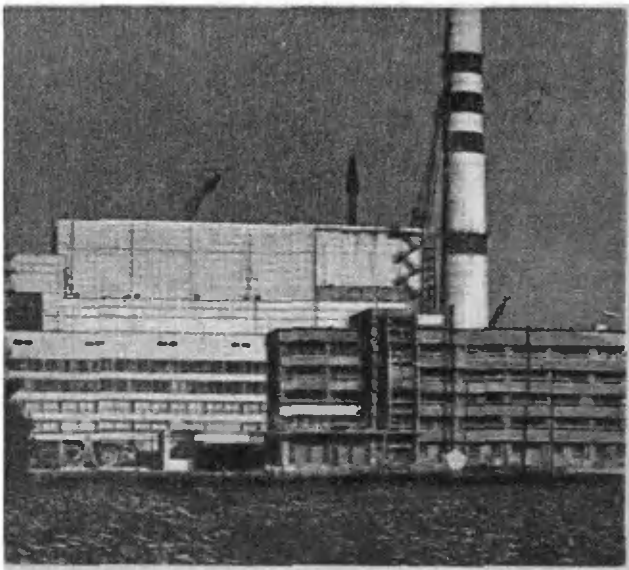
ISSN 0130-2221

Квант

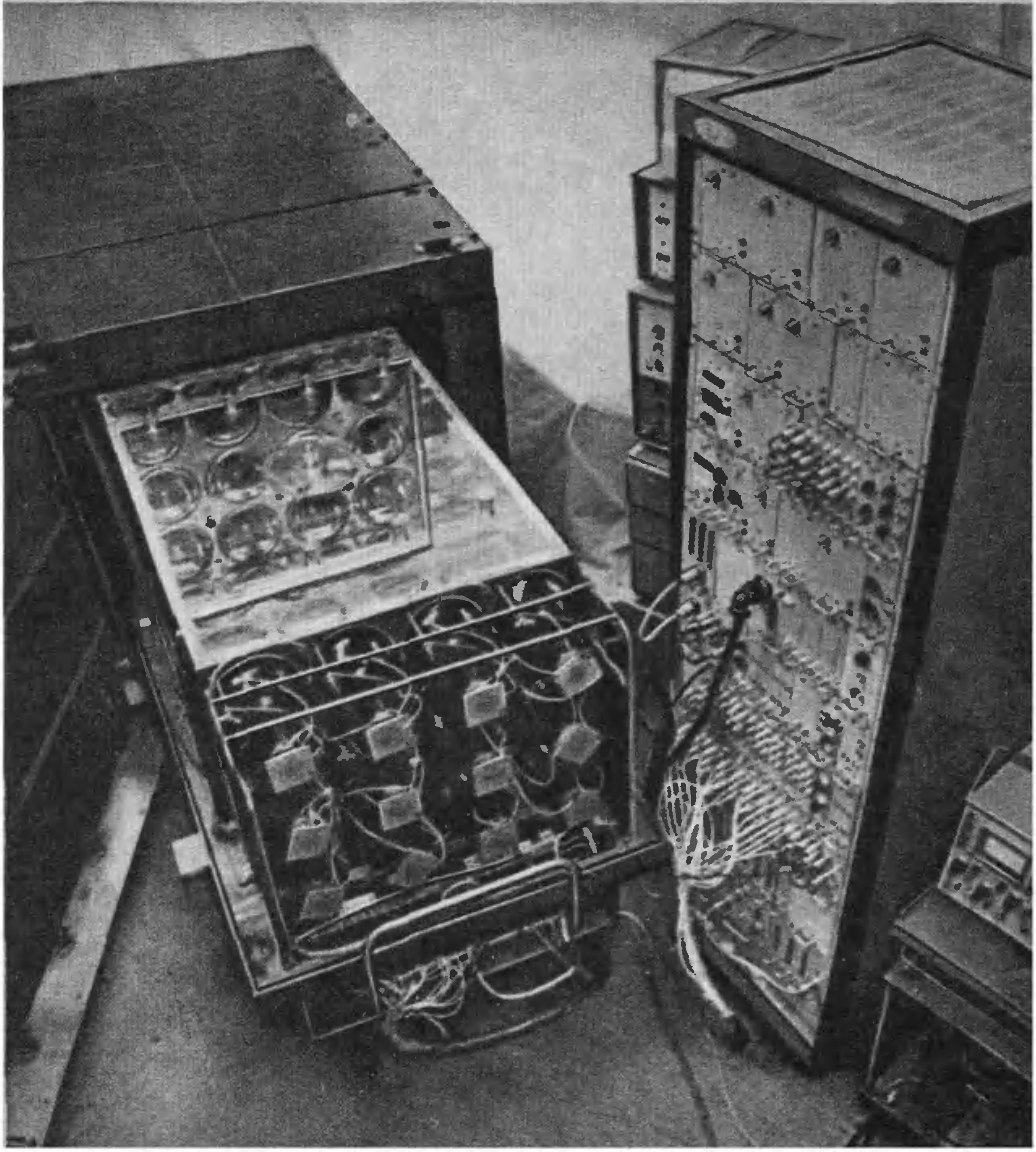
4
1983

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР



17 АПРЕЛЯ — ДЕНЬ СОВЕТСКОЙ НАУКИ

Верхнее фото — общий вид Ровенской атомной электростанции. Нижнее фото — нейтринный детектор. О том, как в нашей стране впервые были зарегистрированы нейтрино, рождающиеся внутри атомного реактора, рассказано в статье А. А. Боровою «Первая в мире нейтринная лаборатория на атомной электростанции».



Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

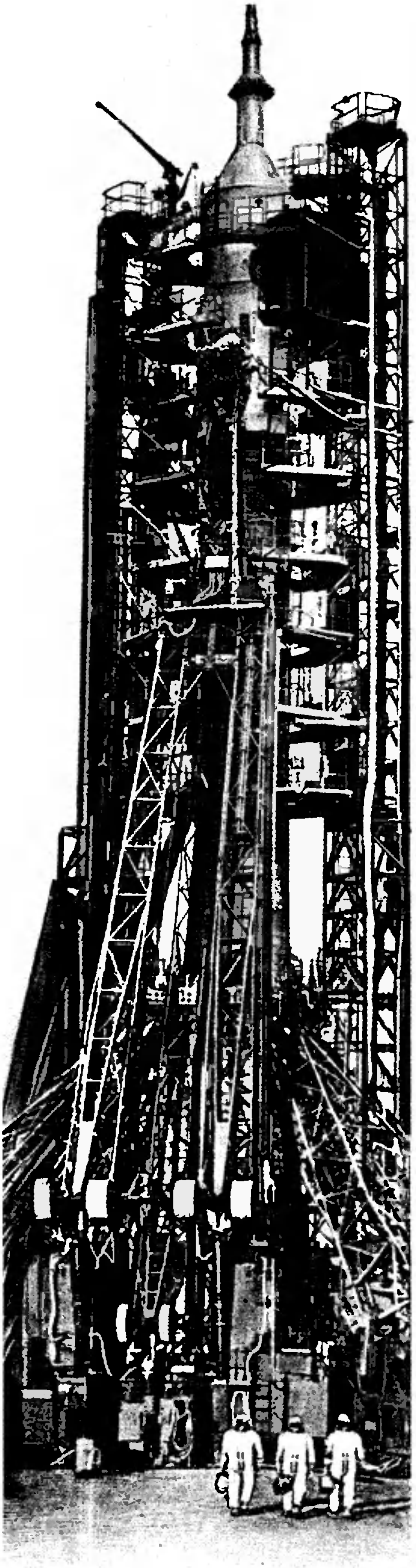
Квант

4 1983

Основан в 1970 году

Издательство „Наука". Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ: | **IN THIS ISSUE:**



Математика и технология в космосе

Доктор физико-математических наук
В. А. ВИНОКУРОВ,
доктор технических наук
Б. С. МИТИН

Возникновение авиации и космонавтики неразрывно связано с применением математики для анализа основных проблем полета, конструирования и расчета самолетов и ракет. Первый вопрос, остро обсуждавшийся на заре авиации в конце XIX-го и начале XX-го века — вопрос о том, могут ли летать аппараты тяжелее воздуха — был принципиально решен великим русским ученым, теоретиком авиации Н. Е. Жуковским. Чисто математическими методами (а именно, при помощи теории функции комплексной переменной) Жуковский вывел формулу для подъемной силы крыла:

$$F = \varrho v \Gamma$$

(здесь ϱ — плотность воздуха, v — скорость движения крыла, Γ — «циркуляция», некоторая величина, зависящая от формы профиля крыла).

Начиная с Жуковского, в теоретической авиации применяется самый современный математический аппарат, причем задачи, возникшие при анализе практических проблем авиации, послужили основой создания новых направлений математики.

Решение ряда ключевых проблем авиации связано с именами известных математиков и механиков нашей страны. Мы остановимся лишь на проблеме флаттера. Это явление было обнаружено в 30-х годах нашего века, когда стали строиться цельнометаллические самолеты со скоростью полета 200—300 км/ч. Оказалось, что при некотором критическом значении скорости возникала сильная вибрация самолета—*флаттер*, в результате которой самолет часто разрушался в полете. Тайной этого страшного для пилотов явления занимались авиаконструкторы многих стран. Решить проблему флаттера удалось советскому математику (впоследствии президенту Академии наук СССР) М. В. Келдышу. Он показал, что флаттер имеет резонансную природу, и, исходя из этого, предложил определенные изменения в конструкции крыла. Первые же полеты самолетов, усовершенствованных по рекомендациям Келдыша, дали прекрасные результаты.

Координаты в космическом полете

Еще более важную роль, чем при рождении авиации, сыграла математика для возникновения космонавтики. Теоретик космонавтики К. Э. Циолковский в своих доказательствах возможности полета к другим планетам и в проектах космических поездов постоянно использовал математику (см. «Квант», 1982, № 9, с. 12).

Кроме теоретического обоснования и расчета конструкции ракеты, математика необходима каждую секунду космического полета. Мы уже привыкли при сообщении о запуске очередного космического корабля слышать стандартную фразу: «Координационно-вычислительный центр ведет обработку поступающей информации». В основе обработки данных о траектории корабля лежит важное математическое понятие — система координат, придуманное в XVII веке великим французским математиком Р. Декартом («Геометрия 9—10», § 59).

Первое практическое применение системы координат, проведенное самим Декартом, носило не совсем мирный характер: на одной из лекций Декарта неизвестный слушатель постоянно стучал ногами; Декарт, не прерывая лекции, попросил ассистента пройти в подвальное помещение под аудиторией и провести измерения координат источника шума; вернувшийся ассистент отложил некоторое расстояние от одной стены аудитории и некоторое расстояние от другой стены — слушателя, сидевшего на пересечении воображаемых перпендикуляров, он попросил удалиться. Демонстрация практического значения прямоугольной системы координат получилась весьма убедительной.

Во многих случаях при движении ракеты, кроме трех координат ее центра масс, нужно знать еще три угла, задающие ее ориентацию относительно Земли. Возможность однозначного определения положения тела в пространстве с помощью конечного набора (шести) чисел позволяет все операции по управлению полетом и предсказанию положения ракеты в пространстве сводить к математическим действиям. Таким образом, математика становится основным инструментом управления движения ракет.

Компьютерная революция и космос

Известно, что в настоящее время летчики-истребители, летающие на наиболее быстрых самолетах, проходят тщательный отбор и медицинский контроль. Они должны иметь безупречное здоровье и идеальные психические реакции. Современный истребитель может развивать скорость, в четыре раза превышающую скорость звука, то есть более 1200 метров в секунду. Так как время реакции человека порядка 0,1 секунды, за время реакции пилота самолет успевает пролететь расстояние в 120 метров. Прежде чем пилот примет решение, ситуация в воздухе может существенно измениться. Скорости космических объектов и ракет превосходят скорость звука более чем в 20 раз, поэтому время реакции человека создает при управлении полетом ракет «мертвую зону» порядка одного километра. Таким образом, человек в ряде ситуаций не в состоянии управлять непосредственно, как говорят «в реальном времени», полетом создаваемых им аппаратов. К счастью, человек столкнулся с этой трудностью тогда, когда уже было создано средство для ее преодоления.

Это средство — *микропроцессорная вычислительная техника*, мощные малогабаритные компьютеры на больших интегральных схемах, «думающие» достаточно быстро, чтобы управлять движением ракеты «в реальном времени». Современные самолеты, ракеты и космические корабли, да и многие другие новейшие технические устройства, оснащаются такими компьютерами. В этой связи стали говорить о «второй промышленной революции», или «компьютерной революции» (см. «Квант», 1983, № 2, с. 2).

Игра «в догонялки» для ракет

С помощью ЭВМ детская игра «в догонялки» поднялась на качественно новый уровень и потеряла свой безобидный характер. Ныне ракеты стали основным боевым средством против воздушных целей. При этом в случае, когда ракета применяется против другой ракеты или самолета, оснащенного компьютером и делающего защитные маневры, мы имеем игру «в догонялки» между двумя летающими компьютерами.

Оказалось, что математические задачи, возникающие при управлении движением одного или нескольких летающих объектов, имеют принципиально новый математический характер. Новая математическая теория решения таких задач была основана в работах советского математика академика Л. С. Понтрягина в 50-х годах и получила название «теория оптимального управления».

Как сделать ракету?

«Аэрокосмическая технология» — при звуке этих слов дрожит рука и учащается пульс даже у самого матерого шпиона.

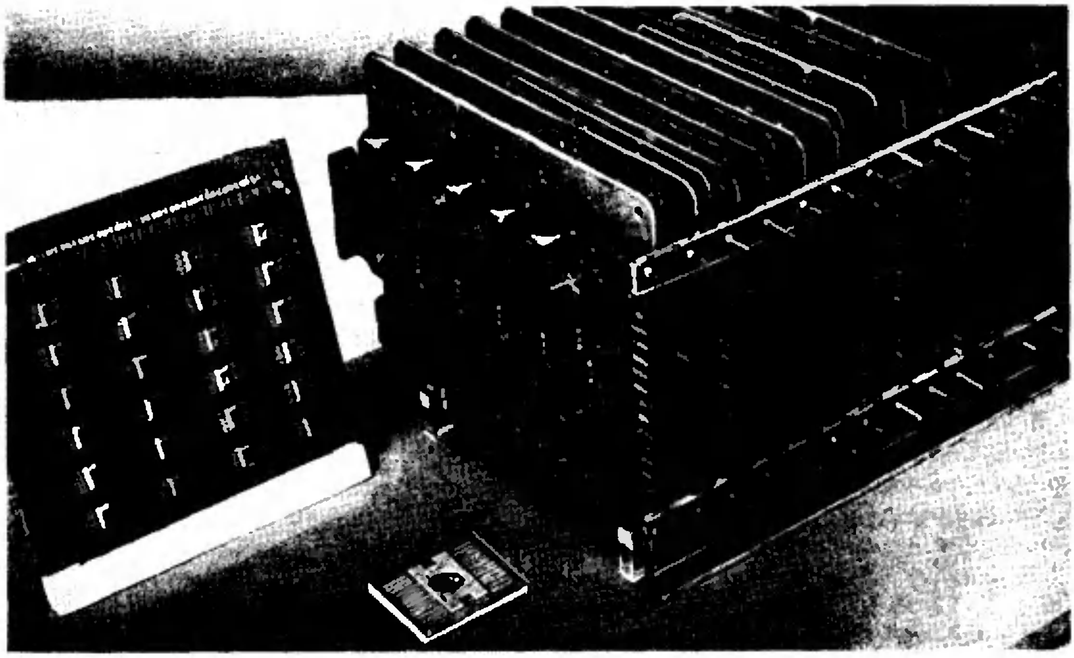
Гигантские потоки информации научного, социального, общественно-политического характера захлестывают земной шар, переполняют кабельные и радиорелейные линии связи и выплескиваются в космос. Всемирные системы спутниковой связи, спутникового теле- и радиовещания, космическая служба изучения и охраны природы — все это необходимо, все это важно для экономики, для науки, для техники, но как, как все это сделать?

«Как сделать авиалайнер?», «Как сделать ракету?», «Как сделать спутник?» — из каких материалов, какими операциями и на каких аппаратах — это и называется *технологией*. Самолет и космический корабль останутся фантазией, пока вы не знаете, из чего и как их можно построить. Уже в древнем Китае запускали небольшие ракеты на фейерверках, но для того, чтобы в космос поднялся Юрий Гагарин, нужен был принципиально более высокий уровень технологии. Поэтому взлет Гагарина — это взлет и триумф советской технологии, доказательство ее самого высокого мирового уровня.

И вновь требуется повторить, что так же, как конструирование и проектирование авиалайнеров и космических кораблей базируется на математическом расчете и законах физики, так и технология их производства базируется на достижениях математики и физики. Производство элементов летательных аппаратов требует такой точности и такой степени организации производства, которые недостижимы без компьютерных систем управления и контроля за станками и технологическими линиями.

Сопло из порошка

Допустим, мы уже спроектировали ракету и уже знаем, какой формы должно быть сопло реактивного двигателя (см. «Квант», 1982, № 9). Но из какого материала его сделать? Требования к этому материалу — прочность и высочайшая температурная стойкость. Ведь струя газов, выходящая из сопла ракеты, имеет температуру 4000°C. При такой температуре железо, алюминий и большинство других маталлов плавятся.



Предпосылка выхода ЭВМ в космос — миниатюризация ее узлов. На фотографии показаны три варианта одного узла (регистра): на полупроводниках (60-е годы), на интегральных схемах (конец 60-х годов) и на одной большой интегральной схеме (70-е годы).

Кроме того, плазменная струя может оказывать и заметное физическое воздействие на стенки сопла, ведь сегодня плазменная горелка используется для резки самых прочных металлов и сплавов. Итак, материал сопла должен выдерживать температуру в 3000—4000°С и при этих температурах быть устойчивым к физическим воздействиям.

В природе практически отсутствуют материалы, которые в чистом виде могли бы удовлетворять этим условиям. Поэтому приходится использовать определенные физические принципы, чтобы охлаждать материал сопла во время горения топлива. Наиболее подходящим материалом является вольфрам, температура плавления которого равна 3400°С. Однако получить из него сопло сложного профиля и с достаточно тонкими (из соображения минимального веса) стенками традиционными методами металлообработки невозможно. Получить изделие путем отливки очень сложно, да и качество металла будет низким. Кроме того, даже если бы это и удалось, то вольфрам не смог бы работать, так как температура отходящих газов при горении некоторых видов современного топлива выше температуры его плавления.

И здесь на помощь приходит *порошковая металлургия* в сочетании с известными физическими принципами. Методом порошковой металлургии, который заключается в том, что в полость инструмента вы закладываете порошок металла, а затем подвергаете его давлению и спеканию, получается пористая структура изделия типа «пемзы». Затем эта «пемза» пропитывается медью (ее температура плавления всего 1083°С) и полученный материал кратковременно может работать, даже если температура отходящих газов будет около 4000°С. Парадокс? Отнюдь. Вспомните, когда вы в жаркий летний день выходите из речки на берег. Вам холодно. Почему? Вода, испаряясь, забирает у вас тепло и охлаждает тело. Так и здесь медь испаряется и охлаждает вольфрамовый каркас, а так как весь он пронизан каналами, наполненными медью, то она все время выступает на поверхность сопла и охлаждает его. А вот скорость охлаждения и время работы зависят от диаметра капилляров, состояния их поверхности, общей пористости и т. д. Расчет зависимости этих параметров от технологии приготовления является сложной математической задачей.

Коконы для горючего

Теперь, когда сопло, через которое истекает реактивная струя, изготовлено, нужно приготовить резервуары для горючего и окислителя. Требования к этим резервуарам — максимальная прочность и минимальная масса. Простейшее технологическое решение, которое приходит на ум, изготовить соответствующие баллоны из легкого и прочного сплава какого-либо из широко используемых в авиации металлов, например титана. Но так ли уж прочен титан? В каком смысле мы сравниваем прочность различных материалов? Разумеется, в относительном. Относительность здесь понимается в прямом смысле — отношение прочности к единице массы изделия. Оказалось, что металлы уступают новым материалам, введенным в обращение благодаря успехам химии и физики, — так называемым *композиционным материалам,* состоящим из объединения различных материалов с разными свойствами (например, металл и пластмассы, стекловолокно и пластмассы и т. д.).

Какое же это имеет отношение к производству ракет? Оказывается, некоторые детали ракеты, например баки для горючего и окислителя, а возможно, и детали корпуса, наматываются из нитей, то есть, грубо говоря, представляют из себя кокон такого же типа, как кокон шелкопряда. При этом, если основа нити делается из высокопрочных волокон, например углерода или стекловолокна, то по прочности соответствующая деталь в 3—5 раз превосходит изделие из титана такой же массы.

Новая технология производства высокопрочных деталей — *намотка* — при своем использовании потребовала решения целого ряда красивейших математических задач Предположим, что мы должны намоткой создать баллон в форме заданного выпуклого тела вращения. Возникает вопрос — по какой траектории должна наматываться нить для достижения заданной прочности всего изделия при минимальной массе? По любой ли траектории можно наматывать нить по заданной оправке? Оказывается, нет! Если коэффициент трения нити мал, что часто бывает, то, для того чтобы намотанное изделие далее сохраняло свою форму, необходимо, чтобы нить образовывала на поверхности геодезическую. *Геодезической линией* на заданной поверхности называют кривую наименьшей длины, соединяющую две точки поверхности. На выпуклой поверхности, чтобы получить геодезическую линию, соединяющую две заданные точки, нужно просто натянуть нить, соединяющую эти точки — нить пойдет по геодезической. Таким образом, проблема определения траектории наматываемой нити сразу же приводит нас к таким разделам математики, как вариационное исчисление и дифференциальная геометрия, изучающим вопросы нахождения наибольших и наименьших значений функции различной природы и строения поверхностей и кривых.

Технология намотки изделия данной формы представляет собой в конечном итоге программу компьютера, управляющего намоточным станком и преобразующего математически рассчитанную траекторию в реальное изделие.

Мы привели только два примера технологических задач производства ракеты, решение которых опирается на математику и физику сегодняшнего дня. Создание современной технологии производства космических кораблей — итог труда ученых и специалистов всех профилей, но тем не менее здесь основную роль играют именно специалисты по технологии — технологи, превращающие достижения научных и технических дисциплин в реальный космический корабль.

Уникальная лаборатория

Интервью
с летчиком-космонавтом СССР
А.А. Серебровым

*19 августа 1982 года в соответствии с программой исследования космического пространства в Советском Союзе был запущен космический корабль «Союз Т-7».
20 августа произошла стыковка корабля «Союз Т-7» с орбитальным комплексом «Салют-7» — «Союз Т-5», в околоземном космическом пространстве начал функционировать пилотируемый научно-исследовательский комплекс «Салют-7» — «Союз Т-5» — «Союз Т-7».
27 августа, после выполнения обширной программы научных исследований, экипаж корабля «Союз Т-7» благополучно возвратился на Землю.
Редакция «Кванта» встретилась с одним из участников этой экспедиции летчиком-космонавтом СССР Героем Советского Союза А. А. Серебровым и попросила его ответить на ряд вопросов, интересующих наших читателей.*

Александр Александрович, насколько нам известно, по образованию Вы — инженер-физик, окончили Московский физико-технический институт и долгое время работали в нем. Какая область физики Вам наиболее близка?

Основная моя специальность — термодинамика, исследование тепло- и массопереноса: экспериментальное изучение особенностей движения масс жидкостей и газов в заданных режимах температуры и давления *). Я принимал участие в работах по созданию станций «Салют-6» и «Салют-7». А некоторые результаты моих студенческих исследований «летают», обеспечивая необходимый тепловой режим «Союзов» и «Союзов-Т».

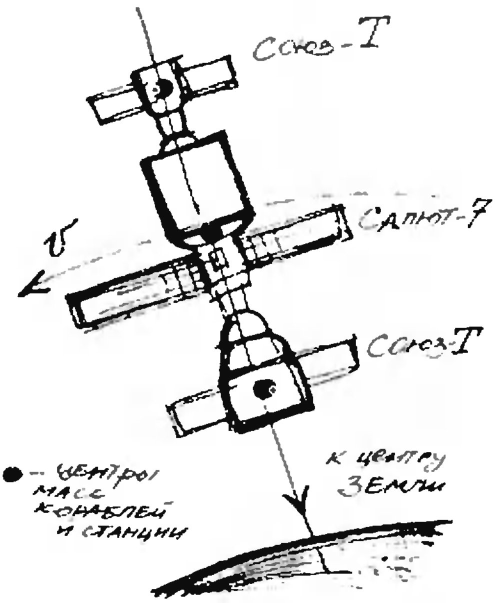
Ваше мнение, как физика, о долгосрочных полетах в космос.

Долговременные космические станции — уникальные физические лаборатории, позволяющие создавать условия, невоспроизводимые на Земле. В то же время, как физик я считаю, что прежде чем серьезно говорить о постановке научных физических экспериментов на станции, нужно изучить специфику корабля как лаборатории.

После выхода на орбиту станция со всем ее содержимым начинает почти свободно, если не считать торможения в атмосфере, «падать» на Землю, и это «падение» происходит на протяжении всего полета, пока не включены двигатели. Так что все на станции находится в состоянии невесомости. Однако, не все так просто, как мы читаем у фантастов. При движении корабля по орбите меняется его удаленность от Земли, что сказывается на величине силы тяготения, действующей на станцию. Разумеется, на величину силы тяготения влияет и неоднородность плотности Земли. Кроме того, корпус станции ощутимо вибрирует из-за непрерывной работы вентиляторов, без которых невозможно обеспечить и тепловой режим работы аппаратуры, и жизнедеятельность человека.

---

*) За работы в этой области авторскому коллективу, в который входил А. А. Серебров, в 1976 году была присуждена премия Ленинского комсомола.



Как во время полета ориентирована станция в пространстве? Сохраняет ли ось станции постоянное направление? Или она все время перпендикулярна направлению на Землю?

Космическая станция вместе с пристыкованным кораблем — это протяженный объект, основная масса которого сосредоточена в рабочем отсеке станции. Поэтому свободное положение станции устойчиво в том случае, когда ее ось направлена к центру Земли, подобно поплавку на воде. Это так называемая «гравитационная стабилизация». Из-за изменения силы тяготения при движении станции, из-за сопротивления атмосферы и несимметричности корпуса по отношению к направлению скорости движения по орбите ось станции не направлена точно к центру Земли, а совершает медленные колебания с амплитудой до $\sim 20°$. Колебания силы тяготения приводят также к изгибанию оси станции, которое заметно даже на глаз.

Вы упомянули о вибрации, вызываемой работой вентиляторов. Но ведь вентиляторы, видимо, можно выключать во время проведения тонких экспериментов, чтобы исключить вызываемую ими вибрацию корпуса?

В том-то и специфика станции, что даже нормальное дыхание человека здесь должно обеспечиваться специальной аппаратурой. Действительно, плотность воздуха, который мы выдыхаем, отличается от плотности окружающего воздуха, и на Земле он, в результате конвекции, отходит от нашего лица, уступая место свежему воздуху, который мы и вдыхаем. К этому человек привыкает с детства и никогда над этим не задумывается. Но в условиях невесомости конвекция отсутствует. Нормальные условия дыхания на космическом корабле обеспечиваются постоянной циркуляцией воздуха по станции, которая осуществляется непрерывно работающими вентиляторами.

Какие еще особенности станции как физического тела Вы хотели бы отметить?

Каждый из вас, очевидно, видел фотографии станции. В то же время, не многие смогут правильно ответить на вопрос, какова толщина стенок станции. На самом деле она невелика — около 2,5 мм по обшивке и $3 \div 4$ мм в ребрах жесткости. На станции могут возникнуть эффекты, отдаленно напоминающие те, которые наблюдаются в кнуте при резком встряхивании. Резкое встряхивание рукоятки кнута вызывает распространение по нему волны. По мере движения этой волны к концу кнута скорость нарастает, достигая сверхзвуковой (поэтому мы слышим громкий хлопок). Космическая станция с причаленным к ней кораблем представляет собой вытянутый объект, диаметр сечения которого убывает более чем в два раза от двигательного отсека к противоположному концу. При стыковке транспортных или грузовых кораблей со станцией могут возникать аналогичные эффекты. Поэтому нетрудно понять, насколько важно изучение этого вопроса.

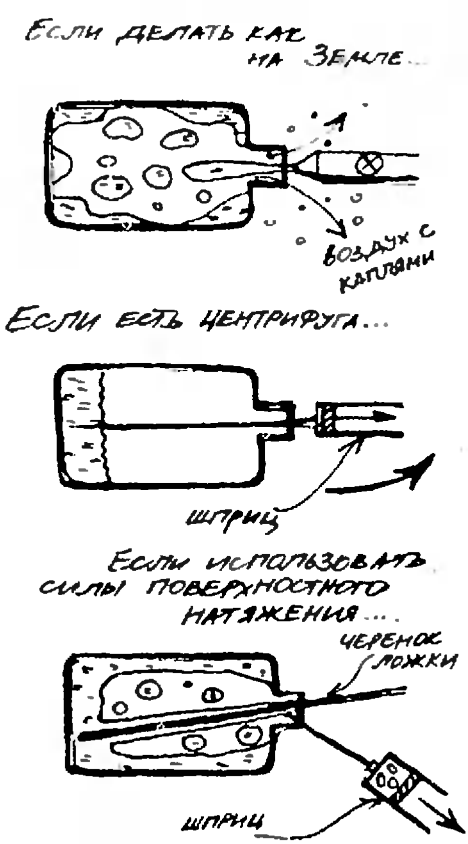
Какие особенности физических явлений, связанные с невесомостью, проявились для Вас наиболее ярко?

Больше всего запоминается необычность поведения того, к чему привык в повседневной жизни. Вот пример.

Представьте себе задачу: каким образом можно без потерь налить жидкость в сосуд? В космосе вода подается из крана порциями по 25 см^3. Если действовать как на

Космонавт А. А. Серебров отвечает на вопросы редакции журнала «Квант».

Земле — наливать из крана в горловину, то собрать всю воду в сосуде не удастся. В условиях невесомости жидкость не накапливается на дне сосуда, она «плавает» в сосуде в виде шаровых капель разного размера. Заполнение сосуда водой вызовет вытеснение из него воздуха, и вместе с воздухом будут «выплывать» взвешенные в нем капли воды.



Если же струю с малой скоростью направить сразу на стенку сосуда, то вода, смачивая стенку, будет прилипать к ней, и взвешенных капель не будет (по крайней мере, до тех пор, пока сосуд не встряхивают). Таким способом можно без потерь налить жидкость в сосуд, выталкивая из него воздух.

И тут же возникает второй вопрос: а как можно взять из сосуда «плавающую» в нем жидкость?

Конечно, если есть центрифуга, то задача решается просто: при вращении сосуда жидкость будет «прижиматься» к дальней от оси вращения стенке, а оттуда ее можно забирать с помощью шприца. Если нет центрифуги, можно прижать жидкость к стенке, двигая сосуд с небольшим линейным ускорением. Именно так обычно и делают.

Я предложил другой способ: поместить внутрь сосуда длинный и узкий предмет — например, черенок ложки, к которому капли прилипают. За счет сил поверхностного натяжения жидкость «расползается» по черенку и подходит к краю горловины сосуда. Слегка «помешивая» черенком, легко добиться того, чтобы жидкость постоянно находилась на черенке вблизи выходного отверстия сосуда, откуда не трудно производить отбор жидкости.

Есть ли еще, кроме невесомости, какие-нибудь существенные отличия космической станции от земной лаборатории?

В земных лабораториях, в которых мне приходилось до этого работать, вопрос о размещении оборудования всегда был второстепенным, там главенствовали соображения удобства. На космической станции любое перемещение оборудования вызывает смещение центра масс станции, что сразу же сказывается на характере ее поступательного и вращательного движения и, как следствие, на работе самого оборудования. Эти обстоятельства учитываются при выборе оптимального режима коррекции положения станции.

Расскажите поподробнее об эксперименте «Таврия», проведенном вашим экипажем во время полета.

«Таврия» относится к разряду биотехнических экспериментов (этот термин был предложен вице-президентом АН СССР академиком Ю. А. Овчинниковым). Это эксперимент по разделению биологического вещества на фракции — группы клеток, сходных по своим физическим свойствам. В частности, удается разделить однотипные клетки даже по возрасту.

Трубку из прозрачного материала, в которой находится исследуемое вещество, помещают в электрическое поле напряженности порядка 10 В/см, направленное вдоль трубки. Под действием этого поля и происходит разделение вещества на однородные фракции по длине трубки. В земных условиях из-за конвекционного перемешивания подобное разделение во многих случаях невозможно. В состоянии невесомости удавалось выделить десятки фракций там, где в земных условиях рекордное разделение содержало лишь три фракции, да и то с размытыми границами.

Какова практическая ценность подобного эксперимента?

Дело в том, что различные фракции одного и того же вещества при их введении в организм живого существа воздействуют на разные органы — одни на печень, другие на сердце и т. п. При лечении одного органа важно не допустить отрицательного воздействия на другой. В частности, ограниченное применение такого вещества, как интерферон, приготовленного в земных условиях, связано с возможными нежелательными побочными эффектами.

В чем состояло Ваше участие в эксперименте?

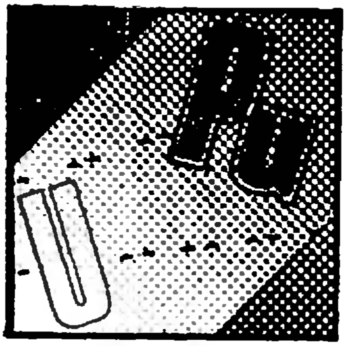
Помимо выполнения операторской работы — монтажа и отлаживания приборов, съемок лазерным голографом на борту станции, — я еще на Земле внес некоторые усовершенствования в методику эксперимента. Так, вместо предусмотренной ранее круглой трубки, фотографирование процессов в которой затруднено преломлением света в цилиндрическом стекле, по моему предложению была использована камера с плоскопараллельными стенками. Поскольку такой эксперимент на борту станции ставился впервые, необходимо было выбрать и обеспечить оптимальный режим работы установки с учетом реальных воздействий на нее. Это тоже было моей задачей.

Каковы Ваши дальнейшие планы?

Моя специальность — инженер-испытатель космической техники, этим много сказано. Хочу продолжать свою испытательскую работу, связанную с усовершенствованием существующей и созданием новой эффективной космической техники. Хотел бы серьезнее заняться вопросами физики борта космического корабля.

Что пожелали бы Вы читателям нашего журнала?

Читатели «Кванта» — люди молодые, любознательные, творческие. Я им желаю открывать для себя новые горизонты в познании окружающего мира и, конечно, желаю подлинных научных открытий. А главное — желаю стремления и умения реализовать на практике то, что удалось создать пером и мыслью.



Первая в мире нейтринная лаборатория на атомной электростанции

Кандидат физико-математических наук *А. А. БОРОВОЙ*

Мы давно привыкли к тому, что одни элементарные частицы уже «освоили», другие «осваивают» самые разные практические специальности. Но не нейтрино. Природа создала на этом пути естественный барьер — ничтожную вероятность его взаимодействия с веществом. Именно поэтому экспериментальное открытие нейтрино произошло только через 25 лет после того, как его существование было предсказано теоретически. И в дальнейшем многие нейтринные эксперименты носили лишь качественный характер.

Некоторое время тому назад физики Института атомной энергии им. И. В. Курчатова предложили способ, как недостаток нейтрино — огромную проникающую способность — превратить в его достоинство. Дело в том, что мощным источником нейтрино является ядерный реактор, излучающий в каждую единицу времени огромное количество этих частиц. Свободно проходя сквозь защиту реактора, они несут информацию о процессах, идущих внутри его активной зоны. Информация эта двоякого рода. Во-первых, есть прямая связь между количеством излучаемых нейтрино и мощностью реактора, а, во-вторых, по энергии нейтрино можно судить о том, с какой интенсивностью внутри реактора «выгорают» одни элементы (уран) и накапливаются другие (плутоний). Таким образом, по мнению ученых, нейтрино из объекта исследования должно превратиться в точный инструмент, с помощью которого приборы, находящиеся за пределами реактора, «видели» бы его внутренность в особом, «нейтринном свете».

Так родился замысел создать на Ровенской атомной электростанции специальную нейтринную лабораторию. Он был поддержан крупнейшими учеными — академиками А. П. Александровым, М. А. Марковым, Б. М. Понтекорво. В создании лаборатории приняли участие проектировщики Урала, строители и энергетики Украины. Задача лаборатории — осуществить большую программу научных исследований и, одновременно, начать изучение возможности практического использования этой неуловимой частицы.

И вот, на глубине 13 метров под атомным реактором, за слоем железа и бетона в зале, облицованном сталью, собрано «сердце» установки — первый нейтринный детектор. Это прямоугольный бак из очень прозрачного пластика, наполненный 250 литрами жидкого сцинтиллятора, вещества, светящегося под действием попадающих в него частиц. Нейтрино вызывает в нем ядерную реакцию (с частотой несколько сотен в сутки), которая сопровождается двумя последовательными вспышками света. Специальные электронные «глаза» — фотоумножители — регистрируют эти вспышки, превращают световые сигналы в электрические и отправляют их в электронно-вычислительную машину. Последняя анализирует яркость вспышек и время между вспышками. Так удается установить, что реакцию вызвали именно нейтрино, а не многочисленные посторонние частицы, все-таки проникающие в детектор, несмотря на защиту из бетона, железа и воды.

Сейчас уже зарегистрированы многие тысячи нейтринных событий. Это первые нейтрино от реактора, которые «своими глазами» увидели физики в Советском Союзе. Впереди трудные дальнейшие исследования.

25 апреля исполняется 80 лет академику Андрею Николаевичу Колмогорову, одному из основателей журнала «Квант» и бессменному первому заместителю главного редактора.

Жизнь А. Н. Колмогорова неразрывно связана с Московским университетом, студентом которого он стал в 1920 году и где затем был профессором и деканом; ныне Андрей Николаевич возглавляет кафедру математической логики и отделение математики механико-математического факультета.

По всеобщему признанию А. Н. Колмогоров — один из ведущих математиков современности. Работы Андрея Николаевича относятся к самым различным отраслям математики и ее приложений, начиная от абстрактнейших разделов и кончая такими прикладными областями, как гидродинамика и теория управления. Во время Великой Отечественной войны А. Н. Колмогоров внес большой вклад в теорию расчета артиллерийских стрельб. Однако наибольшую известность ему принесли работы по теории вероятностей — Андрей Николаевич поставил эту науку на прочный аксиоматический фундамент и значительно обогатил многие из ее разделов (предельные теоремы, марковские процессы, сложности числовых последовательностей).

А. Н. Колмогоров — не только выдающийся математик, но и прекрасный педагог, воспитавший многих талантливых ученых. Среди его учеников — академики А. И. Мальцев, С. М. Никольский и Ю. В. Прохоров, член-корреспондент АН СССР И. М. Гельфанд, а из математиков более молодого поколения — доктора физико-математических наук В. И. Арнольд, Я. Г. Синай и безвременно умерший В. М. Алексеев.

Педагогический талант А. Н. Колмогорова проявился не только в воспитании математиков-исследователей: Андрей Николаевич много преподавал в обычной средней школе, основал школу-интернат при МГУ и 15 лет преподавал в ней; в шестидесятых годах Андрей Николаевич возглавил Комиссию по реформе математического образования и написал ряд школьных учебников.

Редакционный совет, редакционная коллегия и редакция журнала «Квант» поздравляют Андрея Николаевича с днем рождения и желают ему доброго здоровья и новых успехов в педагогической деятельности и в науке.

Беседа с Андреем Николаевичем Колмогоровым

Мы находимся в старом деревянном доме в деревне Комаровка под Москвой, где Андрей Николаевич обычно проводит конец недели. Светлая, скромно обставленная комната. В одном из углов старый, но качественный проигрыватель со специальными полками для пластинок. Стены заставлены стеллажами с книгами. В середине комнаты большой стол с множеством книг, оттисков статей, рукописей, художественных альбомов. Андрей Николаевич сидит у окна за небольшим письменным столом. Рядом с пишущей машинкой и аккуратно сложенными исписанными листами бумаги стоит магнитофон, на который записывается наша беседа. Стенограмму этой беседы мы и предлагаем вашему вниманию.

— Андрей Николаевич, часто приходится слышать о возрастающей специализации науки. В то же время известно, что Вы занимались такими далекими друг от друга областями математики, как теория вероятностей и алгебраическая топология, математическая логика и теория динамических систем. В чем, по-Вашему, будущее науки — в универсальности или специализации?

— Математика велика. Один человек не в состоянии изучить все ее разветвления. В этом смысле специализация неизбежна. Но в то же время математика — единая наука. Все новые и новые связи возникают между ее разделами, иногда самым непредвиденным образом. Одни разделы служат инструментами для других разделов. Поэтому замыкание математиков в слишком узких пределах, должно быть, гибельно для нашей науки. Положение облегчается тем, что работа в области математики, в принципе, коллективна. Должно быть некоторое количество математиков, которые понимают взаимные связи между самыми различными областями математики. С другой стороны, можно работать с большим успехом и в какой-нибудь совсем узкой ветви математики. Но в этом случае надо еще, хотя бы в общих чертах, понимать связи между своей специальной областью исследования с областями смежными, понимать, что, по существу, научная работа в математике — коллективная работа.

— Что Вы можете сказать о соотношении и связях прикладной и чистой математики?

— Прежде всего, нужно заметить, что само различие между прикладной и чистой математикой чрезвычайно условно. Вопросы, которые, казалось бы, принадлежат к чистой математике и не имеют применений, очень часто совершенно неожиданно оказываются важными для разных приложений. С другой стороны, занимаясь прикладной математикой, ученый почти неизбежно наталкивается на смежные вопросы, решающиеся теми же методами, привлекающие его своей логической красотой, но, собственно говоря, непосредственных приложений уже не получающие. Вероятно, в практической работе математика нужно проявлять должную широту. Несомненно, что математики должны, это их долг, заниматься всеми теми вопросами, которые настоятельно навязываются вопросами практики. Если смежные вопросы, пусть сразу применений не имеющие, являются привлекательными хотя бы в силу красоты и естественности возникающих задач, ими, конечно, тоже нужно заниматься.

— Норберт Винер пишет в своей автобиографической книге, что перестал заниматься функциональным анализом, когда почувствовал, что «Колмогоров наступает мне на пятки». А как Вы относитесь к конкуренции в математике?

— Заявление Винера мне не совсем понятно. В функциональном анализе я сделал немного. Самая интересная моя работа по функциональному анализу называется «Спираль Винера и некоторые другие интересные кривые в гильбертовом пространстве».

Что касается конкуренции, то конкуренция может быть дружеской, тогда она мало отличается от сотрудничества. Тесное содружество, когда два математика одновременно и параллельно думают над одной и той же проблемой, порой бывает очень продуктивным. Но при этом иногда бывает и так, что участие одного из сотрудников практически оказывается излишним и тогда ему разумно без обиды отойти в сторону.

— Всегда ли математика была Вашим основным увлечением? Когда Вы окончательно выбрали математику как профессию?

— Нет, как это часто бывает, пути моего развития были более извилистыми. С раннего детства было известно, что я умею хорошо считать и что меня интересуют математические задачи арифметического характера; я сравнительно рано познакомился и с началами алгебры. Но все это относится к очень раннему возрасту. Несколько позднее, в средних классах школы, победили уже совсем другие увлечения — в частности, историей. Возврат к математике произошел в самых последних классах средней школы. Когда я кончил среднюю школу, то долго колебался в выборе дальнейшего пути. В первые студенческие годы, кроме математики, я занимался самым серьезным образом в семинаре по древнерусской истории профессора С. В. Бахрушина. Не бросал мысль о технической карьере, почему-то меня увлекала металлургия, и, параллельно с университетом, я поступил на металлургическое отделение Химико-технологического института им. Менделеева и некоторое время там проучился. Окончательный выбор математики как профессии, собственно говоря, произошел, когда я начал получать первые самостоятельные научные результаты, то есть лет с восемнадцати-девятнадцати.

— Когда обычно проявляются способности к математике? Всегда ли, как у Вас, в раннем возрасте?

— Я довольно много преподавал в средней школе. У меня сложилось такое впечатление, что интерес к математике в средних классах, в возрасте двенадцати-тринадцати лет, часто оказывается временным и совсем проходит к старшим классам. Особенно часто это бывает у девочек. С теми школьниками, которые увлечены математикой в возрасте 13—14—15 лет, по-моему, стоит работать. При умелом культивировании их способности постепенно развиваются и, как правило, уже не теряются. Бывает, конечно, и очень много исключений. Разумеется, серьезный интерес к математике может проявиться и позже.

— Какие математики старшего поколения оказали на Вас наибольшее влияние?

— В студенческие годы я был учеником Николая Николаевича Лузина. Кроме него большое влияние оказали на меня Вячеслав Васильевич Степанов, Александр Яковлевич Хинчин, Павел Сергеевич Александров и другие математики их поколения.

— Что Вам хотелось бы сказать о своих учениках и кого из них Вы хотели бы упомянуть?

— Мне повезло на талантливых учеников. Многие из них, начав работу вместе со мной в какой-нибудь области, потом переходили на новую тематику и уже совершенно независимо от меня получали замечательные результаты. Выделить из них наиболее заслуживающих упоминания было бы трудно.

Скажу только в виде шутки, что в настоящее время один из моих учеников управляет земной атмосферой, а другой — океанами*).

— Андрей Николаевич, каков Ваш режим дня?

— Естественно, в течение моей достаточно длинной жизни режим дня в разные ее периоды был различным. Опишу, пожалуй, только тот режим дня, который мы с Павлом Сергеевичем Александровым установили для себя на те 3—4 дня в неделю, которые мы проводили за городом, под Москвой, в деревне Комаровка.

День начинался в 7 часов утра. Первый час был посвящен гимнастике, пробежке. В 8 часов мы завтракали и принимались за работу за столом — с пишущей машинкой или без нее. В час или два часа дня был полдник, состоящий из молока или кефира с хлебом. После полдника мы еще немного работали, но обычно отправлялись на большую прогулку пешком или — зимой — на лыжах, до 4 часов дня. Потом на полчаса мы укладывались спать. В 5 часов был обед. После обеда мы иногда еще занимались работой, обычно — второстепенной: переписывание или тому подобное. Вечер посвящался чтению, музыке, приему гостей. Перед сном мы любили еще делать небольшую прогулку. Укладывались спать около 10 часов.

Но, конечно, когда работаешь и начинает получаться решение какой-либо важной проблемы, все отступает на задний план, никакого распорядка дня уже не бывает.

— Вы, как и многие математики, любите серьезную музыку. Расскажите, почему.

— Ваше замечание о многих математиках, увлекающихся серьезной музыкой, мне кажется правильным. Если прийти в концертный зал, особенно в Малый зал Московской консерватории, то вы там увидите непропорционально много математиков. По-видимому, между математическим творчеством и настоящим

*) Речь идет об академике А. М. Обухове, директоре Института физики атмосферы АН СССР, и об академике А. С. Монине, директоре Института океанологии АН СССР. (*Прим. редакции.*)

А. Н. Колмогоров и П. С. Александров в Комаровке (семидесятые годы).

интересом к музыке имеются какие-то глубокие связи. Но выяснить и объяснить эти связи мне представляется довольно трудным. Замечу, впрочем, что мой друг Павел Сергеевич Александров рассказывал, что у него каждое направление математической мысли, тема для творческих размышлений, связывались с тем или иным конкретным музыкальным произведением.

Среди любимых композиторов назову, в первую очередь, Моцарта, Шумана, ну и, конечно, величайших музыкантов — Баха, Бетховена.

— Лингвисты и литературоведы обратили внимание на Ваши публикации по стиховедению. Что Вы можете сказать об этом — менее обычном — сочетании: математика и поэзия?

— Мне хотелось бы разделить этот вопрос на два, так как мое увлечение поэзией имеет такой же непроизвольный, стихийный характер, как и у людей, не занимающихся теоретическим исследованием стиха. Любимые мои поэты — это Тютчев, Пушкин, Блок. Что же касается моих научных работ по метрике и ритмике русского стиха, то они действительно обратили на себя внимание специалистов-литературоведов, но все-таки это довольно специальная область исследования, интересоваться которой совершенно не обязательно всякому.

— Занимаетесь ли Вы спортом? Каким?

— Состязательным спортом я никогда не занимался. Если не ошибаюсь, я только три раза в жизни участвовал в гонке на 10 км на лыжах.

Но я всегда очень любил большие прогулки пешком и на лыжах, совершал длинные путешествия на байдарке или на лодке. Очень люблю плавание, походы в горах. Во всех этих занятиях я ценю не только их пользу для здоровья, но ту радость общения с природой, которую они приносят.

Всегда любил купание в морском прибое. В солнечные мартовские дни люблю делать большие лыжные пробеги в одних шортах. Во время таких мартовских лыжных пробегов люблю выкупаться посреди сияющих на солнце сугробов в только что вскрывшейся ото льда речке. Впрочем, я не советую обязательно подражать мне во всем этом — можно просто записаться в какую-нибудь привлекающую Вас спортивную секцию.

— Андрей Николаевич, что бы Вы хотели пожелать нашим читателям?

— Я сам являюсь ученым, и, конечно, в первую очередь, я желаю нашим читателям внести тот или иной вклад в науку, большой или хотя бы маленький. Замечу, впрочем, что в случае если все наши читатели принялись бы писать самостоятельные научные работы, то научные журналы не выдержали бы такого натиска. Поэтому я выскажу и более скромное пожелание — чтобы школьное увлечение математикой пригодилось вам и в дальнейшей жизни. В «Кванте» мы как раз стараемся вам показать (может быть, и недостаточно), как разнообразны приложения математической науки.

Беседу записал А. Б. Сосинский

Рождение кванта

Академик АПН СССР
В. А. ФАБРИКАНТ

Преследование определенной цели, далекий свет которой не меркнет от первых неудач, является необходимой предпосылкой, хотя далеко не гарантией успеха.

М. ПЛАНК.
Нобелевская речь.

В этом году 23 апреля исполнилось 125 лет со дня рождения Макса Планка, сделавшего одно из самых великих открытий за всю историю физики. Он открыл существование квантов. Есть не очень достоверный рассказ о том, что, гуляя со своим семилетним сыном, Планк сказал ему: «Или то, чем я занимаюсь теперь, есть совершенная бессмыслица, или речь идет, быть может, о самом большом открытии в физике со времен Ньютона». Действительно, сделанное Планком открытие поставило его имя в один ряд с именами выдающихся физиков мира. Но путь к открытию был долог и труден. Речь шла о начале всей квантовой физики, а Карл Маркс недаром писал: «Всякое начало трудно — эта истина справедлива для каждой науки».

Интересен вопрос о том, благом ли было бы для человечества отсутствие этих трудностей. У Достоевского в «Дневнике писателя» дан ответ: «Ну, что вышло бы, например, если ... вдруг посыпался бы ряд открытий вроде таких, что солнце стоит, а земля вокруг него обращается (потому что, наверно, есть еще много таких же точно, по размерам, открытий, которые теперь еще не открыты, да и не снятся мудрецам нашим); вдруг все знания так и свалились на человечество, и, главное, совершенно даром, в виде подарка? Я спрашиваю: что бы тогда сталось с людьми? О, конечно, сперва все бы пришли в восторг... Но вряд ли и на одно поколение людей хватило бы этих восторгов! Люди вдруг увидели бы, что жизни уже более нет у них, нет свободы духа, нет воли и личности, что кто-то все украл разом... Поняли бы люди, что нет счастья в бездействии, что погаснет мысль не трудящаяся... Настанет скука и тоска: все сделано и нечего более делать, все известно и нечего более узнавать».

Планк учится

Интерес к изучению физики у Планка пробудился еще в гимназии. В своей автобиографии он с большой теплотой вспоминает преподавателя математики Г. Мюллера — «общительного, проницательного, остроумного человека, умевшего на ярких примерах объяснить смысл тех физических законов, о которых он нам, ученикам, говорил. Так получилось, что в качестве первого закона, не зависящего от человека и имеющего абсолютное значение, я, как откровение, воспринял принцип сохранения энергии. Незабываем для меня рассказ Мюллера о том, как каменщик с трудом втаскивает на крышу дома тяжелую черепицу. Работа, которую он при этом совершает, не теряется, она полностью сохраняется, возможно, на долгие годы, до тех пор, пока в один прекрасный день эта черепица, быть может, сорвется и свалится кому-нибудь на голову».

После окончания гимназии Планк решил поступить в мюнхенский университет и заняться физикой. Его отец, юрист, один из профессоров этого университета, посоветовал ему поговорить предварительно с профессором физики Филиппом фон Жолли. В публичной лекции, прочитанной в 1924 году, Планк вспоминал, как Жолли отговаривал его делать этот, по его мнению, ошибочный шаг. «Он изобразил мне физику как высокоразвитую, едва ли не полностью исчерпанную науку, которая теперь, после того как ее увенчало открытие принципа сохранения энергии, близка, по-видимому, к тому, чтобы принять окончательную стабильную форму. Вероятно, в том или ином углу есть еще пылинка или пузырек, которые можно исследовать и классифицировать, но система как целое построена довольно прочно, и теоретическая физика заметно приближается к той степени законченности, какой, например, обладает геометрия уже в течение столетий». Планк не внял советам Жолли. Проучившись три года в Мюнхене, он для завершения физического образования перебрался в Берлинский университет, где преподавали знаменитые физики — Гельмгольц и Кирхгоф. Однако лекции обоих ученых принесли ему мало пользы. «Гельмгольц, очевидно, никогда как следует не готовился к лекциям.» «В противоположность этому Кирхгоф читал тщательно отработанный курс... Но в целом это действовало как нечто заученное наизусть, сухое и однообразное. Мы восхищались самим лектором, а не тем, о чем он говорил.» Наибольшую пользу принесли Планку самостоятельные занятия и личные контакты с выдающимися учеными.

Проблемы абсолютно черного излучения

К середине XIX века накопилось довольно много экспериментальных данных об излучении нагретых тел. Настала пора их теоретического осмысливания. Здесь два важных шага, в известном смысле противоположных, сделал Кирхгоф. Первый шаг заключался в установлении Кирхгофом, совместно с Бунзеном, того факта, что каждому веществу соответствует вполне определенный спектр — набор длин волн (или частот) света, испускаемого и поглощаемого этим веществом. Это открытие послужило основой для спектрального анализа веществ. Второй шаг состоял в нахождении таких условий, при которых спектр излучения нагретых тел зависит только от их температуры и не зависит от химического состава излучающего вещества. Кирхгоф теоретически рассмотрел излучение внутри замкнутой полости в твердом теле, стенки которой обладают определенной температурой. В такой полости устанавливается равновесие между излучением и стенками — стенки излучают столько же энергии, сколько поглощают. Оказалось, что в этих условиях распределение энергии в спектре излучения не зависит от материала, из которого изготовлены стенки. Такое излучение было названо «абсолютно черным». Сначала черное излучение было как бы «вещью в себе». Но вскоре Луммер предложил для экспериментальной проверки теории Кирхгофа сделать маленькое отверстие в стенке полого шара (диаметр отверстия должен быть мал по сравнению с диаметром шара) и исследовать спектр излучения, выходящего через это отверстие (рисунок 1). Любой световой луч, падающий на отверстие снаружи, испытает внутри полости многократные отражения и практически не сможет выйти через отверстие наружу. (Вспомните, как в яркий солнечный день открытое окно в доме кажется снаружи черным, хотя оно освещается солнцем). Вместе с тем при высокой температуре стенок отверстие будет ярко светиться за

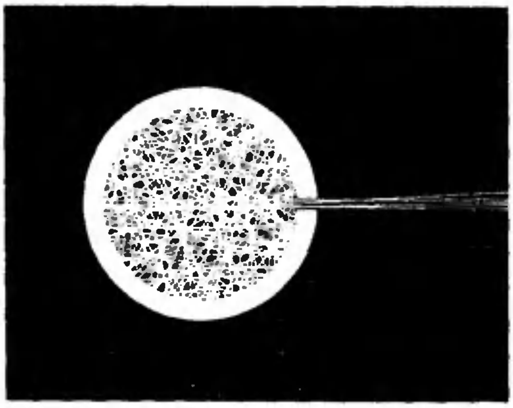


Рис. 1.

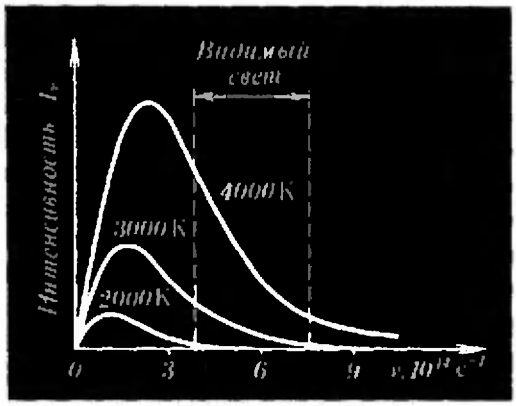


Рис. 2.

счет света, идущего изнутри полости. Так что отверстие ведет себя, как тело, поглощающее все падающие на него лучи, — абсолютно черное тело, и выходящее из него излучение — абсолютно черное.

На рисунке 2 изображено распределение энергии в спектре абсолютно черного излучения. По оси абсцисс отложена частота ν, а по оси ординат — интенсивность излучения I_ν*). Как видно из рисунка, спектр имеет непрерывный характер, и при каждой температуре максимум интенсивности приходится на определенную частоту.

Но вернемся к теории черного излучения. Общие термодинамические соображения позволили Кирхгофу, Больцману и Вину вывести строгим путем ряд важных законов, управляющих излучением нагретых тел. Однако эти общие соображения оказались недостаточными для вывода конкретного вида закона распределения энергии в спектре абсолютно черного излучения. В этом направлении больше всех продвинулся Вин. В 1893 году он доказал, что интенсивность излучения I_ν при данной частоте может зависеть от температуры только как от параметра, входящего в отношение ν/T. Иными словами, I_ν должно зависеть от некоторой функции $f(\nu/T)$. Конкретный вид этой функции оставался неизвестным.

*) Интенсивность излучения — это энергия, приходящаяся на единичный интервал частот.

Планк приступает к решению проблемы черного излучения

Планк приступил к исследованию проблемы черного излучения в 1894 году, уже имея большой опыт физика-теоретика. Он много занимался уточнением формулировок основных законов термодинамики, добиваясь большой строгости и тем самым оттачивая строгость своего мышления. Вместе с тем, как мы увидим ниже, совершая свой главный научный подвиг, он вынужден был поступиться этой строгостью, что создало дополнительные трудности.

Планк начал с попытки построить теорию черного излучения на основе электродинамики Максвелла, рассматривая излучающее тело как совокупность осцилляторов, испускающих и поглощающих электромагнитные волны*). Он показал, что интенсивность излучения I_ν пропорциональна энергии E_ν осциллятора, испускающего излучение данной частоты. Этот результат дал возможность перейти от рассмотрения черного излучения к анализу свойств осцилляторов, представлявших более привычные объекты для физиков того времени.

*) Осциллятор — это колебательная система, в которой могут возбуждаться свободные колебания. Например, шарик на пружине, прикрепленной к опоре; электрический колебательный контур — тоже пример осциллятора.

Планк считал, что испускание атомами электромагнитных волн происходит вследствие колебаний внутриатомных электрических токов. При этом атом уподоблялся микроскопическому вибратору Герца.

В 1896 году Вин, используя, по его словам, «счастливую идею» русского физика В. А. Михельсона, полуэмпирическим путем получил формулу, связывающую интенсивность излучения с частотой и температурой излучателя:

$$I_\nu = a\nu^3 e^{-b\nu/T}$$

(a, b — некоторые константы). Эта формула (ее назвали «формулой Вина») оказалась в хорошем согласии с экспериментальными данными в области больших значений отношения ν/T. Однако вскоре были получены экспериментальные данные в области малых значений ν/T (инфракрасная часть спектра, высокие температуры), которые явно противоречили формуле Вина.

Стало ясно, что формула Вина нуждается в существенном улучшении, и Планк взялся за эту задачу. Решить ее ему удалось весьма нестрогим путем. Полученный результат Планк изложил в докладе «Об одном улучшении закона излучения Вина», сделанном на заседании Немецкого физического общества 19 октября 1900 года. Здесь впервые появилась знаменитая формула Планка:

$$I_\nu = \frac{a\nu^3}{e^{b\nu/T}-1}. \qquad (1)$$

В «Научной автобиографии», опубликованной в 1955 году, Планк вспоминает: «На следующий день (после доклада) утром меня разыскал мой коллега Рубенс и рассказал мне, что после закрытия заседания в ту же ночь моя формула была аккуратно сравнена с данными его измерений и повсюду было найдено удовлетворительное совпадение. Было найдено совпадение также и с данными Луммера и Прингсхейма... Более поздние измерения все снова и снова подтверждали формулу для излучения и притом тем точнее, чем к более тонким методам измерений переходили».

Научный подвиг Планка

Планк отнюдь не был удовлетворен одержанной победой. В той же автобиографии он пишет: «Однако, даже если формулу для излучения предполагать справедливой с абсолютной точностью, то все же она имеет только формальный смысл удачно угаданного закона».

Для ума, воспитанного на термодинамических исследованиях, такое положение было нетерпимым. В речи, произнесенной при получении Нобелевской премии в 1920 году, Планк говорит: «Поэтому я со дня ее (формулы) нахождения был занят задачей установления ее истинного физического смысла, и этот вопрос привел меня ... к больцмановскому образу мыслей. После нескольких недель напряженнейшей в моей жизни работы темнота рассеялась и наметились новые, неподозреваемые раньше дали».

Полученные результаты Планк доложил 14 декабря 1900 года. Этот день следует считать днем рождения кванта, хотя в докладе Планка отсутствует соответствующий термин. В докладе Планк ссылался на большой мемуар 1877 года, в котором Больцман для построения кинетической теории газов воспользовался методами теории вероятностей. Планк решил применить теорию вероятностей к вопросу о распределении по энергиям осцилляторов, а потом перейти к распределению интенсивности в спектре абсолютно черного излучения. Все попытки Планка провести этот вывод в рамках классической физики оказались безуспешными. В поисках выхода из создавшегося положения Планк пришел к использованию приема, примененного Больцманом в качестве промежуточного этапа вероятностных вычислений.

Больцман в указанном мемуаре ввел, как он писал, «полезную фикцию», заключавшуюся в предположении, что кинетическая энергия молекул может иметь только дискретный ряд значений, кратных одной и той же величине ε. Он выписал арифметическую прогрессию значений энергии молекул:

$$0,\ \varepsilon,\ 2\varepsilon,\ 3\varepsilon,\ \ldots,\ n\varepsilon.$$

Проведя соответствующие выкладки, Больцман перешел затем к пределу, устремляя ε к нулю, а n к бесконечности, так как на самом деле кинетическая энергия молекул образует непрерывный ряд значений. Таким образом, дискретность значений кинетических энергий молекул была просто промежуточным вычислительным приемом, лишенным физического смысла. Несмотря на формальный характер примененного Больцманом приема, он, очевидно, сыграл существенную роль в становлении взглядов Планка, предположившего, что энергия осцилляторов также образует дискретный ряд значений, кратных одной и той же величине. Попытки устремить эту величину к нулю не дали желаемого результата, то есть не привели к получению формулы (1). Тогда Планк отказался от этих попыток. В письме к известному американскому физику Вуду Планк писал: «Коротко и сжато я могу все это дело назвать актом отчаяния. Потому что по природе я миролюбив и не расположен к рискованным приключениям. Но я тогда уже 6 лет (с 1894 г.) бился над проблемой равновесия между излучением и материей, не достигнув никакого успеха; я знал, что эта проблема имеет фундаментальное значение для физики, и я знал формулу, которая воспроизводит распределение энергии в нормальном спектре; теоретическое объяснение должно было быть найдено любой ценой, и никакая цена не была бы слишком высока». И Планк заплатил эту цену, введя в физику совершенно новое представление о дискретности возможных значений энергии осцилляторов уже не как промежуточный этап, обусловленный удобствами вычислений, а как существенный элемент всего рассмотрения проблемы. Тем самым нарушался основной принцип классической физики, согласно которому физические величины всегда изменяются непрерывным образом. Все верили в справедливость изречения Аристотеля: «Природа не делает скачков».

Учитывая ограничения, указанные Вином для вида зависимости $I_\nu(T)$, Планк вынужден был предположить, что порции энергии осциллятора должны быть пропорциональными частоте:

$$\varepsilon = h\nu\,. \tag{2}$$

Так в физику вошла новая фундаментальная постоянная h — постоянная Планка. Величина ε позднее была названа квантом энергии. Используя условие (2), Планк получил выражение для энергии осциллятора E_ν, а затем перешел к интенсивности излучения:

$$I_\nu = \frac{2\pi h\nu^3}{c^2\left(e^{h\nu/kT}-1\right)}\,, \tag{1'}$$

где c — скорость света, k — постоянная Больцмана.

Планк неоднократно говорил об «извилистости» пути, который ему пришлось пройти. Действительно, ведь речь шла о выводе формулы (1′), представляющей улучшение формулы Вина. Это удалось сделать за счет введения квантования энергии. Но формула Вина расходилась с опытом в области малых частот, где ε мало́ и квантование мало существенно. В области больших частот, где ε велико и дискретность значений энергии осцилляторов существенна, формула Вина давала хорошее совпадение с опытом. В чем же дело? Обычно пишут, что Вин *вывел* свою формулу из классических представлений. Это неточно. Вин, по существу, *угадал* свою формулу.

Появление единицы в знаменателе формулы Планка обеспечивало совпадение результатов теоретических расчетов с экспериментальными данными и в области малых частот. Вместе с тем, в этой единице был заложен зародыш новой отрасли техники — квантовой электроники, то есть возможность создания мазеров и лазеров. Но это, как говорят, уже другая история.

Как ни важна формула Планка, но идея квантования, использованная в процессе ее вывода, и введение новой фундаментальной константы оказались еще важней. Это была настоящая революция в физике, имевшая такие последствия, как создание квантовой теории вещества и излучения. Наличие в физической формуле величины h означает, что эта формула может быть получена только из квантовых представлений.

Путь, приведший Планка к полной победе, был, по существу, нелогичным: пропорциональность интенсивности излучения I_ν энергии осциллятора E_ν была установлена им на основе представлений чисто классической физики, а выражение для E_ν было получено из квантовых представлений. Но эта «нелогичность» отнюдь не снижает заслуг Планка. Здесь явно сказалась его интуиция великого естествоиспытателя. Такая же ситуация повторилась при создании Бором модели атома. Только значительно позднее трудами ряда ученых была создана логичная квантовая теория, но при этом выявились новые проблемы. Развитие физики — яркое подтверждение справедливости ленинского тезиса о неисчерпаемости свойств материи. Пользуясь терминологией Достоевского — человечеству не угрожает «скука».

* * *

В заключение — несколько слов, характеризующих некоторые черты облика Планка как человека и его взгляды.

Наряду с занятиями физикой Планк всю жизнь увлекался музыкой. Одно время, в юности, он даже колебался в выборе между физикой и музыкой. Планк был незаурядным пианистом, дирижировал академическим хором и играл на органе. Он часто музицировал с Эйнштейном, игравшим на скрипке. До глубокой старости Планк занимался туризмом и альпинизмом. Есть фотография 84-летнего Планка на трехтысячнике в Восточном Тироле. В его натуре было стремление к преодолению препятствий, хотя в обычной жизни он был скромным, приветливым и сдержанным человеком. Планк испытал в своей жизни тяжелые утраты. В войне 1914 года под Верденом был смертельно ранен его старший сын; во времена фашизма его второй сын был казнен за участие в офицерском заговоре против Гитлера.

Планк неоднократно проявлял дружеские чувства к нашей стране. В 1925 году он посетил Советский Союз в связи с 200-летием Академии наук СССР. На вопрос корреспондента «Комсомольской правды» — «Что дала советская наука Западу?» — Планк ответил: «Русская наука внесла за последние годы крупный вклад в мировую науку. Работы русских физиков, особенно Иоффе и Лазарева, хорошо известны мне и моим товарищам. В Германии известны имена многих советских ученых». В газете «Правда» было напечатано следующее заявление Планка: «Я унесу из вашей страны радостную мысль о том, что у вас о науке несут большую заботу не только ученые, но и правительство, и общественность».

Научные идеи Планка получили всеобщее признание и принесли ему мировую славу. Он был избран членом академий наук практически всех стран, в том числе и АН СССР.

Умер Макс Планк в 1947 году в возрасте 89 лет. Имя его навсегда вошло в историю науки.

Из научной переписки

«Ты целину усердно поднимал,
А я лишь изредка букет цветов срывал»

— так написал в письме Максу Планку выдающийся немецкий физик Арнольд Зоммерфельд, развивший квантовую теорию атома Бора. Планк, считая, что в этих строках Зоммерфельд явно несправедлив по отношению к собственным заслугам, ответил ему таким четверостишием:

«Цветы, что ты и я срывали,
Друг друга дивно дополняли.
И мы из них с тобой вдвоем
Прекраснейший венок совьем».

Наша обложка

На первой странице обложки воспроизведена фотограмма, полученная Г. М. Гречко и Ю. В. Романенко с борта космической станции «Салют-6». Они сфотографировали так называемый зодиакальный свет — явление рассеяния солнечного света в ближнем космосе. Затем снимок прошел специальную обработку, в ходе которой зоны разной освещенности получили разные цвета. Такой метод позволяет оценивать состояние межпланетной среды, ее прозрачность, степень запыленности и измерять эти величины.

Расправление контуров на плоскости

Кандидат физико-математических наук С. В. МАТВЕЕВ

Сделаем из тонкой проволоки окружность, плавно изогнем ее в пространстве, придав ей более сложную форму, и бросим на плоскость, плотно прижав к ней (рис. 1). *Можно ли полученный плоский проволочный контур расправить вновь в окружность не отрывая его от плоскости?*

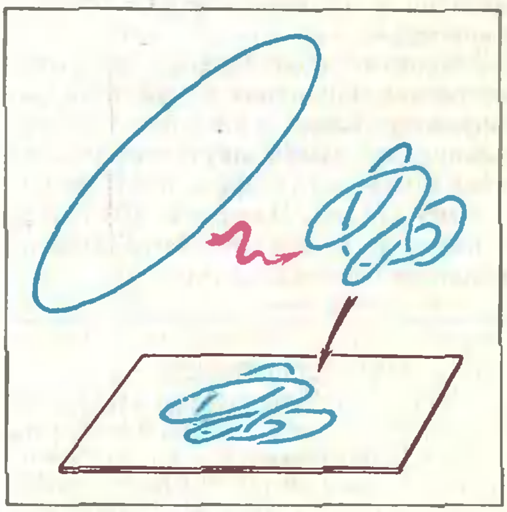


Рис. 1.

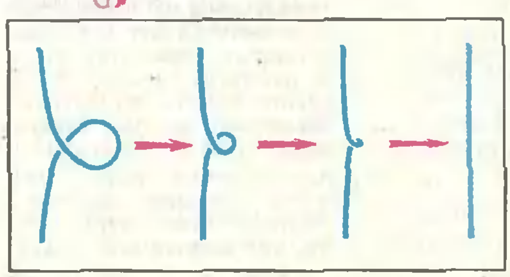


Рис. 2.

Мы считаем, что толщина проволоки нулевая, так что и в тех точках, где один участок кольца проходит над другим (в так называемых *двойных точках*), верхний участок также лежит на плоскости. Проволока очень гибкая, но не бесконечно гибкая — радиус закругления не должен обращаться в ноль, иначе проволока может сломаться. В частности, запрещена операция затягивания петелек, изображенная на рисунке 2.

Разумеется, расправить наш контур в пространстве всегда можно. Ведь мы начинали с проволочной окружности: ее можно восстановить, выполнив проделанные нами изгибания в обратном порядке. Начав с окружности, мы обошли все сложности, связанные с узлами: если бы мы начали с такого заузленного контура, как на рисунке 3, нам заведомо не удалось бы его расправить в окружность не только на плоскости, но даже в пространстве (см. «Квант», 1981, № 3, с. 8). Вернемся к нашему вопросу. Сначала

Немного поэкспериментируем и подумаем

Начнем с проволочного контура на рисунке 1. Повозившись немного с реальной проволочкой (можно и с ниткой), вы легко убедитесь, что этот контур расправить можно (процесс расправления показан на рисунке 4).

А теперь попробуйте расправить контуры *а* — *е*, изображенные на рисунке 5.

Я надеюсь, что читатель сумел расправить контуры *б*, *д*, *е*. Бесплодность попыток расправить контуры *а*, *в*, *г* убеждает в существовании нерасправляемых контуров. Но как дока-

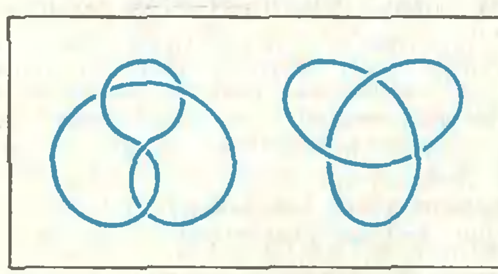


Рис. 3

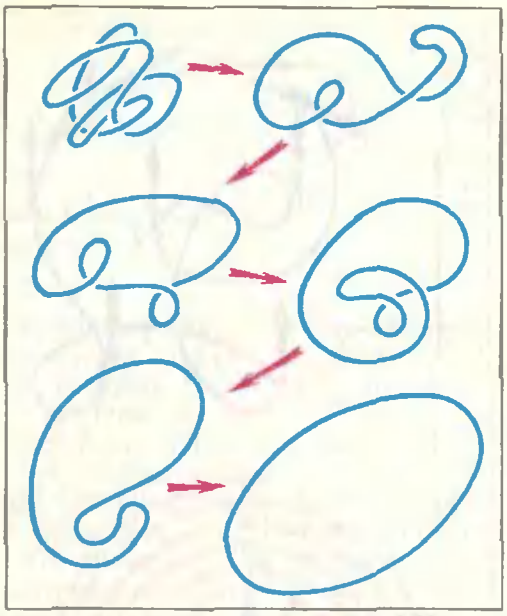


Рис. 4.

зать, что какой-нибудь контур расправить нельзя?

Чтобы доказать невозможность того или иного построения или процесса, математики часто пользуются следующим замечательным приемом. С каждым состоянием рассматриваемого объекта связывается некоторое число, остающееся неизменным в данном процессе (такое число называют *инвариантом* или *препятствием*); затем инвариант подсчитывается для начального и конечного состояния объекта; если получаются разные числа, то процесс перехода от начального состояния к конечному невозможен: ведь инвариант в процессе измениться не может, на то он и инвариант!

Попробуем и мы связать какое-нибудь число с каждым плоским проволочным контуром. Первое, что приходит в голову,— это число двойных точек контура. Увы! Это — не инвариант, как видно, например, из процесса расправления контура на рисунке 4. Однако рассматривая этот рисунок внимательнее, можно заметить, что двойные точки появляются и исчезают п а р а м и. Это наводит на мысль, что ч е т н о с т ь числа двойных точек не меняется, то есть что *остаток от деления числа двойных точек на два — инвариант.*

Так оно и есть (мы к этому еще вернемся). Из этого утверждения следует, например, что контур на рисунке 5, *а* расправить нельзя (7 двойных точек; нечетность числа 7 препятствует расправлению этого контура в окружность, у которой число двойных точек — нулевое, то есть четное). У контура 5, *г* имеется 4 двойные точки, значит, его инвариант равен 0, также как у окружности. Означает ли это, что его можно расправить в окружность? Нет! Ведь о достаточности условия равенства нулю инварианта мы ничего не знаем. Вопрос о расправляемости контура 5, *г* пока остается открытым.

Наши размышления должны были вас убедить, что для решения поставленной задачи имеет смысл находить инварианты. К этому мы и перейдем.

Инвариант *V*

Пусть дан контур на плоскости. Выберем на нем какую-нибудь точку *A* и укажем стрелкой одно из двух

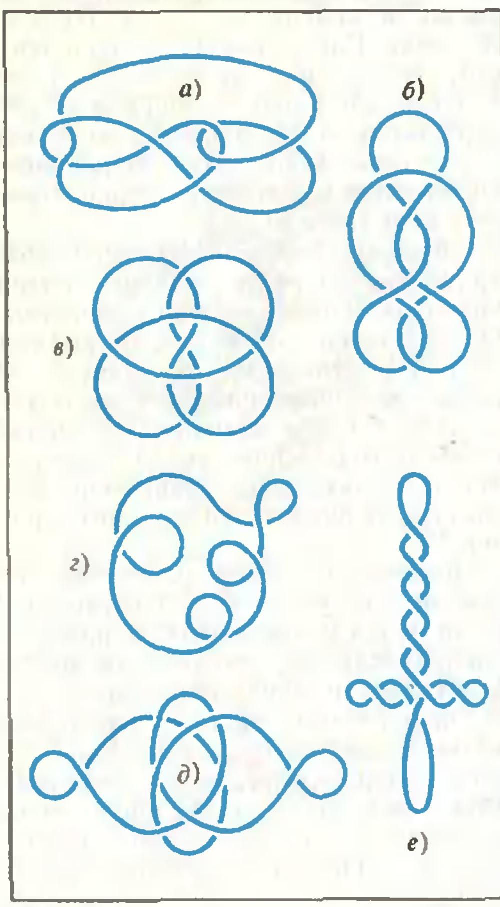


Рис. 5.

возможных направлений обхода. Будем двигаться по контуру из точки A с единичной скоростью в выбранном направлении, а вектор скорости будем откладывать от фиксированной точки A'. Тогда вектор скорости будет поворачиваться вокруг A', причем *его конец будет двигаться по единичной окружности* (с центром в точке A'). Так как в момент завершения обхода контура и возвращения в точку A вектор скорости займет исходное положение, общее число оборотов, которое он совершит вокруг точки A', является целым. При этом обороты в положительном направлении (против часовой стрелки) считаются со знаком «+», в отрицательном (по часовой стрелке) — со знаком «—».

Посмотрите на рисунок 6. На нем путь конца вектора скорости помечен красной линией и для наглядности сдвинут с окружности. На самом деле, красная кривая плотно наматывается на окружность, а точки $1'$ — $6'$ совпадают. Всего вектор скорости совершает (—1) оборот: от точки $1'$ до точки $2'$ — один оборот, от точки $2'$ до точки $3'$ и от точки $5'$ до точки $6'$ оборота не совершается, а от точки $3'$ до точки $4'$ и от точки $4'$ до точки $5'$ совершается по одному обороту в отрицательном направлении.

Обещанный нами *инвариант* (обозначим его V) *равен модулю общего числа оборотов вектора скорости.* Он не зависит, очевидно, от выбора начальной точки A; не зависит он также от выбора направления обхода, так как при изменении направления обхода общее число оборотов меняет только знак. Например, для контура на рисунке 6 инвариант V равен 1.

Покажем (не приводя подробного доказательства), что V *действительно является инвариантом.* В процессе расправления все положения векторов скорости меняются плавно, без скачков, поэтому число V тоже должно меняться непрерывно; однако V — всегда целое число, оно может превратиться в другое целое число только скачком, что противоречит непрерывности. Поэтому V остается неизменным, является инвариантом расправления.

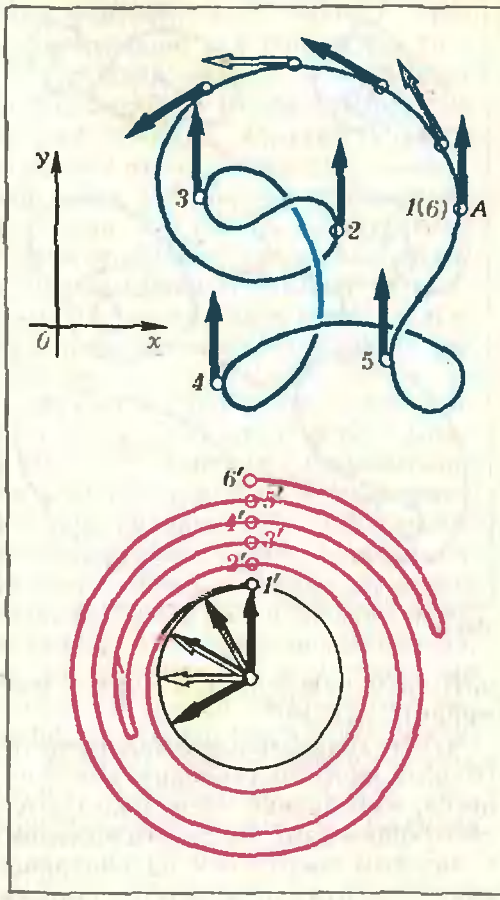


Рис. 6.

Теперь мы можем разобраться с контуром 5, *г*. Для него $V=3$ (проверьте!), поэтому он не расправляется в окружность (для которой $V=1$).

Если вы действительно проверяли, что для контура 5, *г* $V=3$, вы, наверное, заметили, что вычислять число оборотов вектора скорости на практике не очень удобно, легко совершить ошибку. Однако V можно найти проще.

Для этого выберем определенное *направление на плоскости, скажем* — направление оси Oy (см. рис. 6), и отметим точки, в которых вектор скорости направлен так же, как ось Oy. Поставим около каждой отмеченной точки число $+1$, если маленький содержащий ее участок контура находится слева от нее, и -1, если справа (если же контур в отмеченной точке имеет перегиб — то есть лежит по обе стороны от вектора — мы никакого числа не ставим). Тогда *инвариант V равен модулю суммы поставленных чисел.*

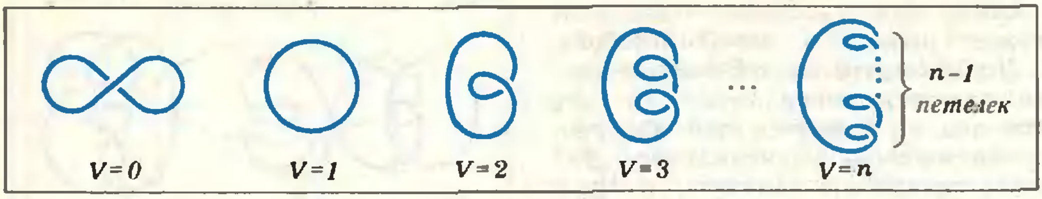


Рис. 7.

Например, около точек 1 и 2 на рисунке 6 следует поставить $+1$, около точек 3, 4, 5 — поставить (-1). Поэтому для контура на рисунке 6 инвариант V равен 1. Докажите самостоятельно, что указанный способ действительно позволяет сосчитать V для любого контура.

На рисунке 7 для каждого целого неотрицательного числа n изображен контур с инвариантом $V=n$. Напомним, что если контур расправляется в окружность, то его инвариант V обязан равняться инварианту окружности, то есть единице.

Инвариант *R*

Равенство $V=1$ является необходимым условием расправляемости контура в окружность. Является ли это условие достаточным? Я полагал, что ответ на этот вопрос положителен. Однако безуспешные попытки расправить собственный брючный ремень, положенный так, как на рисунке 8, *а*, убедили меня в обратном и одновременно натолкнули на важное наблюдение: поднятый с пола ремень (рис. 8, *б*) оказался дважды перекрученным!

Заменим контур на ленту, лежащую на плоскости так, чтобы контур совпадал с ее средней линией (рис. 9, *а*). Расправив контур в пространстве (например, вернув его в исходное положение до бросания на плоскость), получим перекрученную ленту. Число «перекруток» обозначим через R. Это и есть *второй инвариант*, равенство которого 0 необходимо для расправляемости контура в окружность. Следует уточнить, что число перекруток берется со знаком «+», если перекручивание ленты происходит так, как на рисунке 8, *б*, и со знаком «—», если лента перекручена так, как на

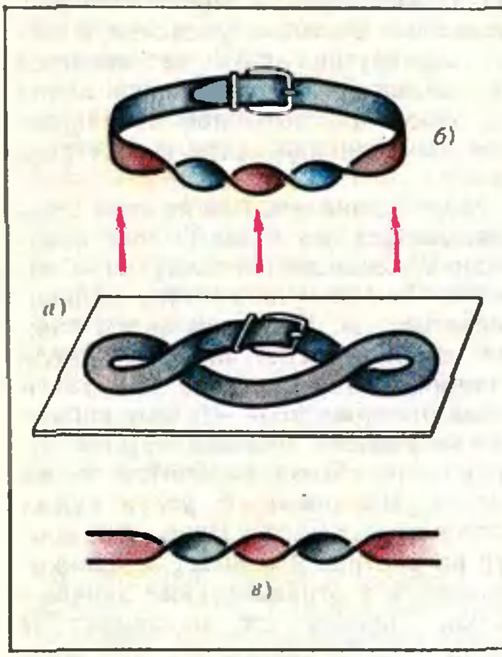


Рис. 8.

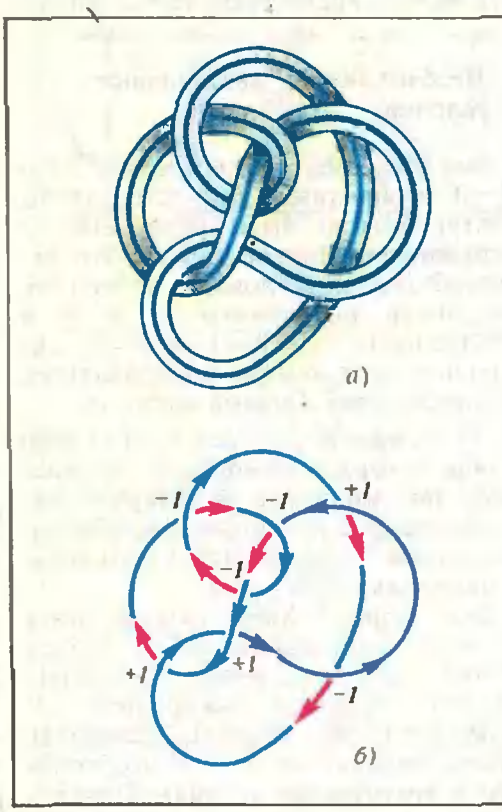


Рис. 9.

рисунке 8, *в* (вспомните различие между правой и левой резьбой).

Докажем, что *число R действительно является инвариантом*, то есть что оно не меняется при расправлении контура на плоскости. Для этого достаточно заметить, что расправление контура определяет расправление ленты на плоскости, а число перекруток ленты не меняется не только при расправлении ленты на плоскости, но и при произвольном перемещении ленты в пространстве.

Можно доказать (мы на этом останавливаться не будем), что инвариант R вычисляется следующим образом. Выберем на контуре направление обхода. Поставим около каждой двойной точки число $+1$, если нижний вектор скорости направлен влево от верхнего, и -1, если вправо (легко увидеть, что при другом направлении обхода получатся те же числа). *Инвариант R равен сумме поставленных чисел.* Например, контур на рисунке 9, *б* имеет 3 положительные и 4 отрицательные двойные точки, поэтому его инвариант R равен -1. Следовательно, этот контур на плоскости расправить нельзя.

Необходимые и достаточные условия

Мы убедились, что условия $V=1$ и $R=0$ необходимы для того, чтобы контур можно было расправить в окружность. Достаточны ли эти условия? Другими словами, можно ли, подсчитав инварианты V и R и убедившись, что $V=1$ и $R=0$, заключить, что контур расправляется в окружность? Оказывается, да.

Основная теорема. *Для того чтобы контур можно было расправить на плоскости в окружность, необходимо и достаточно, чтобы его инвариант V был равен единице, а инвариант R — нулю.*

Эта теорема дает полный ответ на вопрос, поставленный в начале статьи. Описанные выше простые способы подсчета инвариантов V и R позволяют быстро проверить сформулированное в ней необходимое и достаточное условие. Предлагаю читателю в этом убедиться на

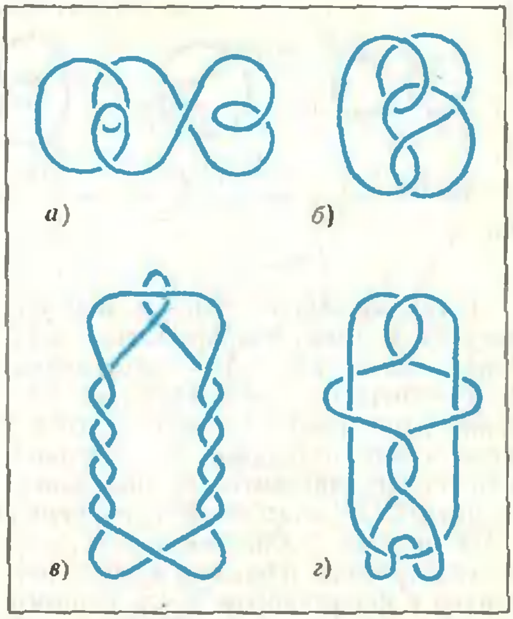


Рис. 10.

примере контуров на рисунках 10, *а—г*.

Доказательство основной теоремы

Мы уже доказали, что V и R являются инвариантами, поэтому необходимость условий $V=1$, $R=0$ уже установлена. Чтобы доказать достаточность, нужно показать, что всякий контур с условиями $V=1$, $R=0$ расправляется на плоскости в окружность.

Возьмем такой контур. Мы знаем, что его можно расправить с выходом в пространство. Положение контура в момент времени t в процессе этого расправления обозначим через K_t. Назовем момент времени t *особым*, если контур K_t хотя бы в одной точке имеет вертикальную касательную. Допустим, что особые моменты времени отсутствуют. Тогда контур можно расправить на плоскости. Действительно, пусть потолок комнаты, в которой происходит расправление, параллелен плоскости. Представим себе, что он начинает опускаться вниз до тех пор, пока плотно не прижмется к ней. Каждый из контуров K_t при этом сомнется в некоторый контур K_t на плоскости. Отсутствие вертикальных касательных гарантирует отсутствие складок (точек с нулевым радиусом закругления) у каждого контура K_t. Се-

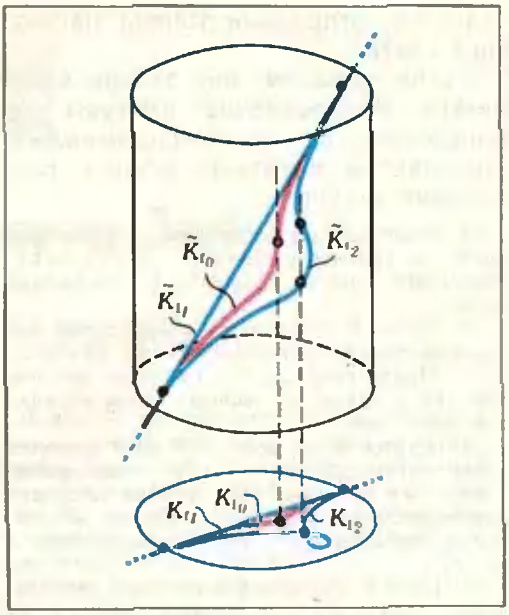


Рис. 11.

мейство контуров K_t и определяет искомое расправление в окружность на плоскости.

Посмотрим теперь, что происходит с контуром K_t, когда момент времени $t=t_0$ является особым, то есть контур проходит через положение K_{t_0} с вертикальной касательной. Типичная картина прохождения через вертикальное положение представлена на рисунке 11; мы видим, что переходу $\tilde K_{t_1} \to \tilde K_{t_0} \to \tilde K_{t_2}$ в пространстве соответствует на плоскости запрещенный переход $K_{t_1} \to K_{t_0} \to K_{t_2}$ при котором появляется излом K_{t_0}, а затем петелька K_{t_2}.

Можно доказать (мы на этом останавливаться не будем), что процесс расправления в пространстве можно вести так, что будет лишь конечное число особых моментов времени и каждый из них будет «типичным» — то есть будет *появляться или исчезать одна петелька*.

Пусть в особый момент времени t_0 исчезла петелька. На плоскости мы не можем ее уничтожить, поэтому затянем ее до очень малых размеров и при дальнейшем расправлении трогать не будем (можно считать, что мы ее «заморозили» — заклеили бумажной пленкой).

Пусть теперь в особый момент времени появилась петелька. Не отрывая контур от плоскости мы не можем создать новую петельку, однако добавить сразу две (взаимно уничтожающиеся) петельки нетрудно (рис. 12). Сделаем это, а лишнюю петельку затянем до ничтожно малых размеров и «заморозим».

Продолжая таким образом процесс расправления в пространстве и одновременно в проекции на плоскость, мы превратим плоский контур в окружность с конечным числом маленьких («замороженных») петелек.

Петельки можно разбить на четыре типа, в зависимости от того, где расположена петелька (внутри или вне окружности) и в каком порядке проходится ее двойная точка (сперва сверху, потом снизу или наоборот), а потом переставить местами, протаскивая друг по другу (рис. 13).

Если k_i обозначает число петелек i-го типа, то $V=1+k_1+k_2-k_3-k_4$ и $R=k_1-k_2+k_3-k_4$. Вспомнив, что $V=1$ и $R=0$, получим систему

$$\begin{cases} k_1+k_2-k_3-k_4=0, \\ k_1-k_2+k_3-k_4=0, \end{cases}$$

из которой легко следует, что $k_1=k_4$ и $k_2=k_3$. Как устранить пару петелек 1 и 4 типов или пару петелек

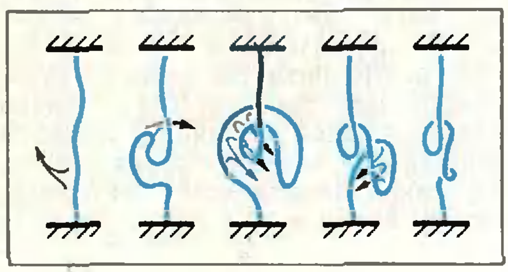


Рис. 12.

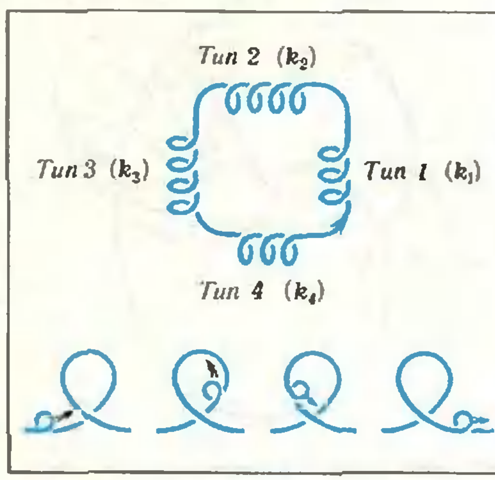


Рис. 13.

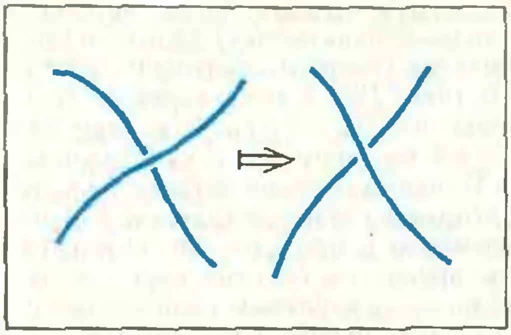


Рис. 14.

2 и 3 типов хорошо видно на рисунках 12 и 3. Остается расправить кольцо в окружность, устраняя петельки попарно. Теорема доказана.

Расправление с самопересечениями

Изменим теперь постановку задачи. Разрешим в процессе расправления контура делать самопересечения — вблизи двойной точки нижний участок кольца протаскивать сквозь верхний в верхнее положение (рис. 14). Такая постановка, конечно, с практической точки зрения довольно противоестественна (чтобы осуществить самопересечение, нужно контур разрезать, а потом опять спаять, что возмутит самого терпеливого экспериментатора). Однако именно к такой постановке сводится формальная математическая задача, изученная американским математиком Х. Уитни в 30-х годах и послужившая, отправной точкой настоящей статьи.

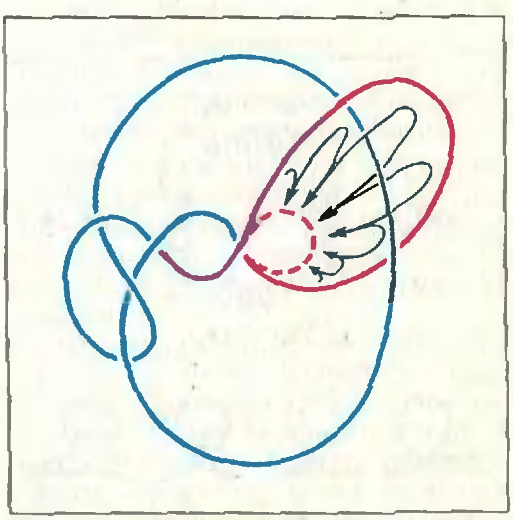


Рис. 15.

Таким образом, нас теперь интересует *расправление контура на плоскости с самопересечениями.* Предлагаем читателю решить следующие задачи:

1. Число k_t является инвариантом расправления с самопересечениями. (Указание. Вспомните способ подсчета V, описаный выше).

2. Число R не является инвариантом для расправления с самопересечениями. (Указание. Проделайте опыт с брючным ремнем, поменяв у одной из двойных точек верхний и нижний участок.)

3. Остаток R' от деления R на 2 является инвариантом расправления с самопересечениями. (Указание. При каждой операции самопересечения число R меняется на два, так как «поставленное число» ± 1 заменяется на ∓ 1.)

4. Число R' является инвариантом расправления (без самопересечений!) контура на плоскости.

Чтобы двигаться дальше, нам потребуется понятие *простой петли:* это участок контура, который начинается в двойной точке, кончается в (той же) двойной точке и сам с собой не пересекается (хотя может пересекать другие участки контура, как на рисунке 15). Теперь предлагаем доказать серию утверждений:

5. У всякого плоского контура есть простая петля.

6. Всякую простую петлю можно (с самопересечениями!) затянуть в маленькую петельку, не трогая остальных участков контура.

7. Всякий контур можно расправить (с самопересечениями) либо в восьмерку, либо в окружность, либо в окружность с конечным числом петелек внутри окружности.

8. Любой контур можно расправить с самопересечениями в любой другой, если к одному из них предварительно добавить несколько (сколько?) петелек.

9. (Теорема Уитни.) Контур с инвариантом V_1 расправляется с самопересечениями в контур с инвариантом V_2 тогда и только тогда, когда $V_1 = V_2$.

В заключение еще три задачи, связанные с первоначальной постановкой (расправлением без самопересечений).

10. Для каждой пары целых чисел m, n ($m \geqslant 0$) с нечетной суммой постройте контур с инвариантами $V = m$, $R = n$. Почему не существует контура с инвариантами $V = 1$, $R = 1$?

11. Сформулируйте и докажите аналог теоремы Уитни для расправления без самопересечений.

12. Докажите, что любой контур на сфере расправляется (без самопересечений) либо в окружность, либо в восьмерку.

Сирена Зеебека

И. Д. ЖИЖИЛКИН

Наверное, вам приходилось когда-нибудь слышать резкий звук сирены машины скорой помощи, спешащей к тяжелобольному, или мощный гул сирены, установленной на маяке и предупреждающей об опасности бороздящие открытое море корабли, или какой-то еще аналогичный сигнальный гудок.

Может быть, не случайно источник этих сильных и потому далеко слышимых звуков назвали сиреной. В древнегреческой мифологии сирены — это полуптицы-полуженщины, своим пением завлекавшие моряков в опасные и гибельные места. Впрочем, это уже выходит за рамки темы данной статьи.

Существует много различных типов сирен. Например — механические сирены, в которых используется прерывание воздушной струи. Одна из наиболее простых была изобретена немецким физиком Томасом Иоганном Зеебеком, жившим с 1770 по 1831 годы. (Обычно имя Зеебека связывают с открытым им явлением термоэлектричества, но любопытно, что Зеебек был первым, кто предложил использовать железные опилки для определения формы магнитных линий и для их непосредственного наблюдения.)

Как устроена такая сирена и можно ли ее сделать самостоятельно — вот о чем пойдет речь в статье, написанной учеником 9 класса 147-ой московской школы Игорем Жижилкиным.

Сирену Зеебека можно сделать, используя... домашний пылесос и соковыжималку.

Из плотного картона надо вырезать диск диаметром 400—600 мм и проделать в нем отверстия диаметром около 10 мм. (Отверстия удобнее всего пробивать с помощью металлической трубки, у которой напильником заостряют края.) Отверстия располагают на равных расстояниях друг от друга по концентрическим окружностям так, чтобы расстояния между отверстиями были больше их диаметра.

С соковыжималки надо снять нож и прочее оборудование и на вал надеть изготовленный круг с отверстиями, закрепив его зажимным винтом.

На шланг пылесоса нужно сделать насадку такую, чтобы ее выходное отверстие имело диаметр также около 10 мм.

Включив соковыжималку в сеть, направим струю воздуха из пылесоса перпендикулярно диску с отверстиями. Раздастся резкий вой. (Вот почему опыты с сиреной надо проводить только с согласия окружающих!) Высоту звука можно изменять, направляя струю воздуха на отверстия различных концентрических окружностей.

Почему же звучит сирена? Ответить на этот вопрос можно так. Если быстро вращать диск с отверстиями и продувать через эти отверстия воздух, то позади отверстий струя будет прерывистой, представляя собой чередующиеся друг с другом сжатия и разрежения. Они и вызывают звук определенной высоты.

Нетрудно сообразить, что высоту тона можно рассчитать заранее, для этого достаточно умножить частоту вращения вашего круга (о чем можно прочитать в инструкции к соковыжималке) на число отверстий.

Советуем вам проделать предлагаемые эксперименты и самостоятельно убедиться во всем, сказанном выше.

Обратные тригонометрические функции

Кандидат физико-математических наук
К. Л. САМАРОВ,
кандидат физико-математических наук
М. И. ШАБУНИН

Напомним*), что если X — область определения, а Y — область значений функции f, то для каждого $x \in X$ существует единственное $y \in Y$ такое, что $f(x)=y$.

Нередко приходится по заданному значению $y \in Y$ искать соответствующее ему значение аргумента x, то есть решать уравнение $f(x)=y$ относительно x. Это уравнение может иметь не одно, а несколько и даже бесконечно много решений.

Например, в случае функции $y=x^2$ соответствующее уравнение для каждого $y>0$ имеет два решения. В случае функции $y=\sin x$ соответствующее уравнение для каждого $y \in [-1;\ 1]$ имеет бесконечно много решений.

Легко также привести примеры функций, для которых уравнение $f(x)=y$ однозначно разрешимо при каждом заданном y из области значений функции f. Например, этим свойством обладают функция $y=2x+3$ и функция $y=x^2$, рассматриваемая на луче $[0;\ +\infty[$.

Функция f (с областью определения X и областью значений Y) называется *обратимой*, если она принимает каждое свое значение только при одном значении аргумента. Для такой функции уравнение $f(x)=y$ при любом $y \in Y$ можно однозначно разрешить относительно x, то есть каждому $y \in Y$ соответствует единственное $x \in X$. Это соответствие определяет функцию g, *обратную* к функции f.

Отметим, что

а) если g — функция, обратная к функции f, то и функция f — обратная к функции g; области определения и области значений взаимно-обратных функций f и g связаны условиями

$$D(g)=E(f),$$
$$E(g)=D(f),$$

то есть область определения функции g совпадает с областью значений функции f и наоборот;

б) для любых $x_0 \in D(f)$, $y_0 \in D(g)$ справедливо утверждение

$$f(x_0)=y_0 \Leftrightarrow g(y_0)=x_0$$

или

$$g(f(x_0))=x_0,$$
$$f(g(y_0))=y_0;$$

в) графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$ симметричны относительно прямой $y=x$;

г) функция, обратная к нечетной функции, тоже нечетна;

д) любая монотонная функция обратима, причем функция, обратная к возрастающей (убывающей), — возрастающая (убывающая).

* * *

Функция $\sin x$, как и любая периодическая функция, не обратима. В то же время, если ограничить ее область определения любым промежутком монотонности, полученная функция будет обратимой. В частности, функция $\sin x$ монотонна и обратима на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Функция, обратная к функции $\sin x$, рассмотренной на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, называется *арксинусом*; значение этой функции в точке a обозначается $\arcsin a$ (рис. 1). Из определения арксинуса следует, что арксинус числа a есть число, заключенное между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, синус которого равен a.

*) В ныне действующих школьных учебниках соответствующий материал изложен в пп. 21—22 учебника «Алгебра 8» и в п. 51 пособия «Алгебра и начала анализа 10». (*Прим. редакции.*)

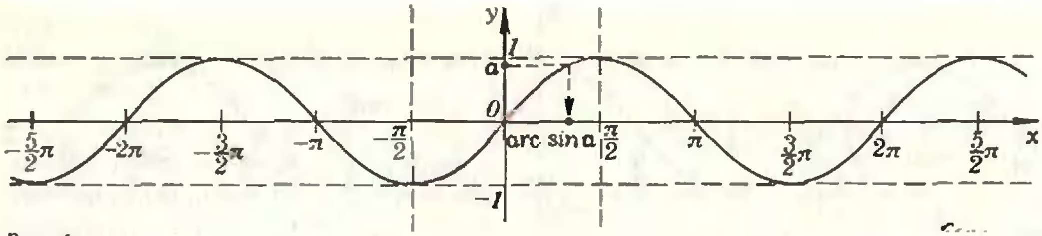


Рис. 1.

Подчеркнем, что функция $\arcsin x$ не является обратной к $\sin x$ — функция $\sin x$, не будучи обратимой, не имеет обратной. Функция $\arcsin x$ является обратной к «функции $\sin x$, рассмотренной на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$», или, как еще говорят в математике, к *сужению функции* $\sin x$ *на отрезок* $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

В силу свойств взаимно-обратных функций, перечисленных в начале статьи,

$$D(\arcsin) = [-1;\ 1],$$
$$E(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$$

и для любых $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, $y_0 \in [-1;\ 1]$ справедливо утверждение

$$\sin x_0 = y_0 \Leftrightarrow \arcsin y_0 = x_0$$

или

$$\arcsin(\sin x_0) = x_0, \qquad (1)$$
$$\sin(\arcsin y_0) = y_0. \qquad (2)$$

Подчеркнем еще раз, что равенство (2) справедливо «всегда», то есть для любого $y_0 \in [-1;\ 1]$, а равенство (1) выполняется не для всех $x_0 \in \mathbb{R}$, а только при $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

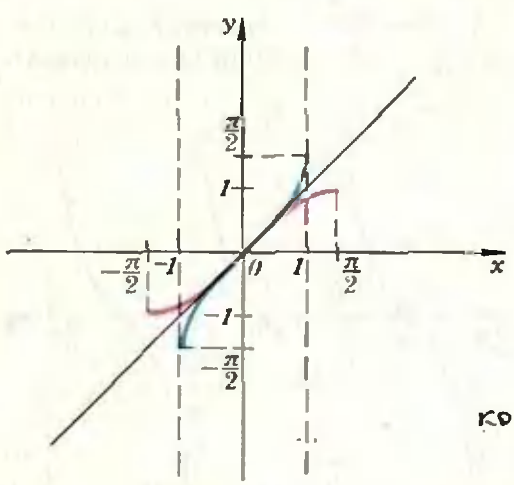


Рис. 2.

Иначе говоря, справедливо утверждение

$$\arcsin a = b \Rightarrow \sin b = a,$$

утверждение же

$$\sin a = b \Rightarrow \arcsin b = a$$

справедливо лишь при $a \in \left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$.

График арксинуса получается по общему правилу — симметрией соответствующей части графика синуса относительно прямой $y = x$ (рис. 2).

Поскольку синус — нечетная функция, нечетен и арксинус:

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x. \qquad (3)$$

Тождество (3), как и любое равенство, в которое входит арксинус, имеет место только тогда, когда аргумент арксинуса лежит на $[-1;\ 1]$.

Поскольку синус возрастает на $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$, арксинус возрастает на $[-1;\ 1]$. Арксинус — обратимая функция, обратной к ней является «синус, рассмотренный на $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$».

* * *

Перейдем к арккосинусу. Функция $\cos x$ не обратима, но, если ограничить ее область определения любым промежутком монотонности, полученная функция будет обратимой.

Функция, обратная к функции $\cos x$, рассмотренной на отрезке $[0;\ \pi]$, называется ***арккосинусом***; значение этой функции в точке a обозначается $\arccos a$ (рис. 3). Арккосинус числа a есть число, заключенное между 0 и π, косинус которого равен a.

Из свойств взаимно-обратных функций следует, что

$$D(\arccos) = [-1;\ 1],$$
$$E(\arccos) = [0;\ \pi]$$

и для любых $x_0 \in [0;\ \pi]$, $y_0 \in [-1;\ 1]$ справедливо утверждение

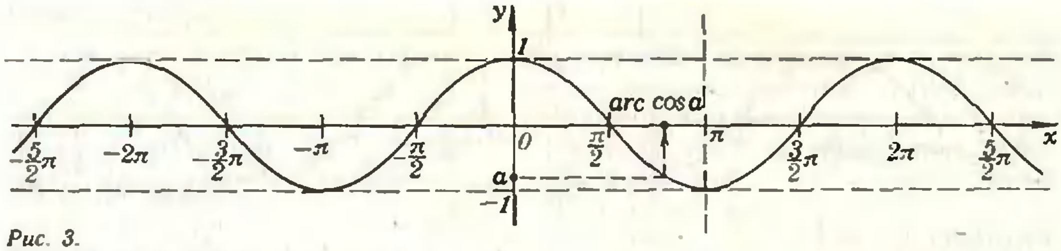


Рис. 3.

$$\cos x_0 = y_0 \Leftrightarrow \arccos y_0 = x_0$$

или

$$\arccos(\cos x_0) = x_0,$$
$$\cos(\arccos y_0) = y_0.$$

Другими словами,

$$\arccos a = b \Rightarrow \cos b = a,$$
$$\cos a = b \text{ и } 0 \leqslant a \leqslant \pi \Rightarrow \arccos b = a.$$

График арккосинуса получается симметрией соответствующей части графика косинуса относительно прямой $y = x$ (рис. 4).

Аналогом равенства (3) является тождество

$$\arccos(-x) = \pi - \arccos x, \quad (4)$$

справедливое только при $-1 \leqslant x \leqslant 1$; мы его докажем ниже.

Арккосинус убывает на $[-1, 1]$. Обратной к функции $\arccos x$ является «косинус, рассмотренный на $[0; \pi]$».

Арксинус и арккосинус связаны тождеством

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad (5)$$

которое мы докажем ниже. Впрочем, при $0 < x < 1$ $\arcsin x$ и $\arccos x$ — углы прямоугольного треугольника; равенство (5) в этом случае очевидно.

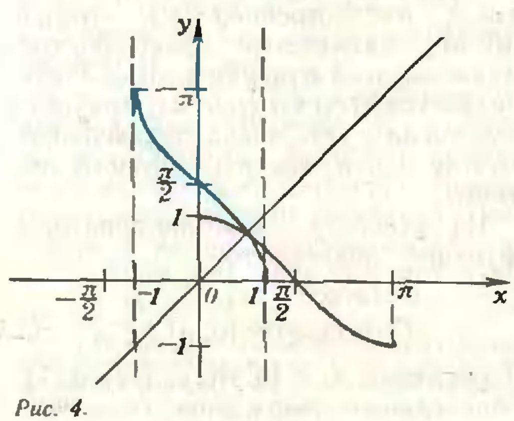


Рис. 4.

* * *

Наконец — об арктангенсе.

Функция, обратная к функции $\operatorname{tg} x$, рассмотренной на интервале $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, называется *арктангенсом*; значение этой функции в точке a обозначается $\operatorname{arctg} a$ (рис. 5). Арктангенс числа a есть число, заключенное между $-\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2}$, тангенс которого равен a.

Из свойств взаимно-обратных функций следует, что

$$D(\operatorname{arctg}) = \mathbf{R},$$
$$E(\operatorname{arctg}) = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$$

и для любых $x_0 \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, $y_0 \in \mathbf{R}$ справедливо утверждение

$$\operatorname{tg} x_0 = y_0 \Leftrightarrow \operatorname{arctg} y_0 = x_0$$

или

$$\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x_0) = x_0,$$
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} y_0) = y_0.$$

Иначе говоря,

$$\operatorname{arctg} a = b \Rightarrow \operatorname{tg} b = a,$$
$$\operatorname{tg} a = b \text{ и } -\frac{\pi}{2} < a < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \operatorname{arctg} b = a.$$

Арктангенс — нечетная функция ($\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$), возраста-

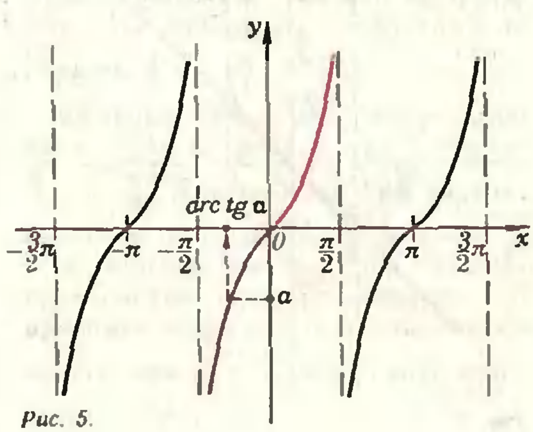


Рис. 5.

ющая на всей числовой прямой. График арктангенса изображен на рисунке 6.

* * *

Тождества с «аркусами» доказываются обычно следующим приемом: во-первых, вычисляется значение какой-нибудь тригонометрической функции φ (φ — это синус, косинус или тангенс) от обеих частей доказываемого тождества

$$A=B$$

и проверяется, что $\varphi(A)=\varphi(B)$, и, во-вторых, устанавливается, что A и B расположены на таком промежутке, где выбранная функция φ монотонна; тогда из равенства $\varphi(A)=\varphi(B)$ вытекает, что $A=B$.

Пример 1. Докажем, что для всех $x\in[-1;1]$ верно (4). Посчитаем косинус от обеих частей равенства (4):

$$\cos(\arccos(-x))=-x,$$

$$\cos(\pi-\arccos x)=-\cos(\arccos x)=-x.$$

Итак, $\cos(\arccos(-x))=\cos(\pi-\arccos x)$. По определению арккосинуса

$$0\leqslant\arccos(-x)\leqslant\pi.$$

Из неравенства $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$ вытекает, что

$$0\leqslant\pi-\arccos x\leqslant\pi.$$

На $[0;\pi]$ косинус монотонен. Следовательно,

$$\arccos(-x)=\pi-\arccos x.$$

Если бы мы в качестве вычисляемой функции выбрали синус, то, конечно, тоже получили бы совпадение значений:

$$\sin(\arccos(-x))=\sqrt{1-\cos^2(\arccos(-x))}=\sqrt{1-(-x)^2}=\sqrt{1-x^2},$$

$$\sin(\pi-\arccos x)=\sin(\arccos x)=\sqrt{1-\cos^2(\arccos x)}=\sqrt{1-x^2}$$

(в обоих случаях перед корнем пишется «плюс», так как $0\leqslant\arccos(-x)\leqslant\pi$ и $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$, а на $[0;\pi]$ синус неотрицателен), но из равенства

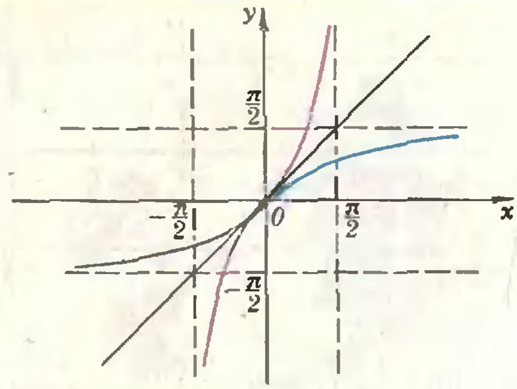


Рис. 6.

$\sin(\arccos(-x))=\sin(\pi-\arccos x)$ не следует (4), так как на $[0;\pi]$ синус не монотонен.

Пример 2. Докажем, что для всех $x\in[-1;1]$ верно тождество (5). Докажем мы его в равносильном виде

$$\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x.$$

По определению арккосинуса

$$0\leqslant\arccos x\leqslant\pi,$$

откуда вытекает, что

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}-\arccos x\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Значит, левая и правая части доказываемого равенства при всех допустимых значениях x принадлежат $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$. Вычислив синус от обеих его частей, получим

$$\sin(\arcsin x)=x,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)=\cos(\arccos x)=x.$$

На $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ синус монотонен. Следовательно,

$$\arcsin x=\frac{\pi}{2}-\arccos x.$$

Пример 3. Докажем, что для $x\in\left[\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right]$

$$\arcsin(\sin x)=\pi-x.$$

С одной стороны,

$$\sin(\arcsin(\sin x))=\sin x,$$

$$\sin(\pi-x)=\sin x.$$

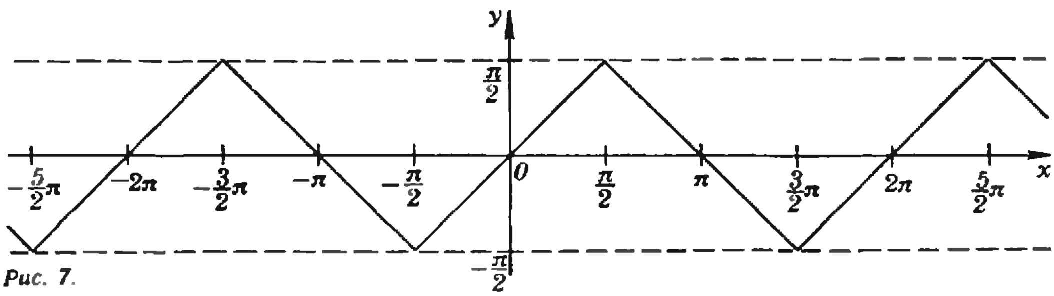


Рис. 7.

С другой стороны,

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin(\sin x)\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

Из неравенства $\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi$ следует, что

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\pi-x\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

На $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ синус монотонен. Значит, $\arcsin(\sin x)=\pi-x$. Итак, $\arcsin(\sin x)=$

$$=\begin{cases}x, & \text{если } -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\\ \pi-x, & \text{если } \frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3}{2}\pi.\end{cases}$$

Поскольку $\arcsin(\sin x)$ — периодическая функция с периодом 2π (почему?) и отрезок $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3}{2}\pi\right]$ имеет длину 2π, мы можем построить ее график (рис. 7).

* * *

Задачи на вычисления с «аркусами» решаются аналогично.

Пример 4. Вычислим $A=\arcsin\frac{4}{\sqrt{65}}-\arccos\left(-\frac{11}{\sqrt{130}}\right)$.

Прежде всего, $A=\arcsin\frac{4}{\sqrt{65}}-\left(\pi-\arccos\frac{11}{\sqrt{130}}\right)=\arcsin\frac{4}{\sqrt{65}}+\arccos\frac{11}{\sqrt{130}}-\pi$. Оценим теперь число $B=\arcsin\frac{4}{\sqrt{65}}+\arccos\frac{11}{\sqrt{130}}$. Поскольку $\frac{4}{\sqrt{65}}>0$ и $\frac{11}{\sqrt{130}}>0$,

$$0<\arcsin\frac{4}{\sqrt{65}}<\frac{\pi}{2}$$

$$0<\arccos\frac{11}{\sqrt{130}}<\frac{\pi}{2}$$

$$\overline{0<\qquad B\qquad<\pi}$$

Так как на $[0;\pi]$ синус не монотонен, а косинус монотонен, найдем $\cos B$: $\cos B=$

$$=\cos\left(\arcsin\frac{4}{\sqrt{65}}+\arccos\frac{11}{\sqrt{130}}\right)=$$

$$=\cos\left(\arcsin\frac{4}{\sqrt{65}}\right)\times$$

$$\times\cos\left(\arccos\frac{11}{\sqrt{130}}\right)-$$

$$-\sin\left(\arcsin\frac{4}{\sqrt{65}}\right)\times$$

$$\times\sin\left(\arccos\frac{11}{\sqrt{130}}\right)=$$

$$=\sqrt{1-\left(\frac{4}{\sqrt{65}}\right)^2}\cdot\frac{11}{\sqrt{130}}-$$

$$-\frac{4}{\sqrt{65}}\cdot\sqrt{1-\left(\frac{11}{\sqrt{130}}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из соотношений $\cos B=\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $0<B<\pi$ следует, что $B=\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\pi}{4}$. Значит, $A=B-\pi=-\frac{3}{4}\pi$.

Пример 5. Сравним числа $\arcsin\frac{2}{5}$ и $\arccos\frac{2}{5}$. Поскольку $\frac{2}{5}>0$,

$$0<\arcsin\frac{2}{5}<\frac{\pi}{2}$$

и

$$0<\arccos\frac{2}{5}<\frac{\pi}{2}.$$

(Окончание см. на с. 49)

Квант для младших школьников

Задачи

1. Мой знакомый Саша однажды мне сказал: «Позавчера мне было 10 лет, а в будущем году мне исполнится 13 лет». Может ли такое быть?

♦

2. Две высоты треугольника не меньше сторон, на которые они опущены. Найти углы треугольника.

♦

3. Сломаем пополам спичку. Одну половинку переломим еще раз. Один из получившихся кусочков снова попытаемся переломить пополам. Почему с каждым разом ломать спичку становится все труднее?

♦

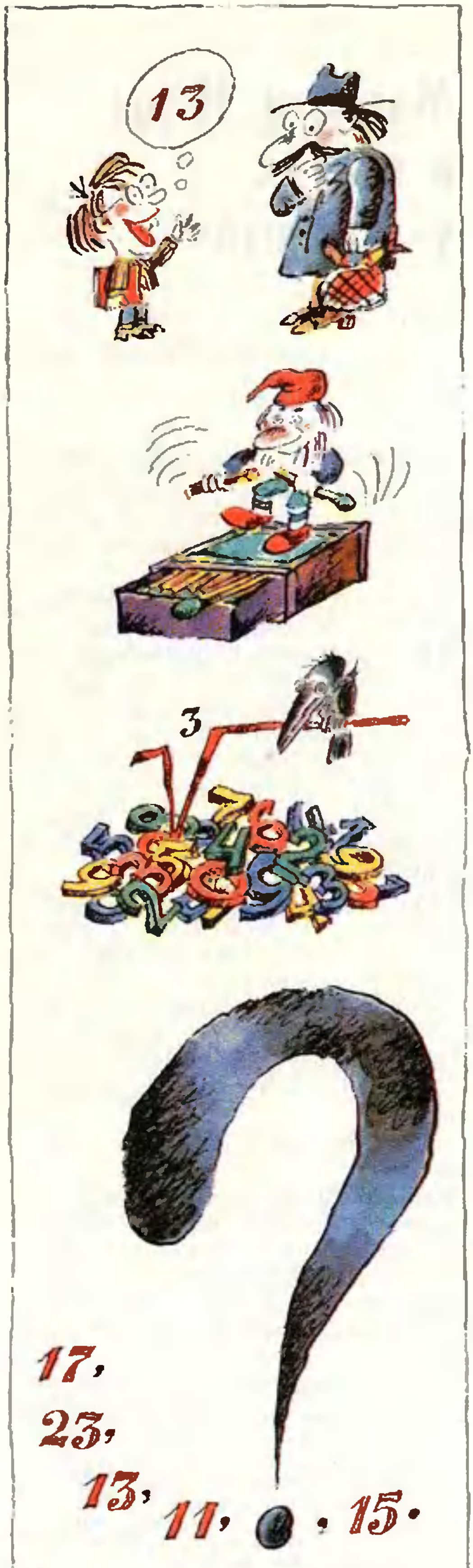
4. Найдите все пятизначные числа, равные кубу числа, образованного двумя их последними цифрами.

♦

5. Какое число нужно поставить вместо знака «?» в последовательности 17, 23, 13, 11, ?, 15?

♦

Эти задачи нам предложили
С. М. Коршунов, А. П. Савин, С. Р. Сефибеков, С. М. Ушницкий.



Магистр Игры в гостях у «Кванта»

Кандидат физико-математических наук
В. Л. ГУТЕНМАХЕР

Мы пригласили в редакцию Магистра Игры*), известного специалиста по теории игр — он знает много старинных игр и придумывает новые.

— *Уважаемый Магистр, расскажите нам, пожалуйста, об играх.*

Магистр. Начнем с простейшей игры, которую мы будем называть.

Игра для начинающих. На столе лежат 66 бусинок. Первый игрок может взять себе от 1 до 9 бусинок, второй игрок берет от 1 до 9 бусинок из оставшихся и так далее. Выигрывает тот, кто заберет последние бусинки.

Игра названа «Игрой для начинающих» — в этом есть двоякий смысл. Во-первых, игра простая и на ее примере удобно показать способы рассуждений начинающим математикам. Во-вторых, в этой игре, если правильно играть, выигрывает начинающий игрок — тот, кто ходит первым.

— *Как Вы будете играть, если Вы начинаете?*

Магистр. Я возьму 6 бусинок — останется 60. Как бы ни пошел противник, следующим ходом я могу сделать так, что останется 50 бусинок, затем — 40, затем 30 и так далее, пока не останется 0 бусинок. Я выиграл.

Если же начну игру не я, то выиграет противник, знающий описанный способ игры. Поэтому двум магистрам достаточно бросить монетку и

*) Магистр Игры — персонаж романа Германа Гессе «Игра в бисер» (М., «Художественная литература», 1969).

выяснить, кто начнет игру. После этого они могут и не играть — и так ясно, кто победит.

— *Что делать, если противник начал первым игру, но не знает, как правильно играть?*

Магистр. Нам же известны «выигрышные позиции» — когда число бусинок, которое остается после хода, кратно 10. Вот и нужно, как только представится возможность, перейти в такую позицию.

— *Как Вы разгадали секрет этой игры?*

Магистр. Я начал рассуждать от конца игры, а не от ее начала. Допустим, я выиграл, то есть взял последние бусинки. Я мог это сделать только в том случае, если перед этим противник оставил на столе от 1 до 9 бусинок. Чтобы заставить его это сделать, я должен был оставить на столе после своего предыдущего хода 10 бусинок. Это выигрышная позиция. Точно так же следующая (на самом деле — предыдущая) выигрышная позиция — оставить 20 бусинок. Выигрышные позиции дальше периодически повторяются. Самая последняя, то есть самая первая выигрышная позиция — оставить на столе 60 бусинок. Мы знаем, что попасть в нее можно первым ходом — забрав 6 бусинок.

Как видите, мои секреты очень просты: рассуждать от конца игры и находить выигрышные позиции. Ну и, конечно, подмечать, как они периодически повторяются.

— *Спасибо, Магистр. А не предложите ли Вы нам другие игры?*

Магистр. Рассмотренную игру очень легко обобщить: давайте, считать, что в начале на столе лежит N бусинок и что каждый игрок может брать от 1 до p бусинок. При конкретных N и p мы получаем различные конкретные игры. В частности, при $p=9$, $N=66$ — это наша игра для начинающих.

— *А есть ли правило, которое годилось бы для любой такой игры?*

Магистр. Да, есть. Если число N не делится на $p+1$, при правильной игре начинающий выиграет. Он должен сначала взять столько бусинок, чтобы оставшееся число делилось на $p+1$ (то есть взять r бусинок, где r — остаток от деления N на $p+1$), а затем применять эту тактику и дальше.

Если же число N делится на $p+1$ (скажем, $N=k(p+1)$), то выигрывает игрок, который ходит вторым. Как бы ни начал его противник, он сможет все время попадать в выигрышные позиции: $(k-1)(p+1)$, $(k-2)(p+1)$ и т. д.

— Можно ли еще как-нибудь изменить «Игру для начинающих»?

Магистр. Да, например, есть игра «Побеждает чет». В этой игре два игрока тоже берут поочередно от 1 до p бусинок из кучки, в которой в начале имеется нечетное число бусинок. Побеждает на этот раз тот, кто в итоге, когда стол опустеет, наберет четное число бусинок. Эта игра гораздо интереснее — выиграть в ней значительно сложнее.

— Правда ли, что тем не менее Вы и в ней всегда выигрываете?

Магистр. Если мне предоставлено право выбирать, начинаю ли я игру или хожу вторым, то я всегда выиграю. Я знаю теорему — в играх такого типа*), как эти, у одного из игроков есть выигрышная стратегия. Этот замечательный факт теории игр придал мне уверенность, и, готовясь к игре, я нашел секрет выигрыша**).

Приведу по этому поводу стих моего приятеля Магистра Игры Иозефа Кнехта:

Ты пишешь на листе, и смысл означен
И закреплен блужданьями пера.
Для следующего до конца прозрачен:
На правилах покоится игра***)

— А есть ли еще какие-нибудь интересные подходы к играм?

Магистр. Давайте подумаем еще над одной игрой, очень похожей на «Игру для начинающих»:

Игра с двумя кучками бусинок. На столе лежат две кучки бусинок, в каждой по 66 бусинок. Каждым ходом можно из какой-нибудь одной кучки взять себе от 1 до 9 бусинок. Выигрывает тот, кто заберет последние бусинки.

— Наверное, тут тоже надо думать от конца игры и в каждой кучке оставлять число, кратное 10.

Магистр. Ничего подобного! Разгадка этой игры в симметрии. Выиграет тот, кто пойдет вторым. Допустим, что начинаете Вы и берете сколько-то бусинок из одной кучки. Тогда я беру столько же бусинок из другой кучки. На каждый Ваш ход у меня есть ответный ход, и поэтому я выиграю.

*) Речь идет об играх, которые специалистами называются «конечные игры без ничьих с полной информацией». О них можно прочитать в книге Е. С. Вентцель «Элементы теории игр» (М., «Наука», 1959) или в «Кванте», 1981, № 1, с. 12.

**) Этот секрет разгадали также ребята из Малой Академии наук Крыма. «Квант» надеется вскоре вернуться к этой игре.

***) Из упомянутой книги Германа Гессе «Игра в бисер» (перевод стихов С. Аверинцева).

задачник Кванта

Задачи

М796—М800; Ф808—Ф812

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 30 июня 1983 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4 — 83» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М796, М797» или «Ф808». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М796. Точка P расположена внутри квадрата $ABCD$ так, что $|AP|:|BP|:|CP|=1:2:3$. Найдите $\widehat{APB}$.

Л. Д. Курляндчик

М797*. Известно, что последними цифрами квадратов целых чисел могут быть лишь цифры 0, 1, 4, 5, 6 и 9. Верно ли, что перед последней цифрой в них может встретиться любая группа цифр, то есть что для любого набора из n цифр $a_1, a_2, \ldots, a_n$ можно найти целое число, квадрат которого оканчивается цифрами $a_1a_2\ldots a_nb$ (где b — одна из перечисленных выше цифр)?

Д. Б. Фукс

М798*. На окружности отметили $4k$ точек и раскрасили их попеременно в красный и синий цвета; затем $2k$ красных точек произвольным образом соединили попарно k красными отрезками, а $2k$ синих — k синими отрезками (никакие три отрезка не пересекаются в одной точке). Докажите, что найдется по крайней мере k точек пересечения красных отрезков с синими.

С. В. Фомин

М799. а) Найдите одно решение уравнения $3^{x+1}+100=7^{x-1}$ и докажите, что у него нет других решений.

б)* Найдите два решения уравнения

$$3^x+3^{x^2}=2^x+4^{x^2}$$

и докажите, что у него нет других решений.

С. С. Валландер

М800*. а) На плоскости отмечены все точки с целочисленными координатами — узлы квадратной решетки, и среди них выделен один «начальный» узел O. Для каждого из остальных узлов P проведена прямая, относительно которой узлы O и P симметричны, — серединный перпендикуляр к отрезку OP. Проведенные прямые разбивают плоскость на мелкие части (треугольники и выпуклые многоугольники). Припишем каждой из них натуральное число —

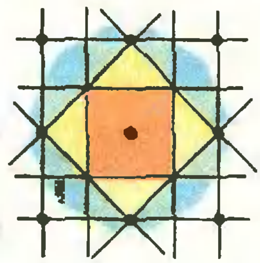


Рис. 1.

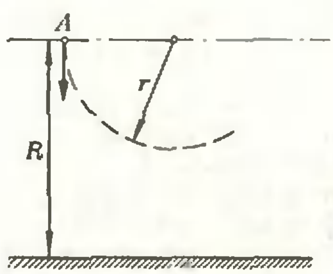


Рис. 2.

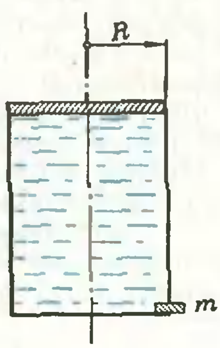


Рис. 3.

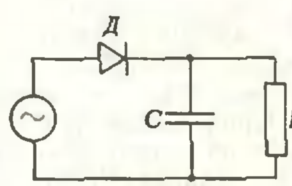


Рис. 4.

ранг — по следующему правилу: часть, содержащая точку O (она имеет форму квадрата), получает ранг 1, части, граничащие с ней по стороне, — ранг 2, части, граничащие с ними по стороне (и отличные от уже рассмотренных) — ранг 3 и т. д. (рис. 1). Докажите, что суммарная площадь всех частей ранга r одна и та же при всех натуральных r.

б) Верно ли аналогичное утверждение для произвольной решетки из параллелограммов (в частности, из ромбов с углом в 60°)? Для решетки из правильных шестиугольников?

в) Сформулируйте и докажите аналогичное утверждение для кубической решетки в пространстве.

А. Б. Гончаров

Ф808. Моторная лодка, находящаяся в точке A на расстоянии R от берега озера, начинает разворот, двигаясь со скоростью $v=18$ км/ч по окружности радиуса $r=R/2$; в начальный момент скорость лодки направлена к берегу (рис. 2). Волна от лодки дошла до берега через время $t=3$ мин после начала разворота. Скорость распространения волн от лодки по поверхности воды равна $u=9$ км/ч. Найти расстояние R.

А. И. Буздин

Ф809. Цилиндрический бак наполнен доверху жидкостью плотности ρ. Сверху бак плотно закрыт крышкой радиуса R. Снизу в баке имеется отверстие площади s, закрытое пробкой массы m (рис. 3). Чтобы вытащить пробку из бака, нужно приложить силу f. С какой максимальной угловой скоростью можно вращать бак вокруг вертикальной оси так, чтобы пробка не вылетала?

В. И. Комов

Ф810. Имеется нагреватель с рабочей температурой $t_н=700$°C. Температура окружающей среды — $t_0=20$°C. Какое минимальное количество тепла необходимо забрать у нагревателя, чтобы испарить $m=3$ кг воды, нагретой до температуры кипения ($t_1=100$°C)? Удельная теплота парообразования воды $r=2{,}26$ МДж/кг.

О. С. Рабинович

Ф811. В обычной схеме однополупериодного выпрямителя (рис. 4) $C=1000$ мкФ, $R=500$ Ом. Частота сети $f=50$ Гц. Считая диод идеальным, найти:

1) величину коэффициента пульсаций напряжения $k=\frac{\Delta U}{U}$ на резисторе R;

2) * во сколько раз уменьшится коэффициент k, если последовательно с резистором включить катушку индуктивности $L=100$ Гн?

А. Р. Зильберман

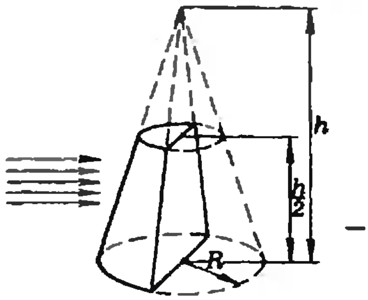


Рис. 5.

Ф812. Коническая линза представляет собой половину усеченного стеклянного конуса. Показатель преломления стекла n; размеры линзы указаны на рисунке 5. На линзу падает пучок параллельных лучей, перпендикулярных плоской части боковой поверхности линзы. Под каким углом к оси пучка надо расположить за линзой экран, чтобы изображение пучка на экране было прямой линией?

А. А. Лапидес

Problems

M796—M800; P808—P812

We have publishing Kvant's contest problems every month from the first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later that June 30th 1983 to the following adress: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1 «Квант». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped selfadressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication, please send it us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write "NEW PROBLEMS IN PHYSICS (or MATHEMATICS")."

M796. For the point P inside the square $ABCD$, $|AP| : |BP| : |CP| = 1:2:3$. Find $\widehat{APB}$.

L. D. Kurliandchik

M797*. It is well known that the last digit of the square of an integer is one of the following: 0, 1, 4, 5, 6, 9. Is it true that any sequence of digits may appear before the last one, i. e. for any sequence of n digits a_1, a_2, ..., a_n there exists an integer whose square ends with the digits $a_1a_2...a_nb$, where b is one of the digits listed above?

D. B. Fuchs

M798*. $4k$ points on the circle are painted alternatively red and blue; then the $2k$ red points are joined pairwise by k red line segments, the $2k$ blue points — by k blue segments, no three lines intersecting at one point. Prove that there are at least k intersection points of red line segments with blue ones.

S. V. Fomin

M799. a) Find a solution of the equation $3^{x+1}+100=7^{x-1}$ and prove it has no other solutions.
b)* Find two solutions of the equation

$$3^x+3^{x^2}=2^x+4^{x^2}$$

and prove it has no others.

S. S. Vallander

M800*. a) The nodes of a square lattice are all the points of the plane both coordinates of which are integers; one of the nodes is the origin O. For each of the other nodes P construct the line in which O and P are symmetric, i. e. the perpendicular to the midpoint of OP. These lines split the plane into little parts (triangles and convex polygons). To each of them assign an integer (its rank) as follows: the part containing O (which is a square) is of rank 1, the parts which have a common side with it are of rank 2, the remaining parts which have a common side with parts of rank 2 are of rank 3, etc. (see figure Рис. 1). Prove that the total area of all parts of rank r is the same for all positive integers r.
b) Is a similar statement true for an arbitrary lattice consisting of parallelograms (in particular, of rhombuses with 60° angles)? For a lattice consisting of regular hexagons?

c) State and prove a similar statement for cubic lattices in space.

A. B. Goncharov

P808. A motorboat begins to turn from point A, located at the distance R from the shore, moving with velocity $v=18$ km/h along a circle of radius $r=R/2$; at the initial moment the boat is directed toward the shore (see figure Рис. 2). The wave from the boat reaches the shore in time $t=3$ min after the boat began to turn. The velocity of wave propagation on the water surface is $u=9$ km/h. Find the distance R.

A. I. Buzdin

P809. A cylindrical container is filled with liquid of density ϱ and tightly closed from above by a cover of radius R. In the bottom of the container there is a hole of area s, closed by a cork of mass m (see figure Рис. 3). In order to pull the cork out, the force f must be applied. With what maximal angular velocity may the container be rotated about its vertical axis before the cork flies out?

V. I. Komov

P810. A heater with working temperature $t_h=700$°C is placed in an environment where the temperature is $t_0=20$°C. What minimal amount of heat must be taken from the heater in order to evaporate $m=3$kg of water, already heated to the boiling point ($t_1=100$°C)? The specific heat of water vaporization is $r=2.26$ MJ/kg.

O. S. Rabinovich

P811. In the ordinary circuit of a singlehalfperiod rectifier (see figure Рис. 4), we have $C=1000$ мсF, $R=500$ Ohm. The frequency of the power source is $f=50$ Hz. Assuming the diod ideal, determine

1) the magnitude of the tension pulsation coefficient $k=\frac{\Delta U}{U}$ on the resistor R;

2)* how the coefficient k will decrease if an induction coil $L=100$ Hn is connected in series to the resistor?

A. R. Zilberman

P812. A glass lens has the shape of half a truncated cone. The refraction index of glass is n; the measurements of the lens are shown on the figure Рис. 5. A beam of parallel light rays falls on the lens perpendicularly to the flat part of the lateral surface of the lens. What angle between the screen and the beam's axis must be chosen in order to obtain the image of the beam in the form of a straight line?

A. A. Lapides

Решения задач

М780—М785; Ф793—Ф797

М780*. *Дан квадрат K со стороной 100. Пусть L — несамопересекающаяся незамкнутая ломаная, лежащая в K, такая, что для любой точки P границы квадрата K найдется точка ломаной L, расстояние которой от P не больше 1/2. Докажите, что на ломаной найдутся две точки X и Y, расстояние*

Обозначим концы ломаной L через A и B. Двинемся по ломаной из A в B. Пусть C_1 — первая вершина квадрата, к которой мы приблизимся на расстояние, не большее 1/2. Будем двигаться дальше, пока впервые не придем в такую точку M ломаной, которая будет удалено от одной из двух соседних с C_1 вершин на расстояние, не большее 1/2. Назовем эту вершину C_2 ($|MC_2|\leqslant 1/2$), а вторую соседнюю с C_1 вершину — C_3 (рис. 1).

Ломаная L разбивается на два куска — AM и MB. В соответствии с этим представим сторону квадрата C_1C_3

между которыми не более 1, такие, что длина части ломаной, заключенной между ними, не меньше 198.

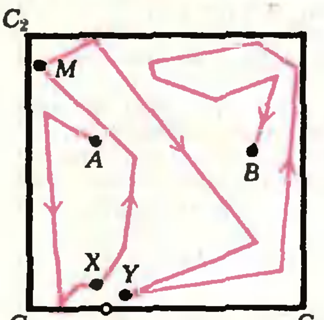


Рис. 1.

Рис. 2.

как объединение двух множеств: множества U точек, удаленных на расстояние, не большее $1/2$, от ломаной AM и множества V точек, удаленных на такое же расстояние от ломаной MB. Эти множества не пусты (U содержит точку C_1, а V — C_3) и каждое из них состоит из отрезков и отдельных точек. (Действительно, множество точек плоскости, удаленных от ломаной на расстояние $1/2$, представляет собой «коридор» ширины 1, идущий вдоль ломаной, с закруглениями около ее вершин — см. рис. 2. Ясно, что такой коридор может пересекаться с произвольным отрезком по конечному числу отрезков и отдельных точек.) Легко понять, что множества U и V имеют хотя бы одну общую точку P, ибо в противном случае они не покрывали бы весь отрезок A_1A_3. На ломаной AM найдется точка X, отстоящая от P на расстояние, не большее $1/2$; аналогичная точка Y ($|YP| < 1/2$) есть и на ломаной MB. Точки X и Y являются искомыми.

В самом деле, расстояние от X до Y не превосходит $|XP| + |YP| < 1$. С другой стороны, длина участка ломаной L от X до Y равна сумме длин ломаных XM и MY, то есть не меньше суммы длин отрезков XM и MY. Но $|XM| > |PC_2| - |PX| - |C_2M| > |C_1C_2| - 1 = 99$; аналогично, $|YM| > 99$. Следовательно, длина ломаной XY не меньше 198.

А. П. Савин

М781. *Постройте прямую, параллельную стороне AC данного треугольника ABC и пересекающую его стороны AB и BC в таких точках D и E соответственно, что $|AD| = |BE|$.*

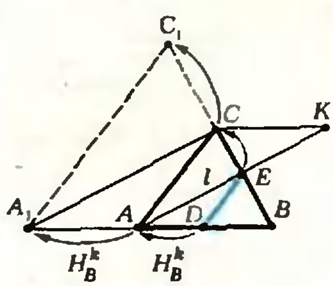


Рис. 1.

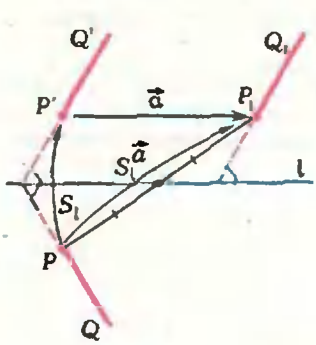


Рис. 2.

Из многочисленных решений этой задачи мы выбрали два, показавшиеся нам наиболее поучительными.

Первое решение основано на методе гомотетии. Заметим, что при гомотетии H_B^k с центром B и коэффициентом $k = |AB| : |DB|$ отрезок DE перейдет в AC (рис. 1), так как $(DE) \parallel (AC)$; при этом $\triangle ABC$ перейдет в $\triangle A_1BC_1$. Ясно, что $|A_1A| = |BC|$ и что прямые A_1C и AE параллельны. Поэтому для построения отрезка DE достаточно отложить на луче BA отрезок $|AA_1|$, равный $|BC|$, (см. рис. 1) и провести через точку A прямую l, параллельную A_1C. Точка ее пересечения со стороной BC и есть искомая точка E. (Вершина C_1 фактически нам не понадобилась). Это построение можно слегка упростить: очевидно, что прямая $l = (AE)$ пересекается с прямой, параллельной AB и проходящей через C, в точке K, удаленной от вершины C на расстояние $|CK| = |AA_1| = |CB|$ (см. рис. 1). А построить точку K совсем легко.

Второе решение использует *перемещения*, точнее, перемещение определенного типа — скользящую симметрию. *Скользящей симметрией* $S_l^{\vec{a}}$ с осью l и вектором $\vec{a}$ называется композиция осевой симметрии S_l и параллельного переноса на вектор $\vec{a}$, при этом вектор $\vec{a}$ должен быть параллелен оси (рис. 2); в частности, при $\vec{a} = \vec{0}$ скользящая симметрия превращается в обычную осевую. Очевидно, что середина любого отрезка PP_1, где P_1 — образ точки P при скользящей симметрии, лежит на ее оси (см. рис. 2). Кроме того, легко видеть, что для любых двух лучей PQ и P_1Q_1 можно указать (единственную) скользящую симметрию, переводящую первый луч во второй: ось l этой симметрии проходит через середину отрезка PP_1 и образует равные углы с данными лучами*) (см. рис. 2), а вектор равен $\overrightarrow{P'P_1}$, где $P' = S_l(P)$.

Рассмотрим теперь скользящую симметрию, переводящую луч AB в луч BC. Поскольку $|AD| = |BE|$, она переведет точку D в точку E. Поэтому середина F отрезка DE лежит на оси этой симметрии. С другой стороны, точка F лежит на медиане BM треугольника ABC, так как

*) Точнее, ось l параллельна биссектрисе угла, стороны которого сонаправлены с лучами PQ и P_1Q_1.

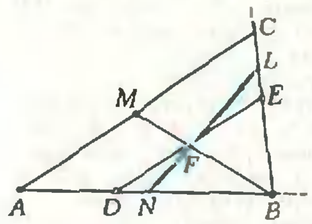


Рис. 3.

$(DE)\parallel(AC)$. Отсюда вытекает следующее построение (рис. 3): находим середину N стороны AB, откладываем на стороне BC отрезок BL, равный BN, и проводим отрезок DE параллельно AC через точку F пересечения отрезка LN и медианы BM (прямая NL служит осью скользящей симметрии, переводящей $[AB)$ в $[BC)$, потому что N — середина отрезка AB и углы BNL и BLN равны по величине, как углы при основании равнобедренного треугольника BLN).

Отметим, что скользящую симметрию в этом решении можно было бы заменить на поворот, переводящий луч AB в луч BC. Подумайте, как найти центр и угол такого поворота и использовать их для построения отрезка DE.

В. Н. Дубровский

М782. *Докажите, что если сумма двух чисел равна 30030, то их произведение не делится на 30030.*

Разложим число $a=30030$ на простые множители:

$$a=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13.$$

Предположим, что произведение двух натуральных чисел x и $a-x$, дающих в сумме a, делится на a:

$$x(a-x)=ak \quad (k \text{ — натуральное}).$$

Тогда $xa-x^2=ak$, то есть $x^2=a(x-k)$ делится на a. Следовательно (по основной теореме арифметики — о единственности разложения числа на простые множители), число x должно делиться на каждый простой множитель числа a, а значит, и на их произведение. Но раз все они входят в a в первой степени, то $x\geqslant a$, то есть $a-x\leqslant0$; это противоречит предположению, что число $a-x$, как и x, — натуральное.

Из нашего решения видно, что утверждение задачи будет выполнено для любого числа a, в разложение которого все простые входят в первой степени (такие числа a называют «свободными от квадратов»). Нетрудно видеть, что оно справедливо только для таких чисел: если a делится на какой-либо квадрат $p^2>1$, то можно взять $x=a/p$ — при этом произведение $x(a-x)=a(a/p-a/p^2)$ будет делиться на a.

Н. Б. Васильев

М783. *а) При каком наибольшем n система неравенств*

$$1<x<2,$$
$$2<x^2<3,$$
$$3<x^3<4,$$
$$\dots\dots\dots$$
$$n<x^n<n+1$$

имеет решения?

б) Для каких n существуют такие две прогрессии — арифметическая $a_1, a_2, a_3, \dots$ и геометрическая $b_1, b_2, b_3, \dots$, что

$$a_1<b_1<a_2<b_2<a_3<\dots$$
$$\dots<a_n<b_n<a_{n+1}?$$

а) Ответ: при $n=4$. Покажем, что $n\leqslant4$. Действительно, если $n\geqslant5$, то для некоторого x должны выполняться неравенства: $x^3>3$ и $x^5<6$. Отсюда следует, что $3^5<x^{15}<6^3$, но $3^5=243$, а $6^3=216$, и мы видим, что это неравенство выполняться не может. Итак, $n\leqslant4$. Осталось заметить, что $1<\sqrt{2}=\sqrt[4]{4}<\sqrt[3]{3}<\sqrt[4]{5}<\sqrt[3]{4}<\sqrt{3}<2$, и поэтому системе первых четырех неравенств удовлетворяет любое число, лежащее на отрезке между $\sqrt[3]{3}$ и $\sqrt[4]{5}$.

Эта задача легко решается, если под рукой есть хороший калькулятор (умеющий вычислять функцию x^y). Заметим, что данная система неравенств может быть переписана в виде

$$1<x<2,$$
$$\sqrt{2}=1{,}4142\ldots<x<1{,}7321\ldots=\sqrt{3},$$
$$\sqrt[3]{3}=1{,}4422\ldots<x<1{,}5874\ldots=\sqrt[3]{4},$$
$$\sqrt[4]{4}=1{,}4142\ldots<x<1{,}4953\ldots=\sqrt[4]{5},$$
$$\sqrt[5]{5}=1{,}3797\ldots<x<1{,}4309\ldots=\sqrt[5]{6},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Теперь воочию видно, что $\sqrt[3]{3} > \sqrt[5]{6}$ и, следовательно, $n<5$. Кроме того, видно, что, например, число 1,45 удовлетворяет первым четырем неравенствам.

Если же вместо калькулятора мы станем пользоваться логарифмической линейкой, дающей не более трех верных знаков, то, даже получив в качестве значения для $\sqrt[3]{3}$ число 1,44, а для числа $\sqrt[5]{6}$ значение 1,43, мы не будем уверены в правильности последних цифр и должны будем сравнивать эти корни прямым счетом, как это было сделано выше.

б) Покажем, что для любого натурального n можно подобрать столь малое $\alpha>0$, что арифметическая прогрессия $1+\frac{\alpha}{2}$, $\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)+\alpha$, ..., $\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)+n\alpha$ с разностью α и геометрическая прогрессия $1+\alpha$, $(1+\alpha)^2$, ..., $(1+\alpha)^n$ со знаменателем $1+\alpha$ удовлетворяют условию задачи.

Воспользуемся тождеством $q^k-1=(q-1)(q^{k-1}+q^{k-2}+\ldots+1)$. Полагая в нем $q=1+\alpha$, получим, что при всех $k\geqslant 1$

$$(1+\alpha)^k=1+\alpha((1+\alpha)^{k-1}+(1+\alpha)^{k-2}+\ldots+1). \qquad (*)$$

Подберем столь малое α, что $(1+\alpha)^n<1+\frac{1}{2n}$, тогда при всех $k=1, \ldots, n$

$$(1+\alpha)^{k-1}+(1+\alpha)^{k-2}+\ldots+1<$$
$$<k(1+\alpha)^n<k\left(1+\frac{1}{2n}\right)<k+\frac{1}{2}.$$

При таком α в силу (*) будут выполнены неравенства

$$\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)+(k-1)\alpha<1+k\alpha<$$
$$<(1+\alpha)^k<1+\alpha\left(k+\frac{1}{2}\right)=\left(1+\frac{\alpha}{2}\right)+k\alpha$$

при всех $k=1, \ldots, n$, то есть k-й член указанной геометрической прогрессии заключен между k-м и $(k+1)$-м членами арифметической прогрессии, что нам и требовалось.

А. П. Савин

◆

М784. *Шарообразная планета движется по окружности вокруг звезды и вращается вокруг своей оси, причем ось суточного вращения наклонена к плоскости орбиты под углом α (для нашей Земли $\alpha=66{,}5°$). Найдите зависимость продолжительности T самого короткого дня в году в данном пункте на поверхности планеты от географической широты φ этого пункта. (Движение планеты по орбите считается очень медленным по сравнению с вращением). Напишите формулу для функции $T=T(\varphi)$ и начертите примерный график.*

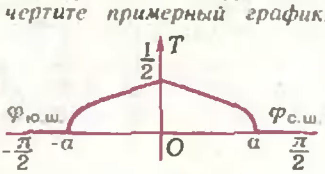


Рис. 1.

Ответ: $T(\varphi)=\frac{1}{\pi}\arccos(\operatorname{tg}\varphi\cdot\operatorname{ctg}\alpha)$ при $0\leqslant\varphi\leqslant\alpha$ и $T(\varphi)=0$ при $\varphi>\alpha$ (за единицу времени приняты сутки для данной планеты, то есть время одного ее оборота вокруг своей оси); примерный график функции $T(\varphi)$ показан на рисунке 1.

Пусть плоскость, содержащая точки с широтой φ, пересекает ось вращения планеты в точке M, а перпендикуляр к плоскости ее орбиты, проведенный из центра планеты O, — в точке K (рис. 2). Границами дня и ночи на этой широте служат концы хорды P_1P_2, по которой указанная плоскость пересекает большой круг, отделяющий освещенную половину планеты от неосвещенной. Поэтому продолжительность дня (в сутках) на широте φ равна $T=\gamma/2\pi$, где γ — величина угла P_1MP_2. Очевидно, этот угол (и продолжительность дня) имеет наименьшую величину, когда хорда P_1P_2 перпендикулярна прямой MK. В этом случае $\cos\frac{\gamma}{2}=\frac{|MK|}{|MP_1|}$. Точка P_1 имеет широту φ, значит $\widehat{P_1OM}=\frac{\pi}{2}-\varphi$ и $|MP_1|=R\cos\varphi$, а $|OM|=R\sin\varphi$, где R — радиус планеты (см. рис. 2). В треугольнике MOK угол при вершине O равен $\frac{\pi}{2}-\alpha$, поэтому $|MK|=|OM|\operatorname{ctg}\alpha=R\sin\varphi\operatorname{ctg}\alpha$. Таким образом,

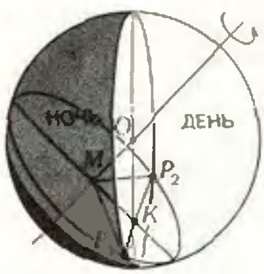


Рис. 2

$$\gamma = 2\arccos\frac{|MK|}{|MP_1|} = 2\arccos\frac{R\sin\varphi\,\mathrm{tg}\,\alpha}{R\cos\varphi} = 2\arccos(\mathrm{tg}\,\varphi\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha).$$

При $\varphi>\alpha$ в момент «зимнего солнцестояния» параллель с широтой φ целиком лежит в неосвещенной половине планеты и $T(\varphi)=0$; здесь наступает полярная ночь (эта область выделена на рисунке 2 черным цветом). Заметим, что при приближении к точке $\varphi=\alpha$ (из интервала $\varphi<\alpha$) касательная к графику $T(\varphi)$ становится вертикальной.

А. П. Савин

М785. *а) Про возрастающую последовательность положительных чисел $a(n)$, $n=1, 2, 3, \ldots$ известно, что для любого натурального числа $k>1$ существует число b_k такое, что $a(kn)\leqslant b_k a(n)$ при всех n. Докажите, что существуют положительные числа c и α, для которых $a(n)\leqslant cn^\alpha$ при всех $n\geqslant 1$.*
Останется ли верным это утверждение, если в условии
б) слово «любого» заменить на «некоторого»?
в) не требовать, чтобы последовательность $a(n)$ была возрастающей?

Докажем сразу, что ответ на вопрос б) утвердительный: если (для некоторого $k>1$) найдется $b=b_k$ такое, что $a(nk)\leqslant b\cdot a(n)$ при всех n, то $a(n)\leqslant cn^\alpha$ при некоторых c и α.

Положим $a(1)=a$. Перемножив ряд голубых неравенств на полях, получим, что (для любого натурального r)

$$a(k^r)\leqslant a\cdot b^r = a\cdot k^{r\alpha},$$

где $\alpha=\log_k b$. Для любого n выберем r так, что $k^{r-1}<n\leqslant k^r$, то есть $\log_k n\leqslant r<\log_k n+1$. Пользуясь монотонностью $a(n)$ и вторым красным тождеством на полях, получаем:

$$a(n)\leqslant a(k^r)\leqslant a\cdot b^r< a\cdot b^{\log_k n+1} = ab\cdot n^{\log_k b} = cn^\alpha,$$

где $c=ab$.

$a(k)\leqslant ba(1)$
$a(k^2)\leqslant ba(k)$
$\ldots\ldots\ldots$
$a(k^r)\leqslant ba(k^{r-1})$

$b=k^{\log_k b}$
$b^{\log_k n}=n^{\log_k b}$

Построим теперь пример, показывающий, что ответ на вопрос в) — отрицательный. Нетрудно построить такую последовательность $a(n)$, которая обладала бы свойством *мультипликативности:* $a(mn)=a(m)a(n)$ для всех m, n, и при этом (для любого натурального r) нашлись бы такие n, что $a(n)\geqslant n^r$. Например, можно положить

$$a(n)=p_1^{l_1}p_2^{2l_2}p_3^{3l_3}\ldots p_s^{sl_s}$$

для $n=p_1^{l_1}p_2^{l_2}\ldots p_s^{l_s}$ (где $p_1=2$, $p_2=3$, $p_3=5$, $\ldots$ — последовательные простые числа); тогда для $m=\prod\limits_{r=1}^{s}p_r^{t_r}$, $n=\prod\limits_{r=1}^{s}p_r^{l_r}$ будет $a(mn)=a(m)\,a(n)=\prod\limits_{r=1}^{s}p_r^{r(l_r+t_r)}$ и для $n=p_r^k$ (при каждом натуральном k) $a(n)=p_r^{rk}=n^r$.

Для этой последовательности условие $a(kn)\leqslant b_k a(n)$ будет выполнено, например, при $b_k=a_k$. Но ни для каких c и α оценка $a(n)\leqslant cn^\alpha$ не может быть верной для всех n, поскольку при $r>\alpha$ существует бесконечно много n таких, что $a(n)\geqslant n^r>cn^\alpha$ (при достаточно большом n).

Н. Б. Васильев

Ф793. *На вогнутую сферическую поверхность радиуса R с высоты $H=R/8$ вблизи оси симметрии падают (с нулевой начальной скоростью) маленькие шарики. Считая удары шариков о поверхность абсолютно упругими, показать, что после первого соударения каждый шарик попадает в низшую точку поверхности. Взаимные соударения шариков не учитывать.*

Рассмотрим движение одного шарика, свободно падающего вблизи оси симметрии. Сразу после соударения с поверхностью шарик имеет скорость $v_0=\sqrt{2gH}$ (поскольку удар абсолютно упругий); вектор $\vec{v}_0$ составляет угол 2α с вертикалью (см. рисунок).

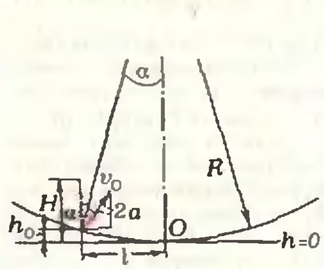
Пусть через время t после соударения с поверхностью смещение шарика вдоль горизонтали равно l (см. рисунок), то есть

$$v_0\sin 2\alpha\cdot t=l \quad\Rightarrow\quad t=l/v_0\sin 2\alpha=l/(\sqrt{2gH}\,\sin 2\alpha),$$

где $v_0\sin 2\alpha$ — горизонтальная проекция скорости v_0 (за время t шарик не ударяется о поверхность). Высота, на которой будет находиться шарик через время t, равна

$$\Delta h=h_0+v_0\cos 2\alpha\cdot t-gt^2/2, \qquad (*)$$

где $v_0\cos 2\alpha$ — вертикальная проекция скорости v_0.



Поскольку шарик начал падать с высоты H вблизи оси симметрии (то есть угол α мал), можно считать, что $h_0 \approx 0$, $\sin 2\alpha \approx 2\alpha$, $\cos 2\alpha \approx 1$, $l = R\alpha$. Учитывая эти соотношения, подставим в уравнение (•) значение $t = l/(\sqrt{2gH}\,\sin 2\alpha) = R/(2\sqrt{2gH})$:

$$\Delta h = v_0 t - \frac{gt^2}{2} = \frac{R}{2} - \frac{R^2}{16H}.$$

При $H = R/8$ $\Delta h = 0$, то есть шарик оказывается в точке O.

Итак, при падении с высоты $H = R/8$ вблизи оси симметрии все шарики после первого соударения с поверхностью попадут в низшую точку поверхности — в точку O.

И. В. Кривченков

♦

Ф794. *Два одинаковых теплоизолированных калориметра высоты $h = 75$ см заполнены на одну треть один — льдом, другой — водой при температуре $t = 10$ °С. Воду из второго калориметра переливают в первый, и при этом калориметр оказывается заполненным на две трети. После того как температура в калориметре установилась, уровень заполнения его увеличился на $\Delta h = 0{,}5$ см. Какова была начальная температура льда в калориметре? Плотность льда — $\varrho_л = 9 \times 10^2$ кг/м^3, воды — $\varrho_в = 10^3$ кг/м^3; удельная теплота плавления льда — $\lambda = 3{,}4 \times 10^5$ Дж/кг; удельная теплоемкость льда — $c_л = 2{,}1 \times 10^3$ Дж/(кг · К), воды — $c_в = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К).*

Тот факт, что после установления температуры в калориметре уровень его заполнения повысился, означает, что часть воды, налитой в калориметр, замерзла — ведь при замерзании воды объем, занимаемый ею, увеличивается. Утверждение о том, что замерзла лишь часть воды, следует из того, что уровень заполнения калориметра увеличился на $\Delta h = 0{,}5$ см — при замерзании всей воды ее объем увеличился бы в $\varrho_в/\varrho_л \approx 1{,}1$ раза, а уровень заполнения калориметра повысился бы на $\frac{h}{3}(1{,}1 - 1) \approx 2{,}5$ см.

Итак, мы приходим к выводу, что установившаяся в калориметре температура равна $t_0 = 0$ °С. Исходя из этого условия запишем уравнение теплового баланса:

$$c_в m_в (t - t_0) + \lambda \cdot \Delta m = c_л m_л (t_0 - t_x), \qquad (1)$$

где Δm — масса замерзшей воды, t_x — начальная температура льда. Найдем Δm.

При повышении уровня заполнения калориметра на Δh объем заполненной части калориметра увеличился на $\Delta h \cdot S$, где S — площадь поперечного сечения калориметра. Очевидно,

$$\Delta h \cdot S = \frac{\Delta m}{\varrho_л} - \frac{\Delta m}{\varrho_в}, \qquad (2)$$

где $\Delta m/\varrho_в$ — объем, который занимала масса Δm воды, $\Delta m/\varrho_л$ — объем, занимаемый той же массой льда. Из (2) находим:

$$\Delta m = \frac{\Delta h \cdot S \varrho_л \varrho_в}{\varrho_в - \varrho_л}.$$

Первоначальные массы воды и льда в калориметрах равны, соответственно, $m_в = \frac{h}{3} S\varrho_в$ и $m_л = \frac{h}{3} S\varrho_л$. Подставляя в (1) выражения для $m_в$, $m_л$ и Δm, получим:

$$c_в S \frac{h}{3} \varrho_в t + \lambda S \cdot \Delta h \frac{\varrho_л \varrho_в}{\varrho_в - \varrho_л} = -c_л S \frac{h}{3} \varrho_л t_x.$$

Отсюда находим начальную температуру льда:

$$t_x = -\frac{c_в h \varrho_в t(\varrho_в - \varrho_л) + 3\lambda \cdot \Delta h \cdot \varrho_л \varrho_в}{c_л h \varrho_л (\varrho_в - \varrho_л)} \approx -54 \text{ °C}.$$

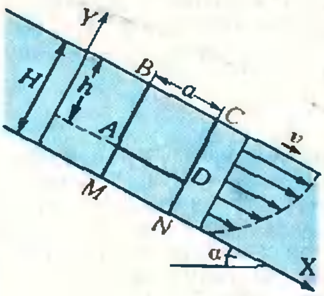
А. И. Буздин

♦

Ф795. *Вода течет по длинному каналу с прямоугольным сечением, наклоненному к горизонту. Можно считать, что сила трения воды о дно и берега канала пропорциональна средней скорости потока и обратно пропорцио-*

При установившемся течении воды глубина H оказывается одной и той же вдоль всего канала. В результате действия сил трения скорости течения на разных глубинах оказываются разными — слои жидкости скользят один по другому и скорость течения возрастает от почти нулевой вблизи дна до наибольшей у поверхности. При этом любой выделенный объем жидкости движется с некоторой постоянной средней скоростью. Это озна-

нальна его глубине. Во время паводка количество воды, протекающей через сечение канала за одну секунду, увеличивается вдвое. Как меняется при этом средняя скорость потока?



чает, что векторная сумма всех сил, действующих на такой объем, равна нулю.

Запишем это условие (II закон Ньютона) для выделенного на рисунке объема $ABCD$. Действующие на него силы — это сила тяжести $F_т = \varrho gabh$ (b — ширина потока), сила давления атмосферного воздуха $F_в = p_0ab$ (p_0 — атмосферное давление), сила давления лежащих ниже слоев воды $F_н = p_hab$ (p_h — давление на «глубине» h), силы давления $F_л$ и $F_п$ со стороны воды слева (выше по течению) и справа (ниже по течению) и сила трения о прилежащий слой воды на глубине h. Запишем II закон Ньютона в проекциях на ось Y (см. рисунок):

$$p_0ab + \varrho gabh\cos\alpha - pab = 0.$$

Из этого уравнения видно, что давление p в потоке определяется только «глубиной» h.

Теперь запишем условие постоянства средней скорости для выделенного на рисунке объема $MBCN$. В проекциях на ось X имеем:

$$\varrho gabH\sin\alpha - k\frac{v}{H} = 0. \qquad (*)$$

Здесь $\varrho gabH$ — сила тяжести, v — средняя скорость течения, kv/H — сила трения ($k = \text{const}$). (Силы давления со стороны воды слева и справа взаимно компенсируются, и поэтому мы не включили их в уравнение). Глубину H выразим через количество Q воды, протекающей через сечение канала за единицу времени: $Q = Hbv \Rightarrow H = \dfrac{Q}{bv}$.

Подставим это выражение в (*) и найдем v:

$$v = \left(\frac{\varrho g a\sin\alpha}{kb}\right)^{1/3} Q^{2/3}.$$

Отсюда видно, что при увеличении Q в 2 раза средняя скорость течения возрастает в $\sqrt[3]{4} \approx 1{,}6$ раза. Глубина потока возрастает при этом в $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}3$ раза.

Г. Л. Коткин

Ф796. *На главной оптической оси AB собирающей линзы с фокусным расстоянием F находится плоское зеркальце, вращающееся с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной оси AB (рис. 1). На зеркальце падает параллельный пучок лучей, который после отражения фокусируется на экране, расположенном в фокальной плоскости линзы. Найти скорость светового пятна на экране в момент, когда оно проходит фокус линзы.*

Пусть в начальный момент времени угол между главной оптической осью линзы и перпендикуляром к зеркалу равен α, а световое пятно при этом находится в точке пересечения оси с экраном (точка B на рисунке 1), то есть после отражения от зеркала лучи идут параллельно главной оптической оси. Через малый промежуток времени Δt зеркало повернется на малый угол $\Delta\alpha = \omega\cdot\Delta t$. Отраженные от зеркала лучи «повернутся» на угол $2\Delta\alpha$ относительно оси (рис. 2) и световое пятно будет находиться в точке C на экране. Найдем перемещение $|BC|$ пятна за время Δt:

$$|BC| = |OB|\,\mathrm{tg}\,2\Delta\alpha = F\,\mathrm{tg}\,2\Delta\alpha \approx 2F\cdot\Delta\alpha$$

(мы воспользовались тем, что $\Delta\alpha$ мало и $\mathrm{tg}\,\Delta\alpha \approx \Delta\alpha$). Зная перемещение, находим мгновенную скорость светового пятна в точке B:

$$v = \frac{|BC|}{\Delta t} = \frac{2F\cdot\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{2F\omega\cdot\Delta t}{\Delta t} = 2F\omega.$$

Е. И. Пальчиков

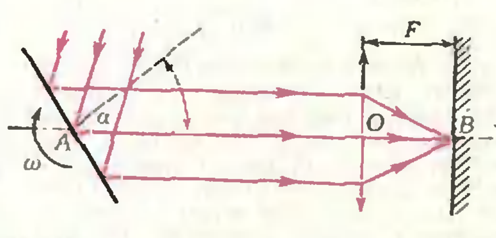


Рис. 1.

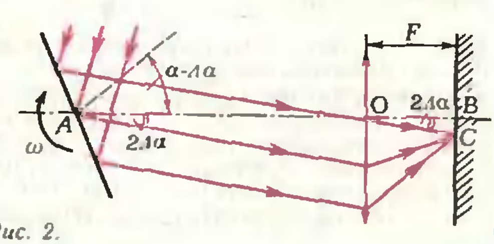


Рис. 2.

Ф797. *Плоский конденсатор заполнен диэлектриком, диэлектрическая проницаемость которого зависит от напряжения U на конденсаторе по закону $\varepsilon = \alpha U$, где $\alpha = 0,1$ В$^{-1}$. Параллельно этому «нелинейному» конденсатору (незаряженному) подключают обычный конденсатор, заряженный до разности потенциалов $U_0 = 60$ В. Каким будет напряжение на конденсаторах?*

Поскольку отличие «нелинейного» конденсатора от обычного заключается лишь в наличии между его обкладками диэлектрика, емкость «нелинейного» конденсатора при напряжении U на нем равна

$$C = \varepsilon C_0 = \alpha U C_0,$$

где C_0 — емкость обычного конденсатора. При этом заряд на «нелинейном» конденсаторе —

$$q_н = CU = \alpha C_0 U^2,$$

а заряд на обычном конденсаторе —

$$q = C_0 U$$

(напряжение U на конденсаторах при параллельном соединении одинаковое).

Начальный заряд обычного конденсатора был равен

$$q_0 = C_0 U_0,$$

и в силу закона сохранения заряда при любом напряжении U на конденсаторах

$$q_н + q = q_0 \quad \Rightarrow \quad \alpha C_0 U^2 + C_0 U = C_0 U_0.$$

Отсюда находим напряжение U:

$$U = \frac{\sqrt{4\alpha U_0 + 1} - 1}{2\alpha} = 20 \text{ В}.$$

А. И. Буздин

Обратные тригонометрические функции

(Начало см. на с. 30)

На отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ и синус, и косинус, и тангенс монотонны. Вычислим, например, косинус от сравниваемых чисел:

$$\cos\left(\arcsin\frac{2}{5}\right) = \sqrt{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \frac{\sqrt{21}}{5},$$

$$\cos\left(\arccos\frac{2}{5}\right) = \frac{2}{5}.$$

Так как на $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ косинус убывает, из неравенства

$$\cos\left(\arcsin\frac{2}{5}\right) > \cos\left(\arccos\frac{2}{5}\right)$$

следует, что

$$\arcsin\frac{2}{5} < \arccos\frac{2}{5}.$$

Пример 6. Вычислим $\arcsin(\sin 11)$. Для этого сравним сначала 11 с $\frac{\pi}{2}k$ ($k \in \mathbf{Z}$). Из неравенства $3 < \pi < 3,142$ ($\pi = 3,14159...$) следует, что $\frac{7}{2}\pi < 11 < 4\pi$. Значит, $-\frac{\pi}{2} < 11 - 4\pi < 0 < \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\arcsin(\sin 11) = \arcsin(\sin(11 - 4\pi)) = 11 - 4\pi.$$

Упражнения

1. Докажите тождество

а) $\arccos x = \begin{cases} \arcsin\sqrt{1-x^2}, & \text{если } 0 < x < 1 \\ \pi - \arcsin\sqrt{1-x^2}, & \text{если } -1 < x < 0. \end{cases}$

б) $2\,\mathrm{arctg}\frac{1+x}{1-x} + \arcsin\frac{1-x^2}{1+x^2} = \pi$ ($0 < x < 1$).

2. Вычислите

а) $\mathrm{arctg}\frac{1}{3} + \mathrm{arctg}\frac{1}{5} + \mathrm{arctg}\frac{1}{7} + \mathrm{arctg}\frac{1}{8}$;

б) $\arccos(\cos 4)$;

в) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)$.

3. Постройте график функции

а) $\arccos(\cos x)$;

б) $\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,x)$.

Нужная книга

Я перелистываю страницы небольшой книжечки в зеленом бумажном переплете и вспоминаю Карелию. Вспоминаю не освоенные еще туристами сказочные леса, чистейшие озера, ночные костры, комсомольские песни...

Нет, не подумайте, что в книге речь идет о романтике путешествий или геологических экспедициях. У рецензируемой книги вполне прозаическое название: «Лекции и задача по математике» (М., «Просвещение», 1981), а написана она известными математиками и педагогами из Москвы и Петрозаводска Л. А. Басовой, М. А. Шубиным, Л. А. Эпштейн.

Первое, о чем подумалось, когда я открыл эту книгу, — о судьбе тех ребят, школьников и студентов, кому посчастливилось учиться и работать в Карельской летней физико-математической школе. Конечно, не все ее участники стали профессиональными математиками или физиками, да это и не было целью организаторов школы. Главный итог 11-летней работы ЛФМШ — сотни и сотни выпускников, которым школа помогла найти свой путь в жизни, почувствовать уверенность в себе, проникнуться духом коллективного поиска, узнать радость самостоятельного творчества. А другой важный итог — рецензируемая книга, написанная создателями и бессменными организаторами ЛФШМ.

О чем же эта книга? Прежде всего, конечно, она состоит из необычных по построению лекций, занимательных задач. Лекции разбиты на четыре цикла. Каждый цикл читался в течение месяца школьникам.

Первый цикл — «Целые числа». Авторы сразу же сообщают, что свойства целых чисел изучает часть математика, которая называется теорией чисел или... арифметикой. Таким образом, речь идет о той самой арифметике, которую начинают проходить еще в первом классе. Сначала читателю напоминают хорошо известные факты, но незаметно его подводят к мысли о том, как много интересных и важных утверждений связаны с такими хорошо знакомыми понятиями как наибольший общий делитель, простые числа, разложение числа на простые множители. К концу первой главы читатель уже подготовлен к доказательству таких интересных утверждений, как малая теорема Ферма, теоремы Эйлера и Вильсона. Цикл лекций из второй главы посвящен понятию центра тяжести и его приложениям. Третий цикл «Комплексные числа и их применение» с особенным интересом прочтут все, кто изучил статьи Л. С. Понтрягина («Квант», №№ 3, 4, 1982 г.) В книге обсуждаются некоторые свойства многочленов, основная теорема алгебры, формулы Виета, формула Кардано. Очень интересна и содержательна подборка задач. Третья глава наряду с первой представляется особенной удачей авторов. С булевыми алгебрами и автоматами знакомит четвертая глава книги. Специальный раздел отводится олимпиадным задачам, в книге много задач-шуток и контрольных вопросов для «математического хоккея».

Для кого же эта книга? Она будет полезной для учителей и руководителей кружков, которых привлечет методика изложения материала, позволяющая изучить его в сжатые сроки. Книга может быть использована в работе летних лагерей для старшеклассников, а также при организации летних физико-математических школ. Но, прежде всего, книга будет интересна и полезна школьникам, желающим самостоятельно изучить нужный и доступный материал, выходящий за рамки школьной программы.

В. М. Уроев

КВАНТ УЛЫБАЕТСЯ

Из предисловия к учебнику по физике

Авторы выражают искреннюю благодарность И. Ньютону и Г. Галилею за нелегкий труд по открытию законов, без которых написание данного учебника было бы затруднительным.

Однажды на экзамене

— Ну, ладно, вот тебе еще один вопрос. Бери ручку и пиши. Синус икс разделить на эн икс...

$$\frac{Si\cancel{n}\,\cancel{x}}{\cancel{n}\,\cancel{x}} = Si$$

Как, уже получилось? Что получилось? Что!? — Кремний!!! Куда же это мой валидол делся?

Е. А. Свистунов

«Черная дыра»?
Рис. А. А. Орехова

Путь в науку начинается с задачи

Пятнадцать лет назад при Институте атомной энергии им. И. В. Курчатова (ИАЭ) начала работать физико-математическая школа для учащихся старших классов. Когда к предметам, изучаемым в школе, прибавилась биология, было решено назвать ее Школой естественных наук (ШЕН).

Это была первая школа такого типа при крупнейшем научно-исследовательском институте. Инициаторами ее создания выступили комитет ВЛКСМ и партком Института. Работе школы во многом помогли ведущие ученые ИАЭ академики А. П. Александров, Л. А. Арцимович, Б. Б. Кадомцев, И. К. Кикоин, члены-корреспонденты АН СССР И. И. Гуревич, В. М. Галицкий и многие другие.

Какие задачи были поставлены перед ШЕН? Основных — три.

Во-первых, учить школьников физике, математике, биологии, углубляя школьный курс, связывая его с новейшими достижениями науки и техники, используя богатейший научный потенциал Института атомной энергии.

Во-вторых, как можно раньше выявить способных учащихся, помочь им проявить себя и выбрать правильно дальнейший путь.

Наконец, третья задача — развивать в учащихся советскую гражданственность, материалистическое мировоззрение, все то, что входит в понятие коммунистического воспитания молодежи. На это особое внимание обращали члены Ученого Совета института, выступая на заседании, посвященном школе.

И вот уже пятнадцать лет по вечерам загорается свет в двухэтажном здании, расположенном недалеко от Института, и в него приходят (после занятий в общеобразовательной школе) учащиеся 8, 9, 10-х классов из многих районов Москвы. Здесь они два (а некоторые и три) раза в неделю встречаются со своими преподавателями — научными сотрудниками и инженерами ИАЭ, аспирантами и студентами старших курсов Московского физико-технического института.

Как проводится отбор учащихся в школу? Этот вопрос решался в течение нескольких лет. Трудность заключалась в том, что приходящие на приемные экзамены учащиеся обладают самым широким спектром знаний. И не только за счет своих способностей, но и за счет того, что они представляют почти сорок различных школ Москвы. В то же время коэффициент отбора должен составлять 4—5, то есть из четырех-пяти абитуриентов в ШЕН можно принять лишь одного. Поэтому важно оценить не только знания, но и умение абитуриента подойти к незнакомой проблеме, освоиться с новым понятием, продолжить мысль преподавателя, принимающего экзамен. Так встречи преподавателя и учащихся стали представлять собой беседу, когда абитуриент не только отвечает на вопросы, но и задает их, решает задачи совместно с экзаменатором. Такой способ, весьма не экономный по времени и, на первый взгляд, достаточно субъективный, стал основным. Сейчас уже проверено годами, что мнения преподавателей ШЕН относительно того или иного абитуриента практически всегда совпадают.

Как уже говорилось, в школе изучаются три предмета: физика, математика и биология.

Курс физики построен так, что сначала в течение 4—5 недель преподаватель рассказывает о физике, о ее связи с другими науками, об отдельных разделах физики, теоретиках и экспериментаторах, о последних достижениях науки. Делается это в популярной форме для того, чтобы во время дополнительного курса учащиеся «не теряли за деревьями леса».

Лекцию по физике читает старший научный сотрудник А. А. Боровой.

Представление о дальнейших разделах могут дать многочисленные пособия, выпущенные в ШЕН и написанные ее преподавателями. Среди книг, вышедших в «Библиотечке физико-математической школы», можно назвать такие книги, как «Механика», «Законы электромагнетизма». В конце десятого класса возобновляется рассказ об отдельных отраслях физики. Но ведут его уже не только преподаватели, но и ведущие ученые Института, приглашенные в школу. Достаточно вспомнить лекции профессоров Я. А. Смородинского, Л. А. Микаэляна, Ю. С. Лазуркина и многих других, которые собирали учащихся, преподавателей ШЕН и очень многих сотрудников Института. На них можно было получить полное представление о работе инженера и ученого.

Одна из целей курса математики — показать проникновение математических методов в естественные науки, использование аппарата математики в биологии, химии, физике. Конечно, ребятам важно научиться самим пользоваться этим аппаратом. Однако овладение математическими методами анализа позволяет не только глубже изучить, например, физику, но и в более широком, гуманистическом смысле обога-

Инженер В. В. Синев проводит занятие по физике.

Изучение результатов домашней лабораторной работы.

щает духовный мир человека. Пятнадцатилетний опыт ШЕН показал, что способности школьников воспринять красоту и логику математики чрезвычайно высоки, и при интенсивной работе ребят под руководством ученых ИАЭ — специалистов в области прикладной математики, физиков-теоретиков, разработчиков математического обеспечения задач, решаемых в вычислительном центре Института, многие из наших выпускников выбирают математику своей профессией.

Нельзя не сказать о том, что ШЕН находится в постоянном контакте и шефствует над научными обществами и физико-математическими школами Челябинска, Навои и других городов, Малой академией наук Крыма. Идет полезный обмен пособиями, планами. На слетах учащиеся Москвы встречаются со своими «коллегами», а ученые ИАЭ читают курсы лекций для ребят этих городов.

Какие же итоги деятельности школы?

Большинство из ее учеников ныне работают в науке и технике, хотя некоторые стали врачами, экономистами. Многие пришли после окончания вуза в ИАЭ. Среди них есть уже кандидаты наук. А некоторые из наших выпускников сами стали преподавателями ШЕН.

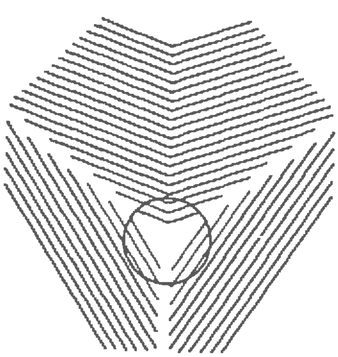
На XIX съезде комсомола первый секретарь ЦК ВЛКСМ Б. Н. Пастухов говорил: «При комитете комсомола Института атомной энергии имени И. В. Курчатова действует Школа естественных наук, в которой с интересом занимаются 300 московских школьников, а в пяти ее филиалах в разных городах страны — более тысячи ребят. С лекциями перед ними выступают известные ученые. Как выиграло бы дело образования, если бы у курчатовцев было побольше последователей».

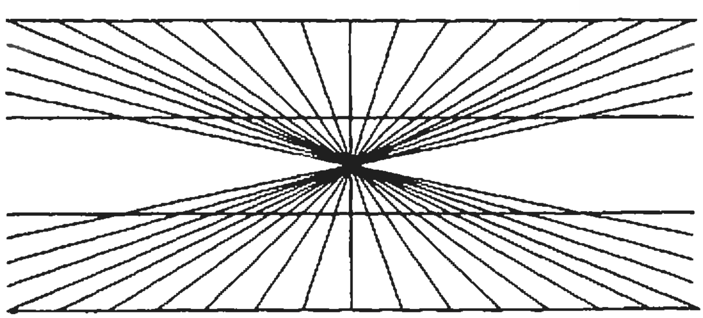
Читатели «Кванта», наверное, понимают, что путь в науку начинается с умения поставить и решить задачу. Последуйте за ребятами в ШЕН, проверьте свои способности.

В. Д. Кулагин,
К. П. Чечеров

Оптические иллюзии

На рисунках изображены квадрат в квадрате, окружность и две пары горизонтальных параллельных линий. Нанесенная штриховка вызывает ощущение искажения их форм.





Заочная физическая школа

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова объявляет набор учащихся в 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме школьной программы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в высшие учебные заведения, в первую очередь на физический факультет МГУ.

Прием в ЗФШ проводится на основании решения результатов вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать до **15 сентября** по адресу: 117234, Москва, В-234, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, Заочная физическая школа. В письмо вложите конверт с вашим домашним адресом и два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 7×12 см и заполненной по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество	*Сидоров Иван Петрович*
Класс	*9-й*
Профессия родителей и занимаемая должность	*отец — инженер* *мать — врач*
Подробный домашний адрес	*248016, г. Калуга, ул. Ленина, д. 4, кв. 73*
Номер и адрес школы	*школа № 10, ул. Пушкина, д. 3.*

Решение приемной комиссии ЗФШ о зачислении будет сообщено до 15 октября. Проверенные вступительные задания обратно не высылаются.

Зачисленным в ЗФШ в течение года направляются методические разработки и контрольные задания по различным разделам физики, изучаемым в средней школе. Решенные задания оцениваются, рецензируются и возвращаются учащимся. Окончившие 9 класс ЗФШ переводятся в 10 класс на основании оценок, полученных за решение контрольных заданий. Успешно прошедшие курс обучения получают справку об окончании ЗФШ.

Вступительное задание

Поступающим в 9 класс для решения предлагаются задачи 1—4, поступающим в 10 класс — задачи 3—6.

1. Клин с углом при вершине 90° и углами при основании α и β находится на горизонтальном столе. По его боковым граням начинают одновременно скользить без трения два бруска одной и той же массы. Будет ли при этом клин скользить по столу (трение между клином и столом отсутствует)?

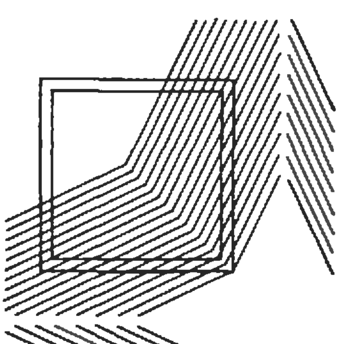
2. В лодке массы M и длины L стоит человек массы m. На какое расстояние переместится лодка, если человек перейдет с одного ее конца на другой?

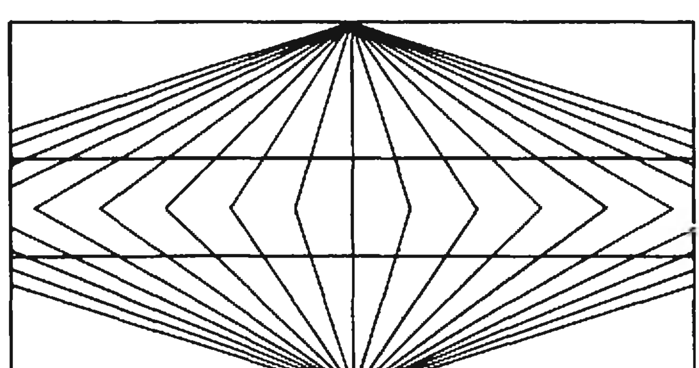
3. На наклонной плоскости с углом наклона к горизонту 30° лежит цилиндр массы M. Цилиндр удерживается в состоянии покоя с помощью огибающей его нити, один конец которой закреплен на наклонной плоскости, а другой натянут вертикально вверх. Чему равна сила натяжения нити?

4. Оцените массу Солнца, зная, что средний радиус орбиты Земли равен $149 \cdot 10^6$ км.

5. При обламывании кончика электрической лампочки, объем которой равен 1 л, на глубине 1 м под поверхностью воды в нее вошло $m = 998{,}7$ г воды. Каким было давление газа в лампочке? Атмосферное давление — нормальное.

6. Положительный электрический заряд Q равномерно распределен по тонкому проволочному кольцу радиуса R. Найдите зависимость модуля напряженности электрического поля на оси кольца от расстояния r до центра кольца.





Ниже публикуются материалы вступительных экзаменов в вузы в 1982 году.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\log_2(x^2-3)-\log_2(6x-10)+1=0.$$

2. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ описан вокруг окружности с центром в точке O, при этом $|AO|=|OC|=1$, $|BO|=|OD|=2$. Найдите периметр четырехугольника $ABCD$.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{5\sin x+\cos 2x}+2\cos x=0.$$

4. Найдите все значения x, для которых выражение

$$\sqrt{3x^4-2-x^8}\cdot\sin(\pi(2x+16x^2))$$

имеет смысл и не обращается в нуль.

5. Дана треугольная пирамида $ABCD$ с вершиной D, грани которой ABD и ACD — прямоугольные треугольники, ребро AD перпендикулярно медиане основания AK и $|AD|=|AK|$. Сечением пирамиды плоскостью, не проходящей через середины ребер AD и BC, является равнобочная трапеция $EFGH$ с основаниями EF и GH, причем точка E делит ребро BD пополам, а точка G лежит на ребре AC и $|AG|=3|GC|$. Найдите отношение площади трапеции $EFGH$ к площади грани BCD.

Вариант 2

(механико-математический факультет)

1. Решите уравнение

$$\log_x(2x^2-3x-4)=2.$$

2. В трапеции $ABCD$, вписанной в окружность радиуса $r=2$, диагональ AC является биссектрисой угла BAD, а длина основания AD в два раза больше длины основания BC. Найдите площадь этой трапеции.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{2\sin x\cdot\sin 2x}=\sqrt{5\cos x+4\sin 2x}.$$

4. Найдите все значения x, для которых выражение

$$\sqrt{4x^4-3-x^8}\cdot(1-\cos(2\pi(2x+21x^2)))$$

ет смысл и не обращается в нуль.

5. В четырехугольной пирамиде $ABCDE$ эвание $ABCD$ — параллелограмм, а грани ADE и BCE — прямоугольные треугольники. Ребро BC перпендикулярно медиане EP грани CDE и $|BC|=|EP|$. Сечением пирамиды плоскостью является равнобочная трапеция $GKHL$, вершины которой G, K, H, L лежат, соответственно, на ребрах AE, BE, CE, DE, причем $|GE|=3|GA|$ и $|CH|=|EH|$. Найдите отношение площади трапеции $GKHL$ к площади грани ABE.

Вариант 3

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Какое из чисел больше: $\sqrt{8}$ или $2^{(2\log_2 5+\log_{\frac{1}{2}} 9)}$?

2. Найдите все x, для которых функция $y=6\cos^2 x+6\sin x-2$ принимает наибольшее значение на $\mathbb{R}$.

3. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{2-x}+4x-3}{x}>2.$$

4. На заводе было несколько одинаковых прессов, штампующих детали, и завод выпускал 6480 деталей в день. После реконструкции все прессы заменили на более производительные, но также одинаковые, а их количество увеличилось на три. Завод стал выпускать в день 11 200 деталей. Сколько прессов было первоначально?

5. При всех a решите уравнение

$$|x+3|-a|x-1|=4$$

и определите, при каких a оно имеет ровно два решения.

6. Около треугольника ABC описана окружность с центром в точке O. Касательная к окружности в точке C пересекается с прямой, делящей пополам угол B треугольника, в точке K, причем угол BKC равен половине разности утроенного угла A и угла C треугольника. Сумма длин сторон AC и AB равна $2+\sqrt{3}$, а сумма расстояний от точки O до сторон AC и AB равна 2. Найдите радиус окружности.

Вариант 4

(физический факультет)

1. Решите уравнение

$$\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}+\sqrt{2}\cos\frac{x}{4}=0.$$

2. Для каких значений a решение уравнения

$$10x-15a=13-5ax+2a$$

больше 2?

3. Известно, что $\log_b a=\sqrt{3}$. Вычислите

$$\log_{\left(\frac{\sqrt{a}}{b}\right)}\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right).$$

4. Решите неравенство

$$5^x-3^{x+1}>2(5^{x-1}-3^{x-2}).$$

5. На боковом ребре SA правильной треугольной пирамиды $SABC$ с вершиной S взята точка D, через которую проведено сечение пирамиды, пересекающее апофемы граней SAC и SAB в точках M и N. Известно, что прямые DM и DN образуют с плоскостью основания пирамиды углы величиной β, а величины углов DMS и DNS равны α $\left(\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$. Найдите величину угла MDN.

6. Прямая, проходящая через центры вписанной и описанной окружностей треугольника, перпендикулярна одной из его биссектрис. Известно, что отношение расстояния между центрами вписанной и описанной окружностей к радиусу описанной окружности равно h. Найдите углы треугольника.

Вариант 5

(химический факультет)

1. Решите уравнение
$$\sqrt{3}\sin 2x-\cos 2x=\sqrt{3}.$$

2. Решите неравенство
$$\log_2\frac{x}{x-1}<-1.$$

3. Решите неравенство $f(g(x))<g(f(x))$, где $f(x)=2^x-1$, $g(x)=2x+1$.

4. Конус лежит на горизонтальной плоскости П, касаясь ее боковой поверхностью. Площадь основания конуса S_1, площадь боковой поверхности S_2. На какой высоте (над П) находится наивысшая точка конуса?

5. При каких значениях параметра p уравнение
$$(x-p)^2[p(x-p)^2-p-1]=-1$$
имеет больше положительных корней, чем отрицательных?

Вариант 6

(биологический факультет)

1. Решите неравенство
$$\log_{\frac{1}{2}}(1+x-\sqrt{x^2-4})<0.$$

2. Решите уравнение
$$\sin^2 x+\cos^2 3x=1.$$

3. В правильную четырехугольную пирамиду $SABCD$ вписан куб. Вершины одной из граней куба лежат на основании $ABCD$ пирамиды. Вершины противоположной грани куба лежат на боковых ребрах пирамиды. Известно, что $|SA|=|AB|=a$, то есть длина бокового ребра пирамиды равна a и равна длине стороны ее основания. Чему равен объем куба?

4. Найдите уравнения тех касательных к графику функции $y=\frac{x^3+1}{x}$, которые вместе с осями координат ограничивают треугольник площади $\frac{1}{2}$.

5. Точки P и Q расположены на стороне BC треугольника ABC так, что $|BP|:|PQ|:|QC|=1:2:3$. Точка R делит сторону AC этого треугольника так, что $|AR|:|RC|=1:2$. Чему равно отношение площади четырехугольника $PQST$ к площади треугольника ABC, где S и T — точки пересечения прямой BR с прямыми AQ и AP соответственно?

Вариант 7

(факультет почвоведения)

1. Из пункта A в пункт B отправился скорый поезд. Одновременно навстречу ему из B в A вышел товарный поезд, который встретился со скорым через $\frac{2}{3}$ часа после отправления. Расстояние между пунктами A и B равно 80 км, поезда двигались с постоянными скоростями. С какой скоростью двигался скорый поезд, если 40 км он прошел за время на $\frac{3}{8}$ часа большее, чем время, за которое товарный поезд прошел 5 км?

2. Решите уравнение
$$\sqrt{2-3\cos 2x}=\sqrt{\sin x}.$$

3. Найдите наибольшее значение функции $f(x)=|x^3+6x^2+9x+1|$ на отрезке $[-3;1]$.

4. В равнобедренный треугольник ABC (где $|AB|=|BC|$) вписана окружность радиуса 3. Прямая p касается этой окружности и параллельна прямой AC, но не совпадает с ней. Расстояние от точки B до прямой p равно 3. Найдите расстояние между точками, в которых окружность касается сторон AB и BC.

5. Длина высоты SO правильной треугольной пирамиды $SABC$ равна 1, а длины сторон основания ABC равны $2\sqrt{6}$. Точки M и N — середины отрезков AC и AB. Вычислите радиус сферы, вписанной в пирамиду $SAMN$ (то есть касающейся всех ее боковых граней и основания).

Вариант 8

(географический факультет)

1. Решите уравнение
$$\sqrt{2x^2+8x+7}-x=2.$$

2. При каких значениях x производная функции $y=3-2\sin\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)$ равна $2\sqrt{2}$?

3. В треугольнике ABC длина высоты BD равна 6 см, длина медианы CE равна 5 см, расстояние от точки пересечения BD с CE до стороны AC равно 1 см. Найдите $|AB|$.

4. Найдите все пары $(x;y)$ действительных чисел, удовлетворяющие системе неравенств
$$\begin{cases}\log_{2-x}(2-y)>0\\ \log_{4-y}(2x-2)>0.\end{cases}$$

5. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA'B'C'D'$ длина ребра AB равна 4 см, длина ребра AD равна 6 см, длина ребра AA' равна 8 см. Точка K, лежащая на ребре AA', удалена от вершины A на 4 см. Расстояние от точки L ребра DD' до вершины D равно 2 см. Точка M лежит на отрезке $B'C$, длина MC вдвое больше длины $B'M$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки K, L, M.

Вариант 9

(отделение геофизики геологического факультета и специальности «экономическая кибернетика» и «планирование народного хозяйства» экономического факультета)

1. Определите, что больше $\sqrt{1-2\sin\frac{3\pi}{2}}$ или $\sqrt[3]{5\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}}$.

2. Найдите все решения неравенства

$$\frac{2x+5}{|x+1|}>1.$$

3. Найдите все решения уравнения

$$9\cdot 4^{\frac{1}{x}}+5\cdot 6^{\frac{1}{x}}=4\cdot 9^{\frac{1}{x}}.$$

4. Найдите все решения уравнения

$$\frac{\sin 4x}{\cos 6x}=1.$$

5. Постройте на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$y=4-\left|y-\frac{6}{x}\right|-2\left|\frac{3}{x}-1\right|$$

и среди точек этого множества найдите все такие, где координата y принимает наибольшее значение.

6. Длина меньшего основания равнобочной трапеции равна сумме длин ее боковых сторон. Найдите наименьшее возможное целое k такое, что площадь полной поверхности фигуры, полученной вращением трапеции вокруг меньшего основания, в k раз больше площади трапеции.

Вариант 10

(отделение геологии геологического факультета и специальность «политическая экономия» экономического факультета)

1. Определите, что больше

$$\sqrt{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}-2\sin\frac{3\pi}{2}}\ \text{или}\ \sqrt[3]{5}.$$

2. Найдите все решения уравнения

$$\sqrt{x+3}-\sqrt{2x-1}=\sqrt{3x-2}.$$

3. Найдите все решения неравенства

$$\log_3[(x+2)(x+4)]+\log_{\frac{1}{3}}(x+2)<\frac{1}{2}\log_{\sqrt{3}}7.$$

4. Найдите все решения уравнения

$$\sin\left(\frac{4}{3}\pi\cdot\sin x\right)=\frac{1}{2}.$$

5. В треугольник вписана окружность, которая касается сторон AB, BC, AC треугольника ABC, соответственно, в точках M, D, N. Определите длину отрезка MD, если известно, что длина отрезка NA равна 2, длина отрезка NC равна 3, а угол BCA равен $\frac{\pi}{3}$.

6. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} 8\cos x\cdot\cos y\cdot\cos(x-y)+1=0\\ x+y=z.\end{cases}$$

Вариант 11

(факультет психологии)

1. Решите неравенство

$$\frac{2x-3}{4-x}>\frac{1}{x}.$$

2. Найдите координаты точки пересечения касательных к графику функции $y=\cos\pi x$ в точках с абсциссами $x=\frac{1}{6}$ и $x=\frac{7}{6}$.

3. Решите уравнение

$$2\sin x-\sqrt{3}=(\sqrt{2}-\sqrt{12})\sqrt{\sin x}.$$

4. В ромбе $ABCD$, где $B\hat{A}D=60°$, перпендикуляр к стороне AD, восстановленный из середины AD, пересекает диагональ AC в точке M, а перпендикуляр к стороне CD, восстановленный из середины CD, пересекает диагональ AC в точке N. Найдите отношение площадей треугольника MND и ромба $ABCD$.

5. Из пункта A в пункт B вышел пешеход, и одновременно из пункта B в пункт A выехал мотоциклист. Встретив в пути пешехода, мотоциклист сразу же развернулся, довез пешехода до пункта B, а затем тотчас же снова поехал в пункт A, куда беспрепятственно добрался. В результате мотоциклист затратил на дорогу до пункта A в два с половиной раза больше времени, чем если бы он ехал из пункта B в пункт A не подвозя пешехода. Во сколько раз медленнее пешеход добрался бы до пункта B, если бы весь путь от A до B он прошел пешком?

6. Решите уравнение

$$\log_{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}(x^2-2x-2)=\log_{2+\sqrt{3}}(x^2-2x-3).$$

Вариант 12

(отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета)

1. Решите уравнение

$$2+\cos 2x=-5\sin x.$$

2. Найдите все числа x, удовлетворяющие одновременно следующим условиям: $\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x+6}<\log_{\frac{1}{9}}(x+4)$ и $x+\frac{1}{2}$ — целое число.

3. Проводятся две касательные к графику функции $y=6x+x^2$. Первая касательная проводится в точке с абсциссой $x_0=-2$, вторая — в точке минимума данной функции. Найдите площадь треугольника, образованного осью ординат с этими двумя касательными.

4. В параллелограмме $ABCD$ длина стороны AB равна 1 и равна длине диагонали BD. Длины диагоналей относятся, как $1:\sqrt{3}$. Найдите площадь той части круга, описанного около треугольника BDC, которая не принадлежит кругу, описанному около ΔADC.

5. При каких значениях параметра γ количество пар целых чисел $(z;x)$, удовлетворяющих неравенству $\gamma^3|x|<\sqrt{2}(\gamma^2-z^2)$, минимально?

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Длинный невесомый жесткий стержень может свободно вращаться в вертикальной плоскости вокруг точки O (рис. 1). На стержне на расстояниях l_1 и l_2 от точки O закреплены небольшие по размерам грузы массой m_1 и m_2 соответственно. Стержень отклонили от вертикали на угол α и отпустили. Каково будет натяжение стержня в точке A, находящейся между грузами, в момент прохождения стержнем положения равновесия?

2. Две пружины вставлены в закрепленную горизонтально трубку и разделены подвижным поршнем (рис. 2). Первая пружина имеет жесткость k_1 и упирается вторым концом

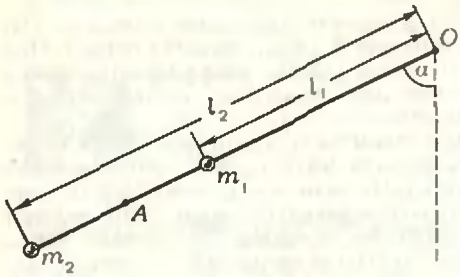


Рис. 1.

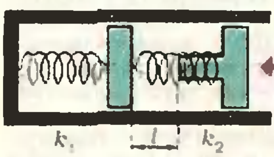


Рис. 2.

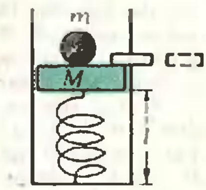


Рис. 3.

в дно трубки. Вторая пружина имеет жесткость k_2 и упирается вторым концом во второй подвижный поршень с ограничителем в виде штока. В недеформированном состоянии расстояние между разделительным поршнем и концом ограничителя второго поршня равно l. Какую работу нужно совершить, действуя медленно возрастающей по величине силой на второй поршень, чтобы шток дошел до разделительного поршня? Трением пренебречь.

3. В закрепленную вертикальную трубку вставлена невесомая пружина, верхний конец которой прикреплен к подвижному поршню массы M (рис. 3). Нижний конец пружины упирается в дно трубки. Пружина сжата до длины l и удерживается в сжатом состоянии с помощью защелки. На поршень положили шарик массой m. На какую высоту подскочит шарик, если освободить пружину, сдвинув защелку? Пружина в недеформированном состоянии имеет длину L. Жесткость пружины k. Трением пренебречь.

4. Баллон разделен перегородкой на две части. В первой части, объемом V_1, находится идеальный газ под давлением p_1, имеющий температуру T_1. Во второй части, объемом V_2, находится такой же газ под давлением p_2 и имеющий температуру T_2. Какое давление установится в баллоне, если перегородку убрать, а температуру газа сделать равной T?

5. В закрытом помещении объемом $V=60$ м^3 относительная влажность воздуха $r=50\%$ при температуре $t=18\,°$С. Сколько воды необходимо испарить в этот объем, чтобы водяные пары при той же температуре стали насыщенными? Давление насыщенного пара при 18°С равно $p_н=2063$ Па; универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К).

6. В плоский конденсатор вставлена металлическая пластинка толщиной d_1 с двумя диэлектрическими пластинками по бокам, толщина каждой из них d_2, диэлектрическая проницаемость ε (рис. 4). Форма и размеры вставки соответствуют форме и размерам пластин конденсатора. Расстояние между пластинами конденсатора несколько больше суммарной толщины вставки и равно d. Конденсатор со вставкой подключают к источнику постоянного напряжения с разностью потенциалов U_0. После того как конденсатор зарядился, источник отключают. Какая разность потенциалов будет между пластинами конденсатора, если после отключения источника вставку вынуть?

7. Конденсаторы емкостью $C_1=5$ мкФ и $C_2=2C_1$ подключили к источнику постоянной ЭДС $\mathscr{E}=300$ В (рис. 5). Затем переключатель K перевели с контакта *1* на контакт *2*. Найдите количество теплоты, выделившееся при этом на резисторе с сопротивлением $R_1=200$ Ом, если $R_2=300$ Ом.

8. Для определения места повреждения двужильного кабеля используют схему, показанную на рисунке 6. Определите расстояние x до места, где один провод кабеля, вследствие повреждения изоляции, получил соединение с землей, если через гальванометр G не течет ток, когда сопротивления плеч реостата равны $R_{AB}=150$ Ом и $R_{BC}=50$ Ом. Длина кабеля $L=10$ км. Сопротивлением соединительных проводов схемы пренебречь (учитывать лишь сопротивление кабеля и реостата).

9. Две одинаковые прямоугольные стеклянные призмы составляют бипризму, изображенную на рисунке 7. На бипризму нормально падает широкий пучок света. На каком расстоянии от бипризмы нужно расположить экран, чтобы лучи света, прошедшие через бипризму, образовали на нем световое пятно минимальных размеров? Преломляющие углы малы и равны α. Ширина бипризмы h. Показатель преломления стекла n.

10. Тонкостенная сферическая колба, заполненная воздухом, погружена в сосуд с водой (рис. 8). На колбу направлен широкий параллельный пучок света. В колбу проникает часть пучка диаметром $d=6$ см. Найдите радиус сферической части колбы. Показатели преломления воздуха и воды равны $n_1=1$ и $n_2=1{,}33$ соответственно.

Механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики

1. К концу однородной палочки массы $M=4{,}4$ г подвешен на нити алюминиевый шарик радиуса $R=0{,}5$ см (рис. 9). Палочку кладут на край стакана с водой, добиваясь такого положения равновесия, при котором

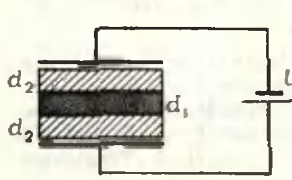


Рис. 4.

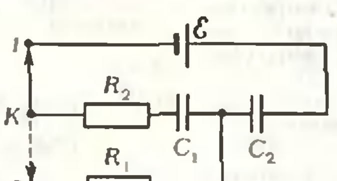


Рис. 5.

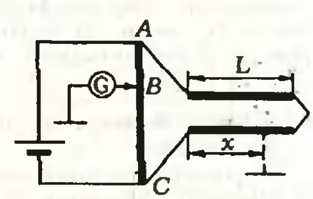
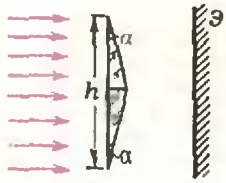
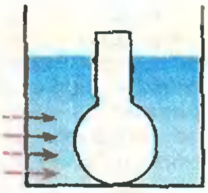
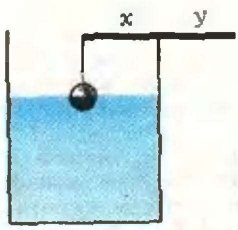


Рис. 6.







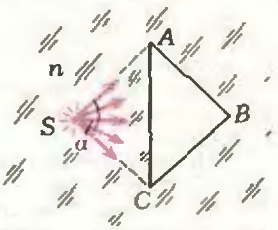
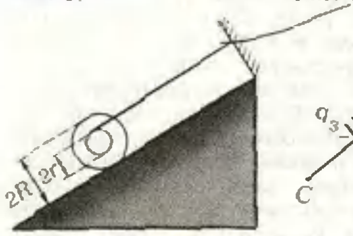


Рис. 9.

Рис. 10.



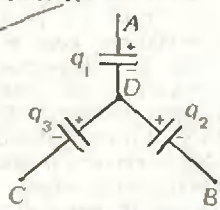


Рис. 11.

Рис. 12.

погруженной в воду оказывается половина шарика. Определите, в каком отношении делится длина палочки точкой опоры. Плотность алюминия $\varrho_a = 2{,}7 \cdot 10^3$ кг/м^3, плотность воды $\varrho_в = 10^3$ кг/м^3.

2. Вертикальный цилиндр с тяжелым поршнем наполнен азотом, масса которого $M = 0{,}1$ кг. После увеличения температуры азота на $\Delta T = 100$ К поршень поднялся на высоту $h = 0{,}1$ м. Над поршнем все время сохраняется нормальное атмосферное давление p_0. Площадь поршня $S = 0{,}02$ м^2. Определите массу поршня. Молярная масса азота $\mu = 28$ кг/кмоль. Газовая постоянная $R = 8{,}3 \cdot 10^3$ Дж/(кмоль·К); $p_0 = 10^5$ Па.

3. Электрон влетает в область пространства с однородным электростатическим полем с напряженностью $E = 6 \cdot 10^4$ В/м перпендикулярно линиям напряженности. Определите величину и направление индукции магнитного поля, которое надо создать в этой области для того, чтобы электрон пролетел ее, не испытывая отклонений. Энергия электрона $W = 1{,}6 \times 10^{-16}$ Дж, масса электрона $m = 9 \cdot 10^{-31}$ кг.

4. В блоке оптического стекла с показателем преломления $n = \sqrt{3}$ сделана наполненная воздухом полость в виде равносторонней призмы ABC (рис. 10). Точечный источник света S находится в стекле и симметричен вершине B относительно плоскости AC. Угол расхождения лучей, падающих на призму, $\alpha = 60°$. Чему равен угол β расхождения лучей, прошедших через призму?

Химический факультет и факультет почвоведения

1. Катушка с нитками лежит на наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом (рис. 11). Свободный конец нити закреплен у верхнего конца наклонной плоскости так, что нить параллельна наклонной плоскости. Радиус катушки R, радиус намотки ниток r. При каком минимальном коэффициенте трения μ_{min} катушки о плоскость система будет в равновесии?

2. В закрытом сосуде относительная влажность воздуха была $r = 30\%$. Затем в сосуд ввели каплю воды массы $m = 0{,}1$ г, которая полностью испарилась, после чего водяной пар стал насыщенным. Определите объем сосуда. Плотность насыщенного пара при данной температуре $\varrho_н = 17{,}3 \cdot 10^{-3}$ кг/м^3.

3. Три одинаковых конденсатора, соединенных как показано на рисунке 12, подключены к точкам A, B и C, потенциалы которых, соответственно, $\varphi_A = 100$ В, $\varphi_B = 60$ В и $\varphi_C = 50$ В. Определите потенциал точки D.

4. На концах отрезка трубы диаметром $D = 3$ см и длиной $l = 12$ см вставлены две собирающие линзы одинакового с трубой диаметра. С одной стороны на трубу падает широкий пучок параллельных лучей, а с другой стороны свет выходит также параллельным пучком диаметром $d = 1$ см. Определите фокусные расстояния линз.

Географический и геологический факультеты

1. Пуля, летящая горизонтально со скоростью $v_0 = 510$ м/с, попадает в ящик, лежащий на горизонтальной поверхности на расстоянии $d = 0{,}5$ м от стены дома, и, пробив ящик, вылетает в том же направлении со скоростью $v = 10$ м/с. Ящик начинает двигаться по направлению к стене. Ударится ли ящик о стену дома? Коэффициент трения между ящиком и поверхностью $\mu = 0{,}1$, масса ящика $M = 10$ кг, масса пули $m = 10$ г, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

2. Пузырек воздуха поднимается со дна цилиндрического сосуда, наполненного жидкостью, на поверхность. При этом объем пузырька увеличивается в 1,5 раза. Определите плотность жидкости. Атмосферное давление у поверхности жидкости $p_0 = 10^5$ Па. Высота жидкости в сосуде $h = 5{,}1$ м. Температуру считать постоянной, ускорение свободного падения $g = 10$ м/с^2.

3. Лампочка накаливания мощностью $P = 180$ Вт используется для обогрева аквариума, содержащего $V = 10^{-3}$ м^3 воды. За $\tau = 2$ мин вода нагревается на $\Delta T = 3$ К. Какая часть расходуемой лампочкой энергии теряется в виде лучистой энергии? Удельная теплоемкость воды $c = 4{,}19 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К).

4. В день весеннего равноденствия солнечный луч, проходя через маленькую прорубь, освещает дно реки, находящееся на глубине $h = 87$ см. Найдите показатель преломления воды, если расстояние между точками дна, освещаемыми лучом в моменты восхода и захода Солнца, равно $l = 2$ м. Толщиной льда пренебречь.

Публикацию подготовили
С. А. Ашманов, А. Н. Боголюбов,
О. П. Виноградов, И. И. Мельников,
А. Н. Соколихин, Е. В. Талалаева,
Л. А. Черникова

Обратные тригонометрические функции

2. а) $\frac{\pi}{4}$. Указание. $\alpha+\beta+\gamma+\delta=(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)$. б) $2\pi-4$. в) $\frac{9}{14}\pi$.

3. а) См. рис. 1. Указание. $\arccos(\cos x)$ — четная функция. б) См. рис. 2.

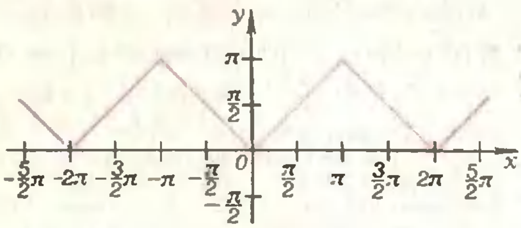


Рис. 1.

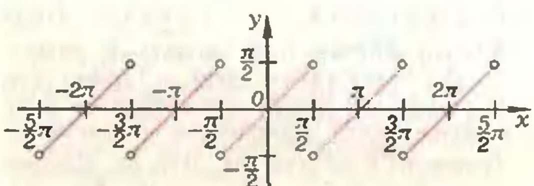


Рис. 2.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Вариант I

1. $\{2\}$. Указание. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\log_2\dfrac{2(x^2-3)}{6x-10}=0\\ 6x-10>0.\end{cases}$$

2. $4\sqrt{5}$. Указание. Если K, L, M, N — точки касания, соответственно, сторон DA, AB, BC, CD с окружностью, то треугольники AOK, AOL, COM и CON конгруэнтны; аналогично, конгруэнтны треугольники DOK, DON, BOL и BOM. Выведите отсюда, что $\widehat{AOD}=\widehat{AOB}=\widehat{COD}=\widehat{COB}$.

3. $x=\frac{5}{6}\pi+2\pi k$ $(k\in Z)$. Указание. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}5\sin x+\cos 2x=4\cos^2 x\\ \cos x<0.\end{cases}$$

4. Все точки интервала $]-\sqrt[4]{2};\ -1[$ за исключением точек $\frac{-1-\sqrt{1+16k}}{16}$ $(15<k<20)$ и все точки интервала $]1;\ \sqrt[4]{2}[$ за исключением точек $\frac{-1+\sqrt{1+16k}}{16}$ $(19<k<25)$. Указание. Неравенство

$$-\sqrt[4]{2}<\frac{-1-\sqrt{1+16k}}{16}<-1$$

равносильно неравенству

$$14<k<16\sqrt{2}-2\sqrt[4]{2}.$$

Грубая оценка $(1<\sqrt[4]{2}<\sqrt{2};\ 1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5)$ показывает, что

$$19{,}6<16\sqrt{2}-2\sqrt[4]{2}<22.$$

Двукратным возведением в квадрат проверяется, что на самом деле

$$20<16\sqrt{2}-2\sqrt[4]{2}<21.$$

Аналогично, неравенство

$$1<\frac{-1+\sqrt{1+16k}}{16}<\sqrt[4]{2}$$

равносильно неравенству

$$18<k<16\sqrt{2}+2\sqrt[4]{2}.$$

Грубая оценка $(1{,}1<\sqrt[4]{2}<\sqrt{2}<1{,}5)$ показывает, что

$$19{,}8<16\sqrt{2}+2\sqrt[4]{2}<27.$$

Двукратным возведением в квадрат проверяется, что на самом деле

$$25<16\sqrt{2}+2\sqrt[4]{2}<26.$$

5. $\frac{5\sqrt{10}}{32}$. Решение. 1) Докажем, что $(AD)\perp(ABC)$. Допустим противное. Тогда, ввиду $\widehat{DAK}=\frac{\pi}{2}$, $\widehat{DAB}\neq\frac{\pi}{2}$ и $\widehat{DAC}\neq\frac{\pi}{2}$. Но по условию треугольники ABD и ACD — прямоугольные. Значит, во-первых, $\widehat{ADB}=\frac{\pi}{2}$ или $\widehat{ABD}=\frac{\pi}{2}$ и, во-вторых, $\widehat{ADC}=\frac{\pi}{2}$ или $\widehat{ACD}=\frac{\pi}{2}$. Если $\widehat{ADB}=\frac{\pi}{2}$ и $\widehat{ADC}=\frac{\pi}{2}$, то $(AD)\perp(BCD)$; значит, $\widehat{ADK}=\frac{\pi}{2}$ и в треугольнике ADK получились два прямых угла. Если $\widehat{ABD}=\frac{\pi}{2}$ и $\widehat{ACD}=\frac{\pi}{2}$, то $|AD|>|AB|$ и $|AD|>|AC|$; значит, $|AD|>|AK|=|AD|$. Если $\widehat{ABD}=\frac{\pi}{2}$ и $\widehat{ADC}=\frac{\pi}{2}$, то, ввиду $(KE)\parallel(CD)$, $(AD)\perp(KE)$; так как $(AD)\perp(AK)$, $(AD)\perp(AKE)$; значит, $\widehat{DAE}=\frac{\pi}{2}$, но $\widehat{AED}>\widehat{ABD}=\frac{\pi}{2}$ и в прямоугольном треугольнике DAE получился тупой угол. Случай $\widehat{ADB}=\widehat{ACD}=\frac{\pi}{2}$ приводится к противоречию аналогично. 2) Докажем, что $F\in[CD]$, $H\in[AB]$. Точка F лежит на одном из ребер CD, AB, AD, BC. Если $F\in[AB]$, то, ввиду того, что никакие три из четырех точек E, F, G, H не могут принадлежать одной грани (иначе плоскость сечения совпала бы с плоскостью этой грани), $H\in[CD]$; так как, по условию, $(EF)\parallel(HG)$, по теореме о линии пересечения плоскостей, проведенных через параллельные прямые (теорема 4 из «Геометрии 9—10»), $(HG)\parallel(AD)$; из $(AD)\perp(ABC)$ следует $(HG)\perp(ABC)$; значит, $(HG)\perp(GF)$; поскольку трапеция $EFGH$ — равнобедренная, $\widehat{EHG}=\widehat{HGF}=\frac{\pi}{2}$, но тогда $EFGH$ — прямоуголь-

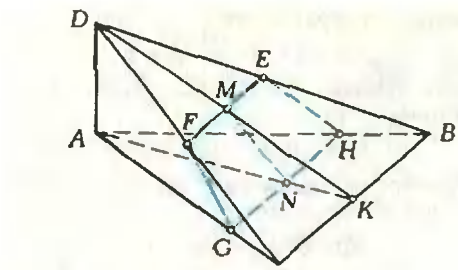


Рис. 3.

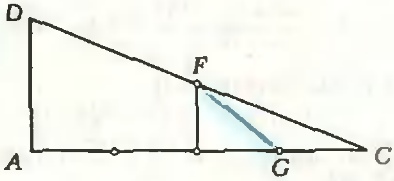


Рис. 4.

ник, что противоречит определению трапеции. Если $F \in [AD]$, то $H \in [BC]$; так как $(EF) \| (HG)$, $(EF) \| (AB)$; значит, $|AF| = |FD|$, что противоречит условию. Случай $F \in [BC]$ приводится к противоречию аналогично. 3) Итак, $F \in [CD]$, $H \in [AB]$ (рис. 3). Значит, $(EF) \| (BC)$ и $(GH) \| (BC)$. Поэтому $|DF| = |FC|$ и $|AH| = 3|HB|$. Из $\triangle ACD$ $|FG| = \sqrt{|CG|^2 + \frac{|AD|^2}{4}}$ (рис. 4). Аналогично, из $\triangle ADB$ $|EH| = \sqrt{|HB|^2 + \frac{|AD|^2}{4}}$. Поскольку, по условию, $|FG| = |EH|$, получаем $\frac{|CG|}{|DC|} = \frac{|HB|}{|DB|}$. Значит, $|AC| = |AB|$, откуда $|DC| = |DB|$. 4) Поскольку треугольники CAB и CDB — равнобедренные, их медианы AK, DK являются высотами. Значит, $(BC) \perp (AKD)$. Поэтому $(FE) \perp (AKD)$ и $(GH) \perp (AKD)$. Следовательно, $(FE) \perp (MN)$ (см. рис. 3) и $(GH) \perp (MN)$. Таким образом, $[MN]$ — высота трапеции $EFGH$. 5) Положим $|AD| = |AK| = h$. Из $\triangle AKD$, ввиду $|AN| = 3|NK|$, легко найти $|MN| = \frac{h\sqrt{5}}{4}$. Поскольку $|GH| = \frac{3}{4}|BC|$ и $|FE| = \frac{1}{2}|BC|$, площадь трапеции $S_1 = \frac{5\sqrt{5}}{32} h|BC|$. Из $|DK| = h\sqrt{2}$ получаем $S_2 = S_{\triangle BCD} = \frac{\sqrt{2}}{2} h|BC|$. Отсюда $\frac{S_1}{S_2} = \frac{5\sqrt{10}}{32}$.

Вариант 2

1. $\{4\}$.
2. $3\sqrt{3}$.
3. $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$.
4. Все точки интервала $]-\sqrt{3}; -1[$ за исключением точек $\frac{-1-\sqrt{1+21k}}{21}$ $(20 \leqslant k \leqslant 33)$ и все точки интервала $]1; \sqrt{3}[$ за исключением точек $\frac{-1+\sqrt{1+21k}}{21}$ $(24 \leqslant k \leqslant 39)$.
5. $\frac{5\sqrt{5}}{16}$. **Указание.** Докажите, что $ABCD$ — прямоугольник, углы ECB и EDA — прямые и $(GK) \| (LH)$.

Вариант 3

1. $\sqrt{8}$.
2. $x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$.
3. $]-\infty; 0[\cup [1; 2]$.
4. 5. **Указание.** Задача равносильна следующей: найти такое $n \in \mathbf{N}$, что $\frac{6480}{n} \in \mathbf{N}$, $\frac{11\,200}{n+3} \in \mathbf{N}$ и $\frac{6480}{n} < \frac{11\,200}{n+3}$. Числа n и $n+3$ одновременно делятся (или не делятся) на 3.
5. $\{1\}$ при $|a| > 1$, $[1; +\infty[$ при $a = 1$, $[-3; 1]$ при $a = -1$, $\left\{1, \frac{a+7}{a-1}\right\}$ при $|a| < 1$. **Указание.** Рассмотрите три случая: $x < -3$, $-3 \leqslant x < 1$ и $x \geqslant 1$. Можно также нарисовать график функции $y = |x+3| - 4$ и рассмотреть семейство кривых $y = a|x-1|$, изменяя a от 1 до $+\infty$ и до $-\infty$.
6. $\frac{1}{2}\sqrt{34 - 15\sqrt{3}}$. **Решение.** Пусть $\widehat{BAC} = \alpha$, $\widehat{ABC} = \beta$, $\widehat{BCA} = \gamma$, $\widehat{BKC} = \delta$, $[OM] \perp [AC]$ $(M \in [AC])$, $\widehat{OAM} = \varphi$, $[ON] \perp [AB]$ $(N \in [AB])$. 1) Докажем, что $[BK]$ не пересекается с $[AC]$. Предполагая противное, получаем $\widehat{ACK} = \beta$ (задача 1179 из «Геометрии 6—8»). Из $\triangle BKC$ $\delta + (\beta + \gamma) + \frac{\beta}{2} = 180°$. Отсюда и из равенств $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, $\delta = \frac{1}{2}(3\alpha - \gamma)$ получаем $\gamma = 90°$. Значит, $O \in [AB]$. Тогда по условию $|OM| = 2$. Отсюда $|BC| = 4$. Следовательно, $|AB| + |AC| = 2 + \sqrt{3} < 4 = |BC|$ — противоречие с неравенством треугольника. 2) $\widehat{BCK} = \alpha$ (та же задача 1179), $\widehat{CBK} = 180° - \frac{\beta}{2}$. Из $\triangle BKC$ $\alpha + \left(180° - \frac{\beta}{2}\right) + \delta = 180°$. Отсюда и из тех же двух равенств получаем $\alpha = 30°$. Из $\alpha + \left(180° - \frac{\beta}{2}\right) + \delta = 180°$ следует $\frac{\beta}{2} > \alpha$. Значит, $\beta > 60°$ и $\gamma < 90°$. 3) Докажем, что $\beta > 90°$. Предполагая противное, получаем, что O лежит внутри $\triangle ABC$ (при $\beta < 90°$; ввиду $\alpha = 30°$ и $\gamma < 90°$, $\triangle ABC$ — остроугольный) или на $[AC]$ (при $\beta = 90°$). Тогда $\widehat{OAN} = 30° - \varphi$. Из условий

$$\begin{cases} 2R \cdot \cos\varphi + 2R \cdot \cos(30° - \varphi) = 2 + \sqrt{3} \\ R \cdot \sin\varphi + R \cdot \sin(30° - \varphi) = 2 \end{cases}$$

Отсюда $\operatorname{tg} 15° = \frac{4}{2+\sqrt{3}} > 1$ — противоречие.

4) Следовательно, O лежит вне $\triangle ABC$, причем O и B лежат по разные стороны от (AC). В этом случае $\widehat{OAN} = 30° + \varphi$. Из условий

$$\begin{cases} 2R \cdot \cos\varphi + 2R \cdot \cos(30° + \varphi) = 2 + \sqrt{3} \\ R \cdot \sin\varphi + R \cdot \sin(30° + \varphi) = 2. \end{cases}$$

Отсюда $R^2 \cdot \cos^2 15° = \left(\frac{2+\sqrt{3}}{4}\right)^2 + 1$. Вычислив $\cos^2 15° = \frac{1+\cos 30°}{2}$, находим R.

Вариант 4

1. $x = \pm 4 \arccos\left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 8\pi k \quad (k \in \mathbf{Z})$.
2. $]-\infty; -2[\ \cup\ ]1; +\infty[$.
3. $\frac{2\sqrt{3}-3}{3\sqrt{3}-6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.
4. $]3; +\infty[$.
5. $2 \arcsin\left[\frac{1}{2}\left(\sin\alpha + \sqrt{3}\,(\cos^2\alpha - \sin^2\beta)\right)\right]$.

Указание. Проведите через (BC) плоскость π, параллельную плоскости сечения. Пусть $(SA) \cap \pi = D'$. Тогда $\widehat{CD'B} = \widehat{MDN}$.

6. $2 \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-h^2}\right)$, $\quad \pi - \arccos h - \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-h^2}\right)$, $\quad \arccos h + \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-h^2}\right) - 2\arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-h^2}\right)$.

Решение. Пусть ABC — данный треугольник, O — центр описанной окружности, R — ее радиус, S — центр вписанной окружности, $(OS) \perp (AS)$, E — точка пересечения (AS) с описанной окружностью, $D = (OE) \cap (BC)$. Опустим из S перпендикуляры на (OE), (BC) и (AB); основания этих перпендикуляров обозначим, соответственно, через F, K и L. Положим $|OS| = l$. 1) $\widehat{EOS} = \widehat{AOS}$, так как $[OS]$ — высота в равнобедренном треугольнике AOE. Поэтому $\triangle FOS \sim \triangle SOA$. Отсюда $\frac{|OF|}{|OS|} = \frac{|OS|}{|OA|}$, $|OF| = \frac{l^2}{R}$. 2) Так как (AE) — биссектриса угла BAC, E — середина дуги BEC. Значит, $(OE) \perp (BC)$. $\widehat{COE} = \widehat{BAC}$, поскольку $\angle COE$ измеряется дугой CE, а $\angle BAC$ измеряется половиной дуги BEC. Следовательно, $|OD| = |OC| \cdot \cos\widehat{COE} = R \cdot \cos\widehat{BAC}$. 3) Из $\triangle OAS$ $|AS| = \sqrt{R^2 - l^2}$. Поэтому $|FD| = |SK| = |SL| = |AS| \cdot \sin\frac{\widehat{BAC}}{2} = \sqrt{R^2-l^2} \cdot \sin\frac{\widehat{BAC}}{2}$.
4) Из $|OD| = |OF| + |FD|$ получаем уравнение

$$R \cdot \cos\widehat{BAC} = \frac{l^2}{R} + \sqrt{R^2-l^2} \cdot \sin\frac{\widehat{BAC}}{2}$$

или $\left(\frac{l}{R} = h\right)$

$$\cos\widehat{BAC} = h^2 + \sqrt{1-h^2} \cdot \sin\frac{\widehat{BAC}}{2}.$$

Решив его, находим $\sin\frac{\widehat{BAC}}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{1-h^2}$, $\widehat{BAC} = 2\arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-h^2}\right)$. 5) Из $\triangle AOS$ $\cos\widehat{AOS} = \frac{l}{R} = h$, $\widehat{AOS} = \arccos h$. Если точка O лежит вне $\triangle ABC$, то $\widehat{AOC} = \widehat{AOS} + \widehat{SOE} + \widehat{EOC} = 2\widehat{AOS} + \widehat{BAC}$ и $\widehat{AOC} = 2\pi - 2\widehat{ABC}$, откуда $\widehat{ABC} = \pi - \widehat{AOS} - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Если точка O лежит внутри $\triangle ABC$, то $\widehat{AOC} = 2\pi - \widehat{AOS} - \widehat{SOE} - \widehat{EOC} = 2\pi - 2\widehat{AOS} - \widehat{BAC}$ и $\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC}$, откуда снова $\widehat{ABC} = \pi - \widehat{AOS} - \frac{1}{2}\widehat{BAC}$. Итак, $\widehat{ABC} = \pi - \arccos h - \arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-h^2}\right)$. 6) $\widehat{ACB} = \pi - \widehat{BAC} - \widehat{ABC}$.

Вариант 5

1. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x_2 = -\frac{7}{12}\pi + \pi l \quad (k,\ l \in \mathbf{Z})$.
2. $[-1; 0[$.
3. $]-\infty; 0[$.
4. $\frac{2}{S_2}\sqrt{\frac{S_1(S_2^2 - S_1^2)}{\pi}}$.
5. $[1; +\infty[$. Указание. При $p \neq 0$ сделайте подстановку $(x-p)^2 = t$. Рассмотрите случаи $p<0$, $0<p<1$, $p=1$, $p>1$. Корни исходного уравнения симметричны относительно точки $x = p$.

Вариант 6

1. $[2; +\infty[$.
2. $x = \frac{\pi}{4} k \quad (k \in \mathbf{Z})$.
3. $\frac{a^3}{(\sqrt{2}+1)^3}$.
4. $y = x + 1$, $y = \frac{9}{\sqrt[3]{25}} x - \frac{3}{\sqrt[3]{5}}$.
5. $\frac{5}{24}$. Решение. Через точку R проведем

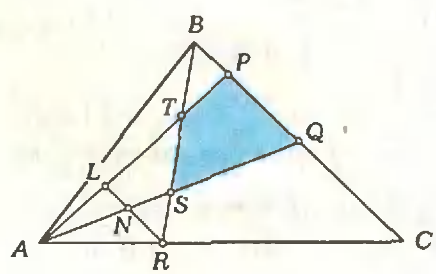


Рис. 5.

прямую, параллельную (BC) (рис. 5). Из подобия треугольников NAR и QAC

$$\frac{|NR|}{|QC|} = \frac{|AR|}{|AC|} = \frac{1}{3}.$$

Из подобия треугольников NSR и QSB

$$\frac{|SR|}{|BS|} = \frac{|NR|}{|BQ|} = \frac{|NR|}{|QC|} \cdot \frac{|QC|}{|BQ|} = \frac{1}{3}.$$

Следовательно,

$$\frac{S_{SBQ}}{S_{RBC}} = \frac{|SB| \cdot |BQ|}{|RB| \cdot |BC|} = \frac{3}{8}.$$

Аналогично, из подобий $\triangle ALR \sim \triangle APC$, $\triangle LRT \sim \triangle PTB$ получаем

$$\frac{S_{TBP}}{S_{RBC}} = \frac{1}{16}.$$

Значит, $S_{PQST} = S_{SBQ} - S_{TBP} = \frac{3}{8} S_{RBC} - \frac{1}{16} S_{RBC} = \frac{5}{16} S_{RBC} = \frac{5}{16}\left(\frac{2}{3} S_{ABC}\right) = \frac{5}{24} S_{ABC}$.

Вариант 7

1. 80 км/ч.

2. $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k\quad(k\in Z)$.

3. $\max\limits_{[-3;1]} f(x)=f(1)=17$. Указание. Нарисуйте график функции f.

4. $3\sqrt{3}$.

5. $\frac{\sqrt{3}}{1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}}$. Указание. Если V — объем пирамиды, S — ее полная поверхность и r — радиус вписанного в нее шара, то $V=\frac{1}{3}Sr$.

Вариант 8

1. $\{-1\}$.

2. $x_1=\frac{7}{16}\pi+\pi k,\ x_2=-\frac{5}{16}\pi+\pi l\quad(k,\ l\in Z)$.

3. $\frac{2}{3}\sqrt{145}$ см. Указание. Через точку E проведите прямые, параллельные (AC) и (BD).

4. Все пары $(x;\ y)$, где $\frac{3}{2}<x<2,\ 1<y<2$.

5. 28 см². Указание. Плоскость сечения пересекает параллельные грани параллелепипеда по параллельным плоскостям. Введите систему координат с началом A и осями по ребрам AD, AB, AA'.

Вариант 9

1. $\sqrt{1-2\sin\frac{3\pi}{2}}$.

2. $]-2;\ -1[\cup]-1;\ +\infty[$.

3. $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

4. $x_1=\frac{\pi}{20}+\pi k,\quad x_2=\frac{9}{20}\pi+\pi l,\quad x_3=\frac{13}{20}\pi+\pi m,$
$x_4=\frac{17}{20}\pi+\pi n\quad(k,\ l,\ m,\ n\in Z)$.

5. См. рис. 6; $\{(x;\ 3)\}$, где $x\in[2;\ 3]$.

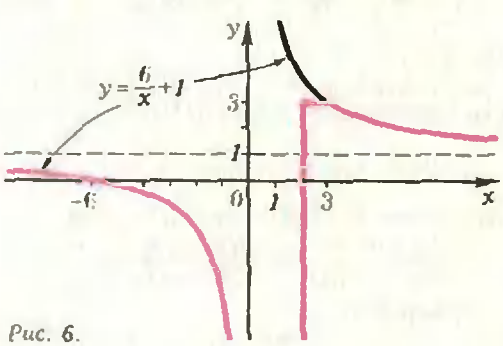


Рис. 6.

6. 10. Указание. $0<\cos\alpha<1$ (α — угол при большем основании).

Вариант 10

1. $\sqrt{\mathrm{ctg}\frac{\pi}{4}-2\sin\frac{3\pi}{2}}$.

2. $\{1\}$.

3. $]-2;\ 3[$.

4. $x_1=(-1)^k\arcsin\frac{5}{8}+\pi k,$
$x_2=(-1)^l\arcsin\frac{1}{8}+\pi l,$
$x_3=(-1)^{m+1}\arcsin\frac{7}{8}+\pi m\quad(k,\ l,\ m\in Z)$.

5. $\frac{5}{7}\sqrt{21}$.

6. $$\left\{\left(\frac{\pi}{3}+\pi(k+l);\ -\frac{\pi}{3}+\pi(k-l);\ 2\pi k\right),\right.$$
$$\left(-\frac{\pi}{3}+\pi(k+l);\ \frac{\pi}{3}+\pi(k-l);\ 2\pi k\right),$$
$$\left(\frac{2}{3}\pi+\pi(k+l);\ \frac{\pi}{3}+\pi(k-l);\ \pi+2\pi k\right),$$
$$\left.\left(\frac{\pi}{3}+\pi(k+l);\ \frac{2}{3}\pi+\pi(k-l);\ \pi+2\pi k\right)\right\}$$
$$(k,\ l\in Z).$$

Указание. Первое уравнение системы равносильно уравнению $4\cos^2(x-y)+4\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)+1=0$. Решите последнее уравнение относительно $\cos(x-y)$. Рассмотрите отдельно случаи $\cos(x-y)=1$ и $\cos(x-y)=-1$.

Вариант 11

1. $]-1;\ 0[\cup]2;\ 4[$.

2. $\left(\frac{2}{3}+\frac{\sqrt{3}}{\pi};\ -\frac{\pi}{4}\right)$.

3. $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k\quad(k\in Z)$.

4. $\frac{1}{6}$.

5. В 2 раза.

6. $\{1-\sqrt{11+4\sqrt{3}},\ 1+\sqrt{11+4\sqrt{3}}\}$. Решение. Данное уравнение равносильно уравнениям

$$\log_{\sqrt{8+4\sqrt{3}}}(x^2-2x-2)=\log_{2+\sqrt{3}}(x^2-2x-3)$$
$$2\log_{8+4\sqrt{3}}(x^2-2x-2)=\log_{2+\sqrt{3}}(x^2-2x-3)$$
$$\log_{8+4\sqrt{3}}(x^2-2x-2)=\frac{1}{2}\log_{2+\sqrt{3}}(x^2-2x-3)$$
$$\log_{8+4\sqrt{3}}(x^2-2x-2)=\log_{(2+\sqrt{3})^2}(x^2-2x-3)$$
$$\log_{8+4\sqrt{3}}(x^2-2x-2)=\log_{7+4\sqrt{3}}(x^2-2x-3)$$
$$\frac{\ln(x^2-2x-2)}{\ln(8+4\sqrt{3})}=\frac{\ln(x^2-2x-3)}{\ln(7+4\sqrt{3})}$$
$$\frac{\ln(x^2-2x-2)}{\ln(x^2-2x-3)}=\frac{\ln(8+4\sqrt{3})}{\ln(7+4\sqrt{3})}.\qquad(1)$$

Положим $7+4\sqrt{3}=a$ и рассмотрим вспомогательное уравнение

$$\frac{\ln(t+1)}{\ln t}=\frac{\ln(a+1)}{\ln a}.\qquad(2)$$

При $f(t)=\frac{\ln(t+1)}{\ln t}$ оно имеет вид

$$f(t)=f(a).$$

Поскольку

$$f'(t)=\frac{t[\ln t-\ln(t+1)]-\ln(t+1)}{t(t+1)\ln^2 t}$$

и ln возрастает на $]0;\ +\infty[$, заключаем, что $f'(t)<0$ на $]0;\ +\infty[$. Таким образом, f монотонна на $]0;\ +\infty[$. Следовательно, уравнение (2) имеет не более одного корня. Но один его корень $t=a$ очевиден. Поэтому уравнение (1) равносильно уравнению

$$x^2-2x-3=7+4\sqrt{3}.$$

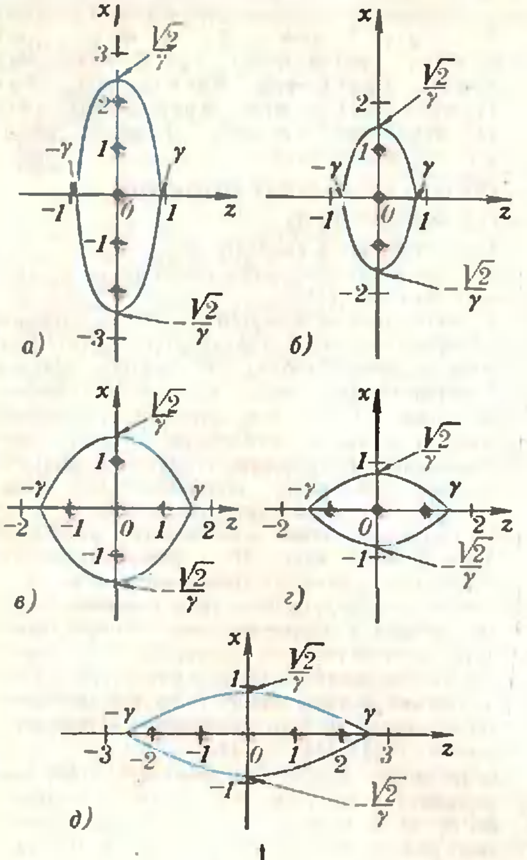


Рис. 7.

откуда $x=1\pm\sqrt{11+4\sqrt3}$.

Вариант 12

1. $x=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{6}+\pi k$ $(k\in Z)$.

2. $\left\{-3\frac12,\ -2\frac12\right\}$.

3. $\frac{25}{4}$.

4. $\frac{\sqrt3}{6}-\frac{\pi}{18}$. Указание. Докажите, что $|AC|=\sqrt3$ и $ABCD$ — ромб.

5. $\left]\frac{\sqrt2}{2};1\right[\cup\left]\sqrt2;2\right[$. Решение. При $\gamma<0$ решением данного неравенства является любая пара $z=0$, $x=n\in Z$ — целочисленных решений бесконечно много. Пусть далее $\gamma>0$. Данное неравенство равносильно неравенству

$$|x|<-\frac{\sqrt2}{\gamma^3}z^2+\frac{\sqrt2}{\gamma}$$

или

$$\frac{\sqrt2}{\gamma^3}z^2-\frac{\sqrt2}{\gamma}<x<-\frac{\sqrt2}{\gamma^3}z^2+\frac{\sqrt2}{\gamma}.$$

Таким образом, нам надо оценить число точек с целочисленными координатами между параболами $x=-\frac{\sqrt2}{\gamma^3}z^2+\frac{\sqrt2}{\gamma}$ и $x=\frac{\sqrt2}{\gamma^3}z^2-\frac{\sqrt2}{\gamma}$. Если $0<\gamma<\frac{\sqrt2}{2}$, то $\frac{\sqrt2}{\gamma}>2$ — на оси ординат (оси x) имеется не меньше 5 искомых точек (рис. 7, а). Если $\frac{\sqrt2}{2}<\gamma<1$, то $1<\frac{\sqrt2}{\gamma}<2$ — между параболами (а именно — на оси ординат) имеется ровно 3 искомые точки (рис. 7, б). Если $1\leqslant\gamma\leqslant\sqrt2$, то $\frac{\sqrt2}{\gamma}\geqslant1$ — между параболами имеется не меньше 5 искомых точек (рис. 7, в). Если $\sqrt2<\gamma<2$, то $\frac{\sqrt2}{\gamma}<1$ — между параболами (а именно — на оси абсцисс) имеется ровно 3 искомые точки (рис. 7, г). Наконец, при $\gamma\geqslant2$ на оси абсцисс имеется не меньше 5 искомых точек (рис. 7, д).

Физика

Физический факультет

1. $T=m_2g\left(1+\frac{4(m_1l_1+m_2l_2)\,l_2\sin^2(\alpha/2)}{m_1l_1^2+m_2l_2^2}\right)$.

2. $A=\frac{k_2(k_1+k_2)l^2}{2k_1}$.

3. $h=\frac{k(L-l)^2}{2g(M+m)}$.

4. $p=\left(\frac{p_1V_1}{T_1}+\frac{p_2V_2}{T_2}\right)\frac{T}{V_1+V_2}$.

5. $m_в=\left(1-\frac{r}{100\%}\right)\frac{p_н\mu V}{RT}=0{,}46$ кг, где $\mu=18\cdot10^{-3}$ кг/моль — молярная масса воды.

6. $U=U_0\frac{d}{d-2d_2-d_1+2d_2/\varepsilon}$.

7. $Q=\frac{C_1C_2^2\mathscr{E}^2}{2(C_1+C_2)^2}\,\frac{R_1}{R_1+R_2}=0{,}04$ Дж.

8. $x=2L\frac{R_{BC}}{R_{AB}+R_{BC}}=5\cdot10^3$ м $=5$ км.

9. $l\approx\frac{h}{4\alpha(n-1)}$.

10. $R=dn_2/(2n_1)=4$ см.

Механико-математический факультет и факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $\frac{y}{x}=1+\frac{4\pi R^3(2\varrho_в-\varrho_в)}{3M}\approx1{,}5$.

2. $m=\frac{MR\Delta T}{\mu hg}-\frac{p_0S}{g}\approx2{,}8\cdot10^3$ кг.

3. $B=E\sqrt{\frac{m}{2W}}\approx3{,}2\cdot10^{-3}$ Тл; линии магнитной индукции перпендикулярны линиям напряженности электрического поля и скорости электрона.

4. $\beta=120°$.

Химический факультет и факультет почвоведения

1. $\mu_{\min}=\dfrac{r\,\mathrm{tg}\,\alpha}{R+r}$.

2. $V=\dfrac{m}{\varrho_{н}(1-r/100\%)}\approx 8{,}3\cdot 10^{-3}$ м$^3\approx 8{,}3$ л.

3. $\varphi_D=(\varphi_A+\varphi_B+\varphi_C)/3=70$ В.

4. $F_1=\dfrac{Dl}{D+d}=9$ см; $F_2=\dfrac{dl}{D+d}=3$ см.

Географический и геологический факультеты

1. Ящик о стену не ударится, так как пройденный им путь

$$l=m^2(v_0-v)^2/(2\mu gM^2)=0{,}125 \text{ м}$$

меньше расстояния $d=0{,}5$ м до стены.

2. $\varrho=\dfrac{0{,}5p_0}{gh}\approx 10^3$ кг/м^3.

3. $\eta=1-\dfrac{\varrho Vc\Delta T}{P\tau}\approx 0{,}4$ (здесь $\varrho=10^3$ кг/м^3 — плотность воды).

4. $n=\sqrt{(2h/l)^2+1}=1{,}33$.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 1)

Задание 1 (С. Лимбах). **1. Фe4!** (но не 1. Фd1+? Лg1 2. Фd5+ e4!) **1... b1Ф 2. Ф:b1+ Лg1 3. Фb7+ e4 4. Ф:e4+ Лg2 5. Фb1+ Лg1 6. Фb7+ Лg2 7. Фe4!** Чисто геометрический мотив — дважды пройдя по треугольнику e4—b1—b7—e4, ферзь вынуждает короля покинуть свое убежище. **7... Кpg1 8. Фe1**×.

Задание 2 (Г. Ринк, 1905 г.). **1. Kg4 Крh1 2. a7 g1Ф 3. a8Ф+ Фg2 4. Фh8+ Кpg1 5. Фd4+ Кph1 6. Фd1+ Фg1 7. Фd5+ Фg2 8. Фh5+ Кpg1 9. Фc5+ Кph1 10. Ф:c1+ Фg1 11. Фc6+ Фg2 12. Фh6+ Кpg1 13. Фc1+ Фf1 14. Фc5+ Кph1 15. Фh5+ Кpg2 16. Кe3+** и белые выигрывают.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 3)

1. Боря живет в квартире 206.
2. Надо взять две нитки № 40 (а не № 10!) и сложить вместе.
3. Весы покажут больший вес. Действительно, давление воздуха в шарике больше атмосферного, поэтому добавление порции воздуха в шарик увеличит объем шарика на величину меньшую того объема, который эта порция воздуха занимала в атмосфере; следовательно, увеличение количества воздуха в шарике вызовет увеличение выталкивающей силы меньше, чем увеличение силы тяжести.
4. На месте знака «?» следует поставить представление числа 16 в троичной системе счисления, то есть 121. Действительно, в последовательности записаны представления числа 16 сначала в 16-ричной системе счисления, потом в 15-ричной, 14-ричной и т. д. Заметим, что вместо заключительного знака «?» в формулировке задачи можно было бы поставить запись числа 16 в «однoричной» системе счисления: 1111111111111111.
5. Не могут. Если бы отрезки AM и BK при пересечении делились бы пополам, то точки A, B, M и K были бы вершинами параллелограмма, то есть стороны AC и BC треугольника ABC были бы параллельны, что невозможно.

Номер оформили:
Л. В. Денисенко, М. Б. Дубах, А. К. Малкин, Э. В. Назаров, И. Е. Смирнова, Е. К. Тенчурина
Фото: Т. П. Волосюк, А. С. Маклецов, А. Пушкарев (ТАСС), А. Сенцов (ТАСС), В. П. Шевченко

Главный художник Э. А. Смирнов

Заведующая редакцией Л. В. Чернова

Художественный редактор Т. М. Макарова

Корректор О. М. Кривенко

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1. «Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 16.2.83. Подписано в печать 16.3.83.
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,90 Т-06945
Цена 40 коп. Заказ 355 Тираж 172 343 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

ДОСКА ПОД ОХРАНОЙ

В прошлом номере журнала мы рассказали о комбинаторных задачах на шахматной доске, связанных с расстановкой наибольшего числа фигур, не угрожающих друг другу. Другой распространенный тип шахматных головоломок состоит в расстановке наименьшего числа фигур, которые держат под защитой все свободные поля доски, подсчете числа таких расстановок и обобщение задач на доску $n\times n$.

Ферзи. Пять ферзей на полях c6, d3, e5, f7, g4 охраняют всю шахматную доску. Число таких расстановок равно 4860. Любопытно, что пяти ферзей достаточно и для охраны досок 9×9, 10×10 и даже 11×11. В общем случае задача о числе ферзей, которые держат под обстрелом все свободные поля доски $n\times n$, не решена, есть лишь некоторые оценки (см. «Квант», 1977, № 12).

Ладьи. Здесь имеется полная ясность. На доске $n\times n$ нужно расставить ровно n ладей, чтобы они обстреливали все поля доски, число расстановок равно $2n^n-n!$ ($n!$ — произведение всех целых чисел от 1 до n).

Слоны. n слонов, поставленные вдоль одной из центральных вертикалей (горизонталей) доски, охраняют все свободные поля доски, то есть на обычной доске со своей задачей справятся 8 слонов. Формула для числа возможных расстановок n слонов на доске $n\times n$ имеет довольно громоздкий вид: $((2k-1)!(4k^2+k))^2$ при $n=4k$, $((2k)!(4k^2+5k+2))^2$ при $n=4k+2$, $2(k!)^2(k+2)$ при $n=2k+1$ ($k>0$).

Короли. Любое натуральное число n можно представить одним из следующих способов: $n=3k$, $n=3k-1$, $n=3k-2$, где k — некоторое натуральное число ($k=[(n+2)/3]$). Наименьшее число королей, охраняющих всю шахматную доску $n\times n$, равно k^2. В частности, для $n=8$ имеем $k=3$, и 9 королей (например, на полях b2, b5, b8, e2, e5, e8, h2, h5, h8) выполняют свои функции. Формула для числа расстановок неизвестна.

Кони. В общем случае, для доски $n\times n$ задача не решена. На обычной доске можно расставить 12 коней, охраняющих все свободные поля доски (b6, c2, c3, c5, c6, d3, e6, f2, f3, f6, f7, g2).

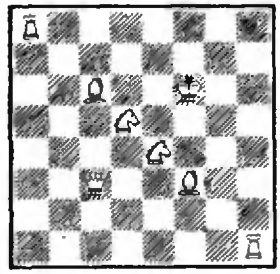
Пешки. На обычной доске для охраны хватает 29 пешек. Их можно поставить на первую горизонталь и на вертикали a, d и g. Число расстановок в общем случае (на доске $n\times n$) попробуйте найти самостоятельно.

В некоторых задачах об охране доски 8×8 требуется, чтобы под боем находились не только свободные поля, но и занятые фигурами. Пять ферзей, удовлетворяющих этому условию, можно поставить на поля a2, c4, d5, e6, g8. Восемь ладей, стоящих вдоль любой горизонтали или вертикали, также нападают на все поля доски. Что же касается других фигур, то для охраны всей доски их требуется несколько больше: коней — 14, слонов — 10, королей — 12.

В подобных задачах не обязательно брать одноименные фигуры. Пять ферзей справляются с шахматной доской, но двух из них можно заменить ладьями (ферзи b7, d1, f7, ладьи d3, h5) или даже ладьей и слоном (ферзи b4, f2, h6, ладья d8, слон e5), причем в первой расстановке атакованы все 64 поля доски. Ферзей может сопровождать конь или король (ферзи d6, e4, f5, g7 и конь c1 или король b2).

А можно ли расставить на шахматной доске полный комплект фигур (без пешек) так, чтобы они держали под обстрелом все 64 поля?

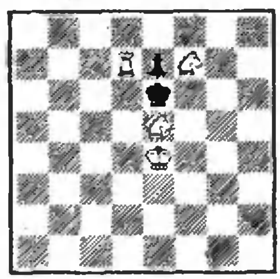
Как ни странно, восемь фигур могут охранять всю доску лишь в том случае, если слоны одноцветные.



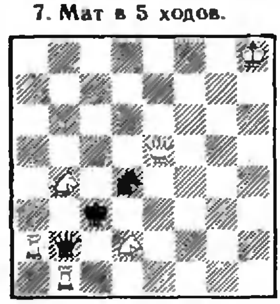
Если же слоны разного цвета, то одно поле всегда останется без охраны, причем доказано, что неатакованным может быть любое поле доски. Если мы хотим, чтобы под защитой находились только свободные поля доски, то хватает и семи фигур: Крb4, Фg2, Лf8, Лh1, Кc7, Кe5, Сc5.

Конкурсные задания

Апрель — «космический» месяц, и поэтому сегодня мы предлагаем две задачи на космическую тему. Первая из них посвящена В. Терешковой и Ю. Гагарину. Начальная буква «Т» в процессе решения трансформируется в букву «Г». В двухходовке начальное расположение фигур изображает ракету, устремившуюся к звездам.



7. Мат в 5 ходов.



8. Мат в 2 хода.

Срок отправки решений — 25 июня 1983 года (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 7, 8»).

Цена 40 коп.

Индекс 70465

Известно, что несколько цветовых образцов, находящихся в одной плоскости, обычно воспринимаются лежащими в нескольких плоскостях, расположенных ближе или дальше реальной. Это — эффект хроматической стереоскопии. При рассмотрении цветового круга, помещенного на черное основание, становится очевидным, что его желтая область значительно выступает вперед, синяя — отступает в глубину, едва отрываясь от черного фона, красные и зеленые цвета занимают промежуточное положение. Аналогичным образом ощущает цвет в пространстве подавляющее большинство людей, обладающих нормальным цветовым зрением.

Одноцветный куб воспринимается как единый геометрический образ. Если разбить его на цветные кубики, он будет казаться пространственно расчлененным. Эту картину можно смоделировать в виде тонового рельефа, учитывающего кажущееся различие в расположении составляющих кубиков. Мы воспроизводим здесь два примера, иллюстрирующие связь между цветными изображениями и их тоновыми рельефами, предложенных художником А. В. Ефимовым.