ISSN 0130-2221

Квант

7
1983

Научно-популярный физико-математический журнал
Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

от поселка Ванавара упал метеорит. Это явление носило характер настоящей катастрофы.
Такой увидел тайгу вблизи Ванавары художник Д. М. Утенков в 1980 году. Об этой катастрофе рассказывается в статье В. А. Бронштэна.

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Квант

7 1983

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ: | **IN THIS ISSUE:**

На первой странице обложки приведена фотография «гладкой» поверхности тщательно отшлифованного стекла, сделанная при помощи микроскопа с увеличением 2100. О физике поверхности будет рассказано в одном из следующих номеров журнала.

Алгебраические и трансцендентные числа

Доктор физико-математических наук
Н. И. ФЕЛЬДМАН

Натуральные, целые, рациональные, действительные и комплексные числа — эта расширяющаяся цепочка

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$$

давно уже стала привычной для математиков.

Недавно «Квант» рассказывал о трудностях утверждения в математике отрицательных ($\mathbf{N} \subset \mathbf{Z}$) и комплексных чисел ($\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$)*). В этой статье речь пойдет о другом звене этой цепочки — о включении $\mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

Читателю, конечно, известно о существовании *иррациональных чисел* (то есть чисел, не представимых в виде дроби m/n, где $m \in \mathbf{Z}$, $n \in \mathbf{N}$), найденных еще в древности. В те времена открытие несоизмеримости диагонали квадрата и его стороны (означающее, в переводе на алгебраический язык, что число $\sqrt{2}$ иррационально) было одним из самых волнующих научных событий. В наши дни алгебраическое доказательство иррациональности числа $\sqrt{2}$ (изящество и обманчивая простота которого не могут оставить равнодушным человека, склонного к математическому мышлению) излагается в учебнике 7-го класса**).

Но действительные числа подразделяются не только на рациональные и иррациональные. Менее известно, но тоже очень важно, их деление на «алгебраические» (таковы, например, $2/3$, $\sqrt{2}$, $5-\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{4}$) и «трансцендентные» числа (к ним относятся такие известные числа, как π, e, $\lg 2$). Именно об этих двух классах чисел, об их свойствах, об их истории (продолжающейся и в наши дни) мы здесь и расскажем.

Алгебраические числа

Каждое рациональное число $\alpha = a/b$ ($a \in \mathbf{Z}$, $b \in \mathbf{N}$) является корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами (например, многочлена $bx-a$). Любое иррациональное число $\sqrt[n]{a}$ ($a \in \mathbf{Z}$) тоже является корнем такого многочлена (напри-

---

*) См. статью С. Г. Гиндикина в предыдущем номере «Кванта».

**) «Алгебра 7», п. 28.

мер, x^n-a). А что если рассмотреть только такие числа — корни многочленов с целыми коэффициентами?

По определению, действительное число называется *алгебраическим*, если оно является корнем некоторого многочлена с целыми коэффициентами, не равного тождественно нулевому многочлену *). Множество всех алгебраических чисел мы будем обозначать через $\mathbf{A}$. Как мы видели выше, $\mathbf{Q}\subset\mathbf{A}\subset\mathbf{R}$. Чтобы немного прочувствовать понятие алгебраического числа, докажите, что

1. *Если* $\alpha\in\mathbf{A}$ $(\alpha\neq0)$, *то и* $1/\alpha\in\mathbf{A}$.
2. *Если* α *— корень многочлена с рациональными коэффициентами, то* $\alpha\in\mathbf{A}$.
3. *Если* $\alpha\in\mathbf{A}$ *и* $a\in\mathbf{Q}$, *то* $a\alpha\in\mathbf{A}$ *и* $a+\alpha\in\mathbf{A}$.

Можно доказать, что из $\alpha\in\mathbf{A}$ и $\beta\in\mathbf{A}$ следует $\alpha+\beta\in\mathbf{A}$, $\alpha-\beta\in\mathbf{A}$, $\alpha\cdot\beta\in\mathbf{A}$, $\alpha/\beta\in\mathbf{A}$ (последнее при $\beta\neq0$). Другими словами, ***арифметические действия не выводят за пределы алгебраических чисел*** (доказательство этого факта, более сложное, чем решение первых трех задач, мы опускаем). Таким образом, множество $\mathbf{A}$ с операциями $+$ и $\times$, так же как множество $\mathbf{Q}$ с теми же операциями, образует *числовое поле*, то есть числовое множество, в пределах которого возможны все четыре арифметических действия (кроме деления на 0, конечно!).

Естественно спросить, существуют ли действительные числа, не являющиеся алгебраическими. Чтобы ответить на этот вопрос, нам потребуется следующее понятие.

Степень алгебраического числа

Если α — корень многочлена $P(x)$, то α — корень и многочлена $P(x)Q(x)$, где $Q(x)$ — любой многочлен. Поэтому каждое алгебраическое число α является корнем бесконечного множества многочленов из $\mathbf{Z}[x]$. Среди них, очевидно, есть многочлены наименьшей степени. Если она равна n, мы будем говорить, что α — алгебраическое число *степени* n, и писать $\deg\alpha=n$. Очевидно, $\deg\alpha=1$ тогда и только тогда, когда $\alpha\in\mathbf{Q}$. Для иррационального числа $\sqrt{a}$ $(a\in\mathbf{Z})$, очевидно, $\deg\sqrt{a}=2$.

Для дальнейшего нам потребуется следующая простая, но важная теорема.

Теорема Безу (1779 г.). *Остаток от деления многочлена* $P(x)$ *на* $x-\gamma$ *равен* $P(\gamma)$.

Доказательство. Разделим $P(x)$ на $x-\gamma$. Остатком будет постоянная, которую мы обозначим c:

$$P(x)=(x-\gamma)P_0(x)+c;$$

здесь $P_0(x)$ также многочлен. Подставляя $x=\gamma$, находим $c=P(\gamma)$.

При помощи этой теоремы легко доказывается

Лемма. *Если алгебраическое число* α *степени* $n\geqslant2$ *является корнем многочлена* $P(x)\in\mathbf{Z}[x]$ *степени* n, *то* $P(x)$ *не имеет рациональных корней.*

Доказательство. Предположим противное: $P(a/b)=0$ $(a\in\mathbf{Z}$, $b\in\mathbf{N})$. По теореме Безу остаток от деления многочлена $P(x)$ на $x-a/b$ равен 0, то есть $P(x)$ делится на $x-a/b$:

$$P(x)=\left(x-\frac{a}{b}\right)P_0(x),$$

где многочлен $P_0(x)$, очевидно, имеет рациональные коэффициенты. Если M — общее кратное знаменателей его коэффициентов, то $P_1(x)=MP_0(x)\in\mathbf{Z}[x]$. Из $P(\alpha)=0$ и $\alpha\neq a/b$ (ведь $n>1$) следует $P_0(\alpha)=0$. Значит, $P_1(\alpha)=0$. Но степень многочлена $P_1(x)$ равна $n-1<n=\deg\alpha$. Мы пришли к противоречию.

Решающим шагом в поиске чисел, не являющихся алгебраическими, стала

Теорема Лиувилля

Ее формулировка, на первый взгляд, никак не связана с существованием «не алгебраических» чисел.

*) Множество многочленов с целыми коэффициентами мы будем обозначать через $\mathbf{Z}[x]$. В дальнейшем мы будем рассматривать только многочлены, отличные от тождественно нулевого многочлена, не оговаривая это дополнительно. Для читателей, знакомых с понятием комплексного числа, заметим, что можно также рассматривать и *комплексные алгебраические числа*.

Жозеф Лиувилль (1809—1882)

Теорема Лиувилля (1844 г.). *Если α — алгебраическое число степени $n \geqslant 2$, то существует такое число $c > 0$, что для любых $p \in \mathbf{Z}$ и $q \in \mathbf{N}$*

$$\boxed{\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{c}{q^n}}$$

(Смысл теоремы состоит в том, что иррациональное алгебраическое число α нельзя «слишком хорошо» приблизить рациональными дробями *). Поэтому, если мы найдем иррациональное число, которое можно «слишком хорошо» приблизить, оно будет не алгебраическим.)

Доказательство. Пусть α — алгебраическое число степени $n \geqslant 2$. Тогда существует такой многочлен с целыми коэффициентами

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0, \quad (a_n \neq 0),$$

что $P(\alpha) = 0$. Обозначим через H наибольший из модулей чисел $|a_1|$, $|a_2|$, ..., $|a_n|$. Покажем, что число

$$c = \frac{1}{n^2 H (1 + |\alpha|)^{n-1}}$$

обладает нужным свойством. Заметим для дальнейшего, что $c < 1$. Возьмем произвольные $p \in \mathbf{Z}$ и $q \in \mathbf{N}$. Тогда

$$P\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} q + \ldots + a_1 p q^{n-1} + a_0 q^n}{q^n} = \frac{a}{q^n}.$$

По лемме $P\left(\frac{p}{q}\right) \neq 0$. Значит, $a \neq 0$. Поскольку $a \in \mathbf{Z}$, мы имеем $|a| \geqslant 1$. Следовательно,

$$\left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| \geqslant \frac{1}{q^n}.$$

Так как $P(\alpha) = 0$, получаем

$$\frac{1}{q^n} \leqslant \left|P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|P(\alpha) - P\left(\frac{p}{q}\right)\right| = \left|a_n\left(\alpha^n - \left(\frac{p}{q}\right)^n\right) + a_{n-1}\left(\alpha^{n-1} - \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}\right) + \ldots + a_1\left(\alpha - \frac{p}{q}\right)\right|.$$

Если $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant 1$, то

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant 1 \geqslant \frac{1}{q^n} > \frac{c}{q^n}.$$

Если же $\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < 1$, то $\left|\frac{p}{q}\right| < |\alpha| + 1$. Тогда для любого $1 \leqslant k \leqslant n$, $k \in \mathbf{N}$, получаем

$$\left|\alpha^k - \left(\frac{p}{q}\right)^k\right| = \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \cdot \left|\alpha^{k-1} + \alpha^{k-2} \cdot \frac{p}{q} + \ldots + \left(\frac{p}{q}\right)^{k-1}\right| \leqslant \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| k(|\alpha| + 1)^{k-1} \leqslant \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| n(|\alpha| + 1)^{n-1}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{q^n} \leqslant \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| n^2 (|\alpha| + 1)^{n-1} H = \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \cdot \frac{1}{c}, \quad \left|\alpha - \frac{p}{q}\right| \geqslant \frac{c}{q^n}.$$

Теорема доказана.

Теореме Лиувилля можно придать следующую форму, в которой уже не требуется условие $\deg \alpha \geqslant 2$.

*) О том, как можно приблизить числа α с помощью рациональных дробей, см. статью «Очерк о цепных дробях» («Квант», 1983, № 5).

Теорема. *Если α — алгебраическое число степени n, то существует такое число $c_0>0$, что для любых $p\in\mathbf{Z}$ и $q\in\mathbf{N}$, для которых $\alpha\neq p/q$, имеем*

$$\boxed{\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|\geqslant\frac{c_0}{q^n}.}\qquad(1)$$

Доказательство. Случай $\deg(\alpha)\geqslant 2$ рассмотрен выше. Пусть теперь $\deg(\alpha)=1$, то есть $\alpha=a/b$ ($a\in\mathbf{Z}$, $b\in\mathbf{N}$). Тогда число $c'=1/b$ обладает нужным свойством. В самом деле, если $a/b\neq p/q$, то $|pb-qa|\geqslant 1$. Следовательно,

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|=\left|\frac{a}{b}-\frac{p}{q}\right|=$$
$$=\frac{|pb-qa|}{bq}\geqslant\frac{1}{bq}=\frac{c'}{q}.$$

Выбрав в качестве c_0 наименьшее из чисел c и c', получим искомое неравенство.

Теорему Лиувилля можно доказать также, изучив разность $P(\alpha)-P(p/q)$ с помощью теоремы Лагранжа («Алгебра и начала анализа 9—10», п. 25). Попробуйте проделать это!

Приближение алгебраических чисел рациональными

Будем говорить, что число α допускает *приближения порядка m*, если для некоторой постоянной γ существует бесконечно много рациональных дробей p/q, удовлетворяющих неравенству

$$0<\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{\gamma}{q^m}.\qquad(2)$$

Теорема Лиувилля показывает, что *алгебраическое число степени n не допускает приближений большего порядка, чем n*. Действительно, если α допускает приближения порядка m, то из (1) и (2) получаем, что для бесконечной последовательности натуральных q

$$\frac{c}{q^n}<\frac{\gamma}{q^m},\quad\frac{1}{q^{m-n}}>\frac{c}{\gamma},$$

а это неравенство при $m>n$ и достаточно больших q невозможно.

Пример трансцендентного числа *)

Теперь у нас есть средство для построения действительных чисел, не являющихся алгебраическими. (Такие числа называются *трансцендентными*.) Нужно построить число, допускающее приближения сколь угодно высокого порядка. Мы зададим такое число в виде бесконечной десятичной дроби: $\alpha=0,\ a_1a_2a_3\ldots$, где

$$a_t=\begin{cases}1,\ \text{если } t=m!\ (m=1,2,\ldots),\\ 0,\ \text{если } t\neq m!.\end{cases}\qquad(3)$$

В частности,

$$a_1=a_2=a_6=a_{24}=a_{120}=a_{720}=\ldots=1,$$
$$a_3=a_4=a_5=a_7=\ldots=a_{23}=a_{25}=$$
$$\ldots=a_{119}=a_{121}=\ldots=0.$$

Тогда для любого $m>1$

$$\alpha=0,\ a_1\ldots a_{(m-1)!}+0,\ 0\ldots 0_{a_{m!}}=\frac{p_m}{q_m}+\beta_m,$$

где

$$p_m=a_1a_2\ldots a_{(m-1)!},$$
$$q_m=10^{(m-1)!},\quad\beta_m=0,\ 0\ldots 0a_{m!}\ldots,$$
$$0<\beta_m=10^{-m!}\cdot a_{m!},\ldots=$$
$$=10^{-m!}\cdot 1,\ldots<2\cdot 10^{-m!}=\frac{2}{q_m^m}.$$

Таким образом,

$$0<\left|\alpha-\frac{p_m}{q_m}\right|<\frac{2}{q_m^m},\qquad m=1,2,\ldots,$$

а это означает, что α допускает приближения сколь угодно высокого порядка и поэтому не может быть алгебраическим.

4. *Покажите, что α будет трансцендентным, если в* (3)

$$a_t=\begin{cases}1\ \text{при } t=m^m\ (m=1,2,\ldots),\\ 0\ \text{при } t\neq m^m.\end{cases}$$

5. *Пользуясь теоремой Лиувилля, постройте еще несколько трансцендентных чисел.*

Теорема Дирихле

В 1955 г. английскому математику К. Роту удалось доказать, что *любое алгебраическое число не допускает*

*) Читатель, знакомый с понятием счетности, легко докажет, что множество алгебраических чисел счетно. Если он знает, что множество всех действительных чисел несчетно (красивое доказательство этого факта излагается в «Кванте», 1973, № 12, с. 7), он сразу заключит, что трансцендентные числа существуют. Это рассуждение, однако, не дает ни одного конкретного примера трансцендентного числа.

приближений большего порядка, чем 2.

В то же время каждое иррациональное число допускает приближения второго порядка. Это доказал немецкий математик П. Дирихле с помощью носящего его имя очень простого и в то же время очень плодотворного принципа: *если n предметов разложить по $n-1$ ящикам, то хотя бы в одном ящике окажется не менее двух предметов.*

6. *Постройте несколько трансцендентных чисел с помощью теоремы Рота.*

Теорема Дирихле (1842 г.). *Для любых действительного числа α и натурального числа m существуют такие $p\in \mathbf{Z}$ и $q\in \mathbf{N}$, что $q\leqslant m$ и*

$$\boxed{\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^{m}}.} \qquad (4)$$

Доказательство. Промежуток $[0, 1[$ является объединением m промежутков

$$\left[0, \frac{1}{m}\right[, \left[\frac{1}{m}, \frac{2}{m}\right[, \ldots, \left[\frac{m-2}{m}, \frac{m-1}{m}\right[, \left[\frac{m-1}{m}, 1\right[\qquad (5)$$

Рассмотрим числа $\{k\alpha\}$ ($k=0, 1, \ldots, n$) (здесь $\{x\}$ — дробная часть; напомним, что, по определению, $\{x\}=x-[x]$). Каждое из них принадлежит одному из промежутков (5). Но наших чисел $m+1$, а промежутков m. Следовательно, хотя бы одному из промежутков (5) принадлежит по крайней мере два наших числа (принцип Дирихле!). Пусть это $\{k_1\alpha\}$ и $\{k_2\alpha\}$ ($k_1>k_2$). Тогда

$$\frac{1}{n}>|\{k_1\alpha\}-\{k_2\alpha\}|=$$
$$=|k_1\alpha-[k_1\alpha]-k_2\alpha+[k_2\alpha]|=$$
$$=|(k_1-k_2)\alpha-([k_1\alpha]-[k_2\alpha])|.$$

Если мы теперь положим $q=k_1-k_2$, $p=[k_1\alpha]-[k_2\alpha]$, то, разделив на q и учитывая неравенства $0\leqslant k_2<k_1\leqslant n$, получим требуемое.

Следствие. *Каждое иррациональное число α допускает приближения второго порядка.*

Доказательство. Для любого $m\in \mathbf{N}$ существуют такие $p\in \mathbf{Z}$ и $q\in \mathbf{N}$, что $q\leqslant m$ и выполняется (4). Поскольку $q\leqslant m$ и α — иррациональное, из (4) получаем

Петер Густав Лежен Дирихле (1805—1859).

$$0<\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}. \qquad (6)$$

Из (4) следует, что при неограниченном возрастании m величина $|\alpha-p/q|$ становится сколь угодно малой. Она отлична от нуля, поэтому с увеличением m дробь p/q должна принимать все более близкие к α значения, так что (6) выполняется для бесконечного числа дробей p/q.

Знаменитые трансцендентные числа

Хотя, пользуясь теоремами Лиувилля и Рота, можно построить бесконечное множество трансцендентных чисел, непосредственно доказать с их помощью трансцендентность таких известных чисел, как, например, π, e, $\ln 2$, $\lg 2$, до сих пор не удавалось. В то же время интерес к этим числам существует уже давно.

Особенно знаменитым в этом смысле является число π. Дело в том, что еще математики Древней Греции поставили ставшую знаменитой *задачу о квадратуре круга:* с помощью циркуля и линейки построить квадрат, площадь которого равна площади круга с заданным радиусом. Эта задача сводится к построению отрезка длины π, если задан отрезок единичной длины. Решить задачу не удавалось в течение двух тысячелетий. Со временем было установлено, что для доказательства невозможности решения этой задачи достаточно доказать трансцендентность числа π (в действительности достаточно меньшего — доказать, что π не является алгебраическим числом некоторого вида).

Иррациональность чисел e и π в 1766 г. доказал И. Ламберт. В 1873 г. Ш. Эрмит доказал трансцендентность числа e. Созданный им для этого метод до сих пор играет важную роль в теории чисел. Усилив метод Эрмита, Ф. Линдеман в 1882 г. доказал трансцендентность числа π. Линдеман доказал также, что при $\alpha \in A$, $\alpha \neq 0$, число e^{α} — трансцендентное. Отсюда следует, что *натуральные логарифмы всех отличных от единицы алгебраических чисел трансцендентны* (докажите это).

В 1748 г. Л. Эйлер высказал такое предположение: *если a, $b \in Q$ и $\log_a b$ — иррациональное число, то оно — трансцендентное.* Конечно, число $\log_a b$ может быть рациональным, например $\log_4 8 = 3/2$. Предположение Эйлера не удалось доказать ни в восемнадцатом, ни в девятнадцатом веке.

В 1900 г. на Всемирном конгрессе математиков в Париже Д. Гильберт сформулировал 23 проблемы, решение которых, по его мнению, должно было бы содействовать дальнейшему существенному развитию математики. Седьмая проблема — это предложение доказать, что если α и β — алгебраические числа, α отлично от чисел 0 и 1, а β — иррациональное, то число α^{β} — трансцендентное. В частности, предлагалось доказать трансцендентность чисел $2^{\sqrt{2}}$ и e^{π} — последнее число также приводится к виду α^{β} ($\alpha, \beta \in A$), однако для этого нужна некоторая информация о функциях комплексного аргумента.

7. *Докажите, что из утверждения Гильберта следует справедливость предположения Эйлера.*

Первое частичное решение седьмой проблемы Гильберта нашел в 1929 г. аспирант Московского университета А. О. Гельфонд. В частности, он доказал трансцендентность числа e^{π}. В следующем году ленинградский математик Р. О. Кузьмин показал, что метод Гельфонда с соответствующими изменениями позволяет доказать трансцендентность чисел вида α^{β} в случае, когда α — алгебраическое, отличное от 0 и 1, а $\beta = \sqrt{d}$, где натуральное число d не является полным квадратом. В частности, он доказал трансцендентность числа $2^{\sqrt{2}}$.

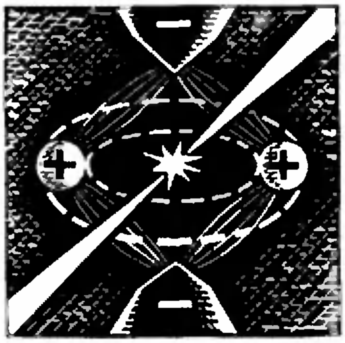
Александр Осипович Гельфонд (1906—1968).

Полное решение седьмой проблемы Гильберта с помощью уже нового метода (второй метод Гельфонда) получил в 1934 г. А. О. Гельфонд.

Теорема Гельфонда. *Пусть α, $\beta \in A$, α отлично от 0 и 1, β иррационально. Тогда число α^{β} — трансцендентное.*

8. *Докажите, что если числа α, β, ϱ — такие, что выражение $\log_{\varrho}\alpha / \log_{\varrho}\beta$ имеет смысл и α, $\beta \in A$, то число $\log_{\varrho}\alpha / \log_{\varrho}\beta$ — трансцендентное или рациональное.*

Второй метод Гельфонда позволил доказать и многие другие теоремы. Усиление этого метода, найденное в 1966 г. А. Бейкером, привело к новым значительным успехам теории чисел. Работа здесь продолжается и в настоящее время.



Как увидели один ион

Доктор физико-математических наук
Э. А. СВИРИДЕНКОВ

Сегодня известно каждому, что все тела состоят из атомов (или молекул) и что атомы имеют очень малые размеры. Однако мы привыкли иметь дело с количеством вещества, содержащим громадное число атомов (например, в 1 см^3 воздуха при нормальных условиях содержится $2{,}7 \cdot 10^{19}$ молекул), поэтому увидеть один атом — не так просто.

Совсем недавно физикам удалось провести эксперимент, который позволил все-таки увидеть атом. Опыт основан на способности атома поглощать и затем испускать (или, как говорят физики, переизлучать) свет, частота которого совпадает с одной из собственных частот излучения данного атома. Если интенсивность излучаемого света окажется достаточно большой, свет (а значит, и атом) можно будет зарегистрировать соответствующим прибором или даже невооруженным глазом. В первых экспериментах удавалось обнаружить свечение сотен тысяч атомов, а теперь — одного-единственного атома.

В возбужденном состоянии (поглотив, но еще не излучив свет) атом может находиться в течение 10^{-8} с. Это означает, что он может в одну секунду поглотить и переизлучить 10^8 фотонов. Если из этих фотонов 10^5 попадут в глаз, этого будет вполне достаточно, чтобы увидеть светящуюся точку, то есть увидеть атом. Такое большое количество фотонов атом может получить, только если он находится в фокусе лазерного луча. Сфокусировать луч практически в точку и ввести туда атом нетрудно, но как его удержать в этой точке?

Сразу приходит мысль, что это следует сделать с помощью электрического поля. Но полем проще удерживать в равновесии заряженные частицы, вот почему эксперимент проводился не с нейтральными, а с ионизированными атомами. Остается вопрос, какое поле надо создать.

Начнем с простейшего случая — электростатического поля. Представим себе, что отрицательный ион помещают точно посередине между двумя положительными зарядами. Ион находится в равновесии, но это равновесие неустойчиво: при малейшем отклонении в сторону одного или другого заряда ион полетит к ближайшему заряду. Такая неустойчивость — общее свойство всех электростатических полей, так что с их помощью невозможно обеспечить устойчивое равновесие заряда. Остается рассмотреть переменное поле.

Попав в переменное электрическое поле, ион начинает колебаться, то есть приобретает энергию колебательного движения, пропорциональную напряженности поля. Если создать такую конфигурацию поля, в которой есть область минимума напряженности, в этом месте ион будет обладать минимальным запасом этой колебательной энергии, то есть пребывать в состоянии устойчивого равновесия.

В опыте, о котором мы рассказываем, необходимая конфигурация поля создается так (см. рисунок). Между двумя электродами, каждый из которых сделан в форме острия, помещается кольцо. На электроды и кольцо подается переменное напряжение таким образом, что острия всегда заряжены одноименно. Силовые линии поля идут от кольца к остриям (или наоборот), а в центре кольца поле минимально. Говорят, что область в центре представляет собой ловушку для заряженных частиц. Именно сюда и фокусируется свет от лазера. Такая ловушка позволяет удерживать ион в течение нескольких десятков минут. Как только ион попадает строго в центр кольца, можно увидеть светящуюся точку. Это светится один ион.

Тунгусский метеорит — в лаборатории физика

Кандидат физико-математических наук
В. А. БРОНШТЭН

Как? — спросите вы, — неужели этот загадочный метеорит все-таки нашли и привезли в лабораторию? На этот вопрос нельзя ответить ни да, ни нет. Нельзя сказать «нет», потому что в результате многолетних усилий вещество Тунгусского метеорита удалось выявить, доставить в лабораторию, датировать, подвергнуть всем тончайшим методам анализа. Но нельзя сказать и «да», потому что эти крупинки и шарики вещества размером в микроны мало похожи на тяжелые железные и каменные метеориты, хранящиеся в музеях или изучаемые в лабораториях геохимиков.

Мы постараемся рассказать в этой статье о Тунгусском метеорите с несколько иной точки зрения. Влет в атмосферу, разрушение и гибель Тунгусского метеорита сопровождались целым комплексом необычных явлений и поставили перед учеными так много трудных вопросов и загадок, что решать их пришлось во всеоружии современной физики и математики. Да, и математики, ибо в физике без нее нельзя сделать ни шагу. А что касается лаборатории, то теперь в научных институтах лабораториями называют не только специально оборудованные помещения, со множеством установленных в них приборов, но и группы ученых, занятых разработкой одной проблемы или научного направления. Именно о таких группах ученых и об их исследованиях мы не раз будем говорить в этой статье.

Немного истории

Метеорит, получивший впоследствии название Тунгусского, упал ранним утром 30 июня 1908 года в бассейне реки Подкаменная Тунгуска (от которой он и получил свое название), в 70 км к северу от поселка (фактории, как тогда говорили) Ванавара Красноярского края. В те годы сведения о нем не достигли ученого мира. Дело ограничилось тем, что уездный исправник (чиновник, управлявший делами уезда) доложил о событии енисейскому губернатору, а делопроизводитель последнего переслал копию рапорта в Красноярское отделение Русского географического общества. Оттуда она попала в Иркутскую магнитную обсерваторию, где пролежала вместе с многочисленными сообщениями очевидцев пролета и падения метеорита до... 1925 года, когда все эти материалы были обработаны и опубликованы. Это произошло уже при Советской власти, когда крупные ученые С. В. Обручев, Л. А. Кулик, А. В. Вознесенский, председатель Комитета помощи народам Севера И. М. Суслов собрали и опубликовали ценные сведения об этом явлении.

В 1927—1930 годах в район падения метеорита были направлены одна за другой три экспедиции под руководством неутомимого исследователя Леонида Алексеевича Кулика. Уже первая экспедиция установила, что явление носило катастрофический характер. Был обнаружен сплошной лесовал на площади свыше 2000 квадратных километров. Вековые деревья были повалены, как тростинки. Они лежали рядами, все в одном направлении. Но аэрофотосъемка области вывала, проведенная в 1938 году, отчетливо показала, что вывал имеет радиальную симметрию, то есть стволы деревьев обращены корнями как бы в одну точку. Значение этого обстоятельства ученые поняли лишь спустя тридцать лет.

Между тем Л. А. Кулик с немногочисленной группой помощников-добровольцев пробрался к эпицентру области лесовала и там, в болотистой местности, обнаружил несколько округлых воронок.

— Эти воронки образованы падением осколков метеорита. Мы должны непременно раскопать их и достать метеорит, — сказал ученый. — За работу, друзья.

И пять-шесть человек принялись раскапывать воронки. Одна из них была заполнена водой. Прорыли траншею, спустили воду. Но на дне воронки нашли... старый пень. Это значило, что воронка не метеоритного происхождения: удар метеорита не оставил бы и трухи от этого пня.

Неудача обескуражила молодых помощников Кулика: один бросил работу и уехал, другой серьезно поспорил с руководителем и за это был уволен из экспедиции; третий тяжело заболел и его пришлось эвакуировать. Длительное время Кулик оставался в тайге один. Но гипотезу о метеоритном происхождении воронок пришлось оставить *).

В 30-х годах выяснились новые сведения о Тунгусской катастрофе и ее последствиях. Оказалось, что ночь с 30 июня на 1 июля 1908 года была необычайно светлой, так что астрономы во многих обсерваториях Европы, на расстоянии многих тысяч километров от места падения метеорита, не могли вести астрономические наблюдения, а в Сибири ночью можно было свободно фотографировать (с техникой того времени). Английский метеоролог Ф. Уиппл обнаружил записи микробарографов на шести английских станциях, зафиксировавших прохождение воздушной волны над Англией. Советский астроном И. С. Астапович обнаружил записи этой волны барографами восемнадцати метеорологических станций Сибири, а также в Слуцке и в Петербурге. А. В. Вознесенский еще в 1925 году обнаружил сделанную в 1908 году запись сейсмической волны на сейсмографах Иркутской обсерватории. Все это говорило о том, что удар метеорита вызвал небольшое землетрясение. Сейсмическая волна Тунгусского метеорита была затем обнаружена на записях сейсмографов в Ташкенте, Тифлисе, Йене; воздушная волна (прямая и обратная) была зарегистрирована в Потсдаме и в ряде других городов. По этим записям был уточнен момент удара, его энергия, а позднее — и высота взрыва. Наиболее тщательную обработку сейсмических данных выполнил (уже в 70-х годах) советский сейсмолог И. П. Пасечник.

Проведением аэрофотосъемки и последней экспедиции в 1939 году закончился довоенный этап исследований. Началась Великая Отечественная война. Профессор Л. А. Кулик пошел на фронт добровольцем, был

*) Как это ни странно, но в зарубежной печати еще долго приводились фотографии этих воронок с указанием, что они образованы осколками Тунгусского метеорита.

Поваленный лес в районе Тунгусской катастрофы (фотография 1930 года). Часть деревьев устояла на корню, но ветви и кроны сорваны воздушной волной.

ранен, захвачен в плен и умер в гитлеровском концлагере.

Падение Сихотэ-Алинского железного метеоритного дождя на Дальнем Востоке 12 февраля 1947 года надолго отвлекло внимание ученых от Тунгусского метеорита. Здесь не было никаких загадок: множество осколков метеорита массой от долей грамма до двух тонн лежали на обширной площади. Уже в первые годы исследований участники экспедиций привезли в Москву свыше двадцати тонн осколков.

Но тайна Тунгусского метеорита не давала покоя исследователям. Ее разрешение еще ждало своего часа.

Новый этап поисков

В конце сороковых годов на проводившихся ежегодно метеоритных конференциях не раз и не два обсуждался вопрос о судьбе Тунгусского метеорита. Энергия его взрыва несомненно превышала энергию взрыва атомных бомб, сброшенных в августе 1945 года американцами на японские города Хиросиму и Нагасаки. Но куда же девался метеорит?

В 1947 году советские ученые К. П. Станюкович и В. В. Федынский разработали теорию образования кратеров при ударе крупных метеоритов о поверхность планеты (именно такими ударами образована бо́льшая часть кратеров на Луне). Теория предсказывала существование ударных кратеров на Марсе, Меркурии, на спутниках планет. В 1964 году, когда были сфотографированы кратеры на Марсе, эти предсказания подтвердились. На Земле тоже было известно немало метеоритных кратеров: знаменитый Аризонский кратер в Северной Америке, Каалиярвский на острове Сааремаа (Эстонская ССР); позже были обнаружены и другие. Если бы Тунгусский метеорит летел с космической скоростью, то при ударе о Землю он бы не уцелел. Кинетическая энергия метеорита, летящего, например, со скоростью 30 км/с, в расчете на единицу массы составляет $4{,}5 \times 10^8$ Дж/кг. Между тем удельная теплота испарения железа равна лишь $8 \cdot 10^6$ Дж/кг, для каменных пород — почти столько же. Поэтому при ударе о Землю метеорит должен был испариться и превратить в пар часть окружающей породы. Значит, искать метеорит бесполезно: он не мог сохраниться. Надо искать кратер Примерно так говорилось на метеоритной конференции в 1950 году.

Но где может быть кратер? Может быть, падение произошло в Южное болото и кратер «похоронен» в болоте? Нужна была новая экспедиция.

Такая экспедиция была организована Комитетом по метеоритам Ака-

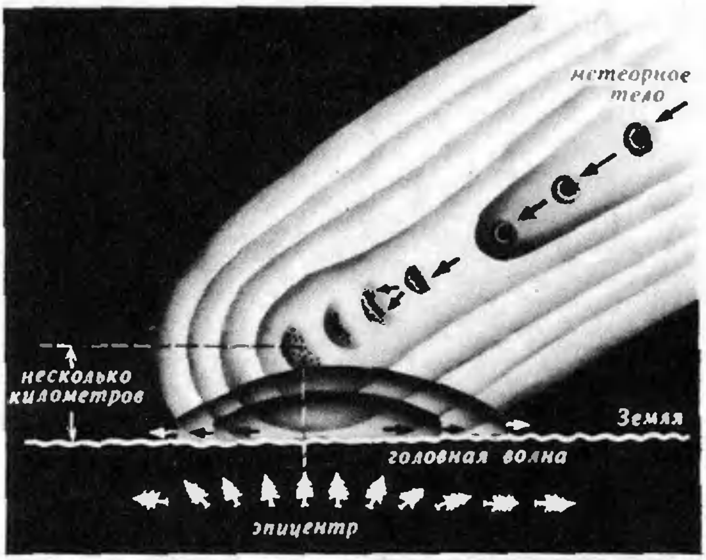


Схема влета в атмосферу и взрыва Тунгусского тела. Образовавшаяся у поверхности Земли головная волна и явилась причиной повала деревьев.

демии наук СССР в 1958 году. Она установила два важных факта. Во-первых, Южное болото не может быть метеоритным кратером или скрывать его (дно болота не нарушено). Во-вторых, взрыв метеорита произошел не при ударе о Землю, а в воздухе. Об этом свидетельствовали «мертвые» деревья в центре области вывала леса, стоявшие на корню, но без ветвей, а подчас и с повреждениями коры. Радиус этой «мертвой зоны» составлял около семи километров. Отсюда можно было оценить, что и высота взрыва такого же порядка.

Предположения о взрыве метеорита в воздухе делались и раньше. Одним из первых его высказал в конце 40-х годов писатель-фантаст А. П. Казанцев. Но исходя из вполне здравой идеи, он облек ее затем в совершенно фантастическую форму, утверждая (не только в художественных произведениях, но и в полемике с учеными), что это потерпел аварию марсианский корабль с атомным двигателем.

Оставим корабль и подумаем, что же могло взорваться? Железный Сихотэ-Алинский метеорит раздробился в воздухе на тысячи осколков под действием аэродинамического давления. Еще чаще дробятся в воздухе каменные метеориты. Но одно дело дробление, а другое дело взрыв. Это разные процессы.

И тут ученые вспомнили, что еще в тридцатые годы уже упоминавшийся английский метеоролог Ф. Уиппл высказал гипотезу, что Тунгусский метеорит представлял собой ядро небольшой кометы. Эту точку зрения продолжил и развил советский астроном И. С. Астапович. После окончания работ экспедиции 1958 года кометную гипотезу решительно поддержал известный астрофизик и исследователь метеоритов академик В. Г. Фесенков. Он вспомнил о необычном свечении ночного неба в течение трех ночей после падения Тунгусского тела. Изучили расположение области свечения над Землей. Оказалось, что она имеет форму широкого шлейфа, идущего от района падения на запад — до Британских островов. Но ни в Америке, ни в Японии свечение не наблюдалось. Дальше последовало короткое рассуждение ученого: Тунгусский метеорит упал рано утром. Солнце было на востоке. Но хвосты комет всегда направлены прочь от Солнца. Значит, хвост кометы должен был быть направлен на запад. Именно он и произвел наблюдавшееся свечение.

Забегая вперед, отметим, что в этой стройной гипотезе не все так гладко, как кажется. Хвосты комет очень разрежены, и даже если предположить, что светился не хвост, а близкие к ядру части комы (оболочки кометы), нужной интенсивности све-

Область аномального свечения неба в ночи, последовавшие за Тунгусским явлением.

чения получить не удастся. И потом, что именно светилось? Астрономы, наблюдавшие странное свечение, пытались изучить его спектр, но никаких линий излучения, как в спектрах полярных сияний, они не нашли. Значит, это было рассеянное свечение пылевых частиц. На этом и остановились.

Томские исследователи Н. В. Васильев, В. К. Журавлев и другие провели тщательное исследование оптических аномалий, связанных с падением Тунгусского метеорита, изучили обширную литературу. В те же ночи наблюдались яркие серебристые облака, плавающие на высоте 80—85 км. По мнению томских исследователей, частицы космической пыли, влетевшие в земную атмосферу вместе с Тунгусской кометой, явились ядрами конденсации для образования ледяных кристалликов, из которых состоят серебристые облака. Они же вызвали все оптические аномалии.

Но если Тунгусский метеорит представлял собой ядро кометы, то почему он взорвался в воздухе, не долетев до Земли? В чем была причина взрыва?

Как произошел взрыв?

Прежде чем объяснить какое-то явление, надо знать, как оно произошло. Показания очевидцев пролета метеорита, собранные в разные годы — вскоре после катастрофы, в конце двадцатых годов и в последующие годы, — не проясняли этого вопроса. По ним нельзя было даже восстановить точную траекторию метеорита. Записи сейсмографов и барографов давали только координаты эпицентра и энергию взрыва, но не направление полета тела. Оставался еще один «свидетель» катастрофы — поваленный лес. И «свидетель» этот оказался очень важным. Он много дал для прояснения картины взрыва. Вот как это произошло.

Начиная с 1959 года, в Тунгусскую тайгу двинулись, помимо профессиональных, еще и самодеятельные экспедиции. Бóльшая часть их ничего не дала науке. Но одна из них, состоявшая из молодых научных работников и студентов Томска, оказала решающее влияние на ход дальнейших исследований. Руководил этой экспедицией физик и врач Г. Ф. Плеханов. Прежде всего, проведенные этой группой анализ медицинских архивов, расспросы старейших жителей и врачей, исследование тел захороненных эвенков навсегда похоронили идею о якобы ядерном характере Тунгусского взрыва. Участники Комплексной самодеятельной экспедиции (КСЭ), как они себя называли, начали планомерное изучение вывала леса и других явлений, например, лучистого ожога деревьев и последствий лесного пожара. Шли годы, шли в тайгу участники КСЭ. Ученые-специалисты сначала смотрели на них снисходительно, потом добродушно, потом с уважением. По результатам исследований защищались диссертации, публиковались толстые тома трудов. Теперь это уже не КСЭ, а постоянно действующая группа исследователей, руководимая Комиссией по метеоритам и космической пыли Сибирского отделения Академии наук СССР и Томским отделением Всесоюзного астрономо-геодезического общества.

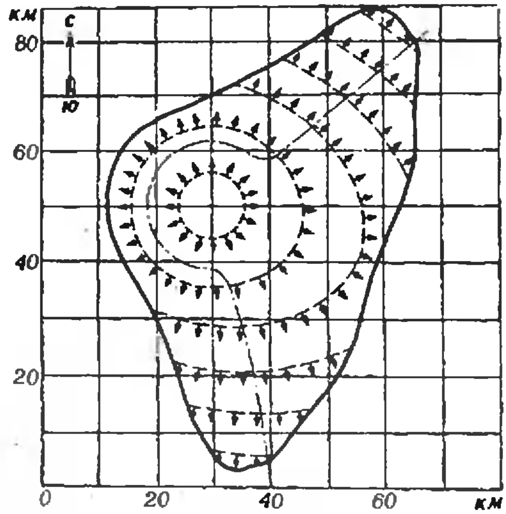
Участники КСЭ поставили задачу: построить математическую модель поля вывала леса. Для этого они планомерно, разбив тайгу на квадраты, измеряли азимуты поваленных деревьев. Азимуты 100 деревьев усреднялись. Каждой точке поля вывала соответствовал определенный средний азимут. Потом математики В. Г. Фаст и А. П. Бояркина обработали результаты на ЭВМ. Получилось следующее: в среднем вывал радиальный (значит, взрыв был!), но наблюдаются следы и осевой симметрии. Ось симметрии проходит с востока — юго-востока на запад — северо-запад. Можно полагать, что это направление и соответствует азимуту траектории Тунгусского тела. Вывал в целом по форме напоминал бабочку. Так его и прозвали — бабочкой.

Изучение области «мертвого» леса в центре бабочки позволило оценить высоту взрыва в 5—10 км.

Построение модели вывала леса заняло почти 10 лет напряженной работы. Теперь предстояло по этой модели попытаться восстановить картину взрыва — определить наклон траектории, интенсивность выделения энергии вдоль нее, наконец, высоту взрыва и его энергию, а по ней — массу и скорость Тунгусского тела.

Эта задача была решена.

Расчеты, проведенные на ЭВМ, дали следующие результаты: энергия взрыва — $4 \cdot 10^{16}$ Дж; скорость Тунгусского тела — 40 км/с; высота взрыва была оценена в 5 — 10 км, что хорошо согласовалось с данными, определенными по радиусу «мертвого» леса и по данным обработки сейсмограмм.



Граница области поваленного леса по форме напоминает бабочку. Стрелки показывают направления поваленных деревьев.

Оценка массы Тунгусского тела была сделана еще в 1961 году независимо двумя методами. Академик В. Г. Фесенков обратил внимание на наблюдения американского астронома Ч. Аббота, который две недели спустя после падения Тунгусского метеорита зафиксировал ослабление солнечного излучения над Калифорнией. Полагая, что за это время туда дошло облако пыли, образовавшееся при взрыве, В. Г. Фесенков сумел по ослаблению солнечного света рассчитать массу взорвавшегося тела. Получилось около миллиона тонн.

В том же году автор этой статьи рассчитал вход в атмосферу семейства тел различной массы с различными скоростями (в пределах скоростей, характерных для метеоритов, — от 15 до 60 км/с). Оказалось, что только тело с начальной массой в один миллион тонн, летя со скоростью около 25 км/с, могло достигнуть высоты 5 — 10 км над Землей и произвести взрыв той энергии, которая соответствовала вывалу леса: 10^{16} Дж. Как видно, обе оценки совпали с результатами расчетов по модели взрыва: при энергии взрыва $4 \cdot 10^{16}$ Дж и скорости $4 \cdot 10^3$ м/с масса тела должна была быть $\sim 10^9$ кг.

Итак, механика взрыва была выяснена. Но его физика все же была неясна. Что заставило ядро кометы взорваться?

Вспомним, что говорит нам астрономия о строении и составе ядер комет. Они — ледяные, хотя лед этот включает не только водяной лед, но также и углекислый (из CO_2), с добавками метана и аммиака. Кроме того, этот лед загрязнен примесями металлов. Как показывают спектры продуктов разрушения комет — метеоров, а иногда и самих комет, в их состав входят железо, магний, кальций, натрий, алюминий и другие металлы, а также кремний. Средняя плотность ядер комет — порядка 1 г/см^3 или немного меньше. Их вещество непрочно, и при входе в земную атмосферу начнет интенсивно испаряться и дробиться. А дробление только увеличивает скорость испарения. Ведь при этом растет поверхность испарения. В самом деле, пусть у нас было тело радиуса R. Площадь его поверхности равнялась $4\pi R^2$. Если тело раздробилось на n осколков, то, как нетрудно подсчитать, их общая поверхность будет в $n^{1/3}$ раз больше первоначальной. Усиление интенсивности испарения происходит и за счет входа тела во все более плотные слои атмосферы.

В 1979 году количественную теорию дробления гигантских тел, входящих в атмосферу Земли, разработал С. С. Григорян. Его расчеты показали, что интенсивность дробления должна нарастать прогрессивно, завершаясь почти мгновенным переходом вещества в пар. Много раньше такую же картину чисто качественно нарисовал известный аэродинамик профессор Г. И. Покровский.

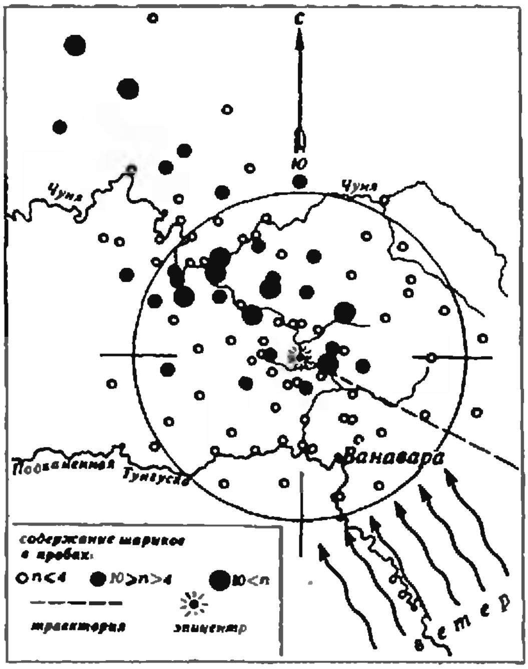
Итак: прогрессивное дробление, ускоряющееся испарение и в конце — почти мгновенный переход всего вещества в пар, напоминающий взрыв. Именно так представляют себе взрыв Тунгусской кометы исследователи этого явления.

Тунгусские метеориты падают каждый год

Да, да, не удивляйтесь. Каждый год и даже чаще. И тоже не достигают поверхности Земли. Только они не так эффектны и не валят деревья.

Речь идет об очень ярких метеорах — болидах. В начале 60-х годов ученые полагали, что большинство болидов заканчивается выпадением на Землю метеоритов. В Соединенных Штатах Америки, среди прерий центральной части страны, американские астрономы организовали сеть станций для фотографирования болидов (ее назвали Прерийной сетью). Еще раньше такая же сеть была развернута на территории Чехословакии (сейчас она продолжена на часть территории ГДР и ФРГ). Через несколько лет астрономы Р. Мак-Кроски и А. Позен опубликовали каталог траекторий, скоростей и начальных масс наблюдавшихся болидов. Первоначальный замысел — по траекториям болидов искать на земле метеориты — не оправдался. Только один болид, сфотографированный Прерийной сетью, закончился выпадением метеорита Лост Сити. Чехословацкие астрономы в 1959 году сняли полет метеорита Пршибрам, а канадцы в 1976 году — полет метеорита Инисфри. И всё. Большинство болидов разрушалось в атмосфере, причем многие — с концевой вспышкой, напоминающей взрыв. Это и дало основание И. Т. Зоткину в статье в журнале «Природа» заявить, что «тунгусские метеориты падают каждый год».

Проверить это заявление решил автор этой статьи. Используя некоторые выведенные ранее закономерности движения метеорных тел в атмосфере Земли, можно было рассчитать высоты разрушения тел при заданных массе, скорости влета и угле наклона траектории. Но надо было еще знать плотность тел. И тут автор предположил, что она одинакова для большинства болидов и Тунгусского метеорита. Расчеты были сравнены с данными наблюдений болидов и теми данными о траектории, массе и скорости Тунгусского метеорита, которые были в нашем распоряжении. Предположение о родстве природы всех этих тел подтвердилось. Очевидно, они ледяные и напоминают ядра комет. Эти тела автор назвал «микрокометами». Тунгусский метеорит как бы крупнейший из этой группы тел, но в принципе ничем от них не отличается.



Шарики и частицы вещества Тунгусского тела в почве и торфяном слое в районе катастрофы. Размер наибольших частиц — около 50 мкм.

Гипотеза о микрокометах тоже имеет свои трудности. Небольшие ледяные тела быстро испаряются от нагрева прямыми лучами Солнца в космическом пространстве. Срок их жизни невелик. Поэтому приходится допустить, что они состоят не из чистого льда, а имеют снаружи своеобразную корку из твердых пород, предохраняющую их от солнечных лучей. По мере таяния льда содержащиеся в этих телах твердые частички медленно оседают (как весной на тающем снеге), и постепенно образуется корка.

Тщательный химический анализ шариков и неправильных по форме частичек вещества Тунгусского тела, собранных на месте катастрофы в торфяном слое 1908 года, дал весьма интересные результаты. Эти шарики по сравнению с «обычными» метеоритами обогащены цинком, натрием, в них присутствуют следы серебра, селена и редких земель. Металлическая фракция пыли характерна повышенным содержанием никеля и кобальта.

В шариках, представляющих собой остатки Тунгусского космического тела, обнаружены газовые включения (вакуоли). Состав этих газов тоже был исследован. В газовых смесях отсутствует примесь воздуха, зато налицо водород. А ведь водород — одна из основных составных частей вещества комет. Так что и химический анализ вещества остатков Тунгусского тела подтверждает гипотезу о его кометной природе.

Вот насколько разнообразны проблемы, которые поставил перед учеными Тунгусский метеорит.

Новое простое число

Возможности вычислительной техники нередко демонстрируются на рекордных арифметических вычислениях. Одно из самых популярных направлений — поиски больших простых чисел (с. 25). Речь обычно идет о простых числах Мерсенна $M_p=2^p-1$ (см. заметку «О десятичной записи некоторых чисел»). Причина, по которой простые числа чаще ищут среди простых чисел Мерсенна, заключается в том, что, начиная с результатов Ферма и Эйлера, известны многочисленные ограничения на возможные делители M_p. Это актуально, поскольку при доказательстве простоты очень больших чисел требуется колоссальный перебор возможных делителей.

Предыдущий рекорд в поисках простых чисел был установлен в апреле 1979 г. Дэвидом Славинским. Он доказал простоту числа $M_{44497}=2^{44497}-1$. Это 27-е по счету простое число Мерсенна. В январе 1983 г. появилось сообщение Славинского о том, что простым является число $M_{86243}=2^{86243}-1$. Это число записывается 25962 десятичными знаками. Вычисления проводились на известной своим быстродействием многопроцессорной машине *Крей-1* в исследовательских лабораториях Крея (и, разумеется, служили рекламой этой машине). Непосредственная проверка простоты M_{86243} заняла 1 час 3 м. 22 с. машинного времени. Несмотря на быстродействие машины, автору пришлось потратить много сил на то, чтобы выполнять арифметические вычисления больших чисел самым экономным образом.

Не известно, является ли M_{86243} 28-м простым числом Мерсенна. Дело в том, что Славинский исследовал M_p для p из интервала (44477, 62000) и, не найдя там простых, «перескочил» на интервал (75000, 100000), где ему удалось найти простое число. Он обещает исследовать интервал (62000, 75000).

С. Г. Гиндикин

Революционер в науке и жизни

В. П. ЛИШЕВСКИЙ

Многие ученые — люди удивительной судьбы, но мало кто прожил такую захватывающе интересную, полную приключений жизнь, как Гаспар Монж. Замечательный ученый (математик, механик, химик и металлург) был также активным участником Великой французской буржуазной революции: именно он своей подписью утвердил смертный приговор Людовику XVI. Сын бедных родителей, революционер и якобинец Монж, боровшийся против привилегий знати, становится графом и личным другом императора Наполеона. После реставрации монархии ученый был исключен из французской Академии наук и кончил свои дни в изгнании.

Гаспар Монж родился 10 мая 1746 г. в небольшом городке Бон, расположенном на востоке Франции. Его отец был малограмотным уличным торговцем, но своим детям он постарался дать наилучшее образование, доступное в то время представителям третьего сословия. Два брата Гаспара тоже стали профессорами: младший, Жан, — математики, гидрографии и навигации, средний, Луи, — математики и астрономии. Интересно, что Луи Монж был участником экспедиции Лаперуза — одним из трех, оставшихся в живых после нее.

Учиться Гаспар начал в шесть лет и вскоре стал лучшим учеником школы, ее гордостью. Окончив в 1762 г. школу, он поступает в коллеж Святой Троицы в Лионе, где одновременно учится и преподает физику. Лето 1764 г. будущий ученый, как всегда, проводит дома. И здесь в его судьбу вмешивается

Его Величество Случай

В дни отдыха Гаспар вместе с одним из друзей начертил план своего родного города Бона. Этот план увидел подполковник инженерной службы дю Винько и предложил Монжу поступить в возглавляемую им Мезьерскую школу на отделение, готовившее мастеров и производителей инженерных работ. Другое отделение готовило военных инженеров, но на него принимали только детей дворян.

Занимаясь в школе, Монж заинтересовался задачей, которая всегда стояла перед военными инженерами: как разместить на местности укрепления, чтобы они были наименее подвержены разрушению артиллерией противника, находящейся в определенной точке. Монж быстро решил задачу, но преподаватели школы не стали смотреть его решение, полагая, что ученик не мог справиться с необходимыми сложными вычислениями. Монж все же настоял на своем. Когда преподаватели ознакомились с простым и совершенно необычным способом решения задачи, предложенным Монжем, они пришли в восторг. Работа, как представляющая ценность для военного дела, сразу была засекречена. Вот почему не скоро увидела свет

Начертательная геометрия Монжа

Теория проектирования и элементы начертательной геометрии существовали и до Монжа. Заслуга ученого в том, что он из разрозненных сведений, решений отдельных задач и не всегда корректных способов изображения создал новую область знания. В этом смысле Монжа можно считать основоположником начертательной геометрии, которую он определял как «искусство представлять на листе бумаги, имеющем только два измерения, предметы, имеющие три размера, которые подчинены точному определению».

Как многие великие идеи, идея Монжа была проста. Геометрические тела составлены из точек,— рассуждал ученый,— поэтому, чтобы изобразить тело в пространстве, надо найти способ изображения точек в пространстве. Возьмем точку и опустим из нее перпендикуляр на горизонтальную плоскость. Получим проекцию точки. Но такую проекцию будут иметь все точки, лежащие на этом перпендикуляре к плоскости. Чтобы точка в пространстве определялась однозначно, введем вторую плоскость — вертикальную. Тогда две проекции (на горизонтальную и вертикальную плоскости) однозначно определят положение точки в пространстве (рис. 1).

Итак,— резюмирует Монж,— если принять прямоугольное (ортогональное) проектирование и на каждой плоскости задать проекции точки, точка будет вполне определена.

Далее Монж делает следующее. Он поворачивает вертикальную плоскость вокруг прямой пересечения ее с горизонтальной плоскостью, чтобы можно было изображать обе проек-

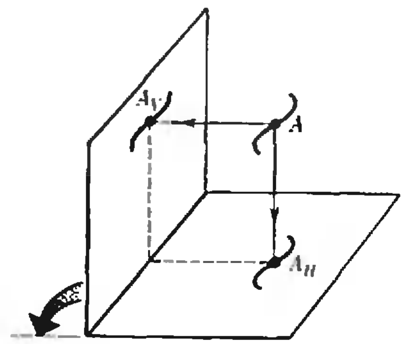


Рис. 1.

Рис. 2.

ции на одном листе бумаги. Теперь все построения можно вести на одном чертеже — «эпюре», как стали затем называть такой комплексный чертеж. А по эпюре можно затем воссоздать пространственную фигуру, определить расстояние между точками и т. п. (рис. 2).

Конечно, впоследствии начертательная геометрия претерпела некоторые изменения, но основы, заложенные Монжем, остались незыблемыми. «Подобно тому, как элементарная геометрия и посейчас излагается почти как у Евклида, или аналитическая геометрия — близко к тому, как ее изложил Декарт, начертательная геометрия рассматривается и сейчас весьма близко к тому, как ее изложил Монж». Эти слова принадлежат известному советскому геометру Б. Н. Делоне. «Начертательная геометрия» Монжа была издана только в 1799 г., когда идеи, заложенные в ней, перестали быть тайной.

Педагог и ученый

В 23 года Монж — профессор Мезьерской школы. В 1770 году ему поручают возглавить кафедру физики, а вскоре — и математики. Одновременно с преподаванием ученый ведет большую научную работу, но о начертательной геометрии он не пишет — она еще долго будет находиться под запретом.

В это время появляются его первые математические мемуары — по теории разверток, по вариационному исчислению и по интегрированию некоторых функций. 31 августа 1771 г. на заседании Парижской Академии наук Монж делает доклад о развертках кривых двоякой кривизны, а 27 ноября того же года — об интегрировании некоторых дифференциалов. В результате 8 апреля 1772 г. Монж, которому нет еще полных 26 лет, избирается членом-корреспондентом Парижской Академии наук.

Очень много времени Монж уделяет преподаванию. Он читает курсы теоретической и экспериментальной физики, курсы химии, математики, резки камней, теории перспективы и теней.

При чтении лекций Монж сильно жестикулировал. Когда в старости Монжу стало трудно изображать руками различные геометрические поверхности, он перестал читать лекции. «Я потерял свой жест», — объяснял Монж свое решение.

Слушатели обожают молодого профессора. Он совершает с ними экскурсии в мастерские и на заводы, прогулки по окрестностям Мезьера, рассказывает много поучительного и интересного. «Случалось иногда, чтобы поскорее попасть с учениками на какой-либо завод, Монж, не тратя времени на разыскивание дорог и мостов, переходил вброд широкий ручей, не прерывая при этом своих объяснений. Молодые люди, окружавшие его, также не замечая препятствий на своем пути, продолжали внимательно слушать: так велика была магия его влияния на их умы!» — вспоминал впоследствии один из его учеников.

В 1777 г. Монж женился на молодой вдове Марии Катерине Орбон — спокойной и доброй женщине, которая родила Монжу трех дочерей. Супруги прожили счастливо всю жизнь.

Мадам Орбон унаследовала от первого мужа металлургическую мастерскую, и в круг интересов Монжа входят работа с металлами и химия. Последней ученый увлекается настолько, что открывает в Мезьерской школе химическую лабораторию.

О его успехах в занятиях химией свидетельствует, например, такой факт. Монж раньше Лавуазье доказал, что вода состоит из кислорода и водорода, и осуществил синтез воды из этих газов. (Лавуазье признавал приоритет Монжа в данном вопросе.)

Но основное внимание ученый попрежнему уделяет математике. Он разрабатывает различные приложения начертательной геометрии к практическим задачам, интересуется уравнениями в частных производных, исследует некоторые аспекты дифференциальной геометрии.

Монж активно участвует в многогранной деятельности Академии. Присутствует на ее заседаниях, работает в различных комиссиях, дает заключения на всевозможные изобретения и научные труды. Одновременно он не прекращает преподавательскую деятельность. В 1783 г. Монжа назначают экзаменатором морской и артиллерийской гвардий. Экзаменуя кадетов, он убеждается, что те плохо знают теоретическую механику, и пишет для них учебник по статике (1788 г.).

Революционер

Во Франции начинается революция. 14 июля 1789 г. восставший народ захватывает Бастилию. За Парижем поднимается на борьбу вся страна. Создаются новые органы власти, новая вооруженная сила — Национальная гвардия; 26 августа Учредительное собрание принимает Декларацию прав человека и гражданина.

«У науки нет отечества, но ученый не бывает без отечества»,— говорил Луи Пастер. Эти слова как нельзя более относятся к Гаспару Монжу. Он не может находиться вне происходящих событий. Ученый горячо приветствует революцию. Он вступает в Патриотическое общество, затем — в Народное общество и, наконец,— в Якобинский клуб.

Против страны, охваченной революционным пожаром, организуется блок контрреволюционных государств. Законодательное собрание Франции объявляет: «Отечество в опасности!». 10 августа 1792 г. начинается новый этап революции — король свергнут и к власти приходит Временный исполнительный совет, состоящий из министров, избранных Законодательным собранием. В этот совет в качестве морского министра входит Гаспар Монж.

21 сентября 1792 г. на своем первом заседании вновь избранный Конвент принял решение об упразднении монархии и провозглашении республики. Король был предан суду и приговорен к смертной казни. Приговор был утвержден Монжем, который в то время исполнял обязанности председателя Временного исполнительного совета (должность председателя Совета министры занимали по очереди).

Французская республика находилась в тяжелом положении. Не хватало оружия и продовольствия. Плохо обученные, недостаточно вооруженные и голодные солдаты сражались на многочисленных фронтах с превосходящими силами противника. По поручению революционного правительства Монж организует производство пороха, ружей, сабель, пушек. Он разыскивает запасы селитры, необходимой для производства пороха, под его руководством железоделательные фабрики и заводы переходят на изготовление оружия (производство ружей в одном только Париже доходит до 1000 штук в день); Монж создает литейные мастерские для отливки пушечных стволов. Он обучает рабочих, заботится об их питании, сам же живет впроголодь. Когда жена ученого к куску хлеба — обычному обеду его в то время — добавила сыр, Монж отказался: «Право же, ты ввязываешь меня в скверную историю; ведь я рассказывал тебе, что, когда на прошлой неделе я проявил некоторое чревоугодие, мне пришлось с горечью услышать, как депутат Ниу с загадочным видом говорил окружающим: "Монж перестает стесняться; глядите — он ест редиску"».

9 термидора (27 июля) 1794 г. произошел контрреволюционный переворот. Руководители якобинской диктатуры — Робеспьер, Сен-Жюст и другие — были казнены. Монжу, как активному якобинцу, пришлось некоторое время скрываться.

Конвент закрыл Академию наук, высшие и средние специальные школы. Сокращается производство оружия, перестают работать многие мастерские и мануфактуры — теперь Монж только преподает.

Политехническая школа

При активном участии Монжа создается Центральная школа общественных работ, преобразованная позже (1 сентября 1795 г.) в Ecole Polytechnique — знаменитую Политехническую школу, директором которой Монж был долгие годы. Это его любимое детище. Политехнической школе Монж отдает все свое свободное время и даже деньги (на стипендии нуждающимся студентам). И школа оправдала его надежды. Из нее в разные годы вышли такие выдающиеся ученые, как Ампер, Кориолис, Гей-Люссак, Беккерель, Араго, Френель, Пуансо, Пуассон, многие поколения инженеров высшего класса.

«Никто не преподавал так хорошо, как он,— вспоминал впоследствии ученик Монжа известный инженер Бриссон. — Жесты, поза, модуляция голоса — все служило ему для развития мыслей. Он всегда следил за глазами слушателей и знал, как угадать степень понимания каждого из них... Мы узнали Монжа, этого добрейшего человека, привязанного к юношеству и преданного наукам. Он всегда был среди нас; после лекций по геометрии, анализу и физике начинались частные беседы, которые еще расширяли и укрепляли наши способности. Он был другом каждого воспитанника, побуждал нас к труду, всегда помогал и всегда радовался нашим успехам».

Другой ученик, Дюпен, так описывает внешность Монжа: «Высокий, сильный, мускулистый. Лицо, широкое и короткое, напоминает льва. Глаза, большие и живые, сверкают из-под густых черных бровей, которые подчеркивают широкий и высокий лоб, оттененный глубокими морщинами, свидетельствующий о большом уме. Это замечательное лицо обычно бывало спокойным — лицом человека, погруженного в размышления».

Для своих слушателей Монж написал несколько учебников по геометрии (начертательной, аналитической и дифференциальной), по которым училось несколько поколений инженеров.

Монж и Наполеон

События в стране тем временем шли своим чередом. В феврале 1796 г. Директория назначает 26-летнего генерала Бонапарта главнокомандующим французскими войсками, сражающимися в Италии. В мае того же года по заданию Директории в Италию выехал Монж. Здесь и произошла его встреча с будущим императором, которая сыграла такую большую роль в жизни ученого.

Бонапарт и Монж один раз встречались ранее (в бытность последнего морским министром), но ученый не запомнил очередного посетителя. Теперь Бонапарт, улыбаясь, напомнил о том свидании: «Один молодой артиллерийский офицер... обращался в 1792 году с просьбой к морскому министру. Может быть, министр и не запомнил этого случая — мало ли просителей у него тогда перебывало... Что же касается безвестного офицера, то он никогда не забудет его внимания».

Между полководцем и ученым сразу же установились доверительные отношения. Это была взаимная симпатия двух умных людей, перешедшая затем в искреннюю дружбу. Бонапарт не отпускал Монжа от себя ни на шаг. И хотя их отношения не всегда были безоблачными, в лице Монжа — этого бескорыстного, простодушного ученого, не способного на малейшую фальшь, неискренность, интригу, Наполеон Бонапарт нашел настоящего друга. Будущий император не ошибся в своем выборе. Монж остался верен этой дружбе до самой смерти.

Когда Бонапарт затеял свой Египетский поход (1798—1799 гг.), Монж принял в нем участие. Этот поход едва не стоил ему жизни: он чуть не умер во время эпидемии чумы. Только благодаря химику Бертоле, самоотверженно ухаживавшему за больным Монжем, тот поправился.

Именно к Египетскому походу относятся слова Наполеона, сказанные им в минуту опасности: «Ослов и ученых в середину!» Эту фразу некоторые пытаются трактовать как неуважение к ученым. Отдавая дань юмору будущего императора, все же отметим, что он приказал поместить в середину каре тех, кем более всего дорожил: ученых и животных, которые перевозили оружие, продовольствие и воду.

В Египте Монж и другие ученые, входившие в экспедицию Бонапарта, вели научную работу. Их целью было, по определению Монжа,— содействовать прогрессу и просвещению Египта. Для этой цели создается Каирский институт, президентом которого избирается Монж, вице-президентом — Бонапарт. Французские ученые составляли «Описание Египта», изучали древние памятники и сельское хозяйство, работали над проектом канала, который соединил бы Средиземное и Красное моря.

Положение французских войск ухудшается. И не только в Египте. Суворов освобождает от французов Италию. Тяжелое положение на других фронтах. В этих условиях Наполеон принимает решение вернуться в Париж. В августе 1799 г. он покидает армию и отплывает во Францию. Вместе с ним — Монж, Бертоле, Мюрат и другие приближенные люди. 16 октября Бонапарт вместе со своими спутниками въезжает в Париж. Его приветствуют восторженные толпы народа.

18 брюмера (9 ноября) 1799 г. была упразднена Директория, а на следующий день — парламент. К власти пришли три консула, но вся полнота власти сосредоточилась в руках первого консула — Наполеона Бонапарта. 24 декабря 1799 г. пер-

вый консул назначает Гаспара Монжа пожизненным сенатором.

Монж уходит с поста директора Политехнической школы, оставаясь в ней профессором. Он продолжает свои исследования приложений алгебры и анализа к геометрии, начинает заниматься наукой о машинах и механизмах, в становлении которой он сыграл заметную роль.

21 августа 1803 г. Монж был назначен вице-президентом Сената, а 28 сентября — сенатором города Льежа. В задачи сенатской администрации входило, в основном, выполнение специальных поручений первого консула. Монж должен был наладить в Льеже производство пушек.

В конце 1803 года Наполеон восстанавливает статус личных наград, отмененных революцией. Первым по списку гражданских лиц орден Почетного легиона получает математик Монж. «Завидую я вам, ученым,— говорит Наполеон Монжу.— Как вы должны быть счастливы тем, что прославились, не запятнав кровью своего бессмертия!»

18 мая 1804 г. во Франции провозглашается новая конституция, по которой Наполеон — пожизненный император. В это время Монж выполняет различные поручения главы государства. Он изучает возможность проведения канала от реки Урк к Парижу, работает над проектом высадки десанта в Англии при помощи 100 воздушных шаров диаметром 100 м каждый и т. д.

20 мая 1806 г. Наполеон назначает Монжа президентом Сената. Вскоре Монж получает звание графа и 100 000 франков на покупку имения. Он в апогее своей славы, но здоровье ученого начинает сдавать. В начале 1809 г. у него отнимается рука. Монж вынужден оставить преподавание в Политехнической школе. Но он по-прежнему консультирует императора по различным научным вопросам. В 1810 г. Монж по распоряжению Наполеона председательствует в комиссии по изучению ракет, дает заключение на мемуар о скафандре, на монографию по металлургии чугуна, железа и стали. Император спрашивает его мнение о тосканской железной промышленности, о рудах острова Эльбы, о производстве пушек и т. д. и т. п.

Империя Наполеона идет к закату. Разгром «Великой армии» в России, поражение в «Битве народов» под Лейпцигом повлекли за собой отречение и ссылку Наполеона.

Когда Наполеон вернулся с Эльбы, Монж прибыл во дворец Тюильри в первый же день воцарения там императора и все время находился при нем. После второго отречения Монж был вынужден уехать в Бельгию, где и умер 28 июля 1818 г.

После смерти его тело перевезено в Париж и похоронено на кладбище Пер-Лашез. Официальной церемонии не было, но многие академики, товарищи, друзья и ученики Монжа пришли проводить его в последний путь.

* * *

Монж вошел в историю науки как создатель начертательной геометрии, как человек, который сделал чертеж рабочим инструментом инженеров и техников всех стран и народов. «Если чертеж является языком техники, то начертательная геометрия служит грамматикой этого всемирного языка, так как она учит нас правильно читать чужие и излагать на нем наши собственные мысли»,— говорил известный русский ученый В. И. Курдюмов. Создатель этого всемирного языка — Гаспар Монж. Но не надо забывать другие его работы по математике (анализу и дифференциальной геометрии), а также по химии, металлургии, метеорологии, оптике, гидравлике, оружейному и стекольному производствам; Монж даже выдвинул гипотезу о происхождении жизни на Земле. А его собственная жизнь остается ярким примером служения науке.

Разложение на множители

Кандидат физико-математических наук С. В. ФОМИН

В школе часто приходится сталкиваться с алгебраическими уравнениями. Линейные уравнения умеют решать уже шестиклассники. В седьмом классе школьники узнают формулы для решения квадратных уравнений. Довольно громоздкие формулы для решения кубических уравнений и уравнений четвертой степени, найденные в XVI веке, оказываются мало полезными на практике (см. книгу С. Г. Гиндикина «Рассказы о физиках и математиках» (М., «Наука», 1981)). Уравнения же пятой степени и выше в общем случае не разрешимы в радикалах.

И тем не менее, во многих случаях уравнение степени $n>2$ удается легко решить. Чаще всего помогает разложение на множители. Из утверждения «число a тогда и только тогда является корнем многочлена $P(x)$, когда $P(x)$ делится на $x-a$» и Основной теоремы алгебры («Квант», 1982, № 4) вытекает, что *всякий многочлен с действительными коэффициентами степени $n>2$ разлагается в произведение множителей первой степени и неразложимых квадратных трехчленов.*

Решим несколько уравнений.

$$2x^3-x^2-7x+2=0. \qquad (1)$$

У многочлена в левой части уравнения (1) — целые коэффициенты. Легко доказать, что если такое уравнение имеет целый корень, то этот корень является делителем свободного члена (докажите это!). Число 2 — корень уравнения (1). Значит, многочлен $2x^3-x^2-7x+2$ делится на $x-2$. Очевидно, частным является квадратный трехчлен со старшим коэффициентом 2, так что

$$2x^3-x^2-7x+2=$$
$$=(x-2)(2x^2+Bx+C),$$

где B и C — неизвестные пока коэффициенты. Это равенство верно при всех x. Полагая $x=0$, получаем $-2C=2$, $C=-1$. Полагая, далее например, $x=1$ получаем $-(B+1)=-4$, $B=3$.

Таким образом, уравнение (1) переписывается в виде

$$(x-2)(2x^2+3x-1)=0.$$

Ответ. $\left\{2, \frac{-3+\sqrt{17}}{4}, \frac{-3-\sqrt{17}}{4}\right\}$.

$$\frac{x^4-3x^3+x^2-2}{x^3+1}=\frac{2}{3x-1} \qquad (2)$$

Если сразу освободиться от знаменателей, мы получим уравнение 5-й степени. Поэтому «попытаем счастья» — попробуем выяснить, нельзя ли сократить дробь, стоящую в левой части. Ее знаменатель раскладывается на множители:

$$x^3+1=(x+1)(x^2-x+1).$$

На первый множитель числитель не делится (ведь число -1 не является корнем многочлена $x^4-3x^3+x^2-2$). Попробуем разделить его на x^2-x+1. Можно, конечно, опять применить «метод неопределенных коэффициентов»:

$$x^4-3x^3+x^2-2=$$
$$=(x^2-x+1)(x^2+Ax+B)+C.$$

Проще, пожалуй, разделить «уголком» — так, как мы делим многозначное число на многозначное:

$$\begin{array}{r|l}
x^4-3x^3+x^2-2 & x^2-x+1 \\
\underline{x^4-x^3+x^2} & x^2-2x-2 \\
-2x^3-2 & \\
\underline{-2x^3+2x^2-2x} & \\
-2x^2+2x-2 & \\
\underline{-2x^2+2x-2} & \\
0 &
\end{array}$$

(Мы делим старший член делимого на старший член делителя: $\frac{x^4}{x^2}=x^2$ — это будет старший член частного. Затем умножаем полученный член частного на делитель и вычитаем произведение из делимого. Далее старший член разности снова делим на старший член делителя: $\frac{-2x^3}{x^2} = -2x$ — получаем следующий член частного и т. д.)

Нам «повезло» — разделилось без остатка. Таким образом, уравнение (2) переписывается в виде

$$\frac{(x^2-x+1)(x^4-2x-2)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{2}{3x-1},$$

$$\frac{x^2-2x-2}{x+1} = \frac{2}{3x-1}$$

и легко сводится к уравнению

$$x(x-3)(3x+2)=0.$$

Ответ. $\left\{0,\ 3,\ -\frac{2}{3}\right\}$.

$$\frac{2}{x+1} + \frac{4}{x-2} - \frac{2}{x} + x+4=0. \quad (3)$$

Можно сразу освободиться от знаменателей и раскладывать левую часть полученного уравнения четвертой степени на множители. Проще, однако, раскладывать на множители непосредственно левую часть уравнения (3). Заметим, что число 1 является его корнем. При $x=1$ пять слагаемых, стоящих в левой части, принимают значения 1, —4, —2, 1 и 4. Преобразуем данное уравнение, вычтя из каждого слагаемого его значение при $x=1$:

$$\left(\frac{2}{x+1}-1\right) + \left(\frac{4}{x-2}+4\right) + \left(-\frac{2}{x}+2\right) + (x-1) + (4-4)=0$$

(сумма добавленных слагаемых равна нулю): Произведем действия в каждой из скобок:

$$-\frac{x-1}{x+1} + \frac{4(x-1)}{x-2} + \frac{2(x-1)}{x} + (x-1)=0.$$

В каждом слагаемом появился множитель $x-1$. Это и не удивительно — ведь значение каждого слагаемого при $x=1$ должно быть нулевым! Теперь задача свелась к решению уравнения

$$-\frac{1}{x+1} + \frac{4}{x-2} + \frac{2}{x} + 1=0.$$

Нетрудно угадать один из его корней: $x=-2$ — и еще раз применить тот же прием:

$$\left(-\frac{1}{x+1}-1\right) + \left(\frac{4}{x-2}+1\right) + \left(\frac{2}{x}+1\right) + (1-1)=0,$$

или

$$-\frac{x+2}{x+1} + \frac{x+2}{x-2} + \frac{x+2}{x} = 0,$$

откуда $x=-2$ или

$$-\frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x} = 0,$$

$$\frac{x^2+2x-2}{x(x+1)(x-2)} = 0.$$

Решая квадратное уравнение, находим оставшиеся корни.

Ответ. $\{1,\ -2,\ -1-\sqrt{3},\ -1+\sqrt{3}\}$.

$$(x^2+3x-2)^2 + 3(x^2+3x-2)-2=x. \quad (4)$$

Заметим, что если число x является решением уравнения

$$x^2+3x-2=x,$$

то оно удовлетворяет и уравнению (4). Следовательно, два корня уравнения (4) нам известны: $x_1=-1-\sqrt{3}$ и $x_2=-1+\sqrt{3}$. Раскрывая скобки и перенося x в левую часть, получим уравнение

$$x^4+6x^3+8x^2-4x-4=0.$$

Его левая часть делится на $x-x_1$ и на $x-x_2$, а значит, и на $(x-x_1)(x-x_2)=x^2+2x-2$. Разделив тем или иным способом, получаем

$$(x^2+2x-2)(x^2+4x+2)=0.$$

Ответ. $\{-1+\sqrt{3},\ -1-\sqrt{3},\ -2+\sqrt{2},\ -2-\sqrt{2}\}$.

В заключение решим систему уравнений

$$\begin{cases} (x+1)(13x-2y-15)-2(y-1)(3y+2)=0, \\ (x+1)(x+4y-15)-28(y-1)=0. \end{cases} \quad (5)$$

Легко заметить, что пара $(-1;\ 1)$ удовлетворяет ей. Нетрудно найти еще одну пару $(1;\ 0)$.

А теперь — нестандартный ход. Проведем через точки $(-1;\ 1)$ и $(1;\ 0)$ прямую (ее уравнение $y=-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$) и возьмем на ней еще какую-нибудь точку, например $(3;\ -1)$. При $x=3$; $y=-1$ левая часть первого уравнения системы (5) равна 100, а второго равна —8. Следовательно, если первое уравнение системы (5) умножить на 2, второе — на 25 и сложить их, то пара (3; —1) будет удовлетворять полученному уравнению (обозначим его (*)). Пары (—1; 1) и (1; 0), очевидно, также удовлетворяют уравнению (*). Таким образом, система уравнений

$$\begin{cases} (*) \\ y=-\frac{x}{2}+\frac{1}{2} \end{cases} \qquad (6)$$

имеет, по крайней мере, т р и различных решения. С другой стороны, подставляя выражение для y через x из второго уравнения системы (6) в первое, мы получим для x уравнение не выше второй степени. Значит, уравнение (*) после подстановки $y=-\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ превращается в тождество (ведь уравнение степени $n\leqslant 2$ не может иметь более д в у х корней). Таким образом, любое решение уравнения $y+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=0$ является решением уравнения (*). Поэтому естественно предположить, что левая часть уравнения (*) раскладывается на множители, одним из которых является $y+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}$ или пропорциональный ему множитель $2y+x-1$.

Приступим к реализации нашего плана. Уравнение (*) имеет вид

$$17x^2+32xy-4y^2-118x-$$
$$-200y+101=0;$$

в левой части его можно (например, методом неопределенных коэффициентов) выделить множитель $x+2y-1$:

$$(x+2y-1)(17x-2y-101)=0;$$

Приравнивая каждый из множителей к нулю, выражая затем y через x и подставляя в одно из уравнений системы (5), получаем в случае $x+2y-1=0$ уже известные нам решения (—1; 1) и (1; 0) (вспомните, откуда возник множитель $x+2y-1$) и в случае $17x-2y-101=0$ решения (5; —8) и (7; 9).

О т в е т. {(—1; 1), (1; 0), (5; —8), (7; 9)}.

У п р а ж н е н и я

1. Решите уравнение

а) $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7)+15=0$,

б) $\frac{x^6+1}{x(x^4+1)}=\frac{65}{34}$.

2. Решите систему уравнений

$$x=\frac{y^2+2}{2y+1},\quad y=\frac{x^2+2}{2x+1}.$$

О десятичной записи некоторых чисел

В двух книгах, выпущенных издательством «Просвещение» в 1980 г., о значениях чисел π и e сказано, что для π найдено 707 десятичных знаков, а для e — более двух тысяч. Приведем более полные данные об этих и некоторых других числах, полученные с помощью ЭВМ.

В 1961 г. найдено 100 625 десятичных знаков числа π и 100 265 десятичных знаков числа e. В 1964 г. вычислено более миллиона цифр числа e, а в 1967 г. — 500 000 цифр числа π, однако эти результаты не были опубликованы.

Для знаменитого числа $1:\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ («золотое сечение») вычислено 2 878 знаков.

В 1970—71 гг. был получен миллион цифр числа $\sqrt{2}$. При проверке результата возведением в квадрат получилась единица, за которой следует десятичная запятая и 1 000 082 девятки.

О больших простых числах. В 1963 г. было найдено 23-е простое число Мерсенна *) $2^{11\,213}-1$. Оно содержит 3 376 цифр и полностью приведено в книге М. Г а р д н е р а «Математические новеллы», 1974, с. 349.

В 1971 г. было найдено 24-е число $2^{19\,937}-1$, в 1978 г. — 25-е число $2^{21\,701}-1$, а в 1979 г. — 26-е число $2^{23\,209}-1$ и 27-е число $2^{44\,497}-1$.

Найдем число цифр, а также несколько первых и последних цифр последнего из перечисленных чисел Мерсенна. Числа 2^p-1 и 2^p имеют одинаковое число цифр. Действительно, если бы 2^p имело на одну цифру больше, то оно оканчивалось бы нулем. Но это невозможно, так как ни одна степень числа 2 на нуль не оканчивается. Итак, число цифр 27-го простого числа Мерсенна равно числу цифр числа $2^{44\,497}$. Имеем:

$$\lg 2^{44497}=44\,497\cdot\lg 2=$$
$$=44497\cdot 0{,}3010\,2999\,57=$$
$$=13394{,}93172.$$

Характеристика логарифма равна 13394, следовательно, само число содержит 13 395 цифр. Мантисса логарифма равна 93 172, поэтому число начинается с цифр 8545.

Можно доказать, что последними тремя цифрами будут 6, 7 и 1. Итак:

$$2^{44\,497}-1=8545\ldots671.$$

М. С. Гельфанд

*) То есть простое число вида 2^p-1; об этих числах и связанных с ними *совершенными* числами см. «Квант», 1982, № 11, с. 50 и 1971, № 8, с. 1.

Задачи-оценки

Кандидат физико-математических наук
Г. В. МЕЛЕДИН

В жизни каждому нередко приходится делать прикидки, оценки: успею ли добраться, хватит ли денег, намного ли надо подвести регулятор часов, сумею ли удержать груз и т. п.

В деятельности исследователей оценки необходимы профессионально. Грубая прикидка, оценка по порядку величины — почти обязательный этап подготовки эксперимента, проектирования установки, теоретической разработки. Они незаменимы в процессе обсуждения новых идей и проектов. Иногда оценки подсказывают путь точного решения задачи, дают возможность установить границы области применимости точного решения и понять, какие изменения потребуются при постановке и решении задачи вне пределов этой области.

Умение делать прикидки, наряду с интуицией, весьма существенно в творческой работе. Неслучайно поэтому, что в последнее время задачи-оценки стали встречаться и на вступительных экзаменах в вузы. Например, уже несколько лет в каждом варианте письменного экзамена по физике для поступающих на физический факультет Новосибирского государственного университета есть задача-оценка. В формулировке такой задачи нет или почти нет необходимых для решения численных значений физических величин; предполагается, что каждый сам сможет их выбрать и задать.

Физическая постановка задачи, выбор и построение простейшей физической модели явления — наиболее важный и вместе с тем трудный этап решения задач-оценок. Нужно правильно отобрать физические параметры, наиболее существенные для задачи, определяющие ее физику, и пренебречь параметрами, слабо влияющими на интересующее нас явление. Для установления связей между различными параметрами существенно правильное использование основных физических законов и определений. Иногда можно ограничиться не очень строгими определениями или качественной трактовкой физических законов.

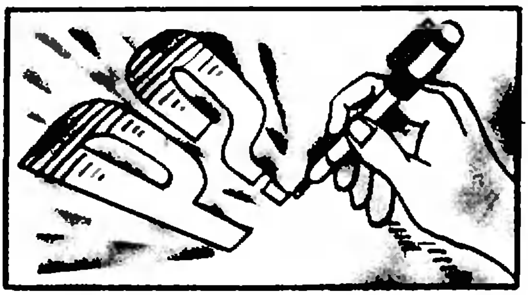
Прежде чем перейти к конкретным задачам, сделаем два небольших замечания. Во-первых, договоримся, что именно мы будем понимать под словами «оценка по порядку величины». Два численных значения какой-либо физической величины считаются отличающимися на порядок, если их отношение примерно равно 10, на два порядка, если оно равно 10^2, и т. д. С этой точки зрения число 89 должно считаться числом порядка 10^2, а число 15 — порядка 10. Если же два значения отличаются, например, в 1,3 раза, их нужно считать величинами одного порядка. То же самое относится к случаю, когда имеется отличие в 2,3 или даже в 5 раз. При грубых оценках такие отличия от точного результата не существенны.

Во-вторых, условимся об обозначениях. Наряду со знаком равенства «$=$» или знака приближенного равенства «$\approx$» мы будем употреблять значок «$\sim$». Обычно он используется для записи факта пропорциональности двух величин. Мы же этим значком будем обозначать равенство по порядку величины, подчеркивая, тем самым, что безразмерные коэффициенты пропорциональности в наших формулах — числа порядка единицы. Еще раз подчеркнем, что отличие коэффициентов «истинных» и «оценочных» в несколько раз для наших целей несущественно.

Теперь рассмотрим несколько сравнительно несложных задач-оценок. Почти все они взяты из вариантов вступительных экзаменов на физический факультет НГУ.

Начнем с задач, в которых физика явления предельно ясна и нужно лишь разумно выбрать конкретные значения соответствующих физических величин.

З а д а ч а 1. *Оцените давление шариковой ручки на бумагу при письме.*

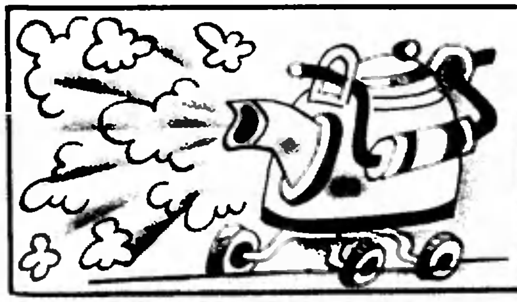


Чтобы сделать такую оценку, воспользуемся непосредственно определением давления: $p=F/S$. Теперь надо подумать о том, каковы численные значения силы и площади, входящих в это определение. Каждая линия, которую мы рисуем на бумаге во время письма, состоит из отдельных точек. Точку можно считать кружком, диаметр которого равен ширине следа d, оставляемого на бумаге: $S=\pi d^2/4$. Примем $d\sim 0{,}2$ мм (что достаточно правдоподобно). Усилие F, прилагаемое к ручке, тоже оценим «на глазок»: оно не превышает веса кисти руки, но заведомо больше веса ручки. Возьмем $F\sim 1$ Н. Тогда

$$p=\frac{F}{S}\sim\frac{4F}{\pi d^2}\sim 3\cdot 10^7 \text{ Па}.$$

Для того чтобы почувствовать, много это или мало, полезно сравнить полученное значение с каким-либо другим. Представьте себе, что на столе стоит гиря массой 1 кг. Ее диаметр в нижней части порядка 4 см, так что гиря оказывает на стол давление порядка $8\cdot 10^3$ Па. Значит, при письме шариковой ручкой давление на бумагу в несколько тысяч раз превышает давление килограммовой гири, стоящей на столе.

З а д а ч а 2. *Оцените скорость струи пара, выходящего из носика кипящего чайника.*



Пусть мощность нагревателя W, а удельная теплота парообразования воды L. Введем еще один параметр — долю мощности η, идущую на образование пара. Тогда $\eta W/L$ — это масса пара, образующегося в каждую единицу времени. Очевидно, сколько пара образовалось, столько же и выходит из чайника:

$$\frac{\eta W}{L}=\varrho vS.$$

Здесь ϱ — плотность пара при кипении, v — скорость вытекания пара, S — площадь сечения носика чайника. По закону Менделеева—Клапейрона плотность пара $\varrho=p\mu/(RT)$, где p — давление, μ — молярная масса воды, R — универсальная газовая постоянная, T — температура пара. Окончательно получаем

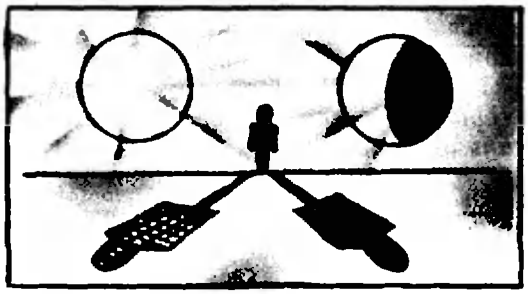
$$v=\frac{\eta W}{L\varrho S}=\frac{\eta WRT}{Lp\mu S}.$$

Если мощность нагревателя $W\sim 1$ кВт, $\eta\sim 0{,}5$, $S\sim 1$ см^2, $T\sim 373$ К, $p\sim 10^5$ Па (так как давление насыщенного пара при температуре кипения равно атмосферному давлению), а постоянные величины равны, соответственно, $R=8{,}3$ Дж/(кг · К), $L=4{,}2$ кДж/кг и $\mu=18\cdot 10^{-3}$ кг/моль, то

$$v\sim 2 \text{ м/с}.$$

З а д а ч а 3. *Оцените, во сколько раз в погожий солнечный день светлее, чем ночью в полнолуние.*

Прежде всего заметим, что Луна лишь отражает свет, падающий на нее от Солнца. Будем считать,



что освещенность, создаваемая Солнцем на Земле и на Луне, примерно одна и та же и равна $E_С$. На Луну попадает световая мощность $E_С\pi R^2$ (здесь R — радиус Луны). Луна создает на Земле освещенность $E_Л = E_С\pi R^2 k/(2\pi l^2)$, где k — коэффициент отражения света от поверхности Луны, l — расстояние от Луны до Земли (считаем, что Луна равномерно «отбрасывает» отраженный свет внутри телесного угла, равного половине максимального). Теперь найдем отношение освещенностей:

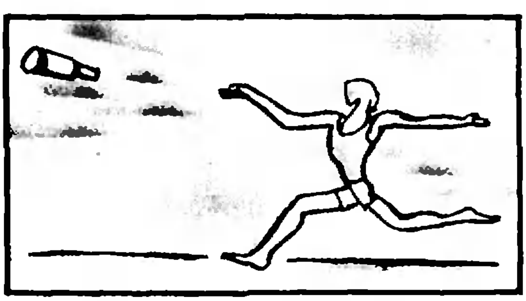
$$\frac{E_С}{E_Л} = \frac{2}{k}\left(\frac{l}{R}\right)^2 = \frac{8}{k}\left(\frac{2R}{l}\right)^{-2},$$

где $2R/l$ — угловой размер Луны, равный по порядку величины 0,01 радиана.

Возьмем $k \sim 0{,}2$, тогда окончательно

$$E_С/E_Л \sim 4 \cdot 10^5.$$

З а д а ч а 4. *Оцените, на сколько дальше упадет граната, если спортсмен будет бросать ее с разбега.*



Предположим, что при полете гранаты она поднимается на максимальную высоту H. Тогда время полета гранаты равно $2\sqrt{2H/g}$. Если в начальный момент горизонтальная проекция скорости гранаты увеличится на v, а вертикальная проекция останется практически без изменения, то время полета не изменится, а дальность полета возрастет на

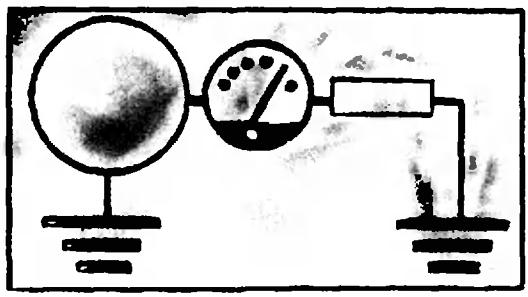
$$l = 2v\sqrt{2H/g}.$$

Разумно считать $H \sim 5$ м, а $v \sim 8$ м/с (вспомните, например, что спринтеры пробегают стометровку за время порядка 10—12 с); следовательно,

$$l \sim 20 \text{ м}.$$

Полученная оценка достаточно разумна.

З а д а ч а 5. *Оцените время разрядки металлического заряженного шара, соединенного с Землей через резистор с известным сопротивлением.*



Пусть потенциал заряженного шара φ, а заряд $Q = C\varphi$, где $C = 4\pi\varepsilon_0 a$ — емкость шара (a — радиус шара). После соединения с Землей и потенциал шара, и его заряд станут равными нулю. Во время разрядки по цепи пойдет ток I, который с течением времени будет, конечно, изменяться, но для оценки этим фактором мы пренебрежем. Тогда получаем

$$I \sim \frac{Q}{t} \sim \frac{\varphi}{R},$$

где R — сопротивление резистора, t — время разрядки. Отсюда

$$t \sim \frac{QR}{\varphi} = CR = 4\pi\varepsilon_0 aR.$$

При $a \sim 1$ м, $R \sim 1$ МОм и $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м

$$t \sim 10^{-4} \text{ с}.$$

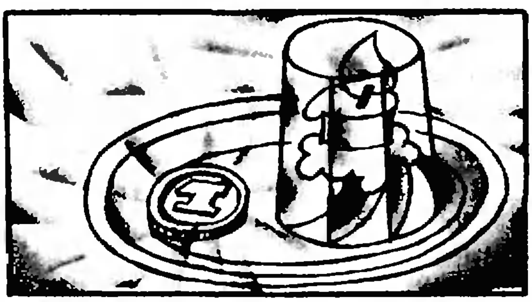
* * *

В «Занимательной физике» Я. И. Перельмана есть рассказ, который называется «Сухим из воды». Он начинается так: «Положите монету на большую плоскую тарелку, налейте столько воды, чтобы она покрыла монету, и предложите гостям взять ее прямо руками, не замочив пальцев.

Эта, казалось бы, невозможная задача довольна просто решается с помощью стакана и горящей бумажки. Зажгите бумажку, положите ее горящей внутрь стакана и быстро поставьте стакан на тарелку вблизи монеты вверх дном. Бумажка погаснет, стакан наполнится белым дымом, а затем под ним сама собой соберется вся вода с тарелки. Монета же, конечно, останется на месте, и через минуту, когда она обсохнет, вы сможете взять ее, не замочив пальцев».

Давайте в связи с этим рассказом решим такую задачу.

Задача 6. *Оцените минимальную температуру, до которой должен нагреться стакан, чтобы в него после остывания оказалась втянутой вся вода из тарелки.*



Решим сначала задачу точно (конечно, в рамках некоторых предположений, о которых позже скажем). Когда стакан подносят к поверхности воды, давление воздуха в нем равно атмосферному давлению p_a, а его температура T_x не известна. Когда стакан остынет и в него окажется втянутой масса воды m, давление воздуха в нем будет p, температура станет равной температуре T окружающего воздуха, а объем уменьшится на величину объема вошедшей воды, то есть станет равным $(Sl - m/\varrho)$, где S и l — площадь сечения стакана и его высота, ϱ — плотность воды. Согласно закону Менделеева—Клапейрона,

$$\frac{p_a S l}{T_x} = \frac{pS(l - m/(\varrho S))}{T}.$$

Из условия равновесия столбика воды следует, что $pS + mg = p_a S$, тогда

$$T_x = T\frac{1}{1 - \frac{mg}{p_a S}}\,\frac{1}{1 - \frac{m}{\varrho l S}}.$$

Укажем теперь те неявные допущения, которые мы сделали при решении. Мы считали, что температура воздуха в стакане совпадает с температурой его стенок; что стакан ставится на воду медленно, так что начальное давление в нем совпадает с атмосферным; что давлением водяных паров в стакане можно пренебречь; что капиллярные эффекты пренебрежимо малы.

Интересно, что в полученную формулу для T_x учет изменения давления (обусловленного вошедшим в стакан водяным столбиком) и учет изменения объема воздуха в стакане вошли в виде независимых сомножителей. Поэтому их влияние можно исследовать раздельно.

Преобразуем первый сомножитель из правой части указанной формулы:

$$\frac{1}{1 - \frac{mg}{p_a S}} = \frac{1}{1 - \frac{p_{вод}}{p_a}} \approx 1 + \frac{p_{вод}}{p_a}.$$

Атмосферное давление соответствует давлению водяного столба высотой 10 м, а в нашем случае ясно, что высота вошедшего в стакан столбика воды не может превышать высоту стакана, то есть приблизительно 10 см, поэтому разумно давлением водяного столбика пренебречь и считать этот множитель приближенно равным единице:

$$\frac{1}{1 - \frac{mg}{p_a S}} \approx 1.$$

Второй сомножитель связан с изменением объема воздуха в стакане. Объем воды и объем стакана уже не различаются столь сильно, как давления, поэтому объемом воды пренебречь нельзя.

Таким образом,

$$T_x \approx \frac{T}{1 - \frac{m}{\varrho l S}}.$$

Выберем численные значения параметров такими: $T \sim 300$ К, $m \sim 30$ г, $l \sim 10$ см и $S \sim 20$ см^2 (поскольку объем стакана равен 200 см^3, а его высота $l \sim 10$ см). Тогда

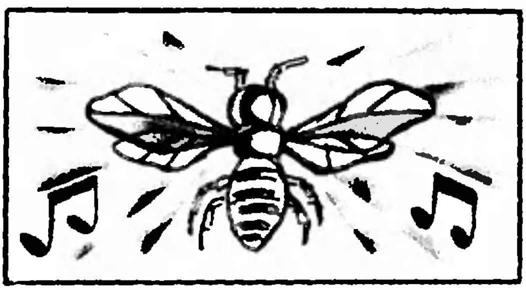
$$T_x \sim 353 \text{ К, или } t \sim 80°\text{C}.$$

Поправка из-за учета изменения давления равна $\Delta T_x \approx T_x \frac{mg}{p_a S} \sim 0{,}1$ К, что, конечно же, мало по сравнению с найденным значением T_x. Получилось довольно забавно, что в результате мы пренебрегли эффектом изменения давления воздуха при остывании — эффектом, который, собственно, и создал задачу.

* * *

Иногда в задаче встречается значительно более сложная ситуация, и подход к получению оценок соответственно усложняется. Вот пример.

Задача 7. *Оцените частоту звука, генерируемого летящим комаром.*



Естественно предположить, что звук здесь возникает от периодического взмахивания крылышек комара. На самом деле физика явлений при полете комара очень непроста. Мы будем пользоваться самой грубой моделью, считая, что взмахами крылышек создается такое изменение импульса воздуха в единицу времени, которое обеспечивает компенсацию действующей на комара силы тяжести:

$$\Delta P/\Delta t = mg.$$

За время Δt движения крылышек площадью S со скоростью v отбрасывается вниз масса воздуха $\Delta m = \varrho_в v \Delta t S$, при этом ей сообщается импульс $\Delta P = \Delta m v = \varrho_в v^2 \Delta t S$. Это создает силу F, действующую на крылышко вверх:

$$F \sim \Delta P/\Delta t \sim \varrho_в v^2 S,$$

где $\varrho_в$ — плотность воздуха. Введем характерный размер комара, например его длину $l \sim 4$ мм. Площадь пары крыльев $S \sim l^2$ (мы считаем, что длина комара того же порядка, что и размах его крыльев). Объем же комара разумно оценить как $\frac{1}{10} l^3$, поскольку поперечные размеры комара без крылышек заметно меньше его длины. Плотность комара примем равной плотности воды $\varrho_{вод}$. Введем частоту взмахов крылышек ν, тогда скорость крыла $v \sim l\nu$. Записав условие равновесия комара

$$F \sim \varrho_в v^2 l^2 \sim \varrho_в \nu^2 l^4 = mg \sim \varrho_{вод} l^3 g/10,$$

получаем

$$\nu_{зв} \sim \nu \sim \left(\frac{\varrho_{вод}}{10 \varrho_в} \frac{g}{l} \right)^{1/2} \sim 400 \text{ Гц}.$$

Разумеется, цифре «4» верить нельзя, но в целом результат дает для частоты разумный порядок величины.

Заметим, что из полученной формулы следует, что частота обратно пропорциональна $\sqrt{l}$. Другими словами, чем крупнее насекомое, тем ниже издаваемый им звук. Действительно, сравните басовитое гудение шмеля (или жужжание пчелы) с тонким, звенящим звуком комара.

* * *

Довольно часто при решении задач-оценок применяется метод размерностей *). В этом методе явно используется предположение о том, что параметры задачи входят в результат в виде сомножителей. Численные коэффициенты только из соображений размерностей получить нельзя. Иногда их можно определить из какого-нибудь частного случая, чаще эти коэффициенты условно полагают равными единице. Последнее может быть допустимо, если речь идет об оценке лишь по порядку величины. Проиллюстрируем применение метода размерностей на конкретной задаче.

*) См., например, статью Ю. Брука и А. Стасенко «Метод размерностей помогает решать задачи» («Квант», 1981, № 6).

Задача 8. *Оцените время, через которое вы услышите гром после вспышки молнии, если известно, что молния ударила в дерево, находящееся от вас на расстоянии около 3 км.*

Поскольку свет распространяется со скоростью $\approx 3 \cdot 10^5$ км/с, вспышку молнии можно будет увидеть через время $\sim 10^{-5}$ с. Звук же идет гораздо дольше. Попробуем оценить скорость распространения звуковых колебаний в воздухе. Воспользуемся для этого методом размерностей.

Очевидно, что скорость v звука зависит от параметров, характеризующих эту среду. Пусть для воздуха это будут давление p и плотность ϱ. Предположим теперь, что

$$v \sim p^x \varrho^y,$$

где x и y — неизвестные пока числа. Если подобная формула действительно существует, то размерности ее левой и правой частей должны быть, конечно, одинаковы.

Условимся размерность физической величины A обозначать $[A]$. Тогда

$$[v] = \text{м} \cdot \text{с}^{-1},$$
$$[p] = \text{Па} = \text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2},$$
$$[\varrho] = \text{кг} \cdot \text{м}^{-3},$$

и можно записать

$$\text{м} \cdot \text{с}^{-1} = (\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2})^x (\text{кг} \cdot \text{м}^{-3})^y.$$

Это равенство выполняется при условии, что

$$x + y = 0,$$
$$-x - 3y = 1,$$
$$-2x = -1.$$

Отсюда

$$x = \frac{1}{2} \text{ и } y = -\frac{1}{2},$$

поэтому получаем

$$v \sim \sqrt{\frac{p}{\varrho}}.$$

Численный коэффициент в этой формуле из соображений размерностей определить нельзя. Предположим, что он порядка единицы (вообще говоря, это нужно было бы как-то проверить).

Для оценки скорости звука давление воздуха примем равным нормальному атмосферному давлению: $p \sim 1$ атм $\sim 10^5$ Па, а плотность воздуха будем считать равной плотности при нормальных условиях: $\varrho \sim 1{,}3$ кг/м^3. Тогда скорость звука

$$v \sim \sqrt{\frac{p}{\varrho}} \sim 300 \text{ м/с},$$

и время, через которое наблюдатель услышит гром,

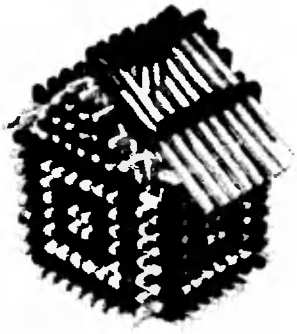
$$t \sim \frac{3 \cdot 10^3 \text{ м}}{300 \text{ м/с}} \sim 10 \text{ с}.$$

Это время на шесть порядков больше времени распространения света, что вполне разумно с точки зрения нашего жизненного опыта.

В заключение предлагается еще несколько задач-оценок. Попробуйте, не заглядывая в ответ, получить необходимые оценки самостоятельно.

Задачи для размышлений

1. Оцените, как изменится давление атмосферы, если вся вода в океанах испарится.
2. Оцените скорость опускания парашютиста с раскрытым парашютом.
3. Оцените среднюю плотность Солнца.
4. Оцените, сколько оборотов (кувырков) совершит автомобиль, на полной скорости свободно упавший в километровую пропасть.
5. Оцените усилие спортсмена при толкании ядра.
6. Оцените силу натяжения цепи велосипеда при езде в гору.
7. Оцените, с какой скоростью летела капля воды, если при ударе о неподвижную стенку она оказывает на нее среднее давление порядка 10^6 Па.
8. Оцените силу натяжения ремней безопасности, удерживающих человека в автомобиле, если автомобиль, движущийся со скоростью порядка 30 км/ч, столкнулся со столбом, в результате чего у автомобиля получилась вмятина глубиной порядка 30 см.
9. Оцените, на сколько отличаются расстояния уровней мирового океана до центра Земли на полюсе и на экваторе.
10. Оцените, на каком расстоянии человек в яркой одежде, уходя в сосновый лес, потеряется из виду. (Подлеска нет.)



Избушка на курьих ножках

Чтобы построить «избушку на курьих ножках», фотография которой помещена на четвертой странице обложки, вам не потребуется ничего, кроме нескольких коробок спичек. Спички в избушке держатся «сами по себе», без помощи клея или каких-либо других крепежных приспособлений. Поняв идею построения этой избушки, вы сможете в дальнейшем построить много других аналогичных конструкций, может быть — более рациональным способом. Пока же рекомендуем строго придерживаться приводимого ниже описания.

Начнем с выбора стройматериала. Для строительства лучше всего подходят наиболее тонкие спички. Чем тоньше спички, тем больше их потребуется, но тем прочнее будет избушка. В процессе строительства нужно отбрасывать спички, заметно отличающиеся от других по толщине, а также гнутые.

Затем подготовим стройплощадку. Возьмите для нее какое-нибудь твердое основание, например книгу, на которой вы будете при необходимости поворачивать недостроенную конструкцию.

Наконец, можно приступать к строительству. Положите на основание в направлении от себя 5—6 спичек параллельно друг другу, оставляя между ними промежуток, примерно равный толщине спички. (В дальнейшем направление от себя будем называть *продольным*, а перпендикулярное ему, то есть слева направо, — *поперечным*.) На первый слой положите такой же второй в поперечном направлении. Эти два слоя образуют пол избушки. Теперь кладите стены в виде колодца (две спички справа и слева в продольном направлении, на них две — в поперечном и т. д.). Ширина колодца должна быть больше ширины пола: между стенами и крайними спичками пола при взгляде сверху должен оставаться просвет в одну спичку. Всего колодец должен содержать 4—5 продольных пар спичек и столько же — поперечных. Последняя пара спичек должна идти в поперечном направлении. Сверху положите два слоя потолка: продольный и, над ним, поперечный.

Теперь наступает черед самой тонкой работы — установки в стены вертикальных спичек. Положите на избушку монету подходящего размера (обычно подходит трехкопеечная монета). Нажимая на монету для придания конструкции жесткости, устанавливайте вертикальные спички стен головками вверх. Начинать следует с правой (или с левой) стены, поскольку спички передней и задней стен будут держаться за спички пола самыми кончиками, которые обычно имеют какие-либо неровности, ухудшающие сцепление. Первую спичку поставьте в правый передний угол — внутри колодца, но вне слоев пола и потолка (можно временно сдвинуть продольные слои пола и потолка к центру, чтобы они не мешали). Следующие спички ставьте вдоль правой стены, чередуя их с поперечными спичками пола и потолка. Раздвигать спички поперечных слоев можно с помощью еще одной спички. Все вертикальные спички следует продвигать вниз до основания. Закончив установку вертикальных спичек правой стены (их должно быть на одну больше, чем в поперечных слоях), установите аналогично левую стену (вот тут вам и пригодится возможность вращать стройплощадку).

Хоть передняя и задняя стены еще не достроены, однако и того, что есть, хватает для получения устойчивой конструкции! Надавливая на крышу сверху с помощью монеты, одновременно сожмите пальцами переднюю и заднюю стены так, чтобы сдвинуть эти стены до упора. Проследите, чтобы все спички стен сдвинулись. Теперь можно приподнять полученный каркас (лучше при этом продолжать сжимать переднюю и заднюю стены). Спички самого нижнего слоя останутся лежать на основании, но остальные спички будут держаться! Ни в коем случае не следует сжимать правую и левую стены; их, напротив, желательно раздвинуть насколько возможно, чтобы хватило места для передней и задней стен.

Установку вертикальных спичек передней и задней стен можно, в принципе, выполнять «в воздухе», однако, если вы сделаете так, то рискуете увидеть, как ваша конструкция в один миг превратится в груду спичек. Поэтому сожмите переднюю и заднюю стены, как описано выше, и устанавливайте вертикальные спички этих стен на основании. Крайние спички этих стен уже установлены в составе правой и левой стен. Устанавливаемые спички должны проходить внутри колодца, но вне поперечных слоев пола и потолка.

Убедившись, что все спички вошли в предназначенные для них промежутки, сжимайте поочередно правую стену с левой и переднюю с задней, давя одновременно на потолок. Необходимо сблизить все спички до упора. Возможно, для этого придется надавливать на некоторые спички отдельно. После этой операции получается весьма прочный каркас куба (фото 1).

(После того как самая трудная часть работы осталась позади, можно немного расслабиться и повнимательнее рассмотреть то, что получилось. Обратите внимание: построенный «куб» — не совсем куб, его грани различаются по размеру. Подумайте, как сделать настоящий куб.)

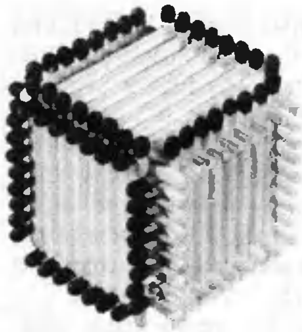


Фото 1.

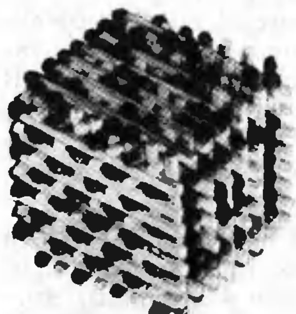


Фото 2.

Теперь смело поднимите куб в воздух и дальнейшую постройку проводите на весу, но не забывайте время от времени сжимать противоположные стены куба, чтобы он не развалился.

Вопрос 1 (для тех, кто любит физику). А почему он все-таки держится? Оцените минимальное число спичек в слое, необходимое для устойчивости каркаса куба.

Продвиньте вертикальные спички вниз, чтобы они выступали сверху и снизу примерно поровну. Затем добавьте к каждой грани куба еще два слоя спичек, направив их головки в противоположную сторону по отношению к уже имеющимся слоям (новые слои удобнее добавлять снаружи, но, если снаружи не хватает места, можно добавить слой и внутри уже имеющегося). Если теперь спички утопить так, чтобы они своими головками прижали спички лежащих ниже слоев, прочность каркаса существенно возрастет.

Достроить каркас можно любым способом. Просовывая спички сквозь отверстия внутрь куба и, если есть место, добавляя их снаружи, можно превратить каркас в полный куб (фото 2, спички пропущены сквозь все отверстия) или в избушку (фото на обложке).

Для построения крыши избушки найдите противоположные грани, в которых внешние слои спичек смотрят головками в одну сторону (или сделайте такие грани, переложив какие-либо слои по-другому). Поставьте куб так, чтобы эти слои стали правой и левой стенами, а их головки были направлены вверх. Выдвиньте вверх вертикальные спички передней и задней стен (из тех слоев, где головки смотрят вверх), чтобы образовать треугольные передние и задние фронтоны крыши, затем заполните пространство под будущей крышей продольными спичками и устанавливайте спички скатов крыши. Для этого слегка выдвиньте вверх спички самых крайних слоев боковых стен и устанавливайте наклонные спички между ними, зацепляя между собой спички правого и левого скатов. После завершения крыши утопите выдвинутые спички боковых стен — они головками прижмут крышу к избушке.

Теперь осталось только сделать архитектурные украшения. Вставьте спички в оставшиеся отверстия внутрь избушки и изобразите окна, двери, ножки, трубу.

Вопрос 2 (для тех, кто любит математику). Какую часть объема занимают спички в полном кубе (фото 2)? Считайте, что спички очень длинные и куб очень большой, так что «краевыми эффектами» можно пренебречь.

Попробуйте разработать способ построения аналогичных домов, длина, ширина и высота которых превышают длину спички. Может быть, вам также удастся построить дворец, имеющий в сечении не прямоугольную форму, а, скажем, форму правильного шестиугольника.

Ф. А. Хайкин,
А. Б. Ходулев

Задача для исследования

Целая точка, ближайшая к вершине угла

Ваня узнал, что на последнем заседании математического кружка, где он не присутствовал, его выбрали старостой, причем за него голосовало более 68%, но менее 69% присутствовавших. Ваня, знаток арифметики, решил выяснить: какое наименьшее число людей при этих условиях могло участвовать в голосовании? Другими словами, каков наименьший знаменатель дроби m/n, лежащей между 0,68 и 0,69? Вот запись из Ваниной тетрадки:

$$«\frac{17}{25} < \frac{m}{n} < \frac{69}{100} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1\frac{8}{17} > \frac{n}{m} > 1\frac{31}{69},$$

$$\frac{8}{17} > \frac{n-m}{m} > \frac{31}{69} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{1}{8} < \frac{m}{n-m} < 2\frac{7}{31},$$

$$\frac{1}{8} < \frac{m-2(n-m)}{n-m} =$$

$$= \frac{3m-2n}{n-m} < \frac{7}{31} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8 > \frac{n-m}{3m-2n} > 4\frac{3}{7}.$$

$$|3m-2n| \geqslant 1 \Rightarrow |n-m| \geqslant 5.$$

Наименьшее целое число, лежащее между $4\frac{3}{7}$ и 8,— это 5.

$$\begin{cases} n-m=5, \\ 3m-2n=1 \end{cases} \quad m=11,\ n=16.$$

Ответ: 16 человек.»

а) Как рассуждал Ваня? Сформулируйте его алгоритм в общем виде для произвольных α и β, $\alpha > \beta > 0$ (у Вани $\alpha = 0{,}69$, $\beta = 0{,}68$).

б) Докажите, что система уравнений, получаемая на последнем шагу, имеет целочисленное решение (m, n) и точка с координатами (m, n) является ближайшей к вершине угла $\{(x, y) \mid \beta y < x < \alpha y,\ x > 0\}$ среди всех лежащих внутри него целых точек.

в) Как можно объяснить Ванин алгоритм с помощью цепных дробей (см. статью Ю. В. Нестеренко и Е. М. Никишина в предыдущем номере)?

В. Муцениекс

Равногранные и каркасные тетраэдры

В. Э. МАТИЗЕН

Среди плоских *четырехугольников принято выделять классы*, обладающие теми или иными интересными свойствами: параллелограммы, трапеции, вписанные, описанные и другие. Хорошо известны необходимые и достаточные условия принадлежности четырехугольника к данному классу. Например, четырехугольник является прямоугольником тогда и только тогда, когда выполнено следующее условие: диагонали конгруэнтны и делятся пополам в точке пересечения. Это условие можно взять за определение прямоугольника.

Точно также обстоит дело с *тетраэдром* (так сказать — пространственным четырехугольником). Среди тетраэдров тоже можно выделять классы (например, всем известные *правильные тетраэдры* и *правильные треугольные пирамиды*) и находить *необходимые и достаточные* условия для принадлежности тетраэдра к данному классу. Именно этим мы здесь займемся, для двух часто встречающихся классов тетраэдров: *равногранных* (с четырьмя конгруэнтными гранями) *и каркасных* (*со сферой, касающейся* всех шести ребер). В отличие от плоского случая, здесь окажется очень большое количество существенно различных условий — порой *не похожих друг на друга.*

Элементы произвольного тетраэдра

У любого тетраэдра 4 вершины, 6 ребер, 4 грани, 4 трехгранных угла, 6 двугранных углов, 12 плоских углов. Если все 6 ребер конгруэнтны, то конгруэнтными будут и грани, и трехгранные углы, и плоские; в этом случае тетраэдр — правильный. Из конгруэнтности всех 4 граней, однако, еще не следует правильность тетраэдра: в этом мы вскоре убедимся при нашем рассмотрении равногранных тетраэдров.

У произвольного тетраэдра имеется *центр тяжести:* это точка, в которой пересекаются 4 прямые, соединяющие вершины с центрами тяжести противоположных граней. В этой же точке пересекаются все 3 *средние линии* тетраэдра, то есть *линии, соединяющие* середины противоположных ребер.

Есть у всякого тетраэдра и *центр описанной сферы*, то есть сферы, проходящей через все 4 вершины. Этот центр является точкой пересечения 4 перпендикуляров к граням, восставленных из центров их описанных окружностей. В этой же точке пересекаются 6 плоскостей, проходящих через середины ребер перпендикулярно к ним.

А вот что назвать вписанной сферой в тетраэдр — сферу, касающуюся всех ребер, или сферу, касающуюся всех граней? Оказывается, не всякий тетраэдр имеет вписанную сферу в первом смысле (мы в этом убедимся при нашем рассмотрении каркасных тетраэдров), поэтому *вписанной сферой* называют сферу, касающуюся всех 4 граней. Она всегда существует, причем *центр вписанной сферы* — точка пересечения биссекторных плоскостей всех 6 двугранных углов тетраэдра.

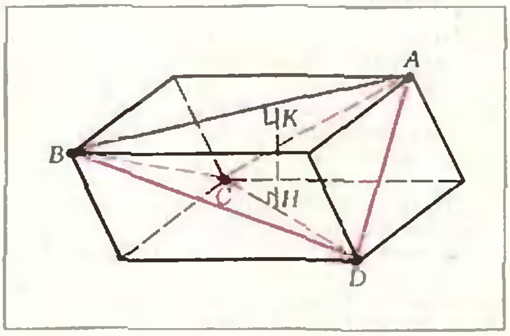


Рис. 1.

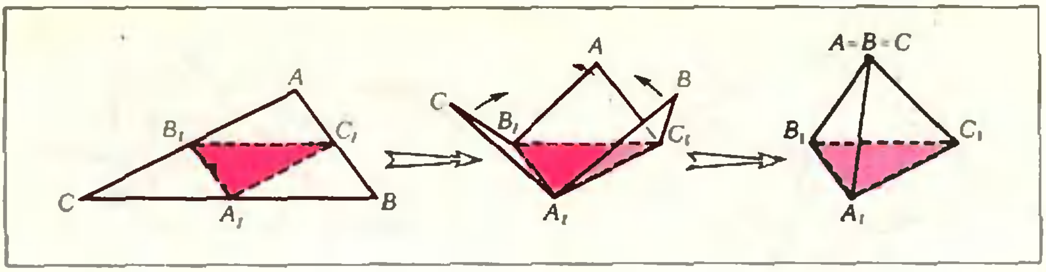


Рис. 2.

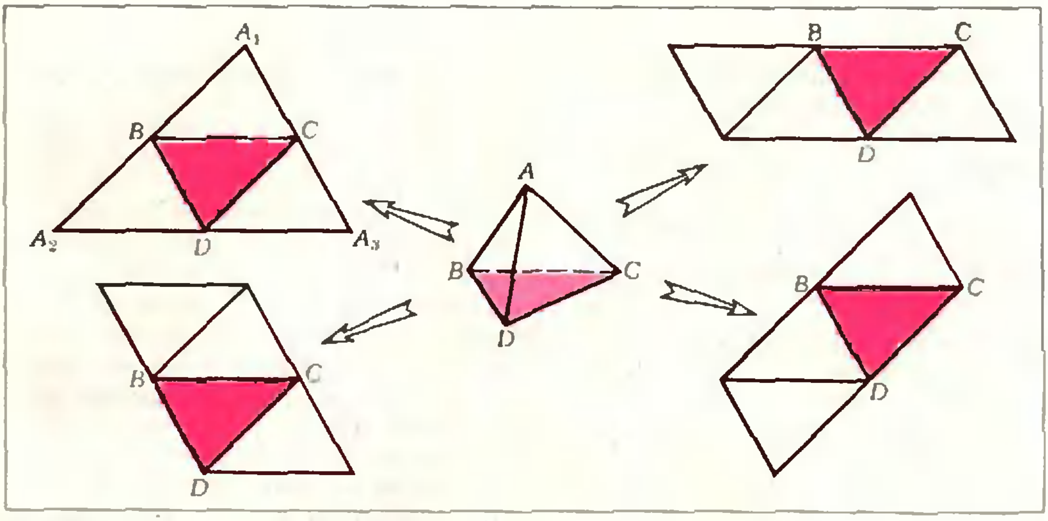


Рис. 3.

Читатель, уловивший аналогию между тетраэдром и треугольником, наверное, теперь ожидает следующую фразу: «Все высоты (перпендикуляры, опущенные из вершины на противоположную грань) тетраэдра пересекаются в одной точке, называемой его ортоцентром». Но, увы, это утверждение неверно для произвольного тетраэдра, а верно лишь для класса тетраэдров, называемых *ортоцентрическими*. Этого класса мы в этой статье касаться не будем, но надеемся к этой теме еще вернуться в «Кванте».

Хорошо представить себе тетраэдр в пространстве помогает *описанный параллелепипед* (рис. 1), который определяется тем, что скрещивающиеся ребра тетраэдра являются диагоналями его противоположных граней. На этой фигуре легко «увидеть» еще один важный элемент тетраэдра: *общие перпендикуляры скрещивающихся ребер* — они образуют высоты параллелепипеда (например, отрезок KH на рисунке 1).

Равногранные тетраэдры

Как уже говорилось, *равногранным* называется тетраэдр, все грани которого конгруэнтны. Чтобы представить себе равногранный тетраэдр, отличный от правильного, возьмем произвольный остроугольный треугольник из бумаги и будем сгибать его по средним линиям. Тогда три вершины сойдутся в одну точку, а половинки сторон сомкнутся, образуя боковые ребра тетраэдра (рис. 2).

Перечислим теперь свойства тетраэдра, каждое из которых является необходимым и достаточным условием равногранности, начиная с определения.

(0) Грани конгруэнтны.

(1) Скрещивающиеся ребра попарно конгруэнтны.

(2) Трехгранные углы конгруэнтны.

(3) Противолежащие двугранные углы конгруэнтны.

(4) Два плоских угла, опирающиеся на одно ребро, конгруэнтны.

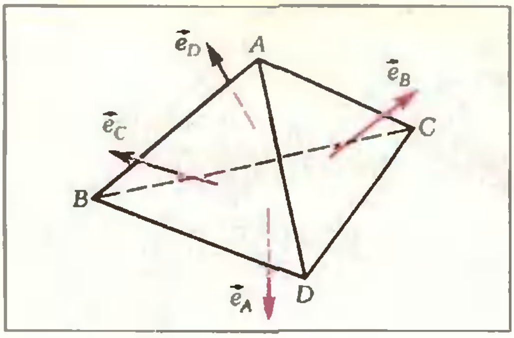


Рис. 4.

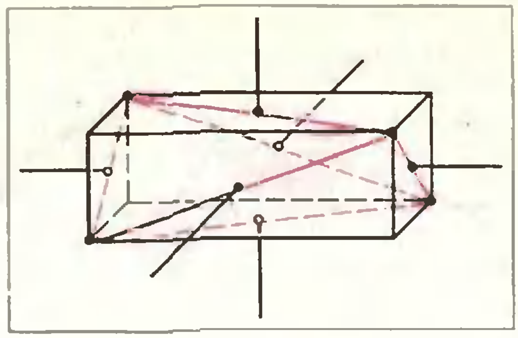


Рис. 5.

(5) Сумма плоских углов при каждой вершине равна 180°.

(6) Развертка тетраэдра — треугольник или параллелограмм (рис. 3).

(7) Описанный параллелепипед — прямоугольный.

(8) Тетраэдр имеет три оси симметрии.

(9) Общие перпендикуляры скрещивающихся ребер попарно перпендикулярны.

(10) Средние линии попарно перпендикулярны.

(11) Периметры граней равны.

(12) Площади граней равны.

(13) Высоты (тетраэдра) равны.

(14) Отрезки, соединяющие вершины с центром тяжести противоположных граней, конгруэнтны.

(15) Радиусы описанных около граней окружностей равны.

(16) Центр тяжести (тетраэдра) совпадает с центром описанной сферы.

(17) Центр тяжести совпадает с центром вписанной сферы.

(18) Центр описанной сферы совпадает с центром вписанной.

(19) Вписанная сфера касается граней в центрах описанных около них окружностей.

(20) Сумма внешних единичных нормалей (единичных векторов, перпендикулярных к граням — см. рис. 4) равна нулю.

(21) Сумма косинусов всех двугранных углов равна 2.

При большом количестве утверждений, равносильность которых нужно доказать, важно найти наиболее экономный порядок рассуждений. Мы наметим его, но лишь часть этапов проведем подробно.

Проще всего устанавливается, что

$$\boxed{(0) \Leftrightarrow (1) \Leftrightarrow (2) \Leftrightarrow (3) \Leftrightarrow (4)}$$

Для иллюстрации докажем (1) ⇒ (0). Пусть $|AB| = |DC|$, $|AD| = |BC|$, $|AC| = |BD|$. Тогда любые две грани тетраэдра $ABCD$ конгруэнтны как треугольники с тремя равными сторонами: одна сторона общая, две другие равны по условию. Например, для граней ADB и ADC, ребро AD общее, а ребра AB и DC, AC и BD конгруэнтны по условию. При остальных доказательствах следует помнить, что трехгранный угол однозначно определяется как своими тремя двугранными углами, так своими тремя плоскими углами.

Рассуждать дальше можно по схеме

$$\boxed{(4) \Rightarrow (5) \Rightarrow (6) \Rightarrow (1)}$$

(откуда уже следует равносильность первых шести условий (1) — (6). Докажем, например, (5) ⇒ (6). Разрежем тетраэдр $ABCD$ по ребрам AB, AC, AD и рассмотрим развертку $A_1BA_2DA_3C$ (см. рис. 3). Тогда в точ-

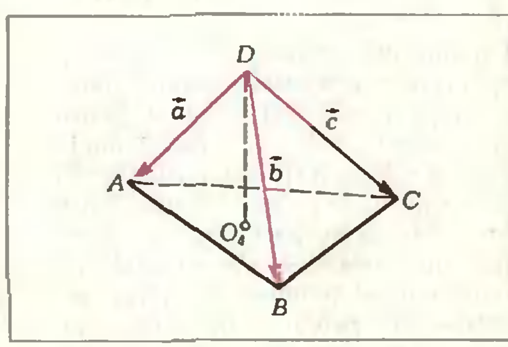


Рис. 6.

ках B, C и D приложены по три угла, сумма которых 180°, поэтому углы A_1BA_2, A_2OA_3, A_3CA_1 — развернутые; значит, $A_1A_2A_3$ — треугольник, содержащий точки B, C, D и являющийся разверткой тетраэдра $ABCD$. Для остальных разверток рассуждение аналогично.

Наш следующий шаг — доказательство равносильности

$$\boxed{(1) \Leftrightarrow (7)}$$

В самом деле, поскольку скрещивающиеся ребра тетраэдра — диагонали граней описанного параллелепипеда (см. рис. 1), из попарной конгруэнтности ребер следует, что грани описанного параллелепипеда — прямоугольники и наоборот.

Теперь мы предлагаем рассуждать по схеме

$$\boxed{(7) \Rightarrow (8) \Rightarrow (9) \Rightarrow (10) \Rightarrow (7)}$$

Остановимся лишь на (7) ⇒ (8). Взглянув на рисунок 5, вы легко установите, что осями симметрии являются прямые, соединяющие центры симметрии противоположных граней описанного (прямоугольного) параллелепипеда, или, что здесь то же самое, общими перпендикулярами скрещивающихся граней.

Далее, очевидно,

$$\boxed{(0) \Rightarrow (11), (12), (13), (14), (15)}$$

Мы докажем, что (11) ⇒ (1), (12) ⇒ (3), (13) ⇒ (12), (14) ⇒ ⇒ (1), (15) ⇒ (4); тем самым будет установлена равносильность первых 15 свойств.

Чтобы установить

$$\boxed{(11) \Rightarrow (1)}$$

запишем условие (11) в виде

$$a_2+b_2+c_2=a_2+b_1+c_1= \\ =b_2+a_1+c_1=c_2+a_1+b_1, \quad (*)$$

где a_1, b_1, c_1 — длины ребер тетраэдра, исходящих из одной вершины, $a_2b_2c_2$ — длины соответственно скрещивающихся с ними ребер. Из этой системы легко получить (как?)

$$a_1=a_2,\ b_1=b_2,\ c_1=c_2,$$

а это и есть запись условия (1).

Для доказательства утверждения

$$\boxed{(12) \Rightarrow (3)}$$

мы предварительно заметим, что

$$S_4=S_1c_{14}+S_2c_{24}+Sc_{34}, \quad (**)$$

где S_i — площади i-й грани, а c_{ij} — косинус двугранного угла между i-й и j-й гранью. Соотношение (**) сразу следует из теоремы о площади проекции («Геометрия 9—10», § 40), если спроектировать все грани тетраэдра на четвертую грань. Написав еще три таких соотношения (для трех других граней) и воспользовавшись условием (12), придем к системе

$$c_{14}+c_{24}+c_{34}=c_{13}+c_{23}+c_{34}= \\ =c_{12}+c_{23}+c_{24}=c_{12}+c_{13}+c_{14},$$

которая решается точно так же, как (*). Получим

$$c_{14}=c_{23},\ c_{24}=c_{14},\ c_{34}=c_{12},$$

откуда следует равенство соответствующих углов, то есть (3).

Утверждение

$$\boxed{(13) \Rightarrow (12)}$$

очевидно следует из формулы для объема тетраэдра $V=Sh/3$.

Чтобы доказать

$$\boxed{(14) \Rightarrow (1)}$$

обозначим через O_i центр тяжести i-й грани и выразим $|DO_4|$ через стороны $\vec{DA}=\vec{a}$, $\vec{DB}=\vec{b}$, $\vec{DC}=\vec{c}$ (рис. 6). Имеем

$$\vec{DO_4}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$

(докажите это!), откуда, находя скалярный квадрат вектора $\vec{DO_4}$, получим

$$\vec{DO_4}^2=\frac{1}{9}(\vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+ \\ +2\vec{a}\cdot\vec{c}+2\vec{b}\cdot\vec{c}).$$

Обозначив $a_1=|\vec{a}|$, $b_1=|\vec{b}|$, $c_1=|\vec{c}|$, $a_2=|BC|$, $b_2=|AC|$, $c_2=|AB|$ и воспользовавшись тем, что $\vec{AB}=\vec{b}-\vec{a}$, $\vec{BC}=\vec{c}-\vec{b}$, $\vec{CA}=\vec{a}-\vec{c}$, можно $\vec{DO_4}^2$ выразить в виде

$$DO_4^2=\frac{1}{3}(a_1^2+b_1^2+c_1^2)+ \\ +\frac{1}{9}(a_2^2+b_2^2+c_2^2).$$

Написав еще три таких соотношения (для трех остальных граней и при-

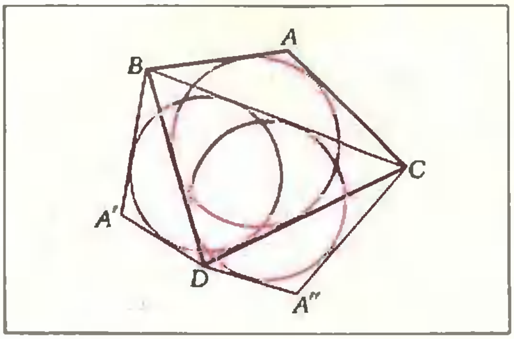


Рис. 7.

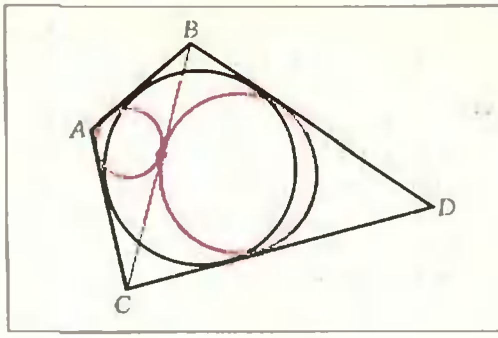


Рис. 8.

равняв их правые части (что можно по условию (14)), придем к равенствам $a_1^2=a_2^2$, $b_1^2=b_2^2$, $c_1^2=c_2^2$, то есть получим (1)*).

Наконец, чтобы доказать

$$\boxed{(15) \Rightarrow (4)}$$

рассмотрим две грани тетраэдра, их общее ребро и опирающиеся на это ребро плоские углы. Опишем около граней окружности. По условию их радиусы равны. Величины вписанных углов, опирающихся на общую хорду конгруэнтных окружностей или равны, или дают в сумме π. Дальнейшее доказательство сводится к несложному перебору вариантов.

Доказательство эквивалентности оставшихся шести свойств (16)—(21) вместе с выбором соответствующей стратегии, мы оставляем читателю. Заметим лишь, что при доказательстве свойства (20) полезно воспользоваться равенством (верным для любого тетраэдра)

$$S_1\vec{e}_1+S_2\vec{e}_2+S_3\vec{e}_3+S_4\vec{e}=0,$$

где $\vec{e}_i$ — единичный внешний нормальный вектор i-й грани, а S_i — ее площадь. Это равенство доказано в этом номере «Кванта» в заметке В. Н. Дубровского.

Каркасные тетраэдры

Напомним, что *каркасным* называется тетраэдр, для которого существует сфера, касающаяся всех шести ребер тетраэдра. Не всякий тетраэдр каркасный. Например, легко понять, что нельзя построить сферу, касающуюся всех ребер равногранного тетраэдра, если его описанный параллелепипед «длинный» (рис. 5).

Перечислим интересующие нас равносильные свойства тетраэдра.

(0) Существует сфера, касающаяся всех ребер.

(1) Суммы длин скрещивающихся ребер равны.

(2) Суммы двугранных углов при противоположных ребрах равны.

(3) Окружности, вписанные в грани, попарно касаются.

(4) Все четырехугольники, получающиеся на развертке тетраэдра (рис. 7), — описанные.

(5) Перпендикуляры, восставленные к граням из центров вписанных в них окружностей, пересекаются в одной точке.

Равносильность этих свойств предлагаем доказать по схеме

$$\boxed{(0) \Rightarrow (1) \Rightarrow (3) \Rightarrow (5) \Rightarrow (0)}$$

Свойства (2) и (4) в эту схему можно добавить по-разному; выбор стратегии мы оставляем читателю.

Мы не будем проводить здесь доказательства, а отметим лишь два полезных для этой цели факта.

1. Плоский четырехугольник будет описанным тогда и только тогда, когда суммы его противоположных *сторон равны.*

2. Если описанный четырехугольник разбить диагональю на два треугольника, то вписанные в треугольники окружности касаются (рис. 8).

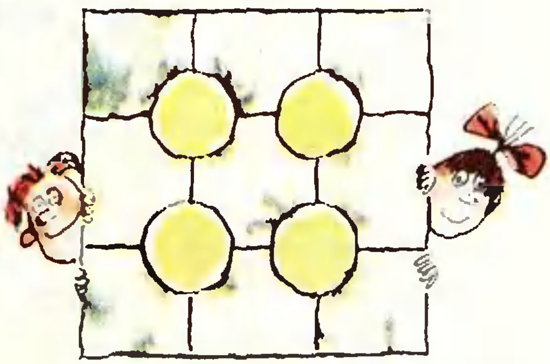
Заметим, что из утверждения 1 можно получить общий способ для построения развертки каркасного тетраэдра: взять описанный четырехугольник, разделить на два треугольника (грани) и пристроить еще две грани, пользуясь свойством (1).

*) Другое доказательство основано на том, что отрезки, указанные в свойстве (14), пересекаются в одной точке и делятся в отношении 1:3.

Квант для младших школьников

Задачи

1. В люстре 5 лампочек. Переключатель имеет 6 положений, при которых каждый раз горит разное количество лампочек — от 0 до 5. Однажды несколько лампочек перегорело. Какое наименьшее число раз нужно переключить переключатель, чтобы узнать, какие именно?



2. Найти все такие трехзначные числа, которые равны произведению числа, записываемого его двумя последними цифрами, на число, выражаемое его последней цифрой.

3. В клетках квадрата 3×3 расставили числа 1,2,...,9. Затем в каждом кружке записали среднее арифметическое окружающих его четырех чисел. После этого вычислили среднее арифметическое полученных четырех чисел. Какое наибольшее число может при этом получиться?

4. В бочке 18 литров бензина. Имеется два ведра объемом по 7 литров, в которые нужно налить по 6 литров бензина. Кроме того, есть черпак объемом 4 литра. Как можно осуществить разлив?

5. Почему днем из комнаты, окно которой завешено тюлевой занавеской, предметы на улице хорошо различимы, а предметы, находящиеся в комнате, с улицы не видны?

Эти задачи нам предложили
А. И. Азамов, Г. А. Гальперин, В. В. Произволов, С. В. Дворянинов, А. П. Савин.

О больших числах

Кандидат физико-математических наук
А. П. САВИН

Однажды в одном пионерском лагере мне довелось присутствовать на вечере вопросов и ответов под названием «А кто самый...?» Много было разных вопросов: «У кого самый длинный хвост? Какая звезда самая близкая к Земле?» Но вот одна девочка спросила:

— А какое число самое большое?

Вместо ответа я ей предложил сыграть в такую игру.

— Вот конфета,— сказал я,— кто назовет большее число, тот получает эту конфету. Назови свое число!

— Сто тысяч миллионов,— выпалила девочка.

— Нет такого названия, — ответил я.

— Нет есть,— настаивала девочка.

— Ладно, тогда я загадал двести тысяч миллионов. Сыграем еще?

Остальные ребята зашумели, начали говорить, перебивая друг друга.

— Тихо,— сказал я,— давайте говорить по очереди, а то ничего нельзя понять. Из десятка ребят, тут же поднявших руку, я выбрал невысокого мальчика в очках.

— Игра нечестная,— сказал он — какое бы число ни назвала Маша, Вы назовете число на единицу больше и выиграете. И вообще, нет наибольшего числа: к любому числу единичку можно прибавить.

Маша, продолжавшая стоять около стола, спросила меня:

— А как называются числа больше миллиона?

Судя по лицам ребят, этот вопрос заинтересовал многих из них. Я стал рассказывать.

— В пределах первой тысячи, как вы знаете, название имеет единица каждого разряда: единица, десять, сто, тысяча. Следующие единицы, имеющие собственное назва-

ние, идут через каждые три разряда, то есть каждая очередная именованная единица содержит тысячу предыдущих именованных единиц:
1 000 000 — *миллион*,
1 000 000 000 — *миллиард* или *биллион*,
1 000 000 000 000 — *триллион*,
1 000 000 000 000 000 — *квадраллион*,
далее идут *квинтиллион, секстиллион, септиллион, октиллион, нониллион, дециллион*.

Принцип построения названий несложен. По-латыни слова «би, трес, квадра, квинта» и т. д. означают два, три четыре, пять и т. д. Мы видим, что троек нулей в записи числа на одну больше, чем латинское число в его названии.

Нужно сказать, что эти названия почти не используются. Астрономы, физики и другие специалисты, имеющие дело с большими числами, предпочитают записывать числа с помощью степеней числа 10. Так, число 460 000 000 физик запишет либо как $46 \cdot 10^7$, а чаще, как $4{,}6 \cdot 10^8$. Если это число нужно прочесть, то он и прочтет его как «четыре и шесть десятых на десять в восьмой».

— А что делать, если на конце не будет нулей? — спросил меня один из мальчиков.

— Дело в том,— сказал я,— что при физических и других измерениях, как правило, верными бывают только первые две-три цифры. Чтобы получить большее количество верных знаков для какого-то числа, например, массы планеты или расстояния до нее, требуется применять особые предосторожности и специальные очень точные приборы. Поэтому в больших числах, получаемых из обычного эксперимента, оставляют лишь первые две-три цифры, а остальные заменяют нулями.

— А с каким самым большим числом приходилось иметь дело на практике? — раздался вопрос с последнего ряда.

— Такое число можно даже назвать,— ответил я,— физики считают, что во всей Вселенной количество элементарных частиц, из которых состоят атомы находящегося в ней вещества, не больше, чем 10^{88}. Поэтому нет практической необходимости пользоваться числами, большими, чем 10^{100}. Для этого числа придумано специальное название — *гугол*. Кажется, невозможно представить себе такую громадину. Но все-таки попробуем.

Представьте себе табло из 400 лампочек, расположенных в виде квадрата 20×20. Это представить себе легко, подобные табло встречаются в крупных аэропортах и на вокзалах, там с помощью загорающихся лампочек высвечиваются объявления о прибытии и отправлении поездов или самолетов. А теперь подумаем, сколько разных способов существует, чтобы зажечь табло 20×20.

Начнем считать количество состояний нашего табло. Для порядка занумеруем лампочки числами от 1 до 400. Первая лампочка может быть в двух состояниях: потушенной и зажженной. Две лампочки могут быть уже в четырех состояниях. Если использовать для обозначения потушенной лампочки значок о, а для зажженной значок +, то эти четыре состояния можно перечислить: оо, +о, о+, ++. Для трех лампочек будет уже восемь состояний: ооо, +оо, о+о, ++о, оо+, +о+, о++, +++. Количество состояний удвоилось потому, что оно равно количеству состояний для первых двух лампочек при потушенной третьей лампочке, плюс то же самое количество состояний при зажженной третьей. Нетрудно заметить, что при добавлении четвертой лампочки количество состояний вновь удвоится и станет равным $2^4 = 16$, при пяти лампочках количество состояний будет $2^5 = 32$, при десяти — уже $2^{10} = 1024$, а при 400 лампочках — 2^{400}. Покажем, что это число больше гугола. Обратим внимание, что $2^{10} = 1024 > 10^3$, поэтому $2^{400} = 2^{10 \cdot 40} > 10^{3 \cdot 40} = 10^{120}$. Итак, с помощью нашего нехитрого табло мы смогли превзойти гугол.

Сколько же времени понадобится для того, чтобы реализовать все имеющиеся возможности? Пусть у нас есть электронное реле, которое меняет состояние табло со скоростью 100 раз в секунду. Поскольку в каждом часе 3600 секунд, в сутках 86 400 секунд, а в году 31 536 000 секунд, то за год табло успеет сделать 3 153 600 000 миганий или $3{,}1536 \cdot 10^9$. Разделив 10^{120} на это число, получим около $3 \cdot 10^{110}$ лет — число, в миллиарды раз большее гугола. Вот так табло!

Может быть, мы сделали великое открытие в науке? К сожалению, нет. То, что количество состояний системы во много раз превосходит количество ее элементов, люди поняли очень давно. И очень часто трудно бывает из всего многообразия вариантов выбрать наилучший. Например, где разместить заводы по производству какого-то нового типа изделий? Какие мощности выбрать для этих заводов? Если сделать немного крупных заводов, то стоимость производства будет невелика, зато изделия придется далеко возить. Если же сделать много мелких заводов, то возить изделия придется меньше, но стоимость изготовления изделий на небольших предприятиях возрастает. Чтобы решать такие и подобные задачи, имеющие большое народнохозяйственное значение, непрерывно работают тысячи электронных вычислительных машин, перебирающих тысячи вариантов в секунду.

— А можно еще вопрос? — руку поднял первый мальчик в очках.

— Да, пожалуйста.

— Но математикам, наверное, приходится оперировать еще большими числами?

— Те, кто думает, что математики только то и делают, что складывают, умножают и делят числа, очень далеки от истины. Лишь в одной ее области — теории чисел — ученые часто имеют дело с конкретными целыми числами. И здесь действительно появляются очень большие числа. Например, долгое время шло соревнование — кто назовет большее простое число. Простое — значит, имеющее лишь два различных делителя: себя и единицу. Потом стали искать лишь такие простые числа, которые имеют вид: 2^n-1. Эти числа называются *простыми числами Мерсенна*, в честь французского ученого Марена Мерсенна, математика, акустика, теоретика музыки, одного из основателей Парижской Академии наук. Числа Мерсенна интересны тем, что если число 2^n-1 — простое, то число $2^{n-1}(2^n-1)$ равно сумме всех своих делителей, кроме самого числа. Такие числа древние греки назвали *совершенными*. Укажем три первых совершенных числа:

$$6=2\cdot 3=2(2^2-1)=1+2+3,$$

$$28=2^2\cdot 7=2^2(2^3-1)=1+2+4+7+14,$$

$$496=2^4\cdot 31=2^4(2^5-1)=1+2+4+8+16+31+62+124+248.$$

Интересно, что число 2^n-1 будет простым только в том случае, если число n — простое. К концу прошлого века было известно 12 простых чисел Мерсенна: для $n=2$, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107 и 127. Для $n=127$ простое число Мерсенна равно — тут я достал из кармана записную книжку, и на доске переписал: 170141183460469231731687303715884105884105727

— Это число все же меньше гугола,— продолжил я.— Но теперь за дело взялись электронные вычислительные машины. Они нашли, что числа 2^n-1 будут простыми при $n=521$, 607, 1279, 2203, 2281, 3217, 4253, 4423, 9689, 9941, 11213, 44497.

Последнее число $2^{44497}-1$ имеет уже более 13 тысяч цифр. Заметим, что гугол имеет «всего» 100 цифр.

После моего ответа последовали новые вопросы: «Какая ЭВМ считает быстрее всех? Какой зверь бегает быстрее всех?»

Вечер вопросов и ответов продолжался...

задачник Кванта

Задачи

M811—M815; Ф823—Ф827

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 30 сентября 1983 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7—83» и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «M811, M812» или «Ф823». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M811. Пусть h_a, h_b, h_c — высоты, а m_a, m_b, m_c — медианы остроугольного треугольника (проведенные к сторонам a, b, c), r и R — радиусы вписанной и описанной окружностей. Докажите, что

$$\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}<1+\frac{R}{r}.$$

Д. М. Милошевич

M812. Докажите, что при любом натуральном n

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2.$$

С. И. Майзус

M813. Даны отрезки OA, OB и OC одинаковой длины (точка B лежит внутри угла AOC). На них как на диаметрах построены окружности. Докажите, что площадь криволинейного треугольника, ограниченного дугами этих окружностей и не содержащего точку O (см. рис. 1, с. 44), равна половине площади (обычного) треугольника ABC.

В. В. Прасолов

M814. Отметим в натуральном ряде числа, которые можно представить в виде суммы двух квадратов натуральных чисел. Среди отмеченных чисел встречаются тройки последовательных чисел, например

$$72=6^2+6^2,\ 73=8^2+3^2,\ 74=7^2+5^2.$$

а) Объясните, почему не могут встретиться четыре последовательных отмеченных числа.

Докажите, что среди отмеченных чисел встретится бесконечно много б) пар, в)* троек последовательных чисел.

Л. Д. Курляндчик

M815*. На окружности расставлены $4k$ точек, занумерованных в произвольном порядке числами $1, 2, \ldots, 4k$.

Докажите, что эти точки можно соединить попарно непересекающимися отрезками так, о разность чисел в концах каждого отрезка превосходит $3k-1$.

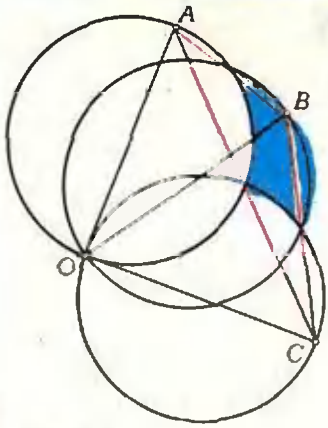


Рис. 1.

б) Постройте пример расстановки номеров, показывающий, что число $3k-1$ в пункте а) нельзя заменить меньшим.

А. А. Разборов

Ф823. Метеорит, летевший прямо на планету (по прямой, проходящей через центр планеты), попал в автоматическую космическую станцию, вращавшуюся вокруг планеты по круговой орбите радиуса R. В результате столкновения метеорит застрял в станции, которая перешла на новую орбиту с минимальным расстоянием до центра планеты $R/2$. Определить скорость метеорита перед столкновением. Масса станции в 10 раз превосходит массу метеорита. Масса планеты M. Гравитационная постоянная равна G.

О. Ю. Никишина

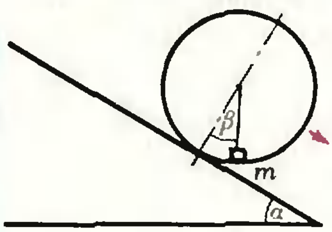


Рис. 2.

Ф824. Полый цилиндр массы M скатывается без проскальзывания по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha=45°$. На абсолютно гладкой внутренней поверхности цилиндра лежит маленькое тело массы $m=M/2$. Чему равен угол β (рис. 2) во время скатывания?

А. И. Федосов

Ф825. Лампочку, рассчитанную на напряжение 2,5 В и ток 0,2 А, подключают длинными проводами к батарейке. Амперметр, включенный последовательно с лампочкой, показывает ток $I_1=0{,}2$ А. Когда лампочку подключили к проводам параллельно с амперметром, она накалилась так же, как и в первом случае. Какой ток показывает амперметр? Батарейку считать идеальной, сопротивление проводов равно 2 Ом.

А. Р. Зильберман

Ф826. На достаточно удаленные предметы смотрят через собирающую линзу с фокусным расстоянием $F=9$ см, располагая глаз на расстоянии $a=36$ см от линзы. Оценить минимальный размер экрана, который нужно расположить за линзой так, чтобы он перекрыл все поле изображения. Где следует расположить экран?

Д. В. Белов

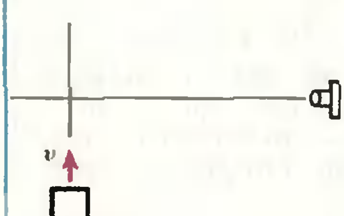


Рис. 3.

Ф827. Куб с ребром длины a движется со скоростью $v=0{,}8\ c$ (c — скорость света) в направлении, перпендикулярном одной из граней куба. Что получится на фотографии куба, сделанной удаленным фотоаппаратом с очень короткой выдержкой, если оптическая ось аппарата перпендикулярна грани куба и пересекает траекторию его центра (рис. 3)?

Д. Ю. Григорьев

Problems

M811—M815; P823—P827

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later that September 30th, 1983 to the following adress: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfadressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS).

M811. Let h_a, h_b, h_c be the altitudes and m_a, m_b, m_c the medians of a triangle (to the sides a, b, c), while r and R are the radii of the incircle and the circumcircle. Prove that

$$\frac{m_a}{h_a}+\frac{m_b}{h_b}+\frac{m_c}{h_c}<1+\frac{R}{r}.$$

D. M. Miloshevich

M812. Prove that for any positive integer n

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}}<2.$$

S. I. Mayzus

M813. The congruent line segments OA, OB and OC (the point B lying within the angle AOC) are the diameters of three circles. Prove that the area of the curvilinear triangle bounded by the arcs of these circles and *not containing* the point O (see figure Рис. 1) is half of that of the ordinary triangle ABC.

V. V. Prasolov

M814. In the sequence of natural numbers encircle all those which can be represented as the sum of two squares of integers. Among the encircled numbers triplets of successive numbers appear, e. g.

$$72=6^2+6^2,\ 73=8^2+3^2,\ 74=7^2+5^2.$$

a) Explain why four successive encircled numbers never appear.

Prove that there are infinitely many b) couples, c)* triplets of successive encircled numbers.

L. D. Kurlyandchik

M815*. On the circle $4k$ points are chosen and numbered 1, 2, ..., $4k$ arbitrarily.

a) Prove that these points may be joined by $2k$ nonintersecting line segments so that the difference between the numbers at the end points never exceeds $3k-1$.

b) Construct an example of numeration showing that the number $3k-1$ in a) cannot be replaced by a smaller one.

A. A. Razborov

P823. A meteorite, flying directly towards a planet (along a straight line passing through its centre), collides with an automatic space lab rotating about the planet along a circular orbit of radius R. The collision results in the meteorite getting stuck on the space lab, which changes its orbit to one whose minimal distance to the planet's centre is $R/2$. Determine the velocity of the meteorite just before the collision. The mass of the space lab is 10 times that of the meteorite. The planet's mass is M, the gravitational constant is G.

O. Yu. Nikishina

P824. A hollow cylinder of mass M rolls down an inclined plane (with angle $\alpha=45°$) without slipping. On the absolutely smooth inner surface of the cylinder lies a small body of mass $m=M/2$. What will the angle β (figure Рис. 2) be while the cylinder is rolling?

A. I. Fedosov

P825. A lamp designed for voltage 2.5 V and current 0.2 A is connected by long wires to a battery. An ammeter, connected in series to the lamp, gives a reading of $I_1=0.2$ A. When the lamp was connected in parallel to the ammeter, it heated exactly as much as in the first case. What was the reading on the ammeter then? The battery is assumed ideal, the resistance of the wires is 2 Ohm.

A. R. Zilberman

P826. Far-away objects are viewed through a convergent lens of focal distance $F=9$ cm, the eye being located at the distance $a=36$ cm from the lens. Estimate the minimalsize of a screen which, if placed behind the lens, would entirely cover the field of vision. Where should the screen be placed?

D. V. Belov

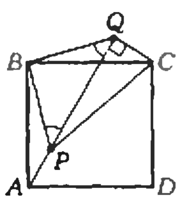
P827. A cube with side a moves with velocity $v=0{,}8\,c$ (where c is the velocity of light) in a direction perpendicular to one of its faces. What will we see on a photograph of the cube taken by a far-away camera with a very short exposure, if the optical axis of the camera is perpendicular to a face of the cube and intersects the trajectory of its centre (figure Рис. 3)?

D. Ju. Grigoriev

Решения задач

М796—М798; Ф808—Ф812

М796. *Точка P расположена внутри квадрата $ABCD$ так, что $|AP|:|BP|:|CP|=1:2:3$. Найдите $\widehat{APB}$.*



Ответ: $\widehat{APB}=135°$. Повернем $\triangle ABP$ вокруг точки B на 90° так, чтобы вершина A совместилась с C (см. рисунок). Пусть вершина P перейдет при этом в точку Q. Тогда $|PQ|^2=2|BP|^2=8|AP|^2$ ($\triangle BPQ$ — равнобедренный прямоугольный), а $|QC|=|PA|$. Следовательно, $|PQ|^2+|QC|^2=9|AP|^2=|CP|^2$, то есть PQC — прямоугольный треугольник с прямым углом PQC. Отсюда $\widehat{APB}=\widehat{CQB}=\widehat{CQP}+\widehat{PQB}=90°+45°=135°$.

Имеется и менее искусственное (но более громоздкое) решение с помощью метода координат. Примем прямые AB и AD за оси координат; пусть (x, y) — координаты точки P. Тогда, считая сторону квадрата равной 1, получим: $|AP|^2=x^2+y^2$, $|BP|^2=x^2+(1-y)^2$, $|CP|^2=(1-x)^2+(1-y)^2$. По условию $|AP|^2:|BP|^2:|CP|^2=1:4:9$, отсюда легко найти x и y, а затем и искомый угол.

Л. Д. Курляндчик

◆

М797*. *Известно, что последними цифрами квадратов целых чисел могут быть лишь цифры 0, 1, 4, 5, 6 и 9. Верно ли, что перед последней цифрой в них может встретиться любая группа цифр, то есть что для любого набора из n цифр $a_1, a_2, \ldots, a_n$ можно найти целое число, квадрат которого оканчивается цифрами $a_1a_2\ldots a_nb$ (где b — одна из перечисленных выше цифр)?*

Ответ: Нет. Мы приведем два доказательства этого факта.

Первое доказательство. Пусть A_n — число всех комбинаций из n цифр, на которые может оканчиваться точный квадрат. Мы покажем, что если $n>4$, то $A_n<10^{n-1}$. Из этого будет вытекать наше утверждение: даже если бы каждая комбинация $a_1, \ldots, a_{n-1}$ встречалась в сочетании лишь с одним b, уже было бы $A_n=10^{n-1}$. Чтобы получить все n-значные окончания квадратов, очевидно, достаточно рассмотреть квадраты только n-значных чисел. Разобьем эти 10^n чисел (от 0 до 10^n-1) на классы, собирая в один класс все числа с одинаковым n-значным окончанием квадратов (p и q входят в один класс, если p^2-q^2 делится на 10^n). Тогда A_n равно числу таких классов; исходя из этого мы и будем оценивать A_n.

Рассмотрим по отдельности три группы n-значных чисел: (1) числа, делящиеся на 5^n (их ровно 2^n); (2) нечетные числа, не делящиеся на 5^n (их меньше чем $0{,}5\cdot10^n$); (3) четные числа, не делящиеся на 5^n (их тоже меньше чем $0{,}5\cdot10^n$). Количество чисел в первой группе мало́ по сравнению с 10^n. Для нас важно, что они дают попарно разные остатки при делении на 2^n (потому что $k\cdot5^n-l\cdot5^n=(k-l)\cdot5^n$ не может делиться на

		m^2
$10^n(10^n-2m)$		$+m^2$
$10^n(0{,}25\cdot 10^n\pm m)$		$+m^2$
$k_1\cdot 5^n$	$(k_1\cdot 5^n-2m)$	$+m^2$
$k_2\cdot 5^n$	$(k_2\cdot 5^n-2m)$	$+m^2$
$k_3\cdot 5^n$	$(k_3\cdot 5^n+2m)$	$+m^2$
$k_4\cdot 5^n$	$(k_4\cdot 5^n+2m)$	$+m^2$

2^n при $1\leqslant l<k\leqslant 2^n$), и следовательно, среди этих остатков по одному разу встречаются все возможные остатки от деления на 2^n. Пусть, далее, m — число из второй группы. Найдем в первой группе числа $k_1\cdot 5^n$, $k_2\cdot 5^n$, $k_3\cdot 5^n$ и $k_4\cdot 5^n$, дающие при делении на 2^n такие же остатки, как $2m$, $2^{n-1}+2m$, 2^n-2m и $2^{n-1}-2m$. Тогда квадраты 8 чисел m, 10^n-m, $0{,}5\cdot 10^n\pm m$, $k_1\cdot 5^n-m$, $k_2\cdot 5^n-m$, $k_3\cdot 5^n+m$ и $k_4\cdot 5^n+m$ (они выписаны на полях) имеют одинаковые n-значные окончания при $n\geqslant 4$. Действительно, поскольку $0{,}25\cdot 10^n$ — целое число ($n\geqslant 4$), k_i — четные числа, а числа в синей рамке на полях делятся на 2^{n-1}, все числа в красной рамке делятся на 10^n. Таким образом, классы чисел второй группы содержат по крайней мере по 8 элементов, поэтому их число меньше, чем $0{,}5\cdot 10^n/8$. Точно так же при $n\geqslant 4$ классы чисел третьей группы содержат по крайней мере по 16 элементов. (Каждый класс вместе с числом m содержит числа 10^n-m, $0{,}25\cdot 10^n\pm m$, $0{,}5\cdot 10^n\pm m$, $0{,}75\cdot 10^n\pm m$, $k_1\cdot 5^n-m$, ..., $k_4\cdot 5^n-m$, $k_5\cdot 5^n+m$, ..., $k_8\cdot 5^n+m$, где k_1, ..., k_8 выбраны так, что числа $k_1\cdot 5^n$, ..., $k_8\cdot 5^n$ дают при делении на 2^n те же остатки, что и числа 2^n, $2^{n-2}+2m$, $2^{n-1}+2m$, $3\cdot 2^{n-2}+2m$, 2^n-2m, $2^{n-2}-2m$, $2^{n-1}-2m$, $3\cdot 2^{n-2}-2m$.) Таким образом, число классов в группе (3) меньше $0{,}5\cdot 10^n/16$, а общее число классов

$$A_n<2^n+\frac{0{,}5\cdot 10^n}{8}+\frac{0{,}5\cdot 10^n}{16}=$$

$$=10^n\left(\frac{1}{5^n}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\right)<10^n\left(\frac{3}{32}+\frac{1}{5^4}\right)=$$

$$=0{,}9535\cdot 10^{n-1}<10^{n-1}.$$

Попробуйте найти $\lim\limits_{n\to\infty} A_n/10^{n-1}$.

Второе доказательство. Оно короче первого, но менее поучительно. Имеет место следующий факт:

если предпоследняя цифра точного квадрата нечетна, то последняя равна 6.

В самом деле, из равенства $(10a+b)^2=100a^2+20ab+b^2$ видно, что предпоследняя цифра квадрата любого числа и предпоследняя цифра квадрата его последней цифры имеют одну и ту же четность. Но у квадрата однозначного числа предпоследняя цифра нечетна только в двух случаях: $4^2=16$ и $6^2=36$.

Теперь покажем, что точный квадрат не может кончаться на 005*b*. Действительно, по доказанному такой квадрат должен был бы иметь окончание 0056, и тогда он давал бы остаток 8 при делении на 16, что, очевидно, невозможно (квадрат числа, делящегося на 4, делится на 16, а квадрат числа, не делящегося на 4, не делится на 8).

Предлагаем читателю самостоятельно исследовать случаи $n=2$ и 3 подробнее. Докажите, что а) для любого числа a_1a_2 найдется точный квадрат с окончанием a_1a_2b; б) точный квадрат может кончаться на $a_1a_2a_3b$ (при некотором b) в том и только том случае, когда трехзначное число $a_1a_2a_3$ дает при делении на 8 остаток, не равный 5 или 7.

Приведем еще одну задачу на эту тему, присланную в редакцию *Д. Федоровым*: докажите, что число вида $aa...ab$, где $b=a+1$, не может быть точным квадратом.

Д. Б. Фукс

◆

M798*. *На окружности отметили 4k точек и раскрасили их попеременно в красный и синий цвета; затем 2k красных точек произвольным образом соединили попарно k красны-*

Допустим сначала, что красные отрезки друг с другом не пересекаются, и покажем, что тогда каждый из них пересекается хотя бы с одним синим, то есть число красно-синих пересечений не меньше k. Возьмем любой красный отрезок AB и одну из стягиваемых им дуг. Число красных точек на ней четно (потому *ми отрезками, а 2k синих — k синими отрезками (никакие три отрезка не пересекаются в одной точке). Докажите, что найдется по крайней мере k точек пересечения красных отрезков с синими.*

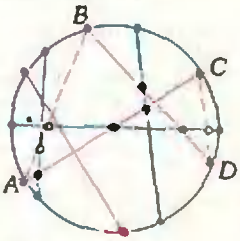


Рис. 1.

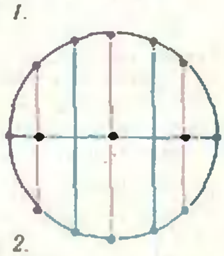


Рис. 2.

что любая из них должна быть соединена отрезком с точкой той же дуги), следовательно, число синих точек на этой дуге нечетно. Поэтому один из начинающихся на ней синих отрезков должен пересекать AB.

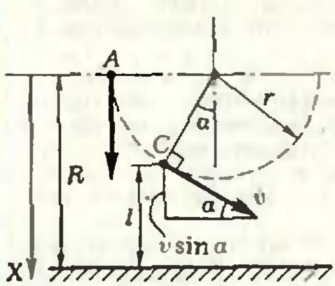
Теперь покажем, что любую систему красных и синих отрезков можно «распутать» — заменить новой, в которой красные отрезки попарно не пересекаются, не увеличивая при этом числа красно-синих пересечений. Пусть AC и BD — пересекающиеся красные отрезки. Заменим их красными отрезками AB и CD (рис. 1). Ясно, что любой отрезок (красный или синий), пересекающийся с отрезком AB или с отрезком CD, имеет с ними обоими столько же точек пересечения, сколько с AC и BD. Поэтому при замене число красно-синих пересечений не увеличивается, а число красно-красных пересечений уменьшается по крайней мере на 1. После нескольких таких операций мы получим систему отрезков, в которой красные отрезки попарно не пересекаются, а число красно-синих пересечений не больше исходного и в то же время, как было доказано вначале, не меньше k.

Легко построить пример системы отрезков, имеющей ровно k красно-синих пересечений (рис. 2).

С. В. Фомин

◆

Ф808. *Моторная лодка, находящаяся в точке A на расстоянии R от берега озера, начинает разворот, двигаясь со скоростью $v=18$ км/ч по окружности радиуса $r=R/2$; в начальный момент скорость лодки направлена к берегу. Волна от лодки дошла до берега через время $t=3$ мин после начала разворота. Скорость распространения волн от лодки по поверхности воды равна $u=9$ км/ч. Найти расстояние R.*



Рассматривая лодку как источник волн, распространяющихся из каждой точки траектории лодки, найдем ту точку C, из которой волна дойдет раньше всего до берега. Положение точки C определяется из условия равенства скорости распространения волн и проекции скорости лодки на направление «к берегу» (ось X на рисунке):

$$u=v_x=v\sin\alpha \quad\Rightarrow\quad \sin\alpha=u/v=1/2,$$

то есть $\alpha=30°$. Расстояние от точки C до берега равно

$$l=R-r\cos\alpha=R-\frac{R}{2}\cos\alpha=R\left(1-\frac{1}{2}\cos\alpha\right).$$

Время t_1, которое требуется волне, чтобы дойти из точки C до берега, равно

$$t_1=l/u=\frac{R}{u}\left(1-\frac{1}{2}\cos\alpha\right).$$

Время t_2, в течение которого лодка дошла от точки A до точки C, равно

$$t_2=\frac{2\pi r}{v}\cdot\frac{60°}{360°}=\frac{\pi R}{6v}.$$

Полное время, через которое после начала разворота волна дойдет до берега, равно

$$t=t_1+t_2=\frac{R}{u}\left(1-\frac{1}{2}\cos\alpha\right)+\frac{\pi R}{6v}.$$

Отсюда находим расстояние R от точки A до берега:

$$R=\frac{6tuv}{3v(2-\cos\alpha)+\pi u}\approx 545 \text{ м}.$$

А. И. Буздин

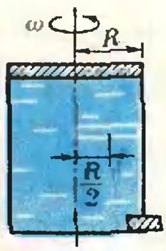
◆

Ф809. *Цилиндрический бак наполнен доверху жидкостью плотности ϱ. Сверху бак плотно закрыт крышкой радиуса R. Снизу в баке имеется отверстие площади s, закрытое пробкой массы m (см. рисуно*

Давление в жидкости во вращающемся баке на одной и той же глубине будет разным в центре сосуда и у стенок — давление нарастает по мере удаления от центра. Найдем, на сколько отличается давление у стенок от давления в центре.

Выделим мысленно тонкий горизонтальный столбик жидкости с площадью поперечного сечения σ (см. рисунок).

нок). Чтобы вытащить пробку из бака, нужно приложить силу f. С какой максимальной угловой скоростью можно вращать бак вокруг вертикальной оси так, чтобы пробка не вылетела?



Центр масс этого столбика движется по окружности радиуса $R/2$. Запишем уравнение движения столбика:

$$\varrho R\sigma\omega^2 \frac{R}{2} = \Delta p \cdot \sigma$$

($\varrho R\sigma$ — масса столбика, $\Delta p \cdot \sigma$ — результирующая сил давлении, действующих на столбик справа и слева). Таким образом, давление в жидкости у стенки больше давления в центре на величину

$$\Delta p = \frac{1}{2}\varrho\omega^2 R^2.$$

Поэтому сила, действующая на пробку со стороны жидкости, равна

$$F = s\left(p_0 + \varrho g H + \frac{1}{2}\varrho\omega^2 R^2\right),$$

где p_0 — атмосферное давление, H — высота бака.

Запишем уравнение движения пробки:

$$m\omega^2 R = p_0 s + F_{\text{тр}} - s\left(p_0 + \varrho g H + \frac{1}{2}\varrho\omega^2 R^2\right).$$

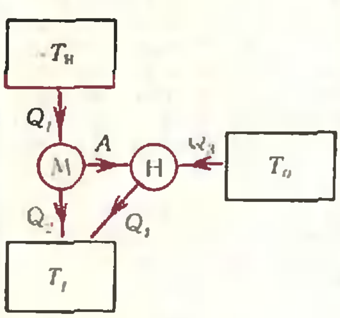
Как следует из условия, пробка вылетает из бака при $F_{\text{тр}} = f + s\varrho g H$. Учитывая это, найдем угловую скорость вращения, при которой пробка вылетит:

$$\omega = \sqrt{\frac{f}{mR + \frac{1}{2}s\varrho R^2}}.$$

В. И. Комов

◆

Ф810. *Имеется нагреватель с рабочей температурой $t_{\text{н}} = 700$ °C. Температура окружающей среды — $t_0 = 20$ °C. Какое минимальное количество тепла необходимо забрать у нагревателя, чтобы испарить $m = 3$ кг воды, нагретой до температуры кипения ($t_1 = 100$ °C)? Удельная теплота парообразования воды $r = 2{,}26$ МДж/кг.*



При непосредственной передаче тепла от нагревателя к воде для испарения массы воды m необходимо получить от нагревателя количество тепла $Q_0 = mr$.

Попытаемся уменьшить эту величину, воспользовавшись тем фактом, что тепловой насос (то есть тепловая машина, работающая по обратному циклу) может перекачивать большое количество тепловой энергии от холодного тела к горячему при малых затратах механической энергии, если перепад температур невелик.

Представим себе устройство для испарения воды, состоящее из идеальной тепловой машины М и идеального теплового насоса Н, включенных так, как показано на рисунке 1. Машина забирает у нагревателя количество тепла Q_1 и передает горячей воде количество тепла Q_2, совершая при этом работу A. Тепловой насос Н, используя работу A, забирает у окружающей среды количество тепла Q_3 и передает горячей воде количество тепла Q_4.

Рассчитаем суммарное количество тепла $Q_2 + Q_4$, получаемое водой. Коэффициент полезного действия машины М равен

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{T_{\text{н}} - T_1}{T_{\text{н}}}.$$

Отсюда

$$A = Q_1\frac{T_{\text{н}} - T_1}{T_{\text{н}}}, \quad Q_2 = Q_1\frac{T_1}{T_{\text{н}}}.$$

Так как тепловой насос Н — идеальная тепловая машина, работающая по обратному циклу, то для него можно аналогичным образом записать

$$\frac{A}{Q_4} = \frac{T_1 - T_0}{T_1} \Rightarrow Q_4 = A\frac{T_1}{T_1 - T_0} = Q_1\frac{(T_{\text{н}} - T_1)T_1}{T_{\text{н}}(T_1 - T_0)}.$$

Таким образом,

$$Q_2 + Q_4 = Q_1\frac{T_1}{T_{\text{н}}}\frac{T_{\text{н}} - T_0}{T_1 - T_0}.$$

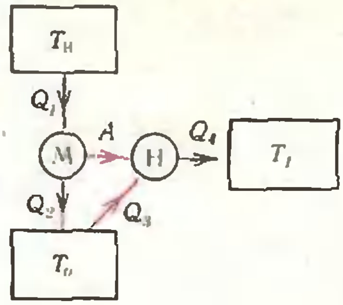


Рис. 2.

Для того чтобы испарить воду, необходимо, чтобы суммарное количество переданного ей тепла было равно $Q_2+Q_1=Q_0$. Следовательно, машина М должна забирать у нагревателя количество тепла

$$Q_1=Q_0\frac{T_н(T_1-T_0)}{T_1(T_н-T_0)}\approx 0{,}31\ mr. \qquad (*)$$

Таким образом, при использовании идеального теплового насоса (холодильника) Q_1 оказывается значительно меньше количества тепла, необходимого для испарения воды.

Из формулы для КПД теплового насоса следует, что при $\frac{T_1-T_0}{T_1}\ll 1$ можно использовать тепловую энергию окружающей среды (на испарение, нагрев и т. д.), затрачивая при этом малое количество механической, электрической или какой-либо другой нетепловой энергии. Однако на практике тепловые насосы (холодильники) пока далеки от идеальных, и их использование в качестве нагревающих элементов еще не нашло широкого распространения.

Интересно отметить, что результат (*) получится и в том случае, если машина М будет работать между нагревателем и окружающей средой (рисунок 2).

О. С. Рабинович

◆

Ф811. *В обычной схеме однополупериодного выпрямителя (рис. 1) $C=1000$ мкФ, $R=500$ Ом. Частота сети $\nu=50$ Гц. Считая диод идеальным, найти:*
1) величину коэффициента пульсаций напряжения $k=\frac{\Delta U}{U}$ на резисторе R;
2) во сколько раз уменьшится коэффициент k, если последовательно с резистором включить катушку индуктивности $L=100$ Гн.

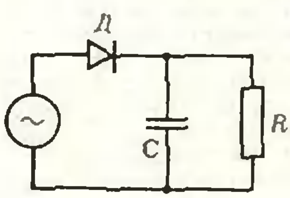


Рис. 1.

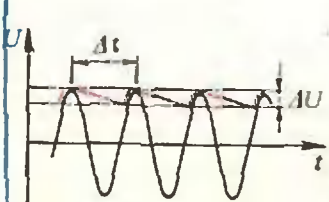


Рис. 2.

1) При выбранных параметрах C и R заряд конденсатора меняется незначительно, поэтому ток разрядки конденсатора можно считать постоянным. Тогда

$$\Delta U=\frac{\Delta q}{C}=\frac{I\cdot\Delta t}{C}=\frac{U\cdot\Delta t}{RC}.$$

Значит,

$$k=\frac{\Delta U}{U}=\frac{\Delta t}{RC}.$$

Если конденсатор разряжается мало, то он подзаряжается в моменты максимального положительного напряжения в сети (рис. 2), то есть

$$\Delta t=T=\frac{1}{\nu}.$$

Следовательно,

$$k=\frac{1}{\nu RC}=0{,}04.$$

2) При подсоединении катушки индуктивности коэффициент пульсаций станет еще меньше (индуктивность большая: $2\pi\nu L\gg R$). Ток нагрузки тем более можно считать постоянным; значит, напряжение на конденсаторе будет меняться по тому же закону, что и в первом случае. При этом напряжение на катушке будет почти компенсировать изменения напряжения на конденсаторе. Ток через катушку в течение периода сети будет меняться по параболическому закону (ЭДС индукции меняется по линейному закону), причем максимальное значение тока будет в середине периода:

$$\mathcal{E}=\frac{\Delta U}{T}t \quad (\text{при } t\in[nT,(n+1)T]),$$

$$I=I_0-\frac{\Delta U}{T}\,\frac{1}{L}\,\frac{1}{2}t^2.$$

Пульсации в этом случае определяются изменениями тока: $\Delta U_1=R\cdot\Delta I$. Поскольку

$$\Delta I=I_{max}-I_{min}=\frac{1}{2}\,\frac{\Delta U}{LT}\,\frac{T^2}{4}=\frac{1}{8}\,\frac{UT^2}{LRC}$$

$\left(\Delta U=\frac{UT}{RC}\right)$, окончательно получаем:

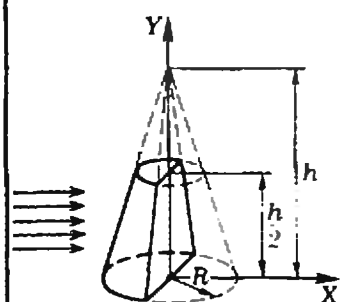
$$k=\frac{\Delta U_1}{U}=\frac{1}{8}\,\frac{T^2}{LC}=5\cdot 10^{-4}.$$

Итак, при подсоединении катушки индуктивности пульсации уменьшатся в $\frac{4\cdot 10^{-2}}{5\cdot 10^{-4}}=80$ раз.

А. Р. Зильберман

◆

Ф812. *Коническая линза представляет собой половину усеченного стеклянного конуса. Показатель преломления стекла n; размеры линзы указаны на рисунке. На линзу падает пучок параллельных лучей, перпендикулярных плоской части боковой поверхности линзы. Под каким углом к оси пучка надо расположить за линзой экран, чтобы изображение пучка на экране было прямой линией?*



На любой луч, падающий на поверхность линзы, линза оказывает двойное действие. В плоскости, параллельной основаниям, коническая линза действует как обычная цилиндрическая линза. Но фокусное расстояние цилиндрической линзы определяется радиусом кривизны ее боковой поверхности. У конической линзы этот радиус меняется с высотой, поэтому и оптическая сила конической линзы меняется с высотой. В плоскости, перпендикулярной основаниям, коническая линза действует как призма с углом при вершине $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{R}{H}$. Нетрудно показать, что она преломляет лучи на угол $\beta=\varphi(n-1)$.

Введем систему координат, поместив начало ее в центре основания линзы и направив ось X вдоль пучка лучей, а ось Y вдоль высоты линзы. Лучи, лежащие в горизонтальной плоскости $y'=\mathrm{const}$, после преломления в линзе соберутся в точке O с координатами (x, y), причем координата x равна фокусному расстоянию линзы на высоте y', то есть равна $\frac{r(y')}{n-1}$, где $r(y')$ — радиус боковой поверхности конуса на высоте y'. Так как $r(y')=R\left(1-\frac{y'}{H}\right)$,

$$x=\frac{R}{n-1}\left(1-\frac{y'}{H}\right). \qquad (1)$$

Координата y определяется из условия, что приходящие в точку $O(x, y)$ лучи образуют с осью X угол $\beta=(n-1)\operatorname{arctg}\frac{R}{H}$:

$$\frac{y'-y}{x}=\operatorname{tg}\left((n-1)\operatorname{arctg}\frac{R}{H}\right). \qquad (2)$$

Исключая y' из уравнений (1) и (2), получаем уравнение для линии, в которую сфокусируются лучи:

$$y=H-x\left(A+\frac{n-1}{R}H\right) \qquad (3)$$

(здесь для краткости мы ввели обозначение $\operatorname{tg}\left((n-1)\operatorname{arctg}\frac{R}{H}\right)=A$).

Из выражения (3) следует, что экран надо установить под углом $\alpha=\operatorname{arctg}\left(A+\frac{n-1}{R}H\right)$ к оси X — в этом случае линия фокусировки будет четкой.

А. А. Лапидес

Еще одно определение равногранного тетраэдра?

В статье В. Э. Матизена «Равногранные и каркасные тетраэдры» в этом номере приводится 21 свойство равногранных тетраэдров, эквивалентных его определению (включая само определение). Среди них — равенство периметров граней, площадей граней, радиусов описанных окружностей граней (свойства (11), (12), (15)). Странно, что свойства «радиусы вписанных в грани окружностей равны» в этом списке нет. Как вы думаете, обязан ли тетраэдр с этим свойством быть равногранным?

В. Д.

Постоянная становится переменной

С. С. ВАЛЛАНДЕР

Пояснить асимптотическое поведение решения при $t2 \to \infty$.

(Г. Дж. Липкин, из сборника «Физики шутят», М., «Мир», 1966)

В серьезных математических работах часто и в совершенно различных ситуациях встречается следующая идея: зафиксировать переменные величины и менять постоянные. В этой заметке мы покажем, как с помощью этой идеи решается задача **М799б**):

Найдите два решения уравнения

$$3^x+3^{x^2}=2^x+4^{x^2} \qquad (1)$$

и докажите, что у него нет других решений.

Это внешне эффектное уравнение кажется малоприспособленным к решению элементарными методами. Обычно уравнения подобного вида решаются из соображений монотонности. Для примера рассмотрим решение задачи **М799а**): ***Найдите одно решение уравнения** $3^{x+1}+100=7^{x-1}$ **и докажите, что у него нет других решений.***

Искомый корень легко угадать: $x=4$ (проверьте!). А других решений нет, потому что, разделив обе части уравнения на 3^{x-1}:

$$9+100\cdot 3^{-x+1}=(7/3)^{x-1}, \qquad (2)$$

мы получим в левой части убывающую функцию от x, а в правой — возрастающую.

Однако применить соображения монотонности к уравнению (1), судя по всему, трудно (хотя нельзя, конечно, исключить возможность того, что более хитрые рассуждения этого типа могут привести к цели). Действительно, уравнение (1) имеет два решения — $x=0$ и $x=1$. Как же доказать, что других решений у него нет?

Попробуем воспользоваться тем, что левая и правая части уравнения имеют похожую структуру $a^x+b^{x^2}$, причем сумма оснований в обеих частях одна и та же ($a+b=6$) — благодаря этому уравнение имеет решение $x=1$. Запишем уравнение (1) в виде

$$3^x+(6-3)^{x^2}=2^x+(6-2)^{x^2} \qquad (3)$$

и рассмотрим функцию $f(t)=t^x+(6-t)^{x^2}$. (Это решающий момент: в исходном уравнении мы **ф и к с и р у е м** переменную и начинаем менять постоянные). Мы должны доказать, что равенство (3), то есть $f(3)=f(2)$, невозможно при $x\neq 0$ и $x\neq 1$. Для этого достаточно установить, что при каждом значении x, кроме 0 и 1, функция $f(t)$ монотонна, по крайней мере на промежутке $2<t<3$.

Найдем производную (по t!) функции f: $f'(t)=xt^{x-1}-x^2(6-t)^{x^2-1}$ и покажем, что она сохраняет знак на отрезке $[2;\ 3]$ (при $x\neq 0;\ 1$). Разберем отдельно три случая — $x<0$, $0<x<1$ и $x>1$.

При $x<0$, очевидно $f'(t)<0$; следовательно, $f(t)$ убывает и $f(2)>f(3)$.

При $0<x<1$ и $t<3$ имеем: $6-t>3$ и $x^2(6-t)^{x^2-1}<x(6-t)^{x-1}<x3^{x-1}<xt^{x-1}$, то есть $f'(t)>0$ и $f(3)>f(2)$.

Наконец, при $x>1$ и $t<3$

$$x^2(6-t)^{x^2-1}>x(6-t)^{x-1}>x3^{x-1}>xt^{x-1},$$

то есть $f'(t)<0$ и $f(2)>f(3)$.

Итак, уравнение (3) (или (1)) не имеет корней, отличных от 0 и 1.

Точно так же можно доказать, что любое уравнение вида $a^x+(2k-a)^{x^2}=b^x+(2k-b)^{x^2}$ при $0<a<b<k$, и $k>1$ имеет ровно два решения — 0 и 1 (в нашей задаче $b=k=3$, $a=2$).

Приведем еще одно решение задачи М799б), опирающееся на ту же идею. (Его нашли некоторые читатели).

Отсутствие отрицательных корней уравнения (1) вытекает из того, что при $x<0$ $3^x<2^x$ и в то же время $3^{x^2}<4^{x^2}$. При $0<x<1$ рассмотрим функцию $g(t)=(t+1)^x-t^x$. Поскольку $g'(t)=x((t+1)^{x-1}-t^{x-1})<0$, функция $g(t)$ убывает. Следовательно, $g(3)=4^x-3^x<$ $<g(2)=3^x-2^x$. А так как $4^x-4^{x^2}=$ $=4^{x^2}(4^{x-x^2}-1)>3^{x^2}(3^{x-x^2}-1)=3^x-3^{x^2}$, справедливо неравенство

$$3^x-2^x>4^x-3^x>4^{x^2}-3^{x^2}. \qquad (4)$$

Поэтому $3^x+3^{x^2}>2^x+4^{x^2}$. Аналогично разбирается случай $x>1$ — с той разницей, что в (4) вместо знаков $>$ получаются знаки $<$.

В заключение сформулируем сходную по условию, но более сложную задачу:

Сколько решений имеет уравнение $3^x+3^{x^2}=4^x+2^{x^2}$?

П о п р а в к а

В «Кванте» № 5 в статье «Интерференция волн» допущена ошибка. В задаче 2 (с. 36) должно быть: $\sin\alpha/\sin(\beta+\alpha)=1/n$, откуда, с учетом малости углов, $\beta\approx\alpha(n-1)$. Тогда $L\approx 300$ см, $N\approx 600$, $b_0\approx 50$ мкм.

Что скрывается за превращениями тетраэдра

Кандидат физико-математических наук
В. Н. ДУБРОВСКИЙ

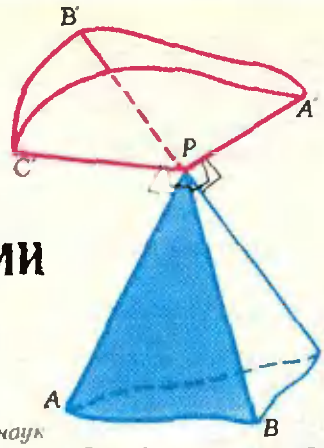


Рис. 1.

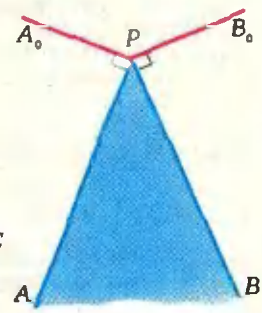


Рис. 2.

В этой заметке мы приведем решение задачи М793 и попутно расскажем о связанных с ней любопытных геометрических фактах.

М793*. *Из вершины P тетраэдра $PABC$ проводятся три отрезка PA', PB', PC', перпендикулярные граням PBC, PCA, PAB и равные по длине площадям этих граней соответственно (направления отрезков выбираются так, что точки A' и A, B' и B, C' и C лежат по разные стороны от плоскостей соответствующих граней PBC, PCA, PAB). Докажите, что*

а) повторив это же построение для тетраэдра $PA'B'C'$ (и его вершины P), мы получим тетраэдр, гомотетичный исходному тетраэдру $PABC$ с коэффициентом $3V/4$, где V — объем тетраэдра $PABC$;

б) вектор $\overrightarrow{PA'}+\overrightarrow{PB'}+\overrightarrow{PC'}$ перпендикулярен плоскости ABC.

в) Из точки O, взятой внутри тетраэдра $ABCD$, опускаются перпендикуляры на плоскости его граней. На этих перпендикулярах от точки O откладываются отрезки, равные по длине площадям соответствующих граней, и концы этих отрезков принимаются за вершины нового тетраэдра $A'B'C'D'$. (Разумеется, с точностью до параллельного переноса, этот тетраэдр не зависит от выбора точки O.) Докажите, что, повторив это построение для тетраэдра $A'B'C'D'$, мы получим тетраэдр, гомотетичный исходному с коэффициентом $3V$, где V — объем исходного тетраэдра $ABCD$. (Если $3V=1$, то последний тетраэдр получается из исходного параллельным переносом.)

Ясно, что т р е х г р а н н ы й у г о л при вершине P тетраэдра $PA'B'C'$ из задачи а) полностью определяется трехгранным углом $PABC$. С обсуждения соотношений между этими углами мы и начнем.

Полярный угол трехгранного угла. Решение задачи М793, а.

Трехгранный угол $PA'B'C'$ называется *полярным* к трехгранному углу $PABC$, если его ребра перпендикулярны граням угла $PABC$ и направлены во внешнюю сторону (то есть, например, $(PA')\perp(PBC)$ и лучи PA' и PA лежат по разные стороны от плоскости PBC; рис. 1). Докажем два основных свойства полярного угла.

Пусть $PA'B'C'$ — полярный угол к $PABC$, тогда

1) $PABC$ — полярный угол к $P'A'B'C'$;

2) сумма величин угла APB и двугранного угла при ребре PC' в угле $PA'B'C'$ равна π; то же верно и для любого плоского угла в одном из трехгранных углов и соответствующего двугранного угла в полярном угле.

Действительно, ребра угла $PABC$ перпендикулярны граням угла $PA'B'C'$ (например, $(PA)\perp(PB'C')$, потому что по определению полярного угла $(PB')\perp(PA)$ и $(PC')\perp(PA)$). Далее, лучи PA и PA' лежат по разные стороны от плоскости PBC, причем $(PA')\perp(PBC)$. Поэтому угол APA' — тупой, а значит, эти лучи лежат по разные стороны и от плоскости $PB'C'$, перпендикулярной лучу PA'. Таким образом, луч PA (и, аналогично, PB и PC) направлен во внешнюю сторону относительно угла $PA'B'C'$. Утверждение 1) доказано.

Для доказательства утверждения 2) заметим, что плоскость APB пересекает двугранный угол при ребре PC' по его линейному углу A_0PB_0 (рис. 2; $A_0\in(PC'B')$, $B_0\in(PC'A')$), причем углы APA_0 и BPB_0 — прямые и лучи PA и PB_0 лежат по разные стороны от прямой PB, а PB и PA_0 — по разные стороны от PA. Поэтому величина двугранного угла при PC' равна $\widehat{A_0PB_0}$ и $\widehat{A_0PB_0}+\widehat{APB}=\pi$.

З а д а ч и

1. Пусть $PABC$ и $PA'B'C'$ — полярные друг другу трехгранные углы. Докажите, что а) величина угла между ребром PA и гранью PBC и величина угла между PA' и $PB'C'$ в сумме дают π; б) ось конуса, описанного около угла $PABC$, и ось конуса, вписанного в угол $PA'B'C'$, совпадают, а сумма углов раствора этих конусов равна π.

2. Докажите, что сумма величин двугранных углов трехгранного угла всегда больше π.

3. Два трехгранных угла конгруэнтны, если их п л о с к и е углы соответственно равны по величине. Выведите отсюда, что два трехгранных угла с соответственно равными д в у г р а н н ы м и углами конгруэнтны.

Докажем теперь утверждение а) нашей задачи. Пусть $PA_1B_1C_1$ — тетраэдр, построенный по $PA'B'C'$. Его трехгранный угол при вершине P по построению является полярным к углу $PA'B'C'$, полярному к $PABC$. Следовательно, он совпадает с трехгранным углом $PABC$, то есть точки A_1, B_1 и C_1 лежат на лучах PA, PB и PC. Найдем отношение длин ребер PA_1 и PA ($S_{PB'C'}$, S_{PAB} и т. д. — площади граней $PB'C'$, PAB и т. д.):

$$|PA_1| = S_{PB'C'} = \frac{1}{2}|PB'|\cdot|PC'|\cdot\sin\widehat{B'PC'} = $$
$$= \frac{1}{2} S_{PAC}\cdot S_{PAB}\cdot\sin\widehat{a},$$

где $\widehat{a}=\pi-\widehat{B'PC'}$ — двугранный угол при ребре PA тетраэдра $PABC$. Но площадь грани PAB равна $S_{PAB}=\frac{1}{2}|PA|\cdot h$, где h — высота треугольника PAB, проведенная из вершины B, поэтому

$$|PA_1|:|PA| = \frac{1}{4}S_{PAC}\cdot h\sin\widehat{a} = \frac{3}{4}V,$$

поскольку $h\sin\widehat{a}$ — это длина высоты тетраэдра $PABC$, опущенный на грань PAC (рис. 3). Аналогично доказывается, что $|PB_1|:|PB| = |PC_1|:|PC| = 3V/4$. Таким образом, тетраэдр $PA_1B_1C_1$ гомотетичен тетраэдру $PABC$ с коэффициентом $3V/4$.

Решение задачи М793, б и теорема о «еже»

Будем называть вектор, перпендикулярный грани Γ данного тетраэдра, равный по длине ее площади и направленный во внешнюю сторону*), *вектором грани Γ*. Надо доказать, что сумма $\vec{v}=\vec{PA'}+\vec{PB'}+\vec{PC'}$ векторов трех граней тетраэдра $PABC$ перпендикулярна четвертой грани ABC, то есть что $\vec{v}\cdot\vec{AB}=\vec{v}\cdot\vec{AC}=0$. Пользуясь тем, что вектор $\vec{PA'}$ перпендикулярен $\vec{PB}$ и $\vec{PC}$, $\vec{PB'}-\vec{PA}$ и $\vec{PC}$, а $\vec{PC'}-\vec{PA}$ и $\vec{PB}$, получим

$$\vec{v}\cdot\vec{AB} = (\vec{PA'}+\vec{PB'}+\vec{PC'})(\vec{PB}-\vec{PA}) =$$
$$= \vec{PB'}\cdot\vec{PB} - \vec{PA'}\cdot\vec{PA}.$$

Но $\vec{PA'}\cdot\vec{PA} = S_{PBC}\cdot|PA|\cdot\cos\widehat{APA'}$, а $\widehat{APA'}=\varphi+\frac{\pi}{2}$, где φ — угол между ребром PA и плоскостью PBC (рис. 4); кроме того, $|PA|\sin\varphi=H_A$ — это длина высоты тетраэдра, опущенной на грань PBC.

Следовательно, $\vec{PA'}\cdot\vec{PA}=-S_{PBC}|PA|\sin\varphi = -S_{PBC}\cdot H_A=-3V$. Точно так же и $\vec{PB'}\cdot\vec{PB}=-3V$. Таким образом, $\vec{v}\cdot\vec{AB}=-3V+3V=0$. Равенство $\vec{v}\cdot\vec{AC}=0$ доказывается аналогично.

Ясно, что доказанное утверждение имеет место для **любых** трех векторов граней, то есть *сумма векторов любых трех граней тетраэдра перпендикулярна четвертой грани*. Но ведь и вектор четвертой грани ей перпендикулярен! Значит, сумма всех четырех векторов граней (если она не равна $\vec{0}$) перпендикулярна любой грани тетраэдра. А это, конечно, невозможно. Итак, доказана

Теорема о «еже» (для тетраэдра). *Сумма векторов граней любого тетраэдра равна* 0.

*) Другими словами, направление этого вектора совпадает с направлением перпендикуляра, опущенного на Γ из любой внутренней точки тетраэдра.

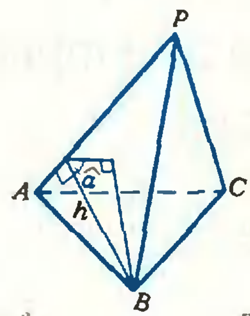


Рис. 3.

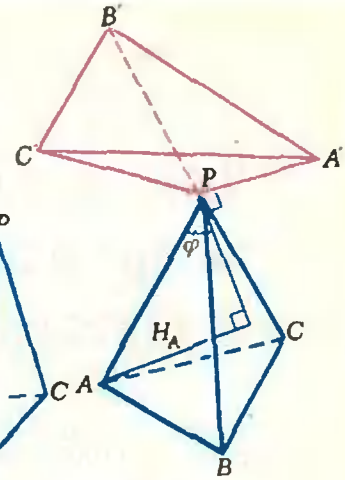


Рис. 4.

Задачи

4. Сформулируйте и докажите двумерную теорему о «еже» — для треугольника.

5. На плоскости даны два равнобедренных прямоугольных треугольника PAB' и $PA'B$ с прямыми углами при их общей вершине P (и с одинаковыми направлениями обхода вершин). Пусть PH — высота треугольника PAB. Докажите, что прямая PH делит отрезок $A'B'$ пополам.

6. Пользуясь теоремой о «еже» для треугольника, докажите теорему о «еже» для призмы.

7. Докажите теорему о «еже» для произвольного выпуклого многогранника.

8. Пользуясь теоремой о «еже» для тетраэдра $ABCD$,

а) выразите площадь грани ABC через площади трех других граней и углы между ними;

б) докажите, что сумма величин его двугранных углов при ребрах AB, BC, CD и DA заключена в пределах от 0 до 2π;

в) Докажите, что сумма величин всех его двугранных углов заключена в пределах от 2π до 3π;

г) докажите, что сумма s косинусов всех двугранных углов удовлетворяет неравенствам $0<s\leq 2$, причем $s=2$ тогда и только тогда, когда грани тетраэдра равновелики; докажите, что в последнем случае двугранные углы при скрещивающихся ребрах равны.

Решение задачи М793, в. Проблема Минковского

По условию задачи $\vec{OA'}$, $\vec{OB'}$, $\vec{OC'}$ и $\vec{OD'}$ — это векторы граней (BCD, CDA, DAB и ABC) тетраэдра $ABCD$. Отложим от точки O векторы граней тетраэдра $A'B'C'D'$. Их концы служат вершинами нового тетраэдра $A''B''C''D''$; надо доказать, что этот тетраэдр гомотетичен тетраэдру $ABCD$.

Заметим, что $\vec{OD''}$ — вектор грани $A'B'C'$ для тетраэдра $A'B'C'D'$ — является также вектором грани $A'B'C'$ и для тетраэдра $OA'B'C'$. Действительно, точки O и D' лежат по одну сторону от плоскости $A'B'C'$ (иначе сумма $\vec{OA'}+\vec{OB'}+\vec{OC'}+\vec{OD'}$ не равнялась бы $\vec{0}$), поэтому вектор $\vec{OD''}$ направлен во внешнюю сторону тетраэдра $OA'B'C'$. По теореме о «еже» вектор $-\vec{OD''}$ равен сумме векторов граней $OA'B'$, $OB'C'$ и $OC'A'$ тетраэдра $OA'B'C'$. Но этот тетраэдр строится точно так же (с точностью до параллельного переноса), как тетраэдр $PA'B'C'$ в задаче а), следовательно $\vec{OD''}=-k(\vec{DA}+\vec{DB}+\vec{DC})$, где $k=3V/4$. Аналогично $OA''=-k(\vec{AB}+\vec{AC}+\vec{AD})$, поэтому $\vec{D''A''}=\vec{OA'}-\vec{OD''}=k(\vec{DA}+\vec{DB}+\vec{DC}-\vec{AB}-\vec{AC}-\vec{AD})=k\cdot 4\vec{DA}=3V\cdot\vec{DA}$. Таким же образом доказывается, что $D''B''=3V\cdot\vec{DB}$, $\vec{D''C''}=3V\cdot\vec{DA}$. Это и значит, что тетраэдры $A''B''C''D''$ и $ABCD$ гомотетичны с коэффициентом $3V$.

Отсюда немедленно следует, что *для любых четырех некомпланарных векторов, дающих в сумме $\vec{0}$, существует единственный с точностью до параллельного переноса тетраэдр, для которого данные векторы служат векторами граней.* (Если $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$ и $\vec{OD}$ — данные векторы и $\vec{OA'}$, $\vec{OB'}$, $\vec{OC'}$, $\vec{OD'}$ — векторы граней тетраэдра $ABCD$, то искомый тетраэдр гомотетичен $A'B'C'D'$.) Это утверждение является очень частным и простым случаем так называемой проблемы Минковского: *можно ли по заданному набору некомпланарных векторов с нулевой суммой простроить выпуклый многогранник, для которого они служили бы векторами граней? будет ли такой многогранник единственным?* Эта проблема была поставлена и решена (положительно) выдающимся немецким математиком Германом Минковским в конце прошлого века.

Задачи

9. В тетраэдре $ABCD$ грани ABC и ABD, а также CDA и CDB равновелики. Докажите, что отрезок, соединяющий середины ребер AB и CD, является их общим перпендикуляром.

10. Докажите, что следующие свойства тетраэдра эквивалентны*): 1) все грани конгруэнтны; 2) все грани равновелики; 3) центр описанной сферы совпадает с центром тяжести (центр тяжести определяется тем, что сумма векторов, проведенных из него в вершины тетраэдра, есть $\vec{0}$).

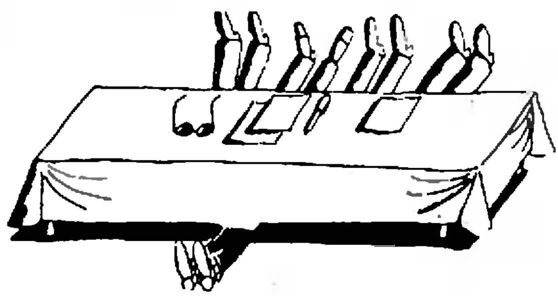
*) Тетраэдры, о которых говорится в этой задаче, называются равногранными. О них подробно рассказано в статье В. Э. Матизена в этом номере журнала; см. также выше задачу 8, г.

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Тихо! Идут экзамены!

(Цикл рисунков А. И. Семенова)

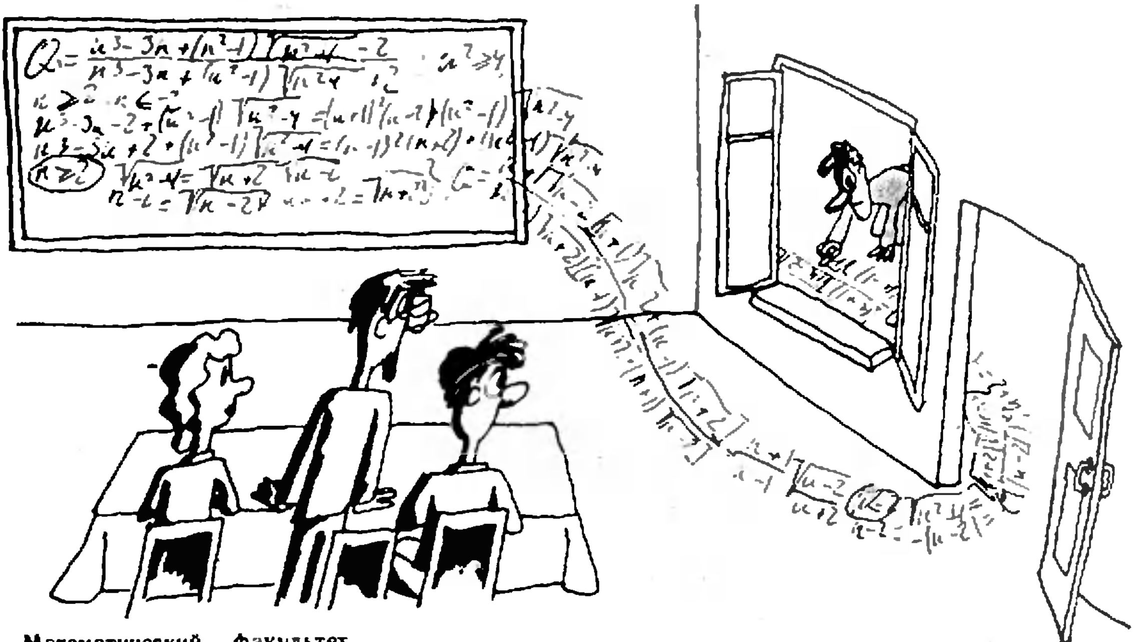
Геологоразведочный институт



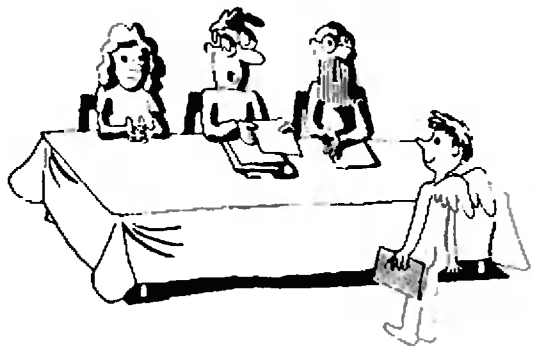
Автомеханический институт

Институт тонкой химической технологии

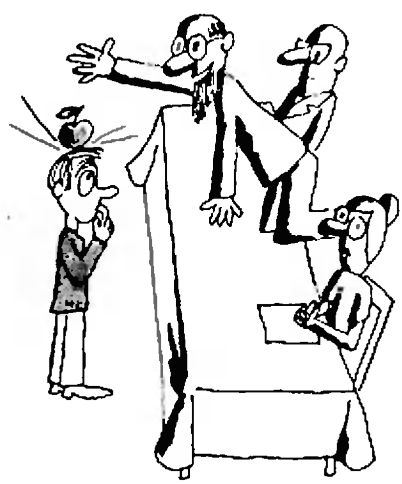
КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ



Математический факультет

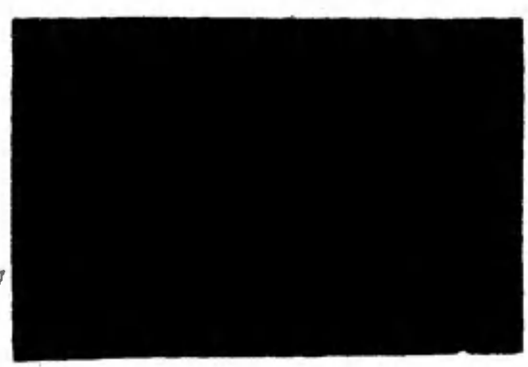


Авиационный институт
— У товарища отличная характеристика, имеет опыт работы в летном деле...



Физический факультет
— Теперь вспомнили закон всемирного тяготения?

Педагогический институт
— Итак, вы пришли в класс. Ну-ка, наведите порядок!



Электротехнический институт
—... Да, с практическими навыками у вас слабовато.

Что такое случайность?

Купив билет в автобусе, вы обнаруживаете, что его номер состоит из одних семерок. Удивительно, не правда ли? Конечно! Ведь не каждый же день такое бывает! А теперь представьте себе, что номер билета — 830877. Наверное, ничего удивительного вы в этом не найдете. А почему, собственно? Ведь и номер 777777, и номер 830877 встречаются одинаково часто (лучше сказать, одинаково редко) — в одном случае из миллиона. Так почему же мы по-разному воспринимаем их появление?

Почему, если наш партнер выбросит на игральной кости десять шестерок подряд, мы подозреваем что-то неладное, а если он выбросит 2, 6, 2, 1, 2, 6, 4, 5, 1, 3, у нас подозрений не возникает?

Почему одни последовательности кажутся нам «случайными», а другие (например, шесть семерок) — нет? Можно ли дать точное математическое определение случайности?

Впервые такое определение было предложено в 1919 году немецким математиком и физиком Рихардом Мизесом. Мы не имеем возможности изложить его во всех деталях, но постараемся объяснить замысел.

Рассмотрим для простоты последовательности, состоящие только из «нулей» и «единиц». В каком случае мы согласны считать такую последовательность случайной? Например, если мы будем многократно подбрасывать о б ы к н о в е н н у ю монету и записывать результаты («орел» — 1, «решка» — 0), полученная последовательность должна быть случайной.

Прежде всего, ясно, что в случайной последовательности должно быть примерно одинаковое число нулей и единиц; поэтому последовательность из одних нулей, как и последовательность из одних единиц, не случайна.

Хотя последовательность

$$0101010101\ldots$$

и содержит равное число нулей и единиц, вряд ли кто-нибудь сочтет ее случайной. Что в ней плохого? Например, то, что в ней ни разу не встречается двух подряд идущих нулей или двух единиц, в то время как в с л у ч а й н о й последовательности комбинации 00, 01, 10, 11 должны встречаться одинаково часто. Но и требования равной частоты появления всех комбинаций одинаковой длины мало.

Выпишем подряд числа 0, 1, 2, 3, ... в двоичной системе — получится последовательность

$$0110111001011101111000\ldots$$

Можно доказать (попробуйте!), что «в пределе» для любого n все комбинации из нулей и единиц длины n будут встречаться в этой последовательности одинаково часто. Но, несмотря на это, вряд ли кто-нибудь согласится считать ее случайной.

Так что же такое случайная последовательность? Мизес предложил такой подход к определению этого понятия. Будем выбирать из последовательности некоторые ее члены, руководствуясь каким-то правилом. Например, разрешается выбрать все члены с четными номерами или все члены, номера которых — простые числа. Разрешается также, решая вопрос о том, выбирать или нет какой-то член, учитывать значения предыдущих членов последовательности. Например, можно отобрать те члены, перед которыми идут две единицы подряд (Но правило «выбрать те члены, которые сами равны единице», не допускается!) Так вот, случайная по Мизесу последовательность должна быть такой, что при **любом** правиле выбора нули и единицы встречаются среди выбранных членов одинаково часто. (Это требование, как можно проверить, запрещает считать случайными приведенные выше последовательности нулей и единиц).

Рихард Мизес сделал попытку положить свою концепцию случайности в основу теории вероятностей, но натолкнулся на серьезные логические трудности. Убедительную критику его подхода дал советский математик А. Я. Хинчин, а удовлетворительное обоснование теории вероятности было получено в 1933 г. А. Н. Колмогоровым на другом пути — аксиоматическим методом.

Однако порожденное Мизесом направление исследований, посвященное делению последовательностей на «случайные» и «неслучайные», оказалось плодотворным. В начале семидесятых годов А. Н. Колмогоров, воспользовавшись идеями теории алгоритмов, дал убедительное определение этих понятий.

Рихард Мизес родился 100 лет назад во Львове. Окончив Венский университет, он затем был профессором Страсбургского и Берлинского университетов. С 1933 г. Мизес работал профессором Стамбульского университета, с 1939 г.— в Гарварде (США). Умер Мизес в 1953 г.

А. Х. Шень

О целочисленных точках кривых вида $x^n+y^n=c^n$

Если c — целое число, то окружность

$$x^2+y^2=c^2 \qquad (1)$$

обязательно проходит через точки с целыми координатами, например через точки $(0, \pm c)$ и $(\pm c, 0)$, лежащие на осях координат. Окружность (1) может проходить и через целочисленные точки, не лежащие на осях координат, например, при $c=5$ — через точки (3, 4), (4, 3) *).

А может ли кривая

$$x^n+y^n=c^n \qquad (2)$$

(где $n>3$, $c>0$) проходить через целочисленную точку (x, y) при $x>0$ и $y>0$? В общем виде ответ на этот вопрос неизвестен, однако мы докажем следующее утверждение:

Для любого целого положительного c можно указать такой номер N, начиная с которого (то есть при $n>N$) кривая (2) не проходит через целочисленные точки, не лежащие на осях координат.

Почему это так? Изучение графика кривой (2) при $n=1, 2, 3, 4, \ldots$ наводит на мысль, что при достаточно большом n эта кривая прижимается к ломаной ABC, звенья которой идут по прямым AB и BC, заданным соответственно уравнениями $y=c$ и $x=c$, где c — целое (рис. 1). Но внутри «красного коридора» ширины 1, ограниченного ломаной ABC, осями координат и ломаной $A_1B_1C_1$ (см. рис. 1), уже нет целочисленных точек, а наша кривая целиком лежит в этом коридоре при достаточно большом n.

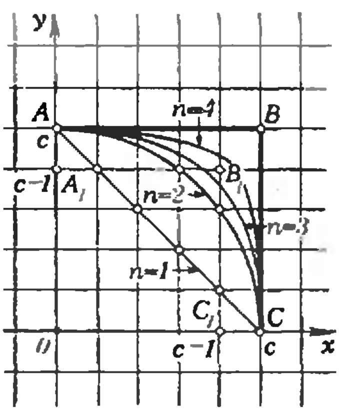


Рис. 1.

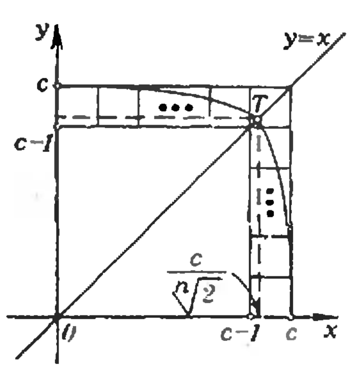


Рис. 2.

Основываясь на этих наглядных соображениях, приведем теперь строгое доказательство сформулированного утверждения.

Пусть дано целое $c>0$; кривая (2) пересекает оси координат в точках $(c, 0)$, $(0, c)$. Ее точка пересечения T с биссектрисой первого квадрата имеет абсциссу $x=\frac{c}{\sqrt[n]{2}}$. Чтобы кривая целиком оказалась внутри «красного коридора» (рис. 2), достаточно потребовать, чтобы $c-1<\frac{c}{\sqrt[n]{2}}$. А последнее неравенство будет выполненным, если мы выберем

$$n>\frac{\ln 2}{\ln c-\ln(c-1)},$$

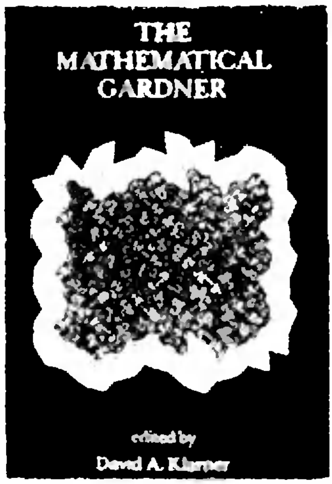
что всегда можно сделать, так как правая часть неравенства — постоянная. В «коридоре» нет целочисленных точек. Значит, наша кривая не проходит через целочисленные точки, не лежащие на осях координат, что и требовалось.

А. Г. Маневич

*) Если окружность (1) проходит через целочисленную точку (x_0, y_0), то тройка чисел (x_0, y_0, c) называется *пифагоровой*. О пифагоровых тройках можно прочитать в «Кванте», 1981, № 4, с. 39 и 1979, № 4, с. 38.

Мартин Гарднер и "The Mathematical Gardner"

Доктор физико-математических наук
И. М. ЯГЛОМ



В этом году в СССР под названием «Мир науки» начал выходить перевод на русский язык известного американского «общенаучного» журнала для широкого читателя "Scientific American", родственного, по своему характеру и кругу читателей, нашему журналу «Наука и жизнь».

Более двадцати лет отделом математики журнала "Scientific American" заведовал Мартин Гарднер и более двадцати лет в каждом номере этого ежемесячника появлялась подготовленная им рубрика «Математические игры».

У меня нет ни малейшего сомнения в том, что при свойственных Гарднеру ярких математических способностях и обостренном научном эстетическом чутье, при его изобретательности и остроумии, умении ценить и чувствовать чужие результаты и личной научной инициативе, в полной мере проявляющихся во всех его публикациях, он вполне мог бы стать серьезным ученым-математиком. Однако Гарднер избрал другой путь — путь популяризатора математической науки. При этом здесь он в полной мере является Профессионалом.

Я пишу это слово с большой буквы, ибо отношусь к нему с таким же глубоким уважением, как поэт Александр Межиров, написавший известные строки

Пусть пребудут в целости
Хмуры и усталы
Делатели ценности —
Профессионалы,

или как поэтесса Марина Цветаева, назвавшая один из самых центральных своих сборников простым и высоким словом «Ремесло», каким обозначала она, вслед за поэтессой Каролиной Павловой, свой поэтический труд.

К своему ремеслу популяризатора математики Гарднер всегда относился с цветаевской одержимостью и проявлял в нем тот высокий профессионализм, который отличает каждого настоящего Мастера.

Профессионалами-популяризаторами были также Сэм Лойд (1841—1911), Генри Эрнест Дьюдени (1857—1930) и Яков Исидорович Перельман (1882—1942). Однако Лойд, Дьюдени и Перельман относятся к несколько более ранней эпохе, а известно, что во всех областях жизни наше время отличается повышенными техническими требованиями.

Если в начале века прыжок в высоту за 2 м расценивался почти как чудо, то сегодня посетителей спортивных соревнований не так уж удивляет и высота в 2 м 30 см (причем это не значит, конечно, что нынешние атлеты по своим физическим данным превосходят прежних — но техника прыжка разработана у них несравненно глубже и детальнее). Если у Пушкина рифмовка трех или, тем более, четырех строк встречалась крайне редко, то у Пастернака и пятикратная рифмовка встречается достаточно часто (что никак не означает, разумеется, что Пастернак как поэт выше Пушкина — предположение, которое, безусловно, крайне возмутило бы самого Бориса Леонидовича: просто работали эти два писателя «в разной технике»). И уж совсем нет никакого сомнения в том, что знания и «техническая оснащенность» современного инженера, специализирующегося в области электронных приборов, не сравнимы с тем, чем владел, скажем, наладчик электромашин дореволюционной эпохи.

Глубина гарднеровских математических конструкций, широта его знаний и богатство используемых им приемов также не идут ни в какое сравнение с арсеналом Лойда, Дьюдени и Перельмана.

В октябре 1979 г. Мартину Гарднеру исполнилось 65 лет — возраст, который в США дает право на пенсионное обеспечение. Легко представить себе, что работа над рубрикой «Математические игры» в журнале "Scientific American" сама по себе игрой отнюдь не являлась — увы, слово «усталы» в процитированном выше четверостишии Межирова не является случайным и относится ко всем, кто по-настоящему вкладывает душу в свою работу. Во всяком случае Гарднер не решился продолжать свою деятельность в журнале и ушел на пенсию. ● По предложению Гарднера редакция пригласила на его место физика Дугласа

Р. Хофштадтера, человека совсем другого типа, интеллектуального склада и характера мышления. Перу Хофштадтера принадлежит замечательная, но по своей структуре, содержанию и замыслу глубоко отличная от стиля Гарднера книга «Гёдель, Эшер, Бах»*). Замена Гарднера на Хофштадтера сразу же полностью изменила характер соответствующих разделов журнала (и даже само название «гарднеровской» рубрики). ◆

Юбилей Гарднера его друзья и поклонники решили ознаменовать изданием сборника посвященных ему статей. В 1983 г. издательство «Мир» должно выпустить русский перевод этого сборника. К сожалению, принятое издательством название «Математический цветник» не передает игру слов оригинального названия "The Mathematical Gardner", обыгрывающего сходство фамилии Gardner с английским словом gardener («садовник»).

Среди авторов сборника — американцы, канадцы, англичане, голландцы, французы; это — поистине плод международного сотрудничества математиков, выразивших таким образом уважение и признательность человеку, так много сделавшему для популяризации их наукн.

Среди авторов — один из патриархов современной геометрии канадец Гарольд Скотт Макдональд Коксетер (его статья «Ангелы и демоны» посвящена математическому анализу некоторых произведений Эшера) и видный специалист по теории кодирования и комбинаторике С. Голомб (читателям «Кванта» он может быть известен по книге «Полимино» (М., «Мир», 1975)).

Сборник разбит на 6 разделов: «Игры», «Геометрия», «Плоские мозаики», «Пространственные мозаики», «Забавы и задачи», «Числа и теория кодирования».

В качестве примера статьи из раздела «Игры» можно указать на разбор игры «Кригсшпиль» (в переводе с немецкого — «Военная игра»), представляющей собой «гибрид» шахмат и «морского боя»: двое противников ведут игру за своими шахматными досками и по обычным правилам, но ни одни из них не знает ни ходов, ни расположения фигур другого (и то, и другое известно «посреднику», который предупреждает, если тот или иной ход является невозможным, и сообщает игрокам другую минимально необходимую информацию); в рассматриваемой статье речь идет о том, можно ли при таких условиях с помощью короля и ладьи заматовать одинокого короля противника.

В разделе «Плоские мозаики» обращает на себя внимание большая статья редактора американского научно-популярного математического журнала "Mathematics Magazine" («Математический журнал») Дорис Шаттшнейдер, содержащая инспирированную Гарднером драматическую — и еще, как будто, не завершенную — историю поисков всех типов выпуклых пятиугольников, которыми можно, без пробелов и перекрытий, замостить плоскость. Дело в том, что, как легко видеть (докажите это сами!), плоскость можно замостить одинаковыми копиями треугольника и (выпуклого или невыпуклого) четырехугольника любого вида; с другой стороны, несложные соображения, связанные с подсчетом углов (попытайтесь-ка их найти!), доказывают, что плоскость нельзя замостить (одинаковыми или различными) выпуклыми многоугольниками, имеющими >6 сторон, если хоть один из этих многоугольников имеет больше 6 сторон*). Три типа выпуклых шестиугольников, которыми можно замостить плоскость, найти совсем несложно (может быть, и это вам удастся сделать самостоятельно), а вот вопрос о пятиугольниках ... Продолжением статьи Д. Шаттшнейдер служит обзор известных математиков Б. Грюнбаума (США) и Г. К. Шепарда (Англия) «Несколько проблем, связанных с плоскими мозаиками» — и эти проблемы (их в статье ровно дюжина) настолько интересны, что я просто не могу выбрать для вас какую-то одну из них!

Немало свежего материала содержит и раздел «Пространственные мозаики» — так, например, здесь рассказывается об использовании задач об укладке квадратов на плоскости и кубов в пространстве для вывода и доказательства алгебраических неравенств. Разделы «Плоские мозаики» и «Пространственные мозаики» кажутся мне самыми интересными в книге.

В заключение — несколько задач из «Математического цветника»:

1. Радиусы трех попарно касающихся друг друга внешним образом окружностей, имеющих общую внешнюю касательную, равны a, b и c ($a>b>c$). Докажите, что $\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}=\frac{1}{\sqrt{c}}$.

2. На плоскости расположены p точек, никакие 4 из которых не лежат на одной прямой. Чему равно наибольшее возможное число $l(p)$ прямых, содержащих 3 из этих точек, при $p=3$, 4, 5, ..., 11?

3. Две плоские фигуры (два пространственных тела) F_1 и F_2 называются *равновеликими по Кавальери*, если существует такая прямая l (плоскость π), что любая параллельная l прямая (параллельная π плоскость) пересекает F_1 и F_2 по отрезкам s_1 и s_2 одинаковой длины (по фигурам S_1 и S_2 одинаковой площади). Существует ли

а) многоугольник M, равновеликий по Кавальери кругу K?

б) многогранник P, равновеликий по Кавальери шару Σ?

4. В каком случае прямоугольник размера $p\times q$ (где p и q — целые числа) можно покрыть (неперекрывающимися) костями домино размера 2×1 так, что внутри прямоугольника не найдется параллельной его сторонам

*) Курт Гёдель (1906—1978) — знаменитый «математический логик» (родился в Австро-Венгрии, с 1940 г. жил в США). Морис Корнелис Эшер (1898—1971) — известный голландский художник, «математический график».

*) Однако (вот вам еще одна несложная, но интересная задача!) для любого $n>3$ можно указать невыпуклый n-угольник, копиями которого можно замостить плоскость (для $n=9$ см. «Квант», 1980, № 2, с. 25).

прямой, разбивающей прямоугольник на 2 меньших прямоугольника, тоже покрытых костями домино?

5. Пятикилометровый рельс закреплен в своих концевых точках. Летом из-за сильной жары длина рельса увеличилась на 2 м. На какую, по порядку величины, высоту поднялась средняя точка рельса в результате его «вспучивания»? (Задачу следует решить «в уме».)

6. Двое играют в следующую игру: первый задумывает 5 натуральных чисел x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, меньших 100, а второй «предъявляет» сопернику пятерки чисел a_1, a_2, a_3, a_4, a_5; b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 и т. д., после чего ему сообщаются суммы $a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3+a_4x_4+a_5x_5$, $b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3+b_4x_4+b_5x_5$ и т. д. Ясно, что за 5 «ходов» второй игрок всегда может определить загаданные числа, решив соответствующую систему 5 уравнений с 5 неизвестными. А какое наименьшее число «ходов» достаточно сделать второму игроку, чтобы определить загаданные числа?

7. Картинная галерея в плане представляет собой (не обязательно выпуклый) n-угольник. Докажите, что

а) внутри галереи всегда можно расположить $\left[\frac{n}{3}\right]$ сторожей так, чтобы они могли обозреть все стены;

б) существуют такие галереи, в которых нельзя расположить таким образом меньшее число сторожей.

Приложение

Книги и статьи Гарднера, имеющиеся на русском языке

1. «Математические головоломки и развлечения» (М., «Мир», 1971).
2. «Математические досуги» (М., «Мир», 1972).
3. «Математические новеллы» (М., «Мир», 1974).
4. «Математические чудеса и тайны» (М., «Наука», 1977).
5. «Есть идея!» (М., «Мир» 1982).
6. «Этот правый, левый мир» (М., «Мир», 1967).
7. «Теория относительности для миллионов» (М., «Атомиздат», 1979).

И. Е. Тамм — человек и ученый

Доктор физико-математических наук
Б. М. БОЛОТОВСКИЙ

Нередко бывает так, что физические законы и явления носят имена ученых — первооткрывателей: законы Ньютона и кольца Ньютона, закон Ома, законы Фарадея, эффект Мёссбауэра... А что мы знаем о людях, именами которых названы эти законы и явления? Каков их вклад в развитие науки? Какую научную смену они себе подготовили? Какими человеческими качествами они обладали?

На большую часть этих и подобных вопросов ответа в учебниках не найти. И тем, кто интересуется физикой, особенно полезно читать книги, рассказывающие о жизни и творчестве ученых. Эти книги расширяют наше знание физики, потому что мы получаем представление о ходе развития науки (в учебниках, как правило, дается лишь результат развития). Но, может быть, еще важнее то, что они знакомят нас с личностью ученого.

Недавно в издательстве «Наука» вышла книга воспоминаний о выдающемся советском ученом И. Е. Тамме. *)

Игорь Евгеньевич Тамм (1895—1971) — физик-теоретик, академик АН СССР, лауреат Государственных премий СССР, лауреат Нобелевской премии. Круг его научных интересов широк: классическая электродинамика, электронная теория, квантовая теория твердых тел, ядерная физика, физика элементарных частиц ... И. Е. Тамм — автор плодотворных физических теорий. С его именем связан ряд важных открытий. Например, он открыл существование таких состояний электронов на поверхности твердого тела, когда электроны как бы «привязаны» к поверхности: они не могут уйти ни внутрь тела, ни наружу. Эти состояния получили название «Таммовские поверхностные состояния». Они играют большую роль в физике твердого тела.

Более тридцати статей помещено в книге о И. Е. Тамме. Пишут его сотрудники, друзья, пишут его ученики (ныне — известные советские ученые), ученики его учеников, пишут товарищи по летним походам и даже люди, которые его видели только несколько раз. Пишут о том, какое удивительное, радостное и неизгладимое впечатление произвел на них Игорь Евгеньевич, какой он был замечательный человек, как действовал на окружающих своим примером. Авторы воспоминаний — не писатели-профессионалы. Нужна была важная причина для того, чтобы каждый из них взялся за перо. Эта причина у всех авторов одна — глубокое уважение и любовь к Игорю Евгеньевичу.

Прочитайте книгу воспоминаний и вы увидите, что в целом она получилась интересная и полезная.

*) Воспоминания о И. Е. Тамме (М., «Наука», 1981).

Задачи-оценки

1. $\Delta p \sim 2/3 \varrho_{\text{вод}} g H \sim 3 \cdot 10^7$ Па (здесь учтено, что океан занимает две трети поверхности Земли и что средняя глубина океана H порядка 4 км).

2. $\varrho_{\text{возд}} v^2 S \sim mg$, откуда $v \sim (mg/(\pi R^2 \varrho_{\text{возд}}))^{1/2} \sim$ ~ 5 м/с (при $m \sim 100$ кг и $R \sim 3$ м).

3. $\varrho_C = \dfrac{M_C}{V_C} = \dfrac{24\pi}{GT^2}\left(\dfrac{D_C}{r}\right)^{-3} \sim 10^3$ кг/м$^3 \sim$ ~ 1 г/см^3 (здесь $D_C/r \sim 0{,}01$ — угловой размер Солнца, $T \sim 3 \cdot 10^7$ с — период обращения Земли вокруг Солнца).

4. $n \sim \sqrt{2gH}/\pi v \sim 1{,}5$ (при $v \sim 30$ м/с). Указание. За время перемещения на длину кузова l центр тяжести машины приобретет вертикальную скорость $v_ц \sim gl/v$, или угловую скорость $\omega \sim v_ц/l/2 \sim 2g/v$. Тогда число оборотов автомобиля $n \sim t\omega/2\pi \sim \sqrt{2gH}/\pi v$.

5. $Fl \sim mv^2/2 \sim mgL/2$; следовательно, $F \sim$ $\sim mgL/(2l) \sim 800$ Н (для $m \sim 8$ кг, $L \sim 20$ м, $l \sim 1$ м).

6. $F \cdot R \sim mg \cdot 2R$, где R — радиус зубчатого колеса, $2R$ — расстояние от его оси до педали, mg — вес человека, то есть сила давления на педаль; отсюда $F \sim 2mg \sim 1400$ Н (при $m \sim 70$ кг).

7. $mv \sim Ft$, или $\varrho \cdot 4/3\pi r^3 \cdot v \sim p \cdot \pi r^2 \cdot r/v$; тогда $v \sim (p/\varrho)^{1/2} \sim 30$ м/с.

8. $F = ma \sim mv^2/(2s) \sim 7 \cdot 10^3$ Н (при $m \sim$ ~ 60 кг).

9. Согласно закону Паскаля, давление в центре Земли, создаваемое «столбами» от полюса до центра (высотой $R_3 - x$) и от экватора до центра (высотой R_3) должны быть равны. Учитывая, что ускорение свободного падения на полюсе равно g, а на экваторе $g - \omega^2 R_3$, имеем

$$\varrho \frac{g}{2}(R_3 - x) \sim \varrho \frac{g - \omega^2 R_3}{2} R_3 .$$

Отсюда для разности уровней мирового океана получаем

$$x \sim \frac{(\omega R_3)^2}{g} = \left(\frac{2\pi R_3}{T}\right)^2 \frac{1}{g} \sim 20 \text{ км}$$

(здесь T — это одни сутки).

10. Пусть d — средний диаметр стволов и l — среднее расстояние между деревьями. Мысленно сместим деревья от наблюдателя так, чтобы стволы образовали сплошной круговой забор, радиус которого равен искомому расстоянию x. За таким забором человека не будет видно ниоткуда. В заборе длиной $2\pi x$ окажется примерно $2\pi x/d$ деревьев, которые были «сдвинуты» с площади πx^2. Если на площадь $\sim l^2$ приходится в среднем одно дерево, то на площади πx^2 их будет $\pi x^2/l^2$. Таким образом,

$$2\pi x/d \sim \pi x^2/l^2,$$

откуда, положив $l \sim 3$ м и $d \sim 0{,}2$ м, получаем

$$x \sim 2l^2/d \sim 100 \text{ м}.$$

Мартин Гарднер и "The Mathematical Gardner"

1. Указание. Спроектируйте центры окружностей на их общую касательную и воспользуйтесь равенством большего из трех полученных отрезков сумме двух других.

2. 1, 1, 2, 4, 6, 7, 10, 12, 16. Замечание. Кроме указанных, известны еще только значения $l(p)$ при $p = 12$ и $p = 16$.

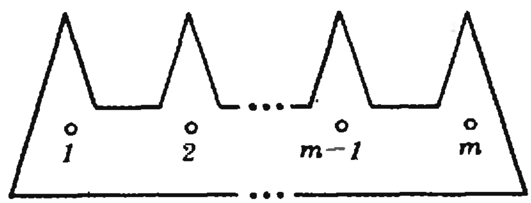
3. а) Нет; б) Да.

4. Если pq четно, $p > 5$, $q > 5$ и по крайней мере одно из чисел p, q отлично от 6.

5. ≈ 70 м. (Ожидали вы такого ответа?)

6. 1.

7. а) Указание. Воспользуйтесь методом математической индукции по n; б) Указание. См. рисунок.



Избушка на курьих ножках

(см. с. 32)

Вопрос 1. Спички любого слоя прижаты к спичкам сцепленного с ним слоя силой давления со стороны каких-то других слоев. Существование этого давления возможно благодаря трению между сцепленными слоями. Для устойчивости необходимо, чтобы сила давления, которую должен развивать слой, не превосходила максимальной силы трения, возможной в данном слое. Ввиду симметрии будем считать силы давления между парами сцепленных спичек и силы трения между ними одинаковыми для всех спичек и равными, соответственно, P и $F_{тр}$ (равенство сил давления вдоль одного ребра следует из условия равновесия). Пусть в слое N спичек (мы пренебрегаем тем, что в разных слоях несколько различное число спичек). Спички одного слоя соприкасаются со сцепленными спичками в $4N-2$ местах, поэтому суммарная сила трения для одного слоя $F_1 = (4N-2)F_{тр}$. Рассмотрим четыре взаимно сцепленных слоя, например слои из горизонтальных спичек стен. На них сверху и снизу давят пол и потолок. Легко видеть, что сила этого давления равна $2F_1$. Она уравновешивается четырьмя силами P, действующими на две верхние (или нижние) спички стен. Отсюда $P = \dfrac{1}{2}F_1 = (2N-1)F_{тр}$. Условие устойчивости $F_{тр} < \mu \cdot P = (2N-1)\mu \cdot F_{тр}$, где μ — коэффициент трения. Преобразуя, находим $(2N-1)\mu > 1$, $2N-1 > \dfrac{1}{\mu}$, $N > \dfrac{1}{2\mu} + \dfrac{1}{2}$. Принимая для дерева $\mu = 0{,}25 \div 0{,}5$, получаем $N > 2 \div 3$. Практически построить каркас из минимального числа спичек ($N=2\div3$) крайне трудно, поскольку для этого надо, чтобы все спички были одинаковы и прижаты с одинаковой силой. Куб с $N=6\div8$, который можно построить из обычных спичек, имеет достаточно большой запас прочности.

Вопрос 2. 3/4. Весь куб состоит из трех одинаковых систем параллельных спичек, каждая из которых, как легко видеть, занимает 1/4 объема куба.

Еще одно определение равногранного тетраэдра?
(см. с. 51)

Нет, не обязан. Пример нам сообщил ученик 10-го класса ФМШ № 18 при МГУ А. Семенов. Оказывается, при данной длине боковой стороны существуют, вообще говоря, два равнобедренных треугольника с одним и тем же радиусом вписанной окружности, причем оба они могут быть остроугольными; «пары» нет только у правильного треугольника (для доказательства изучите зависимость радиуса вписанной окружности от длины боковой стороны и угла при основании). Пусть в тетраэдре $ABCD$ грани ABC и ABD конгруэнтны одному из таких двух треугольников, а CDA и CDB — другому, так что $|AC|=|CB|=|BD|=|DA|$. Тогда, очевидно, $ABCD$ — неравногранный тетраэдр, удовлетворяющий нужному свойству.

Раскраска плоскости и теорема Ван дер Вардена о прогрессиях
(см. «Квант» № 6)

3. Зафиксируем произвольное разбиение натурального ряда на N классов. Теперь перейдем к координатной плоскости, разбитой на клетки (начало координат поставим в центре какой-нибудь клетки, а оси проведем параллельно осям клетчатой бумаги). Покрасим клетки первого координатного угла следующим образом: клетку с центром (i, j), где i и j — натуральные числа, покрасим в цвет, номер которого совпадает с номером класса разбиения натурального ряда, в котором находится число $2^i\cdot j$. Из теоремы о раскраске (для некоторого прямоугольника) следует, что найдутся одноцветные клетки с координатами $(a+bi, c+bj)$, где i и $j=1, 2, \ldots, n$. Им соответствуют натуральные числа $2^{a+bi}(c+bj)$, $i=1, 2, \ldots, n$, $j=1, 2, \ldots, n$, из одного класса разбиения, которые образуют n арифметических прогрессий, с первыми членами $2^{a+bi}(c+b)$, образующими геометрическую прогрессию длины n.

4. Решим сразу задачу в). Нужное разбиение образуют множества A — объединение интервалов натурального ряда вида $(2n-1)!<a<(2n)!$ и B — объединение интервалов $(2n!)<b<(2n+1)!$.

Дом, который построил...
(см. «Квант» № 6)

Прежде всего постараемся четко сформулировать задачу. Внимательно присмотревшись к самовару, нетрудно заметить, что крышка, из-под которой шел пар, и кран, из которого вытекала холодная вода, находятся на разных уровнях. Значит, в верхней части самовара вода горячая, а в нижней — холодная. Возникает естественный вопрос: можно ли нагреть воду таким образом, чтобы вверху она была горячей, а внизу холодной? Вот мы и сформулировали задачу. Теперь постараемся решить ее.

В школьном учебнике для 6—7 классов на странице 142 описан опыт, в котором вода в пробирке нагревается вверху, оставаясь холодной внизу, если пробирка подогревается только в верхней части. Это происходит вследствие плохой теплопроводности воды и невозможности конвекции при таком способе нагревания. Очевидно, и в самоваре по какой-то причине вода нагревалась только сверху. Поскольку самовар углевой, можно предположить, что почему-либо нижние угли не разогрелись, а горели только верхние.

Задача — шутка
(см. «Квант» № 6)

У человека уши расположены выше рта, поэтому путь звуковой волны от верхнего крикуна к нижнему короче, чем путь от нижнего к верхнему, значит, нижний услышит верхнего раньше, чем верхний нижнего.

Этот ответ производит неизгладимое впечатление на специалистов по теории гравитации, особенно после того, как они затратят несколько часов на расчет взаимодействия звуковой волны с неоднородным гравитационным полем. Из состояния, в которое они после этого впадают, их можно вывести с помощью легкого постукивания по спине.

Четвертая страница обложки
(см. «Квант» № 6)

Пятнадцать кубов собираются из следующих пар: 1 — *д*, 2 — *ж*, 2 — *п*, 4 — *г*, 5 — *з*, 6 — *к*, 7 — *б*, 8 — *а*, 9 — *в*, 10 — *и*, 11 — *н*, 12 — *е*, 13 — *о*, 14 — *м*, 15 — *л*.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 5)

1. Книга стоит два рубля.

2. Обозначим число, стоящее в верхнем кружочке, через x, а сумму тройки чисел на каждом «отрезке» через y. Сумма этих сумм по всем «отрезкам» равна $5y$, при этом каждое из чисел в кружочках входит в эту сумму по два раза, кроме числа x, которое входит три раза. Отсюда $5y=2(1+2+3+4+5+6+7)+x$, или $5y=56+x$. Если же мы сложим числа лишь по горизонтальным «отрезкам», то получим сумму шести чисел из семи, то есть $28-x$. Отсюда $2y=28-x$. Сложив полученные уравнения, получим $7y=84$, откуда $y=12$ и $x=4$. Остальные числа могут быть расставлены 12 способами. Одна из расстановок такова: во второй строке стоят числа 1, 2, 5, а в третьей 7, 6, 3.

3. На 48. Каждое из чисел делится на 2, по крайней мере одно число делится на 4 и хотя бы одно число делится на 3. То, что не существует большего числа, показывает пример: $2\cdot4\cdot6=48$.

4. Первый выигрывает. Для этого ему нужно поставить «крестик» в центре. Тогда противник обязан ставить «нулик» (иначе он проигрывает на следующем ходу); после этого первый игрок выиграет, поставив симметричный (относительно центра) «нулик».

5. Комочки грязи, попадая на сухое стекло, образуют на нем небольшие загрязнен-ные участки (грязь не расползается). С ростом их числа видимость постепенно ухудшается, но не так быстро, как при попадании грязи на мокрое стекло: по мокрому стеклу комочки сразу растекаются из-за сил смачивания, образуя крупные «кляксы». За значительно меньший промежуток времени «кляксы» покрывают все стекло.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 4)

1. Да, может. 31 декабря Саше исполнилось 11 лет, а разговор происходил на следующий день, 1 января.

2. Один угол — прямой, остальные два равны 45°. Пусть h_a и h_b — рассматриваемые высоты и $h_a \leqslant h_b$. По условию $a \leqslant h_a$. Но $h_b \leqslant a$ (так как перпендикуляр не длиннее наклонной, проведенной из той же точки к прямой). Отсюда $a \leqslant h_a \leqslant h_b \leqslant a$, следовательно, $a = h_a = h_b = b$ и треугольник ABC является равнобедренным и прямоугольным.

3. Поскольку каждый раз вдвое уменьшается плечо рычага, то необходимо прикладывать вдвое бо́льшую силу.

4. 13 824 и 15 625. По условию задачи $10\,000a + 1000b + 100c + 10d + e = (10d + e)^3$. Это условие можно переписать в виде $100(100a + 10b + c) = (10d + e + 1)(10d + e)(10d + e - 1)$. Три множителя в правой части этого равенства — последовательные числа. На 5 может делиться только один из них, который поэтому должен делиться сразу на 25. Рассмотрим все случаи. Если первый множитель равен 25, то такое число существует и равно 13 824. Если второй множитель равен 25, то число также существует и равно 15 625, если третий множитель равен 25, то произведение справа равно $27 \cdot 26 \cdot 25$ и не делится на 4, а 100 делится на 4. Если же множитель, который делится на 25, больше, чем 25, то есть равен 50 или 75, то произведение будет не меньше чем $50 \cdot 49 \cdot 48 = 117\,600$, то есть не менее чем шестизначным.

5. Каждое число, начиная со второго, равно сумме удвоенного числа десятков и утроенного числа единиц предыдущего числа. Вместо знака ? нужно поставить число 5. Заметим, что могут быть и другие способы образования подобной последовательности и тогда число ? будет другим.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 3, 4)

Задание 5. Трехходовка, в которой в форме миниатюры осуществляется так называемая индийская тема. **1. Са7 d6 2. Крb6 Крd4 3. Крс6×.**

Задание 6. Первый ход решения не бросается в глаза: **1. Kd3!** Теперь возможно несколько вариантов: 1... Кр:с4 2. Се6×, 1...Кр:е4 2. Сс6×, 1...К:с4 2. Ф:b7×, 1...К:е4 2. Фg8×, 1...bc 2. Ле5×, 1...fe 2. Лс5×. Во всех остальных случаях следует 2. Ле:d4×.

Задание 7. 1. Лd8 Крf6 2. Лg8 е6 3. Кd6 Крe7 4. Кc8+ Крf6 5. Лg6×. Начальная буква «Т» трансформировалась в букву «Г».

Задание 8. 1. Крg7! Черные в цугцванге. 1...Ф:b4 (Ф:а2) 2. Фе3×, 1...Ф:d2 (Ф:b1) 2. Фс5×, 1...Кр:b4 2. Фа5×, 1...Кр:d2 2. Фе1×.

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1.
«Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 19.5.83. Подписано к печати 17.6.83.
Т-14239 Формат 70×108 1/16. Печать офсетная.
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 7,08 Тираж 165 920 экз.
Заказ № 1294 Цена 40 коп.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Е. Карпов. Ведет страничку кандидат технических наук, мастер спорта СССР по шахматам Е. Я. Гик.

ХРОМАТИЧЕСКИЕ ЧИСЛА

Сегодня мы рассмотрим следующую задачу: *какое наименьшее число красок требуется для раскраски доски $n\times n$, при которой любые два поля, связанные ходом данной фигуры, окрашены в разные цвета?*

Эту задачу можно в общем виде сформулировать на языке теории графов. Напомним, что *граф* задается множеством точек (вершин графа) и множеством некоторых пар таких вершин (ребер графа). Например, можно в центре каждого поля шахматной доски поставить точку — это будут вершины графа, а затем соединить отрезками (или просто линиями, чтобы избежать пересечений с другими вершинами) пары точек на тех полях, с которых можно попасть друг на друга, скажем, ходом коня. Это и будут ребра графа.

Мы получили *граф коня*. Постройте его на листе бумаги в клетку и посмотрите, сколько ребер выходит из каждой вершины (получатся числа от 2 до 8).

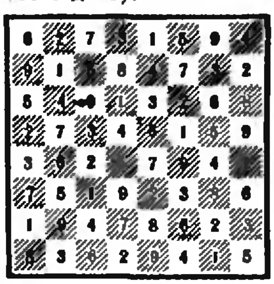
Теперь займемся раскрасками. Граф называется k-раскрашиваемым, если можно так окрасить каждую его вершину одной из k красок, что каждые две вершины, соединенные ребром, окрашены в разные цвета. Наименьшее из таких чисел k называется *хроматическим числом* данного графа.

Каково же хроматическое число графа коня? Очевидно, оно равно двум. Собственно, здесь и раскрашивать нечего, годится обычная черно-белая доска — ведь конь после каждого хода меняет цвет поля, на котором стоит, а на доске 1×1 или 2×2 хватит и одной краски.

В случае слонов и ладей для раскраски обычной доски надо ровно восемь красок, а для раскраски доски $n\times n$ — n красок. В графе слона каждую вертикаль можно окрасить в свой цвет. В графе ладьи все поля первой горизонтали окрасим в разные цвета, а для раскраски последующих горизонталей будем сдвигать цвета на один вправо. Другими словами, если краски занумеровать, то окраска первой горизонтали обычной доски — 1, 2, ..., 8; второй — 2, 3, ..., 8, 1; третьей — 3, 4, ..., 8, 1, 2 и т. д.

Переходя к королям, заметим, что для них все четыре поля произвольного квадрата 2×2 должны быть окрашены в разные цвета. Оказывается, четырех красок хватает и для любой доски $n\times n$ (при $n=1$ — одна краска). Левый нижний квадрат 2×2 можно раскрасить произвольно в четыре цвета, затем перенести его раскраску на соседние квадраты 2×2 и т. д.

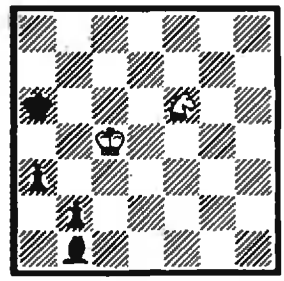
На следующем рисунке показана раскраска обычной шахматной доски для ферзей (краски занумерованы числами от 1 до 9).



Действительно, здесь никакие два одинаковых числа не стоят на одной вертикали, горизонтали и диагонали. Восьми красок для раскраски доски с ферзями не хватает (представляем вам это доказать самостоятельно). В общем случае доказано, что доску $n\times n$ можно раскрасить в $n+3$ цвета так, что ферзи, стоящие на полях одного цвета, не угрожают друг другу. Для некоторых n достаточно и меньшего числа красок: n, $n+1$ или $n+2$. Существует гипотеза, что хроматическое число графа ферзя при любом $n>3$ равно либо n, либо $n+1$.

Графы, которые мы рассматривали, называются *неориентированными* — на их ребрах не выделено направления (поскольку фигуры могут ходить и вперед, и назад). А вот в графе пешки вершины надо соединять направленными отрезками (линиями со стрелкой), так как пешки ходить назад не могут. Такой граф называется *ориентированным*. Легко убедиться, что хроматическое число графа пешки равно двум (при $n>1$).

Приведем теперь один этюд с «цветным» содержанием.



С. Белоконь, 1972 г.
Ничья.

Доска имеет размеры 7×7, и это не случайно — этюд был составлен специально для конкурса «Спортлото». Шесть фигур на 49-клеточной доске символизируют выбор шести счастливых номеров из 49 возможных! Специфика доски проявляется и в решении: **1. Крb3 Cd3! 2. Кс4+ С:с4+ 3. Кр:а3 b1К+!** (3...b1Ф, Л пат) **4. Крb2 Cd3 5. Кра1!** Черным удалось сохранить обе легкие фигуры, но все углы доски черные, и при белопольном слоне поставить мат невозможно! (Мат слоном и конем ставится в том углу, какого цвета слон.)

Литература

1. *О. Оре.* «Теория графов» (М., «Наука», 1980).
2. *Ф. Харари.* «Теория графов» (М., «Мир», 1973).
3. «Квант», 1980, № 9; 1981, № 3.

Конкурсные задания

13. Белые: Крс3, Ch3, п. h2; черные: Крf2. Выигрыш.

14. Белые: Крh8, пп. g2, h3, h6; черные; Крf8, пп. g3, g5, h4. Ничья.

Срок отправки решений — 25 сентября 1983 г. с пометкой на конверте «Шахматный конкурс, задания 13, 14».

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Около трех лет понадобилось алжирскому умельцу Али Беннари, чтобы собрать из спичек макеты здания столичного главпочтамта, шестиэтажного здания в мавританском стиле, кафедрального собора и бейского дворца («Правда», 23 апреля 1983 г.).

В течение дня вы можете построить из спичек — без клея и без всяких крепежных приспособлений — «избушку на курьих ножках», фотографию которой вы здесь видите. Как это сделать, рассказывается в разделе «Наша обложка».