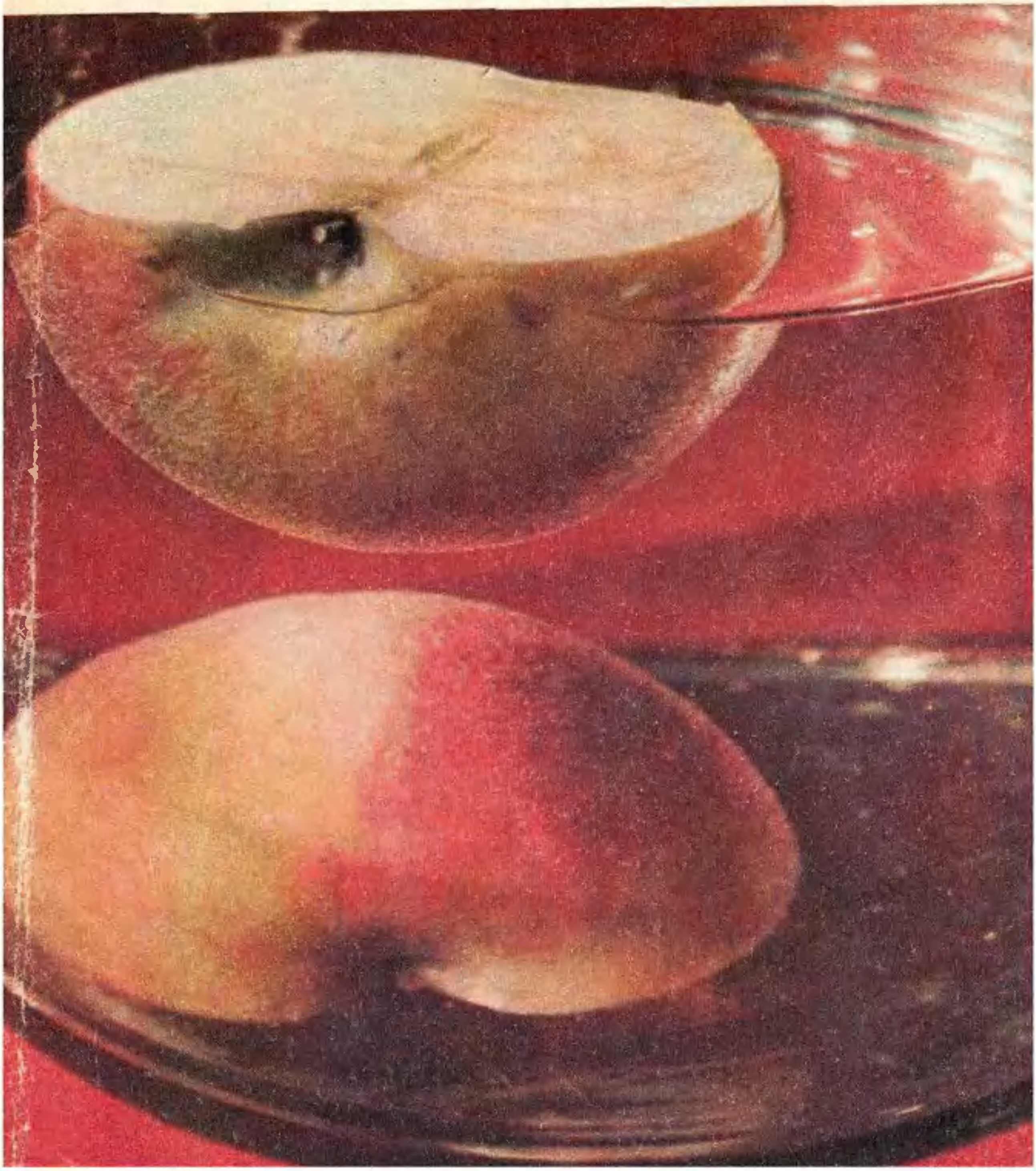
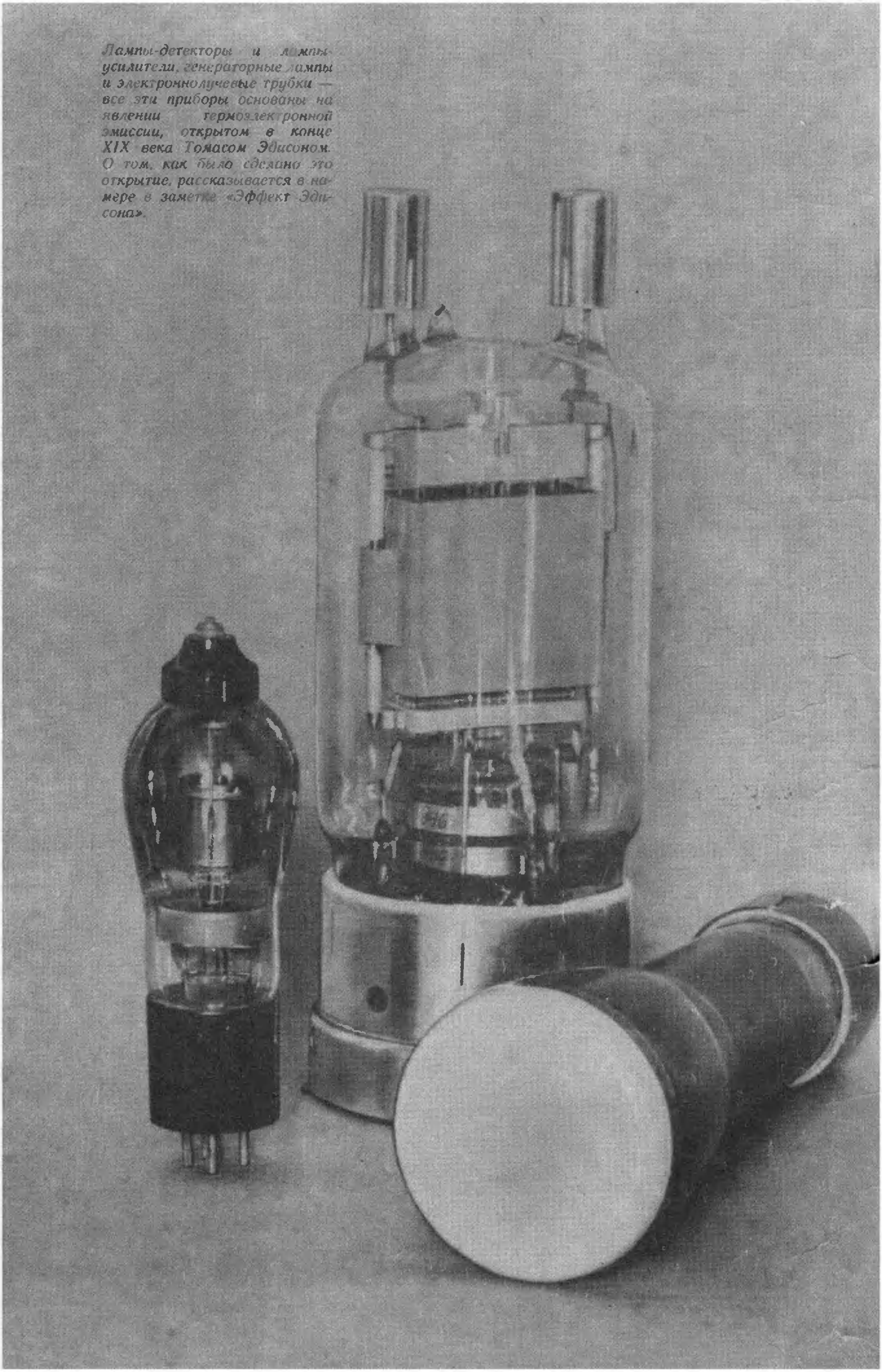
ISSN 0130-2221

Квант

9
1984

Научно-популярный физико-математический журнал
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР





Лампы-детекторы и лампы-усилители, генераторные лампы и электроннолучевые трубки — все эти приборы основаны на явлении термоэлектронной эмиссии, открытом в конце XIX века Томасом Эдисоном. О том, как было сделано это открытие, рассказывается в номере в заметке «Эффект Эдисона».

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Квант

9 1984

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ: / **IN THIS ISSUE:**

2	*И. К. Кикоин.* День знаний	*I. K. Kikoin.* Knowledge Day
3	*Л. Г. Асламазов.* Сверхпроводящие магниты	*L. G. Aslamazov.* Superconducting magnets
9	*А. П. Веселов, С. Г. Гиндикин.* Элементарные функции	*A. P. Veselov, S. G. Gindikin.* Elementary functions
15	*А. И. Прохоров.* Золотая спираль	*A. I. Prokhorov.* The golden spiral
	Новости науки	**Science news**
18	*Л. С. Марочник.* Существуют ли планетные системы у других звезд?	*L. S. Marochnik.* Do other stars have planetary systems?
	Школа в «Кванте»	**Kvant's school**
19	Физика 8, 9, 10	Physics 8, 9, 10
24	Математика 8, 9, 10	Mathematics 8, 9, 10
27	Избранные школьные задачи	Selected school problems
	«Квант» для младших школьников	**Kvant for younger school children**
29	Задачи	Problems
30	*А. Л. Стасенко.* Закон Архимеда	*A. L. Stasenko.* Archimedes' law
	Задачник «Кванта»	**Kvant's problems**
34	Задачи М881—М885; Ф893—Ф897	Problems M881—M885; P893—P897
37	Решения задач М866—М870; Ф878—Ф882	Solutions M866—M870; P878—P882
45	Список читателей, приславших правильные решения	List of readers who have sent correct solutions
	Наш календарь	**Our calendar**
47	Эффект Эдисона	The Edison effect
	Практикум абитуриента	**College applicant's section**
49	*П. П. Горнуша.* Сведем неравенство к известному	*P. P. Gornusha.* Reducing the inequality to a known one
	Олимпиады	**Olympiads**
52	*М. Л. Александрова.* Первая математическая олимпиада	*M. L. Alexandrova.* The first mathematical olympiad
54	Избранные задачи 50-й ленинградской городской олимпиады по математике	Selected problems from the 50th Leningrad olympiad in mathematics
55	Ленинградская городская олимпиада по физике	The Leningrad olympiad in physics
	Информация	**Information**
57	VI Московский турнир юных физиков	The VIth Moskow young physicist's tournament
60	**Ответы, указания, решения**	**Answers, hints, solutions**
	Смесь *(8, 48, 56)*	**Miscellaneous** *(8, 48, 56)*
	Шахматная страничка	**The chess page**
	Последняя тренировка *(3-я с. обложки)*	Last practice session *(3rd cover page)*

Почему две одинаковые половинки яблока ведут себя столь различно — одна плавает на поверхности воды, а другая лежит на дне сосуда (см. фотографию на первой странице обложки)? Ответ на этот вопрос вы найдете в статье «Закон Архимеда».

День знаний

Дорогие друзья, читатели «Кванта»!

Поздравляю вас и в вашем лице всех школьников Советского Союза с праздником — началом учебного года, который решением Советского правительства объявлен Днем знаний.

Знание! Вдумайтесь, какой глубокий смысл содержится в этом слове. Без знания не сделать никакого дела. Старинная русская пословица гласит: «не умеючи и лаптя не сплетешь». Многие из вас, возможно, даже не знают, что такое лапти, а несколько десятков лет назад это был один из наиболее дешевых и доступных видов обуви в русской деревне.

В нашей стране человеческому знанию придается особое значение. Советский гражданин должен обладать большим запасом знаний, в самых разных областях человеческой деятельности.

У человека существует врожденный инстинкт любознательности. Потребность в знаниях присуща человеку любого возраста. В Советской стране созданы все условия для удовлетворения этой потребности. Основным источником знаний у нас служит школа. В нашем государстве провозглашен закон о бесплатном обучении в начальной, средней и высшей школах.

Великое счастье — каждый день узнавать что-то новое в самых разных областях человеческого знания, будь то математика, физика, литература, химия и т. д. Большое удовлетворение доставляет самостоятельно найденное решение трудной задачи. Не меньше радости приносит успешно выполненное общественное поручение в масштабе класса или даже школы.

Когда я вспоминаю свои школьные годы, они представляются мне самым светлым и радостным периодом моего детства и юности. Мы с товарищами проводили бо́льшую часть дня в школе, а во время каникул мечтали о том дне, когда снова попадем в пахнущий свежей краской родной класс и погрузимся в привычные школьные «будни». Мне бы хотелось, чтобы и для вас школа стала вторым домом, а учебные занятия доставляли бы вам радость познания окружающего мира.

Коммунистическая партия и Советское правительство всегда уделяли большое внимание вопросу школьного обучения. Недавно высший орган государственной власти — Верховный Совет СССР — принял постановление о реформе школьного образования.

В законе предусмотрен ряд мер, которые должны привести уровень школьного образования в соответствие с новыми требованиями, выдвинутыми развитием нашего общества. Современные наука и техника разрабатывают новейшие средства промышленного и сельскохозяйственного производства, призванные резко повысить производительность труда. Это приведет к росту выпуска продукции народного хозяйства и в результате — к дальнейшему улучшению благосостояния советского народа.

Вам, будущим выпускникам школ, предстоит участвовать в осуществлении научно-технического прогресса. Это очень увлекательная задача. Быть может, вам повезет, и вы откроете новые закономерности в явлениях природы, разработаете новые методы решения физико-математических задач или новые технологические приемы. Все зависит от вас, от вашего отношения к школьному труду.

Главный редактор журнала «Квант» академик И. К. Кикоин

Сверхпроводящие магниты

Доктор физико-математических наук
Л. Г. АСЛАМАЗОВ

Сильные магнитные поля можно получать, пропуская через катушку сильный ток. Чем больший ток течет через катушку, тем большее магнитное поле он создает. Но если катушка обладает электрическим сопротивлением, то в ней выделяется тепло. Приходится тратить огромную энергию на поддержание тока, возникают серьезные проблемы, связанные с отводом тепла (иначе катушка может расплавиться). Так, в 1937 году впервые было получено магнитное поле с индукцией 10 Тл. Но удерживать это поле удавалось только ночью, когда другие потребители электростанции, подающей ток в обмотку, были отключены. Выделявшееся тепло отводилось проточной водой, и при этом каждую секунду 5 литров воды доводились до кипения.

Именно это и ограничивает возможности получения сильных магнитных полей в обычных соленоидах.

Идея использования сверхпроводимости для создания сильных магнитных полей возникла сразу после ее открытия. Казалось бы, все, что требуется,— это намотать из сверхпроводящей проволоки катушку, замкнуть ее концы и пустить по такому контуру достаточно сильный ток. Так как электрическое сопротивление катушки равно нулю, то выделения тепла не происходит. И хотя охлаждение соленоида до температур жидкого гелия, при которых наступает сверхпроводимость, создает определенные трудности, преимущества окупили бы недостатки, если бы... магнитное поле само не разрушало сверхпроводимость.

Открытие сверхпроводимости

На рисунке 1 показана схема опыта Камерлинга-Оннеса, который был сделан в 1911 году в Лейдене. Голландские ученые изготовили катушку из свинца, подсоединили ее к источнику ЭДС и, поместив катушку в жидкий гелий, охладили ее до температуры кипения гелия (4,2 К). При этом электрическое сопротивление свинца исчезло — он перешел в сверхпроводящее состояние. Затем изменили положение ключей и замкнули катушку накоротко — по ней начал циркулировать незатухающий сверхпроводящий ток.

Этот ток создает магнитное поле, индукция которого пропорциональна силе тока. Казалось бы, чем сильнее ток в катушке, тем большее магнитное поле можно получить таким образом. Результат, однако, оказался разочаровывающим: при индукции поля в несколько сотых долей тесла соленоид переходил в нормальное состояние (у него появлялось сопротивление). Пытались делать катушки из других сверхпроводников, но и в них разрушение сверхпроводимости происходило при сравнительно малых магнитных полях. В чем же дело?

Эффект Мейснера

Разгадку такого «неудобного» поведения сверхпроводников нашли в 1933 году в Берлине в лаборатории В. Мейснера. Оказалось, что сверхпроводник обладает свойством полностью вытеснять из себя магнитное поле; в его толще индукция магнитного поля равна нулю.

Представим себе, что металлический цилиндр (кусок проволоки) охладили до низкой температуры и перевели в

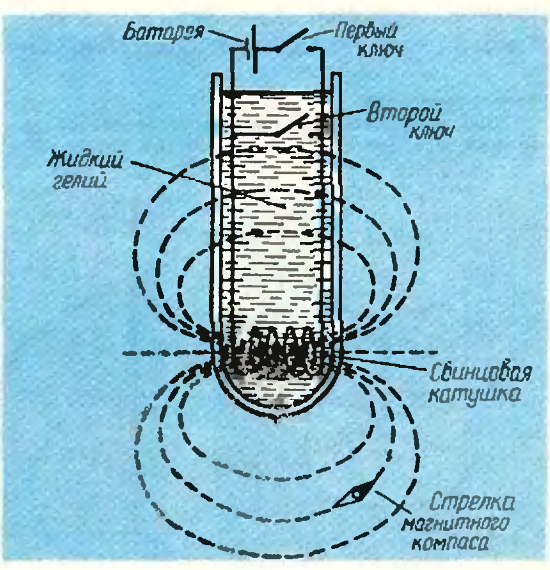


Рис. 1.

сверхпроводящее состояние. Затем включили магнитное поле с индукцией $\vec{B}_{внеш}$. По закону электромагнитной индукции на поверхности цилиндра появятся круговые токи (рисунок 2), которые создадут в цилиндре магнитное поле с индукцией $\vec{B}_{ток}$, равной по величине и противоположной по направлению индукции внешнего поля. Эти токи — сверхпроводящие и затухать не будут. Поэтому в толще сверхпроводника суммарная индукция равна нулю: $\vec{B}=\vec{B}_{внеш}+\vec{B}_{ток}=0$. Линии индукции магнитного поля в сверхпроводник не проникают.

Ну, а что, если изменить последовательность операций — сначала поместить металл во внешнее магнитное поле, а затем охладить его до сверхпроводящего состояния. Казалось бы, индукция магнитного поля при этом не меняется и нет причин для возникновения экранирующих поверхностных токов. Именно так и думал Мейснер, когда проверял расчеты Лауэ, относящиеся к первому способу проведения эксперимента.*) Думать-то думал, но все-таки решил проверить. Результат измененного эксперимента получился удивительный. Оказалось, что и в этом случае магнитное поле полностью вытесняется из сверхпроводника, не проникает в него.

Это явление назвали эффектом Мейснера.

Теперь ясно, почему магнитное поле разрушает сверхпроводимость. Ведь на возбуждение поверхностных токов тратится определенная энергия. В этом смысле сверхпроводящее состояние менее выгодно, чем нормальное состояние, когда магнитное поле проникает в металл и экранирующих поверхностных токов нет. Чем больше индукция внешнего поля, тем более сильный ток должен течь по поверхности, чтобы обеспечить экранировку. При некотором значении индукции магнитного поля сверхпроводимость обязательно разрушается, и металл переходит в нормальное состояние. Поле, при котором происходит разрушение сверхпроводимости, называется критическим полем сверхпроводника. Важно понимать, что для разрушения сверхпроводимости не обязательно внешнее магнитное поле. Ток, текущий по сверхпроводнику, сам создает магнитное поле. Когда при определенном значении тока индукция этого поля достигает значения, соответствующего критическому полю, сверхпроводимость разрушается.

Величина критического поля растет с уменьшением температуры, но даже вблизи абсолютного нуля критическое поле у чистых сверхпроводящих металлов невелико (см. график на рисунке 3). В лучших случаях оно составляет всего десятые доли тесла. Так что, казалось бы, нечего и думать о создании сильных магнитных полей с помощью сверхпроводников.

Но дальнейшее исследование сверхпроводимости показало, что выход все-таки есть. Было обнаружено, что имеется целая группа сверхпроводников, которые и в очень сильных магнитных полях сохраняют сверхпроводимость, правда, в несколько ослабленном виде.

Абрикосовские вихри

В 1957 году советский физик А. А. Абрикосов теоретически показал, что в сплавах разрушить сверхпроводимость

*) Об истории открытия эффекта Мейснера рассказывалось в «Кванте» № 10 за прошлый год (с. 16).

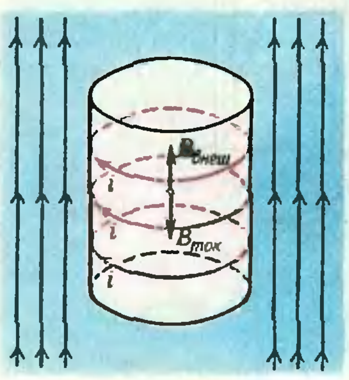


Рис. 2.

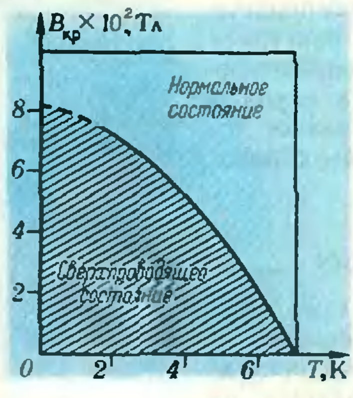


Рис. 3.

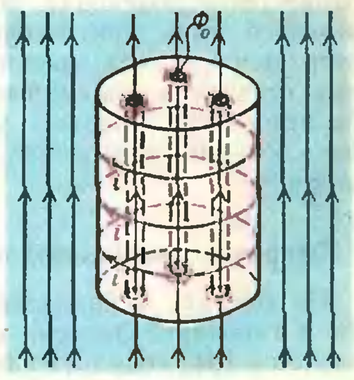


Рис. 4.

магнитным полем не так-то просто. Так же как у чистых сверхпроводников, при некотором значении индукции магнитное поле начинает проникать внутрь сверхпроводника. Но в сплавах магнитное поле обычно не сразу заполняет весь объем сверхпроводника. В толще его вначале образуются лишь отдельные сгустки линий индукции магнитного поля (рисунок 4). В каждом таком сгустке содержится строго определенная порция магнитного потока $\Phi_0 = 2 \cdot 10^{-15}$ Вб. Величина Φ_0 называется квантом магнитного потока.

Чем больше внешнее магнитное поле, тем больше таких сгустков, а следовательно, и квантов магнитного потока проникает в сверхпроводник. Поэтому магнитный поток в сверхпроводнике меняется не непрерывно, а скачками, дискретно. Обычно дискретность физических величин проявляется в микромире (например, квантуется энергия электронов в атоме). Здесь мы сталкиваемся с удивительным явлением — законы квантовой механики «работают» в макроскопических масштабах.

Каждый сгусток линий индукции магнитного поля в сверхпроводнике окружен кольцевыми незатухающими токами (см. рисунок 4), которые напоминают вихри в жидкости или газе. Вот почему такие сгустки линий, окруженные сверхпроводящими токами, называют абрикосовскими вихрями. Внутри каждого вихря сверхпроводимость, разумеется, разрушена. Но в пространстве между вихрями она сохраняется! Только при очень сильных полях, когда вихрей становится так много, что они начинают перекрываться, наступает полное разрушение сверхпроводимости.

Такая необычная картина разрушения сверхпроводимости магнитным полем в сплавах впервые была открыта

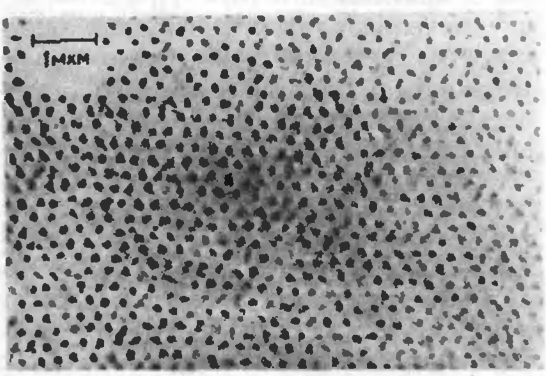


Рис. 5.

«на кончике пера». Однако современная экспериментальная техника позволяет наблюдать абрикосовские вихри непосредственно. Для этого на поверхность сверхпроводника (например, поперечное сечение цилиндра) наносят тончайший магнитный порошок. Частицы порошка скапливаются в тех областях, куда проникло магнитное поле. Размеры каждой области невелики и обычно составляют доли микрона. Если посмотреть на поверхность в электронный микроскоп, то видны темные пятна.

На рисунке 5 показана фотография структуры абрикосовских вихрей, полученная таким способом. Видно, что вихри расположены периодически и образуют решетку, аналогичную кристаллической решетке. Вихревая решетка треугольная (ее можно составить из повторяющихся правильных треугольников).

Итак, в отличие от чистых металлов сплавы имеют не одно, а два критических поля: нижнее критическое поле, при котором первый вихрь проникает в сверхпроводник, и верхнее критическое поле, при котором происходит полное разрушение сверхпроводимости. В промежутке между этими значениями полей сверхпроводник пронизан вихревыми линиями и находится в особом смешанном состоянии. Сверхпроводники с такими свойствами теперь называют сверхпроводниками второго рода, в отличие от сверхпроводников первого рода, в которых разрушение сверхпроводимости в магнитном поле происходит сразу, скачком.

В 50-х годах началась настоящая охота за сверхпроводящими материалами, обладающими высокими критическими полями и температурами. Какими только способами их ни получали! И дуговой сваркой, и быстрым охлаждением, и напылением на горячую подложку. Были открыты, например, сплавы Nb_3Sn и Nb_3Al, имеющие критическую температуру (температуру перехода в сверхпроводящее состояние) 18 К и верхние критические поля более 10 Тл, и многие другие сверхпроводящие соединения с рекордными критическими параметрами.

Казалось бы, проблема создания сверхпроводящих магнитов тем самым решена. Но тут природа поставила на пути исследователей еще одну преграду. Ведь для сверхпроводящего соленоида необходима проволока, которая выдерживала бы не только сильное магнитное поле, но и сильный электрический ток. А это, оказывается, не одно и то же.

Что такое пиннинг?

Известно, что на проводник с током в магнитном поле действует сила. А куда приложена сила противодействия, возникающая по третьему закону Ньютона? Если, например, магнитное поле создается другим проводником с током, то на него действует равная по величине и противоположная по направлению сила (силы взаимодействия между проводниками с током определяются законом Ампера).

В нашем случае ситуация более сложная.

Когда сверхпроводник находится в смешанном состоянии и по нему течет ток, то в тех областях, где имеется магнитное поле (сердцевины вихрей), возникают силы взаимодействия между током и полем. В результате распределение тока изменяется, но и области, в которых сосредоточено магнитное поле, не остаются неподвижными, а начинают перемещаться. Абрикосовские вихри под действием тока движутся!

Сила, действующая на ток в магнитном поле, перпендикулярна индукции магнитного поля и направлению проводника. Сила, действующая со стороны тока на абрикосовский вихрь, тоже перпендикулярна индукции магнитного поля и направлению тока. Если, например, в сверхпроводнике в смешанном состоянии, показанном на рисунке 5, создать ток, протекающий слева направо, то абрикосовские вихри под действием тока начнут двигаться снизу вверх или сверху вниз (в зависимости от направления индукции магнитного поля). Но движение абрикосовского вихря сквозь сверхпроводник — это перемещение нормальной, не сверхпроводящей, сердцевины. При таком движении возникает своеобразное трение, которое приводит к выделению тепла. Значит, при протекании тока через сверхпроводник, находящийся в смешанном состоянии, все-таки появляется сопротивление и использовать такие сверхпроводники для создания соленоидов нельзя.

В чем же выход? Надо помешать вихрям двигаться, закрепить их на месте.

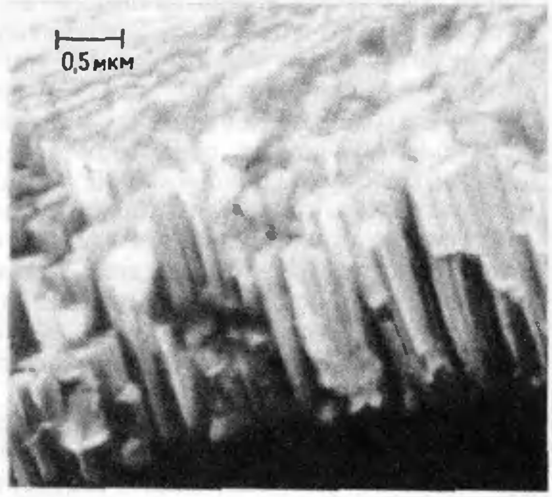


Рис. 6.

Сделать это, оказывается, можно. Надо только «испортить» сверхпроводник, создать в нем какие-то дефекты. Дефекты обычно возникают сами по себе в результате механической или термической обработки материала. На рисунке 6, например, показана электронно-микроскопическая фотография пленки нитрида ниобия (критическая температура которой 15 К), полученной напылением металла на стеклянную пластинку. Ясно видна зернистая (столбчатая) структура материала. Перескочить через границу зерна вихрю довольно сложно. Вот почему до определенного значения тока (его называют критическим током) вихри остаются неподвижными. Электрическое сопротивление в таком случае равно нулю.

Это явление называют пиннингом — от английского слова pinning, что в переводе на русский язык означает прикалывание.

Благодаря пиннингу можно получать сверхпроводящие материалы с высоким значением как критического поля, так и критического тока. При этом, если значение критического поля определяется свойствами самого материала, то значение критического тока (точнее, его плотности, то есть силы тока, приходящейся на единицу площади сечения) во многом зависит от способа приготовления, методов обработки материала. Сейчас разработана технология, позволяющая получать сверхпроводящие материалы, имеющие высокие значения всех критических параметров. Например, на основе сплава ниобия с оловом можно получить материал с плотностью критического тока в сотни тысяч ампер на квадратный сантиметр, верхним критическим полем 25 Тл и критической температурой 18 К.

Но это еще не все. Ведь важны и механические свойства материала — из него предстоит сделать катушку. Сам по себе сплав ниобия с оловом хрупкий, и такую проволоку изгибать нельзя. Поэтому сверхпроводящие соленоиды изготавливали следующим образом: порошок из ниобия и олова набивали в ниобиевую трубку. Затем трубку вытягивали в проволоку, наматывали катушку и нагревали. В результате получался готовый соленоид из сплава Nb_3Sn.

В промышленности используются более технологичные материалы, например, сплав ниобия с титаном NbTi, который обладает достаточной пластичностью. На основе этого сплава создают так называемые композиционные сверхпроводники.

В бруске меди просверливается множество дыр и туда вводят стержни сверхпроводника. Затем брусок вытягивают в длинную проволоку. Проволоку разрезают на куски и снова вводят в медный брусок. Опять вытягивают проволоку, разрезают на куски и т. д. В результате получается кабель, содержащий до миллиона сверхпроводящих жил, из которого и наматывают катушки.

Важное преимущество кабелей состоит в том, что сверхпроводящий ток распределяется в них по всем жилам. Для сверхпроводника даже медь является хорошим изолятором — при параллельном соединении медного и сверхпроводящего проводников весь ток течет по сверхпроводнику, обладающему нулевым сопротивлением. Есть и еще одно преимущество. Представим себе, что в какой-то жиле сверхпроводимость случайно разрушилась. Тогда выделяется тепло, и важно отвести его, для того чтобы предотвратить переход всего кабеля в нормальное состояние. Медь, которая является хорошим теплопроводником, успешно справляется и с этой задачей, осуществляя термическую стабилизацию. Кроме того, медь обеспечивает хорошие механические свойства кабелей.*)

*) В «Кванте» № 9 за 1982 год на обложке были показаны образцы многожильных сверхпроводящих кабелей.

Где применяют сверхпроводящие соленоиды

«Профессии» сверхпроводящих магнитов весьма разнообразны. Они играют важную роль в физике высоких энергий, помогают исследовать твердые тела, применяются в электротехнике и даже на транспорте. О проектах поездов на магнитной подушке в наше время, наверное, слышали все школьники. Сверхпроводящие соленоиды, установленные в вагоне, создают мощное магнитное поле, которое при движении поезда наводит индукционные токи в специальных рельсах. Согласно правилу Ленца магнитное поле этих токов направлено так, чтобы препятствовать приближению соленоида к рельсу, и поезд... повисает над полотном. В Японии уже создана семикилометровая экспериментальная линия, на которой поезд весом в 10 тонн мчится со скоростью более 500 (!) километров в час. В нашей стране разработан технический проект транспортной системы на магнитной подушке для города Алма-Ата.

В электротехнике использование сверхпроводящих магнитов становится целесообразным при создании электрических двигателей и генераторов гигантской мощности в сотни и более мегаватт. Сверхпроводящие обмотки в статоре создают сильное постоянное магнитное поле, в котором вращается ротор из нормального металла. При этом достигается значительное уменьшение размеров и веса установки. Такие двигатели мощностью в несколько мегаватт уже созданы и разрабатываются проекты более мощных машин. Еще бо́льшие преимущества дает применение сверхпроводящей обмотки ротора, но при реализации этой идеи возникает много технических проблем.

Мы знаем, что магнитное поле действует на движущиеся заряженные частицы (токи) силой Лоренца. Она направлена перпендикулярно скорости частицы и искривляет ее траекторию. Чем больше индукция магнитного поля, тем меньше радиус окружности, по которой движется частица в магнитном поле. Именно такой принцип магнитного «удержания» частиц применяется в ускорителях, пузырьковых камерах, установках управляемого термоядерного синтеза. Преимущества использования для этих целей сверхпроводящих магнитов, создающих сильные магнитные поля без затрат огромных энергий, очевидны. В нашей стране уже действует первая в мире сверхпроводящая система для установки термоядерного синтеза «Токамак-7» и разработана установка «Токамак-15», в которой будет накапливаться магнитная энергия в 600 миллионов джоулей. Создание устройств следующих поколений, рассчитанных на более высокие энергии, без использования сверхпроводимости просто невозможно.

При исследовании твердых тел, молекул и атомов, ядер необходимо создавать сильные магнитные поля в малых объемах, а также очень однородные магнитные поля. Сверхпроводящие магниты в таких случаях незаменимы и сейчас широко используются в физических лабораториях. Маленькие сверхсильные соленоиды в комплекте с системой охлаждения стали уже промышленной продукцией, выпуск которой все более расширяется.

Энергетика будущего — это не только новые источники энергии. Необходимо разработать новые эффективные способы хранения и передачи электроэнергии. Сверхпроводники и здесь предлагают свои услуги. Учеными Висконсинского университета (США) разработан проект системы хранения электроэнергии. Гигантская сверхпроводящая катушка диаметром более 100 метров будет установлена в специальном тоннеле, пробитом в горах. В нем с помощью холодильных установок с жидким гелием будет поддерживаться температура, близкая к абсолютному нулю. Незатухающий сверхпроводящий ток в такой катушке запасет гигантскую энергию в $4 \cdot 10^{11}$ Дж. Установку планируется создать к 1987 году.

А передача энергии без потерь по сверхпроводящим кабелям? Пока что можно только мечтать о линиях электропередач, которые, «купаясь» в жидком гелии, переносили бы электричество без потерь на огромные расстояния. Но сверхпроводимость ведь еще не сказала последнего слова. Вполне возможно, что появятся материалы, которые будут становиться сверхпроводниками при температурах жидкого азота. И тогда сразу все изменится. Фантазия станет реальностью. Хочется верить, что читателям «Кванта» предстоит это увидеть.

Традиционный осенний праздник юных математиков

В начале ноября в гостеприимной столице Аджарии — г. Батуми в очередной раз соберутся юные любители математики. Традиционный батумский праздник — давний друг и почти ровесник «Кванта»: в прошлом году он отметил свое 15-летие. Этот небольшой юбилей был отмечен рекордным числом делегаций (14), участников (более 200), докладов на конференции (43). Тем больше заслуга организаторов праздника, сумевших четко продумать и осуществить всю его весьма насыщенную программу. Среди них нужно отметить работников Министерства просвещения Аджарской АССР (Л. А. Чантурая и В. М. Цулукидзе), Батумского гороно (А. В. Готишвили), общества «Знание» (Д. У. Чхендзе), Областного совета профсоюзов (Ш. М. Окропиридзе) и, конечно, главного инициатора и вдохновителя этого замечательного слета юных математиков — заслуженную учительницу республики Медею Илларионовну Жгенти.

За 15 лет батумцы выработали прочные традиции проведения своего праздника и многое из их опыта безусловно может быть использовано в других городах, не только на конференциях, собирающих участников из разных мест, но и на встречах нескольких школ одного города. Это касается и собственно конференции, занимающей центральное место, то есть докладов школьников и их обсуждения (с участием членов жюри — математиков и педагогов), и вечера занимательной математики, и конкурса математических стенгазет и, конечно, любимого всеми веселого математического КВНа (ведущий которого, по традиции, главный «затейник» нашего журнала А. П. Савин).

Истинно праздничному настроению участников в прошлом году весьма способствовала великолепная солнечная погода, не совсем обычная для этого времени в Батуми. Она украсила экскурсии в знаменитый ботанический сад и дельфинарий, ноябрьскую демонстрацию, на которой гостям особенно понравились живые картины, посвященные 200-летию Георгиевского трактата — союза между Грузией и Россией, прогулки по приморскому бульвару.

(Окончание см. на с. 28)

Элементарные функции

Кандидат физико-математических наук
А. П. ВЕСЕЛОВ
Кандидат физико-математических наук
С. Г. ГИНДИКИН

В этой статье рассматриваются показательные, логарифмические и тригонометрические функции. Эти функции причисляют к классу элементарных функций (в который еще входит линейная функция $y=ax+b$, степенная $y=x^n$, а также всевозможные комбинации перечисленных функций — суммы, разности, произведения, частные и композиции). Эти функции называют так потому, что это были первые функции, которые изучались в математике, и долго багаж математиков не выходил за пределы этих функций.

Мы рассмотрим два основных подхода к определению показательных, логарифмических и тригонометрических функций: аксиоматический и кинематический, убедимся в том, что эти подходы приводят к тем же функциям, и обсудим их связь со «школьными» определениями.

Аксиоматическое определение показательной функции

Показательная функция a^x — это такая функция $y=f(x)$, что выполнены следующие условия:

1) f определена для всех x;

2) $f(1)=a>0$ $(a\neq 1)$; (1)

3) для любых x, y выполнено соотношение

$$f(x+y)=f(x)f(y); \qquad (2)$$

4) $f(x)$ — монотонная функция.

Школьная теория показательной функции заключается в построении функции, удовлетворяющей четырем перечисленным свойствам; важно, что существует только одна функция, обладающая этими свойствами. Впрочем, в школе доказывается лишь, что 2), 3) определяют f однозначно для рациональных x; утверждение об однозначном продолжении на все x с рациональных x при условии 4) приводится без доказательства (доказательство можно найти в статье Р. К. Гордина «Что такое степень», Квант, 1981, № 2).

Такие определения объекта при помощи перечисления свойств, его характеризующих, называются *аксиоматическими*. Необходимо уяснить, что аксиоматическое определение показательной функции в сущности не отличается от школьного определения. Соотношение (2) называется *функциональным уравнением* для показательной функции. Функциональные уравнения связывают значения функций в разных точках, а их *решениями* называют ф у н к ц и и, которые этим соотношениям удовлетворяют. В данном случае показательные функции являются решениями функционального уравнения (2) (а при выполнении указанных выше дополнительных ограничений других решений нет).

З а д а ч а 1. Докажите, что всякое решение (2), определенное для всех x, — это или тождественный нуль или всюду положительная функция (и значит всюду определенная показательная функция существует лишь для неотрицательных оснований a).

Принятый сегодня аксиоматический *подход к определению показательной* функции возник не сразу. Замечательно, что показательная функция появилась впервые как решение дифференциального уравнения. Эта история заслуживает того, чтобы ее вспомнить.

Кинематическое определение показательной функции

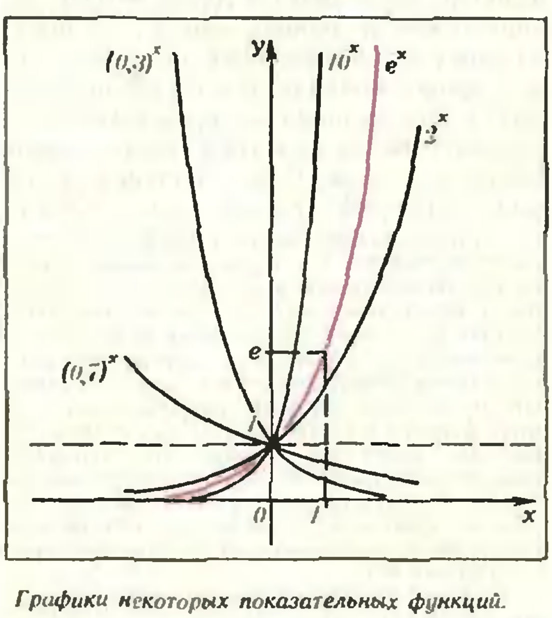
В самом начале XVII века Галилей (1564—1642) хотел открыть закон, по которому происходит свободное падение. Он надеялся открыть этот закон чисто умозрительно, руководствуясь лишь соображениями простоты. Поэтому он предположил, что скорость свободного падения должна быть пропорциональна пройденному пути:

$$\dot{s}=\lambda s. \qquad (3)$$

По физическим соображениям $\lambda>0$ (движение ускорено) и $s(0)=0$ (в начальный момент тело покоится). Через некоторое время Галилей с большим удивлением обнаружил, что дифференциальное уравнение (3) не может иметь решения с $s(0)=0$, отличного от $s\equiv0$ (невозможно движение со свойствами, которые Галилей первоначально приписал свободному падению).

Задача 2. Докажите утверждение Галилея.

Указание. Пусть $\lambda>0$; тогда скорость $\dot{s}$ возрастает с увеличением s. Если в некоторый момент времени t_0 имеем: $s(t_0)=c>0$, то $\dot{s}(t_0)=\lambda c$; $\dot{s}(t)<\lambda c$ при $t<t_0$, а значит, $t_0>1/\lambda$ *независимо от* c! *Отсюда легко вывести, что* $s\equiv0$.



Графики некоторых показательных функций.

Это наблюдение побудило Галилея поменять предполагаемый закон на $\dot{s}=gt$, что привело его к открытию закона свободного падения, а движением по закону (3) он больше не интересовался. Подробнее об этом можно прочитать в книге С. Г. Гиндикина «Рассказы о физиках и математиках» (М., «Наука», 1981).

Мы же должны вспомнить еще об одном замечательном математике — Джоне Непере, бароне Мерчистоне (1550—1617), который почти в те же годы, что и Галилей, совершенно по другим причинам исследовал движение по закону (3). Если Галилей стремился получить математическое описание реального механического явления, то Непер двигался прямо в противоположном направлении: он хотел дать механическую интерпретацию чисто математическим процедурам. Еще до Непера математики пытались воспользоваться связью между арифметической и геометрической прогрессией для упрощения вычислений (замены умножения сложением!). Для увеличения точности требовались все более «частые» прогрессии и гениальная догадка Непера состояла в том, что следует дойти в этом до конца и заменить дискретные прогрессии непрерывными величинами — функциями. Рассматривая для этого воображаемое движение по закону (3) и интерпретируя время как непрерывный аналог арифметической прогрессии, Непер убеждается, что тогда путь будет аналогом геометрической прогрессии. Именно, если время t увеличить на k единиц, то путь умножается на q^k для некоторого q; если перейти к более мелким единицам времени, то по-прежнему сдвигам по времени t отвечают преобразования по закону геометрической прогрессии.

Главное отличие подхода Непера от подхода Галилея состоит в том, что он снимает ограничение $s(0)=0$. Пусть λ фиксировано. Из утверждения Галилея следует важное свойство движений (3). Движение по закону (3) для фиксированного λ полностью определяется значением s в любой фиксированный момент времени t_0. Действительно, если $s_1(t)$, $s_2(t)$ — два движения с $s_1(t_0)=s_2(t_0)$, то для $s(t)=s_1(t)-s_2(t)$, также являющегося решением (3), имеем: $s(t_0)=0$, то есть $s\equiv0$; по теореме Галилея и $s_1(t)=s_2(t)$. Далее, если s — решение (3), то $s_1(t+t_0)$ — также решение, а значит, все решения (3) отличаются лишь постоянным множителем. Также, если s — решение, то $s_1(t)=s(t+t_0)$ — также решение (для фиксированного t_0).

Пусть $S_\lambda(t)$ — такое решение (3), что $S_\lambda(0)=1$. Возьмем

$$s_1(t)=S_\lambda(t+t_0), \qquad s_2(t)=S_\lambda(t)S_\lambda(t_0).$$

Обе эти функции будут решениями (3), принимающими одно и то же значение $S_\lambda(t_0)$ при $t=0$, а потому должны совпадать. Мы получаем, что

$$S_\lambda(t+t_0)=S_\lambda(t)S_\lambda(t_0). \qquad (4)$$

Далее, функция S_λ дифференцируема, значит, она непрерывна. По теореме Галилея она нигде не обращается в нуль, а значит, она всюду имеет один и тот же знак, то есть $S_\lambda(t)>0$ ($S_\lambda(0)=1$). В силу (3), тогда $\dot{S}_\lambda(t)$ всюду имеет тот же знак, что и λ, то есть возрастает при $\lambda>0$, убывает при $\lambda<0$. Итак, *решение уравнения* (3) *с* $s(0)=1$ *обязательно является показательной функцией*. Если теперь продифференцировать (4) по t_0 и положить $t_0=0$, мы получим

$$\dot{S}_\lambda(t)=S_\lambda(t)\dot{S}_\lambda(0). \qquad (5)$$

Значит,показательная функция (в предположении, что она дифференцируема) является решением (3), $\lambda=\dot{S}_\lambda(0)$. Дифференцируемость показательной функции доказывается непосредственно (см. «Алгебра и начала анализа 9—10», п. 65).

Необходимо обсудить еще один вопрос. Мы исследовали решения (3) в предположении, что они существуют. Это предположение следует из общего факта про дифференциальные уравнения, который мы не будем здесь доказывать*). Если принять его, то мы получим доказательство существования показательной функции, отличное от обсуждавшегося выше. С другой стороны, из существования и дифференцируемости показательной функции следует разрешимость уравнения (3).

Число e (неперово число)

У нас теперь два подхода к определению показательной функции. При аксиоматическом определении показательные функции естественно различать по их основаниям $f(1)=a$. Если же исходить из уравнения (3), то в основу более естественно положить коэффициент λ. *Как связаны эти константы?* Прежде всего при кинематическом подходе естественно выделить показательную функцию, отвечающую $\lambda=1$. Ее основание принято обозначать через e и называть *неперовым числом*, а саму функцию иногда обозначают $\exp t$ (по началу слова «экспонента»). Итак, для движения, происходящего по закону $\dot{s}=s$, для которого $s(0)=1$, имеем: $s(t)=e^t$ $(=\exp t)$.

*) «Квант» предполагает вернуться к этому вопросу в одном из ближайших номеров журнала.

Исследуем число e. Это расстояние от начала, на котором в момент времени $t=1$ окажется точка. Поскольку движение происходит со скоростью, большей 1, а начинается движение на расстоянии 1 от начала, мы получаем, что при $t=1$ расстояние $e>1+1=2$. Покажем, что, с другой стороны, $e<3$ (точка не успеет уйти за отметку 3). Для этого разобьем путь от 1 до 3 на 8 равных частей (длина одной части 1/4). Первый отрезок точка пройдет со скоростью, не превышающей ее значения в правом конце отрезка, где, в силу (3), она равна 5/4; следовательно, время, которое потребуется на этот отрезок, не менее 1/5. Аналогично на второй отрезок уйдет не менее 1/6, на третий — не менее 1/7 и т. д. Общее время на путь от 1 до 3 не менее, чем

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12},$$

а эта сумма больше 1. Значит, точка e лежит ближе 3.

Если теперь разбить отрезок времени [0, 1] на n равных частей, то на первом отрезке времени скорость больше 1, точка пройдет за $\Delta t=1/n$ путь, больший $1/n$ и окажется от начала дальше, чем $1+1/n$ со скоростью, превышающей, в силу (3), $1+1/n$; тогда на следующем отрезке $\Delta=1/n$ будет пройден путь, больший $(1+1/n)/n$, и точка окажется от начала на расстоянии большем $(1+1/n)^2$ со скоростью, большей $(1+1/n)^2$ и т. д., в момент времени $t=1$ — на расстоянии $(1+1/n)^n$ от начала.

Из этого рассуждения представляется правдоподобным, что при увеличении n величина $a_n=(1+1/n)^n$ возрастает (докажите, что это действительно так!) и стремится к e. В учебнике «Алгебра и начала анализа 9—10» (§ 22, п. 113) доказывается, что

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

откуда, в частности, e можно определить с любой точностью. Напомним, что $e=2{,}718281828459045\ldots$ Аналогично доказывается, что

$$e^t=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{n}\right)^n. \qquad (6)$$

Продумайте кинематическую интерпретацию этого равенства.

Задача 3. Дайте кинематическое доказательство неравенства

$$e < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Указание. Разбейте отрезок пути $[1, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}]$ на $(n+1)$ отрезков вида $[\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1}, \left(1+\frac{1}{n}\right)^{k}]$. Тогда при движении по k-му отрезку длины $\frac{1}{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k}$ по закону $\dot{s}=s$ скорость не превосходит $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k}$, *а затраченное время соответственно* больше,чем $1/n+1$, то есть общее время больше 1.

Вернемся к вопросу, с которого начинался наш разговор о числе e. Пусть $S_\lambda(t)=a^t$. Как связаны λ и a? Замечая, что если $s(t)$ — решение (3) *для некоторого* λ, то $s(ct)$ — решение (3) с $\lambda'=c\lambda$ и тем же значением в нуле, то есть $S_{\lambda c}(t)=S(ct)$, откуда

$$S_\lambda(t)=a^t,\ \text{где } a=e^\lambda.$$

Таким образом, связь между a и λ очень просто выражается через неперово число.

Подведем итоги рассмотрения уравнения (3). Мы доказали, что общее решение этого уравнения имеет *вид*

$$s(t)=s_0\exp(\lambda t),\quad s_0=s(0).$$

Уравнение (3) называют *уравнением показательного* (или *экспоненциального) роста* (или *убывания* при $\lambda<0$). Оно описывает многие процессы, встречающиеся в природе: радиоактивный распад, изменение температуры со временем и давления с высотой, законы биологического и социального развития и другие процессы. Важнейшей характеристикой показательной функции, проявляющейся в описываемых ею явлениях, является быстрый рост (при $\lambda>0$). В частности, экспоненциальный рост (при $\lambda>0$) превосходит любой степенной рост, а экспоненциальное убывание (при $\lambda<0$) — степенное убывание, именно

$$\lim_{t\to+\infty}\frac{t^k}{e^{\lambda t}}=0\ (\lambda>0),\quad \lim_{t\to+\infty} e^{\lambda t}t^k=0\ (\lambda<0)$$

(«Алгебра и начала анализа 9—10», § 22, п. 117).

Логарифмическая функция $\log_a x$, $a>0$, $a\neq1$

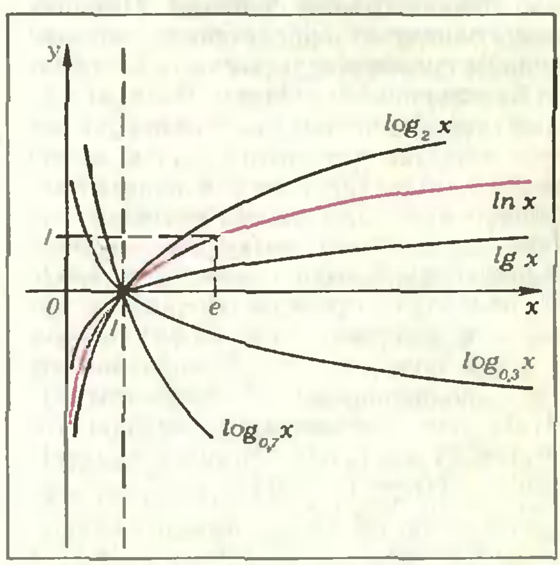
Эта функция определяется как функция, обратная к показательной функции a^x, $a\neq1$, и все ее свойства непосредственно следуют из этого определения. Она определена при $x>0$, ее область значений — вся прямая, $\log_a x$ возрастает при $a>1$ и убывает при $a<1$, $\log_a 1=0$, но, самое главное, имеет место функциональное уравнение (называемое «основным свойством логарифма» в школе)

$$\log_a xy=\log_a x+\log_a y, \tag{7}$$

которое непосредственно следует из функционального уравнения для показательной функции (1) (почему?). *Логарифмическую функцию можно также* описать аксиоматически: $\log_a x$ — *это монотонная функция, равная* 1 *при* $x=a$, удовлетворяющая (7) и определенная при всех $x>0$ (докажите!). Отметим, что при переходе к логарифмической функции мы существенно пользуемся строгой монотонностью a^x при $a\neq1$ (это обеспечивает существование обратной функции); по этой причине исключено $a=1$.

Натуральный логарифм $\ln x$ определяется как функция, обратная к e^x, то есть как время, необходимое точке, движущейся по закону $\dot{s}=s$, чтобы попасть из 1 в x.

Надо сказать, что именно логарифмическая функция, а не показательная, была целью Непера. Однако построенная им картина была несколько осложнена. Он рассмотрел уравнение (3) с $\lambda=10^{-7}$ и взял его решение с $s(0)=10^7$, то есть $s(t)=10^7\exp(10^{-7}t)$; соответственно обратная функция — неперов логарифм — *имела* вид $t=\text{Nep}\log x=10^7\ln 10+10^7\ln x$, и для нее не верно, что $t(x\cdot y)=t(x)t(y)$, $t(1)=0$. К концу двадцатилетних усилий по составлению таблиц логарифмов Непер чувствовал несомненную неудовлетворенность принятой им системой. Он уже *обладал* идеей десятичных логарифмов, но не имел сил провести необходимые вычисле-



Графики некоторых логарифмических функций.

ния. Соответствующие таблицы составил лондонский математик Генри Бригс, который имел возможность обсуждать идею десятичных логарифмов с Непером в его последние годы. Десятичные логарифмы до сих пор иногда называют *бригсовыми* (им была посвящена книга Бригса «Арифметика логарифмов», вышедшая в 1624 г.). Натуральные логарифмы появились в 1619 году в книге малоизвестного учителя математики Спейделя (небольшая анонимная таблица появилась на год раньше в приложении ко второму изданию книги Непера).

Из кинематического определения логарифмов по правилу дифференцирования обратной функции получается

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

Далее, указанная выше связь между λ и основанием решения $S_\lambda(t)$ означает, что $(a^t)'=\ln a\cdot a^t$, откуда

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

Задача 4. Найти максимальное среди чисел вида $\sqrt[n]{n}$ (n — натуральное число).

Указание. Исследуйте на экстремум функцию

$$f(x)=x^{\frac{1}{x}}=\exp\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$

или, что эквивалентно, $g(x)=\ln x/x$.

Функция $\ln x$ удобна для вычисления различных показателей процессов, описываемых уравнением (3). Так, если за характеристику роста (убывания) принять время τ, в течение которого величина удваивается (или уменьшается в два раза), то поскольку $e^{\lambda\tau}=2$, получим $\tau=\frac{\ln 2}{\lambda}$ при $\lambda>0$ и $\tau=-\frac{\ln 2}{\lambda}$ при $\lambda<0$. В случае радиоактивного распада τ называют *временем полураспада* ($\lambda<0$).

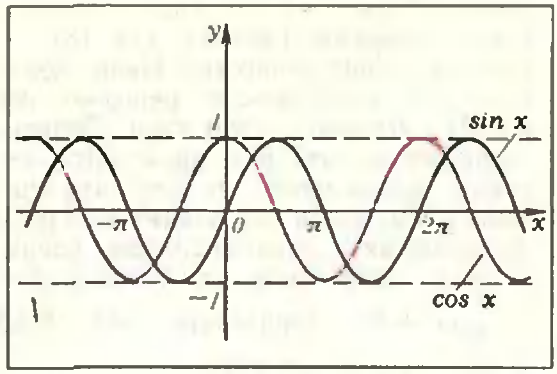
Задача 5. Срочный вклад в сберегательной кассе за год увеличивается на 3%. За сколько лет он увеличится в 2 раза?

Наконец, отметим, что в силу того, что показательная функция очень быстро растет, логарифмическая функция, напротив, растет чрезвычайно медленно. Она растет медленнее любой положительной степени x:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0,\ \alpha>0.$$

Тригонометрические функции

Оба пути, которые мы обсуждали в связи с показательной функцией (аксиоматический и кинематический), имеются и для тригонометрических функций. Однако не один из них не был исторически первым. Первично естественно определять тригонометрические функции через отношения сторон в треугольнике или тригонометрическом круге. Правда, при этом возникают функции, принимающие числовые значения, в то время как их аргумент принимает угловые, а не числовые значения. Чтобы перейти к функциям числового аргумента, надо научиться измерять углы. Надо сказать, что хотя тригонометрия развивалась, начиная со II века до н. э., причем ей придавалось большое значение в связи с астрономическими вычислениями, сегодняшнее определение тригонометрических функций появилось лишь в XVIII веке (в значительной степени у Эйлера). До этого обходились всевозможными таблицами, например, хорд, отвечающих углам. Нельзя забывать, что долго для большинства математиков функции не выходили за пределы алгебраических функций и не приходило в голову, что тригонометрия как-то связана с анализом.



Графики некоторых тригонометрических функций.

Остановимся на кинематическом определении тригонометрических функций. Рассмотрим один из самых простых законов: ускорение (или сила) пропорциональны расстоянию, или

$$\ddot{x}+\omega^2x=0. \qquad (8)$$

Это уравнение называется *уравнением гармонических* колебаний (оно описывает движение шарика на пружинке, качания маятника около положения равновесия и т. д.). Ограничимся вначале случаем $\omega=1$

$$\ddot{x}+x=0. \qquad (9)$$

Мы знаем, что решениями этого уравнения являются $\sin t$ и $\cos t$, но попытаемся получить их независимое определение. Прежде всего надо получить аналог теоремы Галилея для (3) — теорему единственности. Надо доказать, что единственное решение (9) с $x(0)=\dot{x}(0)=0$ — это $x\equiv 0$. Обратите внимание, что нам приходится задавать два условия при $t=0$, что связано с тем, что в (9) входит **вторая** производная. Доказательство следует из сохранения величины $E=\frac{1}{2}(\dot{x}^2+x^2)$ (проверьте, что $\dot{E}=0$ в силу уравнения (9)).

Обозначим через $s(t)$ решение (9) с $s(0)=0$, $\dot{s}(0)=1$. Исследуем свойства этого решения (которое на самом деле совпадает с $\sin t$, но мы хотим вывести все свойства из уравнения (9)).

1) Пусть $c(t)=\dot{s}(t)$; тогда $c(t)$ — решение (9) с начальными условиями $c(0)=1$, $\dot{c}(0)=0$ (проверяется непосредственным дифференцированием: $\ddot{c}=\dddot{s}=-\dot{s}=-c$, $\dot{c}=-s$).

2) $s(t)=-s(-t)$, $c(t)=c(-t)$ (достаточно проверить, что $x(t)=-s(-t)$ является решением (9) с теми же условиями при $t=0$, что и $s(t)$; аналогично для $c(t)$).

3) Имеют место теоремы сложения

$$s(t+t_0)=s(t)c(t_0)+s(t_0)c(t), \qquad (10)$$

$$c(t+t_0)=c(t)c(t_0)-s(t)s(t_0). \qquad (11)$$

Достаточно убедиться, что левые и правые части при фиксированном t_0 являются решениями (9) с одинаковыми начальными данными при $t=0$.

Из теорем сложения можно вывести уже много новых тригонометрических формул (на самом деле почти все, но мы об этом еще поговорим). Например, полагая в (11) $t_0=-t$, получаем

$$c^2(t)+s^2(t)=1. \qquad (12)$$

Из (12) следует, что $|c(t)|\leqslant 1$, $|s(t)|\leqslant 1$.

4) Можно показать, что $c(t)$ обращается в нуль при некотором положительном значении аргумента.

Если бы это было не так, то $c(t)$ было бы положительным при $t>0$, а это означало бы, что функция $s(t)$ монотонно возрастает и, следовательно, при $t>0$ принимает положительные значения. Зафиксируем некоторый момент времени $t=t_0>0$, при этом $s(t_0)=s_0>0$. Равенство $\dot{c}(t)=-s(t)$ означает, что скорость убывания $c(t)$, начиная с момента t_0, больше s_0, и, следовательно, $c(t)$ обратится в нуль не позднее, чем через время $c(t_0)/s(t_0)$, что противоречит предположению о положительности $c(t)$.

Пусть τ — наименьшее из положительных чисел, обращающих в нуль функцию $c(t)$ (τ — константа, полностью определяемая уравнением (9), она равна $\pi/2$, но это требует специального доказательства). Из равенства (12) следует, что $s(\tau)=\pm 1$, но, поскольку $s(t)$ возрастает на интервале $(0,\ \tau)$ $(s(t)=c(t)>0)$, получаем $s(\tau)=1$. Из теорем сложения (10), (11) находим, что

$$s(t+\tau)=c(t),\ c(t+\tau)=-s(t).$$

Следовательно,

$$s(t+2\tau)=c(t+\tau)=-s(t),$$
$$c(t+2\tau)=-s(t+\tau)=-c(t),$$
$$s(t+4\tau)=-s(t+2\tau)=s(t),$$
$$c(t+4\tau)=-c(t+2\tau)=c(t).$$

Итак, решения $c(t)$, $s(t)$ периодичны с периодом $T=4\tau$. Можно показать, что меньшего периода не существует (докажите!).

Тем самым мы показали, что можно строить теорию тригонометрических функций, исследуя лишь уравнение (9). Что касается уравнения (8), то его общее решение имеет вид

$$x(t)=a\cos\omega t+b\sin\omega t,\ a=x(0),$$
$$b=\frac{\dot{x}(0)}{\omega}.$$

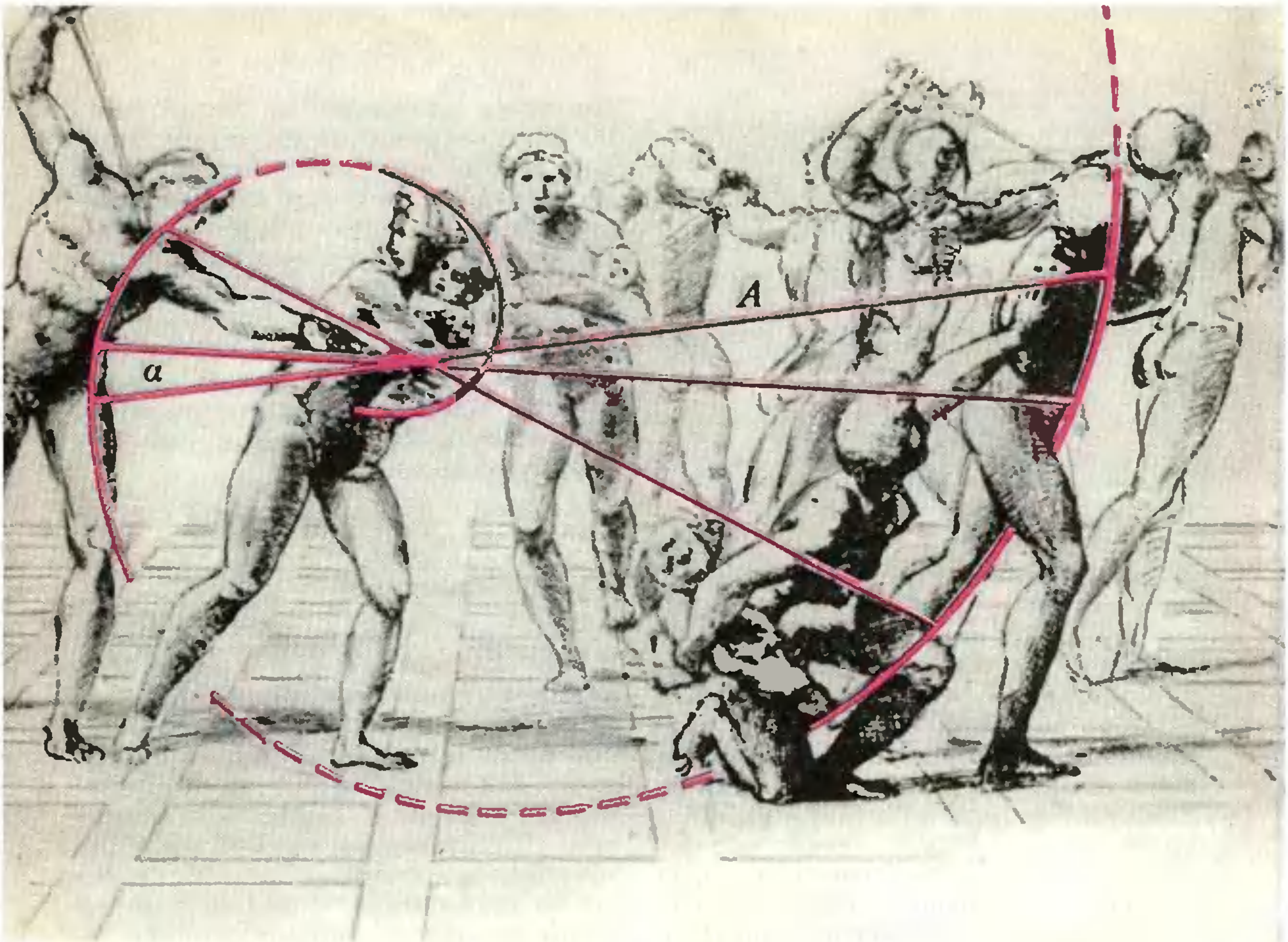
Функциональные уравнения для тригонометрических функций

Возможность характеризовать тригонометрические функции при помощи функциональных уравнений является принципиальным фактом. Грубо говоря, это означает, что при геометрическом определении тригонометрических функций достаточно доказать геометрически лишь теоремы сложения. Все остальные бесчисленные формулы тригонометрии (кроме формул с участием π) могут быть уже чисто формально выведены из теорем сложения без привлечения дополнительных геометрических соображений.

Точное утверждение (сравните с аналогичным аксиоматическим описанием показательной функции) составляет содержание следующей задачи.

Задача 6*. Пусть $s(t)$ и $c(t)$ — функции, которые: 1) определены при всех t; 2) $s(0)=0$, $c(0)=1$; 3) удовлетворяют функциональным уравнениям (10) и (11); 4) непрерывны. Тогда $c(t)=\cos\omega t$, $s(t)=\sin\omega t$ для некоторого действительного числа ω.

Указание. Воспользуйтесь тем фактом, что непрерывная функция полностью определяется своими значениями в точках вида $t=\frac{m}{2^k}t_0$ (m, k — целые числа, t_0 — произвольное фиксированное действительное число, не равное нулю).



Золотая спираль

А. И. ПРОХОРОВ

Измеряй все, что можешь измерить, и сделай таковым все, не поддающееся измерению.
Галилео Галилей

Геометрические мотивы нередко присутствуют в картинах великих живописцев. Геометрические схемы с большей или меньшей очевидностью просматриваются в самой композиции многих полотен. Их можно назвать пирамидальными, круговыми, диагональными, спиральными и т. п. в зависимости от той геометрической фигуры, которая положена в основу композиции. Художник при этом часто действует интуитивно, а искусствовед, исследуя композицию, выявляет ее основу, приводит картину к упрощенной геометрической схеме. Наша заметка — пример такого исследования, относящегося к художественному наследию великого Рафаэля Санти, 500-летие со дня рождения которого отмечалось в прошлом году.

Для дальнейшего нам потребуются

Две геометрические конструкции

Еще древние ввели в рассмотрение *золотое сечение* — такое деление («сечение») данного отрезка длины a на две неравные части x и y, $a=x+y$, $x>y$, при котором меньшая часть относится к большей так же, как большая часть к целому, то есть $x:y=x:a$. Из этого определения следует

$$\frac{a-x}{x}=\frac{x}{a}$$

или $x^2+ax-a^2=0$. Решая это квадратное уравнение и отбрасывая отрицательный корень, находим

$$\frac{x}{a}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}\approx 0{,}62.$$

Эта пропорция часто использовалась в древнегреческой архитектуре, например при строительстве знаменитого Парфенона. Архитекторы понимали, что при зрительном восприятии прямоугольник, отношение сторон которого

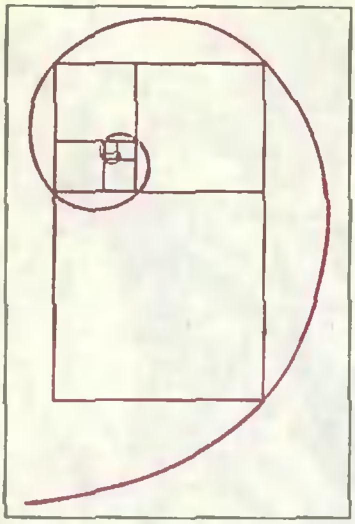


Рис. 1.

выбрано по золотому сечению, вызывает ощущение гармонии, покоя.

Напротив, ощущение динамики, волнения проявляется, пожалуй, сильней всего в другой простейшей геометрической фигуре — спирали. *Спираль* — это плоская линия, образованная движущейся точкой, которая удаляется по определенному закону от начала луча, равномерно вращающегося вокруг своего начала. Если точка удаляется от начала равномерно ($r=k\varphi$, где r — расстояние от начала, а φ — угол поворота луча), то получается *спираль Архимеда*. Если же точка удаляется по экспоненциальному закону ($r=ke^{m\varphi}$, рисунок 1), то получается *логарифмическая спираль*. Частным случаем логарифмической спирали является интересующая нас золотая спираль: она получается в том случае, если начало луча и параметры k и m экспоненциального закона выбраны так, чтобы спираль проходила через три из четырех вершин каждого из последовательно построенных на рисунке 1 «золотых прямоугольников».

Задача. Найдите параметры k и m для золотой спирали.

«Корабельная роща»

На этой знаменитой картине И. И. Шишкина (рисунок 2) с очевидностью просматриваются мотивы золотого сечения. Ярко освещенная солнцем сосна (стоящая на первом плане) делит длину картины по золотому сечению. Справа от сосны — освещенный солнцем пригорок. Он делит по золотому сечению правую часть картины по горизонтали. Слева от главной сосны находится множество сосен — при желании можно с успехом продолжить деление картины по золотому сечению и дальше. Наличие в картине ярких вертикалей и горизонталей, делящих ее в отношении золотого сече-

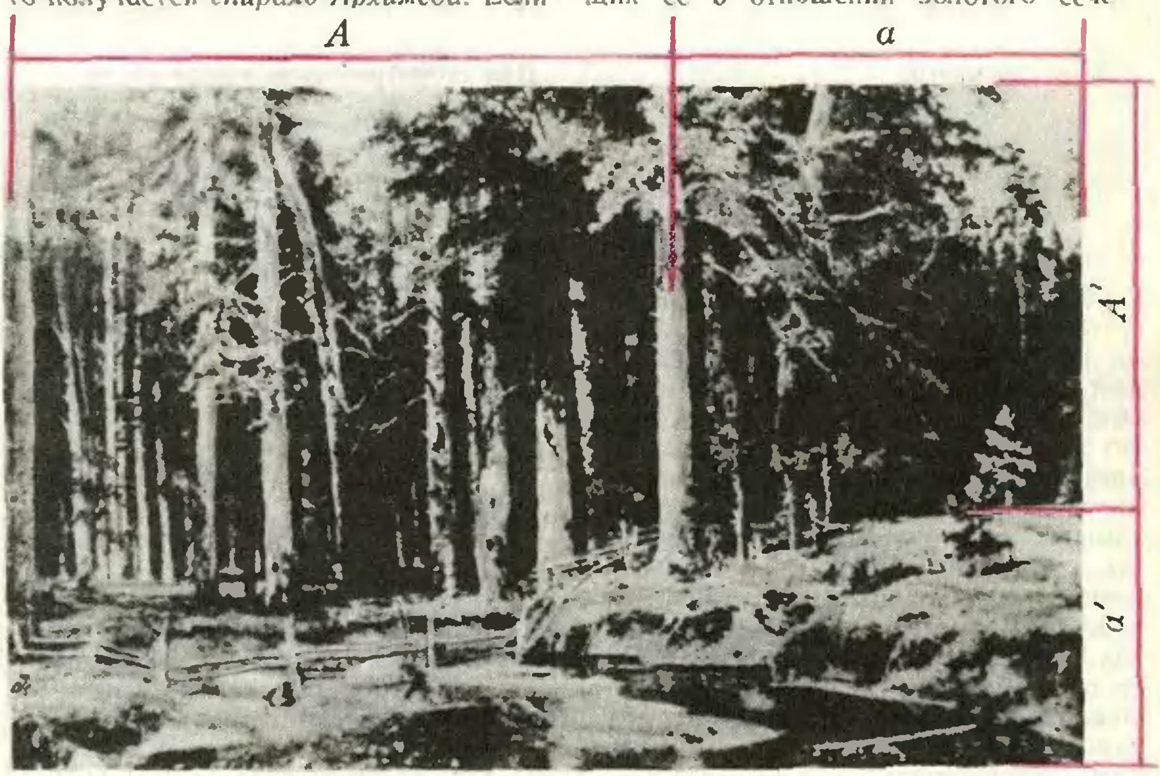


Рис. 2.

ния, придают ей характер уравновешенности и спокойствия, в соответствии с замыслом художника.

Когда же замысел художника иной, если, скажем, он создает картину с бурно развивающимся действием, подобная геометрическая схема композиции (с преобладанием вертикалей и горизонталей) становится неприемлемой.

«Избиение младенцев»

Многофигурная композиция (см. рисунок на с. 15), выполненная в 1509—1510 годах Рафаэлем, когда прославленный живописец создавал свои фрески в Ватикане, как раз отличается динамизмом и драматизмом сюжета. Рафаэль так и не довел свой замысел до завершения, однако, его экскиз был гравирован известным итальянским графиком Маркантонио Раймонди, который на основе этого эскиза и создал гравюру «Избиение младенцев» (рисунок 3).

На подготовительном эскизе Рафаэля мы провели красные линии, идущие от смыслового центра композиции — точки, где пальцы воина сомкнулись вокруг лодыжки ребенка, — вдоль фигур ребенка, женщины, прижимающей его к себе, воина с занесенным мячом и затем вдоль фигур такой же группы в правой части эскиза. Если естественным образом соединить эти куски кривой пунктиром, то с очень большой точностью получается ... золотая спираль! Это можно проверить, измеряя отношение длин отрезков, высекаемых спиралью на прямых, проходящих через начало кривой.

Мы не знаем, рисовал ли на самом деле Рафаэль золотую спираль при создании композиции «Избиение младенцев» или только «чувствовал» ее. Однако с уверенностью можно сказать, что гравер Раймонди эту спираль у в и д е л. Об этом свидетельствуют добавленные им новые элементы композиции, подчеркивающие разворот спирали в тех местах, где она у нас обозначена лишь пунктиром. Эти элементы можно увидеть на окончательной гравюре Раймонди: арка моста, идущая от головы женщины, — в левой части композиции и лежащее тело ребенка — в ее центре.

Первоначальную композицию Рафаэль выполнил в рассвете своих творческих сил, когда он создавал свои наиболее совершенные творения. Глава школы романтизма французский художник Эжен Делакруа (1798—1863)

(Окончание см. на с. 33)

Рис. 3.

Существуют ли планетные системы у других звезд?

Доктор физико-математических наук Л. С. МАРОЧНИК

Вопрос о том, существуют ли планетные системы у каких-либо еще звезд, кроме Солнца, в нашей Галактике, беспокоит человечество давно. Беспокоит, потому что, не имея на него ответа, невозможно даже подступиться к таким волнующим проблемам, как происхождение жизни, существование внеземных цивилизаций и т. п.

Если не доказательства, то, по крайней мере, серьезные аргументы в пользу существования планетной (или протопланетной) системы у звезды Веги (α созвездия Лиры) совсем недавно представил англо-американо-голландский спутник ИРАС (IRAS — Infra Red Astronomical Satellite).

Известно, что максимум интенсивности в спектре свечения Веги приходится на ультрафиолетовую область и что по мере увеличения длин волн интенсивность должна быстро спадать. ИРАС, однако, зарегистрировал большую избыточную интенсивность в инфракрасной части спектра. Это означало, что инфракрасные детекторы ИРАСа обнаружили окружающее Вегу холодное облако твердых частиц, нагретых до температуры 90 К и имеющих миллиметровые размеры*), что в тысячи раз больше, чем размеры пылинок в обычной межзвездной среде.

По мнению ученых, ведущих эксперимент, в облаке безусловно должны быть частицы и бóльших размеров, и если их распределение такое же, как в поясе астероидов в Солнечной системе, то полная масса облака, окружающего Вегу, близка к 0,001 M_C (M_C — масса Солнца). Но это как раз та доля массы Солнечной системы, которая приходится на всю совокупность больших и малых ее планет.

Диаметр облака, окружающего Вегу, определен пока очень неточно. По оценкам он близок к 170 астрономическим единицам. Это приблизительно в два раза больше диаметра орбиты Плутона — последней планеты Солнечной системы.

Очевидно, чтобы не упасть на Вегу, частицы облака должны вращаться вокруг нее.

Итак, получено первое прямое доказательство существования вращающейся вокруг звезды «твердой материи».**) Специалисты программы ИРАС полагают, что облако, окружающее Вегу, примерно такое же, каким было протопланетное облако на относительно ранних стадиях эволюции Солнечной системы. Такая гипотеза кажется привлекательной, потому что Вега довольно молода — она приблизительно в 5 раз моложе Солнца.

*) Частицы меньших размеров должны «выдуваться» из окрестностей Веги под действием давления ее света.

**) Другие причины, которые могли бы объяснить избыток интенсивности в инфракрасной части спектра, например «падение» твердой материи (аккреция) на звезду или наличие близкого, но не связанного с Вегой, пылевого облака, специалисты программы ИРАС исключают.

Советский астрофизик И. С. Шкловский привел еще один красивый аргумент в пользу этой гипотезы. Хорошо известно, что основная масса Солнечной системы сосредоточена в Солнце, но что вращение Солнца происходит существенно медленнее, чем вращение окружающих его планет. Значит, если «твердая материя», вращающаяся вокруг Веги, близка по своим свойствам к планетной (или протопланетной) системе, то сама звезда должна вращаться очень медленно. Оказалось, что астрономы-наблюдатели, изучавшие близкие звезды, давно обращали внимание на то, что Вега не вращается (или вращается очень медленно), хотя звезды того же типа (спектральный класс А) обладают быстрым вращением.

ИРАС обследовал около 9000 ярких звезд на небе. Из них только 450 звезд были настолько яркими в инфракрасном свете, что могли быть зарегистрированы детекторами ИРАСа. По мнению специалистов, из них около 50 могут оказаться системами, подобными Веге, но окончательных подтверждений пока не получено.

И в этом нет ничего удивительного. Как отмечает один из руководителей эксперимента Джордж Ауманн, если бы спутник, подобный ИРАСу, обследовал Солнце с расстояния в 30 световых лет (расстояние до Веги составляет приблизительно 26 световых лет), то он не смог бы обнаружить нашу планетную систему даже на пределе своей чувствительности. С его «инфракрасной точки зрения» Солнце оказалось бы совершенно нормальной и неинтересной звездой.

Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Траектория, путь, перемещение» предназначена восьмиклассникам, «Об агрегатных состояниях вещества» — девятиклассникам, «Гармонические колебания. Сложение колебаний» — десятиклассникам. Материалы подготовил И. К. Белкин.

Траектория, путь, перемещение

Три слова в заглавии этой заметки связаны с движением тел (материальных точек). Первые два широко употребляются в житейском обиходе, третьим пользуются, главным образом, в науке о движении тел — механике.

Траектория — это непрерывная линия, которую описывает движущаяся точка. Она может быть прямой линией. О теле (точке), движущемся по такой троектории, говорят, что оно совершает прямолинейное движение. Траектория может представлять собой и кривую линию любой формы. Тело, движущееся по такой траектории, совершает криволинейное движение. Например, траектория свободно падающего тела по отношению к Земле (если пренебречь ее вращением) — вертикальная прямая, а траектория искусственного спутника Земли — кривая (окружность или эллипс).

Если траектория известна заранее, то задачей механики может быть, скажем, определение точки на траектории, где находится движущееся тело в тот или иной момент времени. Траектория может быть и неизвестной, тогда задача состоит в том, чтобы найти вид траектории. Законы движения позволяют решать и ту, и другую задачи.

Путь, пройденный телом (точкой),— это длина его траектории (измеренная в метрах, километрах и т. д.). Его можно определить, например, по счетчику километров в автомобиле.

Для решения задач механики знать пройденный путь обычно недостаточно и вот почему. Явление движения тела состоит в том, что с течением времени изменяются координаты тела. Путь же с изменением координат связан не всегда. Может даже случиться и так, что пройденный путь не равен нулю, а изменение координат равно нулю (тело прошло по замкнутой траектории). Вот поэтому путь, как правило, в уравнения механики не входит.

Для описания движения тела (точки) в механике (точнее — в кинематике) используется другая физическая величина — *перемещение*. Напомним, что перемещение — это направленный отрезок прямой (вектор), соединяющий некоторое начальное положение движущейся точки с каким-то последующим ее положением («Физика 8», § 3). Важность для механики именно этой величины вытекает из того, что *проекции* вектора перемещения на оси координат равны изменениям соответствующих координат («Физика 8», § 5). А это значит, что, если известен вектор перемещения, можно найти и координаты тела. Правда, для этого нужно знать еще начальные координаты.

Возникает вопрос: не равны ли друг другу модуль вектора перемещения и пройденный путь (и то и другое — скаляры)? Оказывается, что в общем случае — нет, не равны. Например, если тело из точки A пришло в точку B по траектории, представляющей собой половину окружности радиуса R, то пройденный телом путь $l=\pi R$, а модуль перемещения $|\vec{s}|=2R$ (рис. 1). Если бы тело прошло не половину окружности, а сделало полный оборот (вторая половина траектории показана на рисунке 1 штриховой линией), то путь

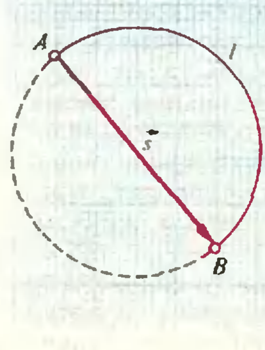


Рис. 1.

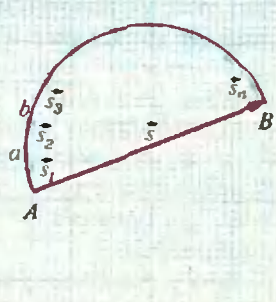


Рис. 2.

был бы равен $2\pi R$, а модуль перемещения — нулю. Только в одном случае, когда траектория движения тела — прямая линия и тело движется по такой траектории в одном направлении, модуль перемещения и пройденный путь равны друг другу.

Существует простая связь между величинами перемещения и пройденного пути. Поясним ее на уже рассмотренном примере движения тела по полуокружности. Разобьем эту траекторию на малые участки *1, 2, 3* и т. д. (рис. 2). На участке *1* путь тела — это длина дуги Aa, а перемещение $\vec{s}_1$ по модулю равно длине хорды Aa. На участке *2* путь тела — это длина дуги ab, а модуль перемещения $\vec{s}_2$ — длина хорды ab и т. д. Можно сделать участки, на которые мы разбили траекторию, такими малыми, чтобы дуга участка мало отличалась от хорды. Тогда, как это видно из рисунка 2, вектор полного перемещения $\vec{s}$ равен сумме векторов элементарных перемещений $\vec{s}_1$, $\vec{s}_2$, $\vec{s}_3$ и т. д.:

$$\vec{s}=\vec{s}_1+\vec{s}_2+\vec{s}_3+\ldots+\vec{s}_n,$$

а длина пути l равна алгебраической сумме модулей $|\vec{s}_1|$, $|\vec{s}_2|$, $|\vec{s}_3|$ и т. д. элементарных перемещений:

$$l=|\vec{s}_1|+|\vec{s}_2|+|\vec{s}_3|+\ldots+|\vec{s}_n|.$$

Об агрегатных состояниях вещества

Молекулярно-кинетическая теория строения вещества — одно из величайших достижений физической науки — основана на трех утверждениях: 1) всякое вещество состоит из частиц — молекул или атомов; 2) частицы (молекулы, атомы) совершают беспорядочное тепловое движение; 3) частицы (молекулы, атомы) взаимодействуют друг с другом. Эта теория позволяет понять множество самых разнообразных явлений и в их числе факт существования вещества в трех, как говорят, агрегатных состояниях — твердом, жидком, газообразном.

Почему же совокупности совершенно одинаковых частиц, например молекул воды (H_2O), могут образовать такие столь непохожие друг на друга тела, как лед, вода, водяной пар? «Виновато» в этом третье из перечисленных выше утверждений, лежащих в основе молекулярно-кинетической теории, — утверждение о том, что между молекулами действуют силы («Физика 9», §§ 4 и 5). Однако существование различных агрегатных состояний удобнее объяснить, пользуясь не «силовым», а «энергетическим» языком.

Тепловое *движение* молекул характеризуется их средней кинетической энергией. Она, как известно, определяет температуру тел. Для идеальных газов, например, температура T и средняя кинетическая энергия поступательного движения молекул $m\overline{v^2}/2$ связаны соотношением

$$\frac{m\overline{v^2}}{2}=\frac{3}{2}kT,$$

где k — постоянная Больцмана ($k=1{,}38\cdot10^{-23}$ Дж/К). Кинетическая энергия вместе с концентрацией n молекул (число молекул в единице объема) определяет и второй основной макроскопический параметр газа — его давление p:

$$p=\frac{2}{3}n\frac{m\overline{v^2}}{2}.$$

Если бы молекулы обладали только *кинетической* энергией, они разлетелись бы по всем направлениям (движение молекул хаотическое!) и вещество заняло бы весь доступный ему объем. Единственно возможным состоянием вещества было бы газообразное состояние.

Взаимодействие молекул (как и всякое взаимодействие) характеризуется *потенциальной* энергией. Она зависит от расстояния между молекулами. Если бы молекулы обладали только потенциальной энергией, они заняли бы друг относительно друга такие положения, чтобы сумма сил, действующих на каждую молекулу со стороны ее соседей, была равна нулю. При этом потенциальная энергия взаимодействия молекул была бы минимальной. Единственным возможным состоянием вещества было бы твердое состояние.

Но молекулы движутся и взаимодействуют одновременно, и, следовательно, они обладают и кинетической и потенциальной энергией. Поэтому быть ли телу твердым, жидким или газообразным, зависит от соотношения обоих видов энергии. А изменение этого соотношения и приводит к переходу вещества из одного состояния в другое.

Твердое состояние — это состояние, в котором потенциальная энергия W_p взаимодействия молекул подавляюще велика по сравнению с кинетической W_k:

$$W_p \gg W_k .$$

Как можно изменить это соотношение? Например, нагревая твердое тело. Ясно, что при нагревании увеличивается кинетическая энергия частиц тела, а их потенциальная энергия при этом практически не изменяется. Таким образом можно добиться того, чтобы кинетическая энергия стала примерно равной потенциальной. Тогда и произойдет переход из твердого состояния в жидкое, для которого характерно примерное равенство W_p и W_k:

$$W_p \approx W_k .$$

В этом состоянии потенциальная энергия еще достаточно велика, чтобы молекулы не могли разлететься друг от друга, а кинетическая энергия уже достаточно велика, чтобы молекулы приобрели определенную подвижность, то есть возможность перемещаться внутри объема. Жидкость сохраняет свой объем, но становится текучей и поэтому не сохраняет своей формы.

Будем продолжать поставлять энергию, нагревая теперь уже жидкость. Кинетическая энергия молекул будет расти и в какой-то момент превзойдет потенциальную энергию их взаимодействия настолько, что ею (потенциальной энергией) можно будет пренебречь:

$$W_p \ll W_k .$$

Вещество перейдет в состояние, которое соответствует идеальному газу («Физика 9», § 6).

А что если продолжать нагрев, теперь уже газа? Приведет ли дальнейший рост кинетической энергии молекул к еще одному агрегатному переходу? Оказывается, да. Но только потому, что молекулы (атомы) это не просто очень маленькие шарики. Они представляют собой сложные системы заряженных частиц, еще меньших, чем атомы, размеров. При достаточно высокой температуре газа столкновения его частиц приводят к тому, что молекулы разваливаются на атомы, а атомы — на составляющие их заряженные частицы. В результате получается особого рода вещество, состоящее из одинакового числа положительно и отрицательно заряженных частиц (в целом — электрически нейтральное). Это и есть четвертое состояние вещества — плазма.

В отличие от других агрегатных состояний плазма состоит из электрически взаимодействующих друг с другом частиц. Вот почему свойства плазмы существенно отличаются от свойств вещества в других состояниях.

Гармонические колебания. Сложение колебаний

Колебательное движение — это периодическое движение, то есть такое, при котором координата тела через определенные промежутки времени (минимальный промежуток называют периодом колебаний) повторяется. Типичный пример колебаний — движение тела, прикрепленного к пружине («Физика 10», §§ 2 и 4). Вызывает такое движение сила упругости $F_x = -kx$, изменяющаяся от точки к точке, поэтому изменяющимся оказывается и ускорение тела. При движении колеблющееся тело проходит и через такое положение, в котором действующая на него сила обращается в нуль. Это — положение равновесия, оно служит центром колебаний. Максимальное отклонение тела от положения равновесия называется амплитудой колебаний.

Так как сила упругости — сила переменная, то решить уравнение второго закона Ньютона

$$-kx = ma_x$$

и найти, как координата x изменяется со временем, средствами обычной алгебры нельзя. Поэтому мы заменим на время физику геометрией и рассмотрим движение совсем другое, но «как две капли воды» похожее на движение тела, скрепленного с пружиной.

Пусть некоторое тело (материальная точка) движется с постоянной угловой скоростью ω по окружности радиуса A (рис. 1). Движение по окружности — это тоже периодическое движение, поскольку через определенные промежутки времени $T = 2\pi/\omega$ (период обращения) тело оказывается в одном и том же месте на окружности. Рассмотрим, однако, движение не самой точки, а ее проекции на диаметр XX окружности. Сразу видно, что при движении точки по окружности ее проекция движется вдоль диаметра XX и это движение действительно похоже на движение тела, скрепленного с пружиной. Двигаясь вдоль диаметра, проекция удаляется от центра окружности на расстояние, не большее, чем радиус A. Можно, значит, сказать, что проекция совершает колебания с амплитудой A. Центр окружности O играет здесь такую же роль, как положение равновесия в опыте с пружиной. Период обращения точки по окружности — это в то же время и период колебаний ее проекции. Но если для точки, движущейся по окружности, ω — это угловая скорость, то для проекции ω — это так называемая *циклическая частота*, то есть число колебаний за 2π секунд:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu.$$

Здесь ν — *частота колебаний*, то есть число колебаний за одну секунду.

Предположим, что в некоторый момент времени, который мы примем за начальный ($t=0$), движущаяся по окружности точка находится в положении M_0 (рис. 2). Проведем из центра окружности как из начала координат вектор $\overrightarrow{OM_0}$. Его называют *радиус-вектором* (модуль этого вектора равен A). Радиус-вектор определяет положение точки на окружности, а проекция его конца на диаметр XX определяет положение проекции M_0' точки, то есть координату x_0 этой проекции, отсчитываемую от центра окружности O. Движение точки по окружности означает в то же время вращение радиус-вектора вокруг центра O с той же угловой скоростью ω. Из рисунка 2 видно, что начальная координата x_0 проекции равна $A\cos\varphi_0$, где φ_0 — угол, отсчитанный от оси X против часовой стрелки до вектора $\overrightarrow{OM_0}$.

Пусть через промежуток времени t движущаяся по окружности точка оказалась в M, а ее проекция — в M'. Угол поворота радиус-вектора увеличился на $\Delta\varphi=\omega t$ и стал равным $\Delta\varphi+\varphi_0$. Координата x проекции точки теперь равна

$$x=A\cos(\Delta\varphi+\varphi_0)=A\cos(\omega t+\varphi_0).$$

Формула

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0) \qquad (*)$$

и показывает, как координата x проекции движущейся по окружности точки, то есть *координата точки, совершающей колебания,* зависит от времени. Колебания, при которых координата колеблющегося тела (точки) зависит от времени по закону $(*)$, называются *гармоническими*. Величина $\varphi=\omega t+\varphi_0$ называется *фазой* колебания, а φ_0 — *начальной фазой*.

Как мы уже говорили, движение проекции конца радиус-вектора на диаметр окружности во всем похоже на движение тела, скрепленного с пружиной. Верно и обратное: движение тела, прикрепленного к пружине, совершенно подобно движению проекции точки, движущейся по окружности, на диаметр этой окружности. Поэтому каждому колеблющемуся телу можно сопоставить вращающийся радиус-вектор, проекция конца которого есть колеблющееся тело (точка). Это и показано на рисунке 3 для случая тела, прикрепленного к горизонтальной пружине.

Только что высказанное соображение позволяет решить важную задачу о сложении колебаний, происходящих вдоль одной прямой и с одинаковыми частотами. Например, когда положение равновесия, около которого тело совер-

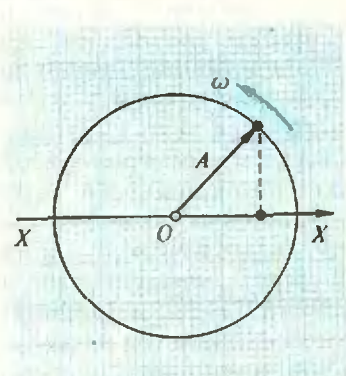


Рис. 1.

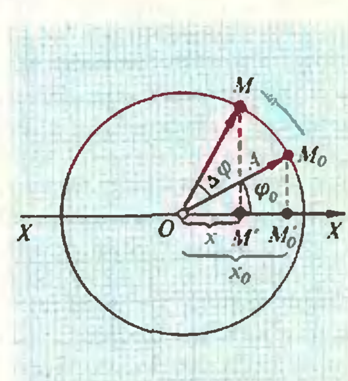


Рис. 2.

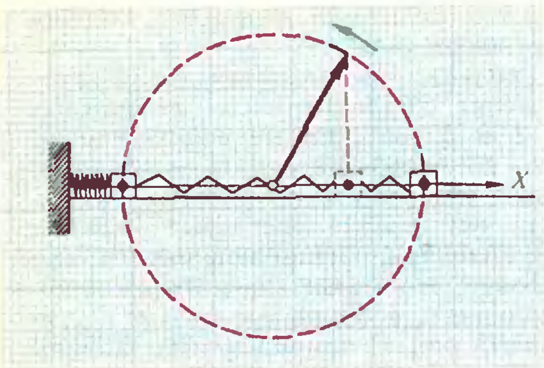


Рис. 3.

шает колебания, само совершает колебания с такой же частотой и вдоль той же прямой. Скажем, тело, скрепленное с пружиной, совершает колебания на платформе, которая сама колеблется относительно неподвижной системы отсчета.

Предположим, что нужно сложить такие два колебания:

$$x_1=A_1\cos(\omega t+\varphi_{01}),$$
$$x_2=A_2\cos(\omega t+\varphi_{02}).$$

Как видно из написанных формул, колебания могут различаться амплитудами (A_1 и A_2) и начальными фазами (φ_{01} и φ_{02}). Чтобы узнать, что получится в результате сложения, изобразим соответствующие складываемым колебаниям вращающиеся радиус-векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ как бы застывшими в начальный момент времени и покажем окружности, по которым движутся их концы (рис. 4; для упрощения на рисунке приведены не полные окружности). Очевидно, что результирующее колебание будет происходить с той же частотой ω, но с другой амплитудой и другой начальной фазой:

$$x=A\cos(\omega t+\varphi_0).$$

Значения A и φ_0 мы получим, если сложим векторы $\vec{A}_1$ и $\vec{A}_2$ по правилу

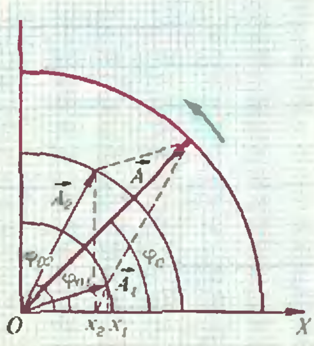


Рис. 4.

параллелограмма. Диагональ параллелограмма $A=|\vec{A}|$ и есть амплитуда суммарного колебания, а угол φ_0, который вектор $\vec{A}$ образует с осью X, — начальная фаза этого колебания.

Согласно известной теореме косинусов, мы можем написать

$$A^2=A_1^2+A_2^2-2A_1A_2\cos\widehat{OA_1A},$$

где $\widehat{OA_1A}=180°-\widehat{A_2OA_1}=180°-(\varphi_{02}-\varphi_{01})$. Так как $\cos(180°-(\varphi_{02}-\varphi_{01}))=-\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01})$, то

$$A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01}).$$

Результат сложения двух колебаний зависит, таким образом, от разности фаз колебаний-слагаемых. Поскольку колебания происходят с одной и той же частотой, разность фаз $\varphi_2-\varphi_1$ колебаний в любой момент времени равна разности $\varphi_{02}-\varphi_{01}$ начальных фаз.

Представляют особый интерес два крайних случая:

1) Разность фаз $\varphi_2-\varphi_1=0$ (или 2π, 4π и т. д.). Колебания, фазы которых в любой момент времени одинаковы, называются синфазными. В таком случае $\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01})=\cos(\varphi_2-\varphi_1)=0$, и $A^2=A_1^2+A_2^2+2A_1A_2$, или $A=A_1+A_2$ — амплитуда результирующего колебания равна сумме амплитуд складываемых колебаний. Другими словами, колебания в результате сложения усиливаются.

2) Разность фаз $\varphi_2-\varphi_1=\pi$ (или 3π, 5π и т. д.). О таких колебаниях говорят, что их фазы противоположны (колебания антифазные). В этом случае $\cos(\varphi_{02}-\varphi_{01})=\cos(\varphi_2-\varphi_1)=-1$, и $A^2=A_1^2+A_2^2-2A_1A_2$, или $A=A_1-A_2$ — результирующее колебание оказывается ослабленным: амплитуда равна разности амплитуд колебаний-слагаемых. Если $A_1=A_2$, то амплитуда результирующего колебания равна нулю, то есть колебаний вовсе нет: одно колебание «погасило» другое.

В этом состоит одно из самых важных свойств колебаний — при сложении они могут усиливаться или ослабляться. Это свойство играет важную роль в волновых процессах («Физика 10», § 36).

Из рисунка 4 легко получить и значение начальной фазы φ_0 результирующего колебания:

$$\operatorname{tg}\varphi_0=\frac{A_1\sin\varphi_{01}+A_2\sin\varphi_{02}}{A_1\cos\varphi_{01}+A_2\cos\varphi_{02}}.$$

Математика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Таблица составных чисел» предназначена восьмиклассникам, «Простой прием в непростых задачах» — девятиклассникам и «Кто же прав?» — десятиклассникам. Это деление в какой-то мере условно, так как каждая из этих заметок может быть полезной не только учащимся указанных классов.

Таблица составных чисел

При решении различных практических задач нередко возникает необходимость в анализе чисел, то есть в выяснении вопроса, являются ли они простыми или составными. Для простых чисел, не превышающих 6000, в справочниках по элементарной математике есть таблица. Но если мы имеем дело с составным числом или с числом за пределами таблицы простых чисел, к которому не подходят известные нам признаки делимости на 2, 3 и 5, то анализ его может оказаться довольно трудоемким. Например, определить, является ли число 10607 простым или составным, можно лишь путем перебора более двух десятков простых делителей, начиная с 7 и кончая 101.

Облегчить эту задачу и избавить нас от необходимости анализа чисел методом последовательного перебора простых делителей позволяет таблица составных чисел.

Таблица предназначена для разложения составных чисел, не кратных 2, 3 и 5, на простые множители от 7 до 101 включительно. С ее помощью можно разложить на простые множители все прочие составные числа с множителями, превышающими 101, при условии, что таких множителей не более одного, а остальные входят в указанный ряд. С помощью этой таблицы можно также выявлять простые числа, если они меньше 103^2. Охватывая, в принципе, бесконечное множество чисел, она позволяет, не прибегая к записям, анализировать числа до пяти знаков включительно.

В верхней строке таблицы — простые делители от 7 до 101. Правая крайняя колонка — возрастающий ряд двухзначных чисел, без чисел, оканчивающихся на 0, 2, 4, 5, 6, 8. В дальнейшем мы будем обозначать эти двухзначные числа символом R. Остальные числа в таблице обозначим символом Q_T.

Правила пользования таблицей поясним на примерах чисел 3827, 5251 и 51620. Проанализируем **число 3827.** Для этого разделим его с остатком на 100. Получаем в остатке число 27. Это значение R для данного числа, с которым мы входим в таблицу. Частное равно 38. Это величина Q для данного числа. Для того, чтобы найти простые множители данного числа, необходимо в строке $R=27$ таблицы

Таблица составных чисел

7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	R
3	10	10	9	15	20	20	22	27	25	3	39	9	23	25	2	22	27	15	39	8	32	1	01
2	8	4	10	7	14	2	4	7	34	9	23	27	10	14	6	66	8	45	34	24	96	3	03
0	4	5	12	10	2	24	30	4	11	21	38	10	43	53	14	12	43	26	24	56	30	7	07
6	2	12	13	2	19	6	12	21	20	27	22	28	30	42	18	56	24	56	19	72	94	9	09
5	0	6	14	13	13	17	25	1	29	33	6	46	17	31	22	29	5	7	14	88	61	11	11
4	9	0	15	5	7	28	7	18	38	39	37	11	4	20	26	2	59	37	9	15	28	13	13
2	5	1	0	8	18	21	2	15	15	8	5	47	37	59	34	19	21	18	82	47	59	17	17
1	3	8	1	0	12	3	15	32	24	14	36	12	24	48	38	63	2	48	77	63	26	19	19
0	1	2	2	11	6	14	28	12	33	20	20	30	11	37	42	36	56	78	72	79	90	21	21
6	10	9	3	3	0	25	10	29	1	26	4	48	57	26	46	9	37	29	67	6	57	23	23
4	6	10	5	6	11	18	5	26	19	38	19	31	31	4	54	26	72	10	57	38	88	27	27
3	4	4	6	17	5	0	18	6	28	1	3	49	18	54	58	70	53	40	52	54	55	29	29
2	2	11	7	9	22	11	0	23	37	7	34	14	5	43	62	43	34	70	47	70	22	31	31
1	0	5	8	1	16	22	13	3	5	13	18	32	51	32	66	16	15	21	42	86	86	33	33
6	7	6	10	4	4	15	8	0	23	25	33	15	25	10	7	33	50	2	32	29	20	37	37
5	5	0	11	15	21	26	21	17	32	31	17	33	12	60	11	6	31	32	27	45	84	39	39
4	3	7	12	7	15	8	3	34	0	37	1	51	58	49	15	50	12	62	22	61	51	41	41
3	1	1	13	18	9	19	16	14	9	0	32	16	45	38	19	23	66	13	17	77	18	43	43
1	8	2	15	2	20	12	11	11	27	12	0	52	19	16	27	40	28	73	7	20	49	47	47
0	6	9	16	13	14	23	24	28	36	18	31	17	6	5	31	13	9	24	2	36	16	49	49

найти такое значение Q_T, которое отвечало бы условию

$$\frac{Q-Q_T}{d} = \text{целое число}, \qquad (1)$$

где d — простой делитель в колонке найденного значения Q_T.

В строке $R=27$ условию (1) отвечают табличные значения $Q_T=38$ в колонках делителей $d=89$ и $d=43$. Это и есть простые множители заданного числа ($89\times43=3827$).

Проанализируем теперь **число 5251.** При делении его на 100 получаем частное $Q=52$ и остаток $R=51$. Для чисел с $R>49$ берем вместо R во входе таблицы его «приведенное» значение $R'=100-R$, т. е. в данном случае $R'=100-51=49$. При этом вместо условия (1) требуется соблюдение условия

$$\frac{Q'+Q_T}{d} = \text{целое число}, \qquad (2)$$

где $Q'=Q+1$. В данном случае $Q'=$ $=52+1=53$.

В строке $R=49$ условию (2) отвечают $Q_T=36$, в колонке делителя $d=89$ ($53+36=89$) и $Q_T=6$ в колонке делителя $d=59$ ($53+6=59$). Таким образом, простые множители данного числа $89\times59=5251$.

Число 51620. После деления его на 20 остается проанализировать число 2581. Здесь $R=81$. Следовательно, $R'=$ $=100-81=19$, $Q=25$. Следовательно, $Q'=25+1=26$.

Условию (2) здесь отвечают $Q_T=63$ в колонке делителя $d=89$ и $Q_T=3$ в колонке делителя $d=29$. Итак, $89\times29\times20=51620$.

Отметим, что общим множителем для всех трех чисел является простое число 89.

С помощью таблицы нетрудно определить, что упомянутое выше число 10607 — простое. Действительно, в строке $R=07$ нет ни одного значения Q_T, которое при вычитании его из $Q=106$ удовлетворяло бы условию (1).

В. С. Хитрук

Простой прием в непростых задачах

С формулой квадрата суммы или разности двух чисел знаком шестиклассник. Нетрудно научиться выделять из алгебраического выражения полный квадрат, «узнавать» его, а затем извлекать корень. Эти действия часто помогают при решении конкурсных задач. Конечно, приведенные ниже задачи допускают и другие способы решения, однако умелое использование указанных приемов позволит абитуриенту «сэкономить» так необходимое на экзамене время.

Упрощение выражений

Пример 1 (МГУ, мехмат, 1978). Разность $\sqrt{|40\sqrt2-57|}-\sqrt{40\sqrt2+57}$ является целым числом. Найти это число.

В книге Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехника, М. К. Потапова «Задачи вступительных экзаменов по математике» (М., Наука, 1980) авторы обозначают искомое число через x, находят, что x есть одно из чисел 10 или -10 и сравнением уменьшаемого и вычитаемого приходят к выводу, что $x=-10$ (с. 132).

Этот же пример решим, выделяя полный квадрат, этот прием пригодится нам впоследствии

$$A=\sqrt{40\sqrt2+57}=\sqrt{25+40\sqrt2+32}= =\sqrt{(5+4\sqrt2)^2}=5+4\sqrt2,$$

$$B=\sqrt{|40\sqrt2-57|}=\sqrt{|(5-4\sqrt2)^2|}= =-5+4\sqrt2.$$

Таким образом, $B-A=-10$.

Пример 2 (МГУ, мехмат, 1969; КПИ, 1980). Упростить:

$$\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}.$$

Решение:

$$A=\sqrt{x+2\sqrt{x-1}+1-1}+ +\sqrt{x-2\sqrt{x-1}+1-1}= =\sqrt{(\sqrt{x-1}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}= =|\sqrt{x-1}+1|+|\sqrt{x-1}-1|= =\sqrt{x-1}+1+|\sqrt{x-1}-1|.$$

Очевидно, что $x\geqslant1$;

а) при $2\geqslant x\geqslant1$, имеем

$$A=\sqrt{x-1}+1-\sqrt{x-1}+1=2;$$

б) при $x\geqslant 2$

$$A=\sqrt{x-1}+1+\sqrt{x-1}-1=2\sqrt{x-1}.$$

Пример 3 (КПИ, 1980). Упростить:

$$\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}.$$

Решение:

$$\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=$$

$$=\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1}{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1}=$$

$$=\frac{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1}{(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha-1}=\frac{2}{3}.$$

Решение уравнений

При решении иррациональных уравнений не следует торопиться возводить в квадрат, стоит посмотреть — нельзя ли его выделить?

Пример 4 (КПИ, 1979). Решить уравнение:

$$\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}}=7\sqrt{2}.$$

Решение:
Имеем

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2x-5+2\sqrt{2x-5}+1}+\sqrt{2x-5+6\sqrt{2x-5}+9}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{(\sqrt{2x-5}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{2x-5}+3)^2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\sqrt{2x-5}+1|+|\sqrt{2x-5}+3|\right).$$

Итак, заданное уравнение эквивалентно уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\sqrt{2x-5}+1+\sqrt{2x-5}+3)=7\sqrt{2}$$

или $2\sqrt{2x-5}=10$, откуда $x=15$.

Пример 5 (КГУ, экон. фак. 1978). Решить уравнение:

$$(\sqrt{4+2\sqrt{3}}-\sqrt{4-2\sqrt{3}})^{2x}+2^{2x+3}=144.$$

Решение:
Имеем

$$\sqrt{4+2\sqrt{3}}=\sqrt{3+2\sqrt{3}+1}=\sqrt{(\sqrt{3}+1)^2}=\sqrt{3}+1;$$

аналогично $\sqrt{4-2\sqrt{3}}=\sqrt{3}-1$. Поэтому заданное уравнение примет вид

$$4^x+8\cdot 4^x=144,\quad x=2.$$

Пример 6 (МГУ, 1978, филфак). Число α подобрано так, что уравнение $\sqrt{x-\sqrt{3}}+\alpha^2x^2+2\alpha x(\sqrt{6}-\sqrt{3})=6\sqrt{2}-9$ имеет решение. Найти решение.

Решение: Обозначим x_1 корень уравнения. Тогда $x_1\neq 0$ и $\sqrt{x_1-\sqrt{3}}+\alpha^2x_1^2+2\alpha x_1(\sqrt{6}-\sqrt{3})-6\sqrt{2}+9=0$, или

$$\alpha^2+2\alpha\left(\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{x_1}\right)+\frac{\sqrt{x_1-\sqrt{3}}+9-6\sqrt{2}}{x_1^2}=0.$$

Выделим полный квадрат относительно чисел x_1 и α. Имеем

$$\left(\alpha+\frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{x_1}\right)^2+\frac{\sqrt{x_1-\sqrt{3}}}{x_1^2}=0.$$

Так как каждое слагаемое не отрицательно, то $x_1=\sqrt{3}$, при этом $\alpha=1-\sqrt{2}$.

Пример 7. Решить уравнение

$$\sin^2 x+\sin^2 y=\sin x\sin y+\sin x+\sin y-1.$$

Решение: Данное уравнение эквивалентно такому:

$$(\sin^2 x-2\sin x+1)+(\sin^2 y-2\sin y+1)+(\sin^2 x+\sin^2 y-2\sin x\sin y)=0,$$

или $(\sin x-1)^2+(\sin y-1)^2+(\sin x-\sin y)^2=0$, откуда $\sin x-1=0$, $\sin y-1=0$, то есть $\sin x=\sin y=1$, $\sin x=\sin y$. Таким образом, решением уравнения будет любая пара вида

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad y=\frac{\pi}{2}+2\pi n,\quad k,\ n\in Z.$$

Упражнения

1. (МГУ, 1979, экон. фак.) Решить уравнение: $\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+\log_{2x+3}\times$ $\times(6x^2+23x+21)=4$.

2. (КГУ, 1978, химфак.) Решить уравнение:

$$(\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}})^{2x}+2^{2(x+1)}=320.$$

3. (МГУ, 1965, мехмат) Найти все пары чисел, которые удовлетворяют уравнению

$$\cos x+\cos y-\cos(x+y)=\frac{3}{2}.$$

4. (КГУ, 1973, мехмат) Решить неравенство

$$\sqrt{x+4\sqrt{x-4}}-\sqrt{x-4\sqrt{x-4}}\geqslant 3.$$

5. (МГУ, 1982, биофак) Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y(x)=x+\sqrt{(x^2+6x+9)(x^2+2x+1)}$$

на отрезке $\left[-4;\ -\frac{5}{4}\right]$.

И. А. Кушнир

Кто же прав?

В некоторой школе, в некотором классе только что прошли производную. И с ее помощью решали разные задачки. И попалась среди прочих задачек такая: *Функция*

$$y=x^2+ax+4$$

убывает при $x<1$ *и возрастает при* $x>1$. *Найдите соответствующее этому условию значение параметра* a.

На следующий день Федя Крестиков и Вася Нуликов пришли в школу заметно удрученные. «Мы пришли к противоречивым результатам», — сказал Федя. «А где ошибка — не понимаем», — добавил Вася. И все, конечно, захотели их послушать.

Начал Федя.

— Я взял производную: $y'=2x+a$. Дальше решил такое неравенство $2x+a>0 \Leftrightarrow x>-\frac{a}{2}$. Итак, наша функция возрастает при $x>-\frac{a}{2}$, но согласно условию она должна возрастать при $x>1$. Оба эти неравенства выполняются, если $-\frac{a}{2}<1$, то есть при $a>-2$.

Затем выступил Вася.

— Я тоже начал с производной. И вообще, у меня все, как у Феди, только наоборот. Я лучше напишу. И оказалось на доске вот что:

$$2x+a<0 \Leftrightarrow x<-\frac{a}{2}, \; x<1,$$

$$-\frac{a}{2}>1 \Leftrightarrow a<-2.$$

Увидев оба результата, мы естественно загудели. Потом начали высказываться.

— У Феди неправильно, — сказал кто-то. — При $a=0$ мы получаем совсем не такую параболу, какую надо. Нарисуйте — увидите сами. Мы нарисовали и увидели сами: действительно — парабола не такая.

— И у Васи неправильно, — добавил другой. — При $a=-4$ мы тоже получаем совсем другую параболу. Мы взяли это значение a, нарисовали график и опять увидели совсем другую параболу.

— Послушайте, но ведь из этих их записей, которые конечно нужно рассматривать совместно, получается, что такой параболы вовсе нет!

— Не знаю, что там получилось у Феди с Васей, но такая парабола есть! Вот она! — воскликнула Дуся Квадратикова. И вышла к доске, и быстренько нарисовала параболу, удовлетворяющую условию полностью.

— Да ..., — протянул кто-то в наступившей тишине.

— Мы делали все так, как написано в учебнике, можете проверить, — сказали Федя и Вася.

Потом мы все же разобрались в чем было дело. Ответьте на следующие вопросы:

1. *Какая парабола была нарисована Дусей?*
2. *Где же ошибка в совместных рассуждениях Феди и Васи, которые приводят к выводу о невозможности такой параболы?*
3. *Верна ли их ссылка на учебник?*

С. И. Рыжик

Избранные школьные задачи

Из «Истории с узелками» и «Полуночных задач» Льюиса Кэрролла*)

8 класс

1. Имеются 5 мешков. Первый и второй мешки вместе весят 12 фунтов, второй и третий — 13,5 фунтов, третий и четвертый — 11,5 фунтов, четвертый и пятый — 8 фунтов, первый, третий и пятый — 16 фунтов. Сколько весит каждый мешок?

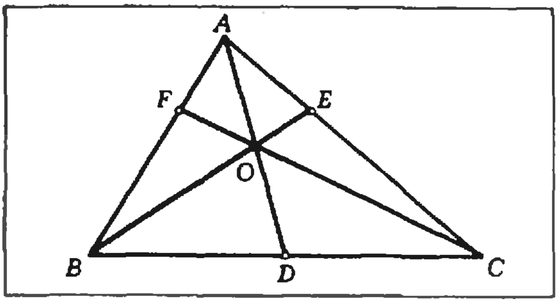
2. Докажите, что утроенная сумма трех квадратов натуральных чисел равна сумме четырех квадратов натуральных чисел.

3. В данном треугольнике проведите прямую, параллельную основанию, так, чтобы сумма длин отрезков боковых сторон, заключенных между этой прямой и основанием была равна основанию.

4. Пусть α, β и γ — правильные дроби и пусть в некотором классе α-я часть всех учеников посещает хоровой кружок, β-я часть — кружок по фотографии, γ-я часть — драмкружок. Чему равна наименьшая доля учеников, посещающих все три кружка?

5. Точки D, E и F лежат соответственно на сторонах BC, AC и AB треугольника ABC. Отрезки AD, BE и CF пересекаются в точке O (см. рисунок). Найдите $\frac{|DO|}{|DA|}$, если $\frac{|EO|}{|EB|}=\alpha$, $\frac{|FO|}{|FC|}=\beta$.

*) Л. Кэрролл. *История с узелками.* — М.: Мир, 1973.



9 класс

6. Сколько существует различных видов треугольников с величинами углов $\frac{360^\circ}{k}$, $\frac{360^\circ}{l}$, $\frac{360^\circ}{m}$, где k, l, m — натуральные числа?

7. Внутри данного угла с вершиной A дана точка P. Постройте прямой угол с вершиной в точке P так, чтобы треугольники APE и APF были равновелики (E и F — точки пересечения сторон прямого угла со сторонами данного).

8. Длины медиан треугольника ABC равны m_a, m_b и m_c. Найдите стороны и углы треугольника ABC.

9. При каких значениях x существуют числа y и z, удовлетворяющие системе

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = x - z, \\ \frac{x}{z} = x - y. \end{cases}$$

10. Найдите сумму

а) $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\ldots+n(n+1)$;

б) $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\ldots+n(n+1)(n+2)$;

в) $1\cdot3\cdot5+2\cdot4\cdot6+3\cdot5\cdot7+\ldots+n(n+2)(n+4)$.

10 класс

11. На сторонах данного треугольника, как на диаметрах, построены окружности. Длины отрезков общих касательных этих окружностей равны k, l, m. Найдите периметр треугольника.

12. Четыре равносторонних треугольника сделаны боковыми гранями правильной четырехугольной пирамиды. Найдите отношение объема этой пирамиды к объему тетраэдра, составленного из тех же четырех треугольников.

13. В данный треугольник впишите шестиугольник так, чтобы противоположные стороны шестиугольника были равны и параллельны, три из этих сторон лежали на сторонах треугольника, а диагонали пересекались в заданной точке внутри треугольника.

14. Два путешественника садятся на поезда, идущие по одному и тому же замкнутому маршруту в противоположных направлениях и отправляющиеся одновременно. Поезда отходят от станции отправления каждые 15 минут в обоих направлениях. Поезд, идущий на восток, возвращается через 3 часа, поезд, идущий на запад,— через 2 часа. а) Сколько поездов встретил в пути каждый из путешественников? б) Сколько поездов встретятся каждому из путешественников, если они начнут считать встречные поезда с момента встречи их поездов?

15. Докажите, что если a и b взаимно-простые числа, то при некотором натуральном $n \leqslant b$ число a^n-1 делится на b.

Публикацию подготовил *А. А. Егоров*

Традиционный осенний праздник юных математиков

(Начало см. на с. 8)

Но даже эта погода не могла рассеять тесные группы ребят, толпившихся по утрам в дни конференции перед классами, где проходила конференция. Доклады читались одновременно в трех секциях — это было вызвано и их обилием, и их разнообразием по уровню и тематике.

Пожалуй, с наибольшим вниманием слушатели отнеслись к докладам ребят о своих собственных решениях интересных трудных задач. Например, Денис Косыгин (ФМШ при МГУ) доказал, что сумма цифр чисел последовательности 2^n (и 5^n) стремится к бесконечности, Елена Шашкова (ПТУ № 13, Ленинград) решала геометрическую задачу об оценке ширины двери и коридора, позволяющей протащить боком стол заданных размеров, а Николай Григорьев (с. ш. № 57, Москва) рассказал о замощении фигур отрезками. Некоторые участники конференции познакомили со своими достижениями в области математики, существенно выходящими за рамки школьного курса,— разумеется, при этом им приходилось ограничиваться постановкой задачи и объяснением результата. Среди таких научных сообщений наиболее интересные были посвящены алгебре (так, Олег Матвеев из Свердловска рассказал об оценке числа корней многочленов от матриц, Алексей Родин из ФМШ при МГУ — о формуле для вычисления определителей); понравился жюри и доклад Бориса Музыкантского (с. ш. № 57, Москва) о некоторых задачах математической логики.

Все большее число школьников с увлечением занимается программированием; ряд докладов в Батуми был связан с вычислительными экспериментами (работы свердловчан), с алгоритмами, в разработке которых принимали участие докладчики (несколько интересных докладов об этом представили члены клуба юных программистов «ЮТА» из Таллина, в частности, они изучали модели кольцевого и встречного знакомства или, например, книгообмена).

Накануне торжественного закрытия праздника состоялся традиционный вечер дружбы — пожалуй, самый символический пункт программы. Разъезжались ребята, обогащенные не только приятными воспоминаниями и новыми знаниями, но и новыми друзьями из разных городов. А самые прочные дружеские связи установили, наверное, «специалисты по знакомствам и обменам» из Таллина; на зимних каникулах у них гостили ребята из ФМШ при МГУ.

Н. Б. Васильев,
В. Н. Дубровский

Задачи

1. Можно ли в 400-значном числе
84198419...8419
вычеркнуть несколько цифр в начале и в конце так, чтобы сумма оставшихся цифр равнялась 1984?

2. Расставьте в клетки таблицы 4×4 числа, не равные 0, так, чтобы сумма чисел в углах каждого квадрата 2×2, 3×3 и 4×4 клетки была равна 0.

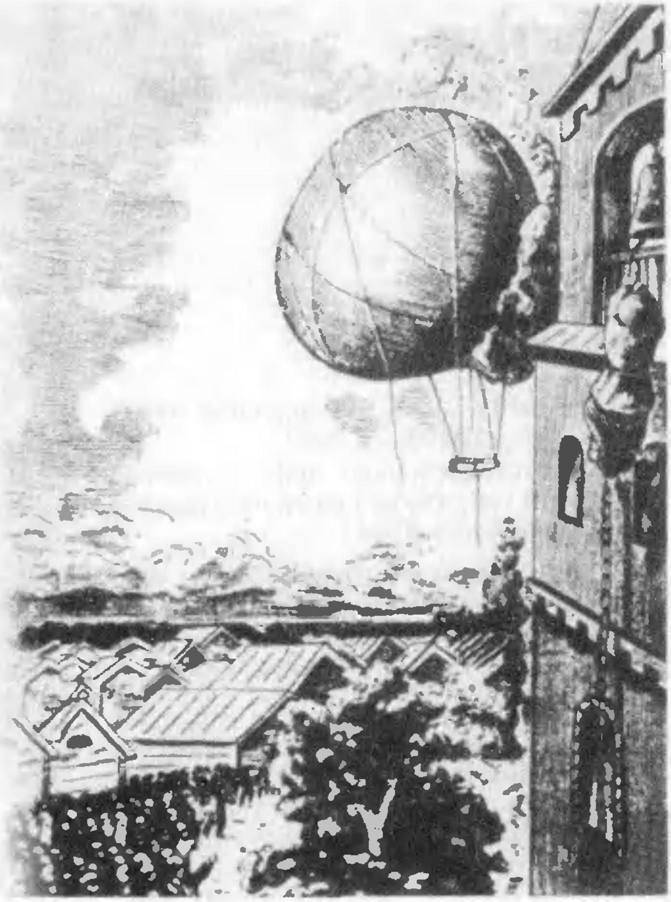
3. В ряд выписаны числа 1 2...100. Двое играющих по очереди вставляют между ними знаки $+$, $-$ и $\times$ (очередной знак можно ставить на любое свободное место). Докажите, что игрок, делающий первый (а значит, и последний) ход, может добиться, чтобы окончательный результат был нечетным числом.

4. 175 Шалтаев стоят дороже, чем 125 Болтаев, но дешевле, чем 126 Болтаев. Докажите, что на покупку 3 Шалтаев и 1 Болтая рубля не хватит, если каждый Шалтай и каждый Болтай стоят целое число копеек.

5. Звенья AB и CD шарнирного четырехугольника $ABCD$ пересекаются в точке O; при этом $AB=CD$ и $BC=AD$. Докажите, что $AO=CO$ и $BO=DO$.

Эти задачи предлагались в 5—7 классах на юбилейной 50-й ленинградской олимпиаде. Их авторы: *А. Г. Гольдберг, С. Л. Генкин, С. В. Фомин.*

Закон Архимеда



Доктор технических наук
А. Л. СТАСЕНКО

...фурвин (мешок) сделал, как мяч большой, надул дымом поганым и вонючим, от него сделал петлю, сел в нее, и нечистая сила подняла его выше березы...
(рассказ о полете подъячего Крякутного в Рязани в 1731 году)

Возьмите кубик из дерева или пластмассы, который, может быть, остался от древних времен детского сада. Подержите его в воздухе где-то между полом и потолком и отпустите. Кубик упадет на пол. Почему? Понятно: его притягивает Земля с силой, которую называют силой тяжести.

Теперь, засучив рукава, поместите этот кубик в ванну, наполненную водой, где-то между дном и поверхностью воды и отпустите. Кубик всплывет. Почему? Разве сила притяжения Земли не действует на него через воду? Не может быть: ведь утюг или гантель опускаются на дно!

Значит, действует еще какая-то сила, направленная вверх,— выталкивающая сила. В случае кубика она «перебарывает» силу тяжести, в случае гантели ее не хватает, чтобы заставить гантель двигаться вверх.

Как бы узнать, чему равна эта выталкивающая сила? Обратимся к рисунку 1 и посмотрим, какое действие оказывает вода на опущенный в нее кубик. На все грани кубика действуют силы давления воды. Но, как известно, давление в жидкости на разной глубине разное — оно тем больше, чем больше глубина погружения. Значит, силы давления, действующие на верхнюю и нижнюю грани кубика, различны. Нетрудно догадаться, что сила, действующая на нижнюю грань, больше. Посмотрим, на сколько больше.

На верхнюю грань действует сила давления, направленная вниз и равная

$$F\downarrow = \varrho_ж g y a^2.$$

Сила, действующая со стороны воды на нижнюю грань, направлена вверх и равна

$$F\uparrow = \varrho_ж g (y+a) a^2.$$

Так что действие этих двух сил эквивалентно действию одной силы, направленной вверх и равной

$$F = F\uparrow - F\downarrow = \varrho_ж g (y+a) a^2 - \varrho_ж g y a^2 = \varrho_ж g a^3.$$

Это и есть выталкивающая сила. Но $\varrho_ж g a^3$ — это вес воды, которую можно было бы налить в наш кубик, если бы он был полым, то есть это вес воды в объеме кубика. Теперь понятно: если выталкивающая сила больше силы тяжести, которая «тянет» тело вниз,— тело всплывает; если эта сила меньше силы тяжести — тело опускается на дно; ну, а если тело плавает в глубине жидкости, это означает, что выталкивающая сила численно равна силе тяжести.*)

В справедливости наших вычислений можно убедиться и на опыте. Возьмите кусочек льда, например, из холодильника, положите его на дно стакана и налейте в стакан воду до краев. Лед будет плавать на поверхности — значит, действующая на лед сила тяжести уравновешена выталкивающей силой. У кубика, как и у корабля, есть надводная и подводная части. Через некоторое время лед растает, надводная его часть исчезнет. А что произойдет с уровнем воды в стакане? Оказывается, он не изменится! Значит, лед, став водой, заполнил как раз тот объем, который раньше занимала его подводная часть. Эту воду (бывший лед) на рисунке 2 мы заштриховали. Сила тяжести, действующая на нее, в точности равна силе тяжести, действовавшей на ледяной кубик. Получается, что для воды в стакане удерживать на плаву ледяной кубик — это то же самое, что удерживать заштрихованную воду. Со стороны воды в стакане на заштрихованную воду действует направленная вверх сила, численно равная весу этой воды. Она-то и есть выталкивающая сила, которая уравновешивает силу тяжести.

Итак, мы пришли к выводу, что на тело, погруженное в жидкость, действует выталкивающая сила, направленная вверх и численно равная весу жидкости в объеме погруженной части тела. Это и есть знаменитый закон Архимеда.

*) Силы, действующие на боковые грани кубика, взаимно уничтожаются — они попарно равны и направлены в противоположные стороны. Поэтому в наших вычислениях мы их не учитывали.

Сам Архимед формулировал эту мысль в других словах: «Твердое тело, которое имеет равный вес в равном объеме с жидкостью, погружается в нее настолько, что ни одна часть его поверхности не выступает над ее поверхностью, и не опускается ниже». Мы бы перевели это теперь так: если плотность твердого тела равна плотности жидкости, то тело погружается в эту жидкость целиком и не тонет. И еще Архимед говорил так: «Тела, относительно более тяжелые, чем жидкость, опускаются вниз до самого дна и становятся в жидкости на столько *легче, сколько весит объем жидкости*, равный объему тела».

Закон Архимеда люди, даже не зная его, использовали издревле, когда на бревне, надутом мехе или долбленой лодке переправлялись через реку. Но когда в прошлом веке от деревянных парусных кораблей стали переходить к железным пароходам, люди, далекие от физики и техники, возмутились: ведь железо, в отличие от дерева, тонет в воде.

Да, железная гантель тонет в воде, но если ее раскатать в тонкий лист и согнуть его «лодочкой» или в виде полушария, он будет плавать (ведь плавают же в пруду и реке пустые консервные банки, брошенные нехорошими туристами). *И банка, и лодочка вытесняют* такой объем воды, что выталкивающая сила, численно равная весу этого объема воды, уравновешивает силу тяжести, действующую на них. А вес воды, вытесняемой гантелью, мал, выталкивающая сила мала — и сила тяжести опускает гантель на дно.

Корабль погружается в воду настолько, что вес вытесняемой им воды оказывается в точности равным силе тяжести, действующей на корабль. А если плавающий корабль хотя бы немного

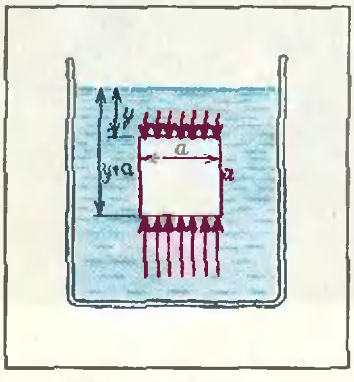


Рис. 1.

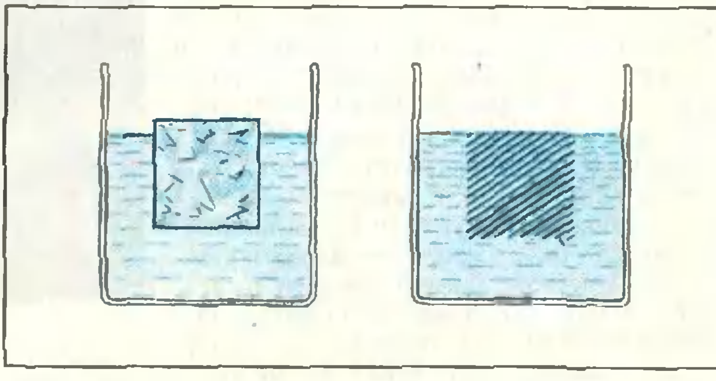


Рис. 2.

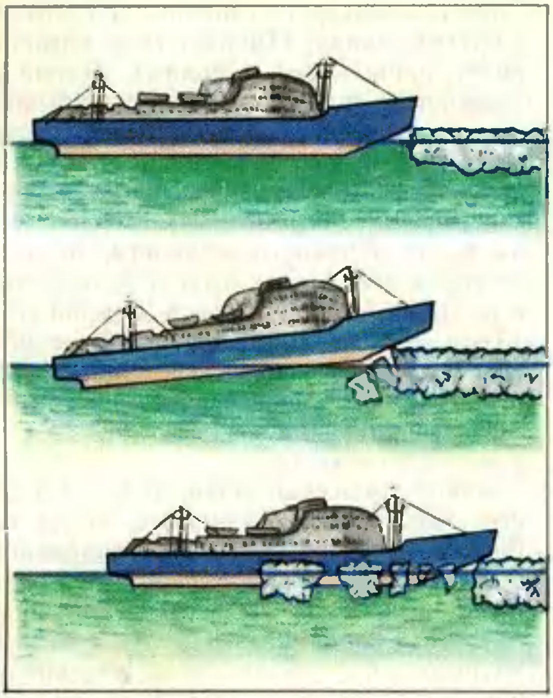


Рис. 3.

приподнять? Сила тяжести от этого не изменится, а выталкивающая сила уменьшится, так как уменьшится объем вытесняемой воды; и сила тяжести потянет корабль вниз. На таком принципе работает ледокол (рисунок 3): с разбегу он выползает носом на кромку льдины (для этого его нос делается очень пологим), и льдина лопается под действием той части веса корабля, которая оказывается уже не скомпенсированной выталкивающей силой воды.

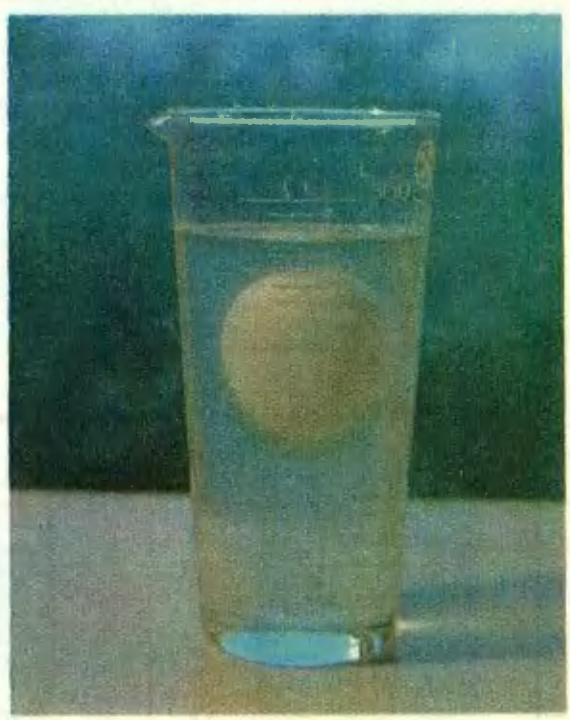
Итак, мы выяснили, при каких условиях тела плавают в жидкостях, при каких — тонут. Теперь давайте проделаем маленький эксперимент. Возьмите яблоко, разрежьте его пополам и опустите половинку в кастрюлю с водой — половинка плавает. А вторую половинку положите на дно пустой кастрюли срезом вниз и осторожно залейте водой, так, чтобы вода не проникала между яблоком и дном кастрюли (для этого можно заранее смазать срез по краям маслом). Эта половинка будет лежать на дне, как приклеенная. (О том, что все будет происходить именно так, свидетельствует фотография на обложке этого номера журнала.) Чем же объясняется столь разное поведение яблочных половинок? Дело в том, что во втором случае — половинка на дне — выталкивающая сила отсутствует, так как под яблоком нет воды. Кстати, не похоже ли это на резиновые присоски, которые используют, например, для развешивания полотенец? Конечно, похоже. Только присоски «работают» не в воде, а в воздухе.

До сих пор мы все время говорили о жидкостях. А воздух?!

Если вес воды — факт, очевидный из ежедневной практики, то осознание весомости воздуха пришло после долгих размышлений и фундаментальных физических опытов. Наконец эту мысль сформулировал Торричелли в следующих образных выражениях: «Мы погружены на дно безбрежного моря воздушной стихии, которая, как известно из неоспоримых опытов, имеет вес, причем он наибольший вблизи поверхности Земли».

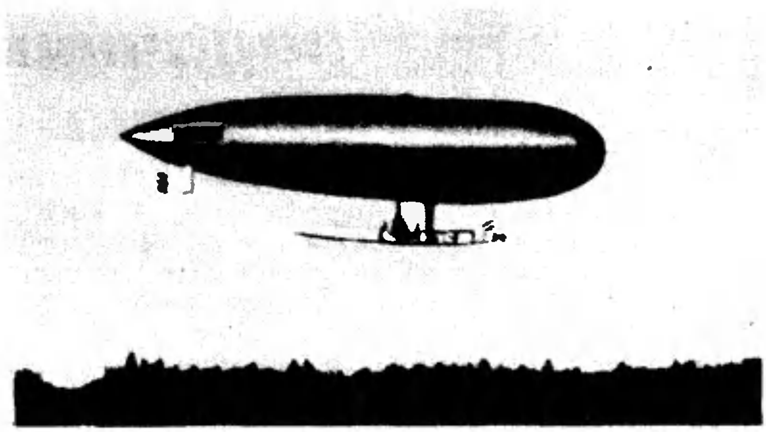
Значит, закон Архимеда должен работать и в воздухе.

...В 1783 году французские изобретатели братья Монгольфье построили бумажный шар, наполнили его горячим воздухом, и этот шар поднялся в небо. Посол России во Франции Барятинский, который наблюдал этот полет, писал «о поднятии на воздух великой тягости посредством дыма»: «Величество сего зрелища и чувствование, какое происходило в нескольких ста тысячах народа, описать никак невозможно, ибо ра-



Плотность куриного яйца равна, в среднем, 1095 кг/м³, а плотность воды — 1000 кг/м³. Почему же плавает яйцо?

Во время первой мировой войны на вооружении русской армии состоял дирижабль «Альбатрос». Длина этого воздушного корабля была 77 м, высота — 22 м. На дирижабле были установлены два двигателя общей мощностью около 350 лошадиных сил (1 л. с.≈736 Вт). Он развивал скорость до 19 м/с и мог подниматься до высоты 2000 м. «Альбатрос» совершил несколько боевых полетов, подвергая бомбардировке немецкие укрепления.



дость, чувствительность, страх, ужас и восторг видимы были на всех лицах, и до сего момента... публика еще как в чаду».

Нам теперь несложно объяснить, что удерживало шар Монгольфье «на плаву»: выталкивающая сила, равная весу воздуха в объеме шара, компенсировала действие силы тяжести, поскольку горячий воздух, заполнявший шар, легче холодного.

А вот еще один легкий «газ». Подумайте, почему облака оказываются вверху. Ведь облака образуются из водяного пара. Значит, водяной пар легче воздуха, и сила Архимеда «транспортирует» его вверх. А раз так, мы могли бы наполнить тонкую оболочку водяным паром и летать на таком устройстве?! Конечно, могли бы, надо только поддерживать температуру оболочки не ниже 100 °С, чтобы пар не конденсировался на ней,— иначе по ее внутренней поверхности потекут «слезы», как на холодном стекле окна зимой, и шар спустится.

Благодаря закону Архимеда летают аэростаты — это ведь своего рода «пузыри», заполненные легким газом, плавающие в «тяжелом» воздухе.

Во время первой мировой войны дирижабли (управляемые аэростаты) участвовали в военных действиях. Но дирижабли — не только прошлое. Недавно о них вспомнили снова из-за их экономичности: ведь самолет или вертолет, чтобы держаться в воздухе, должны изо всех сил «грести» винтами, пропеллерами или выбрасывать реактивные струи, а дирижабль висит «сам собой», не затрачивая энергии. И вот в недалеком будущем блестящие громадные сигары длиною в несколько сот метров, наполненные горячим воздухом, будут перемещать многотонные конструкции в труднодоступные районы гор или тайги. Сейчас это — проекты, а завтра...

Золотая спираль

(Начало см. на с. 15)

писал о нем: «В сочетании всех чудес грации и простоты, познаний и инстинкта в композиции Рафаэль достиг такого совершенства, в котором с ним еще никто не сравнился (...) В самых простых, как и в самых величественных, композициях повсюду его ум вносит вместе с жизнью и движением совершенный порядок в чарующую гармонию».

В композиции «Избиение младенцев» очень ярко проявляются эти черты великого мастера. В ней прекрасно сочетаются динамизм и гармония. Этому сочетанию способствует выбор золотой спирали за композиционную основу рисунка Рафаэля: динамизм ему придает вихревой характер спирали, а гармоничность — выбор золотого сечения как пропорции, определяющей развертывание спирали.

Задачник Кванта

Задачи

М881—М885; Ф893—Ф897

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 30 ноября 1984 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9—84» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М881, М882» или «Ф893». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М881, М882, М883 б) предлагались на юбилейной Ленинградской математической олимпиаде, М883 а), М884, М885 — на турнире городов (апрель 1984 г.).

Задачи Ф893—Ф897 предлагались на Всесоюзной физической олимпиаде (апрель 1984 г., Ереван).

М881. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки плоскости до трех вершин равнобедренной трапеции больше расстояния от этой точки до четвертой ее вершины.

С. Е. Рукшин

М882. Сумма трех целых чисел a, b и c равна 0. Докажите, что число $2a^4+2b^4+2c^4$ — квадрат целого числа.

Л. Д. Курляндчик, А. С. Меркурьев, С. В. Фомин

М883. В какое наименьшее число цветов нужно раскрасить клетки бесконечного листа клетчатой бумаги, чтобы

а) любые две клетки на расстоянии 6 были покрашены в разные цвета? (Расстояние между клетками — наименьшее число линий сетки, горизонтальных и вертикальных, которые должна пересечь ладья на пути из одной клетки в другую.)

б) любые четыре клетки, образующие фигуру в форме буквы Г (рис. 1), были покрашены в четыре разных цвета?

А. Г. Печковский, И. В. Итенберг

М884. Непрерывная и монотонная функция f определена на отрезке $[0; 1]$ и принимает значения также на отрезке $[0; 1]$. Докажите, что ее график можно прикрыть n прямоугольниками площади $1/n^2$ каждый (стороны прямоугольников параллельны осям координат).

А. В. Анджанс

М885*. Для каждого натурального числа n обозначим через $p(n)$ число разбиений n в сумму натуральных слагаемых (разбиения, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются одинаковыми; рис. 2). Количество различных чисел в данном разбиении назовем его *разбросом*.

а) Докажите, что сумма $q(n)$ разбросов всех разбиений числа n равна $1+p(1)+p(2)+\ldots+p(n-1)$.

б) Докажите, что эта сумма не больше $\sqrt{2n}\,p(n)$.

А. В. Зелевинский

Ф893. Для измерения распределения скорости ветра по высоте используются шары-зонды, которые имеют постоянную вертикальную скорость подъема. При запуске такого шара была получена зависимость угла α возвышения шара над горизонтом от времени t (рис. 3). Полагая скорость ветра у поверхности

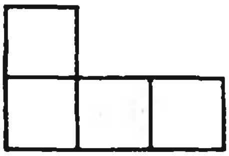


Рис. 1.

Разбиения	Разбросы
1+1+1+1	1
2+1+1	2
2+2	1
3+1	2
4	1
$p(4)=5$	$q(4)=7$

Рис. 2.

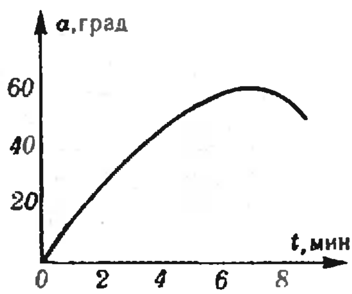


Рис. 3.

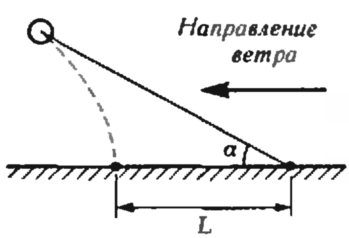


Рис. 4.

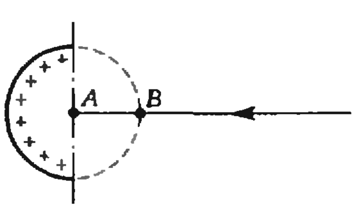


Рис. 5.

Земли равной нулю, а расстояние от места запуска шара до наблюдателя равным $L=1$ км (рис. 4), определить высоту подъема шара через 7 минут после запуска и скорость ветра на этой высоте.

В. В. Можаев

Ф894. В одном из проектов для перелетов космических аппаратов в Солнечной системе предполагалось использовать солнечный парус площадью $S=1$ км^2. Парус раскрывается, когда аппарат движется вокруг Солнца по земной орбите, радиус которой равен $R_З=1{,}5\cdot10^8$ км. При дальнейшем движении парус постоянно ориентирован перпендикулярно солнечным лучам, давление которых на земной орбите составляет $p=10^{-5}$ Па.

1) При какой массе космического аппарата он может улететь из Солнечной системы?

2) При какой максимальной массе аппарат может достичь орбиты Марса, радиус которой равен $R_М=2{,}3\cdot10^8$ км?

Гравитационное влияние Земли и других планет не учитывать. Произведение массы Солнца на гравитационную постоянную — $M_СG=1{,}3\cdot10^{11}$ км^3/с^2.

В. А. Данилин

Ф895. Одна из гипотез о происхождении пояса астероидов восходит к древнегреческой легенде о сыне бога солнца Гелиоса — Фаэтоне, пораженном Зевсом (Юпитером). Согласно этой гипотезе рой каменных глыб, из которого должна была сформироваться планета Фаэтон, слишком близко подошел к Юпитеру. Под влиянием гравитационного поля Юпитера рой распался на отдельные глыбы — астероиды. Радиус роя по оценкам составлял примерно 10^4 км; масса роя (суммарная масса астероидов) в 10^6 раз меньше массы Юпитера.

На каком расстоянии от центра Юпитера должен был пройти рой, чтобы он начал разваливаться?

В. Е. Белонучкин

Ф896. В замкнутом сосуде находятся насыщенный водяной пар при температуре 100 °C и остатки воды. Масса пара $M=100$ г, масса воды $m=1$ г. Сосуд нагревают, пока вся вода не испарится. До какой температуры надо нагреть сосуд? Какое количество тепла для этого потребуется? Давление насыщенного водяного пара возрастает на 3,7 кПа при повышении температуры на 1 °C. Удельная теплота испарения воды $r=2{,}25\cdot10^6$ Дж/кг, удельная теплоемкость водяного пара $c_V=1{,}38\cdot10^3$ Дж/(кг·К).

А. И. Буздин

Ф897. Находящаяся на бесконечности в состоянии покоя заряженная частица притягивается однородно заряженным полукольцом вдоль линии AB (рис. 5). Отношение скоростей частицы в точках B и A равно $v_A/v_B=n$. Найти отношение ускорений частицы в этих точках.

В. Т. Карапетян

Problems

M881—M885; P893—P897

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than November 30th, 1984 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант».
Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

Problems M881, M882, M883b) were proposed at the 50th Leningrad mathematics olympiad, while M883a), M884, M885 were proposed at the Intercity math tournament (April 1984).
Problems P893—P897 were proposed at the Allunion physics olympiad (April 1984, Erevan).

M881. Prove that the sum of distances from an arbitrary point of the plane to three vertices of an equilateral trapezium is greater than the distance to the fourth vertex.

S. E. Rukshin

M882. The sum of the three integers a, b and c is zero. Prove that the number $2(a^4+b^4+c^4)$ is the square of an integer.

L. D. Kurlyandchik, S. V. Fomin, A. S. Merkuriev

M883. What least number of colours are needed to paint an infinite sheet of square lined paper so that
a) any two little squares at a distance of 6 from each other are painted in different colours? (The distance between two squares is the number of lines — horizontal and vertical — that a rook going from one square to the other will intersect.)
b) any four little squares constituting a Greek Γ (see figure 1) have different colours?

A. V. Pechkovski, I. B. Itenberg

M884. The monotonic function f is defined on the closed interval $[0, 1]$ and ranges over $[0, 1]$. Prove that its graph, for any n, may be covered by n rectangles of area $1/n^2$ each. (The sides of the rectangles are parallel to the coordinate axes.)

A. V. Andjans

M885*. For each natural number n denote by $p(n)$ the number of partitions of n into a sum of natural numbers. (Partitions which differ only in the order of summands are not distinguised; e. g. $p(4)=5$ (see figure 2). The *diversity* of the given partition is by definition the quantity of different summands in the partition.
a) Prove that the sum $q(n)$ of diversities of all the partitions of n is equal to $1+p(1)+p(2)+\ldots$ $\ldots+p(n-1)$.
b) Prove that this sum does not exceed $\sqrt{2n}\cdot p(n)$.

A. V. Zelevinsky

P893. In order to measure wind velocity distribution depending on altitude, baloon probes with constant vertical elevation velocity are used. When such a baloon was sent up, the following dependence of the angle of elevation α of the baloon above the horizon on time t was obtained (see figure 3). Assuming wind velocity at the earth's surface to be zero and the distance from the observer to the point where the baloon was released to be $L=1$ km (figure 4), determine the altitude of the baloon 7 minutes after it was released and the wind velocity at that altitude.

V. V. Mozhaev

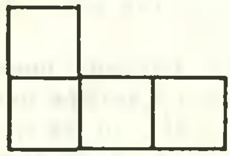


Fig. 1

Partitions	Diversity
1+1+1+1	1
2+1+1	2
2+2	1
3+1	2
4	1
$p(4)=5$	$q(4)=7$

Fig. 2.

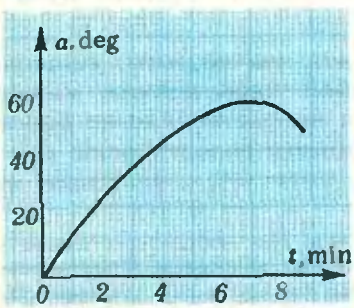


Fig. 3.

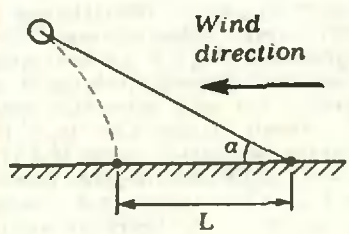


Fig. 4.

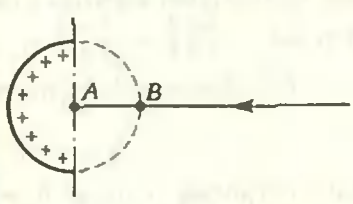


Fig. 5.

P894. In one of the projects for the flight of spacecraft within the Solar system a solar sail of area $S=1$ km^2 was proposed. The sail is opened when the spacecraft moves around the Sun on the Earth's orbit, whose radius is $R_E=1{,}5\times10^8$ km. As the spacecraft moves, the sail is kept oriented perpendicularly to the sun's rays, whose pressure in the vicinity of the orbit is $p=10^{-5}$ Pa.

1) For what mass of the spacecraft will it be able to leave the Solar system?

2) For what maximal mass will the spacecraft be able to reach Mars' orbit, whose radius in $R_M=2{,}3\times10^8$ km? The gravitational attraction of Earth and other planets may be neglected. The product of the Sun's mass by the gravitational constant is $M_S\gamma=1{,}3\times10^{11}$ km^3/c^2.

V. A. Danilin

P895. One of the hypotheses explaining the asteroid belt goes back to the ancient Greek legend about the Sun's son Phaeton, struck down by Jupiter (Zeus). According to this legend, the group of rock pieces, which eventually would have formed the planet Phaeton, moved too close to Jupiter. Under the influence of Jupiter's gravitational field, the group fell apart into separate pieces — asteroids. The radius of the group was estimated as approximately equal to 10^4 km; the mass of the group (the total mass of the asteroids) is 10^6 less than that of Jupiter. How close did the group have to approach Jupiter in order to fall apart?

V. E. Belonuchkin

P896. A closed receptacle contains saturated vapor at temperature 100 °C and leftover water. The mass of vapor is $M=100$ g, the mass of water $m=1$ g. The receptacle is heated until all the water evaporates. To what temperature must be receptacle be heated? What amount of heat will be required? The pressure of saturated vapor increases by 3,7 kPa when the temperature in creases by 1 °C. The specific heat of water vaporation is $r=2.25\cdot$J/kg, the specific heat capacity of vapor is $C_V=1.38\times10^3$ J/(kg·K).

A. I. Buzdin

P897. A particle, located at infinity in motionless state, is attracted by a uniformly charged half ring along the line AB (see figure 5). The ratio of velocities at points B and A is $v_A/v_B=n$. Find the ratio of accelerations at these points.

V. T. Karapetian

Решения задач

М866—М870; Ф878—Ф882

М866. *а) Во всех клетках квадрата 20×20 стоит по одному солдатику. Для какого наибольшего d можно переставить солдатиков в другие клетки так, чтобы каждый передвинулся на расстояние не меньше d?*

Решение задачи во всех вариантах основано на таком простом соображении: солдатик, стоящий в центре прямоугольника, не может передвинуться на расстояние, большее чем расстояние между центральной и угловой клеткой. Именно это расстояние d и слу-

(Расстояние измеряется по прямой между центрами старой и новой клеток; сторона клетки равна 1.)
Решите эту же задачу
б) для квадрата 21×21;
в) для прямоугольника m×n клеток.

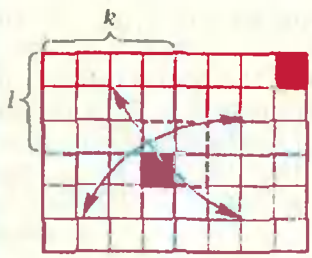


Рис. 1.

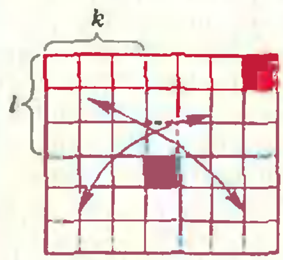


Рис. 2.

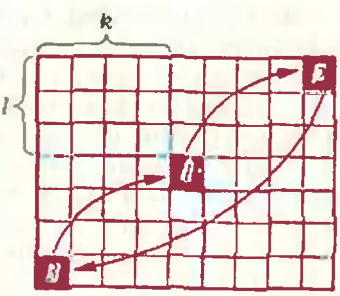


Рис. 3.

жит ответом. Но детали доказательства слегка зависят от четности чисел m и n.

Мы будем рассматривать три случая: прямоугольники $2k\times 2l$, у которых имеются четыре центральные клетки (рис. 1), $(2k+1)\times 2l$ с двумя центральными клетками (рис. 2) и $(2k+1)\times(2l+1)$ с единственной центральной клеткой (рис. 3). Докажем, что во всех трех случаях искомое расстояние d равно $\sqrt{k^2+l^2}$. (С использованием знака $[x]$ для целой части числа x ответ в общей задаче в) можно записать так:

$$d=\sqrt{\left[\frac{m}{2}\right]^2+\left[\frac{n}{2}\right]^2}.)$$

Таким образом, ответ в обеих задачах а) и б): $d=\sqrt{200}=10\sqrt{2}$.

Чтобы обосновать ответ, мы должны, во-первых, доказать, что при любой перестановке найдется солдатик, смещающийся на расстояние не более d, и, во-вторых, привести пример перестановки, при которой любой солдатик смещается на такое (или большее) расстояние.

Первая часть почти очевидна: при любой перестановке центральный солдатик смещается по гипотенузе прямоугольного треугольника, у которого катеты (параллельные сторонам прямоугольника) не превосходят k и l, то есть на расстояние, не больше $d=\sqrt{k^2+l^2}$.

Вторая часть — пример перестановки — показана на рисунках 1—3. В самом простом случае прямоугольник $2k\times 2l$ разрезается на четыре прямоугольника $k\times l$ и расположенные по диагонали пары прямоугольников (точнее, стоящие в них солдатики) переставляются друг с другом с помощью параллельных переносов. Аналогично, прямоугольник $(2k+1)\times l$ разрезается на пары переставляющихся прямоугольников $(k+1)\times l$ и $k\times l$. Для прямоугольников $(2k+1)\times(2l+1)$ солдатик из центральной клетки 1 отправляется в угол 2, солдатик из 2 — в противоположный угол 3, а солдатик из 3 — в центр на место 1 (рис. 3); остальные, — стоящие в двух прямоугольниках $(k+1)\times(l+1)$ с удаленными углами и двух других диагональных прямоугольниках $k\times l$, — меняются местами, как и в предыдущих вариантах.

Заметим, что если «расстояние» измерять не напрямик, *а по числу ходов ладьи* (*как в условии задачи* **М883** *этого номера*), то решение задачи никак не изменится, а ответом будет (в тех же обозначениях) число $d=k+l=\left[\frac{m}{2}\right]+\left[\frac{n}{2}\right]$.

Н. Б. Васильев, С. С. Кротов

М867. *На уроке танцев 17 мальчиков и 17 девочек построили двумя параллельными рядами так, что образовалось 17 пар. При этом рост мальчика и девочки в каждой паре отличаются не более чем на десять сантиметров. Докажите, что если в каждом ряду перестроить мальчиков и девочек по росту, то по-прежнему в каждой паре мальчик и девочка будут отличаться по росту не более чем на десять сантиметров.*

◆

Пусть мальчики и девочки построены в пары в порядке убывания роста. Предположим, что в одной из пар, скажем k-й, рост мальчика отличается от роста девочки больше, чем на 10 см, например, мальчик (обозначим его B) выше девочки (G). Тогда B, а значит и все первые k мальчиков, выше следующих за G девочек больше чем на 10 см. Таким образом, при п е р в о м построении в парах с этими k мальчиками могли стоять только предшествующие G девочки, а их всего $k-1$. Противоречие.

Напомним замечательную старую задачу, очень похожую по формулировке и идее решения. Пусть числа в прямоугольной таблице $m\times n$ в каждой строке стоят в порядке возрастания; надо доказать, что если в каждом столбце их переставить в порядке возрастания, то по-прежнему в каждой строке они будут стоять в порядке возрастания.

В. Л. Гутенмахер, Н. Б. Васильев

◆

М868. *Из вершин основания тетраэдра в боковых гранях проведены высоты. Докажите, что три прямые, соединяющие основания высот в каждой грани, параллельны одной плоскости. (Плоские углы при вершине — не прямые.)*

Приведем три решения задачи. Два из них опираются на следующий полезный факт:

если в треугольнике ADB (в котором угол D — не прямой) соединить основания высот AK и BL, то образуется треугольник KDL, подобный данному, причем $\widehat{DKL}=\widehat{DAB}$, $\widehat{DLK}=\widehat{DBA}$ (рис. 1).

(В самом деле, пусть угол $ADB=\varphi$ — острый. Тогда для рассматриваемых треугольников он общий, а содержащие его стороны пропорциональны:

$$\frac{|DK|}{|DL|}=\frac{|DA|\cdot\cos\varphi}{|DB|\cdot\cos\varphi}=\frac{|DA|}{|DB|}. \qquad (*)$$

В случае тупого угла ADB рассуждение аналогично.)

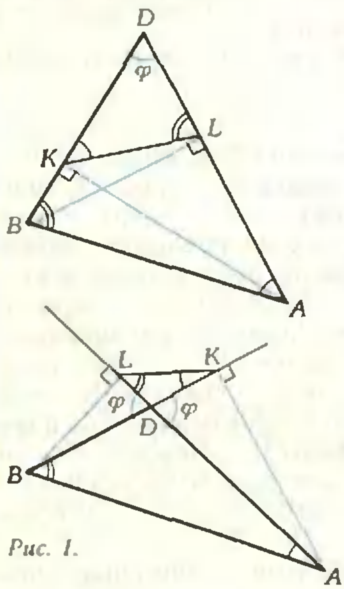


Рис. 1.

Первое решение. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр, ABC — его основание. Докажем, что три прямые из условия задачи параллельны плоскости, которая касается описанной сферы тетраэдра в вершине D. Очевидно, каждая из боковых граней тетраэдра пересекает эту плоскость по касательной к описанной окружности этой грани, поэтому достаточно доказать, что эти три прямые параллельны соответствующим касательным.

Рассмотрим, например, грань ABD; пусть AK и BL — высоты этой грани, DE — касательная к ее описанной окружности (рис. 2). Тогда

$$\widehat{ABK}=\frac{1}{2}\breve{AD}=\widehat{ADE}$$

(первое равенство следует из теоремы об измерении угла, вписанного в окружность, второе — из теоремы об угле между касательной и хордой). Итак, углы DBA, DLK и ADE равны по величине, следовательно, прямые KL и DE параллельны.

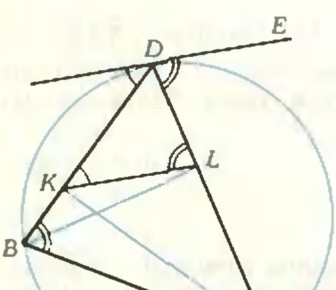


Рис. 2.

Их параллельность вытекает также из следующей полезной теоремы: в любом треугольнике ADB радиус DO описанной окружности и высота DH образуют одинаковые углы с боковыми сторонами: $\widehat{ADO}=\widehat{HDB}$ (рис. 3).

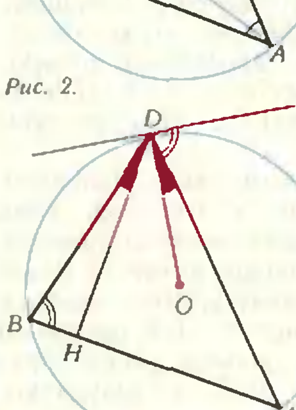


Рис. 3.

Второе решение. Пусть a, b, c — длины ребер DA, DB, DC тетраэдра. Отложим на лучах DA, DB, DC отрезки DA_1, DB_1, DC_1, равные по длине произведениям bc, ca, ab соответственно.

Докажем, что описанные в условии прямые параллельны прямым A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1 (тем самым, параллельны плоскости $A_1B_1C_1$).

Рассмотрим, как и прежде, грань ABD. Треугольники KLD и B_1A_1D подобны, поскольку согласно (*)

$$\frac{|DK|}{|DL|}=\frac{|DA|}{|DB|}=\frac{a}{b}=\frac{ca}{bc}=\frac{|DB_1|}{|DA_1|},$$

следовательно, прямые KL и A_1B_1 параллельны.

Разумеется, в этом решении вместо тройки ab, bc, ca можно было бы взять любую пропорциональную ей тройку чисел, например, $\frac{1}{c}$, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{b}$.

Третье решение — векторное. Пусть $\vec{DA}=\vec{a}$, $\vec{DB}=\vec{b}$, $\vec{DC}=\vec{c}$, тогда, как легко видеть из рисунка 1,

$$\vec{LK}=\vec{BK}-\vec{BL}=b\cos\varphi\cdot\frac{\vec{a}}{a}-a\cos\varphi\cdot\frac{\vec{b}}{b}=\left(\frac{\vec{a}}{a^2}-\frac{\vec{b}}{b^2}\right)\cdot(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

(где $\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos\varphi$). Аналогичная формула верна и для двух других боковых граней тетраэдра. Но три вектора

$$\frac{\vec{a}}{a^2}-\frac{\vec{b}}{b^2},\ \frac{\vec{b}}{b^2}-\frac{\vec{c}}{c^2},\ \frac{\vec{c}}{c^2}-\frac{\vec{a}}{a^2}$$

дают в сумме нуль-вектор и поэтому компланарны. Следовательно, описанные в условии прямые, будучи параллельны этим векторам, параллельны одной плоскости.

Н. Б. Васильев, В. Н. Дубровский, В. Л. Гутенмахер

◆

М869*. *Пары последовательных натуральных чисел (8, 9); (288, 289) обладают тем свойством, что каждое из этих чисел содержит любой простой множитель не менее чем во второй степени.*
а) Найдите еще одну такую пару последовательных чисел.
б) Докажите, что существует бесконечно много таких пар.

Если пара чисел m, $m+1$ обладает нужным свойством (каждое из чисел не содержит простых множителей в первой степени), то и пара чисел $4m(m+1)$, $4m(m+1)+1$ тоже им обладает: первое число, равное $2^2m(m+1)$, по предположению, а второе, — равное $4m^2+4m+1=(2m+1)^2$, — потому, что оно является квадратом. Применяя эту операцию к паре чисел (8, 9), мы получаем как раз пару $4\cdot8\cdot9=288$; $289=17^2$, указанную в условии. Из этой пары, в свою очередь, можно получить еще одну пару $4\cdot288\cdot289=331828$; $331829=577^2$. (Впрочем, читатели указали в ответе к задаче а) и меньшие числа: $675=3^3\cdot5^2$, $676=2^2\cdot13^2$; $12167=23^3$, $12168=2^3\cdot3^2\cdot13^2$ и др.)

Продолжая таким же образом, с помощью операции

$$(m;\ m+1)\to(4m(m+1);\ 4m(m+1)+1),$$

при которой оба числа пары, очевидно, возрастают, мы можем построить сколько угодно нужных пар чисел.

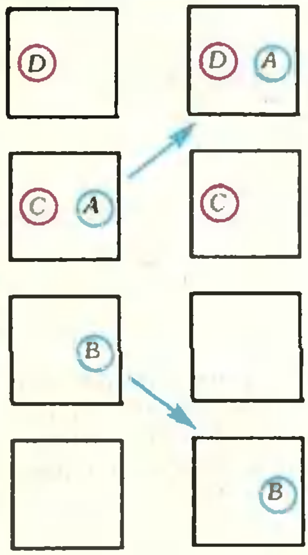
А. В. Анджанс

◆

М870. *По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное число комнат, занумерованных по порядку целыми числами, и в каждой стоит по роялю. В этих комнатах живет некоторое конечное число пианистов. (В одной комнате может жить и несколько пианистов.) Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах — k-й и $(k+1)$-й, — приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в $(k-1)$-ю и $(k+2)$-ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся.*

Интуитивно утверждение задачи довольно понятно: с каждым переселением распределение пианистов становится все более «разреженным», но когда оно станет совсем «разреженным», переселения должны прекратиться, потому что соседствующих пианистов не останется. Попытаемся придать этим рассуждениям строгую форму.

Обозначим через $s=s(t)$ сумму всех попарных расстояний между пианистами в t-й день (под «расстоянием» между пианистами, живущими в k-й и m-й комнатах понимается модуль разности номеров комнат — $|m-k|$). Легко видеть, что *с каждым переселением величина $s(t)$ растет*. Действительно (см. рис.), расстояние между любыми двумя переселяющимися пианистами A и B в результате переселения увеличивается на 2, на столько же увеличивается сумма расстояний от A и B до любого



пианиста C, жившего вместе с одним из них, а для всякого другого пианиста D сумма расстояний до A и B не меняется. Таким образом,

$$s(t+1) \geqslant s(t)+2. \qquad (*)$$

(Вместо суммы попарных расстояний, в качестве «степени разреженности» распределения можно взять также сумму их квадратов, или сумму квадратов номеров комнат всех пианистов.)

Докажем теперь, что распределение по комнатам не может стать слишком «разреженным», то есть *существуют такие два номера m и M, $m<M$, что пианисты всегда будут оставаться в комнатах с номерами от m до M.*

Для этого заметим, что если в какой-то день в трех соседних комнатах (с номерами $k-1$, k и $k+1$) живет хотя бы один пианист, то и в дальнейшем хотя бы одна из них всегда будет заселена. (В самом деле, покинуть эти комнаты можно, лишь переселяясь из $(k+1)$-й в $(k+2)$-ю или из $(k-1)$-й в $(k-2)$-ю; но и то, и другое возможно, только если в k-й комнате жил пианист, переселившийся соответственно, в $(k-1)$-ю или $(k+1)$-ю комнату.) Следовательно, пианист из k-й комнаты не может попасть в комнату с номером, большим $k+3N$, где N — число пианистов (после такого переселения в каждой из $N+1$ троек комнат с номерами $(k, k+1, k+2)$, ..., $(k+3N, k+3N+1, k+3N+2)$ должны были бы остаться пианисты); по той же причине невозможно переселиться из k-й комнаты дальше, чем в $(k-3N)$-ю. Итак, пианисты всегда будут оставаться в комнатах с номерами от $a-3N$ до $b+3N$, где a и b $(a\leqslant b)$ — номера крайних комнат, первоначально занятых пианистами.

Отсюда вытекает, что сумма $s(t)$ попарных расстояний между пианистами не может неограниченно возрастать, а в силу $(*)$ отсюда вытекает, что переселения через конечное число дней прекратятся.

В. Г. Ильичев

◆

Ф878. *Два гладких желоба, образующих с горизонтом одинаковые углы α, расположены в одной вертикальной плоскости (рис. 1). Из точки A одного желоба и из точки B другого желоба одновременно без начальных скоростей начинают соскальзывать два тела. Время движения до горизонтальной плоскости первого тела (из точки A) — t_1, второго — t_2. Через какое время после начала движения тел расстояние между ними было наименьшим?*

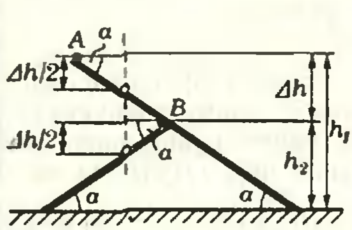


Рис. 1.

При движении тел разность высот, на которых они будут находиться в один и тот же момент времени, всегда будет одной и той же и равной (см. рисунок 1) $\Delta h=h_1-h_2$. Следовательно, расстояние между телами будет минимальным тогда, когда они будут находиться на одной вертикали, то есть по горизонтали расстояние между телами будет равно нулю. Поскольку начальные скорости обоих тел равны нулю и углы наклона их траекторий к горизонту одинаковы, ясно, что на одной вертикали тела окажутся в тот момент, когда, пройдя одинаковые пути, тела сместятся по вертикали каждое на $\Delta h/2$. Так что время $t_{\min}$, через которое расстояние между телами будет минимальным, — это время, за которое любое тело из начальной точки сместится по высоте на $\Delta h/2$, то есть

$$\frac{g' t_{\min}^2}{2}=\frac{\Delta h}{2} \Rightarrow t_{\min}=\sqrt{\frac{\Delta h}{g'}},$$

где g' — вертикальная проекция ускорения тел, которую найдем, воспользовавшись II законом Ньютона: в проекциях на вертикальную ось (см. рисунок 2)

$$mg'=mg-mg\cos^2\alpha \Rightarrow g'=g\sin^2\alpha.$$

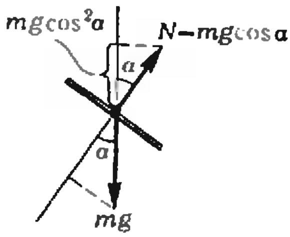


Рис. 2.

Найдем Δh:

$$h_1=\frac{g't_1^2}{2},\quad h_2=\frac{g't_2^2}{2},\quad \Delta h=h_1-h_2=\frac{g'}{2}\,(t_1^2-t_2^2).$$

Таким образом,

$$t_{min}=\sqrt{\frac{t_1^2-t_2^2}{2}}.$$

И. М. Шихалиев

Ф879. *Вагон массы M, установленный на рессорах с жесткостью k, катится по горизонтальному участку пути со скоростью v_0. После прохождения прямолинейного наклонного участка пути с перепадом высот H, составляющего угол α с горизонтом (рис. 1), вагон приобретает скорость v_x. Определить значение v_x, пренебрегая трением в колесах. Считать, что период колебаний вагона на рессорах много меньше времени прохождения наклонного участка пути и много больше времени прохождения скруглений, сопрягающих наклонный и прямолинейные участки пути; рессоры «пружинят» только в направлении, перпендикулярном плоскости рельсов.*

◆

При прохождении вагоном скруглений возникают колебания. При этом часть кинетической энергии вагона переходит в энергию колебаний, которая затем, когда колебания затухают, переходит в тепло. Таким образом,

$$\frac{Mv_x^2}{2}+U=\frac{Mv_0^2}{2}+MgH, \qquad (*)$$

где U — энергия колебаний. Определим U.

При прохождении первого скругления нагрузка на рессоры уменьшается, так как сила нормального давления становится равной $F_2=Mg\cos\alpha$, а не $F_1=Mg$, как было на прямолинейном участке. При прохождении второго скругления нагрузка возрастает до прежней величины. За время спуска по наклонному участку колебания, вызванные уменьшением нагрузки, успевают затухнуть, так что оба процесса надлежит рассматривать независимо.

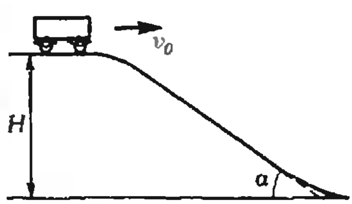


Рис. 1.

Рассмотрим пружину, сжатую силой $F=F_1$ и находящуюся в равновесии. Длина пружины меньше длины ненагруженной пружины на $x_1=F_1/k$. При ослаблении нагрузки до величины $F_2<F_1$ происходят колебания около нового положения равновесия, соответствующего сжатию пружины на $x_2=F_2/k$. После затухания колебаний пружина устанавливается в этом равновесном положении. Полная работа сил упругости пружины, равная разности упругих энергий в первом и во втором положениях, —

$$A_{упр}=\frac{1}{2}\,(F_1x_1-F_2x_2)=\frac{k}{2}\,(x_1^2-x_2^2)=\frac{1}{2k}\,(F_1^2-F_2^2)$$

(на рисунке 2 этой работе соответствует площадь трапеции, заштрихованной вертикально). Если ослабление нагрузки произошло за время, гораздо меньшее периода колебаний, то можно считать, что во время изменения координаты сила нормального давления все время равна приближенно F_2, так что работа против сил нагрузки равна

$$A_{нагр}=F_2(x_1-x_2)$$

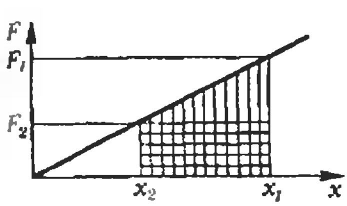


Рис. 2.

(на рисунке 2 этой величине соответствует площадь горизонтально заштрихованного прямоугольника). Разность двух вычисленных работ равна энергии колебаний, перешедшей в тепло при затухании колебаний, то есть

$$U_1=\frac{(F_1+F_2)(F_1-F_2)}{2k}-\frac{F_2(F_1-F_2)}{k}=\frac{(F_1-F_2)^2}{2k}$$

(на рисунке 2 этой энергии соответствует площадь вертикально заштрихованного треугольника).

При быстром возрастании нагрузки от F_2 до F_1 работа сил упругости за время, большее времени затухания колебаний, равна площади трапеции, заштрихованной на рисунке 3 вертикально. Силу нагрузки все это время можно считать равной приближенно F_1; работа, которая совершается против сил нагрузки, — $F_1(x_1-x_2)$ (площадь горизонтально заштрихованного прямоугольника на рисунке 3). В тепло переходит энергия, равная разности этих работ, то есть

$$U_2=\frac{1}{2}(F_1-F_2)(x_1-x_2)=\frac{(F_1-F_2)^2}{2k}$$

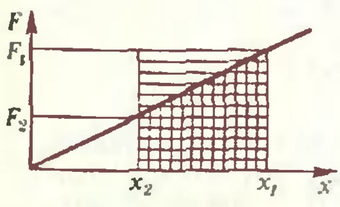


Рис. 3.

(площадь горизонтально заштрихованного треугольника на рисунке 3).

Таким образом, в результате процессов уменьшения нагрузки от F_1 до F_2 и затем возрастания ее до прежней величины F_1 в тепло переходит энергия

$$U=U_1+U_2=\frac{(F_1-F_2)^2}{k}=\frac{(Mg(1-\cos\alpha))^2}{k}.$$

Подставив это значение U в уравнение (*), найдем v_x:

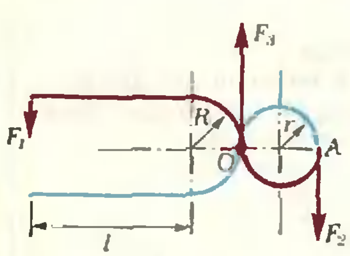
$$v_x=\sqrt{v_0^2+gH-2Mg^2(1-\cos\alpha)^2/k}.$$

Эта формула применима, пока k достаточно велико, чтобы обеспечить малость периода и времени затухания по сравнению со временем спуска.

И. П. Крылов

◆

Ф880. *Клещи состоят из двух одинаковых частей, скрепленных осью в точке O (см. рисунок). Какова сила, действующая на ось, если свободные концы клещей сжимают с силой F? Трение в оси отсутствует.*



Определим силу, действующую на ось со стороны одной из половинок клещей.

На рисунке показаны силы, действующие на красную половинку (направление силы F_3, действующей со стороны оси на эту половинку, однозначно определяется направлением силы $F_1=F$ и силы F_2, действующей на красную половинку со стороны синей). Значение силы F_3 найдем, воспользовавшись правилом моментов. Запишем уравнение моментов относительно точки A (см. рисунок):

$$2rF_3=(l+R+2r)F_1 \Rightarrow F_3=F_1\left(1+\frac{l+R}{2r}\right)=$$
$$=F\left(1+\frac{l+R}{2r}\right).$$

Согласно III закону Ньютона на ось со стороны красной половинки действует сила $\vec{F}_3'=-\vec{F}_3$, то есть

$$F_3'=F\left(1+\frac{l+R}{2r}\right)$$

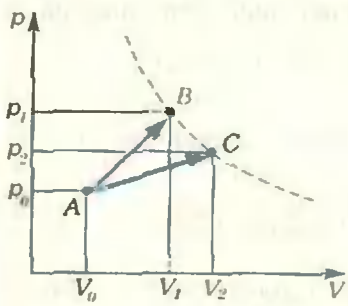
(F_3' — абсолютное значение силы $\vec{F}_3'$). Понятно, что со стороны синей половинки на ось действует такая же, по абсолютной величине, сила. Так что сила, сжимающая ось, равна

$$F_{\text{сж}}=F\left(1+\frac{l+R}{2r}\right).$$

Л. Г. Маркович

◆

Ф881. *Над газом совершают два тепловых процесса, нагревая его из одного и того же состояния до одной и той же конечной температуры. На p—V-диаграмме процессы изображаются прямыми линиями (см. рисунок). При каком из процессов газу сообщается большее количество тепла?*



Согласно первому закону термодинамики при переходе газа из состояния A (p_0, V_0) в состояние B (p_1, V_1)

$$\Delta Q_1=\Delta U_1+A_1,$$

причем

$$A_1=\frac{p_0+p_1}{2}(V_1-V_0).$$

При переходе газа из состояния A в состояние C (p_2, V_2)

$$\Delta Q_2=\Delta U_2+A_2,\qquad A_2=\frac{p_0+p_2}{2}(V_2-V_0).$$

Поскольку конечная температура газа в состоянии B и в состоянии C одна и та же, $\Delta U_1=\Delta U_2$. Чтобы выяснить, в каком процессе газу сообщается большее количество теплоты, надо сравнить значения A_1 и A_2. Сделаем это:

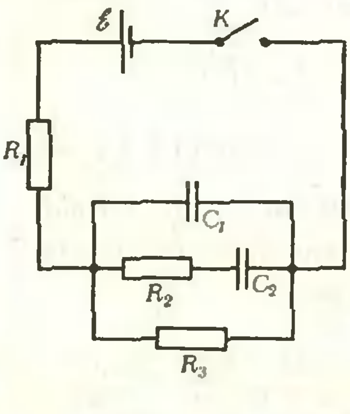
$$A_1-A_2=\frac{1}{2}((p_0V_1-p_0V_2)+(p_2V_0-p_1V_0))<0,$$

так как $p_0V_1<p_0V_2$, $p_2V_0<p_1V_0$. Следовательно, $A_2>A_1$ и $\Delta Q_2>\Delta Q_1$, то есть в процессе $A\to C$ газу сообщается большее количество теплоты.

А. И. Буздин, С. С. Кротов

◆

Ф882. *В схеме, приведенной на рисунке, $R_1=R_2=R_3=R$, $C_1=C_2=C$. Определить величину тока через источник с ЭДС $\mathcal{E}$: а) в первый момент времени после замыкания ключа K; б) спустя большой промежуток времени.*



В первый момент времени после включения ключа K, когда все конденсаторы еще не заряжены и напряжение на них равно нулю, ток, который потечет через резистор R_1, начнет заряжать конденсатор C_1; ни через резистор R_2, ни через резистор R_3 ток не потечет и падения напряжений на них будут равны нулю. Поэтому в первый момент времени

$$I_1=\frac{\mathcal{E}}{R_1}=\frac{\mathcal{E}}{R}$$

(мы считаем источник идеальным).

Спустя большой промежуток времени все конденсаторы зарядятся, и установившийся ток будет течь только через резисторы R_1 и R_3. Поэтому

$$I_{\text{уст}}=\frac{\mathcal{E}}{R_1+R_3}=\frac{\mathcal{E}}{2R}.$$

С. К. Строков

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М836 — М845, М847 — М850, Ф848 — Ф862, справились с задачами М836, М837, М841, М842, М849 и Ф853, Ф857, Ф859. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

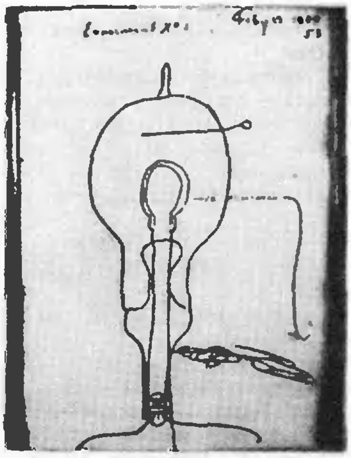
Х. Агаев (с. Тьюркоба Аз.ССР) 50; *М. Александров* (Москва) 43, 44, 50; *Р. Алексеев* (Ленинград) 38, 40, 43—45, 47, 48, 50; *Я. Алиев* (Баку) 43; *А. Аляев* (р.п. Пачелма Пензенской обл.) 43; *Г. Андреева* (Пермь) 43; *А. Артюх* (Чернигов) 43, 50; *А. Асрян* (с. Грибоедов Арм.ССР) 43—45, 50; *А. Астрелин* (Новосибирск) 43—45; *Р. Бабаев* (Баку) 43, 50; *Е. Баланова* (Рига) 43, 44; *А. Барабаш* (Киев) 43, 44; *Ю. Бекетов* (Ленинград) 45; *А. Белоус* (Винница) 43, 44; *В. Бережной* (Киев) 43, 44; *А. Биргер* (Иваново) 38, 39, 40; *И. Бирман* (Донецк) 44, 50; *А. Бирюков* (Саратов) 50; *И. Бордовский* (Трубчевск) 43; *Р. Боташев* (Фрунзе) 43, 44; *Н. Ботвина* (Одесса) 43; *Т. Бурмистрова* (Сердобск) 43; *И. Вайнштейн* (Первоуральск) 44; *А. Ваник* (Днепропетровск) 43, 44; *В. Василенко* (Ростов-на-Дону) 43, 50; *В. Васильев* (Воткинск) 43, 50; *С. Велесько* (Минск) 38; *Э. Велиметов* (Баку) 43, 44; *В. Веретенов* (Москва) 43, 44; *И. Верный* (Киев) 44; *Л. Вертгейм* (Новосибирск) 40, 43—45, 50; *И. Вехтер* (Кишинев) 38, 44, 50; *Р. Видгоп* (Баку) 50; *А. Вишик* (Москва) 43—45, 47, 48, 50; *И. Воронков* (Гатчина) 43; *А. Габараев* (Тбилиси) 43; *Т. Газарян* (Ереван) 50; *В. Гайдук* (Ленинград) 45; *В. Гайлович* (Москва) 43; *Д. Гамарник* (Тбилиси) 50; *Т. Гамбарян* (Баку) 43, 44; *Р. Гендлер* (Ташкент) 38, 43, 44, 48, 50; *Д. Гехтман* (Киев) 43; *П. Глазырин* (Воткинск) 50; *Д. Глек* (Воронеж) 40, 43; *М. Глушко* (Москва) 43; *И. Гольдштейн* (Москва) 43, 45; *Г. Горбатенко* (Арзамас) 43, 44, 50; *В. Гродницкий* (Днепропетровск) 43, 50; *Ю. Грабовский* (Киев) 43, 44, 50; *И. Григорьев* (Челябинск) 38; *А. Городницкий* (Севастополь) 43; *А. Даваажав* (Дундговь, МНР) 40; *А. Давтян* (п. Мецамор, Арм. ССР) 50; *Е. Дадамбаев* (Харьков) 43; *В. Демидович* (Гадяч) 43; *С. Демьянченко* (Москва) 43, 44, 50; *А. Дендерыс* (Львов) 43, 44; *В. Дзюба* (Киев) 38, 39, 43, 44, 50; *Д. Димова* (Ямбол, НРБ) 43, 50; *Б. Добровольский* (Тбилиси) 43; *Е. Доманицкая* (Ленинград) 45; *Ю. Дрозд* (Киев) 44, 48; *С. Дудко* (Донецк) 50; *А. Дынников* (Жуковский) 38, 39, 43—45, 50; *В. Елистратов* (Донецк) 43, 50; *А. Еременко* (Киев) 43; *Б. Жаргалсайхан* (Дундговь, МНР) 39; *Д. Железовский* (Саратов) 43; *В. Жманин* (Желтые Воды) 43; *В. Журавлев* (Гайворон) 50; *А. Захаров* (Гатчина) 43; *С. Зейналов* (Баку) 43; *Д. Земляной* (Севастополь) 39; *Е. Зиманов* (Алма-Ата) 44; *А. Зорин* (Москва) 40; *Л. Зосин* (Киев) 43—45, 47, 48, 50; *И. Иванко* (Киев) 44; *С. Иванков* (Москва) 39, 45; *Л. Иванов* (Саратов) 38, 43, 44, 48, 50; *В. Ивлев* (Джезказган) 40; *О. Ильин* (Чебоксары) 43, 44; *А. Исабеков* (Алма-Ата) 43; *М. Йотов* (София, НРБ) 48, 50; *А. Кадыров* (Ташкент) 43; *В. и И. Каповичи* (Хабаровск) 38, 43—45, 48, 50; *С. Карташев* (Запорожье) 43; *И. Карчевский* (Алма-Ата) 43; *П. Косинский* (Алма-Ата) 43; *Д. Кашпер* (Киев) 43, 44; *Н. Кендер* (Баку) 43; *П. Кирилин* (Дубна) 43, 44, 50; *А. Кисилев* (Ленинград) 44, 50; *С. Кожемяк* (Симферополь) 43; *К. Копотун* (Киев) 43, 50; *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) 43; *Л. Королев* (Елабуга) 43; *Ю. Кочетков* (Винница) 43, 44, 50; *О. Крылов* (п. Синегорье Магаданской обл.) 43, 44; *Т. Куандыков* (Ленгер) 43; *В. Кузнецов* (Пенза) 38, 43; *Н. Кузьмин* (Москва) 43, 45; *И. Кулагин* (Свердловск) 43, 44; *А. Кумпан* (Донецк) 43; *Н. Курило* (с. Ольховка Харьковской обл.) 43, 50; *В. Кусков* (п. Кр. Октябрь Владимирской обл.) 43; *А. Лазарев* (Москва) 38; *С. Лаусмаа* (Кохтла-Ярве) 44; *М. Лев* (Свердловск) 38, 39, 40, 43, 44, 48, 50; *М. Ледней* (с. Лопушное Закарпатской обл.) 43, 50; *Л. Леняшин* (Ленинград) 44; *В. Литвин* (Кривой Рог) 43; *А. Лукьянов* (Севастополь) 39; *Д. Лунц* (Саратов) 43, 44; *М. Макаров* (Севастополь) 39; *А. Малеванец* (Киев) 43—45; *Т. Маливанчук* (Киев) 43, 50; *А. Мальгичев* (с. Дмитровское Ярославской обл.) 43; *М. Мансров* (Севастополь) 43—45; *Ю. Маринец* (Львов) 43, 44; *В. Маркин* (Тамбов) 43; *Г. Масловский* (Бельцы) 43; *Ю. Махлин* (Москва) 48, 50; *Н. Мельник* (Гайсин) 43; *А. Мельников* (Днепропетровск) 43, 50; *С. Минаев* (Свердловск) 43, 44, 50; *Т. Мисирпашаев* (Москва) 43, 44; *В. Михайлюк* (с. Щуровцы Хмельницкой обл.) 44; *Ю. Михлин* (Москва) 43—45; *Е. Мишин* (Севастополь) 39, 43, 44, 50; *В. Мовсесян* (Ереван) 43; *А. Молотков* (Ленинград) 44, 48; *Б. Монхтор* (Улан-Батор, МНР) 43, 50; *Е. Мухин* (Кинешма) 47; *С. Мягчилов* (Одесса) 44, 45; *С. Найден* (Днепропетровск) 43, 44; *М. Неизадим* (Кокчетав) 43; *О. Никифоргин* (Ивано-Франковск) 43; *М. Ободовский* (Москва) 50; *О. Овецкая* (Донецк) 50; *И. Оконечников* (Новгород) 43, 44; *Л. Ольха* (Свердловск) 44; *Р. Оруджев* (Баку) 43; *Я. Оссовски* (Старогард Гданьски, ПНР) 38, 39, 40; *Б. Панич* (Севастополь) 45, 48, 50; *Н. Пеккер* (Новокузнецк) 43; *И. Пивкина* (Новосибирск) 48; *Н. Писаренко* (Новосибирск) 43, 45, 50; *В. Погребняк* (Винница) 43, 44, 50; *Т. Поликарпова* (Белорецк) 50; *С. Полинов* (Магнитогорск) 43, 44; *В. Поляковский* (Киев) 43, 44; *В. Порошин* (Ленинград) 44, 45; *А. Приходько* (Днепропетровск) 43, 44; *И. Прудников* (Москва) 43, 44; *Т. Радько* (Корсунь-Шевченковский) 43, 44, 50; *А. Ри* (Кара-Балта) 43; *Е. Романов* (Димитровград) 44, 50; *Д. Рубленко* (Хмельницкий) 43; *С. Русева* (Сливен, НРБ) 43, 44; *Е. Рухлин* (Винница) 43, 44; *И. Савыков* (Первоуральск) 43; *В. Сакбаев* (Алма-Ата) 43; *Г. Самадашвили* (Тбилиси) 38, 43, 44; *И. Самовол* (Гайворон) 50; *Е. Сангир* (Улан-Батор, МНР) 43; *К. Сасонко* (Ленинград) 43, 45; *Ю. Свирид* (Минск) 43; *И. Святодух* (Красноармейск Донецкой обл.) 38; *М. Седракян* (Ереван) 38, 39, 40; *Л. Селисский* (Горький) 43; *К. Семенов* (Киев) 44; *А. Сергиенко* (Ленинград) 43; *Р. Сибилев* (Ленинград) 50; *А. Сидорович* (Москва) 44; *А. Солянин* (Верхнеднепровск) 43; *Г. Спивак* (Киев) 43, 50; *С. Старцев* (Уфа) 43, 44; *М. Стоенеску* (Брашов, СРР) 43; *А. Стоилов* (Бургас, НРБ) 38, 39, 40; *И. Стоянов* (Димитровград, НРБ) 43, 44; *В. Судаков* (Тбилиси) 45, 50; *В. Тартаковский* (Киев) 43—45, 50; *М. Тейтель* (Киев) 43—45, 47, 48, 50; *М. Теплицкий* (Тбилиси) 45; *Д. Толпин* (Электросталь) 43, 44; *Ф. Толстов* (Свердловск)

50; *Л. Тополюк* (Пенза) **43**; *А. Трухан* (Минск) **38**; *С. Тулешев* (Москва) **43**; *В. Тульчинский* (Киев) **43, 44, 50**; *А. Турова* (Москва) **43**; *Е.* и *Т. Уклистые* (Астрахань) **43, 50**; *Н. Устинов* (Калининград) **50**; *Н. Федин* (Омск) **43, 44**; *Д. Федосеев* (Первоуральск) **43, 44**; *Е. Филенко* (Родинское) **38, 50**; *А. Финельт* (Москва) **43**; *Е. Финк* (Ленинград) **38, 39, 45**; *М. Фоменко* (Алма-Ата) **43, 44**; *Б. Фридман* (Москва) **38, 39, 43—45, 48, 50**; *С. Харченко* (Донецк) **43**; *М. Хованов* (Москва) **38, 45**; *М. Холмянский* (Москва) **43, 44**; *Д. Хрусталев* (Москва) **43, 44**; *В. Хрычиков* (Севастополь) **38, 39**; *Т. Хусейнов* (Душанбе) **44**; *В. Цанко* (Харьков) **43**; *В. Цейткин* (Бердянск) **43**; *А. Череватый* (Киев) **44**; *И. Чернышевич* (Киев) **43**; *С. Чичинский* (Днепропетровск) **43**; *О. Шаров* (Киев) **44, 50**; *И. Шестакова* (Старобельск) **43**; *Г. Шуклин* (Киев) **43**; *М. Шульгина* (Фатеж) **43, 44**; *Л. Эрдёш* (Будапешт, ВНР) **38, 39, 40, 43, 44**; *А. Эфендиев* (Баку) **43**; *Е. Юдицкий* (Киев) **43, 44, 48, 50**; *С. Ягунов* (Ленинград) **44, 45**; *А. Ярин* (Севастополь) **39**.

Физика

А. Абанов (Красноярск) **50—52, 54—56**; *О. Авраменко* (Херсон) **54, 56, 58, 60**; *А. Акулов* (Новосибирск) **54**; *В. Апальков* (Харьков) **49—52, 54—56, 60—62**; *В. Арефьев* (Воронеж) **56**; *Ю. Артемов* (с. Братовщина Московской обл.) **50**; *А. Артюх* (Чернигов) **50, 52**; *Г. Атабаева* (Шаватский р-н Хорезмской обл.) **56**; *Т. Ахабаев* (Чимкент) **54—56**; *Д. Бакунин* (Томмот) **55, 56**; *А. Барибаш* (Киев) **54—56**; *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) **50—61**; *А. Барчунов* (Алма-Ата) **54—56**; *А. Белоус* (Винница) **55**; *П. Бенедюк* (Пятигорск) **55, 56**; *Д. Бердников* (Винница) **55, 56**; *Е. Беспалов* (Курган) **48, 50, 52, 54, 55, 58, 60**; *И. Бордовский* (Трубчевск) **56**; *Д. Борец* (Харьков) **58**; *М. Букин* (Запорожье) **60**; *Н. Бурдейная* (Винница) **55**; *В. Васильев* (Воткинск) **55, 56**; *О. Васильев* (Алма-Ата) **54, 55**; *Ю. Воронов* (Москва) **54—56**; *В. Вульф* (Рудный) **52**; *В. Вяткин* (Воткинск) **56**; *С. Габриш* (ст. Ремонты Красноярского кр.) **54—56**; *О. Гаврилов* (Киев) **54—56**; *А. Галактионов* (Пермь) **48, 54—56, 58, 61**; *В. Галухин* (Рязань) **55, 58**; *Е. Генчикмахер* (Киев) **54—56, 58, 60**; *Д. Гехтман* (Киев) **54—56**; *П. Глазырин* (Воткинск) **61**; *Р. Глухов* (Вязники) **58**; *С. Гнездилова* (Киев) **54, 55**; *Е. Головина* (Йошкар-Ола) **56**; *Г. Горбатенко* (Арзамас) **56**; *Ю. Гордиенко* (Винница) **48, 54, 56**; *М. Готман* (Киев) **60**; *И. Григорьев* (Челябинск) **48, 50—52**; *М. Гринберг* (Красноярск) **50—52**; *Ю. Гринцевич* (п. Сосновоборск Красноярского кр.) **48, 52**; *А. Губанов* (Омск) **55**; *В. Гусев* (Красноярск) **54—56, 58, 60**; *Ю. Дейкало* (Киев) **58**; *П. Дробышев* (Киев) **54—56, 61**; *С. Дубовик* (Брест) **48**; *С. Дудко* (Донецк) **60**; *Д. Ермошин* (Москва) **50, 52, 56**; *О. Ефремов* (Воронеж) **52**; *С. Жилинскас* (Вильнюс) **54—56**; *Е. Зиманов* (Алма-Ата) **54, 56**; *З. Зубалей* (Винница) **54—56**; *А. Изирс* (Апатиты) **56, 58, 60**; *М. Йотов* (София, НРБ) **48, 50—52**; *И. Калиновский* (Киев) **54—56, 58, 62**; *И. Карчевский* (Алма-Ата) **54—56**; *П. Касинский* (Алма-Ата) **54—56**; *Ф. Касымов* (Акстафа) **52**; *Д. Кашпер* (Киев) **54—56**; *М. Кельмансон* (Москва) **58**; *Р. Керимбеков* (Орджоникидзе) **56**; *А. Кириченко* (Пермь) **48, 50—60**; *А. Климачев* (Минск) **54, 55, 58**; *Г. Климович* (п. Болшево Московской обл.) **54—56, 58, 60, 62**; *В. Кобелецкий* (Киев) **54—56, 58, 60—62**; *М. Козлов* (Москва) **56, 58, 62**; *А. Кордюк* (Киев) **54, 56**; *Я. Корчевский* (Киев) **55, 56, 58**; *С. Кочеров* (Маитурово) **56**; *В. Краснов* (Чебоксары) **52, 56, 58, 60, 61**; *Д. Кузнецов* (Куйбышев) **55, 56**; *Л. Кулинский* (Киев) **54—56**; *В. Кусков* (п. Красный Октябрь Владимирской обл.) **60**; *М. Ледней* (с. Лопушное Закарпатской обл.) **55**; *Д. Ледовский* (Киев) **54, 56**; *Е. Либман* (Орел) **61**; *Н. Лимонова* (Киев) **54, 55**; *П. Линник* (ст. Анапская Краснодарского кр.) **55**; *Ю. Литвиненко* (Воронеж) **55, 56**; *Ю. Лобзаков* (Киев) **54—56, 58**; *Е. Ломоносов* (Москва) **48, 54**; *К. Лопин* (Фрунзе) **54**; *В. Лошманов* (Заволжье) **58, 60**; *Д. Лунц* (Саратов) **54—56, 58, 61**; *П. Лушников* (Москва) **54, 58, 60**; *О. Мазяр* (Львов) **58**; *К. Макарчук* (Киев) **54, 55**; *Т. Маливанчук* (Киев) **54—56, 62**; *О. Маров* (Канев) **62**; *М. Марциновский* (Киев) **54—56, 58**; *А. Мельников* (Днепропетровск) **56**; *В. Меньков* (Мончегорск) **58, 60**; *С. Минаев* (Свердловск) **54, 55**; *А. Михеев* (Кимры) **48, 50, 52, 55, 56, 58**; *К. Мосейчев* (Зеленоград) **48, 50, 55**; *О. Мурин* (Ульяновск) **56**; *Х. Муртазаев* (Андижан) **56**; *С. Мягчилов* (Одесса) **58**; *М. Найфонов* (Апатиты) **56, 60**; *С. Никоненко* (Киев) **54—56, 62**; *А. Онуфриев* (Москва) **54**; *О. Панин* (Пенза) **56**; *А. Паныпев* (Магадан) **54, 58, 60, 62**; *Е. Пархименко* (Киев) **48, 50—52, 55, 56**; *И. Перелыгин* (Харьков) **58**; *С. Пилипюк* (Челябинск) **54—56**; *И. Пильников* (Тамбов) **50, 52, 54—56, 61**; *М. Половинник* (Киев) **48, 51, 52, 54—56**; *А. Пономарев* (Москва) **54, 56, 58**; *А. Попов* (Фролово) **52**; *Я. Пугай* (Алма-Ата) **54**; *С. Рахамов* (Казань) **58, 60**; *А. Ржевский* (Новосибирск) **55, 60**; *Р. Ривкин* (Минск) **54**; *М. Рудык* (Винница) **50, 52, 55, 56, 58, 61**; *Д. Русинов* (Ленинград) **48, 52, 54, 56, 58, 60, 61**; *Ю. Рыбалочка* (Киев) **54, 56, 58, 60**; *Л. Рывчин* (Киев) **54—56**; *Ф. Сабуров* (Челябинск) **52, 56**; *М. Савченко* (Белгород) **52, 60**; *И. Савыков* (Первоуральск) **50—52, 54—56**; *Г. Самадашвили* (Тбилиси) **48, 51, 52, 54—56, 61, 62**; *М. Самсонов* (Ленинград) **50, 52**; *С. Сахарук* (Брест) **52, 56**; *Л. Селисский* (Горький) **56**; *М. Скоробогатов* (Киев) **54, 55**; *И. Смовжу* (Херсон) **56**; *С. Собесский* (Красноармейск Кокчетавской обл.) **55**; *А. Сомов* (Киев) **54, 55**; *Г. Спивак* (Киев) **54—56, 58, 60**; *С. Степанянц* (Ереван) **58, 60**; *И. Стрешинский* (Киев) **54—56**; *И. Струговщиков* (Киев) **54, 55**; *Р. Суник* (Киев) **54, 55**; *А. Сурков* (Ленинград) **52**; *В. Тартаковский* (Киев) **52, 54—56, 60, 61**; *И. Терез* (Симферополь) **50, 54, 56, 58, 62**; *С. Точилкин* (Белорецк) **48, 52**; *С. Тужанский* (Винница) **50, 52, 55, 56, 58, 61**; *В. Тульчинский* (Киев) **54, 55**; *А. Умнов* (Миасс) **54**; *Н. Федин* (Омск) **50, 52, 54, 56**; *Л. Федичкин* (Москва) **54, 55, 58**; *Л. Фельдман* (Саратов) **50—52, 54—56, 58, 60, 62**; *С. Феранчук* (Минск) **48, 52, 54—56, 58, 60, 62**; *В. Фурман* (Ташкент) **58, 60**; *С. Хомечко* (Брест) **56**; *Д. Хрусталев* (Москва) **54, 56**; *О. Чемерченко* (Купянск) **56**; *И. Чеповецкий* (Киев) **55**; *А. Черепнин* (Винница) **52, 56**; *С. Черных* (Харьков) **55, 56**; *О. Черп* (Минск) **50**; *Д. Шаповалов* (Джезказган) **50, 52**; *Г. Швец* (Киев) **54, 56, 58, 61**; *И. Шевченко* (Макеевка) **54, 58**; *Г. Шуклин* (Киев) **54, 55**; *А. Щеголев* (п. Черноголовка Московской обл.) **55, 58, 60**; *И. Эльберт* (Киев) **52**; *О. Юдин* (п. Сиверский Ленинградской обл.) **54—56**; *Е. Юдицкий* (Киев) **54—56, 58**; *Е. Юрковицкий* (Одесса) **50, 55, 56**; *О. Яковлев* (Иркутск) **54, 55**.

Эффект Эдисона



Фотокопия страницы из лабораторного журнала с эскизом-заданием Эдисона для эксперимента, в котором и было обнаружено явление термоэлектронной эмиссии. По этому эскизу следовало изготовить лампу с небольшим подковообразным угольным телом накала. Над ним нужно было пропустить проволоку, внешний конец которой мог присоединяться к положительному полюсу источника тока.

Более тысячи различных технических устройств запатентовал за свою долгую жизнь Томас Алва Эдисон (1847—1931), блестящий изобретатель и ловкий делец, неутомимый труженик и азартный честолюбец, человек, до глубокой старости сохранивший озорные замашки марктвеновского Тома Сойера. Эдисон внес огромный вклад в развитие телеграфного дела, телефонии, техники электрического освещения; он изобрел первый звукозаписывающий аппарат — фонограф, новый тип аккумулятора, плавкий предохранитель, электромагнитный тормоз и т. п.

Есть на счету знаменитого изобретателя и физическое открытие, одно, но очень важное. Это — открытие явления термоэлектронной эмиссии, получившего в дальнейшем название «эффекта Эдисона». Этот эффект он впервые наблюдал в 1883 году, но сообщение в печати опубликовал только в следующем, 1884 году.

Подобно множеству других научных открытий, термоэлектронная эмиссия была обнаружена совершенно случайно. В конце 1879 года Эдисон в основном закончил работу по созданию электрической лампы накаливания и теперь упорно работал над проблемой удлинения срока ее службы. Лампа эта по существу мало чем отличалась от современной — только вместо вольфрамовой спиральки использовалась нить из обугленного бамбукового волокна. Первые такие лампы могли непрерывно гореть около 40 часов — «долговечность», которая сначала привела Эдисона и его помощников в неописуемый восторг. Однако уже скоро стало ясно, что для массового применения «лампы-двухдневки» не годятся.

В поисках причины быстрого перегорания угольной нити Эдисон обратил внимание на то, что внутренняя поверхность лампового баллона покрывается темным налетом из углеродистых частиц, видимо, вылетающих из раскаленной нити. Надеясь как-то подавить это нежелательное явление, Эдисон поместил в лампу вблизи нити дополнительный электрод, электрический потенциал которого можно было изменять. При этом он с удивлением обнаружил, что, когда потенциал этого электрода выше потенциала нити (положителен по отношению к потенциалу нити), между ним и нитью — через вакуумный промежуток! — протекает электрический ток. При всей своей технической находчивости никакой практической пользы из своего открытия Эдисон извлечь не смог, и оно было надолго забыто.

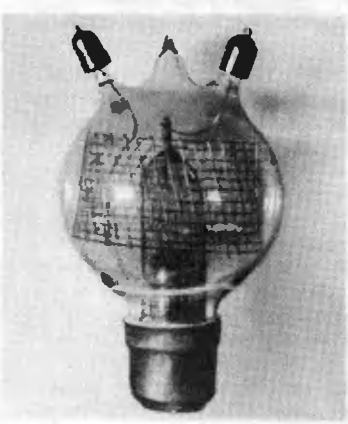
Эффект Эдисона удалось объяснить только после открытия электрона (1897 г.). Объяснение дал английский физик Дж. А. Флеминг (1849—1945), в 1882—85 годах работавший у Эдисона, который сам рассказал ему об открытом эффекте. Флеминг понял, что электрический ток в баллоне лампы создают электроны, испускаемые раскаленной нитью и притягиваемые положительно заряженным дополнительным электродом.

Продолжая размышлять над явлением термоэлектронной эмиссии, в 1904 году Флеминг запатентовал первую в истории техники радиолампу. Это был вакуумный диод, целиком базирующийся на односторонней проводимости, связанный с эффектом Эдисона, и позволяющий выпрямлять переменный ток. Флеминг задумал свою лампу как детектор для радиоволн.

В 1906 году американский инженер Л. де Форест (1873—1961) изобрел трехэлектродную лампу — триод, исторически первый электронный усилительный прибор. Открытие эффективного способа усиления слабых электрических сигналов ознаменовало рождение новой области техники и науки — электроники. До появления транзисторов (50-е годы XX века) в ней безраздельно господствовали радиолампы, работа которых основана на эффекте Эдисона, эффекте, которому знаменитый изобретатель в свое время не придал особого значения.

Сейчас термоэлектронная эмиссия используется в сотнях миллионов источников света, в первую очередь — в люминесцентных лампах.

Б. Е. Явелов



Первая пустотная русская радиолампа, изготовленная в мастерской Тверской радиостанции в 1916 году под руководством одного из пионеров радиотехники М. А. Бонч-Бруевича. Лампа хранится в Москве, в Политехническом музее.

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Гидропаника кисинуса

(заметки экзаменатора)

Прошла пора вступительных экзаменов в вузы. Сколько волнений и тревог вызывали они. Волновались мамы и папы поступавших, волновались их тети и дяди. Волновались на экзаменах, разумеется, и сами поступавшие. Волновались и ... от волнения иногда говорили такое, что потом, вспоминая, сами же улыбались. Но это — потом, после экзаменов. А во время экзаменов удивлялись, почему экзаменаторы хмурят брови, слушая их ответы, а иногда даже ставят отметки, увидев которые, приходится хмурить брови уже самим отвечавшим.

Всякие ответы можно услышать на экзаменах, тем более вступительных.

...Когда у абитуриентки спросили на экзамене: «Как Вас зовут?».— она быстро ответила: «Можно, я подумаю?» — «Что же тут думать? Скажите Ваше имя»,— повторил вопрос экзаменатор, на что после некоторого раздумья последовал ответ: «Вы знаете, мы это, кажется, не проходили».

На экзамене по физике после предложения экзаменатора перейти к ответу на следующий вопрос, паренек бойко сказал: «К вопросу о вопросе следующего вопроса». В ответ на просьбу отвечать конкретнее, сказал: «Хорошо. Рассмотрим для примера, например, такой пример».

А другой поступавший на вопрос: «В каких единицах измеряются электрический ток и напряжение?» — быстро, не задумываясь, ответил: «В амперметрах и вольтметрах».

Объясняя электрическую схему на экзамене, говорили: «истошник тока», а решая задачу, рассказывали о тепловом «балалансе».

На экзамене по истории, волнуясь, говорили: «Кабель о рангах», «Намоклов меч», «Глупец первой гильдии», рассказывали о походах ...Александра Смоктуновского...

И на экзамене по литературе волновались, когда говорили о «квассике русской литературы Щедрикове-Салтыне или о романе «Отцы и дети» Базарова. Рассказывая о «Слове о полку Игореве», абитуриентка читала наизусть: «Банан бо вещий...». А в сказке появлялся «Шалфей бессмертный».

Бывший химик на экзамене по литературе «процитировал» (по памяти): «Хидраргиум воскликнул: Аурум, где ты?».

На экзамене по биологии абитуриенты, волнуясь, говорили: «Искупаемый проглодит длинనозавр», рыбы в их ответах превращались из палтуса и севрюги в «плинтус» и «осетрюгу».

Один паренек, поступавший в сельскохозяйственный институт, рассказывая на экзамене о свойствах живых организмов, разделял их на наследственные и ...«подследственные». А увидя недоуменный взгляд экзаменатора, быстро «поправил» свой ответ, сказав: «То есть, свойства бывают подследственные и влагоприобретенные»...

На экзамене по химии один абитуриент сказал, что до поступления в вуз он был... «аргентум по снабжению», а рассказывая о газах, углекислый газ называл... «угловатым».

На вступительных экзаменах некоторые так волнуются, что вместо «гидропоника» говорят: «гидропаника», вместо «косинус» — «кисинус», годовой план у них превращается в «годовалый», а стимулятор роста — в «симулятор» роста. «Симулятор роста позволяет при помощи гидропаники досрочно выполнить годоввлый план по сбору бобровых культур на орошаемых полях»,— бойко отрапортовал на экзамене абитуриент.

Во время ответов на вступительных экзаменах даже рождались новые науки — «Мокробиология», «Болтаника» и другие.

Да, всякие ответы можно услышать на экзаменах, ведь любые экзамены — это пора волнений, а вступительные — тем более. Поэтому к экзаменам надо отнестись серьезно, без волнений. Впредь — никакой *гидропаники*! Смелее вперед на штурм кисинуса!

Ф. М. Цеховольский

Сведем неравенство к известному

П. П. ГОРНУША

Многие задачи на доказательства неравенств, предлагаемые на вступительных экзаменах, удается решить, сводя их к вспомогательным неравенствам (очевидным или ранее известным) с помощью тождественных преобразований. Такие задачи мы рассмотрим здесь*). Вспомогательные неравенства выделены цветом, но не для того, чтобы их заучивать. Ими (и похожими неравенствами) нужно уметь пользоваться, уметь выводить по мере надобности.

Каждый школьник знает, что квадрат числа (или сумма квадратов чисел) — число неотрицательное:

$$\boxed{a^2\geqslant 0,\ a^2+b^2\geqslant 0,\ a^2+b^2+c^2\geqslant 0,\dots} \quad (1)$$

Это простое обстоятельство является ключом к решению очень многих задач. Начнем с совсем простой.

Задача 1 (КПИ, 1981). *Докажите, что при любых действительных x, y, z, t справедливо неравенство*

$$4x^2+3y^2+4z^2+5t^2+4ax+3ay+4az+5at+4a^2\geqslant 0.$$

Решение. Перегруппируем члены левой части неравенства так, чтобы получить сумму квадратов:

$$(4x^2+4ax+a^2)+(3y^2+3ay+3a^2/4)+(4z^2+4az+a^2)+(5t^2+5at+5a^2/4)\geqslant 0,$$

$$(2x+a)^2+3(y+a/2)^2+(2z+a)^2+5(t+a/2)^2\geqslant 0.$$

Последнее неравенство очевидно (это разновидность (1)), а так как оно равносильно данному — задача решена.

Неравенство (1) выступает во многих разных обличиях; например $(x+y+z)^2\geqslant 0$, $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$, $(t-1)^2\geqslant 0$. Предпоследнее неравенство можно переписать в виде $a+b>2\sqrt{ab}$ (при $a>0$, $b>0$, $a\neq b$) или

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{ab}}>\frac{2}{a+b}.} \quad (2)$$

Важно суметь увидеть это простое неравенство, когда оно появляется в «замаскированной» форме, как например, в следующей задаче.

Задача 2 (ЛГУ, 1978). *Определить знак разности*

$$\left(\frac{1}{\sqrt{1\cdot 1978}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1977}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{k\cdot(1978-k+1)}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{1978\cdot 1}}\right)-2\cdot\frac{1978}{1979}.$$

Решение. Воспользовавшись неравенством (2) 1978 раз, можно написать:

$$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 1978}}>\frac{2}{1+1978}=\frac{2}{1979};$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1977}}>\frac{2}{2+1977}=\frac{2}{1979};$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{1}{\sqrt{1978\cdot 1}}>\frac{2}{1978+1}=\frac{2}{1979}.$$

Складывая эти неравенства, получим

$$\frac{1}{\sqrt{1\cdot 1978}}+\frac{1}{\sqrt{2\cdot 1977}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{1978\cdot 1}}>2\cdot\frac{1978}{1979}.$$

Значит, данная разность — положительная.

А вот другая вариация на тему $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geqslant 0$. Прибавляя к обеим частям этого неравенства выражение $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$, получим

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2\leqslant(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2+(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2=2(a+b),$$

*) Задачи предлагались в разные годы в Киевском, Ленинградском и Московском государственных университетах (КГУ, ЛГУ и МГУ); в Московских институтах электронного машиностроения и автотехническом (МИЭМ, МАТИ) и в Киевском политехническом институте (КПИ); год, когда задача предлагалась, мы указываем рядом с аббревиатурой вуза.

откуда, после извлечения корня (при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$), найдем

$$\boxed{\sqrt{a}+\sqrt{b}\leqslant\sqrt{2(a+b)}.}\qquad(3)$$

Заметим, что равенство здесь достигается только при $a=b$. Неравенство (3) «срабатывает», например, в такой задаче.

Задача 3 (ЛГУ, 1982). *Укажите x, при которых функция*

$$f(x)=5\left(\sqrt{8+\sqrt{4+\sqrt{2+\sqrt{1+x}}}}+\right.$$
$$\left.+\sqrt{8+\sqrt{4+\sqrt{2+\sqrt{1-x}}}}\right)$$

принимает наибольшее значение. Укажите, между какими последовательными целыми числами находится это наибольшее значение $f(x)$.

Решение. Применим неравенство (3) четыре раза

$$f(x)\leqslant 5\sqrt{2(16+\sqrt{4+\sqrt{2+\sqrt{1+x}}}+\sqrt{4+\sqrt{2+\sqrt{1-x}}})}\leqslant$$
$$\leqslant 5\sqrt{2(16+\sqrt{2(8+\sqrt{2+\sqrt{1+x}}+\sqrt{2+\sqrt{1-x}})})}\leqslant$$
$$\leqslant 5\sqrt{2(16+\sqrt{2(8+\sqrt{2(4+\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})})})}\leqslant$$
$$\leqslant 5\sqrt{2(16+\sqrt{2(8+\sqrt{2(4+\sqrt{2\cdot 2})})})}=$$
$$=10\sqrt{8+\sqrt{4+\sqrt{3}}}.$$

Заметим, что при $1+x=1-x$ (то есть при $x=0$) здесь на каждом шаге получается равенство. Это значит, что наибольшее значение (равное $10\sqrt{8+\sqrt{4+\sqrt{3}}}$) достигается только при $x=0$ (продумайте это!). Простые числовые оценки показывают, что

$$3{,}2<\sqrt{8+\sqrt{4+\sqrt{3}}}<3{,}3.$$

Ответ: $x=0$; между 32 и 33.

Последний наш пример на неотрицательность квадратов чисел будет основан на следующем неравенстве:

$$\boxed{\sqrt{a^2+b^2}\geqslant|a\cos\varphi+b\sin\varphi|,}\qquad(4)$$

которое можно доказать так:

$$(a\sin\varphi-b\cos\varphi)^2\geqslant 0\ \Rightarrow$$
$$a^2\sin^2\varphi-2ab\sin\varphi\cos\varphi+b^2\cos^2\varphi\geqslant 0\Rightarrow$$
$$a^2(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)+b^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\geqslant$$
$$\geqslant a^2\cos^2\varphi+b^2\sin^2\varphi+2ab\sin\varphi\cos\varphi\Rightarrow$$
$$a^2+b^2\geqslant(a\cos\varphi+b\sin\varphi)^2\qquad(4)$$

Задача 4 (МГУ, 1981). *Покажите, что функция*

$$y=\sin^2x-14\sin x\cos x-5\cos^2x+$$
$$+3\sqrt[3]{33}$$

всегда положительна.

Решение. Нам нужно доказать неравенство

$$3\sqrt[3]{33}>5\cos^2x+14\sin x\cos x-\sin^2x.$$

Перегруппируем члены правой части так, чтобы перейти к синусу и косинусу двойного угла:

$$3\sqrt[3]{33}>3\cos^2x-3\sin^2x+2\cos^2x+$$
$$+2\sin^2x+7\sin 2x,$$
$$3\sqrt[3]{33}>3\cos 2x+7\sin 2x+2.$$

В силу неравенства (4),

$$3\cos 2x+7\sin 2x\leqslant\sqrt{9+49}=\sqrt{58},$$

поэтому нам остается доказать числовое неравенство

$$3\sqrt[3]{33}>\sqrt{58}+2,$$

которое легко проверяется (возведите обе части в куб).

Список полезных неравенств, вытекающих из положительности квадрата числа, не исчерпывается, конечно, неравенствами (2) — (4). Тригонометрические задачи часто сводятся к какому-нибудь известному тригонометрическому неравенству: одному из проявлений монотонности тригонометрических функций на определенных участках (например, убывания косинуса от 0 до π) или простейшему свойству синуса и косинуса

$$\boxed{|\sin\alpha|\leqslant 1,\ |\cos\alpha|\leqslant 1.}\qquad(5)$$

Задача 5 (МГУ, 1980). *Докажите, что для любых действительных чисел p и t справедливо неравенство*

$$4(p-3)^4+2+[2-4(p-3)^4]\cos t\geqslant 0$$

и найдите все пары чисел (p, t), для которых это неравенство превращается в равенство.

Решение. Данное неравенство равносильно такому

$$4(p-3)^4(1-\cos t)+2(1+\cos t)\geqslant 0.$$

Каждая из скобок $(1-\cos t)$ и $(1+\cos t)$ неотрицательна (см. (5)), так же как и $(p-3)^4=((p-3)^2)^2$ (опять (1)!), поэтому последнее неравенство — всегда верно, а значит, данное — тоже.

Равенство достигается только в случае выполнения системы уравнений

$$\begin{cases}(p-3)^4(1-\cos t)=0,\\ 1+\cos t=0.\end{cases}$$

решение которой сразу находится.

Ответ: $p=3$; $t=\pi+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$.

Монотонное убывание косинуса от 0 до π многократно обыгрывается в следующей задаче (каждый раз, когда мы им пользуемся, мы выделяем цветом соответствующее неравенство).

Задача 6 (МИЭМ, 1980). *При $n=1, 2, 3$, сравните числа*

$$\sin^n 1^\circ+\sin^n 4^\circ \text{ и } \sin^n 2^\circ+\sin^n 3^\circ.$$

Решение. 1) $n=1$. Преобразуем сумму синусов в произведение:

$$\sin 1^\circ+\sin 4^\circ=2\sin 2,5^\circ\cos 1,5^\circ,$$
$$\sin 2^\circ+\sin 3^\circ=2\sin 2,5^\circ\cos 0,5^\circ.$$

Теперь видно, что второе число больше первого, ибо $\sin 2,5^\circ>0$ и

$$\cos 0,5^\circ>\cos 1,5^\circ.$$

2) $n=2$. Выразим квадрат синуса через косинус двойного угла

$$\sin^2 1^\circ+\sin^2 4^\circ=\frac{1-\cos 2^\circ}{2}+\frac{1-\cos 8^\circ}{2},$$
$$\sin^2 2^\circ+\sin^2 3^\circ=\frac{1-\cos 4^\circ}{2}+\frac{1-\cos 6^\circ}{2}.$$

Покажем, что теперь уже первое число больше. Для этого достаточно установить неравенство

$$\cos 4^\circ+\cos 6^\circ>\cos 2^\circ+\cos 8^\circ,$$

а оно равносильно неравенству

$$2\cos 5^\circ\cos 1^\circ>2\cos 5^\circ\cos 3^\circ,$$

которое сразу следует из того, что $\cos 5^\circ>0$ и

$$\cos 1^\circ>\cos 3^\circ.$$

3) $n=3$. Покажем, что здесь снова первое число больше. Воспользуемся формулой

$$\sin^3\alpha=\frac{3\sin\alpha-\sin 3\alpha}{4}, \qquad (6)$$

которая легко проверяется (раскройте $\sin 3\alpha$ как $\sin(2\alpha+\alpha)$, затем примените формулы для $\cos 2\alpha$ и $\sin 2\alpha$). Тогда задача сводится к доказательству (равносильных) неравенств

$$\sin 9^\circ-\sin 3^\circ+\sin 6^\circ-\sin 12^\circ>$$
$$>3\sin 3^\circ-3\sin 1^\circ+3\sin 2^\circ-3\sin 4^\circ;$$
$$2\cos 6^\circ\sin 3^\circ-2\cos 9^\circ\sin 3^\circ>$$
$$>6\cos 2^\circ\sin 1^\circ-6\cos 3^\circ\sin 1^\circ;$$
$$\sin 3^\circ\sin 7,5^\circ\sin 1,5^\circ>$$
$$>3\sin 1^\circ\sin 2,5^\circ\sin 0,5^\circ.$$

Преобразуя синусы утроенных углов в левой части по формуле (6) и пользуясь положительностью $\sin 1^\circ$, $\sin 2,5^\circ$, $\sin 0,5^\circ$, мы видим, что достаточно доказать неравенство

$$(3-4\sin^2 1^\circ)(3-4\sin^2 2,5^\circ)\times$$
$$\times(3-4\sin^2 0,5^\circ)>3,$$

которое преобразуется к равносильному виду

$$(1+2\cos 2^\circ)(1+2\cos 5^\circ)\times$$
$$\times(1+2\cos 1^\circ)>3,$$

а это заведомо верно — левая часть даже больше 8, ибо

$$\cos 1^\circ>\cos 2^\circ>\cos 5^\circ>\frac{1}{2}.$$

Возможно, разобранные примеры вам показались простыми. Это не мудрено — ведь перед каждой задачей мы *заранее заготовили* то неравенство, которое решающим образом сработало в ее решении. Искусство и трудность решения подобных задач состоит как раз в том, чтобы увидеть нужное неравенство в процессе разбора задачи. Поэтому мы предлагаем несколько задач для самостоятельного решения (к наиболее трудным, отмеченных звездочкой, в конце журнала даны указания). Но прежде, чем приступить к их решению, мы советуем вам снова просмотреть разобранные примеры, чтобы понять, как по их виду можно было догадаться до хода решения.

Задачи

7 (КПИ, 1981). Найдите наименьшее значение выражения

$$x^2+4y^2+3z^2+t^2-2x-12y-6z-2t$$

при условии, что x, y, z и t принимают любые действительные значения.

8 (КПИ, 1981). Найдите наибольшее значение функции

$$y=\frac{11}{2}-\frac{1}{2}\cos 4x-\frac{4\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$$

9 (МИЭМ, 1980). При $n=1, 2, 3$ сравните числа

$$\cos^n 1^\circ+\cos^n 4^\circ \text{ и } \cos^n 2^\circ+\cos^n 3^\circ.$$

10 (МГУ, 1980). Докажите, что для любых действительных p и q справедливо неравенство

$$2(2p-1)^4+1+(1-2(2p-1)^4)\sin 2t\geqslant 0,$$

и найдите все пары чисел (p, t), для которых это неравенство превращается в равенство.

11* (КПИ, 1976). Докажите, что многочлен

$$a^4-5a^3-6a^2-a+9$$

не может иметь отрицательных корней.

12* (МИЭМ, 1982). Какому из промежутков $[2; 3]$, $[3,1; 3,3]$, $[3,6; 4,5]$ принадлежит число

$$a=\log_6 7\sqrt[3]{6}-\log_7\frac{1}{8\sqrt[3]{49}}+\log_{8}\frac{9}{8}\,?$$

13 (МИЭМ, 1979). Расположите в порядке возрастания числа

а) 0; $\sqrt{0,8}$; $1,2$; $\frac{11}{30}$; $0,91846$; $\ln\frac{7}{5}$;

б) 1; $0,37$; $\frac{65}{63}$; $\frac{61}{59}$; $\operatorname{tg} 33^\circ$; $\operatorname{tg}(-314^\circ)$.

Первая математическая олимпиада

Кандидат физико-математических наук
М. Л. АЛЕКСАНДРОВА

В связи с 50-летием первой математической олимпиады, состоявшейся в Ленинграде весной 1934 года, мы публикуем воспоминания ее участницы и победительницы М. Л. Георг (ныне Александровой).

Первая математическая олимпиада состоялась весной 1934 года. Она — незабываемое, яркое событие в жизни ее участников. Думаю, что все мы (из оставшихся в живых) совершенно ясно помним некоторые ее моменты, а также свое увлеченное, вдохновенное и счастливое состояние в дни олимпиады. И хотя за достоверность и точность того, что я сообщаю, отвечать за давностью происходившего я не могу, но кажется мне, что все, что я помню, именно так и происходило.

Организовал олимпиаду (а может быть и придумал) Борис Николаевич Делоне, профессор, член-корреспондент Академии наук СССР, талантливый математик широкого профиля, имевший выдающиеся работы по теории чисел, геометрии, алгебре, кристаллографии и др. Стремительный в движениях, с темными, умными, лукаво улыбающимися глазами, он, задавая вопросы, как бы дразнил ум и способности слушателя или собеседника. Встречи с ним во время олимпиады произвели на меня ошеломляющее впечатление. С ним вместе олимпиадой занимались профессора Г. М. Фихтенгольц, В. А. Тартаковский, О. К. Житомирский, В. А. Кречмар.

Ввиду того, что полных средних школ (имевших 8 и 9 классы) в 1934 г. в городе было немного, значительная часть молодых людей заканчивала свое среднее образование в рабфаках, существовавших тогда при некоторых вузах и втузах. Поэтому олимпиаду решили провести как среди школьников, так и среди рабфаковцев.

В школы и рабфаки были разосланы листки с задачами повышенной трудности, рассчитанными не столько на знания, сколько на сообразительность. Среди этих задач, например, были «задачи на построение», которые надо было решать с помощью циркуля и линейки. Мои товарищи и я о них раньше никогда не слыхали, и они так захватили меня, что уже ни о чем другом я думать не могла. Решение этих задач и было первым туром олимпиады.

К марту (февралю? апрелю?) в школах и рабфаках были составлены списки учеников, допущенных ко второму туру олимпиады. Всех нас

Здание, в котором проходила первая математическая олимпиада.

собрали в двух аудиториях университета — Большой физической (школьники) и Большой химической (рабфаковцы). Всем были розданы листы бумаги с тремя задачами на каждом. Были ли они одинаковы для всех или имелись какие-то варианты — не знаю. Кажется, задачи были одинаковые. Каждый, решив задачу, надписывал свою фамилию на листке и уходил, положив решенные задачи на стол внизу аудитории. В этом туре в общей сложности участвовало около 600 человек. На третий тур из их числа было приглашено примерно 100 человек.

На оставшееся до третьего тура время (примерно месяц) нам были розданы новые сборники интересных задач, изданные литографическим способом. Они были значительно труднее предыдущих, и мы, забыв все на свете, занимались их решением. В этом же месяце нас пригласили в университет прослушать лекции по математике. Я. С. Уфлянд помнит лекцию Г. М. Фихтенгольца, я помню лекцию по алгебре В. А. Кречмара и две лекции по геометрии Б. Н. Делоне. На одной из них, пользуясь эпидиаскопом (или кинопроектором?), Б. Н. Делоне демонстрировал на экране трехмерные проекции четырехмерного куба. К. В. Таганцев вспоминает, что Делоне пришел на эту лекцию с рюкзаком, из которого вытащил трехмерные проекции каких-то четырехмерных фигур (может быть куба?). В своих лекциях, прочитанных с невиданным еще нами блеском, Делоне как бы приоткрыл дверь в мир таинств и красот математики.

Третий тур олимпиады происходил в Главном здании университета, в нескольких аудиториях одновременно. Участники этого тура отыскивали свои фамилии и соответствующие номера аудиторий в списках, которые висели на двери главного входа в университет. В каждой аудитории находились два профессора. В той, в которую попала я, был сам Делоне и профессор В. А. Кречмар. На тот случай, если я не справлюсь и нужно будет удирать, я села на парту поближе к двери.

Каждый из нас получил лист бумаги, вверху которого стояла его фамилия, и две задачи — одна геометрическая, другая алгебраическая (так было у меня; у других, я думаю, могли быть и задачи по тригонометрии). По мере того, как мы расправлялись со своими задачами, происходило собеседование профессоров с нами. Надо сказать, что поскольку никаких олимпиад еще не бывало и понятия «победитель олимпиады» еще не существовало, то я и другие об этом вовсе не думали. Просто очень было интересно пройти через это испытание своих способностей.

Победителями олимпиады стали одиннадцать человек. Десять человек, помимо победителей, были премированы. Чудом сохранившаяся вырезка из газеты «Вечерний Ленинград» той поры сообщает, что победителями были: Ананов (23 школа Центрального района), Богомолов и Валландер (2 школа Нарвского района), Георг и Кондрашев (рабфак Университета), Кизевальтер (рабфак Гидротехнического института), Касаткин (рабфак Электротехнического института), Минцберг (15 школа Смоленского района), Оловянишников (завод «Красный химик»), Санов (7 школа Володарского района) и Таганцев (Гидротехнический институт). Из премированных я вспоминаю лишь Либермана, Уфлянда и Смирнова.

Через несколько дней победители и премированные были приглашены в зал Ученого совета университета, где первым были вручены подарки — портфели с металлической планкой, на которой было выгравировано: «Победителю первой математической олимпиады», а также несколько книг — учебников по различным разделам высшей математики, также с соответствующими надписями. Премированные получили такие же книги. Победители были сфотографированы, и их портреты повесили в Институте математики ленинградского университета.

Большая часть победителей и премированных поступила на математико-механический факультет университета, другие — на физический, химический, геологический. В группе «чистой математики» подобрался очень сильный состав студентов. В ней долго царил «дух олимпиады» — в перерывах между лекциями и занятиями мы толпились у доски и обсуждали решения трудных задач. В такой обстановке все быстро росли. Некоторые из нас в студенческие годы получили свои первые научные результаты.

Вне зависимости от того, каких научных или административных званий победители и призеры первой олимпиады достигли на своем трудовом пути, я хорошо знаю, что они все работали и еще работают в избранной ими области с неизменным энтузиазмом.

Мне хочется вспомнить о тех, чью жизнь оборвала война. Сергей Оловянишников пришел на олимпиаду и в университет прямо с производства, помимо школы и рабфака. Уже в студенческие годы проявился его истинный математический талант. Существует в геометрии «теорема Оловянишникова», вошедшая в ряд фундаментальных результатов геометрии. После окончания университета в 1941 году он сразу отправился на фронт. Я была свидетелем того, как, находясь после ранения в батальоне для выздоравливающих, Сергей показывал результаты новой работы А. Д. Александрову*). Работа осталась неоконченной. Вскоре после выздоровления, вернувшись в действующую армию, Сергей Оловянишников погиб на берегах Невы.

Другой участник олимпиады, Иосиф Либерман (он был в числе премированных) в июне 1941 года закончил второй курс аспирантуры. Летом 1941 года в форме морского офицера защитил кандидатскую диссертацию, а осенью погиб, защищая город Таллин.

Погиб на войне и призер олимпиады Саша Смирнов, окончивший математико-механический факультет по специальности «теория упругости».

Мне представляется любопытным, что четверо из отмеченных на олимпиаде наградами за год до нее вместе окончили одно ФЗУ (по современным меркам ПТУ) при Заводе точного машиностроения (ныне Завод полиграфических машин). Это: Александрова, Кизевальтер, Кондрашев и Уфлянд.

---

*) Известный советский геометр, ныне академик.

Избранные задачи 50-й ленинградской городской олимпиады

Задачи юбилейной ленинградской олимпиады включены в «Задачник «Кванта» предыдущего и этого номеров (**М876—М882** и **М883 б**)). Ниже мы публикуем еще несколько интересных задач этой олимпиады. Указания к решению некоторых из них помещены в конце номера (с. 62). Задачи на олимпиаду предложили *С. А. Генкин* (№№ 2, 13), *А. Г. Гольдберг* (№ 5), *Ю. И. Ионин* (№№ 3, 4, 15), *А. С. Меркурьев* (№№ 7, 10, 12, 14, 16), *С. Е. Рукшин* (№№ 8, 9), *Г. Перельман* (№ 11), *Д. В. Фомин* (№ 1), *С. В. Фомин* (№ 17).

1. Круг разделен на 6 секторов, в которых расставлены цифры 1, 0, 1, 0, 0, 0 (в указанном порядке). Разрешается одновременно увеличивать на 1 два стоящих рядом числа. Докажите, что с помощью таких операций нельзя добиться равенства всех шести чисел. (5 кл.)

2. На прямой отмечено 45 точек, лежащих вне отрезка AB. Докажите, что сумма расстояний от этих точек до точки A не равна сумме расстояний от этих точек до точки B. (5—7 кл.)

3. Найдите наименьшее целое число, которое можно тремя разными способами представить в виде $13x+73y$, где x и y — натуральные числа.

4. Докажите, что набор чисел (2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 11, 13, 15) не может быть множеством длин сторон и диагоналей пятиугольника. (7 кл.)

5. Найдите числа

$$(1+x^2)^{-1}+(1+y^2)^{-1} \text{ и } 2(1+xy)^{-1},$$

если известно, что они равны и $x\neq y$. (7 кл.)

6. В выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ выполняются соотношения: $AE=AD$, $AB=AC$, $\angle CAD=\angle AEB+\angle ABE$. Докажите, что сторона CD вдвое больше медианы AM треугольника ABE. (7 кл.)

7. Положительные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$ таковы, что $a_1+a_2+\ldots+a_k=b_1+b_2+\ldots+b_n$. Докажите, что в прямоугольной таблице $k\times n$ клеток можно расставить неотрицательные числа, среди которых по крайней мере $(k-1)(n-1)$ нулей, так, что суммы чисел в строках равны $a_1, \ldots, a_k$, а в столбцах — $b_1, \ldots, b_n$. (8—9 кл.)

8. На сторонах AB и CD выпуклого четырехугольника $ABCD$ даны точки E и H. Докажите, что если треугольники ABH и CDE равновелики и $AE:BE=DH:CH$, то $BC\parallel AD$. (8—9 кл.)

9. Двое играют в такую игру. Первый игрок пишет какую-нибудь цифру; второй игрок приписывает к ней слева или справа еще одну цифру; первый игрок приписывает к образовавшемуся числу слева или справа еще одну цифру и т. д. Докажите, что первый игрок может играть так, чтобы каждое число, получающееся после хода второго игрока, не было квадратом целого числа. (8—9 кл.)

10. На координатной плоскости даны 4 точки с целыми координатами. Разрешается заменять любую из этих точек на точку, симметричную ей относительно любой другой из этих точек. Можно ли за несколько таких операций перейти от четверки вершин единичного квадрата (0; 0), (0; 1), (1; 0), (1; 1) к точкам с координатами (0; 0), (1; 1), (3; 0), (2; —1)? (8—10 кл.)

11. Даны числа: 1 и девять нулей. Разрешается выбрать два числа и заменить каждое их средним арифметическим. Какое наименьшее число может оказаться на месте единицы после серии таких операций? (8—10 кл.)

12. Докажите, что существует такое множество A, состоящее из натуральных чисел, что любое натуральное число, не принадлежащее множеству A, является средним арифметическим двух различных элементов множества A, а никакое число из множества A этим свойством не обладает. (8—10 кл.)

13. Фишка может находиться в одной из 13×13 точек (x, y), где x и y — целые числа, $0\leqslant x\leqslant12$, $0\leqslant y\leqslant12$. Фишка может пойти из точки (x_1, y_1) в точку (x_2, y_2), если каждое из чисел $|x_1-x_2|$, $|x_1-y_2|$, $|y_1-x_2|$, $|y_1-y_2|$ не меньше 2 и не больше 9. Докажите, что она не может обойти все 169 точек, побывав в каждой из них ровно один раз. (8—9 кл.)

14. Разность шестизначных чисел $\overline{abcdef}$ и $\overline{fdebca}$ делится на 271. Докажите, что $b=d$ и $c=e$. (8—10 кл.)

15. В вершинах 50-угольной призмы расставлены числа 1, 2, ..., 100. Докажите, что найдутся два числа, стоящие в концах одного ребра, отличающиеся не более, чем на 48. (10 кл.)

16. Целое число a таково, что число $3a$ представимо в виде x^2+2y^2, где x и y — целые числа. Докажите, что и число a представимо в таком виде. (10 кг.)

17. После нескольких операций дифференцирования и умножения на $x+1$, выполненных в любом порядке, многочлен x^8+x^7 превратился в $ax+b$. Докажите, что разность целых чисел $a-b$ делится на 49.

Публикацию подготовили *Ю. И. Ионин, С. В. Фомин*

Ленинградская городская олимпиада по физике

Городскую физическую олимпиаду для учащихся 8—10 классов организуют физический факультет Ленинградского государственного университета им. А. А. Жданова и Дворец пионеров и школьников им. А. А. Жданова. Олимпиада проходит в три тура — школьный (около 30 тысяч участников), районный (около 5 тысяч участников) и городской (600 участников). Задачи районного и городского туров — единые для всех участников (городской тур проводится в два этапа — теоретический и экспериментальный). Жюри состоит из ученых и лучших студентов физфака ЛГУ.

Итоги олимпиады подводятся в командном и личном зачете. Из победителей в личном зачете формируется команда г. Ленинграда для участия во Всесоюзной олимпиаде школьников.

Ниже приводятся некоторые задачи, предлагавшиеся в 1983 и 1984 годах на Ленинградских олимпиадах по физике.

Районный тур

8 класс

1. Трубу, сечение которой представляет собой правильный шестиугольник со стороной l, перекатывают так, что угловая скорость относительно оси поворота постоянна и равна ω. Нарисуйте траекторию движения центра трубы и найдите среднюю скорость его поступательного движения. Проскальзывания нет.

2. На дно пустого сосуда с высотой H помещены два вертикальных цилиндра (рис. 1). Плотность материала обоих цилиндров $\varrho = 0{,}5$ г/см^3, площади их оснований $S_1 = 10$ см^2 и $S_2 = 5$ см^2, высоты $h_1 = h_2 = 1$ см. Что произойдет с цилиндрами, если сосуд до краев заполнить водой? Атмосферное давление $p_a = 1$ атм.

3. Оцените, какую скорость могут сообщить партнеры теннисному шарику при игре в настольный теннис, если каждый сделает по три удара, а максимальная скорость ракетки v_0. Сколько времени для этого потребуется, если длина стола L?

9 класс

1. Вы стоите, не касаясь земли, на качелях, которые покоятся (рис. 2). Можно ли их раскачать? Если да, то объясните, как это можно сделать и какая сила сообщит вам вместе с качелями импульс в горизонтальном направлении.

2. Две тепловые машины работают по циклам $ABCDA$ и $ABC'D'A$ соответственно (рис. 3). КПД какой из машин больше? В обоих случаях рабочим телом служит один моль идеального одноатомного газа.

3. Уединенный проводник ограниченных размеров имеет заряд $q>0$. Докажите, что плотность заряда на нем всюду неотрицательна.

10 класс

1. Плоское зеркало находится на расстоянии $2F$ от собирающей линзы с фокусным расстоянием F (рис. 4). Постройте изображение отрезка AB, находящегося на расстоянии $L=F$ от линзы.

2. Шарик, закрепленный на пружине, совершает гармонические колебания в горизонтальной плоскости с амплитудой x_m. На каком расстоянии от положения равновесия нужно поставить стенку, упруго отражающую шарик, чтобы период колебаний уменьшился на одну треть?

3. В LC-контуре возбуждены гармонические колебания с амплитудой U_m. В момент, когда конденсатор полностью заряжен, его пластины быстро сдвигают, увеличивая емкость вдвое. Отразится ли это на колебаниях и каким образом?

Городской тур

8 класс

1. Ведущие колеса правой и левой гусениц танка вращаются в одном направлении с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 соответственно ($\omega_2>\omega_1$). Найдите радиус окружности, по которой движется танк, и угловую скорость его движения. Ширина танка l, радиус ведущих колес r. Середины гусениц не проскальзывают относительно земли.

2. Две частицы движутся по одной и той же прямой. Графики скоростей этих частиц приведены на рисунке 5. В момент времени $t=0$ обе частицы находились в одной точке. Найдите минимальное расстояние между частицами при временах $t \geqslant T$.

3. На наклонной плоскости с углом α стоят друг на друге два одинаковых однородных кубика. Коэффициент трения между ними μ, а между нижним кубиком и плоскостью трение очень большое. Угол α медленно увеличивают. Опишите, что произойдет с кубиками (по возможности, количественно).

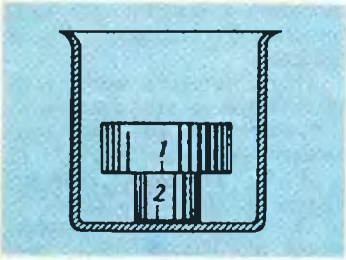


Рис. 1.

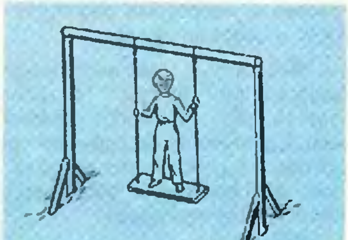


Рис. 2.

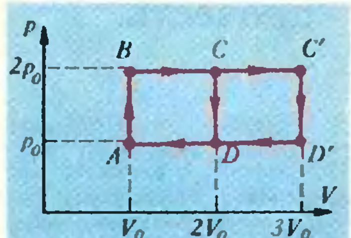


Рис. 3.

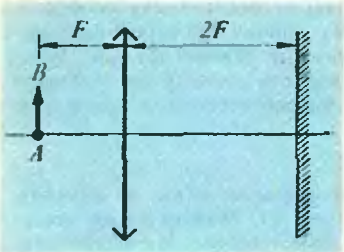


Рис. 4.

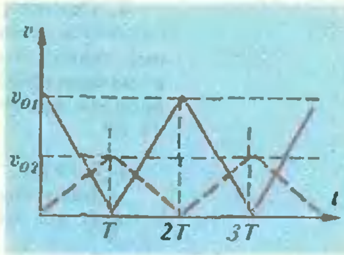


Рис. 5.

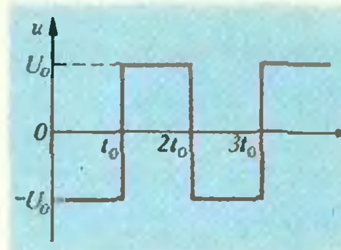


Рис. 6.

9 класс

1. Резервуар массой M и длиной L на колесах пренебрежимо малой массы может двигаться без трения по *горизонтальной плоскости*. Он разделен посередине вертикальной невесомой перегородкой, слева от которой находится идеальный газ, справа — вакуум. Масса газа m, температура T. В начальный момент времени резервуар покоится, а в перегородке открывают отверстие. Определите установившуюся температуру газа. Найдите перемещение резервуара в горизонтальном направлении. Резервуар теплоизолирован.

2. Между пластинами плоского конденсатора находятся заряженные пылинки. В среднем отношение заряда к массе пылинок $q/m=\alpha$. Расстояние между пластинами d. Конденсатор подключают к источнику периодически меняющегося напряжения $u(t)$ (рис. 6). Оцените время, за которое практически все пылинки осядут на стенки, если U_0 достаточно велико, а t_0 достаточно мало.

3. Из четырех одинаковых пластин площадью S каждая, которые нельзя придвигать друг к другу на расстояние меньше d ($d \ll \sqrt{S}$), нужно сделать конденсатор максимально возможной емкости. Как для этого нужно расположить пластины?

10 класс

1. См. задачу 2 для 8 класса.

2. Маленький кубик массой m лежит на горизонтальной поверхности. Коэффициент трения кубика о нее μ. Кубик соединен с вертикальной стенкой горизонтальной пружиной с жесткостью k. Кубик отводят от положения, при котором пружина не деформирована, на расстояние A, меньшее длины нерастянутой пружины, и отпускают. Найдите путь, проходимый кубиком до остановки.

3. Имеются две невесомые пружины с жесткостями k_1 и k_2. Их длины в недеформированном состоянии различаются на величину l. Сначала пружины соединили последовательно, потом вставили одну пружину в другую и соединили оба конца (так что они стали одинаковой длины). Найдите период продольных колебаний каждой системы, если один конец системы пружин закреплен, а к другому прикреплен груз массой m, который может двигаться без трения по горизонтальному столу (пружины при этом тоже расположены горизонтально).

Публикацию подготовили *А. Г. Изергин, Ю. П. Малышев*

Советуем прочесть

Ученые — представители точных наук всего мира отмечали недавно 275-летие со дня рождения и 200-летие со дня смерти гения XVIII века, члена Петербургской Академии наук Леонарда Эйлера. 31 год его научной деятельности протекал в Петербурге (1727—1741 и 1766—1783), 25 лет — в Берлине (1741—1766). В пятом номере на четвертой странице обложки мы поместили информацию о некоторых мероприятиях в память Эйлера.

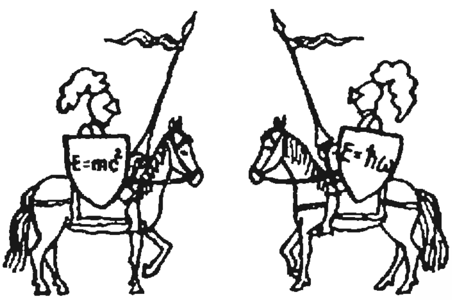
Изданы и две небольшие книжки об Эйлере. Профессор А. П. Юшкевич кратко изложил основные события из жизни Эйлера и его важнейшие достижения в различных областях математики.

Первая часть книжки А. Яковлева представляет собой значительно более подробное беллетризованное жизнеописание ученого; во второй части рассказывается о некоторых математических проблемах и задачах, которыми занимался Эйлер и которые доступны пониманию учащихся IX—X классов.

Наши читатели могут выбрать любую из этих книжек — в соответствии со своей подготовкой и интересами.

1. А. П. Юшкевич. *Леонард Эйлер*. М.: Знание, 1982.
2. А. Я. Яковлев. *Леонард Эйлер*. М.: Просвещение, 1983 (Серия «Люди науки» — пособие для учащихся).

VI Московский турнир юных физиков



Если два человека одинакового возраста придерживаются противоположных взглядов и у одного из них имеются горячие сторонники, то имеются они и у другого.

Льюис Кэррол

VI Московский турнир был проведен физическим факультетом МГУ с декабря 1983 г. по март 1984 г. Оргкомитет Турнира возглавлял вице-президент АН СССР, академик Е. П. Велихов, жюри — профессор физического факультета МГУ В. Л. Бонч-Бруевич. В этом соревновании старшеклассников приняли участие 41 школа Москвы и Московской области.

Как обычно, Турнир проводился в три этапа.

I тур — заочный коллективный конкурс. Школам для коллективного решения предлагались 17 задач сроком на два месяца. По результатам этого конкурса ко II туру были допущены команды 13-ти школ.

II тур — отборочные физбои, которые определили финалистов Турнира. Отборочные физбои проводились на физическом факультете и в московских школах по задачам заочного конкурса.

III тур — финал Турнира был проведен на физическом факультете МГУ. В его программу входили: физбой финалистов Турнира, конкурс домашних заданий, конкурс капитанов, конкурс болельщиков, награждение победителей Турнира.

Первое место и переходящий приз Турнира присуждены команде школы № 179 г. Москвы, второе место — командам школ № 2 и № 57 г. Москвы, третье место — командам школ ФМШ № 542 при МИФИ, № 444 г. Москвы, ЭСШ № 82 пос. Черноголовка и ФМШ № 18 при МГУ. За победу в отдельных конкурсах Турнира грамоты и подарки были вручены 17-ти школьникам. Физический факультет МГУ наградил школы, команды которых показали высокие результаты, физическими приборами.

VII Турнир юных физиков для учащихся 8—10 классов школ Москвы и Московской области начнется в сентябре 1984 г. Ваши вопросы по организации таких соревнований, отзывы и предложения, а также заявки на участие в ТЮФ-VII присылайте по адресу: 119899, Москва, ГСП, МГУ, физический факультет, Совет по работе со школьниками, Оргкомитет ТЮФ.

Задания Турнира

Эти задания вы можете использовать при организации в школе викторин, вечеров науки, физбоев, в работе физических кружков.

Задания заочного коллективного конкурса

Большинство заданий сформулировано на основе конкретных физических явлений и рассчитано на проведение серьезных теоретических и экспериментальных исследований, выходящих за рамки «школьного» подхода. Условия задач, как правило, сформулированы максимально кратко и допускают различные трактовки и степени упрощения.

1. «Придумай сам». Самостоятельно сформулируйте задачу-проблему и решите ее.

2. «Расширяющаяся Вселенная». Длинная полоска резины одним концом прикреплена к неподвижной планке (координаты концов планки — (0; 0) и (0; 1)), а другим — к планке, движущейся с постоянной скоростью v вдоль оси Ox (начальные координаты концов планки — (L; 0) и (L; 1). За какое минимальное время муравей перебежит из начала координат в точку на резине с начальными координатами (x_0; y_0)? Ширина резиновой полоски постоянна, скорость муравья относительно резины v_1.

3. «Встреча». Три муравья одновременно начинают двигаться из трех различных точек с различными постоянными скоростями так, что скорость первого муравья всегда направлена ко второму, второго — к третьему и третьего — к первому. При каких соотношениях скоростей произойдет их одновременная встреча? В какой точке это произойдет? Считать известными начальные координаты и скорости муравьев.

4. «Клей». Наполовину заполненная бутылочка с клеем (свежим, канцелярским) скатывается без проскальзывания с наклонной плоскости. Экспериментатор может придать бутылочке практически любую начальную скорость. Какой будет установившаяся скорость качения бутылочки по очень длинной наклонной плоскости в зависимости от начальной скорости и угла наклона плоскости?

5. «Гипосульфит». Фотолюбители хорошо знают, что при растворении гипосульфита (тиосульфата натрия) вода сильно охлаждается. Исследовать это явление. В частности, определить ΔU [Дж/кг].

6. «Связь». Любознательные физики решили связаться с «жителями» α-Центавра посредством электронного пучка. Возможно ли это и каков тогда должен быть пучок?

7. «Машина катастроф». «Катастрофами называются скачкообразные изменения, возникающие в виде внезапного ответа системы на плавное изменение внешних условий. Применение теории катастроф к конкретным задачам в разных областях науки вызвало много споров...» (Арнольд В. И. *Теория катастроф*. М.: Знание, 1981; МГУ, 1983).

Наглядное представление о применении выводов теории катастроф можно получить с помощью

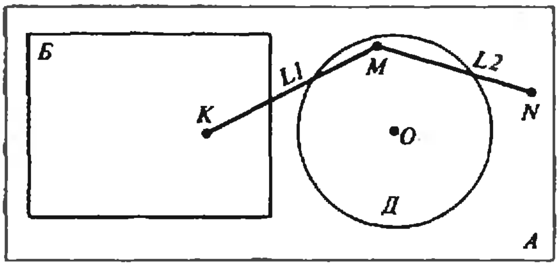


Рис. 1.

«машины катастроф» Зимана (рис. 1). Ее легко изготовить: диск *Д* из плотного картона крепится к доске *А* так, что он может свободно вращаться на оси *О*. На краю диска имеется штырь *М*, к которому прикрепляется середина легко растяжимой резиновой ленты $L1 - L2$. Один конец ленты прикреплен к доске в некоторой точке *N*, а к другому, свободному концу прикрепляют карандаш *К*. При медленном перемещении карандаша по листу бумаги *Б* диск поворачивается и при пересечении карандашом некоторых точек, лежащих на так называемой «кривой катастроф», может скачком перейти в новое положение.

Исследуйте «кривую катастроф» машины Зимана. Постройте свою «машину катастроф» и исследуйте ее.

8. «Река». Оцените скорость течения реки, если перепад высот составляет 1 м/1 км на протяжении 100 км. Какова скорость плота в такой реке?

9. «Электромотор». Экспериментально исследуйте и объясните семейство вольтамперных характеристик $I(U)$ электромотора, применяемого в детских игрушках, при различных механических нагрузках.

10. «Трос». Исследовательское судно «Витязь» отправляется в плавание для изучения дна океана. Предстоит опустить на дно специальное устройство ($m=6000$ кг, $V=1$ м^3) на стальном тросе. На какую глубину можно опустить это устройство и каким должен быть трос?

11. «Батарейка». Исследуйте зависимость ЭДС и внутреннего сопротивления батарейки для карманного фонарика от температуры в интервале 10 °C — 90 °C.

12. «Трансформатор». При размыкании первичной цепи ключом *К* во вторичной цепи возникает импульс тока (рис. 2).

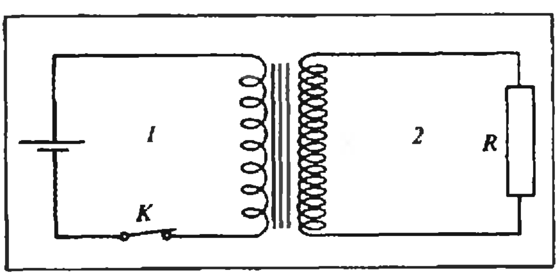


Рис. 2.

Объяснить его происхождение и измерить амплитуду импульса для конкретной схемы. Трансформатор повышающий (любой, какой можно достать), источник тока — батарейка, $R=10$ кОм.

13. «Затухание». Экспериментально вывести закон затухания колебаний математического маятника в воздухе. Эксперименты желательно провести с тяжелым шариком $m=100$ г, подвешенным на нити $l=1$ м. Начальное отклонение $\alpha=20°$.

14. «Плотность вероятности». На *X*-пластины осциллографа подается гармонический сигнал $x=x_0 \sin\omega t$. Вследствие этого на экране наблюдается горизонтальная полоска, освещенность которой больше на краях, чем в центре. Вывести закон изменения освещенности полоски вдоль ее длины.

15. «Шарик и поршень». Маленький, абсолютно упругий шарик находится между абсолютно

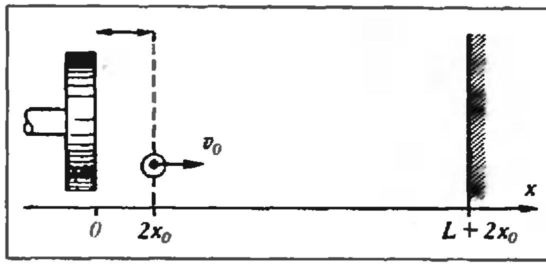


Рис. 3.

упругими стенкой и поршнем (рис. 3). Поршень совершает гармонические колебания по закону $x=x_0(1-\cos\omega t)$. Минимальное расстояние между поршнем и стенкой равно *L*, причем $L \gg x_0$.

В начальный момент $t=0$ шарик находится в точке $x=2x_0$ и имеет скорость $v_0>0$, направленную к стенке. Какая скорость будет у шарика после достаточно большого числа соударений? Для простоты расчетов и сравнимости результатов считать, что после каждого соударения шарика с поршнем поршень мгновенно возвращается в положение $x=0$ и покоится до тех пор, пока шарик не удалится от начала координат на расстояние $x=2x_0$. Затем поршень продолжает гармонические колебания до следующего соударения с шариком и т. д. Пусть все величины безразмерные и $x_0=0{,}0025$; $L=0{,}5$; $\omega=\pi$; $v_0=0{,}04-1{,}00$.

16. «Планета». Некая планета вращается по круговой орбите с периодом τ вокруг звезды типа Солнца. Вследствие вращения планеты вокруг собственной оси с частотой ν температура поверхности планеты неодинакова на дневной и ночной сторонах. Известно, что коэффициент отражения поверхности планеты зависит от температуры: $\Delta\varepsilon=\alpha\Delta T$. Следовательно, электромагнитное излучение больше отражается от вечернего края планеты, чем от утреннего, и это должно изменять скорость вращения планеты вокруг своей оси. Рассчитать изменение частоты вращения планеты за год $\Delta\nu$ [с/год]. Считать известными параметры излучения и параметры планеты. Произвести численные оценки для Земли.

17. «Картошка». Полярность немаркированного источника постоянного напряжения можно определить с помощью ... сырой картошки. Попробуйте!

Домашние задания финалистам Турнира

1. «Мертвая вода». «Мы направились к краю льда, чтобы пристать, но «Фрам» оказался на «мертвой воде» и почти не трогался с места, хотя машина и работала изо всех сил. Мы продвигались так медленно, что я предпочел выехать вперед на лодке, чтобы настрелять тюленей». (Фр. Нансен. *Среди льдов и во мраке полярной ночи.*)

Что такое «мертвая вода», почему она существенно замедляет продвижение корабля?

2. «Качение шарика». Шарик скатывается по двум параллельным наклонным рельсам. Рассчитать и измерить зависимость ускорения *а* шарика от ширины x щели между рельсами: $\alpha = f(x)$. Пусть $x = 0{,}1D - 0{,}7D$ и $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}01 - 0{,}6$, где D — диаметр шарика. Для экспериментов был выдан биллиардный шарик ($D = 5$ см).

3. **«Конденсатор».** Предложить способ и измерить емкость электролитического конденсатора. Для экспериментов был выдан конденсатор ЭГЦ 500 мкФ 30 В.

4. **«Страусиное яйцо».** Оцените, во сколько раз страусиное яйцо варится дольше куриного.

5. **«Представление».** Разыграть с участием членов команды и болельщиков представление на физическую тему. Длительность представления — 5 мин. Жанр произвольный.

Конкурс главных задач

На решение этих задач с представлением письменных отчетов командам отводилось два часа.

1. **«Резонатор Гельмгольца».** Рассчитать и измерить резонансную частоту звуковых колебаний в сферической колбе с узким горлышком. Объем колбы 0,5 л, площадь сечения горлышка 4 см^2, высота горлышка 2 см, скорость звука 330 м/с.

2. **«Искра».** При размыкании цепи постоянного тока, содержащей большую индуктивность, между контактами размыкающего ключа возникает искровой разряд. Если параллельно ключу подсоединить конденсатор, то искровой разряд значительно ослабнет. Исследовать и объяснить явление гашения искры при подключении конденсатора.

3. **«Эффект Доплера».** Источник и приемник звуковых колебаний (репродуктор и микрофон) укреплены на концах планки, которая подвешена к маятнику и может совершать колебания (образуется фигура в виде перевернутой буквы Т). Сигнал, поступающий на репродуктор от звукового генератора, подается на X-пластины осциллографа. На Y-пластины осциллографа подается усиленный сигнал от микрофона. Таким образом, на экране осциллографа методом эллипса можно наблюдать разность фаз между сигналом звукового генератора и усиленным сигналом микрофона. Предварительно, при покоящемся маятнике, небольшим изменением частоты генератора на экране осциллографа получают изображение наклонной прямой. Затем при свободно колеблющемся маятнике на экране осциллографа наблюдают периодическое превращение прямой в эллипс (если планка находится в плоскости качаний).

Объяснить эффект возникновения дополнительной разности фаз в данном эксперименте. Произвести численные оценки. В представленной установке длина маятника 1,6 м, длина планки 70 см, частота звукового генератора 10 кГц, начальное отклонение маятника 30°.

Конкурс капитанов и болельщиков

Капитаны выполняли эти задания с двумя помощниками. Болельщики работали индивидуально или группами и присылали ответы в пользу одной из команд — финалистов. Время на выполнение каждого задания — 5 минут.

1. **«Фокус холода».** Два сферических отражателя направлены навстречу друг другу. В фокус первого отражателя помещен термостолбик. Если в фокус второго отражателя поместить горячий объект (зажженную спичку или руку экспериментатора), то термостолбик зафиксирует повышение температуры. Что будет, если в фокус второго отражателя поместить кювету с жидким азотом?

2. **«Взвешивание слона».** «Слон» подвешен так, как показано на рисунке 4. Определить массу «слона», если известна масса гири. Углы, которые составляют нити с вертикалью, можно измерить.

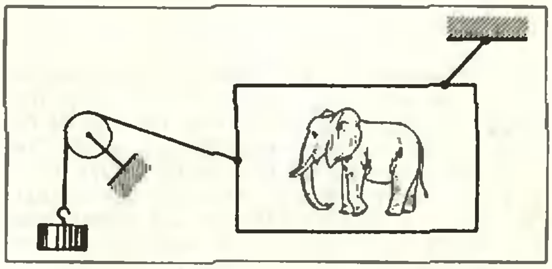


Рис. 4.

3. **«Машина катастроф Зимана».** Объяснить качественно, как изменится кривая катастроф машины Зимана, если укоротить резинку $L1$ (описание машины Зимана см. в заданиях заочного конкурса).

4. **«Машина».** Что будет, если отпустить тормоза (рис. 5)?

5. **«Сифон».** Будет ли действовать сифон, если его поместить под колокол вакуумного насоса и откачать воздух (рис. 6)?

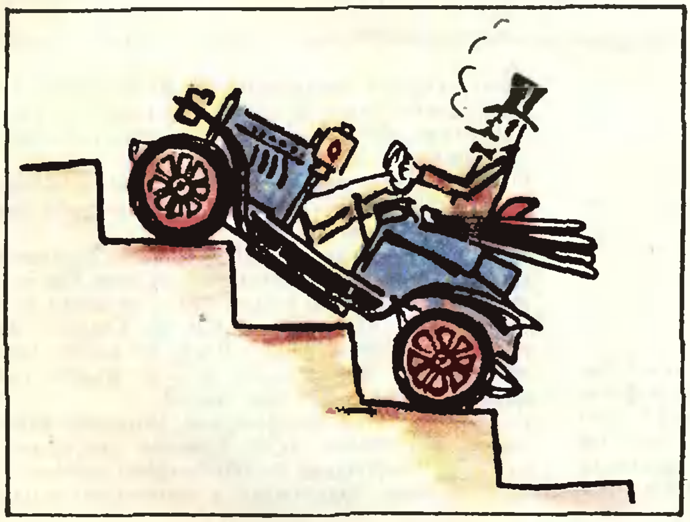


Рис. 5.

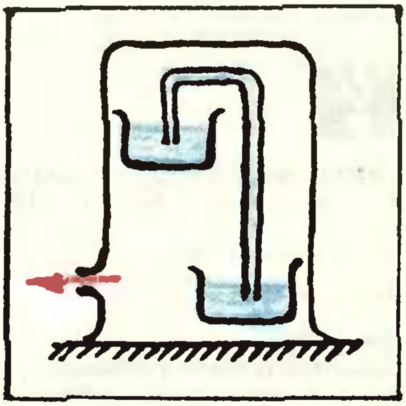


Рис. 6.

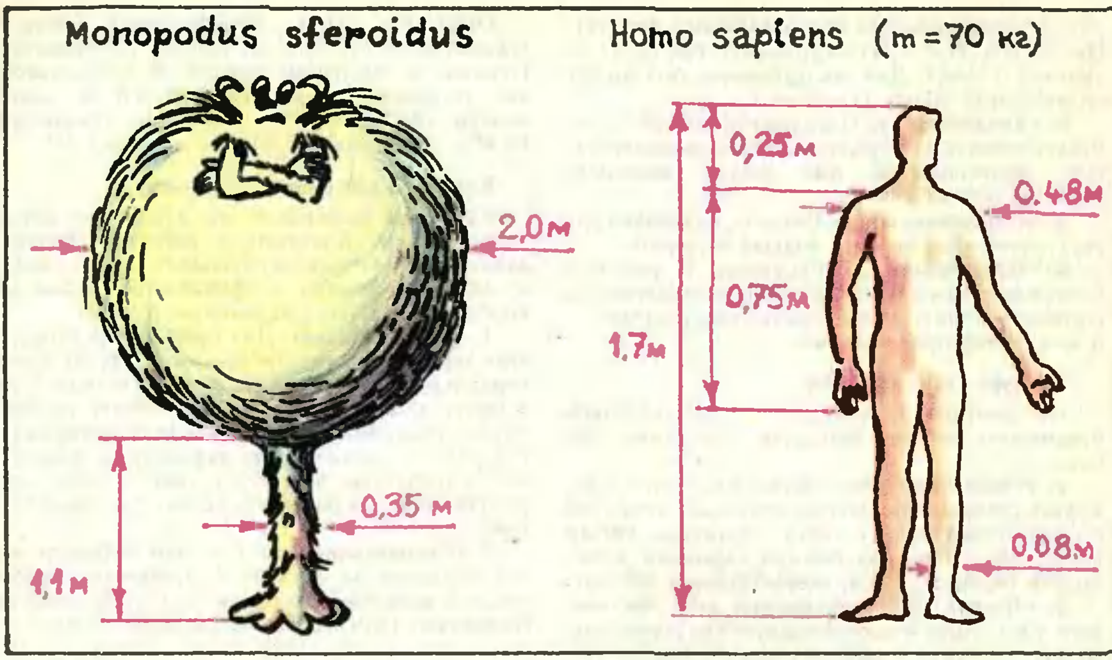


Рис. 7.

6. **«Световые пятна».** Фонарь, состоящий из кожуха и обычной лампы (220 В, 150 Вт), закрыт спереди светонепроницаемой черной бумагой. Длина спирали лампочки 3 см, расстояние от спирали до черной бумаги 6 см. На большом расстоянии от фонаря (5 м) находится экран. Что будет на экране, если в черной бумаге проколоть отверстия диаметром 1 мм? 2 мм? 3 мм? Что будет, если проколоть много отверстий?

7. **«Орловский рысак».** В течение двух минут человек может двигаться со скоростью: бегом — *28 км/ч, на коньках — 47 км/ч. Орловский* рысак в течение двух минут развивает скорость 48 км/ч. Какую скорость мог бы развить орловский рысак на коньках? Для справки дана таблица мировых рекордов (первое число — время, второе — скорость в км/ч):

Бег 800 м	муж. жен.	1.43,5 1.53,5	27,83 25,37
Коньки 1500 м	муж. жен.	1.54,26 2.04,04	47,26 43,53
Бег 1600 м	орловский рысак	1.59,75	48,10

8. **«Одноног».** Некая зоологическая экспедиция обнаружила в джунглях реки Амазонки новый вид млекопитающего животного — Monopodus sferoidus (рис. 7, в просторечии — *одноног*).

Оцените массу и полный рост однонога. При решении задачи используйте средние антропометрические данные для человека.

Зам. председателя оргкомитета турнира
Е. Н. Юносов

Ответы, указания, решения

Простой прием в непростых задачах

1. $-\infty<x<-2$, $-2<x<2-\sqrt{15}$, $6\leqslant x<+\infty$.
2. $x=3$.
4. $x\in[6, 25; +\infty[$.
5. $y_{max}=-\frac{3}{4}$; $y_{min}=-3$.

Кто же прав?

Характеристическим условием возрастания (убывания) на промежутке дифференцируемой функции является неравенство $f'(x)\geqslant 0$, а не $f'(x)>0$ (для убывания $f'(x)\leqslant 0$, а не $f'(x)<0$), лишь бы только критические точки функции не заполняли какого-либо промежутка. Если бы Федя и Вася вместо строгих неравенств $2x+a>0$ и $2x+a<0$ написали нестрогие $2x+a\geqslant 0$ и $2x+a\leqslant 0$, то у них *получилось бы, что $a=-2$, то есть парабола*, нарисованная Дусей.

О таком характеристическом условии монотонности функции в учебнике не сказано, но оно совершенно очевидно.

Вместе с тем, задачу можно решить и оставаясь в рамках того, что написано в учебнике. Система неравенств, которую решал Федя, на самом деле выполняется при условии $a\geqslant -2$. Система неравенств, которую решал Вася, на самом деле выполняется при условии $a\leqslant -2$. Вместе они выполняются как раз при $a=-2$.

И наконец, такое соображение. Согласно замечанию в учебнике, если функция непрерывна на конце промежутка, то его — конец промежутка — можно подключить к соответствующему открытому промежутку при исследовании функции на монотонность. Но тогда наша парабола возрастает при $x\geqslant 1$ и убывает при $x\leqslant 1$, откуда следует, что при $x=1$ имеется ее минимум. Отсюда находим (как?), что $a=-2$.

Избранные школьные задачи

1. Ответ: $5\frac{1}{2}$, $6\frac{1}{2}$, 7, $4\frac{1}{2}$ и $3\frac{1}{2}$ фунта.

Указание. Сумма результатов всех взвешиваний — 61 фунт — равна сумме удвоенных весов первого, второго, четвертого и пятого мешков с утроенным весом третьего мешка. Поэтому утроенный вес третьего мешка равен $61-2(12+8)=21$. Дальнейшее ясно.

2. Решение. $3(a^2+b^2+c^2)=(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2+(a+b+c)^2$.

3. Указание. Пусть DE — искомый отрезок (рис. 1). Отложим на BC отрезок $|CF|=|CD|$. Тогда $|FB|=|EB|$. Треугольники CDF и BEF равнобедренные, а так как $(DE)\parallel(BC)$, отрезки DF и EF — биссектрисы углов CDE и DEB соответственно. Поэтому точка F одинаково удалена от AC, DE и AB, то есть AF — биссектриса угла A.

4. Ответ: 0 при $\alpha+\beta+\gamma\leqslant 2$, $\alpha+\beta+\gamma-2$ при $\alpha+\beta+\gamma>2$. Указание. Пусть N — число учеников в классе. Тогда αN, βN и γN — число участников хорового, драматического и фото-кружков. Если $\alpha+\beta\leqslant 1$, то учеников, посещающих все три кружка, может и не быть. Если $\alpha+\beta>1$, то наименьшее число учеников, участвующих в каждом из первых двух кружков, равно $(\alpha+\beta-1)N$. Пусть $\delta=\alpha+\beta-1$. Аналогичное рассуждение показывает, что при $\delta+\gamma\leqslant 1$ учеников, посещающих все три кружка, может и не быть, а при $\delta+\gamma>1$ наименьшее их число равно $(\delta+\gamma-1)N$, то есть $(\alpha+\beta+\gamma-2)N$.

5. Ответ: $1-\alpha-\beta$. Указание. Из равенств $\frac{S_{OBC}}{S_{ABC}}=\frac{|OD|}{|AD|}$; $\frac{S_{AOC}}{S_{ABC}}=\frac{|OE|}{|BE|}$; $\frac{S_{AOB}}{S_{ABC}}=\frac{|OF|}{|FC|}$ следует, что $\frac{|OD|}{|AD|}+\frac{|OE|}{|BE|}+\frac{|OF|}{|FC|}=1$.

6. Ответ: Всего 10 видов треугольников с углами: **1.** 120°, 30°, 30°; **2.** 120°, 40°, 20°; **3.** 120°, 45°, 15°; **4.** 120°, 36°, 24°;
5. 120°, $\frac{360}{7}$°, $\frac{60}{7}$°; **6.** 90°, 45°, 45°; **7.** 90°, 30°, 60°; **8.** 90°, 72°, 18°; **9.** 72°, 72°, 36°; **10.** 60°, 60°, 60°.
Указание. Задача сводится к решению в натуральных числах уравнения $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}=\frac{1}{2}$. Далее, пусть $k\leqslant l\leqslant m$. Тогда $3\leqslant k\leqslant 6$. (Если $k\geqslant 7$, то $\frac{1}{k}+\frac{1}{l}+\frac{1}{m}<\frac{3}{7}<\frac{1}{2}$.) Остается перебрать случаи $k=3$, $k=4$, $k=5$ и $k=6$.

7. Указание. На перпендикуляре к (AP) (рис. 2) в точке A по обе стороны от A отложим равные отрезки GA и AH, и через точки G и H проведем прямые, параллельные AP. Эти прямые пересекут стороны угла в точках G' и H'. Пусть K — любая из точек пересечения AP с окружностью, построенной на $G'H'$ как на диаметре. Осталось провести через точку P прямые, параллельные $G'K$ и $H'K$, пересекающие соответствующие стороны угла в точках E и F.

8. Ответ: $a=\frac{2}{3}\sqrt{2(m_b^2+m_c^2)-m_a^2}$; $b=\frac{2}{3}\sqrt{2(m_a^2+m_c^2)-m_b^2}$;

$$c=\frac{2}{3}\sqrt{2(m_a^2+m_b^2)-m_c^2},$$
$$\cos\widehat{A}=\frac{2(m_a^2-m_b^2-m_c^2)}{9bc}\ \text{и т. д.}$$

Указание. Продолжив медиану AM (рис. 3) на расстояние $|MO'|=|OM|$, получим из параллелограмма $BOCO'$ $a^2+\left(\frac{2}{3}m_a\right)^2=2\left(\frac{2}{3}m_b\right)^2+2\left(\frac{2}{3}m_c\right)^2$.

9. Ответ: $x<0$; $x\geqslant 4$. Указание. Вычитая из первого уравнения второе, без труда получим, что $y=z$, $y\neq 0$, $y\neq 1$, $x=\frac{y^2}{y-1}$. Остается выяснить, при каких x имеет ненулевые корни уравнение $y^2-xy+x=0$.

10. Ответ: а) $S_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$; б) $S_n=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$;
в) $S_n=\frac{n(n+1)(n+4)(n+5)}{4}$.

Указания. а) Пусть $a_k=k(k+1)$. Заметим, что $k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)=3k(k+1)=3a_k$.

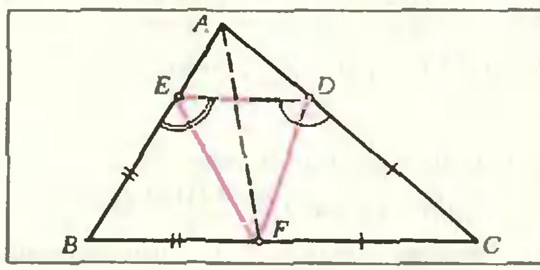


Рис. 1.

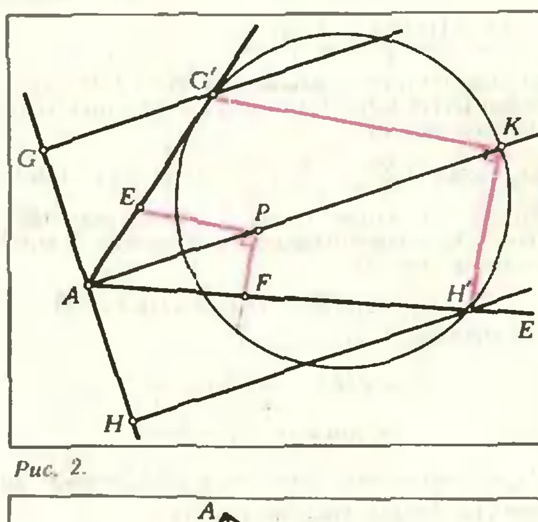


Рис. 2.

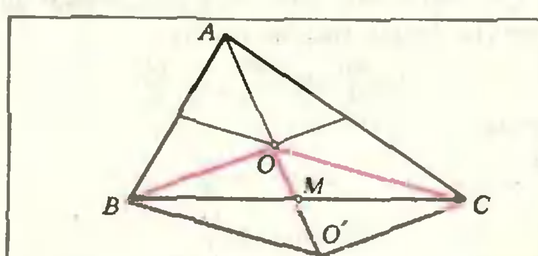


Рис. 3.

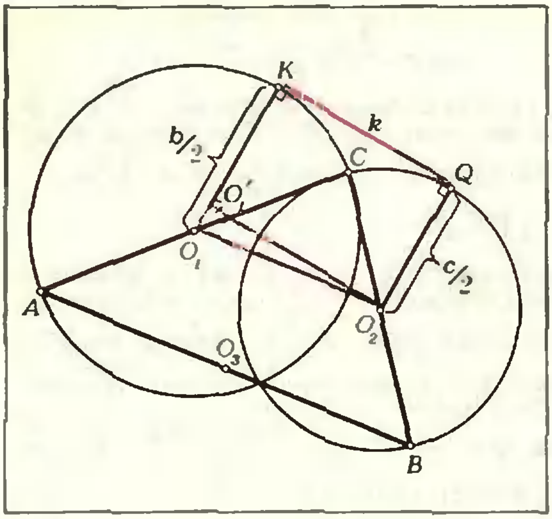


Рис. 4.

Запишем n равенств

$$a_1=\frac{1\cdot2\cdot3}{3}-0,\quad a_2=\frac{2\cdot3\cdot4}{3}-\frac{1\cdot2\cdot3}{3},$$
$$\ldots$$
$$a_k=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}-\frac{(k-1)k(k+1)}{3},$$
$$\ldots$$
$$a_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}-\frac{(n-1)n(n+1)}{3}.$$

Сложив эти равенства, получим

$$a_1+a_2+\ldots+a_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

б) Решается аналогично с использованием равенства $k(k+1)(k+2)=\frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}-\frac{(k-1)\cdot k(k+1)(k+2)}{4}$.

в) Воспользуйтесь равенством $n(n+2)(n+4)=n(n+1)(n+2)+3n(n+1)+3n$ и результатами пунктов а) и б).

11. Ответ: $\frac{ml}{k}+\frac{km}{l}+\frac{kl}{m}$. Решение. Пусть $2a$, $2b$, $2c$ длины сторон треугольника ABC. Тогда из прямоугольного треугольника $O_2O_1O_1'$ получим (рис. 4)

$$k=\sqrt{c^2-(a-b)^2}=\sqrt{(b+c-a)(a+c-b)}.$$

Аналогично,

$$l=\sqrt{(b+c-a)(b+a-c)},$$
$$m=\sqrt{(a+b-c)(a-b-c)}.$$

Если $a+b-c=x$, $a+c-b=y$, $b+c-a=z$, то $k=\sqrt{yz}$, $l=\sqrt{xz}$, $m=\sqrt{xy}$. Откуда

$$x=\frac{ml}{k},\quad y=\frac{km}{l},\quad z=\frac{kl}{m}.$$

Итак

$$a+b-c=\frac{ml}{k},$$
$$a+c-b=\frac{km}{l},$$
$$-a+c+b=\frac{kl}{m}.$$

Складывая полученные равенства, находим, что

$$a+b+c=\frac{ml}{k}+\frac{km}{l}+\frac{kl}{m}.$$

12. Ответ: 2.

13. Указание. Точка P должна быть одинаково удалена от противоположных сторон шестиугольника. Поэтому, если P не лежит внутри треугольника FDE, образованного средними линиями треугольника ABC, данная задача решений не имеет. Если P внутренняя точка треугольника FDE, то проводя $(HG)\parallel(AC)$, $(KL)\parallel(AB)$ и $(MN)\parallel(BC)$ так, чтобы прямые AC и HG, KL и AB, MN и BC были одинаково удалены от точки P, получим требуемый шестиугольник $HGKLMN$.

14. Ответ: а) Каждый из путешественников встретит 19 поездов; б) первый путешественник, едущий восточным поездом, встретит 12 поездов; второй — 8. Указание. Примем за единицу $\frac{1}{360}$ часть всего маршрута. Поезда восточного направления следуют со скоростью 2 единицы в минуту, западного — 3 единицы в минуту. *При отправлении поезда восточного направления* идущий ему навстречу поезд находится в 45 единицах от станции. Встреча этих двух поездов происходит на расстоянии 18 единиц от станции. Отсюда без труда получается, что восточный поезд встретит 19 западных поездов. Остальные случаи рассматриваются аналогично.

15. Указание. Ни одно из чисел a, a^2, ..., a^b не делится на b. Следовательно, какие-то два из них — a^k и a^l дают при делении на b одинаковые остатки. Число a^k-a^l делится на b.

Сведем неравенство к известному

11. *Представьте многочлен в виде* $(a^2-3)^2-(5a^3+a)$.

12. Воспользуйтесь неравенством $\log_n(n+1)>\log_{n+1}(n+2)$ при $n\geqslant2$ (его можно доказать, например, полагая $t=\log_n(n+1)>1$ и учитывая неравенство $t+\frac{1}{t}>2$). Ответ: $a\in[3{,}1;\ 3{,}3]$.

Избранные задачи 50-й ленинградской городской олимпиады по математике

1. Рассмотрите величину $a_1-a_2+a_3-a_4+a_5-a_6$, где a_1, ..., a_i — расставленные в секторах числа.

5. Искомое число равно 1. Указание: в данном равенстве перенесите правую часть налево и разложите полученное выражение на множители.

7. Надо на отрезке CD длины $s=a_1+a_2+\ldots+a_k=b_1+b_2+\ldots+b_n$ выбрать точки $A_1=C$, A_2, A_3, ..., $A_{k+1}=D$ и $B_1=C$, B_2, B_3, ..., $B_{n+1}=D$ такие, что $A_iA_{i+1}=a_i$ и $B_jB_{j+1}=b_j$ для $i=1, 2, \ldots, k$, $j=1, 2, \ldots, n$ и поставить в клетку таблицы, находящуюся в i-й строке и j-м столбце, число, равное длине пересечения отрезков A_iA_{i+1} и B_jB_{j+1}.

9. Используйте то, что точный квадрат не может кончаться на 7 и 3, а если у квадрата предпоследняя цифра — 7 или 3, то он оканчивается на 6.

10. Нельзя. Указание: *разность координат* любой точки итоговой четверки (0; 0), (1, 1), (3; 0), (2; −1) делится нацело на 3; это свойство сохраняется при рассматриваемых преобразованиях, но не выполняется для исходной четверки вершин единичного квадрата.

11. 2^{-9}. Указание: заметьте, что наименьший ненулевой элемент имеющейся на каждом этапе

совокупности чисел можно уменьшить, лишь использовав усреднение с нулем. При этом количество нулей уменьшится на 1, а наименьший ненулевой элемент — не более чем в два раза.
12. Рассмотрите множество натуральных чисел, в троичной записи которых встречаются только цифры 0 и 1. (См. также решение задачи М839 в «Кванте» № 3 за этот год.)
13. Рассмотрите множество из 88 точек, одна из координат которых равна 0,1, 11 или 12.
14. Воспользуйтесь тем, что 271 — простой делитель 99999.
16. Используйте тождество

$$\frac{x^2+2y^2}{3}=\left(\frac{x\pm 2y}{3}\right)^2+2\left(\frac{x\mp y}{3}\right)^2.$$

17. Сделайте замену переменной $y=x+1$ и проследите за изменениями двух старших коэффициентов.

Ленинградская городская олимпиада по физике

Районный тур

8 класс

1. Траектория центра трубы представляет собой последовательность дуг окружностей с радиусом l, стягивающих угол $\alpha=\pi/3$. Центр трубы перемещается в горизонтальном направлении со средней скоростью $v=3\omega l/\pi$.
2. а) Если соприкасающиеся поверхности обоих цилиндров и дна сосуда «пришлифованы» друг к другу, так что между ними вода попасть не может, то цилиндры останутся на месте.
б) Если «пришлифованы» только дно сосуда и нижнее основание нижнего цилиндра, то верхний цилиндр всплывет, а нижний останется на месте.
в) В остальных случаях оба цилиндра всплывут.
3. Максимальная скорость шарика $v\sim 12v_0$; для этого потребуется время $t\sim(137/120)(L/v_0)$.

9 класс

1. Раскачать качели, конечно, можно. Сила, которая сообщит качелям импульс в горизонтальном направлении, это, в конечном итоге, горизонтальная составляющая силы реакции со стороны земли.
2. Отношение КПД циклов $ABCDA$ и $ABC'D'A$ равно $\eta_1/\eta_2=23/26<1$; следовательно, КПД второй машины больше.
3. Пусть есть область с отрицательной поверхностной плотностью заряда. Тогда в этой области силовые линии электрического поля должны входить в проводник. Начинаться на проводнике эти линии не могут (потенциал его поверхности постоянен); следовательно, они должны начинаться на бесконечности. Но поскольку проводник в целом имеет положительный заряд, будут силовые линии, уходящие с его поверхности на бесконечность. Унося пробный заряд по такой линии достаточно далеко от проводника и возвращая его потом на поверхность проводника по силовой линии, входящей в проводник в области с отрицательной поверхностной плотностью, мы совершили бы отличную от нуля работу, так как двигали бы заряд все время вдоль силовой линии. Но это противоречит тому, что потенциал всех точек проводника один и тот же. Значит, плотность заряда на проводнике всюду неотрицательна.

10 класс

1. Изображение A' точки A совпадает с самой точкой, изображение B' точки B расположено на прямой AB по другую сторону оптической оси, причем $|AB|=|AB'|$.
2. Стенку нужно установить на расстоянии, равном $x_m/2$.
3. В контуре возникнут колебания с новой амплитудой, равной $U_m/2$, и с новой круговой частотой, равной $1/\sqrt{2LC}$.

Городской тур

8 класс

1. Угловая скорость танка $\omega=(\omega_2-\omega_1)r/l$; радиус окружности, по которой движется центр танка, $R=\frac{l}{2}\left(\frac{\omega_2+\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\right)$.
2. Минимальное расстояние между частицами при $t\geqslant T$ равно $\frac{T}{2}\left(\frac{v_{01}^2-2v_{02}^2}{v_{01}+v_{02}}\right)$, если $v_{01}>\sqrt{2}v_{02}$, и равно нулю, если $v_{01}\leqslant\sqrt{2}v_{02}$.
3. При $\mu<1/2$ верхний кубик съедет, как только наступит равенство $\operatorname{tg}\alpha=\mu$. При $\mu>1/2$ оба кубика опрокинутся, затем верхний кубик начнет съезжать.

9 класс

1. Внутренняя энергия газа, а следовательно, и его температура T не меняются. Резервуар переместится в горизонтальном направлении на расстояние $x=mL/(4(m+M))$.
2. $T\approx\frac{2d^2}{\alpha U_0 t_0}$.
3. Пластины надо разместить параллельно друг другу одна над другой так, чтобы расстояние между соседними пластинами было равно d, и соединить первую пластину с третьей, а вторую — с четвертой. Емкость такого конденсатора $C=3\varepsilon_0\varepsilon S/d$.

10 класс

2. Пусть начальное отклонение A кубика таково, что $(2n-1)b<A<(2n+1)b$, где n — некоторое целое число, а $b=\mu mg/k$ (поскольку $A\leqslant l_0$, должно выполняться условие $n\leqslant\left[\frac{1}{2}\left(\frac{l_0}{b}-1\right)\right]$, где l_0 — длина нерастянутой пружины, $[x]$ означает целую часть числа x). Тогда $s=2n(A-nb)$.
3. Период колебаний системы с последовательно соединенными пружинами $T_1=2\pi\sqrt{\frac{k_1+k_2}{k_1k_2}m}$, а системы с «параллельно» соединенными — $T_2=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}}$.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 8)

1. Луна находится ближе к Земле, чем звезды, поэтому нельзя увидеть звезду на диске Луны.
2. Пусть $BN=\frac{AC}{2}$ и $\angle A=75°$ (рис. 5). Покажем, что $AC=BC$. Если $BC>AC$, то $\angle B<75°$ и $\angle C>30°$, но тогда $BN>\frac{BC}{2}$ и $\frac{1}{2}AC>\frac{1}{2}BC$, следовательно, $BC<AC$, что противоречит предположению.
Если же мы предположим, что $BC<AC$, то

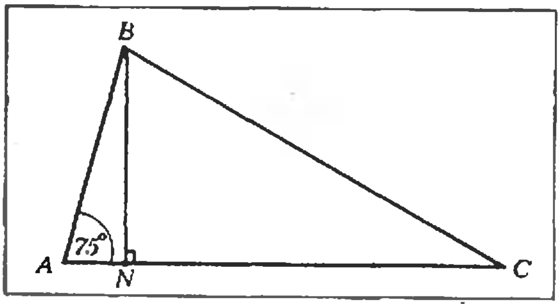


Рис. 5.

$\angle B > 75°$, $\angle C < 30°$ и $BN < \frac{1}{2}BC$, откуда $AC < BC$. Опять противоречие с предположением. Следовательно, $BC = AC$.

3. Так как число $234x2y0$ должно нацело разделиться на 3600, то $y=0$, а из делимости на 3600 следует делимость на 9, откуда $2+3+4+x+2$ должно делиться на 9, откуда $x=7$. Кляксы нужно заменить на 7 и 0.

4. За два первых дня Слава прочел $1/2 + 1/6 = 2/3$ книги, в третий день он прочел еще 1/3, тем самым закончил чтение книги.

5. $25^2 = 625$ (решение единственное).

Шахматная страничка
(см. «Квант» №№ 5, 6)

Задание 9 (Н. Григорьев, 1920 г.). Поспешное 1. d4 ведет к ничьей — 1... Кре4 2. Крс3 Крf5 3. Крd3 Крf4 и т. д. Белые выигрывают, пользуясь «методом треугольника». **1. Крс2 Крf4** (1... Кре3 2. Крс3 и 3. Крd 4) 2. Крb 2 Крf3 **3. Крb3! Крf4 4. Крс2 Крf3 5. Крd2.** Пройдя по треугольнику c2—b2—b3, белый король добился своей цели. На доске исходная позиция, но с ходом черных. Победа достигается следующим образом: **5... Крf4 6. Крс2 Кре5 7. Кре3 Крd5 8. d4 Крс4 9. Кре4 Кр:b4 10. d5 Крс5 11. Кре5 b4 12. d6 Крс6 13. Кре6 b3 14. d7 b2 15. d8Ф b1Ф 16. Фс8+ Крb6 17. Фb8+** и 18. Ф:b1. В случае 4... Кре5 решает 5. Крd1! Крd5 6. Кре2 Крd4 7. Крd2! Кре5 8. Кре3 и т. д.

Задание 10 (Р. Рети, 1923 г.). Возможны два первых хода, но ни один из них обычно не приходит в голову. **1. Лd2(d3)!** А почему не 1. Лd1? Ладья спустится на первую горизонталь только после того, как пешка придет в движение — **1... d4 2. Лd1! Крd5 3. Крd7! Крс4 4. Кре6 d3 5. Кре5** или 3... Кре4 4. Крс6 d3 5. Крс5, и черные беззащитны. Оказывается при 1. Лd1? d4 2. Крd7 Крd5! белые попадают в цугцванг и после 3. Лd2 Кре4 4. Крс6 Кре3 вынуждены смириться с ничьей.

Задание 11 (Л. Лошинский, 1933 г.). **1. Кра5!** Далее все строится на различных связках. 1...Ф:е5+ 2. Кb5×, 1...Ф:f2 2. Кf5×, 1...Л:d4 2.Кd3×, 1...Фе4 2. Ке2×. Других защит от 2. Ке2× у черных нет.

Задание 12 (Л. Лошинский, 1954 г.). Задача завоевала высшее отличие на конкурсе миниатюр. **1. Фе5!** е1К 2. Фе3+ Крf1 3. Се2×, 1...g1К 2. Фg3+ Крf1 3. Сg2×, 1...Крf1 (g1) 2. Ф:е2 (+) и 3. Ф:g2×, 1...е1Ф 2. Фg3+ и 3. Ф:g2×.
Не проходит 1. Фg5 из-за ответа 1...Кре1 и 1. Фf4 из-за 1...Крf1!

Номер подготовили:
А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, Б. М. Ивлев, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
А. А. Астрецов, М. Б. Дубах, В. М. Ильин, Н. С. Кузьмина, Ю. П. Мартыненко, И. Е. Смирнова, А. А. Шабанов, Е. С. Шабельник, В. Б. Юдин

Фото представили:
А. С. Кондратьев, Б. Л. Раскин, В. П. Шевченко

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления
Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Д. Дорохова

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 19.7.84.
Подписано к печати 15.8.84.
Печать офсетная.
Бумага 70×108 1/16. Усл. кр.-отт. 23,80.
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,25. Т-17462.
Цена 40 коп. Заказ 1880. Тираж 172 924 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ПОСЛЕДНЯЯ ТРЕНИРОВКА

К поединку за шахматную корону претендент проходит серьезные матчевые испытания, и как правило оказывается в лучшей форме, чем чемпион мира. Поэтому и чемпион перед матчем с претендентом старается тоже выступать в турнирах высокого ранга. В этом году, когда еще шло сражение в Вильнюсе, А. Карпов отправился на международное состязание в Осло, а оттуда на супертурнир в Лондон. Это была его последняя большая практическая тренировка перед матчем с Г. Каспаровым (если не считать еще участия в матче сборной СССР со сборной мира, в котором А. Карпов выиграл у У. Андерссона).

По всей видимости, проблему предматчевой подготовки чемпион мира решил успешно — в обоих турнирах он завоевал первый приз, продемонстрировав интересную, творческую игру.

А. Карпов — В. Горт
(Осло, 1984 г.)
Скандинавская защита

1.e4 Кc6 2.Kf3 d5 3.ed Ф:d5 4.Кc3 Фa5 5.Cb5 a6. Ведет к существенному ослаблению ферзевого фланга. А когда черным удастся поправить свои дела на этом участке доски, появятся другие, еще более уязвимые слабости. **6.C: c6+ bc 7.Фe2!** Препятствуя связке — 7...Cg4 8.Фe4! и готовясь поддержать коня, который намерен водрузиться на e5. **7...Kf6 8.Ke5 e6 9.0—0 Cd6 10.d4 0—0 11.Лd1 c5 12.Кc4 Фb4 13.a3 Фb8 14. Cg5 Kd5 15.Ke4 cd 16.Ke:d6 cd 17.Л:d4 Лa7 18.Фd3 f6 19. Cd2 Лe7 20.Лe1 Cb7 21.Ka5 f5 22.c4 Kf6 23.Cb4! Ke4 24.C:d6 K:d6 25.Л:d6 f4 26.f3 Ca8 27.b4 e5 28.c5 e4 29.fe f3 30.gf Фc8 31.Лd1 Фh3 32.Лd8! Лf7 33.Л:f8+ Л:f8 34.Фc4+ Kph8 35.Фf7! Лg8 36.c6 Фh6 37.c7.** Черные просрочили время, но могли прекратить свои мучения и раньше.

Я. Тимман — А. Карпов
(Лондон, 1984 г.)
Шотландская партия

1. e4 e5 2.Kf3 Кc6 3.d4 ed 4.К:d4 Kf6 5.К:c6 bc 6.e5 Фe7. Старинная позиция, маневр Ласкера 6...Kd5 менее удачен. **7.Фe2 Kd5 8.c4 Ca6 9.Фe4.** Обычное продолжение здесь Kd2. Но, может быть, белых уже устраивает ничья? Ведь на 9...Kf6 ферзю лучше вернуться на место и после 10. Фe2 Kd5 позиция повторяется. Впрочем, белые могут теперь избрать 11.Kd2. Однако Карпов решил не проверять, согласен ли Тимман на мир, а показал, что сам настроен агрессивно.

9...Kb6 10.Kd2 0—0—0 11.c5. Белые вскрывают игру, полагая, что неприятельский король будет чувствовать себя неуютно. Однако вскоре обнаруживается, что их собственный король еще более неустроен. **11...C:f1 12.cb Ca6 13.ba Kpb7.** Допускать a8Ф× не стоит. **14.Kb3 f6 15.f4 fe 16.fe Лe8! 17.Cf4 Фh4+!** После 17...Фb4+ 18.Ф:b4 C:b4+ у черных благодаря двум слонам заметный перевес в эндшпиле, но они полагают, что партию можно завершить в более ранней стадии. **18.g3 Фh5.** Белый король попал под перекрестный огонь, рокировка невозможна. **19.Лc1 Кpa8!** Король скрывается в углу, но, как ни странно, этот же ход в дальнейшем позволит черным провести решающую матовую атаку. **20.h4 d5! 21.Фe3.** После 21.Фc2 Л:e5+ 22.C:e5 Ф:e5+ 23.Kpf2 Cd6 белым несдобровать. **21...g5! 22.C:g5 Cb4+ 23.Kpf2 Лhf8+ 24.Kpg2.** Проигрывает и 24.Cf4 Л:e5! 25.Фd4 Л:f4+ 26.gf Лe2+ 27.Kpg3 Фg6+ и 28...Фg2×.

24...Л:e5! Когда черные пожертвовали ладью, голландский гроссмейстер, кажется, был несколько удивлен. Он считал, что худшее для него уже позади. **25.Ф:e5 Фf3+ 26.Kph2 Фf2+. Белые сдались.** В случае 27.Kph3 сказывалась хитрость черного короля, проявленная на 19-м ходу — 27...Cc8+ (поле b7 не занято) 28.g4 Лf3+

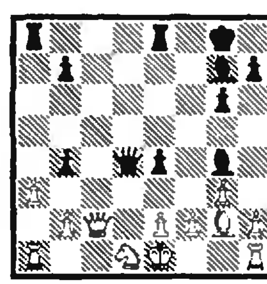
А. Карпов — В. Корчной
(Лондон, 1984 г.)
Защита Грюнфельда

1.Kf3 Kf6 2.c4 g6 3.Кc3 d5 4.d4 Cg7 5.Cg5 Ke4 6.cd K:g5 7.K:g5 e6 8.Kf3 ed. Известная теоретическая позиция. У черных преимущество двух слонов, действие которых, однако, сильно ограничено. В то же время белые прочно владеют центром и намерены захватить инициативу на ферзевом фланге. **9.e3 0—0 10.b4 Ce6 11.Ce2 Kd7 12.0—0 f5.** Черные стремятся к активности на противоположном участке доски, но в конечном счете из их затеи ничего не выйдет. **13.Лe1 g5 14.Лc1 Kph8 15.Cd3 c6 16.b5 g4.** После 17.bc gf (17...bc 18.Kd2 c5 19.Cb5) 18.cd fg 19.f4 оба черных слона расположены довольно неуклюже, однако, Карпов решил, что поле f4 лучше оставить для коня. **17.Kd2 c5 18.dc K:c5 19.Kb3 K:b3 20.ab!** Самое убедительное, после вынужденного d5 — d4 белый слон займет поле c4 **20...Лc8 21.Ke2 Л:c1 22.Ф:c1 Фb6 23.Kf4 Cg8 24.g3.**

Итак, контуры финальной части партии определились. После размена пешек «d» и «e» и белопольных слонов преимущество коня над оставшимся слоном будет бесспорным. **24...d4 25.Cc4 Лc8 26.Фb1 de 27.Л:e3 Фc5 28.Фe1! Cd4 29.Лe2 C:c4 30.bc Лg8.** После 30...Ф:c4 31.Лe8+ Л:e8 32.Ф:e8+ Фg8 33.Фd7 черные беззащитны. **31.Фc1! Лc8 32.Фc2 Cg7 33.Фd3 Фd4 34.Ф:f5 Ф:c4 35.Лe7 Лd8 36.Kpg2 Фb3 37.Ф:g4 Лg8 38.Kg6+! Черные сдались.** (38...hg 39.Фh4+ Ch6 40.Ф:h6×).

Конкурсные задания

17. Белые начинают и выигрывают.



18. Черные начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 ноября 1984 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 17, 18»).

Цена 40 коп.

Индекс 70465

КУБИЧЕСКИЙ КРОССВОРД

Буквы отгаданного слова размещаются в кубических ячейках кроссворда начиная с той, на грани которой написан соответствующий номер (в направлении, перпендикулярном к этой грани).

1. *Химический элемент III группы.* 2. *Элементарная частица.* 3. *Советский физик.* 4. 10^{6}. 5. *Внесистемная единица количества теплоты.* 6. *Советский физик.* 7. *Советский физик.* 8. *Процесс интенсивного испарения жидкости.* 9. 10^{9}. 10. *Итальянский ученый XVI—XVII вв.* 11. *Инструмент для проведения линий на плоскости.* 12. *Геометрическое понятие, характеризующее одинаковость формы.* 13. *Геометрическое понятие, означающее наличие общей касательной.* 14. *Оптический прибор.* 15. *Многочлен.* 16. *Итальянский математик XVII в.* 17. *Раздел математики.* 18. *Выдающийся деятель в какой-либо отрасли знания.* 19. *Древнегреческий геометр III—II вв. до н. э.* 20. *Фотографическое изображение.* 21. *Химический элемент VII группы.* 22. *Величины, выраженные числом.* 23. *Явление.* 24. *Немецкий математик XIX века.* 25. *Замечательный отрезок в треугольнике.* 26. *Женщина-математик IV—V вв.* 27. *Химический элемент V группы.*

А. В. Жуков