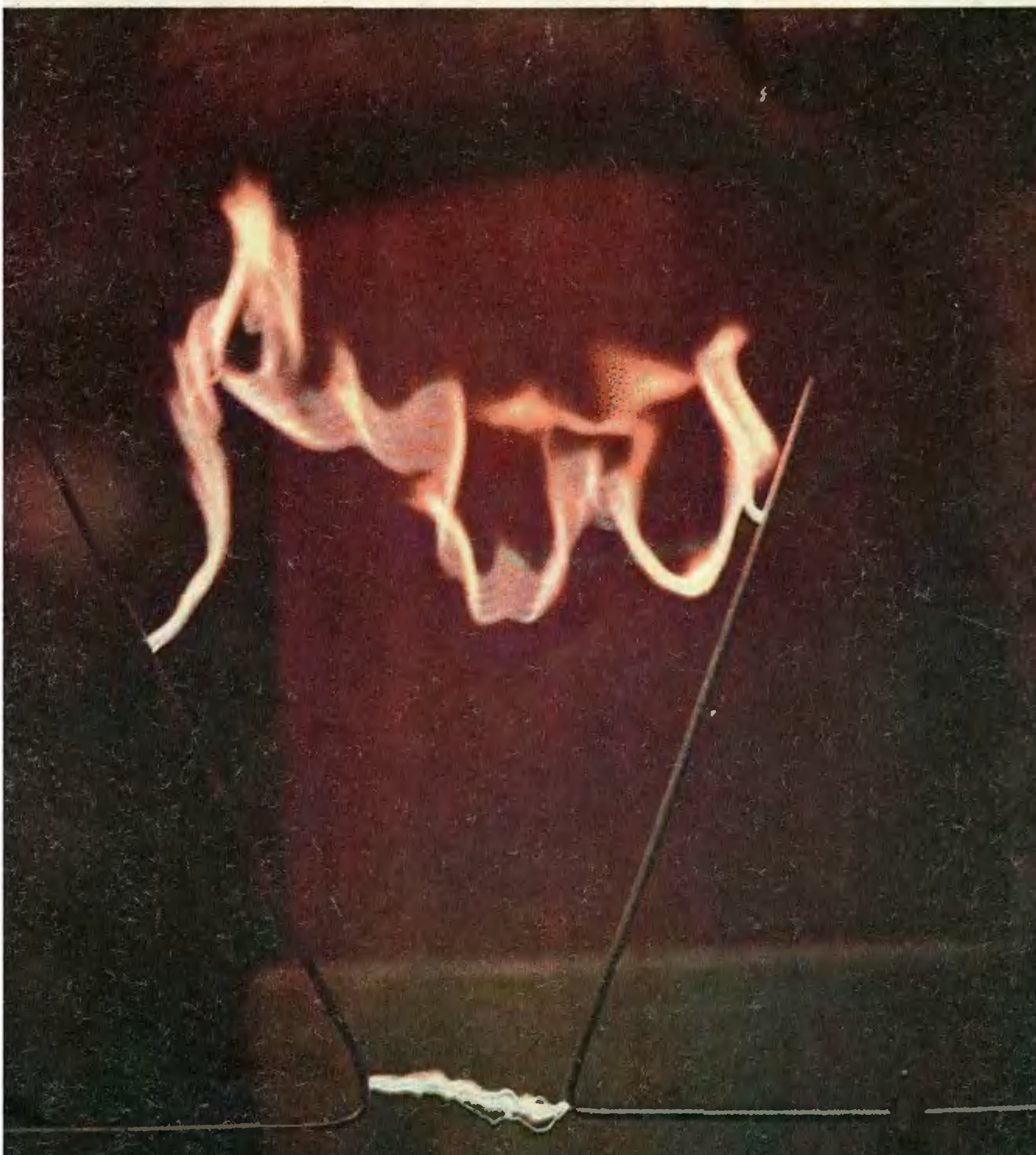
ISSN 0130-2221

Квант

8
1984

Научно-популярный физико-математический журнал
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР



Около 1200 лет назад родился величайший учены средневековья, астроном и математик Мухаммед ибн Муса ал-Хорезми. О значении его трудов говорит хотя бы то, что слово «алгебра» возникло из названия его главного математического труда, а слово «алгоритм» — видоизменение его имени «ал-Хорезми». Подробнее об ал-Хорезми написано внутри номера.

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Квант

8 1984

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ: / **IN THIS ISSUE:**

Недавно в серии «Эврика» издательства «Молодая гвардия» вышла книга крупного физика-теоретика А. Б. Мигдала «Поиски истины», в которой рассказывается об особенностях труда ученого, о психологии научного творчества, о зарождении и развитии важнейших идей физики XX века. Эти проблемы интересуют и многих наших читателей. Поэтому редакция обратилась с просьбой к Аркадию Бенедиктовичу выступить на страницах нашего журнала. Возможно, некоторые места в этой статье покажутся вам трудными, что связано со сложностью обсуждаемых в ней фундаментальных законов физики. Однако редакция надеется, что затронутые в статье вопросы заинтересуют вас и побудят к глубокому изучению.

Как создавалась квантовая теория

Академик А. Б. МИГДАЛ

Как возникает теория? Сначала в результате анализа накопленных экспериментальных и теоретических знаний появляется глубокая и ясная физическая идея, скажем, «движение небесных тел и падение камня на Земле вызваны одной причиной», или «время течет по-разному в неподвижной системе отсчета и в равномерно движущейся». Из первой идеи Ньютон вывел свою теорию тяготения, из второй — Эйнштейн — теорию относительности. С важнейшей физической теорией современности — квантовой теорией — все было совершенно наоборот: ее главные результаты возникали раньше, чем становился понятным их смысл!

На примере создания квантовой теории можно увидеть в действии множество методических особенностей современной теоретической физики. Это было движение в полутьме, наощупь, через смутные догадки, которые часто не подтверждались и уводили в сторону, но зато удачи были поразительны; ученые оказывались провидцами — их утверждения, построенные на шатких основаниях, точнейшим образом подтверждались позже.

Постараемся проследить и почувствовать этот сложный и необычный ход идей.

Все началось с катастрофы

Парадокс под мрачным названием «катастрофа Рэлея—Джинса» достался физикам в наследство от прошлого века. Он возник, когда законы статистической физики применили к равновесному тепловому излучению, которое устанавливается внутри ящика с нагретыми стенками. Это излучение представляет собой стоячие электромагнитные волны.

Статистическая физика установила замечательный закон «равнораспределения энергии»: в тепловом равновесии на каждую «степень свободы»*)

*) Числом степеней свободы называют число независимых координат, определяющих состояние системы. (*Прим. ред.*)

приходится одинаковая энергия. Так, на каждое возможное колебание приходится энергия, равная kT (k — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура). Если возможных колебаний в системе много, то такая система заберет на себя большую энергию. Полная энергия колебательной системы равна NkT, где N — число возможных колебаний.

Посмотрим, сколько стоячих электромагнитных волн может образоваться в ящике. Для того чтобы возникла стоячая волна, от стенки до стенки должно уложиться целое число полуволн (рисунок 1). Чем короче длина волны, тем больше возможностей выполнить это условие. Поэтому число возможных стоячих волн растет с уменьшением длины волны — и, значит, с увеличением частоты. Если на каждое колебание приходится одна и та же энергия, а число колебаний растет с увеличением частоты, то и интенсивность излучения должна расти с частотой. Между тем точными опытами было установлено, что интенсивность излучения при больших частотах резко падает (закон Вина; см. рисунок 2). Но главное — общее число возможных стоячих волн в ящике оказывается бесконечным, и они должны были бы забрать на себя всю энергию стенок, сколько бы тепла мы к ним ни подводили. Это было бы действительно катастрофой — все предметы вокруг должны были бы охлаждаться, их тепло переходило бы в «бездонную бочку излучения».

В 1900 году Макс Планк нашел единственную возможность объяснить описанный парадокс. Он предположил, что частицы, излучающие волны с частотой ν, могут изменять свою энергию не непрерывным образом, а только скачками — дискретными порциями $h\nu$. Коэффициент пропорциональности h вошел в науку под названием «постоянная Планка».

Нагретые стенки ящика можно представить себе как набор частиц, излучающих электромагнитные волны различных частот. Согласно гипотезе Планка, эти излучатели не могут испускать электромагнитные волны с энергиями, заметно бо́льшими, чем средняя тепловая энергия kT, приходящаяся на одну частицу. Излучатели высокой частоты как бы «заморожены» в состоянии с минимальной энергией. Для возбуждения таких излучателей им следует передать энергию $h\nu$, много бо́льшую, чем тепловая энергия. Но согласно законам статистической физики это событие маловероятно, так что возбужденной оказывается лишь малая доля таких излучателей, и интенсивность испущенного ими света мала. Так нашел свое объяснение эмпирический закон Вина.

Планк получил формулу, которая описала результаты экспериментов по распределению интенсивности излучения всех частот при различных температурах стенок; нужно было только правильно подобрать константу h. Численное значение этой величины оказалось равным $h = 6{,}62 \times 10^{-34}$ Дж · с. Понятно, почему скачкообразность в изменении энергии излучателей не замечали в повседневной жизни — порции энергии настолько малы, что ее изменение кажется непрерывным.

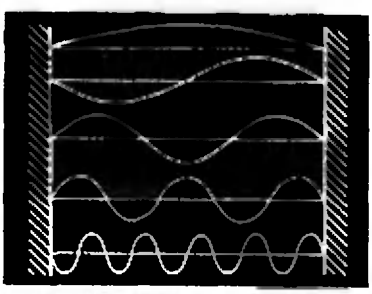


Рис. 1.

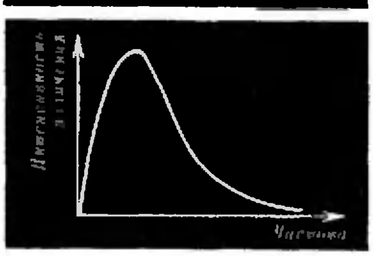


Рис. 2.

Что же такое свет?

Известные всем опыты по интерференции и дифракции доказывают, что свет — это волна. Ньютон, объясняя конечную скорость распространения света, предположил, что светящееся тело испускает частицы — корпускулы,— передающие свет. Но он не смог таким способом объяснить явления интерференции и дифракции, и корпускулярная теория света была надолго забыта.

В 1905 году Альберт Эйнштейн, объясняя явление фотоэффекта — вырывания электронов из молекул газа при облучении его ультрафиолетовым светом*), — заключил, что волна не может создать такой концентрации энергии на одном электроне, чтобы вырвать его с орбиты. Однако свойства фотоэффекта полностью объясняются, если предположить, что свет — это набор частиц — фотонов,— которые, взаимодействуя с электронами, выбрасывают их наружу**).

Эйнштейн показал, что при появлении или исчезновении кванта света возникает или исчезает количество движения; таким образом, фотон имеет импульс p, который связан с длиной волны света соотношением $p = h/\lambda$. Энергия волны заданной частоты может изменяться только порциями $h\nu$, так же как и энергия излучателей в рассуждениях Планка. Таким образом, дискретность распространилась и на электромагнитные волны.

Теория фотоэффекта отчасти подтвердила корпускулярную теорию Ньютона. Так что же такое свет — частица или волна? Объяснить это тогда никто не смог, и противоречие так и осталось чем-то вроде занозы.

Правила квантования

В 1913 году Нильс Бор установил правила, настолько загадочные даже для самого их создателя, что он назвал их «постулатами» — недоказуемыми предположениями.

Бор сделал еще один шаг по той неведомой дороге, которой шли Планк и Эйнштейн,— он распространил дискретность на атом, утверждая, что допустимы не все орбиты электронов, а только некоторые. Согласно существовавшей в классической физике планетарной модели атома, электрон, обращаясь вокруг ядра, движется с центростремительным ускорением и, следовательно, должен излучать электромагнитные волны — ведь по законам классической электродинамики не излучает только заряд, движущийся по прямой с постоянной скоростью. Излучающий же электрон, непрерывно теряя энергию, упал бы на ядро.

Согласно правилам, введенным Бором, электрон может излучать кванты света — фотоны — только при переходе с одной орбиты на другую. Существует орбита с наименьшей возможной энергией, и в таком состоянии электрон живет неограниченно долго — ему некуда переходить. Так была объяснена стабильность атома.

Смысл правил квантования был неясен, но теория Бора описала все главнейшие свойства атомов, например, то, что атомы испускают свет дискретных частот. Бор выразил частоты излучаемого атомом света через заряд ядра, заряд и массу электрона и постоянную Планка.

Еще одна догадка

Событие, которому суждено было объяснить смысл постулатов Бора, произошло в 1923 году. Но сначала оно лишь чувствительно задело больное место — проблему волн-частиц.

Французский физик Луи де Бройль предположил, что электроны на самом деле не частицы, а волны, вернее — и частицы, и волны... Частицы должны описываться некоторым волновым процессом, характеризующимся длиной волны λ, связанной с количеством движения частицы p так же, как длина волны фотона связана с его импульсом.

Через четыре года американские физики Дэвиссон и Джермер и независимо от них англичанин Томсон*) открыли дифракцию электронов на кристаллах (см. рисунок 3). Значит, электрон на самом деле волна!

Так подтвердилось не только удивительное предположение де Бройля, но и в точности его формула для длины волны электрона. История повторилась в обратном порядке: свет сначала изучили как волну, потом как набор частиц, а электрон — наоборот.

Новая механика

В 1926 году Эрвин Шредингер, обобщив гениальную догадку де Бройля на случай, когда электрон движется не в свободном пространстве, а во внешнем поле, например, в кулоновском поле ядра, получил уравнение для функции, описывающей волновые

*) В школьном учебнике 10 класса рассмотрен случай фотоэффекта в металлах. (*Прим. ред.*)

**) При фотоэффекте электрон поглощает фотон, который передает ему свою энергию и импульс. (*Прим. ред.*)

*) Сын знаменитого английского физика Дж. Дж. Томсона, впервые исследовавшего электрон. (*Прим. ред.*)

свойства частиц, которую он назвал волновой функцией.

Если написать это уравнение в свободном от полей пространстве, функция будет описывать волновой процесс с длиной волны де Бройля, то есть волну с постоянной длиной. Во внешнем же поле длина волны не постоянна, она изменяется от точки к точке.

Оказалось, что решение уравнения Шредингера для атома водорода получается в точном согласии с правилами квантования Бора не для всех энергий, а только для определенных дискретных значений, совпадающих с теми, которые следовали из боровских правил. Стационарное — устойчивое — состояние электрона в атоме водорода — допустимая боровская орбита — на языке уравнения Шредингера означает, что получилась стоячая волна, а стоячая волна получается при условии, что в области движения электрона укладывается целое число волн де Бройля.

В этом и состоит смысл правил квантования: стоячие волны могут образовываться только при дискретных значениях энергии электрона в атоме, когда в области движения укладывается одна, две или любое целое число волн (рисунок 4).

Простой пример

Предположим, что частица движется между непроницаемыми стенками, расположенными на расстоянии l друг от друга. У каждой из стенок волновая функция должна обращаться в нуль, то есть переходить в волновую функцию снаружи, которая равна нулю, поскольку за стенки частица не выходит. Поэтому, чтобы получилось стационарное состояние с номером n, на длине l должно уложиться целое число полуволн: $2l/\lambda=n$. Так, в первом состоянии, когда между стенками укладывается половина длины волны, волновая функция равна нулю на стенках и имеет максимум посередине. Стоячую волну можно представить в виде двух волн, бегущих навстречу друг другу. Поэтому средний импульс стоячей волны равен нулю. Абсолютное же значение импульса такое же, как у соответствующей бегущей волны, и связано с ее длиной соотношением де Бройля: $p=h/\lambda=nh/2l$. Найдем энергию $E=p^2/2m$.*) Отсюда легко получить формулу $E=\pi^2\hbar^2n^2/2ml^2$. Так в этом простом случае мы нашли уровни энергии.

Итак, на первом этапе развития квантовой механики была установлена дискретность возможных значений ряда физических величин; найден один из основных масштабов природы — постоянная Планка, разграничивающая область явлений, описывающихся классической физикой, и явления квантовой природы**); выяснено, что частицы выступают как носители и волновых, и корпускулярных свойств; найдено уравнение для волновой функции, описывающей состояние квантовой системы.

Но главный вопрос оставался нерешенным — что такое волновая функция, главный инструмент теории?

В 1905 году Эйнштейн перевернул привычные представления о пространстве и времени, после чего сами собой возникли и были поняты формулы, полученные ранее Лоренцем. Предстояло сделать такой же важный шаг и в квантовой механике. Физика — это не только формулы, а глубокое понимание физических явлений, обогащенное математическим языком.

*) Связь энергии E с импульсом частицы p получается из системы уравнений: $E=mv^2/2$ и $p=mv$. (*Прим. ред.*)

**) Законы квантовой механики переходят в классические в пределе $h\to 0$. (*Прим. ред.*)

Рис. 3.

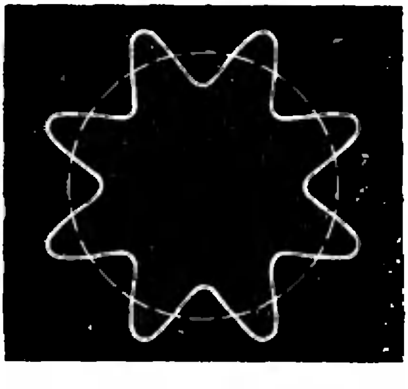


Рис. 4.

Координата или скорость?

В 1927 году один из создателей квантовой механики Вернер Гейзенберг размышлял о понятиях координаты и скорости частицы. Он проделывал мысленные эксперименты и понял, что невозможно одновременно точно измерить координату и скорость — чем точнее измерять координату электрона, тем менее определенной становится его скорость...

Чтобы измерить координату, нужно посмотреть в микроскоп на электрон, освещенный светом короткой волны. При этом координата электрона будет измерена с неопределенностью порядка длины волны использованного света*). Но, взаимодействуя с волной, электрон получит отдачу. Его импульс изменится на величину порядка импульса одного фотона. А этот импульс, как мы уже знаем, равен h/λ. Чем меньше λ, тем лучше будет измерена координата, но зато тем более неопределенным станет импульс.

Итак, неопределенность координаты составляет $\Delta q \sim \lambda$, а неопределенность импульса $\Delta p > h/\lambda$. Умножая выражение для Δp на Δq, получим

$$\Delta q \cdot \Delta p > h.$$

Это и есть соотношение неопределенностей Гейзенберга.

Проделав множество подобных мысленных экспериментов, Гейзенберг пришел к заключению, что для микрочастиц существует принципиальное ограничение, которое природа накладывает на понятия координаты и импульса. Этого ограничения не знала классическая физика, оно не вносит изменений в описание больших тел из-за малости h.

Особенность квантовой механики заключается в том, что свойства микроскопических объектов нельзя изучать, отвлекаясь от способа наблюдения. В зависимости от него электрон проявляет себя то как волна, то как частица. Конечно, есть такие свойства, которые не зависят от способа наблюдения: масса, заряд, спин частицы**)...

*) Частица с размерами, сравнимыми с длиной волны света, из-за дифракции видна в микроскопе размытой. (*Прим. ред.*)

**) Микрочастицы обладают собственным моментом количества движения. Момент количества движения, измеренный в единицах $h/2\pi$, называют спином. (*Прим. ред.*)

Принципиальная неопределенность некоторых величин есть следствие применения классических понятий к описанию неклассических объектов. Но это неизбежно — ведь измерительные приборы должны давать определенные показания, и в этом смысле они обязательно классичны. Не значит ли это, что наше описание объективных свойств микрообъектов неопределенно и двусмысленно? Нет, язык классической физики, на котором говорят средства наблюдения, на котором мы формулируем мысли, позволяет до конца исследовать квантовые свойства микрообъектов.

Квантовая механика помогла, наконец, вытащить занозу, примирить представление об электроне как о частице и о волне. Сказочные мифические существа — кентавры, кони-люди,— в одной ситуации воплощают человеческую мудрость и благожелательность, в другой проявляют животный буйный нрав и невоздержанность; одни из них воспитывают героев, другие вредят им. Частица-волна электрон — то человек, то конь, то кентавр, в зависимости от ситуации, от вопросов, которые задает эксперимент.

Физический смысл волновой функции

Вернемся к опыту. Пусть электроны падают на экран с отверстием. Поставим далеко за экраном фотопластинку. Электрон, попав на нее, «засветит» зерно эмульсии, и его координата определится с точностью до размеров зерна. Пучок электронов в результате дифракции засветит круг с радиусом R, значительно бо́льшим, чем радиус отверстия. Если уменьшать интенсивность пучка электронов так, чтобы на экран падал, скажем, один электрон в минуту, дифракционная картина не изменится, надо только подольше подождать, пока она проявится. Значит, и одному электрону нужно приписать вероятность попадания в то или иное место фотопластинки...

Анализ подобных опытов позволил Максу Борну в 1926 году предположить, что квадрат волновой функции определяет вероятность того или иного значения координаты или импульса электрона в зависимости от типа поставленного опыта.

Что помогло прийти к такому заключению? Вспомним, что теория волновых явлений света — интерференции и дифракции — была разработана задолго до уравнений Максвелла*), до понимания электромагнитной природы света. Предполагалось только, что источник света испускает волны неизвестной природы, а интенсивность света пропорциональна квадрату той величины, которая колеблется. В современном представлении в световой волне колеблются во времени и пространстве электрические и магнитные поля, и интенсивность света пропорциональна их квадрату. Но почти все волновые проявления света объясняются независимо от его природы. Было естественно и для волн, связанных с микрочастицами, считать, что имеется некий волновой процесс, а интенсивность — в нашем случае вероятность — пропорциональна квадрату волновой функции.

Сначала предполагали, что волновым свойствам частицы соответствует реальное физическое поле, подобное электромагнитному в световой волне. Но тогда уже один электрон давал бы в одном акте всю дифракционную картину, а он чернит только одно зерно... Значит, волновая функция частицы не физическое поле и не физическая волна. Это «волна информации». Она представляет собой запись потенциальных возможностей исхода того или иного последующего наблюдения.

Волновая функция — максимально полное допустимое описание состояния частицы. Она заменяет классическое состояние, которое задается координатами и скоростями.

Удивительные свойства волновой функции казались Эйнштейну физически недопустимыми. Спор Эйнштейна с Бором продолжался много лет и способствовал выяснению понятий квантовой механики. Если принять, что волновая функция — волна информации, а не физическое поле, все становится на свое место. Ведь если волновая функция — описание вероятностей, значит, опыт, проделанный в одном месте, может скачком изменить результаты измерений в другом месте. Это скачкообразное изменение вероятности вызвано уточнением, новой информацией. Мы задаем вопрос: «Какова вероятность получить двойку по физике?». Прибавив к этому уточнение, определенное условие, например: «не заглядывая дома в учебник», мы получим скачкообразное изменение вероятности, она подскочит до единицы. Обратное условие: «полностью поняв и выучив урок», снова скачком сведет вероятность к нулю.

Представим себе, что две частицы с суммарным импульсом, равным нулю, разлетелись, и нам нужно найти импульс одной из них в Москве, другой — на Северном полюсе. Вероятность скачком изменится, если мы измерим импульс московской частицы и будем искать импульс другой при условии, что московский нам известен. Вероятность зависит от того, какой вопрос мы поставим, отберем ли мы любые исходы северных опытов или только те, при которых московский импульс имеет заданную величину. Ничего странного и необычного в этом нет.

Квантовая механика не дает однозначного ответа на некоторые вопросы, а только вероятность того или иного результата.

Нарушается ли причинность?

Удивительные успехи небесной механики в XVII—XVIII веках внушили глубокую веру в однозначность предсказаний. Гордясь могуществом своей науки, французский астроном, математик, физик Пьер Лаплас сказал: «Дайте мне координаты и скорости всех частиц, и я предскажу будущее Вселенной!»

Но вот мы узнали, что одновременно точно задать координаты и скорости частиц невозможно! Согласно квантовой механике можно указать только вероятность того или иного значения координат и скоростей.

Наука уже сталкивалась с вероятностными предсказаниями; классическая статистическая физика может ответить на вопрос: какова вероятность найти частицу нагретого газа с такой-то энергией? Но эта вероятность рождена сложностью системы, неточностью определения начального состояния, и за нею стоит строгая однозначность механических законов.

В квантовой механике вероятность подлинная, обусловленная неопределенностью классических понятий. Она су-

*) Уравнения Максвелла описывают свойства электромагнитного поля (*Прим. ред.*)

ществует даже для самой простой системы — для одной частицы. Вероятностный характер законов Вселенной — главное открытие квантовой механики.

Согласно квантовой механике, на некоторые вопросы нельзя однозначно ответить — на взгляд классической физики причинность нарушена! Да, мы не можем задать координаты и скорости частиц, можем только задать в начальный момент волновую функцию и однозначно найти ее в любой более поздний момент.

Мы можем с такой же гордостью, как и Лаплас, воскликнуть: «Дайте мне волновую функцию всех частиц, и я предскажу будущее!»

Итак, в более точном смысле причинность сохраняется; из максимально полно определенного в квантовомеханическом смысле начального состояния однозначно следует единственно возможное конечное состояние.

Квантовая механика — необычайно красивая и внутренне непротиворечивая теория, хорошо согласующаяся с опытом для своего круга явлений.

Применение квантовой механики к электромагнитному полю и к другим физическим полям

Применение квантовой механики к системам, колеблющимся около положения равновесия,— осцилляторам — имело удивительные следствия. Если классический осциллятор — маятник или грузик на пружинке — находится в покое в положении равновесия, квантовый — совершает «нулевые» колебания. Кинетическая и потенциальная энергия этих колебаний порядка $h\nu$. Среднее значение координаты осциллятора равно нулю, но среднее значение квадрата координаты отлично от нуля*)! Энергия квантового осциллятора изменяется порциями $h\nu$ и для состояния с номером n равна $E_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)h\nu$.

Если рассматривать звуковые колебания твердого тела как набор квантовых осцилляторов, получится, что при абсолютном нуле температуры атомы твердого тела не неподвижны — они совершают нулевые колебания. Это в точности подтверждается опытами по рассеянию света твердыми телами. Но и электромагнитные волны в пустоте можно считать набором осцилляторов, и, значит, в вакууме, где нет ни частиц, ни квантов, должны происходить нулевые колебания электромагнитного поля.

Попробуем разобраться, что такое квант света — фотон.

Для этого проделаем опыт. Представим себе, что между параллельными металлическими экранами образовалась стоячая электромагнитная волна перпендикулярно им. Если расстояние между экранами l, между ними может уместиться стоячая волна с максимальной длиной λ такой, что $l=\lambda/2$. Частота волны $\nu=c/\lambda$ связана с возможными значениями энергии волны соотношением $E_n=(n+1/2)h\nu$. В наинизшем состоянии с $n=0$ между экранами нет квантов. В состоянии с $n=1$ появился один квант с длиной волны $\lambda=2l$. При $n=2, 3, \ldots$ есть два, три и так далее квантов с этой длиной волны.

Для следующих стоячих волн (обертонов) с длинами $\lambda=l, l/2, \ldots$ можно повторить то же самое. Для m-й волны $\lambda_m=2l/m$. В этом состоянии также может быть сколько угодно квантов, они определяются степенью возбуждения данного осциллятора, а значок m определяет длину волны, то есть тип осциллятора. Число n_m — номер возбуждения осциллятора — показывает число квантов данного типа.

Кванты принято характеризовать не длиной волны, а величиной, которая называется «волновым вектором». Модуль волнового вектора k просто связан с длиной волны: $k=2\pi/\lambda$. Для каждого k свой осциллятор и свои кванты, число которых равняется номеру возбуждения осциллятора.

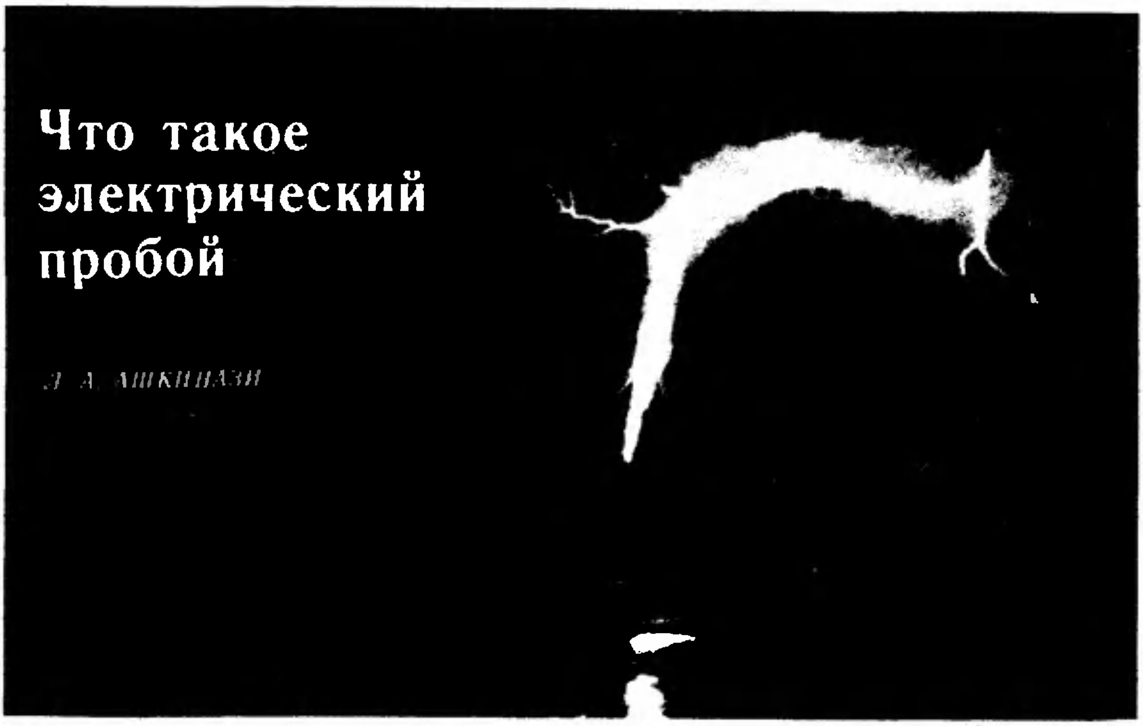
И в бегущей волне происходят периодические колебания. Энергию волны для каждого волнового вектора тоже можно записать как энергию осциллятора, изменяющуюся порциями $h\nu$. Но бегущая волна обладает количеством движения, значит, квант будет иметь импульс. У частицы с массой, равной нулю, импульс равняется энергии, деленной на скорость света: $p=h\nu/c$.

*) См. статью А. Б. Мигдала «Вычисления без вычислений» в «Кванте» № 8 за 1979 год. (*Прим. ред.*)

(*Окончание см. на с. 26*)

Что такое электрический пробой

Л. А. Ашкинази



Почему в линиях электропередачи (ЛЭП) используются высокие напряжения, известно, наверное, всем. Действительно, чем выше напряжение в линии, тем меньше в ней ток (при постоянной передаваемой мощности) и тем меньше тепловые потери. Казалось бы, чем выше напряжение, тем лучше. Однако ЛЭП с рабочим напряжением, скажем, в несколько миллионов вольт не существует, а разработка каждой последующей ЛЭП на большее, чем у предшествующих, напряжение требует больших усилий. По-видимому, есть какой-то эффект, ограничивающий рабочее напряжение ЛЭП.

Оказывается, это тот же самый эффект, который ограничивает «рабочее напряжение» между тучей и землей (или между двумя тучами).

И свет, и звук

Короткий гром — глухой обвал.
Рожденье света и озона,
Далеких молний карнавал.

Н. Майоров

В этих трех строчках уместилась практически вся информация о молнии, хотя автор их был поэтом, а не физиком.

Итак, молния — это кратковременный («короткий») процесс в атмосфере с генерацией звука («гром») и света («рожденье света») и с протеканием химических реакций («и озона»). Во время этого процесса выделяется энергия, во всяком случае в виде света и звука — мы видим свет и слышим звук.

Первый вопрос, который сразу возникает,— откуда берется эта энергия? Ответ очевиден: энергия накапливается в конденсаторе, обкладки которого — это туча и земля, а диэлектрик — воздух между ними. Попытаемся оценить запасенную в этой системе энергию.

Пусть туча имеет размеры 3×3 км, а расстояние между тучей и землей — 1 км. Тогда емкость конденсатора будет около 0,1 мкФ (как получено это значение?). Несмотря на внушительные размеры конденсатора, емкость его весьма скромная — в радиоприемниках есть конденсаторы с емкостью в 1000 раз больше. Правда, энергия заряженного конденсатора зависит еще и от напряжения, а оно между тучей и землей достигает 10^9 В. Таким образом, энергия составляет около $5 \cdot 10^{10}$ Дж (как получена эта величина?), что, например, в 10^9 раз больше энергии заряженного конденсатора фотовспышки (емкость 800 мкФ, напряжение 300 В).

Но для того чтобы эта, даже не очень значительная, энергия электрического поля превратилась в свет, звук или в какую-то другую форму энергии, должно начаться движение зарядов, то есть должен возникнуть электрический ток. Однако в обычных условиях воздух — диэлектрик. Те относительно немногочисленные свободные заряды, которые есть в воздухе в силу каких-то случайных обстоятельств (например, электроны, возникшие из-за ионизации космическими лучами), не могут образовать большого (до 10^5 А, как показывает опыт) тока, протекающего в канале молнии.

Итак, что-то в нашем рассуждении не так.

Куда же бьет молния?

Между катодом и анодом происходит больше явлений, чем это доступно нашему воображению.

Г. Ретер. Электронные лавины в газах

Не следует думать, что Ретер был пессимистом, отнюдь. Просто он понимал ограниченные возможности человеческого разума и необычайную сложность природы.

До сих пор ясны не все детали электрического пробоя в газе (именно так называют процесс прохождения электрического тока через газ). Однако чтобы понять, как протекает процесс в целом, достаточно учитывать сравнительно небольшое число деталей процесса. До полного познания явления электрического пробоя в газе еще очень далеко. Но даже только то, что изучено, позволило создать самые мощные лазеры, самые мощные источники света, самые мощные электронные приборы.

Не все еще ясно и в теории молнии, представителя одного из конкретных видов пробоя в газе — искрового разряда. Но многое уже установлено. Известно, например, что процесс протекает в две стадии — образование канала разряда между тучей и землей и прохождение импульса основного тока.

Обычно туча заряжена отрицательно, а земля положительно. Одиночные электроны, имеющиеся в воздухе, ускоряются электрическим полем и ионизируют нейтральные атомы. При этом возникают новые свободные электроны, которые тоже ионизируют атомы, и так далее. В итоге образуются электронные лавины, движущиеся по направлению от тучи к земле. Два явления наиболее существенны для развития лавин: усиление поля перед головкой лавины и фотоионизация — газ ионизируется испускаемым головкой ультрафиолетовым излучением (рис. 1). Этот процесс в целом называется очень красиво: «ступенчатый лидер». Лидер светится относительно слабо и глазом практически не виден.

Оказывается, ступенчатый лидер распространяется со скоростью порядка 10^7 м/с, но расстояние в 1 км он покрывает не за 0,1 мс, а за... 20 мс! Почему? Почему, пройдя каждые 5 м, он останавливается, «размышляет» 0,1 мс, а затем движется дальше, обычно, изменив направление? Здесь познанное кончается. В физике газового разряда вообще нет заасфальтированных трасс, а тут кончается всякое подобие дорог.

Наконец, лидер добирается до земли, замкнув тучу с землей «накоротко» каналом ионизированного газа. На этом первая стадия процесса заканчивается, и начинается вторая. Теперь по образовавшемуся каналу снизу вверх, то есть от земли к туче, проходит короткий (0,1 мс) и мощный импульс основного тока молнии — его-то мы и видим. Температура газа в канале порядка 10^4 К — вот и происходит «рожденье

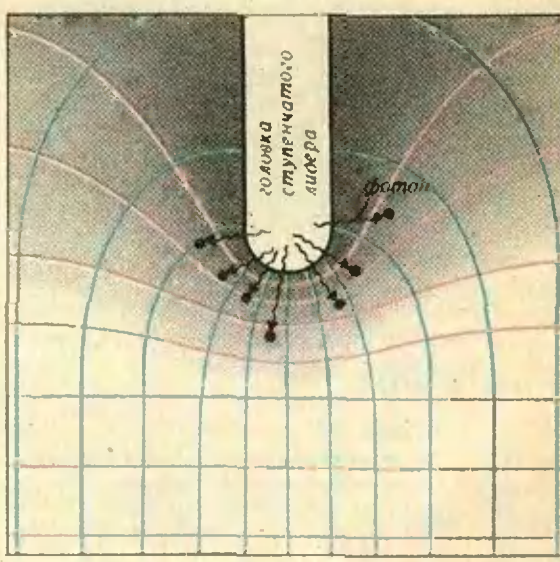


Рис. 1. Для возникновения электронных лавин наиболее существенны два фактора: усиление электрического поля перед головкой лидера (синим цветом показаны линии напряженности поля, красным — эквипотенциальные линии) и фотоионизация (нейтральные атомы ионизируются излучением, испускаемым головкой лидера).

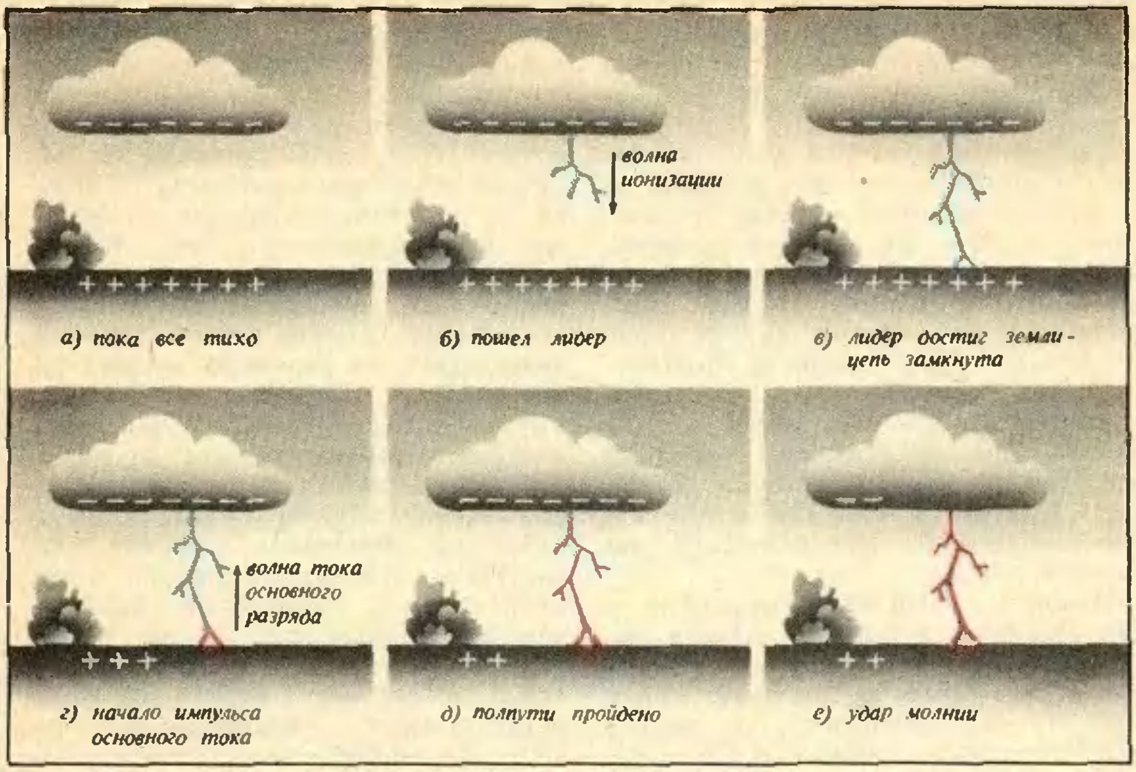


Рис. 2. Две стадии молнии: образование ионизированного канала разряда (а) — в)) и прохождение импульса основного тока (г) — е)).

света и озона». Газ расширяется — мы слышим гром.

Почему-то обычно молнию рисуют бьющей сверху вниз (туча и Зевс-громовержец наверху). Между тем импульс основного тока и свечение начинаются внизу и волной разливаются по каналу, оставленному лидером. Молния, точнее — видимая ее фаза, оказывается, бьет снизу вверх!

Таков вкратце механизм молнии, или пробоя в газе, причем пробоя больших промежутков (рис. 2). При пробое малых промежутков существенными оказываются процессы на электродах.

Неустойчивость и пробой в твердых и жидких диэлектриках

Развитие неустойчивости, то есть катастрофическое нарастание первоначального малого возмущения, является, естественно, процессом нестационарным. От нестационарного процесса мы вправе ожидать, что в конце концов он к чему-то приведет.

Ю. П. Райзер. Основы современной физики газоразрядных процессов

Пробой в твердом теле приводит обычно к пробитому в образце отверстию с оплавленными краями. Именно из-за этого и возникло название «электрический пробой». Пробой чистых жидкостей имеет много общего с пробоем твердых тел (отверстия же при этом, естественно, не остаются).

Основных механизмов пробоя твердых тел и жидкостей три.

Если вещество состоит из ионов (атомы связаны ионной связью), то электрическое поле может эти связи разорвать. При таком механизме электропрочность должна быть тем выше, чем больше энергия связи ионов. И действительно, такая закономерность наблюдается, например для ионных кристаллов (рис. 3). Далее происходит следующее. Во-первых, ион движется по веществу, разрушая химические связи и порождая новые свободные ионы, которые сразу же начинают выполнять свое «черное дело». Во-вторых, все эти ионы отбирают энергию у поля и отдают ее веществу (тормозясь при соударениях). Вещество нагревается, плавится и испаряется, в результате чего происходит еще и пробой в парах. Что там раньше, что позже, разобраться трудно — все эти процессы идут одновременно. А кончаются они, — в зависимости от мощности источника электроэнергии и напряжения пробоя — тихим щелчком или грохотом (если пробой в парах — последняя стадия, то откуда грохот понятно, а если до пробоя в парах дело не дошло?).

Следующий механизм очень похож на предыдущий, но здесь ускоряются, ионизируют атомы, отбирают и выделяют энергию не ионы, а электроны. Ясно, что такой механизм будет иметь место, например, в веществах, состоящих из одинаковых атомов, то есть в чистых элементах. Кончается пробой в этом случае так же, а начинается, естественно, иначе — для начала процесса нужен свободный электрон. Причин, по которым он может оказаться в веществе, много: наличие примесей, приэлектродные явления и т. п.

Наконец, третий механизм пробоя — так называемая электротепловая неустойчивость. Что такое неустойчивость и как она, согласно эпиграфу, развивается? Неустойчивость в физике вообще это то же самое, что и неустойчивость в механике,— малое отклонение от состояния равновесия нарастает (шарик, лежащий на вершине сферы, чуть-чуть отклонившись, не возвращается, а скатывается дальше). В данном случае неустойчивость возникает следующим образом. Сопротивление изолятора хотя и велико, но все же не бесконечно. Какой-то ток через него проходит, и поэтому изолятор нагревается. При нагревании сопротивление изолятора уменьшается (растет число свободных носителей зарядов), ток возрастает, возрастает и выделяющееся количество теплоты. Итак, при увеличении температуры возрастает выделяющееся тепло. Правда при этом возрастает и тепло, уходящее из изолятора в окружающую среду. Начнется ли «лавинный процесс» разогрева или нет, определяется тем, что́ при увеличении температуры растет быстрее — выделяющееся или уходящее тепло. Если быстрее растет тепло выделяющееся, то лавинный процесс начнется. Если же быстрее растет тепло уходящее, то температура будет уменьшаться и равновесие восстановится. Как показывает опыт, при малых напряжениях преобладает вторая ситуация, при больших — первая. Характерное отличие пробоя по этому механизму — значительно большее, чем при первых двух, время развития процесса. Приходит же этот пробой, как и другие, к плавлению, испарению и, если предохранители не отключат раньше источник энергии, к разряду в паре.

И в твердых, и в жидких диэлектриках есть еще несколько механизмов пробоя, связанных с примесями и неоднородностями. Но «нельзя объять необъятное», по крайней мере, в одной статье.

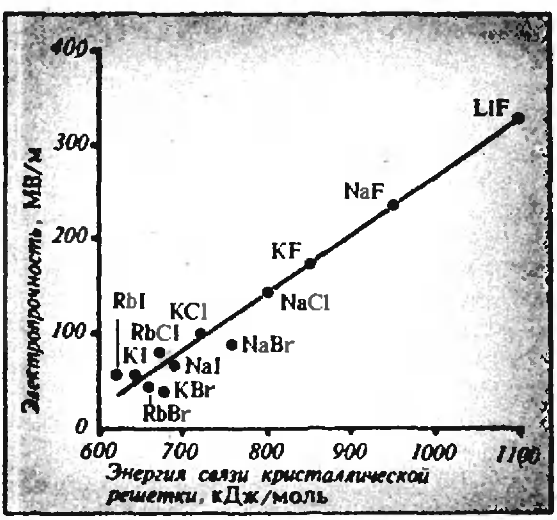


Рис. 3. График зависимости электропрочности щелочногалоидных ионных кристаллов от энергии связи кристаллической решетки.

Самый лучший и самый малоизученный изолятор — вакуум

Теория высоковольтного пробоя вакуума характерна наличием многих гипотез. Это можно объяснить тем, что при проведении исследований отдельные авторы наталкивались на все новые и новые факторы.

Н. В. Черепнин. Сорбционные*) явления в вакуумной технике

Кроме рассмотренных нами твердых, жидких и газообразных диэлектриков в природе есть еще один, причем наилучший. Это — вакуум. Его очевидное отличие от остальных диэлектриков состоит в том, что вакуум не содержит никаких носителей зарядов, даже связанных. Следовательно, источником электронов или ионов, которые потом составят ток пробоя, должны быть электроды. Возможен, например,

*) Сорбция (от латинского sorbeo — поглощаю) — поглощение твердым телом или жидкостью какого-либо вещества из окружающей среды.

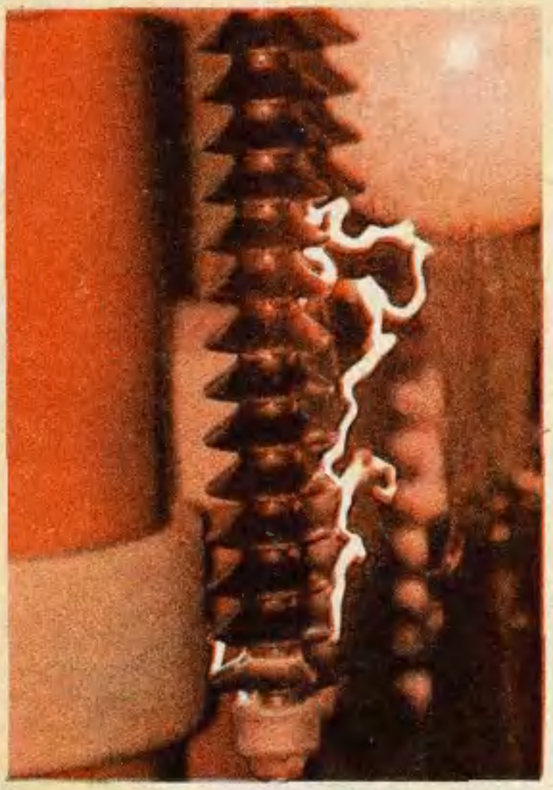


Рис. 4. Поверхностный пробой.

такой процесс: электростатические силы, притягивающие один электрод к другому, отрывают слабо держащуюся на электроде частичку (пыль, заусенец после механической обработки, кристаллик, отделенный микротрещиной). Оторванная частичка пересекает зазор и при ударе о противоположный электрод испаряется. В парах материала частички и происходит пробой.

И снова — ЛЭП

Видимо, пришло время стимуляции условий для развития более тщательных и фундаментальных исследований поведения изоляторов.

Дж. Фаррелл. Электрический пробой в вакууме

Наш рассказ начался с высоковольтных ЛЭП. Вернемся к ним и обратим наше внимание на изоляторы, с помощью которых подвешены провода к опорам. Эти изоляторы — вы, конечно, помните, как они выглядят,— состоят из отдельных «тарелок» (рис. 4).

Очевидно, что прямую палку сделать проще, чем довольно хитрой формы диск. Зачем же изоляторам придают такую причудливую форму? Что меняется, если прямую палку заменить ребристой? Расстояние между электродами по объему диэлектрика, конечно, не изменится, но зато увеличится расстояние по поверхности диэлектрика, то есть по границе между изолятором и воздухом. По-видимому, существует какой-то особый вид пробоя, связанный с поверхностью твердого тела. Практически именно этот вид пробоя наблюдается в опыте с керамическим кубиком, к противоположным граням которого приложена разность потенциалов. В этом случае пути между электродами внутри диэлектрика, по воздуху и по поверхности совпадают, а соответствующие напряжения пробоя относятся примерно как 10:3:1. В этом есть нечто загадочное. Казалось бы, поверхность — понятие чисто геометрическое. Почему же напряжение пробоя по поверхности меньше остальных? Разгадка в том, что на самом деле поверхность — понятие не только геометрическое.

После поверхностного пробоя на диэлектрике, как правило, повреждения отсутствуют. Значит, пробой происходит все-таки в газе, окружающем образец. Но почему тогда канал пробоя «стелется» по образцу? Может быть, газ в непосредственной близости к образцу как-то отличается от газа вдали? Но к этому может привести только выделение газа из образца. Действительно, на поверхности твердого тела всегда имеется слой сорбированного газа и влаги. Чтобы проверить, не происходит ли «поверхностный пробой» в слое более плотного газа у поверхности образца, можно провести такой опыт. Поместим образец в вакуум и нагреем. При нагревании сорбированные на поверхности газ и влага удаляются, а новые не сорбируются, так как образец находится в вакууме. В таких условиях напряжение поверхностного пробоя становится значительно выше. Следовательно, поверхностный пробой — это, по существу, пробой в газе (маленькая молния). Однако этот процесс изучен еще плохо, о чем свидетельствует эпиграф к разделу.

Пять сетов

Доктор физико-математических наук
Л. Е. САДОВСКИЙ,
Кандидат физико-математических наук
А. Л. САДОВСКИЙ,
О. Л. САДОВСКАЯ

Одна из самых популярных спортивных игр, в частности, среди ученых — большой теннис. В этой статье строится математическая модель игры в теннис, позволяющая оценивать шансы выигрыша каждой из сторон. Однако для понимания статьи не требуется ни разряда по теннису, ни специальных знаний по математике.

Немного о теннисе

Сто десять лет тому назад английский майор в отставке У. Уингфилд запатентовал изобретенную им игру, названную *теннисом*. Однако корни тенниса уходят в далекое прошлое — во французское средневековье и даже во времена древнего Египта. Ныне в теннис играет 120 миллионов человек в 193 странах мира (заметим, что в футбол играет лишь 40 миллионов) — это один из самых полезных, увлекательных, рентабельных видов спорта. По темпам развития, росту популярности он уже ряд лет опережает все иные виды спорта. Теннис, являясь незаменимым видом спорта для людей, усиленно занимающихся умственной работой (особенно математиков, физиков, шахматистов), способен доставлять не только физическое, но и огромное интеллектуальное удовлетворение. Недаром говорят, что в теннис играют руками, а выигрывают головой. По словам одного известного теннисиста, для игры высокого класса необходимы три составляющие: выносливость стайера, быстрота спринтера и стремительное мышление шахматиста, свободно играющего в глубоком цейтноте.

Правила игры

Местом для игры в теннис служит ровная площадка (корт) определенных размеров (рис. 1) с нанесенными на ней линиями и разделенная пополам сеткой.*)

Мяч вводит в игру один из двух**) соперников — этот удар называется *подачей*. Подают по диагонали: стоя на первой позиции подачи — в первое поле подачи противника, стоя на второй — во второе. Подача производится поочередно с каждой из позиций. Мяч, введенный в игру ударом ракетки, должен перелететь через сетку и удариться о площадку в пределах соответствующего поля подачи противника (см. рис. 1). Если первая подача в данное поле была неправильной, игрок должен повторно подать в то же поле. После второй неправильной подачи очко считается для подающего проигранным.

Поданный мяч должен быть отражен ударом ракетки принимающего после первого, но до второго приземления мяча. После приема подачи (во время розыгрыша очка) мяч разрешается отражать не только между первым и вторым приземлением, но и «с лета» (до приземления). Розыгрыш очка состоит в том, что каждый из противников поочередно отражает направленный к нему мяч, не позволяя ему приземляться на своей стороне более одного раза. Мяч находится в игре пока какой-либо из противников окажется не в состоянии ударить мяч до второго приземления или пошлет его в сетку или за пределы площадки; он тогда проиграл этот мяч.

Теннисная *встреча* подразбивается на *сеты* (партии), сеты на *геймы* (игры), геймы формируются при розыгрыше отдельных *мячей* (очков). В пределах одного гейма игра ведется до выигрыша одной из сторон не менее четырех мячей (очков) при условии, что эта сторона получила перевес не менее чем на два мяча.

Счет очков в гейме имеет особенности, сохранившиеся с тех времен, когда игра велась на «интерес». Во Франции ценой игры являлась монета в 60 су: она разменивалась на четыре по 15 су. Эти последние, по-видимому, составляли цену четырех ударов: 15, 30, 45, 60. Правда, в XX веке судьи стали лаконичнее, выкрикивая «сорок» вместо «сорок пять».

Итак, при выигрыше какой-либо стороной первого в гейме очка, ей засчитывается 15:0, при выигрыше той же стороной второго очка добавляется еще 15 и счет становится 30:0 в ее пользу. При выигрыше третьего очка счет становится 40:0, выигрыш четвертого очка («игра», как говорят судьи) приносит завершение гейма в пользу этой стороны.

Если одна из сторон после выигрыша первого очка второе очко проиграла, то 15 засчитывается противнику (счет становится 15:15) и т. п. Следовательно, счет (а он ведется всегда, начиная с очков подающего) в гейме может быть только следующий: 15:0, 30:0, 40:0, 0:15, 0:30, 0:40, 15:15, 30:15, 40:15, 15:30, 30:30, 40:30, 30:40, «ровно», «больше», «меньше»; выиграв очко сразу после счета 40:0, 40:15, 40:30, подающий выигрывает игру, а принимающий — после счета 0:40, 15:40, 30:40.

Счет «ровно» имеет место при равенстве очков у противников, начиная с шестого разыгранного очка; «больше» («меньше») — начиная с седьмого

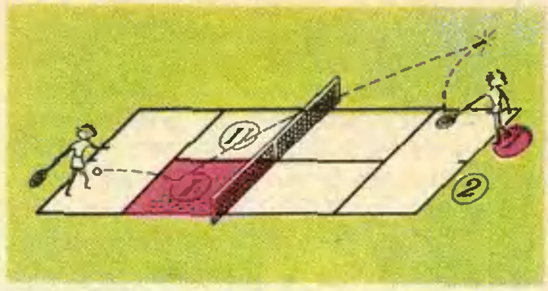


Рис. 1.

очка, если подающий выиграл (проиграл) очко после счета «ровно»; «игра» подающего, если подающий выиграл непосредственно следующий за счетом «больше»; «игра» принимающего, если при счете «меньше» подающий проиграл очередное очко. Возможную эволюцию счета в гейме можно проследить по рисунку 2.

По завершении первого гейма начинается розыгрыш второго гейма, при котором подача переходит к противоположной стороне и т. д. до завершения сета (партии).

Счет геймов в сете напоминает счет очков в волейболе или пинг-понге, но не до 15 и 21, а до 6 (с преимуществом в 2 очка). Сет заканчивается, таким образом, когда счет геймов становится равным одному из следующих: 6:0, 6:1, 6:2, 6:3, 6:4, 7:5, 8:6, 9:7 и т. д.

После первого сета разыгрывается второй сет и т. д. пока одна из сторон не выиграет *встречи* — двух (из трех) или трех (из пяти) сетов, в зависимости от условий соревнований. При выигрыше одной из сторон подряд двух (трех) сетов ей присуждается победа и остальные сеты не играются. Следовательно, счет выигранной встречи может быть 2:0, 2:1 (соответственно 3:0, 3:1, 3:2).

Кто побеждает?

Итак, читатель, мы ознакомились с основными правилами игры в теннис *) в объеме, достаточном для дальнейшего. Теперь мы смогли бы начать играть: Вы (читатель) и я (автор). Если я играю значительно сильнее Вас, то мое преимущество выявится быстро — в первом же сете, затем во втором. Если же разница в силе не столь велика, то счет в каждом гейме и сете будет неустойчивым. Именно так обстоит дело при встречах игроков, входящих в мировую элиту, например, на турнирах серии «Гранд при» или неофициальном первенстве мира (профессионалов и любителей) в Уимблдоне (Англия). Все сильнейшие игроки мира классифицированы по силе игры. Каждый из ведущих игроков имеет свои достоинства (при почти полном отсутствии слабых

*) Игра в теннис впервые в русской литературе описана Л. Н. Толстым в романе «Анна Каренина».

**) Мы не останавливаемся на так называемой «парной игре», в которую играют двое на двое.

*) Для более детального знакомства с особенностями игры отсылаем читателя к брошюре *Теннис. Правила соревнований* (М.: «Физкультура и спорт», 1979) и к специальной литературе.

мест) и встречи между ними проходят, так сказать, «на равных», а исход зависит обычно от дополнительных обстоятельств: психологической подготовки, самочувствия, эмоционального настроя, покрытия корта (грунт, трава, пластик), погоды и т. п.

Так кто все-таки выигрывает? Настоящий спортсмен, проиграв, скажет: победил сильнейший. Можно услышать, однако, фразы вроде «он выиграл у меня случайно» или «ему все время везло». Какова же в действительности доля мастерства и доля случая при выявлении победителя при игре в теннис?

Попытаемся построить *математическую модель* игры в теннис и с ее помощью разобраться в поставленном вопросе.

Основные предпосылки модели

Элемент случайности в теннисе, бесспорно, присутствует, и наша модель должна это учитывать. Выигрыш мяча нельзя предсказать заранее однозначно, однако можно объективно оценить «шансы на выигрыш» каждого из противников. Эта оценка шансов — число — называется *вероятностью*, и поэтому модели, подобные нашей математики называют *вероятностными* (или *статистическими*) моделями.

Но не пугайся, читатель! Для понимания нашей простой модели не потребуется глубоких знаний по теории вероятностей. Тот небольшой объем понятий из этой науки, который будет нужен, мы разъясним по ходу дела. А читателям, захотевшим вникнуть глубже в эту теорию, мы рекомендуем обратиться к выпуску 23 библиотечки «Квант» (А. Н. Колмогоров, И. Г. Журбенко, А. В. Прохоров. *Введение в теорию вероятностей,* М.: Наука, 1982).

Итак, в нашей модели каждый отдельный розыгрыш мяча является *случайным испытанием* с двумя возможными исходами — выигрышами автора (A) и выигрышем читателя ($Ч$). Каждому исходу приписывается его *вероятность* — числа $\mathbf{P}(A)$ и $\mathbf{P}(Ч)$ такие, что

$$0<\mathbf{P}(A)<1,\ 0<\mathbf{P}(Ч)<1,\quad \mathbf{P}(A)+\mathbf{P}(Ч)=1.$$

Что означает, скажем, число $\mathbf{P}(A)$? Оно выражает долю мячей (отнесенную к единице), которую автор в среднем выигрывает у читателя. Если автор в среднем выигрывает у читателя 60 мячей из 100, то вероятность его выигрыша, $\mathbf{P}(A)$, равна 0,6. (Мы считаем, что автор, опытный перворазрядник, играет несколько лучше читателя. В нашем случае, разумеется, $\mathbf{P}(Ч)=0{,}4$ и выполняются написанные выше неравенства и равенство.)

Мы будем предполагать далее, что *вероятность* $\mathbf{P}(A)=0{,}6$ (*а значит, и* $\mathbf{P}(Ч)=0{,}4$) одинакова для всех розыгрышей мяча в течение всей встречи. Исходя из этой предпосылки, мы хотим выяснить, каковы шансы (вероятность) выигрыша автора сначала гейма, затем сета и наконец — всей встречи.

Обсуждение адекватности модели

Разумеется, всякая математическая модель является лишь схемой, идеализацией реального процесса или явления. Упрощая реальность, мы пренебрегаем определенными ее сторонами. Так, считая вероятность $\mathbf{P}(A)$ неизменной в течение встречи, мы пренебрегаем, в частности, *физической подготовкой* противников (в конце встречи автор, наверное, устанет больше своего более молодого соперника и станет чаще ошибаться) и *психологическими факторами* (проиграв очко, особенно два, автор обычно играет внимательнее и злее — его шансы на выигрыш очередного очка повышаются). У нашей модели есть и более серьезный недостаток, который заметит любой опытный теннисист, — она не учитывает *преимущество подающего*, особенно ощутимое на быстром корте (из травы, дерева или скользского пластика).

На самом деле все названные факторы (и некоторые другие) можно включить в вероятностную модель игры в теннис. Мы не делаем это здесь — это существенно осложнило бы схему и технику счета, в то время как наша упрощенная модель уже позволяет прийти к интересным выводам, подчас неожиданным, но подтвержденным практикой.

Кто выиграет гейм?

Наша ближайшая цель — посчитать вероятность того, что автор выиграет гейм у читателя. На рисунке 2 показано, как последовательно может изменяться счет в гейме. При этом запись счета всегда начинается с очков подающего; для определенности будем считать, что подает автор. Для кратности обозначим $p=\mathbf{P}(A)$, $q=\mathbf{P}(Ч)$. Напомним, что p и q — вероятности выигрыша отдельного очка (мяча) автором и читателем — в течение гейма не меняются; мы приняли $p=0{,}6$, $q=0{,}4$.

По условию, вероятность перехода в состоянии 15:0 (то есть вероятность возникновения счета 15:0), которую мы обозначим $\mathbf{P}(15{:}0)$, равна p. Соответственно $\mathbf{P}(0{:}15)=q$.

Найдем **P**(30:0) — вероятность выигрыша автором первых двух мячей подряд. Очевидно

$$\mathbf{P}(30:0)=\mathbf{P}(15:0)\cdot p= =p^2=0{,}36.$$

Но так ли это очевидно? Почему мы перемножили вероятности? На самом деле мы здесь пользуемся «теоремой умножения вероятностей последовательных независимых событий» (о ней можно прочитать в цитированной выше книге А. Н. Колмогорова и др.). Постараемся все же пояснить этот подсчет на языке средней частоты выигрыша. Если автор постоянно выигрывает у читателя в среднем 60 мячей из каждых 100 мячей (то есть в среднем 3/5 мячей), то из 60 мячей (разыгранных непосредственно после выигрыша первого мяча) автор тоже выиграет в среднем 3/5, то есть $60\times(3/5)=36$ раз из 100 (в среднем) автор будет выигрывать два первых мяча подряд.

Аналогично,

$$\mathbf{P}(0:30)=\mathbf{P}(0:15)\cdot q= =q^2=0{,}16$$

— у читателя мало шансов выиграть первые два мяча подряд!

Сосчитаем теперь **P**(15:15). Имеем (подумайте, почему)

$$\mathbf{P}(15:15)=\mathbf{P}(15:0)\cdot q+ +\mathbf{P}(0:15)\cdot p=2pq=0{,}48$$

— счет «по пятнадцати» после первых двух мячей будет возникать почти так же часто, как остальные два счета (30:0 и 0:30) вместе взятые.

Дальнейший подсчет производится совершенно аналогично. Двигаясь по рисунку 2 вниз, читатель может найти вероятность всех состояний (то есть возможных счетов) и заполнить клеточки, оставленные пустыми. Нас же интересует левый столбик («игра автора»). В нем A_1 обозначает выигрыш автора сразу после счета 40:0, A_2 — сразу после счета 40:15, A_3 — сразу после 40:30.

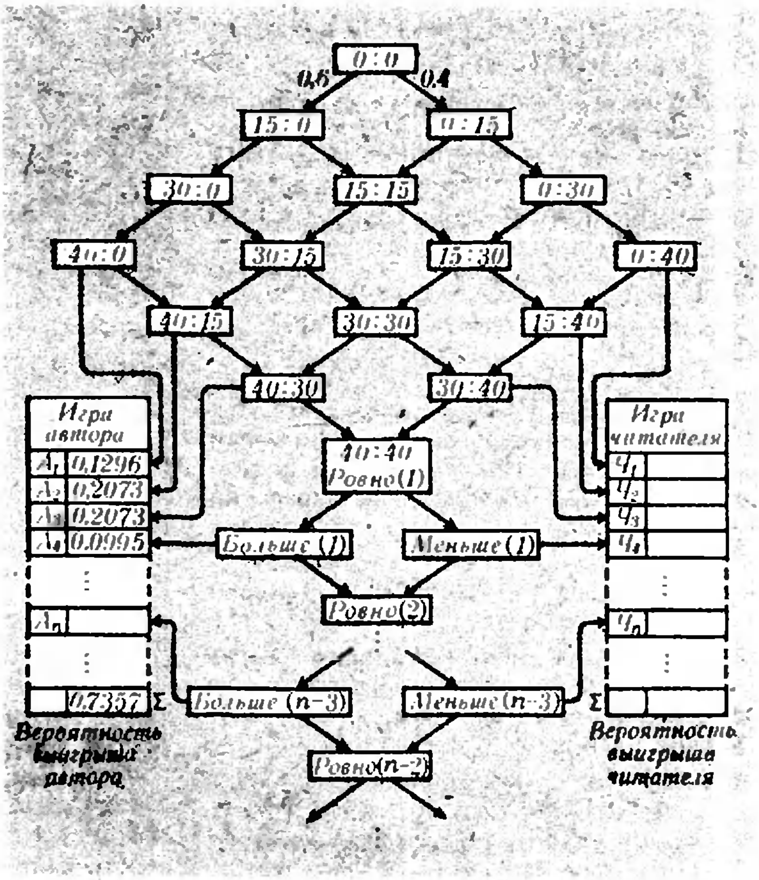
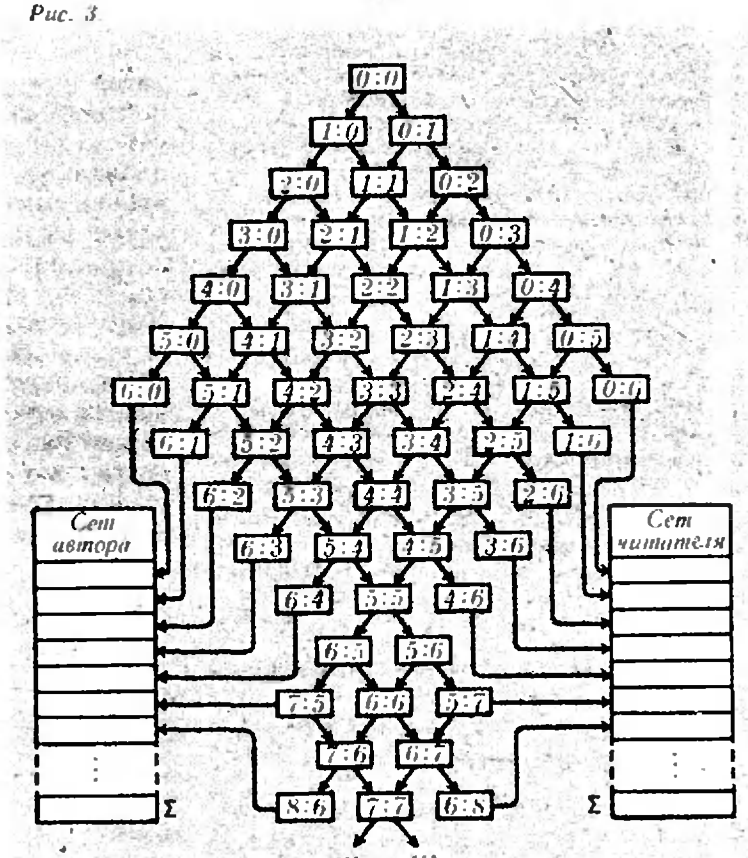


Рис. 2.

Рис. 3



Ясно, что $\mathbf{P}(40:0)=p^3=0{,}216$ и поэтому

$$\mathbf{P}(A_1)=\mathbf{P}(40:0)\cdot p=p^4=0{,}1296,$$

автор выигрывает гейм «в сухую» довольно редко.

Легко подсчитать, что $\mathbf{P}(40:15)=4p^3q\approx 0{,}3456$, $\mathbf{P}(30:30)=4p^2q^2\approx 0{,}2304$ и $\mathbf{P}(40:30)=10p^3q^2\approx 0{,}3970$, откуда находим

$$\mathbf{P}(A_2)=P(40:15)\cdot p=4p^4q\approx 0{,}20736,$$
$$\mathbf{P}(A_3)=P(40:30)\cdot p=10p^4q^2\approx 0{,}20736.$$

Далее нетрудно видеть, что числа $\mathbf{P}(A_3)$, $\mathbf{P}(A_4)$, $\mathbf{P}(A_5)$, ... образуют геометрическую прогрессию с начальным членом $\mathbf{P}(A_3)=10p^4q^2\approx 0{,}20736$ и знаменателем $2pq=0{,}48<1$. По известной формуле находим сумму прогрессии

$$\mathbf{P}(A_3)+\mathbf{P}(A_4)+\ldots=\frac{10p^4q^2}{1-2pq}\approx 0{,}3988.$$

Прибавляя к ней начальные числа $\mathbf{P}(A_1)+\mathbf{P}(A_2)$, находим вероятность выигрыша гейма автором

$$\mathbf{P}(\text{гейм автора})=\mathbf{P}(A_1)+\mathbf{P}(A_2)+\ldots=$$
$$=p^4+4p^4q+\frac{10p^4q^2}{1-2pq}\approx 0{,}7357.$$

Таким образом, автор выигрывает у читателя в среднем около 74 геймов из 100, а читателю достается лишь 26 из 100.

Схемы, подобные той, что изображена на рисунке 2, называются *цепями Маркова*, по имени выдающегося русского математика А. А. Маркова (1856—1922). Цепь Маркова состоит из конечного или бесконечного числа *состояний* (у нас состояние — это счет в гейме), соединенных *переходами* (стрелками), на которых указываются *переходные вероятности* (у нас — числа p и q). Такие цепи описывают *случайные процессы* при условии, что переходные вероятности не зависят от предыстории процесса.

Задачи

1. При игре в пинг-понг игрок А выигрывает очко у игрока Б с вероятностью p; пусть $q=1-p$ (вероятность выигрыша Б). Тогда вероятности возникновения того или иного счета в начале игры следующие:

$$1:0(p);\ 0:1(q),$$
$$2:0(p^2);\ 1:1(2pq);\ 0:2(q^2).$$

а) Продолжите эту схему.

б) Пользуясь ей, сосчитайте вероятность выигрыша партии игроком А (партия играется до выигрыша им не менее 21 очка, но с преимуществом в 2 очка).

2. Исследуйте аналогичную модель для игры в волейбол.

Кто выиграет сет?

Теперь, по аналогичной схеме, пользуясь рисунком 3 вместо рисунка 2, читатель может самостоятельно сосчи-

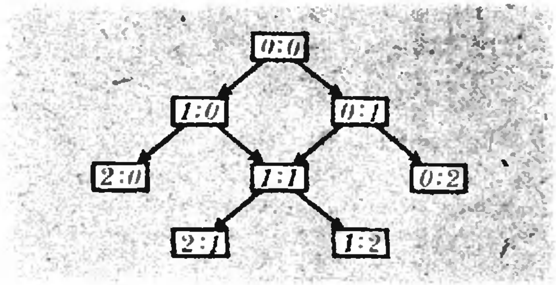


Рис. 4.

тать вероятность выигрыша сета (партии) автором (или читателем). На рисунке 3 в прямоугольничках ставится счет геймов в сете («состояния»); вероятность выигрыша гейма автором равна $p'=0{,}736$, читателем — $q'=0{,}264$ (p' и q' — это «переходные вероятности» для новой «цепи Маркова»; как и p, q в предыдущей цепи, они не только не зависят от предыстории, они просто постоянны). Вы должны получить

$\mathbf{P}(\text{сет автора})\approx 0{,}966$
$\mathbf{P}(\text{сет читателя})\approx 0{,}034$

Кто выиграет встречу?

Как видно, вероятность выигрыша сета автором близка к единице. Это, в общем, естественно, если учесть, что автор выигрывает отдельный мяч с вероятностью в полтора раза большей, чем читатель. Если же продвинуться дальше, то подсчет показывает (проверьте сами), что матч из трех сетов автор выиграет с вероятностью 0,996, а из пяти с вероятностью 0,9996, то есть практически — наверняка. Ясно поэтому, что более трех сетов играть в этом случае нецелесообразно.

Но допустим теперь, что класс игроков практически одинаков, например, вероятность выигрыша мяча автором составляет 0,51, а читателя — 0,49. Иными словами, из ста разыгранных мячей читатель выигрывает в среднем

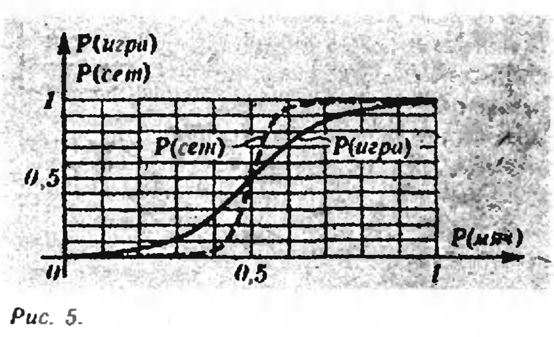


Рис. 5.

лишь на два меньше, чем автор. В этом случае можно найти (подсчитайте сами), что вероятность выигрыша сета автором составит 0,573, а читателем 0,427. Таким образом, при разнице вероятностей выигрыша мяча в 0,02 разница в вероятностях выигрыша сета возрастает в 8 раз. Тем не менее при розыгрыше одного сета преимущественно сильной стороны сказывается не очень убедительно: из десяти встреч, в среднем, автор выиграет шесть раз, читатель — четыре.

Вероятность выигрыша каждой стороной по одному сету велика — 0,488 (подсчитайте ее, используя схему на рисунке 4).

Поэтому для «выяснения отношений» в матче следует играть не менее трех сетов. Однако и в этом случае картина останется не очень убедительной: счет 2:1 и 2:0 в пользу автора может возникнуть соответственно с вероятностями 0,255 или 0,328. Следовательно, в пользу автора матч может завершиться с вероятностью 0,583.

В пятисетовом матче вероятность выигрыша автором составит уже 0,625, а читателем — 0,375.

При других исходных p и q вероятности выигрыша гейма и сета считается также. Их можно свести в график (рис. 5).

Долго ли продлится встреча?

Естественно, что чем продолжительнее встреча, тем четче будет проявляться преимущество одной из сторон. Однако физические возможности игроков (даже экстра-класса) все же ограничены, не говоря уже о приемлемых масштабов времени для зрителя. Как показывает опыт, пятисетовые (и даже трехсетовые) встречи зачастую длятся до трех-четырех часов. Вот почему в последние годы (начиная с 1970 года) введено новое правило tie break («тайбрейк» — нарушение равновесия), согласно которому розыгрыш сета (на некоторых встречах) не продолжается неограниченно (до достижения одной из сторон преимущества минимум в два гейма). При счете геймов 6:6 играется решающий *гейм — тайбрейк,* в котором, однако, счет ведется иначе, чем при розыгрыше обычного гейма: для победы в нем требуется выиграть не менее семи мячей с преимуществом не менее, чем в два. Хотя теоретически и в этом случае спор сторон может продолжаться сколь угодно долго, но в действительности редко затягивается.

Задача для исследования. Сосчитайте среднюю продолжительность обычного гейма и гейма с тайбрейком при вероятности выигрыша мяча одним из противников равным а) 0,5; б) 0,52; в) 0,6. Исходя из этого, найдите среднюю продолжительность сета с тайбрейком и без во всех трех случаях. Пересчитайте среднюю продолжительность геймов и сетов при встрече равных партнеров на быстрой площадке, считая, что подача дает преимущество подающему*) (скажем, $p=0,6$).

Указания. Примите продолжительность розыгрыша одного очка (мяча) равной 30 сек. Средняя продолжительность при игре без тайбрейка вычисляется по формуле

$$S=\sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{P}(A_i)T(i),$$

где $\mathbf{P}(A_i)$ — вероятность выигрыша гейма (соответственно сета) на i-м мяче (соответственно i-м гейме), а $T(i)$ означает время розыгрыша i мячей (соответственно i геймов), то есть $T(i)=i\cdot 30$ сек или $T(i)=i\cdot$ (средняя длительность гейма).

Пять сетов, три сета, ...

Теперь можно понять, что сложившаяся традиция, согласно которой на крупнейших теннисных соревнованиях с участием лучших игроков мира финальные, полуфинальные (а иногда и предшествующие им) матчи проводятся из пяти (реже из трех) сетов, оправдана не только экспериментально, но имеет определенные теоретические основания. В первом и ближайших к нему кругах соревнований фавориты встречаются с уступающими им по классу противниками в трехсетовых матчах. По мере продвижения к финалу напряженность встреч растет, класс игроков выравнивается, переходят к пятисетовым матчам.

До 1976 года в системе «Гранд при» количество турниров, проводимых из трех и из пяти партий, было примерно равным (34 и 38 соответственно). К 1982 году из 93 турниров 62 проводились трехсетовыми встречами. В 1976 году в полуфинальном матче на Кубок Дэвиса (неофициальное командное первенство мира) Александр Метревели (СССР) встретился со вторым игроком мировой классификации 1975 года Мануэлем Оразтесом и выиграл изнурительный четырехчасовой матч (6:4, 6:2, 2:6, 4:6, 6:4) — в пяти сетах!

*) Для простоты можно считать, что при тайбрейке противники подают поочередно.

Дела и проделки феи Морганы

Г. И. ГРИНЁВА,
доктор физико-математических наук
Г. В. РОЗЕНБЕРГ

Фея забавляется

Есть у бедуинов старинная легенда. Живет в пустыне коварная Фата-Моргана. Подстерегая путников, изнемогающих от усталости и жажды, она вдруг разворачивает перед их взором пышный оазис с цветущими деревьями, озером, постройками и людьми. Но напрасно устремляется путник к заветной цели. Оазис, до которого, казалось, рукой подать, отступает все дальше и дальше, завлекая в сторону от пути, в глубь гибельной бесплодной пустыни...

Злые чары безжалостной феи отнюдь не игра воображения. В жарком воздухе порой действительно возникают вполне реальные изображения предметов, иногда удаленных от наблюдателя на сотни километров. Подобное явление — его называют миражем — вовсе не редкость. Недавно жители Евпатории несколько дней подряд любовались висевшим в воздухе Константинополем. Обитатели южного побережья Англии порой видят, будто бы совсем рядом, города и рыбачьи поселки, находящиеся на другом, французском побережье Ла-Манша. Их изображения располагаются так близко, что легко различимы не только постройки, но и люди.

Не раз обитатели степных и приморских краев сообщали, что им доводилось видеть церкви и даже целые поселения, парящие в воздухе или как бы просвечивающие сквозь воду или землю. Нередко морякам доводится видеть корабли, плывущие высоко в небе, иногда днищем вверх. Такие миражи и породили в свое время легенду о «Летучем Голландце».

Шутит фея Моргана и с летчиками. Порой они обнаруживают, что земля под ними становится будто бы прозрачной. И под самолетом, и над ним раскидывается звездное небо, по которому плывут две луны — одна над головой, другая под ногами пилота...

А это произошло совсем недавно недалеко от Москвы. Ранним утром три девушки подходили к опушке леса. Одна из них шла в стороне, чуть поотстав. И вдруг две других увидели перед собой ее двойника. Нет, это был не смутный призрак, а точный двойник подруги — то же платье с цветочками, те же хорошо знакомые и отчетливо различимые черты лица, те же веснушки. Не обращая никакого внимания на перепуганных девушек, двойник шел им навстречу, шевеля губами, и вдруг бесследно исчез. А сама виновница переполоха, ни о чем не подозревая, продолжала весело напевать за их спиной.

Разумеется, то было не приведение. Девушки видели мираж — вполне реальное изображение своей подруги, возникшее в воздухе, подобно тому, как оно возникает в обыкновенном зеркале — впрочем, не совсем обыкновенном, но об этом немного позже.

Далеко не всегда миражи бывают величественны и отчетливы. Порой они только искажают очертания отдаленных предметов, например, гор и побережий. Обычно же, встречаясь повсеместно и повседневно, они едва приметны и ускользают от нашего внимания, особенно если нет навыка в их обнаружении. Вглядитесь в жаркий полдень в линию морского или степного горизонта, и вы непременно заметите, что это линия «плывет», что она изрезана причудливыми выступами и выемками, которые находятся в непрестанном движении — это тоже мираж. Очень часто появляются миражи на шоссейных дорогах. В ясные летние дни, когда асфальт сильно нагревается солнцем, на полотне дороги далеко впереди машины возникают как бы огромные светлые лужи, в которых отчетливо отражается небо. Но стоит подъехать поближе — и от «луж» не остается и следа. Такие же «лужи» или даже «озера» появляются иногда на лугах. Около сильно нагретых стен построек, у опушки леса, возле горных склонов иногда возникают «боковые» миражи.

В чем же разгадка этих, на первый взгляд таинственных, явлений?

Изогнутая прямая

Дикарь, строгающий острой раковиной стрелу для лука, проверял качество своего изделия, поднося его к глазу. Сам того не зная, он пользовался свойством прямолинейности световых лучей: если световой луч, не отклоняясь, скользил вдоль поверхности стрелы — значит, стрела прямая. Так же поступали строители египетских пирамид, контролируя прямизну их граней, и даже поведали об этом в одной из надписей, выгравированных на камне. Современные мастера следуют их примеру. Когда снайпер или землемер наводят свой видоискатель на отдаленный предмет, они рассчитывают на прямолинейность световых лучей. Да и как же иначе? Ведь само понятие прямой линии возникло из представления о световом луче — ничто не может быть прямее его.

Но и световой луч может изгибаться. Это происходит, когда он пронизывает неоднородную среду. Вам наверняка приходилось замечать, как сильно искажаются очертания предметов, находящихся под водой, если смотреть на них сквозь поверхность воды. Причина этих искажений в том, что, проходя через границу воды и воздуха, световой луч поворачивает — *преломляется*.

Как известно, поведение светового луча при переходе из одной среды в другую определяется законом преломления. Напомним этот закон: падающий луч, преломленный луч и перпендикуляр к границе раздела двух сред, восстановленный в точке падения луча, лежат в одной плоскости; отношение синуса угла падения к синусу угла преломления есть величина постоянная для двух данных сред. Если Θ_1 — угол падения, Θ_2 — угол преломления, то

$$\frac{\sin\Theta_1}{\sin\Theta_2}=\frac{n_2}{n_1},$$

где n_1 и n_2 — показатели преломления (абсолютные) сред.

А что будет происходить, если по пути своего распространения световой луч будет проходить через несколько разных сред, то есть через несколько сред с разными показателями преломления?

Обратимся к рисунку 1 а. Согласно закону преломления, при переходе из среды I в среду II

$$\frac{\sin\Theta_1}{\sin\Theta_2}=\frac{n_2}{n_1},\ \text{или}\ n_1\sin\Theta_1=n_2\sin\Theta_2;$$

при следующем переходе, из среды II в среду III,

$$\frac{\sin\Theta_2}{\sin\Theta_3}=\frac{n_3}{n_2},\ \text{или}\ n_2\sin\Theta_2=n_3\sin\Theta_3;$$

при переходе из среды III в среду IV

$$\frac{\sin\Theta_3}{\sin\Theta_4}=\frac{n_4}{n_3},\ \text{или}\ n_3\sin\Theta_3=n_4\sin\Theta_4,$$

и т. д. Из всех записанных соотношений следует, что при переходе светового луча из одной среды в другую сохраняется постоянным произведение показателя преломления среды на синус

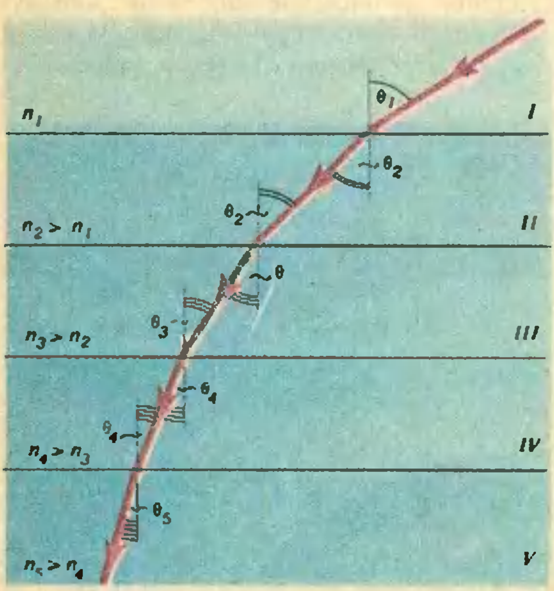


Рис. 1а.

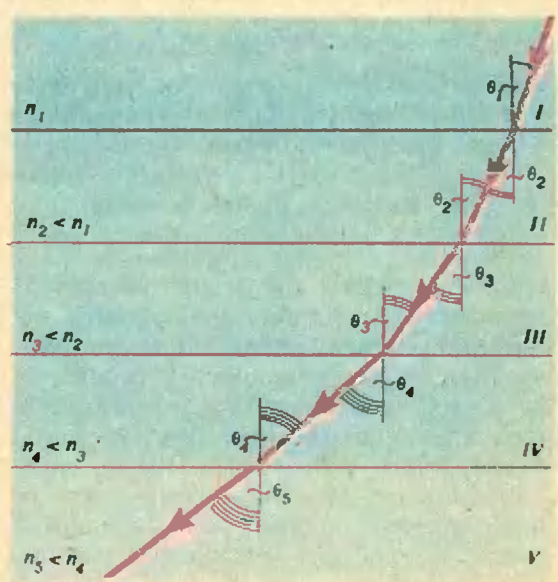


Рис. 1б.

угла падения луча на границу сред, то есть

$$n_i \sin\theta_i = \text{const}.$$

Отсюда следует, что чем больше показатель преломления среды, тем меньше угол падения луча на границу раздела, то есть тем больше угол, который составляет луч с самой границей раздела (угол $\frac{\pi}{2} - \theta_i$). По мере увеличения показателя преломления луч все больше отклоняется от границы раздела (в нашем примере — от горизонтали) и все больше «прижимается» к нормали к границе раздела (в нашем примере — к вертикали).

Мы рассмотрели случай, когда по пути распространения светового луча показатель преломления возрастал, то есть луч переходил из оптически менее плотной среды в оптически более плотную. Что будет происходить при «обратном» ходе луча — при переходе из оптически более плотной среды в менее плотную? В этом случае (рисунок 1 б) луч будет все больше отклоняться от нормали к границе раздела сред. На какой-то из границ угол падения может оказаться таким, что соответствующий угол преломления должен быть равным $\frac{\pi}{2}$. Как видно из соотношения $n_i \sin\theta_i = n_k \sin\theta_k$, это произойдет тогда, когда $\sin\theta_i = \frac{n_k}{n_i}$. В этом случае преломленный луч пойдет почти вдоль границы раздела сред.

Если же на какой-то границе раздела окажется, что $\sin\theta_i > \frac{n_k}{n_i}$, то луч отразится от границы, вернется в среду с показателем n_i и в дальнейшем будет распространяться «обратным» ходом — переходить из оптически менее плотной среды в более плотную.

Если нет резкой границы раздела сред, а свойства среды (ее показатель преломления) плавно меняются в каком-либо направлении, то и световой луч, распространяющийся в такой среде, будет представлять собой не ломаную линию, а плавную кривую. Такое искривление светового луча в среде с непрерывно меняющимся показателем преломления называют рефракцией света. На рисунке 2 показана рефракция световых лучей в двух случаях: когда на пути распространения лучей

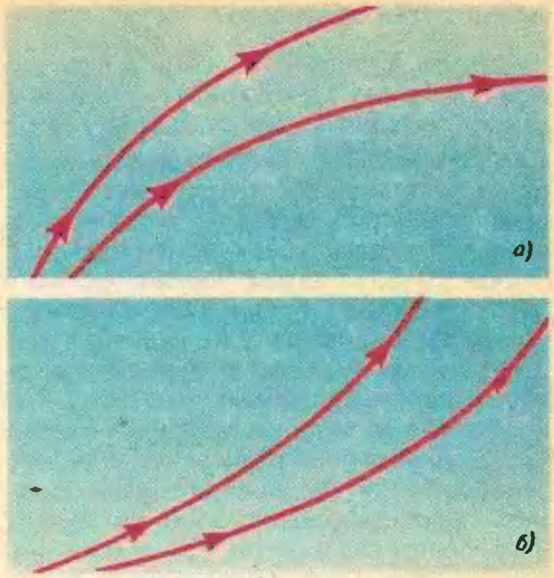


Рис. 2.

оптическая плотность убывает (*а*) и возрастает (*б*).

К чему это приводит?

Земная атмосфера — оптически неоднородная среда. Показатель преломления в атмосфере зависит от плотности воздуха: $n = 1 + A\rho$, где ρ (г/см^3) — плотность воздуха; коэффициент A слабо убывает с увеличением длины волны света; среднее значение A равно приблизительно 0,23.

Как известно, плотность воздуха быстро убывает с высотой. Поэтому лучи, идущие к нам от звезд, изгибаются по направлению к земле все сильнее и сильнее по мере «погружения» в атмосферу (рисунок 3) и тем круче, чем ближе звезда к горизонту.

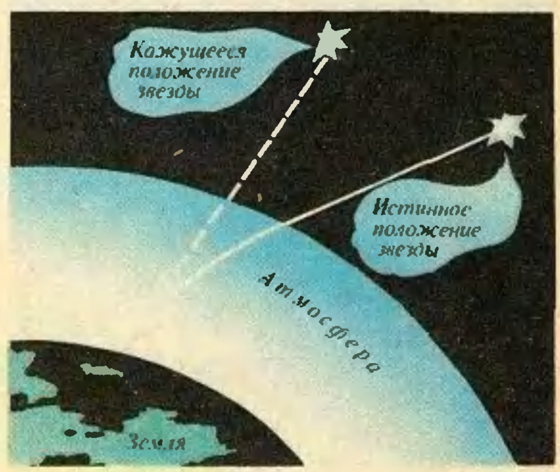


Рис. 3.

Так что с Земли все светила мы видим расположенными выше над горизонтом, чем на самом деле. По той же причине заход звезд и Солнца мы видим на несколько минут позже, а восход — на несколько минут раньше, чем было бы в отсутствие атмосферы; в результате рефракции фигуры Солнца и Луны искажаются вблизи горизонта. Лучи разного цвета искривляются по-разному: синие (для которых значение A больше) сильнее зеленых, а зеленые сильнее красных. Это особенно выразительно проявляется у горизонта, порождая множество красивых явлений.

Земные предметы мы тоже видим не совсем в том направлении, где они находятся. И это тоже связано с оптической неоднородностью воздуха. Плотность воздуха, как известно, зависит от температуры: $\varrho = p\mu/RT$. Давление p зависит от высоты, но на данной высоте оно практически одинаково. А вот температура воздуха на одной и той же высоте может быть разной — над лугом, над лесом, над поверхностью водоема, у склона горы и т. п. она не одинакова. В результате световые лучи, проходящие через столь неоднородный воздух, начинают «виться», и мы видим предметы смещенными то вверх, то вниз, то вбок. В предгорьях, как правило, все удаленные предметы кажутся как бы приподнятыми и слегка отодвинутыми от гор, а порой становятся видимыми и предметы, обычно скрытые горным массивом. Более того, если смотреть на один и тот же предмет с различных сторон, с различных расстояний или в разное время, то он будет находиться как бы в разных местах.

Атмосферное зеркало

Временами, особенно в тихую солнечную погоду, у поверхности земли или воды образуется устойчивый слой теплого, то есть менее плотного воздуха. Лучи, наклонно падающие сверху на этот слой, будут распространяться в среде с убывающей оптической плотностью. Если слой достаточно толст, то внутри слоя может произойти полное внутреннее отражение; лучи могут, пройдя некоторое расстояние, вновь вынырнуть из слоя, но теперь они будут направлены вверх, как будто после отражения от зеркала. Поэтому мы увидим зеркальное отражение всех предметов, вернее их мираж, где-то внизу, под землей или под водой (см. рисунок 4 а на с. 24). Мы можем видеть и сами предметы, ибо другие лучи могут попасть в наш глаз прямо, минуя нагретый слой.

Нечто подобное произошло с тремя девушками. Только слой нагретого воздуха находился не у них под ногами, а сбоку, у опушки леса, охранившего этот слой ночью от остывания. И зеркало, как мы видим, особое — в нем отражаются только очень наклонные лучи, постепенно изгибающиеся внутри толстого слоя, — этим и отличается мираж от обычного отражения.

Если достаточно толстый слой теплого воздуха расположен не под ногами, а на некоторой высоте над головой (рисунок 4б), мираж будет висеть в воздухе, как в случае с «Летучим Голландцем». Сам же предмет может находиться далеко за горизонтом и быть невидимым. Такие миражи образуются лучами очень пологими, наклоненными под малыми углами к поверхности Земли.

Направление, в котором распространяется звук, тоже меняется при переходе из холодного воздуха в теплый. Поэтому в атмосфере бывают и звуковые миражи, отличающиеся от обыкновенного эха тем, что порождаются они не отражением, а рефракцией звука.

Во время войны 1914 года было замечено, что артиллерийская канонада, обычно слышимая до расстояний 50—60 км, вновь становилась слышна, если отдалиться на расстояния 100—150 км. Оказалось, что это был мираж, порожденный рефракцией звука в теплом слое воздуха, существующем на высоте 50—60 км.

А что будет, если в теплом воздухе образуется прослойка из холодного воздуха? Световые лучи, распространяющиеся в этой прослойке, могут оказаться как бы в западне — отражаясь поочередно от верхнего и нижнего слоев, они не смогут вырваться за их пределы (рисунок 4 в). В этом случае можно увидеть причудливо сочетающиеся многократно повторенные прямые и перевернутые изображения одних и тех же предметов, как в калейдоскопе или в комнате со множеством зеркал. Этому явлению фантастически переплетающихся множественных миражей собственно и присвоено наукой название Фата-Моргана.

Канал, по которому свет распространяется почти без потерь, называется волноводом. Попав внутрь такого волновода как в ловушку, свет, звук или радиоволны уже не могут из него вырваться, пока не достигнут его конца. Этим пользуются для передачи различных сигналов от одного прибора к другому. Способы изготовления волноводов различны в зависимости от цели их применения. Для микрорадиоволн, например, на которых работают локаторы, волноводами служат металлические трубы. Для света волноводы изготавливаются в виде тонких гибких стеклянных волокон.

Сравнительно недавно было обнаружено, что в океане существуют естественные звуковые волноводы. Они образуются чередующимися прослойками воды различной температуры или солености. Слабый звук небольшого колокольчика, звенящего у побережья Америки, по такому волноводу беспрепятственно пересекает Атлантику и при благоприятных условиях может быть слышим у берегов Франции.

Для радиоволн волноводом служит все пространство между земной поверхностью и ионосферой. Показатель преломления для радиоволн убывает в атмосфере с высотой. Радиолучи, удаляясь от Земли, испытывают, подобно световым лучам, рефракцию: они все более и более загибаются, пока не «отразятся» от ионосферы и не вернутся на Землю. То, что «ловят» наши приемники, — это радиомираж передающей станции.

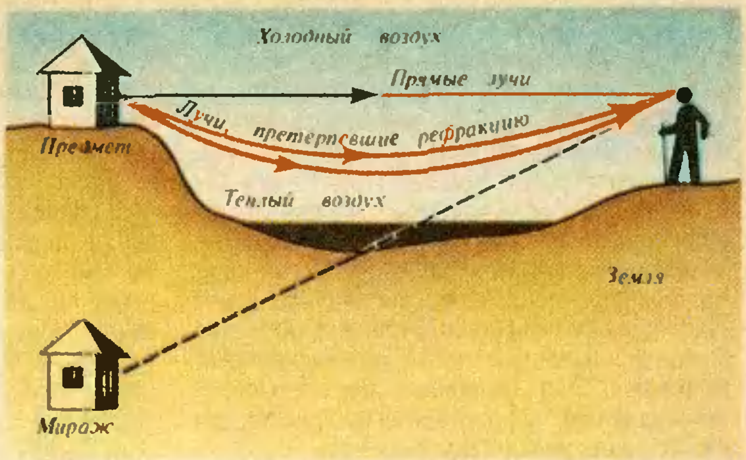


Рис. 4а.

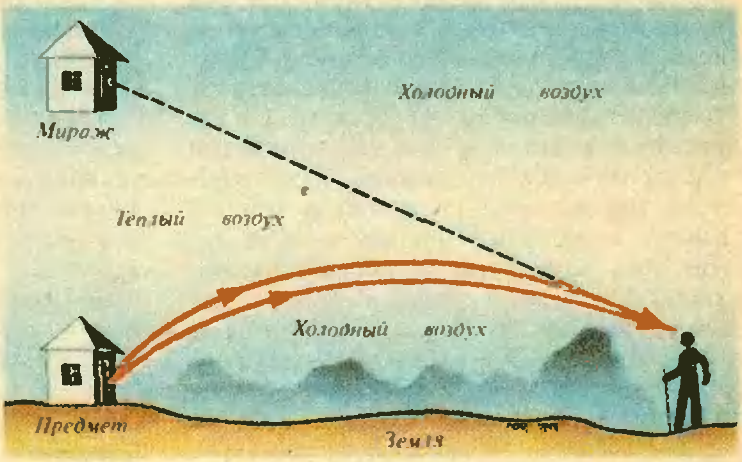


Рис. 4б.

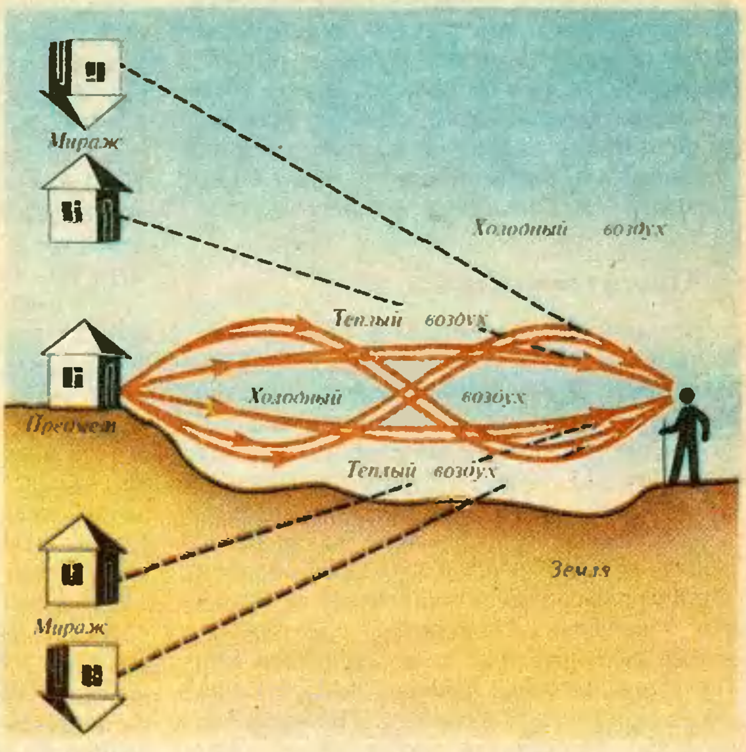


Рис. 4в.

Фея снова куражится

Положение астронома, геодезиста, радиооператора и оператора у локатора осложняется еще одной неустранимой и очень досадной помехой. Под действием ветра в воздухе то и дело возникают местные изменения плотности, температуры, концентрации электронов и других характеристик состояния воздуха. Эти случайные, быстро сменяющиеся возмущения — флуктуации — неустойчивы и подвижны. Проходя сквозь такой трепещущий неоднородный воздух, луч вынужден все время немного менять свое направление. Путь его оказывается и очень извилистым, и очень переменчивым — соседние лучи то сходятся, то расходятся, то переплетаются. Поэтому изображения далеких предметов и огней (например, звезд) никогда не стоят на месте, а все время как бы танцуют и мерцают, то вспыхивая, то бледнея. Эта неспокойность оптической, звуковой или радиокартины, порождаемая шалостями Морганы, ограничивает реальные возможности астрономических и геодезических измерений, локационной техники, техники оптической связи и т. п. При сильных порывах ветра, когда плотность воздуха вдруг резко меняется, луч порой просто «сносится» на мгновенье ветром в сторону или рассыпается им на снопы независимо колышащихся самостоятельных лучиков. На рисунке 5 (он сделан с фотографии) приведен пример того, как движение воздуха размывает и дробит на части равномерный хорошо сформированный световой пучок (он показан справа), когда он проходит в воздухе путь всего в 1/2 км при сравнительно спокойной погоде.

Проследим путь локационного импульса (оптического или радио), отправленного оператором в атмосферу. По капризу Морганы он помчится в воздухе не как по асфальтовому шоссе, а как по ухабистой дороге — его будут трепать неоднородности воздуха, и путь его будет совсем не прямолинейным. Когда он настигнет искомый предмет и, отразившись от него, вернется к оператору, то вернется он, вообще говоря, по другой дороге и появится не оттуда, куда был послан. Обычно эти помехи не велики и не доставляют излишних хлопот. Впрочем... История минувшей войны знает случаи, когда огонь корабельных батарей на-

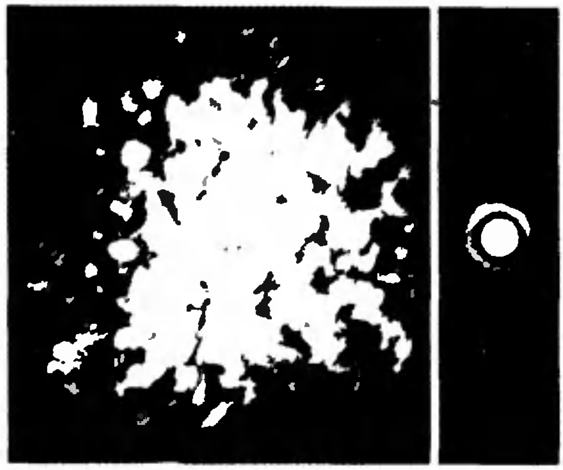


Рис. 5.

правлялся не по вражескому флоту, а по его локационному миражу. Немало есть и примеров грубых навигационных ошибок, порожденных локационным миражем.

Приручение феи

Прагматический ум ученых XX века не долго мирился с проделками шаловливой феи. Еще в первой четверти века возникло стремление приручить ее, сделать ее соучастницей полезных дел.

Первыми это сделали радиофизики. Открыв с ее помощью существование ионосферы, они поручили фее исследовать эти недоступные для человека высоты. Рефракционное изучение ионосферы принадлежит к числу наиболее ярких страниц истории науки. Упоминалось уже о том, как по рефракции звука было открыто существование теплого слоя воздуха на высотах 50—60 км. Дополним этот перечень еще двумя примерами.

То трепетание воздуха, которое мы в обиходе называем ветром, оказывает на нашу жизнь очень сильное и разностороннее влияние — от разрушения конструкций до опыления злаков. Но его законы сложны и еще мало изучены. Вот и оказалось разумным поручить их изучение Моргане — сделать порождаемые ею эффекты инструментом изучения самой атмосферы и движений воздуха в ней.

Другое направление возникло в процессе становления космической техники. Оказалось, что видимая с космического корабля линия горизонта заметно искажена рефракцией, а ею необходимо пользоваться для навигационных целей — ориентацию космического корабля относительно вертикали лучше всего осуществлять по линии горизонта. Но для этого надо знать, как меняется с высотой показатель преломления света и как погода влияет на эту зависимость.

Космонавт Г. М. Гречко с борта космической станции «Салют-4» заметил, что, когда солнце склоняется к горизонту, в результате рефракции не только искривляется его фигура, но и его края становятся изрезанными. Так появился метод дистанционного, из космоса, определения высотной зависимости показателя преломления, а вместе с тем и температуры воздуха.

Явления рефракции и миража, как все, что происходят в природе, в чем-то приносит нам пользу, а в чем-то вред. Наша задача — разумно использовать эти явления и избежать нежелательных последствий. А для этого необходимо знать эти явления и понимать их.

Как создавалась квантовая теория

(Начало см. на с. 2)

Вы видите, что импульс кванта точно так же связан с длиной волны, как и у частицы: $p=h/\lambda$. Значит, для бегущей волны кванты света можно считать дебройлевскими частицами — фотонами.

Итак, что же такое фотон? Это порция возбуждения квантового осциллятора — бегущей электромагнитной волны с данным волновым вектором $\vec{k}$.

Что такое «нулевые» колебания электромагнитного поля? Это нулевые колебания квантовых осцилляторов — электромагнитных волн со всевозможными волновыми векторами.

Другие поля, существующие в природе, например, гравитационное, тоже можно представить в виде совокупности осцилляторов. Поэтому в пустоте должны существовать нулевые колебания гравитационного поля. Но, согласно теории относительности, поле тяжести связано с изменением геометрических свойств пространства. И эти геометрические свойства колеблются, геометрия мерцает! Отношение длины окружности к радиусу колеблется около 2π...

То же относится и к полям, описывающим частицы, например, электроны и позитроны или пи-мезоны. Существуют нулевые колебания в пустоте электронно-позитронного, пионного и вообще полей всех возможных частиц. Нулевые колебания в вакууме полей, описывающих частицы со спином 1/2, проявляются во временном рождении и уничтожении пар электрон — позитрон, нуклон — антинуклон... Вакуум наполнен такими не вполне родившимися частицами, их называют «виртуальными». Но стоит в вакууме столкнуться двум нуклонам или электрону с позитроном, виртуальные частицы могут превратиться в реальные — так при столкновениях рождаются новые частицы. Реальная частица большой энергии окружена облаком виртуальных частиц, и чем больше энергия частицы, тем больше облако. Достаточно краем его задеть другую реальную частицу, как все виртуальные частицы облака станут реальными!

После того как стало ясно, что такое квант, исчез мучительный философский вопрос, проблема волн-частиц. Свет — это волны, энергия которых изменяется порциями, и если мы рассматриваем всевозможные бегущие волны, то совокупность их напоминает газ частиц: у каждой есть определенная энергия и импульс.

Понять — значит уметь ответить на любой разумный вопрос, а разумными в физике считаются те и только те вопросы, ответы на которые могут быть проверены мысленным или реальным экспериментом.

Ал-Хорезми

(к 1200-летию со дня рождения)

Академик АН Тадж.ССР
З. Д. УСМАНОВ,
И. ХОДЖИЕВ

В прошлом году по решению ЮНЕСКО весь мир отмечал 1200-летие со дня рождения выдающегося арабского ученого, уроженца Хивы Мухаммеда ибн Муса ал-Хорезми.

Творчество ал-Хорезми приходится на время около 825 года и проходит в основном в Багдаде. Халиф ал-Мамун, правивший в то время и покровительствовавший астрономии и математике, соорудил в Багдаде «Дом мудрости» с библиотекой и обсерваторией. В этой своего рода Академии наук в то время были сосредоточены почти все крупные ученые арабского халифата.

Мухаммед ибн Муса ал-Хорезми принадлежал к той группе ученых, которой халиф поручил переводы греческих математиков, измерение дуги меридиана и ряд других научных работ. Мухаммед написал много книг по математике и астрономии. В своей арифметике он разъясняет индийскую систему записи чисел и излагает правила письменного счета по десятичной позиционной системе. Арабский оригинал этой книги утерян, но имеется латинский перевод двенадцатого века. Эта книга была одним из источников, с помощью которых Западная Европа познакомилась с десятичной позиционной системой счисления. Заглавие перевода: «Об индийском числе, сочинение Алгоризми» (Algorizmi de numero Indozum). В других рукописях автор именовался Algorismus и Algorithmus, что ввело в математический язык термин «алгоритм» — латинизированное имя автора. Первоначально этот термин означал нумерацию по десятичной позиционной системе; впоследствии так стали называться труды, способствовавшие распространению в Европе индийского способа счета, а затем, наконец, — и сам этот счет*).

В своей арифметике ал-Хорезми разъясняет способ начертания чисел, четыре основных действия с целыми числами и простыми дробями; но удвоение и деление на два рассматривает как особые действия. Все в книге объясняется на словах; приводимые примеры излагаются (по крайней мере, в сохранившемся латинском тексте) не с помощью цифровых знаков, а с помощью чисел, изображенных словами или по римскому способу. В книге не объясняется, как производить вычитание в том случае, когда цифра вычитаемого больше цифры уменьшаемого.

Ал-Хорезми известен также как автор книги «Китаб ал-мухтасар фи хисаб ал-джабр ва-л-мукабала» (буквально: «краткая книга об исчислении восстановления и противопоставления»), что следует понимать как «науку об уравнениях». Эта «алгебра», арабский текст которой сохранился, стала известной на Западе в латинском переводе, и слово «ал-джабр» стало употребляться как синоним всей науки «алгебры», которая действительно до середины девятнадцатого столетия была ничем иным, как наукой об уравнениях.

На самом деле слово «ал-джабр» означает операцию, с помощью которой можно перенести члены из одной сторо-

*) В настоящее время слово «алгоритм» используется для обозначения конечного набора правил, позволяющих чисто механическим путем решать конкретные задачи (притом не только вычислительные), например, с помощью ЭВМ или робота.

ны равенства в другую так, чтобы обе эти стороны содержали только положительные члены. Слово же «ал-мукабала» означает следующую за этим операцию приведения подобных членов, так что в конце концов в уравнении для каждой степени остается только один положительный член, расположенный с той или другой стороны. Так, например, благодаря первой операции уравнение $3x^2-5x+6=x^2+7x+2$ превращается в $3x^2+6=x^2+12x+2$, а благодаря второй — в $2x^2+4=12x$. Таким образом, вся наука об уравнениях («алгебра»), а затем и употребление требующейся для нее совокупности символов, и, наконец, теория абстрактных операций получили название, относившееся сначала только к одной, вышедшей теперь из употребления операции «ал-джабр»; в настоящее время мы — в отличие от греков, арабов и их непосредственных преемников в Европе — не требуем, чтобы на обеих сторонах уравнения были только положительные члены.

В своей «алгебре» ал-Хорезми рассматривает линейные и квадратные уравнения, но без какого бы то ни было алгебраического формализма. Все здесь излагается с помощью слов; так, переменная уравнения называется *корнем*, а ее квадрат — просто *квадратом*. Рассматриваются шесть типов уравнений:

«квадраты равны корням»,
«квадраты равны числу»,
«корни равны числу»,
«квадраты и корни равны числу»,
«квадраты и число равны корням»,
«корни и число равны квадратам» *).

Первые три типа разбираются на следующих примерах уравнений:

$x^2+10x=39$; $x^2+21=10x$; $3x+4=x^2$

(эти уравнения затем часто встречаются в последующих алгебраических текстах). Уравнение $x^2+10x=39$ описывается так: «...квадрат и десять его корней равны тридцати девяти дирхемам **), ... это означает, что если добавить к некоторому квадрату то, что равно десяти корням, получится тридцать девять». Процедуру нахождения корня, а именно

$$x=\sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2+39}-\frac{10}{2}=3,$$

ал-Хорезми описывает следующими словами: «... раздвой число корней, получится в этой задаче пять, умножь это на равное ему, будет двадцать пять. Прибавь это к тридцати девяти, будет шестьдесят четыре. Извлеки из этого корень, будет восемь; вычти из этого половину числа корней, то есть пять, останется три. Это и будет корень квадрата, который ты искал, а квадрат есть девять.»

Для решения этого уравнения приводятся и два геометрических способа (рисунки 1, 2). На рисунке 1 на четырех сторонах квадрата x^2 строятся прямоугольники с высотой $10/4$, после чего углы получающейся фигуры заполняются квадратами со стороной $10/4$; образованный таким образом квадрат со стороной $x+10/2$ будет иметь известное значение $39+(10/2)^2$. На рисунке 2 квадрат той же площади 64 составляется из двух квадратов площади x^2 и 25, что со-

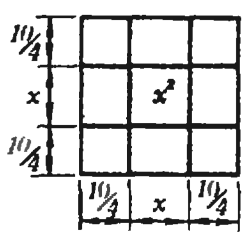


Рис. 1.

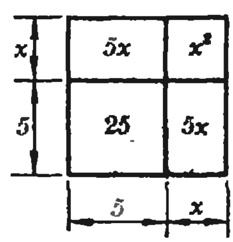


Рис. 2

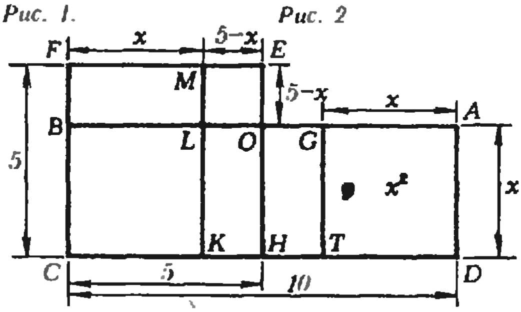


Рис. 3

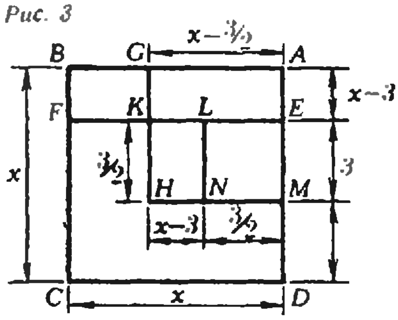


Рис. 4

---

*) В переводе на наш алгебраический язык эти уравнения выглядят так

$ax^2=bx$; $ax^2=b$, $ax=b$,
$ax^2+bx=c$, $ax^2+b=cx$, $ax+b=cx$
$(a, b, c>0)$

**) Дирхем — серебряная монета; здесь это слово используется для указания свободного члена уравнения ответствует записи уравнения $x^2+10x=39$ в виде $x^2+2\cdot5x+25=64$.

Для нахождения положительных корней уравнений $x^2+21=10$ и $3x+4=x^2$ также используются геометрические соображения.

Хотя уравнение $x^2+21=10$ имеет два положительных корня ($x_1=3$, $x_2=7$), ал-Хорезми приводит геометрический способ решения лишь для $x_1=3$, однако указывает на то, что $x_2=7$. Этот способ изображен на рисунке 3. Вначале строится прямоугольник $ABCD$ со сторонами x и 10, затем квадрат $EFCH$ со стороной 5. После этого двумя способами вычисляется площадь квадрата $EMLO$. С одной стороны, она равна $(5-x)^2$; с другой стороны, пл. $(EMLO)$ = пл. $(EFCH)$ — пл. $(MFCHOLM)=25-$пл. $(GBCT)=25-(10x-x^2)=25-21=4$. Поэтому $(5-x)^2=4$, откуда $x_1=3$.

На рисунке 4 приведены построения ал-Хорезми для уравнения $3x+4=x^2$. Квадрат $ABCD$ со стороной x разбивается на прямоугольники $ABFE$ и $EFCD$, площади которых равны, соответственно, 4 и $3x$. Затем строится квадрат $AGHM$ со стороной $x-\frac{3}{2}$. Устанавливается, что его площадь равна 25/4, ибо пл. $(ELNM)=9/4$ и пл. $(AGHNLE)=$пл. $(ABFE)=4$. Но тогда $\left(x-\frac{3}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$, откуда $x=4$.

Свой трактат ал-Хорезми заканчивает «Книгой о завещаниях», в которой мы находим всевозможные применения уравнений к вопросам практической жизни — например, к существовавшему у арабов наследственному праву.

Математические труды ал-Хорезми сыграли важную роль в истории математики как один из главных источников, с помощью которых Западная Европа познакомилась с индийскими цифрами и арабской алгеброй. Но деятельность ал-Хорезми не ограничивалась рамками одной математики. Он был автором сочинения по географии, которое положило начало развитию географических исследований на средневековом Востоке. Он был организатором научных экспедиций в Византию, Хазарию (нижняя Волга) и Афганистан. Под его руководством выполнены достаточно точные вычисления длины одного градуса земного меридиана.

На родине великого ученого

Член-корреспондент АН СССР
А. П. ЕРШОВ

В один прохладный осенний вечер сентября 1979 года дехкане, выстроившиеся с тракторными тележками, полными хлопка, в очередь у приемного пункта хлопкоочистительного комбината на главной площади Ургенча, обратили внимание на необычный транспарант над входом в здание Хорезмского облисполкома:

Приветствуем участников международного симпозиума «Алгоритм в современной математике и ее приложениях»!

Через несколько дней вечерняя программа узбекского телевидения разъяснила непонятную надпись. Сотни тысяч жителей Хорезмской области узнали, что их родной край стал местом научного паломничества группы выдающихся ученых, приехавших из разных стран, чтобы не только обсудить актуальные проблемы современной математики, но и почтить память их земляка Мухаммеда ал-Хорезми, принесшего Хорезму мировую славу еще в IX столетии, и чье имя в течение многих веков было для миллионов людей символом научного авторитета и точности. А для местных школьников было интересно и радостно узнать, что такие знакомые для них слова «алгоритм» и «алгебра» тоже непосредственно связаны с их соотечественником: «алгоритм» — это его видоизмененное имя (алгоритм — алгоризми — ал-Хорезми), а «алгебра» — это одна из частей названия его главного труда, ставшая впоследствии названием всей науки составления и решения уравнений *).

Итак, каждый раз, когда мы говорим «алгоритм», мы произносим имя ученого, а когда говорим «алгебра» — произносим название его главного труда. Если учесть, что этим терминам уже под тысячу лет, то легко понять, что мало еще какой ученый в истории науки так прочно вошел в культурный багаж образованного человека. И в то же время мы непростительно мало знаем об ал-Хорезми. Многие поколения

*) Подробнее об этом говорится в статье З. Д. Усманова и И. Ходжиева (см. с. 27).

людей употребляли слова «алгоритм» и «алгебра», и не подозревая, что они связаны с конкретным человеком. Его работы, хотя и переписывавшиеся десятками раз, стали предметом научного анализа только в самое последнее время, и никто еще не может сказать, что все его существующие труды собраны.

Хорезмский симпозиум стал первым в истории науки собранием, на котором была сделана попытка не только собрать вместе все, что известно об ал-Хорезми и его работах, но и проследить через связь времен, как сложилась та огромная роль, которую понятия алгоритма и алгебры играют в современной математике и вычислительном деле.

С большим докладом о жизни и работах ал-Хорезми выступил известный австрийский ученый Хейниц Земанек. Он посвятил много лет изучению всего, что связано с великим хорезмийцем. Земанек обратил внимание слушателей на то, почему именно работы ал-Хорезми, посвященные арифметике и алгебре, пережили его время и стали главным источником знания для средневековой Европы. Это произошло потому, что ал-Хорезми, как никто другой, заботился о том, чтобы изложить правила арифметики и решения линейных и квадратных уравнений в форме общей, убедительной и понятной. Он хотел, чтобы его правила были понятны каждому грамотному человеку. Достичь этого было очень трудной задачей. В то время не было алгебраической символики — скобок, знаков операций, буквенных обозначений и т. п., да если бы она и существовала, то, скорее всего, была бы недоступна конкретному уму горожанина, купца или землевладельца того времени. И ал-Хорезми выработал в своих работах неподражаемый стиль четкого, строгого и, одновременно, образного предписания, не дающего читателю никаких шансов уклониться в сторону или пропустить что-либо.

Вот, например, как ал-Хорезми говорил в IX веке о правиле пропорций:

«Знай, что сделки людей, как покупка и продажа, обмен и наем, а также другие, имеют дело с четырьмя числами — мерой, ценой, количеством и стоимостью. Число, равное мере, стоит против числа, равного стоимости, а число, равное цене, стоит против числа, равного количеству. Из этих четырех чисел три всегда известны, а одно неизвестно, и о нем-то говорящий и говорит «сколько», спрашивает спрашивающий. Правило это таково: ты рассматриваешь три известных числа, среди них обязательно имеются два, каждое из которых стоит напротив другого. Умножь каждое из двух стоящих друг против друга известных чисел на другое, а произведение раздели на другое известное число, стоящее против неизвестного. Если у тебя есть это частное, оно есть неизвестное число, о котором спрашивает спрашивающий, оно стоит против числа, на которое ты делил.»

Каждое такое правило сопровождается многочисленными примерами его применения в самых разных житейских ситуациях.

В латинских переводах трудов ал-Хорезми многие из правил арифметики начинались словами Dixit Algorizmi (Алгоризми сказал). Читая его книги, читатель привыкал, что такими словами начинается любое четкое и однозначно понимаемое правило. Постепенно люди забыли, что Алгоризми — это автор правила, и стали понимать это слово как общее название правил десятичной системы счисления, а со временем — как синоним любого точного правила действий. Так «Алгоризми сказал» постепенно превратилось в «алгоритм гласит».

Вот еще пример алгоритма ал-Хорезми. В поздней древности был создан первый прибор для ориентировки на местности — астролябия, предшественник современных теодолита и секстана. Грубо говоря, астролябия — это прибор для измерения углов, состоящий из диска с делениями и подвижного визира, называвшегося алидадой*). Трактат ал-Хорезми «Изготовление астролябии и работа с астролябией» является древнейшим текстом, рассказывающим об этом инструменте.

«**Ал-Хорезми сказал:** Первое, что необходимо при работе с астролябией, — это определение высоты солнца. Для этого поверни астролябию задней стороной к себе и дай ей повиснуть в твоей правой руке; солнце должно быть напротив твоего левого плеча. Затем разверни на солнце девяностую линию на шкале градусов, расположенную на задней стороне астролябии. Потом медленно подымай алидаду, пока не увидишь солнце через оба отверстия. Теперь прочитай, на какое из девяноста делений, расположенных на задней стороне астролябии, показывает своим острым концом указатель алидады. Это и есть высота солнца в этот час. Запомни ее!»

Значительную часть симпозиума в Ургенче заняло обсуждение роли алгоритмов в современной теоретической и прикладной математике. На эту тему с обширным докладом выступили московские ученые В. А. Успенский и А. Л. Семенов. Они обратили внимание на то, что понятие алгоритма стало предметом теоретического анализа

*) См. вторую страницу обложки.

На открытии конференции. На переднем плане Х. Земанск (слева) и А. П. Ершов.

только в первой половине XX века. Люди тысячелетиями придумывали и применяли алгоритмы, но только в начале тридцатых годов появились точные математические понятия алгоритма. Однако с первыми шагами новая теория алгоритмов принесла математике серию крупнейших открытий, во многом определивших ее современный облик.

Уже первое определение алгоритма, известное под названием *примитивно рекурсивных функций*, позволило австрийскому математику К. Геделю доказать в 1931 г. свою знаменитую теорию истинных, но недоказуемых утверждений. Это очень глубокий результат, который, с одной стороны, установил пределы формальных теорий, а с другой стороны, обосновал беспредельность процесса человеческого познания. Еще одно определение алгоритма, напоминающее общеизвестное правило подстановки и замены переменных при вычислениях по формулам, позволило американскому математику А. Черчу в 1936 г. обнаружить существование *алгоритмически неразрешимых проблем*, то есть серий задач, допускающих точную математическую формулировку, для которых не может существовать единого алгоритма решения. Примером неразрешимой задачи является такая: найти общий способ, который для любого алгоритма обнаруживал бы, дает ли он результат для любых своих аргументов или же существуют такие данные, для которых он будет работать бесконечно.

Естественно, что как только появились такие ограничительные результаты, стали думать, что, может быть, эти ограничения могут быть не столь стеснительными, если как-то видоизменить или усилить определение алгоритма. И здесь математики столкнулись еще с одним удивительным феноменом: самые разные определения алгоритма, придуманные из совершенно несходных предпосылок, оказались друг другу полностью эквивалентными.

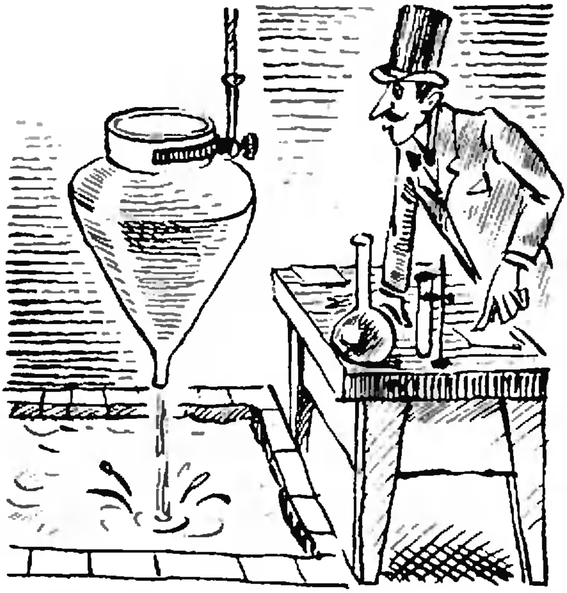
По общему мнению участников, ургенчский симпозиум стал уникальным научным собранием. По выражению одного из его организаторов, американского ученого-информатика Д. Кнута

«...это был незабываемый опыт. Вместо «обычной» конференции, где участники зачитывают заранее приготовленные доклады, мы провели взаимные дискуссии по фундаментальным проблемам вычислительной науки. Ландшафт пустыни, окружающий хорезмский оазис, и дыхание истории отвлекли нас от повседневных мыслей, одолевающих нас дома, и помогли сосредоточиться на наиболее глубоких и устремленных вдаль философских размышлениях.»

Вечером 22-го сентября 1979 г. симпозиум закончил свою работу. Участники разъехались. Площадь опустела, труженики-хлопкоробы тоже разъехались по домам. Около гостиницы полная луна освещала камень, положенный участниками симпозиума в основание памятника Мухаммеду ал-Хорезми, выходцу из Хорезма, оставившему человечеству в наследство индийскую позиционную систему счисления, арифметику, алгебру и свое доброе имя.

Из старых опытов

Кандидат физико-математических наук
А. А. ВАРЛАМОВ



Под таким названием мы публикуем статьи о занимательных и вместе с тем весьма поучительных опытах по физике, которые проводили любознательные гимназисты в прошлом веке.*)
Сегодня вниманию читателей предлагается рассказ об опытах, иллюстрирующих взаимное влияние водяной струи и... звука.

Кто из вас не знаком с микрофоном? Вы его видите по телевизору, в театре и кино, пользуетесь им во время записи на магнитофонную пленку, его устройство описано даже в школьном учебнике по физике. А вот как сделать *водяной* микрофон, наверное, знают немногие. Да, да, не удивляйтесь. Оказывается, с помощью водяной струи можно успешно усиливать различные звуки. Сделал этот необычный прибор американец Александер Грейам Белл, который известен миру как один из изобретателей телефона. Но прежде чем приступить к изготовлению водяного микрофона, познакомимся поближе с некоторыми свойствами его «усилителя» — водяной струи.

Если в дне сосуда с водой просверлить небольшое круглое отверстие, то можно заметить, что вытекающая сквозь него струя воды состоит из двух, различных по своим свойствам, частей. Верхняя часть струи прозрачна и неподвижна настолько, что кажется стеклянной. По мере удаления от истока она становится все тоньше, и в точке наибольшего сокращения начинается нижняя часть, переменчивая по форме и непрозрачная. На первый взгляд эта часть струи, как и верхняя, кажется непрерывной, монолитной. Однако иногда удается быстро провести через нее палец, не замочив его.

Французский физик Феликс Савар провел подробное исследование свойств водяных струй и пришел к выводу, что в самом узком месте водяная струя перестает быть сплошной и распадается на отдельные капельки. Попробуйте убедиться в этом сами, сделав фотографию струи воды со вспышкой или посмотрев на струю при стробоскопическом освещении*).

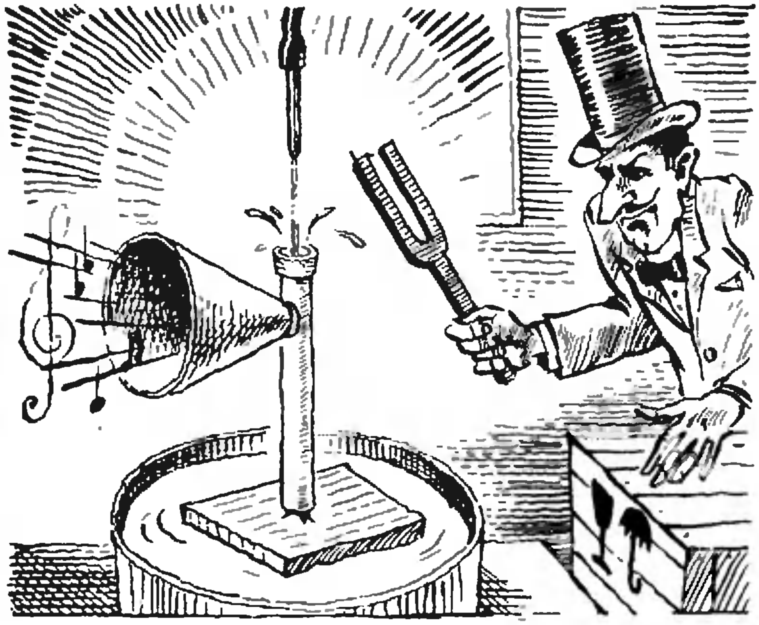
Другим важным открытием Савара было то, что на длину верхней, прозрачной части струи большое влияние оказывают окружающие звуки. Если вблизи водяной струи возбудить звуковые колебания определенной частоты, прозрачная часть струи мгновенно становится мутной**).

Савар объяснял это так. Капли, на которые распадается водяная струя в

*) См. статьи А. А. Варламова в «Кванте» № 10 за 1982 год и в № 5 за 1983 год. (*Прим. ред.*)

*) Подробнее об этом можно прочитать в статье С. Л. Гаврилова «Что такое стробоскоп» («Квант», 1983, № 1). (*Прим. ред.*)

**) О том, что происходит под влиянием звука со струей воды, вытекающей под углом к горизонту, можно прочитать в статье В. Майера и Р.-Э. Шафира «Звук и струя» («Квант», 1977, № 7). (*Прим. ред.*)



своей нижней части, зарождаются еще вверху, у самого отверстия. Представляясь как бы кольцевыми выступами, по мере удаления от отверстия они проявляются все четче и четче, пока не отделятся совсем. Эти выступы следуют друг за другом настолько часто, что производят слабый звук. Музыкальная нота, звучащая в унисон с этим звуком, способствует более раннему распадению струи на отдельные капли, то есть переводит прозрачную часть струи в мутную.

Известный вам по предыдущим публикациям английский физик Джон Тиндаль повторил в своей лаборатории опыты Савара. Ему удалось создать струю (жилу, по выражению Тиндаля), прозрачная часть которой достигала длины около 90 футов ($\approx$27,4 м). При воздействии звука органной трубы соответствующей частоты и умеренной силы эта прозрачная жила тут же превращалась в мутную, распадаясь на огромное количество водяных капель.

В одной из статей Тиндаль так описывает свое наблюдение за падением водяной струи в бассейн с водой: «Когда нисходящая струя пересекает жидкую поверхность выше точки перерыва (точки перехода от прозрачной части струи к мутной — *А. В.*), причем давление не слишком сильно, то она входит в жидкость молча; но когда эта поверхность пересекает струю ниже точки перерыва, то сейчас же слышится журчание и появляется множество пузырьков. В первом случае не только нет сильного разбрызгивания жидкости, но она вокруг основания жилы собирается в кучку, в выступ, где движение противоположно струе». Попытайтесь повторить эти простые опыты со струей из водопроводного крана и, скажем, тазом с водой. Обратите внимание на напор, под которым струя вытекает из крана.

Описанные свойства водяной струи используем теперь для создания водяного микрофона. Приготовьте медную трубку диаметром 2 см и длиной 20 см, кусочек резины от лопнувшего воздушного шарика и несколько стеклянных трубок. На боковой поверхности медной трубки, отступив на 3 см от верхнего конца, проделайте отверстие и впаяйте в него патрубок немного меньшего диаметра и длиной примерно 3 см. На патрубок наденьте воронку (рупор), склеенную из картона. (В вершине рупора следует сделать небольшую шейку, диаметром чуть превышающим диаметр патрубка, с помощью которой рупор будет крепиться к трубке). Верхний конец медной трубки немного расширьте и края зачистите напильником, чтобы они не перерезали резину. После этого наденьте на трубку резину и обвяжите ее шерстяной ниткой, которая резину не режет. Нижний конец трубки укрепите на деревянной подставке. Итак, прибор готов, можно приступать к экспериментам.

Как вы уже видели из опытов Тиндаля, если струя попадает в бассейн с водой своей нижней, распавшейся на капли, частью, она производит шум. Если же в воду попадает верхняя, целая, часть струи, то она втекает в воду бесшумно. Подобный опыт можно провести и с листом картона. Так, если поднимать кусок картона, на который попадает струя, к ее истоку, то удары капель будут слышны все слабее и слабее. Когда же вы достигнете точки перехода к целой части струи, ударов не станет слышно вовсе.

Наш прибор с мембраной играет роль того же куска картона. Однако, благодаря резонатору, которым является трубка, каждый тихий удар капли слышен гораздо лучше. Падающие на резиновую мембрану капли производят в комнате впечатление слабых ударов молотка по наковальне. Попробуйте убедиться в этом.

Для дальнейших опытов вам понадобится тонкая струя. Ее можно получить с помощью стеклянной трубки с закругленным концом диаметра порядка 1 мм. Если такой трубки у вас нет, не огорчайтесь. Возьмите трубку диаметром около 3 мм, расплавьте ее конец (подержав его над пламенем и слегка поворачивая), пока отверстие не станет закрываться, и сильно дуньте в противоположный конец трубки. Вы получите трубку с круглым отверстием малого диаметра. Затем наполните водой достаточно большой сосуд, поставьте его на шкаф и выпускайте из него воду через длинную резиновую трубку (устроив сифон), в конец которой вставлена сделанная вами стеклянная трубочка. Таким образом можно получить струю с довольно длинной верхней прозрачной частью.

Направьте струю на резиновую мембрану сделанного ранее прибора. Сначала шум будет довольно сильным, но по мере приближения конца трубки к мембране он стихнет, и, наконец, струя станет падать практически беззвучно.

Теперь можно убедиться в чувствительности струи к музыкальным звукам, о которой писали Савар и Тиндаль. Приложите, например, к стеклянной трубке ножку камертона. Струя тут же распадется на капли, которые, ударяя по мембране, «запоют» в такой степени, что захочется заткнуть уши.

Это и есть водяной микрофон, в котором слабый исходный звук усиливается за счет энергии падающей струи. Приложив вместо камертона к трубке часы, можно сделать слышным их ход для всех присутствующих в комнате. Б. Донат, в книге*) которого описан этот опыт, утверждает, что, приладив к стеклянной трубке, из которой вытекала струя, воронку, он попытался передать через струю звуки своего голоса. При этом струя действительно «заговорила», но так неясно и грубо и таким ужасным голосом, что все присутствующие при этом опыте разбежались. Попробуйте и вы провести такой эксперимент. Может быть, нервы у ваших друзей окажутся покрепче, и интерес к результату опыта удержит их на месте?

*) Здесь речь идет об упоминавшейся в предыдущих статьях книге «Физика в играх для юношества», изданной в конце XIX века. (*Прим. ред.*)

Задачи наших читателей

Предлагаемые здесь задачи связаны со статьей Ю. И. Ионина и А. И. Плоткина «Выбор модуля», опубликованной в «Кванте» № 6 за этот год.

1. Докажите, что уравнение

$$x^3+y^3=(x+y)^2+(xy)^2$$

не имеет решений в натуральных числах.

М. Гараев, уч. 9-го класса

2. Пусть a и b — натуральные числа, p — простое число, большее, чем a и b. Докажите, что число $(a+b)^p-a^p-b^p$ не делится на p^3.

А. Т. Курганский

3. Докажите, что

а) если числа $n+1$ и $2n+1$ — квадраты натуральных чисел, то n делится на 24;

б) если числа $2n+1$ и $3n+1$ — квадраты натуральных чисел, то n делится на 40;

в) при любом натуральном n число 5^n-1 не делится на 4^n-1;

г) при любом натуральном $n>2$ число 5^n-4^n не является точным квадратом.

Л. Д. Курляндчик

Если массы заменить на площади...

ЧАН КУАНГ

В этой статье мы докажем несколько теорем, которые можно смело отнести к жемчужинам элементарной геометрии. Бесспорно, эти теоремы должны доставить читателю удовольствие даже одними своими формулировками. Но мы рассказываем о них здесь по другой причине — они будут выведены из одной формулы — формулы Лагранжа для вычисления «момента инерции». Приведем ее для случая трех точек A, B, C:

$$\alpha|PA|^2+\beta|PB|^2+\gamma|PC|^2=$$
$$=\frac{1}{\mu}\left(\alpha\beta c^2+\beta\gamma a^2+\gamma\alpha b^2\right)+\mu|PZ|^2; \qquad (1)$$

здесь A, B, C и P — произвольные точки, α, β и γ — произвольные числа (понимаемые как «массы», сосредоточенные в точках A, B и C), $\mu=\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, a, b, c — длины отрезков BC, CA, AB, наконец, Z — это *центр масс* системы материальных точек αA, βB, γC, то есть, по определению, точка, удовлетворяющая условию

$$\alpha\overrightarrow{ZA}+\beta\overrightarrow{ZB}+\gamma\overrightarrow{ZC}=\vec{0}$$

(*материальной точкой* называют пару (точка, число), αA, βB и γC — краткие обозначения материальных точек (A, α), (B, β), (C, γ)). В принципе, сказанного достаточно, и чтобы вывести формулу (1), и чтобы понимать дальнейшее. Но все же мы советуем ознакомиться со статьей В. Н. Дубровского «Момент инерции в геометрии» в предыдущем номере журнала, где доказывается формула Лагранжа (формула (7) из этой статьи), объясняется, как она связана с «моментом инерции», и приводятся еще некоторые ее геометрические следствия, а также необходимые свойства центра масс.

Массы и площади

Оказывается, «массам» α, β, γ, определяющим заданную точку — центр масс Z, можно придать простой геометрический смысл: если треугольник ABC, внутри которого дана точка Z, разбить на три треугольника отрезками ZA, ZB и ZC и поместить в каждую вершину массу, равную площади противоположного треугольника (рис. 1), то центр этих масс попадет как раз в точку Z. Иначе говоря,

$$S_a\cdot\overrightarrow{ZA}+S_b\cdot\overrightarrow{ZB}+S_c\cdot\overrightarrow{ZC}=\vec{0}, \qquad (2)$$

где $S_a=S_{ZBC}$, $S_b=S_{ZCA}$, $S_c=S_{ZAB}$ — площади соответствующих треугольников. Для доказательства обозначим через A_1 точку пересечения прямых AZ и BC (рис. 2), тогда

$$S_b\cdot\overrightarrow{ZB}+S_c\cdot\overrightarrow{ZC}=S_b(\overrightarrow{ZA_1}+\overrightarrow{A_1B})+$$
$$+S_c(\overrightarrow{ZA_1}+\overrightarrow{A_1C})=(S_b+S_c)\overrightarrow{ZA_1}+$$
$$+(S_b\cdot\overrightarrow{A_1B}+S_c\cdot\overrightarrow{A_1C}).$$

Треугольники ZCA и ZAB имеют общую сторону ZA, поэтому отношение их площадей $S_b : S_c$ равно отношению их высот $h_C : h_B$, опущенных на эту сторону, но, очевидно, $h_C : h_B=|A_1C|:|A_1B|$. Следовательно, $S_b\cdot|A_1B|=S_c\cdot|A_1C|$, то есть $S_b\cdot\overrightarrow{A_1B}+S_c\cdot\overrightarrow{A_1C}=\vec{0}$ и

$$\vec{v}=S_a\cdot\overrightarrow{ZA}+S_b\cdot\overrightarrow{ZB}+S_c\cdot\overrightarrow{ZC}=S_a\cdot\overrightarrow{ZA}+$$
$$+(S_b+S_c)\overrightarrow{ZA_1}.$$

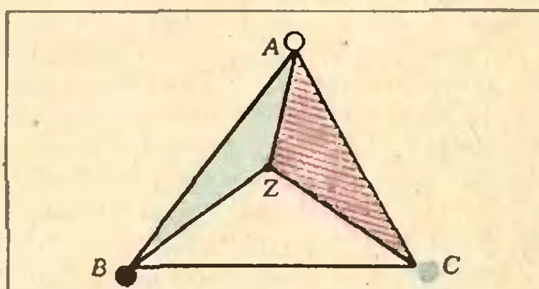


Рис. 1.

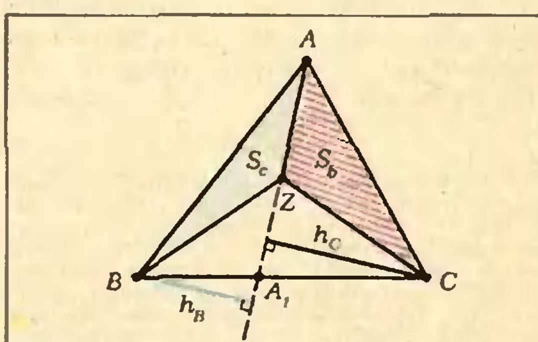


Рис. 2.

Таким образом, вектор $\vec{v}$ коллинеарен $\overrightarrow{ZA}$ ($\overrightarrow{ZA_1} \parallel \overrightarrow{ZA}$); по тем же соображениям $\vec{v} \parallel \overrightarrow{ZB}$ и $\vec{v} \parallel \overrightarrow{ZC}$, а это возможно только, когда $\vec{v}=\vec{0}$.

Разумеется, и для всех наборов масс α, β, γ, пропорциональных S_a, S_b, S_c, точка Z тоже будет центром масс системы αA, βB, γC. Набор S_a, S_b, S_c можно выделить из них очевидным условием

$$S_a+S_b+S_c=S=S_{ABC}. \qquad (3)$$

Мы вывели свойства (2) и (3) только для точек Z, лежащих внутри треугольника, да их и нельзя непосредственно перенести на остальные точки (скажем, для точки Z на рисунке 3, *а* равенство (3) будет выглядеть так: $S=-S_a+S_b+S_c$). Чтобы эти формулы оказались верными для всех точек, надо обобщить понятие площади.

Назовем *ориентированной площадью* S_{KLM} треугольника KLM его площадь, взятую со знаком плюс, если обход вершин $K \to L \to M \to K$ совершается против часовой стрелки, и со знаком минус — в противном случае*). Тогда утверждения (2) и (3) будут справедливы для любой точки Z в плоскости треугольника ABC, если считать величины S_a, S_b, S_c, S ориентированными площадями соответствующих треугольников. (Подчеркнем, что в определении ориентированной площади имеет значение порядок вершин треугольника: например, $S_a=S_{ZBC}=S_{CZB}=-S_{ZCB}$ и т. д.)

Доказательство (2) при этом обобщении почти не меняется. Поясним подробнее его ключевой момент: вывод равенства $S_b \cdot \overrightarrow{A_1B}+S_c \cdot \overrightarrow{A_1C}=\vec{0}$. Так же, как и раньше, доказывается, что $S_b \cdot |A_1B|=S_c \cdot |A_1C|$ при любом положении точки Z. Теперь надо заметить, что если точки B и C лежат по разные стороны от прямой ZA (рис. 2; 3,*б*), то треугольники ZCA и ZAB ориентированы одинаково (имеют одно и то же направление обхода вершин), то есть S_b и S_c — одного знака, и при этом точка A_1 лежит между B и C, то есть векторы $\overrightarrow{A_1B}$ и $\overrightarrow{A_1C}$ противоположно направлены; если же точки B и C лежат по одну сторону от ZA (рис. 3,*а*), то числа S_b и S_c имеют противоположные знаки, а точка A_1 лежит вне отрезка BC, то есть векторы $\overrightarrow{A_1B}$ и $\overrightarrow{A_1C}$ сонаправлены. В обоих случаях векторы $S_b \cdot \overrightarrow{A_1B}$ и $S_c \cdot \overrightarrow{A_1C}$ противоположно направлены, а поскольку их длины равны, они дают в сумме $\vec{0}$. Уточнение остальных деталей мы предоставим читателю (рассмотрите, в частности, случай $\overrightarrow{ZA} \parallel \overrightarrow{BC}$).

Равенство (3) в общем случае легко доказать простым перебором вариантов расположения точки Z; например, на рисунке 3,*а* $S=-|S_a|+|S_b|+|S_c|=S_a+S_b+S_c$, на рисунке 3,*б* $S=|S_a|-|S_b|-|S_c|=S_a+S_b+S_c$ и т. д.

---

*) Мы вынуждены ограничиться этим наглядным определением, потому что строгое определение заняло бы слишком много места и увело бы нас от темы статьи. Читатель, которого это определение не удовлетворяет, может обратиться в статье А. М. Лопшица «Площади ориентированных фигур» («Квант», 1978, № 3, с. 2). С помощью введенных в ней понятий можно абсолютно строго доказать все утверждения, где мы существенно пользуемся ориентированной площадью. См. также статью Н. Васильева «Формула площади» («Квант», 1981, № 4, с. 17).

Теорема Птолемея

Итак, в формуле Лагранжа (1) в качестве «масс» α, β, γ можно взять ориентированные площади S_a, S_b и S_c. Запишем ее для случая, когда точка P совпадает с центром O описанной окружности треугольника, обозначив ее радиус через R:

$$(S_a+S_b+S_c)R^2=$$
$$=\frac{1}{S}(S_aS_bc^2+S_bS_ca^2+S_cS_ab^2)+S|OZ|^2$$

или

$$R^2-|OZ|^2=\frac{1}{S^2}(S_aS_bc^2+S_bS_ca^2+S_cS_ab^2). \qquad (4)$$

Выведем отсюда классическую т е о р е м у П т о л е м е я: *произведение диагоналей вписанного в окружность четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон.*

Пусть четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром O радиуса R (рис. 4). Применим формулу (4) к точке $Z=D$. Левая ее часть будет равна нулю ($|OD|=R$); ориентированные площади S_a, S_b, S_c вычислим, пользуясь тем, что площадь треугольника равна четверти произведения его сторон, деленного на радиус описанной окружности:

$$S_a=S_{DBC}=\frac{1}{4R}\cdot a\cdot|DB|\cdot|DC|,$$

$$S_b=S_{DCA}=-\frac{1}{4R}\cdot b\cdot|DC|\cdot|DA|,$$

$$S_c=S_{DAB}=\frac{1}{4R}\cdot c\cdot|DA|\cdot|DB|.$$

Подставляя эти выражения в (4) и сокращая на $abc\cdot|DA|\cdot|DB|\cdot|DC|/4RS^2$, получим, что

$$-c\cdot|DC|-a\cdot|DA|+b\cdot|DB|=0,$$

то есть

$$|DB|\cdot|AC|=|DA|\cdot|BC|+|AB|\cdot|DC|.$$

Площадь педального треугольника

Выражение, стоящее в правой части (4), выглядит довольно неуклюже, но, как мы сейчас увидим, оно имеет хороший геометрический смысл. Опустим из точки Z перпендикуляры ZA_1, ZB_1 и ZC_1 на прямые BC, CA и AB (рис. 5). Образовавшийся треугольник $A_1B_1C_1$ называется *педальным треугольником* точки Z. *Леонард Эйлер обнаружил, что его площадь равна*

$$S_{A_1B_1C_1}=\frac{1}{4}\left(1-\frac{|OZ|^2}{R^2}\right)S_{ABC}$$

(обе площади ориентированные!). Выведем этот результат из нашей формулы (4). Для этого мы докажем, что $S_aS_bc^2=abcR\cdot S_{ZA_1B_1}$. Складывая это равенство с аналогичными равенствами для двух других слагаемых в правой части (4), мы получим:

$$R^2-|OZ|^2=\frac{1}{S^2}abcR\,(S_{ZA_1B_1}+S_{ZB_1C_1}+S_{ZC_1A_1})=\frac{4R^2}{S_{ABC}}S_{A_1B_1C_1},$$

что эквивалентно формуле Эйлера.

Итак, рассмотрим выражение $S_aS_bc^2$. Ясно, что $|S_a|=a|ZA_1|/2$, $|S_b|=b|ZB_1|/2$, $c=2R\sin\widehat{ACB}=2R\sin\widehat{A_1ZB_1}$ (поскольку стороны углов ACB и A_1ZB_1 взаимно перпендикулярны, их величины равны или дают в сумме 180°). Следовательно,

$$|S_aS_bc^2|=abcR\cdot\frac{1}{2}|ZA_1||ZB_1|\sin\widehat{A_1ZB_1}=abcR|S_{ZA_1B_1}|.$$

Остается доказать, что знак произведения S_aS_b совпадает со знаком $S_{ZA_1B_1}$. Это легко сделать, перебирая четыре возможных случая расположения точки Z относительно прямых AC и BC (внутри каждого из четырех углов, образованных этими прямыми, знаки S_a, S_b и $S_{ZA_1B_1}$ постоянны).

В заключение приведем еще одну старинную теорему: *основания перпендикуляров, опущенных из точки описанной окружности треугольника на его стороны (или их продолжения), лежат на одной прямой — «прямой Симсона»* (рис. 6).

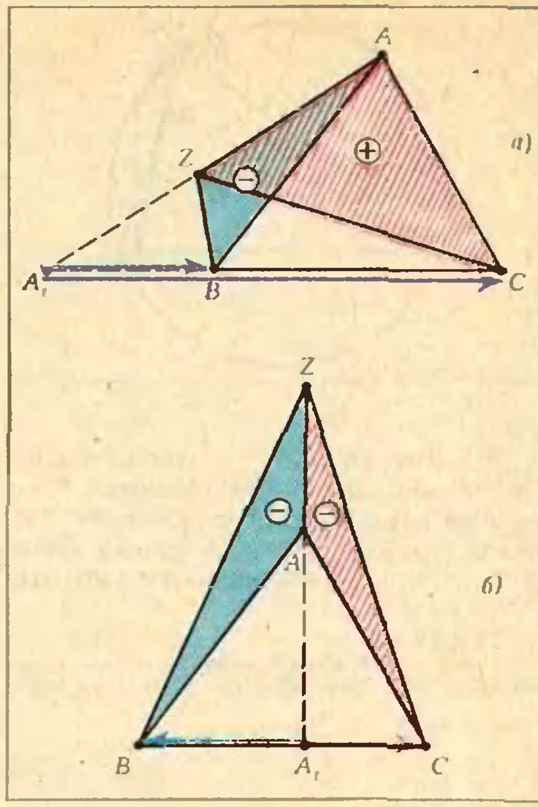


Рис. 3.

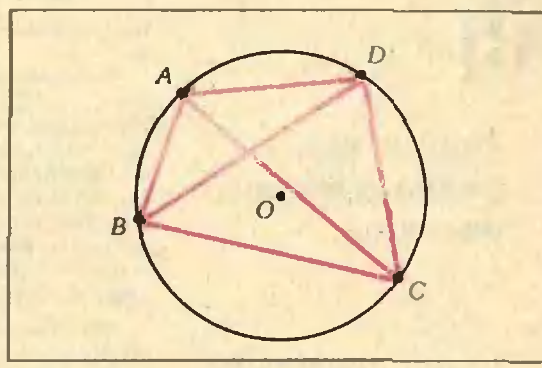


Рис. 4.

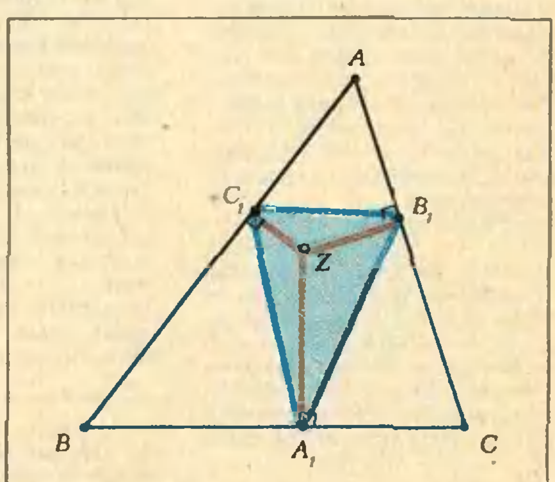


Рис. 5.

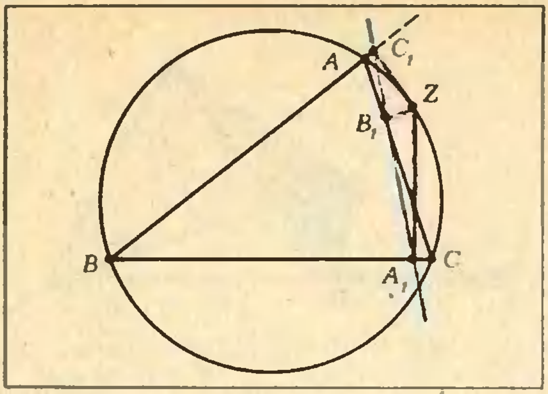


Рис. 6.

Эта теорема сразу следует из формулы Эйлера, потому что для точки Z, лежащей на описанной окружности, площадь педального треугольника равна нулю, то есть он вырождается в прямую.

Задачи

Если точка Z служит центром масс системы материальных точек αA, βB, γC, то три числа α, β, γ называются *барицентрическими координатами* точки Z относительно точек A, B, C.

1. Докажите, что для любой точки плоскости барицентрические координаты определены однозначно с точностью до пропорциональности и обратно, любая тройка чисел (α, β, γ) с ненулевой суммой задает ровно одну точку плоскости.

2. Докажите, что барицентрические координаты «замечательных точек» в треугольнике ABC относительно его вершин равны: для центра Z вписанной окружности — (a, b, c); для центра Z вневписанной окружности, касающейся стороны BC, — $(-a, b, c)$; для центра O описанной окружности — $(\sin 2A; \sin 2B, \sin 2C)$; для точки H пересечения высот — $(\operatorname{tg} A, \operatorname{tg} B, \operatorname{tg} C)$; для точки G пересечения медиан — $(1, 1, 1)$.

3. Докажите, что расстояние между двумя точками M и M' с барицентрическими координатами (α, β, γ) и $(\alpha', \beta', \gamma')$ относительно точек A, B, C при $\alpha+\beta+\gamma=\alpha'+\beta'+\gamma'=1$ можно вычислить по формуле $|MM'|^2=-(a^2k_bk_c+b^2k_ck_a+c^2k_ak_b)$, где $k_a=\alpha-\alpha'$, $k_b=\beta-\beta'$, $k_c=\gamma-\gamma'$.

4. Выразите расстояния от центра описанной окружности треугольника до центров вписанной и вневписанной окружности через радиусы этих окружностей.

5. Докажите, что (в обозначениях задачи 2) $|OG|^2=R^2-(a^2+b^2+c^2)/9$, где R — радиус описанной окружности.

Новости науки

Новый вид радиоактивного распада

В природе есть много элементов, в основном тяжелых, которые самопроизвольно излучают альфа-частицы, бета-частицы и гамма-лучи.*) Эти элементы образуют три естественно-радиоактивных ряда (семейства), где каждый последующий член возникает в результате радиоактивного распада предыдущего.

Родоначальник одного ряда — это ядро $^{238}_{92}U$, изотопа урана с массовым числом 238 (семейство урана), другого — ядро тория $^{232}_{90}Th$ (семейство тория) и третьего — ядро изотопа урана $^{235}_{92}U$, называемого также актиноураном (семейство актиния). Заканчиваются все три ряда устойчивым ядром того или иного изотопа свинца.*)

В семействе, которое начинается с $^{235}_{92}U$, есть ядро изотопа радия, которое распадается с излучением альфа-частицы, превращаясь в ядро радона. За этим распадом следуют еще два аналогичных — превращение радона в полоний и полония в свинец:

$$^{223}_{88}Ra \xrightarrow{\alpha} {}^{219}_{86}Rn \xrightarrow{\alpha} {}^{215}_{84}Po \xrightarrow{\alpha} {}^{211}_{82}Pb.$$

Физиков давно интересовал вопрос — обязательно ли α-частицам вылетать по очереди или они могут объединиться в ядро углерода $^{12}_{6}C$ и вылететь одним большим «куском»? Этому процессу, естественно, мешает отсутствие в ядре радия готового ядра углерода. Впрочем, α-частица тоже не «заготовлена» заранее, а должна «собраться» перед самым вылетом из ядра. Оказывается, α-частице это сделать все же легче, чем ядру углерода, и до последнего времени никто не наблюдал вылета легкого ядра (кроме ядра атома гелия, то есть альфа-частицы) из тяжелого.

В 1940 году было открыто (К. А. Петржаком и Г. Н. Флёровым) спонтанное деление тяжелых ядер на два примерно одинаковых осколка, но это явление вовсе не похоже на вылет легкой частицы. Лишь совсем недавно был обнаружен новый вид радиоактивного распада, который происходит с излучением ядра углерода. Оказалось, что из радия действительно вылетают ядра углерода, причем не $^{12}_{6}C$, а $^{14}_{6}C$, так что три α-частицы прихватывают с собой еще два нейтрона. При этом, как показывает расчет, достигается максимальный выигрыш энергии — 32 МэВ. Если бы вылетало ядро изотопа $^{12}_{6}C$, то оно уносило бы меньше энергии — 28 МэВ.

Вероятность вылета ядра $^{14}_{6}C$ очень мала — она меньше вероятности α-распада радия в 10^{10} раз. Другими словами, одно ядро углерода вылетает на 10 миллиардов альфа-частиц. По оценкам вылет ядра $^{12}_{6}C$ еще менее вероятен (меньше еще в 10^6 раз). С такой же вероятностью должны вылетать ядра и других изотопов ($^{13}_{6}C$, $^{15}_{6}C$).

Можно с уверенностью сказать, что для физиков открылась новая область исследований.

Я. С.

*) Естественная радиоактивность была открыта в 1896 году.

*) Есть еще одно семейство — семейство нептуния, полученное искусственно. Его родоначальник — ядро нептуния $^{237}_{93}Np$, а конечный продукт — ядро висмута $^{209}_{83}Bi$.

Задачи

1. Какая ошибка допущена художником в заставке к вечерней телевизионной передаче «Спокойной ночи, малыши»?

2. Высота треугольника в 2 раза меньше его основания, а один из углов при основании равен 75°. Доказать, что треугольник равнобедренный.

3. Первокласснице Наташе было задано на дом выразить заданное целое число часов в секундах. Она красиво написала ответ в тетради и тут же закрыла ее. Прийдя в школу, Наташа обнаружила, что две цифры расползлись в кляксы. Ко всему, она еще забыла какое именно число часов нужно было выразить в секундах. Какие цифры нужно написать вместо клякс?

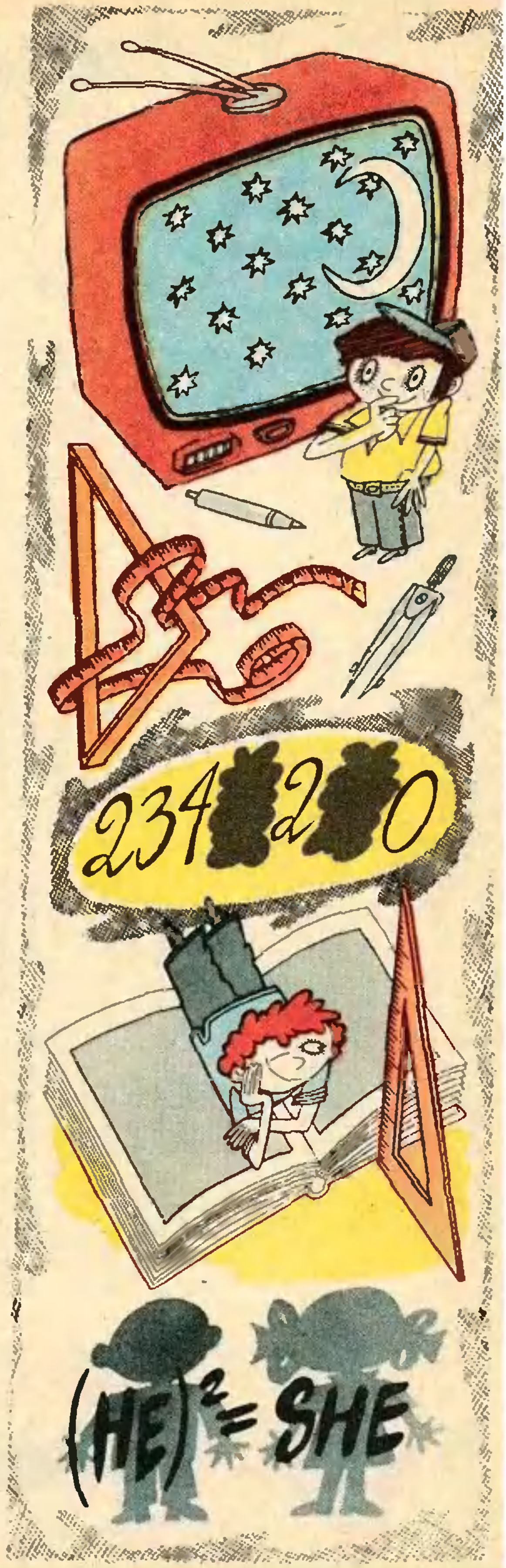
4. Слава взял у товарища книгу на три дня. В первый день он прочел полкниги, во второй — треть оставшихся страниц, а в третий день прочитал количество страниц, равное половине страниц, прочитанных за первые два дня. Успел ли Слава прочесть за три дня книгу?

5. Решите числовой ребус

$$(HE)^2 = SHE$$

(HE и SHE — это «он» и «она» по-английски).

Эти задачи нам предложили: ученик 5-го класса школы № 8 г. Мозыря *Саша Коршков*, *А. Н. Смоляков*, *Н. К. Антонович*, *В. Д. Вьюн*, *А. П. Савин*



Море слёз

Л. КЭРРОЛЛ

Мы завершаем краткий цикл публикаций отрывков из замечательной книги Л. Кэрролла «Алиса в стране чудес» ее второй главой («Море слез»), снабженной (как и первая в предыдущем номере «Кванта») вопросами и задачами. Мы возобновим подобные публикации, если первые две понравятся нашим читателям.

Вопрос 1

Приблизительно оцените, с какой скоростью изменился рост Алисы. Во сколько раз изменился её вес?

— Все страньше и страньше! — вскричала Алиса. От изумления она совсем забыла, как нужно говорить. — Я теперь открываюсь, словно подзорная труба. Прощайте, ноги!

(В эту минуту она как раз взглянула на ноги и увидела, как стремительно они уносятся вниз. Еще мгновение — и они скроются из виду.)

— Бедные мои ножки! Кто же вас будет теперь обувать? Кто натянет на вас чулки и башмаки? Мне же до вас теперь, мои милые, не достать. Мы будем так далеки друг от друга, что мне будет не до вас... Придется вам обходиться без меня...

В эту минуту она ударилась головой о потолок: ведь она вытянулась футов до девяти, не меньше. Тогда она схватила со стола золотой ключик и побежала к двери в сад.

Бедная Алиса! Разве могла она теперь пройти в дверцу? Ей удалось лишь заглянуть в сад одним глазком — и то для этого пришлось лечь на пол. Надежды на то, чтобы пройти в нору, не было никакой. Она уселась на пол и снова расплакалась.

когда я встала, я это была или не я? Кажется, уже не совсем я! Но если это так, то кто же я в таком случае? Все так сложно...

И она снова принялась перебирать в уме подружек, которые были с ней одного возраста. Может, она превратилась в одну из них?

— Во всяком случае, я не Ада! — сказала она решительно. У нее волосы вьются, а у меня нет. И уж, конечно, я не Мейбл. Я столько всего знаю, а она совсем ничего. И вообще, она это она, а я это я. Как все непонятно! А ну-ка, проверю, помню я то, что знала, или нет. Значит, так: четырежды пять — двенадцать, четырежды шесть — тринадцать, четырежды семь... Так я до двадцати никогда не дойду!

Ну ладно, таблица умножения это неважно. Попробую географию. Лондон — столица Парижа, а Париж столица Рима, а Рим... Нет, все не так, попробую прочитать «Дом который построил Джек...»

Она сложила руки на коленях, словно отвечала урок, и начала. Но голос ее зазвучал как-то странно, будто кто-то

Задача 2. Ада, Алиса и Мейбл однажды вышли на прогулку в белом, зеленом и синем платьях. Их туфли были одного из тех же цветов. Известно, что только у Алисы туфли были того же цвета, что и платье. У Ады ни платье, ни туфли не были белыми. Мейбл была в зеленых туфлях. Определить цвет платья каждой из девочек.

Задача 3. Возможны ли равенства, о которых говорит Алиса? И почему она никогда не дойдет до двадцати?

Задача 1. В темной комнате кролика в ящике лежат перчатки: 10 пар белых, 5 пар черных и 7 пар синих. Какое количество перчаток надо вынуть из ящика, чтобы среди них заведомо оказалась пара белых перчаток?

— Стыдись, — сказала себе Алиса немного спустя. — Такая большая девочка (тут она, конечно, была права),— и плачешь! Сейчас же перестань! Слышишь?

Но слезы лились ручьями, и вскоре вокруг нее образовалась большая лужа дюйма в четыре глубиной. Вода разлилась по полу и уже дошла до середины зала.

Немного спустя вдалеке послышался топот маленьких ног. Алиса торопливо вытерла глаза и стала ждать. Это возвращался Белый Кролик. Одет он был парадно, в одной руке держал пару лайковых перчаток, а в другой — большой веер.

На бегу он тихо бормотал про себя:

— Ах, боже мой, что скажет Герцогиня! Она будет в ярости, если я опоздаю! Просто в ярости!

Алиса была в таком отчаянии, что готова была обратиться за помощью к кому угодно. Когда Кролик поравнялся с нею, она робко прошептала:

— Простите, сэр...

Кролик подпрыгнул, уронил перчатки и веер, метнулся прочь и тут же исчез в темноте.

Алиса подняла веер и перчатки. В зале было жарко, и она стала обмахиваться веером.

— Нет, вы только подумайте! — говорила она, — Какой сегодня день странный! А вчера все шло как обычно. Может, это я изменилась за ночь? Дайте-ка вспомнить: сегодня утром, другой хрипло произносил за нее совсем другие слова...

— Слова совсем не те, — сказала бедная Алиса, и глаза у нее снова наполнились слезами. — Значит, я все-таки Мейбл! Придется мне теперь жить в этом старом домишке. И игрушек у меня совсем не будет. Зато уроки надо будет учить без конца. Ну что ж, решено: если я Мейбл, останусь здесь навсегда. Пусть тогда попробуют прийти сюда за мной! Свесят головы вниз, станут звать: «Подымайся, милочка, к нам! А я на них только посмотрю и отвечу: «Скажите мне сначала, кто я? Если мне это понравится, я поднимусь, а если нет — останусь здесь, пока не превращусь в кого-нибудь другого!

Тут слезы брызнули у нее из глаз.

— Почему за мной никто не приходит? Как мне надоело сидеть здесь одной!

С этими словами Алиса глянула вниз и, к своему удивлению, заметила, что, пока говорила, натянула на одну руку крошечную перчатку Кролика.

«Как это мне удалось? — подумала она. — Видно, я опять уменьшаюсь».

Алиса встала и подошла к столику, чтобы выяснить, какого она теперь роста. Судя по всему, в ней было не больше двух футов, и она продолжала стремительно уменьшаться. Вскоре она поняла, что виной тому веер, который она держала в руках, и тут же швырнула его на пол. И хорошо сделала, а то могла бы и вовсе исчезнуть.

Вопрос 2

Как, по вашему, должен был измениться голос у «выросшей» Алисы?

Переверни страницу

Продолжение

Вопрос 3

Какие части железнодорожных вагонов движутся в направлении, противоположном направлению движения поезда?

Задача 4. А на станции — часы, которые стоят (см. рисунок), причем стрелки образуют равные углы с линией, соединяющей их ось с цифрой 6. В котором (точно) часу остановились часы?

Вопрос 4

Во сколько раз больше может наплакать слез «большая» Алиса по сравнению с «маленькой»? Можно ли в такой луже утонуть?

— Уф, едва спаслась! — сказала Алиса, испуганная столь внезапной переменой, но радуясь, что уцелела. — А теперь — в сад!

И она подбежала к дверце. Но увы! Дверца опять была заперта, а золотой ключик так и лежал на стеклянном столе.

«Час от часу не легче! — подумала бедная Алиса. — Такой крошкой я еще не была ни разу! Плохо мое дело! Хуже некуда...»

Тут она поскользнулась и — бух! — шлепнулась в воду. Вода была соленая на вкус и доходила ей до подбородка. Сначала она подумала, что каким-то образом упала в море.

«В таком случае, — подумала она, — можно уехать по железной дороге».

Алиса всего раз в жизни была на взморье, и потому ей казалось, что всё там одинаково: в море — кабинки для купания, на берегу — малыши с деревянными лопатками строят замки из песка; потом — пансионы, а за ними — станция.

Вскоре, однако, она поняла, что упала в лужу слез, которую сама же и наплакала, когда была ростом в девять футов.

«Ах, зачем я так ревела! — подумала Алиса, плавая кругами и пытаясь понять, в какой стороне берег. — Вот глупо будет, если я утону в собственных слезах. И поделом мне! Конечно, это было бы очень странно. Впрочем, сегодня все странно».

— Ой, простите! — закричала Алиса, видя, что обидела бедного зверька. — Я забыла, что вы не любите кошек.

— Не люблю кошек! — вскричала пронзительно Мышь. — А ты бы их на моем месте любила?

— Наверное, нет! — попробовала успокоить ее Алиса. — Прошу вас, не сердитесь! Жаль, что я не могу показать вам нашу Дину. Если б вы только ее увидели, вы бы, мне кажется, полюбили кошек. Она такая милая, такая спокойная, — задумчиво продолжала Алиса, лениво плавая в соленой воде. — Сидит себе у камина, мурлычет и умывается. И такая мягкая, так и хочется погладить. А как она ловит мышей!... Ах, простите! Простите, пожалуйста!

Шерстка у Мыши стала дыбом. Алиса поняла, что оскорбила ее до глубины души.

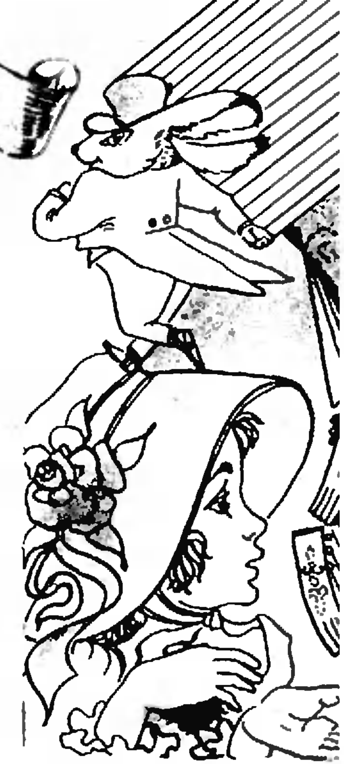
— Если вам неприятно, не будем больше об этом говорить! — сказала Алиса.

— Не будем? — вскричала Мышь, трепеща от головы до самого кончика хвоста. — Можно подумать, что я завела этот разговор! У нас в семье всегда ненавидели кошек. Низкие, гадкие, вульгарные твари. Слышать о них не желаю!

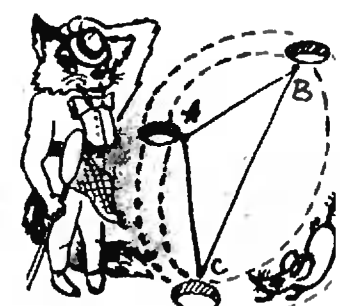
— Хорошо, хорошо! — сказала Алиса, торопясь перевести разговор. — А... собак... вы любите?

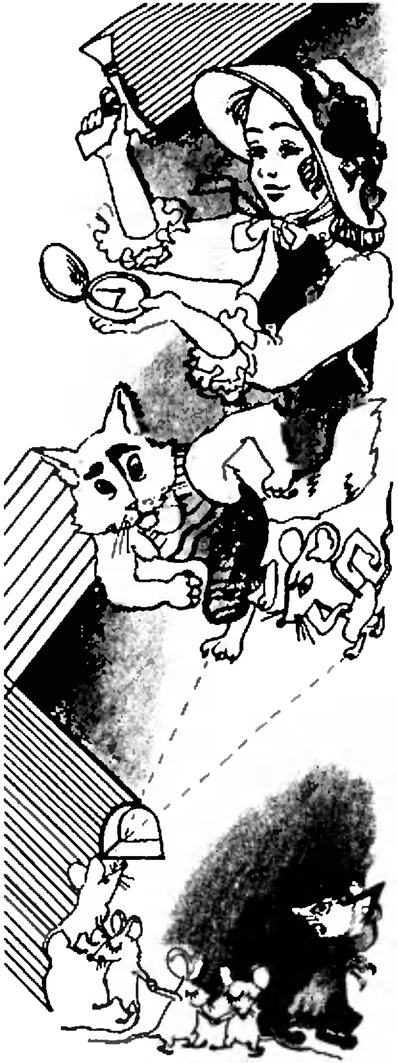
Мышь промолчала.

— Рядом с нами живет такой милый



Задача 6. В одной из тр норок *A*, *B*, *C* сидит мышка (р сунок). Кошка хочет распол житься так, чтобы наибольш из расстояний от нее до нор было наименьшим. Как она э может сделать?





Задача 5. Мышке до норки 20 шагов. Кошке до мышки 5 прыжков. За один прыжок кошки мышка делает 3 шага. Один прыжок кошки равен 10 шагам мышки. Догонит ли кошка мышку?

Тут она услышала какой-то плеск неподалеку и поплыла туда, чтобы узнать, кто это там плещет. Сначала она решила, что это морж или гиппопотам, но потом вспомнила, какая она теперь крошка, и вглядевшись, увидала всего лишь мышь, которая, видно, также упала в воду.

«Заговорить с ней или нет? — подумала Алиса. — Сегодня все так удивительно, что, возможно, и она умеет говорить. Во всяком случае, попытаться стоит».

И она начала:

— О Мышь! Не знаете ли вы, как выбраться из этой лужи? Мне так надоело здесь плавать, о Мышь!

Алиса считала, что именно так и следует обращаться к мышам.

Мышь взглянула на нее с недоумением и легонько ей подмигнула (так, во всяком случае, показалось Алисе), но не сказала в ответ ни слова.

«Может, она по-английски не понимает? — подумала Алиса. — Вдруг она француженка родом? Приплыла вместе с Вильгельмом Завоевателем...»

Хоть Алиса и гордилась своим знанием истории, она не очень ясно представляла себе, что когда происходило.

В учебнике французского языка первой стояла фраза: «Где моя кошка?» Эту фразу она и произнесла по-французски.

Мышь рванулась из воды и вся затрепетала от ужаса.

— Простите! — быстро сказала Алиса. — Мне бы очень хотелось вас с ним познакомить! Маленький терьер. Глаза у него блестящие, а шерстка коричневая, длинная и волнистая! Бросишь ему что-нибудь, он тотчас несет назад, а потом сядет на задние лапки и просит, чтобы ему дали косточку. Чего только он ни делает — всего не упомнишь! Хозяин у него фермер, он говорит: этому песику цены нет! Он всех крыс перебил в округе и всех мыш... Ах, боже мой! — грустно промолвила Алиса. — По-моему, я ее опять обидела!

Мышь изо всех сил плыла от нее прочь, по воде даже волны пошли.

— Мышка, милая! — ласково закричала ей вслед Алиса. — Прошу вас, вернитесь. Если кошки и собаки вам не по душе, я о них больше ни слова не скажу!

Услышав это, Мышь повернула и медленно поплыла назад. Она страшно побледнела («От гнева!» — подумала Алиса.)

— Вылезем на берег, — сказала Мышь тихим, дрожащим голосом, — и я расскажу тебе мою историю. Тогда ты поймешь, за что я ненавижу кошек и собак.

И в самом деле надо было вылезать. В луже становилось все теснее от всяких птиц и зверей, упавших в нее. Там были Робин Гусь, Птица Додо, Попугайчик Лори, Орленок Эд и всякие другие удивительные существа. Алиса поплыла вперед, и все потянулись за ней к берегу.

Задача 7. Отгадайте числовой ребус

$(л+о+р+и)^4=лори$.

Задача 8. Поезд длиной 18 м проезжает мимо столба за 9 секунд. За сколько времени он проедет через мост длины 36 м.

задачник Кванта

Задачи

М876—М880; Ф888—Ф892

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 октября 1984 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 8 — 84» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М876, М877» или «Ф888». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М876—М880 предлагались на заключительном туре юбилейной 50-й ленинградской городской олимпиады.

Задача Ф892 предлагалась на Всесоюзной физической олимпиаде (апрель 1984, г. Ереван).

М876. На окружности, касающейся сторон угла с вершиной O, выбраны две диаметрально противоположные точки A и B (отличные от точек касания). Касательная к окружности в точке B пересекает стороны угла в точках C и D, а прямую OA — в точке E (рис. 1). Докажите, что длины отрезков BC и DE равны.

А. С. Меркурьев

М877. Из листа клетчатой бумаги размерами 29×29 клеток вырезали 99 квадратиков размерами 2×2 каждый. Докажите, что из него можно вырезать еще один такой квадратик.

С. В. Фомин

М878. Докажите, что если сумма плоских углов при вершине пирамиды больше 180°, то каждое боковое ребро пирамиды меньше полупериметра ее основания.

Ю. И. Ионин, А. В. Смирнов

М879. Про пять целых чисел a, b, c, d, e известно, что суммы $a+b+c+d+e$ и $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ делятся на нечетное число p. Докажите, что число

$$a^5+b^5+c^5+d^5+e^5-5abcde$$

также делится на p.

С. В. Фомин

М880*. В последовательности 1, 0, 1, 0, 1, 0,... каждый член, начиная с седьмого, равен последней цифре сумме шести предыдущих. Докажите, что в этой последовательности не встретятся подряд шесть чисел ..., 0, 1, 0, 1, 0, 1,...

А. С. Меркурьев

Ф888. На рисунке 2 изображена принципиальная схема гравиметра — прибора для измерения вариаций ускорения свободного падения g. В теплоизолированных газовых баллонах *1* и *2* давления соответственно $p_1\approx2\cdot10^4$ Па и $p_2\approx$ $\approx3\cdot10^4$ Па. Цилиндрические сосуды A и B радиуса 10 см и соединяющая их трубка заполнены ртутью. Поверх ртути налита очень легкая жидкость (толуол); эта жидкость заполняет также частично капилляры радиуса 1 мм, соединяющие сосуды A и B с баллонами *1* и *2*. Опишите процесс измерения вариаций ускорения g с помощью этого прибора. Какова величина вариаций g, которые можно зарегистриро-

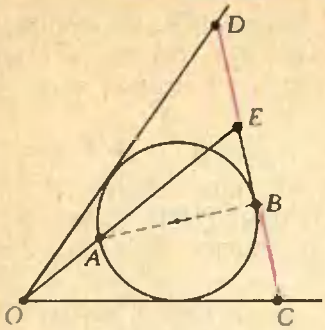


Рис. 1.

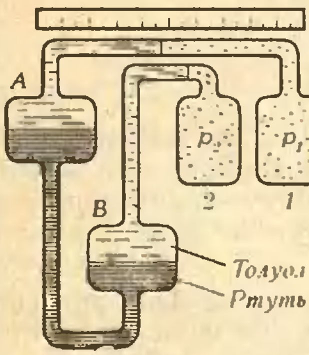


Рис. 2.

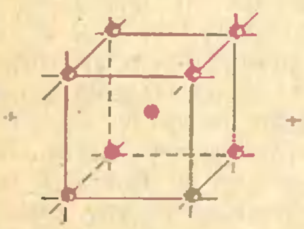


Рис. 3.

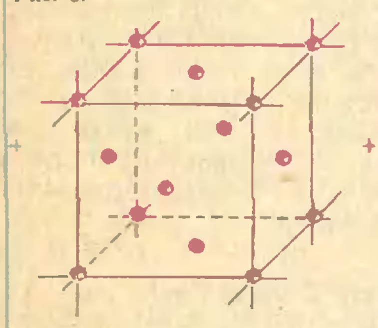


Рис. 4.

вать этим гравиметром, если известно, что при измерениях в разных пунктах изменения разности горизонтальных смещений толуола в капиллярах могут достигать нескольких миллиметров (до 1 см)? Температура во время разных измерений поддерживается постоянной; плотность ртути $\rho=13,5\times\times10^3$ кг/м^3.

Ю. М. Брук

Ф889. Солнце находится на угловой высоте φ над горизонтом. Под каким углом к поверхности Земли нужно бросить тело в вертикальной плоскости, проходящей через Солнце, чтобы тень тела прошла наибольший путь по Земле?

В. А. Нахшин

Ф890. Кристаллы железа при температуре до 910 °C состоят из элементарных ячеек, имеющих форму куба с длиной ребра $a_1=2,87\cdot10^{-10}$ м. Атомы железа располагаются в вершинах куба и в его центре (рис. 3). Такая разновидность элемента — с объемноцентрированной кубической решеткой — называется альфа-железом (Fe_α). При температуре выше 910 °C ячейки кристалла железа представляют собой гранецентрированный куб с длиной ребра $a_2=3,63\cdot10^{-10}$ м. Атомы располагаются в вершинах куба и в центрах его граней (рис. 4). Такая разновидность элемента называется гамма-железом (Fe_γ). Одинакова ли плотность железа в этих состояниях? Относительная атомная масса железа $\mu=55,847$.

И. М. Низамов

Ф891. Как изменится электроемкость проводящей сферы, если в ней сделать вмятину?

Р. Л. Энфиаджян

Ф892. На стеклянный шарик радиуса R падает луч света, направленный вдоль радиуса. На расстоянии r от центра шарика свет рассеивается равномерно по всем направлениям на маленьком воздушном пузырьке, образовавшемся при изготовлении шарика. Определить зависимость доли выходящего из шарика света от r. Показатель преломления стекла n. Потерями света в стекле пренебречь.

А. А. Лапидес

Problems

M876—M880; P888—P892

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who propo-

M876. Diametrically opposed points A and B are chosen on a circle which touches the sides of an angle with vertex O (neither A nor B is a tangency point). The tangent to the circle at B intersects the angle's sides at the points C and D and the line OA at E. Prove that the segments BC and DE are of equal length (see figure Рис. 1).

A. S. Merkuriev

sed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than October 31st, 1984, to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант».
Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfaddressed envelope — we shall use in to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).
Problems M876—M880 were proposed at the final round of the 50th Leningrad city olympiad.
Problem P892 was proposed at the All-Union physics olympiad (April 1984, Erevan).

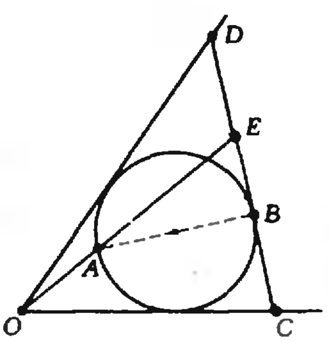


Рис. 1.

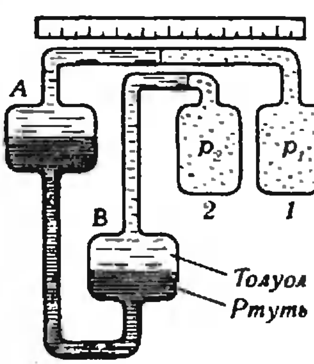


Рис. 2.

M877. In a 29 by 29 square of lined paper, 99 squares, each of which consists of 4 little squares, have been cut out. Prove that one more 2 by 2 square may be cut out.

S. V. Fomin

M878. Prove that if the sum of plane angles at the summit of a pyramid is more than 180°, then each lateral edge of the pyramid is shorter than half the perimeter of its base.

Yu. I. Ionin, A. V. Smirnov

M879. The five integers a, b, c, d, e are chosen so that $a+b+c+d+e$ and $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$ are divisible by the odd number p. Prove that

$$a^5+b^5+c^5+d^5+e^5-5abcde$$

is also divisible by p.

S. V. Fomin

M880. In the sequence 1,0,1,0,1,0,... each term, beginning with the seventh, equals the last digit of the sum of the previous six terms. Prove that the numbers 0,1,0,1,0,1 do not appear in that order in the sequence.

A. S. Merkuriev

P888. Figure Рис. 2 shows the working principle of a gravimeter — an apparatus for measuring variations in the acceleration g of freely falling bodies. The pressure in the two thermoisolated gaz balloons *1* and *2* is, respectively, $p_1 \approx 2 \cdot 10^4$ Pa and $p_2 \approx 3 \cdot 10^4$ Pa. The cylindrical receptacles *A* and *B*, of radius 10 cm, and the pipe joining them are filled with mercury, with a very light liquid (toluol) added above the mercury; this liquid partially fills the capillaries of radius 1 mm joining the receptacles *A* and *B* with the balloons *1* and *2*. Describe the measurement process of the variations of g by means of this apparatus. What smallest variation of g can be registered by the gravimeter, if it is known that the changes in the difference between the horizontal displacements of the toluol level in the capillaries may reach the magnitude of a few millimeters (<1 cm) in the different locations where the measurements take place? The temperature during different measurements is always the same; the density of mercury is $\rho = 13{,}5 \cdot 10^3$ kg/m³.

Yu. M. Bruk

P889. The sun is at the angle φ above the horizon. At what angle to the Earth's surface must a body be thrown (in the vertical plane passing through the sun) so that the shadow of the body covers the longest possible path along the Earth surface?

V. A. Nakhshin

P890. The crystallic structure of iron at temperature 910 °C consists of elementary cube-shaped cells with edge $a_1 = 2{,}87 \cdot 10^{-10}$ m. The ferrum atoms are located at the vertices of the cube and in its centre (figure Рис. 3). Such a state of iron — with "volume-centered" cubic structure — is called α-iron (Fe_α). At temperatures above 910 °C the iron crystalls become "face-centered" cubes of edge $a_2=3{,}63\cdot10^{-10}$ m, the Fe atoms now being located at the vertices of the cube and at the centres of its faces (figure Рис. 4). Iron in this state is called γ-iron (Fe_γ). Is the density of iron the same in these two states? The relative atom mass of iron is $\mu=55{,}847$.

I. M. Nizamov

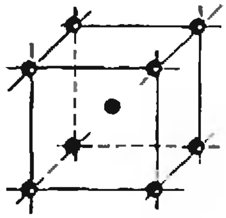


Рис. 3

P891. How will the electric capacity of a conducting sphere change if we make a dent in it?

R. L. Enfiadjan

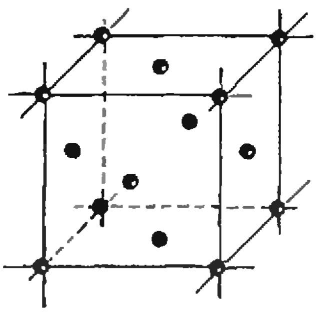


Рис. 4

P892. A ray of light falls along a diameter on a glass ball of radius R. At the distance r from the ball's centre the ray is dissipated uniformly in all direction by a little air bubble in the glass. Find how the amount of light leaving the glass ball depends on r. The refraction coefficient of glass is n. Light losses within the glass are negligible.

A. A. Lapides

Решения задач

М861 — М865; Ф873 — Ф877

М861. *Докажите, что из любых n чисел можно выбрать несколько (быть может, одно) так, что сумма выбранных чисел отличается от ближайшего к ней целого числа не более, чем на $1/(n+1)$.*

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — данные числа, $b_1=\{a_1\}$, $b_2=\{a_1+a_2\}$, ..., $b_n=\{a_1+a_2+\ldots+a_n\}$ ($\{x\}$ — дробная часть x). Все числа $b_1, \ldots, b_n$ лежат в промежутке $[0;1[$. Разделим его на $n+1$ равных промежутков $\Delta_0=[0;1/(n+1)[$, $\Delta_1=[1/(n+1);\ 2/(n+1)[$, ..., $\Delta_n=[n/(n+1);1[$. Если хотя бы одно из чисел b_i попадет в один из крайних промежутков Δ_0 или Δ_n, то утверждение задачи, очевидно, будет выполнено для суммы $a_1+\ldots+a_i$. В противном случае в $n-1$ промежутках $\Delta_1, \ldots, \Delta_{n-1}$ будет расположено n точек $b_1, \ldots, b_n$, поэтому хотя бы в одном из них окажутся две точки, b_k и b_l. Пусть $k>l$, тогда

$$a_{l+1}+a_{l+2}+\ldots+a_k=(a_1+\ldots+a_k)-(a_1+\ldots+a_l)= \\ =\text{целое число}+(b_k-b_l),$$

то есть $a_{l+1}, \ldots, a_k$ — искомые числа (ибо $|b_k-b_l|<1/(n+1)$).

Легко видеть, что число $1/(n+1)$ в условии уменьшить нельзя — достаточно взять все числа равными $1/(n+1)$.

С. Ю. Оревков

◆

М862. *а) Внутри данного правильного треугольника укажите множество всех точек M таких, что расстояния от M до его сторон сами служат длинами сторон некоторого треугольника.*
б) Внутри данного правильного тетраэдра укажите множество всех точек M таких, что расстояние от M до граней тетраэдра служат длинами сторон некоторого четырехугольника.

а) Ответ: искомое множество — это внутренность треугольника, ограниченного средними линиями данного треугольника (рис. 1).

Пусть $d_a=d_1$, d_b, d_c — расстояния от точки M до сторон BC, CA, AB данного правильного треугольника ABC. Для существования треугольника со сторонами длин d_a, d_b и d_c необходимо и достаточно выполнения трех неравенств: $d_a<d_b+d_c$, $d_b<d_a+d_c$ и $d_c<d_a+d_b$, или $d_a<d/2$, $d_b<d/2$, $d_c<d/2$, где $d=d_a+d_b+d_c$, но d — это длина высоты треугольника ABC (если l — длина стороны треугольника, то $ld/2=(ld_a+ld_b+ld_c)/2=S_{MBC}+S_{MCA}+S_{MAB}=S_{ABC}$).

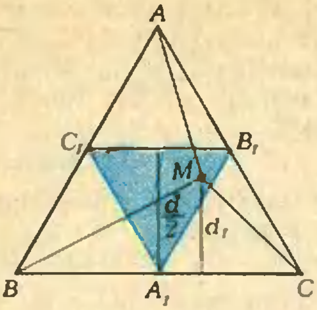


Рис. 1.

Поэтому условие $d_a<d/2$ определяет в треугольнике ABC трапецию BCB_1C_1, отсекаемую от него средней линией B_1C_1 (сам отрезок B_1C_1 при этом исключается). Аналогичные трапеции задаются и двумя другими неравенствами, а пересечение этих трех трапеций и есть внутренность треугольника $A_1B_1C_1$.

б) Ответ: искомое множество — это внутренность правильного октаэдра с вершинами в серединах ребер данного тетраэдра (рис. 2).

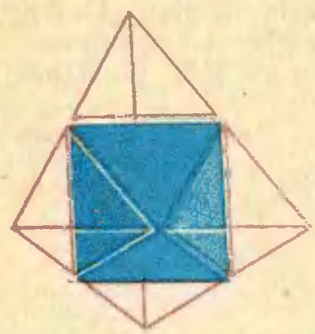


Рис. 2.

Повторяя ход решения задачи а), разобьем данный тетраэдр T на четыре тетраэдра, основаниями которых служат грани данного, а вершины расположены в точке M. Пусть d_1, d_2, d_3, d_4 — их высоты, то есть расстояния от точки M до граней тетраэдра T, тогда сумма их объемов равна $(d_1S+d_2S+d_2S+d_4S)/3$ (где S — площадь грани данного тетраэдра), следовательно, $d=d_1+d_2+d_3+d_4$ — это высота тетраэдра T. Для того чтобы из отрезков длин d_1, d_2, d_3, d_4 можно было составить четырехугольник, каждая из этих длин должна быть меньше $d/2$ (скажем, неравенство $d_1<d/2$ эквивалентно $d_1<d_2+d_3+d_4$). Очевидно, каждое из неравенств «отсекает» от тетраэдра вдвое меньший тетраэдр (тетраэдры с красными ребрами на рисунке 2). После четырех «отсечений» останется правильный октаэдр.

Обратно, для любой точки внутри этого октаэдра будут выполнены неравенства $d_i<d/2$, поэтому из отрезков длин d_1, d_2, d_3, d_4 можно составить четырехугольник. (Действительно, пусть $d_1>d_2>d_3>d_4$; интервалы $]d_1-d_2,\ d_1+d_2[$ и $]d_3-d_4,\ d_3+d_4[$ содержат общую точку l, так как $d_1-d_2<d_3+d_4<d_1+d_2$; теперь нужный четырехугольник можно получить, приставляя друг к другу треугольники со сторонами d_1, d_2, l и d_3, d_4, l.)

Э. А. Ясиновый

M863. *В каждой клетке доски $n\times n$ стоит по фишке. Можно ли переставить их так, чтобы любые две фишки, угрожавшие друг другу ходом коня, после перестановки стали угрожать друг другу ходом короля, если а) $n=3$, б) $n=6$, в) $n=4$?*

◆

а) Ответ: можно. Требуемая перестановка изображена на рисунке 1.

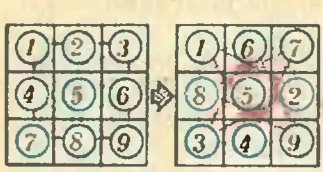


Рис. 1.

б) Ответ: нельзя. Для доказательства введем два «расстояния» между клетками доски: $d_1(a, b)$ — наименьшее число ходов коня, необходимых для перехода из клетки a в клетку b, $d_2(a, b)$ — аналогичное число для ходов короля. Обозначим через a' и b' клетки, на которые попадают фишки из клеток a и b после перестановки. Тогда рассматриваемое в задаче условие, очевидно, влечет неравенство $d_1(a, b)\geqslant d_2(a', b')$. Если a' и b' — противоположные угловые клетки, то (при $n=6$) $d_2(a', b')=5$, но для любых двух клеток a и b $d_1(a, b)\leqslant 4$. В этом можно убедиться непосредственно, причем достаточно рассмотреть случай, когда a — угловая клетка (например, d_1-расстояние между голубыми клетками на рисунке 2 заведомо не превосходит d_1-расстояния между розовыми клетками; цифры на этом рисунке равны d_1-расстояниям от соответствующих клеток до левой нижней).

3	4	3	4	3	4
2	3	2	3	4	3
3	2	3	2	3	4
2	1	4	3	2	3
3	4	1	2	3	4
0	3	2	3	2	3

Рис. 2.

5		3	
		4	3
3	4		
a_1	3		5

	3		3
			4
	3		
3	a_1	3	

			4
	3		
3	a_1	3	
4	3		

Рис. 3.

Точно так же рассматривается случай любого $n>6$: можно показать, что наибольшее значение $d_1(a, b)$ для доски $n\times n$ равно $[2(n+1)/3]$ (при $n\geqslant 5$)*), то есть м е н ь ш е, чем $n-1$ — d_2-расстояние между противоположными углами.

в) О т в е т: нельзя. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 — поля, на которых стояли фишки, попавшие после перестановки в углы доски. Тогда $d_1(a_i, a_j)\geqslant 3$ при $1\leqslant i<j\leqslant 4$ (см. пункт б)). На рисунке 3 для трех существенно различных положений (с учетом симметрий) клетки a_1 отмечены клетки, расположенные на d_1-расстоянии 3, 4 или 5 от a_1. Пользуясь этим рисунком, нетрудно проверить прямым перебором, что ни в одном из случаев нельзя подыскать клетки a_2, a_3, a_4 с соблюдением условия $d_1(a_i, a_j)\geqslant 3$.

Аналогично доказывается, что и при $n=5$ требуемой перестановки не существует.

С. Стефанов

М864. *Назовем «красивым» разбиение треугольника на подобные ему треугольники, никакие два из которых не равны по размерам.*

а) Докажите, что для всякого прямоугольного треугольника существует красивое разбиение.

б) Можно ли устроить красивое разбиение равностороннего треугольника?*

в) Для каких неравносторонних треугольников существует красивое разбиение?

◆

а) Красивое разбиение неравнобедренного прямоугольного треугольника (это самый простой случай) показано на рисунке 1, *а*, равнобедренного — на рисунке 1, *б*.

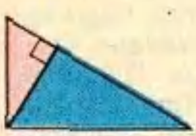


Рис. 1,а.

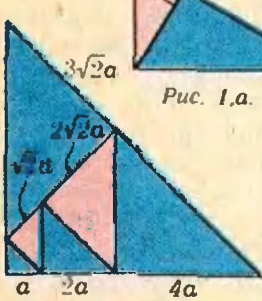


Рис. 1,б.

б) О т в е т: нельзя. Доказательство проведем от противного. Допустим, что красивое разбиение равностороннего треугольника $\triangle$ существует, и оценим число N «внутренних» сторон составляющих его треугольников, то есть сторон, лежащих внутри треугольника $\triangle$. Концы этих сторон (вершины треугольников разбиения) бывают трех типов:

1-й т и п — точки, лежащие внутри сторон треугольника (пример — точка A на рисунке 2, *а*); из каждой такой точки выходят 4 внутренние стороны (AB, AC, AD и AE на рисунке);

2-й т и п — точки внутри треугольника $\triangle$, в которых сходятся 6 треугольников разбиения; из такой точки выходят 12 внутренних сторон (рис. 2,*б*);

3-й т и п — точки, лежащие внутри какой-либо стороны треугольника разбиения (рис. 2, *в*); такая точка служит концом для 6 внутренних сторон.

Обозначим число точек каждого типа через n_1, n_2, n_3 соответственно. Поскольку каждая сторона имеет два конца, число внутренних сторон равно

$$N=\frac{1}{2}(4n_1+12n_2+6n_3)=2n_1+6n_2+3n_3.$$

В то же время, каждой точке A 3-го типа можно сопоставить три внутренние стороны: сторону s, внутри которой лежит точка A, и две примыкающие к s стороны, выходящие из вершины A (на рис. 2, *в* точке A сопоставляются стороны $s=BC$, AD и AE). При этом к а ж д а я внутренняя сторона будет

*) См. статью Д. Коэна «Метрика коня» («Квант», 1981, № 10, с. 13).

сопоставлена хотя бы одной точке 3-го типа — в противном случае внутри этой стороны нет вершин разбиения и сама она не содержится ни в какой большей стороне, а значит, она является общей для двух треугольников разбиения; но это невозможно, так как треугольники разбиения не должны быть равными. Отсюда следует, что $N \leqslant 3n_3$, то есть $2n_1+6n_2+3n_3 \leqslant 3n_3$, или $2n_1+6n_2 \leqslant 0$ и, таким образом, $n_1=n_2=0$. Но если на сторонах исходного треугольника $\triangle$ нет вершин разбиения ($n_1=0$), то нет и разбиения, как такового, — оно состоит из одного треугольника $\triangle$.

в) Ответ: красивое разбиение имеется у любого неравностороннего треугольника. Его построение показано на рисунке 3 (равные углы отмечены на рисунке дужками одного цвета).

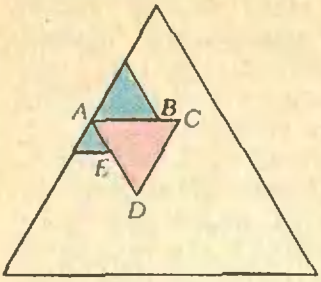


Рис. 2.а.

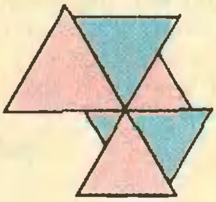


Рис. 2.б.

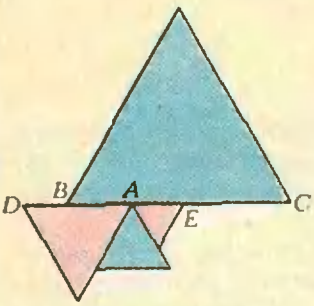


Рис. 2.в.

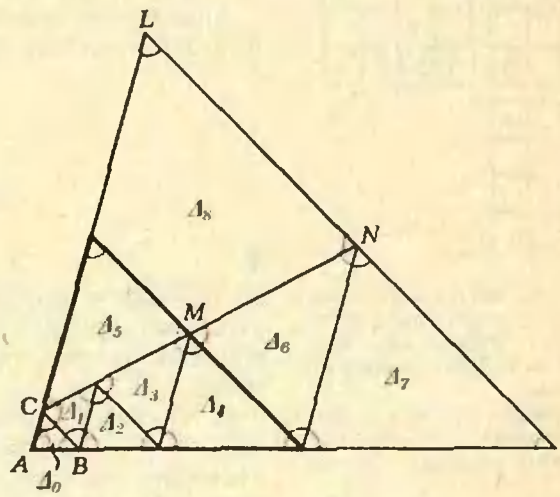


Рис. 3.

Удобно решать как бы обратную задачу: дополнить заданный треугольник ABC до большего подобного ему треугольника другими подобными ему и попарно различными треугольниками. Очевидно, эта задача эквивалентна исходной. Пусть для определенности $|BC|:|AC|=k>1$. Пристроим к треугольнику $\triangle_0=ABC$ подобные треугольники $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$ и $\triangle_5$ в соответствии с рисунком 3. Легко видеть, что при этом коэффициент подобия треугольников $\triangle_{n+1}$ и $\triangle_n$ для $n=0, 1, 2, 3$ равен k, поэтому коэффициент подобия треугольников $\triangle_0$ и $\triangle_n$ при $n=1, 2, 3, 4$ равен k^n, а $\triangle_5$ и $\triangle_0$ — $|CM|:|AB|=(|CK|+|CM|):|AB|=k+k^3$. Отсюда ясно, что единственной парой конгруэнтных треугольников здесь могут быть только $\triangle_5$ и $\triangle_4$ — если $k+k^3=k^4$. В последнем случае дополним конструкцию треугольниками $\triangle_6$, $\triangle_7$, а $\triangle_5$ заменим на $\triangle_8=CNL$ (см. рис. 3). Снова единственной парой конгруэнтных треугольников среди $\triangle_0$, $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$, $\triangle_4$, $\triangle_6$, $\triangle_7$ и $\triangle_8$ могут быть только $\triangle_8$ (подобный $\triangle_0$ с коэффициентом $|CN|:|AB|=k+k^3+k^5$) и $\triangle_7$ (подобный $\triangle_0$ с коэффициентом k^6). Но если $k+k^3=k^4$, то

$k+k^3+k^5>k^3+k^5=k^2(k+k^3)=k^6$, а значит Δ_7 и Δ_8 не конгруэнтны.

Итак, любой неравносторонний треугольник имеет красивое разбиение (на 6 или 8 треугольников).

А. В. Савкин

◆

М865. *Обозначим через $[a, b]$ наименьшее общее кратное целых чисел a и b. Докажите, что для любых $n+1$ чисел $a_0<a_1<\ldots<a_n$ выполнено неравенство*

$$\frac{1}{[a_0, a_1]}+\frac{1}{[a_1, a_2]}+\ldots+\frac{1}{[a_{n-1}, a_n]}\leqslant 1-\frac{1}{2^n},$$

если а) $n=2$; б) $n=3$; в) n — любое натуральное число.*

При небольших n задачу можно решить с помощью перебора.

а) Так как $[a, b]\geqslant 2a$ при $a<b$, и $a_0\geqslant 1$, $a_1\geqslant 2$, справедливы неравенства $\frac{1}{[a_0, a_1]}\leqslant\frac{1}{2}$, $\frac{1}{[a_1, a_2]}\leqslant\frac{1}{4}$ и $\frac{1}{[a_0, a_1]}\leqslant\frac{1}{[a_0, a_1]}+\frac{1}{[a_1, a_2]}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$.

б) Если $a_2\geqslant 4$, то, как и в пункте а), $\frac{1}{[a_0, a_1]}\leqslant\frac{1}{2}$, $\frac{1}{[a_1, a_2]}\leqslant\frac{1}{4}$, $\frac{1}{[a_2, a_3]}\leqslant\frac{1}{8}$, если же $a_2=3$, то $a_0=1$, $a_1=2$, $[a_0, a_1]=2$, $[a_1, a_2]=6$, $[a_2, a_3]\geqslant 6$, и $\frac{1}{[a_0, a_1]}+\frac{1}{[a_1, a_2]}+\frac{1}{[a_2, a_3]}\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{6}<\frac{7}{8}$.

в) Доказательство проведем методом математической индукции. При $n=1$ наше неравенство очевидно. Допустим теперь, что оно справедливо при $n=k$ и докажем его для $n=k+1$. Рассмотрим два случая

1) Пусть $a_{k+1}\geqslant 2^{k+1}$, тогда $[a_k, a_{k+1}]\geqslant a_{k+1}\geqslant 2^{k+1}$ и по предложению индукции

$$\left(\frac{1}{[a_0, a_1]}+\ldots+\frac{1}{[a_{k-1}, a_k]}\right)+\frac{1}{[a_k, a_{k+1}]}\leqslant$$
$$\leqslant\left(1-\frac{1}{2^k}\right)+\frac{1}{2^{k+1}}=1-\frac{1}{2^{k+1}}.$$

2) В случае, когда $a_{k+1}<2^{k+1}$, воспользуемся тождеством $[a, b]=ab/(a, b)$, где (a, b) — наибольший общий делитель чисел a и b. Поскольку $b-a$ делится на (a, b), и следовательно, $(a, b)\leqslant b-a$ (при $b>a$), из этого тождества вытекает, что $1/[a, b]\leqslant(b-a)/ab=1/a-1/b$. Поэтому

$$\frac{1}{[a_0, a_1]}+\frac{1}{[a_1, a_2]}+\ldots+\frac{1}{[a_k, a_{k+1}]}\leqslant\left(\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_1}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}\right)=\frac{1}{a_0}-\frac{1}{a_{k+1}}<1-\frac{1}{2^{k+1}},$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что указанная оценка точная: при любом n равенство достигается для последовательности $a_0=1$, $a_1=2$, ..., $a_n=2^n$.

Б. М. Ивлев

◆

Ф873. *Вымпел на мачте корабля образует угол 60° с курсом корабля при его скорости 20 км/ч. Не меняя курса, корабль увеличил скорость в 2 раза, и угол стал равным 30°. Найти по этим данным скорость ветра (считая ее неизменной). При какой скорости корабля угол станет равным 90°?*

Вымпел на мачте корабля показывает направление вектора $\vec{u}+\vec{v}$, где $\vec{v}$ — вектор скорости корабля (он определяет курс корабля), $\vec{u}$ — вектор скорости ветра.

Спроектируем вектор $\vec{u}$ на направление курса корабля и на направление, перпендикулярное курсу. Пусть u_1 и u_2 — абсолютные значения соответствующих проекций. Поскольку направление ветра нам неизвестно, мы можем в общем случае записать следующие соотношения:

при скорости корабля $|\vec{v}|=20$ км/ч —

$$\frac{\pm u_2}{v \pm u_1}=\operatorname{tg} 60^\circ=\sqrt{3}, \qquad (1)$$

при скорости корабля $2|\vec{v}|=40$ км/ч —

$$\frac{\pm u_2}{2v \pm u_1}=\operatorname{tg} 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{3}. \qquad (2)$$

Решив совместно уравнения (1) и (2), найдем

$$u_1=\frac{1}{2}v, \quad u_2=\frac{\sqrt{3}}{2}v.$$

Отсюда можно найти модуль вектора скорости ветра:

$$|\vec{u}|=\sqrt{u_1^2+u_2^2}=|\vec{v}|=20 \text{ км/ч}.$$

Направление вектора $\vec{u}$ по этим данным найти нельзя, но можно сказать, что угол α, который образует вектор скорости ветра с курсом корабля, с точностью до знака определяется условием

$$\operatorname{tg} \alpha=\pm\frac{u_2}{u_1}=\pm\sqrt{3}.$$

В том случае, когда вымпел образует угол 90° с курсом корабля, скорость v_x корабля и скорость u ветра связаны соотношением

$$|\vec{u}|^2-|\vec{v}_x|^2=u_2^2, \text{ или } u_1^2+u_2^2-|\vec{v}_x|^2=u_2^2,$$

откуда

$$|\vec{v}_x|=u_1=\frac{1}{2}v=10 \text{ км/ч}.$$

Итак, вымпел будет составлять с курсом корабля угол 90° при скорости корабля $|\vec{v}_x|=10$ км/ч.

В. Е. Скороваров

◆

Ф874. *Автомобиль движется вдоль прямой OO′ (рис. 1) и в точке A начинает поворачивать, не снижая скорости. В точке B автомобиль сбил придорожный столбик. Оцените скорость, с которой мог ехать автомобиль. Считайте сцепление шин с асфальтом хорошим. Руль автомобиля управляет его передними колесами.*

Ясно, что мы можем оценить только максимальную скорость автомобиля, соответствующую самому крутому из возможных поворотов — когда автомобиль движется по дуге AB окружности, которая касается прямой OO'. Радиус этой окружности (см. рис. 2) —

$$R=|AC|=\frac{1}{2}|AD|; \; R\approx 35 \text{ м}.$$

Разворачивает автомобиль (сообщает ему центростремительное ускорение) сила трения, действующая на передние колеса в направлении, перпендикулярном скорости автомобиля. Если считать, что центр масс автомобиля расположен примерно посредине

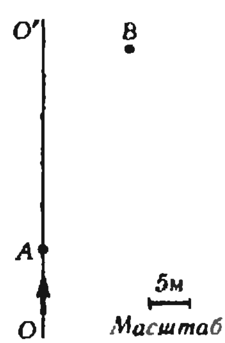


Рис. 1

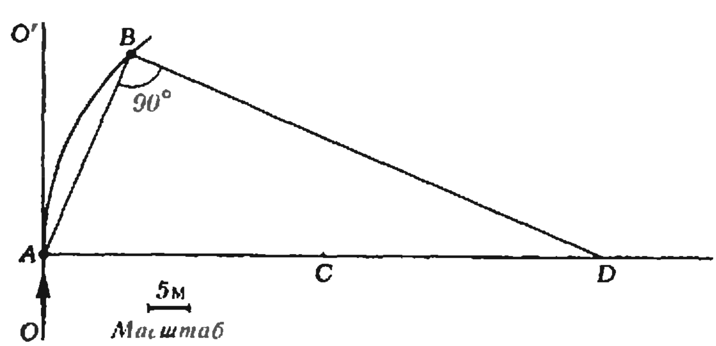


Рис. 2

и поднят не очень высоко над дорогой, а ускорение автомобиля не очень велико (подумайте сами, почему это существенно), то сила нормальной реакции, действующая со стороны дороги на два передних колеса, равна половине силы тяжести, а сила трения равна $\mu\frac{mg}{2}$. Уравнение движения автомобиля при повороте —

$$\frac{mv_м^2}{R}=\mu\frac{mg}{2},$$

откуда находим максимальную скорость $v_м$:

$$v_м=\sqrt{\frac{\mu gR}{2}}.$$

Приняв $\mu=0{,}8$, получаем $v_м\approx12$ м/с≈43 км/ч.

Итак, скорость автомобиля

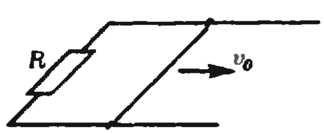
$$v\leqslant v_м\approx43 \text{ км/ч}.$$

Разумеется, это довольно грубая оценка. Более точную оценку можно было бы получить, рассматривая весь след автомобиля от точки A до точки B.

А. Р. Зильберман

◆

Ф875. *По горизонтальным параллельным рельсам, расстояние между которыми равно d, может скользить без трения перемычка, масса которой равна m (см. рисунок). Рельсы соединены резистором с сопротивлением R и помещены в вертикальное магнитное поле, индукция которого B. Перемычке сообщают скорость v_0. Найти путь, пройденный перемычкой до остановки. Как зависит ответ от направления вектора $\vec{B}$?*



При движении перемычки меняется поток магнитной индукции через контур, образуемый перемычкой, рельсами и резистором. В контуре возникает ЭДС индукции и появляется ток. В результате действия магнитного поля на ток, текущий по перемычке, перемычка будет тормозиться.

Найдем тормозящую силу F. Пусть скорость перемычки равна v. За малый промежуток времени Δt перемычка переместится вдоль рельсов на малое расстояние $\Delta x=v\cdot\Delta t$. Изменение площади контура будет равно $vd\cdot\Delta t$, поток магнитной индукции за это время изменится на $\Delta\Phi=B\cdot vd\cdot\Delta t$, в контуре появится ЭДС

$$\mathscr{E}=-\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}=-Bvd,$$

и по перемычке, согласно закону Ома, будет течь ток $i=\mathscr{E}/R$. Сила, действующая на перемычку со стороны магнитного поля, будет равна

$$f=iBd=-\frac{B^2d^2}{R}v;$$

направлена сила f, согласно правилу Ленца, против скорости v.

Запишем теперь уравнение движения перемычки (при малом перемещении Δx):

$$ma=f=-\frac{B^2d^2}{R}v,$$

или, учитывая, что $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$, $v=\frac{\Delta x}{\Delta t}$,

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t}=-\frac{B^2d^2}{R}\frac{\Delta x}{\Delta t}\Rightarrow m\cdot\Delta v=-\frac{B^2d^2}{R}\cdot\Delta x.$$

Мы видим, что изменение скорости перемычки пропорционально изменению ее координаты x (в начальный момент $x_0=0$). Значит, полное изменение скорости $v_{кон}-v_0=0-v_0=-v_0$ связано с изменением координаты (с полным перемещением X) соотношением

$$m(-v_0) = -\frac{B^2d^2}{R}X.$$

Отсюда находим путь X, пройденный перемычкой до полной остановки:

$$X = \frac{mRv_0}{B^2d^2}.$$

В том случае, когда вектор $\vec{B}$ составляет угол α с нормалью к плоскости рельсов,

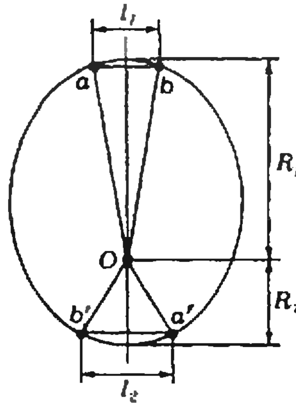
$$X = \frac{mRv_0}{B^2d^2\cos^2\alpha}.$$

Действительно, ЭДС индукции и, следовательно, ток i, текущий по перемычке, определяются потоком магнитной индукции через контур, а поток в этом случае определяется проекцией вектора $\vec{B}$ на нормаль к плоскости контура.

А. И. Буздин

◆

Ф876. *Два спутника движутся по одной орбите на небольшом (по сравнению с радиусом R_0 Земли) расстоянии друг от друга. Расстояние это при движении периодически меняется от l_1 до l_2. Определите минимальное и максимальное удаление спутников от центра Земли, если период обращения спутников равен T.*



Согласно второму закону Кеплера площади, заметаемые радиусом-вектором спутника за равные промежутки времени, равны. За одно и то же время один спутник перешел из точки a в точку a', а другой спутник перешел из точки b в точку b' (см. рисунок). Значит, площади секторов $Oaba'$ и $Oba'b'$ равны. Если из этих площадей вычесть площадь сектора Oba', то получатся площади секторов Oab и $Oa'b'$, которые, таким образом, одинаковы.

Поскольку по условию задачи расстояние между спутниками мало, вместо секторов можно рассматривать соответствующие равнобедренные треугольники. Следовательно, площади треугольников Oab и $Oa'b'$ одинаковы, то есть

$$\frac{1}{2}l_1R_1 = \frac{1}{2}l_2R_2. \qquad (1)$$

Согласно третьему закону Кеплера отношение квадратов периодов обращения спутника на разных орбитах равно отношению кубов больших полуосей этих орбит. Если T_0 — период обращения спутника по круговой орбите вблизи поверхности Земли, то

$$\frac{T^2}{T_0^2} = \frac{\left(\frac{1}{2}(R_1+R_2)\right)^3}{R_0^3}, \qquad (2)$$

где R_0 — радиус Земли. Период T_0 найдем из уравнения движения спутника по круговой орбите радиуса R_0:

$$m\omega^2R_0 = mg, \text{ или } m\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2R_0 = mg,$$

откуда

$$T_0^2 = \frac{4\pi^2R_0}{g}.$$

Таким образом, из (2) находим:

$$R_1+R_2 = 2R_0\sqrt[3]{\frac{T^2g}{4\pi^2R_0}}. \qquad (3)$$

Решая совместно уравнения (1) и (3), найдем максимальное и минимальное удаление спутников от центра Земли:

$$R_1 = \frac{l_2}{l_1+l_2}\sqrt[3]{\frac{2R_0^2gT^2}{\pi^2}},$$

$$R_2 = \frac{l_1}{l_1+l_2}\sqrt[3]{\frac{2R_0^2gT^2}{\pi^2}}.$$

В. Е. Скороваров

◆

Ф877. *При каких положениях точечного источника относительно тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=1$ м можно хотя бы из одной точки увидеть и изображение, и источник?*

Изображение и источник можно увидеть из одной точки, если область II (см. рис. 1) не лежит целиком внутри области I. Крайний случай — такое положение точки A, когда лучи AB и DC будут параллельны. Легко видеть, что это будет в том (и только в том)

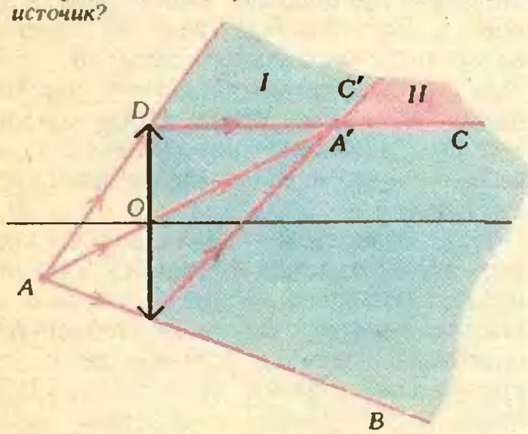


Рис. 1.

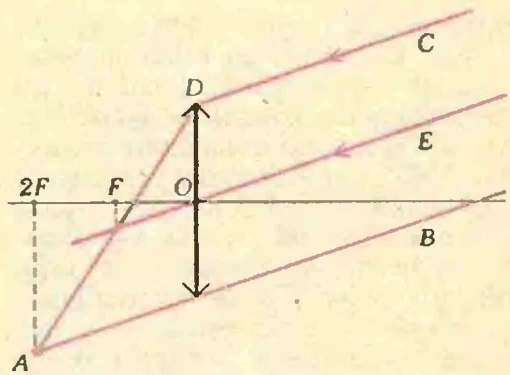


Рис. 2

случае, когда точка A расположена на двойном фокусном расстоянии от линзы.

Для доказательства проведем луч EO параллельно AB и CD (рис. 2) и воспользуемся тем, что лучи CD и EO после преломления в линзе пересекутся в фокальной плоскости.

Итак, изображение и источник можно увидеть одновременно, если источник расположен от плоскости линзы на расстоянии большем, чем $d=2F=2$ м. (Напомним, однако, что формула линзы применима только для узких пучков, что ограничивает справедливость ответа.)

А. Р. Зильберман

Наша обложка

Фотография, воспроизведенная на первой странице обложки, сделана в Лаборатории высоких напряжений Московского ордена Ленина и ордена Октябрьской Революции энергетического института.

На переднем плане изображен так называемый воздушный промежуток — рогообразные электроды, разделенные воздухом. Промежуток подключен к испытательному трансформатору (он виден на заднем плане).

При напряжении выше определенного воздушный промежуток в самой нижней части, где расстояние между электродами наименьшее, пробивается, и возникает дуговой разряд. Канал дугового разряда поднимается вверх, растягивается и обрывается. В момент обрыва канала внизу снова происходит электрический пробой. Именно такой момент и запечатлен на фотографии.

Воздушные промежутки применяются для защиты электрооборудования от чрезмерных повышений напряжения (например, в результате какихлибо переходных процессов в электрической сети или после удара молнии).

Подробнее о возникновении различных электрических пробоев рассказывается в номере в статье «Что такое электрический пробой».

Ленинградским олимпиадам — 50 лет

Доктор физико-математических наук
А. С. МЕРКУРЬЕВ,
член-корреспондент АН СССР
Д. К. ФАДДЕЕВ

Пятьдесят лет тому назад, весной 1934 года, в Ленинграде была проведена первая математическая олимпиада школьников*). Тем самым было положено начало всему олимпиадному движению в СССР, которое затем разрослось вглубь и вширь, захватило все города и республики нашей страны, перекинулось на другие предметы — физику, химию, биологию. Сейчас трудно поверить, что такая естественная вещь, как школьные олимпиады, когда-то не существовала — настолько очевидными кажутся достижения олимпиадного движения в деле математического (да и не только математического) образования школьников, их профессиональной ориентации, пробуждения интереса к научной работе.

Но вернемся к истории. Вдохновителем и организатором первой олимпиады в Ленинграде был член-корреспондент АН СССР Б. Н. Делоне, предложивший систему проведения олимпиад, которая в своей основе сохранилась до настоящего времени. В оргкомитет вошли профессора ЛГУ В. А. Тартаковский, Г. М. Фихтенгольц и О. К. Житомирский. Вслед за школьным и районным турами (осень 1933 г.) состоялся общегородской тур. Его проведению предшествовала большая подготовительная работа. Оргкомитет распространил воззвание к ученикам и учителям, в котором предлагалось «не только выявить одаренных в научном отношении людей, но и вообще повысить тонус учебной работы в школе, развернуть широкую сеть школьных научных кружков и районных научных станций, провести внутришкольные научные соревнования и таким образом вовлечь в научные занятия многомиллионные массы советских школьников». Был организован цикл лекций, которые читали ведущие математики Ленинграда. В 1933 году была создана «Научная станция для одаренных школьников» — прообраз современных математических кружков. Являясь исключительно массовым мероприятием, олимпиада — благодаря своему спортивному аспекту — стимулировала приобщение многих школьников к математике. Математические олимпиады оказались необычно удачным и эффективным средством научной пропаганды. Они стали инструментом, который помогает профессиональным математикам и школьникам находить друг друга.

Надо сказать, что организаторы первых ленинградских олимпиад уделяли первостепенное внимание вопросам профессиональной ориентации. Победители олимпиад получали рекомендации для поступления, причем не только в ЛГУ, но и в различные технические вузы. Младшие школьники привлекались к работе в кружках и научных секциях. Учителя, другие работники просвещения получили прекрасную возможность сравнивать результаты своей работы, обнаруживать недочеты в преподавании, а в случае успеха — обретать признание и поддержку. По существу, олимпиады стали для системы просвещения одной из форм социалистического соревнования.

Иное дело — «спортивный» аспект олимпиад как соревнования между школьниками. Ленинградские математики — организаторы первых олимпиад — прекрасно понимали, что собственно научная деятельность требует от математика не спринтерского умения решить «на время» несколько разнородных задач, а глубокого проникновения в суть изучаемой проблемы, высокой научной культуры, тяжелого труда. Поэтому организаторы постарались, с одной стороны, исключить явления «олимпиадного профессионализма» (запретив победителям олимпиад вторично участвовать в них), и, с другой стороны, избрали такую форму проведения олимпиады, которая давала бы воз-

*) Воспоминания об этой олимпиаде одной из ее участниц, М. Л. Александровой, будут опубликованы в следующем номере журнала.

можность максимально использовать ее для рекламы математики. Здесь речь идет прежде всего об устной олимпиаде. Традиция устных олимпиад чисто ленинградская. Между тем вряд ли что-либо, кроме практических сложностей, возникающих при проведении устного тура, служит аргументом в пользу письменной олимпиады (если говорить о городской олимпиаде, проходящей в университетском центре). На устной олимпиаде каждый участник имеет право на три подхода по любой из предложенных задач. Такая система дает возможность исключить описки, нелепые арифметические ошибки, неправильное понимание условия, неоправданно большие затраты времени и усилий на запись решений и т. д. Но не это главное. Главное — это общение с математиками, доброжелательное и заинтересованное, которое происходит в ходе олимпиады. Именно оно — в не меньшей степени, чем само по себе решение задач — содействует достижению основной цели: показать, что такое математика и как много в ней красоты. Многолетняя статистика свидетельствует, что на Всероссийских и Всесоюзных олимпиадах ленинградцы стабильно показывают высокие результаты. Одна из причин этого — то, что на Ленинградских олимпиадах не только соревнуются, но и учатся.

В настоящее время ленинградская олимпиада является частью Всесоюзной и включает в себя школьный, районный, городской и отборочный туры. Последние два тура — устные. В городском туре участвуют ученики 5—10 классов (по 100—150 человек от параллели), в отборочном — 8—10-классники (по 10—20 человек). Школьнику, пришедшему на городскую олимпиаду, предлагается 4 задачи. Решившие две из них переводятся в другую аудиторию, где к оставшимся двум задачам добавляются еще две. Таким образом, вариант в целом состоит из 6 задач. Такая схема, как показал опыт, обеспечивает лучшую организацию проверки на устной олимпиаде. Проверяют решения преподаватели и студенты матмеха ЛГУ под контролем членов жюри. Основным критерием при определении победителей является число решенных задач. Организационными вопросами, связанными с проведением олимпиад, занимается оргкомитет, который уже свыше 20 лет возглавляет заведующий сектором науки Ленинградского Дворца пионеров В. Я. Григошин.

Особо стоит сказать о деятельности жюри, которое занимается «математическим обеспечением» олимпиады. Основная работа жюри — подбор задач и организация проверки на самой олимпиаде. Если второе требует квалифицированности, доброжелательности и педагогического мастерства, то первое — большого, незаметного и бескорыстного труда. Надо сказать, что на ленинградских олимпиадах жюри старается придерживаться принципа «новизны» в подборе задач, то есть предлагать только те задачи, которые ранее не предлагались ни на одной олимпиаде (иначе участники окажутся в неравных условиях). Кроме того, задача должна быть элементарной, то есть допускать решение, не выходящее за рамки школьной программы. Это решение должно, по возможности, опираться на нестандартные (для школьника) идеи. Оно должно быть достаточно прозрачно, чтобы его изложение на олимпиаде не отняло слишком много времени. Наконец, самое главное — задача должна быть красивой. Смысл этого эпитета понятен каждому, кто хоть раз получал удовольствие от решения олимпиадной задачи.

За прошедшие 50 лет на ленинградских олимпиадах было предложено немало интересных задач, многие из которых знакомы читателям по публикации в «Задачнике «Кванта».

Придумывать задачи для олимпиады — дело непростое, требующее фантазии и вкуса; это своего рода композиция, которая сродни шахматной или музыкальной. Но олимпиада — это не просто набор задач. Необходимо сбалансировать вариант в целом. Он должен включать в себя задачи различной сложности и тематики, дающие возможность проявить себя людям разного темперамента и склада мышления. А ведь, кроме этого, жюри должно планировать и решение чисто технической проблемы — расслоения участников по числу решенных задач (иначе будет просто неинтересно). И совсем плохо, когда большинство уходит с олимпиады, ничего не решив. Неудивительно, что формирование одного-единственного 6-задачного варианта занимает много часов работы жюри.

Ленинградское жюри всегда состояло из энтузиастов, людей, которым не жалко потратить свое время и силы из «любви к искусству» математических олимпиад. Эти люди — преподаватели, студенты, учителя — заслуживают того, чтобы их имена были названы в юбилейной статье. Конечно, всех, кто за 50 лет внес свой вклад в деле ленинградских математических олимпиад, упомянуть невозможно. Назовем некоторых.

Возглавляли работу жюри в разные годы Б. Н. Делоне, В. А. Тартаковский, Г. М. Фихтенгольц, И. П. Натансон, Д. К. Фаддеев, В. А. Залгаллер, Г. П. Акилов, Г. И. Натансон, А. В. Яковлев, А. С. Меркурьев и другие (здесь, как и ниже, мы стараемся придерживаться хронологической последовательности). Активно участвовали в работе жюри О. К. Житомирский, М. К. Гавурин, С. П. Оловянишников, Г. В. Епифанов, Е. Н. Сокирянская, И. В. Романовский, А. Л. Вернер, Н. М. Митрофанова, М. И. Башмаков, Б. Б. Лурье, Ю. И. Ионин, Н. А. Широков, С. С. Валландер, В. Е. Лапицкий, В. П. Федотов, А. Г. Гольдберг, А. И. Плоткин, И. Я. Веребейчик, С. В. Фомин, М. Н. Гусаров, С. Е. Рукшин, А. Б. Александров.

Следует упомянуть о преемственности в работе ленинградского жюри. Едва ли не все его члены в послевоенные годы — это бывшие победители олимпиад. Может быть поэтому ленинградскому олимпиадному движению удалось за 50 лет сохранить своеобразие, свои математические традиции.

Для большинства бывших победителей олимпиад математика стала профессией. Некоторые из них добились больших успехов. Например, среди ленинградцев — победителей международных олимпиад — доктор физико-математических наук Ю. Матиясевич, решивший знаменитую 10 проблему Гильберта, и лауреат премии Ленинского Комсомола доктор физико-математических наук А. А. Суслин.

Наряду с олимпиадами в Ленинграде появились и получили распространение другие формы деятельности, направленной на повышение уровня математического образования школьников. В 1937 году начали работу математические кружки Дворца Пионеров, в 1962 году — Юношеская математическая школа при ЛГУ. В 1964 году была открыта физматшкола-интернат при университете, которая, наряду с ленинградскими школами № 30 и № 239, играет в последние десятилетия ведущую роль в физико-математической подготовке школьников. Ежегодно проводятся математическая конференция школьников, летние математические школы, матбои между физматшколами и т. д.

Прошедшие 50 лет показали, что математические олимпиады являются важным звеном в математическом образовании школьников. Без сомнения, они откроют еще немало талантов, которые так нужны нашей науке и народному хозяйству.

Турнир памяти Ф. А. Бартенева

В г. Евпатории организован физико-математический турнир памяти Ф. А. Бартенева. Федор Александрович Бартенев — Кавалер ордена Ленина, заслуженный учитель школы УССР, депутат городского Совета народных депутатов нескольких созывов, был замечательным учителем, много сделавшим для развития математического образования, как в г. Евпатория, так и во всей стране.

Не все ученики Бартенева стали математиками, но все они научились логично мыслить, через математику они постигли культуру мышления. Статьи и задачи Ф. А. Бартенева неоднократно публиковались на страницах журналов «Математика в школе» и «Квант», а в 1976 году в издательстве «Просвещение» вышла его книга «Нестандартные задачи по алгебре».

Физико-математический турнир, который решено проводить ежегодно, — дань памяти человеку, жившему делами молодежи.

Турнир проводится в три этапа среди учащихся 5—7 классов г. Евпатории. На первом — заочном, школьники решают задачи, публикуемые в городской газете «Евпаторийская здравница».

Второй этап — соревнование команд шести школ, показавших лучшие результаты на первом этапе. К участию на этом этапе привлекаются школьники и других школ, показавшие лучшие результаты на первом этапе.

Третий этап — конкурс двух лучших школьных команд по итогам первых двух этапов.

Приведем несколько задач первого этапа турнира 1984 года.

3. Почему руки моют с мылом?

6. Можно ли пользоваться промокательной бумагой в условиях состояния невесомости?

8. Существуют ли в трамвае точки, которые движутся не вперед, а назад?

10. Вода при замерзании увеличивается на 1/9 своего объема. На какую часть своего объема уменьшается лед при превращении в воду?

11. В стозначном числе 12345678901234567890 ... 7890 вычеркнули все цифры, стоящие на нечетных местах. С полученным числом проделали ту же операцию и т. д. Какая цифра была вычеркнута последней?

А. П.

Заочная школа при НГУ

При Новосибирском государственном университете им. Ленинского комсомола работает заочная школа (ЗШ) для учащихся 8—10 классов общеобразовательных школ Сибири, Дальнего Востока, Средней Азии и Урала.

Основная задача ЗШ — оказать помощь в формировании и развитии у учащихся интереса к естественным наукам.

В ЗШ 5 отделений: математическое, физическое, химическое, биологическое и экономическое. На математическое, физическое и химическое отделения принимаются учащиеся 8—10 классов; на биологическое отделение — 9—10 классов; на экономическое отделение — только учащиеся 10 класса.

Кроме отдельных учащихся, в ЗШ принимаются также математические, физические, химические, биологические и экономические кружки, которые могут быть организованы в школе по инициативе преподавателей. Руководители каждого кружка набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших первое задание по соответствующему предмету. Кружок принимается в ЗШ, если руководитель кружка сообщает в ЗШ свою фамилию, имя, отчество и высылает поименный список членов кружка (с указанием итоговых оценок за первое задание), подписанный директором школы и заверенный печатью школы.

Учащиеся, принятые в ЗШ, и руководители кружков будут получать задания ЗШ, а также дополнительный методический материал. Работы учащихся-заочников проверяют в ЗШ, а членов кружков — его руководители. По желанию руководителей работы членов кружков (или части их) могут проверяться в ЗШ.

Лучшие учащиеся 8—9 классов ЗШ приглашаются в Летнюю школу при НГУ, которая работает с 1 по 22 августа. Здесь они вместе с победителями Всесибирской олимпиады слушают лекции крупных ученых, решают интересные задачи на семинарах, знакомятся с университетом и институтами Академгородка, организованно отдыхают и развлекаются. В период зимних каникул учащиеся ЗШ из близлежащих областей приглашаются в Зимнюю школу при НГУ. В работе этих школ принимают участие также руководители кружков.

Чтобы стать учеником Заочной школы при НГУ, необходимо *до 30 сентября* прислать на имя директора ЗШ заявление, написанное на почтовой карточке, с просьбой выслать первое задание. В заявлении необходимо указать

а) свою фамилию, имя, отчество;
б) класс, в котором Вы учитесь;
в) отделение ЗШ, на котором желаете учиться;
г) подробный домашний адрес с обязательным указанием индекса почтового отделения.

Руководитель кружка должен прислать на имя директора ЗШ письмо с просьбой выслать первое задание и методические материалы.

Заявление о приеме на физическое или математическое отделение ЗШ можно выслать вместе с решением соответствующего первого задания, публикуемого ниже, *не позднее 15 октября*. Для поступления может оказаться достаточным хорошо решить одну — две задачи.

Работы отсылайте только простой бандеролью. В тетрадь с решениями вложите листок бумаги размером 6×10 см с написанным на нем Вашим адресом (мы наклеим его на конверт, когда будем отсылать ответ).

Наш адрес: 630090, Новосибирск, 90, ул. Пирогова, 11, Заочная школа при НГУ.

Первое задание по физике

Задачи 1—5 предназначены для восьмиклассников, 5—11 — для девятиклассников и 9—12 — для десятиклассников.

1. Отверстие в стенке цилиндрического сосуда с водой закрыто пробкой квадратного сечения со стороной a (рис. 1). Верхний край пробки находится на расстоянии h от уровня воды в сосуде. Найдите силу, с которой вода выталкивает пробку. Плотность воды ϱ.

2. В U-образную трубку налиты одинаковые по объему количества воды и керосина, так что длина столбика каждой жидкости $l=10$ см. Найдите разность уровней жидкостей. Плотность воды $\varrho_в=1000$ кг/м^3, керосина $\varrho_к=800$ кг/м^3.

3. Электрическая плитка, работающая от сети с напряжением $U_0=220$ В, расходует мощность $P_0=600$ Вт. Какой будет мощность плитки, если ее включить в сеть с напряжением $U=127$ В? Сопротивление плитки можно считать постоянным.

4. Проволока длины l имеет сопротивление R. Концы проволоки замкнули и получившееся кольцо подсоединили к клеммам так, что одна из частей кольца имеет длину a. Найдите сопротивление цепи между клеммами.

5. Обруч подвесили на гвоздь, вбитый в стену, и отклонили в сторону (в вертикальной плоскости). В какую точку стены нужно вбить еще один гвоздь так, чтобы обруч, опираясь и на него

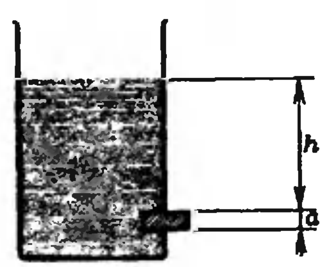


Рис. 1.

тоже, оказался в равновесии? Укажите все такие точки.

6. Мяч, брошенный мальчиком вниз со скоростью v, отскочив от пола, достигает потолка спортзала. С какой скоростью должен мальчик бросить мяч вниз с подставки высоты h, чтобы мяч опять достиг потолка?

7. Спортсмен выполняет прыжок в воду «два с половиной оборота назад прогнувшись» с десятиметровой вышки. На какой высоте над водой он окажется в момент завершения второго оборота?

8. Стержень изготовлен из большого числа чередующихся отрезков одинаковой длины, но из двух разных материалов. В одном материале скорость звука v_1, в другом v_2. Найдите среднюю скорость распространения звука в стержне.

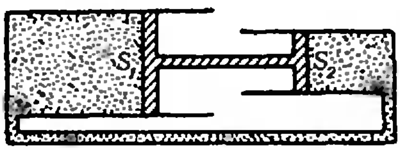


Рис. 2

9. Двигатель, развивающий мощность N, работает с КПД η. Определите секундный расход воды для охлаждения двигателя, если на входе в систему охлаждения она имеет температуру T_0, а на выходе T. Удельная теплоемкость воды c.

10. Цилиндры с сечениями S_1 и S_2 соединены трубкой и перекрыты поршнями, жестко соединенными друг с другом (рис. 2). Давление p_0 воздуха в цилиндрах равно атмосферному, а объем его — V_0. На какое расстояние сдвинутся поршни, если атмосферное давление изменится и станет равным p? Температуру считать постоянной.

11. Главная часть барометра-анероида — металлическая коробочка, из которой выкачан воздух. При изменениях атмосферного давления крышка коробочки деформируется, и ее смещение передается стрелке-указателю. Почему из коробочки нужно выкачивать воздух? Казалось бы, запаянная коробочка с воздухом тоже будет реагировать на изменение атмосферного давления, а изготовление барометра значительно упростится, если воздух не откачивать.

12. Два одинаковых конденсатора зарядили и соединили параллельно, после чего расстояние между пластинами одного из них уменьшили вдвое. Определите, каким стало при этом отношение энергий конденсаторов.

Первое задание по математике

Задачи 1—5 предназначены восьмиклассникам, 4—9 — девятиклассникам, 4, 5, 8—10 — десятиклассникам.

1. Найдите три попарно неравных натуральных числа a, b, c, удовлетворяющих уравнению $cb+ac=ab$. Можете ли вы указать бесконечное множество таких троек?

2. Какие трехзначные целые числа от зачеркивания последней цифры уменьшаются в целое число раз? (Обоснуйте ответ.)

3. Известно, что некоторый треугольник можно разрезать на два равных (конгруэнтных) треугольника. Покажите, что этот треугольник равнобедренный.

4. Имеется 1984 гири массой 1 г, 2 г, ..., 1984 г. Разложите эти гири на четыре равные по массе группы.

5. Сколько существует попарно неравных (неконгруэнтных) треугольников периметра 100, все стороны которых имеют целочисленную длину?

6. Докажите, что числа 33! и 35! дают одинаковые остатки при делении на 41. (Напомним, что $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$.)

7. Найдите сумму $\lg\frac{10}{21}+\lg\frac{21}{32}+\lg\frac{32}{43}+\ldots+$ $+\lg\frac{87}{98}+\lg\frac{98}{100}$.

8. В треугольник со сторонами a, b, c вписан полукруг с диаметром, лежащим на стороне c. Используя формулу Герона, найдите длину этого диаметра.

9. Перпендикуляр, опущенный из вершины при основании равнобедренного треугольника на противоположную сторону, делит ее в отношении $m:n$. Найдите тангенсы углов треугольника.

10. Найдите сумму четвертых степеней корней уравнения $x^2-6x+1=0$.

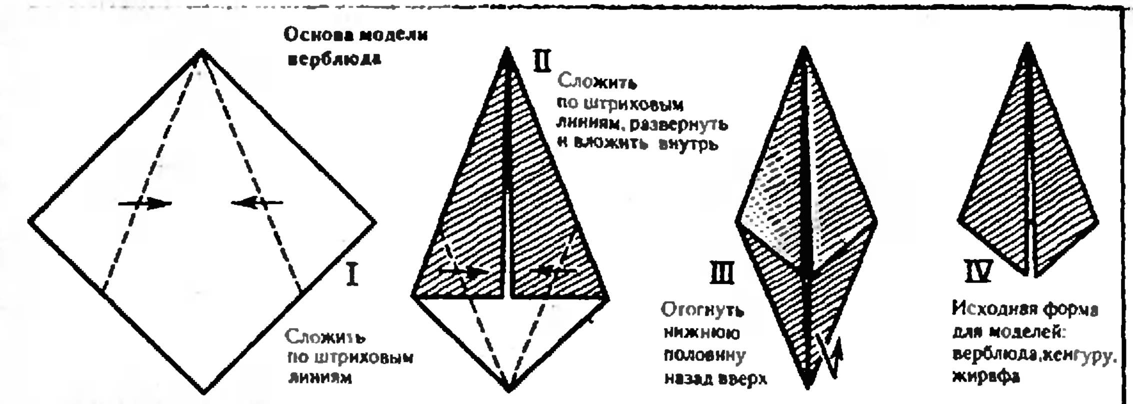
Вечерняя физическая школа при МГУ

Вечерняя физическая школа (ВФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 8, 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ВФШ — помочь учащимся глубже изучить физику в объеме школьной программы. Занятия в школе проводятся в форме лекций, читаемых раз в две недели, и еженедельных семинаров. Кроме того, учащиеся смогут посетить научные лаборатории факультета и на лекциях ведущих ученых познакомиться с основными направлениями современной физики. Для десятиклассников организуются факультативные занятия по математике. Успешно закончившие обучение получают справку об окончании ВФШ.

Прием в ВФШ производится по результатам собеседования, которое будет проводиться, начиная с 26 сентября. Работающая молодежь зачисляется вне конкурса. Для поступления в школу необходимо лично заполнить заявление в комитете ВЛКСМ физфака МГУ (с приложением двух фотокарточек размером 3×4 см). Заявление можно подавать с 5 по 24 сентября ежедневно, кроме воскресенья, с 16 до 18 часов.

Адрес ВФШ: 119899, Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ВФШ. Телефон: 139-26-56.



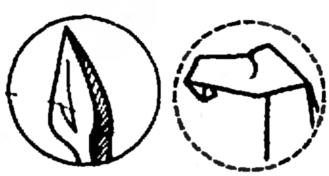
Оригами

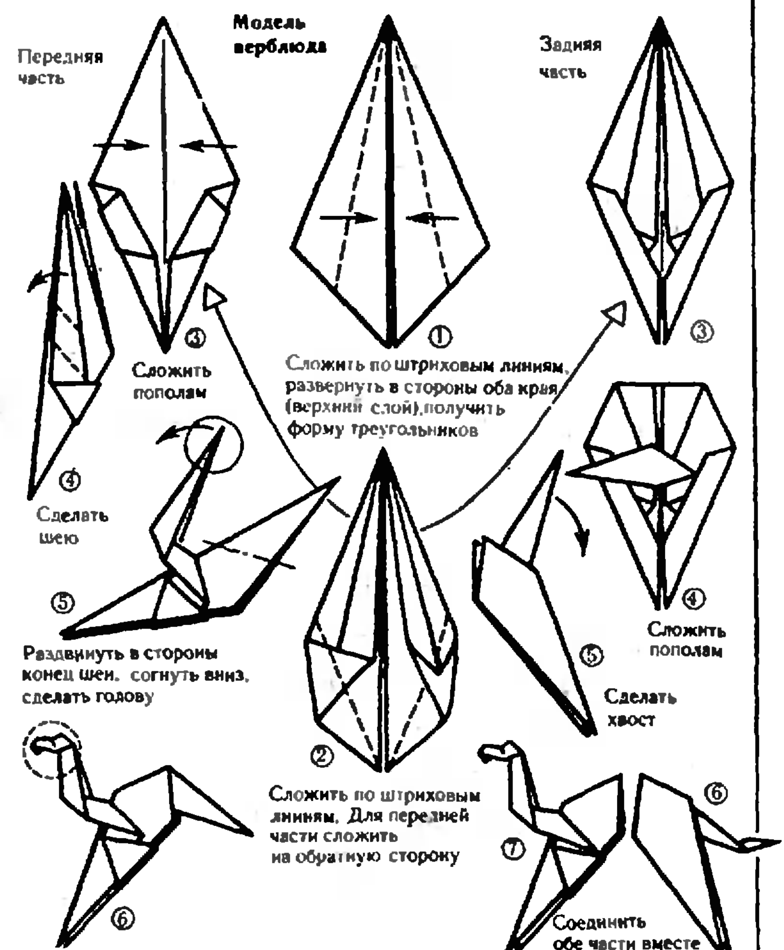
(складывание фигурок из бумаги)

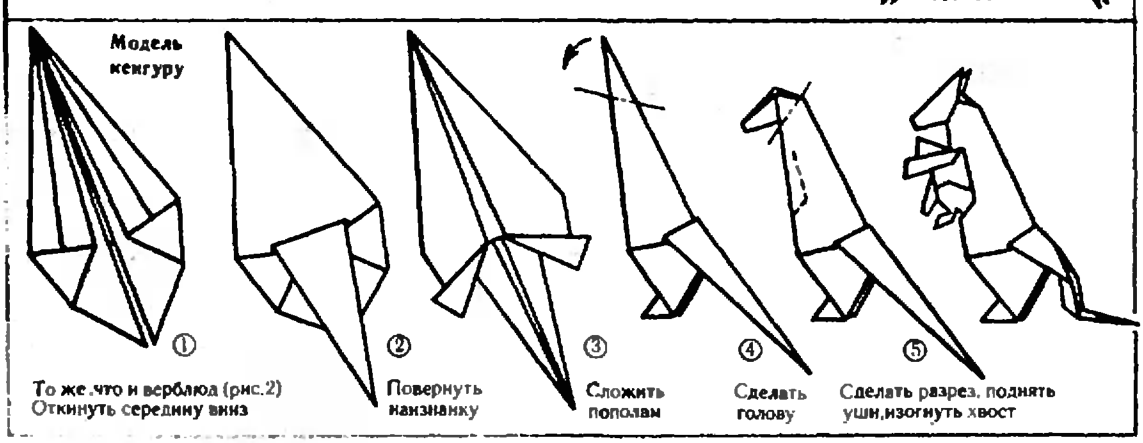
А. И. КЛИМАНОВ

Складывание фигур животных и птиц из бумаги — древнее искусство, наиболее популярное, пожалуй, в Японии, где оно называется «оригами». Все фигуры складываются из цельных прямоугольных листов бумаги (одного или двух), без помощи ножниц или клея (клей применяют разве что для скрепления «половинок» фигур, составленных из двух листов). Порядок изготовления фигурок показан на чертежах-схемах.

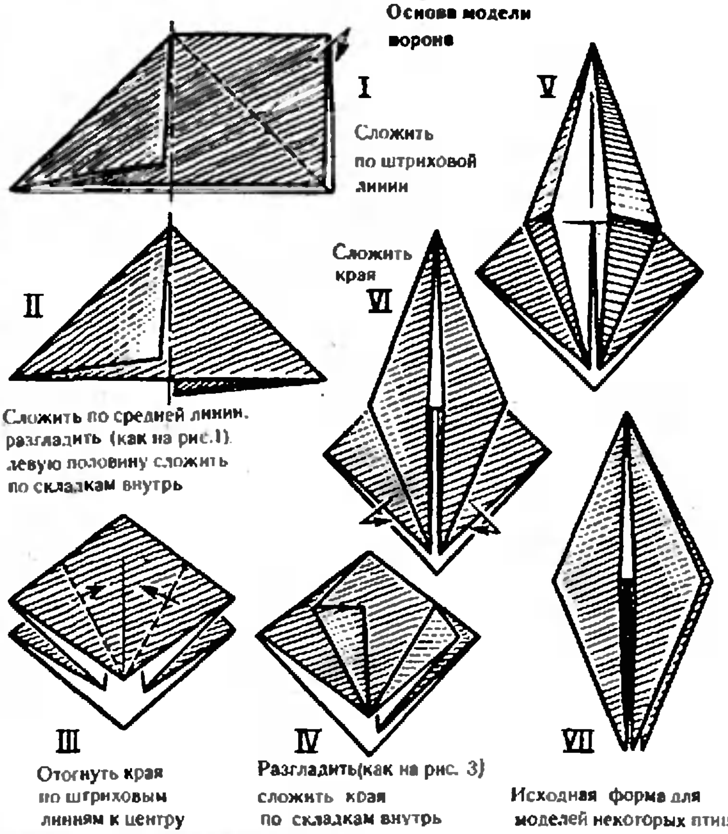
Начальная стадия работы над фигурами показана на чертежах, обозначенных римскими цифрами. Руководствуясь приведенными чертежами, сделайте модели животных и птиц, затем попытайтесь сложить (без чертежа) фигурку жирафа (см. фото на 4-ой с. обложки). Модели жирафа и верблюда делаются из двух одинаковых по размеру заготовок. Овладев «секретами» моделирования, вы научитесь составлять и свои композиции.



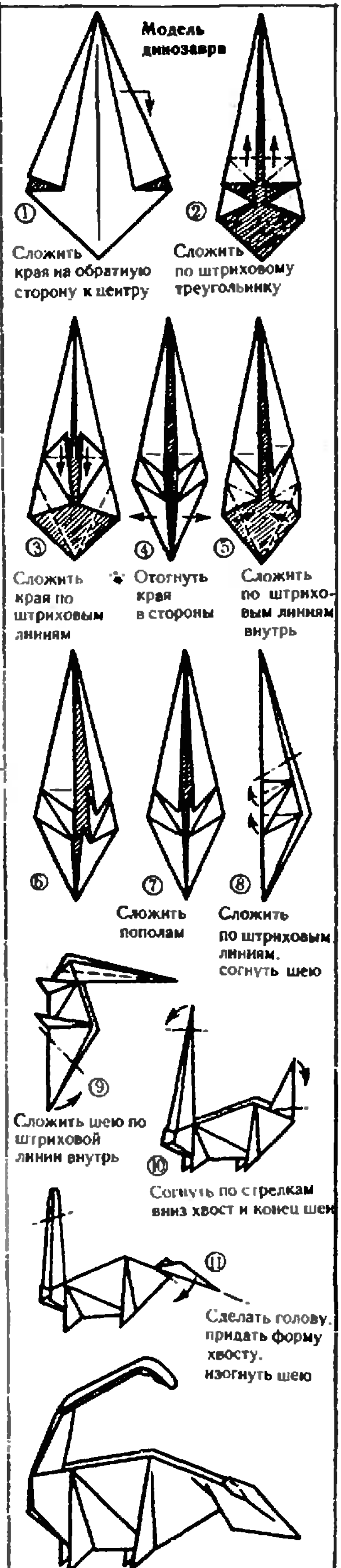




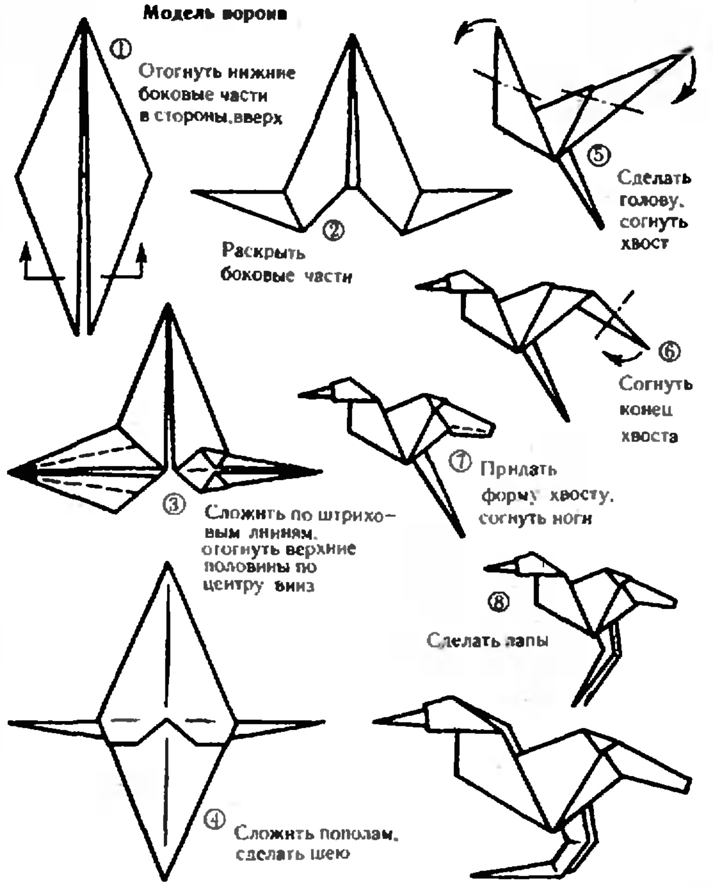
Основа модели ворона



Модель динозавра



Модель ворона



Если бы Следопыт знал физику...
(см. «Квант» № 7)

После того как пуля вылетела из ствола, центр тяжести ружья имеет скорость $\sim\bar{v}_p$. Соответствующий импульс $\sim M\bar{v}_p$. Из формул, приведенных в статье, следует, что

$$M\bar{v}_p \sim \frac{L}{\bar{v}_п}(f\alpha - Mg).$$

В этой формуле, так же как в формуле (6) в статье, можно пренебречь вторым слагаемым в скобках; поэтому

$$M\bar{v}_p \sim \frac{L}{\bar{v}_п} f\alpha \sim \frac{L}{\bar{v}_п}\frac{m\bar{v}_п^2}{L}\alpha \sim m\bar{v}_п\alpha.$$

Кинетическая энергия ружья в момент вылета пули — величина порядка

$$\frac{(M\bar{v}_p)^2}{M} \sim \frac{m^2\bar{v}_п^2\alpha^2}{M}.$$

Строго говоря, мы должны были бы использовать в наших рассуждениях понятие о кинетической энергии вращательного движения вокруг точки A. Однако энергия вращения ружья по порядку величины совпадает с энергией поступательного движения тела массы M со скоростью $\bar{v}_p$. Поэтому, «забывая» о вращении, мы не делаем ошибки в наших порядковых оценках.

После вылета пули ружье продолжает двигаться по инерции до тех пор, пока вся кинетическая энергия не перейдет в потенциальную. Сделаем еще одно упрощающее предположение (для оценок оно вполне разумно). Углы α и φ, как мы уже знаем, малы, а интересует нас угловое отклонение Ψ, связанное с движением ружья по инерции. Мы будем сейчас считать для простоты, что линия $O'B'$ вначале практически горизонтальна (на рисунке 1 для ясности углы изображены бо́льшими, чем они есть на самом деле). Если и угол Ψ мал, то высота, на которую поднимется центр тяжести ружья, $\sim l\Psi$, а закон сохранения энергии можно записать в виде

$$Mgl\Psi \sim \frac{m^2\bar{v}_п^2\alpha^2}{M}.$$

Отсюда

$$\Psi \sim \frac{m^2\bar{v}_п^2\alpha^2}{M^2gl}.$$

Полное отклонение ружья при выстреле будет определяться суммой углов φ и Ψ.

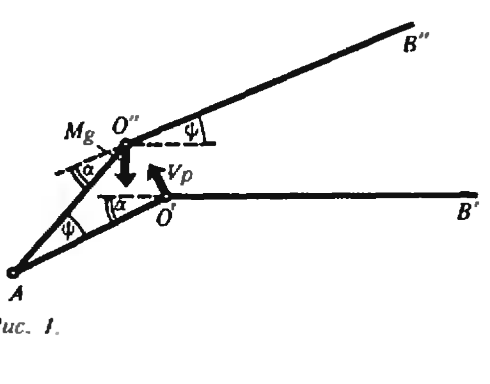


Рис. 1.

Запишем еще соотношение

$$\frac{\Psi}{\varphi} \sim \frac{\alpha m\bar{v}_п^2}{MgL}.$$

Подставив сюда уже известные нам числовые значения всех параметров и $\bar{v}_п \sim 8\cdot10^2$ м/с, мы получим, что $\frac{\Psi}{\varphi} > 25$. Это означает, что угол Ψ по крайней мере на порядок превосходит угол φ. Это, по-видимому, и объясняет, почему автор «Кожаного чулка» считал большую отдачу ружья при выстреле причиной неточного попадания. Мы убедились сейчас в том, что существенно бо́льшее отклонение ружье испытывает уже тогда, когда пуля улетела. Величина же угла Ψ никак не связана с точностью стрельбы.

Момент инерции в геометрии
(см. «Квант» № 7)

2. Указание: а) выразите длины отрезков, на которые стороны треугольника делятся точками A_1, B_1, C_1, через длины сторон a, b, c; покажите, что отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 проходят через центр масс системы $(p-a)A$, $(p-b)B$, $(p-c)C$, где $p=(a+b+c)/2$; б) примените теорему о группировке к системам материальных точек pA, pB, pC и $-aA$, $-bB$, $-cC$.

3. $2\frac{11}{12}$.

7. $(p-a)(p-b)c^2 = abc^2 - p(p-c)c^2 = abc^2 - p(p-c)((p-a)+(p-b))^2 = abc^2 - 2S^2 - p(p-c)((p-a)^2+(p-b)^2)$ (по формуле Герона); аналогично, $(p-b)(p-c)a^2 = bca^2 - 2S^2 - p(p-a)((p-c)^2+(p-b)^2)$. Сложив эти выражения с $(p-c)(p-a)b^2 = cab^2 - p(p-b)b^2$, получим выражение $abc(a+b+c) - 4S^2 - p[(p-c)\times(p-a)^2 + (p-c)(p-b)^2 + (p-a)(p-c)^2 + (p-a)(p-b)^2 + (p-b)b^2] = 2abcp - 4S^2 - pabc$, поскольку $(p-c)(p-a)^2 + (p-a)\times(p-c)^2 = (p-a)(p-c)b = abc - p(p-b)b$, а $(p-c)(p-b)^2 + (p-a)(p-b)^2 + (p-b)b^2 = (p-b)((p-c)+(p-a))(p-b) + b^2) = (p-b)bp$ (мы неоднократно пользовались тождеством $(p-a)+(p-b)=c$ и аналогичными, полученными перестановкой букв a, b, c).

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 7)

1. Пусть v — скорость катера в стоячей воде, u — скорость реки и t — время движения первого катера от A до B. Тогда расстояние между A и B равно $(v+u)t=S$. Второй катер за время t пройдет расстояние $L=(v-u)t$ и будет находиться от пункта A на расстоянии $S-L=2ut$. Плот же за это время пройдет путь ut, то есть будет ровно посредине между пунктом A и вторым катером.

2. Цвет накрытого контура — красный. Действительно, допустим противное — целиком закрыт синий контур и видны части двух других синих контуров. Но верхняя часть синего контура не может быть соединена ни с одной из других выступающих синих частей, так как тогда невозможно было бы замкнуть окружающий эту часть красный контур. Значит верхняя синяя дуга принадлежит одному синему контуру, а остальные три — другому. Но в этом случае три красных дуги: слева, справа и снизу, также принадлежат одному контуру, следовательно, видны куски только двух красных контуров. Получили противоречие с тем, что закрыт целиком только один синий контур, а все три красных контура имеют

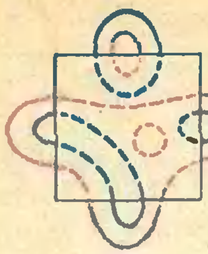


Рис. 2.

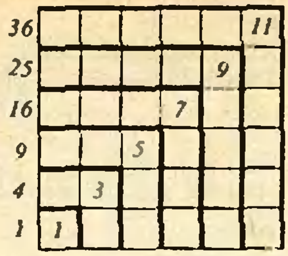


Рис. 3.

выступающие части. Значит закрыт целиком красный контур, например так, как на рисунке 2.

3. Ответ: 77. Указание: искомых шестизначных чисел будет 61, четырех и трехзначных — по 8, двузначных — 0; подсчет упрощается, если заметить, что искомые числа имеют вид $a0b0c$ или $a0b0$ или же $a0b$.

4. Будем находить количество яблок. В первом ряду имеем 1 яблоко, в первом и во втором $1+3=4$, потом $1+3+5+7=16$. Заметим, что получаемые числа являются квадратами количества складываемых рядов. Объяснение этому видно на рисунке 3: квадрат составляется из полосок, содержащих последовательные нечетные количества клеток. Каждый четный ряд содержит на один фрукт больше, чем лежащий над ним нечетный ряд, поэтому количество груш равно квадрату числа рядов, в которых они лежат плюс еще столько, сколько рядов. Естественно, что ответ на задачу зависит от того, четно ли число рядов или нечетно. Если n — четное число $n=2k$, то на витрине лежит k яблок и k^2+k груш. Если же n — нечетное число $n=2k+1$, то количество яблок будет $(k+1)^2$, количество груш останется равным k^2+k.

5. Зимой снег на тропинке утаптывается, уровень тропинки ниже уровня окружающего пушистого снега, в который нога глубже проваливается. В углубление ветер наметает снег, который тоже утаптывается. Таким образом, каждый снегопад с ветром увеличивает количество снега на тропинке больше, чем вокруг нее. Весной же обледенелая тропинка тает медленнее, чем окружающий рыхлый снег.

Две задачи о числах Фибоначчи

(см. «Квант» № 7, с. 14)

1. Решение. Возьмем частное двух любых различных, отличных от единицы, чисел Фибоначчи f_k/f_n. Очевидно, можно рассматривать только $n\geqslant 3$, $k>n$. Пусть $m=k-n$, тогда $f_k/f_n=f_{n+m}/f_n$. Покажем, что для любых таких n и m выполняется условие $f_{m+1}<(f_{n+m}/f_n)<f_{m+2}$

Действительно (мы пользуемся задачей 6 из статьи И. М. Яглома*)

$$\frac{f_{n+m}}{f_n}-f_{m+1}=\frac{f_{n+m}-f_nf_{m+1}}{f_n}=\frac{f_{n-1}f_m}{f_n}>0.$$

$$\frac{f_{n+m}}{f_n}-f_{m+2}=\frac{f_{n+m}-f_nf_{m+2}}{f_n}=$$

$$=\frac{f_{n-1}f_m+f_nf_{m+1}-f_n(f_{m-1}+f_m)}{f_n}=$$

$$=\frac{(f_{n-1}-f_n)f_m}{f_n}=-\frac{f_{n-2}f_m}{f_n}<0.$$

Таким образом, частное двух любых различных, отличных от единицы, чисел Фибоначчи находится между двумя соседними числами Фибоначчи, а между ними нет и не может быть других чисел Фибоначчи.

2. Указание. Воспользуйтесь задачами 6 и 9 из статьи И. М. Яглома.

Номер подготовили:
А. П. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, Б. М. Ивлев, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили:
И. Б. Горская, М. Б. Дубах, В. М. Ильин, А. И. Климанов, В. С. Коваль, А. В. Лисицын, С. Ф. Лухин, А. К. Малкин, Ю. П. Мартыненко, И. А. Смирнов, И. Е. Смирнова, Е. С. Шабельник

Фото представили:
В. И. Ободзинский, Б. Л. Раскин, В. П. Шевченко

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Б. Румянцева

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54
Сдано в набор 20.6.84
Подписано к печати 19.7.84
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Усл. кр. от. 23,3
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 7,28. Т-14882
Цена 40 коп. Заказ 1612. Тираж 172 798

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

КАСПАРОВ — ПОБЕДИТЕЛЬ МАТЧЕЙ ПРЕТЕНДЕНТОВ

На шахматной страничке в «Кванте» № 5 за 1981 год мы пытались выяснить мнение выпускника бакинской школы Г. Каспарова о возможности матча Карпов — Каспаров. Тогда он мечтал только о межзональном турнире. Теперь же Гарри — претендент № 1.

О победах Каспарова в четвертьфинальном и полуфинальном матчах претендентов мы уже рассказывали, осталось ознакомить вас с его партиями из финального матча, который нынешний соперник чемпиона мира считает своим высшим творческим достижением. Четыре победы (при девяти ничьих) одержал Каспаров над Смысловым в этом матче. Перед вами первая из них (в третьей партии).

Г. Каспаров — В. Смыслов
Ферзевый гамбит

1. d4 d5 2. Kf3 Kf6 3. c4 c6 4. Kc3 e6 5. Cg5 Kbd7. Возникла так называемая кембридж-спрингская защита. Теория расценивает ее как чересчур пассивную для черных, и данная встреча не меняет оценки. **6. e3 Фа5 7. cd K:d5 8. Фd2 Cb4 9. Лс1 0—0 10. Cd3 e5 11. 0—0 ed 12. ed f6 13. Ch4 Лd8 14. a3 C:c3 15. bc Kf8 16. Cg3 Ce6 17. Лfe1 Cf7 18. c4 Ф:d2 19. K:d2 Kb6 20. Kb3 Ka4 21. Cf1 Лd7 22. Ka5 Ke6 23. d5 Kd4 24. dc K:c6 25.K:c6 bc 26.c5!** Каспаров безупречно ведет поединок. Последний ход открывает перспективы сразу обоим слонам белых — один пристроится на d6, другой в скором времени решит судьбу партии, проникнув в тыл противника через а6. **26...Ле8 27. Л:е8+ С:е8 28. Cd6 Cf7.** Ускоряет развязку. Следовало продолжать 28...Лb7, хотя и в этом случае после 29. Лс4 у черных немало трудностей. **29. Лb1 Cd5 30. Лb8+ Kpf7 31. Лf8+ Kpe6 32. g3 g6 33. Ca6! Л:d6 34. cd Kp:d6 35. Л:f6+ Kpe5 36. Лf8 c5 37. Ле8+ Kpd4 38. Лd8 Kpe5 39. f4+ Kpe4 40. Cf1 Cb3 41. Kpf2 Kb2. Черные сдались.** Классический образец реализации преимущества двух слонов над слоном и конем.

Четвертую партию Каспаров выиграл в загадочном стиле. Хотя белые непринхотливо разыграли дебют, они не сделали ничего такого, чтобы их позиция внушала опасения. Но скачок конем на край доски внес сумятицу в лагерь белых фигур.

В. Смыслов — Г. Каспаров
Ферзевый гамбит

1. d4 d5 2. Kf3 Kf6 3. c4 e6 4. Kc3 Ce7 5. Cf4 0—0 6. e3 c5 7. dc C:c5 8. Ce2 dc. Чего только не бывает в шахматах! Такой простой ход, а в гроссмейстерской практике встречается впервые. Известное продолжение 8...Kc6 ведет к приятной для белых игре, но Каспаров уготовил для этого коня другое место. **9. C:c4 a6 10. Фe2 b5 11. Cd3 Cb7 12. 0—0 Kbd7 13. e4.** Грозит e4—e5, C:h7+ Kg5+ и т. д. Но в матче претендентов обидно получать мат... **13...Kh5! 14. Cd2.** Видимо, следовало предпочесть 14.Ce3. Через ход слон займет это поле, но дорог каждый темп. **14...Фc7 15.g3 Лad8 16.Ce3 C:e3 17.Ф:e3 Фc5 18.Лfe1 Khf6 19.a3 Kg4 20.Ф:c5 K:c5 21. Cc2 f5!** Дальнейшая часть партии протекает весьма остро, но при явном превосходстве черных. **22.Kg5 f4 23. Лad1 Л:d1 24. C:d1 Ke5 25. gf Ked3 26.b4 h6 27.bc hg 28.Лe3 K:f4 29.a4 b4 30.Ke2 Лс8 31.Cb3 Л:c5 32.K:f4 gf 33.C:e6+ Kpf8 34.Лe1 Лe5 35.Cb3 Л:e4 36.Лd1 Kpe7 37.Kpf1 a5 38.Лc1 Kpf6 39.h3 g5 40.Лc7 Лe7 41.Лc5 Лe5. Белые сдались.**

Следующая победа была одержана Каспаровым в девятой партии.

Г. Каспаров — В. Смыслов
Ферзевый гамбит

1.d4 d5 2.Kf3 Kf6 3.c4 c6 4.Kc3 e6 5.Cg5 Kbd7 6.e3 Фa5 7.cd K:d5 8.Фd2 Cb4 9.Лc1 e5. В третьей партии, как вы видели, этот ход Смыслов сделал после предварительного 9...0—0 10.Cd3. Непосредственное движение пешки «е» приводит черных к еще большим неприятностям. **10.a3 Cd6 11.de K:e5 12.K:e5 C:e5 13.b4! C:c3 14.Ф:c3!** Красивый ход, не предусмотренный Смысловым. После 14.Л:c3 K:b4 черные защищались. Теперь же ферзи размениваются, белые получают преимущество двух слонов, которые вновь реализуют по всем правилам науки и техники, образуя проходную пешку на королевском фланге. **14...K:c3 15.bа Ke4 16.Cf4 0—0 17.f3 Kf6 18.e4 Лe8 19.Kpf2 a6 20.Ce2 Ce6 21.Лb1 Лe7 22.Лhd1 Лae8 23.Лb2 Cc8 24.Лbd2 Лd7 25.Л:d7 K:d7 26.g4 Kc5 27.Ce3 Kd7 28.g5 Kc5 29.Cd4 Kg6 30.Kpg3 Kf8 31.h4 Лd8 32.f4 Ce6 33.Cc3 Л:d1 34.C:d1 Kd7 35.f5 Cc4 36.h5 h6 37.gh gh 38.e5 Kc5 39.Kpf4 Cd5 40.Cc2 f6 41.e6 Kpg7 42.Cb4 Kb3 43.Kpe3 c5 44.Cc3.** Черные записали ход 44...Kpf8, но сдали партию без доигрывания.

Двенадцатая партия подвела итоги дебютной дискуссии, разгоревшейся вокруг защиты Тарраша, которая четыре раза встретилась в матче. Каспаров, игравший черными, каждый раз легко преодолевал дебютные затруднения, а в этом поединке белые потерпели фиаско.

Четыре лишних очка, которые получил бакинец в этом матче, были в точности предсказаны разницей в рейтингах со Смысловым. И вот Каспаров доказал эту математическую «теорему». Теперь Каспарову предстоит сразиться за шахматную корону с Анатолием Карповым.

Конкурсные задания

15. Белые начинают и выигрывают.

16. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 октября 1984 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 15, 16»).

Цена 40 коп.

Индекс 70465

На этой фотографии представлены фигурки животных и птиц, сложенные из бумаги. При их изготовлении заготовка — прямоугольный лист бумаги — только складывается, но не разрезается и не склеивается. (Клей используется только для скрепления двух частей фигур, составленных из двух листов бумаги.) Желающие ознакомиться и приобщиться к этому увлекательному геометрическому искусству — «оригами», как называют его в Японии — могут прочитать заметку А. И. Климанова внутри номера.