ISSN 0130-2221

Квант

12
1982

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

Исполнилось 350 лет со дня основания Тартуского университета. Это один из старейших и известнейших университетов Советского Союза.

В Тарту работали такие замечательные математики, как М. Бартельс — учитель Н. И. Лобачевского, Т. Клаузен, Ф. Г. Миндинг. Работы академика В. Я. Струве и его учеников прославили Тартуский университет как мировой астрономический центр. Воспитанником университета был известный физик Э. Х. Ленц (правило Ленца, закон Джоуля — Ленца). Профессору Тартуского университета Б. С. Якоби, физику и электротехнику, принадлежит изобретение гальванопластики, им был сконструирован первый в мире электродвигатель. Здесь работал профессор Б. Б. Голицын, один из основоположников сейсмологии. Выпускником Тартуского университета был известный естествоиспытатель К. М. Бэр (он открыл закон подмыва берегов рек). Здесь учился создатель «Толкового словаря живого великорусского языка» В. И. Даль. В университете работали выдающиеся хирурги Н. И. Пирогов и Н. Н. Бурденко, известный историк академик Е. В. Тарле.

В наши дни Тартуский университет — видный центр образования, культуры и науки Советского Союза, кузница кадров Эстонской Советской Социалистической Республики.

Основан в 1970 году

Квант

12
1982

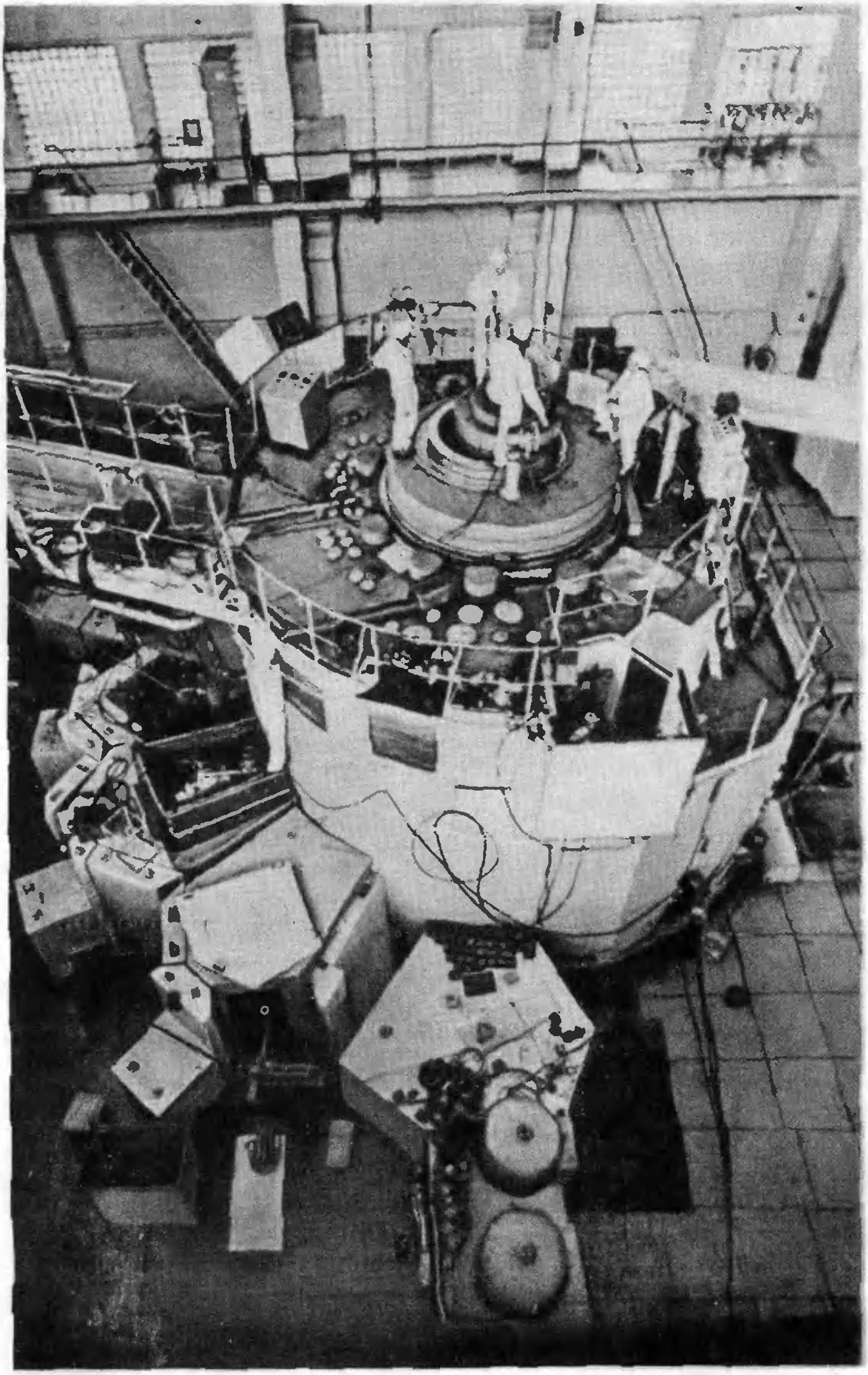
НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО·НАУКА· ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ: IN THIS ISSUE:

На первой странице обложки помещена фотография потока плазмы, распространяющегося вдоль линий магнитного поля в термоядерной установке «Огра 4» (Институт атомной энергии им. И. В. Курчатова). Плазма видна благодаря свечению специально добавленного газа, возбужденного потоком.

Фото Ф. Кузьмина. Фотохроника ТАСС



Атомный реактор Института физики высоких энергий Академии наук Казахской ССР.

СССР 60 ЛЕТ

И. Кикоин

Физика в Союзе Советских Социалистических Республик

До Великой Октябрьской социалистической революции в России были отдельные выдающиеся физики и астрономы, такие как А. Г. Столетов, П. Н. Яблочков, А. С. Попов, П. Н. Лебедев, Н. Е. Жуковский, А. А. Белопольский, А. Ф. Иоффе. Но это были физики-одиночки, и работали они, в основном, в обеих столицах — Москве и Петербурге.

В первые же годы Советской власти по инициативе и указаниям В. И. Ленина в нашей стране стала бурно развиваться наука, в том числе и физика. Был создан ряд научных институтов: Государственный оптический институт (ГОИ) под руководством Д. С. Рождественского и Физико-технический институт (ЛФТИ) под руководством А. Ф. Иоффе — в Ленинграде, Центральный аэрогидродинамический институт (ЦАГИ) под руководством Н. Е. Жуковского — в Москве и некоторые другие. Но эти институты по-прежнему были сосредоточены в столицах.

Вскоре после образования Союза Советских Социалистических Республик во исполнение указаний В. И. Ленина Коммунистическая партия и Советское правительство стали принимать меры по развитию науки в союзных республиках.

Уже на моей памяти во второй половине двадцатых годов из научного состава ЛФТИ директор института академик А. Ф. Иоффе выделил группу молодых талантливых физиков для организации Украинского физико-технического института (УФТИ) в Харькове (тогдашней столице УССР). Это был один из первых крупных физических институтов на Украине. Институт этот вскоре стал знаменит тем, что в нем была единственная в то время в стране лаборатория низких температур с установкой для получения жидкого гелия. (По-видимому, это была вторая в мире, после Лейденской лаборатории в Голландии, криогенная лаборатория.) Ныне УФТИ — известный во всем мире физический институт. Вслед за ним был организован физико-технический институт в Днепропетровске.

Вскоре из того же ЛФТИ была выделена группа физиков, составившая ядро Уральского физико-технического института в Свердловске (ныне — Институт физики металлов). Почти одновременно таким же путем был создан физико-технический институт в Томске.

В наши дни физические науки, как, впрочем, и другие, получили широкое развитие во всех союзных республиках. Важным шагом на пути этого развития было создание республиканских Академий наук. Трудно в небольшой статье рассказать о научных достижениях в области физики во всех пятнадцати республиках. Поэтому я познакомлю читателя с успехами и достижениями лишь тех физических центров страны, в которых мне самому приходилось работать или с которыми я имею непосредственные научные контакты.

В 1938 году мне довелось работать в криогенной лаборатории Украинского физико-технического института (в Харькове), которая была известна своими экспериментальными исследованиями в области сверхпроводимости. В других лабораториях института широким фронтом были развернуты работы по физике атомного ядра. Особое внимание уделялось исследованиям взаимодействия тогда еще недавно открытых нейтронов с веществом. Результаты этих исследований в дальнейшем имели большое значение при создании промышленных ядерных реакторов для атомных электростанций. В настоящее время в УФТИ ведутся важные исследования как в области физики низких температур и создания новых конструкционных материалов, так и в области управляемого термоядерного синтеза.

В столице Латвийской ССР Риге создан превосходный физический институт, в котором имеется исследовательский ядерный реактор, используемый как мощный источник нейтронов.

Любой ядерный реактор служит не только источником энергии, но и сравнительно мощным источником нейтронов. Исследовательские реакторы используются для изучения широкого круга физико-химических процессов. Сооружение таких реакторов требует значительных средств, а эксплуатировать их может только высококвалифицированный персонал.

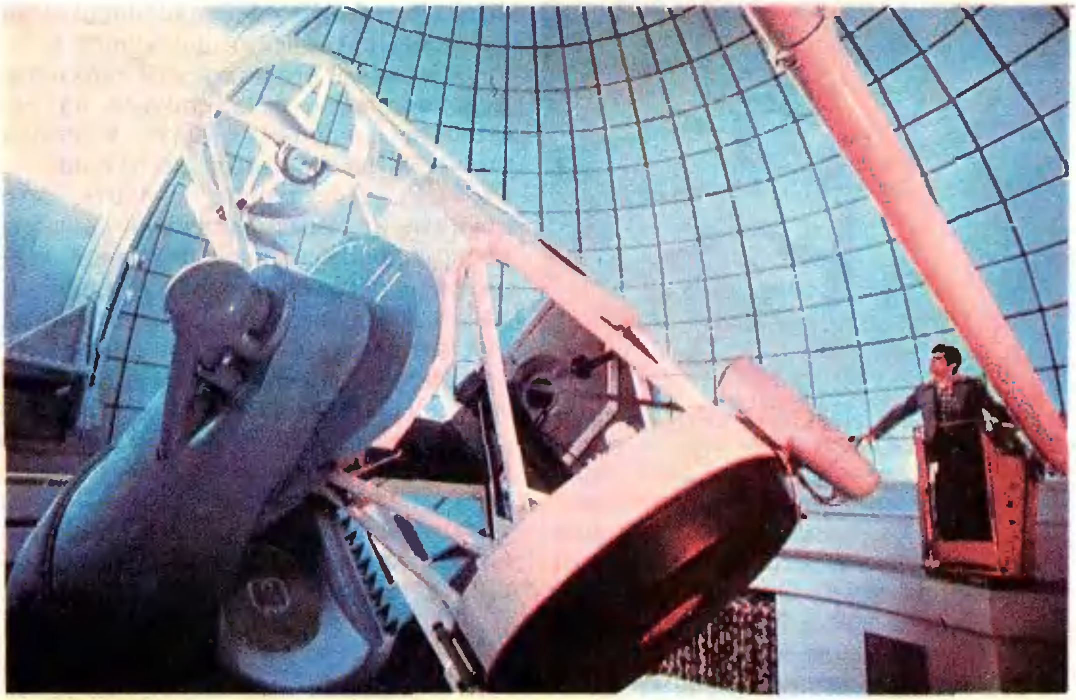
Известно, что многие вещества при облучении их нейтронами заметно изменяют свои физические и химические свойства. На реакторе Института физики в Риге ученые исследуют изменения строения ряда диэлектрических кристаллов, приводящие к изменению их оптических свойств. Эти исследования имеют не только научное значение, но и практическое применение при решении ряда технических задач. Так, в последнее время на реакторе изучалось влияние нейтронного облучения на вещества, которые предполагают использовать в строительстве промышленных атомных реакторов.

Под действием нейтронного облучения молекулы некоторых химических соединений диссоциируют (распадаются) с большей или меньшей скоростью. Поиск соединений, достаточно устойчивых к нейтронному облучению,— важная задача. Изучение ряда химических соединений в этом направлении проводится на исследовательском реакторе Института ядерной физики в столице Узбекской ССР Ташкенте. Опыты, проведенные узбекскими учеными совместно с учеными Института атомной энергии им. И. В. Курчатова на Ташкентском исследовательском реакторе, позволили выбрать пригодные для применения в технике химические соединения, молекулы которых достаточно устойчивы к нейтронному облучению.

Самое важное свойство нейтронов заключается в том, что они способны проникать в ядро атома и изменять его состав; при этом образуется либо ядро другого химического элемента, либо ядро радиоактивного изотопа облучаемого элемента. Классическим примером подобного ядерного превращения служит лежащий в основе всей ядерной техники процесс образования новых химических элементов при облучении нейтронами урана. Радиоактивные изотопы находят широкое применение в медицине, технике, сельском хозяйстве. На Ташкентском реакторе физики Узбекистана получают радиоактивные изотопы ряда элементов.

Важная научная и практическая работа ведется на исследовательском реакторе Института ядерной физики в столице Казахской ССР Алма-Ате.

Нейтроны могут нести и еще одну важную «службу». Они бывают незаменимы для анализа химического состава вещества, при определении содержания в веществе того или иного элемента; особенно, когда количество этого элемента в веществе настолько мало, что методами химического анализа обнаружить его присутствие невозможно. Примером может служить анализ горных пород на содержание в них редких, а потому и дорогих, элементов. Здесь приходят на помощь нейтроны. Как мы уже говорили, проникновение нейтронов в ядра атомов элемента приводит к образованию либо нового, обычно радиоактивного, элемента, либо радиоактивного изотопа исходного элемента. Радиоактивные элементы испускают, в основном, γ-кванты или быстрые электроны (β-частицы). Современные приборы позволяют регистрировать каждый отдельный γ-квант и каждый электрон и измерять их энергию. Энергия испускаемого кванта или электрона — величина, характерная для ядра данного элемента. Поэтому, облучив анализируемый образец горной породы нейтронами и сосчитав за определенное время число γ-квантов



Большой зеркальный телескоп Ленинградского оптико-механического объединения, установленный в Бюраканской астрофизической обсерватории Академии наук Армянской ССР.

или β-частиц с энергией, соответствующей ядру какого-либо элемента, можно определить количество данного элемента в образце, даже если оно очень мало. Этот метод анализа химического состава вещества называется активационным анализом.

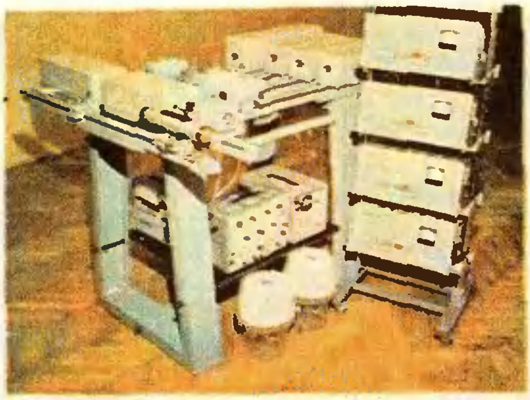
Такой анализ можно провести на любом исследовательском реакторе, но в Институте ядерной физики в Алма-Ате этот метод развит особенно хорошо. Результаты, полученные учеными института, имеют очень важное значение при поисках месторождений редких металлов.

В этом же институте имеется циклотрон — установка не менее дорогостоящая, чем исследовательский реактор.

Циклотрон, как известно, применяется для ускорения заряженных частиц, в частности — α-частиц. Облучая α-частицами какой-либо легкий металл, например бериллий, можно получать пучки нейтронов. Правда, количество нейтронов в этом случае заметно меньше, чем получаемое от ядерного реактора, но зато, используя циклотрон, можно с большой точностью регулировать энергию ускоряемых α-частиц и соответственно энергию «выбиваемых» ими нейтронов. Для ряда исследований это преимущество неоценимо.

Советское государство уделяет большое внимание оснащению научных учреждений союзных республик мощными современными исследовательскими средствами. Так, в столице Армянской ССР Ереване сооружен один из самых мощных в мире циклический ускоритель электронов. Это — грандиозное сооружение, в котором кинетическая энергия электронов достигает $6 \cdot 10^9$ электронвольт (такую энергию получил бы электрон в электрическом поле при напряжении $6 \cdot 10^9$ В). В Армянской же ССР, в Бюракане, находится известная во всем мире астрофизическая обсерватория, оснащенная самым современным научным оборудованием.

За последние десятилетия большое развитие физические науки получили в Белорусской ССР. В состав Академии наук БССР входит ряд крупных физических институтов, ведущих важные работы в области оптики. В Институте физики АН БССР проводятся широкие исследования по физике и технике лазеров. Важное научное и техническое значение имеют исследования белорусских



Лазер на красителях «Радуга-6», разработанный в Институте физики Академии наук Белорусской ССР.

физиков в области спектроскопии. Недалеко от столицы республики Минска сооружен исследовательский ядерный реактор. Одно из важных направлений работ на этом реакторе — исследование возможности при помощи облучения нейтронами улучшать физические и химические свойства ряда материалов, применяемых в промышленности.

Мне довелось побывать в столице Грузинской ССР Тбилиси и ознакомиться с работой некоторых из имеющихся там научных физических учреждений. На физическом факультете Тбилисского государственного университета и в других научных учреждениях города проводятся широкие исследования по физике и технике полупроводников, по радиоэлектронике. В Институте физики, где имеются исследовательский реактор и крупная криогенная установка, изучаются весьма интересные явления, связанные с воздействием нейтронов на физические свойства веществ при низких температурах. Эти исследования позволили в значительной степени прояснить физическую природу изменения свойств материалов, подвергающихся облучению нейтронами. В том же институте изучаются уникальные свойства так называемого сверхтекучего He-II. Дело в том, что жидкий гелий, будучи охлажден до температуры 2,17 K, скачком переходит в новое состояние, в котором его вязкость становится равной нулю (жидкость течет без трения). Вследствие отсутствия вязкости движение жидкого гелия имеет весьма интересные особенности. Они-то и стали предметом изучения грузинских физиков.

Я не имею возможности сколь-нибудь подробно остановиться на состоянии физических наук в самой большой из союзных республик — РСФСР. Достаточно сказать, что крупные научные физические центры расположены по всей огромной территории республики от Калининграда до Владивостока. Со многими из них мне приходилось и приходится сотрудничать. Даже простое перечисление названий важнейших физических учреждений РСФСР заняло бы слишком много места. В столице РСФСР находится и главный штаб советской науки — Академия наук СССР, которую возглавляет выдающийся советский физик академик А. П. Александров.

Необходимо отметить большие заслуги советских физиков в решении важнейших задач, стоявших перед страной. Так, во время Великой Отечественной войны они внесли огромный вклад в усовершенствование существовавшей боевой техники и создание новых ее видов.

Автору этих строк вместе с другими физиками, учеными и инженерами многих специальностей посчастливилось стоять у колыбели атомной техники, создававшейся в нашей стране. На моих глазах физические идеи, лежащие в основе этой техники, получили промышленное воплощение. Сейчас Советский Союз — одна из ведущих держав в этой области. В ряде отраслей атомной техники наша страна опережает наиболее промышленно развитые капиталистические страны. Хорошо известно, что первая атомная электростанция была сооружена в Советском Союзе. Советские атомные ледоколы не имеют себе равных в мире.

Шестидесятилетие образования Союза Советских Социалистических Республик советская физика встречает новыми успехами как в области фундаментальных исследований, так и в их приложении в различных отраслях народного хозяйства. Тем самым физики всех союзных республик выполняют исторические предначертания Коммунистической партии Советского Союза.

А. Александров

Тупость и гений

Оглянемся теперь на историю пятого постулата Евклида. Лобачевский сказал о ней: «Напрасные старанья... в продолжение двух тысяч лет». Но какие старанья! Множество математиков расточает их, и каких математиков! Среди них знаменитейшие имена: попытки открываются, возможно, Архимедом, проходят через Омара Хайяма и подходят к завершению с Гауссом.

Попытки доказать пятый постулат были, как мы выяснили раньше, совершенно естественными. Но 2000 лет никто не догадывался, что доказательство невозможно. Никто не мог подумать, что возможна какая-то геометрия, отличная от привычной евклидовой. Ее неразрывная связь с нашим пространственным опытом и наглядным представлением, ее логическое совершенство и прозрачность, вековые традиции ее изучения и, можно сказать, исповедания — все это делало геометрию Евклида непререкаемой, как бы абсолютно необходимой, присущей и миру, и разуму. Ее происхождение из практики затмевалось совершенством и ясностью ее логики. И дошло, наконец, до того, что в 1781 г. великий философ Кант в своей «Критике чистого разума» счел геометрию априорной — независимой от опыта — и основал на этом вывод об априорности самого пространства, которое для него — не форма, присущая миру, а только форма нашего восприятия, форма «наглядного созерцания».

Окончание. Начало — в предыдущем номере.

Гений

Но как раз в это же время из попыток доказать пятый постулат стали пробиваться первые проблески сомнений. Уже в 1766 году у Ламберта брезжит мысль, что отрицание пятого постулата «имеет место на какой-то мнимой сфере», что, может быть, странные выводы, к которым приводит это отрицание,— не бессмыслица. Напряжение нарастает. Кантовское «априори» распространяется в умах, особенно после второго издания его «Критики» в 1787 г.

Но труд Ламберта выходит в 1786 г. Затем, из столь же упорных, как и безуспешных попыток доказать пятый постулат, в первой четверти XIX века прорастает наконец общая мысль о том, что, возможно, мыслима геометрия, отличная от евклидовой. Почти одновременно, хотя и с разной степенью определенности и ясности, эта идея появляется у нескольких человек — у Швейкарта, Тауринуса, Гаусса, Лобачевского и Больяи.

Дойти до мысли, опровергающей привычное, может быть само по себе гениальным. Но это еще не наука, а только идея. Наука же требует претворения идеи в теории, как инженерия — претворения идеи в предмете, в осуществленном изобретении.

Гений — не только полет мысли, но также ее упорство — труд, приподнятый вдохновением, и вдохновение, подкрепленное трудом. Так, Коперник не только выразил мысль, что не Земля, а Солнце — в центре (мысль, кстати сказать, не новую: ее выразил еще в III в. до н. э. Аристарх Самосский), но и построил «систему Коперника» — дал точное описание движения планет вокруг Солнца, согласное с наблюдениями. Точно так же Лобачевский не только выразил убеждение в возможности неевклидовой геометрии, но и построил эту геометрию. И как от Коперника пошло новое развитие астрономии, дошедшее до современного взгляда на Вселенную с множеством «миров» — планетных систем, галактик и пр., так от Лобачевского пошло новое развитие геометрии, приведшее к созданию множества разнообразных «геометрий», самых разных геометрических теорий «воображаемых» пространств — топологических, римановых, финслеровых, расслоенных... — «им же несть числа». Недаром, когда в 60—70 гг. прошлого века начал во всю силу разворачиваться этот пошедший с Лобачевского процесс преобразования геометрии, Лобачевский был назван «Коперником геометрии». Нельзя, конечно, забывать, что новую геометрию развил и обнародовал также Больяи, но преимущество отдается Лобачевскому, потому что он сделал это раньше и потом еще существенно продолжил свои исследования и публикации.

Лобачевский утверждался в мысли о недоказуемости пятого постулата и о возможности неевклидовой геометрии, исходя из философских, теоретико-познавательных убеждений. Это выражено уже в приведенных ранее (в первой части статьи) его словах из предисловия к «Новым началам геометрии...». «Истина, которую хотели доказывать», то есть пятый постулат, не заключается «в самих понятиях», а в применении к реальному пространству и подлежит проверке опытом, как физический закон. Этим отрицается кантовское «априори»: геометрия не независима от опыта, а подлежит проверке опытом*). В других сочинениях Лобачевский явно возражал против кантианства в общей форме, когда писал, например, что «понятия приобретаются опытом... врожденным не должно верить».

Кстати, это стоит заметить научным снобам, полагающим будто ни им, ни науке вообще не нужно философское мышление. Все великие ученые от Ньютона и Галилея, если говорить лишь о новом времени, были философскими мыслителями. Без философии наука не развивается: проложение новых ее путей, когда они не оформились, и есть философское движение мысли. Вопрос только в том — какая это философия, связывается ли она с точной логикой и фактами опыта или с пребывающими в безвоздушном пространстве общими фразами априорности и чистого спекулятивного мышления. Галилей, Ньютон, Лобачевский не только высказывали философские суждения, но и, отправляясь от общих убеждений, строили здания научных теорий — прочные основания целых обширных областей науки.

Появление неевклидовой геометрии было началом революционного преобразования геометрии. Но так же, что характерно для революции, вместе с назреванием ее сил, росла и реакция. Именно тогда, когда открытие новой геометрии уже приближалось, появилась философия Канта с ее учением об априорности геометрии, о пространстве как априорной форме созерцания. Любая другая геометрия, кроме той, которая присуща этой форме созерцания, казалась немыслимой.

Лобачевский явно выступает против этих воззрений. Появление новой геометрии опровергает их и открывает неведомые, немыслимые раньше пути развития науки — революция совершается. Гений — это революция, революция — это гений в действии.

Тупость

Как история пятого постулата и неевклидовой геометрии демонстрирует человеческий гений, так демонстрирует она и неповоротливость ума, если избегать грубого слова «тупость».

Начать с того, что множество попыток доказать пятый постулат было основано на ошибках. Авторам

*) Собственно говоря, слово «геометрия» должно пониматься двояко: как чисто математическая теория и как теория реальных пространственных отношений. В этом втором качестве она подлежит проверке опытом (современная физика доказала, что наше пространство не является точно евклидовым). Но от чисто математической теории самой по себе требуется логическая стройность прежде всего и обязательно непротиворечивость. В таком виде та или иная геометрия — это совокупность предложений, выводимых из принятых посылок. А какие она находит приложения — это ее саму по себе не затрагивает.

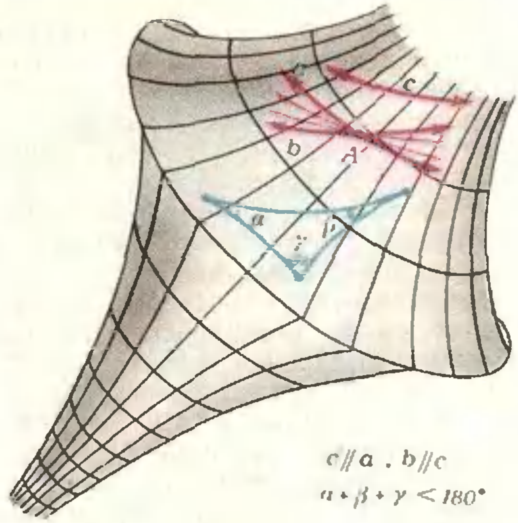
этих доказательств только казалось, что они нашли доказательство. Так было даже в начале XIX века. Только немногие понимали, что опираются на дополнительные предположения, равносильные пятому постулату, и явно их формулировали. Ошибки были психологически обусловлены тем, что автору очень хотелось пятый постулат доказать, отказ от него был невообразимым, а положение, принятое открыто, на которое автор опирался, казалось само собою очевидным и ускользало от того, чтобы его явно формулировать.

Очень характерен пример Саккери: при всей глубине и тонкости его выводов, относящихся к неевклидовой геометрии, он в конце все же заключает, что ему удалось «вырвать с корнем» гипотезу, отрицающую пятый постулат, и очистить Евклида от пятен.

И Ламберт, далеко развивший неевклидову геометрию, только «почти» сделал вывод о ее выполнимости, и Гаусс мучительно долго «все более приходил» к убеждению о невозможности доказать пятый постулат.

Когда же неевклидова геометрия была открыта и обнародована и встал вопрос о ее реальном смысле, то тут несообразительность показала себя в полную силу.

Гаусс еще в 1827 г. развил основы общей теории геометрии на поверхностях, в которой роль прямолинейных отрезков играют кратчайшие линии, расположенные на поверхности. У него был получен, в частности, вывод, что на некоторых поверхностях (поверхностях отрицательной кривизны) сумма углов треугольника (стороны которого кратчайшие линии) меньше 180°. Он знал вместе с тем, что в неевклидовой геометрии верно то же. Но он не сопоставил эти два вывода, не догадался, что неевклидова геометрия должна осуществляться на некоторых поверхностях. Если бы он додумался до этого, то доказательство не представляло бы для него, при его исключительной силе математика, особого труда (этот вывод был получен итальянским математиком Бельтрами только 40 лет спустя).



$c \parallel a$, $b \parallel c$
$\alpha+\beta+\gamma < 180°$

Вероятно, мысли Гаусса в неевклидовой геометрии, с одной стороны, и в теории поверхностей, с другой, шли как бы параллельно, не пересекаясь. Явление довольно обычное. Людям сплошь и рядом не приходит в голову сопоставить вещи, которые кажутся совершенно различными, но при ближайшем рассмотрении оказываются тесно связанными или даже совпадающими. Так бывает и у одного человека, когда он знает обе «вещи», но не сопоставляет их. Так же бывает и в группе людей, когда одни знают одно, другие — другое, да не сопоставляют.

Именно так и было дальше с неевклидовой геометрией и геометрией на поверхностях постоянной отрицательной кривизны. Миндинг, найдя формулы тригонометрии на этих поверхностях,— а они такие же, как в геометрии Лобачевского — не заметил этого, хотя работа Лобачевского была уже опубликована. Двумя годами раньше в том же журнале! Да и Лобачевский, который как геометр-профессионал мог бы прочитать работу Миндинга, не сделал этого сопоставления!

Так путешественники, подошедшие к горному хребту или подплывшие к острову с разных сторон, могут не сообразить, что открыли одно и то же.

Работу Миндинга развил в 1857 г. Кодацци, но и он не сообразил сопоставить свои выводы с неевклидовой геометрией. Да он, возможно, о ней и не знал, хотя часть работ Лобачевского была опубликована по-французски и по-немецки, а работа Больяи еще в 1832 г. вышла на латинском языке.

И только в 1868 г. Бельтрами, отправляясь от работ Миндинга и Кодацци, делает наконец нужное сопоставление и подробно доказывает, что на поверхностях постоянной отрицательной кривизны выполняется геометрия Лобачевского.

В промежутке, в 1859 году, Кэли создает теорию расстояния, содержащую модель геометрии Лобачевского, но не понимает этого, так как не сопоставляет свою теорию с этой геометрией. Хотя позже, в 1861 году, он публикует работу по геометрии Лобачевского!

И только в 1871 году Клейн делает это сопоставление — приходит к той простой модели в круге, о которой мы рассказали вначале. Указанием на эту элементарную модель решается вопрос о недоказуемости пятого постулата. Вот к чему, можно сказать, свелось то, над чем более 2000 лет бились умы математиков!

История неевклидовой геометрии показывает, с каким трудом люди доходят до вещей, которые, когда они наконец ухвачены и понятны, оказываются простыми, и как люди зачастую не понимают, что делают и что лежит у них под руками. Ни Гаусс, ни Лобачевский не поняли то, что было у них почти в руках. Даже Гаусс и Лобачевский.

В наше время все еще находятся люди, занимающиеся «доказательством» пятого постулата и осаждающие математиков этими своими «трудами». Но так как вопрос о пятом постулате решен и решение это с помощью модели в круге нетрудно понять каждому, названные «доказательства» и «труды» относятся уже не к неповоротливости ума, а к глупости или даже к сфере медицины. Глупость — это совсем не то, что тупость — неповоротливость ума; напротив, у дурака может быть «легкость в мыслях необыкновенная», ум его может поворачиваться с головокружительной быстротою, да бестолку. Это не имеет никакого отношения к той неповоротливости ума, свойственной даже гениям, которую так ярко показывает трудная история пятого постулата и неевклидовой геометрии.

Характер

Гаусс, Больяи, Лобачевский — три математика, открывших неевклидову геометрию. Три человека — три характера.

Фридрих Гаусс — математик чрезвычайной силы, о котором говорят «великий Гаусс», «princeps mathematicorum» (то есть король математиков), «старшина математиков»*).

Но Гауссу при всей его математической силе была свойственна интеллектуальная осторожность, нерешительность, которая проявилась, в частности, в том, что он более 30 лет занимался теорией параллельных, прежде чем решился выразить даже самому себе и в частных письмах твердое убеждение в правомерности неевклидовой геометрии. Дальше следовала уже иная осторожность — трусость, которая не дала ему выступить со своими выводами из опасения «крика беотийцев»...

Полной противоположностью Гауссу предстает перед нами Янош Больяи — самый молодой из трех: когда он додумался до неевклидовой геометрии, ему было всего 23 года (соответственно Гауссу — 47, Лобачевскому — 31). Лобачевский выступает публично в 32 года, Больяи — в 30, Гаусс — никогда. Работа Больяи по неевклидовой геометрии написана блестяще, разве что уж слишком кратко. Блеск его таланта соответствовал остальным чертам его пылкой натуры. Он был гусарский офицер, один из знаменитых венгерских гусар, дуэлянт. Как-то ему пришлось встретиться в дуэли на шпагах с несколькими противниками; схватки следовали одна за другой, и он оговорил себе право в перерывах играть на скрипке, чтобы восстано-

*) О Гауссе можно прочитать в «Кванте», 1977, № 8, с. 2 или в брошюре С. Г. Гиндикина «Рассказы о физиках и математиках» (М., «Наука», 1981).

вить гибкость кисти. Он приколол (не до смерти) всех своих противников.

Но гусарское самолюбие погубило Больяи. Не тем, что его самого убили на дуэли, а тем, что это самолюбие распространялось у него в область математики.

Гаусс прислал его отцу, своему старому знакомому, положительный отзыв о работе Яноша, написав, что очень хвалить его достижения не может, так как этим он хвалил бы сам себя, потому что те же результаты известны ему давно. Янош же решил, что Гаусс попросту присвоил себе его открытия. Позже, когда появился немецкий перевод одной из книг Лобачевского, он решил, что под псевдонимом Лобачевского скрывается Гаусс, укравший его, Больяи, результаты. Кроме открытия неевклидовой геометрии Больяи выполнил еще одну работу по математике, где содержались идеи, опережавшие его время, но не достаточно тщательно оформленную. В последние годы жизни сознание его помрачилось. Он умер в 1860 г., на 58 году жизни.

Лобачевский решительно отличался от Гаусса и от Больяи, соединяя смелость с упорством и основательностью, силу теоретической мысли с силой воли. Его открытие не встретило признания, и его считали даже немного сумасшедшим, как говорил о нем, например, Чернышевский. Признание, идущее от Гаусса, пришло позднее. Но Лобачевский не смущался и продолжал свои «сумасшедшие» исследования по «сумасшедшей» геометрии, публикуя вслед за первой обширной работой 1829—30 гг. следующие. Ослепнув к старости, свою последнюю книгу «Пангеометрия» он диктовал.

Деятельность Лобачевского была не только научной: 18 лет он был ректором Казанского университета, проявив на этом посту выдающуюся энергию, административное умение и понимание задач воспитания юношества. Его энергичная и умелая деятельность в тяжелое время холерной эпидемии 1835 года может показаться даже странной у человека, который занимался воображаемой геометрией, одной из абстрактнейших областей абстрактнейшей из наук — математики. Но, может быть, этому не следует особенно удивляться. Воля, необходимая для решительных действий в трудных условиях, также необходима для того, чтобы развить и отстаивать научные убеждения и истину вопреки всем «крикам беотийцев».

Талант, гений — это не только специальные способности, но и характер. Как Магеллану и Нансену была нужна решимость, чтобы отправиться в неизведанное плавание, так теоретику нужна интеллектуальная решимость, чтобы подумать «невероятное» и развивать его вопреки не только устоявшимся взглядам и традициям, но нередко и вопреки собственным сомнениям. Но мало убедиться в своих идеях для самого себя — их нужно передать другим людям. А это тоже может требовать решимости, потому что люди могут не понять, отбросить и даже подвергнуть насмешкам и поруганию новые идеи и выводы. Это могут сделать в первую очередь свои же коллеги — ученые, убежденные в незыблемости своих взглядов в своей академической непогрешимости,— мещане в академических креслах и на профессорских кафедрах, те «беотийцы», которым побоялся противопоставить себя Гаусс.

В недавнее время, да возможно и по сию пору, с легкой руки Бертольда Брехта принято было поносить Галилея за предательство истины — за то, что он отрекся от своих научных убеждений. То, что отрекаться от истины дурно, едва ли нуждается в особых объяснениях. Но в момент суда инквизиции Галилей был 68-летним стариком, через 3 года он ослеп, а ему грозили пыткой, заточением, перед ним стоял образ сожженного на костре Джордано Бруно. Остановитесь, читатель, и постарайтесь представить себе, что вас жгут на костре или вздергивают на дыбе. После этого мы продолжим разговор о верности истине — о ней так легко рассуждать, когда вам не грозят ни костер, ни пытки, ни заточение.

В действительности, Галилей, хотя и отрекся словесно, но истины не предал. Ослепший старец, узник инквизиции, он диктует свое главное научное сочинение и издает его за границей — в Голландии. Галилей исполнил свой долг ученого. По-видимому, на самом деле он не сказал инквизиторам знаменитые слова: «А все-таки она вертится!». Но он сказал то же, хотя и менее эффектно, но более весомо — своим научным трудом, своей книгой, написанной после суда инквизиции. Поэтому легенда, приписывающая ему те слова, справедлива по существу. Поэтому правильно он остался в памяти народа верным истине, верным своим научным убеждениям.

Но Гауссу ничего не грозило, кроме разве нелестных суждений коллег, а он скрыл свои научные убеждения, скрыл истину. Он поступил мудро с точки зрения мещанства, одинаково — прошлого или современного, подвизающегося в науке или всякого другого.

Охотно морализуя по поводу «отречения» Галилея или тех, кто когда-то «каялся в грехах менделизма-морганизма», мещанин будет делать все, чтобы «не испортить отношения» с кем следует. Он не будет ни отрекаться, ни каяться. Потому что ему не от чего отрекаться и не в чем каяться. у него все в порядке, все как полагается.

Этот конформизм, этот подлый дух приспособленчества противен настоящей науке, потому что она требует готовности подвергнуть сомнению и пересмотреть любые научные взгляды, научные положения, как бы ни казались они прочно установленными. Она требует дерзости мысли и дерзости в том, чтобы открыто выступить с дерзкой мыслью, как это было с открытием неевклидовой геометрии.

(Окончание см. на с. 15)

Е. Забабахин

Маленькие заметки

Наковальни Бриджмена

Этот простой, но остроумный прибор для получения огромных давлений был изобретен американским физиком Перси Уильямсом Бриджменом (1882—1961).

Если два конуса свести вершинами (рис. 1, *а*) и сжать вдоль оси, то образуется контактная площадка (рис. 1, *б*). Возникающее напряжение σ максимально в середине этой площадки, а на краях равно нулю (рис. 1, *в*). При усилении сжатия площадка увеличивается, но максимальное напряжение $\sigma_м$ остается тем же (пунктирные линии на рисунках 1, *б* и *в*).

Вблизи вершины этого устройства, называемого наковальней Бриджмена, материал сжат не только по вертикали, но и с боков, то есть сжатие его близко к всестороннему (подобно сжатию, вызванному гидростатическим давлением). При этом допустимое напряжение много больше обычного предела прочности. (Строго всестороннее сжатие не разрушает материала вообще.) К тому же, с ростом давления прочность увеличивается, так как затрудняется взаимное скольжение слоев материала (как при трении).

Максимальное напряжение $\sigma_м$ зависит от угла конуса: для больших углов α оно мало, но с заострением конуса растет. При некотором критическом угле $\alpha_{кр}$ достигаются условия разрушения, и конусы ломаются. Условие прочности такой наковальни оказывается весьма необычным: при $\alpha < \alpha_{кр}$ она ломается всегда, а при $\alpha > \alpha_{кр}$, наоборот, выдерживает любую силу (конечно, если радиус конуса достаточно велик).

Выигрыш в давлении, даваемый этим устройством, можно измерить в простом опыте, схематически показанном на рисунке 2. Два конуса с цилиндрическими ножками диаметром D сжимаются в тисках до разрушения этих ножек. После этого измеряется диаметр отпечатка d (с помощью краски). Очевидно, что

$$\sigma_c D^2 = \sigma_{ср} d^2,$$

где σ_c — предел прочности материала при сжатии, $\sigma_{ср}$ — среднее давление в месте контакта. Для оценки можно считать, что $\sigma_{ср} = \sigma_м/2$, тогда

$$\frac{\sigma_м}{\sigma_c} \approx 2\left(\frac{D}{d}\right)^2.$$

Выигрыш тем больше, чем острее конус (если, конечно, он еще не разрушается).

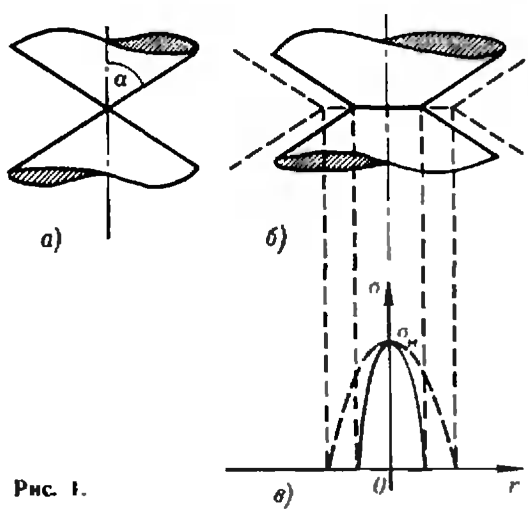


Рис. 1.

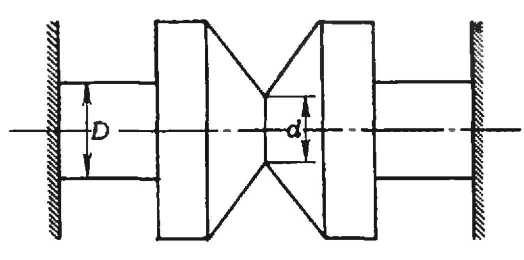


Рис. 2.

Практические наковальни делаются очень прочными, например алмазными, на которых сейчас получают давления порядка миллиона атмосфер. С помощью таких наковален исследуются свойства различных веществ при высоких давлениях (для этого вершины конусов слегка притупляют и испытуемый образец помещают между ними).

Ни упругость, ни пластичность...

Хорошо известны такие свойства твердых тел, как упругость и пластичность. Есть твердые тела, не обладающие этими свойствами; они похожи на очень вязкие жидкости, например на вязкий вар, текущие, хотя и медленно, при любой малой нагрузке. Но теперь инженеры знают пластмассы, поведение которых не сводится ни к одному из этих случаев. Это очень ярко видно на примере наблюдения за бутилметакрилатом (БМА).

Если пластинку из него согнуть вдвое, то сила, с которой ее надо удерживать, через несколько секунд значительно уменьшается (пластинка «привыкает» к новой форме), то есть обычной упругости здесь нет. Однако это и не пластичность, так как если пластинку отпустить, то она медленно, но полностью распрямляется. Если же ей помочь распрямиться и отпустить, то она снова несколько сгибается

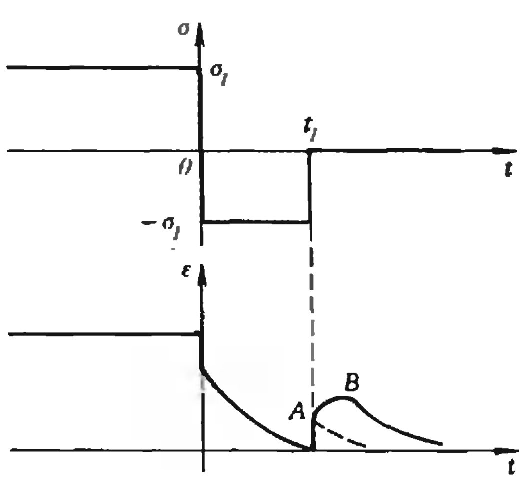


Рис. 1.

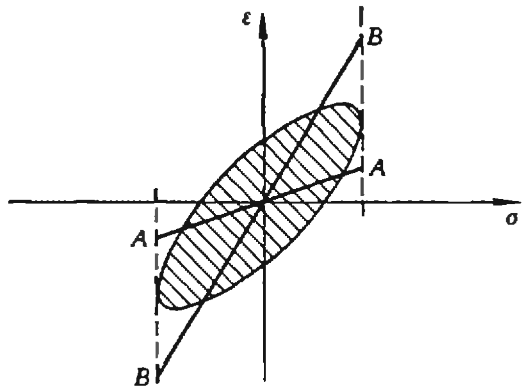


Рис. 2.

и лишь потом медленно сама выпрямляется. Это похоже на поведение чего-то живого, не желающего выполнять навязанные ему движения.

Проиллюстрируем сказанное рисунком 1, на котором показана последовательность соответствующих нагрузок (σ) и деформаций (ε) БМА. До $t=0$ долго поддерживаем напряжение $+\sigma_1$, затем к нему добавляем $-2\sigma_1$ и ждем момента t_1, когда деформация ε обратится в нуль. Здесь нагрузку снимаем, то есть добавляем $+\sigma_1$. Казалось бы, после этого деформация должна монотонно убывать до нуля. Но мы помним, что это не так (согнутая пластина «сопротивляется» помощи при разгибании), то есть в действительности процесс соответствует сплошной кривой AB с максимумом, а не пунктирной линии.

Своеобразно поведение этого материала при периодической нагрузке. Если колебания очень быстры, то он ведет себя как материал упругий и весьма жесткий (линия AA на рисунке 2). Если они очень медленны, то материал тоже похож на упругий, но гораздо более мягкий (линия BB). Наконец, для промежуточных частот деформация «отстает» от напряжения, процесс соответствует замкнутой кривой, площадь которой есть потеря энергии на тепло за один период колебаний. В этом случае совмещаются свойства упругости и вязкости, то есть материал работает одновременно как рессора и как амортизатор.

Описанное свойство может быть как полезным, так и вредным: например, деталь, отштампованная из БМА, может «вспомнить» исходную форму и сильно покоробиться.

Появление материалов нового класса, безусловно, интересно и в научном, и в практическом отношении. Изучением их занимается специальная отрасль науки — реология.

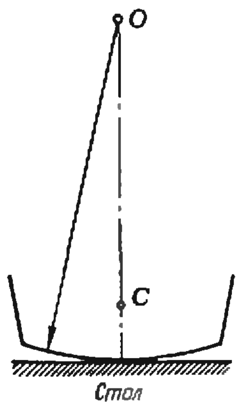


Рис. 1.

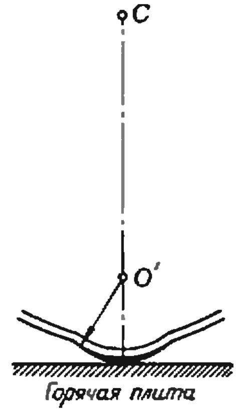


Рис. 2.

Странные колебания

Не приходилось ли вам когда-нибудь наблюдать такую картину: таз со слегка выпуклым дном устойчиво стоит на столе, а на горячей плите он почему-то начинает раскачиваться, и колебания эти не затухают довольно долгое время? (Хозяйкам известно, что некоторые кастрюли тоже способны «плясать» на плите.) Как это можно объяснить?

Устойчивость таза на столе вполне понятна — его центр тяжести C находится ниже центра кривизны дна O (рис. 1). Причина необычного поведения таза на горячей плите — в том, что в месте контакта с плитой дно сильно разогревается и выпучивается вниз, в результате чего местный центр кривизны O' оказывается ниже центра тяжести C (рис. 2), и равновесие становится неустойчивым. Этому способствует и то, что прогрев дна по толщине неравномерен: нижняя сторона его горячее, она расширяется больше, и выпуклость направлена именно вниз. На рисунке 2, где показан контакт с плитой, более горячая сторона дна таза зачернена. Эффект еще усиливается, если в таз налита холодная вода — это увеличивает разность температур и коробление дна. Качнувшись в сторону, таз на мгновение останавливается, контакт и выпуклость образуются в новом месте, он качнется обратно и т. д.

Холодный шар на горячей плите тоже будет неустойчив, но он станет не колебаться, а катиться в одном случайном направлении.

Если же таз горячий, а плита холодная, то эффект будет обратным — случайные колебания таза очень быстро затухнут, а катящийся шар — остановится.

Тупость и гений

(Начало см. на с. 7)

Но история пятого постулата и неевклидовой геометрии показывает также, с каким трудом люди, даже дерзко мыслящие, доходят до истин, которые, когда они уже открыты, оказываются простыми. Эта история показывает, насколько неповоротливой бывает мысль самых выдающихся ученых. Поэтому с дерзостью мысли они соединяют скромность в оценке своих достижений. Так, Дарвин сказал о себе в автобиографии: «Достойно удивления, что человек таких ограниченных способностей, как я, смог оказать некоторое влияние на мнения людей в науке».

Дерзость в достижениях и скромность в их оценке, глубокое понимание того, что достигнутое — только капля в океане недостигнутого и непознанного, этому, вместе с законами и теориями, тоже можно учиться у великих ученых, у истории науки.

А. Баков

Разбиение фигур

В последнее время большое развитие получила комбинаторная геометрия — наука, изучающая оптимальные конфигурации точек или фигур. Она все больше применяется в транспорте (укладка грузов), конструировании (компоновка деталей), архитектуре (планировка) и во многих других отраслях народного хозяйства.

Чтобы пояснить одну из очень известных задач комбинаторной геометрии, введем понятие диаметра фигуры. *Диаметр* фигуры — это такое число d, что расстояние между любыми двумя точками фигуры не превышает d, но для любого числа, меньшего d, в ней найдутся точки, расстояние между которыми превышает d. Например, круг диаметра (в традиционном смысле) d является фигурой диаметра d. Правильный треугольник со стороной d тоже имеет диаметр d.

Плоская (пространственная) фигура называется *ограниченной*, если она содержится в некотором круге (шаре). Если фигура имеет диаметр, то она, очевидно, ограниченная. Можно доказать, что верно и обратное.

Точка плоской фигуры называется *граничной*, если в любом круге с центром в этой точке имеются как точки, принадлежащие фигуре, так и точки, не принадлежащие ей. Фигура называется *замкнутой*, если она содержит все свои граничные точки. Например, плоская фигура $A_1=\{(x;\ y)\,|\,x^2+y^2\leqslant 1\}$ — замкнутая, а фигуры $A_2=\{(x;\ y)\,|\,x^2+y^2<1\}$ и $A_3=\{(x;\ y)\,|\,0<x^2+y^2\leqslant 1\}$ — не замкнутые.

Оказывается, если ограниченная фигура замкнута, то в ней найдется пара точек, расстояние между которыми равно диаметру фигуры.

Диаметр фигур A_1, A_2, A_3 равен 2. Расстояние между точками $(-1;0)$, $(1;0)$ фигуры A_1 равно 2. В A_2 нет точек, расстояние между которыми равно 2. В незамкнутой фигуре A_3 такие точки есть (какие?).

Задача, о которой пойдет речь, заключается в следующем. Любую фигуру диаметра d можно разбить на «много» частей диаметра меньше d. А можно ли любую такую фигуру разбить на «небольшое» число частей диаметра меньше d? На какое минимальное число частей диаметра меньше d можно разбить любую фигуру диаметра d?

Первый шаг в решении этой проблемы сделал в 1933 г. польский математик Борсук. Теорема «Любая плоская фигура диаметра d содержится в некотором правильном шестиугольнике, расстояние между параллельными сторонами которого равно d», доказанная в 1920 г. венгром Палом, подсказала Борсуку идею. Разбив такой шестиугольник на 3 конгруэнтные части диаметра $d_1<d$ (рис. 1), Борсук, на основании теоремы Пала, заключил, что *любую плоскую фигуру диаметра d можно разбить на 3 части диаметра меньше d.*

Легко видеть, что правильный треугольник со стороной d нельзя разбить на 2 части диаметра меньше d (почему?). С другой стороны, есть, конечно, фигуры диаметра d, которые легко разбиваются на 2 части диаметра меньше d.

Итак, одни плоские фигуры диаметра d можно разбить на 2 части диаметра меньше d, а другие можно разбить на 3 такие части, но нельзя на 2. Как их разграничить?

После доказательств Пала и Борсука естественно было попытаться разграничить их при помощи «объем-

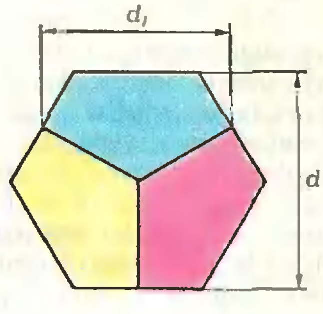


Рис. 1.

Эта заметка основана на докладе, который в ноябре 1981 г. девятиклассник Антон Баков (Свердловск) сделал на XIII конференции юных математиков в Батуми («Квант», 1982, № 4).

лющих» фигур. Здесь не годились ни «шестиугольник Пала» (любая плоская фигура диаметра d содержится в нем), ни круг диаметра d (многие фигуры диаметра d, например правильный треугольник со стороной d, не «влезут» в него). Искомыми фигурами оказались так называемые фигуры постоянной ширины.

В доказательстве своей теоремы Пал использовал опорные прямые. Прямая называется *опорной* к данной плоской фигуре, если она имеет с фигурой хотя бы одну общую точку и вся фигура лежит от нее по одну сторону (рис. 2). Число h называется *шириной* фигуры, если у нее есть параллельные опорные прямые, расстояние между которыми равно h. Вообще говоря, фигура может иметь много «ширин» (рис. 3). Если же ширина фигуры не зависит от направления опорных прямых, фигура называется *фигурой постоянной ширины* (рис. 4).

Оказывается, любая плоская фигура диаметра d содержится в некоторой фигуре постоянной ширины d. Было также доказано, что фигуру постоянной ширины d нельзя разбить на 2 части диаметра меньше d.

Эти соображения позволили советскому математику В. Г. Болтянскому в 1969 г. доказать, что *плоскую фигуру диаметра d тогда и только тогда нельзя разбить на 2 части диаметра меньше d, когда она содержится в единственной фигуре постоянной ширины d.*

Решение рассмотренной задачи послужило фундаментом для дальнейшего развития комбинаторной геометрии.

Сегодня эта задача решена не только для плоскости: доказан эквивалент теоремы Борсука для трехмерного пространства (там всегда достаточно 4 частей). Существует гипотеза, что для n-мерного пространства всегда достаточно $n+1$ частей.

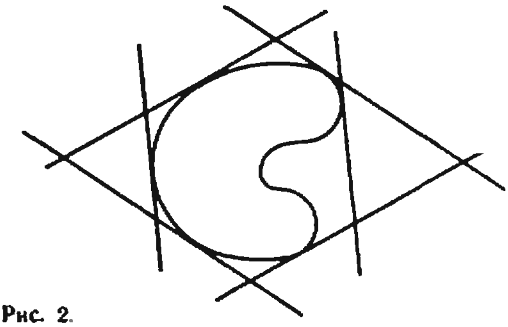


Рис. 2.

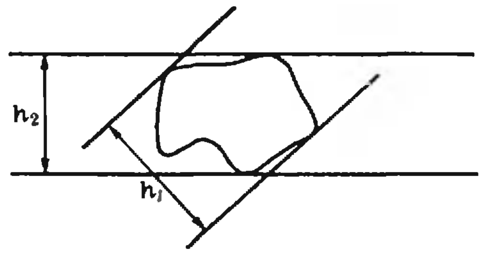


Рис. 3.

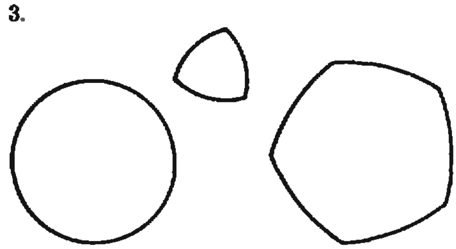


Рис. 4.

Задачи (добавлены В. Г. Болтянским)

1. Докажите, что диаметр многоугольника равен наибольшему из расстояний между его вершинами.

2. Опираясь на теорему Пала, докажите, что любую плоскую фигуру диаметра d можно разбить на три части, диаметр каждой из которых не превосходит $\frac{\sqrt{3}}{2}d \approx 0{,}866\,d$.

3. В правильном многоугольнике с нечетным числом сторон проведены дуги окружностей, каждая из которых соединяет концы стороны и имеет центр в противолежащей вершине (см. рис. 4). Докажите, что эти дуги ограничивают фигуру постоянной ширины.

4. Докажите, что правильный многоугольник с нечетным числом сторон, у которого наибольшая диагональ имеет длину d, не может быть разбит на две части, каждая из которых имеет диаметр меньше d.

5. От круга диаметра d отрезан сегмент, меньший полукруга. Полученная фигура F по-прежнему имеет диаметр d. Ее нетрудно разбить на две части диаметра меньше d (как?). Следовательно, F содержится в разных фигурах постоянной ширины d. Приведите две такие фигуры.

6. Докажите, что вписанный многоугольник с четным числом сторон может быть разбит на две части меньшего диаметра. Верно ли это для произвольного многоугольника с четным числом сторон?

7. Пусть $|AB|>d$ и фигура M («двуугольник») представляет собой пересечение двух кругов радиуса d с центрами A и B. Докажите, что если фигура диаметра d целиком содержится в двуугольнике M, то ее можно разбить на две части диаметра меньше d.

Задачник Кванта

Задачи

М776 — М780; Ф788 — Ф792

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Задачи по математике из этого номера предлагались этим летом на XXIII Международной математической олимпиаде. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 28 февраля 1983 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 12 — 82» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М776, М777» или «Ф788». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М776. На диагоналях AC и CE правильного шестиугольника $ABCDEF$ взяты точки M и N соответственно, такие что

$$\frac{|AM|}{|AC|}=\frac{|CN|}{|CE|}=\lambda.$$

Известно, что точки B, M и N лежат на одной прямой. Найдите λ.

М777. Дано уравнение $x^3-3xy^2+y^3=n$. Докажите, что

а) если натуральное n таково, что данное уравнение имеет целочисленное решение, то оно имеет по меньшей мере три целочисленных решения;

б) при $n=2891$ это уравнение не имеет целочисленных решений.

М778*. Дан неравнобедренный треугольник $A_1A_2A_3$. Пусть a_i — его сторона, лежащая против вершины A_i ($i=1, 2, 3$), M_i — середина стороны a_i, T_i — точка касания стороны с окружностью, вписанной в данный треугольник, и S_i — точка, симметричная T_i относительно биссектрисы угла A_i треугольника. Докажите, что прямые M_1S_1, M_2S_2 и M_3S_3 имеют общую точку.

М779*. Рассматриваются последовательности $\{x_n\}$ положительных чисел, удовлетворяющих условию

$$1=x_0\geqslant x_1\geqslant x_2\geqslant\ldots\geqslant x_n\geqslant\ldots$$

а) Докажите, что для любой такой последовательности $\{x_n\}$ существует n, при котором

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geqslant 3{,}999.$$

б) Найдите такую последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющую указанному условию, для которой при любом n

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}<4.$$

А. Гришков

М780*. Дан квадрат K со стороной 100. Пусть L — несамопересекающаяся незамкнутая ломаная, лежащая к K, такая, что для любой точки P границы квадрата K найдется точка ломаной L, расстояние которой от P не больше $1/2$. Докажите, что на ломаной найдутся две точки X и Y, расстояние между которыми не более 1, такие, что длина части ломаной, заключенной между ними, не меньше 198.

Ф788. Длинная гладкая труба радиуса R наклонена под углом α к горизонту (рис. 1). Из точки A по внутренней поверхности трубы пускают вверх небольшое тело. Вектор начальной скорости тела составляет угол α с горизонтальной плоскостью и угол φ с прямой AB (см. рис. 1). При какой минимальной начальной скорости тело будет двигаться не отрываясь от поверхности трубы?

С. Кротов

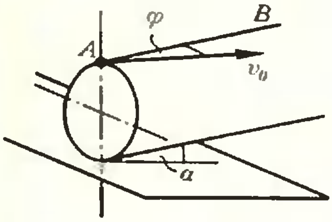


Рис. 1.

Ф789. Выточенную на токарном станке фигуру с плоским основанием поставили на дно сосуда и начали наливать в сосуд воду. На рисунке 2 приведен график зависимости силы F, с которой фигура давит на дно, от высоты H уровня воды в сосуде (вода под фигуру не подтекает). Определите по графику площадь основания фигуры, ее объем и плотность материала, из которого она сделана. Нарисуйте (приближенно) эту фигуру. На какой высоте площадь горизонтального сечения фигуры равна площади ее основания?

Д. Белов

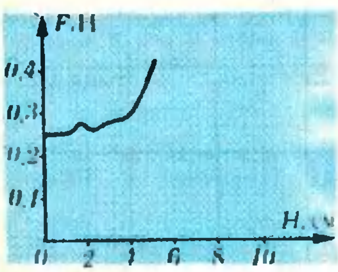


Рис. 2.

Ф790. Брусок массы m прикреплен с помощью пружины жесткости k к стене. На расстоянии d от бруска лежит второй брусок такой же массы (рис. 3). Какую минимальную скорость нужно сообщить правому бруску, чтобы после соударения брусков левый брусок вернулся в исходное положение? Коэффициент трения брусков о поверхность не зависит от скорости и равен μ; соударение брусков считать абсолютно упругим.

В. Петерсон

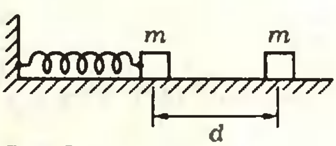


Рис. 3.

Ф791. В цилиндрическом сосуде под поршнем находится 1 моль идеального одноатомного газа. Масса поршня равна M, площадь — S. Какое количество теплоты надо подводить к газу в единицу времени, чтобы поршень двигался равномерно вверх со скоростью v? Атмосферное давление равно p_0. Трение между поршнем и стенками сосуда отсутствует.

Д. Подлесный

Ф792*. Между Москвой и Ленинградом протянута двухпроводная телефонная линия. Сопротивление одного метра проволоки равно $r=0{,}05$ Ом. Из-за несовершенства изоляции сопротивление между проводами составляет

$R=10^7$ Ом на каждый метр линии. К концам линии в Москве подключают источник с напряжением $U=100$ В. Что покажет вольтметр, если его подключить а) к концам линии в Ленинграде? б) в середине линии?

З. Рафаилов

Problems

M776 — M780; P788 — P792

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandart ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The mathematics problems in this issue were proposed this summer at the XXIII International mathematics olympiad. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later that February 28th, 1983 to the following adress: USSR, Moscow, 109006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант».

Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter

M776. The diagonals AC and CE of the regular hexagon $ABCDEF$ are divided by the inner points M and N, respectively, so that $\frac{AM}{AC}=\frac{CN}{CE}=\lambda$. Determine λ if B, M and N are collinear.

M777. Prove that if n is a positive integer such that the equation $x^3-3xy^2+y^3=n$ has a solution in integers (x, y) then

a) it has at least three such solutions;

b) the equation has no solution in integers when $n=2891$.

M778*. A non-isosceles triangle $A_1A_2A_3$ is given with sides a_1, a_2, a_3 (a_i is the side opposite A_i). For all $i=1, 2, 3$, M_i is the midpoint of side a_i, T_i is the point where the incircle touches side a_i, and the reflection of T_i in the interior bissector of A_i yields the point S_i. Prove that the lines M_1S_1, M_2S_2 and M_3S_3 are concurrent.

M779*. Consider the infinite sequences $\{x_n\}$ of positive real numbers with the following properties:

$$x_0=1 \text{ and for all } i\geqslant 0,\ x_{i+1}<x_i.$$

a) Prove that for every such sequence, there is an $n\geqslant 1$ such that

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}\geqslant 3.999.$$

b) Find such a sequence for which

$$\frac{x_0^2}{x_1}+\frac{x_1^2}{x_2}+\ldots+\frac{x_{n-1}^2}{x_n}<4$$

for all n.

A. Grishkov

M780*. Let S be a square with sides of length 100 and let L be a path within S which does not meet itself and which is composed of line segments $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ with $A_0\neq A_n$. Suppose that for every point P of the boundary of S there is a point of L at a distance from P not greater than 1/2. Prove that there are two points X and Y in L such that the distance between X and Y is not greater than 1 and the length of that part of L which lies between X and Y is not smaller than 198.

P788. A long smooth tube of radius R makes an angle equal to α with the horizon (see figure Рис. 1). A small body is propulsed upward from the point A on the inner surface of the tube. The initial velocity vector forms the angle α

enclose an unstamped self-adressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. If you have an original problem to propose for publication please send it to us under separate cover, in two copies (in Russian or in English), including the solution. On the envelope write "NEW PROBLEM IN PHYSICS (or MATHEMATICS)"

with the horizontal plane and the angle φ with the line AB (see Рис. 1). For what minimal initial speed will the body move without detaching itself from the tube's surface?

S. Krotov

P789. A detail with flat bottom, shaped on a lathe, is placed inside a receptacle, into which water is poured. The figure Рис. 2 shows how the force F with which the detail presses on the bottom depends on the water level H in the receptacle (no water seeps under the detail's bottom). Use the graph to determine the area of the detail's bottom, its volume and the density of the material out of which it is made. Make an approximate sketch of the detail. At what height is the area of its horizontal section equal to that of its bottom?

D. Belov

P790. A bar of mass m is attached to a wall by means of a spring of rigidity k. A second bar of the same mass lies at a distance d from the first one (figure Рис. 3). What minimal speed must the second bar be given in order to make the first bar return to its initial position after the bars collide with each other? The friction coefficient of the bars on the surface does not depend on velocity and equals μ; the collision may be assumed perfectly elastic.

V. Peterson

P791. A cylindrical receptacle closed by a piston contains 1 mole of ideal monoatomic gas. The piston's mass is M, its area is S. What quantity of heat must be supplied to the gas in unit time to make the piston move uniformely upward with velocity v? The atmospheric pressure is p_0. There is no friction between the piston and the walls of the receptacle.

D. Podlesnyi

P792*. A two-wire telephone line links Moscow and Leningrad. The resistance of one meter of the wire is $r=0.05$ Ohm. Because of imperfections in the insulation, the resistance between the two wires is $R=10^7$ Ohm per meter of the line. A source of tension $U=100$ v is switched on to the ends of the wire in Moscow. What will the voltmeter reading be a) at the ends of the line in Leningrad? b) in the middle of the line?

Z. Rafailov

Решения задач

М750—М758; Ф768—Ф777

М750. *Докажите, что, как бы ни раскрасить клетки бесконечного листа клетчатой бумаги в N цветов, найдутся а) прямоугольник, вершины которого лежат в центрах клеток одного цвета (а стороны идут параллельно линиям сетки — по вертикальным и горизонтальным прямым); б) l горизонтальных и m вертикальных прямых, которые пересекаются в центрах lm клеток одного цвета (l и m — любые натуральные числа); в) равнобедренный прямоугольный треугольник, вершины которого — центры клеток одного цвета, при $N=2$; г)* то же для $N=3$.*

В решении мы многократно используем «принцип Дирехле»*).

а) Этот пункт — частный случай следующего.

б) Рассмотрим горизонтальную полосу бумаги ширины lN (рис. 1). Она состоит из бесконечного числа столбцов высоты lN. Среди них найдутся m одинаково окрашенных столбцов (общее число разных раскрасок конечно). Проведем через эти столбцы m вертикальных прямых.

Так как каждый из выбранных столбцов окрашен в N цветов, найдется цвет, который встретится в одном (и, стало быть, в любом) из них не меньше l раз (иначе высота столбца меньше lN). Через клетки этого цвета проведем l горизонтальных прямых.

в) Пусть клетки окрашены в красный и синий цвета. Рассмотрим цепочку попарно не пересекающихся квадратов 3×3, расположенных по «диагонали» (рис. 2). Сре-

*) См., например, статью В. Болтянского в «Кванте», 1977, № 2.

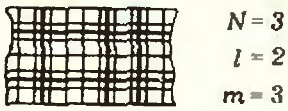


Рис. 1.

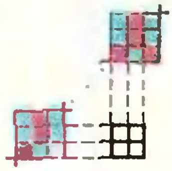


Рис. 2.

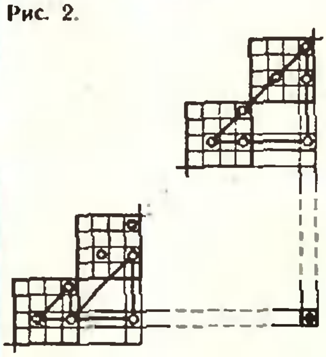


Рис. 3.

ди них найдутся два одинаково раскрашенных квадрата (число способов раскраски квадрата 3×3 в 2 цвета конечно). На диагонали каждого из квадратов есть по 2 клетки одного цвета (на рисунке 2 это красные клетки). Рассмотрим клетки, получающиеся в пересечении вертикальных и горизонтальных полосок, проходящих через эти красные клетки. Если хотя бы одна из них красная — задача решена. Если нет, то все они синего цвета, и из них легко выбрать такие три, что их центры образуют равнобедренный прямоугольный треугольник.

г) Будем рассуждать аналогично с решением пункта в). Рассмотрим бесконечную цепочку достаточно больших квадратов, расположенных по диагонали (что значит «достаточно большой» — выяснится ниже). Среди них всегда найдутся два одинаково раскрашенных. Пусть сторона большого квадрата настолько велика, что вдоль его диагонали можно поместить больше квадратов 4×4, чем число способов раскраски квадрата 4×4 в 3 цвета. Тогда на диагонали каждого из двух выбранных нами одинаковых больших квадратов будет по крайней мере по 2 одинаково раскрашенных квадрата 4×4 (рис. 3). На диагонали каждого из них найдутся как минимум по 2 одинаково окрашенных (и одинаково расположенных) клетки — на рисунке 3 их центры помечены красными точками; одинаковый цвет имеют и 4 соответственные клетки этих квадратов с синими центрами, а также 2 соответственные клетки больших квадратов с желтыми центрами. Если цвета каких-то двух из указанных трех групп клеток совпадают, то, очевидно, один из треугольников, выделенных на рисунке 3, будет искомым. В противном случае можно считать, что цвета всех этих клеток совпадают с цветами их центров. Тогда в какой бы из трех цветов — желтый, синий или красный — ни была окрашена клетка с черным центром (см. рис. 3), один из трех равнобедренных прямоугольных треугольников с общей вершиной в этом центре и двумя другими вершинами или в желтых точках, или в крайних синих, или в крайних красных будет «одноцветным».

С. Беспамятных

Эта задача тесно связана с так называемой «теоремой Ван-дер-Вардена о прогрессиях», о которой мы расскажем в одном из ближайших номеров.

◆

М751. *На окружности отмечены $3k$ точек, разделяющих ее на $3k$ дуг, из которых k дуг имеют длину 1, еще k дуг — длину 2, и остальные k дуг — длину 3. Докажите, что среди отмеченных точек найдутся две диаметрально противоположные.*

Рис. 1.

Поделим образовавшиеся на окружности дуги длины 2 и 3 на равные части длины 1 и пометим эти $k+2k=3k$ точек деления черным цветом, а данные по условию $3k$ точек — красным. Всего будет отмечено $6k$ точек — вершины правильного $6k$-угольника (рис. 1). Далее будем рассуждать от противного.

Предположим, что утверждение задачи неверно, тогда каждой красной точке данной окружности L_0 диаметрально противоположна отмеченная черная точка. Поэтому против каждой из k дуг длины 1 с красными концами лежит дуга длины 1 с черными концами, то есть средняя часть одной из k дуг длины 3 с красными концами (см. рис. 1). Вырежем из окружности L_0 две такие противоположные единичные дуги и из двух оставшихся больших дуг сделаем новую окружность L_1 (рис. 2); она будет состоять из $6k-2$ единичных дуг, концами которых служат $3k-1$ красных и столько же черных точек. При этом диаметрально противоположные точки окружности L_0 перейдут в противоположные точки окружности L_1, поэтому против каждой красной точки будет по-прежнему располагаться черная. Красные точки разделят L_1 на участки длины 1, 2 или 3, причем единичных участков будет $k-1$ — на 1 меньше, чем было до перестройки, двойных будет $k+1$ — на 1 больше, а тройных, как и единичных, — на 1 меньше.

Рис. 2.

$k-1$ — на 1 меньше, чем было до перестройки, двойных будет $k+1$ — на 1 больше, а тройных, как и единичных,— на 1 меньше.

Эту операцию выбрасывания двух дуг длины 1 можно проделать и с L_1, затем — с полученной окружностью L_2 и т. д., всего k раз (столько, сколько имелось первоначально единичных — и противолежащих им тройных — дуг с красными концами). В итоге получится окружность L_k, составленная из дуг длины 1, концами которых служат $2k$ красных и $2k$ черных точек, причем против каждой красной точки будет, как и раньше, располагаться черная. С другой стороны, участков длины 1 или 3 с красными концами на L_k уже не останется (на каждом шагу число тех и других уменьшалось на 1), то есть красные точки будут разбивать L_k на $2k$ участков равной длины (длины 2). Поэтому против каждой красной точки должна оказаться красная.

Требуемое противоречие получено.

Точно так же доказывается аналогичное утверждение для окружности, разбитой на k единичных, l двойных и k тройных дуг, где $k+l$ — четное число.

В. Дубровский

М752. *Квадратная таблица $n\times n$ клеток заполнена целыми числами. При этом в клетках, имеющих общую сторону, записаны числа, отличающиеся одно от другого не больше, чем на 1. Докажите, что хотя бы одно число встречается в таблице:*

а) не менее чем $[n/2]$ раз ($[a]$ — целая часть a);

б) не менее чем n раз.

◆

Нам понадобится следующая

Лемма. *Пусть дана цепочка из N клеток таблицы (каждая клетка граничит с предыдущей по общей стороне), в крайних клетках которой записаны числа a и b (рис. 1). Тогда 1) $|a-b|\leqslant N-1$; 2) любое целое число x, заключенное между a и b, записано в одной из клеток цепочки.*

Доказательство. Пусть x_i — число, записанное в i-й клетке цепочки, тогда первое утверждение вытекает из того, что

$$|a-b|=|a-x_2+x_2-x_3+\ldots+x_{N-1}-b|\leqslant$$
$$\leqslant|a-x_2|+|x_2-x_3|+\ldots+|x_{N-1}-b|,$$

а разность двух соседних чисел не больше 1. При доказательстве второго утверждения будем для определенности считать, что $a<x\leqslant b$. Двинемся по цепочке от первой клетки (с числом a) и найдем последнюю клетку, в которой еще записано число, не превосходящее x. Эта клетка — искомая: в ней записано x, поскольку иначе и в следующей клетке было бы число, не превосходящее x (ведь числа в соседних клетках отличаются не больше чем на 1).

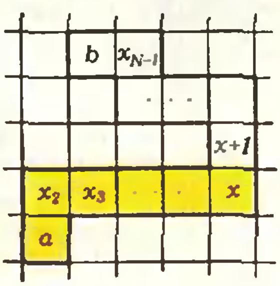


Рис. 1.

а) Пусть M и m — наибольшее и наименьшее числа в таблице. Поскольку любые две клетки можно соединить цепочкой не более чем из $2n-1$ клеток, из неравенства леммы следует, что $|M-m|\leqslant 2n-2$. Поэтому в таблице встречается не более чем $2n-1$ различных чисел, а значит, хотя бы одно из них записано не менее чем в $[n^2/(2n-1)]$ клетках. Но $n^2/(2n-1)>n/2$, откуда и следует утверждение а).

б) Пусть M_k и m_k — наибольшее и наименьшее числа в k-м столбце. Если найдется такое число x, что $m_k\leqslant x\leqslant M_k$ сразу при всех k от 1 до n, то по второму утверждению леммы число x встречается в каждом столбце, то есть не менее n раз. Если же такого числа нет, то для некоторых номеров k и l имеем $m_k\leqslant M_k<m_l\leqslant M_l$, то есть любое число k-го столбца меньше любого числа l-го столбца. Применив то же утверждение к числу y, заключенному между M_k и m_l, и горизонтальным цепочкам между k-м и l-м столбцами, мы получим, что число y записано в каждой строке, и значит, не менее чем n раз.

Заменить в задаче б) число n на большее нельзя, как показывает таблица, изображенная на рисунке 2.

1	2	3	. . .	n-1	n
2	3	. . .	n-1	n	n+1
3	. . .		n	n+1	.
.					.
.	n-1	n	. . .		2n-3
n-1	n	n+1	. . .	2n-3	2n-2
n	n+1	. . .	2n-3	2n-2	2n-1

Рис. 2.

А. Берзиньш

М753. *Числа a, b, c лежат в интервале $]0, \pi/2[$ и удовлетворяют равенствам*

$$\cos a = a,$$
$$\sin \cos b = b,$$
$$\cos \sin c = c.$$

Расположите эти числа в порядке возрастания.

Ответ: $b<a<c$. Для доказательства заметим, что, поскольку $\sin x<x$ при всех положительных x, а $\cos x$ убывает в интервале $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, при всех $x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ справедливо следующее двойное неравенство:

$$\sin \cos x<\cos x<\cos \sin x.$$

Отсюда вытекает, что

$$b=\sin \cos b<\cos b, \ \cos c<\cos \sin c=c,$$

то есть

$$\cos b-b>0=\cos a-a>\cos c-c.$$

Но функция $y=\cos x-x$ убывает в интервале $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$, следовательно, $b<a<c$.

С. Гессен

◆

М754. *а) Существуют ли многочлены*

$$P=P(x, y, z),$$
$$Q=Q(x, y, z),$$
$$R=R(x, y, z)$$

от переменных x, y, z такие, что выполнено тождество

$$(x-y+1)^3P+(y-z-1)^3Q+(z-2x+1)^3R=1?$$

б) Тот же вопрос для тождества

$$(x-y+1)^3P+(y-z-1)^3Q+(z-x+1)^3R=1.$$

а) Ответ: не существуют. Заметим, что система уравнений

$$x-y+1=0, \ y-z-1=0, \ z-2x+1=0$$

имеет решение $(x, y, z)=(1, 2, 1)$. При подстановке этих значений переменных в рассматриваемое тождество множители при многочленах P, Q и R, а с ними и вся левая часть, обращаются в нуль, и тождество нарушается, какие бы многочлены мы ни выбрали.

б) Ответ: существуют. Пусть $f=x-y+1$, $g=y-z-1$, $h=z-x+1$, тогда $f+g+h=1$ при всех значениях x, y и z. Возведя последнее тождество в седьмую степень, получим, что 1 представляется в виде суммы слагаемых вида $f^k \cdot g^l \cdot h^m$, где k, l, $m \geqslant 0$ и $k+l+m=7$, а значит, хотя бы одно из чисел k, l, m не меньше 3. Таким образом, каждое из этих слагаемых делится или на f^3, или на g^3, или на h^3. Группируя все слагаемые, делящиеся на f^3, и вынося f^3 за скобки, получим $f^3 \cdot P$. Группируя те из оставшихся слагаемых, которые делятся на g^3, получим $g^3 \cdot Q$. Сумма остальных слагаемых равна $h^3 \cdot R$ (P, Q и R — какие-то многочлены от x, y, z). В итоге мы получим тождество нужного вида:

$$f^3 \cdot P+g^3 \cdot Q+h^3 \cdot R=1.$$

П. Гусятников,
Ю. Нестеренко

От редакции. Эти задачи наводят на мысль, что верна общая теорема: *если многочлены F_1, F_2, ..., F_m (от одного или нескольких переменных) не обращаются одновременно в нуль, то найдутся такие многочлены P_1, P_2, ..., P_m, что $F_1P_1+F_2P_2+...+F_mP_m=1$.* Такая теорема в самом деле верна, если учитывать не только действительные, но и комплексные значения переменных*). Более того, эта теорема — частный случай знаменитой теоремы Гильберта о корнях: *если многочлен G обращается в 0 при всех тех (комплексных) значениях переменных, при которых одновременно $F_1=0$, ..., $F_m=0$, то существуют многочлены P_1, P_2, ..., P_m и натуральное число r такие, что*

$$F_1P_1+F_2P_2+...+F_mP_m=G^r.$$

◆

М755. *Внутри тетраэдра выбрана точка M. Докажите, что хотя бы одно ребро тетраэдра видно из точки M под углом, косинус которого не больше чем $-1/3$.*

Возьмем на лучах, соединяющих точку M с вершинами данного тетраэдра, точки A, B, C и D на расстоянии 1 от M. Очевидно, точка M будет находиться внутри нового тетраэдра $ABCD$ и его ребра видны из этой точки под теми же

*) О комплексных числах рассказывалось в статьях Л. Понтрягина в «Кванте», 1982, №№ 3, 4.

углами, что и ребра данного тетраэдра. Поэтому, не теряя общности, можно заменить данный тетраэдр на $ABCD$.

Первое решение. Поскольку точка M лежит внутри тетраэдра, луч DM проходит внутри его трехгранного угла при вершине D и потому пересекает плоскость ABC в некоторой точке P, причем точка P находится внутри треугольника ABC (рис. 1). Допустим, что косинусы углов AMD, BMD и CMD больше $-1/3$ (иначе доказывать нечего). Тогда сами эти углы меньше $\varphi=\arccos(-1/3)$, а значит углы AMP, BMP и CMP больше чем $180°-\varphi$. Отсюда вытекает, что длины отрезков AP, BP и CP больше $\sin\varphi$.

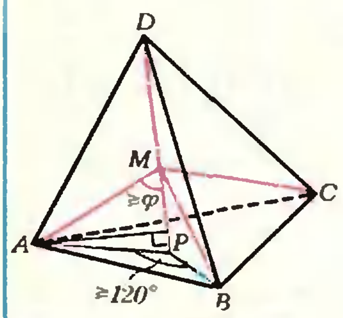


Рис. 1.

Действительно, возьмем, например, отрезок AP. Если угол AMP — острый, то $\sin\widehat{AMP}>\sin(\pi-\varphi)=\sin\varphi$. В то же время $|AP|$ не превосходит расстояния от точки A до прямой MP, которое равно $|AM|\cdot\sin\widehat{AMP}>1\cdot\sin\varphi$ (см. рис. 1). Если же угол AMP — тупой или прямой, то AP — наибольшая сторона в треугольнике AMP и $|AP|>|AM|=1>\sin\varphi$.

Поскольку точка P лежит внутри треугольника ABC, один из углов APB, BPC и CPA не меньше $120°$. Пусть $\widehat{APB}\geqslant 120°$, тогда

$$|AB|^2=|AP|^2+|BP|^2-2|AP|\cdot|BP|\cdot\cos\widehat{APB}>\sin^2\varphi+$$
$$+\sin^2\varphi-2\sin^2\varphi\cdot\cos 120°=3(1-\cos^2\varphi)=\frac{8}{3}.$$

С другой стороны, полагая $\alpha=\widehat{AMB}$, мы имеем

$$|AB|^2=|AM|^2+|BM|^2-2|AM|\cdot|BM|\cos\alpha=2(1-\cos\alpha).$$

Таким образом, $2(1-\cos\alpha)>8/3$; следовательно, $\cos\alpha<-1/3$.

Второе решение. Обозначим векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ и $\overrightarrow{MD}$ через $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$, $\overline{e_4}$ (рис. 2). Так как точка M лежит внутри тетраэдра, никакие три из них не компланарны. Разложим вектор $\overline{e_4}$ по остальным трем:

$$\overline{e_4}=y_1\overline{e_1}+y_2\overline{e_2}+y_3\overline{e_3}.$$

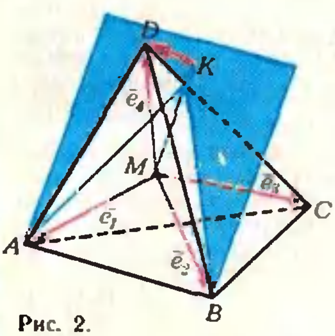


Рис. 2.

Заметим, что коэффициенты y_1, y_2 и y_3 отрицательны. В самом деле, рассмотрим, например, y_3. Вектор $\overline{e_4}$ есть сумма вектора $y_1\overline{e_1}+y_2\overline{e_2}=\overrightarrow{MK}$, где K — некоторая точка плоскости ABM, и вектора $\overrightarrow{KD}=y_3\overline{e_3}$, коллинеарного вектору $\overline{e_3}$ (см. рис. 2). Точка M лежит внутри тетраэдра, поэтому точки C и D лежат по разные стороны от плоскости ABM, а значит, векторы $\overrightarrow{MC}=\overline{e_3}$ и $\overrightarrow{KD}=y_3\overline{e_3}$ противоположно направлены, то есть $y_3<0$.

Положим $x_i=-y_i$ при $i=1, 2, 3$ и $x_4=1$, тогда полученное разложение вектора $\overline{e_4}$ перепишется в виде

$$x_1\overline{e_1}+x_2\overline{e_2}+x_3\overline{e_3}+x_4\overline{e_4}=\overline{0}, \qquad (1)$$

причем все числа x_i положительны. Пусть x_1 — наибольшее из них. Умножим обе части (1) скалярно на вектор $\overline{e_1}$:

$$x_1+x_2\cos\alpha_2+x_3\cos\alpha_3+x_4\cos\alpha_4=0, \qquad (2)$$

где α_i — угол между векторами $\overline{e_1}$ и $\overline{e_i}$ ($i=2, 3, 4$), и перегруппируем слагаемые:

$$\left(x_1-\frac{1}{3}(x_2+x_3+x_4)\right)+x_2\left(\cos\alpha_2+\frac{1}{3}\right)+$$
$$+x_3\left(\cos\alpha_3+\frac{1}{3}\right)+x_4\left(\cos\alpha_4+\frac{1}{3}\right)=0.$$

Первое слагаемое в левой части неотрицательно, так как $x_1\geqslant x_i$ при $i=2, 3, 4$; поэтому хотя бы одно из остальных слагаемых неположительно: $x_i\left(\cos\alpha_i+\frac{1}{3}\right)\leqslant 0$ для некоторого i. Но $x_i>0$; следовательно, $\cos\alpha_i<-1/3$.

Сделаем два замечания. Во-первых, постоянную $-1/3$ в условии уменьшить нельзя, как показывает пример правильного тетраэдра $ABCD$ и его центра M. В этом случае в формуле (2) надо положить $x_i=1$ ($i=1, 2, 3, 4$). $\alpha_2=\alpha_3=\alpha_4=\varphi$, откуда $\cos\varphi=-1/3$ — все ребра правильного тетраэдра видны из его центра под углом $\varphi=\arccos(-1/3)$.

Во-вторых, нетрудно показать, что всегда хотя бы одно ребро тетраэдра будет видно из его внутренней точки M под углом, косинус которого не меньше чем $-1/3$, то есть, что $\overline{e_i}\cdot\overline{e_j}\geqslant-\frac{1}{3}$ хотя бы для одной пары векторов $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \overline{e_4}$ (см. второе решение). Действительно, в противном случае

$$(\overline{e_1}+\overline{e_2}+\overline{e_3}+\overline{e_4})^2=\overline{e_1}^2+\overline{e_2}^2+\overline{e_3}^2+\overline{e_4}^2+$$
$$+2(\overline{e_1}\cdot\overline{e_2}+\overline{e_1}\cdot\overline{e_3}+\ldots+\overline{e_3}\cdot\overline{e_4})<4+2\cdot6\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)=0$$

— противоречие.

В. Дубровский, С. Гашков

М756. *В стране, кроме столицы, больше 100 городов. Столица страны соединена авиалиниями со 100 городами; каждый из остальных городов соединен авиалиниями ровно с 10 городами. Известно, что из любого города можно (быть может, с пересадками) перелететь в любой другой. Докажите, что можно закрыть половину авиалиний, идущих из столицы, так, что возможность попасть из любого города в любой другой сохранится.*

Если закрыть все авиалинии, ведущие из столицы, то остальные города разобьются на несколько зон, так что из любого города любой зоны можно перелететь в любой другой город этой зоны (не пользуясь закрытыми линиями) и нельзя перелететь в города других зон. В каждую зону обязательно ведет хотя бы одна линия из столицы; докажем, что таких линий не менее двух.

Предположим, что это неверно, и в какую-то зону ведет только одна авиалиния из столицы. Пусть k — число городов в этой зоне, а l — общее число соединяющих их авиалиний. Условимся считать, что на каждой линии AB ежедневно совершаются 2 рейса — из A в B и обратно. Тогда число рейсов между городами зоны, совершаемых ежедневно, равно $2l$. С другой стороны, число всех рейсов, следующих из городов зоны, равно $10k$, причем только один из них заканчивается вне зоны — в столице. Поэтому $2l=10k-1$, что, очевидно, невозможно.

Итак, в каждую зону ведет не меньше чем 2 авиалинии из столицы. Откроем часть этих линий — по одной на зону, тогда по меньшей мере столько же, то есть не менее $100:2=50$, авиалиний останутся закрытыми. В то же время авиасообщение между любыми двумя городами страны, очевидно, восстановится.

А. Разборов

М757. *Из последовательности $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$ нетрудно выделить арифметическую прогрессию длины три: $1/2, 1/3, 1/6$. Можно ли из этой последовательности выбрать арифметическую прогрессию*
а) длины 4?
б) длины 5?
в) длины k, где k — любое натуральное число?

Ответ: можно.

При любом натуральном k числа $\frac{1}{k!}, \frac{2}{k!}, \ldots, \frac{k}{k!}$ (где $k!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot k$) образуют арифметическую прогрессию длины k с разностью $1/k!$ В то же время все они входят в последовательность $1, 1/2, 1/3, \ldots$, потому что число $k!/m$ — целое при любом m, $1\leqslant m\leqslant k$.

В частности, при $k=4$ и $k=5$ получаем

$$\frac{1}{24}, \frac{1}{12}, \frac{1}{8}, \frac{1}{6} \text{ и } \frac{1}{120}, \frac{1}{60}, \frac{1}{40}, \frac{1}{30}, \frac{1}{24}$$

(вторую последовательность можно продолжить числом $\frac{1}{20}$).

Более общим образом прогрессию из пункта в) можно получить, разделив все члены произвольной арифметической прогрессии длины k, составленной из натуральных чисел, на любое их общее кратное. Ясно, что и обратно, любая конечная арифметическая прогрессия, содержащаяся в последовательности $1, 1/2, 1/3, \ldots$, может быть получена таким способом. (Действительно, приведем все дроби — члены рассматриваемой прогрессии — к общему знаменателю. Тогда их числители образуют арифметическую прогрессию из натуральных чисел.)

Г. Гальперин

М758*. *Какое наименьшее количество чисел необходимо вычеркнуть из последовательности 1, 2, 3, ..., 1982, чтобы ни одно из оставшихся чисел не равнялось произведению двух других оставшихся чисел?*

Ответ: 43 числа; можно вычеркнуть числа 2, 3, ..., 44.

Если вычеркнуть указанные 43 числа, то условие задачи будет выполнено, ибо произведение любых двух из оставшихся чисел (исключая 1) будет больше чем $45^2=2025>1982$. Покажем теперь, что если вычеркнуть меньше чем 43 числа, то останутся 3 числа, произведение двух из которых равно третьему.

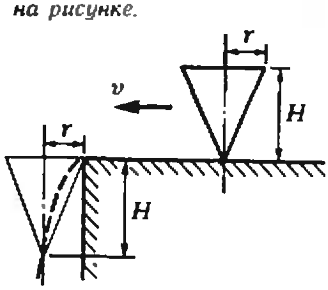
Рассмотрим 43 тройки чисел

$$(2, 87, 2\cdot 87),\ (3, 86, 3\cdot 86),\ \ldots,\ (44, 45, 44\cdot 45).$$

Так как функция $x\cdot(89-x)$ на отрезке $[2; 44]$ возрастает, все выписанные числа различны и не превосходят $44\cdot 45=1980<1982$. Если вычеркнуть менее 43 чисел, то хотя бы одна из выписанных троек останется, и условие задачи будет нарушено.

Л. Курляндчик

Ф768. *По гладкому столу движется, быстро вращаясь вокруг своей оси, волчок, имеющий форму конуса (см. рисунок). При какой скорости v поступательного движения волчок не ударится о край стола, соскочив с него? Ось волчка остается вертикальной. Размеры волчка указаны на рисунке.*



Соскочив со стола, волчок будет двигаться по параболе (вращение лишь стабилизирует вертикальное положение оси волчка). Горизонтальная проекция v_x скорости волчка будет равна скорости v его поступательного движения по столу; вертикальная проекция будет меняться со временем по закону $v_y=gt^2/2$. Волчок не ударится о край стола, если за время τ, за которое он сместится по вертикали на H, его смещение по горизонтали будет больше или равно r (см. рисунок). Запишем это условие:

$$v_x\tau=v\tau\geqslant r,\qquad \tau=\sqrt{\frac{2H}{g}}.$$

Таким образом, скорость поступательного движения волчка должна удовлетворять условию

$$v\geqslant\sqrt{\frac{r^2g}{2H}}.$$

А. Зильберман

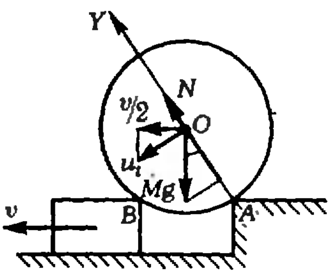
Ф769. *Массивный цилиндр радиуса R опирается на две подставки одинаковой высоты (см. рисунок). Одна подставка неподвижна, а другая выезжает из-под цилиндра со скоростью v. С какой силой давит цилиндр на неподвижную подставку в тот момент, когда расстояние между точками опоры равно $R\sqrt{2}$? Считать, что в начальный момент подставки располагались очень близко друг к другу; трение между цилиндром и подставками отсутствует.*

До тех пор, пока цилиндр не оторвется от опор, ось цилиндра будет всегда находиться точно посередине между опорами. Следовательно, горизонтальная проекция скорости оси цилиндра (точки O на рисунке) равна $v/2$. Поскольку все точки оси движутся по окружности с центром в точке A, полная скорость u_t каждой точки оси направлена в любой момент времени перпендикулярно радиусу OA. Следовательно, все точки оси движутся с центростремительным ускорением $a_t=u_t^2/R$.

Запишем уравнение движения точки O в проекции на ось Y (см. рисунок):

$$Mg\cos\alpha-N=Ma_t=M\frac{u_t^2}{R},\qquad (*)$$

где N — абсолютное значение силы реакции со стороны неподвижной опоры. По III закону Ньютона с такой же по абсолютной величине силой цилиндр давит на неподвиж-



ную опору. Из уравнения (*) находим

$$N=Mg\cos\alpha-M\frac{u^2}{R}.$$

В тот момент, когда расстояние между опорами равно $|AB|=R\sqrt{2}$,

$$\cos\alpha=\frac{R\sqrt{2}}{2R}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Горизонтальная проекция скорости точки O равна $u_t\cos\alpha=v$, откуда $u=v/\sqrt{2}$. Таким образом, при $|AB|=R\sqrt{2}$

$$N=M\frac{g}{\sqrt{2}}-M\frac{v^2}{2R}.$$

Для того чтобы цилиндр не оторвался от опор до того, как $|AB|$ станет равным $R\sqrt{2}$, должно выполняться условие $\frac{g}{\sqrt{2}}>\frac{v^2}{2R}$, то есть $v<\sqrt{gR\sqrt{2}}$.

С. Кротов

◆

Ф770. *В теплоизолированном цилиндре под легким поршнем находится смесь равных количеств воды и льда: $m_в=m_л=m=1$ кг. Давление на поршень медленно увеличивают от начального значения $p_0=10^5$ Па до $p_1=2{,}5\cdot10^6$ Па. Определить, сколько льда при этом растает и какую работу совершит внешняя сила. Известно, что для уменьшения температуры плавления льда на 1 градус нужно довести давление до $p=14\cdot10^6$ Па.*
1) Решите задачу, считая воду и лед несжимаемыми.
2) Оцените поправку, которую дает учет сжимаемости.
Известно, что для уменьшения объема некоторого количества воды на 1% давление нужно поднять до $p'=20\cdot10^8$ Па. Сжимаемость льда примите для оценки равной половине сжимаемости воды.
Удельные теплоемкости воды и льда — $c_в=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К), $c_л=2{,}1\cdot10^3$ Дж/(кг·К); удельная теплота плавления льда $\lambda=3\times10^5$ Дж/кг, плотность льда $\varrho_л=0{,}9\varrho_в$, где $\varrho_в$ — плотность воды.

1) Сначала найдем уменьшение температуры смеси в результате увеличения внешнего давления:

$$\Delta T=\frac{p_1}{p}\approx0{,}17\ \text{К}.$$

Столь малое изменение температуры указывает на то, что растает малое количество льда, то есть $\Delta m\ll m_л$.

Запишем закон сохранения энергии:

$$A=\lambda\cdot\Delta m-(c_л+c_в)m\cdot\Delta T.$$

Оценим значение работы A внешней силы. Изменение объема смеси в результате таяния массы Δm льда равно

$$\Delta V=\frac{\Delta m}{\varrho_л}-\frac{\Delta m}{\varrho_в}=\Delta m\frac{\varrho_в-\varrho_л}{\varrho_в\varrho_л}\ll0{,}1\frac{m}{\varrho_л}\sim10^{-4}\ \text{м}^3,$$

следовательно,

$$A\approx p_1\cdot\Delta V\ll2{,}5\cdot10^2\ \text{Дж}.$$

Количество тепла ΔQ, необходимое для нагревания массы m льда и массы m воды на ΔT градусов, равно

$$\Delta Q=(c_л+c_в)m\cdot\Delta T\approx1{,}1\cdot10^3\ \text{Дж}.$$

Видно, что $A\ll\Delta Q$; поэтому можно для оценки считать, что $\lambda\cdot\Delta m\approx\Delta Q$, откуда

$$\Delta m=\frac{\Delta Q}{\lambda}\approx3{,}7\cdot10^{-3}\ \text{кг}.$$

Изменение объема за счет таяния этой массы льда равно

$$\Delta V=\Delta m\frac{\varrho_в-\varrho_л}{\varrho_в\varrho_л}\approx4\cdot10^{-7}\ \text{м}^3.$$

Учитывая, что при медленном увеличении давления $\Delta V\sim\Delta p$, найдем работу внешней силы:

$$A=\frac{1}{2}p_1\cdot\Delta V\approx0{,}5\ \text{Дж}.$$

2) Примем во внимание сжимаемость льда и воды. Изменение объема льда и воды будет равно

$$\Delta V'=\frac{p_1}{p'}\cdot10^{-2}V_{ов}+\frac{p_1}{p'}\cdot10^{-2}\frac{V_{ол}}{2},$$

где $V_{ов}=10^{-3}$ м^3 и $V_{ол}=1{,}1\cdot10^{-3}$ м^3 — начальные объемы воды и льда. Подставляя числовые данные, находим

$$\Delta V'\approx2\cdot10^{-6}\ \text{м}^3.$$

Работа A' внешней силы, затраченная на сжатие смеси, равна

$$A' = \frac{1}{2} p_1 \cdot \Delta V' \approx 2{,}5 \text{ Дж}.$$

Полная работа внешней силы равна

$$A_п = A + A' \approx 3 \text{ Дж}.$$

А. Буздин

◆

Ф771. *В схеме, приведенной на рисунке 1, диод Д и катушка с индуктивностью L в момент времени $t=0$ при помощи ключа К подключаются к источнику переменного напряжения $u=U_м \cos \omega t$. Определить силу тока в катушке как функцию времени; построить график этой функции. Диод и катушку считать идеальными. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.*

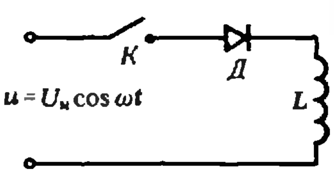


Рис. 1.

После замыкания ключа диод будет открыт, и ток в катушке будет определяться приложенным напряжением. Из условия $U_м \cos \omega t = Li'$ находим:

$$i = \frac{U_м}{\omega L} \sin \omega t.$$

В момент времени $t_1 = \pi/\omega$ $(\omega t_1 = \pi)$ ток в катушке станет равным нулю. С этого момента и до момента времени $t_2 = 3\pi/2\omega$ ток будет оставаться равным нулю, поскольку диод будет закрыт — на нем будет отрицательное напряжение. В момент t_2 диод снова откроется. В дальнейшем

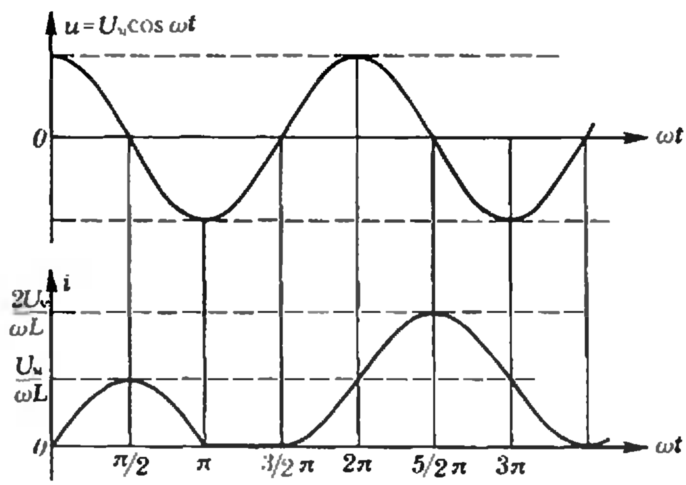


Рис. 2.

напряжение на катушке будет меняться со временем по закону

$$u = U_м \cos\left(\omega t + \frac{3}{2}\pi\right) = U_м \sin \omega t.$$

Ток в катушке будет меняться по закону

$$i = \frac{U_м}{\omega L}(1 - \cos \omega t)$$

(тут учтено, что при $t=t_2$ $I=0$).

На рисунке 2 приведены графики $u(t)$ и $i(t)$.

В. Скороваров

◆

Ф772. *Межпланетный корабль совершил мягкую посадку на Луну. Корабль имеет форму диска радиуса $r=4$ м; его поверхность покрыта черной (неотражающей) краской. Можно ли обнаружить прилунение корабля с помощью самого большого в мире советского телескопа БТА с*

Вследствие дифракции света на оправе объектива с помощью телескопа можно различить две точки на поверхности Луны, находящиеся на расстоянии не менее

$$R \approx \frac{\lambda}{D} L \approx 40 \text{ м}.$$

Объекты, размер которых меньше R, не отличимы от точечного объекта. Для того чтобы прочитать букву, нужно различить несколько ее элементов. Оценка числа этих элементов может быть сделана только приближенно. Для *диаметром объектива $D=6$ м, если в фокальной плоскости установить фотопластинку и сфотографировать участок поверхности Луны, в котором находится предполагаемое место прилунения? Принять, что надежно различимая контрастность изображения на фотопластинке (то есть минимальная относительная разница в освещенности светлых и темных частей изображения) равна $k\approx0{,}05$. Расстояние от Земли до Луны $L=4\cdot10^5$ км; фотографирование ведется в свете с длиной волны $\lambda=0{,}6$ мкм. Оценить, при каком размере букв, выложенных космонавтами на поверхности Луны, их можно прочесть при наблюдении с Земли с помощью телескопа БТА.*

этого можно попытаться, например, изображать буквы цепочками соприкасающихся кружков. Число кружков в таких цепочках должно быть не меньше 5—6, чтобы буквы отличались друг от друга. Учитывая, что радиус этих кружков на поверхности Луны должен быть $R=40$ м, мы получим оценку размера букв: $l\approx400-500$ м.

При фотографировании освещенность любой точки изображения Луны в фокальной плоскости объектива создается за счет излучения всех элементов поверхности Луны, лежащих в пределах круга радиуса $R=40$ м, то есть площади $S=\pi R^2$. Если часть площади этого круга будет закрыта черным (неотражающим) диском площади $s=\pi r^2$, то освещенность изображения точки прилунения будет пропорциональна $(S-s)$, в то время как в других точках она пропорциональна S. Следовательно, контрастность изображения будет равна

$$k=\frac{S-(S-s)}{S}=\frac{s}{S}=\left(\frac{r}{R}\right)^2=10^{-2}.$$

Эта величина меньше заданной в условии надежно различимой контрастности изображения $k_{min}=5\cdot10^{-2}$. Следовательно, межпланетный корабль обнаружить не удастся.

С. Козел

◆

Ф773. *На шероховатой наклонной плоскости с углом наклона α лежит тело, к которому привязана легкая нерастяжимая нить. Свободный конец нити пропущен через маленькое отверстие в плоскости. В начальный момент тело лежит на плоскости так, что нить горизонтальна (рис. 1). Нить начинают медленно вытягивать; при этом тело к моменту достижения отверстия описывает половину окружности. Найти величину коэффициента трения тела о плоскость.*

На рисунке 2 приведена траектория движения тела от начального положения до отверстия (плоскость рисунка совпадает с наклонной плоскостью). Точка O' — центр полуокружности, по которой движется тело.

Поскольку нить вытягивают медленно, можно считать, что в каждый момент времени тело находится в состоянии равновесия. Запишем условие равновесия тела для момента, когда нить составляет угол φ с горизонталью OO' (рис. 2).

В проекциях на ось X —

$$f\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\varphi\right)=T\cos\varphi,\ \text{или}\ f\sin^2\varphi=T\cos\varphi. \qquad (1)$$

В проекциях на ось Y —

$$f\cos2\varphi+T\sin\varphi=mg\sin\alpha. \qquad (2)$$

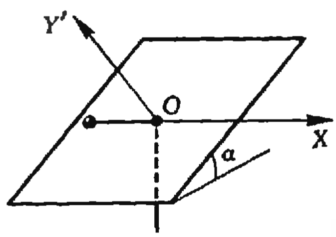


Рис. 1.

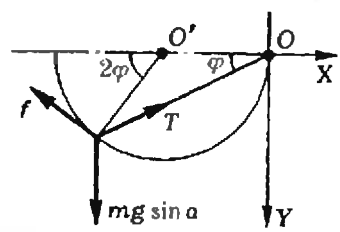


Рис. 2.

В проекциях на ось Y', перпендикулярную наклонной плоскости (см. рис. 1), —

$$mg\cos\alpha=N. \qquad (3)$$

Учитывая, что сила трения f равна по абсолютной величине μN, из (1)—(3) находим μ:

$$\mu=\operatorname{tg}\alpha.$$

А. Зильберман

◆

Ф774. *Для многих веществ существуют такие значения температуры $T_{тр}$ и давления $p_{тр}$, при которых все три фазы*

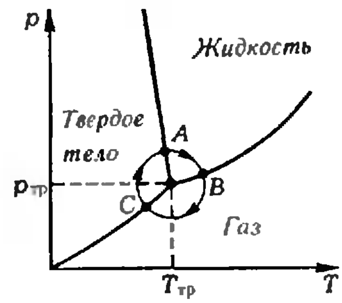
На рисунке приведена диаграмма состояния вещества в координатах $p-T$.

Рассмотрим цикл $A\to B\to C\to A$, который совершают над массой m вещества вблизи тройной точки. В этом цикле *вещества — газообразная, жидкая и твердая — находятся в равновесии друг с другом — так называемая тройная точка. Для воды $T_{тр}=0{,}0075°C$, $p_{тр}=4{,}58$ мм рт. ст; удельная теплота парообразования в тройной точке равна $r=595{,}8$ кал/г, удельная теплота плавления — $\lambda=79{,}7$ кал/г. Найти удельную теплоту сублимации (прямого перехода из твердого состояния в газообразное) воды вблизи тройной точки.*

последовательно происходят следующие превращения фаз: плавление → испарение → превращение пара (газа) непосредственно в твердое тело. Из первого начала термодинамики следует, что при неограниченном сужении цикла к тройной точке

$$rm+\lambda m-\theta m=0,$$

где θ — удельная теплота сублимации (работа системы за цикл равна нулю, притока тепла извне нет, полное



изменение внутренней энергии системы также равно нулю). Следовательно,

$$\theta=r+\lambda.$$

Подставив числовые данные для воды, найдем удельную теплоту сублимации воды:

$$\theta=675{,}5 \text{ кал}.$$

В. Давыдов

◆

Ф775. *Многопредельный амперметр высокой точности содержит для каждого предела измерений отдельный шунт. Амперметр включают в цепь на пределе 10 мА, и он показывает силу тока $I_1=2{,}95$ мА; когда его переключили на предел 3 мА, он показал $I_2=2{,}90$ мА. Какова была сила тока в цепи до подключения амперметра?*

Изменения тока при переключении амперметра малы. Значит, можно считать, что изменение тока в цепи при подключении амперметра мало и пропорционально изменению полного сопротивления цепи, то есть $\Delta I=\alpha\cdot\Delta R_{общ}$, где α — коэффициент пропорциональности. Но $\Delta R_{общ}=R_A$ (R_A — сопротивление амперметра). На разных пределах сопротивление амперметра разное.

Если I_0 — ток в цепи до подключения амперметра, то

$$\begin{aligned}\Delta I_1&=I_0-I_1=\alpha R_{A1},\\ \Delta I_2&=I_0-I_2=\alpha R_{A2},\end{aligned}\qquad (*)$$

где R_{A1} — сопротивление амперметра на пределе 10 мА, R_{A2} — на пределе 3 мА. Учитывая, что $\dfrac{R_{A1}}{R_{A2}}=\dfrac{3}{10}$, из $(*)$ получаем

$$\frac{I_0-I_1}{I_0-I_2}=\frac{3}{10},$$

откуда

$$I_0=\frac{10I_1-3I_2}{7}\approx 2{,}97 \text{ мА}.$$

А. Зильберман

◆

Ф776. *В небольшой чайник налита доверху теплая вода ($t_1=30°C$). Чайник остывает на 1 градус за время $\tau=5$ мин. Для того чтобы чайник не остыл, в него капают горячую воду ($t_2=45°C$). Масса одной капли $m_к=0{,}2$ г. Сколько капель в минуту должно капать в чайник, чтобы температура поддерживалась равной 30°C?*

За одну минуту чайник остывает на $\Delta t_1=0{,}2$ градуса. Количество тепла, «теряемое» за это время чайником, равно

$$\Delta Q_1=cm\cdot\Delta t_1$$

(c — удельная теплоемкость воды). Если в минуту в чайник капают n капель, то количество тепла, передаваемое ими воде в чайнике, равно

$$\Delta Q_2=nm_кc\,(t_2-t_1).$$

Условие постоянства температуры воды в чайнике — $\Delta Q_1=\Delta Q_2$, то есть

На сколько градусов подогреется вода за одну минуту, если начать капать втрое чаще? Считать, что температура воды в чайнике выравнивается очень быстро. Лишняя вода выливается из носика. В чайник входит 0,3 литра воды. Температура окружающего воздуха $t_0=20°C$.

$$cm\cdot\Delta t_1 = nm_{\text{к}}c\,(t_2-t_1).$$

Отсюда находим n:

$$n=\frac{m}{m_{\text{к}}}\,\frac{\Delta t_1}{t_2-t_1}=20 \text{ капель в минуту.}$$

Если капать не n, а $3n$ капель в минуту, то вода в чайнике нагреется за одну минуту на

$$\Delta t_2=\frac{3\Delta Q_2-\Delta Q_1}{cm}=2\Delta t_1=0{,}4 \text{ градуса.}$$

А. Зильберман

Ф777. *На невесомой нерастяжимой нити подвешен блок. Расстояние между точками подвеса равно диаметру блока; длина вертикальных участков нити равна l (рис. 1). Определить период малых колебаний системы в вертикальной плоскости, в которой лежит нить.*

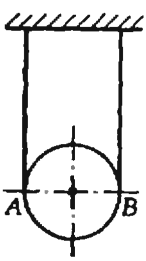


Рис. 1.

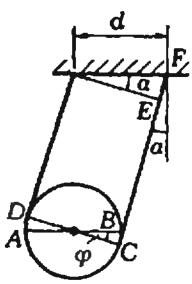


Рис. 2.

Покажем, что при малых углах отклонения блок движется поступательно, то есть в любой момент времени все точки блока имеют одну и ту же скорость.

Отклоним нити на малый угол α от вертикали. Пусть C и D — крайние точки касания нити с блоком (рис. 2). Посмотрим, какой угол составляют радиус-векторы точек C и B (D и A). Понятно, что длины дуг AD и CB равны

$$\Delta l=\frac{1}{2}|FE|=\frac{1}{2}\,d\alpha$$

(поскольку α мало, $\sin\alpha\approx\alpha$).

С другой стороны,

$$\Delta l=\frac{1}{2}\,d\varphi.$$

Следовательно, $\varphi=\alpha$. Это означает, что отрезок AB лежит по-прежнему на горизонтали, то есть блок движется поступательно.

Таким образом, кинетическая энергия блока в любой момент времени равна $mv_t^2/2$, где m — масса блока, v_t — скорость его центра в данный момент. Поэтому в любой момент времени полная энергия блока равна

$$\frac{mv_t^2}{2}+mgl\,(1-\cos\alpha_t),$$

то есть такая же, как у математического маятника длины l. Следовательно, колебания блока идентичны колебаниям математического маятника; период колебаний

$$T=2\pi\sqrt{l/g}.$$

В. Ильин

Список читателей, приславших правильные решения

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М721—М735 и Ф748—Ф762 (цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Большинство читателей, приславших решения, успешно справились с задачами **М721**, **М724**, **М726**, **М727**, **М729**, **М731**, **М734**. Остальные задачи решили: *В. Айзенштадт* (Люберцы) **22, 23, 33**; *Т. Аколян* (Ереван) **22**; *М. Алексеев* (Москва) **22, 23**; *А. Аляев* (п. Пачелма Пензенской обл.) **28**; *М. Арасланов* (Запорожье) **23, 25, 28, 30**; *А. Бажилов* (София, НРБ) **23, 25**; *Л. Байрак* (Белгород) **32**; *В. Барабанов* (Севастополь) **23**; *А. Белоус* (Винница) **28**; *А. Беренштейн* (Москва) **33**; *А. Биргер* (Иваново) **23, 30, 32, 33**; *А. Благодарев* (Пенза) **32**; *И. Богуславский* (Москва) **22, 23, 25, 33**; *М. Бродицкий* (Кишинев) **23, 28, 30, 35**; *В. Булавас* (Паневежис) **22, 25, 30, 32, 33**; *И. Вайнштейк* (Калинин) **23**; *В. Вайншток* (Калинин) **25**; *Г. Виннер* (Свердловск) **22, 23, 25, 28, 32**; *А. Виноградов* (Москва) **23, 28, 32, 35**; *Л. Вовк* (Киев) **22, 25, 32, 33**; *В. Волчков* (Донецк) **23, 25**; *С. Галкина* (Пенза) **25**; *М. Гараев* (Физули) **23, 33**; *О. Гарифуллин* (Пенза) **25**; *А. Герцык* (Ленинград) **35**; *М. Гликман* (Кишинев) **30, 32, 33**; *М. Горбунов* (Минск) **25, 28, 32**; *А. Громов* (Ленинград) **25**; *С. Громов* (Янгиюль) **25**; *А. Гутман* (Новокузнецк) **23**; *А. Дейнека* (Винница) **32**; *А. Добрин* (Киев) **28, 30, 32, 33, 35**; *В. Долотин* (Курск) **23**; *Л. Дочев* (София, НРБ) **25**; *А. Дробышев* (Ленинград) **23, 25**; *А. Дубицкас* (Таураге) **22, 23, 25**; *В. Епхиев* (Новосибирск) **28**; *О. Ерошкин* (Днепропетровск) **23, 25, 33, 35**; *К. Зыков* (Москва) **30, 33**; *М. Ивко* (Павлодар) **25**; *В. Ивлев* (Джезказган) **25**; *А. Ивченко* (Могилев-Подольский) **33**; *М. Йотов* (София, НРБ) **22, 25**; *Е. Кабаков* (Ленинград) **28**; *П. Кадышев* (Москва) **28**; *А. Карпович* (Киев) **30**; *А. Карташев* (Витебск) **32, 33**; *С. Кастелли* (Белград, СФРЮ) **22**; *Н. Кащенко* (Киев) **23, 25, 32, 33**; *В. Кидысюк*

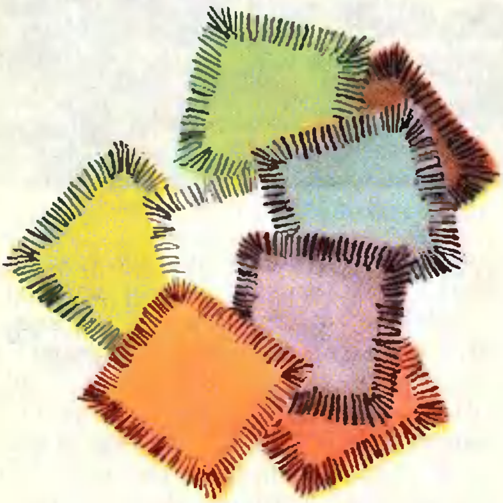
(Продолжение см. на с. 37)

КВАНТ для младших школьников

Задачи

1. Замените звездочки цифрами в выражении 52★2★ так, чтобы полученное число делилось на 36.

2. На стол кладут одну за другой 8 цветных квадратных салфеток (см. рисунок). При этом последующая салфетка закрывает часть хотя бы одной из предыдущих. Определите, какая салфетка была положена первой и какая из двух салфеток — коричневая или белая — была положена раньше?



3. Когда секундная стрелка на часах прошла 1 секунду, минутная стрелка прошла 6 минут, тем не менее часы исправны. Как это объяснить?

4. Для каких двузначных чисел сумма куба числа единиц и квадрата числа десятков равняется самому числу?

5. Какое наибольшее количество чисел можно записать в строку так, чтобы сумма любых 17 последовательных чисел была четна, а сумма любых 18 последовательных чисел была нечетна?

Эти задачи нам предложили
К. Ашурбеков, Ф. Бартенев,
В. Произволов, А. Савик, А. Швецов

А. Панов

Загадка фигуры № 51

Вырежьте из картона квадрат и разделите его на части так, как показано на рисунке 1,— вы получили головоломку «танграм», придуманную несколько тысячелетий назад в Китае и известную ныне во всем мире. Используя все семь элементов танграма, можно сложить много изящных фигурок; попробуйте составить, например, «женщину с веером» (рис. 2).

Но исходный квадрат можно разрезать и по-другому, например — как на рисунке 3. Именно так он разделен в головоломке «пифагор», выпускаемой в нашей стране. На рисунке 4 изображена фигура № 51 из инструкции к экземпляру пифагора, который изготовлен в г. Кузнецке; в инструкции предлагается составить эту фигуру из семи элементов пифагора.

Я долго пытался составить фигуру № 51. Самое близкое к ней из того, что мне удалось, показано на рисунке 5. В конце концов я засомневался: а можно ли это сделать?

Найти ответ помогла книга М. Гарднера «Математические головоломки и развлечения» (М., «Мир», 1971). На с. 329 рассказывается о том, как была решена задача перечисления выпуклых многоугольников, которые можно составить из семи элементов танграма:

«Два китайских математика, Фу Трен-ван и Чуань Чи-сюнь, в 1942 году опубликовали статью, в которой рассмотрели эту задачу. Их подход к решению был весьма остроумен. Каждую из пяти больших частей танграма (два больших треугольника, один треугольник поменьше, квадрат и параллелограмм) можно разбить на равнобедренные прямоугольные треугольники, конгруэнтные двум самым маленьким треугольникам танграма. Всего при этом получится 16 совершенно одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников. С помощью тонких рассуждений авторы показали, что из этих 16 треугольников можно построить 20 различных выпуклых многоугольников (многоугольники, переходящие друг в друга при поворотах и отражениях, различными не считаются). Отсюда уже нетрудно доказать, что лишь 13 из найденных 20 выпуклых многоугольников можно построить из деталей танграма».

Элементы пифагора разбиваются на те же самые 16 треугольников (рис. 6). Фигура № 51 — это выпуклый многоугольник; поэтому, если бы среди упомянутых 20 многоугольников ее не оказалось, ее тем более нельзя было бы сложить из элементов пифагора.

Давайте составим полный список этих 20 многоугольников.

Нам поможет эксперимент. Если заготовить много одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников и попробовать складывать из них различные многоугольники, обнаружится, что выпуклые многоугольники получаются только тогда, когда соседние треугольники граничат по целой общей стороне (рис. 7, *а*). Если же прикладывать треугольники катетом к гипотенузе или со сдвигом (рис. 7, б), выпуклый многоугольник не сложится. В этом «правиле прикладывания» — ключ к описанию искомых многоугольников. Но доказывается оно довольно сложно и мы примем его просто как экспериментальный факт.

Наложим теперь произвольный выпуклый многоугольник, составленный из наших треугольников, на сетку из квадратов, стороны которых равны катетам треугольников, так, чтобы вершины одного из треугольников попали в узлы сетки (рис. 8). Тогда по «правилу прикладывания» вершины остальных треугольников также попадут в узлы сетки. Поскольку углы нашего многоугольника складываются из углов равнобедренных прямоугольных треугольников и, значит, могут равняться только 45°, 90° или 135° (напомню, что многоугольник тогда и только тогда является выпуклым, когда все его внутренние углы меньше 180°), его можно представить как прямоугольник с отрезанными уголками (рис. 8). Стороны этого прямоугольника идут по линиям сетки; если считать, что расстояние между соседними линиями равно 1, то длины его сторон будут выражаться целыми числами a и b. Чтобы полностью задать рассматриваемый мно-

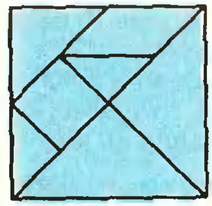


Рис. 1.

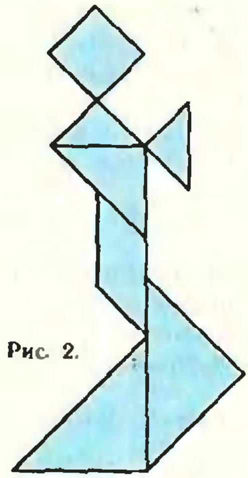


Рис. 2.

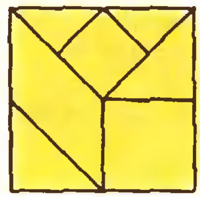


Рис. 3.

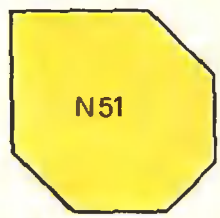


Рис. 4.

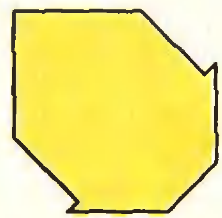


Рис. 5.

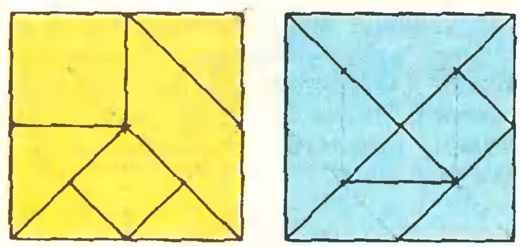


Рис. 6.

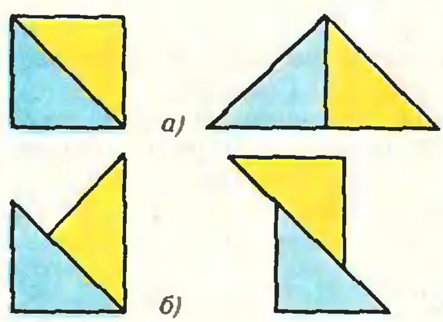


Рис. 7.

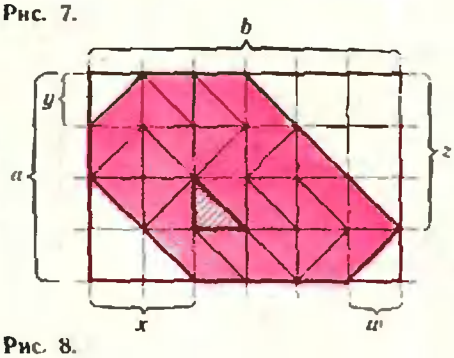


Рис. 8.

гоугольник, надо указать еще 4 целых неотрицательных числа x, y, z и w — длины катетов отрезаемых уголков (см. рис. 8). Зная эти шесть чисел, легко вычислить площадь многоугольника:

$$S = ab - \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2 + w^2).$$

Для искомых многоугольников она должна совпадать с суммарной площадью 16 равнобедренных прямоугольных треугольников с катетами длины 1: $S = 16 \cdot \frac{1}{2} = 8$.

Итак, наша задача претерпела удивительное превращение: из чисто геометрической задачи о составлении многоугольников она превратилась в чисто арифметическую задачу о нахождении неотрицательных целочисленных решений уравнения

$$2ab - 16 = x^2 + y^2 + z^2 + w^2. \qquad (1)$$

При этом, конечно, надо еще, чтобы сумма длин катетов отрезаемых уголков, прилегающих к одной стороне прямоугольника, была не больше длины этой стороны. Другими словами, числа a, b, x, y, z и w должны удовлетворять дополнительным условиям

$$\begin{matrix} x + y \leqslant a, & y + z \leqslant b, \\ z + w \leqslant a, & w + x \leqslant b. \end{matrix} \qquad (2)$$

Дальше геометрия и арифметика будут идти рука об руку.

Прежде всего, выясним, какими могут быть размеры прямоугольника.

С одной стороны, его площадь должна быть не меньше площади искомого многоугольника:

$$ab \geqslant 8. \qquad (3)$$

(Это неравенство легко получить и прямо из уравнения (1).)

С другой стороны, если отрезать от прямоугольника уголки наибольшей общей площади, то площадь остатка должна быть не больше 8. Из рисунка 9 видно, что суммарная площадь уголков, прилегающих к одной стороне прямоугольника, меньше площади равнобедренного прямоугольного треугольника, катеты которого конгруэнтны этой стороне. Поэтому самый маленький по площади (непустой) остаток получается, если отрезать уголки от прямоугольника как на рисунке 10, *а* при $a < b$ и как на рисунке 10, *б* при $a = b$. В первом случае у нас останется параллелограмм площади $(b - a)a$, во втором — трапеция площади $a - \frac{1}{2}$. Следовательно, при $a < b$

$$(b - a)a \leqslant 8. \qquad (4)$$

а при $a = b$

$$a - \frac{1}{2} \leqslant 8. \qquad (5)$$

(Попробуйте вывести эти неравенства из условий (1) и (2)!)

Пары натуральных чисел (a, b), удовлетворяющие неравенствам (3) и (4) или (3) и (5), легко найти простым перебором. Например, при $a = 1$ получим, что $b \geqslant 8$ и $b - 1 \leqslant 8$, то есть $b = 8$ или 9, при $a = 2$ найдем, что $b = 4$, 5 или 6 и т. д. Всего имеется 19 таких пар: (1, 8), (1, 9), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 5), (5, 6), (6, 6), (6, 7), (7, 7), (7, 8), (8, 8), (8, 9).

Для каждой из этих пар нужно, согласно уравнению (1), найти все представления числа $2ab - 16$ в виде суммы четырех квадратов $x^2 + y^2 +$

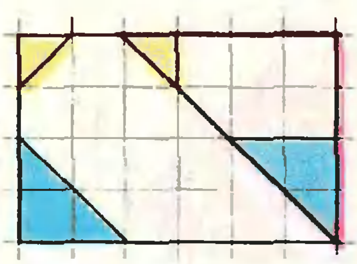


Рис. 9.

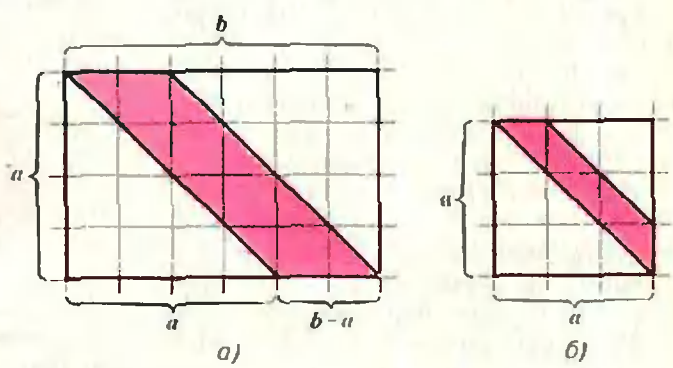


Рис. 10.

$+z^2+w^2$, а затем проверить неравенства (2), или нарисовать прямоугольник $a\times b$ и найти все способы отрезания уголков, при которых остается многоугольник площади 8. (Кстати, для некоторых из 19 пар (a, b) числа x, y, z, w подобрать не удается.) Результаты подобных расчетов суммированы в таблице, содержащей список всех 20 выпуклых многоугольников, которые

a	b	x	y	z	w	T	$П$
1	8	0	0	0	0		
1	9	0	1	0	1		
1	9	0	1	1	0		
2	4	0	0	0	0	+	
2	5	0	0	0	2	+	+
2	5	1	1	1	1	+	+
2	6	0	2	0	2	+	+
2	6	0	2	2	0	+	+
3	3	0	0	1	1	+	
3	3	0	1	0	1	+	+
3	4	0	2	0	2	+	
3	4	0	2	2	0	+	+
3	5	0	3	1	2	+	
3	5	0	3	2	1	+	+
4	4	0	0	0	4	+	+
4	4	2	2	2	2	+	+
4	6	0	4	0	4		+
5	5	0	3	0	5		+
5	5	1	4	1	4		+
8	9	0	8	0	8		

можно сложить из 16 одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников. (Попробуйте доказать «правильность» двух ее последних столбцов!)

(В первых шести столбцах представлены все 20 выпуклых многоугольников, которые можно составить из 16 одинаковых равнобедренных прямоугольных треугольников. В столбце T знаком «+» отмечены те из них, которые можно сложить из элементов танграма; в столбце $П$ — те, которые складываются из элементов пифагора.)

Теперь остается только нарисовать все 20 многоугольников из таблицы и убедиться, что среди них нет ни одного семиугольника, а уж тем более фигуры № 51!

Наша история подходит к благополучному завершению. Передо мной — новый, только что купленный экземпляр пифагора. С удовольствием замечаю, что в новой инструкции фигура № 51 — такая, как у нас на рисунке 5. Хотя, не будь прежней инструкции, эта статья и не была бы написана.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 32)

(Рязань) **32**; *К. Кноп* (Одесса) **30**; *Е. Ковальчук* (Киев) **22, 33**; *М. Коган* (Донецк) **32, 35**; *И. Копылец* (Карловка) **28**; *Д. Коршунов* (Новосибирск) **22, 23, 30, 32, 33**; *А. Костюк* (Бердичев) **22**; *К. Кохась* (Ленинград) **23, 32, 33**; *Ю. Кочетков* (Винница) **28**; *Е. Кочкин* (Волжский Волгоградской обл.) **32, 33**; *И. Кулагин* (Свердловск) **32**; *М. Лев* (Свердловск) **22**; *Б. Лееб* (Кельхайм, ФРГ) **28, 30**; *М. Левкин* (Душанбе) **22, 23, 25, 28**; *Д. Локшин* (Москва) **32**; *О. Мазуров* (Новосибирск) **23**; *И. Маркеев* (Москва) **22, 23**; *А. Маркович* (Белград, СФРЮ) **23, 25, 28, 35**; *О. Матвеев* (Свердловск) **25**; *Л. Наймарк* (Ленинград) **23**; *П. Наконечный* (Кривой Рог) **25**; *С. Некрасов* (Череповец) **25**; *А. Ненов* (Плевен, НРБ) **22, 23**; *Ю. Николаевский* (Харьков) **25**; *А. Оленко* (Умань) **22, 25**; *Д. Орлов* (Владимир) **22, 25**; *Д. Першеев* (Москва) **23**; *К. Порайко* (Винница) **28, 35**; *А. Родионов* (Москва) **22, 23, 33**; *В. Романов* (Москва) **22, 23, 33, 35**; *Л. Рудый* (Кировск Мурманской обл.) **23, 25, 33, 35**; *Е. Рухлин* (Винница) **28**; *В. Садовский* (Ташкент) **23, 32, 33**; *А. Свиридов* (Москва) **25, 28, 32, 33, 35**; *А. Семенов* (Саратов) **23**; *Ф. Серженко* (Запорожье) **25**; *Р. Сефибеков* (с. Кашкент ДАССР) **32**; *О. Смирнов* (Остров) **23**; *В. Старобин* (Северодонецк) **32**; *С. Струков* (Воронеж) **22, 25, 28, 30, 32**; *А. Сурков* (Ленинград) **23**; *И. Терещак* (Стражске, ЧССР) **30**; *С. Типцов* (Киев) **23, 25, 30**; *М. Титаренко* (Винница) **35**; *Н. Титаренко* (Винница) **28**; *Р. Угриновский* (Хмельник) **25, 28**; *Н. Федин* (Омск) **25**; *Б. Фридман* (Москва) **22, 33**; *С. Хирман* (Киев) **23**; *Л. Христоф* (София, НРБ) **32, 33**; *В. Хрычиков* (Севастополь) **23**; *С. Цонев* (София, НРБ) **23, 25, 32**; *С. Чернышев* (Александров) **32**; *В. Шабунин* (Москва) **23, 25**; *С. Шкарин* (Москва) **25, 28, 30**; *Е. Шульман* (Вологда) **22**; *У. Эммус* (с. Тюки ЭССР) **25, 32**; *Л. Эрдеш* (Будапешт, ВНР) **22, 28, 33, 35**; *С. Юровский* (Мытищи) **23, 25, 32, 33, 35**.

Физика

Большинство читателей, приславших решения, справились с задачами **Ф748, Ф754, Ф758** и **Ф761**. Остальные задачи решили: *О. Андреев* (Киев) **59, 60**; *А. Бабиян* (Москва) **49, 52, 56, 60, 62**; *Л. Байрак* (Белгород) **57**; *В. Барабанов* (Севастополь) **57**; *Г. Баранов* (Донецк) **52, 55, 56, 59—62**; *Ю. Бриль* (Днепропетровск) **50, 55—57, 59, 60**; *М. Бродицкий* (Кишинев) **53**; *В. Будилов* (Кирово-Чепецк) **55—57**; *В. Булавас* (Паневежис) **49**,

(Продолжение см. на с. 41)

Л. Баканина

Законы Ньютона

Основные законы динамики были установлены около трехсот лет тому назад великим английским ученым Исааком Ньютоном (1643—1727). Ньютон сформулировал их следующим образом (А. Г. Дорфман. «Всемирная история физики». М., «Наука», 1974):

Закон I. *Всякое тело продолжает сохранять свое состояние покоя или равномерного прямолинейного движения, поскольку оно не принуждается приложенными силами изменять это состояние.*

Закон II. *Изменение (количества) движения пропорционально приложенной движущей силе и происходит по направлению той прямой, по которой эта сила действует.*

Закон III. *Действие всегда встречает равное противодействие, или воздействия двух тел друг на друга между собой равны и направлены в противоположные стороны.*

За 300 лет эти законы многократно подвергались экспериментальной проверке, и никаких нарушений обнаружено не было. Уточнялись лишь границы их применимости и вносились поправки, необходимые для областей микромира и скоростей, близких к скорости света.

Очевидно, что первый закон, по существу, постулирует существование таких систем отсчета (связанных с материальными объектами), в которых справедливы второй и третий законы Ньютона. Эти системы отсчета называют инерциальными.

Третий закон утверждает, что сила всегда является результатом взаимодействия двух каких-то тел. Если рассмотреть все тела, которые взаимодействуют с исследуемым телом, можно определить все силы, на него действующие. В современной физике силы взаимодействия делят на четыре больших класса: гравитационные, электромагнитные, сильные и слабые (два последних класса относятся к ядерным взаимодействиям). В механике, кроме гравитационных сил, принято выделять силы упругости и силы трения. По происхождению две последние силы — электромагнитные, но каждая из них имеет свои особенности и потому рассматривается отдельно.

Основным является, конечно, второй закон, который в настоящее время чаще всего записывается в виде

$$\vec{F}=m\vec{a},$$

где $\vec{F}$ — действующая на тело сила, m — масса тела и $\vec{a}$ — приобретаемое телом ускорение. Если известны все действующие силы, с помощью этого закона можно найти ускорение тела, а следовательно, скорость и координаты в любой момент времени.

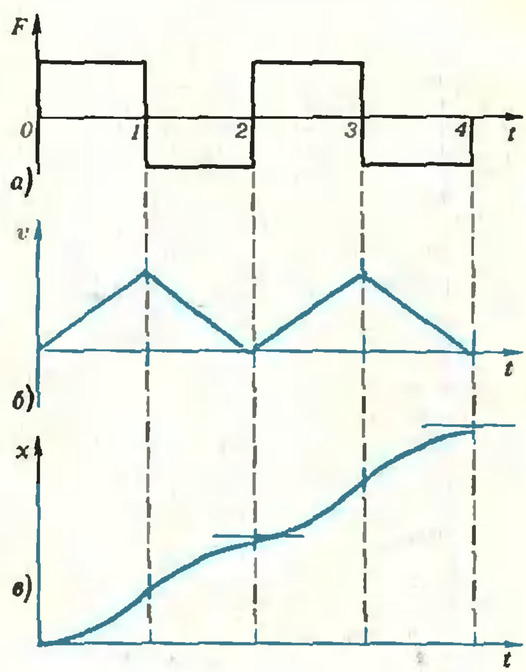


Рис. 1.

Поясним сказанное на конкретных задачах. Большинство из них предлагалось на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт.

Задача 1. *Сила, действующая на тело, периодически меняет свое направление на противоположное (рис. 1, а). Как движется тело под действием такой силы?*

Рассмотрим, как зависят от времени скорость тела и его перемещение вдоль линии действия силы (пусть это будет ось X). Для определенности будем считать, что начальные скорость и координата равны нулю.

На участке *0—1* сила постоянна и по модулю, и по направлению; следовательно, движение тела равноускоренное: скорость меняется пропорционально времени, а перемещение — пропорционально квадрату времени. В таком случае график скорости (точнее — ее проекции v на выбранное направление) представляет собой прямую, проходящую через начало координат (рис. 1, *б*), а график перемещения (вернее — координаты x) — параболу, вершина которой находится в начале координат (рис. 1, *в*).

На участке *1—2* сила постоянна, но направлена в противоположную сторону. Скорость линейно падает со временем и в точке *2* обращается в нуль (время действия силы такое же, как на первом участке; значит, такое же и изменение количества движения). График координаты на этом участке — парабола, у которой вершина находится в точке *2*. В точке *1* происходит плавный переход одной параболы в другую, так как разрыва скорости в этой точке нет.

Дальше рассмотрение ведется аналогично. Как видно из полученных графиков, скорость нигде не меняет знак, лишь периодически обращается в нуль, а координата все время увеличивается. Другими словами, тело все время удаляется от первоначального положения, его движение вовсе не является периодическим, хотя именно такой ответ часто приходится слышать от абитуриентов на вступительных экзаменах.

Задача 2. *Два тела массой $M_1=7$ кг и $M_2=5$ кг связаны нитью и лежат на горизонтальном столе (рис. 2, а). К ним через блок, укрепленный на краю стола, подвешивают третье тело массой $M=1$ кг. Коэффициент трения между первыми двумя телами и столом $\mu=0,1$. Определите натяжение обеих нитей и силы трения, действующие на тела. Как изменится ответ, если $M=1,5$ кг?*

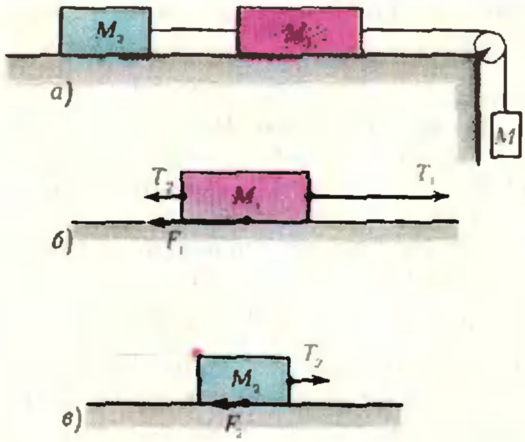


Рис. 2.

Так как значение силы трения существенно зависит от того, движется или покоится тело, прежде всего выясним, что происходит с данной системой тел. Очевидно, тела будут двигаться, если сила тяжести Mg больше максимальной силы трения покоя $F_{max}=\mu(M_1+M_2)g$.

В первом случае $Mg=10$ Н, а $F_{max}=12$ Н; следовательно, движения не возникает. При этом натяжение первой нити, перекинутой через блок, равно

$$T_1=Mg=10 \text{ Н}.$$

Рассмотрим силы, действующие на тело массой M_1 (рис. 2, *б*). Так как $T_1=10 \text{ Н}>\mu M_1 g=7$ Н, сила трения достигает своего максимального значения

$$F_1=\mu M_1 g=7 \text{ Н}.$$

Эта сила не может уравновесить натяжение T_1 первой нити, и вторая нить тоже натягивается. Ее натяжение равно

$$T_2=T_1-F_1=3 \text{ Н}.$$

На тело массой M_2 действуют две силы: натяжение нити T_2 и сила трения F_2 (рис. 2, *в*). Так как $T_2=3 \text{ Н}<\mu M_2 g=5$ Н, сила трения покая F_2 уравновешивает натяжение нити:

$$F_2=T_2=3\ \text{Н}.$$

Во втором случае $Mg=15$ Н; следовательно, $Mg>F_{max}$, и система тел движется как единое целое. При этом силы трения, действующие на тела, есть силы трения скольжения. Следовательно,

$$F_1=\mu M_1 g=7\ \text{Н и } F_2=\mu M_2 g=5\ \text{Н}.$$

Обозначим модуль ускорения всех тел через a и запишем второй закон Ньютона для каждого из тел, выбрав соответствующую ось координат:

$$Mg-T_1=Ma,$$
$$T_1-F_1-T_2=M_1a,$$
$$T_2-F_2=M_2a.$$

Решая эту систему уравнений, находим

$$T_1=Mg\frac{(M_1+M_2)\ (1+\mu)}{(M+M_1+M_2)}=14{,}65\ \text{Н},$$

$$T_2=Mg\frac{M(1+\mu)}{(M+M_1+M_2)}=6{,}12\ \text{Н}.$$

Распространенная ошибка абитуриентов — и в первом случае используется решение, пригодное только для движущейся системы.

Задача 3. *По «экватору» внутренней поверхности сферической оболочки массой M с постоянной по модулю скоростью движется небольшой шарик массой m, совершая полный оборот за время T (рис. 3). Считая, что внешних сил нет и трение отсутствует, определите, с какой силой шарик давит на сферу. Расстояние между центрами тяжести шарика и сферы равно d.*

Поскольку на систему «сфера — шарик» внешние силы не действуют, центр масс этой системы должен покоиться (что непосредственно следует из законов Ньютона). Это означает, что движутся не только шарик, но и сфера, причем оба они вращаются вокруг оси, проходящей через центр масс системы.

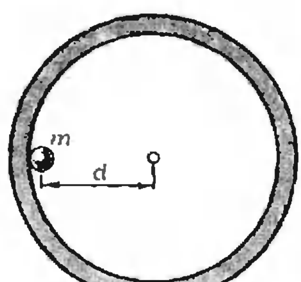


Рис. 3.

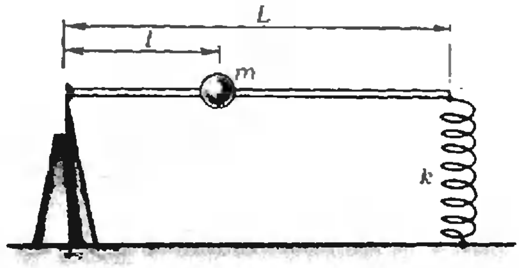


Рис. 4.

Обозначим расстояние от шарика до центра масс через r, тогда

$$mr=M(d-r),\ \text{и}\ r=d\frac{m}{M+m}.$$

По третьему закону Ньютона сила, с которой шарик давит на сферу, равна по модулю силе, с которой сфера действует на шарик. Она и сообщает шарику центростремительное ускорение

$$a_ц=\omega^2 r=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\frac{Md}{(M+m)}$$

Итак, искомая сила равна по модулю

$$F=ma_ц=\frac{4\pi^2 Mmd}{T^2(M+m)}$$

и направлена по радиусу от центра вращения.

Задача 4. *Невесомая штанга длиной L одним концом закреплена в идеальном шарнире, а другим опирается на пружину жесткостью k (рис. 4). Определите период малых колебаний штанги в зависимости от положения l на ней груза массой m.*

Пусть груз сместился по вертикали на расстояние x. При этом пружина деформируется на $x_1=xL/l$, и со стороны пружины на конец штанги действует сила $F_1=kx_1=kxL/l$. Штанга невесома, поэтому суммарный момент сил, действующих на нее, должен быть равен нулю (иначе она приобрела бы бесконечно большое угловое ускорение):

$$F_1L=F_2l,$$

где F_2 — сила, действующая на штан-

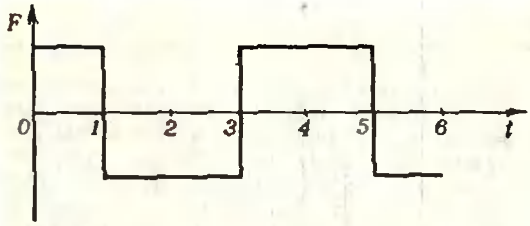


Рис. 5.

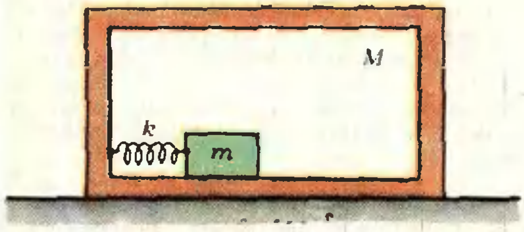


Рис. 6.

гу со стороны груза. Следовательно, на груз со стороны штанги действует возвращающая сила, равная

$$F_2 = F_1 \frac{L}{l} = k\left(\frac{L}{l}\right)^2 x.$$

Запишем для груза второй закон Ньютона:

$$m\vec{a} = \vec{F}, \text{ или } ma_x = -k\left(\frac{L}{l}\right)^2 x.$$

Это — уравнение движения, описывающее свободные гармонические колебания. Оно аналогично уравнению движения груза на пружине, только роль жесткости пружины здесь играет выражение $k_1 = k(L/l)^2$.

Таким образом, период колебаний груза, а значит, и невесомой штанги, равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1}} = 2\pi\frac{l}{L}\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Упражнения

1. Как будет двигаться тело, если действующая на него сила изменяется со временем так, как показано на рисунке 5?

2. Три бруска одинаковой массой $M = 5$ кг лежат на горизонтальном столе. Бруски связаны нитями, которые рвутся при натяжении $T = 20$ Н. Коэффициенты трения брусков о стол равны, соответственно, $\mu_1 = 0{,}3$, $\mu_2 = 0{,}2$ и $\mu_3 = 0{,}1$. Брусок *3* тянут с силой F, которую постепенно увеличивают. Которая из нитей, скрепляющих бруски, порвется, и при какой минимальной силе F это произойдет? Как изменится ответ, если силу F прикладывать к бруску *1*?

3. Груз, подвешенный на нити длиной L, равномерно движется по окружности в горизонтальной плоскости. Найдите период обращения груза, если нить отклонена от вертикали на угол α.

4. Коробка массой M стоит на горизонтальном столе (рис. 6). Коэффициент трения между столом и коробкой μ. Внутри коробки лежит тело массой m, которое может без трения двигаться по дну коробки. Оно прикреплено к стенке коробки пружиной жесткостью k. При какой амплитуде колебаний тела коробка начнет двигаться по столу?

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 32)

55, 60; *М. Верховодов* (Киев) 49, 53, 56, 57, 59; *М. Гаджибабаев* (Махачкала) 57; *И. Гайович* (Киев) 53, 59, 60; *Д. Голенков* (Долгопрудный) 60; *Э. Горячковский* (Кишинев) 52; *М. Гостев* (Липецк) 49, 50, 52, 56, 60; *А. Грабчак* (с. Ободовка Винницкой обл.) 60; *О. Гришин* (Тула) 50, 56, 60; *Л. Доросинский* (п. Черноголовка Московской обл.) 49, 56, 59, 60, 62; *А. Дубровский* (Харьков) 59; *А. Дунаевский* (Киев) 50, 52—57, 59, 60, 62; *М. Дьячков* (п. Черноголовка Московской обл.) 49, 50, 55, 56, 60; *С. Ефимов* (Баку) 56, 57; *В. Житомирский* (Харьков) 49, 52, 53, 55, 56, 59, 60, 62; *Р. Жямайтис* (Вильнюс) 49, 50, 52, 59, 60, 62; *Д. Зайцев* (Горький) 49, 53, 56; *Ю. Звегинцев* (Харьков) 52, 55—57, 59, 62; *А. Зенков* (Свердловск) 57; *М. Зиманов* (Алма-Ата) 59, 60; *Д. Каледин* (Москва) 57, 59, 60; *И. Калиновский* (Киев) 56, 60, 62; *Е. Канцыпер* (Таллин) 57, 60; *А. Карнаухов* (Ижевск) 52; *С. Кастелли* (Болград) 53, 57, 59, 60, 62; *Ю. Кившарь* (Харьков) 57; *В. Кидысюк* (Рязань) 51—53, 56, 57, 62; *М. Козаченко* (Ровно) 55, 60; *А. Комов* (Александров) 49—52, 57, 59, 60, 62; *А. Корчагин* (Красноармейск) 49, 53, 56, 57, 59, 60; *Н. Косматов* (Москва) 51; *В. Криман* (Винница) 53—57, 59, 60; *И. Крылов* (Куйбышев) 57; *Д. Купцов* (Москва) 53, 55, 56, 59, 60; *Н. Кухаркин* (Москва) 56, 59, 60; *Г. Ландсберг* (п. Протвино Московской обл.) 53—55, 57, 59, 60; *М. Ларионов* (Свердловск) 56; *С. Лиханский* (Херсон) 60; *А. Лихачев* (Барнаул) 56; *О. Лопин* (Фрунзе) 55, 56; *Д. Макаров* (п. Черноголовка Московской обл.) 51, 52, 56, 57, 60; *К. Макарчук* (Киев) 62; *А. Максимов* (Новосибирск) 56, 60, 62; *А. Малай* (Каушаны) 60; *А. Маркович* (Белград, СФРЮ) 52, 55, 57; *Л. Маркович* (Брест) 50, 52, 56, 57, 60, 62; *В. Маслов* (Омск) 59, 60; *И. Медков* (Москва) 49, 51; *В. Мороз* (Минск) 55—57, 60; *С. Мусаев* (Баку) 59, 60; *Д. Набутовский* (Новосибирск) 56, 57, 59; *А. Носков* (Москва) 59; *Р. Овчарек* (Шецин, ПНР) 60; *А. Охапкин* (Чита)

(Окончание см. на с. 55)

Стандартные приемы программирования.

Урок 3. Переработка массивов на месте

Сравните свои решения подготовительных задач к этому уроку (см. «Квант» № 11, Урок 2) с приведенными здесь. Варианты *а*) — это правильные решения, варианты *б*) — это типичные ошибки (программы не дадут желаемого результата), варианты *в*) работать будут, и все же их нельзя признать приемлемыми.

Так же, как на прошлом уроке, давайте посмотрим, что общего в условиях задач. Главным общим моментом является то, что **результат должен получиться на том же месте, где находились исходные данные.** Теперь посмотрите на расчетные формулы в условиях задач (читатель простит употребление программистского знака «присваивание» вместо математического знака «равно», оно здесь естественно) и сравните расчетные формулы с решениями *б*): эти решения — «дословные» переводы формул на язык программирования. Мы столкнулись с той же проблемой, что и на прошлых уроках: разницей в правилах разговора на языке математики и языке программирования.

Когда математик пишет формулу транспонирования матрицы, то есть отражения ее элементов относительно диагонали (для всех i, j $a'_{ij}:=a_{ji}$) он, по-видимому, имеет в виду, что по команде «Алле-оп!» все элементы матрицы разом подпрыгнут вверх и тут же все разом опустятся на свои места, но уже с измененными значениями. Но ЭВМ не может делать все сразу*): процесс обработки данных происходит *в пространстве* и *во времени*: сначала обрабатывается один элемент, затем другой и т. д. И к тому времени, когда начнется обработка i-го элемента, для которой нужно *старое* значение k-го элемента, k-й элемент

*) Некоторые современные ЭВМ уже научились и этому, но в языке паскаль такие возможности не отражены.

Решения подготовительных задач

а)	*б*)

Задача 1 (среднее арифметическое и среднее геометрическое)
for *i*:=1 **to** *n* **do**
begin *d*:=*a*[*i*];
  a[*i*]:=(*a*[*i*]+*b*[*i*])/2;
  b[*i*]:=*sqrt*(*d***b*[*i*])
end;
Более быстрый вариант:
for *i*:=1 **to** *n* **do**
begin *ai*:=*a*[*i*]; *bi*:=*b*[*i*];
  a[*i*]:=(*ai*+*bi*)/2;
  b[*i*]:=*sqrt*(*ai***bi*)
end;
	for *i*:=1 **to** *n* **do**
	begin *a*[*i*]:=(*a*[*i*]+*b*[*i*])/2;
	  b[*i*]:=*sqrt*(*a*[*i*]**b*[*i*])
	end;

Задача 2 (деление на диагональный элемент)
for *i*:=1 **to** *n* **do**
begin *d*:=*a*[*i*,*i*];
  for *j*:=1 **to** *n* **do**
    a[*i*, *j*]:=*a*[*i*, *j*]/*d*;
end;
	for *i*:=1 **to** *n* **do**
	  for *j*:=1 **to** *n* **do**
	    a[*i*, *j*]:=*a*[*i*, *j*]/*a*[*i*, *i*];

Задача 3 (транспонирование)
for *i*:=1 **to** *n*−1 **do**
  for *j*:=*i*+1 **to** *n* **do**
  begin *d*:=*a*[*i*, *j*];
    a[*i*, *j*]:=*a*[*j*, *i*];
    a[*j*, *i*]:=*d*
  end;
	for *i*:=1 **to** *n* **do**
	  for *j*:=1 **to** *n* **do**
	    a[*i*, *j*]:=*a*[*j*, *i*];
	второе решение:
	for *i*:=1 **to** *n* **do**
	  for *j*:=1 **to** *n* **do**
	  begin *d*:=*a*[*i*, *j*];
	    a[*i*, *j*]:=*a*[*j*, *i*];
	    a[*j*, *i*]:=*d*
	  end;

уже может успеть получить новое значение. Аналогично, мы привыкли, что математическую фразу «для всех i при $i \in M$» мы переводим на язык программирования циклом с параметром i, пробегающим множество M. Чаще всего этот перевод правильный, но бывают и исключения, одним из которых часто является переработка массивов на месте. Посмотрите на второе решение *б*) задачи 3 и попробуйте понять, что сделает программа и почему в результате ее работы матрица останется в неизменном виде.

Итак, стало понятно, что если один из элементов перерабатываемого на месте массива нужен для вычисления нового значения другого элемента, то его надо как-то сохранить. Простейшее решение — снять копию с исходного массива и записать результат в другое место — на практике часто не годится. Программируя задачу больших размеров (или задачу не очень больших размеров, но на ЭВМ с небольшой памятью), вы можете столкнуться с ситуацией, когда массив занимает почти всю память и на копию просто нет места. В этом и заключается недостаток вариантов *в*): при больших размерах массивов программе не хватит памяти. Однако, как показывают варианты *а*), необходимости в копировании массива нет: вполне можно обойтись одним дополнительным элементом (в программах — это переменная с именем *d*) для сохранения значения, необходимого для вычисления нескольких новых значений.

Теперь можно сделать окончательные выводы.

в)

```
for i:=1 to n do
begin c[i]:=a[i];
  a[i]:=(a[i]+b[i])/2;
  b[i]:=sqrt(c[i]*b[i])
end;
```

```
for i:=1 to n do
begin d[i]:=a[i,i];
  for j:=1 to n do
  a[i,j]:=a[i,j]/d[i];
end;
```

```
for i:=1 to n do
  for j:=1 to n do
    c[j,i]:=a[i,j];
for i:=1 to n do
  for j:=1 to n do
    a[i,j]:=c[i,j];
```

1. При переработке массивов на месте необходимо принимать меры к сохранению значений элементов, нужных при последующих вычислениях. Как правило, для этого достаточно ОДНОГО вспомогательного элемента.

В крайнем случае, когда одного элемента явно мало, можно взять массив меньшей размерности (например, одномерный массив вместо матрицы). Разумеется, бывают случаи, когда массив на месте обработать нельзя, и тогда приходится снимать копию.

2. Если элементы обрабатываются не в порядке их расположения в массиве, то циклы перебора элементов массива следует организовать специальным образом.

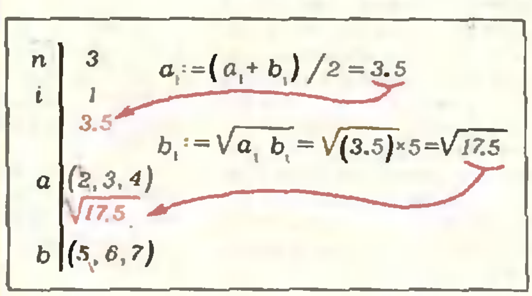
Например, в задаче 3 одновременно обрабатываются пары элементов, симметричные относительно диагонали, поэтому организация цикла отличается от «дословного» перевода математической формулы.

Посмотрим теперь, почему начинающие программисты не видят ошибки в вариантах *б*), и научимся правильно делать самостоятельную проверку решений. Проверяя небольшой фрагмент программы, программист мысленно пытается выполнить соответствующие действия, но при этом часто делает не то, что будет делать программа, а то, что он хочет, чтоб она делала. Для контроля мелких фрагментов можно порекомендовать проверять программу на небольших конкретных примерах, применяя так называемую *ручную прокрутку*, то есть пооперационное выполнение программы вручную. Помните, что ручная прокрутка требует аккуратности и внимательности.

Проверим, например, вариант *б*) задачи 1. Для этого возьмем небольшие массивы, скажем $a=(2, 3, 4)$, $b=(5, 6, 7)$, и прокрутим программу $n=3$, $i=1$, $a[1]=$ $=(2+5)/2=3{,}5$, $b[1]=\sqrt{2\cdot 5}=\sqrt{10}$ и т. д. Это и есть та самая типичная ошибка: мы сделали то, что сами хотим от ЭВМ, а не то, что сделает ЭВМ на самом деле!

Правильная прокрутка выполняется так: *а*) выписывается таблица всех действующих в проверяемом фрагменте идентификаторов и их значений, *б*) на каждом шаге старое значение зачеркивается и заменяется новым.

Прокрутим тот же пример:



Ошибка стала видна на первом же шаге.

И, наконец, последний вопрос: не ухудшается ли программа по скорости при стремлении обойтись без вспомогательных массивов? Ответ неоднозначен. В механике есть «золотое правило»: во сколько раз выигрываем в силе, во столько раз проигрываем в расстоянии. В программировании есть свое «золотое правило»: выигрываем в скорости — теряем в памяти, и наоборот. Но, в отличие от механики, в программировании бывают исключения. Как отмечалось на прошлом уроке, индексация — это трудоемкая операция, и поэтому *все программы вариантов а) работают быстрее программ вариантов в)*. Но в общем случае запрет использовать вспомогательную память замедляет программу и требует от программиста некоторой хитрости и хорошего комбинационного зрения. Так же, как хоккеист должен уметь владеть шайбой на максимальной скорости, а при необходимости уметь обвести соперника «на пятачке» (не сходя с места), программист должен уметь «выжать» из программы максимальную скорость, а при необходимости «сработать на пятачке» (без дополнительной памяти). Для этого он должен *постоянно совершенствовать и расширять свой арсенал технических приемов*.

Контрольное задание

3.1. Симметрично переверните массив $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то есть поменяйте местами элементы a_1 и a_n, a_2 и a_{n-1} и т. д.

3.2. Выполните циклический сдвиг массива на k элементов: a_1 должен перейти на место a_{k+1}, a_2 — на место a_{k+2} и т. д., при этом элементы, вышедшие за границу массива, переходят в его начало: a_{n-k+1} в a_1, a_{n-k+2} в a_2 и т. д.

Обе задачи сделайте в двух вариантах: с записью результата в другой массив и с записью в тот же (без вспомогательного массива). Качественно оцените, какой вариант быстрее.

Подготовительные задачи к уроку 4

1. Даны два массива длины n и m, упорядоченные по возрастанию (в обоих массивах каждый элемент меньше своего соседа справа), и пустой массив длины $n+m$, в который надо переписать элементы двух данных массивов, сохраняя упорядоченность. При этом следует выбирать по одному элементу из исходных массивов и помещать этот элемент сразу на свое место.

2. Дан основной массив и два пустых массива. Выберите в основном массиве ненулевые элементы и рассортируйте их: положительные запишите в один из пустых массивов, отрицательные — в другой. В конце запишите в результирующие массивы по одному нулю, «закрывающему» массив.

3. Даны два массива длины n: (a_i) и (b_i). Вычислите сумму $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ (эта сумма — так называемое «скалярное произведение n-мерных векторов»).

4. Дан массив a длины $2n$ и массив b длины n. Перепишите в массив b элементы с четными номерами из массива a: $a_{2i} \to b_i$.

Традиционные вопросы: что общего в условиях и решениях этих задач? чем задачи 1 и 2 отличаются от задач 3 и 4?

Новые книги

В этом номере мы публикуем краткие аннотации на книги по физике, выпускаемые в 1983 году издательством «Наука» в серии Библиотечка «Квант». В скобках мы указываем квартал, в котором предполагается выход книги в свет. Большинство книжных магазинов, распространяющих литературу данной тематики, а также отделы «Книга — почтой» принимают без ограничений предварительные заказы (открытки) на эти книги.

1. Б. С. Бокштейн. *Атомы блуждают по кристаллу* (I кв.). Цена 40 к.

Эта книга — о диффузии. Именно диффузия лежит в основе многих сложных процессов, протекающих в твердых телах и определяющих такие свойства тел, как прочность и долговечность. Книга рассказывает о том, как перемещаются атомы в кристаллах, каким строгим законам подчиняются блуждания атомов, а также о том, к чему приводит нарушение этих законов — о диффузионных катастрофах.

2. А. В. Бялко. *Наша планета — Земля* (I кв.). Цена 40 к.

Глобальные явления, происходящие на Земле, во многом определяются природой нашей звезды — Солнца. Ему посвящена одна из глав книги, в которой рассказывается о строении Солнца, о термоядерных реакциях, происходящих в его недрах, о солнечном ветре. Остальные главы книги посвящены непосредственно Земле. Чем определяется строение атмосферы Земли, от чего зависит глобальный климат Земли и чем определяется климат местный, как течениями переносятся воды океанов, почему возникают циклоны и антициклоны — об этом можно прочитать в книге.

3. А. А. Михайлов. *Земля и ее вращение* (III кв.). Цена 40 к.

Автор — академик АН СССР, много лет проработавший в Пулковской обсерватории,— популярно рассказывает о планете, на которой мы живем: о форме Земли, ее массе, средней плотности. Много места уделено вопросу вращения Земли вокруг своей оси и обращению ее вокруг Солнца. Специальные главы посвящены открытию земных полюсов и их движению, морским приливам и их влиянию на вращение Земли.

4. С. Р. Филонович. *Самая большая скорость* (II кв.). Цена 40 к.

Скорость света принадлежит к небольшой группе мировых, или фундаментальных, постоянных. Она входит в формулировки физических законов, относящихся к самым, казалось бы, далеким разделам физики. Более трехсот лет насчитывает история измерений скорости света. Новые измерения не только приводили к уточнению значения скорости света, но часто опровергали или подтверждали физические теории, способствовали прогрессу техники. В книге прослеживается история измерений этой замечательной константы.

5. М. Д. Франк-Каменецкий. *Самая главная молекула* (I кв.). Цена 40 к.

Подобно тому, как выяснение строения атома привело к рождению квантовой физики, открытие строения ДНК — самой главной молекулы живой природы — привело к появлению новой молекулярной биологии. В книге рассказано о физических, химических и биологических свойствах ДНК (в частности, о ДНК как носителе генетической информации). Большое внимание уделено открытиям последних лет, приведшим к возникновению генной инженерии.

6. В. С. Эдельман. *Вблизи абсолютного нуля* (I кв.). Цена 40 к.

В книге рассматривается круг вопросов, которыми занимается физика низких температур. Рассказывается о том, как достигаются температуры, близкие к абсолютному нулю, и какие явления наблюдаются при низких температурах (сверхтекучесть, сверхпроводимость), как электроны движутся в жидком гелии и что такое квантовый кристалл. В книге описаны также технические применения сверхпроводимости, такие как создание сильных магнитных полей и высокодобротных колебательных систем.

* * *

Недавно в серии Библиотечка «Квант» вышла в свет книга:

М. И. Каганов, В. М. Цукерник. *Природа магнетизма*. Цена 40 к.

Хотя магниты были открыты на заре цивилизации, понимание природы магнетизма пришло только недавно — после создания квантовой механики. Один из основоположников этой науки Дирак высказал убеждение, что в природе должны быть магнитные заряды. Он назвал их монополями. Много усилий потратили ученые на поиски монополей, но обнаружены они не были. Однако микроскопические источники магнитного поля в природе есть — об этом подробно рассказывается в одной из глав книги. В других главах объясняется, почему различные тела ведут себя по-разному, если их подвергнуть воздействию магнитного поля, что такое магнетики и почему важное место среди них занимают магниты, или ферромагнетики — макроскопические источники магнитного поля.

Л. Владимирова

Задачи Новосибирской ФМШ

В конце 1981 года сибирские физики преподнесли школьникам нашей страны хороший подарок — новый задачник по физике*). Основу его составляют задачи, предлагавшиеся на занятиях в физико-математической школе при Новосибирском государственном университете, на различных олимпиадах и в летних школах.

Задачник этот имеет свое собственное лицо. Познакомиться и поработать с ним будет полезно всем, кто хочет заниматься физикой серьезно, а в дальнейшем и профессионально.

В книге собрано свыше двух тысяч задач различной сложности: от «обычных» задач, которые можно использовать для проверки усвоения разделов школьной программы, до задач, требующих сообразительности, нестандартного мышления. Для большинства задач приводятся только ответы. Все это позволит использовать книгу для занятий в классе, в работе физических кружков, на школьных олимпиадах, для самостоятельных размышлений.

Есть в книге задачи качественные, требующие ясного понимания физических явлений и процессов. Возможно, над этими задачами придется довольно долго подумать. Действительно, не так уж просто дать обоснованный ответ на вопрос: когда быстрее высохнет белье, развешенное в кухне,— если открыть форточку, тогда как на улице моросит холодный осенний дождь, или если ее не открывать? Или на такой вопрос: почему два легких тела, плавающие на поверхности, оба смачиваемые или не смачиваемые водой, притягиваются друг к другу, а в случае, когда одно тело водой смачивается, а другое нет,— отталкиваются?

Бо́льшая же часть задач требует не только рассуждений, но и аккуратных вычислений, построения графиков физических закономерностей. А вычислить школьник может очень многое — и скорость, которую необходимо сообщить телу, чтобы оно улетело из туманности Андромеды; и минимальное и максимальное давления внутри сферической капли жидкости, плавающей в другой жидкости; и максимальное магнитное давление на поверхность сверхпроводника; да и мало ли что еще!

Практически каждая из 13 глав книги содержит задачи по темам, обычно не включаемым в школьные задачники. Для примера можно указать такие темы, как «Преобразования Галилея», «Движения идеальной и вязкой жидкостей», «Вероятность термодинамического состояния», «Сверхпроводники в магнитном поле», «Излучение и отражение электромагнитных волн». Уже только одно это перечисление говорит о том, что авторы затрагивают важные и глубокие вопросы физики.

Самые трудные задачи, задачи с нестандартными формулировками (а их в сборнике довольно много) — чаще всего и самые интересные. Авторы сборника надеются, что решение таких задач будет побуждать школьников к чтению популярных (а может быть и не только популярных!) книг, к более глубокому изучению физики.

Ю. Брук

*) И. И. Воробьев, П. И. Зубков, Г. А. Кутузова, О. Я. Савченко, А. М. Трубачев, В. Г. Харитонов. *Задачи по физике* (учебное пособие). (М., «Наука», 1981). Цена 95 коп.

А. Абрамов, А. Савин

XXIII Международная математическая олимпиада

Добрая традиция — в середине лета заканчивать сезон математических соревнований школьников Международной математической олимпиадой (ММО) — продолжена и в 1982 году: с 5 по 14 июля венгерские города Будапешт и Цеглед принимали участники XXIII олимпиады.

Ребятам, добившимся права участия в этой олимпиаде, пришлось труднее, чем их старшим товарищам, выступавшим ранее. В связи с быстрым ростом числа стран-участниц (в Венгрии их было уже 30 — это рекорд олимпиад) численность команд была сокращена с 8 до 4 участников, и естественно, что уровень требований при отборе в команды повысился; возросла и ответственность, а следовательно, и нагрузки. Поэтому результат каждого из участников нашей команды, сумевших преодолеть отборочные барьеры, а затем достойно выступить в Будапеште (все четверо награждены медалями, в неофициальном зачете команда опередила многие сильные коллективы и заняла второе место), заслуживает высокой оценки. Но обо всем по порядку.

Система отбора команды в этом году была несколько изменена. В зимние каникулы в поселке Черноголовка под Москвой состоялся первый недельный сбор, на котором после серии контрольных заданий из 12 победителей Всесоюзных олимпиад последних лет были отобраны 6 кандидатов в команду СССР. Окончательный состав был определен в конце месячного тренировочного сбора, прошедшего в июне также в Черноголовке. Членами сборной СССР стали К. Матвеев (Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ), Г. Перельман (Ленинград, с. ш. № 239), А. Спивак (Москва, ФМШ № 18 при МГУ) и В. Титенко (д. Блужа Минской обл.). Хорошо были подготовлены и запасные участники С. Матюшов и С. Самборский (Москва, ФМШ № 18 при МГУ) — они помогли команде, сами были готовы к участию в ММО и по праву стали до начала приемных экзаменов студентами механико-математического факультета МГУ. (Поскольку сроки проведения тренировочных сборов и ММО совпадают со сроками вступительных экзаменов в вузы, как члены команды, так и запасные участники зачисляются в выбранные ими вузы без экзаменов. Читатели, видимо, согласятся, что этот путь поступления не самый простой.)

На июньском сборе будущие участники ММО готовились по программе, разработанной в последние годы,— решали задачи, регулярно занимались спортом; культурная программа сбора тоже была обширной. В подготовке команды на всех этапах активно участвовали А. Земляков, Б. Ивлев, С. Конягин, В. Прасолов. Интересные и яркие занятия провели О. Ляшко, А. Разборов. Руководителями команды были А. М. Абрамов и Т. А. Сарычева.

Команда прибыла в Будапешт 7 июля. А с 6 по 8 июля в г. Цеглед международное жюри под председательством академика А. Часара (ВНР) заканчивало последний подготовительный этап — отбирало задачи для олимпиады, утверждало тексты переводов, оценивало задачи в баллах.

Как и в предыдущие годы, в каждый из двух дней олимпиады (9 и 10 июля) участникам отводилось по 4,5 часа на решение трех задач. Читатели могут принять заочное участие в ММО — попробовать за такое же время решить эти задачи и, конечно, записать решения. Тексты пяти задач приводятся в Задачнике «Кванта» (с. 18). Задачи М778 и М779 (эта задача, составленная А. Гришковым, предложена СССР) давались в первый день. Формулировка третьей задачи первого дня такова:

Функция $f(n)$ определена для всех натуральных n и принимает целые неотрицательные значения. Известно, что $f(n)$ удовлетворяет условиям: а) *при любых m и n $f(m+n)-f(m)-f(n)$ принимает значения 0 или 1*; б) $f(2)=0$; в) $f(3)>0$; г) $f(9999)=3333$. *Найти* $f(1982)$.

Задачи М776, М777, М780 — задачи второго дня. Полное решение каждой задачи оценивалось в 7 баллов.

Как всегда, свои предварительные оценки руководители команд защищали при обсуждении работ с координаторами, представителями страны-организатора, а после завершения координации жюри на заключительном заседании приняло решение о распределении призовых мест. Из 119 участников 10 человек, набравших от 37 до 42 очков, награждены первыми премиями и золотыми медалями; 20 участников, показавших результат от 30 до 36 очков, получили вторые премии и серебряные медали; третьи премии и бронзовые медали вручены 31 участнику за результат от 21 до 29 очков. Абсолютные победители олимпиады — Г. Перельман (СССР), Ле Ту Куок Тханг (Вьетнам) и Б. Хайбл (ФРГ) удостоены специальных призов, учрежденных командой Кувейта. Призы за решение отдельных задач не присуждались.

Личные результаты советских участников таковы: К. Матвеев, стабильно выступающий на всех олимпиадах, набрал 37 очков и заслуженно награжден золотой медалью; о классе Г. Перельмана говорит его результат — 42 из 42; один из победителей Всесоюзной математической олимпиады этого года А. Спивак набрал 30 очков и получил серебряную медаль; бронзовая награда (28 очков) у В. Титенко, результат Володи в творческом отношении заслуживает высокой оценки — он нашел блестящие решения обеих самых трудных задач.

По итогам олимпиады команды расположились в следующей последовательности (в скобках указано число очков, набранных командой): ФРГ (145), СССР (137), ГДР (136), США (136), Вьетнам (133), Венгрия (125), Чехословакия (115), Финляндия (113), Болгария (108), Великобритания (103), Румыния (99), Югославия (98), Польша (96), Нидерланды (92), Франция (89), Австрия (82), Канада (78), Израиль (75), Швеция (74), Австралия (66), Бразилия (66), Монголия (56), Греция (55), Бельгия (50), Куба (44), Колумбия (34), Алжир (23), Венесуэла (23), Тунис (19), Кувейт (4).

Существенно отметить, что командный зачет имеет подчеркнуто неофициальный характер. К сожалению, любая статья об олимпиаде неизбежно напоминает спортивный отчет, поскольку речь идет об очках, местах, медалях. Но к Международной олимпиаде, как, пожалуй, ни к каким другим соревнованиям, применим в полной мере олимпийский девиз «Главное — не победа, а участие». Пусть не каждый участник занял первое место, но в выигрыше остались все — новые страны начинают проводить национальные олимпиады, растет массовость олимпийского движения в математике, во всех странах мира увеличивается число ребят, решающих сначала хитрые олимпиадные задачки, а затем и серьезные математические проблемы. Этим, наверное, и объясняется престижность ММО, постоянный рост числа стран-участниц (их стало уже больше, чем членов Международной федерации хоккея!).

Заканчивая обсуждение итогов, необходимо сказать о высокой оценке международным жюри работы венгерских математиков — организаторов олимпиады. Итоги показали, что рекомендации, подготовленные комиссией по отбору задач во главе с доктором Й. Пеликаном, четырехкратным победителем ММО в 1963—

Советские участники XXIII Международной математической олимпиады. Слева направо: В. Титенко, К. Матвеев, А. Спивак, Г. Перельман.

1966 г., позволили дать хорошо сбалансированный как по тематике, так и по трудности набор задач олимпиады. Четко работали координационные комиссии. Высокий профессионализм организаторов олимпиады лишний раз свидетельствует как об уровне венгерской математической школы, так и о большом опыте работы с юными математиками — напомним, что Венгрия одной из первых стран в мире начала еще в прошлом веке проводить математические олимпиады.

Гостеприимные хозяева помогли участникам ближе ознакомиться с Венгрией, ее историей и культурой. Надолго останутся в памяти экскурсии по Будапешту, который справедливо относят к числу красивейших городов мира. Состоялась поездка с купанием на озеро Балатон, прогулка на теплоходе по Дунаю, ставшему со времен Иоганна Штрауса менее голубым, но оставшемуся прекрасным. А привезенные сувениры — знаменитые «змея», «домино» и, конечно, «волшебный кубик» — будут напоминать участникам олимпиады о встрече с создателем этих игрушек Эрнё Рубиком.

Как всегда, обстановка на олимпиаде была самой теплой и дружественной. Участники со всех континентов (лишь Антарктида пока не была представлена) постоянно общались, рассказывали друг другу о своих странах, обменивались задачами и сувенирами.

Торжественное закрытие олимпиады состоялось 13 июля в актовом зале Садоводческого Университета Будапешта. XXIII олимпиада закончилась — для многих читателей «Кванта» начался новый олимпийский цикл.

13.IPhO'82

Л. Асламазов

XIII Международная физическая олимпиада

Олимпиада 1982 года проходила с 19 по 29 июня в Федеративной Республике Германии, в курортном городе Маленте близ Гамбурга. В ней приняло участие 17 стран: Австрия, Болгария, Венгрия, Вьетнам, ГДР, Греция, Италия, Нидерланды, Польша, Румыния, Советский Союз, Финляндия, Франция, ФРГ, Чехословакия, Швеция и Югославия. Впервые на олимпиаду приехали школьники из Австрии, Греции и Нидерландов. Таким образом, круг стран, участвующих в физической олимпиаде, в этом году расширился.

Как и в прежние годы, каждая страна выставила команду из пяти человек — учащихся общеобразовательных и профессиональных школ. Их возраст не превышал 20 лет. Каждую команду сопровождали два руководителя.

В состав команды нашей страны вошли:

Яан Калда (Таллин, с.ш. № 1),

Борис Макеев (Москва, с.ш. № 361),

Александр Панасюк (Одесса, с.ш. № 117),

Владимир Ухов (Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ),

Павел Цветков (Москва, ФМШ № 18 при МГУ).

Руководителями команды были О. Ф. Кабардин (заведующий лабораторией Научно-исследовательского института содержания и методов обучения Академии педагогических наук СССР) и М. В. Грабиленков (начальник отдела ученого методического совета Министерства просвещения СССР).

Олимпиаду открыл министр образования и науки ФРГ Б. Енгольм. Он огласил приветствие участникам Президента ФРГ К. Карстенса. Об истории международных физических олимпиад рассказал почетный гость олимпиады профессор Кунфалви (Венгрия), который принимал участие во всех предыдущих олимпиадах.

Как обычно, олимпиада проводилась в два тура — теоретический и экспериментальный. Дни соревнований были отделены друг от друга днем отдыха. Для решения задач каждого тура отводилось пять часов. При этом разрешалось пользоваться электронными калькуляторами, которые получили все участники в подарок от организаторов олимпиады. Тексты задач были написаны на четырех языках: английском, немецком, русском, французском.

Приведем условия предлагавшихся задач.

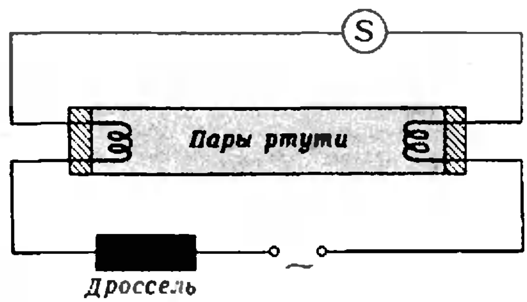


Рис. 1.

Красивый рисунок на эмблеме олимпиады имеет вполне определенный физический смысл — он иллюстрирует обтекание вращающегося цилиндра жидкостью (или газом). На рисунке ясно видно, как из-за вращения цилиндра скорость жидкости внизу оказывается меньше, чем вверху. В соответствии с законом Бернулли, там, где скорость течения жидкости меньше, ее давление больше. Поэтому на цилинд будет действовать подъемная сила, перпендикулярная направлению течения. Этот эффект был открыт в 1852 году немецким физиком Г. Магнусом.

Приведем любопытный пример практического использования эффекта Магнуса. В 1924 году на верфях города Киля была построена шхуна, на которой вместо мачт были установлены вращающиеся цилиндры. В результате обдувания их ветром возникала сила, приводящая шхуну в движение.

Теоретический тур

Задача 1. «Люминесцентная лампа».

Дана люминесцентная лампа, включенная в сеть по схеме, приведенной на рисунке 1. Частота переменного напряжения в сети $\nu = 50$ Гц. Измеряются следующие величины: сетевое напряжение $U = 228{,}5$ В, сила тока в цепи $I = 0{,}6$ А, напряжение на люминесцентной лампе $U' = 84$ В, омическое сопротивление балластного дросселя $R_д = 26{,}3$ Ом. Люминесцентную лампу можно рассматривать как омическое сопротивление.

а) Какой индуктивностью L обладает дроссель?

б) Определите величину сдвига фаз φ между напряжением и током.

в) Какая активная мощность P выделяется в приборе?

г) Дроссель кроме ограничения тока выполняет еще одну важную функцию. Назовите и объясните ее.

Указание. Стартер S имеет контакт, который замыкается вскоре после включения лампы, а затем размыкается и остается разомкнутым.

д) Нарисуйте кривую зависимости испущенного лампой светового потока от времени.

е) Почему лампа горит все время, хотя приложенное переменное напряжение через регулярные промежутки времени проходит через нуль?

ж) У люминесцентных ламп описанного типа иногда последовательно дросселю подключается конденсатор емкостью 4,7 мкФ Как это влияет на работу лампы и для какой цели предусмотрена такая возможность?

Задача 2. «Качающаяся вешалка».

Дана вешалка из проволоки, которая качается с маленькой амплитудой в плоскости чертежа (рис. 2). В положениях *а*) и *б*) длинная сторона расположена горизонтально.

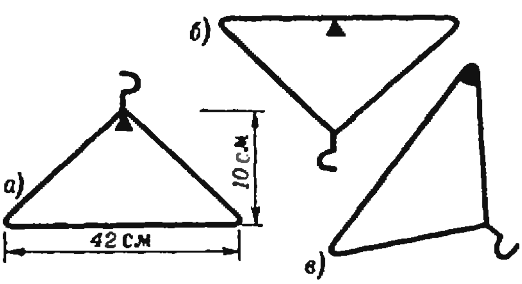


Рис. 2.

Две другие стороны равны между собой. Во всех трех случаях периоды колебаний одинаковы. Где лежит центр масс и каков период колебаний?

Из рисунков можно найти только размеры. Распределение массы вешалки в деталях неизвестно.

Задача 3. «Воздушный шар с подогревом воздуха».

Имеется воздушный шар с постоянным объемом $V = 1{,}10$ м^3. Масса оболочки (объемом которой можно пренебречь) составляет $m_0 = 0{,}187$ кг. Шар стартует при температуре окружающего воздуха $t_1 = 20$°С и нормальном атмосферном давлении $p_0 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Н/м^2. Плотность воздуха при этих условиях равна $\varrho_1 = 1{,}20$ кг/м^3.

а) Какую температуру t_2 должен иметь нагретый воздух внутри шара, чтобы шар мог свободно парить в воздухе?

б) Воздух внутри привязанного к тросу шара нагревается до постоянной температуры $t_3 = 110$°С. Найдите действующую на трос силу.

в) Предположим, что шар герметичен (тогда плотность воздуха в шаре остается постоянной). Шар поднимается в изотермической атмосфере с температурой $t_1 = 20$°С и давлением на уровне Земли $p_0 = 1{,}013 \times 10^5$ Н/м^2. Температура воздуха внутри шара постоянна и равна $t_3 = 110$°С. Какой высоты h достигнет шар при этих условиях?

г) Шар (описанный в предыдущем вопросе) смещается из положения равновесия на высоту $\Delta h = 10$ м и затем отпускается. Опишите качественно, как он движется после этого.

Экспериментальный тур

Задача 4. «Измерения на линзе».

Даны симметричная двояковыпуклая линза, плоское зеркало, вода, линейка, а также карандаш и штатив с муфтой. При решении задачи можно пользоваться только этими предметами.

а) Определите фокусное расстояние линзы с максимальной погрешностью $\pm 1\%$.

б) Определите показатель преломления стекла, из которого изготовлена линза. Показатель преломления воды $n_в = 1{,}33$.

Для фокусного расстояния тонкой линзы имеется выражение

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

где n — показатель преломления линзы, r_1 и r_2 — радиусы кривизны обеих преломляющих поверхностей. Для симметричной двояковыпуклой линзы $r_1 = -r_2 = r$, для симметричной двояковогнутой линзы $r_1 = -r_2 = -r$.

Задача 5. «Движение катящегося цилиндра».

Движение цилиндра складывается из вращательного движения вокруг оси и горизонтального поступательного движения. В этом опыте определяются только ускорение поступательного движения и вызывающие его силы.

К цилиндру с радиусом R и массой M, который лежит на горизонтальной поверхности, приложена сила на расстоянии r_i ($i = 1, \ldots, 6$) от оси цилиндра (рис. 3). После

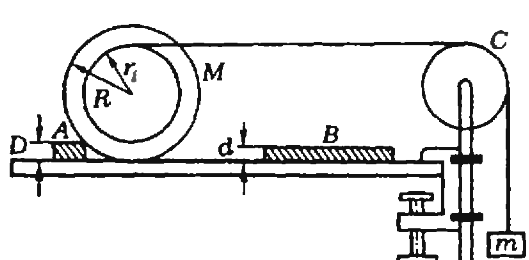


Рис. 3.

того как цилиндр освободили, он катится с постоянным ускорением.

а) Определите экспериментально линейные ускорения оси цилиндра для различных расстояний r_i ($i=1,...,6$).

б) По найденным значениям ускорений a_i рассчитайте горизонтальные силы реакций F_i, действующие между цилиндром и горизонтальной поверхностью.

в) Изобразите зависимость F_i от r_i графически. Обсудите результат.

Перед началом опыта плоскую поверхность расположите горизонтально. Для данного опыта достаточно установить горизонтальное положение с погрешностью ± 1 мм на 1 метр длины.

Даны следующие размеры:

$R=5$ см,	$r_1=0{,}75$ см,
$M=3{,}275$ кг,	$r_2=1{,}5$ см,
$m=2\times 50$ г,	$r_3=2{,}25$ см,
$D=1{,}5$ см,	$r_4=3{,}0$ см,
$d=0{,}1$ мм,	$r_5=3{,}75$ см,
	$r_6=4{,}5$ см.

Трением и массой ролика при расчетах пренебречь.

Секундомер подключается к контактам A и B, как показано на приведенной электронной схеме (рис. 4). Он работает, если контакт A размыкается, и отключается, если

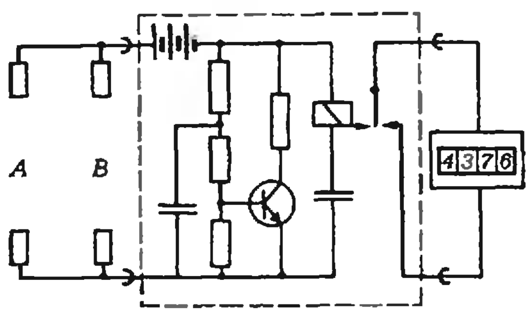


Рис. 4.

контакт B замыкается. Транзисторная схема нужна для того, чтобы после замыкания контакта B фиксировать положение реле, даже если затем из-за ударов или прыжков цилиндра контакт прерывается на несколько миллисекунд.

Как видно, некоторые необходимые для решения задач знания выходят за рамки школьной программы в СССР. Однако программа олимпиады была объявлена заранее, и все школьники имели возможность к ней подготовиться.

Каждая из трех теоретических задач оценивалась по 10-бальной шкале, полное решение двух экспериментальных задач оценивалось в 20 баллов. Таким образом, максимальное число баллов, которое мог получить участник, равнялось 50. Конкурсные задачи и критерии оценок были подготовлены, как обычно, страной—организатором олимпиады. Проверка работ осуществлялась рабочим жюри, назначенным организаторами.

Перед проведением каждого тура тексты задач, их решения и предлагаемые критерии оценок утверждались Международной комиссией, в состав которой входили руководители всех команд. Председателем этой комиссии был известный немецкий физик профессор Вилфред Кун (автор школьных учебников по физике в ФРГ). Руководители команд получили ксерокопии работ школьников и могли ознакомиться с ними до заседания жюри. Международная комиссия утверждала также результаты проверки работ и определяла победителей олимпиады.

Максимальное число баллов — 43 — получил школьник из ФРГ Манфред Лен. Дипломы первой степени были присуждены также и тем участникам, которые набрали более 90% баллов от лучшего результата. Среди них четверо советских школьников: Б. Макеев, А. Панасюк, В. Ухов и П. Цветков. Это большой успех нашей команды, ни одна другая не получила столько первых премий. В неофициальном командном первенстве наша страна заняла первое место, затем шли Польша, Румыния, Венгрия, ФРГ. Следует отметить большой успех на олимпиаде школьников из социалистических стран.

Дипломы второй степени получили участники, набравшие не менее 78% баллов от наилучшего результата, в том числе советский школьник Я. Калда. Дипломами третьей степени были награждены школьники, набравшие не менее 65% баллов от наилучшего результата.

Кроме дипломов победители олимпиады награждались призами. Так, четыре советских школьника получили в качестве призов мини-компьютеры, на которых можно составлять довольно сложные программы, например — позволяющие решать дифференциальные уравнения.

Физическое общество ФРГ учредило также несколько специальных призов: за лучшее решение каждой из пяти задач, самому молодому

Команда Советского Союза на XIII Международной физической олимпиаде. Слева направо: А. Панасюк, П. Цветков, Б. Макеев, В. Ухов, Я. Калда.

участнику олимпиады, участнику, набравшему максимальное число баллов, и школьнику, участвовавшему в международных физических олимпиадах наибольшее число раз. Последние два приза получил уже упоминавшийся школьник из ФРГ М. Лен (он трижды участвовал в международных физических олимпиадах). Самым юным участником оказался школьник из Югославии Д. Мозетик (он родился 7 июля 1966 года). А вот один из призов за лучшее решение задачи получил советский школьник А. Панасюк (он лучше всех решил вторую задачу).

На закрытии олимпиады выступил статс-секретарь Министерства образования и науки ФРГ Э. Кухлвейн. Он отметил, что олимпиада — это не только соревнование; она способствует популяризации физики среди учащихся. Ведь собравшиеся на международную олимпиаду школьники представляют национальные олимпиады, которые на ранних этапах охватывают огромное количество участников. Кухлвейн пожелал всем участникам олимпиады успехов в будущей научной работе и сообщил также, что все члены команды ФРГ получат стипендию для продолжения образования.

Затем выступил заместитель министра образования земли Шлезвиг-Гольштейн (где проходила олимпиада) Я. Шафер. Он говорил о социальной ответственности высоко одаренных людей перед обществом и высказал убеждение, что олимпиада внесла свой вклад в дело взаимопонимания между народами. На память о самой северной земле ФРГ — земле Шлезвиг-Гольштейн — Я. Шафер подарил всем участникам олимпиады памятные книги.

Председатель Международной комиссии профессор В. Кун подвел итоги олимпиады. Из 84 участников I премии получили 14, II премии — 19, III премии — 23 школьника; 10 участников, набравших более 50% от максимального числа баллов, получили поощрительные грамоты. Кун отметил, что важна не только победа в олимпиаде, но и само участие в ней. Те, кто не получил наград в этот раз, не должны огорчаться. Это вовсе не означает, пошутил профессор, что они не могут стать Нобелевскими лауреатами. Особенно трудно было командам, которые выступали на олимпиаде впервые. Но теперь у них появился опыт, и пусть этот опыт передастся следующим поколениям участников.

Затем победителям были вручены дипломы и призы. Приятно отметить, что среди награжденных две девушки из команды Греции. В заключение самодеятельный оркестр студентов Кильского университета исполнил произведения Моцарта и Гайдна.

Олимпиада в Маленте была прекрасно организована. Школьники жили в благоустроенном общежитии спортивной школы футбольного союза Шлезвиг-Гольштейна. Они могли пользоваться бассейном, спортивным залом, игровыми площадками. Соревнования проходили в конференц-зале гостиницы «Интермар». Участники олимпиады ознакомились с историческими, культурными и научными достопримечательностями окрестностей Маленте. Они совершили интересные экскурсии в город Киль, где посетили музей деревянного зодчества и оперный театр, наблюдали за парадом парусников на парусной регате. Киль известен как город, в котором родился знаменитый физик Макс Планк. Участники олимпиады посетили университет, в котором он долгое время работал. Впечатляющей была поездка в старинный город Любек.

Но особенно интересным было посещение Центра экспериментальной физики в Гамбурге, где расположен ускоритель электронов ДЭЗИ и самое большое в мире накопительное электронно-позитронное кольцо ПЕТРА. Кольцо имеет длину 2,3 км, а энергия частиц достигает 38 ГэВ. Многие эксперименты на этом ускорителе проводятся совместно с учеными других стран, в том числе и Советского Союза.

Международные физические олимпиады уже стали доброй традицией. Следующую олимпиаду намечено провести в 1983 году в Румынии, затем — в Швеции. Уверен, что среди читателей «Кванта» есть будущие участники этих олимпиад.

Заочная физико-техническая школа

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся восьмилетних и средних школ, расположенных на территории РСФСР, в 8, 9 и 10 классы на 1983/84 учебный год.

Цель этой школы — помочь ученикам в самостоятельных занятиях физикой и математикой. Вот почему при приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности и рабочих поселках, где такая помощь особенно нужна.

Обучение в школе бесплатное.

ЗФТШ дает хорошие дополнительные знания по физике и математике своим выпускникам, многие из которых впоследствии становятся студентами ведущих вузов нашей страны.

Кроме отдельных учащихся, в ЗФТШ принимаются физико-технические кружки, которые могут быть организованы на месте по инициативе двух преподавателей — физики и математики. Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии руководителей кружка и поименный список членов кружка по классам (с указанием итоговых оценок за вступительное задание).

Учащиеся, принятые в ЗФТШ, и руководители физико-технических кружков будут получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Работы отдельных учащихся проверяют в ЗФТШ или ее филиалах, а членов кружка — его руководители.

С учащимися Москвы два раза в неделю проводятся очные занятия по физике и математике по программе ЗФТШ. Занятия проводятся в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ), набор в которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам очного собеседования по физике и математике (справки по телефону 216-00-05, доб. 2-59).

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик должен выполнить самостоятельно на русском языке и аккуратно переписать в одну школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании.

Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону тетради. Без этой справки решение рассматриваться не будет. На внешнюю сторону тетради наклейте лист бумаги, заполненный по образцу:

1. Область (край или АССР)	*Ульяновская область*
2. Фамилия, имя, отчество	*Ионов Сергей Валентинович*
3. Класс	*девятый*
4. Номер и адрес школы	*Чуфаровская средняя школа*
5. Профессия родителей и занимаемая должность	
отец	*фрезеровщик*
мать	*доярка*
6. Подробный домашний адрес	*433120, Ульяновская обл., Вешкаймский р-он, п. Чуфарово, ул. Заводская, д. 9, кв. 7.*

Срок отправки решения — *не позднее 1 марта 1983 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются.

Зачисление в школу производится приемной комиссией МФТИ. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1983 года.

Тетрадь с выполненным заданием (обязательно по физике и математике) присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской области, Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининградской, Калининской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областей, Карельской и Коми АССР высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Камчатской, Сахалинской и Читинской областей, Красноярского, Приморского и Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР и Чукотки высылают работы по адресу: 660607, г. Красноярск, ул. Перенсона, д. 7, Пединститут, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Ниже приводятся вступительные задания по физике и математике. В задании по физике задачи 1—5 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 3—8 — для учащихся восьмых классов, задачи 6—12 — для учащихся девятых классов. В задании по математике задачи 1—5 — для седьмых классов, 3—10 — для восьмых классов, 6—13 — для девятых классов.

Вступительное задание

Физика

1. Катер, плывущий вниз по реке, догоняет спасательный круг. Через $t=30$ мин после встречи с кругом катер поворачивает назад и снова встречает круг на расстоянии $l=5$ км от места первой встречи. Определите скорость течения реки. Мощность двигателя катера постоянна.

2. В каком случае двигатель автомобиля должен совершить бо́льшую работу: для разгона с места до скорости $v_1=40$ км/ч или на увеличение скорости от $v_1=40$ км/ч до $v_2=60$ км/ч? Сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости движения автомобиля, а время разгона в обоих случаях одно и то же.

3. Коэффициент полезного действия тепловой машины $\eta=30\%$. Каким станет КПД, если количество теплоты, получаемое от нагревателя, увеличить на 5%, а количество теплоты, отдаваемое холодильнику, уменьшить на 10%?

4. Тетраэдр спаян из медных проволочек длиной $l=10$ см и сечением $S=3$ мм^2. Определите сопротивление тетраэдра между двумя его вершинами. Удельное сопротивление меди $\rho=0{,}018$ Ом $\cdot$ мм^2/м.

5. В сосуде с водой плавает кусок льда, внутри которого находится кусочек пенопласта. Как изменится уровень воды в сосуде, если лед растает?

6. С большой высоты вертикально вниз падает мяч. Определите ускорение мяча сразу после абсолютно упругого столкновения с землей. Поверхность земли горизонтальна.

7. Искусственный спутник Земли запущен с экватора и вращается по круговой орбите в плоскости экватора в направлении осевого вращения Земли. Радиус орбиты спутника в три раза больше радиуса Земли $R_З=6400$ км. Через какое время спутник в первый раз пройдет над точкой запуска?

8. Батарея с электродвижущей силой $\mathcal{E}=12$ В и внутренним сопротивлением $r=4$ Ом подключена к нагрузке. При каком сопротивлении нагрузки тепловая мощность, выделяемая на ней, будет максимальной?

9. Радиоактивный газ радон с атомной массой $A=222$ распадается на α-частицу с атомной массой $A_1=4$ и осколок с атомной массой $A_2=218$. Какую долю полной энергии, освобождаемой при распаде радона, уносит α-частица? Кинетической энергией радона по сравнению с выделившейся энергией пренебречь.

10. Два баллона, заполненные одним и тем же газом, соединены трубкой с краном. Вначале кран закрыт. Объемы баллонов $V_1=2$ л и $V_2=3$ л. Давление и температура газа в баллонах $p_1=1{,}5$ атм, $t_1=50°C$ и $p_2=1$ атм, $t_2=100°C$ соответственно. В некоторый момент кран открывают. Найдите давление и температуру газа после установления равновесия. Теплообменом с окружающей средой и объемом трубки пренебречь.

11. Приготовление пищи в кастрюле-скороварке ведется при температуре $t=108°C$ и повышенном давлении. Какая часть воды испарится после разгерметизации скороварки? Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг · К), удельная теплота парообразования $L=2{,}26 \cdot 10^3$ кДж/кг. Теплообменом с окружающей средой за время установления равновесия пренебречь.

12. Конденсатор емкости $C=10$ мкФ, заряженный до напряжения $U=150$ В, разряжается через два последовательно соединенных резистора сопротивлением $R_1=5$ Ом и $R_2=15$ Ом. Какое количество теплоты выделится при этом на каждом резисторе?

Математика

1. Из пункта кольцевой дороги в одном направлении выехали велосипедист и мотоциклист. Известно, что n-й обгон мотоциклистом велосипедиста произошел в тот момент, когда велосипедист прошел m кругов, причем велосипедист ни разу не обогнал мотоциклиста. Найдите отношение средних скоростей велосипедиста и мотоциклиста за промежуток времени от старта до n-го обгона.

2. Точка N — середина боковой стороны CD трапеции $ABCD$. Площадь треугольника ABN равна 1 см^2. Найдите площадь трапеции.

3. Можно ли перевезти 50 контейнеров, вес которых 370 кг, 372 кг, 374 кг, ..., 468 кг, на семи грузовиках, если на каждый из них нельзя грузить больше трех тонн?

4. На плоскости даны две различные точки A и B. Найдите множество точек M таких, что

$$|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{AB}|+|\overrightarrow{BM}|-|\overrightarrow{MA}|.$$

5. Докажите, что не существует таких целых чисел x и y, что $x^2-y^2=1982$.

6. Через точку A проведены прямые, касающиеся окружности в точках B и C. Известно, что центр окружности, описанной около треугольника ABC, принадлежит данной окружности. Найдите $\widehat{BAC}$.

7. Три различных числа, записанные в одном порядке, составляют арифметическую прогрессию, а в другом порядке — геометрическую. Найдите эти числа, если их сумма равна 9.

8. Внутри сферы находится куб, не имеющий общих точек со сферой. На сколько частей разделится сфера плоскостями граней куба?

9. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4 — длины последовательно занумерованных сторон выпуклого четырехугольника площади S. Докажите, что

$$S<\frac{a_1a_3+a_2a_4}{2}.$$

10. Партию деталей решили поровну разложить по ящикам. Сначала в каждый ящик положили по 12 деталей, но при этом осталась одна деталь. Тогда из одного ящика вынули все детали и в оставшиеся ящики удалось разложить все детали поровну. Сколько деталей было в партии, если в каждый ящик помещается не более 20 деталей?

11. Определите, при каких положительных значениях a из неравенства $|x-3|<a$ следует неравенство

$$\left|\frac{x-1}{x+1}-\frac{1}{2}\right|<0{,}01.$$

12. На координатной плоскости Oxy найдите все точки, из которых парабола $y=x^2$ видна под прямым углом.

13. Определите, при каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} 3y-a\sqrt{x^2+1}=1 \\ x+y+\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}=a^2 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Список читателей, приславших правильные решения

(*Начало см. на с. 32*)

57; *И. Панасенкова* (Москва) 57; *В. Пекар* (Киев) 50, 60; *И. Пильников* (Тамбов) 56, 57, 60; *С. Попырин* (Москва) 59, 60; *О. Пузырко* (Пярну) 59; *М. Пустильник* (Свердловск) 49, 50, 55—57, 59, 60; *М. Розенберг* (Ленинград) 59, 60; *Н. Розенвайн* (Киев) 50, 52; *С. Розыскнов* (Керчь) 60; *В. Ромашин* (Донецк) 52, 53, 56, 57, 62; *В. Рыбенков* (Махачкала) 49, 50, 53, 56, 59, 60, 62; *А. Рыляков* (Саратов) 55—57, 60, 62; *Р. Садыгов* (Сиазань) 60; *Ф. Серженко* (Запорожье) 57, 60, 62; *С. Симанов* (Долгопрудный) 59; *Р. Сулейманов* (Янгиабад) 56; *К. Сытник* (Марганец) 57, 60; *И. Тихоненко* (совх. Новоомский Омской обл.) 50, 52, 53, 59, 60; *О. Третьяков* (Омск) 53, 56; *О. Фатьянов* (Курск) 56, 57, 59, 60, 62; *Н. Федин* (Омск) 49, 50, 52, 53, 56, 57, 60, 62; *В. Фельдман* (Саратов) 50, 53, 55—57, 59, 62; *Л. Фельдман* (Саратов) 56, 57, 59, 60, 62; *А. Хельвас* (Долгопрудный) 52, 53, 56, 57, 59, 60, 62; *А. Хомяков* (Белорецк) 60; *Ю. Чаплыгин* (Валуйки) 49, 50, 53, 56; *С. Чеканов* (Саратов) 50, 56, 59, 60, 62; *И. Шойхет* (Ташкент) 52; *Р. Шпильский* (Киев) 56; *А. Шугай* (Запорожье) 49, 50, 52, 60; *Ю. Щербаков* (Запорожье) 60; *А. Щетинин* (Запорожье) 49; *И. Эрхарт* (Биловец, ЧССР) 43, 60.

Напечатано в 1982 году

Законы Ньютона

1. См. рис. 1.
2. В первом случае раньше всего порвется нить между брусками *2* и *3* (при этом все бруски остаются неподвижными). Это произойдет при силе $F_1 = 25$ Н. Во втором случае порвется нить между брусками *1* и *2* при силе $F_2 = 37{,}5$ Н (бруски движутся).
3. $T = 2\pi\sqrt{(L\cos\alpha)/g}$.
4. $x_м > \mu(M+m)g/k$.

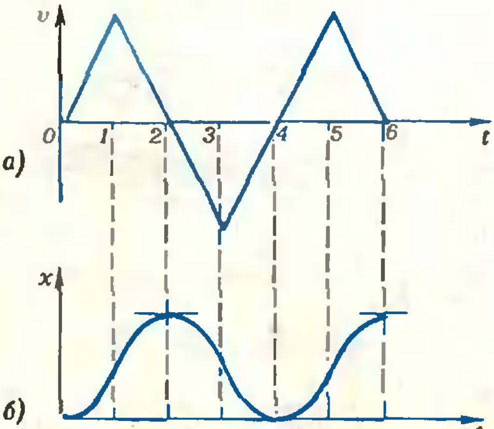


Рис. 1.

XIII Международная физическая олимпиада

Задача 1.

а) Общее сопротивление прибора $z = \dfrac{228{,}5\ \text{В}}{0{,}6\ \text{А}} = 380{,}8$ Ом. Омическое сопротивление лампы $R_л = \dfrac{84\ \text{В}}{0{,}6\ \text{А}} = 140$ Ом, откуда общее омическое сопротивление $R = 140\ \text{Ом} + 26{,}3\ \text{Ом} = 166{,}3$ Ом. Индуктивное сопротивление дросселя

$$\omega L = \sqrt{z^2 - R^2} = 342{,}6\ \text{Ом},$$

следовательно,

$$L = \frac{\sqrt{z^2 - R^2}}{2\pi\nu} = 1{,}09\ \text{Гн}.$$

б) Сдвиг фаз определяется из условия $\operatorname{tg}\varphi = \omega L/R = 2{,}06$; соответственно, $\varphi = 64{,}1°$.

в) Активная мощность $P = I^2R = 59{,}87$ Вт.

г) При размыкании контакта в стартере на дросселе возникает высокое индуктивное напряжение, достаточное для зажигания лампы (сетевое напряжение меньше напряжения зажигания).

д) Зависимость светового потока от времени показана на рисунке 2.

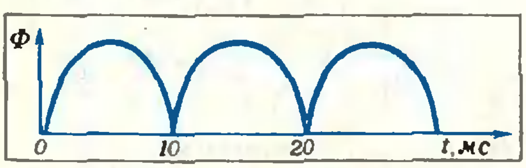


Рис. 2.

е) Время рекомбинации ионов и электронов в газовом разряде достаточно большое — вот почему лампа горит все время.

ж) Емкостное сопротивление конденсатора емкостью $C = 4{,}7$ мкФ равно $1/\omega C = 677{,}3$ Ом. Общее сопротивление системы в таком случае

$$z' = \sqrt{\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2 + R^2} = 373{,}7\ \text{Ом}.$$

Оно почти такое же, как у прибора без конденсатора; следовательно, лампа обладает теми же эксплуатационными свойствами и зажигается по тому же принципу. Различие состоит только в том, что сдвиг фаз теперь противоположен по знаку сдвигу фаз φ:

$$\operatorname{tg}\varphi' = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R} = -2{,}01, \text{ и } \varphi' = -63{,}6°.$$

В зданиях с большим количеством люминесцентных ламп дополнительные конденсаторы используются для компенсации сдвига фаз.

Задача 2.

Обозначив расстояние от точки опоры до центра масс через s, массу через m и момент инерции относительно точки опоры через I, для периода колебаний T записываем

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgs}}. \qquad (1)$$

При этом I определяется через момент инерции I_0 относительно центра масс:

$$I = I_0 + ms^2. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) имеем

$$I_0 + ms^2 = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 mgs, \qquad (3)$$

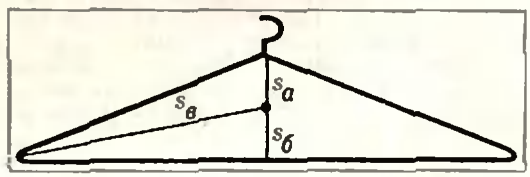


Рис. 3.

где $s = s_а$, $s_б$ и $s_в$ (рис. 3). Это квадратное уравнение может иметь не больше двух различных решений. Так как $s_в > 21_{см} > s_а + s_б = 10$ см, равными могут быть только $s_а$ и $s_б$. Поэтому

$$s_а = s_б = 5\ \text{см},\ s_в = \sqrt{21^2 + 5^2}\ \text{см} = 21{,}6\ \text{см}.$$

Запишем уравнение (3) для случаев а) и в). Исключив момент инерции I_0, получаем

$$m(s_в^2 - s_а^2) = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 mg(s_в - s_а).$$

Отсюда

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{s_в + s_а}{g}} = 1{,}03\ \text{с}.$$

Задача 3.

а) Запишем условие парения шара:

$$m_{t_2} + m_0 = m_{t_1}.$$

где m_t — масса воздуха в объеме шара при температуре t, или

$$\varrho_2 V + m_0 = \varrho_1 V.$$

Отсюда

$$\varrho_2 = \varrho_1 - \frac{m_0}{V} = 1{,}03\ \text{кг/м}^3.$$

Воспользовавшись соотношением $\varrho_1/\varrho_2 = T_2/T_1$, получаем $T_2 = T_1\dfrac{\varrho_1}{\varrho_2} = 341{,}53$ K, или $t_2 = 68{,}38$°C.

б) Сила F, действующая на трос, равна разности между архимедовой силой $F_А$ и силой тяжести $F_т$:

$$F = F_А - F_т.$$

Архимедова сила $F_А = m_1 g = \varrho_1 Vg$, где $m_1 = \varrho_1 V$ — масса вытесненного воздуха при плотности ϱ_1. Сила тяжести $F_т = m_2 g = (\varrho_3 V + m_0)g$, где m_2 — масса воздуха внутри шара при температуре $t_3 = 110$°C и соответствующей плотности $\varrho_3 = \varrho_1 T_1/T_3 = 0{,}918$ кг/м^3 плюс масса оболочки m_0. Таким образом, действующая на трос сила равна

$$F = F_А - F_т = ((\varrho_1 - \varrho_3)V - m_0)g = 1{,}2\ \text{Н}.$$

в) Шар достигает высоты h такой, на которой плотность наружного воздуха ϱ_h имеет то же значение, что и эффективная плотность

$$\varrho_э = \frac{m_2}{V} = \frac{\varrho_3 V + m_0}{V} = 1{,}088\ \text{кг/м}^3.$$

Плотность воздуха на высоте h определяется по барометрической формуле

$$\varrho_h = \varrho_1 e^{-\varrho_1 gh/p_0}.$$

Отсюда для h имеем

$$h = \frac{p_0}{\varrho_1 g}\ln\frac{\varrho_1}{\varrho_h} = \frac{p_0}{\varrho_1 g}\ln\frac{\varrho_1}{\varrho_э} = 843{,}14\ \text{м}.$$

г) Для небольшой разности высот (10 м по сравнению с 843 м) изменение плотности с высотой может быть приблизительно представлено линейной функцией. Поэтому возвращающая к положению равновесия сила пропорциональна величине отклонения от положения равновесия, а это является условием возникновения гармонических колебаний.

Задача 4.

а) Для определения фокусного расстояния F линзу кладут на зеркало, а в муфте штатива закрепляют карандаш. Линзу и зеркало передвигают до тех пор, пока смотрящий перпендикулярно вниз наблюдатель не увидит карандаш и его изображение рядом друг с другом (рис.). Так как зеркало отражает световые лучи, они проходят сквозь линзу два

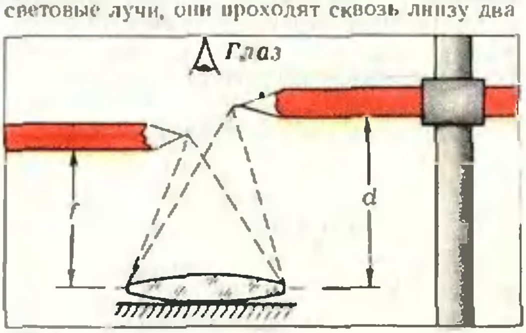


Рис. 4.

раза и получаемое изображение соответствует изображению в случае установленных друг за другом двух линз:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{2}{F}.$$

Для изображения с увеличением равным единице $d = f$; следовательно, $F = d$.

б) Показатель преломления n материала линзы определяется из уравнения

$$\frac{1}{F} = (n-1)\frac{2}{r}.$$

Радиус кривизны r симметричной двояковыпуклой линзы можно найти следующим образом. Если на зеркало налить немного воды и на воду положить стеклянную линзу, то между нею и зеркалом образуется плоско-вогнутая водяная линза (рис.). Один ее радиус кривизны равен радиусу стеклянной

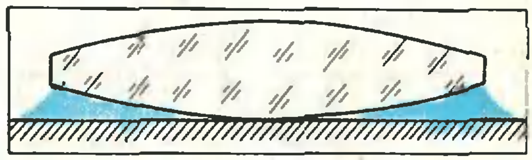


Рис. 5.

линзы, а другой — бесконечно большой. Для этой линзы

$$\frac{1}{F_в} = (n_в - 1)\left(-\frac{1}{r}\right),$$

и

$$r = -(n_в - 1)F_в.$$

Однако измерить на опыте (аналогичном описанному в пункте а)) можно лишь фокусное расстояние комбинации стеклянной и водяной линз:

$$\frac{1}{F_к} = \frac{1}{F} + \frac{1}{F_в}.$$

Затем надо вычислить фокусное расстояние $F_в$ водяной линзы, радиус кривизны r стеклянной линзы и ее показатель преломления n:

$$n = \frac{(n_в - 1)F_к}{2(F_к - F)} + 1.$$

Задача 5.

а) Для ускорения центра тяжести цилиндра (линейного ускорения оси цилиндра) имеем

$$a = \frac{2S}{t^2},$$

где s — путь, пройденный цилиндром за время t.

б) Обозначим ускорение тела массы m через a_m, натяжение каната через T и запишем уравнение движения тела:

$$ma_m = mg - T. \qquad (1)$$

Ускорение a центра тяжести цилиндра определяется разностью сил натяжения каната T и реакции F между цилиндром и плоскостью:

$$Ma = T - F. \qquad (2)$$

Если цилиндр поворачивается на угол θ, то тело проходит путь $x_m = (R + r)\,\theta$. Поэтому

$$a_m = (R+r)\,\frac{a}{R}. \qquad (3)$$

Из равенств (1), (2) и (3) получаем значение силы реакции:

$$F = mg - \left(M + m\left(1 + \frac{r}{R}\right)\right)a.$$

в) График зависимости силы F от расстояния r приведен на рисунке 6. Характерно, что при

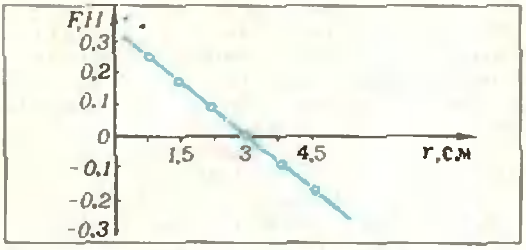


Рис. 6.

$r=3$ см сила меняет знак. Это можно объяснить так. При малых значениях r момент силы натяжения слишком маленький, чтобы сообщить угловое ускорение, при котором цилиндр не проскальзывает, поэтому сила реакции направлена противоположно направлению движения центра тяжести цилиндра и создает дополнительный вращающий момент. При больших r момент силы натяжения слишком большой, и сила реакции направлена таким образом, чтобы создавать противоположный вращающий момент.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 11)

1. Ответ:

$$\begin{array}{ccccc}
IV & \cdot & II & = & VIII \\
\cdot & & \cdot & & \cdot \\
I & \cdot & IV & = & IV \\
\| & & \| & & \| \\
IV & \cdot & VIII & = & XXXII
\end{array}$$

2. Можно: нужно затянуть один из узлов и протянуть через второй (рис. 7).

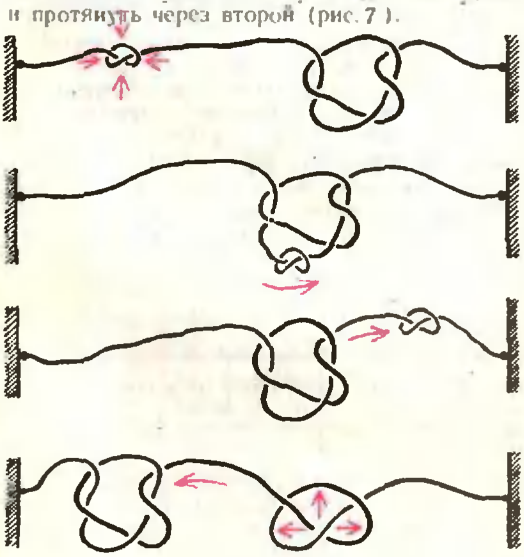


Рис. 7.

3.

$$\begin{array}{r}
8 \\
48 \\
+\quad 648 \\
9648 \\
89648 \\
189648 \\
\hline
289648
\end{array}$$

4. Если делимое, делитель и частное — нечетные числа, то остаток должен быть четным числом и поэтому не может оканчиваться на 7.

Олимпиада по математике

(см. «Квант» № 11)

Мы приводим здесь решения тех задач, которые не вошли в Задачник «Кванта». В Задачник вошли: из 8 класса — задача 8 (М752), из 9 класса — задача 3 (М751), 4 (М755), 6 (М758), из 10 класса — задачи 1 (М753), 4 (М760), 7 (М754), 8 (М759).

8 класс

1. Ответ: $r_1 r_2$. Решение. Прямая O_1O_2 является осью симметрии угла MO_1K и обеих окружностей, поэтому четырехугольник MO_1KO_2 разбивается этой прямой на два конгруэнтных треугольника и $S_{MO_1KO_2} = 2S_{O_1MO_2}$. Далее, если радиус O_1M взять за основание треугольника O_1MO_2, то его высотой будет радиус O_2H второй окружности, проведенный к точке касания H (рис. 8). Осталось воспользоваться формулой для площади треугольника.

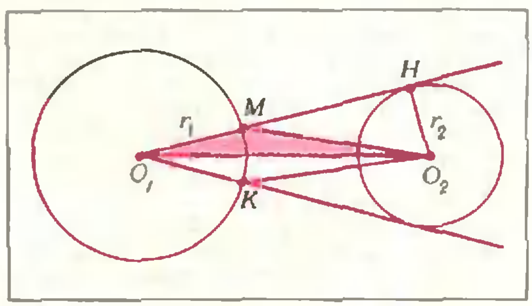


Рис. 8.

2. Ответ: три числа. Решение. Выпишем несколько первых членов

$$(a_n) = 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ \ldots$$
$$(b_n) = 2,\ 1,\ 3,\ 4,\ 7,\ 11,\ \ldots$$

Мы видим, что числа 1, 2, 3 встречаются в обеих последовательностях. Докажем теперь, что все члены второй последовательности, начиная с b_4, в первой последовательности не встречаются и, более того, заключены строго между ее соседними членами: при $n \geqslant 4$

$$a_{n-1} < b_n < a_n. \qquad (*)$$

Для этого заметим, что при $n=4$ и $n=5$ (*) выполняется, и если (*) справедливо для двух соседних значений $n=k$ и $k+1$, то (*) будет выполняться и для $n=k+2$: складывая неравенства

$$b_k < b_{k+1} < a_{k+1},$$

$$a_{k-1} < b_k < a_k$$

получим нужное неравенство

$$a_{k+1} < b_{k+1} < a_{k+2}.$$

Проведенные рассуждения показывают, что неравенство (*) выполняется при всех $n \geq 4$, а это и нужно было доказать.

3. Доказательство проведем рассуждением от противного. Именно, допустим, что существуют наборы показателей $(k_1, ..., k_n)$ и числа m, удовлетворяющие условию задачи, но такие, что $n < m$. Среди этих наборов выберем все наборы наименьшей длины, то есть с наименьшим значением n, а среди выбранных рассмотрим набор $(k_1, ..., k_n)$ с наименьшим значением суммы $k_1 + ... + k_n$. Среди чисел k_i в этом наборе нет одинаковых: если, например, $k_1 = k_2$, то из равенства $2^{k_1} + 2^{k_2} = 2^{k_1+1}$ следовало бы, что набор $(k_1+1, k_3, ..., k_n)$ меньшей длины удовлетворяет условию задачи, в противоречие с выбором $(k_1, ..., k_n)$.
Далее, все числа k_i не превосходят $m-1$: если, например, $k_1 \geq m$, то из равенства $2^{k_1} - 2^{k_1-m} = 2^{k_1-m}(2^m - 1)$ следовало бы, что набор $(k_1 - m, k_2, ..., k_n)$ с меньшей суммой k_i удовлетворяет условию задачи, опять-таки, в противоречие с выбором $(k_1, ..., k_n)$. Итак, все k_i различны и не превосходят $m-1$, поэтому

$$2^{k_1} + ... + 2^{k_n} < 1 + 2 + ... + 2^{m-1} = 2^m - 1,$$

что противоречит тому, что $2^{k_1} + ... + 2^{k_n}$ делится на $2^m - 1$. Тем самым утверждение задачи доказано.

4. Доказательство. Ради краткости назовем числа, не превосходящие 1/6, *хорошими*. Среди восьми неотрицательных чисел с суммой 1 найдутся по крайней мере три хороших — в противном случае не менее шести чисел будут больше 1/6 и сумма всех чисел будет больше 1. Далее, среди хороших чисел найдутся два, соответствующих вершинам куба — концам одной из диагоналей граней куба. В самом деле, диагонали граней куба вместе с вершинами куба разбиваются на два тетраэдра. Из трех хороших вершин хотя бы две являются вершинами одного тетраэдра.

Теперь ясна стратегия первого игрока: первым ходом он выбирает грань, диагональ которой имеет хорошие концы. Тогда при любом выборе второго игрока выбранные грани будут граничить по ребру, одна из вершин которого хорошая. Поэтому первому игроку остается из двух возможных граней выбрать ту, которой принадлежит хорошая точка, что и требовалось доказать.

5. Ответ: 100. Решение. Пусть $a_1, a_2, ..., a_{1982}$ — числа от 1 до 1982, расположенные в каком-то порядке. Обозначим через a_i наибольшее среди первых 99 чисел. Если $a_i > a_{100}$, то при просмотре пар слева направо на некотором шаге a_i будет меняться местами с a_{100}. Значит, все числа, стоящие левее a_{100}, будут меньше a_{100}. Аналогичное рассуждение показывает, что наименьшее среди чисел $a_{101}, a_{102}, ..., a_{1982}$ превосходит a_{100}. Итак, мы доказали, что среди чисел от 1 до 1982 есть ровно 99 чисел, меньших a_{100}. Следовательно, $a_{100} = 100$.

6. Ответ: Знайка прав. Решение. Спроектируем все острова на берег пристани. Так как общий периметр островов равен 8 м, общая длина проекций будет меньше 4 м. Следовательно, от пристани до ближайшего просвета между островами нужно плыть меньше 2 м. Доплыв до просвета, далее плывем перпендикулярно берегам, не встречая препятствий, и достигаем противоположного берега, проплыв в общей сложности менее 3 м.

7. Решение. Пересечем параболу прямой $y = kx + b$; абсциссы точек пересечения x_1 и x_2 суть корни уравнения $x^2 = kx + b$, поэтому по теореме Виета $x_1 + x_2 = k$ не зависит от b. Проведем еще одну прямую, параллельную первой, то есть с тем же угловым коэффициентом k; сумма абсцисс точек пересечения по-прежнему будет равна k. Полусумма абсцисс точек пересечения, равная абсциссе середины отрезка, высекаемого на прямой параболой, равна $k/2$ и, таким образом, прямая, соединяющая середины двух построенных отрезков, параллельна оси координат. Чтобы построить саму ось Oy, достаточно провести хорду параболы, перпендикулярную уже построенной прямой, и далее провести прямую, перпендикулярную этой хорде и проходящую через ее середину — это и будет ось Oy. Построенная ось Oy пересекает параболу в ее вершине, так что ось Ox строится как перпендикуляр к оси Oy в вершине параболы. Тем самым оси координат восстановлены. Чтобы найти единицу длины, построим биссектрису угла xOy — она пересечет параболу как раз в точке с координатами (1, 1). Задача решена.

9 класс

1. Ответ: в субботу. Решение. Для краткости перенумеруем мальчиков римскими числами — I, II, III. Заметим, что мальчик II, побывавший в библиотеке в понедельник, до этого мог быть там лишь три раза — в пятницу, во вторник и в субботу — см. таблицу. Мальчик III, ходящий в библиотеку через три дня, перед понедельником мог побывать в библиотеке в четверг, когда не было II, а до четверга III был в библио-

Таблица

	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	Вт	Ср	Чт	Пт	Сб	Вс	Пн	...
II	—	—	—	+	—	—	+	—	—	+	—	—	+	
III	—	—	—		—			—						
					+				+	—	—	—	+	
или	—	—	—	+	—	—	—	—	+	—	—	—	+	
I				+	—	+	—	—	+	—	+	—		

теке либо в воскресенье, когда опять не было II, либо в субботу, когда был и II. Остается проверить, мог ли мальчик I быть в библиотеке в субботу, когда были II и III. Нетрудно видеть, что мог (см. таблицу). Задача решена.

2. Ответ: k^2. Решение. В указанных на рисунке 9 обозначениях

$$\gamma=\pi-\alpha-\beta,\ \delta=\alpha+\beta,\ \varepsilon=2\pi-2\alpha-2\beta=2\gamma.$$

Соединим M с центром параллелограмма O.

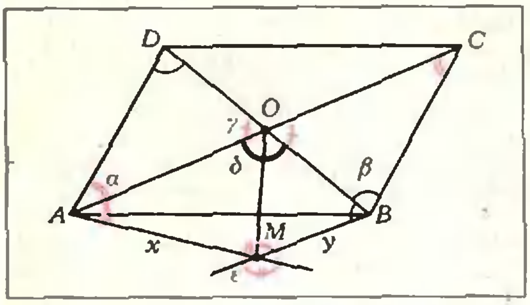


Рис. 9.

Точка O равноудалена от прямых AD и AM, BC и BM, AD и BC и, следовательно, от AM и BM — MO является биссектрисой угла AMB. Следовательно, $\widehat{OMA}=\widehat{OMB}=\frac{\varepsilon}{2}=\gamma$ и мы получаем две пары подобных треугольников: $\Delta AOD\sim\Delta AMO\Rightarrow x=|OM|\cdot k$ и $\Delta BOC\sim\Delta BMO\Rightarrow y=|OM|\cdot\frac{1}{k}$. Итак, $x/y=k\cdot|OM|/\frac{1}{k}\cdot|OM|=k^2$.

5. Доказательство. Применив к левой части доказываемого неравенства неравенство о средних $\left(\frac{a+b}{2}\geqslant\sqrt{ab}\right)$, получим

$$2^{\sqrt[12]{x}}+2^{\sqrt[4]{x}}\geqslant 2\cdot 2^{\frac{\sqrt[12]{x}+\sqrt[4]{x}}{2}}.$$

Применив то же неравенство к показателю степени, получим

$$\frac{\sqrt[12]{x}+\sqrt[4]{x}}{2}\geqslant\sqrt{\sqrt[12]{x}\cdot\sqrt[4]{x}}=\sqrt[6]{x}.$$

Из этих двух неравенств и следует доказываемое.

7. Доказательство. Рассмотрим фигуру из 12 клеток, указанную на рисунке 11. Она обладает тем свойством, что каждая ее клетка окружена не менее чем четырьмя клетками этой же фигуры. Та клетка фигуры, в которой написано наименьшее для этой фигуры число, и будет искомой (таких клеток может быть и несколько).

Замечание. Легко построить пример, показывающий, что число 4 в условии задачи увеличено быть не может: например, в клетку с координатами (x, y) запишем число $x+2y$.

8. Доказательство. Не уменьшая общности, можно считать, что сумма всех данных чисел неотрицательна — в противном случае приведенные ниже рассуждения применяются к числам $-a_1, -a_2, \ldots, -a_n$.

Для всех пар индексов (i, k) таких, что $i, k=0, 1, 2, i\neq k$, обозначим через C_{ik} множество, состоящее, во-первых, из всех чисел данной последовательности, номера которых при делении на 3 дают остаток i, и, во-вторых, из всех положительных чисел последовательности, номера которых при делении на 3 дают в остатке k. При любых i и k множества C_{ik} удовлетворяют условиям (а) и (б) задачи. Докажем, что среди C_{ik} есть множество, удовлетворяющее и условию (в).

Обозначим через $\bar{C}_{ik}$ сумму всех чисел, входящих в C_{ik}. В сумму

$$S=\bar{C}_{01}+\bar{C}_{02}+\bar{C}_{10}+\bar{C}_{12}+\bar{C}_{20}+\bar{C}_{21}\qquad(*)$$

четырежды входят все положительные члены данной последовательности и дважды — все отрицательные. Так как сумма всех чисел неотрицательна, S не меньше, чем удвоенная сумма положительных чисел, которая в свою очередь не меньше $|a_1|+\ldots+|a_n|$. Итак,

$$S\geqslant|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|,$$

и из (*) следует, что для некоторой пары индексов (i, k)

$$|\bar{C}_{ik}|\geqslant(|a_1|+|a_2|+\ldots+|a_n|)/6.$$

Требуемое доказано.

Замечание. Как показывает последовательность

$$1, 1, 1, -1, -1, -1,$$

постоянная $1/6$ в условии задачи увеличена быть не может.

10 класс

2. См. решение задачи 2 из 9 класса.

3. Ответ: не существует. Решение. Предположим противное. Затем выберем наименьшее среди всех натуральных чисел, делящихся на $A=\underbrace{111\ldots1}_{m}$ и имеющих сумму цифр, меньшую, чем m. Обозначим его через B. Так как все числа A, $2A$, $3A$, ..., $9A$ имеют сумму цифр, не меньшую чем m, получаем

$$B\geqslant 10A=10\cdot\frac{10^m-1}{9}\geqslant 10^m.\qquad(**)$$

Пусть

$$B=k_r\cdot 10^r+\ldots+k_1\cdot 10+k_0,$$

где $k_r, k_{r-1}, \ldots, k_1, k_0$ — цифры числа B, $0\leqslant k_j\leqslant 9$, $j=0, 1, \ldots, r-1$, $1\leqslant k\leqslant 9$. Из (**) следует, что $r\geqslant m$. Так как $10^m-1=9A$ делится на A, число

$$B_1=B-(10^r-10^{r-m})=B-10^{r-m}\cdot(10^m-1)$$

делится на A. Кроме того, оно меньше, чем B, и отлично от нуля (сумма цифр натурального

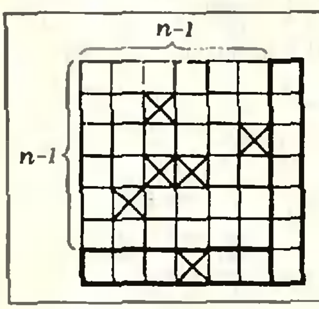


Рис. 10.

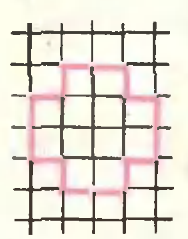


Рис. 11.

числа B меньше m). Действительно, если $k_{r-m}<9$, то сумма цифр числа B_1 равна сумме цифр числа B. Если же $k_{r-m}=9$, то сумма цифр B_1 даже меньше, чем сумма цифр B. Следовательно, исходное предположение неверно.

5. Доказательство. Покажем, что перестановками можно добиться того, что все отмеченные клетки будут лежать ниже диагонали, идущей от левого верхнего угла таблицы в правый нижний. Поскольку отмечено всего $n-1$ клеток, в каком-то из n столбцов вообще нет отмеченных клеток — переставляем его с крайним правым столбцом. Рассмотрим теперь строки таблицы. Все их правые клетки не будут отмеченными, но в некоторой строке будут отмеченные клетки — поменяем эту строку с нижней (см. рис. 10). Проделаем ту же процедуру с квадратом из $(n-1)\times(n-1)$ клеток, примыкающим к левому верхнему углу, и так далее, пока все отмеченные клетки не окажутся ниже рассматриваемой диагонали.

6. Доказательство. Обозначим числа совокупности $\{0, 1, 2, ..., n\}$ через $a_0, a_1, ..., a_n$ так, чтобы выполнялись неравенства

$$|a-a_0|\leqslant|a-a_1|\leqslant...\leqslant|a-a_n|.$$

Для каждого натурального числа k в интервале $|x-a|<k/2$ лежит не более k чисел из нашей совокупности. Следовательно, для значений k от 1 до n справедливы неравенства

$$|a-a_k|\geqslant k/2.$$

Кроме того, очевидно что $|a-a_0|\geqslant\langle a\rangle$. После перемножения всех этих неравенств получим

$$|a|\cdot|a-1|\cdot...\cdot|a-n|=$$
$$=|a-a_0|\cdot|a-a_1|\cdot...\cdot|a-a_n|\geqslant$$
$$\geqslant\langle a\rangle\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{2}\cdot...\cdot\frac{n}{2}=\langle a\rangle\frac{n!}{2^n},$$

что и требовалось доказать.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 9)

Задание 17 (К. Вэтни, 1923 г.). Пешка должна превращаться, но в какую фигуру? Проигрывает 1. e8C? Kf6! 2. C:f7 Kh5! 3. C:h5. Черные запатовали свои пешки и выиграли партию в поддавки! Не годится и 1. e8K? Kf6! 2K:f6 h5 3. K:h7 f6 4. K:f6 h4 и далее пешка черных доходит до первой горизонтали, превращаясь в слона, который легко отдается (аналогично 3. K:h5). Легко проверить, что выигрывают черные в поддавки и при превращении белой пешки в ферзя или ладью.

Решает **1. e8Kp!** Пешка становится королем! 1...Kf6 2. Kp:f7 Kg8 3. Kp:g8 h5 4. Kp:h7 h4 5. Kpg6 h3 6. Kpg5 h2 7. Kpg4! h1Kp! (При другом превращении пешки белый король сразу становится под удар. Теперь же короли не станут подходить друг к другу ближе чем на 2 поля (сделавший следующий шаг проигрывает). Ничья.

Задание 18. Лb6! C:a2 2. Лg6 C:b1 3. g5 C:c2 4. g4 C:d3 5. Ch4! C:e4 6. g3 C:g6. Белым пат, сражение в поддавки закончилось в их пользу.

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, А. Малкин, Э. Назаров, И. Смирнова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Н. Дорохова

103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 251-82-42

Сдано в набор 16.10.82. Подписано в печать 1.12.82
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 7,07 Т-20950
Тираж 175044 экз. Цена 40 коп. Заказ 2601

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром» Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

НОВОГОДНИЕ СЮРПРИЗЫ

В теории окончаний хорошо известна следующая позиция. **Белые: Крd2; черные: Кра1, Кh8, п.а2.** Проигрывает 1.Крс2, но к ничьей ведет 1.Крс1. Теперь белый король спокойно переступает с с1 на с2 и обратно, не опасаясь приближения черного коня. Этой идее можно придать весьма необычный вид.

Б. Сидоров, 1982 г. Ничья.

1.Крf1! b4 2.Кр:f2 (только теперь можно взять пешку) **2...b5 3.Крf1 Кb6 4.Крf2 Кd5 5.Крf1 Кe3+ 6. Крf2** и т. д.

Проигрывает, однако, 1.Кр:f2?, в этом случае после 5...Кe3 клубок черных фигур мгновенно распутывается.

Одинокий король, конечно, не в состоянии одержать победу над всеми черными фигурами. Другое дело, если в его распоряжении имеется хотя бы одна пешка...

Ю. Бухвальд, 1964 г. Выигрыш.

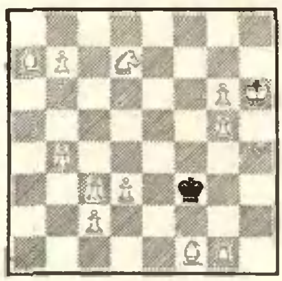
1. Крс7 Сс4 (в случае 1.Кра8 или Крс8 этот ход словом решил бы дело в пользу черных) 2.b8Ф и 3.Ф:b6×. У черных есть и более сильная защита — 1...с2!!! Ответ белых кажется невероятным. 2. Крb8!! Белый король возвращается на место. Черные заперли своего слона, и теперь у них нет защиты от 3.Кра8 и 4.b8К× (2...Лс3 3.Кра8 Лс8+ 4.bcС×!)

В «Кванте», 1980, № 12 рассматривались задачи, в которых мат давался в 1/2 и даже в 2/3 хода. Вот еще один пример, для решения которого ход — слишком много (идея задачи принадлежит Э. Ректину).

Белые: Крd8, Лg6; черные: Крf7, Фh8, Кf8. Мат в 2/3 хода.

Первая треть хода уже сделана — белая пешка g7 снята с доски. Вслед за ней покидает доску черный ферзь (вторая треть хода) и, наконец, его место занимает белый конь (последняя треть хода). Итак, полный ход **g7:h8К×**.

Один из самых популярных трюков в необычных задачах заключается во вращении доски. На следующей диаграмме мат дается при любом положении доски, причем пешка превращается в четыре различные фигуры.



К. Ханнеман, 1922 г. Мат в 2 хода.

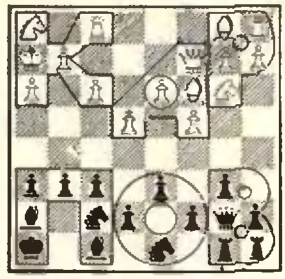
Диаграмма: **1.b8Л!** (1.b8Ф пат) **1...Крf4 2.Лf8×.**

Доска повернута на 90° по ходу часовой стрелки: **1.d8С!** (1.d8Ф пат) **1...Крd4 2.Сf6×.**

На 180°: **1.f8К! Крd5 2.Сb7×.**

На 270°: **1.d8Ф+** (наконец-то пешка может превратиться в ферзя) **1...Кре6 2.Фе7×.**

Следующая необычная задача посвящена победе А. Карпова в Мерано. Полный комплект из 32 шахматных фигур изобразил фамилию чемпиона мира.



В. Лихачев, 1982 г. Может ли эта позиция возникнуть после 18 ходов?

Число 18 напоминает о том, что матч в Мерано завершился в 18-м поединке. Непонятно, правда, как вообще могли фигуры расположиться таким образом.

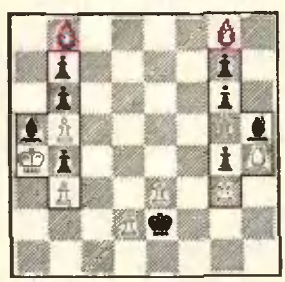
Секрет прост — надо развернуть доску на 180°.

1.с4 d6 2.f3 f6 3.Кh3 Кh6 4.Кf2 Кf7 5.h3 Сf5 6.е4 h6 7.Сd3 Сh7 8.0—0 b6 9.Крh2 g6 10.Кh1 Сg7 11.Сс2 0—0 12.d3 Фс8 13.Кd2 Фb7 14.Кb3 Кс6 15.Сd2 Лfb8 16.Сс3 Кcd8 17.Сb1 Крh8 18.Фс2 Сf8.

Конкурсные задания

В канун Нового года шахматные композиторы в основном занимаются тем, что придумывают задачи с праздничным сюжетом. В № 23 перед вами — новогодняя елка, а в № 24 — две свечки в канделябрах.

23. Мат в 2 хода.



24. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 25 февраля 1983 года (с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 23, 24»).

Цена 40 коп.

Индекс 70465

На этой фотографии — макет конструкции из звездчатых многогранников, родившийся в воображении А. М. Бреславец и исполненный Н. Н. Малышевой. Он экспонировался в этом году в Москве на выставке Архитектурная бионика, новые формы и конструкции», экспонаты которой подчеркивали глубокие связи, существующие между природными формами и современными конструкциями. Он заинтересовал нас не только математической правильностью, но и праздничным видом: с Новым Годом, дорогие читатели!