

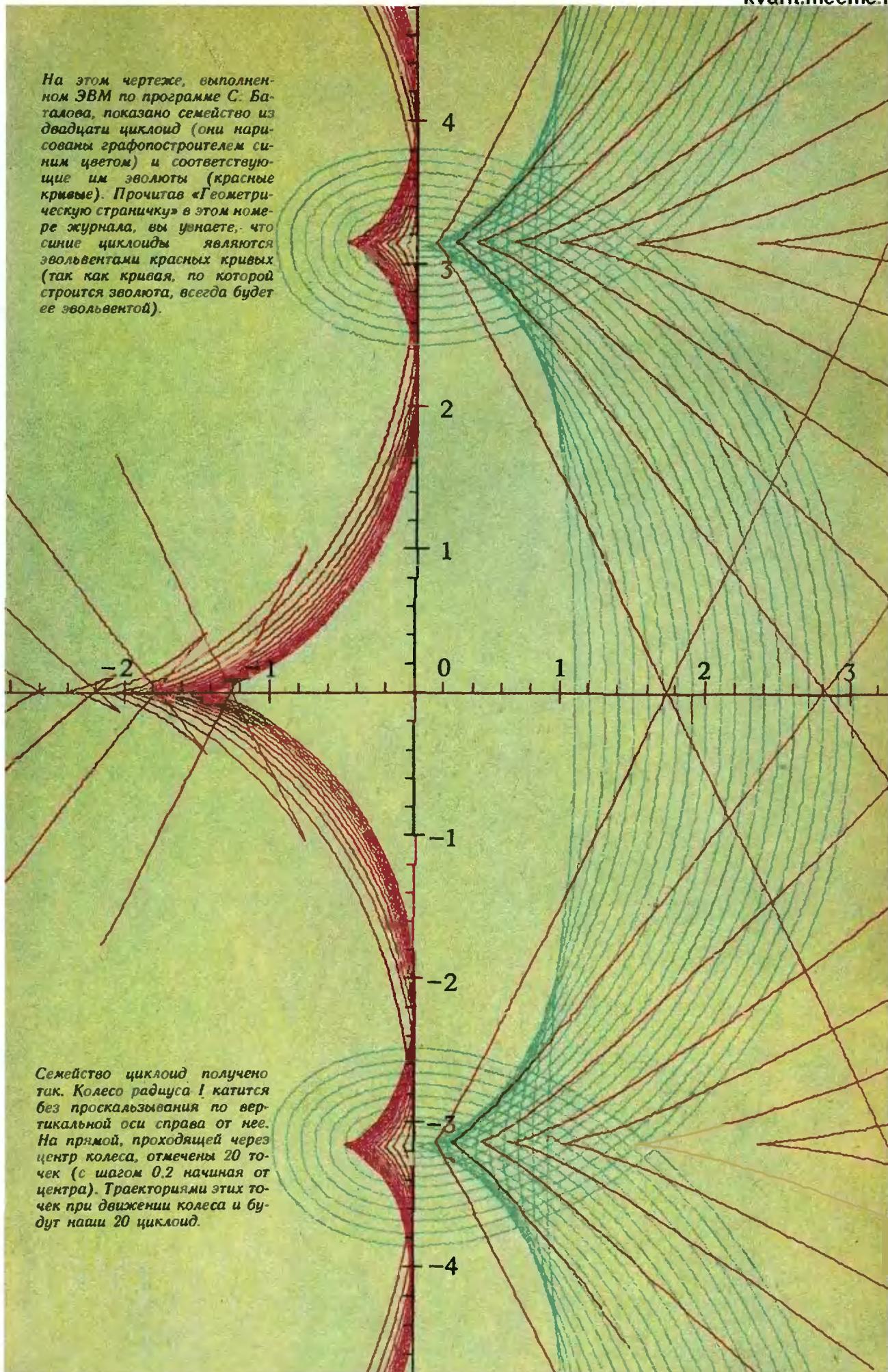
Квант

6
1984

*Научно-популярный физико-математический журнал
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*



На этом чертеже, выполненном ЭВМ по программе С. Баталова, показано семейство из двадцати циклоид (они нарисованы графопостроителем синим цветом) и соответствующие им эволюты (красные кривые). Прочитав «Геометрическую страничку» в этом номере журнала, вы узнаете, что синие циклоиды являются эвольвентами красных кривых (так как кривая, по которой строится эволюта, всегда будет ее эвольвентой).



Семейство циклоид получено так. Колесо радиуса 1 катится без проскальзывания по вертикальной оси справа от нее. На прямой, проходящей через центр колеса, отмечены 20 точек (с шагом 0.2 начиная от центра). Траекториями этих точек при движении колеса и будут наши 20 циклоид.

Научно-популярный
физико-математический журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Квант
1984

6 1984

Основан в 1970 году



Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы



В НОМЕРЕ:

IN THIS ISSUE:

2	Беседа с академиком А. А. Логуновым	A talk with academician A. A. Logunov
5	К. Л. Самаров, В. М. Уроев. Модель Пуанкаре	K. L. Samarov, V. M. Uroev. Poincaré's model
12	П. Б. Бернштейн. От Солнца до Земли	P. B. Bernstein. From Sun to Earth
19	А. Б. Гончаров. Решетки и зоны Бриллюэна	A. B. Goncharov. Lattices and Brillouin zones
11	Новости науки Зачем может понадобиться нейтрино?	Science news What can neutrino be used for?
18	Наш календарь Космологические взгляды Джордано Бруно	Our calendar Giordano Bruno's cosmological views
24	Лаборатория «Кванта» С. Л. Гаврилов. Фонтаны в парках и дома	Kvant's lab S. L. Gavrilov. Fountains in parks and at home
28	Математический кружок Ю. И. Ионин, А. И. Плоткин. Выбор модуля	Mathematics circle Yu. I. Ionin, A. I. Plotkin. Choosing the modulus
30	Школа в «Кванте» Избранные школьные задачи	Kvant's school Selected school problems
31	«Квант» для младших школьников Задачи	Kvant for younger school children Problems
32	Задача в картинках	A problem in pictures
33	Задачник «Кванта» Задачи М866—М870; Ф878—Ф882	Kvant's problems Problems M866—M870; P878—P882
36	Решения задач М851—М855; Ф862—Ф866	Solutions M851—M855; P862—P866
44	Список читателей, приславших правильные решения	List of readers who have sent correct solutions
46	Геометрическая страничка Эволюенты	Geometric page Evolvents
48	Практикум абитуриента Ю. А. Самарский. Движение по окружности	College applicant's section Yu. A. Samarski. Circular motion
52	Информация МАН «Искатель»	Information "The researcher" Junior academy of sciences
54	Варианты вступительных экзаменов	College entrance examination problems
60	Ответы, указания, решения Смесь (45) Шахматная страничка ЭВМ против чемпиона мира (3-я с. обложки)	Answers, hints, solutions Miscellaneous (45) The chess page Computer vs. world champion (3rd cover page)

Снимок солнечной короны, который воспроизведен на первой странице обложки, был сделан во время полного солнечного затмения 31 июля 1981 года вблизи поселка Шортанды в Казахстане. По виду короны можно судить об активности Солнца. О том, как влияет солнечная активность на различные явления на Земле, рассказано в статье «От Солнца до Земли» (с. 12). Фото Г. М. Николаевского (СССР) и С. Кучми (Франция).



Мы предлагаем нашим читателям встречу с ректором Московского государственного университета, вице-президентом АН СССР, известным физиком-теоретиком академиком А. А. Логуновым. Интервью у А. А. Логунова взял член редакционной коллегии нашего журнала кандидат физико-математических наук С. С. Кротов.

Беседа с академиком А. А. Логуновым

— Анатолий Алексеевич, вы возглавляете крупнейший вуз страны. Не могли бы вы вкратце охарактеризовать Московский государственный университет — каким вы его видите сегодня, каким хотели бы видеть его завтра?

— Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова — крупнейший центр науки, образования и культуры. В университете учатся око-

ло 27 тысяч студентов. Коллектив преподавателей, научных и других сотрудников насчитывает свыше 25 тысяч человек, из них свыше тысячи профессоров и докторов наук. Ежегодно Московский университет оканчивают около 5 тысяч молодых специалистов. В аспирантуре университета обучаются свыше 4 тысяч человек. За время существования аспирантуры в МГУ подготовлено свыше 20 тысяч специалистов высшей научной квалификации. Четверть ученых, работающих в системе Академии наук СССР, — выпускники МГУ. В настоящее время в Московском университете работают свыше 120 академиков и членов-корреспондентов АН СССР и союзных республик.

В нашем университете представлены практически все основные направления современной науки. В его стенах возник целый ряд научных школ, получивших мировую известность. Говоря о дальнейшем развитии университетской науки, мы понимаем, что не все ее области мы можем развивать на собственной экспериментальной базе. Поэтому мы не ставим себе цели иметь в университете, скажем, крупнейшие ускорители или реакторы. Но мы всесторонне развиваем сотрудничество с крупными научными центрами, и это позволяет нашим ученым в подготовке кадров использовать громадный научно-технический потенциал страны и одновременно творчески участвовать в решении наиболее важных проблем.

Однако пока нельзя утверждать, что научный потенциал мы используем с максимальной эффективностью. Еще недостаточна оснащенность наших лабораторий современной вычислительной техникой. Большие шаги в этой области предпринимаются. За последние несколько лет мы удвоили свои вычислительные мощности. Вычислительные машины широко внедряются в учебный процесс, студенты почти всех естественных специальностей обучаются обращению с быстродействующей вычислительной техникой. Но останавливаться на достигнутом мы не собираемся, ведь это только начало.

— Бытует мнение, что молодежь сейчас тяготеет к гуманитарным наукам; якобы наметилось охлаждение к физике и математике. Сказывается ли это на конкурсе на естественные факультеты?

— Должен сказать, что конкурс на естественные факультеты в среднем не уменьшается. Однако уровень подготовки абитуриентов, поступающих, скажем, на физический или механико-математический факультет, на мой взгляд, не достаточно высок. Многие школьники непосредственно перед поступлением в вуз усиленно готовятся самостоятельно, решают задачи, тренируются дополнительно. Но основной багаж знаний и навыков должна давать школа. А как показывают результаты вступительных экзаменов, зачастую абитуриентов ставят в тупик простейшие тригонометрические уравнения, плохо обстоит дело с техникой алгебраического счета, умением делать оценки, в целом культура вычислений стала ниже. Это заставляет нас несколько снижать уровень сложности экзаменационных вариантов. Сейчас задачи, предлагаемые абитуриентам, проще, чем, скажем, десять лет назад. Может быть, общее понимание школьниками каких-то вопросов сейчас и лучше, но именно техника зачастую страдает и очень существенно.

Я уже сказал, что конкурс на естественные факультеты в среднем не уменьшается. Но тот факт, что он не растет, не может нас радовать. Я думаю, что в какой-то момент мы, ученые, ослабили свое внимание к средней школе, и это сказалось на подготовке школьников. По этому вопросу я уже выступал на сессии Верховного Совета СССР. То, что многие ведущие ученые страны сейчас проявляют большой интерес к проблемам преподавания математики в средней школе, надеюсь, в скором времени изменит сложившуюся ситуацию. Несомненно, кардинальную роль в улучшении среднего образования будет иметь реформа, к осуществлению которой приступает вся страна.

— Поговорим теперь о тех, кто успешно сдал вступительные экзамены, проучился положенные годы в МГУ. Что ждет их после окончания университета?

— Тот, кто хорошо учится и успешно оканчивает МГУ, может не беспокоиться. Он всюду найдет себе применение — или в системе Академии наук, или у нас в университете, или в отраслевых научно-исследовательских институтах, или в ведущих отраслях производства. Главное — хорошо учиться. К сожалению, еще попадают студенты, кото-

рые просто занимают чужие места. Этого, конечно, быть не должно; по этому поводу нам есть над чем подумать. Учеба никогда не должна быть в тягость, и если она в тягость, то это значит, что студенту необходимо заняться чем-то другим, найти дело по душе и в то же время необходимое обществу.

— Известно, что университетское образование отличается фундаментальностью, широтой. Но выпускник, скажем, физического факультета должен сразу после окончания университета включаться в сегодняшнюю, современную науку, участвовать в решении конкретных научных проблем. Поэтому уже в процессе обучения необходимо вводить студента в проблематику, возникшую совсем недавно. Какое внимание вы, как заведующий кафедрой физики высоких энергий и одновременно лектор важнейшего курса теоретической физики — электродинамики, уделяете этим вопросам?

— Научить, как пользоваться общими методами, дать фундаментальные знания — это главная задача университетского образования. Ведь научить всему — невозможно, важно дать глубокие представления о физических явлениях, выработать творческий подход к изучаемым законам и уравнениям, умение понимать границы их применимости. После окончания университета такой подход позволит выпускникам достаточно быстро адаптироваться в соответствующей узкой области знаний, суметь творчески обогатить ее достижениями науки в других областях и сделать весомый вклад в развитие науки.

— Анатолий Алексеевич, а когда у вас пробудился интерес к физике и математике? Почему вы выбрали физику?

— Физику, нужно сказать, я выбрал не сразу. Сначала мне нравилась математика. В школе у нас был очень хороший учитель математики, который постоянно предлагал интересные задачи. Атмосфера на уроках была деловая и дружелюбная. Мы очень любили математику, любили учителя, всегда старались его порадовать. Физика преподавалась совсем на другом уровне. Особого интереса у меня она не вызывала. В те годы мы думали больше об авиации. В журнале «Математика в школе» я прочитал, что авиация — это на девять десятых математика. Поэтому после школы я решил пойти учиться в авиационный институт. Уже позднее, в

институте, я почувствовал, что это не моя специальность, что мне интересны именно те вопросы, которые на лекциях и семинарах не рассматривались. Например, мы изучали катодную лампу, формулы, описывающие ее работу. Меня интересовали скорее не сами формулы, которые нам приводили, а то, откуда они берутся, насколько они точны и где границы их применимости. Мне хотелось все это глубже понять. И тогда я решил заняться делом по душе. Сдал экстерном экзамены и перевелся в Московский университет на физический факультет.

В университете я должен был бы учиться на пятом курсе, но решил все же пойти на четвертый — мне хотелось лучше прочувствовать дух университета, его специфику. Мне нравились практически все предметы, которые нам преподавали, и на все занятия я ходил с большим удовольствием, хотя некоторые мои сокурсники считали какие-то лекции скучными, маловажными.

Именно в университете состоялось мое настоящее знакомство с теорией Максвелла, оставившее неизгладимый след на всю жизнь. Еще раньше меня поразила красота и простота уравнений Максвелла. Сначала было просто восхищение перед ними. Затем я начал изучать различные явления, которые они описывают. На меня произвела сильнейшее впечатление исключительная общность, фундаментальность теории. Меня начал интересовать вопрос: насколько правильно, точно существующие теории, уравнения описывают мир? Где граница наших знаний о мире? Постепенно я почувствовал свой основной интерес в науке. Хотя я тогда не знал, что существуют физики-теоретики.

Потом я попал к очень хорошему учителю — академику Н. Н. Боголюбову, и дальнейшее мое формирование как научного сотрудника происходило в «школе» Боголюбова.

— Анатолий Алексеевич, известно, что ваша научная деятельность связана с такими глобальными проблемами, как квантовая теория поля, физика высоких энергий, теория относительности. Не могли бы вы рассказать о современном состоянии этих областей науки?

— Рассказать коротко и в доступной школьникам форме — довольно сложно. Но я попытаюсь сделать это так, чтобы

читатель мог составить хотя бы общее представление.

Наше время можно, пожалуй, сравнить с эпохой создания квантовой теории, с двадцатыми — тридцатыми годами нашего столетия, когда создавалась та наука, которая составляет основу современного научно-технического прогресса. Мы являемся свидетелями кардинального продвижения физической науки.

Так же как атом, который с древности считался неделимым, оказался сложным образованием, элементарные частицы оказались не элементарными. Мы еще полностью не знаем, из чего они состоят, но уже само по себе открытие их сложного строения позволило объяснить многие явления микромира.

Элементарные частицы, как известно, являются носителями взаимодействий. Поэтому, вскрывая роль и свойства элементарных частиц, мы глубже изучаем фундаментальные взаимодействия в природе. А изучение свойств элементарных частиц неразрывно связано с созданием мощных ускорителей.

Около 50 лет назад были открыты так называемые слабые взаимодействия, и лишь совсем недавно было показано, что слабые взаимодействия — это не что иное, как электромагнитные взаимодействия. Выяснилось, что распад нейтрона обязан электромагнитным взаимодействиям. Виртуальными продуктами этого распада являются бозоны, масса которых в 100 раз больше массы нейтрона. Ранее их не могли наблюдать, так как не хватало энергий для их рождения. После того как бозоны были обнаружены экспериментально, удалось объединить в единую схему слабые и электромагнитные взаимодействия.

Теперь намечается более широкое объединение, включающее сильные взаимодействия. Но для решения этой проблемы очень важны эксперименты при сверхвысоких энергиях. Именно они должны помочь теоретикам в построении теории, чтобы светом сознания осветить глубины микромира.

Далее встанет вопрос с гравитационным взаимодействием. Но это, безусловно, следующий шаг.

Сейчас, как известно, происходит сближение физики элементарных частиц и космологии. Оказывается, что

(Окончание см. на с. 27)



Модель Пуанкаре

Кандидат физико-математических наук
К. Л. САМАРОВ,
Кандидат физико-математических наук
В. М. УРОЕВ

*Ни одна геометрия не может быть
более истинна, чем другая.*
Анри Пуанкаре

Ко второму веку до нашей эры завершилось аксиоматическое построение геометрии, изложенное Евклидом в тринадцатитомном труде «Начала». Накопленный поколениями практический опыт измерения углов, длин и площадей превратился в стройную математическую теорию с аксиомами и постулатами, теоремами, определениями, доказательствами. Выявились основные действующие лица геометрии: точка, плоскость, прямая.

Но нечто таинственное ощущалось в этих абстрактных понятиях. Практическая деятельность людей, особенно в то время, не могла подсказать, что же происходит с прямыми линиями очень далеко, «на бесконечности». Воз-

можно, по этой причине знаменитую аксиому о параллельных (V постулат) Евклид сформулировал осторожно: *если прямая пересекает две прямые и образует внутренние односторонние углы в сумме меньше двух прямых, то при неограниченном продолжении этих двух прямых они пересекутся с той стороны, где углы меньше двух прямых.*

По-видимому, древние опасались оперировать с бесконечностью, считая плоскость как бы склеенной из привычных сознанию одинаковых конечных кусков. Это не случайно. Согласно господствовавшим тогда представлениям, Земля считалась большим плоским диском. настолько большим, что измерить его было невозможно. Да и не нужно, не было в этом необходимости — слишком уж узкими были пространственные границы познанного мира.

В эпоху дальних странствий и географических открытий эти границы значительно раздвинулись; но потребовались еще столетия, прежде чем изменение представлений об окружающем мире сказалось на развитии геометрии. Так или иначе, в XVIII веке, в книге английского педагога Плейффера, посту-

лат о параллельных появился в своей современной, более смелой и лаконичной, формулировке: *через точку вне прямой можно провести только одну прямую, не пересекающую данную и лежащую с ней в одной плоскости.*

В двадцатых годах XIX века рождается геометрия Лобачевского*). В ней сохраняются все аксиомы и постулаты геометрии Евклида, кроме одного — пятый постулат замещается на следующее утверждение: *через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие данную и лежащие с ней в одной плоскости.*

Почти все современники Лобачевского были уверены, что его геометрия — ошибочна. Они не только отрицали ее применимость к внешнему миру, но считали ее порочной пиззутри — *внутренне противоречивой*, то есть считали, что при дальнейшем развитии теории из постулата о параллельных, принятого Лобачевским, неизбежно будут получены противоречащие друг другу утверждения.

Мы не будем касаться здесь сложного вопроса о связи геометрии Лобачевского с внешним миром — он раскрывается во всей глубине лишь в теории относительности, созданной в начале нашего века**). Наша цель иная — рассказать о том, как математикам удалось снять с геометрии Лобачевского обвинение в противоречивости. Именно для этой цели в конце прошлого века французский математик А. Пуанкаре построил модель геометрии Лобачевского (1882 г.). Но чтобы рассказать, что представляет собой модель Пуанкаре и почему она устанавливает непротиворечивость геометрии Лобачевского, нам придется сначала заняться свойствами... обыкновенной окружности.

Построение ортогональных окружностей и прямых

Назовем две линии — окружности или прямые — *ортогональными*, если они пересекаются под прямым углом. Напомним, что под углом между двумя окружностями понимается угол между

касательными, проведенными к ним в точке пересечения, под углом между прямой и окружностью — угол между прямой и касательной, проведенной к окружности в точке пересечения.

Заметим, что прямая, ортогональная окружности, обязательно проходит через ее центр, а касательная к одной из двух ортогональных окружностей в точке их пересечения проходит через центр другой (рис. 1). Это наблюдение позволяет легко решить следующие две задачи на построение, которые нам пригодятся в дальнейшем.

1. *Через данные точки A и B окружности γ провести ортогональную ей окружность.*

Решение. Центр искомой окружности находится на пересечении перпендикуляра, опущенного из центра O окружности γ на прямую AB и перпендикуляра к прямой OA , восстающего из точки A (см. рис. 1). Решение единственно, если перпендикуляры пересекаются. Если перпендикуляры не пересекаются, то точки A и B диаметрально противоположны (подумайте, почему) и задача решения не имеет; однако в этом случае сама прямая AB ортогональна окружности γ .

2. *Дана окружность γ и точка O_1 вне ее. Провести окружность с центром O_1 , ортогональную окружности γ .*

Решение. Если A — одна из точек пересечения окружности, построенной на отрезке OO_1 как на диаметре, с окружностью γ , то $(O_1, |O_1A|)$ — искомая окружность.

Следующая задача на построение, пущая нам (через произвольные две точки плоскости провести окружность, ортогональную данной окружности), уже не решается так просто. Для ее решения — и для других целей — нам потребуется важное понятие инверсии.

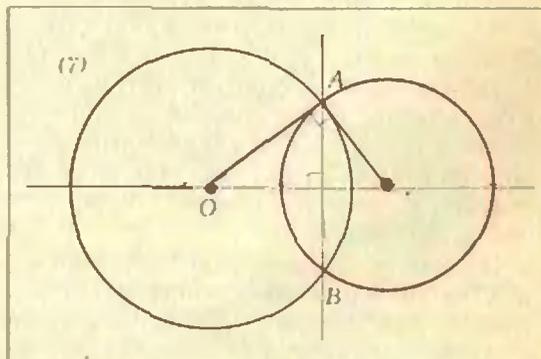


Рис. 1.

*1 Об истории ее становления см. Квант. 1982, № 11, с. 12 и № 12, с. 7.

**2 Об этом написано, например, в книге «Релятивистский мир» В. П. Дубровского, Я. А. Сморodinского, Е. Л. Сукова (М., Наука, 1984).

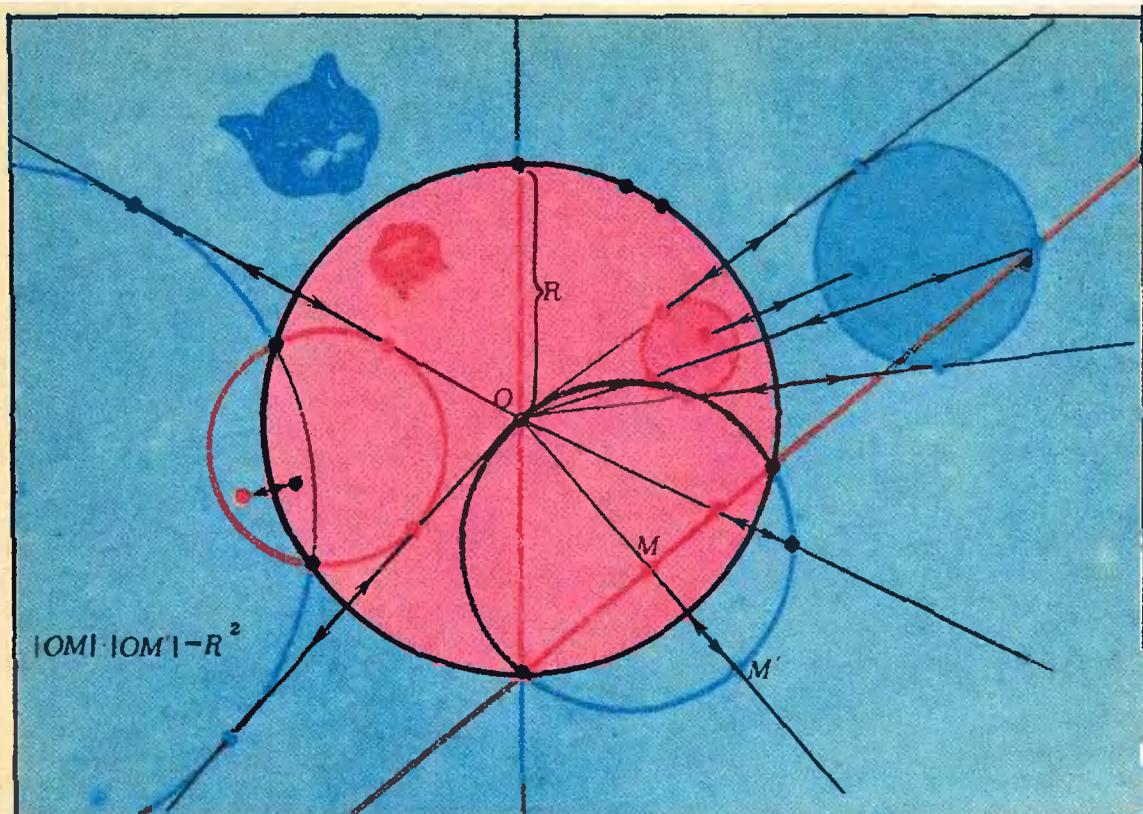


Рис. 2.

Инверсия и ее свойства

Инверсией (O, r) (или симметрией относительно окружности с центром O и радиусом r) называется преобразование плоскости, при котором каждой точке M ставится в соответствие такая точка M' на луче OM , что

$$|OM| \cdot |OM'| = r^2.$$

Точку O называют центром инверсии (это единственная точка, где преобразование не определено), число r — радиусом инверсии, а окружность (O, r) — окружностью инверсии.

Инверсия — действие своего рода симметрия относительно окружности; она «выворачивает» внутренность окружности в ее внешность (и наоборот), своеобразно искажает форму и размеры фигур (см. иллюстрации к статье «Инверсия» в «Кванте» № 5, с. 26). Основные свойства инверсии (O, R) показаны на рисунке 2, где можно проследить, что

1) точки, лежащие внутри окружности инверсии, переходят в точки, лежащие вне нее, и наоборот;

2) точки окружности инверсии, и только они, остаются на месте;

3) прямые, проходящие через центр инверсии, переходят в себя;

3') прямые, не проходящие через центр инверсии, переходят в окружности;

4) окружности, проходящие через центр инверсии, переходят в прямые;

4') окружности, не проходящие через центр инверсии, переходят в окружности;

5) величина углов между линиями сохраняется;

6) инверсия, как и другие виды симметрий, обратна самой себе; другими словами, двукратное применение инверсии возвращает все точки (кроме O) на место.

Эти свойства несложно доказываются; читатель может найти их доказательства в статье «Инверсия» в предыдущем номере «Кванта», однако для понимания дальнейшего их разбор не обязателен. Приведем (уже с доказательствами) еще одно важное свойство инверсии.

7) Любая окружность, ортогональная окружности инверсии, переходит в себя при этой инверсии.

Доказательство. По свойству 4'), данная окружность γ переходит в окружность γ' . По свойству 2), точки пересечения A и B окружности γ с окружностью инверсии остаются на месте, значит, γ' проходит через A и B . По

свойству 5), окружность γ' ортогональна окружности инверсии. Но через A, B проходит единственная окружность, ортогональная окружности инверсии (см. задачу на построение 1), значит, γ' и γ совпадают.

Обратите внимание, что окружность γ переходит в себя, но только две ее точки (A и B) остаются на месте; точки окружности γ , лежащие внутри окружности инверсии, пересекаются (в точки окружности γ) вне нее и наоборот. Оказывается, что этим свойством обладают только окружности, ортогональные окружности инверсии:

8) Если окружность, отличная от самой окружности инверсии, переходит в себя, то она ортогональна окружности инверсии.

Доказательство. В силу свойства 1), данная окружность γ пересекает окружность инверсии в некоторых точках A и B , которые остаются на месте (свойство 2)). Проведем через центр инверсии O и точку A прямую OA . Если A — не единственная общая точка (OA) и γ , а они пересекаются еще в некоторой точке D , то они пересекутся еще в образе D' точки D , так как (OA) переходит в себя (свойство 3)). Трех точек пересечения γ прямой и окружности быть не может, значит, A — единственная общая точка γ и (OA), то есть (OA) — касательная к γ . Это значит, что окружность γ ортогональна окружности инверсии.

Можно дать и другое доказательство. Пусть φ_1 и φ_2 — дуги, на которые точки A и B разбивают окружность γ . При нашей инверсии дуги φ_1 и φ_2 переходят друг в друга. В силу сохранения углов при инверсии, углы, образованные окружностью инверсии с дугами, равны, а в сумме они составляют $180^\circ = 2 \cdot 90^\circ$.

Построение инверсий

Забегая вперед, можно сказать, что инверсии в модели Пуанкаре будут играть роль перемещений. Поэтому нам предстоит научиться находить инверсии, обладающие теми или иными наперед заданными свойствами. Мы их сформулируем в виде очередных задач на построение.

3. Для данной точки X внутри окружности γ с центром Q построить окружность, ортогональную γ , относительно которой точки X и Q симметричны.

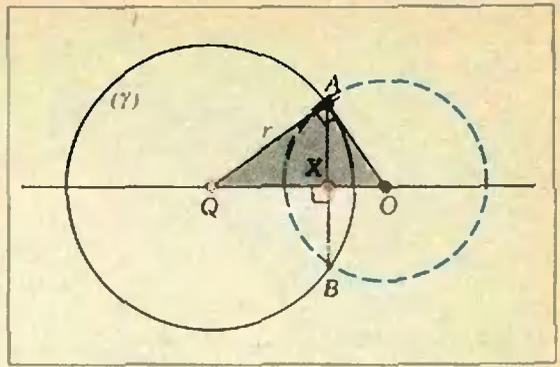


Рис. 3.

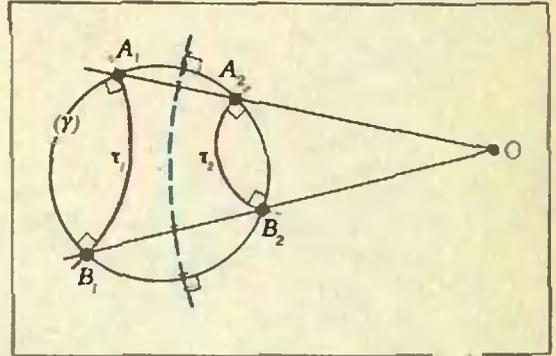


Рис. 4.

Указание. Восставим перпендикуляр из точки A к прямой QA до пересечения с (QX) в точке O (рис. 3). Искомая окружность — ($O, |OA|$). Для доказательства воспользуйтесь подобием прямоугольных треугольников.

4. Для двух данных окружностей τ_1 и τ_2 , ортогональных окружности γ , построить окружность или прямую, ортогональную γ , относительно которой окружности τ_1 и τ_2 симметричны.

Решение. Пусть A_1, B_1 и A_2, B_2 — точки пересечения окружностей γ и τ_1 , γ и τ_2 соответственно. Если прямые A_1A_2 и B_1B_2 параллельны, то τ_1 и τ_2 симметричны относительно диаметра окружности γ , перпендикулярного этим прямым. Если же прямые A_1A_2 и B_1B_2 пересекаются в точке O , то согласно задаче 2 можно провести окружность с центром O , ортогональную окружности γ (рис. 4). Эта окружность — искомая. Действительно, симметрия относительно нее переводит окружность γ и прямые A_1A_2 и B_1B_2 в себя, то есть меняет местами точки A_1 и A_2 , B_1 и B_2 . Углы при инверсии сохраняются (свойство 5)), а через данные две точки проходит ровно одна окружность, ортогональная данной (задача 1), поэтому τ_1 переходит в τ_2 .

Замечание. Утверждение задачи остается в силе, если вместо обеих окружностей τ_1, τ_2 или вместо одной из них рассматривать прямые, ортогональные окружности γ , то есть ее диаметры.

5. Построить инверсию, переводящую данную окружность γ в себя и оставляющую на месте две ее внутренние точки A, B .

Решение. Если точки A и B лежат на одном диаметре, задача не имеет решения (однако симметрия относительно этого диаметра оставляет на месте A и B и переводит γ в себя!). Если A и B не лежат на одном диаметре, мы рассмотрим инверсию относительно окружности τ , переводящую A в центр O окружности γ (такая инверсия есть — см. задачу 3). При этом точка B перейдет в некоторую точку B' . Через точки O и B' проведем диаметр δ окружности γ . Повторно делая инверсию относительно τ , вернем все точки на свои места (свойство б)). Диаметр δ перейдет в дугу окружности δ' , ортогональную γ . Симметрия относительно окружности δ' — искомая.

Попутно мы решили упомянутую выше задачу о проведении окружности или прямой, ортогональной данной, через две точки. Сформулируем ее следующим образом.

Следствие. *Через две точки A и B , лежащие в круге λ или на его границе, можно провести ровно одну окружность или прямую, ортогональную граничной окружности γ круга λ .*

Это утверждение действительно следует из решений задач 5 и 1.

Модель Пуанкаре

Модель Пуанкаре — это одна из возможных евклидовых моделей геометрии Лобачевского.*) Что представляет собой такая модель? Это конкретная небольшая часть геометрии Евклида, в которой выделены специальные понятия, играющие роль основных понятий геометрии Лобачевского — таких, как точка, прямая, перемещение и т. п. Выделенные понятия выбираются с таким расчетом, чтобы для них выполнялись все основные положения (аксиомы) геометрии Лобачевского.

— Как такое может быть? — спросит читатель. — Разве могут аксиомы

Лобачевского выполняться в геометрии Евклида?

Оказывается, могут. Дело в том, что в роли основных понятий геометрии Лобачевского выступают не обычные точки, прямые, перемещения евклидовой геометрии, а более специальные понятия. Для задания модели, таким образом, используется своего рода «словарь» — перечень основных понятий геометрии Лобачевского и их «перевод»: соответствующие специальные понятия из выбранной части евклидовой геометрии.

Вот как выглядит этот словарь для модели Пуанкаре.

Плоскостью Лобачевского называется внутренность круга λ обычной (евклидовой!) плоскости, ограниченного окружностью γ с центром Q . *Точка* плоскости Лобачевского — это любая внутренняя точка круга λ . *Прямая линия* — любой диаметр (без концов) круга λ или лежащая внутри λ дуга окружности, ортогональной окружности λ . (Таким образом, хорды окружности γ , не совпадающие с диаметром, «прямыми» не являются.)

Далее, *перемещением* плоскости Лобачевского называется любое из следующих основных преобразований круга λ :

1) поворот круга λ относительно его центра Q на любой угол;

2) симметрия круга λ относительно диаметра или любой окружности, ортогональной его граничной окружности γ ; а также любая композиция этих преобразований.

Оказывается (мы это подробнее проверим ниже), что при таком толковании слов «точка», «прямая», «плоскости», «перемещение плоскости» выполняются все аксиомы геометрии Лобачевского. А это как раз и значит, что геометрия Лобачевского — непротиворечива. Почему? Вот как это объясняет сам автор модели, Анри Пуанкаре:

«Возьмем теоремы Лобачевского и переведем их с помощью нашего словаря, как мы переводим немецкий текст на французский язык с помощью немецко-французского словаря. Мы получим, таким образом, теоремы обыкновенной геометрии. (...) Стало быть, как бы далеко мы ни развивали следствия из допущений Лобачевского, мы никогда не натолкнемся на противоречие. В самом деле, если бы две теоремы Лобачевского находились в

*) Первую такую модель построил в 1868 г. Э. Бельтрами (1835—1900). Хорошо известна также модель Ф. Клейна (1849—1925).

противоречии, то то же самое имело бы место и для переводов этих двух теорем, сделанных при помощи нашего словаря; но эти переводы суть теоремы обыкновенной геометрии (...), которая свободна от противоречий».

Это рассуждение показывает, что из непротиворечивости евклидовой геометрии следует непротиворечивость геометрии Лобачевского. Именно в этом смысле Пуанкаре говорил, что ни одна геометрия не может быть более истинна, чем другая.

Таким образом, чтобы установить непротиворечивость геометрии Лобачевского, осталось прозреть, что все ее аксиомы выполнены для построенной выше модели.

Проверка аксиом

Мы не будем проверять все аксиомы геометрии Лобачевского для модели Пуанкаре — это скучное и утомительное дело, а ограничимся доказательством лишь нескольких характерных основных положений геометрии Лобачевского. Именно следующих.

I. Любое перемещение переводит «плоскость» λ в себя, причем «прямые» переходят в «прямые».

II. Через любые две «точки» плоскости λ проходит одна и только одна «прямая».

III. «Перемещения плоскости» λ сохраняют углы между «прямыми».

IV. Любые две «прямые» конгруэнтны, то есть существует «перемещение плоскости», переводящее одну в другую.

V. Через каждую точку, не принадлежащую данной «прямой», проходят по крайней мере две «прямые», не имеющие с ней общих точек. (Это «аксиома параллельных» Лобачевского; рис. 5).

Докажем утверждения I—V.

I. Поворот круга λ вокруг его центра и симметрия относительно его диаметров, очевидно, переводят λ в себя. Что же касается инверсии относительно любой окружности γ , ортогональной γ , то она переводит γ в себя (свойство 7)), притом две области, на которые γ разбивает λ , меняются местами, то есть λ переходит в себя.

II. Это вытекает из следствия задачи 5.

III. Это верно для всех основных перемещений (см., в частности, свойство 5)), а значит, и для их композиций.

IV. Это следует из задачи 4.

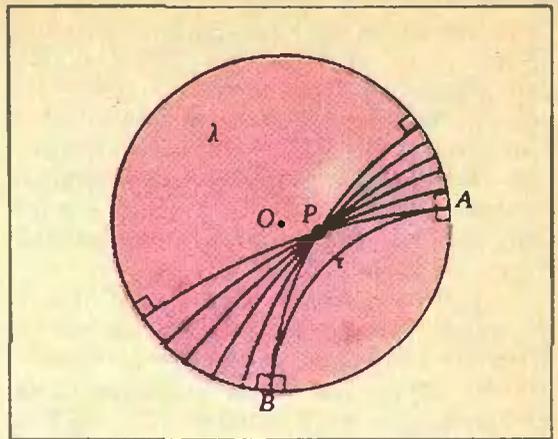


Рис. 5.

V. Пусть данная прямая t пересекает γ в точках A и B . Рассмотрим сперва частный случай, когда данная точка не что иное, как центр O круга λ . Тогда диаметры (OA) и (OB) — прямые, не пересекающие t . Напомним, что точки окружности γ , в частности точки A и B , «точками» «плоскости Лобачевского» не являются. Общий же случай сводится к рассмотренному частному случаю с помощью задачи 3.

Итак, основные положения (I—V) геометрии Лобачевского доказаны в модели Пуанкаре. Тем, кто хотел бы дальше изучать геометрию Лобачевского на этой модели, в конце статьи мы предлагаем несколько задач. А пока ответим на один из вопросов, возникший еще в начале статьи.

А что же все-таки происходит «на бесконечности»?

Одно из преимуществ модели Пуанкаре состоит в том, что на ней — с нашей евклидовой точки зрения — можно увидеть таинственное множество «бесконечно удаленных» точек геометрии Лобачевского.

Покажем, что граничную окружность γ естественно рассматривать как «бесконечно удаленную окружность» плоскости Лобачевского λ . Для этого возвратимся ненадолго в обычную евклидову плоскость и посмотрим, как с помощью перемещений евклидовой плоскости сдвинуть заданную фигуру сколь угодно далеко от ее первоначального положения. Например, это можно сделать так. Выберем на евклидовой плоскости две параллельные несовпадающие прямые l_1, l_2 и отразим плоскость симметрично относительно пря-



Зачем может понадобиться нейтрино?

В нарушение традиций здесь речь пойдет не об открытии, а о... фантазии. Фантазии, которая, если окажется реальностью, будет великолепной иллюстрацией того, как очень далекие сейчас от практики эксперименты могут привести к промышленным установкам.

Конечно, и раньше было множество примеров такого рода — когда-то атомный ледокол тоже казался фантазией. Но все-таки придумать, как можно заставить «работать» нейтрино, не так-то просто.

К сожалению, фантазия часто уводит в ложную сторону. Несколько лет назад, например, появились слухи о том, что пучки нейтрино использовались для связи с подводными лодками. Другая версия связывала нейтрино с телепатией. Да мало ли что могут придумать те, кто не обременяет себя ни доказательствами, ни сколько-нибудь правдоподобной аргументацией!

Почему же трудно найти практическое применение для нейтрино? Прежде всего потому, что они чрезвычайно слабо взаимодействуют с веществом. Так, нейтрино, летящие от Солнца, сквозь пронизывают Землю шар, не отклоняясь от своего пути. С большим трудом на установке, которая состоит из огромного числа счетчиков, удается зарегистрировать нейтрино, пришедшие «с другой стороны» Земли.

Однако оказывается, что с увеличением энергии нейтрино вероятность взаимодействия растет. При энергии в несколько тераэлектронвольт ($1 \text{ ТэВ} = 10^{12} \text{ эВ}$) нейтрино, пролетая сквозь Землю, сталкивается хотя бы с одним атомным ядром. Вот это свойство нейтрино и предполагается использовать в пока еще фантастическом, но, возможно, в будущем реальном проекте.

Идея проекта, высказанная испанским физиком де Рухаао, состоит в том, чтобы энергичным пучком нейтрино «просвечивать» Землю и таким способом искать в ее глубинах, скажем, нефть или воду. Другими словами, предлагается использовать нейтрино подобно рентгеновским лучам!

Но где взять такие энергичные нейтрино? Оказывается, они возникают при распаде быстрых пи-мезонов, который происходит по схеме $\pi \rightarrow \mu + \nu$ (π — пи-мезон, μ — мю-мезон, ν — нейтрино). А откуда взять пи-мезоны? Тоже ясно — они возникают при взаимодействии протонов с ядрами мишени в ускорителе. Но, наконец, где найти такой ускоритель? В этом-то и суть проблемы.

В различных странах мира сейчас обсуждаются планы строительства ускорителей с энергией протонов порядка нескольких десятков тераэлектронвольт. Такие ускорители, вероятно, появятся уже в этом десятилетии. Сейчас к идее нейтринного просвечивания относятся пока весьма скептическое. Возможно, в будущем скептики изменят свою точку зрения.

Я. С.

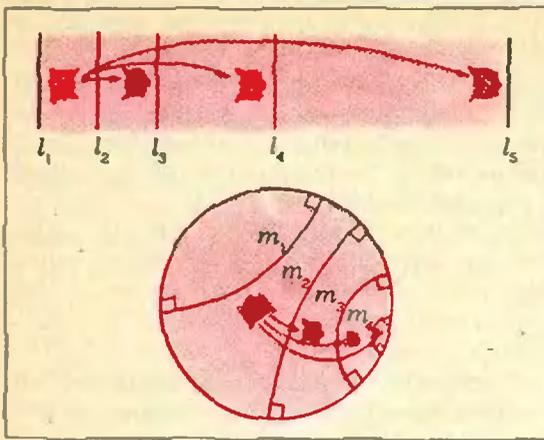


Рис. 6.

мой l_2 . Тогда прямая l_1 перейдет в прямую l_3 . Отразим плоскость симметрично относительно l_3 , обозначим l_4 образ прямой l_1 при этом отображении. Продолжая дальше этот процесс, получим семейство параллельных прямых. При отражении заданной фигуры относительно этих прямых последовательность ее образов уходит в бесконечность (рис. 6).

Аналогичное построение можно выполнить на плоскости Лобачевского λ . Выберем две произвольные параллельные «прямые» m_1, m_2 и на каждом шаге вместо осевой симметрии будем производить симметрию относительно окружности. В результате возникает семейство ортогональных γ окружностей. При последовательном отражении в них произвольная фигура будет передвигаться все ближе и ближе к окружности γ (рис. 6). Точки окружности γ , таким образом, играют роль бесконечно удаленных точек.

Задачи

1. Докажите, что сумма углов «треугольника» в модели Пуанкаре геометрии Лобачевского меньше 180° , а сумма углов «четырёхугольника» — меньше 360° .

2. Докажите, что через данную точку A плоскости λ , не принадлежащую «прямой» φ , можно провести одну «прямую» ψ , ортогональную φ . (Точка пересечения «прямых» φ и ψ называется ортогональной проекцией точки A на «прямую» φ .)

3. Пусть «прямые» φ_1 и φ_2 пересекаются. Докажите, что ортогональной проекцией всех точек «прямой» φ_1 на (φ_2) (см. задачу 2) является «отрезок прямой» φ_2 , а не вся (φ_2), как в евклидовой плоскости.

4. Докажите, что если «прямые» φ_1 и φ_2 плоскости λ параллельны, то есть не пересекаются, то может существовать лишь одна «прямая», ортогональная одновременно φ_1 и φ_2 .

5. Докажите, что если три угла одного «треугольника» в плоскости λ соответственно равны трем углам другого «треугольника», то треугольники конгруэнтны в λ .

От Солнца до Земли

Кандидат физико-математических наук
П. Б. БЕРШТЕЙН

Вылетали частицы гелия,
ядра стронция...
И чего оно не наделало,
это Солнце!
Прерывалось и глохло радио,
и бессовестно
врали компасы,
лихорадила
нас бессонница.
Гибли яблони, падал скот
от бескормицы.
Беспокойное
в этот год
было Солнце.

Эти строчки взяты из стихотворения замечательного поэта Семена Кирсанова «Солнце перед спокойствием». И в этом отрывке упомянуто большинство эффектов, изучением которых занимается солнечно-земная физика.

Давайте же последуем за поэтом и выясним, что же «наделало это Солнце». Но сначала поговорим о самом Солнце.

1

Солнце — звезда, находящаяся на расстоянии около 33 000 световых лет от центра Галактики, в одном из ее спиральных рукавов — в рукаве Орiona. Масса Солнца $M_{\odot} = 1,99 \cdot 10^{30}$ кг; радиус $R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^5$ км, и средняя плотность вещества Солнца $\rho_{\odot} = 1,41 \cdot 10^3$ кг/м³, то есть в 4 раза меньше средней плотности вещества Земли. А сила тяготения на Солнце в 28 раз больше, чем на Земле.

Эти свойства — низкая средняя плотность и громадная сила тяготения — наиболее важны для понимания того, что происходит внутри Солнца. Изучение спектра излучения Солнца показало, что вещество Солнца состоит из тех же химических элементов, которые найдены на Земле.*) Температура внутри Солнца настолько высока, что в твердом и жидком состоянии вещества не могут там существовать, то есть Солнце представляет собой раскаленный газовый шар. Температура в недрах Солнца, по оценкам, должна быть выше 10^7 К. При таких температурах газ полностью ионизируется, превращаясь в плазму — вещество, состоящее из ионов и электронов. Так что Солнце — раскаленный плазменный шар. Столь высокая температура поддерживается за счет происходящих в недрах Солнца термоядерных реакций.

Выделяющаяся в реакциях тепловая энергия излучается во все стороны, и часть ее попадает на Землю.

Внешнюю часть Солнца называют солнечной атмосферой. По физическим особенностям — главным образом, по различным значениям плотности и температуры — в солнечной атмосфере выделяют три слоя: фотосферу, хромосферу и корону.

*) Напомним, что элемент гелий впервые был обнаружен при изучении спектра солнечного света, откуда и его название.

Фотосфера (по-русски — сфера света) — наиболее глубокий слой солнечной атмосферы, доступный нашим наблюдениям. Название — «сфера света» — очень хорошо иллюстрирует то значение, которое она имеет для нас, ибо от нее мы получаем большую часть света и тепла. Толщина фотосферы очень невелика — около 100 км, и этим обусловлены совершенно резкие очертания Солнца, похожие на очертания твердой поверхности. Уровень фотосферы интересен еще и тем, что именно здесь наблюдаются солнечные пятна, число и размеры которых служат наиболее яркими характеристиками солнечной активности.

Область над фотосферой характеризуется резко уменьшающейся плотностью. Называется эта область хромосферой (по-русски — «окрашенной сферой»). Во время полного солнечного затмения, когда интенсивный свет фотосферы экранируется проходящей между Солнцем и Землей Луной, хромосфера видна как кольцо красноватого цвета, окружающее диск Солнца. Такой цвет обусловлен тем, что хромосфера в значительной степени состоит из водорода, а у этого газа наиболее яркая видимая спектральная линия находится в красной области спектра.

Следующая область солнечной атмосферы — корона — видна во время полного солнечного затмения как величественный венец белого цвета, контрастирующий с красноватым светом хромосферы. Солнечная корона состоит из разреженной плазмы с температурой порядка 10^6 К. Исследования показали, что постоянно истекающий от Солнца горячий корональный газ (плазма) доходит вплоть до Земли. Но плотность его у Земли столь мала, что он не может иметь сколь-нибудь существенного значения.

Непрерывное истечение коронального газа называют солнечным ветром. Солнечный ветер состоит в основном из ионов H^+ и ${}^4He^{++}$, но были обнаружены и другие составляющие, в том числе ${}^3He^{++}$, ${}^4He^+$, O^{+5} , O^{+6} , O^{+7} . Общепринятой теории, объясняющей физические процессы, происходящие в солнечном ветре, до сих пор не создано, хотя существует несколько гипотез, дающих различные значения для плотности — от 6,75 до 13 частиц/см³ (при 0 °С и атмосферном давлении газа плотность $\approx 3 \cdot 10^{19}$ частиц/см³), тем-

пературы — от $9 \cdot 10^4$ до $2,8 \cdot 10^5$ К и скорости солнечного ветра — от 165 до 350 км/с.

Солнце вращается около своей оси в том же направлении, что и Земля, но в отличие от Земли оно вращается не как твердое тело. Полярные области Солнца вращаются медленнее, чем экваториальные, — такое свойство называют дифференциальным вращением. Частота вращения на различных широтах Солнца приблизительно определяется эмпирической формулой

$$\omega = \frac{1}{T_0} \left(1 - \frac{1}{8} \sin^2 \varphi - \frac{1}{6} \sin^4 \varphi \right)$$

оборота за земные сутки, где φ — гелиографическая широта, T_0 — продолжительность солнечных суток на экваторе; $T_0 = 26$ земных суток. Период вращения изменяется от 26 суток на экваторе до 37 суток на полюсах, где $\varphi = 90^\circ = \pi/2$.

Из спектральных наблюдений известно, что вокруг Солнца существует магнитное поле. В полярных областях Солнца напряженность поля около 10^{-4} Тл, и векторы напряженности направлены в противоположные стороны. Однако, в отличие от земного магнитного поля, поле Солнца не симметрично. Источник его — сложные движения плазмы, которая представляет собой вещество с большой электропроводностью.

Наибольший интерес представляют участки солнечной поверхности, в которых напряженность магнитного поля достигает больших значений — 0,2—0,4 Тл. Такое сильное магнитное поле действует на движущиеся заряды плазмы, то есть на ионы и электроны, со значительной силой и тем самым препятствует их перемешиванию. Ведь движущиеся заряды это электрический ток, на который магнитное поле действует с силой, пропорциональной току и напряженности поля. В силу этого участки с сильным магнитным полем оказываются более холодными и при наблюдениях видны более темными. Называют эти темные «острова» пятнами. Площадь пятен обычно измеряют в миллионных долях площади полусферы Солнца (мдп). Солнечные пятна иногда достигают размеров до нескольких тысяч мдп, а самое большое из зарегистрированных пятен (наблюдалось 7 апреля 1947 года) имело площадь более 6000 мдп, то есть более 15 миллиардов квадратных километров! На такой площади могли бы поместить-

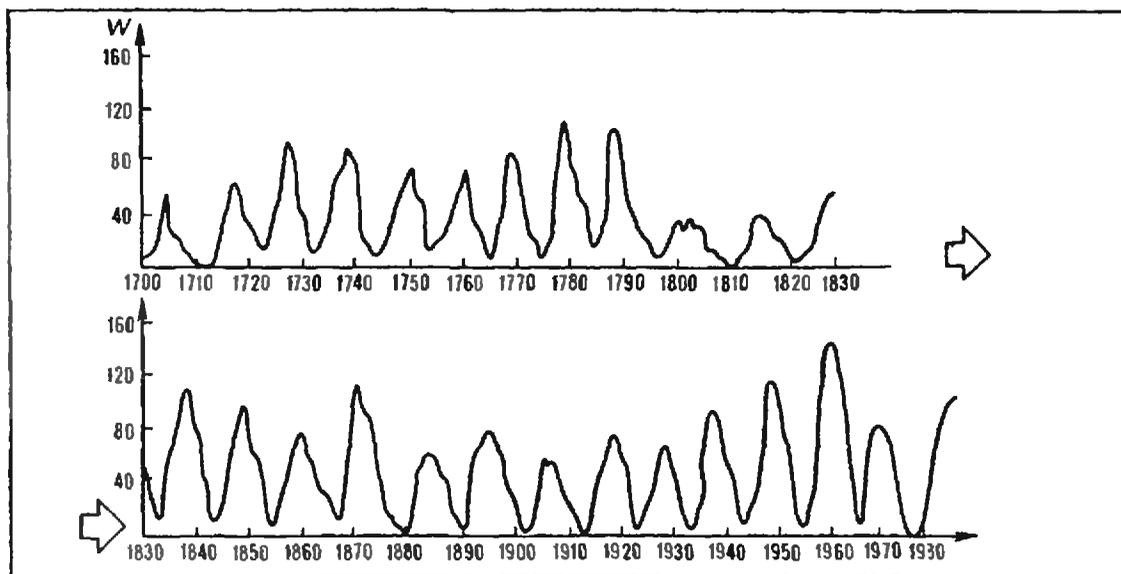


Рис 1

ся почти все планеты солнечной системы.

Большие пятна можно наблюдать даже с помощью небольшого бинокля. (Только не смотрите на Солнце, не защитив предварительно глаза!) Лучше всего сфокусировать изображение на белый экран, помещенный за окуляром. Если вам повезет, и вы направите прибор на Солнце во время нахождения на его наблюдаемой поверхности большой группы пятен, то вы сможете увидеть также вокруг пятен более яркие площадки — флоккулы. Если же очень повезет, то вы сможете увидеть, как вдруг около группы пятен возникает яркое свечение, захватывающее значительную площадь. Знайте, что вы увидели очень большую солнечную вспышку.

Солнечные вспышки зарождаются в нижних слоях солнечной короны, когда в сравнительно небольшой области за короткое время выделяется огромная энергия — до 10^{26} Дж (примерно столько же, сколько при взрыве $2 \cdot 10^{15}$ тонн стандартного взрывчатого вещества). Температура вещества в области вспышки может достигать 10^8 К. Вспышка сопровождается мощным излучением. Наибольшая интенсивность этого излучения приходится на рентгеновскую и ультрафиолетовую области его спектра, а также на видимую красную область спектра. И только самые мощные вспышки бывают видны в белом свете. Это очень редкое событие.

До настоящего времени еще нет удовлетворительной теории, объясняю-

щей происхождение солнечных вспышек. Но многие ученые считают наиболее вероятной причиной вспышки так называемую аннигиляцию сильного магнитного поля в солнечной короне, при которой энергия магнитного поля переходит в кинетическую энергию заряженных частиц, составляющих корональный газ.

Многолетние наблюдения показали, что картина солнечных пятен меняется со временем. Бывают дни, когда пятен нет совсем, потом они появляются, растут, количество их увеличивается, достигает максимума, а затем уменьшается до минимума. Пятнообразовательная деятельность Солнца имеет периодический характер. В среднем этот период равен 11 годам, но вообще пятнообразование представляет собой очень сложное явление, и в действительности продолжительность цикла колеблется от 7 до 17 лет. Для характеристики активности Солнца используют так называемое число Вольфа W , которое определяется выражением

$$W = k(10f + g),$$

где g — число отдельных пятен на данный момент времени, f — число групп пятен, k — коэффициент пропорциональности, зависящий от конкретного прибора, использованного для наблюдения. На рисунке 1 представлен график изменения числа Вольфа со временем (с 1700 года наблюдения пятен ведутся регулярно).

II

Как известно, радиосвязь на Земле между пунктами, находящимися на большом расстоянии друг от друга, возможна только благодаря наличию в земной атмосфере хорошо электропроводящих слоев, называемых ионосферой. Слои эти расположены на высотах от ~ 70 до 400 км. Их электропроводность вызвана ионами и электронами, возникающими вследствие ионизации воздуха ультрафиолетовым излучением Солнца.

Возможность дальней радиосвязи обуславливается способностью ионосферы отражать радиоволны, которые могут, таким образом, уходить далеко за пределы видимого горизонта. Радиоволны отражаются от ионосферы потому, что она обладает электропроводностью. Точно так же, как металлы отражают видимый свет вследствие

их большой электропроводности. В металлах велика плотность электронов (около 10^{22} электронов/см³). Радиоволны разной частоты отражаются на различных высотах. Дело в том, что волна отражается от ионосферы, если частота ν волны меньше некоторой критической величины. Значение же этой критической частоты зависит от плотности электронов в ионосфере и определяется формулой

$$\nu = \frac{e^2}{m\epsilon_0} n,$$

где e , m — заряд и масса электрона, $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м — электрическая постоянная, а n — плотность электронов. Волны с большей частотой проходят сквозь слой ионосферы, не отражаясь от нее. Ясно, что чем больше длина волны (чем меньше частота), тем при меньшей плотности заряженных частиц произойдет отражение.

Плотность электронов в атмосфере различна на разных высотах (рисунок 2). Однако и значение электронной плотности на данной высоте постоянно меняется вследствие многих причин. Так как верхняя атмосфера ионизируется под действием солнечного излучения, то ясно, что наибольшая ионизация наступает в полдень, когда Солнце выше всего на небе. Наименьшая ионизация наблюдается ночью, незадолго до рассвета. Наверное, любители крутить ручки радиоприемника давно заметили, что радиостанция, которую днем можно услышать только на коротких волнах, ночью хорошо слышна и в средневолновом диапазоне. Если вы отметили этот эффект — знайте, что вы столкнулись с одним из эффектов солнечно-земной физики!

Разумеется, кроме суточных вариаций электронной плотности существуют еще и другие причины изменения плотности электронов. Попробуйте объяснить, как должна радиостанция изменять частоту радиовещания в зависимости от времени года и фазы цикла солнечной активности. Ответить на этот вопрос вам поможет рисунок 3, на котором представлено типичное распределение электронной плотности в атмосфере в моменты максимумов (правые кривые на рисунках) или минимумов (левые кривые) солнечного цикла.

Происходящие на Солнце вспышки также оказывают сильное влияние на ионосферу. Значительное увеличение

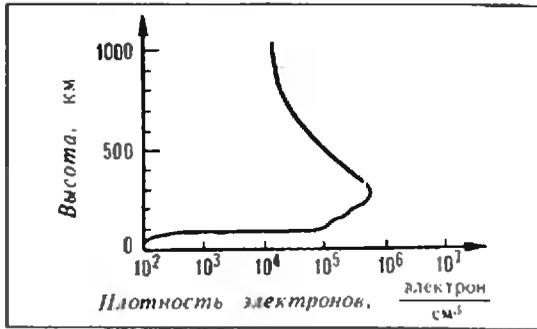


Рис. 2.

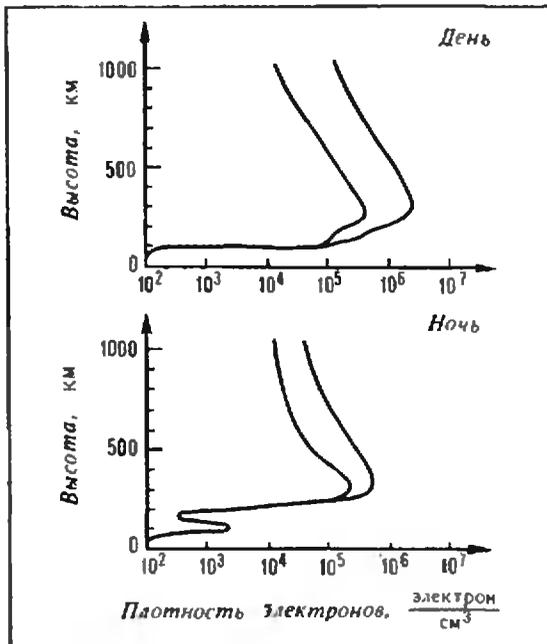


Рис. 3.

интенсивности ультрафиолетового излучения во время вспышки приводит к повышению ионизации и, следовательно, плотности электронов в ионосфере. Радиоволны, которые до этого отражались от данного слоя, теперь могут проходить сквозь него без отражения (критическая частота возросла и превысила значение частоты радиоволны). Это явление называют замиранием радиосвязи. Замирания могут продолжаться от минут до нескольких часов. Предсказания свойств ионосферы для всей Земли содержат основные данные для составления любых сводок о средних условиях слышимости радиостанций. Зная свойства ионосферы, радисты могут выбрать частоты, которые вероятнее всего позволят установить радиосвязь. Но здесь существует очень серьезная проблема — прогноз изменений, возникающих в результате возмущений на Солнце.

III

С деятельностью Солнца связано и такое явление на Земле, как магнитная буря. Но, прежде чем рассказать о магнитных бурях, поговорим немного о магнитном поле Земли.

Геомагнитное поле, как известно, симметрично: картина силовых линий этого поля такая же, как у постоянного магнита (напомним, что источником магнитного поля Земли считают движение электропроводящего жидкого вещества, из которого состоит ядро Земли. Магнитная ось проходит через центр Земли и отклонена от оси вращения Земли приблизительно на 12° в сторону Тихого океана).

Испускаемый Солнцем поток заряженных частиц (солнечный ветер) попадает в магнитное поле Земли, которое действует на эти частицы так называемой силой Лоренца. Эта сила направлена перпендикулярно линиям магнитной индукции поля и направлению потока частиц. Под действием этой силы заряженные частицы отклоняются от своего первоначального направления, могут не попасть на поверхность Земли. Поток солнечной плазмы обтекает Землю и продолжает свое течение далеко за ней — как говорят, «на ночной» стороне. Линии магнитной индукции как бы сжимаются на «дневной» стороне. На поверхности Земли это воспринимается как усиление магнитного поля. Чем выше активность Солнца, тем больше уси-

ливается геомагнитное поле — начинается магнитная буря. Теория утверждает, что магнитное поле Земли должно быть сосредоточено в определенной области, находящейся внутри потока солнечной плазмы. Эту область называют магнитосферой. Земля находится внутри магнитосферы (рисунок 4) на расстоянии 10—12 земных радиусов от дневной границы; за Землей (на «ночной» стороне) расположен так называемый «хвост» магнитосферы, причем, до сих пор не известно, замыкаются ли на «ночной» стороне линии индукции геомагнитного поля или происходит их «пересоединение» с линиями магнитной индукции межпланетного магнитного поля.

С «утренней» и «вечерней» стороны Земли располагаются так называемые нейтральные точки в магнитосфере. Это очень интересные точки. Здесь линии индукции геомагнитного поля как бы расходятся. В районе этих нейтральных точек находятся своеобразные «бреши» в магнитосфере. Магнитное поле в этих областях очень слабое, и некоторое количество заряженных частиц солнечного ветра проникает в магнитосферу. Здесь движением частиц управляет геомагнитное поле. Влияние поля приводит к тому, что частицы вовлекаются в постоянное смещение вокруг Земли вдоль магнитных параллелей. При этом положительно заряженные частицы смещаются с востока на запад, а отрицательно заряженные — с запада на восток. В результате этого процесса вокруг Земли создается кольцевой электрический ток, который создает собственное магнитное поле. Направлено это поле так, что, складываясь с собственным геомагнитным полем, оно приводит к его уменьшению. Ослабление поля — вторая фаза магнитной бури.

На поверхности Земли о магнитной буре можно судить по колебаниям стрелки компаса. Из-за изменения магнитного поля возникают дополнительные (паразитные) токи в линиях электропередачи; паразитные токи вмешиваются в сигналы телеуправления, работу телефонных и телеграфных аппаратов. Наибольшее впечатление производят происходящие во время магнитных бурь полярные сияния.

Полярные сияния возникают в результате столкновения быстрых заряженных частиц, проникших в магнито-

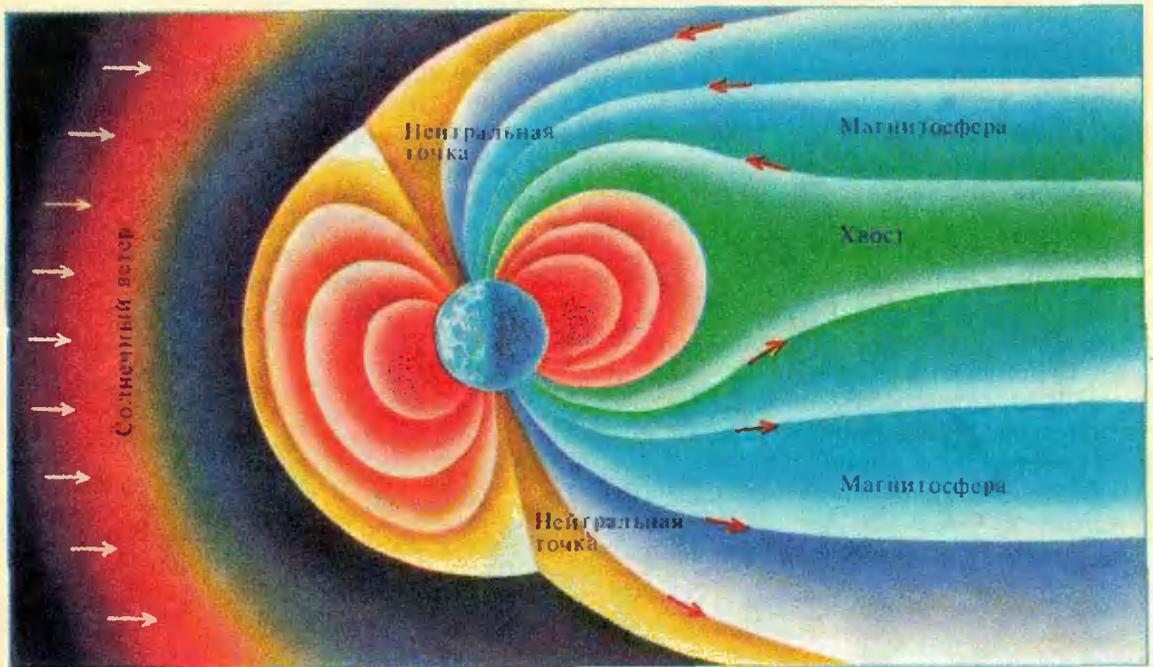


Рис. 4.

сферу, с различными нейтральными атомами или молекулами воздуха верхних слоев атмосферы. При этих столкновениях атомы ионизируются, то есть от них отрываюся электроны. При обратном процессе, когда электрон снова соединяется с ионом, образуя нейтральный атом, излучается свет. Длина волны этого света зависит от сорта атомов. Так, кислород окрашивает небо в зеленый цвет, а темно-красное свечение обязано азоту.

Довольно давно было замечено, что геомагнитные возмущения и яркие полярные сияния бывают чаще и сильнее во время максимума солнечного цикла. Большинство возмущений удается уверенно связать с проходящими по диску Солнца пятнами или с мощными вспышками. Но в то же время точно такие же пятна проходят по диску, не вызывая геомагнитных возмущений; бывают сильные вспышки, не имеющие последствий на Земле. Поэтому приходится сделать вывод, что сами по себе солнечные пятна и вспышки непосредственно не связаны с геомагнитными возмущениями. Но есть один постоянный эффект, который свидетельствует о наличии потоков заряженных частиц, движущихся от Солнца. Это — тенденция магнитных бурь повторяться с периодом около 27 дней. Число это близко к периоду вращения Солнца. Отсюда следует, что солнечный «агент», их вызывающий, распространяется в виде огра-

ниченного пучка, следующего за солнечным вращением. Интересно, что 27-дневная повторяемость ярче выражена во время минимума солнечной активности, когда «запятнность» мала. Эти таинственные области Солнца, вызывающие геомагнитные возмущения, называли М-областями, и долгое время не могли отождествить их с какими-либо определенными образованиями на Солнце. Ситуация несколько прояснилась в последнее время, когда были обнаружены так называемые корональные дыры. Такое название получили области солнечной короны с исключительно низкой плотностью и температурой. Эти области характеризуются низким уровнем излучения в крайнем ультрафиолетовом, рентгеновском и микроволновом диапазонах. Предполагают, что наличие дыр связано со структурой магнитного поля Солнца — в окрестностях дыры поле направлено так, что оно не оказывает заметного влияния на движение заряженных частиц коронального газа, и именно из этой области в космическое пространство устремляются наиболее мощные потоки заряженных частиц.

IV

Наверное, многим школьникам и студентам приходила в голову мысль: «Эх, опоздал я родиться! Все в науке уже открыто». Что ж, действительно, многое уже сделано. Но наука о Солнце и его

влиянии на Землю дает обширное поле для приложения своих знаний. С какими же нерешенными проблемами столкнутся будущие исследователи? Что им предстоит сделать?

1. Создать теорию солнечной цикличности, в частности — объяснить различную продолжительность циклов.

2. Внести полную ясность в теорию солнечных вспышек.

3. Разработать физически обоснованные методы прогноза различных проявлений солнечной активности.

4. Выяснить подробности физических процессов, приводящих к ионосферным и геомагнитным возмущениям.

5. Решить много других проблем, с которыми вы столкнетесь, если будете заниматься солнечно-земной физикой.

Послесловие

Конечно, в небольшой статье невозможно рассказать обо всех аспектах солнечно-земной физики. Но автор и не ставил перед собой такой задачи. Главная цель статьи — заинтересовать читателя проблемами этой важной науки. И можно считать, что цель эта достигнута, если вы хотя бы захотите прочитать рекомендуемую литературу.

1. Казимировский Э. С. *Волшебное зеркало планеты*. — Иркутск: Восточно-Сибирское книжное изд-во, 1978.

2. Дональд Г. Мензел. *Наше Солнце*. — Москва: Физматгиз, 1963.

3. *Солнечная и солнечно-земная физика*. Иллюстрированный словарь терминов под ред. А. Бруцека и Ш. Дюрана — Москва: «Мир», 1980.

Наш календарь

Космологические взгляды Джордано Бруно

(к 400-летию выхода в свет книги «О бесконечности, Вселенной и мирах»)

17 февраля 1600 года по приговору трибунала святой инквизиции был «предан смерти без пролития крови» (сожжен на костре) талантливый мыслитель средневековья Джордано Бруно.

На протяжении долгих столетий в умах людей господствовали представления о мироздании, основанные на геоцентрической системе Аристотеля — Птолемея. Эта система была освящена средневековой церковью, так как находилась в хорошем согласии с религиозным учением. Всякое сомнение в истинности подобных представлений считалось ересью и сурово наказывалось.

Но в конце первой половины XVI столетия Николай Коперник обосновал гелиоцентрическую систему мира, доказав, что видимые перемещения небесных светил — движения кажущиеся, результат вращения Земли вокруг своей оси и ее обращения вокруг Солнца.

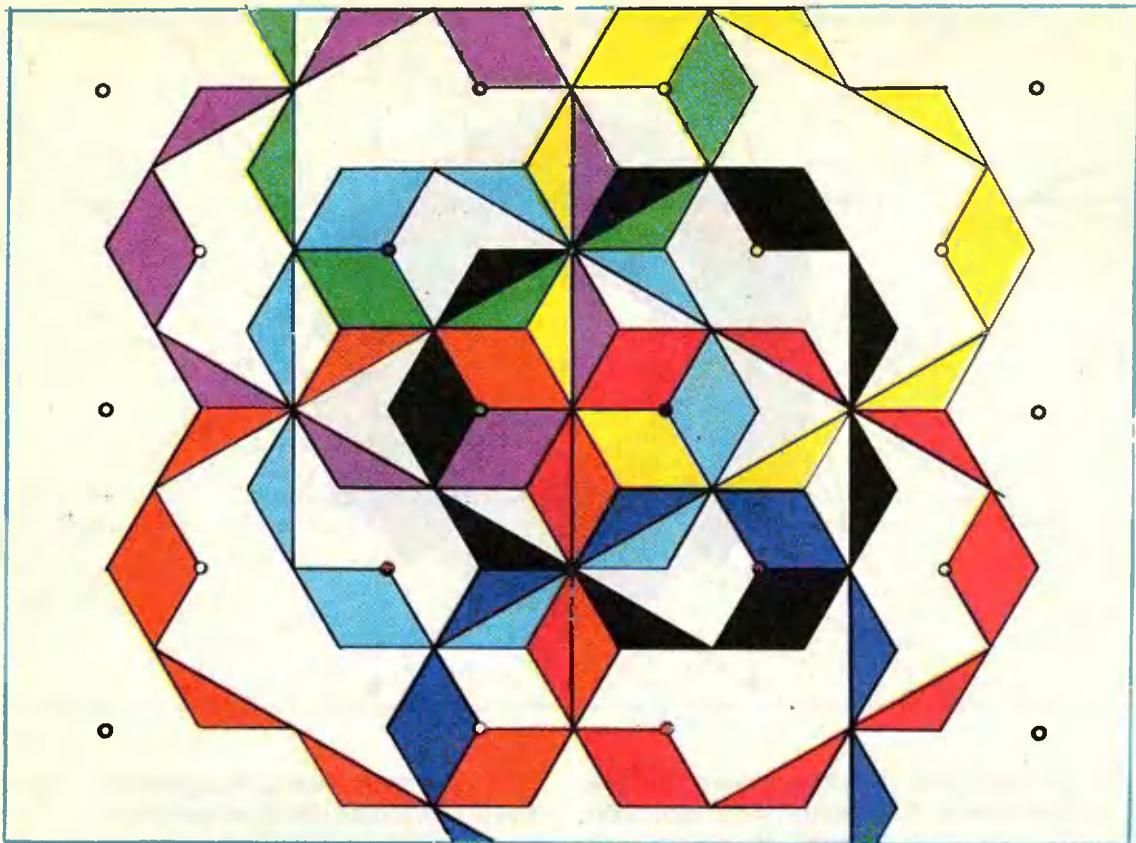
Однако мир Коперника все еще был ограничен сферой неподвижных звезд. Джордано Бруно пошел значительно дальше, отказавшись от неподвижности звезд и от замкнутой конечной Вселенной. Бруно решительно отверг и представления средневековой схоластики о двигателях, будто бы приводящих в движение небесные сферы.

Основные космологические взгляды Джордано Бруно были изложены им в книге «О бесконечности, Вселенной и мирах», написанной в Лондоне в 1584 году. В словах персонажей книги мы видим призыв Бруно, обращенный к самому себе:

«Проповедуй нам учение о бесконечной Вселенной. Низвергай во прах эти воображаемые своды и небесные сферы, которые будто бы должны ограничивать столько-то небес и стихий... Даруй нам учение о всеобщности земных законов во всех мирах и о единстве мировой материи. Ниспровергай теории о том, что Земля будто бы является центром мироздания. Разбей вдребезги внешние движители и границы так называемых небесных сфер. Распахни перед нами дверь, чтобы мы могли через нее взглянуть на неизмеримый и единый звездный мир».

Разумеется, многие положения, изложенные Джордано Бруно в его книге, представляли собой гениальные догадки. Не все выводы нашли подтверждение в ходе дальнейшего развития естествознания. Но главное состояло в том, что Бруно, исходя из достижений науки своего времени, построил картину мира, освобожденную от влияния схоластики и религиозных представлений, и тем самым создал важные предпосылки для развития нового естествознания. Не случайно на пьедестале памятника, установленного на Поле цветов в Риме, начертаны слова: «Джордано Бруно — от века, который он предвидел».

В. Н. Комаров



Решетки и зоны Бриллюэна

А. Б. ГОНЧАРОВ

В этой заметке мы познакомим читателей с некоторыми красивыми фактами из геометрии решеток. Наиболее приятной частью нашего рассказа будут картинки. Если в них как следует разобраться, сразу становятся ясными все конструкции и основные идеи доказательств.

Сразу же заметим, что задачи, о которых пойдет речь, возникли не случайно, а пришли из физики кристаллов. В конце заметки мы поговорим об этом подробнее.

А пока начнем с того, что отметим на плоскости все точки с целочисленными координатами — узлы квадратной решетки, и среди них выделим один «начальный» узел O . Для каждого из остальных узлов P проведем прямую, относительно которой узлы O и P симметричны, — серединный перпендикуляр к отрезку OP . Проведенные пря-

мые разбивают плоскость на мелкие части (треугольники и выпуклые многоугольники). Припишем каждой из них натуральное число — *ранг* — по следующему правилу: часть, содержащая точку O (она имеет форму квадрата), получает *ранг 1*, части, граничащие с ней по стороне, — *ранг 2*, части, граничащие с ними по стороне (и отличные от уже рассмотренных), — *ранг 3* и т. д.

Раскрасим кусочки разных рангов с небольшими номерами в разные цвета (часть получившейся картинки показана на четвертой странице обложки). Оказывается, что области всех цветов имеют одинаковую площадь.

Проделав то же самое с решеткой из правильных треугольников (рис. 1), а также для решетки из 6-угольников (рис. 2), убедимся, что справедлива та же закономерность: площади областей, закрашенных в один цвет, одинаковы.

Обозначим через $D_r(O)$ объединение всех многоугольников ранга r ($r=1, 2, 3, \dots$) для выбранного «центрального» узла O решетки. Мы докажем, что для любой решетки площадь области $D_n(O)$ одна и та же для всех r^* .

*) Это утверждение — содержание задачи М800.

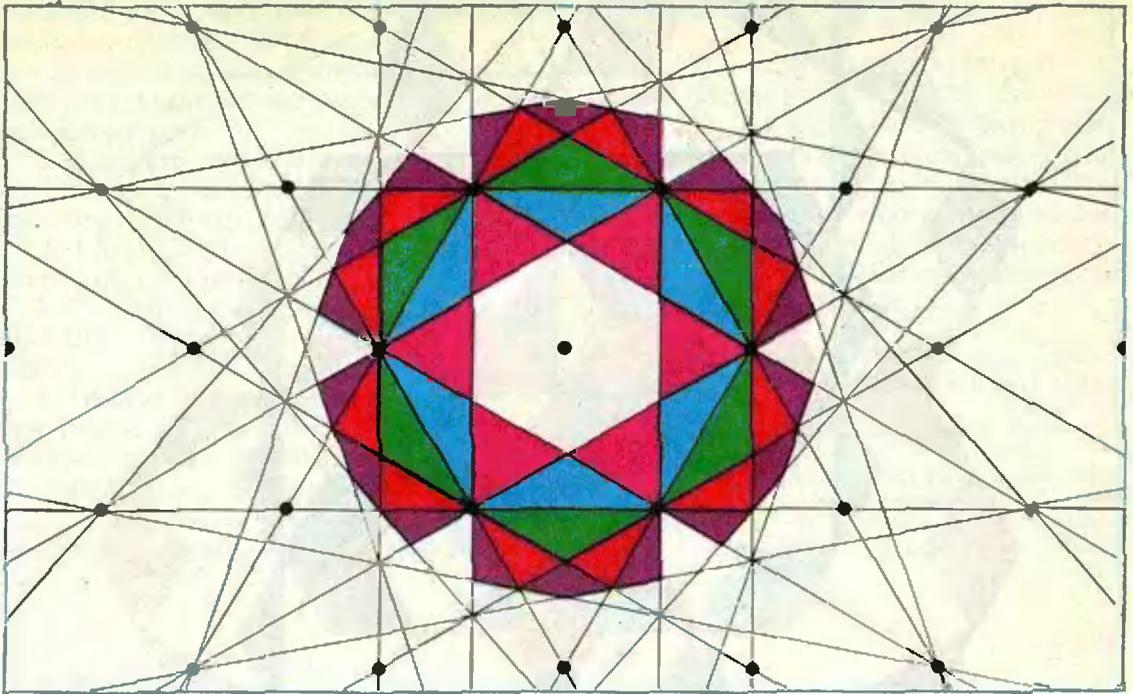


Рис. 1.

Повозившись с картинками, можно сделать два наблюдения, подсказывающие идеи двух разных доказательств. С них мы и начнем.

Наблюдение 1. Рассмотрим самую простую квадратную решетку. На рисунке 3 красным цветом выделена область $D_6(O)$; кроме того, жирными черными линиями плоскость разбита на одинаковые квадраты так, что каждый узел Q служит центром одного из квадратов; этот квадрат — обозначим его $D(Q)$ — получается переносом центрального квадрата $D(O) = D_1(O)$ на вектор \vec{OQ} . Если разрезать всю плоскость по жирным линиям на квадраты $D(Q)$ и перенести все квадраты так, чтобы они совместились с центральным $D(O)$, то красные кусочки $D_6(O)$ в точности заполнят квадрат в один слой, не налегая друг на друга (то же самое будет верно для кусочков области $D_r(O)$ при каждом $r=2, 3, \dots$; предлагаем это проверить читателям для стольких r , чтобы в этом не осталось сомнений). Отсюда, конечно, сразу будет следовать, что $D_6(O)$ (и $D_r(O)$ при каждом r) имеет ту же площадь, что $D_1(O)$.

Наблюдение 2 проиллюстрируем, отчасти для разнообразия, на примере решетки из вершин правильных шестиугольников, заполняющих плоскость. На рисунке 2 показаны области $D_r(O)$ для $r=1, 2, \dots, 6$.

Аналогично можно построить области $D_r(Q)$, приняв за центральный любой другой узел Q решетки. На рисунке на с.19 выделено несколько областей D_4Q — каждая имеет тот же цвет, что и ее центр Q ; все области D_4Q для разных Q заполняют плоскость в один слой, не налегая друг на друга. (То же самое верно для областей $D_r(Q)$ при каждом $r=1, 2, \dots$) Таким образом, площадь D_4Q (и $D_r(Q)$ при каждом r) — это «средняя» площадь, приходящаяся на один узел. Что это такое, мы уточним ниже, а пока сформулируем лемму, которая объясняет оба наблюдения.

Ключевая лемма. Область $D_r(O)$ состоит из тех точек M плоскости, для которых узел O является r -м по удаленности от точки M .

Разберем сначала случай $r=1$. Заметим, что перпендикуляр, проведенный к отрезку PO в его середине, делит плоскость на две полуплоскости так, что точки M в одной из них (содержащей O) ближе к O , чем к P , в другой — наоборот. Область $D(O) = D_1(O)$ — пересечение таких (содержащих O) полуплоскостей для всевозможных узлов P , отличных от O . Поэтому $D(O)$ состоит из точек M , для которых узел O ближе всех другим узлам P^* .

* Аналогичное разбиение на «области Дирихле» использовано в решении задачи М765 (см. Квант, 1983, № 2, с. 41 и 1984, № 3, с. 47).

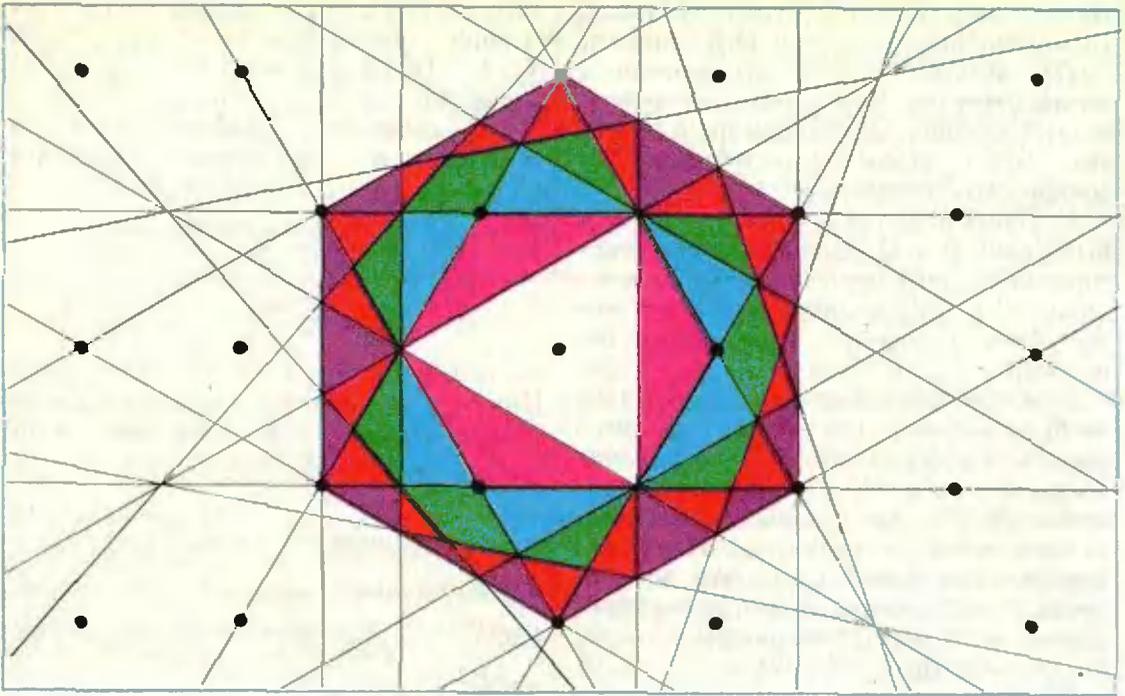


Рис. 2.

Пусть теперь M — точка ранга $r > 1$ (по отношению к центру O). Из определения ранга, данного в условии, следует, что, двигаясь по некоторому пути от точки M к O , мы пересечем ровно $r-1$ проведенных прямых — серединных перпендикуляров некоторых отрезков $OP_1, OP_2, \dots, OP_{r-1}$. (Этот путь можно построить так: сначала мы идем по прямолинейному отрезку от точки M до любой пограничной точки областей $D_r(O)$ и $D_{r-1}(O)$, затем — по другому отрезку до пограничной точки областей $D_{r-1}(O)$ и $D_{r-2}(O)$ и т. д. Дойдя до области $D_1(O) = D(O)$, мы по прямолинейному

отрезку идем в точку O . Это означает, что имеется $r-1$ узлов P_1, \dots, P_{r-1} , к которым M ближе, чем к O . Лемма доказана.

Теперь применим лемму для анализа наших наблюдений.

1°. Пусть решетка такова, что при переносе на вектор \vec{OQ} ; где O и Q — любые ее узлы, вся решетка совмещается с собой. (Этому условию удовлетворяют квадратная решетка, «треугольная» решетка на рисунке 1 и вообще любая решетка из концов векторов $m \cdot \vec{OA} + n \cdot \vec{OB}$, где OAB — фиксированный треугольник, а m и n — произвольные целые числа.) Будем ниже «переносами» называть лишь параллельные переносы на векторы \vec{OQ} . Докажем, что для любой внутренней точки M «области Дирихле» $D(O)$ найдется перенос T такой, что $T(M) \in D_r(O)$, причем если $T(M)$ лежит внутри области $D_r(O)$, то существует ровно один такой перенос T . Другими словами, область $D(O)$ разбивается на куски, при переносах T которых составляется область $D_r(O)$. Пусть M — такая точка, что r -м по удаленности от нее узлом является Q . По ключевой лемме $M \in D(O) \cap D_r(Q)$, и поэтому при переносе T на вектор \vec{OQ} мы получим, что $T(M) \in D_r(O)$. Перенос T определен однозначно, если не существует узла решетки X , для которого $|MQ| = |MX|$.

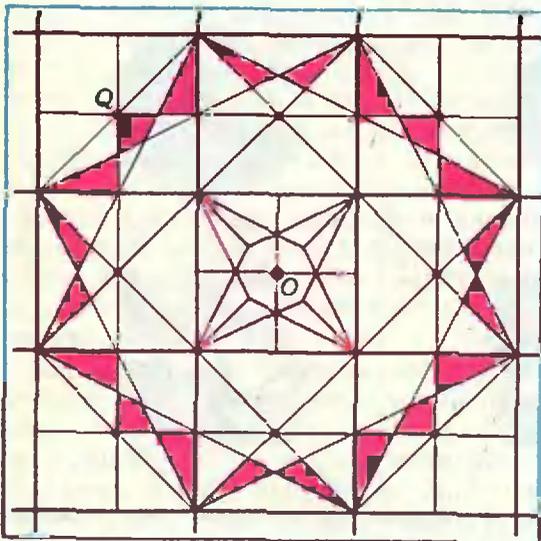


Рис. 3.

Легко видеть, что этому условию удовлетворяют все точки внутренней области $D(O)$, которые лежат вне конечного числа отрезков. Эти отрезки — в точности те линии, по которым надо разрезать $D(O)$, чтобы из полученных кусочков сложить $D_r(O)$.

2°. Пусть решетка такова, что для любых узлов P и Q можно указать некоторое самосовмещение решетки, переводящее P в Q (в отличие от 1°, это может быть и поворот, а не только перенос).

По ключевой лемме для каждой точки M есть лишь один узел Q , для которого $M \in D_r(Q)$ — это r -й по удаленности от точки M узел. Ясно, что области $D_r(Q)$ для разных Q пересекаются лишь по границам. Наложены условия показывают, что все области $D_r(Q)$ одинаковы — при совмещении решетки, переводящем Q в O , $D_r(Q)$ переходит в $D_r(O)$.

Объясним теперь, почему отсюда следует, что $D_r(Q)$ равновелики для разных r . Назовем для данной решетки «плотностью» следующий предел: $\alpha = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{K(N)}{N^2}$, где $K(n)$ — число узлов, лежащих в квадрате размером $N \times N$ с центром O . Докажем, что $\alpha = \frac{1}{S_r}$ (S_r — площадь области $D_r(O)$) для каж-

дого r . Пусть L_r — наибольшее расстояние точек области $D_r(O)$ от O , $N > L_r$. Тогда для всех $K(N)$ узлов Q квадрата $N \times N$ объединение областей $D_r(Q)$ покрывает квадрат $(N - L_r) \times (N - L_r)$ и содержится в квадрате $(N + L_r) \times (N + L_r)$, поэтому

$$\left(1 - \frac{L_r}{N}\right)^2 = \frac{(N - L_r)^2}{N^2} < \frac{S_r \cdot K(N)}{N^2} < \frac{(N + L_r)^2}{N^2} = \left(1 + \frac{L_r}{N}\right)^2.$$

При $N \rightarrow \infty$ правая и левая части сколь угодно близки к 1, поэтому существует предел $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{S_r \cdot K(N)}{N^2} = 1$, так что

$\alpha = \frac{1}{S_r}$; величина $\frac{1}{\alpha}$ — это и есть «средняя площадь на один узел», в частности, площадь S_1 области $D(O)$ тоже равна $\frac{1}{\alpha}$.

Замечание. На тех же идеях основано доказательство знаменитой леммы Минковского о выпуклом теле, имеющей много неожиданных приложений в теории чисел.

Лемма Минковского. Пусть C — выпуклая центрально-симметричная фигура с центром в узле O решетки. Тогда если отношение площадей C и $D_1(O)$ больше 4, то внутри C есть узел решетки, отличный от O .

Набросок доказательства. Сначала доказываем, что существуют узлы решетки P и Q

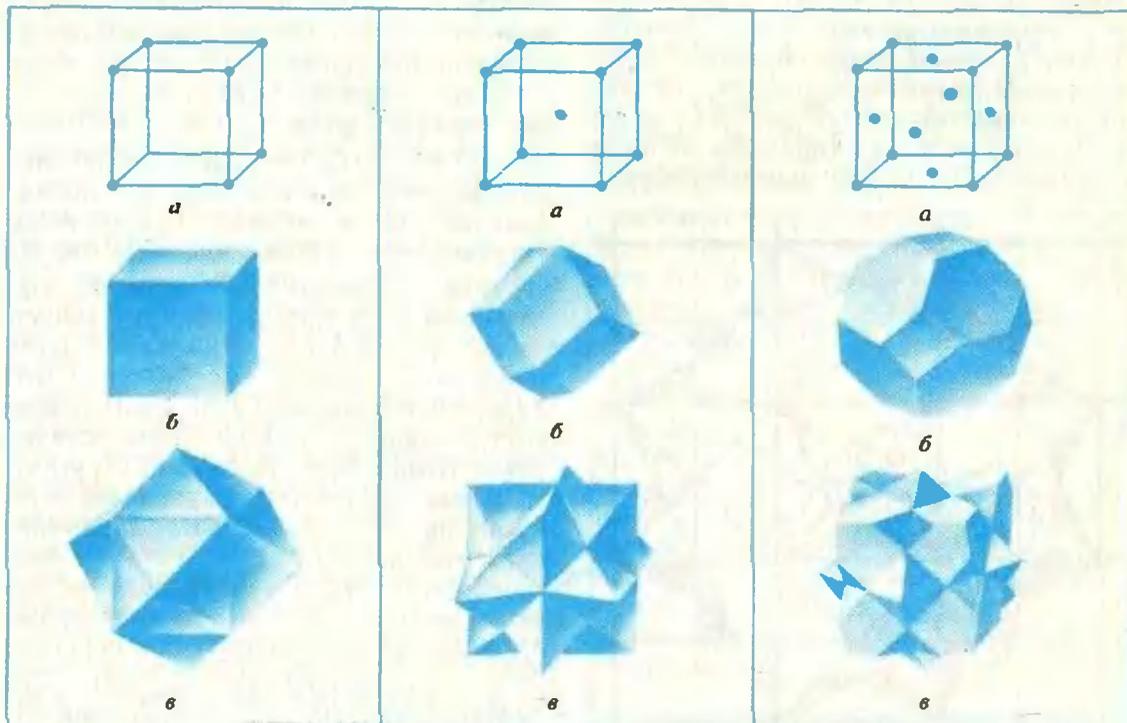


Рис. 4.

Рис. 5.

Рис. 6.

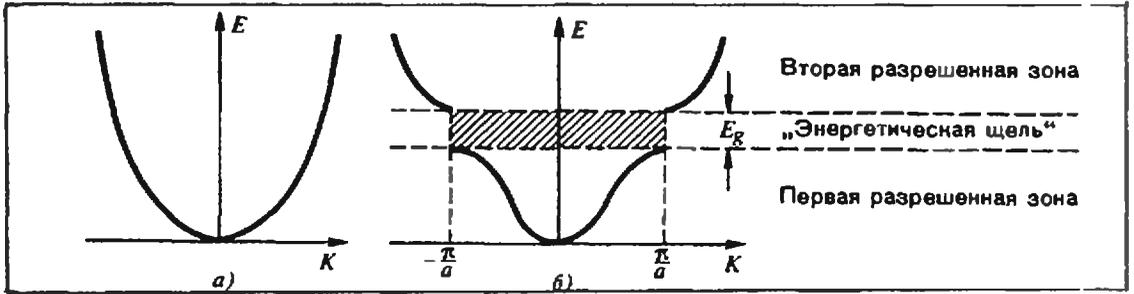


Рис 7

такие, что если сдвинуть фигуру $\frac{1}{2}C$ на векторы \vec{OP} и \vec{OQ} , то полученные области будут иметь общую точку X (эта часть абсолютно аналогична проведенному выше рассуждению). Обозначим через Y и Z точки, полученные из точки X сдвигами на векторы \vec{PO} и \vec{QO} . Эти точки лежат в области $\frac{1}{2}C$. Далее, $\vec{OY} - \vec{OZ} = \vec{OP} - \vec{OQ}$, так что точка A , являющаяся концом вектора $\vec{OY} - \vec{OZ}$ — узел решетки. Заметим, что из выпуклости и центральной симметрии фигуры C следует, что конец вектора $\vec{OY} - \vec{OZ} = \frac{1}{2}(\vec{OY} + 2(-\vec{OZ}))$ лежит в C .

Ясно, что рассуждения 1° и 2° вполне применимы к пространственным решеткам: для них речь будет идти о «серединных плоскостях» к парам узлов O, P и об объемах соответствующих «ячеек» $D_1(O)$ и $D_r(O)$. На рисунках 4, а — 6, а представлены три наиболее популярных решетки — простая кубическая, объемно-центрированная кубическая и гранецентрированная кубическая. Соответствующие им области $D(O)$ и $D_r(O)$ приведены на рисунках 4, б — 6, б и 4, в — 6, в. Многогранники на рисунках 4, в и 5, б называются *ромбододекаэдрами*, а многогранник на рисунке 6, б — *усеченным октаэдром*.

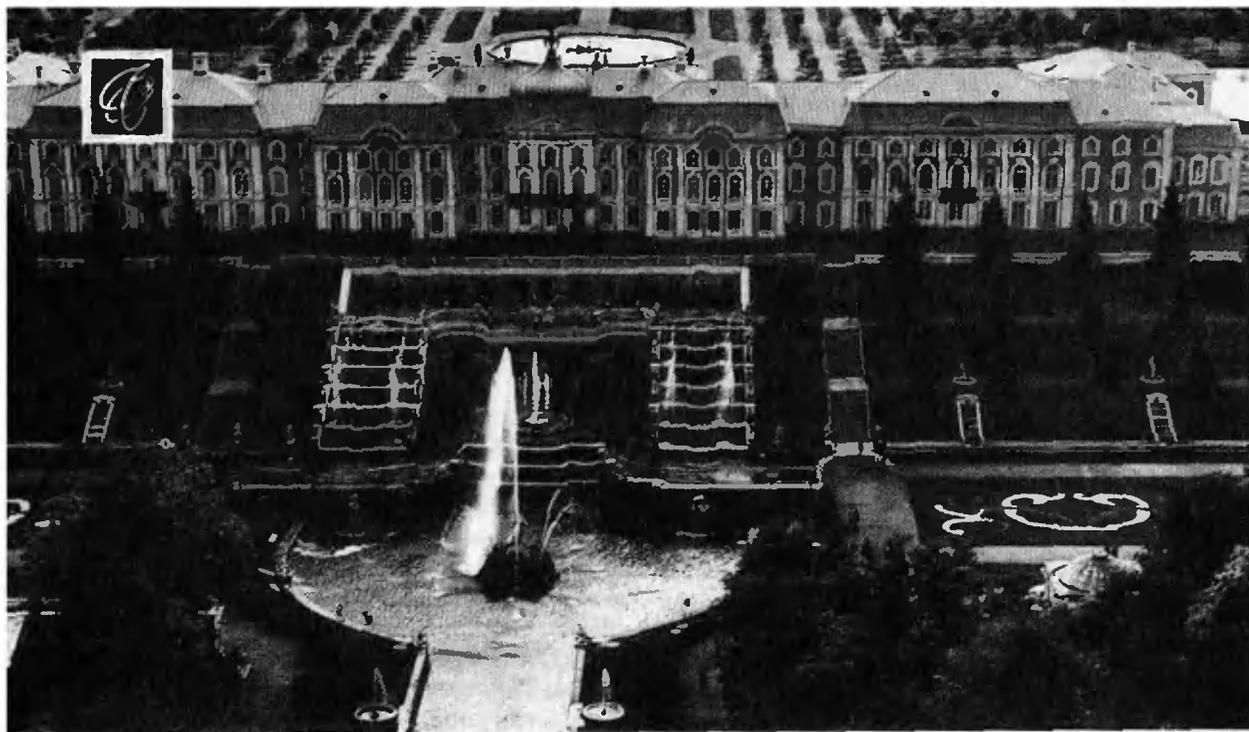
Геометрические конструкции, которые были в центре нашего сюжета, играют важную роль в физике твердого тела. Области $D_r(O)$ известны в физике кристаллов под названием *зон Бриллюэна*, по имени французского ученого Леона Бриллюэна, который в начале 30-х годов детально исследовал квантовые законы движения электронов в кристалле. В нескольких словах это можно пояснить так.

Свойства электропроводности кристалла в основном зависят от наличия «энергетических щелей» — интервалов, в которые не попадают возможные значения энергии электронов. Для свободного электрона (не взаимодействующего с кристаллом) график зависи-

мости энергии от импульса — парабола (кинетическая энергия пропорциональна квадрату скорости, рис. 7, а). Если же электрон взаимодействует с ионами кристаллической решетки, то в графике зависимости энергии от импульса при некоторых значениях импульса появляются разрывы. Для «одномерного» кристалла график будет выглядеть примерно так, как показано на рисунке 7, б. Для «двумерного» и реального — «трехмерного» — кристалла импульс \vec{p} — вектор. Условившись откладывать эти векторы \vec{p} от одной точки O — начала координат, мы получим (двумерное или трехмерное) пространство, точкам которого соответствуют значения импульсов — так называемое *импульсное пространство*. Заданной решетке A атомов в обычном пространстве естественным образом ставится в соответствие некоторая «двойственная» по отношению к A решетка P в импульсном пространстве (физики обычно называют ее *обратной решеткой*). При подходящем выборе масштаба в импульсном пространстве она задается так: вектор \vec{p} принадлежит P , если скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{p}$ — целое число для всех векторов \vec{a} , соединяющих две точки решетки A .

Упражнение. а) Объясните, почему концы P таких векторов $\vec{p} = \vec{OP}$ образуют решетку б) Нарисуйте двойственные решетки P для решеток A , изображенных на рисунках 1, 2, 3.

Оказывается, что разрывы энергии (как функции на импульсном пространстве) возникают как раз на плоскостях, являющихся «серединными перпендикулярами» отрезков OP , где P — точки двойственной решетки. Физический смысл имеет также параллельный перенос всех кусочков зоны Бриллюэна $D_r(O)$ r -го ранга в основную зону $D_1(O)$, который мы использовали в решении задачи М800.



Фонтаны в парках и дома

С. Л. ГАВРИЛОВ

Предок современного фонтана появился очень давно — когда первобытный человек облицовал родник камнями. Вода полилась струйкой, и стало удобно наполнять ею глиняную и деревянную посуду. Спустя тысячелетия каменная облицовка приобрела эстетическое значение. Появились такие произведения искусства, как фонтаны Древней Греции, Рима, а затем Версаля и Петродворца (Петергофа). Но вплоть до конца прошлого столетия сохранилось и утилитарное назначение фонтанов — население брало из них воду. Это и понятно: само слово «фонтан» происходит от латинского *fons* — источник.

Большое внимание внешнему виду фонтанов уделяли русские архитекторы. С XVIII века фонтаны в России — неотъемлемая часть дворцово-парковой архитектуры. Самый яркий пример этому — фонтаны Петродворца, загородной резиденции русских царей, основанной Петром I в 1709 году (см. фотографию вверху). В его строительстве

принимали участие такие прославленные архитекторы, как Растрелли, Кваренги и др. Гидротехническими работами руководил инженер Гуволков.

Вот что писал о Петродворце русский художник Александр Бенуа: «Это — резиденция царя морей. Фонтаны в Петергофе не придаток, а главное. Они являются символическим выражением водяного царства, тучей брызг того моря, которое плещется у берегов Петергофа».

Примечательно, что из-за благоприятного расположения территории дворца для питания фонтанов не пришлось строить никаких водоподъемных сооружений. Вода собиралась в окрестных реках и по разветвленному трубопроводу поступала к Петродворцу. А необходимое для действия фонтанов давление создавалось за счет естественного перепада уровней.

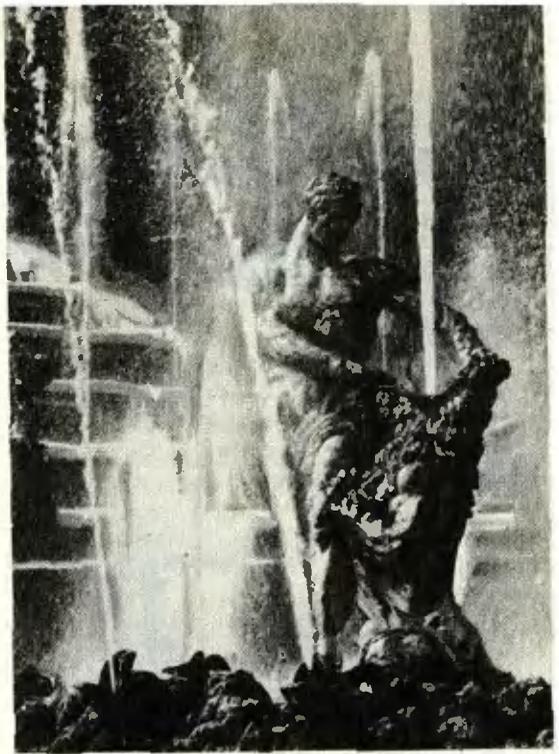
Не меньший интерес к фонтанам проявляли и западноевропейские архитекторы. Со времен эпохи Возрождения в Европе было построено много красивейших фонтанов, которые до сих пор производят неизгладимое впечатление. Но самый выдающийся памятник садово-парковой архитектуры с использованием фонтанов — это Версаль, резиденция французских королей, построенная во второй половине XVII века по проекту архитектора Андре Ленотра.

Версаль расположен значительно выше долины, по которой катит свои воды Сена. Поэтому, чтобы были фонтаны, пришлось строить мощную, по тем временам, насосную станцию. Любопытно, что насосы приводились в движение водяным колесом, вращающимся за счет течения реки.

Лучшие традиции зодчих прошлого продолжили советские архитекторы. За годы советской власти в нашей стране было построено много интересных фонтанов. Особенно широкое распространение фонтаны получили в южных республиках нашей страны.

Мы привыкли к тому, что место фонтана — на площади или в саду. Но можно устроить фонтаны (конечно, гораздо меньших размеров) и в домашних условиях. Предлагаем вашему вниманию несколько наиболее интересных и легко осуществимых устройств.

Создание одного из самых остроумных по конструкции фонтанов приписывается древнегреческому ученому Герону Александрийскому (I век нашей эры). Этот фонтан состоит из трех сосудов (рис. 1) — одного открытого плоского (А) и двух закрытых шарообразных (Б и В), соединенных между собой тонкими трубками. Достаточно наполнить водой сосуд В и налить немного воды в сосуд А, как фонтан начнет действовать. Вода, переливаясь из сосуда А в сосуд В, вытесняет оттуда воздух в сосуд Б. Там создается избыточное, по сравнению с атмосферным, давление, которое и заставляет воду бить фонтаном. (Очевидно, что это избыточное давление равно разности дав-



Фонтан «Самсон» в Петровворце.

лений, создаваемых столбами воды АВ и АБ: $p_{изб} = \rho g H_{AB} - \rho g H_{AB} = \rho g \times (H_{AB} - H_{AB})$.) Когда сосуд В наполнится водой, фонтан перестанет работать. Но достаточно его перевернуть, чтобы вода из В перелилась в Б, и фонтан снова готов к работе.

Я. И. Перельман в книге «Занимательная физика» приводит упрощенную конструкцию фонтана Герона, которую любой может повторить в домашних условиях. Автором этой модернизации был школьный учитель из Италии. Не имея возможности воспроизвести конструкцию старинного фонтана в точности,

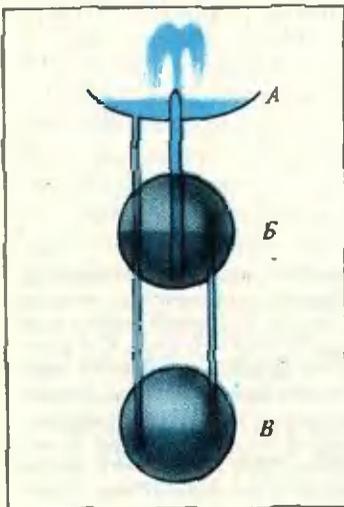


Рис. 1

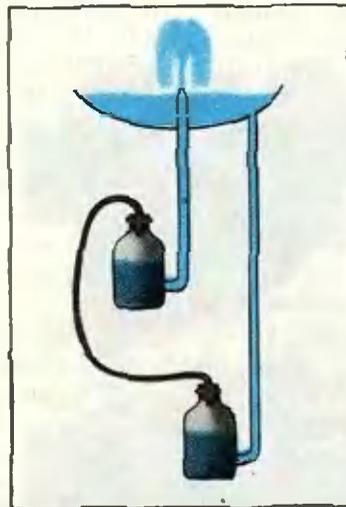


Рис. 2.

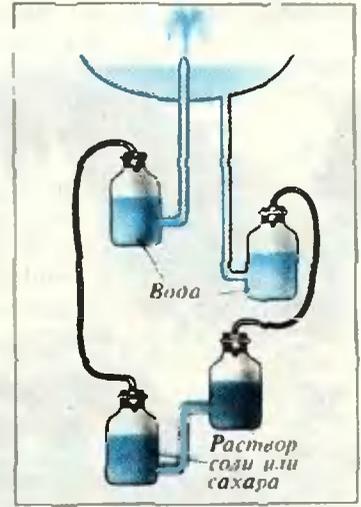


Рис. 3.

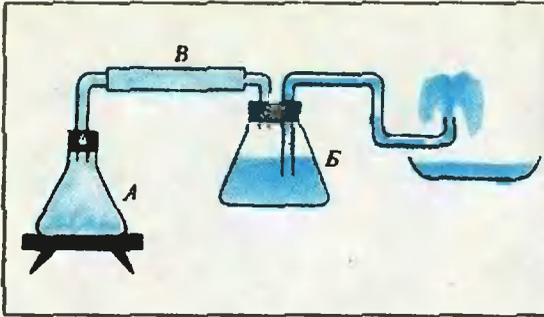


Рис. 4.

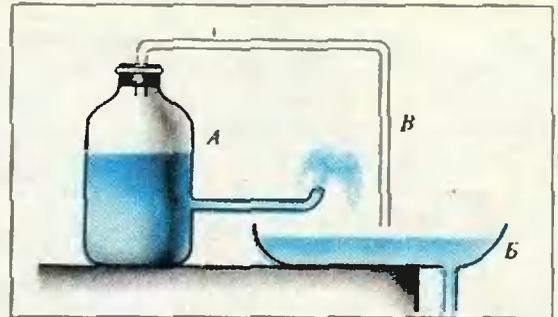


Рис. 6.



Рис. 5.

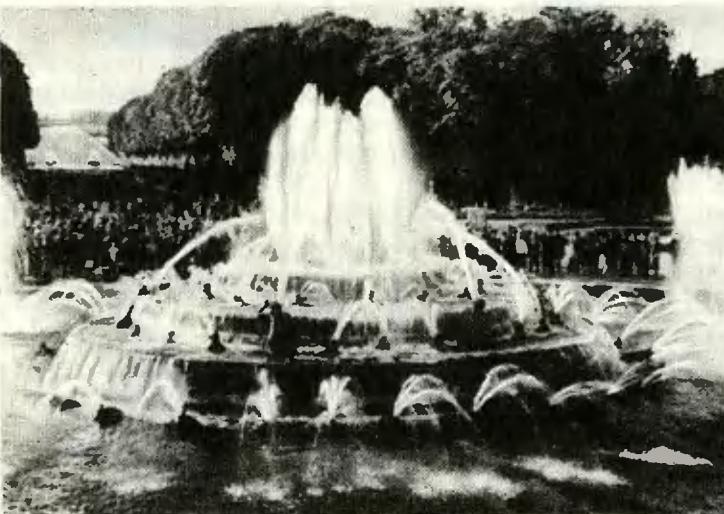
он употребил вместо шаров аптечные склянки с двумя отверстиями, а вместо стеклянных трубок — резиновые (рис. 2). Не обязательна и специально изготовленная верхняя ванночка. Ее вполне может заменить обычная миска, к которой соответствующим образом крепятся резиновые трубки. Такая конструкция интересна еще и тем, что, меняя относительное расположение склянок, можно изменять высоту струн фонтана.

Этого же можно добиться, если в разрез трубки, передающей давление воздуха из сосуда В в сосуд Б, поместить своеобразный «гидроусилитель давлe-

ния» — склянки с жидкостью большой плотности (рис. 3). Наибольшего эффекта можно было бы добиться, используя ртуть, которая тяжелее воды в 13,6 раза. Но работать с ней опасно, поэтому лучше воспользоваться раствором поваренной соли или сахара в воде. Сахар несколько предпочтительнее, так как он, в отличие от соли, не дает насыщенного раствора и позволяет получить «сироп» с плотностью, в 1,5 раза превышающей плотность воды.

А можно устроить фонтан, который будет приводиться в действие паром. Подобные конструкции использовались на практике, когда человечество еще не знало насосов с электрическим приводом. Пример схемы «парового» фонтана приведен на рисунке 4. При нагревании воды в колбе А образуется пар, который создает избыточное давление в сосуде Б, вытесняя из него воду.

Такой фонтан воспроизвести нетрудно. Нужно помнить только, что колба А должна быть из термостойкого стекла (можно использовать металлический сосуд), а соединения — достаточно герметичными. Пробки для колб легко изготовить из плотной резины, а отвер-



Фонтан Латоны в Версале. Фонтан состоит из четырех круглых бассейнов, поднимающихся один над другим. В центре на круглом пьедестале стоит фигура богини Латоны. Лягушки и ящерицы на трех верхних бассейнах выбрасывают из насадок струи воды, почти закрывающие фигуру Латоны. Струями каскадами вода из верхних бассейнов переливается в нижний.

ствия в них — прорезать с помощью тонкостенной металлической трубочки с заостренными краями.

Этот фонтан может действовать также, если вместо пара использовать сжатый воздух. Для этого колбу нужно заменить предварительно накачанной камерой от волейбольного мяча или любой другой подходящей резиновой емкостью. По мере уменьшения давления в камере фонтан, естественно, будет ослабевать. Чтобы это происходило не так быстро, на камеру можно поставить сосуд, как это изображено на рисунке 5. Наполняясь водой, сосуд будет давить на камеру с большей силой, что, в некоторой степени, замедлит падение давления в камере.

Фонтан возможно привести в действие и с помощью газов, выделяющихся при некоторых химических реакциях. Например, используя реакцию нейтрализации уксусной кислоты пищевой содой, при которой выделяется достаточное количество углекислого газа.

Фонтан, изображенный на рисунке 6, интересен тем, что он сам периодически прекращает свое действие, а через определенное время возобновляет его. Пока нижний конец трубки *B* открыт, прост-

ранство над жидкостью в сосуде *A* соединено с атмосферой, давление в нем равно атмосферному и фонтан функционирует. Когда уровень воды в сосуде *B* достигнет трубки *B*, воздух перестанет поступать в сосуд *A* и по мере расхода воды в нем будет создаваться разрежение. По истечении некоторого времени фонтан иссякнет. Если же в сосуде *B* сделать небольшой сток, часть воды из сосуда выльется, отверстие в трубке *B* откроется и фонтан снова заработает. Для того чтобы фонтан действовал периодически, поступление воды в сосуд *B* должно быть больше расхода. Тогда при работающем фонтане уровень воды будет подниматься, а после остановки фонтана — опускаться, и, когда конец трубки *B* окажется в воздухе, фонтан снова заработает.

В заключение хочется напомнить, что многие современные большие фонтаны в темное время суток украшают самой разнообразной подсветкой. Не надо забывать о таких возможностях, создавая и мини-фонтаны в домашних условиях. Используя обычные осветительные приборы и разноцветные светофильтры и призвав на помощь немного фантазии, можно домашний фонтан превратить в красочное зрелище.

Беседа с академиком А. А. Логуновым

(Начало см. на с. 2)

многие явления, наблюдаемые в астрофизике, невозможно понять, не зная физики элементарных частиц. Происходит своеобразное взаимное дополнение и обогащение: с одной стороны — астрофизика, приносящая новые открытия, с другой — микромир, изучение которого дает возможность понять многие проблемы, связанные не только со строением материи, но и со строением и эволюцией Вселенной.

— И в заключение — вопрос к вам как члену редакционного совета «Кванта». Как вы оцениваете журнал? Ваши пожелания его читателям?

— Мне журнал нравится. Он, несомненно, очень полезен школьникам, увлекающимся физикой и математикой, тем, кто хочет в дальнейшем занимать-

ся ими серьезно. Но, возможно, мы недостаточно уделяем внимания тем, кто еще не определил свои интересы, нашему «начинающему» читателю. Увлечь его математикой и физикой, возбудить у него интерес к этим наукам — наша задача. По-видимому, нужен спектр статей и задач разного уровня сложности, чтобы постепенно вводить читателя в круг трудных проблем.

Очень важно, конечно, как читать журнал. Необходимы и постепенность, и внимательность, и терпеливость. И главное — это поиск оригинальных решений. Именно с этого и начинается самостоятельное творчество. Это требует большого труда, но и приносит истинное удовлетворение. Трудиться надо не ради того, чтобы кого-то удивить, а для того, чтобы узнать что-то новое, в чем-то разобраться, глубже проникнуть в сущность явления.

Это, если хотите, и пожелание, и призыв...



Выбор модуля

Кандидат педагогических наук
Ю. И. ИОНИН,
кандидат физико-математических наук
А. И. ПЛОТКИН

Практически на любой математической олимпиаде встречаются задачи о целых числах. Они часто бывают трудными, но имеется несколько общих приемов для их решения. Об одном из наиболее популярных таких приемов рассказывается в этой статье.

Прием состоит в следующем: данные в задаче целые числа заменяются их остатками от деления на специально подобранное для этой задачи целое число, которое в этом случае называют *модулем*.

Начнем с очень простого примера.

Пример 1. *Существуют ли целые числа x и y , удовлетворяющие уравнению $x^3 + x + 10y = 20\,004$?*

Чтобы ответить на этот вопрос, заметим, что, зная последнюю цифру числа x , можно легко узнать последнюю цифру числа x^3 и (при любом y) последнюю цифру числа $x^3 + x + 10y$. Составим таблицу:

Последняя цифра числа	x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	x^3	0	1	8	7	4	5	6	3	2	9
	$x^3 + x + 10y$	0	2	0	0	8	0	2	0	0	8

Мы видим, что число $x^3 + x + 10y$ при любых целых x и y оканчивается одной из цифр 0, 2, 8 и, следовательно, не может быть равно 20 004.

Рассуждения такого рода вам, наверное, знакомы. Но давайте задумаемся в их смысл.

Последняя цифра числа — это остаток от деления этого числа на 10. Решение основывалось на том, что для вычисления последней цифры числа $x^3 + x$ достаточно знать лишь последнюю цифру числа x . Это верно не только для остатков от деления на 10, но и для ос-

татков от деления на любое другое целое число. Так, приведенное решение можно было сократить, заменяя рассматриваемые числа их остатками от деления не на 10, а на 5.

Пример 2. *Найти все такие натуральные числа n , что числа $n+1$, $n+71$ и $n+99$ — простые.*

Решение. Рассмотрим остатки от деления данных чисел на 3 (как часто говорят, «будем рассуждать по модулю 3»). Заметим, что 1, 71 и 99 дают различные остатки при делении на 3, а, значит, числа $n+1$, $n+71$, $n+99$ также различны по модулю 3. Но различных остатков при делении на 3 лишь три: 0, 1 и 2. Поэтому одно из данных чисел делится на 3, а так как это число простое, то оно равно 3. Отсюда находим, что $n=2$.

Подобного рода рассуждения будет легче проводить, если ввести следующее определение. Будем говорить, что числа a и b равны по модулю m (a, b, m — целые числа, $m \neq 0$), если a и b дают одинаковые остатки при делении на m , иначе говоря, $a-b$ делится на m .

Введенное понятие удобно благодаря такому свойству: если числа a_1 и b_1 равны по модулю m и числа a_2 и b_2 равны по модулю m , то по этому же модулю равны числа a_1+a_2 и b_1+b_2 , a_1-a_2 , и b_1-b_2 , a_1a_2 и b_1b_2 . Это очень легко следует из следующих тождеств:

$$\begin{aligned} (a_1+a_2) - (b_1+b_2) &= (a_1-b_1) + (a_2-b_2), \\ (a_1-a_2) - (b_1-b_2) &= (a_1-b_1) - (a_2-b_2), \\ a_1a_2 - b_1b_2 &= a_1(a_2-b_2) + b_2(a_1-b_1). \end{aligned}$$

Сформулированное свойство позволяет в выражении, полученном из целых чисел с помощью действий сложения, вычитания и умножения, заменять слагаемые и сомножители любыми числами, равными им по модулю m . В частности, можно найти все значения, которые заданное выражение принимает по данному модулю, как и было сделано в решении примера 1.

Рассуждения «по модулю» можно применять для доказательства того, что данное целое число не является квадратом или кубом целого числа. При этом часто бывают полезны следующие простые леммы:

а) квадрат целого числа равен 0 или 1 по модулю 3;

б) квадрат целого числа равен 0 или 1 по модулю 4;

в) куб целого числа равен 0, 1 или -1 по модулю 9;

г) куб целого числа равен 0, 1 или -1 по модулю 7;

д) при нечетном n числа n^n и n равны по модулю 8.

Задача 1. Докажите эти леммы

Задача 2. Докажите, что любое натуральное число по модулям 3 и 9 равно сумме своих цифр в десятичной записи.

Проиллюстрируем применение лемм а)–б), ответив на следующий вопрос. Является ли число 97 531 квадратом или кубом целого числа? Нет. Оно не является квадратом хотя бы потому, что равно 3 по модулю 4, и не является кубом, так как равно 7 по модулю 9 (поскольку сумма его цифр равна 25). Как видите, успех часто определяется удачным выбором модуля.

Пример 3. Докажите, что сумма квадратов пяти последовательных целых чисел не является квадратом целого числа.

Решение. Попробуем рассуждать по модулю 3. Если первое из чисел делится на 3, то их квадраты образуют по модулю 3 последовательность 0, 1, 1, 0, 1 и, значит, их сумма равна 0 по модулю 3. Мы не получили противоречия: квадрат целого числа может равняться 0 по модулю 3. Что ж, это означает, что мы неудачно выбрали модуль. Попробуем рассуждать по модулю 4. Легко видеть, что в этом случае, в зависимости от того, четно или нечетно первое число, мы приходим либо к последовательности 0, 1, 0, 1, 0 с суммой 2, либо к последовательности 1, 0, 1, 0, 1 с суммой 3. Но результат леммы б) говорит о том, что квадрат целого числа не может равняться ни 2, ни 3 по модулю 4.

Задача 3. Докажите, что каждое из следующих чисел не может быть квадратом целого числа:

а) сумма квадратов трех нечетных чисел;

б) число, десятичная запись которого состоит из 20 единиц и некоторого числа нулей;

в) $2^2 + 4^2 + 6^2 + \dots + 50^{50}$

Разумеется, не всегда удастся решить задачу такого типа, рассуждая лишь по модулю 3 или 4.

Задачи

4. Найдите все натуральные числа n , для которых число $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ является квадратом целого числа.*)

5. Докажите, что число $222\dots 2$ (1982 двойки) нельзя представить в виде $xy(x+y)$, где x и y — целые числа.

*) Запись $n!$ обозначает факториал числа n , то есть $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$

6. Докажите, что сумма квадратов трех последовательных целых чисел не может быть кубом целого числа.

Разберем два более трудных примера.

Пример 4. Докажите, что число $1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 1983^{1983}$ нельзя представить в виде t^k , где t и k — натуральные числа, $k \geq 2$.

Решение. Начнем с рассуждения по модулю 3. Так как любое целое число равно 0, 1 или -1 по модулю 3, то a^n равно a^2 по модулю 3 при четном n и a^n равно a по модулю 3 при нечетном n . Отсюда можно вывести, что числа $1^1, 2^2, 3^3, \dots$ образуют по модулю 3 периодическую последовательность с периодом длины 6, состоящим из чисел 1, 1, 0, 1, $-1, 0$. Используя эту периодичность, нетрудно показать, что данная сумма равна 2 по модулю 3 и, следовательно, не может быть квадратом. Но как показать, что эта сумма не может быть кубом, пятой степенью и т. д.? Необходимую помощь оказывает модуль 4. По этому модулю числа $1^1, 2^2, 3^3, \dots$ также образуют периодическую последовательность с периодом 1, 0, $-1, 0$ длины 4, откуда следует, что сумма $1^1 + 2^2 + 3^3 + \dots + 1983^{1983}$ делится на 4. Поэтому, если бы эта сумма имела вид t^k , где $k \geq 3$, то она делилась бы на 8. Исследуем ее по модулю 8. Если n четно, и $n \neq 2$, то n^k делится на 8, а если n нечетно, то n^n равно n по модулю 8 (см. лемму д)), так что данная сумма равна по модулю 8 сумме $2^2 + 1 + 3 + \dots + 1983$. Но эта сумма не делится на 8 (она равна 984068).

Пример 5. Две последовательности целых чисел (x_n) и (y_n) построены так, что $x_1 = x_2 = 10$, $y_1 = y_2 = -10$, $x_{n+2} = (x_{n+1} + 1)x_n + 1$, $y_{n+2} = (y_{n+1} + 1)y_n + 1$ при всех натуральных n . Возможно ли при каких-нибудь k и l равенство $x_k = y_l$?

Решение. Попробуем подобрать модуль t таким образом, чтобы обе последовательности были по этому модулю постоянны, то есть равны соответственно 10 и -10 . Если x_n , x_{n+1} и x_{n+2} равны 10 по модулю t , то по модулю t равны числа 10 и $(10+1)10+1=111$. Следовательно, в качестве t нужно взять число 101. Легко убедиться, что по этому модулю последовательность (y_n) также окажется постоянной и равной -10 . Но 10 и -10 не равны по модулю 101. Следовательно, равенство $x_k = y_l$ невозможно.

Задачи

7. Найдите все простые числа p , для которых число $2p^4 - p^2 + 16$ является квадратом целого числа.

8. Найдите все натуральные n , для которых число $3^n + 55$ является квадратом целого числа.

9. Натуральное число n таково, что число $n^2 + 1$ десятизначное. Докажите, что в записи этого десятизначного числа встречаются две одинаковые цифры.

10. Натуральное число n таково, что число $n^{n+1} + (n+1)^n$ делится на 3. Докажите, что $n-1$ делится на 6.

11. Докажите, что куб целого числа равен 0, 1 или -1 по модулю 7.

12. Докажите, что уравнение $15x^3 + 13y^3 = 101$ не имеет решений в целых числах.

13. Докажите, что при $n > 2$ число $1! + 2! + 3! + \dots + n!$ нельзя представить в виде m^k , где m, k — натуральные числа, $m > 3$.

Заметим в заключение, что сферой применения рассуждений «по модулю» являются, разумеется, не только олимпиадные задачи. Глубокий анализ идеи, на которой основаны эти рассуждения, привел к разработке методов, позволивших решить ряд проблем теории чисел. Интересующемуся читателю мы можем порекомендовать книгу Боревича З. И. и Шафаревича И. Р. «Теория чисел» (М.: Наука, 1972).

Школа в «Кванте»



Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. Вычислите:

$$\frac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{7}} + \frac{2}{\sqrt{10}+\sqrt{8}} - \frac{3}{\sqrt{10}-\sqrt{7}}$$

2. а) Диагонали выпуклого четырехугольника разбивают его на 4 треугольника, площади которых равны S_1, S_2, S_3, S_4 (рис. 1). Докажите, что $S_1 S_3 = S_2 S_4$.

б) В трапеции $ABCD$ проведены диагонали (рис. 2). Известно, что $S_{BOC} = S_1, S_{AOD} = S_2$. Найдите S — площадь треугольника ABO .

3. Переход из порта A в порт B длится 15 суток. Каждый день в 12 часов дня из A в B и из B в A выходит по пароходу. Сколько пароходов, идущих из B в A , встретит в открытом море каждый пароход, идущий из A в B ?

4. Докажите, что в любом треугольнике

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c},$$

где r — радиус вписанной в треугольник окружности, h_a, h_b, h_c — его высоты.

5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + 2y + 1 = 0, \\ y^2 + 2z + 1 = 0, \\ z^2 + 2x + 1 = 0. \end{cases}$$

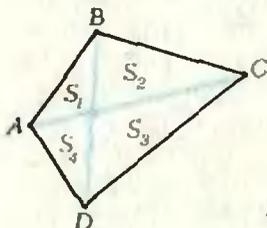


Рис. 1.

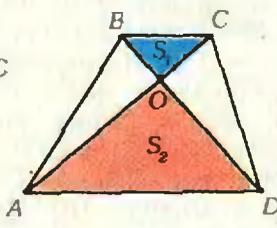


Рис. 2.

Девятый класс

6. Даны два неколлинеарных вектора \vec{a} и \vec{b} равной длины. Найдите угол между векторами $\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{a} - \vec{b}$.

7. Вычислите:

$$\left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{1984^2}\right).$$

8. Докажите иррациональность чисел: а) $\sqrt{6}$;

б) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

9. Решите уравнения:

а) $(x+1)(x+2)(x+4)(x+5) = 40$.

б) $(x+1)^4 + (x+3)^4 = 82$.

10. Могут ли: а) четная, б) нечетная, в) периодическая функции — иметь в точности n точек экстремума, если $n=0; 1; 3; 4$?

Десятый класс

11. Докажите, что если a, b, c — положительные действительные числа и $abc = 1$, что

$$a + b + c + ab + ac + bc \geq 6.$$

12. Докажите, что в сечении любого выпуклого четырехгранного угла плоскостью можно получить параллелограмм.

13. Докажите, что в любом тетраэдре (произвольной треугольной пирамиде)

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4},$$

где r — радиус вписанной в тетраэдр сферы, h_1, h_2, h_3, h_4 — его высоты.

14. Решите уравнения:

а) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 - 2x + 1 = 0$.

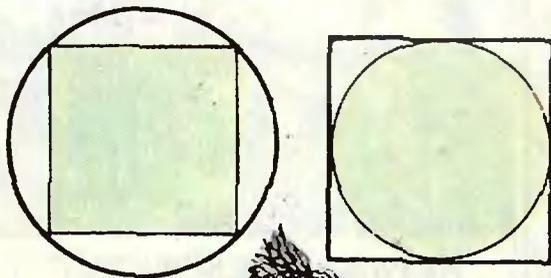
б) $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 6x + 4 = 0$.

15. В трехгранном угле все плоские углы при вершине O прямые. На ребрах этого угла выбирается по точке: A, B, C . а) Докажите, что треугольник ABC — остроугольный. б) Докажите, что точки A, B и C можно выбрать так, чтобы треугольник ABC был конгруэентен данному остроугольному треугольнику.

Публикацию подготовил Б. М. Измаев

$$\square \square : \square = \square - \square =$$

$$= \square + \square = \square \times \square$$



Задачи

1. Впишите в квадратики цифры от 1 до 9 так, чтобы все эти девять цифр были использованы и выполнялись указанные равенства.

2. Круг и квадрат имеют одинаковые площади. В круг вписали квадрат, а в квадрат вписали круг. Что больше — площадь квадрата, вписанного в круг, или площадь круга, вписанного в квадрат?

3. Какое число нужно поставить вместо знака «?» в последовательности: 7, 17, 37, 77, ?, 317, ...?

4. Найдите ключ к «тарабарской грамоте» — тайнописи, применявшейся ранее в России для дипломатической переписки: «Пайцике тсюг т «камащамлтой чмароке» — кайпонили, нмирепяшвейля ш Моллии цся цинсоракигелтой неменилти.»

5. В большом зеркале отражается ваза. Рита сдвинула зеркало на метр, и отражение сместилось на метр. Женя сдвинула зеркало на метр, а отражение сместилось на два метра. Лиля сдвинула зеркало на метр — отражение не сместилось вообще. Гриша же к зеркалу не прикасался, а отражение сдвинулось на метр. Как вы все это объясните?

Эти задачи нам предложили: Л. П. Мочалов, А. П. Савин, Н. К. Антонович, С. В. Дворянинов, Н. Ю. Цветаев



Задача в картинках

Князь Владимир призвал к себе трех богатырей.



Кто из вас поймал Соловья-разбойника?



Негоже хвастать. Поэтому мы решили, что каждый из нас будет трижды речь держать. Два раза скажет правду, а единожды слукавит. После этого сам решай, кто поймал Соловья-разбойника.



Это сделал Алеша Попович.



Это сделал не я.



Я давно хотел совершить подвиг.



Много на Руси храбрых воинов.



Я был в это время в другом месте.



Это не я сделал.



Это сделал Алеша Попович.



Илья в это время был в другом месте.



Трудная задача, но попробую её решить.



Я знаю, где жил Соловей-разбойник.

Задачник «Кванта»

Задачи

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 августа 1984 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6 — 84» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М866, М867», или «Ф878». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь. Задачи по математике этого номера предлагались на «Турнире городов» в апреле этого года.

М866—М870; Ф878—Ф882

М866. а) Во всех клетках квадрата 20×20 стоит по одному солдатику. Для какого наибольшего d можно переставить солдатиков в другие клетки так, чтобы каждый передвинулся на расстояние не меньше d ? (Расстояние измеряется по прямой между центрами старой и новой клеток; сторона клетки равна 1.)

Решите эту же задачу

б) для квадрата 21×21 ;

в) для прямоугольника $m \times n$ клеток.

С. С. Кротов

М867. На уроке танцев 17 мальчиков и 17 девочек построили двумя параллельными рядами так, что образовалось 17 пар. При этом в каждой паре рост мальчика отличается от роста девочки не более чем на десять сантиметров. Докажите, что если в каждом ряду перестроить мальчиков и девочек по росту, то по-прежнему в каждой паре мальчик и девочка будут отличаться по росту не более чем на десять сантиметров.

А. Г. Печковский

М868. Из вершин основания тетраэдра в боковых гранях проведены высоты. Докажите, что три прямые, соединяющие основания высот в каждой грани, параллельны одной плоскости. (Плоские углы при вершине — не прямые.)

И. Ф. Шарыгин

М869* Пары последовательных натуральных чисел (8, 9); (288, 289) обладают тем свойством, что каждое из этих чисел содержит любой простой множитель не менее чем во второй степени.

а) Найдите еще одну такую пару последовательных чисел.

б) Докажите, что существует бесконечно много таких пар.

А. В. Анджане

М870. По одной стороне бесконечного коридора расположено бесконечное число комнат, занумерованных по порядку целыми числами, и в каждой стоит по роялю. В этих комнатах живет некоторое конечное число пианистов. (В одной комнате может жить и несколько пианистов.) Каждый день какие-то два пианиста, живущие в соседних комнатах — k -й и $(k+1)$ -й — приходят к выводу, что они мешают друг другу, и переселяются соответственно в $(k-1)$ -ю и $(k+2)$ -ю комнаты. Докажите, что через конечное число дней эти переселения прекратятся.

В. Г. Ильичев

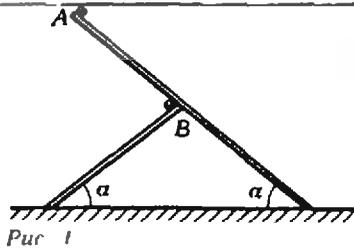


Рис. 1

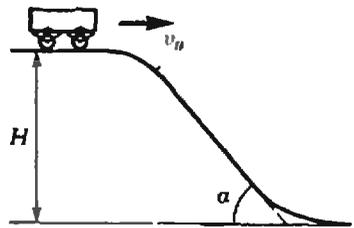


Рис. 2.

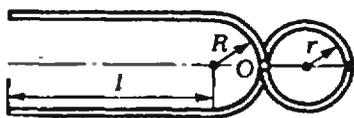


Рис. 3.

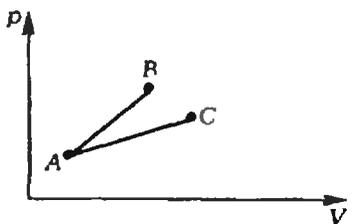


Рис. 4.

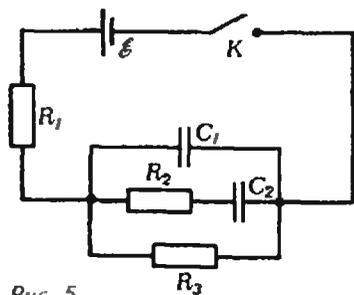


Рис. 5

Ф878. Два гладких желоба, образующих с горизонтом углы α , расположены в одной вертикальной плоскости (рис. 1). Из точки A одного желоба и из точки B другого желоба одновременно без начальных скоростей начинают соскальзывать два шарика. Время движения до горизонтальной плоскости первого шарика (из точки A) — t_1 , второго — t_2 . Через какое время после начала движения шариков расстояние между ними было наименьшим?

П. Шихалиев

Ф879. Вагон массы M , установленный на рессорах с жесткостью k , катится по горизонтальному участку пути со скоростью v_0 . После прохождения прямолинейного наклонного участка пути с перепадом высот H , составляющего угол α с горизонтом (рис. 2), вагон приобретает скорость v_x . Определить значение v_x , пренебрегая трением в колесах. Считать, что период колебаний вагона на рессорах много меньше времени прохождения наклонного участка пути и много больше времени прохождения скруглений, сопрягающих наклонный и горизонтальные участки пути; рессоры «пружинят» только в направлении, перпендикулярном плоскости рельсов.

И. П. Крылов

Ф880. Клещи состоят из двух одинаковых частей, скрепленных осью в точке O (рис. 3). Какова сила, действующая на ось, если свободные концы клещей сжимают с силой F ? Трение в оси отсутствует.

Л. Г. Маркович

Ф881. Над газом совершают два тепловых процесса, нагревая его из одного и того же состояния до одной и той же конечной температуры. На p — V -диаграмме процессы изображаются прямыми линиями (рис. 4). При каком из процессов газу сообщается большее количество тепла?

А. И. Буздин, С. С. Кротов

Ф882. В схеме, приведенной на рисунке 5, $R_1 = R_2 = R_3 = R$, $C_1 = C_2 = C$. Определить величину тока через источник с ЭДС \mathcal{E} а) в первый момент времени после замыкания ключа K ; б) спустя большой промежуток времени.

С. К. Строков

Problems

M866—M870; P878—P882

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the

M866. a) A toy soldier stands in each little square of a 20 by 20 square. For what largest d can we interchange the soldiers so that each is moved a distance no less than d ? The distance is the one between the centres of the corresponding little squares, whose sides are 1. Solve the same problem

- b) for a 21 by 21 square;
- c) for an m by n rectangle.

S. S. Krotov

problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than August 31st, 1984, to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words „KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). The mathematics problems in this issue are taken from the 1984 Inter-city Math Tournament („Turnir gorodov").

M867. In a ballroom dance class 17 boys and 17 girls are lined up in parallel rows so that 17 couples are formed. It so happens that the difference in height between the boys and girls in all the couples is not more than 10 cm. Prove that if the boys and the girls are placed in each line in order of decreasing height, then the height difference in each of the newly formed couples will still be less than 10 cm.

A. G. Pechkouski

M868. Six altitudes are constructed from the three vertices of the base of a tetrahedron to the opposite sides of the three lateral faces. Prove that all three straight lines joining the base points of the altitudes in each lateral face are parallel to a certain plane. (The planar angles at the summit are not right angles.)

I. F. Sharygin

M869*. The two pairs of consecutive natural numbers (8, 9), (288, 289) possess the following property: each of them contains each of its prime factors to a power no less than 2.

a) Find one more pair of consecutive numbers with that property.

b) Prove that there are infinitely many such pairs.

A. V. Andjans

M870*. An infinite (in both directions) sequence of rooms is situated on one side of an infinite hallway. The rooms are numbered by successive integers and each contains a grand piano. A finite number of pianists live in these rooms. (There may be more than one of them in some of the rooms.) Every day some two pianists living in adjacent rooms (the k -th and $(k+1)$ -st) decide that they interfere with each other's practice — they move to the $(k-1)$ -st and $(k+2)$ -nd rooms respectively. Prove that these moves will cease after a finite number of days.

V. G. Il'ichev

P878. Two smooth troughs, forming angles equal to α with the horizon, are in the same vertical plane (see figure Рис. 1). From the point A in one trough and the point B in the other, two small ball bearings simultaneously begin sliding down. The first (from A) reaches the horizontal plane in time t_1 , the second — in time t_2 . At what time after they start will the distance between them be minimal?

P. Shikhaltev

P879. A wagon of mass M , with a suspension on springs of elasticity k , rolls along a horizontal stretch of the railroad with velocity v_0 . After going through a rectilinear downgrade (of angle α with the horizon) where it loses the height H (see figure Рис. 2), the wagon acquires the velocity v_x . Determine v_x , assuming friction in the wheels to be negligible. You can suppose that the period of oscillation of the wagon on its springs is much less than the time it takes to roll down the downgrade and much more than the time it takes to pass over the curved parts of the rails joining the horizontal and inclined stretches; the

springs "work" only in the direction perpendicular to the plane of the rails.

I. P. Krylov

P880. A pair of pliers consists of two identical parts, connected by an axis at the point O (see figure Рис. 3). What is the force acting on the axis when the ends of the handles are pressed together with the force F ? The axis is friction-free.

L. G. Markovich

P881. Two different heating processes are carried out on the same gas, bringing it from the same initial state to the same terminal temperature. The processes are represented by straight lines on the p - V -diagram (see figure Рис. 4). In which of the two processes more heat is communicated to the gas?

I. J. Buzdin, S. S. Krotov

P882. On the circuit shown on figure Рис. 5, $R_1 = R_2 = R_3 = R$, $C_1 = C_2 = C$. Determine the current through the source of EMF \mathcal{E} a) at the initial moment, when the switch K is turned on; b) a long time later.

S. K. Strokou

Решения задач

M851 — M855; Ф862 — Ф866

M851. Длина стороны квадрата $ABCD$ равна 1. На сторонах AB и AD выбраны точки P и Q так, что периметр треугольника APQ равен 2. Доказать, что $\widehat{PCQ} = 45^\circ$.

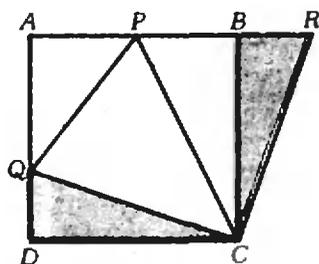


Рис. 1.

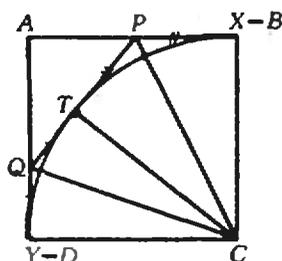


Рис. 2.

Приведем два решения задачи.

Первое решение. Повернем треугольник CDQ вокруг точки C на 90° так, чтобы сторона CD совместилась с CB ; пусть точка Q при этом повороте перейдет в R (рис. 1). Очевидно, что точка R лежит на продолжении AB , $|BR| = |DQ|$, $|CR| = |CQ|$, $\widehat{QCR} = 90^\circ$. В треугольниках CQP и CRP сторона CP — общая, стороны CQ и CR равны; докажем, что и третьи стороны PQ и PR тоже равны. По условию,

$$|PQ| + |AP| + |QA| = |AB| + |AD|,$$

$$\text{но } |AD| = |DQ| + |QA| = |BR| + |QA|,$$

поэтому

$$|PQ| + |AP| + |QA| = |AP| + |PB| + |BR| + |QA| = |PR| + |AP| + |QA|,$$

то есть $|PQ| = |PR|$.

Итак, треугольники CQP и CRP конгруэнтны, следовательно, $\widehat{QCP} = \widehat{RCP} = \widehat{QCR}/2 = 45^\circ$.

Второе решение. Рассмотрим окружность, касающуюся продолжений катетов AP и AQ треугольника APQ (в точках X и Y) и гипотенузы PQ (в точке T) — см. рис. 2. (Для построения этой окружности достаточно провести биссектрисы углов DQP и BPQ — они пересекутся в ее центре. Отметим, что такая окружность называется *внеписанной* в треугольник APQ .) По свойству касательных $|PX| = |PT|$, $|QY| = |QT|$ и $|AX| = |AY|$. Следо-

вательно,

$$|AX| + |AY| = (|AP| + |PT|) + (|AQ| + |QT|) = \\ = |AP| + |AQ| + |PQ| = 2,$$

то есть $|AX| = |AY| = 1$ или $X=B$, $Y=D$. Точка P равноудалена от прямых CB и CT ($|PB| = |PT|$), поэтому CP — биссектриса угла BCT , аналогично, CQ — биссектриса угла DCT . Отсюда вытекает, что $\widehat{QCP} = \widehat{DCB}/2 = 45^\circ$.

А. Б. Ходулев



M852. Пусть x, y, z — длины сторон треугольника. Докажите, что величины

$$\left| \frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x} \right|$$

меньше а) 1; б) $1/8$.

Докажем сначала, что рассматриваемая сумма трех дробей по абсолютной величине равна их произведению. Заменяя числитель последней дроби $z-x$ на $(z-y) + (y-x)$, получим:

$$\frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x} = \\ = (x-y) \left(\frac{1}{x+y} - \frac{1}{z+x} \right) + (y-z) \left(\frac{1}{y+z} - \frac{1}{z+x} \right) = \\ = \frac{(x-y)(y-z)}{z+x} \left(-\frac{1}{x+y} + \frac{1}{y+z} \right) = \\ = \frac{(x-y)(y-z)(x-z)}{(x+y)(y+z)(z+x)}.$$

Теперь будем оценивать это произведение.

а) Поскольку x, y, z — положительные числа, справедливы неравенства $|x-y| < x+y$, $|y-z| < y+z$, $|z-x| < z+x$, поэтому

$$\left| \frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{y-z}{y+z} \cdot \frac{z-x}{z+x} \right| < 1.$$

(Для этого пункта условие, что x, y, z — длины сторон треугольника, несущественно.)

б) Длины сторон треугольника удовлетворяют следующим неравенствам: $|x-y| < z$, $|y-z| < x$, $|z-x| < y$, поэтому

$$\left| \frac{x-y}{x+y} \cdot \frac{y-z}{y+z} \cdot \frac{z-x}{z+x} \right| < \frac{zxy}{(x+y)(y+z)(z+x)} = \\ = \frac{\sqrt{xy}}{x+y} \cdot \frac{\sqrt{yz}}{y+z} \cdot \frac{\sqrt{zx}}{z+x} < \frac{1}{8}$$

(в последнем переходе мы использовали неравенство между средним геометрическим и средним арифметическим: $\sqrt{ab} \leq (a+b)/2$ при $a > 0, b > 0$).

Более подробное исследование средствами математического анализа позволяет установить точную оценку:

$$\left| \frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x} \right| < \frac{16\sqrt{2}-10\sqrt{5}}{3} \approx 0,089;$$

равенство в этой оценке достигается для вырожденного треугольника со сторонами $z=1$, $y=(\sqrt{10} + \sqrt{5} + \sqrt{2} + 1)/2$, $x=z+y$. Попробуйте получить эту точную оценку самостоятельно.

А. В. Ермилов

M853. Квадрат $ABCD$ вращается вокруг своего неподвижного центра. Найдите множество, которое описывает середина отрезка PQ , где P — основание перпендикуляра, опущенного из точки D на неподвижную прямую l , а Q — середина стороны AB .

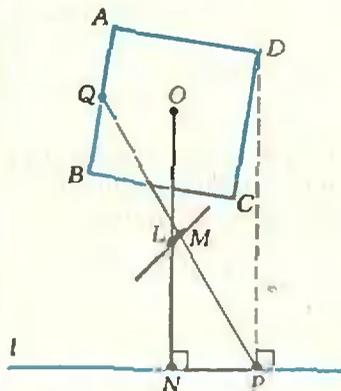


Рис. 1.

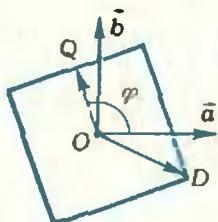


Рис. 2.

Ответ: искомое множество — это отрезок, концы которого отвечают двум положениям квадрата, таким что сторона AB параллельна прямой l . Длина его равна половине диагонали квадрата, его середина совпадает с серединой перпендикуляра, опущенного из центра квадрата на прямую l и он составляет угол 45° с прямой l (рис. 1).

Ответ можно угадать, рассмотрев несколько положений квадрата, а потом обосновать традиционными геометрическими средствами. Однако здесь перед нами тот, не столь уж частый случай, когда общность и «автоматизм» векторного решения искупают его некоторую неуклюжесть.

Пусть N — проекция центра квадрата O на прямую l , L — середина отрезка ON , M — середина PQ (рис. 1). Тогда

$$\vec{LM} = \vec{LO} + \vec{OQ} + \vec{QM},$$

$$\vec{LM} = \vec{LN} + \vec{NP} + \vec{PM}.$$

Складывая эти равенства и деля сумму пополам, получим

$$\vec{LM} = \frac{1}{2} (\vec{OQ} + \vec{NP}).$$

Рассмотрим вектор \vec{a} длины $|OA|$, коллинеарный прямой l , и перпендикулярный ему вектор \vec{b} той же длины. Ясно, что при повороте на угол α вектор \vec{a} перейдет в вектор $\vec{a} \cos \alpha + \vec{b} \sin \alpha$. Поэтому, обозначая через φ угол между векторами \vec{a} и \vec{OQ} (рис. 2), получим, что

$$\vec{OQ} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\vec{a} \cos \varphi + \vec{b} \sin \varphi),$$

$$\vec{OD} = \vec{a} \cos(\varphi - 135^\circ) + \vec{b} \sin(\varphi - 135^\circ),$$

а поскольку \vec{NP} — проекция \vec{OD} на прямую l ,

$$\vec{NP} = \vec{a} \cos(\varphi - 135^\circ) = \frac{\vec{a}}{\sqrt{2}} (\sin \varphi - \cos \varphi).$$

Следовательно, $\vec{LM} = (\vec{a} + \vec{b}) \sin \varphi / 2\sqrt{2}$. Отсюда и вытекает приведенный выше ответ, так как при изменении φ от 0° до 360° величина $\sin \varphi$ меняется в пределах от -1 до 1 .

Я. Табов

M854. На переговорном пункте установлены автоматы для размена серебряных монет достоинством 10, 15 и 20 копеек, действующие так, как показано на рисунке. У Пети было 1 руб. 25 коп. серебряными монетами и он все их разменял в автоматах на медь. Вася, посчитав сколько каких монет стало у Пети, сказал: — А я знаю, какие у тебя были серебряные монеты! Узнайте это и вы.

Ответ: 11 монет достоинством 10 копеек и одна — 15 копеек.

Заметим, что две монеты по 15 коп. размениваются так же, как монета 20 коп. и монета 10 коп. А поскольку Вася сумел однозначно восстановить первоначальный набор монет у Пети, в этом наборе было не более одной монеты 15 коп., а значит, была ровно одна такая монета, потому что общая сумма 125 коп. не делится на 10; кроме того, в этот набор не могли входить одновременно монеты по 10 коп. и 20 коп. Следовательно, он мог быть только таким, как указано в ответе (125—15=110 не делится на 20).



Остается еще доказать, что указанный набор можно восстановить по результатам размена. Действительно, среди меди имеется только одна монета достоинством 1 коп., поэтому в исходном наборе все монеты, кроме одной, должны быть десятикопеечными, а оставшаяся, очевидно, может быть только пятнадцатикопеечной.

Б. И. Бегун

M855. Можно ли жесткий правильный тетраэдр с ребром 1 протаскать сквозь обруч диаметра а) 1; б) 0,95; в)* 0,9; г) 0,85?

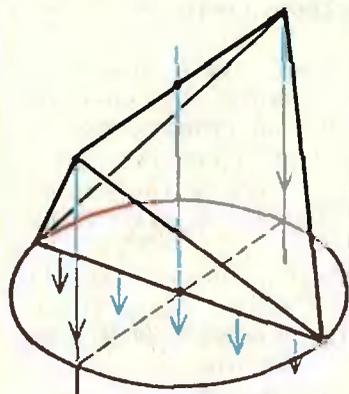


Рис. 1.

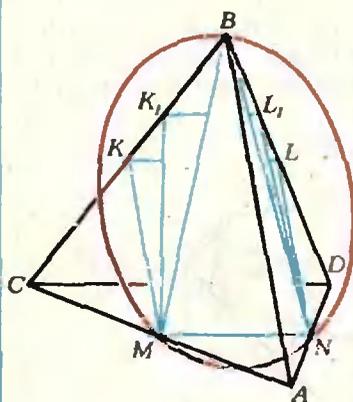


Рис. 2.

а) Ответ: можно. Для этого располагаем тетраэдр так, чтобы прямая, проходящая через середины двух его скрещивающихся ребер, была перпендикулярна плоскости окружности и проходила через ее центр (рис. 1).

б) Ответ: можно. Покажем, что тетраэдр можно протаскать сквозь окружность диаметра $3/\sqrt{11} \approx 0,905 < 0,95$; это диаметр окружности, проходящей через вершину тетраэдра и середины двух ребер основания.

Наденем такую окружность на вершину A тетраэдра $ABCD$ и продвинем ее так, чтобы она прошла через вершину B и середины M и N ребер AC и AD (рис. 2). После этого будем поворачивать окружность вокруг оси MN за вершину B . Плоскость окружности будет пересекать тетраэдр по трапеции $MNLK_1$. Диаметр окружности, описанной около этой трапеции, равен $|NK_1|/\sin \angle MMK_1$; нетрудно подсчитать, что при вращении он уменьшается ($|NK_1|$ уменьшается, а $\sin \angle MMK_1$ растет). Поэтому окружность можно поворачивать беспрепятственно, пока она не попадет в плоскость $MNLK$, где K и L — середины ребер BC и BD . Теперь ее можно снять с тетраэдра через ребро CD точно так же, как мы надели ее через AB (осью вращения, аналогичной MN , при этом будет прямая MK или NL).

в) Ответ: можно. Поступаем примерно так же, как в случае б), но точки M и N берем на расстояниях $|AM| = |AN| = 1/3$ от вершины A (на тех же ребрах). Тогда диаметр окружности, описанной около треугольника BMN , равен $14/9\sqrt{3} \approx 0,898 < 0,9$. Последовательность протаскивания чуть-чуть изменяется: после того как в результате вращения вокруг MN плоскость окружности станет параллельной ребру AB , окружность нужно параллельно перенести так, чтобы она коснулась ребер CA и CB в точках,

отстоящих от вершины C на расстояние $1/3$, а затем «обратным порядком» снимать окружность через CD .

г) Ответ: нельзя. Равносторонний треугольник со стороной 1 нельзя протаснуть сквозь окружность, диаметр которой меньше высоты этого треугольника, то есть меньше $\sqrt{3}/2 > 0,85$. Но тогда тем более сквозь окружность диаметра $0,85$ нельзя протаснуть тетраэдр, все грани которого — такие равносторонние треугольники.

В. В. Производов

От редакции. После того как эта задача была подготовлена к печати и независимо от этого, она появилась и в только что вышедшей в серии Библиотечка «Квант» книге И. Ф. Шарыгина «Задачи по геометрии (стереометрия)» (М., 1984, задача 261). Там же приводится вычисление диаметра наименьшей окружности, сквозь которую можно протаснуть тетраэдр с ребром длины 1 . Этот диаметр примерно равен $0,896$; протаскивание осуществляется по тому же принципу, что в решении задачи в).



Ф862. Линза с фокусным расстоянием F и диаметром d вставлена в отверстие такого же диаметра в экране из светопоглощающего материала ($d/F < 2$). Экран расположен так, что оптическая ось линзы совпадает с биссектральной плоскостью и перпендикулярна ребру двугранного прямого угла (рис. 1). Грани угла посеребрены. Расстояние от ребра угла до фокуса линзы равно a ($a > F$). Экран освещается широким пучком, параллельным оси линзы. Какая доля светового пучка, отраженного от зеркал, выйдет наружу, пройдя через линзу? На каком расстоянии от линзы эти пучки дадут изображение?

Пучок лучей, прошедших через линзу, собирается в ее фокусе (рис. 2). Лучи, идущие из фокуса, падают на зеркала под тупыми углами (так как $d/F < 2$). Поэтому после первого отражения от одного из зеркал лучи падают на второе зеркало. После отражения от двух зеркал все лучи (весь световой поток) падают на экран с линзой.

Для линзы источником этих лучей является мнимое изображение S фокуса линзы, создаваемое зеркальными гранями угла на расстоянии $2a + F$ от линзы. Сквозь линзу наружу проходят лишь лучи, лежащие внутри телесного угла Ω (на рисунке 2 показаны лучи, ограничивающие выходящий наружу пучок).

Доля k светового потока, отраженного от зеркал и проходящего повторно через линзу, равна отношению светового потока, распространяющегося внутри телесного угла Ω , к световому потоку, отраженному от зеркал. Но световой поток, распространяющийся внутри телесного угла Ω , равен световому потоку, входящему в линзу внутри пучка диаметра δ (рис. 2), а световой поток, отраженный от зеркал, равен всему световому потоку, входящему в линзу, то есть световому потоку внутри

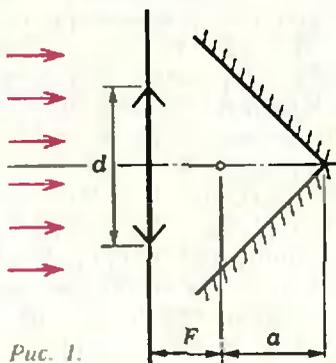


Рис. 1.

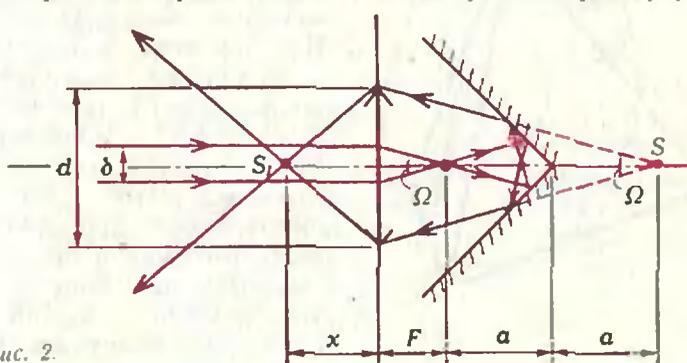


Рис. 2.

пучка диаметра d . Следовательно,

$$k = \left(\frac{\delta}{d}\right)^2.$$

Каждый прошедший через линзу луч после двукратного отражения от зеркал меняет свое направление на обратное. Следовательно (см. рис. 2),

$$\frac{\delta}{d} = \frac{F}{F+2a} \quad \text{и}$$

$$k = \left(\frac{F}{F+2a}\right)^2.$$

Действительное изображение S_1 источника S , создаваемое линзой, находится на главной оптической оси линзы. Расстояние x от S_1 до линзы определяется по формуле линзы:

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{F+2a} + \frac{1}{x} \Rightarrow x = \frac{F(F+2a)}{2a}.$$

А. А. Лапидес

Ф863. В конической лунке с углом 2α при вершине прыгает шарик, упруго отражаясь от стенки лунки. Точки соударения шарика со стенкой лежат на одной и той же высоте (рис. 1); время от удара до удара постоянно и равно T . Чему равна средняя угловая скорость движения шарика вокруг оси лунки, если максимальная скорость шарика v лежит в диапазоне от $\frac{1}{2}gT$ до $\frac{gT}{2\sin\alpha}$?

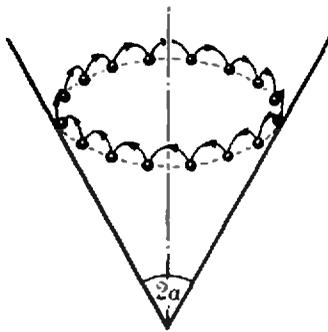


Рис. 1.

На рисунке 2 изображены: 1 — плоскость, в которой лежат векторы скоростей падающего и отраженного шарика, 2 — горизонтальная плоскость, 3 — плоскость, касательная к поверхности лунки в точке удара. Время от удара до удара будет оставаться постоянным только в том случае, когда плоскость 1 будет перпендикулярна плоскости 3, а угол φ — угол между вектором скорости шарика сразу же после удара и горизонтальной плоскостью — будет таким, что $\sin\varphi = gT/2v$. В этом случае $\cos\gamma$ (γ — половина угла между проекциями скоростей шарика до и после удара на горизонтальную плоскость) можно определить по формуле

$$\cos\gamma = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}\alpha} = \left(\operatorname{tg}^2\alpha \cdot \left(1 - \frac{g^2T^2}{4v^2}\right)\right)^{-1/2}$$

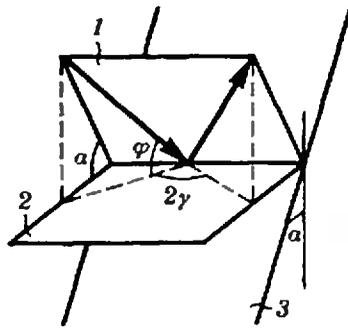


Рис. 2.

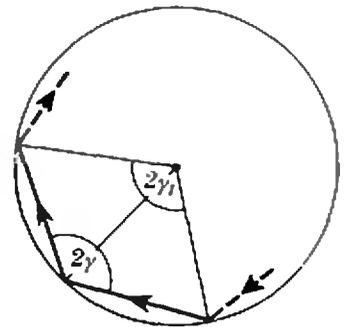


Рис. 3.

Но $\cos\gamma = \sin\gamma_1$ (рис. 3; $2\gamma_1 = (\pi - 2\gamma)$ — угол поворота плоскости движения шарика вокруг оси лунки за время T). Значит, средняя угловая скорость шарика равна

$$\bar{\omega} = \frac{2}{T} \arcsin \left(\operatorname{tg}^2\alpha \cdot \left(1 - \frac{g^2T^2}{4v^2}\right)\right)^{-1/2}$$

О. Я. Савченко

Ф864. Мальчик медленно поднимается на снежную горку и

Работа A по поднятию санок складывается из двух частей: работы против силы тяжести $A_1 = mgH$

тщит за собой на веревке санки. Веревка все время параллельна касательной к горке в той точке, в которой находится мальчик. Вершина горки расположена на высоте H и на расстоянии l от ее основания (рис. 1). Какую работу совершит мальчик при поднятии санок на горку? Масса санок m , коэффициент трения санок о снег μ .

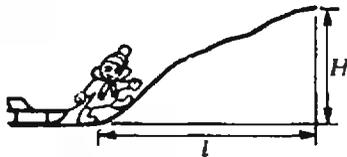


Рис. 1.

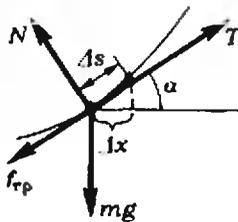


Рис. 2.

Ф865. Оцените размер атома ртути, если известны: σ — коэффициент поверхностного натяжения ртути (в единицах $\frac{\text{энергия}}{\text{площадь}}$), ρ — плотность ртути, r — удельная теплота парообразования ртути.

и работы против силы трения A_2 . Чтобы найти A_2 , рассмотрим небольшое перемещение Δs санок вдоль горки. Пусть касательная к горке в этом месте составляет угол α с горизонтом (рис. 2). Поскольку подъем медленный и сила натяжения веревки T направлена вдоль касательной (вдоль Δs), можно считать, что санки все время находятся в равновесии, и

$$f_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg \cos \alpha.$$

Работа ΔA_2 , совершаемая против силы трения при перемещении на Δs , равна

$$\Delta A_2 = \mu mg \cos \alpha \cdot \Delta s.$$

Как видно из рисунка 2, $\Delta s \cdot \cos \alpha = \Delta x$ — перемещение санок в горизонтальном направлении. Так что ясно, что результирующая работа против силы трения при поднятии санок на высоту H равна

$$A_2 = \mu mgl,$$

так как l — суммарное горизонтальное перемещение санок при подъеме.

Таким образом, полная работа, совершаемая мальчиком, равна

$$A = A_1 + A_2 = mgH + \mu mgl = mg(H + \mu l)$$

и не зависит от профиля горки.

А. И. Буздин

При плотной упаковке молекул (что вполне справедливо для жидкостей) каждая молекула имеет 12 соседей. (Покажите это самостоятельно. Подсказка: рассмотрите телесные углы, в которых видны из центра молекулы ее соседи.) Из этих 12 молекул 6 окружают ее кольцом, а еще по три молекулы находятся с каждой стороны от плоскости кольца. Когда мы создаем плоскую свободную поверхность, мы отрываем от молекулы по 3 молекулы из 12, то есть разрываем четверть всех связей.

Итак, создавая свободную поверхность площади S , мы совершаем работу

$$A = \sigma S = \frac{1}{4} r m = \frac{1}{4} r V \rho = \frac{1}{4} r S d \rho,$$

где d — диаметр молекулы («высота» одного слоя). Отсюда

$$d = \frac{4\sigma}{r\rho}.$$

Для ртути $\sigma = 0,47$ Дж/м², $\rho = 13,6 \cdot 10^3$ кг/м³, $r = 2,82 \cdot 10^5$ Дж/кг, и $d \approx 5 \cdot 10^{-10}$ м.

Оценим диаметр молекулы стандартным способом — по объему, занимаемому 1 молекул: на 1 молекулу приходится объем

$$v = \frac{\mu}{\rho N_A} = \frac{1}{6} \pi d^3,$$

откуда

$$d = \left(\frac{6\mu}{\rho N_A} \right)^{1/3}$$

Для ртути $\mu = 0,2$ кг/моль, и $d \approx 3,6 \cdot 10^{-10}$ м, то есть наша оценка по энергии связей вполне разумна.

Подумайте, годится ли такой способ оценки (по энергии связей) для многоатомных молекул.

Ю. А. Родионов, А. Я. Яковлев

Ф866. Электролитическая ванна подключена через идеальный диод к сети переменного напряжения (рис. 1). Найти показание теплового амперметра (А), если известно, что за время $t=1$ ч на катоде выделяется $m=1,078$ г меди. Электрохимический эквивалент меди $k=0,33 \cdot 10^{-6}$ кг/Кл.

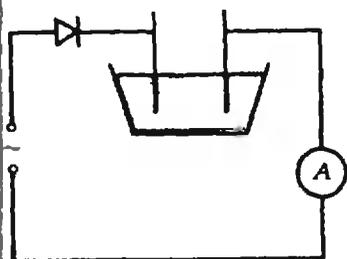


Рис. 1.

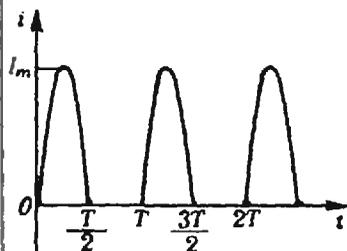


Рис. 2.

Согласно I закону Фарадея, $m=kq$, откуда

$$q = \frac{m}{k}, \quad (1)$$

где q — заряд, прошедший через электролит за время t .

На рисунке 2 показано изменение тока в цепи с идеальным диодом. Как видно из рисунка, суммарный заряд, прошедший по цепи за время t , равен $q = q_{T/2} \cdot \frac{t}{T}$, где $q_{T/2}$ — заряд, проходящий по цепи за половину периода колебаний тока в сети, равный

$$q_{T/2} = \int_0^{T/2} I_m \sin \omega t dt = -\frac{I_m}{\omega} \cos \omega t \Big|_0^{T/2} = \frac{I_m}{\pi} T.$$

Таким образом,

$$q = \frac{I_m}{\pi} T \cdot \frac{t}{T} = \frac{I_m}{\pi} t. \quad (2)$$

Из (1) и (2) находим амплитудное значение тока в сети:

$$I_m = \frac{\pi m}{kt}. \quad (3)$$

Количество тепла, выделяющееся на амперметре за время t , равно $Q = Q_{T/2} \cdot \frac{t}{T}$, где $Q_{T/2}$ — тепло, выделяющееся за половину периода изменения тока, равное

$$Q_{T/2} = \frac{I_m^2}{2} R \frac{T}{2}.$$

Следовательно,

$$Q = \frac{I_m^2}{4} R t.$$

При установившемся тепловом равновесии средняя мощность, выделяющаяся на амперметре, равна

$$\bar{p} = \frac{I_m^2}{4} R.$$

Тепловой амперметр проградуирован по действующему значению тока. Значит, показание амперметра I_A определяется соотношением

$$\bar{p} = I_A^2 R = \frac{I_m^2}{4} R \Rightarrow I_A = \frac{I_m}{2}.$$

Подставляя найденное выражение для I_m (см. (3)), находим:

$$I_A = \frac{\pi m}{2kt} = \frac{3,14 \cdot 1,078 \text{ г}}{2 \cdot 0,33 \cdot 10^{-3} (\text{г/Кл}) \cdot 3600 \text{ с}} \approx 1,43 \text{ А}.$$

Б. А. Мукушев

Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М821—М835, Ф833—Ф847, справились с задачами М821, М826, М831, М832 и Ф833, Ф834, Ф836, Ф844, Ф846. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Р. Алексеев (Ленинград) 22, 24, 25, 33; *А. Артюх* (Чернигов) 27; *А. Астрелин* (Новосибирск) 22—25, 27—30, 33, 34; *Я. Бабкин* (Петрозаводск) 24; *Л. Байрак* (Белгород) 24; *А. Барабаш* (Киев) 22, 25, 29, 33; *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) 24, 25, 27, 29, 33; *Ю. Баркаган* (Пенза) 22, 24; *М. Барон* (Ленинград) 22, 24; *А. Биргер* (Иваново) 22, 33, 35; *Г. Борщевская* (Казань) 24; *А. Ванин* (Днепропетровск) 33; *В. Васильев* (Воткинск) 22, 27, 33; *С. Велеско* (Минск) 24; *Л. Вертгейм* (Новосибирск) 27, 33; *И. Воронков* (Гатчина) 24, 33; *Б. Галицкий* (Москва) 22; *М. Гараев* (Физули) 22, 24, 25, 33, 35; *Р. Гендлер* (Ташкент) 22, 24, 25, 27, 33, 35; *М. Гордина* (Ленинград) 24; *В. Горюшкин* (Петрозаводск-Камчатский) 24; *Ю. Грабовский* (Киев) 33; *И. Григорьев* (Челябинск) 22, 24, 27, 33; *Н. Григорьева* (Рыбинск) 22, 25, 33, 34; *А. Губирев* (Фатеж) 22; *Р. Гут* (Исобильный) 27; *З. Джафаров* (с. Тьюркоба Аз. ССР) 24, 27, 29, 33, 34; *Е. Долгоборец* (Киев) 27; *Е. Доманицкая* (Ленинград) 22, 24; *Е. Дорофеев* (Ленинград) 24; *В. Журавлев* (Гайворон) 24; *Д. Земляной* (Севастополь) 22, 24, 25, 27—30, 33, 34; *Л. Зосин* (Киев) 22, 24, 25; *А. Иванов* (Петрозаводск) 24; *В. Ивлеев* (Джезказган) 33; *В. Капович* (Хабаровск) 27; *И. Карчевский* (Алма-Ата) 24; *П. Касинский* (Алма-Ата) 24, 25; *О. Козловский* (Москва) 24, 27, 33; *Д. Коломиец* (Москва) 22, 24; *К. Колотун* (Киев) 24, 34; *С. Коршунов* (Целиноград) 24, 25; *Р. Кукльер* (Париж, Франция) 33; *А. Лазарев* (Москва) 24; *М. Лев* (Свердловск) 22, 24, 25, 27—29, 33; *А. Лукьянов* (Севастополь) 24, 25, 27—30, 33, 34; *М. Макаров* (Севастополь) 22, 27—30, 33; *Т. Маливанчук* (Киев) 22—25, 33; *Д. Михов* (Толбухин, НРБ) 24, 25, 33, 35; *Е. Мишин* (Севастополь) 22, 24, 27—29; *П. Молодчик* (Киев) 27; *А. Молотков* (Ленинград) 22, 24, 25, 28, 29; *В. Назаренко* (Киев) 27; *С. Найден* (Днепропетровск) 29, 33; *П. Наумов* (Москва) 24; *В. Николаев* (Хабаровск) 22, 24; *О. Овецкая* (Донецк) 27—29; *И. Онучин* (Пермь) 24; *В. Панич* (Севастополь) 24, 25, 27—29; *Н. Панченко* (Ленинград) 22, 24; *А. Петрунин* (Ленинград) 22, 24; *С. Пиунихин* (Москва) 27—29; *М. Половинник* (Киев) 25; *Р. Полянова* (София, НРБ) 33; *К. Постригаич* (Барнаул) 33; *Е. Розаль* (Ровно) 24; *Д. Рубленко* (Хмельницкий) 24, 34; *Г. Самадашвили* (Тбилиси) 24, 29; *И. Сандлер* (Москва) 22; *А. Сергиенко* (Ленинград) 24; *Р. Сибилев* (Ленинград) 33; *И. Слуцкий* (Алма-Ата) 25, 27, 28; *И. Стойциу* (Белград, СФРЮ) 33; *И. Стоянов* (Дмитровград, НРБ) 27; *С. Струков* (Воронеж) 33—35; *Р. Суник* (Киев) 27; *Д. Тананко* (Ворошиловград) 22; *М. Тейтель* (Киев) 22, 24, 25, 27—30, 33; *Д. Терешин* (Саратов) 24, 25, 27—30; *С. Триунихин* (Москва) 22, 24; *Ю. Факторович* (Москва) 33; *Д. Федотов* (Новокузнецк) 27, 30,

33; *Е. Фикк* (Ленинград) 23, 24; *М. Фоменко* (Алма-Ата) 28; *М. Холмянский* (Москва) 24; *В. Хрычиков* (Севастополь) 22, 24, 25, 27—30, 33; *С. Цветков* (Киев) 24; *С. Цонев* (София, НРБ) 33; *С. Чернышев* (Александров) 22, 24; *С. Чичинский* (Днепропетровск) 33; *Т. Шаглеев* (Севастополь) 24, 27; *А. Шанин* (Москва) 24; *П. Шинков* (Пушино) 24, 25; *В. Щепинов* (Севастополь) 24, 28; *Л. Эрдьш* (Будапешт, ВНР) 22, 24, 25, 27, 29, 33—35; *П. Этинггоф* (Киев) 22, 24, 25, 27—29; *Е. Юдицкий* (Киев) 24, 27; *Г. Юшин* (Воронеж) 24, 25; *А. Ярин* (Севастополь) 24, 27—30, 33, 34.

Физика

А. Абанов (Красноярск) 35, 37, 38, 40, 42, 45, 47; *В. Аносов* (Киев) 35, 37—39, 41—43, 45, 47; *В. Апальков* (Харьков) 35, 37—41, 43; *В. Байбинов* (Новосибирск) 35, 37, 43, 45, 47; *А. Барабаш* (Киев) 43, 47; *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) 33—47; *А. Башлаков* (Москва) 38, 41; *А. Белопольский* (Киев) 43; *И. Берхин* (Донецк) 35, 38, 41, 42; *Е. Беспалов* (Курган) 35, 39, 41—43, 45; *В. Бражников* (Запорожье) 35, 37, 39, 40, 45; *А. Брезгунов* (Новосибирск) 43, 45, 47; *Н. Бурдейная* (Винница) 35; *В. Вергелюк* (Винница) 35; *Л. Вертгейм* (Новосибирск) 35, 43; *О. Гаврилов* (Киев) 35, 38, 39, 43, 45; *В. Глаголев* (Тула) 35; *П. Глазырин* (Воткинск) 41—43; *О. Голицкий* (Тамбов) 35, 37—39, 41—43, 45; *Ю. Гордиенко* (Винница) 38, 41; *Ю. Грабовский* (Киев) 45; *С. Гребенчиков* (п. Черноголовка Московской обл.) 35, 37—43; *И. Григорьев* (Челябинск) 35, 37, 38, 40—43, 45; *М. Гринберг* (Красноярск) 35, 39—42; *М. Демидова* (Винница) 35; *П. Докучаев* (Хабаровск) 43; *Е. Долгоборец* (Киев) 39; *Г. Долгопятов* (Донецк) 35, 37—39, 41, 42, 45; *С. Дубоик* (Брест) 39, 43; *С. Дудко* (Донецк) 39, 43; *Д. Ермошин* (Москва) 35, 38, 39, 42, 43, 47; *О. Ефремов* (Воронеж) 35, 37—40; *С. Загоруйко* (Винница) 35, 37; *С. Зинченко* (Краматорск) 35, 37—39, 42; *М. Имас* (Донецк) 35, 37; *Б. Иричанин* (Белград, СФРЮ) 35; *М. Иотов* (София, НРБ) 35, 37; *И. Калиновский* (Киев) 35, 37—39, 42, 43, 45; *В. Карасев* (Алма-Ата) 35, 38—40, 43; *А. Кириченко* (Пермь) 43, 45, 47; *М. Козлов* (Москва) 45, 47; *М. Кояев* (Ленинград) 43; *С. Кравичев* (Киев) 35, 37—39, 41, 42, 45; *А. Крапивин* (Киев) 35; *В. Краснов* (Чебоксары) 37, 41, 43; *А. Крюченков* (Ульяновск) 43, 45; *Д. Кузнецов* (Куйбышев) 39, 41, 43, 45; *Д. Куцлов* (Москва) 33—47; *Д. Кузютин* (Алма-Ата) 43; *Н. Кухаркин* (Москва) 37; *С. Лауриновичус* (Мажейкяй) 37—39, 41—43, 45; *И. Левин* (Донецк) 37; *Ю. Литвиненко* (Воронеж) 43; *Д. Лунц* (Саратов) 35, 38, 39, 42, 43, 45; *П. Лушиников* (Москва) 45; *Д. Макаров* (п. Черноголовка Московской обл.) 33—47; *К. Махарчук* (Киев) 38; *Т. Маливанчук* (Киев) 35, 39, 42, 47; *Г. Макметов* (Москва) 47; *Л. Маркович* (Минск) 35, 37; *О. Маров* (Киев) 43; *А. Михеев* (Кимры) 35, 39, 42, 43, 47; *С. Молчанов* (Саратов) 35, 37, 43, 45; *А. Монахов* (п. Перевоз Горьковской обл.) 45; *К. Моссейчев* (Зеленоград) 39, 43, 45; *С. Мягчилов* (Одесса) 39; *А. Найфонов* (Апатиты) 43; *Г. Николаев* (Горький) 43; *С. Никоненко* (Киев) 35, 37—39, 42, 43, 47; *А. Онуфриев* (Москва) 43; *Е. Пархименко* (Киев) 37—43, 45; *Д. Пастухов* (Витебск) 35, 38—40; *А. Петренко* (Винница) 35, 37—39, 41—43, 45, 47; *И. Пильников* (Тамбов) 38, 39; *А. Погорелов* (Алма-Ата) 38, 40, 43, 45; *М. Половинник* (Киев) 40, 45, 47; *А. Поляков* (Златоуст) 39; *Э. Преображенский* (Краснодар)

(Окончание см. на с. 47)

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Микроистории

История, рассказанная В. Вайскопфом о Н. Боре

Однажды коллега-физик зашел в кабинет к Нильсу Бору и к своему удивлению увидел подкову, прибитую к двери.

— Профессор, — неужели Вы верите в это?

— Нет, конечно, — спокойно отвечал Бор, — но говорят, подкова помогает и тем, кто в нее не верит...

(Шелест В. П. *Новый круг*. М.: Атомиздат, 1978.)

Выкладывайте начистоту

Великий Лаплас присутствовал на заседании Парижской Академии наук 18 сентября 1820 г., когда Ампер впервые продемонстрировал электродинамическое взаимодействие токов — при пропускании тока по двум проводникам они взаимно смещались. Рассказывают, что после окончания лекции, когда полная впечатлений публика уже расходилась, Лаплас остановился в дверях, дожидаясь Даниэля Колладона, ассистировавшего Амперу. Когда тот приблизился, Лаплас, отличающийся малоприятным характером и подозрительностью, хлопнул Колладона по плечу и, пристально смотря ему в глаза, сказал: «А теперь, молодой человек, признавайтесь! Ведь это вы подтачивали провод.»

(По материалам Эльзины М. *История физики*. М.: Мир, 1970.)

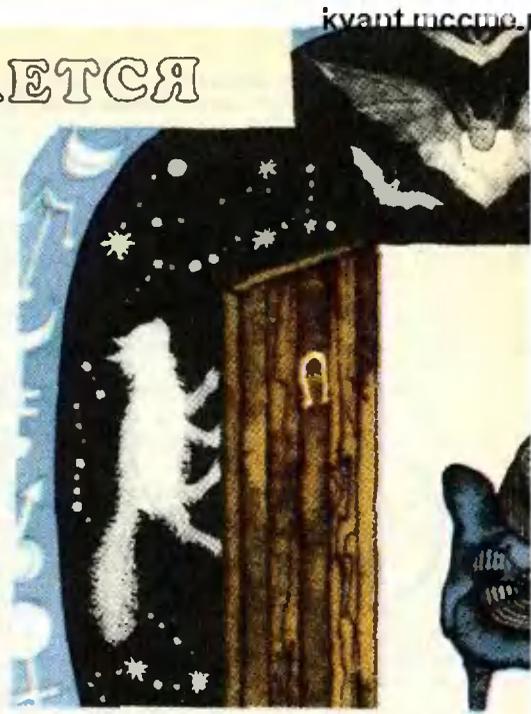
История, рассказанная И. К. Киконим

Это происходило в конце 20-х годов в Ленинграде. Киностудии вместе с группой физиков было поручено сделать научно-популярный фильм о физике. В группе физиков был и Исаак Константинович Киконин, тогда еще — молодой сотрудник Физико-технического рентгеновского института.

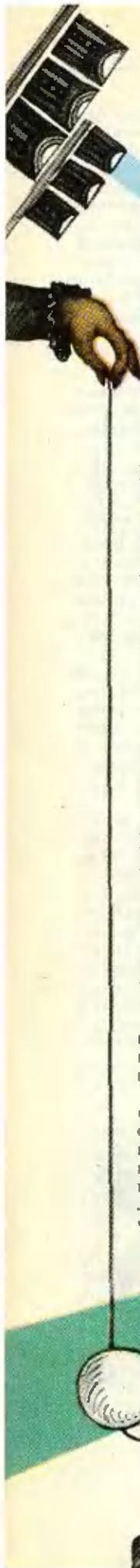
По сценарию надо было отснять опыт с отталкиванием одноименных зарядов. На репетиции взяли целлулоидный шарик, поднесли к нему наэлектризованную эбонитовую палочку — шарик исправно оттолкнулся. После этого приступили к съемке. Мотор, камера... подносят палочку к шарiku — никакого эффекта.

Тогда сценарий немного изменили. Лаборантка держала шарик на ниточке, подносила к нему палочку, а рядом стоял И. К. Киконин и незаметно подталкивал шарик. Съемка прошла блестяще.

Почему же не получился такой простой «настоящий» опыт? Дело в том, что в те годы для освещения при съемке применялись мощные дуговые лампы, испускающие ультрафиолетовые лучи, которые, ионизируя воздух, делают его проводящим ток. Понятно, что как только были включены лампы, заряды с шарика и палочки быстро стекли через проводящий воздух.



Подобные трудности встретились и в других опытах, так что в результате половина кинокадра была «настоящей», а половина — тем, что сейчас называется «комбинированной съемкой». Само интересное — когда готовый фильм показали специалистам-физикам, предупредив их, что половина опытов — поддельные, они все назвали поддельными как раз настоящие опыты. В подделанных опытах все было «как надо», и они сомнения не вызывали.



Эвольвенты

Под редакцией Д. Б. Фукса

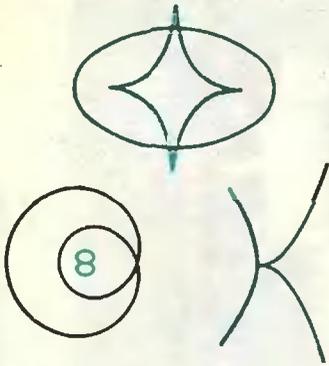


Рис. 1.

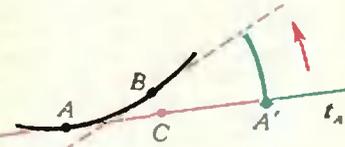


Рис. 2.

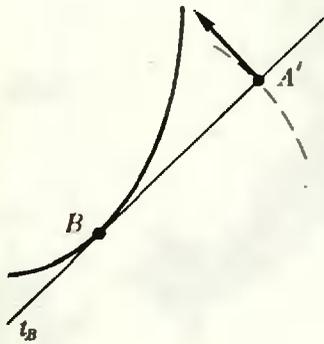


Рис. 3.

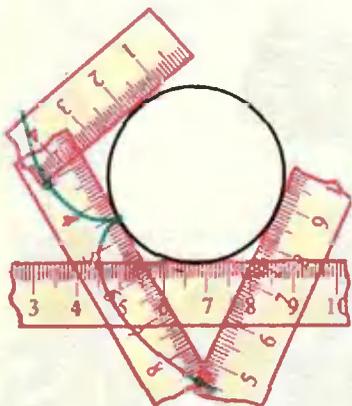


Рис. 4.

На предыдущей геометрической страничке мы подробно рассказывали об эволютах. Напомним о них то немногое, что потребуется сегодня. По гладкой кривой c на плоскости строится другая кривая — ее эволюта e . Среди замечательных свойств эволюты выделим такое: *всякая нормаль к кривой e (то есть перпендикуляр к касательной, восстановленный в точке касания) касается кривой c* . Это свойство эволюты можно принять за ее определение, что мы и делаем. В прошлый раз мы должны были построить эволюты трех кривых: эллипса, «вывернутой восьмерки» и полукубической параболы. Результаты построения всех трех эволют показаны на рисунке 1, где черная линия изображает заданную кривую, синяя — эволюту. Сегодня нас интересует обратная задача: по кривой e восстановить кривую c , эволютой которой она является. Эта кривая называется *эвольвентой* кривой e (то есть если e — эволюта кривой c , то c — эвольвента кривой e). Мы обучимся совсем простому способу построения эвольвент и увидим, что у гладкой кривой без прямолинейных кусков всегда имеется бесконечное количество эвольвент*).

Построение эвольвент. Пусть e — данная кривая, A — ее точка, t_A — касательная к кривой e в точке A . Выберем на прямой t_A точку A' (точка A' выбирается на t_A произвольно, и этот произвол определяет неоднозначность построения: возьмем другую точку — получим другую эвольвенту). Представим себе, что прямая t_A катится по кривой e без проскальзывания (то есть когда она занимает положение t_B касательной в точке B , то с B совмещается такая точка C прямой t_A , что длина отрезка CA равна длине дуги BA нашей кривой (рис. 2). Кривая, описываемая при этом качении точкой A' , и есть эвольвента.

Причина здесь проста. Поскольку прямая катится по кривой без скольжения, то скорость точки в тот момент, когда она касается кривой, равна нулю — эта точка представляет собой «мгновенный центр вращения» прямой t_B . При этом скорость любой точки на t_B , например A' , в этот момент направлена перпендикулярно t_B (рис. 3) — то есть t_B есть нормаль к траектории точки A' ; значит, эта траектория и есть эвольвента.

На практике наш способ удобнее всего применять к выпуклым замкнутым кривым. Достаточно вырезать кусок картона, граница которого имеет форму заданной кривой, положить его на лист бумаги, приложить к нему линейку и поворачивать ее вокруг куска картона, следя, чтобы она не проскальзывала. Если при этом все время держать карандаш около выбранного деления линейки, мы нарисуем на бумаге эвольвенту нашей кривой. Например, построение эвольвенты окружности показано на рисунке 4. Заметьте, что в некоторый момент эвольвента возвращается в нашу окружность под прямым углом и тут же отскакивает от нее под прямым углом — в этом месте у эвольвенты точка возврата. (С подобным явлением вы сталкивались, готовясь к предыдущей геометрической страничке, когда рисовали

*) Красивые примеры эвольвент можно посмотреть на второй странице обложки.



Рис. 5.



Рис. 6.

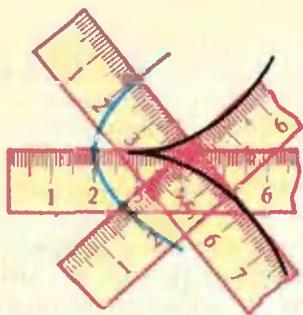


Рис. 7.

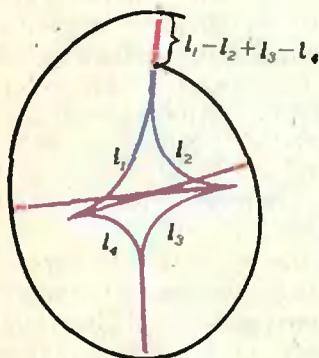


Рис. 8.

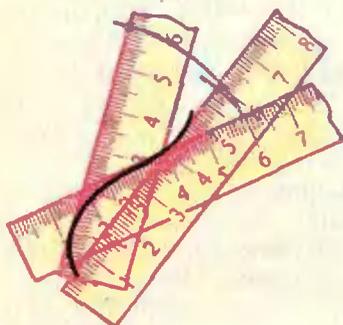


Рис. 9.

эволюту полукубической параболы; как и эвольвента окружности, полукубическая парабола своим острым клювом воззается в свою эволюту: см. рис. 1.)

Если продолжить эвольвенту окружности в любую сторону, мы получим спираль, за один виток удаляющуюся от окружности примерно на ее длину. Похожим образом устроена эвольвента любой замкнутой кривой; и частности, она не может быть замкнутой.

Наш способ построения эвольвент допускает различные выразительные интерпретации. Например, его можно представить как «способ белого бычка» (когда бычок идет-качается по доске, положенной на опору, гвоздь, вбитый в доску, описывает эвольвенту границы опоры; рис. 5) или как «способ серенького козлика» (если серенький козлик обходит дерево, к которому его привязала бабушка, и при этом все время держит веревку в натянутом состоянии, то он движется по эвольвенте границы дерева; рис. 6).

Рассмотрим эвольвенты более сложных кривых. В прошлый раз мы убедились, что эволюта гладкой кривой как правило имеет точки возврата. Поэтому естественно поинтересоваться, как устроена эвольвента кривой, имеющей точку возврата.

Как видно из рисунка 7, эвольвента в этом месте не имеет видимых особенностей. Но имеет «невидимую особенность»: расстояние от отмеченной точки линейки до точки касания после прохождения точки возврата из растущего делается убывающим (или наоборот). Легко показать (это — упражнение вам), что если замкнутая кривая имеет нечетное число точек возврата, то всякая ее эвольвента замкнута. В случае замкнутой кривой с $2k$ точками возврата обозначим через l_1, l_2, \dots, l_{2k} длины дуг, на которые точки возврата делят кривую. Если $l_1 + l_3 + \dots + l_{2k-1} = l_2 + l_4 + \dots + l_{2k}$, то все эвольвенты кривой замкнуты, в противном случае не замкнута ни одна из них (рис. 8). Например, эволюта эллипса имеет 4 точки возврата, и указанное условие выполнено. Поэтому эвольвенты этой кривой замкнуты, в том числе и сам эллипс.

Очень интересно устроены эвольвенты кривой, имеющей точку перегиба. Когда мы движемся по кривой, касательная поворачивается — по часовой стрелке или против часовой стрелки. При прохождении точки перегиба касательная изменяет направление вращения, достигая в этой точке экстремального положения. Поскольку эвольвента всегда перпендикулярна касательной, она воззается в это экстремальное положение под прямым углом и под прямым же углом от него отходит — снова точка возврата. Более внимательное рассмотрение этой точки возврата показывает, что она отличается от ранее открытых точек возврата. Именно, она острее и имеет форму клюва хищной птицы: обе ее ветви расположены по одну сторону от их общей касательной (рис. 9).

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 44)

47; С. Режук (Винница) 35, 37; М. Рудык (Винница) 35; Д. Русинов (Ленинград) 37, 42, 43, 45; М. Савченко (Белгород) 45; Н. Савыков (Москва) 35, 39, 41—43, 45, 47; Г. Самадашвили (Тбилиси) 38—42, 45; А. Самойлович (Донецк) 37; М. Самсонов (Ленинград) 35, 37, 38, 43; С. Сахарук (Брест) 43; М. Скорик (Киев) 37, 41—43, 45; М. Скоробогатов (Киев) 35, 39, 41; Л. Слободян (Коломыя) 43; А. Соловьев (Куйбышев) 35, 37—43, 45; А. Суцидин (Калининград Московской

обл.) 43, 45; А. Сурков (Ленинград) 39; В. Таргаковский (Киев) 38, 39, 41—43, 47; В. Темченко (Краматорск) 39; И. Терез (Симферополь) 37—39, 42, 45; Д. Третьяков (Винница) 35, 37—39, 41—43, 45, 47; С. Тужинский (Винница) 35; И. Федин (Омск) 37, 38, 40, 43, 45, 47; Л. Фельдман (Саратов) 35, 39, 42, 43, 45; С. Феринчук (Минск) 45, 47; Ю. Цыганков (с. Старое Дрожжаное ТАССР) 43, 45, 47; О. Черн (Минск) 38, 39, 45, 47; И. Четкин (Киев) 35—39, 41, 42; А. Чудновский (Киев) 35, 37—41, 47; А. Шагинов (Иваново) 47; И. Шендерович (Северодвинск) 35, 38, 39, 42, 47; А. Шлезберг (Киев) 39; А. Шнирман (Донецк) 37; И. Штрайх (Винница) 35; М. Яковлев (Харьков) 45; Г. Яцин (п. Черноголовка Московской обл.) 35, 37—39, 41—43.



Движение по окружности

Кандидат физико-математических наук
Ю. А. САМАРСКИЙ

Движение тел по окружности часто встречается в природе и технике. Это полеты спутников Земли и движение автомашин на закруглениях дороги, вращение шарика на нитке и движение заряженных частиц в магнитном поле, вращение деталей различных механизмов и движение самолета при выполнении летчиком «мертвой петли».

Если размеры тела много меньше радиуса окружности, тело можно считать материальной точкой. Напомним основные особенности движения материальной точки по окружности.

Как известно, скорость \vec{v} тела всегда направлена по касательной к окружности и может изменяться как по модулю, так и по направлению. Вектор ускорения тела при этом не совпадает с направлением скорости, а составляет с ней некоторый угол. Для анализа движения удобно вместо ускорения \vec{a} рассматривать две его проекции — на направление скорости (по касательной к окружности) и на направление, перпендикулярное скорости (по радиусу окружности). Первую проекцию называют касательным ускорением a_k , а вторую — центростремительным ускорением a_u (рис. 1). Касательное ускорение характеризует изменение модуля

скорости, а центростремительное — изменение направления скорости.

Модуль центростремительного ускорения в каждой точке траектории равен квадрату модуля скорости, деленному на радиус окружности: $a_u = v^2/R$. Модуль касательного ускорения зависит от характера движения тела по окружности. В частности, при равномерном движении $a_k = 0$ и полное ускорение совпадает с центростремительным, изменяя только направление скорости. В этом случае бывает удобно выразить центростремительное ускорение через угловую скорость ω или период T движения тела по окружности радиуса R : $a_u = \omega^2 R = 4\pi^2 R/T^2$.

Для тела, движущегося по окружности, так же как и для всякого движения, справедлив второй закон Ньютона: векторная сумма всех действующих на тело сил равна произведению массы тела на его ускорение. При движении по окружности тело все время остается в одной плоскости, поэтому второй закон Ньютона удобно представить системой двух скалярных уравнений, записанных для проекций всех векторов на направление вдоль радиуса окружности и перпендикулярное к нему.

Физическая природа сил, обеспечивающих движение материальной точки по заданной окружности, может быть весьма разнообразной. Покажем это на нескольких конкретных задачах. Почти все они в разные годы предлагались на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт.

Задача 1. Выезд с горки на горизонтальную плоскость представляет собой дугу окружности радиуса $R=4$ м (рис. 2). Горка гладкая, а горизонтальная плоскость шероховатая, с коэффициентом трения $\mu=0.2$. Санки, съехав

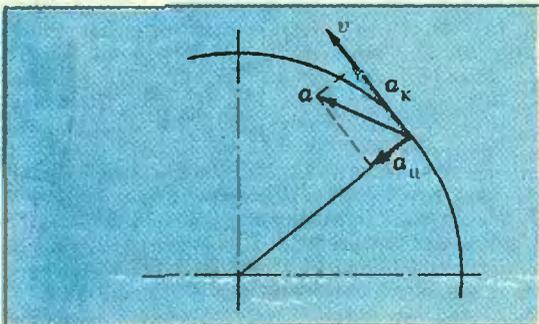


Рис. 1.

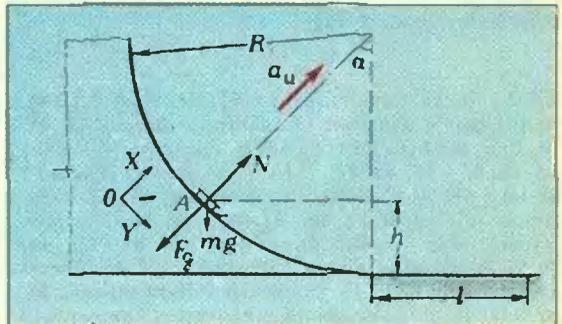


Рис. 2.

с горки, остановились на расстоянии $l=30$ м от ее конца. На какой высоте санки давили на горку с силой, в два раза превышающей по модулю их силу тяжести?

Пусть искомая высота h соответствует точке A , как показано на рисунке 2. Рассмотрим силы, действующие на санки в этой точке. Это сила притяжения к Земле (сила тяжести) $m\vec{g}$ и сила реакции горки \vec{N} . По третьему закону Ньютона сила реакции горки равна по модулю силе давления санок:

$$N = F_d = 2mg.$$

Напишем уравнение движения санок (второй закон Ньютона), приняв за положительное направление оси Ox направление центростремительного ускорения a_u :

$$N - mg \cos \alpha = ma_u.$$

Здесь $\cos \alpha = (R-h)/R$ и $a_u = v_A^2/R$. Подставляя значения N , $\cos \alpha$ и a_u , имеем

$$2mg - mg \frac{R-h}{R} = \frac{mv_A^2}{R}. \quad (1)$$

Скорость v_A можно определить из закона сохранения и превращения энергии — работа сил трения на участке l равна полной энергии санок в точке A :

$$\mu mgl = \frac{mv_A^2}{2} + mgh. \quad (2)$$

Решая уравнения (1) и (2), получим

$$h = \frac{2\mu l - R}{3} \approx 2,7 \text{ м.}$$

Задача 2. Шарик радиуса r висит на нити длины l и касается вертикально расположенного вала электродвигателя (рис. 3). Радиус вала R . При какой угловой скорости вращения «системы» шарик перестанет давить на вал?

Рассмотрим силы, действующие на шарик при небольшой угловой скорости вращения, пока шарик еще оказывает давление на вал (см. рис. 3). На него действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила натяжения нити \vec{T} и сила реакции вала \vec{N} . С увеличением угловой скорости должно расти и центростремительное ускорение шарика, что возможно только за счет уменьшения модуля силы реакции \vec{N} , поскольку силы $m\vec{g}$ и \vec{T} остаются постоянными.

При некоторой угловой скорости ω_0 взаимодействие шарика с валом прекра-

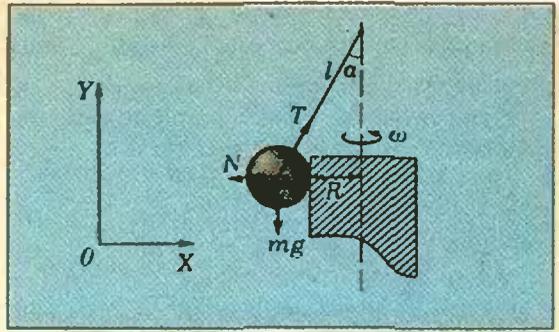


Рис. 3.

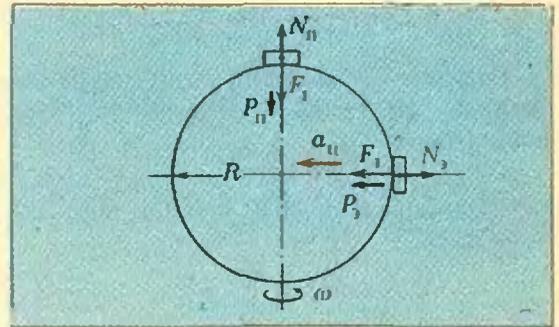


Рис. 4.

тится, и сила N исчезнет (обратится в нуль). Запишем уравнения движения шарика в этот момент в проекциях на оси координат Ox и Oy :

$$T \sin \alpha = m\omega_0^2(R+r),$$

$$T \cos \alpha - mg = 0.$$

Решая их, найдем искомую угловую скорость:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g \operatorname{tg} \alpha}{R+r}}.$$

Используя рисунок 3, легко определить, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{R+r}{\{(l+r)^2 - (R+r)^2\}^{1/2}}.$$

Тогда окончательно

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\{(l+r)^2 - (R+r)^2\}^{1/2}}}.$$

Задача 3. На полюсе некоторой планеты тело весит вдвое больше, чем на экваторе. Определите период обращения планеты вокруг собственной оси. Планету считать шаром. Плотность вещества планеты ρ_0 .

Напомним, что весом тела \vec{P} называется сила, с которой тело вследствие притяжения к планете действует на неподвижную относительно него опору или подвес. По третьему закону Ньютона со стороны опоры на тело действует

сила реакции \vec{N} равная по модулю и противоположная по направлению силе \vec{P} . На рисунке 4 показаны силы, действующие на тела, расположенные на полюсе и экваторе планеты.

Уравнение движения тела на экваторе имеет вид

$$F_T - N_s = m \frac{4\pi^2}{T^2} R,$$

где F_T — сила тяготения, T — искомый период обращения планеты. Отсюда можно найти вес тела на экваторе:

$$P_s = N_s = F_T - m \frac{4\pi^2 R}{T^2}.$$

На полюсе скорость и центростремительное ускорение равны нулю; следовательно,

$$P_n = N_n = F_T.$$

По условию $P_s = 0,5P_n = 0,5F_T$, поэтому получаем

$$m \frac{4\pi^2 R}{T^2} = 0,5F_T.$$

Согласно закону всемирного тяготения, $F_T = GmM/R^2$, где m — масса тела, $M = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho_0$ — масса планеты, R — ее радиус. Таким образом, из последнего уравнения имеем

$$T = \sqrt{\frac{6\pi}{G\rho_0}}.$$

Задача 4. *Велосипедист движется по горизонтальному кругу радиуса R с постоянной скоростью. Определите максимальную возможную скорость такого движения. Коэффициент трения между шинами и дорогой μ .*

Кто катался на велосипеде, тот знает, что движение по кругу возможно только при определенном наклоне велосипедиста в сторону центра закругления.

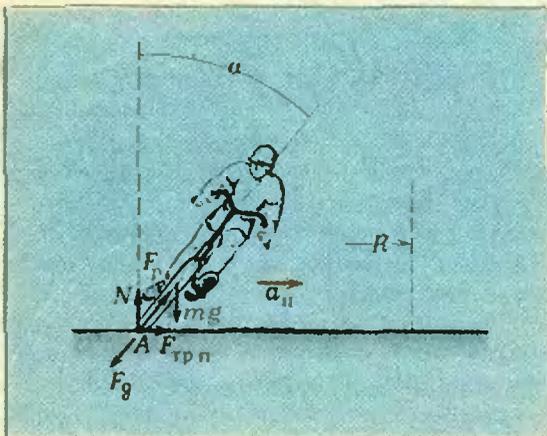


Рис. 5.

Чем больше скорость, с которой велосипедист хочет пройти закругление, тем большим должен быть угол наклона (угол отклонения от вертикали). Однако существует предельный угол наклона, превысив который велосипедист непременно упадет. Почему это происходит?

На рисунке 5 показан момент движения велосипедиста по кругу радиуса R с некоторой скоростью \vec{v} , направленной «на нас» перпендикулярно плоскости рисунка. Пусть этой скорости соответствует угол наклона α . При движении велосипедист действует на дорогу с некоторой силой \vec{F}_d . Реакция дороги, приложенная к велосипеду, равна \vec{F}_p . Легко видеть, что горизонтальная проекция силы \vec{F}_p есть не что иное, как сила трения покоя $F_{тр.п}$ (точка A колеса не скользит по поверхности), а вертикальная проекция — сила нормальной реакции со стороны дороги N . Кроме того, на систему велосипед—велосипедист действует еще сила тяжести $m\vec{g}$.

Как видно из рисунка 5, единственная сила, действующая на велосипед в сторону центра закругления, это сила трения покоя. Она-то и сообщает центростремительное ускорение: $F_{тр.п} = ma_{ц}$. Эта сила перпендикулярна вектору скорости движения и изменяет только ее направление. Напомним, что в зависимости от условий сила трения покоя может изменяться в пределах от 0 до μN . А каково ее значение в нашем случае?

Учитывая, что $N = mg$ (нет движения в вертикальной плоскости), из силового треугольника на рисунке 5 имеем

$$F_{тр.п} = mg \operatorname{tg} \alpha.$$

Следовательно, в зависимости от угла наклона велосипедиста сила трения может принимать значения

$$0 < (F_{тр.п} = mg \operatorname{tg} \alpha) < \mu N.$$

Если велосипедист движется прямолинейно, $\alpha = 0$ и $F_{тр.п} = 0$. Другой предельный случай соответствует максимальному углу наклона велосипедиста при движении по закругленному пути:

$$mg \operatorname{tg} \alpha_{\max} = \mu N, \text{ где } N = mg.$$

Отсюда $\operatorname{tg} \alpha_{\max} = \mu$.

Если движение происходит по кругу фиксированного радиуса, то каждому значению скорости соответствует определенный угол наклона, такой, чтобы

сила трения покоя обеспечила необходимое центростремительное ускорение:

$$mg \operatorname{tg} \alpha = \frac{mv^2}{R}.$$

Умелый велосипедист инстинктивно наклоняется в сторону поворота ровно настолько, чтобы выполнялось данное условие. Таким образом, максимальная скорость движения велосипедиста определяется формулой

$$\mu mg = \frac{mv_{\max}^2}{R},$$

откуда

$$v_{\max} = \sqrt{\mu g R}.$$

Попытка велосипедиста проехать закругление с еще большей скоростью, превысив угол наклона α_{\max} , приведет к его падению. Это и понятно: сила трения, достигнув максимального значения, не сможет обеспечить необходимого центростремительного ускорения, точка A колеса начнет скользить вдоль радиуса от центра, и велосипедист упадет.

Однако можно увеличить максимальную скорость движения, используя либо покрытие с большим μ , либо дорогу специального, наклонного профиля, называемую трекком.

Задача 5. Автомобиль, трогаясь с места, равномерно набирает скорость, двигаясь по горизонтальному участку дороги AB , который представляет собой дугу окружности радиуса $R=100$ м, опирающуюся на угол $\alpha=30^\circ$ (рис. 6). С какой максимальной скоростью автомобиль может выехать на прямой участок пути? Коэффициент трения колес о дорогу $\mu=0,3$.

Прежде всего напомним, что внешняя сила, сообщающая автомобилю ускорение, это сила трения колес о дорогу. При движении автомобиля по горизонтальному закругленному участку вместо силы трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ в каждый момент времени удобно рассматривать две его

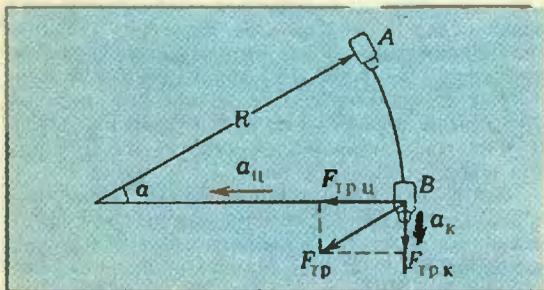


Рис. 6.

проекции (см. рис. 6): касательную проекцию $F_{\text{тр}к}$, обеспечивающую разгон автомобиля, и центростремительную $F_{\text{тр}ц}$, создающую центростремительное ускорение и обуславливающую движение по окружности.

Напишем уравнения движения автомобиля в точке перехода с закругленного участка дороги на прямой:

$$F_{\text{тр}ц} = ma_{\text{ц}}, \quad F_{\text{тр}к} = ma_{\text{к}}.$$

По условию автомобиль набирает скорость равномерно, то есть $a_{\text{к}} = \text{const}$. Это означает, что скорость, которую будет иметь автомобиль в конце разгона, равна

$$v_B = \sqrt{2a_{\text{к}}l}, \quad \text{где } l = \pi R/6.$$

Отсюда касательное ускорение равно

$$a_{\text{к}} = \frac{v_B^2}{2l} = \frac{3v_B^2}{\pi R}.$$

Учитывая, что центростремительное ускорение $a_{\text{ц}} = v_B^2/R$, уравнения движения можно записать в виде

$$F_{\text{тр}ц} = \frac{mv_B^2}{R}, \quad F_{\text{тр}к} = \frac{3mv_B^2}{\pi R}.$$

В момент перехода автомобиля на прямой участок дороги (в точке B) его скорость по условию должна быть максимальной: $v_B = v_{\max}$. Следовательно, в точке B сила трения должна достигнуть своего максимального значения: $F_{\text{тр}} = F_{\text{тр}к\max} = \mu mg$. Из рисунка 6 следует, что $F_{\text{тр}}^2 = F_{\text{тр}ц}^2 + F_{\text{тр}к}^2$. Подставляя соответствующие значения, найдем максимальную скорость автомобиля:

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{\mu g R}{\sqrt{1 + (3/\pi)^2}}} \approx 14,6 \text{ м/с} \approx$$

$$\approx 52,6 \text{ км/ч.}$$

Упражнения

1. На дно сферы радиуса R насыпали горсть песка. Определите, где будут находиться песчинка после того, как сферу приведем во вращение вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω . Трением песчинки о сферу пренебречь.

2. Внутри камеры велосипедного колеса попал небольшой камешек. Радиус колеса $r=0,4$ м. При какой минимальной скорости движения велосипеда камешек будет вращаться вместе с колесом? Толщиной шины пренебречь.

3. Во сколько раз увеличится максимально допустимая скорость движения мотоциклиста по наклонному треку с углом наклона β по сравнению с допустимой скоростью по горизонтальному треку при одинаковом радиусе закругления и коэффициенте трения μ ?

4. Автомобиль движется по выпуклому мосту, имеющему форму дуги окружности радиуса $R=40$ м. Какое максимальное ускорение в горизонтальном направлении может развивать автомобиль в высшей точке моста, если в этой точке его скорость $v=50,4$ км/ч? Коэффициент трения колес автомобиля о мост $\mu=0,57$.



МАН «Искатель»

В 1983 году малой академии наук «Искатель» Крымской области Украинской ССР, республиканскому научному обществу «Вишторул» Молдавской ССР, школе естественных наук Института атомной энергии им. И. В. Курчатова и юношеской геологической экспедиции Свердловской области были присуждены премии Ленинского комсомола за большую работу по коммунистическому воспитанию молодежи и развитию научно-технического творчества учащихся.

О школе ИАЭ и НОУ «Вишторул» уже рассказывалось в нашем журнале (см. «Квант» № 4 за 1983 г. и № 4 за 1977 г.). Сегодня мы знакомим читателей с работой МАН «Искатель».

МАН — это «малая академия наук» — научное общество учащихся Крыма. Создано оно было более 20 лет назад (20—21 апреля 1963 года состоялась учредительная сессия «Искателя»). Это было первое в нашей стране НОУ, в то время и слов таких — «научное общество учащихся» — еще не было.

Ныне в «Искателе» 11 секций: математики, физики, химии, астрономии, кибернетики, истории и краеведения, сельского хозяйства, малой механики, биологии, инженерно-технической, журналистики (пресс-центр). Работают школы: вечера и заочная юных кибернетиков, заочная юных изобретателей и рационализаторов, областная школа юных корреспондентов. Есть также 24 городских и районных филиала, которые объединяют 153 школьных отделения. Всего в МАН занимаются более 16 тысяч школьников.

Что же отличает «Искателя», дает ему возможность вести работу с таким размахом?

«Искатель» — организация общественная, она работает под руководством областного отдела народного образования, Крымского обкома комсомола. Оперативно руководит работой «Искателя» президиум МАН во главе с президентом (научным сотрудником) и тремя вице-президентами (школьниками). Первым президентом МАН был Я. Д. Козин, профессор, доктор геолого-минералогических наук; с 1973 года МАН возглавил доцент Симферопольского университета В. Н. Касаткин. Вице-президенты «Искателя» регулярно меняются, раньше их было два, теперь добавлен третий — специально по сельскохозяйственным наукам с целью усиления работы по пропаганде знаний о сельском хозяйстве.

Методическое руководство «Искателем» осуществляет областной институт усовершенствования учителей. В президиум МАН входят представители обкома ЛКСМУ, зав. кабинетами института усовершенствования учителей.

Система приема в МАН требует от школьников постоянной активной работы. Основным элементом этой системы — творческий взнос. Это может быть успешное выступление на секции,

серия экспериментальных работ, самоделка или другая самостоятельная работа. Активисты МАН (сейчас их более 16 тысяч) на основании творческого вклада принимаются в кандидаты МАН (их около 2 тысяч), следующий этап — действительный член МАН (их сейчас более 400). Здесь надо проявить настойчивость и склонность к научно-исследовательской работе, регулярно вносить творческие взносы. При этом, если школьник в течение года не имеет творческих взносов, то он переводится на ступеньку ниже. Но надо сказать, что школьники не гонятся за званием. Их больше всего привлекает в МАН возможность общения с учеными и занятий под их руководством.

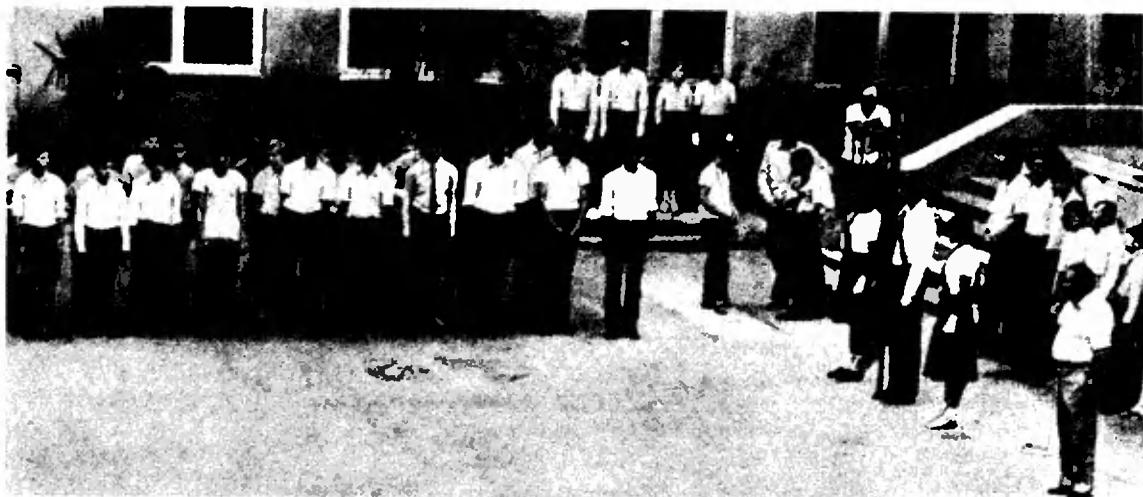
О научном руководстве «Искателем» надо сказать особо. В «Положении» о МАН «Искатель» сказано: «Руководство исследовательской работой членов МАН «Искатель» осуществляют высшие учебные заведения и научно-исследовательские учреждения. Опорными пунктами для выполнения практических и исследовательских работ в филиалах МАН «Искатель» являются: все внешкольные учреждения Крымской области: лаборатории, кабинеты, мастерские и библиотеки школ, в которых учатся члены МАН «Искатель»; лаборатории и кабинеты научно-исследовательских учреждений и высших учебных заведений области».

За 20 лет перед ребятами выступили более 500 ведущих специалистов в разных областях науки, передовики производства, изобретатели. В каждом научно-исследовательском учреждении или организации области привыкли к тому, что рядом с учеными там частые гости — школьники. Здесь можно назвать Крымскую астрофизическую обсерваторию АН СССР в пос. Научный Бахчисарайского района, многие вычислительные центры, Никитский ботанический сад и другие организации.

Существенно также то, что «Искатель» помогает школьникам лучше понять связи между разными науками. В днях физики, химии, математики и др. участвуют представители разных секций, и это позволяет им познакомиться со смежными науками, не дает замкнуться в какой-либо одной области.

МАН отличает также систематичность работы и постоянный контроль за развитием школьников. Раз в месяц проводит заседания школьные предметные научные общества, ежегодно в ноябре проводится сессия МАН, а в июле — конференция в летнем научно-оздоровительном лагере, куда ежегодно приезжает более 200 школьников и до 30 ученых — докторов и кандидатов наук, научных сотрудников из разных институтов и университетов. В течение месяца школьники слушают лекции ученых, выполняют различные исследования, знакомятся со сверстниками, так же, как они, увлеченными наукой, набираются здоровья и энергии на целый год. В лагерь прошлых лет опробовались курсы математической логики, основ программирования, конструирования различных приборов и наглядных пособий, которые затем были прочитаны во всех отделениях МАН. В 1983 году испытывался курс языка фортран для школьников.

За 20 лет через систему МАН «Искатель» прошло около 150 тысяч школьников. Ныне среди них немало докторов и кандидатов наук, научных сотрудников, педагогов. Многие продолжают работу в МАН уже в роли лекторов. За свои успехи «Искатель» к 15-летию был удостоен премии комсомола Украины, а 1983 году — премии Ленинско-



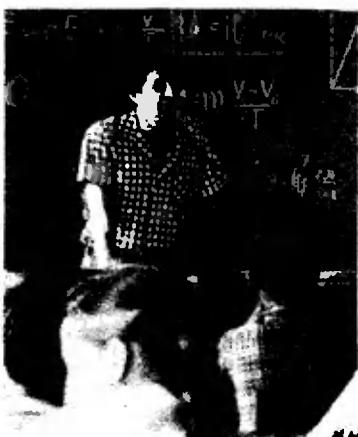
Летний лагерь-83

Торжественное открытие летнего лагеря 1983 г. в пос. Фрунзенское.

Встречу школьников с ветеранами МАН ведет ее президент В. Н. Касаткин.

Занятие со школьниками ведет ветеран МАН, ныне доктор физико-математических наук Б.И. Фуке.

Встреча школьников с учеными.



го комсомола. О значении МАН для крымских школьников очень хорошо сказал ее президент В. Н. Касаткин на встрече школьников с учеными: «Если школьник в Крыму хочет попробовать свои силы в науке или технике, то он знает, куда ему идти. При каждом высшем учебном заведении

в Симферополе, Севастополе, Керчи работают учебные подразделения МАН. Отделения МАН есть во многих школах городов и области».

В этом — огромное достижение «Искателя». Пожелаем же ему дальнейшей успешной работы.

А. Н. Виленкин

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1983 году

Предлагаем подборку задач вступительных экзаменов по математике и физике в некоторые университеты — Белорусский, Донецкий, Казанский, Киевский, Саратовский, Ташкентский и институты — Кишиневский политехнический, Ленинградский филиал московского технологического института, Московский авиационный технологический, Московский гидромелиоративный, Тбилисский педагогический.

Математика

Письменный экзамен

Алгебра

1. Сумма квадратов двух последовательных целых чисел на 29 больше утроенного меньшего числа. Найдите эти числа.

2. Определите три числа, образующих геометрическую прогрессию, если сумма этих чисел равна 31, а сумма их квадратов равна 651.

3. От пристани А одновременно отправились вниз по течению катер и плот. Катер спустился вниз по течению на 96 км, затем повернул обратно и вернулся в А через 14 часов. Найдите скорость катера в стоячей воде, если известно, что катер встретил плот на обратном пути на расстоянии 24 км от А.

4. Точки А и В находятся на окружности радиуса R см. Если точки начнут двигаться навстречу друг другу по меньшей дуге, то встретятся через 5 с, а если по большей дуге, то встреча произойдет через 11 с. Если точки будут двигаться в одном направлении, то первая точка нагонит вторую через 20 с. Найдите скорости точек.

5. Трое рабочих разной квалификации выполнили некоторую работу, причем первый работал 6 часов, второй — 4 часа, третий — 7 часов. Если бы первый рабочий работал 4 часа, второй — 2 часа и третий 5 часов, то было бы выполнено лишь 2/3 всей работы. За сколько часов рабочие закончили бы работу, если бы они работали все вместе одно и то же время?

6. Числа a_1, a_2, \dots, a_n образуют арифметическую прогрессию. Докажите, что

$$\frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_2 a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1} a_n} = \frac{n-1}{a_1 a_n}.$$

7. Упростите:

$$a) \frac{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} + \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}}{\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} - \sqrt{\frac{1-a}{1+a}}} - \frac{1}{a}.$$

$$b) \frac{x-1}{x+\sqrt{x+1}} : \frac{x^{0.5}+1}{x^{1.5}-1} + \frac{2}{x^{0.5}}.$$

$$в) \frac{1 - \left(\frac{a}{b}\right)^{-2}}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 + 2\sqrt{ab}} \cdot a^2.$$

$$г) \left[\frac{(a+\sqrt[3]{a^2x}) : (x+\sqrt[3]{ax^2}) - 1}{\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{x}} - x^{-\frac{1}{3}} \right]^3.$$

8. Докажите тождество:

$$a) \frac{1 + \operatorname{ctg} 2\alpha \operatorname{ctg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{ctg} \alpha} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

$$б) 2 \operatorname{tg} \left(\alpha - \frac{\pi}{4} \right) \sin^2 \left(\frac{\pi}{4} + \alpha \right) = 1 - 2 \cos^2 \alpha.$$

$$в) \cos^2(\alpha + \beta) + \cos^2(\alpha - \beta) - \cos 2\alpha \cos 2\beta = 1.$$

$$г) 1 - \frac{1}{4} \sin^2 2\alpha + \cos 2\alpha = \cos^2 \alpha + \cos^4 \alpha.$$

9. Известно, что $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{1}{2}$. Найдите $\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$.

$$10. \text{ Вычислите } \sin \left(2\alpha + \frac{5}{4} \pi \right), \text{ если } \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}.$$

11. При каких значениях p оба корня квадратного уравнения

$$(p-2)x^2 - 2px + p - 1 = 0$$

положительны?

12. Найдите все значения b , при которых ровно один корень уравнения

$$x^2 + 2bx - 2b = 1$$

удовлетворяет неравенству $x > 2$.

13. Решите уравнение:

$$a) \sqrt{2x+3} + \sqrt{x+1} = 5.$$

$$б) \sqrt{3x+7} - \sqrt{x+1} = 2.$$

$$в) \frac{\sqrt{x-2} + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x-2}} = \frac{\sqrt{x-2} - \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x-2}}.$$

$$г) x^{\lg x + 2} = 100x.$$

$$д) 2 + \log_3(2^x - 2) = \log_3 2 + \log_3(4^{x-1} - 1).$$

$$е) 4^{x+1.5} + 9^x = 6^{x-1}.$$

$$ж) \lg(x-3) + \lg(x+6) = \lg 2 + \lg 5.$$

$$з) \log_{16} x^3 + \log_{\sqrt[3]{x}} x = 2.$$

$$и) \cos 4x + 2 \cos^2 x = 1.$$

$$к) 5 \operatorname{ctg} x - 4 \operatorname{tg} x = \frac{9}{\sin x}.$$

$$л) 5 \sin 2x - 12(\sin x - \cos x) + 12 = 0.$$

$$м) \sin x \sin 2x \cdot \sin 3x = \frac{1}{4} \sin 4x.$$

$$н) \sin^4 x + \cos^4 x = \sin x \cdot \cos x.$$

$$о) 4 \log_2 \sin x + 2 \log_{\frac{1}{2}} \cos \left(2x + \frac{\pi}{4} \right) + 1 = 0.$$

$$п) 4^{\sin x} - 2^{\frac{1}{2} - \sin x} = 1.$$

$$р) \cos \left(\frac{4\pi x}{x^2 + x + 1} \right) = 1.$$

14. Определите, какие значения x из отрезка $[-\pi; \pi]$ удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{\cos x} = \sin x + \cos x.$$

15. Найдите все решения уравнения

$$\frac{2}{\cos 6x - \cos 2x} = \frac{1}{\cos 8x \cos 2x}.$$

удовлетворяющие неравенству $0 < x < \pi/2$.

16. Сколько решений в зависимости от параметра a имеет уравнение

$$\left|x + \frac{1}{x} - 4\right| = a?$$

17. При каких значениях параметра a уравнение

$$\sqrt{2a-3-3\cos 2x} = \sqrt{2}(1-\cos x)$$

имеет решения? Найдите их.

18. Решите неравенство:

а) $7-3\sqrt{x+1} > 2x$,

б) $\sqrt{x^2-x-6} < x+5$,

в) $x^6 + \sqrt{x^2-1983} > 1983^3$,

г) $x \cdot \sqrt{1983-x^2} < \sqrt{1982}$,

д) $\sqrt{\log_2 \frac{3-2x}{1-x}} < 1$,

е) $|1-\log_{1983}x| + |\log_{1983}x-3| > 4$,

ж) $\log_{\frac{1}{2}|x-1|}(\log_2(6-x)) < 0$,

з) $\frac{|1-3x|-2}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 1} > 0$,

и) $\log_{|x-1|}(x^2-1) < 1$,

к) $\log_2(x^2+x-2) - \frac{2}{\log_{|x-6|}4} > 0$,

л) $(x^2+2x+2)\cos(x+1) \geq 2x^2+4x+3$.

19. Решите систему уравнений:

а) $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{10}{3}, \\ x^2+y^2=5; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 2, \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = 8; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \log_2 y \cdot \log_{1/x} 2 = 1 - \log_x 2, \\ \log_y 2 \cdot \log_{\sqrt{2}} x = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 10^{3-|x(x-y)|} = 250, \\ \sqrt{x-y} + \frac{1}{2}\sqrt{x+y} = \frac{26-y}{\sqrt{x-y}}. \end{cases}$

Анализ

1. Вычислите

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{4}} \frac{4x^2-5x-6}{4x^2+11x+6}$$

2. В каких точках касательные к кривой $y = \frac{x^3}{3} - x^2 - x + 1$ параллельны прямой $y = -2x - 1$?

3. Решите неравенство

$$y' < -3, \text{ если } y = 5x^2 - 2 \ln x - 6x.$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

а) $y = x^3 - 3x^2 - 6x + 10$ на отрезке $[-1; 3]$,

б) $y = (x-2)^2 \cdot \sqrt{x^2-4x+6}$ на отрезке $[1; 4]$.

5. Найдите координаты точки пересечения с осью OX касательной к кривой $y = x^2 + 3x + 3$ в точке $A(-2; 1)$.

6. Найдите точки экстремума функции

а) $y = e^{2x} - 2e^x - 4x + 2$,

б) $y = -2 \cdot 3^{-4x^2} - 2 \cdot 3^{-3x^2} + 3^{-2x^2} + 1$.

7. Найдите интервалы монотонности функции

$$y = 2x^2 + 5x + 11 + 6 \ln \frac{2}{x}.$$

8. При каких a функция

$$y = -x^3 + ax^2 + a^2x + 5$$

возрастает на промежутке $[-6; 2]$?

9. Пусть x_1 и x_2 — соответственно точка минимума и точка максимума функции $y = -2x^3 + 3(1-2a)x^2 + 12ax - 1$. При каком значении a $x_1^2 = x_2^2$?

10. Найдите все значения параметра a , при которых функция $f(x) = \left(\frac{\sqrt{a+4}}{1-a} - 1\right)x^5 - 3x + \lg 5$ убывает.

11. По двум взаимно перпендикулярным дорогам к перекрестку движутся две автомашины со скоростями 40 км/ч и 50 км/ч соответственно. В данный момент они находятся от перекрестка на расстоянии 20 км и 30 км соответственно. Через сколько времени расстояние между машинами будет минимальным?

12. К графику функции $y = (x-1)^2$, $x \in [0; 1]$ проводятся касательные. В какой точке нужно провести касательную к графику этой функции, чтобы площадь треугольника, ограниченного этой касательной и осями координат, была наибольшей? Найдите эту площадь.

13. Представьте число 48 в виде суммы двух натуральных слагаемых так, чтобы сумма куба первого числа с квадратом второго была минимальна.

14. Найдите расстояние между ближайшими точками графиков функций: $y_1 = x^2 + x + 1$ и $y_2 = -2x - 2$.

Геометрия

1. Даны три ненулевых вектора \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , каждые два из которых не коллинеарны. Найдите их сумму, если вектор $\vec{a} + \vec{b}$ коллинеарен вектору \vec{c} , а вектор $\vec{b} + \vec{c}$ коллинеарен вектору \vec{a} .

2. Вычислите ABC треугольника ABC , заданного координатами его вершин

$$A(2; 2\sqrt{3}), B(0; 0), C(-\sqrt{3}; 1).$$

3. В правильный треугольник вписана окружность радиуса $r = 5\sqrt{3}$ м и через центр окружности проведена прямая, параллельная одной из сторон треугольника. Найдите длину отрезка этой прямой, заключенного между сторонами треугольника.

4. Найдите площадь квадрата, вписанного в правильный треугольник со стороной a .

5. В равнобедренный треугольник с основанием a и углом α при основании вписан прямоугольник наибольшей площади так, что одна его сторона лежит на основании треугольника. Найдите площадь и периметр прямоугольника.

6. Найдите площадь треугольника, если две его стороны равны 27 см и 29 см, а медиана третьей стороны равна 26 см.

7. Найдите периметр прямоугольного треугольника, если 10 и 4 — радиусы описанного и вписанного в него кругов.

8. В прямоугольном треугольнике ABC (C — вершина прямого угла) на гипотенузе выбрана точка D так, что $BQ/DA = 2$. Найдите площадь этого треугольника, если длина катета AC равна a , а длина другого катета равна двум длинам отрезка CD .

9. Вычислите длину биссектрисы угла C треугольника ABC , если $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$.

10. Длина большего основания трапеции равна b ; меньшего — a , углы при большем основании 30° и 45° . Найдите площадь трапеции.

11. Диагонали равнобокой трапеции взаимно перпендикулярны, а высота равна h . Найдите площадь трапеции, если нижнее основание в два раза длиннее верхнего.

12. В прямоугольной трапеции длины оснований равны a и $3a$, а меньшая боковая сторона равна b . Найдите расстояния от точки пересечения диагоналей трапеции до большего основания и до меньшей боковой стороны.

13. Диагонали четырехугольника имеют длины a и b и образуют угол α . Найдите площадь четырехугольника, вершинами которого являются середины сторон данного.

14. Точки A_1, B_1, C_1, D_1 лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и DA выпуклого четырехугольника $ABCD$. При этом $|AA_1| : |A_1B| = |BB_1| : |B_1C| = |CC_1| : |C_1D| = |DD_1| : |D_1A| = 3:4$. Определите площадь четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$, если площадь четырехугольника $ABCD$ равна S .

15. На сторонах BC и CD квадрата $ABCD$ взяты точки H и M так, что $|BH| : |HC| = |CM| : |MD| = 1:2$. Отрезки $|AH|$ и $|BM|$ пересекаются в точке P . Найдите отношение $|AP| : |PH|$.

16. На сторонах равнобедренной трапеции $ABCD$ (A, D — вершины острых углов) выбраны точки F, G, K так, что $|AF| / |FB| = |CG| / |DG| = |DK| / |AK| = 4$. Найдите площадь треугольника, вершинами которого являются точки F, G, K , если длины сторон AD, BC, CD равны соответственно a, b, d .

17. Вокруг четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность. Угол A равен 60° . Найдите $|AB|$, если $|BC|, |CD|, |DA|$ образуют арифметическую прогрессию с разностью $d = 3 + \sqrt{13}$.

18. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a , а боковые ребра образуют угол β с плоскостью основания. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

19. Пусть α — угол наклона боковых ребер к основанию правильной треугольной пирамиды, а φ — угол между боковыми гранями этой пирамиды. Известно, что $\alpha = \varphi$. Определите α .

20. В правильную четырехугольную пирамиду, высота которой равна h , а стороны основания — a , вписан куб. Четыре вершины куба расположены на основании пирамиды, а другие четыре — на боковых ребрах. Определите площадь поверхности куба.

21. Основанием прямой призмы служит ромб; диагонали призмы равны 8 см и 5 см; высота 2 см. Найдите сторону основания призмы.

22. В прямоугольном параллелепипеде диагональ его a наклонена к основанию под углом α , а к боковой грани под углом β . Найдите объем параллелепипеда.

23. Грани параллелепипеда — конгруэнтные ромбы со стороной a и острым углом 60° . Определите объем параллелепипеда.

24. Найдите радиус шара, вписанного в правильную треугольную пирамиду с высотой H и углом между боковым ребром и плоскостью основания, равным α .

25. Определите объем шара, вписанного около правильной треугольной пирамиды, сторона основания которой b , а боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом α .

26. Проведены две параллельные плоскости по одну сторону от центра сферы на расстоянии

3 см друг от друга. Эти плоскости пересекают сферу по двум окружностям, радиусы которых соответственно равны 9 см и 12 см. Найдите площадь поверхности сферы.

27. Высота конуса равна диаметру основания. Найдите объем куба, вписанного в конус, если объем конуса равен V .

28. Угол при вершине осевого сечения прямого кругового конуса равен α , а площадь боковой поверхности — S . Найдите объем конуса.

29. Найдите отношение объема шара к объему вписанного в него конуса, если образующая конуса в a раз больше радиуса его основания.

30. Шар радиуса R вписан в конус. Из центра шара образующая конуса видна под углом α . Найдите объем конуса.

31. В конус вписан цилиндр, диагонали осевого сечения которого параллельны образующим конуса. Образующая конуса равна l и составляет с плоскостью основания конуса угол α . Найдите объем части пространства, ограниченной поверхностями конуса и цилиндра.

32. Конус и цилиндр имеют общее основание, а вершина конуса находится в центре другого основания цилиндра. Чему равен угол между осью конуса и его образующей, если известно, что полная поверхность цилиндра относится к полной поверхности конуса как 7:4?

33. В правильную четырехугольную пирамиду P вписан шар $Ш_1$. Шар $Ш_2$ касается шара $Ш_1$ и всех боковых граней пирамиды P . Радиус шара $Ш_2$ в γ раз меньше, чем радиус шара $Ш_1$. Найдите отношение объема шара $Ш_2$ к объему пирамиды P . При каком значении γ это отношение наибольшее?

Устный экзамен

Алгебра

1. Что больше $\log_7 7$ или $\log_7 7^7$?

2. Вычислите а) $5^{-\log_5 4 + 9^{\log_5 2}}$, б) $\log_4 5 \times \log_5 6 \cdot \log_6 7 \cdot \log_7 8$.

3. Найдите $\sin \frac{\alpha}{2}$, если $\cos \alpha = -\frac{8}{17}$ и $180^\circ < \alpha < 270^\circ$.

4. Докажите неравенство

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{n-1}{n}.$$

5. Сумма n членов арифметической прогрессии для любого n равна $3n^2 - 2n$. Найдите ее десятый член.

6. Решите уравнение:

а) $\sqrt{6-x-x^2} = x+1$,

б) $\left(1 + \frac{9}{x}\right)^{\frac{1}{2}} + 4\left(1 + \frac{9}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} = 4$,

в) $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$,

г) $\lg(x-1) + \lg(x+2) = \lg 7 - \lg 4$,

д) $x^2 - 4x + 4 + 2 \lg^2(xy) = 0$,

е) $\sqrt{\log_2 x - 0.5} = \log_2 \sqrt{x}$,

ж) $\sqrt{\cos 2x} = \sqrt{2} \sin x$.

з) $\operatorname{tg}(\cos x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

7. Установите графически, сколько решений имеют уравнения:

а) $x^2 + e^{-|1-x|} = 2x$, б) $\log_2 |x| + x^2 = 4$, в) $\operatorname{tg} x + 10x = 0$.

8. При каких x, y, z справедливо равенство $(\cos^2 x + \cos^{-2} x)(1 + \operatorname{tg}^2 2y)(3 + \sin 3z) = 4$.

9. Решите неравенство:

а) $\left| \frac{2x-3}{x^2-1} \right| < 2,$

б) $\log_{0,25} \frac{35-x^2}{x} > -\frac{1}{2},$

в) $x^2 - 10^{\lg(-x)} \leq 20,$

г) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x^2-6x+8}{6} > 1,$

д) $\frac{(x^2-1)(x^2-5x+6) \ln x}{x^2-4x-21} < 0,$

е) $\log_2(x^2+3) + \sqrt{x^2-1} > 2.$

10. При каких a система неравенств

$$\begin{cases} x^2 - (a+1)x + a < 0, \\ x^2 - (a+3)x < 0 \end{cases}$$

имеет решения?

11. Изобразите на координатной плоскости все точки $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют условиям:

а) $|x| + y^2 < 1, б) |x| - |y| < 1.$

12. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + xy = 10, \\ x^3 + x^2y = 20. \end{cases}$$

13. Постройте графики функций

а) $y = \frac{x}{x-1}, y = \frac{|x|}{|x|-1}, y = \frac{|x|}{x-1};$

б) $y = \log_{\frac{1}{2}}(2-x), y = \log_{\frac{1}{2}}(2-|x|), y =$

$= \log_{\frac{1}{2}}|2-|x||;$

в) $y = \cos\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right), y = \cos\left(\pi|x| - \frac{\pi}{4}\right),$

$y = \left|\cos\left(\pi x - \frac{\pi}{4}\right)\right|;$

г) $y = \left| \log_2 \frac{x-4}{x^2-16} \right|;$

д) $y = ||x-1|-2|-1|.$

14. Найдите все значения b , при которых уравнение

$$x^2 - bx + 1 = 0$$

не имеет действительных корней.

Анализ

1. Найдите производную функции

а) $y = e^{x^2-5x^2};$

б) $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$ при $x = \frac{\pi}{2}.$

2. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x + \cos^2 x$ на промежутке

$\left[0; \frac{\pi}{2}\right].$

3. Найдите наименьшее значение функции

$y = \sin^3 x + 2 \cos^3 x$ на промежутке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right].$

4. Найдите промежутки возрастания (убывания) функций $y = x \cdot \ln x.$

5. При каких значениях a функция

$$y = (a+2)x^3 - 3ax^2 + 9ax - 2$$

монотонно убывает на всей числовой оси?

Геометрия

1. Могут ли длины сторон прямоугольного треугольника образовывать арифметическую прогрессию?

2. Укажите, в каких пределах изменяется площадь S треугольника с основанием a и противоположным углом $\alpha.$

3. Определите площадь треугольника по трем его высотам $h_1, h_2, h_3.$

4. Пусть A — одна из вершин правильного n -угольника. Докажите, что диагонали n -угольника, проведенные из этой вершины, делят внутренний угол A на равные части.

5. Радиус окружности l_1 равен r . Существует ли такая концентрическая с ней окружность l_2 , чтобы в кольцо, образованное этими окружностями, можно было вписать n окружностей, каждая из которых касалась бы двух соседних (n — данное натуральное число, $n > 3$). Найдите радиус окружности $l_2.$

6. Определите объем правильной четырехугольной пирамиды, у которой высота боковой грани равна l , а величина двугранного угла, образованного двумя противоположными боковыми гранями, равна $\beta.$

7. Плоский угол при вершине правильной n -угольной пирамиды равен α . Определите угол наклона боковых граней к плоскости основания пирамиды.

8. В конус, радиус основания которого равен 1 , вписан цилиндр, осевое сечение которого есть квадрат, а вокруг конуса описана сфера. Оказалось, что радиус основания цилиндра r и радиус сферы R связаны соотношением: $r = \frac{1}{R}.$

Определите угол между образующей конуса и плоскостью его основания.

Физика

Задачи устного экзамена

Механика

1. Первую половину своего пути автомобиль двигался со скоростью $v_1 = 80$ км/ч, а вторую — со скоростью $v_2 = 40$ км/ч. Какова средняя скорость движения автомобиля на всем пути?

2. Расстояние между двумя свободно падающими каплями через время $t = 2$ с после начала падения второй капли было $l = 25$ м. На сколько позднее первой начала падать вторая капля?

3. Пуля выпущена с начальной скоростью $v_0 = 8 \cdot 10^2$ м/с под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Найдите время полета пули до падения на землю. Определите радиус кривизны траектории в ее верхней точке. Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Две гири массой $m_1 = 4$ кг и $m_2 = 3$ кг подвешены на концах нити, перекинутой через неподвижный блок, причем меньшая гиря находится на $h = 2,8$ м ниже, чем большая (рис. 1). Определите, через какое время гири окажутся на одной высоте, если дать им возможность двигаться под действием сил тяжести.

5. На каком расстоянии от центра Земли период обращения искусственного спутника равен $T = 24$ ч, так что спутник относительно Земли занимает неизменное положение? Радиус Земли $R_3 = 6370$ км.

6. Когда к пружине длиной l подвесили груз, то ее длина стала равной l_1 . До какой максимальной длины растянется пружина, если этот груз поднять так, чтобы пружина оказалась нерастянутой, и отпустить без начальной скорости?

7. Двое рабочих несут бревно, масса которого $m = 50$ кг. Один поддерживает бревно на расстоянии $l_1 = 1$ м от его конца, а второй — противоположный конец бревна. Длина бревна $l = 5$ м. Определите нагрузку, приходящуюся на каждого рабочего.

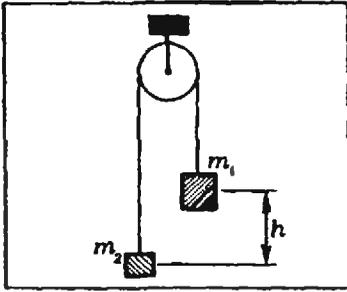


Рис. 1.

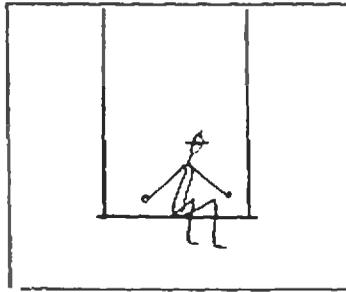


Рис. 2.

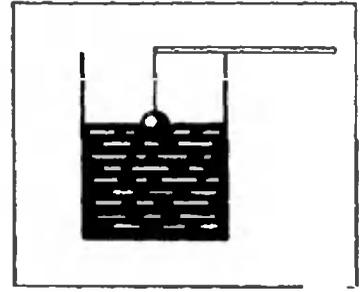


Рис. 3.

8. Человек, масса которого $m=70$ кг, сидит на середине трапеции (рис. 2). Палка трапеции подвешена на веревках длиной $l=8$ м. При качании человек проходит положение равновесия со скоростью $v=6$ м/с. Каково натяжение каждой веревки в этот момент?

9. К концу однородной палочки массой $m=4$ г подвешен на нити алюминиевый шар радиуса $R=0,5$ см (рис. 3). Палочку кладут на край стакана с водой, добиваясь равновесия при погружении в воду половины шарика. Определите, в каком отношении делится палочка точкой опоры. Плотность алюминия $\rho_a=2,7 \cdot 10^3$ кг/м³.

10. Какой максимальный уклон может преодолеть электровоз мощностью $N=7 \cdot 10^5$ Вт, двигая состав массой $m=6 \cdot 10^6$ кг со скоростью $v=7,2$ км/ч, если коэффициент трения $\mu=0,002$?

11. Деталь, обрабатываемая на станке, прижимается к шлифовальному камню диаметром $D=4 \cdot 10^{-1}$ м с силой $F=1,0 \cdot 10^3$ Н. Какая мощность затрачивается на шлифовку, если коэффициент трения камня о деталь $\mu=2 \cdot 10^{-1}$ и камень вращается с частотой $n=2$ об/с?

12. Определите мощность гидротурбины при условии, что за время $t=1$ с с высоты $h=100$ м падает $V=250$ м³ воды. КПД турбины $\eta=90\%$.

13. Брусок массой m_1 движется по гладкой горизонтальной плоскости со скоростью \vec{v}_1 . Пуля массой m_2 , летевшая в горизонтальном направлении со скоростью \vec{v}_2 , застревает в бруске. Угол между векторами \vec{v}_1 и \vec{v}_2 $\alpha=90^\circ$. Какое количество теплоты выделилось в бруске?

14. Пуля массой $m=10$ г, летящая горизонтально со скоростью $v=500$ м/с, попадает в ящик с песком массой $M=50$ кг, подвешенный на веревке, и застревает в нем. На какую высоту поднимется ящик, отклоняясь после попадания пули?

15. Нейтрон сталкивается с покоящимся ядром и после упругого удара отскакивает от него в прямо противоположном направлении. Измерения показали, что отношение энергии нейтрона после столкновения к его энергии до столкновения равно $(11/13)^2$. Определите массовое число ядра.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1. Сколько кислорода вдыхает при каждом вдохе альпинист, находящийся на высоте, где давление воздуха $p=50 \cdot 10^3$ Па? Известно, что у поверхности Земли, где давление $p_0=100 \cdot 10^3$ Па, человек вдыхает за один раз $m_0=1,0 \cdot 10^{-3}$ кг кислорода. Изменением температуры воздуха с высотой можно пренебречь.

2. На сколько градусов необходимо нагреть газ при постоянном давлении, чтобы объем его увеличился вдвое по сравнению с объемом при 0°C ?

3. На какой глубине объем пузырька воздуха, поднимающегося со дна водоема, вдвое меньше, чем у поверхности? Наружное давление $p_0=760$ мм рт. ст.

4. В баллоне объемом $V=1,0 \cdot 10^{-3}$ м³ находится газ. При постоянной температуре часть газа выпускается из баллона, при этом давление в нем уменьшается на $\Delta p=55$ кПа, а масса баллона с газом — на $\Delta m=1,0 \cdot 10^{-3}$ кг. Найдите плотность газа при нормальном давлении $p_0=101,3$ кПа и температуре опыта.

5. Два сосуда соединены тонкой трубкой с краном. В одном сосуде, объем которого $V_1=2$ л, находится азот при давлении $p_1=1,4 \cdot 10^5$ Па и температуре $t_1=7^\circ\text{C}$, в другом, объемом $V_2=4$ л, — углекислый газ при давлении $p_2=1,6 \cdot 10^5$ Па и температуре $t_2=47^\circ\text{C}$. Какое установится давление в сосудах, если кран будет открыт, а температура станет равной $t=27^\circ\text{C}$?

6. На сколько градусов надо нагреть воздух внутри сообщающегося с атмосферой воздушно-го шара, сферическая оболочка которого имеет диаметр $d=10$ м и массу $m=10$ кг, для того, чтобы шар взлетел? Атмосферное давление $p_a=735$ мм рт. ст., температура $t_a=27^\circ\text{C}$. Молярную массу воздуха принять равной $M=29$ кг/кмоль.

7. При изобарном нагревании $m=2$ кг кислорода была совершена работа $A=65$ кДж. На сколько градусов нагрели газ? Молярная масса кислорода $M=0,032$ кг/моль.

8. Автомобиль совершает пробег длиной $s=120$ км со средней скоростью $v=60$ км/ч.

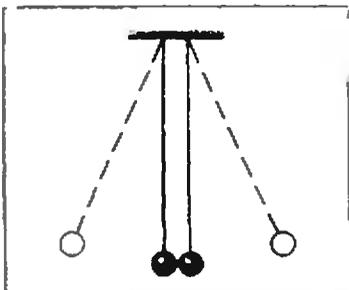


Рис. 4.

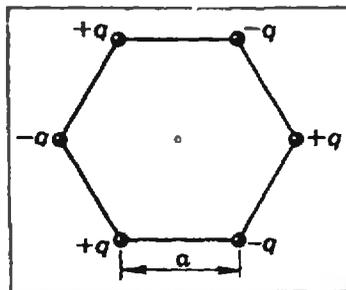


Рис. 5.

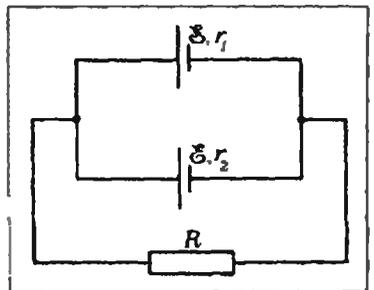


Рис. 6.

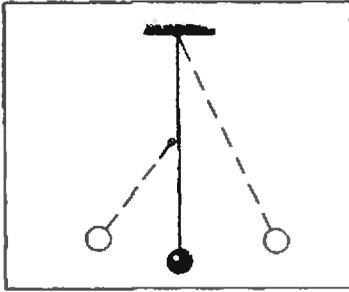


Рис. 7.

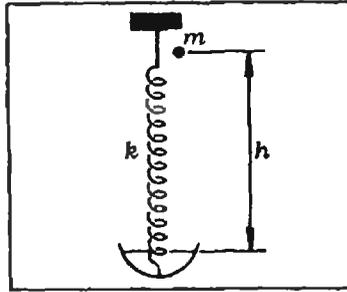


Рис. 8.

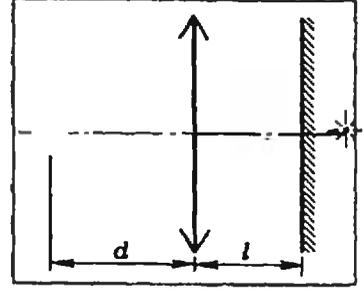


Рис. 9

На этом пути израсходовано $V=15$ л бензина. КПД мотора $\eta=30\%$. Какую среднюю мощность развивал мотор во время пробега? Теплота сгорания бензина $q=4,6 \cdot 10^7$ Дж/кг, а его плотность $\rho=800$ кг/м³.

9. Сколько необходимо сжечь угля, чтобы $M=6 \cdot 10^3$ кг воды, взятой при $T_1=283$ К, нагреть до $t_2=100^\circ\text{C}$ и $m=1,0 \cdot 10^3$ кг ее обратить в пар? КПД котла $\eta=70\%$. Удельная теплоемкость воды $c=4190$ Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды $r=2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг, теплота сгорания угля $q=3 \cdot 10^7$ Дж/кг.

10. Какую максимальную работу может совершить идеальный двигатель, если он в каждом цикле получает количество теплоты $Q=10^3$ Дж от нагревателя с температурой $T_n=1000$ К? Температура окружающей среды (холодильника) $T_x=20^\circ\text{C}$.

Основы электродинамики

1. На шелковых нитях длиной $l=1$ м висят, соприкасаясь друг с другом, два шарика малого диаметра с массой $m=1,5 \cdot 10^{-3}$ кг каждый (рис. 4). На какое расстояние разойдутся шарики, если каждому из них сообщить заряд $q=6 \times 10^{-9}$ Кл?

2. Поле создано двумя точечными зарядами $q_1=4 \cdot 10^{-9}$ Кл и $q_2=9 \cdot 10^{-9}$ Кл. В каких точках напряженность равна нулю, если расстояние между зарядами $l=2 \cdot 10^{-1}$ м?

3. В вершинах правильного шестиугольника со стороны a поочередно расположены заряды $+q$ и $-q$ (рис. 5). Определите напряженность поля, создаваемого всеми зарядами, в центре фигуры.

4. Потенциал электрического поля на расстоянии $r=40$ см от точечного заряда равен $\phi=200$ В. Какая сила будет действовать на точечный заряд $q=10^{-9}$ Кл, помещенный в эту точку?

5. Конденсатор, заряженный до напряжения $U_1=250$ В, соединяется с конденсатором такой же емкости, но заряженным до напряжения $U_2=150$ В, параллельно. Какое напряжение установится между обкладками? Рассмотреть два случая: соединение пластин одинаковой и различной полярностей.

6. Разность потенциалов между катодом и анодом электронной лампы $U=90$ В, расстояние между электродами $d=1$ мм. С каким ускорением движется электрон от катода к аноду? Какую скорость приобретает электрон, подлетая к аноду? Поле в пространстве между электродами считать однородным. Масса электрона $m=9,1 \cdot 10^{-31}$ кг, а его заряд $e=-1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

7. В поле плоского конденсатора, расстояние между пластинами которого $d=1,0 \cdot 10^{-2}$ м, находится в равновесии частица массой $m=1,0 \times 10^{-7}$ кг и зарядом $q=1,0 \cdot 10^{-12}$ Кл. Определите разность потенциалов на пластинах конден-

сатора при условии, что между ними находится воздух.

8. Если вольтметр соединить последовательно с резистором с сопротивлением $R=10$ кОм, то при напряжении в цепи $U=120$ В он покажет $U_1=50$ В. Если соединить его последовательно с резистором с неизвестным сопротивлением, то при том же напряжении он покажет $U_2=10$ В. Определите величину неизвестного сопротивления.

9. Электродвижущая сила каждого из двух источников, соединенных параллельно, $\mathcal{E}=1,8$ В (рис. 6). Внутреннее сопротивление первого источника $r_1=0,9$ Ом, второго $r_2=0,45$ Ом. Батарея замкнута резистором, причём ток, проходящий в первом источнике, равен $I=1$ А. Чему равно сопротивление резистора?

10. Электрическая плитка мощностью $P_1=550$ Вт для сети с напряжением $U_1=220$ В была включена в сеть с напряжением $U_2=127$ В. Какая мощность выделяется в плитке при таком включении? На какую часть нужно укоротить спираль, чтобы плитка выделяла мощность P_1 при напряжении U_2 ?

11. Определите КПД электрического чайника, если при мощности $P=8 \cdot 10^2$ Вт за время $t=20$ мин можно вскипятить $V=2$ л воды при начальной температуре $t=20^\circ\text{C}$. Удельная теплоемкость воды $c=4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).

12. От генератора, напряжение на выходе которого $U=300$ В, требуется передать на расстоянии $l=1$ км мощность $P=10$ кВт. Какого сечения должен быть медный провод, чтобы потери напряжения на линии не превышали 5%? Удельное сопротивление меди $\rho=1,7 \cdot 10^{-8}$ Ом·м.

13. Для получения меди включено последовательно $N=400$ электролитических ванн с площадью катодных пластин $S=16$ м² в каждой ванне. Плотность тока $j=200$ А/м². Найдите выпуск меди за время $t=24$ ч и расход энергии за то же время, если напряжение на ваннах $U=100$ В. Электрохимический эквивалент меди $k=0,33$ мг/Кл.

Колебания и волны

1. В кабине подъемника висит маятник. Когда кабина неподвижна, период его колебаний $T_0=1$ с. В движущейся с постоянным ускорением кабине период $T=1,2$ с. Определите модуль и направление ускорения кабины.

2. Математический маятник длиной l совершает колебания вблизи вертикальной стенки (рис. 7). Под точкой подвеса маятника на расстоянии $l/2$ от нее в стену забит гвоздь. Найдите период колебаний маятника.

3. На чашку, подвешенную на пружине жесткостью k (рис. 8), с высоты h падает груз массы m и остается на чашке (удар абсолютно неупру-

гий). Определите амплитуду колебаний чашки (массой чашки можно пренебречь).

4. Капли воды падают через одинаковые интервалы времени с некоторой высоты на пластину, закрепленную на пружине. Частота собственных колебаний пластины ω_0 . Известно, что амплитуда колебаний пластины при этом оказывается максимальной. Найдите расстояние между отрывающейся каплей и ближайшей к ней падающей каплей.

5. При какой скорости поезда рессоры вагонов будут особенно сильно колебаться под действием толчков колес о стыки рельсов? Длина рельса l , нагрузка на рессору F , рессора прогибается на h при нагрузке f .

6. Колебательный контур с периодом колебаний $T = 1 \cdot 10^{-6}$ с имеет индуктивность $L = 0,2$ Гн и активное сопротивление $R = 2$ Ом. На сколько процентов уменьшится энергия этого контура за время одного колебания? На протяжении нескольких колебаний ток можно считать синусоидальным.

Оптика

1. На поверхности озера находится плот, длина которого $a = 8$ м, ширина $b = 6$ м. Определите размеры полной тени от плота на дне озера при освещении поверхности воды рассеянным светом. Глубина озера $h = 2$ м, показатель преломления воды $n = 1,33$.

2. Угол падения луча из воздуха на стеклянную пластину с толщиной d и показателем преломления n равен углу полного отражения для стекла, из которого изготовлена пластинка. Вычислите смещение луча в результате прохождения сквозь указанную пластину.

3. Фокусное расстояние собирающей линзы $F = 10$ см, расстояние от предмета до переднего фокуса $l = 5$ см, а линейный размер предмета $h = 2$ см. Определите величину изображения. Где нужно расположить предмет, чтобы получить изображение с увеличением $\Gamma = 10$?

4. С помощью собирающей линзы на экране получено уменьшенное действительное изображение предмета. Размер предмета $h = 6$ см, размер изображения $h_1 = 4$ см. Оставляя экран и предмет неподвижными, линзу перемещают в сторону предмета до тех пор, пока не получат второе четкое изображение предмета. Определите его величину.

5. На оптической оси на расстоянии $d = 2$ м от собирающей линзы с оптической силой $D = 1$ дптр помещена лампочка (рис. 9). За линзой на расстоянии $l = 1,75$ м расположено плоское зеркало, установленное перпендикулярно оптической оси. На каких расстояниях от линзы будет находиться изображение предмета?

6. При освещении катода светом вначале с длиной волны λ_1 , затем λ_2 обнаружили, что запирающее напряжение изменилось в n раз ($U_1/U_2 = n$). Определите работу выхода электрона из материала катода.

7. Какими лучами освещен стронций, если с его поверхности вылетают электроны с максимальной кинетической энергией $E = 1,8 \times 10^{-19}$ Дж? Красная граница фотоэффекта для стронция $\lambda_{\text{max}} = 550$ нм.

Ответы, указания, решения



Избранные никовые задачи

1. Ответ: 0. Решение.
$$\frac{1}{\sqrt{8-\sqrt{7}} + \sqrt{10+\sqrt{8}}} + \frac{2}{\sqrt{8+\sqrt{7}} + \frac{2(\sqrt{10}-\sqrt{8})}{(\sqrt{10}-\sqrt{7})^2 - (\sqrt{8}-\sqrt{7})^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}-\sqrt{7}} = \frac{3(\sqrt{10}+\sqrt{7})}{(\sqrt{10})^2 - (\sqrt{7})^2} = \frac{3(\sqrt{10}+\sqrt{7})}{3} = \sqrt{10} + \sqrt{7} - \sqrt{10} - \sqrt{7} = 0.$$

2. а) 1 способ. Треугольники ABO и BCO имеют общую высоту, проведенную из вершины B , поэтому их площади относятся как длины оснований: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{|AO|}{|CO|}$ (рис. 1); аналогично $\frac{S_4}{S_3} = \frac{|AO|}{|CO|}$. Следовательно, $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_4}{S_3}$ и поэтому $S_1 S_3 = S_2 S_4$. 2 способ. Оба произведения равны $\frac{1}{4} |AO| |BO| |CO| |DO| \sin^2 \varphi$, где φ — угол между прямыми AC и BD .

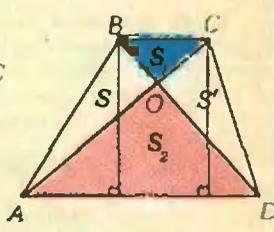
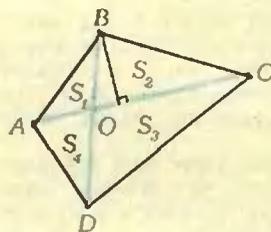


Рис. 1.

Рис. 2.

б) Ответ: $\sqrt{S_1 S_2}$. Указание. (рис. 2) $S_{ABD} = S_{ACD}$ (у них общее основание AD и равны высоты, проведенные к AD), поэтому $S_{CDO} = S_{ABO} = S$; после чего ответ немедленно следует из утверждения п. а): $S^2 = S_1 S_3$. Другой способ: из подобия треугольников BOC и AOD следует, что $\frac{|AO|}{|OC|} = \sqrt{\frac{S_2}{S_1}}$. С другой стороны, $\frac{S}{S_1} = \frac{|AO|}{|OC|}$ (см. п. а)), откуда $\frac{S}{S_1} = \frac{\sqrt{S_2}}{\sqrt{S_1}}$ и $S = \sqrt{S_1 S_2}$.

3. Ответ: 29. Решение. В момент выхода из порта A выбранный нами пароход встретит в порту A пароход, вышедший из B ровно 15 суток назад, в момент прибытия в B — пароход, выходящий из B ровно через 15 суток после отправления выбранного парохода. Значит, всего произойдет 31 встреча (столько же, сколько целых чисел от -15 до 15 включительно), из них — 29 в открытом море.

4. Умножив обе части доказываемого равенства на S , где S — площадь треугольника, получим равносильное равенство $\frac{S}{r} = \frac{S}{h_a} + \frac{S}{h_b} + \frac{S}{h_c}$, где

части которого равны полупериметру треугольника (в силу формул $S=pr = \frac{1}{2} ah_a = \frac{1}{2} bh_b = \frac{1}{2} ch_c$ для площади треугольника).

5. Ответ: $(-1; -1; -1)$. Решение. Сложив все три уравнения, после преобразований получим: $(x+1)^2 + (y+1)^2 + (z+1)^2 = 0$, что возможно лишь при $x=y=z=-1$ (каждое из слагаемых $(x+1)^2, (y+1)^2, (z+1)^2$ неотрицательно). Остаток проверить, что полученная тройка чисел удовлетворяет исходной системе уравнений.

6. Ответ: 90° . Указание. Оба вектора ненулевые и их скалярное произведение равно 0.

7. Ответ: $\frac{1985}{3968}$. Указание. Преобразуйте

каждую из скобок по формуле $1 - \frac{1}{k^2} = \frac{k^2-1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$ и сократите общие множители числителя и знаменатели, получится, что указанное выражение равно $\frac{1 \cdot 1985}{2 \cdot 1984}$.

8. а) Предположим, что число $\sqrt{6}$ — рационально.

Тогда оно представимо в виде $\sqrt{6} = \frac{m}{n}$, где m и n — натуральные числа, так как $m^2 = 6n^2$, то m^2 , а следовательно, и m , делится на 3, то есть $m = 3m_1$, где m_1 — натуральное число. Подставляя $9m_1^2$ вместо m^2 в равенство $m^2 = 6n^2$, получим $3m_1^2 = 2n^2$, откуда следует, что и n делится на 3, что противоречит предположению о несократимости дроби $\frac{m}{n}$.

б) Предположим противное: пусть $\sqrt{2} + \sqrt{3} = r$, где r — рациональное число. Тогда $r^2 = 2 + 3 + 2\sqrt{6}$, откуда получаем, что число $\sqrt{6} = \frac{r^2-5}{2}$ рационально, что противоречит результату, доказанному в п. а).

Замечание. Аналогично задаче 8 а) показывается, что если k не является квадратом натурального числа, то число \sqrt{k} — иррационально:

из равенства $\sqrt{k} = \frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n}$ — несократимая дробь выводится, что и m и n делятся на p , где p — любое из простых чисел, входящих в нечетной степени в разложение числа k на простые множители.

9. Ответ: а) $-6; 0$; б) $-4; 0$. Указание.

а) Уравнение «симметрично» относительно $x+3$ (точки $x+1, x+2, x+4, x+5$ расположены на числовой оси симметрично относительно точки $x+3$); замена $y = x+3$, приводит уравнение к биквадратному уравнению $y^4 - 5y^2 - 36 = 0$. (Возможна и замена $z = x^2 + 6x$, тогда $(x+1)(x+5) = z+5, (x+2)(x+4) = z+8$.) б) Замена $y = x+2$ приводит уравнение к биквадратному уравнению $y^4 + 6y^2 - 40 = 0$.

10. Ответ: а) Может во всех случаях; б) может только при четных n , то есть при $n=0$ и $n=4$; в) может только при $n=0$. Указание. Если четная (нечетная) функция имеет экстремум в точке $x_0 \neq 0$, то она имеет экстремум и в точке $-x_0$; в точке 0 нечетная функция не может иметь экстремума (докажите это сами), четная может иметь, а может и не иметь (приведите соответствующие примеры). Периодическая функция может не иметь точек экстремума, например,

функция $f(x) = \frac{\{x\}^2}{\{x\}}$ ($\{x\}$ обозначает дробную часть x , в целых точках f не определена).

Если же хотя бы один экстремум есть, скажем в точке x_0 , то функция имеет бесконечно много экстремумов, так как точками экстремума являются все точки вида $x_0 + kT$, где T — период функции, k — любое целое число.

11. Так как $ab = \frac{1}{c}, ac = \frac{1}{b}, bc = \frac{1}{a}$, то ука-

занное неравенство можно записать в виде

$a + \frac{1}{a} + b + \frac{1}{b} + c + \frac{1}{c} > 6$, после чего оста-

лось воспользоваться неравенством $x + \frac{1}{x} > 2$,

верным для любого положительного x . Равенство достигается только в случае $a=b=c=1$.

12. Указание. Рассмотрите прямые a и b — линии пересечения плоскостей, содержащих противоположные грани четырехгранного угла. Сечение угла плоскостью, параллельной a и b , будет искомым.

13. Умножив обе части равенства на $3V$, где V — объем тетраэдра, получим равносильное равенство $\frac{3V}{r} = \frac{3V}{h_1} + \frac{3V}{h_2} + \frac{3V}{h_3} + \frac{3V}{h_4}$, обе

части которого равны полной поверхности тетраэдра (в силу формул $V = \frac{1}{3} Sr = \frac{1}{3} S_i h_i$,

для объема тетраэдра, S — полная поверхность, S_i — площади граней, $i=1, 2, 3, 4$)

14. Ответ: а) $\frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}; \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$; б) $-2; 1$.

— $1 \pm \sqrt{3}$. Указание. а) Проверьте, что $x=0$ не является корнем уравнения и поделите обе части уравнения на x^2 . Тогда после замены $y = x + \frac{1}{x}$ уравнение запишется в виде

$y^2 - 2y - 15 = 0$ (так как $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$); б) заме-

на $y = x - \frac{2}{x}$ приводит уравнение (после деления

обеих частей на x^2) к виду $y^2 + 3y + 2 = 0$; другой способ «угадать» корни $x=1$ и $x=-2$ и разложить левую часть уравнения на множители: $(x-1)(x+2)(x^2+2x-2)$, — например, делением $x^4+3x^3-2x^2-6x+4$ сначала на $(x-1)$, а затем на $(x+2)$.

15. Для решения задачи проще всего воспользоваться методом координат. При доказательстве мы будем использовать следующее утверждение: треугольник является остроугольным тогда и только тогда, когда квадрат любой его стороны меньше суммы квадратов двух других сторон. Справедливость этого утверждения легко следует, например, из теоремы косинусов: $\cos A =$

$= \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$, поэтому $\cos \hat{A}$ положителен тогда

и только тогда, когда $b^2 + c^2 > a^2$. Аналогично рассуждаем для углов B и C . Выберем систему координат с центром O и направим оси Ox, Oy и Oz вдоль лучей OA, OB и OC , соответственно (рис. 3). Пусть точки A, B и C имеют координаты $(x, 0, 0), (0, y, 0)$ и $(0, 0, z)$, соответственно. По формуле расстояния между двумя точками пространства (см. § 59 учебника геометрии) имеем: $|AB|^2 = x^2 + y^2, |AC|^2 = x^2 + z^2, |BC|^2 = y^2 + z^2$. а) Очевидно, что квадрат любой стороны

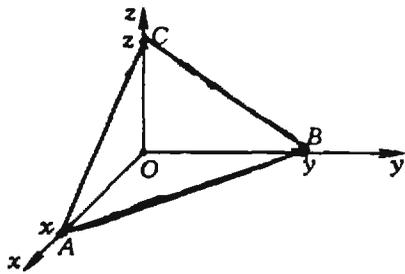


Рис. 3.

треугольника ABC меньше суммы квадратов двух других сторон, например, $|AB|^2 = x^2 + y^2 < (x^2 + z^2) + (y^2 + z^2) = |AC|^2 + |BC|^2$. Следовательно, этот треугольник остроугольный. б) Достаточно проверить, что имеет решение система уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = c^2, \\ x^2 + z^2 = b^2, \\ y^2 + z^2 = a^2, \end{cases}$$

где a, b, c — длины сторон данного остроугольного треугольника. Сложив все три уравнения системы и разделив обе части полученного уравнения на 2 найдем, что $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{2}$. После этого легко выражаются

$$x^2, y^2 \text{ и } z^2: x^2 = (x^2 + y^2 + z^2) - (y^2 + z^2) = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2},$$

$$\text{аналогично } y^2 = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} \text{ и } z^2 = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2}.$$

Так как данный треугольник остроугольный, то правые части полученных выражений положительны и исходная система имеет решение (x, y и z нужно взять положительными). Замечание. Вместо метода координат можно воспользоваться теоремой Пифагора.

Движение по окружности

1. Песчинки будут находиться на высоте $h = R(1 - g/(\omega^2 R))$, если $\omega^2 R > g$, и на высоте $h = 0$, если $\omega^2 R < g$. Первый случай соответствует положению неустойчивого равновесия, а второй — устойчивого равновесия.

2. $v_{\min} = \sqrt{gR} = 2 \text{ м/с.}$

3. $\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{gR(\mu + \operatorname{tg} \alpha)/(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)}}{\sqrt{\mu gR}} =$

$$= \sqrt{\frac{\mu + \operatorname{tg} \alpha}{\mu(1 - \mu \operatorname{tg} \alpha)}}.$$

4. $a = \mu(g - v^2/R) \approx 2,8 \text{ м/с}^2.$

Задачи вступительных экзаменов в различные вузы в 1983 году

Математика

Письменный экзамен

Алгебра

1. 4 и 5. 2. 1, 5, 25. 3. 14 км/ч. 4. $\frac{3\pi R}{64}$ см/с и $\frac{5\pi R}{64}$ см/с или $\frac{9\pi R}{320}$ см/с; $\frac{31\pi R}{320}$ см/с

(два ответа в зависимости от направления движения точек).

5. За 6 часов. 6. Воспользуйтесь тем, что

$$\frac{1}{a_k - 1/a_k} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{a_k - 1} - \frac{1}{a_k} \right).$$

- б) $x + 1$ при $x > 0, x \neq 1$; в) $a - b$ при $a > 0, b > 0$;
 г) $\frac{a}{x^2}$ при $x > 0, a \neq x$. 9. $\frac{23}{32}$. 10. $-\frac{17}{26} \sqrt{2}$.
 11. $p > 2$. 12. $b < -\frac{3}{2}$.

13. а) {3}; б) {-1; 3}; в) {4}; г) $\left\{ \frac{1}{100}; 10 \right\}$;
 д) {4}; е) $(\log_{1,5} 2; 2 \log_{1,5} 2)$; ж) {4}; з) $\{4; 4 \sqrt[3]{4}\}$;
 н) $x_1 = \frac{\pi}{2} (2k + 1), x_2 = \frac{\pi}{6} (6l \pm 1) \quad (k, l \in \mathbb{Z})$;

к) $x = \pm \arccos \left(-\frac{1}{3} \right) + 2\pi k \quad (k \in \mathbb{Z})$;

л) $x_1 = \frac{\pi}{2} (4k + 1); x_2 = \pi(2l + 1) \quad (k, l \in \mathbb{Z})$;

м) $x_1 = \frac{k\pi}{2}; x_2 = \frac{\pi}{8} (2l + 1) \quad (k, l \in \mathbb{Z})$;

н) $x = \frac{\pi}{4} (4k + 1) \quad (k \in \mathbb{Z})$;

о) $x_1 = \frac{\pi}{4} (8k + 3), x_2 = \arctg \frac{1}{3} + 2\pi l \quad (k, l \in \mathbb{Z})$;

п) $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n \quad (n \in \mathbb{Z})$;

р) $\left\{ -\frac{3 + \sqrt{5}}{2}; -1; \frac{\sqrt{5} - 3}{2}; 0 \right\}$.

14. $\left\{ -\pi; -\frac{3\pi}{4}; 0; \frac{\pi}{4}; \pi \right\}$.

15. $\left\{ \frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{8}; \frac{3\pi}{8}; \frac{5\pi}{12} \right\}$.

16. Нет корней, если $a < 0$,
 2 корня, если $a = 0$ и $a \in [2; 6]$,
 3 корня, если $a = 2$ или $a = 6$,
 4 корня, если $a \in]0; 2[\cup]6; +\infty[$.

17. Уравнение имеет корни при $\frac{3}{4} < a < 7$.

При этом $x = \pm \arccos \frac{1}{4} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$, если $a = \frac{3}{4}$;

$$x_1 = \pm \arccos \left(\frac{1 - \sqrt{4a - 3}}{4} \right) + 2k\pi,$$

$$x_2 = \pm \arccos \left(\frac{1 + \sqrt{4a - 3}}{4} \right) + 2l\pi$$

$$(k, l \in \mathbb{Z}), \text{ если } a \in \left[\frac{3}{4}; 3 \right];$$

$$x = \pm \arccos \left(\frac{1 - \sqrt{4a - 3}}{4} \right) + 2k\pi$$

$$(k \in \mathbb{Z}), \text{ если } a \in]3; 7[.$$

18. а) $\left[-1; \frac{5}{4} \right]; б) \left[-2 \frac{9}{11}; -2 \right] \cup]3; +\infty[$;

в) $] -\infty; -\sqrt{1983}] \cup]\sqrt{1983}; +\infty[$;

г) $] -\sqrt{1983}; 1[\cup]\sqrt{1982}; \sqrt{1983}[$;

д) $]2; +\infty[$; е) $]0; 1[\cup]1983^4; +\infty[$;

ж) $] -1; 1[\cup]1; 3[\cup]4; 5[$;

з) $\left[-\frac{1}{3}; \frac{\pi}{6} \right] \cup \left[\frac{\pi}{6}; 1 \right]$;

и) $] -2; -1[\cup]1; 2[$;

к) $] -\infty; -4[\cup]2; 5[\cup]5; 6[\cup]6; 7[\cup]7; +\infty[$;

л) $\{-1\}$.

19. а) $\{(2; 1), (-2; -1), (2; -1), (-2; 1)\}$;

б) $\{(4!; 40)\}$; в) $\{(2^3; 2^5)\}$; г) $\{(20; 16)\}$;

Анализ

1. $-\frac{11}{5}$. 2. $x_1 = 3, x_2 = -1$. 3. $]0; \frac{3 + \sqrt{89}}{20}[$.

4. а) $\max y = y(-1) = 12; \min y = y(1 + \sqrt{3}) = -2 - 6\sqrt{3}$; б) $\min y = y(2) = 0; \max y = y(4) = 4\sqrt{6}$.

5. $(-1; 0)$. 6. а) Точка минимума $x = \ln 2$;

- 6) $x_1 = -\sqrt{2 \log_3 2}$, $x_2 = \sqrt{2 \log_3 2}$ — точка максимума, $x_3 = 0$ — точка минимума.
 7. Убывает на $\left] 0; \frac{3}{4} \right[$, возрастает на $\left] \frac{3}{4}; +\infty \right[$.
 8. $a \in]-\infty; -6[\cup]18; +\infty[$.
 9. $a = \frac{1}{2}$. 10. $\left[-4; \frac{3-\sqrt{21}}{2} \right] \cup]1; +\infty[$.
 11. $\frac{23}{41}$ часа. 12. $S_{\max} = \frac{8}{27}$, $x = \frac{1}{3}$.
 13. $48 = 5 + 43$. 14. $0,55 \sqrt{5}$

Геометрия

1. $\vec{0}$. 2. $\frac{\pi}{2}$. 3. 20 м. 4. $3a^2(7-4\sqrt{3})$. 5. $\frac{a^2}{8} \operatorname{tg} \alpha$;
 $a \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha \right)$ 6. 270 см². 7. 48. 8. $\frac{2}{\sqrt{5}} a^2$.
 9. $\frac{\sqrt{ab((a+b)^2-c^2)}}{a+b}$. 10. $\frac{a^2-b^2}{4} (\sqrt{3}-1)$. 11. h^2 .
 12. $\frac{3}{4} b$, $\frac{3}{4} a$. 13. $\frac{1}{4} ab \sin \alpha$. 14. $\frac{25}{49} S$. 15. 9:1.
 16. $\frac{13a+4b}{50} \sqrt{d^2 - \frac{1}{4}(a-b)^2}$. 17. 2.
 18. $\frac{a^2}{4} \sqrt{3(4 \operatorname{tg}^2 \beta + 1)}$. 19. $2 \arcsin \frac{1}{\sqrt{12}}$.
 20. $\frac{6a^2 h^2}{(a+h)^2}$. 21. 4,5 см. 22. $a^3 \sin \alpha \sin \beta \times$
 $\times \sqrt{\cos(\alpha+\beta) \cos(\alpha-\beta)}$. 23. $\frac{\sqrt{2}}{2} a^3$.
 24. $\frac{H}{\sqrt{1+4 \operatorname{tg}^2 \alpha + 1}}$. 25. $4 \sqrt{3} \pi b^3 (27 \sin^3 2\alpha)^{-1}$.
 26. 900π. 27. $\frac{12V}{\pi(1+\sqrt{2})^3}$.
 28. $\frac{1}{6} S \sqrt{S} \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\pi \sin \frac{\alpha}{2}}}$. 29. $\frac{a^6}{2(a^2-1)^2}$.
 30. $-\frac{1}{3} \pi R^3 \operatorname{tg}^3 \alpha \cdot \operatorname{tg} 2\alpha$. 31. $\frac{7}{54} l^3 \sin 2\alpha \cos \alpha$.
 32. $\arcsin \frac{3}{5}$. 33. $\frac{\pi(\gamma-1)}{\gamma^6}$. Отношение наибольшее при $\gamma = \frac{5}{4}$.

Устный экзамен

Алгебра

1. Второе число больше. 2. а) $\frac{17}{4}$, б) $\frac{3}{2}$.
 3. $\frac{5}{34} \sqrt{34}$. 4. Воспользуйтесь тем, что $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{(k-1)^2} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$.
 5. 55. 6. а) {1}; б) {3}; в) {3}; г) $\left\{ \frac{3}{2} \right\}$;
 д) $x=2$, $y = \frac{1}{2}$; е) {2}; ж) $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$ ($n \in \mathbb{Z}$); з) $x = \pm \arccos \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$).
 7. а) три решения; б) два решения; в) бесконечно много решений.
 8. $x = k\pi$, $y = \frac{\pi l}{2}$, $z = -\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi m}{3}$ ($k, l, m \in \mathbb{Z}$).
 9. а) $]-\infty; \frac{-1-\sqrt{11}}{2}] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{11}}{2}; +\infty \right[$;
 б) $[-7; -\sqrt{35}[\cup]0; 5]$; в) $[-5; 0[$; г) $]1; 2[\cup]8; +\infty[$; д) $]0; 2[\cup]3; 7[$; е) $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$.

10. $a \in]-\infty; 1[\cup]3; +\infty[$.
 12. $\{2; 3\}$. 14. $b \in]-2; 2[$.

Анализ

1. а) $(3x^2-10x)e^{x^3-5x^2}$, б) 0.
 2. $\min y = y(0) = 1$, $\max y = y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$.
 3. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$. 4. Убывает при $x \in \left] 0; \frac{1}{e} \right[$, возрастает при $x \in \left] \frac{1}{e}; +\infty \right[$. 5. $a \in]-\infty; -3[$.

Геометрия

1. Могут — это треугольники со сторонами $3d$, $4d$ и $5d$, где $d > 0$.
 2. $0 < S < \frac{a^2}{4} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}$.
 3. $S = \left(\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} \right) \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_3} \right) \times \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_3} - \frac{1}{h_2} \right) \left(\frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} - \frac{1}{h_1} \right) \right)^{-\frac{1}{2}} \times \frac{1 + \sin \frac{\pi}{n}}{n} \frac{1 - \sin \frac{\pi}{n}}{n}$.
 5. $r_1 = r \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}}{1 - \sin \frac{\pi}{n}}$, $r_2 = r \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}}{1 + \sin \frac{\pi}{n}}$.
 6. $\frac{2}{3} l^3 \sin \beta \sin \frac{\beta}{2}$. 7. $\arccos \frac{\operatorname{ctg} \frac{\pi}{n}}{\operatorname{ctg} \frac{\beta}{2}}$. 8. $\operatorname{arctg} 3$

Физика

Механика

1. $v_{\text{ср}} = \frac{2v_1 v_2}{v_1 + v_2} \approx 53,3$ км/ч.
 2. $\tau = \sqrt{l^2 + 2l/g} \approx 1$ с.
 3. $t = (2v_0 \sin \alpha)/g \approx 80$ с; $R = (v_0 \cos \alpha)^2/g \approx 4,8 \cdot 10^4$ м.
 4. $t = \sqrt{\frac{(m_1 + m_2)h}{(m_1 - m_2)g}} = 1,4$ с.
 5. $r = \sqrt[3]{\frac{T^2 R^3 g}{4\pi^2}} \approx 4,2 \cdot 10^7$ м.
 6. $l_2 = 2l_1 - l$.
 7. $F_1 = \frac{mg l}{2(l-l_1)} = 312,5$ Н; $F_2 = mg - F_1 = 187,5$ Н.
 8. $T = \frac{m}{2} \left(g + \frac{v^2}{l} \right) \approx 500$ Н.
 9. $\frac{l_1}{l_2} = 1 + \frac{4\pi R^3 (2\rho_a - \rho_b)}{3m} \approx 1,6$ (здесь $\rho_b = 10^3$ кг/м³ — плотность воды).
 10. $\alpha \approx \frac{N}{mgv} - \mu \approx 0,004$ рад $\approx 0,23^\circ$.
 11. $N = \mu F \pi D n \approx 480$ Вт.
 12. $N = \eta \rho g V h \approx 225$ МВт.
 13. $Q = \frac{m_1 m_2 (v_1^2 + v_2^2)}{2(m_1 + m_2)}$.
 14. $h = \frac{m^2 v^2}{2g(m+M)^2} \approx 0,5 \cdot 10^{-3}$ м $\approx 0,5$ мм.
 15. $A = 12$.

Молекулярная физика. Тепловые явления

1. $m = m_0 \rho / \rho_0 = 0,5 \cdot 10^{-3}$ кг.
 2. $\Delta t = 273^\circ \text{C}$.
 3. $h = \rho_0 / (\rho g) \approx 10$ м (здесь $\rho = 10^3$ кг/м³ — плотность воды).
 4. $\rho = \frac{\rho_0 \Delta m}{\Delta p V} \approx 1,8$ кг/м³.

5. $p = \left(\frac{p_1 V_1}{T_1} + \frac{p_2 V_2}{T_2} \right) \frac{T}{(V_1 + V_2)} = 1,5 \cdot 10^5 \text{ Па.}$
6. $\Delta T = \frac{T_u}{\left(\frac{\rho_1 M \lambda d^3}{6mRT_3} \right) - 1} \approx 61,4 \text{ К.}$
7. $\Delta T = AM / (mR) \approx 125 \text{ К.}$
8. $N = \eta q V q v / s \approx 23 \text{ кВт}$ (здесь $\eta \approx 0,3$).
9. $m_y = \frac{cM(T_2 - T_1) + rm}{q\eta/100\%} \approx 215 \text{ кг.}$
10. $A_{\text{max}} = (1 - T_x/T_n) Q = 707 \text{ Дж.}$

Основы электродинамики

1. $r \approx \sqrt{\frac{2kq^2 l}{mg}} \approx 4 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ (здесь $k = 9 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{м}^2/\text{Кл}^2$).
2. На линии, соединяющей заряды, точка, в которой напряженность поля равна нулю, находится на расстоянии $x = 8 \cdot 10^{-2} \text{ м}$ от первого заряда (x определяется из уравнения $(q_2 - q_1)x^2 + 2q_1 lx - q_1 l^2 = 0$).
3. $E = 0$.
4. $F = q\varphi/r = 5 \cdot 10^{-7} \text{ Н.}$
5. а) $U = (U_1 + U_2)/2 = 200 \text{ В}$; б) $U = (U_1 - U_2)/2 = 50 \text{ В.}$
6. $a = |e|U/(dm) \approx 1,6 \cdot 10^{16} \text{ м/с}^2$; $v = \sqrt{2|e|U/m} \approx 5,6 \cdot 10^6 \text{ м/с.}$
7. $U = mgd/q \approx 10^4 \text{ В.}$
8. $R_x = R \frac{U_1(U - U_2)}{U_2(U - U_1)} = 78,6 \text{ кОм.}$
9. $R = \frac{(R_1 - r_1)r_2}{l(r_1 + r_2)} = 0,3 \text{ Ом.}$
10. $P_2 = P_1 (U_2/U_1)^2 \approx 1 \text{ кВт}$; спираль надо укоротить на 0,67 ее длины.

11. $\eta = c\rho V(t_k - t) / (P\tau) = 0,7 = 70\%$ (здесь $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, $t_k = 100^\circ\text{C}$ — температура кипения воды).
12. $S = \frac{2qIP}{\alpha(1-\alpha)U^2} = 0,8 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ ($\alpha = 0,05$).
13. $m = kJStN \approx 36,5 \cdot 10^3 \text{ кг} = 36,5 \text{ т}$; $W = U_jStN \approx 1,1 \cdot 10^{13} \text{ Дж.}$

Колебания и волны

1. Ускорение кабины направлено вниз; его модуль $a = g(1 - T_0^2/T^2) = 0,31g \approx 3,1 \text{ м/с}^2$.

$$2. T = \pi \sqrt{\frac{l}{g} \left(1 + \frac{l}{\sqrt{2}} \right)}$$

$$3. x_m = \sqrt{(mg)^2 + 2mghk}/k.$$

$$4. l = 2\pi^2 g / \omega_0^2.$$

$$5. v = \frac{l}{2\pi} \sqrt{\frac{fg}{Fh}}$$

$$6. \alpha = \frac{RT}{L} 100\% = 0,001\%$$

Оптика

1. $a' = a - 2h/\sqrt{n^2 - 1} \approx 3,4 \text{ м}$; $b' = b - 2h/\sqrt{n^2 - 1} \approx 1,4 \text{ м.}$

$$2. l = \frac{d}{n} \left(1 - \frac{l}{\sqrt{n^2 + 1}} \right)$$

3. $H = hF/l = 4 \text{ см}$; $d_1 = F(1 + 1/\Gamma) = 11 \text{ см}$; $d_2 = F(1 - 1/\Gamma) = 9 \text{ см}$ (изображение мнимое).

4. $h_2 = h^2/h_1 = 9 \text{ см.}$

5. $f_1 = 3F/2$ (изображение действительное и находится за линзой); $f_2 = 3F$ (изображение действительное и находится перед линзой).

$$6. A = \frac{hc}{n-1} \left(\frac{n}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1} \right)$$

$$7. \lambda = \frac{\lambda_{\text{max}}}{E\lambda_{\text{max}}/(hc) + 1} \approx 367 \text{ нм.}$$

Главный редактор — академик И. К. Кикин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можяев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили

А. И. Вилескин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, Б. М. Ивлев, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

Номер оформили

М. Б. Дубах, А. И. Климинов, В. С. Коваль, А. Я. Коршунов, И. С. Клячкин, Ю. П. Миртышенко, Э. В. Назаров, А. Г. Остаев, И. Е. Смирнова, Е. К. Темчурин

Фото предоставили

А. И. Вилескин, В. Е. Шутов

В номере использованы материалы фотохроники ТАСС

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления

Э. А. Смирнов

Художественные редакторы Т. М. Макарова,

Е. В. Морозова

Корректор Н. Б. Румянцева

103006, Москва, К 6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 19.04.84. Подписано к печати 25.05.84

Печать офсетная. Усл. кр. от 23,8

Бумага 70×108 1/16

Усл. печ. л. 5,6. Уч. изд. л. 7,67. Т-09794

Тираж 179 459 экз. Цена 40 коп. Заказ 979

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Связьполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательства, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области



Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

ЭВМ ПРОТИВ ЧЕМПИОНА МИРА

В «Кванте» № 4 мы рассказывали о четвертом чемпионате мира среди ЭВМ. Стоит упомянуть и об их младших собратьях — микрокомпьютерах, которые широко распространяются по всему свету и, возможно, скоро появятся в продаже и в наших магазинах. Хотя по своей силе маленькие автоматы уступают старшим коллегам, интерес к ним постоянно растет. Уже состоялись три первенства мира среди микрокомпьютеров (1980 г. — Англия; 1981 г. — ФРГ; 1983 г. — Венгрия). В этих соревнованиях, которые в основном проводятся в рекламных целях (чем сильнее автомат, тем охотнее его купят), побеждали машины американской фирмы «Фиделити» — «Сэнсори Вайс», «Челленджер» и «Эйлит». Кстати, в последнем чемпионате мира среди больших ЭВМ участвовали девять микрокомпьютеров, но с весьма скромным результатом. Так, «Фиделити X» набрала 50 % очков и разделила 10—13 места.

В 1980 году организаторы международного турнира в Бад-Киссингене (ФРГ), опять же в целях рекламы, решили провести севис одновременной игры четырех гроссмейстеров против 100 микрокомпьютеров — А. Карпов, Б. Спасский, В. Унцикер и Р. Хюбнер боролись против 25 машин каждый. В ходе сеанса гроссмейстеры часто экспериментировали, ни теряясь возможностью машин. Спасский так много жертвовал, что ему пришлось приложить немало усилий, чтобы не отстать от своих коллег и добиться стопроцентного результата. Карпов шутки ради выиграл четыре одинаковые —

ход в ход партии, но в одном поединке он «зевнул» целую ладью, и для достижения победы ему пришлось пойти на хитрость. Программа была построена по принципу «дают — бери, бьют — беги». Если машине грозит мат и одновременно под боем фигура, то машина скорее получит мат, чем допустит материальные потери. Как раз этим несовершенством робота и воспользовался чемпион мира — имея лишнюю ладью и не желая расставаться с качеством, его скупой партнер пожертвовал королем. Посмотрите, как это произошло. Партия почти сенсационная, ведь впервые машина была близка к победе, встречаясь за доской с чемпионом мира по шахматам среди людей!

Карпов — «Суперсистем III» Английское начало

1. e4 e5 2. Kf3 Kc6 3. g3 Cc5 4. Cg2 Kf6 5. Kf3 0—0 6. 0—0 d6 7. d3 Ce6 8. a3 a5 9. h3 ♕e7 10. Лb1 Cf5 11. Cg5 Kph8 12. Kd5 ♖d8 13. b4 ab 14. ab Ca7 15. Ла1 h6 16. C:f6 gf 17. ♖d2 Kph7 18. Kh4 Ce6 19. Ce4+ Kpg7 20. g4 Kd4. Позиционные достижения компьютера невелики, и, продолжая 21. Ла3, белые, конечно, довели бы свой перевес до логического конца. Однако чемпион мира допускает редкий в своей практике зевок. 21. Kph2?? Kb3 22. ♖b2 K:a1 23. e3. Увы, брать коня нельзя ни ферзем, ни ладьей из-за 23... C:f2. 23... c6 24. Kc3 d5 25. cd cd 26. Cg2 d4 27. Kb5 ♖b6 28. K:a7 ♖:a7 29. f4 de 30. fe fe 31. ♕:e5+ Kpg8 32. Kg6.

Играя сейчас 32... ♖b8!, машина брала верх. После 33. Ke7+ Kph7 34. Ce4+ f5 35. ♖:b8 Лf:b8 36. gf Cf7 37. f6+ Kph8 38. Лg1 Ла2+ 39. Kph1 e2 белым пришлось бы «пожать руку» компьютеру. Что же случилось в партии? Обнаружив, что ладья находится под боем, машина не пожелала отдавать качество и, убедившись, что 32... fg, ведет к вечному шаху, отступила ею в сторону — 32... Лfd8. В результате электронному шахматисту удалось сохранить огромный материальный перевес, но дорогой ценой — последовало 33. ♖h8X.

А. Карпову не раз приходилось обыгрывать микроЭВМ в сеансах одновременной игры. Но однажды компьютеру повезло. Это случилось в 1983 году в сеансе одновременной игры во время открытого чемпионата ФРГ.

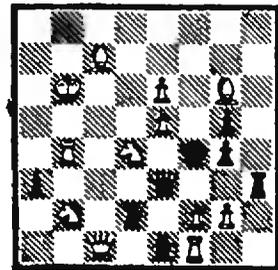
Карпов — «Мифисто III»

Испанская партия

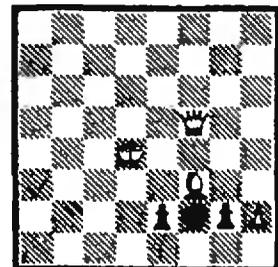
1. e4 e5 2. Kf3 Kc6 3. Cb5 Kf6 4. 0—0 K:e4 5. d4 ed. Неважный ход. Сильнее 5... Ce7. 6. Le1 f5. Не будем обижать автомат и снабжать его ходы вопросительными знаками. Заметим лишь, что после «импульсивного» движения пешки «f» положение черных уже безнадежно. 7. K:d4 K:d4 8. ♕:d4 Kpf7. Здесь решало 9. ♖d5+ Kpg6 (9... Kpf6 10. Л:e4 fe 11. Cg5+) 10. Л:e4! fe 11. ♖:e4+ Kpf7 (11... Kph5 12. Ce2X, 11... Kpf6 12. Фh4+) 12. Cc4+ d5 (12... Kpf6 13. Фf4+ Kpe7 14. ♖e5X, 13... Kpg6 14. Cf7X) 13. C:d5+ Ce6 14. ♖:e6X. Хороший учебный пример для начинающих шахматистов. Однако чемпион мира тоже сделал «импульсивный» ход — дал шах не той фигурой, и дальнейшая жертва качества на e4 привела лишь к вечному шаху.

9. Cc4+ d5 10. C:d5+ Ce6 11. C:e6+ Kpe6 12. Л:e4+ fe 13. ♖:e4+ Kpf6 14. Kc3 ce 15. Ce3 Ce7 16. Le1 ♖d7 17. ♖f4+ Kpg6 18. h4 ♖f5 19. h5+ ♕:h5 20. Cd4 Cf6 21. g4 ♖g5 22. ♖:e4+ Kpf7 23. ♖e6+ Kpg6 24. ♖:e4+ Kpf7 25. ♖e6+ Kpg6 26. ♖:e4+. Ничья.

Конкурсные задания



11. Мат в 2 хода.



12. Мат в 3 хода.

Срок отправки решений — 25 августа 1984 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 11, 12).

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Этот цветной геометрический узор — не плод фантазии художника, а точный математический чертеж, изображающий так называемые зоны Бриллюэна. Каждая из представленных здесь зон дана своим цветом. Их формы различны, но площади одинаковы (они равны площади центрального квадрата). Откуда возникают зоны Бриллюэна и почему они обладают указанным свойством, можно узнать из статьи А. Б. Гончарова в этом номере журнала.

