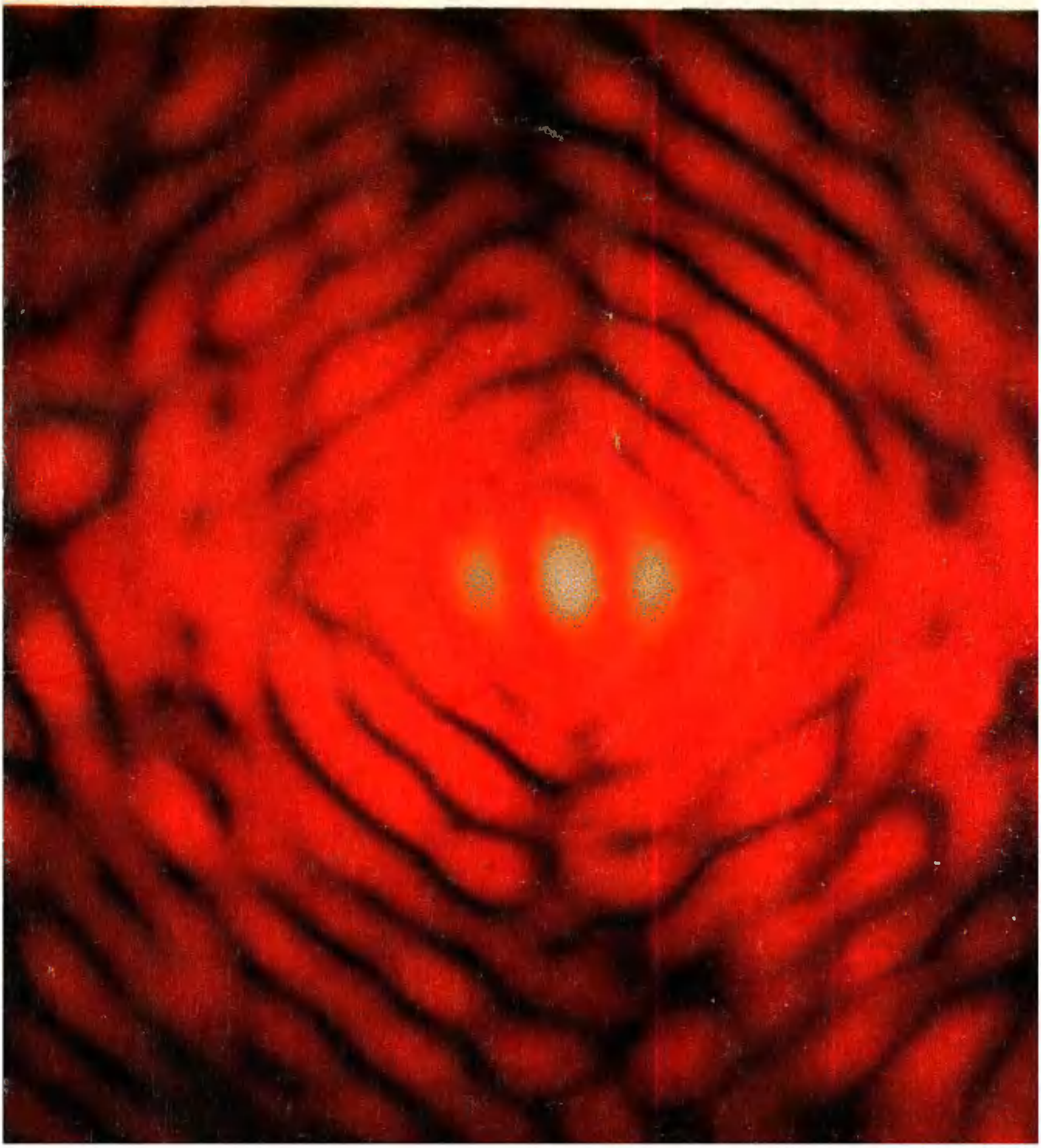
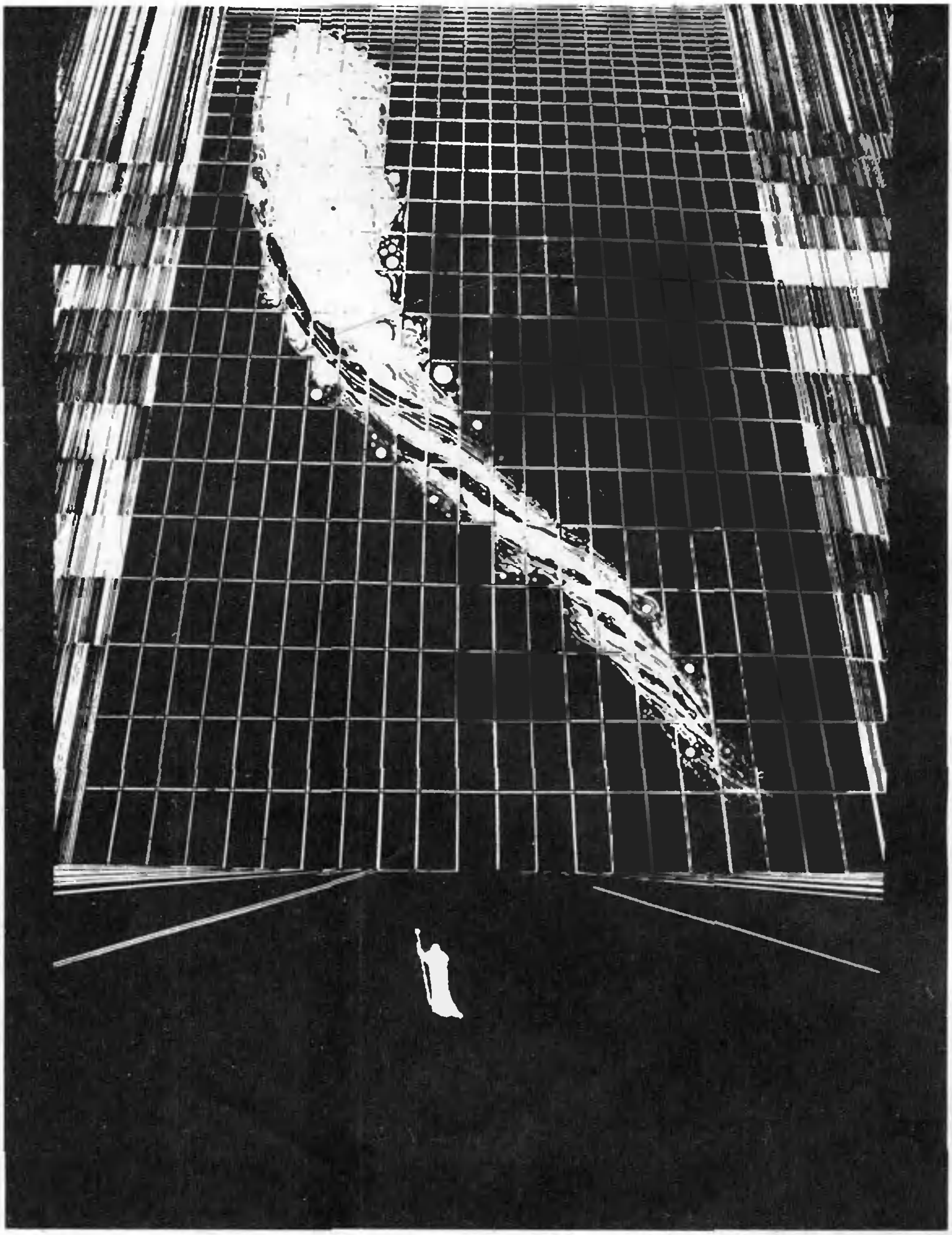
ISSN 0130-2221

Квант

6
1982

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





В апреле этого года в Москве, в Центральном Доме художника проходила выставка «Ученые рисуют». Среди представленных на ней работ большой интерес вызвала графика доктора физико-математических наук А. Т. Фоменко, математика, известного своими исследованиями по дифференциальной геометрии и топологии. Здесь мы помещаем репродукцию работы А. Т. Фоменко, названной им «Диаграмма Герцшпрунга — Рессела», а на четвертой странице обложки — репродукцию работы «Линзовые пространства».

На первой странице обложки помещена фотография дифракционной картины от круглого отверстия (фото — А. Щуки). В качестве источника света был использован гелий-неоновый лазер, дающий монохроматический свет красного цвета.

О некоторых опытах по дифракции, которые вы сможете провести самостоятельно в вашей домашней лаборатории, рассказано в этом номере журнала в статье Я. Амстиславского «Необычные явления вокруг обычных источников света».

Основан в 1970 году

Квант

6
1982

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА» ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ: IN THIS ISSUE:

Л. Асламазов, И. Кикоин

Что такое волна?

Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые; иначе такое бросание будет пустою забавою.
Козьма Прутков. Плоды раздумья

Понятие волны нам кажется очевидным, и мы интуитивно связываем его с каким-то движением. Бросим в воду камень — по поверхности воды побежит волна. Но если на воде в это время плавает ветка, то мы заметим, что она вовсе не смещается в направлении распространения волны, а совершает колебательное движение вверх-вниз. Что же перемещается при распространении волны? Рассмотрим несколько примеров.

Говорят, что императрица Елизавета, дочь Петра I, пожелала, чтобы торжественный момент ее коронации был отмечен артиллерийским салютом с Петропавловской крепости в новой столице — Петербурге. А по закону коронация русских царей проходила в Успенском соборе в Москве. В наше время передать любую информацию из Москвы в Ленинград просто: достаточно послать по радио сигнал, и пушка выстрелит вовремя. А тогда нужно было придумать другой способ оповещения о моменте возложения патриархом короны на голову императрицы.

И вот на всем пути (примерно 650 км) от собора в Москве до крепости в Петербурге были выстроены солдаты на расстоянии прямой видимости (около 100 м) друг от друга. Для этого, как легко подсчитать, понадобилось приблизительно 6500 солдат. У каждого солдата в руке был флажок. В момент коронования первый солдат взмахнул флажком, следующий повторил его движение, за ним — все остальные. Время реакции человека составляет десятые доли секунды, и, следовательно, через 10—20 минут известие о коронации дошло до артиллериста в Петропавловской крепости.

Что же перемещалось от Москвы до Петербурга? Каждый солдат остался стоять на своем месте. Единственное, что он сделал — взмахнул флажком. На научном языке можно сказать, что, подняв и опустив руку с флажком, он на некоторое время изменил свое состояние. Это изменение состояния и перемещалось вдоль цепи солдат.

Перемещение в пространстве изменения состояния называется волной.

В 1905 году в Петербурге начались забастовки, и тогда печать писала, что волна забастовок распространилась по всей России и достигла самых далеких окраин. В этом случае распространялось состояние, в котором рабочие бросали работу на промышленных предприятиях и предъявляли политические и экономические требования.

А вот пример о том, как распространяются слухи. Известно, что слух, пущенный даже одним человеком, может распространиться в городе в течение короткого времени. Оно значительно меньше времени, необходимого для того, чтобы этому человеку обойти (или обзвонить) всех людей в городе. Ясно, что носители слуха сами могут и не перемещаться. Перемещается состояние осведомленности. Так обычно и говорят — по городу распространяется волна слухов.

Разберем, наконец, физический пример. На биллиардном столе выстроена цепочка шаров (рис. 1, *а*). На нее налетает еще один шар так, что его скорость направлена вдоль цепочки. После удара налетающий шар остановится, а последний шар отскочит (рис. 1, *б*). Мы сообщаем импульс первому шару, а получает его — последний. Это происходит потому, что вдоль цепочки шаров распространяется волна деформации. При ударе первый шар сплющивается и деформирует соседний, тот — следующий и т. д. На любой промежуточный шар слева и справа действуют равные по модулю, но противоположные по направлению силы упругости (рис. 1, *в*), и он остается на месте. Последнему шару действующая только с одной стороны сила упругости сообщает импульс, и он отскакивает.

Такие волны деформации, распространяющиеся в упругих средах, называют звуковыми волнами. Следовательно, в результате удара по цепочке шаров пробежала звуковая волна. Она может распространяться в любом упругом теле. Например, если по закрепленному стержню (рис. 2, *а*) ударить с одного конца молотком, по стержню побежит волна деформации (звуковая волна). Когда эта волна дойдет до противоположного конца стержня, висящий там шарик отскочит (рис. 2, *б*). Аналогично можно возбудить звуковую волну в жидкости или в газе, только вместо молотка удобнее, конечно, воспользоваться поршнем.

Попытаемся подробнее разобраться в механизме распространения звуковых волн в упругих телах. В частности, выясним, от чего зависит скорость распространения волны. Сначала решим упрощенную задачу для модели упругого тела. Будем считать, что у нас имеется цепочка шариков массой m, соединенных пружинками жесткостью k (рис. 3). Размеры шариков малы по сравнению с

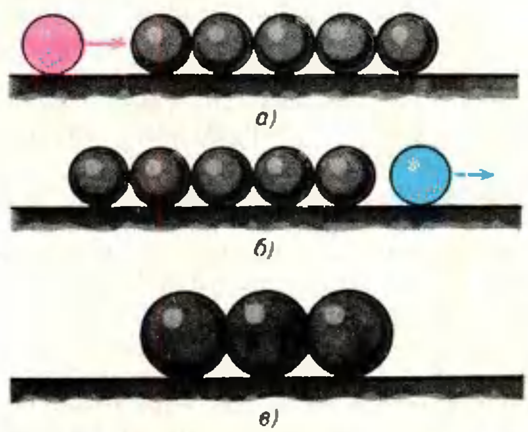


Рис. 1.

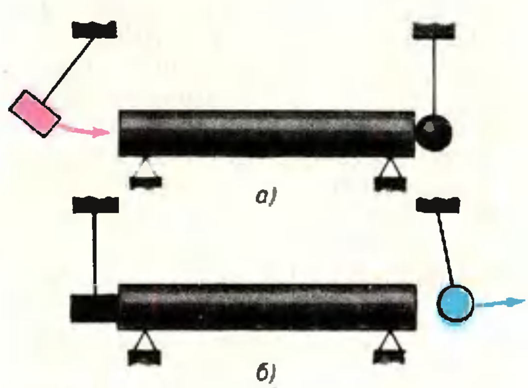


Рис. 2.

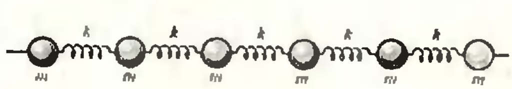


Рис. 3.

расстоянием между ними, а масса пружинок пренебрежимо мала по сравнению с массой шариков. По существу это та же цепочка биллиардных шаров, у которой мы «разделили» инертность (массу) и упругость (жесткость).

Такая модель близка к реальной ситуации в твердом теле. В кристаллической решетке атомы располагаются так, что в состоянии равновесия векторная сумма сил, действующих на каждый атом со стороны всех других, равняется нулю. При отклонении атомов от положения равновесия возникают силы притяжения и отталкивания, которые похожи на силы упругости*).

Давайте сообщим какому-либо шарику, например первому слева, импульс, направленный вдоль цепочки (толкнем его). Тогда, как и в примере с биллиардными шарами, по цепочке побежит волна упругой деформации, которая через какое-то время достигнет правого конца цепочки. Так как последний шарик связан с цепочкой пружинкой, отскочить совсем он не сможет. Растянутая пружинка вынудит его вернуться назад, а затем, вследствие своей инертности, шарик сожмет пружинку. Теперь волна деформации побежит справа налево. В таком случае говорят, что волна отразилась от конца цепочки и начала распространяться в обратном направлении. По тем же причинам она отразится от противоположного конца и т. д. Эти отраженные волны усложнят наше рассмотрение, и, чтобы избавиться от них, рассмотрим «бесконечную» (то есть без концов) цепочку. Ее можно реализовать, замкнув цепочку из большого числа шариков в кольцо (рис. 4). По такой «бесконечной» цепочке волна упругой деформации будет двигаться по кругу без отражений, пока не затухнет.

*) На далеких расстояниях между атомами действуют преимущественно силы притяжения, а на близких — силы отталкивания (квантовая механика запрещает атомам проникать друг в друга). Лишь при некотором, равновесном, расстоянии (примерно равном размеру атома) силы взаимодействия между атомами обращаются в нуль.

Отклоним один из шариков от положения равновесия (например, сместим по часовой стрелке) и отпустим. Тогда под действием подсоединенных к нему пружин положение шарика в пространстве будет периодически изменяться. Такое движение называют колебательным.

Колебания играют важную роль в природе и технике. Колебательное движение совершает маятник в часах; в бытовых электроприборах колеблются сила тока и напряжение; смена дня и ночи, времен года — это тоже колебательный процесс, обусловленный движением Земли. Все вращающиеся механизмы вызывают колебания фундамента, которые необходимо обязательно учитывать при конструировании.

Простейший тип колебательного движения — это гармоническое колебание, когда смещение тела от положения равновесия меняется со временем по закону

$$\alpha = \alpha_м \sin(2\pi t/T) = \alpha_м \sin 2\pi \nu t = \alpha_м \sin \omega t,$$

где в случае кольцевой цепочки α — угловое отклонение шарика от положения равновесия. Как видно, гармоническое колебание характеризуется двумя величинами (параметрами): максимальным отклонением (амплитудой) $\alpha_м$ и периодом колебаний T (промежутком времени, через который колебание полностью повторяется). Частота ν равна числу колебаний в единицу времени, циклическая частота $\omega = 2\pi\nu$ вводится для упрощения математической записи колебательного движения, а величина $\varphi = \omega t$, определяющая положение шарика в данный момент времени t, называется фазой колебаний.

Приведем пример. Пусть шарик совершает полное колебание за время $T = 4$ с, в начальный момент он находится в положении равновесия, а его максимальное отклонение $\alpha_м = 0{,}1$ рад. Тогда, если он совершает гармонические колебания, то зависимость отклонения от времени дается формулой

$$\alpha = 0{,}1 \sin(\pi t/2).$$

В момент $t_1 = 1$ с фаза колебаний равна $\varphi_1 = \pi/2$, в момент $t_2 = 2$ с фаза

$\varphi_2=\pi$, в момент $t_3=3$ с фаза $\varphi_3=3\pi/2$ и т. д.

Частота колебаний (а значит, и период, и циклическая частота) зависит от свойств системы. Так, циклическая частота колебаний шарика массой m, присоединенного к пружинке жесткостью k_0, равна (см. «Приложение» к статье)

$$\omega_0=\sqrt{k_0/m}. \qquad (*)$$

Состояние колебательного движения может распространяться в пространстве. Например, в нашей цепочке все шарики будут повторять колебания первого, но только с некоторым опозданием. В состоянии максимального отклонения от положения равновесия каждый следующий шарик будет находиться позже, чем предыдущий. Точно так же, когда первый шарик снова вернется в положение равновесия, соседний еще будет отклонен и вернется в положение равновесия с запозданием.

Запаздывание колебаний во времени математически описывается с помощью сдвига по фазе. Угловое смещение шарика с номером n дается формулой

$$\alpha_n=\alpha_м\sin(\omega(t-\Delta t_n))=\alpha_м\sin(\omega t-\Delta\varphi_n).$$

Величина $\Delta\varphi_n=\omega\Delta t_n$ называется сдвигом фазы (Δt_n — время запаздывания колебаний n-го шарика). В таком случае каждый шарик в цепочке совершает гармоническое колебание. У всех шариков амплитуда колебаний $\alpha_м$ и циклическая частота ω — одинаковые, но сдвиги фазы $\Delta\varphi_n$ — разные. Чем больше расстояние до n-го шарика, тем больше запаздывание и, следовательно, тем больше сдвиг фазы.

На рисунке 5 показаны графики колебательных движений, сдвинутых по фазе на $\Delta\varphi_1=\pi/8$, $\Delta\varphi_2=\pi$ и $\Delta\varphi_3=15\pi/8$ по отношению к колебанию, изображенному пунктиром. В первом случае фазовый сдвиг мал, и шарики колеблются почти что в такт. Во втором случае наступает полный разнобой: при максимальном отклонении одного шарика другой шарик также максимально отклонен, но в противоположную сторону. В таком случае говорят, что шарики колеблются в противофазе. Наконец, в третьем случае сдвиг фаз близок к 2π. Как видно, шарики опять начинают колебаться почти что в такт. Это и понятно, ведь 2π — период синуса, и колебания, сдвинутые по фазе на величину, кратную 2π, просто совпадают.

Так как сдвиг фазы колебаний шариков в цепочке при увеличении расстояния между ними растет, то ясно, что на некотором расстоянии он станет равным 2π и шарики будут колебаться в такт (в унисон). Это расстояние называется длиной волны λ.

Сколько длин волн может укладываться на длине цепочки? Так как начало и конец цепочки соединены (кольцо!), то ясно, что — только целое число длин волн. Ведь первый и последний шарики совпадают и, следовательно, должны колебаться одинаково. Если длина цепочки L ($L=Na$, где a — расстояние между шариками в положении равновесия, а N — их число), то самая длинная волна, которая может рас-

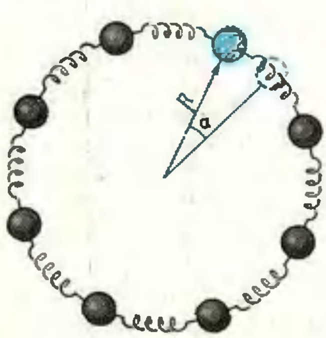


Рис. 4.

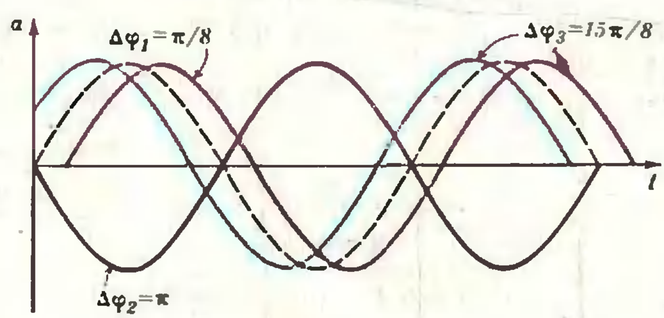


Рис. 5.

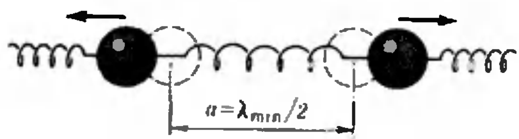


Рис. 6.

пространяться в цепочке, имеет длину $\lambda_1=L$. Следующая, более короткая, — $\lambda_2=L/2$, следующая — $\lambda_3=L/3$ и т. д. Какая же самая короткая волна может распространяться в цепочке?

Чем меньше длина волны, тем больший сдвиг фаз приходится на соседние шарики. Максимальный «разнобой» происходит при сдвиге фаз между соседними шариками, равном π. В таком случае шарики колеблются в противофазе (рис. 6), и соответствующая длина волны $\lambda_{min}=2a$.

Давайте рассчитаем, с какой частотой происходят колебания, соответствующие минимальной длине волны (это позволит оценить скорость распространения волны в цепочке). Если положить, что средний шарик колеблется по закону

$$\alpha_n=\alpha_м\sin\omega t,$$

то колебания предыдущего шарика описываются формулой

$$\alpha_{n-1}=\alpha_м\sin(\omega t+\pi),$$

а последующего —

$$\alpha_{n+1}=\alpha_м\sin(\omega t-\pi).$$

Зная, как движутся концы пружин, легко найти, как зависит от времени их деформация, и по закону Гука $F=kx$ рассчитать силы упругости, действующие на средний шарик. Результирующая сила

$$F=kx_м(\sin(\omega t-\pi)-\sin\omega t+\sin(\omega t+\pi)-\sin\omega t)=-4kx_м\sin\omega t,$$

где $x_м=R\alpha_м$ — максимальное линейное отклонение шарика (R — радиус кольца, в которое замкнута цепочка). Как видно, средний шарик колеблется так, как если бы он был присоединен к одной пружинке, но с учетверенной жесткостью. Подставляя в формулу (*) значение $k_0=4k$, получаем, что при распространении по цепочке волны с минимальной длиной $\lambda_{min}=2a$ частота колебаний $\omega=2\sqrt{k/m}$. Это — максимальная частота колебаний шариков в замкнутой цепочке.

В реальном твердом теле также имеется максимальная частота, с которой могут колебаться атомы.

Какова при этом скорость распространения волны? Если частота колебаний ω, то их период $T=2\pi/\omega$. При скорости распространения v волна за время T проходит путь $l=vT=2\pi v/\omega$. Этот путь и равен длине волны, так как сдвинутые во времени на период T колебания будут происходить в фазе. Таким образом,

$$\lambda=vT=2\pi v/\omega,$$

и, следовательно,

$$v=\frac{\lambda\omega}{2\pi}=\frac{2}{\pi}a\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

А каковы скорость распространения и частота колебаний для волн с большей длиной? Их можно подсчитать, например, таким же способом (хотя это и несколько более сложная задача). При этом оказывается, что с увеличением длины волны частота колебаний уменьшается, а скорость распространения волны увеличивается, но незначительно. Для больших длин волн ($\lambda\gg a$) скорость распространения становится постоянной и равной

$$v_0=a\sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Так что выведенное нами выражение с хорошей точностью дает величину скорости распространения волн в цепочке связанных шариков и для других длин волн.

Вернемся к твердому телу. Чем определяется скорость распространения в нем звуковых волн? Проведя аналогию с цепочкой шаров, можно понять, что скорость зависит от упругих свойств материала, массы атомов, из которых состоит вещество, и расстояния между ними. Чем меньше расстояние между атомами и чем больше их масса, тем больше плотность вещества ϱ. Жесткость k в нашей модели можно считать пропорциональной модулю Юнга E. Точная формула для скорости звука в твердом теле такова:

$$v=\sqrt{\frac{E}{\varrho}}.$$

Например, для стали с помощью этой формулы получаем $v\approx5000$ м/с. Так нам удалось разобраться в явлении распространения звука в упругих телах, то есть в распространении колебаний смещений атомов, из которых состоят эти тела.

В пространстве могут распространяться колебания и других физических величин. Если периодически изменяются значения напряженности электрического и индукции магнитного полей, то говорят, что распространяется электромагнитная волна. Могут распространяться колебания температуры — температурные волны, колебания индукции магнитного поля в веществе — волны намагничивания и т. д. Образно говоря, все здание современной физики пронизывают разные типы волн.

Приложение

Представим себе, что пружина надета на стержень AB, расположенный по диаметру кольца (рис. 7). Один конец пружины связан с шариком, а второй закреплен у края стержня A. Шарик может свободно перемещаться вдоль стержня, причем в состоянии равновесия он находится в центре кольца O. Приведем кольцо во вращение в горизонтальной плоскости с угловой скоростью ω_0. Тогда шарик отклонится от центра. Если его смещение равно r, то со стороны пружины на шарик будет действовать сила, равная по закону Гука $F=k_0r$ и направленная к центру кольца. Согласно второму закону Ньютона, эта сила должна создавать центростремительное ускорение $a_ц=\omega_0^2r$:

$$m\omega_0^2r=k_0r.$$

Следовательно, для того чтобы шарик находился в устойчивом состоянии при вращении кольца, необходимо, чтобы скорость вращения была равна $\omega_0=\sqrt{k_0/m}$.

При этом проекция шарика на неподвижную ось совершает гармоническое колебание с циклической частотой, равной угловой скорости вращения. Например, $x=r\sin\omega_0t$. Таким образом, частота гармонических колебаний шарика массой m на пружинке жесткости k_0 определяется формулой

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k_0}{m}}.$$

Упражнения

1. «Почувствовать», что такое волна, можно, сделав следующее упражнение. Встаньте в круг, возьмитесь за руки и пусть один из вас присядет и выпрямится, следующий за ним сделает это с некоторым запозданием, следующий — с бо́льшим запозданием и т. д. Тогда по кругу побежит волна. От чего зависит скорость распространения такой волны?

2. Длина воздушной линии передачи $l=3000$ км. Частота напряжения $\nu=50$ Гц. На какую долю периода сдвинуты колебания напряжения в начале и конце этой линии? Найдите также сдвиг фазы.

3. Оцените время соударения τ стальных шариков, имеющих диаметр $d=0{,}01$ м. Плотность стали $\varrho=7{,}8\cdot10^3$ кг/м^3, модуль Юнга $E=2\cdot10^{11}$ Н/м^2.

4. Для создания сильных магнитных полей П. Л. Капица использовал следующую установку. Ротор генератора, вращающийся в магнитном поле статора, резко останавливается. При этом в роторе наводилась большая ЭДС индукции. Ротор был замкнут на катушку с малым сопротивлением, так что в цепи возникал сильный импульс тока, создающий в катушке рекордное по тем временам магнитное поле (с индукцией около 30 Тл). Почему катушку, в которой находился исследуемый образец, приходилось помещать далеко от генератора? Оцените требуемое минимальное расстояние l между генератором и катушкой, если опыт длился $\Delta t=0{,}01$ с, а пол в лаборатории — бетонный.

5. Модель молекулы углекислого газа CO_2 — три шарика, соединенных пружинками и расположенных в положении равновесия вдоль одной прямой. Такая молекула может совершать колебания разных типов, показанные на рисунке 8. Найти отношение частот этих колебаний.

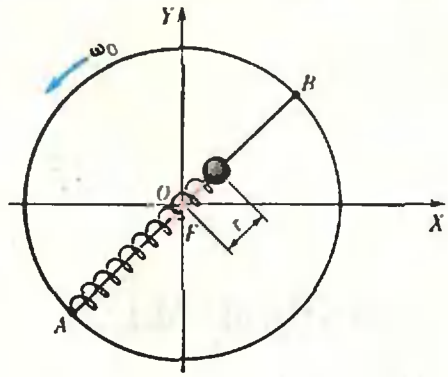


Рис. 7.

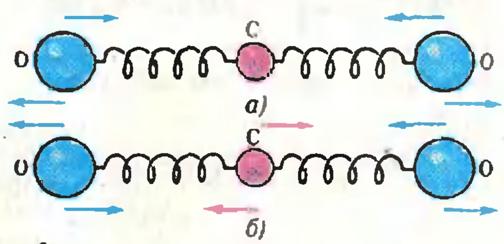


Рис. 8.

Б. Мартынов

О максимумах функции Ван-дер-Вардена

Функция, которой мы займемся

Школьники девятого и десятого классов знают, что функция, дифференцируемая в некоторой точке, непрерывна в этой точке («Алгебра и начала анализа 9—10», п. 19). Знают они и то, что обратное не верно: например, функция $y=|x|$ непрерывна при $x=0$ (и в любой другой точке), но не имеет производной при $x=0$. Вообще, всякая функция, график которой в некоторой точке имеет «уголок», не дифференцируема в этой точке. Ясно, что легко построить функцию, которая на отрезке, скажем, $[0; 1]$ имеет бесконечное количество «уголков» (на рисунке 1 изображен кусок графика такой функции; полностью его нарисовать, конечно, невозможно).

Однако все такие функции, а также другие известные вам непрерывные функции все-таки дифференцируемы в «большинстве» точек.

Долгое время после изобретения дифференциального исчисления математики думали, что непрерывные функции являются, как правило, дифференцируемыми. Поэтому, когда в шестидесятых годах прошлого века немецкий математик Карл Вейерштрасс опубликовал пример *функции, непрерывной в каждой точке прямой и не имеющей производной ни в одной точке**), в математическом мире возник переполох.

*) Первый пример такого рода лет за сорок до Вейерштрасса построил чешский математик и философ Бернгард Больцано, но его пример стал известен позже вейерштрассовского.

«Каким образом интуиция могла обманывать нас до такой степени?» — спрашивал французский математик Анри Пуанкаре. Еще энергичнее реагировал французский математик Шарль Эрмит, сказавший, что он «с ужасом и омерзением отворачивается от этой жалкой язвы непрерывных функций, не имеющих ни в одной точке производной».

Пример Вейерштрасса был весьса сложным. Значительно более простой пример уже в нашем веке построил голландский математик Б. Л. Ван-дер-Варден. Функцией Ван-ден-Вардена мы и займемся.

Мы начнем ее построение с функции φ_0, график которой показан на рисунке 2. Функция φ_0 непрерывна в каждой точке прямой и периодическая (с периодом 1), $0 \leqslant \varphi_0(x) \leqslant \frac{1}{2}$ при всех $x \in \mathbf{R}$. Кроме того, график функции φ_0 симметричен относительно любой вертикальной прямой вида $x=\frac{k}{2}$ $(k \in \mathbf{Z})$. В точках $x=\frac{k}{2}$ функция φ не дифференцируема.

Функция $\varphi_1(x)=\frac{1}{2}\varphi_0(2x)$ (ее график показан синим цветом на рисунке 3*) не имеет производной в точках $x=\frac{k}{4}$ $(k \in \mathbf{Z})$, функция $\varphi_2(x)=\frac{1}{2^2}\varphi_0(2^2x)$ («синий график»

*) На этом и следующих рисунках графики рисуются на отрезке $[0; 1]$, но функции считаются определенными на всей прямой: вне отрезка $[0; 1]$ они продолжаются «по периодичности» (с периодом 1).

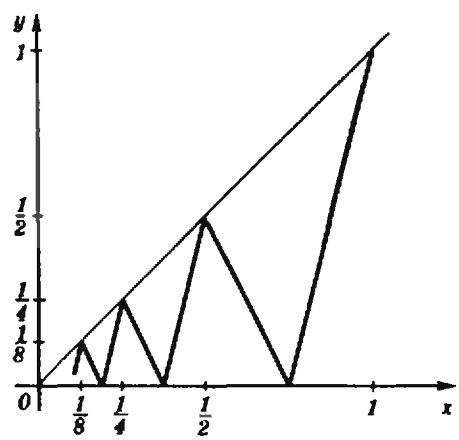


Рис. 1.

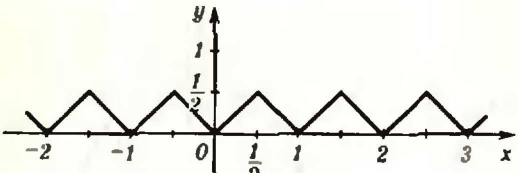


Рис. 2.

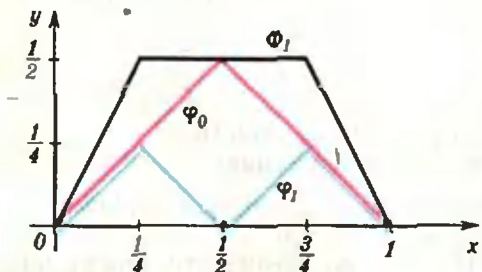


Рис. 3.

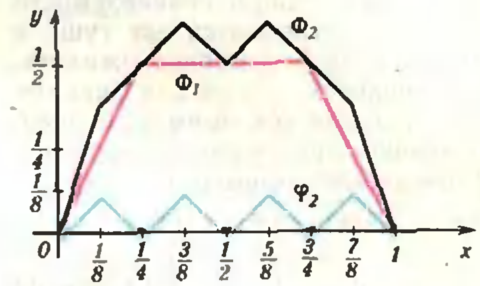


Рис. 4.

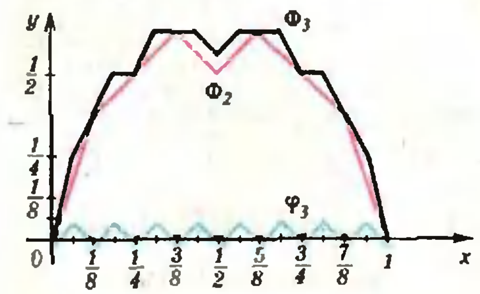


Рис. 5.

на рисунке 4) — в точках $x=\frac{k}{8}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

Для любого $n\in\mathbf{N}$ положим $\varphi_n(x)=\frac{1}{2^n}\varphi_0(2^n x)$ (на рисунке 5 синим цветом показан график функции φ_3). Функция φ_n непрерывна в каждой точке прямой и не дифференцируема при $x=\frac{k}{2^{n+1}}$ $(k\in\mathbf{Z})$. Кроме того, $0\leqslant\varphi_n(x)\leqslant\frac{1}{2^{n+1}}$ при всех $x\in\mathbf{R}$.

Мы видим, что точки недифференцируемости функций φ_n с увеличением n располагаются все гуще и гуще.

А что, если все функции φ_n сложить? Есть основания надеяться, что «сумма» уж во всяком случае будет непрерывна в каждой точке и не дифференцируема в точках вида $x=\frac{k}{2^n}$ $(k\in\mathbf{Z},\ n\in\mathbf{N})$. К сожалению, мы не знаем, что такое сумма бесконечного числа слагаемых.

Поэтому мы поступим так: образуем последовательность функций

$$\Phi_n(x)=\varphi_0(x)+\varphi_1(x)+\ldots+\varphi_n(x)$$

(таким образом, $\Phi_{n+1}(x)=\Phi_n(x)+\varphi_{n+1}(x)$; см. рис. 3—5) и докажем, что при любом x существует $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n(x)$.

Для доказательства нам понадобится теорема Вейерштрасса, утверждающая, что монотонная ограниченная последовательность имеет предел («Алгебра и начала анализа 9», п. 32).

Из $\varphi_{n+1}(x)\geqslant 0$ следует $\Phi_{n+1}(x)\geqslant\Phi_n(x)$ — последовательность $(\Phi_n(x))$ монотонна. Поскольку

$$\Phi_n(x)=\varphi_0(x)+\varphi_1(x)+\ldots+\varphi_n(x)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}=1-\frac{1}{2^{n+1}}<1,$$

последовательность $(\Phi_n(x))$ ограничена. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\Phi_n(x)$ существует. Обозначим этот предел через $\Phi(x)$. Таким образом, на всей числовой оси определена функция Φ. Она периодическая (с периодом 1), $0\leqslant\Phi(x)\leqslant 1$ при всех $x\in\mathbf{R}$, график функции Φ симметричен относительно любой прямой $x=\frac{k}{2}$ $(k\in\mathbf{Z})$ — все это легко следует из свойств функции φ_0 и свойств предела. Построить график функции Φ невозможно: на рисунках 3—5 видно, как «накапливаются» точки, в которых график функции Φ_n имеет «уголок», то есть точки, где эти функции не имеют производной.

Непрерывность построенной функции

Функция Φ непрерывна в каждой точке прямой.

Интуитивно это довольно ясно: если бы у Φ в некоторой точке x_0 был разрыв, то при достаточно большом

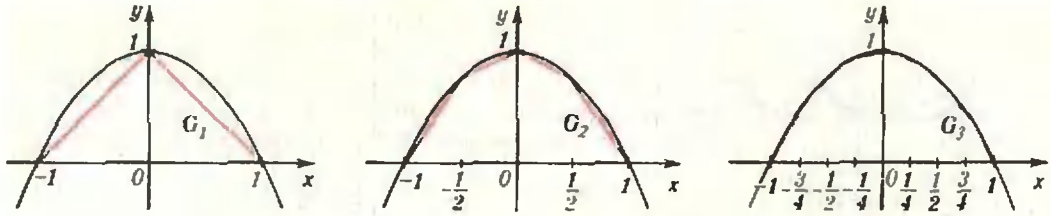


Рис. 6.

$n\in\mathbf{N}$ примерно такой же разрыв был бы в точке x_0 у Φ_n, а Φ_n непрерывна на всей прямой. Приводимое ниже доказательство уточняет эти соображения.

Изучим сначала разность $r_n(x)=\Phi(x)-\Phi_n(x)$ (здесь x фиксировано, n — переменная).

$$\Phi_{n+m}(x)-\Phi_n(x)=\varphi_{n+1}(x)+\varphi_{n+2}(x)+\ldots+\varphi_{n+m}(x).$$

Ясно, что

$$0<\Phi_{n+m}(x)-\Phi_n(x)<\frac{1}{2^{n+2}}+\frac{1}{2^{n+3}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+m+1}}=\frac{1}{2^{n+2}}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^m}}{1-\frac{1}{2}}<\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Поскольку $\lim\limits_{m\to\infty}\Phi_{n+m}(x)=\Phi(x)$ и $\lim\limits_{m\to\infty}\Phi_n(x)=\Phi_n(x)$,

$$0<r_n(x)<\frac{1}{2^{n+1}}.$$

Теперь можно перейти к доказательству непрерывности функции Φ в произвольной точке $x_0\in\mathbf{R}$. Возьмем $\varepsilon>0$ и рассмотрим модуль разности

$$|\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)|=|\Phi_n(x_0+h)+r_n(x_0+h)-\Phi_n(x_0)-r_n(x_0)|<$$
$$<|\Phi_n(x_0+h)-\Phi_n(x_0)|+|r_n(x_0+h)|+|r_n(x_0)|.$$

Но $|r_n(x_0)|<\frac{1}{2^{n+1}}$ и $|r_n(x_0+h)|<\frac{1}{2^{n+1}}$; поэтому

$$|\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)|<|\Phi_n(x_0+h)-\Phi_n(x_0)|+\frac{1}{2^n}.$$

При достаточно большом n

$$\frac{1}{2^n}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Функция Φ_n, как сумма конечного числа непрерывных функций, непрерывна в точке x_0. Следовательно, за счет выбора $\delta>0$ можно добиться того, что при $|h|<\delta$

$$|\Phi_n(x_0+h)-\Phi_n(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

При выбранном δ

$$|\Phi(x_0+h)-\Phi(x_0)|<\varepsilon,$$

а это и доказывает непрерывность функции Φ в точке x_0.

Недифференцируемость построенной функции

Функция Φ не дифференцируема ни в одной точке прямой.

На первый взгляд это может показаться очевидным: с ростом n множество точек недифференцируемости функции Φ_n становится все гуще и гуще, поэтому естественно ожидать, что «в пределе», то есть для функции Φ, оно заполнит всю прямую. Однако это наивное рассуждение неверно, как показывает пример функции

$$G(x)=\lim_{n\to\infty}G_n(x),$$

где функции G_1, G_2, G_3 показаны на рисунке 6. Очевидно, $G(x)=1-x^2$ — функция, дифференцируемая в любой точке.

Доказывая от противного, допустим, что для некоторого $x_0\in\mathbf{R}$ существует $\Phi'(x_0)$.

«Зажмем» x_0 в последовательности двоичных приближений по недостатку и по избытку:

$$\frac{s_k}{2^{k+1}}<x_0<\frac{s_k+1}{2^{k+1}}\quad(k=0,1,2,\ldots;\ s_k\in\mathbf{Z}).$$

Положим $\alpha_k=\frac{s_k}{2^{k+1}}$, $\beta_k=\frac{s_k+1}{2^{k+1}}$. Тогда

$$\alpha_k\leqslant x_0<\beta_k\ (k=0,1,2,\ldots)\qquad(1)$$

и

$$\lim_{k\to\infty}\alpha_k=\lim_{k\to\infty}\beta_k=x_0.\qquad(2)$$

Из (1)

$$0<\frac{\beta_k-x_0}{\beta_k-\alpha_k}\leqslant 1$$
$$0\leqslant\frac{x_0-\alpha_k}{\beta_k-\alpha_k}<1.$$

Отсюда, из (2) и из легко проверяемого тождества

$$\frac{\Phi(\beta_k)-\Phi(\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k}-\Phi'(x_0)=$$
$$=\frac{\beta_k-x_0}{\beta_k-\alpha_k}\left[\frac{\Phi(\beta_k)-\Phi(x_0)}{\beta_k-x_0}-\Phi'(x_0)\right]+$$
$$+\frac{x_0-\alpha_k}{\beta_k-\alpha_k}\left[\frac{\Phi(x_0)-\Phi(\alpha_k)}{x_0-\alpha_k}-\Phi'(x_0)\right]$$

следует

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\Phi(\beta_k)-\Phi(\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k}=\Phi'(x_0).$$

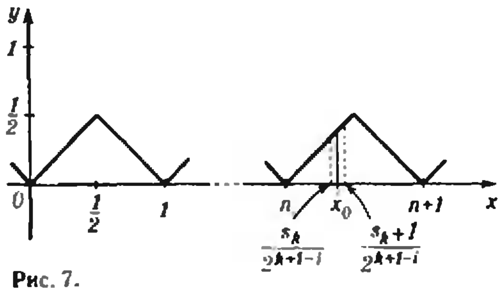


Рис. 7.

Покажем теперь, что на самом деле $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\Phi(\beta_k)-\Phi(\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k}$ не существует — это и будет желанное противоречие. Из определения функции Φ_n

$$\frac{\Phi_n(\beta_k)-\Phi_n(\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{\varphi_0(2^i\beta_k)-\varphi_0(2^i\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k}.$$

При $i>k$ $2^{i-k-1}\in\mathbb{Z}$. Поэтому при таких i

$$\varphi_0(2^i\alpha_k)=\varphi_0(2^{i-k-1}s_k)=0,$$

$$\varphi_0(2^i\beta_k)=\varphi_0(2^{i-k-1}(s_k+1))=0.$$

Значит,

$$\frac{\Phi_n(\beta_k)-\Phi_n(\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k}=$$

$$=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{\varphi_0(2^i\beta_k)-\varphi_0(2^i\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k}.$$

Таким образом, отношение $\frac{\Phi_n(\beta_k)-\Phi_n(\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k}$ не зависит от n. Переходя к пределу при $n\to\infty$, получаем

$$\frac{\Phi(\beta_k)-\Phi(\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k}=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{2^i}\cdot\frac{\varphi_0(2^i\beta_k)-\varphi_0(2^i\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k}.$$

При $i\leqslant k$

$$\frac{1}{2^i}\cdot\frac{\varphi_0(2^i\beta_k)-\varphi_0(2^i\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k}=$$

$$=\frac{\varphi_0\left(\frac{s_k+1}{2^{k+1-i}}\right)-\varphi_0\left(\frac{s_k}{2^{k+1-i}}\right)}{\frac{1}{2^{k+1-i}}}.$$

Но функция φ_0 на отрезке $\left[\frac{s_k}{2^{k+1-i}};\ \frac{s_k+1}{2^{k+1-i}}\right]$ является линейной (рис. 7). Отношение в правой части представляет из себя угловой коэффициент соответствующей прямой, то есть оно равно $+1$ или -1. Значит,

$$\frac{\Phi(\beta_k)-\Phi(\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k}=p\cdot 1+q\cdot(-1),$$

где $p+q=k+1$. Число $p\cdot 1+q\cdot(-1)$ имеет ту же четность, что и $p\cdot 1+q\cdot(-1+2)=$ $=p\cdot 1+q\cdot 1=(p+q)\cdot 1=(k+1)\cdot 1=k+1$. Следовательно, отношение $\frac{\Phi(\beta_k)-\Phi(\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k}$ четно при нечетном k и нечетно при четном k. Поэтому $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\Phi(\beta_k)-\Phi(\alpha_k)}{\beta_k-\alpha_k}$ не существует.

Отыскание максимума

Докажем, что наибольшее значение $M=\max\limits_{R}\Phi(x)=\max\limits_{[0;\,1]}\Phi(x)$ равно $\frac{2}{3}$ и определим множество точек, где оно достигается*). Стандартный метод здесь не применим: не можем же мы приравнять к нулю производную, которой не существует.

$$\Phi_n(2x)=\varphi_0(2x)+\varphi_1(2x)+\ldots+$$
$$+\varphi_n(2x)=\varphi_0(2x)+\frac{1}{2}\varphi_0(2^2x)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{2^n}\varphi_0(2^{n+1}x)=2\left[\frac{1}{2}\varphi_0(2x)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2^2}\varphi_0(2^2x)+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}\varphi_0(2^{n+1}x)\right]=$$
$$=2[\varphi_1(x)+\varphi_2(x)+\ldots+\varphi_{n+1}(x)]=$$
$$=2[\Phi_{n+1}(x)-\varphi_0(x)]=$$
$$=2\Phi_{n+1}(x)-2\varphi_0(x).$$

Перейдем к пределу при $n\to\infty$:

$$\Phi(2x)=2\Phi(x)-2\varphi_0(x).\qquad(3)$$

Интересно отметить, что существует единственная неотрицательная на всей числовой прямой функция, удовлетворяющая функциональному уравнению (3), — попробуйте доказать это самостоятельно.

Из того, что 1 — период функции Φ, следует, что $\bar{x}$ *тогда и только тогда является точкой максимума функции* Φ, *когда точкой максимума является дробная часть* $\{\bar{x}\}\in[0;\,1]$.

Поэтому займемся множеством E точек максимума на отрезке $[0;\,1]$. Пользуясь симметрией графика функции Φ относительно прямой $x=\frac{1}{2}$, а также равенством (3), найдем $\Phi\left(\frac{1}{3}\right)$:

$$\Phi\left(\frac{1}{3}\right)=\Phi\left(\frac{2}{3}\right)=2\Phi\left(\frac{1}{3}\right)-2\varphi_0\left(\frac{1}{3}\right)$$
$$\Phi\left(\frac{1}{3}\right)=2\varphi_0\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}.$$

Докажем, что $E\subset\left[\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right]$. В самом деле, пусть $\bar{x}\in E$ и $\bar{x}<\frac{1}{2}$. Тогда из $\Phi(\bar{x})=M$, $\Phi(2\bar{x})\leqslant M$, $\frac{2}{3}=\Phi\left(\frac{1}{3}\right)\leqslant M$ и из равенства (3) следует

*) В дальнейшем мы, расходясь с учебником, будем называть такие точки *точками максимума*, а само наибольшее значение — *максимумом*.

$$\Phi(2\bar{x}) = 2\Phi(\bar{x}) - 2\varphi_0(\bar{x}) = 2\Phi(\bar{x}) - 2\bar{x} = 2M - 2\bar{x} \leqslant M$$

$$\bar{x} \geqslant \frac{M}{2} \geqslant \frac{1}{3}.$$

Из симметрии графика функции Φ относительно прямой $x = \frac{1}{2}$ следует, что на промежутке $\left]\frac{2}{3}; 1\right]$ точек максимума нет.

Докажем теперь, что $M = \frac{2}{3}$. Снова применим равенство (3):

$$\Phi(4x) = 2\Phi(2x) - 2\varphi_0(2x) = 2[2\Phi(x) - 2\varphi_0(x)] - 2\varphi_0(2x) = 4\Phi(x) - 4\varphi_0(x) - 2\varphi_0(2x)$$

$$\Phi(x) = \varphi_0(x) + \frac{1}{2}\varphi_0(2x) + \frac{1}{4}\Phi(4x) = \Phi_1(x) + \frac{1}{4}\Phi(4x).$$

Функция Φ_1 на отрезке $\left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right]$ постоянна и равна $\frac{1}{2}$ (рис. 3), поэтому на этом отрезке

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\Phi(4x). \qquad (4)$$

Поскольку $\bar{x} \in \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right] \subset \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right]$, к $\bar{x}$ можно применить равенство (4):

$$M = \Phi(\bar{x}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\Phi(4\bar{x}) \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{4}M$$

$$M \leqslant \frac{2}{3}.$$

Вспомнив, что $M \geqslant \Phi\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}$, окончательно найдем $M = \frac{2}{3}$. Кроме того, $\Phi\left(\frac{1}{3}\right) = \Phi\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

Для дальнейшего докажем, что *если $\bar{x}$ — точка максимума, то $4\bar{x}$ — точка максимума; если $4\bar{x}$ — точка максимума и $\{\bar{x}\} \in \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right]$, то $\bar{x}$ — точка максимума.* Для доказательства заметим, что равенство (4) верно для всех x, для которых $\{x\} \in \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right]$ (проверьте!). Пусть $\bar{x}$ — точка максимума. Тогда $\{\bar{x}\} \in \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right] \subset \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right]$. Значит,

$$\frac{2}{3} = M = \Phi(\bar{x}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\Phi(4\bar{x})$$

$$\Phi(4\bar{x}) = \frac{2}{3} = M.$$

Пусть теперь $4\bar{x}$ — точка максимума и $\{\bar{x}\} \in \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{4}\right]$. Тогда $\Phi(4\bar{x}) = M = \frac{2}{3}$ и

$$\Phi(\bar{x}) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\Phi(4\bar{x}) = \frac{2}{3} = M.$$

Множество точек максимума

Выясним структуру множества E.

Наверное, если бы Эрмит знал, как сложно оно устроено, он отвернулся бы от функции Ван-дер-Вардена с еще большим омерзением. С другой стороны, кто знает — быть может, красивое и тонкое строение этого множества привлекло бы Эрмита к исследованию недифференцируемых функций.

Две точки множества E мы знаем: $\frac{1}{3}$ и $\frac{2}{3}$; мы знаем также, что $E \subset \left[\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$.

Далее, множество E замкнуто. Это означает следующее: если имеется сходящаяся последовательность из точек множества E, то предел этой последовательности также принадлежит E. Докажем это. Пусть $x_n \in E$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, то есть $\Phi(x_n) = M$, и пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$; тогда из непрерывности функции Φ в точке $\bar{x}$ следует, что $\Phi(\bar{x}) = \Phi(\lim\limits_{n\to\infty} x_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\Phi(x_n) = M$, то есть $\bar{x} \in E$.

Из доказанного в конце предыдущего пункта и того, что 1 — период функции Φ, следует, что если x — точка множества E, то и точки $\frac{1}{4} + \frac{x}{4} = \frac{x+1}{4}$, $\frac{2}{4} + \frac{x}{4} = \frac{x+2}{4}$ принадлежат E. Таким образом, исходя из точек $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}$, можно построить много точек множества $E: \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}$, $\frac{2}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}$ и т. д.

Легко видеть, что все числа вида

$$x = \frac{\alpha_1}{4} + \frac{\alpha_2}{4^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{4^n} + \frac{1}{4^n}\cdot\frac{\alpha_{n+1}}{3},$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ — либо единицы, либо двойки, являются элементами множества Е. Поскольку

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots,$$

такое x можно представить в виде

$$x=\frac{\alpha_1}{4}+\frac{\alpha_2}{4^2}+\ldots+\frac{\alpha_n}{4^n}+\frac{\alpha_{n+1}}{4^{n+1}}+\frac{\alpha_{n+1}}{4^{n+2}}+\ldots$$

или, по аналогии с десятичными дробями, в виде бесконечной периодической *четверичной* дроби с периодом длины 1:

$$x=0,\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n\alpha_{n+1}\alpha_{n+1}\ldots=$$
$$=0,\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n(\alpha_{n+1}).$$

Так как множество Е замкнуто, *любое число*

$$x=\frac{\alpha_1}{4}+\frac{\alpha_2}{4^2}+\ldots+\frac{\alpha_n}{4^n}+\frac{\alpha_{n+1}}{4^{n+1}}+\frac{\alpha_{n+2}}{4^{n+2}}+\ldots$$

где α_i — либо единицы, либо двойки, принадлежит множеству Е. В самом деле, для каждого такого x можно найти последовательность (x_n) элементов из Е, сходящуюся к x; например, если

$$x_n=\frac{\alpha_1}{4}+\frac{\alpha_2}{4^2}+\ldots+\frac{\alpha_n}{4^n}+\frac{1}{4^n}\cdot\frac{1}{3},$$

то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x\left(0<x-x_n<\frac{1}{4^{n+1}}\right)$.

Таким образом, множество Е содержит все числа, в представлении которых 0, $\alpha_1\alpha_2\alpha_3\ldots$ в виде бесконечной четверичной дроби все цифры α_i — либо единицы, либо двойки (на рисунке 8 изображены четверичные разложения чисел $\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \ldots, \frac{11}{12}$).

Докажем теперь, что других чисел Е не содержит. Пусть в четверичной записи числа $x\in$Е на каком-либо месте после запятой имеется цифра 0, то есть $x=0,\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n0\alpha_{n+2}\ldots$; тогда

$$\{4^nx\}=0{,}0\alpha_{n+2}\ldots\in\text{Е}.$$

Но $0,\ 0\alpha_{n+2}\alpha_{n+3}\ldots<0{,}033\ldots=$ $=3\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\ldots\right)=\frac{1}{4}$ и, значит, точка $\{4^nx\}$ не принадлежит отрезку $\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$, содержащему Е.

Если в четверичной записи числа $x\in$Е имеется цифра 3, то есть $x=0,\ \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n3\alpha_{n+2}\ldots$, то

	$\frac{1}{12}$	$=0{,}0\,1\,1\,1\,1\,1\,1\ \ldots$
	$\frac{1}{6}=\frac{2}{12}$	$=0{,}0\,2\,2\,2\,2\,2\,2\ \ldots$
	$\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$	$=0{,}1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ \ldots$
V	$\frac{1}{3}=\frac{4}{12}$	$=0{,}1\,1\,1\,1\,1\,1\,1\ \ldots$
V	$\frac{5}{12}$	$=0{,}1\,2\,2\,2\,2\,2\,2\ \ldots$
	$\frac{1}{2}=\frac{6}{12}$	$=0{,}2\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ \ldots$
V	$\frac{7}{12}$	$=0{,}2\,1\,1\,1\,1\,1\,1\ \ldots$
V	$\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$	$=0{,}2\,2\,2\,2\,2\,2\,2\ \ldots$
	$\frac{3}{4}=\frac{9}{12}$	$=0{,}3\,0\,0\,0\,0\,0\,0\ \ldots$
	$\frac{5}{6}=\frac{10}{12}$	$=0{,}3\,1\,1\,1\,1\,1\,1\ \ldots$
	$\frac{11}{12}$	$=0{,}3\,2\,2\,2\,2\,2\,2\ \ldots$

Рис. 8.

$$\{4^nx\}=0{,}3\alpha_{n+2}\ldots\in\text{Е},$$

а этого быть не может, так как $0{,}3\alpha_{n+2}\ldots>0{,}3=\frac{3}{4}$.

Геометрически множество Е может быть получено следующим образом: разделим отрезок $\left[\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right]$ на 4 одинаковые части и выбросим внутренние точки двух средних частей и середину отрезка (рис. 9). Каждый из оставшихся отрезков опять

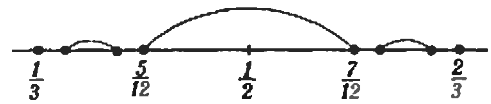


Рис. 9.

разделим на 4 одинаковые части и снова выбросим внутренние точки двух средних частей и середину отрезка, и так далее. То, что остается после всех выбрасываний, — это множество точек, в четверичной записи которых есть лишь цифры 1 и 2 (докажите самостоятельно), то есть множество Е.

Приложение

Редакция предлагает пример всюду непрерывной, нигде не дифференцируемой функции, который построил тбилисский десятиклассник Лаша Эпремидзе (см. «Квант», 1982, № 4, «XIII конференция юных математиков в Батуми»).

Искомая функция f опять получается как предел некоторой последовательности функций $\{f_n\}$:

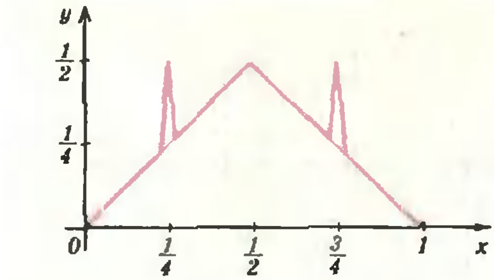


Рис. 10.

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Функции f_1 совпадает с функцией φ_0 из статьи (рис. 2). Функция f_2 получается (на отрезке [0; 1]) из функции f_1 «выпячиванием» в точках $\frac{m}{2^2}$ $(m=1, 3)$ «уголков», для которых

$$f_2\left(\frac{m}{2^2}\right) = f_1\left(\frac{m}{2^2}\right) + \frac{1}{2^2}$$

и модуль угловых коэффициентов сторон больше 2 (рис. 10). Функция f_{k+1} получается (на отрезке [0; 1]) из функции f_k «выпячиванием» в точках $\frac{m}{2^{k+1}}$ $(m=1,3,5, \ldots, 2^{k+1}-1)$ «уголков», для которых

$$f_{k+1}\left(\frac{m}{2^{k+1}}\right) = f_k\left(\frac{m}{2^{k+1}}\right) + \frac{1}{2^{k+1}}$$

и модуль угловых коэффициентов сторон больше $k+1$.

Докажите нужные свойства функции f!

Спрашивайте — отвечаем

Дорогая редакция!

В задаче 3 варианта I Московского электротехнического института связи («Квант», 1982, № 1) предлагалось решить неравенство

$$\frac{9x-15}{19} < \int_0^x \frac{dy}{(y+1)^2} - 1.$$

Я полагаю, что ответ $]-\infty; -1[$, указанный в «Кванте» (с. 63), не верен. Правда, формальное интегрирование дает этот ответ, но ведь при любом $x_0 < -1$ подынтегральная функция $\frac{1}{(x+1)^2}$ не является непрерывной на отрезке $[x_0; 0]$ (она разрывна при $x=-1$); поэтому интеграл $\int_0^{x_0} \frac{dy}{(y+1)^2}$ не существует. Прав ли я?

Н. П. Ратников,
учитель математики

Вы правы: по определению интеграла, данному в школьном учебнике («Алгебра и начала анализа 9—10», п. 60), для существования интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ требуется, чтобы подынтегральная функция f была непрерывна на отрезке с концами a, b (то есть на $[a; b]$ при $a<b$ и на $[b; a]$ при $a>b$).

Ответ, указанный в «Кванте», получается при чересчур формальном интегрировании, не учитывающем условий, при которых верна формула Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b.$$

Эта формула верна, если функция f непрерывна на $[a; b]$ и $F'(x) = f(x)$ всюду на $[a; b]$. Поэтому

$$\int_0^x \frac{dy}{(y+1)^2} = -\frac{1}{y+1}\Big|_0^x \qquad (*)$$

только при $x>-1$ и данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \dfrac{9x-15}{19} < -\dfrac{1}{y+1}\Big|_0^x - 1 \\ x > -1. \end{cases}$$

Правильный ответ в задаче: $\varnothing$.

Между прочим, из (*) следует

$$\int_x^0 \frac{dy}{(y+1)^2} = \frac{1}{x+1} - 1.$$

При $x<-1$ получаем парадоксальный результат: интеграл от положительной функции, то есть вроде бы площадь, отрицателен (напомним, что $\int_a^b f(x)\,dx$ есть площадь при $a<b$ и $f(x) \geqslant 0$ на $[a; b]$).

Для тех, кто знаком с понятием несобственного интеграла, заметим, что при $x_0 < -1$ интеграл $\int_0^{x_0} \frac{dy}{(y+1)^2}$ не существует: он расходится.

Я. Амстиславский

Необычные явления вокруг обычных источников света

Наверное, каждому доводилось наблюдать так называемые венцы — разноцветные кольца, окружающие удаленный источник света, например Солнце, Луну или уличный фонарь. Их возникновение связано с явлением дифракции света — огибания световыми волнами различных препятствий.

О дифракционных венцах написано немало, и это не удивительно. Они очень красивы, получить их довольно несложно и с их помощью можно проводить весьма тонкие измерения, причем в условиях скромной домашней лаборатории. Можно ожидать, что и читателям «Кванта» эта тема будет небезынтересной.

Что представляет собой изображение звезды в телескопе?

Представьте себе, что вы смотрите в телескоп на звездное небо. Из геометрической оптики известно, что параллельный пучок света, идущий от бесконечно удаленного источника, попав в объектив, должен сфокусироваться в одном из побочных фокусов объектива, создав там точечное изображение источника. Однако в действительности это не так.

Из-за дифракции света на краях оправы объектива изображение звезды получается в виде светлого кружка, окаймленного цветными кольцами (рис. 1). Оказывается, размер полученной дифракционной картины существенно зависит от диаметра оправы объектива. Если с помощью диафрагмы уменьшить диаметр светового пучка, попадающего в объектив, светлое пятно и окружающие его кольца увеличиваются (рис. 2).

Чем отличаются множество отверстий от одного и непрозрачный шарик от прозрачного отверстия?

А что, если диафрагму заменить экраном с большим числом отверстий, имеющих строго одинаковые размеры, но распределенных по поверхности экрана совершенно хаотически (рис. 3)?

В этом случае происходит наслоение огромного числа одинаковых первичных дифракционных картин, и суммарная картина сильно изменяется. Во-первых, она гораздо сильнее освещена в целом. Во-вторых, появляется дифракционный узор в виде слабо заметной лучистой структуры. Наконец, в-третьих, в центре появляется изображение источника света. Такую картину и называют венцом.

Описанный экран для получения венцов изготовить не так-то просто, да в этом и нет необходимости. Оказывается, в дифракционной картине не произойдет заметных изменений, если непрозрачный экран с множеством одинаковых круглых отверстий заменить прозрачным экраном, покрытым большим числом одинаковых непрозрачных шариков аналогичных размеров. В качестве подобного экрана с успехом может быть использо-


Рис. 1.


Рис. 2.


Рис. 3.

Рис. 4.

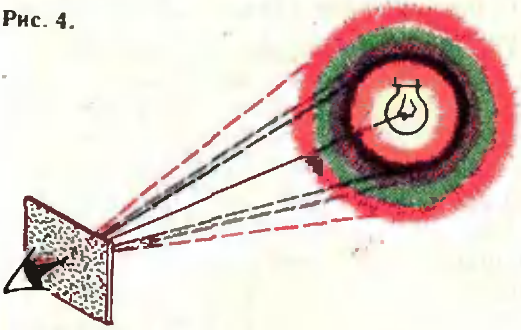


Рис. 5.

вана обыкновенная стеклянная пластинка, запыленная ликоподием — желтым порошком из непрозрачных шарообразных спор плауна (рис. 4; здесь приведена микрофотография дифракционной решетки с периодом 0,02 мм, покрытой ликоподием).

Как изготовить хороший препарат?

Для приготовления препарата вам понадобятся две стеклянные пластинки размером в четверть тетрадного листа и ликоподий. Ликоподий можно купить в аптеке, а в качестве пластинок удобно использовать отмытые от эмульсии фотопластинки размером 9×12 см.

На поверхность чистой пластинки наносят капельку машинного или растительного масла (можно крупицу жира, маргарина, сливочного масла или вазелина — что попадет под руку) и размазывают ее тонким слоем. Затем чистой тряпочкой аккуратно протирают смазанную поверхность до прозрачности. Остающийся при этом тончайший слой жира служит клейкой основой для удержания частиц покрытия. На обработанную поверхность насыпают небольшое количество (с наперсток) ликоподия, пластинку наклоняют и, постукивая по краю, добиваются ссыпания порошка к ее основанию. На пластинке остается широкий след в виде достаточно плотного и однородного слоя ликоподия. Затем изменяют наклон пластинки и добиваются ссыпания порошка в другом направлении. Эту процедуру повторяют до тех пор, пока вся поверхность пластинки не окажется покрытой подобным слоем. Затем пластинку ставят ребром на стол, положив под нее лист бумаги, и, постукивая нижним краем пластинки по столу, избавляются от излишков ликоподия. Правильно запыленная пластинка не должна быть ни слишком плотной, ни слишком прозрачной. По виду она напоминает матовое стекло средней плотности.

Если покрытие оказалось неудачным — не беда. Его легко стереть и воспроизвести заново. Однако обращаться с ним надо аккуратно.

При желании сохранить препарат для многократного пользования поступают следующим образом. Запыленную пластинку кладут на стол покрытием вверх, на нее накладывают бумажную рамку шириной 0,5—1 см, вырезанную по размерам пластинки, покрывают второй (чистой) пластинкой тех же размеров и оклеивают по краям полосками черной бумаги. Полученный прибор можно с успехом использовать в любой момент, когда появится желание полюбоваться красивой дифракционной картиной или показать ее друзьям.

Дифракционные венцы — картина впечатляющая

Если через запыленную пластинку посмотреть на какой-нибудь яркий источник света не очень больших угловых размеров, то можно наблюдать описанные выше дифракционные венцы (рис. 5). При этом не нужны никакие оптические приборы: роль объектива играет хрусталик глаза. Дифракционная картина создается на сетчатке глаза, но воспринимается нами в той плоскости, в которой виден источник света.

Источником может быть диск Луны на чистом ночном небе, наблюдаемый с улицы или через окно комнаты

Дифракционные венцы, наблюдаемые вокруг различных удаленных источников света.


Рис. 6. Диск Луны и его дифракционное изображение.


Рис. 7. Венцы вокруг уличного фонаря.





Рис. 8. Лампа накаливания и изображение ее раскаленной спирали.

Рис. 9. Дифракционное изображение пламени свечи.

Рис. 10. Венцы вокруг Солнца.

при выключенном свете (рис. 6). Или уличный фонарь, удаленный на несколько десятков метров (рис. 7). Или раскаленная спираль лампы накаливания, наблюдаемая в комнате с расстояния 2—3 м (рис. 8); лучше, если лампа расположена так, что луч зрения оказывается в плоскости спирали. Или, наконец, пламя свечи (или даже — спички) на расстоянии вытянутой руки в тёмном помещении (рис. 9; внизу видно отражение пламени от поверхности полированного стола).

Можно любоваться и венцами вокруг Солнца. Если светило находится достаточно низко над горизонтом, его рассматривают непосредственно через пластинку (рис. 10, *а*; восходящее Солнце сфотографировано в проеме между домами). В случае Солнца, высоко поднятого над горизонтом, к запыленной пластинке надо добавить засвеченную фотопластинку или закопченное стекло (рис. 10, *б*).

Все фотографии, приведенные на рисунках 6—10, были сделаны обычным фотоаппаратом через красное стекло, запыленное ликоподием. Гораздо красивее дифракционная картина, наблюдаемая в белом свете. В центре картины находится светлый круг с оранжево-красным окаймлением на периферии и изображением источника света в средней части. Этот круг виден под углом около 3°, что почти в шесть раз больше углового диаметра Луны или Солнца (30′). К центральному кругу прилегают два ярких окрашенных дифракционных кольца. Присмотревшись, можно увидеть лучистую структуру картины; более отчетливо она проявляется при меньших размерах источника света. Любопытно, что, если отвлечься от этой структуры и от наличия изображения источника, наблюдаемая картина очень напоминает дифракционное изображение звезды в телескопе, правда воспроизведенное с огромным увеличением.

Насладившись красивыми картинками дифракционных венцов, подумайте над природой этого явления. Может быть, в этом вам помогут следующие книги:

1. М. Миннарт. «Свет и цвет в природе». (М., «Наука», 1969, с. 222.)
2. Р. В. Поль. «Оптика и атомная физика». (М., «Наука», 1966, с. 149.)
3. «Опыты в домашней лаборатории». (М., «Наука», серия «Библиотечка «Квант», выпуск 4, с. 125.)

Приложение. Чему равна длина световой волны?

В самом начале статьи было сказано, что с помощью дифракционной картины можно проводить весьма тонкие измерения. Например — длины волны света. Покажем, как это можно сделать.

Как показывают наблюдения и расчеты, подавляющая часть света, проходящего через отверстие, попадает в область центрального светлого кружка (который обычно и принимают за дифракционное изображение источника). Размеры его связаны с диаметром отверстия d и длиной световой волны λ соотношением

$$d \sin \varphi = 1{,}22\,\lambda,$$

где φ — угловой радиус первого темного кольца, а значит — и центрального светлого кружка. Отсюда, зная d и φ, можно найти λ.

Это же соотношение справедливо и для дифракционной картины, полученной с помощью стеклянной пластинки, запыленной ликоподием. Диаметр d частиц ликоподия нетрудно оценить по микрофотографии дифракционной решетки с периодом 0,02 мм. Из рисунка 4 видно, что $d \approx 0{,}03$ мм $\approx 3 \cdot 10^{-5}$ м.

Для определения угла φ поступим следующим образом. Из черной бумаги изготовим диафрагму с тремя сделанными иглой проколами: центральным, диаметром 5—7 мм, и двумя боковыми, расположенными симметрично относительно центрального и удаленными друг от друга на заданное и точно вымеренное расстояние a, например $a = 3$ см.

В качестве источника света воспользуемся карманным фонариком. Прикроем его стекло сделанной диафрагмой так, чтобы центральное отверстие оказалось как раз напротив лампочки, и положим на него осколок красного стекла. Глядя на лампочку через запыленную пластинку, удалимся от источника на такое расстояние L, при котором первое темное кольцо видимой глазом дифракционной картины будет проходить через боковые проколы в диафрагме. В этом случае

$$\sin \varphi \approx \operatorname{tg} \varphi = \frac{a/2}{L} = \frac{a}{2L}$$

(мы воспользовались тем, что для малых углов синусы углов можно заменять их тангенсами).

Таким образом, длину волны λ можно вычислить по формуле

$$\lambda = \frac{d \sin \varphi}{1{,}22} \approx \frac{da}{2{,}44L}.$$

Можно решить и обратную задачу. Полагая длину волны известной (для красного света $\lambda = 0{,}65$ мкм), нетрудно определить диаметр частиц ликоподия. Проделайте это самостоятельно.

задачник Кванта

Задачи

М746 — М750; Ф758 — Ф762

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 августа 1982 года по адресу: 117071, Москва, Ленинский проспект, 15, «Физматлит», «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6—82» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М746, М747» или «Ф758». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М746. Бумажный квадрат складывается пополам по некоторой прямой l, проходящей через его центр, в (невыпуклый) девятиугольник. Как нужно провести прямую l, чтобы:
а) полученный девятиугольник имел наибольшую площадь?
б)* В нем помещалась окружность наибольшего возможного радиуса (рис. 1)?

К. Вульфсон

М747. а) Сумма n чисел равна 0, сумма их модулей равна a. Докажите, что разность между наибольшим и наименьшим из них не меньше $2a/n$.
б)* Внутри выпуклого n-угольника $A_1A_2...A_n$ выбрана точка O так, что сумма векторов $\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2}+...+\overrightarrow{OA_n}$ равна нулевому вектору, а сумма их длин равна d. Докажите, что периметр этого n-угольника не меньше $4d/n$.
в)* Можно ли улучшить эту оценку (при некоторых n)?

В. Прасолов

М748. а) Можно ли разместить на плоскости конечное число парабол так, чтобы их внутренние области покрыли всю плоскость? (*Внутренней областью параболы* мы называем выпуклую фигуру, границей которой служит эта парабола — см. рис. 2)
б)* В пространстве расположено несколько непересекающихся конусов. Докажите, что их нельзя переместить так, чтобы они покрыли все пространство. (*Конусом* мы называем здесь неограниченную выпуклую фигуру, полученную в результате вращения некоторого угла вокруг его биссектрисы.)

О. Кузьминых

М749* а) Докажите, что если x_1, x_2, x_3 — положительные числа, то

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_1+x_2}\geqslant\frac{3}{2};$$

при каком условии это неравенство превращается в равенство?

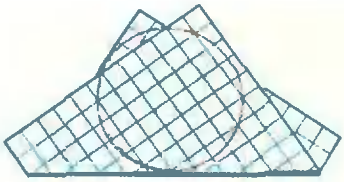


Рис. 1.

Рис. 2.

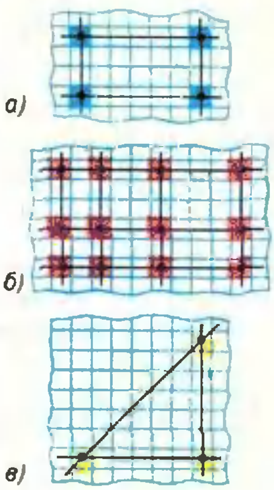


Рис. 3.

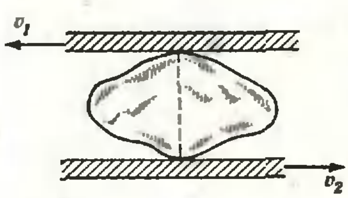


Рис. 4.

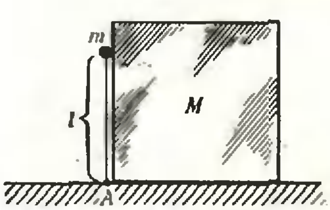


Рис. 5.

б) Докажите, что если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — положительные числа, то

$$\frac{x_1}{x_2+x_n}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_{n-2}}+\frac{x_n}{x_1+x_{n-1}}\geqslant 2,$$

причем равенство возможно только при $n=4$.

в) Докажите, что при $n>4$ неравенство пункта б) является точным в том смысле, что ни при каком n число 2 в правой части нельзя заменить на большее.

А. Прокопьев

М750. Докажите, что, как бы ни раскрасить клетки бесконечного листа клетчатой бумаги в N цветов, найдутся

а) прямоугольник, вершины которого лежат в центрах клеток одного цвета (а стороны идут параллельно линиям сетки — по вертикальным и горизонтальным прямым — рис. 3, *а*);

б) l горизонтальных и m вертикальных прямых, которые пересекаются в центрах lm клеток одного цвета (l и m — любые натуральные числа — рис. 3, *б*);

в) равнобедренный прямоугольный треугольник, вершины которого — центры клеток одного цвета, при $N=2$ (рис. 3, *в*);

г)* то же для $N=3$.

С. Беспамятных

Ф758. Жесткая заготовка зажата между двумя параллельными направляющими, движущимися в горизонтальном направлении со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ (рис. 4). В некоторый момент времени точки касания заготовки с направляющими лежат на прямой, перпендикулярной векторам $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$. Какие точки заготовки имеют в этот момент скорости, равные по абсолютной величине v_1 и v_2?

С. Кротов

Ф759. Невесомый стержень длины l с небольшим грузом массы m на конце шарнирно закреплен в точке A (рис. 5) и находится в строго вертикальном положении, касаясь при этом тела массы M. От небольшого толчка система приходит в движение. При каком соотношении между m и M стержень в момент «отрыва» от тела M будет составлять с горизонтом угол $\alpha=\pi/6$? Чему будет равна в этот момент скорость тела M? Трением пренебречь.

К. Сергеев

Ф760. В теплоизолированный сосуд, содержащий $m_1=20$ г гелия, влетает со скоростью $v=100$ м/с стальной шарик массы $m_2=1$ г. Найти изменение температуры в сосуде. Удары шарика о стенки сосуда и атомов о шарик считать абсолютно упругими.

Р. Александров

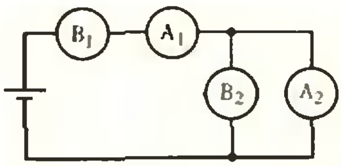


Рис. 6.

Ф761. Схему собирают из батарейки, двух одинаковых амперметров и двух одинаковых вольтметров (рис. 6). Амперметры A_1 и A_2 показывают, соответственно, $I_1=1{,}1$ мА, $I_2=0{,}9$ мА; вольтметр B_2 показывает $U_2=0{,}25$ В. Что показывает вольтметр B_1? Чему равно напряжение батареи?

З. Рафаилов

Ф762. На рисунке 7 приведена вольтамперная характеристика лампы накаливания, номинальное напряжение которой $U_н=220$ В, номинальная мощность $P_н=100$ Вт. Лампу подключают к сети переменного тока (220 В, 50 Гц) последовательно

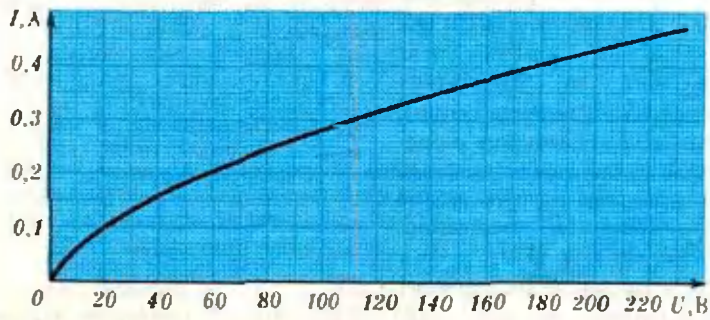


Рис. 7.

с конденсатором емкости $C=10$ мкФ. Определить ток в лампе и напряжение на ней. Считать, что в течение периода сетевого напряжения температура нити практически не меняется.

А. Зильберман

Problems

M746 — M750; P758 — P762

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications.
The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than August 31, 1982 to the following address: USSR, Moscow, 117071, Mosk-

M746. A paper square is folded in half along a line l, passing through its centre, into a (non-convex) nine-sided polygon. How should the line l be chosen in order to:
a) make the area of the polygon maximal?
b)* construct a circle of maximal radius contained in the polygon (see figure Рис. 1)?

K. Vulfson

M747. a) The sum of n numbers is zero, the sum of their absolute values is a. Prove that the difference between the largest and smallest number is no less than $2a/n$.
b)* The point O is chosen inside the polygon $A_1A_2...A_n$ so that the sum of vectors $\vec{OA_1}+\vec{OA_2}+...+\vec{OA_n}$ is the zero vector and the sum of their lengths is d. Prove that the polygon's perimeter is no less than $4d/n$.
c)* Can this estimate be improved (for certain n)?

V. Prasolov

M748. a) Can a finite number of parabolas be placed on the plane so that their inner domains cover the entire plane? (The *inner domain* of a parabola is the convex figure bounded by it — see figure Рис. 2).
b)* Several non-intersecting cones are placed in space. Show that they cannot be moved so as to cover the entire space. (By a *cone* here we mean the unbounded convex figure obtained by rotating an angle about its bissector).

O. Kuzminykh

ва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Физматлит», «КВАНТ». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well solutions of problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. The list of prizewinners is published in the September issue. If you have an original problem to propose for publication, please send it to us in two copies (including the solution) in an envelope inscribed "NEW PROBLEM IN PHYSICS (MATHEMATICS)".

M749*. a) Prove that if x_1, x_2, x_3 are positive numbers, then

$$\frac{x_1}{x_2+x_3}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\frac{x_3}{x_1+x_2}\geqslant\frac{3}{2};$$

under what conditions does this inequality become an equality?
b) Prove that if x_1, x_2, ..., x_n are positive numbers, then

$$\frac{x_1}{x_2+x_n}+\frac{x_2}{x_3+x_1}+\ldots+\frac{x_{n-1}}{x_n+x_{n-2}}+\frac{x_n}{x_1+x_{n-1}}\geqslant 2,$$

the equality being possible only if $n=4$.
c) Prove that for $n>4$ the inequality in b) is exact in the sense that the number 2 in the right hand side cannot be replaced by a larger one for any n.

A. Prokopiev

M750. An infinite sheet of paper is divided into identical squares by horizontal and vertical lines. Each of the squares is painted in one of N colours. Prove that there exist
a) a rectangle with vertices in the centres of four squares of the same colour and sides parallel to those of the squares (see figure Рис. 3*а*);
b) l horizontal and m vertical lines which intersect in ml centres of squares of the same colour (l and m are arbitrary positive integers; figure Рис. 3*б*);
c) an isoceles right triangle whose vertices are centres of squares of the same colour, if $N=2$ (Рис. 3*в*);
d)* same question for $N=3$.

S. Bespamiatnykh

P758. A rigid sample is held between two parallel directing planes moving horizontally with velocities $\vec{v}_1$ and $\vec{v}_2$ (see figure Рис. 4). At a certain moment of time the points where the sample touches the planes are on a line perpendicular to vectors $\vec{v}_1$ and $\vec{v}_2$. What points of the sample will then have velocities whose absolute value is v_1 and v_2?

S. Krotov

P759. A. weightless rod of length L with a small mass m at its extremity is fixed by a hinge at the point A (see figure Рис. 5) and stands vertically touching a solid of mass M. A small push sets the system into motion towards the left. For what relation between m and M will the rod make an angle $\alpha=\pi/6$ with the horizontal direction when it "detaches" itself from the solid? What will the velocity of the solid be at that moment? Friction is negligible.

K. Sergeev

P760. A little steel ball of mass $m_2=1$g flies into a thermoisolated receptacle, containing $m_1=20$ g of helium, with velocity $v=100$m/s. Find the change of temperature in the receptacle. The reflections of the ball against the walls of the receptacle and against the atoms are assumed to be absolutely elastic.

R. Alexandrov

P761. An electric circuit consists of a battery, two identical amperemeters and two identical voltmeters (see figure Рис. 6). The amperemeters A_1 and A_2 show respectively $I_1=1.1$ mA, $I_2=0.9$ mA the voltmeter B_2 shows $U_2=0.25$V. What is the showing of the voltmeter B_1? The voltage of the battery?

Z. Rafailov

P762. The figure Рис. 7 shows the volt-ampere characteristic of an incandescent lamp whose nominal voltage is $U_н=220$V and nominal power $P_н=100$W. The lamp is connected in succession with a condensator of capacity $C=10\mu F$ to a household circuit (220 V, 50 Hz). Determine the current in the lamp and the voltage on it. It is assumed that during one period of the alternative current in the circuit the filament's temperature does not change.

A. Zilberman

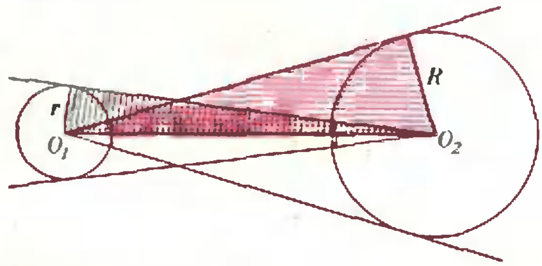
Решения задач

М706 — М710; Ф718 — Ф722

М706. *Из центра каждой из двух данных окружностей проведены касательные к другой окружности. Докажите, что хорды, соединяющие точки пересечения касательных с окружностями (на рисунке эти хорды показаны красным цветом), имеют одинаковые длины.*

Из подобия соответствующих треугольников (см. рисунок) легко находим, что каждая хорда имеет длину $\frac{2Rr}{|O_1O_2|}$.

И. Клумова



◆

М707. *Каждый из учеников класса занимается не более чем в двух кружках, причем для любой пары учеников существует кружок, в котором они занимаются вместе. Докажите, что найдется кружок, где занимаются не менее 2/3 этого класса.*

Если в одном из кружков занимается весь класс, то все доказано. Пусть ни в одном из кружков весь класс целиком не занимается. Рассмотрим один из кружков (назовем его *кружком № 1*) и одного из учеников, занятого в этом кружке (назовем его *учеником A*). Поскольку в кружке № 1 весь класс целиком не занят, найдется ученик B, не занимающийся в этом кружке. По условию задачи существует кружок № 2, где занимаются вместе ученики A и B. Поскольку и этот кружок не охватывает весь класс, существует ученик C, который в него не входит. Но ученик A занимается только в кружках № 1 и № 2, поэтому ученик C занимается вместе с учеником A в кружке № 1. Тогда должен существовать кружок № 3, где занимаются вместе ученики B и C. Рассмотрим любого другого ученика D (если в классе есть еще ученики, кроме учеников A, B и C). Если бы ученик D не занимался ни в кружке № 1, ни в кружке № 2, то для него не нашлось бы общего кружка с учеником A. Если бы D не занимался в кружках № 1 и № 3, то он не занимался бы вместе с учеником C. Наконец, если бы D не занимался в кружках № 2 и № 3, то у него не было бы общего кружка с учеником B. Таким образом, каждый ученик класса должен быть занят в двух из трех рассмотренных кружков. Обозначив через y_1, y_2 и y_3 число учеников в кружках № 1, № 2 и № 3 соответственно, получим $y_1+y_2+y_3=2y$, где y — число всех учеников в классе. Ясно, что хотя бы одно из чисел y_1, y_2, y_3 должно быть не меньше $\frac{1}{3}\cdot 2y$.

А. Сидоренко

◆

М708. *На сторонах выпуклого четырехугольника площади S вне его построены квадраты, центры которых служат вершинами нового четырехугольника площади S_1. Дока-*

Из рисунка 1 видно, что площадь S_1 нового четырехугольника $MNPQ$ (M, N, P и Q — центры квадратов, построенных на сторонах данного четырехугольника $ABCD$) равна сумме площадей четырех заштрихованных розовых четырехугольников (с вершинами, соответственно, в центрах двух соседних квадратов и серединах двух соседних сторон исходного

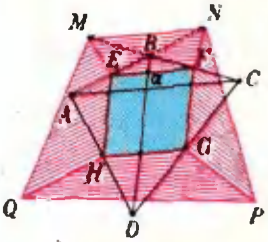


Рис. 1.

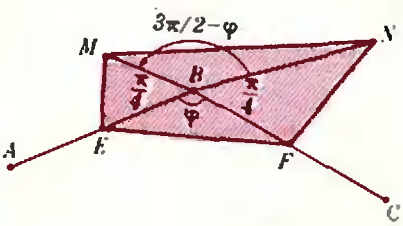


Рис. 2.

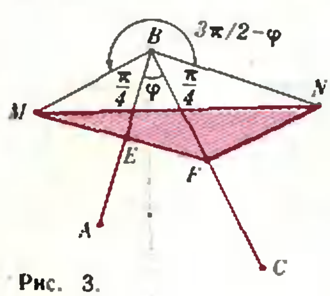


Рис. 3.

жите, что а) $S_1 > 2S$; б) $S_1 = 2S$ в том и только в том случае, когда диагонали исходного четырехугольника равны по длине и взаимно перпендикулярны.

четырехугольника) и голубого параллелограмма (с вершинами в серединах сторон данного четырехугольника). Найдем, чему равна площадь одного такого розового четырехугольника — например, четырехугольника $EMNF$ (см. рис. 1).

Обозначим через φ угол при вершине B исходного четырехугольника. Заметим, что

$$S_{EMNF} = S_{EBF} + S_{EMB} + S_{FNB} \pm S_{MBN},$$

причем знак «+» берется, если $\frac{3\pi}{2} - \varphi < \pi$ (рис. 2), то есть $\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$, и знак «—», если $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ (рис. 3). Подсчитав алгебраическую сумму последних трех слагаемых, найдем

$$S_{EMNF} = S_{EBF} + \frac{|AB|^2}{8} + \frac{|BC|^2}{8} + \frac{|AB|\cdot|BC|}{4}\sin\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) =$$

$$= S_{EBF} + \frac{1}{8}\left(|AB|^2 - 2|AB|\cdot|BC|\cos\varphi + |BC|^2\right) =$$

$$= S_{EBF} + \frac{|AC|^2}{8}$$

(мы воспользовались теоремой косинусов для треугольника ABC).

Проведя аналогичные вычисления для остальных розовых четырехугольников, окончательно получим, что

$$S_1 = S + \frac{1}{4}\left(|AC|^2 + |BD|^2\right).$$

Но $S = \frac{1}{2}|AC|\cdot|BD|\sin\alpha$ (α — угол между диагоналями AC и BD), так что $\frac{1}{4}(|AC|^2 + |BD|^2) > \frac{1}{2}|AC|\cdot|BD| > S$ и $S_1 > 2S$, — мы решили задачу а).

Поскольку последние неравенства превращаются в равенства в том и только в том случае, когда $|AC| = |BD|$ и $\sin\alpha = 1$, то есть $(AC) \perp (BD)$, мы попутно получаем утверждение б).

П. Гусятников

М709. *Пол комнаты, имеющий форму правильного шестиугольника со стороной 10, заполнен плитками, имеющими форму ромба со стороной 1 и острым углом 60°. Разрешается вынуть три плитки, составляющие правильный шестиугольник со стороной 1, и заменить их расположение другим (рис. 1). Докажите, что а) из любого расположения плиток такими операциями можно получить любое другое; б) из расположения плиток рисунка 2 нельзя получить расположение рисунка 3 менее чем за 1000 операций.*

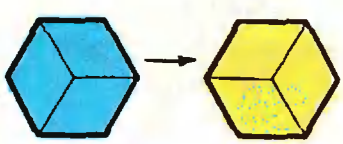


Рис. 1.

◆

Автор задачи *А. Смирнов* предложил замечательную пространственную интерпретацию, которая делает решение задачи почти очевидным.

Представим себе куб размерами $k \times k \times k$, разбитый на k^3 кубиков $1 \times 1 \times 1$. Уложим его в «открытую коробку», склеенную из трех квадратов $k \times k$ с общей вершиной A, и посмотрим на него по направлению диагонали HA (рис. 4). Мы увидим рисунок 3. Если же высыпать из коробки все кубики (но считать, что на внутренних стенках коробки осталась сетка $k \times k$ — «следы» от кубиков), то мы увидим рисунок 2. Вообще, если снять сверху лишь часть из k^3 кубиков, то мы увидим как раз такую картину, о которой говорится в условии задачи (где $k = 10$): шестиугольник, разбитый на $3k^2$ одинаковых ромбов (с острым углом 60°)*). При этом ромбам каждого из трех типов — стороны которых параллельны определенным двум сторонам шестиугольника (на рисунках 5, 6 и 7 эти ромбы показаны белым, светло-голубым и темно-голубым цветом) — соответствуют грани кубиков, параллельные определенной паре граней большого куба; отсюда ясно, что соответствие между разбиениями шестиугольника на ромбы и соответствующими «частичными»

*) Разумеется, при проектировании куба на плоскость, перпендикулярную диагонали, длины ребер и параллельных им отрезков в определенное число раз уменьшаются (а именно, умножаются на $\sqrt{2/3}$ — проверьте!), но мы надеемся, что отсутствие коэффициента не вызовет недоумения читателей, — ведь нас интересуют лишь расположения кубиков, а не размеры.

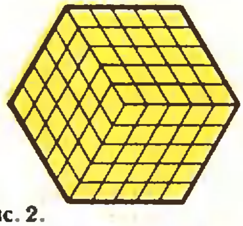


Рис. 2.

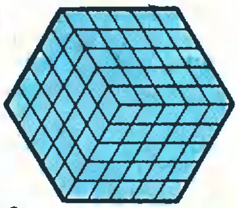


Рис. 3.

заполнениями коробки взаимно однозначно. Операция, указанная на рисунке 1, — это просто добавление кубика $1\times1\times1$ в свободное «гнездо» или вынимание такого кубика, на котором не лежат другие. (Например, на рисунке 7 происходит добавление кубика в «гнездо», обведенное красной линией.)

Теперь все утверждения задачи допускают вполне осязаемое обоснование (если не верите, сделайте модель!). Чтобы перейти от рисунка 2 к рисунку 3, нужно класть кубики в коробку по одному — и, разумеется, уложить их все можно самое меньшее за k^3 ходов (большее число ходов может получиться, если вынимать уже уложенные кубики). Если имеется два расположения ромбов: одному соответствует заполнение C_1, а другому — заполнение C_2 кубиками, то перейти от одного к другому можно любым из двух способов: либо сначала «спуститься» к рисунку 2 — вынуть все кубики, а затем уложить нужные C_2 кубиков, либо «подняться» до полного куба (рис. 3), а затем вынуть лишнее. Нетрудно

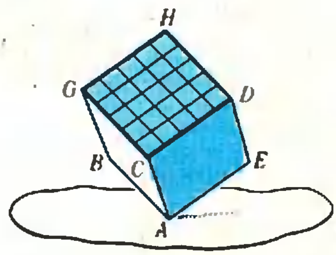


Рис. 4.

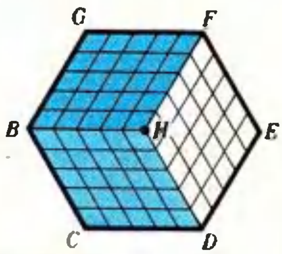


Рис. 5.

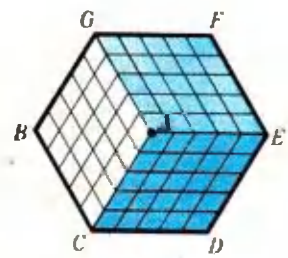


Рис. 6.

проверить, что в случае $C_1+C_2<k^3$ первый, а в случае $(k^3-C_1)+(k^3-C_2)<k^3 \Leftrightarrow C_1+C_2>k^3$ второй способ гарантирует переход от C_1 к C_2 не более чем за k^3 ходов. (Впрочем, наша модель позволяет указать для любых двух заполнений C_1 и C_2 точное «расстояние» $\varrho(C_1, C_2)$ между ними — наименьшее число ходов, за которое можно перейти от одного к другому. Оно равно числу кубиков, на которое различаются C_1 и C_2, то есть число кубиков C_1, которые лежат выше C_2, плюс число кубиков C_2, которые лежат выше C_1.)

Заметим, что «выход в пространство» для решения этой задачи не обязателен: многие читатели изложили (по существу, то же) решение, не выходя из плоскости, примерно так. Заметим, что ромбы, у которых имеется хоть одна «горизонтальная» сторона (голубые ромбы обоих оттенков на наших рисунках), образуют k полосок, каждая из которых ведет от верхней к нижней стороне шестиугольника и состоит из $2k$ ромбов. При этом рисунок 5 соответствует случаю, когда все полоски максимально смещены вправо, рисунок 6 — влево, а переход (рис. 7) позволяет на одной полоске в одном месте «изгиб вправо» заменить «изгибом влево» — сдвинуть на 1 ровно одну из пересекаемых полоской сторон ромбов. Теперь остается ввести какую-либо числовую оценку «смещения полосок» (аналогичную числу C кубиков в пространственной модели), и решение задачи доводится до конца так же, как и выше.

Н. Васильев

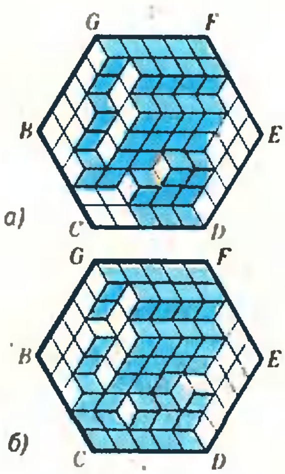


Рис. 7.

◆

М710. *Существует ли последовательность различных натуральных чисел $a_1, a_2, a_3, \ldots$, ни один из членов которой не равен сумме нескольких других, такая что (при всех $n=1, 2, \ldots$)*
а) $a_n<2(\sqrt{3})^n$;
б) $a_n<10(1,5)^n$;
в) $a_n<n^{10}$;
г) $a_n<1000n^{7/2}$;
д) $a_n<1000n^{3/2}$?

Самый очевидный пример последовательности различных натуральных чисел, ни один из членов которой не равен сумме нескольких других, — прогрессия $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots$: у нее каждый член на 1 больше суммы предыдущих. Но она растет слишком быстро.

Основная идея построения всех нижеследующих примеров, показывающих, что ответы на вопросы а) — г) положительные, — составлять последовательность «пачками». В примерах а), б) с показательным ростом числа в пачках можно взять растущими примерно по геометрической прогрессии, а количество чисел в пачке — постоянным; в примерах со степенным ростом длины пачек, как и их первые числа, очень быстро растут.

а) Пусть $a_{2m-1}=3^m-1$, $a_{2m}=3^m$. Очевидно,

$$(2+3)+(8+9)+\ldots+(3^{m-1}-1+3^{m-1})<$$
$$<2(3+9+\ldots+3^{m-1})=3^m-3$$

меньше 3^m-1; поэтому ни одно из чисел 3^m-1 и 3^m не равно сумме предыдущих. При этом $a_1=2$ и $a_n<3^{(n+1)/2}<2(\sqrt{3})^n$ при всех n. (В этом примере в каждой «пачке» всего два числа.)

$a_n\leqslant 2\cdot(\sqrt{3})^n$:

2, 3,
8, 9,
26, 27,
80, 81,
242, 243,
..., ...,

б) Последовательность (a_n) будем строить тоже по пачкам. m-я пачка ($m=1, 2, \ldots$) будет содержать 16 чисел:

$$15\cdot 361^{m-1},\quad 16\cdot 361^{m-1},\ \ldots,\ 30\cdot 361^{m-1}.$$

Таким образом, $a_n=361^{m-1}(14+r)$, где m и r выбираются из условия $n=16(m-1)+r$, $m=1, 2, \ldots$, $r=1, 2, \ldots, 16$.

Заметим, что сумма всех чисел в пачках с первой до $(m-1)$-й равна

$$(15+16+\ldots+30)+(15\cdot 361+\ldots+30\cdot 361)+\ldots+$$
$$+(15\cdot 361^{m-2}+\ldots+30\cdot 361^{m-2})=$$
$$=360+360\cdot 361+\ldots+360\cdot 361^{m-2}=361^{m-1}-1.$$

Допустим, что какое-то число a из m-й пачки представимо в виде суммы $b_1+\ldots+b_k$ нескольких меньших членов $b_1, \ldots, b_k$ нашей последовательности. Поскольку $a>361^{m-1}$, среди чисел $b_1, \ldots, b_k$ есть хоть одно из m-й пачки. Рассмотрим два случая.

1°. *Среди чисел $b_1, \ldots, b_k$ ровно одно из m-й пачки;* можно считать, что это b_1. Но равенство $a-b_1=b_2+\ldots+b_k$ невозможно, так как, с одной стороны, $a-b_1$, как разность чисел m-й пачки, не меньше 361^{m-1}, а с другой стороны, $b_2+\ldots+b_k$, как сумма чисел из пачек с номерами меньше m, не превосходит $361^{m-1}-1$.

2°. *Среди чисел $b_1, \ldots, b_k$ больше одного лежит в m-й пачке.* Тогда равенство $a=b_1+\ldots+b_k$ невозможно, так как сумма двух любых различных чисел m-й пачки уже больше любого третьего числа этой пачки.

$a_n\leqslant 10\cdot(1{,}5)^n$:

15, 16, ..., 30,
$15\cdot 361$, ..., ..., $30\cdot 361$,
$15\cdot 361^2$, ..., ..., $30\cdot 361^2$,
... ...

Таким образом, ни одно из чисел a_n не представимо в виде суммы других членов построенной последовательности.

Поскольку $361^{m-1}\leqslant(1{,}5)^{16(m-1)}$ и $14+r\leqslant 10\cdot(1{,}5)^r$ ($r=1, \ldots, 16$), получаем

$$a_n=361^{m-1}(14+r)\leqslant(1{,}5)^{16(m-1)}\cdot 10\cdot(1{,}5)^r=10\cdot(1{,}5)^n$$

— условие б) выполнено.

в), г). Построим последовательность (a_n), ни один из членов которой не равен сумме нескольких других, такую, что при всех n одновременно $a_n\leqslant n^{10}$ и $a_n\leqslant 100n^{7/2}$.

Сначала положим $b_m=10^{5^{m-2}}$ для всех натуральных $m\geqslant 2$, то есть $b_2=10$, $b_3=100\,000$, b_4 равно единице с 25 нулями, и т. д.

Последовательность (a_n) опять будем строить «по пачкам». Первую пачку возьмем состоящей из одного числа — единицы. В качестве m-й пачки при $m\geqslant 2$ возьмем арифметическую прогрессию с первым членом $2b_m+1$, разностью $2b_m$ и числом членов, равным $b_m^2/2$:

$$2b_m+1,\quad 4b_m+1,\ \ldots,\ b_m^3+1.$$

Оценим сумму чисел m-й пачки

$$\frac{(2b_m+1)+(b_m^3+1)}{2}\cdot\frac{b_m^2}{2}=$$
$$=\frac{b_m^5+2b_m^3+2b_m^2}{4}<\frac{b_m^5}{2}<b_m^5-b_m=b_{m+1}-b_m.$$

Таким образом, сумма чисел в пачках от 1-й до m-й включительно меньше

$$1+(b_3-b_2)+\ldots+(b_{m+1}-b_m)=b_{m+1}-b_2+1<b_{m+1}.$$

Допустим, что некоторое число a из m-й пачки ($m\geqslant 2$) представимо в виде суммы некоторых других членов построенной последовательности. Так как сумма всех чисел в пачках с номерами, меньшими m, меньше $b_m<2b_m+1\leqslant a$, среди этих членов последовательности найдется несколько чисел из m-й пачки; обозначим их $c_1, \ldots, c_k$. Остальные члены нашей суммы обозначим через $d_1, \ldots, d_l$:

$$a=c_1+\ldots+c_k+d_1+\ldots+d_l.$$

Так как сумма первых b_m чисел m-й пачки равна

$$(2b_m+1)+(4b_m+1)+\ldots+(2b_m^2+1)=b_m^3+b_m^2+b_m>b_m^3+1,$$

то есть больше наибольшего числа m-й пачки, и, следовательно, больше a, мы получаем, что $k<b_m$. Поэтому

$$r=k+(d_1+\ldots+d_l)<b_m+(d_1+\ldots+d_l)<2b_m.$$

Но $a-r=(c_1+\ldots+c_k)-k=(c_1-1)+\ldots+(c_k-1)$. Поскольку каждое число из m-й пачки при делении на $2b_m$ дает в остатке 1, числа c_1-1, c_2-1, ..., c_k-1 делятся на $2b_m$, так что $a-r$ делится на $2b_m$. Так как при этом $r<2b_m$, r равно остатку от деления a на $2b_m$, то есть $r=1$; значит, $k+d_1+\ldots+d_l=1$, что невозможно. Отсюда заключаем, что ни один член построенной последовательности (a_n) не равен сумме нескольких других.

Проверим теперь, что $a_n\leqslant 100n^{7/2}$ при любом n.

При $n=1$ это очевидно. Если a_n лежит во второй пачке, то $a_n\leqslant 1001<100\cdot 2^{7/2}\leqslant 100n^{7/2}$. Пусть a_n лежит в m-й пачке и $m\geqslant 3$. Представим a_m в виде $2kb_m+1$ $(1\leqslant k\leqslant b_m^2/2)$ и рассмотрим два случая.

1°. $k\leqslant b_{m-1}^2$.

Тогда

$$a_n\leqslant 2b_{m-1}^2b_m+1<3b_{m-1}^2b_m=3b_{m-1}=3\cdot 2^{7/2}\cdot(b_{m-1}^2/2)^{7/2}$$

Но $b_{m-1}^2/2<n$, поскольку $b_{m-1}^2/2$ — число членов в $(m-1)$-й пачке. Поэтому $a_n\leqslant 3\cdot 2^{7/2}\cdot n^{7/2}<100n^{7/2}$.

2°. $k>b_{m-1}^2$.

Ясно, что номер a_n в m-й пачке не превосходит его номера в последовательности, то есть $k\leqslant n$. Поэтому

$$a_n=2kb_m+1<3kb_m=3k(b_{m-1}^2)^{5/2}<3k\cdot k^{5/2}\leqslant 3n^{7/2}.$$

Таким образом, неравенство $a_n\leqslant 100n^{7/2}$ доказано для всех n. Неравенство $a_n\leqslant n^{10}$ при $n=1$ и $n=2$ проверяется непосредственно, а при $n>2$ вытекает из того, что

$$a_n\leqslant 100n^{7/2}<3^{13/2}\cdot n^{7/2}\leqslant n^{13/2}\cdot n^{7/2}.$$

Для экономии места мы не стали приводить более простые примеры последовательностей, дающие решение задачи в), но не решающие задачу г).

д) Ответ на этот вопрос отрицателен: такой последовательности не существует.

Докажем, что хотя бы один член последовательности (a_n) такой, что $a_n<100n^{3/2}$ при всех $n=1, 2, \ldots$ равен сумме нескольких других. (Конечно, число 100 здесь можно заменить любой константой; от показателя 3/2 в нашем доказательстве нужно, чтобы он был меньше $(\sqrt{5}+1)/2$.)

Рассмотрим прямоугольную таблицу с 10^{30} строками и 10^{18} столбцами. Присвоим ее строкам номера от $10^{30}+1$ до $2\cdot 10^{30}$, а столбцам — номера от 1 до 10^{18}. На пересечении n-й строки и k-го столбца напишем число $c_{n,k}=(a_1+a_2+\ldots+a_k)+a_n$. Оно не превосходит $a_1+\ldots+a_{10^{18}}+a_{2\cdot 10^{30}}\leqslant 100+100\cdot 2^{3/2}+\ldots+100\cdot(10^{18})^{3/2}+100\cdot(2\cdot 10^{30})^{3/2}<100\cdot(10^{18})^{3/2}\cdot 10^{18}+100\cdot(10^{30})^{3/2}\cdot 2^{3/2}=10^{47}+10^{47}\times 2^{3/2}<4\cdot 10^{47}$.

Так как в таблице выписано 10^{48} чисел, каждое из которых может принимать менее $4\cdot 10^{47}$ значений, какие-нибудь два из этих чисел совпадают. Пусть, например, $c_{n,k}=c_{m,l}$. Поскольку в n-й строке все числа различны, $n\neq m$. Можно считать, что $n>m$ (случай $m>n$ аналогичен). Равенство $c_{n,k}=c_{m,l}$ означает, что

$$(a_1+\ldots+a_k)+a_n=(a_1+\ldots+a_l)+a_m,$$

откуда $k<l$ и $a_n=(a_{k+1}+\ldots+a_l)+a_m$. Так как при этом $l\leqslant 10^{18}<m$, получаем, что a_n представляется в виде суммы нескольких других членов последовательности.

Конечно, зазор между $(\sqrt{5}+1)/2$ и $7/2$ еще довольно велик. Может быть, кому-либо из читателей удастся его сократить. По-видимому, пока лучшая оценка снизу чем $C\cdot n^{(\sqrt{5}+1)/2}$, неизвестна.

Как нам сообщил венгерский математик П. Эрдеш, в свое время он тоже занимался задачей о последовательностях (a_n), в которых ни одно число не равно сумме неко-

$a_n\leqslant n^{10}$ и $a_n\leqslant 100n^{7/2}$.

1,			
21,	41,	...,	1001
200 001,	400 001,	...,	$10^{15}+1$
...,	...,	...,	...

торых предыдущих, и получил для них оценки другого типа; в частности, он доказал, что сумма ряда $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots$ не превосходит 103. (Позднее было доказано, что эта сумма не превосходит 6.)

С. Конягин

Ф719.*) *Маленькому тяжелому шарику массы m, имеющему заряд q, сообщают начальную скорость v_0, направленную вертикально вверх. Шарик находится в однородном горизонтальном электростатическом поле, напряженность которого равна E. Пренебрегая сопротивлением воздуха и зависимостью ускорения свободного падения от высоты, определить минимальную скорость шарика в процессе его движения.*

*) Решение задачи Ф718 — в статье С. Кротова на с. 30.

◆

На шарик действуют две постоянные силы: сила тяжести $m\vec{g}$ и сила $q\vec{E}$ со стороны электростатического поля. Следовательно, шарик будет двигаться с постоянным ускорением

$$\vec{a}=\vec{g}+\frac{q}{m}\vec{E}.$$

Вектор $\vec{a}$ составляет с горизонтом угол α, причем

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{g}{Eq/m}=\frac{mg}{Eq}.$$

Скорость же шарика будет все время меняться и по величине, и по направлению. Через время t после начала движения модуль скорости

$$v_t=\sqrt{\left(\frac{qE}{m}t\right)^2+(v_0-gt)^2};$$

вектор $\vec{v}_t$ составляет с вертикалью угол β_t такой, что

$$\operatorname{tg}\beta_t=qEt/m(v_0-gt).$$

Скорость шарика будет минимальная в тот момент времени τ, когда проекция ускорения $\vec{a}$ на направление скорости $\vec{v}_\tau$ будет равна нулю, то есть когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{v}_\tau$ будут перпендикулярны. Угол, который составит в этот момент вектор $\vec{v}_\tau$ с вертикалью, будет равен α. Из условия $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta_\tau$ найдем τ:

$$\tau=\frac{m^2gv_0}{m^2g^2+q^2E^2}.$$

Минимальная скорость шарика в процессе движения равна по величине

$$v_{\min}=v_\tau=v_0\frac{qE}{\sqrt{q^2E^2+m^2g^2}}.$$

Б. Буховцев

Ф720. *Однородный брусок массы M длины l начинает двигаться вниз по наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом. Начальный участок длины l наклонной плоскости занят близко расположенными катками в виде трубок массы m и радиуса $r \ll l$ (рис. 1), которые вращаются без трения в подшипниках. Остальной участок наклонной плоскости гладкий. Найти зависимость ускорения бруска от перемещения вдоль плоскости.*

◆

Запишем уравнение движения бруска для момента времени, когда перемещение бруска вдоль наклонной плоскости равно x $(x<l)$:

$$Ma_x=Mg\sin\alpha-f_{\text{тр}}N(1-x/l), \qquad (1)$$

где $N=l/2r$ — полное число катков на участке длины l, $N(1-x/l)$ — число катков, с которыми соприкасается брусок в данный момент, $f_{\text{тр}}$ — абсолютная величина силы трения, действующей на брусок со стороны каждого катка.

Каждому катку, соприкасающемуся с бруском, сила трения $f_{\text{тр}}$ сообщает в данный момент тангенциальное ускоре-

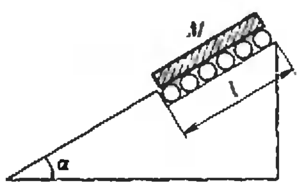


Рис. 1.

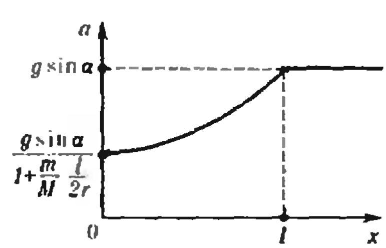


Рис. 2.

ние, равное по абсолютной величине a_x (брусок не проскальзывает по каткам), то есть

$$f_{тр}=ma_x. \quad (2)$$

Подставив (2) в (1), найдем зависимость ускорения бруска от перемещения вдоль наклонной плоскости (для $x<l$):

$$a_x=\frac{g\sin\alpha}{1+\frac{m}{M}\,\frac{l}{2r}\left(1-\frac{x}{l}\right)}.$$

При $x>l$ брусок перестает касаться катков и скользит по наклонной плоскости с ускорением

$$a=g\sin\alpha.$$

Общий вид зависимости $a(x)$ представлен на рисунке 2.

А. Стасенко

Ф721. *Равномерно заряженный по поверхности лист из диэлектрика, имеющий форму равнобедренного прямоугольного треугольника, сложили пополам. При этом была совершена работа A против сил электростатического поля. Какую работу надо совершить, чтобы сложить пополам полученный треугольник?*

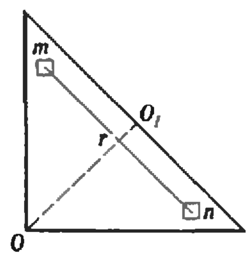


Рис. 1.

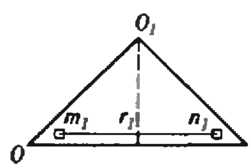


Рис. 2.

Пусть Q — заряд на поверхности начального (не сложенного ни разу) треугольника площади S, A_0 — электростатическая энергия, которой обладает этот заряд. Эта энергия складывается из электростатических энергий попарного взаимодействия отдельных заряженных участков треугольника.

Рассмотрим два малых участка m и n треугольника, находящихся на расстоянии r друг от друга (см. рис. 1). Пусть s — площадь каждого участка; заряд каждого участка, очевидно, равен $q=\frac{Q}{S}s$. Электростатическая энергия взаимодействия этих участков

$$a_0\sim q^2/r=Q^2\frac{s}{Sr}.$$

Посмотрим, как изменится эта энергия после первого сложения треугольника. Из рисунка 2 видно, что на сложенном треугольнике участки, подобные m и n, — это участки m_1 и n_1. Заряд на сложенном треугольнике будет по-прежнему Q, площадь треугольника станет $S_1=S/2$, расстояние между площадками, как нетрудно понять, станет $r_1=r/\sqrt{2}$, а площади их — $s_1=s/2$. Таким образом, энергия взаимодействия площадок станет

$$a_1\sim q_1^2/r_1=Q^2\frac{s_1}{Sr_1}=a_0\sqrt{2}.$$

Поскольку те же рассуждения относятся к любой паре площадок, электростатическая энергия сложенного заряженного треугольника станет

$$A_1=A_0\sqrt{2}.$$

Изменение энергии $\Delta A_1=A_1-A_0$ равно работе A, затраченной при сложении треугольника, то есть

$$A_1-A_0=A_0(\sqrt{2}-1)=A.$$

При повторном сложении треугольника его электростатическая энергия станет

$$A_2=A_1\sqrt{2}.$$

Изменение энергии $\Delta A_2=A_2-A_1$ равно работе A_x, которую затратили при сложении. Таким образом,

$$A_x=A_2-A_1=A(\sqrt{2}-1)=A_0\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)=A\sqrt{2}.$$

О. Савченко

Ф722. *Плоский конденсатор находится в магнитном поле, которое перпендикулярно плоскости пластин. Расстояние между пластинами d, вектор магнитной индукции $\vec{B}$. Внутри конденсатора около отрицательно заряженной пласти-*

Рассмотрим движение электронов как суперпозицию двух движений: прямолинейного движения вдоль оси Z (направление оси Z совпадает с направлением вектора индукции $\vec{B}$) и движения в плоскости, перпендикулярной оси Z.

Со стороны электрического поля на электрон действует сила $\vec{F}=e\vec{E}$, сообщающая ему ускорение, направленное вдоль оси Z (вектор $\vec{E}$ направлен вдоль оси Z) и равное по абсолютной величине *ны расположен источник медленных электронов, испускающий электроны в разных направлениях. При каком напряжении между пластинами электроны будут фокусироваться на положительно заряженной пластине? От чего зависит размер «пятна»?*

$$a_z = eE/m = eU/md.$$

В проекции на плоскость, перпендикулярную оси Z, траектория электрона — окружность; центростремительное ускорение, которое электрону сообщает сила, действующая на него со стороны магнитного поля, равно по абсолютной величине

$$a_{цс} = v_\perp^2/R = eBv_\perp/m,$$

где $v_\perp$ — проекция скорости электрона на плоскость, R — радиус окружности. Период обращения электрона по окружности равен

$$T = 2\pi R/v_\perp = 2\pi m/eB.$$

Для электронов с различными начальными скоростями (с различными значениями $v_\perp$) проекции траекторий на выбранную плоскость — семейство окружностей, «выходящих» из одной точки плоскости и «возвращающихся» к ней через время nT, где $n=0, 1, 2, ...$

Чтобы пучок электронов сфокусировался в «точку» на положительной пластине, время пролета между пластинами должно равняться nT. Исходя из этого условия и надо подобрать напряжение $U_ф$.

Если проекция начальной скорости электрона на ось Z равна v_{0z}, то условие фокусировки можно записать так:

$$d = v_{0z}nT + \frac{a_z n^2T^2}{2} = v_{0z}nT + \frac{eU_ф}{2md}n^2T^2.$$

Видно, что определяемое этим условием напряжение зависит от начальной скорости электронов, так что сфокусировать электроны в «точку» невозможно. Но по условию задачи источник испускает медленные электроны. Поэтому в предыдущей формуле можно пренебречь слагаемым $v_{0z}nT$, малым по сравнению с $eU_ф n^2T^2/2md$, и считать, что условие фокусировки —

$$d = \frac{eU_ф n^2T^2}{2md} = \frac{2\pi^2 n^2 U_ф m}{eB^2 d}.$$

Отсюда находим $U_ф$:

$$U_ф = \frac{ed^2B^2}{2\pi^2 n^2 m}.$$

Из-за различия в начальных скоростях времена пролета электронов между пластинами немного отличаются от nT. Это означает, что в плоскости, перпендикулярной оси Z, часть электронов за время nT не успевает вернуться в «исходную» точку, а часть — немного проскакивает ее. Поэтому на положительной пластине образуется не точка, а пятно. Размер этого пятна растет с увеличением разброса начальных скоростей электронов. Подумайте, почему с ростом числа n фокусировка делается хуже.

Вторая причина «уширения» пятна — взаимное отталкивание электронов. Мы учитывали только действие на электроны внешних полей и пренебрегли взаимодействием электронов. Пока плотность электронов мала, это допустимо. Однако при увеличении тока источника пространственный заряд между пластинами растет и может вообще нарушить фокусировку.

И. Воробьев

С. Кротов

Об оптимальных траекториях движения

Многим из вас приходилось решать задачи на определение оптимальных траекторий движения — задачи типа «определить траекторию, по которой — при определенных условиях движения — из точки A в точку B можно добраться за минимальное время». В настоящей заметке мы расскажем о методе, позволяющем к задачам подобного рода подходить с единых позиций.

Начнем с простой задачи. Представим себе мальчика, оказавшегося в некоторый момент времени t_0 посреди ровного поля в точке A. Нам известно, что из этой точки A он может перемещаться со скоростью v в любом направлении (мы подразумеваем, что условия передвижения мальчика из точки A одинаковы по всем направлениям). Поставим следующий вопрос: где может оказаться мальчик через небольшой интервал времени Δt?

Будем считать, что на протяжении этого интервала времени мальчик, начав двигаться, не меняет курса, и скорость его остается неизменной. В этом случае ответ очевиден: мальчик может оказаться в любой точке окружности с центром в начальном положении — в точке A — и радиуса $v \cdot \Delta t$.

Предположим теперь, что мальчик в процессе движения может в любой момент времени в любой точке своей траектории мгновенно менять произвольным образом направление скорости, сохраняя ее неизменной по величине (в данном случае нам придется наделить мальчика сверхъестественной силой). И в этом случае ответ на вопрос задачи достаточно прост: так как длины всех возможных траекторий мальчика равны $v \cdot \Delta t$, конец произвольной траектории может оказаться в любой точке круга радиуса $v \cdot \Delta t$ с центром в точке A. Это следует из того факта, что перемещение мальчика, то есть расстояние между началом и концом произвольной траектории по прямой, по абсолютной величине не больше длины самой траектории, равной $v \cdot \Delta t$. Таким образом, область достижимости (назовем так множество точек поля, где может оказаться мальчик к моменту времени $t_0+\Delta t$) будет представлять собой круг радиуса $v \cdot \Delta t$. Обратим внимание на то, что для любой внутренней точки области достижимости (например, точки B на рисунке 1) можно указать бесконечное число траекторий, по которым мальчик мог бы в нее попасть. Для любой же точки границы области достижимости (например, точки C на рисунке 1) существует единственная траектория «попадания» (в точку C — по радиусу AC).

Если в дальнейшем (при $t>t_0+\Delta t$) условия передвижения мальчика по полю остаются прежними, то и в последующие моменты времени границы области достижимости будут также представлять собой окружности (с центром в точке A). Границу области достижимости назовем фронтом всевозможных перемещений, или просто фронтом. В предыдущем рассмотрении фронт представлял собой окружность, радиус которой увеличивался со скоростью v. Такая простая форма фронта была связана с тем, что условия передвижения мальчика из точки A (и из любой точки области достижимости) во все стороны были одинаковы. Нетрудно заметить, что и в более общем случае передвижения фронт обладает следующими свойствами:

1) рано или поздно фронт пройдет через любую точку (имеются в виду точки, куда вообще можно попасть);

2) ни при каком способе перемещения нельзя оказаться дальше фронта в соответствующий момент времени;

3) для каждой точки фронта можно указать, как правило, единственную траекторию, оканчивающуюся в ней;

4) при определении фронта в последующие моменты времени (то есть при определении изменения фронта с течением времени) все точки исходного фронта одновременно будут выступать в роли точки A, так что в любой момент времени фронт будет представлять собой огибающую множества окружностей, центры которых лежат на исходном фронте, а радиусы определяются условиями «разбегания» из соответствующих точек фронта (рис. 2);

5) возьмем два положения фронта — M и M', разделенные интервалом времени Δt (см. рис. 2). Для любой точки E фронта M существует единственная точка E' фронта M', в которую можно добраться за время Δt; траектория движения при этом единственная. Во все другие точки фронта M' из точки E можно добраться лишь за бо́льшие времена.

Изложенный выше метод рассмотрения движения путем построения перемещающегося с течением времени фронта может быть с успехом применен при решении задач на определение оптимальных траекторий движения. Если

1) мы знаем, как меняется фронт с течением времени, то есть умеем его строить в каждый момент времени,

2) умеем выделять из всего множества траекторий движения ту, которая приводит в произвольную точку фронта,

то задача определения оптимальной траектории перемещения решается следующим образом: устанавливаем вид фронта с течением времени, определяем момент времени, когда фронт достигнет интересующей нас точки, строим траекторию, реализующую попадание именно в эту точку фронта.

Для иллюстрации сказанного рассмотрим одну вспомогательную задачу.

З а д а ч а. *Мальчик живет на берегу OP залива MOP (рис. 3). Берега залива образуют угол α. Дом мальчика — в точке A. Расстояние от дома до берега равно h, а расстояние от дома до точки O (см. рис. 3) равно l. Мальчик ловит рыбу с берега OM. На каком расстоянии от точки O он должен выбрать место для рыбалки, чтобы добираться до этого места от дома за минимальное время? Чему*

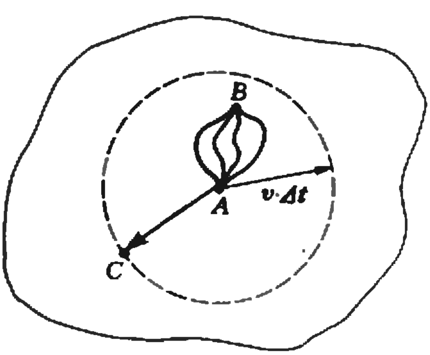


Рис. 1.

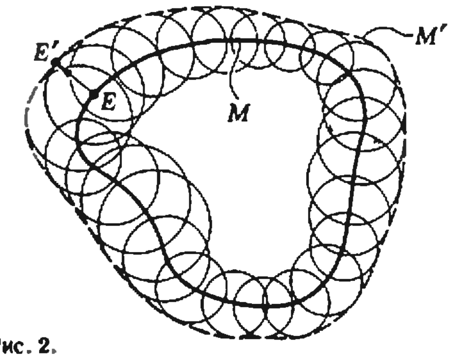


Рис. 2.

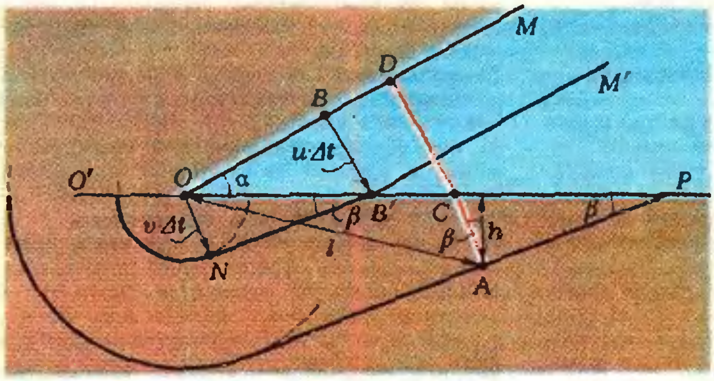


Рис. 3.

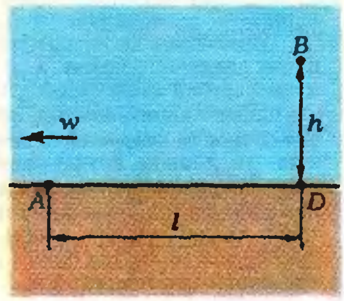


Рис. 4.

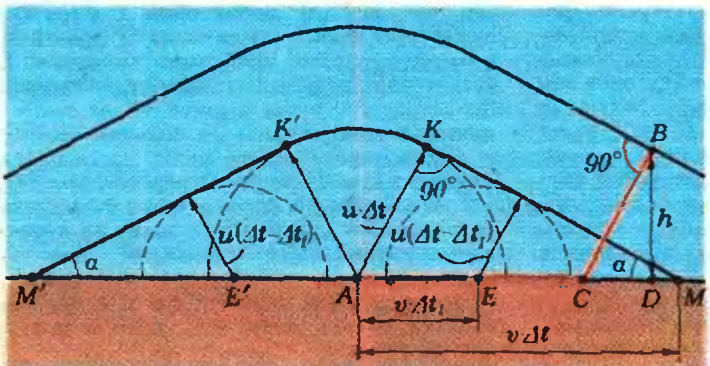


Рис. 5.

равно это время, если по берегу мальчик идет со скоростью v, а по заливу плывет на лодке со скоростью u?

Представим себе линию берега OM фронтом возможных перемещений в исходный момент времени t_0. Учитывая условия передвижения мальчика, построим фронт спустя небольшой промежуток времени Δt. Нетрудно убедиться, что фронт будет представлять собой кривую $O'NB'M'$, состоящую из дуги окружности радиуса $|ON|=|OO'|=v\cdot\Delta t$, участка NB' касательной к этой окружности в точке N, составляющей угол β с берегом OP, и участка $B'M'$ прямой, находящейся на расстоянии $|BB'|=u\cdot\Delta t$ от исходного фронта. Длина отрезка OB' равна, с одной стороны, $(u\cdot\Delta t)/\sin\alpha$ (из $\triangle OBB'$); а с другой стороны, $|OB'|=(v\cdot\Delta t)/\sin\beta$ (из $\triangle ONB'$). Из этих соотношений следует, что $v/\sin\beta=u/\sin\alpha$, то есть $\sin\beta=(v/u)\sin\alpha$.

Очевидно, что время ΔT (от момента t_0), через которое фронт пройдет через точку A, и есть искомое в задаче минимальное время. Оптимальная траектория движения мальчика связывает соответственные точки исходного фронта и фронта, проходящего через точку A. Построим эту траекторию.

Из точки A восставим перпендикуляр AC к фронту; C — точка пересечения перпендикуляра с берегом OP (см. рис. 3). Из точки C опустим перпендикуляр на исходный фронт (на берег OM). Точка D пересечения этого перпендикуляра с фронтом OM и есть искомая точка на берегу OM, которую мальчику надо выбрать местом рыбалки. Расстояние от точки O до точки D равно

$$|OD|=|OC|\cos\alpha=(\sqrt{l^2-h^2}-h\operatorname{tg}\beta)\cos\alpha=$$

$$=\left(\sqrt{l^2-h^2}-h\frac{v\sin\alpha}{\sqrt{u^2-v^2\sin^2\alpha}}\right)\cos\alpha.$$

Минимальное время, которое мальчик будет тратить на дорогу из A в D, равно

$$\Delta T=\frac{|AC|}{v}+\frac{|CD|}{u}=$$

$$=\frac{\sqrt{l^2-h^2}}{u}\sin\alpha+\frac{h}{uv}\sqrt{u^2-v^2\sin^2\alpha}.$$

Перейдем теперь к решению задачи Ф718. Напомним ее условие.

Ф718. *На берегу реки, скорость течения которой равна w, в точке A находится мальчик. Он может бежать по берегу со скоростью v и плыть по реке со скоростью u (относительно воды), причем $u<w$. Определить, на каком расстоянии x от точки A находится точка C берега, откуда мальчик должен начать плыть, чтобы добраться до бакена B за наименьшее время. Расстояние BD от бакена до берега равно h, расстояние AD равно l (рис. 4).*

Рассмотрим сначала случай, когда скорость реки равна нулю и мальчик может плыть со скоростью u относительно берега.

Построим фронт спустя время Δt после начала ($t_0=0$) движения мальчика. Если бы мальчик сразу начал плыть, то он оказался бы в любой точке полуокружности радиуса $u\cdot\Delta t$ с центром в точке A (рис. 5). Если бы он только бежал вдоль берега, то оказался бы в точках M или M'. Наконец, если бы мальчик часть времени Δt_1 бежал по берегу, а время $\Delta t_2=\Delta t-\Delta t_1$ плыл, то он оказался бы в любой точке полуокружности радиуса $u\cdot\Delta t_2=u(\Delta t-\Delta t_1)$ с центром в точке E (E'), рас-

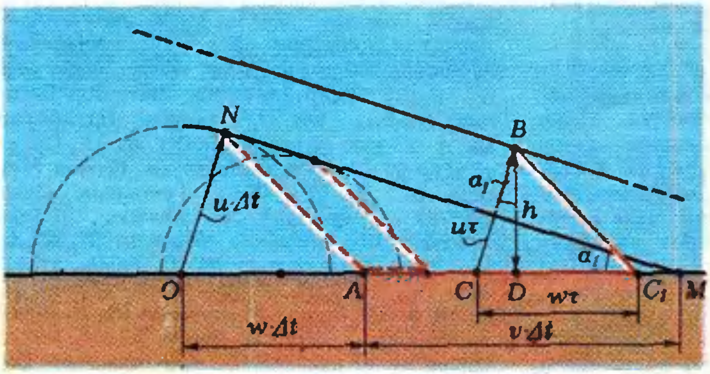


Рис. 6.

стояние от которой до точки A равно $|AE|=v\cdot\Delta t_1$ ($|AE|=|AE'|$). Нетрудно убедиться, что к моменту времени Δt фронт будет представлять собой кривую $M'K'KM$, где $M'K'$ и KM — касательные к полуокружности радиуса $u\cdot\Delta t$ с центром в точке A. Эти касательные составляют с берегом угол α такой, что $\sin\alpha=u/v$. (Вообще фронт будет представлять собой кривую $M'K'KM$ и дугу окружности радиуса AM (AM') с центром в точке A, лежащей на берегу. Но нас интересует только та часть фронта, которая лежит в области «река».) В любой другой момент времени фронт будет подобен построенному нами фронту $M'K'KM$.

Теперь понятно, как найти оптимальную траекторию попадания (то есть траекторию попадания за наименьшее время) из точки A в точку B реки, находящуюся на расстоянии h от берега. Эта траектория будет представлять собой ломаную ACB (см. рис. 5), отрезок CB которой перпендикулярен фронту, проходящему через точку B. Точка C — та точка берега, из которой мальчик должен начать плыть. Если расстояние вдоль берега от точки A до точки B равно $|AD|=l$, то

$$|AC|=|AD|-|CD|=l-h\operatorname{tg}\alpha=$$
$$=l-h\frac{u}{\sqrt{v^2-u^2}}.$$

Теперь учтем, что, по условию задачи, скорость течения реки $w\neq0$. Как будет выглядеть фронт через время Δt от начала движения? Очевидно, что точка M фронта (см. рис. 5) останется на месте; центр полуокружности радиуса $u\cdot\Delta t$ сместится от точки A влево (по направлению w) на расстояние $|AO|=w\cdot\Delta t$. Фронт в области «река» будет представлять собой кривую $M'N'NM$ (на рисунке 6 показана часть NM фронта); касательная MN составляет с берегом угол α_1 такой, что

$$\sin\alpha_1=u/(w+v).$$

По существу построение точек участка MN фронта мы разбиваем на два этапа: для каждой точки M_i берега, в которой мальчик оказывается через время Δt_i, мы строим «вспомогательный фронт» — границу той области реки, в которой мальчик может оказаться через время $\Delta t-\Delta t_i$. Эта граница — полуокружность радиуса $u\cdot(\Delta t-\Delta t_i)$ с центром в точке M_i. Затем мы смещаем эти полуокружности влево (по направлению w) на расстояние, равное $w\cdot(\Delta t-\Delta t_i)$. Касательная ко всем таким смещенным полуокружностям и есть участок MN фронта.

Следовательно, чтобы попасть из точки A в точку B за наименьшее время, мальчик должен начать плыть из той точки C_1 берега, которая находится справа от точки C (см. рис. 6) на расстоянии $|CC_1|=w\tau$, где τ — время, в течение которого мальчик будет плыть. (Понятно, что отрезок C_1B оптимальной траектории должен быть параллелен отрезку AN.) Расстояние между точками A и C_1 равно

$$x=|AC_1|=|AD|+|DC_1|=l+|DC_1|.$$

Найдем длину отрезка DC_1:

$$|DC_1|=|CC_1|-|CD|=w\tau-h\operatorname{tg}\alpha_1;$$

из $\triangle BDC$ находим

$$\frac{h}{u\tau}=\cos\alpha_1\Rightarrow\tau=\frac{h}{u\cos\alpha_1}=$$
$$=\frac{h}{u}\,\frac{(w+v)}{\sqrt{(w+v)^2-u^2}}$$

(напомним, что $\sin\alpha_1=u/(w+v)$ $\cos\alpha_1=\sqrt{1-\sin^2\alpha_1}$); таким образом

$$|DC_1|=\frac{hw}{u\cos\alpha_1}-\frac{h\sin\alpha_1}{\cos\alpha_1}=$$
$$=\frac{h(w^2-u^2+wv)}{u\sqrt{(w+v)^2-u^2}}.$$

Итак, чтобы добраться до бакена B за наименьшее время, мальчик должен начать плыть из точки C_1, находящейся от точки A на расстоянии

$$x=l+h\frac{(w^2-u^2+wv)}{u\sqrt{(w+v)^2-u^2}}.$$

Рассмотренный нами метод решения кинематической задачи путем построения фронта всевозможных перемещений основывается на хорошо известной физической картине распространения возмущения в среде; фронт при этом является реальной границей той области, куда дошло возмущение к данному моменту времени. Нетрудно видеть, что при отыскании оптимальных траекторий мы воспользовались тесной взаимосвязью, существующей между фронтом и лучами, а именно тем фактом, что луч является линией, по которой возмущение распространяется за наименьшее время. Принцип построения фронта, который мы предложили, является ни чем иным, как принципом Гюйгенса — методом построения фронта распространения волнового возмущения.

Список читателей, приславших правильные решения

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М696 — М705 (сведения о решивших задачи М691 — М695, предлагавшиеся на XV Всесоюзной олимпиаде школьников, публиковаться не будут) и Ф708 — Ф722 (цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

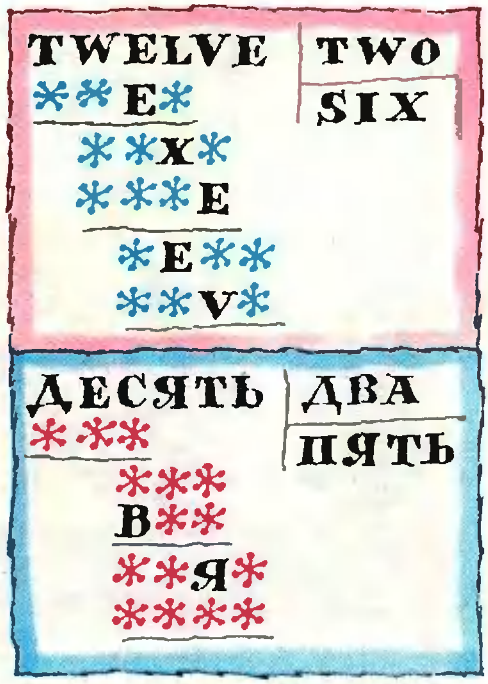
Большинство читателей, приславших решения, справились с задачами **М696, М698 — М701.** Остальные задачи решили: *В. Акимов* (Москва) **02 — 04**; *М. Алексеев* (Москва) **02 — 04**; *А. Аляев* (п. Пачелма Пензенской обл.) **04**; *С. Амшинский* (Ленинград) **97, 02, 04**; *М. Арамян* (Ереван) **02**; *А. Асланян* (Ереван) **02 — 04**; *Б. Банканашвили* (с. Кехиджвари ГССР) **97**; *А. Беренштейн* (Москва) **03**; *Ю. Беспалов* (Шостка) **02 — 04**; *И. Бинус* (Пенза) **04**; *А. Борискин* (Москва) **03**; *Г. Винкер* (Свердловск) **97, 02**; *И. Гайович* (Киев) **03**; *М. Гараев* (Физули) **97, 03, 04**; *А. Гохберг* (Донецк) **97, 04**; *Д. Грибанов* (Суворов) **02, 04**; *О. Гринив* (Киев) **97, 03 — 05**; *О. Гулин* (Черкассы) **97**; *И. Димитров*. (Ямбол, НРБ) **03, 04**; *О. Дранко* (Киев) **97**; *А. Дубицкас* (Таураге) **97, 03, 04**; *М. Дуйсекулов* (Аркалык) **02**; *М. Дьячков* (п. Черноголовка Московской обл.) **04**; *М. Елисеев* (п. Нововоронежский Воронежской обл.) **97, 04, 05**; *О. Ерошкин* (Днепропетровск) **97, 02 — 04**; *И. Жуков* (Ленинград) **03, 04**; *В. Завадникова* (Киев) **03**; *В. Ивлев* (Джезказган) **04**; *А. Ивченко* (Могилев-Подольский) **97, 03, 04**; *К. Игнатьев* (Москва) **02 — 04**; *И. Итенберг* (Ленинград) **97, 02**; *А. Казмерчук* (Киев) **02 — 04**; *Д. Калюжный* (Одесса) **97, 02**; *Д. Камунтавичюс* (Вильнюс) **03**; *А. Карпович* (Киев) **97, 02**; *А. Кернерман* (Киев) **97, 02, 04**; *А. Киселев* (Ташкент) **97**; *В. Кисиль* (Одесса) **97, 02, 04, 05**; *Е. Клебанов* (Горловка) **97, 02 — 04**; *А. Колосов* (Дзержинск Горьковской обл.) **03, 04**; *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) **02, 03**; *А. Корсуков* (Ачинск) **97, 02**; *Д. Коршунов* (Новосибирск) **97, 02**; *В. Кратофиль* (Киев) **97**; *И. Кудряшов* (Ленинград) **97, 02**; *И. Куйда* (Запорожье) **03**; *Ю. Куприков* (Подольск) **03, 04**; *Л. Лейцин* (Чернигов) **97, 02 — 05**; *О. Мазуров* (Новосибирск) **03**; *С. Макаронов* (Волжский Волгоградской обл.) **04**; *Д. Макаров* (п. Черноголовка, Московской обл.) **02**; *С. Мамедов* (Баку) **97, 03, 04**; *Д. Мамедьяров* (Баку) **04**; *Г. Масловский* (Бельцы) **97, 04**; *А. Матевос* (Ереван) **03**; *Е. Мендрелюк* (Могилев-Подольский) **03**; *В. Москаленко* (Минеральные Воды) **03**; *В. Мотин* (Ленинград) **97**; *Б. Мурзахметов* (Джезказган) **02, 04**; *Ю. Николаевский* (Харьков) **97, 02 — 04**; *А. Никонов* (Кировград) **97, 02, 04, 05**; *О. Нотыч* (Киев) **03, 04**; *М. Овецкий* (Донецк) **97, 03, 04**; *Р. Овчарек* (Щецин, ПНР) **97**; *О. Огурцова* (Ленинград) **97**; *Д. Орлов* (Владимир) **02 — 04**; *Р. Оруджев* (Баку) **97, 02, 03**; *А. Пайак* (Лодзь, ПНР) **97**; *Г. Перельман* (Ленинград) **97, 02 — 05**; *Л. Першеев* (Москва) **97, 02**; *А. Полторацкий* (Ленинград) **02**; *В. Поярков* (Николаев) **97, 03, 04**; *А. Родионов* (Москва) **02**; *В. Романов* (Москва) **02 — 04**; *В. Светлицкий* (Запорожье) **04**; *Ф. Серженко* (Запорожье) **03**; *А. Сикса* (Киев) **03 — 05**; *А. Сохет* (Харьков) **03, 04**; *Э. Степанян* (Баку) **04**; *Р. Тедеев* (Цхинвали) **03**; *А. Тижка* (Краков, ПНР) **03**; *С. Типцов* (Киев) **02 — 04**; *В. Титенко* (д. Блужа Минской обл.) **97, 02 — 05**; *О. Третьяков* (Омск) **02**; *Ю. Трофимчук* (Калиновка Винницкой обл.) **03**; *Г. Трунов* (Москва) **97, 03, 04**; *Ю. Тутин* (Запорожье) **03**; *Е. Тюрин* (Вильнюс) **97, 03** ; *Р. Угриновский* (Хмельник) **97, 03, 04**; *Т. Утепов* (Алма-Ата) **04**; *Н. Федин* (Омск) **03**; *С. Хирман* (Киев) **97**; *А. Хохлов* (Москва) **97, 02, 03**; *Г. Христофорова* (Воронеж) **03**; *П. Цветков* (Подольск) **02 — 05**; *В. Цолов* (Панагюриште, НРБ) **02, 03**; *С. Чудинова* (Тюмень) **04**; *В. Шабунин* (п. Хохольский Воронежской обл.) **02, 04**; *И. Шапчев* (Ямбол, НРБ) **03, 04**; *З. Шебзухов* (Москва) **97, 03, 04**; *А. Шигарев* (Сибай) **04**; *В. Шириков* (Москва) **97, 03**; *М. Шуклин* (Пермь) **97**; *Ф. Эфендиев* (Баку) **97**; *С. Юровский* (Мытищи) **04**; *В. Ярош* (Ленинград) **97, 02 — 04**; *Э. Ясиновый* (Куйбышев) **03, 04**.

Физика

Большинство читателей, приславших решения, справились с задачами **Ф711, Ф713 и Ф719.** Остальные задачи решили: *Е. Абедимов* (п. В. Березовка Восточно-Казахстанской обл.) **08, 09, 17, 20**; *А. Айрапетян* (Ереван) **12, 18**; *И. Алексеев* (Москва) **08 — 10, 12, 14 — 16, 18, 21, 22**; *Э. Алиев* (Баку) **08, 17, 22**; *З. Али-заде* (Баку) **14**; *С. Амшинский* (Ленинград) **12**; *М. Арамян* (Ереван) **12, 18**; *А. Асланян* (Ереван) **14, 16, 18**; *А. Астахов* (Железнодорожный) **08, 09, 12, 14, 17, 18, 20**; *А. Бабаев* (Баку) **08, 09, 12, 14, 17, 18, 20**; *Э. Багдасарян* (Баку) **14, 17**; *Я. Базалий* (Донецк) **08 — 22**; *Г. Баранов* (Донецк) **08, 16**; *О. Бендер* (Запорожье) **08 — 10**; *Ю. Беспалов* (Киев) **08 — 22**; *М. Бродицкий* (Кишинев) **18**; *В. Будилов* (Кирово-Чепецк) **09, 10, 12, 15—17**; *В. Бумагин* (Саратов) **18, 20 — 22**; *А. Буриченко* (Новосибирск) **14, 16**; *В. Васильев* (Таганрог) **14**; *В. Вачев* (Ямбол, НРБ) **15, 17**; *Б. Вейцман* (Одесса) **08 — 10, 12, 14 — 17, 18, 20 — 22**; *А. Витыньш* (Рига) **08, 09**; *С. Вознюк* (Харьков) **16, 17**; *С. Выгран* (Запорожье) **14, 16, 20**; *И. Гавриков* (Москва) **21, 22**; *К. Григоришин* (Запорожье) **09, 10, 12, 15, 18, 20 — 22**; *И. Гурович* (Одесса) **08, 09, 15, 20 — 22**; *А. Дешковский* (Барановичи) **14**; *И. Доценко* (Москва) **08, 10, 12, 15, 16, 18, 21, 22**; *М. Дьячков* (п. Черноголовка Московской обл.) **14 — 16, 20, 21**; *В. Евстратов* (Ленинград) **08 — 10, 12, 15, 16, 18**; *С. Егоров* (Новодвинск) **09**; *М. Жяконис* (Каунас) **08 — 10, 14 — 16, 20**; *Р. Жямайтис* (Вильнюс) **20, 21**; *Ю. Зандаров* (Кургантепа) **16, 17**; *Н. Запускалов* (Магнитогорск) **17**; *Е. Ильмер* (Ленинград) **16**; *В. Иосифов* (ст. Выселки Краснодарского кр.) **09**; *Л. Иосипов* (Киев) **17**; *Г. Кадышев* (Москва) **20**; *Е. Касперский* (Москва) **08 — 10**; *С. Кастелли* (Болград) **18**; *М. Козуб* (Киев) **08**; *В. Комов* (Александров) **08, 09, 12, 14 — 17**; *Д. Короткин* (Ленинград) **15**; *А. Корчагин* (Красноармейск Московской обл.) **14, 16 — 18**; *Г. Костылин* (Минск)

(Окончание см. на с. 57).

Квант для младших школьников



Задачи

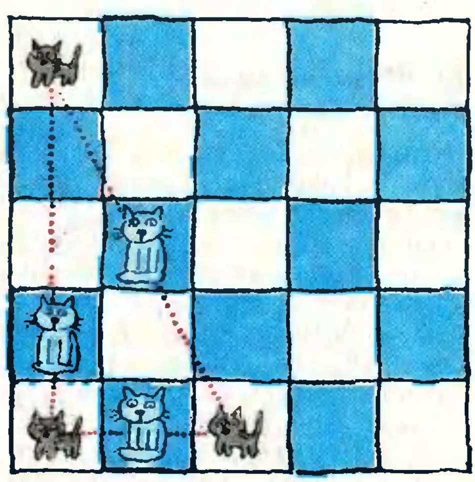
1. Число $\overline{ab}$ ($a>b$, $b\neq 0$) таково, что разность $\overline{ab}-\overline{ba}$ — точный квадрат. Найдите все двузначные числа, обладающие этим свойством.

А существуют ли трехзначные числа с аналогичным свойством: $\overline{abc}-\overline{cba}$ ($a>c$) — точный квадрат?

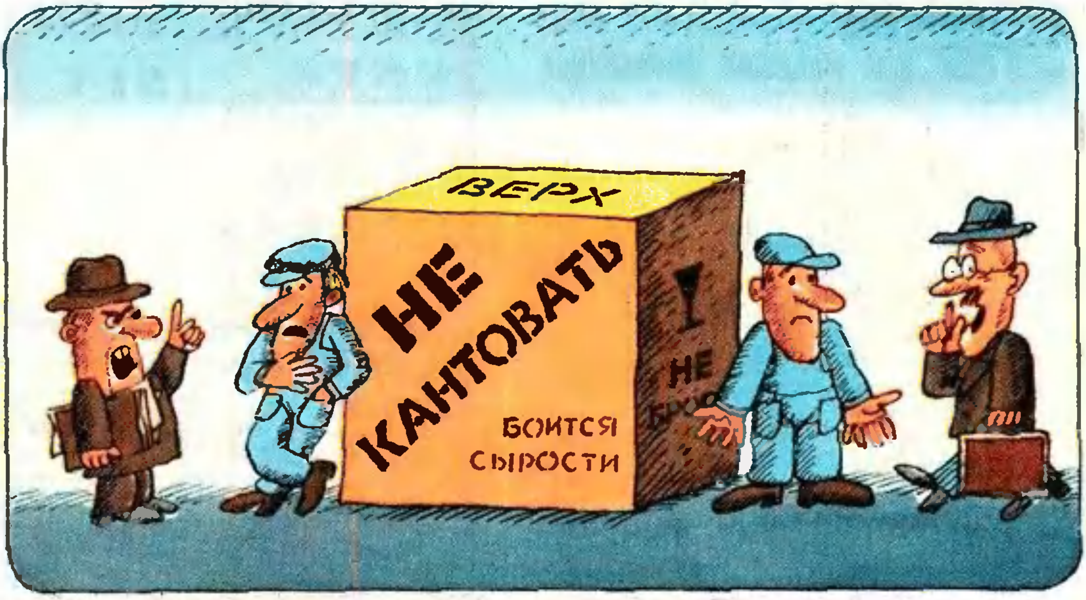
2. В ребусах, изображенных на рисунке (по-английски two — это *два*, six — *шесть*, twelve — *двенадцать*), одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные. Звездочки могут быть любыми цифрами. Расшифруйте эти ребусы.

3. У Тани и Наташи, взятых вместе, волос на голове на 40 больше, чем у Пети и Васи, а у Тани и Пети — на 20 больше, чем у Наташи и Васи. «Если бы у меня,— подумал Иван Иванович, их сосед,— выросло столько волос, сколько их у Тани, а потом еще три раза по столько, сколько у Пети, то их у меня стало бы столько, сколько у Васи и трех Наташ, вместе взятых». Какого цвета волосы у Ивана Ивановича?

4. В каждой клетке квадрата 5×5 сидит либо котенок, либо кошка (на рисунке котята — черные, а кошки — белые). Если на прямой между двумя котятами находится кошка, то котята не видят друг друга. Какое наибольшее количество котят можно расположить в клетках квадрата так, чтобы ни один котенок не видел остальных котят?



Эти задачи нам предложили
Ф. Бартенев, Э. Рекстин, С. Сефибеков, Д. Фукс



Ф. Бартенев

Кантование кубика

Природа говорит языком математики. Даже бросание игральной кости или обычного детского кубика таит в себе немало математических неожиданностей. Но чтобы научиться читать книгу природы, нужно не только смотреть, но и наблюдать. Однако и этого мало: нужно научиться экспериментировать.

Для опытов с кубиком нам потребуется «квадратная сетка» — лист бумаги, разграфленный на квадраты, равные граням кубика. По квадратной сетке мы будем катать наш кубик.

Кубик вырисовывает свою развертку

Положим кубик на квадрат с центром M (рис. 1); а затем повернем кубик на 90° вокруг его ребра AB, совпадающего со стороной квадрата сетки. Кубик ляжет новой гранью на квадрат с центром N. Этот поворот (*кантование*) можно задать стрелкой MN. Выполним пять последовательных кантований, определяемых ломаной $MNRSPQ$. При перемещении кубик соприкоснется последовательно с шестью квадратами сетки, которые образуют голубой многоугольник, показанный на рис. 1. Проверьте экспериментом, что при этом каждая грань коснется сетки по одному разу, и поэтому голубой многоугольник является *разверткой* кубика.

Нетрудно показать, что ломаная $MNKLHT$ тоже определит развертку кубика, но отличающуюся от первой.

Задача 1. *Используя кантование, найдите опытным путем еще две развертки кубика, отличные от указанных на рисунке 1.*

Задача 2. *На рисунке 2 изображена одна и та же игральная кость в двух различных положениях. Какая ее грань содержит четверку?*

Задача 3. *Игральная кость находится на нижнем левом угловом поле сетки 3×10 (3 столбца из 10 клеток) в таком начальном по-*

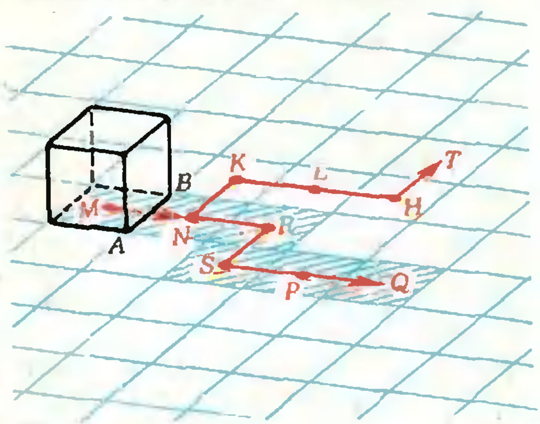


Рис. 1.

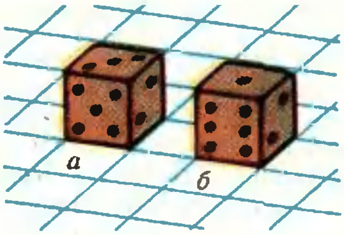


Рис. 2.

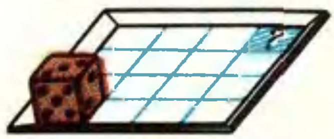


Рис. 3.

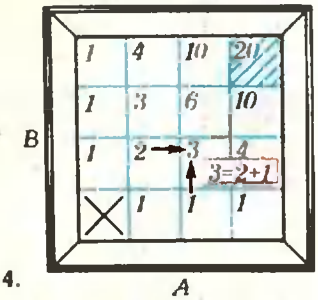


Рис. 4.

ложении, как на рисунке 2, а. Может ли кость обойти все поля сетки, если запрещается класть грань с тройкой на какое-либо ее поле?

Кубик раскрашивает плоскость

Обратимся теперь к кубикам с разноцветными гранями. Будем считать, что каждая грань кубика окрашивает в соответствующий цвет то поле сетки, с которым она соприкасается. На каждом квадрате кубику разрешается побывать только один раз. Разберем теперь такую задачу: *может ли кубик с разноцветными гранями кантованием раскрасить сетку 4×4 так, чтобы на ней не было двух одноцветных соседних квадратов?*

Особенности рассматриваемых ситуаций легче всего выявить опытным путем, рассматривая вначале сетки меньших размеров.

При обходе сетки 2×2 первый и последний квадраты всегда будут и соседними и одноцветными. Значит, при кантовании нельзя делать «крутые» повороты типа *RNKL* (рис. 1). Но без таких «крутых» поворотов нельзя обойти сетку 3×3, а также сетку 4×4. Значит, требуемую раскраску получить нельзя.

Задача 4. *Решите предыдущую задачу для сетки 5×5.*

Задача 5. *Может ли кубик с разноцветными гранями кантованием обойти все клетки сетки 4×5 так, что сетка окажется раскрашенной только в пять цветов?*

Катаем игральную кость

Рассмотрим несколько задач, в которых речь вновь будет идти об игральной кости, изображенной на рисунке 2. Условимся о правилах, по которым будет кантоваться кость (кубик). Договоримся, что в каждом случае кость находится в начальном положении, представленном на рисунке 2,*а*; кость можно кантовать только вправо и вверх; на каждом поле сетки кость может находиться только один раз.

Начнем с такого примера: *игральная кость в своем начальном положении находится на левом нижнем поле сетки 4×4; Можно ли перекантовать ее по нашим правилам в верхнее правое угловое поле так, чтобы кость лежала на нем гранью, содержащей тройку (рис. 3)?*

И в этом случае целесообразно вначале рассмотреть сетки 2×2 и 3×3. Опыт покажет, что гранью, содержащей тройку, кубик будет соприкасаться только с теми квадратами, которые расположены на третьей вертикали или третьей горизонтали, считая снизу. Естественно, что нужно дать отрицательный ответ на вопрос задачи.

Разберем последний пример с игральной костью: снова, как на рисунке 3, *имеется квадратная сетка 4×4, на левом нижнем квадрате которой лежит кубик; сколькими различными способами кубик можно перекантовать на каждое поле сетки (по нашим правилам)?*

Прежде чем смотреть ответ на рисунке 4, поэкспериментируйте с кубиком. Подметили ли вы закономерность, указанную на этом рисунке: число в каждом поле равно сумме (двух) чисел, расположенных непосредственно под и непосредственно слева от этого поля?

Задача 6. *Игральная кость находится в начальном положении на нижнем левом поле сетки 4×4. На какие поля сетки можно перекантовать ее так, чтобы она вновь находилась в начальном положении? Решите задачу для сетки 5×5.*

А. Назаретов

Плоскость в пространстве

В § 45 пособия «Геометрия 9—10» доказывается, что график любого уравнения первой степени*) $ax+by+cz+d=0$ есть плоскость, перпендикулярная вектору с координатами $(a;\, b;\, c)$.

Отсюда вытекает, что плоскости, заданные уравнениями

$$a_1x+b_1y+c_1z+d_1=0 \qquad (1)$$
$$a_2x+b_2y+c_2z+d_2=0 \qquad (2)$$

параллельны тогда и только тогда, когда существует такое λ, что $a_2=\lambda a_1$, $b_2=\lambda b_1$, $c_2=\lambda c_1$.

Очевидно, плоскости с уравнениями (1), (2) совпадают тогда и только тогда, когда существует такое λ, что $a_2=\lambda a_1$, $b_2=\lambda b_1$, $c_2=\lambda c_1$, $d_2=\lambda d_1$.

Подчеркнем еще раз. Переход от уравнения первой степени к плоскости (его графику) однозначен: каждое уравнение первой степени является графиком единственной, вполне определенной плоскости. (Поэтому говорят «плоскость с уравнением $ax+by+cz+d=0$» или даже «плоскость $ax+by+cz+d=0$».) Обратный же переход — от плоскости (в координатном пространстве) к уравнению — совсем не однозначен: каждая плоскость может быть задана бесчисленным множеством уравнений; если плоскость Δ является графиком уравнения $ax+by+cz+d=0$, то она является также графиком любого уравнения $(\lambda a)x+(\lambda b)y+(\lambda c)z+(\lambda d)=0$. Каждое из этих уравнений называется *уравнением плоскости* Δ.

В том же параграфе пособия доказывается, что в координатном пространстве каждая плоскость есть график некоторого уравнения первой степени.

В частности, уравнение плоскости, проходящей через точку $M(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и перпендикулярной (ненулевому) вектору $\vec{n}=(a;\, b;\, c)$, имеет вид $a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$.

Если решение задачи 28 к тому же параграфу, изложенное в пособии, повторить «в общем виде», мы получим, что расстояние от точки $K(x_0;\, y_0;\, z_0)$ до плоскости $ax+by+cz+d=0$ равно

$$\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Задача 1 (МГМИ, 1981). *Составьте уравнение плоскости, перпендикулярной оси Ox и проходящей через точку M* $(3;\, 2;\, 4)$.

Плоскость, перпендикулярная оси Ox, перпендикулярна вектору с координатами $(1;\, 0;\, 0)$. Поэтому искомое уравнение имеет вид $1(x-3)+0(y-2)+0(z-4)=0$ или $x-3=0$, $x=3$. Впрочем, последнюю форму ответа можно сообразить и непосредственно.

Задача 2 (МИЭТ, 1981). *Найдите расстояние между параллельными плоскостями* $x-y+2z-4=0$ и $x-y+2z-10=0$.

Искомое расстояние равно, очевидно, расстоянию от произвольной точки плоскости $x-y+2z-4=0$, например от точки $K(0;\, 0;\, 2)$, до плоскости $x-y+2z-10=0$. По готовой формуле получаем ответ $\sqrt{6}$.

Задача 3 (МИИВТ, 1980). *Найдите уравнение плоскости, проходящей через точки* $M(0;\, 1;\, 0)$, $N(1;\, 1;\, 1)$ и $K(0;\, 0;\, 1)$.

Пусть $ax+by+cz+d=0$ — искомое уравнение. Подставив в него координаты точек M, N, K, получаем систему трех уравнений с четырьмя

*) Напомним, что уравнение $ax+by+cz+d=0$ называется *уравнением первой степени*, если по крайней мере один коэффициент при переменных отличен от нуля, то есть $a^2+b^2+c^2\neq 0$.

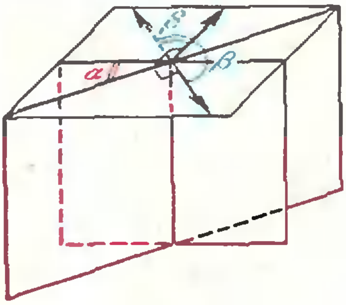


Рис. 1.

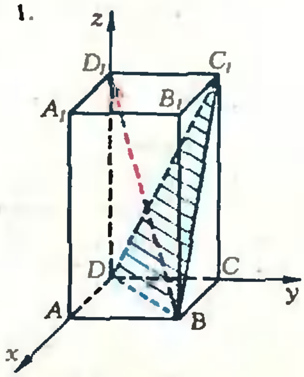


Рис. 2.

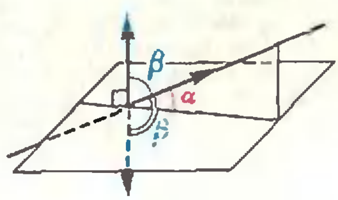


Рис. 3.

неизвестными:

$$\begin{cases} b+d=0 \\ a+b+c+d=0 \\ c+d=0 \end{cases}$$

Отсюда $b=-d$, $c=-d$, $a=d$. Значит, искомое уравнение имеет вид $dx-dy-dz+d=0$ или (поскольку a, b и c одновременно не равны 0, $d\neq 0$) $x-y-z+1=0$.

Задача 4 (МГМИ, 1981). *Составьте уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и точку $M(3;\ 2;\ 4)$.*

Плоскость, проходящая через ось Ox, содержит, например, точки $(1;\ 0;\ 0)$ и $(2;\ 0;\ 0)$ — задача свелась к предыдущей. Можно, впрочем, и сразу сообразить, что уравнение плоскости, проходящей через ось Ox, имеет вид $by+cz=0$.

Задача 5 (МИФИ, 1978). *Точки $A(1;\ 0;\ 3)$, $B(-1;\ 3;\ 4)$ и $C(1;\ 2;\ 1)$ принадлежат плоскости α. При каком значении k точка $M(k;\ 2;\ 5)$ тоже принадлежит плоскости α?*

Находим уравнение плоскости ABC (задача 3) и подставляем в него координаты точки M. Несколько короче, пользуясь компланарностью векторов $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ и $\vec{AM}$, разложить вектор $\vec{AM}$ по векторам $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$: $\vec{AM}=\mu\vec{AB}+\nu\vec{AC}$; переписав это векторное равенство в координатной форме, получим систему трех уравнений с тремя переменными μ, ν, k.

Задача 6 (МИХМ, 1981). *Найдите угол между плоскостями $-3y+z+2=0$ и $2y+z-5=0$.*

Искомый угол α мы найдем при помощи угла β между векторами, перпендикулярными к данным плоскостям. Углы α и β могут не совпадать. По определению («Геометрия 9—10», § 38) $0°\leqslant\alpha\leqslant 90°$. Угол же β между векторами по определению («Геометрия 9—10», § 24) заключен между 0° и 180°. Очевидно (рис. 1), $\alpha=\beta$ или $\alpha=180°-\beta$. Поэтому $\cos\alpha=|\cos\beta|$.

Задача 7 (МИСиС, 1980). *Найдите угол между плоскостью, проходящей через точки $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(1;\ 1;\ 1)$ и $C(3;\ 2;\ 1)$, и плоскостью, проходящей через точки $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(1;\ 1;\ 1)$ и $D(3;\ 1;\ 2)$.*

Сначала находим уравнения плоскостей ABC и ABD (задача 3), затем — угол между ними (задача 5).

Задача 8 (МИИВТ, 1981). *В правильной четырехугольной призме отношение длин бокового ребра и стороны основания равно 2. Найдите угол между диагональю BD_1 призмы и плоскостью BC_1D.*

Введем систему координат, как показано на рисунке 2, и положим $|AB|=a$. Далее последовательно находим координаты точек B, C_1 и D, уравнение плоскости BC_1D (задача 3), координаты точки D_1 и вектора $\vec{BD_1}$.

(Окончание см. на с. 52)

И. Быстрый

О сокращении показателей

В ныне действующем учебном пособии «Алгебра 8» (М., «Просвещение», издания 1979 г. и позже) ***корнем n-й степени из a*** называется такое число, n-я степень которого равна a. (Здесь n — произвольное натуральное число, в частности 1.)

Поэтому у положительного числа a при четном n имеются два корня n-й степени из a — положительный (именно он обозначается через $\sqrt[n]{a}$) и отрицательный ($-\sqrt[n]{a}$). При нечетном n у любого числа a имеется один корень (он обозначается через $\sqrt[n]{a}$). Наконец, при любом натуральном n $\sqrt[n]{0}=0$.

Сокращение показателей для **неотрицательных** a не вызывает никаких затруднений: $\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ (п. 26 упомянутого пособия). А вот для произвольных a (в частности, когда a — выражение, содержащее переменную) дело обстоит хитрее. Вы хорошо знаете, что $\sqrt{a^2}=|a|$ (здесь $m=n=1$, $k=2$). В общем случае,

$$\sqrt[nk]{a^{mk}}=\begin{cases}\sqrt[n]{|a|^m}, & \text{если } mk \text{ четно и } m \text{ нечетно}\\ \sqrt[n]{a^m} & \text{во всех остальных случаях}\end{cases}\qquad(1)$$

Например, $\sqrt[4]{a^2}=\sqrt{|a|}$ и $\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[3]{|a|}$ (равенство $\sqrt[6]{a^2}=\sqrt[3]{a}$ верно только при $a>0$, хотя оба выражения $\sqrt[6]{a^2}$, $\sqrt[3]{a}$ определены при любом a!).

Покажем, как применяется правило сокращения показателей на примере системы иррациональных уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6\\ \sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2}=8\end{cases}\qquad(2)$$

При любых x и y $\sqrt[6]{(x+y)^3(x-y)^2}=\sqrt[6]{(x+y)^3}\times\sqrt[6]{(x-y)^2}$ (почему?). По (1) $\sqrt[6]{(x+y)^3}=\sqrt{x+y}$, $\sqrt[6]{(x-y)^2}=\sqrt[3]{|x-y|}$. Поэтому система (2) равносильна системе

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6\\ \sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{|x-y|}=8\end{cases}$$

которая, в свою очередь, равносильна **совокупности** двух систем:

$$\begin{cases}x-y\geqslant 0\\ \sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6\\ \sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{x-y}=8\end{cases}\qquad(3)$$

$$\begin{cases}x-y<0\\ \sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6\\ \sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{x-y}=-8\end{cases}\qquad(4)$$

Система (3) равносильна системе

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6\\ \sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{x-y}=8\end{cases}\qquad(5)$$

система (4) — системе

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}+\sqrt[3]{x-y}=6\\ \sqrt{x+y}\cdot\sqrt[3]{x-y}=-8\end{cases}\qquad(6)$$

Системы (5), (6) подсказывают подстановку $u=\sqrt{x+y}$, $v=\sqrt[3]{x-y}$.

Решая вспомогательную систему

$$\begin{cases}u+v=6\\ u\cdot v=8\end{cases}$$

получаем два решения: $u_1=4$, $v_1=2$ и $u_2=2$, $v_2=4$. Решая системы

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}=4\\ \sqrt[3]{x-y}=2\end{cases}\qquad\begin{cases}\sqrt{x+y}=2\\ \sqrt[3]{x-y}=4\end{cases}$$

получаем два решения системы (5): (12; 4), (34; —30).

Решая вспомогательную систему

$$\begin{cases}u+v=6\\ u\cdot v=-8\end{cases}$$

получаем тоже два решения: $u_3=3+\sqrt{17}$, $v_3=3-\sqrt{17}$ и $u_4=3-\sqrt{17}$, $v_4=3+\sqrt{17}$. Но система

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}=3-\sqrt{17}\\ \sqrt[3]{x-y}=3+\sqrt{17}\end{cases}$$

решений не имеет (почему?), а система

$$\begin{cases}\sqrt{x+y}=3+\sqrt{17}\\ \sqrt[3]{x-y}=3-\sqrt{17}\end{cases}$$

имеет решение $(103-19\sqrt{17};\ -77+25\sqrt{17})$. Это решение будет единственным решением системы (6).

Объединяя решения систем (5) и (6), получаем три решения системы (2): $\{(12;4),\ (34;-30),\ (103-19\sqrt{17};\ -77+25\sqrt{17})\}$.

Упражнения

1. Решите уравнение

$$\sqrt{(x-3)(x^2-4x+3)}-4\sqrt{(x-4)(x^2-5x+4)}=1-x$$

2. Решите уравнение

$$\sqrt[3]{x+7}+\sqrt[3]{x^2-2x+1}=2.$$

3. Решите неравенство

$$\sqrt{2+\sqrt{4-x^2}}-\sqrt{2-\sqrt{4-x^2}}<\sqrt{2x^2+3x+1}.$$

От редакции. В п. 74 ныне действующего учебного пособия «Алгебра и начала анализа 9—10» (М., «Просвещение», издания 1979 г. и позже) в качестве решений системы (2) даются только пары (12; 4), (34; —30). Это связано с тем, что во время его создания в пособии «Алгебра 8» (М., «Просвещение», 1978) было принято определение корня, по которому при $a<0$ выражение $\sqrt[3]{a}$ (например, $\sqrt[3]{-8}$) не имело смысла. При таком определении корня пара $(103-19\sqrt{17};\ -77+25\sqrt{17})$ не являлась решением системы (2), так как $(103-19\sqrt{17})-(-77+25\sqrt{17})<0$.

Следует понимать, что математические определения являются в какой-то мере **условными**, а выбор того или иного варианта обуславливается его естественностью, удобством на практике.

Разумеется, на предстоящих вступительных экзаменах безопаснее исходить из определения, изложенного в **последнем** издании пособия.

Поправка

В статье Л. **Понтрягина** «Комплексные числа» («Квант», 1982, № 3) в доказательство формулы (11) по вине редакции вкрались опечатки, затрудняющие его понимание. Мы воспроизводим в исправленной форме эту часть доказательства (с. 5—6): «Из формулы (9) непосредственно вытекает

$$iz=i\cdot(x+iy)=x\cdot i+y(-1)=$$
$$=xR_\alpha(1)+yR_\alpha(i)=R_\alpha(x\cdot 1+y\cdot i)=$$
$$=R_\alpha(x+iy)=R_\alpha(z).$$

Таким образом, формула (11) доказана при $\alpha=\frac{\pi}{2}$.

Пусть теперь α — произвольное действительное число. При $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$ получаем

$$z\cdot i=iz=R_\alpha(z)=R_\alpha(\cos\alpha+i\sin\alpha)=$$
$$=\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)=$$
$$=R_\alpha\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=R_\alpha(i).\qquad(12)$$

Таким образом, формула (11) доказана при $z=i$.»

Кроме того, в статье того же автора «Основная теорема алгебры» («Квант», 1982, № 4) по вине типографии на с. 9 напечатано $\overline{f(\bar z)}=f(\bar z)$ вместо правильного $\overline{f(z)}=f(\bar z)$.

Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(механико-математический факультет)

1. В окружности радиуса r на расстоянии $\frac{r}{8}$ от центра проведена хорда. В меньший из образованных сегментов помещены две окружности одинакового радиуса так, что они касаются одна другой и каждая из них касается данной окружности и проведенной хорды. Определите радиус этих двух окружностей.

2. $SABC$ — треугольная пирамида, P — середина ребра AB, Q — точка пересечения медиан грани SBC. Разложите вектор $\overrightarrow{PQ}$ по векторам $\vec{a}=\overrightarrow{SA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{SB}$, $\vec{c}=\overrightarrow{SC}$.

3. Решите уравнение

$$\left[4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+2\sin^2\frac{x}{2}-\cos x\right]^{\frac{1}{2}}=3\cos x.$$

4. При каком значении параметра c из промежутка $[1;4]$ площадь фигуры, ограниченной линиями $y=0$ и $y=|x-c|-\frac{c^2-c+1}{c^2-3c+3}$, будет наибольшей? Когда эта площадь будет наименьшей? Чему равны обе эти площади?

Вариант 2
(физический и радиофизический факультеты)

1. В прямой круговой конус вписан шар радиуса R. Радиус окружности, по которой боковая поверхность конуса касается шара, равен $\frac{3}{5}R$. Найдите площадь боковой поверхности конуса.

2. Решите неравенство

$$\log_{3-x}\frac{1}{|x|}>1.$$

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sin^2 x+\sin^2 y=\frac{1}{2}\\ x-y=\frac{4\pi}{3}.\end{cases}$$

4. При каком a площадь фигуры, ограниченной параболой $y=2x^2$ и прямой $y=a$, равна $\frac{20\sqrt{2}}{3}$?

Вариант 3
(экономический факультет)

1. При каких значениях k кривые $y=2x^2$ и $y=k\cdot\ln x$ имеют одну общую точку?

2. Решите уравнение

$$16\cdot 9^{\log_{\frac{1}{3}}\left(\sin^2 x-\frac{7}{2}\sin 2x+\frac{7}{2}\right)}=1.$$

3. Решите неравенство

$$|\log_{\sqrt{2}}x-2|-|2-\log_2 x|>1.$$

4. Одна вершина равностороннего треугольника совпадает с вершиной квадрата, а две другие его вершины лежат на сторонах квадрата. Сторона квадрата равна $\sqrt{2\sqrt{3}+3}$ см. Найдите площадь треугольника.

Вариант 4
(географический факультет)

1. Основанием пирамиды служит трапеция, боковые стороны и меньшее основание которой равны b, а острый угол равен α. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом φ. Найдите объем пирамиды.

2. Решите уравнение

$$\sin^2 x+\sin^2 2x=\sin^2 3x+\sin^2 4x.$$

3. Решите неравенство

$$\lg(9^{\lg x}+1)>\lg\frac{10}{3}+\lg x\cdot\lg 3.$$

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=\frac{1}{2}(\sin x+\sqrt{1-\cos^2 x})$ на промежутке $[0;\pi]$ и осью абсцисс.

Задачи устного экзамена

1. Изобразите на координатной плоскости множество точек $(x;y)$, координаты которых удовлетворяют условию
а) $\log_{xy}|x|>1$;
б) $\log_{|xy|}x^2<2$.

2. Пусть $f(x)=\ln\frac{1-x}{1+x}$. При каких a и b выполняется равенство $f(a)+f(b)=f\left(\frac{a+b}{1+ab}\right)$?

3. Вычислите $x_1^4+x_2^4$, где x_1 и x_2 — корни уравнения $3x^2-5x-1=0$.

4. Сколько корней имеет уравнение
а) $x^4+x^3=10$?
б) $3^{|x|}\cdot|2-|x||=1$?
в) $x^2-2x-\log_2|1-x|=3$?

5. При каких a уравнение
а) $x^3+ax+2=0$;
б) $x^2\cdot e^x=a$;
в) $|\ln x|-ax=0$;
имеет три корня?

6. Решите уравнение
а) $3^x+1-|3^x-1|=2\log_5|6-x|$;
б) $|x-1|^{\lg^2 x-\lg x^2}=|x-1|^3$;
в) $2\pi\cdot\cos x=|x|-|x-\pi|$.

7. Решите неравенство
а) $\sqrt{25-x^2}<\frac{12}{x}$;
б) $\log_{\frac{1+x^2}{2|x|}}(5-x^2)>0$.

8. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} |x-y^2|=1 \\ |x|-|y|=1. \end{cases}$$

9. Исходя из определения предела последовательности, докажите, что последовательность $a_n=\dfrac{n^2+1}{n^2+2}$ имеет предел 1.

10. Найдите промежутки монотонности и точки экстремумов функции $y=||2-x^2|-2|$ Постройте график этой функции.

11. Найдите промежутки монотонности и точки экстремумов функции а) $y=x\cdot e^{-3x}$, б) $y=\dfrac{x}{\ln x}$.

12. Докажите, что функция $y=3x^4-4x^3+6x^2+ax+b$ при любых a и b имеет только одну экстремальную точку.

13. В какой точке промежутка $]0; \dfrac{\pi}{2}[$ функция $y=\operatorname{tg}x+\dfrac{3}{4}\operatorname{ctg}x$ принимает наименьшее значение?

14. Для каких значений параметра a функция $y=(\sqrt{3}\operatorname{ctg}x+a^2)^3\cdot\operatorname{tg}x$ достигает наименьшего значения на промежутке $]0; \dfrac{\pi}{2}[$ в точке $x=\dfrac{\pi}{3}$?

15. При каком значении параметра a минимальное значение функции $y=x^2-4ax-a^4$ наибольшее?

16. Используя геометрический смысл интеграла, вычислите

$$\int_0^2 \sqrt{2x-x^2}\,dx.$$

17. Вычислите объем пространственной фигуры, образованной вращением вокруг оси абсцисс плоской фигуры, ограниченной графиком функции $y=1-e^{-|x|}$ и прямой $y=\dfrac{2}{3}$.

18. Точки M и N — середины сторон AC и BC треугольника ABC, а точки M_1 и N_1 — середины сторон A_1C_1 и B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Если $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A_1B_1}$, то векторы $\overrightarrow{MM_1}$, $\overrightarrow{NN_1}$ и $\overrightarrow{CC_1}$ компланарные. Докажите это.

19. В треугольнике ABC проведена медиана CM. Прямая l, параллельная (CM), пересекает прямые BC, CA и AB, соответственно, в точках A_1, B_1 и C_1. Докажите, что $\overrightarrow{A_1C_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}$.

20. Если длины сторон треугольника $a<b<c$ образуют арифметическую прогрессию, то $ac=6rR$, где r и R — соответственно, радиусы вписанной и описанной окружностей. Докажите это.

21. Через точку B хорды AB проведена к окружности касательная, а из точки A на нее опущен перпендикуляр AC. Докажите, что величина $\dfrac{|AB|^2}{|AC|}$ не зависит от хорды AB.

22. Предположим, что в n-угольник можно вписать окружность. Пусть r — радиус этой окружности, а P — периметр n-угольника. Докажите, что площадь n-угольника $S=\dfrac{1}{2}Pr$.

23. Если в многогранник можно вписать шар, то его объем V и площадь его поверхности S связаны соотношением $V=\dfrac{1}{3}Sr$ (r — радиус вписанного шара). Докажите это.

24. Если точка $(x; y; z)$ лежит на плоскости $x+y+z=3$, то $x^2+y^2+z^2\geq 3$. Докажите это.

Публикацию подготовили
В. Вышенский, Н. Перестюк, А. Самойленко

Ростовский государственный университет им. М. А. Суслова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(отделение математики механико-математического факультета)

1. В равнобедренную трапецию с тупым углом величины α вписана окружность радиуса r. Найдите длину окружности, описанной около той же трапеции.

2. Напишите уравнения касательных к графику функции $y(x)=-x^2-2x$, если известно, что касательные проходят через точку с координатами $(0; a)$.

3. Решите уравнение

$$5\sin\frac{x}{2}+\cos x-3=0.$$

4. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите угол между векторами $\overrightarrow{DA_1}$ и $\overrightarrow{DM}$, где M — середина ребра CC_1.

Вариант 2
(отделения механики и прикладной математики механико-математического факультета)

1. Найдите величину двугранного угла между боковыми гранями правильной треугольной пирамиды, если двугранный угол, образуемый боковой гранью с основанием, равен α.

2. Два тела совершают прямолинейное движение по законам $s_1(t)=\dfrac{1}{3}t^3+\dfrac{1}{2}t^2+\dfrac{1}{2}t+4$, $s_2(t)=\dfrac{2}{3}t^3+\dfrac{5}{2}t^2+12t+3$, где t — время в секундах, $s_1(t)$ и $s_2(t)$ — пути в метрах, пройденные, соответственно, первым и вторым телами. В какой момент времени, считая от $t=0$, скорость движения первого тела будет в четыре раза меньше скорости второго тела?

3. Решите уравнение
$\cos 7x+\sin^2 2x=\cos^2 2x-\cos x$.

4. Решите неравенство

$$\log_{\frac{x+3}{x-3}}4<2\left(\log_{\frac{1}{2}}(x-3)-\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{x+3}\right).$$

Вариант 3
(физический факультет)

1. Цилиндр, высота которого имеет длину H, а радиус основания равен r, вписан в конус. Найдите величину угла при вершине осевого сечения конуса, при которой объем конуса будет наименьшим.

2. Решите уравнение

$$(\sin x+\cos x)^2=\operatorname{tg} x+\cos 2x.$$

3. Найдите область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{\log_{0,3}|x-2|}{|x|}}.$$

4. Упростите выражение

$$f(x, y)=\left(\frac{\sqrt[4]{x^3y}-\sqrt[4]{xy^3}}{\sqrt{y}-\sqrt{x}}+\frac{1+\sqrt{xy}}{\sqrt[4]{xy}}\right)^{-2}\times\left(1+2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

и вычислите при $x=9$, $y=0{,}04$.

Вариант 4
(экономический факультет)

1. Диагональ прямоугольного параллелепипеда имеет длину d и образует с двумя смежными боковыми гранями конгруэнтные углы, величина которых равна α. Найдите объем параллелепипеда и укажите значение α, при котором этот объем будет максимальным.

2. Решите уравнение

$$2\cos 2x-\sin x+1=0.$$

3. Решите неравенство

$$\log_3\frac{4x^2-1}{x}<1.$$

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$, касательной к ней в точке с абсциссой 2 и осью абсцисс.

Вариант 5
(геолого-географический факультет)

1. Найдите длину высоты цилиндра максимального объема, если цилиндр вписан в шар радиуса R.

2. Решите уравнение

$$3\cos^2 x-\sin^2 x-\sin 2x=0.$$

3. Найдите область определения функции

$$f(x)=\sqrt[6]{x+x^2-2x^3}.$$

Публикацию подготовили
Н. Карапетянц, Н. Коваленко, В. Шутько

Таджикский государственный университет им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(механико-математический факультет)

1. Сечение конуса, параллельное его основанию, проходит через центр описанного около конуса шара. Объем отсеченного конуса равен половине объема конуса. Найдите угол наклона образующей конуса к плоскости его основания.

2. Исследуйте и постройте график функции $y=3x^2-x^3$.

3. Найдите знаменатель и сумму семи членов геометрической прогрессии, если $a_1=36$, $a_7=\frac{4}{81}$.

4. Решите уравнение

$$25^{\sqrt{x}}-124\cdot 5^{\sqrt{x}}=125.$$

5. Решите неравенство

$$\log_3 x+\log_{\sqrt{3}} x+\log_{\frac{1}{3}} x<6.$$

Вариант 2
(физический факультет)

1. В равнобедренной трапеции $ABCD$ $|AB|=|CD|=a$ см. Диагональ делит угол при нижнем основании, величина которого равна α, пополам. Найдите площадь трапеции.

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$, касательной к ней в точке с абсциссой 2 и осью абсцисс.

3. Решите систему

$$\begin{cases}\log_y x+\log_x y=\frac{5}{2}\\ x\cdot y=27.\end{cases}$$

4. Решите уравнение

$$\frac{1}{\sin^2 x}-\frac{3}{\cos^2 x}=1.$$

5. Решите неравенство

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x+2}}<3^{-x}.$$

Вариант 3
(геологический факультет)

1. Дан тетраэдр $ABCD$, ребро которого равно a. Через вершину B и середину ребер AD и DC проведена плоскость. Найдите периметр фигуры, получающейся в сечении.

2. Исследуйте функцию $y=(5+\cos x)\times(12-\cos x)$ на экстремум.

3. Найдите величину x, если

$$\left[\left(6\frac{3}{7}-\frac{\frac{3}{4}\cdot x-2}{0{,}35}\right)\cdot 2{,}8-1\frac{3}{4}\right]:\frac{1}{20}=35.$$

4. Решите систему

$$\begin{cases}3^x\cdot 2^y=972\\ \log_{\sqrt{3}}(x-y)=2.\end{cases}$$

5. Решите неравенство

$$\sin x+\sin 2x<0.$$

Вариант 4
(планово-экономический факультет)

1. В треугольнике ABC проведите прямую A_1B_1, параллельную основанию AB, так, чтобы площадь прямоугольника $A_1B_1C_1D_1$ оказалась наибольшей (C_1 и D_1 лежат на AB).

2. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=-x^2+2x+8$ и осью абсцисс.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}x^2+2xy+y^2-x-y=6\\ x-2y=3.\end{cases}$$

4. Решите уравнение

$$2\sin^2 x-3\cos x=3.$$

5. Решите уравнение

$$x^{1-\frac{1}{3}\lg x^2}=10^{-\frac{2}{3}}.$$

Публикацию подготовил
Б. Алиев

Харьковский государственный университет им. А. М. Горького

Физика

Задачи устного экзамена

1. С горы, высота и основание которой равны $h=2$ м и $l=5$ м соответственно, скатываются санн и останавливаются, пройдя по горизонтали расстояние $s=35$ м от основания горы. Определите коэффициент трения, считая его постоянным на всем пути.

2. Велосипедист должен проехать по треку, имеющему форму «мертвой петли», радиус которой $R=8$ м. С какой высоты он должен начать разгон, чтобы не упасть в верхней точке петли?

3. Лестница опирается на вертикальную стену и горизонтальный пол. Коэффициент трения между лестницей и стеной $\mu_1=0{,}5$, а между полом и лестницей $\mu_2=0{,}4$. Определите наименьший угол наклона лестницы, при котором она еще может оставаться в равновесии.

4. С какой высоты должно упасть тело, плотность которого $\varrho=0{,}4$ г/см^3, чтобы погрузиться в воду на глубину $H=6$ см? Сопротивлением воды и воздуха можно пренебречь.

5. С какой скоростью должна вылететь из ружья свинцовая дробинка, чтобы при ударе о неупругую стену она расплавилась? Температура дробинки перед ударом $t_1=27$°С. Считать, что кинетическая энергия дробинки полностью идет на изменение ее внутренней энергии. Температура плавления свинца $t_2=327$°С, удельная теплоемкость $c=140$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления $\lambda=0{,}25\cdot 10^5$ Дж/кг.

6. Баллон емкостью $V=0{,}04$ м^3 наполнен сжатым воздухом при температуре $t=20$°С до давления $p=4{,}63\cdot 10^7$ Н/м^2. Какой объем воды можно вытеснить этим воздухом из цистерны подводной лодки в море на глубине $H=30$ м, если температура воды $t_0=5$°С и плотность морской воды $\varrho=1030$ кг/м^3?

7. Нагреватель кипятильника состоит из двух секций сопротивлением $R=4$ Ом каждая. Кипятильник питают от аккумуляторной батареи, ЭДС которой $\mathscr{E}=12$ В. Вода в кипятильнике закипает за одно и то же время как при последовательном, так и при параллельном соединении элементов нагревателя. Определите силу тока, проходящего через аккумулятор при коротком замыкании.

8. Напряжение на шинах электростанции $U_0=100$ кВ. Расстояние до потребителя $l=500$ км. Станция должна передать потребителю мощность $P=100$ кВт. Потери напряжения не должны превышать 5% ($k=0{,}05$). Вычислите ток в проводах, сечение проводов и массу меди, необходимой для проводки. Удельное сопротивление меди $\varrho=0{,}17\cdot 10^{-7}$ Ом·м, плотность меди $\varrho_0=8960$ кг/м^3.

9. Какова истинная глубина реки, если при определении на глаз в вертикальном направлении глубина ее кажется равной $h=2$ м? Показатель преломления воды $n=1{,}33$.

10. Медный шарик, удаленный от других тел, облучают монохроматическим излучением, длина волны которого $\lambda=2\cdot 10^{-7}$ м. До какого максимального потенциала зарядится шарик, излучая фотоэлектроны? Работа выхода электрона с поверхности меди $A=4{,}5$ эВ. Постоянная Планка $h=6{,}6\cdot 10^{-34}$ Дж · с; заряд электрона $e=1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл.

Публикацию подготовили
Н. Беляев, Ю. Кирочкин, В. Приходько

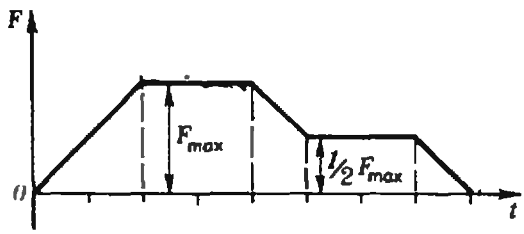
Ворошиловградский государственный педагогический институт им. Т. Г. Шевченко

Физика

Задачи устного экзамена

1. Сравните среднюю скорость поршня двигателя мотоцикла Иж-Юпитер-3 в режиме максимальной мощности ($n=5300$ об/мин) с максимальной скоростью движения мотоцикла ($v_{max}=125$ км/ч). Ход поршня $s=58$ мм.

2. Сила F, действующая на тело в горизонтальном направлении, изменяется так, как показано на рисунке. Ее максимальное значение в два раза больше силы трения скольжения. Постройте график изменения скорости тела с течением времени, если начальная скорость $v_0=0$.



3. Идеальный газ переводят изотермически из состояния 1 в состояние 2 ($V_2<V_1$), затем его переводят изобарно в состояние 3 и возвращают изохорно в состояние 1. Положительную или отрицательную работу совершает газ в каждом из процессов и целиком за цикл? Имеет ли место теплообмен между газом и окружающей средой?

4. На сколько градусов нагреется стальная пластинка размером 5×5 см при сверлении в ней отверстия с подачей $l=0{,}5$ мм/об, если вращающий момент $M=8$ Н · м. Считать, что на нагревание пластинки идет половина выделяемого при сверлении количества теплоты. Удельная теплоемкость стали $c=460$ Дж/(кг · К), плотность $\varrho=7{,}8\times 10^3$ кг/м^3.

5. Два постоянных и один переменный резисторы подключаются к источнику с напряжением $U=6$ В один раз параллельно друг другу, другой — последовательно. Сопротивление каждого постоянного резистора $r=2$ Ом, сопротивление переменного $R=1-3$ Ом. Какая схема позволяет в большем диапазоне изменять силу тока путем изменения сопротивления переменного резистора?

Чему равна чувствительность каждой из схем (в амперах на ом)? Сопротивление проводов не учитывать.

6. При каком соотношении сопротивлений внешнего и внутреннего участков цепи с источником постоянного тока во внешнем участке будет выделяться максимальная мощность?

7. Энергия ионизации молекул воздуха $E_и = 2{,}4 \cdot 10^{-20}$ Дж. Вызовет ли ионизацию воздуха электрон, летящий со скоростью $v = 2{,}5 \cdot 10^6$ м/с, если его масса $m = 9{,}1 \times 10^{-31}$ кг?

8. Два электрона влетают в однородные магнитные поля с индукциями $B_1 = 0{,}1$ Тл и $B_2 = 0{,}2$ Тл перпендикулярно линиям индукции. Сравните периоды их обращения по окружностям, описываемым в магнитных полях.

9. В фокусе собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 10$ см находится точечный источник света. На расстоянии $l = 1$ м от линзы перпендикулярно ее главной оптической оси помещен экран. Сравните освещенности в центре светового пятна на экране без линзы и с линзой. Потерями света пренебречь.

10. Сколько фотонов видимого света излучает за 1 секунду 75-ваттная лампа накаливания, если считать, что в видимый свет переходит $\eta = 1/25$ часть потребляемой лампой энергии? Длину волны видимого света принять равной $\lambda = 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м. Постоянная Планка $h = 6{,}62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с, скорость света $c = 3 \cdot 10^8$ м/с.

Публикацию подготовили
А. Проказа, В. Ромбах

Киевский государственный педагогический институт им. А. М. Горького

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(физико-математический факультет)

1. Два куска латуни имеют массу 30 кг. Первый кусок содержит 5 кг чистой меди, а второй кусок — 4 кг. Сколько процентов меди содержит первый кусок латуни, если второй содержит меди на 15% больше первого?

2. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник, боковые стороны которого имеют длину a и образуют угол α. Двугранные углы при всех сторонах основания равны β. Определите площадь полной поверхности пирамиды.

3. Дано: $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 1$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°$. Найдите угол между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$.

4. Исследуйте на экстремум функцию $f(x) = \dfrac{6(x-1)}{x^2+3}$.

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=0$ и $y=2+x-x^2$.

Вариант 2
(факультет общетехнических дисциплин)

1. Моторная лодка прошла против течения реки 16 км и возвратилась назад, затратив на обратный путь на 40 мин. меньше, чем на путь против течения. Найдите скорость в стоячей воде, если известно, что скорость течения реки 2 км/ч.

2. В конус с углом φ между образующей и плоскостью основания вписан шар. Определите отношение объема конуса к объему шара.

3. Исследуйте на экстремум функцию $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y=0$, $x=1$ и $x=2$.

5. Решите уравнение
$$2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^{x-2} = 150.$$

Публикацию подготовили
С. Левищенко, З. Слепкань

Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(факультет прикладной математики)

1. Решите неравенство
$$8^{x+\frac{1}{3}} - 9 \cdot 4^x + 2^{x+2} > 0.$$

2. Решите уравнение
$$\log_2(\operatorname{ctg} x + \operatorname{tg} 3x) - 1 = \log_2(\operatorname{tg} 3x).$$

3. Постройте график функции $y = 2\cos^2 x + \sin^2 x$. Найдите точки пересечения этого графика с прямой $y = \dfrac{5}{4}$.

4. В основании правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной a. Боковые грани пирамиды наклонены к плоскости основания под углами величиной 45°. Вершина конуса совпадает с точкой S, окружность основания конуса касается плоскости основания пирамиды, и центр этой окружности лежит на ребре $[SA]$. Найдите наибольшее возможное значение объема такого конуса.

5. Найдите все значения $a \in \mathbf{R}$, при которых уравнение
$$a^3 + a^2 \cdot |a+x| + |a^2x+1| = 1$$
имеет не менее четырех различных решений, являющихся целыми числами.

Вариант 2
(экзамен по алгебре и началам анализа на остальных факультетах)

1. Дайте определение равносильных уравнений. Сформулируйте и докажите обратную теорему Виета.

2. Решите уравнение
$$\sqrt{x^2+8} = 2x+1.$$

3. Решите неравенство

$$|\log_x 4+1|<3.$$

4. Постройте график функции $y=(1-x)\times(1+x)^2$ на отрезке $[-2; 2]$. В каких точках этого графика надо провести к нему касательные, чтобы они проходили через точку $(-1; 0)$?

5. При каких значениях $a\in\mathbf{R}$ найдутся такие значения $b\in\mathbf{R}$, что числа $4+25^b$, a, 5^{-b} будут являться последовательными членами геометрической прогресин?

Вариант 3
(экзамен по геометрии и тригонометрии на остальных факультетах)

1. Выведите формулу объема конуса.

2. Докажите тождество

$$\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

3. Решите уравнение

$$4\sin^2 x-4\cos x\cdot\cos 3x=1.$$

4. Векторы $\vec{a}=(3; 1)$ и $\vec{b}$, лежащие на координатной плоскости, имеют равные длины. Найдите координаты вектора $\vec{b}$, если длина вектора $\vec{b}-2\vec{a}$ равна $\sqrt{26}$ и вектор $\vec{b}-2\vec{a}$ составляет с осью Oy острый угол.

5. В треугольной пирамиде $ABCD$ все ребра имеют равные длины. Точка M — середина ребра AD, точка O — центр треугольника ABC, точка N — середина ребра AB, и точка K — середина $[CD]$. Найдите величину угла между прямыми (MO) и (KN).

Задачи устного экзамена
(факультет прикладной математики)

1. Разность двух натуральных чисел равна 21, а наименьшее общее кратное первого числа и утроенного второго числа равно 180. Найдите эти числа.

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3-(y+1)^2=\sqrt{x-y} \\ x+8y=\sqrt{x-y-9}. \end{cases}$$

3. Решите уравнение

$$\cos 3x+\sin\left(2x-\frac{7\pi}{6}\right)=-2.$$

4. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 см и 4 см. Через середину меньшего катета и середину гипотенузы проведена окружность, касающаяся гипотенузы. Найдите длину этой окружности.

5. Пирамида задана координатами своих вершин S (0; 0; 2), A (0; 0; 0), B (1; 0; 0), C (0; 1; 0). Найдите координаты точки M, лежащей на оси z, и координаты точки N, лежащей в плоскости (SBC), если известно, что $\overrightarrow{MN}=\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0\right)$.

Физика

Образцы задач письменного экзамена

1. Прямолинейное движение тела вдоль оси X описывается зависимостью: $x=-6t^5+30t$, где x измеряется в метрах, t — в секундах. Найдите зависимости скорости и ускорения тела от времени. Что произойдет с телом через $\tau=1$ с от начала движения?

2. Христиан Гюйгенс считал: если шар на невесомой и нерастяжимой нити вращается в вертикальной плоскости, то нить должна обязательно выдерживать силу, равную, по крайней мере, ушестеренной силе тяжести шара. Верно ли это утверждение?

3. В цилиндрический сосуд налита ртуть и поверх нее — масло. Масса масла в 2 раза меньше массы ртути. Сосуд заполнен до высоты $h=30$ см. Определите давление на дно сосуда, если плотность ртути $\rho_1=13{,}6\times10^3$ кг/м³, а плотность масла $\rho_2=0{,}9\times10^3$ кг/м³.

4. В салоне самолета объемом $V=600$ м³ при полете поддерживаются температура $t_1=20$°С и относительная влажность $\varphi_1=60\%$. При посадке самолета температура в салоне возросла до $t_2=30$°С. Сколько воды необходимо испарить, чтобы влажность осталась прежней? Давление насыщенных паров при температурах t_1 и t_2 равно, соответственно, $p_{н1}=2352$ Н/м² и $p_{н2}=4214$ Н/м².

5. В сосуде находится одноатомный газ при температуре $t=17$°С и давлении $p=1$ атм. Объем сосуда $V=3$ л. Газ изохорически нагревают на $\Delta t=100$°С. Определите изменение внутренней энергии газа. Какое количество теплоты было передано газу в этом процессе?

6. Какой заряд прошел через сечение проводника, если известно, что электрический ток в этом проводнике равномерно возрастал от нуля до $I=5$ А в течение $t=10$ с?

7. Источник тока с ЭДС $\mathscr{E}=1{,}5$ В замкнут на сопротивление $R=3$ Ом. При этом по цепи протекает ток $I=0{,}15$ А. Определите ток короткого замыкания.

8. В камере Вильсона, помещенной в однородное магнитное поле с индукцией $B=1{,}5$ Тл, альфа-частица, влетая перпендикулярно направлению поля, оставляет след в виде дуги окружности радиусом $R=2{,}7$ м. Найдите импульс и кинетическую энергию частицы. Масса альфа-частицы $m=6{,}7\cdot10^{-27}$ кг, ее заряд $q=3{,}2\cdot10^{-19}$ Кл.

9. Предмет находится на расстоянии $d=40$ см от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=20$ см. Определите местоположение изображения. Полностью охарактеризуйте изображение.

10. Атом водорода при переходе из одного стационарного состояния в другое испускает последовательно два кванта с длинами волн $\lambda_1=40510$ Å и $\lambda_2=972{,}5$ Å (1 Å$=10^{-10}$ м). Определите изменение энергии атома водорода. Постоянная Планка $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с.

Публикацию подготовили
В. Виноградов, В. Закалюкин

Московский автомобильно-дорожный институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(первый экзамен)

1. Найдите x, если

$$\frac{x\cdot(\sqrt[4]{4})^3}{\sqrt{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3}=4^2\cdot\frac{1}{(\sqrt[4]{4})^3}.$$

2. Решите уравнение

$$\frac{2x+1}{x}+\frac{4x}{2x+1}=5.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{x+5}+\sqrt[4]{x+5}-12=0.$$

4. Решите уравнение

$$\sqrt{5x-5}+\sqrt{10x-5}=\sqrt{15x-10}.$$

5. Решите уравнение

$$\lg 8-\lg(x+7)=\lg 2-\lg\sqrt{x+7}.$$

6. Вычислите A, если $A=2^B$ и

$$B=3\log_8 9-4\log_{\frac{1}{16}}\frac{1}{6}.$$

7. Найдите середину отрезка, в котором выполнено неравенство

$$2x^2-7(\sqrt{x})^2<4.$$

8. Дано: $\cos 3\alpha=\frac{1}{4}$. Вычислите $A=$ $=49\,\mathrm{ctg}^2\left(6\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$.

9. Найдите 25-й член арифметической прогрессии 3, 8, ...

10. В равнобедренной трапеции боковая сторона равна средней линии, а периметр равен 48. Найдите боковую сторону.

Вариант 2
(второй экзамен)

1. Найдите в градусах, если $45°<x<90°$ и

$$\sin(270°+3x)=\cos 5x.$$

2. Вычислите значение производной $f'(0)$ для

$$f(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x^2}}+\frac{5}{2}x.$$

3. Найдите на отрезке $[-1;2]$ наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x)=(x+1)^2(x-2)+2.$$

4. Вычислите интеграл

$$\int_0^{\frac{1}{4}}\left(1-\frac{\pi}{\cos^2\pi x}\right)dx.$$

5. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2$, $y=2-x$.

6. Даны вершины треугольника A (0; 0), B (1; —3), C (2; —2). Найдите квадрат длины его медианы, проведенной из вершины B.

Физика

Письменный экзамен

Вариант

1. С высоты $h=100$ м над поверхностью Луны вертикально вниз брошено тело с начальной скоростью $v_0=2$ м/с. Через сколько времени тело достигнет поверхности Луны? Ускорение свободного падения на Луне $g_Л=1{,}6$ м/с^2.

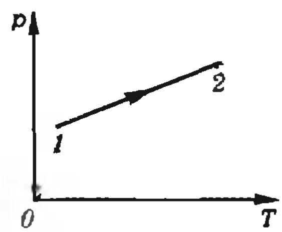
2. Чтобы тело массой $m=5$ кг не соскальзывало с вертикальной стены, его следует придавить к ней с минимальной силой $F=500$ Н, направленной перпендикулярно плоскости стены. Найдите коэффициент трения тела о стену. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

3. На одном конце неподвижной длинной тележки массой $m_т=20$ кг стоит человек массой $m_ч=60$ кг. С какой скоростью будет двигаться тележка, если человек пойдет вдоль нее со скоростью $v=2$ м/с относительно тележки?

4. На какой глубине в воде давление в 5 раз больше атмосферного, которое равно $p=10^5$ Па? Плотность воды $\varrho=10^3$ кг/м^3, ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

5. Какое количество теплоты надо затратить, чтобы $m=0{,}1$ кг воды, взятой при температуре $T=273$ К, довести до кипения и обратить в пар? Температура кипения воды $T_к=373$ К, удельная теплоемкость $c=$ $=4200$ Дж/(кг · К), удельная теплота парообразования $r=22{,}6\cdot 10^5$ Дж/кг. Ответ дать в кДж (1 кДж$=10^3$ Дж).

6. При нагревании газа получена зависимость давления от абсолютной температуры, приведенная на рисунке. Как изменился при этом объем газа? Укажите номер правильного ответа: 1) увеличился, 2) не изменился, 3) уменьшился, 4) для решения задачи данных недостаточно.



7. Расстояние от точечного заряда увеличилось в 7 раз. Во сколько раз уменьшилась напряженность электрического поля в данной точке?

8. Два проводника включены в цепь параллельно; сопротивление первого проводника в 10 раз больше второго. Найдите отношение мощности, потребляемой первым проводником, к мощности, потребляемой вторым.

9. Определите длину волны света, энергия кванта которого $W=3{,}6\cdot 10^{-19}$ Дж. Постоянная Планка $h=6{,}6\cdot 10^{-34}$ Дж · с, скорость света в вакууме $c=3\cdot 10^8$ м/с. Ответ дать в нанометрах (1 нм$=10^{-9}$ м).

10. Перед двояковыпуклой линзой с фокусным расстоянием $F=1$ м находится предмет высотой $h=2$ м на расстоянии $d=3$ м. Найдите высоту изображения предмета.

Публикацию подготовили
О. Мишина, Ю. Рябов, А. Соловьев, А. Тимофеев

Московский архитектурный институт

Математика

Задачи устного экзамена

1. Доказать тождество

$\sin^2\alpha\cdot\cos^4\alpha=$
$$=\frac{1}{16}+\frac{1}{32}\cos 2\alpha-\frac{1}{16}\cos 4\alpha-\frac{1}{32}\cos 6\alpha.$$

2. Выражение

$\log_m A\cdot\log_n A+\log_n A\cdot\log_p A+\log_p A\cdot\log_m A$

представить в виде произведения.

3. Построить график функции $y=\frac{|x|}{x}$.

4. Решить уравнение

а) $\lg(2^x+x-41)=x(1-\lg 5)$;

б) $\cos x+\cos 2x+\cos 3x+\cos 4x+\cos 5x=0$.

5. Решить систему уравнений
$$\begin{cases}\sqrt[x-y]{x+y}=2\sqrt{3}\\(x+y)\cdot 2^{y-x}=3.\end{cases}$$

6. Решить неравенство

а) $0{,}11^{\log_5\frac{4x-1}{3x+2}}>1$;

б) $3\sqrt{6+x-x^2}>4x-2$.

7. Найти

а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{1-\cos x}$;

б) $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\cos 2-\cos 2x}{x^2-|x|}$.

8. Найти наибольший объем треугольной пирамиды $MABC$, в основании которой лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC ($|AB|=|BC|$), если $[MB]\perp\perp(ABC)$ и $|MA|=\sqrt{3}$.

9. Вычислить объем фигуры, полученной при вращении вокруг оси абсцисс плоской фигуры, ограниченной кривой $y=\cos x$ и осью абсцисс, $x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Груз массой $m=50$ кг перемещается по горизонтальной плоскости под действием силы $F=500$ Н, направленной под углом $\alpha=30°$ к горизонту. Коэффициент трения груза о плоскость $\mu=0{,}5$. Определите ускорение движения груза.

2. Шарик, привязанный нитью к подвесу, описывает в горизонтальной плоскости окружность, имея постоянную скорость. Определите скорость шарика и период его вращения по окружности, если длина нити $l=1$ м, а ее угол с вертикалью составляет $\alpha=45°$.

3. Деревянный брусок лежит на наклонной плоскости. С какой силой нужно прижать брусок к наклонной плоскости, чтобы он оставался на ней в покое? Масса бруска $m=4$ кг, длина наклонной плоскости $l=1$ м, высота $h=0{,}6$ м. Коэффициент трения бруска о плоскость $\mu=0{,}4$.

4. Два шара массой $m_1=4$ кг и $m_2=6$ кг скреплены стержнем, масса которого $m_3=2$ кг. Определите положение общего центра масс, если радиус первого шара $R_1=6$ см, второго $R_2=8$ см, длина стержня $l=30$ см.

5. Тело массой $m=100$ кг поднимают постоянной силой на высоту $h=15$ м в течение $t=10$ с. Определите работу этой силы. Начальная скорость тела равна нулю.

6. Объем пузырька воздуха по мере всплывания его со дна озера на поверхность увеличивается в три раза. Какова глубина озера?

7. Стальной брус при температуре $t_1=0°$С помещен вплотную между каменными неподвижными стенами. Найдите напряжение материала бруса при температуре $t_2=20°$С. Коэффициент линейного расширения стали $\alpha=1{,}1\cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$; модуль Юнга $E=2\cdot 10^{11}$ Н/м^2.

8. На окружности радиусом $R=6$ см на одинаковом расстоянии друг от друга расположены три заряда: $q_1=q_2=2/3\cdot 10^{-8}$ Кл и $q_3=-2/3\cdot 10^{-8}$ Кл. Определите напряженность электрического поля в центре окружности.

9. Два проводника, соединенных параллельно, имеют сопротивление $R_1=6$ Ом и $R_2=10$ Ом. При прохождении через них тока в первом проводнике выделяется количество теплоты $Q_1=4\cdot 10^4$ Дж. Определите, какое количество теплоты выделится за это время во втором проводнике и в обоих проводниках, соединенных последовательно (при том же напряжении).

10. Вогнутое зеркало дает увеличенное изображение. Увеличение $\Gamma=3$. Расстояние между предметом и его изображением $l=30$ см. Определите фокусное расстояние зеркала.

Публикацию подготовили
Ю. Мещеряков, Ю. Морозов, В. Смирнов

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Рабочий A может окончить некоторую работу на 5 дней позже, чем рабочий B, и на 9 дней позже, чем рабочий C. Рабочие A и B, работающие вместе, могут окончить эту работу за столько дней, за сколько ее может закончить рабочий C. За сколько дней каждый рабочий в отдельности может закончить эту работу?

2. Решите уравнение
$$\sin 2x-\sin x=\cos x-\frac{1}{2}.$$

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=\ln(2x)-x^2+x$ на промежутке $\left[\frac{1}{2};2\right]$.

4. Вычислите (сделав рисунок) площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x-\frac{x^2}{2}$,

$y=2-x$, $y=\frac{1}{2}$.

5. Основание параллелепипеда — квадрат со стороной b, а одно из боковых ребер образует равные углы α со сторонами основания. Известно, что в параллелепипед можно вписать шар, касающийся всех его граней. Найдите длину бокового ребра параллелепипеда и радиус вписанного шара.

Вариант 2

1. Определите бесконечную геометрическую прогрессию, в которой второй член равен 6, а сумма равна 0,125 суммы прогрессии, составленной из квадратов ее членов.

2. Решите уравнение

$$\mathrm{tg}^2 x-\mathrm{ctg}^2 x=\frac{4\sqrt{3}}{\sin 2x}.$$

3. Решите уравнение

$$\log_2\left(x+\frac{5}{3}\right)=1-\log_2 3x.$$

4. Вычислите (сделав рисунок) площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{4}{x}$, $y=4-x$, $x=1$.

5. В сферу вписана правильная четырехугольная пирамида; в пирамиду вписана правильная четырехугольная призма, одно из оснований которой лежит в плоскости основания пирамиды, а вершины другого основания принадлежат боковым ребрам пирамиды. Длина высоты призмы равна b, а ребро ее основания имеет длину $2b$. При какой высоте пирамиды радиус описанной около нее сферы будет наименьшим? Найдите это наименьшее значение радиуса.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Два тела брошены с одной и той же скоростью под углом α и $(\pi/2-\alpha)$ к горизонту. Определите отношение наибольших высот подъема этих тел.

2. Чаша в форме полусферы радиусом $R=0{,}8$ м вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси. Вместе с чашей вращается шарик, лежащий на ее внутренней поверхности. Расстояние от шарика до нижней точки чаши равно ее радиусу. Определите угловую скорость вращения чаши.

3. Из баллона объемом $V=10^{-3}$ м³, наполненного водородом, происходит утечка газа. Вначале давление в баллоне было $p_1=1{,}5\cdot 10^7$ Па, а температура $t_1=17$°C. Через некоторое время давление упало до $p_2=1{,}2\cdot 10^7$ Па, а температура повысилась до $t_2=27$°C. Найдите массу вытекшего газа. Молярная масса водорода $\mu=2\cdot 10^{-3}$ кг/моль. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К).

4. Сосуд с маслом, диэлектрическая проницаемость которого $\varepsilon=5$, помещен в вертикальное однородное электрическое поле. В масле находится во взвешенном состоянии алюминиевый шарик диаметром $d=3$ мм, имеющий заряд $q=10^{-7}$ Кл. Определите напряженность электрического поля, если плотность алюминия $\varrho_a=2{,}6\cdot 10^3$ кг/м³, а масла $\varrho_м=0{,}9\cdot 10^3$ кг/м³.

5. Никелирование пластины с поверхностью $S=100$ см² продолжается $t=4$ ч при токе $I=0{,}4$ А. Атомная масса никеля $A=58{,}7\cdot 10^{-3}$ кг/моль, его валентность $n=2$, а плотность $\varrho=8{,}9\cdot 10^3$ кг/м³. Определите толщину слоя никеля, который покроет за это время пластину. Постоянная Фарадея $F=9{,}65\cdot 10^4$ Кл/моль.

6. В однородном магнитном поле с индукцией $B=0{,}05$ Тл находится проволочный контур, плоскость которого перпендикулярна магнитному полю. Площадь контура $S=20$ см². Контур присоединен к баллистическому гальванометру. При повороте контура в положение, когда его плоскость параллельна магнитному полю, через гальванометр проходит заряд $q=2\cdot 10^{-4}$ Кл. Найдите сопротивление всей цепи.

7. На нижнюю поверхность горизонтальной плоскопараллельной пластины с показателем преломления $n=1{,}5$ нанесли черную точку. Наблюдатель, смотрящий сверху, видит эту точку на расстоянии $l=2$ см от верхней поверхности. Определите толщину пластины.

8. Высота предмета $H=5$ см. Выпуклая линза дает на экране изображение этого предмета высотой $h_1=15$ см. Не трогая линзы, предмет отодвинули на $l=1{,}5$ см дальше от линзы и, передвинув экран, вновь получили резкое изображение предмета, но теперь — высотой $h_2=10$ см. Найдите фокусное расстояние линзы.

9. Радиус первой орбиты электрона в атоме водорода $r_1=0{,}53$ Å. Найдите напряженность электрического поля ядра на этом расстоянии и кинетическую энергию электрона на этой орбите. Заряд электрона $e=1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл. Электрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}85\cdot 10^{-12}$ Ф/м (1 ангстрем $=1$ Å $=10^{-10}$ м.)

10. Определите энергию, которая выделяется при делении одного ядра урана $^{235}_{92}$U, если при делении всех ядер, содержащихся в уране массой $m=1$ г, выделяется энергия $E=8{,}2\cdot 10^{10}$ Дж. Число Авогадро $N_A=6{,}02\cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$.

Публикацию подготовили
Н. Гладков, Л. Паршев

2-й Московский государственный медицинский институт им. Н. И. Пирогова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. В конусе сумма длин высоты и образующей равна 4 дм. Какова должна быть длина образующей конуса, чтобы его объем был наибольшим?

2. Напишите уравнение касательной к графику функции $y=x^3-x$ в точке с абсциссой, равной (-1). Вычислите площадь фигуры, ограниченной этой касательной и графиком функции.

3. Решите уравнение

$$1+2\cdot\log_{x+2}5=\log_5(x+2).$$

4. Представьте в виде произведения $1-\cos 1+\sin 1$.

Вариант 2

1. Найдите наибольший объем правильной треугольной пирамиды, у которой апофема $2\sqrt{3}$ дм.

2. Найдите числа A и B такие, чтобы функция вида $f(x)=A\cdot\sin 2x+B$ удовлетворяла условиям $f'(0)=4$ и $\int\limits_0^{2\pi} f(x)dx=3$.

3. Решите неравенство

$$\log_x 2\cdot\log_{2x} 2\cdot\log_2(4x)>1.$$

4. Решите уравнение

$$4\sin^4 x+\sin^2 2x=1.$$

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Архимедова сила для жидкостей и газов.

2. Фотоэлектрический эффект. Исследования А. Г. Столетова по фотоэлектрическому эффекту. Законы фотоэффекта. Уравнение Эйнштейна. Фотоэлементы и их применение.

3. В сосуд, содержащий $m_1=500$ г воды при температуре $t=15°C$, бросили $m_2=50$ г мокрого снега. Температура воды в сосуде понизилась на $\Delta t=5°C$. Сколько воды было в снеге? Потерями тепла пренебречь. Удельная теплота плавления льда $\lambda=330$ кДж/кг, удельная теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг·К).

4. Какого сечения надо взять медный провод для устройства линии от электростанции до потребителя, расположенного на расстоянии $l=1$ км, чтобы передать потребителю мощность $P=8$ кВт? Напряжение на станции $U=130$ В, допустимая потеря напряжения на линии $k=8\%$. Удельное сопротивление меди $\rho=1{,}7\cdot10^{-8}$ Ом·м.

Вариант 2

1. Сложение сил. Момент силы. Условие равновесия тела с неподвижной осью вращения.

2. Явление термоэлектронной эмиссии. Электрический ток в вакууме. Электронные лампы — диод и триод. Использование диода для выпрямления переменного тока. Электронно-лучевая трубка.

3. Полый шар с жесткой оболочкой, масса которой $m=10$ г, наполнен водородом. Объем водорода $V=10$ л. Температура водорода и окружающего шар воздуха $t=0°C$. Найдите давление водорода в шаре, если результирующая подъемная сила шара равна нулю. Атмосферное давление $p_0=10^5$ Па, молярная масса воздуха $\mu_в=29\cdot10^{-3}$ кг/моль, универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль·К).

4. Оптическая система состоит из двух собирающих линз с фокусными расстояниями $F_1=20$ см и $F_2=10$ см. Расстояние между линзами $l=30$ см. Светящаяся точка находится на расстоянии $d=30$ см от первой линзы. На каком расстоянии от второй линзы получится изображение?

Вариант 3

1. Абсолютная и относительная влажности.

2. Дисперсия света. Спектроскоп. Инфракрасная и ультрафиолетовая части спектра. Спектры излучения. Спектры поглощения. Понятие о спектральном анализе.

3. Пуля массой $m=10$ г, летевшая горизонтально со скоростью $v=500$ м/с, ударилась в свободно подвешенный деревянный брусок массой $M=10$ кг и застряла в нем, углубившись на $l=20$ см. Найдите среднюю силу сопротивления дерева движению пули.

4. Однородный медный шар диаметром $d=1$ см помещен в масло. Плотность масла $\rho_0=800$ кг/м^3. Чему равен заряд шара, если в однородном электрическом поле шар оказался взвешенным в масле? Напряженность электрического поля направлена вертикально вверх и равна $E=36\,000$ В/м. Плотность меди $\rho=8600$ кг/м^3.

Вариант 4

1. Тепловые двигатели. Физические основы их работы. КПД теплового двигателя и его максимальное значение.

2. Электролиз. Законы Фарадея для электролиза.

3. Наклонная плоскость составляет с горизонтом угол $\alpha=30°$. По ней пускают снизу вверх тело, которое в течение $t_1=2$ с проходит расстояние $l=16$ м, после чего соскальзывает вниз. Сколько времени длится соскальзывание тела вниз? Каков коэффициент трения между поверхностью и телом?

4. Высота пламени горелки $h=2{,}5$ см. Линза дает на экране изображение этого пламени высотой $H_1=7{,}5$ см. Не трогая линзы, горелку отодвинули на $l=2$ см дальше от линзы и, передвинув экран, вновь получили резкое изображение пламени, но теперь высотой $H_2=5$ см. Найдите фокусное расстояние линзы.

Вариант 5

1. Законы Бойля — Мариотта, Гей-Люссака, Шарля. Графики этих законов. Понятие об абсолютном нуле температуры. Абсолютная температурная шкала. Уравнение состояния идеального газа.

2. Экспериментальные методы регистрации заряженных частиц: камера Вильсона, счетчик Гейгера, фотоэмульсионный метод.

3. На гладкой горизонтальной плоскости лежали два шара, между которыми находилась сжатая пружина. Затем пружине дали возможность распрямиться, вследствие чего шары приобрели некоторые скорости. Вычислите их, зная, что массы шаров равны $m_1=2$ кг и $m_2=4$ кг, а энергия сжатой пружины $E=6$ Дж. Массу пружины не учитывать.

4. Два резистора сопротивлением $R=200$ Ом каждый подключаются к источнику тока сначала последовательно, а затем параллельно. Мощность, выделяемая на каждом резисторе, оказалась одинаковой в обоих случаях. Найдите ЭДС источника, если при последовательном соединении резисторов ток в цепи $I=0{,}5$ А.

Публикацию подготовили
Б. Алешин, М. Блохина

Московский технологический институт легкой промышленности

Математика

Письменный экзамен

Вариант

1. Упростите и вычислите при $x=3$ выражение
$$\frac{\sqrt[3]{x\cdot\sqrt{x}}+\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x}}}{1+\sqrt[6]{x}}\cdot\sqrt{x}.$$

2. Определите значение первого члена арифметической прогрессии, если ее разность составляет 25% от значения последнего члена, являющегося девятнадцатым. Значение разности прогрессии равно 12.

3. Решите уравнение
$$\frac{x^2-3{,}5x+1{,}5}{x^2-x-6}=0.$$
Ответ запишите в виде десятичной дроби.

4. Найдите наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству
$$\frac{2x+1}{3}-\frac{3x-1}{2}>1.$$

5. Решите уравнение
$$x-1=\sqrt{\frac{x}{2}}.$$

6. Найдите наименьшее целое положительное значение x, удовлетворяющее неравенству
$$\sqrt{x^2+16x+64}>20.$$

7. Из A в B со скоростью 3,6 км/ч вышел пешеход; через 1 ч 15 мин навстречу ему из B вышел другой пешеход со скоростью 4,8 км/ч. Чему равно расстояние AB, если второй пешеход прибыл в A одновременно с приходом первого в B?

8. Три пионерских звена собрали для библиотеки 65 книг. Первое звено собрало на 10 книг меньше, чем второе, а третье — 30% того числа книг, которые собрали первое и второе звено вместе. Сколько книг собрало второе звено?

9. В магазин привезли 1600 кг яблок. В первый день было продано 30% всех яблок. Во второй день — 40% от оставшегося на второй день количества яблок. В третий день было продано 25% от оставшегося на третий день количества яблок. Сколько яблок осталось в магазине после трех дней продажи?

10. Решите уравнение
$$5^{2x}\cdot 6^{2x}=900.$$

11. Решите уравнение
$$\log_4 2^{4x}=2^{\log_2 4}.$$

12. Найдите целое число, удовлетворяющее неравенству
$$\log_{0{,}3}(4x+1)<\log_{0{,}3}(x^2+4).$$

13. Упростите выражение
$$\frac{1}{3}\cdot\frac{\sin x+\sqrt{3}\cos x}{\sin(x+60^\circ)}$$
до числового ответа с двумя знаками после запятой, учитывая правила округления.

14. Вычислите без таблиц с тремя знаками после запятой
$$\cos 20^\circ\cdot\cos 40^\circ\cdot\cos 80^\circ$$

15. Найдите корень уравнения
$$3\,\mathrm{tg}^2\,2x+\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,(270^\circ+2x)=0,$$
принадлежащий интервалу $]0^\circ, 90^\circ[$; вычислите его в градусах.

16. Найдите наименьший корень уравнения
$$\mathrm{tg}\,2x+\mathrm{tg}\,4x=0,$$
принадлежащий интервалу $]0^\circ; 90^\circ[$; ответ запишите в градусах.

17. Определите периметр трапеции с отношением оснований 8:3, если тангенсы углов при большем основании равны 4/3 и 3/4, а высота трапеции равна 12 единицам.

18. В круг вписаны правильный треугольник и квадрат. Найдите с точностью до третьего знака после запятой, используя правила округления, отношение площади треугольника к площади квадрата, приняв $\cos 30^\circ=0{,}866$

19. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной призмы, если известны ее объем 36 и высота 4.

20. Определите объем шара, вписанного в цилиндр, высота которого равна диаметру основания. Объем цилиндра 128π. Принять $\pi=3{,}14$. Ответ запишите в виде десятичной дроби с двумя знаками после запятой, используя правила округления.

Публикацию подготовил *В. Юргов*

Уральский электромеханический институт инженеров железнодорожного транспорта

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Через вершину конуса под углом φ к его основанию проведена плоскость сечения. Расстояние от центра основания конуса до плоскости сечения равно d и составляет половину образующей. Найдите объем конуса

2. Решите уравнение
$$\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(x+\frac{7}{6}\pi\right)=$$
$$=2\left(\cos\frac{5}{3}\pi-\sin^2 x\right).$$

3. Решите уравнение
$$\lg(3^{2\sqrt{x+5}-x}-4)=1-\lg 2.$$

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-2x+3$ и $y=3+4x-x^2$.

Вариант 2

1. Высота правильной треугольной призмы равна h. Отрезок, соединяющий центр верхнего основания с серединой стороны нижнего основания, составляет с плоскостью основания угол α. Найдите полную поверхность призмы.

2. Решите неравенство

$$1<\frac{3x^2-7x+8}{x^2+1}<2.$$

3. Найдите объем фигуры, образованной вращением вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, граница которой задана уравнениями $y=\sqrt{x}$, $y=\frac{1}{x}$, $x=2$ и $y=0$.

4. Докажите тождество

$$\sin^2 2\alpha-\cos\left(\frac{\pi}{3}-2\alpha\right)\cdot\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{4}.$$

Задачи устного экзамена

1. Первый член арифметической прогрессии равен 429, разность ее равна —22. Сколько нужно взять членов этой прогрессии, чтобы их сумма была равна 3069?

2. Найдите область определения функции

$$y=\frac{\sqrt{4-x}}{\lg(x-2)}.$$

3. Решите уравнение

$$\sqrt{5-\log_2 x}=3-\log_2 x.$$

4. Найдите решения уравнения $\cos^2 x=1$, для которых $x^2<20$.

5. Найдите $\sin 2\alpha$, если $\cos\alpha$ удовлетворяет условию

$$25\cos^2\alpha+5\cos\alpha-12=0$$

и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

6. Решите неравенство

$$\frac{x+1}{x+5}+\frac{x}{x-1}<\frac{2x^2+5x}{x^2+4x-5}.$$

7. На кривой $y=-\frac{1}{2}x^2+3x-4$ найдите точку, касательная в которой параллельна прямой $y=2x-1$.

8. Точка движется по закону $s(t)=-2t^2+8t+7$ до тех пор, пока ее скорость не обратится в нуль. Найдите пройденный при этом путь.

9. Вычислите интеграл $\int_0^3(3x-x^2)\,dx$ и объясните его геометрический смысл.

10. Даны точки $A(2;1;-1)$, $B(3;2;-1)$ и $C(3;1;0)$. Найдите величину угла между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{AC}$.

Публикацию подготовил
Э. Поповский

Плоскость в пространстве

(Начало см. на с. 38)

На этот раз искомый угол α мы найдем при помощи угла β между вектором, перпендикулярным к (BC_1D), и вектором $\vec{BD_1}$. По определению («Геометрия 9—10», § 37) $0°\leqslant\alpha\leqslant 90°$. Очевидно (рис. 3 на с. 39), $\alpha=90°-\beta$ или $\alpha=90°-(180°-\beta)=\beta-90°$. Поэтому $\sin\alpha=|\cos\beta|$. Ответ. $\arcsin\frac{\sqrt{6}}{9}$.

Задача 9 (МИФИ, 1981). *Уравнения плоскостей α и β есть $2x+3y+4z-8=0$ и $4x+y+3z-6=0$, $p=\alpha\cap\beta$. а) Определите координаты точки пересечения прямой p с плоскостями xOy и yOz. б) Определите величину угла между прямой p и плоскостью xOz.*

Координаты точки $A=p\cap xOy$ являются решением системы

$$\begin{cases}2x+3y+4z-8=0\\4x+y+3z-6=0\\z=0.\end{cases}$$

Координаты точки $B=p\cap yOz$ — решением системы

$$\begin{cases}2x+3y+4z-8=0\\4x+y+3z-6=0\\x=0.\end{cases}$$

Теперь, если α — искомый угол и β — угол между векторами $\vec{AB}$ и $\vec{n}=(1;0;1)$, то $\sin\alpha=|\cos\beta|$. Ответ. а) $A(1;2;0)$, $B(0;0;2)$. б) $\arcsin\frac{2}{3}$.

Упражнения

1 (МИНХ, 1980). Точка $P(2;-1;1)$ служит основанием перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость. Составьте уравнение этой плоскости.

2 (МИНХ, 1980). Составьте уравнение плоскости, которая проходит через точку $(2;-3;3)$ параллельно плоскости xOy.

3 (МИНХ, 1979). Напишите уравнение плоскости, проходящей через точки $A(4;0;0)$ и $B(0;0;4)$ и параллельной оси Oy.

4 (МЭСИ, 1981). Вычислите расстояние от плоскости $2x+2y-z+15=0$ до сферы $x^2+y^2+z^2-4=0$.

5 (МИФИ, 1978). Даны четыре точки: $A(1;-2;2)$, $B(1;4;0)$, $C(-4;1;1)$ и $D(-5;-5;3)$. а) Докажите, что эти точки лежат в одной плоскости. б) Определите величину угла между прямыми (AC) и (BD).

6 (МИСиС, 1980). В пространстве даны векторы $\vec{MA}=(2;1;-1)$, $\vec{MB}=(-2;3;5)$ и $\vec{MC}=(3;5;1)$. Найдите величину двугранного угла, образованного плоскостями, проходящими, соответственно, через векторы $\vec{MA}$, $\vec{MB}$ и $\vec{MA}$, $\vec{MC}$.

«Советы» абитуриентам

Поступление в вуз состоит из двух событий: первое — выбор института, второе — сдача вступительных экзаменов.

Выбор института

Здесь следует искать золотую середину между возможностью осчастливить человечество на выбранном поприще и желанием заниматься делом, интересным себе самому. В идеальном случае желание и возможность совпадают. Рассмотрим пример, когда они, казалось бы, противоречат друг другу.

Ваша способность читать стихи в манере Качалова и говорить голосом Папанова ясно указывают дорогу на театральные подмостки. А вы во время чтения баллады Жуковского представляете себе крыло самолета и формулу другого Жуковского. И вообще вам нравится складывать, вычитать, умножать, делить, извлекать корни, логарифмировать и вычислять проценты. В этом случае можно порекомендовать институт, готовящий специалистов по бухгалтерскому учету для культурно-просветительных учреждений.

Выбор вуза можно производить на основе опроса общественного мнения — в масштабах семьи, класса, школы и т. п. Причем, если вам все одинаково интересно, то поступайте в тот институт, который рекомендует большинство опрашиваемых, а если все одинаково неинтересно — то не утруждайте себя сдачей вступительных экзаменов.

Экзамены

При сдаче экзамена в принципе возможны следующие четыре ситуации.

1. Экзаменуемый и экзаменатор хорошо знают вопрос. Этот случай встречается достаточно редко, поэтому его рассмотрение интереса не представляет. Экзаменуемый рассказывает, экзаменатор слушает и они расстаются довольные собой и друг другом.

2. Экзаменуемый и экзаменатор плохо знают вопрос. Что будет говорить при этом абитуриент, существенного значения не имеет. Важно только не отклоняться от темы. При ответе необходимо внимательно следить за выражением лица экзаменатора. Ответ следует закончить за мгновение до того, как в его глазах промелькнет понимание или, боже сохрани, интерес.

При ответе не следует опровергать общеизвестные истины. Например, не нужно долго настаивать на том, что сумма углов треугольника больше 180°. После непродолжительной дискуссии согласитесь с мнением экзаменатора. И трижды подумайте, прежде чем говорить, что вы имели в виду треугольник на сфере, так как экзаменатор может заинтересоваться сферической геометрией.

При ответе на дополнительные вопросы будьте осторожны с фразой: «У нас в учебнике этого нет». Экзаменатор может вытащить учебник и вы окажетесь в невыгодном положении — экзаменатор сможет пользоваться учебником, а вы — нет.

3. Экзаменуемый знает вопрос хорошо, а экзаменатор плохо. Случай встречается так редко, что еще ждет своего исследователя. Абитуриенту можно рекомендовать рассказать только самую суть, не останавливаясь на подробностях, чтобы не привить экзаменатору комплекса неполноценности.

4. Экзаменуемый знает вопрос плохо, а экзаменатор хорошо. Наиболее часто встречающаяся ситуация.

Если вашей целью является тройка, то попытайтесь убедить экзаменатора, что заданный вопрос — ваш любимый и вы знаете так много, что «жаль драгоценного времени уважаемого экзаменатора». Кроме того, вам «мешает говорить радость по поводу того, что на вступительных экзаменах выпала возможность побеседовать со специалистом на свою любимую тему». Лучше всего заставить экзаменатора высказаться по данному вопросу, а вам в этом случае надо только восторженно поддакивать.

Если вам не удалось убедить экзаменатора в своей заинтересованности данным вопросом — попытайтесь его разжалобить. Но плакать не надо — экзаменатор и не такое видел. Вы можете сказать, что этот институт закончили ваши прадедушка, дедушка, бабушка, отец, мать и два дяди (здесь можно показывать семейные фотографии и свою в детстве), что вся семья собралась сейчас у выхода и ждет вашей высокой оценки. К хорошему эффекту приводит фраза: «Не можете же Вы поставить мне двойку в той самой аудитории, в которой познакомились мои дедушка с бабушкой!»

Получить четыре при рассматриваемой ситуации гораздо труднее, чем три. Если экзаменатор хочет поставить вам двойку или тройку — попросите дополнительный вопрос и надолго задумайтесь. Когда экзаменатор снова подойдет к вам с вопросом «Ну как?»— махните рукой и с сожалением (обязательно с сожалением!) выдавите: «Ладно, ставьте четыре». Иногда ставят.

Пятерку в рассматриваемой ситуации можно получить очень редко и только на первом экзамене. Магическая фраза звучит так: «Я знаю, что все равно не пройду по конкурсу, но я не хочу позора. Пусть у меня будет хотя бы одна пятерка». Попытка на следующем экзамене убедить экзаменатора, что нехорошо ставить отметку, отличную от 5, после того как «Ваш коллега высоко оценил мои знания на предыдущем экзамене», к желаемому эффекту не приводит.

Таким образом, мы рассмотрели все возможные ситуации. Ваша задача теперь состоит только в том, чтобы определить, к какому именно случаю следует отнести вашу ситуацию. Кстати, если вы быстро и безошибочно определяете уровень знаний экзаменатора,— может быть, вам лучше стать психологом или криминалистом.

Мы надеемся, что при поступлении в вуз вам не придется вспоминать наши рекомендации, приводимые в пунктах 2, 3, 4.

Ни пуха, ни пера!

П. Бернштейн

Г. Звенигородский

VI Всесоюзная летняя школа юных программистов

Уже дважды в нашем журнале публиковались материалы о Всесоюзной летней школе юных программистов (1979, № 12 и 1980, № 12). Сегодня мы публикуем рассказ об очередной Летней школе, проводившейся с 25 июля по 10 августа 1981 г. Вместе с лучшими учениками Заочной школы программирования на нее были приглашены победители конкурса, объявленного нашим журналом в № 1 за 1981 г.

Половину контингента Шестой школы составляли ребята, уже знакомые с техническими возможностями Вычислительного центра по прошлой Летней школе и почти год работавшие над программами, которые им хотелось опробовать на ЭВМ за две короткие недели Летней школы. А среди «новичков» большинство составляли призеры конкурса программистских работ («Квант», 1981, № 1). Не удивительно поэтому, что общий уровень Летней школы намного вырос.

Как и в прошлые годы, научная конференция Летней школы проходила в два приема: 28 июля выступали докладчики, имевшие возможность еще до Летней школы отладить на ЭВМ свои программы, а 7 августа — те, кто смог поработать с машиной только во время Летней школы.

Научим ЭВМ учебным языкам!

Сильнейшие работы школьников были посвящены задачам системного программирования; в основном описывались реализации учебных языков. Новосибирские десятиклассницы *Наташа Глаголева* и *Оля Хорошевская* рассказали о новых, самостоятельных реализациях языков Робик и Рапира. Эти языки (и имена докладчиц) хорошо знакомы читателям нашего раздела. Девятиклассник *Женя Забокрицкий* (Ленинград) за время Летней школы успел разработать на языке Алгол-ГДР интерпретатор команд учебной ЭВМ mix, описанной Д. Кнутом в книге «Искусство программирования». *Феликс Толстов* (Свердловск, 7 кл.) рассказал о двух интерпретаторах для машины Поста: один из них он разработал в Свердловске (на ЭВМ МИР-2, язык аналитик), а второй успел написать и отладить в Новосибирске (ЭВМ БЭСМ-6, язык сетл). *Ася Салихова* (Новосибирск, 10 кл.) рассказала о первом этапе реализации учебного языка форс-I для студентов, разработанного в Московском университете, а *Миша Черкашин* (Обнинск, 8 кл.) подготовил комплект процедур для работы с текстами в учебных программах на фортране.

Конечно, не все системы, реализацией которых занимались школьники, предназначены для обучения. *Виталий Цикоза* и *Женя Налимов* (Новосибирск, 10 кл.) занимались вполне производственным, хотя и довольно необычным языком, описывающим интегральную микросхему. И совсем уж экзотическим языком занимался *Женя Каленкович* (Новосибирск, 10 кл.): язык этот был предназначен для анализа музыкальных произведений.

Программа для микроЭВМ

Наш журнал уже не раз писал о том, как быстро возрастает роль **микроЭВМ** о самых разных областях применения вычислительной техники. Но писать для этих машин программы куда труднее, чем для машин других классов. Большие операционные системы и трансляторы с языков высокого уровня здесь развернуть трудно — памяти не хватает. Программист, переходящий с больших ЭВМ на «микро», лишается преимуществ языков высокого уровня. Но это не испугало юных программистов — немало работ было посвящено именно микроЭВМ. *Женя Яблонский* и *Олег Бойченко* (Москва, 10 кл.) разработали для такой машины программу редактирования текста на экране терминала. *Вита Волкова* (Новосибирск, 7 кл.) подготовила по заказу одного из отделов ВЦ СО АН комплекты процедур для вычисления стандартных математических функций: синуса, косинуса, логарифма и т. д. Для каждой функции она составляла несколько разных процедур: с использованием ряда Тейлора, многочленов Чебышева, с применением формул приведения или без них. А новосибирские школьницы *Аня Вайнштейн* (6 кл.), *Света Урюпина* (7 кл.) и *Женя Васенева* (8 кл.) провели большую работу по проверке точности и скорости работы этих процедур.

Павел Земцов (Новосибирск, 7 кл.) доложил о реализованной им на «Электронике-60» графической системе, напоминающей по возможностям «НУ ПОГОДИ», о которой мы рассказали в «Кванте» № 12 за 1980 г. А наш гость из Чехословакии — выпускник гимназии *Рихард Гавлик* рассказал о целой серии графических и игровых программ для мини-ЭВМ. И еще одну графическую программу — «Дисней» — описал в докладе *Леонид Кузин* (Новосибирск, 10 кл.). Программа позволяет формировать рисунки из звездочек или любых других символов на тех ЭВМ, где нет графопостроителя.

ЭВМ в школе, в цехе, в лаборатории...

Многие школьники посвятили свои доклады решению задач «промышленного» направления. *Катя Левина* (Саранск, 10 кл.) подготовила две программы для расчета профиля кулачковых механизмов. Семиклассник *Максим Гусев* и восьмиклассница *Лариса Жма-*

кина из Московской областной школы музыкантских воспитанников представили тщательно разработанную программу для контроля за сбытом электроэнергии: машина производит все расчеты с абонентами и даже сама печатает письма-напоминания для должников.

Программа *Марины Глушковой* (Омск, 9 кл.) позволяет рассчитать нормативную трудоемкость изготовления детали и определить расценку на ее изготовление. *Женя Музыченко* (Новосибирск, 8 кл.) подготовил программу для начисления зарплаты педагогам, с учетом числа учебных часов по расписанию, количества замен уроков, изменения ставки в зависимости от педагогического стажа и т. д. А самая юная участница школы — десятилетняя москвичка *Маша Бубнова* — составила программу, которая проверяет качество поверхности деталей и выдает рекомендации по их дальнейшей обработке.

Несколько докладов было посвящено моделированию химических процессов. Впрочем, только один из них, подготовленный группой десятиклассниц из Куйбышева (докладывала *Наташа Наварова*), имел производственное значение. Три другие программы предназначались для решения химических уравнений по правилам, изучаемым в школе. Самой интересной из них была программа *Гули Абдрахмановой* (пос. Курайли Актюбинской области, 10 кл.) «Моделирование гидролиза солей».

Больше всего докладов собрали две заключительные секции конференции: «Применение ЭВМ в учебном процессе» и «Моделирование игр». Многие доклады были подготовлены новичками. Машину обучали самым разным играм — от угадывания двузначного числа до международных шашек и даже шахмат. А иногда машина сама начинала обучать и экзаменовать участников и даже преподавателей Летней школы. Диалоговую программу, проверяющую знания по разным предметам, разработала уральская делегация (докладывал *Андрей Габбасов*, Уфа, 9 кл.).

3,14159265358979323846264338327950288419...

А теперь несколько слов о докладах, ближе к «чистой» математике, чем к программированию. *Сергей Баталов* (Арзамас, 10 кл.) выступал на конференции дважды. В первом докладе он рассказал о вычислении математических констант (π, e, $\lg e$) с высокой точностью. Англичанин Вильям Шенкс потратил 20 лет жизни на вычисление 707 десятичных знаков π, из которых только 527 оказались правильными. Шенкс опубликовал свои результаты в 1873 году. В наши дни десятиклассник Сергей Баталов затратил два месяца на разработку и отладку программы, а вычислительная машина — чуть больше часа на работу по этой программе. Результат — 50 тысяч знаков.

Во втором докладе Сергей рассказал о работе, выполненной за время Летней школы. Нашим читателям, вероятно, знаком трехчлен Эйлера x^2-x+41. При натуральных x от 1 до 40 значениями этого трехчлена будут простые числа. Сергей разработал программу для поиска других трехчленов, позволяющих получить подряд не менее 40 простых чисел. Работая с этой программой, он получил еще два трехчлена, формирующих по 40 чисел: трехчлен $4x^2-162x+1681$ позволяет получить те же числа, что и трехчлен Эйлера, но в другом порядке, а $9x^2-249x+1763$ выдает другую последовательность простых чисел.

Три десятиклассника — *Игорь Морылев* из Киева, *Леонид Либкин* и *Илья Шкроб* из Москвы, работая независимо друг от друга, решали одну и ту же задачу: обучить ЭВМ дифференцированию сложных функций, записанных в виде текстовых формул. Их программы, хотя и основаны на разных принципах, работают одинаково хорошо, и жюри конкурса так и не смогло отдать предпочтение какой-либо из них.

Летняя школа окончена — Летняя школа продолжается

...И вот догорел прощальный костер. 10 августа член-корреспондент АН СССР Андрей Петрович Ершов вручил награды победителям конкурса.

Но Школа на этом не закончилась!

Вместе с гостями Академгородка отправились в дальний путь две «десантные группы» новосибирцев. Отправились проводить занятия и конференции, которые стали прямым продолжением VI Летней школы.

В состав одной из таких групп вошли десятиклассницы *Наташа Глаголева* и *Аня Шкляева* и семиклассница *Вита Волкова*. Они поехали в пионерлагерь «Таежный», что в восьмидесяти километрах от Красноярска вниз по Енисею, где в это время проходила Краевая летняя школа по естественным наукам. Девочкам предстояло принять участие в организации факультатива по программированию для участников этой Школы, в проведении конференции школьников. Одиннадцать школьников стали участниками второй «десантной» группы, которая выехала в г. Ангарск (Иркутская область). Там состоялась встреча учащихся двух школ юных программистов — Ангарской и Новосибирской.

Ангарская школа юных программистов организована на базе Ангарского электромеханического завода (АЭМЗ) и межшкольного учебно-производственного комбината. Первые свои задачи ребята решают на ЭВМ «Минск-32», на ней они получают основные навыки операторской работы. Большой интерес вызвали у новосибирцев две программы, разработанные ангарчанами: с помощью одной из них «Минск-32» воспроизводит музыкальные мелодии, а результат работы другой программы — портрет Джоконды, нарисованный на АЦПУ.

Новосибирские школьники провели для ангарчан консультации по графической системе Шпага, рассказали о ее новых возможностях и помогли ребятам составить первые рисующие программы. В Ангарске пока нет своего графопостроителя и эти программы новосибирские школьники забрали с собой, чтобы поставить на ЭВМ, отладить и послать ангарским друзьям получившиеся рисунки.

Заочная физико-техническая школа при МИСиС

При Московском ордена Октябрьской Революции и ордена Трудового Красного Знамени институте стали и сплавов организуется новое отделение Всесоюзной заочной математической школы — Заочная физико-техническая школа. Занятия в ЗФТШ (МИСиС) начнутся с 15 октября 1982 года.

Цель работы школы — оказание помощи учащимся в углубленном изучении программного материала средней школы по физике и математике.

Программа обучения по математике полностью соответствует курсу ВЗМШ. Курс физики разработан преподавателями кафедры теоретической физики Московского института стали и сплавов и соответствует уровню требований на вступительных экзаменах в вузы, прежде всего — в МИСиС.

Работа школы будет организована следующим образом. Шесть-семь раз в год учащимся будут рассылаться контрольные задания по физике и математике вместе с краткими сведениями по теории и примерами решения задач. Присланные в ЗФТШ (МИСиС) контрольные работы будут проверяться прикрепленными преподавателями и, вместе с оценками и комментариями, отправляться учащимся. В качестве годового задания учащимся десятых классов будут разосланы материалы вступительных экзаменов в МИСиС за прошлые годы.

Несколько слов о самом институте. Московский институт стали и сплавов готовит инженерные и научные кадры для металлургической промышленности и ряда новых отраслей науки и техники. На многих кафедрах обучение строится так, что студенты уже с 3—4 курса приобщаются к самостоятельной научной работе как на самих кафедрах института, так и в базовых академических и отраслевых научно-исследовательских институтах. Работая над курсовыми и дипломными работами, которые обычно входят в план научных исследований соответствующих кафедр, студенты широко используют возможности институтского вычислительного центра. Он оборудован мощными современными ЭВМ, позволяющими работать с ними в режиме прямого диалога с помощью дисплея.

Поступив в Московский институт стали и сплавов, вы сможете заниматься теорией и экспериментом в области физики твердого тела и сверхпроводимости, созданием и исследованием современных сплавов с новыми физическими и химическими свойствами, металловедением, рентгенографией, физикой и химией поверхности, физикой полупроводников, вычислительной математикой и многими другими интересными и актуальными проблемами. В лабораториях МИСиС материалы с новыми свойствами исследуются в широком диапазоне температур — от окрестности абсолютного нуля до нескольких тысяч градусов — и давлений — от сверхвысокого вакуума до десятков тысяч атмосфер.

В 1982/83 учебном году в ЗФТШ (МИСиС) начинают работать восьмые и девятые классы. Для зачисления в них необходимо прислать заявление с указанием фамилии, имени, отчества, полного адреса, профессии и занимаемой должности родителей, а также приложить справку из школы с указанием класса и годовых оценок по физике и математике. Заявление и справки нужно выслать не позднее 1 октября по адресу: 117049, Москва, Ленинский проспект, 4, МИСиС, ЗФТШ.

Вечерняя физическая школа при МГУ

Вечерняя физическая школа (ВФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 8, 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ВФШ — помочь учащимся глубже изучить физику в объеме школьной программы. Занятия проводятся в форме лекций, читаемых раз в две недели, и еженедельных семинаров. Кроме того, учащиеся смогут посетить научные лаборатории факультета и на лекциях ведущих ученых ознакомиться с основными *направлениями* современной физики.

Успешно закончившие обучение получают справку об окончании ВФШ.

Прием в ВФШ производится по результатам собеседования, которое будет проводиться, начиная с 23 сентября. Для поступления в школу необходимо лично заполнить заявление в комитете ВЛКСМ физфака МГУ (с приложением двух фотокарточек размером 3×4 см). Заявления можно подавать с 5 по 21 сентября ежедневно, кроме воскресенья, с 16 до 18 часов.

Адрес ВФШ: 117234, Москва, В-34, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ВФШ.

Список читателей, приславших правильные решения

(Начало см. на с. 34)

08, 12, 16, 17; *В. Криман* (Винница) 14, 16, 17; *С. Крюковский* (Владивосток) 12, 20, 22; *А. Кубышкин* (Киев) 08, 10, 15, 16, 18, 20; *А. Кудрявцев* (Нефтекамск) 08, 14, 20, 21; *А. Кузнецов* (Сыктывкар) 14; *О. Кузьмин* (Ташкент) 22; *Г. Ландсберг* (п. Протвино Московской обл.) 14, 17, 20, 22; *И. Ласкин* (Алексин) 10; *А. Латынин* (Киев) 09; *И. Липшиц* (Винница) 16, 17; *М. Маловичко* (Северодонецк) 08 — 10, 12, 16, 17; *Х. Матчанов* (Хорезмская обл. Уз. ССР) 09; *А. Миленин* (Люберцы) 09, 10, 12, 15 — 17; *А. Мильман* (Одесса) 16, 17; *А. Мингалеев* (Уфа) 09, 12; *В. Молчанов* (Киев) 12; *П. Морозов* (Тула) 14 — 17, 20 — 22; *Д. Мукушев* (с. Арнат Семипалатинской обл.) 16, 17; *Б. Мурзахметов* (Джезказган) 14, 18, 20; *Ю. Наливайко* (Краслава) 20; *К. Немченко* (Донецк) 08, 20; *К. Никамов* (Салават) 14 — 18, 20; *Л. Никитин* (Великие Луки) 08, 15, 18, 20, 22; *Е. Обелец* (Запорожье) 16, 17, 20; *Д. Овечкин* (Набережные Челны) 08, 16; *К. Панкратов* (Куйбышев) 18; *В. Пентегов* (Киев) 08 — 11, 12, 14 — 17, 20, 22; *С. Пильтяй* (Ангарск) 08, 09, 12, 14, 16 — 18, 20, 22; *А. Пироженко* (Мытищи) 08 — 22; *Е. Поланкер* (Ереван) 16; *М. Половинченко* (Киев) 09, 14, 16; *И. Примак* (Винница) 14, 16; *М. Пустильник* (Свердловск) 09, 12, 17, 21, 22; *А. Радионов* (п. Никольское Ленинградской обл.) 08 — 10, 12, 14 — 16, 18, 20 — 22; *М. Рахманов* (Новосибирск) 08, 09, 12, 15, 16, 20 — 22; *М. Розенвайн* (Киев) 09, 10, 16; *Л. Ростока* (Хуст) 10, 22; *Л. Салахова* (Сумгаит) 09, 17; *Ю. Самохин* (Москва) 08, 09, 16; *Д. Свирида* (Москва) 08 — 10, 12, 14 — 17, 20 — 22; *С. Сейдаханова* (Алма-Ата) 22; *Ф. Серженко* (Запорожье) 09, 10; *С. Симанов* (Долгопрудный) 20; *Ю. Синюков* (ст. Селезни Тамбовской обл.) 15, 16, 20, 22; *И. Сираков* (Ямбол, НРБ) 08, 09, 17, 20; *С. Сипливец* (Волгоград) 20, 22; *С. Сириченко* (Киев) 14, 18; *М. Сливка* (с. Ефремовка Павлодарской обл.) 08, 12, 20 — 22; *С. Смук* (Киев) 21; *И. Соколова* (Феодосия) 18; *С. Соломко* (Мелеуз) 08, 09, 12, 16; *Ю. Талденко* (Сумы) 08, 09, 12, 18, 21; *А. Терещенко* (Киев) 09, 12 — 18, 20, 22; *А. Тищенко* (Днепропетровск) 08, 12, 14, 17, 18, 20; *О. Третьяков* (Омск) 09, 12, 15; *Г. Трунов* (Москва) 08, 09, 12, 15, 16; *Н. Федин* (Омск) 08, 14 — 16, 18, 20, 21; *В. Фельдман* (Саратов) 16, 21, 22; *А. Хельвас* (Киев) 09, 12, 16, 20, 22; *А. Ходарин* (п. Нововоронежский Воронежской обл.) 12, 14, 15, 22; *Т. Христофорова* (Воронеж) 14; *С. Черкас* (Минск) 08, 20, 22; *С. Черниводкий* (Глазов) 16; *А. Шатов* (Киев) 08, 12, 14, 20 — 22; *Л. Шейнкман* (Москва) 17, 18; *Р. Шигалов* (Казань) 18; *П. Шихалиев* (с. Беюк-Дахна Аз. ССР) 17, 20; *А. Шрамков* (п. Волоконовка Белгородской обл.) 10, 16, 17; *А. Шугай* (Запорожье) 09, 14 — 16; *М. Шуклин* (Пермь) 08, 09, 12, 14, 17, 20, 21; *Ю. Щедрин* (Брянск) 14, 16, 22; *Б. Юдин* (Люберцы) 16, 20, 22; *В. Ярош* (Ленинград) 08 — 10, 14 — 16.

Ответы, указания, решения

Плоскость в пространстве

1. $2x-y+z-6=0$.
2. $z-3=0$.
3. $x+z-4=0$.
4. 3.
5. б) $\frac{\pi}{2}$.
6. $\arccos\frac{3\sqrt{330}}{55}$. Решение. В задаче, очевидно, подразумевается двугранный угол с ребром (MA), гранями которого являются полуплоскость плоскости MAB, содержащая точку B, и полуплоскость плоскости MAC, содержащая точку C (рис. 1). Чтобы найти нужный угол, спроектируем вектор $\vec{MB}$ на $\vec{MA}$:

$$\vec{MB_1}=\frac{|\vec{MB}|\cos(\widehat{\vec{MB},\vec{MA}})}{|\vec{MA}|}\vec{MA}. \qquad (*)$$

Домножая числитель и знаменатель на $|\vec{MA}|$, получаем $\vec{MB_1}=\frac{\vec{MB}\cdot\vec{MA}}{|\vec{MA}|^2}\vec{MA}=\frac{-6}{6}\vec{MA}=-\vec{MA}=(-2;-1;1)$ (таким образом, рисунок 1 оказался в каком-то смысле неверным: на самом деле, вектора $\vec{MB_1}$ и $\vec{MA}$ противоположно направлены; однако это никоим образом не влияет на верность равенства (*)); далее находим вектор $\vec{MB_2}=\vec{MB}-\vec{MB_1}=(0;4;4)$; тогда $\vec{MB_2}\perp\vec{MA}$ и точка B_2 лежит на грани рассматриваемого двугранного угла. Аналогично находим вектора $\vec{MC_1}=\frac{\vec{MC}\cdot\vec{MA}}{|\vec{MA}|^2}\vec{MA}=\left(\frac{10}{3};\frac{5}{3};-\frac{5}{3}\right)$ (таким образом, на рисунке 1 есть еще одна неточность: на самом деле, $|\vec{MC_1}|>|\vec{MA}|$; это опять-таки не влияет на верность наших выкладок; если у вас есть потребность, сделайте верный рисунок) и $\vec{MC_2}=\vec{MC}-\vec{MC_1}=\left(-\frac{1}{3};\frac{10}{3};\frac{8}{3}\right)$. Угол между векторами $\vec{MB_2}$ и $\vec{MC_2}$ — искомый. $\cos(\vec{MB_2},\vec{MC_2})=\frac{\vec{MB_2}\cdot\vec{MC_2}}{|\vec{MB_2}|\cdot|\vec{MC_2}|}=\frac{3\sqrt{330}}{55}$.

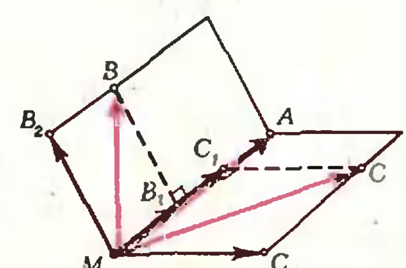


Рис. 1.

О сокращении показателей

1. $\left\{1{,}5,\ \frac{191-\sqrt{281}}{50}\right\}$. Указание. $\sqrt{u^2}=|u|$.

2. $\{-7, 1\}$. Указание. $\sqrt[6]{u^2}=\sqrt[3]{|u|}$; $(u+v)^3=u^3+v^3+3uv(u+v)$.

3. $\left[-2; -\frac{3}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}; 2\right]$. Указание. $2(2\pm\sqrt{4-x^2})=(\sqrt{2+x}\pm\sqrt{2-x})^2$. Поэтому данное неравенство равносильно неравенству

$$\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}-|\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}|<\sqrt{2(2x^2+3x+1)};$$

которое равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x>0 \\ 2\sqrt{2-x}<\sqrt{2(2x^2+3x+1)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<0 \\ 2\sqrt{2+x}<\sqrt{2(2x^2+3x+1)}. \end{cases}$$

Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $\frac{3}{8}r$. Указание. См. рис. 2.

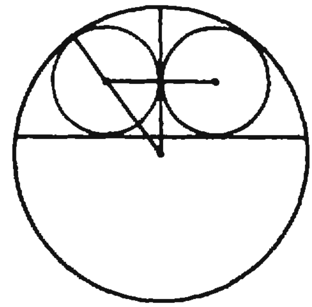


Рис. 2.

2. $\vec{PQ}=-\frac{1}{2}\vec{a}-\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$. Указание. См. § 22 пособия «Геометрия 9—10».

3. $x=\pm\arccos\frac{1}{4}+2\pi k$ $(k\in \mathbf{Z})$.

4. $\max\limits_{[1,4]} S(c)=S(2)=9$, $\min\limits_{[1;4]} S(c)=S(1)=1$.

Вариант 2

1. $\frac{45}{4}\pi R^2$.

2. $\left]\frac{3-\sqrt{13}}{2}; 0\right[\cup\left]0; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right[\cup\left]2; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right[$.

3. $\left\{\left(\frac{\pi}{6}+\pi k; -\frac{7}{6}\pi+\pi k\right)\right\}$ $(k\in \mathbf{Z})$.

4. $\sqrt[3]{100}$.

Вариант 3

1. $k<0$ и $k=4e$.

2. $x=-\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{7}+\frac{\pi}{2}k$ $(k\in \mathbf{Z})$.

3. $\left]0; \frac{1}{2}\right[\cup\left]2\sqrt[3]{4}; +\infty\right[$.

4. 3 см^2.

Вариант 4

1. $\frac{2}{3}b^3\cdot\cos^3\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\varphi$.

2. $x_1=\frac{\pi}{2}k$, $x_2=\frac{\pi}{5}l$ $(k, l\in \mathbf{Z})$.

3. $\left]0; \frac{1}{10}\right]\cup[10; +\infty[$.

4. 2.

Задачи устного экзамена

2. $a\in]-1; 1[$, $b\in]-1; 1[$. 3. $\frac{943}{81}$.

4. а) 2. Указание. Нарисуйте график функции $y=x^4+x^3-10$; б) 4; в) 4. 5. а) $a<-3$; б) $0<a<\frac{4}{e^2}$; в) $0<a<\frac{1}{e}$. 6. а) $\{1, 11\}$; б) $\left\{\frac{1}{10}, 2, 1000\right\}$; в) $\left\{-\frac{2}{3}\pi, \frac{\pi}{2}, \pm\frac{2}{3}\pi-2\pi k\ (k\in \mathbf{N}), \pm\frac{\pi}{3}+2\pi l\ (l\in \mathbf{N})\right\}$. 7. а) $]0; 3]\cup[4; 5]$; б) $[-2; -1[\cup]-1; 0[\cup]0; 1[\cup]1; 2]$. 8. $\{(-1; 0), (1; 0), (2; -1), (2; 1), (3; -2), (3; 2)\}$. 10. Промежутки убывания $]-\infty; -2]$, $[-\sqrt{2}; 0]$ и $[\sqrt{2}; 2]$, промежутки возрастания $[-2; -\sqrt{2}]$, $[0; \sqrt{2}]$ и $[2; +\infty[$, точки минимума $x=-2$, $x=0$ и $x=2$, точки максимума $x=-\sqrt{2}$ и $x=\sqrt{2}$. 11. а) На $\left]-\infty; \frac{1}{3}\right]$ возрастает, $x=\frac{1}{3}$ — точка максимума, на $\left[\frac{1}{3}; +\infty\right[$ убывает. б) Промежутки убывания $]0; 1[$ и $]1; e]$, $x=e$ — точка минимума, $[e; +\infty[$ — промежуток возрастания. 12. Указание. Исследуйте y'. 13. $\arccos\sqrt{\frac{4}{7}}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$. 14. $\pm\sqrt{2}$. 15. 0. 16. $\frac{\pi}{2}$. 17. $\frac{2\pi}{9}(8-5\ln 3)$. 18. **Указание.** $\vec{MM_1}=\vec{NN_1}$. 19. Указание. $\vec{CA}+\vec{CB}=2\vec{CM}$. 20. Указание. Площадь треугольника $S=\frac{a+b+c}{2}r=\frac{abc}{4R}$. 21. Указание. $\widehat{AKB}=\widehat{ABC}$ (K — точка пересечения диаметра, проходящего через A, с окружностью). 24. Указание. $x^2+y^2+z^2$ — это квадрат расстояния от начала координат до точки $(x; y; z)$.

Ростовский государственный университет им. М. А. Суслова

Математика

Вариант 1

1. $\frac{2\pi r}{\sin^2\alpha}\sqrt{1+\sin^2\alpha}$. Указание. Пусть O_1 — центр вписанной окружности, $O_1M\parallel AD$ (обозначения — на рис. 3), $MO_2\perp AB$; тогда O_2 — центр описанной окружности. $|AD|+|BC|=2|AB|$.

2. При $a<0$ искомых касательных не существует, при $a=0$ существует одна касательная $y=-2x$, при $a>0$ — две: $y=-2(\sqrt{a}+1)x+a$ и $y=-2(-\sqrt{a}+1)x+a$.

3. $x=(-1)^k\frac{\pi}{3}+2\pi k$ $(k\in \mathbf{Z})$.

4. $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Вариант 2

1. $2\arcsin\frac{\sqrt{3\cos^2\alpha+1}}{2}$.

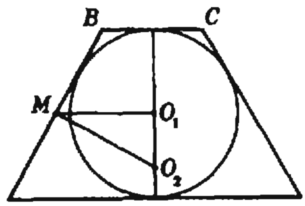


Рис. 3.

2. $\frac{5}{2}$ с.

3. $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}\pi l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$.

4. $]3; 9[$.

Вариант 3.

1. $2\operatorname{arctg}\frac{r}{2H}$.

2. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$.

3. $[1; 2[\cup]2; 3]$.

4. $f(x, y) = y + \sqrt{xy}$, $f(9; 0{,}04) = 0{,}64$.

Вариант 4

1. $V = d^3 \cdot \sin^2\alpha \cdot \sqrt{\cos 2\alpha}$, объем максимален при $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}$.

2. $x_1 = (-1)^k \arcsin\frac{3}{4} + \pi k$, $x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$.

3. $\left]-\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right] \cup \left]\frac{1}{2}; 1\right]$.

4. $\frac{2}{3}$.

Вариант 5

1. $\frac{2\sqrt{3}}{3}R$.

2. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x_2 = -\operatorname{arctg} 3 + \pi l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$.

3. $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [0; 1]$.

Таджикский государственный университет им. В. И. Ленина

Математика

Вариант 1

1. $\arcsin\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

3. $q = \frac{1}{3}$, $S_7 = 53\frac{79}{81}$.

4. 9.

5. $]0; 27[$.

Вариант 2

1. $a^2 \sin\alpha \cdot (1 + \cos\alpha)$ см^2.

2. $\frac{2}{3}$.

3. $\{(3; 9), (9; 3)\}$.

4. $x = \pm\frac{1}{2}\arccos(\sqrt{21} - 4) + \pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$.

5. $[-2; 2[$.

Вариант 3

1. $a\left(\sqrt{3} + \frac{1}{2}\right)$.

2. Точки экстремума: $x = 2\pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$ — точки максимума (в них $y = 66$) и $x = \pi + 2\pi l$ $(l \in \mathbf{Z})$ — точки минимума (в них $y = 52$).

3. $5\frac{1}{12}$.

4. $\{(5; 2)\}$.

5. $\left]\frac{2}{3}\pi + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right[\cup \left]\frac{4}{3}\pi + 2\pi l; 2\pi + 2\pi l\right[$ $(k, l \in \mathbf{Z})$.

Вариант 4

1. $[A_1B_1]$ — средняя линия.

2. 36.

3. $\left\{(3; 0), \left(-\frac{1}{3}; -\frac{5}{3}\right)\right\}$.

4. $x_1 = \pi + 2\pi k$, $x_2 = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$.

5. $\left\{100, \frac{1}{\sqrt{10}}\right\}$.

Харьковский государственный университет им. А. М. Горького

Физика

1. $\mu = \frac{h}{l+s} = 0{,}05$.

2. $H = 2{,}5$ $R = 20$ м.

3. $\alpha_{min} = \operatorname{arctg}\frac{1 - \mu_1\mu_2}{2\mu_2} = 45°$.

4. $h = H\left(\frac{\varrho_0}{\varrho} - 1\right) = 9$ см (здесь $\varrho_0 = 1$ г/см^3 — плотность воды).

5. $v = \sqrt{2(c(t_2 - t_1) + \lambda)} \approx 366$ м/с.

6. $V_в = V\left(\frac{pT_в}{(p_0 + \varrho gH)T} - 1\right) \approx 4{,}3$ м^3 (здесь $p_0 = 10^5$ Н/м^2 — атмосферное давление).

7. $I = \mathscr{E}/R = 3$А.

8. $I = \frac{P}{U_0(1-k)} = 1{,}05$ А; $S = \frac{2P\varrho l}{k(1-k)U_0^2} \approx$ $\approx 3{,}6 \cdot 10^{-6}$ м^2; $m = 2\varrho_0 lS \approx 32\,256$ кг.

9. $H = nh = 2{,}66$ м.

10. $\varphi = \frac{hc}{e\lambda} - \frac{A}{e} \approx 1{,}7$ В (здесь $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света).

Ворошиловградский государственный педагогический институт им. Т. Г. Шевченко

Физика

1. $\frac{v_{ср}}{v_{max}} = \frac{2sn}{v_{max}} \approx 0{,}3$.

2. См. рис. 4.

3. На участке *1—2* совершаемая газом работа отрицательна $(A < 0)$ и от газа отводится некоторое количество теплоты окружающей среде $(Q < 0)$. Аналогично, на участке *2—3* $A > 0$ и $Q > 0$; на участке *3—1* $A \approx 0$ и $Q < 0$; в процессе *1—2—3—1* $A > 0$ и $Q > 0$.

4. $\Delta T = \frac{\pi M}{c\varrho S l} \approx 5{,}6$ К.

5. В первом случае изменение тока $(\Delta I_1 = 4$ А$)$ больше, чем во втором $(\Delta I_2 \approx 0{,}34$ А$)$. Чувствительность первой схемы равна $\left(\frac{\Delta I}{\Delta R}\right)_1 =$

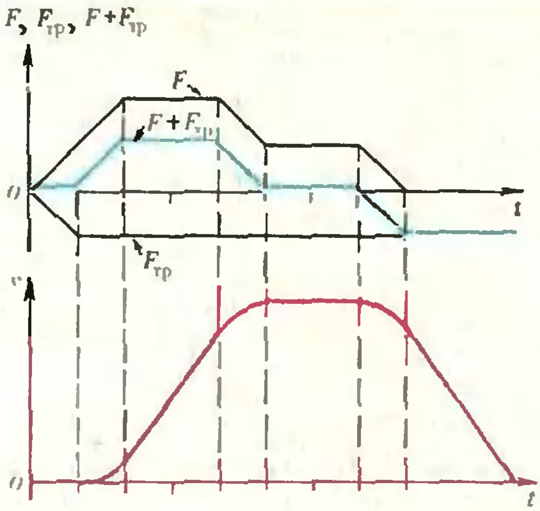


Рис. 4.

$=2$ А/Ом, второй — $\left(\frac{\Delta I}{\Delta R}\right)_2 \approx 0{,}17$ А/Ом.

6. Сопротивления внешнего и внутреннего участков цепи должны быть равны.
7. $E=mv^2/2\approx 2{,}8\cdot 10^{-18}$ Дж$>E_и$; следовательно, ионизация произойдет.
8. $T_1/T_2=B_2/B_1=2$.
9. $\frac{E_2}{E_1}=\frac{(F+l)^2}{F^2}=121$.
10. $N=\frac{\eta P t\lambda}{hc}\approx 8\cdot 10^{18}$ (здесь $t=1$ с и $P=$ $=75$ Вт).

Киевский государственный педагогический институт им. А. М. Горького

Математика

Вариант 1

1. 25%.
2. $\frac{a^2\cdot\sin\alpha}{2}\left(1+\frac{1}{\cos\beta}\right)$.
3. $\arccos\sqrt{\frac{3}{7}}$.
4. Точка минимума $x=-1$, точка максимума $x=3$.
5. 4,5.

Вариант 2

1. 10 км/ч.
2. $\frac{\operatorname{tg}\varphi}{4\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}}$.
3. Точка минимума $x=3$.
4. $\frac{1}{2}$.
5. $\{3\}$.

Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $]-\infty;-1]\cup[2;+\infty[$.
2. $x_1=\frac{1}{8}\pi+\pi k$, $x_2=\frac{3}{8}\pi+\pi l$ $(k, l\in\mathbf{Z})$.
3. $x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$.
4. $\frac{\pi\sqrt{3}}{108}a^3$. Указание. Возьмем на ребре SA произвольную точку K — центр основания конуса. Если в плоскости SAC провести через K перпендикуляр к SA и через точку M пересечения этого перпендикуляра с $[AC]$ провести прямую l, параллельную (BD), то плоскость, проходящая через (KM) и l, будет перпендикулярна $[SA]$ и, тем самым, будет плоскостью основания конуса. Под *окружностью, касающейся плоскости,* подразумевается окружность, имеющая с этой плоскостью одну общую точку. Очевидно, окружность Окр. $(K;|KM|)$ касается плоскости $ABCD$.
5. $]-\infty;-3]\cup\left[-\frac{1}{\sqrt{3}};\frac{1}{2}\right]$. Указание.

Данное уравнение равносильно уравнению $|a^2x+1|+|a^3+a^2x|=(a^2x+1)-(a^3+a^2x)$. Уравнение $|u|+|v|=u-v$ равносильно системе

$$\begin{cases} u\geqslant 0\\ v<0.\end{cases}$$

При $a\neq 0$ рассмотрите случаи $0<a<1$, $-1<a<0$, $a=-1$ и $a<-1$.

Вариант 2

2. $\{1\}$.
3. $\left]0;\frac{\sqrt{2}}{2}\right[\cup[2;+\infty[$.
4. $(0;1)$ и $(-1;0)$.
5. $]-\infty;-2]\cup[2;+\infty[$.

Вариант 3

3. $x=\pm\frac{\pi}{6}+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$.
4. $(1;3)$.
5. $\arccos\sqrt{\frac{2}{6}}$. Указание. $\vec{OM}=\frac{1}{2}(\vec{ON}+\vec{NA}+\vec{OD})$.

Задачи устного экзамена

1. 36, 15. Решение. Любой общий делитель искомых чисел a и b является общим делителем чисел $НОК(a, 3b)=180$ и $a-b=21$. Поэтому числа a, b не имеют общих делителей $(\neq 1)$, кроме 3. Следовательно, общими делителями чисел a и $3b$ могут быть только числа 3 и 9. Легко видеть, что НОК двух чисел равно произведению любого из этих чисел на недостающие делители другого числа. Поэтому, если наибольший общий делитель чисел a и $3b$ равен 3, то $180=a\cdot\frac{3b}{3}$. Если наибольший общий делитель чисел a и $3b$ равен 9, то $180=a\cdot\frac{3b}{9}$. В первом случае получаем систему

$$\begin{cases} ab=180\\ a-b=21,\end{cases}$$

не имеющую целочисленных решений. Во втором случае получаем систему

$$\begin{cases} ab=540\\ a-b=21.\end{cases}$$

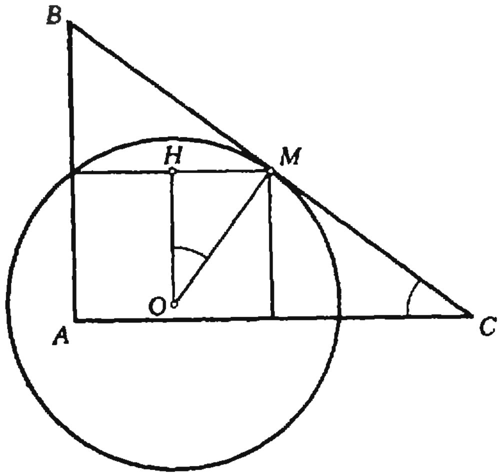


Рис. 5.

имеющую единственное решение $a=36$, $b=15$, удовлетворяющее всем условиям задачи.

2. $\{(8;-1)\}$. Указание. Из первого уравнения $\sqrt{x-y}<3$, из второго $x-y-9>0$, $x-y>9$, $\sqrt{x-y}>3$.

3. $x=\frac{\pi}{3}+2\pi k$ $(k\in\mathbb{Z})$. Указание. Данное уравнение равносильно системе

$$\begin{cases}\cos 3x=-1\\ \sin\left(2x-\frac{7\pi}{6}\right)=-1.\end{cases}$$

4. $\frac{10\pi}{3}$ см. Указание. Данный треугольник ABC подобен треугольнику OHM (обозначения — на рис. 5).

5. $M\left(0;0;\frac{2}{3}\right)$, $N\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$. Указание. Вектор $\overrightarrow{MN}$ параллелен биссектрисе первого координатного угла плоскости xOy.

Физика

1. $v(t)=x'(t)=-30t^4+30$; $a(t)=v'(t)=x''(t)=-120t^3$; $x(\tau)=24$ м; $v(\tau)=0$; $a(\tau)=-120$ м/с^2.
2. Утверждение верно.
3. $p=\frac{3\varrho_1\varrho_2gh}{\varrho_1+2\varrho_2}\approx 7$ кПа.
4. $\Delta m=\frac{\varphi_1}{100\%}\frac{\mu V}{R}\left(\frac{p_{н2}}{T_2}-\frac{p_{н1}}{T_1}\right)\approx 4{,}6$ кг.
5. $\Delta U=Q=\frac{3}{2}\frac{pV}{T}\Delta T\approx 155$ Дж.
6. $q=It/2=25$ Кл.
7. $I_к=\frac{\mathscr{E}I}{\mathscr{E}-IR}=0{,}21$ А.
8. $p=qBR\approx 1{,}3\cdot 10^{-18}$ кг·м/с; $E=q^2B^2R^2/(2m)\approx 1{,}3\cdot 10^{-10}$ Дж.
9. $f=\frac{dF}{d-F}=40$ см; изображение действительное, перевернутое и одного размера с предметом.
10. $\Delta E=hc\left(\frac{1}{\lambda_1}+\frac{1}{\lambda_2}\right)\approx 13$ эВ.

Московский автомобильно-дорожный институт

Математика

Вариант 1

1. 1. 2. $\left\{-1;\frac{1}{2}\right\}$. 3. $\{76\}$. 4. $\{1\}$. 5. $\{9\}$. 6. $\frac{3}{2}$. 7. 2. 8. 15. 9. 123. 10. 12.

Вариант 2

1. $67{,}5°$, $90°$. 2. 2. 3. $\max\limits_{[-1;2]} f(x)=f(-1)=f(2)=2$, $\min\limits_{[-1;2]} f(x)=f(1)=-2$. 4. $-\frac{3}{4}$. 5. 4,5. 6. 4.

Физика

1. $t=\frac{-v_0+\sqrt{v_0^2+2g_Лh}}{g_Л}=10$ с.
2. $\mu=\frac{mg}{F}=0{,}1$.
3. $v_т=\frac{m_чv}{m_ч+m_т}=1{,}5$ м/с.
4. $h=\frac{4p}{\varrho g}=40$ м.
5. $Q=cm(T_к-T)+rm=268$ кДж.
6. Правилен первый ответ.
7. Напряженность электрического поля уменьшилась в 49 раз.
8. $P_1/P_2=0{,}1$.
9. $\lambda=\frac{hc}{W}=550$ нм.
10. $H=h\frac{F}{d-F}=1$ м.

Московский архитектурный институт

Математика

2. $\frac{\log_m A\cdot\log_n A\cdot\log_p A}{\log_{mnp} A}$. 4. а) $\{-4\}$; б) $x_1=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}k$, $x_2=\pm\arccos\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{4}\right)+2\pi l$ $(k,l\in\mathbb{Z})$. 5. $\{(7;5)\}$. 6. а) $\left]\frac{1}{4};3\right[$; б) $[-2;2[$.
7. а) 2; б) $2\sin 2$. 8. $\frac{1}{3}$. 9. $\frac{1}{2}\pi^2$.

Физика

1. $a=\frac{F\cos\alpha-\mu(mg-F\sin\alpha)}{m}\approx 6{,}3$ м/с^2.
2. $v=\sqrt{gl/\cos\alpha}\sin\alpha\approx 2{,}6$ м/с; $T=2\pi\sqrt{l(\cos\alpha)/g}\approx 1{,}7$ с.
3. $F=\frac{mg}{l}\left(\frac{h}{\mu}-\sqrt{l^2-h^2}\right)\approx 27{,}4$ Н.
4. Центр масс системы находится на $x=\frac{m_2(l/2+R_2)-m_1(l/2+R_1)}{m_1+m_2+m_3}=4{,}5$ см правее центра стержня.
5. $A=mh(g+2h/t^2)=15\,150$ Дж.
6. $h=\frac{2p_0}{\varrho g}\approx 20{,}4$ м (здесь $p_0=10^5$ Па — нормальное атмосферное давление, $\varrho=10^3$ кг/м^3 — плотность воды).

7. $\sigma = E\alpha(T_2 - T_1) = 4{,}4 \cdot 10^7$ Н/м².

8. $E = \dfrac{q_1}{2\pi\varepsilon_0 R^2} \approx 3{,}3 \cdot 10^4$ В/м.

9. $Q_2 = Q_1 \dfrac{R_1}{R_2} = 2{,}4 \cdot 10^4$ Дж;

$Q_3 = Q_1 \dfrac{R_1}{R_1 + R_2} = 1{,}5 \cdot 10^4$ Дж.

10. $F = \dfrac{\Gamma l}{\Gamma^2 - 1} = 11{,}25$ см (заметим, что изображение может быть как действительным, так и мнимым).

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Математика

Вариант 1

1. A — за 15 дней, B — за 10, C — за 6.

2. $x_1 = \pm \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$, $x_2 = (-1)^l \dfrac{\pi}{6} + \pi l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$.

3. $\max\limits_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} y = y(1) = \ln 2$, $\min\limits_{\left[\frac{1}{2}; 2\right]} y = y(2) = 2(\ln 2 - 1)$.

4. $\dfrac{1}{24}$.

5. $\dfrac{b}{\sin\alpha}$, $\dfrac{b}{2}\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2\alpha}$. Указание. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — данный параллелепипед и $\widehat{A_1AB} = \widehat{A_1AD} = \alpha$. Если через центр вписанного шара провести плоскость, перпендикулярную $[BC]$, сечение параллелепипеда этой плоскостью — ромб.

Вариант 2

1. $\div\, 12, 6, 3, \ldots$

2. $x = -\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{\pi}{2} k$ $(k \in \mathbf{Z})$.

3. $\left\{\dfrac{1}{3}\right\}$.

4. $4 \ln 2 - 2{,}5$.

5. $\min R = R(3b) = \dfrac{9}{4} b$. Указание. $\dfrac{|SO_1|}{|SO_2|} = \dfrac{|O_1P|}{|O_2Q|}$, $|O_1A|^2 = |O_1S| \cdot |O_1T|$ (обозначения см. на рис. 6).

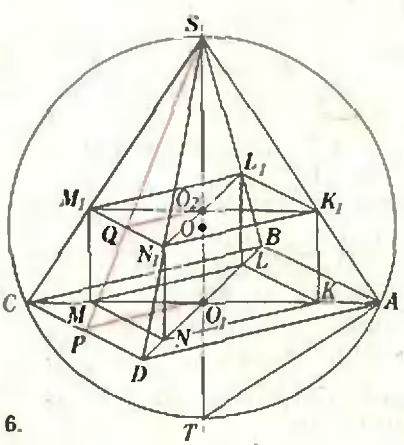


Рис. 6.

Физика

1. $h_1/h_2 = \operatorname{tg}^2\alpha$.

2. $\omega = \sqrt{\dfrac{g}{R\cos 60^\circ}} = 5$ с⁻¹.

3. $\Delta m = \dfrac{V\mu}{R}\left(\dfrac{p_1}{T_1} - \dfrac{p_2}{T_2}\right) \approx 0{,}003$ кг.

4. $E = \dfrac{\pi d^3 \varepsilon g(\varrho_в - \varrho_м)}{6q} = 1{,}2 \cdot 10^4$ В/м.

5. $d = \dfrac{AIt}{Fn\varrho S} \approx 19{,}7$ мкм.

6. $R = \dfrac{BS}{q} = 0{,}5$ Ом.

7. $d = nl = 3$ см.

8. $F = \dfrac{h_1 h_2 l}{H(h_1 - h_2)} = 9$ см.

9. $E = \dfrac{e}{4\pi\varepsilon_0 r_1^2} \approx 5{,}1 \cdot 10^{11}$ В/м;

$W_к = \dfrac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_1} \approx 2{,}2 \cdot 10^{-18}$ Дж $\approx 13{,}6$ эВ.

10. $E_0 = E\dfrac{\mu}{N_A m} \approx 3{,}2 \cdot 10^{-11}$ Дж ≈ 200 МэВ (здесь $\mu = 235$ г/моль — молярная масса данного изотопа урана).

2-й Московский государственный медицинский институт им. Н. И. Пирогова

Математика

Вариант 1

1. 3.

2. $y = 2x + 2$; $\dfrac{27}{4}$.

3. $\left\{-\dfrac{9}{5}, 23\right\}$.

4. $2\sqrt{2} \cdot \sin\dfrac{1}{2} \cdot \cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{2}\right)$.

Вариант 2

1. $16\sqrt{3}$.

2. $A = 2$, $B = \dfrac{3}{2\pi}$.

3. $\left[\dfrac{1}{2\sqrt{2}}; \dfrac{1}{2}\right[\cup\,]1; 2\sqrt{2}]$.

4. $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Физика

Вариант 1

3. $m_в = \dfrac{m_2(c(t - \Delta t) + \lambda) - m_1 c \Delta t}{\lambda} \approx 0{,}025$ кг.

4. $S = \dfrac{2\varrho l P}{k(1 - k)U^2} \approx 2{,}2 \cdot 10^{-4}$ м².

Вариант 2

3. $p = \dfrac{p_0 V \mu_в - mRT}{V \mu_{вод}} \approx 3{,}2 \cdot 10^5$ Па.

4. $f = \dfrac{F_2(F_1(d + l) - dl)}{d(F_2 - l) + F_1(d + l - F_2)} = 7{,}5$ см.

Вариант 3

3. $F_c = \frac{mMv^2}{2l(m+M)} \approx 6250$ Н.

4. $q = \frac{(\varrho-\varrho_0)\pi d^3 g}{6E} \approx 1{,}1 \cdot 10^{-6}$ Кл.

Вариант 4

3. $t_2 = t_1\sqrt{\frac{l}{gt_1^2 \sin\alpha - l}} = 4$ с;

$\mu = \frac{2l}{gt_1^2 \cos\alpha} - \operatorname{tg}\alpha \approx 0{,}36.$

4. $F = 6l = 12$ см.

Вариант 5

3. $v_1 = \sqrt{\frac{2Em_2}{m_1(m_1+m_2)}} = 2$ м/с;

$v_2 = v_1 \frac{m_1}{m_2} = 1$ м/с.

4. $\mathcal{E} = 3IR = 300$ В.

Московский технологический институт легкой промышленности

Математика

1. 3. 2. -168. 3. $\{0{,}5\}$. 4. -1. 5. $\{2\}$. 6. 13. 7. 18 км. 8. 30. 9. 504. 10. $\{1\}$. 11. $\{2\}$. 12. 2. 13. 0,67. 14. 0,125. 15. 15°. 16. 30°. 17. 90. 18. 0,650. 19. 48. 20. 267,95.

Уральский электромеханический институт инженеров железнодорожного транспорта

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $\frac{1}{3}\pi d^3 \cdot \frac{4\cos^2\varphi - 1}{\cos^3\varphi}$.
2. $x_1 = 2\pi k,\ x_2 = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi l\ (k, l \in \mathbf{Z})$.
3. $\{4\}$.
4. 9.

Вариант 2

1. $6\sqrt{3}\,h^2 \cdot \operatorname{ctg}\alpha\,(\operatorname{ctg}\alpha + 1)$.
2. $]1; 6[$.
3. π.

Задачи устного экзамена

1. 9 или 31. 2. $]2; 3[\cup]3; 4[$. 3. $\{2\}$. 4. $\{-\pi, 0, \pi\}$. 5. $-\frac{24}{25}$. 6. $]-\infty; -5[\cup]1; +\infty[$. 7. $\left(1; -\frac{3}{2}\right)$. 8. 15. 9. 4,5. 10. $\frac{\pi}{3}$.

Вторая страница обложки
(см. «Квант» № 5)

Утенок и цветок. Петлю, завязанную на конце шнурка, протяните вдоль шнурка, затем через правую лапку утенка и далее до цветка. Проденьте цветок сквозь петлю и вытяните шнурок из лапок утенка.

Утенок и гусь. Петлю, охватывающую лапку утенка, протяните вдоль шнурка через левую лапу гуся к грибку. Пропустите грибок через петлю и вытяните ее обратно к утенку. Теперь потяните петлю вверх, пропустите через нее утенка и освободите шнурок из лапки утенка.

Трое утят. Петлю, стягивающую лапки любого утенка, проведите вдоль параллельных шнурков и пропустите через эту петлю двух остальных утят. Первый утенок будет освобожден. Так же освобождают от шнурков остальных утят.

Маша и утята. Петлю, охватывающую левую ножку Маши, протяните вдоль шнурка через ее правую туфельку. Пропустите левого утенка сквозь петлю и вытащите ее через правую туфельку обратно. Теперь протяните петлю вдоль шнурка через левый рукав Машиного платья и проденьте в нее верхнего утенка. Вытащив петлю через левый рукав и левую туфельку, вы освободите одного утенка.

Шахматная страничка
(см. «Квант» № 3)

Задание 5. 1. Фс2! Л:с4 2. Ке4×; 1... С:с4 2. Ке6×; 1... К:с4 2. Са7×. Не проходит 1. Фа2? К:с4! и мата нет.

Задание 6. 1. Лf8! с угрозой 2. Лс8 и 3. Л:с6×; 1... С:b3 2. Ла8 Сс4 3. d4×; 1... Кb3 2. fe Кd4 3. Сb4×.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 5)

1. Можно — см. рисунок 7.
2. Утверждение а) следует из равенства $2a + b = (100a + b) - 98a$, утверждение б) — из равенства $5a - b = 105a - (100a + b)$.
3. Нетрудно составить таблицы дней недели, выпадающих на тринадцатое число каждого месяца в зависимости от дня недели, выпадающего на 13 января, отдельно для високосного (таблица 1) и невисокосного (таблица 2) годов.

Таблица 1

Я	Ф	М	А	М	И	И	А	С	О	Н	Д
пн	чт	пт	пн	ср	сб	пн	чт	вс	вт	пт	вс
вт	пт	сб	вт	чт	вс	вт	сб	пн	ср	вт	пн
ср	сб	вс	ср	пт	пн	ср	вс	вт	чт	ср	вт
чт	вс	пн	чт	сб	вт	чт	пн	ср	пт	чт	ср
пт	пн	вт	пт	вс	ср	пт	вт	чт	сб	пт	чт
сб	вт	ср	сб	пн	чт	сб	ср	пт	вс	сб	пт
вс	ср	чт	вс	вт	ср	чт	пт	сб	пн	вс	сб

Таблица 2

Я	Ф	М	А	М	И	И	А	С	О	Н	Д
пн	чт	чт	вс	вт	пт	вс	ср	вс	вт	сб	пн
вт	пт	пт	пн	ср	сб	пн	чт	пн	ср	вс	вт
ср	сб	сб	вт	чт	вс	вт	пт	вт	чт	пн	ср
чт	вс	вс	ср	пт	пн	ср	сб	ср	пт	пн	ср
пт	пн	пн	чт	сб	вт	чт	вс	чт	сб	вт	чт
сб	вт	вт	пт	вс	ср	пт	пн	чт	сб	вт	чт
вс	ср	ср	сб	пн	чт	сб	ср	сб	пн	пт	вс

Рис. 7.

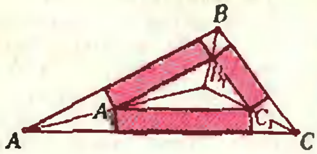


Рис. 8.

Изучив таблицы, мы видим, что в любом году тринадцатое число хоть раз является понедельником, а наибольшее число раз — 4.

4. У треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ попарно параллельны стороны (рис. 8); следовательно, они гомотетичны. Прямые, соединяющие их вершины, пересекаются в центре гомотетии.

5. Раскрасим клетки квадрата в три цвета двумя способами (см. рисунок 9):

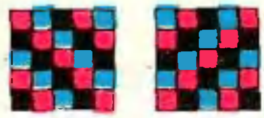


Рис. 9.

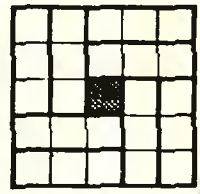


Рис. 10

В обоих случаях одна клетка, окрашенная красной краской, оказывается лишней, поскольку при укладке прямоугольника 1×3 закрываются все три цвета. Но красная краска в обоих случаях на одном и том же месте стоит лишь в центре квадрата. Значит, из нашего квадрата можно вырезать лишь центральную клетку. Как разрезать получившуюся фигуру, показано на рисунке 10.

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
Л. Денисенко, М. Дубах, Г. Красиков, Н. Кузьмина, Э. Назаров, И. Смирнова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Н. Дорохова

117071, Москва, Ленинский проспект, 15,
«Физматлит», «Квант», тел. 234-08-21
Сдано в набор 17.04.82. Подписано в печать 28.05.82
Печать офсетная
Бумага $70 \div 108$ 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд.-л. 7,50 Т-12031
Цена 40 коп. Заказ 953. Тираж 181 270 экз.

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

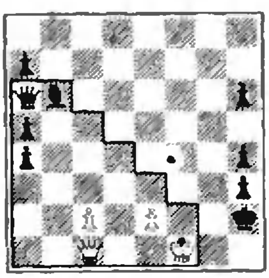
Шахматная страничка Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

ШАХМАТНЫЕ ЛЕСТНИЦЫ

Почти в каждой книге по шахматной композиции можно найти раздел, посвященный геометрическим мотивам на шахматной доске. В этом нет ничего удивительного. Ведь фигуры перемещаются по определенным линиям, и часто в точках пересечения этих линий происходит «взрыв», в результате которого одна из сторон неминуемо гибнет. В задачах и этюдах нередко наблюдаются совершенно четкие траектории, по которым передвигаются ферзь, ладья или король.

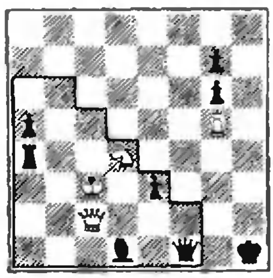
Один из самых популярных жанров шахматной композиции называется «систематическое движение фигур». Он объединяет задачи и этюды, в которых фигуры несколько раз прогуливаются по одним и тем же маршрутам, всякий раз возвращаясь с прогулки с определенными завоеваниями. Маршруты могут быть весьма разнообразными — лестницы, виниты, карусели, змейки, окружности, квадраты, треугольники, ромбы и другие. Наш сегодняшний рассказ — о шахматных лестницах.

По самым высоким и крутым лестницам ходит ферзь.



Г. Надарейшвили, 1946 г. Выигрыш.

1.Фf4+. Ферзь попал на лестницу. **1...Крh1 2.Фe4+ Крh2 3.Фe5+ Крh1 4.Фd5+ Крh2 5.Фd6+ Крh1 6.Фc6+ Крh2 7.c4!** Поднявшись на самый верх лестницы, можно сделать и передышку. **7...Крg3! 8.Фf3+.** Ферзь быстро сбежал на нижнюю ступеньку лестницы. **8...Крh2 9.Фf4+.** Впереди новый подъем. **9...Крh1 10.Фe4+ Крh2 11.Фe5+ Крh1 12.Фd5+ Крh2 13.Фd6+ Крh1 14.Фc6+ Крh2 15. e3!** Последний отдых, ферзь готовится к третьей прогулке по лестнице. Спуск на этот раз будет проходить медленнее. **15...a3 16.Фd6+ Крh1 17.Фd5+ Крh2 18.Фe5+ Крh1 19.Фe4+ Крh2 20.Фf4+ Крh1 21.Фf3+ Крh2 22.Фf2+ Крh1 23.Фg1×.**

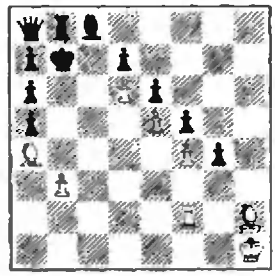


П. Подольный, 1953 г. Выигрыш.

И в этом этюде ферзь трижды прогуливается по лестнице — вверх, вниз и снова вверх. Однако лестница здесь еще более длинная.

1—8. Фe4 — e5 — d5 — d6 — c6 — c7 — b7 — b8 + Крh1 — h2 — h1 9.Фh8+. На этот раз ферзь работает без отдыха. Покинув лестницу, он тут же спохватывается и возвращается на нее. **9...Сh5 10—18. Фa8 — b8 — b7 — — c7 — c6 — d6 — d5 — e5 — —e4+ Крh2 — h1 — h2 19.Фh4+ Фh3 20.Фf4+ Крh1.** Белый ферзь снова на лестнице, он начинает свое третье и решающее восхождение. **21—28. Фe4 — e5 — d5 — — d6 — c6 — c7 — b7 — b8+ Крh1 — h2 — h1 29.Фb1+ Крh2 30.Фg1×.**

В следующем этюде два основных варианта решения, и в обоих возникает лестница — либо для ладьи (первый вариант), либо для короля (второй вариант).



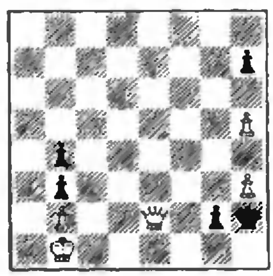
Т. Кок, 1938 г. Выигрыш.

1.Сg1 g3 2.Крg2 Крb6+ 3.Лf3+ Крb7 4.Лe3+ Крb6+ 5.Лe4+ Крb7 6.Лd4 Крb6+ 7.Лd5+ Крb7 8.Лc5 Крb6+ 9.Лc6++ Крb7 10.Лc7×!

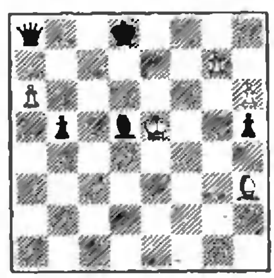
Вторая лестница чуть длиннее: 2...gf 3.Кр : f2 Крb6 4.Крe2+ Крb7 5.Крe3 Крb6 6.Крd3+ Крb7 7.Крd4 Крb6 8.Крc4+ Крb7 9.b4 ab 10.Кр : b4 a5+ 11.Кр : a5 a6 12.Сd1 и 13.Сf3×.

Заметим, что «геометрические» этюды ввиду четкости их решений часто могут быть превращены в задачи с условием — мат во столько-то (много!) ходов.

Конкурсные задания

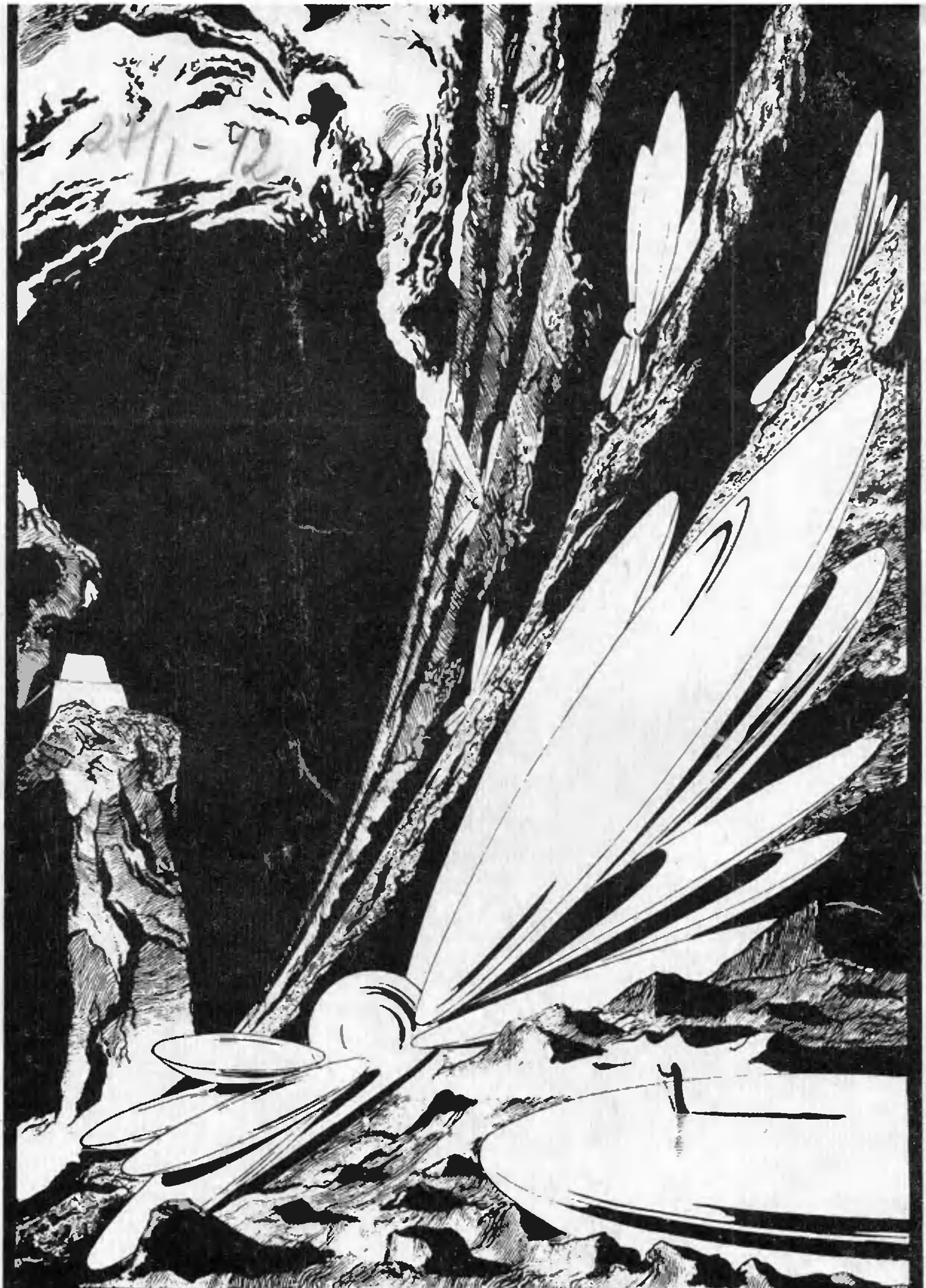


11. Выигрыш.



12. Выигрыш.

Срок отправки решений — 25 августа 1982 года (с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 11, 12»).



На этой странице обложки мы помещаем репродукцию работы «Линзовые пространства» А. Т. Фоменко. Репродукция еще одной его работы помещена на второй странице обложки.

Цена 40 коп.
Индекс 70465