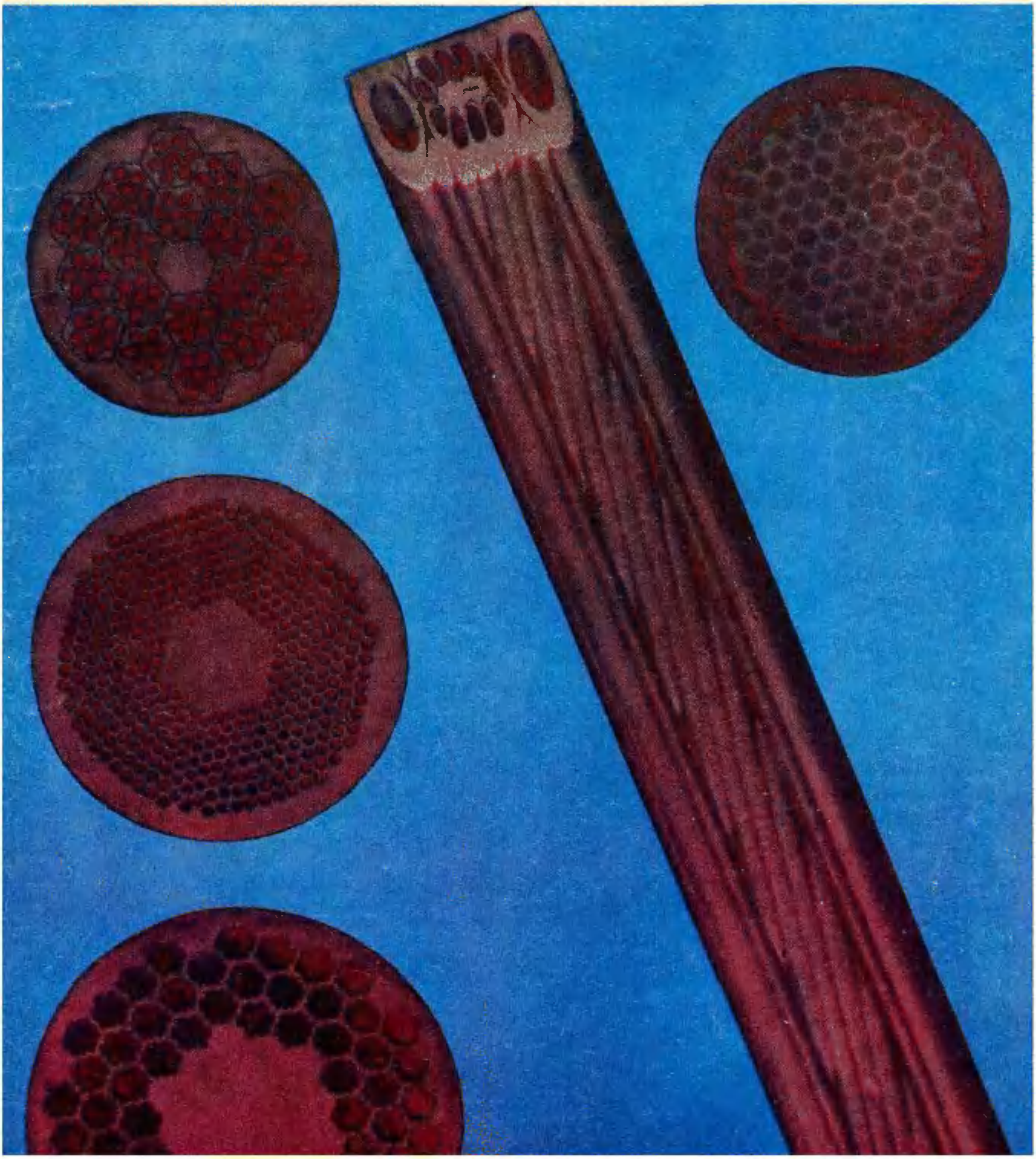
ISSN 0130-2221

# Квант

9
1982

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР




На этой странице мы воспроизводим рисунки К. Э. Циолковского из его «Альбома космических путешествий». «Альбом» был задуман ученым как первое пособие для будущих покорителей межпланетных пространств.

Циолковский впервые на основании строгого научного анализа показал, что в космических полетах сразу после прекращения работы двигателей будет возникать состояние невесомости. Особенностью творческой деятельности ученого было органическое сочетание точного расчета и образной наглядности, и «Альбом космических путешествий» — яркий тому пример.

Квант 9
1982
Основан в 1970 году
Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР
Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы

## В НОМЕРЕ: IN THIS ISSUE:



На первой странице обложки изображены в натуральную величину сверхпроводящие кабели, используемые в крупных сверхпроводящих системах. В сечении видны тонкие нити сверхпроводника, окруженные металлом с высокой электро и теплопроводностью.

Об открытии сверхпроводимости читайте в статье А. Буздина и В. Тугушева «Как создавалась физика низких температур».

СССР
60
ЛЕТ

# С новым учебным годом!

Дорогие ребята!

1982 год богат событиями важного политического значения, каждое из которых имеет прямое отношение к нашим школьным делам.

Отмечается 60-летие образования СССР. Как далеко шагнула наша страна за эти годы! Первой из стран мира она перешла рубеж полного среднего образования подрастающего поколения. Она может гордиться тем, что на этом новом количественном рубеже обеспечивается и глубокий научный уровень подготовки молодежи. Для выпускника советской школы характерно глубокое проникновение и в понимание общественных закономерностей, и в материальный мир. Гармоническое развитие человека достигается познанием научных истин, непременным посильным участием в общественно полезных трудовых делах, приобретением навыков высоко нравственного поведения. Школа стала важнейшим государственным воспитательным учреждением, в котором формируются молодые строители коммунистического общества.

Майский (1982 г.) пленум ЦК КПСС выдвинул Продовольственную программу СССР. Вам предстоит трудиться над претворением ее в жизнь. Впереди у нас большие дела. Все быстрее достижения человеческой мысли облекаются в конкретные дела, новые машины, эффективные технологии. Все совершеннее становится труд, оснащение предприятий. И от вас требуется хорошая подготовка. Современный работник — это человек, глубоко понимающий процессы, происходящие в материальном производстве, умеющий использовать их с максимальной отдачей. Вот почему очень важно иметь в школах разветвленную систему кружков по интересам, факультативных курсов, школьных научных обществ, различных секций. На фундамент основных школьных курсов, в зависимости от интересов учащихся, должны накладываться дополнительные знания. Лучшие учителя не только обогащают вашу память знаниями. Они всемерно развивают ваши способности, стараются привить вам элементы творческого подхода к анализу явлений. Современная педагогика немыслима без применения приемов, развивающих, будоражащих мысль.

Инициатива создания журнала, который вы держите в руках, принадлежит выдающимся ученым и педагогам страны. Это журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР. Он относится к жанру изданий отнюдь не легкого чтения. Тем не менее его тираж превышает 175 тысяч экземпляров. Для многих молодых людей «Квант» становится первым ориентиром на пути в современную науку. Это ли не показатель огромного желания молодежи вникнуть в мир математики, теоретической физики и других сопредельных наук.

Позвольте пожелать вам новых успехов в овладении богатствами познания природы и общества. Старайтесь вникнуть в существо изучаемых явлений. Помните, что не только количеством материала, который вы запомнили, определяется успех учения, но и глубиной познания этого материала, умением активно его применять на практике.

Министр просвещения СССР
член-корреспондент АН СССР
М. А. ПРОКОФЬЕВ

# Народное образование в СССР

Советская школа с момента ее возникновения всегда была верным помощником Партии в коммунистическом строительстве. За 60 лет Союза Советских Социалистических Республик каждая пятилетка оставляла в области народного образования свой неповторимый след.

Нелегок был путь страны от почти сплошной неграмотности до Октябрьской революции ко всеобщему среднему образованию. Советское общенародное государство взяло на себя решение всех задач школьного строительства, создание материальной базы школ и их финансирование, подготовку и содержание педагогических кадров, обеспечение школы необходимыми учебными материалами и пособиями. Наше государство ежегодно выделяет на нужды просвещения миллиарды рублей и всеми доступными ему средствами стимулирует его развитие.

В этом году исполнилось 10 лет со дня принятия ЦК КПСС и Советом Министров СССР постановления «О завершении перехода ко всеобщему среднему образованию молодежи и дальнейшем развитии общеобразовательной школы». В нем отмечалось, что в стране создаются все условия для завершения перехода ко всеобщему среднему образованию как одной из важных предпосылок дальнейшего социально-политического и экономического развития нашего общества по пути к коммунизму, роста социалистической сознательности и культуры трудящихся.

Суммируя итоги развития школы за 10 лет со дня принятия постановления, следует отметить, что за это время среднее образование получили 37,5 млн. человек, что составляет почти половину всех людей, получивших среднее образование за все время существования Советской власти.

Осуществление общего, специального и профессионально-технического среднего образования подрастающего поколения имеет историческое и международное значение. В нашей стране успешно развивается и совершенствуется единая система народного образования, которая обеспечивает широкую образовательную подготовку молодежи, хорошо и надежно служит ее духовному, нравственному и физическому развитию, обеспечивает возможность поступления в любой вуз, а также подготовку к труду во всех сферах народного хозяйства. Такая демократическая система народного образования — одно из величайших достижений Советской власти.

В отчетном докладе ЦК КПСС XXVI съезду Коммунистической партии Советского Союза дана высокая оценка достижений советской социалистической системы народного образования. Генеральный секретарь ЦК КПСС Л. И. Брежнев в докладе съезду партии сказал: «Взят важный рубеж — завершен переход к обязательному всеобщему среднему образованию».

*Ю. Осипов*

# Гравитационный захват

Как образовалась Солнечная система? Этот вопрос завладел умами ученых, вероятно, с той самой поры, как выяснилось, в каком порядке сорасположены в мировом пространстве Солнце, Земля, другие планеты. Древние верили, что центральной фигурой этого космического сообщества является Земля. Однако истинная картина оказалась иной: планеты, в том числе и наша, обращаются вокруг Солнца по орбитам, близким к круговым и расположенным примерно в одной плоскости. Как же сложился этот хоровод?

В 1796 году французский математик и механик Пьер Симон Лаплас выдвинул свою знаменитую космогоническую гипотезу, предлагавшую ответ на этот вопрос. Лаплас полагал, что Солнечная система образовалась из вращающейся газовой туманности. Под действием сил притяжения между частицами газа туманность сжималась и, в соответствии с законом сохранения момента импульса, вращалась все быстрее. В какой-то момент для частиц, находившихся на экваторе вращающегося сгустка, сила притяжения к его центру оказалась равной центробежной силе инерции, так что орбиты этих частиц далее уже не сужались; другие же частицы продолжали приближаться к центру. Туманность сплющивалась к плоскости, перпендикулярной оси ее вращения. Затем, по предположению Лапласа, она разделилась на центральный сгусток, из которого впоследствии образовалось Солнце, и периферийные кольца, позже сгустившиеся в планеты.

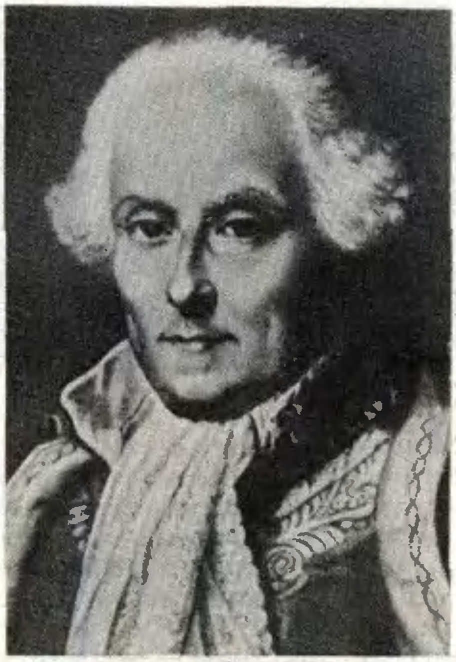
Гипотеза Лапласа хорошо объясняла концентрический характер планетных орбит. Но ведь в околосолнечном хороводе участвуют не только планеты. Вместе с ними вокруг нашего светила обращаются также и кометы. У многих из них орбиты сильно отличаются от круговых, представляют собой весьма вытянутые эллипсы и, что особенно примечательно, не лежат в плоскости планетных орбит, а ориентированы довольно хаотически. Как объяснить такую дисгармонию?

В 1770 году астрономы наблюдали комету, названную кометой Лекселя. В ожидавшийся срок ее следующего появления она не была обнаружена в предвычисленной точке небосвода. Как оказалось, в этом повинен Юпитер: комета была резко сбита со своей орбиты мощным притяжением этой планеты-гиганта в тот момент, когда она миновала его окрестности.

И вот, встав перед необходимостью вписать кометы в свою картину происхождения Солнечной системы, Лаплас выдвинул смелое предположение: среди тел, ее составляющих, есть не только "родные" дети Солнца, но и "приемные"; кометы — это пришельцы из космоса; те из них, которые, пролетая сквозь Солнечную систему, прошли вблизи какой-либо крупной планеты, резко, подобно комете Лекселя, изменили свою орбиту и свернули со своего прежнего, устремленного в бесконечность, пути на эллиптические околосолнечные орбиты.

Правда, Лаплас не доказал своего предположения, видимо, полагаясь на его самоочевидное правдоподобие. Это сочетание правдоподобия и недоказанности предопределило гипотезе гравитационного захвата нелегкую судьбу в истории науки.

Одни ученые, веря в ее будущее строгое обоснование, отводили ей принципиальную роль в своих суждениях о происхождении Солнечной системы. Другие, напротив, относи-



П. Лаплас (1749—1827). Великий французский математик, астроном и механик, выдвинувший гипотезу о возможности гравитационного захвата.

лись к ней с недоверием и настойчиво пытались ее опровергнуть.

А причины для недоверия у скептиков были. К сомнениям побуждали уже самые простые примеры гравитационного взаимодействия.

## Задача двух тел

Простейшая система небесных тел, движущихся под действием взаимного притяжения, очевидно, насчитывает всего два тела. Если исследуется вопрос о том, может ли одно из них захватить своим притяжением другое и заставить его обращаться вокруг себя, то естественно предположить "захватывающее" тело весьма массивным, а массу "захватываемого" считать весьма малой.

Условимся не рассматривать случай, когда притягиваемое тело падает на притягивающее. Иными словами, будем считать, что движение не прекращается и его можно прослеживать сколь угодно далеко вспять и сколь угодно далеко вперед во времени.

Чтобы исследовать это движение, воспользуемся известной формулой Ньютона для силы гравитационного взаимодействия между двумя телами масс $m_1$ и $m_2$, отстоящими друг от друга на расстояние $r$:

$$F=\gamma\frac{m_1m_2}{r^2}.$$

Поскольку масса одного тела предполагается много большей, чем масса другого, естественно считать это первое, массивное тело (назовем его Солнцем) неподвижным и поместить в его центре начало системы координат. Тогда величина $r$ в знаменателе Ньютоновой формулы представит собой радиус-вектор второго, движущегося тела (назовем его кометой).

Формула Ньютона задает силу притяжения кометы Солнцем, а следовательно, ускорение кометы. Чтобы конкретно описать ее траекторию, надо знать ее положение и скорость в какой-то момент времени.

Ньютон показал, что в зависимости от этих конкретных данных траектория кометы может относиться лишь к одному из трех типов — представлять собой либо эллипс, либо гиперболу, либо параболу (рис. 1). Принадлежность к тому или иному типу легче всего установить*) по скорости кометы в перигелии (наиболее близкой к Солнцу точке ее орбиты): при определенном значении этой скорости орбита будет параболической, при меньших значениях — эллиптической, при больших — гиперболической. Грубо говоря, эллиптические орбиты — самые

*) Вывод можно найти в «Кванте», 1976, № 5, с. 11 или в книге В. И. Левантовского «Механика космического полета в элементарном изложении» (М., «Наука», 1980).


Рис. 1. Семейство эллипсов, переходящее в параболу и гиперболы

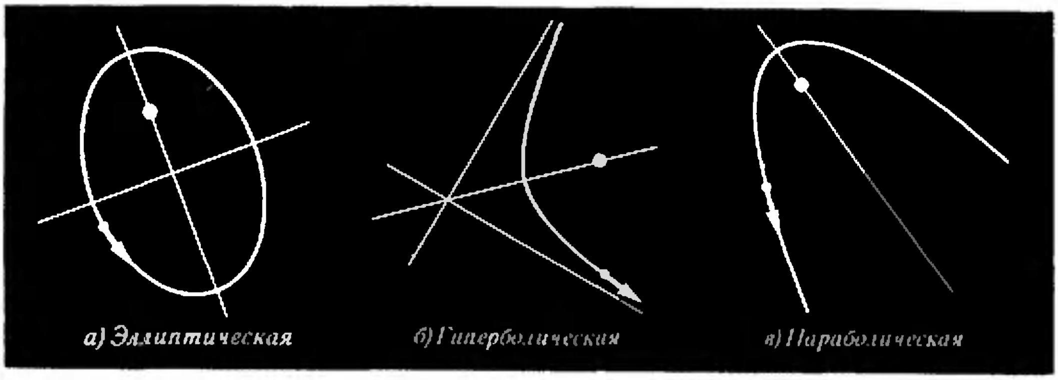



Рис. 2. Типы орбит в задаче двух тел

"тихоходные", гиперболические — самые "стремительные".

По эллиптической орбите (рис. 2,*а*) комета движется периодически с переменной скоростью, достигающей максимума при каждом прохождении через перигелий и минимума — при прохождении через афелий (наиболее удаленную от Солнца точку эллиптической орбиты).

При движении по гиперболической орбите (рис. 2,*б*) комета прилетает из бесконечности вдоль асимптоты, при приближении к Солнцу поворачивается, облетает его и удаляется в бесконечность вдоль другой асимптоты. При этом на очень большом расстоянии от Солнца скорость можно считать постоянной; при приближении к Солнцу ее величина возрастает, достигая максимума в перигелии, затем убывает и комета уходит на бесконечность с прежней по величине скоростью. Роль Солнца, таким образом, сводится к тому, чтобы повернуть вектор скорости кометы.

У параболической орбиты (рис. 2,*в*) нет асимптоты и, что важно, при удалении на бесконечность скорость кометы стремится к нулю.

Гиперболические и параболические орбиты родственны друг другу: комета прилетает к Солнцу из бесконечности и в бесконечность же удаляется. Эллиптические орбиты качественно отличны от остальных: комета всегда остается на ограниченном расстоянии от Солнца.

Слова, только что послужившие нам для сравнения орбит, помогут отчетливее охарактеризовать процесс гравитационного захвата одного тела другим (или какой-либо системой тел): в предшествующие этому процессу бесконечно давние моменты времени захватываемое тело находилось на бесконечном удалении от захватывающего, а во все последующие пребывает близ него на ограниченном расстоянии. Таким образом, картина движения захватываемого тела сугубо несимметрична во времени по отношению к моменту захвата.

Ничего подобного мы не видим среди типов движения, исчерпывающе описанных Ньютоном для случая двух тел, которые мы условно назвали Солнцем и кометой. В каждом из трех случаев характер движения кометы в бесконечно далеком прошлом и бесконечно далеком будущем совпадают.

Иными словами, гравитационный захват в системе из двух тел невозможен.

А если тел больше?

### Задача трех тел

Казалось бы, с появлением третьего участника в ансамбле движущихся тел расчет их движения не должен существенно усложниться. Однако это не так: сложность задачи при переходе от случая двух тел к случаю трех тел резко возрастает. Движение двух тел сможет рассчитать (хотя и не без труда) всякий, кто хорошо освоил методы дифференциального и интегрального исчисления. Задача трех тел представляет собой знаменитую проблему, над которой билось не одно поколение математиков и астрономов.

Легко написать уравнения движения для каждого из тел. Но вот решить получившиеся уравнения, найти траектории тел по заданным их положениям и скоростям в некоторый момент времени в общем случае не удается. Более того, сейчас строго доказано, что найти общее решение задачи невозможно! Дать геометрическое описание решений тоже представляется в высшей степени затруднительным.

Ну, а если подойти к задаче трех тел без желания найти ее точное решение и попытаться определить хотя бы типы их движения? При таком подходе удается достичь некоторых результатов.

Ради ясности можно несколько сузить постановку вопроса наподобие того, как мы поступали при разборе задачи двух тел. Пусть одно из трех тел значительно превосходит по массе остальные. И пусть в какой-то период времени оба легких тела (кометы) находятся поблизости от тяжелого (Солнца). Рассмотрим моменты времени, бесконечно далекие от этого периода, прошлые или будущие по отношению к нему, и будем интересоваться: где в такие моменты находится та или иная комета — на бесконечном удалении от Солнца или в ограниченной его окрестности? В зависимости от ответа на этот вопрос будем классифицировать типы движения.

Подобную классификацию для задачи трех тел предложил французский астроном Ж. Шази (1882—1955). Все мыслимые варианты движения он подразделил на четыре типа:

*тип гиперболический* (рис. 3,*а*), когда в бесконечно далекие моменты времени и будущего и прошлого обе кометы бесконечно далеки от Солнца;

*тип гиперболо-эллиптический* (рис. 3,*б*), когда одна из комет находится на ограниченном расстоянии от Солнца, а вторая приходит из бесконечности и уходит в бесконечность;

*тип ограниченных движений* (рис. 3,*в*), когда все три тела в продолжение бесконечного времени находятся на ограниченных расстояниях друг от друга;

*тип осциллирующих движений* (рис. 3,*г*), весьма экзотический, когда существует некоторая ограниченная область пространства, где все три тела время от времени оказываются одновременно, но не существует такой ограниченной области, где они оставались бы вечно.

Исходя из этой классификации, для случая трех тел определяют понятия *частичного* и *полного захвата*. Про частичный захват говорят, если в прошлом движение принадлежит гиперболическому типу, а в будущем — гиперболо-эллиптическому.

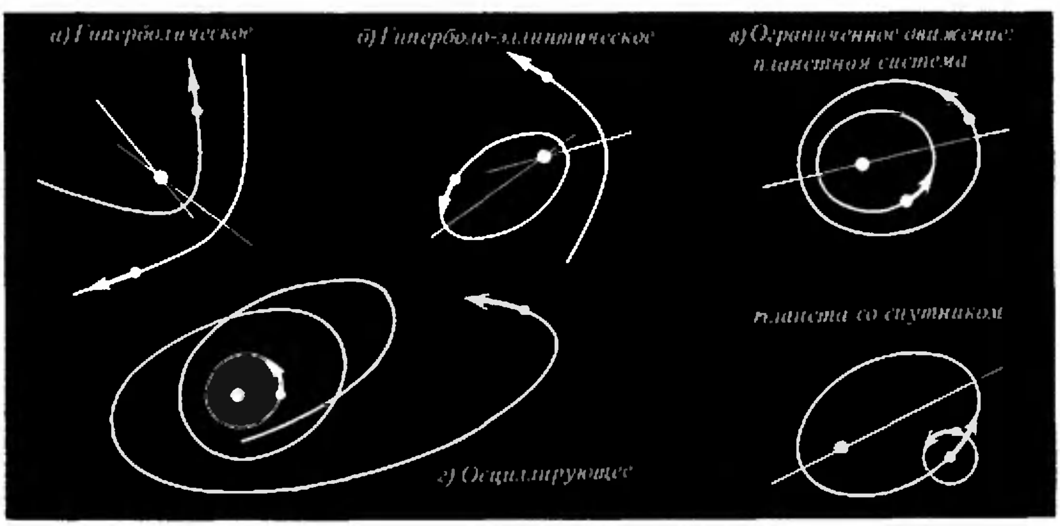



**Рис. 3. Классификация движений в задаче трех тел**

Иначе говоря, две кометы прилетают к Солнцу из бесконечности, одна из них способствует объединению Солнца и другой кометы в систему и, сыграв свою роль, уходит на бесконечность. *Полный захват* осуществляется, когда система из Солнца и кометы, обращающейся вокруг него по эллиптической орбите, присоединяет к себе вторую комету, прилетевшую из бесконечности, то есть когда в прошлом движение принадлежит гиперболо-эллиптическому типу, а в будущем — типу ограниченных движений.

Логически мыслимы и другие сочетания разнородных типов движения в прошлом и будущем. Вот, например, так называемый *обмен:* комета, прилетев из бесконечности, разрушает систему из Солнца и другой кометы, обращающейся вокруг него по эллипсу, так что эта другая комета улетает на бесконечность, а прилетевшая вместе с Солнцем образуют новую эллиптическую систему.

### Ж. Шази: захват невозможен

В определениях частичного и полного захвата, данных в предыдущем разделе, бросается в глаза характерная деталь: поведение системы трех тел в прошлом и будущем принадлежит разным типам.

Следовательно, вопрос о гравитационном захвате в задаче трех тел допускает и такую, более широкую постановку: может ли система в результате гравитационного взаимодействия сменить один тип своего движения на другой?

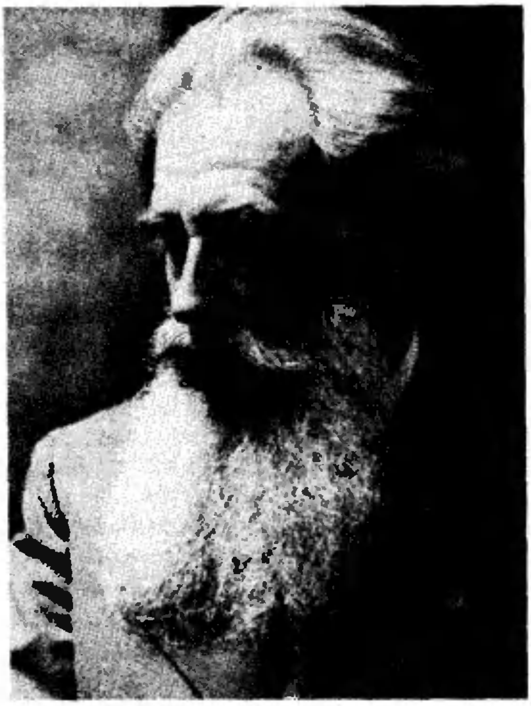
Не кто иной, как сам Шази, в начале тридцатых годов опубликовал категорическое утверждение: подобные процессы невозможны. Иначе говоря, гравитационный захват — как полный, так и частичный — неосуществим и в системе трех тел.

Ну, а обмен? Шази было известно, что еще в начале века путем приближенного численного интегрирования были построены примеры обменного взаимодействия. Однако он счел эти примеры неубедительными на том основании, что по поведению системы на конечном интервале времени нельзя судить о ее поведении на интервале бесконечном. Кроме того, он указывал на ошибки численного интегрирования, которые очень трудно учесть. Шази даже заметил по этому поводу, что "точный математический анализ демонстрирует здесь свое преимущество перед приближенными численными методами исследования".

Мысль о том, что движение тел может иметь неодинаковый характер в прошлом и будущем, в частности идея гравитационного захвата, оказалась дискредитированной. Это заставило многих усомниться ~~в~~ космогонической гипотезе О. Ю. Шмидта, выдвинутой советским ученым в 1944 году. Центральным местом в этой гипотезе было предположение о том, что Солнечная система возникла из газо-пылевого облака, которое Солнцу помогла захватить пролетавшая неподалеку от него звезда.

### О. Ю. Шмидт: частичный захват?

Чтобы рассеять сомнения скептиков, Шмидт построил в середине сороковых годов, опять-таки путем численного интегрирования, пример частичного захвата в задаче трех тел. Орбиты всех трех тел в системе координат, связанной с одним из них ($P_0$), изображены на рисунке 4,*а*. Тело $P_1$ приходит из бесконечности с умеренной скоростью, тело $P_2$ — с очень высокой; в какой-то момент они сближаются. В течение короткого времени сближения относительное движение тел $P_1$ и $P_2$ можно считать происходящим как в задаче двух тел, то есть по гиперболам. Как мы уже знаем, взаимное притяжение несколько разворачивает эти тела друг относительно друга и далее они продолжают движение с изменившимися скоростями (как если бы двое, бегущих наперерез друг другу, вздумали обменяться рукопожатием). В результате после сближения тело $P_1$ несколько теряет в абсолютной величине скорости и переходит с гиперболической орбиты относительно $P_0$ на эллиптическую, а тело $P_2$ продолжает свой путь по



О. Ю. Шмидт (1891—1956). Выдающийся советский математик, прославленный полярный исследователь. Предложил первый пример частичного захвата в задаче трех тел.

слегка изменившейся гиперболе с несколько увеличенной скоростью.

Этот пример, возможно, станет более понятным, если представить себе противоположную ситуацию «распада», когда тело $P_1$ «от века» обращалось вокруг $P_0$, но в какой-то момент налетевшее с огромной скоростью тело $P_2$ стащило его с орбиты и выбросило на бесконечность, а само продолжило свой путь на бесконечность, немного потеряв в энергии (рис. 4, *б*). Чтобы получить отсюда пример захвата, достаточно представить себе время, текущим вспять.

Пример Шмидта обладал теми же недостатками, что и примеры обмена: расчет охватывал лишь конечный промежуток времени; к тому же ошибки численного интегрирования оказались чрезмерно велики. Когда сравнили значения момента импульса на концах интервала интегрирования, они не совпали. Пример Шмидта получился не убедительным. Казалось, что точка зрения Шази восторжествовала.

### К. А. Ситников: частичный захват возможен!

Прошло несколько лет. Пример Шмидта подвергся пересмотру. Результаты свидетельствовали: основная идея ученого верна — небесное тело, прилетевшее к Солнцу на огромной скорости, может «столкнуть» другое тело, пролетающее рядом, с гиперболической орбиты на эллиптическую, а затем удалиться в бесконечность. Более того, выяснилось, что эту идею можно использовать для построения траекторий чисто теоретическими средствами, без численного интегрирования.

В 1952 году К. А. Ситников построил аналитический пример частичного захвата, а в 1956 году В. М. Алексеев — примеры обмена. При этом оказалось, что подобные примеры отнюдь не представляют собою какие-то единичные исключения — небольшое изменение параметров небесных тел не приводило к изменениям качественной картины явления.

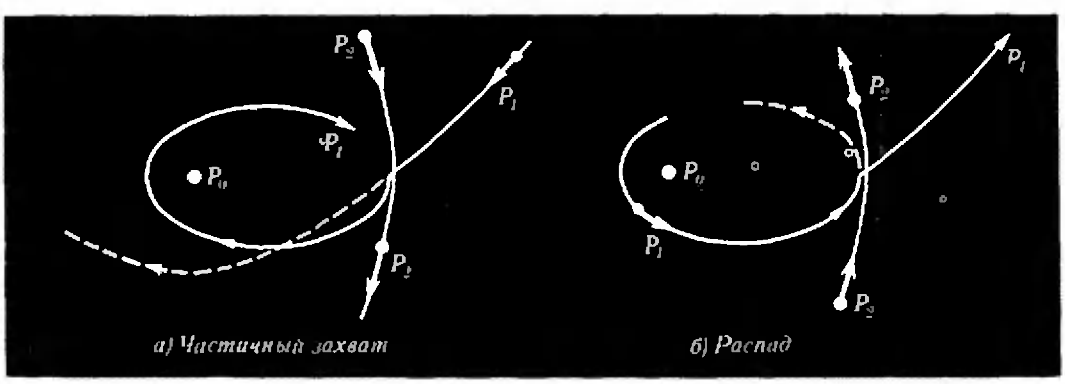



Рис. 4. Примеры частичного захвата и распада

В. М. Алексеев (1932—1980). Выдающийся советский математик, исследования которого в задаче трех тел завершились построением безупречного примера полного захвата.

В сравнительно простых случаях утверждение Шази было опровергнуто.

Но оставалась под сомнением возможность комбинаций других типов движений. Было неизвестно, существуют ли осциллирующие движения вообще, возможен ли полный захват. Дело осложнялось тем, что такие примеры, если бы их и удалось обнаружить, представляли бы собой случаи исключительные.

## Равнобедренная задача трех тел

Уже на примере задачи двух тел мы могли убедиться, как много для осмысления общей проблемы значит порою характерный частный случай. При разборе задачи двух тел одно из них мы предполагали значительно тяжелее другого. Это сильно упростило классификацию их движений. Классификация остается справедливой и для общего случая, но если бы мы сразу принялись за него, объяснение потребовало бы больших усилий.

При анализе осциллирующих движений успех также был обусловлен удачным модельным примером. Предложенный А. Н. Колмогоровым, он получил впоследствии название *равнобедренной задачи* трех тел. Слово «равнобедренный» выражает характерную особенность примера: в каждый момент времени треугольник, образуемый тремя телами, оказывается равнобедренным. Два тела, составляющие основание этого треугольника, имеют одинаковую, весьма солидную массу. Назовем их «звездами»; третье же, значительно более легкое, естественно назвать «пылинкой».

Звезды в примере Колмогорова движутся в плоскости по эллиптическим орбитам вокруг своего общего центра масс, пылинка же движется вдоль перпендикуляра к плоскости, восстановленного в этом центре (рис. 5).

В 1960 году Ситников показал, что движение пылинки может носить осциллирующий характер, то есть представлять собой колебания с изменяющимся размахом, причем этот размах временами достигает сколь угодно больших значений.

Такие колебания могут происходить и с постоянным размахом — если звезды движутся по окружности, словно гонясь друг за другом. Но если орбиты звезд — эллиптические и благодаря этому звезды то сближаются, то расходятся, хотя бы незначительно, в движении пылинки возникает эффект раскачки.

Этим примером было доказано существование осциллирующих движений в задаче трех тел.

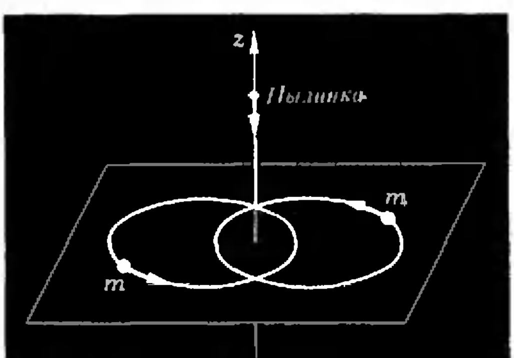



Рис. 5. Равнобедренная задача трех тел

Оставался последний бастион: проблема полного захвата.

### В. М. Алексеев: полный захват возможен!

Исходной позицией для штурма последнего бастиона послужила все та же равнобедренная задача трех тел. Исследуя ее, В. М. Алексеев в 1968 году доказал: начальное положение и скорость пылинки можно выбрать так, что ее последующее движение будет принадлежать к типу ограниченных или осциллирующих движений, а приобрести такое положение и скорость пылинка может и прилетев из бесконечности.

В целом же картина движения выглядит так: пылинка приближается из бесконечности к плоскости эллиптического движения двух массивных тел, пронзает эту плоскость, и за это время массивные тела сближаются, силы взаимного притяжения между всеми тремя участниками движения возрастают настолько, что притормаживают пылинку, поворачивают ее вспять и заставляют в последующем совершать колебания с ограниченным или неограниченным размахом. Первая из двух этих возможностей соответствует полному захвату, вторая — *захвату в осцилляцию*, как говорят исследователи.

Как водится, самые последние шаги оказываются самыми трудными. Все те примеры движений, имеющих различный характер в прошлом и будущем, которые были построены до 1968 года, как бы выуживались из огромного океана неизвестности, какой представляет из себя вся совокупность возможных движений в задаче трех тел. Исследования же Алексеева пролили свет на то, как эта совокупность устроена.

Результат Алексеева завершил многолетнюю дискуссию по поводу утверждения Шази: оно оказалось полностью неверным! Самые спорные комбинации разнородных типов из классификации Шази, которыми движение трех тел описывается в прошлом и будущем, оказались осуществимыми, получили строгое аналитическое обоснование.

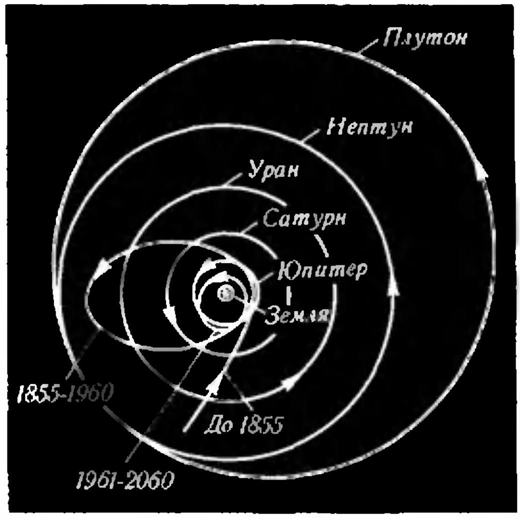



**Рис. 6. Катастрофическая трансформация кометы Кирнса-Кви в 1855 г. и эволюция ее орбиты (по расчетам Е. И. Казимирчак—Полонской)**

### Комета Кирнса-Кви: захват Юпитером?

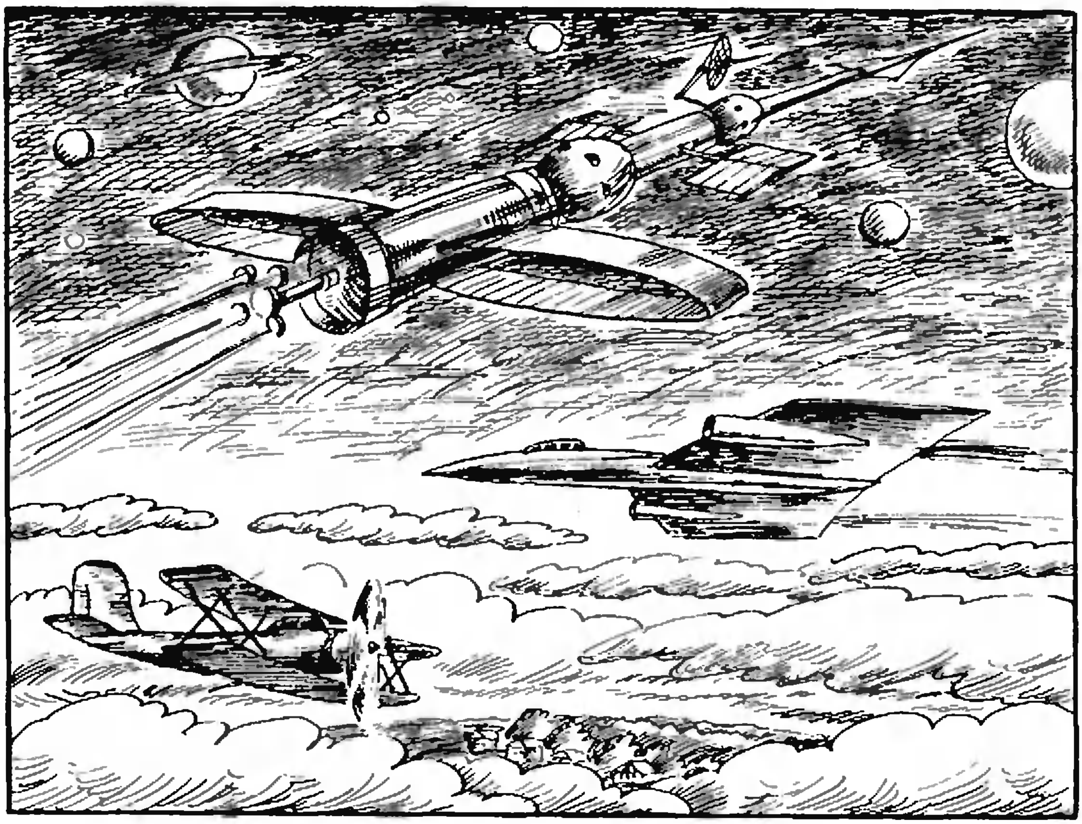
Нельзя сказать, что с опровержением утверждений Шази в проблеме гравитационного захвата не осталось никаких неясностей. Некоторые из них внимательный читатель мог бы подметить даже с помощью этой короткой статьи.

Ну, например: возможен ли такой гравитационный захват кометы, каким он виделся Лапласу — за счет ее прохождения мимо Юпитера или другой планеты-гиганта? Есть основания думать, что ответ — положительный.

Вот как может выглядеть этот захват. Комета, пройдя вблизи Юпитера на гиперболической (по отношению к Солнцу) скорости, тормозится им и переводится на эллиптическую орбиту вокруг Солнца с тем, чтобы при очередной встрече с Юпитером перейти на другую эллиптическую орбиту и т. д.

Некоторое время казалось, что так была захвачена комета Кирнса-Кви, открытая в 1963 году. По результатам полугодового наблюдения были вычислены ее нынешняя и предшествующая орбиты. Получилось (рис. 6), что в 1961 году комета Кирнса-Кви прошла вблизи Юпитера

*(Окончание см. на с. 27)*



*А. Стасенко*

# Летать быстрее и дальше

*Живет она, дошедшая от дедов,*
*Особая сжигающая страсть*
*Влечет к себе туманность Андромеды*
*Сквозь немоту космических пространств*

Н. Образцова. Город над морем

Тысячи лет мечтал человек летать и добился этого, «опираясь на силу своего разума», на сумму науки и технологии. Летательный аппарат, по сути дела, — венец технической цивилизации. Не случайно его разработка и постройка и сегодня доступны не всем странам. Мы можем по праву гордиться вкладом русских ученых в осуществление этой общечеловеческой мечты. Одним из них был Константин Эдуардович Циолковский, который впервые обосновал возможность использования ракет для межпланетных сообщений.

Рассмотрим некоторые аспекты физики летательного аппарата, в частности — ракетного двигателя, разработанного Циолковским и описанного в его научных и популярных статьях и книгах.

### Почему именно ракета?

В определенном смысле любое движение является реактивным. «Пароход отталкивает воду, дирижабль и аэроплан — воздух, человек и лошадь — земной шар... Такие жалкие реактивные явления мы обыкновенно и наблюдаем на земле. Вот почему они никого не могли поощрить к мечтам и исследованиям... Ракета заключает в самой себе вещества для отброса» (К. Э. Циолковский).

Ракеты начали делать давно, но сначала это была «то гульба, то пальба», как поется в песне. Только Циолковский понял, что ракета — единственное средство для достижения принципиально любой скорости, а значит, и необходимой для преодоления силы земного тяготения. «Только разум и наука могли указать на преобразование этих явлений в грандиозные, почти непостижимые чувству», — писал Циолковский.

Так почему же именно ракета? Постараемся понять это, сравнив ее с другим, казалось бы самым близким ей «по духу», летательным аппаратом — прямоточным воздушно-реактивным двигателем. Но прежде — о самой ракете (рис. 1). Представим себе, что в некоторый произвольный момент времени $t$ ракета имела скорость $v$. Мысленно разобьем ракету на две части — ту, которая через малый промежуток времени $\Delta t$ «собирается» отлететь назад (отработанное топливо ракеты), обозначим ее массу через $\Delta M$, и тот «остаток» массой $m$, который полетит дальше, но уже с другой скоростью, равной $v+\Delta v$. Скорость отлетевшей части относительно «остатка» обозначим через $u$, тогда ее скорость относительно земного наблюдателя будет равна $(v+\Delta v)-u$. Так как разделение произошло под действием внутренних сил, суммарный импульс ракеты не изменился*):

$$(m+\Delta M)\,v=m\,(v+\Delta v)+\\ +\Delta M\,(v+\Delta v-u),$$

или

$$\underline{mv}+\underline{\underline{\Delta M\cdot v}}=\underline{mv}+m\Delta v+\\ +\underline{\underline{\Delta M\cdot v}}+\underline{\Delta M\cdot \Delta v}-\Delta M\cdot u.$$

Слагаемые, подчеркнутые прямыми чертами (одной или двумя), взаимно уничтожатся, а слагаемое, подчеркнутое волнистой линией, «исчезнет» вот по какой причине. Здесь и в дальнейшем мы будем все приращения — $\Delta t$, $\Delta v$, $\Delta M$ и другие — считать очень малыми, так что их произведения типа $\Delta M\cdot\Delta v$ будут совсем малыми, или, как говорят математики, второго порядка малости. Итак, что же останется от закона сохранения импульса? Вот какое равенство:

$$m\Delta v=u\Delta M.$$

Если учесть, что отброшенная масса $\Delta M$ в точности равна убыли массы ракеты: $\Delta M=-\Delta m$, то полученное равенство можно переписать в виде

$$\frac{\Delta v}{u}=-\frac{\Delta m}{m}. \qquad (1)$$

Теперь проведем аналогичные рассуждения для воздушно-реактивного двигателя (рис. 2). Вот он «готовится» в момент времени $t$ «заглотить» порцию воздуха массой $\Delta m_в$ и, израсходовав массу горючего $\Delta m_г$, выбросить образовавшуюся смесь с относительной скоростью $u$. При этом, разумеется, изменение массы самого летательного аппарата будет равно $\Delta m=-\Delta m_г$. Запишем закон сохранения импульса для системы двигатель — горючее — воздух:

$$\Delta m_в\cdot 0+(m+\Delta m_г)\,v=\\ =(\Delta m_в+\Delta m_г)\,(v+\Delta v-u)+m\,(v+\Delta v)$$

(здесь $v$ — скорость аппарата в момент времени $t$, $v+\Delta v$ — его новая скорость в момент $t+\Delta t$, первое слагаемое слева отражает тот факт, что поглощенный двигателем воздух первоначально покоился).

*) Если эта фраза вам показалась не очень понятной, советуем прочитать главу «Закон сохранения импульса» из школьного учебника «Физика 8».

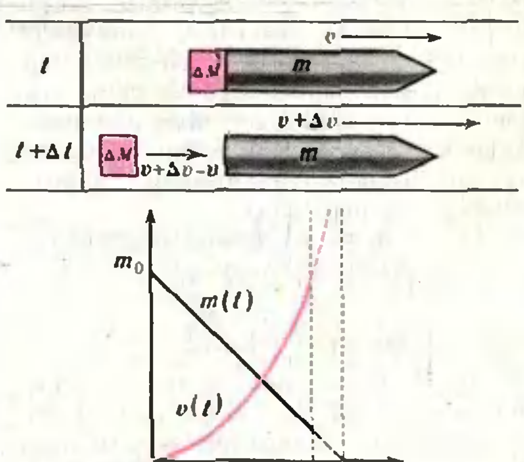


Рис. 1.

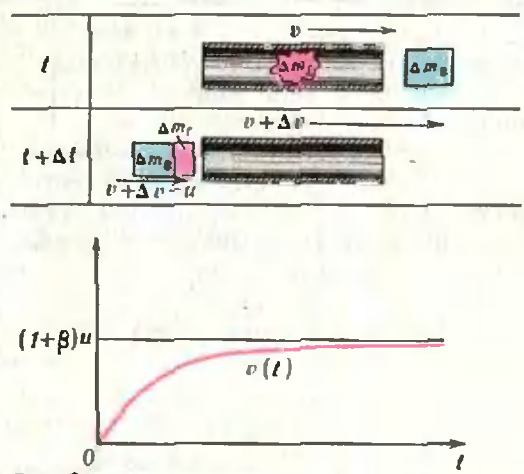


Рис. 2.

Отсюда, учитывая сделанные раньше оговорки, после некоторых преобразований получаем

$$\frac{\Delta v}{u}=\frac{\Delta m_{\text{г}}}{m}-\frac{\Delta m_{\text{в}}}{m}\left(\frac{v}{u}-1\right).$$

Пусть горючего подается ровно столько, чтобы оно все прореагировало с кислородом воздуха. Отношение масс $\Delta m_{\text{г}}/\Delta m_{\text{в}}$, конечно, будет зависеть от химического состава горючего, но для данного вещества оно будет постоянной величиной, которую мы обозначим через $\beta$. Тогда предыдущее равенство примет вид

$$\frac{\Delta v}{u}=\frac{\Delta m_{\text{г}}}{m}\,\frac{1+\beta-v/u}{\beta},$$

или

$$\frac{\Delta v}{u}=-\frac{\Delta m}{m}\,\frac{1+\beta-v/u}{\beta}. \qquad (2)$$

Посмотрите внимательно на уравнения (1) и (2). Они имеют нечто общее, а именно: для того чтобы скорость летательного аппарата росла ($\Delta v>0$), нужно, чтобы масса его убывала ($\Delta m<0$). Но есть и очень важное отличие: в правую часть уравнения (2) входит множитель $1+\beta-v/u$, который по достижении скорости $v=u(1+\beta)$ становится равным нулю. Это означает, что воздушно-реактивный двигатель, «заглатывающий» покоящийся воздух, не может разогнаться до скорости, существенно большей, чем относительная скорость истечения продуктов сгорания. Скорость такого двигателя имеет предел, который преодолеть невозможно. А для ракеты аналогичного предела нет.

На самом деле этим уже все сказано, однако в принципе можно получить и точные выражения для скоростей ракеты и двигателя.

Тот, кто умеет суммировать бесконечно малые приращения, то есть интегрировать, из выражения (1) легко получит (учитывая, что в момент $t_0=0$ $v=0$ и $m=m_0$)

$$\frac{v-0}{u}=-(\ln m-\ln m_0),$$

или

$$\frac{v}{u}=\ln\frac{m_0}{m}.$$

Это и есть знаменитая формула Циолковского. Историки науки говорят, что он затратил на нее немало времени: первооткрывателю всегда трудно. Сегодня грамотный школьник получит ее за несколько минут, а студент факультета аэромеханики и летательной техники Московского физико-технического института (специально тому обученный) — за несколько секунд.

Проанализируем полученную формулу. Если убыль массы ракеты в единицу времени есть величина постоянная (обозначим ее через $\mu=-\frac{\Delta m}{\Delta t}$), то с течением времени масса ракеты изменяется по закону (см. рис. 1)

$$m(t)=m_0-\mu t.$$

По истечении времени $\tau$, когда сгорит и будет выброшено все топливо, масса ракеты станет равной $m_\tau=m_0-\mu\tau$, а ее скорость —

$$\frac{v_\tau}{u}=\ln\frac{m_0}{m_\tau}.$$

Очевидно, что ракета достигнет тем большей скорости, чем меньше оставшаяся масса. Это печально, ибо неэкономно, но что поделаешь — такова природа. Хорошо уже то, что найдена лазейка, используя которую можно достичь «скорости убегания» от планеты, хотя и дорогой ценой. Но есть и еще одна возможность — увеличение относительной скорости выброса отработанного топлива.

Вот что писал сам Циолковский по этому поводу: «Чтобы снаряд получил наибольшую скорость, надо, чтобы каждая частица продуктов горения или иного отброса получила наибольшую относительную скорость. Она же постоянна для определенных веществ отброса. Экономия энергии тут не должна иметь места: невозможна и невыгодна».

Итак, нужно постараться увеличить скорость выброса $u$.

### Как выбрасывать массу?

В принципе, это можно делать миллионом способов. Так, в одном из проектов Циолковского реактивная тяга должна была получаться в результате выбрасывания из имеющейся на борту космического корабля пушки сферических ядер. Ясно, что такой способ не многого стоит: большой скорости он дать не может.

Среди множества гораздо более поздних проектов был, например, такой*) (рис. 3). В геометрическом центре огромной прочной чаши взрываются поочередно доставляемые туда атомные бомбы. При взрыве каждой из них сначала возникает интенсивный выброс электромагнитной энергии в виде гамма- и рентгеновских лучей, видимого света и теплового излучения. Поглощение этой энергии, сопровождающееся испарением тонкого слоя космического корабля, сообщает аппарату импульс в желаемом направлении. Второе воздействие на корабль возникнет, когда осколки бомбы достигнут поверхности чаши и, обладая высокой скоростью, передадут ей свой импульс. Серия из нескольких сотен таких взрывов сможет обеспечить ускорение большой полезной нагрузки и ее взлет с поверхности планеты. (Этот процесс можно сравнить с работой многоступенчатой ракеты, состоящей из мощных ступеней с малыми периодами работы.) Конечно, в этом проекте речь идет о громадном летательном аппарате размером в несколько километров (а может быть, даже и десятков километров). Вот «как далеко может хватить разум человеческий!».

В настоящее время задача разгона и выброса массы реализуется более обыденно: путем пропускания сильно нагретого газа через так называемое сверхзвуковое сопло. Такой вариант получения реактивной тяги — «силою действия струи газа, вытекающего из резервуара, в котором этот газ находится под давлением», — тоже рассматривался Циолковским.

Разберем этот процесс в упрощенном виде, который, однако, позволит сделать многие выводы. Для лучшего понимания нам придется ввести несколько новых для многих читателей

*) Этот и ряд других любопытных проектов описаны в книге У. Корлисса «Ракетные двигатели для космических полетов» (М., «Иностранная литература», 1962).

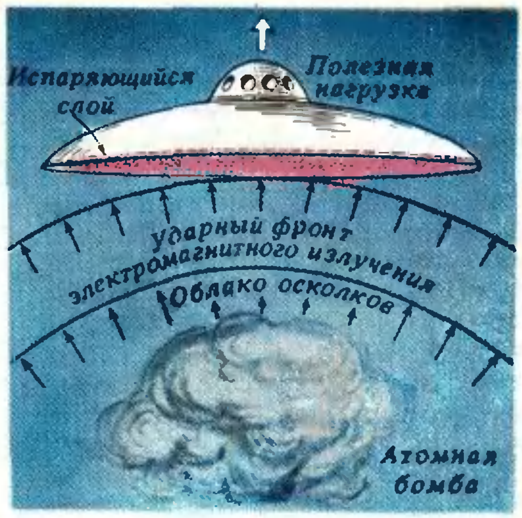



Рис. 3.

понятий — таких, как поток массы, поток импульса и поток энергии*). Они часто используются в физике.

Представьте себе речку, в которой вода течет со скоростью $u$ и которая имеет площадь поперечного сечения (перпендикулярного скорости) $S$. Тогда за единицу времени через это сечение проходит масса воды, равная произведению $\varrho uS$. Эта величина и называется потоком массы. Посмотрите, как она «устроена»: плотность воды $\varrho$ умножается на объем $uS$, переносимый в единицу времени. Но каждая единица массы (точнее — масса каждой единицы объема) обладает и кинетической энергией $\varrho u^2/2$, и импульсом $\varrho u$. Значит, река переносит не только массу, но и эти величины тоже, причем потоки кинетической энергии и импульса равны соответственно $(\varrho u^2/2)\,uS$ и $\varrho u \cdot uS$. В дальнейшем эти понятия будут нами использованы.

Пусть какая-нибудь жидкость (или газ) движется по каналу переменного сечения с площадью $S$, зависящей от точки на оси $X$. Очевидно, что масса жидкости (или газа), проходящая через любое сечение $S$ в единицу времени (поток массы), одинакова:

$$\varrho uS = \mu = \text{const}. \qquad (3)$$

*) О понятии потока различных физических величин рассказывается в статье Л. Луганского «Стойте справа, проходите слева...» («Квант», 1982, № 5). (Прим. ред.)

Если плотность $\varrho$ постоянна, например, течет несжимаемая жидкость, то это уравнение отражает совсем простую мысль: где канал шире, там течение медленнее, где уже — быстрее. В отличие от несжимаемой жидкости, газ может сильно расширяться, при этом его плотность уменьшается. Следовательно, при той же площади сечения канала скорость газа будет гораздо больше, чем скорость жидкости. Что и требуется для наших целей. Теперь понятно, почему из ракеты должен выбрасываться именно газ.

Для простоты рассуждений будем считать газ идеальным и одноатомным. Это означает, что он подчиняется уравнению Менделеева — Клапейрона $pV = \frac{m}{M}RT$, или

$$p = \varrho \frac{RT}{M} \qquad (4)$$

(здесь $p$ — давление, $\varrho = m/V$ — плотность, $T$ — температура, $M$ — молярная масса газа, а $R$ — универсальная газовая постоянная), и что его внутренняя (тепловая) энергия равна

$$\frac{3}{2}\frac{m}{M}RT.$$

Далее положим, что в газе не происходит никаких химических реакций, тепло к нему ниоткуда не поступает и никуда от него не отводится. Тогда поток суммарной энергии газа, так же как и поток массы, должен сохраняться. Как это записать?

Каждая единица объема газа обладает во время движения кинетической энергией $\varrho u^2/2$ и тепловой энергией $^3/_2 \varrho RT/M$, поэтому потоки этих энергий равны $(\varrho u^2/2)uS$ и $(^3/_2 \varrho RT/M)uS$. Кроме того, сила давления $pS$ совершает в единицу времени работу, равную $pSu$, что вызывает соответствующее увеличение потока энергии. Таким образом, поток суммарной энергии равен

$$\left(\frac{\varrho u^2}{2} + \frac{3}{2}\varrho\frac{RT}{M}\right)uS + pSu = \text{const},$$

или, после деления на $\varrho uS$,

$$\frac{u^2}{2} + \frac{3}{2}\frac{RT}{M} + \frac{p}{\varrho} = \text{const}.$$

Преобразуем еще это уравнение, подставив выражение для давления из уравнения Менделеева — Клапейрона. Тогда получим

$$\frac{u^2}{2} + \frac{3}{2}\frac{RT}{M} + \frac{RT}{M} = \frac{u^2}{2} + \frac{5}{2}\frac{RT}{M} = \text{const} = \frac{5}{2}\frac{RT_0}{M}. \qquad (5)$$

Здесь мы конкретизировали выражение постоянной, введя температуру $T_0$, при которой газ покоится ($u = 0$).

Теперь, хорошенько поработав, пора получать «урожай». Из последнего уравнения видно, что если бы газ в процессе движения мог охладиться до $T = 0$, то он приобрел бы самую большую скорость

$$u_{max} = \sqrt{\frac{5RT_0}{M}}.$$

При этом вся тепловая энергия газа перешла бы в кинетическую энергию его направленного движения.

Сделаем численную оценку. Допустим, нам удалось нагреть самый легкий одноатомный газ гелий ($M = 4$ кг/кмоль) до $T_0 = 3000$ К. Тогда его можно разогнать до скорости

$$u_{max} = \sqrt{\frac{5RT_0}{M}} = \sqrt{\frac{5 \cdot 8{,}31 \cdot 10^3\ \text{Дж/(кмоль}\cdot\text{К)} \cdot 3 \cdot 10^3\ \text{К}}{4\ \text{кг/кмоль}}} \approx$$
$$\approx 5{,}6 \cdot 10^3\ \text{м/с} \approx 5{,}6\ \text{км/с}.$$

Это приблизительно в полтора раза меньше первой космической скорости, но вся прелесть в том, что ракета может набрать скорость, гораздо большую скорости истечения газа.

И, наконец, остался последний вопрос.

### Каким нужно сделать канал?

Иначе говоря, каков должен быть закон изменения площади поперечного сечения $S$ вдоль оси $X$, чтобы можно было достичь скорости $u_{max}$?

Выделим объем канала, заключенный между близкими друг к другу сечениями $x$ и $x + \Delta x$, где площади равны $S$ и $S + \Delta S$, а скорости, плотности и давления — $u$ и $u + \Delta u$, $\varrho$ и $\varrho + \Delta\varrho$, $p$ и $p + \Delta p$ соответственно (рис. 4). На участке $\Delta x$ поток массы $\mu = \varrho uS$ изменяет свой импульс под действием разности $pS-(p+\Delta p)\times\times(S+\Delta S)$ сил давления, действующих вдоль оси $X$, и проекции на эту ось силы давления, действующей на боковую стенку канала: $p\cdot 2\pi r(x)\times\times\Delta x\cdot\operatorname{tg}\alpha=p\cdot 2\pi r(x)\cdot\Delta r=p\cdot\Delta(\pi r^2)==p\Delta S$.

Запишем уравнение второго закона Ньютона для приращения импульса потока массы $\mu$ под действием указанных сил:

$$\mu(u+\Delta u)-\mu u==pS-(p+\Delta p)(S+\Delta S)+p\Delta S,$$

или

$$\underline{\mu u}+\mu\Delta u-\underline{\mu u}==\underline{\underline{pS}}-\underline{\underline{pS}}-\Delta p\cdot S-\underline{\underline{\underline{p\Delta S}}}-\Delta p\cdot\Delta S++\underline{\underline{\underline{p\Delta S}}}.$$

Отсюда, опуская подчеркнутые члены, получим

$$\mu\Delta u=-\Delta p\cdot S,$$

или

$$\varrho u\Delta u=-\Delta p. \qquad (6)$$

Тут кончается физика и начинается формальная обработка полученных результатов. Чтобы собраться с духом, выпишем рядом уравнения (3)—(6):

$$\varrho uS=\mathrm{const},$$
$$p=\varrho\frac{RT}{M},$$
$$\frac{u^2}{2}+\frac{5}{2}\frac{RT}{M}=\mathrm{const},$$
$$\varrho u\Delta u=-\Delta p.$$

Можно полюбоваться и прислушаться: тут вся динамика стационарного течения идеального газа! Но вот что любопытно. Три уравнения выписаны в виде обычных алгебраических соотношений, а последнее — в виде малых приращений. И с этим ничего не поделаешь — ведь и $\varrho$, и $p$ и $u$ изменяются вдоль канала. Поэтому последнее уравнение трогать не будем, а все другие запишем тоже в виде приращений (подробнее о том, как это сделать, в частности — как найти малое приращение произведения изменяющихся величин, можно прочитать в Приложении к статье):

$$uS\Delta\varrho+\varrho S\Delta u+\varrho u\Delta S=0,$$

или

$$\frac{\Delta\varrho}{\varrho}+\frac{\Delta u}{u}+\frac{\Delta S}{S}=0, \qquad (3')$$

$$\Delta p=\frac{R}{M}(T\Delta\varrho+\varrho\Delta T), \qquad (4')$$

$$u\Delta u+\frac{5}{2}\frac{R}{M}\Delta T=0, \qquad (5')$$

$$\varrho u\Delta u=-\Delta p. \qquad (6)$$

Подставим $\Delta T$ из выражения (5′) в равенство (4′), $\Delta p$ из полученного выражения подставим в (6), оттуда $\Delta\varrho$ — в (3′) и найдем связь между $\Delta u$ и $\Delta S$:

$$\frac{\Delta u}{u}\left(\frac{3}{5}\frac{u^2M}{RT}-1\right)=\frac{\Delta S}{S}.$$

Отметим, что $^5/_3RT/M$ — это квадрат какой-то скорости. Обозначим его через $a^2$, тогда в скобке будет выражение $u^2/a^2-1$. На самом деле $a^2$ — это квадрат скорости звука в одноатомном газе при температуре $T$, но этот факт нам не понадобится. Просто будем помнить, что есть некоторая важная скорость $a$, зависящая от $T$. И этого нам здесь будет достаточно.

Итак, что же видно из последнего уравнения? Если $u<a$, то скобка отрицательна, и для положительного приращения скорости ($\Delta u>0$) приращение площади должно быть отрицательным ($\Delta S<0$), то есть площадь надо уменьшать. По мере увеличения $u$ мы достигнем точки, где $u=a$. Здесь скобка обращается в нуль, и $\Delta S=0$ при любом $\Delta u$, в том числе и положительном. И наконец, когда $u>a$, для дальнейшего роста $u$ нужно обеспечить положительное приращение площади ($\Delta S>0$), то есть сечение канала должно увеличиваться. Это и есть качественное описание

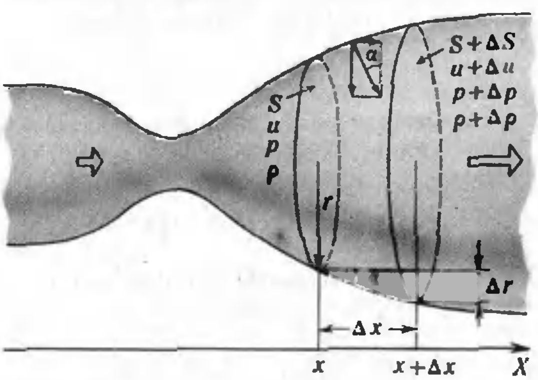



Рис. 4.

## Константин Эдуардович Циолковский

**(1857 — 1935)**

*«Сначала неизбежно идут: мысль, фантазия, сказка. За ними шествует научный расчет. И уже в конце концов исполнение венчает мысль».*

К. Э. Циолковский

*«Время иногда неумолимо стирает облики прошлого, но идеи и труды Константина Эдуардовича будут все больше и больше привлекать к себе внимание по мере дальнейшего развития ракетной техники. Константин Эдуардович Циолковский был человеком, жившим намного впереди своего века, как и должен жить истинный и большой ученый».*

Академик С. П. Королев

*«Для нас, космонавтов, пророческие слова Циолковского об освоении космоса всегда будут программными, всегда будут звать вперед».*

Ю. А. Гагарин

сопла, которое позволяет разогнать газ до большой скорости (в частности, при $S \to \infty$ и $T \to 0$ до $u_{\max}$).

* * *

Закончить статью нам хочется словами К. Э. Циолковского, сказанными им в 1935 году: «...До последнего времени я предполагал, что нужны сотни лет для осуществления полетов с астрономической скоростью (8—17 км в секунду)... Но непрерывная работа в последнее время поколебала эти мои пессимистические взгляды: найдены приемы, которые дадут изумительные результаты уже через десятки лет».

### Приложение

Покажем, как найти малое приращение произведения нескольких изменяющихся величин.

Рассмотрим величину $w$, которая является произведением двух величин $f$ и $g$. Если последние изменились на $\Delta f$ и $\Delta g$ соответственно, то приращение величины $w$ равно разности между ее новым значением $w+\Delta w = (f+\Delta f)(g+\Delta g)$ и первоначальным значением $w = fg$:

$$(w+\Delta w) - w = (f+\Delta f)(g+\Delta g) - fg,$$

или

$$\underline{w} + \Delta w - \underline{w} = \underline{\underline{fg}} + \Delta f\cdot g + \Delta g\cdot f + \underset{\sim\sim}{\Delta f\cdot\Delta g} - \underline{\underline{fg}}.$$

Слагаемые, подчеркнутые прямыми чертами (одной или двумя), взаимно уничтожатся, а слагаемым, подчеркнутым волнистой линией, можно будет пренебречь, когда мы захотим рассматривать малые приращения величин $\Delta w$, $\Delta f$ и $\Delta g$ (произведение $\Delta f\cdot\Delta g$ двух малых приращений совсем мало, и учитывать его не имеет смысла). Таким образом,

$$\Delta w = \Delta(fg) = f\Delta g + g\Delta f.$$

В качестве частных случаев легко получить следующие. Если одна из величин, например $f$, постоянна (обозначим ее через $f_0$), то ее приращение, естественно, всегда равно нулю, поэтому

$$\Delta(f_0 g) = f_0\Delta g$$

(постоянная величина выносится за знак приращения). Если же обе величины одинаковы ($f = g = v$), то

$$\Delta(fg) = \Delta(v^2) = 2v\Delta v.$$

Аналогично можно показать, что малое приращение трех изменяющихся величин равно

$$\Delta(fgz) = gz\Delta f + fz\Delta g + fg\Delta z$$

и так далее.

Возможно, математик, прочитав написанное, нахмурится и выскажет много критических замечаний. И он будет прав. Действительно, все доказательства можно провести более строго и аккуратно, но для понимания статьи достаточно и этого Приложения.

*А. Буздин, В. Тугушев*

# Как создавалась физика низких температур

Исследования при низких температурах давно привлекали к себе внимание ученых. Еще Лавуазье в XVIII веке писал, что если бы удалось поместить нашу Землю в некую весьма холодную область, и все реки и океаны превратились бы в горы, а воздух перестал бы быть невидимым и превратился бы в жидкость, то такое превращение открыло бы возможность получения новых необычных жидкостей, о свойствах которых ранее не имелось никакого представления. Предвидение Лавуазье о существовании нового, интересного мира низких температур сбылось в полной мере. Исследования при низких температурах являются одним из важнейших направлений в современной физике.

Поведение вещества вблизи абсолютного нуля зачастую не имеет ничего общего с его поведением при обычных температурах. При низких температурах проявляются многочисленные красивые эффекты, которые при обычных условиях, как правило, оказываются замаскированными тепловым движением атомов. Только при низких температурах наблюдается сверхпроводимость — способность вещества пропускать ток, не оказывая ему ни малейшего сопротивления. Открытием этого замечательного явления, не имеющего аналога в классической физике, мы обязаны выдающемуся голландскому ученому Гейке Камерлинг-Оннесу. Камерлинг-Оннес первым получил гелий в жидком состоянии и приступил к всестороннему исследованию его свойств. Именно возможность работать при гелиевых температурах и позволила Камерлинг-Оннесу обнаружить сверхпроводимость. О том, как был получен жидкий гелий и открыта сверхпроводимость, и пойдет речь в этой статье.

### Ожижение газов

Проведение исследований при низких температурах непосредственно связано с получением жидких газов. Дело в том, что многие газы могут находиться в жидком состоянии лишь при очень низкой температуре. Жидкий газ, налитый в сосуд, испаряясь, отнимает подводимое снаружи тепло; и пока остается хоть капля жидкого газа, температура поддерживается на уровне его температуры кипения.

История ожижения атмосферных газов начинается с 1877 года. Французский исследователь Кальете проводил опыты по ожижению ацетилена под высоким давлением. Во время одного из опытов аппаратура дала течь, и сжимаемый газ начал просачиваться наружу. Кальете, внимательно следивший за ходом опыта, успел заметить, что сразу же после возникновения течи в сосуде образовалось легкое облачко, которое тут же исчезло. У исследователя возникла догадка, что падение давления в результате утечки вызвало резкое охлаждение ацетилена, и появившееся облачко — сконденсировавшийся газ. Тщательные опыты подтвердили это предположение.

Кальете, не теряя времени, приступил к работе по ожижению атмосферных газов; начал он с кислорода. Толстостенный стеклянный сосуд с кислородом, сжатым до 300 атм, охлаждался испаряющейся двуокисью серы до —29°С. Когда сосуд был разгерметизирован и давление в нем резко упало, Кальете заметил облачко сконденсировавшегося газа. Сомнений быть не могло — удалось получить кислород в жидком состоянии. В декабре

1877 года Кальете сделал сообщение о результатах своих опытов по ожижению кислорода в Парижской Академии наук. Вскоре Кальете удалось получить в жидком виде и азот.

Понять, почему в опытах Кальете газ охлаждался, нетрудно. При достаточно быстром расширении газа не происходит заметного теплообмена между системой и окружающей средой, так что процесс расширения очень близок к адиабатному. Согласно первому закону термодинамики, при адиабатном процессе $\Delta U = A$, то есть изменение внутренней энергии газа равно работе внешних сил над газом. При расширении сам газ совершает положительную работу ($A' > 0$), и работа внешних сил — отрицательная. Следовательно, $\Delta U < 0$, что и означает охлаждение газа (поскольку внутренняя энергия газа пропорциональна его температуре).

Весьма важным параметром, определяющим ожижение газа, является давление. В конце XVIII века голландский физик Ван Марум, проводя эксперименты с аммиаком с целью проверить справедливость закона Бойля—Мариотта, заметил следующее. Вначале при уменьшении объема, занимаемого газом, давление газа пропорционально увеличивалось. Когда давление достигло значения 7 атм, произошло неожиданное — при дальнейшем сжатии давление не росло. В цилиндре появился жидкий аммиак, и количество жидкости увеличивалось при сжатии.

Именно по пути сжатия и шли исследователи в своих попытках ожижать газы. Однако водород, азот, кислород не удавалось ожижить, как бы сильно их ни сжимали. Ученые полагали, что это «постоянные газы», то есть водород, азот, кислород не могут существовать в виде жидкости. Загадкой оставалось, почему одни газы — «постоянные», а другие — нет. Решить эту загадку помогла теория голландского физика Ван-дер-Ваальса.

Ван-дер-Ваальс во второй половине XIX века предложил довольно

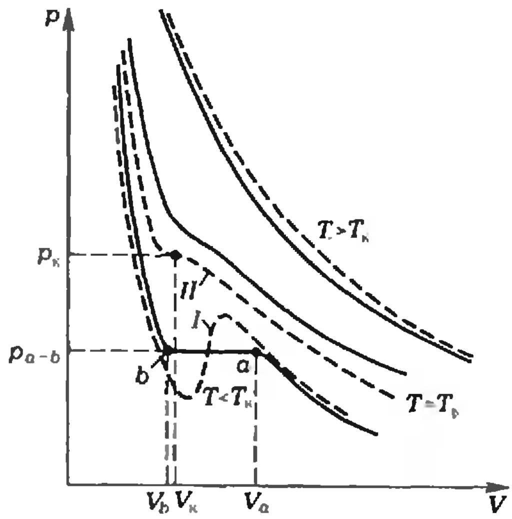



Рис. 1.

простое уравнение, описывающее состояние реальных газов. Как известно, модель «идеальный газ» тем точнее соответствует реальным газам, чем выше температура газа и чем меньше его плотность. При низких температурах и больших плотностях существенную роль играют силы взаимодействия между молекулами газа и тот факт, что молекулы имеют собственный объем. Предложенное Ван-дер-Ваальсом уравнение состояния реальных газов учитывало эти обстоятельства.

На рисунке 1 приведены изотермы реальных газов, получающиеся при измерениях (сплошные кривые), и теоретические изотермы, рассчитанные по уравнению Ван-дер-Ваальса. Как видно из рисунка, и изотермы Ван-дер-Ваальса тем точнее описывают поведение реального газа, чем выше его температура. Иными словами, и уравнение Ван-дер-Ваальса лишь приближенно описывает реальные газы. Однако это уравнение отражает факт существования двух различных состояний вещества, или, как говорят, двух фаз вещества — жидкой и газообразной, и из этого уравнения следует, что существует некоторая критическая температура, при которой исчезает различие между этими фазами.

Основная особенность изотермы *I* на рисунке 1 — наличие участка, на котором давление возрастает с увеличением объема газа.

Как нетрудно понять, наличие участка изотермы $I$, отвечающего падению давления с уменьшением объема, указывает на неустойчивость газа.

Действительно, рассмотрим газ в цилиндре, закрытом поршнем: на некотором участке изотермы $I$ (между точками $a$ и $b$) случайное уменьшение объема газа привело бы к уменьшению давления на поршень и, следовательно, к дальнейшему сжатию газа. В этой области теория Ван-дер-Ваальса неприменима — здесь происходит конденсация газа в жидкость. При конденсации давление остается постоянным — равным давлению насыщенных паров — на реальной изотерме появляется горизонтальный участок ($V_a - V_b$). После конденсации всего газа мы уже имеем дело с жидкостью. Определить точно, при каком значении $V$ начинается процесс конденсации, можно лишь экспериментально.

По мере увеличения температуры максимум и минимум на участке изотермы, соответствующем неустойчивому состоянию, сближаются, и при некоторой температуре они совпадают (изотерма $II$ на рисунке 1). Эта температура $T_к$ — критическая температура — является характерной величиной для каждого газа. При температуре выше $T_к$ газ не может сконденсироваться ни при каких значениях давления. Иными словами, $T_к$ есть максимальная температура, при которой вещество может существовать в жидком состоянии. Соответствующее этой температуре значение критического давления $p_к$ — максимальное давление насыщенного пара (газа), а значение $V_к$ определяет максимальную плотность газа. По мере приближения к критической точке разность плотностей газа и жидкости уменьшается, и в критическом состоянии она обращается в нуль. (Отметим, что для идеального газа $T_к = 0$, то есть конденсация не происходит ни при каких конечных давлениях. Это связано с тем, что в модели идеального газа полностью отсутствует межмолекулярное взаимодействие.)

Теперь понятно, что «постоянными газами» считали газы, которые пытались ожижать при температурах, выше критических; а это сделать невозможно ни при каких давлениях.

### На подступах к жидкому гелию

Хотя Кальете и удалось ожижить кислород, перед ним продолжала стоять задача удержания заметного количества кислорода в жидкой фазе — ведь предоставленный самому себе кислород очень быстро испарялся. Эту задачу решить ему не удалось. Дальнейший прогресс в деле ожижения газов связан с именами польских физиков Ольшевского и Вроблевского, усовершенствовавших малопроизводительный прибор Кальете и получивших жидкий кислород «спокойно кипящим в испытательной трубке». Однако, несмотря на настойчивые попытки, Вроблевскому и Ольшевскому не удалось пополнить список ожиженных газов — водород не поддавался ожижению. Первым получил водород в жидком состоянии английский физик Дьюар в 1898 году.

В Голландии эстафету в проведении исследований по ожижению газов принял друг и последователь Ван-дер-Ваальса Камерлинг-Оннес, который возглавил в 1882 году криогенную лабораторию в Лейденском университете. Первым шагом в его научной деятельности на этом пути была экспериментальная проверка теоретических предсказаний Ван-дер-Ваальса относительно критических значений температуры и давления, при которых газ может перейти в жидкое состояние.

В качестве объектов исследований Камерлинг-Оннес использовал различные газы, охлаждая их до все более низких температур и измеряя изотермы. Наибольшее внимание ученого привлек гелий, который к тому времени еще не был ожижен, несмотря на настойчивые попытки. Тот факт, что гелий остается в газообразном состоянии вплоть до крайне низких температур, дает возможность по экспериментальным изотермам гелия получать данные о межмолекулярных взаимодействиях в газе (ведь именно при низких температурах резче проявляются отклонения реального газа от идеального, связанные с межмолекулярным взаимодействием).

В 1907 году Камерлинг-Оннес опубликовал результаты измерений изотерм гелия в интервале температур от $+100°C$ до $-216°C$. Вскоре после этого последовали измерения при температурах жидкого водорода ($-259°C$).

Исследования при таких температурах требовали уникального оборудования, мощной технологической базы для сжижения газов. И здесь самое время рассказать о некоторых выдающихся качествах Камерлинг-Оннеса, которые во многом определили успехи Лейденской лаборатории в низкотемпературных исследованиях.

Камерлинг-Оннес понимал, что сложность исследовательской техники требует искусного и хорошо подготовленного вспомогательного персонала. Он чувствовал, что времена профессоров-любителей, проводивших эксперименты с помощью непритязательных самодельных приборов, безвозвратно уходят. Проникновение во все более глубокие тайны природы требовало создания «индустрии» научного приборостроения. Оннес основал при своей лаборатории в 1901 году школу прибористов и стеклодувов. Он постоянно подчеркивал, что физические наблюдения должны выполняться с астрономической точностью; а это требовало радикального изменения технической подготовки эксперимента. По существу, лаборатория Оннеса стала прообразом и моделью для научно-исследовательских институтов XX века.

Понимая важность быстрого ознакомления ученых с научными достижениями, Камерлинг-Оннес основал журнал «Сообщения из физической лаборатории Лейденского университета», в котором печатались сообщения о работах, выполненных в его лаборатории. Двери лаборатории были широко распахнуты перед всеми, кто хотел работать в области криогенной техники. Это был совершенно новый научный стиль, новый тип взаимоотношений между физиками разных стран и научных школ.

**Ожижение гелия**

Камерлинг-Оннеса интересовали прежде всего значения критических параметров гелия, главным образом — температуры $T_к$. Измеряя изотермы гелия при все более низких температурах, он пришел к выводу, что значение $T_к$ лежит между 5К и 6К. Решено было, что охладить гелий до температуры ниже критической можно при помощи быстрого расширения гелия, сжатого предварительно до давления 100 атм и охлажденного до температуры жидкого водорода. При опытной проверке Камерлинг-Оннес заметил плотное серое облако тумана. Казалось бы, это свидетельствовало о конденсации гелия.

Однако продолжение этих экспериментов показало, что причина появления облака — наличие в гелии незначительной примеси водорода, оставшейся несмотря на тщательную очистку. Когда опыт был повторен с гелием, очищенным еще более тщательно, образование тумана не наблюдалось. Увеличив скорость расширения, Камерлинг-Оннес увидел легкое облачко тумана. Но туман был очень неплотным, и облачко исчезло в течение секунды; так что вопрос об истинном значении критической температуры гелия остался открытым.

Решающий эксперимент был произведен 10 июля 1908 года. Схема этого эксперимента приведена на рисунке 2. Гелий, сжатый до большого давления, из компрессора поступает в теплообменник, где охлаждается жидким водородом. Охлажденный сжатый гелий, пройдя через специальный кран $K_1$, попадает в приемник, где резко расширяется и охлаждается. Пока температура гелия в приемнике выше $T_к$, конденсации не происходит, и охлажденный гелий возвращается в компрессор через теплообмен-

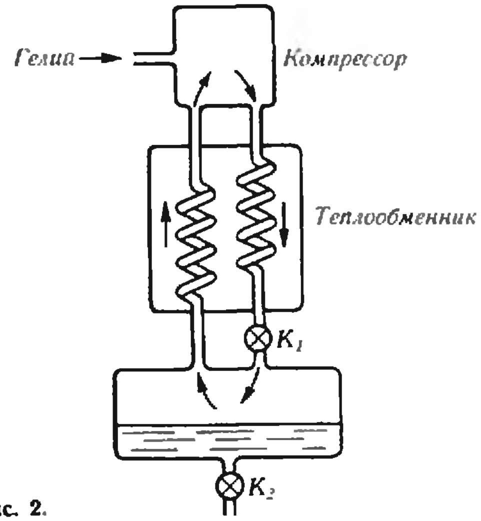



Рис. 2.

ник. В теплообменнике этот гелий дополнительно охлаждает идущий ему навстречу сжатый гелий, так что новая порция газа, попадающего в приемник, имеет более низкую температуру, чем предыдущая. Таким постепенным охлаждением можно добиться того, что температура гелия, расширяющегося в приемник, станет равной критической — начнется конденсация.

Образовавшийся жидкий гелий через специальный кран $K_2$ попадает в сосуд Дьюара.

Эксперимент начался в 5 часов 45 минут с ожижения 20 литров водорода, необходимого для охлаждения гелия. Эта работа была завершена в 13 часов 30 минут. При предварительном охлаждении аппаратуры с помощью жидкого водорода требовалась исключительная осторожность. Малейшее количество атмосферного воздуха, который мог случайно попасть в систему, подвергло бы риску заключительный эксперимент. В контакте с жидким водородом воздух отвердел бы, примерз к стеклу гелиевого сосуда и сделал бы невозможным дальнейшее наблюдение. Циркуляция гелия началась в 16 часов 20 минут, и с этого момента внутренний криостат ожижителя оказался в области еще не исследованных низких температур.

В течение длительного времени индикатор термометра почти не смещался. После дополнительной регулировки аппаратуры было отмечено постепенное снижение температуры; однако вскоре оно прекратилось. Уже был израсходован почти весь имевшийся жидкий водород, а никаких признаков ожижения гелия еще не было. В 19 часов 30 минут казалось, что все попытки ожижения окончились неудачей, и именно в этот критический момент один из коллег Камерлинг-Оннеса высказал предположение, что отсутствие дальнейшего отклонения индикатора объясняется тем, что термометр погружен в кипящую жидкость. Сосуд осветили снизу, и вдруг неожиданно стал видимым уровень жидкости, ясно различимый благодаря отражению света снизу. Сосуд почти полностью был заполнен жидким гелием (около 60 см$^3$). Вот как описывает этот торжественный момент Камерлинг-Оннес: «Это было удивительное зрелище — появление впервые жидкости, имеющей почти нематериальный вид. Втекание ее в сосуд не было замечено. Ее присутствие было замечено, когда она уже наполнила сосуд, а ее поверхность выделялась остро, как лезвие ножа. Я был счастлив, что мог показать сгущенный гелий своему многоуважаемому другу Ван-дер-Ваальсу, теория которого до конца оставалась путеводной нитью».

В конце эксперимента Камерлинг-Оннес сделал попытку получить гелий в твердом виде, понижая давление в объеме, где кипела жидкость. Чтобы получить как можно более низкую температуру, он позволил жидкости испаряться до тех пор, пока ее не осталось лишь около 10 см$^3$, а после этого подсоединил гелиевый криостат к вакуумному насосу, понижающему давление над кипящей жидкостью до 0,01 атм. Но никаких признаков образования твердого гелия не обнаружилось, и Камерлинг-Оннес предположил, что точка отвердевания гелия лежит за пределами возможности его эксперимента. В своих более поздних исследованиях он дважды пытался охладить гелий до твердого состояния и дважды терпел неудачу. Последняя такая попытка была предпринята им в 1922 году. Откачивая пар над жидким гелием с помощью двенадцати насосов, он сумел понизить давление до 0,013 мм рт. ст. и достичь температуры 0,83 К! Однако даже при такой рекордно низкой температуре гелий остался жидким.

Камерлинг-Оннеса в первом же эксперименте поразила очень малая плотность жидкого гелия. Он оказался в 8 раз легче воды; это говорит о том, что легкие атомы гелия находятся на относительно большом расстоянии друг от друга; перевести такую жидкость в твердое состояние гораздо сложнее, чем обычные жидкости.

По этой причине гелий остается жидким вплоть до самых низких температур. Но даже и вблизи абсолютного нуля он остался бы жидким, поскольку здесь его затвердеванию препятствуют законы квантовой механики. Напомним, что с точки зрения классической физики с понижением температуры тепловые колебания частиц вещества становятся все слабее и слабее. Наличие межмолекулярных сил должно в конце концов приводить к затвердеванию вещества. Согласно законам квантовой механики обычное представление о полной остановке атомов при абсолютном нуле оказывается неверным — атомы совершают так называемые «нулевые» колебания, которые не связаны с тепловым движением.

Таким образом, с точки зрения классической физики уникальное поведение жидкого гелия при низких температурах совершенно непонятно. Это вещество при нормальном давлении не затвердевает вплоть до абсолютного нуля. Так, при $T=1{,}78$ К твердый гелий существует при давлении $p=30\,000$ атм.

Другое очень странное свойство жидкого гелия было отмечено Оннесом в первом же опыте по ожижению. Измеряя плотность жидкого гелия, он обнаружил, что при понижении температуры от точки кипения она увеличивается, то есть гелий сжимается. При температуре 2,2 К имеет место острый максимум, и при дальнейшем охлаждении гелий увеличивается в объеме, и плотность его падает. Исследования, проведенные Оннесом в последние годы жизни, выявили необычные аномалии в физических свойствах гелия при температуре ниже 2,2 К.

Позднее, уже после смерти Оннеса в 1926 году, были опубликованы результаты исследований жидкого гелия, проведенных его учениками. Так, в 1932 году Кеезом и Клаузиус обнаружили резкое увеличение теплоемкости жидкого гелия вблизи $T=2{,}2$ К. Через несколько лет стало ясно, что при $T=2{,}2$ К в жидком гелии происходит фазовый переход, характеризующийся изменением физических свойств. При $T>2{,}2$ К до точки кипения жидкий гелий представляет собой обычную жидкость (называемую HeI), а вот при $T<2{,}2$ К у него появляются совершенно необычные свойства. В 1938 году советский физик П. Л. Капица обнаружил, что при $T<2{,}2$ К жидкй гелий (названный HeII) характеризуется полным отсутствием вязкости: он течет по узкому капилляру без сопротивления, то есть силы трения строго равны нулю. Такое свойство HeII было названо сверхтекучестью. Теория этого явления была создана Л. Д. Ландау.

Работы выдающихся советских физиков получили высочайшую оценку — оба они были удостоены Нобелевских премий.

В своих экспериментах с жидким гелием Камерлинг-Оннес фактически наблюдал переход жидкого гелия в совершенно новое, сверхтекучее состояние, но не сумел оценить величие сделанного им открытия. Не будем забывать, однако, что тогда квантовая физика еще только делала первые шаги; чтобы объяснить поведение жидкого гелия при низких температурах, требовался радикально новый подход, отказ от классических представлений. Это могли сделать и сделали только физики следующего поколения. Во времена же Оннеса само ожижение гелия было огромной научной победой и казалось последней ступенью на пути к абсолютному нулю.

**Открытие сверхпроводимости**

Располагая возможностью получать температуры лишь на один градус выше абсолютного нуля, Камерлинг-Оннес приступил к исследованию свойств различных веществ при «гелиевых температурах». Определить удельное электрическое сопротивление образца сравнительно легко при любой температуре. Вполне понятно поэтому, что Оннес начал с изучения поведения сопротивления при низких температурах. К тому же в начале века этот вопрос был весьма важен.

Существовали теории, которые давали совершенно противоположные предсказания относительно поведения электропроводности при очень низких температурах.

Согласно одной, при абсолютном нуле электрическое сопротивление должно исчезать. Действительно, электропроводность металла пропорциональна времени между двумя последовательными столкновениями электрона с колеблющимися атомами. При понижении температуры амплитуда колебаний атомов уменьшается. Следовательно, столкновения электрона с атомами становятся более редкими, и проводимость растет; так что при $T=0$ сопротивление становится равным нулю.

С другой стороны, была выдвинута гипотеза, согласно которой электроны проводимости при низких температурах связываются с атомами, что приводит к бесконечно большому сопротивлению при $T=0$.

Камерлинг-Оннес приступил к измерению сопротивления платины при низких температурах. Полученные им результаты не укладывались в рамки существовавших теорий — при понижении температуры сопротивление платины оставалось постоянным. Однако Оннес обратил внимание на то, что величина сопротивления различных образцов при прочих равных условиях была тем меньше, чем чище оказывался металл. Отсюда он заключил, что существование сопротивления при $T \to 0$ — так называемого остаточного сопротивления — связано с примесями, и чистый металл при нулевой температуре должен обладать бесконечной проводимостью. (Оннес, правда, ошибочно полагал, что сопротивление чистых металлов должно плавно уменьшиться до нуля уже при гелиевых температурах.) Задача, таким образом, заключалась в исследовании возможно более чистого образца. Золото можно очистить значительно лучше большинства металлов, в частности лучше платины. Полученные при измерениях величины удельного остаточного сопротивления у золота были много ниже, чем у платины, и падали с увеличением чистоты образца. Камерлинг-Оннес обратился также к исследованию поведения сопротивления ртути. Дело в том, что это вещество при комнатной температуре находится в жидкой фазе, и путем последовательной перегонки можно получать все более и более чистую ртуть.

Результаты экспериментов со ртутью оказались неожиданными. Сопротивление ртути изменялось с понижением температуры не плавно — при температуре несколько ниже точки кипения жидкого гелия оно резко падало и становилось неизмеримо малым.

28 апреля 1911 года Камерлинг-Оннес сообщил о результатах своих экспериментов Нидерландской Королевской академии. Открытое им явление он назвал сверхпроводимостью.

В 1913 году в своей лекции при получении Нобелевской премии Оннес высказал предположение, что явление сверхпроводимости может быть связано с квантованием энергии, открытым Планком в конце прошлого века. Однако должно было пройти около полувека, пока была построена полная теория сверхпроводимости.

Обнаружив переход в совершенно неизвестное ранее состояние, Камерлинг-Оннес задался целью досконально изучить его свойства. Первым вставал вопрос: насколько же малым становится сопротивление образца в сверхпроводящей фазе? Оннесу необходимо было научиться измерять предельно малые удельные сопротивления. С этой задачей он

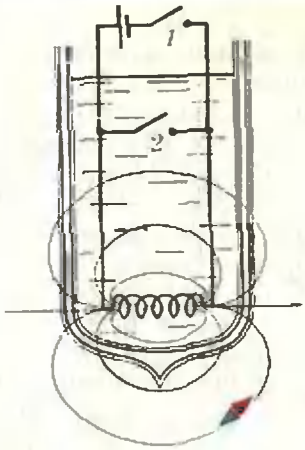



Рис. 3.

блестяще справился, разработав новый остроумный метод измерения.

Катушка из свинцового провода (рис. 3) путем замыкания ключа 1 может быть подключена к батарее, а с помощью ключа 2 может быть замкнута накоротко. В начале эксперимента ключ 1 был замкнут, а 2 — разомкнут. Охлаждаемая жидким гелием в сосуде Дьюара катушка находилась в сверхпроводящем состоянии. При этом ток от батареи, проходящий через катушку, создавал вокруг нее магнитное поле, которое легко обнаруживалось по отклонению стрелки компаса, расположенной снаружи сосуда Дьюара. Затем ключ 2 замкнули, а ключ 1 разомкнули. Сверхпроводящая обмотка оказалась замкнутой накоротко. Стрелка компаса, однако, оставалась отклоненной, что указывало на наличие тока в катушке, уже отсоединенной от батареи. Наблюдая за стрелкой на протяжении нескольких часов (пока не испарился весь гелий из сосуда), Оннес не заметил ни малейшего изменения в отклонении стрелки. Это и означало отсутствие сопротивления обмотки — ведь при наличии сопротивления энергия рассеивалась бы в катушке, ток уменьшался бы, и это можно было бы заметить по изменению отклонения стрелки компаса.

По результатам эксперимента Камерлинг-Оннес пришел к выводу, что сопротивление сверхпроводящей свинцовой катушки по меньшей мере в $10^{11}$ раз меньше ее сопротивления в нормальном (не сверхпроводящем) состоянии.

Самое длительное зафиксированное до сих пор существование незатухающего тока — около двух лет. (Этот ток циркулировал бы и поныне, если бы не перерыв в снабжении жидким гелием, вызванный забастовкой транспортных рабочих.) Даже спустя два года не было замечено никакого ослабления величины циркулирующего тока, что позволяет с полным основанием считать сопротивление сверхпроводника равным нулю.

Практическое применение сверхпроводимости сулило блестящие перспективы. Ведь сверхпроводящий электромагнит совсем не потребляет электроэнергию, и с его помощью можно было бы легко получать сильные магнитные поля. В обычном электромагните получение сильного магнитного поля требует больших токов, что приводит к выделению колоссального количества тепла в обмотках. Последнее обстоятельство и ограничивает предельную величину магнитного поля, создаваемого электромагнитом. Применение сверхпроводников в трансформаторах, электромоторах и генераторах также сулило огромные преимущества, с лихвой окупающие необходимость работать при гелиевых температурах.

Оннес первым приступил к созданию сверхпроводящего магнита. Однако здесь его ждало разочарование. Эксперименты в Лейдене показали, что в магнитном поле, превышающем некоторое пороговое значение, сверхпроводимость исчезает. Величины этих пороговых полей оказались очень малыми — несколько сотен эрстед, что существенно ниже полей даже в небольших электрических машинах. Пропускание сильного электрического тока также разрушало сверхпроводимость — возникавшие магнитные поля оказывались выше пороговых уже при сравнительно слабых токах.

Лишь много времени спустя были открыты сверхпроводящие материалы, способные выдерживать сильные магнитные поля и пропускать большие токи без разрушения сверхпроводимости. Понадобилось более сорока лет для создания первых сверхпроводящих магнитов, имеющих пракическое значение. В настоящее время основные исследования в области сверхпроводимости направлены на создание материалов, которые переходили бы в сверхпроводящее состояние при сравнительно «высоких» низких температурах — хотя бы в области азотных температур (температура кипения азота — 77,4 К). Пока наибольшая температура такого перехода — 24 К (у соединения $Nb_3Ge$).

В современной физике исследования свойств вещества при низких температурах играют огромную роль. В полной мере сбываются слова Камерлинг-Оннеса, образно писавшего: «Из всех областей физики приходят к нам толпой вопросы, ожидающие решения от измерений при гелиевых, температурах. Заглядывая в будущее, я вижу, что всюду... производятся измерения в криостатах, в которых доставляется жидкий гелий... им можно распоряжаться так же легко, как водою... Эта работа должна приподнять покрывало, которым тепловое движение при обычных температурах закрывает от нас внутренний мир атомов и электронов».

## Гравитационный захват

*(Начало см. на с. 4)*

и перешла с орбиты, афелий которой располагался между орбитами Нептуна и Урана, на короткопериодическую орбиту с перигелием, довольно близким к орбите Земли (последнее обстоятельство и сделало возможным ее обнаружение). Согласно тем же вычислениям, на большой эллипс комету Кирнса-Кви вывел Юпитер в 1855 году, захватив с гиперболической орбиты.

К сожалению, позднейшие наблюдения и вычисления не подтвердили захвата. Представления астрономов о прошлом кометы Кирнса-Кви радикально изменяются при каждом уточнении ее нынешней орбиты. Поистине «беззаконная комета в кругу расчисленных светил»!

Таким образом, проблема поставленная Лапласом почти два столетия назад, все еще вызывает острые дискуссии. С одной стороны, гравитационный захват осуществим, это доказано строго и окончательно. С другой стороны, до сих пор не выяснено, была ли захвачена Солнечной системой хотя бы одна из принадлежащих ей комет. Ни об одной из них, наблюдавшихся до сих пор, нельзя с достоверностью утверждать, что она действительно пришла из межзвездных пространств. На 1979 год (дата издания последнего каталога кометных орбит) надежно определены орбиты 659 комет, из которых только 98 имеют гиперболический тип. Но где гарантия, что они были гиперболическими и до момента первого наблюдения этих комет?

В настоящее время считается, что на границе Солнечной системы находится гигантское облако комет — облако Оорта, которое по размерам в 100—150 тысяч раз превосходит орбиту Земли. Считается, что те кометные орбиты, которые кажутся нам параболическими или слабо гиперболическими, в своей подавляющей части являются на самом деле сильно вытянутыми эллипсами, обход которых совершается за времена до 400 тысяч лет. Но вот вопрос: образовалось ли облако Оорта одновременно со всей Солнечной системой или оно время от времени пополняется за счет гравитационного захвата комет, странствующих в межзвездных пространствах? Здесь мнения расходятся. Будем надеяться, что ответ на этой вопрос даст будущее.

*Б. Явелов*

# Луи де Бройль

Девяносто лет назад в небольшом городке Дьеппе на французском берегу Ла-Манша родился Луи де Бройль, один из основоположников квантовой теории. Род де Бройлей — очень старый, аристократический, его многочисленные представители прославились как военачальники, дипломаты, высокопоставленные сановники.

Но молодого Луи де Бройля, так же как и его брата Мориса (который был старше на 17 лет), лавры предков прельщали мало — они оба стали учеными. К концу первого десятилетия нынешнего века Морис де Бройль приобрел репутацию одного из самых авторитетных физиков Франции. Его младший брат, окончивший в 1909 году лицей в Париже, вначале решил посвятить себя гуманитарным наукам и в 1910 году получил в Парижском университете (в знаменитой Сорбонне) звание лиценциата (низшая ученая степень во Франции) истории. Но тяга к физике и математике — сложившаяся не без влияния брата — возобладала, и в 1913 году Луи де Бройль в той же Сорбонне получил еще одно звание лиценциата, на этот раз — лиценциата точных наук.

В 1914 году началась первая мировая война, и будущий великий физик был мобилизован и определен радистом на радиостанцию, которая помещалась в Эйфелевой башне. Шесть лет он занимался радио, или, как тогда говорили, «беспроволочным телеграфом», и только в 1920 году получил возможность вернуться к физике. Он начал работать в частной лаборатории своего брата, где занялся экспериментами с высокочастотным электромагнитным излучением (в частности — с рентгеновскими лучами). Глубоко заинтересовавшись тесно связанными с этой работой проблемами квантовой теории, стоявшими тогда в центре внимания физиков, Луи де Бройль уже в начале 1922 года приступил к теоретическим попыткам продвинуться в понимании сущности квантовых явлений.

В 1924 году де Бройль защитил докторскую диссертацию, которая называлась «Исследования по теории квантов». Научным консультантом де Бройля был Поль Ланжевен (1872—1946) — выдающийся французский физик, человек передовых научных и политических взглядов (Ланжевен был большим другом нашей страны, в 1944 г. он вступил во Французскую коммунистическую партию). В этой работе де Бройль выдвинул идею о волновых свойствах материи: он предположил, что любая материальная частица наряду с корпускулярными свойствами обладает и волновыми свойствами. Если масса частицы $m$, скорость ее $v$, то этой частице соответствует волна, длина которой определяется по формуле

$$\lambda = h/mv,$$

где $h$ — постоянная Планка.

При энергии электрона 200 эВ соответствующая ему волна имеет длину $\sim 10^{-10}$ м, то есть такую же, как длина волн рентгеновского излучения. Можно было ожидать, что если электроны действительно обладают волновыми свойствами, то при прохождении электронов через кристаллическую решетку должна происходить дифракция — как при прохождении через кристалл рентгеновских лучей.

Действительно, в 1927 году впервые наблюдалась дифракционная картина при прохождении электронов через металлическую фольгу.

Основная идея теории де Бройля — уподобление движущихся материальных объектов волнам — шла вразрез с привычными представлениями об окружающем мире, и большинству физиков она казалась несуразной, дикой, даже сумасшедшей. Лишь немногие с пониманием отнеслись к революционным взглядам де Бройля. Но среди этих немногих были Ланжевен и Эйнштейн, сказавший, что своей работой де Бройль «приподнял краешек великого занавеса».

Прошло два года, и этот занавес был полностью поднят — на сцене физики во всем величии и блеске предстала новая наука — квантовая механика, важнейшей частью которой является переосмысленная и углубленная волновая теория де Бройля.

В 1929 году выдающиеся заслуги де Бройля перед наукой были отмечены присуждением ему Нобелевской премии по физике; множество научных учреждений и организаций различных стран мира сделали французского ученого своим членом. Луи де Бройль — иностранный член АН СССР.

После своего эпохального открытия Луи де Бройль продолжал заниматься принципиальными вопросами квантовой теории, проблемами сверхвысокочастотных электромагнитных колебаний, философией и историей физики, много времени уделял он и преподаванию физики, в частности, в той же Сорбонне, где когда-то учился сам. Свой живой интерес к физике великий ученый не утратил и по сей день.

**Рецензии, библиография**

## Этот прочный непрочный мир

Каждый человек, мало-мальски интересующийся, как устроен наш мир, рано или поздно задает себе вопрос: «Почему наш мир устроен так, а не иначе?» В самом деле, почему, например, все предметы не разваливаются на составляющие их молекулы и атомы? А если атомам и молекулам так нравится держаться друг за друга, то почему наш мир состоит из отдельных предметов, а не представляет из себя единую монолитную глыбу?

Ответы на эти вопросы в первую очередь пытается дать физика. Ученым многое ясно уже и теперь. А как быть тем, кто знает физику еще слишком мало, только начал ее изучать? Махнуть на все рукой: мол, интересно, конечно, но не по зубам? Не стоит отчаиваться. Физики сами охотно рассказывают обо всем, что знают, и стараются делать это просто и понятно, так сказать «на пальцах».

Вот и на наши «почему?» можно найти ответы в книге «Портрет трещины» (М., «Металлургия», 1981), написанной физиком профессором В. М. Финкелем. Научная работа автора непосредственно касается обсуждаемых в книге проблем.

Открыв книгу, мы сразу же знакомимся с главными «действующими лицами», нарисованными художником Р. В. Левицким: это — металл с атомами, вакансиями и дислокациями, ус, напряжение, трещина, температуры.

Не будет преувеличением сказать, что настоящее и будущее человечества зависят от того, какими материалами мы пользуемся сейчас и какие придут им на смену. Ведь наше спокойствие, удобства, а иногда и жизнь зависят от прочности и надежности окружающих нас предметов: домов, дорог, мостов, автомобилей, поездов, самолетов... Читая книгу, мы постепенно начинаем понимать, как сложны и оригинальны механизмы прочности и разрушения, определяющие многие физические свойства тел.

Автор разбирает эти вопросы на самом современном уровне: читатель попадает в таинственный микромир — мир атомов и молекул. Довольно строгое изложение отнюдь не сухо, во многом — благодаря удачным аналогиям, цитатам из литературных произведений, образно иллюстрирующим сложные физические проблемы.

А теперь предоставим слово автору:

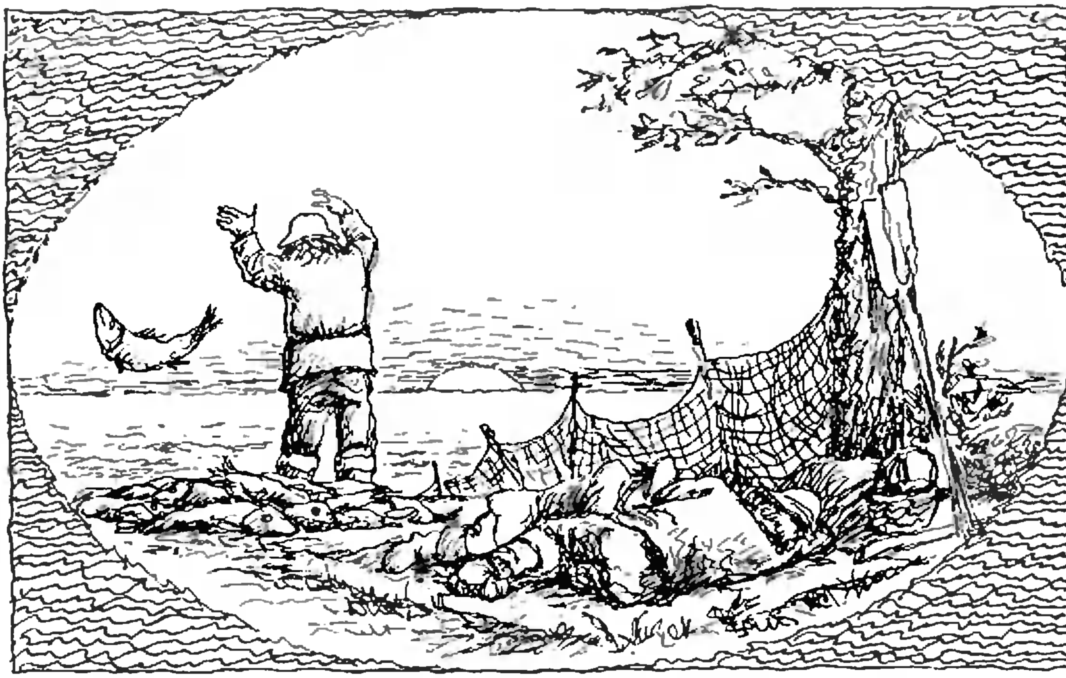
«Книга, лежащая перед вами, посвящена разрушению, его природе и его многообразным проявлениям: и когда оно обнаженное зло, и когда оно жизненно важно и успешно служит людям... Возможно, и хорошо, если природа была бы проще, чем она есть, но зато как чудесно, что так еще много неизвестного, даже опасно неизвестного, к чему можно приложить свои мужество, ум и руки...

Книга рассчитана на любознательного читателя, и автор стремился написать ее так, чтобы она была интересна и небесполезна и школьнику, и специалисту-инженеру.

Преисполненный этой надеждой, автор отдает свою книгу на суд читателей».

Нам кажется, что надежды автора оправдаются.

*А. Аринштейн*



*И. Камышко*

# Поль Дирак и задача о трех рыбаках

Совсем недавно, 8 августа этого года, отмечалось восьмидесятилетие выдающегося физика современности, лауреата Нобелевской премии Поля А. М. Дирака. С его именем связаны многие яркие достижения квантовой теории, и, может быть, самое впечатляющее среди них — предсказание первой античастицы — «антиэлектрона», или, как его назвали потом, позитрона. Напомним вкратце, как обстояло дело*).

Дирак составил уравнение, описывающее поведение электронов с учетом эффектов теории относительности. Это уравнение прекрасно объясняло ряд экспериментальных фактов, но обнаружилась и некая «странность»: части его решений отвечали отрицательные значения энергии электрона. Что было с ними делать? Отмахнуться от них или попытаться выявить скрытый в них физический смысл? Для Дирака ответ был ясен. Приведем его слова, сказанные, правда, в лекции, посвященной А. Эйнштейну и теории относительности, но вполне применимые и к нему самому: «Любой, кто понимает глубокую гармонию, связывающую между собой явления природы и общие математические принципы, должен чувствовать, что если теория так прекрасна и изящна, как теория Эйнштейна, то она в основном, безусловно, верна». И он высказывает оригинальную и исключительно смелую, особенно для того времени, гипотезу: решения его уравнения, лишенные, как казалось, физического смысла, в действительности описывают неизвестную пока элементарную частицу, почти ничем не отличающуюся от электрона, но с противоположным (положительным) электрическим зарядом той же величины. Так позитроны были предсказаны. А уже в следующем, 1932 году они были зарегистрированы в космических лучах.

---

*) Подробнее об открытии позитрона рассказано в статье А. Борового «Год чудес» («Квант», 1982, №№ 4, 5).

Вероятно, именно этот эпизод из богатой творческими победами жизни Поля Дирака способствовал возникновению одной легенды, уже много лет кочующей в разных вариантах по научно-популярным книжкам.

Рассказывают, что в юности ему попалась такая задача: *Три рыбака занимались ловлей рыбы в темную ночь. Устав, они улеглись спать, не поделив улова. На рассвете один из них проснулся и, не желая тревожить товарищей, поделил рыбу на три равные части; взяв свою часть, он уехал домой. При дележе у него одна рыбина оказалась лишней и он ее выбросил в море. Затем проснулся второй. Не зная, что первый уже уехал со своей долей, он тоже разделил рыбу на три части, одну из которых забрал себе, и уехал, а оказавшуюся и у него лишней рыбину он, как первый, выбросил в море. Наконец, проснулся третий рыбак. Не зная о том, что проделали первые два, он поступил, как они, то есть разделил рыбу на три части, забрал себе треть, а оставшуюся и у него рыбину выбросил в море, после чего уехал домой. Спрашивается, сколько всего рыб было выловлено?*

Ответ (приписываемый Дираку): «Было выловлено... минус две рыбы». Легко проверить, что формально все правильно. Первый рыбак, обнаружив всего минус (!) две рыбы, одну рыбу выбрасывает и из оставшихся (—3) рыб честно берет одну треть. В точности то же самое проделают второй и третий рыбаки, каждый из которых тоже унесет ровно минус одну рыбу. И хотя, по собственному свидетельству знаменитого физика, это решение ему сообщил профессор математики Дж. Уайтхед из Оксфорда*), понять авторов «легенды о Дираке и отрицательных рыбах» можно. Трудно найти более простой и изящный пример, который бы так же хорошо иллюстрировал дерзость идей и веру в «непостижимую эффективность математики в естественных науках» (как выразился другой нобелевский лауреат — американский физик Ю. Вигнер) — качества, столь присущие современной физике и физикам.

Но задача о рыбаках любопытна и сама по себе. Давайте попробуем ее решить. Переведем условие на язык уравнений. Пусть $N=N_0$ — количество всей выловленной рыбы, $N_1$ — количество рыбы, оставшейся после первого дележа, $N_2$ — после второго, $N_3$ — после третьего. Тогда, очевидно, $N_1=\frac{2}{3}(N_0-1)$ и, вообще, при $k=0, 1, 2$

$$N_{k+1}=\frac{2}{3}(N_k-1). \qquad (1)$$

Требуется найти такое целое число $N$, чтобы и числа $N_1$, $N_2$ и $N_3$ были целыми. Потребуем к тому же, чтобы все они были неотрицательными. Даже при этом ограничении задача, разумеется, имеет бесконечно много решений. Мы постараемся вывести общую формулу для числа $N$.

Откажемся пока от условия неотрицательности (!). Заметим, что задача допускает решение, причем только одно, при котором все $N_k$ равны одному и тому же числу $D$. Из (1) для числа $D$ получается уравнение $D=\frac{2}{3}(D-1)$, откуда $D=-2$. Это «решение Дирака». Пусть теперь $(N_k)$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая соотношению (1). Рассмотрим разность $N'_k$ двух решений задачи — $N_k$ и решения Дирака: $N'_k=N_k-D=N_k+2$. Поскольку

$$N'_{k+1}=N_{k+1}-D=\frac{2}{3}(N_k-1)-$$
$$-\frac{2}{3}(D-1)=\frac{2}{3}(N_k-D)=\frac{2}{3}N'_k,$$

последовательность $(N'_k)$ является геометрической прогрессией со знаменателем $\frac{2}{3}$. Следовательно,

$$N_k=N'_k-2=\left(\frac{2}{3}\right)^k N'_0-2=$$
$$=\left(\frac{2}{3}\right)^k(N+2)-2. \qquad (2)$$

*(Окончание см. на с. 62)*

*) Об этом пишет М. Гарднер в книге «Математические головоломки и развлечения» (М., «Мир», 1971), гл. 24. В этой книге, а также в книге «Заочные математические олимпиады» (М., «Наука», 1981), § 5, разобраны похожие задачи.

# Премии «Кванта»

В 1981/82 учебном году редакция получила более 12 тысяч писем с решениями задач из Задачника «Кванта». Школьники, решившие наибольшее число задач или приславшие наиболее оригинальные решения, награждаются специальными премиями, учрежденными редакционной коллегией журнала.

Книгами Библиотечки «Квант» с автографами авторов награждаются:

АЛЕКСЕЕВ Игорь (г. Москва, с. ш. № 179)
БАБАЕВ Азер (г. Баку, с. ш. № 145)
БАЗАЛИЙ Ярослав (г. Донецк, с. ш. № 17)
БЕСПАЛОВ Юрий (г. Киев, ФМШ № 2 при КГУ)
ВЕЙЦМАН Борис (г. Одесса, с. ш. № 53)
ГОХБЕРГ Александр (г. Донецк, с. ш. № 17)
ГРИНИВ Остап (г. Киев, ФМШ № 2 при КГУ)
ДУБИЦКАС Артурас (г. Таураге, с. ш. № 1)
ЕЛИСЕЕВ Максим (г. Москва, ФМШ № 18 при МГУ)
ЖЯКОНИС Миндаугас (г. Каунас, с. ш. № 2)
КИСИЛЬ Владимир (г. Одесса, с. ш. № 33)
КОМОВ Владимир (г. Александров, с. ш. № 2)
КУБЫШКИН Александр (г. Киев, с. ш. № 145)
НИКОЛАЕВСКИЙ Юрий (г. Харьков, с. ш. № 131)
НИКОНОВ Андрей (г. Кировград, с. ш. № 2)
ОВЕЦКИЙ Михаил (г. Донецк, с. ш. № 17)
ПЕНТЕГОВ Всеволод (г. Киев, с. ш. № 145)
ПЕРЕЛЬМАН Григорий (г. Ленинград, с. ш. № 239)
ПИРОЖЕНКО Андрей (г. Москва, ФМШ № 18 при МГУ)
РАДИОНОВ Александр (пос. Никольское Ленинградской обл.)
РАХМАНОВ Малик (г. Алма-Ата, РФМШ)
СИНЮКОВ Юрий (ст. Селезни Тамбовской обл.)
ТИТЕНКО Владимир (д. Блужа Минской обл.)
УГРИНОВСКИЙ Роман (г. Хмельник, с. ш. № 3)
ХОХЛОВ Андрей (г. Москва, с. ш. № 36)
ЦВЕТКОВ Павел (г. Москва, ФМШ № 18 при МГУ)
ШУГАЙ Александр (г. Запорожье, с. ш. № 23)
ШУКЛИН Михаил (г. Пермь, с. ш. № 32)
ЩЕДРИН Юрий (г. Брянск, с. ш. № 39)
ЯРОШ Валерий (г. Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ)

Подпиской на журнал «Квант» на 1983 год награждаются:

АЛЕКСЕЕВ Максим (г. Москва, с. ш. № 2, 9 кл.)
ЕРОШКИН Олег (г. Днепропетровск, с. ш. № 15, 10 кл.)
ЖЯМАЙТИС Раймундас (г. Вильнюс, с. ш. № 9, 11 кл.)
ЛЕЙЦИН Леонид (г. Чернигов, с. ш. № 10, 10 кл.)
ПУСТИЛЬНИК Михаил (г. Свердловск, с. ш. № 9, 10 кл.)
РОЗЕНВАЙН Наталия (г. Киев, с. ш. № 206, 10 кл.)
ТИЩЕНКО Андрей (г. Днепропетровск, с. ш. № 23, 10 кл.)
ФЕЛЬДМАН Виктор (г. Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.)

За интересные работы по моделированию многогранников книгами Библиотечки «Квант» награждается

ГОРОХОВСКИЙ Дмитрий (г. Черкассы, с. ш. № 4)

За успешное участие в XVI Всесоюзной физико-математической олимпиаде школьников подпиской на «Квант» на 1983 год награждаются:

ЕРШОВ Анатолий (г. Златоуст)
ИСХАКОВ Тимур (г. Душанбе, с. ш. № 8, 9 кл.)
ОГНЕВ Андрей (г. Ленинск-Кузнецкий, с. ш. № 2, 9 кл.)
ХОМЯКОВ Николай (г. Улан-Удэ, с. ш. № 35, 9 кл.)

Подпиской на «Квант» на 1983 год награждаются победители конкурса машинных рисунков («Квант», 1981, № 9), итоги которого были подведены в июле на Летней школе юных программистов в Новосибирском Академгородке:

ВОРНОВИЦКИЙ Юрий (г. Кишинев, с. ш. № 13)
ЗВЕРИНСКИЙ Семен (г. Москва, с. ш. № 772)
КУЗЕНКОВ Евгений (п. Нижнегородец Горьковской обл.)

За активную работу с учащимися и пропаганду физико-математических знаний, в результате чего многие школьники достигли значительных успехов в нашем конкурсе, за активное участие в Турнире юных физиков подпиской на «Квант» на 1983 год награждаются школы №№ 134, 145 (г. Баку), 17 (г. Донецк), 842 (г. Зеленоград), 145 (г. Киев), 239 (г. Ленинград), 11, 50 (г. Львов), 2 (г. Масаллы), 16, 50 (г. Минск), 2, 7, 38, 43, 46, 52, 57, 91, 179, 444, 710 (г. Москва), 1 (п. Нововоронежский), 103 (г. Ташкент), 1 (г. Фрязино), 82 (п. Черноголовка), РФМШ (г. Алма-Ата), ФМШ № 1 при ЕрГУ (г. Ереван), ФМШ № 2 при КГУ (г. Киев), ФМШ № 45 при ЛГУ (г. Ленинград), ФМШ № 18 при МГУ (г. Москва), ФМШ № 165 при НГУ (г. Новосибирск), ФМШ им. В. М. Комарова (г. Тбилиси).

# Задачник Кванта

## Задачи

### М761 — М765; Ф773 — Ф777

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 30 ноября 1982 года по адресу: 103006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9 — 82» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М761, М762» или «Ф773». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

**М761.** Через произвольную точку $P$ на стороне $AC$ треугольника $ABC$ параллельно его медианам $AK$ и $CL$ проведены прямые, пересекающие стороны $BC$ и $AB$ в точках $E$ и $F$ соответственно (рис. 1). Докажите, что медианы $AK$ и $CL$ делят отрезок $EF$ на три одинаковые части.

*Э. Готман*

**М762.** Докажите, что для любых положительных чисел $a$, $b$, $c$ выполнены неравенства

$$a+b+c\leqslant\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}\leqslant\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}.$$

**М763*.** Дан параллелограмм $ABCD$, отличный от ромба. Прямая, симметричная прямой $AB$ относительно диагонали $AC$, пересекает в точке $Q$ прямую, симметричную прямой $DC$ относительно диагонали $DB$ (рис. 2). Найдите отношение $|QA|:|QD|$, если известно отношение $|AC|:|BD|=k$.

*В. Дубровский*

**М764*.** Докажите, что каждое из уравнений а) $x^2+y^3=z^5$; б) $x^2+y^3+z^5=t^7$ имеет бесконечно много решений в натуральных числах.

*О. Мазуров*

**М765.** Пусть $B$ — конечное множество точек на плоскости, не принадлежащих одной прямой.
а) Докажите, что найдутся три точки множества $B$ такие, что проходящая через них окружность не содержит внутри себя других точек множества $B$.
б)* Назовем *триангуляцией* множества $B$ семейство треугольников с множеством вершин $B$, не налегающих друг на друга и в объединении дающих выпуклый многоугольник (триангуляцию множества $B$ можно получить, соединяя его точки непересекающимися отрезками, пока это возможно). Докажите, что для любого $B$ существует такая триангуляция, что окружность, описанная около любого треугольника этой триангуляции, не содержит внутри себя точек множества $B$. Укажите способ построе-

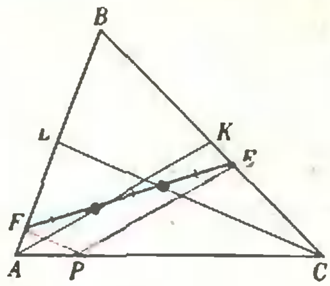



Рис. 1.

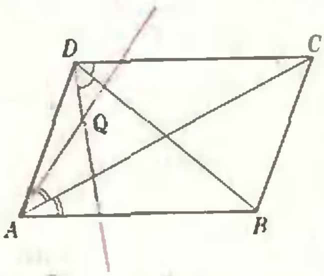



Рис. 2.

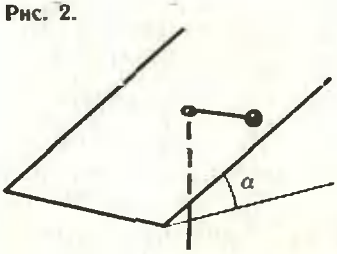



Рис. 3.

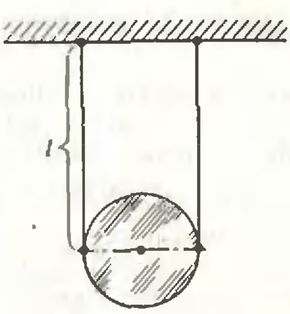



Рис. 4.

ния такой триангуляции.

в)* Докажите, что если никакие четыре точки множества $B$ не лежат на одной окружности, то описанная в пункте б) триангуляция единственна.

*Ф. Вайнштейн*

**Ф773.***) На шероховатой наклонной плоскости с углом наклона $\alpha$ лежит тело, к которому привязана легкая нерастяжимая нить. Свободный конец нити пропущен через маленькое отверстие в плоскости. В начальный момент тело лежит на плоскости так, что нить горизонтальна (рис. 3). Нить начинают медленно вытягивать; при этом тело к моменту достижения отверстия описывает половину окружности. Найти величину коэффициента трения тела о плоскость. (10)

**Ф774.** Для многих веществ существуют такие значения температуры $T_{тр}$ и давления $p_{тр}$, при которых все три фазы вещества — газообразная, жидкая и твердая — находятся в равновесии друг с другом — так называемая тройная точка. Для воды $T_{тр}=0{,}0075$°C, $p_{тр}=4{,}58$ мм рт. ст; удельная теплота парообразования в тройной точке равна $r=595{,}8$ кал/г, удельная теплота плавления — $\lambda=79{,}7$ кал/г. Найти удельную теплоту сублимации (прямого перехода из твердого состояния в газообразное) воды вблизи тройной точки.

*В. Давыдов*

**Ф775.** Многопредельный амперметр высокой точности содержит для каждого предела измерений отдельный шунт. Амперметр включают в сеть на пределе 10 мА, и он показывает силу тока $I_1=2{,}95$ мА; когда его переключили на предел 3 мА, он показал $I_2=2{,}90$ мА. Какова была сила тока в цепи до подключения амперметра? (9)

*А. Зильберман*

**Ф776.** В небольшой чайник налита доверху теплая вода ($t_1=30$°C). Чайник остывает на 1 градус за время $\tau=5$ мин. Для того чтобы чайник не остыл, в него капают горячую воду ($t_2=45$°C). Масса одной капли $m_к=0{,}2$ г. Сколько капель в минуту должно капать в чайник, чтобы температура поддерживалась равной 30°C? На сколько градусов подогреется вода за одну минуту, если начать капать втрое чаще?

Считать, что температура воды в чайнике выравнивается очень быстро. Лишняя вода выливается из носика. В чайник входит 0,3 литра воды. Температура окружающего воздуха $t_0=20$°C. (8)

*А. Зильберман*

*) Задачи Ф773, Ф775 и Ф776 предлагались на заключительном туре Всесоюзной физической олимпиады школьников. Число в скобках обозначает класс, в котором предлагалась задача.

**Ф777.** На невесомой нерастяжимой нити подвешен блок. Расстояние между точками подвеса нити равно диаметру блока; длина вертикальных участков нити равна $l$ (рис. 4). Определить период малых колебаний системы в плоскости, перпендикулярной оси блока.

*В. Ильин*

# Problems

## M761 — M765; P773 — P777

**We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than November 31 st 1982 to the following address: USSR, Moscow, 103006, Москва, К-6, ул. Горького, д. 32/1, «КВАНТ». Please send us the solutions of physics and mathematics Problems, as well solutions of problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: 'KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. The list of prizewinners appears in this issue. If you have an origi-**

**M761.** From an arbitrary point $P$ on the side $AC$ of the triangle $ABC$ lines $PE$ and $PF$ are drawn parallel to the medians $AK$ and $CL$, $E$ and $F$ being points on $BC$ and $AB$ respectively (see figure Рис. 1). Prove that the medians $AK$ and $CL$ divide the segment $EF$ into three equal parts.

*E. Gotman*

**M762.** Prove that for all positive numbers $a$, $b$, $c$ we have the inequalities

$$a+b+c<\frac{a^2+b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2}{2a}+\frac{c^2+a^2}{2b}<\frac{a^3}{bc}+\frac{b^3}{ca}+\frac{c^3}{ab}.$$

**M763*.** A parallelogram $ABCD$, which is not a rhombus, is given. The line symmetric to $AB$ with respect to the diagonal $AC$ intersects the line symmetric to $DC$ with respect to the diagonal $DB$ at the point $Q$ (see figure Рис. 2). Find the ratio $|QA|:|QD|$, if the ratio $|AC|:|BD|=k$ is given.

*V. Dubrovski*

**M764*.** Prove that each of the equations a) $x^2+y^3=z^5$; b) $x^2+y^3+z^5=t^7$ has an infinite number of positive integer solutions.

*O. Mazurov*

**M765.** Let $B$ be a finite set of points on the plane, not all contained in one straight line.

a) Prove that three points can be found in $B$ such that the circle passing through them does not contain any points of $B$ in its interior.

b)* Let us call a family of triangles with the set of vertices $B$ a *triangulation* of $B$, if they don't overlap and their union is a convex polygon (a triangulation of $B$ may be obtained by joining pairs of its points by line segments until it is no longer possible). Prove that for any $B$ there exists a triangulation such that any circle circumscribed about any triangle of the triangulation contains no points of $B$ in its interior. How can such a triangulation be constructed?

c)* Prove that if no circle contains any four points of $B$, then the triangulation described in b) is unique.

*F. Vainstein*

**P773.** A. solid is placed on a rough plane, inclined at an angle $\alpha$ to the horizontal. A light unstretchable string is tied to the solid, its free end passing through a little hole in the plane. At the initial moment, the string is horizontal (see figure Рис. 3), then it is slowly pulled until the solid reaches the hole, having described a semi-circle. Find the friction coefficient of the solid against the plane.

**P774.** For many substances, there exist values of temperature $T_{tr}$ and pressure $p_{tr}$ for which all three states of the substance — gaseous, liquid and solid — are in equilibrium with each other — the so-called triple point. For water $T_{tr}=$

**nal problem to propose for publication, please send it to us in two copies (including the solution) in an envelope inscribed "NEW PROBLEM IN PHYSICS (MATHEMATICS)".**

$=0{,}0075$ C, $p_{tr}=4.58$ mm Hg, the specific heat of evaporation is $r=595.8$ cal/g and the specific heat of melting is $\lambda=79.7$ cal/g. Find the specific heat of sublimation (the direct passage from solid to gas) of water at the triple point.

*V. Davydov*

**P775.** A high precision multi-range ammeter has a separate scale for each range of measurement. The ammeter is plugged into a network at range 10 mA and registers a current of $I_1=2.95$ mA; when it is switched over to the 3 mA range, it shows $I_2=2.90$ mA. What was the current in the network before the ammeter was plugged in?

*A. Zilberman*

**P776.** A small tea-kettle is filled with warm water ($t_1=30$°C). The kettle cools by 1 degree in time $\tau=5$ min. To keep the water warm, hot water ($t_2=45$°C) is added to it drop by drop. The mass of one drop is $m_d=0.2$ g. How many drops per minute are required to keep the temperature at 30°C? By how many degress will the water warm up in one minute, if the frequency of dripping is tripled? Assume that the water temperature evens out very quickly. The extra water drips out of the kettle's nose. The kettle contains 0.3 litres of water. The surrounding air temperature is $t_0=20$°C.

*A. Zilberman*

**P777.** A pulley is suspended by a weightless unstretchable string; the length of the vertical parts of the string is $l$ (see figure Рис. 4). Find the period of small oscillations of the system in the plane perpendicular to the pulley's axis.

*W. Ilyin*

# Решения задач

## М731 — М738; Ф743 — Ф747

**М731.** *Двое играют в такую игру: первый называет натуральное число от 2 до 9; второй умножает это число на произвольное натуральное число от 2 до 9; затем первый умножает результат на любое натуральное число от 2 до 9 и т. д.; выигрывает тот, у кого впервые получится произведение больше а) тысячи; б) миллиона. Кто выигрывает при правильной игре — начинающий или его партнер?*

а) Задача решается разбором с конца (рис. 1). Если в конце концов один из игроков *П* предложит другому игроку — назовем его *В* — любое из чисел от 112 до 999, то игрок *В* выигрывает (умножением на 9). Следовательно, если *В* предложит своему партнеру *П* любое из чисел от 56 до 111, то у *П* получится не менее 112 (даже если он умножит только на 2) и не более 999 (даже если он умножит на 9), и игроку *В* будет обеспечен выигрыш. Теперь ясно, что если *П* называет любое из чисел от 7 до 55, то *В* может попасть в выгодный ему промежуток [56; 111]. Наконец, чтобы *П* обязательно попал в этот роковой для него промежуток [7; 55], игроку *В* достаточно назвать на первом шаге любое из чисел 4, 5, 6. Итак, начинающий при правильной игре выигрывает.

б) Этот случай может быть разобран примерно так же — «с конца». Однако мы приведем общее решение, позволяющее оценить ситуацию при игре не только до 1000 или до 1 000 000, но и до любого числа. С этой целью «прологарифмируем» условие игры. Игра, можно считать, начинается с того, что первый игрок получает число 1 и умножает его на любое из чисел 2, 3, ..., 9. Перейдем к логарифмам: начинающий имеет число $\lg 1=0$ и может прибавить к нему любое из чисел $a_1=\lg 2$, $a_2=\lg 3$, ..., $a_8=\lg 9$. Затем партнер прибавляет к результату любое из чисел $a_1, a_2, ..., a_8$, затем начинающий и т. д. Выигрывает тот, кто первым доберется до числа $\lg 1\,000\,000=6$. Теперь можно сформулировать более общее

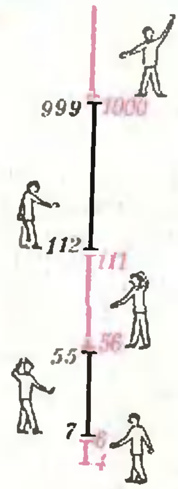



Рис. 1.

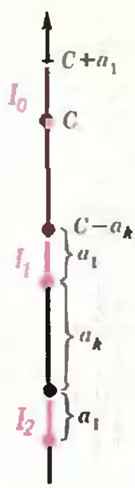



Рис. 2.

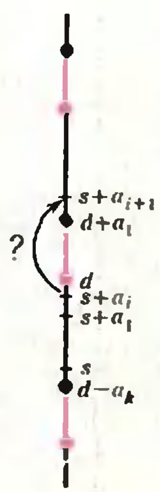



Рис. 3.

условие игры. Заданы положительные числа $a_1$, $a_2$, ..., $a_k$ (для удобства расположенные в порядке возрастания: $a_1<a_2<...<a_k$); начинающий прибавляет к числу 0 любое из этих чисел, затем его партнер прибавляет к результату любое из этих чисел, затем снова начинающий и т. д. Выигрывает тот, кто первым получит результат, не меньший заданного положительного числа $C$.

Решать задачу в такой ее общей постановке мы будем при следующем дополнительном предположении: $a_{i+1}-a_i<a_1$ (при любом $i=1, 2, ..., k-1$), смысл которого выяснится при решении. Заметим, что в первоначальном варианте задачи это условие выполнено:

$$a_{i+1}-a_i=\lg(i+2)-\lg(i+1)=\lg\frac{i+2}{i+1}<\lg 2=a_1$$

при любом $i=1, 2, ..., 8$.

Обозначим через $I_0$ полуинтервал $C\leqslant x<C+a_1$, а через $I_1$, $I_2$, ... — полуинтервалы, получающиеся из $I_0$ сдвигами вниз на расстояния $a_1+a_k$, $2(a_1+a_k)$, ... (см. рис. 2). Эти полуинтервалы назовем *красными*, а полуинтервалы, расположенные между ними ($[C-a_k, C[$, $[C-2a_k-a_1, C-a_k-a_1[$, ...) — *черными*; числа, принадлежащие этим полуинтервалам, будем также называть, соответственно, *красными* и *черными*. Заметим, что длина любого красного полуинтервала равна $a_1$, а любого черного — $a_k$.

Пусть игрок, получивший от своего напарника сумму $s$, своим ходом увеличивает ее на одно из чисел $a_1$, ..., $a_k$ и в результате получает сумму $s'$. Тогда

1) если $s$ принадлежит красному полуинтервалу, то *при любом ходе* $s'$ будет принадлежать следующему за ним черному полуинтервалу;

2) если $s$ принадлежит черному полуинтервалу, то всегда *можно сделать такой ход*, что $s'$ попадет в следующий за ним красный полуинтервал.

Действительно, пусть $s\in I_l=[b-a_1, b[$; тогда, поскольку $a_1<a_2<...<a_k$, $s'\in[b, b+a_k[$, но это и есть соседний с $I_l$ черный полуинтервал. Пусть теперь $s$ принадлежит черному полуинтервалу $[d-a_k, d[$. Тогда очередным ходом можно получить сумму $s+a_k\geqslant d$, которая либо попадет в следующий красный полуинтервал $[d, d+a_1[$, либо даже «перескочит» через него. Перебирая все возможные ходы, то есть $s+a_1$, ..., $s+a_k$, мы всегда можем найти среди них такой, что сумма $s$ принадлежит $[d, d+a_1[$ (ведь в последовательности $s$, $s+a_1$, ..., $s+a_k$ расстояния между соседними точками не превосходят $a_1$ — здесь используется условие $a_{i+1}-a_i\leqslant a_1$ — и потому красный полуинтервал длины $a_1$ обязательно захватит хотя бы одну из них; см. рис. 3).

С помощью утверждений 1) и 2) легко доказывается следующая

Теорема. *Если число 0 черное, то начинающий (при правильной игре) всегда выигрывает, если же число 0 красное, то начинающий (при правильной игре партнера) непременно проигрывает.*

Доказательство. Допустим, что 0 — черное число. Тогда в силу утверждения 2) начинающий своим первым ходом может получить красное число. Его партнер при любом своем ходе попадет в черный полуинтервал (утверждение 1)), после чего начинающий снова сделает сумму красной и т. д. Таким образом начинающий все время может получать суммы, принадлежащие полуинтервалам $I_l$, с каждым своим ходом уменьшая номер $l$ на 1, и в конце концов попадет в полуинтервал $I_0$, то есть первым получит сумму, большую или равную $C$. А его партнеру придется довольствоваться проигрышными черными полуинтервалами. В случае, если 0 — красное число, роли игроков меняются: партнер становится активным и все время «прыгает» по красным полуинтервалам. Теорема доказана.

Заметим, что если сделанное выше дополнительное предположение не выполняется, то «выигрышные» множества уже не являются полуинтервалами, а могут иметь более сложную структуру*).

Для нашей задачи б) «выигрышные» (то есть красные) полуинтервалы имеют вид

$$I_l=[6-l\lg 18;\ 6-l\lg 18+\lg 2[\ =\ \left[\lg\frac{10^6}{18^l};\ \lg\frac{2\cdot 10^6}{18^l}\right[,$$

где $l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$ поскольку $a_1=\lg 2,\ a_k=a_8=\lg 9,$ $a_1+a_k=\lg 18$, а $C=\lg 10^6=6$. Так как $0\in I_5$, начинающий проигрывает. Снова переходя от логарифмов к самим числам, мы из $I_l$ получаем полуинтервалы $\left[\frac{10^6}{18^l};\ \frac{2\cdot 10^6}{18^l}\right[$, где $l=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$ Наконец, учитывая, что произведения все время получаются целые, получаем следующие «выигрышные» отрезки (расположенные в порядке возрастания):

$$[10;\ 19],\ [172;\ 342],\ [3087;\ 6172],\ [55556;\ 111111].$$

Знaя эти отрезки (и, еще лучше, имея в руках микрокалькулятор), партнер начинающего может легко осуществлять правильную стратегию игры.

*В. Болтянский*

◆

**М732.** *а) В треугольник $ABC$ вписаны два разных прямоугольника так, что на основании $AC$ лежат по две вершины каждого прямоугольника (а на сторонах $AB$ и $BC$ — по одной). Периметр каждого из прямоугольников равен 10. Найдите площадь треугольника $ABC$ и докажите, что периметр любого вписанного в треугольник $ABC$ прямоугольника, две вершины которого лежат на $[AC]$, тоже равен 10.*

*б)* В четырехугольник $ABCD$ вписаны два прямоугольника с параллельными сторонами (так, что на каждой из сторон $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ лежит по одной вершине каждого прямоугольника). Периметр каждого из прямоугольников равен 10. Найдите площадь четырехугольника $ABCD$ и докажите, что для любой точки на любой из сторон четырехугольника $ABCD$ можно построить вписанный прямоугольник с вершиной в этой точке, стороны которого параллельны сторонам данных прямоугольников и периметр которого также равен 10.*

а) Ответ: $S_{ABC}=\frac{25}{2}$. Введем на плоскости прямоугольную систему координат $Oxy$, начало $O$ которой совпадает с основанием высоты $BO$ треугольника $ABC$, ось $Ox$ проходит через вершину $B$, а ось $Oy$ — через вершины $A$ и $C$ (рис. 1). Пусть $KLMN$ — прямоугольник, вписанный в $\triangle ABC$, и пусть $|NK|=|ML|=x$ — абсцисса точек $K$ и $L$. Поскольку точки $K$ и $L$ лежат на прямых $AB$ и $CB$ соответственно, их ординаты $y_1$ и $y_2$ являются линейными функциями от $x$. Следовательно, и периметр прямоугольника $KLMN$ $p(x)=2(x+y_1(x)-y_2(x))$ — линейная функция. По условию эта функция в двух разных точках принимает одно и то же значение $p=10$, поэтому $p(x)=10$ при всех $x$, то есть периметр любого прямоугольника, вписанного в $\triangle ABC$ так, что две его вершины лежат на стороне $AC$, равен 10. Кроме того, $p(0)=2|AC|=10$ и $p(|OB|)=2|OB|=10$. Следовательно, $S_{ABC}=\frac{1}{2}|AC|\cdot|OB|=\frac{25}{2}$.

То же самое рассуждение можно было провести, пользуясь не системой координат и линейными функциями, а подобием треугольников $ANK$ и $AOB$, $KBL$ и $ABC$, опираясь на которое нетрудно выразить периметр прямоугольника через длины постоянных отрезков $AC$ и $OB$ и переменного — $NK$.

б) Ответ: $S_{ABCD}=\frac{25}{2}$.

Первое решение. Возьмем на стороне $AB$ четырехугольника $ABCD$ произвольную точку $K$ и построим прямоугольник $KLMN$, вершины $L$ и $N$ которого лежат, соответственно, на прямых $BC$ и $AD$, а стороны параллельны сторонам данных прямоугольников (рис. 2). Если $K$ совпадает с вершиной $A$, то прямоугольник $KLMN$ вырождается в отрезок $AC_1$ (точка $C_1$ лежит на $(BC)$), а если $K=B$, то — в отрезок $BD_1$ ($D_1\in(AD)$). Докажем, что точка $M$ всегда лежит на отрезке $C_1D_1$, причем этот отрезок совпадает со стороной $CD$, то есть что прямоугольник $KLMN$ вписан в четырехугольник $ABCD$.

Пусть $\overrightarrow{AK}=t\overrightarrow{AB}$, где $0<t<1$, тогда $\overrightarrow{KB}=(1-t)\overrightarrow{AB}$ и, поскольку треугольники $AKN$ и $ABD_1$, а также $BKL$ и $BAC_1$, подобны, $\overrightarrow{AN}=t\overrightarrow{AD_1}$, $\overrightarrow{KN}=t\overrightarrow{BD_1}$ и $\overrightarrow{KL}=(1-t)\overrightarrow{AC_1}$. Следовательно, $\overrightarrow{C_1M}=\overrightarrow{C_1A}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NM}=\overrightarrow{C_1A}+t\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{KL}=$ $=\overrightarrow{C_1A}+(t-1)\overrightarrow{C_1A}+t\overrightarrow{AD_1}=t(\overrightarrow{C_1A}+\overrightarrow{AD_1})=t\overrightarrow{C_1D_1}$. Это

*) Интересный, но, видимо, трудный вопрос: будет ли в общем случае разбиение точек на красные и черные, начиная с некоторого места, периодическим?

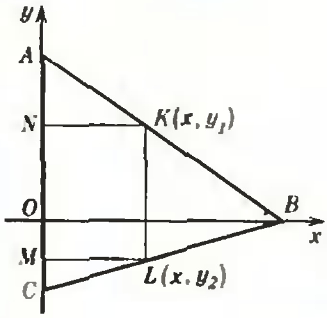



Рис. 1.

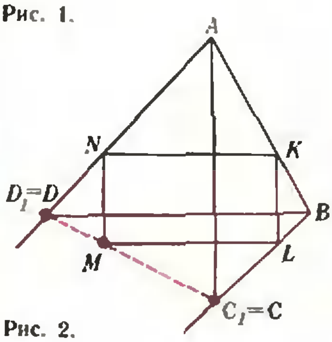



Рис. 2.

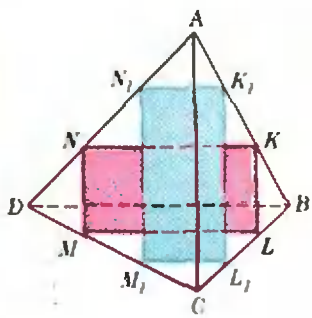



Рис. 3.

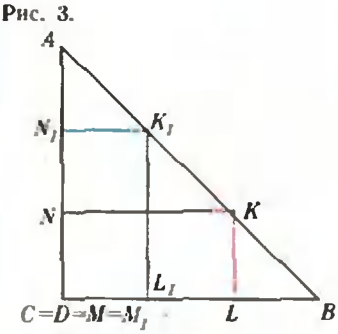



Рис. 4.

значит, что точка $M$ лежит на прямой $C_1D_1$. Но по условию при двух различных положениях точки $K$ точка $M$ попадает на сторону $CD$, поэтому отрезок $C_1D_1$ совпадает с $[CD]$. Попутно мы получаем, что диагонали $AC$ и $BD$ параллельны сторонам вписанных прямоугольников.

Найдем периметр прямоугольника $KLMN$:

$$p=2(|KL|+|KN|)=2((1-t)|AC|+t|BD|),$$

следовательно, $p$ — линейная функция от $t$. Отсюда, как и в пункте а), заключаем, что $p=10$ при всех положениях точки $K$. В частности, при $K=A$ получаем, что $p=p(0)=2|AC|=10$, а при $K=B$, что $p=p(1)=2|BD|=10$. Легко доказать, что площадь четырехугольника равна $\frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|\cdot\sin\alpha$, где $\alpha$ — угол между его диагоналями. В нашем случае диагонали перпендикулярны, поэтому $S_{ABCD}=\frac{25}{2}$.

Второе решение. Четырехугольник $ABCD$ с вписанными в него прямоугольниками $KLMN$ и $K_1L_1M_1N_1$ можно рассматривать как проекцию тетраэдра $ABCD$ и двух его сечений (см. рис. 3). В самом деле, приподнимем прямоугольник $K_1L_1M_1N_1$ над плоскостью чертежа так, чтобы его стороны остались параллельны сторонам прямоугольника $KLMN$. Четыре плоскости, проведенные через соответственные стороны «приподнятого» прямоугольника и прямоугольника $KLMN$, ограничивают тетраэдр $ABCD$. Выполним параллельную проекцию, при которой «приподнятый» прямоугольник переходит в $K_1L_1M_1N_1$. Тогда тетраэдр спроектируется в четырехугольник, описанный около данных прямоугольников, то есть в исходный четырехугольник $ABCD$.

Грани $ABC$ и $ADC$ тетраэдра проходят через параллельные отрезки $KL$ и $MN$ и пересекаются по ребру $AC$. Поэтому оно параллельно этим отрезкам и, следовательно, плоскости чертежа. Отсюда вытекает, что любая его параллельная проекция на эту плоскость, в частности диагональ $AC$ четырехугольника $ABCD$, равна и параллельна ребру $AC$. Аналогично любая проекция ребра $BD$, в частности диагональ $BD$ четырехугольника $ABCD$, равна и параллельна ребру $BD$. Теперь спроектируем тетраэдр $ABCD$ на плоскость чертежа по-другому — параллельно ребру $CD$. Проекции точек $C$ и $D$ совпадут, и мы получим прямоугольный треугольник $ABC$, в который вписаны два прямоугольника периметра 10 (см. рис. 4). При этом катеты $AC$ и $BC$ этого треугольника равны и параллельны диагоналям $AC$ и $BD$ исходного четырехугольника. Любому прямоугольнику, вписанному в $\triangle ABC$ так, как показано на рисунке 4, отвечает некоторое сечение тетраэдра и некоторый прямоугольник, вписанный в четырехугольник $ABCD$. Таким образом, задача сводится к пункту а).

Отметим, что решение можно было бы довести до конца и не пользуясь второй проекцией, чисто стереометрическими рассуждениями. Другие примеры применения «выхода в пространство» при решении планиметрических задач можно найти в статье И. Шарыгина «Выход в пространство» («Квант», 1975, № 5, с. 45); см. также решение задачи М735 в этом номере журнала.

*В. Дубровский, А. Егоров*

◆

**М733.** *а) При каких натуральных $m$ число $31^m-1$ делится на $2^m$? б)* Докажите, что для любого нечетного $a$ и натурального $m$ существует бесконечно много натуральных $k$ таких, что $a^k-1$ делится на $2^m$. в)* Докажите, что для любого нечетного $a$ существует лишь конечное число натуральных $m$ таких, что $a^m-1$ делится на $2^m$.*

а) Ответ: $m=1, 2, 4, 6, 8$. Доказательство будет приведено в решении пункта в).

б) Первое решение. Пусть $c_k=a^k-1$. Разложим $c_k$ на множители при $k=2^n$:

$$c_k=a^{2^n}-1=(a^{2^{n-1}}-1)(a^{2^{n-1}}+1)=$$
$$=(a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)\dots(a^{2^{n-1}}+1). \qquad (1)$$

Если $a$ нечетно, то в этом произведении $n+1$ четных сомножителей, и поэтому $c_k$ делится на $2^{n+1}$. Итак, при всех $k=2^n$, где $n-1\geqslant m$, число $c_k$ делится на $2^m$.

Второе решение. Рассмотрим остатки, которые дают числа $c_1$, $c_2$, $c_3$, ... ($c_k=a^k-1$) при делении на $2^m$. Число различных остатков конечно, поэтому среди чисел $c_k$ найдутся два, скажем $c_n$ и $c_l$ ($n>l$), дающие при делении на $2^m$ одинаковые остатки. Их разность кратна $2^m$, а так как $c_n-c_l=a^n-a^l=a^l(a^{n-l}-1)=a^l\cdot c_{n-l}$ и $a$ нечетно, на $2^m$ делится $c_{n-l}$. Из формулы для разности вытекает также, что вместе с $c_{n-l}$ на $2^m$ делятся и все члены бесконечной последовательности $c_{n-l}$, $c_{2(n-l)}$, $c_{3(n-l)}$, ...

Мы рекомендуем читателю доказать, что вообще множество всех чисел $c_k$, делящихся на $2^m$, имеет вид $\{c_r, c_{2r}, ..., c_{i\cdot r}, ...\}$, где $r=2^t$, $t\leqslant m$.

в) Обозначим через $d(N)$ показатель наибольшей степени двойки, на которую делится целое число $N$. Пусть $d(m)=n$, тогда $m=2^n\cdot s$, где $s$ нечетно. Поскольку $c_m=a^{2^n\cdot s}-1=(a^{2^n}-1)(a^{2^n(s-1)}+a^{2^n(s-2)}+...+1)$, а сумма во второй скобке нечетна, $d(c_m)=d(a^{2^n}-1)$. Заметим теперь, что сомножтели вида $a^{2^l}+1$ в разложении (1) при $l\geqslant 1$ делятся на 2 и не делятся на 4 (в самом деле, число $a$ нечетно, поэтому $a^{2^l}$ — квадрат нечетного числа и дает при делении на 4 остаток 1). Отсюда следует, что $d(c_m)=d(a^2-1)+n-1$ при $n\geqslant 1$; если же $n=0$, то $d(c_m)=d(a-1)$.

Для делимости $c_m$ на $2^m$ необходимо, чтобы выполнялось неравенство $d(c_m)\geqslant m$, то есть $d(a-1)\geqslant m$ при $m$ нечетном и $d(a^2-1)+n-1\geqslant m=2^n\cdot s$ при $m$ — четном. Первое неравенство выполняется лишь для конечного количества чисел $m$, а второе неравенство приводится к виду

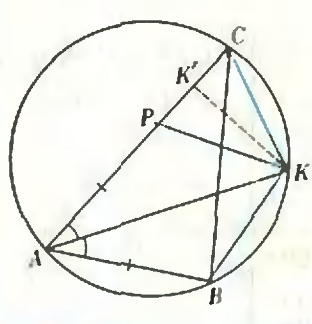
$$s\leqslant\frac{d(a^2-1)+n-1}{2^n}.$$

Так как правая часть этого неравенства стремится к 0 при $n\to\infty$, оно может выполняться лишь для конечного множества пар $(n; s)$ при любом фиксированном $a$.

Возвращаясь к пункту а), положим $a=31$. Искомые числа $m$ удовлетворяют неравенству $m\leqslant d(31-1)=d(30)=1$, если $m$ нечетно, и неравенству $s\leqslant(d(31^2-1)+n-1)/2^n$, если $m=2^n\cdot s$, где $n\geqslant 1$, $s$ — нечетно. Первое неравенство дает $m=1$. Второе приводится к виду $s\leqslant(5+n)/2^n$, поскольку $d(31^2-1)=d(30\cdot 32)=6$. Отсюда получаем возможные пары $(n; s)$: это $(1; 1)$, $(1; 3)$, $(2; 1)$ и $(3; 1)$, то есть $m=2, 4, 6, 8$.

*В. Прасолов*

**М734.** *Биссектриса угла $A$ треугольника $ABC$ пересекает описанную вокруг него окружность в точке $K$. Докажите, что длина проекции отрезка $AK$ на прямую $AB$ (или $AC$) равна полусумме длин сторон $AB$ и $AC$.*




Пусть для определенности $|AB|<|AC|$. На стороне $AC$ рассмотрим точку $P$, симметричную $B$ относительно прямой $AK$ (см. рисунок). Очевидно, $|AP|=|AB|$, $|PK|=|BK|$. Из равенства углов $BAK$ и $CAK$ вытекает равенство дуг $BK$ и $CK$, на которые они опираются, а из равенства дуг следует равенство стягивающих их хорд $BK$ и $CK$. Таким образом, $|CK|=|BK|=|PK|$, и поэтому проекция $K'$ точки $K$ на сторону $AC$ является серединой отрезка $CP$. Следовательно,

$$|AK'|=|AP|+|PK'|=|AB|+\frac{|AC|-|AB|}{2}=\frac{|AB|+|AC|}{2}.$$

*А. Егоров*

**М735.** *а) Докажите, что круг диаметра 1 нельзя покрыть несколькими бумажными полосками, суммарная ширина которых меньше 1.*

*б) Назовем слоем толщины $h$ часть пространства, заключенную между параллельными плоскостями, находящимися на расстоянии $h$ друг от друга. Докажите, что шар диаметра 1 нельзя покрыть несколькими слоями, суммарная толщина которых меньше 1.*

Одно из самых простых решений задачи а) опирается на задачу б), поэтому мы начнем с пространственной задачи.

б) Площадь поверхности части сферы радиуса $r$, заключенной между двумя пересекающими сферу параллельными плоскостями, равна $2\pi rh$, где $h$ — расстояние между этими плоскостями*). Это значит, что площадь части поверхности сферы диаметра 1, содержащейся в слое толщины $h$, не больше $\pi h$. Поэтому сумма площадей частей сферы, содержащихся в нескольких слоях, не больше $\pi s$, где $s$ — суммарная толщина всех слоев. А так как $s<1$, площадь покрытой слоями части сферы меньше площади поверхности всей сферы, равной $\pi$. Следовательно, на сфере найдутся непокрытые точки.

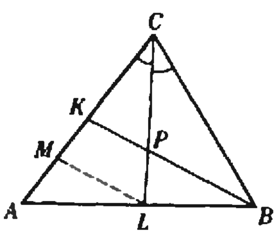
а) Рассмотрим круг радиуса 1 как проекцию шара радиуса 1. Каждой полоске поставим в соответствие слой, толщина которого равна ширине полоски (этот слой заключен между двумя плоскостями, перпендикулярными плоскости круга и проходящими через границы полосок). Если бы круг был полностью покрыт полосками, то весь шар был бы покрыт слоями, суммарная толщина которых была бы меньше 1. Но это, по доказанному в пункте б), невозможно.

*С. Шлосман*

◆

**М736.** *Медиана $BK$ и биссектриса $CL$ треугольника $ABC$ пересекаются в точке $P$. Докажите равенство*

$$\frac{|PC|}{|PL|}-\frac{|AC|}{|BC|}=1$$




Проведем отрезок $LM$, параллельный $BK$ (см. рисунок). Ясно, что

$$\frac{|PC|}{|PL|}=\frac{|KC|}{|KM|},\quad \frac{|BL|}{|KM|}=\frac{|LA|}{|MA|}.$$

Поскольку $CL$ — биссектриса угла $C$, $\frac{|AC|}{|BC|}=\frac{|LA|}{|LB|}$. Поэтому $\frac{|AC|}{|BC|}=\frac{|MA|}{|KM|}$, и, следовательно,

$$\frac{|PC|}{|PL|}-\frac{|AC|}{|BC|}=\frac{|KC|}{|KM|}-\frac{|MA|}{|KM|}=\frac{|KA|-|MA|}{|KM|}=$$

$$=\frac{|KM|}{|KM|}=1,$$

что и требовалось.

*З. Анджапаридзе*

◆

**М737.** *Обозначим через $d_k$ количество таких домов в вашем городе, в которых живет не меньше $k$ жителей ($d_1 \geqslant d_2 \geqslant d_3 \geqslant \ldots$), и через $c_m$ — количество жителей в $m$-м по величине населения в доме ($c_1 \geqslant c_2 \geqslant c_3 \geqslant \ldots$). Докажите равенства*

*а)* $c_1+c_2+c_3+\ldots=d_1+d_2+d_3+\ldots;$

*б)* $c_1^2+c_2^2+c_3^2+\ldots=d_1+3d_2+5d_3+\ldots+(2k-1)d_k+\ldots,$

$d_1^2+d_2^2+d_3^2+\ldots=c_1+3c_2+5c_3+\ldots+(2m-1)c_m+\ldots$

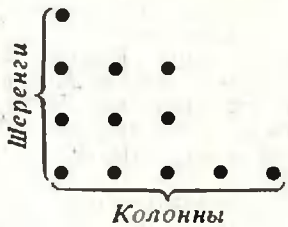
а) Представим себе, что все жители города выстроены в несколько шеренг, причем в $m$-й шеренге стоят все жители $m$-го по численности дома, и шеренги выравнены по левому флангу (на рисунке люди изображены точками). Таким образом, $c_m$ — это число людей в $m$-й шеренге. Заметим теперь, что число людей в $k$-й колонне равно $d_k$. В самом деле, в $k$-й колонне стоит по одному человеку из каждой шеренги, содержащей не менее $k$ человек; по условию, число таких шеренг равно $d_k$. Например, на рисунке изображен случай, когда

$$c_1=5,\ c_2=c_3=3,\ c_4=1,\ d_1=4,\ d_2=d_3=3,\ d_4=d_5=1.$$

Из сказанного сразу следует, что каждая из сумм $c_1+c_2+\ldots+c_m+\ldots$ и $d_1+d_2+\ldots+d_k+\ldots$ есть общее число жителей города: первый раз мы пересчитали их, сгруппировав в шеренги, а второй раз — в колонны. Это доказывает утверждение а).

б) Дадим левофланговым во всех шеренгах по одному флажку, следующим за ними людям — по 3 флажка и т. д., так что все люди в $k$-й колонне получат по $2k-1$ флажков. Сосчитаем двумя способами общее количество розданных флажков. Так как каждый из $d_k$ человек в $k$-й колонне

*) См., например, «Геометрия 9—10» (1981), с. 233.




получил $2k-1$ флажков, общее число флажков равно $d_1+3d_2+5d_3+\ldots$ С другой стороны, люди из $m$-й шеренги получили $1+3+\ldots+(2c_m-1)=c_m^2$ флажков, так что общее число флажков равно $c_1^2+c_2^2+\ldots+c_m^2+\ldots$ Приравнивая эти выражения, получаем первое равенство пункта б).

Второе равенство можно доказать аналогично, но проще приказать всем собравшимся жителям повернуться на 90°. При этом шеренги превратятся в колонны, а колонны в шеренги, так что теперь $c_m$ — это количество людей в $m$-й колонне, а $d_k$ — в $k$-й шеренге. Записывая для нового построения уже доказанное равенство, получим требуемое.

Массивы точек, подобные изображенному на рисунке, называются диаграммами Юнга. Они играют важную роль в современной комбинаторике и находят интересные применения в программировании. Об этом можно прочитать в третьем томе замечательной книги Д. Кнута «Искусство программирования для ЭВМ» (М., «Мир», 1978).

*А. Зелевинский*

**М738***. *Докажите, что а) количество прямых различных направлений, на которые данный $n$-угольник дает одинаковые по величине проекции, не превосходит $2n$; б) максимальное число таких прямых для любого многоугольника четно; в) для треугольника это число больше 3 тогда и только тогда, когда он остроугольный.*

Прежде всего заметим, что проекция произвольного многоугольника $M$ на любую прямую $l$ совпадает с проекцией на эту прямую содержащей его полосы, края которой перпендикулярны $l$ и проходят через вершины многоугольника (рис. 1). Пересечение всех таких полос есть выпуклый многоугольник $M'$. Очевидно, $M' \supset M$, проекции многоугольников $M$ и $M'$ на любую прямую совпадают и число сторон $M'$ не превосходит числа сторон $M$*). Поэтому без всякого ущерба можно заменить многоугольник $M$ на $M'$ и в дальнейшем считать данный многоугольник выпуклым.

Фиксируем прямую $l_0$, перпендикулярную одной из сторон данного многоугольника, и обозначим через $l_\varphi$ прямую, в которую переходит $l_0$ при повороте на угол $\varphi$ против часовой стрелки (центр поворота роли не играет), а через $L(\varphi)$ — длину проекции многоугольника на прямую $l_\varphi$. В задаче рассматривается число точек $\varphi$ на отрезке $[0; \pi]$ (или на любом другом отрезке длины $\pi$), в которых функция $L(\varphi)$ принимает одно и то же значение.

а) Проекция данного $n$-угольника на прямую $l_\varphi$ совпадает с проекцией на эту прямую некоторого отрезка $I$ — диагонали или стороны $n$-угольника, зависящего, конечно, от направления прямой $l_\varphi$. При этом смена отрезков $I$ может происходить только при переходе через направления, перпендикулярные сторонам $n$-угольника, поскольку он выпуклый. Следовательно, отрезок $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$ разбивается на $k$ промежутков, где $k \leqslant n$, на каждом из которых функция $L(\varphi)$ совпадает с длиной проекции фиксированного отрезка $I_j$, $j=1, \ldots, k$, соединяющего вершины данного $n$-угольника. Если отрезок $I_j$ параллелен прямой $l_{\alpha_j}$, а его длина равна $a_j$, то длина проекции этого отрезка на прямую $l_\varphi$ (то есть значение функции $L(\varphi)$ на $j$-м промежутке) равна $a_j|\cos(\varphi-\alpha_j)|$. Поэтому проекция любого из отрезков $I_j$ на прямую $l_\varphi$ может иметь заданную длину не более чем при двух значениях $\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, а количество точек на отрезке $[0; \pi]$, в которых функция $L(\varphi)$ принимает любое заданное значение, не больше $2k \leqslant 2n$.

б) Как мы видели, график функции $L(\varphi)$ состоит из нескольких кусков синусоид; эскиз такого графика показан на рисунке 2. Отметим, что $L(0)=L(\pi)$.

Пусть функция $L(\varphi)$ принимает некоторое значение $L$ в наибольшем числе точек, среди которых имеется $p$ точек максимума и $q$ точек минимума; остальные $m$ точек — «обычные»: в них график функции $y=L(\varphi)$ переходит с одной стороны прямой $y=L$ на другую. Число таких переходов четно, поскольку $L(0)=L(\pi)$. Во всяком случае, это верно, если $L \neq L(0)$. Если же $L=L(0)$, то можно

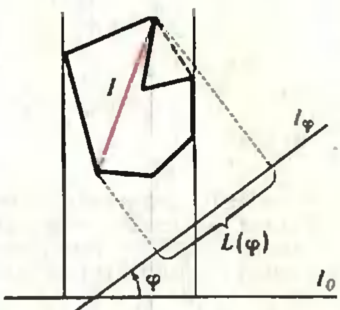


Рис. 1.

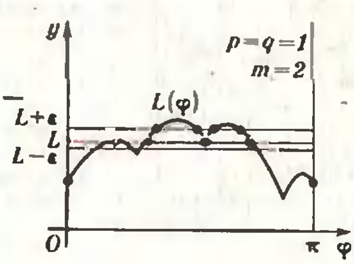


Рис. 2.

*) Любой выпуклый многоугольник, содержащий $M$, содержит также и $M'$; $M'$ называют *выпуклой оболочкой* $M$.

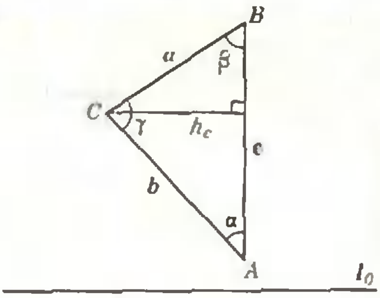



Рис. 3.

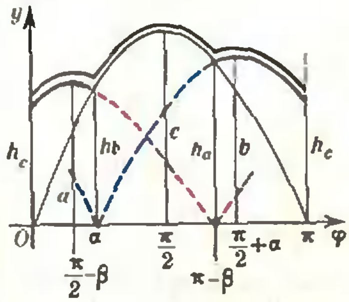



Рис. 4.

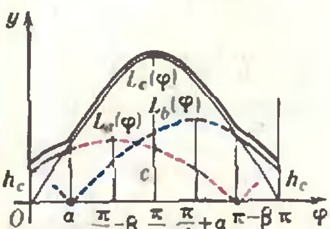



Рис. 5.

рассматривать функцию $L(\varphi)$ на отрезке $\varphi_0 \le \varphi \le \pi+\varphi_0$, где $L(\varphi_0)\ne L$. При этом числа $p$, $q$ и $m$ не изменятся (точки 0 и $\pi$ надо считать за одну). Итак, $m$ — четное число.

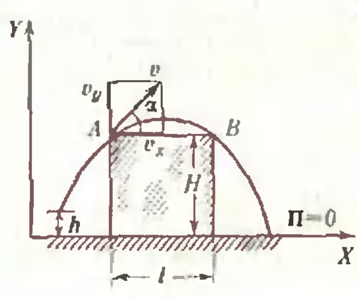
Покажем, что $p=q$. Сдвинем прямую $y=L$ вверх на расстояние $\varepsilon$ (рис. 2). Если $\varepsilon$ достаточно мало, то каждой «обычной» точке пересечения графика функции $L(\varphi)$ с прямой $y=L$ будет отвечать одна «обычная» точка на прямой $y=L+\varepsilon$, каждая из $q$ точек минимума как бы «раздвоится», а точки максимума исчезнут. Общее число точек пересечения графика и прямой станет равно $m+2q$, а так как увеличиться оно не может, $m+2q\le m+p+q$, то есть $q\le p$. Аналогично доказывается, что $q\ge p$. Следовательно, $p=q$, и число $m+p+q$ четно.

в) Рассмотрим $\triangle ABC$. Пусть $c$ — его наибольшая сторона, $c\ge b\ge a$ (обозначения см. на рисунке 3). Прямую $l_0$ проведем перпендикулярно стороне $AB$. Направления высот треугольника $ABC$ соответствуют значениям $\varphi=0$, $\varphi=\alpha$ и $\varphi=\pi-\beta$. Поэтому на отрезке $0\le\varphi\le\alpha$ проекция треугольника на прямую $l_0$ совпадает с проекцией стороны $BC$, то есть $L(\varphi)=L_a(\varphi)=a\left|\cos\left(\varphi-\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\right)\right|$, на отрезке $[\alpha;\pi-\beta]$ — с проекцией стороны $AB$: $L(\varphi)=L_c(\varphi)=c|\cos\varphi|$, а на отрезке $[\pi-\beta;\pi]$ — с проекцией стороны $AC$: $L(\varphi)=L_b(\varphi)=b\left|\cos\left(\varphi-\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\right)\right|$. Если треугольник — тупоугольный или прямоугольный, то $\alpha+\beta=\pi-\gamma\le\frac{\pi}{2}$, поэтому, как легко проверить, точки максимума функций $L_a(\varphi)$ и $L_b(\varphi)$ — $\frac{\pi}{2}-\beta$ и $\frac{\pi}{2}+\alpha$ — попадают на отрезок $[\alpha;\pi-\beta]$, на котором $L(\varphi)=L_c(\varphi)$. В этом случае функция $L(\varphi)$ сначала возрастает на отрезке $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ от $h_c$ до $c$, а затем убывает от $c$ до $h_c$ (рис. 4). Каждое свое значение она принимает не более двух раз. Если $\triangle ABC$ — остроугольный, то $\alpha+\beta>\frac{\pi}{2}$, и максимумы функций $L_a(\varphi)$ и $L_b(\varphi)$ попадают внутрь отрезков $[0;\alpha]$ и $[\pi-\beta;\pi]$. Поэтому функция $L(\varphi)$ имеет три максимума и шесть промежутков монотонности (рис. 5). Поскольку $h_c\le h_b< a\le b\le c$, любое значение из интервала $]h_b;a[$ функция $L(\varphi)$ принимает не менее четырех раз — на первых трех и последнем промежутках монотонности (см. рис. 5). Заметим еще, что если $h_a<a$, то любое значение из интервала $]h_a;a[$ принимается шесть раз — по разу на каждом промежутке монотонности функции $L(\varphi)$.

*В. Прасолов*

◆

**Ф743.** *С какой минимальной скоростью можно перебросить камень через стену высотой H и толщиной l, если бросать его с высоты h?*




Камень, брошенный с минимальной начальной скоростью $v_0$, достаточной, чтобы камень перелетел через стену, описывает траекторию такую, как показано на рисунке. В точках $A$ и $B$ траектория касается кромок стены; скорость $v$ камня в точке $A$ составляет угол $\alpha=45°$ с горизонтом. Время $t$, в течение которого камень летит от точки $A$ до точки $B$, определяется условием

$$v_y=v\sin\alpha=gt/2 \Rightarrow t=2v(\sin\alpha)/g.$$

Величина скорости $v$ связана с толщиной стены $l$ соотношением

$$l=v_xt=2v\cos\alpha\cdot v(\sin\alpha)/g=v^2/g \Rightarrow v=\sqrt{gl}.$$

Связь между $v_0$ и $v$ найдем из закона сохранения энергии:

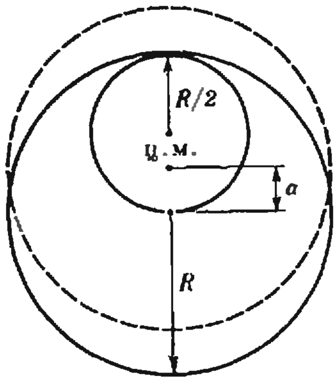
$$\frac{mv_0^2}{2}+mgh=\frac{mv^2}{2}+mgH,$$

откуда

$$v_0=\sqrt{v^2+2g(H-h)}=\sqrt{g(l+2H-2h)}.$$

*О. Савченко*

**Ф744.** *Космический аппарат представляет собой жесткую тонкостенную сферу радиуса $R=2$ м, наполненную газом. Внутри аппарата находится шар радиуса $r=R/2$, наполненный тем же газом, что и весь аппарат, но при большем давлении. Шар касается внутренней поверхности аппарата. В результате повреждения шар лопнул. Найти, во сколько раз изменилось давление внутри аппарата, если оказалось, что весь аппарат при этом сместился на расстояние $a=0{,}5$ м. Массой оболочек пренебречь; температуру считать неизменной.*




При изменениях, происходящих внутри аппарата, положение центра масс (ц. м.) аппарата не меняется.

В начальный момент ц. м. аппарата определяется как ц. м. системы «шар с плотностью $\varrho_1$ + шар с плотностью $\varrho_2-\varrho_1$», где $\varrho_1$ — плотность газа, заполняющего сферу радиуса $R$, $\varrho_2$ — плотность газа, заполняющего шар радиуса $R/2$.

После того как лопнул шар, ц. м. аппарата определяется как ц. м. сферы радиуса $R$, заполненной газом с плотностью $\varrho$, где $\varrho$ — плотность газа в сфере после повреждения шара.

Тот факт, что после повреждения шара весь аппарат сместился на расстояние $a$, означает, что ц. м. аппарата с целым шаром находится на расстоянии $a$ от центра сферы (см. рисунок). Из этого условия найдем соотношение между $\varrho_1$ и $\varrho_2$:

$$\frac{4}{3}\pi R^3\varrho_1 a g=\frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{8}(\varrho_2-\varrho_1)\left(\frac{R}{2}-a\right)g\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{\varrho_2}{\varrho_1}=\frac{R+14a}{R-2a}.$$

Плотность газа в аппарате, после того как лопнул шар, определяется условием

$$\frac{4}{3}\pi R^3\varrho_1+\frac{4}{3}\pi\frac{R^3}{8}(\varrho_2-\varrho_1)=\frac{4}{3}\pi R^3\varrho\Rightarrow\varrho=\frac{7}{8}\varrho_1+\frac{1}{8}\varrho_2.$$

Давление $p$ газа в аппарате после повреждения шара может быть найдено из условия $\frac{p}{p_1}=\frac{\varrho}{\varrho_1}$, где $p_1$ — начальное давление газа внутри тонкостенной сферы.

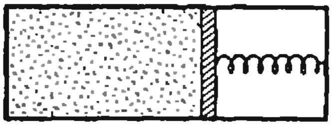
Таким образом,

$$\frac{p}{p_1}=\frac{\varrho}{\varrho_1}=\frac{7}{8}+\frac{1}{8}\frac{\varrho_2}{\varrho_1}=\frac{R}{R-2a}=2,$$

то есть давление газа внутри аппарата увеличилось в 2 раза.

*А. Буздин*

**Ф745.** *Теплоизолированный сосуд разделен на две части теплоизолированным поршнем, который может перемещаться в сосуде без трения. В левой части сосуда содержится 1 моль идеального одноатомного газа, в правой — вакуум. Поршень соединен с правой стенкой сосуда пружиной, длина которой в свободном состоянии равна длине сосуда. Пренебрегая теплоемкостью сосуда, поршня и пружины, определить теплоемкость системы.*



Пусть $T_1$ — начальная температура газа под поршнем, $T_2$ — температура газа после того, как системе сообщено тепло $\Delta Q$. Поскольку трение отсутствует и сосуд теплоизолирован, все тепло $\Delta Q$ идет на изменение $\Delta U$ внутренней энергии системы, то есть $\Delta Q=\Delta U$. Изменение внутренней энергии системы складывается из изменения внутренней энергии газа и изменения потенциальной энергии сжатой пружины (теплоемкостью сосуда, поршня и пружины пренебрегаем).

Внутренняя энергия одного моля одноатомного идеального газа при нагревании от температуры $T_1$ до температуры $T_2$ увеличивается на

$$\Delta U_1=\frac{3}{2}R(T_2-T_1).$$

Потенциальная энергия сжатой пружины изменяется на величину

$$\Delta U_2=\frac{k}{2}(x_2^2-x_1^2),$$

где $x_1$ и $x_2$ — значения абсолютной деформации пружины при температурах газа $T_1$ и $T_2$ соответственно. Найдем связь между параметрами газа под поршнем и деформацией пружины.

Из условия равновесия поршня следует, что

$$p=\frac{F}{s}=\frac{kx}{s}\Rightarrow x=\frac{ps}{k} \qquad (\bullet)$$

($p$ — давление газа, $s$ — площадь поршня, $k$ — упругость пружины). Согласно закону Менделеева — Клапейрона для 1 моля идеального одноатомного газа выполняется соотношение

$$pV=RT \Rightarrow p=RT/V.$$

При деформации пружины $x$ объем, занимаемый газом под поршнем, равен $V=xs$ и $p=RT/xs$. Подставляя это выражение в (•), находим

$$x^2=RT/k.$$

Таким образом, изменение потенциальной энергии сжатой пружины при нагревании системы равно

$$\Delta U_2=\frac{R}{2}(T_2-T_1).$$

Полное изменение внутренней энергии системы при нагревании от температуры $T_1$ до температуры $T_2$ равно

$$\Delta U=\Delta U_1+\Delta U_2=2R(T_2-T_1),$$

и теплоемкость системы равна

$$c=\frac{\Delta Q}{\Delta T}=\frac{\Delta U}{T_2-T_1}=2R.$$

*Б. Клячин*

◆

**Ф746.** *Электрическая батарея, использующая β-радиоактивность, представляет собой металлическую сферу, внутри которой помещен изолированный от нее кусочек радиоактивного вещества (рис. 1). Ежесекундно распадаются ν атомов. Считая, что энергия электронов, образующихся при распаде, равновероятно распределена от минимального значения $W_{min}$ до максимального $W_{max}$, определить ЭДС батареи. Какой наибольший ток может давать такая батарея? До каких сопротивлений нагрузки батарею можно считать генератором тока?*

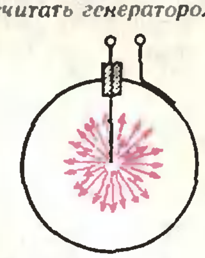


Рис. 1.

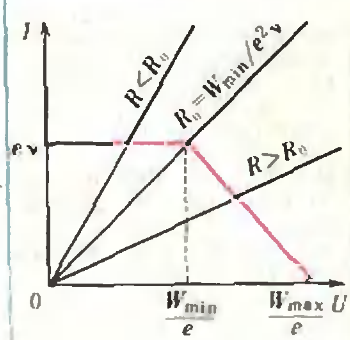



Рис. 2.

Пусть клеммы батареи замкнуты на нагрузку, и напряжение на клеммах равно $U$. Найдем ток, текущий через нагрузку, то есть установим вольт-амперную характеристику батареи.

До сферы долетают электроны с энергией $W \geqslant eU$. В стационарном режиме (при постоянном $U$) заряд сферы остается неизменным. Следовательно, число электронов, попадающих ежесекундно на сферу, равно числу электронов, возвращающихся за это же время через нагрузку к кусочку радиоактивного вещества.

При $eU \leqslant W_{min}$ все электроны долетают до сферы, переносимый ими в единицу времени заряд и есть максимальный ток, который может давать такая батарея, то есть

$$I_{max}=e\nu.$$

При большем напряжении, когда $W_{min}<eU<W_{max}$, на сферу попадают только те электроны, энергия которых $W \geqslant eU$; эти электроны и определяют ток, текущий через нагрузку (остальные электроны возвращаются в центр сферы, минуя нагрузку). Доля этих электронов от общего числа электронов, вылетающих из кусочка радиоактивного вещества, равна

$$n=\frac{W_{max}-eU}{W_{max}-W_{min}}$$

(ввиду равномерного распределения электронов по энергии). Ток, текущий при этом через нагрузку, равен

$$I=e\nu n=e\nu\frac{W_{max}-eU}{W_{max}-W_{min}}.$$

Наибольшее напряжение $U_{max}$ на разомкнутых клеммах батареи (ЭДС батареи) определяется условием

$$eU_{max}=W_{max} \Rightarrow U_{max}=W_{max}/e.$$

Как только это напряжение достигнуто, заряд сферы и кусочка радиоактивного вещества перестают меняться.

На рисунке 2 приведена зависимость тока от напряжения. На этом же графике изображены вольт-амперные характеристики нагрузки с сопротивлением $R$ (при различных значениях $R$). Ординаты и абсциссы точек пересечения графиков дают значения тока и напряжения в цепи при данном значении $R$. При

$$R \leqslant R_0=W_{min}/e^2\nu$$

ток остается постоянным независимо от сопротивления нагрузки. При таких сопротивлениях батарею можно считать генератором тока.

*И. Воробьев*

**Ф747.** *Космонавты во время вывода космического корабля на орбиту заметили на некоторой высоте $H_0$ тонкий светящийся слой (полное внутреннее отражение света в атмосфере). Как по графику (рис. 1) зависимости коэффициента преломления атмосферы $n$ от расстояния $R$ до центра Земли определить $H_0$?*

Пусть слой, в котором происходит полное внутреннее отражение света, находится на расстоянии $R_0$ от центра Земли (точка $O$ на рисунке 2) и имеет толщину $\Delta R$. Коэффициент преломления атмосферы для этого слоя обозначим $n_0$ (поскольку слой тонкий, можно считать, что на расстоянии $\Delta R$ величина $n$ постоянна).

Рассмотрим луч $AB$, который направлен к верхней границе слоя вдоль касательной к нижней его границе в точке $A$. Если этот луч испытает полное внутреннее отражение на верхней границе слоя (в точке $B$), то и любой другой луч, попавший снизу в выделенный слой, отразится от верхней границы.

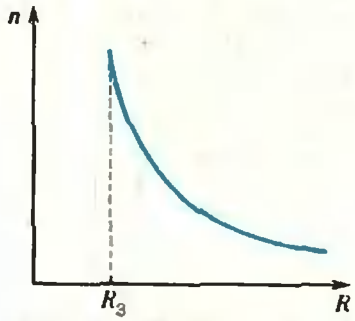



Рис. 1.

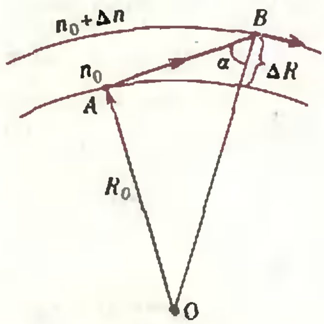



Рис. 2.

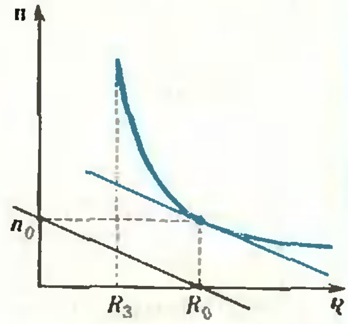



Рис. 3.

Запишем условие полного внутреннего отражения для луча $AB$:

$$\frac{\sin\alpha}{1}=\frac{n_0+\Delta n}{n_0}=1+\frac{\Delta n}{n_0},$$

где $n_0+\Delta n$ — коэффициент преломления атмосферы за верхней границей выделенного слоя. Поскольку слой тонкий, можно считать, что

$$\sin\alpha=\frac{R_0}{R_0+\Delta R}=1-\frac{\Delta R}{R_0+\Delta R}\approx 1-\frac{\Delta R}{R_0},$$

и, следовательно,

$$1+\frac{\Delta n}{n_0}=1-\frac{\Delta R}{R_0},$$

откуда

$$\frac{\Delta n}{n_0}=-\frac{\Delta R}{R_0}, \quad \text{или} \quad \frac{\Delta n}{\Delta R}=-\frac{n_0}{R_0}=n'(R_0).$$

Таким образом, касательная к графику $n(R)$ в точке, соответствующей значениям $n_0$ и $R_0$, должна быть наклонена под углом $\varphi$ таким, что $\operatorname{tg}\varphi=-\frac{n_0}{R_0}$, то есть эта касательная должна быть параллельна прямой, проходящей через точки с координатами $(0, n_0)$ и $(R_0, 0)$ (рис. 3).

Высота $H_0$ равна

$$H_0=R_0-R_3.$$

*О. Батищев*

# Любопытный факт

7 октября 1959 года станция «Луна-3» сфотографировала обратную, невидимую с Земли сторону Луны и передала снимки на Землю. Через 15 лет после этого старший научный сотрудник Днепропетровского исторического музея В. Пименов нашел в газете «Московские губернские ведомости» за 1848 год хроникальную заметку, в которой говорилось о решении «мещанина Никифора Никитина за крамольные речи о полете на Луну сослать в поселение Байконур».


(Из книги Я. Голованова «Дорога на космодром»)

## Список читателей, приславших правильные решения

**В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М706 — М720 и Ф723 — Ф747 (цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).**

### Математика

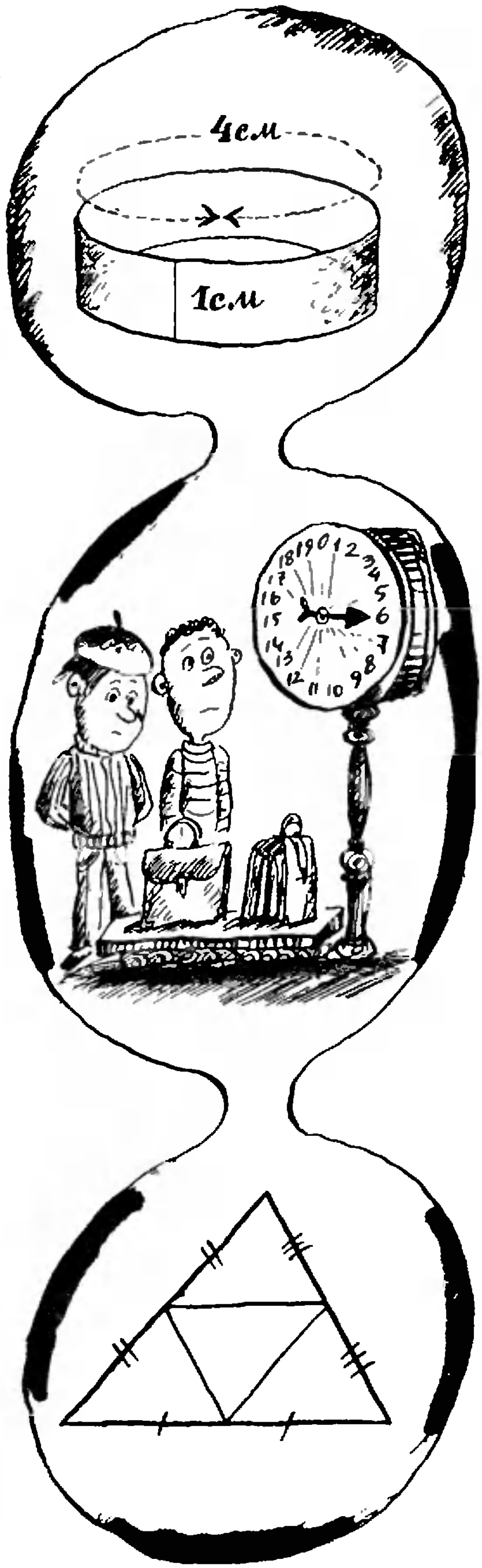
Большинство читателей, приславших решения, справились с задачами **М706, М707, М711, М712, М717** и **М720**. Остальные задачи решили: *З. Авалиани* (Батуми) **16**; *М. Алексеев* (Москва) **13, 18, 19**; *С. Амшинский* (Ленинград) **08, 16, 19**; *В. Арабидзе* (Тбилиси) **18**; *М. Арасланов* (Запорожье) **18**; *В. Барабинов* (Киев) **16, 19**; *А. Баронов* (Ростов) **18**; *А. Борискин* (Москва) **16, 18**; *М. Бродицкий* (Кишинев) **08**; *Б. Вейцман* (Одесса) **16, 19**; *Г. Виннер* (Свердловск) **08, 13, 19**; *И. Волгин* (Белорецк) **16**; *Г. Ганев* (Ямбол, НРБ) **16, 18, 19**; *Р. Георгиев* (Ямбол, НРБ) **16, 18, 19**; *Ю. Гончаренко* (Киев) **16, 18, 19**; *А. Гохберг* (Донецк) **08, 13, 15, 16, 18, 19**; *О. Гринив* (Киев) **08**; *А. Громов* (Ленинград) **13**; *И. Димитров* (Ямбол, НРБ) **16, 18, 19**; *А. Добрин* (Киев) **16, 18, 19**; *А. Дубицкас* (Таураге) **08, 09, 13, 15, 16, 18, 19**; *О. Ерошкин* (Днепропетровск) **13, 15, 16, 18, 19**; *П. Зусманович* (Алма-Ата) **16**; *А. Ивченко* (Могилев-Подольский) **13, 16, 18**; *Т. Кидышев* (Москва) **18**; *В. Каллер* (Киев) **16, 19**; *Д. Калюжный* (Одесса) **18, 19**; *В. Камаев* (Куйбышев) **16**; *Д. Камунтавичюс* (Вильнюс) **18, 19**; *А. Карпович* (Киев) **13, 15, 16, 19**; *Н. Кащенко* (Киев) **18**; *Д. Кирьянов* (Красноуфимск) **19**; *В. Кисиль* (Одесса) **08**; *Е. Клебанов* (Горловка) **19**; *Д. Коршунов* (Новосибирск) **16, 19**; *Е. Кочнин* (Волжский) **18**; *Л. Лейцин* (Чернигов) **08**; *П. Лисоньек* (Оломоуц, ЧССР) **19**; *Ш. Лыонг* (Львов) **16**; *Д. Макаров* (п. Черноголовка Московской обл.) **18**; *С. Мамедов* (Баку) **08, 16**; *А. Маркович* (Белград, СФРЮ) **16, 18, 19**; *О. Матвеев* (Свердловск) **19**; *Ю. Николаевский* (Харьков) **08, 13, 15**; *И. Николов* (Ямбол, НРБ) **16, 18, 19**; *А. Никонов* (Кировград) **08, 15**; *О. Нотыч* (Киев) **16**; *М. Овецкий* (Донецк) **08, 15**; *Р. Оруджев* (Баку) **16**; *Г. Перельман* (Ленинград) **08, 09**; *Д. Першеев* (Москва) **18**; *С. Путинцев* (Невинномысск) **13, 15**; *А. Родионов* (Москва) **18**; *Л. Рудый* (Кировск Мурманской обл.) **16, 19**; *А. Сикса* (Киев) **08, 15**; *А. Сохет* (Харьков) **15, 16, 19**; *В. Титенко* (д. Блужа Минской обл.) **08**; *В. Толстых* (Кемерово) **18**; *Г. Трунов* (Москва) **08**; *Е. Тюрин* (Вильнюс) **08**; *Р. Угриновский* (Хмельник) **08, 16**; *Н. Федин* (Омск) **16**; *Ю. Харкевич* (с. Лобачевка Волынской обл.) **16**; *А. Хельвас* (Киев) **13**; *С. Хирман* (Киев) **13, 15, 16**; *А. Хохлов* (Москва) **08, 19**; *В. Хрычиков* (Севастополь) **16, 18, 19**; *П. Цветков* (Подольск) **08**; *И. Шапчев* (Ямбол, НРБ) **16, 18, 19**; *З. Шебзухов* (Москва) **08**; *Л. Эрдеш* (Будапешт, ВНР) **16, 18**; *П. Этингоф* (Киев) **16, 19**; *С. Юровский* (Мытищи) **08**; *В. Ярош* (Ленинград) **08**; *Н. Яцкевич* (Саратов) **16**.

### Физика

Большинство читателей, приславших решения, справились с задачами **Ф723—Ф725, Ф731, Ф738, Ф740** и **Ф743**. Остальные задачи решили: *Е. Абсдимов* (п. В. Березовка Восточно-Казахстанской обл.) **26—28, 35, 36**; *Я. Абдуллаев* (Геокчай) **35**; *М. Авдеев* (Новосибирск) **34—37**; *А. Айрапетян* (Ереван) **28, 29**; *Т. Акопян* (Ереван) **34—36**; *И. Алексеев* (Москва) **27, 28, 32—37**; *Э. Алиев* (Баку) **27**; *А. Амбарцумян* (Кафан) **27, 35, 37**; *О. Андреев* (Киев) **28, 29, 35, 37, 39, 44, 45**; *Е. Антонян* (Ереван) **39, 44, 45**; *А. Асланян* (Ереван) **29**; *А. Астахов* (Железнодорожный) **27, 30**; *А. Бабаев* (Баку) **26, 27**; *Э. Багдасарян* (Баку) **26**; *Ю. Баданов* (Новосибирск) **39, 44, 45**; *Я. Базалий* (Донецк) **26,27**; *Ф. Байкабулов* (Ташкент) **39, 41**; *В. Баринов* (Севастополь) **39, 45**; *Г. Баранов* (Донецк) **28, 30, 34, 36, 37, 39, 42, 44, 45, 47**; *Д. Басалаев* (Черногорск) **33, 36, 44, 45**; *С. Бережной* (Кривой Рог) **39, 44**; *Ю. Беспалов* (Киев) **26**; *А. Благодарев* (Пенза) **45**; *А. Бойко* (Хабаровск) **45**; *А. Брезгунов* (Новосибирск) **39**; *Ю. Бриль* (Днепропетровск) **39, 41, 42, 44, 47**; *В. Будилов* (Кирово-Чепецк) **26, 27, 39**; *В. Будовский* (Харьков) **33, 34, 36**; *В. Булавас* (Паневежис) **36, 45**; *О. Важеевский* (Москва) **36, 44, 45**; *В. Вайншток* (Калинин) **45**; *В. Васильев* (Таганрог) **39, 44, 45**; *Б. Вейцман* (Одесса) **26—30, 33, 35—37, 42**; *Г. Волынцев* (Владивосток) **36**; *Р. Върбанов* (Тервел, НРБ) **26, 27, 33—37**; *С. Выгран* (Запорожье) **26, 27**; *С. Вылегжанин* (с. Золотое Поле Крымской обл.) **26, 33, 35, 37**; *А. Вышкварь* (Ленинград) **42**; *И. Гавриков* (Москва) **28, 35, 37**; *И. Гайович* (Киев) **27, 34—36, 45**; *Д. Гесслер* (Москва) **26—28, 32, 39, 41**; *А. Гинев* (Винница) **26**; *В. Гомоз* (Ереван) **41**; *Д. Гороховский* (Черкассы) **28, 32**; *М. Гостев* (Липецк) **38, 44, 45**; *С. Гребенщиков* (п. Черноголовка Московской обл.) **33, 44, 45**; *А. Гриненко* (Конотоп) **28**; *О. Гришин* (Тула) **27, 35, 45**; *К. Гуляев* (Воскресенск) **44, 45**; *И. Гурович* (Одесса) **26**; *Т. Дагдаев* (Ширин) **29**; *А. Дешковский* (Барановичи) **26**; *Л. Доросинский* (п. Черноголовка Московской обл.) **41, 44, 45**; *И. Доценко* (Москва) **26—28, 30, 32**; *А. Дунаевский* (Киев) **26, 33—37, 39, 41, 42, 44—47**; *О. Драгунов* (Барабинск) **26**; *М. Дьячков* (п. Черноголовка Московской обл.) **26—30, 32, 34, 36, 41, 44, 45**; *В. Евстратов* (Ленинград) **26, 28—30**; *С. Ефимов* (Баку) **44, 45**; *В. Житомирский* (Харьков) **33, 34, 36, 39, 41, 44, 45**; *Н. Жохов* (Александров) **34**; *Г. Жуков* (Шумерля) **26**; *М. Жяконис* (Каунас) **26—30, 33, 34, 36, 37**; *Р. Жямайтис* (Вильнюс) **26—30, 32—37, 39, 41, 44—46**; *А. Заболотный* (Улан-Удэ) **44, 45**; *В. Зайцев* (Москва) **39, 44, 45**; *Д. Зайцев* (Горький) **36, 39, 45**; *Ю. Зандаров* (Кургантепа) **33, 37**; *Ю. Звегинцев* (Харьков) **33—37, 39, 42, 44, 46**; *Э. Звенигородский* (Киев) **28**; *Б. Ирычанин* (Белград, СФРЮ) **27, 29**; *Р. Искендеров* (Джалилабад) **26, 27**; *А. Ишханян* (Джермук) **35**; *М. Йотов* (София, НРБ) **39, 41**; *Е. Кибаков* (Ленинград) **33, 34, 39, 41**; *Т. Кадышев* (Москва) **26—29, 39, 42**; *А. Камашев* (Ижевск) **35, 41**; *В. Карасев* (Великие Луки) **27**; *Д. Карманский* (п. Шортанды Целиноградской обл.)

36; *А. Карнаухов* (Ижевск) 41, 44; *Е. Касперский* (Долгопрудный) 28, 32; *С. Кастелли* (Болград) 26, 33, 34, 36, 39, 44—46; *В. Кадыенок* (Рязань) 41, 44—47; *С. Киянов* (Ленинград) 35—37, 41, 42, 44, 45; *С. Кияшко* (Краснодар) 35; *Н. Клейницкий* (Жодино) 26, 28, 30; *М. Козаченко* (Ровно) 44, 45; *М. Колбин* (Свердловск) 27; *В. Комов* (Александров) 26, 28—30, 32, 33, 35, 37; *Р. Кононов* (Новосибирск) 44—46; *А. Корчагин* (Красноармейск Московской обл.) 26—30, 33—36, 39, 41, 45; *Н. Косматов* (Москва) 39, 45; *Г. Костышин* (Минск) 26, 27, 35—37; *В. Криман* (Винница) 26, 28, 32, 33, 37, 39, 45, 46; *Е. Крылов* (Великие Луки) 28; *И. Крылов* (Куйбышев) 44; *С. Крюковский* (Владивосток) 26; *А. Кубышкин* (Киев) 26—28, 30, 33, 35—37; *О. Кузнецов* (Тулун) 26; *Е. Кузнецова* (Липецк) 35, 37, 44; *В. Кузьмин* (Горловка) 44; *О. Кузьмин* (Ташкент) 26; *О. Кузьминова* (Электросталь) 41; *И. Куколев* (Сызрань) 26, 30; *Ф. Курбанов* (п. Ленин Аз.ССР) 26; *Н. Кухиркин* (Москва) 38, 45; *А. Лаврентьев* (п. Черноголовка Московской обл.) 45; *Г. Ландсберг* (п. Протвино Московской обл.) 28, 30, 33, 35, 36, 39, 41, 44—46; *Д. Ларионов* (Чебоксары) 39; *И. Линшиц* (Винница) 28, 32, 39; *С. Лиханский* (Херсон) 42, 45; *А. Лихачев* (Барнаул) 44; *С. Логунов* (Великие Луки) 26—28; *Д. Локшин* (Москва) 45, 46; *О. Лопин* (Фрунзе) 33—35, 44, 45; *Ю. Лупина* (Кокчетав) 27, 29, 39, 45; *Д. Макаров* (п. Черноголовка Московской обл.) 33, 45; *Л. Макарова* (Гайсин) 37; *М. Маловичко* (Северодонецк) 26—28, 30; *А. Маркович* (Белград, СФРЮ) 28, 30, 32—37, 41, 44, 45; *Л. Маркович* (Брест) 33—37, 39, 42—47; *И. Медков* (Москва) 28, 34; *Р. Микаилов* (Геокчай) 35, 41; *В. Михайловский* (Магнитогорск) 45; *И. Мокеев* (Ангарск) 36; *В. Молчанов* (Киев) 26, 27, 39; *Е. Морозов* (Запорожье) 34—39, 42, 45—47; *П. Морозов* (Тула) 35—37, 42; *С. Москаленко* (Киев) 28, 30; *С. Москвичев* (п. Заречье Калужской обл.) 26; *Д. Мукушев* (с. Аркат Семипалатинской обл.) 26, 27; *Б. Мурзахметов* (Джезказган) 28; *С. Мусаев* (Баку) 35, 36, 39, 44, 45; *Д. Набутовский* (Новосибирск) 36, 39; *А. Накас* (Вильнюс) 33, 35—42; *С. Некрасов* (Череповец) 28; *О. Нечипоренко* (ст. Северская Краснодарского кр.) 35, 42; *К. Никашев* (Салават) 27; *А. Носков* (Москва) 34, 36, 37; *И. Осташевский* (Челябинск) 34; *С. Очеретяный* (Житомир) 41; *Е. Паланкер* (Ереван) 26; *И. Паробий* (Киев) 39; *Е. Парубец* (Киев) 39, 45; *С. Парфенов* (Москва) 34,39; *В. Пекар* (Киев) 35, 36, 44, 45; *В. Пентегов* (Киев) 26, 27; *К. Первушин* (Ташкент) 39; *Т. Петруша* (Чирчик) 35; *И. Пильников* (Тамбов) 27, 30, 36, 37, 39, 45; *С. Пильтяй* (Ангарск) 26, 27, 30; *А. Пироженко* (Мытищи) 26, 27; *А. Позолотин* (Воронеж) 33—37; *В. Поляков* (Кривой Рог) 42; *М. Пустыльник* (Свердловск) 26, 28—46; *А. Радионов* (п. Никольское Ленинградской обл.) 26—29, 31, 32; *М. Рахманов* (Алма-Ата) 26—32; *М. Розенберг* (Ленинград) 26, 33, 34, 36, 45; *Н. Розенвайн* (Киев) 30, 32, 34, 35, 37, 39, 42, 45, 47; *С. Розыскнов* (Керчь) 35, 37; *В. Ромашин* (Донецк) 33, 34, 36—38, 42, 44, 45; *Б. Румянцев* (Ленинград) 33, 35—37, 39, 42; *В. Рыбенков* (Махачкала) 41, 44, 45; *А. Рыляков* (Саратов) 26, 28, 31, 33, 36, 39, 44, 45; *Р. Садыгов* (Сиазань) 45; *Г. Самадашвили* (Тбилиси) 44; *А. Самоделов* (Великие Луки) 27; *Д. Свирида* (Москва) 26, 27, 29, 32; *И. Семененко* (Киев) 33—36, 41; *С. Семенков* (Витебск) 27, 35; *А. Семенов* (Саратов) 33—37; *Ф. Серженко* (Запорожье) 26—28, 35, 36, 44, 45; *Н. Сидоранов* (Москва) 26; *С. Симанов* (Долгопрудный) 41; *Ю. Синюков* (ст. Селезни Тамбовской обл.) 27—29; *С. Сипливец* (Волгоград) 26, 28, 29, 33, 35, 36, 39, 42; *И. Сираков* (Ямбол, НРБ) 26, 27; *С. Сириченко* (Киев) 36; *М. Скорик* (Киев) 28, 30, 35, 37, 39, 44, 45; *Н. Сливка* (с. Ефремовка Павлодарской обл.) 30, 36, 37; *С. Смородин* (п. Писцово Ивановской обл.) 44, 45; *С. Смук* (Киев) 28; *И. Соколова* (Феодосия) 28, 30, 34, 37; *И. Соколовский* (Покров) 35; *О. Стасюк* (Винница) 45; *М. Стежко* (Брест) 29—36, 39; *И. Степанов* (Ленинград) 26; *Р. Сулейманов* (Ангиабад) 44, 45; *А. Сурков* (Ленинград) 43—45; *Ю. Талденко* (Сумы) 26, 27; *К. Тарасов* (Новокузнецк) 26, 27; *А. Тенсин* (Реутово) 44, 45; *Т. Терешков* (Елец) 26; *И. Тихоненко* (совх. Новоомский Омской обл.) 26—29, 33—37, 44, 45; *А. Тищенко* (Днепропетровск) 27, 30, 33—35, 37, 39; *О. Третьяков* (Омск) 26, 35—37; *Г. Трунов* (Москва) 26, 29; *В. Туровский* (Баку) 26, 27; *О. Фатьянов* (Курск) 44, 45; *Н. Федин* (Омск) 26, 28, 29, 33, 34, 36, 41, 44—46; *Р. Федыня* (Нововолынск) 39; *А. Фельдман* (Саратов) 35, 44, 45; *В. Фельдман* (Саратов) 26, 28, 30, 35, 36, 39, 44—46; *И. Филянов* (Владимир) 26; *А. Фомин* (Ленинград) 35, 36; *Б. Хвостов* (Москва) 29; *А. Хельвас* (Киев) 26, 29, 32, 34—37, 39, 42, 44—47; *А. Ходарин* (п. Нововоронежский Воронежской обл.) 27; *Е. Хорунова* (Киев) 26, 37; *С. Цонев* (София, НРБ) 44, 45; *А. Цыганок* (Енакиево) 32; *Ю. Чаплыгин* (Валуйки) 34, 36, 44—46; *С. Чеканов* (Саратов) 28—30, 34, 36, 41, 44—46; *С. Черкас* (Минск) 42; *А. Чернышев* (Новосибирск) 39; *И. Чечеткин* (Киев) 39, 44; *А. Чудновский* (Киев) 39, 44; *А. Шатов* (Киев) 27; *Ю. Шмидт* (Андижан) 44, 45; *И. Шойхет* (Ташкент) 33, 37, 42, 45; *А. Шрамков* (п. Волоконовка Белгородской обл.) 35, 37; *М. Шуклин* (Пермь) 26—30, 32, 34—37, 41; *Ю. Щедрин* (Брянск) 26—28, 32; *В. Щедров* (Великие Луки) 26, 28; *А. Щетинин* (Запорожье) 35, 36; *И. Эрхарт* (Биловец, ЧССР) 41; *Б. Юдин* (Люберцы) 26; *Н. Юзва* (д. Таловая Красноярского кр.) 41; *А. Юшкявичус* (Каунас) 39; *А. Якунин* (Москва) 36, 44; *Н. Яцкевич* (Саратов) 26, 28, 35—37, 41; *М. Арамян* (Ереван) 28; *Г. Волынцев* (Владивосток) 36; *В. Ефимов* (Баку) 38, 40; *К. Милеев* (Брест) 33—35; *К. Мишин* (Днепропетровск) 30, 39; *А. Шугай* (Запорожье) 37, 41, 42, 45.

# Квант для младших школьников




## Задачи

**1.** Делимое в 6 раз больше делителя, а делитель в 6 раз больше частного. Чему равны делимое, делитель и частное?

**2.** Из полоски бумаги шириной 1 см склеили цилиндрическое кольцо с окружностью длиной 4 см так, как показано на рисунке. Можно ли из этого кольца изготовить квадрат а) площади 1 см$^2$; б) площади 2 см$^2$? Бумагу разрешается как угодно складывать, но рвать ее, конечно, нельзя.

**3.** Школьники Вадик и Саша увидели весы и взвесили на них свои портфели. Весы показали, что массы портфелей — 3 кг и 2 кг. Когда они поставили на весы оба портфеля, то весы показали 6 кг.
— Как же так? — воскликнул Саша.— Два плюс три не равняется шести!
— Разве ты не видишь? — ответил Вадик.— Просто у весов сдвинута стрелка.
Так сколько же весили портфели на самом деле?

**4.** Любой треугольник можно разрезать на четыре одинаковых треугольника, подобных исходному, так, как показано на рисунке. Найдите треугольник, который можно разрезать на три одинаковых треугольника, ему подобных.

Эти задачи нам предложили
*В. Александров, Ю. Аленков, В. Произволов, Л. Штейнгарц*

*В. Нахшин*

# Понятие определения и определение понятий

Петя Шариков пришел из школы невеселый.

— Ты почему такой хмурый сегодня? — спросила его старшая сестра Таня.— Или двойку принес?

— Угу,— ответил Петя.— По истории.

— Новости! — сказала Таня.— Но ты ведь вчера готовился?

— Готовился. И вообще, этот материал я знаю лучше многих в классе: средние века. Уйму книг перечитал об этом.

— Так за что же тебе двойку-то влепили?

— Понятия не имею! Вызывает меня Иван Миронович и говорит: «А сейчас Шариков нам определит понятие "феодализм".» Я подумал — чего ему понадобилось? Определить — это ведь значит "найти"...

— Ясное дело! — вступил в разговор младший брат Пети Коля.— Нам сегодня на математике задали задачку, там надо было определить площадь поля. Значит — найти.

— Ну вот, я так и подумал. И стал искать на карте страны, где был феодализм. Чувствую, что-то не то. А учитель говорит: «Садись, Шариков, ничего-то ты не знаешь!» И поставил двойку!

— Эх ты,— посочувствовала Таня.— Неужели ты не понимаешь, что "определить" — это значит "дать определение"?

— Спасибо, пояснила. «Учиться — заниматься ученьем.» «Гулять — заниматься гуляньем.» А если я спрошу у тебя, что значит "дать определение", ты скажешь "определить"?

— Нет, я так не скажу! — замотала головой Таня.

— А я знаю,— снова вмешался в разговор младший Шариков.— Мы как раз сейчас по русскому языку проходим: определение — это второстепенный член предложения, отвечающий на вопрос: какой? какая? какие? Например: п л о х а я оценка.

— Выходит, по-твоему, учитель хотел узнать от меня, к а к о й бывает феодализм? Что означает — какой? Хороший, плохой, отсталый, мрачный, несправедливый? Да мало ли можно придумать определений! И все они будут правильными?

— А помнишь, Петя, позавчера по телику была передача "Человек и закон", и там народный суд вынес "частное определение",— вспомнил вдруг Коля.

— Да, знаю, это когда пишут на работу кому-то, кто виноват, но кого не осудили. А вот я еще вспомнил: наша классная руководительница сказала, что каждому ученику в школьном саду надо определить участок работы... Значит, в этом случае, выделить, что ли?

— А я помню, папа рассказывал о том, как начинал работать на заводе и ему определили оклад 120 рублей. Здесь "определили" значит — установили? Назначили? Странное слово! Сколько значений, и все разные! Чего же хотел учитель от тебя?

Таня сказала:

— Разве вы забыли, что слово может иметь много значений? Между прочим, Петюня, среди всех значений слова "определение" ты не назвал еще одного, а именно: «Определение — это предложение, сообщающее, что означает данное понятие.» А ведь именно этого хотел от тебя учитель. Он хотел, чтобы ты сказал, что означает понятие "феодализм"! А чтобы ты знал, как это надо делать, тебе прежде всего надо знать, что такое "понятие". Знаешь ли ты это?

— О понятии — не имею никакого понятия,— сострил Петя.

— Шутки в сторону. Дело в том, что слово "понятие" в русском языке тоже имеет разные значения, что видно даже из твоей остроты. Итак, что же такое "понятие"?

Оба Шарикова задумались. Младший сопел, старший вздыхал, но сказать что-либо никто не решился.

— Смотрите,— сказала Таня и быстро нарисовала три разных треугольника.

— Что это такое?

— Треугольник!

— А это?

— И это — треугольник.

— А это?

— И это — треугольник.

— Вопрос, мальчики: почему одним словом "треугольник" вы называете такие разные вещи? Ведь и размеры у них — разные. И цвет — различный. И вообще они мало похожи друг на друга!

— Как "почему"! — закричали оба в голос.— Ясное дело! Потому, что все они — треугольники!

— Не ясно. Почему же они треугольники-то?

— Да потому, что у них три угла! — сказал Коля.

— Образованные замкнутой ломаной линией из трех отрезков,— добавил Петя.

— Молодцы! Проследим за вашей мыслью. Вы мысленно отбросили у множества предметов все несущественные признаки и оставили, на ваш взгляд, самый существенный! Вот так и возникает ПОНЯТИЕ! У целого класса предметов, даже, может быть, у бесконечного их множества, отбрасываются несущественные признаки, оставляется один признак — самый общий и самый существенный! И обратите внимание. В данном случае возникает понятие о треугольнике "вообще", хотя в природе не существует "треугольника вообще": каждый нарисованный треугольник неповторим! Так вот, друзья мои, запомните раз и навсегда: любая наука начинается именно тогда, когда в ней возникают п о н я т и я, а не конкретные предметы.

— Для чего же науке так уж нужны "понятия"? Не понимаю.

— Не понимаешь? А ты представь на миг, что в геометрии нет понятий, и мы имеем дело с конкретными предметами. Ты знаешь, что сумма углов в треугольнике равна 180°?

— Кто же этого не знает!

— Так вот,— сказала Таня.— У тебя есть конкретный треугольник — деревянный или металлический. Ты прикладываешь к его углам транспортир и убеждаешься: так и есть, в сумме углы составляют 180°. Но это — у твоего, конкретного. А у другого, другой формы?

— Снова измерю!

— А у нового... у тысячного? У миллионного? Ты затратишь на эти измерения всю жизнь и все равно ничего не докажешь. Можешь ли ты быть уверен, что для миллион первого эта сумма будет такою же? Нет, пока твое предположение не будет д о к а з а н н ы м. Когда вы в классе на уроке геометрии доказали эту теорему, вы ведь в своем доказательстве опирались не на конкретный треугольник, нарисованный на доске мелом! Вы доказали эту теорему, опираясь на свойства понятия треугольника, и тем самым доказали ее для каждого из представителей этого понятия! Вот, братцы мои, для чего нужны понятия в науке. Они попросту экономят человеку и время, и силы. Впрочем "экономят" — это не то слово. Именно они делают науку возможной. Был такой великий ученый — Анри Пуанкаре. Его спросили: «Что такое математика?» и он ответил: «Математика — это искусство называть одним и тем же словом разные, на первый взгляд, вещи.»

— Искусство?!

— Да, причем понятия есть не только в математике. В любой науке есть свой круг понятий. А овладеть этим кругом понятий и помогает "определение".

— А как это определение помогает овладеть понятиями? — спросил Петя.

— Весьма просто, мальчики. Пример из той же геометрии. Что такое квадрат?

— Квадрат? Ромб, у которого все углы прямые.

— Спасибо, Шариков Петр. Вот ты и произнес определение квадрата. Ну, а что же такое — ромб?

— Параллелограмм, у которого все стороны конгруэнтны.

— И снова — определение, на сей раз ромба. А теперь проследим, как ты это сделал. Сперва ты сказал: «Квадрат — это ромб», то есть свел понятие квадрата к понятию ромба. Квадрат есть частный случай ромба, так как каждый квадрат — ромб, но не каждый ромб — квадрат. Если первое понятие есть частный случай второго, то оно называется видовым для второго, а второе — родовым для первого!

— Я это знаю! Потому что и в ботанике есть роды и виды.

— Совершенно верно! Но продолжим наши геометрические рассуждения. Во втором определении родовым понятием стал параллелограмм, а ромб для него видовым, то есть и здесь ты проделал ту же операцию: свел видовое понятие к родовому. Но это еще не все! Ведь ты не просто указал родовое понятие. Ты отметил, какой именно частный случай родового представляет собой видовое понятие. Квадрат — не просто ромб, а ромб с прямыми углами. Ромб — не просто параллелограмм, а параллелограмм с конгруэнтными сторонами. Вывод? В любом определении нового понятия проделываются две операции: во-первых, мы указываем ближайшее родовое понятие, известное ранее, а во-вторых, сообщаем — каким именно частным случаем родового понятия является наше новое понятие*).

— Ну, Татьяна, ты — голова! — сказал Петя Шариков своей сестре.— Ловко ты владеешь этим искусством!

— Я еще только учусь, мальчики,— скромно сказала Таня, первокурсница университета.

— А почему ты сказала «ближайшее родовое понятие?» Как это понять?

— Потому что, скажем, для квадрата родовым будет не только ромб, но и параллелограмм, и четырехугольник, и фигура, но тогда определение станет более громоздким. Например: квадратом называется параллелограмм с прямыми углами и конгруэнтными сторонами. Чем дальше родовое понятие, тем больше видовых отличий придется перечислять — это просто неэкономно! А теперь потренируйтесь-ка, мальчики! Вот вам несколько фраз. Являются ли они определениями? «Тигр — это животное.»

— Нет, это — не определение,— сказал Петя.— Здесь все сведено к родовому понятию, но не указано, какой частный случай.

— Верно. А это: «Евклид — знаменитый древнегреческий математик, автор "Начал".»?

— Да!—воскликнули мальчики.

— Увы, нет,— сказала Таня.— Определение может быть дано только п о н я т и ю, а не конкретному объекту, хотя бы человеку. А вот еще фраза: «Бегемот — это гиппопотам.»

*) Первокурсница Таня еще не знает, что не все определения укладываются в эту схему — см., например, «Квант», 1978, № 6, с. 33. *(Прим. ред.)*

— Нет. Здесь понятие заменено синонимом, но не сведено к родовому.

— Ну, кажется мне, вы все поняли. Тогда скажите: всякому ли понятию может быть дано определение?

Петя задумался:

— По-видимому, нет. Ведь, давая определение, мы сводим понятие к другому, родовому для него. В свою очередь, для этого родового существует свое родовое. И так далее, и так далее. Если идти все дальше по цепочке определений, мы будем переходить к все более общим понятиям, каждое из которых будет выражаться каким-то словом в языке. Если предположить, что эта цепочка определений продолжается без конца, получится, что в языке бесконечно много слов! Но это не так. Значит, где-то нас ждет остановка.

— Да, ты рассудил оригинально! Ты сейчас дал, я бы сказала, языковое решение общенаучной проблемы. Но дело здесь не столько в ограниченности языка, сколько в существовании самых общих понятий. Вернемся к примеру с квадратом. Мы ведь затронули пока только два звена в цепочке определений. Но ведь можно пойти и дальше. Что такое "параллелограмм"?

— Четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

— Идя дальше, можно получить "фигуру", "ломаную", "отрезок", "прямую" и, наконец, "точку". Здесь мы вынуждены остановиться! Прямая и точка — самые общие понятия в геометрии. Родовых понятий для них не существует. Поэтому им нельзя дать определение!

— Странно! Такие простые и наглядные понятия, а определения дать нельзя. Танюша, а как математики узнали, что нельзя? Как сам Евклид до этого додумался?

— А Евклид, кстати, попытался это сделать. В своих "Началах" он написал «Точка есть то, что не имеет размеров» и «Прямая — линия, которая одинаково ориентирована по отношению ко всем своим точкам.» Евклид явно считал эти фразы определениями.

— Погоди-ка. А чем же они — не определения?

— Давайте разберемся. Первая фраза нехороша уже тем, что "то" — это не родовое понятие для точки.

— Ну, хорошо. А может быть попробуем усовершенствовать,— предложил Петя.— Почему нельзя сказать так: «Точка — это фигура, не имеющая размеров»?

— Потому что сама "фигура" определяется как "множество точек". Но что же такое те точки? И второе: "отсутствие точки" ведь тоже не имеет размеров! Так что все это весьма туманно. А по поводу второго "определения" — прямой — Феликс Клейн, немецкий математик, писал: «Смысл его совершенно темен. Например, под него подойдут и окружность, и винтовая линия.»

— И все же мне кажется, что можно придумать определение прямой,— сказал Петя.

— Попытайся! Но должна тебе сказать — до тебя это пытались сделать в течение веков многие математики. И все их усилия оказались тщетными. Потому-то точка и прямая считаются самыми общими понятиями.

— Вот с этим-то я и не согласен. Ведь "прямая" — частный случай линии, не так ли?

— Верно. Итак, начинай свое определение: «Прямая — это линия, которая...

— Которая... которая обладает свойством прямизны. Нет, пожалуй, это нехорошо — само это "свойство прямизны" звучит как самое общее понятие.

— Разумеется.

— Но погоди, я еще не сдаюсь. А почему нельзя сказать: прямая — это линия, расстояние между двумя любыми точками которой короче, чем длина участка любой другой линии, проходящей через те же две точки?

— А что такое расстояние?

— Расстояние — это длина отрезка, соединяющего две точки.

— А что такое отрезок?

— Отрезок — это... это часть прямой. Ага, я понял. «А что такое

*(Окончание см. на с. 56)*

*Г. Левитас*

# Используя графики

В книге С. Страшевича и Е. Бровкина «Польские математические олимпиады» (М., «Мир», 1978) есть две интересные задачи о многочленах (задачи 7 и 13 на с. 12—13). Сформулируем их так:

Задача 1. *Какому условию должны удовлетворять коэффициенты трехчленов $x^2+mx+n$ и $x^2+px+q$, чтобы их корни перемежались?*

Задача 2. *Какому условию должны удовлетворять коэффициенты многочлена $x^3+ax^2+bx+c$, чтобы три его различных корня образовывали арифметическую прогрессию?*

Решения, данные в книге, используют внепрограммный материал — комплексные числа и теорему Виета для кубических уравнений. Кроме того, очень непрост, на мой взгляд, сам поиск решения этих задач, что и делает их поистине «олимпиадными».

Но если решать эти задачи, используя графики, их сложность существенно понижается как в отношении поиска решения (оно теперь получается переводом наглядных фактов на аналитический язык и обоснованием их), так и в отношении используемого аппарата. Предлагаемое здесь решение не требует внепрограммного материала; зато необходимо отчетливое представление о том, как графики могут располагаться на координатной плоскости.

* * *

Первая задача — вполне под силу восьмиклассникам.

Представим себе, как должны расположиться конгруэнтные параболы $y=x^2+mx+n$ и $y=x^2+px+q$, чтобы точки их пересечения с осью абсцисс перемежались. Видно (рис. 1), что такие параболы *имеют ровно одну общую точку, причем она лежит ниже оси абсцисс.*

Докажем, что это условие необходимо и достаточно для перемежаемости корней.

Сколько, прежде всего, общих точек могут иметь наши параболы? Уравнение $x^2+mx+n = x^2+px+q$ равносильно уравнению $(m-p)x=q-n$, которое либо имеет корнем любое действительное число (при $m=p$ и $n=q$ — в этом случае параболы совпадают), либо вовсе не имеет корней (при $m=p$ и $n\neq q$; как расположены параболы в этом случае?), либо (при $m\neq p$) имеет один корень — число $x_0=\frac{q-n}{m-p}$.

Пусть сначала корни $x_3$, $x_4$ трехчлена $x^2+px+q$ перемежаются с корнями $x_1$, $x_2$ трехчлена $x^2+mx+n$ (см. рис. 1). Тогда из точек $A(x_3; 0)$, $B(x_4; 0)$ второй параболы одна лежит «внутри» первой параболы, другая — «вне» ее (рис. 2). Значит, вторая парабола пересекает первую, причем пересечение происхо-

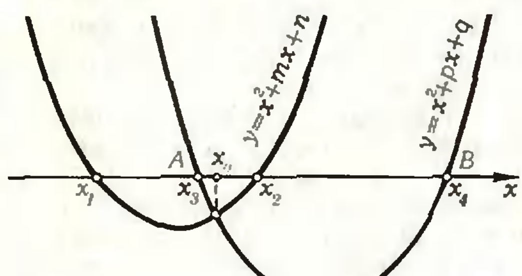



Рис. 1.

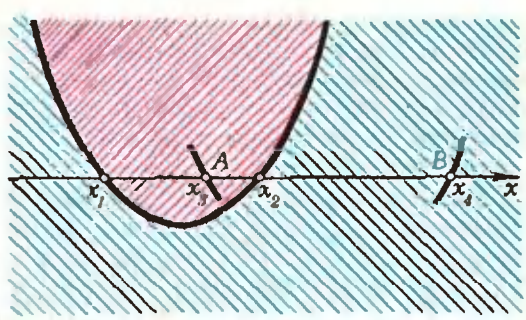



Рис. 2.

дит на том участке второй параболы, который лежит между $A$ и $B$, а весь этот участок лежит ниже оси абсцисс.

Пусть теперь параболы имеют ровно одну общую точку и пусть эта точка лежит ниже оси абсцисс. Так как она лежит ниже оси абсцисс, она расположена между корнями каждой параболы. Значит, один корень каждой параболы лежит «внутри» другой параболы, а второй корень — «вне» ее, то есть корни перемежаются.

Итак, расположение парабол на рисунке 1 равносильно перемежаемости корней. Значение каждого из данных трехчленов в точке $x_0$ отрицательно. Запишем этот факт, например, для первого трехчлена: $x_0^2+mx_0+n<0$, или

$$\left(\frac{q-n}{m-p}\right)^2+m\left(\frac{q-n}{m-p}\right)+n<0.$$

Это и есть искомое соотношение между коэффициентами $m$, $n$, $p$, $q$. Его можно упростить:

$$(q-n)^2+(m-p)(mq-np)<0.$$

Проверьте, что получится, если $x_0$ подставить во второй трехчлен.

* * *

Вторая задача — для тех, кто знает, что такое производная. Представим себе график многочлена $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$, различные корни $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ которого образуют арифметическую прогрессию (рис. 3). Задача упростится, если произвести параллельный перенос графика вдоль оси абсцисс так, чтобы средний корень $\beta$ попал в начало координат. Получим многочлен $g(x)=(x+\beta)^3+a(x+\beta)^2+b(x+\beta)+c$, имеющий корни $x_1$, 0, $-x_1$ (рис. 4). Видно, что функция $g$ нечетна.

Докажем это. Если в выражении $g(x)$ раскрыть скобки и привести подобные члены, коэффициент при $x^3$ окажется равным 1. Обозначим остальные коэффициенты буквами $A$, $B$, $C$: $g(x)=x^3+Ax^2+Bx+C$. Поскольку числа $x_1$, 0 и $-x_1$ служат корнями многочлена $g(x)$,

$$\begin{cases} x_1^3+Ax_1^2+Bx_1+C=0 \\ C=0 \\ -x_1^3+Ax_1^2-Bx_1+C=0 \end{cases}$$

откуда $A=C=0$; значит, $g(x)=x^3+Bx$ — нечетная функция.

Полученная нами информация о расположении графика функции $g$ пока еще неполна. Ведь нечетны и те функции, графики которых изображены на рисунке 5, однако эти кубические многочлены имеют всего по одному корню. Чтобы появились еще два корня, необходимо «изогнуть» график в начале координат. Для этого надо, чтобы касательная к графику в этой точке образовывала с осью абсцисс тупой угол, то есть чтобы производная $g'(0)$ была отрицательной.

В самом деле, если $g'(0)=B\geqslant 0$, то производная $g'(x)=3x^2+B$ положительна при всех $x\neq 0$, и функция $g$ возрастает на всей прямой. В этом случае многочлен $g(x)$ не может иметь трех (различных) корней.

Пусть теперь, обратно, функция $g$ нечетна и $g'(0)<0$. Поскольку $g$ нечетна, $g(0)=0$. Поскольку $g'(0)<0$,

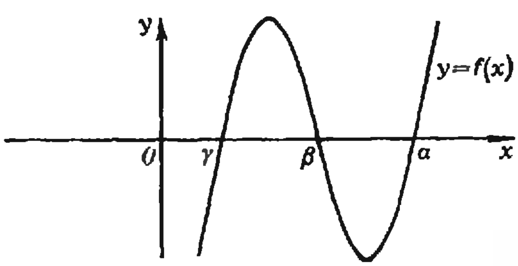



Рис. 3.

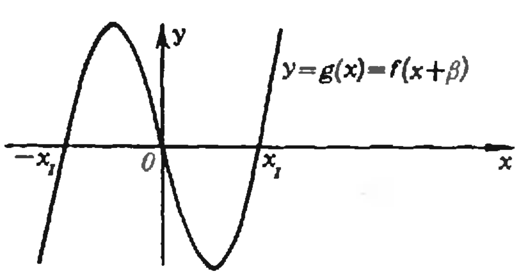



Рис. 4.

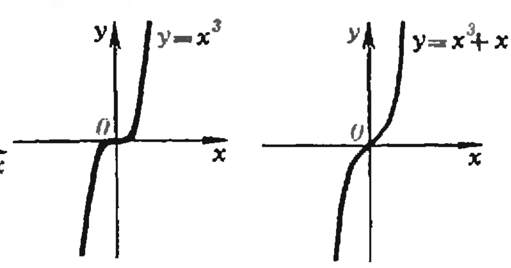



Рис. 5.

функция $g$ отрицательна на некотором интервале правее точки 0 (почему?). Но при больших $x$ (как говорят математики, «на плюс бесконечности») $g(x)>0$. Значит, где-то правее точки 0 многочлен $g(x)$ (непрерывная функция!) имеет корень $x_1$. Так как функция $g$ нечетна, $g(-x_1)=-g(x_1)=0$. Итак, многочлен $g(x)$ имеет корни $x_1$, 0, $-x_1$, образующие арифметическую прогрессию. Значит, арифметическую прогрессию образуют и корни $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ данного многочлена $f(x)$.

Итак, условие «*$g$ нечетна и* $g'(0)<0$», то есть

$$\begin{cases} A=0 \\ C=0 \\ B<0 \end{cases}$$

равносильно существованию трех корней, образующих арифметическую прогрессию.

$$g(x)=(x+\beta)^3+a(x+\beta)^2+b(x+\beta)+c=x^3+(3\beta+a)x^2+(3\beta^2+2a\beta+b)x+(\beta^3+a\beta^2+b\beta+c).$$

Значит, $A=3\beta+a=0$, откуда $\beta=-\frac{a}{3}$.

Поэтому условие

$$\begin{cases} C=0 \\ B<0 \end{cases}$$

принимает вид

$$\begin{cases} \left(\frac{a}{3}\right)^3-a\left(\frac{a}{3}\right)^2+b\cdot\frac{a}{3}-c=0 \\ 3\left(\frac{a}{3}\right)^2-2a\cdot\frac{a}{3}+b<0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 2a^3-9ab+27c=0 \\ a^2-3b>0 \end{cases}$$

Это и есть искомое соотношение между коэффициентами $a$, $b$, $c$.

---

# Понятие определения и определение понятий

*(Начало см. на с. 50)*

эта прямая?» Сказка про белого бычка! Но вот тебе еще одно определение. Попробуй-ка придраться: «Прямая — это линия, обладающая тем свойством, что если поместить на нее зрачок глаза, то она будет представляться глазу точкой.»

Таня засмеялась:

— Видишь ли, твое "определение" предполагает, что свет распространяется прямолинейно — иначе ты бы мог увидеть и другие точки. Но что такое прямолинейно? По прямой! И мы опять топчемся на месте.

— Д-да, все это очень интересно. Я все-таки еще попытаюсь подумать. Но почему учителя нам никогда не рассказывают обо всех этих вещах? Ведь все это несложно понять!

— Каких учителей ты имеешь в виду?

— Разумеется, по математике.

— Но разве материал об определениях и понятиях относится только к математике? Это вопросы общенаучного характера. В любой науке есть свои родовые и видовые понятия. Поэтому все это нельзя отнести к какому-нибудь одному школьному предмету! Этот материал относится к философии, к тому ее разделу, где изучается научное знание.

— Вот здорово! — сказал Коля.— Теперь и мы — философы, знаем, как строится любая наука.

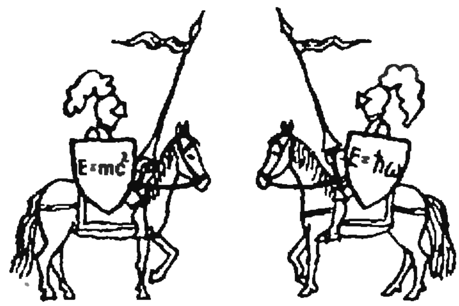
— О нет, мальчики, до такого знания нам с вами еще далеко. Понятия и определения — важные элементы науки, но не самое главное, что в ней есть.

— А что главное? Доказательства?

— Нет. Главное — идеи, утверждения.

— А что это такое? Расскажи, Тань!

— Об этом, мальчики, в другой раз. Заговорилась я с вами, опаздываю на лекцию! Подумайте над сегодняшним разговором. Поиграйте в "понятия-определения", как в "казаки-разбойники"! Дело стоящее, уверяю вас.




# IV Московский турнир юных физиков

*Загадок больше на земле, Горацию,*
*Чем изощренный ум придумать может.*
В. Шекспир «Гамлет»

**IV Московский Турнир был проведен физическим факультетом МГУ с 23 декабря 1981 г. по 4 апреля 1982 г. Оргкомитет Турнира возглавлял вице-президент АН СССР, академик Е. П. Велихов, жюри — профессор физического факультета МГУ В. Л. Бонч-Бруевич. 32 школы Москвы и Московской области приняли участие в этом своеобразном соревновании старшеклассников.**

**Мы расскажем, как проходил Турнир, и приведем полный текст заданий, предложенных на конкурсах. Эти задания вы можете использовать при организации в школе викторин, вечеров занимательной науки, турниров юных физиков.**

Как обычно, Турнир проводился в три этапа.

I тур — заочный конкурс. Школам для коллективного решения предлагались 17 задач на срок два месяца. По результатам этого конкурса ко II туру были допущены команды 15-ти школ. Коллективный характер этого тура дал возможность участвовать в конкурсе всем желающим — каждый учащийся мог способствовать успеху своей школы.

Для примера расскажем, как решали задачу «Автобус» десятиклассники школы № 179. Для исследования тряски в автобусе они сделали переносную установку, преобразующую механические толчки в электрические импульсы, пропорциональные амплитуде встряхиваний. Эти импульсы записывались на магнитофон.

На такой установке в автобусе кольцевого маршрута ребята в течение двух часов записывали встряхивания в шести точках автобуса от ближайшей до самой удаленной от водителя. Обработка полученных данных показала, что действительно на заднем сидении трясет больше, чем на переднем. Это явление было разумно объяснено и обосновано количественными результатами эксперимента.

II тур — отборочные физбои, которые определили финалистов Турнира. Ими стали команды московской школы № 179, ФМШ № 18 при МГУ и школы № 842 (г. Зеленоград).

III тур (финал) проходил на физическом факультете МГУ. В его программу входили: физбой команд — финалистов Турнира, конкурс капитанов и конкурс болельщиков.

Живо, интересно, с большой пользой для всех участников проходили эти коллективные состязания юных физиков в умении решать сложные задачи, убедительно излагать свои решения, полемизировать. На физбоях команды по очереди выступали в роли докладчиков, оппонентов и рецензентов. Докладчики излагали суть решения задач (предложенных командам заранее), оппоненты высказывали свои критические замечания, пытались найти ошибки в рассуждениях докладчиков, рецензенты оценивали дискуссии докладчик — оппонент, представители жюри комментировали их выступления и подводили итоги.

После подведения итогов финала состоялось торжественное закрытие IV Турнира юных физиков. Переходящий приз (магазин сопротивлений из лаборатории выдающегося русского физика Н. А. Умова) за победу в Турнире был вручен команде ФМШ № 18 при МГУ. Физический факультет МГУ наградил школы, команды которых показали высокие результаты в этом состязании, ценными физическими приборами.

В заключительном слове профессор В. Л. Бонч-Бруевич выразил глубокую признательность учителям, воспитавшим в своих учениках любовь к знаниям, и пожелал всем юным участникам Турнира сохранить и развивать тот интерес к науке, который они проявили в этом состязании*).

### Задачи заочного коллективного конкурса

Условия задач сформулированы максимально кратко. Необходимые дополнительные данные и оговорки следует вводить, опираясь на здравый смысл.

**1. «Галактика».** Астроном исследует спектр излучения некоторой галактики, которая видна «с ребра». Щель спектрографа установлена вдоль ребра галактики. Оказалось, что спектральные линии имеют форму наклон-

---

*) V Турнир юных физиков для школ Москвы и Московской области начнется 5 декабря 1982 г. Ваши вопросы по организации таких соревнований, предложения и заявки на участие в ТЮФ-V присылайте по адресу: 117234, Москва, МГУ, физический факультет, Совет по работе со школьниками, Оргкомитет ТЮФ.

Участники конкурса капитанов пытаются зарядить электроскоп ровно на 2 деления.

Теория задачи «Газ»...

...опровергается экспериментом.

*Фото В. Александрова*

ных прямых. Как с помощью этого спектра определить массу галактики? Что можно сказать о распределении массы в галактике?

**2. «Венера».** В какой фазе Венера выглядит наиболее яркой для Земного наблюдателя?

**3. «Капилляр».** Предложите способы измерения диаметра капилляра, представляющего собой сужение в средней части длинной толстостенной стеклянной трубки. Диаметр трубки 3 мм, длина трубки 3 см, диаметр капилляра порядка 1 мкм, длина капилляра порядка 1 мм.

**4. «Капля».** Две расплавленные капли олова и цинка, медленно остывая, застыли. Оказалось, что при этом оловянная капля имеет шарообразную форму, а у цинковой просматриваются плоские грани. Как это объяснить?

**5. «Испарение».** Определите экспериментально интенсивность испарения (в кг/с) воды из наполовину заполненного цилиндрического сосуда (стакана). Произведите численные оценки с учетом влажности воздуха в помещении. Рассмотрите следующие случаи:

а) Сосуд открыт.

б) Сосуд накрыт фольгой, в которой сделано круглое отверстие площади 20% от площади сечения сосуда.

в) Сосуд накрыт фольгой, в которой сделано множество хаотически расположенных отверстий диаметром порядка 100 мкм. Суммарная площадь отверстий составляет 10% от площади сечения сосуда.

**6. «Шерсть».** Шерстяная нить сплетена из множества отдельных ворсинок. Исследуйте прочность такой нити на разрыв в зависимости от ее длины. Объясните результаты эксперимента.

**7. «Придумай сам».** Самостоятельно сформулируйте физическую задачу-проблему и решите ее.

Примерный список тем.

«Антистатик». В чем принцип действия антистатика, который в последнее время широко используется в быту?

«Центр тяжести». Есть мнение, что длинная однородная балка, лежащая на земле, имеет два центра тяжести. Внесите ясность в этот вопрос.

«Парашют». Можно ли в качестве парашюта использовать длинную полосу легкой и прочной материи?

«Кирпич». Как наиболее эффективно сушить влажные кирпичи?

«Чай». Почему пятно от высохшей на стекле капли чая имеет резко очерченную границу?

«ЛЭП». Почему так неэкономно (с большим провисом) развешены провода линии электропередачи?

«Тигр и клетка». Используя стробоскопические методы, можно нарисованного тигра посадить в нарисованную клетку. Как это сделать?

«Температура». В безветреную погоду вы измерили температуру воздуха термометром ($t=23°C$). Затем вы сели на велосипед и поехали со скоростью 10 м/с. Что теперь покажет термометр? Что покажет тот же термометр, помещенный в пучок молекул, летящих в одном направлении с одинаковыми скоростями?

«Целлофан». Если между двумя скрещенными поляризаторами поместить скомканный кусочек целлофана, то он предстанет в виде красочного разноцветного «кристалла». Предложите интересные опыты с поляризованным светом.

**8. «Супербол».** Супербол (мячик из плотной резины диаметром около 5 см) падает с высоты 30 см на горизонтальную поверхность гладкой стальной плиты. Сколько произойдет ударов? Какова длительность одного удара? Сколько времени будет «скакать» супербол? Считать, что при каждом отскоке в тепло переходит 20% кинетической энергии супербола.

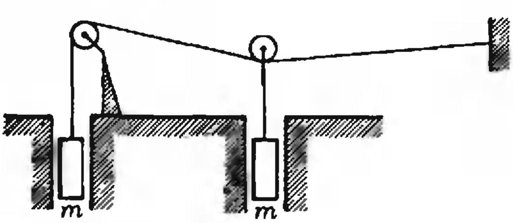
**9. «Удар».** Два одинаковых упругих кубика лежат вплотную друг к другу на гладком столе. Как они отскочат после лобового удара гладкого упругого шарика такой же массы? Рассмотрите следующие случаи:

а) Грани кубиков сухие.

б) Соприкасающиеся грани кубиков смочены водой.

в) Те же грани смочены машинным маслом.

**10. «Период».** Определить период малых колебаний в следующей системе:



Трения нет, блоки невесомы, нить нерастяжима и невесома, массы грузов $m$.

**11. «Автобус».** Известно, что в автобусе «трясет» больше на заднем сиденье, чем на переднем. Почему?

**12. «Трение».** Большой диск вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси с постоянной угловой скоростью $\omega$. На его горизонтальную поверхность опускают маленький диск, способный вращаться вокруг неподвижной вертикальной оси, смещенной относительно оси большого диска. Через некоторое время за счет трения малый диск тоже будет вращаться. Какова установившаяся скорость малого диска? Рассмотрите следующие случаи:

а) Малый диск не выступает за края большого диска.

б) Малый диск выступает за края большого диска.

**13. «Сахар».** В пачках быстрорастворимого сахара часто встречаются слипшиеся по большой грани «столбики» из 2—4 кусочков. Если коснуться поверхности горячего чая концом такого столбика (большой гранью крайнего кусочка), то нижний кусочек быстро отделяется от столбика, не успев намокнуть. Если же коснуться поверхности чая боковой гранью столбика (малыми гранями кусочков), то разделение происходит через значительно большее время, только после достаточно сильного размокания кусочков. Исследовать и объяснить это явление.

**14. «Кубик»** Однородный кубик плавает на поверхности воды. При каких значениях плотности кубика его верхняя грань горизонтальна?

**15. «Наушник».** Если к клеммам головного наушника присоединить достаточно длинные (метровые) куски свободного провода, то наушник «заговорит» (правда, не всегда). Какую радиопередачу вы вероятнее всего услышите? Объясните это явление.

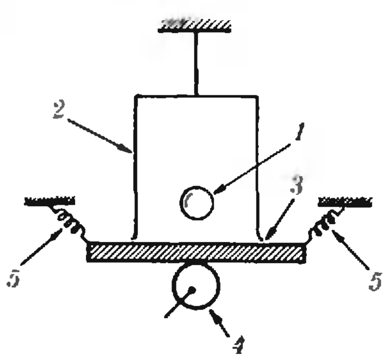
**16. «Поле».** В однородном магнитном поле $B=0{,}5$ Тл, линии индукции которого горизонтальны, вблизи поверхности Земли падает ребром вниз однородный медный диск. Плоскость диска параллельна линиям индукции магнитного поля. Диаметр диска 3 см, толщина диска 3 мм. Оценить ускорение диска без учета сопротивления воздуха.

**17. «Кит».** Как определить объем кита, плавающего у берегов Гренландии?

### Задачи финального физбоя

На решение этих задач с представлением отчетов в жюри Турнира командам был дан 1 час времени.

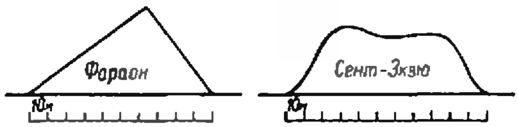
**1. «Супербол».** Плита совершает колебания с амплитудой $A$ и частотой $\nu$. Определить, на какую максимальную высоту $h$ может подскочить супербол.



1. Супербол;
2. Стеклянный цилиндр (экран);
3. Текстолитовая плита;
4. Мотор с эксцентриком;
5. Пружины подвеса.

Оценить, через какое время $\tau$ от начала процесса можно ожидать, что супербол подскочит на высоту $0{,}99h$, если $A=1$ мм, $\nu=50$ Гц, при каждом отскоке 20% кинетической энергии супербола в системе отсчета, связанной с плитой, переходит в тепло.

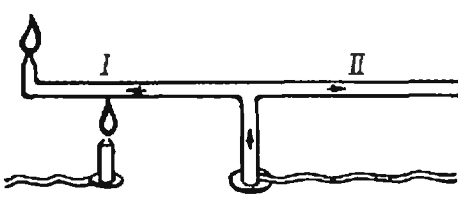
**2. «Горка».** Длинный поезд ($L=500$ м) движется по инерции без трения по горизонтальному участку железной дороги и наезжает на горку типа




а) Фараон; б) Сент-Экзю.

При какой минимальной скорости $v$ поезд перекатится через горку? Считать, что колеса поезда не отрываются от рельсов.

**3. «Газ».** Газ подается в середину медной трубки диаметром 1 мм и расходится по двум коленам длины 30 см каждое, заканчивающимся горелками




При нагревании одного колена отдельной горелкой размеры факелов заметно изменяются. Объяснить это явление. Определить изменение расхода газа в колене I при нагревании его на 600 °C. Все необходимые данные найти в справочнике.

**4. «Шар».** Определить время падения резинового надувного шара (диаметр $d=0{,}65$ м, масса оболочки $m=120$ г) с балкона физической аудитории МГУ (высота $H=8{,}6$ м). (Для предварительных экспериментов давались резиновые шары меньших размеров, но на балкон участников не пускали.)

**5. «Ртуть».** На часовое стекло в слабый (5%) раствор азотной кислоты быстро вливают ртуть в виде 20—30 мелких капелек диаметром порядка 1 мм. Капельки сливаются друг с другом. Определить экспериментально закон изменения числа капелек ртути с течением времени. Дать теоретическое обоснование. (Участникам давалась серия фотографий, сделанных с интервалом в 1 секунду; читатели могут поставить эксперимент в школе.)

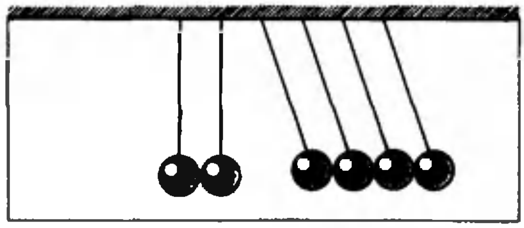
### Задания конкурса капитанов

Капитаны выполняли задания с двумя помощниками. Время на обдумывание каждого задания — 3 минуты.

**1. «Шутка».** Радий тяжелее олова? (на этот вопрос предлагалось дать шуточный ответ.)

**2. «Дерево».** Определить массу и плотность деревянного цилиндра (диаметр основания около 20 мм, высота около 10 мм). Даны: деревянный цилиндр, мензурка 100 мл, колба с водой 500 мл, штангенциркуль.

**3. «Шары».** На нитях подряд подвешены 6 шаров. 4 отклонили, затем отпустили.



Что будет после удара?

**4. «Микроскоп».** Можно ли и как сделать телескоп из микроскопа?

**5. «Телескоп».** Чем плох телескоп, сделанный из микроскопа?

**6. «Электроскоп».** Зарядить электроскоп так, чтобы стрелка отклонилась ровно на два деления. Даны: электроскоп, эбонитовая палочка, кусочек кроличьей шкурки.

**7. «Дифракционная решетка».** Почему дифракционные максимумы разных порядков имеют разную интенсивность?

**8. «Атом».** Оцените диаметр возбужденного атома водорода ($n=100$).

### Задания конкурса болельщиков

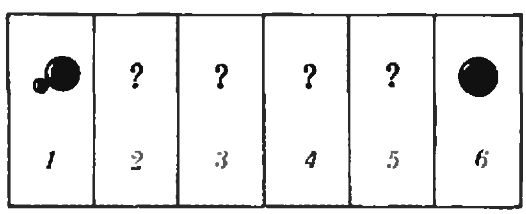
На выполнение заданий конкурса было отведено 50 минут. Болельщики присылали ответы в пользу одной из команд — финалистов Турнира. (Симпатии болельщиков склонились в пользу команды школы № 842.)

**1. «Горы».** Как объяснить названия «Фараон» и «Сент-Экзю» в задаче «Горка»?

**2. «Пинг-понг».** Определить время падения с балкона аудитории шарика для пинг-понга ($m=2{,}5$ г, $d=37{,}5$ мм, $H=8{,}6$ м).

**3. «Слияние».** На часовом стекле рядом лежат 2 капли ртути.

Нарисовать 4 промежуточные стадии слияния капелек ртути




**4. «Кислота».** Почему опыт по слиянию капелек ртути производят в слабом растворе азотной кислоты?

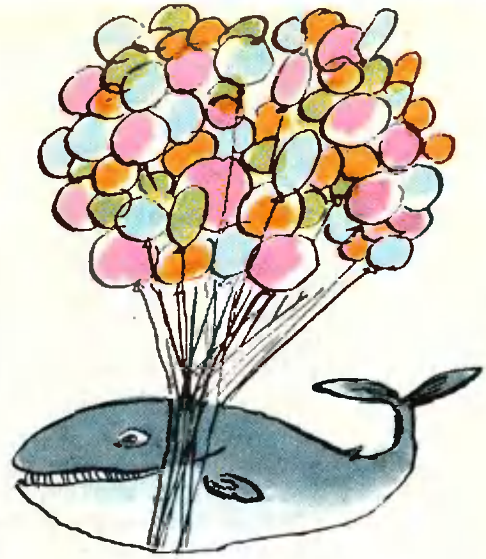
**5. «Ртуть».** Какова будет толщина слоя ртути, вылитой на горизонтальную поверхность стеклянной пластины? Масса ртути более 100 г.

**6. «Приз»** Что означает надпись

$$1\ \mathrm{Ohm} = 106{,}3\ \frac{\mathrm{cm}}{\mathrm{mm}^2}\ \mathrm{Hg}\ 0°\mathrm{C}$$

на переходящем призе Турнира?

Зам. председателя оргкомитета Турнира
*Е. Юносов*



**Как определить объем кита, плавающего у берегов Гренландии?**

Такая задача была предложена командам школьников на IV Московском турнире юных физиков. Команда школы № 91 представила 91 решение. Часть из них мы предлагаем вниманию читателей.

Во всех решениях плотность кита принимается равной плотности воды, откуда

$$V_{\text{кита}} = M_{\text{кита}}/\varrho_{H_2O}.$$

### «Ателье»

Надо заказать КИТУ костюм. Тогда в мастерской КИТА безусловно как следует измерят.

### «Пружина»

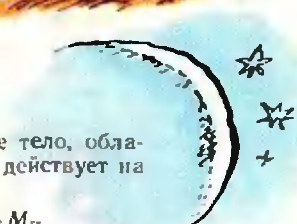
Берем пружину заданной жесткости $k$. Прикрепляем к ней КИТА. Измеряем период колебаний $T$. Тогда масса КИТА равна

$$M_{\text{кита}} = \frac{T^2 k}{4\pi^2}.$$

Отсюда находим и его объем.

### «Воздушные шарики»

Возьмем много воздушных шариков одинаковой подъемной силы $F$. Будем их прикреплять к КИТУ один за другим. При некотором числе $n$ шариков КИТ начнет взлетать. Отсюда найдем силу тяжести, действующую на КИТА: $P_{\text{кита}} = nF$, а потом — его объем.



### «Луна»

КИТ, как всякое тело, обладающее массой, действует на Луну с силой

$$F = \gamma \frac{M_{\text{кита}} \cdot M_{\text{Луны}}}{R^2},$$

где $R$ — расстояние от КИТА до Луны (известно). Остается измерить силу $F$ по изменению орбиты Луны под действием КИТА.

### «Подсадная утка»

В Доме игрушки закупается надувной игрушечный КИТ. Он надувается, при этом измеряется его объем. Затем он доставляется к берегам Гренландии и отпускается плавать. Так как в условии задачи не оговорено, какой именно КИТ имеется в виду, то этот КИТ удовлетворяет условию. Объем его известен заранее.

### «Гениально простой метод»

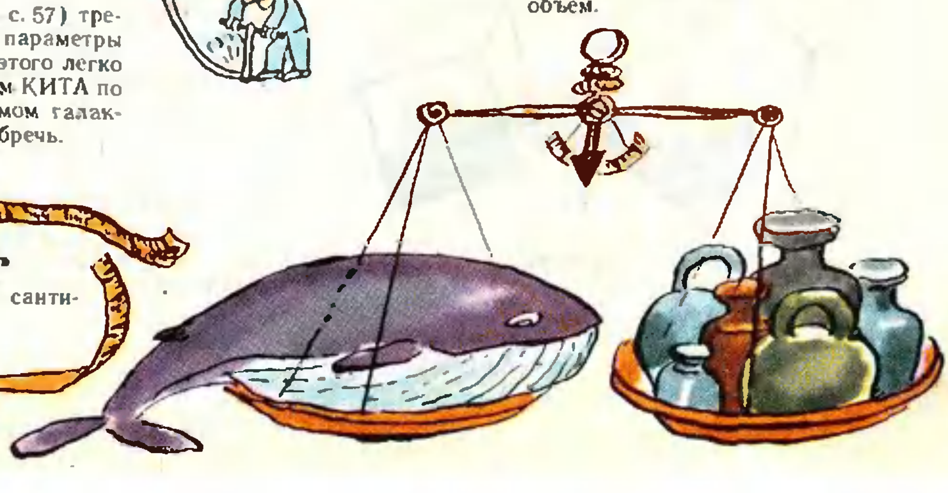
КИТА нужно взвесить. Положить на весы и ВЗВЕСИТЬ! Потом запросто находится его объем.

### «Масштабы»

В задаче № 1 (см. с. 57) требовалось измерить параметры галактики. После этого легко видеть, что объемом КИТА по сравнению с объемом галактики можно пренебречь.

### «Очень простой метод»

Надо измерить КИТА сантиметром!



## Поль Дирак и задача о трех рыбаках

*(Начало см. на с. 30)*

Отсюда видно, что числа $N_k$ будут целыми при $k=0$, 1, 2 и 3 тогда и только тогда, когда число $N+2$ делится на $3^3=27$. Поэтому $N=-2+27n$, где $n$ — любое целое число. Число $N_3$, а значит, и $N_k$ при $k<3$, будет неотрицательным, если $n\geqslant 1$. В частности, наименьшее неотрицательное решение $N_{min}=25$ получается при $n=1$, а при $n=0$ получается решение Дирака $N=-2$. Интересно отметить, что это же число $-2$ является пределом последовательности $(N_k)$ (определенной формулой (1) для всех $k\geqslant 1$) при любом $N_0=N$ (см. (2)).

**Упражнения**

1. Пусть последовательность $(x_k)$, $k=0, 1, 2, \ldots$, определяется рекуррентной формулой $x_{k+1}=ax_k+b$, где $|a|<1$. Докажите, что, независимо от значения $x_0$, при $k\to\infty$ она стремится к корню уравнения $x=ax+b$.

2. **Обобщенная задача о рыбаках.** Пусть рыбаков было $r$ и при каждом дележе на $r$ равных частей они выбрасывали по $q$ рыб $(q<r)$. Докажите, что тогда $N=-(r-1)q+r^rn$. При каких $n$ все числа $N_k$, $k=0, 1, \ldots, r$, будут неотрицательными?



### «Квант» для младших школьников

*(см. «Квант» № 8)*

**1.** Заметим, что в задаче не сказано что дороже — конфеты или пряник. Поэтому нужно исследовать два случая. Обозначим количество денег у Вадика через $x$ копеек, тогда всего у ребят будет $3x$ копеек. Из утверждения Вадика следует, что пряник стоит $(6x-2):8$ копеек, а из утверждения Кости следует, что конфета стоит $(3x-3):6$ копеек. Если конфета дороже пряника, то

$$(3x-3):6=(6x-2):8+2,$$

откуда $x=7$ копеек; если же предположить, что конфета дешевле пряника на 2 копейки, то

$$(3x-3):6=(6x-2):8-2,$$

откуда $x=-9$ копеек, что невозможно. Таким образом, у Вадика осталось 7, а у Кости 14 копеек.

**2.** Ответ: 250 см². Действительно, сдвинутое стекло пересекается с неподвижным по прямоугольнику размерами 10 см × 25 см. Если закрыть окно, то этот прямоугольник исчезнет, то есть открытая часть окна покроется площадью этого прямоугольника (см. рис. 1).

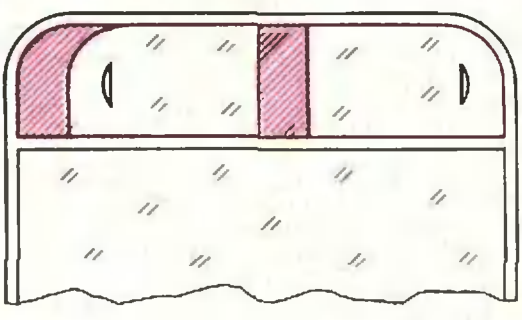


Рис. 1.

**3.** Поставьте сосуд на вершину $A$ (рис. 2, *а*) и начните наливать в него воду. Наливая ее, добейтесь, чтобы поверхностью воды был треугольник $A_1BD$ (см. рис. 2, *а*). Легко посчитать, что в этот момент вода займет $\frac{1}{6}$ объема сосуда. Затем, не проливая воду, поставьте сосуд на ребро $AD$ (рис. 2, *б*). Поворачивая куб, добейтесь, чтобы поверхность воды проходила через ребро $BC$ (см. рис. 2, *б*). Отметьте на ребре $AA_1$ точку $X$ пересечения с поверхностью воды. Тогда $|AX|=\frac{1}{3}|AA_1|$ (почему?). Теперь, поставив сосуд на основание $ABCD$, долейте воду до отметки $X$.

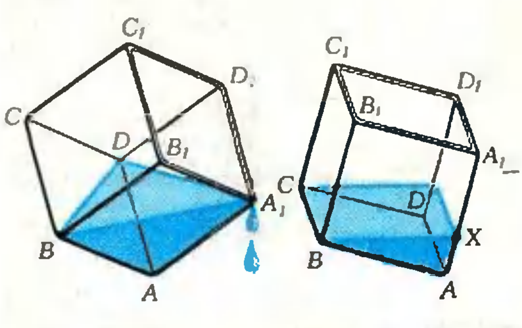



Рис. 2. *а)* *б)*

**4.** Ребята стоят в таком порядке: Олег, Юра, Володя, Миша, Саша.

### В чем разница?

*(см. «Квант» № 8)*

При $\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-1)l$. В задаче 1 область определения функции $S_1(x)=\frac{|CD|}{2l}x(l-x)$ — интервал $]0; l[$, в задаче 2 область определения функции $S_2(x)=\frac{\sqrt{3}}{4}x(l-x)$ — полуинтервал

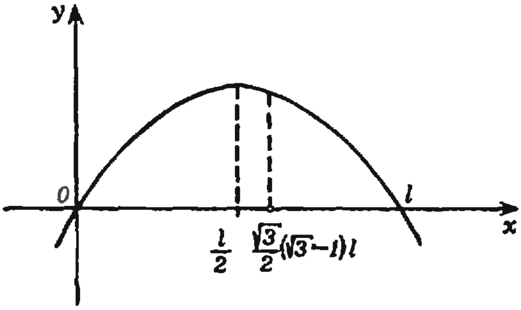



Рис. 3.

$\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-1)l;\, l\right[$. Поскольку $\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-1)l > \frac{l}{2}$, функция $S_2$ принимает наибольшее значение при $x=\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-1)l$ (рис. 3). При $0<x<\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-1)l$ искомого треугольника не существует!

### Почему так?

*(см. «Квант» № 8)*

Потому что для к о н у с а за площадь боковой поверхности необходимо принять предел отношения приращения объема конуса к приращению «боковой высоты» $h$ (см. рис. 4),

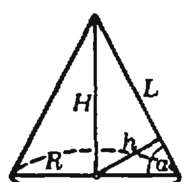



Рис. 4.

а не к приращению радиуса основания $R$, то есть производную функции $V(h)$ по $h$. Поскольку $R=\frac{h}{\sin\alpha}$ и $H=\frac{h}{\cos\alpha}$,

$$V(h)=\frac{1}{3}\pi\cdot\frac{h^3}{\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}.$$

Значит,

$$S=\pi\cdot\frac{h^2}{\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}$$

Так как $L=\frac{H}{\sin\alpha}=\frac{h}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$,

$$S=\pi RL.$$

### Шахматная страничка

*(см. «Квант» № 6)*

**Задание 11** (Э. Закон, 1953 г.) **1. Кра1! Кph1** (проигрывает 1...Кр:h3 2. Фе1 Кph2 3. Фh4+ Кpg1 4. Кpb1 и дальше ферзь всякий раз загоняет черного короля на g1, а белый король приближается к нему) 2. Фе4 Кph2 3. Фе5+ Кph1 4. Фd5 Кph2 5. Фd6+ Кph1 6. Фс6 Кph2 7. Фс7+ Кph1 8. Ф:h7 g1Ф+ 9. Фb1 с выигрышем; 6...h6 7. Кpb1! Кph2 8. Фd6+ Кph1 9. Ф:h6 g1Ф+ 10. Фс1 с выигрышем.
**Задание 12** (Т. Кок, 1937 г.). **1. h7 Фb8++ 2. Кр:d5 Фа8+ 3. Кре5 Фb8+ 4. Кре4 Фа8+ 5. Кpf4 Фb8+ 6. Кpf3 Фа8+ 7. Кpg3 Фb8+ 8. Кpg2 Фа8+ 9. Кph2 Фb8+ 10. Кph1 Фа8+ 11. Cg2 с выигрышем.**

### Задачи наших читателей

*(см. «Квант» № 7, с. 60)*

В $k$-м столбце рассматриваемой таблицы стоят числа $k+9n$ ($n=0, 1, 2, \ldots$), то есть все числа, дающие при делении на 9 остаток $k$. Поскольку $(k+9n)^2=k^2+9(2nk+9n^2)$, квадраты всех этих чисел также дают один и тот же остаток при делении на 9 и потому стоят в одном столбце.

Пусть дано произвольное число $a=a_1+10a_2+{}+100a_3+\ldots$ Обозначим сумму его цифр через $\Sigma(a)$, тогда $\Sigma(a)=a_1+a_2+a_3+\ldots={}=a-9(a_2+11a_3+\ldots)$, поэтому числа $a$ и $\Sigma(a)$ дают одинаковые остатки при делении на 9 и, значит, стоят в одном столбце. После первого возведения в квадрат произвольного числа $a$ из $k$-го столбца и сложения цифр результата мы получим число $\Sigma(a^2)$, остаток которого при делении на 9 равен:

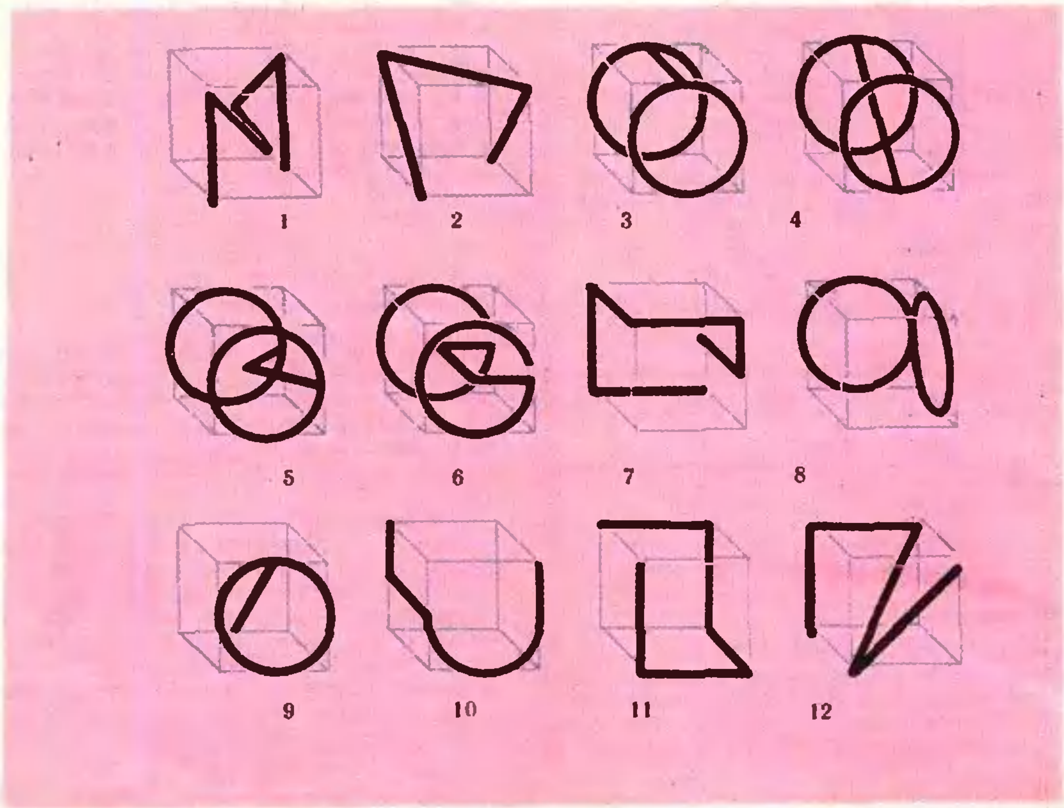
$$\begin{array}{lccccccccc} k= & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ \Sigma(a^2)= & 1 & 4 & 9 & 7 & 7 & 9 & 13 & 10 & 9. \end{array}$$

При повторении этих операций число из 1-го, 3-го, 6-го, 8-го или 9-го столбца остается в этом же столбце; числа из 4-го переходят в 7-й и обратно; из 2-го и 5-го в 7-й, затем в 4-й, опять 7-й и т. д.

Покажем, что после достаточного числа повторений результат станет меньше 27. Если $a$ — $m$-значное число, то $a\geq10^{m-1}$. С другой стороны, число $a^2$ имеет в этом случае не более $2m$ знаков; следовательно, $\Sigma(a^2)\leq9\cdot2m={}=18m$. Но $10^{m-1}>18m$ при $m>3$ (докажите!), поэтому, если $a$ записывается не менее, чем тремя знаками, $\Sigma(a^2)<a$. Значит, повторяя наши операции, мы можем уменьшать число, пока оно не станет двузначным. Далее, для любого двузначного числа $a$ имеем $\Sigma(a^2)\leq18\cdot2=36$, а квадрат любого числа $a\leq36$ не превосходит $36^2=1296$, поэтому для суммы его цифр имеем $\Sigma(a^2)<\Sigma(999)=27$ (999 — не квадрат).

Теперь остается рассмотреть числа, меньшие 27. Для 1-го и 8-го столбцов это 19, 10 и 1: $\Sigma(19^2)=10$, $\Sigma(10^2)=1$, а 1 порождает последовательность 1, 1, 1 ... Для 3-го, 6-го и 9-го столбцов — это 18 и 9: $\Sigma(18^2)=9$, $\Sigma(9^2)=9$, которые порождают последовательность 9, 81, 9, ... Для 4-го столбца — это 22 и 13: $\Sigma(22^2)=16$, $\Sigma(16^2)=13$, $\Sigma(13^2)=16$, которые порождают последовательность 13, 169, 16, 256, 13, ... Для 2-го, 5-го и 7-го столбцов получается та же последовательность. Для сравнения советуем читателю решить задачу № 2 из книги Г. Ш т е й н г а у з а «Сто задач» (М., «Наука», 1976).

**Четвертая страница обложки**
*(см. «Квант» № 7)*
Ответы показаны на рисунках.






103006, Москва, К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-31-73

Сдано в набор 17.7.82. Подписано в печать 26.8.82
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,91 Т-16733
Цена 40 коп. Заказ 1798 Тираж 175 634 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

**Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.**

## КАК ВЫИГРЫВАТЬ ПРОИГРЫВАЯ

Удивительный случай произошел с ведущим страничку в канун Нового года в одной из шахматных редакций.

— Сыграем партию в шахматные поддавки? — предложил мне заглянувший в редакцию гроссмейстер Д. Бронштейн.

Не каждый день удается встретиться за доской с известным гроссмейстером, и я, не раздумывая, согласился. Цель игры очень проста и удобна — надо избавиться от всех своих фигур, либо запатовать их. Взятие, как и в шашках, обязательно, а если есть выбор, то брать можно любую фигуру, включая короля.

Мне достались белые, и мы начали поддаваться.

**Е. Гик — Д. Бронштейн**

**1. e4 d5 2. ed Ф:d5 3. Кc3.** Сделав ход конем, я поудобнее разместился в кресле, полагая, что предстоит долгая и упорная борьба. Но меня ожидал неприятный сюрприз.

— Вынужден огорчить вас, — мягко сказал гроссмейстер. — Теперь вы неизбежно съедаете все мои фигуры!

Последовало ошеломляющее **3...Ф:g2.** Дальнейшее течение этого поединка уже не зависело от меня, и я еле успевал снимать с доски черные фигуры. **4. С:g2 b6 5. С:a8 Кc6 6. С:c6 a5** (в поддавках на шах можно не реагировать) **7. С:e8** (короли в этой игре берутся) **7...Кf6 8. С:f7 Сe6 9. С:e6 Кd7 10. С:d7 e6 11. С:e6 Лg8 12. С:g8 g6 13. С:h7 c5 14. С:g6 a4 15. К:a4 c4 16. К:b6 Сc5 17. К:c4 С:f2.** Пришлось сдаться, так как после вынужденного 18. Кр:f2 от черных фигур на доске не остается и следа.

Комбинация Бронштейна была одной из самых длинных за всю историю шахмат! Я чувствовал, что гроссмейстеру известна тайна поддавков и все же вызвал его на реванш. Мы перевернули доску и начали новую партию.

**Д. Бронштейн — Е. Гик**

**1. d4 f5 2. e4 fe 3. Фh5 g6 4. Сe2.** Вообще-то этот ход был неправильным — белому ферзю полагалось взять одну из моих пешек g6 или h7. Однако я тактично не стал делать замечание гроссмейстеру. Сам же продолжал играть строго по правилам. **4...gh.** Последовал мгновенный ответ **5. С:h5.**

Как и в первой партии, белый слон вошел в игру и, казалось, сейчас займется истреблением черных фигур. Реванш был близок, оставалось только найти наиболее изящный способ довести дело до конца. Внезапно Бронштейн прервал мои поиски.

— Над чем задумались, маэстро? — проявил он искреннюю заинтересованность.

— Над тем, как закончить эту встречу жертвой слона на f2, — я решил не скрывать от партнера своих намерений.

— Простите, но вашему королю мат! — сказал гроссмейстер.

— Какой мат, ведь мы играем в поддавки!?

— С чего вы взяли? Речь шла только о первой партии, а о второй мы не договаривались.

Лишь теперь до меня дошел смысл происшедшего. На доске стоял натуральный мат. Мат, который каким-то загадочным образом объявил моему королю белый слон спустя всего пять ходов после начала игры...

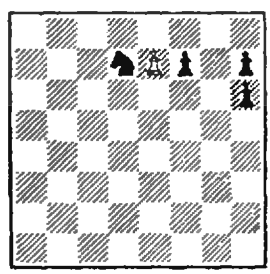
— С Новым годом! — лукаво улыбнулся Бронштейн и удалился из комнаты, оставив мне в качестве новогоднего сюрприза эту сказочную позицию.

Много дней я был не в себе и успокоился только тогда, когда опубликовал эту рождественскую историю в том самом издании, в стенах которого она произошла. Однако впереди меня ждала еще одна неожиданность. Вскоре я получил письмо от одного специалиста по поддавкам, в котором сообщалось, что излюбленный ход О. Бендера 1. e2—e4 после ответа 1...b7—b5! приводит белых к форсированной гибели. Таким образом, в первой партии матча оба партнера ошиблись на первом же ходу! Вот убедительные варианты, обнаруженные мною в конверте:

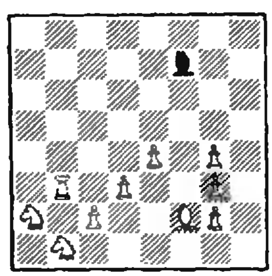
1. e4? b5! 2. С:b5 Кf6! (тихий ход) 3. С:d7 К:e4 4. С:c8 (возможность 4. С:e8 рассмотрена ниже) 4...К:d2 5. С:d2 Ф:d2 6. Ф:d2 (не меняют дела и другие взятия на d2) 6...Кa6 7. С:a6 Лc8 8. С:c8 f5 9. С:f5 Лg8 10. С:h7 c5 11. С:g8 Крf7 12. С:f7 e6 13. С:e6 c4 14. С:c4 a6 15. С:a6 Сa3 16. ba g5 17. Ф:g5.

В случае 4. С:e8 решает 4...Ф:d2 5. Ф:d2 К:d2 6. Кр:d2 Лg8 7. С:f7 c5 8. С:g8 g6 9. С:h7 e5 10. С:g6 e4 11. С:e4 Кc6 12. С:c6 Сb7 13. С:b7 Лc8 14. С:c8 a6 15. С:a6 c4 16. С:c4 Сa3 17. К:a3.

### Конкурсные задания



**17. Белые начинают и делают ничью в поддавки.**



**18. Белые начинают и выигрывают в поддавки.**

*Срок отправки решений — 25 ноября 1982 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 17, 18»).*

Цена 40 коп.
Индекс 70465

## НА МАРКАХ — К. Э. ЦИОЛКОВСКИЙ

Исполнилось 125 лет со дня рождения Константина Эдуардовича Циолковского — замечательного русского ученого, основателя теории космического полета.

Циолковский первым создал строгую математическую теорию движения одноступенчатых и многоступенчатых ракет, обосновал возможность полетов к планетам Солнечной системы, разработал и научно обосновал конструкцию цельнометаллического дирижабля, дал основы теории жидкостного реактивного двигателя.

Творческое наследие Циолковского богато оригинальными идеями, многие из которых осуществлены совсем недавно, а другие еще ждут своего осуществления.

Имя К. Э. Циолковского пользуется огромной популярностью во всем мире, что находит естественное отражение и в филателии. Первая советская марка, посвященная Циолковскому, была выпущена в 1951 году; вторая — в 1957 году к столетию со дня рождения ученого. Марка 1957 года с соответствующей надпечаткой оказалась первой в мире маркой, посвященной первому искусственному спутнику Земли. С тех пор в Советском Союзе и за рубежом появилось много марок и почтовых блоков, посвященных К. Э. Циолковскому.

*В. Рудов*