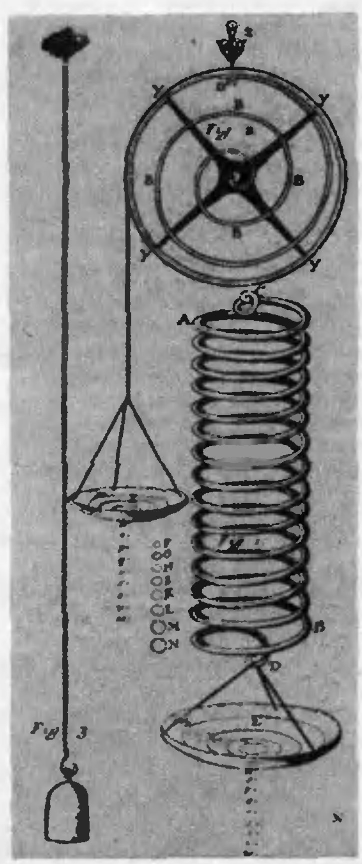

LECTURES
De Potentia Restitutiva,
OR OF
SPRING
Explaining the Power of Springing Bodies.
COLLECTIONS
By ROBERT HOOKE S.R.S.
LONDON,
Printed for John Martyn Printer to the Royal Society, at the Bell in St. Paul's Church-Yard, 1678.

Рис. 4. Титульный лист брошюры Гука «О восстановительной способности, или об упругости» и рисунок из брошюры, иллюстрирующий методы исследования деформаций обычной пружины (Fig. 1), *спиральной часовой пружины* (Fig. 2) *и латунной проволоки* (Fig. 3).



скромные желания Гука имели полное основание. Написать «Начала» в XVII веке никто, кроме Ньютона, не мог, но нельзя оспаривать, что программа, план «Начал» были впервые набросаны Гуком».

В этих словах содержится не только оценка дискуссии между двумя учеными, но и признание выдающихся заслуг Гука в развитии нового естествознания.

* * *

Рассказывая о творчестве Гука, мы неизбежно были вынуждены ограничиться лишь наиболее значительными из полученных им результатов. Так, почти ничего не было сказано о его работах по астрономии, географии и картографии, хотя они и были весьма существенными. Тем не менее, даже этот краткий обзор позволяет без всякого преувеличения назвать Гука ученым-энциклопедистом.

Но что за человек был Роберт Гук, талантливый изобретатель, глубокий исследователь и неугомонный спорщик?

Современники пишут о нем по-разному. Одни, не испытывавшие к нему симпатии, подчеркивали его неуживчивый характер, неприятную внешность, резкие манеры. Друзья же оставили о Гуке воспоминания как о человеке добром и отзывчивом, готовом отстаивать не только свой собственный приоритет на то или иное изобретение, но и честь английской науки в целом. Большую роль в формировании представлений о личности Гука сыграла публикация его дневников. Они отразили всю сложность и противоречивость характера ученого, но по ним же можно судить о том, как относился Гук к науке. Для него она всегда оставалась главным в жизни. Уже будучи тяжело больным, почти ослепнув, он продолжал размышлять над важнейшими вопросами естествознания своего времени.

Гук умер в 1703 году. Коллеги по Лондонскому Королевскому обществу выразили глубокое уважение его памяти: на похоронах Гука присутствовали все члены Общества, находившиеся тогда в Лондоне. Однако история не всегда справедлива к выдающимся людям: многие работы Гука были очень скоро забыты. Даже портрет ученого, сыгравшего выдающуюся роль в научной революции XVII века, не сохранился.

Только в наше время, характеризующееся узкой специализацией научных исследований, когда очень остро стоит вопрос о единстве науки, творчество Роберта Гука, ученого-энциклопедиста, получило должную оценку.

* * *

О законе упругости

В приведенных ниже отрывках описывается методика проведения экспериментов по исследованию упругих свойств твердых тел и дается вывод, следующий из их результатов.

«Возьмите проволочную струну 20, 30 или 40 футов [1 фут = 30,48 см — *С. Ф.*] длиной, укрепите ее в верхней части гвоздем, а к нижнему концу подвесьте чашку весов для нагрузки (разновесов). Затем измерьте циркулем расстояние от дна чашки до земли или пола и запишите это расстояние; далее положите в названную чашку гири, измерьте несколько раз удлинения названной струны и запишите их. Затем сравните несколько таких удлинений той же струны, и вы найдете, что они всегда будут относиться друг к другу так же, как вызвавшие их нагрузки.»

«Совершенно очевидно, что правило или закон природы для всякого упругого тела состоит в том, что его сила или способность восстанавливать свое естественное состояние всегда пропорциональны той же мере, на которую оно выведено из этого своего естественного состояния... И наблюдать это можно... во всех каких бы то ни было упругих телах... Исходя из этого принципа, легко можно будет вычислять силу луков, а также баллист или катапульт, находивших применение у древних... Легко будет находить и необходимое сопротивление пружины для часов... Пользуясь тем же законом, легко было бы устроить Философские весы, чтобы определять вес любого тела без применения гирь... Такие весы я изобрел для того, чтобы исследовать притяжение тел к центру Земли, иначе говоря, выяснить, не теряют ли тела на большом удалении от центра Земли несколько в своей силе тяготения к центру Земли...»

Функциональные уравнения и группы

Я. С. БРОДСКИЙ, А. К. СЛИПЕНКО

С функциональными уравнениями вы, наверное, знакомы, хотя, может быть, и не знаете, что они так называются. Так, именно функциональные уравнения $f(x)=f(-x)$, $f(-x)=-f(x)$, $f(x+a)=f(x)$ задают такие свойства функций, как четность, нечетность, периодичность.

Вообще же функциональное уравнение — это некоторое соотношение, из которого нужно найти неизвестную функцию.

Например, $f(x+1)+f(x)=x$,

$$2f(1-x)+1=xf(x),$$

$$xf(x)+f\left(\frac{4}{2-x}\right)=x.$$

Изучать функциональные уравнения математики начали более двухсот лет назад, когда к ним привели некоторые задачи механики. Большой вклад в изучение таких уравнений внес О. Коши (1789—1857). На страницах нашего журнала уже рассматривалось функциональное уравнение $f(x+y)=f(x)+f(y)$, носящее его имя*). В данной статье мы рассмотрим один из методов решения функциональных уравнений, использующий важнейшее понятие современной алгебры — понятие группы.

Композиция функций

Вы, конечно, заметили, что число исходных, основных функций, изучаемых в школьном курсе математики, сравнительно невелико. К ним, например, относятся линейная, степенная, показательная, тригонометрические функции. Другие функции получаются из основных при помощи композиций и алгебраических действий.

Так, функция $f(x)=\sin(2x+1)$ является композицией линейной функции $g(x)=2x+1$ и тригонометрической функции $h(x)=\sin x$, т. е. $f(x)=h(g(x))=(h\circ g)(x)$.

Функция $f(x)=\lg\arcsin x$ получена в результате композиции функций $g(x)=\arcsin x$ и $h(x)=\lg x$. Обратите внимание на то, что в область определения композиции $h\circ g$ входят те значения x из $D(g)$, для которых $g(x)\in D(h)$. В последнем примере $D(g)=[-1;\ 1]$, $D(h)=]\,0;\ \infty\,[$. Так как $\arcsin x>0$ при $x\in]\,0;\ 1]$, то $D(f)=]\,0;\ 1]$.

Если взять композицию этих же функций в обратном порядке, то есть функцию $f(x)=\arcsin\lg x$, то получим $D(f)=\left[\frac{1}{10};\ 10\right]$.

Композицией дробно-линейных функций $g(x)=\frac{-2x+1}{3x+2}$ и $h(x)=\frac{3x-2}{-x+4}$ является функция $f(x)=h(g(x))=$

$$=\frac{3\cdot\frac{-2x+1}{3x+2}-2}{-\frac{-2x+1}{3x+2}+4}=\frac{-12x-1}{14x+7},\quad x\neq-\frac{2}{3}.$$

Здесь $D(f)=R\setminus\left\{-\frac{2}{3},\ -\frac{1}{2}\right\}$.

Как правило, $f\circ g\neq g\circ f$. В то же время для любых функций

$$(f\circ g)\circ h=f\circ(g\circ h),$$

что непосредственно вытекает из определения композиции.

Упражнения

1. Найдите композиции $f_1\circ f_2$ и $f_2\circ f_1$ следующих функций:

$$f_1=\frac{x-2}{3x+4},\quad f_2=\frac{2x+3}{5x-1}.$$

2. Найдите область определения композиции функции $1-x^2$ и $\sqrt{x}$.

3. Пусть $f(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$. Найдите $\underbrace{f\circ f\circ f\circ\ldots\circ f}_{n}$.

Функциональные уравнения

Решим следующую задачу.

Задача 1. Найдите все функции $y=f(x)$ такие, что

$$2f(1-x)+1=xf(x). \qquad (1)$$

*) См. «Квант», 1975, № 1.

Решение. Предположим, что существует функция $f(x)$, удовлетворяющая данному уравнению. Заменив x на $1-x$, получим

$$2f(x)+1=(1-x)f(1-x). \qquad (2)$$

Из (1) находим $f(1-x)=\frac{1}{2}(xf(x)-1)$. Подставляя значение $f(1-x)$ и уравнение (2), получим

$$2f(x)+1=(1-x)\cdot\frac{1}{2}\cdot(xf(x)-1),$$

откуда $f(x)=\frac{x-3}{x^2-x+4}$.

Непосредственной проверкой убеждаемся, что полученная функция удовлетворяет уравнению (1).

В рассмотренном уравнении под знаком неизвестной функции стоят функции $f_1=x$ и $f_2=1-x$. Замена x на $1-x$ переводит функции f_1 и f_2 друг в друга. В результате подстановки $x\to 1-x$ получено еще одно уравнение, содержащее $f(x)$ и $f(1-x)$. Решение функционального уравнения мы свели к решению системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

Рассмотрим теперь более сложную задачу.

Задача 2. Решите уравнение

$$xf(x)+2f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=1. \qquad (3)$$

Решение. Попробуем действовать так же, как и в первом случае. Выполним замену $x\to\frac{x-1}{x+1}$. Получаем

$$\frac{x-1}{x+1}f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+2f\left(-\frac{1}{x}\right)=1. \qquad (4)$$

Наряду с выражениями $f(x)$ и $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$ у нас появилось новое «неизвестное» — $f\left(-\frac{1}{x}\right)$. Попробуем применить в (3) еще одну подстановку: $x\to-\frac{1}{x}$. Имеем

$$-\frac{1}{x}f\left(-\frac{1}{x}\right)+2f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)=1. \qquad (5)$$

Кроме $f\left(-\frac{1}{x}\right)$, в уравнении появилось «нежелательное» выражение $f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$. Что же, попробуем выполнить в (3) подстановку $x\to\frac{x+1}{1-x}$. И, наконец, удача. Получаем уравнение

$$\frac{x+1}{1-x}f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)+2f(x)=1, \qquad (6)$$

где новые неизвестные не возникли — построена система четырех линейных уравнений (3) — (6) с четырьмя неизвестными $f(x)$, $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, $f\left(-\frac{1}{x}\right)$ и $f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$. Последовательно исключая $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$, $f\left(-\frac{1}{x}\right)$, $f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)$, найдем

$$f(x)=\frac{4x^2-x+1}{5x(x-1)}\ (x\neq-1,\ x\neq 0,\ x\neq 1).$$

Как и при решении уравнения (1), мы предполагали, что функция, удовлетворяющая (3), существует. Проверка показывает, что f удовлетворяет уравнению (3).

Появляются группы

Попробуем разобраться почему нам удалось решить уравнения предыдущего параграфа.

Рассмотрим еще одно уравнение

$$f(x+1)+f(x)=x.$$

Оно выглядит не более «страшным», чем уравнение (3), однако все попытки решить его тем же способом окажутся тщетными: при замене $x\to x+1$ появляется «неизвестное» $f(x+2)$, и так далее. Цепочка не замыкается: мы никогда не получим линейной системы.

Вспомним, что, решая первое уравнение, мы выполнили подстановку $x\to 1-x$. При этом $1-x\to x$. То есть две функции $g_1(x)=x$ и $g_2(x)=1-x$ по отношению к операции композиции ведут себя так $g_1\circ g_2=g_2\circ g_1=g_2$, $g_2\circ g_2=g_1$, $g_1\circ g_1=g_1$.

Рассмотрим таблицу «умножения» (на пересечении строки с номером i и столбца с номером j стоит $g_i\circ g_j$).

$\circ$	g_1	g_2
g_1	g_1	g_2
g_2	g_2	g_1

В каждой строке и каждом столбце этой таблицы встречаются и g_1 и g_2.

Допустим теперь, что нам нужно

решить уравнение

$$a(x)f(x)+b(x)f(1-x)=c(x), \qquad (*)$$

где a, b, c — некоторые функции. Ясно, что выполняя подстановку $x\to 1-x$, мы получим уравнение

$$a(1-x)f(1-x)+b(1-x)f(x)=c(1-x), \qquad (**)$$

которое вместе с уравнением (*) образует линейную систему относительно функций $f(x)$ и $f(1-x)$. Дальше решение будет развиваться так же, как и при решении задачи 1.

Во втором рассмотренном примере мы делали подстановки

$$x\to\frac{x-1}{x+1},\ x\to-\frac{1}{x},\ x\to\frac{x+1}{1-x},$$

то есть имели дело с функциями

$$g_1(x)=x,\ g_2(x)=\frac{x-1}{x+1},$$

$$g_3(x)=-\frac{1}{x},\ g_4(x)=\frac{x+1}{1-x}.$$

Посмотрим, как ведут себя функции g_1, g_2, g_3, g_4 по отношению к операции композиции. Составим таблицу 2, аналогичную таблице 1 (в пересечении i-й строки и k-го столбца запишем $g_i\circ g_k$).

$\circ$	g_1	g_2	g_3	g_4
g_1	g_1	g_2	g_3	g_4
g_2	g_2	g_3	g_4	g_1
g_3	g_3	g_4	g_1	g_2
g_4	g_4	g_1	g_2	g_3

Таблица эта симметрична относительно своей диагонали (это значит, что $g_i\circ g_k=g_k\circ g_i$ при любых k и i). Кроме того, все функции g_i встречаются в каждой строке и каждом столбце равно один раз, и, наконец, легко заметить, что $g_3=g_2^2$, $g_4=g_2^3$, $g_1=g_2^4$. Здесь $g_2^i=\underbrace{g_2\circ g_2\circ\ldots\circ g_2}_{i\ \text{раз}}$.

Таким образом, система функции $G=\{g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4\}$ обладает следующими свойствами: а) она замкнута относительно композиций; б) среди этих функций есть тождественное отображение $g_1(x)=x$; в) у каждой из функций g_i есть обратная g_i^{-1}: $g_1^{-1}=g_1$, $g_2^{-1}=g_4$, $g_3^{-1}=g_3$, $g_4^{-1}=g_2$.

Теми же свойствами обладает и система функций $G=\{g_1,\ g_2\}$ из примера 1.

Если бы теперь нам предложили решить любое функциональное уравнение вида

$$a(x)f(x)+b(x)f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+c(x)f\left(-\frac{1}{x}\right)+$$
$$+d(x)f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)=h(x), \qquad (***)$$

мы сделали бы это, выполнив замены $x\to g_2(x)$, $x\to g_3(x)$, $x\to g_4(x)$, после чего пришли бы к линейной системе. Для примера запишем, что получится из (***) после замены $x\to g_2(x)$.

При этом $g_2(x)\to g_3(x)$, $g_3(x)\to g_4(x)$, $g_4(x)\to g_1(x)$, так что получится уравнение

$$a\left(\frac{x-1}{x+1}\right)f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+b\left(\frac{x-1}{x+1}\right)f\left(-\frac{1}{x}\right)+$$
$$+c\left(\frac{x-1}{x+1}\right)\cdot f\left(\frac{x+1}{1-x}\right)+d\left(\frac{x-1}{x+1}\right)f(x)=$$
$$=h\left(\frac{x-1}{x+1}\right).$$

Теперь дадим следующее определение.

Определение. Произвольное множество G функций, определенных на некотором множестве M, называется *группой* относительно операции $\circ$, если оно обладает теми же свойствами, что и система $(g_1,\ g_2,\ g_3,\ g_4)$, то есть

1. Для любых двух функций $f\in G$, $g\in G$ их композиция $f\circ g$ тоже принадлежит G.

2. Функция $e(x)=x$ принадлежит G.

3. Для всякой функции $f\in G$ существует обратная функция f^{-1}, которая также принадлежит G.

Это определение есть частный случай общего определения понятия группы — одного из важнейших понятий современной математики. Подробно и популярно основные понятия теории групп изложены в книге П. С. Александрова «Введение в теорию групп» (Библиотечка «Квант», вып. 7, М.: Наука, 1980).

Два примера групп функций мы уже видели. Приведем еще некоторые примеры.

а) Множество G линейных функций $f(x)=ax+b$, $(a\neq 0,\ b\in\mathbb{R})$;

б) $G=\left\{x,\ \frac{1}{1-x},\ \frac{x-1}{x}\right\}$ $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,\ 1\}$;

в) $G=\left\{x,\ \frac{1}{1-x},\ \frac{x-1}{x}\right\}$ $x\in R\setminus\{0,\ 1\}$;

г) Множество G функций вида $f(x)=x+a$.

Докажем, например, что линейные функции образуют группу. Все эти функции определены из числовой прямой R. Пусть $f_1=a_1x+b_1$, $f_2=a_2x+b_2$, тогда

$$f_1\circ f_2=a_1(a_2x+b_2)+b_1=a_1a_2x+a_1b_2+b_1,$$

снова есть линейная функция. Функция $e(x)=x$ — также линейная. Если $f(x)=ax+b$, то функцией, обратной к f, будет линейная функция $f^{-1}=\frac{x}{a}-\frac{b}{a}$.

Упражнения

4. Докажите, что множества функций примеров б) и г) образуют группы.

5. Образует ли множество функций $G=\left\{x, \frac{1}{1-x}; \frac{x-1}{x}; 1-x; \frac{1}{x}; \frac{x}{x-1}\right\}$, где $x\in R/\{0, 1\}$ группу относительно композиции?

Подведение итогов

Теперь мы можем изложить общий метод решения некоторых функциональных уравнений с использованием понятия группы функций.

Пусть в функциональном уравнении

$$a_1f(g_1)+a_2f(g_2)+\ldots+a_nf(g_n)=b \qquad (7)$$

выражения, стоящие под знаком неизвестной функции $f(x)$ являются элементами группы G, состоящей из n функций: $g_1(x)=x$, $g_2(x)$, ..., $g_n(x)$, причем коэффициенты уравнения (7) $a_1, a_2, \ldots, a_n, b$ — некоторые функции от x. Предположим, что уравнение (7) имеет решение. Заменим $x\to g_2(x)$. В результате последовательность функции $g_1, g_2, \ldots, g_n$ перейдет в последовательность $g_1\circ g_2$, $g_2\circ g_2$, ..., $g_n\circ g_2$, состоящую опять таки из всех элементов группы.

Поэтому «неизвестные» $f(g_1)$, $f(g_2)$, ..., $f(g_n)$ переставятся и мы получим новое линейное уравнение того же вида, что и (7). Далее в уравнении (7) делаем замены $x\to g_3(x)$, $x\to g_4(x)$, ..., $x\to g_n(x)$, после чего получим систему из n линейных уравнений, которую следует решить. Если решения есть, то мы еще должны проверкой убедиться в том, что они удовлетворяют уравнению (7).

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$2xf(x)+f\left(\frac{1}{1-x}\right)=2x. \qquad (8)$$

Множество функций $g_1=x$, $g_2=\frac{1}{1-x}$, $g_3=\frac{x-1}{x}$ образует группу с «таблицей умножения»,

∘	g_1	g_2	g_3
g_1	g_1	g_2	g_3
g_2	g_2	g_3	g_1
g_3	g_3	g_1	g_2

Заменяя в уравнении (8) x на $\frac{1}{1-x}$, и на $\frac{x-1}{x}$, получим систему

$$\begin{cases}2xf_1+f_2=2x,\\ \frac{2}{1-x}f_2+f_3=\frac{2}{1-x},\\ \frac{2(x-1)}{x}f_3+f_1=\frac{2(x-1)}{x},\end{cases}$$

где $f_1=f(x)$, $f_2=f(g_2(x))=f\left(\frac{1}{1-x}\right)$, $f_3=f(g_3(x))=f\left(\frac{x-1}{x}\right)$, решая которую получим, выполнив проверку

$$f_1=f(x)=\frac{6x-2}{7x} \text{ при } x\neq 0,\ x\neq -1.$$

Приведем в заключение некоторые примеры групп функций, которые могут быть использованы при решении функциональных уравнений.

$G_1=\{x, a-x\}$, $G_2=\left\{x, \frac{a}{x}\right\}$ (здесь и далее $a\neq 0$), $G_3=\left\{x, \frac{a}{x}, -x, -\frac{a}{x}\right\}$, $G_4=\left\{x, \frac{1}{x}, -x, -\frac{1}{x}, \frac{x-1}{x+1}, \frac{1-x}{x+1}, \frac{x+1}{x-1}, \frac{x+1}{1-x}\right\}$, $G_5=\left\{x, \frac{a^2}{x}, a-x, \frac{ax}{x-a}, \frac{ax-a^2}{x}, \frac{a^2}{a-x}\right\}$, $G_6=\left\{x, \frac{x\sqrt{3}-1}{x+\sqrt{3}}, \frac{x-\sqrt{3}}{x\sqrt{3}+1}, -\frac{1}{x}, \frac{x+\sqrt{3}}{1-x\sqrt{3}}, \frac{x\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-x}\right\}$.

Упражнения

6. Решить функциональные уравнения

а) $xf(x)+2f\left(-\frac{1}{x}\right)=3$, $x\neq 0$;

б) $f\left(\frac{x}{x-1}\right)+xf\left(\frac{1}{x}\right)=2$, $D(f)=R\setminus\{0; 1\}$;

в) $f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=1-x$.

(Окончание см. на с. 32)

Игорь Евгеньевич Тамм

В июле этого года исполняется 90 лет со дня рождения выдающегося советского физика-теоретика Игоря Евгеньевича Тамма (1895—1971).

Научные достижения И. Е. Тамма относятся к самым разным областям физики: к электромагнитным явлениям, физике твердого тела, ядерной физике, физике элементарных частиц.

Для Игоря Евгеньевича Тамма было характерно, что он неизменно интересовался труднейшими и важнейшими вопросами физики и с большой целеустремленностью добивался ясности для себя и для других. Правда, нередко получалось так, что значение его работ выяснялось существенно позднее, когда другие исследователи находили применения тем явлениям, которые впервые рассмотрел или предсказал Игорь Евгеньевич.

Например, в 1932 году И. Е. Тамм опубликовал работу «О возможной связи электронов на поверхности кристалла». В ней было предсказано существование особых состояний электронов на поверхности кристалла («уровни Тамма»), когда электроны как бы привязаны к поверхности, то есть не могут ни выйти наружу, ни войти внутрь. Прошло несколько десятков лет после опубликования работы, и выяснилось, что «уровни Тамма» определяют контактные свойства твердых тел, то есть электрические свойства переходного слоя, образованного при соприкосновении двух тел. Без учета «уровней Тамма» было невозможным объяснить работу полупроводниковых диодов и транзисторов, а ведь когда И. Е. Тамм изучал поверхностные состояния, слова «транзистор» еще не существовало. Работа И. Е. Тамма оказалась также очень важной для быстро развивающейся в наши дни физики поверхностных явлений. Интересно, что, когда тридцать пять лет спустя Игорю Евгеньевичу сказали о большой важности его работы по поверхностным состояниям для физики поверхностей, он очень удивился и попросил ему напомнить об этой работе. К тому времени он ее забыл, а точнее говоря, потерял к ней интерес, полностью переключившись на работы по ядерной физике.

В 1937 году И. Е. Тамм вместе с И. М. Франком создали теорию явления, которое было тремя годами ранее найдено и исследовано П. А. Черенковым и С. И. Вавиловым. Было обнаружено слабое свечение жидкостей под действием радиоактивного излучения. Тамм и Франк указали, что источником свечения являются быстрые заряженные частицы, пролетающие через прозрачное вещество со скоростью, превосходящей скорость света в этом веществе. Очень красивая эта теория, как и само явление, сначала не привлекли к себе большого внимания, потому что свечение было очень слабым и казалось, что его невозможно использовать. Однако прошло полтора десятка лет после открытия, и появились приборы — черенковские счетчики, позволяющие регистрировать быстрые заряженные частицы по излучаемому ими свечению.

Сам Игорь Евгеньевич считал одной из лучших своих работ работу по теории ядерных сил, опубликованную в 1934 году. В этой работе он не смог объяснить природу сил, действующих между частицами в атомном ядре, но указал путь, на котором несколько лет спустя такое объяснение было получено. Оно принадлежит известному японскому физику Х. Юкаве. В своей работе он ссылался на И. Е. Тамма как на своего предшественника.

Невозможно в краткой заметке рассказать обо всех, или хотя бы о важнейших, работах И. Е. Тамма. Добавим лишь, что он был в числе советских ученых, предложивших новый, перспективный и практически неисчерпаемый источник энергии — управляемые термоядерные реакции.

Игорь Евгеньевич был очень хорошим человеком — справедливым, доброжелательным, веселым. Он радовался каждому научному успеху своих товарищей по работе, и эта радость всегда была искренней. Сам работая очень много (сохранились черновики его вычислений — страницы, помеченные четырехзначными номерами), он находил время для того, чтобы выслушать и обсудить чужую работу. Его критика всегда была доброжелательной, и даже после самых резких его замечаний у докладчика не опускались руки, а возникало желание работать дальше. После общения с ним у молодежи появлялась уверенность в своих силах. Может быть, именно поэтому среди его учеников так много выдающихся физиков.

По натуре своей Игорь Евгеньевич был очень активен. Он и отдых любил активный: ходил в горы, в походы на байдарках, с большим азартом играл в шахматы, был неистощимым рассказчиком. Его принципиальность тоже носила активный характер. Если он сталкивался с проявлениями лженауки, с незаслуженным восхвалением одних или осуждением других, он неизменно начинал борьбу за восстановление справедливости. Его выступления на страницах газет, на собраниях и обсуждениях были проникнуты заботой о развитии советской науки. Эти качества отчасти объясняют тот факт, что известность Игоря Евгеньевича, любовь и уважение к нему далеко выходили за пределы круга физиков.

Б. М. Болотовский

Струя воды и ... движущийся кораблик

Кандидат физико-математических наук
Л. В. ТАРАСОВ,
М. Л. ТАРАСОВ

Уже несколько раз на страницах «Лаборатории «Кванта» рассказывалось об очень интересном и важном физическом явлении — о наличии реакции вытекающей струи и об отсутствии реакции втекающей струи жидкости (см. «Квант», 1978, № 9; 1980, № 9).
В этом номере публикуется еще одна статья на эту тему.

Начнем с рассказа об одной забытой детской игрушке, которая была достаточно популярной в 30-е годы. Называлась она «Самоходный катер». Сейчас эту игрушку в магазинах уже не продают, но ее нетрудно сделать своими руками дома или в кружке «Умелые руки».

Устройство «Самоходного катера» изображено на рисунке 1. На лодочке *1* укреплена герметичная жестяная плоская коробочка *2*, которая может подогреваться свечой *3* (в современных опытах вместо свечи лучше использовать таблетку сухого спирта). Из коробочки под дно лодки выходит изогнутая металлическая трубка *4* (плотность соединений обеспечивается пайкой *5*). Для большего эффекта одну сторону коробочки можно изготовить в виде щелкающей мембраны (см. «Юный техник», 1983, № 8, с. 65).

Работала эта игрушка следующим образом. Жестяная коробочка заполнялась водой (через отверстие с пробкой *6*), и игрушка опускалась на поверхность воды. Затем зажигалась свеча. Через некоторое время лодка начинала двигаться — сначала медленно и плавно, потом рывками,

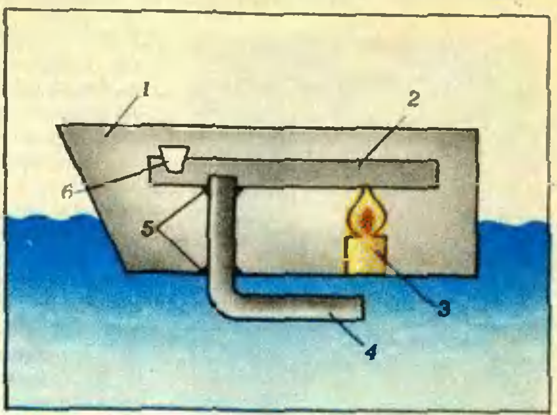


Рис. 1.

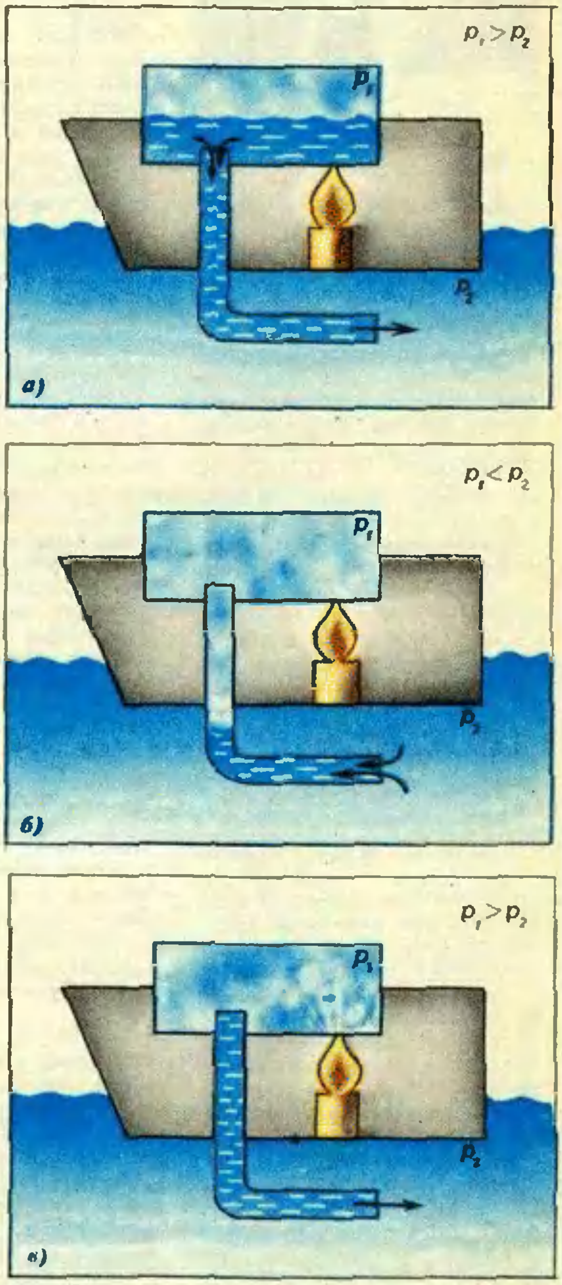


Рис. 2.

издавая характерные звуки, имитирующие работу паровой машины. И двигалась все время, пока горела свеча.

Попробуем теперь разобраться в том, почему же движется «самоходный катер».

Когда мы зажигаем свечу, вода в коробочке нагревается и закипает (рис. 2, *а*). При этом давление в коробочке повышается, вода начинает через трубочку выходить наружу, а лодочка приходит в плавное и медленное движение. Эта, первая, фаза работы игрушки заканчивается, когда вся вода в коробочке выкипает.

Поскольку теплопроводность пара мала, пар практически не отбирает тепло от коробочки и не нагревается, а значит, и не расширяется. Более того, он конденсируется в трубке (в месте контакта с водой), в результате чего давление в коробочке *падает, и вода постепенно поднимается* вверх по трубке (рис. 2, *б*). Это — вторая фаза работы игрушки.

Когда вода поднимется по трубке до самого верха и какое-то количество воды, перелившись через край, упадет на раскаленное дно коробочки, произойдет моментальное испарение воды. При этом давление в коробочке подскочит, и некоторое количество воды из трубки вытолкнется наружу (рис. 2, *в*). Это — третья фаза работы игрушки.

В дальнейшем, пока горит свеча, вторая и третья фазы чередуются. Когда же свеча потухнет, коробочка остынет, весь пар сконденсируется, и коробочка вновь заполнится водой.

Может показаться непонятным, как перемещениями одного и того же количества воды — выталкиваемого из трубки в третьей фазе и всасываемого трубкой во второй фазе — можно добиться поступательного движения лодочки. Оказывается, все дело в существовании реакции вытекающей струи и отсутствии реакции втекающей струи жидкости.

Для наглядной иллюстрации этого факта обратимся к другой любопытной самоделке (рис. 3) — «картезианскому водолазу» с пристроенным к нему сегнеровым колесом. (О том, как сделать эту игрушку, рассказывается в «Кванте» № 9 за 1980 год.) Если нажать на поршень *1*, давление в сосуде *2* увеличивается, вода через

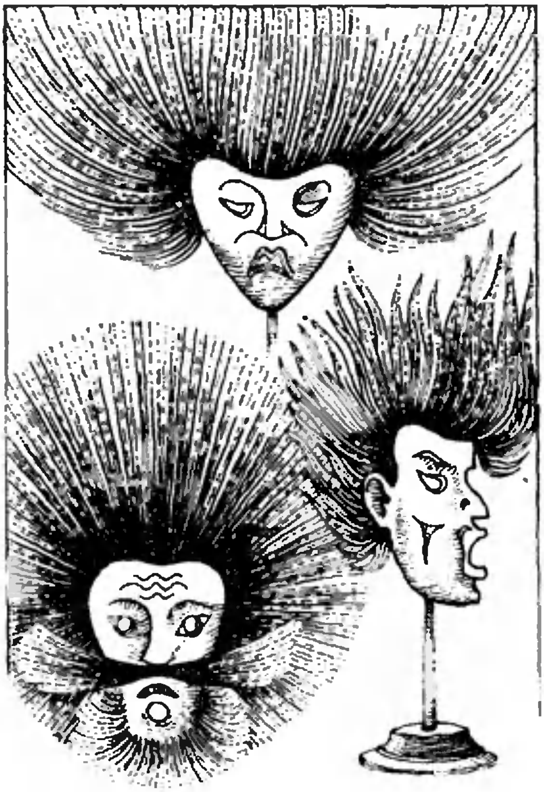
Рис. 3.

трубки *4* заходит внутрь «водолаза» *3*, сила тяжести его увеличивается, и он опускается на дно, не вращаясь при этом. Если поршень поднять, давление в сосуде уменьшается, объем воздуха в «водолазе» увеличивается, сила тяжести «водолаза» уменьшается и он всплывает, вращаясь под действием вытекающих из трубок струй. *Периодически поднимая и опуская* поршень, можно заставить «водолаза» вращаться с довольно большой угловой скоростью. Это явно свидетельствует о различной роли вытекающих и втекающих струй.

Можно ли дать этому теоретическое объяснение?

Наличие реакции вытекающей струи — это известное реактивное движение. А вот с втекающей струей дело обстоит сложнее. Строго отсутствие реакции втекающей струи доказал известный русский ученый, основоположник современной гидроаэродинамики Н. Е. Жуковский, но его теория непроста.

Итак, при вытекании струи тело получает какой-то импульс, а при втекании струи оно импульса не получает. Совершая последовательные втягивание и выталкивание некоторого количества воды, тело может двигаться в сторону, противоположную выталкиванию воды. На этом принципе и основано действие игрушечного «самоходного катера».



Из старых опытов

Кандидат физико-математических наук
А. А. ВАРЛАМОВ

Под таким заголовком мы публикуем статьи о занимательных и вместе с тем весьма поучительных старых опытах по физике.*) Сегодня вниманию читателей предлагается рассказ о том, как легко «добыть» электрические заряды в домашних условиях, как была «открыта» лейденская банка и какие опыты можно с ней провести.

Маски, изображенные на верхнем рисунке, вовсе не являются атрибутами жреца какого-нибудь языческого племени. В прошлом веке с их помощью почтенные профессора физики демонстрировали на своих лекциях в университетах явление электростатического отталкивания. Для этого маску с волосяным париком укрепляли на диэлектрической подставке и заряжали от электростатической машины. Иногда для демонстрации приглашался кто-либо из студентов (из числа наиболее любознательных). Как и маску, его устанавливали на изолирующей подставке и подсоединяли к кондуктору электростатической машины. Через некоторое время, когда на нем накапливался достаточно большой заряд, волосы на его голове становились дыбом, а в притихшем зале слышалось слабое потрескивание — это с кончиков волос стекали электрические заряды.

Существует много различных забавных опытов по электричеству, которые довольно легко воспроизвести самостоятельно. О некоторых опытах мы уже рассказывали раньше (см. «Квант», 1983, № 5, с. 29), еще с несколькими хотим познакомить теперь.

В книге Гастона Тисандье «Научные развлечения», изданной более ста лет назад, есть описание очень простой в изготовлении электростатической машины, с помощью которой можно легко «получать» необходимые для опытов электрические заряды.

Возьмите металлический лакированный поднос длиной 35—40 сантиметров и установите его на столе на нескольких стеклянных рюмках (рис. 1). Вырежьте по форме подноса лист плотной оберточной бумаги так, чтобы он хорошо ложился на плоскую часть подноса. С помощью расплавленного сургуча приклейте к листу две бумажные ленты, за которые можно было бы его поднимать.

Заготовленный лист бумаги поднесите к какому-нибудь источнику тепла, например к печке, чтобы бумага хорошенько просохла и по возможности сильно нагрелась. После этого быстро положите ее на деревянный стол и сильно потрите сухой и жесткой платяной щеткой — благодаря электризации трением лист бумаги приобретет некоторый заряд.

Теперь, взявшись за ленты, перенесите лист бумаги на поднос, заземлите последний, прикоснувшись к его краю пальцем, и тотчас же поднимите бумагу. В результате этого поднос окажется заряженным (причем зарядом противоположного бумаге знака). Чтобы убедиться в этом, приблизьте к подносу согнутый палец руки — на достаточно малом расстоянии от подноса в палец ударит маленькая молния — искра. Можно сно-

*) См. статьи А. А. Варламова в «Кванте» № 10 за 1982 год, в № 5 за 1983 год и в № 8 за 1984 год.

ва опустить лист бумаги на поднос и, повторяя тот же прием, получить еще одну искру и так далее, вплоть до 7—8 раз.

Эту электростатическую машину можно использовать для зарядки конденсатора, называемого лейденской банкой.

Впрочем, история открытия лейденской банки стоит того, чтобы рассказать о ней отдельно.

В 1745 году профессор Лейденского университета (Голландия) Мушенбрек решил с помощью электростатической машины зарядить воду. Для этого он взял стеклянную банку и вставил в нее, для подвода к воде заряда, металлический стержень. Совершив процесс зарядки, он, держась одной рукой за банку, другой взялся за стержень. Впоследствии в письме к французскому физику Реомюру он писал, что все его тело при этом содрогнулось, как от молнии, и что он даже ради короны Франции не стал бы повторять этот ужасный эксперимент.

Примерно в то же время немецкий каноник Клейст проводил опыты по получению

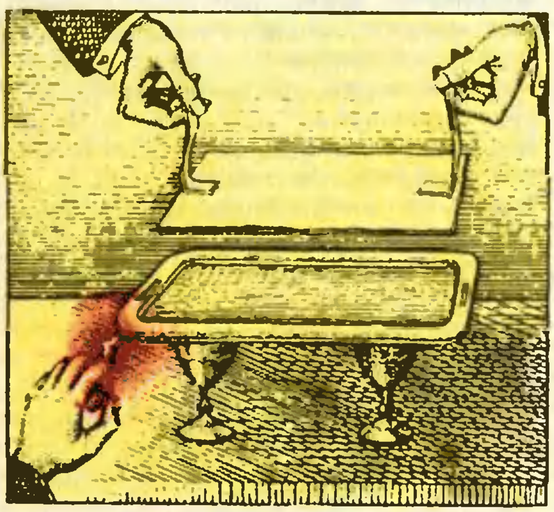


Рис. 1.

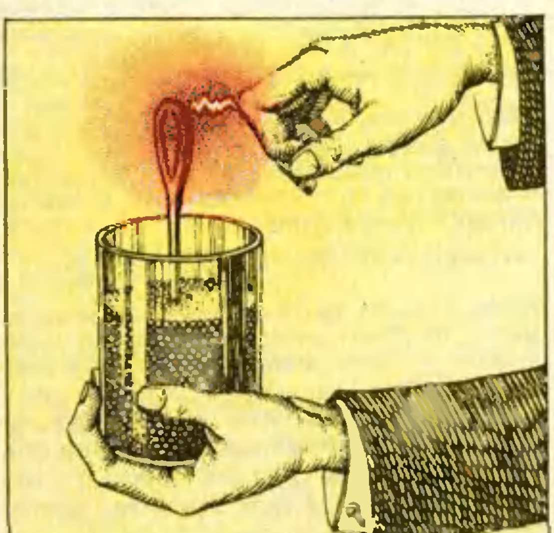


Рис. 2.

электризованной воды, которая, как предполагалось, обладала целебными свойствами. Зарядив воду в бутылке, он прикоснулся к гвоздю, по которому подавался заряд в воду, и его постигла та же участь, что и Мушенбрека.

Так был открыт первый электрический конденсатор, который впоследствии получил название лейденской банки.

Известия об этих опытах быстро распространились по свету, и их стали повторять во многих местах.

Интересны, например, опыты одного из создателей учения об электричестве американского естествоиспытателя Франклина. Для начала он проделал обычный опыт с лейденской банкой. Опустив палец одной руки в воду и дотронувшись другой рукой до наружной поверхности банки, он получил ощутимый удар. Предположив, что заряд содержится в самой воде, он в следующем опыте осторожно перелил ее в другую банку и испытал ее действие на себе — удара не последовало. Следовательно, дело не в воде. Налив в первую банку свежей воды и повторив свой опыт, Франклин снова получил удар и таким образом убедился в том, что «сила, дающая его, заключена в самом стекле».

Прошло совсем немного времени, и лейденская банка приняла «современный» вид — стеклянная банка, обклеенная с обеих сторон металлической фольгой.

Превосходную лейденскую банку можно изготовить, например, так (рис. 2). Возьмите наполненный охотничьей дробью стеклянный стакан и вставьте в него металлическую чайную ложку (конечно, все эти предметы должны быть абсолютно сухими). Для зарядки полученного конденсатора (подумайте, а что служит его обкладками?) обратимся к помощи только что описанной электростатической машины. В то время как вы касаетесь пальцем подноса и поднимаете лист бумаги, пусть ваш помощник, держа банку за дно, поднесет ее к краю подноса так, чтобы искра ударила в конец ложки. После нескольких таких разрядов лейденская банка получит вполне достаточный заряд, и с ее помощью можно будет проделать множество интересных опытов. Опишем некоторые из них.

Самый простой опыт — разрядите лейденскую банку через плотную бумагу, и вы увидите, что искра пробьет в бумаге отверстие причудливой формы.

Теперь понаблюдайте так называемые фигуры Лихтенберга. Профессор физики Геттингенского университета Лихтенберг (живший в XVIII веке) придумал способ, как сделать видимым невооруженным глазом распределение зарядов на электризованной поверхности. Для этого им была использована способность различных

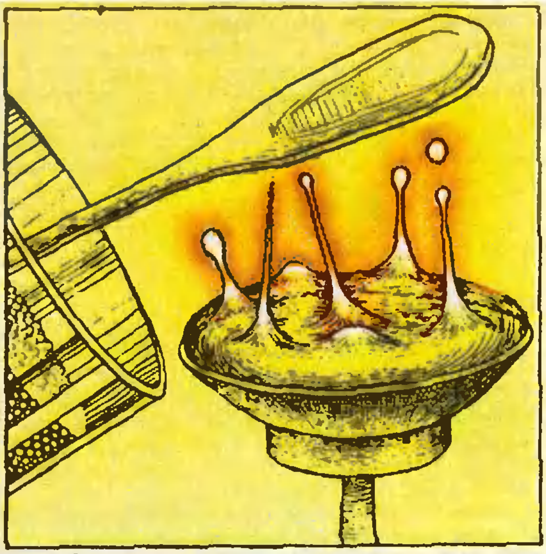


Рис. 3.

порошков электризоваться по-разному. Так например, было замечено, что при просеивании сквозь марлю порошок сурика (сухая красная краска) электризуется положительно, а порошок серы — отрицательно.

Возьмите какой-нибудь диэлектрик, скажем кусок смолы. Тиндаль в своих «Уроках по электричеству» рекомендует предварительно обмахнуть его поверхность лисьим хвостом (если такового у вас нет, постарайтесь найти ему замену), а затем провести по ней концом ложки вашей лейденской банки, написав на смоле, например, свое имя. При этом поверхность смолы становится заряженной отчасти положительно, отчасти отрицательно. Если теперь посыпать ее тонким слоем смеси сурика и серы, то сера соберется там, где сосредоточены положительные заряды, а сурик — где находятся отрицательные заряды. В результате может возникнуть очень красивый рисунок. (Подумайте, как с помощью этих порошков определить знак заряда, возникающего на бумаге при ее электризации трением.)

Еще один опыт, известный в истории науки как опыт флорентийских академиков. Налейте в маленькое часовое стекло растительного масла так, чтобы оно образовало выпуклую поверхность, несколько выступающую над краями стекла. Установите стекло на маленькую подставку и поднесите к поверхности масла конец ложки *заряженной лейденской банки*. Вы увидите, как на поверхности масла будут зарождаться выступы, из которых, при дальнейшем приближении банки, брызнут струи масла (рис. 3).

Функциональные уравнения и группы

(Начало см. на с. 23)

7. Найти $f(x)$, если

$$af(x^n)+f(-x^n)=bx,$$

где $a\neq 1$, n — нечетное число.

8. Найти функцию, определенную при $x\neq 0$ и удовлетворяющую уравнению

$$(x-2)f(x)+f\left(-\frac{2}{x}\right)-xf(2)=5.$$

9. Найти хотя бы одну функцию, удовлетворяющую уравнению $f(f(f(x)))=-\frac{1}{x}$ и не удовлетворяющую уравнению $f(f(x))=-x$.

10. Доказать, что если $G=\{g_1=x, g_2, \dots, g_n\}$ — конечная группа функций относительно композиции, $\varphi=\varphi(x)$ — произвольная обратимая функция, то множество

$$G_\varphi=\{\varphi^{-1}\circ g_1\circ\varphi,\ \varphi^{-1}\circ g_2\circ\varphi,\ \dots,\ \varphi^{-1}\circ g_n\circ\varphi\}$$

также является группой относительно композиции. Обычное замечание об области определения каждого элемента остается в силе.

Мы изложили один из методов решения функциональных уравнений. Существуют *и другие методы*, использующие понятие предела, непрерывности, производной и др. Но это уже предмет особого разговора.

Как получаются симметричные неравенства

Кандидат физико-математических наук
С. В. ДВОРЯНИНОВ,
кандидат педагогических наук
Э. А. ЯСИНОВЫЙ

Во многих задачниках по алгебре и анализу, на математических олимпиадах, а иногда и на экзаменах встречаются задачи, в которых требуется доказать неравенство с несколькими переменными. Самые простые из них доступны ученикам 5—6 класса. Разнообразным методам их доказательства, общим теоремам о замечательных неравенствах посвящены многочисленные математические статьи, обзоры, монографии. Немало статей о неравенствах накопилось и в портфеле нашего «Математического кружка».

В этой заметке рассказывается о теореме Мюрхеда про неравенства, связывающие симметрические многочлены специального вида (суммы всевозможных одночленов с одинаковыми показателями). Эта теорема, доказанная в 1903 году, замечательна не только своей общностью и окончательностью, но и тем, что возникающие в связи с ней комбинаторные понятия («диаграммы Юнга» и их сравнение — «мажоризация») столь же естественно появляются в различных разделах теоретической и прикладной математики, активно развивающихся в последнее время.

Введение

Мы будем заниматься неравенствами такого типа:

$$x^2+y^2\geqslant 2xy, \qquad (1)$$

$$x^5+y^5\geqslant x^3y^2+y^3x^2, \qquad (2)$$

$$x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx, \qquad (3)$$

$$x^3+y^3+z^3\geqslant 3xyz, \qquad (4)$$

$$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\geqslant x^2yz+y^2xz+z^2xy, \qquad (5)$$

$$x^4+y^4+z^4+w^4\geqslant 4xyzw. \qquad (6)$$

Эти неравенства справедливы при всех неотрицательных значениях входящих в них букв. Для случая двух переменных такие неравенства легко доказать группировкой слагаемых и разложением на множители. Докажем, например, что при любых неотрицательных x и y выполнено неравенство (2). Для этого рассмотрим разность

$$x^5+y^5-x^3y^2-y^3x^2=$$
$$=x^3(x^2-y^2)-y^3(x^2-y^2)=$$
$$=(x^3-y^3)(x^2-y^2).$$

Последнее произведение, очевидно, неотрицательно: обе скобки не меньше 0 при $x\geqslant y\geqslant 0$ и не больше 0 при $y\geqslant x\geqslant 0$.

Более трудно додуматься до симметричного доказательства неравенства с тремя или большим числом переменных. Продемонстрируем общую идею пока на одном примере (5). Здесь удобно, перенеся все члены в левую часть неравенства, умножить их на 2 и собрать в три группы:

$$x^2(y^2-2yz+z^2)+$$
$$+y^2(x^2-2xz+z^2)+$$
$$+z^2(x^2-2xy+y^2)=$$
$$=x^2(y-z)^2+y^2(x-z)^2+z^2(x-y)^2\geqslant 0.$$

Упражнение 1. Постарайтесь доказать неравенства (1), (3) и (6).

Чтобы научиться доказывать всевозможные неравенства такого типа и сформулировать общую теорему, необходимо познакомиться с некоторыми новыми понятиями. Сейчас мы их опишем.

Симметризация одночлена

Пусть у нас есть несколько неотрицательных переменных — для определенности, три переменных x, y и z. Кроме того, пусть задан набор из такого же количества целых неотрицательных чисел, $\alpha=(k;\ j;\ i)$, где $k\geqslant j\geqslant i$; назовем их *показателями*. Нарисуем таблицу из трех квадратов и в верхнем правом углу каждого напишем соответствующий показатель. В эти квадраты впишем наши три буквы x, y, z и, глядя на таблицу, напишем одночлен $x^ky^jz^i$. Теперь в ту же таблицу впишем переменные в другом

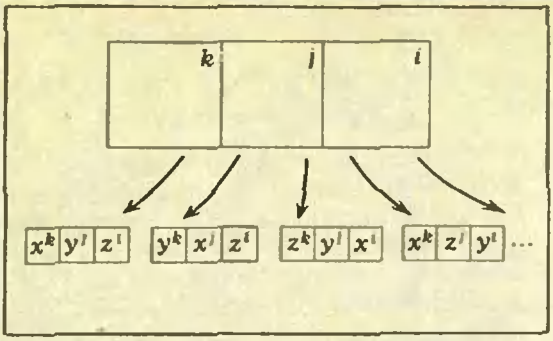


Рис. 1.

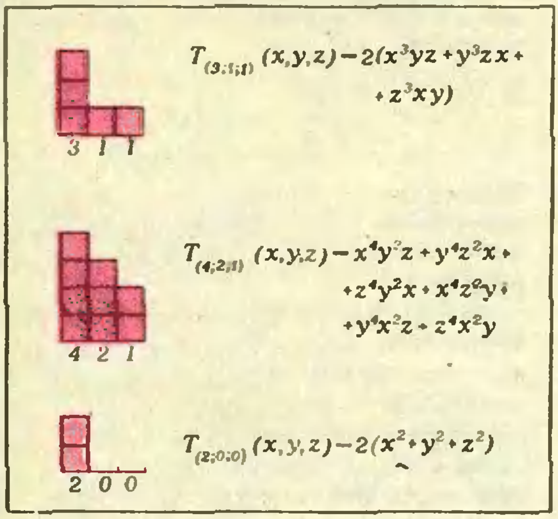


Рис. 2.

порядке; получим, например, такой одночлен $y^k x^j z^i$, и так далее (рис. 1). (Нетрудно сосчитать, сколько всего разных одночленов у нас получится. В первый квадрат можно поместить любую из трех букв x, y, z — это дает три варианта; во второй квадрат — любую из двух оставшихся букв, так что всего имеется $3\cdot 2=6$ вариантов.) Затем сложим все написанные одночлены; получившийся многочлен от трех переменных x, y, z обозначим через $T_{(k,j,i)}(x,y,z)$, или $T_\alpha(x,y,z)$, или просто T_α (T — от слова «таблица»). Этот многочлен будет, как говорят, *симметрическим* — он не меняется при любых перестановках переменных. Степень каждого его одночлена равна $s=k+j+i$.

Например,

$$T_{(2;\,1;\,0)}(x,\,y,\,z)=$$
$$=x^2y+y^2x+z^2x+x^2z+y^2z+z^2y;$$
$$T_{(3;\,1;\,1)}(x,\,y,\,z)=$$
$$=x^3yz+y^3xz+z^3xy+x^3zy+$$
$$+y^3zx+z^3yx=2(x^3yz+y^3zx+z^3xy);$$
$$T_{(2;\,2;\,2)}(x,\,y,\,z)=6x^2y^2z^2.$$

Последние два примера показывают, что когда среди показателей есть равные, в многочлене T_α можно привести подобные члены и записать его короче.

Если набор показателей $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ состоит из n чисел, то надо нарисовать таблицу с n квадратами и взять n переменных $x_1,x_2,\ldots,x_n$. При этом в многочлене $T_\alpha(x_1,\ldots,x_n)$ до приведения подобных будет $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ одночленов.

Итак, каждому набору целых чисел $\alpha=(\alpha_1;\alpha_2;\ldots;\alpha_n)$, где $\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\alpha_3\geqslant\ldots\geqslant\alpha_n\geqslant 0$ соответствует многочлен T_α — «симметризация» одночлена с показателями $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n$.

Будем каждый такой набор α изображать в виде лесенки из n ступенек: высота каждой ступеньки равна соответствующему показателю, ширина — единице. Такую лесенку удобно рисовать на клетчатой бумаге; общее число клеточек — «кирпичей» 1×1, из которых состоит лесенка, равно $s=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$ — степени многочлена T_α. На рисунке 2 изображены лесенки, соответствующие некоторым из многочленов T_α, встречающихся в наших неравенствах.

Научное название этих лесенок, которые оказываются полезными в разных задачах комбинаторики, алгебры и анализа — «диаграммы Юнга» (см. [3]).

Упражнение 2. Напишите многочлены T_α и нарисуйте соответствующие им лесенки для следующих наборов α: (3, 2); (3, 2, 1); (3, 3, 0, 0); (4, 1, 1, 0); (5, 0, 0, 0, 0); (1, 1, 1, 1, 1).

Сравнение диаграмм Юнга

На рисунке 3 изображены пары лесенок, соответствующие неравенствам (1)—(6) из введения. Мы видим, что бо́льшему из двух многочленов соответствует более крутая лесенка: вторую, более пологую, можно получить из первой, свалив несколько кирпичей направо — вниз (см. рис. 4). Сформулируем точнее, что означают здесь слова «более крутая»,— сначала для лесенок из трех ступеней.

Пусть $\alpha=(\alpha_1;\alpha_2;\alpha_3)$ и $\beta=(\beta_1;\beta_2;\beta_3)$ — два набора целых чисел с одинаковой суммой $s=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\beta_1+\beta_2+\beta_3$; $\alpha_1\geqslant\alpha_2\geqslant\alpha_3\geqslant 0$ и $\beta_1\geqslant\beta_2\geqslant\beta_3\geqslant 0$). Будем считать, что $\alpha\succ\beta$ (α *мажорирует* β), если выполнено такое условие:

β можно получить из α, проделав несколько раз (быть может,

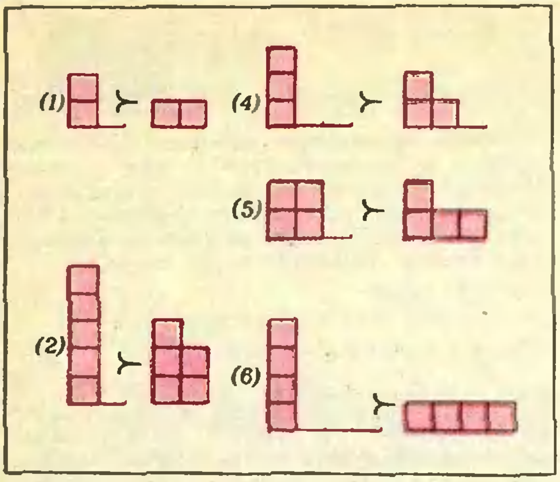


Рис. 3.

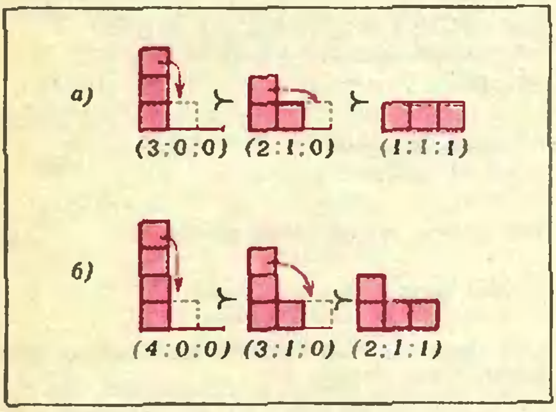


Рис. 4.

один раз или ни одного) операцию

$$\begin{array}{ccc} & (k,\, i,\, j) & \\ \swarrow & \downarrow & \searrow \\ (k-1,\, j+1,\, i) & (k-1,\, j,\, i+1) & (k,\, j-1,\, i+1) \end{array} \qquad (*)$$

Этому условию можно придать и другую, эквивалентную форму: $\alpha \succ \beta$, если выполнены условия

$$\begin{cases} \alpha_1 \geqslant \beta_1, \\ \alpha_1+\alpha_2 \geqslant \beta_1+\beta_2, \\ \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\beta_1+\beta_2+\beta_3. \end{cases} \qquad (**)$$

Аналогично, для невозрастающих наборов целых неотрицательных чисел $\alpha=(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \ldots;\ \alpha_n)$, и $\beta=(\beta_1;\ \beta_2;\ \ldots;\ \beta_n)$ будем писать $\alpha \succ \beta$, если

$$\begin{cases} \alpha_1 \geqslant \beta_1, \\ \alpha_1+\alpha_2 \geqslant \beta_1+\beta_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{n-1} \geqslant \beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_{n-1}, \\ \alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=\beta_1+\beta_2+\ldots+\beta_n. \end{cases}$$

Например, $(4;\ 2;\ 1) \succ (3;\ 2;\ 2)$, поскольку $4 \geqslant 3$, $4+2 \geqslant 3+2$, $4+2+1=3+2+2$.

Отношение $\succ$ между наборами аналогично отношению порядка между числами: $\alpha \succ \alpha$ для любого α; если $\alpha \succ \beta$, $\beta \succ \gamma$, то $\alpha \succ \gamma$. Однако порядок между наборами лишь частичный — бывает, что два набора с одинаковой суммой не сравнимы (см. упражнение 6).

Упражнения

3. Проверьте, что для пар диаграмм Юнга на рис. 3 выполнены условия (*) и (**).

4. Докажите, что условия (*) и (**) эквивалентны (то есть если выполнены неравенства (**), то набор β можно получить из α «сваливанием кирпичей», и обратно).

5. Нарисуйте все лесенки из $s=4$ кирпичей в порядке убывания, начиная от самой крутой (4; 0; 0; 0) и кончая самой пологой (1; 1; 1; 1); то же — для лесенок из 5 кирпичей.

6. а) Проверьте, что диаграммы Юнга (4; 1; 1) и (3; 3; 0) не сравнимы,— ни одна из них не мажорирует другую. Есть ли еще такие несравнимые наборы с суммой 6?

б) Найдите все такие пары наборов для $s=7$.

Теорема Мюрхеда

Теперь все готово для формулировки основной теоремы.

Пусть $\alpha=(\alpha_1;\ \alpha_2;\ \ldots;\ \alpha_n)$ *и* $\beta=(\beta_1;\ \beta_2;\ \ldots;\ \beta_n)$ *— два набора показателей с одинаковой суммой. Если* $\alpha \succ \beta$, *то при всех неотрицательных* $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$T_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant T_\beta(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Обратно, если выполнено такое неравенство, то $\alpha \succ \beta$.

Мы не будем приводить формального доказательства теоремы в общем виде (его можно найти в книгах [1], [2] — вторая из них целиком посвящена различным вариантам отношения «мажоризации», его применениям и обобщениям), вместо этого опишем его основные идеи и продемонстрируем их на конкретных примерах.

Доказательство второй части утверждения теоремы — необходимости условия $\alpha \succ \beta$ — вытекает из того простого факта, что из двух многочленов от одной переменной t (с положительными старшими коэффициентами) при больших значениях t больше тот, у которого больше степень (см. упражнение 8).

Доказательство достаточности условия $\alpha \succ \beta$ основано на двух идеях. Первая — «сваливание кирпичей»: два набора $\alpha \succ \beta$ можно соединить цепочкой наборов так, что соседние наборы в этой цепочке отличаются лишь в двух местах, так что от каждого набора к следующему можно перейти, «свалив кирпич» с одной ступеньки на другую на соответствующей лесенке. Вторая — «симметричная группировка»: разность многочленов для соседних наборов можно записать как сумму (по всем парам переменных x, y) одинаковых групп вида

$$(x^{p+r}y^q+y^{p+r}x^q-x^py^{q+r}-y^px^{q+r})Z$$

(см. рис. 5), где Z — произведение остальных переменных, соответствующих одинаковым показателям в соседних наборах. Последнее вы-

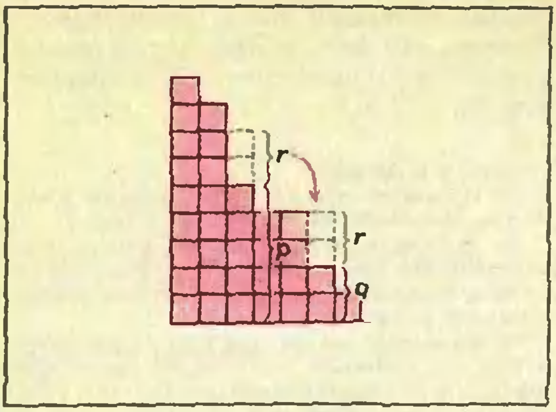


Рис. 5.

ражение раскладывается на множители и, как легко видеть, при $p>q$, $r\geqslant 0$, неотрицательно. (Проверьте!)

Все это станет понятным для тех, кто внимательно, подробно выписывая все выкладки, разберет несколько примеров. Мы приведем два.

Неравенство между средними

Неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим трех неотрицательных чисел

$$\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\geqslant\sqrt[3]{a_1a_2a_3}$$

после переобозначений $a_1=x^3$, $a_2=y^3$, $a_3=z^3$ превращается в неравенство (4), которое уже упоминалось выше. Покажем, как оно доказывается по способу Мюрхеда. Глядя на рисунок 4 а), мы видим, что нужно доказать два неравенства:

$$T_{(3;\,0;\,0)}(x,y,z)\geqslant T_{(2;\,1;\,0)}(x,y,z)\geqslant T_{(1;\,1;\,1)}(x,y,z).$$

Рассмотрим первое из них и составим разность

$$R_1=T_{(3;\,0;\,0)}(x,y,z)-T_{(2;\,1;\,0)}(x,y,z)=2(x^3+y^3+z^3)-x^2y-y^2z-z^2x-x^2z-y^2x-z^2y.$$

Сгруппируем теперь слагаемые по четыре по следующему принципу: для каждой пары переменных в одну группу включаются слагаемые, в которых показатели при этих переменных меняются с (3, 0) на (2, 1) (а общий показатель в наборах здесь 0 на последнем месте). Получим

$$R_1=(y^3+z^3-y^2z)+(x^3+y^3-x^2y-y^2x)+(z^3+x^3-z^2x-x^2z)=(y^2-z^2)(y-z)+(x^2-y^2)(x-y)+(z^2-x^2)(z-x)\geqslant 0$$

при всех неотрицательных x, y, z.

Теперь докажем второе неравенство

$$R_2=T_{(2;\,1;\,0)}(x,y,z)-T_{(1;\,1;\,1)}(x,y,z)=x^2y+y^2z+z^2x+x^2z+y^2z+z^2y-6xyz.$$

Здесь в показателях общая единица на втором месте, а (2; 0) превращается в (1, 1). В соответствии с этим, получим:

$$R_2=x(y^2+z^2-2yz)+y(z^2+x^2-2zx)+z(y^2+z^2-2yz)=x(y-z)^2+y(z-x)^2+z(x-y)^2\geqslant 0.$$

Это и доказывает неравенство (4).

Решение задачи М762.

В этой задаче (из «Задачника «Кванта» № 9, 1982) требовалось для положительных a, b, c доказать неравенства

$$a+b+c\leqslant\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}\leqslant\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}.$$

Читатели предложили несколько различных методов их решения. Один из них — способ Мюрхеда (к другим мы надеемся вернуться в одном из следующих номеров «Кванта»). Умножив данные неравенства на $2abc$, мы приведем их к такому «мюрхедовскому» виду:

$$2(a^4+b^4+c^4)\geqslant a^3b+b^3a+b^3c+c^3b+c^3a+a^3c. \qquad (7)$$

$$a^3b+b^3a+b^3c+c^3b+c^3a+a^3c\geqslant 2(a^2bc+b^2ac+c^2ab). \qquad (8)$$

Соответствующие диаграммы Юнга изображены на рисунке 4, б. Разность левой и правой части каждого неравенства можно записать, как и выше, в виде суммы трех групп по четыре одночлена. Экономя место, мы запишем только одну группу — две другие получаются заменой букв a, b, c на b, c, a и c, a, b.

Доказательство (7):

$$(a^4+b^4-a^3b-b^3a)+\ldots=(a^3-b^3)(a-b)+\ldots\geqslant 0.$$

Доказательство (8):

$$(a^3b+c^3b-a^2cb-c^2ab)+\ldots=b(a^2-c^2)(a-c)+\ldots\geqslant 0.$$

Тем самым, задача М762 решена.

Еще несколько упражнений и задач для исследования

7. Выпишите все неравенства Мюрхеда для многочленов степени 4.

8. а) Пусть $T_{(\alpha_1;\,\alpha_2;\,\alpha_3)}(x,y,z)\geqslant T_{(\beta_1;\,\beta_2;\,\beta_3)}(x,y,z)$ для всех неотрицательных x,y,z. Докажите, что тогда выполнены неравенства (**). (У к а з а н и е. Рассмотрите несколько случаев: $x=y=z=t$; $x=y=t$, $z=1$; $x=t$, $y=z=1$ и сравните степени полученных многочленов от t.)

9. Докажите следующие неравенства (для неотрицательных x, y, z, v, w):

а) $x^4y^2z+y^4x^2z+z^4yx^2+x^4z^2y+z^4x^2y\geqslant 2(x^3y^2z^2+y^3z^2x^2+z^3x^2y^2)$;

б) $x^5+y^5+z^5\geqslant x^2y^2z+y^2z^2x+z^2x^2y$;

в) $x^3+y^3+z^3+v^3\geqslant xyz+xyv+xzv+yzv$.

10. Выведите из теоремы Мюрхеда неравенство для средних арифметического и геометрического n неотрицательных чисел.

Сколько «кирпичей» нужно свалить, чтобы от набора $(n, 0, 0, \ldots, 0)$ из n чисел перейти к набору $(1, 1, \ldots, 1)$?

11. Сформулируйте и докажите теорему *Мюрхеда для любых неотрицательных* (не обязательно целых) показателей.

12. Для некоторых наборов показателей (с четной суммой s) неравенство, о котором идет речь в теореме Мюрхеда, верно для всех, а не только для неотрицательных значений переменных. Постарайтесь описать все такие случаи.

Л и т е р а т у р а

1. Харди Г. Г., Литтльвуд Д. Е., Полиа Г. *Неравенства* — М.: ИЛ, 1948.

2. Маршалл А., Олкин И. *Неравенства: теория мажоризации и ее приложения.* — М.: Мир, 1983.

3. *Заочные математические олимпиады* (задачи 5—9). — М.: Наука, 1981.

Квант для младших школьников

Задачи

1. У меня замечательный номер телефона: первые три цифры одинаковы, остальные четыре цифры тоже одинаковы. Более того, сумма всех цифр номера равна двузначному числу, первая цифра которого совпадает с первой цифрой номера моего телефона, а последняя — с последней. Найдите этот семизначный номер.

2. Решите следующий числовой ребус:

```
   ×СЕМЬ
    СЕМЬ
    ****
   ****
  ****
 ********
```

3. На круглом столе лежат 11 шашек: 5 черных и 6 белых. Пятеро сидящих за столом ребят играют в следующую игру. Сначала каждый берет по две шашки, потом начинающий берет оставшуюся шашку. Если у него оказываются все три шашки одинакового цвета, то он выиграл и игра прекращается, если нет, то он оставляет себе две шашки одинакового цвета, а третью передает партнеру справа. Если у того окажутся все шашки одинакового цвета, то выиграл он, если нет, то он поступает аналогично предыдущему и т. д. Может ли так случиться, что каждый сделает не меньше двух ходов?

4. Попросите товарища стать спиной к стене, прислонив к стене пятки, а потом попытаться достать пальцами рук пальцы ног, не сгибая ноги в коленях. Наверняка это ему не удастся сделать. Почему?

5. Правильный восьмиугольник разделен на части, которые раскрашены так, как на рисунке. Докажите, что сумма площадей, закрашенных каждым цветом, одна и та же.

Эти задачи нам предложили:
Н. К. Антонович, Л. П. Мочалов, А. П. Савин, С. С. Кротов, В. В. Произволов

Синяя Гусеница дает совет.

Алиса и Синяя Гусеница долго смотрели друг на друга, не говоря ни слова. Наконец Гусеница вынула кальян изо рта и медленно, словно в полусне, заговорила: — Ты... кто... такая? Алиса немного рассердилась — уж очень неприветливо говорила с ней Гусеница. Она выпрямилась и произнесла, стараясь, чтобы голос ее звучал повнушительнее: — По-моему, это вы должны мне сказать сначала, кто вы такая.— Почему? — спросила Гусеница. Вопрос поставил Алису в тупик BRA Она ничего не мо BRA гла придумать, а Гусеница, видно, просто была не в духе, так что Алиса повернулась и пошла прочь. — Вернись! — закричала Гусеница ей вслед.— Мне нужно сказать тебе что-то очень важное. Это звучало заманчиво, и Алиса вернулась.— Держи себя в руках! — сказала Гусеница.— Это все? — спросила Алиса, стараясь не сердиться.— Нет, — отвечала Гусеница. Алиса решила подождать, вдруг все же Гусеница скажет что-нибудь стоящее? Сначала та долго сосала кальян, но наконец вынула мундштук изо рта и сказала: — Значит,

не возражаете, сударыня, мне бы хотелось хоть капельку подрасти. Три дюйма такой ужасный рост! CA — Это прекрасный рост! CA — сердито закричала Гусеница и вытянулась во всю длину. (В ней было ровно три дюйма). DA BRA Но я к нему не при DA BRA выкла! — жалобно протянула Алиса. А про себя подумала: «До чего они тут все обидчивые!» — Со временем привыкнешь,— возразила Гусеница, сунула мундштук в рот и пустила дым в воздух. Алиса терпеливо ждала, пока Гусеница не соблаговолит снова обратить на нее внимание. Минуты через две Гусеница вынула кальян изо рта, зевнула раз-другой и потянулась. Потом она сползла с гриба и скрылась в траве, бросив Алисе на прощанье: — Откусишь с одной стороны — подрастешь, а с другой — уменьшишься! «С одной стороны чего? — подумала Алиса.— С другой стороны чего?» — Гриба, — ответила Гусеница, словно услышав вопрос, и исчезла из виду. С минуту Алиса задумчиво смотрела на гриб, пытаясь определить, где у него одна сторона, а где — другая; гриб был круглый, и это совсем сбило ее с толку. Наконец она решилась: обхватила гриб руками и отломила с каждой стороны по кусочку. «Интересно, какой из них какой?» — подумала она и откусила

— Папа Вильям,— сказал
любопытный малыш,—
Голова твоя белого цвета.
Между тем ты всегда
вверх ногами стоишь.
Как ты думаешь, правильно это?

В ранней юности,
— старец промолвил в ответ,—
Я боялся раскинуть мозгами,
Но узнав, что мозгов
в голове моей нет,
Я спокойно стою вверх ногами.
— Ты старик,—
продолжал любопытный юнец,—

— Ты немолод,— сказал
любознательный сын,—
Сотню лет ты
без малого прожил.
Между тем двух гусей
за обедом один
Ты от клюва до лап уничтожил.
— В ранней юности
мышцы своих челюстей
Я развил изучением права,
И так часто я спорил
с женою своей,
Что жевать научился на славу!
— Мой отец, ты простишь
ли меня, несмотря

изменилась?

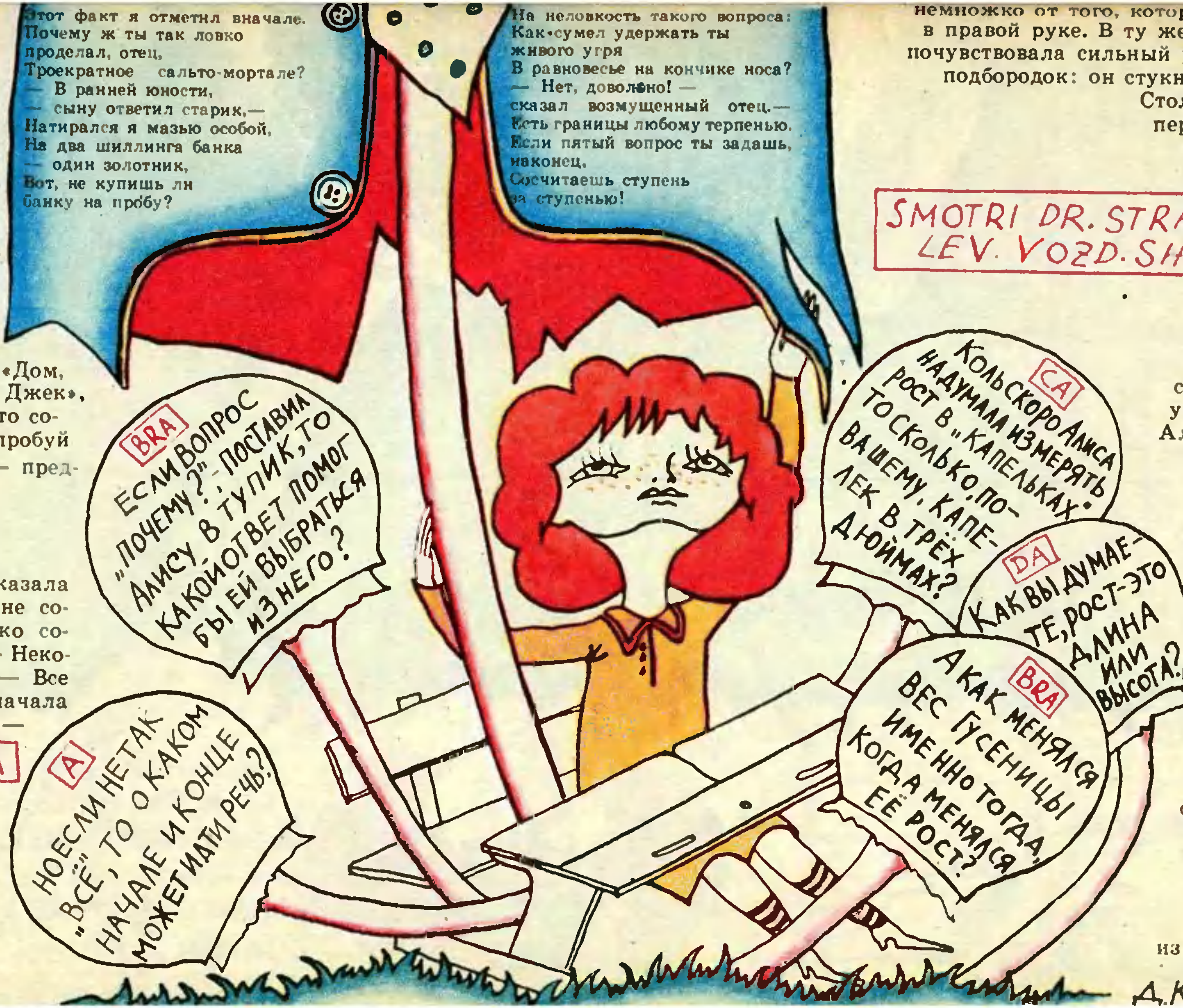
— Да, сударыня, — отвечала Алиса,— и это очень грустно. То одного становлюсь роста, то другого и ничего не помню.

— Ничего не помнишь? — спросила Гусеница.

— Ничего! — сказала с тоской Алиса.— Я пробовала прочитать «Дом, который построил Джек», а получилось что-то совсем другое.— Попробуй «Папу Вильяма»,— предложила Гусеница. Алиса начала. (Прочти и ты стихи на мундире...)

— Все неверно,— сказала Гусеница. — Да, не совсем верно,— робко согласилась Алиса.— Некоторые слова не те.— Все не так, от самого начала и до самого конца,— строго проговорила Гусеница. Наступило молчание.— А какого роста ты хочешь быть? — спросила наконец Гусеница.— Ах, все равно,— быстро сказала Алиса.

— Если вы



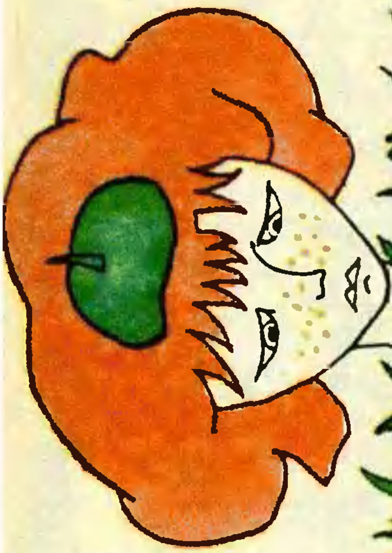
A

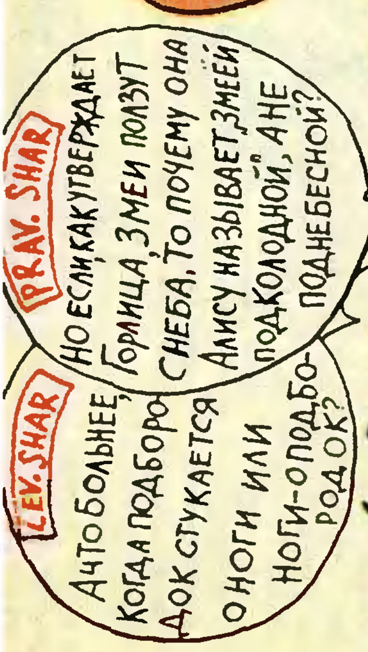
немножко от того, который держала в правой руке. В ту же минуту она почувствовала сильный удар снизу в подбородок: он стукнулся о ноги! Столь внезапная перемена очень ее напугала;

SMOTRI DR. STRANITSU
LEV. VOZD. SHAR

нельзя было терять ни минуты, ибо она стремительно уменьшалась. Алиса взялась за другой кусок но подбородок ее так прочно прижало к ногам, что она никак не могла открыть рот. Наконец ей это удалось, и она откусила немного из левой руки.

— Ну вот, голова наконец освободилась! — радостно воскликнула Алиса. Впрочем, радость ее тут же сменилась тревогой: куда-то пропали плечи. Она взглянула вниз, но увидела только шею невероятной длины, которая возвышалась, словно огромный шест над зеленым морем листвы.— Что это за зелень? — промолвила Алиса.— И куда девались мои плечи? Бедные мои ручки, где вы? Почему я вас не вижу? С этими словами она пошевелила руками, но увидеть их все равно не смогла. Убедившись, что поднять руки к голове не удастся, Алиса решила нагнуть к ним голову и с восторгом убедилась, что шея у нее словно змея, гнется в любом направлении. Алиса выгнула шею изящным зигзагом, готовясь нырнуть в лес (ей уже стало ясно, что это верхушки деревьев, под которыми она только что стояла), как вдруг послышалось громкое шипение. Она вздрогнула и отступила. Прямо в лицо ей, яростно бия крыльями, кинулась горлица.— Змея! — крикнула Горлица.— Никакая я не змея! — возмутилась Алиса.— Оставьте меня в покое! — А я говорю — змея! — повторила Горлица несколько сдержаннее.— Стоило мне устроиться на самом высоком дереве,— продолжала Горлица громче и громче и наконец срываясь на крик,— стоило мне подумать, что я наконец-то от них избавилась, как нет! Они тут как тут! Лезут на меня прямо с неба! У-у! Змея подколодная!

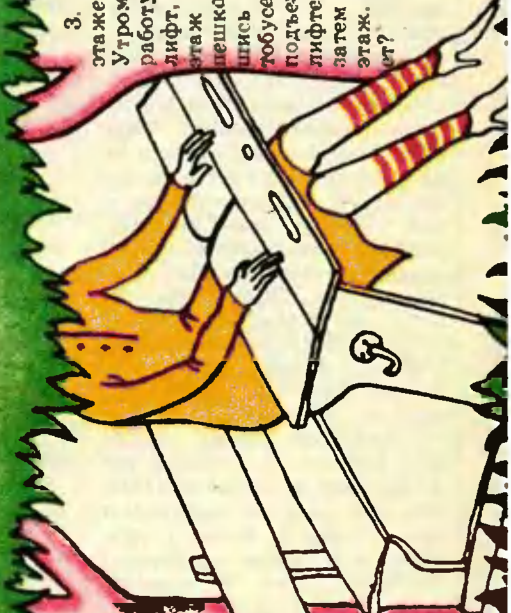




SMOTRI PRAV. VOZD. SHAR

— Никакая я не змея! — сказала Алиса.— Я просто... просто...— Ну скажи, скажи, кто ты такая? — подхватила Горлица.— Сразу видно, хочешь что-то выдумать.— Я... я... маленькая девочка,— сказала Алиса не очень уверенно, вспомнив, сколько раз она менялась за этот день.— Ну уж, конечно,— ответила Горлица с величайшим презрением.— Видала я на своем веку много маленьких девочек, но с такой шеей — ни одной! Нет, меня не проведешь!

Самая настоящая змея — вот ты кто! Ты мне еще скажешь, что ни разу не пробовала яиц.— Нет, почему же, пробовала,— отвечала Алиса. (Она всегда говорила правду). — Девочки, знаете, тоже едят яйца.— Я этому не верю,— сказала Горлица.— Но если это так, тогда они тоже змеи! Больше мне нечего сказать. Мысль эта так поразила Алису, что она замолчала. А Горлица прибавила: — Знаю, знаю, ты яйца ищешь! А девочка ты или змея — мне это безразлично.— Но мне это совсем не безразлично,— поспешила возразить Алиса.— И, по правде сказать, яйца я не ищу! А если даже и искала б, то ваши мне все равно бы не понадобились. Я сырые не люблю! — Ну, тогда убирайся!— сказала хмуро Горлица и снова уселась на свое гнездо. А Алиса стала спускаться иа землю, что оказалось совсем не просто: шея то и дело запутывалась среди ветвей. Немного спустя Алиса вспомнила, что все еще держит в руках кусочки гриба, и принялась понемножку откусывать сначала от одного, а потом от другого, то вырастая, то уменьшаясь, пока наконец не приняла прежнего своего вида. Поначалу это показалось ей очень странным, так как она успела уже отвыкнуть от собственного роста, но вскоре она освоилась и начала опять беседовать сама с собой. — Ну вот, половина задуманного сделана! Как удивительны все эти перемены! Не знаешь, что с тобой будет в следующий миг... Ну ничего, сейчас у меня рост опять прежний. А теперь надо попасть в тот сад. Хотела бы я знать, как это сделать? Тут она вышла на поляну, где стоял маленький домик, не более четырех футов вышиной. «Интересно, кто там живет? — подумала Алиса.— Но мне нельзя туда идти, я слишком большая, перепугаю их до смерти!» Она принялась за гриб и не подходила к дому до тех пор, пока не уменьшилась до девяти дюймов.



1. Гусеница длиной 5 дюймов ползет по вертикальному стволу дерева, стремясь добраться до зеленой ветки, находящейся на высоте 100 дюймов. За день она поднимается на 20 дюймов, ночью спит и сползает под действием собственной тяжести на 15 дюймов. За сколько дней она доберется до зеленой ветки?

2. Два животных, A и B, находятся на огромной гладкой равнине. Если A хочет схватить B, а B стремится убежать от A и B расположен от A в 20 метрах, то A всегда может схватить B. В то же время, если B хочет схватить A, а A стремится убежать от B и A находится в 20 метрах от B, то B всегда может схватить A. Что это за животные и как это может быть?

3. Некто живёт на 16 этаже 16 этажного дома. Утром, отправляясь на работу, он входит в лифт, спускается на 1-й этаж и до работы идет пешком. Вечером, вернувшись с работы на автобусе, он входит в свой подъезд, поднимается на лифте до 14 этажа, а затем пешком — на свой этаж. Зачем он это делает?

4. Улитка ползет по прямой дорожке. В течение 6 минут за ней постоянно наблюдают несколько человек. Каждый наблюдает ровно одну минуту, а затем уходит. Все наблюдатели сообщили, что за время их наблюдения улитка проползла ровно один метр.

Какое наибольшее расстояние могла преодолеть улитка?

5. Разгадайте числовой ребус

```
   SIX
 * TWO
   ***
  ****
 ****
TWELVE
```

задачник Кванта

Задачи

М931 — М935; Ф943 — Ф947

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 сентября 1985 года по адресу: 103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7 — 85» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М931, М932» или «Ф943». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. Фамилию, имя и отчество пишите печатными буквами. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи по математике этого номера предлагались на Московских городских олимпиадах последних лет. Задачи 1985 года, в котором олимпиада отметила свой 50-летний юбилей, будут помещены в «Кванте» № 9.

М931. В треугольник ABC вписана окружность, которая касается сторон AB, BC и CA в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Известно, что длины отрезков AA_1, BB_1 и CC_1 равны. Докажите, что треугольник ABC — правильный.

А. Н. Дранишников

М932. В квадратной клетке со стороной 1 м находится анаконда длиной 10 м. Барон Мюнхгаузен утверждает, что он в любой момент может одним выстрелом прострелить анаконду сразу в 6 местах. Не преувеличивает ли барон? (Анаконду можно считать произвольной ломаной длины 10, расположенной внутри квадрата 1×1.)

С. Б. Гашков

М933. 13 рыцарей из k разных кланов ($1<k<13$) сидят за круглым столом. Каждый держит золотой или серебряный кубок, причем золотых кубков ровно k. Король Артур приказал рыцарям одновременно передать кубки своим соседям справа, потом сделать то же самое еще раз и т. д. Докажите, что в некоторый момент найдутся два рыцаря из одного клана, в руках у которых золотые кубки.

А. А. Болотов

М934.* В пространстве расположено $2n$ ($n\geqslant2$) точек (так, что никакие 4 не лежат в одной плоскости) и проведено n^2+1 отрезков с концами в этих точках. Докажите, что проведенные отрезки образуют а) хотя бы один треугольник; б) не менее n треугольников.

М935. (Задача о гайке.) Если внутри правильного $2n$-угольника со стороной a и центром O поместить произвольным образом правильный $2n$-угольник со стороной $a/2$, то он накроет точку O. Докажите это утверждение: а) для $n=2$, б)* для $n=3$, в)* для любого натурального $n>1$.

С. Б. Гашков

Ф943. Небольшое тело падает с огромной высоты на землю. Считая удар тела о землю абсолютно упругим, определить ускорение тела сразу после того, как оно отскочит от земли.

А. Г. Шихкеримов

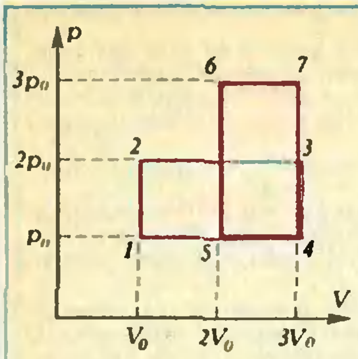


Рис. 1.

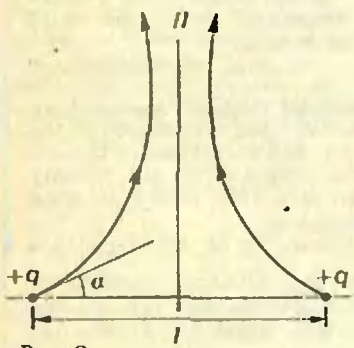


Рис. 2.

Ф944. На твердое тело, движущееся поступательно по шероховатой горизонтальной поверхности, в момент времени $t_0=0$, когда скорость тела равна v_0, начинает действовать сила $F(t)$, направленная все время вдоль вектора $\vec{v}_0$ и возрастающая со временем. Через время t скорость тела оказывается равной v_t, причем $v_t=5$ м/с, если $v_0=1$ м/с, и $v_t=13$ м/с, если $v_0=10$ м/с. Определить зависимость $v_t=f(v_0)$ при всех возможных v_0.

Р. Л. Мкртчян, О. М. Худавердян

Ф945. Определите отношение η_1/η_2 коэффициентов полезного действия двух циклических процессов, проведенных с идеальным газом (рис. 1): первый процесс 1-2-3-4-1, второй процесс 5-6-7-4-5.

Ф946. Два одинаковых точечных заряда $q>0$ находятся на расстоянии l друг от друга. На какое минимальное расстояние «подойдет» к плоскости симметрии II (рис. 2) силовая линия, выходящая *из левого заряда под углом* α *к прямой, соединяющей* заряды? Под каким углом к плоскости симметрии будет расположена эта линия при удалении на большое расстояние от зарядов?

С. С. Кротов

Ф947. Оболочка космической станции представляет собой зачерненную сферу, температура которой за счет работы аппаратуры внутри станции равна $T=500$ К. Какой будет температура оболочки, если станцию окружить тонким черным сферическим экраном почти такого же радиуса, как оболочка? Количество тепла, излучаемого с единицы площади поверхности, пропорционально четвертой степени абсолютной температуры.

А. И. Буздин

Problems

M931 — M935; P943 — P947

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not

M931. The incircle of triangle ABC touches sides AB, BC and CA at the points C_1, A_1, B_1 respectively. It is known that the segments AA_1, BB_1, CC_1 are of equal length. Prove that ABC is equilateral.

A. N. Dranishnikov

M932. A 10 meter long anaconda lives in a square cage of side 1 meter. Baron Münhausen claims that he can shoot through the anaconda in 6 places anytime with a single shot. Is the baron exaggerating? (The anaconda may be viewed as an arbitrary polygonal line of length 10 in a 1 by 1 square.)

S. B. Gashkov

M933. 13 knights from k different clans ($1<k<13$) sit at the Round Table. Each holds a gold or silver cup, the number of gold ones all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than September 15 th, 1985 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN RHYSICS (or MATHEMATICS).

being k. King Arthur orders all the knights to pass the cups to their neighbours to the right simultaneously, and then to continue this procedure. Prove that at some moment it will be possible to find two knights from the same clan both holding gold cups.

A. A. Bolotov

M934.* There are $2n$ ($n \geqslant 2$) points (no 4 of which are coplanar) in space and n^2+1 line segments joining them. Prove that the segments constitute a) at least one triangle; b) no less than n triangles.

M935 (the bolt problem). A regular polygon of $2n$ sides of length $a/2$ placed inside another regular $2n$-gon of side a always covers the centre O of the latter. Prove this for a) $n=2$; b)* $n=3$; c)* for any natural $n>1$.

S. B. Gashkov

P943. A solid body falling from a great height bounces off the ground. Assuming the collision absolutely elastic, determine its acceleration immediately after the bounce.

A. G. Shihkerimov

P944. A small solid, remaining parallel to itself, moves along a rough horizontal surface. At time $t_0=0$, when the velocity of the solid is v_0, a force $F(t)$ directed along v_0 and increasing with time is applied to the solid. At time t the solid aquires the velocity $v_t=5$ m/s, if $v_0=1$ m/s and $v_t=13$ m/s, if $v_0=10$ m/s. Find the dependence $v_t=f(v_0)$ for all possible v_0.

R. L. Mkrtchyan, O. M. Khudaverdyan

P945. Determine the ratio η_1/η_2 of the efficiency coefficients of two cyclic processes involving an ideal gas (see рис. 1, p. 43), the first process being *1—2—3—4—1*, the second one *5—6—7—4—5*.

P946. Two identical point charges $q>0$ are placed at the distance l from each other. Consider the line of force originating from the left charge and forming the angle α with the line joining the charges (see рис. 2, p. 43). How near the symmetry plane Π will it approach? What will be the angle between this line of force and the plane Π at points far away from the charges?

S. S. Krotov

P947. The envelope of a space station is a blackened sphere, whose temperature (due to the work of the apparatus inside the sphere) is $T=500$ K. What will the temperature of the envelope be if the station is surrounded by a thin black spherical screen of radius slightly larger than that of the envelope? The quantity of heat irradiated by a unit surface is proportional to the fourth power of absolute temperature.

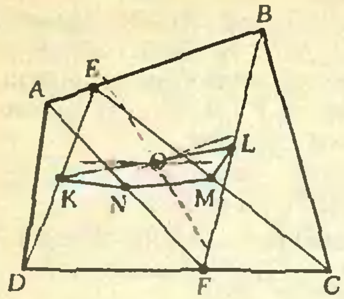
A. I. Buzdin

Решения задач

М911 — М915; Ф923 — Ф926

М911. *На сторонах AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ выбираются произвольные точки E и F соответственно. Докажите, что середины отрезков AF, BF, CE и DE являются вершинами выпуклого четырехугольника, причем его площадь не зависит от выбора точек E и F.*

Обозначим середины отрезков AF, BF, CE и DE через N, L, M, K соответственно (см. рисунок). Отрезки LN и KM — средние линии треугольников ABF и CDE, поэтому они имеют общую внутреннюю точку — середину O отрезка EF, равны по длине $AB/2$ и $CD/2$, а угол между ними равен углу α между прямыми AB и CD. Отсюда вытекает, что $KLMN$ — выпуклый четырехугольник



(возможно, вырождающийся в треугольник или отрезок) с диагоналями KM и LN, а его площадь S по известной формуле равна

$$S=\frac{1}{2}\,KL\cdot MN\cdot\sin\angle KON=\frac{1}{8}\,AB\cdot CD\cdot\sin\alpha,$$

то есть не зависит от выбора точек E и F.

Из доказательства видно, что утверждение задачи верно и для невыпуклого четырехугольника $ABCD$.

М. В. Старк

◆

М912. *Докажите, что а) многочлен x^2, б) любой многочлен можно представить в виде разности двух многочленов, каждый из которых является монотонно возрастающей функцией.*

а) Нужное представление нетрудно найти в явном виде:

$$x^2=\frac{1}{3}(x+1)^3-\frac{1}{3}(x^3+3x+1).$$

б) Доказательство проведем индукцией по степени многочлена. Для многочленов нулевой степени (постоянных функций) утверждение задачи очевидно. Пусть оно справедливо для всех многочленов степени меньше n. Произвольный многочлен n-й степени $P_n(x)$ можно записать в виде

$$P_n(x)=ax^n+P_{n-1}(x),$$

где $P_{n-1}(x)$ — многочлен степени не выше $n-1$, для которого наше утверждение верно по предположению индукции. Поэтому его достаточно доказать для одночлена ax^n (если утверждение задачи верно для двух многочленов, то оно, очевидно, верно и для их суммы). Ясно, что ax^n — монотонная функция при нечетном n; при четном n существование нужного представления следует из формулы

$$(n+1)x^n=(x+1)^{n+1}-x^{n+1}-Q_{n-1}(x),$$

в которой $(x+1)^{n+1}$ и x^{n+1} — возрастающие функции ($n+1$ нечетно), а для многочлена $Q_{n-1}(x)$ степени $n-1$ утверждение задачи выполняется по предположению индукции.

При четном $n=2k$ можно рассуждать и иначе. По предположению индукции $x^k=P(x)-Q(x)$, где P и Q — монотонно возрастающие многочлены; следовательно,

$$x^{2k}=2P^2(x)+2Q^2(x)-(P(x)+Q(x))^2.$$

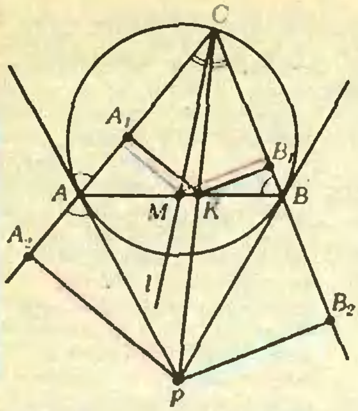
Подставляя в формулу пункта а) $P(x)$ вместо x, мы получим представление $P^2(x)$ в виде разности двух возрастающих многочленов. То же самое можно проделать с $Q(x)$ и $P(x)+Q(x)$, что в конечном счете даст нужное представление для x^{2k}.

А. Ю. Вайнтроб, В. Н. Дубровский

◆

М913. *Касательные к описанной вокруг треугольника ABC окружности, проведенные в точках A и B, пересекаются в точке P. Докажите, что прямая PC*
а) пересекает сторону AB в точке K, делящей ее в отношении $AC^2:BC^2$;
б) симметрична медиане, проведенной из C, относительно биссектрисы угла C треугольника.

а) Воспользуемся тем, что для всех точек прямой, проходящей через вершину угла, отношение расстояний до его сторон (точнее, до прямых, содержащих стороны) будет одним и тем же. В частности, равны отношения KA_1/KB_1 и PA_2/PB_2 расстояний от точек K и P до сторон CA и CB угла ACB (см. рисунок: на нем угол C острый, для тупого угла C рассуждение аналогично). Первое из этих отношений, очевидно, равно $AK\sin\angle A/BK\sin\angle B$ ($\angle A$ и $\angle B$ — углы треугольника ABC). Чтобы



найти второе, заметим, что $\angle PAA_2$ является вертикальным к углу между хордой AC описанной окружности треугольника ABC и касательной к ней в точке A, то есть равен по величине половине дуги AC и, следовательно, $\angle PAA_2 = \angle B$; аналогично, $\angle PBB_2 = \angle A$. Таким образом,

$$\frac{PA_2}{PB_2} = \frac{PA \sin \angle PAA_2}{PB \sin \angle PBB_2} = \frac{\sin \angle B}{\sin \angle A} \qquad (*)$$

($PA = PB$ по свойству касательных к окружности, проведенных из одной точки). Приравнивая полученные выражения

$$\frac{AK \sin \angle A}{BK \sin \angle B} = \frac{\sin \angle B}{\sin \angle A}$$

и пользуясь теоремой синусов $\sin \angle B / \sin \angle A = AC/BC$, получим нужное соотношение:

$$\frac{AK}{BK} = \frac{AC^2}{BC^2}.$$

б) Рассмотрим прямую l, симметричную CP относительно биссектрисы угла ACB (см. рисунок). Ясно, что для всех ее точек отношение расстояний до прямых CA и CB обратно такому же отношению для CP, то есть равно $\sin \angle A / \sin \angle B$ (см. (*)). Для точки M, в которой прямая l пересекает сторону AB, это отношение, очевидно, равно $AM \sin \angle A / BM \sin \angle B$. Следовательно, $AM = BM$, то есть CM — медиана треугольника ABC.

В. Н. Дубровский

◆

М914. *На острове Серобуромалин обитают 13 серых, 15 бурых и 17 малиновых хамелеонов. Если встречаются два хамелеона разного цвета, то они одновременно меняют свой цвет на третий (серый и бурый становятся оба малиновыми и т. д.). Может ли случиться так, что через некоторое время все хамелеоны будут одного цвета?*

Ответ: не может. Мы должны доказать, что из тройки (13, 15, 17) с помощью операций, описанных в условии, то есть увеличения одного из чисел на 2 и одновременного уменьшения двух других на 1 (если они положительны), нельзя получить ни одну из троек (45, 0, 0), (0, 45, 0) и (0, 0, 45) ($45 = 13 + 15 + 17$). Как и в большинстве аналогичных задач с отрицательным ответом, для доказательства надо постараться подобрать *инвариант* — величину, определенную на тройках целых чисел (c, $б$, $м$) и не меняющуюся при указанных преобразованиях троек, которая бы принимала разные значения для первой тройки и трех последних.

Таким инвариантом является, например, остаток r от деления на 3 разности $c - б$ первых двух чисел тройки (c, $б$, $м$).

Действительно, при «смене окраски хамелеонов» числа c и $б$ могут замениться на $c-1$, $б-1$, на $c+2$, $б-1$ или на $c-1$, $б+2$; в первом случае $c - б$ не меняется, в двух других — изменяется на 3, значит, остаток r остается прежним. Остается заметить, что для исходной тройки (13, 15, 17) он равен 1, а для трех последних $r = 0$.

Несложно ответить и на общий вопрос — при каком условии из одной тройки чисел нашими операциями можно получить другую. Поскольку сумма $s = c + б + м$ всех чисел тройки, очевидно, тоже инвариант, мы можем воспользоваться удобной и красивой геометрической интерпретацией нашей задачи: каждую тройку (c, $б$, $м$) с заданной суммой s будем изобра-

$$c+б+м=\frac{2S_{AOB}}{AB}+\frac{2S_{BOC}}{BC}+\frac{2S_{COA}}{CA}=\frac{2S_{ABC}}{AB}=s$$

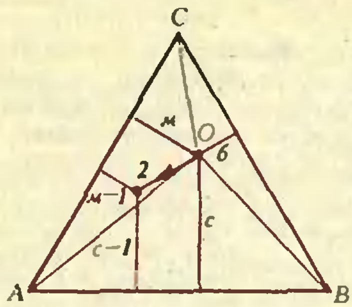


Рис. 1.

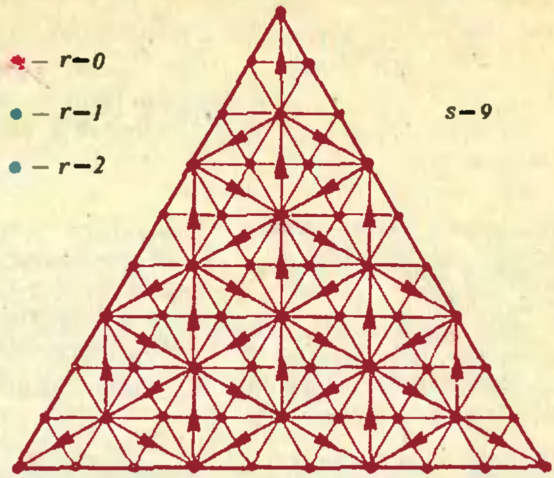


Рис. 2.

жать точкой внутри равностороннего треугольника высоты s, удаленной от его сторон на расстояния c, $б$, $м$ соответственно (рис. 1). При этом каждой нашей операции отвечает сдвиг точки в треугольнике на расстояние 2 перпендикулярно одной из сторон. Разобьем треугольник на s^2 одинаковых правильных треугольников высоты 1 (рис. 2); очевидно, их вершины отвечают всем целочисленным тройкам с заданной суммой s. Возьмем одну из этих вершин, проведем из нее стрелки в те точки, куда ее можно сдвинуть с помощью наших операций, из концов стрелок проведем новые стрелки и т. д. Все эти стрелки образуют еще одну сеть правильных треугольников со стороной 2. Их вершины изображают все тройки чисел, которые можно получить из исходной «перекрашиванием хамелеонов». Легко убедиться, что из любой красной точки за исключением вершин большого треугольника, можно перейти по красным стрелкам в любую другую. Остальные точки аналогичным образом разобьются еще на два класса «связанных» точек (зеленые и синие на рисунке 2; стрелки для них не показаны). Значение инварианта r для всех точек одного класса будет, разумеется, одним и тем же; причем легко проверить, что для красных точек $r=0$, для зеленых — $r=1$, для синих — $r=2$.

Таким образом, из тройки (c, $б$, $м$) можно получить другую тройку (c', $б'$, $м'$) тогда и только тогда, когда в первой тройке хотя бы два числа положительны и значения инвариантов s и r для данных троек совпадают (значения любого другого инварианта будут совпадать уже автоматически; докажите непосредственно, что, например, остаток от деления $м-б$ на 3 выражается через s и r). В частности, если s кратно трем, для всех вершин большого треугольника $r=0$, то есть они достижимы только из точек с $r=0$ (на рисунке 2 — из красных точек); если же s не делится на 3, то в одной из них будет $r=0$, в другой — $r=1$, в третьей — $r=2$, то есть из любой точки (c, $б$, $м$) можно попасть в одну (и только одну) вершину.

В. Г. Ильичев, Н. Б. Васильев

◆

М915.* *Докажите, что для любых положительных чисел a, b, c, d выполнено неравенство*

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\geqslant 2.$$

Первое решение. Группируя первое слагаемое в левой части доказываемого неравенства с третьим, а второе — с четвертым, и пользуясь оценкой $xy\leqslant(x+y)^2/4$ при $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$ (вытекающей из тождества $4xy=(x+y)^2-(x-y)^2$), получим

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}=\frac{a(d+a)+c(b+c)}{(b+c)(d+a)}+$$
$$+\frac{b(a+b)+d(c+d)}{(c+d)(a+b)}\geqslant\frac{4(a^2+b^2+c^2+d^2+ad+bc+ab+cd)}{(a+b+c+d)^2}=$$
$$=2\frac{(a+b+c+d)^2+(a-c)^2+(b-d)^2}{(a+b+c+d)^2}\geqslant 2.$$

Второе решение. Положим $x_1=\sqrt{a/(b+c)}$, $x_2=\sqrt{b/(c+d)}$, $x_3=\sqrt{c/(d+a)}$, $x_4=\sqrt{d/(a+b)}$ и $y_1=\sqrt{a(b+c)}$, $y_2=\sqrt{b(c+d)}$, $y_3=\sqrt{c(d+a)}$, $y_4=\sqrt{d(a+b)}$. В силу неравенства Коши — Буняковского, которое доказано на полях,

$$(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)(y_1^2+y_2^2+y_3^2+y_4^2)=$$
$$=\left(\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+d}+\frac{c}{d+a}+\frac{d}{a+b}\right)(2ac+2bd+ab+bc+$$
$$+cd+da)\geqslant(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3+x_4y_4)^2=(a+b+c+d)^2. \quad (*)$$

Очевидно, $a^2+c^2\geqslant 2ac$, $b^2+d^2\geqslant 2bd$, поэтому

$$(a+b+c+d)^2\geqslant 4ac+4bd+2(ab+bc+cd+da).$$

Подставляя эту оценку в (*), получим требуемое неравенство. Доказанное неравенство является частным случаем неравенства

$$\frac{a_1}{a_2+a_3}+\ldots+\frac{a_{n-1}}{a_n+a_1}+\frac{a_n}{a_1+a_2}\geqslant\frac{n}{2}\quad(\text{при } a_i>0),$$

которое в 1954 году предложил доказать американский математик Шапиро. В нашей задаче $n=4$; случай $n=3$ рассматривался в задачах М182 и М749 «Задачника «Кванта». Вопрос о справедливости этого неравенства при других значениях n оказался довольно трудным и до сих пор не получил полного ответа. В будущем мы рассчитываем вернуться к этой теме.

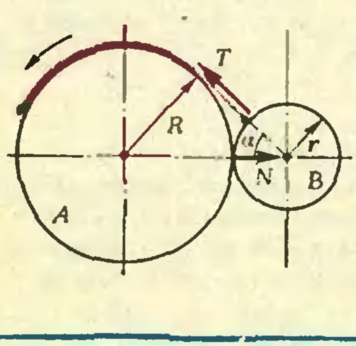
Л. Д. Курляндчик

Неравенство Коши — Буняковского:
для любых чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$

$$\boxed{(x_1^2+\ldots+x_n^2)(y_1^2+\ldots+y_n^2)\geqslant(x_1y_1+\ldots+x_ny_n)^2.}$$

Для доказательства этого неравенства достаточно заметить, что квадратичная функция $P(t)=(x_1+y_1t)^2+\ldots+(x_n+y_nt)^2$ неотрицательна при всех t и записать вытекающее отсюда условие неположительности ее дискриминанта.

Ф923. *На гладкой горизонтальной плоскости лежат два касающихся друг друга диска, скрепленных нерастяжимой нитью (см. рисунок). Диск радиуса R начинает вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, проходящей через его центр, причем скорость вращения линейно возрастает со временем. В некоторый момент диск меньшего радиуса r отрывается от большого диска (перестает его касаться). На какой угол повернется к этому моменту большой диск? Трение между дисками отсутствует. Считать, что вся масса диска сосредоточена в его центре.*



◆

Пусть диск начал вращаться в момент времени $t_0=0$. Тогда в момент времени t угловая скорость диска A равна $\omega_t=\beta t$, где β — постоянное угловое ускорение, с которым вращается диск. С такой же угловой скоростью движется в этот момент центр диска B по окружности радиуса $R+r$. Линейная скорость диска B при этом равна $v_t=\beta t(R+r)$; его центростремительное ускорение — $a_ц=(\beta t)^2(R+r)$, а тангенциальное ускорение — $a_\tau=(v_t)'=\beta(R+r)$.

В плоскости, в которой происходит движение, на диск B действует сила натяжения нити $\vec{T}$ и сила нормальной реакции со стороны большого диска $\vec{N}$. Запишем уравнение движения диска B в проекциях на оси X и Y (см. рисунок):

$$T\cos\alpha-N=ma_ц=m(\beta t)^2(R+r),$$
$$T\sin\alpha=ma_\tau=m\beta(R+r).$$

Отсюда находим:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{N}{m\beta(R+r)}+\beta t^2.$$

В момент отрыва $N=0$, и

$$\operatorname{ctg}\alpha=\beta t_{отр}^2.$$

Угол φ, на который повернется за время $t_{отр}$ диск A, равен

$$\varphi=\beta\frac{t_{отр}^2}{2}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{2}.$$

Подставляя выражение для $\operatorname{ctg}\alpha$ (см. рисунок), находим:

$$\varphi = \frac{\sqrt{2Rr + r^2}}{2R}.$$

Л. Г. Маркович

Ф924. *В жаркую погоду для быстрого охлаждения воды ее наливают в обросшую льдом формочку, вынутую из морозильной камеры холодильника. Воду «перекатывают» от одного края формочки к другому, потом выливают. Оцените, больше или меньше воды становится при этой операции.*

◆

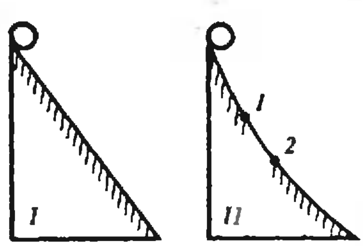
При этой операции возможны следующие процессы: охлаждение и замерзание воды, нагрев и плавление льда, нагрев формочки. Последний процесс заведомо несуществен, так как масса формочки мала по сравнению с массой воды, а теплоемкость алюминия существенно меньше теплоемкости воды.

Если процесс длится долго, то конечная ситуация определяется исходными количествами льда и воды. Поскольку воды обычно больше, чем льда, а охлаждаться ей до замерзания надо на большую разность температур, чем нагреваться льду до плавления, лед согревается и плавится, а вода даже не остывает до нуля и, тем более, не замерзает. (Разумеется, при малом количестве воды она может замерзнуть.) В результате воды становится больше.

Если процесс длится недолго, ситуация сохраняется: температура всей воды в результате перемешивания успевает выровняться, а лед прогреться не успевает, плавятся только его верхние слои. В этом случае вода охлаждается меньше.

Л. А. Ашкинази

Ф925. *Две одинаковых массивных трубы скатываются с горок одинаковой высоты, но разного профиля (см. рисунок). По первой горке труба на всем участке движется без проскальзывания; на второй горке имеется абсолютно гладкий участок (участок 1—2), но в конце пути (у подножия горки) труба вновь движется без проскальзывания. У какой трубы в конце горки скорость больше?*



◆

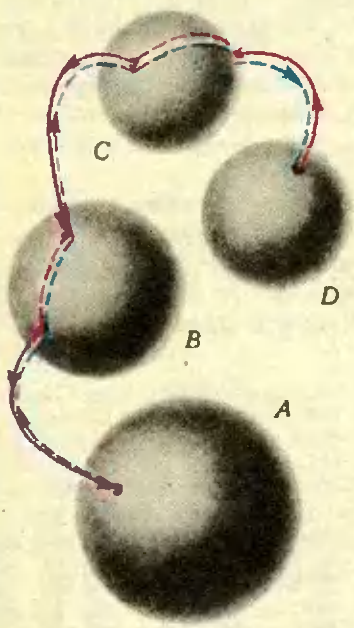
В случае движения без проскальзывания по горке *I* первоначальный запас потенциальной энергии трубы переходит в ее кинетическую энергию (которая «делится» между вращательным и поступательным движениями трубы).

При движении по горке *II* на абсолютно гладком участке *1—2* скорость вращения трубы остается постоянной, в то время как скорость поступательного движения растет. В результате при переходе трубы на шероховатый участок (ниже точки *2*) скорость поступательного движения трубы оказывается больше линейной скорости вращения ее точек. Значит, после прохождения точки *2* труба начинает двигаться с проскальзыванием. Таким движение будет до тех пор, пока скорости не сравняются. На участке выравнивания скоростей часть потенциальной энергии трубы будет расходоваться на работу против силы трения. Поэтому в тот момент, когда труба вновь станет двигаться без проскальзывания, ее скорость будет меньше, чем скорость на той же высоте трубы, скатывающейся по горке *I*.

Следовательно, в конце горки большая скорость будет у трубы, которая скатывается по горке *I*.

А. И. Буздин

Ф926. *В пространстве находятся 1985 несоприкасающихся металлических шаров, заряды которых равны, соответственно, q, $-2q$, $3q$, $-4q$, ..., $1984q$, $1985q$ ($q>0$). Докажите, что среди них есть шар, у которого поверхностная плотность заряда всюду неотрицательна. Расстояния между шарами конечны.*



Представим себе электростатическое поле заряженных шаров в виде некоторой картины силовых линий. Так как поле внутри каждого шара отсутствует, силовые линии начинаются и кончаются на поверхности шаров.

Возьмем любой шар, например шар A, и найдем на его поверхности место, в котором находится конец какой-нибудь силовой линии (красная линия на рисунке). Если такого места мы не обнаружим, то это будет означать, что шар A и есть искомый — он везде заряжен неотрицательно (ведь силовые линии кончаются на отрицательных зарядах).

Будем переносить положительный пробный заряд из найденного нами на шаре места вдоль силовой линии противоположно ее направлению. Следуя по этому пути, мы придем на поверхность какого-то другого шара B. Пройдем по его поверхности, найдем на ней конец другой силовой линии и вновь пойдем по ней («навстречу»). Будем продолжать этот процесс, следуя через шары C, D и т. д. (синий пунктир на рисунке).

Справедливы следующие утверждения:

1. Такое движение не уведет нас в бесконечность, так как полный заряд системы —

$$Q=q-2q+3q-4q+...-1984q+1985q=993q$$

— положителен (по условию $q>0$), и следовательно, силовые линии не приходят из бесконечности. Действительно, во всех точках, достаточно удаленных от нашей системы, которая имеет ограниченные линейные размеры (расстояния между шарами конечны), поле, создаваемое системой, эквивалентно полю точечного положительного заряда, и силовые линии в таких точках направлены от системы и уходят в бесконечность.

2. В нашем путешествии мы не можем побывать снова ни на одном из шаров, которые уже были пройдены. Если бы такое случилось, то это означало бы, что какая-то часть нашего пути является замкнутой линией, чего не может быть в электростатическом поле.

Следовательно, поскольку число шаров конечно, наше передвижение рано или поздно закончится, то есть мы найдем шар, в который силовые линии не входят. Поверхность такого шара повсюду заряжена неотрицательно.

В. А. Ясинский

Равномерные расположения

М. Л. КОНЦЕВИЧ

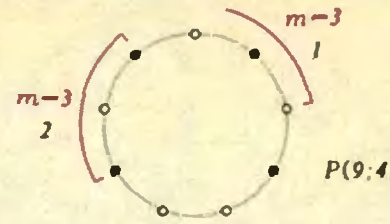
Пусть на окружности расположено n точек, и некоторые k из них выделены — будем называть их черными, а остальные — белыми. Легко указать самое неравномерное расположение k черных точек среди остальных: нужно расставить их все подряд. Оказывается, можно дать вполне естественное определение и для самого равномерного расположения черных точек. Такие равномерные расположения обнаруживаются во многих математических, да и не только математических, ситуациях. О них и рассказывается в этой заметке; здесь приводится решение задачи М818 из «Задачника «Кванта», опубликованной в № 9, 1983 г.

Определение, примеры и основная теорема

Назовем расположение черных точек *равномерным*, если для каждого натурального $m < n$ (где n — общее количество точек — черных и белых) количества черных точек в наборах из m последовательных точек на окружности отличаются друг от друга не более чем на 1. Например, расположение 4 точек среди 9 на рисунке 1 равномерно — в этом легко убедиться перебором, а расположение 7 точек среди 17 на рисунке 2 не равномерно. Равномерное расположение k черных точек среди n точек на окружности будем обозначать Р $(n;\ k)$. Заметим, что замена цветов — черного на белый — превращает Р $(n;\ k)$ в Р $(n;\ n-k)$, поэтому всегда можно свести дело к случаю $k \leqslant n/2$.

Расположение Р (12; 5) нам особенно хорошо знакомо — это расположение пяти коротких (менее 31 дня) месяцев в году, а также пяти черных клавиш среди 12 клавиш одной октавы; легко убедиться, что это — одинаковые расположения: январю соответствует нота «фа», февралю — «фа диез» и т. д., так что, чтобы проиграть хроматическую гамму, достаточно вспомнить, сколько дней в каждом из 12 месяцев (рис. 3, 4). Изображение равномерных расположений не на окружности, а в виде периодической последовательности черных и белых точек на прямой, встретившееся в последнем примере, оказывается очень удобным для новых интерпретаций и обобщений, которые мы укажем в заключительных задачах.

На внешних окружностях рисунков 5 и 6 показаны расположения Р (17; 7) и Р (84; 19). Мы объясним общий способ, которым они построены; одновременно будет доказана следующая



m	1	2	3	4
Черных точек	0:1	0:1	1:2	1:2

Рис. 1.

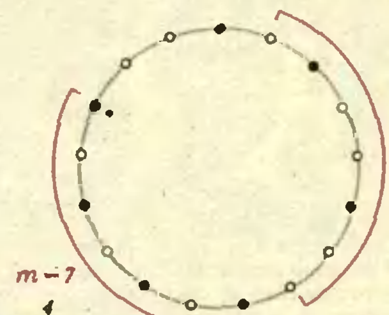


Рис. 2.

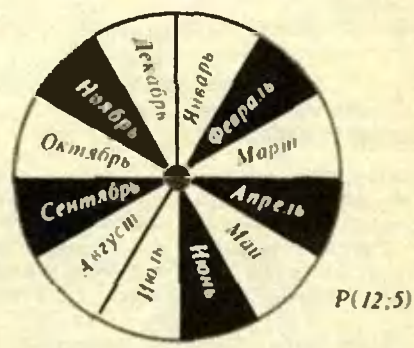


Рис. 3.

Рис. 4.

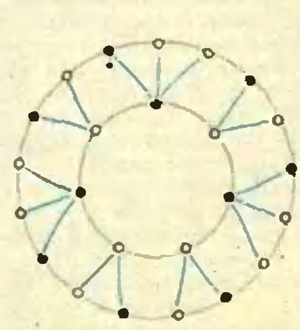
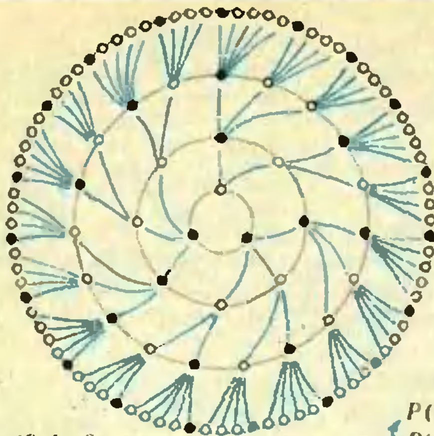


Рис. 5. Р(7; 3) и Р(17; 7)



$84=19\cdot 4+8$ $P(84;19)$

$19=8\cdot 2+3$ $P(19;8)$

$8=3\cdot 2+2$ $P(8;3)$

$P(3;2)$

Рис. 6.

Основная теорема: *для любых натуральных чисел n и k ($k \leqslant n$) существует равномерное расположение* $P(n;k)$, *причем только одно* (с точностью до передвижения точек по окружности без изменения порядка их расположения).

Это и требовалось сделать в задаче М818.

Лемма «о спуске» и построение $P(n;k)$

Условимся расстояние между двумя крайними точками A и B отрезка из m последовательных точек на окружности считать равным $m-1$ (при этом между A и B лежит еще $m-2$ точки); это расстояние мы будем ниже называть также «длиной» отрезка AB и обозначать $|AB|$.

Рассмотрим сначала очевидный случай, когда n делится на k. При расстановке k черных точек на равных расстояниях $d=n/k$ друг от друга получаем равномерное расположение $P(n;k)$: среди m вершин, расположенных подряд, всегда будет $[m/d]$ или $[m/d]+1$ черных точек ($[x]$ — целая часть числа x). При любой другой расстановке k черных точек их расположение не будет равномерным: среди расстояний между соседними черными точками встретится хотя бы одно не меньше $d+1$ и одно — не больше $d-1$, так что среди $m=d$ последовательных точек может оказаться и 2, и 0 черных.

Для произвольных n и k, как показывает аналогичное рассуждение, расстояния между соседними черными точками равномерного расположения также должны отличаться друг от друга не более чем на 1. В сумме все эти k расстояний равны n, поэтому если $n=kd+r$ (мы разделили n на k с остатком), то r из этих расстояний имеют длину $d+1$, а остальные — d. Но важно еще (сравните рисунки 2 и 5), как r более длинных отрезков расположены среди всех k отрезков по окружности.

Например, на рисунке 2 (с неравномерным расположением) последовательность длинных и коротких отрезков, выписанная по часовой стрелке от точки со звездочкой, выглядит так: дкддккк, а на рисунке 5 (для $P(17;7)$) — дкдккдк. Видно, что во второй последовательности буквы д расположены равномерно, а в первой — нет. Такие последовательности удобно снова изображать точками на меньшей окружности: длинные отрезки — черными, короткие — белыми (рис. 5, 6). И вот ключевая

Лемма. *Пусть k черных точек среди n точек на окружности, разбивают ее на отрезки длины $d+1$ и d. Для того чтобы расположение черных точек было равномерным, необходимо и достаточно, чтобы было равномерным соответствующее расположение r черных точек среди k точек на меньшей окружности.*

По этой лемме, которую мы докажем чуть ниже, из существования и единственности $P(k;r)$ следует существование и единственность $P(n;k)$. Отсюда сразу получается доказательство основной теоремы (по индукции) и удобный способ построения равномерных расположений при любых n и k. Ведь начатый «спуск» можно продолжить: k разделить (с остатком $r_2<r$) на $r_1=r$, затем — r_1 (с остатком $r_3<r_2$) на r_2 и т. д., пока какой-то остаток r_{s-1} не разделится нацело на следующий r_s. (Это — известный алгоритм Евклида отыскания наибольшего общего делителя чисел n и k: $r_s=$ НОД $(n;k)$.) Таким образом, за несколько шагов спуска мы придем к очевидному случаю $P(r_{s-1};r_s)$, когда r_{s-1} делится на r_s. Проделав для данной пары чисел n и k необходимые деления с остатком (как в алгоритме Евклида), мы узнаем, какая цепочка расположений $P(r_{s-1};\ r_s)$, $P(r_{s-2};\ r_{s-1})$,... ведет к $P(n;k)$ и может «вырастить» расположение $P(n;k)$ (как показано на рисунке 6), построив из «бусин» двух цветов в концентрических ярусов-окружностей. Потренируйтесь в построении этих «ожерелий». В наших примерах n и k взаимно просты, то есть $r_s=1$ и спуск приводит к расположению вида $P(r_{s-1};1)$ с единственной выделенной среди остальных точкой. Заметим, что практически спуск можно несколько ускорить; если на некотором шагу окажется больше половины черных точек, то можно «поменять цвет» (перейти от пары (n,k) к паре $(n;\ n-k)$), так что на каждом шаге число точек будет убывать более чем вдвое.

Доказательство леммы

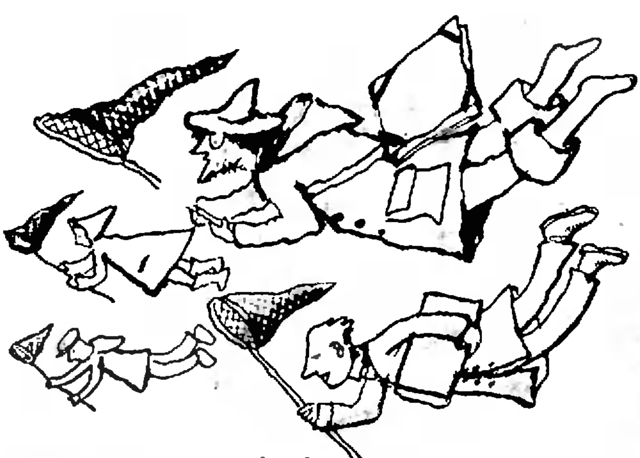
Занумеруем по порядку (скажем, по часовой стрелке) черные точки: $B_1, B_2, ..., B_k$. Расстояние (отсчитываемое также по часовой стрелке) от B_i до q-й от нее черной точки B_{i+q} обозначим $|B_iB_{i+q}|$, здесь $B_{k+1}=B_1$, $B_{k+2}=B_2$ и т. д. Среди отрезков B_iB_{i+1}, $B_{i+1}B_{i+2}$, ..., $B_{i+q-1}B_{i+q}$ ровно $|B_iB_{i+q}|-qd$ имеют длину $d+1$, остальные — длину d. Таким образом, мы должны доказать, что равномерность расположения точек B_i эквивалентна условию: при каждом $q<k$ расстояния $|B_iB_{i+q}|$ отличаются друг от друга не больше чем на 1. Доказательство в обе стороны проведем от противного. Если наше расположение не равномерно, то найдутся два отрезка одинаковой длины, на одном из которых расположено лишь $q-1$ черных точек $B_{i+1}, ..., B_{i+q-1}$, на другом — по крайней мере на 2 больше $B_j, B_{j+1}, ..., B_{j+q}$, но тогда $|B_iB_{i+q}|-|B_jB_{j+q}|\geqslant 2$. Обратно, если выполнено последнее неравенство, то на отрезке B_jB_{j+q} лежит $q+1$ черная точка, а на отрезке той же длины, начинающемся со следующей за B_i точки, — по крайней мере на две меньше.

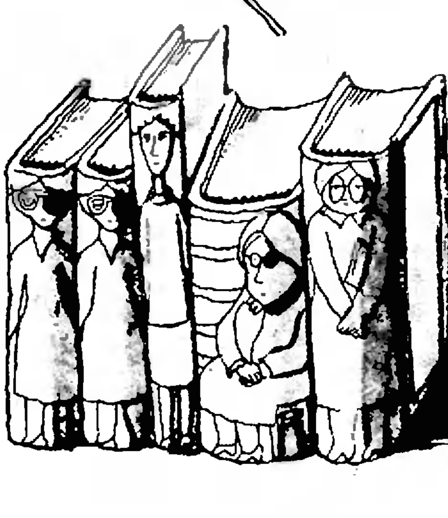
(Окончание см. на с. 59)

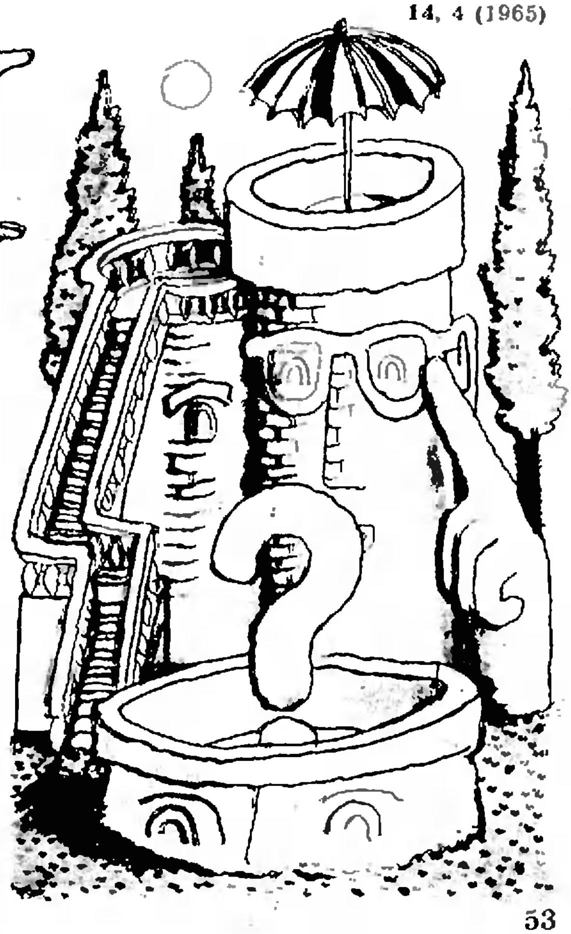
Названия коллективов в естественных науках

Колония бактериологов
Кипа библиотекарей
Выводок генетиков
Галактика космологов
Множество математиков
Сплав металлургов
Туча метеорологов
Стая орнитологов
Комплекс психологов
Сеть связистов
Тьма синоптиков
Линия спектроскопистов
Котел физиков-атомщиков
Поле физиков-теоретиков
Взвесь химиков
Пачка экономистов

По материалам Journal of Irreproducible Results 14, 4 (1965)







Фазовые превращения

Кандидат физико-математических наук
А. И. БУЗДИН,
кандидат физико-математических наук
С. С. КРОТОВ

Многие вещи нам непонятны не потому, что наши понятия слабы; но потому, что сии вещи не входят в круг наших понятий.
К. Прутков. Плоды раздумья

В этой статье речь пойдет о процессах, при которых происходит смена одного агрегатного состояния вещества на другое (одной фазы на другую). Такие процессы относятся к *фазовым превращениям*, или *фазовым переходам*. Это плавление твердого тела (и обратный ему процесс отвердевания, или кристаллизации, жидкости), конденсация пара (и обратный ему процесс испарения жидкости) и сублимация, или возгонка, — переход вещества из твердого состояния в газообразное, минуя жидкое (и обратный процесс, также называемый кристаллизацией).

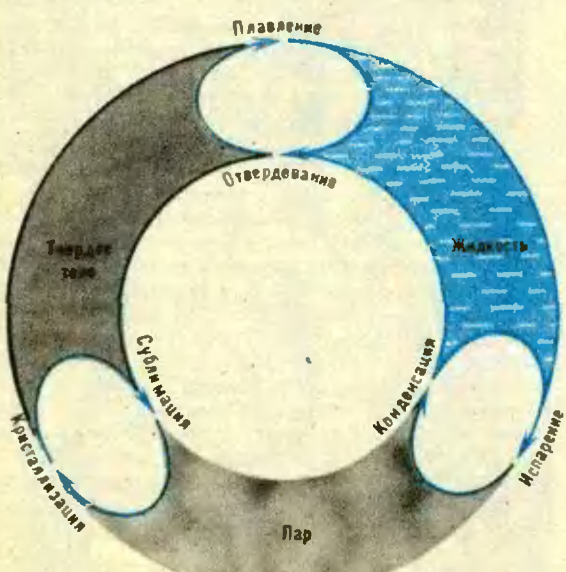


Рис. 1.

С фазовыми превращениями мы часто сталкиваемся в повседневной жизни — когда кипятим воду для чая или варим суп, дышим на обледенелое стекло автобуса или любуемся сосульками, образовавшимися на карнизе дома. Мы уже привыкли и поэтому не задумываемся над тем, зачем зимой тротуар посыпают солью (а почему не сахаром?) или почему при пайке радиосхем пользуются оловом (а почему, скажем, не алюминием?). Впрочем, зачем далеко ходить за примером? Основа существования всего живого в природе — вода — постоянно претерпевает различные фазовые переходы. Внимательно посмотрев на рисунок 1, скажите, какой процесс происходит при:

— сушке белья на морозе;

— образовании зимних узоров на стеклах (кстати, с какой стороны стекла образуются эти узоры?);

— запотевании стекол очков у человека, входящего с мороза в теплое помещение;

— образовании инея на деревьях или росы на траве и т. д. (Попробуйте самостоятельно продолжить этот перечень.)

Опыт проведения приемных экзаменов в вузы показывает, что отношение абитуриентов к данной теме различное. Одни считают, что здесь все просто, другие испытывают трепет при встрече с любым вопросом по этой теме. И обе точки зрения, на наш взгляд, правомерны. С одной стороны, для решения подавляющего большинства задач, где встречаются фазовые превращения, достаточно воспользоваться лишь уравнением теплового баланса, то есть частным случаем закона сохранения энергии. С другой стороны, в таких задачах не всегда очевиден ответ на вопрос о том, каким будет конечное состояние рассматриваемой системы: например, весь ли лед, брошенный в воду, растает или будет сосуществование двух фаз — льда и воды?

А теперь рассмотрим несколько конкретных задач и вопросов. Многие из них предлагались на вступительных экзаменах в различные вузы.

Начнем с задач, в которых центральное место занимает процесс плавления (или обратный ему процесс — отвердевание).

Задача 1. *В теплоизолированном сосуде находится вода, масса которой $m_1=1$ кг, а температура $t_1=30$ °С. В воду опускают лед, находящийся при температуре $t_2=-20$ °С. Через некоторое время в сосуде оказалась вода с температурой $t_3=20$ °С. Найдите массу льда, опущенного в сосуд. Удельная теплоемкость воды $c_1=4{,}2$ кДж/(кг · К), удельная теплоемкость льда $c_2=2{,}1$ кДж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda=0{,}33$ МДж/кг. Теплоемкостью сосуда можно пренебречь.*

Обозначим массу льда через m_2. Тогда количество теплоты, полученное льдом при его нагревании до температуры таяния $t_0=0$ °С, будет равно

$$Q_1=c_2m_2(t_0-t_2).$$

Превращаясь в воду (при неизменной температуре!), этот лед получит количество теплоты

$$Q_2=\lambda m_2.$$

Образовавшаяся вода при последующем нагревании ее до температуры t_3 получит количество теплоты

$$Q_3=c_1m_2(t_3-t_0).$$

Вода, первоначально находящаяся в сосуде, при охлаждении до температуры t_3 отдаст количество теплоты

$$Q_4=c_1m_1(t_1-t_3).$$

Воспользовавшись уравнением теплового баланса $Q_1+Q_2+Q_3=Q_4$, найдем массу льда, опущенного в сосуд:

$$m_2=m_1\frac{c_1(t_1-t_3)}{c_1(t_3-t_0)+c_2(t_0-t_2)+\lambda}\approx 0{,}09 \text{ кг}.$$

Задача 2. *В теплоизолированный сосуд, в котором находился лед массой $m_1=3$ кг при температуре $t_1=-10$ °С, ввели воду, масса которой $m_2=0{,}5$ кг, а температура $t_2=10$ °С. Найдите массу льда в сосуде после установления теплового равновесия. Удельная теплоемкость льда $c_1=2{,}1$ кДж/(кг · К), удельная теплоемкость воды $c_2=4{,}2$ кДж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda=0{,}33$ МДж/кг. Теплоемкость сосуда не учитывать.*

Эта задача отличается от предыдущей тем, что заранее неизвестно, в каком конечном агрегатном состоянии будет находиться система, в частности, — какой будет ее конечная температура. Для ответа на этот вопрос найдем, прежде всего, количество теплоты, которое потребуется для того, чтобы весь находящийся в сосуде лед нагреть до температуры плавления $t_0=0$ °С:

$$Q_1=c_1m_1(t_0-t_1)=63 \text{ кДж}.$$

Если вся введенная в сосуд вода охладится до этой температуры, выделится количество теплоты

$$Q_2=c_2m_2(t_2-t_0)=21 \text{ кДж}<Q_1.$$

Превратившись в лед, вся вода может выделить еще количество теплоты

$$Q_3=\lambda m_2=165 \text{ кДж}>Q_1.$$

Таким образом, получаем, что конечная температура системы будет равна $t_0=0$ °С, при этом некоторая часть воды замерзнет. Ее массу Δm найдем из уравнения теплового баланса:

$$\Delta m=\frac{Q_1-Q_2}{\lambda}\approx 0{,}1 \text{ кг}.$$

Следовательно, после установления равновесия в сосуде будет $m_1'=m_1+\Delta m\approx 3{,}1$ кг льда.

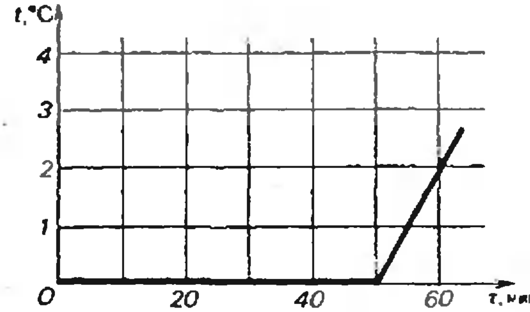


Рис. 2.

Задача 3. *Ведро, в котором находится смесь воды со льдом массой $m=10$ кг, внесли в комнату и сразу же начали измерять температуру смеси. Получившийся график зависимости температуры t от времени τ изображен на рисунке 2. Какая масса льда была в ведре, когда его внесли в комнату? Теплоемкостью ведра пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг · К), удельная теплота плавления льда $\lambda=0{,}33$ МДж/кг.*

Как видно из графика, первые 50 минут температура смеси не менялась и оставалась равной $t_0=0$ °С. Все это время тепло, получаемое смесью из комнаты, шло на таяние льда. Через 50 минут весь лед растаял, и температура воды (бывшей в ведре и образовавшейся из льда) начала повышаться.

За 10 минут (от $\tau_1=50$ мин до $\tau_2=60$ мин) температура повысилась на $\Delta t=2$ °С. Количество теплоты, поступившее к воде из комнаты за это время, равно

$$Q_1 = cm\Delta t = 84 \text{ кДж}.$$

Значит, за первые 50 минут (от 0 до τ_1) к смеси поступило количество теплоты

$$Q_2 = 5Q_1 = 420 \text{ кДж}.$$

Это тепло и пошло на таяние льда. Таким образом, масса льда равна

$$m_л = \frac{Q_2}{\lambda} \approx 1{,}3 \text{ кг}.$$

* * *

До сих пор мы считали, что температура плавления льда равна $t_0 = 0\ ^\circ\text{C}$ ($T_0 = 273$ К). Однако это справедливо лишь при нормальном внешнем давлении $p_0 = 10^5$ Па. С изменением давления меняется и температура плавления, то есть та температура, при которой находятся в равновесии (сосуществуют) две различные фазы — лед и вода. Аналогично, при фиксированном внешнем давлении вода и пар сосуществуют только при единственной температуре (речь идет о закрытом сосуде). То же относится и к случаю сосуществования льда и пара. Для переменных значений давления p и температуры T можно получить три различных кривых сосуществования фаз вода — пар, вода — лед и лед — пар. На рисунке 3 им соответствуют кривая испарения OK, кривая плавления OB и кривая сублимации AO. Все три кривые имеют общую точку O — так называемую *тройную точку*. Только в ней возможно одновременное сосуществование всех трех фаз. Для тройной точки воды, например, $T_{кр} = 273{,}16$К и $p_{кр} = 609$Па (4,6 мм рт. ст.).

Заметим, что кривая испарения заканчивается в определенной точке (точке K), называемой критической. В этой точке теряется всякое различие между жидкостью и ее паром. При температурах выше критической газ сконденсировать нельзя, как бы сильно мы не сжимали его. Интересно, что именно благодаря этому обстоятельству так долго не удавалось получить кислород, водород и гелий в жидком состоянии — критические температуры этих веществ очень низкие, а для ожижения вещество, прежде чем сжимать, предварительно нужно охладить до температуры ниже критической.

Удельная теплота плавления (а также парообразования и сублимации) как количественная характеристика фазового превращения вещества зависит от температуры и от внешнего давления. Для одного и того же вещества удельные теплоты плавления, парообразования и сублимации связаны друг с другом. Проиллюстрируем это следующими задачами.

Задача 4. *На сколько изменится удельная теплота плавления вещества при понижении температуры плавления на ΔT, если удельные теплоемкости вещества в жидкой и твердой фазах равны соответственно c_1 и c_2?*

Пусть, первоначально находясь в жидкой фазе при температуре T, вещество массой m переходит в твердое состояние, а затем охлаждается до температуры $T' = T - \Delta T$. Выделившееся при этом количество теплоты будет равно $(\lambda + c_2\Delta T)\,m$ (здесь λ — удельная теплота плавления при температуре T). Переход в состояние с температурой T' может осуществляться и другим путем — сначала вещество, оставаясь в жидкой фазе, охлаждается до температуры T', а затем переходит в твердую фазу. Во время этого перехода выделится количество теплоты, равное $(c_1\Delta T + \lambda')\,m$ (где λ' — удельная теплота плавления при температуре T').

Воспользуемся далее законом сохранения энергии для тепловых процессов (первым законом термодинамики). Будем считать, что в пределах интервала температур ΔT удельный объем вещества и в жидком, и в твердом состоянии не зависит от температуры. Тогда работа, связанная со скачком удельного объема в точке фазового превращения, в обоих случаях будет одной и той же. Учитывая, что изменение внутренней энергии системы не зависит от пути перехода, а определяется лишь начальным и конечным состояниями системы, запишем закон сохранения энергии в виде

$$(\lambda + c_2\Delta T)\,m = (c_1\Delta T + \lambda')\,m.$$

Отсюда найдем изменение удельной теплоты плавления:

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda' = (c_1 - c_2)\Delta T.$$

Задача 5. *В тройной точке удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}48 \cdot 10^6$ Дж/кг, удельная теплота плавления $\lambda = 3{,}32 \cdot 10^5$ Дж/кг. Найдите удельную теплоту b сублимации воды в тройной точке.*

Рассмотрим цикл, окружающий тройную точку (см. рис. 3), в котором по очереди происходят следующие

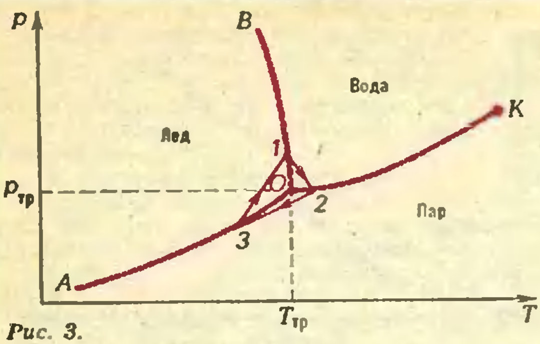


Рис. 3.

превращения: плавление (в точке *1*) → испарение (в точке *2*) → конденсация газа в твердое тело (в точке *3*). Если этот цикл проводится с некоторой массой вещества m и притока тепла извне нет (система теплоизолирована), то, согласно первому закону термодинамики (закону сохранения энергии), полное изменение внутренней энергии за цикл равно работе внешних сил:

$$m\lambda + mr - m\delta = A.$$

Неограниченно сжимая цикл около тройной точки, найдем, что $A \to 0$, а удельная теплота сублимации в этой точке равна

$$\delta = \lambda + r = 2{,}81 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}.$$

* * *

Вспомним теперь, что кипение жидкости начинается при температуре, когда давление насыщенного пара становится равным внешнему давлению. Как видно из кривой сосуществования жидкость — пар, давление насыщенного пара растет по мере увеличения его температуры, и, наоборот, с уменьшением температуры давление паров падает.

Рассмотрим несколько задач, связанных с процессом кипения.

Задача 6. *Приготовление пищи в кастрюле-скороварке происходит при повышенном давлении. При этом температура превышает $t_к = 100$ °С. Было обнаружено, что сразу после разгерметизации скороварки испарилось 3 % содержащейся в ней воды. Определите температуру, которую имела вода до разгерметизации. Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}2$ кДж/(кг · К), удельная теплота парообразования $r = 2{,}3$ МДж/кг. Теплообменом за время установления нового состояния равновесия и изменением удельной теплоты парообразования с температурой пренебречь.*

После разгерметизации скороварки давление станет равным атмосферному. Поскольку температура воды t в скороварке превышает температуру $t_к = 100$ °С кипения воды при нормальном атмосферном давлении, то начнется интенсивное испарение (кипение) воды. Оно будет происходить до тех пор, пока ее температура не уменьшится до значения $t_к$. При этом на испарение 3 % воды, то есть массы $0{,}03m$, где m — исходная масса воды в скороварке, потребуется количество теплоты $0{,}03mr$. Это тепло выделяется при охлаждении воды от температуры t до $t_к$. В результате мы можем записать

$$0{,}03mr = cm(t - t_к),$$

откуда следует, что температура воды в скороварке была равна

$$t = t_к + 0{,}03r/c \approx 116 \text{ °C}.$$

Обратим внимание на тот факт, что при расчете выделяющегося при охлаждении воды количества теплоты мы пренебрегаем уменьшением ее массы. Это оправдано, поскольку испаряется всего лишь 3 % воды.

Вопрос 1. *Будет ли кипеть вода в пробирке, опущенной в кастрюлю с кипящей водой?*

Процесс кипения, как известно, требует непрерывного подвода тепла. Когда вода в пробирке нагреется до температуры 100 °С, подвод тепла из кастрюли прекратится. Поэтому вода в пробирке кипеть, естественно, не будет.

Вопрос 2. *А что будет, если в пробирку поверх воды налить толуол (это более легкая жидкость, не смешивающаяся с водой), температура кипения которого 111 °С?*

Здесь мы сталкиваемся с интересным явлением — так называемым пограничным кипением. Суть его состоит в том, что кипение начинается на границе двух жидкостей, когда сумма парциальных давлений их насыщенных паров равна внешнему атмосферному давлению. Ясно, что при этом давление насыщенных паров воды меньше атмосферного, а значит, и температура ниже 100 °С. Таким образом, при добавлении толуола в пробирку с водой кипение на границе толуол — вода начнется гораздо раньше, чем закипит вода в кастрюле.

Задача 7. *Во сколько раз плотность водяного пара под крышкой ка-*

стрюли, в которой кипит жирный бульон, больше плотности масляного пара? Давление насыщенного пара масла при температуре $t=100\ ^\circ C$ равно $p_{нм}=120$ Па. Молярная масса масла $M_м=80$ г/моль.

Давление насыщенных паров масла при температуре $t=100\ ^\circ C$ примерно в тысячу раз меньше атмосферного давления ($p_{атм}=10^5$ Па), а значит, и кипеть жирный бульон будет практически при этой температуре (обсуждавшийся выше эффект пограничного кипения в этом случае приводит к сдвигу температуры кипения лишь на 0,2 °C). Из закона Менделеева — Клапейрона следует, что отношение плотности водяного пара $\rho_{вп}$ и масляного пара $\rho_{мп}$ будет равно

$$\frac{\rho_{вп}}{\rho_{мп}}=\frac{p_{нв}M_в}{p_{нм}M_м}=\frac{p_{атм}M_в}{p_{нм}M_в}\approx 190.$$

Задача 8. *В вертикальном цилиндре под невесомым поршнем площадью $S=100$ см^2 находится $m_1=18$ г насыщенного пара. В цилиндр впрыскивают $m_2=18$ г воды при температуре $t_0=0\ ^\circ C$. На сколько опустится поршень? Атмосферное давление $p_0=10^5$ Па, удельная теплоемкость воды $c=4.2$ кДж/кг, удельная теплота парообразования $r=2,3$ МДж/кг. Теплоемкостью цилиндра и теплоотдачей в окружающую среду можно пренебречь.*

По условию задачи пар в сосуде насыщенный. Поскольку поршень невесомый, давление пара равно атмосферному давлению $p_0=10^5$ Па, а температура пара до впрыскивания воды была равна $t=100\ ^\circ C$. Этот момент — самый важный в данной задаче. Нетрудно далее убедиться в том, что конечная температура системы после установления равновесия также будет равной t (покажите это самостоятельно). Следовательно, введенная в цилиндр вода нагреется до температуры t, что может произойти только за счет конденсации некоторой массы пара $m_п$:

$$cm_2(t-t_0)=m_пr,$$

откуда

$$m_п=cm_2(t-t_0)/r\approx 3{,}3 \text{ г}.$$

Объем V, который занимал этот пар до конденсации, найдем из уравнения газового состояния:

$$V=\frac{m_пRT}{Mp_0}\approx 5{,}7\cdot 10^{-3}\ м^3.$$

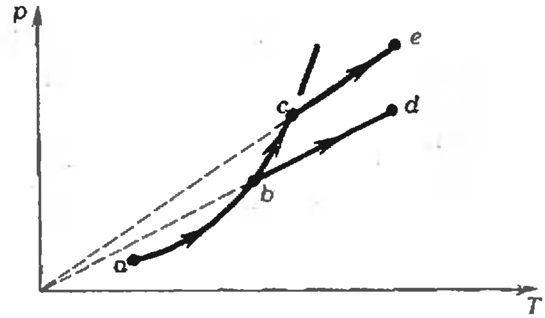


Рис. 4.

Считая объем, который занимает сконденсировавшаяся из пара вода, пренебрежимо малым (убедитесь в этом самостоятельно), получим, что перемещение поршня равно

$$h=\frac{V}{S}\approx 0{,}57\ м=57\ см.$$

* * *

В заключение остановимся на одном любопытном факте: давление насыщенных паров может зависеть еще и от формы поверхности жидкости (а не только от ее температуры). Так, например, при одной и той же температуре плотность (а значит, и давление) насыщенных паров над выпуклой поверхностью воды больше, чем над плоской. (Постарайтесь объяснить это явление.)

Упражнения

1. В закрытый сосуд объемом $V=166$ л поместили воду, масса которой $m=0{,}5$ кг, а затем сосуд нагрели до температуры $t=127\ ^\circ C$. Какова масса воды, оставшейся в сосуде при этих условиях? Объемом, занимаемым водой, по сравнению с объемом сосуда можно пренебречь. Давление насыщенных паров воды при температуре t равно $p_н=2{,}5\cdot 10^5$ Па.

2. Приготовление пищи в кастрюле-скороварке ведется при температуре $t=108\ ^\circ C$ и повышенном давлении. Какая часть воды испарится после разгерметизации скороварки? Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды $r=2{,}3$ Дж/кг. Теплообменом за время установления равновесия пренебречь.

3. На рисунке 4 представлена зависимость давления от температуры для двух процессов, abd и $abce$, происходящих с двумя изолированными системами. Участок кривой abc является частью кривой сосуществования жидкости и пара. Считая объемы систем одинаковыми, объясните причину их различного поведения с ростом температуры.

4. Известно, что если обычную воду подсолить, то температура ее кипения станет выше. Как при этом изменится плотность насыщенных водяных паров при температуре кипения?

5. В таблицах температуры плавления и удельной теплоты плавления вещества не приводятся данные для стекла. Почему?

6. Почему в сухом воздухе человек выдерживает температуру, превышающую 100 °С?

7. Почему в резиновой одежде трудно переносить жару?

8. Удельная теплота парообразования воды значительно больше, чем серного эфира. Почему же эфир, налитый на руку, производит значительно большее охлаждение, чем вода?

9. Почему при нагревании воды пузырьки пара образуются сначала у дна сосуда?

10. Где кипящая вода горячей — на уровне моря или в глубокой шахте?

11. Почему приготовление пищи в горах требует значительно большего времени, чем при обычных условиях?

12. Почему в специально охлаждаемых помещениях часто бывает сыро?

13. Зубные врачи, применяющие для осмотров зубов небольшое зеркальце, предварительно его нагревают до температуры несколько выше 37 °С. Зачем?

14. Почему не бывает росы под густым деревом?

15. Почему после выпадения росы с течением времени исчезают мелкие капли и увеличиваются размеры более крупных?

Равномерные расположения

(Начало см. на с. 51)

Несколько задач

1. Разделим окружность на n равных дуг и впишем в нее правильный k-угольник (вершины которого не попадают в концы дуг, рис. 7). Закрасим в черный цвет те k дуг, в которые попали вершины. Докажите, что их расположение среди всех n дуг равномерно. (Эта задача дает новый способ построения $\mathrm{P}(n;\,k)$.)

2. а) Будем располагать n (черных и белых) точек в вершинах правильного n-угольника. Докажите, что черные точки равномерного расположения $\mathrm{P}(n;\,k)$ образуют множество, симметричное относительно некоторой прямой. б)* Сколько таких осей симметрии у $\mathrm{P}(n;\,k)$?

В следующих задачах изучается несколько более общее понятие: равномерное расположение на прямой. Пусть на прямой задана бесконечная (в обе стороны) последовательность точек — в частности, например, целочисленных точек числовой оси, — «раскрашенных» в черный и белый цвет. Она называется *равномерной*, если для любого натурального m количество черных среди m последовательных ее точек колеблется не более чем на 1. Докажите следующие теоремы.

3. Для данных чисел a, b ($a > 1$) целые числа $[al+b]$, где l пробегает всевозможные целые числа, назовем черными, остальные целые числа — белыми. Полученное расположение равномерно. Оно периодично, если и только если a — рациональное число (при $a=\frac{n}{k}$ оно имеет период n и расположение черных и белых точек на периоде совпадает с расположением $\mathrm{P}(n;\,k)$ на окружности).

4*. Для любого равномерного расположения найдется число α такое, что количество черных точек среди любых m последовательных точек расположения отличается от αm менее чем на 1.

5*. Проведем на бесконечном листе клетчатой бумаги прямую, не проходящую через узлы, отметим черным точки ее пересечения с линиями одного направления, белым — другого (рис. 8). Полученное расположение равномерно.

6. Две бесконечные (в обе стороны) арифметические прогрессии a_1l+b_1, a_2l+b_2 ($l\in\mathrm{Z}$) не имеют общих членов. На числовой прямой числа одной прогрессии помечены черным, другой — белым. Полученное расположение черных и белых точек равномерно.

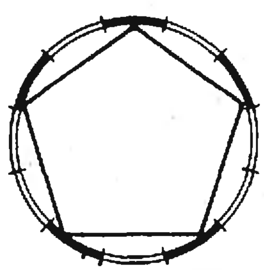


Рис. 7.

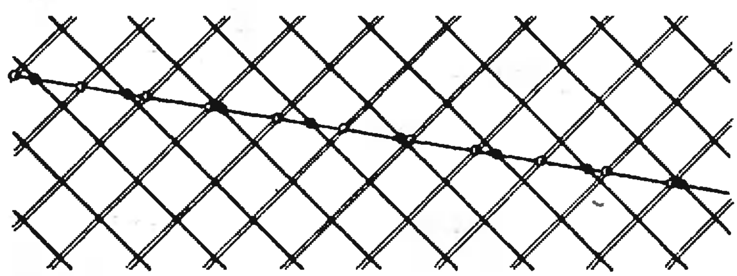


Рис. 8.

Задача о доминировании ферзей

В. Г. ЧВАНОВ

В статье М. Мамикона в «Кванте» 1977 г., № 12 рассматривалась следующая до конца еще не решенная задача:

Задача о доминировании. *Какое минимальное число ферзей $F(n)$ можно разместить на шахматной доске $n \times n$ так, чтобы они атаковали все ее свободные поля?*

Числа $F(n)$ известны лишь для малых n ($n \leqslant 11$), приведенных в таблице 1.

Таблица 1

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	...
$F(n)$	1	2	3	3	4	5	5	5	5	?	...

На рисунке 1 приведены размещения ферзей на досках 3×3, 8×8, 11×11, для которых $F(n)$ равны соответственно 1, 5 и 5. Для больших n задача ждет своего решения.

В статье М. Мамикона приводятся следующие оценки для $F(n)$:

$$F(n) \geqslant \frac{n-1}{2}, \qquad (1)$$

$$F(n) \leqslant \frac{5}{8} n + 16\sqrt{n}. \qquad (2)$$

Наша цель — указать некоторые приемы, позволяющие улучшить эти оценки и сформулировать связанные с ними задачи в надежде на то, что читатель самостоятельно продвинется в решении задачи о доминировании.

Первая геометрическая идея — пробивание каймы

Размещение ферзей на доске $n \times n$, для которых $F(n) = (n-1)/2$ (реализуется нижняя оценка М. Мамикона), назовем *идеальным*. Примерами могут служить размещения, показанные на рисунке 1 (при $n=3$ и $n=11$).

Посмотрим на *кайму* доски (совокупность из $4(n-1)$ клеток, расположенных вдоль ее края). При идеальном размещении (см. рис. 1*а*, *б*) каждый ферзь бьет ровно 8 клеток на кайме, при том никакая ее клетка не пробивается двумя ферзями, поэтому число ферзей равно $4(n-1):8 = (n-1)/2$, откуда и получается нижняя оценка (1). Полное доказательство дано в статье М. Мамикона.

Задача 1 (нерешенная). Существуют ли идеальные размещения кроме двух указанных? Конечно ли число идеальных размещений? (Гипотеза: ответ на последний вопрос — положительный.)

Необходимым условием доминирования, разумеется, является доминирование на кайме. Поэтому интересно знать, для каких досок возможно доминирование на кайме $(n-1)/2$ ферзями. М. Мамикон доказал, что такими досками являются доски $n \times n$ при $n = 2(k^2+l^2)+1$, где k и l — взаимно-простые числа разной четности. Но этим списком такие доски не исчерпываются. Примером может служить размещение на рисунке 2 ($n=15$); еще одно такое размещение я придумал для доски $n \times n$, $n=27$. Эти размещения примечательны тем, что в них соблюдается численное равенство фигур, расположенных лишь в противоположных квадрантах, образованных пересечением главных диагоналей.

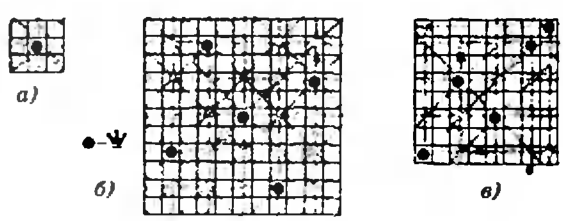


Рис. 1.

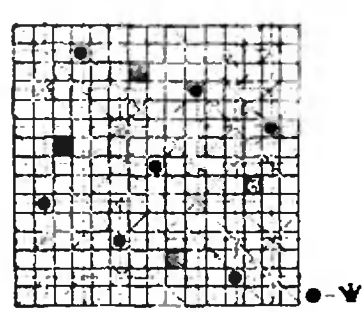


Рис. 2.

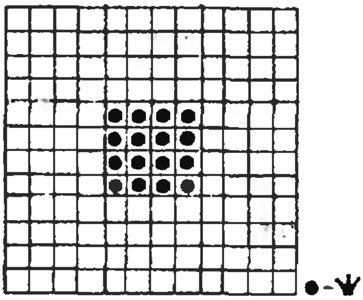
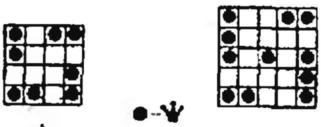


Рис. 3.



а) б)

Рис. 4.

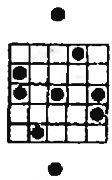


Рис. 5.

Задача 2 (нерешенная). Указать полный список досок $n\times n$, на которых возможно доминирование на кайме $(n-1)/2$ ферзями. (Гипотеза: кроме указанной выше серии, в этот список входят все доски вида $n=12k+3$ и только они.)

Вторая геометрическая идея — «комбинированный ферзь»

Эта нехитрая идея состоит в имитации идеального размещения на доске 3×3 на досках большего размера. Рассмотрим для начала доску размера $3m\times3m$ и в центральном квадрате $m\times m$ разместим несколько ферзей так, чтобы они пробивали все диагонали, все вертикали и все горизонтали центрального квадрата; тогда очевидно, что такой «комбинированный ферзь» будет доминировать по всей доске $3m\times3m$ (рис. 3).

Дадим теперь определение *комбинированного* ферзя (коротко — *k-ферзя*) в общем случае. Пусть на бесконечной шахматной доске выделен квадрат $m\times m$ и выбран набор ферзей, которые 1) пробивают все $2m-1$ нисходящие и все $2m-1$ восходящие диагонали выделенного квадрата; 2) пробивают все m горизонталей и все m вертикалей выделенного квадрата; такой набор ферзей мы назовем k-ферзем.

Задача 3. Для каждого m постройте k-ферзь из минимального числа ферзей, целиком расположенный внутри квадрата $m\times m$.

Решение эквивалентной задачи дано в «Кванте», 1980, № 7 (решение задачи М577). При четном m число ферзей равно $2m$, при нечетном, — оно равно $2m+1$ (рис. 4,а,б).

Таким образом, для n кратного 3, $n=3m$, мы получим оценку $F(n)\leqslant\leqslant 2n/3$ при m четном, $F(n)\leqslant\leqslant(2n/3)+1$ при n нечетном. Но мы увидим, что эту оценку можно еще улучшить, если воспользоваться еще одной геометрической идеей.

Третья геометрическая идея — вывести k-ферзя за пределы центрального квадрата

Рассмотрим k-ферзя на рисунке 4,б и заменим четыре угловых ферзя на два ферзя, лежащие за пределами центрального квадрата $m\times m$ $(m=5)$, как показано на рисунке 5. Тогда мы получим k-ферзя из $2m-1$ фигур, доминирующего на доске $3m\times3m$. Дальнейшее сокращение числа фигур невозможно, так как в квадрате $m\times m$ имеется $2m-1$ диагонали.

Однако, когда мы выносим фигуры по своим диагоналям за пределы центрального квадрата, оказывается, что можно получить k-ферзя, доминирующий на доске большего размера, чем $3m\times3m$, за счет увеличения числа атакуемых горизонталей и вертикалей (см. рисунок на четвертой странице обложки). Естественно спросить

Задача 4. Каков максимальный размер квадрата, на котором доминирует k-ферзь из $2m-1$ фигур?

Я не знаю ответа на этот вопрос, однако, удается строить серии k-ферзей указанным приемом, которые позволяют заметно улучшить оценку сверху для $F(n)$. В частности, для любого m из серии $m=12c+9$ $(c=0, 1, 2, ...)$ можно построить k-ферзя из $2m-1$ ферзей, который доминирует на доске $n\times n$, где $n=42c+31=(7m-1)/2$. Таким образом, для всех n из серии $n=42c+31$ $(c=0, 1, 2, ...)$, мы получаем оценку

$$F(n)\leqslant\frac{4n-5}{7}. \qquad (3)$$

Заметим, что число вертикалей (а также — горизонталей), атакуемых таким k-ферзем, равно $l=(3m-1)/2$.

k-ферзь, изображенный на обложке, и есть один из k-ферзей этой серии (при $c=0$). Рассмотрим его подробнее. Он состоит из 3-х, обладающих определенными «конструктивными» достоинствами, групп фигур. Каждая, взятая отдельно, группа атакует во всех направлениях столько рядов, сколько содержится в ней фигур. Причем, в вертикальном и одном из диа-

Таблица 2

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$F(n)$	1	2	3	3	4	5	5	5	5	6	7				9
μ	0,33	0,5	0,6	0,5	0,57	0,62	0,55	0,5	0,45	0,5	0,54				0,53

гональных направлений ряды атакованы без разрывов, в другом — атакован каждый третий ряд, в горизонтальном — каждый второй. Крайние группы содержат $\frac{2}{3}m-1$, а средняя — по $\frac{2}{3}m$ фигур, размещенных последовательным ходом коня вдоль параллельных линий 1—1, 2—2, 3—3. Линия 1—1 проходит через центральную клетку доски. Расстояния между линиями 2—2, 3—3 и линией 1—1 выбирается так, чтобы за пределами доски $m\times m$ с 2-х ее сторон (см. рисунок на обложке) находилось по $\frac{m-1}{4}$ фигур каждой крайней группы. Но при этом часть фигур каждой группы выходит из синей зоны и в ней образуется разрыв (показано зеленым) в сплошном диагональном пробое. Фигуры, вышедшие из синей зоны, возвращают в нее параллельным переносом по своим диагоналям так, чтобы ликвидировать образовавшийся разрыв.

Улучшение нижней оценки для $F(n)$

Теперь вернемся к нижней оценке $F(n)$. Ее можно улучшить, раздельно оценивая $F(n)$ для досок $n\times n$, сравнимых по модулю 4.

Задача 5. Докажите для каждого вида досок $n\times n$ выполняемость следующих оценок $F(n)$:

$$n=4k \quad F(n)\geqslant\frac{n}{2}, \tag{4}$$

$$n=4k+1 \quad F(n)\geqslant\frac{n+1}{2}, \tag{5}$$

$$n=4k+2 \quad F(n)\geqslant\frac{n}{2}, \tag{6}$$

$$n=4k+3 \quad F(n)\geqslant\frac{n-1}{2}. \tag{7}$$

Указание. Число полей краевой каймы доски, на которой доминируют $\frac{n-1}{2}$ ферзей, кратно 8; число фигур идеальной расстановки $F(n)=2k+1$.

Задача 6. Дано по $\frac{n-1}{2}$ вертикальных, горизонтальных, восходящих и нисходящих диагональных линий. Укажите все значения n, для которых возможно этими линиями (они идут через центры клеток) зачеркнуть все клетки доски $n\times n$.

Задача 7 (нерешенная). Конечно ли число досок, для которых выполняются оценки (4), (5), (6)? Гипотеза: число таких досок конечно.

Оценки (4), (5), (6) позволяют нам расширить таблицу 1. Действительно, с их учетом можно записать, что $F(12)\geqslant 6$; $F(13)\geqslant 7$; $F(17)\geqslant 9$; $F(12)=6$ и $F(13)=7$ легко получить, достраивая размещения $F(11)=5$ (рис. 1«б») до размеров 12×12 и 13×13 с установкой дополнительной фигуры в угловой клетке доски. Размещение же $F(17)=9$ показано на рисунке 6.

«Качество» того или иного доминирующего размещения удобно оценивать отношением $\mu=\frac{F(n)}{n}$. Итак, наши результаты можно представить в виде Таблицы 2.

Таблица 2 заслуживает внимания, но ее анализ мы оставляем читателям. Отметим лишь следующее: М. Мамиконом высказывалась гипотеза о том, что доска 8×8 является наихудшей в смысле максимальности μ. Формула (6) и полученные нами значения $F(n)$ позволяют нам ответить на этот вопрос пока утвердительно.

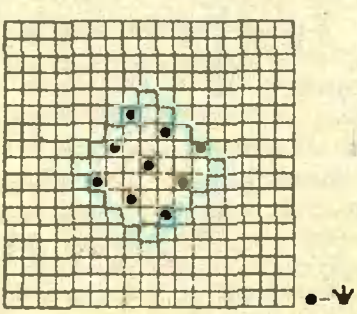


Рис. 6.

Задача 8 (о внешнем доминировании). Какое максимальное число ферзей можно разместить на бесконечной шахматной доске так, чтобы они атаковали все поле доски $n\times n$?

Фазовые превращения

1. $m_в = m - pVM/(RT) \approx 0{,}3$ кг.
2. $\alpha = c(t - t_к)/\lambda \approx 0{,}015 = 1{,}5\ \%$ (здесь $t_к = 100\ ^\circ C$ — температура кипения воды при нормальном атмосферном давлении).
3. Масса системы, с которой проводится процесс *abce*, больше массы системы, с которой проводится процесс *abd*.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 6)

1. 10 белых грибов.
2. Очевидно, что первая цифра частного 1, а первая цифра делителя — 2. Теперь нетрудно найти, что последняя цифра частного — 6. Зная делитель 23 и частное 136, находим все цифры в примере.
3. На рисунке 1а показана полоска длины 1×12, на которой пунктиром намечены линии сгиба. Согнув полоску по этим линиям, получим двуслойную зигзагообразную полоску, изображенную на рисунке 1б, после чего оклеиваем кубик этой полоской так, как показано на рисунке 1в.
4. Ответ: $h = 3$. Наибольшая из высот h треугольника не превосходит длины средней по величине стороны этого треугольника. Поэтому $h \leqslant 3$. Если $b = h = 3$, $a = 2$, то $c = \sqrt{13} < 4$.
5. Ответ: 4,3 м. Продолжим линию горизонта (рис. 2). Представим себе, что рядом с лодкой находится вертикальная палка AB, верхний конец которой совпадает с горизонтом. Так как линию, проходящую через фотоаппарат при съемке, можно считать параллельной поверхности моря (из фотографии видно, что катер находится довольно близко к точке съемки, так что кривизной Земли можно пренебречь), длина палки равна высоте фотоаппарата над уровнем моря. Так как катер расположен параллельно линии горизонта ($AF \parallel l$) и перпендикулярно к оси объектива фотоаппарата, будет $\frac{CD}{AB} = \frac{l}{h}$, где l — длина лодки, h — высота фотоаппарата. Измерив на чертеже CD и AB и считая, что $h \approx 1{,}6$ м, получим

$$l \approx h \cdot \frac{CD}{AB} = 1{,}6 \cdot \frac{3{,}2}{1{,}2} \approx 4{,}3 \text{ м.}$$

Замечание. Мы допустили, что $h \approx 1{,}6$ м, зная рост автора фотографии и исходя из среднего роста человека. При других h, естественно, будут получаться другие ответы.

Рис. 1а.

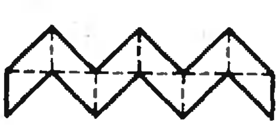


Рис. 1б.

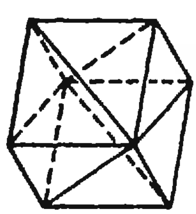


Рис. 1в.

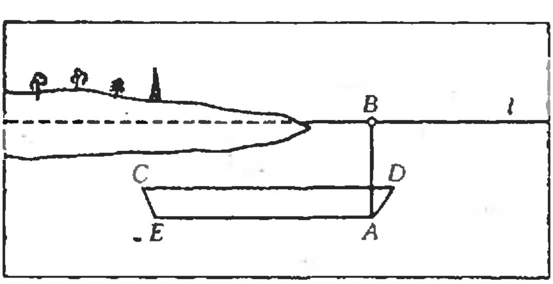


Рис. 2

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 5)

Головоломки

1. См. рис. 3.
2. $24017 \cdot 2 = 48034$
   $6492 : 3 = 2164$
   $83296 \cdot 7 = 583072$
   $17692 \cdot 4 = 70768$
3. Одно из решений изображено на рисунке 4.

4	8	3
9	1	5
2	6	7

Рис. 3.

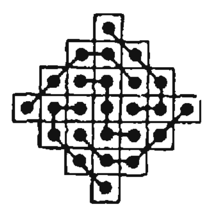


Рис. 4.

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 6)

Наблюдения и эксперименты

1. Если предмет попал точно в центр сосуда, то он возбудит круговую волну, которая одновременно во всех точках отразится от краев сосуда и сфокусируется в центре.
2. Маятники будут обмениваться энергией благодаря поперечной нити и станут попеременно останавливаться, приводя в движение «соседа». (Подробное объяснение — в статье «Связанные маятники», «Квант», 1984, № 5.)
3. Следует вывести маятники из положения равновесия и одновременно отпустить их, затем дождаться, когда они одновременно вернутся в исходное положение. Если первый маятник за это время совершил n_1 колебаний, а второй n_2, то $\frac{T_2}{T_1} = \frac{n_1}{n_2}$, откуда $T_2 = \frac{n_1}{n_2} T_1$.
4. Так как крылья стрекозы покрыты тонкой прозрачной пленкой, имеющей различную толщину, то при падении на пленку солнечных лучей образуются цветные интерференционные полосы. Положение этих полос меняется, если смотреть на пленку под разными углами.

Задачи и задачки

1. Для увеличения массы струны. Чем больше масса, тем меньше частота упругих колебаний, тем ниже тон создаваемого струной звука.
2. Колеблются векторы электрической напряженности $\vec{E}$ и магнитной индукции $\vec{B}$.

3. Энергия колебаний больших по глубине слоев воды передается у берегов более тонким слоям, и амплитуда колебаний увеличивается.
4. На мелком месте скорость волн меньше, чем на глубоком. Волны испытывают преломление и изменяют направление своего распространения.
5. Звуковые волны огибают дверь за счет дифракции, а она, как известно, проявляется тогда, когда длина волны сравнима с размерами препятствия. Для световых волн это условие в данном случае не выполняется.
6. Обе части полоски будут выглядеть смещенными, причем фиолетовая сместится благодаря дисперсии больше, чем красная.
7. Штриховка играет роль дифракционной решетки, создающей спектр в отраженных лучах.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 4)

Задание 7 (З. Колодный, 1927 г.). **1. e7 Крc7** (1... Крb5 2. e8Ф+ и 3. Фea4×) **2. e8С! Крc8 3. Фd7×.**

Задание 8 (В. Шпекман, 1964 г.). **1. Крc4! Крa7 2. Фc7! Крa6 3. b8К×!**

Бег по кругу и длинный рассказ
(см. «Квант» № 2)

Вопросы

1. Когда птица намокает, перьям это очень не нравится и они взъерошиваются. (Если говорить серьезно, то первое, что делает попавшая под дождь птица, — это встряхивается, сбрасывая с себя излишки воды. После этого отдельные волоски пера, впитавшие влагу, «собираются» из-за смачивания около его остова. Таким образом перья превращаются в торчащие во все стороны «стрелки», придавая птице взъерошенный вид.)
2. От ощущения своей беспомощности перед «силами природы» и от досады. (Ну, а серьезно — испаряющаяся с мокрой одежды вода, забирает тепло у всего окружающего, в том числе и у вас. Поэтому вам и становится холодно.)
3. Правда, если бежать не очень быстро. От очень быстрого бега скорее еще больше взмокнешь.
4. Он может подняться страшно-страшно высоко.
5. Приблизительно затем, зачем бьют палкой по ковру, когда его чистят.
6. Величина силы обратно пропорциональна вашей воспитанности.

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
Е. В. Винодарова, М. Б. Дубах, А. И. Климанов, А. Я. Коршунов, Д. А. Крымов, Г. В. Мурышкин, Ю. Н. Сафонов, И. Е. Смирнова, Э. А. Смирнов, Е. К. Тенчурина, Н. А. Яццук
Фото представили: Б. Е. Лахметкин

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Л. С. Сомова

103006 Москва К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

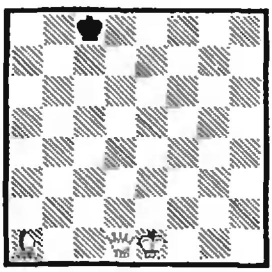
Сдано в набор 21.05.85. Подписано к печати 3.07.85
Печать офсетная. Усл. кр.-отт. 23,8
Бумага 70×108 1/16
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 7,03. Т-12332
Тираж 172 290 экз. Цена 40 коп. Заказ 1311

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
142300 г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

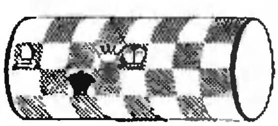
ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ШАХМАТЫ

Задание, которое указано под первой диаграммой, наверняка удивит читателей.



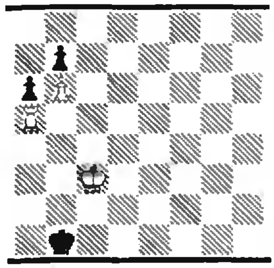
В. Хуторной, 1985 г. Мат в 0 ходов.

А между тем мат действительно дается в 0 ходов, причем сразу двумя способами! Белые не переставляют ни одной из своих фигур, но зато... сворачивают доску в цилиндр! Из одной доски можно соорудить две цилиндрические — горизонтальную и вертикальную. На каждой из них черный король сразу оказывается заматованным.



На горизонтальном цилиндре это хорошо видно невооруженным глазом, вертикальный цилиндр рассмотрите сами.

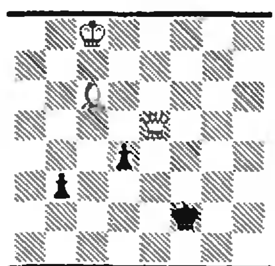
В цилиндрических шахматах, с одной стороны, открываются новые возможности, а с другой — становится невозможным то, что легко достигается на обычной доске. Так, на цилиндрической доске король с ладьей не в состоянии поставить мат голому королю, не существует ни одной расстановки 8 ферзей, не угрожающих друг другу (на обычной доске, как известно, существуют 92 таких расстановки).



Мат в 2 хода на вертикальной цилиндрической доске.

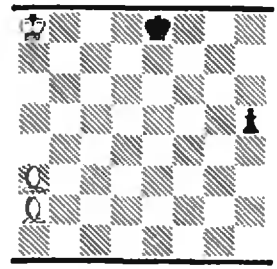
В цилиндрических шахматах у доски, как правило, отрезаются соответствующие границы, что мы и видим на данном рисунке. На стандартной доске задание невыполнимо — королем ходить бесполезно, а если движется ладья, то выручает ход пешкой a6—a5. На цилиндре решает удивительный маневр: 1. Ла5—а5! Ладья пробежалась по горизонтальному кругу и вернулась на свое место. Теперь все ясно — 1...Крс1 2.Ла1 ×.

Рассмотрим задачи посложнее.



А. Мандлер, 1962 г. Мат в 3 хода на вертикальной цилиндрической доске.

1.Сb7. Занимая слоном диагональ c8 — a6 — h5 — d1 и угрожая 2. Фf4+ Кре(g)1 3. Фf8× (с поля f8 ферзь держит поля d2, e1 по диагонали f8—h6—a5—e1, а поля g1, h2 — по диагонали f8—a3—h2—g1). 1...d3. Теперь после 2.Фf4+Кре1 3.Фf8+ есть защита 3...d2. Но опасно оголилась диагональ a7—g1, что и решает дело. **2.Фа5+** (шах по диагонали d8—a5—h4—e1) **2...Кре3 3. Фа7×!** Как легко убедиться, все белые поля около черного короля держит слон, а все черные — ферзь (включая e3 — по диагонали b8—a7—h6—c1).



Д. Никсон, 1936 г. Мат в 5 ходов на вертикальной цилиндрической доске.

На обычной доске для того, чтобы заматовать неприятельского короля двумя слонами, его предварительно загоняют в угол. На цилиндре углов вообще нет! Но это не беда — сила слонов здесь значительно возрастает, и поставить мат можно и на краю доски.

1.Сh4 Крf8 2.Крh7 Кре8 3.Крg6 Крf8 4.Са3+ Кре8 5.Сh3×.

Разыграв эту позицию «вслепую» (без доски), вы хорошо потренируете свое геометрическое воображение!

В следующей задаче, как и в самой первой, задание полусерьезное, полушуточное.

Б. Рябинин, 1983 г. Белые: Крс2; черные: Кре2, п. g7. Ничья.

Шансы белых на ничью, прямо скажем, не слишком велики. Черная пешка, как будто, беспрепятственно движется вперед, пока не станет ферзем. В отчаянии белые приклеивают друг к другу первую и последнюю горизонтали доски, превращая ее в горизонтальный цилиндр! В результате пешка совершенно неожиданно лишается всяких перспектив — превращение в ферзя отменяется. Перпетуум — мобиле...

Конкурсные задания

13. Белые: Крh5, Фh6, Сс6; черные: Кре7. Мат в 3 хода.

14. Белые: Крf3 Фf7, Сb4; черные: Крb8. Мат в 3 хода на вертикальной цилиндрической доске.

Срок отправки решений — 25 сентября 1985 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 13, 14»).

Индекс 70465

Цена 40 коп.

Семнадцать черных ферзей, стоящих на этой «шахматной доске 30×31», доминируют на ней, то есть пробивают все ее 930 клеток без исключения. Можете проверить! Эту остроумную расстановку ферзей придумал В. Г. Чванов, она лишь одна из бесконечной серии решений «Задачи о доминировании на доске n×n» — именно, для случая n=(7m−1)/2, m=9, n=31. Эта хитрая расстановка получается из более простой расстановки семнадцати ферзей (13 черных, 4 белых) по линиям 1—1, 2—2, 3—3. Эти ферзи не пробивают все клетки доски (какие именно?), но после сдвига четырех белых ферзей (по красным стрелкам), полученная система из 17 черных ферзей уже решает задачу о доминировании на доске 30×31. Впрочем, можно прибавить еще 31 клетку к этой доске (в каком месте?) и получить решение задачи для доски 31×31. Подробнее об этих построениях можно прочитать в статье В. Г. Чванова внутри этого номера.