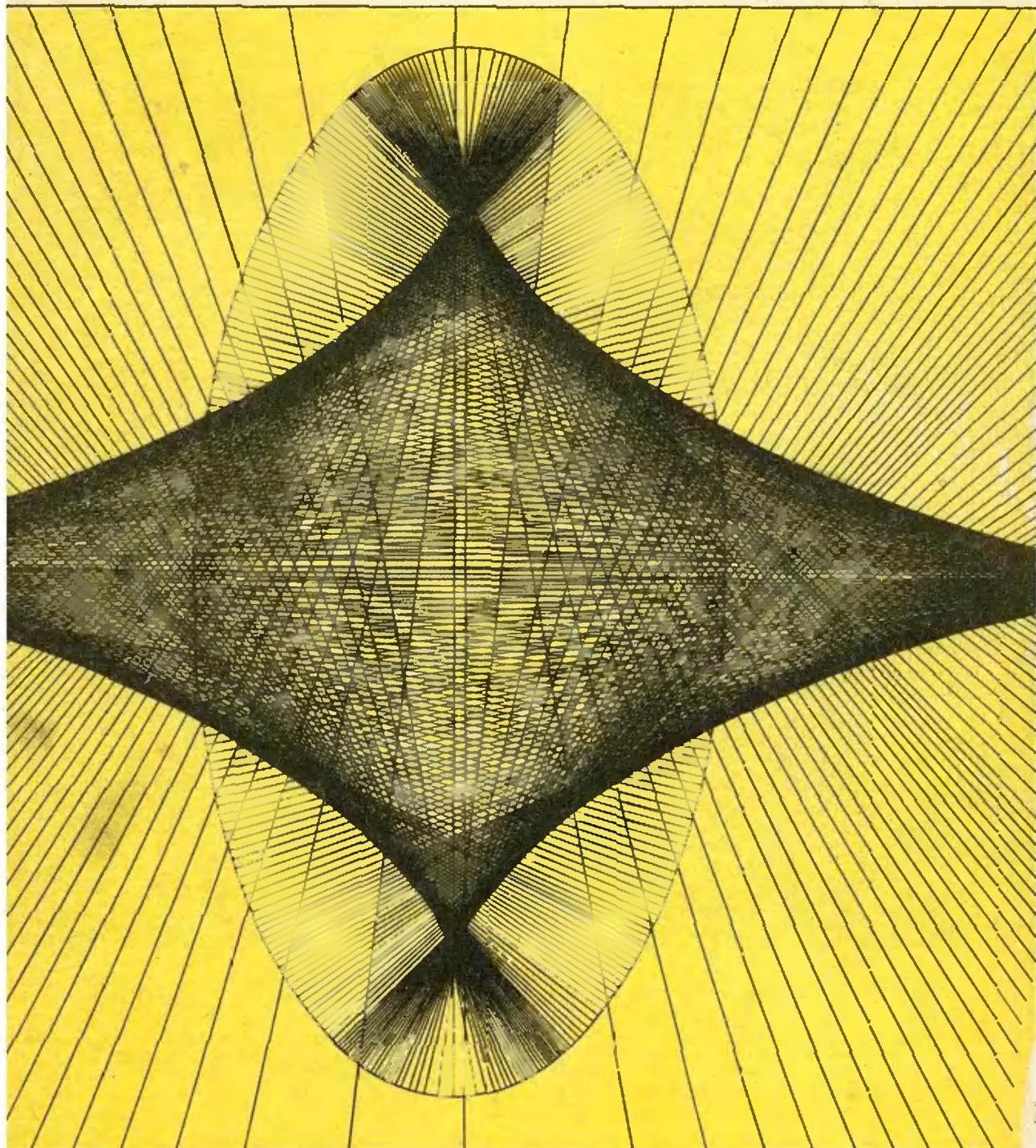


Квант

5
1984

*Научно-популярный физико-математический журнал
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*





Перед вами фотография треков заряженных частиц, зарегистрированных в пузырьковой камере. Одни треки — одиночные, пересекающие все поле фотографии и соответствующие частицам, которые попадают в камеру извне. Другие — это парные треки (похожие на бараньи рога), закрученные в противоположные стороны. Они начинаются в точках внутри камеры и соответ-

ствуют рождению электронно-позитронных пар при столкновении γ -квантов с ядрами атомов жидкого вещества, заполняющего камеру. О том, как происходит процесс образования электронно-позитронной пары и обратный ему процесс аннигиляции электрона и позитрона, можно прочитать в статье «Физика 8, 9, 10», опубликованной в этом номере журнала.



Издательство „Наука“. Главная редакция физико-математической литературы



В НОМЕРЕ:

- 3 И. К. Кикоин. Философские идеи В. И. Ленина и развитие современной физики
11 С. М. Воронин, А. Г. Кулагин. Метод производящих функций
16 С. Н. Артеменко, А. Ф. Волков. Синтетические металлы — новый тип проводников

IN THIS ISSUE:

- I. K. Kikoin. V. I. Lenin's philosophical ideas and the development of contemporary physics
S. M. Voronin, A. G. Kulagin. The method of generating functions
S. N. Artemenko, A. F. Volkov. Synthetic metals — a new kind of conductor

Новости науки

- 10 В. А. Бронштэн. Нейтронная звезда, черная дыра или ...?

Science news

- V. A. Bronshten. Neutron star, black hole or...?

- 22 Наш календарь
Пьер Кюри

- Our calendar
Pierre Curie

- 23 Лаборатория «Кванта»
Е. И. Бутиков. Связанные маятники

- Kvant's lab
E. I. Butikov. Linked pendulums

- 26 Математический кружок
В. М. Уроев. Инверсия

- Mathematics circle
V. M. Uroev. Inversion

- 33 Школа в «Кванте»
Физика 8, 9, 10
36 Непослушные задачи
37 Избранные школьные задачи

- Kvant's school
Physics 8, 9, 10
Disobedient problems
Selected school problems

- 38 Геометрическая страничка
Эволюта

- The geometric page
The evolute

- 40 «Квант» для младших школьников
Задачи
41 Задача в картинках

- Kvant for younger school-children
Problems
A problem in pictures

- 42 Задачник «Кванта»
Problems M861—M865; Ф873—Ф877
45 Решения задач M847—M850; Ф858—Ф861

- Kvant's problems
Problems M861—M865; P873—P877
Solutions M847—M850; P858—P861

- 53 Информация
Ижевскому НОУ — 5 лет

- Information
The Izhevsk school scientific society is 5 years old

- 54 Варианты вступительных экзаменов

- College entrance examination problems

- 58 Ответы, указания, решения
Смесь (21)
Шахматная страничка
«Бермудский треугольник» в центре доски
(3-я с. обложки)

- Answers, hints, solutions
Miscellaneous (21)
The chess page
The "Bermuda triangle" in the chessboard's centre (3rd cover page)

На первой странице обложки изображены эволюта «звезда» построения ЭВМ на программно-конструкторском языке Ани Байбиной. Эволюта изображена на «Геометрической страничке» внутри номера.

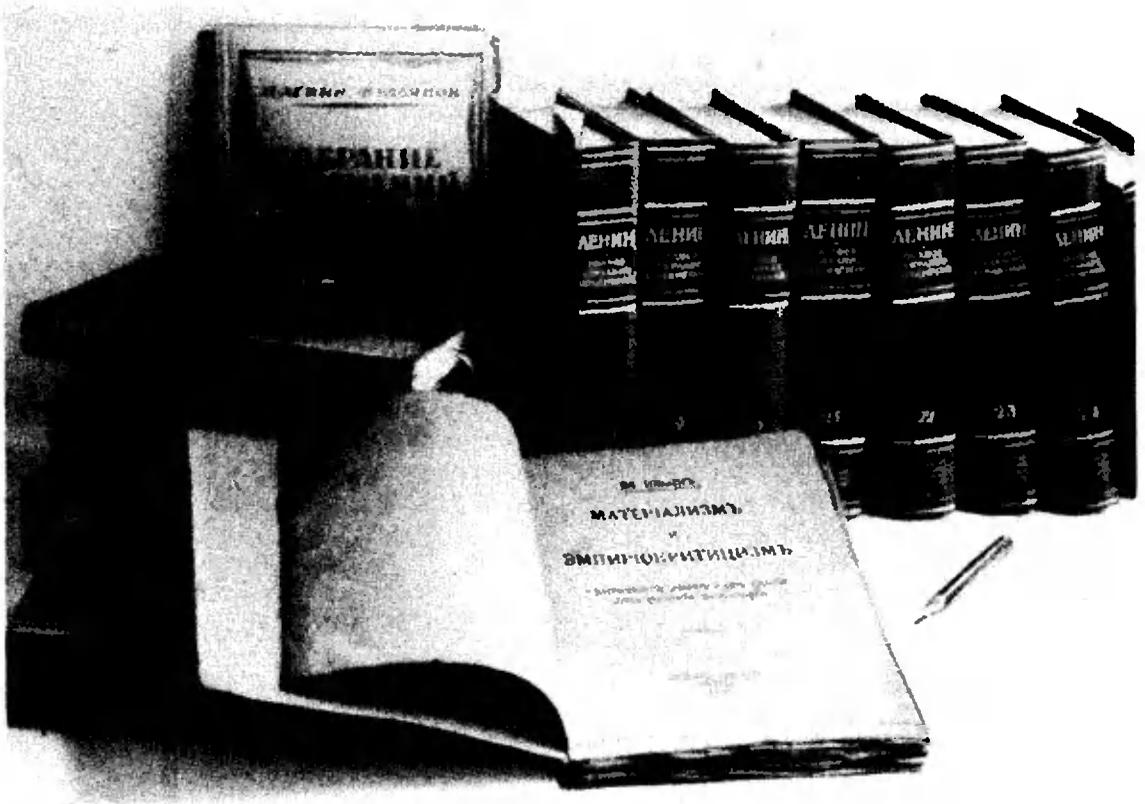


Петр Леонидович Капица

8 апреля 1984 года на 90-м году жизни скончался крупнейший физик нашего времени, выдающийся организатор советской науки, член президиума Академии наук СССР, директор Института физических проблем, дважды Герой Социалистического Труда, один из инициаторов создания журнала «Квант» и член его редакционного совета, академик Петр Леонидович Капица.

П. Л. Капица внес крупный вклад в развитие физики магнитных явлений, физики и техники низких температур, физической электроники. Он был членом Лондонского королевского общества, иностранным членом академий наук США, Швеции, Дании, Польши, Индии и ряда других стран, лауреатом Государственных премий СССР и Нобелевской премии.

П. Л. Капица активно участвовал в Пагуошском движении ученых за мир. Он горячо любил молодежь и был одним из основателей Московского физико-технического института. Светлая память о нем навсегда сохранится в истории советской науки.



Философские идеи В. И. Ленина и развитие современной физики

(к 75-летию книги В. И. Ленина «Материализм и эмпириокритицизм»)

Академик И. К. КИКОИН

В своей книге «Материализм и эмпириокритицизм» В. И. Ленин дал исчерпывающий анализ философских проблем современной ему физики. Величайшее значение этого труда Ленина заключается в том, что в нем был разработан метод анализа философских проблем науки, которым и сейчас пользуются прогрессивные ученые.

Владимир Ильич Ленин был не только великим политическим и государственным деятелем, но и великим ученым.

Особая роль физики в развитии как техники, так и философии явилась причиной пристального внимания Ленина к вопросам новой физики (может быть,

на интерес Ленина к физике в какой-то мере повлияло и то, что его отец Илья Николаевич Ульянов был учителем физики).

Ленинский метод научной работы особенно близок сердцам физиков. В своей теоретической работе Ленин всегда опирался на *опыт*, на практику как на критерий истины. Ленин следующими словами Энгельса поясняет идею «критерия практики»: «В тот момент, когда, сообразно воспринимаемым нами свойствам какой-либо вещи, мы употребляем ее для себя,— мы в этот самый момент подвергаем безошибочному испытанию истинность или ложность наших чувственных восприятий. (Курсив мой — И. К.) (...) ... Успех наших действий дает доказательство соответствия (Übereinstimmung) наших восприятий с предметной (gegenständlich) природой воспринимаемых вещей»^{*}).

Но история науки знает немало примеров, свидетельствующих о том, что явно неправильные с современной точки зрения представления ученых приводили, тем не менее, к «успеху наших действий».

^{*} Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 18, с. 109—110

Для примера возьмем старую теорию магнетизма, по которой намагниченный кусок стали рассматривался как магнитный диполь, состоящий из двух магнитных полюсов, или «магнитных зарядов» (по аналогии с электрическим диполем). Пользуясь этим представлением, физики создали магнитостатику, на которой базируется вся практика и техника использования магнитов. Эта практика блестяще подтвердила теорию «магнитных зарядов». Между тем теперь хорошо известно, что никаких магнитных зарядов в действительности не существует. И когда сейчас говорят о магнитных полюсах, то обязательно оговаривают, что это фиктивное понятие.

Выходит, что критерий практики не может служить надежной основой для выяснения истинности наших представлений о том или ином предмете? Это, разумеется, не праздный вопрос.

Один из крупнейших физиков-теоретиков современности Ричард Фейнман, пытаясь выяснить, что же такое философское толкование физического закона, иллюстрирует значение этого вопроса следующим примером.

«Пусть те, кто настаивает на том, что единственно важным является лишь согласие теории и эксперимента, представят себе разговор между астрономом из племени майя и его студентом. Майя умели с поразительной точностью предсказывать, например, время затмений, положение на небе Луны, Венеры и других планет. Все это делалось при помощи арифметики... У них не было ни малейшего представления о вращении небесных тел.

Представьте себе, что к нашему астроному приходит молодой человек и говорит: «Вот, что мне пришло в голову. Может быть, все это вертится, может, это шары из камня... и их движение можно рассчитывать совсем иначе». Далее, узнав, что молодой человек еще не дошел до расчетов движения планет, астроном майя ответит ему, что мы можем и так достаточно точно вычислять затмения, так что не стоит возиться с твоими идеями.

Как видим, — заканчивает Фейнман, — нелегкая задача — решить, стоит или не стоит задумываться над тем, что кроется за нашими теориями».

Это и в самом деле нелегкая задача. Ведь если принять безоговорочно ут-

верждение, что критерием истины является практика, то такое утверждение, как видно из приведенных примеров, может привести к застою в науке.

Эту нелегкую задачу с блеском решил В. И. Ленин.

Утверждая, что «точка зрения жизни, практики должна быть первой и основной точкой зрения теории познания», Ленин добавляет: «Конечно, при этом не надо забывать, что критерий практики никогда не может по самой сути дела подтвердить или опровергнуть *полностью* какого бы то ни было человеческого представления. Этот критерий тоже настолько «неопределенен», чтобы не позволять знаниям человека превратиться в «абсолют», и в то же время настолько определенен, чтобы вести беспощадную борьбу со всеми разновидностями идеализма и агностицизма*)».**)

«...Отсюда, — продолжает Ленин, — вытекает признание единственным путем к этой истине пути *науки*, стоящей на материалистической точке зрения.»***) (Курсив мой. — И. К.)

Подавляющее большинство физиков сознательно или стихийно руководствуется именно таким ленинским пониманием критерия практики.

Опыт служил Ленину надежной опорой, когда он формулировал основы своих философских воззрений. Иллюстрацией к этому может служить следующий пример.

Ленин считал необходимым *проверить историей науки* (то есть проверить экспериментально, как сказал бы физик) одно из основных положений диалектики — так называемое «единство противоположностей». Свою заметку «К вопросу о диалектике» Ленин так и начинает: «Раздвоение единого и познание противоречивых частей его... есть *суть* (одна из «сущностей», одна из основных, если не основная, особенностей или черт) диалектики. (...) Правильность этой стороны содержания диалектики должна быть проверена историей науки»****).

*) Агностицизмом называется философское учение, отрицающее возможность познания объективного мира, ограничивающее роль науки лишь познанием явлений. (Прим мое. — И. К.)

***) Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 18, с. 145—146.

****) Там же, с. 146.

*****) Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 29, с. 316.

Это высказывание Ленина не было простой декларацией. Такую проверку он сам осуществил в своей классической работе «Материализм и эмпириокритицизм», написанной в 1908 году, в работе, которая оказала и продолжает оказывать огромное влияние на развитие науки.

Написанный в годы крутого перелома основных физических представлений, этот труд дал исчерпывающий философский анализ данных физики того времени.

Известно, что Ленин назвал «гигантскими, головокружительными» успехи физики за последние три десятилетия XIX столетия и первые годы XX столетия. В еще большей мере такую оценку можно дать успехам физики за годы, прошедшие после выхода в свет книги Ленина «Материализм и эмпириокритицизм».

Начало нашего века ознаменовалось величайшей революцией в физике. В 1905 году была опубликована знаменитая работа Эйнштейна «К электродинамике движущихся тел», представляющая собой основу специальной теории относительности. Мы не можем здесь подробно изложить эту теорию. Сущность ее заключается в «простой» идее о том, что в движущихся друг относительно друга системах отсчета *время течет по-разному*. Теория относительности внесла коренные изменения в представления о времени и пространстве — об этих основных философских и физических понятиях. Сейчас, когда основы теории относительности уже излагают в школьном курсе физики, когда широко развивается ядерная техника, основанная на прямых следствиях теории относительности, кажется удивительным, что вначале эта теория была принята физиками «в штыки». Даже один из величайших физиков начала нынешнего столетия, создатель электронной теории Х. А. Лоренц не сразу оценил значение этой теории. И это тот Лоренц, который выковал для теории относительности самое могучее оружие — так называемые «преобразования Лоренца».

Замечательно, что Ленин, спустя всего два с лишним года после опубликования работы Эйнштейна, следующими словами оценил ее огромное революционное и философское значение: «...как ни необычно ограничение меха-

нических законов движения одной только областью явлений природы и подчинение их более глубоким законам электромагнитных явлений и т. д., — все это только лишнее *подтверждение* диалектического материализма»^{*)}.

В течение многих лет теория относительности порождала обширную литературу, в которой отразилась ожесточенная борьба на философском и физическом фронтах. Эта литература имеет сейчас главным образом исторический интерес, и мы не будем на ней останавливаться. Но следует напомнить, что В. И. Ленин и в дальнейшем продолжал считать автора теории относительности «великим преобразователем естествознания».

В своем знаменитом труде «Материализм и эмпириокритицизм» В. И. Ленин не ограничился общим философским анализом бурного развития физики в период, когда он писал свою книгу. В некоторых случаях он выступал как специалист-физик высокой квалификации.

В качестве примера этому приведем разъяснение В. И. Ленина одному из его идеологических противников чисто физического вопроса о массе тела.

Известно, что вопрос о том, что такое масса тела в прежнее время казался довольно сложным и ответы на него разных физиков были противоречивыми. К сожалению, и в наше время нередко некоторые авторы придерживаются устарелых определений этой важнейшей физической величины. Это связано с тем, что сам Ньютон, который несомненно понимал, что такое масса тела, в своей книге «Математические начала натуральной философии» дал не очень удачное определение этой величины. Точное определение понятия массы дал впервые известный механик Сен-Венан. Так же определил эту величину Л. Больцман в своих лекциях о принципах механики. Оно основано на опытах по взаимодействию тел.

Опыты показали, что отношение ускорений двух взаимодействующих тел есть величина постоянная и не зависит от условий взаимодействия и других условий. Обратное отношение ускорений называли отношением масс этих тел. Чтобы найти массу отдельного тела,

^{*)} Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 18, с. 276

выбирают какое-нибудь тело, массу которого условно принимают за единицу — эталон массы. Отсюда следует определение массы: масса тела — это величина, выражающая его инертность, она определяет отношение модуля ускорения *эталона массы* к модулю ускорения тела при их взаимодействии.

Упомянутый выше идеологический противник В. И. Ленина, не поняв смысла приведенного определения, решил его использовать для «опровержения» материалистического мировоззрения, указав, что понятие материи... сводится к обратному отношению ускорений взаимодействующих тел!

В. И. Ленин объяснил незадачливому философу его ошибку следующими словами: «Понятно, что если какое-нибудь тело взять за единицу, то движение (механическое) всех прочих тел можно выразить простым отношением ускорений. Но ведь «тела» (т. е. материя) от этого вовсе еще не исчезают, не перестают существовать независимо от нашего сознания*). Приведенный пример показывает, насколько ясно, профессионально В. И. Ленин разбирался в сложных, по тем временам, понятиях физики.

Революцию, сравнимую с той, которую произвела теория относительности, совершила в физике и квантовая механика. Уже упоминавшийся ранее Ричард Фейнман свидетельствует, например, что «...было время, когда газеты писали, что теории относительности понимают только двенадцать человек». Не соглашаясь с таким мнением и считая, что многие ученые, прочитав статью Эйнштейна, так или иначе поняли теорию относительности, Фейнман продолжает: «Но мне кажется, я смело могу сказать, что *квантовой механики никто не понимает*».

Это очень честное заявление одного из крупнейших физиков-теоретиков, столь много сделавшего для развития квантовой электродинамики, весьма многозначительно.

Далее Фейнман поясняет, что значит «понимать» квантовую механику. Это значит найти ответ на вопрос: «Как же так может быть?».

Современная физика — это квантовая физика. Успехи квантовой механики можно назвать исключительными.

Она позволила раскрыть тайну строения атома. Пользуясь квантовой механикой, можно с любой степенью точности рассчитать атом, то есть вычислить детальную электронную структуру атома. Эти вычисления находятся в потрясающем по точности согласии с экспериментом.

Вся современная квантовая электроника с ее разнообразными техническими применениями (лазерами, мазерами и т. п.) — это продукт квантовой механики. Квантовая механика еще не стала объектом изучения в школе, но ее приложения уже изучаются в технических вузах.

И при всем том крупнейший авторитет в этой области физики утверждает, что ее никто не понимает!

Попытаемся разобраться, в чем причины непонимания квантовой механики.

Дело в том, что уже при самом ее зарождении квантовая механика содержала противоречия. Обратимся, например, к простейшему проявлению квантовой природы света — к фотоэлектрическому эффекту.

В теории фотоэффекта, развитой Эйнштейном, свет частоты ν рассматривается как поток «частиц» — фотонов, энергия которых $E = h\nu$ (h — постоянная Планка). Когда фотоны достигают поверхности металла, некоторая часть их поглощается электронами. Электрон, поглотивший фотон, приобретает энергию $h\nu$. Обладая такой энергией, электрон может покинуть металл, вылететь наружу. При этом он теряет часть приобретенной энергии, затратив ее на «работу выхода» A . Поэтому максимальная кинетическая энергия, с которой электрон вылетит из металла, равна

$$\frac{1}{2}mv^2 = h\nu - A.$$

Эта знаменитая формула Эйнштейна для фотоэффекта подтверждается многочисленными экспериментами и лежит в основе бесчисленных применений этого явления.

Так вот, если вдуматься в смысл формулы Эйнштейна (она была получена им тоже в 1905 году), то сразу становится ясной ее противоречивость.

Входящая в эту формулу величина $E = h\nu$ — это энергия «световой частицы» (фотона), а величина ν — частота света, состоящего из частиц. Но частота — это величина, характеризующая

*) Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 18, с. 305.

волну. Понятие частоты света появилось после того, как в XIX столетии было установлено, что свет представляет собой процесс распространения колебаний. Такой процесс и называется волной. Но волна, по самому смыслу этого понятия, занимает большую область пространства (если говорить строго — всё пространство). Частица же — это нечто такое, что локализовано в пространстве, занимает малый объем. Поэтому основное выражение $E=h\nu$, связывающее *энергию* фотона, то есть *частицы*, с *частотой* световой *волны*, представляется с точки зрения «здравого смысла» абсурдным.

Фотоэлектрические явления неопровержимо доказали, что свет представляет собой поток частиц.

С другой стороны, существуют столь же неопровержимые экспериментальные доказательства того, что свет представляет собой волновой процесс. Действительно, самое характерное свойство волн заключается в следующем: если наложить две волны друг на друга так, чтобы гребень одной совпал со впадиной другой, то волнение вовсе прекратится. И наоборот, когда гребни одной волны совпадают с гребнями другой, волнение усиливается. Это хорошо известное явление называется интерференцией волн. Можно утверждать, что если в опыте наблюдается явление интерференции, то мы имеем дело с волной.

Волновая теория света утвердилась в науке после того, как было показано, что некоторые точки экрана, освещаемого одновременно двумя одинаковыми источниками света, оказываются темными, тогда как при действии каждого из источников в отдельности экран освещен равномерно.

Практика, следовательно, привела к необходимости принять парадоксальный факт, что как волновая, так и квантовая теория света верны, а формула $E=h\nu$ устанавливает связь между этими противоречащими друг другу теориями.

Этот вызов «здравому смыслу» достиг своей кульминации в 1924 году, когда двойственное понятие «волна — частица» путем теоретических рассуждений было распространено на электроны и атомы. Другими словами, атом и электрон, которые с момента их открытия обладали всеми свойствами частиц, должны были вести себя и как

волны. И очень скоро эксперименты подтвердили эти теоретические выводы.

Основы квантовой механики были заложены в 1925—1927 годах. Шестивенный вклад в ее развитие внес немецкий физик Вернер Гейзенберг. Он сформулировал так называемое соотношение неопределенностей, вокруг которого разгорелась обширная философская дискуссия. Многих известных физиков это соотношение привело в лагерь философских идеалистов.

На первый взгляд соотношение неопределенностей имеет совершенно безобидный вид:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{h}{2\pi}$$

Здесь Δx — неопределенность (неточность) значения координаты частицы, Δp — неопределенность значения импульса частицы и h — постоянная Планка. В переводе на разговорный язык эта формула означает, что нельзя в одно и то же время точно узнать место и скорость движения частицы. Другими словами, если мы попытаемся определить точное значение скорости частицы, находящейся в данный момент в строго фиксированной точке ее траектории, то сделать это нам не удастся. И наоборот, если мы заставим частицу двигаться со строго определенной скоростью, то мы не сможем точно указать, в какой точке траектории находится частица в данный момент времени. Отсюда легко сделать «простейшее» заключение явно идеалистического характера о том, что знания человека принципиально ограничены, раз нам не дано ответить на такой простой вопрос. Более того, отсюда же можно сделать заключение, столь же идеалистическое по своему смыслу, что события в мире непредсказуемы, то есть нарушается принцип причинности.

Действительно, мы привыкли к тому, что классическая механика позволяет нам предвидеть будущее движение тела, если известны его начальное положение и скорость, а также действующие на него силы. На этом строится вся классическая механика. Так, успехи космонавтики основаны на том, что, зная место старта ракеты (начальные координаты), сообщив ракете известную начальную скорость, мы можем по законам классической механики заранее предсказать, где будет находиться ракета в любой момент времени.

Иное дело с частицей, подчиняющейся квантовой механике. Раз мы, в соответствии с соотношением неопределенностей, не можем точно указать ее координаты и скорость в данный момент времени, то, очевидно, мы не можем предсказать, какими они станут в будущем. Нетрудно догадаться, что все это является следствием того, что частицы (электроны, атомы, нейтроны и т. д.) обладают волновыми свойствами.

В самом деле, рассмотрим следующий грубо схематизированный опыт, который, тем не менее, очень недалек от действительно осуществляемых опытов. Представим себе, что через два отверстия в экране пролетают электроны, испускаемые каким-то источником, например накаленной проволокой. Позади экрана мы можем передвигать параллельно ему счетчик электронов. Счетчик регистрирует каждый попавший в него электрон. Значит, число электронов можно непосредственно сосчитать.

Естественно полагать, что каждый электрон, попадающий в счетчик, прошел через одно из двух отверстий. Поэтому, если мы сосчитаем число электронов, попавших в счетчик через первое отверстие при закрытом втором, затем сделаем то же самое с электронами, попавшими в счетчик через второе отверстие при закрытом первом, мы вправе ожидать, что число электронов, попавших в счетчик через оба отверстия, будет равно сумме показаний счетчика. Мы уверены, что так было бы, если бы мы стреляли из пулемета через броневой щит с двумя отверстиями, за которым в каком-нибудь месте помещен ящик с песком, где застревают пролетевшие пули. Можно не сомневаться в том, что число пуль, попадающих в ящик с песком при открытых обоих отверстиях в щите, равно сумме чисел пуль, попадающих в тот же ящик через каждое из отверстий в отдельности (конечно, за один и тот же промежуток времени, скажем, за час).

Но когда мы «стреляем» электронами, этого не получается! Больше того, может оказаться, что установленный в надлежащем месте счетчик, зарегистрировавший одинаковое число электронов при их прохождении через каждое отверстие в отдельности (когда одно из отверстий закрыто), не зарегистри-

рует ни одного электрона, когда открыты оба отверстия.

Естественно возникает вопрос: как это может быть?

Нетрудно усмотреть здесь то же явление, которое наблюдается при освещении экрана двумя одинаковыми источниками света, то есть явление интерференции.

Попытаемся теперь ответить на вопрос, почему непонятна квантовая механика. Это поможет нам найти корни идеалистических выводов, к которым пришли некоторые философы и физики, анализируя создавшееся в физике положение.

Основная трудность понимания рассмотренных выше физических явлений заключается в том, что мы пытались при их анализе пользоваться теми же понятиями, к которым мы привыкли в повседневной жизни. Многовековой опыт человечества привел к тому, что человек считает для себя понятным то, что он может представить себе в виде *геометрического или механического образа*. Этот опыт, практика изучения окружающего мира привели к созданию ряда понятий, при помощи которых реальный мир отражается в мозгу человека. Но до XX века человечество занималось лишь макроскопическими телами, движущимися со сравнительно небольшими скоростями. Макроскопическими называются тела, которые можно видеть, определить их форму и размеры (создать геометрический образ) и изучить их движение (создать механический образ). К этому опыту были приспособлены и соответствующие понятия.

Механика Ньютона, разработанная применительно к движению макроскопических тел, установила, что механическое состояние тела однозначно определяется его координатами и импульсом (или скоростью, если массу тела считать неизменной).

Но вот мы перешли к миру объектов, подчиняющихся квантовым законам, чуждым механике Ньютона. Человеческий опыт не успел еще выработать образы объектов и понятия, соответствующие этому миру.

Если опыт показывает, что эти объекты обладают и свойствами частиц, и свойствами волн, то в действительности они не волны и не частицы, а должны быть чем-то иным, «единым

в противоположностях». И действительно, если внимательно рассмотреть экспериментальные доказательства того, что электрон есть обычная механическая частица, то мы убедимся, что это весьма косвенные доказательства. Скорее всего только глубокое убеждение физиков в атомистическом строении вещества привело их к выводу, что опыты с электронами (и атомами тоже) свидетельствуют о том, что они являются частицами в обычном механическом смысле.

Даже Эйнштейн не мог отречься от «механической» точки зрения на движение электрона. Он часто качал головой и говорил: «Но ведь не гадают же бог «орел — решка», чтобы решить, куда должен двинуться электрон».

В наше время достоверность реального существования атомов, электронов, протонов может соперничать с достоверностью системы Коперника в астрономии. Но это не значит, что мы можем представлять себе эти объекты как уменьшенную модель астрономических тел. Мы до сих пор никак не можем их себе представить; они ни на что не похожи. И в этом природа не виновата!

Было бы, конечно, выражением высшей степени философского идеализма считать, что природа должна так приспособиться к человеческому разуму, чтобы он мог образно представить себе все ее объекты. Именно потому, что мы не можем представить квантовые объекты в виде геометрических и механических образов, мы считаем их непонятными.

Но если это так, то какие у нас основания предполагать, что состояние квантовых объектов должно определяться теми же величинами, то есть координатами и импульсом, которыми определяется состояние небесных тел? Словом, вопрос «каковы координаты и импульс в данный момент времени?» применительно к квантовым объектам — незаконный вопрос. Ведь не всякий вопрос правомерен. Например, нельзя ответить на вопрос «какого цвета пулковский меридиан?». Но из этого не следует, что возможности познания ограничены!

В такой же мере, по-видимому, неправомерен вопрос «каковы координаты и импульс электрона?».

К создавшейся ситуации в квантовой механике как нельзя лучше применимы

слова Ленина: «Движение тел превращается в природе в движение того, что не есть тело с постоянной массой, в движение того, что есть неведомый заряд неведомого электричества в неведомом эфире,— эта диалектика материальных превращений, протельваемых в лаборатории и на заводе, служит в глазах идеалиста... подтверждением не материалистической диалектики, а доводом против материализма...»^{*)}. Из того, что было сказано выше, ясно, что «непонятность» квантовой механики не дает никаких оснований для идеалистических выводов об ограниченности возможности познания природы.

Также лишен основания идеалистический вывод о нарушении принципа причинности, то есть о непредсказуемости событий.

По квантовой механике состояние системы вполне определяется специальной величиной, так называемой волновой функцией. Для нее имеется уравнение, решив которое, физик вполне может предвидеть, какой у него получится результат опыта. И не было случая, чтобы уравнения квантовой механики подводили экспериментаторов!

Здесь вполне уместно следующее высказывание Ленина о современной ему новой физике: «...все это много мудренее старой механики, но все это есть движение материи в пространстве и во времени»^{**)}.

В наши дни все больше и больше физиков всего мира становятся на позиции диалектического материализма. В свое время Ленин показал, что современные ему физики не сумели «прямо и сразу подняться от метафизического материализма к диалектическому материализму». Но он предвидел, что «этот шаг делает и сделает современная физика».

Это предвидение Ленина сбылось!

^{*)} Ленин В. И. Полн. собр. соч., т. 18, с. 297—298.

^{**)} Там же, с. 298.



Нейтронная звезда, черная дыра или ...?

Кандидат
физико-математических
наук

В. А. БРОНШТЭН

Все началось довольно прозаично. В 1977 году американские астрономы Б. Стефенсон и Н. Сандулак, завершив многолетний труд, опубликовали новый каталог звезд Млечного Пути с яркими линиями водорода в спектре.

Уже на следующий год одна из звезд нового каталога, получившая обозначение SS 433, привлекла всеобщее внимание. Это слабая звездочка (14-й звездной величины) в созвездии Орла, наблюдать ее можно только в крупные телескопы. Однако, если в спектре звезды наблюдаются яркие линии, значит, звезда проявляет необычную активность. Ее решили «проверить». Оказалось, что вблизи этой звезды находится источник радиоизлучения, напоминающий остаток взрыва сверхновой звезды. Почти в той же точке неба был зарегистрирован и источник рентгеновского излучения. Но самое удивительное было связано все же со спектром самой звезды.

Начиная с июля 1978 года астрономы из Калифорнийского университета (США) начали систематически фотографировать спектры нового объекта. Они оказались какими-то странными. Вместо каждой линии водорода, гелия и других газов наблюдались

три линии: одна там, где ей положено быть, и еще две по бокам. Вскоре обнаружилось, что боковые линии смещаются: они как бы сходятся, приближаясь друг к другу. В сентябре этого же года крайние линии сошлись, но при этом не совпали со средней линией! Затем они опять начали расходиться. Наблюдения, проводимые в течение полугода, показали, что линии сходятся и расходятся с периодом в 165 суток.

Чем можно объяснить расщепление каждой спектральной линии на три?

В принципе, возможны три причины: смещение линий в гравитационном поле, расщепление линий сильным магнитным полем и эффект, связанный с движением источника излучения (эффект Доплера). Первые два механизма были отвергнуты, поскольку им не нашлось соответствующих подтверждений. Остается эффект Доплера — смещение линий при движении источника относительно наблюдателя. Но это означает, что исследуемый объект должен содержать по меньшей мере три источника излучения: один неподвижный и два движущихся в противоположных направлениях. Согласно расчетам, скорости последних достигают 80 000 км/с — более четверти скорости света!

Что же представляет собой эта система источников? Может быть, это центральная звезда с двумя спутниками, обращающимися вокруг нее с периодом, равным 165 суткам? Но такому периоду и указанным гигантским скоростям движения спутников соответствует радиус орбиты, в 1000 раз превышающий среднее расстояние от Земли до Солнца, и масса системы порядка 10^{10} солнечных масс. Таких звезд просто не бывает!

Не может данный объект быть и квазаром (далеким квазизвездным источником

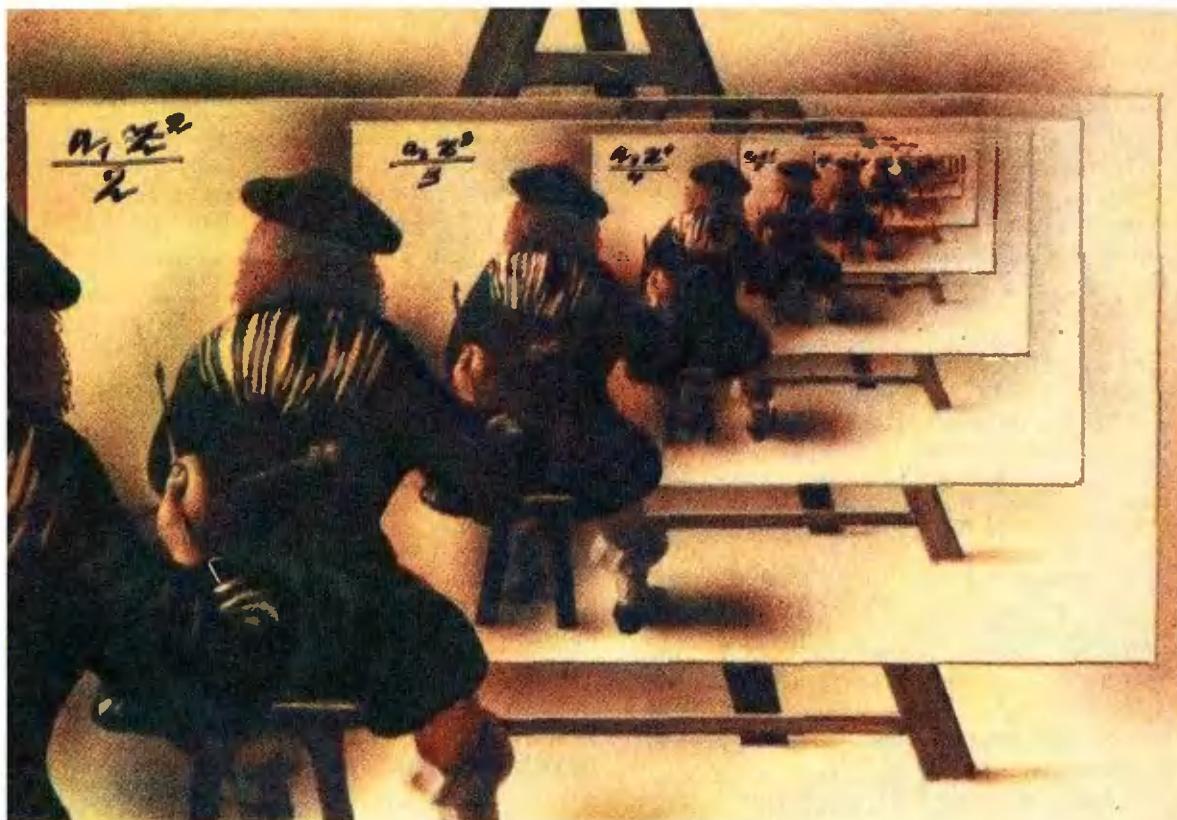
радиоизлучения): объект находится в пределах нашей Галактики.

Начались разработки возможной модели звезды SS 433. Одну из первых предложили английские астрономы Э. Фабиан и М. Рис. Согласно их гипотезе, некое центральное тело в результате пока еще не известного процесса выбрасывает в двух противоположных направлениях два потока газа со скоростями порядка 80 000 км/с. При этом вся система испытывает прецессию — хорошо известное движение оси системы по конусу, как у детского волчка или у нашей собственной планеты. Период этой прецессии и равен, по уточненным данным, 164 суткам. Но что же находится в центре?

По мнению Фабиана и Риса центральным телом может быть, например, черная дыра. Советский астрофизик И. С. Шкловский высказал другую гипотезу. Он предположил, что в центре находится нейтронная звезда, обладающая сильным магнитным полем, а неподалеку от нее — нормальная звезда. Вещество нормальной звезды под действием притяжения перетекает к нейтронной звезде, образуя вокруг нее газовый диск. Магнитное поле быстро вращающейся нейтронной звезды, подобно гигантскому фонтану, выбрасывает две газовые струи: одну — в сторону Земли, другую — в противоположную сторону.

Развивая эту модель, советский ученый И. Д. Новиков и его сотрудники предположили, что нейтронная звезда выбрасывает потоки быстрых частиц, которые, взаимодействуя с веществом диска, разгоняют это вещество до сверхвысоких скоростей.

Все же мы не можем сейчас дать окончательный ответ на вопрос, что же находится в центре объекта SS 433. Исследования продолжатся!



Метод производящих функций

Доктор физико-математических наук
С. М. ВОРОНИН,
А. Г. КУЛАГИН

Метод, названный в заглавии статьи, — красивый и неожиданный математический прием, позволяющий сводить задачи из теории чисел, теории вероятностей и комбинаторики к задачам из анализа. Часто оказывается, что для аналитической переформулировки задачи, полученной этим методом, удается быстро найти решение, в то время как другие подходы к исходной задаче ничего не дают. Следует сразу оговориться, однако, что метод производящих функций не является «волшебной палочкой», с помощью которой можно решить все задачи (см. ниже задачу Ферма, для решения которой он оказывается бесполезным).

Вначале, не вдаваясь в тонкости теории, мы покажем, как работает метод производящих функций в четырех классических задачах. Затем кратко остано-

вимся на обосновании метода, а в конце предложим ряд задач, решаемых с его помощью.

Задача о взвешивании

В 50-х годах XVIII века Л. Эйлер решал следующую задачу: *какие грузы можно взвесить гирями в 1, 2, 2², 2³, ..., 2^m, ... грамм, и сколькими способами?* Мы не знаем, как быстро и каким образом Эйлер пришел к ее решению, но окончательный ход мысли великого петербургского математика, дошедший до нас, поражает своей неожиданностью. Посудите сами.

Эйлер рассматривает... произведение $\alpha(z) = (1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8) \cdot \dots$ (1)

которое, после раскрытия скобок и приведения подобных членов, представляется в виде «бесконечного многочлена по z »:

$$\alpha(z) = 1 + A_1z + A_2z^2 + A_3z^3 + \dots \quad (2)$$

Чему же равны числа A_k ($k=1, 2, \dots$)? Каждый A_k — это коэффициент при z^k , а z^k получается как произведение каких-то одночленов z^{2^m} (не более одного из каждой скобки в (1)), то есть A_k — это в точности число разных представлений числа k в виде суммы некоторых из чисел 1, 2, 4, 8, ..., $2^m, \dots$ (продумайте это место). Другими словами, A_k — это

число способов взвешивания груза в k грамм рассматриваемыми гирями!

Итак, для решения исходной задачи остается вычислить A_k . И здесь — очевидной неожиданный ход Эйлера. Он пишет очевидные тождества

$$\begin{aligned}(1-z)(1+z) &= 1-z^2, \\ (1-z^2)(1+z^2) &= 1-z^4, \\ (1-z^4)(1+z^4) &= 1-z^8,\end{aligned}$$

а после перемножения и сокращения на общие множители получает

$$(1-z)(1+z)(1+z^2)(1+z^4)(1+z^8)\dots = 1,$$

то есть $(1-z)\alpha(z)=1$, откуда

$$\alpha(z) = \frac{1}{1-z} = 1+z+z^2+z^3+z^4+\dots \quad (3)$$

(здесь написана хорошо вам известная формула суммы геометрической прогрессии*). Сравнение (3) с (2) показывает, что $A_k=1$ для всех k , то есть *всякий груз в целое число граммов можно взвесить гирями в 1, 2, 4, ..., 2^m , ... граммов, притом единственным способом.*

Задача о разбиении числа

Так Эйлер назвал следующую задачу: *найти число положительных целых решений уравнения*

$$x_1 + \dots + x_m = k, \quad (4)$$

где m и k — фиксированные натуральные числа. Здесь к цели приводит другое неожиданное выражение, именно

$$\beta(z) = (1+z+z^2+z^3+z^4+\dots)^m. \quad (5)$$

После раскрытия скобок, $\beta(z)$ записывается в виде

$$\beta(z) = 1 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 + \dots \quad (6)$$

Чему равно B_k ? Попробуйте ответить на этот вопрос сами, имея в виду, что B_k — коэффициент при z^k . Да, разумеется: коэффициент B_k равен числу способов выбора по одному целому показателю из каждой из скобок в правой части (5), то есть B_k равно числу положительных целых решений уравнения (4)! Задача Эйлера свелась к вычислению B_k .

Для этого, вспомнив формулу геометрической прогрессии, можно написать

$$\beta(z) = (1-z)^{-m} = 1 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 + \dots \quad (7)$$

Дифференцируя это равенство

$$m(1-z)^{-m-1} = B_1 + 2B_2z + 3B_3z^2 + \dots$$

и подставляя $z=0$, получаем $B_1=m$.

Дифференцируя еще раз и вновь подставляя $z=0$, получаем $B_2=m(m+1)/2$. Продолжая точно так же (то есть продифференцировав (7) k раз и подставив $z=0$), мы получаем, следуя Эйлеру, число решений уравнения (4) в виде

$$B_k = \frac{m(m+1)\dots(m+k-1)}{k!}$$

Задача о размене

Сколькими способами можно разменять рубль монетами достоинством 1, 2, 3, 5, 10 копеек? Эту задачу можно сформулировать иначе: сколько неотрицательных целых решений имеет уравнение

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 + 10x_5 = 100?$$

В более общем виде «задачу о размене» ставят так: *сколько неотрицательных целых решений имеет уравнение*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_mx_m = n, \quad (8)$$

если a_i — целые положительные числа, а n — фиксированное натуральное число?

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}\gamma(z) &= (1+z^{a_1}+z^{2a_1}+z^{3a_1}+\dots) \times \\ &\times (1+z^{a_2}+z^{2a_2}+z^{3a_2}+\dots) \times \dots \\ &\times (1+z^{a_m}+z^{2a_m}+z^{3a_m}+\dots) = \\ &= 1 + C_1z + C_2z^2 + C_3z^3 + \dots\end{aligned} \quad (9)$$

Если вы поняли предыдущие рассуждения, вы сразу скажете, что число C_n равно числу решений уравнения (8). Но как найти C_n ? Пользуясь формулой суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии (например, $1+z^{a_1}+z^{2a_1}+\dots=1/(1-z^{a_1})$), можно $\gamma(z)$ представить в виде

$$\gamma(z) = \frac{1}{(1-z^{a_1})(1-z^{a_2})\dots(1-z^{a_m})},$$

но отсюда сразу не ясно, как получить C_n в общем случае. Однако уже формулы (9) достаточно, чтобы найти C_n при малых n .

Задача о четырех квадратах

Всякое ли целое число можно представить в виде суммы четырех квадратов целых чисел, а если можно, то сколькими способами? Другими словами, *сколько целых решений имеет уравнение*

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = m, \quad (10)$$

где m — данное натуральное число?

Эта задача потруднее предыдущих, хотя она сводится, как и они, к вычислению коэффициентов некоторого «бесконечного многочлена». Именно, положив

* Если $|z| < 1$. Но к этому мы еще вернемся.

$$\delta(z) = (1 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + 2z^4 + \dots)^4 = \quad (11)$$

$$= 1 + D_1 z + D_2 z^2 + D_3 z^3 + \dots,$$

легко понять, что число искомого решения уравнения (10) равно D_m . Дифференцируя m раз и подставляя $z=0$, можно найти D_m в виде

$$D_m = \frac{1}{m!} \frac{d^m}{dz^m} (\delta(z)) \Big|_{z=0}$$

где $\frac{d^m}{dz^m}$ обозначает взятие производной m -го порядка, а символ $\Big|_{z=0}$ означает, что всюду вместо z нужно подставить 0. Для малых m число D_m можно сосчитать по этой формуле, но в общем виде это непросто. Исходная задача по теории чисел сведена к некоторой задаче из анализа, но последнюю нужно еще решить!

Из результатов немецкого математика К. Г. Якоби (1804—1851) следует замечательная формула для $\delta(z)$

$$\delta(z) = 1 + 8 \sum_{m \neq 4k} \frac{mz^m}{1-z^m},$$

которую также получил индийский математик С. Рамануджан (1887—1920). Из нее можно вывести, что уравнение (10) всегда разрешимо, и найти число решений этого уравнения.

Обсуждение метода

Попробуем теперь понять, в чем состоит общий метод, так удивительно сработавший в разобранных задачах. В каждой из них рассматривалось некое «бесконечное выражение», содержащее букву z (бесконечное произведение двучленов — (1), конечная степень бесконечной суммы — (5) и (11), произведение бесконечных сумм — (9)). Далее это выражение записывалось в виде «бесконечного многочлена от z », то есть в виде

$$a(z) = A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + \dots$$

$$\dots + A_n z^n + \dots,$$

и выяснялось, что коэффициенты A_k дают ключ к решению задачи. Коэффициент A_k удавалось затем вычислить, производя разные операции над бесконечными выражениями: выполнялись арифметические действия над ними, они дифференцировались, преобразовывались по формуле геометрической прогрессии...

Естественно спросить: что представляют собой рассматриваемые нами бесконечные выражения, и законны ли те действия, которые над ними производились? Автор метода, Леонард Эйлер, видимо, не очень задумывался над этими вопросами — он оперировал с бесконечными выражениями как с конечными, для него было важно лишь получение результата. Между тем беспечное обращение с бесконечностью таит в себе опасность ошибок.

Пренебрежительный пример

Рассмотрим два «бесконечных многочлена»

$$\alpha(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + z^4 - \dots,$$

$$\beta(z) = -1 + z - z^2 + z^3 - z^4 + \dots$$

и посчитаем бесконечную сумму

$$S(z) = \alpha(z) + \beta(z) + \alpha(z) + \beta(z) + \dots$$

Если сгруппировать слагаемые в $S(z)$ попарно, начиная с первой пары, получим

$$S(z) = [\alpha(z) + \beta(z)] + [\alpha(z) + \beta(z)] + \dots$$

$$\dots = 0 + 0 + \dots = 0.$$

Но если сгруппировать иначе, можно получить

$$S(z) = \alpha(z) + [\beta(z) + \alpha(z)] + [\beta(z) + \alpha(z)] + \dots$$

$$\dots = \alpha(z) + 0 + 0 + \dots = \alpha(z)!$$

А если менять порядок слагаемых, то можно прийти к еще более странному результату, например, $S(z) = 17z^{17}$ (подумайте, как это можно сделать).

Наверное, наступило время дать точные определения бесконечных выражений и выяснить, какие операции над ними законны.

Формальные степенные ряды

Формальным степенным рядом называется выражение

$$\alpha(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots, \quad (12)$$

где a_i — действительные числа (коэффициенты ряда (12)), а z — просто символ (формальная переменная ряда). Математики говорят также, что $\alpha(z)$ является производящей функцией для последовательности коэффициентов $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$. Не следует думать, однако, что в рассматриваемом нами общем случае $\alpha(z)$ является функцией от переменной z в обычном смысле. Когда мы говорим, что $\alpha(z)$ — производящая функция от последовательности $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$, это значит лишь то, что $\alpha(z)$ является сокращенной записью формального выражения в правой части (12).

Для читателей, знакомых с понятием (обычного) степенного ряда, подчеркнем, что формальный ряд (12) может расходиться (при некоторых z или даже при всех z), но при этом равенство (12) остается законным: ведь $\alpha(z)$ обозначает не сумму ряда для данного значения z , а сам формальный ряд.

Выдающийся немецкий математик К. Вейерштрасс (1815—1897), развивший и поставивший на строгую логическую основу теорию степенных рядов, рассматривал лишь сходящиеся степенные ряды, и критиковал Эйлера за сомнительные трюки с «бесконечными многочленами». Современная алгебраическая теория формальных степенных рядов, которой мы здесь касаемся, вполне строга, однако по сути ближе к «наивному» подходу Эйлера, чем к строгой аналитической теории Вейерштрасса.

Формальные степенные ряды можно складывать и умножать. Пусть, кроме ряда $\alpha(x)$ (см. (12)), дан формальный

степенной ряд

$$\beta(z) = b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \dots + b_n z^n + \dots \quad (13)$$

Тогда *сумма* и *произведения* этих рядов определяются по естественным формулам:

$$\alpha(z) + \beta(z) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)z + \dots + (a_n + b_n)z^n + \dots,$$

$$\alpha(z) \cdot \beta(z) = a_0 b_0 + (a_1 b_0 + a_0 b_1)z + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)z^2 + \dots \quad (14)$$

(эти действия выполняются по правилам, аналогичным обычным правилам сложения и умножения конечных многочленов). Заметим, кстати, что обычный многочлен можно считать частным случаем формального степенного ряда — именно такого, у которого все коэффициенты, начиная с некоторого, равны нулю. При этом обычное сложение и умножение многочленов будут, конечно, совпадать с их сложением и умножением как формальных степенных рядов.

Далее, формальные степенные ряды можно дифференцировать и интегрировать. По определению

$$\frac{d}{dz} (\alpha(z)) = (\alpha(z))' = a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots + n a_n z^{n-1} + \dots,$$

$$\int \alpha(z) dz = \int_0^z \alpha(x) dx = a_0 z + \frac{a_1}{2} z^2 + \frac{a_2}{3} z^3 + \dots + \frac{a_n}{n+1} z^{n+1} + \dots$$

Для определенных таким образом сложения и умножения бесконечных рядов будут выполняться свойства, аналогичные свойствам чисел или многочленов. Именно, будут выполняться переместительный, сочетательный и распределительный законы.

Подобно целым числам, из любого формального ряда можно вычесть любой другой ряд и получить опять же формально степенной ряд. Деление же в области формально-степенных рядов не всегда возможно, так же как не всегда возможно деление двух целых чисел. Например, нельзя делить на «нуль», то есть нельзя делить на ряд

$$0 = 0 + 0 \cdot z + 0 \cdot z^2 + \dots + 0 \cdot z^n + \dots$$

Нельзя осуществить деление «единицы», то есть ряда

$$1 = 1 + 0 \cdot z + 0 \cdot z^2 + \dots + 0 \cdot z^n + \dots$$

на ряд

$$z = 0 + 1 \cdot z + 0 \cdot z^2 + \dots + 0 \cdot z^n + \dots$$

Действительно, предположим, что существует ряд

$$\alpha(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots,$$

для которого $\alpha(z) \cdot z = 1$, или,

$$(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots) \times (0 + 1 \cdot z + 0 \cdot z^2 + \dots) = 1 + 0 \cdot z + 0 \cdot z^2 + \dots$$

Но из формулы (14) следует тогда, что $a_0 \cdot 0 = 1$, что безусловно невозможно.

Аналогично доказывается, что $\alpha(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ делится на z^n тогда и только тогда, когда $a_0 = a_1 = a_2 = \dots = a_{n-1} = 0$.

Легко проверить, что 1 делится на $\alpha(z)$, если только $a_0 \neq 0$, причем коэффициенты получающегося ряда определяются однозначно.

Найдем, для примера, результат деления «единицы» на ряд $1 - z$. Пусть $(1 - z)(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots) = 1 + 0 \cdot z + 0z^2 + \dots$

Тогда, раскрывая скобки и приравнивая коэффициент при одинаковых степенях z , получаем систему равенств

$$1 \cdot a_0 = 1, \quad a_1 - a_0 = 0, \\ a_2 - a_1 = 0, \dots, \quad a_n - a_{n-1} = 0, \dots,$$

откуда $a_0 = a_1 = \dots = a_n = \dots = 1$, то есть

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots$$

Мы уже пользовались этой формулой (см. (3) выше и сноску на с. 10) под другим названием; здесь же эта формула — верное равенство для формальных степенных рядов (и условие $|z| < 1$ уже не при чем).

Бесконечные суммы и произведения

В решении задач в начале статьи использовались бесконечные произведения; не менее полезны и бесконечные суммы (в частности, формальный степенной ряд можно рассматривать как бесконечную сумму одночленов). Во избежание неприятностей, дадим необходимые определения этих понятий.

Пусть $\alpha_1(z), \alpha_2(z), \dots, \alpha_k(z), \dots$ — последовательность формальных степенных рядов (в частности — многочленов). Мы хотим определить бесконечную сумму и бесконечное произведение:

$$(\alpha_1(z)) + (\alpha_2(z)) + \dots + (\alpha_k(z)) + \dots, \quad (15)$$

$$(\alpha_1(z)) \cdot (\alpha_2(z)) \cdot \dots \cdot (\alpha_k(z)) \cdot \dots \quad (16)$$

так же, как и выше, то есть с помощью раскрытия скобок и приведения подоб-

ных членов. Однако такое определение в общем случае не годится. Действительно, если, например, в «бесконечном произведении»

$$(1+z)(1+z) \cdot \dots \cdot (1+z) \cdot \dots$$

мы начнем раскрывать скобки и приводить подобные, мы сразу увидим, что коэффициент, скажем, при z^2 , растет и продолжает расти по мере того, как мы раскрываем скобки. Этот пример принципиально отличается от ранее разобранных произведений

$$(1+z)(1+z^2)(1+z^4) \cdot \dots \cdot (1+z^{2^m}) \cdot \dots,$$

в котором начальные коэффициенты постепенно стабилизируются, в силу того, что в «далеких» скобках нет одночленов с формальной переменной в «низкой» степени.

Так вот, *бесконечная сумма* (15) и *бесконечное произведение* (16) определяются, только если происходит стабилизация коэффициентов при раскрытии скобок и приведении подобных членов, — как формальный степенной ряд с полученными таким образом коэффициентами.

Точное определение «стабилизации» такое: для всякого натурального d найдется натуральное число n такое, что при $n > N$ ряд $a_n(z)$ не содержит z в степенях меньших, чем d .

Этим завершается наш краткий экскурс в теорию формальных степенных рядов. Мы советуем читателю прервать чтение на этом месте, вернуться к примерам в начале статьи и убедиться в том, что в них производились не сомнительные трюки с бесконечными многочленами, а вполне законные операции с формальными степенными рядами.

Производящие функции

Вдумчивый читатель, разбирая примеры в начале статьи, возможно, заметил, что успех метода связан с возможностью записать производящую функцию формального степенного ряда $\alpha(z)$ в компактном виде. Так, например, производящую функцию последовательности $1, 1, 1, \dots$ можно записать как $1/(1-z)$, ибо

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \dots + z^n + \dots \quad (17)$$

Отправляясь от этого соотношения, можно получить много других конкретных производящих функций. Например, умножив обе части (17) на z и дифференцируя, получим

$$\left(\frac{z}{1-z}\right)' = 1 + 2z + 3z^2 + \dots + (n+1)z^n + \dots \quad (18)$$

Это значит, что функция $(z(1-z))' = z/(1-z)^2$ является производящей для последовательности $1, 2, 3, 4, \dots$. Снова умножая на z и дифференцируя, мы получим

$$\frac{1+z}{(1-z)^3} = 1 + 2^2z + 3^2z^2 + \dots + (n+1)^2z^n + \dots \quad (19)$$

Мы нашли явное выражение для производящей функции последовательности $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots$.

Читатели, умеющие делить многочлены «уголком», могут получить соотношение (19) иначе — именно деля многочлен $1+z$ на многочлен $1-3z+3z^2-z^3$.

Вновь отправляясь от (17), но теперь уже интегрируя, получим

$$\int_0^z \frac{dx}{1-x} = \int_0^z 1 \cdot dx + \int_0^z x dx + \dots + \int_0^z x^n dx + \dots$$

$$-\ln(1-z) = z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots$$

Мы видим, что производящей функции последовательности $1, 1/2, 1/3, \dots$ будет функция $-\ln(1-z)/z$.

Ограничимся этими примерами и перейдем к задачам, решаемым методом производящих функций.

Задачи

1. Докажите, что любое целое положительное число можно представить в двоичной записи единственным образом.

Указание. Сравните эту задачу с задачей о взвешивании.

2. Докажите, что любое целое положительное число можно представить в десятичной записи единственным образом.*

Указание. Воспользуйтесь соотношением (доказав его):

$$(1+z+z^2+\dots+z^9) \cdot (1+z^{10}+z^{20}+\dots+z^{90}) \times \\ \times (1+z^{100}+z^{200}+\dots+z^{900}) \cdot \dots = \\ = 1+z+z^2+z^3+\dots = 1/(1-z)$$

3. Докажите, что любое целое положительное число можно представить в виде суммы различных целых положительных слагаемых столькими способами, сколькими способами его можно представить в виде суммы (не обязательно различных) нечетных положительных слагаемых. (Например, для числа 6 — четыре способа, именно $6=1+5=2+4=1+2+3$ и $1+5=3+3=1+1+1+3=1+1+1+1+1$.)

* Окончание см. на с. 52.

* То, что этот факт вам известен с первого класса, нельзя считать математическим обоснованием его справедливости!

Синтетические металлы — новый тип проводников

Кандидат физико-математических наук
С. Н. АРТЕМЕНКО,
доктор физико-математических наук
А. Ф. ВОЛКОВ

Что лучше всего проводит ток?

По способности проводить электрический ток все твердые тела делят на три большие группы: металлы, полупроводники и диэлектрики (или изоляторы). Сюда можно добавить и сверхпроводники — ряд металлов и их соединений, которые при очень низких температурах проводят ток без потерь энергии; их электросопротивление равно нулю.

Наилучшими проводниками электричества являются металлы. Удельное сопротивление металлов — порядка 10^{-8} — 10^{-6} Ом·м. У диэлектриков удельное сопротивление больше 10^3 Ом·м. Полупроводники занимают промежуточное положение.

На рисунке 1 приведены значения удельного сопротивления некоторых металлов, полупроводников и диэлектриков. Видите, удельное сопротивление у серебра меньше, чем у тефлона, в 10^{24} (!) раз. Ни одна физическая характеристика не изменяется так сильно при переходе от вещества к веществу, как удельное сопротивление.

И диэлектрики, и полупроводники, и металлы широко используются в технике. Диэлектрики применяются, например, в качестве изоляторов. Полу-

проводники составляют основу современной электроники. Полупроводниковые приборы можно встретить во многих устройствах, начиная с бытовой радиоаппаратуры и кончая современными вычислительными машинами, создание которых было бы немыслимо без полупроводниковых элементов. Из металлов делают соединительные провода, а также различные электросиловые установки (генераторы тока, электромоторы, трансформаторы и т. д.).

В последнее время в технику начинают вторгаться и сверхпроводники. Основное преимущество сверхпроводников состоит в их способности проводить ток без потерь энергии. Это свойство сверхпроводников оказывается очень ценным не только при проектировании будущих линий электропередач от мощных ГЭС к потребителям, но и в тех областях, где расходы энергии сравнительно невелики. В частности — при конструировании сверхмощных (по числу выполняемых операций, а не по потребляемой мощности) ЭВМ со скоростью вычислений в сто или тысячу миллионов операций в секунду.*)

Недостаток же существующих сверхпроводников состоит в необходимости охлаждать их до очень низких температур (даже самый «высокотемпературный» сплав Nb_3Ge переходит в сверхпроводящее состояние лишь при 21,3 К). Поэтому ясно, что очень заманчивой является задача создания проводника тока, который становился бы сверхпроводником при обычных температурах или хотя бы при температуре жидкого азота, равной 77 К (жидкий азот намного дешевле жидкого гелия, его сейчас используют даже при транспортировке скоропортящихся продуктов). В этом направлении уже было сделано немало оригинальных предложений. Интересные и перспективные идеи были высказаны в 1964 го-

* См. статью Л. Г. Асламазова «ЭВМ на сверхпроводниках» в «Кванте» № 11 за 1983 год.

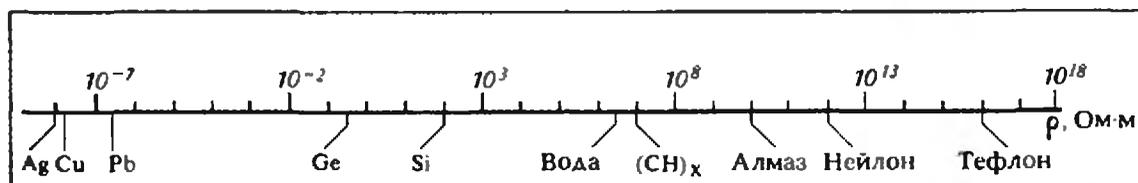


Рис. 1.

ду советским физиком-теоретиком В. Л. Гинзбургом и американским физиком У. Литтлом. Они предложили искать сверхпроводимость в специально созданных веществах, которые часто называют квазиодномерными (похожими на одномерные).

Квазиодномерные вещества

Такие вещества должны состоять из длинных проводящих цепочек атомов, окруженных молекулами непроводящего материала. Тогда свободные электроны будут легко двигаться вдоль цепочки и ориентировать соответствующим образом электроны в окружающих «непроводящих» молекулах. По предсказаниям теории, такое поведение электронов (как в проводящих цепочках, так и в «непроводящих» молекулах) приводит к новому механизму сверхпроводимости, и температура T_k перехода квазиодномерных веществ в сверхпроводящее состояние должна быть достаточно высокой — вплоть до комнатной.

Термин «квазиодномерный проводник» возник от того, что эти вещества хорошо проводят ток только в одном направлении — вдоль цепочек (электрон легко перемещается вдоль цепочки и плохо — в поперечных направлениях). В этом случае говорят, что проводимость вещества резко анизотропна. Такие вещества могут быть как органическими, так и неорганическими. На рисунке 2 схематически представлена структура квазиодномерного неорганического вещества трисульфида тантала — TaS_3 . В органических квазиодномерных веществах атомы металла могут вообще отсутствовать, но тем не менее и там есть свободные электроны, которые легко движутся только в одном измерении — вдоль цепочек.

Вдохновляемые заманчивыми идеями получения высокотемпературной сверхпроводимости, ученые с энтузиазмом принялись за исследование квазиодномерных материалов. Были синтезированы квазиодномерные металлы. Прежде всего были измерены зависимости $R(T)$ сопротивления этих проводников от температуры. С понижением температуры сопротивление, как и должно быть в металлах, уменьшалось. Ожидалось, что при некоторой температуре T_k оно упадет до нуля, то есть произойдет переход

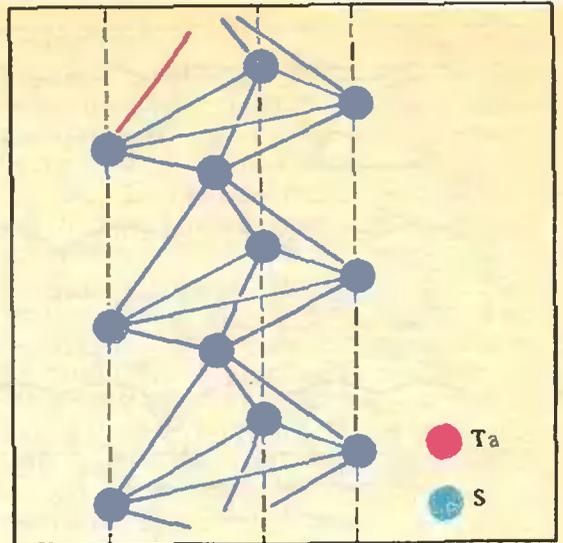


Рис. 2.

в сверхпроводящее состояние. Однако, вместо этого сопротивление при некоторой температуре начало расти. Дальнейшие исследования показали, что в веществе действительно происходит переход, но не в сверхпроводящее состояние, а в полупроводниковое или даже диэлектрическое!

Надо сказать, что обнаруженное явление скорее несколько разочаровало физиков, чем удивило. А удивляться действительно было особенно нечему, так как еще в 1954 году английский физик-теоретик Р. Пайерлс рассмотрел устойчивость регулярного расположения атомов металла в цепочках. Оказывается, что, если при высоких температурах атомы в цепочках располагаются на одинаковом расстоянии a друг от друга (рисунок 3, а), то по мере охлаждения при некоторой температуре T_k они начинают смещаться из положения равновесия. Смещение происходит вдоль направления цепочки, и атомы могут образовывать, например, пары (рисунок 3, б). При этом период l решетки удваивается — $l=2a$, а проводимость материала сильно падает. Если раньше каждый свободный электрон не принадлежал ни к какому конкретному атому и мог свободно перемещаться по кристаллу, то при удвоении периода (то есть при образовании пар атомов) два электрона пары близко расположенных атомов принадлежат именно этой паре. Такой кристалл с удвоенным периодом решетки напоминает молекулярный кристалл, который почти всегда является полупроводником или диэлектриком.

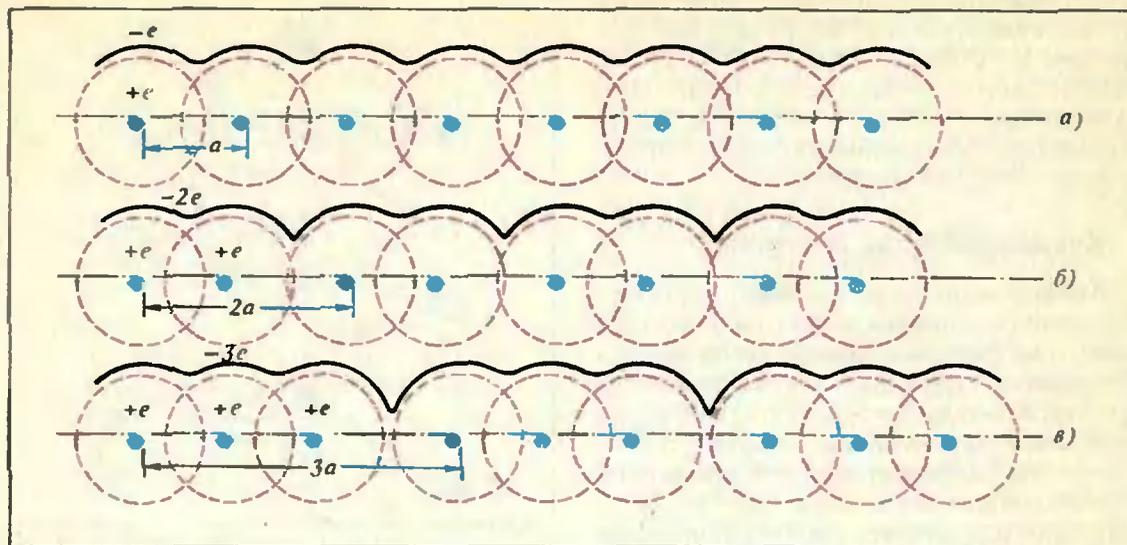


Рис. 3.

Следовательно, наблюдаемый рост сопротивления при охлаждении свидетельствует о том, что кристалл перешел из металлического состояния в полупроводниковое или диэлектрическое. Такой переход называют пайерлсовским, а температуру T_p , при которой он происходит, — температурой пайерлсовского перехода.

Удвоение — это наиболее простой случай изменения периода решетки. Чаще возникает более сложная ситуация: могут образовываться тройки атомов (утроение периода — $l=3a$; этот случай показан на рисунке 3, в), четверки атомов (четверение периода — $l=4a$) и т. д. Более того, период новой искаженной решетки может быть и несоизмерим с периодом исходной, неискаженной решетки, то есть его нельзя представить в виде $l=na/m$, где n и m — целые числа.

Когда появилась работа Пайерлса, она не вызвала большого интереса у экспериментаторов. В то время предсказание Пайерлса представлялось чисто теоретическим построением, касающимся, в лучшем случае, каких-то экзотических веществ. К тому же казалось, что если бы даже и удалось наблюдать переход из металлического состояния в полупроводниковое, ничего особенно нового это не дало бы.

В последние годы положение изменилось. Во-первых, ученые хотели бы детально изучить пайерлсовский переход, чтобы понять нельзя ли его подавить и получить переход из металлического состояния в сверхпроводящее. Во-вторых, хотелось выяснить, ка-

кими новыми свойствами, отличающими его от обычного полупроводника или диэлектрика, обладает вещество с искаженным периодом (такое вещество часто называют пайерлсовским проводником). В поисках ответов на поставленные вопросы были развернуты широкие исследования во многих лабораториях мира. Были синтезированы десятки новых квазиодномерных соединений, как органических, так и неорганических. Эти соединения, полученные с помощью мощных методов химической технологии, называют также синтетическими металлами, поскольку их проводимость довольно высока. На шкале удельных сопротивлений (см. рисунок 1) синтетические металлы занимают промежуточное положение между полупроводниками и хорошими проводниками (типа меди). Исследования, проведенные с этими материалами, дали неожиданные и интересные результаты.

Каков же ответ на первый вопрос? Оказалось, что подавить пайерлсовский переход совсем не просто. А если и удастся это сделать (например, с помощью введения большого числа примесных атомов, которые стабилизируют атомы металла в цепочках, не дают им смещаться), ожидаемого сверхпроводящего перехода не наблюдается. С другой стороны, довольно неожиданное поведение обнаружено у некоторых квазиодномерных органических проводников. При уменьшении температуры сопротивление этих веществ, которое близко по величине к сопротивлению металлов, умень-

шается. При дальнейшем понижении температуры в веществе происходит переход типа пайерлсовского и сопротивление увеличивается. Но при последующем охлаждении при температуре около 1 К кристалл переходит в сверхпроводящее состояние! Ясно, конечно, что это не высокотемпературная сверхпроводимость, хотя и не совсем понятно, почему вещество из полупроводникового состояния переходит сразу в сверхпроводящее. Имеются экспериментальные данные, показывающие, что сверхпроводимость в этом веществе отличается по своим свойствам от сверхпроводимости в обычных металлах. Однако полной ясности относительно природы обнаруженной сверхпроводимости пока нет, и вопрос о ее механизме остается открытым. Исследования его продолжаются.

Новый механизм проводимости

Как же обстоит дело с ответом на второй вопрос — об отличии квазиодномерного пайерлсовского проводника от обычного полупроводника? Здесь усилия физиков были вполне вознаграждены природой. Как оказалось, такие отличия есть, и они настолько существенны, что подчас трудно решить, к какому типу веществ отнести пайерлсовские проводники: к металлам, полупроводникам или к диэлектрикам. В некоторых квазиодномерных веществах можно обнаружить черты поведения, свойственные всем трем типам. Более того, в пайерлсовских проводниках наблюдаются явления, обусловленные коллективным поведением электронов и сходные с теми, которые происходят в сверхпроводниках. Остановимся на одном из наиболее ярких отличий пайерлсовского проводника от обычных проводников и расскажем о новом механизме проводимости.

Несмотря на то, что, как мы уже говорили, проводимости металла, полупроводника и диэлектрика очень сильно различаются по величине, механизм проводимости во всех этих веществах в принципе один и тот же. Все отличие связано, главным образом, с различной концентрацией n свободных электронов (или дырок). В металлах концентрация практически не зависит от температуры и является самой большой: в кубическом сантиметре содержится примерно 10^{22} свободных

электронов. В полупроводниках и диэлектриках при достаточно низких температурах свободных электронов практически нет — все электроны участвуют в образовании химических связей. С повышением температуры часть связей разрывается, и некоторые электроны становятся свободными. В полупроводниках разрыв связей происходит легче (при более низких температурах), чем в диэлектриках. Именно свободные электроны и создают ток в твердом теле при приложении к нему напряжения. Тепловые колебания атомов кристаллической решетки мешают двигаться электронам, ограничивая их среднюю скорость. Поэтому и уменьшается сопротивление металла при охлаждении — при низких температурах атомы решетки колеблются слабее, с меньшей амплитудой. В полупроводниках и диэлектриках тепловое движение, как правило, также уменьшает среднюю направленную скорость имеющих в наличии свободных электронов. Зато само число электронов сильно зависит от температуры: оно резко возрастает с повышением температуры. При охлаждении число свободных электронов уменьшается, и сопротивление полупроводника и диэлектрика увеличивается.

Как же ведет себя пайерлсовский проводник, когда к нему приложено напряжение? В слабых электрических полях выполняется закон Ома: ток пропорционален приложенному напряжению $I=U/R$. Сопротивление R велико и увеличивается при понижении температуры, как в полупроводнике или в диэлектрике. Однако, когда напряжение U превышает некоторое поро-

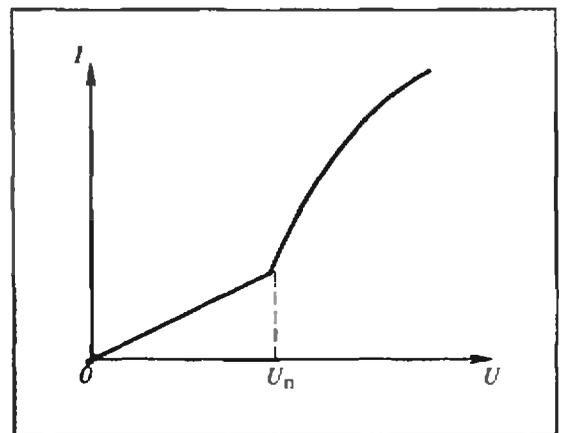


Рис. 4.

говое значение U_n , ток начинает расти с увеличением U более резко, чем по линейному закону (см. рисунок 4). Вид зависимости $I(U)$ наводит на мысль, что при $U > U_n$ включается дополнительный механизм проводимости. Как показали всесторонние исследования, именно это и происходит. Резкий рост тока с ростом напряжения обусловлен не свободными электронами, а коллективным движением связанных электронов.

Поясним природу нового механизма проводимости, обратившись снова к рисунку 3. Рассмотрим, например, случай утроения периода (рисунок 3, в) и образование «молекул» из трех атомов металла. Электроны, которые до утроения периода были свободными, теперь участвуют в связывании атомов металла друг с другом и группируются вблизи соответствующих троек атомов. Распределение плотности таких электронов вдоль цепочки атомов показано на рисунке 3 черной линией. Прибегая к научной терминологии, можно сказать, что возникла электронная сверхрешетка с утроенным периодом. Отличительное свойство квазиодномерных проводников и заключается в слабом взаимодействии атомов каждой цепочки с их окружением из других цепочек. Не следует забывать, что сверхрешетка образована электронами, которые до пайерлсовского перехода (то есть при температуре выше T_n) были свободными. Поэтому довольно слабое воздействие может изменить положение каждой тройки атомов в цепочке. Такое воздействие оказывает электрическое поле $E = U/L$, возникающее при приложении к проводнику напряжения U (L — длина образца). Поле действует на электронную сверхрешетку, пытаясь сдвинуть ее. При сравнительно небольших значениях E сверхрешетка деформируется.

Если поле превышает некоторое пороговое значение $E_n = U_n/L$, то электронная сверхрешетка срывается с места и начинает двигаться как целое (коллективное движение). (Ионная решетка при этом как целое не движется, но ионы совершают колебательные движения.) Движение электронной сверхрешетки, образованной связанными электронами, и приводит к резкому увеличению тока. Интересно, что скорость электронной сверхрешетки может быть не постоянной, она может содержать изменяю-

щуюся со временем часть. Поэтому помимо постоянного тока, на его «фоне», в образце течет переменный ток.

Таким образом, пайерлсовский переход и образование сверхрешетки приводят к тому, что в слабых полях вещество может быть полупроводником или диэлектриком, а в полях выше порогового, когда включается коллективный механизм проводимости, проводимость вещества становится близкой к металлической.

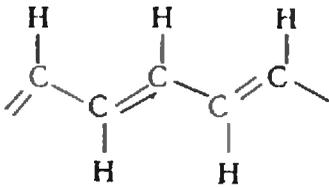
Подобного коллективного механизма нет в обычных типах проводников. Исключения составляют сверхпроводники, в которых наблюдается ряд явлений, до некоторой степени аналогичных явлениям в пайерлсовском проводнике. Изучение этих явлений в синтетических металлах ведется широким фронтом, и оно уже не связано с проблемой высокотемпературной сверхпроводимости, так как имеет самостоятельную научную ценность.

При каких же температурах происходит изменение периода в квазиодномерных веществах? Температура T_n пайерлсовского перехода, как и температура T_x сверхпроводящего перехода, зависит от вещества, но она значительно выше критической температуры сверхпроводника. Например, для трисульфида тантала TaS_3 температура T_n составляет 215 К, для органического проводника с пугающе длинным названием тетрагидрофульвален-тетрацианохинодиметан (его химический символ TTF—TCNQ) $T_n = 53$ К, а для полиацетилена $(CH)_x$ температура T_n превышает температуру его химического разложения. Это значит, что полиацетилен находится в пайерлсовском состоянии при всех температурах, при которых он существует, в том числе и при температурах, близких к комнатной, то есть около 300 К.

Квазиодномерный проводник — полиацетилен

Надо сказать, что полиацетилен занимает несколько особое место и ему уделяется повышенное внимание в исследовании пайерлсовских проводников. В полиацетиле происходит удвоение периода, то есть период цепочки $(CH)_x$ включает в себя не одну, а две CH -группы. Это, кстати, отражает и структурная химическая формула

полиацетилена



Чтобы сдвинуть электронную сверхрешетку с удвоенным периодом, требуется слишком большое электрическое поле, и поэтому движение сверхрешетки как целого не наблюдается. Однако, как выяснилось, в полиацетилене могут возникать особые нарушения в регулярности расположения пар СН-групп и окружающего их электронного облака. Такие нарушения могут сопровождаться перераспределением зарядов — в области нарушения появляется дополнительный положительный или отрицательный заряд. Раз возникнув, такое нарушение перемещается вдоль цепочки СН-групп, и при его движении переносится электрический заряд. По цепочке бежит уединенная волна — область с повышенным (относительно окружающего пространства) значением электрического поля. Подобные волны называют солитонами*). Таким образом, в полиацетилене осуществляется новый механизм протекания токов с участием солитонов.

Интересно, что количество солитонов, содержащихся в полиацетилене, может значительно изменяться при добавлении к материалу примесей (этот процесс называется легированием). А так как солитоны служат носителями тока, то

*) Солитонам была посвящена статья в ноябрьском номере «Кванта» за 1983 год.

при этом сильно меняется и проводимость материала. Чистый полиацетилен — диэлектрик; его удельная электропроводность порядка 10^{-6} (Ом · м)⁻¹. А за счет введения определенных примесей его проводимость можно увеличить в 10^{12} раз! Причем, в зависимости от примесей проводимость полиацетилена может быть как электронного, так и дырочного типа (преобладают отрицательные или положительные солитоны). Следовательно, на основе полиацетилена можно создать *p-n*-переход, что и было уже реализовано экспериментально. Эти качества делают полиацетилен очень привлекательным с точки зрения его применений в электронной технике. Учитывая то, что полиацетилен напоминает обычную полиэтиленовую пленку, можно представить себе перспективность использования его на практике. Из пленки полиацетилена уже изготовлены образцы солнечных батарей, имеющие меньший удельный вес и более дешевые, чем батареи на основе обычных полупроводников.

Возможно, в недалеком будущем будут построены дома, автомобили или, например, легкие самолеты, оклеенные тонкой пленкой и работающие на энергии, которая производится ею. Пока еще нет промышленных приборов, использующих новые вещества — синтетические металлы. Однако есть все основания думать, что разнообразие свойств этих материалов и возможности изменения их свойств с помощью современных методов химической технологии приведут к широкому внедрению синтетических металлов в практику и к открытию новой страницы в развитии электроники.

Задачи

для

исследования

Вокруг задачи Сильвестра

Предлагаем читателям обдумать некоторые варианты и обобщения «задачи Сильвестра», которые указали нам А. Белостоцкий, Н. Долбинин, И. Шарыгин, С. Шлосман.

Напомним исходную формулировку этой классической задачи.

Если на плоскости задано $n > 2$ точек, не лежащих на одной прямой, то найдется пря-

мая, содержащая ровно две из данных n точек (короткое доказательство этого утверждения см. в «Кванте» № 5, 1981 г., или в книге Г. С. М. Кокстера *Введение в геометрию*, «Наука», М., 1966).

1°. Докажите, что при тех же условиях найдутся по крайней мере а) две, б) три прямые, содержащие ровно две из данных точек. в) Можно ли утверждать, что найдется k таких прямых, если число точек n достаточно велико, $n > n_k$? (Оценка n_k нам не известна.)

2°. На плоскости задано $n > 3$ точек, не лежащих на од-

ной окружности или на одной прямой. а) Докажите, что найдется окружность, которая содержит ровно три из данных точек. б) Оцените (как в пункте 1°) число таких окружностей.

3°. На плоскости нарисовано n прямых, среди которых нет двух параллельных и не все пересекаются в одной точке. а) Докажите, что найдется точка, в которой пересекаются ровно две прямые. б) Оцените число таких точек.

4°. Попробуйте сформулировать и доказать какие-либо аналоги «задачи Сильвестра» в пространстве.



Пьер Кюри

(к 125-летию со дня рождения)

Известный французский физик, один из основателей учения о радиоактивности, Пьер Кюри родился 15 мая 1859 года.

Не многие из ученых удостаивались того, чтобы их именем был назван новый эффект, закон, единица измерения. Имя Кюри встречается на страницах учебников физики не один раз: принцип Кюри, закон Кюри, точка Кюри и просто кюри — единица измерения радиоактивности.

Эти названия соответствуют крупнейшим открытиям ученого. Так, многие, наверное, знают, что один из способов размагнитить постоянный магнит состоит в том, чтобы его сильно нагреть. Температура, при которой происходит размагничивание, и называется точкой Кюри. Законы поведения магнитных тел при различных температурах были открыты ученым и описаны в его докторской диссертации.

Есть и еще одно открытие, которое было сделано Пьером Кюри совместно с его старшим братом Жаком. Это — открытие пьезоэлектричества. При деформации некоторых кристаллов (например, кварца) на их гранях возникают противоположные по знаку электрические заряды. Братья Кюри впервые экспериментально обнаружили этот эффект, а также и обратный ему — при помещении пьезокристалла в электриче-

ское поле он деформируется. Сейчас это явление используется в самых разных областях науки и техники, начиная от радиотехники и кончая точными часами.

В 1895 году Пьер Кюри женился на Марии Склодовской. С этого момента начинается одиннадцатилетний период счастливой, трудной и необычайно плодотворной жизни супругов Кюри, принесший им мировую славу и трагически оборвавшийся гибелью П. Кюри в результате несчастного случая 19 апреля 1906 года.

Начиная с 1897 года научные интересы Кюри сосредоточиваются на изучении явления радиоактивности.

Исследуя радиоактивность солей урана, Мария Кюри обнаружила, что их излучение значительно сильнее, чем излучение чистого урана. Тогда она предположила, что соли содержат еще неизвестное радиоактивное вещество. Так началась работа, которая привела к открытию двух новых элементов — полония и радия.

Для того чтобы выделить из восьми тонн отходов урановой руды десятую долю грамма радия, потребовалось четыре года. Основные работы проводились учеными на собственные скудные сбережения в старом деревянном сарае, без всяких приспособлений. Опыты, в которых выделялись вредные газы, приходилось делать во дворе.

Кюри могли бы стать богатыми людьми, если бы запатентовали способ получения радия, но они полностью опубликовали результаты своих исследований, не стремясь извлечь из них какую-либо материальную выгоду. Любой заинтересованный человек получал подробную информацию.

Крупнейший физик, признанный во всем мире ученый, лауреат Нобелевской премии (совместно с М. Кюри), П. Кюри не дождался того, о чем мечтал, — хорошей лаборатории для своих исследований. Когда в 1903 году его хотели наградить орденом Почетного легиона, он написал в письме: «Прошу Вас передать господину министру, что не имею никакой нужды в ордене, но весьма нуждаюсь в лаборатории».

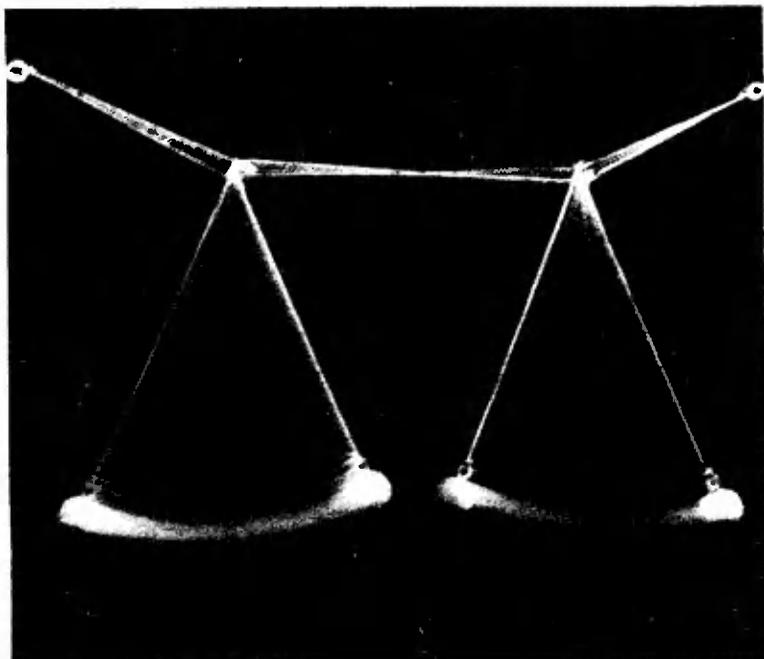
Лучше всего о Пьере Кюри сказала его жена: «Веря лишь в мирное могущество науки и разума, он жил для искания истины».

А. А. Боровой



Связанные маятники

Кандидат
физико-математических наук
Е. И. БУТИКОВ



Закономерности колебаний сложных систем таких, как связанные маятники, можно изучить на опыте с помощью простейших средств. Все, что вам потребуется для того, чтобы воспродублировать описываемые здесь опыты, — это два одинаковых небольших грузика (например, массивные гайки), два штатива, которые с успехом можно заменить спинками стульев, прочные нитки, секундомер или часы с секундной стрелкой.

Прикрепим грузики к нитям одинаковой длины 50—60 см, а нити привяжем к поперечной нити длиной около 1 м, расположив их симметрично на расстоянии 40—50 см друг от друга. Концы поперечной нити закрепим в штативах или привяжем к спинкам стульев. В результате получим систему из двух маятников, примерно такую, как показано на фотографии. Это и есть *связанные маятники*. Желательно добиться возможно более совершенной симметрии системы. Нужно позаботиться также и о том, чтобы можно было изменять расстояние между штативами, регулируя, тем самым, провисание поперечной нити.

Несмотря на простоту, это устройство дает возможность провести много интересных наблюдений. Ограничимся изучением лишь свободных (или собственных) колебаний системы в случае,

когда маятники качаются перпендикулярно к плоскости их равновесия.

Удерживая один из маятников в положении равновесия, другой отклоним на небольшой угол в поперечном направлении, затем отпустим их одновременно. Будем внимательно следить за их дальнейшим поведением. Мы увидим, что амплитуда колебаний первоначально отклоненного маятника постепенно уменьшается, но одновременно с этим второй маятник раскачивается все сильнее и сильнее. В какой-то момент маятники будут колебаться с одинаковыми амплитудами. Но через некоторое время первый маятник вообще остановится, «замрет» в положении равновесия, а второй раскачается настолько, что его амплитуда будет такой же, как в начальный момент у первого маятника. Колебания как бы полностью «перейдут» от одного маятника к другому.

Продолжаем наблюдать дальше. Теперь все процессы происходят в обратной последовательности: амплитуда второго маятника уменьшается, а первый раскачивается, пока не достигнет прежней амплитуды. Затем все повторяется сначала.

Такой тип движения с периодически «замираниями» колебаний принято называть *биениями*. Проследите за несколькими циклами биений и постарай-

тесь определить их период, то есть время, в течение которого один из маятников совершает полный цикл от одной остановки до другой. (При этом в качестве часов можно использовать сами маятники: подсчитайте, например, сколько полных колебаний совершает маятник за один цикл биений.)

Почему колебания передаются от одного маятника к другому? Понаблюдаем за поперечной нитью, к которой они привязаны. Легко заметить, что при колебаниях маятников она не остается неподвижной: отклоняясь в сторону, один из маятников тянет ее за собой и тем самым приводит в движение точку подвеса второго маятника. Таким образом, поперечная нить осуществляет связь маятников друг с другом. Поэтому маятники и называются *связанными*.

Интуиция подсказывает, что маятники связаны тем сильнее, чем больше провисает нить. Проверим это на опыте. Уменьшим натяжение нити, несколько сблизив точки ее закрепления, и повторим описанный выше опыт. Мы увидим, что полный цикл передачи колебаний от одного маятника к другому и обратно сокращается. Напротив, при увеличении натяжения нити связь маятников ослабляется, и обмен колебаниями происходит медленнее. Но интересно, что и при заметно ослабленной связи маятники полностью обмениваются энергией. (Конечно, если принять во внимание постепенное затухание колебаний маятников из-за трения, то при очень слабой связи время обмена энергией может стать больше времени затухания колебаний. Колебания возбужденного маятника прекратятся прежде, чем он успеет передать заметную часть своей энергии другому маятнику. В таких условиях наличие связи маятников становится несущественным, и их можно рассматривать как независимые.)

Задумаемся над тем, почему после того как амплитуды, а значит, и энергии маятников станут одинаковыми, процесс обмена энергией не прекращается, а продолжается до тех пор, пока возбужденный маятник не передаст другому всю свою энергию. Все дело в соотношении фаз: при выравнивании амплитуд колебания раскачиваемого маятника отстают по фазе на четверть периода. В тот момент, когда «активный» маятник достигает максимального отклонения и создает наибольшее натяжение поперечной соединительной ни-

ти, «пассивный» маятник (то есть раскачиваемый) еще только проходит через положение равновесия. Скорость точки его подвеса максимальна, а действующая на нее со стороны поперечной нити сила направлена в ту же сторону, куда движется точка подвеса. Это значит, что здесь сложились наиболее благоприятные условия для продолжения передачи энергии в прежнем направлении.

Мы видели, что при рассмотренном способе возбуждения (начальное отклонение одного из маятников) возникающие колебания не являются гармоническими (хотя при слабой связи их можно считать «почти гармоническими» с медленно меняющейся амплитудой). А нельзя ли возбудить колебания таким образом, чтобы движение каждого из маятников было чисто гармоническим? Легко сообразить, что для колебаний, перпендикулярных к равновесной плоскости, существует два типа таких движений.

Во-первых, можно отклонить оба маятника на один и тот же небольшой угол в одном направлении и одновременно осторожно отпустить их без толчка. Тогда вся система будет качаться как единое целое. Попробуйте возбудить такие колебания и измерьте их частоту ω_1 . Так как маятники колеблются в одинаковых фазах, зависимость смещения от времени для каждого из них выражается одной и той же гармонической функцией:

$$x_1(t) = x_2(t) = x_m \cos \omega_1 t, \quad (1)$$

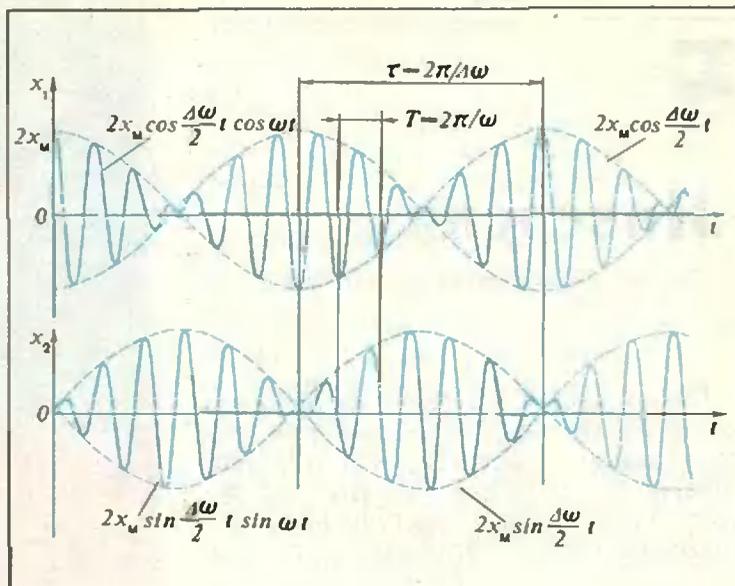
где амплитуда x_m равна начальному отклонению маятников из положения равновесия.

Во-вторых, можно отвести оба маятника на одинаковые углы в противоположные стороны и одновременно отпустить. Маятники и в этом случае будут совершать гармонические колебания с одинаковой амплитудой и одной и той же частотой ω_2 (эта частота несколько больше, чем ω_1), но в противоположных фазах. Поэтому зависимости смещения от времени имеют вид

$$x_1(t) = x_m \cos \omega_2 t, \quad x_2(t) = -x_m \cos \omega_2 t. \quad (2)$$

Такие движения сложной системы, когда все тела совершают чисто гармонические колебания с одной и той же частотой, называют *нормальными колебаниями*, или *модами* системы. Поперечным колебаниям связанных маят-

Так выглядят графики биений двух связанных маятников. В начальный момент первый маятник отклонен на небольшой угол в направлении, перпендикулярном плоскости равновесия системы, а второй маятник находится в положении равновесия.



ников соответствуют две рассмотренные выше моды с частотами ω_1 и ω_2 . Каждая мода характеризуется не только собственной частотой, но и определенным взаимным расположением (конфигурацией) маятников при колебаниях.

Какое отношение имеют моды к изученным ранее биениям? Вспомним начальные условия, при которых возбуждается каждая из них: для первой маятники нужно отклонить в одну сторону, для второй — в противоположные. Если мы захотим возбудить обе моды одновременно, то как раз и получим начальные условия, соответствующие возбуждению биений: один маятник отклонен, второй находится в положении равновесия. Таким образом, мы приходим к выводу, что биения получаются в результате суперпозиции нормальных колебаний с частотами ω_1 и ω_2 и одинаковыми амплитудами.

Смещение каждого маятника в любой момент времени t мы получим, сложив соответствующие выражения из формул (1) и (2) и воспользовавшись известными тригонометрическими тождествами:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_m (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = \\ &= 2x_m \cos \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \cos \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t, \\ x_2(t) &= x_m (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) = \\ &= 2x_m \sin \frac{\omega_2 - \omega_1}{2} t \sin \frac{\omega_2 + \omega_1}{2} t. \end{aligned} \quad (3)$$

Если разность частот нормальных колебаний $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ мала по сравнению со средней частотой $\omega = (\omega_2 + \omega_1)/2$, то в правых частях формул (3) первая

тригонометрическая функция изменяется медленно по сравнению со второй. Это и значит, что $x_1(t)$ и $x_2(t)$ описывают «почти гармонические» колебания с частотой ω и медленно пульсирующими амплитудами. Соответствующие графики приведены на рисунке. Мы видим, что они правильно описывают то, что наблюдалось в первом опыте.

О представлении сложного колебания в виде суммы гармонических колебаний говорят как о разложении в спектр. Спектр любого поперечного колебания маятников изучаемой системы, в том числе и биений, состоит только из двух компонент с частотами ω_1 и ω_2 , так как ими исчерпывается весь набор поперечных нормальных колебаний. Все многообразие возможных свободных колебаний, возникающих при разных начальных условиях, обусловлено различными соотношениями амплитуд и фаз этих спектральных компонент. Попробуйте задать иные, чем раньше, начальные условия (например, неодинаковые начальные отклонения) и наблюдайте за возникающими колебаниями.

С нашими связанными маятниками можно проделать еще много интересных опытов, если не ограничиваться только поперечными движениями. В этой системе есть еще три моды, соответствующие колебаниям маятников в плоскости, образуемой нитями при равновесии. Попробуйте возбудить эти моды и наблюдайте за ними.



Инверсия

Кандидат физико-математических наук
В. М. УРОЕВ

В этой статье мы расскажем об одном замечательном геометрическом преобразовании — инверсии — позволяет решать задачи, даже подступиться к которым на первый взгляд очень трудно.

§ 1. Что такое инверсия

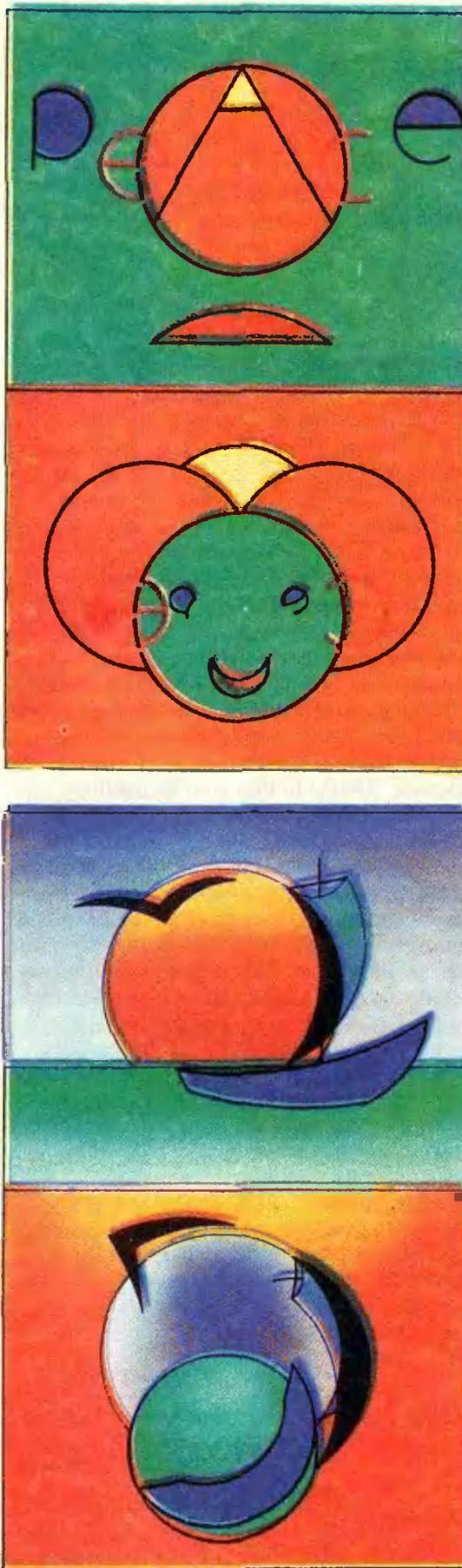
Предположим, на плоскости α задана окружность S радиуса R с центром O . Инверсией плоскости α относительно этой окружности называется отображение, при котором каждой точке A плоскости α , за исключением точки O , ставится в соответствие лежащая на луче (OA) точка A' такая, что

$$|OA'| = \frac{R^2}{|OA|}. \quad (1)$$

Из этого определения видно, что при инверсии точки A и A' меняются местами, отображаясь друг в друга. Центр O окружности S , называемый *центром инверсии*, не имеет образа, и никакая точка при инверсии в него не попадает (рис. 1). Внутренность круга, ограниченного окружностью S , инверсия переводит во внешнюю область, поскольку из неравенства $|OA| < R$ следует, что $|OA'| > R$, и наоборот, внешняя область отображается во внутреннюю.

Точки окружности S при инверсии остаются на месте, а из того, что внутренность круга переходит во внешность, вытекает, что других неподвижных точек нет.

На этих рисунках, выполненных учащимися ФМШ при МГУ, показано, как инверсия преобразует цветные картинки. На первом рисунке окружность инверсии охватывает букву A , на втором эта окружность — край солнца.



Иногда инверсию называют *симметрией относительно окружности* (по аналогии с симметрией относительно прямой), а точки A и A' — *симметричными относительно окружности*. Как и осевая симметрия, инверсия относительно окружности S обладает интересным свойством: ее повторное выполнение возвращает точки в исходное положение. Отметим еще, что если точку A выбирать все ближе и ближе к O , то $|OA'|$ будет неограниченно возрастать. Инверсия как бы «выворачивает» внутренность круга на его внешность и, соответственно, внешность круга выворачивается на его внутренность.

Это наблюдение наводит на мысль добавить к плоскости не принадлежащую ей «бесконечно удаленную точку» ∞ и считать, что при инверсии центр O переходит в ∞ , а ∞ — в точку O .

§ 2. Свойства инверсии

Посмотрим, как преобразуются при инверсии прямые и окружности плоскости α . Непосредственно из определения следует, что прямая, проходящая через центр инверсии, переходит в себя. При этом центр O и ∞ меняются местами. Прямая как бы «проворачивается по плоскости»: часть ее, находящаяся вне окружности вместе с «бесконечностью», переходит в диаметр окружности, а диаметр переходит в два луча, причем точка O переходит в ∞ , как бы «соединяющую» эти лучи.

А что произойдет с прямой, не проходящей через центр O ?

Пусть l — прямая, и D — основание перпендикуляра, опущенного из центра O на l , точка D' — образ точки D при инверсии, относительно окружности S (рис. 2)*). Пусть A — произвольная точка на прямой l , а точка D' — ее образ при инверсии. Из $|OA'| \times |OA| = |OD'| \cdot |OD| = R^2$ следует, что $\frac{|OA'|}{|OD|} = \frac{|OD'|}{|OA|}$. Поэтому треугольники $A'OD'$ и AOD подобны, поскольку угол AOD у них общий, а стороны, между которыми заключен этот угол, пропорциональны. Это означает, что $\widehat{OA'D'} = \widehat{ODA} = 90^\circ$, так что точка A'

* На рисунке 2 окружности S нет. Но это и не нужно: наши рассуждения, связанные с подобием, никак не зависят от чертежа

лежит на окружности, построенной на $[OD']$ как на диаметре.

Итак, *прямая, не проходящая через центр инверсии O , переходит в окружность, проходящую через точку O* . Верно и обратное утверждение: *всякая окружность, проходящая через центр инверсии O , переходит в прямую, не проходящую через точку O* .

Упражнение 1. Докажите это утверждение.

Теперь выясним, что происходит с окружностями, не проходящими через центр инверсии. Пусть сначала точка O лежит вне данной окружности S с центром Q .

Проведем луч OQ и рассмотрим диаметр ED (см. рис. 3)*). Пусть D' и E' — точки, симметричные точкам D и E относительно S , а A' — образ произвольной точки A окружности S .

Упражнение 2. Докажите, что $\triangle OA'D' \sim \triangle OAD$, а $\triangle OA'E' \sim \triangle OAE$.

Отсюда следует, что $\widehat{D'A'E'} = \widehat{OEA} - \widehat{ODA} = \widehat{EAD} = 90^\circ$. Итак, отрезок $D'E'$ виден из каждой точки A' под прямым углом, а это и значит, что образом окружности S является окружность S' , построенная на $D'E'$ как на диаметре.

Упражнение 3. Докажите, что утверждение остается в силе, если центр инверсии лежит внутри окружности S .

Для доказательства достаточно аккуратно построить чертеж и провести почти дословно рассуждения из упражнения 2.

Объединяя результаты упражнений 2 и 3, мы видим, что *образом всякой*

* На рисунке 3 сама окружность инверсии не изображена.

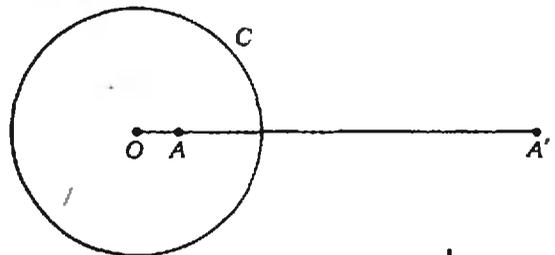


Рис. 1.

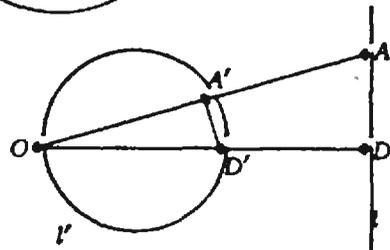


Рис. 2.

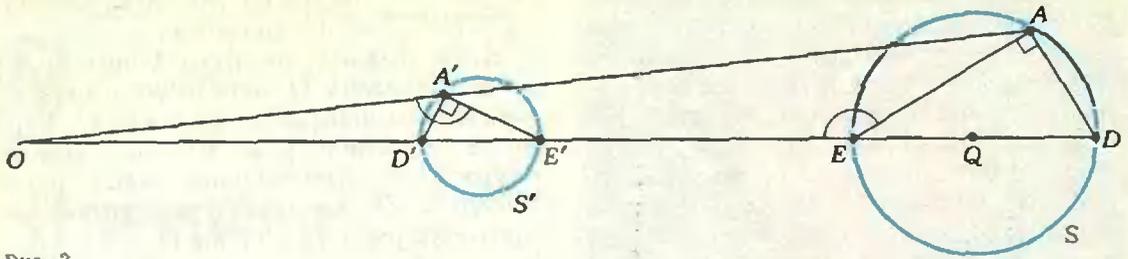


Рис. 3.

окружности, не проходящей через центр инверсии, является окружность, также не проходящая через центр инверсии.

Если рассматривать прямую линию как окружность бесконечного радиуса, содержащую бесконечно удаленную точку, то круговое свойство инверсии можно сформулировать так.

Инверсия отображает совокупность прямых линий и окружностей на себя, причем окружности, проходящие через центр инверсии и окружности, содержащие бесконечно удаленную точку, переходят друг в друга.

Теперь докажем, что инверсия сохраняет углы между окружностями и прямыми.

Углом между окружностями называется угол между касательными к ним в точке пересечения. Углом между прямой и окружностью называется угол между прямой и касательной к этой окружности в их общей точке.

Начнем со случая нулевых углов, то есть когда окружности касаются.

Этот случай рассмотрен на рисунке 4. Если окружности S_1 и S_2 касаются в точке K и не проходят через центр инверсии, то их образы — тоже окружности, имеющие единственную общую точку (рис. 4, а). Если центр инверсии лежит на одной из них и не совпадает с точкой касания, то другая переходит в окружность, а первая — в прямую, имеющую с ней единственную общую точку, то есть — в касательную (рис. 4, б). Если, наконец, центр окажется в точке касания, то обе окружности перейдут в параллельные прямые,

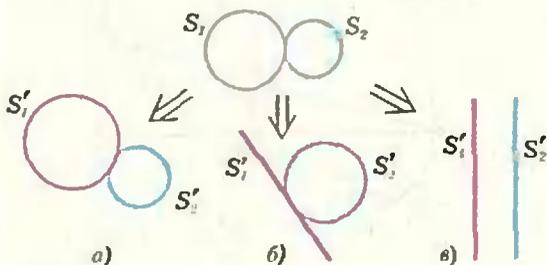


Рис. 4.

угол между которыми можно считать равным нулю (рис. 4, в).

Доказательство общей теоремы вы получите, решив следующие упражнения.

Упражнения

4. Докажите, что при инверсии относительно окружности с центром O углы между прямыми равны углам между их образами.

Указание. Рассмотрите три возможных случая: а) прямые l_1 и l_2 проходят через O ; б) прямая l_1 проходит через O , а l_2 — нет; в) обе прямые не проходят через O . Для доказательства утверждения во всех трех случаях достаточно воспользоваться уже известными вам свойствами инверсии.

5. Угол между двумя окружностями равен углу между их образами.

6. Угол между прямой и окружностью равен углу между их образами.

Указание. Проведите касательные в точках пересечения и воспользуйтесь упражнением 4.

§ 3. Решение задач с помощью инверсии

Сначала докажем одно важное свойство окружности.

Теорема о квадрате касательной. Пусть прямая OD касается окружности T в точке D , секущая OA пересекает окружность T в точках A и B . Тогда $|OD|^2 = |OA| \cdot |OB|$ (рис. 5).

Упражнение 7. Докажите, что $\widehat{DAO} = \widehat{ODB}$.

Указание. Проведите DD' — диаметр окружности T и воспользуйтесь тем, что $\widehat{DAB} = \widehat{DD'B}$ как вписанные углы, а $\widehat{D'BD} = 90^\circ$.

Упражнение 8. Из упражнения 7 получите утверждение теоремы.

Рассмотрим теперь несколько задач.

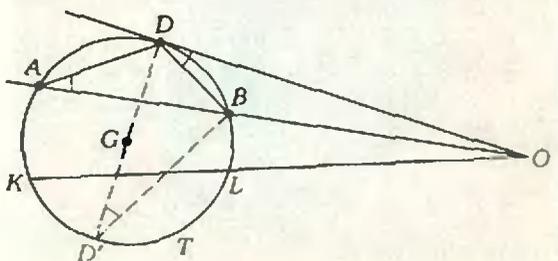


Рис. 5.

Задача 1. Если при инверсии относительно некоторой окружности S точки A и B окружности T переходят друг в друга, то окружность T переходит в себя (см. рис. 5).

Решение. Центр инверсии O должен лежать на прямой AB , которая переходит в себя, причем $OA \cdot OB = R^2$, где R — радиус окружности S . Проведем касательную OD к окружности T . По доказанной теореме $|OA| \cdot |OB| = |OD|^2$. Значит, $|OD| = R$. Проведем теперь произвольную секущую OK к окружности T . По теореме о квадрате касательной $|OK| \cdot |OL| = |OD|^2 = R^2$ и, значит, точки K и L переходят друг в друга, а поэтому окружность T переходит в себя.

Задача 2. Пусть A' и B' точки, симметричные точкам A и B относительно окружности радиуса R с центром O . Докажите, что $|A'B'| = \frac{R^2 \cdot |AB|}{|OA| \cdot |OB|}$.

Указание. Воспользуйтесь подобием треугольников OAB и $OA'B'$.

Задача 3. Прямые MA и MB касаются окружности S в точках A и B , точка D — середина хорды AB . Докажите, что точки D и M симметричны относительно окружности S (рис. 6).

Доказательство. $\triangle OAD \sim \triangle OAM$. Поэтому $\frac{|OA|}{|OM|} = \frac{|OD|}{|OA|}$. Отсюда сразу следует, что $|OA|^2 = R^2 = |OM| \cdot |OD|$.

Задача 4 (теорема Птолемея). Докажите, что в любом вписанном четырехугольнике $ABCD$ произведение длин диагоналей равно сумме произведений длин противоположных сторон (рис. 7):

$$|AC| \cdot |BD| = |AB| \cdot |CD| + |BC| \cdot |AD|.$$

Доказательство. Выполним инверсию с центром в вершине A . Тогда описанная окружность T перейдет в прямую T' , вершины B, C, D — соот-

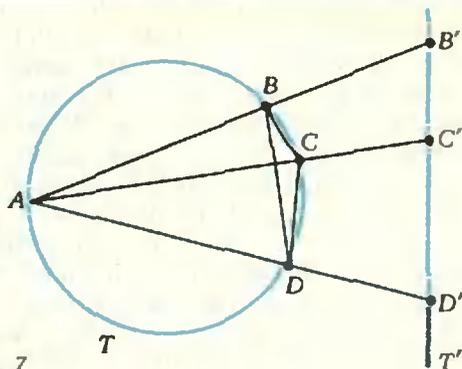


Рис. 7.

ветственно в точки B', C', D' на прямой T' . Обозначим R — радиус описанной окружности. Обращаясь к задаче 2, получаем

$$|C'B'| = \frac{R^2 \cdot |BC|}{|AB| \cdot |AC|},$$

$$|B'D'| = \frac{|BD| \cdot R^2}{|AD| \cdot |AB|},$$

$$|C'D'| = \frac{R^2 \cdot |CD|}{|AC| \cdot |AD|}$$

Отсюда видно, что утверждение теоремы Птолемея выражает следующий очевидный факт: $|B'D'| = |B'C'| + |C'D'|$. Действительно, подставляя в это равенство найденные значения $|C'B'|, |B'D'|, |C'D'|$ и приводя к общему знаменателю, приходим к искомому соотношению.

Задача 5. На окружности S даны две точки A и B . Рассматриваются всевозможные пары окружностей, лежащие внутри S , одна из которых касается окружности S в точке A , другая — в точке B и касающиеся друг друга, (рис. 8). Найдите множество X всех точек, в которых могут касаться друг друга две окружности такой пары.

Решение. Пусть T_1 и T_2 касающиеся окружности и D — их точка касания (см. рис. 8). Выполним инверсию с центром в точке A относительно произвольной окружности. Тогда окружности S и T_1 перейдут в парал-

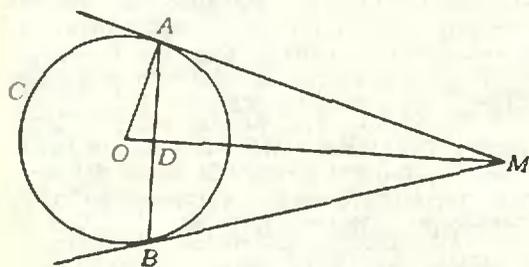


Рис. 6.

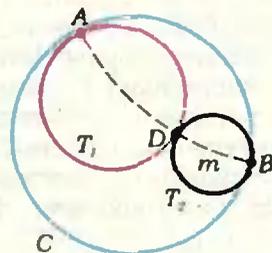


Рис. 8.

дельные прямые C' и T'_1 . Окружность T_2 перейдет в окружность T'_2 , касающуюся прямой T'_1 в образе D' точки D , а прямой C' — в образе B' точки B (рис. 9). Очевидно, точка D' лежит на перпендикуляре m' , восстановленном к C' в точке B' . При другом выборе пары T_1, T_2 получится другая прямая T'_1 , параллельная C' , но точка D' будет по-прежнему лежать на перпендикуляре m' . Следовательно, искомое множество точек инверсии отображает на луч m' .

Очевидно, каждая точка луча m' может быть точкой касания некоторой прямой T'_1 , параллельной C' , и окружности T'_2 , касающейся C' в точке B' . Следовательно, любая точка (m') является образом некоторой точки D множества X . При повторном выполнении инверсии, сделанной вначале, все точки вернутся на прежнее место, поэтому луч m' перейдет в множество X точек касания. Следовательно, искомым множеством является лежащая внутри S дуга окружности, пересекающей C в точках A и B под прямым углом.

Задача б (теорема Эйлера). Пусть r и R — радиусы вписанной T_1 и описанной T_2 окружностей треугольника ABC , а d — расстояние между центрами этих окружностей. Докажите, что $\frac{1}{R+d} + \frac{1}{R-d} = \frac{1}{r}$, то есть $d^2 = R^2 - 2Rr$.

Указание. Обозначим M, N, K — точки касания вписанной окружности со сторонами треугольника ABC (рис. 10). Сделаем инверсию относительно вписанной окружности T_1 . Тогда вершины A, B, C треугольника отобразятся на середины P, Q, R сторон треугольника MNK (см. задачу 3), поэтому описанная окружность T_2 перейдет в окружность T_3 , описанную около треугольника PQR . Сама окружность T_1 , описанная около треугольника MNK , останется на месте. Треугольники PQR и MNK подобны с коэффициентом $1/2$, поэтому радиус окружности T_3 равен $1/2r$. Проведем диаметр GF окружности T_2 , проходящий через центр O_1 вписанной окружности T_1 . При инверсии относительно T_1 точки O_1 и F перейдут в точки G' и F' , лежащие на концах диаметра окружности T_3 , проходящего через точку O_1 . Следовательно, выполняется соотношение $|O_1G'| + |O_1F'| = 2 \cdot r/2$, откуда $\frac{r^2}{|O_1G|} =$

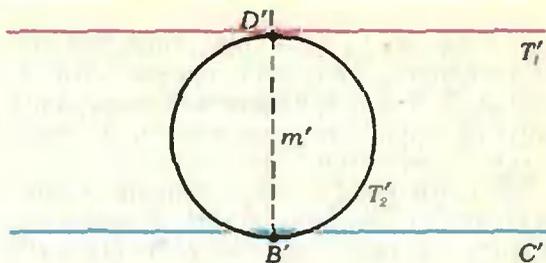


Рис. 9.

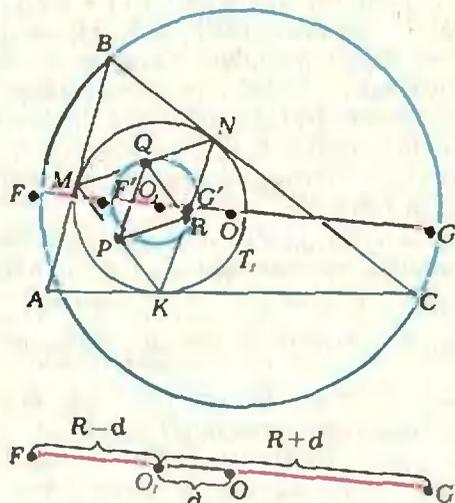


Рис. 10.

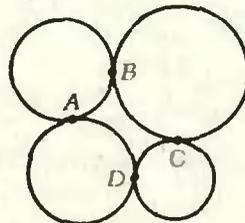


Рис. 11.

$$= \frac{r^2}{|O_1F|} = r, \text{ но } |O_1G| = R+d, |O_1F_1| = R-d.$$

В заключение этого параграфа предлагаем вам решить несколько задач.

Упражнения

9. Четыре окружности касаются друг друга внешним образом, как показано на рисунке 11. Докажите, что четыре точки касания A, B, C, D лежат на одной окружности.

10. На отрезке AB отмечена точка M и на отрезках AB и AM как на диаметрах построены полуокружности C_1 и C_2 . Окружность C_3 касается полуокружностей C_1, C_2 и перпендикуляра m , восстановленного к (AB) в точке M (рис. 12). Докажите, что общая касательная к окружностям C_2 и C_3 проходит через точку B .

11. На отрезке AB отмечена точка M и на отрезках AB, AM и MB как на диаметрах построены полуокружности C_1, C_2 и C_3 соответственно. Пусть точка O — центр окружности T , касающейся полуокружностей C_1, C_2, C_3 (рис. 13). Найдите расстояние от точки O до прямой AB , если радиус окружности T равен r .

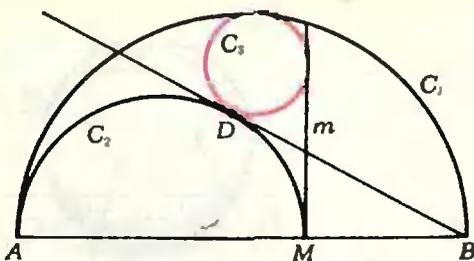


Рис. 12.

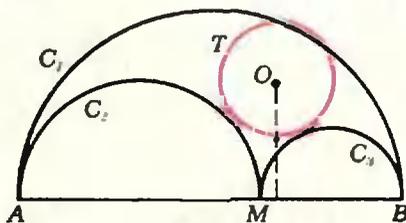


Рис. 13.

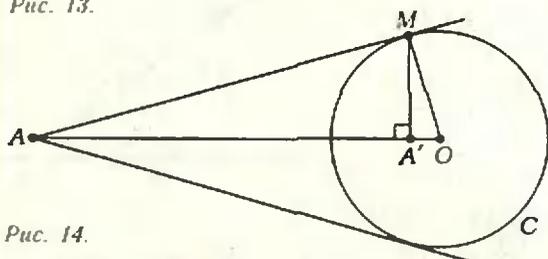


Рис. 14.

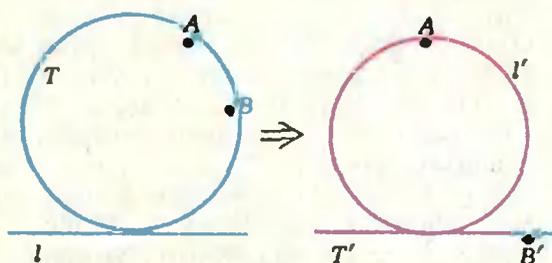


Рис. 15.

§ 4. Задачи на построение

Инверсия с большим успехом может применяться при решении задач на построение.

В основе решения всех задач лежит способ построения точки A' , симметричной данной точке A относительно окружности C (см. рис. 14). Способ этот заключается в следующем (для точки A , лежащей вне окружности C). Проводим касательную AM и из точки M опускаем перпендикуляр на OA . Основание перпендикуляра — искомая точка A' (см. задачу 3 из § 3).

Упражнение 12. Придумайте построение точки A' , если A лежит внутри окружности C .

Зная, как строить образы точек, мы без труда можем построить образы прямых и окружностей. Например, если требуется построить образ прямой l , не проходящей через точку O , достаточно опустить из точки O перпендикуляр

OD на прямую l , построить точку D' и описать окружность на OD' как на диаметре.

Упражнение 13. А как построить образ окружности, не проходящей через точку O ? Вспомните, что об этом написано в § 2.

Приведем теперь пример задачи на построение, решаемой с помощью инверсии.

Задача 7. Постройте окружность, касающуюся данной прямой l и проходящую через данные точки A и B . Сколько решений имеет эта задача?

Решение. Предположим, что искомая окружность T построена. Сделаем произвольную инверсию с центром в точке A . Прямая l перейдет при этом в некоторую окружность l' , точка B — в точку B' , а окружность T — в прямую T' , касающуюся окружности l' (см. рис. 15).

Отсюда сразу вытекает способ построения: выполняем инверсию с центром в точке A , из точки B' проводим касательные к окружности l' , выполняем еще одну инверсию с центром в точке A , получаем требуемое. Всего будет, вообще говоря, два решения. (А одно решение может получиться?)

— Упражнения

14. Постройте окружность, проходящую через данные две точки A и B и касающуюся данной окружности L . Сколько решений имеет эта задача?

15. Постройте окружность, касающуюся данной окружности S в точке A и а) данной прямой l ; б) данной окружности T .

16 (задача Аполлония). Постройте окружность, касающуюся трех данных окружностей. Об этой знаменитой задаче см. статью А. П. Савина «Инверсия и задача Аполлония» («Квант», 1971, № 8, с. 23).

17. Проведите две окружности равных радиусов, которые касались бы друг друга в данной точке D и проходили соответственно через данные точки A и B .

§ 5. Инверсия и стереографическая проекция

Рассмотрим сферу Q , касающуюся плоскости α в точке O . Пусть точка A' диаметрально противоположна точке S . Стереографической проекцией сферы Q на плоскость α называется отображение, которое каждой точке B сферы, за исключением точки N , сопоставляет точку A плоскости α , полученную в результате пересечения прямой NB с плоскостью α (рис. 16). Заметим, что любая точка A плоскости α является образом некоторой точки B сферы при стереогра-

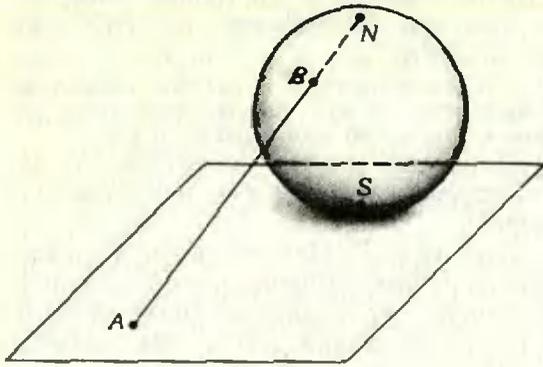


Рис. 16.

фической проекции. Точка B — есть пересечение прямой NA со сферой Q .

Покажем, как устроены на сфере множества точек, соответствующие некоторым хорошо известным линиям в плоскости α . При этом нам удобно будет пользоваться «географической» терминологией, называя сферу Q глобусом, а точки S и N — южным и северным полюсом.

Параллели, то есть окружности, проведенные на сфере «параллельно» плоскости α , отображаются на концентрические окружности с центром S . «Южный полюс» S , принадлежащий одновременно и сфере и плоскости, переходит в себя. «Северный полюс» образа не имеет.

Построим множество точек сферы, отображающееся на прямую линию l , лежащую в плоскости α . Поскольку через полюс N и прямую l можно провести единственную плоскость β , то все лучи, выходящие из точки N и осуществляющие стереографическую проекцию искомого множества на прямую l , лежат в плоскости β (рис. 17). Следовательно, прямая l сопоставляется множеству точек сферы, принадлежащему пересечению сферы Q с плоскостью β , т. е. окружности с выброшенной точкой N . В частности, «меридианы», проходящие через точки S и N , отображаются на лучи, выходящие из точки S . Заметим, что если точка A на плоскости α неограниченно удаляется от точки S (например, по прямой), то соответствующая ей точка B сферы приближается к полюсу N . Это соображение дает возможность вновь определить понятие бесконечно удаленной точки плоскости α как мысленный образ полюса N при стереографической проекции.

Оказывается, инверсия плоскости α

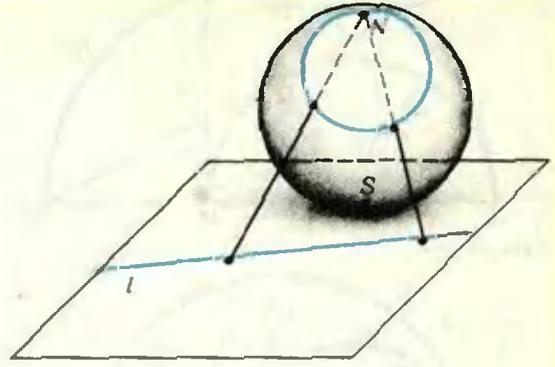


Рис. 17.

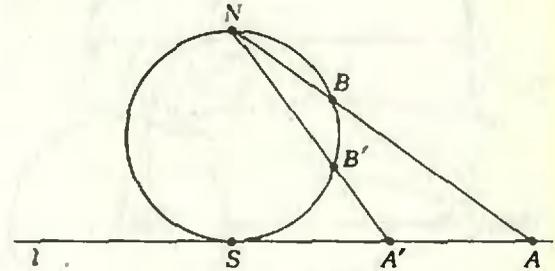


Рис. 18.

с центром S относительно окружности C радиуса R непосредственно связана со стереографической проекцией сферы Q , радиуса $R/2$, касающейся плоскости α в точке S . Для этого мы предлагаем читателям самостоятельно решить следующую задачу.

Задача 8. Окружность T радиуса $R/2$ касается прямой l в точке S . Точка N — диаметрально противоположна точке S . Точки B и B' лежат на окружности T , причем $|SB| = |NB'|$. Прямые NB и NB' пересекают прямую l в точках A и A' соответственно. Доказать, что $|SA'| = R^2/|SA|$ (рис. 18).

Указание. $\widehat{SNA} = \widehat{NA'S}$, поэтому треугольники SNA и SNA' подобны.

Из решения задачи 8 вытекает важное утверждение:

Если точки B и B' сферы Q радиуса $R/2$ симметричны относительно экваториальной плоскости сферы Q , то их образы A и A' , получающиеся при стереографической проекции сферы Q на плоскость α , симметричны относительно окружности радиуса R с центром S .

Упражнение 18. Докажите, что при стереографической проекции окружностям на плоскости α соответствуют окружности на сфере Q . И, наоборот, окружностям на сфере Q , не проходящим через полюс, соответствуют окружности на плоскости α .



Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Закон Бернулли» предназначена восьмиклассникам, «Токи смещения» — девятиклассникам и «Аннигиляция и рождение пар» — десятиклассникам. Материалы подготовил И. К. Белкин.

Закон Бернулли

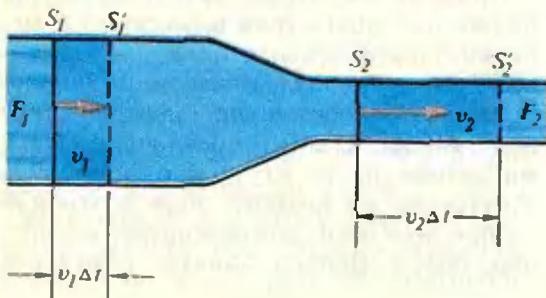
В учебнике «Физика 8» рассказывается о зависимости давления p жидкости от скорости v ее движения. Выведем формулу, связывающую эти величины количественно.

Будем считать, что труба, по которой течет жидкость, имеет широкий и узкий участки. Труба расположена горизонтально, так что потенциальная энергия жидкости в поле тяжести при течении не меняется. Выделим объем жидкости, ограниченный сечениями S_1 и S_2 , где скорость жидкости равна v_1 и v_2 соответственно (см. рисунок). Этот объем при течении жидкости перемещается вправо. Через промежуток времени Δt он займет положение между сечениями S'_1 и S'_2 , показанными на рисунке штриховыми линиями.

Так как жидкость несжимаема, уменьшение объема жидкости в широком участке трубы равно его приращению в узком участке:

$$S_1 v_1 \Delta t = S_2 v_2 \Delta t, \text{ или } S_1 v_1 = S_2 v_2.$$

Но что значит — жидкость несжимаема? Когда так говорят, имеют в виду только то обстоятельство, что изменения объема жидкости относительно малы. Небольшие деформации жидкости имеются всегда, и именно они приводят



к возникновению сил давления — упругих сил сжатия жидкости.

На выделенный объем жидкости действуют силы давления с двух сторон — со стороны жидкости, следующей за ним, и со стороны жидкости, находящейся впереди. При перемещении этого объема силы давления совершают работу. Согласно теореме о кинетической энергии, полная работа сил давления равна изменению кинетической энергии жидкости:

$$A = E_{k2} - E_{k1}.$$

Подсчитаем работу A сил давления. В сечении S_1 давление жидкости равно p_1 , и сила давления $F_1 = p_1 S_1$. За время Δt это сечение перемещается вправо на расстояние $v_1 \Delta t$, и, следовательно, сила F_1 , направленная вдоль перемещения, совершает работу

$$A_1 = F_1 v_1 \Delta t = p_1 S_1 v_1 \Delta t.$$

В сечении S_2 действует сила давления F_2 ($F_2 = p_2 S_2$), направленная противоположно перемещению. Работа этой силы отрицательна:

$$A_2 = -F_2 v_2 \Delta t = -p_2 S_2 v_2 \Delta t.$$

Полная работа сил давления

$$A = A_1 + A_2 = (p_1 v_1 S_1 - p_2 v_2 S_2) \Delta t.$$

Вот эта работа и равна увеличению кинетической энергии жидкости.

Теперь найдем разность кинетических энергий выделенного объема жидкости до и после перемещения. Очевидно, что энергия жидкости между сечениями S'_1 и S_2 не изменяется. Поэтому общее изменение энергии будет таким, как если бы часть жидкости, заключенная между сечениями S_1 и S'_1 , заняла место жидкости, заключенной между сечениями S_2 и S'_2 .

Кинетическая энергия массы жидкости m_1 , протекающей за время Δt через сечение S_1 (то есть жидкости в объеме между сечениями S_1 и S'_1), равна

$$E_{k1} = \frac{m_1 v_1^2}{2} = \rho v_1 \Delta t \cdot S_1 \frac{v_1^2}{2},$$

где ρ — плотность жидкости. Для сечения S_2 кинетическая энергия соответственно равна

$$E_{k2} = \rho v_2 \Delta t \cdot S_2 \frac{v_2^2}{2}.$$

Следовательно, за время Δt кинетическая энергия выделенного объема жидкости изменилась на величину

$$E_{k2} - E_{k1} = \left(\rho v_2 S_2 \frac{v_2^2}{2} - \rho v_1 S_1 \frac{v_1^2}{2} \right) \Delta t.$$

Приравняем эту разность работе A :

$$\rho v_2 S_2 \frac{v_2^2}{2} - \rho v_1 S_1 \frac{v_1^2}{2} = p_1 v_1 S_1 - p_2 v_2 S_2.$$

Так как произведение площади сечения на скорость в любом сечении трубы одно и то же, написанное равенство можно сократить на величину $S_1 v_1 = S_2 v_2$. В результате получаем

$$p_1 - p_2 = \frac{\rho v_2^2}{2} - \frac{\rho v_1^2}{2}.$$

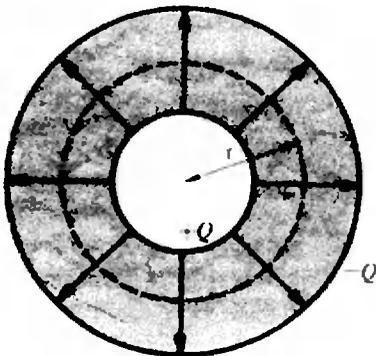
Перенесем члены, относящиеся к сечению S_1 , в одну сторону, а к сечению S_2 — в другую:

$$p_1 + \frac{\rho v_1^2}{2} = p_2 + \frac{\rho v_2^2}{2}.$$

Это равенство и выражает связь между давлением и скоростью жидкости. Оно называется законом Бернулли. Согласно этому закону, там, где скорость течения жидкости больше, давление меньше и наоборот. Заметим, что величина $\rho v^2/2$ — это кинетическая энергия единицы объема жидкости. Таким образом, в любом месте трубы сумма давления и кинетической энергии единицы объема жидкости одна и та же.

Токи смещения

В разделе «Школа в «Кванте» в заметке «Электрические колебания. Колебательный контур» (см. «Квант», 1983, № 11) уже говорилось о том, что причиной возникновения магнитного поля могут быть не только движущиеся электрические заряды (токи), но и переменное электрическое поле. Этот второй источник магнитного поля Максвелл назвал током смещения. Существование токов смещения относится к числу основных законов электродинамики. Поэтому рассмотрим этот вопрос подробнее. Покажем на конкретном примере, когда возникают токи смещения и какова их величина.



Представьте себе, что пространство между двумя концентрическими проводящими сферами, заряженными одинаковыми по знаку зарядами (сферический конденсатор), заполнено проводящей средой (см. рисунок). Тогда в этой среде вдоль радиусов текут токи, и конденсатор разряжается. Как «устроено» возникающее при разрядке конденсатора магнитное поле?

В этой задаче нет никакого выделенного направления и нарисовать систему магнитных линий, удовлетворяющую условиям симметрии, не удастся. Что же это означает? Только то, что магнитное поле при разрядке сферического конденсатора вообще не возникает. Как же так — токи текут, а магнитного поля нет? Значит, есть еще один «источник», создающий магнитное поле, компенсирующее поле, создаваемое токами.

Подсчитаем силу тока, проходящую на единицу площади поперечного сечения, то есть плотность тока, на расстоянии r от центра сфер. Полный ток i равен скорости изменения заряда конденсатора:

$$i = \frac{\Delta Q}{\Delta t}.$$

Этот ток равномерно распределяется по площади сферы радиуса r ; следовательно, плотность тока

$$j = \frac{i}{S} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{\Delta Q}{\Delta t}. \quad (1)$$

Как при разрядке конденсатора изменяется электрическое поле? Между обкладками сферического конденсатора поле такое же, как поле точечного заряда Q , помещенного в центр сфер, поэтому на расстоянии r от центра напряженность поля определяется формулой

$$E = k \frac{Q}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}.$$

Тогда скорость изменения напряженности равна

$$\frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r^2} \frac{\Delta Q}{\Delta t}. \quad (2)$$

Сравним формулы (1) и (2). Как видно, плотность тока и скорость изменения электрического поля пропорциональны друг другу. Если предположить, что переменное электрическое поле, так же, как и обычный ток, создает магнитное поле, то можно объяснить отсутствие магнитного поля в конденсаторе взаимной компенсацией магнитных полей. Введем понятие плотности

тока смещения, которая определяется согласно формуле

$$j_{см} = \epsilon_0 \frac{\Delta E}{\Delta t}. \quad (3)$$

В нашем примере электрическое поле в конденсаторе убывает, и скорость изменения поля отрицательна. Это означает, что ток смещения в данном случае течет в направлении, противоположном электрическому полю, в то время как обычный ток течет по направлению электрического поля. Как видно из формул (1) — (3), плотности тока смещения и обычного тока по модулю совпадают. Следовательно, суммарная плотность токов и суммарное магнитное поле равны нулю (как и должно быть в этой задаче).

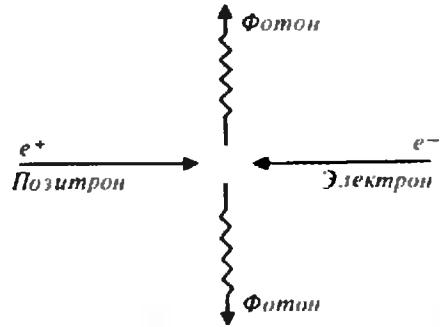
Оказывается, что формула (3) справедлива не только при разрядке сферического конденсатора, но и в самом общем случае. Индукция магнитного поля всегда определяется суммой плотности обычного тока (тока проводимости) и плотности тока смещения, связанной со скоростью изменения электрического поля формулой (3).

Аннигиляция и рождение пар

В учебнике «Физика 10» говорится о том, что при встрече позитрона с электроном эти частицы исчезают (аннигилируют), порождая взамен себя фотоны большой энергии. Возможен и обратный процесс — образование электронно-позитронной пары.

Рассмотрим эти процессы подробнее. Покажем, например, что при аннигиляции не может родиться один фотон.

Представим себе, что в какой-то системе отсчета электрон неподвижен, а позитрон налетает на него со скоростью v_0 . Затем перейдем в систему отсчета, движущуюся с постоянной скоростью $v_0/2$ (переходить в любую другую инерциальную систему отсчета можно, согласно принципу относительности Галилея, о чем подробно рассказывается в учебнике «Физика 8»). В этой системе скорость позитрона равна $v_0/2$, но и электрон уже не неподвижен — его скорость равна $-v_0/2$. Таким образом, в выбранной нами системе отсчета обе частицы движутся с равными по модулю, но противополо-



жно направленными скоростями. Так как масса m у электрона и позитрона одна и та же, их суммарный импульс $m\vec{v}_0/2 - m\vec{v}_0/2$ равен нулю.

Теперь понятно, почему в результате аннигиляции не может родиться только один фотон. Ведь фотон — это квант света, и его скорость во всех инерциальных системах отсчета одинакова и равна c . Поэтому и в выбранной нами системе отсчета фотон тоже имел бы импульс, отличный от нуля. А значит, нарушался бы основной закон природы — закон сохранения импульса, который управляет любыми процессами, происходящими в замкнутой системе. Но все встает на свои места, если предположить, что при аннигиляции рождаются два фотона, летящие в противоположные стороны (см. рисунок). Тогда их суммарный импульс тоже равен нулю, и закон сохранения импульса не нарушается.

Воспользовавшись еще и законом сохранения энергии, можно найти частоту и длину волны соответствующего излучения. Будем считать, что скорость частиц мала по сравнению со скоростью света. Тогда основной запас их энергии — это энергия покоя, определяемая формулой Эйнштейна $E = mc^2$. Приравняв энергию покоя частиц энергии $h\nu$ квантов излучения, получаем

$$2mc^2 = 2h\nu,$$

откуда

$$\nu = \frac{mc^2}{h} \approx 1,3 \cdot 10^{20} \text{ Гц},$$

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{h}{mc} \approx 2,4 \cdot 10^{-12} \text{ м},$$

что соответствует гамма-излучению.

Аналогично можно показать, что γ -квант, летящий в пустоте, не может сам по себе родить электронно-позитронную пару. Для этого нужно третье тело (например, ядро), которому можно отдать «лишний» импульс. Процесс рождения пар возможен также при столкновении двух фотонов.

Непослушные задачи

с устного экзамена
по математике

В этой заметке приводятся несколько простых задач, взятых из практики устных вступительных экзаменов по математике. Но пусть читатель не смотрит на них свысока и не смеется над теми, кто их решал с ошибками. На устном экзамене решать не так просто, как дома за столом: подмигивание, незначимые экзаменаторы, дивлящаяся над абитуриентом ответственность часто приводят к торопливости, к потере необходимой рассудительности, порой к непоправимым ошибкам «на ровном месте». Чтобы их избежать, нужно подходить к легкому вопросу, заданному на устном экзамене, не менее серьезно, чем к трудному. Не бросайтесь мгновенно в вычисления — подумав немного заранее, вы сможете избежать подвоха или существенно упростить ход решения, тем самым подняв себя в глазах экзаменатора.

На устных вступительных экзаменах я люблю давать вот такую задачу: Решите уравнение $\sin x = \pi/3$. Очень часто абитуриент тут же пишет

$$x = (-1)^k \arcsin \frac{\pi}{3} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

а в ответ на вопрос: «Так сколько же будет у него решений?» — отвечает, — «Бесконечно много». А иногда при этом продолжает предыдущее равенство так:

$$x = (-1)^k \frac{\sqrt{3}}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (!)$$

Сидя за столом, читатель наверное давно сообразил, что $\pi/3 > 1$ и поэтому данное уравнение не имеет решений. Важно проявлять подобную сообразительность и хладнокровие в экзаменационной обстановке. Надеюсь, что вам в этом помогут другие простые задачи (с небольшим подвохом) из моего экзаменационного арсенала. Советую их прорешать самостоятельно, затем просмотреть комментарий к ним и только при необходимости заглянуть в конец журнала в раздел «Ответы, указания, решения». Если ошибок будет много, тренируйтесь — в конце статьи для этого помещены дополнительные задачи.

Задачи

1. Решите уравнение $\sin \sqrt{x} = -1$.
2. Решите относительно x неравенство $ax + b > 0$.
3. Решите систему

$$\begin{cases} |x-y| = x+y, \\ |x+y| = x-y. \end{cases}$$

4. Решите неравенство $x \sin 3x > 3x$.

5. Решите неравенство

$$\sqrt{4+3x-x^2} > -2.$$

6. Решите относительно x неравенство

$$\frac{x^2 - 2x + 2^{|x|}}{x^2 - 1} < 0.$$

7. Что больше: $\log_2 3$ или $\log_5 8$?

8. Постройте график функции

$$y = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1+x^n}, \quad x \in [0; +\infty[.$$

9. На отрезке AB , как на диаметре, построен полукруг. Точки C и D делят полуокружность на три конгруэнтные части. Докажите, что площадь фигуры F , ограниченной хордами AC и AD и дугой CD , равна трети площади полукруга.

10. Дан четырехугольник, три угла которого тупые. Докажите, что диагональ четырехугольника, содержащая вершину его острого угла, больше другой его диагонали.

11. Вычислите сумму всех векторов, начало каждого из которых лежит в центре правильного n -угольника, а концы расположены в вершинах этого n -угольника.

12. Существует ли многогранник с 25 ребрами?

13. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной d , длины боковых ребер SA, SB, SC равны a, b, c соответственно. На боковых ребрах SA, SB и SC соответственно выбраны точки P, Q и R так, что $|SP|:|SA| = |SQ|:|SB| = |RC|:|SC| = 1:2$. В каком отношении плоскость PQR делит объем пирамиды $SABC$?

Комментарий к задачам

1. Многие абитуриенты почему-то говорят, что это уравнение решений не имеет, так как функция $y = \sqrt{x}$ отрицательных значений не принимает. Решения же легко находятся.

2. «Ответ» $x > b/a$ — неполный!

3. Многие абитуриенты долго рисуют области на плоскости Oxy и ищут их пересечения, при этом часто ошибаются. Воспользуйтесь симметрией системы.

4. Здесь снова облегчает жизнь свойство $|\sin x| \leq 1$.

5. Не торопитесь обе части неравенства возводить в квадрат!

6. Рассмотрите по отдельности два случая $a=0$ и $a \neq 0$.

7. Оба числа лежат на отрезке $[1, 2]$. Не на разных ли половинках?

8. Рассмотрите по отдельности три случая $x=1$, $x < 1$, $x > 1$.

9. Не начинайте вычислять! Не надо интегралов! Это же простая задача!

10. Эта задача решается красивым дополнительным построением.

11. Это не вычислительная задача. Можно рассуждать и от противного.

12. Пятью пять — двадцать пять. Попробуйте составить многогранник из призмы и двух пирамид.

13. Не надо считать, как это делают многие абитуриенты. Подумайте, как расположена плоскость PQR относительно плоскости ABC .

Дополнительные задачи

14. Решите уравнения: а) $|\cos x| = \cos x + 2$,

б) $\cos x = x^2 + 1$, в) $\frac{x^2 + 6x + 9}{x^2 + 6x + 9} = 1$, г) $\sin |x| = 1$,

д) $\cos(\cos x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, е) $\sin x = \frac{|x|}{x}$, ж) $\sqrt{x+3} + \sqrt{7x-6} = 3$.

15. Решите неравенство: а) $\arcsin x < \arccos x$, б) $\frac{|x+1|}{x^2-x-2} > 1$, в) (МГУ, физфак,

1967) $\frac{x^2 - 2x + 2^{|x|}}{x^2 - a^2} > 0$.

16. Постройте график функции $y = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2^n} x$, $x \in \mathbb{R}$.

17. Упростите выражение

$$\frac{x^1 + x^2 + \dots + x^{1983}}{x^{-1} + x^{-2} + \dots + x^{-1983}}$$

18. Докажите, что функция $y = \lg(x + \sqrt{x^2 + 1})$ является нечетной.

19. Докажите, что между любыми двумя рациональными числами найдется третье рациональное число.

20. Докажите, что сумма длин всех ребер четырехугольной призмы, лежащей внутри шара радиуса 1 см, меньше 22 см.

Г. Ю. Зайцев

Избранные школьные задачи

Восьмой класс

1. а) Докажите, что сумма расстояний от любой внутренней или граничной точки правильного треугольника до его сторон равна длине высоты этого треугольника.

б) Пусть S и p — соответственно площадь и полупериметр многоугольника, в который можно вписать окружность радиуса r . Докажите, что $S = pr$.

2. При каких p и q корнями квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ являются числа p и q ?

3. Пусть D — точка, в которой биссектриса угла A треугольника ABC пересекает его сторону BC , $|BC| = a$, $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BD| = x$, $|DC| = y$, $|AD| = l$. Докажите, что:

а) (теорема о биссектрисе) биссектриса AD делит сторону BC на части, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника:

$$\frac{b}{c} = \frac{y}{x}$$

б) $l^2 = bc - xy$.

4. Упростите выражение

$$\frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{2} + \sqrt{2 + \sqrt{3}}} + \frac{2 - \sqrt{3}}{\sqrt{2} - \sqrt{2 - \sqrt{3}}}$$

5. Какое из двух чисел больше:

а) 2^{300} или 3^{200} ; б) 2^{91} или 5^{35} ?

Девятый класс

6. В математическом кружке, где занимается восьмиклассник Миша, более 93 % участников — девятиклассники. Чему равно наименьшее возможное число членов этого кружка?

7. Сколько существует плоскостей, одинаково удаленных от всех вершин тетраэдра (произвольной треугольной пирамиды)?

8. Пусть $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, где $b > 0$ и $d > 0$. Докажите, что

$$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

9. Даны плоскость α и две точки A и B по одну сторону от этой плоскости. Укажите на плоскости α такую точку C , для которой $|AC| + |CB|$ принимает наименьшее значение.

10. Под каким углом видна парабола $y = x^2$ из точки $M(0; -0,25)$?

Десятый класс

11. Сумма квадратов положительных чисел a и b равна единице. Докажите, что $a^{10} + b^{10} < 1$.

12. Пусть сфера радиуса r вписана в многогранник объема V с полной поверхностью S .

Докажите, что $V = \frac{1}{3} Sr$.

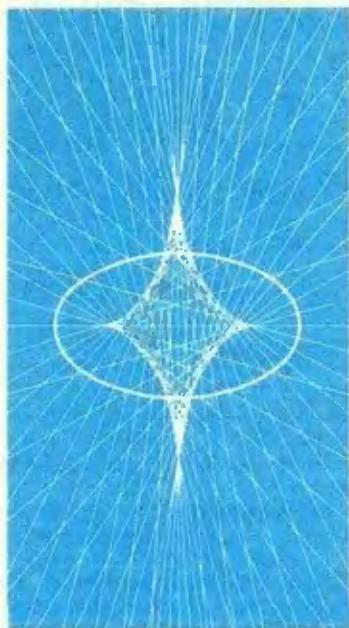
13. Пространственный четырехугольник (то есть не все его вершины лежат в одной плоскости) описан около сферы. Доказать, что все четыре точки касания лежат в одной плоскости.

14. Известно, что осевое сечение прямого кругового конуса имеет площадь в два раза меньшую, чем максимальная из площадей всех его сечений, проходящих через вершину конуса. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

15. а) Пусть $a + b + c = 1$. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 > \frac{1}{3}$.

б) Пусть $a + b + c = 1$ (как и в пункте а)) и, кроме того, известно, что a , b и c — длины сторон некоторого треугольника. Докажите, что $a^2 + b^2 + c^2 < \frac{1}{2}$.

Публикацию подготовил
Ж. М. Раббот



Эволюта

Под редакцией
Д. Б. ФУКСА

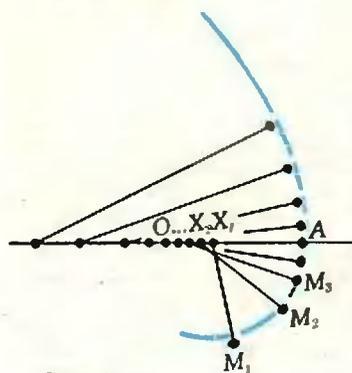


Рис. 1.

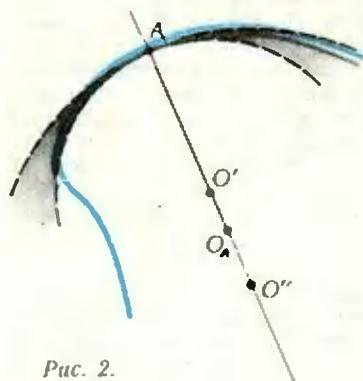
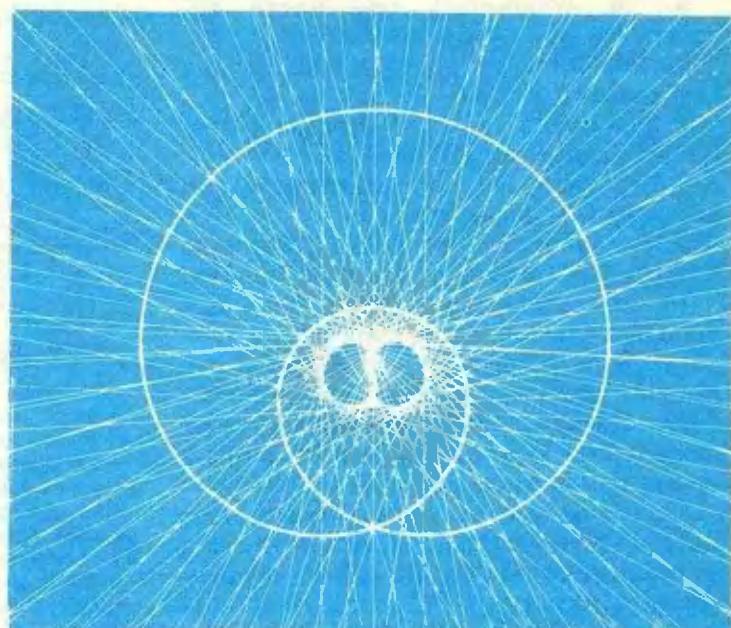


Рис. 2.



В прошлый раз (см. «Квант» № 2, с. 40) вам были предложены три кривые (эллипс, «вывернутая восьмерка» и полукубическая парабола), к которым требовалось провести достаточно частое семейство нормалей (нормаль — перпендикуляр к касательной в точке касания). Правильные чертежи для первых двух кривых вы видите перед собой. На каждом из этих чертежей нормали к кривой сгущаются к точкам некоторой другой кривой. Эта другая кривая называется *эволютой* исходной кривой^{*}). В двух первых случаях эволюта имеет *точки возврата* (точки, в которых кривая скачком изменяет свое направление на 180°). Мы попытаемся понять, что такое эволюта, и разобраться в причинах всех названных явлений.

Для этого нам потребуется еще одно геометрическое понятие — *центр кривизны*. Пусть c — некоторая кривая. n_A — нормаль к ней в ее фиксированной точке A . Пусть M — переменная точка на кривой c и n_M — соответствующая нормаль. Обозначим через $X(A, M)$ точку пересечения нормалей n_A и n_M . Будем теперь двигать точку M по кривой c , устремляя ее к A (с любой стороны). Тогда точка $X(A, M)$ будет, вообще говоря, меняться; предельное положение этой точки, когда M достигнет A , если оно существует, называется *центром кривизны* кривой c в точке A и обозначается через $O_A(c)$ (рис. 1).^{**}

Введем еще несколько названий. Окружность с центром $O_A(c)$, проходящая через A , называется *соприкасающейся с кривой c в точке A* , ее радиус, то есть расстояние от точки $O_A(c)$ до точки A , — *радиусом кривизны кривой c в точке A* , и величина, обратная к радиусу кривизны, — *кривизной кривой c в точке A* .

Простейший пример. Пусть c есть окружность радиуса R с центром O . Тогда все нормали к c проходят через O и поэтому при движении точки по c точка $X(A, M)$ вообще не меняется, а занимает неподвижное положение O . Поэтому и предел этой точки есть O , то есть центр кривизны нашей окружности в любой ее точке совпадает с центром окружности. Следовательно, радиус кривизны и кривизна нашей окружности в любой ее точке равны соответственно R и $1/R$.

^{*}) Эволюта эллипса, построенная ЭВМ, показана также на первой странице обложки. Обратите внимание на красный мраморный узор в виде семейства гипербол вблизи центра эллипса. Подумайте, почему он получился.

^{**}) Можно показать, что если кривая c является «достаточно гладкой», а точка A не является ее точкой перегиба, то $O_A(c)$ существует.

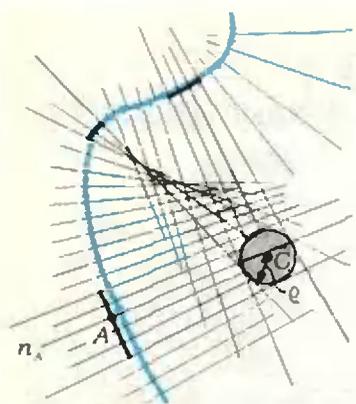


Рис. 3.

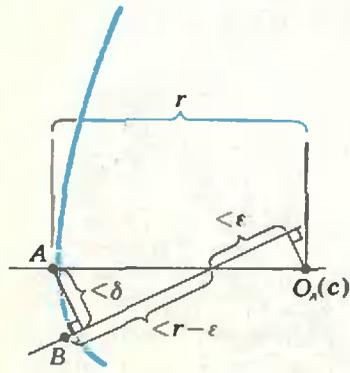


Рис. 4.

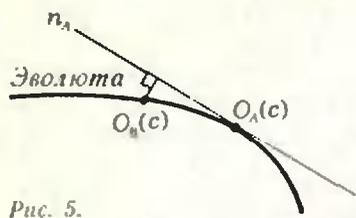


Рис. 5.

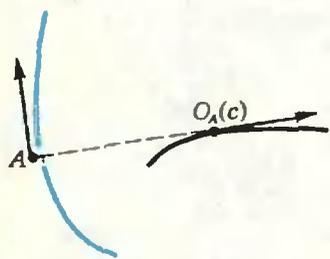


Рис. 6.

Задание к следующей геометрической страничке
 Как построить кривую, эволютой которой является заданная кривая, например окружность?

Если c не окружность, а другая кривая, то при движении точки A по ней центр кривизны $O_A(c)$ не стоит на месте, а сам выписывает некоторую кривую. Как мы увидим, эта кривая и есть эволюта. Прежде, чем это доказывать, мы поговорим немного о свойствах введенных понятий.

Соприкасающаяся окружность из всех окружностей, проходящих через точку A , наиболее тесно прилегает к кривой c . Можно сказать, что если касательная к c в точке A служит для кривой c первым приближением, то соприкасающаяся окружность служит вторым приближением кривой c в точке A . Этому утверждению можно придать точный смысл многими разными способами, например, так. Пусть точки O' и O'' лежат на n_A по разные стороны от $O_A(c)$, и пусть c' , c'' — окружности с центрами O' , O'' , проходящие через точку A . Тогда некоторый кусок кривой c , охватывающий точку A , заключен между окружностями c' и c'' (рис. 2).

Обратимся, наконец, к иному семейству нормалей. Пусть C — точка плоскости. Зафиксируем число ρ и отметим на кривой c множество тех точек A , для которых нормаль n_A проходит от C на расстоянии, меньшем ρ . Это множество состоит из одного или нескольких интервалов (рис. 3). Обозначим через $L(\rho)$ сумму их длин. Предел отношения $L(\rho)/\rho$ при $\rho \rightarrow 0$ называется плотностью нашего семейства нормалей в точке A . (Это определение согласуется с наглядным представлением о плотности: чем больше плотность, тем гуще нормали скапливаются к точке C .)

Теорема. Плотность семейства нормалей в точках вида $O_A(c)$ бесконечна; в других точках она конечна.

Мы ограничимся доказательством первой части теоремы. Поскольку предельное положение точек $X(A, B)$, когда B стремится к A , есть $O_A(c)$, для любого $\epsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что если расстояние от B до A меньше δ , то расстояние от $X(A, B)$ до нормали n_B меньше ϵ . В этом случае расстояние от точки $O_A(c)$ до прямой n_B меньше $\epsilon\delta/(r-\epsilon)$, где r — радиус кривизны в точке A (рис. 4), вследствие чего $L(\epsilon\delta/(r-\epsilon)) > \delta$ и при $\epsilon = \epsilon\delta/(r-\epsilon)$, получаем $L(\rho)/\rho > \delta/(\epsilon\delta/(r-\epsilon)) = (r-\epsilon)/\epsilon$. Остается заметить, что можно взять $\delta < 1$ и тогда при $\epsilon \rightarrow 0$

$$\rho = \frac{\epsilon\delta}{r-\epsilon} \rightarrow 0, \quad \frac{L(\rho)}{\rho} > \frac{r-\epsilon}{\epsilon} \rightarrow \infty,$$

то есть плотность бесконечна. Эта теорема показывает, что точки наибольшего сгущения нашего семейства нормалей действительно составляют эволюту.

В заключение мы назовем еще одно свойство эволюты.

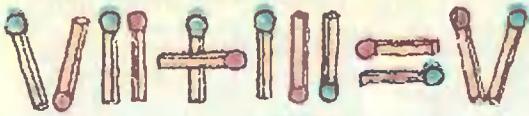
Теорема. Нормаль n_A касается эволюты в точке A .

Эта теорема, строгого доказательства которой мы не приводим, по существу, является следствием предыдущей теоремы: поскольку семейство нормалей имеет в точках эволюты бесконечную плотность, всякая нормаль n_A проходит очень близко от точек $O_B(c)$, относительно далеких от $O_A(c)$, в том смысле, что предел отношения расстояния от $O_B(c)$ до n_A к расстоянию от $O_B(c)$ до $O_A(c)$ стремится к 0. А это и значит, что прямая n_A касается эволюты (рис. 5).

(Можно доказать и обратное: если некоторая кривая касается всех нормалей к кривой c , то она является ее эволютой.)

Из последней теоремы видно, что когда точка A движется по кривой c , точка $O_A(c)$ движется либо в направлении от точки A , либо в направлении к точке A . Можно сказать точнее: если при движении точки A по c радиус кривизны увеличивается, то точка $O_A(c)$ движется в направлении от A , и если радиус кривизны уменьшается, то точка $O_A(c)$ движется в направлении к A (рис. 6). А что происходит в точках, где радиус кривизны достигает максимума или минимума? А в этих точках центр кривизны меняет свое направление движения на противоположное — откуда точки возврата на эволюте. Например, четыре точки возврата эволюты эллипса отвечают двум максимумам и двум минимумам радиуса кривизны эллипса в четырех его «вершинах» — точках пересечения с осями симметрии.

Мы не успели обсудить третью часть домашнего задания — эволюту полукубической параболы. Все к лучшему: более уместно будет поговорить об этом в следующем раз. А пока —



Задачи

1. В равенстве на рисунке переложите одну спичку так, чтобы оно стало верным. Попробуйте отыскать три разных способа.

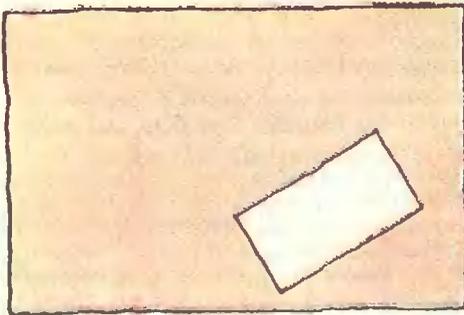
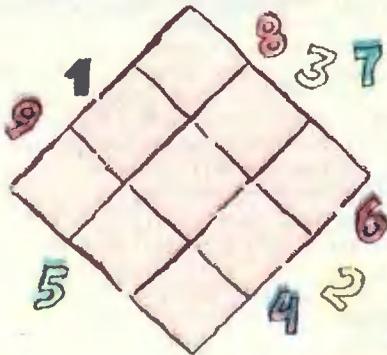
2. Умный продавец получил для продажи несколько пачек конвертов по 100 конвертов в пачке. 10 конвертов он отсчитывает за 10 секунд. За сколько секунд он отсчитает 60 конвертов? А 90 конвертов?

3. В клетках квадрата расставьте цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, чтобы пять чисел, десятичная запись которых получается на горизонтальных прямых, были бы квадратами целых чисел.

4. После того как из прямоугольника вырезали прямоугольник, образовалась фигура, изображенная на рисунке. Проведите прямую, которая делит площадь этой фигуры на две равные части.

5. Зимой можно наблюдать, как буксует автомашина: одно ведущее колесо, находящееся на льду, быстро вертится, а другое, стоящее на более шероховатой части дороги, остановлено. Если бы колеса всегда вращались с одной скоростью, машина таким образом буксовать бы не стала. Почему же тогда ведущие колеса автомобиля соединены так, что они могут вращаться с разными скоростями?

Эти задачи нам предложили:
С. В. Дворянинов, Саша Кориков
(ученик 5 класса),
В. В. Произвилов, А. П. Савин



Задача в картинках



задачник Кванта

Задачи

M861—M865; Ф873—Ф877

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 июля 1984 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5—84» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «M861, M862» или «Ф873». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M861. Докажите, что из любых n чисел можно выбрать несколько (быть может, одно) так, что сумма выбранных чисел отличается от ближайшего к ней целого числа не более, чем на $1/(n+1)$.

С. Ю. Орезов

M862. а) Внутри данного правильного треугольника укажите множество всех точек M таких, что расстояния от M до его сторон сами служат длинами сторон некоторого треугольника.

б) Внутри данного правильного тетраэдра укажите множество всех точек M таких, что расстояния от M до граней тетраэдра служат длинами сторон некоторого четырехугольника.

Э. А. Ясиновский

M863. В каждой клетке доски $n \times n$ стоит по фишке. Можно ли переставить их так, чтобы любые две фишки, угрожавшие друг другу ходом коня, после перестановки стали угрожать друг другу ходом короля, если а) $n=3$, б) $n=6$, в) $n=4$?

С. Стефинов

M864. Назовем «красивым» разбиение треугольника на подобные ему треугольники, никакие два из которых не равны по размерам.

а) Докажите, что для всякого прямоугольного треугольника существует красивое разбиение.

б) * Можно ли устроить красивое разбиение равностороннего треугольника?

в) Для каких неравносторонних треугольников существует красивое разбиение?

А. В. Савкин

M865. Обозначим через $[a, b]$ наименьшее общее кратное целых чисел a и b . Докажите, что для любых $n+1$ чисел $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{[a_0, a_1]} + \frac{1}{[a_1, a_2]} + \dots + \frac{1}{[a_{n-1}, a_n]} \leq 1 - \frac{1}{2^n},$$

если а) $n=2$; б) $n=3$; в) * n — любое натуральное число.

Б. М. Иволга

Ф873. Вымпел на мачте корабля образует угол 60° с курсом корабля при его скорости 20 км/ч. Не меняя курса, корабль увеличил скорость в 2 раза, и угол стал равным 30° . Найти по этим данным скорость

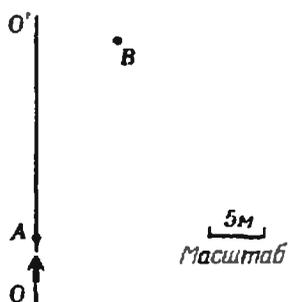


Рис. 1.

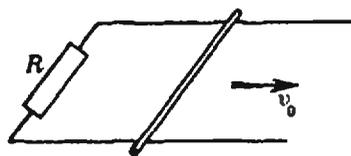


Рис. 2

ветра (считая ее неизменной). При какой скорости корабля угол станет равным 90° ?

В. Е. Скороваров

Ф874. Автомобиль движется вдоль прямой OO' (рис. 1) и в точке A начинает поворачивать, не снижая скорости. В точке B автомобиль сбил придорожный столбик. Оцените скорость, с которой мог ехать автомобиль. Считайте сцепление шин с асфальтом хорошим. Руль автомобиля управляет его передними колесами.

А. Р. Зильберман

Ф875. По горизонтальным параллельным рельсам, расстояние между которыми равно d , может скользить без трения перемычка, масса которой равна m (рис. 2). Рельсы соединены резистором с сопротивлением R и помещены в вертикальное магнитное поле, индукция которого B . Перемычке сообщают скорость v_0 . Найти путь, пройденный перемычкой до остановки. Как зависит ответ от направления вектора B ? от направления скорости?

А. И. Буздин

Ф876. Два спутника движутся по одной орбите на небольшом (по сравнению с радиусом R_0 Земли) расстоянии друг от друга. Расстояние это при движении периодически меняется от l_1 до l_2 . Определите минимальное и максимальное удаления спутников от центра Земли, если период обращения спутников равен T .

В. Е. Скороваров

Ф877. При каких положениях точечного источника относительно тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=1$ м можно хотя бы из одной точки видеть одновременно и изображение, и источник?

А. Р. Зильберман

Problems

M861—M865; P873—P877

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than July 31 st, 1984, to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва. К-6, ул. Горь-

M861. Prove that it is always possible to choose some numbers (possibly only one) from any given n numbers so that the sum of the chosen numbers differs from the nearest integer by no more than $1/(n+1)$.

S.Yu. Orevkov

M862. a) Inside a given equilateral triangle indicate the set of all points M such that the distances from M to the triangle's sides are the lengths of the sides of some triangle

b) Inside a given regular tetrahedron indicate the set of all points M such that the distances from M to the tetrahedron's faces are the lengths of the sides of some quadrilateral.

E. A. Yasinov

M863. A different pawn is placed in each case of an $n \times n$ chess board. Is it possible to rearrange them

кого, 32/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

so that any two pawns which originally attacked each other by a knight's move now attack each other by a king's move, if a) $n=3$, b) $n=6$, c) $n=4$?

S. Stephanov

M864. A partition of a triangle into smaller triangles similar to it is called nice if they are all of different size.

a) Prove that any right triangle possesses a nice partition.

b) * Is there a nice partition of the equilateral triangle?

c) For what non-equilateral triangles does a nice partition exist?

A. V. Savkin

M865. Denote by $[a, b]$ the least common multiple of the integers a and b . Prove that for any $n+1$ numbers $a_0 < a_1 < \dots < a_n$ the following inequality

$$\frac{1}{[a_0, a_1]} + \frac{1}{[a_1, a_2]} + \dots + \frac{1}{[a_{n-1}, a_n]} < 1 - \frac{1}{2^n},$$

holds when a) $n=2$; b) $n=3$; c) * n is any natural number.

B. M. Iulev

P873. A flag on the mast of a ship forms an angle of 60° to the ship's course when it sails at 20 km/h. Without changing course, the ship doubles its speed; the angle then becomes 30° . Use this data to find the wind's velocity (assumed constant). For what speed of the ship will the angle become equal to 90° ?

V. E. Skorouarov

P874. A car, moving along the straight line OO' (see figure Pnc. 1), begins to turn at the point A without decreasing its speed. At the point B the car knocked down a roadside indicator. Estimate the speed at which the car may have been moving. Assume that the adherence to asphalt was good. The car's steering wheel turns the front wheels.

A. R. Zilberman

P875. A rod of mass m slides without friction along two parallel rails (at distance d from each other); see figure Pnc. 2. The rails are joined by a resistor to a resistance R and placed in a vertical magnetic field of induction B . The rod is pushed with velocity v_0 . Find the path covered by the rod until it stops. How does the answer depend on the direction of the vector B ?

A. I. Buzdin

P876. Two sputniks move along the same orbit at a small (as compared to the Earth's radius R_0) distance from each other. This distance changes periodically from l_1 to l_2 . Determine the minimal and maximal distance of the two sputniks from the Earth's centre, if their period of revolution is T .

V. E. Skorouarov

P877. For what position of a point light source with respect to a thin convergent lens with focal distance $F=1\text{m}$ is it possible to observe both the source and its image from at least one point?

A. R. Zilberman

Решения задач

М847—М850, Ф858—Ф861

М847. Квадрат расчерчен на $n \times n$ клеток. Двое игроков по очереди обводят по одной стороне одной клетки (дважды обводить одну и ту же сторону нельзя). Кто выиграет при правильной игре, если

а) побеждает игрок, первым построивший замкнутую линию;

б) проигрывает игрок, который вынужден первым построить замкнутую линию.

а) **О т в е т:** при правильной игре всегда побеждает игрок, ходящий вторым. Для этого он должен делать ходы, симметричные ходам первого (начинающего) относительно одной из диагоналей квадрата, пока первый не построит «почти-цикл», то есть позицию, в которой достаточно обвести одну сторону, чтобы получился цикл (замкнутая ломаная). Обведя эту сторону, второй игрок выигрывает.

Нам надо доказать, что при такой стратегии первый «почти-цикл» не может возникнуть после хода второго игрока. Допустим, что, напротив, после того, как он обвел некоторую сторону a , впервые возник «почти-цикл», причем до цикла ему не достаёт одной стороны b ; пусть x_1, \dots, x_n — остальные стороны этого цикла. Эти стороны уже были обведены до последнего хода (a) второго игрока, поэтому и симметричные им относительно диагонали стороны x'_1, \dots, x'_n , а также сторона a' , симметричная a , были обведены до этого хода. А так как x_1, \dots, x_n и a образуют «почти-цикл», x'_1, \dots, x'_n и a' тоже образуют «почти-цикл» (которому до цикла не достаёт стороны b' , симметричной b). Следовательно, «почти-цикл» возник перед последним ходом второго игрока. Противоречие.

б) **О т в е т:** при четном n выигрывает второй игрок, при нечетном — первый; точнее, первый цикл образуется ровно через $(n+1)^2$ ходов (подразумевается, конечно, что игроки ходят правильно, то есть не замыкают цикла, пока это возможно).

Действительно, рассмотрим позицию, в которой циклов еще нет, но любой новый ход создает цикл. Мы докажем следующие два утверждения:

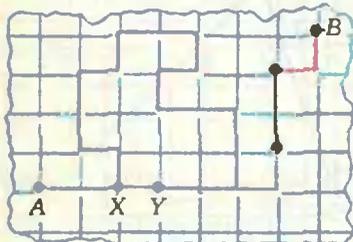
1) любые два узла «игрового поля» в этой позиции можно соединить цепочкой из обведенных сторон; другими словами, (разветвленная) ломаная, составленная из всех обведенных сторон, проходит через все узлы и связна (из любой ее вершины можно пройти по ней в любую другую вершину);

2) любая связная ломаная без циклов с k вершинами имеет $k-1$ звеньев.

Из этих утверждений вытекает, что в рассматриваемой позиции обведено $(n+1)^2-1$ сторон, что нам и требуется.

Для доказательства первого утверждения возьмем любые два узла A и B и любую соединяющую их цепочку с из сторон клеток. Пусть в ней встретилась необведенная сторона XU (см. рисунок). Если ее обвести, возникнет цикл. Очевидно, он должен содержать звено XU , поэтому узлы X и U уже должны быть соединены «мостиком» из обведенных сторон. Заменяя каждое необведенное звено цепочки с таким «мостиком», мы получим ломаную из обведенных сторон, проходящую через A и B .

Перейдем ко второму утверждению. Если ломаная не содержит циклов, то у нее, очевидно, имеется хотя бы одна вершина X , из которой выходит только одно звено XU . В силу связности, из точки U выходит еще хотя бы одно звено. Удалим из ломаной звено XU ; вместе с ним удаляется одна вершина — X , причем ломаная остается связной. Поступая так же и дальше, мы в конце



концов получим одно звено. У этой «ломаной» число вершин на 1 больше числа звеньев, поэтому то же самое верно и для исходной ломаной.

А. Г. Коган, И. В. Ветров

М848. а) Постройте график функции

$$f_0(x) = ||x-1| - 2||x|-3||.$$

б) На рисунке 1 изображены графики трех «кусочно-линейных» функций f_1 , f_2 , f_3 . Запишите формулы для них в виде $y = kx + b + c_1|x - a_1| + \dots + c_m|x - a_m|$,

где k , b , c_i , a_i — некоторые числа, m — количество точек излома графика (a_i — абсциссы точек излома, $i = 1, 2, \dots, m$).

в) Запишите в таком же виде функцию f_0 из пункта а)

г) * Некоторая функция является комбинацией линейных функций, «модуля» и операции сложения, причем знак модуля использован в ее записи n раз (в примере а) $n=4$). Какое наибольшее число изломов (при каждом n) может иметь ее график?

а) График функций f_0 изображен красным (рис. 2). Он является ломаной с конечным числом вершин — точек излома и двумя бесконечными крайними звеньями; функции с такими графиками называются кусочно-линейными. Хотя построение этого графика вполне стандартно, мы остановимся на нем подробнее — это позволит сделать несколько замечаний, полезных при решении задачи г).

Пусть $f(x) = |x-1| - 2||x|-3|$, тогда $f_0(x) = |f(x)|$, и потому график f_0 получается из графика f (Черная линия на рисунке 2) отражением его части, лежащей ниже оси абсцисс, относительно этой оси. Ясно, что это правило построения графика $|f|$ справедливо для любой функции f . В частности, из него следует, что:

1) если $m(f)$ — число изломов кусочно-линейной функции f , то

$$m(|f|) \leq 2m(f) + 1.$$

(Действительно, при переходе от f к $|f|$ новые изломы появляются там, где график функции f пересекает ось Ox , то есть не более чем по одному на каждом звене, а число звеньев на 1 больше числа изломов $m(f)$.)

Далее, функция f есть сумма функций $g(x) = |x-1|$ и $h(x) = -2||x|-3|$, поэтому она может иметь изломы только там, где есть излом хотя бы у одного из слагаемых, то есть в точках, где обращаются в нуль выражения, стоящие под модулем: $x-1$, x или $|x|-3$; это точки $-3, 0, 1$ и 3 . Точно так же вообще

2) для любых кусочно-линейных функций g и h

$$m(g+h) \leq m(g) + m(h).$$

На каждом из промежутков $]-\infty; -3]$, $]-3; 0]$, $[0; 1]$, $[1; 3]$ и $[3; \infty[$ функции g , h и, следовательно, f линейны. «Раскрывая модули», получим, что $f(x) = -x+1$ при $x \leq -3$, $f(x) = -3x-5$ при $-3 \leq x \leq 0$ и т. д., после чего можно построить каждое звено графика. (Впрочем, «раскрывать модули» необязательно. Для построения графика, очевидно, достаточно построить его точки

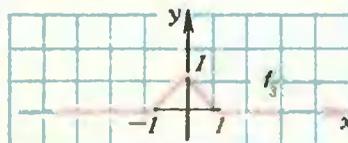
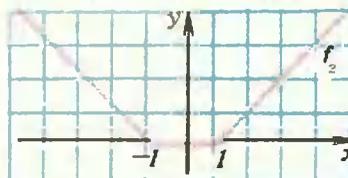
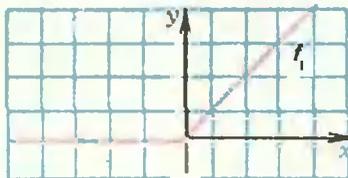


Рис. 1.

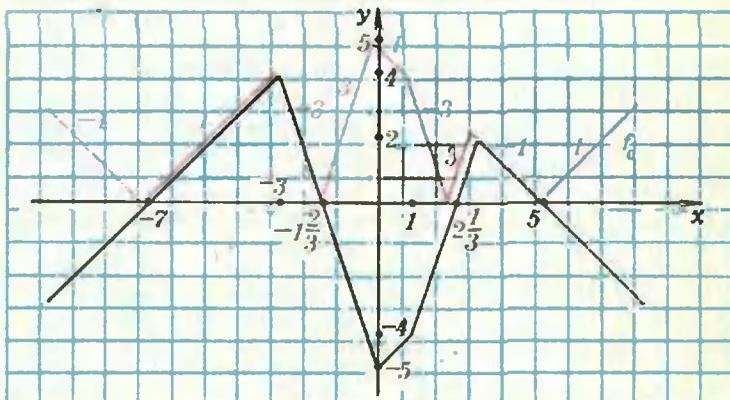
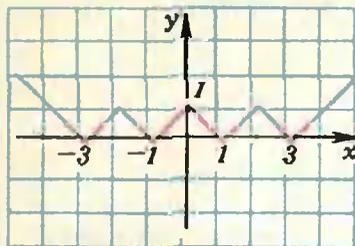


Рис. 2.



Р.

излома и по точке на бесконечных звеньях, то есть найти значения $f(-3)$, $f(0)$, $f(1)$, $f(3)$ и, скажем, $f(4)$ и $f(-4)$.)

б) Ответ: $f_1(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}|x|$, $f_2(x) = f_1(-x - 1) + f_1(x - 1) = -1 + \frac{1}{2}|x + 1| + \frac{1}{2}|x - 1|$, $f_3(x) = 1 - |x| + f_2(x) = \frac{1}{2}|x + 1| - |x| + \frac{1}{2}|x - 1|$.

в) Ответ: $f_0(x) = -6 + |x + 7| - 2|x + 3| + 3|x + 5| + \frac{5}{3}|-2|x| - |x - 1| + 3|x - \frac{7}{3}| - 2|x - 3| + |x - 5|$.

Решим задачу сразу в общем виде. Пусть f — кусочно-линейная функция с изломами в точках с абсциссами a_1, \dots, a_m и пусть k_0, k_1, \dots, k_m — угловые коэффициенты звеньев ее графика на промежутках $]-\infty; a_1]$, $[a_1; a_2]$, ..., $[a_m; \infty[$. Покажем, что ее можно единственным образом представить в виде

$$f(x) = kx + b + c_1|x - a_1| + \dots + c_m|x - a_m|. \quad (1)$$

Это можно сделать, «раскрыв модули» на каждом из $m+1$ промежутков, приравняв коэффициент при x в полученном выражении для $f(x)$ к соответствующему k_i и решив возникающую систему уравнений относительно k, c_1, \dots, c_m . Но можно сразу найти значения c_1, \dots, c_m .

Пусть $l_i(x)$ — линейная функция, совпадающая с $f(x)$ на i -м промежутке; ее угловой коэффициент равен k_i . Если функция $f(x)$ представима в виде (1), то есть $f(x) = c_i|x - a_i| + h(x)$, где $h(x)$ — линейная на промежутке $[a_{i-1}; a_{i+1}]$ функция, то на этом промежутке $l_{i-1}(x) = c_i(a_i - x) + h(x)$, $l_i(x) = c_i(x - a_i) + h(x)$, а угловой коэффициент разности $l_i(x) - l_{i-1}(x) = 2c_i x$ равен $k_i - k_{i-1}$. Следовательно, должны выполняться равенства $c_i = (k_i - k_{i-1})/2$, $i = 1, 2, \dots, m$. Обратно, если они выполняются, то функция $c_1|x - a_1| + \dots + c_m|x - a_m|$ имеет изломы в тех же точках, что и f , и изменение углового коэффициента при переходе через любую из этих точек для обеих функций будет одинаковым. Поэтому разность этих функций — линейная функция $kx + b$. Угловые коэффициенты левой и правой частей (1) при $x > a_m$ равны k_m и $k + c_1 + \dots + c_m = k + (k_m - k_0)/2$ соответственно, поэтому $k = (k_0 + k_m)/2$. Значение b можно найти, подставляя в (1) любое конкретное значение x , например $x = 0$.

Коэффициенты k_0, \dots, k_m для функции f_0 выписаны над ее графиком (рис. 2). Подставляя их в полученные формулы, найдем приведенный выше ответ.

г) Ответ: Если в запись функции f , рассматриваемой в задаче, знак модуля входит n раз, то число изломов $m(f)$ её графика не превосходит $2^n - 1$.

Это утверждение мы докажем индукцией по n . При $n = 0$ оно очевидно (у линейной функции изломов нет). Пусть оно верно, если число модулей меньше n , а в запись функции f входит n модулей. Тогда эту функцию можно представить в виде $f = |g| + h$, причем функция g записывается с n_1 модулями, а h — с n_2 модулями, где $n_1 + n_2 = n - 1$. В силу утверждений 1) и 2) пункта а) и предположения индукции

$$m(f) \leq m(|g|) + m(h) \leq 2m(g) + 1 + m(h) \leq 2 \cdot (2^{n_1} - 1) + 1 + 2^{n_2} - 1 = 2^{n_1+1} + 2^{n_2} - 2 \leq 2^{n_1+n_2+1} - 1 = 2^n - 1,$$

поскольку $2^{n_1+n_2+1} - 2^{n_1+1} - 2^{n_2} + 1 = (2^{n_1+1} - 1)(2^{n_2} - 1) \geq 0$.

График функции $y = |\dots||x| - 2^{n-2}| - 2^{n-3}| - \dots - 1|$ (см. рис. 3 для $n = 3$) имеет ровно $2^n - 1$ излом (при n модулях в записи функции), поэтому оценка в задаче точная.

П. Г. Сатянов

MS49. Из цифр 1, 2, ..., 7, взятых в разном порядке, составлены семь семизначных чисел. Докажите, что сумма седьмых степеней нескольких из этих

Каждое из рассматриваемых чисел при делении на 9 дает остаток, равный остатку от деления суммы его цифр $1 + 2 + \dots + 7 = 28$ на 9, то есть 1. Такой же остаток дадут при делении на 9 и седьмые степени

чисел не может равняться сумме седьмых степеней остальных чисел.

этих чисел. Остается заметить, что эти семь остатков-единиц нельзя разбить на две группы с равными суммами.

Г. А. Гальперин

M850* Через точку пересечения биссектрисы угла A треугольника ABC и отрезка, соединяющего основаниями двух других биссектрис, проведена прямая, параллельная стороне BC . Докажите, что длина меньшего основания образовавшейся трапеции равна полусумме длин ее боковых сторон.

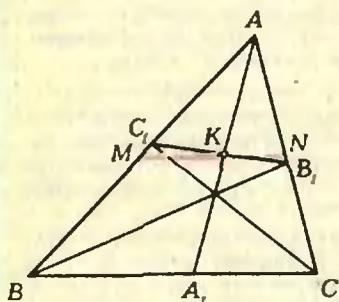


Рис. 1.

Введем следующие обозначения: a, b, c — длины сторон данного треугольника ABC , A_1, B_1, C_1 — основания его биссектрис, K — точка пересечения биссектрисы AA_1 с отрезком B_1C_1 , MN — проведенный через нее параллельно стороне BC отрезок (см. рис. 1). Поскольку треугольники AMN и ABC гомотетичны, справедливы следующие соотношения:

$$|MN| : |BC| = |AK| : |AA_1|,$$

$$|BM| : |AB| = |CN| : |AC| = |A_1K| : |AA_1|.$$

Выражая отсюда $|BM|$, $|CN|$ и $|MN|$, получим

$$\frac{|BM| + |CN|}{|MN|} = \frac{(|AB| + |AC|) \cdot |A_1K| / |AA_1|}{|BC| \cdot |AK| / |AA_1|} =$$

$$= \frac{b+c}{a} \cdot \frac{|A_1K|}{|AK|}.$$

Теперь остается доказать, что $|A_1K| : |AK| = 2a / (b+c)$.

Самое короткое доказательство дает метод центров масс, о котором подробно рассказывалось в статье М. Б. Балка и В. Г. Болтянского («Квант», 1984, № 4, с. 18). Поместим в точку A массу $2a$, в точки B и C — массы b и c . (рис. 2). Центр двух масс — массы b в точке B и массы a в точке A — находится в точке C_1 (поскольку по известному свойству биссектрисы треугольника*) $|AC_1| : |C_1B| = b:a$; аналогично, центр массы c в точке C и оставшейся массы a в точке A находится в B_1 . Следовательно, общий центр масс лежит на отрезке B_1C_1 . С другой стороны, центр масс b и c — это точка A_1 ($|BA_1| : |A_1C| = c:b$), поэтому общий центр масс лежит на отрезке AA_1 , а значит, в точке K , и делит его в отношении $|A_1K| : |KA| = 2c : (a+b)$, что и требовалось доказать.

Приведем еще одно, векторное, доказательство.

Выразим вектор \vec{AA}_1 через векторы $\vec{b} = \vec{AC}$ и $\vec{c} = \vec{AB}$ и их длины, пользуясь свойством биссектрисы:

$$\vec{AA}_1 = \vec{AB} + \vec{BA}_1 = \vec{AB} + \frac{|BA_1|}{|BC|} \cdot \vec{BC} =$$

$$= \vec{c} + \frac{c}{b+c} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = \frac{b\vec{c} + c\vec{b}}{b+c}.$$

Аналогично выражается вектор \vec{AK} через $\vec{b}_1 = \vec{AB}_1$ и $\vec{c}_1 = \vec{AC}_1$, и длины этих векторов b_1 и c_1 :

$$\vec{AK} = \frac{b_1\vec{c}_1 + c_1\vec{b}_1}{b_1 + c_1}.$$

Но $\vec{b}_1 = \frac{cb}{a+c}$, $\vec{c}_1 = \frac{bc}{a+b}$, а $\vec{AK} = k\vec{AA}_1$, где $k =$
 $= |AK| : |AA_1|.$

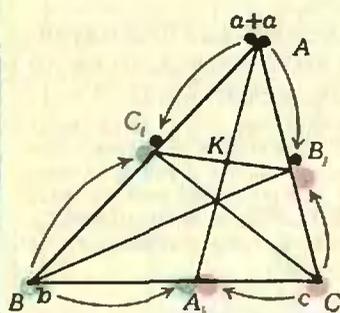


Рис. 2.

Отсюда легко получить, что

$$\vec{AK} = \frac{b\vec{c} + c\vec{b}}{2a + b + c} = k \frac{b\vec{c} + c\vec{b}}{b + c},$$

то есть $k = (b + c) / (2a + b + c)$. Следовательно, $|AK| : |KA| = (1/k) - 1 = 2a / (b + c)$.

Из решения задачи вытекает, что каждый из отрезков MK и KN вдвое короче прилежащей к нему стороны трапеции.

В. Н. Дубровский

Ф858. После удара футболиста мяч полетел в направлении ворот, находящихся на расстоянии $L = 32$ м, со скоростью $v = 25$ м/с под углом α к горизонту ($\cos \alpha = 0,8$). Из-за бокового ветра, дующего вдоль ворот перпендикулярно скорости \vec{v} , горизонтальное смещение мяча в плоскости ворот оказалось равным $s = 2$ м. Найти время полета мяча до плоскости ворот. Мяч не вращается; скорость ветра $u = 10$ м/с.

Рассмотрим движение мяча в системе отсчета K , движущейся со скоростью \vec{u} . Свяжем с K прямоугольную систему координат XYZ с началом в точке удара A такую, что плоскость XY горизонтальна, а ось X параллельна плоскости ворот P (см. рисунок). Начальная скорость мяча в этой системе

$$\vec{v}_1 = \vec{v} - \vec{u}.$$

В системе K воздух неподвижен, и траектория мяча ABC будет находиться в вертикальной плоскости, в которой лежит вектор \vec{v}_1 , причем траектория не будет параболой, поскольку на мяч действует кроме силы тяжести еще и сила сопротивления со стороны воздуха, направленная против мгновенной скорости мяча. Заметим сразу, что характер зависимости силы сопротивления от скорости в задаче не дан и для решения не потребуется.

За время полета t до плоскости ворот мяч переместится в системе K вдоль оси Y на расстояние L , а вдоль оси X — на расстояние s_1 , причем (см. рисунок; точка C лежит на плоскости P)

$$\frac{s_1}{L} = \frac{u}{v \cos \alpha},$$

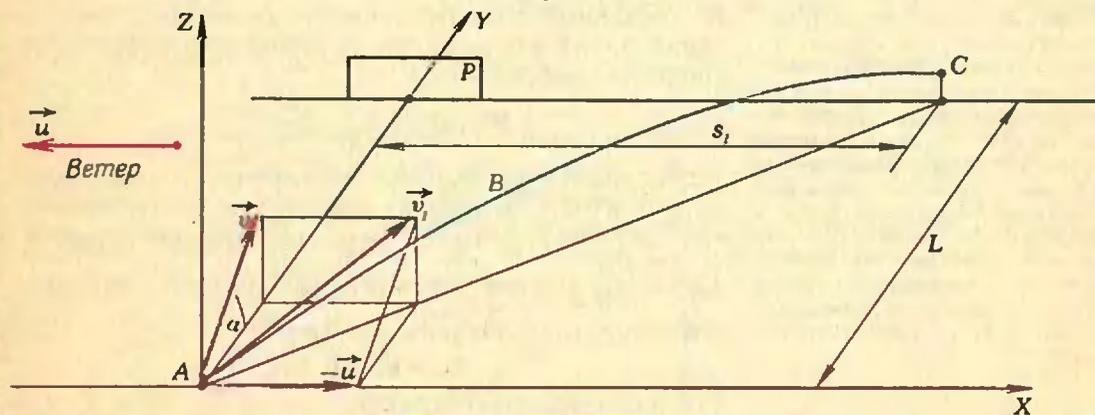
откуда

$$s_1 = \frac{Lu}{v \cos \alpha}. \quad (1)$$

За это же время t система K сместится вдоль оси X в противоположном направлении на расстояние

$$s_2 = ut. \quad (2)$$

Реальное горизонтальное смещение мяча (в непод-



вижной системе отсчета) происходит в отрицательном направлении оси X и равно

$$s = s_2 - s_1.$$

Учитывая (1) и (2), получаем уравнение для нахождения t :

$$s = ut - \frac{Lu}{v \cos \alpha},$$

откуда

$$t = \frac{L}{v \cos \alpha} + \frac{s}{u}.$$

Подстановка численных значений дает $t = 1,8$ с.

В. И. Чивилёв

◆ При движении шара нить может быть параллельна горизонтальной поверхности лишь при условии, что между шаром и поверхностью есть трение. В противном случае (при отсутствии трения) отличный от нуля момент силы F (относительно точки O) вращал бы шар, то есть шар двигался бы не поступательно.

Запишем условие поступательного движения шара (равенство нулю суммы моментов действующих на шар сил относительно точки O):

$$F_{\text{тр}} R = F(R - h).$$

Отсюда

$$F_{\text{тр}} = F \left(1 - \frac{h}{R} \right).$$

С другой стороны,

$$F_{\text{тр}} = \mu mg.$$

Из двух последних уравнений находим μ :

$$\mu = \frac{F}{mg} \left(1 - \frac{h}{R} \right).$$

Ускорение шара найдем из II закона Ньютона:

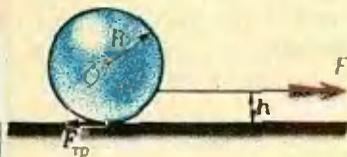
$$ma = F - F_{\text{тр}} = F \frac{h}{R}.$$

откуда

$$a = \frac{F}{m} \frac{h}{R}.$$

Л. Г. Маркович

Ф859. Шар радиуса R и массы m движется по горизонтальной поверхности под действием постоянной силы натяжения F легкой нерастяжимой нити. Точка закрепления нити находится на высоте h над поверхностью (см. рисунок), нить все время горизонтальна, шар движется поступательно. При каком максимальном коэффициенте трения это возможно? Чему равно ускорение шара?



Ф860. В конической непроходящей лунке с углом 2α при вершине на глубине h находятся два небольших одинаково заряженных тела, связанных нитью (рис. 1); масса каждого тела m . После пережигания нити тела начинают скользить вверх по поверхности лунки и вылетают из лунки на высоте H над ее основанием со скоростью v . Коэффициент трения тел о поверхность лунки $\mu = a \operatorname{tg} \alpha$ ($a < 1$). Определить заряды тел.

В начальный момент времени (в момент пережигания нити) всю энергию системы составляет электрическая энергия тел:

$$W_1 = E_1 = k \frac{Q^2}{2(H-h) \operatorname{tg} \alpha}$$

(потенциальную энергию на глубине h принимаем равной нулю). В момент вылета тел из лунки энергия системы складывается из электрической энергии

$E_2 = k \frac{Q^2}{2H \operatorname{tg} \alpha}$, кинетической энергии тел $K = mv^2$ и их потенциальной энергии $\Pi = 2mgh$:

$$W_2 = E_2 + K + \Pi.$$

Согласно закону сохранения энергии, $W_1 = W_2 + A$,

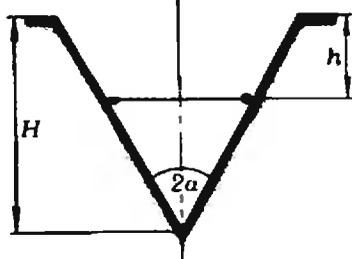


Рис. 1.

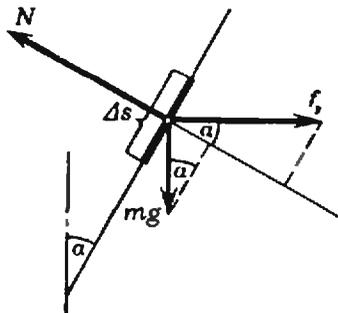


Рис. 2.

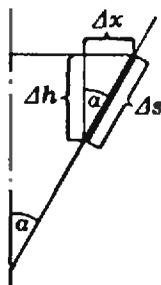


Рис. 3.

Ф861. В колебательном RLC контуре сопротивление невелико, так что колебания затухают в нем слабо. Для получения незатухающих колебаний поступают следующим образом: дважды за период в моменты, когда ток в цепи максимален, катушку индуктивности быстро растягивают от длины l до длины $l + \Delta l$, а в моменты, когда максимален заряд на конденсаторе, катушку быстро сжимают до прежнего размера (параметрический резонанс). При каком относительном изменении длины катушки $\Delta l/l$ колебания в контуре будут незатухающими? Индуктивность катушки считать пропорциональной ее длине.

или

$$E_1 = E_2 + K + \Pi + A \Rightarrow E_1 - E_2 = K + \Pi + A,$$

где A — энергия, потраченная на преодоление сил трения. Найдем эту энергию.

Рассмотрим движение тела на малом участке Δs поверхности лунки таким, что силу электростатического отталкивания $f_э$ на этом участке можно считать постоянной. Сила трения $f_{тр}$, действующая на тело, на этом участке постоянна и равна (рис. 2)

$$f_{тр} = \mu N = \mu (f_э \cos \alpha + mg \sin \alpha).$$

Работа силы трения на участке Δs численно равна $\Delta a = f_{тр} \cdot \Delta s = \mu f_э \cos \alpha \cdot \Delta s + \mu mg \sin \alpha \cdot \Delta s =$
 $= \mu \operatorname{ctg} \alpha f_э (\sin \alpha \cdot \Delta s) + \mu \operatorname{tg} \alpha mg (\cos \alpha \cdot \Delta s) =$
 $= \mu \operatorname{ctg} \alpha (f_э \cdot \Delta x) + \mu \operatorname{tg} \alpha (mg \cdot \Delta h)$

(см. рис. 3). Но $f_э \cdot \Delta x$ — это изменение электрической энергии тела, а $mg \cdot \Delta h$ — изменение его потенциальной энергии. Таким образом, полная работа сил трения при движении тел равна по абсолютной величине

$$A = \mu \operatorname{ctg} \alpha \cdot (E_1 - E_2) + \mu \operatorname{tg} \alpha \cdot \Pi.$$

Итак, согласно закону сохранения энергии,

$$E_1 - E_2 = K + \Pi + \mu \operatorname{ctg} \alpha \cdot (E_1 - E_2) + \mu \operatorname{tg} \alpha \cdot \Pi.$$

Подставляя выражения для E_1 , E_2 , K , Π и $\mu = a \operatorname{tg} \alpha$, получаем

$$\frac{kQ^2}{2(H-h) \operatorname{tg} \alpha} - \frac{kQ'^2}{2H \operatorname{tg} \alpha} =$$

$$= mv^2 + 2mgh + a \left(\frac{kQ^2}{2(H-h) \operatorname{tg} \alpha} - \frac{kQ'^2}{2H \operatorname{tg} \alpha} \right) +$$

$$+ 2a \operatorname{tg}^2 \alpha \cdot mgh.$$

Отсюда находим заряд Q :

$$Q = \sqrt{\frac{2mH(H-h) \operatorname{tg} \alpha \cdot (v^2 + 2gh(1 + a \operatorname{tg}^2 \alpha))}{kh(1-a)}}.$$

О. Я. Савченко

При растягивании катушки совершается работа против сил притяжения ее витков. Эта работа идет на увеличение энергии колебательной системы и должна быть не меньше убыли энергии из-за джоулевых потерь на сопротивлении.

По закону индукции Фарадея $\mathcal{E}_{\text{инд}} = -\frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ и $I_{\text{инд}} = -\frac{1}{R} \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$. При быстром растягивании катушки $\Delta t \rightarrow 0$, а поскольку ток не может достигать бесконечно больших значений, то в этом случае и $\Delta \Phi \rightarrow 0$, то есть в этом процессе сохраняется магнитный поток Φ .

Работа, совершаемая при растягивании, идет только на увеличение энергии магнитного поля:

$$\Delta A = \Delta W_+ = \frac{L' I^2}{2} - \frac{L I^2}{2} = \frac{L'^2 I^2}{2L'} - \frac{L^2 I^2}{2L} =$$

$$= \frac{\Phi^2}{2L} \left(\frac{L}{L'} - 1 \right) = \frac{\Phi^2}{2L} \left(\frac{l + \Delta l}{l} - 1 \right) = \frac{\Phi^2}{2L} \frac{\Delta l}{l} = \frac{L I_a^2}{2} \frac{\Delta l}{l}.$$

где штрихи проставлены у величин, относящихся к состоянию системы после растягивания катушки, I_0 — амплитудное значение силы тока (в момент растягивания ток максимален).

Катушку сжимают, когда максимален заряд на конденсаторе n , следовательно, ток в цепи равен нулю. Поэтому при сжатии никакой работы не совершается.

При малом затухании убыль энергии за счет выделения тепла на сопротивлении мала по сравнению с полной энергией системы, поэтому можно считать, что за период амплитуда колебаний изменяется мало, ток почти синусоидален. Тогда можно получить следующую оценку для потерь энергии за половину периода:

$$\Delta W_- = I_n^2 R \frac{T}{2} = \frac{1}{2} I_0^2 R \pi \sqrt{LC},$$

где I_n — действующее значение тока.

Колебания будут незатухающими, если $\Delta W_+ \geq \Delta W_-$, то есть

$$\frac{LI_0^2}{2} \frac{\Delta I}{I} \geq \frac{1}{2} I_0^2 R \pi \sqrt{LC},$$

откуда

$$\frac{\Delta I}{I} \geq \pi R \sqrt{\frac{C}{L}}.$$

А. И. Киркинский

Метод производящих функций

(Начало см. на с. 11)

Указание. Воспользуйтесь соотношениями (доказав их)

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-z} \cdot \frac{1}{1-z^3} \cdot \frac{1}{1-z^5} \cdot \dots &= \\ &= (1+z+z^2+z^3+\dots) \cdot (1+z^3+z^6+z^9+\dots) \times \\ &\quad \times (1+z^5+z^{10}+\dots) \cdot \dots = (1+z)(1+z^2) \times \\ &\quad \times (1+z^3)(1+z^4) \dots = (1-z^m)(1+z^m)(1+z^{2m}) \times \\ &\quad \times (1+z^{4m})(1+z^{6m}) \dots = 1. \end{aligned}$$

4. Найдите явную формулу для общего члена последовательности $(u_n) = (0, 1, 5, 19, 65, \dots)$, заданной рекуррентными соотношениями $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, $u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1}$.

Указание. Воспользуйтесь тем, что ряд $u_0 + u_1 z + u_2 z^2 + \dots$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{z}{6z^2 - 5z + 1} &= \frac{1}{1-3z} - \frac{1}{1-2z} = \\ &= (1+2z+2^2z^2+2^3z^3+\dots) \times \\ &\quad \times (1+3z+3^2z^2+3^3z^3+\dots). \end{aligned}$$

5. Пусть $n > 2$ — фиксированное натуральное число. Рассмотрите ряды

$$f(z) = z^n + z^{n^2} + z^{n^3} + \dots; \quad [f(z)]^2 = c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$$

и покажите, что число целых решений $(k_1; k_2; k_3)$ уравнения Ферма $k_1^n + k_2^n = k_3^n$ равно c_m при $m = k_3^n$.

Замечание. К сожалению, к вычислению коэффициентов c_m для любого m подходов не видно!

6. Найдите v_n — количество различных разбиений выпуклого n -угольника непересекающимися диагоналями на треугольники (например, $v_5 = 5$, $v_6 = 9$).

Указание. Положите $v_2 = v_3 = 1$ и докажите рекуррентное соотношение

$$v_n = v_2 v_{n-1} + v_3 \cdot v_{n-2} + \dots + v_{n-1} v_2, \quad n \geq 3.$$

Воспользуйтесь этим, чтобы доказать соотношение $(a(z))^2 - a(z) = z$, где $a(z) = v_2 z + v_3 z^2 + v_4 z^3 + \dots$, найдите отсюда $a(z)$ и дифференцируйте.

Ответ. $v_n = \frac{(2n-4)!}{(n-2)!(n-1)!}$. Эти числа называются числами Каталана.



Ижевскому НОУ — 5 лет

Ученые —
путь
к звезде
открытий



Ижевск — город промышленный, рабочий. И одна из основных проблем города — рабочие руки, талантливые специалисты. Именно поэтому серьезное внимание уделяется в городе профориентации среди старших школьников, обучению уже в школе будущей жизненной профессии, поиску среди школьников и учащихся ПТУ, техникумов талантливых целеустремленных ребят.

Ижевскому городскому НОУ «Мысль» исполнилось пять лет. Общество создано по инициативе ГК ВЛКСМ при поддержке городского отдела народного образования, Дома техники НТО, республиканского общества «Знание». В НОУ приходят школьники, стремящиеся расширить свои знания в определенной области науки, техники, искусства, желающие уже в школе попробовать: а какой из меня получится физик, математик, биолог, медик, юрист. Основная база для занятий — Удмуртский государственный университет. Секции НОУ созданы в Ижевском государственном медицинском институте, в Ижевском механическом институте, в Физико-техническом институте УНЦ АН СССР, в Музее изобразительных искусств, в кружках и факультативах школ, во Дворце пионеров. В городском Дворце пионеров и школьников находится и методический центр НОУ, где еженедельно собираются ребята — старосты секций, которые образуют Ученический Совет. В его ведении — вся работа НОУ в течение года. Научной и методи-

ческой работой руководит Совет кураторов общества.

В 24 кружках и секциях НОУ сейчас занимается около 350 учащихся 7—10 классов и ПТУ. Под руководством преподавателей, ученых, специалистов члены НОУ учатся работать со специальной литературой, получают практические навыки в той или иной области науки, техники, искусства. За время работы НОУ сложились определенные традиции. Учебный год начинается в октябре организационной сессией, на которой ребята вместе со своими руководителями планируют работу на учебный год. В течение года они встречаются не только на занятиях секции, но и на общегородских лекциях: «Химия вокруг нас», «Математика в современном мире», «Загадочный мир кристаллов», «На пороге совершенлетия», в «Школе юного лектора». Одна из главных задач членов НОУ — не только заниматься любимой наукой, но и пропагандировать ее среди своих товарищей путем чтения лекций, организации кружков в младших классах.

Каждый год итоги работы НОУ подводятся на научно-практической конференции «Юность — науке». И если на первой конференции 4 секции объединили 32 члена НОУ, работавших под руководством 26 научных руководителей, то на четвертой конференции на 9 секциях выступали с итогами своей работы 143 члена НОУ, работавших под руководством 107 преподавателей, специалистов научных учреждений города и студентов. Были отмечены работы: «Дешифрование космических снимков на примере пустынных территорий Аравии» ученицы 10 класса Т. Полянцева; «Динамика ЭКГ в ранние сроки ишемии» ученицы 9 класса М. Лопаткиной; «Построение функции полезности в задаче распределения семейного бюджета» ученика 10 класса О. Евстафьева; «Построение 32 точечных групп кристаллических решеток», выполненная учениками 8 и 9 классов А. Мащевичем и Д. Гаем. Работа И. Козлова «Решение некоторых задач динамики с помощью АВМ» была отмечена на студенческой конференции ИМИ.

Интересен опыт работы ученых со школьниками физических классов в школе № 58: в 9 и 10 классах читаются

два факультатива: «Введение в физику твердого тела» и «Программирование», в лабораториях в ВЦ университета ведутся занятия по труду со специализацией «лаборант-металловед» и «программист».

Большой интерес школьников вызывает работа Зимних школ НОУ. Зимние школы организуются ежегодно в последние предновогодние дни в одном из пригородов Ижевска — на турбазе «Югон». Каждая школа обычно проводится по одной общей теме: «Симметрия в науке и природе», «Человек и природа», «Профессия — ученый», «Человек. Земля. Вселенная», «Наука и искусство». В течение трех дней 200 участников Школы — лучшие члены НОУ слушают лекции ведущих ученых города. Для ребят Школа — это еще и зимние спортивные соревнования, и «физбой», и традиционные КВН между командами школьников и комиссаров секций — студентов УдГУ, и новогодняя елка со всякими чудесами, и торжественная клятва верности науке. А самое главное — это общение единомышленников, ребят, стремящихся к «снятию вершин науки».

В 1983 году впервые была организована Летняя школа НОУ, где также читались лекции, проводились экскурсии, физические бои, наблюдения звездного неба. При этом школьники еще 3—4 часа ежедневно работали на полях совхоза «Удмуртский» и тем самым полностью оплатили расходы по организации лагеря. Летнюю школу также решено сделать ежегодной.

Своим девизом члены НОУ взяли слова «Ученые — путь к звезде открытий». И пусть пока школьники не совершают открытий в науке, главные открытия они делают в себе: а что я могу, куда приложить свои способности, кем быть? И организаторы НОУ «Мысль» верят в то, что ребята станут настоящими людьми, специалистами своего дела.

Председатель совета кураторов
Ижевского НОУ
И. А. Муртазин

Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов в вузы в 1983 году.

Новосибирский государственный университет имени Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

Вариант I

(факультеты механико-математический, физический, экономический)

1. Решите уравнение

$$1 + 2\sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 2 \sin x.$$

2. При каких значениях параметра a среди решений неравенства

$$\log_2(x-100) - \log_2 \frac{|x-101|}{(105-x)} + \\ + \log_2 \frac{|x-103|(105-x)}{(x-100)} > a$$

содержится единственное целое число?

3. Расстояние между центрами двух окружностей равно $5r$. Одна из окружностей имеет радиус r , вторая — $7r$. Хорда большей окружности касается малой окружности и делится точкой касания в отношении 1:6. Найдите длину этой хорды.

4. Дан куб $ABCA'B'C'D'$ с основанием $ABCD$ и боковыми ребрами AA' , BB' , CC' и DD' . Плоскость α перпендикулярна прямой $A'C'$, а плоскость β параллельна прямой CD' . Какова наименьшая возможная величина угла между плоскостями α и β ?

5. Девятизначное целое число A , записанное в десятичной системе счисления, получается из целого числа B перестановкой последней цифры на первое место. При этом известно, что число B взаимно просто с числом 18 и $B > 222222222$. Найдите наибольшее и наименьшее среди чисел A , удовлетворяющих этим условиям.

Два натуральных числа называются взаимно простыми, если они не имеют общих делителей, отличных от единицы.

Вариант 2

(факультеты геолого-геофизический, естественных наук)

1. Решите уравнение

$$\sin 2x \cos x = \operatorname{tg} 3x \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) - \cos 2x \sin x.$$

2. В треугольнике ABC радиус вписанной окружности равен $\frac{10}{3}$, косинус угла C равен $\frac{5}{13}$, а площадь треугольника равна 60. Найдите стороны треугольника.

3. По беговой дорожке длиной 400 м от одной стартовой линии одновременно стартовали

два бегуна (разрядник и начинающий). Скорость разрядника на 200 м в минуту больше скорости начинающего. Через полминуты разрядник остановился на 20 секунд. За это время начинающий обогнал разрядника. Какой могла бы быть скорость разрядника, чтобы, несмотря на остановку, он смог закончить дистанцию первым, если известно, что скорости бегунов во время движения неизменны и постоянны?

4. При каких значениях параметра a для любого действительного числа x выполняется неравенство

$$\log_{|a^2-2|} [(a^2-1)x^2 + 2x + 2] > 1?$$

5. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCA'B'C'D'$, в основании которого лежит квадрат $ABCD$ со стороной длины 3, боковые ребра AA' , BB' , CC' и DD' имеют длину 5. Равносторонний треугольник расположен в пространстве так, что одна его вершина совпадает с вершиной C параллелепипеда, а две другие расположены на прямых BB' и $C'D'$ соответственно. Найдите длину медианы этого треугольника.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из пяти задач трех типов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобратся в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные численные значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи физические величины и их численные значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных факторов выделить главный.

На решение задач давалось пять часов, начиная с завершения демонстраций.

Ниже после текста каждой задачи в скобках указан процент решивших ее.

Вариант I

1. В конической лунке с вертикальной осью симметрии и углом раствора 2α прыгает шарик, ударяясь о противоположные точки A и B , расположенные на одной горизонтали, через одно и то же время T (рис. 1). Ускорение свободного падения g . Найдите максимальную и минимальную скорости движущегося шарика. (57%)

2. Между конусом, сделанным из стекла с показателем преломления n , и экраном, перпендикулярным оси конуса, поместили собирающую линзу с фокусным расстоянием F , расположив ее на расстоянии F от экрана (рис. 2). Главная оптическая ось линзы совпадает с осью конуса. Вдоль оси конуса падает неширокий параллельный пучок света. Найдите форму изображения пучка на экране и определите максимальный размер изо-

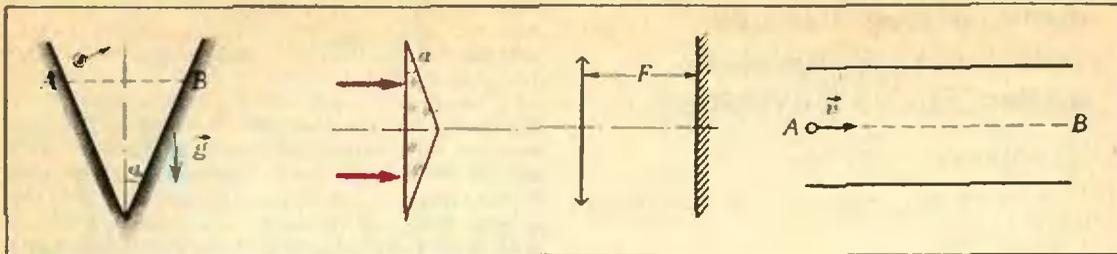


Рис. 1.

Рис. 2.

Рис. 3.

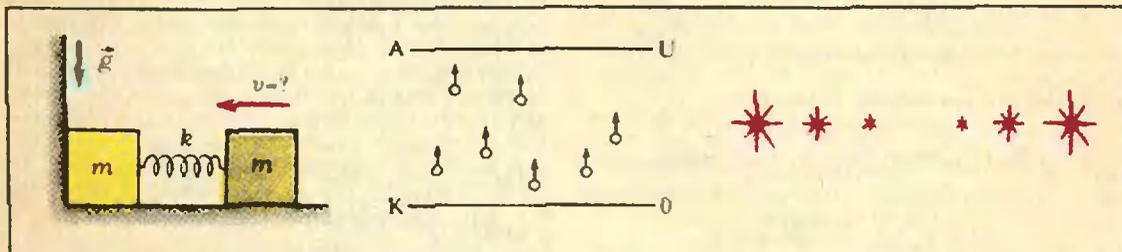


Рис. 4.

Рис. 5.

Рис. 6.

бражения. Угол α между образующей конуса и плоскостью его основания мал ($\sin \alpha \approx \cos \alpha \approx \alpha$). (60 %)

3. В теплоизолированной трубе под поршнем содержится один моль газа при давлении в два раза меньшем внешнего и температуре T . Поршень может свободно передвигаться в сторону увеличения объема и удерживается стопором от противоположного движения. Внутренняя энергия газа $U = cT$, газовая постоянная R . Какое количество теплоты надо подвести к газу, чтобы его объем увеличился в два раза? (73 %)

4. Оцените размеры неоднородностей вдоль дорожки звукозаписи на долбонгающей пластинке. (42 %)

5. Через молоко, налитое в цилиндрический стеклянный сосуд, пропускают узкий пучок света вдоль оси сосуда и поперек и регистрируют интенсивность прошедшего светового сигнала. При разбавлении молока продольный сигнал не меняет свою интенсивность, а у поперечного она существенно увеличивается. Объясните явление. (55 %)

Вариант 2

1. Около вертикальной стены стоят два человека на расстояниях l_1 и l_2 соответственно от нее и на расстоянии l друг от друга. Первый громко произносит короткое слово. За какое время он должен произнести это слово, чтобы второй человек услышал его конец совпадающим с началом эха? Скорость звука в воздухе v . (54 %)

2. Электрон влетает в плоский заряженный конденсатор, двигаясь в начальный момент вдоль средней плоскости AB конденсатора со скоростью v (рис. 3). Через какое время нужно изменить направление электрического поля в конденсаторе на противоположное, не изменив его абсолютной величины, чтобы на вылете из конденсатора электрон пересек плоскость AB ? Длина конденсатора l . Силу тяжести не учитывать. (31 %)

3. Два одинаковых тела массой m каждое соединены пружиной жесткости k и лежат на горизонтальной плоскости (рис. 4). Левое тело касается вертикальной стенки. Какую минимальную скорость, направленную к стенке, надо сообщить правому телу, чтобы при обратном движении от стенки оно сдвинуло левое тело? Коэффициент трения о плоскость μ . Пружина в начальный мо-

мент не деформирована. Ускорение свободного падения g . (40 %)

4. Оцените отношение мощности, развиваемой кузнечиком при прыжке, к его массе (то есть удельную мощность). (45 %)

5. На блестящей консервной банке есть плоская вмятина, от которой отражается на экран свет. В банку наливают охлажденную жидкость — отраженный сигнал явно гаснет. Объясните явление. (72 %)

Вариант 3

1. Внутри сплошного шара радиуса R с показателем преломления $n=2$ слева от центра вблизи поверхности находится точечный источник света S . На каком расстоянии справа от центра шара радиуса светового пучка, вышедшего из шара, будет равен R ? (40 %)

2. В центре закрытой с торцов трубы длиной $2l$ находится поршень массы m и площадью S , который может без трения перемещаться по трубе. Слева и справа от поршня имеется газ с давлением p . Трубу раскручивают в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр. Найдите угловую скорость вращения, если поршень сместился на $l/2$. Температуру газа считать постоянной. (78 %)

3. Вакуумный диод, у которого анод и катод — параллельные пластины (рис. 5), работает в режиме, когда между током и напряжением выполняется соотношение $I = cU^{3/2}$. Во сколько раз увеличится сила, действующая на анод из-за удара электронов, если напряжение на диоде увеличить в два раза? Начальной скоростью электронов, вылетающих с катода, пренебречь. (49 %)

4. Косточки домино поставлены так, что первая при падении сбивает вторую, вторая — третью и т. д. Оцените, за какое время упадет ряд из 100 косточек. (30 %)

5. При падении под небольшим углом на толстую стеклянную пластину узкого пучка света на экране отчетливо видны несколько пятен разной интенсивности (рис. 6). Объясните наблюдаемое явление. (66 %)

Публикацию подготовили
С. С. Гончаров, Г. В. Меледин,
А. А. Никитин

Московское высшее техническое училище имени Н. Э. Баумана

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Вычислите

$$1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{6} + \dots + \operatorname{tg}^{n-1} \frac{\pi}{6} + \dots$$

2. Решите уравнение

$$2 \cos 2x \cdot \cos 5x = \cos 7x + \frac{1}{2}.$$

3. Решите уравнение

$$25^{-x} + 5^{1-x} = 50.$$

4. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{1 + \log_3 \frac{1}{x}}.$$

5. Дан куб $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ с ребром a . Найдите радиус сферы, проходящей через вершины A и B_1 и точки K и M на ребре CC_1 такие, что $|CK| = |KM| = |MC_1|$.

Вариант 2

1. Число 108 представить в виде произведения двух положительных чисел так, чтобы сумма куба одного из них с квадратом другого была наименьшей.

2. Решите уравнение

$$\sin 5x - \cos \left(x + \frac{5\pi}{2} \right) = \sin \left(2x - \frac{\pi}{2} \right).$$

3. Решите уравнение

$$\frac{4}{2^x - 3} = 2^x.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{\log_3(4-x)}{x-2} < 0.$$

5. На основании прямого кругового конуса лежат три шара радиуса r . На них лежит четвертый шар того же радиуса. Каждый из этих четырех шаров касается боковой поверхности конуса и трех других шаров. Найти площадь боковой поверхности конуса.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Из брандспойта (шланг с металлическим наконечником), расположенного около поверхности Земли, вырывается струя воды со скоростью $v_0 = 10$ м/с. Брандспойт медленно вращается, вокруг вертикальной оси, одновременно с этим меняется угол его наклона к горизонту. Опреде-

лите максимальную площадь, которую можно полить этим брандспойтом. Сопротивлением воздуха пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

2. Преграда массой $M = 10$ кг, имеющая цилиндрический паз радиусом $R = 0,2$ м, расположена на горизонтальной плоскости (рис. 1). Тело массой $m = 1$ кг с начальной горизонтальной скоростью $v_0 = 3$ м/с поднимается по цилиндрической поверхности паза. Определите скорость тела на высоте R . Трением пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

3. На идеально гладкой горизонтальной плоскости расположен брусок массой $M = 1$ кг, скрепленный с пружинами, жесткость каждой из которых $k = 30$ Н/м (рис. 2). На брусок лежит шайба массой $m = 0,5$ кг. Система брусок — шайба приводится в колебательное движение. Определите максимальную амплитуду колебаний, при которой система будет двигаться как единое целое, то есть без проскальзывания шайбы по бруску. Коэффициент трения между бруском и шайбой $\mu = 0,4$. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

4. Идеальная тепловая машина, работающая при нормальных условиях окружающего воздуха, который для нее является холодильником, поднимает груз массой $m = 400$ кг. Рабочее тело машины получает от нагревателя с температурой $t = 200$ °С количество теплоты $Q = 80$ кДж. На какую максимальную высоту поднимет груз эта тепловая машина? Трением пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

5. В однородное горизонтальное электрическое поле с напряженностью $E = 10^3$ В/м помещена система, состоящая из двух одинаковых и противоположно заряженных шариков, соединенных тонким изолирующим стержнем длиной $l = 0,1$ м. Система может только вращаться в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня. Масса и модуль заряда каждого шарика равны $m = 5$ г и $q = 10^{-6}$ Кл. Система кратковременным воздействием выводится из состояния устойчивого равновесия и приводится во вращательное движение с начальной угловой скоростью $\omega_0 = 2$ с⁻¹. Определите максимальный угол поворота этой системы. Массой стержня пренебречь. Шарники рассматривать как материальные точки.

6. Источники тока, имеющие одинаковые внутренние сопротивления $r = 0,5$ Ом, подключены к резисторам, каждый из которых имеет сопротивление R (рис. 3). ЭДС источников тока соответственно равны $\mathcal{E}_1 = 12$ В и $\mathcal{E}_2 = 6$ В. Определите величину сопротивления R , при котором ток в цепи $ABCD$ не течет.

7. Плоский замкнутый металлический контур площадью $S_0 = 10$ см² деформируется в однородном магнитном поле, индукция которого $B = 10^{-2}$ Тл. Площадь контура за время $t = 2$ с равномерно уменьшается (плоскость контура при этом остается перпендикулярной магнитному по-

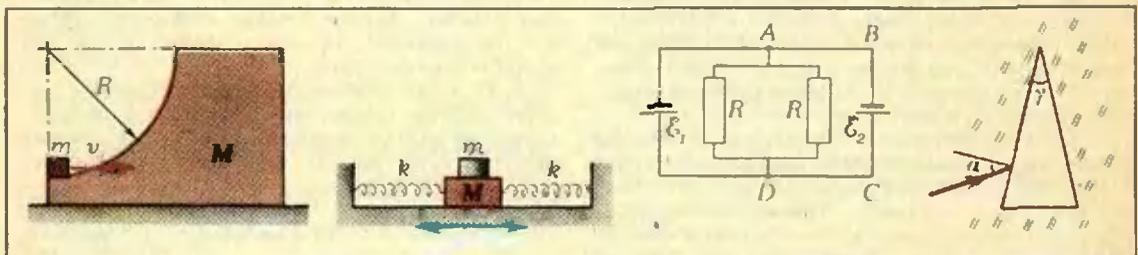


Рис. 1.

Рис. 2.

Рис. 3.

Рис. 4.

лю) до величины $S = 2 \text{ см}^2$. Определите силу тока, протекающего по контуру в течение времени t , если сопротивление контура $R = 1 \text{ Ом}$.

8. Внутри стекла имеется воздушная полость треугольного сечения (рис. 4). Угол при вершине треугольника $\gamma = 30^\circ$. Показатели преломления стекла и воздуха соответственно равны $n_s = \sqrt{3}$ и $n_a = 1$. На боковую грань треугольной призмы падает луч света под углом $\alpha = 30^\circ$. Определите угол выхода луча из другой грани призмы.

9. Катод вакуумного фотоэлемента освещается светом с длиной волны $\lambda = 0,5 \text{ мкм}$. При задерживающей разности потенциалов между анодом и катодом $U = 1,2 \text{ В}$ фототок прекращается. Определите работу выхода электрона из материала катода. Постоянная Планка $h = 6,6 \times 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с}$; заряд электрона $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ Кл}$; скорость света $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$.

10. При термоядерной реакции слияния дейтерия ${}^2\text{H}$ и трития ${}^3\text{H}$ образуются нейтрон, неизвестная частица и выделяется $E_0 = 17,6 \text{ МэВ}$ энергии. Определите неизвестную частицу и полную энергию, которая выделится, если прореагирует $m = 1 \text{ г}$ дейтерия. Число Авогадро $N_A = 6 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$; $1 \text{ эВ} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ Дж}$.

Публикацию подготовили
Н. А. Гладков, В. Ф. Панов

Московский архитектурный институт

Математика

Задачи устного экзамена

1. Упростите выражение

$$\sqrt{(1 - \cos \alpha \cdot \cos \beta)^2 \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta}.$$

2. Вычислите без таблиц

а) $\lg 1^\circ \cdot \lg 3^\circ \cdot \lg 5^\circ \cdot \dots \cdot \lg 89^\circ$.

б) $\cos 5^\circ \cdot \cos 55^\circ \cdot \cos 65^\circ$.

в) $\cos 20^\circ \cdot \cos 40^\circ \cdot \cos 60^\circ \cdot \cos 80^\circ$.

3. Докажите тождество

а) $32 \cos^6 \alpha = 10 + 15 \cos 2\alpha + 6 \cos 4\alpha + \cos 6\alpha$.

б) $\sin^2 \alpha \cdot \cos^4 \alpha = \frac{1}{16} + \frac{1}{32} \cos 2\alpha - \frac{1}{16} \cos 4\alpha - \frac{1}{32} \cos 6\alpha$.

в) $\cos 9\alpha + 3 \cos 7\alpha + 3 \cos 5\alpha + \cos 3\alpha = 8 \cos^6 \alpha \cdot \cos^3 \alpha$.

4. Решите уравнение

а) $\log_2(9^{x-1} + 7) = 2 + \log_2(3^{x-1} + 1)$.

б) $3 \cdot 16^x + 2 \cdot 81^x = 5 \cdot 36^x$.

в) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{7}{16}$.

г) $\sqrt{y^2 + 4y + 8} + \sqrt{y^2 + 4y + 3} = \sqrt{2(y^2 + 4y + 6)}$.

5. Решите неравенство

а) $\frac{1}{2^x + 3} > \frac{1}{2^{x+2} - 1}$.

б) $x^2 - 3 > \sqrt{x^2 - 2x + 1}$.

в) $\log_3(4x + 5) \leq 1$.

6. Постройте график

а) $y = |x| - |x + 1| + 2$.

б) $y = \frac{x}{|x - 1|}$.

7. Решите систему

$$\begin{cases} x + xy + y = 11, \\ x^2 y + xy^2 = 30. \end{cases}$$

8. При каких целых « n » решение системы

$$\begin{cases} nx - y = 5, \\ 2x + 3ny = 7 \end{cases}$$

удовлетворяет условиям $x > 0$, $y < 0$?

Физика

Задачи устного экзамена

1. Воздушный шар объемом $V = 600 \text{ м}^3$ находится в равновесии. Какое количество балласта надо выбросить за борт, чтобы шар начал подниматься с ускорением $a = 0,1 \text{ м/с}^2$? Плотность воздуха $\rho = 1,29 \text{ кг/м}^3$.

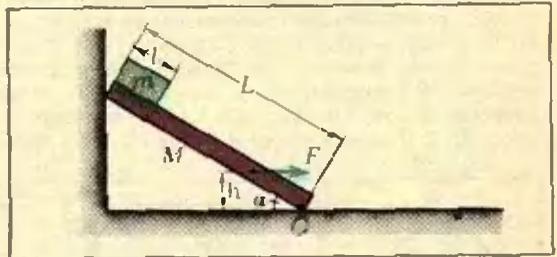
2. Тело массой $m = 2 \text{ кг}$ тянут по гладкой горизонтальной поверхности с помощью пружины, которая при движении растянулась на $\Delta l = 1 \text{ см}$. Жесткость пружины $k = 100 \text{ Н/м}$. Определите ускорение, с которым движется тело.

3. Тело без начальной скорости начинает скользить по наклонной плоскости высотой $h = 5 \text{ м}$. Угол наклона $\alpha = 30^\circ$, коэффициент трения $\mu = 0,05$. Найдите время движения тела.

4. Найдите силу тяжести, действующую на тело массой $m = 12 \text{ кг}$, поднятое над Землей на расстояние, равное трети земного радиуса.

5. Шарик массой $m = 0,5 \text{ кг}$, подвешенный на нерастяжимой нити длиной $l = 1 \text{ м}$, совершает колебания в вертикальной плоскости. Найдите силу натяжения нити в момент, когда она образует с вертикалью угол $\alpha = 60^\circ$. В этот момент скорость шарика $v = 1,5 \text{ м/с}$.

6. К верхнему краю доски длиной L и массой M прибит брусок, длина которого l и масса m (см. рисунок). Доска закреплена в точке O и прислонена к стенке под углом α к основанию. При какой горизонтальной силе F , приложенной на высоте h , равновесие доски не нарушится, если стенку убрать?



7. Тело массой m , скатившись с горы высотой h , останавливается. Какую работу нужно совершить, чтобы поднять тело обратно на вершину горы?

8. Подъемный кран должен в течение $t = 8 \text{ ч}$ поднять $m = 3000 \text{ т}$ строительных материалов на высоту $h = 12 \text{ м}$. Чему равна мощность, потребляемая двигателем крана, если коэффициент полезного действия мотора $\eta = 60\%$?

9. Тело, имеющее массу $m = 2 \text{ кг}$ и объем $V = 1000 \text{ см}^3$, находится в овере на глубине $h = 5 \text{ м}$. Какая работа должна быть совершена при его подъеме на высоту $H = 5 \text{ м}$ над поверхностью воды?

10. Шарик неподвижно висит на пружине, когда она растянута на $\Delta l = 4 \text{ см}$. Определите период колебаний такого вертикального пружинного маятника.

Публикацию подготовили
Ю. М. Мещеряков, Ю. А. Морозов,
В. А. Смирнов



Инверсия

4. в) При инверсии с центром в точке O прямые l_1 и l_2 , пересекающиеся в некоторой точке A , переходят в окружности, проходящие через точку O . Через точку O проведем касательные t_1 и t_2 к окружностям l'_1 и l'_2 . Легко видеть, что $t_1 \parallel l_1$, $t_2 \parallel l_2$, а касательные к l'_1 и l'_2 в точке A' образуют такой же угол, как l_1 и l_2 .

5. 6. Поскольку касательные к окружностям переходят в окружности или прямые, касающиеся образов данных окружностей, достаточно заметить окружности касательными к ним в их общих точках.

9. Выполним инверсию относительно окружности произвольного радиуса с центром в точке A (см. рис. 11 на стр. 30). Тогда окружности, проходящие через центр инверсии, перейдут в параллельные прямые, а другие две окружности в касающиеся этих прямых и друг друга окружности (рис. 1). Три точки касания будут лежать на одной прямой (докажите!), которая при повторном выполнении инверсии перейдет в окружность.

10. Выполним инверсию относительно окружности с центром в точке B радиуса $\sqrt{|AB| \cdot |AM|}$. Тогда полуокружность C_2 перейдет в себя, полуокружность C_1 и луч m перейдут друг в друга, так как прямые углы с прямой (AB) сохраняются. Следовательно, окружность C_3 перейдет в себя и точка касания D окружностей C_2 и C_3 останется на месте, поэтому прямая BD перейдет в себя, но в таком случае BD имеет единственную общую точку и с C_2 и с C_3 , то есть касается обеих окружностей.

11. Пусть Γ — окружность с центром в точке A такая, что при инверсии относительно нее окружность T переходит в себя. Радиус окружности Γ равен длине отрезка касательной, проведенной из точки A к окружности T . При инверсии относительно Γ луч AB перейдет в себя, полуокружности C_1 и C_2 отобразятся на лучи C'_1 и C'_2 пере-

секающиеся с (AB) под прямым углом в точках B' и M' (см. рис. 2). Образом полуокружности C_3 является полуокружность C'_3 , построенная на отрезке $B'M'$ как на диаметре. Точка O , конечно, не останется на месте, однако окружность T перейдет в себя, поэтому интересующее нас расстояние от центра T до прямой AB не изменится. Это расстояние равно $2r$, так как окружность T касается всех трех линий C'_1, C'_2, C'_3 , следовательно, $|B'M'| = 2r$.

14. Инверсией с центром в любой из точек данной окружности задача сводится к разобранной в параграфе 4 задаче 7.

15. б) После инверсии с центром в точке A задача сводится к следующей: построить прямую, параллельную данной прямой и касающейся данной окружности (см. рис. 3). Пункт а) инверсии относительно произвольной точки, не лежащей на прямой l и окружности s сводится к пункту б).

16. Увеличим радиусы всех трех окружностей на одну и ту же величину d так, чтобы две из них касались в некоторой точке A (рис. 4). Выполним инверсию с центром в точке A относительно окружности произвольного радиуса. Задача сводится к следующей: построить окружность T' , касающуюся двух данных параллельных прямых и данной окружности. Остается найти образ T окружности T' при повторном выполнении инверсии и увеличить радиус T на величину d .

17. Выполним инверсию с центром в точке D , при этом точки A и B перейдут в A' и B' . Задача сводится к следующей: построить две параллельные прямые, равноудаленные от точки D так, чтобы одна из них проходила через точку A' , а другая — через B' . Это легко сделать, если заметить, что эти прямые параллельны отрезку DM , соединяющему D с серединой M отрезка $A'B'$ (рис. 5).

Непослушные задачи

1. $(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n)^2, n \in \mathbb{N}$. 2. Если $a > 0$, то $x \geq -b/a$. Если $a < 0$, то $x \leq -b/a$. Если $a = 0$ и $b \geq 0$, то x может быть любым. Если $a = 0$ и $b < 0$, решений нет. 3. $\{(x; y): x \geq 0, y = 0\}$. 4. $]-\infty; 0[$.

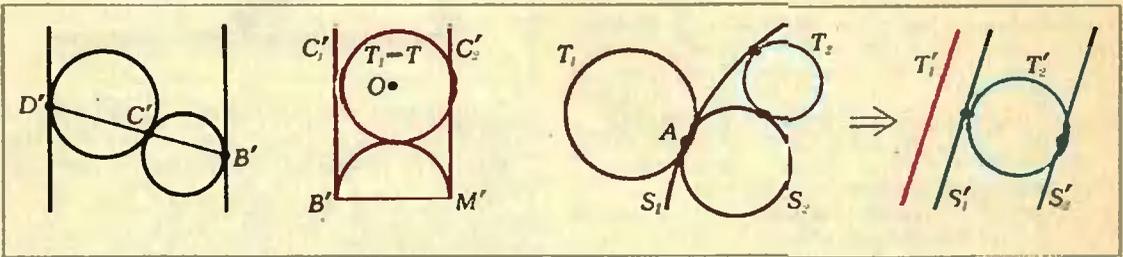


Рис. 1.

Рис. 2.

Рис. 3.

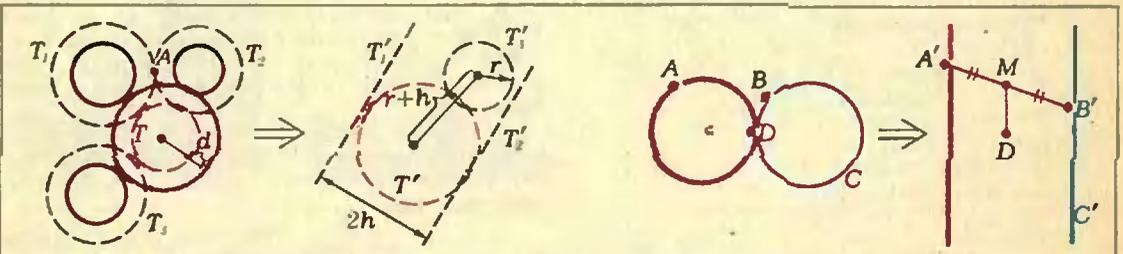


Рис. 4.

Рис. 5.

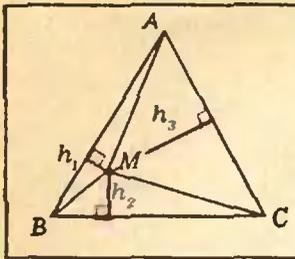


Рис. 6

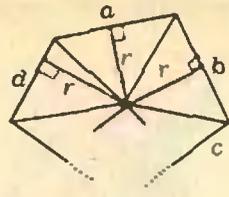


Рис. 7

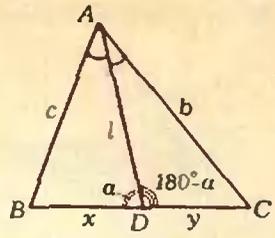


Рис. 8

5. $[-1; 4]$, 6. $]-1; 1[$, (при любых значениях числа a). 7. $\log_3 8 < \log_2 3$. 8. График совпадает с осью абсцисс на участке $[0; 1[$ и с прямой $y=1$ на участке $]1; +\infty[$, а при $x=1$ имеет «изолированную точку» $(1, 1/2)$. 9. Указание. Площадь сектора ODC , где O середина отрезка AB , равна площади фигуры F . 10. Указание. Постройте окружность на диагонали (содержащей вершину острого угла), как на диаметре. 11. 0. 12. Да. 13. В отношении 1:27.

Избранные школьные задачи

1. а) Пусть M — произвольная точка внутри треугольника, h_1, h_2 и h_3 — ее расстояния до сторон, a и h — соответственно длины сторон и высоты правильного треугольника (рис. 6). Запишем, что сумма площадей треугольников MAB, MBC и MAC равна площади треугольника ABC : $\frac{ah_1}{2} + \frac{ah_2}{2} + \frac{ah_3}{2} = \frac{ah}{2}$, откуда $h_1 + h_2 + h_3 = h$, что и требовалось. Случай, когда M — граничная точка треугольника, разбирается аналогично.

б) Отрезки, соединяющие центр вписанной окружности с вершинами многоугольника, разбивают его на треугольники, основаниями которых служат стороны многоугольника, а высотами — радиусы окружности, проведенные в точки касания со сторонами (рис. 7). Пусть a, b, c, \dots, d — длины сторон многоугольника. Поскольку сумма площадей треугольников, на которые разбит многоугольник, равна площади многоугольника, получаем, что $\frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} + \dots + \frac{dr}{2} = S$, откуда

$$S = r \cdot \frac{a+b+c+\dots+d}{2}, \text{ то есть } S = r \cdot \rho.$$

2. Ответ: $(0; 0)$, $(1; -2)$ и $(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$.

Решение. Поскольку p и q — корни уравнения, то, подставив каждое из них в уравнение, мы получим два верных равенства:

$$p^2 + p^2 + q = 0 \text{ и } q^2 + pq + q = 0.$$

Решив полученную систему, находим ответ.

З а м е ч а н и е. Типичная ошибка: поскольку p и q — корни уравнения, то $p+q=-p$ и $pq=q$, откуда находим, что $p=q=0$ или $p=1, q=-2$. В этом рассуждении предполагается то, чего нет в условии — что p и q — два корня уравнения (ср. с последним ответом в нашем решении: при

$$p=q=-\frac{1}{2} \text{ уравнение принимает вид } x^2 - \frac{x}{2} - \frac{1}{2} = 0 \text{ и имеет корни } 1 \text{ и } -\frac{1}{2}).$$

3. Поскольку треугольники ABD и ACD имеют общую высоту, опущенную из вершины A (рис. 8), то их площади относятся, как длины соответствующих оснований: $S_{ABD} : S_{ACD} = x : y$. Так как точка D лежит на биссектрисе, она

одинаково удалена от сторон AB и AC . Поэтому высоты треугольников ABD и ACD , опущенные из вершины D , одинаковы и площади этих треугольников относятся, как длины сторон, на которые опущены эти высоты: $S_{ABD} : S_{ACD} = c : b$. Из этого равенства и предыдущего равенства получаем утверждение задачи.

б) По теореме косинусов из треугольников ABD и ACD получаем: $c^2 = x^2 + l^2 - 2xl \cos \alpha$ и $l^2 =$

$$= y^2 + b^2 + 2yl \cos \alpha, \text{ где } \alpha = \widehat{ADB}. \text{ Умножим первое из этих соотношений на } y, \text{ второе на } x \text{ и сложим: } c^2 y + b^2 x = l^2(x+y) + xy(x+y), \text{ то есть } l^2 = \frac{c^2 y + b^2 x}{x+y} - xy. \text{ Так как, по теореме о биссектрисе (см. п. а)), } cy = bx, \text{ получаем } c^2 y = b^2 x, \text{ } b^2 x = bc y, \text{ откуда } \frac{c^2 y + b^2 x}{x+y} = bc \text{ и } l^2 = bc - xy.$$

4. Ответ: $\sqrt{2}$. Решение. Так как $\sqrt{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{4+2\sqrt{3}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$ и $\sqrt{2-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$, получаем $\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}} + \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2-\sqrt{2-\sqrt{3}}}} = \frac{\sqrt{2}(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}+1} + \frac{\sqrt{2}(2-\sqrt{3})}{2-(\sqrt{3}-1)} = \frac{(2\sqrt{2}+\sqrt{6})(3-\sqrt{3}) + (2\sqrt{2}-\sqrt{6})(3+\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})} = \frac{6\sqrt{2}}{9-3} = \sqrt{2}$.

5. Ответ: а) $2^{300} < 3^{200}$; б) $2^{91} > 5^{35}$. Решение. а) Поскольку $2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$, а $3^{200} = 9^{100}$, то $2^{300} < 3^{200}$. б) Поскольку $2^{91} = (2^{13})^7$, $5^{35} = (5^5)^7$, то достаточно сравнить числа 2^{13} и 5^5 . Так как $2^5 > 5^2$, то $2^{10} > 5^4$, поэтому $2^{13} = 8 \cdot 2^{10} > 5 \cdot 5^4 = 5^5$.

6. Ответ: 15. Решение. Пусть x — количество членов кружка. Из условия следует, что, с одной стороны, менее 7% членов кружка — восьмиклассники, а с другой — что хотя бы один восьмиклассник (Миша) в кружке занимается, поэтому $1 < 0,07x$, откуда $x > 14,2 \dots$. Поскольку число членов кружка целое, получаем, что наименьшее возможное число участников равно 15. При этом выполняются все условия.

7. Ответ: 7. Решение. Любая из искоемых плоскостей должна пересекать тетраэдр. Действительно, в противном случае четыре его вершины находятся на одинаковом расстоянии от плоскости и лежат по одну сторону от нее, — значит, они лежат в плоскости, параллельной данной, чего нет на самом деле. Далее, искомая плоскость разделяет вершины тетраэдра на две группы: или на группы в одну и в три вершины, или на две группы по две вершины. В первом случае (рис. 9 а) она проходит через середину высоты тетраэдра, опущенной на грань, которой при-

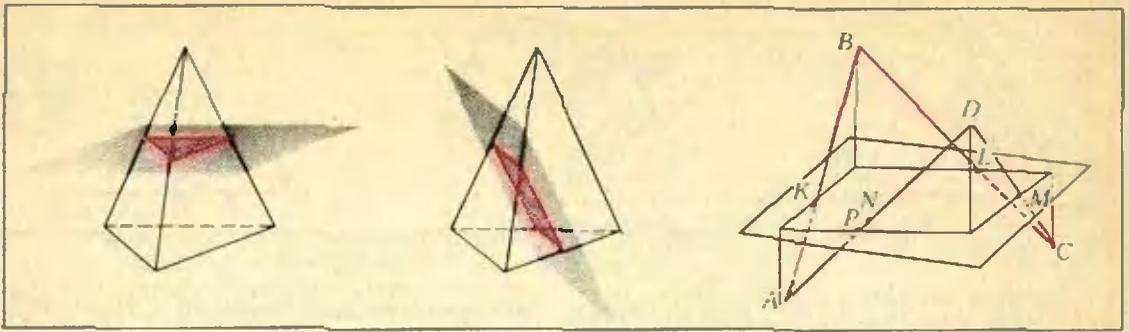


Рис. 9а.

Рис. 9б.

Рис. 10.

надлежит группа из трех вершин, параллельно этой грани. Таких плоскостей, очевидно, столько же, сколько высот у тетраэдра — четыре. Во втором случае искомая плоскость (рис. 9 б) параллельна скрещивающимся ребрам тетраэдра, соединяющим по две вершины каждой группы, и проходит через средние линии соответствующих граней. Таких плоскостей три. Итак, всего существует семь плоскостей, удовлетворяющих условию.

8. Докажем, что $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$. Из условий $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, $b > 0$, $d > 0$ вытекает, что $ad < bc$. Прибавив к обеим частям этого неравенства число ab , получим, что $a(b+d) < b(a+c)$, откуда, разделив обе части на положительное число $b(b+d)$, приходим к неравенству $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$. Аналогично можно доказать, что $\frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

9. Ответ: C — точка пересечения плоскости α с отрезком AB_1 , где B_1 — точка, симметричная точке B относительно плоскости α . Указание. Для любой точки $M \neq C$ плоскости α $|AM| + |MB| = |AM| + |MB_1| > |AB_1|$ в силу неравенства треугольника, а $|AB_1| = |AC| + |CB_1| = |AC| + |CB|$.

10. Ответ: 90° . Указание. Искомый угол равен углу между касательными к параболе, проходящими через точку $M(0; -0,25)$ (не лежащую на параболе!). Касательная к параболе в ее точке $M(x_0; x_0^2)$ имеет уравнение $y = 2xx_0 - x_0^2$ и проходит через точку $M(0; -0,25)$ при $x_0^2 = 0,25$; уравнения соответствующих касательных: $y = x$ и $y = -x$.

11. Так как $0 < a < 1$, то $a^{10} < a^2$, аналогично $b^{10} < b^2$, поэтому $a^{10} + b^{10} < a^2 + b^2 = 1$.

12. Соединим центр сферы со всеми вершинами многогранника. При этом многогранник разобьется на пирамиды, основаниями которых являются грани многогранника, с общей вершиной — центром сферы. Высотами этих пирамид, опущенными из центра сферы, являются радиусы сферы, проведенные в точки касания. Записав, что сумма объемов пирамид равна объему многогранника, получим требуемую формулу (сравните с задачей 1, б).

13. Для доказательства воспользуемся двумя утверждениями: 1) длины отрезков касательных, проведенных из одной точки к сфере, равны; 2) если из одной точки (не лежащей в плоскости) к плоскости проведены две наклонные, то равные наклонные образуют с плоскостью равные углы, а большая наклонная образует с плоскостью меньший угол. Пусть четырехугольник $ABCD$ описан около сферы и пусть K, L, M, N — точки касания сторон $AB,$

BC, CD, DA соответственно. Проведем плоскость α через точки K, L и M . Поскольку точки A и D лежат по разные стороны от α , отрезок AD пересекает α в некоторой точке P (рис. 10).

Требуется доказать, что P совпадает с N . Обозначим угол между (AB) и α через φ . По свойству касательных к сфере $|BK| = |BL|$, а так как длины наклонных BK и BL , проведенных из точки B к плоскости α равны, то прямые AB и BC образуют с этой плоскостью равные углы, то есть угол между (BC) и α также равен φ . Аналогично, $|CL| = |CM|$ и угол между (CD) и α равен φ (так как он равен углу между (CB) и α).

Предположим теперь, что P не совпадает с N и пусть $|AP| < |AN|$, тогда $|DP| > |DN|$. Обозначим угол между (AD) и α через ψ . Теперь, так как $|AP| < |AK| = |AN|$, получаем $\psi > \varphi$ (в силу утверждения 2)), с другой стороны, из $|DP| > |DM| = |DN|$, следует $\psi < \varphi$. Аналогично приходим к противоречию, положив $|AP| > |AN|$. Следовательно, точки P и N совпадают.

14. Ответ: 120° . Решение. Рассмотрим сечение конуса плоскостью, проходящей через вершину конуса. В сечении получается равнобедренный треугольник с боковой стороной — образующей конуса. Докажем, что чем ближе сечение к высоте конуса, тем больше угол при вершине соответствующего сечения. Действительно, с приближением сечения к высоте конуса уменьшается длина высоты сечения, опущенной из вершины конуса (так как проекция этой высоты на плоскость основания уменьшается (рис. 11)), поэтому уменьшается отношение этой высоты и образующей — косинус половины угла при вершине сечения. Но с уменьшением косинуса острого угла сам угол возрастает. Таким образом, с приближением сечения к высоте конуса угол при вершине сечения растет. Поскольку площадь сечения равна половине произведения квадрата длины образующей на синус угла при вершине сечения, площадь сечения максимальна, если максимален синус угла при вершине сечения. Максимальный угол при вершине сечения — когда сечение осевое. Поскольку осевое сечение, по условию, имеет не максимальную площадь, это возможно только при условии, что угол при вершине осевого сечения тупой, причем его синус в два раза меньше максимального значения синуса — единицы. Таким образом, угол при вершине осевого сечения равен 120° .

15. а) Пусть a, b, c — координаты точек пространства. Тогда условие $a + b + c = 1$ определяет плоскость, пересекающую каждую координатную ось на расстоянии 1 от начала координат в положительном направлении (рис. 12 а). Учитывая, что $a^2 + b^2 + c^2$ — квадрат расстояния от начала координат до точки $(a; b; c)$, данную за-

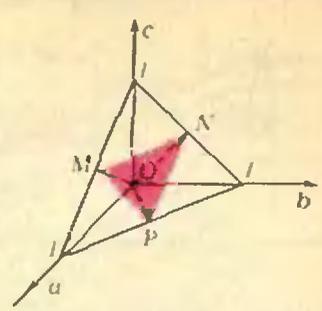
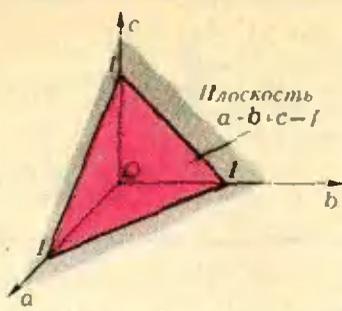
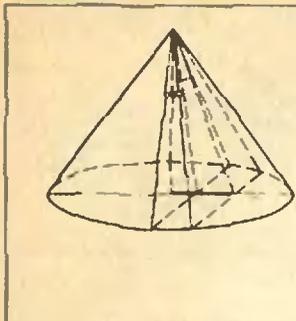


Рис. 11.

Рис. 12а.

Рис. 12б.

дачу можно переформулировать так: доказать, что точки плоскости $a+b+c=1$ удалены от начала координат не меньше, чем на $1/\sqrt{3}$. Используя формулу расстояния от точки до плоскости (см. § 62 учебника «Геометрия 9—10»), найдем, что расстояние от начала координат до рассматриваемой плоскости равно $1/\sqrt{3}$. Отсюда следует доказываемое неравенство.

б) Дополнительное (по сравнению с а)) условие означает, что для координат точек $(a; b; c)$ выполняются неравенства $a < b+c$, $b < a+c$ и $c < a+b$, которые задают полупространства. Пересечение этих полупространств вырезает на плоскости $a+b+c=1$ треугольник MNP из средних линий (рис. 12 б). Поскольку вершины этого треугольника, точки M, N и P , максимально удалены от начала координат, по сравнению с остальными точками этого треугольника, а

$|OM|=|ON|=|OP|=\frac{1}{\sqrt{2}}$, доказываемое неравенство имеет место.

Новосибирский государственный университет имени Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ ($k \in Z$).
2. $0 \leq a < \log_2 3$.
3. $x_1 = 7\sqrt{3}r$, $x_2 = \frac{7\sqrt{143}}{6}r$.
4. $\frac{\pi}{6}$.
5. 9 999 999 998 и 122 222 224.

Вариант 2

1. $x_1 = \frac{n\pi}{3}$, $x_2 = \frac{m\pi}{2} + \frac{m\pi}{2}$ ($n, m \in Z$).
2. $|AB|=13$, при этом либо $|AC|=10$, $|BC|=13$, либо $|AC|=13$; $|BC|=10$.
3. Если v — скорость разрядника, то $500 \text{ м/мин} < v < 600 \text{ м/мин}$.
4. $\sqrt{3} < |a| < \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}$.
5. $\frac{3\sqrt{30}}{2}$.

Физика

Вариант 1

1. Очевидно, что скорость шарика максимальна в момент удара о стенку. Из симметрии и с учетом перпендикулярности скорости шарика у стен-

ки и касательной плоскости найдем $v_{\text{max}} = gT/(2 \sin \alpha)$. При пересечении оси лунки скорость шарика минимальна (она же — горизонтальная скорость): $v_{\text{min}} = v_{\text{max}} \cos \alpha = (gT \operatorname{ctg} \alpha)/2$.

2. Получится окружность (рис. 13) с диаметром

$$2r = 2F \operatorname{tg} \theta \approx 2F\theta = 2F(\beta - \alpha) \approx 2Fa(n - 1).$$

3. Количество теплоты Q переходит в изменение внутренней энергии ΔU и в работу A' по расширению газа:

$$Q = \Delta U + A' = c\Delta T + p\Delta V.$$

Из уравнения Менделеева — Клапейрона, записанного для начального состояния газа: $(p/2)V = RT$ и для конечного: $p \cdot 2V = RT_1$, найдем

$$\Delta U = c\Delta T = c(T_1 - T) = 3cT,$$

$$A' = p\Delta V = pV = RT_1/2 = 2RT.$$

Тогда окончательно

$$Q = (3c + 2R)T.$$

4. При скорости иглы v и частоте ν характерного звука соответствующий размер неоднородности $l \sim v/\nu$. Выбрав радиус звуковой дорожки $R \sim 10$ см и учитывая, что число оборотов в минуту для долгоиграющей пластинки $n \approx 33$ об/мин $\approx 0,5$ об/с, имеем $v = 2\pi nR \sim 30$ см/с. Полагая характерную частоту звука $\nu \sim 10^3$ Гц, получаем

$$l \sim v/\nu \sim 3 \cdot 10^{-2} \text{ см}.$$

5. Число рассеивающих и поглощающих свет частиц вдоль оси не меняется при разбавлении, поскольку площадь сечения сосуда и полное число частиц сохраняются. Значит, число частиц, встреченных светом на пути вдоль оси, сохраняется (во сколько раз увеличивается путь, во сколько же раз уменьшается концентрация молекул, воду считаем абсолютно прозрачной) и интенсивность прошедшего сигнала практически не изменяется. При прохождении света поперек оси число встреченных светом частиц при разбавлении уменьшается (концентрация уменьшилась, а путь остался прежним). Таким образом, интенсивность прошедшего света в этом случае увеличится.

Вариант 2

1. Для учета эха вместо источника звука в точке A (рис. 14) можно взять минимый источник A' , симметричный относительно стенки (как при отражении света от плоского зеркала). Чтобы отраженный сигнал пришел сразу же вслед идущему по прямой, необходимо выполнение условия

$$vt = |AC| + |CB| - r = |A'B| - r = \sqrt{(l_1 + l_2)^2 + r^2} - (l_2 - l_1) - r.$$

Откуда

$$t = (\sqrt{r^2 - 4l_1l_2} - r)/v.$$

2. Через время t высота электрона над плоскостью AB $y = at^2/2$, где a — его ускорение, а вертикаль-

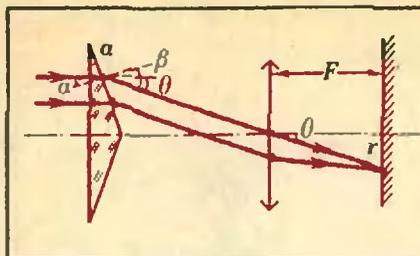


Рис. 13.

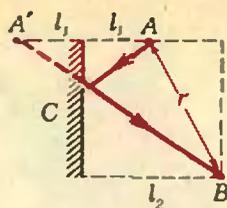


Рис. 14.

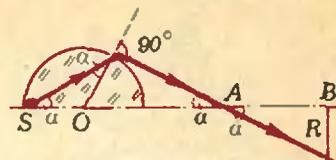


Рис. 15.

ная проекция скорости $v_y = at$. Через время $l/v - t$ координата $y = 0$. Таким образом,

$$\frac{at^2}{2} + at\left(\frac{l}{v} - t\right) - \frac{a}{2}\left(\frac{l}{v} - t\right)^2 = 0.$$

Однозначно, так как $l < l/v$, получаем

$$t = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} \frac{l}{v}.$$

3. Пусть x_1 — смещение правого тела влево, а x_2 — вправо от начального положения. Тогда из закона сохранения энергии получаем

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{kx_1^2}{2} + \mu mgx_1,$$

$$\frac{kx_1^2}{2} = \frac{kx_2^2}{2} + \mu mg(x_1 + x_2).$$

Требование сдвига левого груза дает условие

$$kx_2 = \mu mg.$$

Решая систему трех уравнений, получаем

$$x_1 = 3x_2, \text{ и } v = \mu g \sqrt{15m/k}.$$

4. За время τ кузнечик, распрямляя ногу длиной l , набирает скорость v и затем взлетает на высоту H :

$$\frac{v\tau}{2} \sim l, \quad v \sim \sqrt{2gl}.$$

Средняя мощность кузнечика

$$N \sim \frac{E_{кин}}{\tau} \sim \frac{mv^2}{2\tau}.$$

Отсюда

$$\frac{N}{m} \sim \frac{v^3}{4l} \sim \frac{(2gl)^{3/2}}{4l}.$$

Полагая $l \sim 3 \cdot 10^{-2}$ м, $H \sim 1$ м, $g = 10$ м/с², имеем $N/m \sim 1$ кВт/кг.

5. Вследствие охлаждения банки на ней конденсируются пары воды и создают помутнение отражающей поверхности. Вместо отражения в определенном направлении свет начинает рассеиваться в довольно широком диапазоне углов. В итоге освещенность экрана в районе первоначального зайчика уменьшается.

Вариант 3

1. Максимальное расхождение лучей, выходящих из шара вправо, определяется явлением полного отражения света (рис. 15):

$$n \sin \alpha = 1, \quad \alpha = \arcsin(1/2) = 30^\circ.$$

Тогда

$$x = |AO| + |AB| = R/\sin 30^\circ + R/\operatorname{tg} 30^\circ = R(2 + \sqrt{3}).$$

2. Пусть p_2 — большее давление, а p_1 — меньшее. По закону Бойля — Мариотта

$$p_2 l/2 = p l \text{ и } p_1 \cdot 3l/2 = p l.$$

Второй закон Ньютона дает

$$m\omega^2 l/2 = (p_2 - p_1)S.$$

Решая систему, получаем

$$\omega = 2 \sqrt{\frac{2pS}{3ml}}.$$

3. Рассмотрим небольшой промежуток времени Δt . За это время к аноду подлетят $N = I\Delta t/e$ электронов (здесь e — заряд электрона) и сообщат ему импульс $P = mvN$. Скорость v электрона у анода определим из закона сохранения энергии $mv^2/2 = eU$. Согласно второму закону Ньютона,

$$F\Delta t = \Delta P, \text{ или } F\Delta t = mvI\Delta t/e.$$

Отсюда, с учетом связи $I = cU^{3/2}$, найдем

$$F = \frac{I}{e} mv = c \sqrt{\frac{2m}{e}} U^2.$$

Таким образом, отношение сил

$$F/F_0 = (U/U_0)^2 = 4.$$

4. Выберем самую простую физическую модель (рис. 16): будем считать, что угол отклонения косточки от вертикали в момент встречи с другой косточкой невелик и от толчка следующая косточка начинает падать, но на запас энергии толчок практически не влияет. По закону сохранения энергии (с учетом малости угла φ)

$$\begin{aligned} \frac{mv^2}{2} &\sim mg \left(\frac{l}{2} - \frac{l \cos \varphi}{2} \right) \sim \\ &\sim mgl \sin^2 \frac{\varphi}{2} \sim \frac{mgl\varphi^2}{4} \sim \frac{mgx^2}{4l}. \end{aligned}$$

Тогда

$$v \sim x \sqrt{\frac{g}{2l}}, \quad v_{x \text{ средн}} \sim \frac{v}{2} \sim \frac{x}{2} \sqrt{\frac{g}{2l}} \text{ и}$$

$$T = 100 \frac{x}{v_{x \text{ средн}}} \sim 100 \sqrt{\frac{8l}{g}}.$$

При $l \sim 5$ см $T \sim 20$ с.

5. Вследствие многократных отражений от обеих поверхностей толстой пластины (рис. 17) наблюдается несколько вышедших по обе стороны пластины лучков, впоследствии ослабленных, так как каждый раз при встрече с поверхностью пластины пучок частично отражается поверхностью, а частично преломляется. Самыми яркими, как видно из рисунка, должны быть самые крайние пятна.

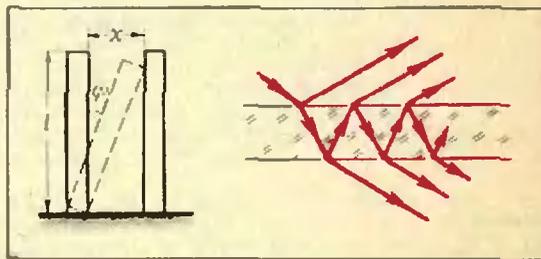


Рис. 16.

Рис. 17.

Московское высшее техническое училище имени Н. Э. Баумана

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $\frac{3+\sqrt{3}}{2}$. 2. $x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi k}{3}$ ($k \in Z$). 3. $\{-1\}$.

4. $]0; 3]$. 5. $R = \frac{a}{18}$.

Вариант 2

1. $108 = 6 \cdot 18$. 2. $x_1 = \frac{\pi}{4} (2k+1)$; $x_2 = (-1)^{k+1} \frac{\pi}{18} +$

$+\frac{\pi}{3}$ ($k, l \in Z$). 3. $\{2\}$. 4. $]-\infty; 2[\cup]3; 4[$.

5. $\pi \frac{r^2 \sqrt{3}}{2} \left(1 + \sqrt{3} + \frac{2\sqrt{6}}{3}\right)^2$.

Физика

1. $S_{\max} = \pi v_0^2 / g^2 = 314 \text{ м}^2$.

2. $v = \sqrt{v_0^2 (1 - Mm/(m+M)^2) - 2gR} \approx 2 \text{ м/с}$.

3. $x_{\max} \leq (m+M) \mu g / (2k) = 0.1 \text{ м}$.

4. $h_{\text{пр}} = Q (1 - T_0/T) / (mg) = 8.45 \text{ м}$
(здесь $T_0 = 273 \text{ К}$, $T = 473 \text{ К}$).

5. $\varphi_{\text{пр}} = \arccos(1 - m\omega_0^2 l / (4qF)) = 60^\circ$.

6. $R = 2 \mathcal{E}_1 / (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) = 1 \text{ Ом}$.

7. $I = B (S_0 - S) / (Rl) = 4 \text{ мкА}$.

8. $\beta = \arcsin(1/2 \sqrt{3}) \approx 17^\circ$.

9. $A = hc/\lambda - eU \approx 2 \cdot 10^{-19} \text{ Дж} \approx 1.25 \text{ эВ}$.

10. Кроме нейтрона образуется еще ядро атома гелия ${}^4_2\text{He}$. Полная энергия равна $E = E_0 N_{\text{дт}} m/M \approx 8.5 \cdot 10^{11} \text{ Дж}$, где $M = 2 \cdot 10^{-3} \text{ кг/моль}$ — молярная масса дейтерия.

Московский архитектурный институт

Математика

Задачи устного экзамена

1. $|\cos \alpha - \cos \beta|$.

2. а) 1; б) $\frac{\sqrt{2}}{16} (\sqrt{3}+1)$; в) $\frac{1}{16}$.

4. а) $\{1; 2\}$; б) $\left\{0; \frac{1}{2}\right\}$; в) $\left\{\frac{\pi}{6} (3n \pm 1)\right\}$, $n \in Z$;
г) $\{-2\}$.

5. а) $]-\infty; -2[\cup]2 - \log_3 3; +\infty[$.

б) $]-\infty; -\frac{1+\sqrt{17}}{2}[\cup]2; +\infty[$.

в) $]-\frac{5}{4}; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; 1[\cup]5; +\infty[$.

7. $\{(1; 5)^4; (5; 1); (2; 3); (3; 2)\}$.

8. $n_1 = 0$, $n_2 = 1$.

Физика

1. $\Delta m = \rho V a / (g+a) \approx 7.8 \text{ кг}$.

2. $a = k \Delta l / m = 0.5 \text{ м/с}^2$.

3. $t = \sqrt{\frac{2h}{g(\sin \alpha - \mu \cos \alpha) \sin \alpha}} \approx 2.1 \text{ с}$.

4. $F_2 = (3/4)^2 mg \approx 66 \text{ Н}$.

5. $T = m(g \cos \alpha + v^2/l) \approx 3.6 \text{ Н}$.

6. $F = \frac{(MgL + mg(2L-l)) \cos \alpha}{2h}$.

7. $A = 2mgh$.

8. $N = \frac{mgh}{\eta/100\%} \approx 20.4 \text{ кВт}$.

9. $A = mg(H+h) - \rho V gh \approx 150 \text{ Дж}$.

10. $T = 2\pi \sqrt{l/g} \approx 0.4 \text{ с}$.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 4)

1. В первом случае — при любом соотношении радиусов, во втором — никогда, поскольку одна из шестеренок должна вращаться сразу... в две противоположные стороны (см. рисунок 18).

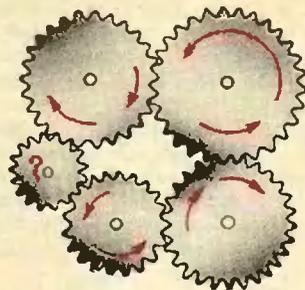


Рис. 18.

2. Рассмотрим три квадратика, примыкающих к одной из вершин куба. Очевидно, что все они обязаны иметь разный цвет. Из этого замечания и следует утверждение задачи.

3.
$$\begin{array}{r} + 85679 \\ + 85679 \\ \hline 171358 \end{array}$$

4. Первые два действия над числом можно заметить умножением его на 21, а всю процедуру — умножением на число $21 \cdot 481 = 10101$. Ясно, что при умножении на 10101 из любого двузначного числа получается шестизначное число, записывающееся, как трехкратное повторение первоначального числа.

5. Цифра 2 бывает на первом месте в течение 4 часов (от 20.00 до 00.00). В остальные 20 часов она бывает на втором месте 2 часа (от 02.00 до 03.00 и от 12.00 до 13.00). В оставшиеся 18 часов цифра 2 бывает на третьем месте по 10 минут, а в остальные 50 минут каждого часа еще 5 раз по одной минуте на четвертом месте, итого по 15 минут в каждый из 18 часов, то есть 4 часа 30 минут. Всего получаем

$4 \text{ ч} + 2 \text{ ч} + 4 \text{ ч} 30 \text{ мин} = 10 \text{ ч} 30 \text{ мин}$.

Для цифр 0 и 1 аналогично получаем 15 часов 00 минут, для цифры 3 — 8 часов 15 минут, для цифр 4 и 5 — по 7 часов 30 минут, для остальных цифр (6, 7, 8 и 9) — по 4 часа 12 минут.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 2)

Задание 3 (Рудаковский — Ботвинник, чемпионат СССР, 1945 г.). 1... K:c1 2. Лб:c1 Л:c1 3. Л:c1 Фh6! На первый взгляд, двойной удар не опасен, так как есть защита — 4. Фс4. Но теперь ферзь перегружена, и черные пользуются этим. 4... Сb5 5. Фс5 b6! Белые сдались.

Задание 4 (Тайманов — Воротников, Ленинград, 1978 г.). 1... Kf3!! Выясняется, что чуть ли не все белые фигуры перегружены. Ни одна из них не может отвлечься от своих дел и безнаказанно взять коня на f3: 2. K4:f3 Ke3+, 2. K2:f3 Ke3+ 3. Kpg1 K:d1 4. Л:d1 С:f4, наконец, 2. С:f3 Ke3+, и черные выигрывают. 2. Л:f3 Фh4! 3. Лg3 Фh1+ 4. Лg1 Ke3+ 5. Kpf2 Фh2+. Белые сдались.

Победители шахматного конкурса 1983 года

Победителями конкурса признаны: С. Александров (п. Черноголовка Московской обл.), М. Ахмадеева (с. Еткуль Челябинской обл.), Г. Бедный (Бердичев), А. Болрский (Бендеры), В. Воронцов (Ижевск), В. Гаевский (Бендеры).

М. Германов (с. Чаши Курганской обл.), *Г. Гончаренко* (Киев), *И. Грачев* (Москва), *В. Гриндей* (Черновцы), *В. Ефимов* (п. Сазоново Вологодской обл.), *А. Каган* (Ташкент), *Б. Калинин* (с. Нижнедевицк Воронежской обл.), *О. Кальченко* (Норильск), *С. Катаргин* (Омутнинск), *И. Кваша* (Новочеркасск), *С. Киречко* (Жданов), *В. Колпаков* (Сухуми), *Д. Красиков* (Ростов-на-Дону), *М. Креймер* (Житомир), *Г. Леонов* (Курган), *Н. Малик* (Баку), *П. Малюта* (Львов), *В. Москаленко* (Ворошиловград), *К. Мусаханяк* (с. Суренаван Арм. ССР), *Р. Нижегородцев* (Харьков), *Н. Пархоменко* (Винница), *А. Рустапов* (Баку), *А. Рябов* (Куйбышев), *С. Самоленко* (Лубны), *А. Скороход* (Чернигов), *Д. Станкович* (Сараево, СФРЮ), *М. Федорив* (Львов), *А. Шаров* (Железногорск), *Р. Энхбат* (Улаи-Батор, МНР), *А. Ярцев* (ст. Брюховейская Краснодарского края).

Редакция поздравляет победителей. Все они награждаются дипломами журнала «Квант», книгой А. Е. Карлова и Е. Я. Гика «Нисчерпаемые шахматы» с автографами авторов и им присваивается II разряд по шахматам.

Поправка

В «Кванте» № 4 на с. 27 по вине типографии на девятой строчке правой колонки пропущена формула

$$y = x^2 \cdot \ln x^3.$$

Главный редактор — академик И. К. Кириин

Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров

Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович,

[П. Л. Капица], В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаяев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. Э. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Суриин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фалдеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:

А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, Б. М. Ивлев, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихонирова

Номер оформили:

М. К. Гуров, М. Б. Дубах, В. С. Коваль, А. Я. Коршунов, Н. С. Кузьмина, Ю. П. Мартыненко, Э. В. Назаров, А. А. Орехов, А. Е. Остаев, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина

Фото представили:

А. Н. Виленкин, Э. А. Смирнов

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Редактор отдела художественного оформления Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Е. В. Сидоркина

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1,
«Квант», тел. 250-33-54
Сдано в набор 21.3.84. Подписано к печати 19.4.84
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Усл. кр. от. 23,8
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 7,56. Т-09726
Цена 40 коп. Заказ 688. Тираж 179382 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательства, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

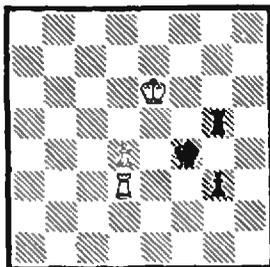
Шахматная страничка



Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

«БЕРМУДСКИЙ ТРЕУГОЛЬНИК» В ЦЕНТРЕ ДОСКИ

В прошлом году мы рассказывали об успехе советских гроссмейстеров Г. Каспарова и В. Смыслова в четвертьфинальных матчах претендентов. Уверенно провели они и полуфинальные поединки.



В. Корчной — Г. Каспаров

Это положение возникло в шестой партии матча. Белые сделали естественный ход 63.d5 — ведь в эндшпиле пешка должна идти вперед. Если теперь 63.g2?, то 64. Лd4+ Крf3 65.Лd1 g1Ф 66.Л:g1 Л:g1 67. d6 с ничьей. Однако промежуточный шах 63...Лg6+! разрушил надежды белых. Только после 64. Кр7 (64. Крf7 g2 65. Лd1 Лd6 с неотвратимой угрозой 66. Лd5) пешка тронулась с места — 64...g2 65. Лd1 Крe5 66. d6 Ле6+ 67. Крd7 Л:d6+ 68. Л:d6 g1Ф. Ферзь легко справляется с ладьей, и белые вскоре сдались.

Оказывается, в позиции на диаграмме белые могли эту точку спастись посредством 63. Лd1! (Первым это обнаружил шахматный мастер и кандидат химических наук С. Розенберг.) Изюминка маневра ладьи состоит в том, что черному королю пока что недоступно поле e5 — пешка «d» сохранила контроль над ним. Чтобы попасть на это поле, королю придется двигаться по треугольнику f4—e4—e5. В пешечных окончаниях король, перемещаясь по треугольнику,

часто обеспечивает победу. В данном же случае, наоборот, он бы упустил ее. 63... Крe4 64. d5 Лg6+ 65. Крe7 Крe5. В результате белые могли выиграть важный темп, которого им так не хватило в партии, и сыграть 66. d6 с простой ничьей.

Сравняв счет, Каспаров на глазах преобразился и одержал след за этой победой еще три — белыми. Матч был убедительно выигран со счетом 7:4. Таким образом, не исключено, что судьбу поединка решил «бермудский треугольник», скрытый в самом центре шахматной доски. Предлагаем вам ознакомиться еще с одной победой Каспарова, в девятой партии матча. И здесь его соперника погубил треугольник.

Г. Каспаров — В. Корчной Каталонское начало

1. d4 Кf6 2. c4 e6 3. g3 d5 4. Cg2 dc 5. Kf3 Kbd7 6. 0—0 Лb8. В первой партии Корчной решил все дебютные проблемы при помощи неожиданного fianкеттирования слона, правда, на королевском фланге. Теперь он применяет ту же идею на ферзевом фланге, но с гораздо меньшим эффектом. 7. a4 b6 8. Kfd2! Этот ход белых, типичный для закрытых позиций, здесь выглядит весьма нешаблонно. Белых не смущает, что многие их фигуры еще не вступили в бой, и они делают второй ход одним и тем же конем. 8... e5. После 8... Сb7 9. С:b7 Л:b7 ладья на b7 выглядит неестественно, но в конце концов ей все равно придется оказаться на этом поле. 9. К:c4 ed10. Ф:d4 Сс5 11. Фd3 0—0 12. Кc3. К игре подключится второй конь. Черные больше не хотят терпеть белого слона на большой диагонали и размещают его. 12...Сb7 13. С:b7 Л:b7 14. Фf3 Фa8. Итак, ладья переместилась по треугольнику a8—b8—b7, и неестественность расположения черных фигур видна теперь невооруженным глазом. Каспаров легко и изящно превращает свой перевес в очко. 15. Cf4 a6 16. e4 Лa7 17. Kd5 b5 18. Ka5 ba 19. Лf1 Cd4 20. Л:a4 С:b2 21. Ke7+ Крh8 22.Лс2 Фе8 23. Л:b2 Ф:e7 24.Кс6 Фс5 25.К:a7 Ф:a7 26.e5 Kg8 27.Сe3 Фа8 28.Ф:a8 Л:a8 29.f4 Ke7 30.Лd2. Черные сдались.

Приведем теперь седьмую партию другого матча. В ней дело обошлось без вмешательства геометрии.

В. Смыслов — З. Рибли Ферзевый гамбит

1.d4 Кf6 2.Kf3 e6 3.c4 d5 4.Кс3 с5 5.cd К:d5 6.e3 Кс6 7.Cd3 Ce7 8.0—0 0—0 9.a3 cd 10.ed Cf6 11.Ce4 Ксe7 12.Ke5 g6 13. Ch6 Cg7 14.C:g7 Кр:g7 15.Лс1 b6 16.К:d5. В позиции с изолированной пешкой у белых размены, как правило, входят в планы черных. Таким образом, белые как будто идут навстречу пожеланиям соперника. Но не спешите с выводами. 16...К:d5 17.С:d5 d5 18.Лс7 Сb7 19.Фg4. Белая ладья проникла на седьмую горизонталь, и это решает исход поединка. 19...Лad8 20.Лd1 a5 21.h4 Лс8 22.Лd7 Фе4 23.Фg5 Сс6 24.f3 Фf5 25.Ла7 Са4 26.Лe1 Лс2 27.b4 Сb3 28.ba ba 29.Лe4 h6 30.Фe3 Лb2 31.Лg4 g5 32.hg h5.

Действия белых настолько ясны и понятны, что комментарии не требуются. В сильном цейтноте Рибли придумал способ обострить ситуацию, но логика игры Смыслова достигнет полного торжества. 33.Лg3 h4 34.Лg4 h3 35.g6 h2+ 36.Кр:h2 Лh8+ 37.Кpg3 Л:g2+ 38.Кр:g2 Фс2+ 39.Фf2 Лh2+ 40.Кр:h2 Ф:f2+ 41.Крh3 Фf1+ 42.Лg2. Здесь партия была отложена, и у черных оставались надежды на вечный шах. Однако Рибли сдался без доигрывания, убившись при анализе, что максимум, на что может рассчитывать, это дватри крошечных g6:f7, Ла8 и f8Ф у черных нет.

После этой победы Смыслова судьба матча была практически решена — все оставшиеся встречи закончились ничью и Смыслов выиграл матч со счетом 6,5:4,5.

Конкурсные задания

9. Белые: Крd2, п. п. b4, d3; черные: Крf3, п. b5. Белые начинают и выигрывают.

10. Белые: Крe7, Лd4; черные: Крeб, п. d5. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 июля 1984 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 9, 10»)

По итогам шахматного конкурса 1984 года победителям будут присуждаться спортивные разряды: за 12 решений заданий (из 24) — третий разряд, за 16 — второй разряд.

Цена 40 коп.

Индекс 70465

В сентябре 1983 года во всем мире отмечалось 200-летие со дня смерти великого петербургского математика Леонарда Эйлера (1707—1783). Специально созданный Эйлеровский комитет при Академии наук ГДР провел приуроченную к этой дате научную конференцию с участием зарубежных математиков. К открытию конференции была выпущена памятная медаль из мейсенского фарфора (см. снимок ниже),

вышла в свет марка с портретом Эйлера и одной из наиболее знаменитых его формул $e-k+f=2$, конверты с факсимиле его подписи и тисненым портретом, были организованы специальные почтовые гашения. Такой конверт был прислан в редакцию А. Я. Халамайзером — участником конференции, посвященной памяти Эйлера.

