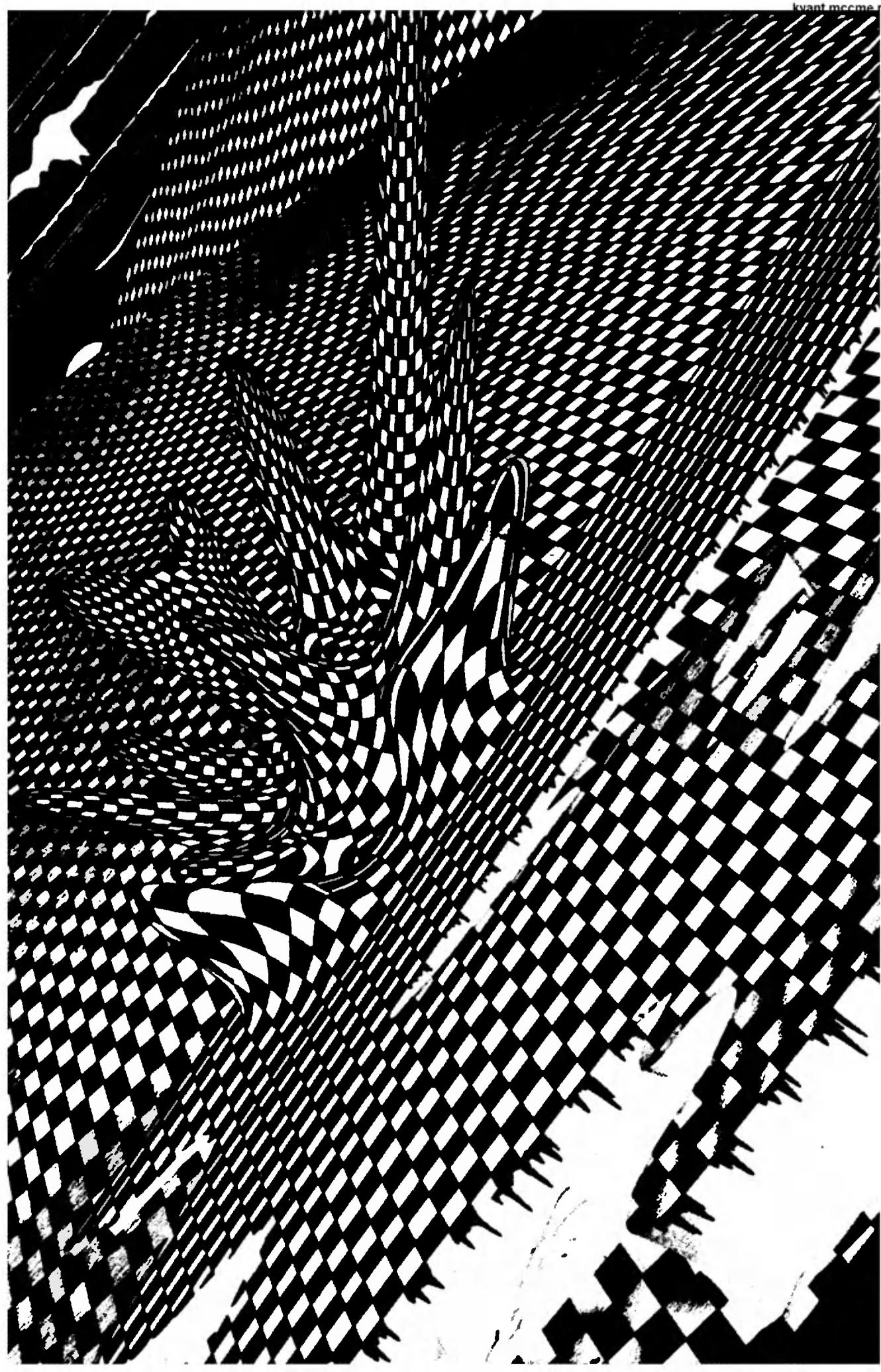


# Квант

**7**  
1984

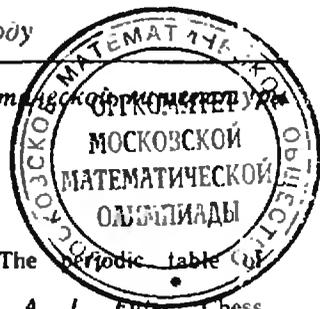
Научно-популярный физико-математический журнал  
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

10,811	12,81110		
13 <b>Al</b> АЛЮМИНИЙ 26,982	14 <b>Si</b> КРЕМНИЙ 28,086	15 <b>P</b> ФОСФОР 30,974	
21 <b>Sc</b> СКАНДИЙ 44,956	22 <b>Ti</b> ТИТАН 47,90	23 <b>V</b> ВАНАДИЙ 50,942	
31 <b>Ga</b> ГАЛЛИЙ 69,72	32 <b>Ge</b> ГЕРМАНИЙ 72,59	33 <b>As</b> МЫШЬЯК 74,922	
39 <b>Y</b> ИТТРИЙ 88,905	40 <b>Zr</b> ЦИРКОНИЙ 91,22	41 <b>Nb</b> НИОБИЙ 92,906	
49 <b>In</b> ИНДИЙ 114,82	50 <b>Sn</b> ОЛОВО 118,69	51 <b>Sb</b> СВЯТОУСЛОВИЙ 121,757	
71 <b>La</b> ЦЕРОЛИЙ 138,905	72 <b>Hf</b> ГАФНИЙ 178,49	73 <b>Ta</b> ТАНТАЛ 180,948	





Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы



## В НОМЕРЕ:

- 2 М. А. Кожушнер. Периодическая система элементов  
9 Э. А. Комиссарчик, А. Л. Футер. Человек, ЭВМ и шахматный эндшпиль  
15 И. М. Яглом. Итальянский купец Леонардо Фибоначчи и его кролики  
18 А. Ю. Матулис, А. Ю. Савукина. «Ферзя — в угол», «цзяньшици» и числа Фибоначчи  
23 Ю. М. Сандлер. Если бы Следопыт знал физику...  
26 Е. М. Воинов. О гидравлическом ударе

## IN THIS ISSUE:

- M. A. Kozhushner. The periodic table elements  
E. A. Komissarchik, A. L. Futer. Chess players, computers and endgames  
I. M. Yaglom. The Italian merchant Leonardo Fibonacci and his rabbits  
A. Yu. Matulis, A. Yu. Savukinas. "Queen-in-the-corner", "tsianshitsi" and Fibonacci numbers  
Yu. M. Sandler. If the Deerslayer knew physics...  
E. M. Vainov. On the hydrolic strike

## Новости науки

- 22 А. И. Буздин. Еще один шаг на пути к абсолютному нулю

## Science news

- A. I. Buzdin. One more step to absolute zero

## Лаборатория «Кванта»

- 30 Е. И. Пальчиков. Почему «поет» водопровод?

## Kvant's lab

- E. I. Palchikov. Why do water-pipes "sing"?

## Математический кружок

- 33 В. Н. Дубровский. Момент инерции в геометрии

## Mathematics circle

- V. N. Dubrovski. Moment of inertia in geometry

## «Квант» для младших школьников

- 39 Задачи  
39 Л. Керролл. Вниз по кроличьей норе

Kvant for younger school children  
Problems

- L. Carroll. Down the rabbit hole

## Игры и головоломки

- 45 А. И. Климанов. Стереоскопические чертежи

## Puzzles and games

- A. I. Klimanov. Stereoscopic pictures

## Задачник «Кванта»

- 50 Задачи М871 — М875; Ф883 — Ф887  
53 Решения задач М846, М856 — М860; Ф867 — Ф872

## Kvant's problems

- Problems M871 — M875; P883 — P887  
Solutions M846, M856 — M860; P867 — P872

- 63 Ответы, указания, решения

## Answers, hints, solutions

## Уголок коллекционера

- 8 Марки, посвященные Д. И. Менделееву  
Смесь (14, 32, 49)  
Шахматная страничка  
Ученые — гроссмейстеры по композиции (3-я с. обложки)

## Collector's corner

- Stamps dedicated to D. I. Mendeleev  
Miscellaneous (14, 32, 49)  
The chess page  
Scientists — grandmasters in composition (3rd cover page)

Та часть периодической системы элементов, которая выделена на первой странице обложки, содержит три элемента — скандий, галлий и германий, — которые к моменту открытия Д. И. Менделеевым периодического закона были неизвестны. Предсказание существования этих элементов и их физических и химических свойств, сделанное Менделеевым, Энгельс назвал настоящим научным подвигом.

О научной истории периодической таблицы элементов рассказывается в этом номере журнала.

Фрагмент графической композиции доктора физико-математических наук А. Т. Фоменко «Шахматный эндшпиль» (см. вторую страницу обложки) помещен в связи со статьей «Человек, ЭВМ и шахматный эндшпиль», опубликованной в этом номере журнала.

# Периодическая система элементов

Доктор физико-математических наук  
М. А. КОЖУШНЕР

27 января исполнилось 150 лет со дня рождения великого русского ученого Дмитрия Ивановича Менделеева, а в феврале — 115 лет его величайшему творению — периодической таблице элементов. История того, как Менделеев шел к одному из крупнейших научных открытий XIX века, как постепенно происходило усовершенствование таблицы, как выяснение сложной структуры атомов и открытие квантовых законов, управляющих движением атомных частиц, привели, наконец, к пониманию физической основы периодической системы элементов — исключительно интересна и поучительна. Сейчас, когда науке уже достаточно хорошо известна структура атомов, ретроспективно эта история напоминает увлекательный детектив, когда большая армия ученых в разные годы и в разных странах постепенно накапливала факты, выдвигала различные гипотезы, чаще всего в общем не верные, но содержащие какое-то приближение к истине — правильной картине строения атомов.

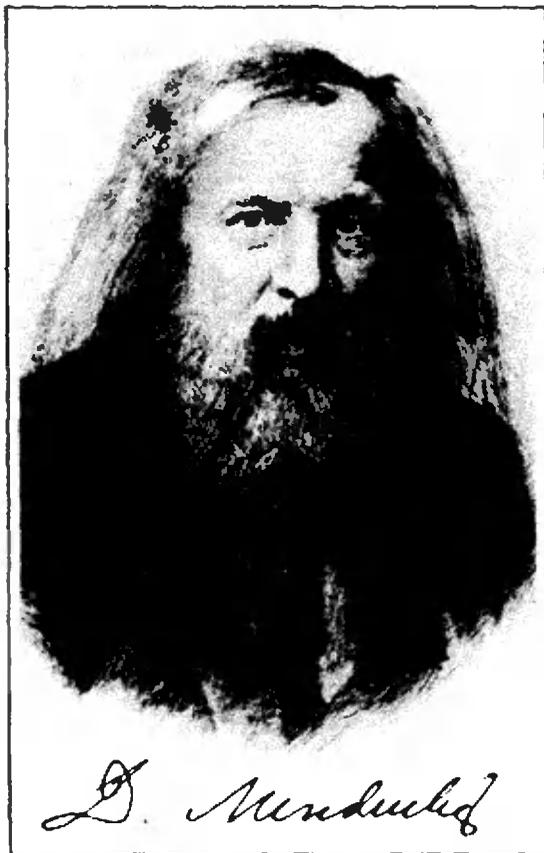
Научную историю периодической таблицы элементов можно разбить на четыре этапа:

1 этап — накопление фактов о свойствах элементов, первые попытки их систематизации, создание Д. И. Менделеевым первого варианта таблицы;

2 этап — уточнение таблицы, заполнение пустующих клеток, окончательное подтверждение ее истинности;

3 этап — развитие знаний о структуре атомов, открытие квантовой механики, качественное объяснение периодического закона;

4 этап — создание и развитие количественных методов расчета структуры атомов, создание новых элементов, расширение таблицы Менделеева.



Еще будучи студентом Петербургского педагогического института, Д. И. Менделеев, избравший химию основной специальностью под влиянием своего учителя, крупного русского химика А. А. Воскресенского, задумался над закономерностями изменения химических свойств от элемента к элементу. В то время, к середине XIX века, было накоплено огромное количество фактических сведений о химических свойствах элементов, были найдены группы химически сходных элементов (щелочные металлы — Li, Na, K, Rb, Cs, щелочно-земельные металлы, галогены), причем внутри этих групп была подмечена определенная закономерность, связывающая химическую активность элементов с их атомными массами. Однако общей, объединяющей, картины не было. Делались попытки как-то классифицировать элементы по качественным характеристикам образуемых ими химических соединений. Но они оказались несостоятельными из-за слишком большого разнообразия таких соединений и их свойств.

Менделеев был физико-химиком и понимал, что если систематизация воз-

можно, то она должна базироваться на четких *количественных* физических характеристиках. Он писал: «... Всякая система, основанная на точно наблюдаемых числах, конечно, будет уже в том отношении заслуживать предпочтения перед другими системами, не имеющими численных опор, что в ней остается мало места произволу». В 1859—61 годах Д. И. Менделеев был командирован за границу. В Гейдельберге, в Германии, он начал работать в лаборатории Бунзена. Бунзен темпераментно заявлял: «Химик, который не есть также физик, есть ничто!». Сначала здесь, а затем в собственной, созданной им самим, лаборатории Менделеев систематически изучает силы сцепления между молекулами в разных жидкостях, пытаясь найти закономерности в изменении этих сил, связанные с химическими особенностями элементов и соединений. Таких явных закономерностей он не нашел, однако эти исследования привели его к важному физическому открытию — он открыл существование критической точки (критических температуры и давления, при которых исчезает различие между жидкостью и ее паром).

Большое влияние на дальнейшую деятельность Дмитрия Ивановича оказал I съезд химиков в Карлсруэ, в котором он принимал живейшее участие, особенно — выступление итальянского химика С. Канниццаро. Сам Менделеев впоследствии вспоминал: «Его (Канниццаро. — М. К.) я считаю настоящим моим предшественником, так как установленные им атомные веса дали необходимую точку опоры. Я сразу же тогда заметил, что предложенные им изменения атомных весов вносят ... новую стройность, и идея возможной периодичности свойств элементов при возрастании атомного веса, в сущности, уже тогда мне представлялась внутренне».

В 1867 году, возглавив кафедру общей химии в Петербургском университете, Менделеев начал писать учебник для студентов «Основы химии». Необходимость в построении таблицы элементов снова встала перед ним. Началась мучительная многонедельная работа. Выписав на отдельных карточках атомные массы и основные химические и физические свойства элементов, Менделеев начал раскладывать своеобразный «пасьянс», исходя из уже известных

групп химически сходных элементов. Однако очень скоро он приходит к выводу, что важнейший, принципиальный момент в систематизации — сопоставление именно несходных элементов, поиск общей закономерности. Трое суток, почти без отдыха, проработал он; интуитивно чувствовавшаяся закономерность в таблицу не складывалась. По словам Менделеева, «все в голове сложилось, а выразить таблицей не могу». Крайняя усталость свалила с ног, он лег и сразу заснул. «Вижу во сне таблицу, где все элементы расставлены, как нужно. Проснулся, тотчас записал на клочке бумаги, — только в одном месте оказалась нужной поправка».

Так 1 марта 1869 года родилась периодическая система элементов. Хотя вид таблицы отличался от принятого в настоящее время, но она отвечала главному правилу, сформулированному ее автором: «измеримые химические и физические свойства элемента и его соединений периодически зависят от атомного веса элементов». Уже в августе 1869 года Д. И. Менделеев придал таблице тот вид, к которому мы привыкли; известные в то время элементы были размещены так же, как и сейчас.

Уверенность в правильности и научной значимости закона позволила Менделееву утверждать, что атомные массы некоторых элементов были определены неправильно: Th — должно быть 232 вместо 116, U — 240 вместо 120, Ce — 138 вместо 92, In — 113 вместо 75,6. Ошибки в атомных массах были связаны с тем, что при их определении исходили из неправильных формул химических соединений. Например, для окиси церия использовалась формула CeO. Исходя из химических свойств Ce, Менделеев определил его предполагаемое место в таблице и возможную формулу окисла — Ce<sub>2</sub>O<sub>3</sub>. Тогда атомная масса церия должна была быть увеличена в 1,5 раза, и с атомной массой 138 Ce занял правильное место в таблице. Независимое определение атомной массы Ce по величине теплоемкости металлического Ce, предпринятое самим Менделеевым, блестяще подтвердило его догадку.

Исходя из открытого им периодического закона, Д. И. Менделеев с поразительной точностью предсказал открытие и физические и химические свойства новых элементов (см. таблицы в конце статьи): экабор — скандий, эка-

алюминий — галлий, экасилиций — германий (приставка «эка» означает «следующий за»). Это был, по выражению Энгельса, настоящий научный подвиг.

Наступил второй этап — подтверждение и укрепление периодической таблицы.

Сначала таблица не вызвала почти никакого отклика у европейских химиков и физиков, большинство в нее просто не верили. Когда Бунзену, одновременно с Менделеевым установившему правильную атомную массу Се, один из учеников указал на то, что это как раз подтверждает таблицу Менделеева, он раздраженно ответил: «Да уйдите вы от меня с этими догадками. Такие правильности вы найдете и между числами биржевого листка». Даже Л. Мейер, знакомый с первыми работами Менделеева и предложивший в 1870 году аналогичный вариант таблицы, заметивший периодическую зависимость атомных объемов элементов (объемов, приходящихся на один атом) от атомной массы, считал, что нельзя на таком шатком основании, как периодический закон, предлагать изменение атомных масс.

Гром грянул в 1875 году. Молодой французский химик П. Лекок де Буабодран открыл новый элемент, который он назвал галлием в честь древнего названия Франции. Прочитав сообщение об этом, Менделеев по описанным химическим свойствам и минералу, в котором был найден новый элемент, сразу понял, что галлий — это предсказанный им экаалюминий. Однако плотность галлия была указана равной  $4,7 \text{ г/см}^3$ , в то время как Менделеев, исходя из своей таблицы, предсказывал для нее значение  $5,9 \text{ г/см}^3$ . Об этом Менделеев написал автору открытия. Лекок де Буабодран, возмущенный тем, что кто-то пытается указывать на ошибку ему, единственному в мире державшему новый элемент в руках, все-таки принял проверку. Результат был ошеломляющий: русский ученый оказался прав. Это был блистательный триумф периодической таблицы, сразу же получившей всемирное признание.

В 1879 году Л. Нильсон в Швеции открыл новый элемент скандий — экабор. В 1886 году немецкий химик К. Винклер открыл германий, который по своим свойствам блестяще совпал с предсказанным Менделеевым экасилицием. В письме к Менделееву Вин-

клер писал: «...уведомляю Вас о ...новом триумфе Вашего гениального исследования».

Впоследствии Д. И. Менделеев писал: «Л. де Буабодрана, Нильсона и Винклера... я со своей стороны считаю истинными укрепителями периодического закона».

Периодическая таблица продолжала заполняться, и последний из предсказанных Менделеевым элементов — астатин (экаиод) — был открыт только в 1940 году. Наиболее серьезные испытания на универсальность таблица выдержала в конце прошлого — начале нынешнего века. В 1894 году Дж. Рэлей и У. Рамзай в Англии открыли аргон, затем в 1895—98 годах Рамзаем совместно с другими учеными были открыты гелий, неон, криптон, ксенон. Кажется, этим элементам нет места в таблице Менделеева. По своим химическим свойствам (точнее, по почти полному отсутствию таковых, за что газы и были названы инертными) они не походили ни на какой другой элемент. Тогда Рамзай и предположил, что в таблицу должно включить новую группу — нулевую, которая отделяет активнейшие неметаллы — галогены от активнейших металлов — щелочных. В это же время стало ясно, что все редкоземельные элементы должны быть помещены в одну клетку таблицы, так как их химические и физические свойства чрезвычайно близки.

К этому же времени выяснилось, что атомы имеют сложное строение, что в их состав входят отрицательно заряженные легкие частицы — электроны. Значит, атом состоит из противоположно заряженных компонентов. В 1896 году французский физик А. Беккерель открыл радиоактивность урана. Супруги Пьер и Мария Кюри в 1898 году открыли новые радиоактивные элементы — радий и полоний, затем был открыт актиний... Радиоактивных элементов стало слишком много — они не помещались в периодическую таблицу. И только в 1909 году все стало на свои места. Дело в том, что один и тот же радиоактивный элемент может получаться путем различных распадов разных начальных элементов. Так как продуктов распада по массе получалось очень мало, трудно было провести химический анализ, и эти продукты считались разными элементами. В 1909 году Д. Стрёмгольм и Т. Сведберг в

Швеции установили химическое тождество различных «радио-элементов», и в буквальном смысле слова все стало на свои места. Таблица Менделеева выдержала еще одно испытание. Хотя при радиоактивном распаде происходило превращение одних элементов в другие, они перемещались по клеткам таблицы.

Теперь на первый план выдвигалась задача — на основе изучения структуры атома найти первопричину открытой Д. И. Менделеевым периодичности.

Уже в 1904 году Дж. Томсон, открывший электрон, создал первую модель атома — в положительно заряженном «тесте» двигались «изюминки» — электроны. Томсон впервые предположил, что химические свойства элементов определяются электронами, входящими в состав атома. Послойное расположение электронов может привести к периодической зависимости свойств от атомной массы, если с массой атома увеличивается и число электронов в нем. Хотя такая модель атома оказалась неправильной, идея электронных слоев вошла в последующую правильную теорию.

В 1911 году Э. Резерфорд открыл атомное ядро. Он показал, что внутри атома сосредоточено маленькое массивное положительно заряженное ядро, вокруг которого движутся легкие отрицательно заряженные электроны. Это открытие было сделано на основе изучения рассеяния  $\alpha$ -частиц (частиц, появляющихся в результате радиоактивного распада). Исследование результатов рассеяния показало, что заряд ядра  $Z$  и, следовательно, число электронов в атоме примерно вдвое меньше атомной массы  $A$  элемента. К тому же выводу (о числе электронов в атоме) еще в 1906 году пришел английский физик Ч. Баркла, исходя из рассеяния рентгеновских лучей в веществе.

События разворачиваются стремительно. В 1913 году Н. Бор публикует свою знаменитую работу «О строении атомов и молекул», в которой он впервые ввел понятие о стационарных (устойчивых) состояниях электронов в атомах. При переходе с одной стационарной орбиты (с большей энергией) на другую (с меньшей энергией) испускается квант света, энергия  $E$  которого равна разности энергий состояний электрона, частота света равна  $\nu = E/h$  ( $h$  —

постоянная Планка). Теория Бора блестяще объяснила спектр излучения атома водорода и помогла подойти к объяснению спектров других элементов.

Из теории Бора, в частности, следовало, что энергия связи электрона, движущегося вблизи ядра с зарядом  $Z$ , пропорциональна  $Z^2$ . Следовательно, если электрон переходит с какой-нибудь далекой внешней орбиты на внутреннюю, близкую к ядру, то энергия кванта света должна быть примерно пропорциональна  $Z^2$ . В том же 1913 году Г. Мозли, ученик Резерфорда, показал, что частота рентгеновского излучения, возникающего при переходе атомных электронов на самые близкие к ядрам орбиты, пропорциональна числу  $(N-1)^2$ , где  $N$  — номер данного элемента в таблице Менделеева. Отсюда следовало, что заряд ядра (в единицах заряда электрона) совпадает с номером элемента.

К этому времени было окончательно установлено существование изотопов — атомов, отличающихся по массе, но имеющих один и тот же заряд ядра. Химически эти атомы абсолютно идентичны, так что изотопы — это разновидности одного и того же элемента, и они должны быть помещены в одну клетку таблицы Менделеева. Это было завершающим доказательством того, что свойства элементов периодически зависят от заряда ядра. Однако причины такой периодичности были неясны.

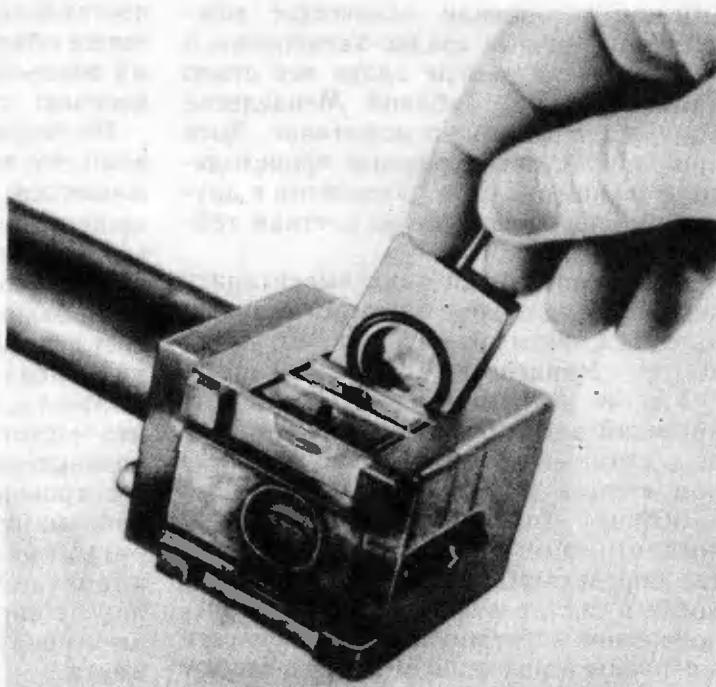
Первое качественное объяснение периодической зависимости химических свойств элементов от заряда атомного ядра дал в 1921 году Н. Бор. Заряд ядра (в единицах заряда электрона) равен числу электронов в атоме. Электроны, образующие электронную оболочку атома, размещаются вокруг ядра слоями. В каждом слое может находиться определенное число электронов. По мере увеличения заряда ядра электроны заполняют наиболее далекий от ядра слой. При этом внутренние слои остаются неизменными. С накоплением электронов в наружном слое связано плавное изменение химических свойств элементов в периодах. С появлением нового электронного слоя происходит резкое изменение химических свойств — начинается новый период элементов.

Закономерности заполнения электронных слоев в элементах, предложенные Бором, удалось вывести строго только на основе законов квантовой



На фото слева почти в натуральном масштабе показана значительная часть мировых запасов элемента прометия ( $_{61}\text{Pt}$ ).

На верхнем фото — специальное устройство, позволившее отделить атомы менделевия ( $_{101}\text{Md}$ ), которые возникали при бомбардировке эйнштейния. На фотографии показано, как вынимается фольга, на которой «осаждались» атомы менделевия.



Этот образец — существенная часть мировых ресурсов технеция ( $_{43}\text{Tc}$ ); следует учесть, что изображение увеличено по сравнению с реальными размерами почти втрое.

механики, созданной в 1925—27 годах. Математический аппарат квантовой механики позволяет рассчитать структуру различных атомов.

Так в конце двадцатых годов XX века периодическая система элементов получила окончательное физическое объяснение. Исполнилась мечта Д. И. Менделеева о том, что «причина периодической законности будет открыта и понята».

К тридцатым годам периодическая таблица содержала 88 элементов и в ней было 4 незанятые клеточки — с номерами 43, 61, 85 и 87. Соответствующих элементов практически нет в природе — их атомные ядра нестабильны. Миллиарды лет назад, в период формирова-

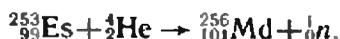
ния Земли, они должны были существовать, но с течением времени их земные запасы исчезли в результате радиоактивного распада. Три из этих четырех элементов — технеций (№ 43), прометий (№ 61) и астат (№ 85) — были получены искусственным путем, а четвертый — франций (№ 87) — был открыт при естественном  $\alpha$ -распаде ядер актиния. С открытием этих элементов периодическая таблица заполнилась вплоть до урана (№ 92).

Активные поиски элементов, стоящих за ураном, — трансуранов — начались после открытия в 1938 году деления ядер урана. В 1940—41 годах были открыты нептуний  $_{93}\text{Np}$  и плутоний  $_{94}\text{Pu}$ . Следующие же трансурановые элемен-

ты, хотя они несомненно получались в результате соответствующих ядерных реакций (например,  ${}^{239}_{94}\text{Pu} + {}^4_2\text{He} \rightarrow {}^{242}_{96}\text{Cm} + {}^1_0n$ ), никак не удавалось выделить химически. Как стало ясно в дальнейшем, их химические свойства прогнозировались неверно. Лишь после того, как Г. Сиборг, известный радиохимик, получивший Нобелевскую премию за открытие трансураниевых элементов, предположил, что трансураны химически подобны редкоземельным элементам, удалось выделить четыре новых трансураниевых элемента — с № 95 по № 98.

Завершающие первую сотню элементов эйнштейний (№ 99) и фермий (№ 100) были обнаружены в продуктах первого термоядерного взрыва в 1952 году. Впоследствии эти элементы научились получать в мощных нейтронных потоках ядерного реактора.

Чем дальше ученые продвигались по таблице элементов, тем труднее приходилось и при синтезе, и при обнаружении новых трансураниевых элементов. В 1955 году Г. Сиборг и его коллеги, накопив несколько миллиардов атомов эйнштейния, подвергли их бомбардировке ускоренными в циклотроне ядрами гелия:



Вся операция по разделению и опознанию атомов нового элемента № 101 должна была занимать не более получаса — времени жизни этих атомов. Так в начале 1955 года были получены первые 17 (!) атомов нового элемента, который авторы открытия предложили назвать менделевием «в честь великого русского химика Дмитрия Менделеева, который первый использовал периодическую систему элементов для предсказания химических свойств еще не открытых элементов, то есть провозгласил принцип, послуживший ключом к открытию последних семи трансураниевых элементов».

В 1964 году в Дубне под руководством академика Г. Н. Флерова был получен новый элемент № 104. Авторы открытия предложили назвать его курчатовием. Атомы курчатовия живут всего 0,3 с, но тем не менее они были опознаны и были выяснены их химические свойства.

Сейчас уже твердо установлены 105 элементов таблицы Менделеева. Времена жизни тяжелых элементов очень ма-

### Скандий ${}_{21}\text{Sc}$ (экабор Eb)

Предсказано Д. И. Менделеевым	В действительности
Относительная а. м. 44	Относительная а. м. 44,9559
Оксид экабора $\text{Eb}_2\text{O}_3$	Оксид скандия $\text{Sc}_2\text{O}_3$
Плотность окиси 3,5 г/см <sup>3</sup>	Плотность окиси 3,864 г/см <sup>3</sup>
Гидрат $\text{Eb}(\text{OH})_3$ не растворим в щелочах	$\text{Sc}(\text{OH})_3$ не растворим в щелочах
Сернистая соль $\text{Eb}_2(\text{SO}_4)_3$ трудно растворима	$\text{Sc}_2(\text{SO}_4)_3 \cdot 6\text{H}_2\text{O}$ трудно растворима

### Галлий ${}_{31}\text{Ga}$ (экаалюминий Ea)

Предсказано Д. И. Менделеевым	В действительности
Относительная а. м. 68	Относительная а. м. 69,72
Должен быть низкоплавкий	Температура плавления 29,8 °С
Плотность ~5,9 г/см <sup>3</sup>	Плотность 5,904 г/см <sup>3</sup>
Не должен окисляться в воздухе	Слегка окисляется только при красном калении
Должен разлагать воду при краснокалийном жаре	Разлагает воду при высокой температуре
Формулы соединений: $\text{EaCl}_3$ , $\text{Ea}_2\text{O}_3$ , $\text{Ea}_2(\text{SO}_4)_3$	Формулы соединений: $\text{GaCl}_3$ , $\text{Ga}_2\text{O}_3$ , $\text{Ga}_2(\text{SO}_4)_3$
Оксид $\text{Ea}_2\text{O}_3$ должна легко восстанавливаться и давать металл более летучий, чем Al; поэтому можно ожидать, что Ea будет открыт путем спектрального анализа.	Ga восстанавливается из окиси прокаливанием в токе водорода; открыт при помощи спектрального анализа.

### Германий ${}_{32}\text{Ge}$ (экасилиций Es)

Предсказано Д. И. Менделеевым	В действительности
Относительная а. м. 72	Относительная а. м. 72,59
Плотность 5,5 г/см <sup>3</sup>	Плотность 5,327 г/см <sup>3</sup>
Высшая окись $\text{EsO}_2$	Высшая окись $\text{GeO}_2$
Хлористое соединение $\text{EsCl}_4$ жидк.	Хлористое соединение $\text{GeCl}_4$ жидк.
Точка кипения $\text{EsCl}_4$ ~90 °С	$\text{GeCl}_4$ кипит при 85 °С
Металлоорганическое соединение $\text{Es}(\text{C}_2\text{H}_5)_4$	Металлоорганическое соединение $\text{Ge}(\text{C}_2\text{H}_5)_4$

лы из-за спонтанного деления тяжелых ядер. Однако есть теоретические предположения, что ядра элементов с зарядами 114 и 126 могут оказаться достаточно стабильными, так что, может быть, мы с вами еще станем свидете-

лями нового расширения периодической таблицы элементов, которая через 115 лет после открытия продолжает расти и вглубь, и вширь — как живая и неотъемлемая часть великого здания науки.

Уголок коллекционера

## Марки, посвященные Д. И. Менделееву

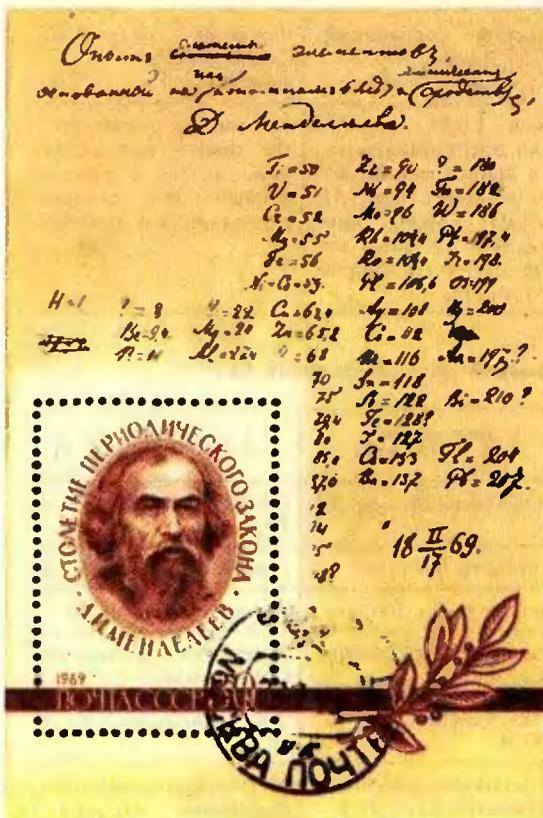
Советская филателия неоднократно посвящала различные знаки почтовой оплаты выдающемуся русскому ученому Дмитрию Ивановичу Менделееву. Первые четыре марки были выпущены в 1934 году, к столетию со дня рождения Д. И. Менделеева. На одной из них изображен памятник великому ученому, установленный в 1932 году в Ленинграде. Эта марка приведена в нашей подборке.

В августе 1951 года вышла серия из шестнадцати марок, посвященная выдающимся русским ученым. Среди них мы видим снизу марку с портретом Д. И. Менделеева. Следующая марка

с его портретом на фоне здания Ленинградского университета была выпущена в 1957 году к пятидесятилетию со дня смерти ученого. В 1969 году, к столетию периодической системы, вышла новая марка с портретом Менделеева и почтовый блок с факсимиле одного из первых вариантов периодической системы.

В нашу подборку включена также марка Польской народной республики, посвященная Д. И. Менделееву.

В. Рудов



# Человек, ЭВМ и шахматный эндшпиль

Кандидат физико-математических наук  
Э. А. КОМИССАРЧИК,  
кандидат физико-математических наук  
А. Л. ФУТЕР

Машина играет в шахматы... Этот удивительный факт становится для современных людей привычным. А впервые весть об искусственном шахматисте пронеслась еще в конце XVIII столетия. Венгерский изобретатель и механик Вольфганг Кемпелен сконструировал аппарат, который в течение многих лет обыгрывал сильнейших шахматистов Европы. Однако секрет этого «игрока в шахматы» заключался в остроумной системе зеркал, позволявшей внутри аппарата скрывать опытного шахматиста\*).

Век спустя, на исходе XIX столетия, испанский инженер Торрез-и-Квевадо сконструировал первую машину, которая играла в шахматы «по-настоящему», без обмана. Правда, машина Торреза разыгрывала не любые позиции. Она умела лишь королем и ладьей ставить мат одинокому королю противника. Да и делала она это весьма неторопливо, используя до 62 ходов, в то время как при оптимальной игре достаточно 16-ти.

В середине нашего века появились первые ЭВМ, и, вслед за ними, первые электронные «шахматисты» — программы для игры в шахматы. Шахматные программы стали соревноваться с «живыми» шахматистами (поначалу без особого успеха), играть между собой в матчах и в турнирах, разыгрывать мировое первенство. Первым чемпионом мира среди шахматных программ стала советская программа «Кансса» в 1974 г. в Стокгольме\*\*).

В последние годы развитие микропроцессоров привело к коммерческому

освоению игральных шахматных автоматов. Это небольшие пластмассовые коробочки со встроенной доской и фигурами, как у дорожных шахмат, с простой системой сигнализации ходов, работающие на батарейках (см. фото на с. 10). Играют они пока слабенько, на уровне третьего или второго разряда; это, впрочем, позволяет им уверенно побеждать начинающих живых шахматистов. Бывают и более серьезные специализированные шахматные машины. Так, «Belle» из США, чемпионка мира среди шахматных программ 1980 г., не просто программа, а ЭВМ, специально созданная для игры в шахматы, по мощности не уступающая многим ЭВМ четвертого поколения, снабженная соответствующей программой, которая продолжает совершенствоваться.

## Локальный принцип

Современные шахматные программы нацелены, в основном, на игру в середине партии — миттельшпилье. Здесь лучшие из них весьма квалифицированы — играют на уровне мастера спорта по шахматам.

В дебюте электронные игроки научились использовать человеческий опыт — для шахматных программ подготовлены специальные дебютные справочники. А как обстоит дело с эндшпилем? Ответ неутешителен.

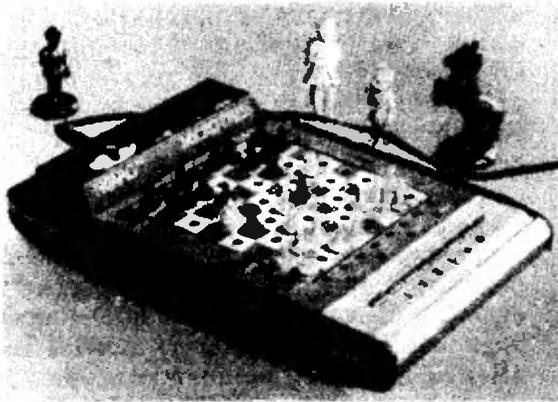
Некоторые эндшпилье программа может разыграть в целом безошибочно. Например, поставить мат при преимуществе в ферзя или ладью. Что же касается эндшпильей с незначительным материальным перевесом одной из сторон, то здесь миттельшпилье программы ведут себя довольно беспомощно, порой делая ошибки, которые заставили бы покраснеть второразрядника.

В чем же дело? Почему программа, хорошо играющая в миттельшпилье, играет слабее заурядного живого шахматиста в эндшпилье?

Дело в том, что миттельшпилье программы основаны на так называемом *локальном принципе*. Это значит, что для выбора хода в произвольной позиции рассматриваются позиции, получаемые из нее несколькими ходами своих и чужих фигур. Для оценки силы позиции вычисляется специальная функция, учитывающая как материальные, так и позиционные факторы: материальные силы обеих сторон, защи-

\* ) Одно из первых разоблачений обмана было опубликовано американским писателем Эдгаром По.

\*\* ) Об этом чемпионате подробно написано в «Кванте», 1974, №№ 11, 12; о последнем — см. «Квант», 1984, № 4, 3-я с. обложки.



Электронный шахматный автомат

шенность короля, открытые линии, пешечную структуру и т. д.

Силу программы определяет не только выбор этой функции, но и «глубина перебора», то есть количество ходов, на которые удастся «заглянуть» вперед. Обычно шахматные программисты для точности употребляют здесь термин «полуход», который означает ход одной из сторон. Так вот, лучшие программы сейчас могут просмотреть и учесть позиции, отстоящие от исходной на 7—9 полуходов<sup>\*</sup>).

При этом и машина, и мастер спорта, и гроссмейстер выбирают ход, рассмотрев варианты не до конца (мата), а лишь до некоторой глубины. Как показывает опыт, локальный принцип при игре ЭВМ в миттельшпиле вполне удовлетворителен.

Что же касается эндшпиля, то глубина просмотра среднего шахматиста значительно больше, чем у самой мощной ЭВМ. Шахматист на основании опыта и общих принципов сразу отбрасывает заведомо бессмысленные продолжения; это позволяет ему продвинуться в своем анализе значительно дальше, чем 7—9 полуходов. Машина же не умеет пока отбрасывать варианты и перебирает все подряд, пока не исчерпает своих ресурсов.

Итак, метод прямого перебора вариантов, применяемый шахматными программами, играющими по локальному принципу, мало эффективен в эндшпиле. Нельзя ли научить ЭВМ играть эндшпиль иначе? Для простых эндшпи-

лей известны правила «поведения», которыми можно оснастить программу. Например, чтобы королем и ладьей «заматовать» одинокого короля, нужно теснить его к краю доски. А чтобы разыгрывать эндшпиль «король и пешка против короля», практически достаточно давно известных шахматистам правил квадрата и оппозиции.

Однако в более сложных эндшпилях аналогичных правил шахматисты пока не могут сформулировать.

### Метод обратных волн

В 1912 г. на Пятом Всемирном конгрессе математиков известный специалист по теории множеств Эрнст Цермело прочитал доклад с необычным тогда названием «О применении теории множеств к теории шахматной игры». Он показал, что *все шахматные позиции можно объективно разделить на выигрышные за белых, выигрышные за черных и ничейные; кроме того, в каждой позиции указать лучший ход.*

Как же это можно сделать? Для этого отвлечемся от шахмат и поговорим о ... городах и дорогах.

Пусть в стране Z-ландии имеется сеть дорог, соединяющих между собой города. В каждом городе стоит застава, проезжая через которую путешественник платит дорожную пошлину величиной в один гульден. В нескольких городах  $Z_1, Z_2, \dots, Z_k$  проводятся ярмарки. Требуется указать для каждого города  $A$  путь, ведущий в какой-либо из ярмарочных городов, при котором придется заплатить как можно меньше.

Эту задачу можно решить следующим образом. Возьмем карту Z-ландии (рис. 1) и пометим город  $A$  числом 0. Теперь рассмотрим соседей города  $A$ , то есть города, в которые можно проехать из  $A$ , минуя все остальные города (здесь это города  $B$  и  $D$ ). Соседей города  $A$  пометим числом 1. Теперь рассмотрим соседей этих соседей и пометим числом 2 те из них, которые еще не помечены. Будем продолжать этот процесс до тех пор, пока не встретится один из городов  $Z_1, \dots, Z_k$ . Тем самым будет найден искомый кратчайший путь, притом первый встреченный ярмарочный город будет помечен числом, равным наименьшей пошлине, которая требуется, чтобы в него попасть из  $A$ . Тот же процесс можно применить для города  $B$  и т. д.

<sup>\*</sup> Поэтому запутать такую машину, как «Belle», в тактических осложнениях в миттельшпиле удается не всякому мастеру. Например, один из сильнейших специалистов по игре с машинными, шотландский мастер Д. Леви, выигрывает за счет спокойной композиционной игры, упрощая позицию, но постепенно наращивая стратегическое преимущество.

Недостаток метода состоит в том, что нумерацию для каждого города нужно вести заново, в сущности, повторяя одну и те же пути.

Чтобы избежать многократного рассмотрения одних и тех же дорог, проведем аналогичный процесс нумерации, но только двигаться будем в противоположном направлении — от ярмарочных городов к остальным. То есть ярмарки пометим числом 0, их соседей — числом 1 и т. д. (В качестве упражнения сделайте это для карты с рисунка 1.) Таким образом, мы помечаем города, двигаясь расширяющимися волнами. А поскольку движение происходит от ярмарочных городов к исходным, такой метод естественно назвать *методом обратных волн*.

Здесь уместно привести анекдот о двух французах, которые решили выяснить, являются ли они прямыми потомками Карла Великого по мужской линии. Метрические книги у них были. Один из французов начал с Карла Великого, взял его многочисленных сыновей, затем их сыновей и т. д. Через час он понял, что даже если ему будет помогать все население Франции, то на решение этой задачи потребуются годы. Другой же француз начал со своего отца, затем нашел его отца и через час благополучно добрался до Карла Великого. Таким образом, некоторые задачи выгоднее решать с конца.

Вернемся вновь в  $Z$ -ландию. Для любого множества  $M$  городов, обозначим через  $M$  множество его соседей. Определим *множество  $i$ -го ранга  $R_i$*  как совокупность городов, помеченных числом  $i$  (при применении метода обратных волн). В частности, ярмарочные города составят множество  $R_0$ . Допустим, что уже построены множества  $R_0, R_1, \dots, R_i$ . Множество городов, еще не имеющих ранга, обозначим  $V_i$ . Тогда, согласно методу обратных волн, множество очередного ранга  $R_{i+1}$  составят те и только те города из  $V_i$ , которые имеют соседей в  $R_i$ . Поэтому множества  $R_i$  городов  $i$ -го ранга можно вычислять по следующим рекуррентным формулам, для  $i \geq 0$ :

$$\begin{aligned} R_{i+1} &= V_i \cap R_i, \\ V_{i+1} &= V_i \setminus R_{i+1}. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $M \cap N$  означает пересечение множеств  $M$  и  $N$ ,  $M \setminus N$  — разность этих множеств.

Аналог метода обратных волн мы будем применять и в игровом случае для нахождения лучшего хода из позиции. Естественно, метод усложняется, поскольку противники стремятся к противоположным целям.

## Граф игры

Многие игры, такие, например, как крестики-нолики, шахматы, шашки, го и другие также можно изобразить графом. Каждую позицию игры представим точкой (*вершиной графа*). Каждый ход из одной позиции в другую изобразим стрелкой (*дугой графа*) между соответствующими вершинами. Такая совокупность дуг и вершин называется *графом игры*. На рисунке 2 представлен граф предельно простой игры: крестики-нолики на доске  $1 \times 3$  (выигрывает тот, кто поставит 2 крестика или 2 нолика подряд).

В дальнейшем будем рассматривать только граф шахматной игры. Вершины этого графа — шахматные позиции (понимаемые не только как полученные по правилам расположения фигур, но учитывающие очередность хода\*), а его дуги — шахматные ходы.

Теперь давайте подумаем, как для вершин графа игры определить понятие ранга. Хотелось бы, чтобы определение

\* ) А также, когда это существенно (например, для взятия пешки «на проходе»), и предыдущий ход.

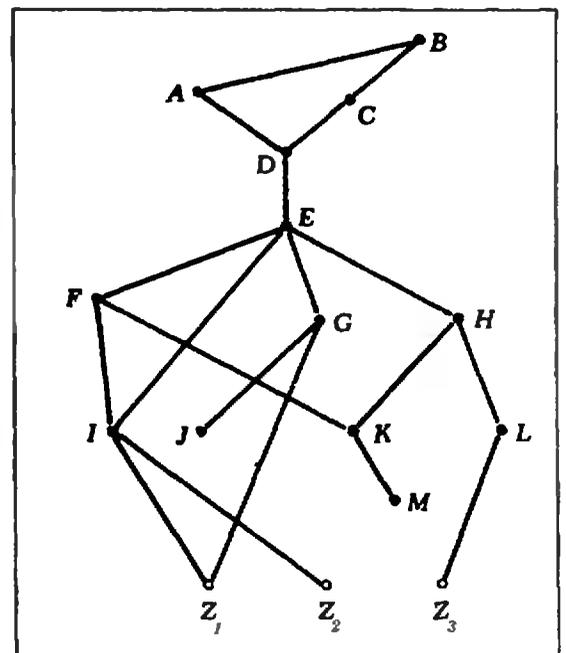


Рис. 1.

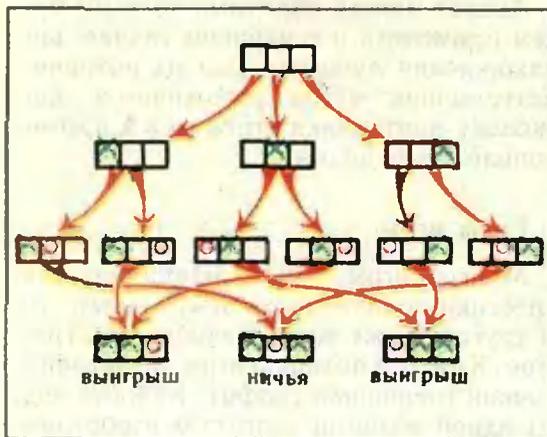


Рис. 2.

ранга соответствовало естественному представлению о минимальном числе ходов до целевых вершин. Здесь *целевыми* мы называем позиции, в которых выигрыш одной из сторон бесспорен. В шахматах это позиции, в которых уже стоит мат. Таким позициям в графе игры соответствуют тупиковые вершины, то есть вершины, из которых не выходит ни одна стрелка.

Как и в пенгровом случае, для определения ранга воспользуемся рекуррентным построением. Обозначим через  $B$  множество всех позиций с ходом белых, через  $Ч$  — с ходом черных (кроме патовых, которые мы пока рассматривать не будем). В множестве  $Ч$  выделим целевые (для белых), то есть те, где черным уже стоит мат; они образуют множество нулевого ранга, которое мы обозначим  $Ч'_0$ . Через  $B'_1$  обозначим множество всех позиций, где белые могут одним ходом перейти в  $Ч'_0$  (поставить мат). Через  $Ч'_1$  обозначим множество всех позиций из  $Ч \setminus Ч'_0$ , где любой ход черных ведет в  $B'_1$ . Через  $B'_2$  обозначим множество позиций из  $B \setminus B'_1$ , для которых существует ход  $Ч'_1$  (шахматисты их называют «двухходовками»). Через  $Ч'_2$  обозначим те позиции из  $Ч \setminus (Ч'_0 \cup Ч'_1)$ , при которых любой ход черных ведет в  $B'_1 \cup B'_2$  и т. д. (см. рис. 3).

Если уже определены  $Ч'_0, Ч'_1, \dots, Ч'_n$  и  $B'_1, B'_2, \dots, B'_n$ , то  $B'_{n+1}$  определяется как множество всех позиций из  $B \setminus (B'_1 \cup B'_2 \cup \dots \cup B'_n)$ , для которых существует ход в  $Ч'_n$ , а  $Ч'_{n+1}$  определяется как множество всех позиций из  $Ч \setminus (Ч'_1 \cup Ч'_2 \cup \dots \cup Ч'_n)$ , для которых любой ход ведет в  $B'_1 \cup B'_2 \cup \dots \cup B'_n$ . Таким образом,  $B'_n$  — это множество всех позиций, где белые могут поставить мат в  $n$  ходов или меньше.

Поскольку множества различных рангов не пересекаются, а число шахматных позиций конечно, описанный процесс на каком-то шаге  $N$  оборвется.

Таким образом, мы распределили позиции, выигрышные для белых, по уровням (рангам):

$$Ч'_0 \leftarrow B'_1 \leftarrow Ч'_1 \leftarrow B'_2 \leftarrow Ч'_2 \leftarrow \dots \quad (2)$$

Назовем *оптимальным* ход из  $B'_{k+1}$  в  $Ч'_k$  и из  $Ч'_k$  в  $B'_{k+1}$ . Оптимальный ход в выигрышных для белых позициях ведет к мату кратчайшим образом, а в проигрышных для черных позволяет продержаться до мата как можно дольше.

**Задача 1.** Найдите рекуррентные формулы, описывающие процесс ранжирования графа игры.

Процесс ранжирования мы рассмотрели с точки зрения белых. Аналогичные построения с точки зрения черных позволяют распределить по рангам позиции, выигрышные для черных:

$$B''_0 \leftarrow Ч''_1 \leftarrow B''_1 \leftarrow Ч''_2 \leftarrow B''_2 \leftarrow \dots \quad (3)$$

и определить оптимальные ходы в этих позициях.

Остальные позиции (не вошедшие в (2) или (3), а также матовые) являются ничейными. Для них оптимальным называется любой ход, не упускающий ничью.

Таким образом, мы доказали сформулированную выше теорему Цермело. И что же получилось? Теперь над ходом думать не надо! Достаточно выписать из любой позиции все ходы и выбрать тот, который ведет на самый «выгодный» уровень, то есть оптимальный ход. Так можно поступить и в начальной

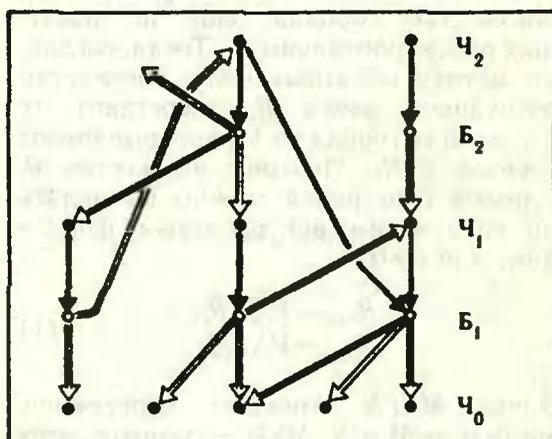


Рис. 3.

шахматной позиции и тогда, в частности, ответить на вопрос, выигрывают ли в ней белые.

Вы, наверное, уже догадались, почему это до сих пор не сделано. Описанное построение возможно лишь с точки зрения математической абстракции. Реально выполнить его нельзя из-за огромного числа всех шахматных позиций. Доказано, что в каждой позиции существует оптимальный ход. Однако не известен короткий способ (например, формула) для его нахождения.

Но нельзя ли практически проделать это, разумеется, не для всех позиций, а лишь для части — например, для некоторых эндшпилей?

### Малофигурные эндшпили

Пользуясь методом обратных волн, авторам удалось научить ЭВМ играть в эндшпиль «король, ферзь и пешка против короля и ферзя», (КФП—КФ), при условии, что белая пешка стоит на поле g7 и «король, ладья и пешка против короля и ладьи» (КЛП—КЛ) \* с любым положением пешки. Эти эндшпили машина играет не просто лучше человека, а делает в каждой позиции оптимальный ход. Таким образом, малофигурные эндшпили поддаются точному анализу на ЭВМ.

Однако такой анализ реализовать совсем не просто, потому что его трудоемкость находится где-то на пределе возможностей современных ЭВМ. Так, в эндшпиль КЛП—КЛ необходимо рассмотреть около миллиарда позиций. А если на запись каждой позиции

потратить всего лишь несколько «бит» (символов 0 или 1 в машинной памяти), то множество позиций займет всю память машины (и «оперативную», и «внешнюю»). Поэтому для машинного анализа малофигурных эндшпилей пришлось применить ряд специальных приемов, направленных на экономное использование ресурсов ЭВМ. Мы лишь бегло остановимся на одном из этих приемов (декомпозиции), на примере эндшпиля КЛП—КЛ.

Вспомним, что задача машины — ранжирование графа  $\Delta$  всех позиций, возникающих при разыгрывании эндшпиля КЛП—КЛ. Разумеется, число позиций в  $\Delta$  больше, чем число позиций КЛП—КЛ (например, обмен ладья переводит нас в эндшпиль КФ—К, проход пешки в ферзи дает КФЛ—КЛ и т. п.), но это число значительно меньше, чем позиций в графе  $\Gamma$  всей шахматной игры. Более того, сам граф  $\Delta$  может быть разбит на части (это разбиение показано на рисунке 4). Суть метода декомпозиции состоит в том, чтобы эти части ранжировать по отдельности. Этот прием приводит к цели потому, что связи между частями не слишком сложны: в частности, они не образуют ориентированных циклов\* (см. рис. 4). Такой граф называется *ациклическим*.

**Задача 2.** Докажите, что вершины ациклического графа можно занумеровать так, что любая дуга будет вести из вершины с большим номером в вершину с меньшим номером.

Итак, исследование графа  $\Delta$  свелось к изучению серии эндшпилей; однако некоторые из них все еще велики.

\* Последняя работа была проделана большим коллективом под руководством В. Л. Арлазарова

\* Это значит, что нельзя выйти из какой-либо вершины и, двигаясь по направлению стрелок, вернуться в нее же

Схема эндшпилей, возникающих из позиций типа КЛП—КЛ при изменении состава фигур (взятием или превращением пешки). Для наглядности опущена часть эндшпилей, не влияющих на исследование основного эндшпиля КЛП—КЛ.

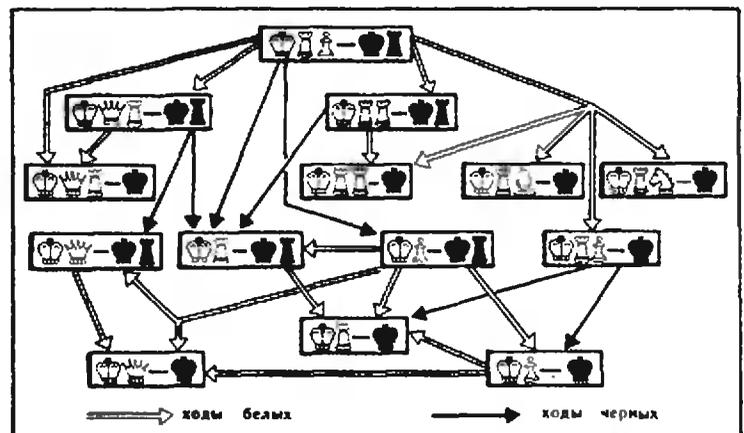


Рис. 4.

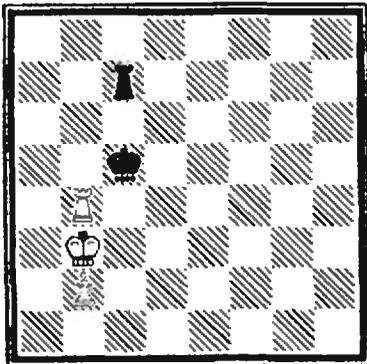


Рис. 5.

В случае пешечного эндшпиля, задачу его анализа удастся уменьшить, проведя декомпозицию уже не по составу фигур, а по различным положениям пешек. Это можно сделать потому, что пешки не ходят назад и не переходят с одной вертикали на другую без взятий. Декомпозиция оказалась решающим приемом для размещения эндшпиля КЛП—КЛ во внешней памяти ЭВМ.

Недостаток места не позволяет нам рассказать подробнее о других приемах — использование симметрии, метод «групповой обработки» и др. Эти приемы дали возможность удовлетворить ограничения как по объему имеющейся оперативной памяти ЭВМ так и во времени счета, что позволило довести анализ малофигурных эндшпилей до конца.

### Машина разыгрывает эндшпиль

Как же все это выглядит на практике? Имеемся два партнера, делающие ходы поочередно, скажем, в эндшпиль КЛП—КЛ. Но в нашем случае один из партнеров — человек, а другой — ЭВМ. В результате процесса ранжирования позиций, проведенного раз и навсегда, в памяти ЭВМ хранится «шпаргалка» — список всех позиций с указанием ранга. Сидя за пультом дисплея, человек набирает позицию и сообщает свой ход. В ответ машина, пользуясь «шпаргал-

кой», находит ранг получившейся позиции и просматривает все ходы из нее, пока не наткнется на оптимальный ход, который и высвечивает на экране дисплея.

**Задача 3** (для тех, у кого есть много много времени). В позиции с рисунка 5 белые начинают и выигрывают.

Эта позиция замечательна тем, что длина оптимального пути от нее до превращения пешки рекордна — 60 ходов! Цепочку ходов из нее мы получили, заставив машину играть за обе стороны.

### И что же дальше?

Итак, машину научили разыгрывать эндшпиль КЛП—КЛ, причем не только идеально правильно, но и весьма быстро, затрачивая на каждый ход 10—15 секунд (сравните с турнирными правилами — 2 часа на 40 ходов).

Аналогично можно научить ЭВМ играть оптимально и в других пятифигурных эндшпилях. С использованием новых идей, улучшающих алгоритм анализа эндшпиля, а также более мощных машин, видимо, удастся сделать доступными для исследования 6—7 фигурные эндшпили. В то же время миттельшпильные шахматные программы, о которых мы уже рассказывали, даже в многофигурных эндшпилях (10—12 фигур) играют неважно.

Как заполнить эту лагуну, пока не известно. Быть может, удастся создать достаточно просто формулируемые правила поведения в эндшпилье, рекомендующие пусть и не оптимальные, а близкие к оптимальным ходы. Такие правила можно разрабатывать, исследуя эндшпили, полный анализ которых уже выполнен на ЭВМ. Эти правила оказались бы весьма ценными и для шахматистов, поскольку пользоваться ими удобнее, чем огромными справочными массивами, хранящимися в памяти машины.

## Две задачи о числах Фибоначчи

Докажите следующее свойство чисел Фибоначчи (см. с. 17)

1. Произведение и частное двух любых различных, отлич-

ных от единицы, чисел Фибоначчи никогда не являются числами Фибоначчи.

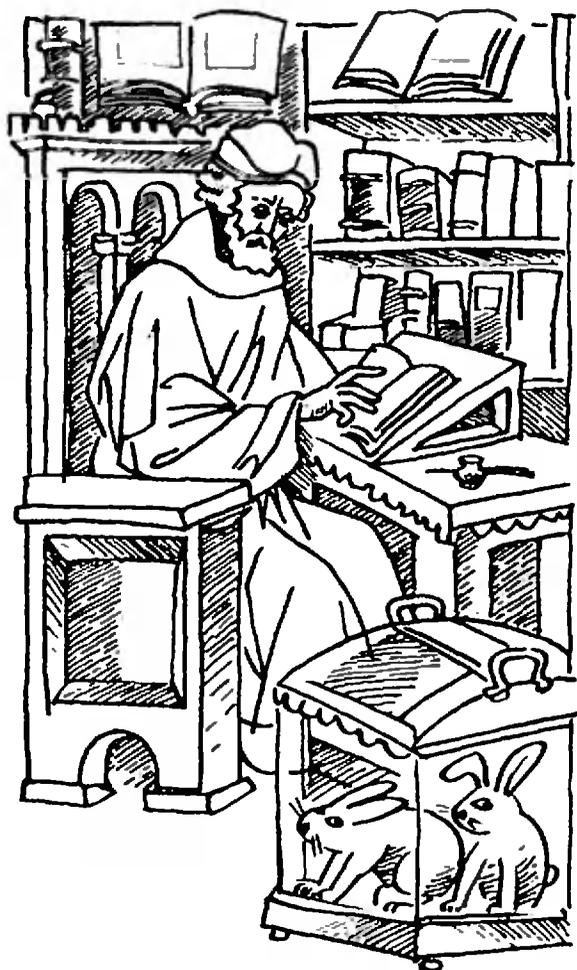
Известно, что с возрастанием номеров сами числа Фибоначчи быстро увеличиваются. Так,  $f_1=1$ , но  $f_{50}=12586269025$  и  $f_{100}=354224848179261915075$ . Однако последнюю цифру лю-

бого числа найти легко. Действительно

2. Ровно через 60 чисел последняя цифра любого числа Фибоначчи периодически повторяется.

Докажите это.

М. И. Заикин



## Итальянский купец Леонардо Фибоначчи и его кролики

Доктор физико-математических наук  
И. М. ЯГЛОМ

*Habent sua fata libelli*, — говорили древние, — имеют свою судьбу книги. А с ними и люди, создатели этих книг. Итальянский купец Леонардо из Пизы (1180—1240), более известный под прозвищем Фибоначчи\*) был, безусловно, самым значительным математиком европейского средневековья. Роль его книг в развитии математики и распространении в Европе математических знаний трудно переоценить.

\*) *Fibonacci*, или *lino Bonacci* — сын *Bonacci*; слово «*Bonacci*» означает «добродушный».

Однако сегодня его имя незаслуженно почти полностью забыто, и лишь одна забавная задачка, придуманная Фибоначчи, — о ней ниже — навеки внесла его имя в списки творцов математической науки.

Жизнь и научная карьера Леонарда теснейшим образом связана с развитием европейской культуры и науки. Хорошо известно, какую роль здесь сыграли итальянские города и итальянское купечество. Традиционные торговые связи с исламскими странами, находившимися тогда в периоде расцвета наук и искусств, обогащали европейскую культуру и исподволь подготавливали удивительный всплеск эпохи Возрождения. Прямых связей с Индией и Китаем еще не было, но знаменитое путешествие итальянского купца Марко Поло на восток было уже не за горами (1271—1295). Именно итальянское купечество явилось впоследствии родоначальником гуманизма, идеология и практика которого подготовили торжество научного метода и ознаменовали конец средних веков, когда мистическое озарение считалось чуть ли не основным инструментом познания мира, а тертуллианово\*) «верю, ибо абсурдно» — чуть ли не научным принципом.

В век Фибоначчи Возрождение было еще далеко, — однако история даровала Италии краткий промежуток времени, который вполне можно было назвать репетицией надвигающейся эпохи Ренессанса. Этой «репетицией» руководил Фридрих II Гогенштауфен (1194—1251), император (с 1220 г.) огромной «Священной Римской Империи Германской Нации» и король (с 1197 г., то есть с трехлетнего возраста!) легкомысленного Неаполитанского (или Сицилийского) королевства, столь далекого и географически и идеологически от суровой Германии, которую терпеть не мог ее император Фридрих.

Воспитанный в традициях южной Италии, причудливо соединяющей элементы христианской культуры с сильным влиянием арабов и Востока, Фридрих II был внутренне глубоко далек от европейского христианского рыцарства, воплощением которого были его дед Фридрих Барбароса (1125—1190) или английский король Ричард

\*) Тертуллиан, Квинт Септимий Флоренс, христианский теолог и писатель (II—III век).

Львиное Сердце (1157—1199). В ряде итальянских городов он завел гаремы, что мало подходило «христианейшему» императору. К преподаванию в основанном им Неаполитанском университете, наряду с христианскими учеными, он привлек арабов и евреев. Более того, молва приписывала ему авторство атеистического памфлета «О трех обманщиках», под которыми подразумевались Моисей, Христос и Магомет.

Столь любимые его дедом рыцарские турниры, на которых сражающиеся калечили друг друга на потеху публике, Фридрих II совсем не признавал. Вместо этого он культивировал гораздо менее кровавые математические соревнования (нечно среднее между математическими олимпиадами и КВН), на которых противники обменивались не ударами мечом, а задачами.

На таких турнирах и заблистал талант Леонардо Фибоначчи. Этому способствовало хорошее образование, которое дал сыну купец Боначчи, взявший его с собой на Восток и приставивший к нему арабских учителей. Впоследствии Фибоначчи пользовался неизменным покровительством Фридриха II. Это покровительство облегчило дальнейшие торговые поездки Леонардо в северную Африку, Египет, Сирию, Византию, во время которых он глубоко ознакомился с арабской и греческой наукой. (Произведения классиков античной науки были известны тогда, главным образом, в арабских переводах.) Покровительство Фридриха II стимулировало также выпуск научных трактатов Фибоначчи: обширнейшей «Книги абака» (1202 г., переработанный и дополненный вариант, 1228 г.), «Практики геометрии» (1220 г.), «Книги квадратов» (1225 г.). По этим книгам, превосходящим по своему уровню арабские и средневековые европейские сочинения, учили математику чуть ли не до времен Декарта (XVII в.) и Эйлера (XVIII в.).

В строении всех книг Леонардо явственно сказывается их происхождение от математических турниров. Основную роль в них играют многочисленные решенные и комментированные задачи, — иногда те, которые предлагались на турнирах самим Леонардо или его основным соперником, выходцем из сицилийского купечества Иоганном Палермским, придворным философом Фридриха II. Заметим еще,

что абак — это старинная счетная доска, нечто вроде русских счетов. Однако «Книга абака» посвящена не практике счета, а теоретической арифметике в широком понимании этого термина. В частности, по этой книге Европа впервые познакомилась с арабскими (точнее — индийскими) цифрами и с современной системой записи чисел. Аналогично, «Практика геометрии» посвящена не прикладной (землемерной) геометрии, а теоретической геометрии.

Для характеристики достижений Леонардо достаточно упомянуть две из решенных им задач: *найти три числа  $x$ ,  $y$  и  $z$  такие, что их сумма, увеличенная как на  $x^2$ , так и на  $x^2 + y^2$  и  $x^2 + y^2 + z^2$  была бы полным квадратом* (решение Леонардо:  $x = 16/5$ ,  $y = 48/5$  и  $z = 144/5$ ) и, особенно, задачу *о решении кубического уравнения  $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$* . Леонардо доказывает, что корень этого уравнения не может быть выражен в квадратных радикалах (первое «доказательство невозможности» в европейской математике после античных теорем об иррациональности  $\sqrt{2}$  и других чисел), а затем вычисляет корень уравнения с ошибкой, не превышающей 0,00000000003 (фантастическая точность).

Но из всех достижений Леонардо неблагоприятное человечество помнит сегодня лишь следующую задачу из «Книги абака»:

«Некто поместил пару кроликов в некоем месте, огороженном со всех сторон стеной, чтобы узнать, сколько пар кроликов родится при этом в течении года, если природа кроликов такова, что через месяц пара кроликов производит на свет другую пару, а рожают кролики со второго месяца после своего рождения»

Ясно, что если считать первую пару кроликов новорожденными (Леонардо не делает этого предположения, что, впрочем, мало отражается на результатах, то на 2-й месяц мы будем попрежнему иметь 1 пару; на 3-й месяц —  $1 + 1 = 2$ ; на 4-й —  $2 + 1 = 3$  пары (ибо из двух имеющихся пар потомство даст лишь одна пара); на 5-й —  $3 + 2 = 5$  пар (лишь две родившиеся на 3-й месяц пары дадут потомство на 5-м месяце); на 6-й месяц —  $5 + 3 = 8$  пар (ибо потомство дадут только те пары, которые родились на 4-м месяце) и т. д. Таким образом, если обозначить число пар

кроликов, имеющих на  $n$ -м месяце через  $f_k$ , то  $f_1=1$ ,  $f_2=1$ ,  $f_3=2$ ,  $f_4=3$ ,  $f_5=5$ ,  $f_6=8$  и т. д., причем образование этих чисел регулируется общим законом:

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} \text{ при всех } n > 2 \quad (1)$$

— ведь число  $f_n$  пар кроликов на  $n$ -м месяце равно числу  $f_{n-1}$  пар кроликов на предшествующем месяце плюс число вновь родившихся пар, которое совпадает с числом  $f_{n-2}$  пар кроликов, родившихся на  $(n-2)$ -м месяце (ибо лишь эти пары кроликов дают потомство).

Числа  $f_n$ , образующие последовательность 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, ..., называются ныне *числами Фибоначчи*. Эти числа обладают многими удивительными свойствами. Перечислим некоторые из них. Их доказательства читатель может рассматривать как задачи:

1.  $f_1 + f_2 + \dots + f_n = f_{n+2} - 1$ .
2. а)  $f_1 + f_3 + f_5 + \dots + f_{2n-1} = f_{2n}$ ,  
б)  $f_2 + f_4 + f_6 + \dots + f_{2n} = f_{2n+1} - 1$ .
3.  $f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_n^2 = f_n f_{n+1}$
4. а)  $f_{2n} = f_{n+1}^2 - f_{n-1}^2$ ,  
б)  $f_{3n} = f_{n+1}^3 + f_n^3 - f_{n-1}^3$ .
5.  $f_n^2 = f_{n-1} f_{n+1} - (-1)^n$ .
6.  $f_{n+m} = f_{n-1} f_m + f_n f_{m+1}$ .
7.  $f_n$  четно  $\Leftrightarrow$  делится на 3.
8.  $f_n$  делится на 7  $\Leftrightarrow$  делится на 8.
9.  $f_n$  делится на  $f_m \Leftrightarrow n$  делится на  $m$ .

Этот список можно было бы продолжить. Заинтересованный читатель найдет много других красивых тождеств (свойств чисел  $f_n$ ) в популярных книгах, названных в конце статьи, в частности в замечательных брошюрах и книгах Н. Н. Воробьева. Еще два свойства, присланные в «Квант» М. И. Заикиным, можно посмотреть на с. 14 этого номера.

Рекуррентное соотношение (1) позволяет без труда последовательно вычислять числа  $f_1, f_2, f_3, \dots$ . Но есть ли явное выражение для общего члена  $f_n$  последовательности Фибоначчи, не требующее знания предыдущих членов? Есть, притом совершенно неожиданное. Посудите сами:

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[ \left( \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left( \frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]. \quad (2)$$

Подробный разбор доказательства имеется у Воробьева, а также в брошюре А. И. Маркушевича, цитированной в списке литературы; см. также «Квант» 1982, № 1, с. 19.

Особенно возросла популярность чисел Фибоначчи в послевоенные годы, что связано с определенными изменениями в самой математике, в частности — с ростом значения комбинаторики и проблем, связанных с целыми числами. Известную роль здесь сыграло неожиданное появление чисел Фибоначчи в некоторых из недавних важных исследований, формально никак с этими числами не связанных. В первую очередь мы имеем в виду сенсационное решение молодым ленинградцем Юрием Матиясевичем так называемой *десятой проблемы Гильберта\**, а также возникновение чисел Фибоначчи в некоторых из идущих от американца Ричарда Беллмана направлений современной прикладной (оптимизационной) математики.

Где только не возникают числа Фибоначчи! У них есть красивые геометрические применения, важные приложения в биологии растений: например, в размещении на ветке листьев тех или иных пород деревьев, в строении чешуек ананаса или расположении зерен подсолнуха (явление *филотаксиса*; см. «Квант», 1979, № 5, с. 53). Задача об *оптимальной стратегии автомобилиста*, желающего найти самую выгодную для него скорость машины, то есть такую, при которой она потребляет наименьшее количество бензина на километр пройденного пути, тоже приводит к числам Фибоначчи — вот уж невозможно сразу увидеть, какое отношение эти числа имеют к такой задаче!

Всего не перечислишь. Мы назовем еще лишь разработку оптимальной стратегии в старинной китайской народной игре *цзяньшицзы*, о которой можно прочитать на с. 18 этого номера.

#### Список литературы

1. Воробьев Н. Н. *Числа Фибоначчи*, 1-е издание, М.—Л.: Гостехиздат, 1951; 4-е издание, М.: Наука, 1978.
2. Маркушевич А. И. *Возвратные последовательности*, М.: Наука, 1979.
3. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. *Избранные задачи и теоремы элементарной математики* (арифметика и алгебра), М.: Наука, 1976.
4. Дынкин Е. Б., Успенский В. А. *Математические беседы*, М.—Л.: Гостехиздат, 1952.
5. Стахов А. П. *Алгоритмическая теория измерения*, М.: Знание, 1979.

\* См «Квант», 1971, № 11, с. 31

# «Ферзя — в угол», «цзяньшицзы» и числа Фибоначчи

А. Ю. МАТУЛИС, А. Ю. САВУКИНАС

Мы хотим познакомить вас с еще одним, довольно неожиданным, применением чисел Фибоначчи, о которых рассказано в статье И. М. Яглома на с. 15—18 этого номера журнала.

Мы увидим, что числа Фибоначчи помогают построить теорию древней китайской игры «цзяньшицзы» и связанной с ней игры «ферзя — в угол». Этим играм уже были посвящены статьи И. М. Яглома («Квант», 1971, № 2, с. 4) и А. Орлова («Квант», 1977, № 3, с. 41).

Здесь мы наметим несколько иной подход к решению той же задачи.

## «Цзяньшицзы» и «ферзя — в угол»

Условия старинной игры «цзяньшицзы» (выбирание камней) таковы. Имеются две кучки камней (или каких-нибудь других предметов, например спичек). Двое играющих поочередно выбирают камни из этих кучек, причем за один ход можно либо взять любое число камней из одной (какой угодно) кучки, либо поровну из обеих кучек сразу. Выигрывает тот, кто возьмет последний камень.

Нам требуется найти правила беспронгрешной игры.

Пусть в одной кучке  $a$  камней, во второй  $b$  камней. Поставим в соответствие паре чисел  $(a, b)$  клетку (бесконечной!) шахматной доски, изображенной на рисунке 1 и поместим в клетку  $(a, b)$  ферзя.

Легко видеть, что каждому ходу в игре «цзяньшицзы» соответствует некоторый ход ферзя: если игрок берет  $k$  камней из первой кучки, то ферзь смещается на  $k$  клеток влево; если игрок берет  $l$  камней из второй кучки — ферзь смещается на  $l$  клеток вниз; если же он берет по  $t$  камней из каждой

кучки, ферзь смещается на  $t$  клеток по диагонали влево и вниз.

Итак, вместо игры «цзяньшицзы», можно рассматривать игру «ферзя — в угол» с такими правилами: на бесконечной шахматной доске стоит ферзь. Два игрока по очереди перемещают ферзя так, чтобы он приближался к угловому полю  $(0, 0)$ , то есть за один ход разрешается смещать ферзя на любое число клеток либо влево, либо вниз, либо по диагонали влево и вниз. Выигрывает тот, кто приведет ферзя на поле  $(0, 0)$ .

На рисунке 1 изображен ход игры, начинающейся в клетке  $(12, 14)$ , где красные стрелки указывают ходы первого игрока, а синие — второго; выиграл здесь первый игрок.

Понятно, что любой партии игры в «цзяньшицзы» соответствует некоторая партия игры «ферзя — в угол», а партии игры «ферзя — в угол» — партия «цзяньшицзы». Поэтому в дальнейшем мы будем говорить только об игре «ферзя — в угол».

## Пронгрешные поля

На рисунке 2 изображена бесконечная шахматная доска, на которой некоторые поля помечены знаком «—». Эти поля мы будем называть также пронгрешными. Нетрудно видеть, что если один из играющих будет каждым своим ходом ставить ферзя на отмеченное поле, то он выигрывает.

В самом деле, ни из какого отмеченного поля нельзя перейти ходом ферзя на отмеченное поле. Напротив, из любого неотмеченного поля можно одним ходом перейти на отмеченное. Поэтому, поставив ферзя на отмеченное поле, вы вынуждаете вашего противника сойти с отмеченного поля. Следующим ходом вы можете снова шагнуть на отмеченное поле (более близкое к полю  $(0, 0)$ ) и так далее. В конце концов вы шагнете на отмеченное поле  $(0, 0)$  и выигрываете.

Можно указать правило, по которому последовательно получают отмеченные поля. Сначала отмечается поле  $(0, 0)$ . На это поле можно пойти с любого поля вертикали  $a=0$ , горизонтали  $b=0$  и диагонали  $a=b$ . Ближайшие нерассмотренные поля — это поля  $(1, 2)$  и  $(2, 1)$ . На одно из этих полей можно пойти из любых полей вертикалей  $a=1$ ,  $a=2$ , горизонталей

$b=1$  и  $b=2$  и диагоналей  $b-a=1$ ,  $a-b=1$ . С самих же полей  $(1; 2)$  и  $(2; 1)$  можно пойти только на неотмеченные поля. Значит, эти два поля мы должны отметить знаком «—». За этими полями следуют поля  $(3; 5)$  и  $(5; 3)$ , которые мы тоже должны отметить, и так далее.

Поскольку симметричны относительно главной диагонали поля  $(a; b)$  и  $(b; a)$  в этой игре совершенно равноправны (это особенно понятно при формулировке игры на языке кучек камней: ведь  $(a; b)$  и  $(b; a)$  — это, разумеется, одно и то же положение, когда в одной кучке имеется  $a$ , а в другой  $b$  камней), мы в дальнейшем будем изучать отмеченные поля, лежащие в верхней половине доски, то есть поля, для которых  $b \geq a$ .

Положение первых из таких полей приведено в таблице: здесь  $n$  — номер проигрышного поля.

Проигрышные поля  $(a_n, b_n)$

$n$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$a_n$	0	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19
$b_n$	0	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31

Из описанного выше способа построения проигрышных полей следует, что на каждой вертикали, на каждой горизонтали и на каждой диагонали  $b-a=n$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ) имеется единственное отмеченное поле. При этом отмеченные поля нижней половины доски симметричны отмеченным полям  $(a_n; b_n)$ . Это поля  $(b_n; a_n)$ .

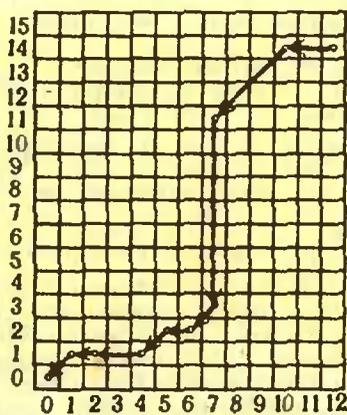


Рис. 1.

### Свойства чисел $(a_n; b_n)$

Из таблицы видно, что наши числа  $(a_n, b_n)$  обладают следующими свойствами.

1. Каждое натуральное число входит в проигрышные пары один и только один раз: либо в качестве  $a_n$ , либо в качестве  $b_n$ .

Это означает, что при любом натуральном  $N$  либо на  $N$ -й горизонтали, либо на  $N$ -й вертикали есть такое поле, причем эти два случая взаимно исключают друг друга.

Учитывая теперь отмеченные поля нижней половины доски, получаемые заменой  $a \rightarrow b$ , а  $b \rightarrow a$ , мы можем утверждать, что каждая вертикаль и каждая горизонталь содержит одно и только одно отмеченное поле.

2. Для любого натурального  $n$  имеется единственная проигрышная пара  $(a_n, b_n)$  такая, что выполняется равенство  $b_n - a_n = n$ .

Заметим, что на доске разность  $b-a$  указывает расстояние от поля  $(a, b)$  до диагонали доски, измеренное по вертикали или по горизонтали. Число  $n$  мы будем считать совпадающим с номером соответствующей диагонали доски.

Свойства 1 и 2 обеспечивают то, что с каждого неотмеченного поля можно одним ходом перейти на отмеченное, а всякий ход с отмеченного поля приводит на неотмеченное, — то есть обстоятельства, которые обеспечивают выигрыш игроку каждым своим ходом ставящему ферзя на отмеченное поле. (Если начальное положение ферзя — отмеченное, то начинающий при правильной игре второго игрока проигрывает, поэтому ему остается либо

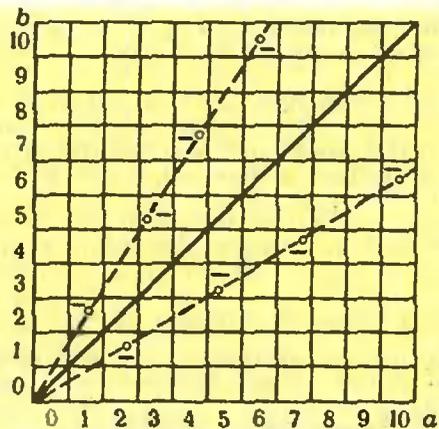


Рис. 2.

рассчитывать на ошибку противника — весьма правдоподобно, если тот не владеет правилами беспроеигрышной игры, либо сразу капитулировать).

В самом деле, с отмеченного поля все ходы ведут на неотмеченные поля. Если же поле  $(a, b)$  неотмеченное и  $b - a = n > 0$ , то при  $a > a_n$  (и, значит,  $b > b_n$ ) можно сразу перейти на поле  $(a_n, b_n)$  ходом по диагонали. Если же  $a < a_n$  (и  $b < b_n$ ), то либо  $a = a_k$ , либо  $b = b_l$ . В первом случае  $k < n$  (ибо  $a_k = a < a_n$ ) и  $b_k - a = b_k - a_k = k < n = b - a$ , и поэтому  $b > b_k$ ; из этого следует, что ферзя можно ходом по вертикали перевести в точку  $(a_k, b_k)$ . Если же  $a = b_l$  и тем более  $l < n$ , то  $b > a = b_l > a_l$ , и ферзя можно одним ходом перевести в отмеченное поле  $(b_l, a_l)$  нижней половины доски.

Точно так же проверяется, что из каждого неотмеченного поля нижней половины доски ферзя можно одним ходом поставить на отмеченное поле.

Опишем еще одно рекуррентное правило построения последовательности  $(a_n, b_n)$ .

Пусть  $a_0 = 0, b_0 = 0$ . Пара  $(a_n, b_n)$  определяется так:  $a_n$  — наименьшее из натуральных чисел, отсутствующих среди чисел  $a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{n-1}, b_{n-1}$ , а  $b_n = a_n + n$ .

Упражнение 1. Докажите, что последовательность  $(a_n, b_n)$  совпадает с построенной ранее последовательностью проигрышных пар.

Описанные нами способы нахождения отмеченных пар довольно трудно применять в конкретных ситуациях. Как, например, узнать, будет ли отмеченной пара чисел  $(a, b)$ , если  $a$  и  $b$  очень велики (скажем, если  $a$  и  $b$  порядка миллиона)?

### Частоты чисел $a_n$ и $b_n$ в ряду натуральных чисел

Заранее предупреждаем читателей, что в этом разделе мы ничего не будем доказывать, а лишь ограничимся некоторыми интуитивными соображениями, которые позволят нам угадать формулы для  $a_n$  и  $b_n$ .

Пусть  $N$  — натуральное число,  $A_N$  — количество чисел  $a_n$ , не превосходящих  $N$ , а  $B_N$  — количество не превосходящих  $N$  чисел  $b_n$ .

Тогда отношения  $p_N = \frac{A_N}{N}, q_N = \frac{B_N}{N}$  указывают долю («частоту») чисел  $a_n$ , соответственно  $b_n$ , среди всех натуральных чисел от 1 до  $N$ . Ясно, что  $p_N + q_N = 1$ .

Выпишем ряд первых чисел  $p_N$  и  $q_N$ :

$$\begin{aligned} p_1 &= 1/1 = 1, & q_1 &= 0/1 = 0; \\ p_2 &= 1/2 = 0,5, & q_2 &= 1/2 = 0,5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_3 &= 2/3 \approx 0,6667, & q_3 &= 1/3 \approx 0,3333; \\ p_4 &= 3/4 = 0,75, & q_4 &= 1/4 = 0,25; \\ p_5 &= 3/5 = 0,6, & q_5 &= 2/5 = 0,4; \\ p_6 &= 4/6 \approx 0,6667, & q_6 &= 2/6 \approx 0,3333; \\ p_7 &= 4/7 \approx 0,5714, & q_7 &= 3/7 \approx 0,4286; \\ p_8 &= 5/8 \approx 0,625, & q_8 &= 3/8 = 0,375; \\ p_9 &= 6/9 \approx 0,6667, & q_9 &= 3/9 \approx 0,3333; \\ p_{10} &= 6/10 = 0,6, & q_{10} &= 4/10 = 0,4; \\ p_{11} &= 7/11 \approx 0,6364, & q_{11} &= 4/11 \approx 0,3636. \end{aligned}$$

Мы видим, что числа  $p_N$  не слишком сильно отличаются друг от друга и «группируются» около величины, близкой к 0,3—0,4. Можно считать, что с ростом  $N$  величины  $p_N$  и  $q_N$  стремятся к некоторым пределам, то есть существуют  $\lim_{N \rightarrow \infty} p_N = p$  и  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_N = q$ , причем

числа  $p$  и  $q$  выражают частоту («плотность»), с какой встречаются в натуральном ряду числа  $a_n$  и  $b_n$  соответственно.

Если частота чисел  $a_n$  в натуральном ряду равна  $p$ , то эти числа составляют « $p$ -ю долю» всех натуральных чисел, то есть одно число  $a$

в среднем приходится на  $\frac{1}{p} = u$  натуральных

чисел. При равномерном распределении чисел  $a_n$  разность между соседними числами  $a_{i+1}$  и  $a_i$  этой последовательности должна была бы составить  $u$ , то есть числа  $a_n$  должны образовывать арифметическую прогрессию  $a_1 = u, a_2 = 2u, \dots, a_n = nu, \dots$  с разностью  $u = \frac{1}{p}$ .

Разумеется, в точности эти равенства выполняться не могут, так как числа нашей прогрессии — не целые; однако если допустить, что распределение чисел  $a_n$  «довольно равномерно», то можно надеяться, что  $a_i \approx iu, i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$ . Здесь знак  $\approx$  означает лишь, что правая часть не слишком сильно отличается от левой. Точно так же рассуждая, получим для чисел  $b_n$  приближенное равенство  $b_i \approx iv, i = 1, 2, \dots, n, \dots$ , где  $v = \frac{1}{q}$ .

Поскольку  $p + q = 1$ , числа  $u = \frac{1}{p}$  и  $v = \frac{1}{q}$  удовлетворяют условию

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1.$$

По свойству 2,  $b_n - a_n = n$ . Поэтому в силу нашего допущения  $b_n \approx nv, a_n \approx nu$ . Получим  $nv - nu \approx n$ , то есть  $v - u \approx 1$ .

Поэтому естественно искать числа  $u$  и  $v$ , исходя из системы  $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1, v - u = 1, u > 0, v > 0$ . Решая эту систему, получим

$$u = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, v = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

Из равенств  $a_i \approx iu$  и  $b_i \approx iv$  следует, что  $b_i \approx \frac{v}{u} a_i = ua_i$  (легко проверить, что  $v = u^2$ ).

Линия  $b = ua$  и симметричная ей линия  $b = \frac{1}{u} a$

в нижней половине доски изображены пунктиром на рисунке 2, а принадлежавшие этим линиям точки  $a_i = iu$  и  $b_i = iv$  отмечены кружочками. Эти точки, естественно, не совпадают с левыми нижними углами проигрышных клеток доски. Однако все кружки на рисунке принадлежат отмеченным клеткам. Естественно предположить, что  $a_i = [iu]$ , а  $b_i = [iv]$ , где квадратные скобки обозначают целую часть числа.

## Основная теорема

Теперь мы можем забыть все соображения, которые привели нас к выписанным выражениям для проигрышных полей  $(a_n, b_n)$ , и сразу сформулировать следующую основную теорему.

**Теорема 1.** Пусть  $u = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $v = u^2 = u + 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$ . Поле  $(a, b)$ , где

$b > a$ , в том и только в том случае является проигрышным, если существует натуральное число  $n$  такое, что  $a = [nu]$ ,  $b = [nv]$ . Если такого натурального  $n$  не существует, то позиция является выигрышной.

**Доказательство.** Рассмотрим последовательность точек

$$(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n), \dots$$

где  $a_n = [nu]$ ,  $b_n = [nv]$ , и докажем, что для этой последовательности выполнены свойства 1 и 2 (см. с. 19). Начнем со свойства 1.

Сначала убедимся в том, что все числа  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$  различны. Числа  $a_i = [iu]$  различны, так как  $u > 1$ . По той же причине ( $v > 1$ ) различны числа  $b_j = [jv]$ . Предположим, что какие-то два из чисел  $a_i$  и  $b_l$  совпадают. Это значит, что  $[iu] = [jv] = k$ . Поэтому  $iu = k + \delta_1$ , где  $0 < \delta_1 < 1$ ,  $jv = k + \delta_2$ , где  $0 < \delta_2 < 1$ . Разделив первое равенство на  $u$ , второе на  $v$ , а затем сложив полученные равенства, приходим к равенству

$$i + j = \frac{k}{u} + \frac{k}{v} + \frac{\delta_1}{u} + \frac{\delta_2}{v} = k + \frac{\delta_1}{u} + \frac{\delta_2}{v},$$

из которого следует, что

$$0 < i + j - k = \frac{\delta_1}{u} + \frac{\delta_2}{v} < \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1,$$

что невозможно, так как число  $i + j - k$  — целое.

Теперь докажем, что каждое натуральное число встречается в последовательности  $a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots$

Пусть  $N$  произвольное натуральное число.

Существует ровно  $\left[ \frac{N}{u} \right]$  чисел  $a_i = [iu]$ , меньших  $N$ . (Это числа с номерами  $i = 1, 2, \dots, \left[ \frac{N}{u} \right]$ .)

И ровно  $\left[ \frac{N}{v} \right]$  чисел  $b_j = [jv]$ , меньших  $N$  (числа с номерами  $j = 1, 2, \dots, \left[ \frac{N}{v} \right]$ ): Всего

чисел  $a_i$  и  $b_j$ , меньших  $N$ , существует  $\left[ \frac{N}{u} \right] + \left[ \frac{N}{v} \right]$ , а так как  $\frac{N}{u}$  и  $\frac{N}{v}$  — не целые числа,  $\frac{N}{u} - 1 + \frac{N}{v} < \left[ \frac{N}{u} \right] + \left[ \frac{N}{v} \right] < \frac{N}{u} + \frac{N}{v}$ . то есть

$$N - 2 < \left[ \frac{N}{u} \right] + \left[ \frac{N}{v} \right] < N.$$

Таким образом,  $\left[ \frac{N}{u} \right] + \left[ \frac{N}{v} \right] = N - 1$ . Но это означает, что чисел вида  $a_i$  и  $b_j$ , меньших  $N$ ,

имеется в точности столько, сколько всего натуральных чисел, меньших  $N$ . Поскольку все числа  $a_i$  и  $b_j$  различны, свойство 1 последовательности  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), \dots, (a_n, b_n), \dots$  доказано.

Свойство 2 доказывается без труда:

$$\begin{aligned} b_n - a_n &= [vn] - [un] = \\ &= [(u+1)n] - [vn] - [un] = [nu] + n - [un] = n. \end{aligned}$$

Тем самым основная теорема полностью доказана.

## Появляются числа Фибоначчи

Согласно основной теореме, для определения проигрышной пары с номером  $n$  надо умножить  $n$  на иррациональное число, заданное в виде бесконечной десятичной дроби. Возможно, что такое умножение вам не понравится, особенно если вы не имеете счетной машины. Как для определения проигрышных пар  $(a_n, b_n)$  обойтись только действиями над натуральными числами?

Для этой цели может послужить такое свойство проигрышных пар:

**3. Если  $(a_n, b_n)$  — проигрышная пара, то пары  $(b_n - 1, a_n + b_n - 1)$  и  $(b_n + 1, a_n + b_n + 2)$  — тоже проигрышные.**

При этом, исходя из начального поля  $(0, 0)$  или первого поля  $(1, 2)$ , мы можем построить, пользуясь свойством 3, все проигрышные пары.

Наметим доказательство свойства 3.

**Упражнение 2.** Докажите, что для проигрышных пар  $(a_n, b_n)$  и  $(a_{n+1}, b_{n+1})$ :  $2 < b_{n+1} - b_n < 3$ , и  $1 < a_{n+1} - a_n < 2$ .

Из результатов упражнения 2 следует, что числа  $b_n - 1$  и  $b_n + 1$  не являются большими числами проигрышных пар. По свойству 1 существуют такие  $k$  и  $l$ , что  $a_k = b_n - 1$ ,  $a_l = b_n + 1$ . Посмотрим, чему равны  $k$  и  $l$ .

По свойству 2, номер любой пары равен разности между большим и меньшим из чисел этой пары.

С другой стороны, из свойства 1 следует, что номер любой отмеченной пары  $(a_k, b_k)$  равен разности ее меньшего числа  $a_k$  и количества всех ненулевых  $b_l < a_k$ . При  $a_l = b_n - 1$  количество чисел  $b_l$ , меньших  $a_l$ , равно  $n - 1$ . Это значит, что  $k = b_n - 1 - (n - 1) = a_n$ . Поэтому пара  $(b_n - 1, b_n + a_n - 1)$  — отмеченная.

**Упражнение 3.** Докажите, что пара  $(b_n + 1, a_n + b_n + 2)$  является отмеченной для всякой отмеченной пары  $(a_n, b_n)$ .

**Упражнение 4.** Докажите, что любая отмеченная пара  $(a_n, b_n)$  может быть получена из пары  $(0, 0)$  или пары  $(1, 2)$  с помощью последовательного применения нескольких операций, описываемых свойством 3.

(Окончание см. на с. 29)



## Еще один шаг на пути к абсолютному нулю

Кандидат  
физико-математических  
наук  
А. И. БУЗДИН

Недавно японские ученые из Токийского университета установили новый рекорд в получении сверхнизких температур. Им удалось достичь температуры, превышающей абсолютный нуль лишь на 27 миллионных долей кельвина (27 мкК).

Получение столь низких температур, конечно, не является самоцелью. Продвижение к абсолютному нулю позволяет обнаружить новые физические явления, исследовать поведение необычных фаз вещества и, в конечном итоге, лучше понять природу различных физических взаимодействий.

Когда в начале века был получен жидкий гелий и появилась возможность работать с температурами порядка нескольких кельвинов, были обнаружены такие новые фундаментальные явления, как сверхпроводимость и, открытая несколько позже, сверхтекучесть.\*)

Долгое время считалось, что сверхтекучестью обладает только изотоп гелия с массовым числом четыре (гелий-4). В последнее десятилетие созданы установки, на которых можно получать температуры около

одной тысячной кельвина (1 мК), что позволило наблюдать сверхтекучесть другого изотопа гелия — с массовым числом три (гелий-3). Оказалось, что переход гелия-3 в сверхтекучее состояние (при температуре, близкой к 1 мК) имеет принципиально иной характер, чем возникновение (при  $T \approx 2,2$  К) сверхтекучести в гелии-4. Это открытие ознаменовало собой появление нового направления, которое позволило существенно расширить наши представления о физике низких температур.

Теперь очередь за микрокельвиновым диапазоном температур. Что же можно ожидать от проникновения в эту новую область? В принципе возможны самые неожиданные сюрпризы. Например, ученые предполагают обнаружить сверхпроводимость ряда нормальных металлов (золота, платины); причем возможно, что эта сверхпроводимость будет носить иной характер, чем наблюдавшаяся до сих пор.

Нужно отметить, что каждый новый шаг на пути к абсолютному нулю сопряжен с огромными техническими и технологическими трудностями, поскольку требует создания новых методов охлаждения. Расскажем немного об одной из них.

Рекорд температуры, о котором мы говорили, был поставлен с последовательным применением нескольких различных методов охлаждения. На последнем этапе использовался метод ядерного размагничивания. Суть его заключается в следующем. Ядра атомов отчасти подобны маленьким магнетикам, которые из-за теплового движения ориен-

тированы хаотически. Если включить магнитное поле, ядра-магнетики выстроятся преимущественно вдоль направления поля, то есть их тепловое движение как бы «заморозится». После выключения поля снова должна возникнуть хаотическая ориентация, что потребует поглощения тепла. Значит, при этом возможно понижение температуры.

К этому нужно добавить, что ядра с трудом забирают тепло от окружающих частиц: электронов и ионов. Поэтому ядра можно «охладить» и до значительно более низких температур — здесь рекорд достигает 50 нанокельвинов ( $5 \cdot 10^{-8}$  К). Однако передать такой холод электронам пока еще не умеют, и физики вынуждены довольствоваться температурой 27 микрокельвинов.

Подробнее о физике низких температур, о самой температуре и способах ее измерения вы можете узнать, например, из книг Я. А. Смородинского «Температура» и В. С. Эдельмана «Вблизи абсолютного нуля», вышедших в Библиотечке «Квант».

\*) О том, как был получен жидкий гелий и открыта сверхпроводимость, можно прочитать, например, в статье А. Буздина и В. Тугушева «Как создавалась физика низких температур» (Квант, 1982, № 9) (Прим. ред.)

# Если бы Следопыт знал физику...

Кандидат физико-математических наук  
Ю. М. САЙДЛЕР



«Верите полегче пулю, и ваш выстрел будет точен...» «Ункас, мальчик, ты даром тратишь порох и засыпаешь его слишком много. Ружье отдает, и пуля летит плохо... Твоя пуля попала на два дюйма выше...» Эти слова принадлежат герою романа Кунера охотнику Натаниэлю Бампо. Охотником он, судя по романам, был действительно замечательным. Но вот насколько точны были его советы с точки зрения физики? Действительно ли пуля полегче и не слишком много пороха повышают точность выстрела? Давайте попытаемся разобраться в этом вопросе.

Сначала полезно напомнить, что выстрел всегда сопровождается отдачей. Если приклад ружья упирается в плечо стрелка, то при выстреле ружье «толкает» его. Внимательный наблюдатель заметит, что одновременно с толчком в плечо при выстреле ствол ружья дергается вверх — ружье поворачивается около точки, в которой оно

упирается в плечо. Это тоже объясняется отдачей.

Чтобы понять, как это все происходит, обратимся к рисунку 1. Отрезок  $OB$  — это ствол ружья, отрезок  $OA$  — приклад, в точке  $A$  ружье упирается в плечо стрелка. На пулю, движущуюся в стволе, действует сила давления пороховых газов. На ружье в горизонтальном направлении действует такая же по абсолютной величине сила, направленная в противоположную сторону. Проекция  $f \cos \alpha$  этой силы определяет толчок в плечо, а проекция  $f \sin \alpha$  создает момент, который заставляет ружье поворачиваться вокруг точки  $A$ . Плечо стрелка мы будем считать неподвижным (в первом приближении это справедливо, так как время выстре-

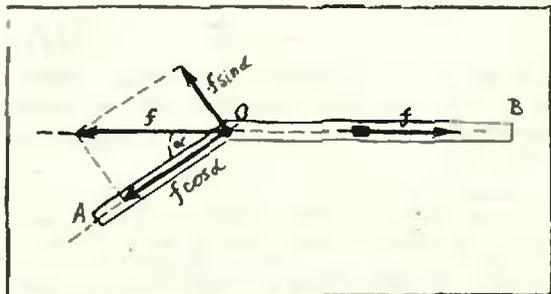


Рис. 1.

ла мало, а массу стрелка можно считать достаточно большой).

Понятно, что от количества пороха, сгорающего при выстреле, зависит сила давления пороховых газов. Чем больше пороховой заряд, тем больше это давление, тем больше сила  $f$  (см. рисунок 1) и тем большую скорость набирает пуля, двигаясь в стволе. С другой стороны, чем больше сила  $f$ , тем больше вращательный момент, обусловленный ее проекцией  $f \sin \alpha$ , и тем больше должно быть отклонение ствола от горизонтали при выстреле. Мы попробуем оценить это отклонение и обсудим вопрос о том, как оно зависит от массы и скорости пули.

Мы будем рассматривать упрощенную «модельную» задачу, и наши вычисления нельзя рассматривать как точное решение задачи о механике ружья при выстреле. О степени правильности наших качественных рассуждений мы сможем судить по разумности количественных оценок, к которым они приведут.

Для обозначения приближенных равенств мы пользуемся значком  $\sim$ ; такой значок часто употребляют, когда речь идет о сравнении по порядку величины\*).

На рисунках 2 и 3 показаны положения ружья в начальный момент (горизонтальный ствол) и в момент вылета пули. Точку  $A$ , как уже сказано выше, можно считать неподвижной. Центр тяжести ружья находится в точке  $O$ . Длину ствола обозначим буквой  $L$ , а расстояние  $AO$  —  $l$ . Угол между  $L$  и  $l$  равен  $\alpha$ , угол отклонения ствола в момент, когда пуля покидает ствол ружья, —  $\varphi$ . Средняя сила давления пороховых газов, действующая на пулю, равна  $\bar{f}$ , пуля движется в стволе ружья ускоренно, но нам удобно для оценок пользоваться средней скоростью пули; обозначим ее  $\bar{v}_n$ . Временем выстрела  $\tau$  назовем время движения пули по стволу; тогда

$$\bar{v}_n \tau \sim L. \quad (1)$$

Вращение ствола ружья, вообще говоря, тоже неравномерно, но можно ввести среднюю угловую скорость  $\bar{\omega}$ ;

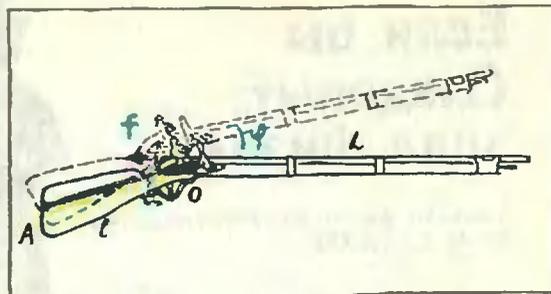


Рис. 2

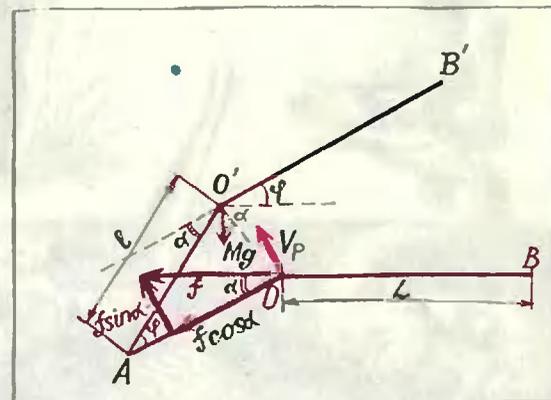


Рис. 3

тогда за время  $\tau$  ружье отклонится на угол

$$\varphi = \bar{\omega} \tau \sim \left( \frac{\bar{v}_p}{l} \right) \tau. \quad (2)$$

В формуле (2)  $\bar{v}_p$  — средняя за время выстрела скорость точки  $O$  в направлении, перпендикулярном  $AO$ .

Силу  $f$ , действующую на пулю массы  $m$ , можно выразить через среднее ускорение пули  $\bar{a}_n \sim \bar{v}_n / \tau$ :

$$f \sim m \bar{a}_n \sim m \frac{\bar{v}_n}{\tau} \sim \frac{m \bar{v}_n^2}{L}. \quad (3)$$

Такая же по величине, но противоположно направленная сила действует на само ружье. Выразим теперь среднее ускорение  $\bar{a}_p$  и среднюю скорость  $\bar{v}_p$  ружья в направлении, перпендикулярном  $AO$  (см. рисунок 3):

$$\bar{a}_p \sim \frac{f \sin \alpha - Mg \cos \alpha}{M}, \quad (4)$$

$$\bar{v}_p \sim \bar{a}_p \tau \quad (5)$$

(здесь  $M$  — масса ружья). Можно сразу воспользоваться тем, что типичные значения  $\alpha$  невелики ( $\alpha \leq 2 \cdot 10^{-1}$  рад), и считать  $\sin \alpha \approx \alpha$ ,  $\cos \alpha \approx 1$ . После этого из написанных выше формул (2) — (5) легко получить

$$\varphi \sim \frac{L}{l} \left( \alpha \frac{m}{M} - \frac{gL}{\bar{v}_n^2} \right). \quad (6)$$

\* Напомним, что две величины  $a$  и  $b$  условно называются величинами одного порядка, если их отношение не более чем в десять раз отличается от единицы. Равенство по порядку величины часто записывается в виде  $a \sim b$ . Размерности  $a$  и  $b$  должны быть, конечно, одинаковыми.

Посмотрим теперь повнимательнее на формулу (6). При ее выводе мы не учли, что перед выстрелом где-то вблизи точки  $O$  ружье поддерживается еще рукой охотника. Но нас интересует отклонение ствола вверх, и если у охотника не дрожат руки, то в рассматриваемой нами модельной ситуации можно считать, что ружье «оторвалось» от поддерживающей руки в тот самый момент, когда был нажат спуск. Поэтому в формулах (4) и (6) учтены только силы  $\vec{T}$  и  $M\vec{g}$ . Действие силы  $\vec{T}$  вдоль направления  $OA$  (проекция  $f \cos \alpha$ ) «гасится» плечом стрелка (последний действует на ружье с такой же по величине, но противоположно направленной силой).

Следующий наш вывод основан на том факте, что ружье «прыгает» вверх; значит, первое слагаемое в скобках в формуле (6) больше, чем второе, то есть

$$\alpha \frac{m}{M} > \frac{gL}{\bar{v}_n^2}$$

и, следовательно,

$$\bar{v}_n > \left( \frac{MgL}{\alpha m} \right)^{1/2}. \quad (7)$$

Попробуем теперь сделать численную оценку. Пусть масса ружья  $M \sim 5$  кг, длина ствола  $L \sim 1$  м, масса пули  $m \sim 10$  г,  $\alpha \sim 2 \cdot 10^{-1}$  рад. Нетрудно убедиться, что неравенство (7) приводит к значению  $\bar{v}_n > 100$  м/с. Реальные скорости для боевого оружия  $\sim 600$ — $800$  м/с. Таким образом, мы убедились в том, что второе слагаемое в формуле (6) меньше первого, и по порядку величины

$$\varphi \sim \alpha \frac{m}{M} \frac{L}{l} \sim 0,2 \frac{m}{M} \frac{L}{l}. \quad (8)$$

Из (8) следует, что чем меньше  $\alpha$ , тем точнее стрельба. Значит, лучше, если ружье имеет вид неизогнутой палки? Разумеется, нет. Не нужно забывать, что формула (8) справедлива только тогда, когда первое слагаемое в (6) превышает второе. Существует и чисто практическая причина — из ружья с очень малым углом  $\alpha$  очень трудно стрелять, из него просто неудобно целиться.

Если взять  $(m/M) \sim 10^{-3}$  и учесть, что  $L/l \sim 1$ , то для угла  $\varphi$  мы получаем оценку  $\varphi \sim 10^{-3}$  рад. Что это означает? При таком значении  $\varphi$  на расстоянии

порядка 100 м пуля отклонится вверх от точки прицеливания примерно на 10 см (естественно, если отсутствуют другие причины промахов и если отвлечься пока от влияния на летящую пулю силы тяжести).

Итак, как показали наши оценки, легкая пуля действительно улучшает точность стрельбы. От массы порохового заряда рассмотренное выше отклонение пули от цели не зависит.

Мы обсудили пока только вопрос о том, как вычислить отклонение ружья от линии прицеливания (в нашем случае — от горизонтального направления), пока пуля движется в канале ствола. Именно это отклонение и существенно для точности стрельбы. Но и после того, как пуля вылетела из ствола, само ружье продолжает двигаться вверх, ведь скорость центра тяжести ружья не равна нулю. Попробуйте сами оценить, на какой дополнительный угол отклонится ружье после того, как пуля покинула ствол. (В следующем номере журнала мы приведем решение этой задачи.)

Обратимся теперь снова к вопросу о скорости пули и величине порохового заряда. Мы уже говорили о том, что чем больше насыпает охотник пороха, тем больше скорость пули. А какая здесь связь с точностью стрельбы? Мы должны учесть еще, что пуля отклоняется при своем полете и вниз, это связано с действием силы тяжести. Такое отклонение зависит, конечно, от скорости пули и дальности цели. Если пуля вылетает из ружья горизонтально, то ее отклонение вниз определяется формулой  $gt^2/2$ , где  $t$  — время полета. Считая  $t \sim (X/\bar{v}_n)$ , где  $X$  — дальность цели, оцените сами отклонение  $gt^2/2 \sim gX^2/2\bar{v}_n^2$  при  $\bar{v}_n \sim 8 \cdot 10^2$  м/с и  $X \sim 100$  м. Вы увидите, что вниз пуля отклоняется тоже на несколько сантиметров ( $\sim 10$  см). В принципе, отклонение, определяемое углом  $\varphi$ , и отклонение под действием силы тяжести могут даже до той или иной степени компенсировать друг друга. Понятно теперь, что изгиб ружья (угол  $\alpha$ ) конструктивно оправдан.

А теперь читатель может снова задуматься над вопросом о том, знал ли Следопыт физику.

# О гидравлическом ударе

Кандидат технических наук  
Е. М. ВОИНОВ

В конце XIX века в Москве участились случаи разрыва труб городского водопровода, неоднократно происходили серьезные аварии на гидравлических станциях. Видимых причин этих событий не было, и в 1897 году великий русский ученый Николай Егорович Жуковский занялся изучением этого вопроса. В результате появилась, ставшая теперь классической, работа «О гидравлическом ударе в водопроводных трубах», в которой Жуковский дал предельно четкое решение задачи, доведенное до непосредственного практического применения. Он показал теоретически, а затем и экспериментально проверил, что при быстром закрывании запорных устройств и, следовательно, быстром прекращении движения воды по трубе давление в трубопроводе резко возрастает. Это явление, называемое гидравлическим ударом, и служит причиной разрыва труб. Познакомимся с ним подробнее.

Н. Е. Жуковский предположил, что резкое повышение давления в трубе обусловлено неустановившимся движением жидкости. Он пришел к выводу, что в процессе повышения давления в трубе после быстрого прекращения течения участвует вся жидкость, находящаяся в трубе, и ее кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию упругой деформации самой жидкости (то есть приводит к резкому повышению давления в ней), а также расходуется на работу по упругой деформации стенок трубы. Поясним, как протекает этот процесс.

Пусть из большого резервуара (рисунк 1) по достаточно длинной трубе течет жидкость со скоростью  $v_0$ . На конце трубы установлена задвижка, которая может быстро перекрывать трубу (что значит «быстро», мы поясним позже). При быстром закрывании задвижки в первый момент времени останавливается некоторый слой жидкости,

находящийся непосредственно у задвижки, и давление в нем из-за потери импульса резко возрастает. Остановка этого слоя вызывает остановку следующего за ним слоя, причем из-за сжимаемости жидкости (хотя и очень малой) второй слой остановится чуть позже, чем первый, и в нем также повысится давление. Так, слой за слоем, будет останавливаться жидкость во всей трубе, начиная от задвижки и вплоть до резервуара. Очевидно, что граница области повышенного давления будет перемещаться в том же направлении. Важно понимать, что при этом все слои жидкости остаются на своих местах, смещаясь лишь на незначительную величину, определяемую значением упругой деформации каждого слоя. Происходит передача состояния деформации от слоя к слою и связанное с ним распространение области повышенного давления вдоль трубы. Как принято говорить, распространяется волна давления.

Определим теперь максимальное значение возникающего в трубе давления. Для этого выделим небольшой объем жидкости, примыкающий к задвижке (это и есть слой, о котором шла речь выше). Пусть площадь сечения трубы равна  $S$ , а толщина слоя  $\Delta x$ ; тогда выделенный объем жидкости равен  $S \cdot \Delta x$ , а его масса  $m = \rho S \cdot \Delta x$ . За малое время  $\Delta t$ , в течение которого этот слой останавливается, он теряет импульс  $\Delta(mv_0) = \rho S \cdot \Delta x \cdot \Delta v_0$ , что приводит к повышению давления в нем на  $\Delta p$ . Согласно второму закону Ньютона, изменение импульса этого слоя определяется импульсом возникающей силы давления  $F = S \cdot \Delta p$ , то есть

$$F \cdot \Delta t = \Delta p \cdot S \cdot \Delta t = \rho S \cdot \Delta x \cdot v_0.$$

Отсюда

$$\Delta p = \rho v_0 \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \right).$$

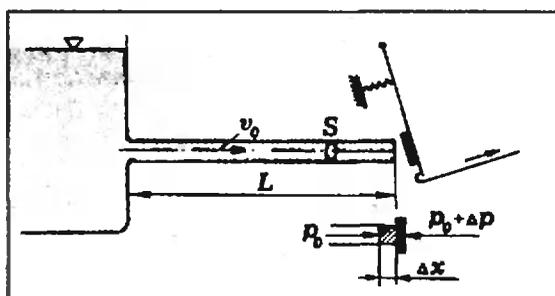


Рис. 1.

Входящая в это выражение величина  $c = \frac{\Delta x}{\Delta t}$  — это скорость распространения границы области повышенного давления (деформации) в жидкости вдоль трубы. Как показал Н. Е. Жуковский, эта величина зависит от упругих свойств самой жидкости и материала стенки трубы, а также от отношения толщины стенки трубы к ее диаметру. Оказалось, что для обычно используемых в трубопроводах стальных и чугунных труб при протекании в них воды эта скорость близка к скорости звука в воде  $c_{\text{зв}} = 1450$  м/с и равна  $c = 0,9c_{\text{зв}} \approx 1300$  м/с. Таким образом,

$$\Delta p = \rho v_0 c.$$

Мы получили известную формулу Н. Е. Жуковского для избыточного давления, возникающего при быстрой остановке жидкости, текущей по трубе. Явление резкого изменения давления жидкости, вызванное внезапным изменением скорости ее течения, называют гидравлическим ударом.

Теперь поясним, что следует понимать под быстрым закрытием задвижки. Для этого рассмотрим более подробно процесс распространения волны давления по трубе. Если труба имеет длину  $L$ , то время распространения области повышенного давления от задвижки до резервуара составляет  $t_1 = L/c$ . Когда эта волна (ее часто называют ударной) достигает резервуара, на границе трубы и резервуара соприкасаются два слоя жидкости с различными давлениями: один, находящийся со стороны резервуара, с давлением  $p_0$ , и другой, находящийся в трубе, с давлением  $p_{\text{уд}} = p_0 + \Delta p$ . Поскольку в таких условиях состояние равновесия на границе этих слоев невозможно, то небольшое количество жидкости из трубы вытечет в резервуар, и давление в этом сечении трубы понизится до давления  $p_0$ .

Это состояние пониженного (по отношению к давлению  $p_{\text{уд}}$  в трубе) давления начнет, в свою очередь, распространяться в обратном направлении — от резервуара к задвижке, которой он достигнет через время  $t_2 = 2L/c$  от момента закрытия задвижки. В момент времени  $t_2$  во всей трубе устанавливается начальное давление  $p_0$ . Однако, в тот момент, когда волна пониженного давления  $p_0$  достигает самой задвижки, слой жидкости, примыкающий к ней, стремится оторваться от нее, что приво-

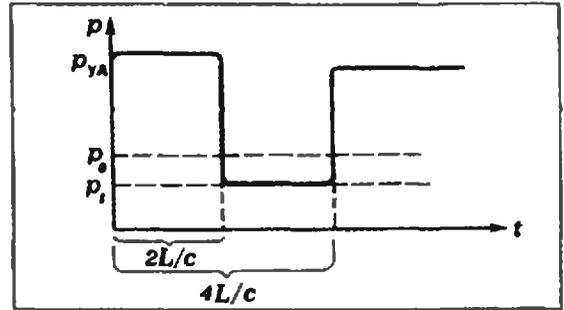


Рис. 2.

дит к понижению давления в нем до некоторой величины  $p_1 < p_0$ . Понятно, что после этого волна пониженного давления  $p_1$  начинает распространяться от задвижки к резервуару. После того как она достигает границы трубы и резервуара, там снова возникает ударная волна (но уже повышенного давления в трубе), которая доходит до задвижки через время  $t_3 = 4L/c$  от начала всего процесса. Теперь процесс, полный цикл которого мы рассмотрели, начнет повторяться, но вследствие потерь энергии на работу против сил трения (обусловленных вязкостью жидкости) амплитуда колебаний давления в ударной волне постепенно будет уменьшаться. На рисунке 2 показано, как будет изменяться давление у задвижки в течение всего рассмотренного цикла. Как следует из приведенных рассуждений, наиболее высокое давление в трубе будет иметь место в течение времени  $t = 2L/c$ . Поэтому под временем быстрого закрытия задвижки понимается время  $t_{\text{закр}} < 2L/c$ . По определению Н. Е. Жуковского, максимальное повышение давления в трубе принято называть прямым ударом.

Если же время закрытия задвижки больше  $2L/c$ , то величина избыточного давления оказывается меньшей, чем при прямом ударе, и, как показал Н. Е. Жуковский, определяется выражением

$$\Delta p_{\text{непр}} = \rho v_0 c \left( \frac{L}{ct_{\text{закр}} - L} \right).$$

Для примера рассмотрим остановку движения воды в стальной трубе длиной  $L = 500$  м при скорости течения воды  $v_0 = 3$  м/с. Приняв  $c \approx 1300$  м/с, получим: время быстрого закрытия трубы  $t_{\text{закр}} = 2L/c \approx 0,8$  с; соответствующее максимальное новышение давления при прямом ударе составит  $\Delta p_{\text{max}} = \rho v_0 c = 39 \cdot 10^5$  Па = 39 атм. При таком повы-

шении давления труба, рассчитанная даже на 10 атм, может разорваться. Если же время закрытия принять равным 10 с, то повышение давления составит всего  $\sim 2$  атм, что уже не угрожает разрывом трубы. Такой удар называется непрямым.

Таким образом, наиболее простым средством борьбы с гидравлическим ударом является выбор безопасного времени закрытия задвижки. Получив эти результаты, Н. Е. Жуковский предложил заменить применявшиеся в магистральных трубопроводах пробковые краны (подобные самоварным) на медленно закрывающиеся вентильные, которые применяются и в настоящее время. После того как это было сделано, массовые разрывы труб прекратились. Как уже упоминалось, все описанные теоретические результаты о распространении ударных волн были проверены экспериментально самим Жуковским, и даже при имевшихся в то время весьма примитивных приборах получили блестящее подтверждение.

С явлением гидравлического удара вы, наверное, не раз встречались в быту. Иногда бывает так: открываешь водопроводный кран, ... и раздается сильное дребезжание, сопровождающееся вибрацией подводящей трубы. Это явление непосредственно связано с гидравлическим ударом, который вызывается неисправностью в кране. Попробуйте объяснить, как в данном случае «работает» гидравлический удар.\*)

Однако не следует думать, что гидравлический удар приносит только вред. По предложению Н. Е. Жуковского он используется, например, для очень полезного дела — нахождения мест разрыва труб, заложенных в землю. Для этого в том участке трассы, который, предположительно, имеет повреждение, перед задвижкой устанавливается прибор, записывающий давление. Затем достаточно быстрым закрытием задвижки (но не опасным для прочности трубы) создается слабый не прямой удар. Возникшее избыточное давление, дойдя до места утечки, резко спадет, и обратно к задвижке пойдет уже волна пониженного давления. По

величине промежутка времени  $\Delta t$  между появлением избыточного давления и его спадом легко определить место утечки: оно находится на расстоянии  $\Delta x = c \cdot \Delta t / 2$  от задвижки.

Гидравлическим ударом часто пользуются и в быту. Если вдруг засорилась труба, отводящая воду из раковины, то пришедший водопроводчик прикроет отверстие в раковине специальным устройством — вантузом — и резко ударит по рукоятке. За счет гидравлического удара обычно удается протолкнуть предметы, засорившие раковину.

Еще одним примером полезного использования гидравлического удара служит так называемый гидравлический таран — устройство для подъема воды. Его схема приведена на рисунке 3. Вода из большого водоема  $A$ , находящегося выше клапана  $E$  на  $H_1$  метров, поступает к отбойному клапану  $E$  и застывает его. Если на него падают, то вода под напором начнет вытекать наружу. Если же затем клапан резко отпустить, то поток воды прекратится, и возникнет гидравлический удар. Давление в трубе  $a$  повысится, клапан  $K$  откроется, и часть воды перетечет в емкость  $B$ . Затем давление в трубе  $a$  упадет, клапан  $K$  закроется, а клапан  $E$  вновь откроется, и вода начнет вытекать наружу. После этого клапан  $E$  закроется силой атмосферного давления, снова возникнет гидравлический удар и т. д. После заполнения емкости  $B$  жидкость по трубе  $b$  будет подниматься в емкость  $C$ .

Такое устройство работает автоматически: для его запуска требуется только один раз резко открыть клапан  $E$ . Полезность такого устройства состоит в его простоте, а также в том,

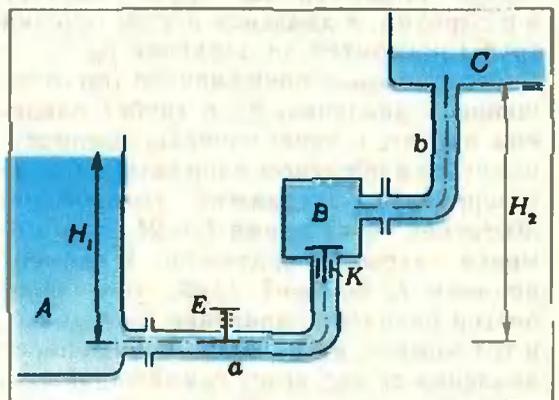


Рис. 3.

\*) В этом номере журнала в разделе «Лаборатория «Кванта» помещена статья «Почему «поет» водопровод?». Вы можете воспользоваться приведенной в ней схемой устройства водопроводного крана (рис. 1 на с. 31). (Прим. ред.)

что оно позволяет производить подъем воды на  $H_2=20\div 30$  м при напоре  $H_1$  всего 1—2 м. При этом никакого нарушения закона сохранения энергии не происходит — значительная часть воды вытекает из-под клапана  $E$ , теряя свою кинетическую энергию. Разработанная Н. Е. Жуковским теория позволяет рассчитать гидравлический таран с КПД 50—60 %. Любопытно заметить, что гидравлический таран был предложен французскими изобретателями братьями Монгольфье еще в 1796 году, то есть за сто лет до теоретической работы Н. Е. Жуковского. Таким образом, к нему были «причастны» основатели воздухоплавания братья Монгольфье и «отец русской авиации» Н. Е. Жуковский.

И, наконец, приведем еще один пример очень полезного использования гидравлического удара. В настоящее время в промышленности широко используется так называемая гидравлическая штамповка. Это делается следующим образом. В достаточно прочную емкость устанавливается матрица, изготовленная из прочного материала, имеющая «негативную» форму штампуемого изделия (там, где в изделии должна быть выпуклость, в матрице — вогнутость, и наоборот). На нее кладется заготовка, и емкость заливается жидкостью. В определенных местах в емкость вводятся два (или несколько) электрода. Осуществляя мощный импульсный разряд (или серию разрядов), создают гидравлический удар, деформирующий заготовку по форме матрицы. Таким образом штамуются стальные изделия значительных размеров с толщиной до 10 мм, изготавливаются кузовные детали автомобилей и др.

Имеются и водометные устройства, работающие по этому принципу. За счет энергии разряда удается получить скорость истечения струи до 1000 м/с. Один импульсный удар такой струи

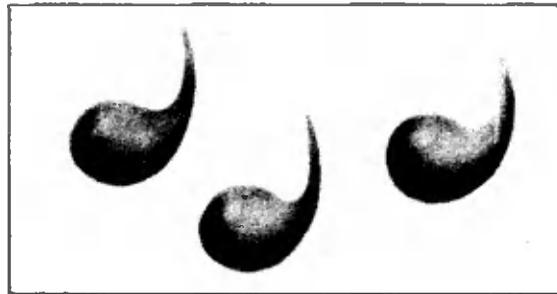


Рис. 4.

пробивает бетон на глубину до 60 мм. Электрогидравлическая технология применялась, например, для разрушения бетонных фундаментов Уралмашзавода при его реконструкции. Она осуществлялась следующим образом. В разрушаемом фундаменте пробивались вертикальные шпуров диаметром 40 мм и глубиной 300—500 мм. В них вставлялись электроды-взрыватели и все заливалось водой. Затем на электроды подавался мощный импульс тока — происходил гидравлический удар, разрушающий бетон.

В заключение опишем красивый опыт с так называемыми «батавскими слезками», демонстрирующий малую сжимаемость жидкости и возникновение гидравлического удара. Батавские слезки получаются, когда капли расплавленного стекла падают в холодную воду. При быстром охлаждении стекла в такой слезке (рисунок 4) возникают значительные внутренние напряжения, особенно в местах перехода в тонкой части. Если такую слезку завернуть в марлю и раздавить на ладони, то при этом будет слышен лишь слабый хруст. Но если слезку положить в стакан с водой и с помощью двух пинцетов отломать у нее хвостик, то из-за внутренних напряжений она разлетится на мелкие части, вызвав гидравлический удар, иногда даже приводящий к разрушению стакана.

## «Ферзя в угол», «цзяншиньзы» и числа Фибоначчи

(Начало см. на с. 18)

После сделанных нами замечаний мы можем сформулировать следующую теорему, дающую еще одно описание всех отмеченных пар.

**Теорема 2.** Пусть  $(a_n, b_n)$  — отмеченная пара. Если представить нату-

ральное число  $n-1$  в виде суммы неповторяющихся чисел Фибоначчи:  $n-1 = f_{k_1} + f_{k_2} + \dots + f_{k_r}$ , то  $a_{n-1} = f_{k_1+1} + f_{k_2+1} + \dots + f_{k_r+1}$  или, иначе говоря, если  $n-1$  есть сумма некоторых попарно различных чисел Фибоначчи, то  $a_{n-1}$  есть такая же сумма чисел Фибоначчи с номерами на единицу большими.



## Почему «поет» водопровод?

Е. И. ПАЛЬЧИКОВ

Согласитесь, что «пение» водопроводных труб, особенно в поздний час, не доставляет особого удовольствия. Пытаясь избавиться от неприятных звуков или хотя бы понять причину их возникновения, вы открываете водопроводный кран. Часто это ни к чему не приводит. Но иногда бывает и так: достаточно открыть кран, который до этого был закрыт, и гудение либо переходит на другую ноту, либо пропадает вовсе. Значит, причиной всему водопроводный кран? Оказывается, да. Точнее — неисправный кран.

Физику-экспериментатору «поющий» водопровод может послужить хорошим объектом для исследований, а избавление от «пения» — неплохой лабораторной работой с полезным выходом для окружающих.

Как известно, источником звука может быть любое тело, колеблющееся со звуковой частотой.\*) Рассмотрим, где и каким образом возникают колебания в системе водопровод — кран.

На рисунке 1 изображена одна из возможных конструкций водопроводного крана. В нем заслонка, состоящая из металлической шайбы и резиновой прокладки, прижимается винтом к бортику, ограничивающему круглое отверстие, через которое вода поступает к крану. Что произойдет, если кран

слегка приоткрыть? Из рисунка видно, что самое узкое место, через которое проходит вода, это щель между краями отверстия и нижней стороной заслонки. Так как объем воды, проходящий в единицу времени через любое поперечное сечение водопровода, остается постоянным, в самом узком месте скорость движения воды будет самой большой. С верхней стороны заслонки скорость воды существенно меньше, чем с нижней. При изменении скорости жидкости, движущейся по водопроводу, меняется и давление. В соответствии с законом Бернулли, там, где больше скорость, меньше давление и наоборот.\*)

При некоторых скоростях расхода воды и «благоприятных» размерах заслонки, отверстия и щели может оказаться, что сумма сил давления, действующих на заслонку снизу, будет намного меньше сил давления сверху, и заслонка прижмется к отверстию. Очевидно, что долго такая ситуация продолжаться не может. Как только заслонка перекроет воду, скорость в

\*) См., например, § 32 учебника «Физика 10».

\*) Подробнее об этом см. § 65 учебника «Физика 8».

зазоре упадет, давление снизу повысится, и заслонку отбросит от отверстия вверх. После чего процесс повторится сначала.

Колебания заслонки, которые мы рассмотрели, могут происходить в довольно широком интервале частот. Однако из практики известно, что каждый водопровод «поет», как правило, на одной, своей ноте. В крайнем случае на двух-трех. Почему?

Оказывается, здесь главную роль играют трубы водопровода, заполненные водой. Под влиянием заслонки в них тоже возникают колебания, причем сильнее всего столб воды откликается на те частоты, на которых может колебаться он сам. Это — конкретное проявление известного явления резонанса, поэтому неслучайно, что соответствующий участок водопровода называют резонатором. Таким образом, из всех возможных частот колебаний заслонки в кране «выбираются» только те, на которых может колебаться столб воды в прилегающих к крану участках водопровода.

При этом колебания столба воды помогают колебаниям заслонки, управляют ими. Заслонка же отбирает часть энергии у вытекающей из крана воды и отдает эту энергию колеблющемуся в трубах столбу воды. Другими словами, колебания заслонки вызывают колебания воды, а последние, в свою очередь, заставляют колебаться заслонку. Для того чтобы колебания не ослабевали, заслонка должна колебаться в такт с колебаниями прилегающего к ней столба воды.

Заметим, что рассмотренная ситуация наблюдается реально только тогда,

когда заслонка расхлябана и имеет возможность свободно двигаться в некоторых пределах вдоль оси винта, а резиновая прокладка сильно деформирована и повторяет очертания бортика вокруг отверстия.

И еще. Все происходящее в реальном трубопроводе, конечно, намного сложнее того, что было описано выше. Тем не менее понимание физической сущности процессов, происходящих в «поющем» водопроводе, может оказать реальную практическую помощь — найти неисправные краны.

Например, если при открывании вращающегося, ранее закрытого крана, «пение» изменилось или прекратилось, то это означает, что участок трубы с вашим краном входит в резонатор. Изменение «пения» обычно происходит за счет изменения размеров, формы резонатора (или потерь в нем). Прекращение (срыв) колебаний может быть следствием изменения давления в трубопроводе, увеличения потерь в резонаторе или уменьшения энергии, поступающей от крана. А если после открывания вашего крана «пение» не изменилось, говорит ли это о том, что ваш участок трубы не резонирует? Подумайте над этим вопросом самостоятельно.

Во всяком случае радикальное средство избавления от «пения» состоит в том, чтобы отыскать и починить кран (или краны), в котором деформировалась или выскочила прокладка. Достаточно сменить резиновую прокладку, а при необходимости и уменьшить возможность передвижения заслонки — и колебания пропадут. Как же это сделать практически?

Для этого нужно сначала перекрыть водопровод аварийным краном (который обычно расположен в ванной комнате или в кухне под раковиной), затем ключом или плоскогубцами открыть корпус ремонтируемого крана (ни в коем случае не аварийного!). Чтобы не нарушить никелировку, откручивать крышку корпуса нужно осторожно, подложив под плоскогубцы несколько слоев бумаги или ткани. После этого из резины подходящей толщины (обычно от 2 до 4 мм) вырезается новая прокладка и ставится на место неисправной (или отсутствующей вообще). В большинстве бытовых кранов прокладка должна лежать в углублении металлической шайбы и держаться за счет того, что ее диаметр чуть больше диаметра углуб-

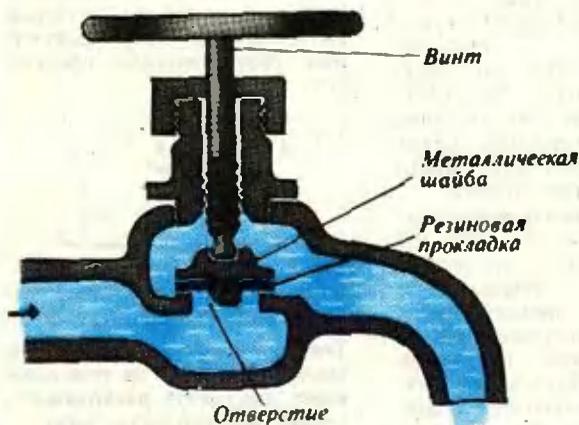


Рис. 1.

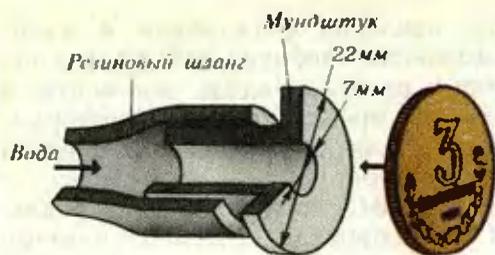


Рис. 2.

ления. В некоторых кранах в центре прокладки делается отверстие, и она крепится к шайбе гайкой. Отремонтированный кран собирают в обратном порядке и потихоньку открывают аварийный кран.

В заключение предлагаем вам провести опыт, моделирующий поведение заслонки в водопроводном кране.

Через полутораметровый резиновый шланг подсоедините к крану мундштук с размерами, изображенными на рисунке 2. Откройте воду, возьмите в руку трехкопеечную монету и постарайтесь ее «посадить» на конец мундштука (гербом к мундштуку). После некоторой

тренировки можно добиться того, чтобы монета устойчиво держалась при довольно большом интервале скоростей расхода воды и при любом положении мундштука. Никаких колебаний при этом не наблюдается, а вся конструкция напоминает разбрызгиватель для поливки огородов.

Интересно, что диск того же размера, что монета, но с гладкой поверхностью, на мундштуке не удерживается. Зато если прижать его к мундштуку пальцем, появляются колебания, причем при увеличении силы нажима частота колебаний возрастает. Таким образом можно руками потрогать модель заслонки водопроводного крана и убедиться, что колебания действительно возможны.

Для последнего опыта не обязательно выдерживать указанные размеры мундштука и «заслонки». Важно только, чтобы их поверхности были плоскими и гладкими. Попробуйте самостоятельно придумать и другие опыты, моделирующие процессы, происходящие в гудящем («поющем») водопроводе.

## Гармонический ряд

Единица плюс половина плюс четверть плюс одна восьмая... Если продолжать это суммирование все дальше и дальше — будут ли образующиеся суммы стремиться к какому-либо пределу? Конечно, ведь перед нами бесконечная геометрическая прогрессия со знаменателем меньше 1. Для ее суммы известна простая формула — первый член, деленный на единицу минус знаменатель прогрессии:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = \frac{1}{1 - (1/2)} = 2. \quad (1)$$

Ну, а если попытаться суммировать величинам, бесконечно убывающим, но не по закону геометрической прогрессии?

Например, единица плюс половина плюс треть плюс четверть плюс одна пятая...

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \dots \quad (2)$$

Выражение (2) называется *гармоническим рядом*. Попробуем найти его сумму. Для этого последовательно будем вычислять его *частичные суммы*, то есть числа  $S_1=1$ ,  $S_2=1+1/2=3/2$ ,  $S_3=1+1/2+1/3=11/6$ , ... С помощью микрокалькулятора мы получили, например,  $S_{99}=5,177$ ,  $S_{100}=5,187$ . Так чему же равна сумма гармонического ряда? Подумайте и попробуйте найти его сумму самостоятельно.

Ну как? Оценили сумму гармонического ряда? Если вы пришли к выводу, что сумма  $1+1/2+1/3+\dots$  стремится к определенному пределу, то вы определенно ошиблись. По мере прибавления новых слагаемых сумма увеличивается, увеличивается, но не стремится к пределу (как это делает сумма геометрической прогрессии

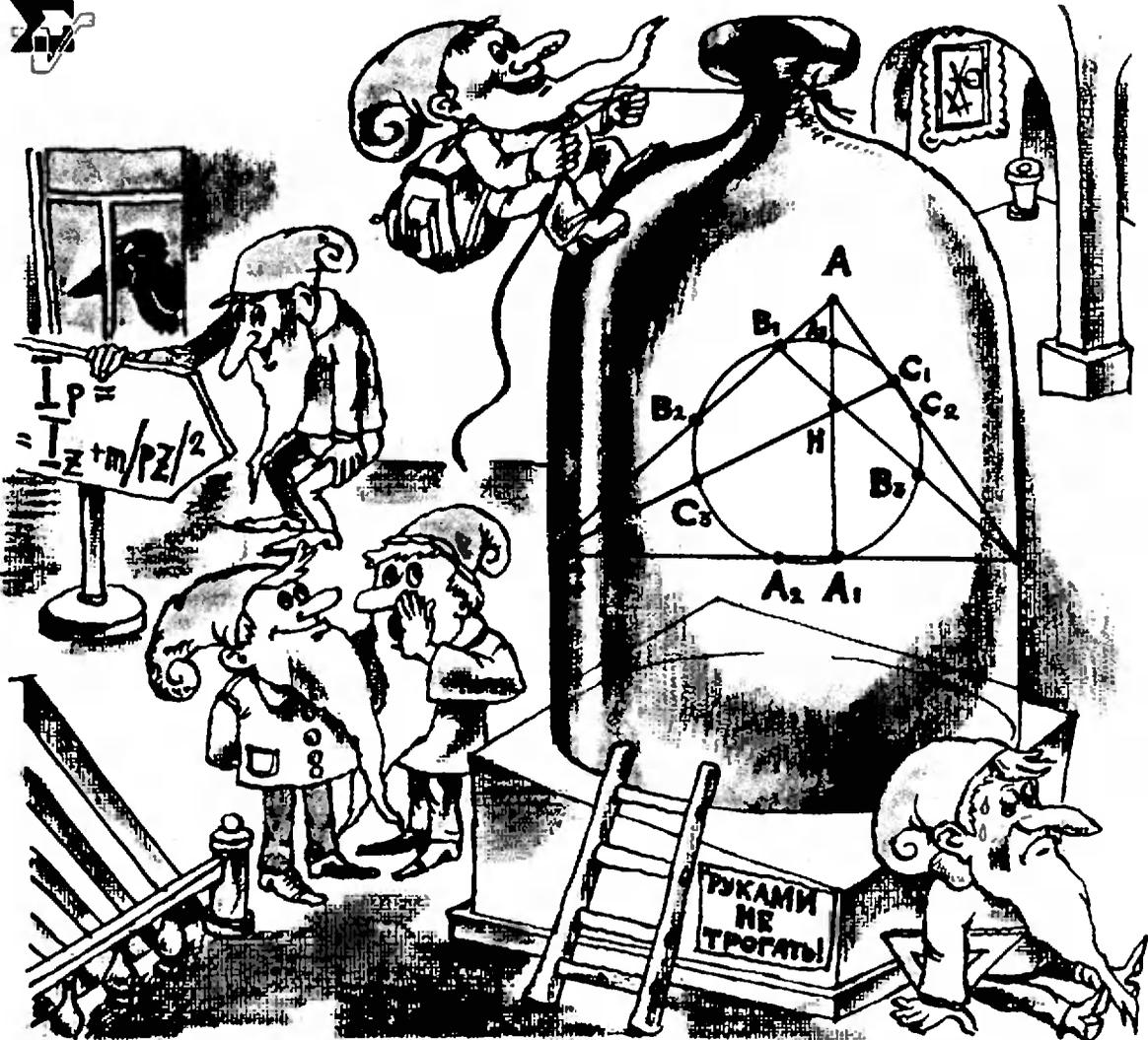
$1+1/2+1/4+1/8+\dots$ ), а становится больше любого наперед заданного числа. Как говорят математики, гармонический ряд расходится, стремится к бесконечности. (Если бы последовательность частичных сумм имела предел, то этот предел назывался бы *суммой* ряда, а ряд — *сходящимся*.)

Почему гармонический ряд расходится? В исследовании неизвестного человеку свойственно опираться на известное. Вот и мы выделим в гармоническом ряде члены известной нам геометрической прогрессии:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{1}{15} + \frac{1}{16} + \dots$$

Теперь видно, что..., впрочем, кончается место на этой странице: додумайте расходимость гармонического ряда сами!

(Окончание см. на с. 44)



## Момент инерции в геометрии

Кандидат физико-математических наук  
В. Н. ДУБРОВСКИЙ

Все хорошо знают, что математика постоянно используется в физике. Реже встречается и потому менее известно обратное — использование физических понятий в математике. Один яркий пример такого рода — *центр масс* в геометрии — обсуждался в недавней статье М. Б. Балка и В. Г. Болтянского («Квант» № 4, с. 18). В нашей статье главную роль также играет понятие, заимствованное из механики, — *момент инерции*.

Но когда с понятием, взятым из физики, начинает работать математик, он быстро забывает его физический смысл и видит в нем лишь полезную математическую формулу. Так, понятие *материальной точки*  $A$  массы  $m$ , которую физик воспринимает как «тело массы  $m$  пренебрежимо малых размеров для данной задачи», математик определяет формально, как «пару  $(A, m)$ , состоящую из точки  $A$  (геометрической) и действительного числа  $m \in \mathbb{R}$ ». Физик дважды подумает, прежде чем воспользуется «отрицательной массой», а математик будет рассматривать как ни в чем не бывало «материальную точку»  $(A, m)$ , для которой  $m < 0$ ! И притом с пользой для дела (см. цитированную выше статью, например задачу 5 на с. 19). Подобным же образом мы здесь определим момент инерции чисто математическим выражением. А выведенная

затем формула Лагранжа для вычисления момента инерции станет ключом в своеобразную кунсткамеру геометрии, с множеством диких теорем и формул. Об этом наш рассказ.

Предваряя возможный вопрос любознательного читателя, поясним все же физический смысл момента инерции. Это легко сделать, отправляясь от второго закона Ньютона. При вращательном движении второй закон Ньютона записывается в виде  $M=I\alpha$ , где  $M$  — момент прикладываемой силы,  $\alpha$  — угловое ускорение, а  $I$  и есть как раз момент инерции (см. «Квант», 1971, № 1, с. 6). Сравнивая эту формулу с  $F=ma$ , мы видим, что момент инерции представляет собой меру инерции вращающегося тела, подобно тому, как масса представляет собой меру инерции при поступательном движении.

### Что нужно знать о центре масс

Коротко напомним все необходимые нам сведения о центре масс (подробности можно найти в упомянутой статье М. Б. Балка и В. Г. Болтянского).

Рассмотрим систему из  $n$  материальных точек (или точечных масс), то есть  $n$  пар  $(A_i, m_i)$ , ...,  $(A_n, m_n)$ , где  $A_i$  — произвольные точки пространства,  $m_i$  — действительные числа («массы», сосредоточенные в этих точках); более короткое и удобное обозначение для этой системы —  $m_1A_1, \dots, m_nA_n$ . Если общая масса  $m = m_1 + \dots + m_n \neq 0$ , то

1) существует и единственная такая точка  $Z$ , что

$$m_1\vec{ZA}_1 + \dots + m_n\vec{ZA}_n = \vec{0};$$

эта точка называется **центром масс** системы  $m_1A_1, \dots, m_nA_n$ ;

2) для любой точки  $P$  имеет место равенство

$$\vec{PZ} = \frac{1}{m} (m_1\vec{PA}_1 + \dots + m_n\vec{PA}_n); \quad (1)$$

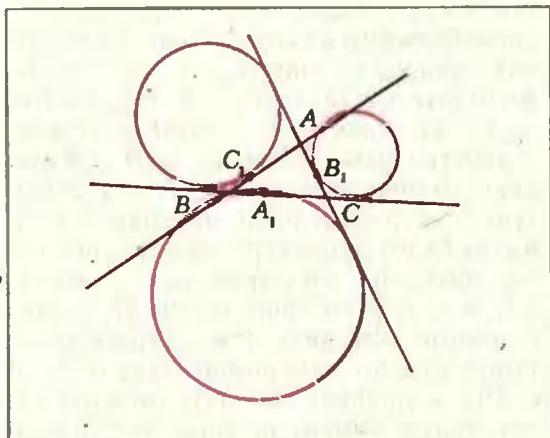


Рис. 1.

3) (теорема о группировке) при замене части материальных точек системы  $m_1A_1, \dots, m_nA_n$ , например точек  $m_1A_1, \dots, m_kA_k$ , на их центр масс  $C$ , в который помещена их общая масса  $m' = m_1 + \dots + m_k$ , положение центра масс всей системы не меняется, то есть центры масс систем  $m'C, m_{k+1}A_{k+1}, \dots, m_nA_n$  и  $m_1A_1, \dots, m_nA_n$  совпадают.

Непосредственно из определения следует, что центр  $Z$  двух точечных масс  $m_1A_1$  и  $m_2A_2$  находится по известному **правилу рычага**: точка  $Z$  лежит на прямой

$A_1A_2$  и  $\vec{A_1Z} : \vec{ZA_2} = m_2 : m_1$  (в левой части — коэффициент пропорциональности двух коллинеарных векторов).

### Задачи

1. Пусть  $a, b, c$  — длины сторон  $BC, CA, AB$  треугольника  $ABC$ . Докажите, что центр его вписанной окружности является центром масс системы  $aA, bB, cC$ . (Указание: пользуясь тем, что биссектриса треугольника делит его сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим к ним сторонам\*), докажите, что, например, барицентр материальных точек в  $bB$  и  $cC$  — основание биссектрисы угла  $A$ ; примените теорему о группировке.)

2. Рассмотрим три **вневписанные окружности** треугольника  $ABC$  — окружности, касающиеся (извне) одной из сторон треугольника и продолжений двух других сторон (рис. 1). Пусть  $A_1, B_1, C_1$  — точки их касания со сторонами  $BC, CA, AB$ . Докажите, что а) отрезки  $AA_1, BB_1$  и  $CC_1$  пересекаются в одной точке  $N$  (точке **Нагеля**), б) точка пересечения медиан  $M$  треугольника лежит на отрезке  $ZN$ , где  $Z$  — центр вписанной окружности, и  $|ZM| : |MN| = 1 : 2$ .

### Момент инерции и формула Лагранжа

**Моментом инерции** системы материальных точек

$$m_1A_1, m_2A_2, \dots, m_nA_n$$

относительно фиксированной точки  $P$  называется число

$$I_P = m_1|PA_1|^2 + m_2|PA_2|^2 + \dots + m_n|PA_n|^2. \quad (2)$$

Впервые это понятие было введено великим Л. Эйлером (1707—1783).

Для любителей физики отметим, что в механике обычно рассматривается, собственно говоря, момент инерции системы точек относительно

\* См., например, статью Сефибекова С. Р. «Четыре доказательства теоремы о биссектрисе» (Квант, 1983, № 8, с. 37).

\*\* См. также книгу Н. И. Воробьева «Числа Фибоначчи» (М.: Наука, 1978, с. 15).

оси, равный сумме  $m_1 d_1^2 + \dots + m_n d_n^2$ , где  $d_i$  — расстояние от точки  $A_i$  до этой оси (его произведение на угловую скорость вращения системы вокруг оси равно моменту импульса системы). Он совпадает с  $I_P$ , когда точка  $P$  и все точки  $A_i$  лежат в одной плоскости, а ось перпендикулярна ей и проходит через  $P$ .

Формулу (2) можно записать короче, обозначив расстояние от  $A_i$  до  $P$  через  $r_i$  и воспользовавшись знаком суммы  $\Sigma$  \*):

$$I_P = \sum_i m_i r_i^2. \quad (3)$$

Формулам (3) и (2) можно придать другую форму. Пусть  $P$  и  $Q$  — две произвольные точки, тогда

$$\begin{aligned} I_P &= \sum_i m_i |PA_i|^2 = \sum_i m_i (\vec{PQ} + \vec{QA}_i)^2 = \\ &= \sum_i m_i |PQ|^2 + 2 \sum_i m_i \cdot \vec{PQ} \cdot \vec{QA}_i + \\ &\quad + \sum_i m_i |QA_i|^2, \end{aligned}$$

то есть

$$I_P = I_Q + m |PQ|^2 + 2 \vec{PQ} \cdot (\sum_i m_i \vec{QA}_i). \quad (4)$$

Если теперь в качестве  $Q$  взять центр масс  $Z$  нашей системы, то, поскольку

$\sum_i m_i \vec{ZA}_i = \vec{0}$  (по определению центра масс), мы получим

$$I_P = I_Z + m |PZ|^2. \quad (5)$$

В конце статьи мы покажем, что момент инерции относительно центра масс выражается, если  $m \neq 0$ , следующей красивой формулой:

$$I_Z = \frac{1}{m} \sum_{i < j} m_i m_j |A_i A_j|^2 \quad (6)$$

и, следовательно, для любой точки  $P$

$$I_P = \left( \frac{1}{m} \sum_{i < j} m_i m_j |A_i A_j|^2 \right) + m |PZ|^2. \quad (7)$$

Формулы (5) — (7) называются формулами Лагранжа, на них основывается все дальнейшее.

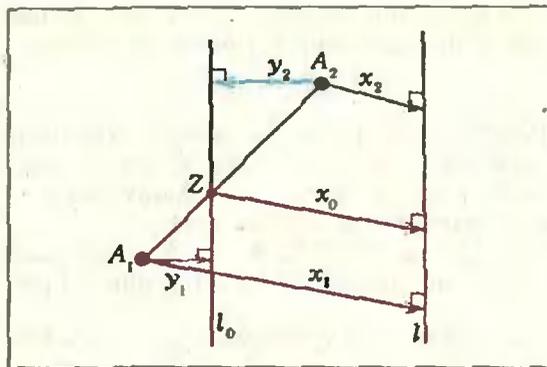


Рис. 2.

**Математика — это искусство называть разные вещи одинаково, а одинаковые — по-разному**

Шутливый афоризм, вынесенный в заголовок, имеет глубокий смысл. Математические теоремы отражают самые общие закономерности, поэтому одна и та же теорема в разных обличьях может встретиться нам в ситуациях, не имеющих на первый взгляд ничего общего. Хорошим, хотя и очень элементарным, примером служит формула (5).

Перепишем ее в «нейтральных» обозначениях, отвлекаясь от смысла входящих в нее величин. Пусть  $x_1, \dots, x_n$  — какой-то набор векторов,  $c_1, \dots, c_n$  — набор чисел,  $c = c_1 + \dots + c_n \neq 0$ ,  $x_0 = (c_1 x_1 + \dots + c_n x_n) / c$ ,  $y_i = x_i - x_0$  при  $i = 1, \dots, n$ . Тогда

$$\begin{aligned} c_1 x_1^2 + \dots + c_n x_n^2 &= \\ &= (c_1 y_1^2 + \dots + c_n y_n^2) + c x_0^2 \end{aligned} \quad (8)$$

( $x_i^2, y_i^2$  нужно понимать, как скалярные квадраты векторов  $x_i, y_i$ ). Доказывать эту формулу нам уже не нужно, потому

что всегда можно считать, что  $x_i = \vec{PA}_i$ ,

тогда  $x_0 = \vec{PZ}$ , где  $Z$  — барицентр системы материальных точек  $c_1 A_1, \dots,$

$\dots, c_n A_n$ ,  $y_i = \vec{ZA}_i$  и формула (8) превращается в формулу Лагранжа (5).

Теперь приведем еще три интерпретации этой формулы.

1) Пусть  $x_1, \dots, x_n$  — векторы перпендикуляров, опущенных из точек  $A_1, \dots, A_n$  на ось  $l$  (рис. 2),  $c_1, \dots, c_n$  — массы, помещенные в эти точки. Тогда  $x_0$  — это вектор перпендикуляра из их барицентра  $Z$  на ось  $l$  (почему?), а  $y_i$  — векторы перпендикуляров из точек  $A_i$  на ось  $l_0$ , проведенную через

\* Этот знак позволяет кратко записывать суммы из многих слагаемых: вместо  $A_1 + A_2 + A_3 + \dots + A_n$  мы пишем  $\sum_{i=1}^n A_i$  или просто  $\sum_i A_i$  (когда число слагаемых  $n$  ясно из контекста). Аналогично,  $\sum_i m_i r_i^2$  — сокращение для  $m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots + m_n r_n^2$  и т. п.

точку  $Z$  параллельно  $l$ . В этом случае (8) принимает вид *теоремы Штейнера*:

$$I_l = I_{l_0} + md^2$$

(здесь  $I_l$  и  $I_{l_0}$  — моменты инерции системы  $c_1A_1, \dots, c_nA_n$  относительно осей  $l$  и  $l_0$ ,  $m=c$  — общая масса,  $d$  — расстояние между осями).

2) Пусть  $n$  частиц  $A_1, \dots, A_n$  с массами  $m_1, \dots, m_n$  движутся равномерно и прямолинейно со скоростями  $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$  относительно некоторой системы отсчета  $S$ . Тогда их центр масс движется в системе  $S$  со скоростью  $\vec{v}_0 = (m_1\vec{v}_1 + \dots$

$\dots + m_n\vec{v}_n)/m$  ( $m = m_1 + \dots + m_n$ ). Скорость частицы  $A_i$  в системе покоя центра масс по правилу сложения скоростей равна  $\vec{u}_i = \vec{v}_i - \vec{v}_0$ . Пусть  $E$  и  $E_0$  — полные кинетические энергии всех частиц в системе  $S$  и в системе центра масс, то есть  $E = \frac{m_1v_1^2}{2} + \dots + \frac{m_nv_n^2}{2}$ ,  $E_0 = \frac{m_1u_1^2}{2} + \dots + \frac{m_nu_n^2}{2}$ . Полагая в (8)  $x_i = \vec{v}_i$ ,  $c_i = m_i/2$ , получим *теорему Кёнига* о кинетической энергии:

$$E = E_0 + \frac{mv_0^2}{2}$$

(полная кинетическая энергия системы частиц равна энергии их движения относительно центра масс плюс энергия движения центра масс).

Последний пример — из совершенно другой области — теории вероятностей.

3) Пусть в некотором эксперименте со случайным исходом измеряется некая величина  $X$ , например, бросают игральную кость и определяют выпавшее число очков. Предположим, что, в зависимости от результата эксперимента, величина  $X$  может принимать  $n$  значений  $x_1, \dots, x_n$  (в примере с костью — 6 значений 1, 2, ..., 6), причем значение  $x_i$  принимается с вероятностью  $p_i$  (числа  $p_i$  неотрицательны и дают в сумме 1; в нашем примере, очевидно, все значения равновероятны, то есть  $p_1 = p_2 = \dots = p_6 = 1/6$ ). Число  $p_1x_1 + \dots + p_nx_n$  называется *средним значением* (или математическим ожиданием) случайной величины  $X$  и обозначается  $MX$  (в нашем примере  $MX = (1 + \dots + 6)/6 = 3,5$ ). Таким образом, с точки зрения теории вероятностей выражения, входящие в (8) (при  $c_i = p_i$ ,  $c = \sum p_i = 1$ ), можно

интерпретировать так\*):

$$p_1x_1^2 + \dots + p_nx_n^2 = MX^2$$

— среднее значение случайной величины  $X^2$  или, как говорят, *второй момент* (снова «момент»!) случайной величины  $X$ ;  $y_i = x_i - x_0 = x_i - MX$  — отклонения значений величины  $X$  от среднего значения;

$$p_1y_1^2 + \dots + p_ny_n^2 = M(X - MX)^2$$

— среднее значение квадрата отклонения  $X$  от  $MX$ ; это очень важная характеристика случайной величины, показывающая степень ее «разброса» вокруг среднего значения, она называется *дисперсией* и обозначается  $DX$ ;  $x_0^2 = (MX)^2$ .

В результате (8) превращается в формулу для вычисления дисперсии, имеющуюся во всех учебниках теории вероятностей (правда, не носящую ничьих звучных имен):

$$DX = MX^2 - (MX)^2.$$

Легко ли здесь узнать формулу Лагранжа?

Задача 3. Найдите дисперсию числа очков при бросании кости.

### Геометрические следствия

Формула Стюарта. Найдём расстояние  $d$  от вершины  $A$  треугольника  $ABC$  до точки  $D$  на стороне  $BC$ , зная длины  $a, b, c$  сторон треугольника и длины отрезков  $BD$  и  $DC$  (рис. 3). Пусть  $p = |BD| : |BC|$ ,  $q = |DC| : |BC|$ , тогда  $D$  — это центр масс системы материальных точек  $qB, pC$ . Вычисляя момент инерции этой системы относительно точки  $A$ , получим (см. (7))

\* Формула (8) верна и в случае, когда  $x_i$  — числа: можно просто считать их векторами с координатами  $(x_i; 0; 0)$ . С другой стороны, её можно применять к случайным величинам, принимающим векторные значения.

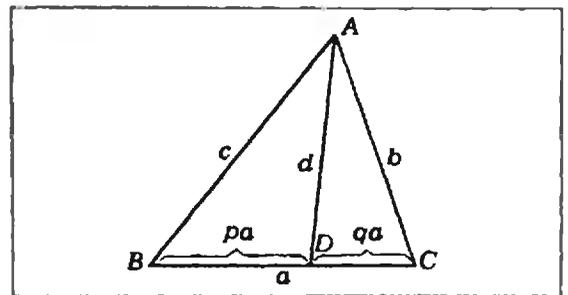


Рис. 3.

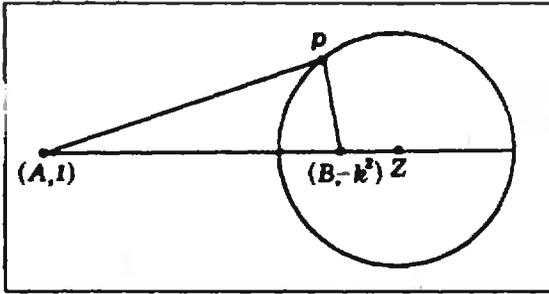


Рис. 4.

$$I_A = pb^2 + qc^2 = \frac{pqa^2}{p+q} + (p+q)d^2$$

и, поскольку  $p+q=1$ ,

$$d^2 = pb^2 + qc^2 - pqa^2.$$

**Окружность Аполлония.** Так называют окружность, определяемую тем, что отношение расстояний от любой ее точки до двух данных точек  $A$  и  $B$  постоянно. Докажем, пользуясь моментом инерции, что множество точек  $P$  плоскости, удовлетворяющих условию  $|PA|:|PB|=k \neq 1$ , — действительно окружность. Перепишем это условие в виде  $I_P = |PA|^2 - k^2|PB|^2 = 0$ . Поскольку  $I_P$  — это момент инерции системы  $1A, (-k^2)B$  относительно точки  $P$ , по формуле (5)

$$I_P = I_Z + (1-k^2)|PZ|^2,$$

где  $Z$  — центр масс этой системы. Следовательно, рассматриваемое множество есть окружность (рис. 4) с центром  $Z$  радиуса  $\sqrt{I_Z/(k^2-1)}$ . (Проверьте, что подкоренное выражение больше нуля и выразите радиус окружности через  $k$  и  $|AB|$ . Где находится ее центр?).

**Радикальная ось.** Покажем, что множество точек  $P$ , касательных из которых к двум данным непересекающимся окружностям равны, есть прямая. (Эта прямая называется *радикальной осью* пары окружностей.) Пусть  $O_1$  и  $O_2$  — центры,  $R_1$  и  $R_2$  — радиусы окружностей. Условие равенства длин касательных (точнее, их квадратов) с помощью теоремы Пифагора можно записать так (рис. 5):  $|PO_1|^2 - R_1^2 = |PO_2|^2 - R_2^2$  или  $I_P = |PO_1|^2 - |PO_2|^2 = R_1^2 - R_2^2$ , где  $I_P$  — момент инерции системы  $1O_1, (-1)O_2$  относительно точки  $P$ . Сейчас общая масса равна  $1 + (-1) = 0$ , поэтому надо пользоваться формулой (4), взяв в ней в качестве  $Q$  любую фиксированную точку плоскости, например,  $O_1$ :

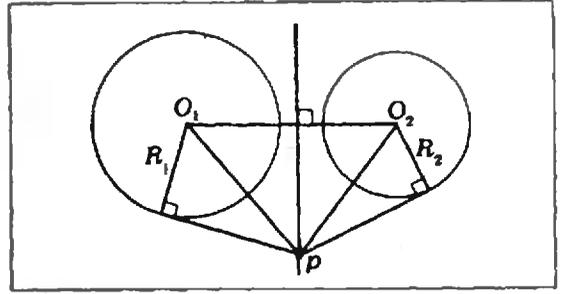


Рис. 5.

$$I_P = I_{O_1} + 2\vec{PO}_1 \cdot (-\vec{O}_1\vec{O}_2) = -|O_1O_2|^2 + 2\vec{O}_1\vec{P} \cdot \vec{O}_1\vec{O}_2,$$

то есть

$$\vec{O}_1\vec{P} \cdot \vec{O}_1\vec{O}_2 = \frac{1}{2} (R_1^2 - R_2^2 + |O_1O_2|^2).$$

Легко понять, что это условие задает прямую, перпендикулярную  $O_1O_2$ . (Убедитесь самостоятельно, что из любой точки этой прямой можно провести касательные к окружностям.)

**Задачи**

4. Пусть  $m_a$  и  $l_a$  — длины медианы и биссектрисы треугольника  $ABC$ , проведенных из вершины  $A$ . Докажите, что  $m_a^2 = (b^2 + c^2)/2 - a^2/4$ ,  $l_a^2 = bc - b_1c_1$ , где  $a, b, c$  — длины сторон,  $b_1, c_1$  — длины отрезков, на которые биссектриса делит сторону  $BC$ .

5. Формула Лейбница. Пусть  $M$  — точка пересечения медиан треугольника  $ABC$ . Докажите, что для любой точки  $P$ ,  $|PM|^2 = (a_1^2 + b_1^2 + c_1^2)/3 - (a^2 + b^2 + c^2)/9$ , где  $a_1, b_1, c_1$  — расстояния от точки  $P$  до вершин треугольника,  $a, b, c$  — длины его сторон.

6. Докажите, что множество точек пространства  $P$ , для которых величина  $m_1|PA_1|^2 + \dots + m_n|PA_n|^2$  принимает заданное значение при заданных точках  $A_1, \dots, A_n$  и заданных коэффициентах  $m_1, \dots, m_n$ , есть сфера, точка или пустое множество, если  $m = m_1 + \dots + m_n \neq 0$  и плоскость, все пространство или пустое множество, если  $m = 0$ . При каких условиях реализуются перечисленные случаи?

**Две замечательные теоремы из геометрии треугольника**

Пусть  $a, b, c$  — длины сторон треугольника  $ABC$ ,  $p$  — полупериметр,  $S$  — площадь,  $R$  и  $r$  радиусы описанной и вписанной окружностей,  $O$  и  $Z$  — их центры.

Формула Эйлера  $|OZ|^2 = R^2 - 2Rr$ .

\* Если окружности пересекаются, рассматриваемое множество состоит из двух лучей, продолжающих их общую хорду. Обычно радикальную ось определяют другим условием, которое всегда задает «полную» прямую (при  $O_1 \neq O_2$ ) и сводится к тем же уравнениям.

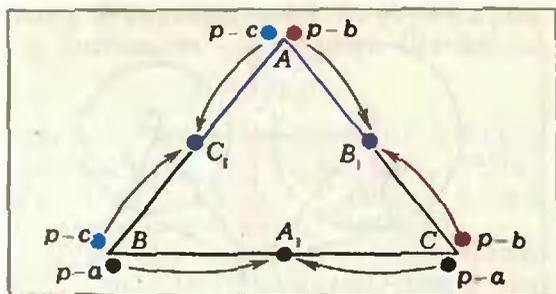


Рис. 6.

Для доказательства заметим, что  $Z$  — это центр масс системы материальных точек  $aA, bB, cC$  (см. задачу 1). Найдем моменты инерции этой системы относительно  $Z$  (см. (6)):

$$I_Z = \frac{abc^2 + bca^2 + cab^2}{a+b+c} = abc = 2R \sin A \cdot bc = 4RS = 4Rrp,$$

и относительно  $O$ :

$$\text{По формуле (5)} \quad |OZ|^2 = (I_O - I_Z) / 2p = R^2 - 2Rr.$$

Одна из красивейших теорем геометрии треугольника утверждает, что середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих точку пересечения высот с вершинами, лежат на одной окружности — так называемой «окружности девяти точек» (см. «Квант» 1981, № 8, с. 34). Но еще большее впечатление производит

**Теорема Фейербаха.** Окружность девяти точек касается четырех «замечательных» окружностей — вписанной и трех вневыписанных.

Мы докажем эту теорему только для вписанной окружности (остальные рассматриваются аналогично — см. задачу 8), причем нам будет достаточно знать, что окружность девяти точек проходит через середины  $A_1, B_1$  и  $C_1$  сторон треугольника  $ABC$ .

Треугольник  $A_1B_1C_1$  подобен треугольнику  $ABC$  с коэффициентом  $1/2$ , поэтому радиус его описанной окружности равен  $R/2$ ; ее центр обозначим через  $F$ . Условие касания этой окружности с вписанной удобно записать и доказывать в виде

$$|FZ|^2 = \left(\frac{R}{2} - r\right)^2.$$

Поместим в вершины  $ABC$  треугольника массы  $a, b, c$  (их центром масс будет точка  $Z$ ), разобьем каждую массу на две части:  $a = (p-b) + (p-c)$ ,  $b = (p-c) + (p-a)$ ,  $c = (p-a) + (p-b)$

и попарно сгруппируем эти части, как показано на рисунке 6; центр масс при этом останется на месте. Центр масс системы  $(p-a)B, (p-a)C$  находится в точке  $A_1$ , системы  $(p-b)A, (p-b)C$  — в точке  $B_1$ , а системы  $(p-c)A, (p-c)B$  — в точке  $C_1$ , следовательно, точка  $Z$  — это центр масс системы  $(p-a)A, (p-b)B_1, (p-c)C_1$  (массы, полученные после группировки, мы одновременно уменьшили вдвое). Найдем моменты инерции этой системы относительно точек  $F$  и  $Z$ :

$$\begin{aligned} I_F &= ((p-a) + (p-b) + (p-c)) \cdot \left(\frac{R}{2}\right)^2 = \frac{R^2}{4} \cdot p, \\ I_Z &= \frac{1}{p} ((p-a)(p-b) \left(\frac{c}{2}\right)^2 + (p-b)(p-c) \left(\frac{a}{2}\right)^2 + (p-a)(p-b) \left(\frac{b}{2}\right)^2). \end{aligned}$$

**Задача 7.** Докажите, что для любого треугольника справедливо тождество

$$(p-a)(p-b)c^2 + (p-b)(p-c)a^2 + (p-c)(p-a)b^2 = abc p - 4S^2.$$

Пользуясь тождеством этой задачи (ее решение приводится в конце журнала), завершить доказательство совсем легко: по формуле (5)

$$\begin{aligned} |FZ|^2 &= \frac{I_F - I_Z}{p} = \frac{R^2}{4} - \frac{abc}{4p} + \frac{S^2}{p^2} = \\ &= \frac{R^2}{4} - \frac{abc}{4Rp} R + \left(\frac{S}{p}\right)^2 = \frac{R^2}{4} - rR + r^2 = \\ &= \left(\frac{R}{2} - r\right)^2, \end{aligned}$$

что и требовалось.

**Задача 8.** Докажите утверждение теоремы Фейербаха для вневыписанных окружностей. (Указание: центр вневыписанной окружности, касающейся (извне) стороны  $a$ , служит центром масс системы  $(-a)A, bB, cC$ . Соберите эти массы в серединах сторон, пользуясь равенствами  $a = (p-b) + (p-c)$ ,  $b = p - (p-b)$ ,  $c = p - (p-c)$ .)

### Расстояние до центра масс и вывод формулы Лагранжа

Чтобы доказать формулы (7) и (6), мы выведем формулу, выражающую расстояние от произвольной точки  $P$  до центра масс  $Z$  системы материальных точек  $m_1A_1, \dots, m_nA_n$  через расстояния от этой точки до точек системы:  $r_i = |PA_i|$ , и попарные расстояния между

(Окончание см. на с. 48)

## Задачи

1. Из пункта *A* вниз по течению реки одновременно отплыли плот и катер, а навстречу им в тот же момент из пункта *B* отправился второй такой же катер. Когда первый катер достигнет пункта *B*, к чему будет ближе плот — к пункту *A* или ко второму катеру?

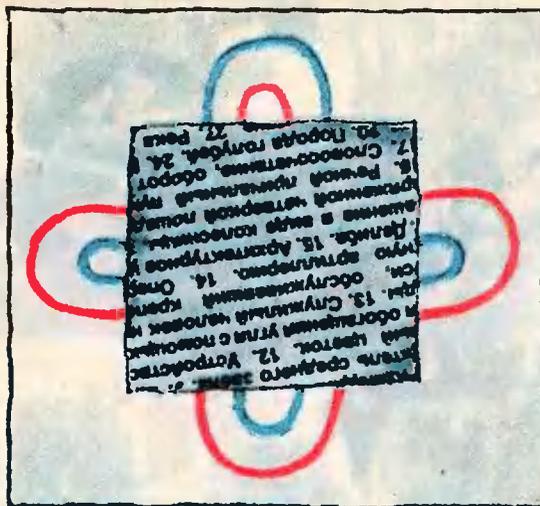
2. На бумаге нарисованы непересекающиеся контуры: 3 красных и 3 синих. Рисунок накрыли другим листком бумаги, так, что ровно один из контуров оказался накрытым целиком, а все другие частично видны. Определите цвет накрытого контура.

3. Сколько существует натуральных чисел, делящихся на 11, меньших 100 000, сумма цифр которых равна 11?

4. На витрине магазина разложены яблоки и груши в виде треугольника. В первом ряду — одно яблоко, во втором — две груши, в третьем — три яблока и т. д. Сколько лежало яблок и сколько груш, если было *n* рядов?

5. Замечали ли вы, что, оступившись с утоптанной тропинки, можно довольно глубоко провалиться в рыхлый снег? А в начале весны, когда снег оседает при таянии, тропинки иногда оказываются даже выше окружающей снежной целины. Чем это можно объяснить?

Эти задачи нам предложили: Г. А. Гальперин, В. В. Производов, В. Д. Вьюн, Эльхан Агаев (ученик 7 класса), А. А. Бялко



## Вниз по кроличьей норе

Л. КЭРРОЛЛ

Многие читатели «Алисы в стране чудес» и «Алисы в зазеркалье» знают, что Льюис Кэрролл — это псевдоним известного английского математика Чарлза Льюиса Кэрролла (1832—1898), автора научных статей и монографий по алгебре. Несомненно, логическая и геометрическая фантазия математика Доджсона сильно повлияла на творчество писателя Льюиса Кэрролла. Наверное, поэтому математик или физик, читающий «Алису», обычно начинает фантазировать; у него непременно возникают интересные вопросы.

И вот «Квант» для младших школьников» решил на следующий эксперимент: в этом и в

следующем номере мы помещаем первые две главы книги Л. Кэрролла «Алиса в стране чудес» в замечательном переводе Н. М. Демуровой (М., «Наука», 1979), а также те вопросы и задачи, которые пришли нам в голову при перечитывании этой замечательной книги. Как обычно в КМШ, ответы приводятся в следующих номерах.

Ждем ваших отзывов (их можно присылать по адресу: 103006, Москва, ул. Горького, 32/1, редакция журнала «Квант», АЛИСА). Те читатели, у которых есть указанная книга Л. Кэрролла, могут к отзывам присоединить свои задачи и вопросы к следующим главам книги. Если этот материал вам понравится и мы получим достаточный читательский отклик, публикация «Алисы в стране чудес» будет продолжена.



# ВНИЗ ПО КРОЛИЧЬЕЙ НОЖЕ

**Задача 1.** Со скуки Алиса под- считала количество цифр, нуж- ных для нумерации страниц в книге своей сестры, и получи- ла, что их 373. Сильна ли Алиса в арифметике?

**Вопрос 1.** Как вы думаете, со старшей или с младшей се- строй сидела Алиса?

**Вопрос 2.** Каким голосом говорил кролик: "толстым" или "тонким"?

**Задача 2.** Кролик на бегу урони- лил часы и они разобились. Мог ли циферблат расколоться на а) 2 части; б) 3 части; в) 4 части с равными суммами чисел, стоящих в этих частях?

Алисе наскучило празднично сидеть ря- дом с сестрой на берегу реки; разок- другой она заглянула в книжку, ко- торую читала сестра, но там не было ни картинок, ни разговоров.

Что толку в книжке, — подумала Алиса, — если в ней нет ни картинок, ни разговоров?

Она сидела и размышляла, не встать ли ей и не нарвать ли цветов для венка; мысли ее текли медленно и не- связно — от жары ее клонило в сон. Вдруг мимо пробежал Белый Кролик с красными глазами.

Конечно, ничего удивительного в этом не было. Правда, Кролик на бегу говорил:

— Ах, боже мой, боже мой! Я олаз- дываю.

Но и это не показалось Алисе особен- но странным. Вспоминная об этом впоследствии, она подумала, что ей сле- довало бы удивиться, однако в тот миг все казалось ей вполне естественным. Но когда Кролик вдруг вынул часы из жилетного кармана и, взглянув на них, помчался дальше, Алиса вскочила на ноги. Ее тут осенило: ведь никогда рань- ше она не видела кролика с часами, да еще с жилетным карманом в при- дачу! Старая от любопытства, она по-

пролетела? — сказала Алиса вслух. — Я, верно, приближаюсь к центру земли. Дайте-ка вспомнить... Это, кажется, около четырех тысяч миль вниз...

Видишь ли, Алиса выучила кое-что в этом роде на уроках в классе, и, хоть сейчас момент был не самый подхо- дящий демонстрировать свои позна- ния — никто ведь ее не слышал, она не могла удержаться.

— Да так, верно, оно и есть, — про- должала Алиса. — Но интересно, на какой же я тогда широте и долготе?

Сказать по правде, она понятия не имела о том, что такое широта и дол- гота, но ей очень нравились эти слова. Они звучали так важно и внушительно! Помолчав, она начала снова:

— А не пролечу ли я всю землю насквозь? Вот будет смешно! Вылезая, а люди вниз головой! Как их там зо- вут?.. Антипати, кажется...

В глубине души она порадовалась, что в этот миг ее никто не слышит, потому что слово это звучало как-то не так.

— Придется мне у них спросить, как называется их страна. Простите, суда- рыня, где я? В Австралии или в новой Зеландии?

И она попробовала сделать реверанс.



**Вопрос 6.** А вы помните, что такое? — широта и долгота. Если помните, ска- жите, в какой точке земного шара вы оказались бы, проле- тев землю насквозь из того места, где вы сейчас находитесь.

**Задача 5.** Алиса, пролетев насквозь Землю, оказалась в одной из двух стран А или Б. Она знает, что все жители страны А всегда говорят прав- ду, а страны Б — всегда лгут, притом часто едят в гости друг к другу. Может ли она, задав один-единственный во- прос первому встречному, уз- нать, в какой из стран она на- ходится?



**Вопрос 3. Могла ли Алиса падать очень медленно?**

**Задача 3.** На трех банках с вареньем рассеянная хозяйка сделала надпись так, как показано на рисунке. Определите сорта варенья в каждой банке, если известно, что все надписи не верны.



**Вопрос 4. Что будет, если Алиса отпустит банку?**

**Вопрос 5. Может ли банка при этом разбиться?**

**Задача 4.** Падая по лестнице с пятого этажа, Алиса насчитала 100 ступенек. Сколько ступенек она насчитала бы, падая со 2 этажа?



бежала за ним по полю и только успела заметить, что он юркнул в нору под изгородью.

В тот же миг Алиса юркнула за ним следом, не думая о том, как она будет выбираться обратно. Нора сначала шла прямо, ровная, как туннель, а потом вдруг круто оборвалась вниз. Не успела Алиса и глазом моргнуть, как она начала падать, словно в глубокий колодезь.

То ли колодезь был очень глубокий, то ли падала она очень медленно, только времени у нее было достаточно, чтобы прийти в себя и подумать, что же будет дальше. Сначала она попыталась разглядеть, что ждет ее внизу, но там было темно, и она ничего не увидела. Тогда она принялась смотреть по сторонам.

Стены колодца были уставлены шкафами и книжными полками; кое-где висели на гвоздиках картины и карты. Пролетая мимо одной из полок, она привадила с нее банку с вареньем. На банке было написано «АПЕЛЬСИНОВОЕ», но увя! она оказалась пуста. Алиса побоялась бросить банку вниз — как бы не убить кого-нибудь! На лету она умудрилась засунуть ее в какой-то шкаф.

«Вот это упала, так упала! — подумала Алиса. — Упала с лестницы теперь для меня пара пустяков. А наши решат, что я ужасно смелая. Да свались я хоть с крыши, я бы и то не пикнула».

Вполне возможно, что так оно и было бы.

А она все падала и падала. Неужели этому не будет конца?

— Интересно, сколько миль я уже

можешь себе представить реверанс в воздухе во время падения?  
Как, по-твоему, тебе бы удалось его сделать?

— А они, конечно, подумают, что страшная невежда. Нет, не буду никого спрашивать! Может, увижу где-нибудь надпись! А она все падала и падала. Делать нечего, помолчав, Алиса снова заговорила.

— Дина будет меня сегодня весь вечер искать! Ей без меня скучно! Диной звали их кошку.

— Надеюсь, они не забудут в полдень налить ей молочка... Ах, Дина, милая, как жаль, что тебя со мной нет.

Тут раздался страшный треск. Алиса упала на кучу валежника и сухих листьев.

Она ничуть не ушиблась и быстро вскочила на ноги. Взглянула вверх — там было темно. Перед ней шел другой коридор, а в конце его мелькнул Белый Кролик. Нельзя было терять ни минуты, и Алиса помчалась за ним следом. Она слышала, как, исчезая за поворотом, Кролик произнес:

— Ах, мои усики! Ах, мои уши! Как я опаздываю!

Повернув за угол, Алиса надеялась тут же увидеть Кролика, но его нигде не было. А она оказалась в длинном низком зале, освещенном рядом ламп, свисавших с потолка.

Дверей в зале было множество, но все оказались заперты. Алиса попробовала открыть их сначала с одной стороны, потом с другой, но убедившись, что ни одна не поддается, она с грустью прошла по залу, соображая, как ей от-



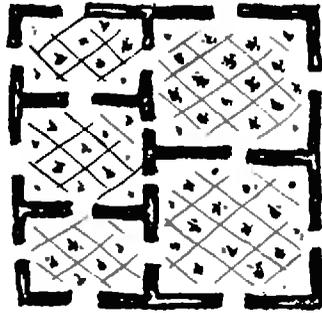
**Задача 6.** Подняк бывает в полдень, а в полдень стрелки часов совпадают. а) Когда они совпадут в следующий раз? б) Сколько в сутках таких моментов? в) Сколько раз в сутки стрелки часов перпендикулярны?



**Задача 7** Сколькими способами можно осветить зал, если в ряду десять ламп и каждая из ламп может гореть или быть выключенной?



**Задача 8.** Часть подземного замка имеет план, показанный на рисунке. Можно ли прогнаться по замку так, чтобы пройти через каждую дверь ровно один раз?



**Задача-шутка.** Можете ли вы, обнаружив в комнате мышиную норку, вползти в нее?



сюда выбраться.

Вдруг она увидела стеклянный столик на трех ножках. На нем не было ничего, кроме крошечного золотого ключика. Алиса решила, что этот ключ от одной из дверей, но увы! — то ли замочные скважины были слишком велики, то ли ключик слишком мал, только он не подошел ни к одной, как она ни старалась. Пройдясь по залу во второй раз, Алиса увидела записку, которую не заметила раньше, а за ней оказалась маленькая дверца дюймов в пятнадцать вышиной. Алиса вставила ключик в замочную скважину — и, к величайшей ее радости, он подошел!

Она открыла дверцу и увидела за ней нору, совсем узкую, не шире крысиной. Алиса встала на колени и заглянула в нее — в глубине виднелся сад удивительной красоты. Ах, как ей захотелось выбраться из темного зала и побродить между яркими цветочными клумбами и прохладными фонтанами. Но она не могла просунуть в нору даже голову. Если б моя голова и прошла, — подумала бедная Алиса, — что толку! Кому нужна голова без плечей? Ах, почему я не складываюсь, как подзорная труба! Если б я только знала, с чего начать, я бы, наверно, сумела.

Видишь ли, в тот день столько было всяких удивительных происшествий, что ничто не казалось ей теперь совсем невозможным.

Сидеть у маленькой дверцы не было никакого смысла, и Алиса вернулась к стеклянному столику, смутно надеясь найти на нем другой ключ, или, на

— Какое странное ощущение! — воскликнула Алиса. — Я, верно, складываюсь, как подзорная труба.

И не ошиблась, в ней сейчас было всего десять дюймов роста. Она подумала, что легко пройдет теперь сквозь дверцу в чудесный сад, и очень обрадовалась. Но сначала на всякий случай она немножко подождала, ей хотелось убедиться, что больше она не уменьшится. Это ее слегка тревожило.

— Если я и дальше буду так уменьшаться, — сказала она про себя, — я могу и вовсе исчезнуть. Сгорю, как свечка! Интересно, какая я тогда буду?

И она постаралась представить себе, как выглядит *пламя свечи после того, как свеча потухнет*. Насколько ей помнилось, такого она никогда не видела.

Подождав немного и убедившись, что больше ничего не происходит, она решила тотчас же выйти в сад. Бедняжка! Подойдя к дверце, она обнаружила, что забыла золотой ключик на столе, а вернувшись к столу, поняла, что ей теперь до него не дотянуться. Сквозь стекло она ясно видела снизу лежащий на столе ключик. Она попыталась взобраться на стол по стеклянной ножке, но ножка была очень скользкая. Устав от напрасных усилий, бедная Алиса села на пол и заплакала.

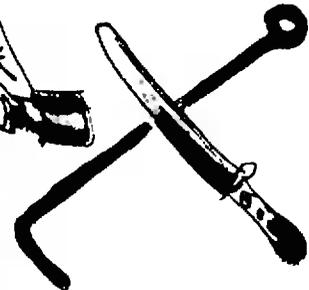
— Ну, хватит! — строго приказала она себе немного спустя. — Слезами горю не поможешь. Советую тебе сию же минуту перестать!

**Задача 9.** Представим себе что в этом момент перед Алисой предстали два ангипода X и Y и сказали ей следующее:

X: Одни из нас живет в стране А;  
Y: Не верьте ему! Он лжет!  
В пузырьке яд!  
Что в пузырьке и в какой стране живут X и Y?



**Вопрос 8.** А вы видели? Нет? Тогда попробуйте представить, как это выглядило.



**Вопрос 7. Как долго можно держать в руках раскаленную кочергу?**

худой конец, руководство к складыванию наподобие подзорной трубы... Однако на этот раз на столе оказался пузырек.

— Я совершенно уверена, что раньше его здесь не было! — сказала про себя Алиса.

К горлышку пузырька была привязана бумажка, а на бумажке крупными красивыми буквами было написано: «**ВЫПЕЙ МЕНЯ!**»

Это, конечно, было очень мило, но умная Алиса совсем не торопилась следовать этому совету.

— Прежде всего надо убедиться, что на этом пузырьке нигде нет пометки «Яд!», — сказала она.

Видишь ли, она читалась всяких прелестных историй о том, как дети сторали живьем или попадали на съедение диким зверям, и все эти неприятности происходили с ними потому, что они не желали соблюдать простых правил, которым обучали их друзья: если слншком долго держать в руках раскаленную докрасна кочергу, в конце концов обожжешься; если поглубже полоснуть по пальцу ножом, из пальца обычно идет кровь; если разом осушить пузырек с пометкой «Яд!», рано или поздно почти наверняка почувствуешь недомогание. Последнее правило Алиса помнила твердо.

Однако на этом пузырьке никаких пометок не было, и Алиса рискнула отпить из него немного. Напиток был очень приятен на вкус, и Алиса выпила его до конца.



**Вопрос 9. Как возвратиться по скользкой стеклянной ножке?**

**Задача 10. Разгадайте числовой ребус если ж=4, й=6**



веты, хоть следовала им нечасто. Порой же ругала себя так беспощадно, что глаза ее наполнялись слезами. А однажды она даже попыталась отшлепать себя по щекам за то, что схитрила, играя в одиночку партию в крокет. Эта глупышка очень любила притворяться двумя разными девочками сразу.

— Но сейчас это при всем желании невозможно! — подумала бедная Алиса. — Меня и на одну-то едва-едва хватает!

Тут она увидела под столом маленькую стеклянную коробочку. Алиса открыла ее, внутри был пирожок, на котором коринками было красиво написано: «Съешь меня!»

— Что ж, — сказала Алиса, — я так и сделаю. Если при этом я вырасту, я достану ключик, а если уменьшусь — пролезу под дверь. Мне бы только попасть в сад, а как — все равно!

Она откусила от пирожка и с тревогой подумала: «Расту или уменьшаюсь? Расту или уменьшаюсь?»

Руку Алиса при этом положила на макушку, чтобы чувствовать, что с ней происходит. Но, к величайшему ее удивлению, она не стала ни выше, ни ниже. Конечно, так всегда и бывает, когда ешь пирожки, но Алиса успела привыкнуть к тому, что вокруг происходит одно только удивительное!; ей казалось скучно и глупо, что жизнь опять пошла по-обычному. Она откусила еще кусочек и вскоре съела весь пирожок.

**ПРОДОЛЖЕНИЕ СЛЕДУЕТ...**

# Гармонический ряд

(Начало см. на с. 32)

Ну конечно. Каждый из групп, ограниченная выделенными числами, например  $1/5+1/6+1/7+1/8$  или  $1/9+1/10+...+1/16$ , имеет сумму большую, чем  $1/2$ . А этих групп — бесконечно много! Частичные суммы гармонического ряда становятся больше, чем  $1/2+1/2+...+1/2$ . Взяв сумму из  $2n$  групп, мы получим число, большее  $n$ . Ряд расходится.

\*\*\*

Этот удивительный факт проявляется самым неожиданным образом. Например, при решении следующей задачи: как, имея  $n$  кирпичей, положить их друг на друга так, чтобы самый верхний был выдвинут в сторону на максимально возможное расстояние?

Если кирпичей всего два, то их, очевидно, надо составить так, чтобы центр масс верхнего оказался над краем нижнего: тогда верхний кирпич будет выступать в сторону на  $1/2$  (длину кирпичей мы примем равной 1). Центр масс такой пары отстоит от края нижнего кирпича на  $1/2$ . Положим эту пару на третий кирпич так, чтобы ее центр масс оказался над его краем (рис. 1). При этом верхний кирпич будет выдвинут в сторону на расстоянии  $1+1/2$ .

Уже не частичные ли суммы гармонического ряда возникают по ходу нашего построения? Да, и это легко доказать по индукции. Утверждение, подлежащее доказательству, сформулируем так: *центр масс устойчивой стопки из  $n$  кирпичей, где верхний максимально выдвинут в сторону, расположен на расстоянии  $1/n$  от края нижнего кирпича* (рис. 2). Это утверждение мы уже проверили для начальных  $n$ , равных 2 и 3. Предположим, что оно верно для стопки из  $(n-1)$  кирпичей, составленной описанным выше образом. Подложим под эту стопку  $n$ -й кирпич, чтобы его край оказался под центром тяжести стопки. Вспомним известную формулу для координат центра масс системы из двух тел  $m_1$  и  $m_2$ :

$$x = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

Воспользуемся системой координат, связанной с рисунком, начало которой размещено точно под краем нижнего кирпича, и будем считать под первым телом нижний кирпич, а под вторым — положенную на него стопку из  $(n-1)$  кирпичей. Тогда  $x_1 = 1, x_2 = 0, m_2 = (n-1)m_1, x = \frac{1}{n}$ . Утверждение доказано. А вместе с ним доказано и такое:  *$n$  кирпичей можно составить так, что верхний будет выступать в сторону за край нижнего на расстояние  $S_{n-1}$ , где  $S_n$  —  $n$ -я частичная сумма гармонического ряда.*

Величина  $S_n$ , как мы знаем, неограниченно растет с рос-

том  $n$ . И так, достаточно высокую стопку кирпичей можно загнуть в сторону сколь угодно далеко! Невсоятно, но факт! Правда, величины  $S_n$  растут очень медленно. И если мы хотим, например, чтобы боковое уклонение превышало длину кирпича хотя бы вдвое, нам придется положить друг на друга не много ни мало тридцать два кирпича.

\*\*\*

Если подсчитывать частичные суммы гармонического ряда, приводя их к общему знаменателю, тотчас обнаружится любопытная деталь: во-первых, знаменатель суммарной дроби всегда будет четным, во-вторых, все слагаемые в числителе, за исключением одного-единственного, тоже четные. Первое неудивительно: оно обусловлено наличием в гармоническом ряде слагаемого  $1/2$ . Второе же, если бы удалось его доказать для произвольной частичной суммы ряда, сразу же позволило бы утверждать, что среди чисел  $S_n$  нет ни одного целого. Попробуем это доказать.

Вновь нам могут сослужить добрую службу степени половинны, то и дело встречающиеся в гармоническом ряде. Взяв произвольную частичную сумму ряда, отыщем в ней наибольшую степень половинны:  $1/2^p$ . Знаменатели всех других слагаемых этой суммы содержат двойку в степени меньшей, чем  $p$ . Поэтому при приведении всей суммы к общему знаменателю числитель дроби  $1/2^p$  будет умножен на нечетное число, а числители всех остальных дробей — на четные. Это и обосновывает высказанное ранее утверждение: в числителе суммарной дроби все слагаемые, за исключением одного, — четные; после суммирования в числителе получается нечетное число, а поскольку знаменатель любой такой дроби — четный, дробь не может разниться целому числу.

\*\*\*

Гармонический ряд обладает и многими другими замечательными свойствами и приложениями. В частности, в теории музыки — недаром он называется гармоническим! Но это уже, как говорится, другая история...

Ю. В. Побожий

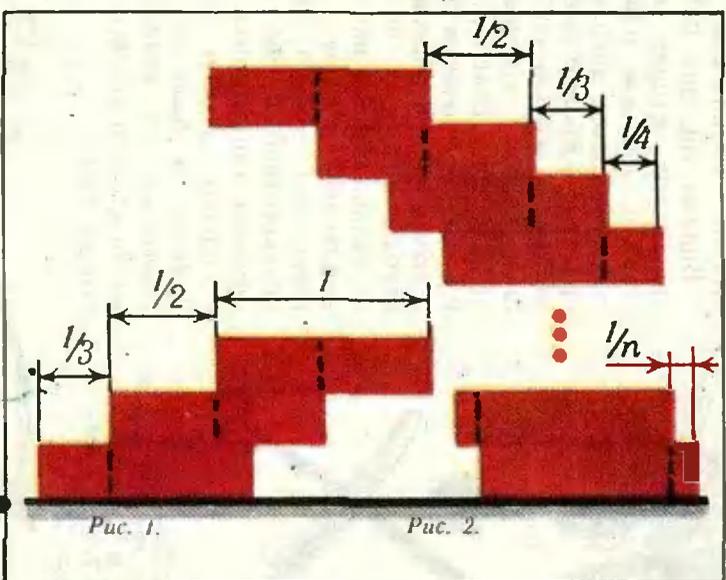
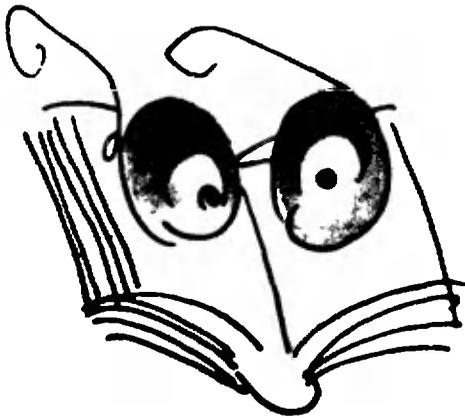


Рис. 1.

Рис. 2.



## Стереоскопические чертежи

А. И. КЛИМАНОВ

Многим школьникам плохо дается стереометрия. Это не мудрено — не так легко по плоскому чертежу увидеть форму пространственного тела. Для этого нужно иметь пространственное воображение — умение мысленно «вытолкнуть» плоский чертеж в пространство, наделить нарисованные на плоской бумаге линии объемным содержанием. Такое объемное видение плоского чертежа требует особой сноровки.

Другое дело — *стереоскопический чертеж*. На нем любой человек с нормальным зрением видит без напряжения изображаемый предмет в трех измерениях. При этом возникает *стереоэффект*: линии как бы поднимаются над листом бумаги, кажется, что смотришь не на рисунок, а на объемную модель.

Существуют разные виды стереоскопических изображений: зеркальный, линозный, растровый и др. Мы остановимся лишь на *анаглифическом стереоизображении* — это чертеж, состоящий из двух «полукартин», исполненных взаимно-дополнительными красками, который потом рассматривается через очки-светофильтры.

### Почему возникает стереоэффект?

Когда мы смотрим на какой-нибудь объемный предмет — скажем, спичечный коробок, лежащий перед нами на столе, — на сетчатке каждого глаза регистрируется плоское изображение этого предмета. В первом приближении можно считать, что происходит *центральное проецирование* коробка на плоскость сетчатки \*). Но левый и правый глаз находятся на некотором расстоянии друг от друга. Стало быть, проецирование производится из двух разных центров — поэтому плоские изображения коробка различны, каждый глаз видит коробок в своем ракурсе.

\*О центральном проецировании можно прочитать на «геометрической страничке» в «Кванте», 1984, № 3

Информация с сетчатки каждого глаза передается в кору головного мозга, где она удивительно обрабатывается: мозг как бы совмещает правый и левый ракурс коробка, но что-то от каждого ракурса остается — возникает «ощущение объемности» \*).

Стереоскопическое изображение искусственно создает такое же ощущение объемности, за счет тщательно продуманного «обмана мозга». С этой целью в левый глаз засылается изображение «левого ракурса» объемного предмета, в правый глаз — «правого ракурса», мозг «по привычке» совмещает эти изображения, возникает *иллюзия объемности* — стереоэффект.

Различные виды стереоизображений различаются способом засылки разных изображений в правый и левый глаз. При методе цветных стереопар, о котором здесь речь, засылка производится очень просто: на одном листе бумаги выполняются два чертежа (*полукартины*) красным и синим цветом, а цветные светофильтры очков пропускают в каждый глаз именно нужную ему полукартину.

Прежде чем заняться рисованием стереоскопических чертежей, давайте посмотрим на ту стереокартинку, которая имеется в этом номере журнала. Для этого сначала

### Сделаем очки

Здесь самое сложное — раздобыть подходящие цветные пленки (нужна красная и синяя). В идеале красная пленка должна полностью поглощать красный цвет на рисунке и контрастно выделить на нем синий цвет, а синяя пленка — наоборот.

При отсутствии цветной пленки можно использовать фильтры, предназначенные для фотографических объективов, или изготовить их на ацетатной основе из обычной фотопленки. Для этого эмульсионный слой пленки смывают горячей водой, ацетатную основу просушивают, затем погружают ее в раствор красителей, растворимых в уксусе или спирте. Наиболее высококачественные цветные фильтры изготавливаются на желатиновой основе (подробнее описание этого способа имеется в книге С. С. Гуревича *Объемные печатные иллюстрации*, М.: Искусство, 1959).

При наличии пленки очки делают очень просто. Из плотной бумаги или тонкого картона по размерам, указанным на рисунке 1, вырезаем две сторонки, заднюю и переднюю, промазываем их клеем, после чего на прорези передней сторонки накладываем цветные пленки (красная слева), затем обе половинки совмещаем и склеиваем. Очки готовы, давайте

### Посмотрим на стереокартину

В этом номере «Кванта» на 4-й странице обложки — стереочертеж. Начнем разглядывать его через сделанные нами очки. Стереоскопический эффект появляется не сразу, он возникает спустя некоторое время после начала рассматривания. При этом нужно найти оптимальное расстояние и угол зрения, при котором получается наибольший стереоэффект. Чер-

\*Чтобы почувствовать этот механизм, попробуйте такой эксперимент: поднесите спичечный коробок поближе к лицу и посмотрите на него несколько раз каждым глазом поочередно, а затем обоими глазами сразу.

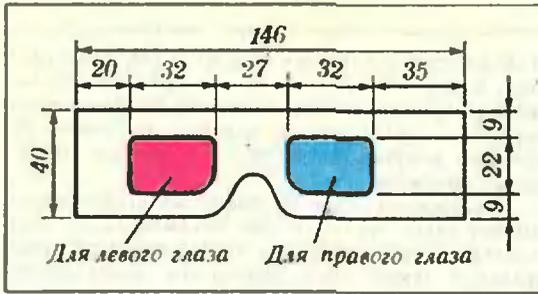


Рис. 1.

теж должен быть освещен ровным, мягким, рассеянным светом.

При рассматривании стереонары через две цветные очки вместе с основным изображением иногда появляются добавочные бледные линии или контуры полукартин. В этом случае надо ослабить освещенность стереочертежа или сгустить плотность окраски светофильтров. Часто бывает достаточно увеличить плотность одного синего светофильтра. Если же изображение при рассматривании получается недостаточно ясным, четким, следует усилить освещение.

Приведенный здесь чертеж получен путем проецирования на горизонтальную плоскость. Поэтому его надо рассматривать, расположив горизонтально.

\* \* \*

Для изготовления стереочертежей мы будем пользоваться специальным приспособлением, называемым *шаблон-трафаретом*. Это приспособление многократного использования нужно изготовить заранее. Для этого, в свою очередь, нужно построить так называемый *перспективный масштаб*. С него мы и начнем.

### Построение перспективного масштаба

Перспективный масштаб устанавливает соотношения между натуральными и перспективными линейными размерами изображаемого предмета в центральном проецировании на плоскость.

Построение перспективного масштаба высот показано на рисунке 2, где обозначены:

точка  $S$  — центр проецирования, отстоящий от своей горизонтальной проекции  $S_1$  на высоту  $h=300$  мм;

$a$  — расстояние (160 мм) между горизонтальной проекцией  $S_1$  до основания натурального масштаба  $O_1$ ;

$O_1N$  — *натуральный масштаб* высот (150 мм), разделенный на равные масштабные отрезки;

$O_1N_S$  — *перспективный масштаб*, в котором масштабные отрезки имеют разные длины (по мере удаления от точки  $O_1$  они увеличиваются).

$D_k$  — *длина произвольного перспективного масштабного отрезка*. Все линейные элементы изображаемого предмета измеряются в единицах натурального масштаба.

Перспективный масштаб определяется построением или высчисляется по формуле  $x_k = aK / (h - K)$ . В последнем случае длины отдельных отрезков перспективного масштаба считаются от нулевой отметки  $O_1$ .

С целью упрощения построения перспективного масштаба дана таблица с вычисленными величинами отрезков перспективного масштаба для значений  $K$  от 5 до 150 мм. В случае необходимости промежуточные величины нахо-

дятся вышеуказанными способами (по формуле или построением).

Таблица данных для построения перспективного масштаба.

K	$x_K$	K	$x_K$	K	$x_K$	K	$x_K$	K	$x_K$
5	2,71	35	21,13	65	4,25	95	74,15	125	114,28
10	5,52	40	24,61	70	48,70	100	80,00	130	122,35
15	8,42	45	28,23	75	53,33	105	86,15	135	130,91
20	11,43	50	32,00	80	58,18	110	92,64	140	140,00
25	14,54	55	35,92	85	63,25	115	99,46	145	149,68
30	17,78	60	40,00	90	68,57	120	106,67	150	160,00

### Изготовим шаблон-трафарет

Шаблон-трафарет (рис. 3) служит основой способа построения двойной центральной проекции (двух полукартин) на горизонтальной плоскости. (Способ разработан Б. А. Аиичкиным.)

На шаблон-трафарет размером 430×350 мм наносятся:

две горизонтальные проекции  $L_1$  и  $R_1$  центров проецирования  $L$  и  $R$ ; (расстояние между центрами проецирования  $L$  и  $R$  называется *стереобазисом*; нормальным стереобазисом считается среднее расстояние между центрами зрачков человека, равное 65 мм;

два *перспективных масштаба* (левый и правый); о том, как их получить, сказано выше; *габаритный прямоугольник E* (148×210 мм), на котором закрепляются сменные листы для построения эскизов стереоскопических чертежей;

*кресты-метки* на габаритном прямоугольнике, служащие для совмещения обеих полукартин с такими же метками на стереоскопическом чертеже;

*ось симметрии построения*, проходящая через центр горизонтальной проекции  $S_1$  стереобазиса  $S$  (выполнена штрихпунктирной линией).

### Как пользоваться шаблоном-трафаретом

Изображаемый объект мы считаем расположенным на габаритном прямоугольнике в его центре, так чтобы боковые проекции объекта находились на равных расстояниях от оси построения, а его ближайшая к нам граница от-

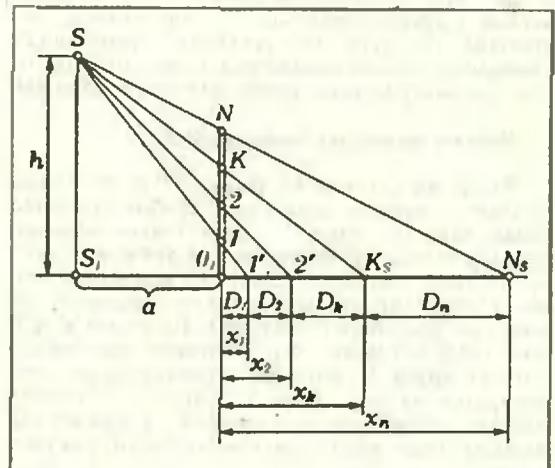


Рис. 2.

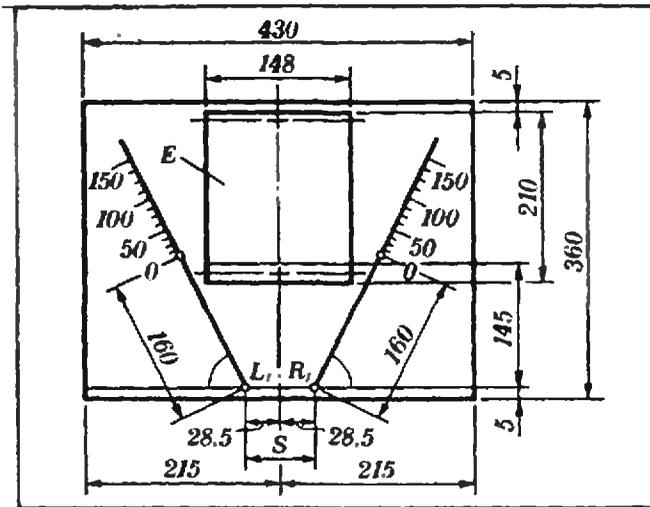


Рис. 3.

стояла не менее чем на 145 мм от горизонтальной проекции  $L_1$  и  $R_1$ .

Рассмотрим пример построения центральной проекции точки  $A$ . Точка  $A$ , заданная своей горизонтальной проекцией  $a_1$ , отстоит от предметной плоскости на высоте  $h=100$  мм (рис. 4).

Для определения центральной проекции точки  $A$  выполняют следующие построения: через точку  $L_1$  проводят проекцию проецирующего луча  $LA$  через точку  $a_1$ , продолжая его вверх за точку  $a_1$ ; нулевую отметку левого перспективного масштаба  $O_L$  соединяют с точкой  $a_1$  отрезком прямой  $O_L a_1$ ; из отметки 100 $_L$  (левого перспективного масштаба) соответствующей заданной высоте изображаемой точки  $A$  над предметной плоскостью проводят прямую параллельно отрезку  $O_L a_1$  до пересечения с проекцией проецирующего луча  $LA$ .

Полученная при пересечении точка  $A_L$  является центральной проекцией точки  $A$  для левого центра проецирования. Аналогичные построения для этой же точки  $A$  выполняются для правого центра проецирования, в результате чего определяется положение точки  $A_R$  — центральной проекции точки  $A$  для правого центра проецирования.

Дальнейшее построение стереопар сводится к нахождению всех характерных точек изображаемого объекта и соединению их между собой линиями.

Для каждого центра проецирования строится отдельная полукартина. В простейших случаях изображение обеих полукартин может вычерчиваться на одном сменном листе.

На практике обычно используется стереобазис  $b$  меньше нормального ( $b < 65$  мм). При этом нет необходимости делать новый шаблон-трафарет. Просто на изготовленном шаблоне отмечают две точки  $L'_1$  и  $R'_1$  на отрезке  $L_1 R_1$  симметрично относительно его центра, так чтобы  $|L'_1 R'_1| = b$ . Далее все построения выполняют точно так же, только с заменой  $L_1$  на  $L'_1$  и  $R_1$  на  $R'_1$ .

#### Изготовление стереоскопических чертежей

Оно состоит из двух этапов: построения эскизов в карандаше и изготовления стереопары в цвете.

До составления эскиза определяются: положение изображаемого предмета относительно

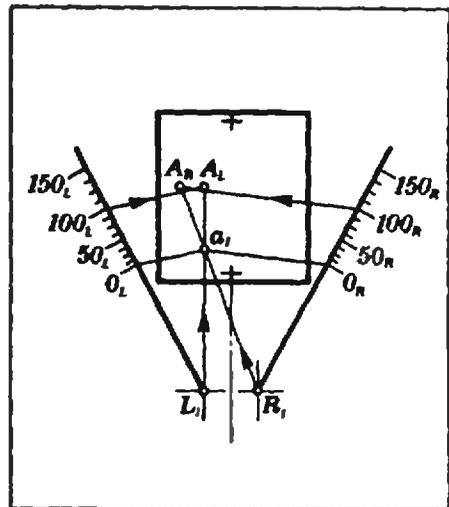


Рис. 4.

центров проецирования и горизонтальной плоскости проекции (плоскости шаблона); высота всех характерных точек предмета, находящихся над горизонтальной плоскостью; рабочая величина стереобазиса ( $b \leq 65$  мм).

Определение стереобазиса — дело гибкое, выбор его оптимального размера достигается методом проб и ошибок; помогает, конечно, опыт.

От стереобазиса зависит смещение одноименных точек стереопары; мы советуем выбирать его величину так, чтобы максимальное смещение (достигаемое на наиболее высоких точках) было не более 12 мм.

Для чертежа на 4-й странице обложки мы использовали стереобазис 40 мм.

Составление эскиза начинают с нахождения горизонтальной проекции изображаемого предмета. В данном случае, когда предмет располагается на той же горизонтальной плоскости, на которой строится его проекция, все горизонтальные элементы изображаемого предмета проецируются в натуральном виде без искажения, независимо от места расположения центров проецирования. Далее, пользуясь шаблон-трафаретом, строят обе центральные проекции  $A_L$  и  $A_R$  каждой характерной точки  $A$  предмета, как указано в предыдущем разделе, и они соединяются линиями.

Если необходимо дополнить стереочертеж буквенными или цифровыми обозначениями, нужно нанести их на обе полукартины. Каждая пара букв, обозначающих одноименные точки изображаемого предмета, располагается на одной горизонтальной прямой, расстояние между ними равняется расстоянию между одноименными точками изображения этого уровня, все вертикальные элементы букв (если начертание шрифта прямое) должны быть направлены по линиям проецирующих лучей к соответствующим центрам проецирования.

Изготовление стереопар в цвете заключается в следующем: белую бумагу окрашивают в желто-охристый цвет (для уменьшения контраста между цветами изображения и белым фоном), покрывая ее крепким настоем чая или водным раствором марганцовки. На эту бумагу переводится на просвет изображение обеих полукартин. На один и тот же лист цветными карандашами или краской, заправленной в рейсфедер, красным цветом копируется

изображение, полученное из правого центра проектирования, синим цветом — изображение левой полукартины. В итоге получают цветной стереочертеж.

С готового цветного оригинала, не прибегая к помощи эскизов, можно сделать дубликат. Для этого кроющими красками, гуашью или темперой, в той же последовательности переносят на кальку изображения стереопар. Готовая копия просто накладывается на цветную бумагу подходящего тона и с помощью светофильтров проверяется качество стереоскопического изображения.

Для достижения наибольшего стереоскопического эффекта нужно правильно подобрать цвета красок и светофильтров. Практически это де-

лается так: на белую бумагу наносят ряд цветных линий, затем их рассматривают через светофильтры, — правильно найденный цвет должен, как мы уже говорили, полностью поглощаться фильтром аналогичной окраски и контрастно выделяться фильтром противоположного цвета.

На черном же фоне — наоборот, красный светофильтр выявляет красное изображение, синий — синее, поэтому на обложке цвета полукартин — противоположные (правая — синяя, левая — красная).

Следует учесть, что фон и краски взаимно влияют друг на друга. Поэтому найденные цвета рекомендуется проверять еще раз на фоне будущего чертежа.

## Момент инерции в геометрии

(Начало см. на с. 33)

точками системы:  $a_j = |A_i A_j|$ . В силу (1),

$$m\vec{PZ} = m_1\vec{PA}_1 + \dots + m_n\vec{PA}_n = \sum_i m_i\vec{PA}_i.$$

Возводя это векторное равенство в скалярный квадрат, получим

$$\begin{aligned} m^2|PZ|^2 &= \rightarrow \rightarrow \\ &= \sum_i m_i\vec{PA}_i \cdot \sum_j m_j\vec{PA}_j = \sum_{i,j} m_i m_j PA_i \cdot PA_j, \end{aligned}$$

где в правой части стоит сумма всех произведений  $m_i m_j \vec{PA}_i \cdot \vec{PA}_j$  при  $1 \leq i, j \leq n$ . Каждое слагаемое этой суммы можно преобразовать, пользуясь равенством

$$\begin{aligned} |A_i A_j|^2 &= (\vec{PA}_j - \vec{PA}_i)^2 = \\ &= |PA_j|^2 + |PA_i|^2 - 2\vec{PA}_i \cdot \vec{PA}_j, \end{aligned}$$

$$m_i m_j \vec{PA}_i \cdot \vec{PA}_j = \frac{1}{2} m_i m_j (r_j^2 + r_i^2 - a_{ij}^2).$$

Складывая эти выражения, получим:

$$\begin{aligned} m^2|PZ|^2 &= (\sum_i m_i \vec{PA}_i)^2 = \\ &= m \sum_i m_i r_i^2 - \sum_{1 \leq i < j \leq n} m_i m_j a_{ij}^2 \quad (1) \end{aligned}$$

(мы учли, что сумма слагаемых  $m_i m_j r_i^2$  по всем  $i, j, 1 \leq i, j \leq n$  равна сумме величин  $m_i m_j r_i^2$  и что

$$m_i m_j a_{ij}^2 = m_j m_i a_{ji}^2).$$

Задачи

9. Расстояние между двумя центрами масс. а) Пусть в точках  $A_1, \dots, A_n$  помещены два набора масс —  $p_1, \dots, p_n$  и  $q_1, \dots, q_n$ , причем  $p_1 + \dots + p_n = 1$  и  $q_1 + \dots + q_n = 1$ , и пусть  $P$  и  $Q$  — центры масс этих двух систем материальных точек. Докажите, что

$$|PQ|^2 = - \sum_{1 \leq i < j \leq n} (p_i - q_i)(p_i - q_j) |A_i A_j|^2.$$

б) Пусть  $A$  и  $B$  — центры систем материальных точек  $a_1 A_1, \dots, a_n A_n$  и  $b_1 B_1, \dots, b_m B_m$ . Докажите, что

$$\begin{aligned} |AB|^2 &= \frac{1}{ab} \sum_{i,j} a_i b_j |A_i B_j|^2 - \\ &- \frac{1}{a^2} \sum_{i < k} a_i a_k |A_i A_k|^2 - \\ &- \frac{1}{b^2} \sum_{j < l} b_j b_l |B_j B_l|^2, \end{aligned}$$

где  $a = a_1 + \dots + a_n$ ,  $b = b_1 + \dots + b_m$ , индексы  $i$  и  $k$  в суммах прибегают значения от 1 до  $n$ , а  $j$  и  $l$  — от 1 до  $m$ . (Указание: а) покажите, что

$\vec{PQ} = \sum_i (q_i - p_i) \vec{PA}_i$ , воспользуйтесь вторым равенством в (9), справедливым и при  $m=0$ , полагая в нем  $m_i = q_i - p_i$ ; б) сводится к а), если представить точку  $A$  как центр масс системы  $(a_i/a) A_1, \dots, (a_n/a) A_n, 0B_1, \dots, 0B_m$  и, аналогично, точку  $B$ .)

10. Формула Эйлера. Пусть  $M$  и  $N$  — середины отрезков  $AC$  и  $BD$ , где  $A, B, C, D$  — любые 4 точки в пространстве. Докажите, что

$$4|MN|^2 - |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2 - |AC|^2 - |BD|^2.$$

Какое свойство параллелограмма вытекает из этой формулы?

## КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

## Комментарии излишни

«Еще в прошлом веке профессор Эдинбургского университета Грегори сообщал об опытах французского исследователя Бениуа. Последний, исходя из предположения, что между животными существует какая-то «связь на расстоянии», экспериментировал с улитками. Он взял 50 улиток, разделл их на пары и каждую пару поместил отдельно. Через некоторое время, пометив раковины каждой пары одинаковой буквой, исследователь отправил в Америку по одной улитке от каждой пары. Затем в определенное время улитку, помеченную буквой А, подвергали в Париже воздействию электрического тока. В тот же момент совершенно одинаково реагировала на ток ее «половина» — улитка, находившаяся в Америке».

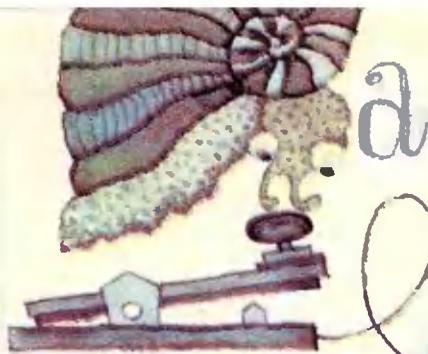
Мезенцев Вл. *В лабиринтах живой природы*. М.: Московский рабочий, 1983, с. 195.

Сверхестественная чувствительность несчастных улиток не нуждается в комментариях. Остается только растерянно улыбаться: как это до сих пор инженеры и ученые не заинтересовались таким уникальным способом передачи сигналов на большие расстояния? Ведь открытие, судя по заметке, было сделано более 100 лет тому назад. Вместо того чтобы, как говорится, осваивать такие чрезвычайные результаты из «лабиринтов живой природы», люди прокладывали дорогой кабель через океан, изобретали радио, запускали спутники связи, применили лазеры для передачи информации на большие расстояния. Люди работали.

Подобные мистические сообщения можно просто коллекционировать. Там же (с. 203) читаем:

«В. Л. Дуров (знаменитый дрессировщик — прим. ред.) мысленно приказывал собаке: «Подойди к пианино и ударь лапой по белой клавише». Собака выполняла все точно. Присутствовавший при этом В. М. Бехтерев попробовал сделать животному внушение: пес должен подойти к одному из научных сотрудников и вырвать у него из рук платок. О своем замысле Бехтерев не сказал никому ни слова. Внушение удалось: собака выполнила это задание».

Комментарии, действительно, излишни.



а

а

а

# Задачник Кванта

## Задачи

M871—M875; Ф883—Ф887

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 30 сентября 1984 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7 — 84» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M871, M872» или «Ф883». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Задачи M871—M875 предлагались на проходившей в апреле 1984 г. в Ашхабаде Всесоюзной математической олимпиаде.

**M871.** В клетки таблицы размера  $3 \times 3$  записывают числа 1 или  $-1$ . Затем число в каждой клетке заменяется на произведение чисел, стоящих во всех соседних клетках (соседними считаются клетки, имеющие общую сторону). Докажите, что после нескольких повторений этой операции во всех клетках будут стоять единицы.

*И. К. Жук, И. В. Воронович*

**M872.** На плоскости расположены три окружности  $C_1, C_2, C_3$  радиусов  $r_1, r_2, r_3$  — каждая вне двух других, причем  $r_1 > r_2$  и  $r_1 > r_3$ . Из точки пересечения внешних касательных к окружностям  $C_1$  и  $C_2$  проведены касательные к окружности  $C_3$ , а из точки пересечения внешних касательных к  $C_1$  и  $C_3$  — касательные к  $C_2$ . Докажите, что последние две пары касательных образуют четырехугольник, в который можно вписать окружность, и найдите ее радиус.

*Л. П. Куцков*

**M873.** Учитель написал на доске квадратный трехчлен  $x^2 + 10x + 20$ . Затем каждый ученик по очереди увеличивал или уменьшал на единицу по своему выбору один из младших коэффициентов (коэффициент при  $x$  или свободный член), но не оба сразу. В результате получился трехчлен  $x^2 + 20x + 10$ . Верно ли, что в некоторый момент на доске был написан квадратный трехчлен с целыми корнями?

*А. А. Берзиниш*

**M874\*.** При каких целых  $m$  и  $n$  выполняется равенство а)  $(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n$ ? б)  $(a + b\sqrt{d})^m = (b + a\sqrt{d})^n$ , где  $a$  и  $b$  ( $a \neq b$ ) — взаимно простые натуральные числа, а  $d > 1$  — натуральное число, среди делителей которого нет квадратов простых чисел?

*Ю. В. Михеев*

**M875.** По кругу выписано  $n \geq 3$  натуральных чисел, причем отношение суммы двух соседей любого из этих чисел к нему самому является натуральным числом. Докажите, что сумма всех таких отношений а) не меньше  $2n$ , б) \* меньше  $3n$ .

*О. Р. Мусик*

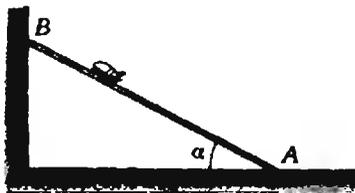


Рис. 1.

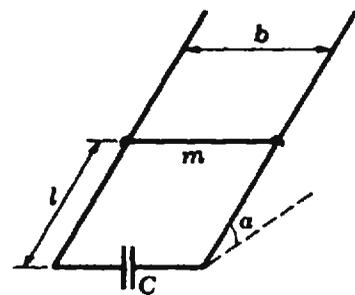


Рис. 2.

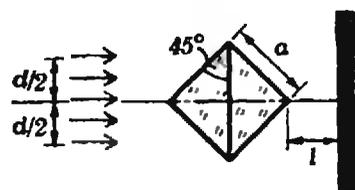


Рис. 3.

**Ф883.** При разрыве неподвижного зенитного снаряда он разлетается на очень большое число осколков, летящих равномерно во все стороны со скоростью  $v_0$ . Такой снаряд, летящий вниз со скоростью  $u$ , разрывается на высоте  $H$  над землей. Когда осколки будут падать на землю наиболее часто?

*И. С. Солодовников*

**Ф884. Задача Н. Е. Жуковского.** Жук ползет по жесткой (непрогибающейся) соломинке, опирающейся на гладкий пол и гладкую вертикальную стенку (рис. 1). Соломинка однородная, длина ее  $l$ , масса  $m$ ; масса жука  $M$  ( $M \gg m$ ). Соломинка образует угол  $\alpha$  с горизонтом. Начальная скорость жука в точке  $B$  была равна  $v_0$ . Как должен двигаться жук, чтобы соломинка оставалась неподвижной? Как зависит ускорение жука от пройденного им вдоль соломинки расстояния? За какое время жук доползет до нижней точки? Сможет ли жук подняться по соломинке из точки  $A$  в точку  $B$ ?

**Ф885.** Концы однородного стержня постоянного сечения поддерживаются при температурах  $T_1$  и  $T_2$  ( $T_2 > T_1$ ). Температурный коэффициент линейного расширения материала стержня равен  $\alpha$ . Чему равна длина стержня, если при  $t=0^\circ\text{C}$  она была  $l_0$ ?

*Л. Г. Маркович*

**Ф886.** По двум параллельным металлическим направляющим, наклоненным под углом  $\alpha$  к горизонту и расположенным на расстоянии  $b$  друг от друга, может скользить без трения металлическая перемычка массы  $m$ . Направляющие замкнуты снизу на незаряженный конденсатор емкости  $C$ , и вся конструкция находится в магнитном поле, индукция которого  $\vec{B}$  направлена вертикально (рис. 2). В начальный момент перемычку удерживают на расстоянии  $l$  от основания «горки». За какое время перемычка достигнет основания «горки» после того как ее отпустят? Какую скорость она будет иметь у основания? Сопротивлением проводников пренебречь.

*А. И. Буздин*

**Ф887.** На прозрачное стеклянное тело, представляющее собой два соединенных основаниями конуса, падает пучок параллельных световых лучей, имеющий круглое сечение диаметра  $d$  (рис. 3). Размеры тела указаны на рисунке 3; показатель преломления стекла  $n$ . Какая картина будет наблюдаться на экране, установленном на расстоянии  $l$  от тела?

*А. В. Хельвас*

## Problems

**M871 — M875; P883 — P887**

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult

**M871.** The numbers  $+1$  and  $-1$  are written in the nine little squares of a 3 by 3 square. Then each number in the little squares is replaced by the product of its neighbours (two little squares are neighbours if they have a common side). Prove that after a finite number of such operations the nine little squares will be filled with  $+1$ 's.

*I. K. Zhuk, I. V. Voronouch*

problems are marked with a star (\*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than September 30 th. 1984, to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант».

Please send the solutions of problems in physics and mathematics, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Problems M871—M875 in this issue were proposed in April 1984 at the All — Union mathematics olympiad in Ashkhabad.

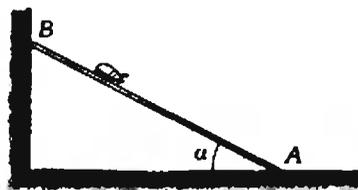


Рис 1

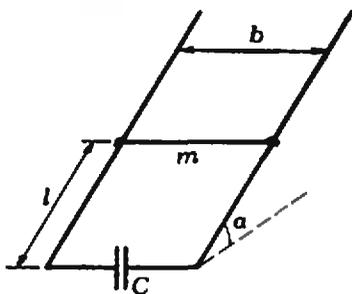


Рис 2

M872. Three circles  $C_1, C_2, C_3$  of radii  $r_1, r_2, r_3$  in the plane are exterior to each other and  $r_1 > r_2, r_1 > r_3$ . The two tangents to  $C_3$  are drawn from the intersection point of the exterior tangents to  $C_1$  and  $C_2$ , and the two tangents to  $C_2$  — from the intersection point of the exterior tangents to  $C_1$  and  $C_3$ . Prove that these two pairs of tangents (to  $C_3$  and  $C_2$ ) form a quadrilateral into which a circle can be inscribed. Find its radius.

L. P. Kuptsov

M873. A math teacher wrote the quadratic trinomial  $x^2 + 10x + 20$  on the blackboard. Then each pupil in turn either increased by one or decreased by one either the constant term or the coefficient of  $x$ . Finally the trinomial  $x^2 + 20x + 10$  appeared. Will a quadratic trinomial with integer roots necessarily appear on the blackboard in the process?

A. A. Berzun

M874.\* For what integers  $m$  and  $n$  do we have a)  $(5 + 3\sqrt{2})^m = (3 + 5\sqrt{2})^n$ ; b)  $(a + b\sqrt{d})^m = (b + a\sqrt{d})^n$ , where  $a$  and  $b$  ( $a \neq b$ ) are relatively prime natural numbers, while  $d > 1$  is a natural number not divisible by the square of a prime?

Yu. V. Mukheev

M875.  $n > 3$  natural numbers are written around a circle so that the ratio of the sum of the two neighbours of any number to the number itself is a natural number. Prove that the sum of all such ratios is a) not less than  $2n$ ; b)\* not more than  $3n$ .

O. R. Musin

P883. When it explodes, an anti-aircraft shell breaks up into a large number of shell splinters which fly outward uniformly in all directions with velocity  $v_0$ . Such a shell, falling downward with velocity  $u$ , explodes at the altitude  $H$  above ground. When will the shell splinters fall on the ground with maximal frequency?

I. S. Solodovnikov

P884. The N. E. Zhukovski problem. A bug crawls along a rigid (unbending) straw, one end of which is on the (smooth) floor, the other — on a smooth wall (see figure Рис. 1). The straw is uniform, its length is  $l$ , its mass  $m$ , the bug's mass  $M$  ( $M > m$ ), the angle between the straw and the horizon is  $\alpha$ , the initial velocity of the bug at the point B is  $v_0$ . How must the bug move in order to keep the straw motionless? How will the bug's acceleration then depend on the distance travelled along the straw? When will the bug reach the floor? Will the bug be able to crawl up the straw from the point A back to the point B?

P885. The extremities of a uniform rod of constant section are maintained at temperatures  $T_1$  and  $T_2$  ( $T_2 > T_1$ ). The temperature coefficient of linear expansion of the rod is  $\alpha$ . What is the length of the rod, if at  $t = 0^\circ\text{C}$  it was  $l_0$ ?

L. G. Markovich

**P886.** A metal rod of mass  $m$ , joining perpendicularly two parallel metallic rails which form an angle of  $\alpha$  with the horizon, slides down the rails without friction; the distance between the rails is  $b$ . The rails are joined at the bottom to an uncharged capacitor of capacity  $C$  and the entire construction is placed in a magnetic field whose induction  $\vec{B}$  is directed vertically upward (see figure Рис. 2). At the initial moment the rod is maintained on the rails at a distance  $l$  from the bottom of the rails. How long will it take the rod to reach the bottom after it is freed? What velocity will it have acquired at the bottom? The resistance of the conductors is negligible.

A. I. Buzdin

**P887.** A beam of parallel light rays with circular section of diameter  $d$  falls on a transparent glass body consisting of two cones joined at their common base (see figure Рис. 3). The measurements of the body are shown on the figure. The refraction index of glass is  $n$ . What picture will be observed on a screen placed at a distance of  $l$  from the body?

A. V. Helvas

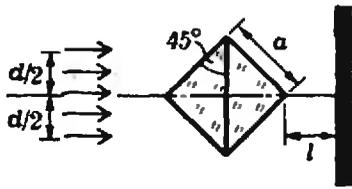


Рис. 3.

## Решения задач

M846, M856 — M860; Ф867 — Ф872

**M846.** Докажите, что среднее арифметическое длин сторон произвольного выпуклого многоугольника меньше среднего арифметического длин его диагоналей.

Пусть  $n$  — число сторон многоугольника (естественно, мы считаем  $n > 4$ ); тогда число его диагоналей равно  $n(n-3)/2$  (поскольку из каждой вершины выходят  $n-3$  диагонали и при этом каждая диагональ учитывается дважды). Таким образом, надо доказать, что

$$\frac{s}{n} < \frac{d}{n(n-3)/2}, \quad (*)$$

где  $s$  — сумма длин всех сторон многоугольника, а  $d$  — всех его диагоналей.

Рассмотрим две несмежные стороны  $AB$  и  $CD$  и две пересекающиеся диагонали  $AC$  и  $BD$ , соединяющие их концы (см. рисунок). Так как  $|AB| < |AO| + |OB|$ ,  $|CD| < |CO| + |OD|$ , где  $O$  — точка пересечения диагоналей, имеем

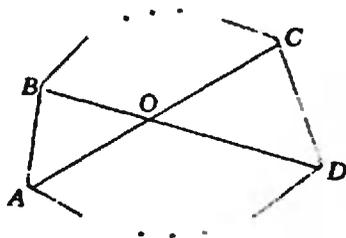
$$|AB| + |CD| < |AC| + |BD|.$$

Сложим такие неравенства для всех пар несмежных сторон. Каждая сторона входит в  $n-3$  пары, а каждая диагональ — в две; поэтому в левой части получим  $(n-3)s$ , а в правой —  $2d$ . Итак,

$$(n-3)s < 2d,$$

что эквивалентно (\*).

В. Ф. Лев



**M856.** а) Постройте четырехугольник, зная длины его сторон и длину отрезка, соединяющего середины диагоналей.

а) Пусть  $M$  и  $N$  — середины диагоналей  $AC$  и  $BD$  четырехугольника  $ABCD$ ,  $K$  и  $L$  — середины сторон  $BC$  и  $CD$  (рис. 1). Заметим, что отрезки  $MK$ ,  $KN$ ,  $ML$

б) При каких условиях задача имеет решение?

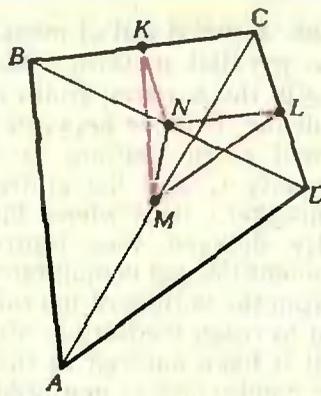


Рис. 1.

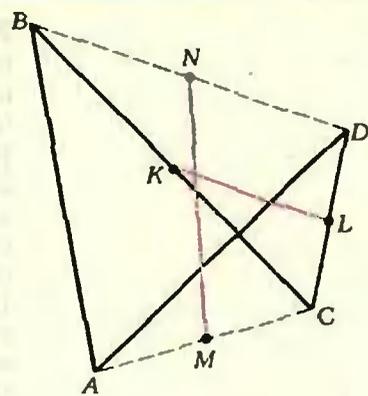


Рис. 2.

и  $LN$  параллельны сторонам  $AB$ ,  $CD$ ,  $AD$  и  $CB$  и равны по длине их половинам (как средние линии соответствующих треугольников), то есть их длины нам известны.

Отсюда вытекает следующее построение: строим треугольники  $NMK$  и  $NML$  (по трем сторонам), затем вершины  $B$  и  $C$  ( $\vec{BK} = \vec{KC} = \vec{NL}$ ) и  $A$  и  $D$  ( $\vec{BA} = 2\vec{KM}$ ,  $\vec{CD} = 2\vec{KN}$ ).

б) Очевидно, задача разрешима тогда и только тогда, когда можно построить треугольники  $NMK$  и  $NML$  (возможно, вырожденные), то есть когда выполнены неравенства

$$\left| |AB| - |BC| \right| < 2|NM| < |AB| + |BC|,$$

$$\left| |AD| - |DC| \right| < 2|NM| < |AD| + |DC|.$$

Вообще говоря, задача имеет два решения, причем четырехугольник  $ABCD$  может оказаться самопересекающимся (рис. 2).

И. З. Титович

**M857.** Среди 1984 первых натуральных чисел (от 1 до 1984) отметим те, которые можно представить в виде суммы пяти целых неотрицательных степеней двойки (то есть пяти не обязательно различных чисел 1, 2, 4, 8, ...). Каких чисел окажется больше: отмеченных или не отмеченных?

♦ Ответ: отмеченных чисел больше.

Поскольку  $2^a + 2^b = 2^{a+1}$ , сумму нескольких степеней двойки всегда можно переписать так, что все они будут различны, при этом число слагаемых может уменьшиться, например  $4 + 2 + 2 + 2 = 4 + 4 + 2 = 8 + 2$ . Следовательно, любое отмеченное число есть сумма не более чем пяти различных слагаемых вида  $2^n$ , где  $n = 0, 1, \dots, 10$  ( $2^{11} = 2048 > 1984$ ). Найдем число  $N$  таких сумм, то есть наборов различных степеней  $n_1, \dots, n_k$  ( $0 \leq n_i \leq 10$ ,  $1 \leq k \leq 5$ ). Каждому набору  $n_1, \dots, n_k$  взаимно-однозначно соответствует набор, составленный из всех чисел от 0 до 10, кроме  $n_1, \dots, n_k$ , поэтому количество  $N_k$  наборов из  $k$  чисел равно количеству наборов из  $11 - k$  чисел, и  $N = N_1 + \dots + N_5 = N_{10} + \dots + N_6 = (N_1 + N_2 + \dots + N_{10}) / 2$ . Сумма  $N_0 + N_1 + \dots + N_{11}$  — это число всех подмножеств множества  $\{0, 1, \dots, 11\}$ , оно равно  $2^{11}$  (каждому подмножеству  $A$  взаимно-однозначно отвечает последовательность  $d_0, \dots, d_{10}$  из нулей и единиц, в которой  $d_i = 0$ , если  $i \notin A$  и  $d_i = 1$ , если  $i \in A$ ; число таких последовательностей, очевидно, равно  $2^{11}$ ). А так как  $N_0 = N_{11} = 1$  (одно пустое подмножество и одно под-

$$\begin{aligned}
 N &= C_{11}^1 + \dots + C_{11}^n = \\
 &= \frac{1}{2} ((C_{11}^1 + C_{11}^{10}) + \dots + \\
 &\quad + (C_{11}^5 + C_{11}^6)) = \\
 &= \frac{(C_{11}^0 + C_{11}^1 + \dots + C_{11}^{11}) - 2}{2} = \\
 &= \frac{(1+1)^{11} - 2}{2} = 1023.
 \end{aligned}$$

множество, совпадающее со всем множеством  $\{0, 1, \dots, 11\}$ ,  $N = (2^{11} - 2)/2 = 1023$ . Для читателей, знакомых с началами комбинаторики, мы повторяем этот расчет на полях, пользуясь простейшими свойствами числа сочетаний  $C_n^k$ .

Теперь заметим, что любое отмеченное число единственным образом разлагается в сумму различных степеней двойки. (Это доказывается от противного: если  $a$  — наименьшее число, имеющее хотя бы два разложения,  $a = 2^{n_1} + \dots + 2^{n_k} = 2^{m_1} + \dots + 2^{m_l}$ , где  $n_1 < \dots < n_k$ ,  $m_1 < \dots < m_l$ , то, очевидно,  $n_1 \neq m_1$ , например,  $n_1 > m_1$ ; но тогда число  $a/2^{m_1} = 2^{n_1 - m_1} + \dots + 2^{n_k - m_1}$  четно, и в то же время  $a/2^{m_1} = 1 + 2^{m_2 - m_1} + \dots + 2^{m_l - m_1}$  — нечетно. Противоречие.) Отсюда, учитывая, что любое отмеченное число является суммой пяти (не обязательно различных) степеней двойки, то есть больше 4, и что  $2^6 + 2^7 + 2^8 + 2^9 + 2^{10} = 1984$ , получаем, что количество отмеченных чисел равно  $N - 4 = 1019 > 1984 - 1019$ .

В. Н. Дубровский

**М858.** Для величин  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  углов некоторого треугольника выполнено соотношение

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin \gamma.$$

а) Найдите  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ , если известно, что треугольник равнобедренный (рассмотрите все случаи).

б) Может ли треугольник быть остроугольным?

в) Какие значения может принимать наибольший угол треугольника?

а) Ответ: либо  $\alpha = \beta = \pi/4$ ,  $\gamma = \pi/2$ , либо  $\gamma$  и один из углов  $\alpha$  или  $\beta$  равны  $\arcsin(\sqrt{2}-1)/2$ , а третий угол —  $\pi - 2 \arcsin(\sqrt{2}-1)/2$ .

Достаточно рассмотреть два случая:  $\alpha = \beta$  и  $\alpha = \gamma$ . В первом случае условие переписывается в виде

$$2 \sin^2 \alpha = \sin(\pi - 2\alpha) = \sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

и, поскольку  $\sin \alpha \neq 0$ ,  $\sin \alpha = \cos \alpha$ , то есть  $\alpha = \pi/4$  ( $\beta = \pi/4$ ,  $\gamma = \pi/2$ ).

Во втором случае имеем  $\sin^2 \alpha + \sin^2 2\alpha = \sin \alpha$  или  $4 \sin^2 \alpha (1 - \sin^2 \alpha) = \sin \alpha (1 - \sin \alpha)$ . Сокращая на  $\sin \alpha (1 - \sin \alpha)$  ( $0 < \sin \alpha < 1$ ), приходим к уравнению  $4 \sin \alpha + 4 \sin^2 \alpha = 1$ , то есть  $\sin \alpha = (\sqrt{2}-1)/2$ .

б) Ответ: не может. Доказательство проведем от противного. Предположим, что  $\alpha$  и  $\beta$  — острые углы. Из условия  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin(\pi - (\alpha + \beta)) = \sin \alpha \cos \beta + \sin \beta \cos \alpha$  вытекает, что

$$\sin \alpha (\sin \alpha - \cos \beta) = \sin \beta (\cos \alpha - \sin \beta). \quad (*)$$

Допустим, что  $\sin \alpha > \cos \beta$ , тогда в силу (\*)  $\cos \alpha > \sin \beta$  ( $\sin \alpha$  и  $\sin \beta$  положительны). Поскольку  $\beta$  — острый угол, оба неравенства можно возвести в квадрат:  $\sin^2 \alpha > \cos^2 \beta$ ,  $\cos^2 \alpha > \sin^2 \beta$ . Складывая эти неравенства, получим противоречие:  $1 = \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha > \cos^2 \beta + \sin^2 \beta = 1$ . Аналогично доказывается, что и случай  $\sin \alpha < \cos \beta$  невозможен. Остается предположить, что  $\sin \alpha = \cos \beta$ . Но тогда  $\alpha = \pi/2 - \beta$ , а угол  $\gamma = \pi - (\alpha + \beta)$  — прямой.

Тем самым мы доказали, что все три угла не могут быть острыми одновременно. Отметим, что углы  $\alpha$  и  $\beta$  не могут быть и прямыми (при  $\alpha = \pi/2$   $\sin \gamma = 1 + \sin^2 \beta > 1$ ), если же прямым является угол  $\gamma$ , то равенству (\*), а значит, и условию задачи удовлетворяет любой острый угол  $\alpha$  и  $\beta =$

$$\lg \frac{\alpha + \beta}{2} = \lg^2 \frac{\alpha - \beta}{2} \text{ или}$$

$$\begin{aligned} \alpha &= \operatorname{arctg} p^2 + \operatorname{arctg} p, \\ \beta &= \operatorname{arctg} p^2 - \operatorname{arctg} p, \\ \gamma &= \pi - 2 \operatorname{arctg} p^2. \end{aligned}$$

где  $p$  — любое число, большее 1.

$= \pi/2 - \alpha$  (в этом случае  $\cos \alpha - \sin \beta = \sin \alpha - \cos \beta = 0$ ).

в) Ответ: наибольший из углов  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  может принимать любое значение в промежутке  $[\pi/2; \pi]$ .

Мы уже показали в решении пункта б), что наибольший угол не может быть острым, но может быть прямым ( $\gamma = \pi/2$ ). Покажем теперь, что он может принимать любое значение от  $\pi/2$  до  $\pi$ , точнее, что для любого  $\alpha$ ,  $\pi/2 < \alpha < \pi$ , уравнение относительно  $\beta$

$$\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta = \sin(\alpha + \beta)$$

имеет решение в промежутке  $0 < \beta < \pi - \alpha$  (так что  $\gamma = \pi - (\alpha + \beta) > 0$ ). Обе части этого уравнения — непрерывные функции от  $\beta$ , причем при  $\beta = 0$  левая часть меньше правой ( $\sin^2 \alpha < \sin \alpha$ ), а при  $\beta = \pi - \alpha$  — больше ( $2 \sin^2 \alpha > 0$ ). Поэтому в некоторой точке  $\beta$ ,  $0 < \beta < \pi - \alpha$ , значения обеих частей совпадают. Эта точка и будет корнем уравнения.

Читателю предлагается самостоятельно продолжить исследование нашего уравнения: докажите, что угол  $\gamma$  не может быть тупым (для этого надо умножить данное соотношение на квадрат диаметра описанной окружности, получить из него по теореме синусов неравенство для сторон треугольника и показать, что  $\cos \gamma \leq 0$ ); проверьте, что углы  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  при  $\gamma \neq \pi/2$  могут быть заданы красивыми формулами, приведенными на полях (конечно, из этих формул сразу же следуют утверждения б) и в)).

П. Б. Гусятников

**М859.** Найдите наименьшее положительное число  $a$  такое, что для любого квадратного трехчлена  $f(x)$ , удовлетворяющего при  $0 < x < 1$  неравенству  $|f(x)| < 1$ , выполняется неравенство  $|f'(1)| < a$ .

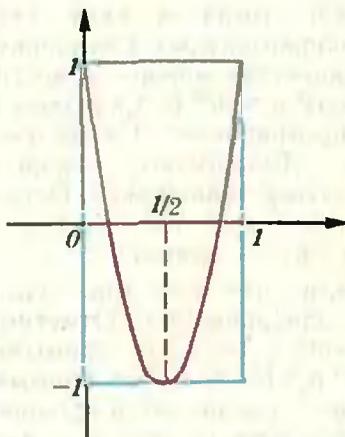
♦ Ответ:  $a = 8$ . Пусть функция  $f(x) = Ax^2 + Bx + C$  удовлетворяет условиям задачи. Заметим, что  $f'(1) = 2A + B$ ,  $f(0) = C$ ,  $f(1) = A + B + C$  и  $f(1/2) = A/4 + B/2 + C$ , и потому  $f'(1) = 3f(1) - 4f(1/2) + f(0)$ . Следовательно,

$$|f'(1)| \leq 3|f(1)| + 4|f(1/2)| + |f(0)| \leq 8,$$

причем эти неравенства превращаются в равенства при  $f(0) = f(1) = 1$ ,  $f(1/2) = -1$ , то есть для функции  $f_0(x) = 8x^2 - 8x + 1$  см. рисунок. А так как эта функция удовлетворяет неравенству  $|f_0(x)| \leq 1$  при  $0 \leq x \leq 1$  (её график — парабола с вершиной в точке  $x = 1/2$  — точке минимума), число 8 в нашей оценке  $|f'(1)|$  уменьшить нельзя.

По сути дела, в решении мы воспользовались тем, что многочлен  $n$ -й степени, а значит, и его производная, однозначно задается своими значениями в  $n+1$  точках (при  $n=2$ ). Попробуйте самостоятельно решить эту задачу для кубических многочленов. Отметим, что при произвольной степени  $n$  наилучшую оценку в задаче будут давать так называемые многочлены Чебышева, о которых можно прочитать в статье Н. Васильева и А. Зелевинского «Многочлены Чебышева и рекуррентные соотношения» («Квант», 1982, № 1, с. 12).

В. П. Пикулин



М860\*. а) Пусть  $O$  и  $R$  — центр и радиус описанной окружности треугольника  $ABC$ ,  $Z$  и  $r$  — центр и радиус его вписанной окружности,  $K$  — точка пересечения медиан треугольника с вершинами в точках касания вписанной окружности со сторонами треугольника  $ABC$ . Докажите, что точка  $Z$  лежит на отрезке  $OK$ , причем  $|OZ|:|ZK|=3R/r$ .

б) Пусть  $a, b, c$  — длины сторон треугольника  $ABC$ ,  $\vec{n}_a, \vec{n}_b, \vec{n}_c$  — единичные векторы, перпендикулярные к соответствующим сторонам треугольника и направленные во внешнюю сторону. Докажите, что

$$a^2 \vec{n}_a + b^2 \vec{n}_b + c^2 \vec{n}_c = 12S \cdot \vec{MO},$$

где  $S$  — площадь треугольника  $ABC$ ,  $M$  — точка пересечения его медиан,  $O$  — центр описанной окружности.

Решение задачи а), так же как и б), сводится к доказательству векторного равенства — в задаче а) это равенство

$$\vec{OZ} = \frac{3R}{r} \vec{ZK}. \quad (1)$$

В решениях обеих задач мы будем использовать такое основное соображение: чтобы доказать равенство двух векторов, достаточно доказать равенство их проекций по крайней мере на две (не параллельные) оси. Этими осями у нас будут стороны треугольника.

Мы будем использовать также известные факты о «центрах тяжести» двух и трех точек: сумма двух векторов, проведенных из точки  $P$  к концам отрезка, равна  $2\vec{PN}$ , где  $N$  — середина этого отрезка; сумма трех векторов, проведенных из точки  $P$  к вершинам треугольника, равна  $3\vec{PK}$ , где  $K$  — точка пересечения медиан треугольника.

Обозначим через  $a, b, c$  длины сторон треугольника  $ABC$ , через  $T_a, T_b, T_c$  — точки касания вписанной окружности с этими сторонами, через  $\alpha, \beta, \gamma$  — величины углов  $A, B, C$ ; пусть  $N$  — середина стороны  $BC$  (рис. 1).

а) Равенство (1) эквивалентно следующему:

$$\vec{OZ} = \frac{R}{r} (\vec{ZT}_a + \vec{ZT}_b + \vec{ZT}_c). \quad (2)$$

Проверим, что левая и правая части дают одинаковые проекции на сторону  $BC$  (проекции мы берем с учетом знака, считая положительным направление вектора  $\vec{BC}$ , то есть проекция вектора  $\vec{v}$  на ось  $BC$  равна  $|\vec{v}| \cos \alpha$ , где  $\alpha$  — угол между осью и вектором, или  $(\vec{v} \cdot \vec{BC})/|BC|$ ; очевидно, проекция суммы векторов равна сумме их проекций). Для двух других сторон (собственно, нам достаточно и одной из них) проверка аналогична — ведь в условии задачи стороны равноправны.

Поскольку проекции точек  $O$  и  $Z$  на сторону  $BC$  — это точки  $N$  и  $T_a$ , проекция вектора  $\vec{OZ} = \vec{BZ} - \vec{BO}$  на ось  $BC$  равна

$$|BT_a| - |BN| = \frac{a+c-b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{c-b}{2}$$

( $|BT_a| = (a+c-b)/2$  потому, что отрезки касательных, проведенных из каждой вершины треугольника к вписанной окружности, равны).

Проекция вектора  $\vec{ZT}_a$  на  $BC$  равна нулю, а проекция  $\vec{ZT}_b + \vec{ZT}_c$  — суммы векторов длины  $r$ , образующих углы  $90^\circ - \gamma$  и  $90^\circ + \beta$  с осью  $BC$  — равна

$$r \cos(90^\circ - \gamma) + r \cos(90^\circ + \beta) = \\ = r \sin \gamma - r \sin \beta = \frac{r}{2R} (c-b)$$

(в последнем равенстве использована теорема

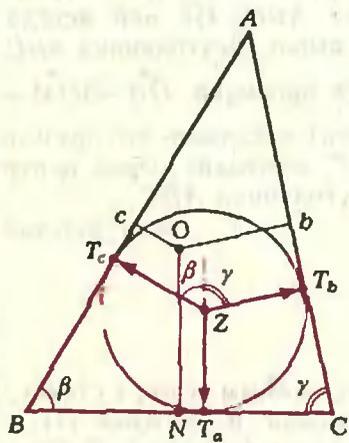


Рис. 1.

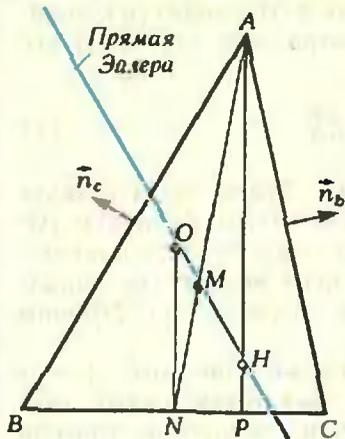


Рис. 2.

синусов:  $c = 2R \sin \gamma$ ,  $b = 2R \sin \beta$ ). Отсюда вытекает равенство (2).

б) Заметим, что векторы  $\vec{n}_a$ ,  $\vec{n}_b$ ,  $\vec{n}_c$ , о которых идет речь в задаче, — это векторы длины 1, направленные так же, как  $\vec{ZT}_a$ ,  $\vec{ZT}_b$ ,  $\vec{ZT}_c$  из задачи а). Обозначим через  $P$  основание высоты  $AP$  треугольника  $ABC$  (рис. 2).

Найдем проекцию вектора  $\vec{MO}$  на ось  $BC$ . Поскольку  $\vec{OM} = (\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC})/3$ , а проекции векторов  $\vec{OB}$  и  $\vec{OC}$  противоположны и равны по величине, проекция  $\vec{MO}$  равна одной трети проекции вектора  $\vec{AO}$ ; далее, поскольку  $\vec{PN} = (\vec{PB} + \vec{PC})/2$ , проекция  $\vec{AO}$  равна  $(|PC| - |PB|)/2 = (b^2 - c^2)/2a$ . (В последнем равенстве мы использовали теорему Пифагора:  $b^2 - c^2 = (|PC|^2 + |AP|^2) - (|PB|^2 + |AP|^2) = (|PC| - |PB|)(|PC| + |PB|) = (|PC| - |PB|)a$ .)

Проекция вектора  $a^3 \vec{n}_a + b^3 \vec{n}_b + c^3 \vec{n}_c$  на ту же ось равна

$$b^3 \sin \gamma - c^3 \sin \beta = \\ = \frac{b^3 c - c^3 b}{2R} = \frac{abc}{R} \cdot \frac{b^2 - c^2}{2a} = 4S \cdot \frac{b^2 - c^2}{2a}.$$

(в последнем равенстве использована формула  $S = abc/4R$  для площади треугольника). Отсюда вытекает равенство задачи б).

Прямая  $OM$  называется прямой Эйлера (неравностороннего) треугольника  $ABC$ . На ней всегда лежит точка  $H$  пересечения высот треугольника  $ABC$

(как видно из рассмотрения проекций,  $\vec{OH} = 3\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$ ). В задаче а) доказано, что прямая Эйлера треугольника  $T_a T_b T_c$  проходит через центр вписанной окружности треугольника  $ABC$ .

Н. Б. Васильев

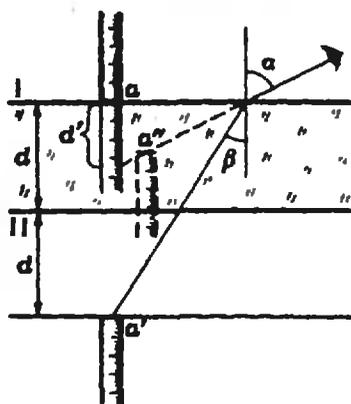
Ф867. Представьте себе, что вы стоите перед большим листом толстого прозрачного стекла (например, перед стеклянной витриной). Каким образом можно определить толщину стекла, если доступа к его краям нет (скажем, края стекла замурованы в стены), в помещении за стеклом проникнуть нельзя, разбить стекло тоже нельзя? В вашем распоряжении имеются линейка, угольник, бумага, карандаш и карманный калькулятор для проведения расчетов.

◆ Если приставить линейку под прямым углом к стеклу, то мы увидим два ее отражения: в ближней (I) и дальней (II) поверхностях стекла (см. рис.). Первое изображение дает нам как бы «линейку за зеркалом», по которой можно измерять положение конца второго изображения при разных углах наблюдения. Это позволяет определить толщину стекла.

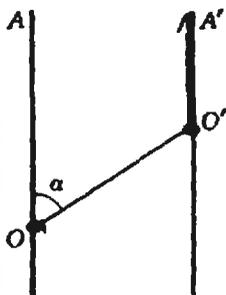
Глядя в стекло, мы видим конец второго отражения линейки не в точке  $a'$ , где он находится на самом деле, а в точке  $a''$ . Положение этой точки мы и можем фиксировать по «линейке за зеркалом».

Пусть толщина стекла  $d$ , показатель преломления  $n$ . Как видно из рисунка,

$$d' \operatorname{tg} \alpha = 2d \operatorname{tg} \beta \Rightarrow d = \frac{d' \sin \alpha \cos \alpha}{2 \sin \beta \cos \beta}.$$



868. Колечки  $O$  и  $O'$  надеты на вертикально закрепленные стержни  $AB$  и  $A'B'$ . Нерастяжимая нить привязана к кольцу  $O$ , пропущена через кольцо  $O'$  и закреплена в точке  $A$  (см. рисунок). В тот момент, когда  $\widehat{AOO'} = \alpha$ , кольцо  $O'$  движется вниз со скоростью  $v$ . Найти скорость кольца  $O$  в этот момент.



869. Вертикальная длинная кирпичная труба заполнена чугуном. Нижний конец трубы поддерживается при температуре  $T_1 > T_{пл}$  ( $T_{пл}$  — температура плавления чугуна), верхний — при температуре  $T_2 < T_{пл}$ . Теплопроводность  $\chi$  расплавленного чугуна в  $k$  раз больше, чем у твердого. Какая часть металла находится в расплавленном состоянии?

Подставив  $n = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$ ,  $\cos \beta = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}}$ , получим

$$d = \frac{d' (n^2 - \sin^2 \alpha)^{1/2}}{2 \cos \alpha}.$$

В этом выражении  $d'$ ,  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  — те величины, которые мы можем измерить и вычислить, пользуясь нашими инструментами. Чтобы избавиться от неизвестного показателя преломления  $n$ , поступим так. Произведем измерения  $d'$  при двух значениях угла падения  $\alpha$  (измерения  $\sin \alpha$  и  $\cos \alpha$  легко найти, измеряя расстояния от глаза до стекла и до точки пересечения луча зрения со стеклом). Тогда

$$\frac{d'_1 (n^2 - \sin^2 \alpha_1)^{1/2}}{2 \cos \alpha_1} = \frac{d'_2 (n^2 - \sin^2 \alpha_2)^{1/2}}{2 \cos \alpha_2}.$$

Отсюда после несложных преобразований получим

$$d = \frac{d'_1 d'_2}{2} \left( \frac{\sin^2 \alpha_2 - \sin^2 \alpha_1}{(d'_2)^2 \cos^2 \alpha_1 - (d'_1)^2 \cos^2 \alpha_2} \right)^{1/2}.$$

М. В. Семенов

Рассмотрим движение колечек и веревки в системе отсчета, движущейся вместе с колечком  $O'$ . В этой системе колечко  $O'$  неподвижно. В тот момент, когда  $\widehat{AOO'} = \alpha$ , нить «выбирается» вверх со скоростью  $v$ . Поскольку нить нерастяжима, колечко  $O$  в этот момент должно иметь такую скорость  $u$  (в системе, связанной с колечком  $O'$ ), чтобы ее проекция на направление  $OO'$  была равна  $v$ , то есть

$$u = \frac{v}{\cos \alpha}.$$

В неподвижной системе отсчета скорость колечка в этот момент равна

$$v_a = u - v = v \left( \frac{1}{\cos \alpha} - 1 \right).$$

С. С. Кротов

Поскольку нижний конец трубы поддерживается при температуре  $T_1$ , большей температуры плавления, чугун внизу будет расплавлен. Температура границы между расплавленным и твердым чугуном, естественно, равна температуре плавления  $T_{пл}$ .

Поскольку температуры верхнего и нижнего концов трубы поддерживаются постоянными, количество тепла, проходящего за единицу времени через поперечное сечение трубы, в любом месте трубы должно быть одним и тем же. Другими словами, поток тепла через расплавленный и твердый чугун должен быть одним и тем же. (Кирпичная труба плохо проводит тепло, и теплообменом через ее стенки можно пренебречь.)

Поток тепла пропорционален теплопроводности, площади поперечного сечения и разности температур,

приходящейся на единицу длины. Пусть  $l_1$  — длина нижней части трубы, где чугун расплавлен, а  $l_2$  — длина верхней части, где чугун находится в твердой фазе. Условие постоянства потока тепла запишется тогда в виде (сечение трубы постоянно).

$$\chi_{ж} \frac{T_1 - T_{пл}}{l_1} = \chi_{тв} \frac{T_{пл} - T_2}{l_2},$$

где  $\chi_{ж}$  и  $\chi_{тв}$  — теплопроводность жидкого и твердого чугуна соответственно. Учитывая, что  $\chi_{ж} = k\chi_{тв}$ , найдем

$$l_1 = l_2 k \frac{T_1 - T_{пл}}{T_{пл} - T_2}.$$

Полная длина трубы равна  $l_1 + l_2$ ; значит, в расплавленном состоянии находится

$$\frac{l_1}{l_1 + l_2} = \frac{k(T_1 - T_{пл})}{k(T_1 - T_{пл}) + (T_{пл} - T_2)} \text{ часть металла.}$$

А. И. Буздин

870\*. Одноатомный идеальный газ расширяется так, что его молярная теплоемкость  $c_x$  остается постоянной; при этом газ совершает работу  $A = 165$  Дж. Затем газ изохорически нагревают до первоначальной температуры, для чего к нему подводят количество теплоты  $Q = 125$  Дж. Определить  $c_x$ .

Пусть в процессе с постоянной теплоемкостью, равной  $c_x$ , температура газа изменяется от  $T_1$  до  $T_2$ . Тогда, по определению теплоемкости, количество теплоты  $Q_x$ , полученное газом в этом процессе, равно

$$Q_x = c_x (T_2 - T_1). \quad (1)$$

По закону сохранения энергии это количество теплоты идет на совершение газом работы  $A$  над внешними телами и на изменение его внутренней энергии  $\Delta U$ :

$$Q_x = A + \Delta U. \quad (2)$$

При нагревании газа в изохорическом процессе без совершения работы все подведенное тепло  $Q$  идет на увеличение его внутренней энергии. Газ при этом возвращается к исходной температуре  $T_1$ . Внутренняя энергия идеального газа зависит только от температуры, а ее изменение определяется разностью температур конечного и начального состояний. Поэтому ясно, что в процессе с постоянной теплоемкостью изменения температуры газа и изменения его внутренней энергии противоположны по знаку соответствующим изменениям в изохорическом процессе.

Пусть в изохорическом процессе теплоемкость газа равна  $c_V$ , а модуль изменения внутренней энергии равен  $|\Delta U|$ . Тогда изменение температуры газа определяется из равенства

$$Q = |\Delta U| = c_V (T_1 - T_2).$$

С учетом вышесказанного, имеем из равенств (1) и (2):

$$-c_x \frac{|\Delta U|}{c_V} = A - |\Delta U|,$$

откуда

$$c_x = c_V \frac{|\Delta U| - A}{|\Delta U|}.$$

По условию  $|\Delta U| = 125$  Дж,  $A = 165$  Дж и

$$c_V = \frac{3}{2} R \approx 12,5 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К)}.$$

Поэтому для теплоемкости  $c_x$  получаем окончательно

$$c_x \approx -4 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К}).$$

Таким образом, найденная нами теплоемкость отрицательна, что соответствует охлаждению газа при подводе к нему тепла. С точки зрения закона сохранения энергии это означает, что газ совершает часть работы за счет уменьшения своей внутренней энергии, а часть — за счет подвода тепла.

А. А. Шеронов

Ф871. Первоначально незаряженный конденсатор емкости  $C$  подключают к последовательно соединенным батарее с напряжением  $U$  и катушке с индуктивностью  $L$ . Ток через катушку вначале увеличивается, а затем уменьшается. В тот момент, когда ток становится равным нулю, конденсатор отключают от схемы и подключают вновь, поменяв местами его выводы. Какой максимальный ток будет после этого течь через катушку? Как изменится этот ток, если процесс переключения повторить 1984 раза? Сопротивлением цепи пренебречь.

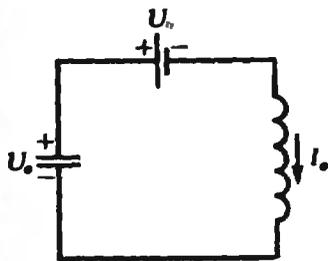


Рис. 1.

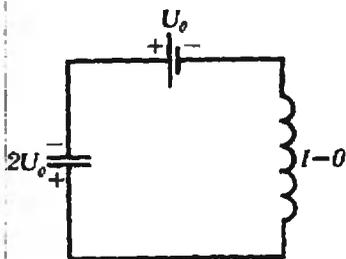


Рис. 2.

◆ В тот момент, когда ток через катушку станет равным нулю, энергия конденсатора будет равна работе, которую произвела батарея. Следовательно, заряд конденсатора в этот момент определяется условием

$$\frac{q_0^2}{2C} = U_0 q_0,$$

откуда

$$q_0 = 2CU_0.$$

Найдем максимальный ток через катушку после подключения конденсатора. Условие максимума тока —  $I' = 0$ , то есть  $\mathcal{E}_{\text{инд}} = -LI' = 0$ ; значит, в тот момент, когда ток максимален, напряжение на конденсаторе равно  $U_0$  и «компенсирует» напряжение батареи (рис. 1). Из закона сохранения энергии —

$$U_0 CU_0 = \frac{CU_0^2}{2} + \frac{LI_0^2}{2}$$

— находим максимальное значение тока:

$$I_0 = U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Рассмотрим схему после переключения (рис. 2). Ток через катушку равен нулю (только в тот момент, когда энергия катушки равна нулю, ее можно «безнаказанно» отключать от цепи). В тот момент, когда ток достигнет искомого максимального значения  $I_1$ , напряжение на конденсаторе будет равно  $U_0$ ; значит, к этому моменту по цепи протечет заряд  $3CU_0$  н, согласно закону сохранения энергии,

$$U_0 3CU_0 + C \frac{(2U_0)^2}{2} = \frac{CU_0^2}{2} + \frac{LI_1^2}{2}.$$

Отсюда

$$I_1 = 3U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

Перед следующим, вторым, переключением, когда ток через катушку будет равен нулю, на конденсаторе будет заряд  $q_1$ , который, как и в первом случае, найдем из условия

$$U_0 (2CU_0 + q_1) + C \frac{(2U_0)^2}{2} = \frac{q_1^2}{2C}.$$

Отсюда

$$q_1^2 - 2CU_0 q_1 - 8C^2 U_0^2 = 0 \Rightarrow q_1 = CU_0 \pm 3CU_0.$$

Корень —  $2CU_0$  не подходит (подумайте, какому случаю он соответствует). Значит,  $q_1 = 4CU_0$ .

Максимальное значение тока после второго переключения будет  $I_2 = 5U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}$ . после третьего пере-

ключения —  $I_3 = 7U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}$  и т. д. После  $n$  переключений

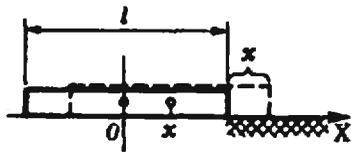
$$I_n = (2n+1)U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

При  $n=1984$  получим

$$I_{1984} = 3969U_0 \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

А. Р. Зильберман

◆  
**Ф872.** Длинные сани, скользящие по очень гладкому льду, въезжают на асфальт и останавливаются, не пройдя половины своей длины. После этого саням резким толчком сообщают первоначальную скорость и они вновь останавливаются. Как относятся времена торможения в первом и во втором случаях? Как относятся пути торможения?



Пусть длина саней  $l$ , их масса  $m$ , скорость, с которой они скользят по льду,  $v_0$  и коэффициент трения саней об асфальт  $\mu$ .

С того момента, как сани начнут въезжать на асфальт, уравнение движения саней будет таким (см. рисунок):

$$mx'' = -\mu g \frac{m}{l} x. \quad (*)$$

Это — уравнение колебательного движения. Зависимость координаты от времени имеет вид

$$x(t) = X_1 \sin \omega_0 t,$$

где  $\omega_0 = \sqrt{\mu g/l}$ ,  $X_1$  — координата саней в момент их остановки (амплитуда колебаний). К этому моменту вся начальная кинетическая энергия саней будет израсходована на работу против силы трения. Из этого условия (закон сохранения энергии) найдем  $X_1$ :

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{1}{2} \mu g \frac{mX_1}{l} X_1 = \frac{\mu mg X_1^2}{2l}$$

( $\frac{1}{2} \mu g \frac{mX_1}{l}$  — среднее значение силы трения), откуда

$$X_1 = v_0 \sqrt{\frac{l}{\mu g}} = \frac{v_0}{\omega_0}.$$

Время  $t_1$ , прошедшее от момента въезда саней на асфальт до их первой остановки, — это четверть периода колебаний с частотой  $\omega_0$ , то есть

$$t_1 = \frac{2\pi}{4\omega_0} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{\mu g}}.$$

После того как саням резким толчком сообщают скорость  $v_0$ , уравнение движения саней будет таким же, как в первом случае (см. (\*)). Зависимость координаты  $x$  ( $x > X_1$ ) от времени имеет вид

$$x(t) = \bar{X}_1 \sin \omega_0 t,$$

где  $\bar{X}_1$  — координата саней в момент их второй остановки (новая амплитуда колебаний).

Чтобы найти путь и время второго торможения, будем считать, что сани начали въезжать на асфальт со скоростью  $u_0$  и, пройдя путь  $\bar{X}_1$ , имели скорость  $v_0$ . Тогда, согласно закону сохранения энергии,

$$\frac{mu_0^2}{2} = \frac{1}{2} \mu g \frac{m\bar{X}_1}{l} \bar{X}_1 = \frac{\mu mg \bar{X}_1^2}{2l},$$

откуда

$$\bar{X}_1 = u_0 \sqrt{\frac{l}{\mu g}} = \frac{u_0}{\omega_0}.$$

Скорость  $u_0$  найдем из условия

$$\frac{mu_0^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = \frac{1}{2} \mu g \frac{mX_1^2}{l} \Rightarrow u_0 = v_0 \sqrt{2}.$$

Таким образом,

$$\bar{X}_1 = \frac{v_0}{\omega_0} \sqrt{2}.$$

Путь, который пройдут сани после толчка до остановки, равен

$$X_2 = \bar{X}_1 - X_1 = \frac{v_0}{\omega_0} (\sqrt{2} - 1),$$

и отношение путей торможения в первом и во втором случаях —

$$X_1 : X_2 = 1 : (\sqrt{2} - 1).$$

При начальной скорости  $u_0 = v_0 \sqrt{2}$  сани прошли бы путь  $X_1$  за время  $t_1$ , определяемое из условия  $v_0 = v_0 \sqrt{2} \cos \omega_0 t_1$ , то есть за время

$$\bar{t}_1 = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{l}{\mu g}}.$$

До полной остановки они двигались бы в течение времени  $t_1 = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{l}{\mu g}}$  (период колебаний не зависит от начальной скорости). Следовательно, время, в течение которого сани будут двигаться после толчка до второй остановки, равно

$$t_2 = t_1 - \bar{t}_1 = \frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{l}{\mu g}},$$

и отношение времен торможения в первом и во втором случаях —

$$t_1 : t_2 = 2 : 1.$$

С. С. Кротков

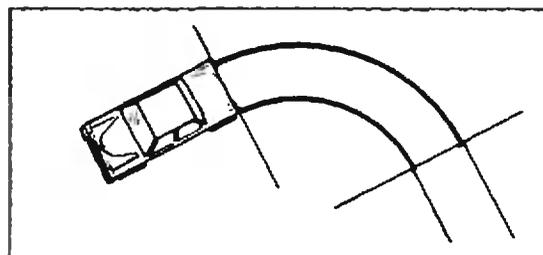
### Ответы, указания, решения



#### «Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 5)

- $VIII - III = V$ ,  $VII + III = X$ ,  $VII - III = IV$ .
- Чтобы отсчитать 60 конвертов, достаточно отсчитать 40 конвертов, на что потребуется 40 секунд, а остальные конверты из пачки отдать покупателю. При таком методе 90 конвертов продавец отсчитает за 10 секунд.



3.

1
2 5
7 8 4
3 6
9

4. Прямою следует провести через центры прямоугольников.

5. При повороте, скажем, налево правое ведущее колесо проходит больший путь, чем левое (см. рисунок). Если бы колеса при этом вращались с одинаковой скоростью, то трение на этом участке приводило бы к быстрому износу покрышек и затрудняло управление машиной.

**Задача в картинках.**

(см. «Квант» № 5)

Первым был Сережа, второй — Надя, третьим — Коля, четвертым — Ваня и пятым — Толя.

#### «Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 6)

- $56 : 8 = 9 - 2 = 3 + 4 = 1 \times 7$ .
- Пусть  $a$  — сторона квадрата, а  $r$  — радиус данного круга, тогда равенство их площадей запишется следующим образом:  $a^2 = \pi r^2$ . Радиус круга, вписанного в квадрат, равен  $\frac{a}{2}$ , а сторона

квадрата, вписанного в круг, равна  $r\sqrt{2}$ . Отсюда площади вписанных фигур равны, соответственно,  $\pi \frac{a^2}{4}$  и  $2r^2$ . Заменяя  $a^2$  на  $\pi r^2$ , получаем

для площадей значения  $\frac{\pi^2}{4} r^2$  и  $2r^2$ , но  $\pi^2$  больше

9, поскольку  $\pi$  больше 3, поэтому  $\frac{\pi^2}{4} r^2$  больше

$2r^2$ , то есть площадь вписанного круга больше площади вписанного квадрата.

3. Каждое следующее число равно удвоенному предыдущему, сложенному с числом 3, поэтому вместо знака ? следует поставить число 157.

4. В этом шифре гласные буквы остаются на месте, а каждая согласная меняется на букву, расположенную непосредственно над или под ней в таблице:

б в г д ж з к л м н  
щ ш ч ц х ф т с р п

Об этом шифре пишет П. И. Мельников (Андрей Печерский) в своей эпопее «В лесах».

5. Все дело в том, в каком направлении двигать зеркало. Если двигать его к предмету или от него, то изображение переместится на расстояние вдвое больше, чем зеркало; если двигать его параллельно себе, то отражение не сместится вовсе, а чтобы отражение сместилось на такое же расстояние, что и зеркало, нужно двигать его вбок — под углом  $60^\circ$ . А Гриша просто переставил вазу.

**Задача в картинках**

(см. «Квант» № 6)

Вопреки известной былинке, выходит, что Соловья-разбойника поймал Добрыня Никитич!

## Шахматная страничка

(см. «Квант» № 46 3, 4)

**Задание 5** (Шаши — Гик, Харьков, 1967 г.). Черные были уверены, что у них все в порядке — королю осталось сделать всего три хода, чтобы забрать опасную пешку «с». Однако последовало 1. Ch3!!, и положение резко изменилось. Проигрывает 1...C:h3 2. f5!, и обратная дорога слону к полю с8 перекрыта. Пришлось играть 1...f5 2. C:e5 C:e5 3. fe h5 4. Kpf2 Kpe6 5. ef+gf 6. Kpe3 Kp:e6 7. Cf1 Kpd6 8. Kpf4 Kp:c7. Королю удалось добраться до пешки, но эндшпиль проигран: 9. Kpe5 Cd7 10. Cd3 Ce8 11. C:f5 Cf7 12. h3 Kpd8 13. Kpf6 Ce8 14. g4 hg 15. hg Kpc7 16. Kpe7. Черные сдались.

**Задание 6** (Куйперс — Петерсен, Галле, 1967 г.).

Кажется, что спасение невозможно. На помощь приходит идея перекрытия. 1. Ле6+ Kp:f5 2. Лг6!! Теперь после 2... Kp:g6 (2...Л:г6 3. с8Ф+) линия «g» перекрыта и белые успеют поставить ладью на b8. Но черные тоже проявляют изобретательность. 2...Ле8! (грозит 3...e2+). Однако белые заготовили еще одно перекрытие. 3. Ле6! Опять ладья под двумя ударами, но как 3...Kp:e6 4. Лb8, так и 3...Ле:б 4. с8Ф e2+ 5. Kpg2 e1Ф 6. Лb5+ не опасно для белых. После 3...Лg8! 4. Лг6! партнеры согласились на ничью.

**Задание 7.** 1. Cd6! Красная геометрическая идея. Ферзь белых остался под боем, но его нельзя бить из-за 2. Лf8x. Но и слон неприкосновенен: 1...Л:d6 2. Фb8+ (сразу этот шах ничего не давал ввиду 1...Л:c8). Таким образом, черные или получают мат или теряют ферзя.

**Задание 8.** 1. Фe6!! Л:b3 2. Лh8+! Kp:h8 3. Фh6+ Kpg8 4. Ф:g7x.

**Главный редактор** — академик И. К. Киконн

**Первый заместитель главного редактора** — академик А. Н. Колмогоров

**Заместители главного редактора:** Л. Г. Асламазов, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

**Редакционная коллегия:** М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

**Редакционный совет:** А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаяев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурич, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

**Номер подготовили:**

А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров,  
Б. М. Ивлева, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский,  
В. А. Тихомирова

**Номер оформили:**

Г. Н. Бини, М. Б. Дубах, А. И. Климанов, В. С. Коваль,  
Ю. В. Котва, М. М. Краковский, А. К. Милкин,  
Э. В. Назаров, И. А. Смирнов, И. Е. Смирнова,  
Е. К. Теичурин  
Фото представил Б. Л. Раскин

**Занимающая редакцией** Л. В. Чернов

**Редактор отдела художественного оформления**  
Э. А. Смирнов

**Художественный редактор** Т. М. Макарова  
**Корректор** Н. Д. Дорохова

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1.  
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 22.5.84.

Подписано к печати 20.6.84.

Печать офсетная.

Бумага 70x108 1/16. Усл. кр. от. 23,8.

Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 7,07 Т-14325

Цена 40 коп. Заказ 1290 Тираж 172 309 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени  
Чеховский полиграфический комбинат  
ВО «Союзполиграфпром»  
Государственного комитета СССР  
по делам издательства, полиграфии  
и книжной торговли  
г. Чехов Московской области

## Шахматная страничка

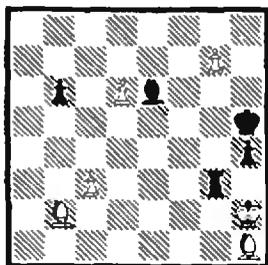


Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

### УЧЕНЫЕ — ГРОССМЕЙСТЕРЫ ПО КОМПОЗИЦИИ

На «шахматной страничке» в № 12 за 1983 год вы познакомились с этюдами международного гроссмейстера по шахматной композиции В. Королькова. Теперь мы расскажем еще о двух гроссмейстерах — этюдниках. Интересно, что оба они известны не только в мире шахмат, но и в мире науки.

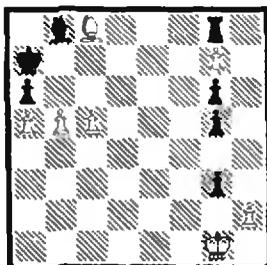
Владимир Брон — крупный советский ученый, доктор технических наук, и в то же время победитель ряда конкурсов по композиции. Следующие два этюда, отобранные для нас самим автором, отличаются новизной замысла, насыщены острой борьбой.



В. Брон, 1946 г.  
Выигрыш.

1. c4 C:c4 2. d7 Лd3 3. Cf3+! Kph6 4. Cd5! Старинная тема Новотного — белая фигура внезапно возникла на пересечении дорог, по которым ходят черная ладья и слон, и любое взятие ведет к катастрофе (4...C:d5 5. d8Ф, 4...Л:d5 5. g8Ф Лd2+ 6. Фg2). Но впереди нас ждет еще один остроумный этюдный маневр. 4...Лd2+! 5. Kpg1 Л:d5 6. g8K+! Kpg5 7. Cc1+ Kpf5. Король вскоре съест белую пешку, но превращенный конь одну за другой заберет три черные фигуры — «шашечная тема». 8. Кe7+ Кре8 9. К:d5 Кр:d7 10. К:b6+ Крс6 11. К:c4, и белые выигрывают. Классический этюд, иллюстрирующий собой последовательный синтез идей (тема Новотного + шашечная тема).

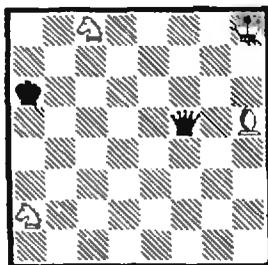
люстрирующий собой последовательный синтез идей (тема Новотного + шашечная тема).



В. Брон, 1962 г.  
Выигрыш.

1. b6+ Кра8 2. Се6 Л:g7! Интересно и продолжение 2...gh+ 3. Kph1! Лd8 4. Cb3! Kpb7 5. g8Ф Л:g8 6. Cd5+! Крс8 7. C:g8 Крд7 8. Cd5! g4! 9. c6+ Кре7 10. c7 C:c7 11. bc Крд7 12. Кр:h2 Кр:c7 13. Cc4 Этюд в этюде! 3. Cd5+ Лb7 4. c6 Лc7! 5. Kph1! (5. hg Ca7!!) 5... gh 6. Cg2 g4 7. Cd5 g3 8. Cg2 g5 9. Cd5. Теперь все зависит от того, какая из пешек «g» двинется вперед: 9...g2+ 10. C:g2 g4 11. Cd5 g3 12. Cg2 Ла7! 13. c7+ Лb7 14. Ce4! C:c7 15. bc Кра7! 16. c8Л! с выигрышем; 9...g4 10. Cg2 Лf7 11. c7+ Лf3! 12. c8Л! с тем же итогом.

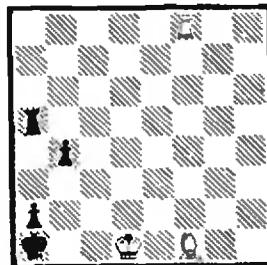
Гроссмейстер по композиции Гиа Надарешвили известен в Грузии, не только как замечательный этюдник, но и как крупный врач, главный невропатолог Тбилиси, автор многих научных трудов. Следующие этюды также отобраны самим композитором.



Г. Надарешвили, 1958 г.  
Ничья.

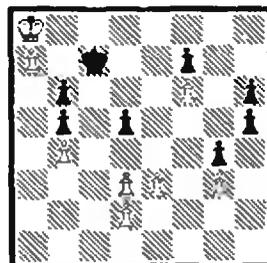
Фигуры белых разбросаны по всей доске, но в конце концов им удастся собраться в клубок. 1. Kb4+ Кра5 2. Кс6+ Кра4. От одного коня черный король убежал, в погоню пускается другой. 3. Kb6+ Кра3 4. Кс4+ Кра2. Настает очередь действовать слону. 5. Cf3! Ф:f3 (5. Фf8+ 6. Kph7 Фf7+ 7. Kph8 Ф:c4 8. Cd5! Ф:d5 9. Kb4+)

6. Kb4+ Кра1 7. Кс2+ Кра2 8. Kb4+. Вечный шах одними конями. Этот этюд открыл тему, которую автор назвал «мхедрули» — грузинский таец всадников.



Г. Надарешвили, 1970 г.  
Ничья.

1. Cc4 Лс5 2. Cg8!! Kpb1 3. Лb8! Лc1+ 4. Крд2 Лс2+ 5. Крд1 a1Ф 6. Л:b4+ Лb2 7. Лс4! Лс2 8. Лb4+ Лb2 9. Лс4. Позиционная ничья



Г. Надарешвили, 1970 г.  
Ничья.

При создании этого этюда автора в первую очередь интересовали возможности самого беззащитного шахматного персонажа — пешки (превращение, взятие на проходе и т. д.).

1. e4 d4 (1...h4 ведет к ничьей — 2. ed hg 3. d6+ Кр:d6 4. Kpb7 g2 5. a8Ф g1Ф 6. Фf8+ Кре6 7. Фe7+ Kpf5 8. Ф:f7) 2. e5 h4 3. e6 h3 4. e7 h2 5. e8Л!! с победой. Но не годятся 5. e8Ф h1Ф+ 6. Фe4 Фf3!, 5. e8K+ Крд7 6. Kpb8 h1Ф 7. a8Ф Ф:a8+ 8. Кр:a8 Кр:e8, и пешка «h» идет вперед

### Конкурсные задания

13. Белые: Кра2, Лb4, Кf4, Са3; черные: Крс5, Фf5, пп. e6, g7. Выигрыш.

14. Белые: Крb8, пп. b7, e5; черные: Кра5, Кf8, п. d2. Ничья.

Срок отправки решений — 25 сентября 1984 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 13, 14»).

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Здесь представлен двухцветный стереочертеж (так называемый анаглиф), который следует рассматривать через двухцветные очки или светофильтры. Чертеж состоит из двух частей: многогранник (слева вверху) вычерчен вручную, а сложная «архитектурно-геометрическая композиция» построена на автоматизированной графической системе АЛГРАФ, созданной Ю. В. Котовым. Рассматривать анаглифы следует через очки-светофильтры; для правого глаза нужен синий светофильтр, для левого — красный. Жур-

нал должен лежать на горизонтальной поверхности перед вами. Передвигая его, надо найти такое положение, при котором объекты будут восприниматься как стоящие «вертикально». Если подобрать светофильтры не удастся, и картинка «двоится», желающие могут попробовать скопировать чертежи красками, подобранными соответственно имеющимся фильтрам. Подробнее об анаглифах рассказано в статье А. И. Климанова в этом номере журнала.

