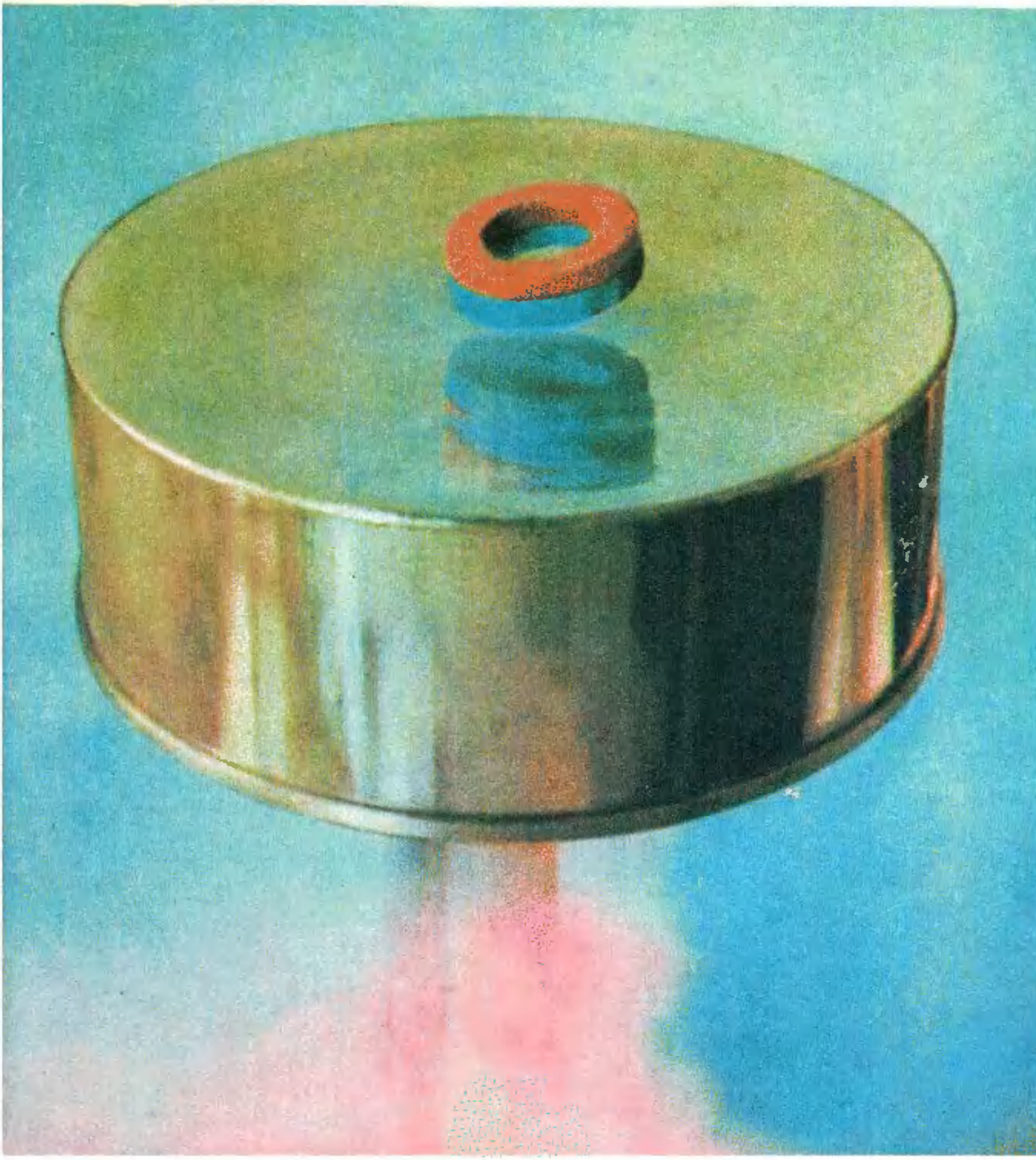
kvant.mccme.ru

ISSN 0130-2221

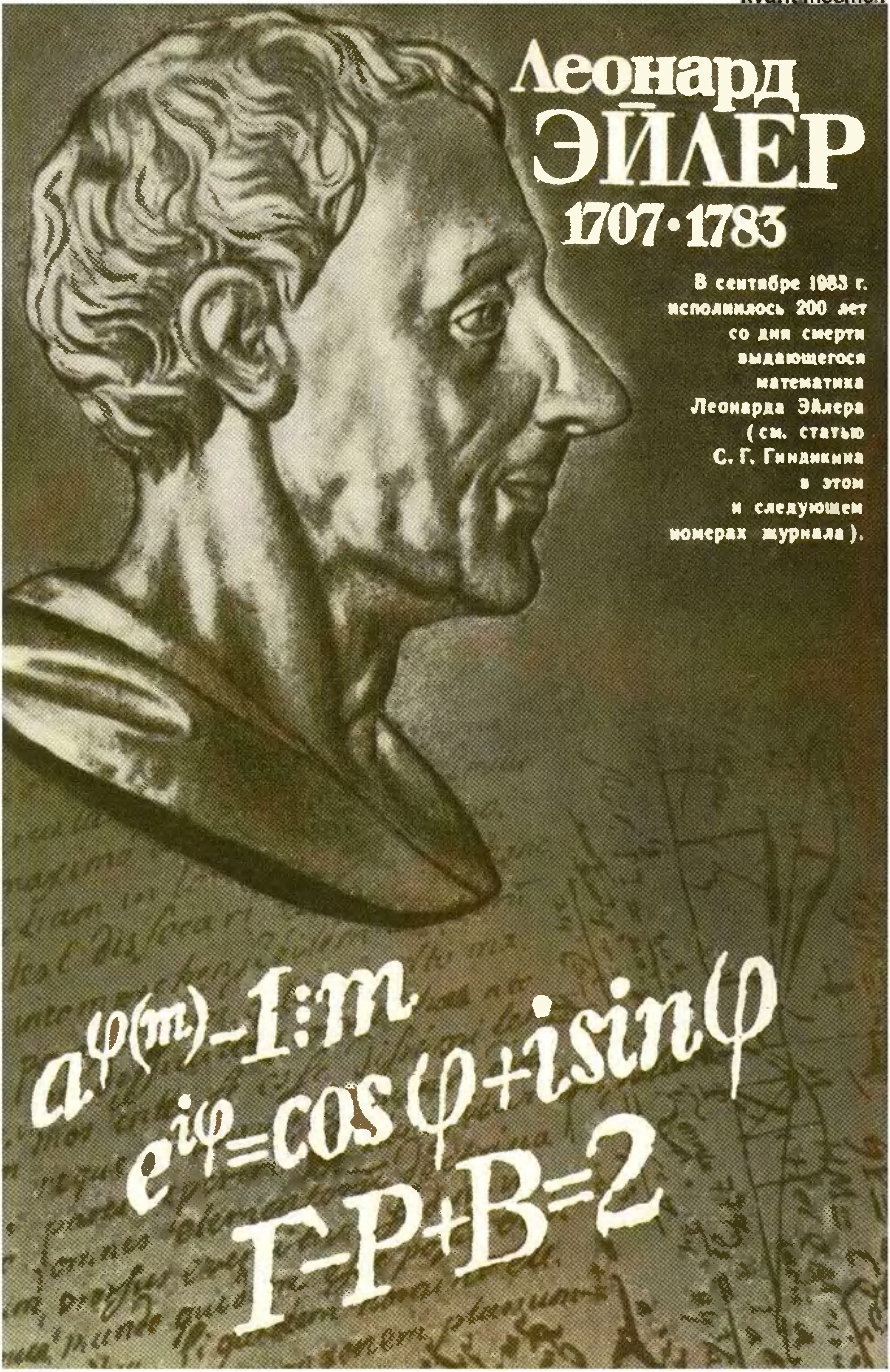
Квант

10
1983

Научно-популярный физико-математический журнал
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР



kvant.mccme.ru



kvant.mccme.ru

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

КВАНТ 10 1983

Основан в 1970 году

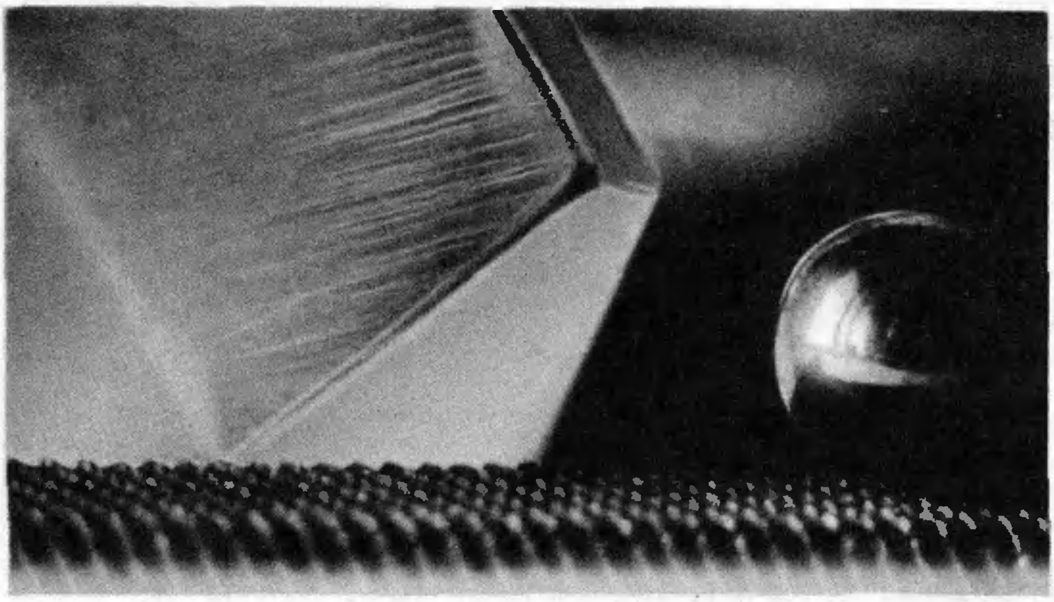
Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

Московское математическое общество
Оргкомитет Московской математической олимпиады

В НОМЕРЕ — IN THIS ISSUE

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы. «Квант», 1983

kvant.mccme.ru



Физика поверхности

Доктор физико-математических наук
Л. А. ФАЛЬКОВСКИЙ

Как выглядит поверхность твердого тела? Ответ на этот вопрос, пожалуй, очевиден: вид поверхности зависит от способа ее получения. Если взять кристалл и пройтись по его грани наждачной бумагой, то картинка под микроскопом будет напоминать вид горных цепей из окна самолета. А до обработки наждачной бумагой поверхность хорошего кристалла кажется нам идеально ровной, зеркальной. В действительности и на такой поверхности есть неровности, а ее зеркальность означает лишь, что размеры этих неровностей не превышают длины волны видимого света — нашего инструмента. Свет не «видит» дефектов, размеры которых малы по сравнению с его длиной волны. Подобно тому, как мы не замечаем на дороге неровностей, малых по сравнению с нашим шагом. Как обнаружить эти дефекты? Что мы увидим на поверхности при более сильном увеличении? Для того чтобы получить ответ на этот вопрос, в настоящее время разработаны разнообразные и весьма чувствительные методы исследования. Но перед тем, как рассказать о них, — несколько слов о том, зачем нужна столь детальная информация о структуре поверхности.

На первый взгляд может показаться удивительным, что в наше время космических исследований и физики элементарных частиц бурное развитие переживает столь «рядом лежащая» область науки — физика, химия и механика поверхности. Диктуется это, конечно, запросами новой техники. Поведение элементов малых размеров, используемых в микроэлектронике, в значительной степени определяется свойствами их поверхности. Проблема удержания плазмы требует выяснения механизма взаимодействия частиц и излучения с границами того объема, где плазма находится. Конструирование вакуумных насосов, а также разделение и очистка газов сталкиваются с проблемами адсорбции, то есть поглощения газа разветвленной поверхностью твердого тела. Удивительное влияние катализаторов, одно присутствие которых ускоряет течение химических реакций, безусловно связано с происходящими при этом поверхностными явлениями. И, нако-

---

Статья написана трудным языком, но в связи с тем, что проблема строения поверхности весьма актуальна, редакция решила ее опубликовать.

kvant.mccme.ru

нец, трение. Сколько сил потратили люди, чтобы от него избавиться, а с другой стороны — чтобы его увеличить в тех случаях, когда без трения обойтись невозможно. Силы трения тесно связаны со структурой трущихся поверхностей, и этот вопрос заслуживает специального разговора.

О законах трения

Среди записей Леонардо да Винчи существует и такая: «Трение производит двойное усилие, если вес удваивается». Иными словами, сила трения F пропорциональна действующей перпендикулярно поверхности прижимающей силе (или нагрузке) N. Великий художник заметил также, что сила трения не зависит от площади соприкосновения трущихся тел. Он писал: «Трение, производимое тем же весом, оказывает равное сопротивление в начале движения, несмотря на то, что контакт может иметь разную ширину и длину». Слова «начало движения» здесь не очень существенны, а независимость трения от площади контакта подмечена верно.

Приблизительно через 200 лет, в 1699 году, эти два закона трения были вновь открыты Амонтоном, который сформулировал их следующим образом:

1) Сила трения пропорциональна нагрузке, а коэффициент трения $\mu = F/N$ приблизительно равен 1/3 для большинства тел.

2) Сила трения не зависит от площади соприкосновения тел.

Число 1/3 не надо воспринимать серьезно. Коэффициент μ равнялся 1/3 для большинства тел, бывших у Амонтона под руками.

Прошло еще 100 лет, и законы трения были снова открыты Кулоном, и теперь мы называем их законами Амонтона — Кулона. При попытке объяснить эти законы мы сталкиваемся с серьезными проблемами. Вообразим две соприкасающиеся поверхности, например, в случае, когда одно из тел находится на горизонтальной поверхности другого. Под действием веса первого тела между поверхностями появится сцепление, или адгезия. Поверхности в некотором смысле склеиваются. Интуитивно ясно, что на единицу площади контакта приходится определенная сила сцепления, а ее величина может зависеть лишь от типа соприкасающихся поверхностей. Но тогда полная сила сцепления двух тел пропорциональна площади контакта. Как же быть со вторым законом Амонтона — Кулона?

Чтобы справиться с этой трудностью, надо знать, как устроена реальная поверхность. В любом случае она довольно шероховата. Когда мы сближаем две поверхности, они приходят в соприкосновение вначале всего в нескольких точках. И даже при небольшой нагрузке N сжимающее усилие в точках контакта будет огромным. Давление в местах контакта превысит не только предел упругости $\sigma_{упр}$, но и предел текучести материалов $\sigma_т$. Вещество в окрестностях контактов начнет растекаться. Этот процесс остановится в тот момент, когда полная площадь реального контакта S окажется такой, чтобы выполнялось условие $\sigma_т = N/S$. При обычных нагрузках N площадь реального контакта S существенно меньше той площади, по которой могли бы соприкасаться рассматриваемые тела, если бы их поверхности были идеально ровными. Например, величина $\sigma_т$ для различных сортов стали лежит в пределах $(2-3)\cdot 10^8$ Н/м^2. Это значит, что стальной брусок массой в 1 кг соприкасается с поверхностью, на которой он находится, по площади $S = N/\sigma_т \approx 5 \times \times 10^{-8}$ м^2, то есть всего 0,05 мм^2.

Для того чтобы сдвинуть одну поверхность относительно другой, надо приложить некоторое сдвиговое усилие F, которое, в соответствии с нашими интуитивными представлениями, пропорционально площади контакта (но реального!), то есть $F = cS$ (очевидно, c — сдвиговое усилие, необходимое при единичной площади контакта). Это усилие необходимо для деформации зацепляющихся и растекающихся шероховатостей. Таким образом, мы можем найти коэффициент трения:

$$\mu = F/N = cS/\sigma_т S = c/\sigma_т.$$

Действительно, коэффициент трения

не зависит ни от площади трущихся поверхностей, ни от величины нагрузки, что соответствует законам Амонтона — Кулона.

При трении двух различных тел коэффициент μ определяется отношением $c/\sigma_т$ для наиболее пластичного из них. Предел текучести $\sigma_т$, а также сдвиговое усилие c можно определить, проведя механические испытания. Определенное таким образом отношение $c/\sigma_т$ для меди, например, оказывается близко к 0,2. Это почти та 1/3, которая предсказывалась Амонтоном. Однако это раза в 3 меньше, чем современное опытное значение коэффициента трения, полученное для случая, когда медный брусок скользит по достаточно гладкой стальной поверхности. Расхождение в 3 раза не должно нас обескураживать в данном случае. Ведь мы не учли ряд факторов. Например, пластическое течение возникает вследствие как сдвиговых напряжений, так и направленных по нормали к поверхности. Современные исследования учитывают и это, и другие обстоятельства и позволяют описать не только вариации коэффициента трения при переходе от одного материала к другому, но и отклонения от законов Амонтона — Кулона для полимеров — веществ, деформацию в которых нельзя считать упругой или пластической.

Однако не будем забывать, что решающим при объяснении законов трения было предположение о шероховатой структуре поверхности. Какова же она на самом деле?

Методы изучения структуры поверхности

Идеальный инструмент для изучения поверхности — электронный микроскоп. Этот микроскоп отличается от обычного тем, что вместо лучей света в нем используются пучки электронов. Как известно, электроны обладают волновыми свойствами, но их длина волны гораздо меньше, чем у света. Это позволяет получить большее увеличение. Сравните две фотографии. Первая (рисунок 1) получена с помощью обычного оптического микроскопа и изображает «свежую» поверхность кристалла NaCl. Чистка поверхности произведена путем травления кислотой. Так избавляются от пленки «грязи», существующей практически на любой поверхности. На поверхности кристалла NaCl видна характерная рябь. Ямки возникают в тех местах, где дефекты кристаллической структуры выходят на поверхность. Образование ямок обусловлено тем, что вблизи дефектов имеются большие внутренние напряжения, ускоряющие травление. Расстояние между ямками — порядка 10^{-3} см, и его можно оценить по известному увеличению микроскопа. Вторая фотография (рисунок 2) получена с помощью электронного микроскопа. Это — поверхность кристалла платины. Увеличение здесь раз в десять больше, чем на предыдущем снимке. Видны холмы, долины и атомные террасы. Заметны и следы периодической структуры.

Периодическую структуру поверхности можно изучать методами дифракции. И опять вместо световых волн удобно использовать пучок электронов, ускоренных до энергии в 100 эВ. Это довольно медленные электроны. Их энергии не хватает на то, чтобы проникнуть в глубь вещества. Такие электроны отражаются практически лишь поверхностным слоем атомов, и внутренняя кристаллическая структура не затеняет картину. Оказалось, что очень часто симметрия в расположении атомов на поверхности отличается от объемной, то есть от той, которую мы получили бы простым срезом кристалла. Силы, действующие на атомы поверхности, отличаются от сил, действующих на те же атомы внутри тела, и атомам на поверхности подчас выгоднее располагаться иначе, чем в объеме.

Интересные задачи приходится решать, когда рассматривается напыление каких-либо атомов на кристаллическую подложку, состоящую из атомов другого сорта. Здесь происходит конкуренция взаимодействия напыляемых атомов между собой и с атомами подложки. Напыляемые атомы образуют структуры различной симметрии. При изменении концентрации атомов на подложке могут происходить переходы от одного сим-

kvant.mccme.ru

Рис. 1

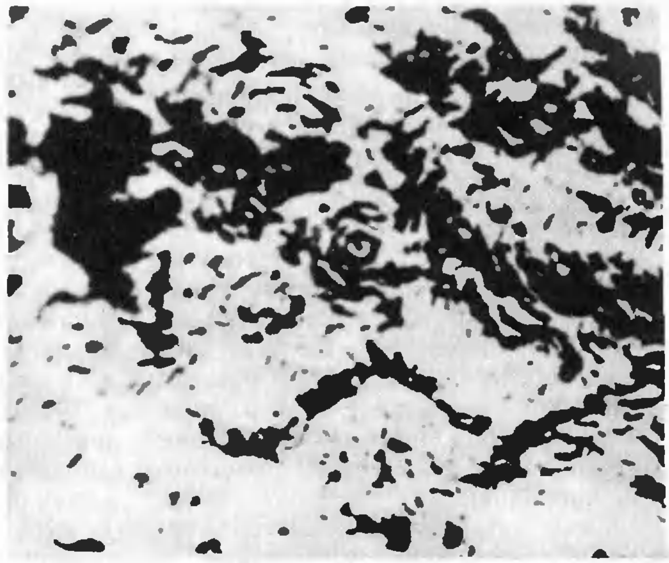


Рис. 2.

метричного расположения к другому.

До сих пор речь шла о том, как выглядит поверхность твердого тела снаружи. Не менее важно знать, какой она представляется электронам проводимости, подлетающим к ней, так сказать, изнутри. Для этой цели служит недавно предложенный оригинальный метод, который иллюстрирует рисунок 3. В точках a и b к поверхности подсоединены два токовых контакта, а перпендикулярно линии ab в плоскости поверхности приложено постоянное магнитное поле с индукцией B. Электроны, вылетающие из контакта a со скоростью v, будут двигаться в плоскости рисунка по окружности радиуса r, который определяется силой Лоренца и равен mv/eB, где m и e — масса и заряд электрона*). Если расстояние ab меньше диаметра окружности $2r$, то на контакте b будут регистрироваться электроны, вылетающие из a не строго по нормали к поверхности. При $ab>2r$ электроны перестанут приходить на контакт b. Увеличим теперь магнитное поле в два раза. Радиус r уменьшится, соответственно, в два раза. На контакт b теперь могут прилететь электроны, отражающиеся зеркально от поверхности в средней точке c. Количество пришедших в b электронов, то есть электрический ток, определяется, таким образом, условиями отражения. Будет ли отражение от внутренней поверхности зеркальным? Или электрон, налетевший на поверхность, «отскочит» от нее под произвольным углом, не равным углу падения? Как зависит характер отражения от структуры поверхности и свойств самого материала в объеме? Известные нам ответы на эти вопросы пока нельзя считать исчерпывающими. Их нужно знать для понимания многих свойств проводников. Рассмотрим, например, как отражение электронов от внутренней поверхности влияет на сопротивление проводников.

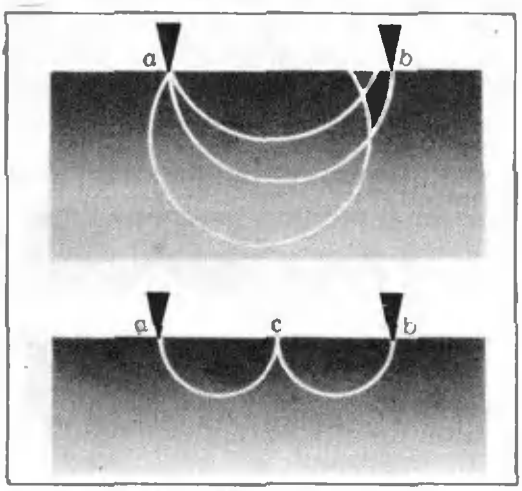


Рис. 3.

*) Далеко не в любом реальном металле траектория электрона в магнитном поле представляет собой окружность. Так бывает только в щелочных металлах. В общем случае из-за взаимодействия электрона с кристаллической решеткой его траектория может быть искажена.

kvant.mccme.ru

О влиянии поверхности на свойства проводников

Хорошо известно, что сопротивление проволоки определяется ее длиной L и диаметром d:

$$R=\varrho L/S=4\varrho L/\pi d^2.$$

Вопрос, который нас интересует, заключается в следующем: можно ли считать, что удельное сопротивление ϱ зависит только от материала проволоки и не зависит, например, от диаметра d? Мы сейчас увидим, что для ответа на этот вопрос важно знать характер отражения электронов проводимости от внутренней поверхности проводника.

Пусть электрон отражается зеркально, то есть параллельная поверхности проекция его импульса, а также энергия не меняются при отражении (рисунок 4, *а*). Это значит, что присутствие поверхности никак не сказывается на движении электрона в направлении, параллельном поверхности. Электрическое поле мы считаем, как это обычно бывает, направленным вдоль поверхности. Поэтому удельное сопротивление ϱ такого образца — с «зеркальной» внутренней поверхностью — должно совпадать с удельным сопротивлением неограниченного образца. Это сопротивление зависит от концентрации свободных электронов и от характера их движения внутри проводника. Как показывает несложный расчет (мы проделаем его в Приложении в конце статьи), удельное сопротивление неограниченного проводника равно

$$\varrho_0=m/e^2n\tau, \qquad (1)$$

где m, e — масса и заряд электрона, n — концентрация электронов в образце, τ — среднее время между двумя последовательными столкновениями электрона с дефектами в объеме проводника.

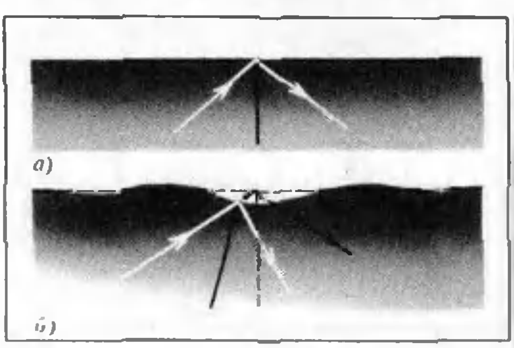


Рис. 4.

Однако отражение электронов от реальной поверхности не может быть полностью зеркальным. На рисунке 4, *б* изображено отражение от шероховатой поверхности, которая «в среднем» выглядит плоской. Хотя в каждой точке электрон отражается зеркально, отражение от «средней» плоскости оказывается диффузным.

Понятно, что диффузное отражение препятствует направленному движению электронов и дает свой вклад в сопротивление проводника. В этом случае вместо формулы (1) теория дает такое выражение для удельного сопротивления:

$$\varrho=\varrho_0\left(1+q\frac{l}{d}\right) \qquad (2)$$

(эту формулу мы тоже выведем в Приложении). Здесь l — средняя длина свободного пробега электрона, то есть среднее расстояние, проходимое электроном между двумя последовательными столкновениями с дефектами, а q — величина, определяемая характером столкновения электрона с поверхностью. Значения q лежат в интервале между 0 и 1. При чисто зеркальном отражении $q=0$, и мы приходим к прежней формуле (1). Относительная поправка к ней, то есть величина $\varrho/\varrho_0=1+ql/d$, содержит отношение длины свободного пробега l к толщине образца d. Это довольно естественно, поскольку электрон «забывает» о поверхности на расстоянии l от нее, а ток течет по всему сечению образца.

Для достаточно толстых образцов, то есть при $d\gg ql$, формула (2) практически совпадает с формулой (1). В обратном предельном случае, когда $d\ll ql$, удельное сопротивление определяется лишь диаметром d и вообще не зависит от длины свободного пробега l. Происходит это потому, что электрон часто сталкивается с поверхностями образца и отражается от них диффузно. В этом случае роль длины свободного пробега играет диаметр образца.

Мы видим, что при «незеркальной» поверхности зависимость удельного

kvant.mccme.ru

сопротивления от размера образца определяется соотношением между длиной свободного пробега l и размером d. В совершенных кристаллических образцах величина l существенно меняется при изменении температуры. При комнатной температуре типичное значение l — порядка 10^{-5} см. С понижением температуры длина свободного пробега быстро растет. При температурах жидкого гелия (~ 4 К) величина l достигает подчас миллиметров. Сопротивление образцов такого размера и более тонких зависит от рассеяния на поверхности, следовательно — от диаметра d.

Зависимость (2) часто наблюдается в эксперименте, но известны и отклонения от нее. Особого внимания заслуживает ситуация, когда длина свободного пробега l очень велика по сравнению с толщиной d, а отражение близко к зеркальному. Не следует думать, что почти зеркальное отражение не реально. В предельном случае почти скользящего падения, то есть когда угол между направлением движения и поверхностью стремится к нулю, отражение обязательно зеркальное. С этим явлением знаком каждый: если вы смотрите на асфальтированное шоссе под достаточно малым углом, например, поднимаясь в гору, то оно сверкнет зеркалом в тот момент, когда луч зрения пройдет по касательной к шоссе.

Таким образом, мы можем, несколько условно, разделить электроны на две группы: скользящие, которые отражаются почти зеркально, и остальные, отражающиеся диффузно. Каждая из этих групп дает свой вклад в сопротивление проводника.

Теперь нам понятно, что условия отражения от поверхности определяются состоянием самой поверхности и углами, под которыми электроны подлетают к поверхности. Величина q в формуле (2), характеризующая взаимодействие электронов с поверхностью, при малых углах скольжения θ (при углах падения, близких к $\pi/2$) может быть представлена в виде $q=Q\theta$, где Q — некоторый коэффициент, определяемый качеством поверхности. (Такая формула для q наиболее простым образом удовлетворяет требованию $q\to 0$ при $\theta\to 0$, но ее можно получить и путем строгих вычислений.)

Как показывают расчеты, вклад, вносимый скользящими электронами в сопротивление тонкой пластины толщины d, оказывается равным

$$\varrho_{\text{ск}}=\varrho_0\sqrt{Ql/d} \qquad (3)$$

(для тонкой проволочки формула получается иной). Вклад остальных электронов, отражающихся диффузно, дается вторым слагаемым в формуле (2), где q соответствует большим углам скольжения ($\theta\approx\pi/2$). Для достаточно малых толщин величина (3) меньше, чем это второе слагаемое (легко видеть, что для малой величины $x\sim\sqrt{d/l}\ll 1$ выполняется неравенство $x\gg x^2$). Полное сопротивление образца подсчитывается как сопротивление двух параллельно соединенных проводников.

Мы рассмотрели здесь несколько различных задач, каждая из которых представляет самостоятельный интерес. Объединяет их то, что все они посвящены изучению поверхностных явлений. На наших глазах складывается новая область науки, привлекающая разнообразные методы исследования, которые разработаны и используются в механике, физике и химии.

Приложение

Рассмотрим проводник длины L с площадью сечения S, к которому приложено напряжение U. Электрическое поле внутри проводника равно $E=U/L$.

В отсутствие поля электроны в проводнике двигались хаотически и их средняя скорость равнялась нулю. В результате действия поля у электронов появляется отличная от нуля средняя скорость $\bar{u}$ (так называемая дрейфовая скорость). Эту скорость можно оценить, предположив, что она полностью теряется при столкновении электрона с колеблющимся атомом, с дефектом или с примесным атомом. Если среднее время между двумя последовательными столкновениями электрона равно τ, то к моменту столкновения средняя скорость электрона равна

$$\bar{u}\approx a\tau=\frac{eE}{m}\tau=\frac{eU}{mL}\tau,$$

где a — ускорение, приобретаемое электроном в поле E.

Для того чтобы вычислить электрический ток, текущий по проводнику, надо умножить количество электронов, протекающих через сечение проводника за единицу времени, на заряд электрона:

$$I=enS\bar{u},$$

kvant.mccme.ru

где n — концентрация электронов. Подставляя сюда u, получаем закон Ома: $I=U/R$, где сопротивление R пропорционально длине l и обратно пропорционально сечению S — $R=\varrho_0 L/S$, а удельное сопротивление ϱ_0 от L и S не зависит:

$$\varrho_0=\frac{m}{ne^2\tau}. \qquad (a)$$

До сих пор мы отвлекались от того факта, что у проводника имеются границы. Теперь учтем его.

Мы видим, что удельное сопротивление массивного проводника определяется величиной, обратной времени между двумя последовательными столкновениями электрона с атомами или с дефектами в проводнике. При наличии границ роль τ играет время между двумя последовательными столкновениями электрона с границами. Это время по порядку величины равно d/v, где v — характерная скорость хаотического движения электронов в металле, d — толщина образца. Вклад, который вносит в удельное сопротивление столкновения с границами, мы можем оценить, подставив в (a) вместо $1/\tau$ величину v/d:

$$\varrho_s=q\frac{mv}{ne^2d}, \qquad (б)$$

где множитель q введен для того, чтобы учесть эффективность столкновений с поверхностью: для идеально зеркальной поверхности $q=0$, в случае полностью диффузного отражения электронов от поверхности $q=1$.

Каждый электрон может, в принципе, испытывать столкновения как на поверхности, так и внутри проводника. Поэтому полное удельное сопротивление образца равно сумме слагаемых (a) и $(б)$:

$$\varrho=\varrho_0+\varrho_s=\varrho_0\left(1+q\frac{v\tau}{d}\right)=\varrho_0\left(1+q\frac{l}{d}\right),$$

где $l=v\tau$ — средняя длина свободного пробега электрона, то есть среднее расстояние, проходимое электроном между двумя последовательными столкновениями.

Наша обложка

Парящий магнит

На первой странице обложки показана демонстрация опыта с парящим магнитом. Внутри блестящего металлического сосуда, над которым висит без всякой поддержки постоянный кольцевой магнит, находится жидкий гелий и в нем — сверхпроводник. Сверхпроводник представляет собой тонкий свинцовый диск диаметром 16 см, поверхность которого сделана слегка вогнутой. (Внешняя стенка сосуда повторяет форму сверхпроводника; вогнутость верхней поверхности обеспечивает устойчивость равновесия магнита.)

Этот опыт подтверждает существование в сверхпроводнике незатухающих (стационарных) токов. Они возникают при приближении магнита к поверхности сверхпроводника вследствие явления электромагнитной индукции. Направление токов индукции в сверхпроводнике определяется правилом Ленца, и создаваемое ими магнитное поле отталкивает кольцевой магнит, уравновешивая действие силы тяжести. Малейшее движение магнита вызывает изменение магнитного поля сверхпроводящих токов — поле «следит» за магнитом; при этом вогнутость поверхности сверхпроводника приводит к тому, что положение равновесия магнита оказывается устойчивым.

Установку с парящим магнитом в шутку называют «гроб Магомета» (по преданию гроб пророка Магомета висел в пространстве без всякой поддержки). Прибор, который изображен на первой странице обложки, нужен не только для демонстрационных целей. Он был изготовлен для выяснения вопроса, насколько хорошо большие полости, окруженные сверхпроводящим материалом, защищены от проникновения внешнего магнитного поля (иными словами, в какой степени магнитное поле сверхпроводящих токов компенсирует внешнее магнитное поле). *) Экран из сверхпроводника может оказаться незаменимым при исследовании физических явлений в слабых магнитных полях (порядка 10^{-13} Тл).

Установку с парящим магнитом, фотография которой приведена на нашей обложке, изготовил сотрудник Института атомной энергии им. И. В. Курчатова А. В. Инюшкин.

*) О свойствах сверхпроводников, помещенных в магнитное поле, вы можете прочитать в заметке «Эффект Мейснера» на с. 16 в этом номере журнала.

kvant.mccme.ru

Неинерциальные системы отсчета

Доктор физико-математических наук
Л. Г. АСЛАМАЗОВ

Когда Коперник заменил геоцентрическую систему мира Птолемея на гелиоцентрическую систему и объяснил в ней движение всех планет, он произвел революцию в человеческом мышлении. В течение многих веков люди рассматривали движение всех тел только относительно Земли. Говоря современным языком, они пользовались единственной, выделенной системой отсчета, связанной с Землей, хотя движение планет и Солнца в ней описывались очень сложным образом.

Позже из трудов Галилея и Ньютона стало понятно, что для описания движения пригодна не только система отсчета, связанная с Солнцем и неподвижными звездами, но и любые другие системы, движущиеся по отношению к ней равномерно и прямолинейно. Так были открыты инерциальные системы отсчета, в которых движением тел управляют простые законы Ньютона.

Ну, а что случилось дальше с земной системой отсчета? Ведь для нас Земля это, все-таки, выделенная система; исследуя движение тел на Земле, чаще всего можно вообще забыть о Солнце и звездах. Строго говоря, эта система отсчета не является инерциальной, так как Земля вращается вокруг своей оси и Солнца. Однако ускорения, связанные с этим движениями, малы, и обычно мы делаем лишь небольшую ошибку, пользуясь для описания движения законами Ньютона. Обычно, но не всегда.

Многие, наверное, бывали в Ленинграде и видели знаменитый маятник в Исаакиевском соборе или, хотя бы, слышали о нем (рис. 1). Этот маятник не только колеблется, но плоскость его колебаний еще и медленно поворачивается. Такое наблюдение впервые провел французский ученый Фуко в 1851 году. Опыт проводился в огромном зале Парижского Пантеона, шар маятника имел массу 28 кг, а длина нити была 67 м. С тех пор такой маятник называют маятником Фуко. Как же объяснить его движение?

Если бы на Земле строго выполнялись законы Ньютона, то, как известно из школьного курса физики, маят-

kvant.mccme.ru

Рис. 1. В марте 1931 года в здании Исаакиевского собора, где тогда находился Ленинградский государственный антирелигиозный музей, состоялся первый пуск маятника Фуко.

ник колебался бы в одной плоскости. Значит, в системе отсчета, связанной с Землей, законы Ньютона надо «исправить». Это делают, вводя специальные силы — силы инерции.

Силы инерции приходится вводить в любой системе отсчета, движущейся относительно инерциальной с ускорением. Такие системы называют неинерциальными системами отсчета.

Чтобы найти силы инерции, надо рассмотреть движение одного и того же тела в двух системах отсчета — неинерциальной и инерциальной. Результат зависит, прежде всего, от того, как движется неинерциальная система. Она может двигаться поступательно, может вращаться, возможны и комбинации этих движений.

Оставим на время маятник Фуко — это довольно сложный случай — и рассмотрим вначале более простой пример.

Система отсчета движется поступательно

Представьте себе, что вы находитесь в кузове грузовика, и грузовик резко трогается с места. Если не успеть схватиться за борт, можно вылететь из кузова. Относительно Земли все понятно: человек остается неподвижным, а пол кузова уходит из-под ног. Но как объяснить это же явление в неинерциальной системе отсчета, связанной с ускоренно движущимся грузовиком? Никаких новых сил на человека, стоящего в кузове, не действует (для простоты будем считать, что силы трения малы), а человек начинает двигаться относительно грузовика с ускорением. Ясно, что просто применять законы Ньютона в этой системе нельзя: есть ускорение, но нет сил. Вот почему приходится вводить фиктивные силы — силы инерции.

Другой пример неинерциальной системы отсчета, который мы разберем более подробно, — это движущийся ускоренно лифт. При движении лифта вверх чувствуется «утяжеление» при разгоне и «облегчение» при резком торможении. Если пользоваться в системе лифта законами Ньютона, то этого понять нельзя. Действительно, на тело действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и сила реакции $\vec{N}$. *Так как человек покоится, сила* реакции должна была бы равняться по модулю силе тяжести. Но из опыта ясно, что это не так. Поэтому (если считать в лифте) к силе тяжести надо добавить какую-то фиктивную силу при разгоне лифта и вычесть ее при замедлении. Это и есть сила инерции.

Чему же равна сила инерции? Для того чтобы выяснить это, сначала найдем силу реакции, действующую на человека при ускорении и замедлении лифта в неподвижной системе отсчета. Относительно такой системы справедлив второй закон Ньютона

$$\pm ma = N - mg,$$

где знак «+» соответствует разгону лифта (ускорение направлено вверх), а знак «—» — относится к случаю его замедления (ускорение направлено вниз). Отсюда сила реакции

$$N = mg \pm ma.$$

В системе, связанной с лифтом, сила реакции должна получиться такой же, поэтому к силе тяжести необходимо добавить силу инерции при разгоне лифта и вычесть ее при замедлении. Из последнего равенства получаем, что сила инерции, действующая на человека в лифте, равна

$$\vec{F}_и = -m\vec{a}.$$

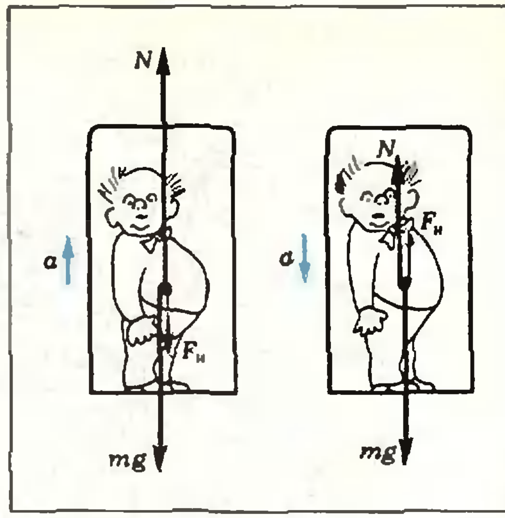


Рис. 2. Сила инерции в лифте, движущемся с ускорением.

Теперь все в порядке: при разгоне лифта сила инерции как бы утяжеляет тело, а при замедлении, наоборот, облегчает его (рис. 2). Обратите внимание, что *сила инерции внешне* похожа на силу тяжести: обе они пропорциональны массе тела.

Иногда приходится слышать, например, что силы инерции откидывают пассажиров назад при разгоне поезда и толкают их вперед при его замедлении, то есть говорят о силах инерции как об обычных силах. При этом обязательно надо добавлять, что движение *рассматривается относительно* ускоренно движущейся системы отсчета (в данном случае относительно поезда). Но и в этой системе не следует забывать о происхождении сил инерции. Эти силы принципиально отличаются от обычных сил: они не связаны с взаимодействием тел. Вот почему их часто называют фиктивными силами или псевдосилами. *Силы инерции вводятся искусственно*, для того чтобы описать изменение ускорения тела в неинерциальной системе отсчета по сравнению с инерциальной при тех же самых действующих на тело реальных силах.

Исследовать движение в неинерциальной системе отсчета, вводя силы инерции, часто оказывается *более простым и удобным, чем в инерциальной* системе, где таких сил нет, но характер движения может быть

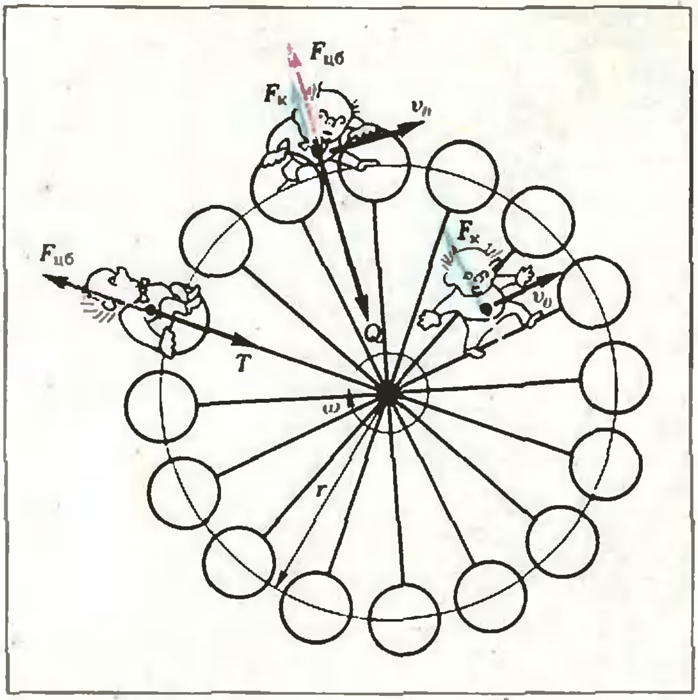


Рис. 3. Силы инерции во вращающейся системе отсчета.

гораздо сложнее. В этом легко убедиться, решив задачи, приведенные в конце статьи.

Система отсчета вращается

Предположим, что уже знакомый нам грузовик с человеком в кузове поворачивает. Тогда человек может стукнуться о борт и даже набить себе шишку. Почему это происходит? Относительно Земли все понятно: человек продолжает двигаться прямолинейно, а борт грузовика, поворачивая, приближается к нему. В системе отсчета, связанной с грузовиком, наоборот, человек приближается к борту, хотя никаких новых реальных сил на человека в этой системе не действует. Для того чтобы объяснить это движение в неинерциальной системе грузовика, приходится ввести фиктивную силу — центробежную силу инерции, направленную по радиусу от центра поворота. Вот так — силы фиктивные, а шишки реальные!

Еще один пример — человек на карусели. Почему он движется по окружности? В инерциальной системе отсчета ответ дает второй закон Ньютона: сила реакции со стороны боковой стенки кресла, направленная к центру, вызывает центростремительное ускорение. Можно ли понять это движение, пользуясь законами Ньютона во вращающейся системе? Опять нет: в этой системе человек покоится, и в то же время на него действует сила реакции со стороны кресла. Но все встает на свои места, если ввести центробежную силу инерции, направленную от центра вращения. Тогда можно объяснить, почему в этой системе движения нет.

Чтобы найти величину центробежной силы инерции, рассмотрим сначала движение человека в неподвижной (инерциальной) системе отсчета. Центростремительное ускорение $a_ц = \omega^2 r$ (ω — частота вращения карусели, r — ее радиус) вызывается действующей на человека силой реакции T со стороны кресла карусели (рис. 3):

$$m\omega^2 r = T.$$

Во вращающейся (неинерциальной) системе отсчета центробежная сила инерции $\vec{F}_{цб}$ должна быть по модулю равна силе $\vec{T}$, а по направлению — противоположна ей. Поэтому

$$F_{цб} = -m\omega^2 r,$$

где знак «—» указывает, что эта сила направлена от центра вращения. Как видно, и во вращающейся системе отсчета сохраняется характерная

kvant.mccme.ru

особенность сил инерции — эти силы пропорциональны массе тела.

С центробежными силами инерции сталкиваются во многих практических задачах. При этом часто, делая расчеты, забывают об их происхождении и обращаются с ними как с обычными силами. Например, считают, что центробежная сила инерции сушит белье в центрифугах, разделяет изотопы, помогает тренировкам космонавтов; она же может разрушить ротор турбины и вызвать биение колеса при плохой центровке. Еще раз отметим, что такие утверждения имеют смысл лишь во вращающейся системе отсчета. Но и там надо помнить, что силы инерции — фиктивные силы, которые вводятся для того, чтобы описать изменение ускорения тела, вызванное вращением системы отсчета. Все описанные явления можно объяснить, рассматривая их и в инерциальной системе, где справедливы обычные законы Ньютона. Правда, там объяснение будет сложнее.

Кориолисова сила

Теперь обсудим случай, когда человек не просто катается на карусели, а еще и вздумал перебраться из одного кресла в другое (см. рис. 3), то есть начинает двигаться по окружности с некоторой скоростью v_0 в системе карусели, например, в сторону вращения. (Эксперимент чисто мысленный, так как это строжайше запрещено правилами.) Оказывается, тогда необходимо ввести еще одну силу инерции, направленную тоже от центра вращения.

Рассмотрим вначале движение человека относительно Земли. Полная скорость движения v складывается из линейной скорости карусели ωr и скорости относительного движения v_0:

$$v = \omega r + v_0.$$

Центростремительное ускорение определяется известной формулой

$$a_ц = \frac{v^2}{r} = \frac{v_0^2}{r} + \omega^2 r + 2v_0\omega.$$

По второму закону Ньютона

$$ma_ц = Q,$$

где Q — сила реакции, действующая на человека со стороны карусели.

Теперь рассмотрим это же движение в системе карусели. Там скорость равна v_0, и центростремительное ускорение $a'_ц = v_0^2/r$. Используя предыдущие два равенства, можно записать

$$ma'_ц = \frac{mv_0^2}{r} = Q - m\omega^2 r - 2mv_0\omega.$$

Если мы хотим пользоваться законом Ньютона и во вращающейся системе, надо ввести силу инерции

$$F_{ин} = -(m\omega^2 r + 2mv_0\omega),$$

где знак «—» указывает, что эта сила направлена от центра вращения. Первый член — это уже знакомая нам центробежная сила инерции $F_{цб}$. Она тем больше, чем быстрее вращение и чем дальше отстоит тело от центра. Вторая сила называется кориолисовой силой $F_к$ (по имени французского ученого Кориолиса, впервые рассчитавшего эту силу). Ее приходится вводить только тогда, когда тело движется во вращающейся системе. Она не зависит от положения тела, но зависит от скорости движения тела и от скорости вращения системы отсчета.

Что, если тело во вращающейся системе движется не по окружности, а, например, по радиусу (см. рис. 3)? Оказывается, и в этом случае также необходимо ввести силу Кориолиса, но направлена она будет не вдоль радиуса, а перпендикулярно ему. И вообще при любом движении во вращающейся системе кориолисова сила направлена перпендикулярно оси вращения и скорости тела. Удивительно, но факт: при движении во вращающейся системе сила инерции как бы толкает тело вбок.

Слова «как бы» стоят не случайно. Происхождение силы Кориолиса такое же, как и всех сил инерции — это псевдосила. Вот наглядный тому пример.

Представьте себе, что на полюсе установлена пушка, которая стреляет вдоль меридиана (полюс взят для простоты рассмотрения). Цель находится на том же меридиане. Может ли снаряд попасть в цель? Если смотреть на стрельбу со стороны (пользоваться инерциальной системой от-

kvant.mccme.ru

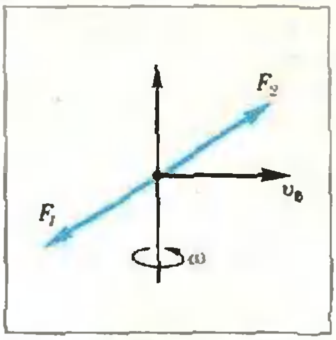


Рис. 4. Два возможных направления силы Кориолиса.

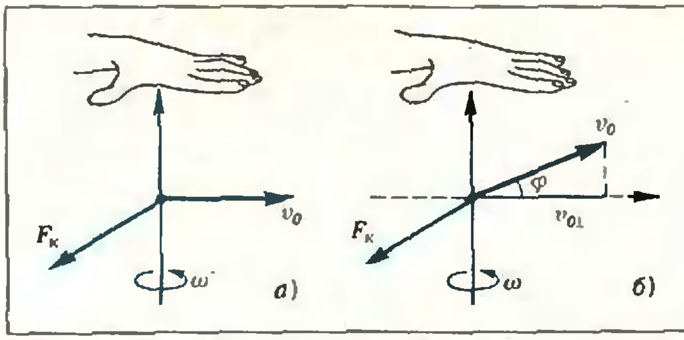


Рис. 5. Правильное направление силы Кориолиса определяется с помощью правила левой руки.

счета, связанной с Солнцем), то ситуация ясная: траектория снаряда лежит в начальной меридиональной плоскости, а цель вместе с Землей поворачивается. Поэтому снаряд никогда не попадет в цель. А как объяснить то же явление в системе, связанной с Землей? Как объяснить эффекты, обусловленные «уходом» цели из плоскости полета снаряда? Для этого и приходится вводить кориолисову силу, направленную перпендикулярно скорости тела и оси вращения. Тогда и на Земле становится понятным, почему снаряд отклоняется и не попадает в цель.

Точно так же объясняется поворот плоскости колебаний маятника Фуко, о котором мы говорили в начале статьи. В инерциальной системе Солнца плоскость колебаний маятника остается неизменной, а Земля вращается. Поэтому относительно Земли плоскость колебаний поворачивается. (Проще всего опять представить себе, что маятник колеблется на полюсе; тогда плоскость колебаний совершит полный оборот как раз за сутки.) А вот в системе отсчета, связанной с Землей, это явление можно объяснить только с помощью силы Кориолиса.*)

Интересные следствия

Сила Кориолиса, возникающая вследствие вращения Земли, приводит к целому ряду весьма важных эффектов. Но прежде чем говорить о них, обсудим подробнее вопрос о направлении силы Кориолиса. Уже было сказано, что сила Кориолиса всегда перпендикулярна оси вращения и скорости тела. Но при таком определении остаются возможными два направления силы Кориолиса, показанные на рисунке 4. Напомним, что аналогичная ситуация возникает при определении направления силы Лоренца, действующей на движущийся заряд со стороны магнитного поля. Как известно из школьного курса физики, эта сила перпендикулярна скорости заряда и индукции магнитного поля. Для того чтобы однозначно определить ее направление, надо воспользоваться правилом левой руки. (Конечно, в действительности электрону нет никакого дела до вашей левой руки; таким способом просто удобно формулировать правило для нахождения направления силы Лоренца.)

Направление кориолисовой силы можно найти с помощью аналогичного правила. Его иллюстрирует рисунок 5, *а*. Прежде всего выберем определенное направление на оси вращения: если смотреть на вращающееся тело в этом направлении, вращение должно происходить по часовой стрелке. Теперь расположим левую руку так, чтобы направление вытянутых четырех пальцев совпадало с направлением скорости тела, а направление оси вращения пронизывало бы ладонь. Тогда отогнутый под углом 90° большой палец покажет направление силы Кориолиса.

Итак, мы подробно обсудили вопрос о силе Кориолиса для случая, когда скорость тела во вращающейся системе отсчета перпендикулярна оси вращения. При этом модуль силы равен $F_к = 2m\omega v_0$, а направление оп-

*) Более подробно о движении маятника Фуко рассказано, например, в статье Я. А. Смородинского «Сила Кориолиса» («Квант», 1975, № 4).

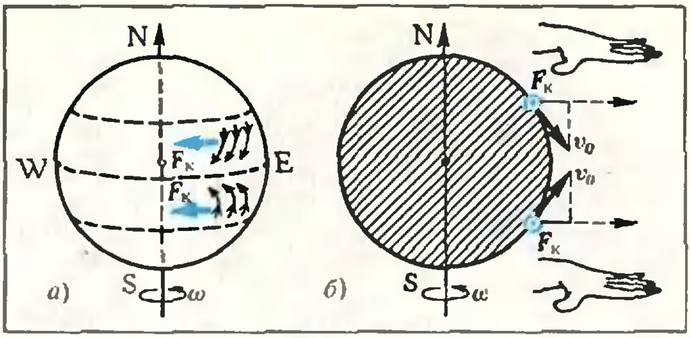


Рис. 6. Сила Кориолиса отклоняет пассаты к западу.

ределяется правилом левой руки. А как быть в общем случае?

Оказывается, если скорость тела v_0 составляет с осью вращения произвольный угол (рис. 5, *б*), то при нахождении силы Кориолиса надо учитывать только проекцию скорости на плоскость, перпендикулярную оси вращения. Тогда модуль кориолисовой силы вычисляется по формуле

$$F_к = 2m\omega v_{0\perp} = 2m\omega v_0 \cos\varphi.$$

Направление этой силы определяется тем же правилом левой руки, но четыре вытянутых пальца нужно располагать не вдоль скорости тела, а по перпендикуляру к оси вращения, как показано на рисунке 5, *б*.

Теперь нам все известно про силу Кориолиса: и как найти ее модуль, и как определить направление. Вооружившись этими знаниями, приступим к объяснению ряда интересных эффектов.

Известно, например, что пассаты — ветры, дующие от тропиков к экватору, — всегда отклоняются к западу. Рисунок 6 объясняет этот эффект. Сначала убедитесь в том, что это действительно так, для северного полушария, где пассаты дуют с севера на юг. Расположите левую руку так, чтобы ось вращения Земли входила в ладонь, а четыре вытянутых пальца направьте вдоль перпендикуляра к оси вращения (рис. 6, *б*). Вы увидите, что кориолисова сила направлена на вас перпендикулярно чертежу и, следовательно, на запад (рис. 6, *а*). В южном полушарии пассаты дуют, наоборот, с юга на север. Но ни направление оси вращения, ни направление перпендикуляра к ней не изменяются; следовательно, не изменяется и направление силы Кориолиса. Таким образом, эта сила в обоих случаях направлена к западу.

Рисунок 7 иллюстрирует закон Бэра: у рек, текущих в северном полушарии, правый берег более крутой и подмытый, чем левый (в южном полушарии — наоборот). В этом случае действие кориолисовой силы приводит к тому, что вода прижимается к правому берегу. Из-за трения у поверхности скорость течения всегда больше, чем у дна; соответственно, будет большей и сила Кориолиса. В результате возникает циркуляция воды, показанная стрелками на рисунке 8, почва у правого берега подмывается, а у левого — осаждается*) Глубже разо-

*) Аналогичное явление возникает при повороте реки. О нем подробно рассказывалось в статье «Меандры рек» («Квант», 1983, № 1).

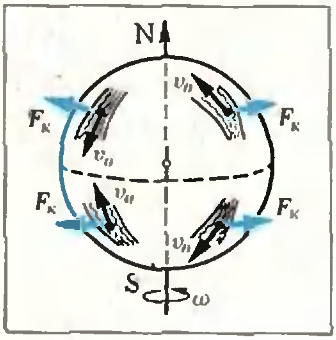


Рис. 7. Сила Кориолиса прижимает воду к реке к правому берегу в северном полушарии и к левому — в южном.

Рис. 8. У рек в северном полушарии правый берег более крутой и подмытый, чем левый.

браться в этом явлении можно, решив задачу 7 в конце статьи.

Кориолисова сила приводит к отклонению падающих тел к востоку. (Объяснить этот эффект попробуйте сами.) В 1833 году немецкий физик Фердинанд Райх в Фрейбургской шахте провел очень точные эксперименты и получил, что при свободном падении тел с высоты 158 м их отклонение в среднем (по 106 опытам) составляет 28,3 мм. Это послужило одним из первых экспериментальных доказательств теории Кориолиса.

Задачи

1. В кузове грузовика лежит деревянный ящик, загруженный кирпичами. Дно ящика — квадрат со стороной $l=1$ м; масса ящика пренебрежимо мала по сравнению с массой кирпича. Известно, что ящик начинает скользить, если грузовик трогается с ускорением, большим $a=6$ м/с^2. До какой высоты можно уложить кирпичи в ящик, не опасаясь, что он опрокинется при таком ускорении?

2. При вертикальном взлете ракета движется с ускорением $2g$. Каков период колебаний маятника длины l, расположенного в кабине ракеты? Каким станет период колебаний маятника при вертикальном спуске ракеты с тем же ускорением $2g$?

3. Маятниковые часы установлены в пригородной электричке, которая отправляется от вокзала и через некоторое время возвращается назад. Как будут различаться показания вокзальных часов и часов в электричке? Учесть, что при торможениях и разгонах электричка движется с ускорением.

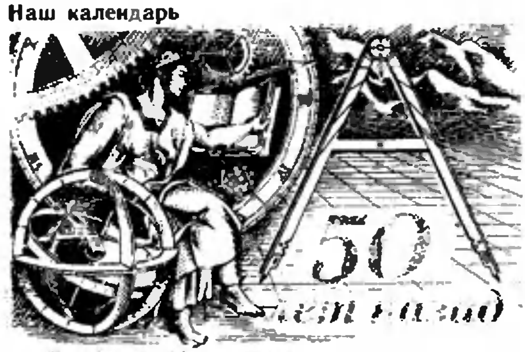
4. Однородный стержень длины $2l$ и массы m вращается с угловой скоростью ω в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через его середину. Определите, как меняется натяжение стержня в зависимости от расстояния до центра вращения. Найдите максимальное значение этого натяжения.

5. Металлическая цепочка длины l и массы m, концы которой соединены, насажена на диск. Диск вращается в горизонтальной плоскости, делая n оборотов в единицу времени. Определите натяжение цепочки T.

6. В узкую радиальную канавку, расположенную на поверхности горизонтального диска, вставлено лезвие бритвы. В каком направлении — в сторону вращения или против него — будет падать лезвие при вращении диска (лезвие может скользить вдоль канавки)?

7. Река в северном полушарии течет к югу. Ширина русла реки на широте φ равна d, скорость течения v. Выведите формулу для разности уровней воды на восточном и западном берегах реки. Оцените эту величину для реки Волги. Будет ли наблюдаться этот эффект, если река течет вдоль параллели? Что произойдет, если река пересекает экватор?

Наш календарь



Эффект Мейснера

(или Как делаются открытия)

Осенью 1933 года было сделано выдающееся открытие: обнаружено, что магнитное поле не проникает в глубь сверхпроводников, иными словами, магнитная индукция в сверхпроводниках равна нулю.

Как же было сделано это открытие? Видный специалист по физике низких температур В. Мейснер и его сотрудник Р. Оксенфельд решили экспериментально проверить расчеты известного физика, лауреата Нобелевской премии М. Лауэ. Лауэ рассчитал распределение магнитного поля вокруг сверхпроводников простой геометрической формы. Он исходил из следующих соображений. При включении магнитного поля в сверхпроводнике вследствие электромагнитной индукции должны возникать незатухающие вихревые токи. Согласно правилу Ленца, магнитный поток поля, создаваемого этими токами, равен магнитному потоку включенного поля, но имеет противоположный знак. Следовательно, суммарное магнитное поле в сверхпроводнике равняется нулю. Таким образом, включаемое магнитное поле не должно проникать в сверхпроводник.

Мейснер и Оксенфельд измерили распределение магнитного поля вокруг сверхпроводящего образца после включения магнитного поля и убедились, что расчеты Лауэ точны. Потом они решили изменить последовательность операций эксперимента. Сначала включили магнитное поле, и в это постоянное магнитное поле поместили при комнатной температуре исследуемый образец. Затем его охладили и тем самым перевели в сверхпроводящее состояние. Снова повторили измерения распределения магнитного поля вокруг образца. К их удивлению оно оказалось таким же, как и в первом опыте. Но ведь магнитное поле не менялось, и электромагнитной индукции не должно быть! Выходит, что и в случае, когда нет электромагнитной индукции, магнитное поле вытеснялось из образца при переходе его в сверхпроводящее состояние. Это уже явно противоречило расчетам Лауэ.

Так было обнаружено фундаментальное свойство сверхпроводников, которое никак нельзя было «вывести» из равенства нулю электросопротивления. Это явление «непроницаемости» сверхпроводника для магнитного поля имеет фундаментальное значение для физики сверхпроводимости. Оно получило название «эффект Мейснера».

Б. Е. Явелов

kvant.mccme.ru

Леонард Эйлер

(к 200-летию со дня смерти)

Кандидат физико-математических наук
С. Г. ГИНДИКИН

Итак, Эйлер перестал вычислять и жить.
Кондорсе

В начале 1783 г. директором Петербургской Академии наук была назначена княгиня Екатерина Романовна Дашкова, которая за 20 лет до того была ближайшей сподвижницей Екатерины II в дни воцарения ее на российском троне. Известная своей изобретательностью княгиня придумывает безошибочный ход, который должен убедить академиков в ее приверженности науке. Она уговаривает сопровождать ее при первом посещении Академии престарелого Эйлера, который давно был не в ладах с академическим начальством и не посещал академических конференций. Слепой Эйлер появляется в сопровождении сына и внука. Дашкова вспоминала впоследствии: «Я сказала им, что просила Эйлера ввести меня в заседание, так как, несмотря на собственное невежество, считаю, что подобным поступком самым торжественным образом свидетельствую о своем уважении к науке и просвещению».

А всего через несколько месяцев в протоколах Академии было записано: «В заседании конференции 11 сентября 1783 г. академик Н. И. Фусс взял на себя обязанности секретаря *), отсутствующего из-за кончины его знаменитого отца, г. Леонарда Эйлера, который умер от апоплексического удара 7 сентября в 11 часов вечера, в возрасте 76 лет, 5 месяцев и 3 дней, совершившего свой долгий и блестящий путь и сделавшего свое бессмертное имя известным всей Европе».

Исключительность личности Эйлера, его беспрецедентная роль в истории Академии заставили искать нестандартные способы почтить его память. 23 октября академик Н. И. Фусс, ученик Эйлера и муж его внучки, произнес «Похвальное слово». Академики решили на свои средства изготовить бюст «бессмертного Эйлера, равно достойного восхищения своим гением и своими достоинствами», а их «прославленный начальник» (Дашкова) «прибавила к этому великолепную колонну, которая служит основанием этому бюсту»; вначале бюст установили в библиотеке, а затем — напротив кресла президента в зале заседаний (а в библиотеке осталась

*) Им был Иоганн-Альбрехт, старший сын Л. Эйлера.

kvant.mccme.ru

картина «Силуэты группы академиков Математического класса, занятых установкой бюста покойного Л. Эйлера»). В больших подробностях (включая качество бумаги) обсуждались вопросы, связанные с изданием трудов покойного.

Слухи о почестях ученому распространились далеко за пределы России. Непременный секретарь Французской Академии наук маркиз Кондорсе (менее чем через 10 лет он примет участие в революции и его имя вычеркнут из списков Петербургской Академии за «достойное порицания поведение... против суверена») сказал в своем «Похвальном слове»: «Итак, народ, который мы в начале этого века принимали за варваров, в настоящем случае подает пример цивилизованной Европе — как чествовать великих людей при жизни и уважать их память по смерти: и другим нациям приходится в данном случае краснеть, что они не только в этом отношении не могли предупредить Россию, но даже не в силах ей подражать». Хотя в далеком Париже обстановка в Петербурге казалась более благополучной, чем была на самом деле, отношение к науке за 60 лет существования Петербургской Академии стало неузнаваемым.

Первые годы Академии

Петр I думал об организации Академии в России еще в последние годы XVII века. Начиная с 1711 г. он трижды обсуждал свои планы с Лейбницем и даже зачислил последнего на русскую службу. Лейбниц не считал отсутствие наук в России препятствием к созданию Академии и даже находил в этом некоторые преимущества. Однако мало кто в России разделял этот оптимизм. Трудности на пути проекта были многочисленны, но в 1724 г. Сенат принял решение о создании Академии наук. В это время даже слово «наука» еще не существовало в русском языке и Академию назвали «ди сиянс Академия».

В 1725 г. Петр умер, так и не дождавшись открытия Академии. Екатерина I не без колебаний осуществила замысел мужа, хотя и не разделяла его интереса к науке (как пишет современник, «похвальные речи ученых были непонятны Ее Величеству»). Судьба Академии все время висела на волоске. Она воспринималась как явление исключительно немецкое, и русская партия, в частности Меншиков, была настроена против нее. Академики пытались наладить контакты с русской публикой, плохо понимавшей функции Академии. Два раза в неделю ее двери открывались для посетителей. Иногда там можно было увидеть нечто удивительное. 24 февраля 1729 г. «профессор Лейтман умудрился изменить изображение государственного герба (с помощью призм) в портрет царствующего императора». Академики несколько утвердили себя успехами в организации «потешных огней» и иллюминаций, в сочинении торжественных од. Высокие материи не были в чести, разве что при составлении «ландкарт» да некоторых рекомендаций мореплавателям.

kvant.mccme.ru

Будущих академиков стали собирать еще при Петре I. Постепенно становилось ясно, что первоклассный состав набрать не удается: именитые ученые считали поездку в Россию мероприятием сомнительным и даже рискованным. Лейбница тогда уже не было в живых, а его ближайший последователь Христиан Вольф отказался принять пост президента. Первым президентом стал лейб-медик Блюментрост. Попробовали вместо именитых ученых приглашать их детей (в надежде, что способности к науке передаются по наследству, да и славное имя украсит академические списки). Так, приглашение знаменитому Иоганну Бернулли (1667—1748) было переадресовано его сыну. В многоступенчатой переписке долго было не ясно, относится ли приглашение к старшему сыну Николаю (1695—1726) или среднему — Даниилу (1700—1782). В конечном счете поехали оба: Николай, прежде бывший профессором римского права, стал профессором математики (с окладом 1000 руб. в год), а Даниил — профессором физиологии (с окладом 800 руб.). Отец напутствовал сыновей словами: «...лучше несколько потерпеть от сурового климата страны льдов, в которой приветствуют муз, чем умереть от голода в стране с умеренным климатом, в которой муз презирают и обижают». Мог ли он думать тогда, что не пройдет и года, как его старшего сына не станет!

Эйлер в Петербурге

С завистью провожал братьев Бернулли в 1726 г. ученик их отца Леонард Эйлер: «У меня явилось неописуемое желание отправиться вместе с ними... Дело, однако, не могло так скоро осуществиться, а между тем... молодые Бернулли крепко пообещали мне по прибытии своем в Петербург похлопотать о пристойном для меня месте.»

Леонард Эйлер родился 4 (15) апреля 1707 г. в Базеле, в Швейцарии. Его отец, Пауль Эйлер, был сельским пастором. В молодости он успешно занимался математикой под руководством Якоба Бернулли (1654—1705), старшего брата Иоганна. Первые уроки Леонард получил от отца, последние классы гимназии он проходил в Базеле и одновременно посещал лекции по математике в университете, где преподавал И. Бернулли. Вскоре Эйлер самостоятельно изучает первоисточники, а по субботам И. Бернулли беседует с талантливым студентом, обсуждает неясные места. Леонард дружит с его сыновьями, особенно с Даниилом.

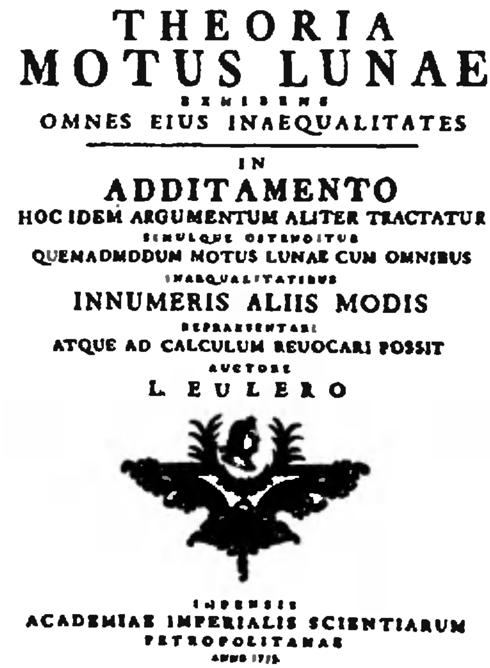

THEORIA
MOTUS LUNAE
EXHIBENS
OMNES EIUS INAEQUALITATES
IN
ADDITAMENTO
HOC IDEM ARGUMENTUM ALITER TRACTATUR
SIMULQUE OSTENDITUR
QUEMADMODUM MOTUS LUNAE CUM OMNIBUS
INAEQUALITATIBUS
INNUMERIS ALIIS MODIS
REPRAESENTARI
ATQUE AD CALCULUM REVOCARI POSSIT
AUCTORE
L. EULERO
IMPENSIS
ACADEMIAE IMPERIALIS SCIENTIARUM
PETROPOLITANAE
ANNO 1753

Рис. 3.

Титульный лист книги Эйлера «Теория движения Луны», изданной в Санкт-Петербурге в 1753 году.

В 1723 г. Леонард получил степень магистра искусств; на испытании он произнес на латыни речь о сравнении философии Декарта и Ньютона. Пауль Эйлер считал, что сын должен повторить его карьеру, и Леонард покорно изучал богословие. И отец, и сын отчетливо понимали, что научная карьера бесперспективна. Хотя она и не была особенно престижной (в те годы в Швейцарии любили говорить: пусть учатся немцы, а у швейцарцев есть дела поважнее), число претендентов на профессорские места сильно превышало количество вакансий.

kvant.mccme.ru

В 1727 г. Эйлер предпринял попытку занять кафедру физики в Базеле, заранее обреченную на неудачу. Тем временем он успешно участвует в конкурсе Французской Академии наук на наилучший способ расположения мачт на корабле. Примечательно, что «в гористой Швейцарии, из которой до того времени Эйлер никуда не выезжал, он, конечно, имел случай видеть корабль не иначе, как на картинках...» (акад. А. Н. Крылов).

Даниил Бернулли выполнил обещание, данное при отъезде в Петербург: еще до попытки Эйлера устроиться в Базеле он узнал о возможности получить место адъюнкта по физиологии с окладом 200 рублей. Бернулли торопит, рекомендует ехать «еще этою зимою». Эйлера не смутило, что ему предстоит заниматься медициной. В те годы медицина не воспринималась как наука, далекая от математики. За примерами идти недалеко: его учитель И. Бернулли чередовал занятия математикой с медицинской практикой (как, впрочем, и с преподаванием греческого языка). Эйлер приступает к изучению анатомии и физиологии; позднее он удивлял окружающих медицинскими познаниями. Отъезд не удался столь быстро, как хотелось Д. Бернулли, но весной 1727 г. Эйлер получил «на проезд денег сто тридцать рублей векселем» и уехал в Россию. В Петербург он прибыл в день смерти Екатерины I.

В свои первые петербургские годы вряд ли Эйлер думал, что его жизнь так прочно будет связана с Академией. Само дальнейшее существование Академии казалось тогда крайне проблематичным. Потом Н. И. Фусс напишет: «Эйлер был украшением и славой нашей Академии в продолжение пятидесяти лет. На его глазах она начинала свое существование, несколько раз погибала и воскресала». Очень неуютно чувствовал себя Эйлер, когда гибель Академии представлялась ему реальностью. В один из самых тяжелых моментов, когда после кончины Петра II в 1730 г. началось массовое бегство академиков из России, отчаявшийся Эйлер ведет переговоры о поступлении на морскую службу. Но это не потребовалось. Напротив, освободившаяся вакансия позволила Эйлеру занять место профессора (академика) по кафедре физики (правда, с сравнительно невысоким окладом в 400 рублей). А через два года Д. Бернулли покинул Россию и Эйлер занял его кафедру математики (хотя его оклад — 600 руб.— лишь половина оклада, который получал на этом месте Д. Бернулли).

За эти годы Эйлер стал в Академии заметной фигурой. Большинство академиков не слишком ревностно относились к своим обязанностям, которые к тому же еще и не определились четко. Эйлер не пренебрегал никакими поручениями: он постоянно делает доклады на академических конференциях, читает публичные лекции, пишет учебник по арифметике для академической гимназии и научно-популярные статьи для «Примечаний» к «Санкт-Петербургским ведомостям», он в комиссиях по исследованию пожарного насоса, весов, «пильной машины» и магнитов, принимает разнообразные экзамены. Эйлер подробно вникает в многочисленные технические проекты. Забегая вперед, можно вспомнить исследования Эйлера по гидравлическим турбинам и заключения по проектам мостов через Неву, в том числе об одноарочном деревянном мосте И. П. Кулибина, работавшего в Академии механиком.

Начиная с 1733 г. Эйлер участвует в «экзамене» карт, и постепенно участие в картографической деятельности выходит среди его академических обязанностей на первый план. Встает вопрос о составлении генеральной карты России на основе уже составленных губернских карт, и Эйлер предлагает свой проект, сопровождая его словами: «Я уверен, что география российская через мои и г. профессора Гензиуса труды приведена гораздо в исправнейшее состояние, нежели география немецкой земли». Острые разногласия с академиком Делилем привели Эйлера в 1840 г. к решению прекратить занятия картографией. Вероятно, состояние здоровья ученого тоже сыграло свою роль в принятии этого решения. 21 августа он писал академику Гольдбаху: «География мне гибельна. Вы знаете, что я за нее поплатился глазом, а теперь опять нахожусь в подобной опасности; когда мне сегодня утром послали часть карт на просмотр, то я тотчас же почувствовал новый припадок, потому что эта работа, требуя всегда рассмотрения одновременно большого пространства, сильнее утомляет зрение, чем простое чтение или одно писание». Эйлер потерял правый глаз в 1735 г., когда выполнил в три дня правительственное задание, на которое академики требовали несколько месяцев.

На 1740 г. приходится еще один случай, когда Эйлер уклонился от данного ему поручения (других примеров не известно): он переадресовал придворному астроному составление гороскопа «Ивану-царевичу», будущему недолговечному императору Иоанну Антоновичу. Впрочем, А. С. Пушкин сообщает иную версию этой истории: «Когда родился Иоанн Антонович, то императрица Анна Иоанновна послала к Эйлеру приказание составить гороскоп новорожденному. Эйлер сначала отказывался, но принужден был повиноваться. Он занялся гороскопом вместе с другим академиком. Они составили его по всем правилам астрологии, как добросовестные немцы, хотя и не верили ей. Заключение, выведенное ими, испугало обоих математиков — и они послали императрице другой гороскоп, в котором предсказывали новорожденному всякие благополучия. Эйлер сохранил однако ж первый и показывал его графу К. Г. Разумовскому, когда судьба несчастного Иоанна Антоновича совершилась».

Не перестаешь удивляться, что все эти многочисленные обязанности оставляли Эйлеру время для его главного дела — для занятий математикой. Именно в эти годы он сложился как великий ученый. Критически переосмыслив труды Лейбница и Ньютона по математическому анализу и механике и работы Ферма по теории чисел, он нашел свой собственный путь в науке. Почти все его книги и статьи были опубликованы позднее, но главное в научной судьбе Эйлера решилось в его первое петербургское десятилетие. Только фантастическая работоспособность и поразительная целеустремленность позволили Эйлеру совместить малозаметные миру занятия математикой с повседневными академическими заботами. Позднее он писал, что для молодого ученого необходимо, чтобы его специальность «была у него главным предметом, и он не... отрывался от нее никакими другими занятиями».

В 1733 г. Эйлер женился на Екатерине Гзель, дочери академического живописца родом из Швейцарии, вывезенного Петром I из Голландии. Из тринадцати их детей выжили три сына и две дочери. Для благочестивого сына сельского пастора семья была крепостью, в которой он мог уберечься от вольных нравов северной столицы. Размеренная семейная жизнь, маленькие радости были необходимы Эйлеру для спокойной работы. Никакие научные занятия не могли быть для него поводом пренебречь семейными обязанностями. Например, он никогда не был безразличным к финансовым проблемам (ему приписываются слова «Где больше дадут, туда и служить пойду»).

1740 год был, возможно, самым тяжелым годом в жизни Эйлера. С одной стороны, все признаки благополучия: его академический оклад достиг максимума — 1200 руб.; он успел многое понять в жизни русского общества; ему оказывал «честь своим особливым расположением» фельдмаршал Миних; Эйлер ладил даже со всемогущим управителем академии Шумахером, что удавалось немногим академикам. (Возможность спокойно заниматься наукой была для Эйлера важнейшим делом, да и вообще он всю жизнь избегал конфликтов. Можно вспомнить многолетние добрые отношения с И. Бернулли, который постоянно ссорился не только с учениками, но и с братом Якобом и сыном Даниилом). С другой стороны, великий ученый, только приближавшийся к тридцатитрехлетнему рубежу, успел из-за постоянных перегрузок основательно подорвать свое здоровье. В 1840 г. он оказался

kvant.mccme.ru

в тяжелой депрессии, что было связано не только со здоровьем, но и с постоянным напряжением из-за неустойчивости политической жизни в России. Позже он вспоминал, что «после кончины достославной императрицы Анны — при последовавшем тогда регенстве, дела стали идти плохо». К тому времени появляется возможность переехать в Берлин к Фридриху II и Эйлер подает заявление об отставке: «...того ради нахожусь принужден, как ради слабого здоровья, так и других обстоятельств, искать приятнейшего климата и принять от его королевского величества прусского учиненное мне призывание. Того ради прошу императорскую академию наук всеподдаиейше меня милостиво уволить и снабдить для моего и домашних моих проезду потребным пашпортом...» Он обещает сохранить контакты с Академией, «а пришедши в лутчее здоровье, из немецкой земли опять в Россию возвратиться». Впрочем, в Пруссию Эйлер писал, что «твердо решился жить под славным правлением» Фридриха. 29 мая 1741 г. Эйлер увольняется со службы, а позднее удовлетворяется его просьба «почетным членом Академии наук учинить, с определением пенсии по двести рублев в год». Такая практика перевода уезжающих членов Академии в почетные с обязательством оказывать помощь Академии была обычной. С Эйлера берется обещание «через всегдашнюю корреспонденцию и другими математическими пиесами более того служить, нежели как он в действительной академической службе был».

На службе у «коронованного философа».

Итак, Эйлер в Берлине. Постепенно он втягивается в берлинскую жизнь. Поручений здесь не меньше, чем в Петербурге: он рекомендует королю книги по баллистике и сам печатает три тома работ на эту тему, обследует нивелировку канала между Гавелем и Одером и состояние дел в солеварнях, участвует в организации государственных лотерей и реформе вдовьих касс, дает отзывы на множество проектов. Все быстро поняли, что он может хорошо делать разнообразные дела и ни от чего не отказывается. После организации Берлинской Академии наук (1744 г.) Эйлер — директор ее математического департамента.

Однако отношения с королем сложились не самым лучшим образом. Показательно, что оклад Эйлера составлял половину оклада президента Академии Мопертюи. Эйлер редко удостаивался монаршей похвалы.

В Берлине считали, что в обязанности ученых входит служить украшением гостиных, радовать приятной беседой. Французские ученые Мопертюи и Даржан блестяще владели этим искусством, а Эйлер — нет. В 1746 г. с Эйлером познакомился брат Фридриха Август-Вильгельм, он делится с королем своими впечатлениями: «...г. Мопертюи познакомил меня с математиком Эйлером. Я нашел, что в нем подтверждается та истина, что все вещи несовершенны. Благодаря прилежанию он развил в себе логическое мышление и приобрел тем самым имя, но его внешность и неловкая манера выражаться затемняют все его прекрасные качества и мешают получить от них удовольствие».

Эйлер делил свое время между наукой и домом, но он не принадлежал к категории ученых, не интересовавшихся внешними событиями и избегавших общения с людьми. Его научные познания были энциклопедичны, он много знал по ботанике, химии, анатомии, медицине, хорошо знал языки «древние» и «восточные», владел русским языком. После его смерти вспоминали, что он хорошо знал «лучших писателей древнего мира», «древнюю литературу по математике», «историю всех времен и народов». Н. И. Фусс писал в своих воспоминаниях, что Эйлер знал наизусть «Энеиду», причем помнил, каким стихом начинается и каким кончается каждая страница его экземпляра. Впрочем, для прусского двора культурный уровень Эйлера оказался «недостаточным». Эйлер, прочно завоевавший репутацию одного из крупнейших, а может быть, крупнейшего математика Европы, в окруже-

kvant.mccme.ru

нии Фридриха был обречен оставаться человеком второго сорта.

После окончания Семилетней войны (1763 г.) Эйлер все решительнее думает о возвращении в Россию. В 1746 и 1750 гг. он уже получал приглашения через президента Академии графа К. Г. Разумовского, но тогда вежливо отложил принятие решения на неопределенный срок.

С восшествием на русский престол Екатерины II (1762 г.) переговоры о переезде возобновились с новой силой. Екатерине II очень хотелось получить Эйлера. Эйлер едва не уехал в Россию в 1763 г., но все же отказался от переезда. Однако через два года Эйлер вызвал гнев короля, заступившись во время ревизии за академического казначея.

Эйлер сообщает в Россию свои условия: оклад в 3000 руб. (такой оклад получал президент, оклад академика обычно не превышал 1200 руб.), место академика по физике для сына Иоганна-Альбрехта, подходящие места для других сыновей (артиллериста и врача), квартира, свободная от солдатского постоя, и, наконец, учреждение для него поста вице-президента с соответствующим чином. Когда-то Фридрих отказался предоставить Эйлеру вакантный пост президента Берлинской Академии. Теперь Эйлер хотел хотя бы отчасти реализовать свои честолюбивые планы в Петербурге (на место президента он не претендовал, считая, что в России его должен занимать вельможа). 6 января 1766 г. Екатерина пишет канцлеру графу Воронцову: «Письмо к Вам г. Эйлера доставило мне большое удовольствие, потому что я узнаю из него о желании его снова вступить в мою службу. Конечно, я нахожу его совершенно достойным желаемого звания вице-президента Академии наук, но для этого следует принять некоторые меры, прежде чем я установлю это звание — говорю установлю, так как доныне его не существовало. При настоящем положении дел там нет денег на жалование в 3000 рублей, но для человека с такими достоинствами, как г. Эйлер, я добавлю к академическому жалованию из государственных доходов, что вместе составит требуемые 3000 рублей. У него будет казенная квартира и ни малейшей тени солдат. ...Я уверена, что моя Академия возродится из пепла от такого важного приобретения, и заранее поздравляю себя с тем, что возвратила России великого человека». Узнав о желании Эйлера принять участие в перестройке Академии, императрица обещает «не предпринимать до его приезда никаких перемен в Академии, на тот конец, чтобы лучше уговориться с ним об улучшениях...». С великим дипломатическим мастерством Эйлеру отказывают в чине: «Я дала бы, когда он хочет, чин, если бы не опасалась, что этот чин сравняет его с множеством людей, которые не стоят г. Эйлера. Поистине его известность лучше чина для оказания ему должного уважения». Эйлер, вероятно, быстро понял, что щедрая императрица умеет четко объяснить границы дозволенного, согласился со всеми условиями и решил «кончить дни свои на службе этой несравненной государыни».

kvant.mccme.ru

Снова в России

Эйлер прибыл в Петербург 17 июля 1766 года. Он отсутствовал ровно 25 лет и приближался к своему шестидесятилетию. Поначалу Эйлер всерьез принял предложение Екатерины принять участие в реорганизации Академии. Он привез с собой подробный проект, причем он не стремился к автономии Академии, а, напротив, ориентировался на тесное переплетение деятельности Академии и правительственных учреждений. Однако постепенно выяснилось, что императрица не склонна передоверять Эйлеру руководство Академией. Эйлер получил еще один урок того, что просвещенные монархи любят, чтобы их ученые знали свое место.

Эйлер привез с собой в Петербург кипу рукописей, которые не удалось опубликовать в Берлине из-за почти прекратившейся во время войны издательской деятельности. Но еще больше привез он в своей голове почти созревших, но не реализованных замыслов. А жизнь подсказывала ученому, что он должен торопиться. Вскоре после приезда он лишается зрения во втором глазу, но не прекращает работать, диктуя свои сочинения мальчику, не имевшему ни малейшего представления о математике. Приглашенный императрицей окулист барон Вентцель удалил катаракту на одном глазу, но предупредил, что перегрузка неминуемо приведет к возвращению слепоты. Так и случилось вскоре, ибо Эйлер предпочел потерю зрения пассивности. Он пробует привлечь к занятиям других ученых: своего сына, академиков Крафта, Фусса и Лекселя, но больше всего диктует то, что он знал и хотел поведать людям. За полтора десятка лет он продиктовал более 400 статей и 10 больших книг. К слепоте стала присоединяться глухота. В 1766 г. умирает жена и Эйлер женится на ее сестре (так проще всего было сохранить порядок, принятый в доме). Сгорел дом и большая часть имущества. Ничто не может заставить Эйлера прервать работу. Летом 1777 г. Эйлера посетил Иоганн Бернулли (1747—1807), племянник Даниила. Вот его впечатления: «Здоровье его довольно хорошо, и этим он обязан умеренному и правильному образу жизни. Зрением, по большей части утраченным, а одно время вовсе потерянным, он, однако, теперь лучше пользуется, чем многие воображают! Хотя он не может узнать никого в лицо, читать черного на белом и писать пером на бумаге, однако пишет на черном столе свои математические вычисления мелом очень ясно и порядочно в обыкновенную величину. Потом они вписываются в большую книгу одним или другим из его адъюнктов, Фуссом или Головиным (чаще первым из них). И из этих-то материалов составляются под его руководством статьи».

Эйлер сохранил работоспособность до последних дней. Второй петербургский период продолжался 17 лет. В 1783 г. окончил свои дни сын сельского пастора, ставший величайшим математиком Европы. Похоронили Эйлера на Смоленском кладбище. Надпись на памятнике гласила: «Здесь покоятся бренные остатки мудрого, справедливого, знаменитого Леонарда Эйлера». Через 50 лет обнаружилось, что могила утеряна, и лишь случайно (во время похорон невестки ученого) обнаружили «камень, погрузившийся мало-помалу от собственной тяжести в землю и поросший дерном». В Академии почувствовали себя неловко и решили установить новый памятник, «достойный знаменитого геометра». В 1957 г. останки Эйлера были перенесены в Некрополь Александро-Невской Лавры, где и сегодня можно увидеть его могилу.

(Окончание в следующем номере)

kvant.mccme.ru

Изменение фигуры Земли и ее вращения

Кандидат физико-математических наук
А. В. БЯЛКО

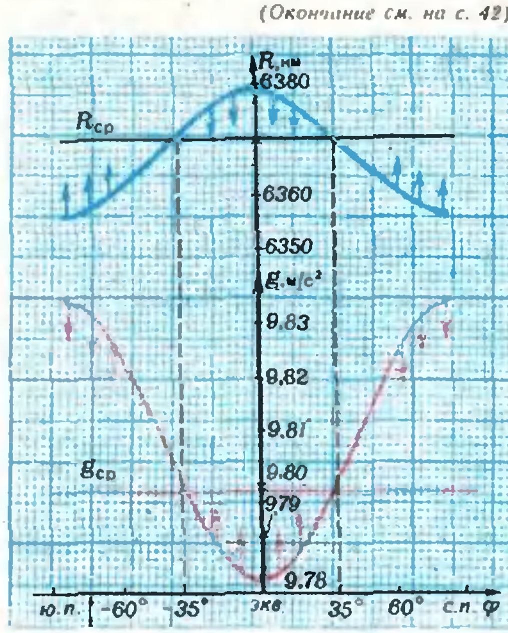
Два года назад в «Докладах Академии наук» и сразу же в журнале «Наука и жизнь» появилось сообщение, от которого сильнее забились сердца физиков. Как показали измерения, проведенные советскими учеными в трех точках Земного шара — в Потсдаме, на станции Лёдово под Москвой и в Новосибирске, ускорение силы тяжести во всех указанных пунктах с течением времени регулярно уменьшается на величину порядка 10^{-7} м/с^2 за год. Недавно известные геофизики Ю. Д. Буланже и Н. Н. Парийский дали объяснение этому удивительному факту. Оказывается, уменьшение ускорения отнюдь не означает, что уменьшается масса Земли или гравитационная постоянная. Причиной всему — изменение фигуры Земли. Попытаемся это объяснить.

Как известно, вращение Земли вокруг своей оси приводит к тому, что наша планета не точный шар, а слегка сплюснутый у полюсов: его экваториальный радиус приблизительно на 21,4 км больше полярного. Кроме того, из-за этого вращения ускорение силы тяжести (чаще называемое ускорением свободного падения), измеряемое в земных условиях, то есть во вращающейся системе отсчета, не есть чисто гравитационное ускорение, а представляет собой разность гравитационного и центростремительного ускорений: $g = GM/R^2 - \omega^2 R\cos\varphi$. Здесь G — гравитационная постоянная, M — масса Земли, R — расстояние до центра Земли, зависящее от широты (см. рисунок), ω — угловая скорость вращения Земли, φ — географическая широта места. Таким образом, измеряемое ускорение меняется с широтой: оно минимально на экваторе и максимально на полюсах.

Еще Лаплас, автор классического «Трактата о небесной механике», подозревал, что вращение Земли не совсем равномерно во времени. Теперь нам известно несколько тому причин. Во-первых, вращение замедляется океанскими приливами, которые вызваны притяжением Луны и Солнца. Величину этого постоянного замедления, называемого вековым (в отличие от других, более кратковременных, изменений угловой скорости), удалось найти, используя данные о полных солнечных затмениях в древности. Она оказалась очень малой.

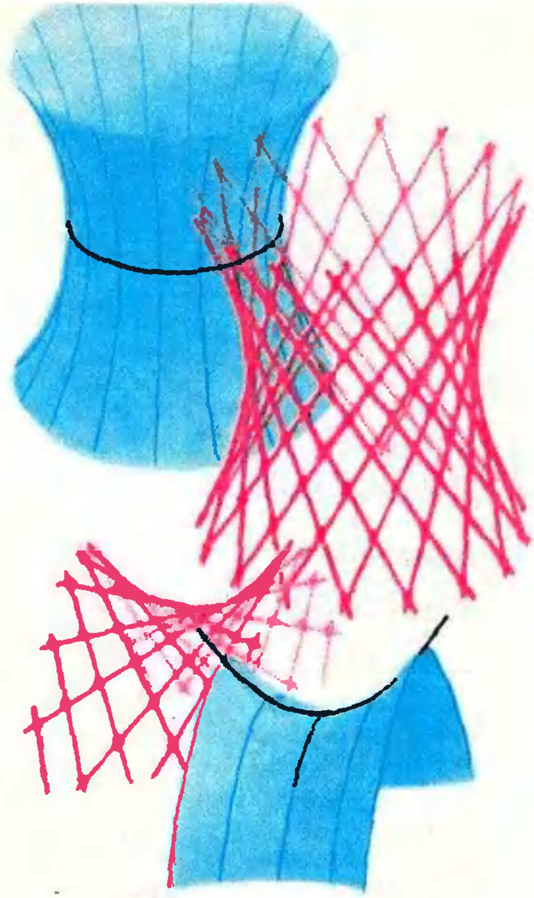
Сохранились сведения о том, например, что одно из полных солнечных затмений наблюдали жители Вавилона 15 апреля 136 г. до н. э. Если сделать соответствующий расчет в предположении, что скорость вращения Земли неизменна, то окажется, что в указанный день действительно должно было бы произойти затмение, но не в Вавилоне, а примерно на 49° западнее его. Однако затмение наблюдалось именно в Вавилоне, откуда можно заключить, что угловое смещение полосы затмения вызвано накопившимся изменением угловой скорости вращения Земли. Для оценки будем считать, что угловая скорость уменьшалась равномерно, то есть с постоянным угловым ускорением $\beta = \Delta\omega/t$. С момента затмения прошло примерно 2100 лет, или $t = 6{,}7 \cdot 10^{10}$ с. По аналогии с равноускоренным прямолинейным движением запишем формулу зависимости углового смещения α ($\alpha = 49° \approx 0{,}85$ рад) от времени: $\alpha = \beta t^2/2$. Отсюда угловое ускорение, то есть быстрота изменения угловой скорости, $\beta = \Delta\omega/t \approx 3{,}8 \times 10^{-32}$ с$^{-2}$.

(Окончание см. на с. 42)



Под редакцией Д. Б. ФУКСА

Прямые на кривой поверхности



То, что на сильно искривленной поверхности могут целиком помещаться прямые, не удивит читателя, рассмотревшего обложку предыдущего номера «Кванта». Мы еще не раз обратимся к этому феномену на наших геометрических страничках; сегодня же мы поговорим о поверхностях, на которых этих прямых особенно много.

Поверхность называется *линейчатой*, если через каждую ее точку проходит целиком содержащаяся в ней прямая; прямые, лежащие на линейчатой поверхности, называются ее *прямолинейными образующими*. Поверхность называется *двукратно линейчатой*, если через каждую ее точку проходит по крайней мере две различные прямолинейные образующие.

Простейший пример неплоской двукратно линейчатой поверхности — «однополостный гиперболоид вращения». Это — поверхность, получающаяся при вращении гиперболы вокруг не пересекающей ее оси симметрии (рис. 1). В системе координат $OXYZ$ с началом в центре гиперболы и с осью OZ, проходящей по оси вращения, уравнение нашей поверхности имеет вид

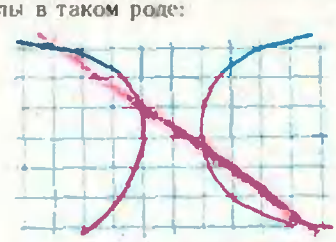
$$x^2+y^2=a^2z^2+b^2, \qquad (1)$$

где a и b — длины отрезков, отмеченных на рисунке 1. Мы не занимаемся выводом этого уравнения, и оно нам почти не понадобится. Важно лишь, что наша поверхность задается многочленом второй степени от x, y, z, то есть наш гиперболоид есть, как говорят, *поверхность второго порядка*.

Следующее свойство нашего гиперболоида является, в действительности, общим для всех поверхностей второго порядка: *если прямая имеет с гиперболоидом по крайней мере три общие точки, то она в нем содержится*.

Доказательство. Пусть l — любая прямая и $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ — любые две ее точки. Вектор $\overrightarrow{A_1A_2}$ имеет координаты $(x_2-x_1;\ y_2-y_1;\ z_2-z_1)$. Пусть A — произвольная точка прямой l. Тогда вектор $\overrightarrow{A_1A}$ коллинеарен $\overrightarrow{A_1A_2}$; значит, он имеет координаты $(\lambda(x_2-x_1);\ \lambda(y_2-y_1);\ \lambda(z_2-z_1))$, где λ — некоторое число. Значит, точка A, в свою очередь, имеет координаты $(x_1+\lambda(x_2-x_1);\ y_1+\lambda(y_2-y_1);\ z_1+\lambda(z_2-z_1))$. Чтобы точка A лежала на нашей поверхности, необходимо, чтобы ее координаты удовлетворяли уравнению поверхности. Подставляя эти координаты в уравнение (1) и перенося все члены в левую часть, мы получаем уравнение относительно λ вида $\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma=0$, где коэффициенты α, β, γ легко подсчитываются (они зависят от a, b, x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2), но их явное выражение нам не нужно. Если хотя бы один из этих коэффициентов α, β, γ не равен нулю, последнее уравнение имеет не более двух решений, то есть прямая имеет не более двух общих точек с поверхностью, что невозможно по условию. Значит, $\alpha=\beta=\gamma=0$, и при любом λ точка A лежит на поверхности.

Кстати, точно так же доказывается, что *кривая второго порядка* (то есть кривая на плоскости, заданная многочленом второй степени от неизвестных x, y) пересекается с прямой (не содержащейся в ней) не более чем в двух точках. (В школьных тетрадях приходится иногда видеть небрежный рисунок гиперболы в таком роде:



Красная прямая пересекает эту «гиперболу» в 4 точках, что невозможно: ведь гипербола — кривая второго порядка!)

kvant.mccme.ru

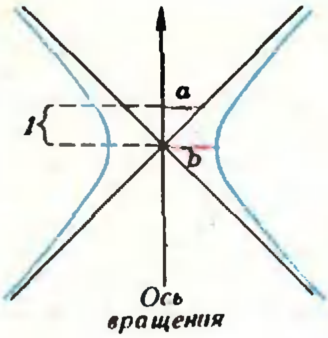


Рис. 1.

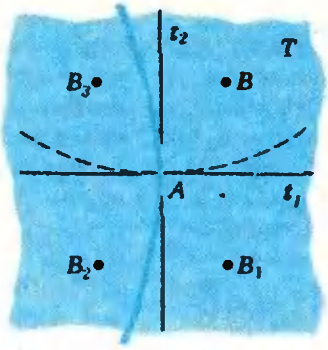


Рис. 2.

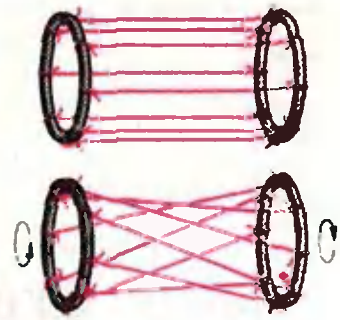
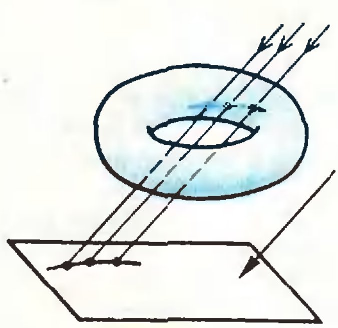


Рис. 3.

Вернемся к нашему гиперболоиду. Возьмем точку A на горловой окружности (то есть на линии пересечения гиперболоида с плоскостью XOY), проведем касательную l_1 к этой окружности и касательную l_2 к соответствующему положению вращаемой гиперболы, а затем проведем через прямые l_1 и l_2 плоскость T. Заметим, что окружность и гипербола, которых касаются прямые l_1 и l_2, лежит по разные стороны от плоскости T. Поэтому в любой из четырех четвертей, на которые прямые l_1 и l_2 делят плоскость T, найдется общая точка гиперболоида и плоскости. Пусть B — одна из таких точек (рис. 2). Так как, очевидно, наш гиперболоид симметричен относительно плоскостей, проведенных через l_1 и l_2 перпендикулярно T, его пересечение с T симметрично относительно l_1 и l_2 и вместе с точкой B ему принадлежат точки B_1, B_2 и B_3, образующие с B прямоугольник с центром A. Каждая из диагоналей l_1, l_2 этого прямоугольника имеет с гиперболоидом три общие точки (соответственно, B, A, B_2 и B_1, A, B_3). Значит, согласно доказанному выше, каждая из них содержится в нашем гиперболоиде. Остается заметить, что это рассуждение применимо к любой точке A горловой окружности. Прямые l_1 и отдельно прямые l_2 заметают весь гиперболоид. Таким образом, *однополостный гиперболоид вращения — двукратно линейчатая поверхность.*

В заключение два замечания. Первое состоит в том, что *однополостный гиперболоид вращения является также поверхностью вращения одной прямой вокруг другой, ей не параллельной* (докажите это!). Из этого видно, что соорудить гиперболоид легче, чем нарисовать гиперболу: достаточно связать нитками два одинаковых обруча, как показано на рисунке, и повернуть один обруч относительно другого, держа все нити в натянутом состоянии (рис. 3). Заменив обручи на картонные круги, посаженные на общую ось, можно соорудить такую модель для школьного математического кабинета. Вопрос на сообразительность: можно ли сделать нитяной гиперболоид, имея два неодинаковых обруча?

Второе замечание. Заключается оно в том, что двукратно линейчатых поверхностей существует немного. Если сжать гиперболоид к любой плоскости, то он, конечно, сохранит свою двукратную линейчатость; возникающая поверхность называется *однополостным гиперболоидом* (не «вращения», а просто). Другой пример линейчатой поверхности второго порядка — *гиперболический параболоид.* Эта поверхность получится, если в каждой точке параболы, ось которой вертикальна и направлена вверх, подвесить за вершину перпендикулярную ей параболу (см. рисунок в начале «странички»; подвешиваемые параболы все одинаковы, парабола подвески может иметь другие размеры). Гиперболический параболоид — тоже поверхность второго порядка, в подходящей системе координат он имеет уравнение $z=xy$. Других связных (то есть состоящих из одного куска) двукратно линейчатых поверхностей не бывает.



Задание к следующему выпуску геометрической странички.

Тор (поверхность вращения окружности вокруг не пересекающей ее оси, лежащей с ней в одной плоскости) пронизывается пучком параллельных прямых, которые пересекают затем плоскость («экран»). Мы рассматриваем только те прямые, которые касаются тора. Точки касания мы отмечаем синим карандашом, точки пересечения наших прямых с экраном — красным. На торе возникает синяя линия, на экране — красная. Попробуйте их нарисовать. (Особенно интересный результат получится, если угол наклона прямых к плоскости осевой окружности тора невелик — меньше 45° — и если расстояние от оси вращения до вращаемой окружности не превышает радиуса окружности.)

kvant.mccme.ru

Перед школьной олимпиадой

Кандидат физико-математических наук
А. Г. ГЕЙН

Сегодняшнее занятие математического кружка следует рассматривать как подготовительное к олимпиадам.

Для многих школьников математические олимпиады — это первый шаг в знакомстве с внешкольной математикой. На олимпиадах ребята учатся применять свои знания к решению нестандартных задач, соревнуются со сверстниками из других школ и городов. Обычно на олимпиаде предлагаются задачи, которые условно можно назвать алгебраическими, геометрическими, числовыми и логическими. Мы предлагаем вашему вниманию несколько таких задач уровня школьных и районных олимпиад (цифра в скобках указывает класс, в котором предлагалась задача*)). Краткие решения и указания ко всем задачам вы найдете в следующем номере журнала.

Начнем с задач алгебраических и геометрических — они, пожалуй, не нуждаются в комментариях.

1. На дне озера бьют ключи. Стадо из 183 слонов могло бы выпить озеро за один день, а стадо из 37 слонов — за 5 дней. За сколько дней выпьет озеро один слон? (7)

2. Пусть a, b, c, d — целые числа и $a+b+c+d=0$. Докажите, что число $a^2+b^2+c^2+d^2$ можно представить в виде суммы квадратов трех целых чисел. (7)

3. Даны не равные нулю числа a, b, p, q такие, что $p+q=1$ и $\frac{p}{a}+\frac{q}{b}=\frac{1}{pa+qb}$. Докажите, что $a=b$. (8)

4. Найдите все числа a, b, c, d такие, что

$$\begin{cases} abc=a+b+c, \\ bcd=b+c+d, \\ cda=c+d+a, \\ dab=d+a+b. \end{cases} \qquad (8)$$

5. Найдите все числа x, y, z такие, что

$$\begin{cases} x^4+y^4+z^4=3, \\ x^5+y^5+z^5=3, \\ x^6+y^6+z^6=3. \end{cases} \qquad (9)$$

6. Определите значение параметра k, если известно, что неравенство $\left|\frac{x^2+kx+10}{x^2+3x+10}\right|<1$ выполняется для всех x. (9)

7. При каком α уравнение $1+\sin^2\alpha x=\cos x$ имеет единственное решение? (10)

8. Решите уравнение $x^3-[x]=4$, где $[x]$ — целая часть числа x. (10)

9. Найдите

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)\left(1+\frac{1}{15}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n^2+2n}\right). \qquad (10)$$

10. Докажите, что если каждая диагональ выпуклого четырехугольника разбивает его на два конгруэнтных треугольника, то этот четырехугольник — параллелограмм. (7)

11. Две окружности касаются внутренним образом в точке M. На первой окружности постройте точку A, а на второй — точку B так, чтобы треугольник ABM был равносторонним. (8)

12. Каково множество центров окружностей, вписанных в треугольник ABM, когда точка M пробегает окружность, а AB — фиксированная хорда этой окружности? (9)

13. Пусть $ABCD$ — треугольная пирамида. Докажите, что отрезки, соединяющие вершины пирамиды с точками пересечения медиан противолежащих этим вершинам граней,

---

*) Эти задачи предлагались школьникам Свердловской области в разные годы. Свердловские областные олимпиады по математике организуются учеными Института математики и механики Уральского научного центра АН СССР и Уральского государственного университета им. А. М. Горького. Единое жюри составляет варианты от школьного до областного туров. Об олимпиадах в Свердловске см. «Квант», 1983, № 9

kvant.mccme.ru

пересекаются в одной точке и делятся ею в отношении 3:1, считая от вершины. (10)

Числовые задачи — это, в основном, задачи на делимость и решение уравнений в целых числах. Такие задачи в школе практически не встречаются и участнику олимпиады приходится изобретать методы их решения непосредственно в «боевой» обстановке. Начнем с совсем простых задач.

14. Сумма 1982 целых чисел нечетна. Докажите, что произведение этих чисел четно. (7)

15. Докажите, что число 2^9+2^{99} делится на 100. (7)

В задачах на целые числа часто помогает делимость на 3 и на 9.

16. Докажите, что ни при каких натуральных m и n число 10^m+1 не делится на 10^n-1. (7)

17. Найдите все двузначные числа, сумма цифр которых не меняется при умножении на 2. (7)

18. Докажите, что уравнение $x^2+1=3y$ не разрешимо в целых числах. (7)

В последней задаче используется тот факт, что *если сумма квадратов двух целых чисел делится на 3, то каждое слагаемое делится на 3*. Это утверждение верно и для числа 7, и для числа 11, и вообще для всех простых чисел вида $4k+3$. Но это уже — «настоящая» математическая теорема, впервые доказанная П. Ферма. Как видите, от олимпиадной задачи до математической теоремы — один шаг. Только как его сделать?

19. Умножение на 9 изменяет порядок цифр некоторого четырехзначного числа на обратный. Найдите это число. (7)

20. Найдите все натуральные числа x, y, z, для которых выполняется равенство $xyz=x+y$. (7)

21. Найдите все натуральные числа, обладающие следующим свойством: существует такое k, $1<k<8$, что если все цифры квадрата этого числа уменьшить на k единиц, то получится квадрат числа, которое на k меньше, чем исходное. (10)

Логические задачи обычно называют «чисто олимпиадными». Вот несколько таких задач.

22. Докажите, что среди 82 кубиков, каждый из которых выкрашен в определенный цвет, всегда можно выбрать 10 кубиков так, что либо все они выкрашены в разные цвета, либо все они — одного цвета. (7)

23. Плоскость произвольным образом раскрашена в два цвета. Докажите, что найдутся две точки одного цвета на расстоянии 1 м друг от друга. (7)

24. а) Докажите, что среди любых 11 натуральных чисел найдутся два, разность которых делится на 10.

б) Докажите, что среди любых $k+1$ натуральных чисел найдутся два, разность которых делится на k. (7)

25. По краю круглого стола равномерно расставлены таблички с фамилиями дипломатов, участвующих в переговорах. После начала переговоров оказалось, что ни один из дипломатов не сидит против своей таблички. Можно ли повернуть стол так, чтобы по крайней мере два дипломата сидели против своих табличек? (8)

Основная идея, используемая при решении этих четырех задач, заключена в следующем легко доказываемом утверждении, называемом *принципом Дирихле: если $kn+1$ предметов разложено в k ящиков, то по крайней мере в одном ящике лежит не менее $n+1$ предметов*. Надо только сообразить, что принять за «предметы», а что — за «ящики».

Та же идея избыточности используется и в следующих трех задачах.

26. Внутри квадрата со стороной 1 расположено несколько окружностей, сумма длин которых равна 10. Докажите, что найдется прямая, пересекающая по крайней мере четыре из этих окружностей. (9)

27. В окружности радиуса 1 проведено несколько хорд, суммарная длина которых больше, чем 7π. Докажите, что найдется диаметр, пересекающий не менее восьми хорд. (9)

28. Внутри круга радиуса 16 расположено 650 точек. Докажите, что найдется кольцо ширины 1 и внутреннего радиуса 2, содержащее не менее десяти из этих точек. (10)

В задачах, где известные в каком-то смысле равноправны, полезно рас-

kvant.mccme.ru

смотреть «экстремальный» (то есть крайний) по отношению к некоторому свойству элемент (самый левый, самый верхний, самый длинный, наибольший, наименьший и т. п.).

29. В каждой вершине десятиугольника записано число, причем каждое число равно полусумме чисел, написанных в соседних вершинах. Докажите, что все десять чисел равны между собой. (7)

30. Докажите, что в любом выпуклом пятиугольнике можно выбрать три диагонали так, что из них можно составить треугольник. (8)

31. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2=x_3^2, \\ x_2+x_3=x_4^2, \\ x_3+x_4=x_5^2, \\ x_4+x_5=x_1^2, \\ x_5+x_1=x_2^2. \end{cases} \qquad (10)$$

32. Найдите положительные решения системы уравнений

$$x^2+y^2=1, \quad x^y=y^x. \qquad (9)$$

33. Можно ли 44 монеты разложить по 10 кошелькам так, чтобы любые два из них содержали различное число монет? (Считаем, что два пустых кошелька содержат одинаковое число монет.) (8)

34. В квадрате со стороной 1 отмечено 500 различных точек. Докажите, что среди отмеченных точек можно выбрать 12 точек $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{12}$ так, что длина ломаной $A_1A_2 \ldots A_{12}$ меньше 1. (10)

Часто на олимпиадах предлагаются задачи, в условии которых приводится описание некоторого способа действий и спрашивается, может ли в результате этих действий получиться тот или иной результат. Основным методом решения таких задач является обнаружение свойства исходного объекта, не меняющегося при выполнении действий, указанных в задаче (такое свойство называют *инвариантом*). Если конечный объект задачи не обладает найденным свойством, то он, очевидно, не может быть получен в результате описанных действий.

Вот несколько подобных задач.

35. На чудо-яблоне садовник вырастил 25 бананов и 30 апельсинов. Каждый день он срывает два плода и тут же на яблоне вырастает новый, причем если он срывает два одинаковых плода, то вырастает апельсин, а если он срывает два разных плода, то вырастает банан. Каким окажется последний плод на этом дереве? (7)

36. Даны три числа: 2; $1+\sqrt{2}$; $1-\sqrt{2}$.

а) За один ход разрешается написать новые три числа, заменив каждое из исходных чисел полусуммой двух других чисел. Можно ли, проделав эту операцию несколько раз, придти к набору 1; $2+\sqrt{2}$; $2-\sqrt{2}$?

б) За один ход разрешается любые два числа заменить их суммой, деленной на $\sqrt{2}$, и разностью, деленной на $\sqrt{2}$, оставив третье число неизменным. Можно ли, проделав эту операцию несколько раз, прийти к набору 1; $\sqrt{2}$; $1/\sqrt{2}$? (8)

37. Три кузнечика играют в чехарду: если кузнечик из точки A прыгает через кузнечика в точке B, то он оказывается в точке C, симметричной точке A относительно точки B. В исходном положении кузнечики занимают три вершины квадрата. Могут ли они, играя в чехарду, попасть в четвертую его вершину? (8)

В задачах на клетчатой бумаге или на шахматной доске найти инвариант помогает удачная раскраска.

38. У шахматной доски 8×8 вырезаны левая верхняя и правая нижняя угловые клетки. Можно ли ее замостить косточками домино, покрывающими ровно две клетки доски, так, чтобы покрыть без наложений всю такую доску? (7)

39. Можно ли из четырехклеточных фигурок, изображенных на рисунке, составить квадрат размером 50×50 клеток? (9)

40. Из шахматной доски 8×8 вырезана одна угловая клетка. Можно ли оставшуюся часть покрыть без наложений прямоугольниками, составленными из трех клеток? (9)

Самая лучшая подготовка к олимпиаде — самостоятельное решение «олимпиадных» задач. Желаем вам успеха!

kvant.mccme.ru

$n^x = x^n$

Л. Б. ПЕЧЕРСКИЙ

Сколько корней имеет это уравнение, если $n \in \mathbb{N}$ и $n \neq 1$?

С отрицательными корнями все просто и ясно: если n — четное, уравнение имеет один отрицательный корень (набросайте график!); если n — нечетное, таких корней нет.

Займемся положительными корнями. Данное уравнение равносильно уравнениям

$$\ln (n^x) = \ln (x^n),$$
$$x \cdot \ln n = n \cdot \ln x,$$
$$x \cdot \ln n - n \cdot \ln x = 0.$$

Сколько же нулей*) имеет на $]0; +\infty[$ функция $y(x) = x \cdot \ln n - n \cdot \ln x$?

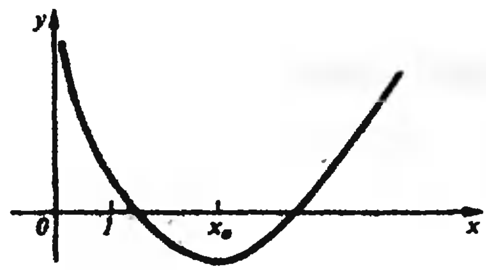
Ее производная $y'(x) = \ln n - \frac{n}{x}$ на $]0; +\infty[$ возрастает (набросайте график!). В точке $x_0 = \frac{n}{\ln n}$ $y'(x_0) = 0$; значит, на $]0; x_0[$ $y'(x) < 0$, на $]x_0; +\infty[$ $y'(x) > 0$. Так как функция y непрерывна в точке x_0, x_0 — точка ее минимума. На $]0; x_0]$ функция y убывает, на $[x_0; +\infty[$ — возрастает.

Какой же знак имеет функция y в точке x_0?

$$y(x_0) = n(1 - \ln n + \ln \ln n).$$

Чтобы определить знак числа $y(x_0)$, исследуем функцию $z(x) = 1 - \ln x + \ln \ln x$. Поскольку $z'(x) = \frac{1 - \ln x}{x \cdot \ln x}$, $x_1 = e$ — точка максимума функции z, причем на $]1; e]$ z возрастает, на $[e; +\infty[$ — убывает. Так как $z(x_1) = 0$, в остальных точках области определения $z(x) < 0$; в частности, при $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 1$ $z(n) < 0$. Значит, $y(x_0) < 0$.

Функция y непрерывна на $]0; +\infty[$. На $]0; x_0]$ она убывает. Поскольку «около нуля» (например, заведомо при $x < 1$) $y(x) > 0$, а $y(x_0) < 0$, на интервале $]0; x_0[$ функция y имеет ровно один нуль (см. рисунок).



Покажем, что при «больших» x («на плюс бесконечности») $y(x) > 0$. Для этого рассмотрим функцию $u(x) = \frac{x}{\ln x}$. Поскольку $u'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$, u возрастает на $[e; +\infty[$. Если $n \geqslant 3$, то при $x > n \geqslant 3$

$$\frac{x}{\ln x} > \frac{n}{\ln n},$$
$$x \cdot \ln n > n \cdot \ln x,$$
$$x \cdot \ln n - n \cdot \ln x > 0,$$
$$y(x) > 0.$$

Докажите сами, что и при $n = 2$ $y(x) > 0$ при «больших» x.

Поскольку $y(x_0) < 0$, y возрастает и непрерывна на $[x_0; +\infty[$ и $y(x) > 0$, при «больших» x, на промежутке $]x_0; +\infty[$ функция y тоже имеет ровно один нуль (см. рисунок).

Итак, при $n \geqslant 2$ уравнение, стоящее в заголовке, имеет на $]0; +\infty[$ два корня: один — на $]0; x_0[$, другой — на $]x_0; +\infty[$.

Между прочим, один его корень: $x = n$ — очевиден сразу.

Задачи о числе корней некоторого уравнения $f(x) = g(x)$ встречаются на вступительных экзаменах. Как правило, даются уравнения, недоступные алгебраическим средствам. В подобных случаях часто бывает полезно исследовать функции f, g, входящие в уравнение, а тут уж совершенно естественно использовать средства анализа.

*) Число a называется *нулем* функции f, если $f(a) = 0$.

kvant.mccme.ru

Где ошибка?

Кандидат физико-математических наук
Я. Е. ЖАК

К ученице 10 «А» класса Вале Бессоновой забежала ее подруга из 10 «Б» Катя Сапожникова и сразу же сообщила:

— Что у нас сегодня на уроке математики Воробьев устроил!

— Что же? — спросила Валя.

— Елена Васильевна доказывала, что показательная функция растет быстрее, чем любая степенная функция*). Все было вроде бы понятно. Елена Васильевна закончила доказательство, как вдруг Воробьев заявил, что может привести пример степенной функции, которая растет быстрее, чем показательная. Елена Васильевна послала его к доске, чтобы мы вывели его на чистую воду.

— И вывели? — спросила Валя.

— В том-то и дело, что нет! — ответила Катя. — До конца урока голову ломали над его рассуждением, но так и не нашли ошибки.

И Катя рассказала своей подруге это рассуждение. Вот оно.

Пусть $x_n=2^n/n^8$. Найдем несколько первых членов последовательности x_n:

$$x_1=2,\ x_2=\frac{1}{2^6},\ x_3=\frac{8}{6561},\ x_4=\frac{1}{2^{12}}.$$

Это наводит на мысль, что предел этой последовательности равен нулю. В самом деле, положим $x_0=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$. Заметим, что

$$x_n=2\cdot\frac{2^{n-1}}{(n-1)^8}\left(\frac{n-1}{n}\right)^8=2x_{n-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)^8.$$

Но, очевидно, $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n-1}=x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^8=1$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}=2\lim\limits_{n\to\infty}x_{n-1}$, откуда $x_0=2x_0$, то есть $x_0=0$. А это значит, что степенная функция n^8 растет быстрее, чем показательная 2^n!

Сообщим читателю, что Валя нашла-таки ошибку в этом рассуждении. В чем же она?

*) См. п. 70 учебного пособия «Алгебра и начала анализа 9—10»

Физика 8, 9, 10

Публикуемые ниже заметки «Перемещение при прямолинейном равноускоренном движении» и «О графике прямолинейного равноускоренного движения» предназначены восьмиклассникам, а заметки «Давление идеального газа» и «Физический смысл универсальной газовой постоянной» — девятиклассникам.
Материалы подготовил И. К. Белкин.

Перемещение при прямолинейном равноускоренном движении

В учебнике «Физика 8» выражение

$$s=v_0t+\frac{at^2}{2}$$

для перемещения тела (материальной точки) при прямолинейном равноускоренном движении выводится из графика зависимости скорости тела от времени. Но то же выражение можно получить и прямым вычислением. Покажем это.

Пусть точка движется вдоль прямой с ускорением a в течение времени t, начиная с некоторого начального момента $t=0$, когда скорость (начальная скорость) была равна v_0. Разделим мысленно все время движения на одинаковые малые промежутки времени Δt, настолько малые, что скорость в течение времени Δt можно считать постоянной. Однако будем считать, что к концу каждого такого промежутка скорость как бы скачком возрастает на величину $a\Delta t$ (движение ведь ускоренное).

За первый промежуток времени Δt перемещение Δs_1 равно $v_0\Delta t$. Во второй промежуток времени скорость уже равна $v_0+a\Delta t$, а перемещение Δs_2 равно $(v_0+a\Delta t)\Delta t=v_0\Delta t+a(\Delta t)^2$, в третий оно равно $(v_0+2a\Delta t)\Delta t=v_0\Delta t+2a(\Delta t)^2$ и т. д.

kvant.mccme.ru

Таким образом,

$$\Delta s_1 = v_0\Delta t,$$
$$\Delta s_2 = v_0\Delta t + a(\Delta t)^2,$$
$$\Delta s_3 = v_0\Delta t + 2a(\Delta t)^2,$$
$$\Delta s_4 = v_0\Delta t + 3a(\Delta t)^2,$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$\Delta s_n = v_0\Delta t + (n-1)\,a(\Delta t)^2,$$

где n — число промежутков, на которые мы разделили время движения t. Так как промежутки Δt малы, n велико, поэтому в правой части последнего равенства можно пренебречь единицей по сравнению с n и считать, что

$$\Delta s_n = v_0\Delta t + na(\Delta t)^2.$$

Общее перемещение s равно сумме всех малых перемещений Δs_i:

$$s = \Delta s_1 + \Delta s_2 + \Delta s_3 + \ldots + \Delta s_n,$$

или

$$s = nv_0\Delta t + a\Delta t^2(1+2+3+\ldots+n).$$

Сумма последовательных натуральных чисел равна полусумме крайних слагаемых, умноженной на их число: $1+2+3+\ldots+n = \frac{1+n}{2}\,n$. Пренебрегая единицей по сравнению с n, получаем

$$1+2+3+\ldots+n = \frac{n^2}{2}.$$

Отсюда

$$s = v_0 n\Delta t + \frac{a(n\Delta t)^2}{2}.$$

Но $n\Delta t = t$, а $(n\Delta t)^2 = t^2$, тогда окончательно

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

О графике прямолинейного равноускоренного движения

При изучении механического движения широко пользуются графиками, показывающими зависимость координаты тела от времени (график движения) и скорости тела от времени (график скорости). Графики, как и соответствующие формулы, полностью описывают движение, то есть позволяют определить координату и скорость в любой момент времени. Но график имеет преимущество наглядности (построив график какой-либо функции, можно как бы «увидеть» функцию).

В учебнике «Физика 8» приведены графики движения и скорости для прямолинейного равномерного движения, а также график скорости для прямолинейного равноускоренного движения. С помощью последнего графика была получена формула для перемещения s, а значит, и для координаты x тела, движущегося равноускоренно:

$$s = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \quad x = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Эти формулы, впрочем, можно получить и прямым вычислением (см., например, заметку «Перемещение при прямолинейном равноускоренном движении»). График же движения для этого случая не приведен, а он представляет немалый интерес. О нем и пойдет речь в этой заметке.

Как видно из последней формулы, выражение для координаты при равноускоренном движении — это квадратный трехчлен. В общем случае коэффициенты при t и t^2 и свободный член не равны нулю. График, выражающий такую функцию, называется параболой. Ее вид и расположение относительно осей координат зависит от трех констант — x_0, v_0 и a. На рисунке 1, например, изображена парабола, соответствующая уравнению

$$x = 3 + 12t + 3t^2.$$

Оно описывает прямолинейное равноускоренное движение с начальной скоростью $v_0 = 12$ м/с и ускорением $a = 6$ м/с^2. Начало отсчета времени — это момент времени, когда координата x тела (начальная координата) была равна $x_0 = 3$ м. Графиком такого движения служит, строго говоря, лишь правая часть кривой, показанная на рисунке 1 сплошной линией. Но если бы тело двигалось по той же прямой и с тем же ускорением и до момента времени, принятого за начало отсчета, то графиком его движения была бы и левая часть кривой тоже (она показана на рисунке 1 штриховой линией).

В качестве другого примера рассмотрим движение, представленное

kvant.mccme.ru

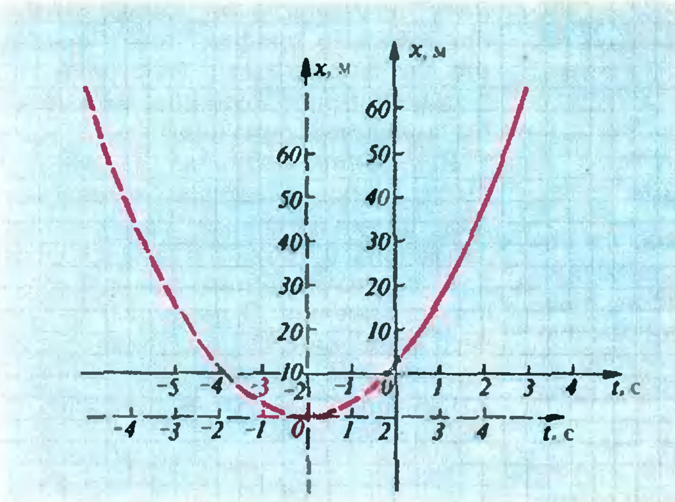


Рис. 1.

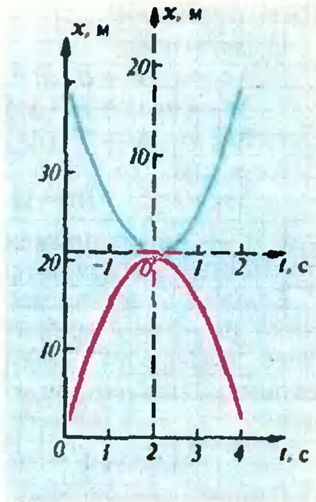


Рис. 2.

формулой

$$x=2+20t-5t^2.$$

Она описывает движение тела, которому в начальный момент времени $t=0$, когда его координата была равна $x_0=2$ м, сообщена начальная скорость $v_0=20$ м/с и которое в дальнейшем движется с постоянным ускорением $a=-10$ м/с^2. Это движение очень близко к движению тела, брошенного вертикально вверх (туда направлена ось X) с начальной скоростью 20 м/с с высоты 2 м над Землей. Мы лишь, для простоты, приняли ускорение свободного падения равным не 9,8 м/с^2, а 10 м/с^2. График этого движения приведен на рисунке 2 сплошной красной линией.

Из рисунка 2 очень ясно видно (яснее, чем из соответствующей формулы), как движется тело. Сначала оно поднимается вверх, быстро удаляясь от Земли. Через 2 секунды оно достигает максимальной высоты 22 м, после чего начинает двигаться вниз (падать). Движению вверх соответствует левая ветвь параболы, падению вниз — правая ветвь. Вообще парабола (с двумя ветвями) всегда изображает движение «туда и обратно». Синей линией на рисунке 2 показан график такого же равноускоренного движения, но с противоположно направленным ускорением.

В математике доказывается, что парабола, выражающая квадратный трехчлен вида

$$x=x_0+v_0t+\frac{at^2}{2},$$

параллельным переносом осей координат может быть преобразована в параболу, выражающую формулу

$$x=\frac{a}{2}t^2.$$

Применительно к нашему случаю для этого нужно ось t перенести вдоль оси X на расстояние, равное $x_0-v_0^2/2a$, а ось X перенести вдоль оси t на расстояние, равное $-v_0/a$. На рисунках 1 и 2 перенесенные по этому правилу оси показаны штриховыми линиями.

Такой перенос осей означает, что за начало отсчета времени теперь принимается тот момент, когда скорость тела равна нулю (при движении «туда и обратно» такой момент обязательно существует), а за начало отсчета координаты выбирается точка, в которой в этот момент находится тело. После переноса осей парабола становится симметричной относительно оси X. Значения координаты x в момент времени t и $-t$ и теперь одинаковы, поскольку в формулу входит только t^2 и замена t на $-t$ ничего не изменяет.

По такой параболе (в новых осях) легко найти ускорение. Ясно, что ордината точки параболы, соответствующей моменту времени $t=1$, равна $a/2$, откуда и находим a. Ускорение a можно найти и другим путем. Если построить график зависимости x не от t, а от t^2, то из формулы $x=at^2/2$ видно, что получится прямая, проходящая через начало координат. На рисунке 3 приведен такой график для нашего случая движения тела, брошенного вверх. Значение $a/2$, а значит и a, можно теперь найти, взяв для любой точки графика отношение ее ординаты к абсциссе. Иначе говоря, $a/2$ равно тангенсу угла наклона прямой к оси t.

Интересна еще одна особенность параболы, позволяющая легко определять и скорость движения тела. Известно, что если график движения представляет собой прямую (прямолинейное равномерное движение), то скорость определяется углом наклона прямой к оси t. График же прямолинейного неравномерного движения — всегда кривая. Если выделить на этой кривой участок, соответствующий промежутку времени Δt и изменению координаты Δx (рис. 4), то отношение $\Delta x/\Delta t$ будет равно средней скорости за время Δt. Как видно из рисунка 4, она определяется углом наклона хорды, стягивающей выделенный участок кривой (она равна тангенсу этого угла). Если беспредельно уменьшать промежуток времени Δt, устремляя его к нулю, то хорда перейдет в касательную к кривой в точке, соответствующей моменту времени t, а угол ее наклона определит уже мгновенную скорость в этот момент времени. Таким образом, чтобы найти по графику движения мгновенную скорость в какой-то момент времени, нужно провести касательную к графику в точке, соответствующей этому моменту, и найти тангенс угла ее наклона к оси t.

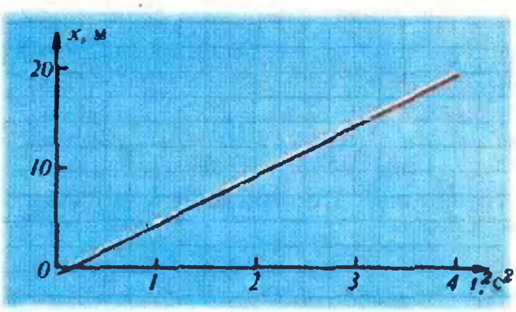


Рис. 3

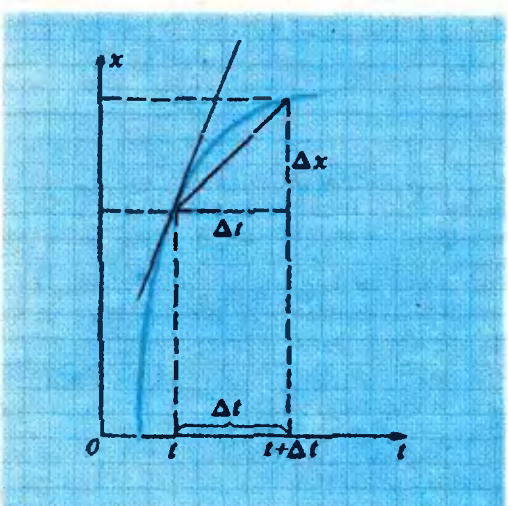


Рис. 4

Точное проведение касательной к кривой в заданной точке (если кривая не окружность) — задача не простая. Однако в случае прямолинейного равноускоренного движения, графиком которого является парабола, для определения скорости в любой момент времени касательную можно и не проводить. Эта особенность параболы (квадратного трехчлена) связана с тем обстоятельством, что при прямолинейном равноускоренном движении средняя скорость за любой промежуток времени равна полусумме начальной и конечной скоростей. Поэтому, чтобы, пользуясь параболой, найти мгновенную скорость в какой-то момент времени, нужно выбрать промежуток времени, для которого интересующий нас момент служит серединой. Тогда средняя скорость на этот промежуток оказывается равной мгновенной скорости в середине промежутка. А чтобы найти среднюю скорость, нужно провести хорду, а не касательную, что не представляет большого труда.

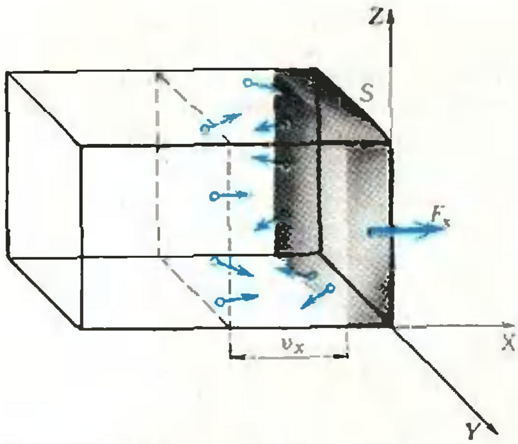
Давление идеального газа

Вывод выражения для давления идеального газа

$$p = \frac{1}{3}\, nm\overline{v^2} = \frac{2}{3}\, n\frac{m\overline{v^2}}{2},$$

приведенный в учебнике «Физика 9», основан на предположении, что моле-

kvant.mccme.ru



кулы ударяются о стенку сосуда обязательно упруго. Покажем, что эту же формулу можно получить и не делая никаких предположений о характере ударов молекул о стенку.*)

Достаточно знать, что молекулы движутся хаотически. Это, в частности, означает, что в любой момент времени число молекул, движущихся во взаимно противоположных направлениях, одинаково.

Кроме того, мы знаем, что давление p газа равно по определению

$$p=\frac{F}{S},$$

где F — сила, действующая на перпендикулярную ей поверхность площадью S. Значит, нам предстоит вычислить силу F. Это мы сделаем, пользуясь законами механики Ньютона.

Поместим наш газ в сосуд в виде прямоугольного параллелепипеда и направим оси координат X, Y и Z вдоль его ребер, как показано на рисунке. Найдем силу, с которой газ действует, например, на правую стенку сосуда. Очевидно, что ее надо обозначить через F_x.

По третьему закону Ньютона эта стенка сама действует на прилегающий к ней слой газа с силой $-F_x$ (на рисунке этот слой газа заштрихован). Из второго закона Ньютона следует, что сила $-F_x$ должна сообщить нашему слою (как и всякому телу) импульс, равный $-F_x t$, где t — время действия силы. Но наш слой газа находится в покое (как и весь газ в сосуде), и импульс этого слоя равен нулю. Значит, этот слой газа получает еще импульс, направленный по оси X, то есть равный $F_x t$. Откуда он берется?

Этот импульс возникает из-за хаотичности движения молекул. Действительно, вследствие этой хаотичности, число молекул, *влетающих* в наш слой газа через его границу *слева*, равно числу молекул, *вылетающих* из него *справа*.

Легко доказать, что как влетающая в слой газа молекула, так и вылетающая из него сообщают ему импульс, направленный по оси X, то есть положительного знака. В самом деле, если молекула массой m *влетает* в слой слева направо, то проекция ее скорости положительна. Обозначим ее через v_x. Проекция импульса mv_x тоже положительна. Проекция импульса такой же молекулы, *вылетающей* из слоя, отрицательна и равна $-mv_x$. Значит, влетающая молекула *прибавляет* слою газа импульс mv_x, а вылетающая из него — *отнимает* от него отрицательный импульс $-mv_x$. Но отнять отрицательное — это то же, что прибавить положительное.

Так мы убедились, что как влетающие в слой газа молекулы, так и вылетающие из него сообщают ему импульс, проекция которого равна mv_x.

Предположив для простоты, что значения mv_x одинаковы для всех молекул, легко вычислить изменение импульса ΔP всего слоя газа за время t. Оно, очевидно, равно удвоенному произведению mv_x на число z молекул, влетающих в слой газа за время t:

$$\Delta P=2zmv_x.$$

Значение z вычисляется так же, как число соударений молекул со стенкой (см. «Физику 9»):

$$z=\frac{1}{2}nSv_x t,$$

где n — число молекул в единице объема газа. Следовательно,

*) Когда говорят об упругом ударе молекул о стенку, предполагают, что стенка вполне гладкая. Но ведь стенка тоже состоит из молекул; следовательно, для налетающих молекул она шероховатая. Даже на самой гладкой стенке эти шероховатости имеют размеры, не меньшие, чем размеры молекул. Поэтому после отражения молекулы будут двигаться случайным образом.

kvant.mccme.ru

$$\Delta P = 2 \cdot \frac{1}{2} nSv_x t \cdot mv_x = nSmv_x^2 t.$$

Вот мы и нашли, откуда берется у нашего слоя импульс, направленный по оси X и равный $F_x t$. Значит,

$$F_x t = nSmv_x^2 t.$$

Сократив на t и разделив обе части этого равенства на S, получаем выражение для давления газа на правую стенку сосуда:

$$p = \frac{F_x}{S} = nmv_x^2. \qquad (1)$$

Повторив наши рассуждения для стенок, перпендикулярных осям Y и Z, получим

$$p = nmv_y^2, \qquad (2)$$

$$p = nmv_z^2. \qquad (3)$$

Давления p на все стенки, конечно, одинаковы. Сложив почленно равенства (1), (2) и (3), получаем

$$3p = nm\,(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2),$$

или,

$$p = \frac{1}{3} nm\,(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2). \qquad (4)$$

В действительности, значения v_x, v_y и v_z у разных молекул разные (вследствие хаотичности их движения). Поэтому в правой части равенства (4) надо вместо v_x^2, v_y^2 и v_z^2 подставить их средние значения $\overline{v_x^2}$, $\overline{v_y^2}$ и $\overline{v_z^2}$. Сумма $\overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$ равна $\overline{v^2}$, тогда окончательно

$$p = \frac{1}{3} nm\overline{v^2} = \frac{2}{3} n \frac{m\overline{v^2}}{2}.$$

Физический смысл универсальной газовой постоянной

В уравнение состояния идеального газа (уравнение Менделеева — Клапейрона)

$$pV = \frac{m}{M} RT$$

входит универсальная газовая постоянная R. Она, как известно, равна произведению двух других постоянных — числа Авогадро N_A и постоянной Больцмана k:

$$R = N_A k.$$

Постоянные N_A и k имеют ясный смысл: N_A — это число молекул или атомов в единице количества вещества, то есть моле; k — постоянная, определяющая связь между температурой в кельвинах и температурой в единицах энергии. Но определенный физический смысл (быть может, многим он покажется неожиданным) имеет и комбинация N_A и k — постоянная R.

Представим себе, что 1 моль идеального газа находится в сосуде с подвижным поршнем и что подводом тепла к нему или отводом тепла от него его температуру изменяют на 1 кельвин. Благодаря тому, что сосуд закрыт подвижным поршнем, давление газа будет оставаться постоянным (и равным внешнему давлению).

Напишем уравнение состояния газа до и после нагревания:

до нагревания $pV_1 = RT$,

после нагревания $pV_2 = R\,(T + \Delta T)$,

где $\Delta T = 1$ К. Вычтя первое равенство из второго, мы получим

$$p\,(V_2 - V_1) = RT + R\Delta T - RT = R\Delta T.$$

Левая часть этого равенства представляет собой работу, совершаемую силой давления газа (или внешней силой против силы давления), когда при постоянном давлении p объем газа увеличивается (или уменьшается) от V_1 до V_2. Следовательно, *газовая постоянная R равна работе, которую совершает 1 моль идеального газа, расширяясь при нагревании на 1 К при постоянном давлении.*

Разумеется, при изобарном охлаждении 1 моля газа на 1 К такую же работу совершает внешняя сила, действующая на поршень.

kvant.mccme.ru

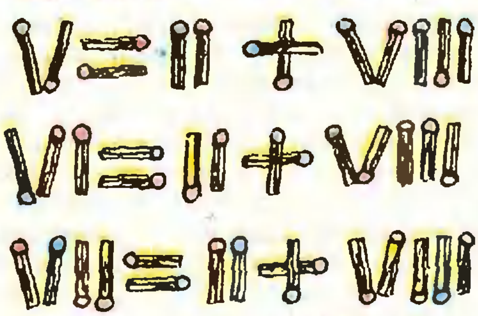
Квант для младших школьников

Задачи

1. Симметричен ли узор на рисунке?

2. Имеется два шарика красного цвета, два — синего, два — зеленого, два — желтого и два — белого. На одну чашку весов положили несколько разноцветных шариков, а на другую — вторые шарики этих цветов. При этом перевесила левая чашка весов. Однако было замечено, что какую бы пару шариков одного цвета ни поменять местами, весы либо окажутся в равновесии, либо перетянет правая чашка. При каком количестве шариков на весах это может быть?

3. Переставьте в каждом ряду по одной спичке так (см. рисунок), чтобы везде оказалось верное равенство.



4. Квадрат разрезан на прямоугольники так, что никакая точка квадрата не является вершиной сразу четырех прямоугольников. Докажите, что число точек квадрата, являющихся вершинами прямоугольников,— четно.

5. Стальной шарик плавает в ртути. Увеличится или уменьшится глубина погружения, если повысится температура?

Эти задачи нам предложили *Г. А. Гальперин, В. В. Произволов, Н. А. Родина, Л. М. Салахов, Л. А. Штейнграц*

kvant.mccme.ru

А если..., что тогда?

Кандидат педагогических наук
И. Л. НИКОЛЬСКАЯ,
Н. Г. САБЛИНА

В конце последнего урока в класс, где учится Петя, вошла Татьяна Ивановна, их классный руководитель.

— Ребята,— сказала она,— у меня есть для вас хорошая новость: летом двадцать учеников класса поедут в Москву.

— Ура!— закричали все.

— А кто поедет в Москву? — спросил Петя.

— Для того чтобы поехать в Москву, достаточно окончить учебный год без троек, — ответила Татьяна Ивановна.

Домой Петя пришел взволнованный. Катя это сразу заметила и спросила, в чем дело. Петя рассказал ей про поездку в Москву.

— Ну, — протянула Катя, — уж тебе-то Москвы не видать. Ведь у тебя по русскому за год будет тройка, а может быть, еще и по математике.

— Катька права,— подумал Петя.— По математике я еще смогу получить за год четверку, а вот по русскому... Схожу-ка я к Мите; он — студент, он должен что-нибудь придумать.

Митя внимательно выслушал Петю и посоветовал ему не вешать нос раньше времени.

— Да,— уныло проговорил Петя,— Татьяна Ивановна, знаешь, какая: если уж что сказала, то непременно так и сделает.

— Погоди, давай разберемся,— сказал Митя.— Что означает фраза «Для того чтобы поехать в Москву, достаточно окончить учебный год без троек?» То же самое можно сказать так:

«Если ученик окончит учебный год без троек, то он поедет в Москву». Это сложное предложение образовано с помощью логической связки «если ..., то...» из двух простых предложений: «Ученик окончит учебный год без троек» и «Он поедет в Москву». Обозначим первое из этих предложений буквой A, а второе — буквой B. Впрочем, так нехорошо — ведь истинность или ложность этих предложений зависит от того, к какому ученику они применяются: один ученик может закончить учебный год с тройками, а другой — без троек; один поедет в Москву, а другой не

kvant.mccme.ru

поедет. Таким образом, эти фразы являются предложениями с переменной, а не высказываниями: помнишь — в «Алгебре 6» ты читал об этом? Поэтому давай обозначим их не через A и B, а через $A(x)$ и $B(x)$, где x может быть любым учеником класса. Теперь при помощи знаков математической логики запишем фразу Татьяны Ивановны так:

$$(\forall x)\,[A(x) \Rightarrow B(x)]; \qquad (1)$$

знак $\forall$ применяется в математике вместо слов «любой», «всякий», «каждый». Таким образом, фразу Татьяны Ивановны в форме (1) можно прочитать так: «Любой ученик, окончивший учебный год без троек, поедет в Москву». Впрочем, в словесной формулировке слова «любой» и т. п. обычно опускаются — их подразумевают. Поэтому-то и можно сказать: «Если ученик окончит учебный год без троек, то он поедет в Москву», то есть

$$A(x) \Rightarrow B(x) \qquad (2)$$

Вместо «Если $A(x)$, то $B(x)$» говорят также «Из $A(x)$ следует $B(x)$». Как по-твоему, когда мы сможем сказать, что учительница не выполнила обещания?

— Если найдется ученик, который окончит год без троек, а в Москву не поедет,— ответил Петя.

— Правильно, для такого ученика высказывание $A(x)$ истинно, а $B(x)$ ложно; поэтому ложно высказывание (2). А теперь скажи, в каких случаях Татьяна Ивановна обещание выполнит.

— Если все ученики, окончившие учебный год без троек, поедут в Москву.

— Верно. А как должна поступить Татьяна Ивановна с учениками, имеющими годовую «тройку»? Если она такого ученика в Москву не возьмет, она, конечно, своего обещания не нарушит (таким образом, когда $A(x)$ и $B(x)$ ложны, $A(x) \Rightarrow B(x)$ истинно). Но, если Татьяна Ивановна такого ученика все-таки возьмет в Москву, она тоже не нарушит своего обещания! Вспомни, что она сказала: «Для того чтобы поехать в Москву, достаточно окончить учебный год без троек». Достаточно, но не обязательно! Можно отличиться в каком-нибудь другом деле. А ведь ты у нас спортсмен!

— Это что ж получается! — воскликнул Петя. — При ложном $A(x)$ и истинном $B(x)$ опять $A(x) \Rightarrow B(x)$ истинно? Значит, у меня все-таки есть шанс поехать в Москву.

— Итак,— продолжал Митя,— высказывание (1) ложно только в одном случае: если найдется такое x, для которого $A(x)$ истинно, а $B(x)$ ложно. Давай запишем наши «исследования» в табличку:

$A(x)$	$B(x)$	$A(x) \Rightarrow B(x)$
и	и	и
и	л	л
л	и	и
л	л	и

Именно в таком смысле употребляется связка «Если..., то...» в математике: высказывание $A \Rightarrow B$ ложно в том и только в том случае, когда A истинно, а B ложно; в остальных трех случаях оно является истинным. Наша таблица как раз и задает определение союза «Если:.., то...». Возьмем, к примеру, утверждение «Всякое число n, делящееся на 4, четно». Ты, конечно, понимаешь, что оно имеет вид (1). В форме (2) оно будет выглядеть так: «Если n делится на 4, то оно четно». Как ты считаешь, это верно?

— Ясно, верно,— ответил Петя,— это и третьекласснику известно.

— Ну, тогда скажи, верно ли утверждение «Если 18 делится на 4, то 18 четно»?

— Но ведь 18 иа 4 не делится,— засомневался Петя.

— Ну и что же, что не делится,— возразил Митя,— не в этом дело! Ведь ты сам сказал, что утверждение «Если n делится на 4, то оно четно» верно, то есть верно при любом значении n. А раз так, то верно и утверждение «Если 18 делится на 4, то 18 четно» (третья строка таблицы), и утверждение «Если 17 делится на 4, то 17 четно» (четвертая строка таблицы), и утверждение «Если 16 делится на 4, то 16 четно» (первая строка таблицы). И только случая «$A(n)$ истинно, $B(n)$ ложно» (вторая строка таблицы) для данного утверждения не будет ни при каком значении n; именно поэтому это утверждение верно. Иными словами, из высказывания «Число n делится на 4» следует высказывание «Число n четно». А как ты думаешь, следует ли первое из этих высказываний из второго?

— Нет,— быстро сказал Петя,— ведь 2 четно, а на 4 не делится.

— Молодец,— похвалил друга Митя.

— Разрази меня гром, если я не исправлю тройку по математике!— радостно закричал Петя.

— Конечно же, ты исправишь тройку по математике и гром тебя не разразит,— засмеялся Митя.— Будем надеяться, что твое восклицание — истинное высказывание с ложными A и B. Подобные истины любил изрекать мудрейший Козьма Прутков. «Если бы тени предметов зависели не от величины сих последних, а имели бы свой произвольный рост, то, может быть, вскоре не осталось бы на всем земном шаре ни одного светлого места», — говаривал он.

Но вернемся к математике. Ты, я вижу, хорошо понял, что значит «Из A следует B». Если же каждое из двух высказываний следует из другого, то такие высказывания называются *равносильными*.

Знаешь, как-то раз родители сказали нам с сестренкой Галей и братом Колей: «Если мы поедем в дом отдыха, то вы поедете в лагерь». В школе нас спросили, куда мы поедем летом. «Если мы поедем в лагерь, то родители поедут в дом отдыха»,— ответила Галя. Коля сказал «Если папа с мамой не поедут в дом отдыха, то мы не поедем в лагерь». «Вы все перепутали,— сказал я.— Было сказано: «Если мы не поедем в лагерь, то родители не поедут в дом отдыха».

— Да, но ты ведь тоже сказал не так, как родители,— заметил Петя.

— Так-то оно так,— ответил Митя,— но ведь одно и то же можно сказать по-разному. Давай-ка снова составим табличку. Пусть A означает высказывание «Родители поедут в дом отдыха», а B — «Мы поедем в лагерь». Тогда то, что сказали родители, запишется как «Если A, то B», ответ Гали запишется как «Если B, то A», ответ Коли — как «Если не A, то не B», а мой ответ — как «Если не B, то не A».

Давай теперь составим таблицу, похожую на предыдущую. Поскольку опять каждое из высказываний A, B может быть истинным или ложным, в ней снова будет 4 строки. Чтобы нам легче было с ч и т а т ь, запишем после столбцов для A и B столбцы для «не A» и «не B» («не A» истинно, когда A ложно, и ложно, когда A истинно; аналогично «не B»). Столбец для «если A, то B» просто перепишем из предыдущей таблицы. А столбцы для трех остальных высказываний заполняются по общему правилу: «л» пишется тогда и только тогда, когда *посылка* (то, что стоит между «если» и «то») истинна, а *заключение* (то, что стоит после «то») ложно. В результате мы получим следующую таблицу:

A	B	не A	не B	если A, то B	если B, то A	если не A, то не B	если не B, то не A
и	и	л	л	и	и	и	и
и	л	л	и	л	и	и	л
л	и	и	л	и	л	л	и
л	л	и	и	и	и	и	и

Ты видишь, что высказыванию «Если A, то B» (тому, что сказали родители) равносильно только высказывание «Если не B, то не A» (то, что сказал я). Так что правильно передал смысл сказанного родителями только я. Галя и Коля сказали одно и то же, но не то, что родители.

— А-а,— протянул Петя,— значит, зря я обиделся на Катьку. Мама сказала мне: «Если пойдешь в кино, то сначала сделай все уроки», а Катька съехидничала: «Если не сделаешь уроки, то и в кино не пойдешь». Оказывается, они сказали одно и то же!

— Конечно,— улыбнулся Митя,— Обе они сказали, что для того чтобы пойти в кино, необходимо сначала сделать все уроки.

kvant.mccme.ru

Петя, быстро сделав уроки, отправился в кино, а тебе, читатель, мы предлагаем решить несколько задач.

Задачи

1. Какие из следующих высказываний истинны, какие ложны?

а) Если Париж расположен на Сене, то Австралия находится в северном полушарии.
б) Если Астралия находится в северном полушарии, то Париж расположен на Сене.
в) Если Австралия находится в северном полушарии, то Париж расположен на Темзе.
г) Если Австралия находится в южном полушарии, то Париж расположен на Сене.
д) Если $1=0$, то $2=1$.
е) Если $1=0$, то $2=2$.

2. При любых x и y верны утверждения:
а) «Если x — брат y, то y — брат x»?
б) «Если x — брат y, то x и y — родственники»?

3. Следует ли из утверждения «Если ученик много занимается, то он успешно сдает экзамены» утверждение «Ученик, проваливщийся на экзамене, занимался мало»?

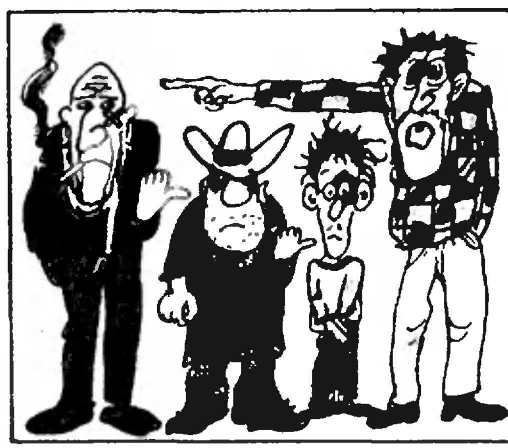
4. Учительница после математической олимпиады сообщила: «Каждую задачу решил по крайней мере один ученик», а Катя сказала Пете так: «По крайней мере один ученик решил каждую задачу». Правильно ли передала Катя смысл сказанного?

5. Следует ли из первого предложения второе?
а) $(x-2)(x-5)=0$; $x-1>0$.
б) $x=2$; $(x+1)^2>0$.
в) $|x|<0$; $x=5$.

6. Докажите теорему «Если число $2k+1$ четно, то число $2k$ нечетно».

7. Докажите, что утверждение «Если диагонали четырехугольника равны, то он — прямоугольник» неверно.

8. Следователь допрашивал четырех гангстеров по делу о похищении автомобиля. Джек сказал: «Если Том не угонял автомобиля, то его угнал Боб». Боб сказал: «Если Джек не угонял автомобиля, то его угнал Том». Фред сказал: «Если Том не угонял автомобиля, то его угнал Джек». Том сказал: «Если Боб не угонял автомобиля, то его угнал я». Удалось выяснить, что Боб солгал, а Том сказал правду. Правдивы ли показания Джека и Фреда? Кто угнал машину?



Изменение фигуры Земли и ее вращения

(Начало см. на с. 25)

Во-вторых, на это малое, но постоянное увеличение продолжительности суток накладываются сезонные изменения вращения Земли, вызванные различными перемещениями масс атмосферы и океана. В-третьих, скорость вращения Земли изменяется (обычно скачками) при землетрясениях, перемещающих массы земных недр. Направление этих перемещений, как правило, таково, что оно стремится сделать фигуру Земли более шарообразной (как показано стрелками на рисунке), при этом скорость вращения Земли возрастает.

В частности, такое возрастание скорости вращения наблюдалось в период с 1973 по 1978 гг., когда продолжительность суток уменьшилась на 0,006 с. Во время этих наблюдений и были получены сведения о регулярном изменении ускорения свободного падения.

Когда форма Земли приближается к сферической, ускорение силы тяжести стремится к среднему значению, равному 9,7977 м/с^2, увеличиваясь в низких широтах и уменьшаясь севернее и южнее широты 35°. Теперь понятно, почему первые измерения показали именно уменьшение ускорения: и Москва, и Новосибирск, и Потсдам находятся на широте от 52 до 56°.

kvant.mccme.ru

задачник Кванта

Задачи

М826—М830; Ф838—Ф842

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 декабря 1983 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 10 — 83» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М826, М827» или «Ф838». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М826—М830 и Ф838—Ф842 предлагались на заключительном этапе Всесоюзной олимпиады школьников. Число в скобках обозначает класс, в котором предлагалась задача.

М826. На доске написали три числа. Затем одно из них стерли и вместо него написали сумму двух других чисел, уменьшенную на единицу. Эту операцию повторили несколько раз и в результате получили числа 17, 1967, 1983. Могли ли первоначально быть написаны числа а) 2, 2, 2; б) 3, 3, 3? (8)

А. А. Берзиньш

М827. Известно, что четыре синих треугольника на рисунке 1 (с. 44) равновелики.

а) Докажите, что три красных четырехугольника на этом рисунке также равновелики.

б) Найдите площадь одного четырехугольника, если площадь одного синего треугольника равна 1. (8)

Б. И. Чиник

М828*. Можно ли в клетках бесконечного листа клетчатой бумаги расставить целые числа так, чтобы сумма чисел в каждом прямоугольнике размера 4×6 клеток, стороны которого идут по линиям сетки, равнялась а) 10; б) 1? (8)

Н. Ю. Нецветаев

М829. Докажите, что среди любых $2m+1$ различных целых чисел, по модулю не превосходящих $2m-1$, найдутся три числа, сумма которых равна 0. (9)

Н. В. Карташов

М830*. Школьник упражняется в решении квадратных уравнений. Выписав какое-то уравнение $x^2+p_1x+q_1=0$, он решает его и, убедившись, что оно имеет два корня, составляет второе уравнение $x^2+p_2x+q_2=0$, в котором p_2 — это меньший, а q_2 — больший корень первого уравнения. По второму уравнению он составляет третье, если это возможно, и т. д.

а) Докажите, что это упражнение не может продолжаться бесконечно долго.

б) Найдите наибольшую длину конечной последовательности квадратных трехчленов, удовлетворяющих указанному условию. (10)

М. В. Сапир

Ф838. В 1844 году выдающийся математик и астроном Бессель обнаружил, что собственное (не связанное с движением земного наблю-

kvant.mccme.ru

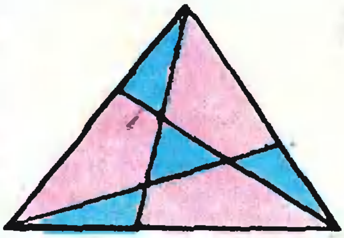


Рис. 1.

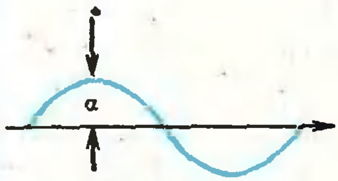


Рис. 2.

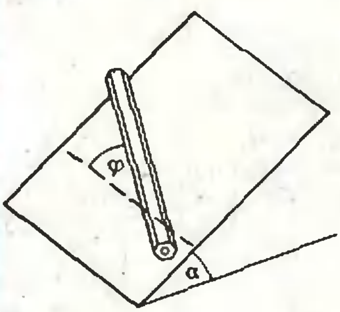


Рис. 3.

дателя) движение Сириуса происходит примерно по синусоиде (рис. 2.). Максимальное угловое отклонение от прямолинейного пути $\alpha=2{,}3''$, период $T=50$ лет. Бессель предположил (через 18 лет это было подтверждено прямыми наблюдениями), что искривление пути Сириуса вызывается наличием спутника — более слабой звезды. Найти отношение массы m спутника (Сириуса B) к массе M_C Солнца, если масса основной звезды (Сириуса A) $M=2{,}3\ M_C$. Известно, что радиус земной орбиты виден с Сириуса под углом $\beta=0{,}376''$. Считать, что орбиты звезд круговые, а плоскость орбит перпендикулярна направлению от Солнечной системы к Сириусу. (10)

В. Е. Белонучкин

Ф839. Если шестигранный карандаш положить на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтальной поверхностью, перпендикулярно ее образующей (линии пересечения плоскости с горизонтальной поверхностью), карандаш будет покоиться. Если его положить параллельно образующей, он будет скатываться вниз. При каких углах φ между осью карандаша и образующей наклонной плоскости (рис. 3) карандаш будет находиться в равновесии? (8)

С. С. Кротов

Ф840. В горизонтально расположенной плоской коробке размером 10×10 см беспорядочно лежат 1000 маленьких стальных шариков массы $m=0{,}5$ мг каждый. Коробку начинают двигать со скоростью $v_0=10$ м/с перпендикулярно одной из боковых стенок. Считая удары шариков о стенки коробки и друг о друга абсолютно упругими, определить: а) какие импульсы передадут шарики каждой из боковых стенок за первые 10 секунд; б) какие импульсы получают стенки за следующие 10 секунд после того, как коробку резко затормозили. (9)

А. Р. Зильберман

Ф841. Спускаемый аппарат космического корабля приближается к поверхности некоторой планеты с постоянной скоростью, передавая на борт корабля данные о наружном давлении. График зависимости давления p (в условных единицах) от времени t приведен на рисунке 4. Опустившись на поверхность планеты, аппарат измерил и передал на борт данные о температуре и ускорении свободного падения: $T=700$ К, $g=10$ м/с². Определить скорость спуска аппарата, если известно, что атмосфера планеты состоит из углекислого газа (CO_2). Определить также температуру на высоте $h=15$ км над поверхностью планеты. (9)

А. И. Буздин

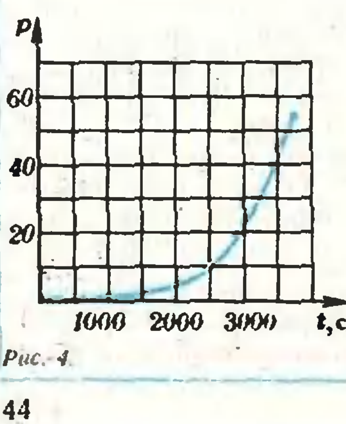


Рис. 4.

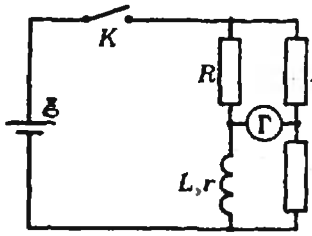


Рис. 5

Ф842. В схеме, изображенной на рисунке 5, в некоторый момент замыкают ключ K. Найти установившееся значение тока, текущего через катушку с индуктивностью L и активным сопротивлением r. Какой заряд протечет через гальванометр Г после замыкания ключа? Параметры элементов, указанные на рисунке, считать заданными. Внутренним сопротивлением источника и сопротивлением гальванометра пренебречь. (10)

В. В. Можаев

Problems

M826—M830; P838—P842

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than December 31st, 1983, to the following adress: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 31/1, «Квант». Please send the solutions of physics and mathematics problems, as well as problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfadressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS). Problems P838—P842 and M826—M830 in this issue are taken from the 1983 All-Union School Olympiad.

M826. Three integers are written on the blackboard. Then one of them is erased and replaced by the sum of the two others minus one. This operation is repeated several times until the following integers are obtained: 17, 1967, 1983. Could the original integers have been a) 2,2,2; b) 3,3,3?

A. A. Berzinsh

M827. The four blue triangles in figure Рис. 1 have the same area.
a) Prove that so do the three red quadrilaterals.
b) Find the area of one quadrilateral if thatof one blue triangle is 1.

B. I. Chinik

M828. Can integers be written in the squares of an infinite square-lined sheet of paper so that the sum of the integers in each 4×6 rectangle (with sides on the lines of the lined paper) is a) 10; b) 1?

N. Yu. Netsvetaev

M829. Prove that among any $2m+1$ different integers whose absolute value is no greater than $2m-1$ there are three with zero sum.

N. V. Kartashov

M830. A secondary school pupil practices solving quadratic equations. Having written the equation $x_2^2+p_1x+q_1=0$ and solved it, he checks that it has two real roots and writes the equation $x^2+p_2x+q_2=0$ in which p_2 is the smaller and q_2 the larger of the two roots of the first equation. Using the second equation he writes a third in the same way (if possible), etc.

a) Prove that this exercise cannot continue indefinitely.

b) Find the greatest possible length of a finite sequence of quadratic trinomials satisfying the above conditions.

M. V. Sapir

P838. In 1844 the outstanding mathematician and astronomer Bessel discovered that the proper (i. e. not related to the motion of the terrestrial observer) motion of Sirius is approximately sinusoidal (see figure Рис. 2). The maximal deviation from a rectilinear trajectory is $\alpha=2.3''$, the period is $T=50$ years. Bessel conjectured (correctly, as confirmed by direct obesrvation 18 years later) that the deviations in Sirius' trajectory are due to the presence of a sattelite — a smaller star. Find the ratio of the mass m of this sattelite (Sirius B) to the mass M_s of the Sun, if the mass of the bigger star (Sirius A) is $M=2.3M_s$. It is known that the radius of the earth orbit is seen from Sirius under the angle $\beta=0.376''$. Assume that the orbits of the stars are circular, while their orbit plane is perpendicular to the direction from the solar system to Sirius.

V. E. Belonuchkin

P839. If a pencil with hexagonal section is placed on an inclined plane (forming the angle α with the horizontal plane) perpendicularly to the intersection l of these planes, the pencil remains motionless. Placed parallel to l, it rolls down. For what angles φ between the axis of the pencil and l (see figure Рис. 3) will the pencil remain in equilibrium?

S. S. Krotov

P840. A flat 10×10 cm box placed horizontally contains 1000 small steel ball-bearings of mass $m=0.5$ mg each, mixed at random. The box starts to move with velocity $v_0=10$ m/s perpendicularly to one of its sides. Assuming the collisions of the ball-bearings with each other and the walls of the box absolutely elastic, determine: a) what impulses will the ball-bearings communicate to each of the walls during the first 10 seconds; b) what impulses will the walls get in the 10 seconds following a sudden braking of the box to a stop.

A. R. Zilberman

P841. A landing craft from a spaceship approaches the surface of a planet with constant velocity, transmitting data on outside pressure to the mother ship. The graph of the pressure p (in conditional units) as a function of time t is plotted on figure Рис. 4. Having landed, the craft measures temperature and gravitational acceleration: $T=700$K, $g=10$ m/s^2. Determine the descent velocity of the landing craft, if it is known that the atmosphere of the planet consists of carbon dioxide (CO_2). Determine the temperature at elevation $h=15$ km above the planet's surface.

A. I. Buzdin

P842. In the circuit shown on figure Рис. 5, the switch K is turned on. Find the established value of the current flowing through the coil of inductivity L and active resistance r. What charge will flow through the galvanometer Γ after K is switched on? The parameters of the elements shown on the figure are assumed known. The inner resistance of the source and the resistance of the galvanometer are negligible.

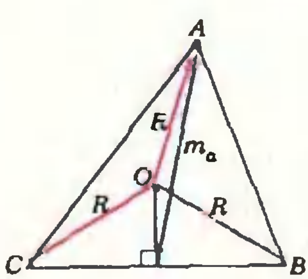
V. V. Mojaev

Решения задач

M811—M815; Ф823—Ф827

M811. *Пусть h_a, h_b, h_c — высоты, а m_a, m_b, m_c — медианы остроугольного треугольника (проведенные к сторонам a, b, c), r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей. Докажите, что*

$$\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}\leqslant 1+\frac{R}{r}.$$



Умножим обе части доказываемого неравенства на площадь треугольника S и воспользуемся формулами $S=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2}=r\frac{a+b+c}{2}$. Тогда оно приведется к виду

$$\frac{m_a\cdot a}{2}+\frac{m_b\cdot b}{2}+\frac{m_c\cdot c}{2}\leqslant S+R\frac{a+b+c}{2}$$

или

$$\frac{(m_a-R)a}{2}+\frac{(m_b-R)b}{2}+\frac{(m_c-R)c}{2}\leqslant S. \qquad (*)$$

Ясно, что величина m_a-R не превосходит расстояния от центра O описанной окружности до стороны BC (см. рисунок), то есть высоты треугольника OBC. Следовательно, первое слагаемое в левой части неравенства $(*)$ не больше площади треугольника OBC. Аналогично, два других слагаемых не превосходят площадей треугольников OCA и OAB соответственно. Тем самым доказано неравенство $(*)$, а с ним и неравенство задачи.

Из доказательства видно, что равенство имеет место только для правильного треугольника. Заметим еще, что поскольку медиана всегда не меньше высоты, проведенной из той же вершины, из нашего неравенства вытекает, что $1+\frac{R}{r}\geqslant 3$, то есть известное соотношение $R\geqslant 2r$.

Подумайте, справедливо ли утверждение задачи для тупоугольных треугольников?

Д. М. Милошевич

M812. *Докажите, что при любом натуральном n*

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2.$$

◆

Оценим общий член суммы в левой части:

$$\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}}=\sqrt{k}\cdot\frac{1}{(k+1)k}=\sqrt{k}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=$$

$$=\sqrt{k}\left(\frac{1}{\sqrt{k}}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)=$$

$$=\left(1+\sqrt{\frac{k}{k+1}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)<$$

$$<2\left(\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right),$$

так как $k/(k+1)<1$. Отсюда сразу вытекает, что

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<$$

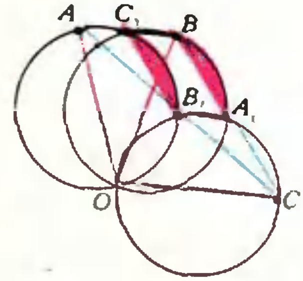
$$<2\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\ldots+2\left(\frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)=$$

$$=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)<2,$$

что и требовалось.

С. И. Майзус

M813. *Даны отрезки OA, OB и OC одинаковой длины (точка B лежит внутри угла AOC). На них как на диаметрах построены окружности. Докажите, что площадь криволинейного треугольника, ограниченного дугами этих окружностей и не содержащего точку O, равна половине площади (обычного) треугольника ABC.*



◆

Заметим, что вершины A_1, B_1, C_1 рассматриваемого криволинейного треугольника (см. рисунок) являются серединами сторон треугольника ABC (например, $|BA_1|=|A_1C|$ потому, что треугольники BOA_1 и COA_1 конгруэнтны как прямоугольные треугольники с равными гипотенузами OB и OC и общим катетом OA_1). Следовательно, отрезок B_1C_1 — средняя линия треугольника ABC — равен отрезку A_1B, а поскольку эти отрезки являются хордами в конгруэнтных кругах, отсекаемые ими сегменты (на рисунке — красные) конгруэнтны. Точно так же конгруэнтны друг другу черные сегменты, отсекаемые хордами A_1B_1 и C_1B. Отсюда вытекает, что криволинейный треугольник $A_1B_1C_1$ равновелик параллелограмму $A_1B_1C_1B$. Но площадь параллелограмма, очевидно, равна половине площади треугольника ABC.

В. В. Прасолов

M814. *Отметим в натуральном ряду числа, которые можно представить в виде суммы двух квадратов натуральных чисел. Среди отмеченных чисел встречаются тройки последовательных чисел, например,*

$$72=6^2+6^2,\ 73=8^2+3^2,$$
$$74=7^2+5^2.$$

◆

а) Квадрат натурального числа при делении на 4 может давать остаток 0 (если число четно) или 1 (если нечетно). Поэтому сумма двух квадратов натуральных чисел при делении на 4 может давать остатки 0, 1 или 2. Но среди четырех последовательных натуральных чисел есть число, дающее при делении на 4 остаток 3.

б) Ясно, что если квадрат некоторого числа является отмеченным числом, то есть $n^2=a^2+b^2$, то числа n и n^2+1 образуют нужную пару отмеченных чисел ($1=1^2$). Из одной такой пары можно получить бесконечно много

kvant.mccme.ru

а) Объясните, почему не могут встретиться четыре последовательных отмеченных числа.

Докажите, что среди отмеченных чисел встретится бесконечно много б) пар, в) троек последовательных чисел.*

пар, заменяя n на $n\cdot k$, $k=1, 2, 3, \ldots$ ($(nk)^2=(ak)^2+(bk)^2$). Поэтому достаточно указать хотя бы один квадрат, представимый в виде суммы двух квадратов, например, $5^2=3^2+4^2$. Соответствующие пары последовательных отмеченных чисел имеют вид $(25k^2, 25k^2+1)$, $k=1, 2, 3, \ldots$.

в) Приведем три решения этой задачи.

Первое решение. Продолжая рассуждения пункта б), рассмотрим три последовательных числа n^2k^2-1, n^2k^2 и n^2k^2+1, где $n^2=a^2+b^2$. Второе и третье из этих чисел являются суммами двух квадратов при всех $k=1, 2, \ldots$, поэтому задача будет решена, если мы сумеем подобрать такое n, что для бесконечного множества натуральных k число n^2k^2-1 представимо в виде суммы двух квадратов.

Возьмем $n=17$ $(17^2=8^2+15^2)$. Представим число n^2k^2-1 в следующем виде: $n^2k^2-1=(17k)^2-1=(17k-1)^2+(34k-2)$, и покажем, что число $34k-2$ есть точный квадрат для бесконечного множества k.

Пусть $34k-2=(2m)^2$. Тогда $k=(2m^2+1)/17$. Это число целое, если m^2 при делении на 17 дает остаток 8, то есть если $m=17l\pm5$ и, следовательно, $k=34l^2\pm20l+3$. Итак, мы получаем такие тройки последовательных отмеченных чисел: $(578l^2\pm340l+50)^2+(34l\pm10)^2$, $(510l^2\pm300l+45)^2+(272l^2-160l+24)^2$, $(578l^2\pm340l+51)^2+1^2$.

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ad+bc)^2+(ac-bd)^2$$

Второе решение опирается на красивое тождество, выписанное на полях. Из этого тождества следует, что *если два числа представимы в виде суммы квадратов двух натуральных чисел, то их произведение также есть сумма двух квадратов или само является квадратом* (если $ac-bd=0$). В частности, *квадрат нечетного отмеченного числа — отмеченное число* (если $n=a^2+b^2$, то $n^2=(a^2-b^2)^2+(2a^2b^2)^2$, причем $a^2-b^2\neq0$, так как n нечетно).

Пусть $n-1$, n и $n+1$ — отмеченные числа и n нечетно. Тогда n^2-1, n^2 и n^2+1 — тоже три последовательных отмеченных числа. Действительно, n^2-1 — произведение отмеченных чисел $n-1$ и $n+1$, причем само это число, очевидно, не квадрат; n^2 — квадрат нечетного отмеченного числа; $n^2+1=n^2+1^2$. Из чисел n^2-1, n^2 и n^2+1 аналогично получаются отмеченные числа n^4-1, n^4 и n^4+1 и т. д.. Таким образом, тройка отмеченных чисел 72, 73, 74, приведенная в условии, дает бесконечно много троек вида $73^{2k}-1$, 73^{2k}, $73^{2k}+1$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$.

Третье решение. Рассмотрим тройки последовательных чисел вида $8n^2=(2n)^2+(2n)^2$, $8n^2+1$ и $8n^2+2=(2n-1)^2+(2n+1)^2$. Покажем, что при $n=(m^2+m)/2$, где $m=1, 2, \ldots$, все такие числа — отмеченные. Достаточно рассмотреть вторые числа троек:

$$8n^2+1=2(m^2+m)^2+1=2m^4+4m^3+2m^2+1=(m^2-1)^2+(m^2+2m)^2.$$

Это решение самое короткое, но и наиболее искусственное из трех.

Л. Д. Курляндчик

●

М815.* *На окружности расставлены $4k$ точек, занумерованных в произвольном порядке числами $1, 2, \ldots, 4k$.*

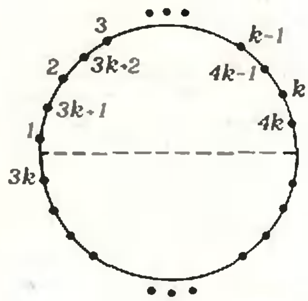
а) Докажите, что при любой расстановке номеров можно соединить точки $2k$ попарно непересекающимися отрезками так, что разность чисел в концах каждого отрезка не превосходит $3k-1$.

а) Разобьем натуральные числа от 1 до $4k$ на две группы по $2k$ чисел. В первую группу включим числа $1, 2, \ldots, k$, $3k+1$, $3k+2$, ..., $4k$; во вторую — оставшиеся числа $k+1$, $k+2$, ..., $3k-1$, $3k$. Поскольку разность между любыми двумя числами из разных групп не превосходит $3k-1$, достаточно доказать следующее утверждение: *если на окружности расставлены $2l$ точек, разбитые на две группы по l точек в каждой, то их можно соединить! попарно непересекающимися отрезками так, что каждый отрезок соединяет точки из разных групп* (в нашем случае $l=2k$).

Докажем это утверждение индукцией по l. При $l=1$ оно очевидно. Допустим, что для некоторго l оно доказано,

kvant.mccme.ru

б) Постройте пример расстановки номеров, показывающий, что число $3k-1$ в пункте а) нельзя заменить меньшим.



и рассмотрим расстановку $2l+2$ точек. Очевидно, что найдутся две с о с е д н и е точки a и b из разных групп. Соединим их отрезком. Оставшиеся l точек первой группы можно соединить l непересекающимися отрезками с точками второй группы по предположению индукции, причем эти отрезки, очевидно, не пересекаются с отрезком ab. Тем самым, наше утверждение доказано.

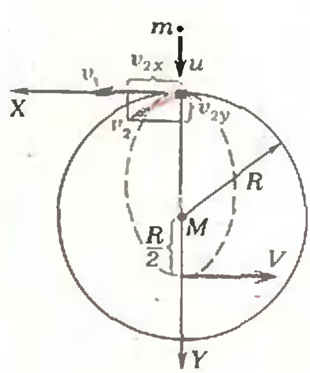
б) Воспользуемся тем же разбиением, что и в доказательстве пункта а). Расставим на верхней и нижней полуокружностях по $2k$ точек и занумеруем точки верхней полуокружности числами первой группы в таком порядке: $1, 3k+1, 2, 3k+2, \ldots, k, 4k$, а точки нижней полуокружности — числами второй группы: номер $3k$ поставим рядом с 1, остальные — произвольно (см. рисунок). Докажем, что при любом соединении точек непересекающимися отрезками разность чисел в концах одного из них будет $3k-1$ или больше.

Если какой-то отрезок соединяет две точки a и b верхней полуокружности, то, очевидно, на дуге ab найдутся две с о с е д н и е точки, соединенные отрезком. Разность их номеров по построению равна $3k-1$ или $3k$.

В противном случае любая точка верхней полуокружности должна быть соединена с точкой нижней полуокружности. Следовательно, каждый из отрезков соединяет числа разных групп. Отрезок, выходящий из точки 1, должен заканчиваться на нижней полуокружности, а отрезок, выходящий из соседней точки $3k$ — на верхней. Поскольку пересекаться они не могут по условию, это должен быть один и тот же отрезок. Он и является искомым, так как разность чисел в его концах равна $3k-1$.

А. А. Разборов

Ф823. *Метеорит, летевший прямо на планету (по прямой, проходящей через центр планеты), попал в автоматическую космическую станцию, вращавшуюся вокруг планеты по круговой орбите радиуса R. В результате столкновения метеорит застрял в станции, которая перешла на новую орбиту с минимальным расстоянием до центра планеты $R/2$. Определить скорость метеорита перед столкновением. Масса станции в 10 раз превосходит массу метеорита. Масса планеты M. Гравитационная постоянная равна G.*



Пусть u — скорость метеорита, v_1 — скорость станции до столкновения, v_2 — скорость станции и метеорита сразу после столкновения, m — масса метеорита, $10m$ — масса станции.

Запишем уравнение движения станции до столкновения:

$$10m\,\frac{v_1^2}{R}=G\,\frac{10mM}{R^2}.$$

Отсюда находим скорость v_1:

$$v_1=\sqrt{G\,\frac{M}{R}}.$$

Согласно закону сохранения импульса скорости $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ связаны соотношением

$$m\vec{u}+10m\vec{v}_1=11m\vec{v}_2.$$

Запишем закон сохранения импульса в проекциях на оси X и Y (см. рисунок):

$$10mv_1=11mv_{2x}, \qquad (1)$$

$$mu=11mv_{2y}. \qquad (2)$$

После столкновения станция переходит на эллиптическую орбиту. Механическая энергия станции с застрявшим в ней метеоритом при движении по эллиптической орбите остается постоянной. Следовательно,

$$-G\,\frac{11mM}{R}+\frac{11m}{2}\left(v_{2x}^2+v_{2y}^2\right)=-G\,\frac{11mM}{R/2}+\frac{11m}{2}V^2, \qquad (3)$$

где V — скорость станции в момент наибольшего сближения с планетой. Согласно второму закону Кеплера скорость V и скорость v_2 станции сразу после столкновения связаны соотношением

$$VR/2=v_{2x}R. \qquad (4)$$

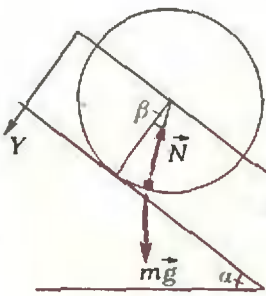
Решая совместно уравнения (1)—(4) и учитывая, что $v_1=\sqrt{G\,\frac{M}{R}}$, находим скорость метеорита u:

$$u=\sqrt{58G\,\frac{M}{R}}.$$

А. И. Буздин

kvant.mccme.ru

Ф824. *Полый цилиндр массы M скатывается без проскальзывания по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha = 45°$. На абсолютно гладкой внутренней поверхности цилиндра лежит маленькое тело массы $m = M/2$. Чему равен угол β (см. рисунок) во время скатывания?*



Поскольку силы трения отсутствуют, механическая энергия системы цилиндр + тело остается постоянной. Кинетическая энергия системы складывается из кинетической энергии поступательного движения цилиндра и тела как целого и кинетической энергии всех точек цилиндра, обладающих в каждый момент некоторой линейной скоростью. Так как проскальзывания нет, эта линейная скорость равна скорости поступательного движения цилиндра.

Запишем закон сохранения энергии:

$$(2M+m)\frac{v_x^2}{2} = (M+m)gx\sin\alpha. \qquad (1)$$

Здесь x (см. рисунок) — координата центра цилиндра в данный момент времени ($x=0$ в начале движения), v_x — скорость движения в данный момент времени ($v_x=0$, когда $x=0$). Учитывая, что $x = v_x^2/2a$, из уравнения (1) находим ускорение системы:

$$(2M+m)a = (M+m)g\sin\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \frac{M+m}{2M+m}g\sin\alpha = \frac{3}{5}g\sin\alpha. \qquad (2)$$

Запишем уравнение движения тела в проекциях на оси X и Y (см. рисунок):

$$mg\sin\alpha - N\sin\beta = ma,$$
$$mg\cos\alpha - N\cos\beta = 0.$$

Отсюда с учетом соотношения (2) получаем

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{2}{5}\operatorname{tg}\alpha = 0{,}4, \quad \beta = 21°48'.$$

А. И. Федосов

◆

Ф825. *Лампочку, рассчитанную на напряжение 2,5 В и ток 0,2 А, подключают длинными проводами к батарейке. Амперметр, включенный последовательно с лампочкой, показывает ток $I_1 = 0{,}2$ А. Когда лампочку подключили к проводам параллельно с амперметром, она накалилась так же, как и в первом случае. Какой ток показывает амперметр? Батарейку считать идеальной, сопротивление проводов равно 2 Ом.*

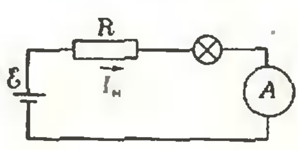


Рис. 1.

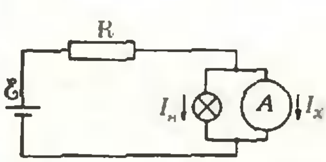


Рис. 2.

При последовательном соединении амперметр показывает ток, текущий через лампу. По условию задачи ток I_1 равен номинальному току $I_н = 0{,}2$ А, на который рассчитана лампа. Следовательно, в первом случае напряжение на лампе равно номинальному значению $U_н = 2{,}5$ В. Тот факт, что при параллельном соединении лампы и амперметра лампа накалилась так же, как и в первом случае, означает, что ток, текущий через лампу, равен номинальному и напряжение на лампе и на амперметре равно номинальному.

Запишем закон Ома для обоих случаев соединения.

При последовательном соединении (рис. 1) —

$$\mathcal{E} = I_н(R+r) + U_н, \qquad (1)$$

где R — сопротивление проводов, r — сопротивление амперметра.

При параллельном соединении (рис. 2) —

$$\mathcal{E} = (I_н + I_x)R + U_н, \qquad (2)$$

где I_x — ток, текущий через амперметр. Учитывая, что $rI_x = U_н$, преобразуем уравнение (1):

$$\mathcal{E} = I_н\left(R + \frac{U_н}{I_x}\right) + U_н. \qquad (1')$$

Решая совместно уравнения (1′) и (2), находим ток I_x, текущий через амперметр при параллельном соединении лампы и амперметра:

$$I_x = \sqrt{\frac{I_н U_н}{R}} = 0{,}5\ \text{А}.$$

А. Р. Зильберман

◆

Ф826. *На достаточно удаленные предметы смотрят через собирающую линзу с фокусным расстоянием $F = 9$ см, располагая глаз на расстоя-*

Пренебрежем сначала размерами зрачка, считая его точечным. Ясно, что из прошедших через линзу лучей в глаз попадут те и только те, которые перед попаданием на линзу прошли через точку B (рис. 1), сопряженную с той точкой, в которой расположен зрачок (две точки называют сопря-

нии $a=36$ см от линзы. Оценить минимальный размер экрана, который нужно расположить за линзой так, чтобы он перекрыл все поле изображения. Где следует расположить экран?

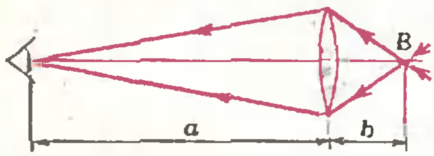


Рис. 1.

женными, если при помещении точечного предмета в одну из них в другой получается действительное изображение предмета). Расстояние b от линзы до точки B найдем, воспользовавшись формулой тонкой линзы:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\Rightarrow b=\frac{aF}{a-F}=12\text{ см}.$$

Рис. 2.

Именно в точке B следует расположить малый экран, закрывающий доступ световым лучам в глаз.

Чтобы оценить минимальный радиус R экрана, следует учесть, что зрачок имеет конечный радиус $r\approx1{,}5$ мм. Лучи не будут попадать в глаз, если экран перекроет всю область, сопряженную с поверхностью зрачка. Как видно из рисунка 2,

$$R=\frac{b}{a}r=0{,}5\text{ мм}.$$

Д. В. Белов

◆

Ф827. *Куб с ребром длины a движется со скоростью $v=0{,}8\,c$ (c — скорость света) в направлении, перпендикулярном одной из граней куба. Что получается на фотографии куба, сделанной удаленным фотоаппаратом с очень короткой выдержкой, если оптическая ось аппарата перпендикулярна грани куба и пересекает траекторию его центра (рис. 1)?*

Мысленно обратим процесс фотографирования во времени: пусть куб движется со скоростью $-\vec{v}$, в некоторый момент фотоаппарат испускает световую вспышку, которая достигает куб в то время, когда он пересекает оптическую ось. Точки пересечения фронта волны с точками куба будут именно теми точками, изображения которых получатся на снимке (это связано с тем, что от разных частей куба до фотоаппарата свет проходит разные расстояния, а следовательно, за разные времена).

Вблизи куба волну можно считать плоской (поскольку фотоаппарат удален от куба). Расстояние a от ближней до дальней грани куба свет пройдет за время $\tau\approx a/c$.

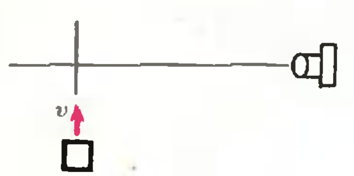


Рис. 1.

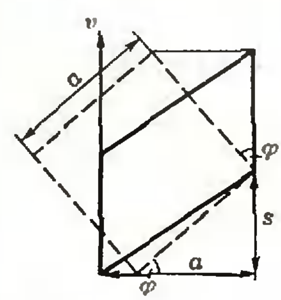


Рис. 2.

Поэтому на фотографии изображения ближних и дальних ребер куба будут смещены в направлении движения куба на расстояние $s=v\tau=0{,}8a$ друг относительно друга. Куб на фотографии получится как бы повернутым на угол $\varphi=\arcsin\frac{v}{c}$ (рис. 2).

Д. Ю. Григорьев

Рэндзю

В. А. САПРОНОВ

Итак, вы усвоили азы атаки. Но не менее важно уметь защищаться. Лишь искусная оборона позволяет белым выстоять в начальный период партии и создать фундамент для перехода в контрнаступление.

В партии на рисунке 1 белые строят защитную *сеть* (треугольники показывают возможное развитие этой сети), так что четверки черных шашек упираются в ее «узлы». Эффективная в некоторых ситуациях, сеть все же не может стать универсальным средством обороны: во-первых, черные постараются занять какой-нибудь из опорных пунктов белых и выйти на оперативный простор; во-вторых, при таком методе защиты можно добиться только ничьей — перейти к контригре трудно.

Поэтому, если это возможно, защиту следует строить на контрударах. Особенно эффективное средство — контршах. В партии Коцев — Сапронов из первого чемпионата мира по переписке (рис. 2) черные после хода в пункт 1 полагали, что имеют выигрыш в точках *A* и *B*. Однако белые пошли в пункт 2, и черные обнаружили, что атака у них срывается, а удовлетворительной защиты нет.

В результате швед Янсон и я набрали одинаковое количество очков; по лучшему соотношению ходов в выигранных и проигранных партиях японский судья в октябре 1982 г. объявил меня победителем. (В чемпионате участвовали еще 5 человек — по одному человеку из Болгарии, Дании и Канады и два японца.)

Наверное, вы уже обратили внимание, как дорого обходится ошибка в дебюте, особенно белым. Одна неточность — и партию не спасти.

В рэндзю дебюты классифицируются по трем первым ходам.

На втором ходу у белых, с точностью до симметрии, пять вариантов (рис. 3). Разумеется, они вправе сыграть и подальше от центра, но в таком случае их шашка может оказаться слишком далеко от «театра военных действий».

При втором ходе в пункты *A* или *B* черным целесообразно пойти в один из пунктов 1—3, 5—8.

Менее изучены последствия второго хода в пункты *C*, *D*, *E*. Во всяком случае, черные могут пойти в пункты 1 или 2 и перевести игру в русло тех же дебютов, что и после *A* или *B*. Однако многие игроки отвечают атакой на удаленных от белой шашки пунктах. На рисунке 4 (партия Сапронов — Бирюков) после девятого хода у белых нет защиты.

На рисунке 5 (партия Бирюков — Сапронов) черные опрометчивым третьим ходом передали инициативу белым и их шашка осталась в стороне от «поля боя».

Окончание. Начало — в № 8.

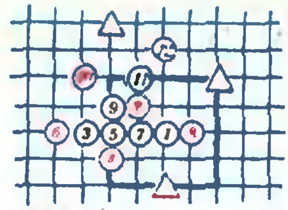


Рис. 1.

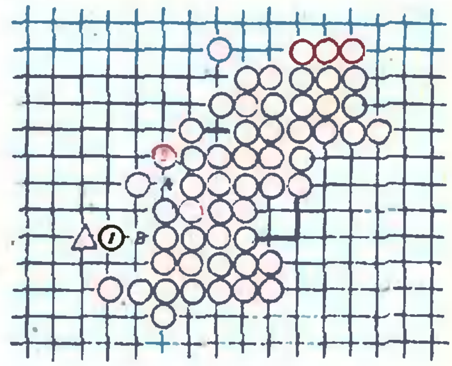


Рис. 2.

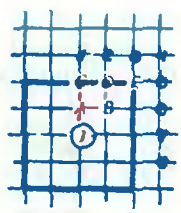


Рис. 3.

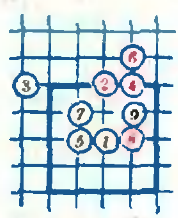


Рис. 4.

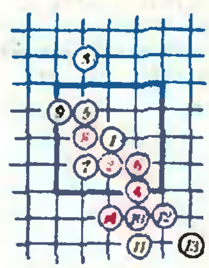


Рис. 5.

На рисунке 6 показаны типичные начала, встречающиеся в партиях рэндзистов. Дальше они распадаются на варианты в зависимости от различных ходов соперников.

Несмотря на древний возраст, рэндзю еще только вступает на путь совершенствования.

Задачи второго тура

В задачах №№ 7—11 черные начинают и выигрывают. В задачах №№ 7—9 достаточно указать первый ход; обоснуйте правильность вашего выбора. В задачах №№ 10, 11 надо указать кратчайший выигрыш (до построения победной вилки). В задаче № 12 надо указать лучший, по вашему мнению, ход черных и наметить план дальнейшей игры.

Решения высылайте до 31 декабря.

kvant.mccme.ru

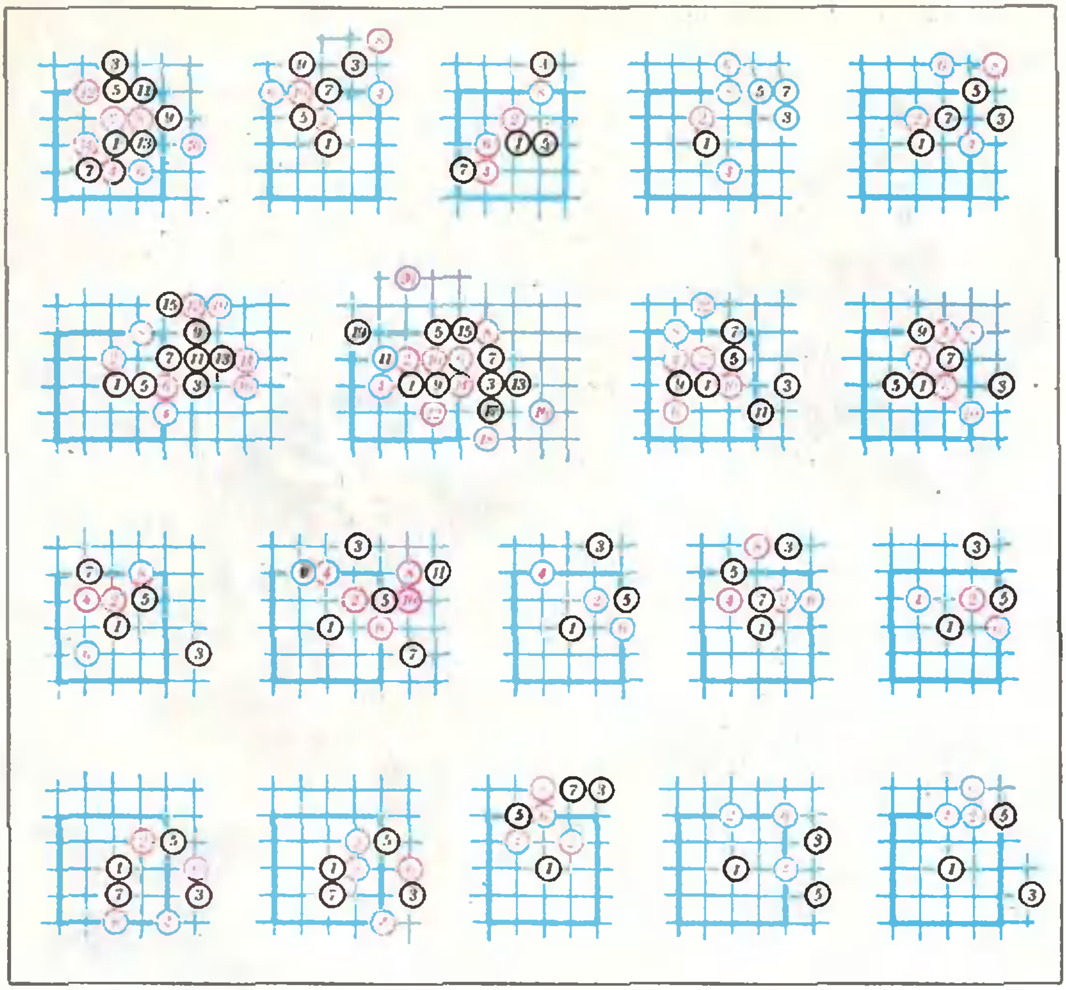
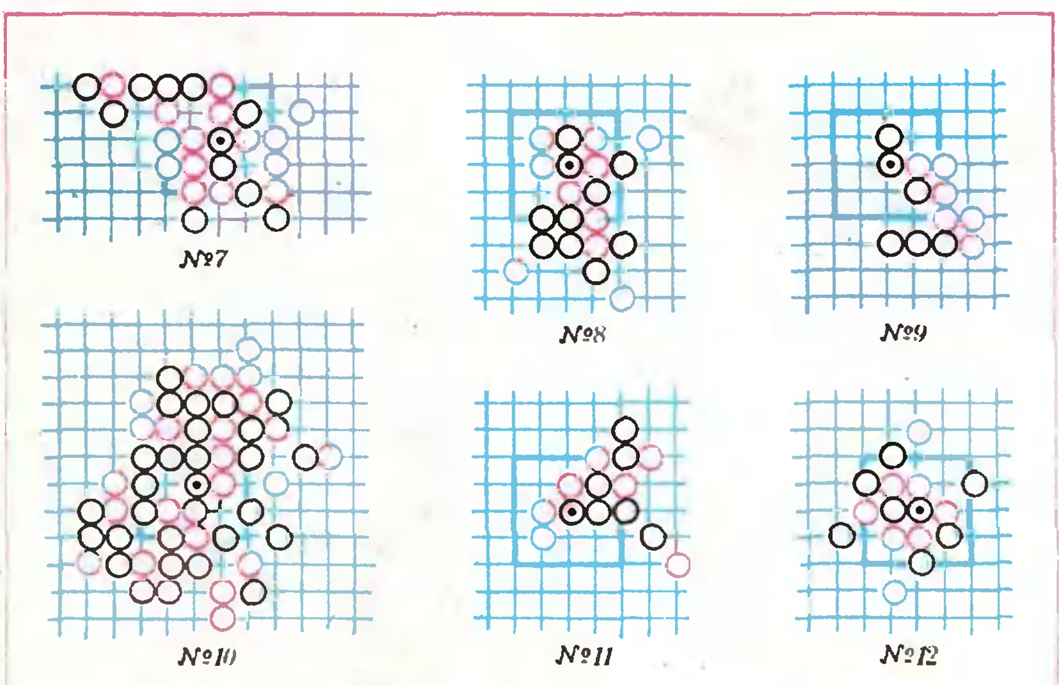


Рис. 6.

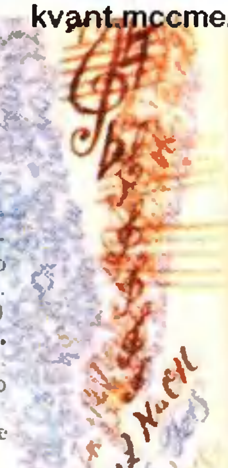


КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Наука помогла

Как-то профессор химии А. Бородин, работая над оперой «Князь Игорь», сидел за роялем и, глядя на пустой нотный лист (дело не клеилось), задумчиво перебирал клавиши. Кто-то (кто именно, пока не установлено) положил ему на рояль несколько листков, им же исписанных химическими формулами. И композитор А. Бородин сыграл то, что было на этих листках.

Так родились знаменитые половецкие пляски.



О труде ученого

О рассеянности Ампера до сих пор ходят легенды.

Однажды репортер пришел взять у него интервью.

— Говорят, что вы всегда в поиске? — был вопрос.

— И не говорите! — ответил ученый.— Иногда целый день потратишь, чтобы найти эти проклятущие очки. А они, как всегда, оказываются на лбу... Вот и сегодня с самого утра не могу их найти!

Ответ мэтра

— Почему я стал геометром? — говорил Пифагор своим ученикам.— Наверное, потому, что меня в детстве часто и надолго ставили в угол.

Дутый факт

Братья Жозеф и Этьенн Монгольфье, как известно, являются изобретателями воздушного шара, который они склеили из плотной бумаги, наполнили горячим воздухом и запустили в 1783 году в Париже. Поэтому именно братьев считают первыми, кто провел операцию по надувательству, хотя испытания шара были успешными.

Е. А. Свистунов

Спокойной ночи!

Известно, что Д. И. Менделеев однажды во сне увидел таблицу, которую потом назвали «Периодической системой элементов Д. И. Менделеева». Это было открытие века.

Но, к сожалению, сон ему до конца досмотреть не дали, разбудили раньше времени. Вот поэтому-то таблица так и осталась с некоторыми пустыми клетками.

kvant.mccme.ru

IX Всероссийская олимпиада школьников

По традиции в дни весенних школьных каникул проходил заключительный, зональный этап Всероссийской физико-математической и химической олимпиады школьников 8—10 классов. Зональному этапу предшествовали районные, городские и областные (краевые) олимпиады. Каждая область (край) была представлена победителем областного (краевого) этапа по каждому классу.

В этом году заключительный этап олимпиады проводился для Северо-Западной зоны в Калуге, для Центральной зоны в Пензе, для Юго-Западной зоны в Астрахани и для зоны Сибири и Дальнего Востока в Барнауле. Кроме того, в это же время заключительный этап олимпиады проходил в физико-математических школах-интернатах при Московском, Ленинградском и Новосибирском университетах.

Задание заключительного этапа по математике состояло из пяти задач, на решение которых отводилось четыре часа. Как показала проверка, наибольшие трудности у учащихся вызвали задачи по геометрии. Значительные трудности вызвали также задачи комбинаторного типа. Члены жюри подробно обсудили со школьниками конкурсные задачи и проанализировали допущенные учащимися ошибки. Каждый школьник получил полный комплект текстов и решений задач.

Заключительный этап олимпиады по физике проводился в два тура — теоретический и экспериментальный, причем в экспериментальном туре принимали участие все школьники, независимо от результатов теоретического тура. На решение теоретических задач давалось четыре часа, а экспериментальных — три. Наибольшие затруднения у восьмиклассников вызвали теоретические задачи 1 и 3, у девятиклассников — теоретическая задача 2, а у десятиклассников — задача 2 экспериментального тура. В целом все участники олимпиады успешно справились со всеми предложенными задачами.

Школьники, занявшие I—IV места на зональном этапе олимпиады, были награждены дипломами, грамотами и памятными подарками. Из призеров зонального этапа была составлена команда РСФСР для участия во Всесоюзной олимпиаде. Специальными грамотами были награждены учителя, подготовившие призеров олимпиады.

Ниже приводятся задачи по математике и физике заключительного этапа и фамилии призеров IX Всероссийской олимпиады школьников.

Математика

8 класс

1. Сумма ста действительных чисел равна нулю. Докажите, что их можно занумеровать так, что будут выполнены неравенства: $a_1 \geqslant 0$, $a_1+a_2 \geqslant 0$, ..., $a_1+a_2+\ldots+a_{99} \geqslant 0$.

2. Можно ли в клетках квадратной таблицы размера 6×6 записать натуральные числа от 1 до 36, так, чтобы сумма чисел, записанных в клетках любой фигуры на рисунке 1, делилась на 2?

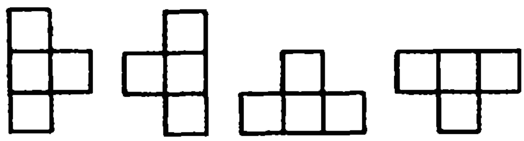


Рис. 1

3. Разложите число $2^{1982}+1$ на два натуральных множителя, каждый из которых не меньше 1000.

4. Пусть $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. От некоторой точки O откладываются четыре вектора, равные $\vec{AB}$, $\vec{BC}$, $\vec{CD}$, $\vec{DA}$, концы которых обозначаются через B_1, C_1, D_1, A_1 соответственно. Всегда ли четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ выпуклый? Чему равна его площадь, если площадь четырехугольника $ABCD$ равна S?

5. Учитель нарисовал на доске прямоугольный треугольник ABC с прямым углом при вершине B и вписанный в него равносторонний треугольник KMP такой, что точки K, M, P лежат на сторонах AB, BC, AC соответственно, и $[KM] \parallel [AC]$. Затем он стер с доски все, кроме точек A, P, C и предложил ученикам при помощи циркуля и линейки восстановить стертые точки и линии. Как это сделать?

9 класс

1. Найдите все простые числа, представимые в виде $\left[\frac{n^2}{3}\right]$, где n — натуральное число. ($[x]$ — целая часть числа x).

2. Упростите выражение $\frac{1}{2!}+\frac{2}{3!}+\ldots+\frac{99}{100!}$.

3. Можно ли в клетках квадратной таблицы размера 6×6 записать натуральные числа от 1 до 36 так, чтобы сумма чисел, записанных в клетках любой фигуры на рисунке 2, делилась на 9?

4. На координатной плоскости задан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, все вершины которого имеют целочисленные координаты. Докажите, что внутри пятиугольника $ABCDE$

kvant.mccme.ru

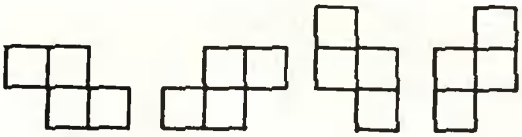


Рис. 2.

найдется хотя бы одна точка с целочисленными координатами. Справедливо ли аналогичное утверждение для невыпуклого пятиугольника?

5. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} 4x^2-3y=xy^3, \\ x^2+x^3y^2=2y. \end{cases}$$

10 класс

1. По кругу написано несколько различных действительных чисел, каждое из которых равно произведению двух чисел, стоящих по обе стороны от него. Сколько всего чисел написано?

2. Докажите, что для любых действительных чисел $\alpha>1$, $\beta>1$, $\gamma>1$, таких, что $\frac{\alpha}{\beta}\geqslant\frac{\gamma}{\alpha}$, выполнено неравенство

$$\frac{\lg\alpha}{\lg\beta}\geqslant\frac{\lg\gamma}{\lg\alpha}.$$

3. Рассмотрим правильный $(2n+1)$-угольник и всевозможные треугольники с вершинами в вершинах данного $(2n+1)$-угольника. Некоторые из этих треугольников содержат центр $(2n+1)$-угольника. Найдите число таких треугольников.

4. Последовательность (x_n) задана рекуррентно следующим образом: $x_1=0$, $x_{n+1}=5x_n+\sqrt{24x_n^2+1}$, $n=1, 2, \ldots$. Докажите, что все члены последовательности — целые числа.

5. Правильные пятиугольники $OABCD$ и $OA_1B_1C_1D_1$ расположены в пространстве так, что $A\neq A_1$, $B\neq B_1$, $C\neq C_1$, $D\neq D_1$. Докажите, что прямые (AA_1), (BB_1), (CC_1) и (DD_1) параллельны некоторой плоскости.

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. В калориметр наливают ложку горячей воды, при этом его температура увеличивается на 5 градусов. После того как в него добавили еще одну ложку горячей воды, температура возросла еще на 3 градуса. На сколько еще градусов возрастет температура калориметра, если в него добавить еще 48 ложек горячей воды? Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

2. Какой из резисторов нужно замкнуть накоротко, чтобы сопротивление между точками A и B изменилось сильнее всего (рис. 1)?

3. В системе, изображенной на рисунке 2, поршень $П$ и подвижная втулка B, вставленная в отверстие в поршне, находятся в равновесии с жидкостью плотности ρ. Трение между скользящими поверхностями отсутствует, зазоры жидкость не пропускают. На поверхность втулки положили перегрузок массы m_0. На сколько сместится втулка относительно первоначального положения? Площадь поперечного сечения сосуда S, площадь отверстия S_0.

4. Низкая двухосная тележка связана нитью с грузом (рис. 3). Тележку отпускают, и она движется по столу с некоторым ускорением. Опыт повторяют, заклинив одну из осей (колеса жестко насажены на ось). При этом ускорение тележки оказывается в k раз меньше, чем в первом опыте. Во сколько раз еще уменьшится ускорение, если отпустить тележку, заклинив обе оси? Задачу решить для $k_1=1{,}5$ и $k_2=3{,}0$.

9 класс

1. Три одинаковых невесомых стержня шарнирно закреплены в точках A и B, лежащих на одной горизонтали (рис. 4). Расстояние между этими точками в два раза превышает длину стержня. К шарниру C подвешен груз массы m. Какую наименьшую силу нужно приложить к шарниру D, чтобы стержень CD был горизонтальным?

2. Теннисный мяч падает со скоростью $\vec{v}_0$ на тяжелую ракетку и упруго отражается от нее. С какой скоростью $\vec{v}_р$ должна двигаться ракетка, чтобы мяч отразился под прямым углом к первоначальной траектории? Какой угол φ составляет скорость $\vec{v}_р$ с перпендикуляром к ракетке, если скорость $\vec{v}_0$ составляет с тем же перпендикуляром угол α? Ракетка и мяч движутся в любой момент времени поступательно.

3. С идеальным газом, взятым в количестве $\nu=\frac{m}{M}=3$ моля, проводят замкнутый процесс (цикл), состоящий из двух изохор и двух изобар. Отношение давлений на изобарах $\alpha=5/4$, отношение объемов на изохорах $\beta=6/5$. Известно, что разность максимальной и минимальной температур в цикле $\Delta T=100$ К. Универсальная газовая постоянная $R=$

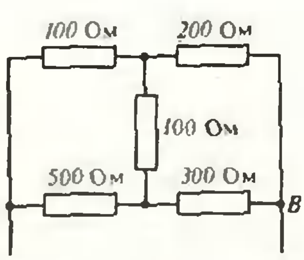


Рис. 1.

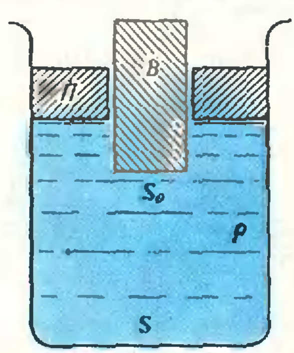


Рис. 2.

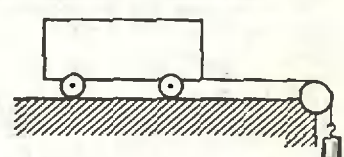


Рис. 3.

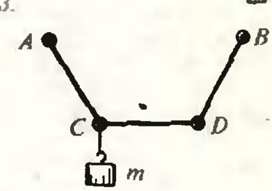


Рис. 4.

$=8{,}32$ Дж/(моль · К). Найдите работу, совершаемую газом за один цикл.

4. Измеряя модуль Юнга материала длинной проволоки по ее удлинению под действием силы, учащийся получил значение $E'=96$ ГПа. При повторных опытах он провел те же измерения, сложив проволоку вдвое (учитывая, разумеется, что длина проволоки уменьшилась, а площадь поперечного сечения увеличилась в два раза). В этих опытах получилось значение $E''=100$ ГПа. Различие результатов было объяснено тем, что проволока состоит из двух равных по размерам кусков из разных материалов. Определите значения E_1 и E_2 модулей Юнга этих материалов.

10 класс

1. Однородная доска массы m симметрично лежит на двух катках, расстояние между осями которых равно l (рис. 5). Коэффициент трения одного из катков о доску равен μ; по другому катку доска может скользить без трения. Шероховатый каток приведен в очень быстрое вращение, а в прежнем положении равновесия доску удерживает пружина жесткости k. При каких значениях μ доска, получив смещение из положения равновесия, сможет совершать гармонические колебания? Какова частота этих колебаний?

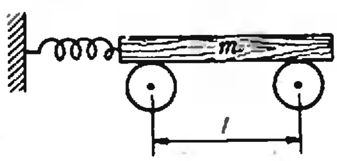


Рис. 5

2. Катушка состоит из n витков, площадь каждого витка S, индуктивность катушки L. Перпендикулярно виткам включают внешнее однородное магнитное поле, возрастающее линейно от 0 до B_0 в течение времени τ_1, затем вновь равномерно убывающее до нуля в течение времени τ_2. Какой заряд протек по катушке, если она была замкнута накоротко? Омическим сопротивлением цепи пренебречь.

3. На горизонтально расположенном плоском зеркале лежит тонкая симметричная двояковыпуклая линза. На оси системы на некотором расстоянии от линзы находится светящаяся точка, причем изображение точки совпадает с ней самой. Где окажется новое изображение точки, если на поверхность зеркала ввести немного жидкости с показателем преломления, равным показателю преломления стекла линзы, так, чтобы весь зазор между линзой и зеркалом был заполнен этой жидкостью?

4. Для обнаружения некоторых полезных ископаемых используют прибор, принцип действия которого основан на изменении периода колебаний математического маятника над залежами руды. Вычислите относительное изменение периода колебаний $\Delta T/T$ маятника над месторождением руды. Принять, что залежи имеют форму шара радиуса $R=1$ км, центр которого находится на глубине $h=1{,}2$ км. Плотность руды в 3 раза больше плотности Земли. Радиус Земли $R_3=6400$ км. Землю считать однородной.

Экспериментальный тур

8 класс

1. Постройте график зависимости силы трения нити о металлический стержень от числа оборотов нити вокруг стержня. Опыт проведите для числа оборотов от 0 до 4 через 1/2 оборота.

Оборудование: штатив с двумя лапками, нить суровая длиной 1 метр, стержни металлические от штатива (2 шт.), динамометр Бакушинского, линейка, лист миллиметровой бумаги, груз.

2. Определите жесткость пружины.

Оборудование: пружина, мензурка, нить, тело, линейка, сосуд с водой.

9 класс

1. Определите неизвестное сопротивление.

Оборудование: источник тока, катушка, стрелка магнитная на подставке, реостат, соединительные провода, резистор с неизвестным сопротивлением.

2. Определите теплоемкость металлического предмета. (Комнатная температура и атмосферное давление известны). Плотность воздуха 1,3 кг/м^3.

Оборудование: пробирка, трубка стеклянная, калориметр, мензурка, груз массой 100 г, нагретый до температуры 100°С, пластилин.

10 класс

1. Определите массу гайки двумя способами.

Оборудование: штатив с лапкой, подставка с лампочкой, источник тока, линза, экран с миллиметровыми делениями, пластилин, соединительные провода, линейка, гайка, набор монет стоимостью 1, 2 и 3 копейки.

2. Определите зависимость КПД генератора от сопротивления нагрузки.

Оборудование: электромикродвигатели (2 шт.), амперметры (2 шт.), вольтметры (2 шт.), провода соединительные, нипельная резина, реостат.

Б. Б. Буховцев, О. Ю. Овчинников, С. В. Резниченко, Г. Н. Яковлев

Поправка

В статье «Алгебраические и трансцендентные числа» («Квант», 1983, № 7, с. 2) по вине редакции в формуле (4) на с. 6 вместо qm напечатано q^m. Формула (4) должна быть такой:

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{qm}.$$

kvant.mccme.ru

Призеры IX Всероссийской олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Бадрин Е. (Рязань, с. ш. № 8),
Иванов Л. (Саратов, с. ш. № 13),
Михайлов В. (Братск, с. ш. № 37),
Филиппов С. (Белорецк, с. ш. № 14);

по 9 классам —
Астрелин А. (Новосибирск, с. ш. № 121),
Гочев Г. (Дубна, с. ш. № 9),
Лев М. (Свердловск, с. ш. № 130),
Мисник С. (Воронеж, с. ш. № 62),
Москадынов Е. (Ангарск, с. ш. № 10);

по 10 классам —
Гутман А. (Новокузнецк, с. ш. № 11),
Орлов Д. (Владимир, с. ш. № 8),
Сорокин М. (Ижевск, с. ш. № 30),
Стаховский В. (Капустин Яр, с. ш. № 231).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Басов О. (Владимир, с. ш. поселка Владимир-30),
Есипова Т. (Ростов-на-Дону, с. ш. № 5),
Романов Е. (Димитровград, с. ш. № 25),
Троицкий В. (Южно-Сахалинск, с. ш. № 2);

по 9 классам —
Веснин Р. (Петрозаводск, с. ш. № 18),
Гарифуллин О. (Пенза, с. ш. № 17),
Струков С. (Воронеж, с. ш. № 85),
Четкова А. (Барнаул, с. ш. № 22);

по 10 классам —
Васильченко Е. (Алексин, с. ш. № 3)
Карнаух С. (Красноярск, с. ш. № 161),
Кочкин Е. (Волжский, с. ш. № 2),
Кузнецов Д. (Горький, с. ш. № 36).

Дипломы III степени

по 8 классам получили
Атаманчук Ю. (Тюменская обл., п. Усть-Юган, с. ш.)
Биргер А. (Иваново, с. ш. № 6),
Никитенко В. (Благодарный, с. ш. № 9),
Писаренко Н. (Владивосток, с. ш. № 51);

по 9 классам —
Лазуткин Е. (Черногорск, с. ш. № 19),
Плакунова Е. (Горький, с. ш. № 40),
Сергиенко А. (Североморск, с. ш. № 12),
Хохлов В. (Саратов, с. ш. № 13);

по 10 классам —
Белов Д. (Тамбов, с. ш. № 29),
Кидысюк В. (Рязань, с. ш. № 58),
Коршунов Д. (Новосибирск, с. ш. № 25),
Сапегин И. (Пенза, с. ш. № 29).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили
Климович Г. (п. Болшево Московской обл., с. ш. № 3),
Лобода А. (Прокопьевск, с. ш. № 2),
Павлов Р. (Чебоксары, с. ш. № 4),
Фролов А. (Новочеркасск, с. ш. № 1);

по 9 классам —
Абанов А. (Красноярск, с. ш. № 170),
Брезгунов А. (Новосибирск, с. ш. № 25),
Кузнецын К. (Киров, с. ш. № 16),
Курников И. (Гатчина, с. ш. № 1),
Паршин Н. (Пенза, с. ш. № 6),
Приходько В. (Ростов-на-Дону, с. ш. 14),
Цырлин А. (Балашиха, с. ш. № 26);

по 10 классам —
Кулябин К. (Челябинск, с. ш. № 127),
Ландсберг Г. (п. Протвино Московской обл., с. ш. № 1),
Поляков М. (Усолье, с. ш. № 15),
Сыскин В. (Новосибирск, с. ш. № 130),
Фатьянов О. (Курск, с. ш. № 6).

Дипломы II степени

по 8 классам получили
Бенедюк П. (Пятигорск, с. ш. № 5),
Громов Р. (Барнаул, с. ш. № 88),
Дмитриев К. (Гатчина, с. ш. № 9),
Суслов С. (Ульяновск, с. ш. № 35);

по 9 классам —
Богородицкий А. (Саратов, с. ш. № 42),
Король А. (Новокузнецк, с. ш. № 7),
Осипов А. (Смоленск, с. ш. № 7),
Чеботарь О. (Хабаровск, с. ш. № 2),
Ярунин Н. (Павлово, с. ш. № 1);

по 10 классам —
Дьячков М. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Комин А. (Северодвинск, с. ш. № 17),
Мокеев И. (Ангарск, с. ш. № 10),
Рыжиков А. (Саратов, с. ш. № 13),
Савров М. (Азов, с. ш. № 13),
Энтелис А. (Свердловск, с. ш. № 9).

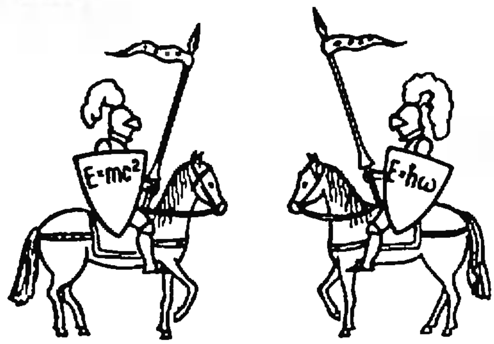
Дипломы III степени

по 8 классам получили
Евстифеев А. (Ижевск, с. ш. № 28),
Меньков В. (Мончегорск, с. ш. № 3),
Мотовилов М. (Новосибирск, с. ш. № 136),
Паплев А. (Нальчик, с. ш. № 2);

по 9 классам —
Лукьянов А. (Ангарск, с. ш. № 10),
Макаров Д. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Нораев Д. (Горький, с. ш. № 66),
Степанец Е. (Астрахань, с. ш. № 46);

по 10 классам —
Катаргин А. (Салават, с. ш. № 6),
Кондратьев С. (Кострома, с. ш. № 32),
Павленко А. (Владивосток, с. ш. № 23),
Чеканов С. (Саратов, с. ш. № 13).

kvant.mccme.ru



V Московский турнир юных физиков

Я здесь не дам сих тайн истолкованья.—
Вопрос, а не ответ — мое призванье.
Г. Ибсен

V Московский турнир был проведен физическим факультетом МГУ с 20 декабря 1982 г. по 3 апреля 1983 г. Оргкомитет Турнира возглавлял вице-президент АН СССР, академик Е. П. Велихов, жюри — профессор физического факультета МГУ В. Л. Бонч-Бруевич. В этом соревновании старшеклассников приняли участие 40 школ Москвы и Московской области.

Как обычно, турнир проводился в три этапа.

I тур — заочный коллективный конкурс. Школам для коллективного решения предлагались 20 задач сроком на два месяца. По результатам этого конкурса ко II туру были допущены команды 15-ти школ.

II тур — отборочные физбои, которые определили финалистов турнира. Отборочные физбои проводились в московских школах по задачам заочного конкурса.

III тур — финал турнира был проведен на физическом факультете МГУ. В его программу входили: конкурс домашних заданий, конкурс капитанов, физбой трех команд — финалистов турнира, конкурс болельщиков, награждение победителей.

Диплом I степени и переходящий приз турнира был вручен командам школ № 57 и № 7 г. Москвы, диплом II степени — команде школы № 710 г. Москвы, диплом III степени — командам школ № 444 г. Москвы, № 82 пос. Черноголовка и ФМШ № 18 при МГУ. За победу в отдельных конкурсах турнира грамоты и подарки были вручены 17-ти школьникам. Физический факультет МГУ наградил школы, команды которых показали высокие результаты в этом состязании, ценными физическими приборами. Журнал «Квант» наградил ряд школьников книгами серии «Библиотечка «Квант» с автографами авторов.

VI турнир юных физиков начнется 15 октября 1983 г. Ваши вопросы по организации таких соревнований, отзывы и предложения, а также заявки на участие в ТЮФ—VI присылайте по адресу: *117234, Москва, МГУ, физический факультет, Совет по работе со школьниками. Оргкомитет ТЮФ.*

Задачи заочного коллективного конкурса

Условия задач сформулированы максимально кратко. Необходимые дополнительные данные и оговорки следует вводить, опираясь на здравый смысл. Эти задания вы можете использовать при организации в школе викторин, вечеров занимательной науки, турниров юных физиков, использовать в работе физических кружков.

1. «Гол». «...сильнейший удар! Го-о-ол!!!» Каково максимальное давление в футбольном мяче при ударе?

2. «Дождь». Оцените, во сколько раз уменьшится количество тополиного пуха в воздухе после грозового дождя (Москва, июнь, гроза средней силы и продолжительности).

3. «Гравитационное поле Земли». Как зависит напряженность гравитационного поля Земли от расстояния до ее центра?

4. «Электрическое поле Земли». Предложите способ и измерьте напряженность электрического поля Земли.

5. «Взрыв». На маленьком островке Курильской гряды физик охотился за бабочкой. Вдруг, в момент, когда бабочка сложила крылья, ее резко отнесло на 10 см в сторону. Оказалось, что в 300 км от наблюдательного физика началось извержение вулкана — произошел первый мощный взрыв с выбросом газов и пепла. Оцените энергию этого взрыва.

6. «Болото». Объясните, почему человек может утонуть в болоте, даже если средняя плотность болотной среды существенно больше плотности воды.

7. «Колодец». Говорят, что в яркий солнечный день из глубокого колодца можно наблюдать звезды. Объясните, какие звезды можно так наблюдать и каким должен быть для этого колодец.

8. «Марианский желоб». Каково давление воды на дне самой глубокой океанской впадины?

9. «Аэростат». Аэростат объемом 1000 м^3 находился в равновесии на высоте $H=300$ метров над поверхностью Земли. Вдруг на него сверху сел беркут ($m=10$ кг). Как будет опускаться аэростат?

10. «Воздушный шарик». Исследуйте зависимость избыточного давления в воздушном шарике от его диаметра.

11. «Парафин». Измерьте коэффициент объемного расширения парафина в интервале температур 0—80°С.

12. «Прыгающий шарик». Горизонтальная упругая плита совершает гармонические колебания вверх-вниз с амплитудой A и частотой ν. Определить, на какую максимальную высоту может подскочить стальной шарик, находящийся на этой плите. Оценить, через какое время t от начала процесса можно ожидать, что шарик подскочит на высоту 0,99 H.

Проведите экспериментальные исследования.

13. «Конан Дойл». «В тот вечер, сидя подле дяди на красном бархатном диванчике, я впервые увидел кое-кого из людей, чья слава и чудачества не забыты миром и по сей день.

— Старик с кислой миной и тонкими ногами — это герцог Куинсберри,— сказал дядя.— В состязании с графом Таафом он проехал в фаэтоне девятнадцать миль за один час, и ему удалось за полчаса передать письмо на расстояние в пятьдесят миль — письмо перебрасывали из рук в руки с крикетным мячом...

— А зачем ему это понадобилось, сэр? — удивленно спросил я. Дядя пожал плечами.

— Так ему вздумалось,— сказал он».

(А. Конан Дойл. «Родни Стоун»).

Придумать и испытать канал передачи материальной информации (теннисный мяч) средствами XVIII века на расстояние 2 км за минимальное время.

14. «Лом». Оцените, какую работу необходимо совершить, чтобы завязать узлом стальной лом.

15. «Линза». Точечный источник света помещен в фокусе собирающей линзы. Каково распределение интенсивности полученного таким образом светового пучка по его диаметру? Предложите способ создания параллельного светового пучка с равномерным распределением интенсивности в поперечном сечении пучка.

16. «Биллиард». При ударе биллиардных шаров слышен звук. Какова высота основного тона? Каковы обертоны?

17. «Магнитный момент». В цилиндрическом сосуде находится электронный газ ($n = 10^{13}$ см$^{-3}$, $T = 300$ К). Стенки сосуда упруго отражают электроны. Друг с другом электроны не взаимодействуют. Цилиндр помещают в магнитное поле, линии индукции которого параллельны оси цилиндра. Определить суммарный магнитный момент электронного газа.

18. «Водопровод». Как, не разрушая водопроводной трубы, определить, в какую сторону течет в ней вода, если вы имеете доступ только к ограниченному участку ($l = 2$ м) этой трубы?

19. «Брызги». Камушек падает в воду с высоты H. Какова при этом максимальная высота подъема водяных брызг?

20. «Кабестан». Канат, одним концом прикрепленный к стене, намотан на вал электродвигателя (n витков). Каково натяжение закрепленного участка каната, если к свободному концу каната приложена сила F? Коэффициент трения канат-вал μ, частота вращения вала ν.

Конкурс домашних заданий

1. «Представление». Разыграть с участием членов команды и болельщиков представление на физическую тему. Длительность представления — 5 минут. Жанр произвольный.

2. «Невесомость». Объяснить принцип действия и продемонстрировать изготовленный в школьной лаборатории прибор, демонстрирующий явление невесомости (например — фонарик, загорающийся, когда он находится в невесомости).

Конкурс главных задач

На решение этих задач с представлением письменных отчетов в жюри Турнира командам отводилось два часа.

1. «Гелий». Экспериментатор делает глубокий выдох, а затем глубоким вдохом наполняет легкие и дыхательные пути гелием (через трубку из газгольдера). После этого экспериментатор произносит вслух несколько фраз. Присутствующих, даже тех, кто ранее не слышал голоса этого человека, поражает необычность звучания его речи. Во-первых, высота тона становится в несколько раз выше. Во-вторых, тембр голоса сильно искажается, делая его неузнаваемым. По мере выдыхания гелия, практически после первого вдоха воздуха, обычное звучание голоса восстанавливается. Объяснить, почему увеличивается высота основного тона человеческого голоса в этом эксперименте. Сделать численные оценки.

2. «Магнит». Известно, что при помощи магнита можно поднимать тяжести. В эксперименте, демонстрирующем подъемную силу магнита, использовались: тороидальный керамический магнит, к которому для удобства была приклеена ручка из немагнитного материала, подъемная платформа в виде двух стальных дисков, связанных вдоль оси стержнем, и набор съемных грузов. Оказалось, что максимальный вес груза, который можно поднять этим магнитом, P_1.

Если теперь на боковую поверхность магнита плотно наложить тонкую полоску жести, то подъемная сила магнита значительно возрастет: $P_2 > P_1$. В проведенном эксперименте: внешний диаметр магнита 60 мм, внутренний диаметр 30 мм, ширина 15 мм, толщина жестяной полоски 0,15 мм, $P_1 = 25$ Н, $P_2 = 35$ Н. Как объяснить столь значительное увеличение подъемной силы магнита?

3. «Показатель преломления». Определить показатель преломления стекла, из которого изготовлена цилиндрическая палочка. В распоряжении экспериментаторов имеются: цилиндрическая стеклянная палочка диаметром 30 мм и длиной 50 см, штатив для закрепления палочки в любом положении, источник света — гелий-неоновый лазер, диск с калиброванным отверстием ($\varnothing = 1$ мм и 2 мм) на штативе, белый экран, штангенциркуль и рулетка (2 метра).

4. «Вода и лед». Можно ли вскипятить чай в ледяном стаканчике? Оказывается, можно! В большой кусок льда вморожены три обычных тонкостенных стакана (200 мл). В стаканы наливают холодную воду, кладут по 2 кусочка сахара и по щепотке чая. Все это на металлическом лотке закладывают в духовку СВЧ печи «Электроника» и включают ее. Через 5 минут капитаны команд получают по стакану сладкого, хорошо заваренного, горячего чая. При этом оказывается, что лед расплавился только в местах соприкосновения с горячими стаканами. Объяснить, почему в СВЧ печи вода нагревается, а лед — нет.

kvant.mccme.ru

Конкурс капитанов

Капитаны выполняли эти задания с двумя помощниками. Время на обдумывание каждого задания — 5 минут.

1. **«Кинематика».** Однородный диск катится без проскальзывания по горизонтальной плоскости со скоростью v. Как определить с помощью циркуля и линейки величину и направление мгновенной скорости некоторой точки A на ободе диска?

2. **«Факелы».** В середину длинной ($l=1$ м) стеклянной трубки подается светильный газ. Концы трубки являются горелками. При горизонтальном положении трубки получаются факелы одинаковой величины. Как изменится величина факелов, если трубку наклонить?

3. **«Проволочка».** Тонкая гибкая проволочка, изогнутая случайным образом, концами подсоединена к двум близко расположенным клеммам. Какую форму примет проволочка, если к клеммам подключить:

а) источник постоянного тока;

б) источник переменного тока?

Считать, что эксперимент проводится в невесомости.

4. **«Юла».** Юла в виде диска, насаженного на заостренный стержень, касается боковым ребром поверхности стола и вращается вокруг вертикальной оси со скоростью ω_0. Какова скорость ω вращения юлы вокруг собственной (в данном случае наклонной) оси? Все необходимые размеры юлы считать известными.

5. **«Тепловая машина».** Велосипедное колесо, у которого все металлические спицы заменены натянутыми резиновыми жгутами, тщательно сбалансировано на горизонтальной оси. Если мощным источником света облучить резиновые жгуты по одну сторону от оси колеса, то колесо начнет вращаться. В какую сторону и почему начнет вращаться колесо?

6. **«Дымоход».** Объясните, почему существует тяга в печной (заводской) трубе. Введите параметр, характеризующий тягу, и определите, как он зависит от высоты трубы.

Конкурс болельщиков

Болельщики присылали ответы в пользу одной из команд — финалистов турнира. Время на выполнение каждого задания — 5 минут. Первые 6 заданий — задания конкурса капитанов.

7. **«Фигуры Лиссажу».** На входы X и Y осциллографа подаются гармонические сигналы с отношением частот $f_X/f_Y=2/3$. Нарисовать осциллограмму.

8. **«Пульсации».** Простейший однополупериодный выпрямитель, состоящий из диода и последовательно с ним соединенного конденсатора емкостью 50 мкф, нагружен на резистор сопротивлением 2 кОм (подключенный параллельно конденсатору). Напряжение сети 220 В, частота 50 Гц. Определить амплитуду пульсаций на резисторе.

9. **«Роса».** На стекло подышали так, что оно запотело, и плотно накрыли это место стеклянным колпаком. Через некоторое время стало заметно, что некоторые капельки росы значительно укрупнились за счет исчезновения большого числа соседних мелких росинок. Объяснить это явление. Какова дальнейшая динамика роста или исчезновения отдельных капелек росы?

Зам. председателя оргкомитета турнира
Е. Н. Юносов

Ответы, указания, решения

Где ошибка?

Ошибка — в том, что мы обозначили через x_0 величину ($\lim x_n$), существование которой не доказано. Приведенное рассуждение устанавливает лишь, что е с л и предел $x_0=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ существует, то он равен нулю. На самом же деле этот предел не существует (выражение $\frac{2^n}{n^8}$ убывает только в начале, потом оно неограниченно возрастает).

А если ..., что тогда?

1. Ложно только предложение а).
2. Утверждение а) ложно, когда y — сестра x; утверждение б) всегда истинно.
3. Эти утверждения даже равносильны.
4. Нет: возможен случай, когда каждая задача кем-нибудь решена, но никто не решил всех задач.
5. Во всех трех случаях из первого предложения следует второе.
7. Опровергающий пример — равнобедренная трапеция.
8. Джек сказал правду, а Фред солгал. Машину угнал Боб.

IX Всероссийская олимпиада школьников

Математика

8 к л а с с

1. У к а з а н и е. Докажите, что если сумма некоторых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ неотрицательна, то среди этих чисел можно выбрать такое, что сумма оставшихся чисел будет все равно неотрицательной.
2. Нельзя. У к а з а н и е. Предположите, что требуемая расстановка чисел существует и докажите, что тогда все числа в клетках произвольного креста (рис. 1) имеют одинаковую четность.
3. $2^{1982}+1=(2^{1982}+2^{992}+1)-2^{992}=(2^{991}+1)^2-2^{992}=(2^{991}+2^{496}+1)(2^{991}-2^{496}+1)$.
4. $S_{A_1B_1C_1D_1}=2S$. Четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ может вырождаться в треугольник и даже быть невыпуклым. Например, если $ABCD$ — трапеция, изображенная на рисунке 2, то при $u<1$ четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ — выпуклый,

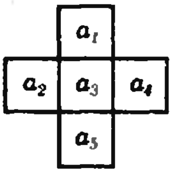


Рис. 1.

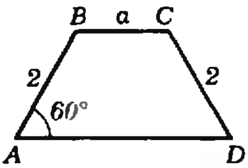


Рис. 2.

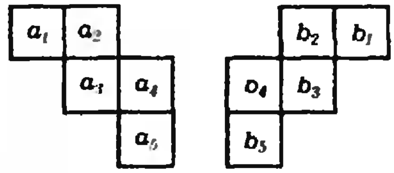


Рис. 3.

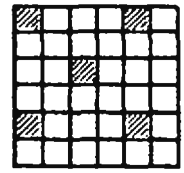


Рис. 4.

при $a>1$ — невыпуклый, а при $a=1$ — вырождается в треугольник.

5. Точка B является точкой пересечения прямой DP, где D — вершина равностороннего треугольника ADC, и полуокружности, построенной на AC как на диаметре по другую сторону от D.

9 класс

1. 3; 5. Указание. Рассмотрите случаи $n=3k$, $n=3k+1$ и $n=3k+2$.

2. $1-\frac{1}{100!}$. Указание. $\frac{k}{(k+1)!}=\frac{1}{k!}-\frac{1}{(k+1)!}$.

3. Нельзя. Указание. С помощью фигур, изображенных на рисунке 3, докажите, что пять чисел, стоящих в клетках квадрата, заштрихованных на рисунке 4, при делении на 9 должны давать одинаковые остатки.

4. Точка M — четвертая вершина параллелограмма, построенного на сторонах AB и CB. Выпуклость пятиугольника $ABCDE$ существенна.

5. $(0, 0)$, $(1, 1)$, $\left(-\frac{\sqrt[5]{40}}{2}, -\sqrt[5]{50}\right)$.

10 класс

1. 6.

2. Для указанных α, β, γ имеем

$$2\lg\alpha=\lg\alpha^2>\lg\beta\gamma=\lg\beta+\lg\gamma\geqslant 2\sqrt{\lg\beta\cdot\lg\gamma}$$
$$(\lg\alpha>0,\ \lg\beta>0,\ \lg\gamma>0),$$

откуда следует требуемое неравенство.

3. $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Указание. Докажите, что число таких треугольников с данной фиксированной вершиной A равно $\frac{n(n+1)}{2}$.

4. Поскольку для любого $n\geqslant 1$ справедливо равенство $x_{n+1}^2-10x_nx_{n+1}+x_n^2-1=0$ и аналогично для $n\geqslant 2$ — равенство $x_n^2-10x_nx_{n-1}+x_{n-1}^2-1=0$, числа x_{n+1} и x_{n-1} являются различными $(x_{n+1}>x_n>x_{n-1})$ корнями квадратного уравнения $y^2-10x_ny+x_n^2-1=0$. По теореме Виета находим, что для $n\geqslant 2$

$$x_{n+1}+x_{n-1}=10x_n \qquad (*)$$

Поскольку $x_1=0$, $x_2=1$, утверждение задачи следует из формулы (*) по индукции.

5. Пусть $\overrightarrow{OC}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$. В силу подобия пятиугольников $\overrightarrow{OC_1}=\alpha\overrightarrow{OA_1}+\beta\overrightarrow{OB_1}$, откуда $\overrightarrow{CC_1}=\alpha\overrightarrow{AA_1}+\beta\overrightarrow{BB_1}$ и, значит, прямые AA_1, BB_1 и CC_1 параллельны некоторой плоскости. Этой же плоскости параллельна и прямая DD_1.

Физика

Теоретический тур

8 класс

1. $\Delta t=10{,}9°$.

2. Закоротить нужно резистор с сопротивлением 300 Ом.

3. $x=\frac{m_0(S-S_0)}{\rho SS_0}$.

4. В первом случае ($k_1=1{,}5$) ускорение тележки уменьшится еще в 2 раза, во втором случае ($k_2=3$) тележка вообще не будет двигаться.

9 класс

1. См. решение задачи Ф813 («Квант», 1983, № 8).

2. $v_p=v_0/(2\cos\alpha)$; $\varphi=\pi-2\alpha$.

3. $A=\frac{m}{M}R\frac{(\alpha-1)(\beta-1)}{\alpha\beta-1}\Delta T\approx 250$ Дж (если цикл проводится против часовой стрелки, работа газа отрицательна).

4. $E_{1,2}=E''(1\pm\sqrt{1-E'/E''})$;
$E_1=120$ ГПа; $E_2=80$ ГПа.

10 класс

1. Если шероховатый каток левый, то при его вращении по часовой стрелке (или при вращении шероховатого правого катка против часовой стрелки) при любом μ частота равна $\omega_1=\sqrt{k/m+\mu g/l}$. Если же направление вращения иное, то колебания возможны лишь при $\mu<kl/(mg)$; при этом частота колебаний равна $\omega_2=\sqrt{k/m-\mu g/l}$.

2. $q=B_0nS(\tau_1+\tau_2)/(2L)$.

3. Изображение окажется в бесконечности.

4. $\frac{\Delta T}{T}\approx\frac{R^3}{R_3h^2}\approx 10^{-4}$.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 9)

1. В первый раз Гена получил числа 18, 36, 54, 72, 90, а во второй — 9, 18, 27, 36, 45.

2. Плотность тыквы равна примерно 413 кг/м^3. Тыква будет плавать в воде и сможет удержать на себе, как на плоту, мальчика.

3. В новом наборе домино будет 13 дуплей (от 0—0 до 12—12). На остальных костях каждое значение встречается по 12 раз, а так как значений 13, то половинок костей будет 12 • 13, следовательно целых костей домино будет вдвое меньше, то есть 6 • 13 = 78. Прибавив к этому числу 13 (число дуплей), получим общее количество костей домино: 91.

4. В треугольнике ABC угол C больше угла B, так как $|AB|>|AC|$. Сравним углы треугольников AEB и AEC: углы при вершине A у них равны, а угол C больше угла B. Поэтому угол AEB больше угла AEC.

5. Нетрудно посчитать, что белых полей на доске на одно больше, чем черных. Если мы начнем обход с черного поля, то получим чередование цветов полей ч—б—ч—б—... В такой цепочке черных полей не меньше, чем белых, поэтому обойти все черные поля таким образом не удастся. Если же мы начнем с белого поля, то, закончив цепочку снова на белом поле, получим б—ч—б—ч—...—ч—б; в такой цепочке белых полей на одно больше,

kvant.mccme.ru

чем черных, что согласуется с их общим количеством.

Московская городская олимпиада по физике
(см. «Квант» № 9)

Здесь мы приводим решения или ответы лишь к тем задачам, которые не вошли в Задачник «Кванта».

Районный тур

8 класс

1. Перейдите в систему отсчета, связанную с коробкой, тогда, поскольку удары шайбы с коробкой абсолютно упруги, скорость шайбы относительно коробки будет через интервалы времени $(D-2R)/v_0$ менять свое направление, оставаясь равной по величине v_0. 2. 1: 1,5. 3. $\operatorname{ctg}\alpha=-m_1/m_2$. 4. $\Delta I_{max}=-U/R$, если убрать ребро, соединяющее вершины, к которым подведено напряжение.

9 класс

1. $\operatorname{tg}\alpha=m_2/(m_1+m_2)$. 3. $p_C=2p_0/3$, $p_D=p_0/3$, $V_H=2V_0$. 4. 124,5 Дж. 5. $\varphi_0=(\varphi_1C_1+\varphi_2C_2+\varphi_3C_3)/(C_1+C_2+C_3)$.

10 класс

1. Луч нарисует квадрат, разделенный вертикальной линией пополам, причем боковые стороны квадрата будут бледными. 2. Система представляет собой «наклонный математический маятник» — качели вращаются вокруг оси, проходящей через точки подвеса. $T=2\pi\sqrt{l_1l_2/(ag)}$. 3. $3{,}2\cdot10^{-4}$ Тл. 4. $U=U_0+2\mathcal{E}$.

I городской тур

8 класс

1. Угол на дымовом следе образуется, лишь если скорость ветра равна скорости паровоза. 3. $l(\cos\alpha+\mu\sin\alpha)$. 4. 3/2.

9 класс

1. $\sqrt{2ghm^2/(M^2+mM)}$. 2. $p_0=(p_A+Mg/S)\times(1-\Delta H/H)$. 3. Уменьшится. 4. $q\varphi/(2\pi^2\varepsilon_0R^2)$. 5. Пока напряжение на диоде не превышает 1 В, он ведет себя как сопротивление в 10 Ом, а затем на диоде падает напряжение 1 В.

10 класс

1. Рассмотрите сумму моментов (относительно центра масс) всех сил, действующих на автомобиль (внешняя рессора должна дать бо́льшую силу реакции, т. е. сильнее сжаться). 2. $\sin(\beta/2)=\sin(\alpha/2)q_1/q_2$; если получающееся значение больше 1, то линия не войдет в заряд $-q_2$. 3. $\varphi=\pi/2$; φ уменьшается при включении резистора. 4. $CU\sqrt{2-\cos^2\omega_0\tau}/2$, где $\omega_0=\sqrt{2/LC}$. 5. 75 м^2.

Свердловская областная олимпиада по математике
(см. «Квант» № 9)

Школьный тур

7 класс

1. Если около вершин стоят числа a, b, c, то суммы равны $a+b+c$. 2. Рассмотрите случаи $x\leq0$, $0<x<1$, $x>1$. 3. Примените теорему Фалеса. 4. Если k является общим делителем чисел $n+1$ и n^2+3n+3, то оно является делителем и числа $(n^2+3n+3)-(n+1)^2-(n+1)=1$.

8 класс

1. Рассмотрев разные способы накрытия квадрата 2×2, легко найти, что в клетках, граничащих только по вершине, стоят равные числа. Раскрасьте лист в шахматном порядке и рассмотрите прямоугольник 2×3. 2. Если x — цена книги, то $11<9x<12$, $15<13x<16$, отсюда $11/9<x<6/13$ и $x=1{,}23$. 3. Медиана делит треугольник на два равных площадей, отсюда равны площади треугольников ACM и ABM, а также OCM и OBM. 4. Среди чисел, меньших p^2, на p делятся p, $2p$, ..., $(p-1)p$. Остается $(p^2-1)-(p-1)=p^2-p$ чисел.

9 класс

1. По крайней мере 101 число больше 9. Эти числа могут кончаться 100 разными парами цифр (от 00 до 99), но чисел больше, значит, найдутся 2 числа, оканчивающиеся одинаково (принцип Дирихле). 2. Если $a\geq b$, то $a^2\leq a^2+b^2\leq4$ и $a\leq2$. 3. Пусть четырехугольник $ABCD$, F — середина стороны CD. Примените задачу 3 из 8 класса к треугольнику AFB и докажите, что высоты, опущенные из точек A и B на сторону CD, одной длины. 4. Если $p+1=n^2$, то $p=n^2-1=(n-1)(n+1)$.

10 класс

1. Искомый набор: $\{1, 2, ..., 1982\}$. Для произвольного набора $a_1<a_2<...<a_{1982}$ рассмотрите суммы вида a_1+a_k и a_m+a_{1982} ($k=2, 3, ..., 1982$; $m=1, 2, ..., 1981$). 2. Если $a>0$, то $f(x)=a\left(\frac{1}{3}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^3+\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+x\right)-a\times\left(\frac{1}{3}\left(x+\frac{b}{2a}\right)^3+x+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{c}{a}\right)$; если $a<0$, то разность берется с противоположным знаком. 3. $S=1/2$. 4. $ax^2+bx+c=a(x^2-x)+(a+b)x+c$, но число x^2-x четно.

Бим и Бом
(см. «Квант» № 9, с. 31)

Пусть $\overline{a_1a_2...a_9}$ — десятичная запись числа 2^{29} и b — недостающая цифра. Бом применил сравнения по модулю 9 (см., например, приложение 1 в книге М. Н. Аршинова и Л. Е. Садовского «Коды и математика» (М., «Наука», 1983) или статью Н. Я. Виленкина «Сравнения и классы вычетов» («Квант», 1978, № 10)). С одной стороны,

$$2^{29}\equiv-4\ (\mathrm{mod}\ 9)$$

(из $2^3=8\equiv-1$ следует $2^{27}=(2^3)^9\equiv(-1)^9=-1$, $2^{29}=2^{27}\cdot2^2\equiv(-1)\cdot4=-4$). С другой стороны,

$$\overline{a_1a_2...a_9}\equiv a_1+a_2+...+a_9\ (\mathrm{mod}\ 9)$$

($10\equiv1$; значит, для любого k тоже $10^k\equiv1$; поэтому $\overline{a_1a_2...a_9}=a_1\cdot10^8+a_2\cdot10^7+...+a_9\equiv a_1+a_2+...+a_9$). Следовательно,

$$a_1+a_2+...+a_9\equiv-4\ (\mathrm{mod}\ 9).$$

Но сумма всех цифр от 0 до 9 равна 45, то есть

$$a_1+...+a_9+b\equiv0\ (\mathrm{mod}\ 9)$$

или

$$a_1+...+a_9\equiv-b\ (\mathrm{mod}\ 9)$$

Отсюда $b\equiv4$ (mod 9). Так как $0\leq b\leq9$, $b=4$.

4-я страница обложки
(см. «Квант» № 9)

«Зигзаг»: $(ПЛФТ)^3$, (12).
«Тройные крюки»: $[Л'П'\cdot П'Ф'Л'Т'\cdot В\cdot$

kvant.mccme.ru

$\cdot\, ТЛФП \cdot В' \cdot ПЛ] \cdot [ПЛ'ФТ'ВН'ПЛ']$, (18).
«Шесть П»: $[Ф^2(ПФ)^2(П'Ф')^3] \cdot [ФНФ^2Н'Л' \cdot$ $\cdot\, Ф'Н'Л^2НЛ' \cdot Т^2П^2Ф^2П^2Т^2] \cdot [Т^2(Л'Т')^2 \times$ $\times (ЛТ)^3] \cdot [ТФ'ЛП'НВ'ТФ']$, (40).
«Кольца»: $[Л' \cdot ТН^2Т' \cdot Н' \cdot ПН^2П' \cdot Н \cdot Л] \cdot$ $\cdot\, [П \cdot Ф'В^2Ф \cdot В \cdot Л'В^2Л \cdot В' \cdot П'] \cdot$ $\cdot\, [П'Н^2ПТ'В^2Т]^2$, (31).
«Потусторонние кольца»: $[ПФТ'Н' \cdot Ф^2 \cdot$ $\cdot\, НТФ'П' \cdot Ф^2] \cdot [ВП^2В'] \cdot [НП^2ФТ \cdot В^2 \cdot$ $\cdot\, Т'Ф'П^2Н']$, (22).
«Змея»: в предыдущей операции замените третью скобку на $[НФ^2Н']$, (16).
«Червяк»: $ТВП^2Н'ТФ'ПЛ'Н'П'Т'П^2ТВ^2ПТ^2 \times$ $\times П'Т'В'П'В^2ПТ$, (23).
«Полосы»: невозможное состояние.
Обозначения поворотов граней кубика объясняются в статье «Кубик в картинках» («Квант» № 9) ($Т$ — поворот задней — тыльной — грани на 90° по часовой стрелке). После каждой операции указано число составляющих ее поворотов, которое получится, если раскрыть скобки и произвести возможные упрощения (например, если заменить во второй операции последовательность четырех поворотов $ПЛПЛ'$ на один — эквивалентный ей — поворот $П^2$). В квадратных скобках стоят более простые, «законченные» операции, действие которых полезно проследить на «собранном» кубике. Точки в скобках помогут вам понять, как эти операции устроены и как они работают.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 7)

Задание 13 (О. Фринк, 1923 г.). **1.Cd7! Крe3!** (1...Крf3 2.Крd4 Крf4 3.h4) **2.h4 Крe4 3.h5 Крe5 4.h6 Крf6 5. Ce8!** и т. д.

Задание 14 (В. Вукович, 1923 г.). **1.h7 g4 2.hg h3 3.g5 hg 4.g6 g1Ф 5.g7+ Крe7 6.Крg8!** (но не 6.g8Ф? Фd4+ 7.Фg7+ Ф:g7+ 8.Кр:g7 g2 9.h8Ф g1Ф+ 10.Крh7 Крf7!) **6...Фf2 7. h8Ф Фf7+8. Крh7 g2 9. Фb8 g1Ф 10. Фc7+ Крe8 11. Фc8+** с вечным шахом.

Главный редактор — академик И. К. Кикоин
Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров
Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев
Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. М. Воронин, Б. В. Гнеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков, А. Р. Зильберман, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Потапов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосинский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Сурин, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер оформили:
М. Б. Дубах, В. С. Коваль, Н. С. Кузьмина, А. К. Малкин, Э. В. Назаров, Н. И. Поляноская, А. М. Пономарева, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина, Е. С. Шабельник

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Главный художник Э. А. Смирнов

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор Н. Б. Румянцева

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1.
«Квант», тел. 250-33-54
Сдано в набор 16.8.83. Подписано к печати 14.9.83
Печать офсетная
Бумага $70 \times 108\ ^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 5,60. Уч.-изд. л. 7,22. Т-17699
Тираж 166 162 экз. Цена 40 коп. Заказ 2201

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

kvant.mccme.ru

Шахматная страничка

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Я. Гик.

УДИВИТЕЛЬНЫЙ МАНЕВР

Одна из самых удивительных и загадочных идей на шахматной доске принадлежит чешскому гроссмейстеру Рихарду Рети.

Р. Рети, 1921 г. Белые: Kph8, п. c6; черные: Kpa6, п. h5. Ничья.

Поначалу невозможно поверить в реальность задания. Черный король в двух шагах от белой пешки, а черная пешка неудержимо рвется вперед. И все же белым удается догнать ее! Разумеется если король отправится по прямой — 1. Kph7 h4 2. Kph6 h3, то это вызовет только улыбку. Но он применяет неожиданный и хитрый маневр. **1. Kpg7! h4 2. Kpf6! Kpb6.** На 2...h3 следует 3. Kpe7 h2 4. c7 Kpb7 5. Kpd7 и обе пешки становятся ферзями. **3. Kpe5!** Теперь 3...h3 4. Kpd6 h2 5. c7 снова ведет к ничьей, не меняет дела и 3...Kp:c6 4. Kpf4 h3 5. Kpg3 h2 6. Kp:h2.

Как же случилось, что белые спаслись в этой позиции?! Вся соль в необычной геометрии шахматной доски — кратчайшее расстояние на ней не всегда измеряется по прямой линии. Путь короля между полями h8 и h2 занимает шесть ходов как при прямолинейном движении, так и при зигзагообразном, однако во втором случае черные вынуждены потратить два темпа, и их «неудержимую» пешку удается остановить. В прямоугольном треугольнике h8—e5—h2 с точки зрения короля сумма катетов h8—e5 и e5—h2 равна гипотенузе h8—h2. Такое возможно только в шахматах!

Замысел Рети — одно из самых замечательных шахматных открытий. Создание этого произведения было подготовлено всем развитием шахматной композиции, и наверное, если бы не Рети, то такой же этюд составил бы другой композитор. Здесь можно провести аналогию с наукой, где крупное открытие часто является закономерным итогом общего прогресса.

Пешечный шедевр Рети вызвал настоящую сенсацию в шахматном мире и, конечно, многочисленные отклики у композиторов. Геометрическая идея этюда, которую называют «маневр Рети», в дальнейшем неоднократно совершенствовалась и углублялась, хотя по чистоте формы оригинал превзойти невозможно.

Г. Адамсон, 1921 г. Белые: Kph7, п.c6; черные: Kpa6, п.a5. Ничья.

1. Kpg6 a4 2. Kpf5! Kpb6 (2...a3 3. Kpe6!) **3. Kpe5 Kp:c6** (3...a3 4. Kpd6 a2 5. c7) **4. Kpd4 Kpb5 5. Kpc3** с ничьей.

Л. Прокеш, 1947 г. Белые: Kpd8, п. a5; черные: Kpd6, п. h7. Ничья.

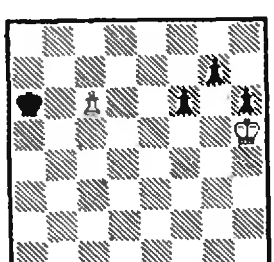
1. Kpc8 Kpc6 2. Kpb8! Kpb5 3. Kpb7! Kp:a5 4. Kpc6 h5 5. Kpd5 и белые справились со своей задачей.

И. Моравец, 1952 г. Белые: Kph3, п. d2; черные: Kpa4, п. b7. Ничья.

1. Kpg4 b5 2. d4 b4 3. d5! Kpb5 4.d6! Kpc6 5. Kpf5!

Король вышел на пересечение дорог. 5...Kp:d6 6. Kpe4 или 5...b3 6. Kpe6 b2 7.d7 с ничьей.

Спустя семь лет после своего открытия Рети вернулся к нему и придумал еще более парадоксальный сюжет.



Р. Рети. 1928 г. Ничья.

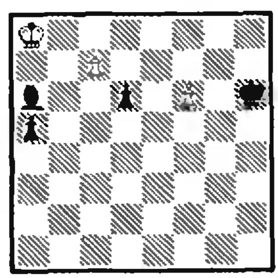
Единственная белая пешка, к тому же не опасная на вид, успешно противостоит трем связанным проходным соперника! **1. Kpg6** Kpb6 2. Kp:g7 h5 (2...f5 3. Kpf6 f4 4. Kpe5 f3 5. Kpd6) 3. Kp:f6 h4 4. Kpe5 со знакомым финалом; 1...h5 2. Kp:g7 h4 3. Kp:f6 и т. д.; 1...f5 2. Kp:g7 f4 3. Kpf6 f3 (3...Kpb6 4. Kpe5) 4. Kpe7 с ничьей.

В том же году был составлен еще один знаменитый этюд, имеющий прямое отношение к маневру Рети.

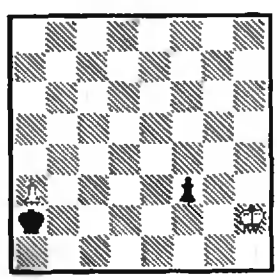
А. и К. Сарычевы, 1928 г. Белые: Kpd7, п. c7; черные: Kpf3, Ch7, п. b7. Ничья.

1. Kpc8!! Фантастический ход! Вместо того, чтобы догонять неприятельскую пешку, белый король удаляется от нее. **1...b5 2. Kpd7! b4 3. Kpd6! Cf5 4. Kpe5! Cc8 5. Kpd4** и цель достигнута. Вновь король действовал на два фронта и более чем успешно.

Конкурсные задания



19. Ничья.



20. Выигрыш.

Срок отправки решений — 25 декабря 1983 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 19, 20»).

kvant.mccme.ru

Цена 40 коп.
Индекс 70465

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ КРОССВОРД

По горизонтали

5. Часть многоугольника. 6. Часть прямой. 8. Часть плоскости внутри окружности. 9. Географическая координата. 10. Одно из основных понятий геометрии. 13. Древнегреческий ученый — физик, математик. 14. Предложение, принимаемое без доказательства. 17. Отрезок в треугольнике. 18. Математическое действие. 19. Результат арифметического действия. 20. Плоская кривая. 23. Четырехугольник. 24. Геометрическое изображение функции.

По вертикали

1. Геометрическое тело. 2. Элемент прямоугольного треугольника. 3. Великий русский математик. 4. Отрезок в окружности. 5. Прямая, имеющая с кривой по меньшей мере две общие точки. 7. Четырехугольник. 11. Кривая второго порядка. 12. Геометрическое место точек. 15. Прямая, пересекающая данную прямую под прямым углом. 16. Замкнутая ломаная линия. 19. Единица времени. 21. Два луча, исходящие из одной точки. 22. Расстояние между концами отрезка.

Н. Антонович