

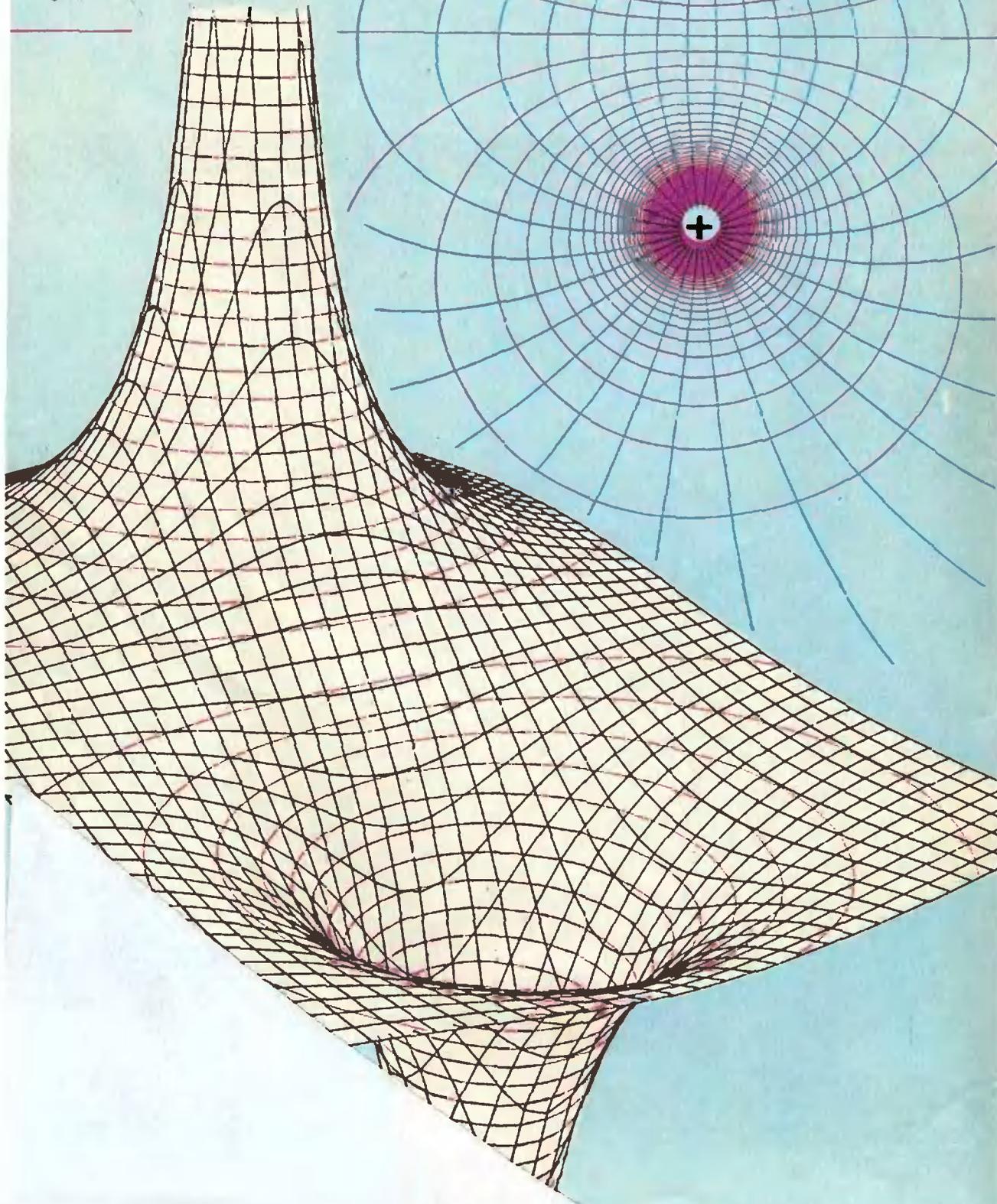
# Квант

**3**  
1984

*Научно-популярный физико-математический журнал  
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР*



Так выглядит картина электрического поля диполя, выполненная с помощью ЭВМ. Справа показана система силовых линий и линий равного потенциала в одной из плоскостей, проходящих через диполь. В центре изображена вспомогательная поверхность, построенная таким образом, что аппликаты (вертикальные координаты) ее точек соответствуют значениям потенциала в точках указанной выше плоскости.





Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

**В НОМЕРЕ:**

**IN THIS ISSUE:**

- 2 Я. Б. Зельдович. Вселенная  
10 Л. С. Понтригин. Кубическая парабола  
15 С. М. Рытов. Из предыстории радио

- Ya. B. Zeldovich. The universe  
L. S. Pontriagin. The cubic parabola  
S. M. Rytov. From the early history of radio

- 19 **Новости науки**  
А. Ю. Вайнтроб, А. Б. Сосинский. Доказа-  
тельство гипотезы Морделла

- Science news**  
A. Yu. Vaintrob, A. B. Sossinsky. Proof of the  
Mordell hypothesis

- 20 **Лаборатория «Кванта»**  
А. А. Боровой. Цвета рассеянного света

- Kvant's lab**  
A. A. Borovoy. Colors of diffuse light

- 22 **Спрашивайте—отвечаем**

- Questions and answers**

- 23 **Математический кружок**  
Ошибки в геометрических доказательствах

- Mathematics circle**  
Errors in geometric proofs

- 27 **Школа в «Кванте»**  
Физика 8, 9, 10  
33 И. А. Кушнир. Задачи-матрешки

- Kvant's school**  
Physics 8, 9, 10  
I. A. Kushnir. Problems and dolls

- 34 **«Квант» для младших школьников**  
Задачи  
35 А. Н. Колмогоров. Решето Эратосфена

- Kvant for younger school children**  
Problems  
A. N. Kolmogorov. Eratosthenes's sieve

- Задачник «Кванта»**  
36 Победители конкурса «Задачник «Кванта»  
37 Задачи М851—М855; Ф863—Ф867  
39 Решения задач М836—М840; Ф847—Ф851  
47 Из писем читателей  
49 Список читателей, приславших правильные  
решения

- Kvant's problems**  
Kvant contest prizewinners  
Problems M851—M855; P863—P867  
Solutions M836—M840; P847—P851  
From our readers's letters  
List of readers who have sent correct  
solutions

- 51 **Практикум абитуриента**  
В. В. Можаяв. Магнитное поле и магнитные  
силы

- College applicant's section**  
V. V. Mojaev. Magnetic field and magnetic  
forces

- 55 **Варианты вступительных экзаменов**

- College entrance examinations problems**

- 59 **Ответы, указания, решения**  
Смесь (35, 50)  
**Шахматная страничка**  
Перекрытые (3-я с. обложки)

- Answers, hints, solutions**  
Miscellaneous (35, 50)  
**The chess page**  
Interception (3rd cover page)

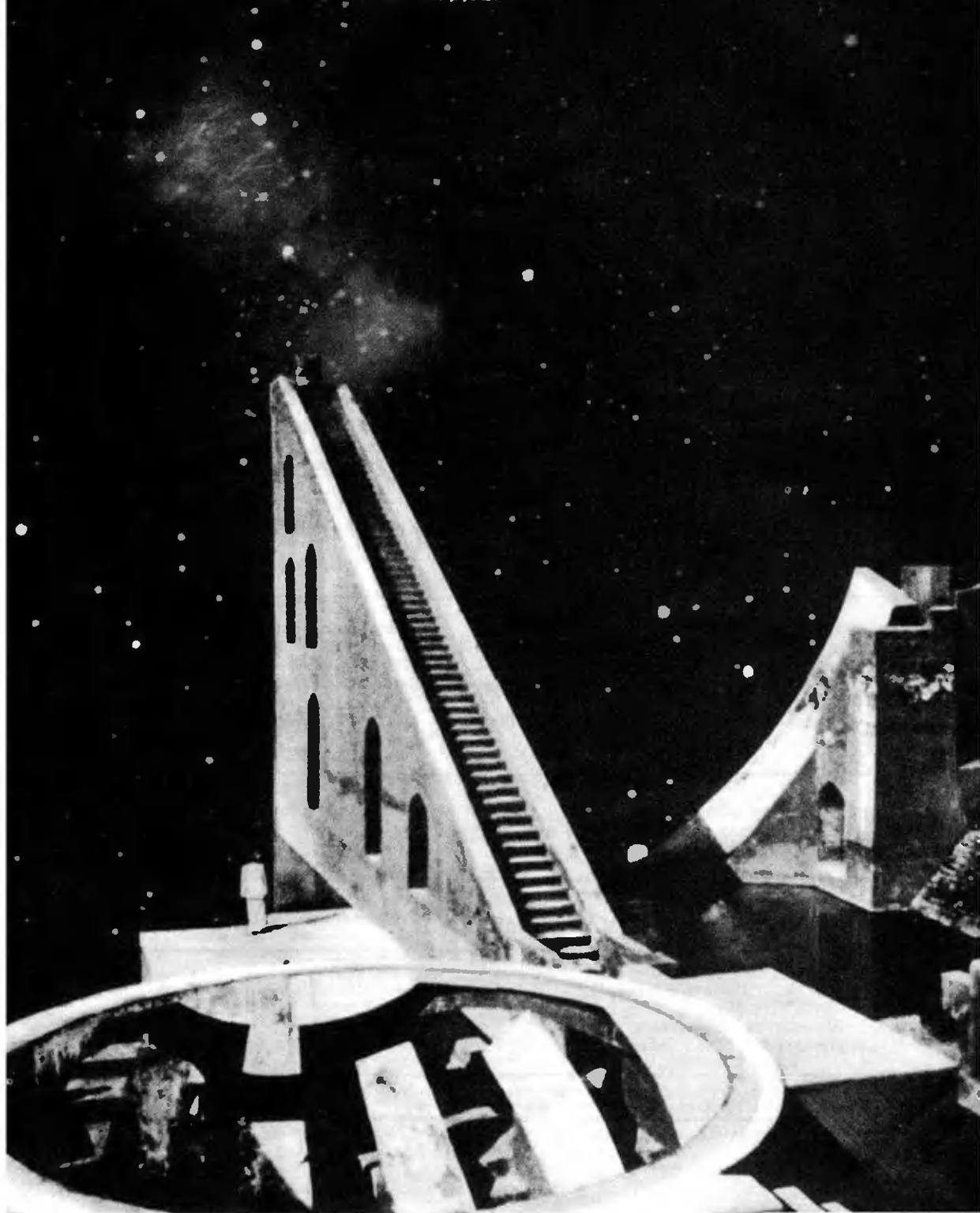
Фотография, построенная на первой странице обложки, сделана с борта станции «Салют-6» космонавтами Л. Поповым и В. Рязиним. Она служит прекрасной иллюстрацией к статье «Цвета рассеянного света», опубликованной в этом номере журнала.

Выдающемуся советскому физику-теоретику, лауреату Ленинской и Государственных премий СССР, трижды Герою Социалистического Труда академику Я.Б.Зельдовичу 8 марта 1984 года исполнилось 70 лет. Журнал "Квант" поздравляет Якова Борисовича с этим юбилеем. Нашим читателям мы предлагаем в этом номере статью Я.Б.Зельдовича, посвященную современной космологии.

# Вселенная

*Академик*

**Я.Б.ЗЕЛЬДОВИЧ**





*Иков Борисович Зельдович.*

Как устроена Вселенная? Каково её прошлое, настоящее и будущее?

Эти вопросы естественно появляются после того, как мы в общих чертах поняли, как устроена ближайшая наша окрестность, сначала земной шар, затем Солнце и вся Солнечная система, а потом и другие звезды, наша и другие галактики.

Космология — наука, исследующая Вселенную как целое, — пожалуй, самая трудная ветвь астрономии. За последние десятилетия достигнуты определенные успехи в понимании современного состояния и ряда этапов эволюции Вселенной. Эти успехи — результат работы многих людей, совместных усилий астрономов и физиков.

В настоящее время многое о Вселенной известно нам вполне достоверно. Перечислим основные факты.

1. Вселенная однородна. Это значит, что она везде одинакова, но «однородность», «одинаковость» нужно понимать в определенном статистическом смысле. Поясню примером: воздух в сосуде однороден. В каждом кубическом сантиметре одинаково число молекул кислорода и одинаково число молекул азота. Если же взять очень маленькие объемы, например, кубики с ребром  $3 \cdot 10^{-7}$  см, объем их примерно  $10^{-20}$  см<sup>3</sup>, то в них в среднем должна находиться одна молекула кислорода или азота. Значит, в каждый данный момент в каком-то одном или нескольких кубиках нет ни одной молекулы, в других — одна молекула N<sub>2</sub>, в третьих — одна

молекула O<sub>2</sub>, а может быть и две или три молекулы, одинаковых или разных. Однородность же проявляется только тогда, когда мы рассматриваем достаточно большие объемы.

Во Вселенной однородность проявляется в объемах (кубах) с характерным размером (ребром) больше 300 мегапарсеков (1 мегапарсек (Мпс) =  $10^6$  парсек (пс)  $\approx 3 \cdot 10^6 \cdot 10^{18}$  см =  $3 \cdot 10^{24}$  см).

Учтем, что 1 год  $\approx 3 \cdot 10^7$  с, а скорость света  $c = 3 \cdot 10^{10}$  см/с. Значит, за год свет проходит  $3 \cdot 10^{10} \cdot 3 \cdot 10^7$  см  $\approx 10^{18}$  см — такая единица длины называется световым годом; 1 парсек  $\approx 3$  световым годом. В космологии, как и в теоретической физике, часто пользуются этими единицами.

Однородность Вселенной в масштабах 300 Мпс и больших означает, что в любом кубе с таким ребром, где бы его ни «поместить» во Вселенной, будет заключено приблизительно одинаковое количество скоплений галактик; такие скопления представляют собой самые большие структурные единицы Вселенной и заменяют молекулы газа в приведенном выше примере. В масштабах же порядка 30 Мпс Вселенная неоднородна. Заметим, что масштабы  $\sim 300$  Мпс значительно меньше того расстояния, до которого можно исследовать Вселенную современными телескопами.

2. Как мы уже сказали, самой большой структурной единицей является во Вселенной скопление галактик. Большие скопления содержат тысячи галактик, их линейные размеры достигают нескольких мегапарсеков. Входящие в

скопления галактики состоят из сотен миллиардов звезд. Звезды же состоят из горячего газа, образованного атомными ядрами и электронами. Небольшая часть газа находится в пространстве между звездами. Если взять достаточно большой объем во Вселенной и поделить общее количество вещества в нем на объем, то получим среднюю плотность. Средняя плотность вещества во Вселенной заключена между  $10^{-30}$  и  $10^{-31}$  г/см<sup>3</sup>. Большой объем надо было взять для того, чтобы случайно не попасть на область, где вещества намного больше или меньше, чем в среднем.

Атомные ядра состоят, как мы знаем, из протонов и нейтронов (в свою очередь протоны и нейтроны состоят из кварков, но это сейчас для нас несущественно). Среди ядер больше всего во Вселенной свободных протонов, то есть ядер водорода. Их примерно 70 % от общего числа нуклонов (протонов и нейтронов). Около 15 % протонов связаны в других ядрах, главным образом в ядрах гелия. И наконец, ~15 % составляют нейтроны, также связанные в ядрах. Всего гелия во Вселенной приблизительно 25—28 %. На ядра тяжелых элементов остается всего лишь около 2 % нуклонов.

Плотность электронов (число штук в 1 см<sup>3</sup>) равна плотности протонов, так что электрические заряды их уравновешивают друг друга. В среднем Вселенная электронейтральна. Протоны и нейтроны имеют приблизительно одинаковую массу  $1,67 \cdot 10^{-24}$  г, масса электрона намного меньше, она равна  $9,1 \times 10^{-28}$  г. Понятно теперь, что среднее (для больших объемов!) число нейтронов и протонов в 1 см<sup>3</sup> можно оценить, поделив  $(10^{-30} \div 10^{-31})$  г/см<sup>3</sup> на  $1,67 \cdot 10^{-24}$  г. Оказывается, что в 1 см<sup>3</sup> во Вселенной в среднем  $6 \cdot (10^{-7} \div 10^{-8})$  нуклонов. Другими словами, один нуклон (протон или нейтрон) приходится в среднем на несколько кубических метров!

Подчеркием еще раз, что внутри тех больших объемов, о которых мы говорили, вещество распределено крайне неравномерно. Например, в центре нашего Солнца плотность около 100 г/см<sup>3</sup>, в  $(10^{32} \div 10^{33})$  раз больше средней. Существуют и гораздо более плотные звезды, плотность в центральных областях нейтронных звезд  $\sim 10^{14}$  г/см<sup>3</sup>. И в то же время между галактиками плотность вещества меньше средней.

3. Вселенная заполнена первичным радионизлучением с длинами волн от 1 метра до 1 миллиметра. Это излучение называют еще реликтовым, потому что оно сохранилось от самых первых стадий эволюции Вселенной. Оно не связано с какими-либо источниками, например, со звездами или с радиогалактиками.

Читатели «Кванта» знают, что излучение можно рассматривать как поток частиц — квантов электромагнитного поля, иначе их называют фотонами. Поэтому можно не только говорить о потоке и плотности энергии излучения, но и подсчитать число фотонов, находящихся в данный момент в единице объема.

Оказывается, что это число велико — 500 фотонов в 1 см<sup>3</sup>. Средняя энергия фотона  $1,6 \cdot 10^{-15}$  эрг =  $1,6 \cdot 10^{-22}$  Дж. Общая энергия всех фотонов в единице объема около  $8 \cdot 10^{-13}$  эрг/см<sup>3</sup> =  $8 \times 10^{-14}$  Дж/м<sup>3</sup>. Для сравнения со средней плотностью вещества во Вселенной выразим энергию фотонов через массу. Воспользуемся для этого формулой Эйнштейна  $E = mc^2$ . Тогда соответствующая «фотонная плотность массы» равна

$$8 \cdot 10^{-13} \text{ эрг/см}^3 : (3 \cdot 10^{10} \text{ см/с})^2 \approx \\ \approx 8 \cdot 10^{-34} \text{ г/см}^3.$$

Итак, по порядку величины «фотонная плотность массы»  $10^{-33}$  г/см<sup>3\*</sup>.

Вырисовывается любопытная картина: по числу штук фотонов гораздо больше, чем протонов, нейтронов и электронов. Если же вести подсчет плотности, то есть массы в единице объема, то протоны и нейтроны в 100 или 1000 раз превосходят фотоны (излучение).

Хочется сравнить ситуацию со слонами в лесу, где есть также муравьи: число слонов меньше числа муравьев, но они тяжелее, и общая масса всех слонов больше массы всех муравьев. Однако это сравнение неточное. Фотоны не муравьи, они не сидят в муравейниках, они со скоростью света летают во всех направлениях и нигде не собираются в кучи или стаи — именно потому, что они «легкие»; про-

\* Говоря о массе фотона, мы имеем здесь в виду определенное формулой Эйнштейна соответствие массы и энергии; напомним, что масса покоя фотона равна нулю. Энергия фотона  $\epsilon$ , его импульс  $p$  и масса  $m$  связаны формулой:  $\epsilon = pc^2 = \text{ср}$ . Буквами  $E$  и  $m$  мы обозначаем в тексте соответственно суммарную энергию и массу всех фотонов в 1 см<sup>3</sup>.

тоны и нейтроны — «тяжелые», поэтому силы тяготения собирают их в плотные кучи — планеты, звезды, галактики.

Подсчет числа реликтовых фотонов совершается с помощью радиотелескопов. Технически это довольно трудная задача, так как на Земле есть много фотонов местного, земного и солнечного происхождения. Преодолев все эти трудности, радиоастрономы измерили общий поток фотонов реликтового излучения. Он оказался равным  $1,3 \cdot 10^{19}$  (см<sup>2</sup> · с · стер)<sup>-1</sup>. Отсюда и была вычислена указанная выше концентрация реликтовых фотонов во Вселенной.

Есть основания считать, что кроме фотонов Вселенную пронизывают и другие частицы, в частности, нейтрино и антинейтрино разных сортов. Если масса покоя нейтрино равна нулю, то их вклад в суммарную плотность примерно равен вкладу в плотность от излучения. Однако даже очень малая масса покоя одного из видов нейтрино (в 25 000 раз меньше массы покоя электрона) радикально изменила бы наши представления о средней плотности вещества во Вселенной.

Современная физика уже вполне охотно приписывает нейтрино малую массу покоя, хотя и не дает определенного числа. В свою очередь астрономы приводят доводы в пользу того, что масса галактик и скоплений галактик больше массы содержащегося в них обычного вещества. Предполагается, что существует еще какая-то «скрытая» масса, которая обнаруживается только по той силе тяготения, которую она создает.

4. Вселенная не остается все время в одном и том же состоянии — она эволюционирует. Об этом можно судить, измеряя скорость движения далеких галактик. Наблюдения показывают, что далекие галактики удаляются от нас со скоростью  $u$ , пропорциональной расстоянию  $r$  до них. Формула  $\vec{u} = H\vec{r}$  выражает знаменитый закон Хаббла. Коэффициент пропорциональности  $H$  называется постоянной Хаббла и приблизительно равен 50 (км/с)/Мпс. Отметим здесь же, что название «постоянная» указывает в этом случае только на независимость  $H$  от величины и направления вектора  $\vec{r}$ . В то же время  $H$  зависит от времени.

Для того чтобы установить этот закон, нужно было научиться определять скорости движения галактик и расстояния, на которых они находятся.

Принцип определения скорости таков. Излучение галактик содержит спект-

ральные линии, принадлежащие определенным химическим элементам (вспомните, например, «желтую линию» натрия, которую вы видите, когда поваренная соль NaCl попадает в пламя газовой горелки). Законы физики везде одинаковы. Длина волны определенной линии в момент излучения —  $\lambda_{изл}$  одинакова на Земле и в любой самой далекой галактике. Если источник удаляется, то согласно эффекту Доплера покоящийся наблюдатель будет принимать излучение, смещенное к красному концу спектра, другими словами, длина волны для наблюдателя  $\lambda_{набл}$  увеличится. Относительная величина смещения в космологии обозначается буквой  $z$  и определяется формулой

$$z = \frac{\lambda_{набл} - \lambda_{изл}}{\lambda_{изл}}$$

Для случая, когда скорость  $u$  много меньше скорости света  $c$ ,  $z \approx u/c$ . В случае же, когда скорость  $u$  приближается к  $c$ , формула, связывающая  $u$  и  $z$ , становится более сложной, но нам она не потребуется.

Понятно поэтому, что измеряя смещение спектральных линий в спектрах небесных тел и галактик, можно вычислить их скорость удаления (так называют компоненту скорости, направленную вдоль «луча зрения»\*)).

Эффект Доплера дает возможность не только измерять скорость удаляющихся от нас галактик, но «работает» и на автомобильных дорогах. Автоинспекторы вооружены специальным прибором — «пистолетом», измеряющим скорость приближающихся или удаляющихся автомашины. В отличие от космических объектов, автомашины сами не излучают, а лишь отражают электромагнитный импульс, испускаемый «пистолетом». Подумайте, как это влияет на величину эффекта Доплера?

А как же определить расстояния до галактик? Эта задача — одна из самых важных и самых трудных в космологии.

Говорят, что нужно иметь «стандартный метр» или «стандартную свечу». Это означает следующее.

Если есть далекий объект с известным размером  $d$  («метр»; не надо, конечно, отождествлять его с единицей длины в системе СИ) и если можно измерить угол  $\theta$ , под которым этот объект виден, то  $d = r\theta$ , а значит,  $r = d/\theta$ .

Представим себе другую возможность. Будем считать, что известна светимость удаленного объекта («свеча»). Пусть этот объект испускает  $L$  единиц энергии в секунду; тогда поток

\*Об эффекте Доплера см. статью Я. Смородицкого и А. Урнова — «Квант», № 8, 1980, с. 12—17

энергии от такого источника, падающей на единицу поверхности земного приемника

$$F = L / (4\pi r^2), \quad \text{откуда} \quad r = \sqrt{L / 4\pi F}.$$

Астрономы, изучая и классифицируя сравнительно близкие к нам объекты, нашли среди них такие, светимость и размеры которых хотя бы приблизительно известны. Это позволило найти расстояния до аналогичных объектов, находящихся далеко.

Сопоставляя расстояния со смещениями спектральных линий, астрономы установили закон Хаббла и нашли постоянную  $H$ .

С другой стороны, когда постоянная Хаббла  $H$  уже известна, измерение расстояний может быть сведено к определению скорости  $u$  (или смещения  $z$ ).

Разумеется, у нас нет никаких оснований думать, что мы занимаем какое-то выделенное положение во Вселенной. Естественно поэтому, что наблюдатель в любой другой галактике тоже увидит картину убегающих удаленных от него галактик. Относительная скорость любых двух галактик пропорциональна расстоянию между ними. Именно это утверждение следует из закона Хаббла (проверьте!).

5. Большой взрыв. Процесс разбегания галактик заключается в увеличении со временем расстояний между ними. Можно задать вопрос — когда это движение началось?

Определить момент, когда все галактики находились «в одном и том же месте» («в точке»), совсем просто, если предположить, что скорость  $u$  удаления от нас каждой галактики остается постоянной с течением времени. Достаточно для этого разделить сегодняшнее расстояние  $r$  на скорость  $u$ . Получим:

$$t = \frac{r}{u} = \frac{r}{Hr} = \frac{1}{H} = 20 \text{ млрд лет.}$$

Предположение о постоянстве  $u$  не противоречит закону Хаббла: хотя расстояние  $r$  увеличивается со временем,  $H$ , как уже упоминалось выше, тоже зависит от времени.

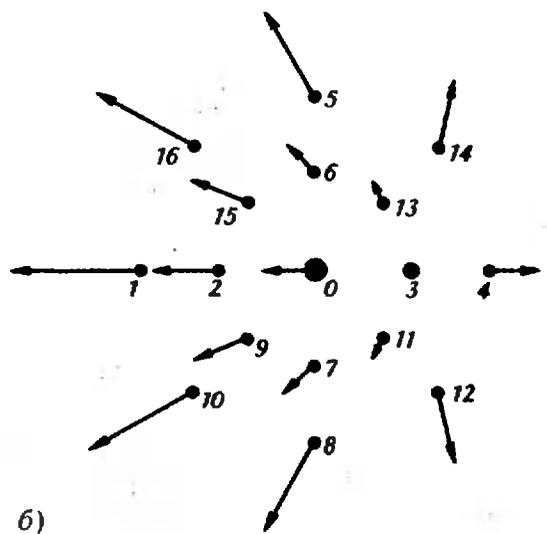
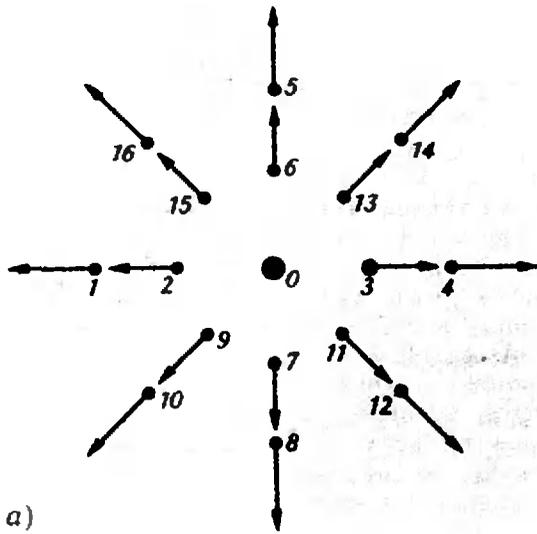
Более аккуратные рассуждения показывают, что скорость удаления каждой галактики к тому же уменьшается с течением времени. Причина этого в том, что галактикам приходится преодолевать силы тяготения, действующие на них со стороны остальных галактик. Это приводит к тому, что в действительности время, прошедшее с начала расширения (возраст Вселенной), ока-

зывается ближе к  $t_0 = \frac{2}{3} \frac{1}{H} \approx 13$  млрд лет. (Вычисляя возраст, мы подставляем в формулы сегодняшнее значение постоянной Хаббла  $H$ , раньше величина этой постоянной была больше.)

Итак, твердо установлено, что около 13 миллиардов лет тому назад произошел Большой взрыв. Более того, прослежена последовательность событий, начинающихся с расширения очень плотного вещества. Это вещество было и очень горячим, поэтому принято говорить о теории «горячей» Вселенной. Расширение сопровождается не только уменьшением плотности, но и понижением температуры. На основе известных нам законов физики можно надежно проследить, какие процессы происходили во Вселенной начиная с того момента, когда температура вещества составляла около  $10^{13}$  градусов, плотность  $10^{33}$  г/см<sup>3</sup>, давление  $10^{54}$  дин/см<sup>2</sup> =  $10^{53}$  Н/м<sup>2</sup>  $\approx 10^{48}$  атм. При этих условиях вещество представляло собой «суп» из всевозможных частиц и античастиц. «Тяжелые» частицы и античастицы в основном аннигилируют, «выживают» кванты электромагнитного излучения (фотоны) и нейтрино. Количество вещества в «супе» ненамного превосходило количество антивещества. Поэтому выживает и небольшое (по сравнению с фотонами и нейтрино) количество протонов, нейтронов и электронов. Выжившие нейтроны с частью протонов соединяются в ядра гелия. Гораздо позже (через 300 000 лет) протоны и ядра гелия соединяются с электронами, превращаясь в нейтральные атомы. Расчетное количество образующегося гелия хорошо совпадает с тем, которое наблюдается. Это укрепляет нашу уверенность в правильности теории горячей Вселенной.

Общее расширение между тем продолжается. Фотоны остаются равномерно распределенными в пространстве и до настоящего времени. Они-то и образуют уже упоминавшийся выше космический фон радионизлучения — реликтовое излучение.

Атомы же, наряду с общим расширением, образуют местные «сгущения» — звезды, квазары, галактики, скопления галактик. Тяжелые элементы рождаются позже — в процессах ядерного горения в звездах. При взрывах звезд они выбрасываются и начинают свое путешествие внутри галактик, часть их попадает в звезды второго



Для иллюстрации закона Хаббла на рисунке а) показано распределение скоростей убегающих галактик с точки зрения наблюдателя, находящегося в нашей Галактике (0). На рисунке б) приведено распределение скоростей тех же галактик, но с точки зрения наблюдателя, находя-

щегося в галактике 3. Стрелки, изображающие скорости, на обоих рисунках направлены от наблюдателя, и их длины пропорциональны расстояниям от наблюдателя до соответствующей галактики.

поколения (Солнце!) и в планеты (Земля!). Общее число атомов тяжелых элементов, однако, невелико (см. выше).

Такова история эволюции Вселенной в самом кратком очерке. Уверенность в том, что эта картина эволюции в целом правильна, не исключает необходимости дальнейшей трудной работы, в ходе которой возможны и открытия, и ошибки.

Необходимо, например, подробно исследовать последнюю стадию, связанную с образованием отдельных небесных тел и галактик и с их расположением в пространстве. Один из центральных вопросов космологии — это вопрос о том, какова сегодняшняя структура Вселенной и как эта структура образовалась. Сюда же относятся вопросы о происхождении скоплений и сверхскоплений галактик. Ответы на эти вопросы зависят от начальной малой неоднородности плотности, которую потом тяготение усиливало.

Усиление неоднородности плотности проявляется в сгущении, сжатии газообразного вещества. В трехмерном пространстве «газовое облако» могло бы сжиматься в каждом из трех взаимно перпендикулярных направлений. Однако одновременное сильное сжатие вдоль двух или трех осей — явление нехарактерное. Как правило, сжатие каждого «облака» происходит в одном выделенном направлении. Такой про-

цесс приводит к образованию тонких слоев, их называют «блинами». Плотность вещества внутри этих слоев увеличивается по мере их сжатия. При падении новых порций газа на уже образовавшиеся «блины» они разогреваются и разрастаются в направлении своей плоскости. На более поздних стадиях «блины» начинают пересекаться. В результате формируется сложная ячеистая структура, напоминающая пчелиные соты. В этой структуре слои сжатого газа окружены областями, где газа практически нет. Размеры отдельных ячеек достигают сотни меганарсеков, а их «стенки» образуются сильно уплощенными сверхскоплениями. Именно в «блинах» происходит рождение отдельных звезд, галактик и их скоплений.

Образование структуры описывается уравнением, определяющим положение частиц вещества в произвольный момент времени  $t$ . Если задавать положение частицы в некоторой системе отсчета вектором  $\vec{x}$ , то уравнение имеет вид:

$$\vec{x} = t^{2/3} \vec{x} + t^{4/3} \vec{v}(\vec{x}).$$

Здесь  $\vec{x}$  — вектор, определяющий начальное положение частицы (при  $t=0$ ). Первое слагаемое в правой части этого уравнения описывает общее расширение Вселенной. Функция  $\vec{v}(\vec{x})$  задает начальные возмущения для частицы, которой соответствует вектор  $\vec{x}$ , а второе слагаемое в целом характеризует рост возмущений со временем. Векторы  $\vec{x}$  и  $\vec{v}(\vec{x})$  таковы, что размерности обоих слагаемых в правой части уравнения совпадают с размерностью вектора  $\vec{x}$  (понятно, что

при такой записи размерность  $\vec{x}$  не совпадает с размерностью  $\vec{X}$ ). Анализ написанного уравнения требует в общем случае сложных расчетов на современных вычислительных машинах.

Попробуйте сами проанализировать более простой случай, когда мы имеем дело со свободным движением вдоль одной прямой:

$$X = x + tv(x).$$

Здесь  $X$  — положение частицы в произвольный момент времени,  $x$  — начальное положение частицы,  $v(x) = v_0 \sin kx$  — начальное возмущение. Найдите распределения частиц, их скоростей и плотности по оси  $X$  в различные моменты времени  $t$ . Начальную плотность (при  $t=0$ ) можно считать постоянной. Заметьте, что в этом случае размерности  $x$  и  $X$  совпадают,  $v(x)$  имеет смысл скорости.

Проблема структуры тесно связана с тем, какие еще частицы (кроме атомных ядер, электронов, фотонов) содержатся во Вселенной и определяют ее среднюю плотность. Проблема «скрытой массы», уже упоминавшаяся выше, как и проблема структуры Вселенной, требует еще очень большой работы астрономов-наблюдателей. Нужно также, чтобы физики, занимающиеся элементарными частицами, закончили составление полного каталога частиц с указанием их масс и других свойств.

Есть и другая сторона вопроса: что из себя представляет вся Вселенная, Вселенная как целое? Общая теория относительности Эйнштейна говорит о том, что геометрия пространства не подчиняется законам Евклида. Пространство в целом может быть замкнутым, иметь ограниченный объем и в то же время не иметь границ. Говоря про такую возможность, всегда пользуются двумерной аналогией: поверхность шара имеет вполне определенную площадь ( $4\pi R^2$ ), она замкнута, но не имеет границ, все ее точки равноценны. Вместе с тем, малая часть сферы по своим геометрическим свойствам очень близка к малой части плоскости. Ответ на вопрос о том, замкнута ли Вселенная, тоже связан с тем, как велика «скрытая масса».

Подчеркнем еще раз, что решение всех этих сложных задач не изменит в целом того сценария расширения, который был изложен выше.

Существуют еще и более глубокие и трудные вопросы о том, что представляет собой начальное состояние с высокой температурой и плотностью, откуда оно взялось, почему Вселенная расширяется.

Мы говорили выше о Большом взрыве. Но Большой взрыв Вселенной очень

не похож на взрыв даже самой большой бомбы. Заряд из обычного взрывчатого вещества в результате химической реакции превращается в газ с давлением в сотни тысяч атмосфер. Этот газ окружен воздухом с давлением в одну атмосферу. Разность давлений газа и окружающей атмосферы представляет собой ту силу, которая вызывает движение газа и окружающего воздуха, расширение газа и весь комплекс явлений, который называется взрывом.

Между тем в Большом взрыве Вселенной с хорошей точностью плотность, температура и давление одинаковы во всех точках пространства в один и тот же момент времени.

Большой взрыв — результат определенного начального распределения скоростей в горячем веществе. Разлет частиц происходит по инерции. Высокое давление отнюдь не ускоряет разлет, а силы тяготения даже замедляют его. С самого начала *относительная* скорость разлета любых двух малых объемов вещества пропорциональна расстоянию между ними, другими словами, с самого начала «работает» закон Хаббла. Для объяснения всего того, что происходит позже, в теории Большого взрыва нужны очень специфические начальные условия.

Только в последние годы наметились ответы на вопросы о том, как же получаются эти начальные условия, что приводит к расширению Вселенной. Ответы эти связаны с тем, что современная теория допускает возможность существования состояния с отрицательным давлением, а в этом состоянии гравитационные силы вызывают отталкивание вместо обычного притяжения. Тем, кто не захочет поверить мне на слово, а пожелает проверить это утверждение, придется сначала серьезно изучить общую теорию относительности.

Мы коснулись в этой статье только некоторых вопросов, связанных с историей и эволюцией Вселенной. Законченная теория возникновения Вселенной пока еще не создана, космология при всех ее успехах отнюдь еще не завершена. Она имеет определенные хорошо сформулированные проблемы, ожидающие систематической исследовательской работы. Чтобы развивать космологию дальше, необходимы более совершенные наблюдения, прогресс физической теории и большая научная смелость.

\* \* \*

По моим приближенным расчетам, вы, мои читатели в 4 — 5 раз моложе меня. На языке космологии вы находитесь «на другой стадии эволюции». Поэтому позвольте дать вам несколько советов.

1) Учитесь постановке задач. Учитесь этому всегда и везде. Почти любое явление в жизни, в природе, в быту может быть источником «задач», источником размышления.

Падение капли воды, ожидание автобуса, полет палки, мелькание двух оград, цвет пленки масла на воде... Еще Козьма Прутков сказал: «Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые; иначе такое бросание будет пустою забавою».

Экзамены и олимпиады нацелены на решение задач, которые перед вами ставят другие. Открытия — большие или маленькие — это, как правило, постановка задач.

2) Физика неотделима от математики. Только на языке математики можно формулировать законы физики. Мой взгляд на то, как учить высшую математику, изложен в предисловии к моей книге «Высшая математика для начинающих». Недавно вышла книга И. М. Яглома и моя с близким названием, более толстая, скорее нацеленная на педагога, а не на учащегося. В этих книгах дано много конкретных примеров задач, доступных школьникам\*).

3) Занимайтесь самообразованием. Ищите задачи и решайте их — в одиночку, а еще лучше вдвоем. Если Ваш партнер сильнее Вас, он Вас многому научит. Если Ваш партнер слабее, то ведя его за собой, обучая его, Вы лучше и глубже поймете вопрос сами.

4) Чередуйте приобретение знаний и приложение знаний к решению интересующих Вас вопросов. Более того, попробуйте учению придать характер открытия, научной работы. Можно взять главу учебника и подробно, шаг за шагом, страницу за страницей формулу за формулой добросовестно прочесть, понять и разобраться в материале. Но можно поступить иначе: бегло проглядеть главу, понять — хотя бы очень приблизительно — о чем идет речь, какие задачи

ставятся и решаются в данной главе. Потом отложить учебник и попытаться самому придумать решение или восстановить ход доказательства. Помучившись несколько дней, возьмите учебники и посмотрите уже внимательно — правилен ли был тот подход, который Вы нашли сами, или — в другом случае — как в учебнике преодолены те трудности, с которыми Вы столкнулись, но не справились.

Время, затраченное на поиски пути, не потеряно. Если Вы придумаете сами что-то, науке уже известное, Вы будете это знать лучше, чем если бы то же самое узнали пассивно. Пройдут годы — и Вы будете открывать новое так, как сейчас Вы открываете для себя то, что уже известно. Но даже если Вы и не нашли ответ, все равно Вы лучше поняли трудности вопроса, лучше оценили то, что написано в учебнике.

Будущий физик (или вообще ученый) уже в школьные годы не должен ограничиваться классными занятиями, стандартной программой и стабильными учебниками.

Я пишу обо всем этом, вспоминая свои школьные годы, непростые, но вдохновляющие.

Учитесь творить! И всем тем, кто становится на этот трудный путь, я от всей души желаю успеха.

#### Что читать о Вселенной и космологии:

1. Зельдович Я. Б. Современная космология. Природа, 1983, № 9.
2. Силк Дж. Большой взрыв. М.: Мир, 1982.
3. Вайнберг С. Первые три минуты. Современный взгляд на происхождение Вселенной. М.: Энергоиздат, 1981.
4. Климишин И. А. Релятивистская астрономия. М.: Наука, 1983.
5. Гуревич Л. Э., Чернин А. Д. Происхождение галактик и звезд. М.: Наука, 1983.
6. Долгов А. Д., Зельдович Я. Б. Вещество и антивещество во Вселенной. Природа, 1982, № 8.
7. Энциклопедический словарь юного астронома. М.: Педагогика, 1980.
8. Физика космоса. Маленькая энциклопедия. М.: Сов. энциклопедия, 1976.
9. Зельдович Я. Б. Почему расширяется Вселенная. Природа, 1984, № 2.

\* Зельдович Я. Б. Высшая математика для начинающих и ее приложения к физике. 5-е изд. М.: Наука, 1970; Зельдович Я. Б., Яглом И. М. Высшая математика для начинающих физиков и техников. М.: Наука, 1982.

# Кубическая парабола

Академик Л. С. ПОНТЯГИН

Для понимания этой статьи нужно уметь вычислять производную многочлена и знать теорему о том, что если функция  $f(x)$ , заданная на отрезке  $a_1 \leq x \leq a_2$ , имеет положительную производную на интервале  $a_1 < x < a_2$ , при этом быть может имеет производную равную нулю в концах отрезка, то она возрастает на всем отрезке  $a_1 \leq x \leq a_2^*$ ). Так что для двух точек  $x_1, x_2$ , удовлетворяющих условию

$$a_1 \leq x_1 < x_2 \leq a_2 \quad (1)$$

имеет место неравенство

$$f(x_1) < f(x_2). \quad (2)$$

Аналогичная теорема имеет место так-

\*) «Алгебра и начала анализа 9–10», п. 25.

же и для убывания функции в случае отрицательной производной.

Кроме того нужно знать, что такое вторая и третья производные функции  $f(x)$ . Вторая производная  $f''(x)$  есть производная от производной функции  $f'(x)$ , то есть задается формулой

$$f''(x) = (f'(x))'. \quad (3)$$

Третья производная  $f'''(x)$  функции  $f(x)$  есть производная от второй производной, то есть задается формулой

$$f'''(x) = (f''(x))'. \quad (4)$$

Статья посвящена изучению графика функции

$$y = g(x) = x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3. \quad (5)$$

Этот график называется *кубической параболой*.

Рассмотрим прежде всего кубическую параболу частного вида

$$y = f(x) = x^3 - px, \quad (6)$$

где  $p$  — постоянная. График этой функции (рис. 1) обозначим через  $L$ .

Отметим прежде всего совершенно специальные, но очень заметные свойства кубической параболы (6). Кубическая парабола центрально симметрична относительно начала координат. В самом деле, если точка  $(x, y)$  принадлежит кубической параболе, то есть величины  $x$  и  $y$  удовлетворяют уравне-



нию (6), то точка  $(-x, -y)$  также удовлетворяет этому уравнению. Именно, имеем

$$(-y) = (-x)^3 - p(-x). \quad (7)$$

Таким образом, наряду с точкой  $(x, y)$  к линии  $L$  принадлежит и симметричная к ней относительно начала координат точка  $(-x, -y)$ .

Найдем, далее, точки пересечения линии  $L$  с осью абсцисс, то есть корни уравнения

$$x^3 - px = 0. \quad (8)$$

Уравнение это имеет три корня

$$x = 0, x = \pm\sqrt{p}. \quad (9)$$

Последние два корня при  $p < 0$  мнимые и потому не имеют обычного геометрического смысла. При  $p > 0$  все три корня (9) различны, и, следовательно, имеются три точки пересечения линии  $L$  с осью абсцисс. При  $p = 0$  три корня сливаются в один трехкратный корень  $x = 0$ .

Производная функции (6) задается формулой

$$f'(x) = 3x^2 - p. \quad (10)$$

Изучая знак этой функции при различных значениях  $x$ , мы можем разбить линию  $L$  на участки возрастания и убывания функции  $f(x)$  и найти точки максимума и минимума. Для той и другой цели нам следует найти корни уравнения

$$f'(x) = 3x^2 - p = 0. \quad (11)$$

При отрицательном  $p$  функция  $f'(x)$  (см. (10)) положительна при любом значении  $x$  и, следовательно, функция  $f(x)$  возрастает на всем протяжении изменения  $x$ :  $-\infty < x < \infty$ .

При  $p = 0$  функция  $f'(x)$  (см. (10)) положительна при всех значениях  $x \neq 0$ . Таким образом, она возрастает при  $-\infty < x < 0$ ,  $0 < x < \infty$ . А так как на первом из этих участков функция  $f(x)$  отрицательна, на втором положительна, то она возрастает на всем протяжении изменения от  $-\infty$  до  $\infty$ .

В точке  $x = 0$ , где  $f'(x) = 0$ , функция  $f(x)$  также возрастает. Таким образом, при  $x = 0$ , где  $f'(x) = 0$ , функция  $x^3$  не имеет ни максимума, ни минимума.

В случае положительного  $p$  уравнение (11) имеет два корня

$$x_1 = -\sqrt{p/3}, x_2 = \sqrt{p/3}. \quad (12)$$

Следует проверить, не имеет ли функция  $f(x)$  в точках  $x_1$  и  $x_2$  максимумов или минимумов. Те же точки  $x_1$  и  $x_2$  разбивают все протяжении изменения  $x$  на участки:

$$-\infty < x < x_1, x_1 < x < x_2, x_2 < x < \infty. \quad (13)$$

На первом из этих участков функция  $f'(x)$  положительна, на втором — отрицательна, на третьем — вновь положительна. Таким образом, функция  $f(x)$  возрастает на первом участке, убывает на втором и возрастает на третьем. Отсюда же видно, что точка  $x_1$  есть точка максимума, а точка  $x_2$  — точка минимума. Таким образом, кубическая парабола (6) имеет три существенно различные формы в зависимости от значения  $p$ : первая  $p < 0$ , вторая  $p = 0$ , третья  $p > 0$ . На рисунке 1 кубическая парабола изображена во всех трех случаях.

Рассмотрим уравнение

$$x^3 - px = c. \quad (14)$$

Геометрически ясно, что при  $p < 0$  это уравнение имеет лишь один действительный корень. При  $p = 0$  это уравнение имеет также лишь один действительный корень, за исключением случая  $c = 0$ , когда имеется тройной корень  $x = 0$ . Если  $p > 0$ , уравнение (14) имеет три корня при

$$f(x_2) \leq c \leq f(x_1), \quad (15)$$

причем в крайних положениях значе-

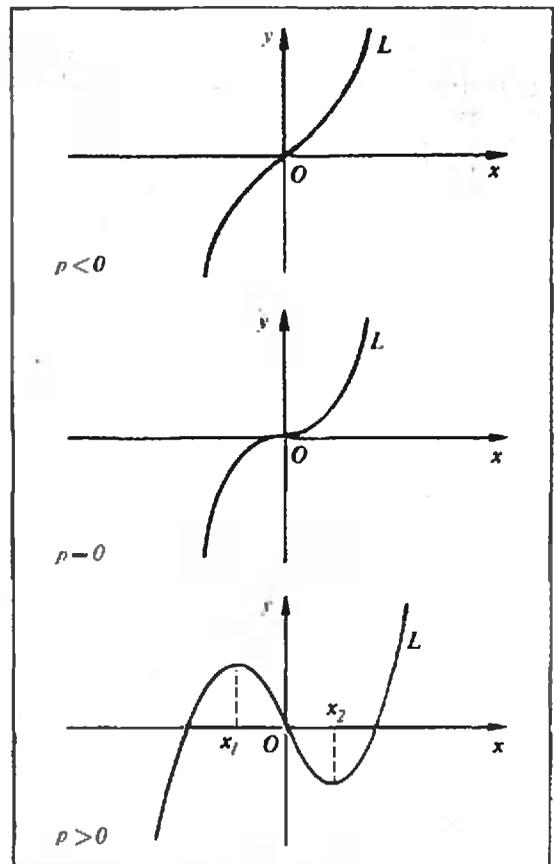


Рис. 1.

ния  $s$  на отрезке (15) имеется один простой и один двойной корень. Вне отрезка (15) имеется лишь один действительный корень уравнения (14).

Кубическая парабола (6) всегда проходит через начало координат. Тангенс угла наклона ее в начале координат определяется формулой

$$f'(0) = -p. \quad (16)$$

Таким образом, сама касательная имеет уравнение

$$y = k(x) = -px. \quad (17)$$

Эта касательная разбивает всю плоскость на две части: верхнюю, лежащую над ней, и нижнюю, лежащую под ней. Произвольная точка  $(x^*, y^*)$  плоскости лежит над прямой (17), если

$$y^* > -px^*. \quad (18)$$

Точка  $(x^*, y^*)$  лежит под прямой (17), если

$$y^* < -px^*. \quad (19)$$

Выясним, в какой из рассмотренных двух полуплоскостей лежит точка  $(x, y)$  кубической параболы, то есть точка, удовлетворяющая уравнению (6). Для выяснения этого вопроса мы должны сравнить величину

$$x^3 - px \quad (20)$$

с величиной

$$-px. \quad (21)$$

Ясно, что при  $x < 0$  величина (20) меньше величины (21), а при  $x > 0$  величина (20) больше величины (21). При  $x < 0$

точка  $(x, y)$  кубической параболы удовлетворяет условию (19), то есть лежит под касательной, а при  $x > 0$  эта точка удовлетворяет условию (18), то есть лежит над касательной. Следовательно, в начале координат кубическая парабола переходит с одной стороны касательной на другую ее сторону.

Явление перехода линии с одной стороны касательной на другую вблизи точки касания имеет общий интерес. Займемся этим явлением.

**Точка перегиба.** Пусть  $L$  — график некоторой функции  $f(x)$ ,  $a$  — некоторая точка линии  $L$  с абсциссой  $x_0$ .  $K$  — касательная к  $L$  в точке  $a$  (рис. 2). Если линия  $L$  переходит в точке  $a$  с одной стороны касательной на другую, то точка называется *точкой перегиба* линии  $L$ . Оказывается, что для точки перегиба выполнено условие (см. (3))

$$f''(x_0) = 0. \quad (22)$$

Докажем это утверждение. Уравнение касательной  $K$  мы можем записать в виде

$$y = K(x) = f'(x_0) \cdot x + y_0. \quad (23)$$

Здесь  $f'(x_0)$  есть тангенс угла наклона касательной к оси абсцисс, а  $y_0$  — некоторая константа, которая определяется условием

$$f(x_0) - K(x_0) = 0. \quad (24)$$

Это условие выражает тот факт, что касательная в точке  $a$  к линии  $L$  проходит через точку  $a$ . Рассмотрим функцию

$$h(x) = f(x) - K(x). \quad (25)$$

Эта функция удовлетворяет следующим двум условиям

$$h(x_0) = 0, \quad h'(x_0) = 0. \quad (26)$$

Таким образом, график функции

$$y = h(x) \quad (27)$$

касается оси абсцисс в точке  $x = x_0$ .

Если  $a$  есть точка перегиба, то график функции  $h(x)$  в точке  $x_0$  переходит с одной стороны оси абсцисс на другую. Докажем прежде всего, что  $h''(x_0) = 0$ . Доказательство будем вести от противного. Действительно, допустим, что  $h''(x_0) > 0$ . Так как  $h'(x_0) = 0$ , то функция  $h(x)$  имеет в точке  $x_0$  минимум и потому при всех  $x$ , достаточно близких к  $x_0$ , имеем

$$h(x) > h(x_0) = 0.$$

Поэтому график функции  $h(x)$  не переходит в точке  $x_0$  с одной стороны оси абсцисс на другую. Точно так же

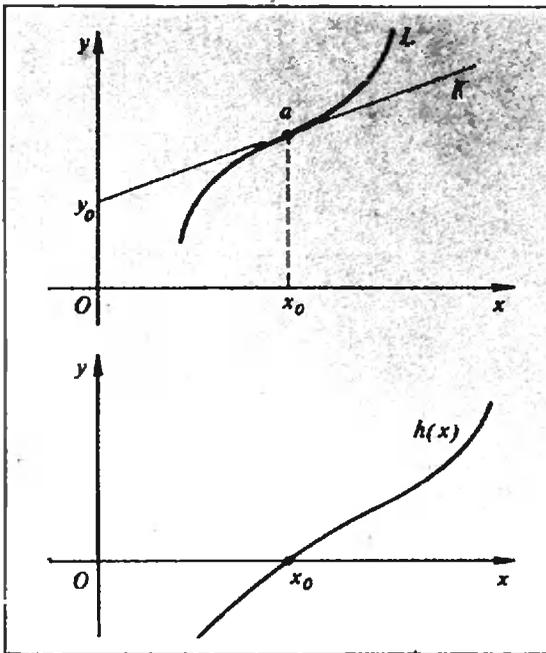


Рис. 2.

разбирается случай  $h''(x_0) < 0$ . Тогда функция  $h(x)$  имеет в точке  $x_0$  максимум, и потому  $h(x) \leq h(x_0) = 0$ ; следовательно, и при  $h''(x_0) < 0$  график функции  $h(x)$  не переходит с одной стороны оси абсцисс на другую в точке  $x_0$ . Итак, остается одна возможность:  $h''(x_0) = 0$ .

Далее, мы имеем

$$0 = h''(x_0) = f''(x_0) - K''(x_0) = f''(x_0), \quad (28)$$

так как  $K''(x) = 0$ . Таким образом, формула (28) доказана.

Не следует, однако, думать, что это равенство является достаточным условием для того, чтобы точка с абсциссой  $x_0$  была точкой перегиба графика функций  $f(x)$ .

Читателю предлагается доказать, что точка  $a$  действительно является точкой перегиба, если

$$f''(x_0) = 0, \quad f'''(x_0) \neq 0, \quad (29)$$

так что условие (29) является достаточным условием для того, чтобы точка  $a$  была точкой перегиба.

Вернемся теперь к кубической параболе (6). Вычислим вторую производную функции (6). Мы имеем

$$f''(x) = (x^3 - px)'' = 6x. \quad (30)$$

Мы уже установили, что начало координат является точкой перегиба кубической параболы (2). Выражение (25) для второй производной функции (2) показывает, что начало координат является единственной точкой перегиба кубической параболы, так как вторая производная (25) обращается в нуль лишь при  $x=0$ .

Третья производная функции (6) определяется формулой (см. (4))

$$f'''(x) = 6.$$

Таким образом, в точке  $x=0$  для кубической параболы (6) выполнены условия (29), откуда в частности вытекает, что точка  $x=0$  является точкой перегиба.

\*\*\*

Займемся теперь общей кубической параболой (5). Выясним прежде всего сколько действительных корней имеет многочлен (5).

Рассмотрим уравнение (14)

$$x^3 - px = c.$$

Как уже было сказано, при  $p < 0$  это уравнение имеет лишь один действительный корень. При  $p = 0$  это уравнение имеет также лишь один действительный корень, за исключением случая

$c = 0$ , когда имеется тройной корень  $x = 0$ . Если  $c = 0$ , уравнение (14) имеет три корня при

$$f(x_2) < c < f(x_1)$$

(см. (15)), где

$$f(x_1) = \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}}, \quad f(x_2) = -\frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}},$$

(см. (12)), так что неравенство (15) можно записать в виде

$$|c| < \frac{2}{3}p\sqrt{\frac{p}{3}}, \quad (31)$$

причем для крайних значений  $c$  из отрезка (31) имеется один простой и один двойной корень. Вне отрезка (31) уравнение (14) имеет лишь один действительный корень.

Многочлен (5) можно привести к виду

$$\eta = f(\xi) = \xi^3 - p\xi \quad (32)$$

заменой переменных

$$x = \xi + \alpha, \quad y = \eta + \beta. \quad (33)$$

Такая замена означает параллельный сдвиг системы координат.

Производя подстановку (33), получим

$$\eta = \xi^3 + (3\alpha + a_1)\xi^2 + (3\alpha^2 + 2a_1\alpha + a_2)\xi + (\alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + a_3 - \beta). \quad (34)$$

Для того чтобы многочлен (5) был приведен к виду (32), достаточно, чтобы были выполнены условия

$$\begin{aligned} 3\alpha + a_1 &= 0, \\ \alpha^3 + a_1\alpha^2 + a_2\alpha + a_3 - \beta &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Из первого уравнения системы (35) имеем

$$\alpha = -\frac{a_1}{3}. \quad (36)$$

Подставляя это выражение для  $\alpha$  во второе уравнение системы (35), получим

$$\beta = \frac{2a_1^3}{27} - \frac{a_1a_2}{3} + a_3. \quad (37)$$

Считая, что  $\alpha$  и  $\beta$  заданы формулами (36) и (37), мы можем переписать (34) в виде

$$\eta = f(\xi) = \xi^3 - p\xi, \quad (38)$$

где

$$p = \frac{a_1^2}{3} - a_2. \quad (39)$$

Геометрическая форма кубической параболы (5) совпадает с геометрической формой параболы (38). Последняя же зависит от знака величины  $p$  (39).

\*\*\*

Выясним теперь вопрос о том, сколько корней имеет многочлен  $g(x)$  (см. (5)).

Многочлены  $g(x)$  и  $f(\xi)$  связаны соотношением

$$f(\xi) = g(x) - \beta.$$

Таким образом, число корней многочлена  $g(x)$  равно числу корней многочлена  $f(\xi) + \beta$  или, что то же самое, числу корней уравнения  $f(\xi) = -\beta$ . Но это число нам уже известно (см. (14)). Следовательно, при  $p < 0$  (см. (38)) многочлен  $g(x)$  имеет один действительный корень, при  $p = 0$  многочлен  $g(x)$  также имеет один действительный корень, за исключением случая, когда величина  $\beta$  (см. (37)) равна нулю.

Рассмотрим случай  $p > 0$ . Если величина  $\beta$  (см. (37)) удовлетворяет условию

$$|\beta| \leq \frac{2}{3\sqrt{3}} p^{3/2} \quad (40)$$

(см. (31)), то многочлен  $g(x)$  имеет три действительных корня, причем на концах отрезка (40) два корня сливаются в один. Подставляя в (40) величины  $\beta$  и  $p$  из соотношений (37) и (39) и возводя полученное соотношение в квадрат, получим условие

$$\left(\frac{2a_1^3}{27} - \frac{a_1 a_2}{3} + a_3\right)^2 \leq \frac{4}{27} \left(\frac{a_1^2}{3} - a_2\right)^3. \quad (41)$$

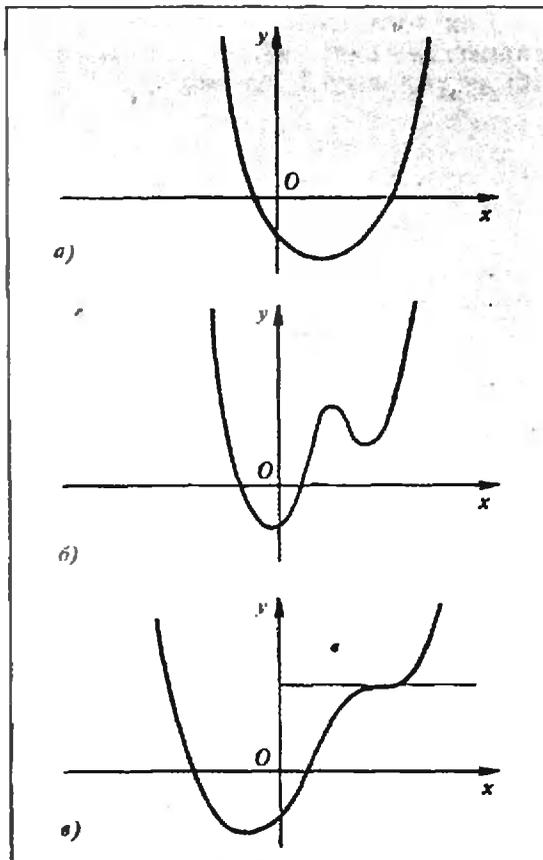


Рис. 3.

Полученное условие является полным критерием наличия трех действительных корней многочлена  $g(x)$ , так как при его выполнении исключается случай  $p < 0$ . Ведь первая часть неравенства (41) при  $p < 0$  отрицательна, в то время как левая часть, будучи квадратом, не может быть отрицательной.

\* \* \*

Укажем теперь путь изучения графика многочлена четвертой степени

$$y = h(x) = x^4 + b_1 x^3 + b_2 x^2 + b_3 x + b_4.$$

Для выяснения его поведения следует изучить поведение многочлена

$$h'(x) = 4x^3 + 3b_1 x^2 + 2b_2 x + b_3.$$

Этот многочлен уже имеет степень 3 и вопрос о том, сколько у него действительных корней, нами уже решен.

Так как многочлен  $h(x)$  неограниченно возрастает, оставаясь положительным, когда  $x \rightarrow +\infty$  и  $x \rightarrow -\infty$ \*, то в случае, если многочлен  $h'(x)$  имеет лишь один действительный корень, многочлен  $h(x)$  имеет лишь один минимум. Если же многочлен  $h'(x)$  имеет три различных действительных корня, то многочлен  $h(x)$  имеет два минимума и один максимум. Вид графика функции  $h(x)$  в этих двух случаях дан на рисунке 3, а, б, а в случае, когда два действительных корня сливаются в один, график имеет вид, показанный на рисунке 3, в.

\* \* \*

В заключение приведу формулу Кардано (1501—1576) для решения кубического уравнения (14), то есть уравнения

$$x^3 - px = c. \quad (42)$$

После того, как решение будет получено, мы сможем заменить  $p$  и  $c$  в соответствии с формулами (37) и (39). Таким образом, мы можем получить формулу для нахождения всех корней многочлена (5).

Для решения уравнения (42) производится замена переменного на сумму двух новых неизвестных  $u$  и  $v$ , то есть

$$x = u + v. \quad (43)$$

Новые неизвестные  $u$  и  $v$  мы свяжем некоторым дополнительным соотношением. Подставляя  $x = u + v$  в уравнение (42), получим

$$u^3 + v^3 + (3uv - p)(u + v) = c. \quad (44)$$

(Окончание см. на с. 32)

\* То есть когда  $x$  неограниченно возрастает по модулю, оставаясь положительным ( $x \rightarrow +\infty$ ) и оставаясь отрицательным ( $x \rightarrow -\infty$ ). (Прим. ред.)

# Из предыстории радио

(к 125-летию со дня рождения А. С. Попова)

Член-корреспондент АН СССР  
С. М. РЫТОВ

*Как возникло изобретение, почему оно возникло именно в конце прошлого века, каким образом сооружение, построенное изобретателями, выросло в столь обширное и великолепное здание, — все это становится по-настоящему понятным только если учесть, что пионеры радио могли строить на широком и солидном фундаменте, возведение которого было завершено за несколько лет до самого изобретения.*

Академик Л. И. Мандельштам



М. Фарадей.



Дж. К. Максвелл.



Г. Герц.



А. С. Попов.

Радио — одна из основ современной цивилизации, определяющая ее облик. Не только в пределах Земли, но и в межпланетных масштабах, в космических и даже в космологических проблемах радиоволны являются теперь как средством общения, так и средством познания.

Если сопоставить современное значение радио с его скромным началом, то может показаться, что весь путь развития радио — как идейный, так и практический — исчерпывается нашим веком. Но это ошибочное представление. Как писал выдающийся советский радиопизик и радиотехник академик Л. И. Мандельштам, «изобретение радио, равно как и его развитие, сделалось возможным только благодаря тому перевороту в представлениях об электрических явлениях, который связан с именами Фарадея, Максвелла и Герца. История развития этих представлений есть, по существу, предыстория радио».

В 1831 году Фарадей открыл явление электромагнитной индукции — возникновение электрического поля при всяком изменении магнитного поля. В 1833 году он открывает законы электролиза; в 1837 — обнаруживает влияние среды на емкость конденсатора; с 1845 года следует ряд дальнейших блестящих открытий, в том числе — открытие вращения плоскости поляризации света в магнитном поле, открытие диамагнетизма и парамагнетизма. Во всей своей титанической экспериментальной работе Фарадей опирался на идею о силовых линиях, на представление о роли среды в электромагнитных явлениях, на концепцию близкодействия от точки к точке в противовес ньютоновским представлениям мгновенного дальнего действия. Несмотря на расплывчатость своих представлений о природе электромагнетизма, несмотря на непонимание и оспаривание его концепций, Фарадей шел своим непроторенным путем, и этот путь вел его от одного открытия к другому. А ведь в числе сторонников дальнего действия были такие блестящие физики, как Ампер, Вебер, Кирхгоф, В. Томсон. Единственным, кто глубоко проникся идеями Фарадея и кто поставил перед собой задачу разъяснить и уточнить эти идеи,

был Джеймс Клерк Максвелл. В предисловии к написанному им позднее «Трактату по электричеству и магнетизму» он так и пишет: «Главным образом в надежде сделать его [Фарадея — С. Р.] идею основой математической теории, я и предпринял написание этого трактата».

Но, преследуя эту цель, сам Максвелл сделал величайшее открытие, новое не только по содержанию, но и по методу: открытие пришло не из эксперимента, а из математического обобщения теории. Он предсказал явление, обратное тому, которое открыл Фарадей, — возникновение магнитного поля при всяком изменении электрического поля. Тем самым была создана нынешняя макроскопическая электродинамика, которая математически выражена уравнениями Максвелла, в физике охватывает гигантский круг электромагнитных явлений, а исторически означает победу фарадеевского близкодействия, рождение в физике понятия поля.

Чрезвычайно важным выводом, вытекающим из теории Максвелла, было следующее: должны существовать электромагнитные поперечные волны, скорость распространения которых конечна и определяется произведением электрической и магнитной постоянных

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}.$$

$\epsilon_0$  и  $\mu_0$  были измерены ранее и значение величины  $\frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$  оказалось равным

193 088 миль/с, то есть очень близким к значению скорости света 193 118 миль/с, полученному в оптическом опыте Физо. Это позволило Максвеллу уверенно выдвинуть свой знаменитый тезис о том, что «свет есть не что иное, как электромагнитные колебания\*\*»). Первое упоминание об этом величайшем открытии содержится в

\*) См. статью «Электрическое и магнитное поля» в разделе Школа в «Кванте». (Прим. ред.)

\*\*) «...названные числа совпадают с точностью до 30 миль/с, и что особенно удивительно — это то, что оба числа ошибочны более чем на 6000 миль/с... Впрочем, при опубликовании в 1864 году своего мемуара «Динамическая теория электромагнитного поля»... Максвелл указывает скорости в км/с, причем оба числа ни в какой мере не находятся в таком хорошем согласии, как это казалось вначале. К счастью, Максвелл, видимо, осознал, что скорость света была измерена очень неточно, и поэтому не дал обескуражить себя существенно расхождению в числах». — так говорил по поводу первых определений скорости света из теории Максвелла английский физик Дж. Джинс.

письме Максвелла Фарадею, датированном 19 октября 1861 года.

Следует заметить, что сам Максвелл скромно считал, что электромагнитная теория света предложена Фарадеем. Он прямо пишет об этом в 1864 году, ссылаясь на чисто умозрительные рассуждения Фарадея в его статье 1846 года «Мысли о лучевых колебаниях». Скромность, конечно, украшает человека, но не может уничтожить разницу между общими словами и прямым следствием теории, следствием, поддающимся опытной проверке. В том-то и дело, что теория Максвелла не только свела воедино все ранее известное об электромагнетизме, но была эвристична, она количественно предсказывала новые явления. Одним из таких предсказаний, пожалуй, самым важным были электромагнитные волны. Ни Фарадей, ни — поначалу — сам Максвелл не имели в виду той прямой связи между оптикой и электромагнетизмом, которая так ярко выявилась в качестве результата теории, создававшейся первоначально только для электромагнитных явлений. Недаром Генрих Герц сказал о теории Максвелла, о его уравнениях в своем докладе «О соотношениях между светом и электричеством» (Гейдельберг, 1889 год):

«Нельзя изучать эту чудесную теорию без того, чтобы порою не возникало ощущения, что математическим формулам присуща самостоятельная жизнь и собственный разум, что они умнее нас, умнее даже открывшего их, что они дают даже больше, чем в них было первоначально вложено».

Герц немало сделал для усовершенствования математического облика теории, но главное его достижение — это задуманные и проведенные им опыты, «классические на веки вечные», как сказал о них известный русский физик О. Д. Хвольсон.

По случаю столетия со дня рождения Максвелла (то есть в 1931 году) Дж. Дж. Томсон, сам выдающийся экспериментатор, сказал об этих опытах: «Исследования Герца являются одним из наиболее замечательных во всей истории физики триумфом экспериментального умения, изобретательности и осторожности в выводах». И далее: «Открытие электрических волн имело не только научный интерес, хотя единственно им оно было вдохновлено. Подобно открытию электромагнитной индукции Фарадея, оно имело глубокое

влияние на цивилизацию. Оно дало в руки рабочий метод, который позволяет приблизить друг к другу обитателей земного шара на расстояние слышимости, в чем заложены социальные, воспитательные и политические возможности, значение которых мы только начинаем понимать».

Именно эти волны породили радио. Ведь радио и есть не что иное, как использование электромагнитных волн для практических целей.

Мысль об использовании электромагнитных волн для связи возникла у многих сразу же вслед за опытами Герца. Интересно поэтому, что думал по данному поводу сам Герц.

В 1889 году к Герцу обратился инженер Губер из Мюнхена с вопросом, нельзя ли открытые Герцем волны использовать для беспроволочного телефона. Полученное от Герца ответное письмо Губер в 1897 году (то есть через 3 года после смерти Герца) переслал в немецкий электротехнический журнал, где оно было напечатано без комментариев. Вот перевод этого письма.

«Милостивый государь! Я с удовольствием отвечаю на Ваше любезное письмо от 1 декабря. Силовые магнитные линии распространяются подобно лучам, так же как и силовые электрические линии, только тогда, когда их колебания достаточно быстры; в этом случае оба вида силовых линий неотделимы друг от друга, и лучи или волны, о которых идет речь в моих исследованиях, могут быть с одинаковым правом названы как магнитными, так и электрическими. Но колебания в трансформаторе или телефоне намного более медленны. Предположим, что у нас 1000 колебаний в секунду, что уже представляется довольно высоким числом колебаний; этому соответствовала бы в эфире волна длиной 300 км; фокусные расстояния применяемых зеркал должны были бы иметь размеры того же порядка. Если бы Вы были в состоянии построить вогнутые зеркала размером с материк, то Вы могли бы отлично поставить опыты, которые Вы имеете в виду. Но с обычными зеркалами практически ничего сделать нельзя, и Вы не сможете обнаружить ни малейшего действия. Так, по крайней мере, я думаю.

С совершенным уважением, преданный Вам Г. Герц.»

Мы тоже не будем комментировать это письмо. Даже гениальному человеку трудно заглянуть на десятки лет впе-

ред и угадать пути решения технической задачи, в данном случае — радиотелефонии.

Предложения использовать электромагнитные волны для связи были, конечно, лишь пожеланиями. Надо было показать, как это осуществить.

Именно это и сделал Александр Степанович Попов своим великим изобретением.

Что же именно сыграло основную роль в изобретении Попова? Ведь, казалось бы, все элементы его приборов уже были известны.

Было известно, что искровой разряд, будь то разряд лейденской банки, электрофорной машины, индукционной катушки или грозовой разряд, представляет собой затухающие электрические колебания. Тем самым, было известно, как создавать электрические колебания высокой частоты.

После опытов Герца стало известно, что такие колебания порождают в окружающем пространстве электромагнитные волны. Вопрос о повышении мощности разряда, конечно, не воспринимался как нечто принципиальное, а представлялся чисто техническим.

Таким образом, центральной задачей было создание чувствительного приемника. Маленькая искорка в приемном вибраторе, которым пользовался в своих опытах Герц, конечно, не могла служить практическим способом приема.

За пять лет до изобретения Попова появился прибор, названный когерером. Это трубка с двумя электродами, между которыми находятся металлические опилки. Под действием высокочастотного поля сопротивление опилок меняется от сотен тысяч до десятков и даже единиц омов. Это происходит в результате «спекания» опилок (из-за микроскопических искр в точках их соприкосновения) при приходе электромагнитной волны. Таким образом, когерер — это превосходное реле, позволяющее высокочастотному сигналу замкнуть цепь местной батареи. Беда только в том, что при каждом срабатывании это реле портится: надо встряхнуть опилки, чтобы когерер снова стал высокоомным и мог дать скачок (резкий спад) сопротивления при следующем сигнале. Конечно, такое устройство не являлось приемником, своевременно готовым к приему сигнала.

Мы подошли теперь вплотную к тому, что нового создал А. С. Попов.

«Добившись удовлетворительного постоянства чувствительности при употреблении трубки с платиновыми листочками и железным порошком\*), я поставил себе еще и другую задачу: добиться такой комбинации, чтобы связь между опилками, вызванная электрическим колебанием, разрушалась немедленно автоматически» [выделено мной — С. Р.], — так писал Попов в своей статье «Прибор для обнаружения электрических колебаний» в январском выпуске «Журнала Русского физико-химического общества» в 1896 году. И с этой задачей он справился блестяще. Можно сказать, что в своем приемнике Попов электромеханическим путем реализовал не только усиление, но и то, что теперь мы называем обратной связью.

Свой приемник Попов назвал «грозоотметчиком», но в описанных в статье опытах приемник фиксировал не только удары молнии, но и разряды электрофорной машины, и разряды в большом герцевском вибраторе, и даже быстрые взмахи заряженной эбонитовой палочкой. Статья заканчивается той же фразой, которой А. С. Попов закончил свой

\*) Попов потратил много усилий на создание хорошего когерера. [С. Р.]

доклад на Физической секции Русского физико-химического общества 7 мая 1895 года:

«В заключение могу выразить надежду, что мой прибор при дальнейшем усовершенствовании его может быть применен к передаче сигналов на расстояния при помощи быстрых электрических колебаний, как только будет найден источник таких колебаний, обладающий достаточной энергией».

На деле первоначальный прогресс шел по линии увеличения высоты приемных антенн. Этот прогресс протекал, как известно, очень быстро, и чем дальше, тем быстрее. Уже в 1897 году П. Н. Рыбкин, сотрудник Попова, перекрыл передачей расстояние в 5 км.

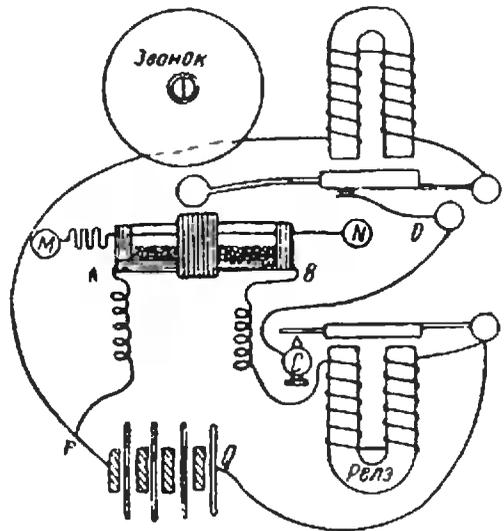
XX век принес одно за другим многочисленные новые принципиальные изобретения и усовершенствования, поток которых продолжался и нарастает по сегодняшний день. Радиотелеграф и радиотелефон, радиовещание и телевидение, радиолокация и радионавигация, радиоастрономия и радиоспектроскопия, радиогеодезия и служба времени плюс множество новых физических явлений, открытие которых было стимулировано практическими нуждами радиотехники. Вот что такое радио в наши дни.

### Схема и описание прибора

(из статьи А. С. Попова «Прибор для обнаружения электрических колебаний»)

«Прилагаемая схема показывает расположение частей прибора. Трубка с опилками подвешена горизонтально между зажимами *M* и *N* на легкой часовой пружине, которая для большей эластичности согнута со стороны одного зажима зигзагом. Над трубкой расположен звонок, так чтобы при своем действии он мог давать легкие удары молоточком по середине трубки, защищенной от разбивания резиновым кольцом. Удобнее всего трубку и звонок укреплять на общей вертикальной дощечке. Реле может быть помещено как угодно.

Действует прибор следующим образом. Ток батареи в 4—5 вольт постоянно циркулирует от зажима *P* к платиновой пластинке *A*, далее через порошок, содержащийся в трубке, — к другой пластинке *B* и по обмотке электромагнита реле обратно к батарее. Сила этого тока недостаточна для притягивания якоря реле, но, если трубка *AB* подвергнется действию электрического колебания, то сопротивление мгновенно уменьшится и ток увеличится настолько, что якорь реле притянется. В этот момент цепь, идущая от батареи к звонку, прерванная в точке *C*, замкнется, и звонок начнет действовать, но тотчас же сотрясения трубки опять уменьшат ее проводимость и реле разомкнет цепь звонка. В моем приборе сопротивление опилок после сильного



встряхивания бывает около 100 000 ом, а реле, имея сопротивление около 250 ом, притягивает якорь при токах от 5 до 10 миллиампер (передель регулировки), т. е. когда сопротивление всей цепи падает ниже 1000 ом.»



## Доказательство гипотезы Морделла

А. Ю. ВАЙНТРОБ,  
кандидат  
физико-математических  
наук  
А. Б. СОСНИНСКИЙ

Таков уж характер современного математического творчества, что рассказать о наиболее значительных его результатах в понятной для школьников форме, как правило, не представляется возможным. Слишком далек передний фронт нашей науки от школьной математики, содержание которой выработывалось еще в античном мире и завершается достижениями XVII века. Наверное поэтому в «Новостях науки» в «Кванте» пока писалось лишь о физике и технике, где при всей сложности часто все же удается популярно объяснить суть дела.

Но вот и на нашу математическую улицу пришел праздник — прошлой весной была доказана гипотеза Морделла. И хотя ее формулировка мало что скажет школьнику, легко указать большое число ее следствий, которые элементарно формулируются, но не поддаются элементарному решению.

Из гипотезы Морделла следует, что некоторый обширный класс диофантовых уравнений и систем имеет лишь конечное число целых решений. (Диофантовы уравнения — уравнения вида  $P(x, y, \dots, z) = 0$ , где  $P$  — многочлен от нескольких переменных с целыми коэффициентами, — изучаются с времеч греческого математика Диофанта (III век).)

Покажем на примере знаменитого уравнения Ферма

$$a^n + b^n = c^n, \text{ где } n \geq 3, \quad (1)$$

что целые решения диофантова уравнения связаны с «рациональными точками» некоторой кривой. Поделив обе части уравнения на  $c^n$ , мы видим, что каждому целому решению  $(a; b; c)$  уравнения (1) отвечает рациональная точка (то есть точка с рациональными координатами)  $(x; y) = (a/c; b/c)$  кривой, задаваемой уравнением  $x^n + y^n = 1$  на плоскости  $Oxy$  (и обратно). Поэтому конечность числа взаимно простых решений уравнения (1) следует из конечности числа рациональных точек на кривой  $x^n + y^n = 1$ . А последний факт как раз и следует из гипотезы Морделла (при  $n \geq 3$ ). Итак, уравнение Ферма имеет не более конечного числа взаимно простых решений.

Задача описания рациональных точек на кривых имеет многовековую историю, но до недавнего времени подностью были исследованы лишь два частных случая: рациональные кривые (или кривые рода 0) (классический пример для этого случая — окружность  $x^2 + y^2 = 1$ , рациональные точки которой соотносятся с всевозможным пифагоровым тройкам — решениям уравнения  $a^2 + b^2 = c^2$ ) и эллиптические кривые (или кривые рода 1), все рациональные точки которых могут быть получены из конечного их набора с помощью специальной операции сложения (подробнее об этом см. «Квант», 1978, № 8, с. 2). В каждом из этих случаев число рациональных точек может быть бесконечным.

В 1922 году английский математик Дж. Морделл (1888—1972) выдвинул гипотезу о том, что во всех остальных случаях число рациональных точек конечно. Точная формулировка звучит так: неприводимая неособая алгебраическая кривая рода больше 1 над полем алгебраических чисел имеет лишь конечное число рациональных точек.

Вот еще несколько примеров уравнений, для которых конечность числа взаимно простых решений следует из гипотезы Морделла:

$$\begin{aligned} x^4 + 3y^3x + 3z^2x^2 - 7xz^3 &= 0; \\ (x^2 + y^2 + 2z^2)(x^2 + 2y^2 + z^2) &= \\ &= (2x^2 - 2y^2 + z^2)^2; \\ x^n + y^n &= 2z^n, \text{ где } n \geq 3. \end{aligned}$$

Вообще же можно сказать, что

«написанный наугад» многочлен  $P(x, y)$  с целыми коэффициентами степени  $d > 3$  «скорее всего» задает кривую с конечным числом рациональных точек.

Несмотря на усилия крупнейших математиков, гипотеза Морделла на протяжении 60 лет оставалась неприступной. И вот весной 1983 года научный мир облетело известие о том, что Герт Фалтингс, доселе малоизвестный 29-летний математик, работающий в ФРГ, доказал эту гипотезу. Его работы еще не опубликованы, но 40-страничная рукопись Фалтингса выдержала проверку ведущих математических центров мира: в Гарварде (США), в Бюр-сюр-Ивет (Франция), в Институте им. Стеклова (Москва). На самом деле Г. Фалтингс доказывал (и доказал!) не гипотезу Морделла, а несколько более общую гипотезу Шафаревича, которую наш соотечественник, член-корреспондент АН СССР, И. Р. Шафаревич, предложил в своем докладе на Международном конгрессе математиков в Стокгольме в 1962 году. Следует отметить также, что в своей работе Г. Фалтингс опирался на результаты советских математиков Ю. Г. Зархина и А. Н. Паршина.

Гипотеза Шафаревича, как и гипотеза Морделла, относится к алгебраической геометрии — науке, изучающей кривые и поверхности, заданные многочленами. Но если для формулировки гипотезы Морделла нужны лишь классические понятия этой науки («неприводимость», «род»), придуманные еще в прошлом веке, то для ее доказательства потребовались изощренные методы и язык современной алгебраической геометрии, возникшие в послевоенные годы в работах таких выдающихся математиков, как Ж.-П. Серр, А. Гротендик (Франция), Дж. Тэйт (Великобритания), Л. Мамфорд (США), И. Р. Шафаревич, Ю. И. Манин (СССР).

Такова диалектика развития математической науки: классическая задача долго остается неприступной, но после создания нового аппарата ее удается обобщить и решить. Так случилось и с гипотезой Морделла — сильный молодой исследователь, овладевший современным аппаратом, добился выдающихся результатов в области, в которой математики работают уже два тысячелетия.



## Цвета рассеянного света

Кандидат физико-математических наук  
А. А. БОРОВОЙ

Синевя неба, белые, постоянно меняющие свои очертания облака, краски восхода и заката всегда вызывали у людей чувство восхищения. Они питали фантазию поэтов и художников и, естественно, привлекали внимание ученых.

«Воздушная синевя рождается от телесной плотности освещенного воздуха, находящегося между верхним мраком и землей», — писал еще Леонардо да Винчи. Около ста лет назад, в 1869 году, известный английский физик и популяризатор науки Дж. Тиндаль впервые поставил опыты, в которых наблюдал синий оттенок рассеянного света. Однако понадобилось еще немало усилий и труда таких ученых, как Рэлей, Смолуховский, Манделштам, Эйнштейн, чтобы окончательно объяснить краски дневного и вечернего неба рассеянным светом.

Знакомство с этим явлением мы начнем с простых модельных опытов, затем попытаемся качественно объяснить полученные результаты и от них «перекинуть мостик» к цвету неба.

1. Для опытов необходим прямоугольный сосуд с прозрачными стенками, например аквариум. Его длина должна составлять не менее 30 см. Кроме сосуда понадобится источник света, дающий слабо расходящийся пучок лучей. Можно воспользоваться диапроектором, поставив на место слайда кусочек черной бумаги с круглым отверстием диаметра 2—3 мм в центре, или приспособить для этой цели достаточно сильный электрический фонарь.

Опыты надо проводить в затемненной комнате.

Налейте в сосуд воду и направьте сквозь нее световой пучок вдоль длинной стороны сосуда (как показано на рисунке). А теперь посмотрите на него сбоку. Чем чище вода, чем меньше в ней пузырьков, пылинок и других посторонних включений, тем менее заметен пучок. Он лишь слегка подсвечивает сосуд на границах воздух — стекло и стекло — вода. Однако стоит только нарушить однород-

ность жидкости, например начать перемешивать воду или нагревать ее (придумайте сами, как можно это осуществить), и в местах неоднородностей рассеяние света, отклонение его по различным направлениям станет значительно сильнее. (Здесь можно вспомнить и всем известный факт: солнечный луч, проникший через щель в занавеске, виден нам сбоку по светящимся в нем пылинкам.)

Из этого опыта можно сделать вывод, что свет, распространяясь в однородной жидкости, не рассеивается (или рассеивается очень слабо).

Теперь будем добавлять в воду по каплям молоко и хорошенько размешивать жидкость. Частички жира, содержащегося в молоке, не растворяются в воде, а находятся там во взвешенном состоянии. Уже после добавления первых капель рассеянный свет станет виден гораздо лучше. Обратите внимание — он имеет голубоватый оттенок. (Иногда наблюдается такой же эффект, если в легком тумане вы смотрите сбоку на свет фар проезжающей машины.)

Постепенно увеличивая концентрацию молока, мы увидим, что голубоватый цвет рассеянного света сменился в конце пути на желтоватый или даже красноватый. Окрашенным в такие же цвета будет и свет, прошедший через сосуд.

При большом количестве молока рассеянный свет становится белым.

Можно сделать еще несколько выводов: нарушение однородности жидкости добавлением в нее весьма малых частиц приводит к увеличению рассеяния, при этом синий свет рассеивается сильнее, а красный слабее, так что белый свет, прошедший сквозь такую жидкость, «обогащается» красным цветом; если же частиц очень много и они образуют целые скопления, рассеянный свет оказывается белым.

II. Качественное объяснение опытов можно понять, если опираться на такие факты:

а) Любой электрический заряд, движущийся ускоренно (например, колеблющийся), излучает электромагнитные волны. Излучение тем более интенсивно, чем больше ускорение (частота колебаний).

б) Электромагнитная волна в каждой точке среды, куда она дошла, создает переменное электромагнитное поле.

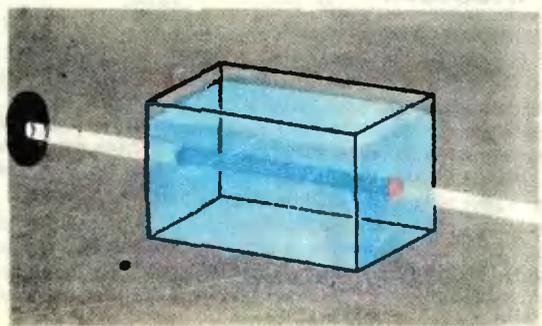
в) Волны от зарядов, колеблющихся с одной частотой, складываются таким образом, что в одних точках они могут усиливать, а в других гасить друг друга.

г) Свет представляет собой электромагнитные волны. Видимый белый свет — набор электромагнитных волн, в котором самая малая длина волны у фиолетового и синего цвета ( $\lambda = (4 - 5) \cdot 10^{-7}$  м), а самая большая — у желтого и красного ( $\lambda = (6 - 7) \cdot 10^{-7}$  м).

Когда свет проходит через однородную среду, его переменное поле возбуждает колебания электронов в атомах, и они начинают сами излучать электромагнитные волны той же частоты. Но, как показывает расчет, их излучение гасит друг друга во всех направлениях, кроме направления распространения света. При идеальной однородности среды мы вовсе не увидели бы рассеянного света.

Другое дело, когда среда неоднородна. Наличие неоднородностей создает совсем иные условия для сложения вторичных волн и возникает рассеяние света по различным направлениям.

Если неоднородности невелики по размерам (много меньше длины волны падающего света), рассеяние света описывается законом, открытым в 1871 году английским физиком Рэлеем: интенсивность рассеянного света прямо пропорциональна четвертой степени частоты (обратно пропорциональна четвертой степени длины волны). Следовательно, голубой свет рассеивается гораздо сильнее красного. Вот почему в наших опытах, наблюдая сбоку, мы видели голубую окраску рассеянного света, а цвет прошедшего через жидкость света оказался красноватым. Тидаль так описывал свое впечатление от увиденного им эффекта: «Мы наблюдали синий цвет, который соперни-



чал с цветом голубого и чистого неба Италии, если не превосходил его.»

III. В повседневной жизни мы часто сталкиваемся с такими случаями, когда в однородной среде (жидкости или газе) присутствуют весьма малые (по сравнению с длиной волны видимого света) посторонние частицы. Это дым, туман или пыль в воздухе, мелкие частицы твердого вещества в воде, различные эмульсии и т. п. Все они могут вызвать рассеяние света.

Что же, голубой цвет весеннего неба или краски солнечного заката связаны с пылью и дымом в воздухе? Так вначале и думали. Но этому противоречило, например, то, что высоко в горах, где нет ни пыли, ни дыма, окраска неба может быть ярче, чем в запыленном городе.

Объяснение состоит в другом. За счет хаотичного движения молекул воздуха возможно появление в нем существенных неоднородностей плотности. Эти неоднородности приводят к рассеянию света и появлению синего или голубого цвета дневного неба. А солнечные лучи, которым на рассвете или закате приходится пронизывать гораздо большую, чем днем, толщу воздуха, приобретают красный или желтый оттенки.

Конечно, это не исключает влияния пыли, дыма, тумана на окраску неба. По этому поводу можно привести любопытный эпизод\*), описанный К. Паустовским в книге «Золотая роза»:

«Французский художник Моне приехал в Лондон и написал Вестминстерское аббатство. Работал Моне в обыкновенный лондонский туманный

день. На картине Моне готические очертания аббатства едва выступают из тумана. Написана картина виртуозно.

Когда картина была выставлена, она произвела смятение среди лондонцев. Они были поражены, что туман у Моне был окрашен в багровый цвет, тогда как всем известно, что цвет тумана серый.

Дерзость Моне вызвала сначала возмущение. Но возмущающиеся, выйдя на лондонские улицы, взгляделись в туман и впервые заметили, что он действительно багровый».

Рассеяние света на частицах, размеры которых сравнимы с длиной волны его видимой части, могут приводить к совершенно необычной окраске, поскольку закон Рэлея здесь перестает действовать, и красный свет рассеивается даже более интенсивно, чем синий. Именно поэтому удивительный цвет неба наблюдается иногда при извержениях вулканов, когда мельчайшая пыль висит в воздухе, при песчаных бурях или крупных лесных пожарах.

Этим же объясняется явление, получившее название «синей луны»: частицы, взвешенные в воздухе, сильнее рассеивают красные лучи, и до нас доходит только синий свет.

В облаке размеры капель уже настолько велики, что свет отражается от их поверхности и не меняет своего спектра, то есть остается белым.

Удивительно красивые цвета света, рассеянного атмосферой Земли, теперь стали доступны не только земному наблюдателю. На первой странице обложки воспроизведена фотография Земли в ореоле рассеянного света, сделанная космонавтами из космоса.

\*) Читатели «Кванта» могли с ним встретиться в статье А. Шмелева «Новогодний физический фейерверк» в № 1 за 1982 год.

## Спрашивайте — отвечаем

*Уважаемая редакция!*

В вашем журнале часто публикуются различные замысловатые рисунки, полученные с помощью ЭВМ. Было бы очень полезно познакомить читателей с графическими изображениями электрических полей нескольких точечных зарядов. Ведь во всех учебниках, школьных и вузовских, такие рисунки выполняются «на глаз»,

а не в соответствии со строгими математическими расчетами.

*В. И. Кондратенко,  
преподаватель физики  
из г. Дрогобыча*

На это письмо редакция попросила ответить специалиста в области машинной графики Ю. В. Котова.

Распределение электрического поля в пространстве (на плоскости) можно сделать наглядным с помощью силовых

линий и эквипотенциальных поверхностей (линий).

На второй странице обложки воспроизведена картина поля диполя, рассчитанная и построенная при помощи ЭВМ и графопроектировщика. Вследствие осевой симметрии такая картина одинакова во всех плоскостях, проходящих через ось диполя. Чтобы наглядно проиллюстрировать зависимость потенциала от координат точек плоскости, построена вспо-

*(Окончание см. на с. 26)*



## Ошибки в геометрических доказательствах

Наверное, всем школьникам встречались «доказательства» того, что  $1 = -1$ . Вот пример такого доказательства. Пусть  $a + b = c$  и  $a = b = 1$ . Умножим обе части равенства  $a + b = c$  на  $a + b$ . Мы получим:  $a^2 + 2ab + b^2 = c(a + b)$ . После преобразований получим:  $a^2 + ab - ac = -ab - b^2 + bc$  или  $a(a + b - c) = -b(a + b - c)$ . Деля обе части на  $a + b - c$ , получаем абсурдное равенство  $a = -b$  или  $1 = -1$ .

После мгновенного замешательства мы сразу находим ошибку в этом рассуждении: делить на  $a + b - c$  нельзя, так как это выражение равно нулю. Многие другие подобные доказательства используют ту же идею «замаскированного» деления на нуль, поэтому найти ошибку в них не составляет труда.

Менее известны ошибочные доказательства заведомо неверных утверждений в геометрии. Поиски ошибки в таких геометрических доказательствах составляют порой совсем непростую и очень поучительную задачу. Таким задачам посвящена замечательная книга Я. С. Дубнова *Ошибки в геометрических доказательствах* (М.: Наука, 1969)\*. Эта книга, которая, к сожалению, уже давно не переиздавалась, содержит 15 геометрических «доказательств» вместе с полным разбором. Мы приведем сейчас одно из них.

\* Яков Семенович Дубнов (1887—1957) — известный геометр и педагог, доктор физико-математических наук, профессор, долгие годы преподававший в Московском государственном университете. Я. С. Дубнов читал лекции для школьников в математической лектории при МГУ. Эти лекции и легли в основу упомянутой книги.

Следите внимательно за ходом рассуждений и постарайтесь найти ошибку.

«Теорема». Все треугольники равнобедренные.

Доказательство. Рассмотрим треугольник  $ABC$  (рис. 1). Проведем биссектрису угла  $B$  и срединный перпендикуляр к основанию  $AC$ . (Далее мы будем называть их просто «биссектрисой» и «срединным перпендикуляром».) Обозначим через  $N$  их точку пересечения. Опустим перпендикуляры  $NP$  и  $NQ$  на прямые  $AB$  и  $BC$ .

Поскольку точка  $N$  принадлежит биссектрисе, она равноудалена от прямых  $AB$  и  $BC$ . Следовательно,  $|PN| = |QN|$ . Поскольку точка  $N$  принадлежит срединному перпендикуляру, она равноудалена от точек  $A$  и  $C$ . Следовательно,  $|AN| = |CN|$ . Прямоугольные треугольники  $ANP$  и  $CNQ$  конгруэнтны по катету и гипотенузе, следовательно,  $\angle NAP = \angle NCQ$ . Кроме того, треугольник  $ANC$  равнобедренный, следовательно,  $\angle NAM = \angle NCM$ . Складывая равные углы, мы заключаем, что  $\angle PAM = \angle QCM$ . Значит, и  $\angle BAM = \angle BCM$ , поэтому треугольник  $ABC$  равнобедренный.

Доказательство закончено. Но у вас, наверно, возникли возражения. Попробую угадать некоторые из них и на них ответить.

Возражение 1. Почему мы считаем, что биссектриса и срединный перпендикуляр пересекаются? Ведь они могут быть параллельными.

Отв. Если биссектриса параллельна срединному перпендикуляру, то она перпендикулярна основанию треугольника. Следовательно, она является также и высотой  $\triangle ABC$ . Поэтому данный треугольник равнобедренный. Как видите, в этом случае вывод о том, что треугольник равнобедренный, сохраняет силу!

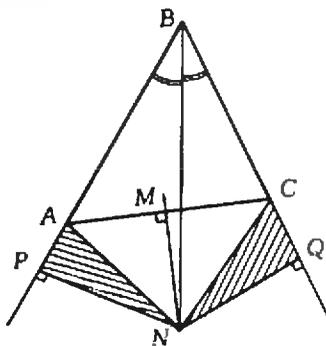


Рис. 1.

Возражение 2. Но биссектриса может и совпадать со средним перпендикуляром.

Ответ. На это возражение у меня есть сразу два ответа. Во-первых, в этом случае биссектриса тоже совпадает с высотой и треугольник опять оказывается равнобедренным. Во-вторых, если биссектриса совпадает со средним перпендикуляром, то точку  $N$  можно выбрать произвольно на биссектрисе и провести все рассуждения доказательства.

Возражение 3. А что, если биссектриса пересекает средний перпендикуляр на основании  $AC$ , то есть  $N=M$ ?

Ответ. В этом случае биссектриса совпадает с медианой  $BM$ . Отсюда легко следует, что треугольник  $ABC$  опять оказывается равнобедренным.

Возражение 4. Вы не рассмотрели случай, когда биссектриса пересекается со средним перпендикуляром внутри треугольника  $ABC$ .

Ответ. Этот случай изображен на рисунке 2. Рассуждая аналогично тому, как мы делали при рассмотрении рисунка 1, мы заключаем, что  $|AN| = |NC|$ ,  $|NP| = |NQ|$  и, следовательно,  $\triangle APN = \triangle CQN$ . Поэтому  $\angle NAP = \angle NCQ$ . Кроме того,  $\triangle ANC$  равнобедренный, поэтому  $\angle NAM = \angle NCM$ . Складывая равные углы, мы получаем, что  $\angle BAC = \angle BCA$ . Следовательно, треугольник  $ABC$  — равнобедренный.

Впрочем, могут представить и другой контрдовод: случай, изображенный на рисунке 2, невозможен, так как биссектриса треугольника всегда лежит между его медианой и высотой.

Итак, четыре возражения мне удалось парировать. Предлагаю читателю на этом месте остановиться и все-таки найти решающее возражение про-

тив приведенного «доказательства». А если не получится — посмотреть раздел «Ответы, указания, решения».

\* \* \*

Ну вот, теперь вы будете относиться к чертежам с большим подозрением. Возможно, некоторым читателям захотелось даже пойти дальше: сделать все математические доказательства совершенно формально-логическими, не обращаться к наглядным представлениям, исключая тем самым возможность ошибки. Математики-профессионалы обычно удовлетворяются тем, чтобы их доказательства могли бы быть записаны формально. Однако, как правило, они широко используют всевозможные наглядные представления, в том числе рисунки. Объясняется это тем, что формальные выводы значительно длиннее обычных доказательств, воспринимать и придумывать их гораздо труднее<sup>1)</sup>. Так что отказываться от чертежей и наглядных представлений при доказательстве геометрических теорем не стоит, нужно только научиться правильно ими пользоваться. В этом вам поможет решение следующих задач, также заимствованных из упомянутой книги Я. С. Дубнова.

**Задачи.** Найдите ошибки в следующих доказательствах.

1. Как известно, сумма углов треугольника равна  $180^\circ$ . Доказательство этого факта опирается на аксиому параллельности. Мы сейчас дадим доказательство, не использующее аксиомы параллельности.

<sup>1)</sup> Например, записать «единицу» на одном из формальных языков — языке теории множеств Н. Бурбаки — совсем непросто. «Полная запись...» содержала бы несколько десятков тысяч знаков; для «единицы» этого, пожалуй, многовато» (Матви Ю. И. *Доказание и недоказуемое*. М.: Советское радио, 1979).

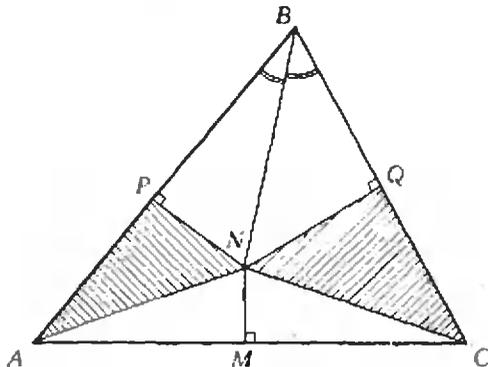


Рис. 2.

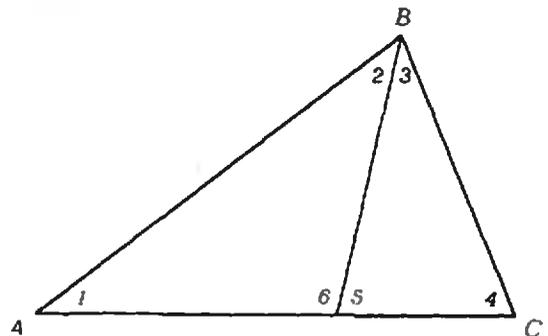


Рис. 3.

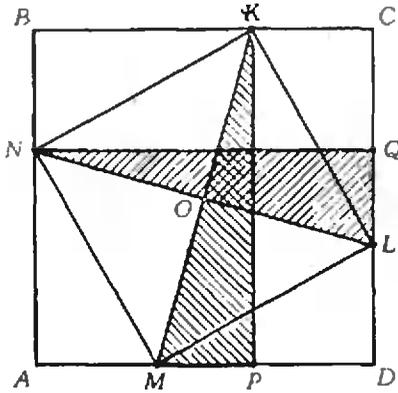


Рис. 4.

Разобьем произвольный треугольник  $ABC$  на два треугольника (рис. 3). Обозначим через  $x$  неизвестную нам пока сумму углов треугольника. Тогда  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 6 = x$  и  $\angle 3 + \angle 4 + \angle 5 = x$ . Сложим эти два равенства:  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4 + \angle 5 + \angle 6 = 2x$ . Поскольку  $\angle 5 + \angle 6 = 180^\circ$ , а  $\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 + \angle 4$  есть сумма углов треугольника  $ABC$ , то есть равно  $x$ , мы получаем уравнение  $x + 180^\circ = 2x$ . Отсюда:  $x = 180^\circ$ .

2. Докажем «теорему»: *прямоугольник, вписанный в квадрат, также является квадратом.*

Рассмотрим квадрат  $ABCD$ ; пусть  $KLMN$  — вписанный прямоугольник (рис. 4). Опустим перпендикуляры  $KP \perp AD$  и  $NQ \perp CD$ . Эти перпендикуляры равны по длине сторонам квадрата, поэтому они равны между собой. Отрезки  $KM$  и  $NL$  также равны по длине, как диагонали прямоугольника  $KLMN$ . Следовательно, прямоугольные треугольники  $KPM$  и  $NQL$  конгруэнтны по гипотенузе и катету. Поэтому  $\angle KMP = \angle NLQ$ . Рассмотрим четырехугольник  $OLDM$ . Поскольку  $\angle OMP = \angle OLQ$ , сумма углов  $OLD$  и  $OMD$  равна  $180^\circ$ . Следовательно, сумма двух других противоположных углов четырехугольника  $OLDM$  тоже равна  $180^\circ$ , то есть  $\angle MOL + \angle MDL = 180^\circ$ . Но  $\angle MDL = 90^\circ$ , значит,  $\angle MOL$  — тоже прямой. Следовательно,  $KLMN$  — прямоугольник, диагонали которого перпендикулярны, то есть квадрат.

3. Докажем «теорему»: *перпендикуляр и наклонная к прямой не пересекаются.*

Рассмотрим наклонную  $AP$  и перпендикуляр  $BQ$  к отрезку  $AB$  (рис. 5). Пусть  $C$  — середина отрезка  $AB$ .

Отложим отрезки  $AA_1$  и  $BB_1$ , по длине равные отрезку  $AC = BC$ . Мы утверждаем, что лучи  $AP$  и  $BQ$  не пересекаются на протяжении отрезков  $AA_1$  и  $BB_1$ . Действительно, если бы существовала точка пересечения  $K$ , то получился бы треугольник  $AKB$ , в котором  $|AK| \leq |AA_1|$ ,  $|BK| \leq |BB_1|$ , то есть  $|AK| + |KB| \leq |AA_1| + |BB_1| = |AB|$ . Последнее неравенство противоречит тому, что сумма двух сторон треугольника больше третьей стороны.

Соединим теперь точки  $A_1$  и  $B_1$  и повторим предыдущее построение. Мы получим точки  $A_2$  и  $B_2$ , причем  $|A_1A_2| = |A_1C_1| = |C_1B_1| = |B_1B_2|$ . Как и раньше, лучи  $AP$  и  $BQ$  не пересекаются на протяжении отрезков  $A_1A_2$  и  $B_1B_2$ . В частности, точки  $A_2$  и  $B_2$  различны и процесс построения можно продолжать неограниченно. Следовательно, лучи  $AP$  и  $BQ$  не пересекаются.

4. Докажем, что *все окружности имеют одинаковую длину.*

Большая окружность на рисунке 6 совершает полный оборот, перемещаясь из точки  $A$  в точку  $B$ . Следовательно, расстояние  $AB$  равно длине большой окружности. Маленькая окружность внутри первой также совершает полный оборот, перемещаясь из точки  $C$  в точку  $D$ . Следовательно,  $|CD|$  равен длине малой окружности. Поскольку длины отрезков  $AB$  и  $CD$ , очевидно, равны, обе окружности имеют одинаковую длину.

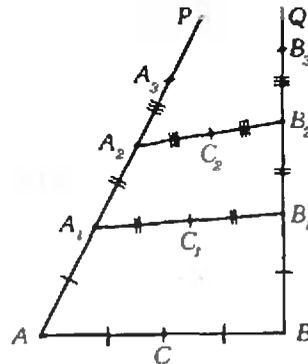


Рис. 5.

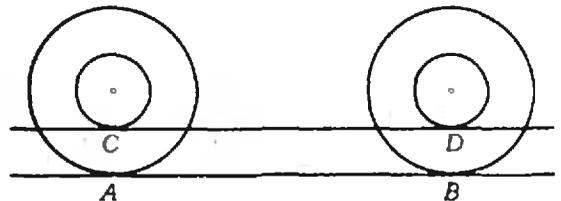


Рис. 6.

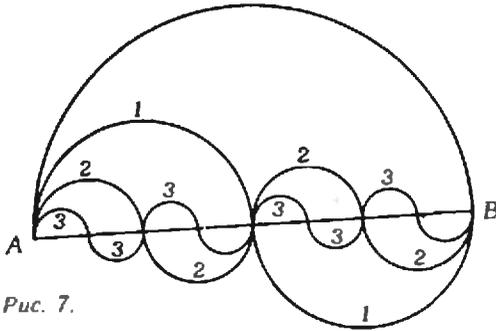


Рис. 7.

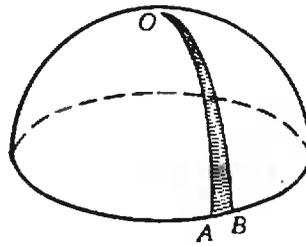
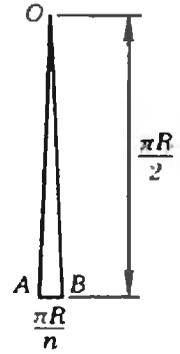


Рис. 8.



5. Известно, что длина окружности радиуса  $R$  равна  $2\pi R$ . Но мы «докажем», что *длина окружности вдвое больше ее диаметра*.

Построим полуокружность с диаметром  $AB$  (рис. 7). Разделим отрезок  $AB$  пополам точкой  $C$  и построим на отрезках  $AC$  и  $CB$  полуокружности, располагая их по разные стороны от прямой  $AB$ . Каждая из построенных полуокружностей имеет диаметр, вдвое меньший, чем диаметр исходной полуокружности. Поэтому их длины вдвое меньше длины исходной полуокружности. Следовательно, длина волнообразной линии, помеченной на рисунке номером 1, равна длине данной полуокружности. Разделим теперь каждый из отрезков  $AC$  и  $CB$  пополам и построим волнообразную линию 2. Ее длина также равна длине исходной полуокружности. Продолжим этот процесс, получая на каждом шаге волнообразную линию той же длины. Расстояние от точек этой линии до прямой  $AB$  не превосходит радиуса полуокружностей, составляющих

эту линию, то есть стремится к нулю. Следовательно, последовательность волнообразных линий стремится к отрезку  $AB$ . Поскольку их длины равны длине данной полуокружности, такой же должна быть и длина отрезка  $AB$ . Поэтому длина окружности равна ее удвоенному диаметру.

6. Докажем, что *площадь сферы радиуса  $R$  равна  $\pi^2 R^2$* .

Рассмотрим полусферу с полюсом  $O$  и разделим ее экватор на  $n$  равных частей. Площадь полусферы в  $n$  раз больше площади каждого из маленьких сферических треугольников, изображенных на рисунке 8. Рассмотрим такой треугольник. Его основание равно  $2\pi R/n$ , а высота стремится к  $\pi R/2$  при  $n \rightarrow \infty$ . Следовательно, его площадь стремится к  $\pi^2 R^2/2n$ . Поэтому площадь полусферы равна

$$n \cdot \frac{\pi^2 R^2}{2n} = \frac{\pi^2 R^2}{2},$$

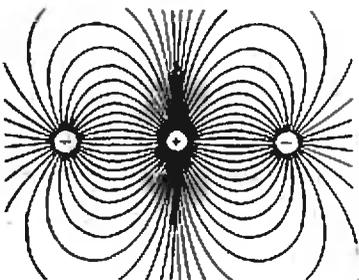
а площадь сферы —  $\pi^2 R^2$ .

Материал подготовил С. Л. Табичников

## Спрашивайте — отвечаем

(Начало см. на с. 22)

могательная поверхность. Аппликаты ее точек соответствуют значениям потенциала в точках



плоского сечения поля. Там, где расположены сами заряды, поверхность «вытягивается» вверх или вниз, а при удалении от зарядов — приближается к горизонтальной («нулевой») плоскости.

В разных точках поверхность по-разному наклонена к горизонтальной плоскости. Чтобы уточнить наклон, надо в интересующей точке поверхности построить касательную плоскость и определить угол ее наклона к горизонтальной плоскости. Тангенс этого угла связан со значением напряженности поля в данной точке.

Силовые линии поля можно было бы провести на вспомога-

тельной поверхности как линии скорейшего спуска: вдоль такой линии покатылся бы маленький шарик, помещенный в данную точку поверхности.

С помощью ЭВМ и графопостроителя можно получить аналогичные картины электрических полей и для нескольких различных образом расположенных точечных зарядов. В качестве примера здесь показаны силовые линии поля, образованного тремя зарядами, находящимися на одной прямой. Крайние заряды одноименны и одинаковы, средний — противоположен по знаку, а по модулю равен сумме двух крайних.

Ю. В. Котов



## Физика 8, 9, 10

Публикуемая ниже заметка «Работа, энергия и архимедова сила» предназначена восьмиклассникам, «Электрическое и магнитное поля» — девятиклассникам и «Заряд атомного ядра и периодическая система элементов Менделеева» — десятиклассникам.  
Материалы подготовил И. К. Белкин.

### Работа, энергия и архимедова сила

Работа силы, с которой одно тело действует на другое, равна, как известно, изменению потенциальной энергии взаимодействия этих тел, взятому с противоположным знаком («Физика 8», § 57):

$$A = -\Delta E_p.$$

Если, например, тело массы  $M$  падает в вакууме с высоты  $h_1$  до высоты  $h_2$  ( $h_1$  и  $h_2$  отсчитываются от произвольно выбранного нулевого уровня, как показано на рисунке), то сила тяжести совершает работу, равную произведению проекции  $Mg$  этой силы на направление перемещения на модуль перемещения  $h_1 - h_2$ :

$$A = Mg(h_1 - h_2). \quad (1)$$

Это равенство можно записать и так:  $A = Mgh_1 - Mgh_2 =$

$$= -(Mgh_2 - Mgh_1) = -\Delta E_p,$$

то есть работа равна изменению потенциальной энергии, взятому с противоположным знаком.

Теперь допустим, что падение этого же тела происходит в некоторой жидкости (см. рисунок). Присутствие жидкости, конечно, не изменит ни массы тела, ни ускорения свободного падения, ни, следовательно, силы тяжести, действующей на тело. Но когда тело займет новое положение на высоте  $h_2$ , оно вытеснит находившуюся там жидкость, которая переместится вверх, на высоту  $h_1$ , и займет место, освобожденное телом. Тело и жидкость в объеме тела как бы поменяются местами. При этом по-

тенциальная энергия тела уменьшится на величину  $\Delta E_{p1} = (Mgh_2 - Mgh_1)$ , а потенциальная энергия жидкости увеличится на величину  $\Delta E_{p2} = (mgh_1 - mgh_2)$ , где  $m$  — масса жидкости в объеме, равном объему тела. Общее изменение потенциальной энергии  $\Delta E_p$  будет равно сумме  $\Delta E_{p1}$  и  $\Delta E_{p2}$ , поэтому получим

$$A = -\Delta E_p =$$

$$= -(Mgh_2 - Mgh_1) + (mgh_1 - mgh_2) =$$

$$= (Mg - mg)(h_1 - h_2). \quad (2)$$

Сравнивая равенства (2) и (1), мы видим, что во втором случае на тело кроме силы  $M\vec{g}$ , направленной вниз, действует еще сила  $-m\vec{g}$ , направленная вверх. Но  $mg$  — это модуль силы тяжести, действующей на жидкость, вытесненную телом (и равной ее весу). Следовательно, сила  $-m\vec{g}$  и есть архимедова сила. Утверждение о том, что такая сила существует, известно в физике как закон Архимеда: на тело, погруженное в жидкость, со стороны окружающей жидкости действует выталкивающая сила, равная весу жидкости в объеме, вытесненном телом.

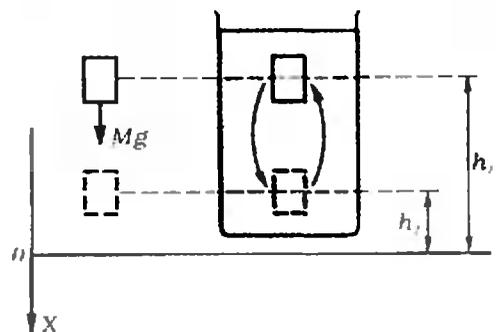
Формулу (2) можно переписать в другом виде. Обозначим объем тела через  $V$ , плотность тела через  $\rho_t$  и плотность жидкости через  $\rho_{ж}$ . Тогда масса тела  $M = \rho_t V$ , масса жидкости в объеме  $V$  равна  $m = \rho_{ж} V$  и

$$A = (\rho_t Vg - \rho_{ж} Vg)(h_1 - h_2) =$$

$$= (\rho_t - \rho_{ж}) Vg(h_1 - h_2). \quad (3)$$

Величина  $\rho_{ж} Vg$  и представляет собой модуль архимедовой силы.

Из формулы (3) видно, что если плотность  $\rho_t$  тела больше плотности  $\rho_{ж}$  жидкости, то результирующая сила, действующая на тело, направлена вниз, и тело тонет. Если, наоборот, плотность тела меньше плотности жидкости, результирующая сила направлена



вверх, и тело всплывает. Когда вес жидкости в объеме погруженной части тела станет равным силе тяжести тела, наступит равновесие. Наконец, если плотности тела и жидкости равны друг другу, тело окажется в равновесии, будучи полностью погруженным в жидкость.

Рассуждения, которые привели нас к выводу о существовании архимедовой силы (и закона Архимеда), справедливы как для жидкости, так и для газа. Поэтому закон Архимеда лежит в основе теории плавания не только кораблей на воде, но и воздушных кораблей — аэростатов, дирижаблей и т. п. с той только разницей, что воздушный корабль не может быть погружен в газ частично.

В учебнике «Физика 8» указывается, что в механике приходится иметь дело с тремя видами сил — упругости, трения и тяготения. К какому же виду нужно отнести силу Архимеда? Или это, может быть, особый, четвертый вид сил? Нет, по природе своей архимедова сила — это результат упругого взаимодействия тела и жидкости (или газа), то есть ее следует считать силой упругости, возникающей вследствие сжатия жидкости (или газа).

Отметим в заключение, что закон Архимеда, при всей его исторической важности, нельзя считать одним из основных, фундаментальных законов природы. В действительности, это прямое следствие более общего закона — закона Паскаля. Как мы только что видели, он может считаться также следствием закона сохранения энергии.

## Электрическое и магнитное поля

Вокруг всякого покоящегося в некоторой системе отсчета электрического заряда  $q$  существует, как известно, электростатическое поле. Если этот заряд точечный, то напряженность поля в любой точке на расстоянии  $r$  от него определяется формулой:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2}. \quad (1)$$

Сила взаимодействия двух покоящихся точечных зарядов  $q$  и  $q'$ , находящихся на расстоянии  $r$  друг от друга, равна

$$F_{эл} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq'}{r^2}. \quad (2)$$

Если заряды одинаковые ( $q = q'$ ), то

$$F_{эл} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2}. \quad (2')$$

Это хорошо известный закон Кулона. Подчеркнем, что этот закон был установлен экспериментально. Входящая в формулы (1), (2) величина  $\epsilon_0$  — это электрическая постоянная, равная  $8,85 \cdot 10^{-12} \text{ Кл}^2 / (\text{Н} \cdot \text{м}^2)$ .

Обсудим теперь ситуацию с зарядом, движущимся с постоянной скоростью  $\vec{v}$ . Скорость  $\vec{v}$  мы измеряем относительно заранее выбранной системы отсчета, которую мы условно считаем неподвижной и обозначим буквой  $K$ .

Движущийся заряд — это электрический ток, а вокруг тока существует магнитное поле. Значит, движение заряда приводит к появлению магнитного поля в рассматриваемой нами системе отсчета  $K$ .

Обратите внимание на то, что если бы мы перешли в систему отсчета  $K'$ , движущуюся относительно системы  $K$  со скоростью, равной скорости заряда  $\vec{v}$ , никакого магнитного поля в этой системе не было бы (помещенная там магнитная стрелка (компас) оставалась бы в покое).

Вернемся, однако, снова в систему  $K$ . Из опыта мы знаем, что магнитное поле действует на электрический ток, а значит, и на движущийся заряд. Понятно, что между электрическими и магнитными явлениями должна существовать тесная связь.

Рассмотрим простой пример. Пусть заряд  $q$  движется со скоростью  $\vec{v}$  (в системе  $K$ ). Тогда в пространстве вокруг него есть и электрическое, и магнитное поля. Пусть теперь в какой-то точке, где электрическое и магнитное поля созданы зарядом  $q$ , оказался другой заряд  $q'$ , который движется со скоростью  $\vec{v}'$ . Очевидно, что на него будут действовать электрическая и магнитная силы. Аналогичное утверждение можно сделать и про заряд  $q$ .

Если заряды движутся со скоростями не слишком большими (что такое «не слишком большие», выяснится ниже), то их электрические поля в каждый момент времени практически не отличаются от случая покоящихся зарядов, а силу электрического взаимодействия зарядов можно подсчитывать по закону Кулона (2).

Мы ограничимся дальше случаем не очень быстро движущихся зарядов. В этом случае можно довольно просто сравнить магнитные и электрические силы. Мы сделаем это для двух зарядов, скорости которых в некоторый момент оказались параллельными друг другу и перпендикулярными к линии, соединяющей эти заряды (рис. 1).

Прежде всего нам нужно понять, как индукция магнитного поля  $\vec{B}$ , создаваемого движущимся зарядом, связана с величиной этого заряда  $q$  и его скоростью  $\vec{v}$ . Проведем из точки, где находится заряд  $q$ , в точку, в которой мы хотим вычислить индукцию  $\vec{B}$ , радиус-вектор  $\vec{r}$ . Обобщение результатов опытов показывает, что величина индукции определяется формулой

$$B = kq \frac{v}{r^2} \sin \varphi. \quad (3)$$

Здесь  $r = |\vec{r}|$ ,  $\varphi$  — угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{r}$ , а  $k$  — постоянная, определяемая опытным путем и равная  $10^{-7} \text{ Н} \cdot \text{с}^2 / \text{Кл}^2$ . Для интересующего нас случая  $\varphi = 90^\circ$  и

$$B = kv \frac{q}{r^2}. \quad (3')$$

Направление вектора  $\vec{B}$  определяется по правилу буравчика (правого винта): если вращать вектор  $\vec{v}$  по направлению к вектору  $\vec{r}$  в той плоскости, в которой они оба лежат, и так, чтобы вращение происходило в направлении минимального угла между  $\vec{v}$  и  $\vec{r}$ , то вектор  $\vec{B}$  направлен перпендикулярно указанной плоскости и «смотрит» туда, куда «смотрел бы» ввинчиваемый буравчик (рис. 2).

В формулы (3) и (3') входит в качестве множителя то же отношение  $q/r^2$ , которое содержится и в выражении для напряженности электрического поля, создаваемого зарядом  $q$  в точке, где находится заряд  $q'$ . Это замечание позволяет нам установить связь между величинами  $B$  и  $E$ . Учитывая (1), получаем

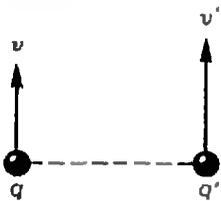


Рис. 1.

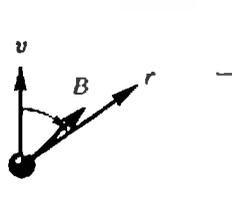


Рис. 2.

$$B = kv \frac{q}{r^2} = 4\pi\epsilon_0 kvE.$$

Обозначим еще  $4\pi k = \mu_0$ , тогда

$$B = \epsilon_0 \mu_0 vE. \quad (4)$$

Входящая в (4) величина  $\mu_0$  носит название магнитной постоянной (по аналогии с электрической постоянной  $\epsilon_0$ ). Зная  $k$ , мы вычислим  $\mu_0 = 1,256 \times 10^{-6} \text{ Н} \cdot \text{с}^2 / \text{Кл}^2$ .

Теперь, когда мы умеем вычислять магнитную индукцию  $B$  в точке, где находится заряд  $q'$ , можно определить и магнитную силу (силу Лоренца), действующую на заряд  $q'$ . В общем случае сила Лоренца

$$F_{\perp} = q'v'B \sin \alpha. \quad (5)$$

Здесь  $\alpha$  — угол между векторами  $\vec{v}'$  и  $\vec{B}$ . Направление вектора  $\vec{F}_{\perp}$  определяется тоже по правилу правого буравчика (вектор  $\vec{v}'$  нужно поворачивать в направлении минимального угла к вектору  $\vec{B}$  в плоскости, в которой лежат оба этих вектора, вектор  $\vec{F}_{\perp}$  перпендикулярен этой плоскости).

В нашем случае угол  $\alpha$  также равен  $90^\circ$ , и на заряд  $q'$  действует сила

$$F_{\text{магн}} = q'v'B.$$

Подставляя сюда  $B$  из (3'), получим

$$F_{\text{магн}} = k \frac{qq'vv'}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{qq'vv'}{r^2}. \quad (6)$$

Электрическая сила, действующая между  $q$  и  $q'$ , определяется формулой (2). Предположим теперь еще, что  $q = q'$ , а  $\vec{v} = \vec{v}'$ . Тогда отношение

$$\frac{F_{\text{магн}}}{F_{\text{эл}}} = \epsilon_0 \mu_0 v^2.$$

Зная определенные из опыта постоянные  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$ , мы легко убедимся в том, что

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = 9 \cdot 10^{16} \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}.$$

Но стоящая в этой формуле справа величина есть квадрат скорости света! Это, конечно, не случайное совпадение. Обозначая скорость света буквой  $c$ , получим окончательно:

$$\frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} = c^2 \quad (7)$$

и

$$\frac{F_{\text{магн}}}{F_{\text{эл}}} = \left(\frac{v}{c}\right)^2. \quad (8)$$

Это очень важные формулы. Формула (7) еще раз подтверждает существование глубокой связи электрических и магнитных явлений. Из формулы (8) мы можем сделать вывод, что отноше-

ние магнитных и электрических сил для многих практически интересных случаев оказывается малой величиной. Например, обычно направленная скорость электронов в металле при прохождении тока составляет десятые доли миллиметра в секунду. В таких случаях магнитное взаимодействие электронов примерно в  $10^{24}$  раз меньше их электрического взаимодействия. Стоит ли вообще считаться с магнитным взаимодействием движущихся зарядов? Оказывается, стоит и вот почему. Во всяком проводнике имеются в равном числе заряженные частицы обоих знаков. Поэтому проводники с током электрически практически нейтральны. Электрические силы в проводниках с огромной точностью скомпенсированы, а при их отсутствии даже очень малые магнитные силы оказываются существенными. В электрических моторах движущиеся в их обмотках электроны взаимодействуют именно магнитными силами. Именно за счет магнитных сил приводятся в движение двигатели.

Вспомним теперь, что в наших рассуждениях мы сделали допущение о «не слишком больших скоростях». Теперь можно сказать, что мы имели в виду малость скоростей частиц по сравнению со скоростью света. Это было нужно нам для того, чтобы не возникло необходимости пользоваться более сложными (релятивистскими) формулами. Например, при скоростях заряженных частиц, близких к скорости света, уже нельзя записывать формулу для напряженности электрического поля в виде (1).

Так же, как и другие физические величины, например, скорости и ускорения частиц, силы, действующие на них, напряженность электрического поля и индукция магнитного поля зависят от того, в какой системе отсчета мы их рассматриваем (измеряем). Выше мы уже говорили, например, о том, что если магнитное поле существует в системе  $K$ , то из этого еще не следует, что оно сохранится в системе  $K'$ . Система  $K'$ , которую мы рассматривали, двигалась со скоростью, равной скорости  $\vec{v}$  интересовавшего нас заряда. И магнитное поле в системе  $K'$  отсутствовало. В общем случае и вектор  $\vec{E}$ , и вектор  $\vec{B}$  *относительны*, то есть зависят от того, в какой системе отсчета находится наблюдатель с приборами, измеряющими эти величины.

Для нас существенно то, что при скоростях, малых по сравнению со скоростью света, электрическое поле изменяется мало. Количественной характеристикой этой малости как раз и служит отношение  $(v/c)^2$ .

Заметим, впрочем, что формула (8) оказывается справедливой и при скоростях, близких к скорости света. Поэтому для релятивистских частиц, движущихся со скоростью, лишь немногим меньшей скорости света, величины магнитных и электрических сил могут отличаться не очень сильно.

Подводя итог нашим вычислениям, еще раз подчеркнем, что для многих задач магнитное взаимодействие оказывается существенным, даже если оно мало по сравнению с электрическим.

Остановимся совсем кратко на других отличиях магнитного и электрического (электростатического) полей. Одно из этих отличий состоит в том, что линии действия электрических сил (силовые линии электростатического поля) имеют начало и конец. Они начинаются на положительных зарядах и кончаются на отрицательных. Работа при перемещении заряда между двумя фиксированными точками в электростатическом поле не зависит от формы и длины траектории, а работа, совершаемая при движении заряда по замкнутой траектории, равна нулю. Благодаря этому свойству электростатического поля каждая его точка характеризуется не только напряженностью, но и потенциалом.

Линии же магнитной индукции, в отличие от силовых линий электростатического поля, не имеют начала и конца. Они замкнуты и охватывают ток. Каждая точка магнитного поля характеризуется величиной магнитной индукции, но не потенциалом.

Сила, действующая на заряд в электростатическом поле, всегда направлена по касательной к силовым линиям. Если рассматривать в магнитном поле участки проводников с током или движущиеся заряженные частицы, то силы, действующие на них, направлены не по касательной к линиям индукции, а перпендикулярно к ним (сила Лоренца, закон Ампера). Сила в магнитном поле может вовсе не вызывать поступательного движения, а лишь поворот (рамка с током в однородном магнитном поле; движение заряда по окружности в плоскости, перпендикулярной однородному магнитному полю).

Все сказанное говорит о том, что электростатическое поле во многом не похоже на магнитное. Связь электрических и магнитных полей вовсе не означает, что между ними не существует различий.

## Заряд атомного ядра и периодическая система элементов Менделеева

Современные представления о строении атома возникли в 1911—1913 годах, после знаменитых опытов Резерфорда по рассеянию альфа-частиц. В этих опытах было показано, что  $\alpha$ -частицы (их заряд положительный), попадая на тонкую металлическую фольгу, иногда отклоняются на большие углы и даже отбрасываются назад. Это можно было объяснить только тем, что положительный заряд в атоме сконцентрирован в ничтожно малом объеме. Если представить его в виде шарика, то, как установил Резерфорд, радиус этого шарика должен быть равен примерно  $10^{-14}$ — $10^{-15}$  м, что в десятки и сотни тысяч раз меньше размеров атома в целом ( $\sim 10^{-10}$  м). Только вблизи столь малого по размерам положительного заряда может существовать электрическое поле, способное отбросить  $\alpha$ -частицу, мчащуюся со скоростью около 20 000 км/с. Эту часть атома Резерфорд назвал атомным ядром.

Так возникла идея о том, что атом любого вещества состоит из положительно заряженного ядра и отрицательно заряженных электронов, существование которых в атомах было установлено ранее. Очевидно, что, поскольку атом в целом электрически нейтрален, заряд ядра должен быть численно равен заряду всех имеющихся в атоме электронов. Если обозначить модуль заряда электрона буквой  $e$  (элементарный заряд), то заряд  $q_{\text{я}}$  ядра должен быть равен  $q_{\text{я}} = Ze$ , где  $Z$  — целое число, равное числу электронов в атоме. Но чему равно число  $Z$ ? Чему равен заряд  $q_{\text{я}}$  ядра?

Из опытов Резерфорда, позволивших установить размеры ядра, в принципе, можно определить и величину заряда ядра. Ведь электрическое поле, отбрасывающее  $\alpha$ -частицу, зависит не только от размеров, но и от заряда

ядра. И Резерфорд в самом деле оценил заряд ядра. По Резерфорду заряд ядра атома того или иного химического элемента примерно равен половине его относительной атомной массы  $A$ , умноженной на элементарный заряд  $e$ , то есть

$$Z = \frac{1}{2} A \text{ и } q_{\text{я}} = \frac{1}{2} Ae.$$

Но, как это ни странно, истинный заряд ядра был установлен не Резерфордом, а одним из читателей его статей и докладов — голландским ученым Ван-ден-Бруком (1870—1926). Странно потому, что Ван-ден-Брук по образованию и профессии был не физиком, а юристом.

Почему Резерфорд, оценивая заряды атомных ядер, соотносил их с атомными массами? Дело в том, что когда в 1869 году Д. И. Менделеев создал периодическую систему химических элементов, он расположил элементы в порядке возрастания их относительных атомных масс. И за истекшие сорок лет все привыкли к тому, что самая важная характеристика химического элемента — его относительная атомная масса, что именно она отличает один элемент от другого.

Между тем именно в это время, в начале XX века, с системой элементов возникли трудности. При исследовании явления радиоактивности был открыт ряд новых радиоактивных элементов. И для них в системе Менделеева как будто бы не было места. Казалось, что система Менделеева требовала изменения. Этим и был особенно озабочен Ван-ден-Брук. В течение нескольких лет им было предложено несколько вариантов расширенной системы элементов, в которой хватило бы места не только для неоткрытых еще стабильных элементов (о местах для них «позаботился» еще сам Д. И. Менделеев), но и для радиоактивных элементов тоже. Последний вариант Ван-ден-Брук опубликовал в начале 1913 года, в нем было 120 мест, а уран занимал клетку под номером 118.

В том же 1913 году были опубликованы результаты последних исследований по рассеянию  $\alpha$ -частиц на большие углы, проведенных сотрудниками Резерфорда Гейгером и Марсденом. Анализируя эти результаты, Ван-ден-Брук сделал важнейшее открытие. Он установил, что число  $Z$  в формуле  $q_{\text{я}} = Ze$  равно не половине

относительной массы атома химического элемента, а его порядковому номеру. И притом порядковому номеру элемента в системе Менделеева, а не в его, Ван-ден-Брука, 120-местной системе. Система Менделеева, оказывается, не нуждалась в изменении!

Из идеи Ван-ден-Брука следует, что всякий атом состоит из атомного ядра, заряд которого равен порядковому номеру соответствующего элемента в системе Менделеева, умноженному на элементарный заряд, и электронов, число которых в атоме тоже равно порядковому номеру элемента. (Атом меди, например, состоит из ядра с зарядом, равным  $29e$ , и 29 электронов.) Стало ясно, что Д. И. Менделеев интуитивно расположил химические элементы в порядке возрастания не атомной массы элемента, а заряда его ядра (хотя он об этом и не знал). Следовательно, один химический элемент отличается от другого не своей атомной массой, а зарядом атомного ядра. Заряд ядра атома — вот главная характеристика химического элемента. Существуют атомы совершенно различных элементов, но с одинаковыми атомными массами (они имеют специальное название — изобары).

То, что не атомные массы определяют положение элемента в системе,

видно и из таблицы Менделеева: в трех местах нарушено правило возрастания атомной массы. Так, относительная атомная масса у никеля (№ 28) меньше, чем у кобальта (№ 27), у калия (№ 19) она меньше, чем у аргона (№ 18), у иода (№ 53) меньше, чем у теллура (№ 52).

Предположение о взаимосвязи заряда атомного ядра и порядкового номера элемента легко объясняло и правила смещения при радиоактивных превращениях, открытые в том же 1913 году («Физика 10», § 103). В самом деле, при испускании ядром  $\alpha$ -частицы, заряд которой равен двум элементарным зарядам, заряд ядра, а значит, и его порядковый номер (теперь обычно говорят — атомный номер) должен уменьшиться на две единицы. При испускании же  $\beta$ -частицы, то есть отрицательно заряженного электрона, он должен увеличиться на одну единицу. Именно в этом и состоят правила смещения.

Идея Ван-ден-Брука очень скоро (буквально в том же году) получила первое, правда косвенное, опытное подтверждение. Несколько позже правильность ее была доказана прямыми измерениями заряда ядер многих элементов. Понятно, что она сыграла важную роль в дальнейшем развитии физики атома и атомного ядра.

## Кубическая парабола

(Начало см. на с. 10)

В качестве упомянутого дополнительного соотношения выберем такое, которое обращает в нуль второе слагаемое левой части, а именно  $3uv = p$ . После этого мы получаем соотношение  $u^3 + v^3 = c$ . Возводя соотношение  $3uv = p$  в куб, получаем  $u^3v^3 = p^3/27$ . Таким образом, нам известна сумма  $u^3$  и  $v^3$  и произведение  $u^3v^3$ . Следовательно,  $z_1 = u^3$  и  $z_2 = v^3$  является двумя корнями квадратного уравнения  $z^2 - cz + p^3/27 = 0$ . Отсюда

$$z_1 = u^3 = \frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} - \frac{p^3}{27}}, \quad (45)$$

$$z_2 = v^3 = \frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} - \frac{p^3}{27}}. \quad (46)$$

Очень интересным является тот факт, что подкоренное выражение в (45), (46)

отрицательно тогда и только тогда, когда уравнение (42) имеет три различных действительных корня. Таким образом, именно в случае трех действительных корней в промежуточных вычислениях появляются комплексные числа. Это обстоятельство исторически сыграло важную роль, показав, что рассмотрение комплексных чисел необходимо для получения результата в виде действительных чисел.

Теперь мы можем выписать саму формулу Кардано для решения уравнения (42)

$$x = \sqrt[3]{\frac{c}{2} + \sqrt{\frac{c^2}{4} - \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{\frac{c}{2} - \sqrt{\frac{c^2}{4} - \frac{p^3}{27}}}. \quad (47)$$

Формула (47) дает выражение для всех трех решений уравнения (42) при подходящем выборе комплексных значений кубического корня.

# Задачи-матрешки

И. А. КУШНИР

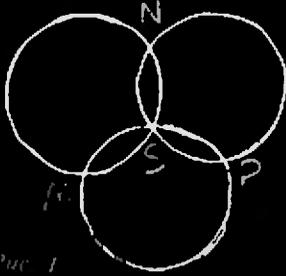


Рис. 1

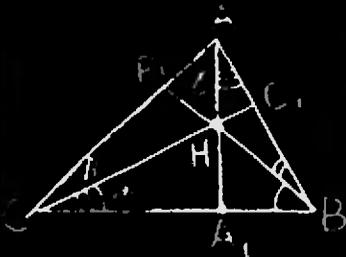


Рис. 2

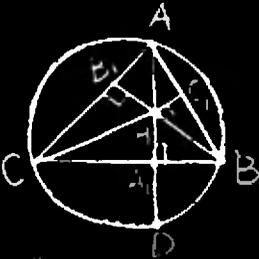


Рис. 3

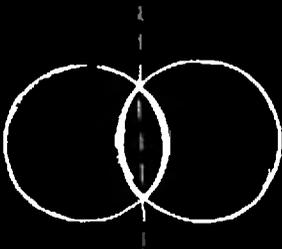


Рис. 4

В начале факультатива по геометрии Петр Иванович нарисовал на доске три окружности (рис. 1) и предложил решить такую задачу:

*Три окружности одинакового радиуса  $R$  пересекаются в общей точке  $S$  и в точках  $M, N, P$ . Докажите, что точки  $M, N, P$  лежат на окружности того же радиуса  $R$ .*

Подумали мы немного. Ничего не получается: не видно, как приступить к задаче. Тогда Петр Иванович поставил на стол маленькую матрешку и написал на доске:

*Задача 1. Внутри треугольника  $ABC$  дана такая точка  $H$ , что  $\widehat{HAC} = \widehat{HBC}$ ,  $\widehat{HBA} = \widehat{HCA}$ ,  $\widehat{HCB} = \widehat{HAB}$ . Тогда  $H$  — ортоцентр треугольника  $ABC$ , то есть точка пересечения его высот.*

Мы это доказали почти сразу. В обозначениях, которые появились в чертеже на доске (рис. 2), очевидно,  $2(\alpha + \beta + \gamma) = 180^\circ$ , откуда  $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$ . Но тогда внешний угол  $AA_1B$  треугольника  $ACA_1$  равен  $(\alpha + \beta) + \gamma = 90^\circ$ , значит,  $AA_1$  — высота. Аналогично  $BB_1$  и  $CC_1$ , и, стало быть,  $H$  — ортоцентр.

— Правильно,— сказал Петр Иванович, поставил рядом с первой матрешкой вторую, чуть побольше, а на доске написал:

*Задача 2. Точка, симметричная ортоцентру относительно стороны треугольника, лежит на его описанной окружности.*

По чертежу, нарисованному на доске (рис. 3), в котором  $D$  обозначает точку пересечения высоты  $AA_1$  с описанной окружностью, мы быстро усмотрели равенства  $\widehat{HBC} = \widehat{CAD}$  (так как каждый из этих углов составляет  $90^\circ$  вместе с углом  $B_1\widehat{CB}$ ) и  $\widehat{CAD} = \widehat{CBD}$  (углы опираются на общую дугу  $\widehat{CD}$ ). Поэтому  $\widehat{HBC} = \widehat{DBC}$  и точка  $D$  симметрична  $H$  относительно  $CB$ .

Тут на столе Петра Ивановича появилась третья матрешка, а на доске — такая запись:

*Задача 3. Радиус описанной окружности треугольника равен радиусу окружности, проходящей через две вершины и ортоцентр.*

На предыдущем чертеже (см. рис. 3) Петр Иванович дорисовал окружность, проходящую через точки  $C, H, B$  и отрезки  $CD$  и  $DB$ . С места ему стали говорить, что треугольники  $CHB$  и  $CDB$  конгруэнтны по предыдущей задаче, поэтому их описанные окружности — одинакового радиуса. Петр Иванович вторую матрешку спрятал в третью.

— А еще есть матрешки? — спросили мы.

— Есть,— ответил Петр Иванович, вынув самую маленькую матрешку,— но задача будет устная, и написал:

*Задача 4. Дуги окружностей равных радиусов, соединяющие две их точки пересечения, конгруэнтны.*

— Дуги, конечно, конгруэнтны, ведь они симметричны относительно прямой, проходящей через точки пересечения,— ответили мы (рис. 4).

— Ну, а теперь любой из вас должен решить первоначальную задачу про три окружности,— сказал Петр Иванович и... вызвал меня к доске.

Я начал говорить что-то невнятное, но тут прозвучал спасительный звонок. Тогда Петр Иванович достал пятую, самую большую матрешку, многозначительно вложил матрешки друг в друга и сказал:

— Чтобы к следующему разу все решили эту задачу. Дома я ее довольно быстро решил.\*) А вы?

\*) Решение можно прочитать в разделе «Ответы, указания, решения».

## Задачи

1. При делении числа  $2 \cdot 3 = 6$  на 4 получаем в остатке 2, при делении числа  $3 \cdot 4 = 12$  на 5 вновь получаем в остатке 2. Верно ли, что остаток от деления произведения двух последовательных чисел на число, следующее за ними, всегда равен 2?

2. Два мальчика катаются на велосипедах поздно вечером. У одного из них велосипед с большими колесами, а у другого — с маленькими, но ездят они с одинаковой скоростью. У кого из них ярче горит фонарь, работающий от динамомашинки на ободе колеса?

3. Существует ли трехзначное число, равное произведению своих цифр?

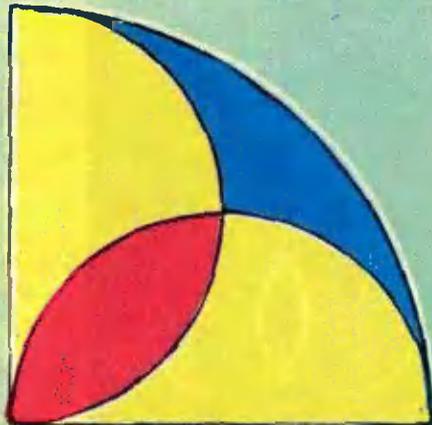
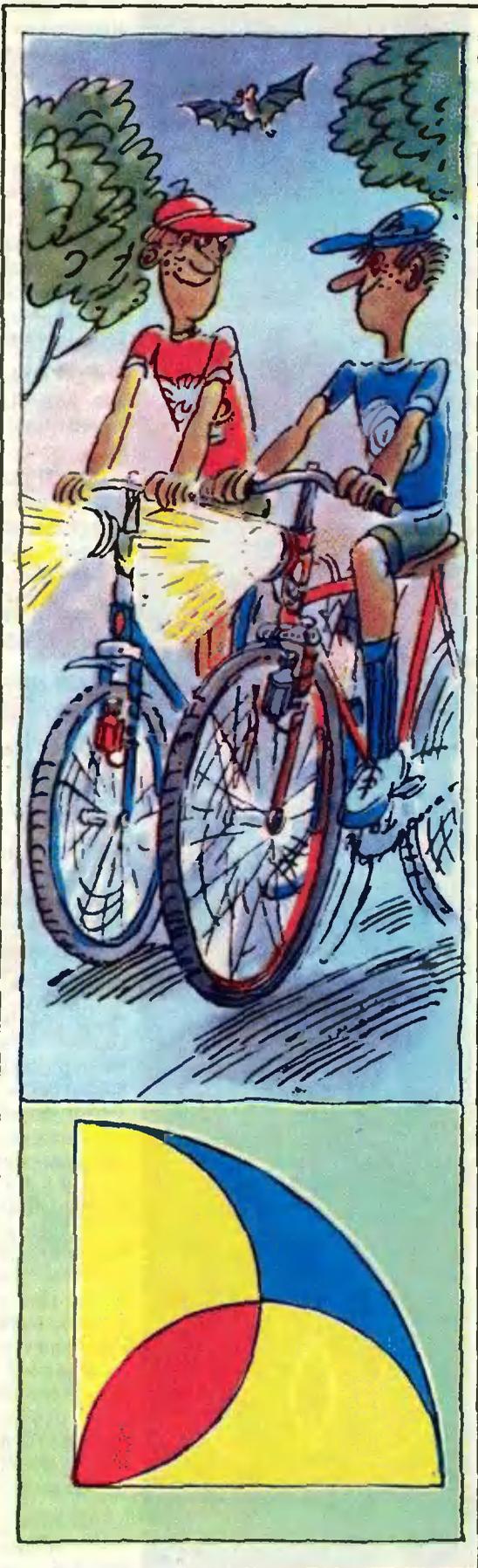
4. На радиусах четверти круга, как на диаметрах, построены полукруги (см. рисунок). Что имеет большую площадь: общая (красная) часть этих полукругов или (синяя) часть четверти круга, не покрытая ими?

5. Цифру 9, с которой начиналось трехзначное число, перенесли в конец числа. В результате получилось число на 216 меньше. Какое число было первоначально?

Эти задачи нам предложили:

*Н. К. Антонович, С. В. Дворянинов.*

*С. Н. Олехник, А. И. Савин, А. Г. Самосвит.*



## Решето Эратосфена

Академик А. И. КОЛМОГОРОВ

Эта красивая форма решета Эратосфена\*) заимствована из книги М. Гарднера «Математические досуги» (изд-во «Мир», 1972). Все не перечеркнутые (красным или синим) числа — простые, кроме числа 121. Объясните, почему!

**Задача 1.** Чтобы получить список простых чисел, меньших 1000, надо «отсеять» числа, которые делятся на 2, 3, 5, 7, 11... На каком простом числе можно при этом остановиться?

Как изменится ответ для случая составления таблицы простых чисел, меньших 10 000?

Восклицательным знаком отмечены в таблице пары простых чисел «близнецов\*\*»). В нашей таблице их десять.

Известно, что простых чисел бесконечно много. Но никто не знает, конечно или бесконечно множество пар близнецов.

**Задача 2.** Первые две пары близнецов (3, 5) и (5, 7) имеют общий элемент (5). «Расстояние» между второй и третьей парой близнецов (11, 13) равно

$$11 - 7 = 4.$$

Расстояние между третьей и четвертой (17, 19)

$$17 - 13 = 4,$$

между четвертой и пятой (29, 31)

$$29 - 19 = 10.$$

Докажите, что далее расстояние между соседними парами близнецов никогда не будет меньше четырех.

\*) См. «Квант», 1973, № 4, с. 71.

\*\*) См. «Квант», 1973, № 5, с. 56.

2	3	4	5!	6	7!
8	9	10	11	12	13!
14	15	16	17	18	19!
20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31!
32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43!
44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61!
62	63	64	65	66	67
68	69	70	71	72	73!
74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85
86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97
98	99	100	101	102	103!
104	105	106	107	108	109!
110	111	112	113	114	115
116	117	118	119	120	121

## Сколько воды в колбах?

Шесть прозрачных колб с водой расставлены в два параллельных ряда по три колбы в каждом. На рисунке 1 видны три передние колбы и на рисунке 2 — две правые боковые. Через прозрачные стенки колб просматриваются уровни воды в каждой видимой колбе и во всех колбах, стоящих за ней. Определите, сколько воды налито в каждую колбу.

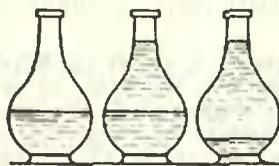


Рис. 1.

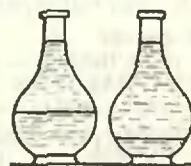


Рис. 2.

## Победители конкурса «Задачник «Кванта»

Ежегодно наш журнал проводит конкурс среди школьников по решению задач из Задачника «Кванта». Ниже публикуются списки победителей конкурса «Задачник «Кванта» 1983 года.

В соответствии с решением оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьников право участвовать сразу в четвертом (республиканском) туре Всесоюзной олимпиады получают:

### По математике

Я. БАБКИН — Петрозаводск, с. ш. № 30, 9 кл.  
 А. БАРАБАШ — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.  
 С. ВЕЛЕСЬКО — Минск, с. ш. № 103, 8 кл.  
 К. ГАДЖИЕВ — с. Зод Арм. ССР, Зодская с. ш., 9 кл.  
 М. ГАРАЕВ — Физули, с. ш. № 2, 10 кл.  
 Р. ГЕНДЛЕР — Ташкент, с. ш. № 208, 7 кл.  
 З. ДЖАББАРОВ — Ташкент, с. ш. № 5, 10 кл.  
 З. ДЖАФАРОВ — с. Тьюркоба Аз. ССР, Тьюркобинская с. ш., 10 кл.  
 А. ДУЛУБ — Калининчи, с. ш. № 7, 10 кл.  
 В. ЖУРАВЛЕВ — Гайворон, с. ш. № 2, 7 кл.  
 Л. ЗОСИН — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.  
 П. КАСИНСКИЙ — Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.  
 О. КОЗЛОВСКИЙ — Москва, с. ш. № 444, 9 кл.  
 С. КОРШУНОВ — Целиноград, с. ш. № 1, 10 кл.  
 О. МАТВЕЕВ — Свердловск, с. ш. № 79, 10 кл.  
 А. МОЛОТКОВ — Ленинград, с. ш. № 366, 9 кл.  
 С. НАБИЕВ — Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.  
 С. НАЙДЕН — Днепрпетровск, с. ш. № 43, 10 кл.  
 А. РАСУЛОВ — Баку, ФМШ № 1, 10 кл.  
 Г. САМАДАШВИЛИ — Тбилиси, с. ш. № 63, 10 кл.  
 М. ТЕЙТЕЛЬ — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.  
 Д. ТЕРЕШИН — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.  
 Д. ФЕДОТОВ — Новокузнецк, с. ш. № 97, 8 кл.  
 Е. ФИЛЕНКО — Родинское, с. ш. № 8, 10 кл.  
 Б. ФРИДМАН — Москва, с. ш. № 57, 9 кл.  
 А. ШНИРМАН — Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.  
 А. ЯРИН — Севастополь, с. ш. № 24, 10 кл.

### По физике

В. АПАЛЬКОВ — Харьков, с. ш. № 16, 9 кл.  
 Э. БАГДАСАРЯН — Баку, с. ш. № 46, 10 кл.  
 В. БАРЗЫКИН — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 9 кл.  
 И. БЕРХИН — Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.

В. БРАЖНИКОВ — Запорожье, с. ш. № 28, 10 кл.  
 М. ГРИНБЕРГ — Красноярск, с. ш. № 42, 10 кл.  
 Г. ДОЛГОПЯТОВ — Донецк, с. ш. № 1, 10 кл.  
 М. ЗИМАНОВ — Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.  
 И. КАЛИНОВСКИЙ — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.  
 Д. КУЩОВ — Москва, спецшк. № 4, 10 кл.  
 С. ЛАУРИНАВИЧЮС — Мажейкий, с. ш. № 3, 11 кл.  
 Д. МАКАРОВ — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.  
 К. МАКАРЧУК — Киев, с. ш. № 145, 9 кл.  
 И. ПИЛЬНИКОВ — Тамбов, ПТУ № 2  
 А. ПОГОРЕЛОВ — Алма-Ата, РФМШ, 10 кл.  
 Г. САМАДАШВИЛИ — Тбилиси, с. ш. № 63, 10 кл.  
 В. САМОЙЛЕНКО — Находка, с. ш. № 10, 10 кл.  
 С. САХАРУК — Брест, с. ш. № 1, 10 кл.  
 А. СОЛОВЬЕВ — Куйбышев, с. ш. № 63, 10 кл.  
 Д. ТРЕТЬЯКОВ — Винница, с. ш. № 33, 10 кл.  
 Л. ФЕЛЬДМАН — Саратов, с. ш. № 13, 9 кл.  
 А. ЧУДНОВСКИЙ — Кисев, с. ш. № 145, 10 кл.  
 Г. ЯШИН — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.

\* \* \*

В соответствии с решением редколлегии награждаются призами журнала «Квант»:

А. АБАНОВ — Красноярск, с. ш. № 170, 10 кл.  
 Р. АЛЕКСЕЕВ — ФМШ № 45 при ЛГУ, 9 кл.  
 А. АСТРЕЛИН — Новосибирск, с. ш. № 119, 10 кл.  
 А. БИРГЕР — Иваново, с. ш. № 6, 9 кл.  
 Г. ГОЧЕВ — Дубна, с. ш. № 9, 10 кл.  
 С. ГРЕБЕНЩИКОВ — п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.  
 А. КРАСНОВ — ФМШ № 165 при НГУ, 10 кл.  
 М. ЛЕВ — Свердловск, с. ш. № 130, 10 кл.  
 А. МАЛЕВАНЕЦ — ФМШ № 2 при КГУ, 9 кл.  
 Ф. НАЗАРОВ — Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.  
 А. САМОЙЛОВИЧ — Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.  
 С. СТРУКОВ — Воронеж, с. ш. № 85, 10 кл.  
 В. ХРЫЧИКОВ — Севастополь, с. ш. № 24, 10 кл.  
 С. ЧЕРНЫШЕВ — ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.  
 Л. ЭРДЕШ — Будапешт, гимназия им. Бержени  
 П. ЭТИНГОФ — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.

# Задачник Кванта

## Задачи

М851—М855; Ф863—Ф867

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 мая 1984 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта», № 3—84» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М851, М852» или «Ф863». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

**М851.** Длина стороны квадрата  $ABCD$  равна 1. На сторонах  $AB$  и  $AD$  выбраны точки  $P$  и  $Q$  так, что периметр треугольника  $APQ$  равен 2. Доказать, что  $\widehat{PCQ} = 45^\circ$ .

*А. Б. Ходулев*

**М852.** Пусть  $x, y, z$  — длины сторон треугольника. Докажите, что величина

$$\left| \frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{y+z} + \frac{z-x}{z+x} \right|$$

меньше а) 1; б)  $\frac{1}{8}$ .

*А. В. Ермилов*

**М853.** Квадрат  $ABCD$  вращается вокруг своего неподвижного центра. Найдите множество, которое описывает середина отрезка  $PQ$ , где  $P$  — основание перпендикуляра, опущенного из точки  $D$  на неподвижную прямую  $l$ , а  $Q$  — середина стороны  $AB$ .

*И. Табов (Болгария)*

**М854.** На переговорном пункте установлены автоматы для размена серебряных монет достоинством 10, 15 и 20 копеек, действующие так, как показано на рисунке 1. У Пети был 1 руб. 25 коп.



Рис. 1.

серебряными монетами и он все их разменял в автоматах на медь. Вася, посчитав сколько каких монет стало у Пети, сказал:

— А я знаю, какие у тебя были серебряные монеты!

Узнайте это и вы.

*Б. И. Бегун*

**М855.** Можно ли жесткий правильный тетраэдр с ребром 1 протолкнуть сквозь обруч диаметра а) 1; б) 0,95; в) 0,9; г) 0,85?

*В. В. Производов*

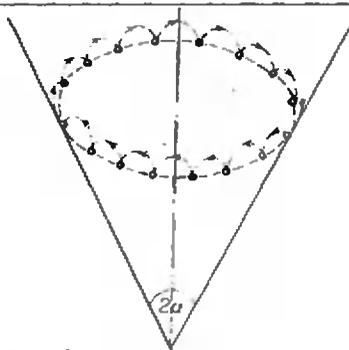


Рис. 2.

**Ф863.** В конической лунке с углом при вершине  $2\alpha$  прыгает шарик, упруго отражаясь от стенки лунки. Точки соударения шарика со стенкой лежат на одной и той же высоте (рис. 2); время от удара до удара постоянно и равно  $T$ . Чему равна средняя угловая скорость движения шарика вокруг оси лунки, если максимальная скорость шарика  $v$  лежит в диапазоне от  $\frac{1}{2} gT$  до  $gT/2 \sin \alpha$ ?

*О. Я. Савченко*

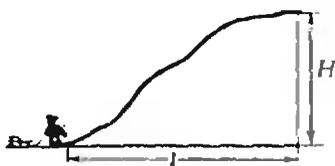


Рис. 3.

**Ф864.** Мальчик медленно поднимается на снежную горку и тащит за собой на веревке санки. Веревка все время параллельна касательной к горке в той точке, в которой находится мальчик. Вершина горки расположена на высоте  $H$  и на расстоянии  $l$  от ее основания (рис. 3). Какую работу совершит мальчик при поднятии санок на горку? Масса санок  $m$ , коэффициент трения санок о снег  $\mu$ .

*А. И. Буздин*

**Ф865.** Оцените размер атома ртути, если известны:  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения ртути (в единицах  $\frac{\text{энергия}}{\text{площадь}}$ ),  $\rho$  — плотность ртути,  $r$  — удельная теплота парообразования ртути.

*Ю. Родионов, А. Яковлев*

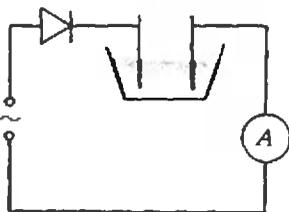


Рис. 4.

**Ф866.** Электролитическая ванна подключена через идеальный диод к сети переменного напряжения (рис. 4). Найти показания теплового амперметра (А), если известно, что за время  $t=1$  ч на катоде выделяется  $m=1,078$  г меди. Электрохимический эквивалент меди  $k=0,33 \cdot 10^{-6}$  кг/Кл.

*Б. А. Мукушев*

**Ф867.** Представьте себе, что вы стоите перед большим листом толстого прозрачного стекла (например, перед стеклянной витриной). Каким образом можно определить толщину стекла, если доступа к его краям нет (скажем, края стекла замурованы в стены), в помещение за стеклом проникнуть нельзя, разбить стекло тоже нельзя? В вашем распоряжении имеются линейка, угольник, бумага, карандаш и карманный калькулятор для проведения расчетов.

*М. В. Семенов*

## Problems

**M851—M855; P863—P867**

**M851.** The square  $ABCD$  is of length 1. Points  $P$  and  $Q$  are chosen on sides  $AB$  and  $AD$  respectively so the perimeter of  $ABC$  is 2.

Prove that  $\widehat{PCQ} = 45^\circ$ .

*A. B. Khodulev*

**M852.** Suppose  $x, y, z$  are the lengths of a triangle's sides. Prove that the number

$$\left| \frac{x-y}{x+y} + \frac{y-z}{x+z} + \frac{z-x}{z+x} \right|$$

is less than a) 1; b)  $\frac{1}{8}$ .

*A. V. Ermilov*

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (\*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it

to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than May 31st, 1984 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант».

Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose and unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

**M853.** The square  $ABCD$  rotates about its fixed centre. Find the set of points described by the midpoint of the segment  $PQ$ , where  $P$  is the foot of the perpendicular drawn from  $D$  to a fixed line  $l$  and  $Q$  is the midpoint of side  $AB$ .

*Y. Tabov (Bulgaria)*

**M854.** Automats for making change exchange 10, 15 and 20 kopeck silver coins for copper coins as shown on the figure Рис. 1. Pete had 1 rouble 25 kopecks in silver coins which he entirely exchanged for copper ones by means of the automats. Pete's friend Vassia, having counted Pete's copper coins, said:

— I know what silver coins you had.  
What were they?

*B. I. Begun*

**M855.** Is it possible to pull a rigid regular tetrahedron of edge  $l$  through a hoop of diameter a)  $l$ ; b)  $0,95l$ ; c)  $0,9l$ ; d)  $0,85l$ ?

*V. V. Proizvolov*

**P863.** A small ball-bearing bounces elastically off the walls of a cone-shaped hole with summit angle  $2\alpha$ . The points where the ball-bearing bounces are all on the same height (see figure Рис. 2); the time between bounces is constant and equals  $T$ . What is the mean angular velocity about the axis of the trough of the ball-bearing if its maximal velocity  $v$  is in the interval from  $\frac{1}{2}gT$  to  $gT/2 \sin \alpha$ ?

*O. Ya. Savchenko*

**P864.** A boy slowly climbs up a snowy hill pulling a sled behind him by means of a rope. The rope is always parallel to the tangent to the hill at the point where the boy is located. The top of the hill is at height  $H$  and distance  $l$  from its base (see figure Рис. 3). What work will the boy perform in pulling the sled to the top of the hill? The sled's mass is  $m$ , its friction coefficient on snow is  $\mu$ .

*A. I. Buzdin*

**P865.** Estimate the size of a mercury atom if the coefficient of surface tension for mercury is  $\sigma$  (in units  $\frac{\text{energy}}{\text{area}}$ ), the density of mercury is  $\rho$ , the specific heat of vaporization is  $r$ .

*Yu. Rodionov, A. Yakovlev*

**P866.** An electrolytic bath is connected via an ideal diode to a source of alternating voltage (see figure Рис. 4). Find the showing of the calorific ammeter (A) if it is known that  $m = 1.078$  gr of copper appear on the cathode in time  $t = 1$  hour. The electrochemical equivalent of copper is  $k = 0.33 \cdot 10^{-6}$  kg/c.

*B. A. Mukushev*

**P867.** Imagine that you are standing in front of a large pane of transparent glass (e. g. a glass store window). How can you determine the glass' thickness if there is no access to its edges (they are walled in, say) or to the inside of the glass, nor are you allowed to break the glass. In your possession you have a ruler, a right angle, paper, pencil and a pocket calculator for computations.

*M. V. Semionov*

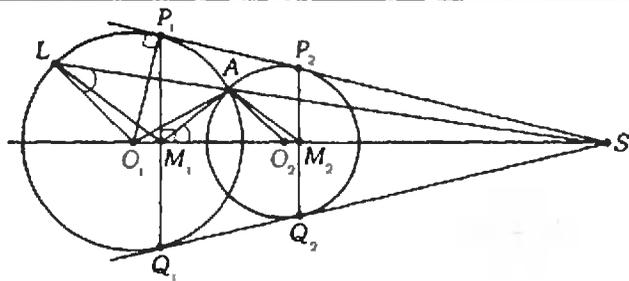
## Решения задач

**M836—M840; Ф847—Ф851**

**M836.** Пусть  $A$  — одна из точек пересечения двух окружностей с центрами  $O_1$  и  $O_2$ ,  $P_1P_2$  и  $Q_1Q_2$  — общие касательные,  $M_1$  и  $M_2$  — середины хорд  $P_1Q_1$  и  $P_2Q_2$  этих окружностей. Докажите равенство углов  $O_1AO_2$  и  $M_1AM_2$ .

Как это часто бывает, полезно начать решение с конца — последовательно преобразовывать доказываемое утверждение, заменяя его на эквивалентные, пока не получится утверждение, которое можно доказать непосредственно.

Очевидно, можно считать, что радиусы окружностей различны. При гомотетии с центром  $S$ , переводящей меньшую окружность в большую (см. рисунок), прямая  $O_2A$  перейдет в пря-



ую  $O_1L$ . Следовательно, они параллельны и  $O_1\widehat{AO}_2 = \widehat{AO}_1L$ ; аналогично,  $M_1\widehat{AM}_2 = \widehat{AM}_1L$ . Таким образом, равенство углов  $O_1\widehat{AO}_2 = M_1\widehat{AM}_2$  эквивалентно следующим утверждениям:

$$\widehat{AO}_1L = \widehat{AM}_1L;$$

точки  $A, L, O_1, M_1$  лежат на одной окружности;

$$O_1\widehat{LA} + \widehat{AM}_1O_1 = 180^\circ;$$

$$O_1\widehat{LS} = \widehat{AM}_1S;$$

треугольники  $SLO_1$  и  $SAM_1$  (с общим углом при вершине  $S$ ) подобны;

$$\frac{|SA|}{|SO_1|} = \frac{|SM_1|}{|SL|}.$$

Для доказательства последнего равенства достаточно заметить, что  $|SA| \cdot |SL| = |SP_1|^2 = |SO_1| \cdot |SM_1|$  (первое равенство здесь — свойство касательной и секущей — следует из подобия треугольников  $P_1LS$  и  $AP_1S$ , второе — из подобия треугольников  $O_1P_1S$  и  $P_1M_1S$ ).

А. М. Абрамов



**М837\***. Пусть  $a, b, c$  — целые положительные числа, каждые два из которых взаимно просты. Докажите, что наибольшее из целых чисел, которые не представимы в виде

$$xbc + yca + zab$$

(где  $x, y, z$  — неотрицательные целые числа), равно

$$2abc - ab - bc - ca.$$

Удобно рассматривать сразу более общую задачу:

пусть  $a_1, a_2, \dots, a_n$  — натуральные попарно взаимно простые числа. Назовем натуральное число  $u$  «красным», если его можно представить в виде

$$u = a_1 a_2 \dots a_n \left( \frac{x_1}{a_1} + \dots + \frac{x_n}{a_n} \right), \tag{1}$$

где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — целые неотрицательные числа, а «синим» — в противном случае. Каково наибольшее синее число?

(В нашей задаче  $n=3$ .)

Одно из самых коротких решений этой задачи опирается на следующие два утверждения:

1) любое целое число  $u$  допускает единственное представление (1), где  $x_1, x_2, \dots, x_n$  — целые числа, причем  $0 \leq x_2 \leq a_2 - 1, \dots, 0 \leq x_n \leq a_n - 1, x_1$  может быть любым (такое представление мы будем называть стандартным);

2) целое число  $u$  — красное тогда и только тогда, когда в его стандартном представлении  $x_1 \geq 0$ .

Из последнего утверждения ясно, что наибольшее синее число  $m$  имеет стандартное представление с  $x_1 = -1, x_2 = a_2 - 1, \dots, x_n = a_n - 1$ , то есть

$$m = a_1 a_2 \dots a_n \left( n - 1 - \frac{1}{a_1} - \dots - \frac{1}{a_n} \right).$$

Докажем эти утверждения по индукции, начиная со случая  $n=2$ . В этом случае 1) превращается в такую очень полезную лемму (ниже  $a_1 = a, a_2 = b$ ):

если натуральные числа  $u$  и  $v$  взаимно просты, то любое целое  $u$  единственным образом представляется в виде

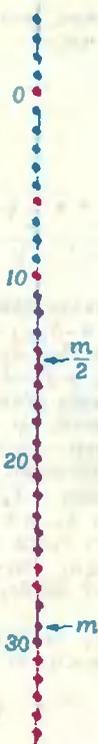
$$u = bx + ay, \tag{2}$$

где  $x$  и  $y$  — целые,  $0 \leq y < b - 1$ .

Для ее доказательства заметим, что все остатки от деления  $v$  чисел  $0, a, 2a, \dots, (b-1)a$  на  $b$  различны (в противном случае оказалось бы, что какое-то число вида  $(k-1)a$ , где

$$\begin{aligned} u &= abc \left( \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \right) = \\ &= bcx + cay + abz = \\ &= c(bx + ay) + abz = \\ &= cv + abz, \end{aligned}$$

где  $v = bx + ay$



$0 < l < k < b-1$ , делится на  $b$ , а это невозможно), и следовательно, ровно одно из них.  $ay$  дает такой же остаток, как и число  $u$ , то есть  $u - ay = bx$  при некоторых целых  $x$  и  $y$ .  $0 < y < b-1$ .

Утверждение 2) при  $a=2$  почти очевидно: если число  $u$  красное, то есть имеет представление (2) с  $x > 0$ ,  $y > 0$ , то и в его стандартном представлении коэффициент при  $b$  будет неотрицателен (если  $y = qb + r$ , где  $q > 0$ ,  $0 < r < b-1$ , то  $u = bx + ay = b(x + aq) + ar$ ).

Таким образом, в этом случае наибольшим синим числом будет  $m = b \cdot (-1) + a \cdot (b-1) = ab - a - b$ .

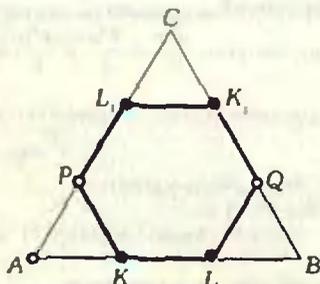
Покажем теперь, как с помощью этой же леммы сделать переход от  $n=2$  к  $n=3$  (тем самым задача M837 будет решена; в общем случае переход от  $n$  к  $n+1$  совершается аналогично). Перепишем представление вида (1) числа  $u$ , как показано на полях. Поскольку  $c$  и  $ab$  взаимно просты, по лемме можно найти (причем единственным образом) целые  $v$  и  $z$ ,  $0 < z < c-1$ , такие что  $u = cv + abz$ , а затем  $-x$  и  $y$ ,  $0 < y < b-1$ , такие что  $v = bx + ay$ . Это доказывает утверждение 1) для  $n=3$ . Для доказательства 2) достаточно заметить, что красным и отвечают красные  $v$ , а стандартному представлению  $u$  — стандартное представление  $v$ , в котором  $x > 0$ .

На рисунке отмечены красные и синие числа для  $a=2$ ,  $b=3$ ,  $c=5$ ; здесь  $m=29$ . Видно, что они располагаются симметрично относительно точки  $m/2$ : если  $u$  — красное число, то  $m-u$  — синее. Из нашего решения нетрудно вывести, что так будет и в общем случае (при любых  $a, b, c$ ): красные числа — это всевозможные значения функции  $u(x, y, z) = bxc + c ay + abz$  на множестве точек пространства с целыми координатами  $(x, y, z)$ , где  $x > 0$ ,  $0 < y < b-1$ ,  $0 < z < c-1$ , синие — ее значения на множестве  $x < -1$ ,  $0 < y < b-1$ ,  $0 < z < c-1$ . Эти множества симметричны, а функция  $u$  — линейная, поэтому и ее значения на этих множествах расположены симметрично.

Было бы интересно исследовать аналогичные задачи для представлений целых чисел в виде  $Ax + By + Cz$  с любыми взаимно простыми коэффициентами  $A, B, C$ .

А. М. Абрамов,  
Н. Б. Васильев

M838. Все точки, лежащие на сторонах правильного треугольника  $ABC$ , разбиты на два множества  $E_1$  и  $E_2$ . Верно ли, что для любого такого разбиения в одном из множеств  $E_1$  и  $E_2$  найдется тройка вершин прямоугольного треугольника?



◆ Ответ: верно. Доказательство проведем от противного. Пусть точки множества  $E_1$  окрашены синим цветом, множества  $E_2$  — красным. Предположим, что не существует прямоугольного треугольника с одноцветными вершинами, и рассмотрим правильный шестиугольник, вписанный в треугольник  $ABC$  (см. рисунок). Каждые две его противоположные вершины должны быть окрашены по-разному — если, например, противоположные вершины  $P$  и  $Q$  синие, то любая из остальных четырех вершин должна быть красной, так как образует вместе с  $P$  и  $Q$  прямоугольный треугольник; но тогда любые три из этих красных точек образуют запрещенный одноцветный прямоугольный треугольник.

Ясно, что в таком случае найдутся две соседние разноцветные вершины шестиугольника. Либо эти две вершины, либо противоположные им (тоже разноцветные!) лежат на одной из сторон треугольника. Пусть для определенности на стороне  $AB$  лежат синяя вершина  $K$  и красная  $L$ , тогда противоположные им вершины  $K_1$  и  $L_1$  будут красной и синей (см. рисунок). Но тогда в какой бы цвет ни была окрашена вершина  $A$ , один из прямоугольных треугольников  $AKL_1$  и  $ALK_1$  будет одноцветным. Противоречие.

Это рассуждение показывает, что даже множество из восьми точек — вершин шестиугольника и любых двух вершин треугольника — нельзя разбить на подмножества без прямоугольных треугольников.

Н. Б. Васильев, В. Н. Дубровский

M839\*. Можно ли выбрать 1983 натуральных числа, не превосходящих  $10^9$ , так, чтобы среди выбранных чисел не было ни одной тройки чисел, состав-

◆ Ответ: да, можно.

Для краткости договоримся называть подмножество натурального ряда «хорошим», если оно не содержит ни одной тройки последовательных членов арифметической прогрессии (иными словами, если ни одно число этого подмножества

яющих арифметическую прогрессию (то есть ни одной тройки  $a, b, c$ , в которой  $a+c=2b$ )?

$$X_0: \dots$$

$$X_1: \dots$$

$$X_2: \dots$$

не является средним арифметическим двух других). Докажем, что

из множества  $1, 2, \dots, 5 \cdot 3^k$  ( $k \geq 0$ ) можно выбрать «хорошее» подмножество  $X_k$ , состоящее из  $4 \cdot 2^k$  чисел.

На рисунке показаны первые шаги индуктивного построения нужного множества:  $X_0 = \{1, 2, 4, 5\}$ , а  $X_{k+1} = X_k \cup Y_k$ , где множество  $Y_k$  получается из  $X_k$  сдвигом на  $2a_k$ ,  $a_k$  — наибольшее число в  $X_k$ . Таким образом,  $a_{k+1} = 3a_k$  и  $a_k = 5 \cdot 3^k$ , то есть  $X_k \subset \{1, 2, \dots, 5 \cdot 3^k\}$ , кроме того, на каждом шаге количество чисел в нашем «хорошем» множестве удваивается, то есть  $X_k$  состоит из  $4 \cdot 2^k$  чисел. Докажем по индукции, что все множества  $X_k$  «хороши». Для  $X_0$  это очевидно. Проверим, что среднее арифметическое двух чисел из  $X_{k-1}$  не входит в  $X_{k+1}$ . Поскольку по предположению индукции множество  $X_k$ , а с ним и  $Y_k$ , «хорошее», можно считать, что одно из этих чисел,  $x$ , содержится в  $X_k$ , а другое,  $y$ , — в  $Y_k$ . Тогда  $0 < x < a_k$ ,  $2a_k < y < 3a_k$ , поэтому  $a_k < (x+y)/2 < 2a_k$ , но числа от  $a_k+1$  до  $2a_k$  по построению не входят в  $X_{k+1}$ .

Остается заметить, что множество  $X_9$  содержит  $4 \cdot 2^9 = 2048 > 1983$  чисел, и все они не превосходят  $a_9 = 5 \cdot 3^9 = 98415 < 10^6$ .

А. М. Абрамов

М840\*. а) Докажите, что если  $a, b, c$  — длины сторон треугольника, то выполнено неравенство

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) > 0.$$

Выясните, в каких случаях оно превращается в равенство.

б) Докажите, что для любых положительных чисел  $a, b, c$  выполнено неравенство

$$a^3b + b^3c + c^3a > a^2bc + b^2ca + c^2ab.$$

Первый пункт этой задачи можно свести ко второму, поэтому решим сначала задачу б).

Домножив обе части неравенства на  $a+b+c$ , перепишем его в виде

$$(a^3b + b^3c + c^3a)(a+b+c) > abc(a+b+c)^2.$$

Первый сомножитель в левой части — это квадрат длины вектора  $\vec{v}(x, y, z)$  с координатами  $x = a\sqrt{ab}$ ,  $y = b\sqrt{bc}$ ,  $z = c\sqrt{ca}$ , второй — квадрат длины вектора  $\vec{u}(x_1, y_1, z_1)$  с координатами  $x_1 = \sqrt{c}$ ,  $y_1 = \sqrt{a}$ ,  $z_1 = \sqrt{b}$ . В правой части, как легко видеть, стоит квадрат их скалярного произведения  $(xx_1 + yy_1 + zz_1)^2$ . Но для любых двух векторов  $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 < |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2$  (это так называемое «неравенство Коши — Буняковского»).

Ясно, что равенство  $(\vec{u} \cdot \vec{v})^2 = |\vec{u}|^2 |\vec{v}|^2$  возможно лишь тогда, когда векторы  $\vec{u}$  и  $\vec{v}$  коллинеарны, то есть  $\frac{a^3b}{c} = \frac{b^3c}{a} = \frac{c^3a}{b}$  или  $a=b=c$ .

Имеется и короткое прямое доказательство с помощью вычисления полных квадратов:

$$\begin{aligned} a^3b + b^3c + c^3a - a^2bc - b^2ca - c^2ab &= \\ &= (a^3b - 2a^2bc + c^2ab) + (b^3c - 2b^2ca + a^2bc) + \\ &\quad + (c^3a - 2c^2ab + b^2ca) = \\ &= ab(a-c)^2 + bc(b-a)^2 + ca(c-b)^2 > 0 \end{aligned}$$

а) Приведем два решения.

Первое решение использует замену переменных  $x+y=a$ ,  $y+z=a$ ,  $z+x=b$  ( $x, y, z$  — это отрезки, на которые стороны треугольника разбиваются точками касания вписанной окружности). Можно проверить, что после этой замены неравенство пункта а) приводится к виду

$$xy^3 + yz^3 + zx^3 > x^2yz + y^2zx + z^2xy, \quad (1)$$

а это неравенство, как мы доказали выше, справедливо при любых неотрицательных  $x, y, z$ .

При этом, чтобы не запутаться в выкладках и не выписывать всех членов разложения, можно использовать «симметричность» левой части неравенства пункта а) относительно цикли-

$$\begin{aligned} &xy^3 + yz^3 + \\ &+ zy^3 - xz^3 - \\ &- x^2y^3 - y^2z^3 + 2z^3x^2 - \\ &- 2x^2yz + y^2xz - z^2xy \end{aligned}$$

2  
0  
0  
-2

ческой замены  $a \rightarrow b, b \rightarrow c, c \rightarrow a$ . Ей отвечает аналогичная замена  $R$  переменных  $x, y, z: x \rightarrow y, y \rightarrow z, z \rightarrow x$ , поэтому одночлены, получившиеся после раскрытия скобок в выражении

$$a^2b(a-b) = (y+z)^2(z+x)(y-x),$$

полезно сгруппировать по «типам», как это сделано на полях: к одному типу относятся одночлены, получающиеся друг из друга при циклической замене переменных  $R$  (на полях они выписаны в одну строку; подчеркнем, что попарные перестановки переменных не разрешаются — они меняют многочлен!). Ясно, что два других слагаемых  $b^2c(b-c)$  и  $c^2a(c-a)$  дадут другие одночлены тех же типов (их можно получить просто заменой  $R$ ). Благодаря этому можно сразу указать, с каким коэффициентом войдут в результат одночлены каждого типа (синие цифры на полях).

В пункте б) мы показали, что равенство в (1), а значит, и в неравенстве а) достигается только при  $x=y=z$ , то есть при  $a=b=c$  (для равностороннего треугольника).

Второе решение основано на искусной перегруппировке (и удачных переобозначениях). Найти ее гораздо труднее, чем в пункте б), потому что переменные  $a, b, c$  на сей раз связаны неравенством треугольника и это должно быть использовано.

Обозначим левую часть неравенства через  $f(a,b,c)$ . Поскольку  $f(a,b,c) = f(b,c,a) = f(c,a,b)$ , без ограничения общности можно доказывать неравенство  $f(a,b,c) \geq 0$ , считая, что  $b$  — средняя по длине сторона треугольника.

Предположим сначала, что  $a < b < c$ . Пусть  $a = b - \alpha, c = b + \gamma$ ; тогда нужно доказывать неравенство  $f(b - \alpha, b, b + \gamma) \geq 0$  при  $b > 0, \alpha > 0, \gamma > 0$  и при  $b + \gamma < (b - \alpha) + b$ , то есть  $b > \alpha + \gamma$ . Несложная, но объемистая выкладка показывает, что

$$f(b - \alpha, b, b + \gamma) = b\alpha(\alpha + \gamma)(b - \alpha - \gamma) + \gamma^2(b - \alpha)(b + \alpha + \gamma). \quad (2)$$

При указанных значениях переменных правая часть неотрицательна и обращается в нуль только при  $\alpha = \gamma = 0$ , то есть  $a = b = c$ . Пусть теперь  $a > b > c$ , тогда в тех же обозначениях выражение (2) следует рассматривать при  $\alpha < 0, \gamma < 0$  и  $b > -(\alpha + \gamma)$ , но и в этом случае оно, очевидно, неотрицательно.

А. М. Абрамов, Э. А. Ясиновий

Ф847. В объемный пучок положительных ионов, имеющий круглое сечение, в точке А влетает электрон, скорость которого параллельна оси симметрии пучка (рис. 1). Объемная плотность зарядов в пучке равна  $\rho$ , длина пучка  $l$  (длина пучка много больше его радиуса). При каких значениях скорости электрона он вылетит из пучка в точке В? Столкновения электрона с ионами не учитывать.

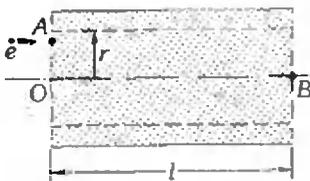


Рис. 1.

На электрон, летящий в пучке, действует электрическое поле, создаваемое ионами. Найдем, как зависит напряженность этого поля от расстояния до оси пучка.

Напряженность  $\vec{E}(r)$  в точках, находящихся внутри пучка достаточно далеко от его торцов на расстоянии  $r$  от оси  $OB$ , можно представить как сумму

$$\vec{E}(r) = \vec{E}_1(r) + \vec{E}_2(r),$$

где  $\vec{E}_1(r)$  — напряженность поля, создаваемого теми зарядами, которые находятся внутри цилиндра радиуса  $r$ , а  $\vec{E}_2(r)$  — напряженность поля, создаваемого зарядами, находящимися вне этого цилиндра (см. рис. 1). Из соображений симметрии ясно, что вектор  $\vec{E}_2(r)$  должен быть направлен вдоль радиуса пучка. Поскольку силовые линии внутри цилиндрической полости могут начинаться на положительных зарядах, а заканчиваться — на отрицательных, мы приходим к выводу, что  $\vec{E}_2(r) = \vec{0}$ . Более того, заряды, находящиеся вне цилиндра радиуса  $r$ , во всех точках области внутри цилиндра поля не создают.

Определим теперь напряженность  $\vec{E}(r) = \vec{E}_1(r)$ . Известно, что с точки зрения картины силовых линий напряженность поля определяется как число силовых линий, пронизывающих площадку единичной площади, перпендикулярную линиям. Следовательно, если мы сожмем заряд цилиндра радиуса  $r$  равномерно к оси цилиндра, то поля, создаваемые прежним распределением зарядов и новым «сжатым» распределением, вне цилиндра будут совпадать. Поэтому величину  $\vec{E}_1(r)$  определим как напряженность поля бесконечной заряженной прямой на расстоянии  $r$  от нее.

Рассчитаем, какой должна быть линейная плотность зарядов на прямой. Заряд, находящийся после сжатия на отрезке длины  $l$ , равен  $q = \sigma \cdot l$ , где  $\sigma$  — линейная плотность заряда

на прямой. Этот заряд должен равняться тому заряду, который находился внутри цилиндра радиуса  $r$  и высоты  $M$ , то есть

$$\sigma \cdot M = q \cdot M \cdot \pi r^2.$$

Отсюда получаем:

$$\sigma = qr^2.$$

Найдем теперь напряженность поля, создаваемого бесконечной заряженной прямой с плотностью заряда  $\sigma$ . Выделим на прямой малый участок длины  $dx$ . Заряд этого участка равен  $\sigma \cdot dx$ . Напряженность поля, создаваемого этим участком в точке  $M$ , находящейся на расстоянии  $r$  от прямой, равна (рис. 2)

$$\Delta E = |\Delta \vec{E}| = \frac{\sigma \cdot dx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + r^2)}.$$

Из соображений симметрии ясно, что вектор  $\vec{E}(r)$  должен быть в любой точке перпендикулярен прямой. Следовательно, вклад, который вносит в поле в точке  $M$  участок  $dx$ , равен

$$dE = \Delta E \cdot \cos \varphi = \frac{qr^2 \cdot dx}{4\pi\epsilon_0(x^2 + r^2)} \frac{r}{\sqrt{x^2 + r^2}} = \frac{qr^3}{4\epsilon_0(x^2 + r^2)^{3/2}} dx.$$

Полная напряженность поля в точке  $M$  представляет собой сумму таких вкладов, вносимых всеми участками прямой, то есть

$$E(r) = \int_{-\infty}^{\infty} dE = 2 \int_0^{\infty} \frac{qr^3 dx}{4\epsilon_0(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{qr}{2\epsilon_0}.$$

Такова напряженность поля на расстоянии  $r$  от оси пучка в тех его точках, которые достаточно далеки от торцов пучка. Вблизи торцов поле «искажено». Учет этих искажений (краевых эффектов) достаточно сложен. Мы упростим задачу: будем считать, что точки  $A$  и  $B$  лежат внутри бесконечно длинного пучка ионов на расстоянии  $l$  (вдоль оси пучка) друг от друга.

Рассмотрим движение электрона внутри бесконечно длинного пучка ионов. Сила, действующая на электрон, когда он находится на расстоянии  $r$  от оси пучка, равна

$$F = \frac{eQ}{2\epsilon_0} r = - \frac{|e|q}{2\epsilon_0} r$$

и направлена перпендикулярно оси пучка. Ускорение электрона в этом направлении —

$$a = \frac{F}{m}, \text{ или } r'' = - \frac{|e|q}{2\epsilon_0 m} r.$$

Из этого уравнения следует, что движение электрона в проекции на плоскость, перпендикулярную оси пучка, представляет собой гармонические колебания с периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{2\epsilon_0 m}{|e|q}}.$$

В направлении оси пучка скорость электрона остается постоянной и равной той скорости, которую он имел в точке  $A$ .

На рисунке 3 приведено несколько возможных траекторий электрона, вылетающего из пучка в точке  $B$ . Очевидно, что время движения электрона в пучке при этом определяется условиями

$$t_1 = \frac{T}{4}, t_2 = \frac{T}{4} + \frac{T}{2} = \frac{3T}{4}, t_3 = \frac{3T}{4} + \frac{T}{2} = \frac{5T}{4} \text{ и т. д.}$$

или, в общем виде,

$$t_n = (2n-1) \frac{T}{4} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

С другой стороны,  $t_n = l/v_n$ . Так что возможные значения скорости электрона определяются условием

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{l}{t_n} = \frac{4l}{(2n-1)T} = \frac{4l\sqrt{|e|q}}{(2n-1)2\pi\sqrt{2\epsilon_0 m}} = \\ &= \frac{2l}{\pi(2n-1)} \sqrt{\frac{|e|q}{2\epsilon_0 m}} \quad (n \in \mathbb{N}). \end{aligned}$$

О. В. Фальков

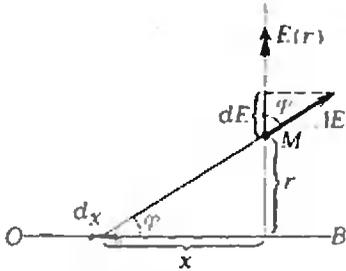


Рис. 2.

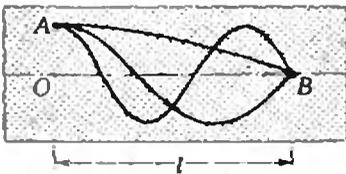
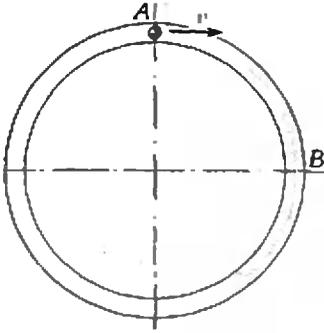


Рис. 3.

**Ф848.** По гладкому горизонтальному круговому желобу длины  $l$  катается шарик. Скорость шарика известна с точностью  $\epsilon = \pm 5\%$ . При каких значениях  $\epsilon$  можно точно утверждать, что через время  $t$  после того, как шарик находился в точке  $A$  (см. рисунок), его нет в точке  $B$ ?



Так как скорость шарика известна с точностью  $\epsilon$ , то для любого момента времени можно указать не точку, а некоторый участок на окружности, внутри которого находится шарик. Передняя граница этого участка движется со скоростью  $v + \epsilon v = v(1 + \epsilon)$ , а задняя — со скоростью  $v(1 - \epsilon)$ . Спустя время  $t$  после того, как шарик был в точке  $A$ , длина участка будет  $2\epsilon vt$ . Тот факт, что шарика в данный момент нет в точке  $B$ , означает, что точка  $B$  не попадает внутрь этого участка, то есть (см. рисунок)

$$2\epsilon vt - \frac{3l}{4} < v(1 + \epsilon)t - nl < \frac{l}{4}$$

где  $n$  — число полных оборотов шарика по окружности за время  $t$ . Отсюда находим

$$\frac{l \left( n - \frac{3}{4} \right)}{(1 - \epsilon)t} < v < \frac{l \left( n + \frac{1}{4} \right)}{(1 + \epsilon)t}$$

Однако это не окончательный ответ. Участок, где может находиться шарик, «расползается» со скоростью  $2\epsilon v$ . Поэтому через время  $t = l/2\epsilon v$  (когда участком будет вся окружность) положение шарика определить невозможно. За это время шарик сделает  $n = \epsilon t/l = l/2\epsilon$  полных оборотов. Так что задача имеет смысл при  $n < \frac{1}{2\epsilon} = \frac{1}{2(1/20)} = 10$ .

Ответ:

$$\frac{l \left( n - \frac{3}{4} \right)}{(1 - \epsilon)t} < v < \frac{l \left( n + \frac{1}{4} \right)}{(1 + \epsilon)t}, \text{ где } n = 1, 2, \dots, 9.$$

Е. И. Рабкин

**Ф849.** Сухой термометр находящегося в комнате психрометра показывает температуру  $t_1 = 18^\circ\text{C}$ , а влажный —  $t_2 = 11 - \Delta t = 15^\circ\text{C}$ . Не пользуясь таблицей, определите относительную влажность воздуха в комнате. Давление насыщенного водяного пара при указанных температурах равно, соответственно,  $p_1 = 15,5$  мм рт. ст. и  $p_2 = 12,8$  мм рт. ст. Молярная теплота испарения воды —  $L = 4,07 \cdot 10^4$  Дж/моль; теплоемкость воздуха равна  $c = 20,8$  Дж/(моль · град) (при постоянном объеме).

Обозначим парциальное давление паров в комнате  $p_n$ ; тогда искомая относительная влажность —

$$\varphi = \frac{p_n}{p_1} 100\%$$

Для нахождения  $p_n$  воспользуемся законом сохранения энергии.

Выделим мысленно в комнате объем  $V_1$ , содержащий заданную массу сухого воздуха  $M$  и некоторое количество пара  $m_1$ , и переместим его к влажному термометру. Там объем, содержащий столько же сухого воздуха, обозначим  $V_2$ , а количество пара в этом объеме —  $m_2$ . Плотность воздуха в комнате практически повсюду одна и та же, так что такое перемещение не требует совершения работы какими-либо силами, кроме сил давления воздуха, а их работу мы учтем.

Работа сил давления —

$$A = p(V_1 - V_2).$$

Воздух охлаждается от температуры  $T_1$  до температуры  $T_2$ , и его внутренняя энергия уменьшается на

$$\Delta U = cv \cdot \Delta T = c \frac{M}{\mu_a} \cdot \Delta T.$$

Уменьшением внутренней энергии пара при охлаждении явно можно пренебречь по сравнению с этой величиной, так как при этих температурах пара в воздухе мало ( $p_n \ll p$ ).

При испарении «недостающей» воды поглощается тепло

$$\Delta Q = L \frac{m_2 - m_1}{\mu_n}$$

Запишем баланс энергии:

$$p(V_1 - V_2) + c \frac{M}{\mu_a} \cdot \Delta T = L \frac{m_2 - m_1}{\mu_n} \quad (*)$$

Воспользовавшись уравнением Менделеева — Клапейрона, найдем:

$$V_1 = \frac{MRT_1}{(p - p_n)\mu_a} + \frac{m_1 RT_1}{p_n \mu_n}, \quad m_1 = M \frac{p_n}{p} \frac{\mu_n}{\mu_a}$$

$$V_2 = \frac{MR(T_1 - \Delta T)}{(p - p_2)\mu_a} + \frac{m_2 R(T_1 - \Delta T)}{p_2 \mu_n}, \quad m_2 = M \frac{p_2}{p} \frac{\mu_n}{\mu_a}$$

Учитывая эти соотношения и пренебрегая при вычислениях малым

числом порядка  $\frac{\Delta T}{T} \frac{\rho_2}{\rho}$ , получим:

$$V_1 - V_2 = \frac{MR}{\rho \mu_n} \left( \frac{T_1}{\rho} (\rho_n - \rho) + \Delta T \right).$$

Подставив это выражение в (\*) с учетом того, что  $\mu_n = \frac{m_2}{M \rho_2} \rho \mu_n$ , после упрощений получим:

$$\rho_n = \rho_2 - \rho \cdot \Delta T \cdot \frac{R + c}{RT_1 + L}.$$

Таким образом, относительная влажность воздуха равна

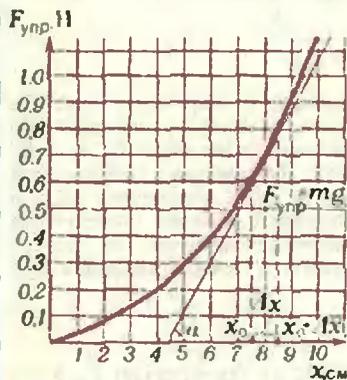
$$\varphi = \frac{\rho_n}{\rho_1} 100\% = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} - \frac{\rho \cdot \Delta T}{\rho_1} \cdot \frac{R + c}{RT_1 + L} \right) 100\%.$$

Подставляя числовые данные, находим:

$$\varphi \approx 73\%.$$

И. С. Солодовников

**Ф850.** На рисунке показана экспериментально полученная зависимость силы упругости пружины от ее длины. Найти период малых колебаний груза массы  $m = 60$  г, подвешенного вертикально на этой пружине в поле тяжести.



Прежде всего найдем положение равновесия груза. При равновесии

$$F_{\text{упр}}(x_0) = mg,$$

где  $x_0$  — координата положения равновесия (и длина пружины в этом положении). Значение  $x_0$  найдем графически, проведя прямую  $F_{\text{упр}} = mg$  до пересечения с графиком  $F_{\text{упр}}(x)$  (см. рисунок):

$$x_0 = 7.5 \text{ см.}$$

При смещении из положения равновесия на  $\Delta x$  (см. рисунок) на груз действует возвращающая сила

$$F(\Delta x) = F_{\text{упр}}(x_0 + \Delta x) - mg = F_{\text{упр}}(x_0 + \Delta x) - F_{\text{упр}}(x_0).$$

При малых  $\Delta x$  с хорошей точностью

$$F_{\text{упр}}(x_0 + \Delta x) - F_{\text{упр}}(x_0) = F'_{\text{упр}}(x_0) \cdot \Delta x = k(x_0) \cdot \Delta x,$$

где  $k(x_0)$  — жесткость пружины, когда ее длина равна  $x_0$ . Геометрически этому приближению соответствует замена участка кривой  $F_{\text{упр}}(x)$  прямой линией, то есть касательной, проведенной в точке  $F_{\text{упр}}(x_0)$ . Тангенс угла наклона этой касательной к оси  $x$  равен  $k(x_0)$ . Поэтому период малых колебаний груза равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k(x_0)}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\text{tg } \alpha}}.$$

Из графика находим  $\text{tg } \alpha$ :

$$\text{tg } \alpha \approx \frac{0.2}{0.01} = 20.$$

Таким образом,

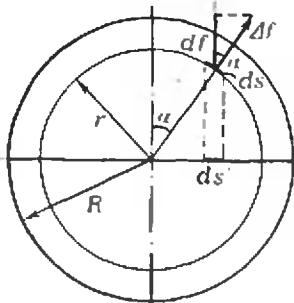
$$T = 2 \cdot 3.14 \sqrt{\frac{60 \cdot 10^{-3}}{20}} \text{ с} \approx 3.4 \text{ с.}$$

В. И. Котов

**Ф851.** Найти силу взаимодействия двух непроводящих половинок шара радиуса  $R$ , каждая из которых равномерно заряжена по объему с плотностью  $\rho_1$  и  $\rho_2$  соответственно. Диэлектрическую проницаемость материала шара считать равной единице.

Сначала докажем тот факт, что сила взаимодействия заряженных половинок шара пропорциональна произведению плотностей зарядов, то есть  $F \sim \rho_1 \rho_2$ .

Мысленно зафиксируем заряд первой половинки, а заряд второй изменим, например в 2 раза. На вторую половинку действует поле первой, а также собственное поле второй половинки, но суммарное действие этого второго поля равно нулю. Так как  $\rho_2$  изменилось в два раза, то и сила, действующая на вторую половинку со стороны поля первой, изменилась в два раза — ведь в каждой точке  $\vec{f} = \rho_2 \vec{E} \cdot dV$  ( $\vec{E}$  — напряженность поля первой половинки в данной точке,  $\rho_2 \cdot dV$  — заряд элементарного объема около точки), то есть сила пропорциональна  $\rho_2$ . Аналогично, зафиксировав  $\rho_2$  и меняя  $\rho_1$ , найдем, что сила пропорциональна  $\rho_1$ . Значит,



$$F \sim q_1 q_2 = \frac{q_2}{q_1} q_1 q_2 = \frac{q_1}{q_2} q_2 q_2.$$

Из полученного соотношения видно, что для нахождения силы взаимодействия двух половинок с равными плотностями зарядов можно найти силу взаимодействия двух одинаковых половинок с одинаковой плотностью зарядов  $q_1$  (или  $q_2$ ), а затем умножить найденное значение на  $k = \frac{q_2}{q_1}$  (или  $\frac{1}{k} = \frac{q_1}{q_2}$ ).

Итак, найдем силу, действующую на полушарие с плотностью заряда  $q_1$  со стороны полушария с такой же плотностью заряда. Разобьем полушарие на множество слоев таких толщин, что их можно считать полусферами. В каждой точке полусферы напряженность электрического поля равна

$$E = \frac{4}{3} \pi r^3 q_1 \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{1}{3\epsilon_0} q_1 r.$$

где  $r$  — радиус полусферы. Вертикальная проекция силы  $\Delta f$ , действующей на элемент поверхности полусферы, площадь которого равна  $ds$ , равна (см. рисунок)

$$df = E q_1 \cdot ds \cdot dr \cdot \cos \alpha = \frac{q_1^2 r}{3\epsilon_0} ds' \cdot dr,$$

где  $dr$  — толщина сферического слоя,  $ds'$  — площадь проекции элемента  $ds$  на горизонтальную плоскость. Очевидно, что вертикальная проекция силы, действующей на всю полусферу, пропорциональна площади проекции полусферы на горизонтальную плоскость, то есть

$$f = \frac{q_1^2 r}{3\epsilon_0} \pi r^2 dr.$$

Горизонтальная же проекция силы, действующей на полусферу, равна нулю.

Таким образом, сила взаимодействия двух полушарий с одинаковой плотностью заряда равна

$$F = \int_0^R \frac{\pi q_1^2 r^3}{3\epsilon_0} dr = \frac{\pi q_1^2 R^4}{12\epsilon_0}.$$

А чтобы найти силу взаимодействия двух полушарий с плотностями зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , надо полученное выражение умножить на

$$k = \frac{q_2}{q_1};$$

$$F' = \frac{q_2}{q_1} \frac{\pi q_1^2 R^4}{12\epsilon_0} = \frac{\pi R^4}{12\epsilon_0} q_1 q_2.$$

И. В. Гребнев

## Из писем читателей

Постоянные читатели «Кванта» могли заметить изменение в традициях «Задачника Кванта», происшедшее за последний год. Решения большинства задач публикуются теперь всего лишь через три месяца после условий. (Решения остальных задач, как правило, входят в небольшие заметки, публикуемые в рамках «Задачника».) Это сокращение разрыва в публикации задач и их решений положительно оценено многими школьниками и учителями, но

Замечательное решение задачи М765 о триангуляции, совершенно отличное от авторского, предложил М. Концевич (Москва). В этой задаче требовалось доказать, что для любого конечного множества точек  $B$  в плоскости (не принадлежащих одной прямой) можно построить систему треугольников — триангуляцию (с вершинами во всех точках  $B$  и только в них), обладающую следующим свойством: описанная окружность каждого из них треугольников не содержит внутри себя точек  $B$ , причем для множества точек  $B$  общего положения (когда никакие четыре из них не принадлежат одной окружности) такая триангуляция единственна.

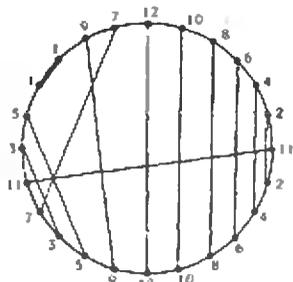
Спроектируем нашу плоскость на сферу, касающуюся ее в точке  $T$  из диаметрально противоположной  $T$  точки  $S$ . Натянем на полученное из  $B$  множество точек сферы  $B'$  (и точку  $S$ ) «резиную пленку» — возьмем их выпуклую оболочку. Получится выпуклый многогранник с треугольными (в общем случае) гранями, причем плоскость каждой грани пересечет сферу по описанной вокруг грани окружности, и все вершины многогранника будут лежать по одну сторону от плоскости окружности

оно не позволяет редакции журнала учитывать при подготовке решений все письма читателей, касающиеся «Задачника». Наиболее интересные отклики читателей, дополняющие уже опубликованные решения, побудили нас вернуться к некоторым задачам. Мы надеемся сделать такой обзор одной из традиций «Задачника». В этом номере речь пойдет о нескольких задачах по математике.

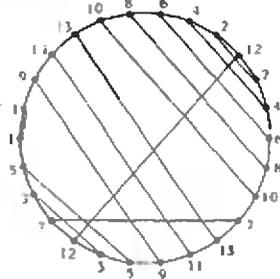
(это и есть условие выпуклости многогранника!). Спроектировав ребра многогранника обратно на плоскость, получим требуемую триангуляцию.

Здесь мы используем следующее свойство *стереографической проекции* (то есть проекции сферы из ее точки на плоскость, касающуюся ее в диаметрально противоположной точке): любая не проходящая через центр проекции окружность на сфере переходит в окружность на плоскости (см., например, «Квант», 1978, № 12, с. 51). Читатели, немного знакомые с четырехмерной геометрией, легко сообразят, как тем же способом решается пространственный вариант задачи М765.

Автор задачи М748 А. Кузьминых и некоторые другие читатели обратили внимание на неточности в изложении решения этой задачи. Приведем краткое решение, в котором более четко выделена основная идея. Речь идет о таком утверждении (пункт б) задачи: *если несколько конусов в пространстве попарно не пересекаются, то их нельзя передвинуть так, чтобы они покрыли все пространство*. (Здесь конус — тело, полученное вращением угла, меньшего развернутого, вокруг биссектрисы.) Идея решения — рассмотреть множество *всех направлений* в пространстве. Будем каждому направлению сопоставлять луч с началом в фиксированной точке  $O$ . Еще лучше: возьмем сферу (скажем, радиуса 1) с центром в точке  $O$  — каждой ее точке  $M$  отвечает определенное направление  $OM$  в пространстве. Каждому конусу  $K$  отвечает «шапочка» на сфере — пересечение сферы с конусом  $K_0$ , полученным из  $K$  параллельным переносом вершины в точку  $O$ ; при этом для любой точки  $M$  внутри  $K_0$  луч направления  $OM$  пересекает конус  $K$  по некоторому лучу, а для точки  $M$  вне  $K_0$  — не более чем по отрезку (быть может, вовсе не пересекает  $K$ ); чтобы убедиться в этом, полезно провести плоскость через луч  $OM$  и вершину конуса  $K$ . Если два конуса в пространстве не пересекаются, то соответствующие им шапочки на сфере направлений также не могут иметь общих внутренних точек: для такой точки  $M$  луч  $OM$  должен был бы пересекаться с каждым из двух конусов по лучу, то есть конусы должны были бы иметь общий луч. Таким образом, шапочки для данных в условии конусов в сумме не имеют площади, меньшую площади сферы, поэтому как бы мы ни двигали конусы, шапочки не смогут покрыть сферу. Но для любой внутренней или точки  $M$  луч  $OM$  пересекается с каждым из (передвинутых) конусов не более чем по отрезку, так что конусы не покрывают пространство.



24 точки  
n = 12  
m = 3



26 точек  
n = 13  
m = 3

Наш читатель из Болгарии Иван Топов (София) получил окончательный результат, связанный с таким вопросом: *при каких натуральных  $n > 1$  можно  $2n$  точек, делящих окружность на  $2n$  равных дуг, соединить попарно  $n$  хордами различной длины?* В решении задачи М789 («Квант», 1983, № 5, с. 46) из соображений четности было выведено, что при  $n = 4m + 2$  и  $n = 4m + 3$  это сделать нельзя, и высказывалась гипотеза, что при других  $n$  — можно; это и доказал И. Топов. Вот его построение. Для  $n = 4m$  занумеруем все  $2n = 8m$  точек по порядку (скажем, по часовой стрелке) числами от 1 до  $4m$ :

$$\begin{array}{c}
 \underbrace{4m, 4m-2, 4m-4, \dots, 4, 2; \quad 4m-1; \quad 2, 4, \dots, 4m-2, 4m; \quad 2m}_{2m} \\
 \underbrace{4m-3, 4m-5, \dots, 2m+3; \quad m-2}_{m-2} \\
 \underbrace{2m-1, \dots, 5, 3; \quad 2m+1; \quad 4m-1; \quad 3, 5, \dots, 2m-1; \quad 1; \quad 1; \quad m-1}_{m-1} \\
 \underbrace{2m+3, \dots, 4m-3; \quad 2m+1; \quad m-2}_{m-2}
 \end{array}$$

Тогда каждый номер  $k \leq 4m$  будет приписан двум точкам, между которыми (по более короткой дуге окружности) стоит ровно  $k-1$  точек. Аналогичным образом, для  $n = 4m + 1$  годится нумерация:  $4m-2, 4m-4, \dots, 6, 2, 4m; 2, 4, \dots, 4m-2; 2m+1; 4m+1, 4m-1, \dots, 2m+3; 2m-1, \dots, 5, 3; 2m+1; 3, 5, 2m-1; 1, 1; 2m+3, \dots, 4m-1, 4m+1$ . (См. рисунки для  $m=3$ .)

И. Б. Васильев

## Список читателей, приславших правильные решения

Большинство читателей, приславших решения задач М806—М820, Ф818—Ф832, справились с задачами М809, М812, М813, М816 и Ф818, Ф819, Ф822, Ф828, Ф829. Ниже мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения остальных задач (цифры после фамилии — последние цифры номеров решенных задач).

### Математика

*В. Акимов* (Свердловск) 19, 20; *Р. Алексеев* (Ленинград) 14, 17, 19, 20; *А. Астрежин* (Новосибирск) 06, 07, 10, 14, 17—20; *Я. Бабкин* (Петрозаводск) 06, 14, 19; *Л. Байрак* (Белгород) 10, 14, 20; *Баланова* (Рига) 17; *А. Барабаш* (Киев) 14, 17, 19, 20; *В. Барзыкин* (п. Черноголова Московской обл.) 17—19; *Ю. Баркаган* (Пенза) 17, 19; *А. Барчунов* (Алма-Ата) 06; *Т. Батбаяр* (Дархан, МНР) 11; *А. Биргер* (Иваново) 06—08, 10, 14, 15, 17, 19, 20; *А. Бодачев* (Хабаровск) 14; *А. Вакин* (Днепропетровск) 17; *С. Велеско* (Минск) 19; *А. Верницкий* (Свердловск) 19, 20; *Л. Вертгейм* (Новосибирск) 11, 14, 17, 19, 20; *А. Винкич* (Винница) 17; *И. Волков* (Минск) 06; *В. Волокитин* (Москва) 19; *К. Гаджиев* (с. Зод Арм. ССР) 11; *М. Гараев* (Физули) 06, 10, 11, 14, 17, 19; *Р. Гендлер* (Ташкент) 11, 17, 19; *Г. Гочев* (Дубна) 06, 14, 15; *Н. Григорьев* (Рыбинск) 19; *Я. Гроздева* (Бургас, НРБ) 17; *А. Губарев* (Фатеж) 17, 19; *О. Дарг* (Симферополь) 06; *З. Джаббаров* (Ташкент) 17; *З. Джафаров* (с. Тюркоба Аз. ССР) 06, 07, 14, 17, 19; *В. Дзюба* (Киев) 14, 17, 19; *Э. Емельянов* (Белгород) 06; *О. Ерошкин* (Днепропетровск) 08; *П. Житный* (Ворошиловград) 17; *Д. Земляной* (Севастополь) 06, 17, 19; *П. Земцов* (Новосибирск) 14; *Л. Зосин* (Киев) 08, 14, 17, 19, 20; *А. Изаак* (Орск) 14; *Ю. Илясов* (Сызань) 06; *С. Каганович* (Киев) 17; *Б. Капитонский* (Киев) 17, 19; *Д. Кауымбаев* (Алма-Ата) 17; *Ю. Коваль* (Киев) 17; *О. Козловский* (Москва) 14, 17, 19; *А. Коломыйский* (Винница) 06, 07; *К. Копотун* (Киев) 11, 17; *А. Коротков* (Ленинград) 17, 19; *С. Коршунов* (Целиноград) 17; *Н. Курило* (с. Ольховка Харьковской обл.) 06; *А. Лазарев* (Москва) 19; *М. Лев* (Свердловск) 06, 07, 10, 14, 15, 17—19; *С. Литовченко* (Воронеж) 19; *А. Лукьянов* (Севастополь) 11, 14, 17, 20; *Макаров* (Севастополь) 11, 14, 19; *К. Макачук* (Киев) 07, 18, 19; *А. Малеванец* (Киев) 06, 10, 14; *Е. Малеванец* (Киев) 17, 19, 20; *Д. Мамедов* (Гермутская с. ш. Аз. ССР) 06; *В. Маркин* (Тамбов) 17; *О. Матвеев* (Свердловск) 06, 07, 10; *Н. Мельник* (Гайсин) 06; *В. Михайлюк* (Киев) 06; *Е. Мишин* (Севастополь) 17; *П. Молочник* (Киев) 19; *А. Молоткова* (Ленинград) 14, 19; *С. Набиев* (Алма-Ата) 17, 19; *Ф. Назаров* (Ленинград) 06, 07, 10, 14; *С. Найдек* (Днепропетровск) 17, 19; *Л. Нестерова* (Свердловск) 19, 20; *В. Николаев* (Хабаровск) 14, 19, 20; *Т. Новикова* (Свердловск) 19, 20; *Т. Оахберг* (Ленинград) 10, 14; *Р. Оруджев* (Баку) 06; *М. Осипова* (Владивосток) 17; *А. Петрунин* (Ленинград) 19, 20; *В. Пихулин* (Москва) 06; *Д. Подкопаев* (Винница) 06; *В. Поляковский* (Киев) 17; *В. Поярков* (Николаев) 06, 10; *А. Расулов* (Баку) 06; *С. Ромаш* (Ровно) 06; *Д. Рубленко* (Хмельницкий) 11; *Р. Рудченко* (Ворошиловград) 17; *Е. Рычков* (Красноярск) 10; *В. Сабиров* (Бердянск) 17, 19; *И. Савыков* (Первоуральск) 06; *Г. Самадашвили* (Тбилиси) 06, 19, 20; *И. Святодуч*

(Красноармейск Донецкой обл.) 17; *А. Сергиенко* (Ленинград) 14, 17; *М. Скоробогатов* (Киев) 17; *И. Слуцкий* (Алма-Ата) 17, 19; *Г. Сливак* (Киев) 17; *С. Струков* (Воронеж) 06—08, 11, 14, 18—20; *Р. Сунник* (Киев) 17, 19; *В. Тартаковский* (Киев) 14; *М. Тейтель* (Киев) 06, 14, 17, 19, 20; *Д. Тершин* (Саратов) 10, 14, 17; *С. Токарь* (Киев) 17, 20; *Ю. Факторович* (Москва) 19; *Н. Федин* (Омск) 07; *Д. Федотов* (Новокузнецк) 14; *Е. Филенко* (Родинское) 06, 19, 20; *М. Флямер* (Протвино) 06; *Б. Фридман* (Москва) 14; *М. Хомянский* (Москва) 17, 19; *В. Хрычиков* (Севастополь) 06, 07, 11, 14, 17, 19; *С. Чернышев* (Александров) 06, 07; *С. Чичинский* (Днепропетровск) 17; *А. Шнирман* (Донецк) 06, 07, 10; *А. Шор* (Киев) 06, 07; *Л. Эрдеш* (Будапешт, ВНР) 06—08, 10, 11, 14, 15, 17—20; *П. Этингоф* (Киев) 06, 07, 14, 17—20; *А. Эфендиев* (Баку) 06; *Е. Юдицкий* (Киев) 19; *Г. Юшин* (Воронеж) 11, 14, 15; *А. Ярин* (Севастополь) 06, 11, 14, 17, 20.

### Физика

*А. Абаков* (Красноярск) 20, 21, 23—26; *В. Аपालков* (Харьков) 21, 25, 30; *Н. Асеев* (Харьков) 31; *Э. Багдасарян* (Баку) 25, 31, 32; *В. Байковский* (Новосибирск) 23—27, 31, 32; *Н. Барановская* (Винница) 23—25; *В. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) 20, 21, 23—27, 30; *Е. Беспалов* (Курган) 20, 24—27, 30, 32; *М. Бияк* (Краснодар) 20, 24, 25; *В. Бражников* (Запорожье) 23, 26, 27, 30—32; *Н. Бурдейная* (Винница) 23—25; *В. Вангелов* (Бургас, НРБ) 23, 24; *И. Волков* (Минск) 24; *О. Гаврилов* (Киев) 23, 25; *М. Гаевский* (Воткинск) 20, 24, 25; *Е. Гисич* (Винница) 23—25; *В. Глаголев* (Тула) 21, 25; *П. Глазырин* (Воткинск) 24; *О. Голинский* (Тамбов) 23—25, 31; *Ю. Гордиенко* (Винница) 25; *С. Гребенчиков* (п. Черноголовка Московской обл.) 25, 30; *М. Гринберг* (Красноярск) 21, 23—27, 31, 32; *Г. Данелия* (Тбилиси) 25; *Л. Демидова* (Винница) 23—25; *Г. Долгопятлов* (Донецк) 24, 25, 30—32; *Д. Ермошин* (Москва) 24, 25, 31; *О. Ефремов* (Воронеж) 24, 25, 30, 31; *Л. Захаров* (Самтредиа) 20; *А. Зеленюк* (Здолбунов) 24, 25; *М. Зиманов* (Алма-Ата) 25, 27; *С. Зикченко* (Краматорск) 20, 23—25, 31; *Э. Иванов* (Орджоникидзе) 25; *М. Имас* (Донецк) 20, 25, 26; *Т. Калатоци* (Кутаиси) 23, 32; *И. Калиновский* (Киев) 23—25, 30; *В. Карасев* (Алма-Ата) 31; *Е. Качковская* (Винница) 23—25; *М. Козлов* (Москва) 23—25; *А. Коломейский* (Винница) 24, 25, 27; *Е. Королева* (Москва) 25; *С. Кравчук* (Киев) 24, 25; *А. Краснов* (Новосибирск) 24, 25, 31; *В. Краснов* (Чебоксары) 31; *Ю. Кремень* (Молодечно) 25, 27; *Д. Кузнецов* (Куйбышев) 20, 23, 25, 30—32; *И. Куличик* (Брест) 25, 26; *Д. Куццов* (Москва) 23—25, 30, 32; *Н. Кухаркин* (Москва) 20, 21, 25, 30; *А. Лапатинов* (Винница) 23—25; *С. Лауринавичюс* (Мажейкяй) 21, 23—25, 30—32; *И. Левин* (Донецк) 24—26; *Д. Луцц* (Саратов) 24, 25, 30, 31; *П. Лушников* (Москва) 25; *Д. Макаров* (п. Черноголовка Московской обл.) 23—27, 30; *К. Макачук* (Киев) 25, 31; *Л. Маркович* (Минск) 24—27; *О. Маров* (Канев) 25; *А. Мартошенко* (Днепропетровск) 23—25; *П. Милютин* (Хабаровск) 25; *А. Михеев* (Кимры) 31; *С. Молчанов* (Саратов) 23—25, 30, 31; *К. Мосейчев* (Зеленоград) 25; *А. Наффинов* (Апатиты) 25, 32; *В. Никитин* (Одесса) 20, 25; *И. Новиков* (Обнинск) 25, 31; *Е. Паркименко* (Чернигов)

(Окончание см. на с. 54)

# КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

## Оценка за полугодие

Я подводил итоги полугодия в десятом классе. Прямо на уроке. Вычислял на микрокалькуляторе средний балл и округлял его до ближайшего целого числа. А если таких оказывалось сразу два, то в сторону последней в полугодии оценки, созданная таким образом, что результат зависит не от произвола учителя, а от математических законов. После этого я зачитывал итоговую оценку.

Класс, привыкший к этой процедуре, не проявлял особого интереса к моим расчетам, и только Г., сидевший прямо передо мной на первой парте, время от времени поднимал голову и вытягивал шею, стараясь высмотреть, что там делается в журнале. Невольно я заглянул вперед в его графу — хотя там стояли только четверки и пятёрки, четверок было больше, так что итог был однозначен. Встретившись с Г. глазами, я резко качнул головой вниз, показывая ему, чтобы он не отвлекался. И тут я заметил на его черновике расчеты, никак не соответствовавшие задаче, которую он должен был решать. Я собрался сделать ему замечание, но он опередил меня.

— У меня четыре выходит, да?

— Очевидно, — сказал я, гримасой показывая, что недоволен его нетерпеливостью.

— Это если считать *среднее арифметическое*, — вдруг сказал он. — А почему бы Вам не взять *среднее квадратическое*?

Класс оторвал головы от парт и насторожился.

— А геометрическое не хочешь? — спросил я, оправившись от неожиданности: ничего подобного за многие годы моей работы в школе не было — до Г. эта идея никому не приходила в голову.

— Не хочу, — сказал он. — Вы же ставите оценку по алгебре, а не по геометрии!

Класс засмеялся. Возразить на этот довод было нечего, и я взялся за машинку, надеясь, что повышения на балл все же не случится. Но табло безжалостно высветило величину, большую, чем четыре с половиной.

— Твоя взяла, — сказал я, вздохнув, и тут же понял, что будет дальше.

— А нам?!?! — незамедлительно за моей мыслью возопил класс, но я уже сообразил, как выйти из положения... нужно было рискнуть.

— Хорошо, — сказал я, пристально глядя на Г., — только пеняйте на себя, если новое число будет *меньше* старого.

Г. открыл было рот... но не произнес ни слова. Класс колебался.

— Ну, кто смелый? — спросил я с интонацией, показывающей, что им лучше не рисковать.

Несколько человек принялись лихорадочно считать.

— А Вы скажите сперва, что такое *среднее квадратическое*... — жалобно сказали девочки с последней парты.

— Ну что ж, — сказал я не без облегчения, — выходит, что Г. честно заработал свои пять баллов: он-то не только знал, что это такое, но и знал, что оно *всегда не меньше* среднего арифметического, не говоря уже о том, что успел все рассчитать заранее.

Класс взвыл от огорчения.

— А вот пусть и докажет, что всегда не меньше, — мстительно сказал Д., редко упускавший случай подсадить удачливого товарища.

— Пусть докажет, раз он так!!! — торжествующе завопил класс.

— Ты слышал, чего требует народ? — спросил я.

Г. тяжело вздохнул, но делать было нечего. Он пошел к доске, взял мел, почесал им в затылке, написал неравенство... и после некоторой возни его доказал:

$$\sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n}} > \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

На дом я ему задал вычислить, при каком наименьшем количестве оценок за полугодие может случиться такая история.

В. Э. Матисен





## Магнитное поле и магнитные силы

Кандидат физико-математических наук  
В. В. МОЖАЕВ

Всякое упорядоченное движение заряженных частиц, то есть электрический ток, создает в окружающем пространстве магнитное поле. Для количественного описания магнитного поля служит специальная физическая величина — вектор магнитной индукции  $\vec{B}$ . О том, как определяется модуль и направление этого вектора, подробно рассказано в школьном учебнике «Физика 9».

Существование магнитного поля можно обнаружить по его действию на ток (на движущиеся заряды). Сила  $\vec{F}$ , действующая на малый отрезок проводника  $\Delta l$ , по которому течет ток  $I$  (на элемент тока), со стороны магнитного поля с индукцией  $\vec{B}$ , составляющей угол  $\alpha$  с элементом тока, определяется законом Ампера. Согласно этому закону, модуль магнитной силы (силы Ампера) равен

$$F = B \Delta l \sin \alpha.$$

На заряд  $q$ , движущийся со скоростью  $\vec{v}$  в магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$ , действует сила Лоренца  $\vec{F}_L$ . Ее модуль равен

$$F_L = qvB \sin \beta,$$

где  $\beta$  — угол между векторами  $\vec{v}$  и  $\vec{B}$ . Направление и силы Ампера, и силы Лоренца определяется известным правилом левой руки.

В том случае, когда проводник с током имеет произвольную форму, мы должны разбить его на отдельные элементы, найти, согласно закону Ампера, силы, действующие на каждый элемент, и затем сложить их (векторно).

Теперь обсудим несколько конкретных задач, в которых рассматривается действие магнитного поля на проводники с током и на отдельные движущиеся

ся заряды. Большинство этих задач предлагалось в разные годы на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт.

**Задача 1.** Однородный провод, согнутый таким образом, что он образует три стороны квадрата, может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, являющейся четвертой стороной этого квадрата (рис. 1, а). Рамка находится в постоянном однородном вертикальном магнитном поле. Если по проводу течет ток  $I_1$ , рамка отклоняется от вертикали на угол  $\alpha_1 = 30^\circ$ . При какой силе тока  $I_2$  угол отклонения будет  $\alpha_2 = 60^\circ$ ?

На каждый участок проводника с током в магнитном поле действует магнитная сила, которую можно определить по закону Ампера. В начальный момент магнитная сила действует лишь на нижнюю сторону квадрата. Она создает вращающий момент, под действием которого рамка начнет поворачиваться относительно оси вращения. Это, в свою очередь, приведет к появлению момента сил тяжести, возвращающего рамку в первоначальное положение. Магнитные силы, действующие на боковые стороны квадрата, лежат в горизонтальной плоскости и поэтому вращающего момента не создают.

При некотором угле  $\alpha_1$  рамка будет находиться в положении равновесия (рис. 1, б). В этот момент алгебраическая сумма моментов всех сил, действующих на рамку, должна быть равна нулю:

$$F_M a \cos \alpha_1 - mga \sin \alpha_1 - 2mg \frac{a}{2} \sin \alpha_1 = 0,$$

или

$$BI_1 a^2 \cos \alpha_1 - 2mga \sin \alpha_1 = 0.$$

Отсюда получим

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{BI_1 a}{2mg}.$$

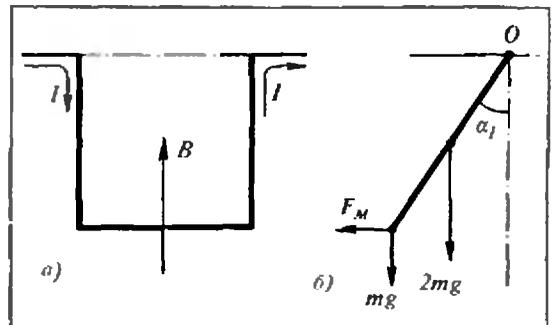


Рис. 1.

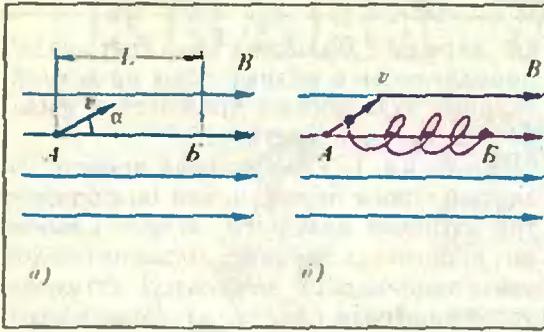


Рис. 2.

где  $a$  — длина стороны квадрата. Аналогично для второго случая найдем

$$\operatorname{tg} \alpha_2 = \frac{Bl_2 a}{2mg}$$

Тогда

$$l_2 = l_1 \frac{\operatorname{tg} \alpha_2}{\operatorname{tg} \alpha_1} = 3l_1.$$

**Задача 2.** Электрон влетает в однородное магнитное поле. В точке  $A$  он имеет скорость  $\vec{v}$ , которая составляет с направлением магнитной индукции поля угол  $\alpha$  (рис. 2, а). При каких значениях модуля  $B$  магнитной индукции электрон окажется в точке  $B$ ? Заряд электрона  $e$ , масса  $m$ , расстояние  $|AB|$  равно  $L$ .

На движущийся электрон со стороны магнитного поля действует сила Лоренца. Поскольку эта сила всегда направлена перпендикулярно вектору магнитной индукции, ее проекция на направление поля равна нулю. Следовательно, вдоль этого направления электрон будет двигаться с постоянной скоростью  $v \cos \alpha$ . В плоскости, перпендикулярной вектору  $\vec{B}$ , электрон будет двигаться по окружности с линейной скоростью, равной  $v \sin \alpha$ . Запишем уравнение движения электрона по окружности:

$$\frac{mv^2 \sin^2 \alpha}{R} = eBv \sin \alpha,$$

откуда найдем радиус окружности  $R$  и период обращения  $T$ :

$$R = \frac{mv \sin \alpha}{eB},$$

$$T = \frac{2\pi R}{v \sin \alpha} = \frac{2\pi m}{eB}.$$

В целом траектория движения электрона будет иметь вид спирали, изображенной на рисунке 2, б (электрон поступательно движется вдоль направления поля и движется по окружности в плоскости, перпендикулярной полю).

Пусть при некотором значении  $B_n$  модуля магнитной индукции электрон ока-

жется в точке  $B$ . Время его движения от  $A$  к  $B$  будет равно

$$\tau = \frac{L}{v \cos \alpha}.$$

За это время он должен будет совершить целое число  $n$  полных оборотов, то есть

$$\tau = nT,$$

или

$$\frac{L}{v \cos \alpha} = n \frac{2\pi m}{eB_n}.$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$ . В результате получаем дискретный набор значений  $B_n$ , при которых электрон будет попадать в точку  $B$ :

$$B_n = \frac{2\pi m v \cos \alpha}{eL} n.$$

**Задача 3.** Жесткая проволочная квадратная рамка с длиной каждой стороны  $a$ , сопротивлением  $R$  и массой  $m$  свободно падает в магнитном поле. Направление вектора магнитной индукции поля перпендикулярно плоскости рамки, а модуль меняется с высотой по закону  $B(z) = B_0 - kz$ , где  $B_0$  и  $k$  — некоторые константы. Найдите установившееся значение скорости рамки.

Пусть рамка в некоторый произвольный момент времени находится на высоте  $z$  (координата верхней стороны рамки) и имеет скорость  $v_z$  (рис. 3). На каждый свободный электрон рамки в этот момент будет действовать сила Лоренца:  $\vec{f}_1$  на электроны верхней стороны квадрата ( $f_1 = ev_z B(z)$ ) и  $\vec{f}_2$  — на электроны нижней стороны ( $f_2 = ev_z B(z+a)$ ). Силы, действующие на электроны боковых сторон, мы рассматривать не будем, так как они на движение рамки не влияют.

Под влиянием сил  $\vec{f}_1$  и  $\vec{f}_2$  электроны придут в упорядоченное движение вдоль рамки, то есть по рамке будет течь некоторый ток  $I$ . Поскольку  $f_1 > f_2$ , ток будет направлен по часовой стрелке. В свою

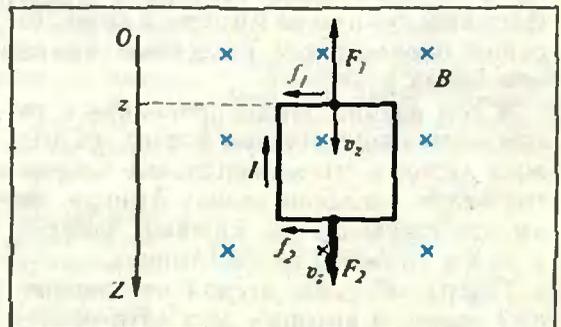


Рис. 3.

очередь, на рамку, по которой течет ток  $I$ , будут действовать силы Ампера (той же самой природы, что и силы Лоренца):  $\vec{F}_1$  на верхнюю сторону рамки ( $F_1 = B(z)Ia$ ) и  $\vec{F}_2$  — на нижнюю сторону ( $F_2 = B(z+a)Ia$ ).

Найдем силу тока  $I$ , который по закону Ома связан с электродвижущей силой индукции, возникающей в рамке, и сопротивлением рамки. ЭДС индукции в данном случае представляет собой работу силы Лоренца по перемещению единичного положительного заряда по замкнутому контуру рамки:

$$\mathcal{E}_i = \frac{A}{e} = \frac{I_1 a - I_2 a}{e} = \frac{ev_1 B(z)a - ev_2 B(z+a)a}{e} = v_1 ka^2.$$

Тогда

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{v_1 ka^2}{R}.$$

На рамку в целом при ее движении действуют три силы — сила тяжести  $m\vec{g}$  и магнитные силы  $\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$ . В установившемся режиме уравнение движения рамки будет иметь вид

$$m\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0,$$

или

$$mg - B(z)Ia + B(z+a)Ia = mg - \frac{k^2 a^4 v_1}{R} = 0.$$

Отсюда найдем установившееся значение скорости рамки:

$$v_{z, \text{уст}} = \frac{mgR}{k^2 a^4}.$$

**Задача 4\*).** При прохождении электрического тока  $I$  через соленоид с длиной  $L$ , радиусом  $R$  и большим числом витков  $N$  внутри соленоида создается однородное магнитное поле с индукцией  $B = \mu_0 NI/L$  ( $\mu_0$  — магнитная постоянная). Линии магнитной индукции параллельны оси соленоида. Определите величину тока, при которой произойдет разрыв обмотки соленоида, если предельная растягивающая нагрузка на проволоку равна  $F_{\text{пр}}$ .

Прежде всего заметим, что в условии задачи не случайно говорится о большом числе витков соленоида, то есть подразумевается, что длина катушки много больше диаметра поперечного сечения соленоида. Только в этом случае можно считать, что магнитное поле внутри соленоида однородно, а индукцией

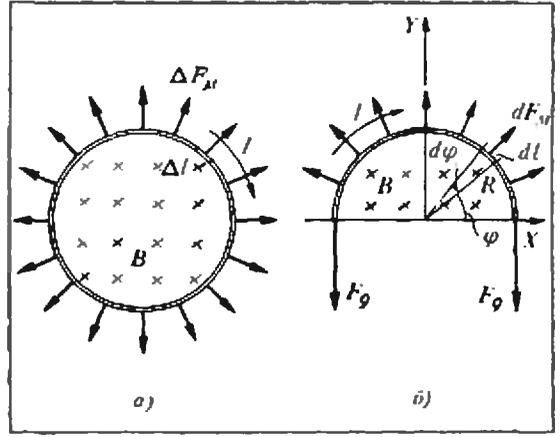


Рис. 4.

поля вне соленоида можно пренебречь. Это означает, что внутри соленоида вблизи поверхности кольцевого витка с током вектор магнитной индукции перпендикулярен плоскости витка и равен  $\mu_0 NI/L$ , а с внешней стороны индукция равна нулю.

Теперь обратимся непосредственно к вопросу задачи. Очевидно, что разрыв обмотки соленоида может произойти в результате действия магнитного поля. Возникает вопрос: какое же значение магнитной индукции нужно взять, чтобы правильно вычислить силы, действующие на элементы витка с током? Большинство абитуриентов, решавших эту задачу, брали ошибочно всю величину индукции. На самом деле, поле как у внутренней, так и у внешней сторон витка соленоида представляет собой суперпозицию полей, создаваемых самим витком и всеми остальными витками. Пусть модуль индукции, создаваемой витком, равен  $B_1$ , а всех остальных витков —  $B_{N-1}$ . Используя принцип суперпозиции, можно записать:

$$B_1 - B_{N-1} = 0 \text{ — с наружной стороны,}$$

$$B_1 + B_{N-1} = \mu_0 \frac{NI}{L} \text{ — внутри соленоида.}$$

Из этих равенств получаем, что  $B_{N-1} = \mu_0 NI/(2L)$ . Следовательно, индукция поля, в котором находится каждый виток, равна половине индукции поля в соленоиде. Именно это значение мы должны брать для расчета сил, действующих на элементы витка.

По закону Ампера на каждый небольшой элемент  $\Delta l$  витка с током  $I$  будет действовать магнитная сила, направленная перпендикулярно вектору магнитной индукции и элементу тока (рис. 4, а). Модуль ее равен

\* Эта задача повышенной трудности.

$$\Delta F_n = \frac{1}{2} B I \Delta l.$$

Эти силы, направленные по радиусам витка, и будут вызывать растяжение проволоки витка. Для определения сил, возникающих в ответ на растяжение, удобно рассмотреть равновесие любой половинки кольца.

На рисунке 4, б показаны силы, действующие на полувиток. Это — магнитные силы и силы  $\vec{F}_d$ , возникающие при деформации. При равновесии сумма проекций всех сил на вертикальную ось должна быть равна нулю. Найдем проекцию суммарной магнитной силы. Некоторые из вас, наверное, встречались с аналогичными задачами и знают, что эта проекция равна силе, действующей на единицу длины витка, умноженной на величину проекции полуокружности, то есть на диаметр витка. Покажем это с помощью строгого расчета.

Выберем в качестве бесконечно малого элемента длины кольца участок  $dl$ , заключенный между двумя радиусами, проведенными под углами  $\varphi$  и  $\varphi + d\varphi$  к оси  $X$  (см. рис. 4, б). Здесь  $d\varphi$  — бесконечно малое приращение угла  $\varphi$ . Длина этого элемента будет равна  $dl = R d\varphi$ , сила, действующая на него, равна

$$dF_n = \frac{1}{2} B I R d\varphi,$$

а проекция этой силы на ось  $Y$  —

$$dF_{ny} = \frac{1}{2} B I R \sin \varphi \cdot d\varphi.$$

Тогда проекция суммарной магнитной силы, действующей на весь полувиток, будет равна

$$\begin{aligned} F_{ny} &= \int_0^\pi \frac{1}{2} B I R \sin \varphi \cdot d\varphi = \\ &= -\frac{1}{2} B I R (\cos \pi - \cos 0) = B I R. \end{aligned}$$

### Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 49)

23—25, 30; Г. Перельман (Киев) 25; А. Петренко (Винница) 23, 25; О. Петренко (Кировское) 25; И. Пильников (Тамбов) 24—26; А. Поляков (Златоуст) 25, 31; А. Попов (Фролово) 30; С. Рекум (Винница) 23, 24; Ю. Рожь (Борисполь) 25; М. Рудык (Винница) 23—25; Д. Русинов (Ленинград) 23, 25, 32; М. Савченко (Белгород) 24, 25; И. Савыков (Первоуральск) 21, 24—26, 30; Г. Самадашвили (Тбилиси) 24, 25, 31; А. Самойлович (Донецк) 21, 23—26, 30, 31; С. Сахарук (Брест)

Разрыв обмотки соленоида, очевидно, произойдет при условии, что проекция суммарной магнитной силы будет больше или равна удвоенному значению предельной растягивающей нагрузки на проволоку:

$$B I R > 2F_{пр}, \text{ или } \frac{\mu_0 I^2 R N}{L} > 2F_{пр}.$$

Отсюда найдем искомое значение тока  $I$ :

$$I > \left( \frac{2F_{пр} L}{\mu_0 R N} \right)^{1/2}.$$

### Упражнения

1. Металлическая штанга длины  $l$  и массы  $m$  подвешена на двух одинаковых упругих пружинах (жесткость каждой пружины  $k$ ) в однородном магнитном поле с индукцией  $\vec{B}$  (рис. 5). Вектор  $\vec{B}$  перпендикулярен плоскости чертежа. На какую максимальную величину  $\Delta x_{\max}$  сместится штанга от положения равновесия, если через нее пропустить короткий импульс тока силы  $I$  в течение промежутка времени  $\tau$ ? Сместением штанги за время  $\tau$  пренебречь.

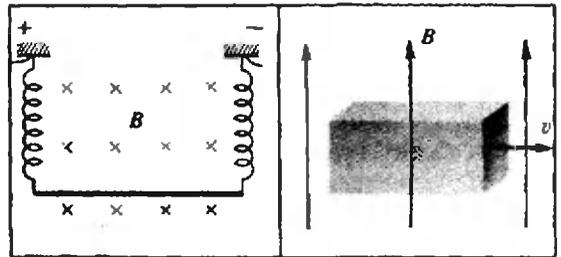


Рис. 5.

Рис. 6.

2. Пройдя ускоряющую разность потенциалов  $U = 3,52 \cdot 10^3$  В, электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией  $B = 0,01$  Тл перпендикулярно линиям индукции и движется по окружности радиуса  $R = 0,02$  м. Вычислите отношение  $e/m$  заряда электрона к его массе.

3. Длинная и тонкая незаряженная пластинка из немагнитного металла движется с постоянной скоростью  $v = 11,3$  м/с в однородном магнитном поле с индукцией  $B = 1$  Тл. Векторы  $\vec{B}$  и  $\vec{v}$  взаимно перпендикулярны и параллельны плоскости пластинки (рис. 6). Определите поверхностную плотность  $\sigma$  электрических зарядов, возникающих на боковых плоскостях пластинки вследствие ее движения.

25, 26; И. Сегаль (Сумы) 23—25; М. Скорик (Киев) 20, 24—26, 31; М. Скоробогатов (Киев) 30, 31; И. Соколовский (Покров) 25; А. Соловьев (Куйбышев) 20, 23—25, 31, 32; Б. Судейманов (Баку) 25; А. Сурков (Ленинград) 25; И. Тетко (Кодыма) 25; В. Томчук (Винница) 23, 25; Д. Третьяков (Винница) 23—25; Н. Федик (Омск) 21, 23—25, 31; Л. Федичкин (Москва) 23—25; Л. Фельдман (Саратов) 24, 25, 31, 32; М. Флямер (п. Протвино Московской обл.) 25; С. Цонев (София, НРБ) 23, 25; А. Черепкин (Винница) 21; И. Четветкин (Киев) 25, 31; А. Чудновский (Киев) 25, 31; И. Шендерович (Северодвинск) 25, 31, 32; А. Шнирман (Донецк) 23—27, 31; И. Штрайх (Винница) 23—25; И. Эльберги (Киев) 24; О. Юдин (Ленинград) 25; Г. Яцин (п. Черноголовка Московской обл.) 25, 31.

Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов в вузы в 1983 году.

## Московский инженерно-физический институт

### Математика

#### Письменный экзамен

#### Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sqrt{\sin x - \frac{1}{2}} \cdot \log_3(x-2) = 0.$$

2. Найдите критические точки функции

$$f(x) = (2x-1) \cdot \sqrt{x-a}.$$

3. Основанием призмы  $ABCA_1B_1C_1$  служит равнобедренный треугольник  $ABC$ , у которого  $|AB| = |AC|$ ,  $\hat{A} = 2\alpha$  и высота  $AD$  имеет длину  $h$ . Боковая грань  $BB_1C_1C$  — прямоугольник, плоскость которого составляет с плоскостью основания призмы угол величины  $\varphi$ . Через точку  $A_1$  проведена плоскость, перпендикулярная ребру  $AA_1$  и пересекающая призму. Найдите объемы многогранников, на которые секущая плоскость разбивает призму, если  $|BB_1| = b$ .

4. Набор одинаковых альбомов и одинаковых книг стоит 40 руб., причем цена альбома 2 руб., а книги — 3 руб. Если бы цена альбома была  $k$  руб., книги — 3 руб., то весь набор стоил бы 39 руб. Сколько альбомов и сколько книг в наборе, если известно, что книг в нем не меньше, чем альбомов?

#### Вариант 2

1. Разность между произведением двадцать первого и тринадцатого членов арифметической прогрессии и произведением четырнадцатого и двадцать второго членов этой же прогрессии равна  $p$ . Определите разность этой прогрессии, если сумма ее шестнадцатого и девятнадцатого членов равна  $q$ .

2. Плоскость, проходящая через точку  $A$  бокового ребра  $PQ$  правильной треугольной пирамиды  $PQRT$  и параллельная ребру  $TR$ , пересекает пирамиду так, что сечением является треугольник, все внутренние углы которого имеют одинаковую величину. Найдите площадь этого треугольника, если известно, что апофема боковой грани пирамиды равна  $k$ , боковая грань  $PTR$  составляет с плоскостью основания угол величины  $\varphi$  и  $|AQ| = |0,75|AP|$ .

3. Найдите интервалы монотонного возрастания функции

$$f(x) = (c-3) \cdot 5^x - (3c+4) \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^x + 7.$$

4. Решите уравнение

$$\begin{aligned} \cos^3 \frac{x}{3} \cdot (2 \cos x - \sin 2x) = \\ = \left(3 \sin x - \frac{5}{6} \sin^2 x\right) \cdot \sin^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{3}\right). \end{aligned}$$

### Физика

#### Задачи устного экзамена

1. На грань призмы, образующей угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом, положили груз (рис. 1). Коэффициент трения между грузом и призмой  $\mu = 0,35$ . С каким ускорением нужно двигать призму вдоль оси  $X$ , чтобы груз не скользил относительно призмы ни вверх, ни вниз?

2. Два груза одинаковой массы укреплены на концах легкого стержня, согнутого под прямым углом (рис. 2). Вершина угла является осью вращения,  $l_1 = 40$  см,  $l_2 = 30$  см. Стержень выводит из положения равновесия так, что груз, укрепленный на  $l_2$ , оказывается под осью вращения, а затем отпускают. Определите угловую скорость системы в момент, когда  $l_1$  занимает вертикальное положение.

3. Пластинчатый шар бросают со скоростью  $v_0 = 10$  м/с под углом  $\alpha = 60^\circ$  к горизонту по направлению к вертикальной стенке, расположенной на расстоянии  $l = 6,3$  м от точки бросания. Шар прилипает к стенке. Считая, что вся кинетическая энергия шара пошла на его нагревание, найдите приращение температуры шара. Удельная теплоемкость пластины  $c = 2,5 \times 10^3$  Дж/(кг · К).

4. В трубке, запаянной с одного конца, находится столбик ртути длиной  $l = 0,3$  см. Трубку вращают в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через ее закрытый конец. При какой угловой скорости вращения ртуть достигнет открытого конца, если в неподвижной горизонтальной трубке она находится на расстоянии  $d = 64$  см от закрытого конца? Длина трубки  $b = 80$  см. Внешнее давление  $p_0 = 100$  кПа. Температура постоянна. Плотность ртути  $\rho = 13,6 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>. Капиллярными эффектами пренебречь.

5. Небольшой шарик массы  $m = 10$  мг, несущий электрический заряд  $q = -0,4$  мкКл, вначале удерживают у поверхности одной из двух заряженных вертикальных пластин (а именно — у отрицательно заряженной), отстоящих друг от друга на расстоянии  $d = 6$  см (рис. 3). Затем шарик отпускают без начальной скорости. Найдите работу, которую совершит над шариком сила тяжести за время его движения к положительно заряженной пластине, если разность потенциалов между пластинами  $U = 10$  В.

6. Электромотор с сопротивлением обмоток  $R = 2$  Ом подключен к генератору с ЭДС

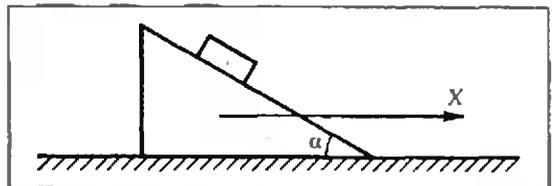


Рис. 1.

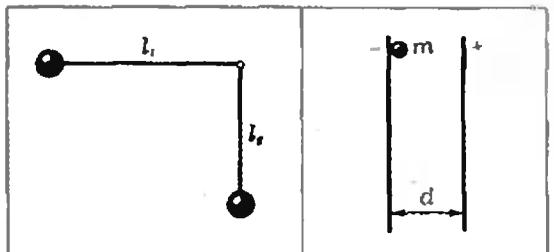


Рис. 2.

Рис. 3.

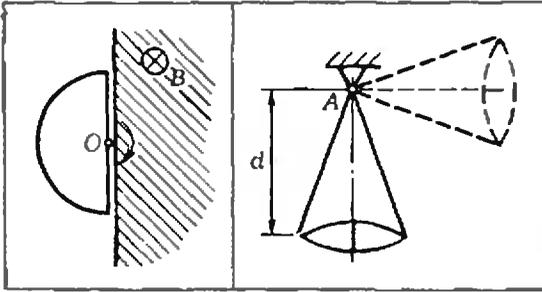


Рис. 4.

Рис. 5.

$\mathcal{E} = 240$  В и внутренним сопротивлением  $r = 4$  Ом. При работе мотора через его обмотки проходит ток  $I = 10$  А. Найдите КПД электромотора. Сопротивление подводящих проводов пренебрежимо мало.

7. Из электронной пушки, ускоряющее напряжение в которой  $U = 600$  В, вылетает электрон и попадает в магнитное поле с индукцией  $B = 1,2$  Тл. Линии магнитной индукции составляют угол  $\alpha = 30^\circ$  с направлением скорости электрона. Найдите ускорение электрона в магнитном поле. Удельный заряд электрона  $e/m = 1,76 \cdot 10^{-11}$  Кл/кг.

8. Контур, ограничивающий полукруг радиусом  $r = 0,1$  м, находится на границе однородного магнитного поля с индукцией  $B = 0,1$  Тл (рис. 4). Контур начали вращать с постоянной угловой скоростью  $\omega = 100$  с $^{-1}$  вокруг оси  $O$ , перпендикулярной плоскости рисунка. Сопротивление контура  $R = 0,314$  Ом. Найдите количество теплоты, выделяющееся в контуре за один оборот.

9. Маленькая линза с фокусным расстоянием  $F = 20$  см подвешена в точке  $A$  на нитях так, что расстояние от точки  $A$  до оптического центра линзы равно  $d = 25$  см (рис. 5). Подвес отклоняют до горизонтального положения, затем отпускают. С каким ускорением будет двигаться изображение точки  $A$  в линзе в момент, когда линза проходит нижнее положение?

10. Протон, летящий горизонтально со скоростью  $v_0 = 4,6 \cdot 10^4$  м/с, сталкивается с неподвижным свободным атомом гелия. После удара протон отскакивает назад со скоростью  $1/2v_0$ , а атом переходит в возбужденное состояние. Вычислите длину волны света, который излучает атом гелия, возвращаясь в первоначальное состояние.

Публикацию подготовили  
Д. Ф. Калининко, А. И. Руденко, В. Е. Чижов

## Московский институт стали и сплавов

### Математика

#### Письменный экзамен

#### Вариант 1

1. Найдите сумму членов бесконечной геометрической прогрессии  $3, -1, 1/3, -1/9, \dots$

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x+1} + \sqrt{2x+3} = 1.$$

3. Решите уравнение

$$\log_4(2 \log_3(1 + \log_2(1 + 3 \log_2 x))) = \frac{1}{2}.$$

4. Преобразуйте и вычислите

$$\cos \frac{\pi}{8} \left( \lg \frac{5\pi}{16} + \lg \frac{3\pi}{16} \right).$$

5. Решите систему неравенств

$$\begin{cases} 2^x > 4^{x-1} \\ -5 < x < 10. \end{cases}$$

В ответе запишите количество целых чисел, удовлетворяющих этой системе.

6. Решите уравнение

$$\cos lx \cdot \sin 7lx = \cos 3lx \cdot \sin 5lx.$$

В ответе запишите количество корней уравнения, принадлежащих отрезку  $[0,1; 0,9]$ .

7. В равнобедренную трапецию вписана окружность радиуса 2. Найдите площадь трапеции, если длина боковой стороны равна 10.

8. При перемножении двух натуральных чисел, одно из которых на 10 больше другого, ученик ошибся, уменьшив произведение на 5 единиц. При делении полученного произведения на меньший из множителей он получил в частном 37, а в остатке 23. Найдите больший множитель.

9. На окружности радиуса 2 дана точка  $A$ . Хорда  $BC$  проведена параллельно касательной к окружности в точке  $A$  так, что площадь треугольника  $ABC$  наибольшая. Найдите расстояние от точки  $A$  до хорды  $BC$ .

10. Металлический шар радиуса  $5\sqrt{2}$  перелит в конус. Площадь боковой поверхности которого в 3 раза больше площади основания. Найдите высоту конуса.

#### Вариант 2

1. Вычислите  $\sqrt[12]{81^6 \cdot (0,064)^4}$ .

2. Диаметр  $CD$  параллелен хорде  $AB$  той же окружности. Найдите длину этой хорды, если  $|AC| = 3, |BC| = 4$ .

3. Найдите радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, если его катеты являются корнями уравнения  $x^2 - 7x + 12 = 0$ .

4. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом  $60^\circ$ . Найдите отношение площади боковой поверхности конуса к площади его основания.

5. Вычислите  $\sin 2\alpha$ , если  $\sin \alpha - \cos \alpha = \frac{3}{5}$ .

6. Решите неравенство

$$\log_2 \log_4 x + \log_4 \log_2 x < 2.$$

В ответе запишите длину промежутка, являющегося множеством решений неравенства.

7. Решите уравнение  $\sin^2 x - \cos^2 x = \cos \frac{x}{2}$ .

В ответе запишите (в градусах) наименьший положительный корень этого уравнения.

8. Найдите  $f'(2)$ , если

$$f(x) = \frac{27 \cdot \ln(2x^2 - 7)}{4x^3 - 5} + 7x - 2.$$

9. Решите неравенство

$$\frac{6x+3}{3x^2} > \sqrt[4]{27 \frac{2x+1}{x}}$$

В ответе запишите произведение целых чисел, удовлетворяющих неравенству.

10. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x) = 3\sqrt{3} \cdot \sin x \cdot \sin 2x \text{ на отрезке } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

### Физика

#### Письменный экзамен

#### Вариант 1

1. Каким был бы период обращения искусственного спутника Земли по круговой орбите, если бы он был удален от поверхности Земли на

расстояние, равное земному радиусу ( $R_3 = 6370$  км)?

2. С какой наименьшей высоты должен скатываться велосипедист, не вращая педалей, чтобы проехать по дорожке, имеющей форму «мертвой петли» радиусом  $R = 4$  м, не отрываясь от дорожки в верхней точке петли?

3. Мяч, упавший с высоты  $h = 1$  м, два раза ударяется о наклонную плоскость. Расстояние между точками удара мяча  $l = 4$  м. Считая удар абсолютно упругим, определите угол наклона плоскости к горизонту.

4. Сосуд кубической формы с ребром  $a = 10$  м до краев наполнен водой. Определите силу давления воды на боковую поверхность сосуда при нормальном атмосферном давлении.

5. Давление воздуха в сосуде было равно  $p_0 = 1,01 \cdot 10^5$  Па. После трех ходов откачивающего поршневого насоса давление воздуха упало до значения  $p = 2$  кПа. Определите отношение объема сосуда к объему цилиндра поршневого насоса. Температуру воздуха в процессе откачки считать постоянной.

6. Два литра воды нагрелась в электрическом чайнике от  $t_1 = 0^\circ\text{C}$  до  $t_2 = 100^\circ\text{C}$  в течение  $\tau = 29$  мин. Мощность чайника  $P = 600$  Вт. Определите коэффициент полезного действия нагревателя в чайнике, считая, что удельная теплоемкость воды  $c = 4190$  Дж/(кг · К).

7. Когда ключ  $K$  замкнут, сопротивление схемы, изображенной на рисунке 1, равно  $R_1 = 80$  Ом. Определите сопротивление схемы, когда ключ разомкнут.

8. Определите время, в течение которого при электролизе раствора медного купороса на электроде выделится  $m = 0,1$  г меди. Ширина катодной пластины  $a = 5$  см, глубина ее погружения в электролит  $h = 10$  см. Наибольшая допустимая плотность тока  $i = 100$  А/м<sup>2</sup>.

9. Проволочное кольцо радиусом  $r = 0,1$  м лежит на столе. Какой заряд протечет по кольцу, если его перевернуть с одной стороны на другую? Сопротивление кольца  $R = 1$  Ом. Вертикальная составляющая индукции магнитного поля Земли  $B = 0,5 \cdot 10^{-4}$  Тл.

10. Изображение небольшого предмета, расположенного перпендикулярно главной оптической оси рассеивающей линзы, в два раза меньше поперечного размера самого предмета. Если предмет передвинуть на расстояние  $l = 10$  см ближе к линзе, то изображение станет в 1,5 раза меньше предмета. Определите модуль фокусного расстояния линзы.

**Вариант 2**

1. Человек тянет за собой с постоянной скоростью санки массой  $m = 20$  кг с помощью веревки, составляющей угол  $\alpha = 30^\circ$  с горизонтом. Коэффициент трения между санками и горизонтальной поверхностью  $\mu = 0,05$ . Определите силу натяжения веревки.

2. Тело массой  $m = 1$  кг, брошенное с вышки в горизонтальном направлении со скоростью  $v_0 = 20$  м/с, упало на Землю через  $t = 3$  с. Определите кинетическую энергию тела в момент удара о Землю.

3. К концам горизонтального стержня длиной  $l = 0,8$  м и массой  $m = 2$  кг подвешены два груза: слева массой  $m_1 = 1$  кг, справа —  $m_2 = 3$  кг. На каком расстоянии со стороны большей массы следует подпереть стержень, чтобы он остался в равновесии?

4. Звук удара камня о дно ущелья слышен навстреху через  $t = 10$  с после начала падения. Определите глубину ущелья, если скорость звука  $v = 340$  м/с.

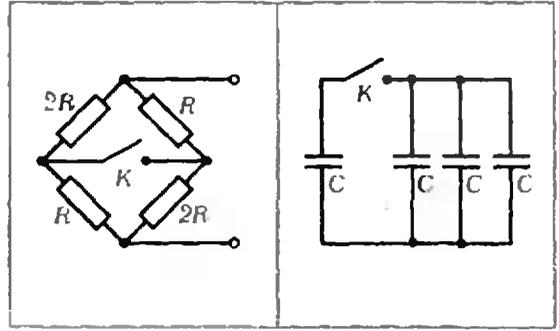


Рис. 1.

Рис. 2.

5. Какая масса воздуха выйдет из комнаты объемом  $V = 50$  м<sup>3</sup> при повышении температуры от  $T_1 = 250$  К до  $T_2 = 300$  К при нормальном атмосферном давлении? Молярная масса воздуха  $M = 29 \cdot 10^{-3}$  кг/моль.

6. Относительная влажность воздуха в комнате объемом  $V = 40$  м<sup>3</sup> равна  $\varphi = 70\%$ . Определите массу водяных паров в комнате, если температура  $t = 20^\circ\text{C}$ , а давление насыщенного пара при этой температуре  $p_{\text{н}} = 2330$  Па.

7. В схеме, приведенной на рисунке 2, первый конденсатор заряжен до энергии  $W_0 = 1$  Дж. Найдите энергию всей системы конденсаторов после замыкания ключа  $K$ .

8. Расстояние между двумя точечными зарядами  $q_1 = 64 \cdot 10^{-9}$  Кл и  $q_2 = -48 \cdot 10^{-9}$  Кл равно  $l = 10$  см. Определите модуль напряженности поля в точке, удаленной на  $l_1 = 8$  см от первого заряда и на  $l_2 = 6$  см — от второго.

9. Источник тока с ЭДС  $\mathcal{E} = 50$  В и внутренним сопротивлением  $r = 1,2$  Ом должен питать дуговую лампу с сопротивлением  $R = 6$  Ом, требующую для нормального горения напряжение  $U = 30$  В. Определите величину дополнительного сопротивления.

10. Изображение слайда, имеющего поперечный размер  $h = 32$  мм и расположенного перед линзой на расстоянии  $d = 10,5$  см, имеет на экране поперечный размер  $h' = 64$  см. Определите фокусное расстояние линзы.

Публикацию подготовили  
В. И. Башкиров, О. Т. Малючок,  
Б. Г. Разумейко, А. Г. Токаев

## Московский энергетический институт

### Математика

#### Письменный экзамен

#### Вариант 1

1. Упростив выражение для  $f(x)$ , найдите  $f'(x)$ , если

$$f(x) = \left[ \frac{1 - 0,5\sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} + \frac{2 - 2\sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}} - \frac{2 - 3\sqrt{x} + 0,75x}{10\sqrt{x+1}(\sqrt{x+1} + \sqrt{x})} - \frac{1 - 1,5\sqrt{x} + 0,5x}{1 - x} \right]^{-1}$$

2. Решите уравнение

$$(2^x + \sqrt{0,7x + 1})^{1/3} + \sqrt{0,7x + 1} = (0,5)^{-x} + \sqrt{0,7x + 1}$$

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = 4x - \frac{15x^2}{4} - \frac{x^3}{3}$$

на отрезке  $[0,5; 1]$  и постройте ее график на указанном отрезке.

4. Найдите все корни уравнения

$$\sin^4 x + \sin^4 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin^2 \left(\frac{25\pi}{6}\right).$$

удовлетворяющее неравенству

$$\lg(x - \sqrt{2x+24}) > 0.$$

5. Около круга описана трапеция, боковые стороны которой образуют с ее большим основанием углы  $\alpha$  и  $\beta$ . Определите площадь круга, если площадь трапеции равна  $Q$ .

В а р и а н т 2

7. Упростив выражение для  $f(x)$ , найдите  $f'(x)$ , если

$$f(x) = \left\{ 2x^{-1} \left[ \frac{(0,25x^2 - 1)^2}{x} + 1 \right]^{1/2} \times \sqrt{(0,5)^{-2 \log_2(1 + 0,25x^2)} + \left( \frac{\sqrt{0,25x^2}}{\sqrt{-8x+1}} \right)^{-1} \right\}^4$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} (x+1)^4 - 16^{-y} + 15 = 0, \\ (x+1)^3 \cdot 2^{-y} - (x+1) \cdot 8^{-y} + 6 = 0. \end{cases}$$

3. Найдите промежутки монотонности и экстремумы функции  $f(x) = x^3 - 0,15x^2 - 0,06x - 3$  и постройте ее график.

4. Найдите все корни уравнения

$$3 \lg x + \sqrt{2} \sin \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \lg^2 \frac{4\pi}{3} = 0.$$

удовлетворяющие неравенству

$$1 + \log_2 x < 2 \log_4 \sqrt[4]{(x+1)^{2/3}}.$$

5. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция. Диагональ трапеции равна  $l$  и образует с основанием угол  $\alpha$ . Найдите объем пирамиды, если ее высота равна  $h$ .

Задачи устного экзамена

1. Чему равен  $\lg(ab)$ , если  $a < 0$  и  $b < 0$ ?

2. Докажите, что для всех  $\alpha$  и  $\beta$  таких, что  $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$ ,  $\beta \neq \pi l$  ( $k, l \in \mathbb{Z}$ ).

$$|\sin \alpha + \cos \beta| < |1 + \sin \alpha \cdot \cos \beta|.$$

3. Найдите область определения функции

$$f(x) = \sqrt{-1 + \frac{1}{x}}.$$

4. Исследуйте на четность-нечетность функцию

$$f(x) = \log_{0,5}(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

5. Постройте график функции

а)  $y = 2^{\lg x} \cdot \lg x$ ,

б)  $y = 10^{\lg_{0,1}(\sin^2 \sqrt{x} - \cos^2 \sqrt{x})}$ .

6. Решите уравнение

$$\sin 18x + \cos 18x = \sqrt{2} \lg \frac{7,1}{20}$$

7. Решите неравенство

$$\cos x > \sqrt{y^2 + 1}.$$

8. Дана прямая  $(MN)$  и две точки  $A$  и  $B$ , лежащие по одну сторону от этой прямой. Постройте точку  $P$ , лежащую на прямой  $(MN)$ , так, чтобы сумма  $|AP| + |BP|$  была наименьшей.

9. Даны угол  $ABC$  и точка  $P$  внутри этого угла. На стороне  $[BA)$  найдите точку, равноудаленную от точки  $P$  и стороны  $[BC)$ .

10. Можно ли в окружность вписать трапецию, боковые стороны которой имеют разные длины?

### Физика

На одних факультетах экзамен по физике проводится в письменной форме, на других — в устной.

### Письменный экзамен

#### В а р и а н т 1

1. Сила тока. Условия возникновения электрического тока. Закон Ома для участка цепи. Напряжение и сопротивление, единицы измерения.

2. Уединенный металлический шар радиуса  $R$  имеет заряд  $Q$ . Постройте график зависимости напряженности  $E$  электростатического поля в точках на оси  $r$  в зависимости от величины  $r$  (рис. 1).

3. Луч света, распространяясь в воздухе, падает на плоскую стеклянную пластинку с показателем преломления  $n = 1,5$ . Определите величину угла  $\alpha$  падения луча, при котором отраженный от пластинки луч будет перпендикулярен преломленному лучу.

4. С каким максимальным ускорением  $a$  можно перемещать брусок массы  $m$  по горизонтальной поверхности, если веревка, за которую тянут брусок, выдерживает максимальное натяжение  $T$ ? Коэффициент трения бруска о поверхность равен  $\mu$ . Веревку тянут в направлении, составляющем угол  $\alpha$  с горизонтальной поверхностью.

5. Нагретое до температуры  $t_1 = 100^\circ\text{C}$  тело опустили в сосуд с водой, и при этом температура воды повысилась от  $t_2 = 20^\circ\text{C}$  до  $t_3 = 30^\circ\text{C}$ . Какой станет температура воды  $t_4$ , если в нее одновременно с первым опустить еще одно такое же тело, нагретое до  $t_5 = 50^\circ\text{C}$ ?

#### В а р и а н т 2

1. Электрическое поле. Силовая характеристика поля. Напряженность поля точечного заряда. Поле сферы. Силовые линии электрического поля. Однородное электрическое поле.

2. При своем движении положительный заряд попадает в однородное магнитное поле, занимающее ограниченную область пространства (рис. 2). Нарисуйте возможные виды траектории движения заряда.

3. Тонкая линза с фокусным расстоянием  $F = 0,1$  м создает на экране изображение предмета, увеличенное в  $\Gamma = 5$  раз. Определите расстояния  $d$  от предмета до линзы и  $l$  от линзы до экрана.

4. В цилиндре под невесомым поршнем находится газ, занимающий объем  $V$  и имеющий температуру  $T$ . Определите работу  $A$ , которую произведет газ, если его нагреть на  $\Delta t$  градусов. Атмосферное давление постоянно и равно  $p_0$ . Трением поршня о цилиндр пренебречь.

5. Два тела с массами  $m_1 = 1$  кг и  $m_2 = 2$  кг движутся по взаимно перпендикулярным направлениям со скоростями, равными  $v_1 = 10$  м/с и  $v_2 = 15$  м/с соответственно. После соударения первое тело остановилось. Какое количество теплоты  $Q$  выделилось при ударе?

#### Задачи устного экзамена

1. По наклонной плоскости снизу вверх пускают тело с начальной скоростью  $v_0 = 2$  м/с. Поднявшись на некоторую высоту, тело соскальзывает

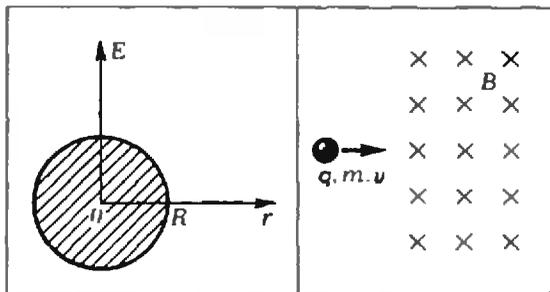


Рис. 1.

Рис. 2.

по тому же пути вниз. Какова будет скорость  $v$  тела, когда оно вернется в исходную точку? Коэффициент трения между телом и плоскостью  $\mu=0,4$ . Угол наклона плоскости к горизонтали  $\alpha=30^\circ$ .

2. Плоский конденсатор с площадью пластин  $S=10^{-3}$  м<sup>2</sup> и расстоянием между пластинами  $d=1$  мм заряжен зарядом  $Q=10^{-8}$  Кл. Конденсатор заполнен диэлектриком с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon=10$ . Определите напряженность  $E$  и энергию  $W$  электрического поля конденсатора.

Электрическая постоянная  $\epsilon_0=8,85 \times 10^{-12}$  Ф/м.

3. Рентгеновская трубка, работающая под напряжением  $U=50$  кВ и потребляющая ток  $I=10^{-3}$  А, излучает в секунду  $N=2 \cdot 10^{13}$  фотонов со средней длиной волны  $\lambda=10^{-10}$  м. Определите КПД трубки  $\eta$ . Постоянная Планка  $h=6,63 \times 10^{-34}$  Дж·с, скорость света  $c=3 \cdot 10^8$  м/с.

Публикацию подготовили  
В. Ф. Сафонов, В. Л. Чудов

**Ответы, указания, решения**



**Ошибки в геометрических доказательствах**

Если ваше возражение состоит в том, что биссектриса и срединный перпендикуляр пересекаются вне треугольника  $ABC$ , но точки  $P$  и  $Q$  лежат на его сторонах (рис. 1), то вы не правы. Как и раньше,  $|AN|=|NC|$  и  $|NP|=|NQ|$ . Поэтому треугольники  $ANP$  и  $CNQ$  конгруэнтны и  $\angle NAP = \angle NCQ$ . Кроме того,  $\triangle ANC$  равнобедренный, поэтому  $\angle NAM = \angle NCM$ . Вычитая из равных углов равные, мы получаем, что  $\angle BAC = \angle BCA$ , то есть  $\triangle ABC$  — равнобедренный.

На самом же деле в общем случае срединный перпендикуляр и биссектриса пересекаются в точке  $N$  вне треугольника, а перпендикуляры из точки  $N$  на стороны  $BA$  и  $BC$  обязательно располагаются так, что один из них попадает на саму сторону, а другой — на продолжение другой стороны (рис. 2). В этом случае  $\triangle APN$  — по-прежнему равен  $\triangle CNQ$  и  $\angle NAP = \angle NCQ$ . Кроме того,  $\angle NAM = \angle NCM$ . Однако в этом случае  $\angle BAC = \angle NAP - \angle NAM$ , а  $\angle BCA = 180^\circ - (\angle NCQ + \angle NCM)$ . Отсюда, конечно, не следует равенство углов  $BAC$  и  $BCA$ .

Однако такое объяснение не должно вас удовлетворить. Ведь нужно доказать, что расположение частей в треугольнике такое, как на рисунке 2 (или «обратное»:  $Q \in [BC]$ ,  $P \notin [AB]$ ). Приведем это доказательство.

Опишем вокруг треугольника  $ABC$  окружность и предположим, что  $|AB| > |BC|$ . По свойству вписанных углов биссектриса угла  $B$  пересекает дугу  $AC$  в ее середине. Через ту же середину проходит и срединный перпендикуляр к отрезку  $AC$ . Следовательно, точка  $N$  — середина дуги  $AC$ .

Поскольку  $|AB| > |BC|$ ,  $\widehat{AB} > \widehat{BC}$ . Прибавляя к обеим частям этого неравенства равные дуги  $\widehat{AN}$  и  $\widehat{CN}$ , мы получим неравенство  $\widehat{BAN} > \widehat{BCN}$ .

Следовательно, дуга  $\widehat{BAN}$  больше полуокружности, а дуга  $\widehat{BCN}$  — меньше. Следовательно,  $\angle NCB$  тупой, а  $\angle NAB$  — острый. Поэтому точка  $Q$  лежит на продолжении стороны  $BC$ , а точка  $P$  — на стороне  $AB$ .

1. Мы безо всяких оснований предположим, что сумма углов треугольника является постоянной величиной и не зависит от самого треугольника. В действительности, в геометрии Лобачевского, в которой не выполнена аксиома параллельности, сумма углов любого треугольника меньше, чем  $180^\circ$ , и разность между  $180^\circ$  и суммой углов треугольника пропорциональна его площади. Тем самым, чем ближе сумма углов треугольника к  $180^\circ$ , тем меньше его площадь.

2. Проведите наше «доказательство» на чертеже, данном в рисунке 3.

3. Мы правильно доказали, что отрезки  $A_i A_{i+1}$  и  $B_i B_{i+1}$  не пересекаются. Однако при  $i \neq j$  отрезки  $A_i A_{i+1}$  и  $B_j B_{j+1}$  могут пересечься.

4. Если большая окружность катится без проскальзывания, то меньшая окружность обязательно будет проскальзывать. Поэтому отрезок не будет равен длине меньшей окружности.

5. Последовательность волнообразных линий действительно неограниченно приближается к отрезку. Однако из этого не следует, что последовательность их длины стремится к длине отрезка  $AB$ .

6. Мы молчаливо предполагали, что маленький сферический треугольник развернут на плоскость, и применяли формулу для вычисления площади плоского треугольника. В действительности, никакой сферический треугольник не может быть развернут на плоскость. В нашем случае это следует из того, что у сферического треугольника — два прямых угла, а у плоского треугольника этого быть не может.

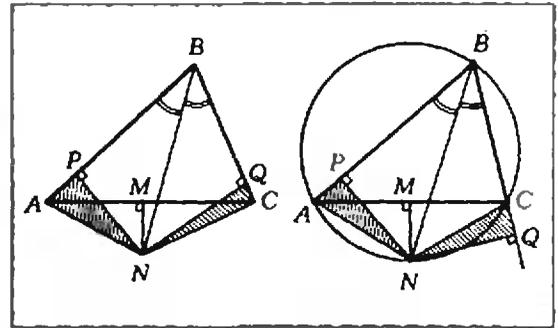


Рис. 1.

Рис. 2.

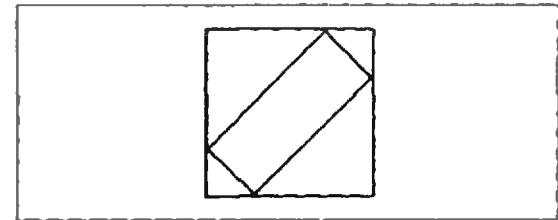


Рис. 3.

**Задачи-матрешки**

Соединим между собой точки  $M, N, P, S$  (рис. 4). В силу задачи 4 углы  $\alpha, \beta, \gamma$  соответственно равны  $\alpha', \beta', \gamma'$ , поэтому, по задаче 1,  $S$  — орто-

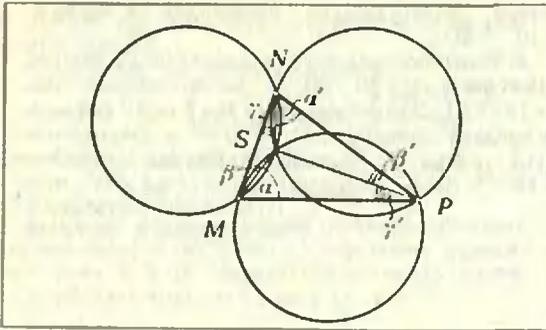


Рис. 4.

центр треугольника  $MNP$ . Но тогда по задаче 3 окружность, описанная около  $MNP$ , имеет тот же радиус, что любая из трех данных окружностей, то есть  $R^*$ ).

#### Магнитное поле и магнитные силы

- $\Delta x_{\text{макс}} = IB\ell/\sqrt{2km}$ .
- $e/m = 2U/(RB^2) \approx 1,76 \cdot 10^{-11}$  Кл/кг.
- $\sigma = \epsilon_0 v B = 10^{-10}$  Кл/м<sup>2</sup> (здесь  $\epsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12}$  Ф/м — электрическая постоянная).

#### Московский инженерно-физический институт

##### Математика

###### Вариант I

- $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$  ( $k \in \mathbb{N}$ ).
- $x = \frac{4}{5}a + \frac{1}{10}$  при  $a < \frac{1}{2}$ ; если  $a > \frac{1}{2}$ , критических точек нет.
- Пусть  $V_1$  — объем многогранника, одним из ребер которого является  $[B_1C_1]$ .  $V_2$  — объем второго многогранника. Тогда при  $h \cdot \cos \varphi < b$

$$V_1 = \frac{1}{3} h^3 \cdot \sin 2\varphi \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

$$V_2 = \frac{1}{3} h^2 \cdot \sin \varphi \cdot \operatorname{tg} \alpha (3b - 2h \cdot \cos \varphi);$$

при  $h \cdot \cos \varphi > b$

$$V_1 = \frac{1}{3} b \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \cdot \operatorname{tg} \alpha (3h^2 \cdot \cos^2 \varphi - b^2),$$

$$V_2 = b^3 \cdot \frac{\sin \varphi}{\cos^2 \varphi} \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

**Указание.** Пусть  $D$  и  $D_1$  — середины, соответственно, отрезков  $BC$  и  $B_1C_1$ ,  $D_2$  — точка, в которой сечение пересекается с ломаной  $ADD_1$ . Тогда: если  $0 < h \cdot \cos \varphi < b$ , то  $D_2 \in [DD_1]$  (рис. 5, а); если  $h \cdot \cos \varphi > b$ , то  $D_2 \in [AD]$  (рис. 5, б). Если  $h \cdot \cos \varphi = b$ , то  $D_2 = D$  и оба ответа совпадают. При  $\varphi = \pi/2$  плоскость сечения совпадает с  $(A_1B_1C_1)$ .

- 2 альбома и 12 книг или 5 альбомов и 10 книг.
- Указание.** Если  $x$  — число альбомов,  $y$  — чис-

\*) Обратите внимание на следующую логическую тонкость. Для решения нашей задачи не требуется уметь доказывать существование ортоцентра в общем случае (то есть доказывать, что все три высоты произвольного треугольника пересекаются в одной точке). Мы лишь устанавливаем, что треугольник  $MNP$  имеет ортоцентр  $S$ , но этот треугольник строится определенным образом: заранее не очевидно, что произвольный треугольник может быть так построен.

ло книг, то  $x \in \mathbb{N}$ ,  $y \in \mathbb{N}$ . Кроме того, число  $k$  имеет после десятичной запятой не больше двух знаков.

#### Вариант 2

- $p/q$  при  $q \neq 0$ , любое число при  $p=q=0$ , нет решений при  $p \neq 0$ ,  $q=0$ .

2. При любом  $\varphi \in ]0; \pi/2[$  имеется 2 треугольника, удовлетворяющих требованиям задачи. Один из них — это треугольник, плоскость которого параллельна  $(QRT)$  ( $\Delta AR_1T_1$  на рисунке 6); его площадь равна  $\frac{48\sqrt{3}}{49} k^2 \cdot \cos^2 \varphi$ . При  $\varphi \in ]0; \arccos 1/5[$  плоскость второго нужного треугольника пересекается с  $(QRT)$  внутри  $\Delta QRT$  ( $\Delta AR_2T_2$  на рисунке 6); его площадь равна

$$\frac{3\sqrt{3}}{784} k^2 \cdot \frac{(1+3\cos^2 \varphi)^2}{\cos^2 \varphi}.$$

При  $\varphi = \arccos 1/5$  второй нужный треугольник — это  $\Delta ART$ ; его площадь равна  $\frac{3\sqrt{3}}{25} k^2$ . При  $\varphi \in ]\arccos 1/5; \pi/2[$  плоскость второго нужного треугольника пересекается с  $(PRT)$  внутри  $\Delta PRT$  и не параллельна  $(QRT)$  ( $\Delta AR_3T_3$  на рисунке 6); его площадь равна

$$\frac{48\sqrt{3}}{49} k^2 \cdot \frac{(1+3\cos^2 \varphi)^2 \cdot \cos^2 \varphi}{(1-9\cos^2 \varphi)^2}.$$

3. При  $c < -4/3$  таких интервалов нет при  $-4/3 < c < 3$  возрастает на  $]-\infty; \frac{1}{2} \log_3 \frac{3c+4}{3-c}[$ , при  $c > 3$  возрастает на  $\mathbb{R}$ .

4.  $x_1 = \frac{3}{2}\pi + 3\pi k$ ,  $x_2 = -\arccos \frac{2}{\sqrt{13}} \pm \arccos \left(1 - \frac{3}{\sqrt{13}}\right) + 2\pi l$  ( $k, l \in \mathbb{Z}$ ).

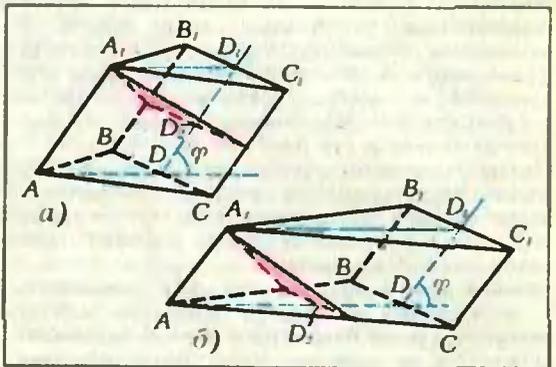


Рис. 5.

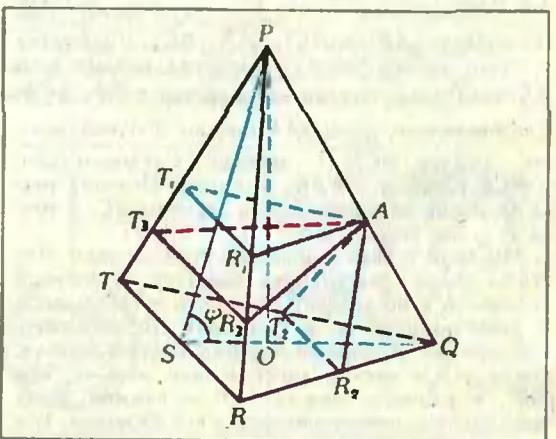


Рис. 6.

Указание. Воспользуйтесь равенством  $2 \cos x - \sin 2x = 3 \sin x + \frac{5}{6} \sin^2 x = \frac{1}{6} [(2 \cos x - 3 \sin x)^2 + 6(2 \cos x - 3 \sin x) - 4]$ .

**Физика**

1. Рассмотрим два предельных случая: 1) когда груз уже не скользит вниз по призме; 2) когда груз еще не движется вверх относительно призмы. Силы, действующие на груз в обоих случаях, показаны на рисунке 7, а и б. Это — сила тяжести  $\vec{m\vec{g}}$ , сила реакции призмы  $\vec{N}$  и сила трения  $\vec{F}_{тр}$  ( $F_{тр} = \mu N$ ). Обозначим ускорения призмы, а значит и груза, в первом и во втором случаях через  $\vec{a}_1$  и  $\vec{a}_2$  соответственно. Спроектируем силы и ускорения на горизонтальную и вертикальную оси координат и запишем для груза соответствующие уравнения движения. Для случая 1) получим:

$$\begin{aligned} N \sin \alpha - \mu N \cos \alpha &= ma_1, \\ N \cos \alpha + \mu N \sin \alpha - mg &= 0, \end{aligned}$$

откуда

$$a_1 = g \frac{\operatorname{tg} \alpha - \mu}{1 + \mu \operatorname{tg} \alpha} = 4 \text{ м/с}^2.$$

Аналогично для случая 2)

$$\begin{aligned} N \sin \alpha + \mu N \cos \alpha &= ma_2, \\ N \cos \alpha - \mu N \sin \alpha - mg &= 0, \end{aligned}$$

и

$$a_2 = g \frac{\operatorname{tg} \alpha + \mu}{1 - \mu \operatorname{tg} \alpha} = 11,5 \text{ м/с}^2.$$

Таким образом, призму надо двигать с ускорением  $\vec{a}$  таким, чтобы

$$4 \text{ м/с}^2 = a_1 < a < a_2 = 11,5 \text{ м/с}^2.$$

2. Из закона сохранения энергии

$$\frac{m\omega^2 (l_1^2 + l_2^2)}{2} = mg(l_1 - l_2)$$

находим угловую скорость  $\omega$  системы:

$$\omega = \sqrt{\frac{2g(l_1 - l_2)}{l_1^2 + l_2^2}} \approx 2,8 \text{ с}^{-1}.$$

3. Скорость шара  $v$  в момент удара о стенку можно найти из кинематических соотношений

$$\begin{aligned} v^2 &= (v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt)^2, \\ l &= v_0 \cos \alpha \cdot t. \end{aligned}$$

Тогда из закона сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = cm\Delta T$$

найдем приращение  $\Delta T$  температуры шара:

$$\begin{aligned} \Delta T &= \frac{(v_0 \cos \alpha)^2 + (v_0 \sin \alpha - gt/(v_0 \cos \alpha))^2}{2c} \approx \\ &\approx 8 \cdot 10^{-3} \text{ К}. \end{aligned}$$

4. Запишем для столбика ртути второй закон Ньютона:

$$m\omega^2 b = p_0 S - pS.$$

Здесь  $m = \rho l S$  — масса ртути,  $\omega$  — угловая скорость вращения трубки,  $b$  — радиус окружности, по которой движется капля ртути ( $l$  по сравнению с  $b$  можно пренебречь),  $S$  — площадь сечения трубки и  $p$  — давление воздуха в трубке, которое находим из закона Бойля — Мариотта  $p_0 d S = p b S$ . Отсюда получаем

$$\omega = \sqrt{\frac{p_0}{\rho l b} \left(1 - \frac{d}{b}\right)} \approx 25 \text{ с}^{-1}.$$

5. Работа силы тяжести равна

$$A = mgh.$$

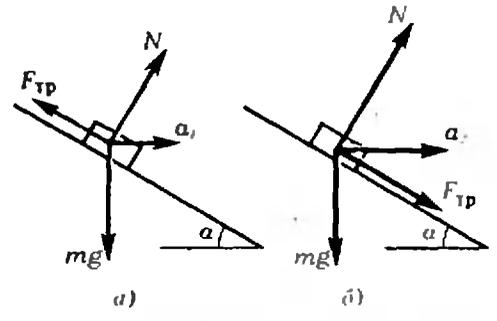


Рис. 7.

где  $h = gl^2/2$  — высота падения шарика. Время  $t$  найдем, рассмотрев движение шарика в электрическом поле:

$$d = \frac{at^2}{2}, \quad a = \frac{qU}{md}.$$

Тогда окончательно

$$A = \frac{(mgd)^2}{qU} \approx 8,6 \text{ мкДж}.$$

6. КПД электромотора равен отношению его механической мощности к мощности, потребляемой мотором от генератора. Согласно закону сохранения энергии, полная мощность  $\mathcal{E}I$ , расходуемая генератором, складывается из механической мощности  $P_m$  электромотора и тепловой мощности  $I^2(R+r)$ , выделяющейся в моторе и генераторе:

$$\mathcal{E}I = P_m + I^2(R+r).$$

Отсюда

$$P_m = \mathcal{E}I - I^2(R+r).$$

Мощность, потребляемая электромотором, равна

$$P_n = UI = (\mathcal{E} - Ir)I.$$

Поэтому КПД мотора

$$\eta = \frac{P_m}{P_n} = 1 - \frac{IR}{\mathcal{E} - Ir} = 0,9 = 90\%.$$

7. В электрическом поле электрон приобретает кинетическую энергию

$$\frac{mv^2}{2} = eU.$$

В магнитном поле сила Лоренца сообщает электрону ускорение

$$\begin{aligned} a &= \frac{rBv \sin \alpha}{m} = B \sin \alpha \cdot \sqrt{2U(e/m)^3} \approx \\ &\approx 1,5 \cdot 10^{18} \text{ м/с}^2. \end{aligned}$$

8. Возникающая в контуре ЭДС индукции

$$\mathcal{E}_i = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| = \frac{Br^2 \omega}{2}$$

вызывает в контуре ток

$$I = \frac{\mathcal{E}_i}{R} = \frac{Br^2 \omega}{2R}.$$

За один оборот контура в нем выделяется количество теплоты

$$Q = I^2 R T = I^2 R \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\pi B^2 r^4 \omega}{2R} \approx 5 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}.$$

9. По формуле линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$$

находим расстояние  $f$  от изображения точки  $A$  до линзы:

$$f = \frac{dF}{d-F}.$$

В момент прохождения нижнего положения линза движется со скоростью  $v = \sqrt{2gd}$  по окружности радиуса  $d$ , а изображение — со скоростью  $v' = v(d+f)/d$  по окружности радиуса  $d+f$ . Поэтому ускорение изображения равно

$$a = \frac{v'^2}{d+f} = 2g \frac{d}{d-f} = 100 \text{ м/с}^2.$$

10. Запишем для системы протон — атом гелия законы сохранения импульса и энергии:

$$mv_0 = -mv_0/2 + Mv,$$

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_0^2}{8} + \frac{Mv^2}{2} + W,$$

где  $m = 1$  а.е.м.  $= 1,67 \cdot 10^{-27}$  кг — масса протона,  $M = 4$  а.е.м. — масса атома гелия,  $W$  — энергия возбуждения атома. Отсюда найдем

$$W = \frac{3}{8} mv_0^2 \left(1 - \frac{3m}{M}\right).$$

Возвращаясь в первоначальное состояние, атом излучает квант света, энергия которого равна энергии возбуждения:

$$h\nu = W,$$

откуда длина волны излучаемого света

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{W} = \frac{8hc}{3mv_0^2(1-3m/M)} \approx 0,6 \cdot 10^{-6} \text{ м.}$$

### Московский институт стали и сплавов

#### Математика

##### Вариант 1

1.  $2\frac{1}{4}$ . 2.  $\{-1\}$ . 3.  $\{2\}$ . 4. 2. 5. 9. 6. 5. 7. 40.

8. 38. 9. 3. 10. 20.

##### Вариант 2

1. 3,6. 2. 1,4. 3. 1. 4. 2. 5. 0,64. 6. 15. 7.  $72^\circ$ . 8. 15. 9. 24. 10. 4.

#### Физика

##### Вариант 1

1.  $T = 4\pi\sqrt{2R_3/g} \approx 14200$  с.

2.  $h_{\text{мин}} = 5R/2 = 10$  м.

3.  $\alpha = \arcsin \frac{l}{8h} = 30^\circ$ .

4.  $F_{\lambda} = 4a^2(\rho_0 + \rho_0 g a/2) \approx 6 \cdot 10^7$  Н (здесь  $\rho_0 = 1,01 \cdot 10^5$  Па — нормальное атмосферное давление,  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup> — плотность воды).

5.  $\frac{V_c}{V_u} = \frac{l}{3\sqrt{\rho_v/\rho} - l} \approx 0,37$ .

6.  $\eta = \frac{cm(t_2 - t_1)}{P\tau} \approx 80\%$  (здесь  $m = 2$  кг — масса двух литров воды).

7.  $R_2 = 9R_1/8 = 90$  Ом.

8.  $t = \frac{mFn}{Mj\lambda h} \approx 600$  с  $\approx 10$  мин (здесь  $F = 96500$  Кл/моль — постоянная Фарадея,  $M = 64 \cdot 10^{-3}$  кг/моль — молярная масса меди,  $n = 2$  — валентность меди).

9.  $q = 2\pi r^2 B/R = 3,14 \cdot 10^{-6}$  Кл.

10.  $F = 2l = 20$  см.

##### Вариант 2

1.  $F = \frac{\mu mg}{\cos \alpha + \mu \sin \alpha} \approx 11$  Н.

2.  $E_k = m(v_0^2 + g^2 t^2)/2 \approx 650$  Дж.

3.  $x = \frac{l(m_1 + m/2)}{m_1 + m_2 + m} \approx 0,27$  м.

4.  $h \approx 390$  м (глубина уцелья определяется из уравнения  $l = \sqrt{2h/g} + h/v$ ).

5.  $m = \frac{\rho_0 VM}{R} \left( \frac{1}{T_1} - \frac{1}{T_2} \right) \approx 11,6$  кг (здесь

$\rho_0 = 1,01 \cdot 10^5$  Па — нормальное атмосферное давление).

6.  $m = \frac{MV\varphi\rho_n/100\%}{RT} \approx 0,48$  кг (здесь  $M =$

$= 18 \cdot 10^{-3}$  кг/моль — молярная масса воды).

7.  $W = W_0/4 = 0,25$  Дж.

8.  $E = k \sqrt{\left(\frac{q_1}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{q_2}{r_2}\right)^2} = 15 \cdot 10^4$  В/м

(здесь  $k = 9 \cdot 10^9$  Н · м<sup>2</sup>/Кл<sup>2</sup>).

9.  $R_a = \frac{R}{U} (R + r) = 2,8$  Ом.

10.  $F = \frac{d}{1 + h/h'} \approx 10,4$  см.

### Московский энергетический институт

#### Математика

##### Письменный экзамен

##### Вариант 1

1.  $f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}$ .

2.  $\left\{12\frac{1}{2}\right\}$ . Указание. Сделайте подстановку  $\sqrt{0,1x+1} = t$ .

3.  $\max_{[0,5; 1]} f(x) = f(0,5) = 1\frac{1}{48}$ ,  $\min_{[0,5; 1]} f(x) = f(1) = -\frac{1}{12}$ .

4.  $x_1 = \pi k$ ,  $x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi l$  ( $k, l = 3, 4, 5, \dots$ ).

Указание. Воспользуйтесь формулой  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}$ .

5.  $\frac{\pi Q \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta}{2(\sin \alpha + \sin \beta)}$ .

##### Вариант 2

1. При  $x < 0$ ,  $f'(x) = 2x^{-2}$ . Указание. В данном случае  $\sqrt{x^2} = -x$ .

2.  $\{(0; -1)\}$ . Указание. Сделав подстановку  $x+1 = u$ ,  $2^{-u} = v$ , разделите первое уравнение на второе; затем сделайте подстановку  $u/v = t$ .

3.  $f$  возрастает на  $]-\infty; -0,1]$  и на  $]0,2; +\infty[$ , убывает на  $[-0,1; 0,2]$ ;  $x = -0,1$  — точка максимума,  $f(-0,1) = -2,9965$ ,  $x = 0,2$  — точка минимума,  $f(0,2) = -3,01$ .

4.  $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ).

5.  $\frac{1}{3} l^2 h \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha$ .

#### Задачи устного экзамена

1.  $\lg(-a) + \lg(-b)$ . 2. Указание. Задача равносильна следующей: докажите, что для всех  $a, b$  таких, что  $|a| < 1$ ,  $|b| < 1$ , имеем  $|a+b| < |1+ab|$ .

3.  $]0; 1[$ . 4. Нечетная. 5. Указание. Не забудьте про область определения! 6.  $\emptyset$ . Указа-

ние.  $\left(\lg \frac{7\pi}{20} = \lg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{10}\right) > 1\right)$ . 7.  $\{(2\pi k; 0)\}$



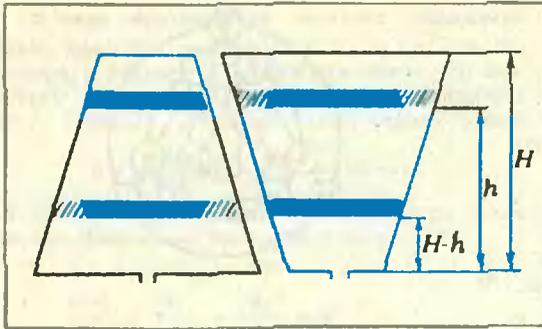


Рис. 11.

время выливания воды в обоих слоях для каждого из сосудов. Время выливания воды, отмеченной на рисунке голубым цветом, будет для обоих сосудов одинаково, в заштрихованная часть воды в первом сосуде будет выливаться с меньшей скоростью, чем во втором, поскольку эта часть будет выливаться при меньшей высоте уровня жидкости. Поэтому из первого сосуда вода вытечет позже, чем из второго.

### Шахматная страничка

(см. «Квант», 1983, № 12)

**Задание 23** (В. Корольков, 1950 г.). 1. Кс3+ Нелья I. Се8 — 1...Кр:d1 2. С:d7 а3 3. Се6 С:g5, и за проходную пешку белым придется отдать слона. 1...Крd3. После 1...Крd2 2. Ке4+ Крс2 3. Се8 а3 4. Сf7 Крb2 5. Крf5 Се7 6. Крг6 Сf8 7. Кг3 а2 8. С:a2 Кр:a2 9. Крf7 Сd6 10. Кf5 Се5 11. К:g7 d5 12. Кf5 d4 13. К:d4 белые даже выигрывают. 2. К:a4. В случае 2. Ке4 а3 3. Се8 а2 4. Ке5+ Крс3 5. Кb3 Кр:b3 6. Сf7+ Крb2 7. С:a2

Кр:a2 черные остаются с лишней фигурой. 2...d6+. После 2...g6 3. С:g6 С:g6 4. Ке5+ черные теряют последнюю пешку. 3. Кр:d6 С:a4. Итак, черные остались с лишней фигурой, но выиграть не удастся. 4. Крe6 С:g5 5. Крf7 Сf6 6. g5 Сс3 7. Крг8 Крe4 8. Сf7! Крf5 9. g6 Крг5 10. Крh7 Сс2 11. Се8 Сd3 12. Сf7. Позиционная ничья, черные не могут успеть свою позицию. **Задание 24** (В. Корольков, 1951 г.). 1. f7 Лa6+ 2. Са3! Л:a3+ 3. Крb2 Лa2+! 4. Крс1! После 4. Крс2? Лe2+! белому королю не уйти от преследования. 4...Лa1+ 5. Крd2 Лa2+ 6. Крс3 Лa3+ 7. Крf4 Лa4+ 8. Крг5 Лg4+! 9. Крb6! Лg8 10. Ке7! Се6 11. fgФ+ С:g8 12. Кг6×

### Головоломка с шарами

(см. «Квант», 1984, № 2, 4-я с. обложки)

Ответ показан на рисунке 12.

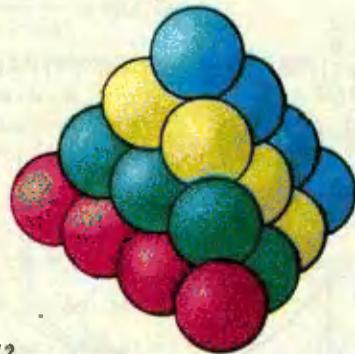


Рис. 12.

**Главный редактор** — академик И. К. Кикоин

**Первый заместитель главного редактора** — академик А. Н. Колмогоров

**Заместители главного редактора:** М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

**Редакционная коллегия:** Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтынский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилли, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

**Редакционный совет:** А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капница, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаяев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стаценко, И. К. Сурии, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фалдеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

#### Индер подготовили:

А. Н. Виленкин, В. Н. Дубровский, А. А. Егоров, Т. С. Петрова, А. Б. Сосинский, В. А. Тихомирова

#### Индер оформили:

М. Б. Дубах, В. С. Козаля, Ю. В. Котон, А. И. Климанов, Н. С. Кузьмина, Э. В. Назаров, Н. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурниа

Фото А. Н. Виленкина, С. Козова (фотохроника ТАСС)

**Заведующая редакцией** Л. В. Чернова

**Редактор отдела художественного оформления**  
Э. А. Смирнов

**Художественный редактор** Т. М. Макарова

**Корректор** Т. С. Вайсберг

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1,

«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 19.1.84. Подписано к печати 21.2.84

Печать офсетная. Усл. кр. от. 24,85

Бумага 70×108 1/16

Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 7,59. Т-00234

Тираж 178248 экз. Цена 40 коп. Заказ 57

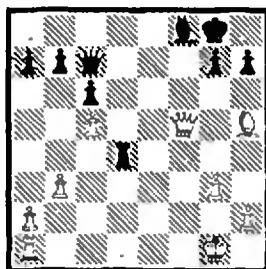
Орден Трудового Красного Знамени  
Чеховский полиграфический комбинат  
ВУ «Союзполиграфпром»  
Государственного комитета СССР  
по делам издательства, полиграфии  
и книжной торговли  
г. Чехов Московской области



Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

**ПЕРЕКРЫТИЕ**

В предыдущих выпусках мы ознакомились с несколькими тактическими приемами геометрического характера — связкой, рентгеном, перегрузкой фигур. На очереди еще один: перекрытие. Представьте себе, что ваша дальнобойная фигура (ферзь, ладья или слон) надежно защищает другую фигуру или держит под обстрелом какое-нибудь важное поле. Внезапно на той самой линии, по которой происходит это действие, появляется неприятельская фигура, перекрывающая дальнобойной фигуре путь к своей «подопечной». Дело может кончиться очень печально.

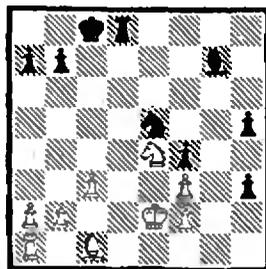


**Рети — Боголюбов**  
(Нью-Йорк, 1924 г.)

Комбинация, которая последовала в этой позиции, своим изяществом напоминает этюд и поэтому является одной из самых популярных во всей шахматной истории!

1. Лf1 Лd8 (1...Фd8 2. Фf7 + Крh8 3. Ф:f8 +) 2. Cf7 + Крh8 3. Ce8!! Фантастический ход, сделанный с одной-единственной целью — перекрыть дорогу черной ладье к своему слону. Черные сразу сдались. В случае 1...Фe7 выигрывало другое, не менее красивое перекрытие: 2. Cf7 + Крh8 3. Cd5!! g6 4. Ф:f8 + Ф:f8 5. Л:f8 + Крg7 6. Лg8 + и слон уходит из-под боя.

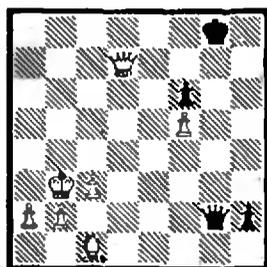
В отличие от рентгена, при котором одна фигура воздействует на другую сквозь преграды, в теме перекрытия все наоборот — внезапно появляется преграда и сфера действия фигуры существенно сужается.



**Катаев — Марков**  
(Москва, 1977 г.)

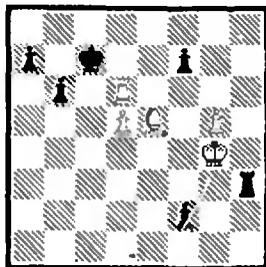
На первый взгляд, черная пешка «h» не опасна — после 1...h2 2. Cf4 она гибнет, поскольку поле h1 в распоряжении белой ладьи. Однако можно создать преграду к этому полю: 1...Лd1!! Белые сдались, на 2. Кр:d1 уже решает 2...h2.

Следующие две диаграммы в «Кванте» уже были (в № 7 за 1982 год), но они хорошо иллюстрируют тему перекрытия, и мы решили их повторить.



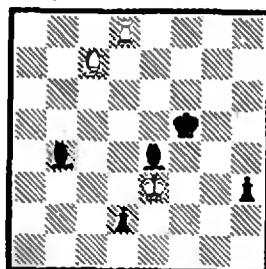
**Симагин — Бронштейн**  
(Москва, 1947 г.)

Вечный шах у белых есть, и вроде на большее рассчитывать не приходится, ведь черная пешка вот-вот станет вторым ферзем. 1. Сg5!! Перекрывающая связь между неприятельским ферзем и королем, белые достигают заветной цели. Теперь после 1...Фg5 они дают два шаха и забирают пешку h2, а на 1...f6 следует 2. f6 с неизбежным матом. Остается 1...h1Ф и белые используют преграду между королем и ферзем «g» в свою пользу: 2. Фe8 + Крg7 3. Фg6 + Крf8 4. Ф:f6 + Крg8 5. Фd8 + Крg7 6. Фe7 + Крg8 7. Фe8 +. Черные сдались, мат неизбежен: 7...Крg7 8. f6 + Крh7 9. Фf7 + Крh8 10. Фg7X.



**Кобленц — Монсеев**  
(Рига, 1955 г.)

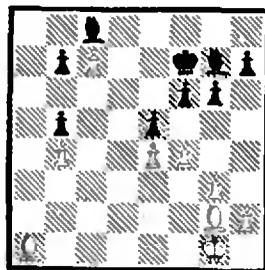
Ход черных, и их пешка может превратиться в ферзя. Однако после 1...h1Ф 2. Лf6 эта акция не увенчается успехом. В то же время у противника лишняя фигура, и необходимы решительные меры. 1...f5 +!! Неожиданный способ смешать планы белых по линии «f». После 2. f1 (2. Кр:f5 f1Ф +) собственная пешка преграждает дорогу ладье к полю f6. Безнадежно и 2. Кр:h3 f1Ф + 3. Крh4 Фe1 + 4. Сg3 Фh1 +. Поэтому белые сдались.



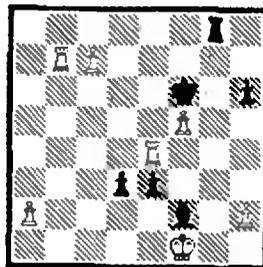
**Ненароков — Григорьев**  
(Москва, 1923 г.)

Обе пешки черных застопорены, и налицо все признаки ничьей. Но известный шахматный композитор находит чисто этюдное решение. 1...Cd6!! Выясняется, что либо слон перекрест дорогу ладье к пешке «d» — 2. С:d6 d1Ф, либо ладья слону к пешке «h» — 2. Л:d6 h2. Белые сдались. Классический пример на тему перекрытия!

**Конкурсные задания**



5. Белые начинают и выигрывают.



6. Ход белых. Могут ли они спастись?

Срок отправки решений — 25 мая 1984 г. (с помечкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задание 5, 6»).

Цена 40 коп.

Индекс 70465

10-31

Эти причудливые шарообразные фигуры сделаны из тонкого картона без клея. Они составлены из 12 одинаковых кругов, предварительно разрезанных специальным образом. Круги можно раскрасить. Такие игрушки, подвешенные на нитках, будут стремительно и красиво вращаться от легкого дуновения ветра.

Какова геометрия этих фигур?

Продолжим грани додекаэдра, показанного на рисунке слева вверху. Получится сложная конфигурация из 12 плоскостей в пространстве. Выберем одну из этих плоскостей. Ее пересекают 10 других плоскостей, а одна ей

параллельна. Получается 10 линий пересечения — они изображены на чертеже. На нем же штриховкой выделена грань додекаэдра — часть выбранной плоскости. Проведем сферу с центром в центре додекаэдра. Наши 12 плоскостей высекают на ней своеобразную сеть из 12 окружностей. Такие сети окружностей отчетливо видны на трех картонных моделях. Сети получаются разные, если менять размеры додекаэдра, сохраняя радиус сферы неизменным.

Подобные модели используются в архитектуре при поисках новых форм.

О. Я. БОДНАР

