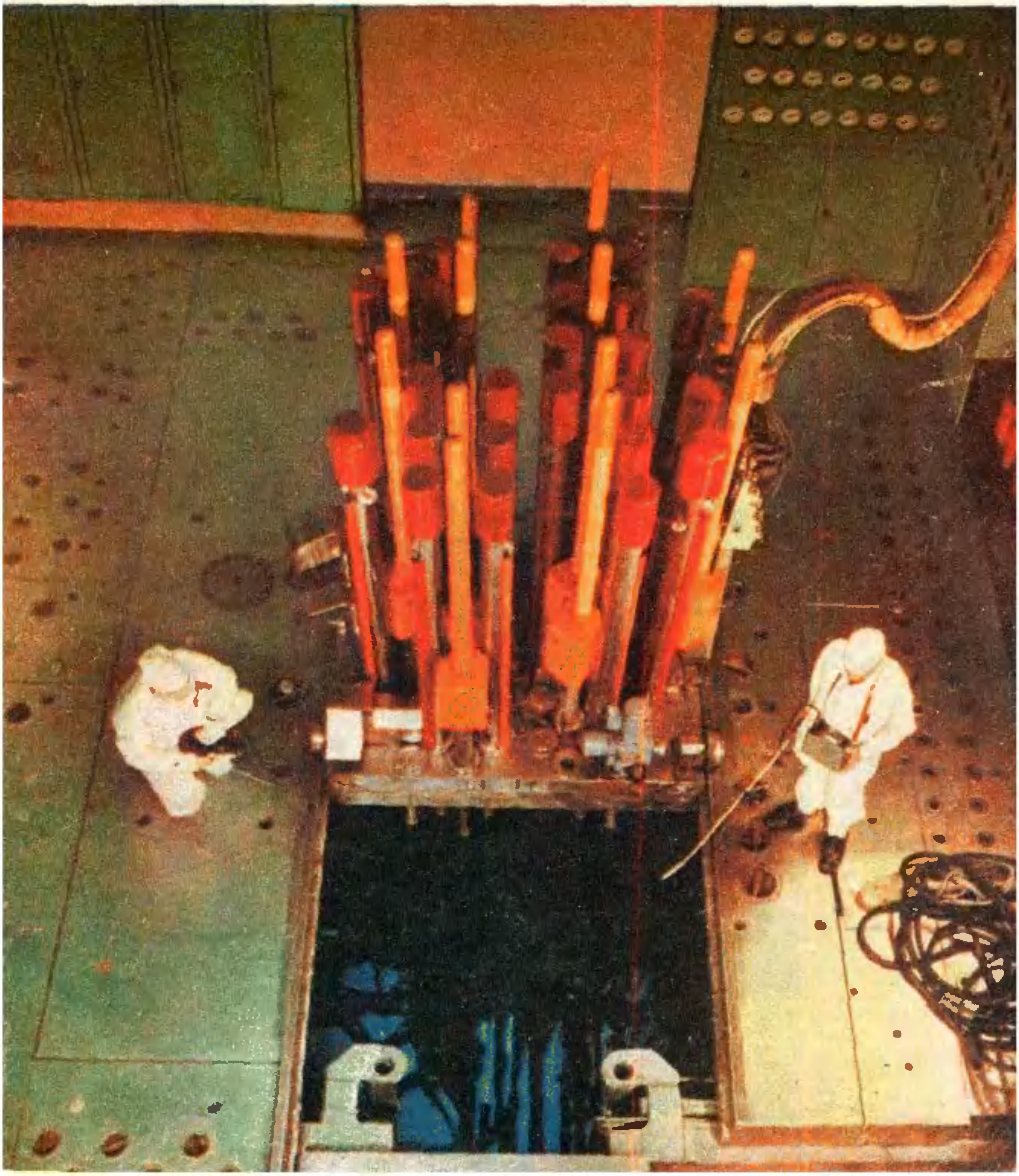
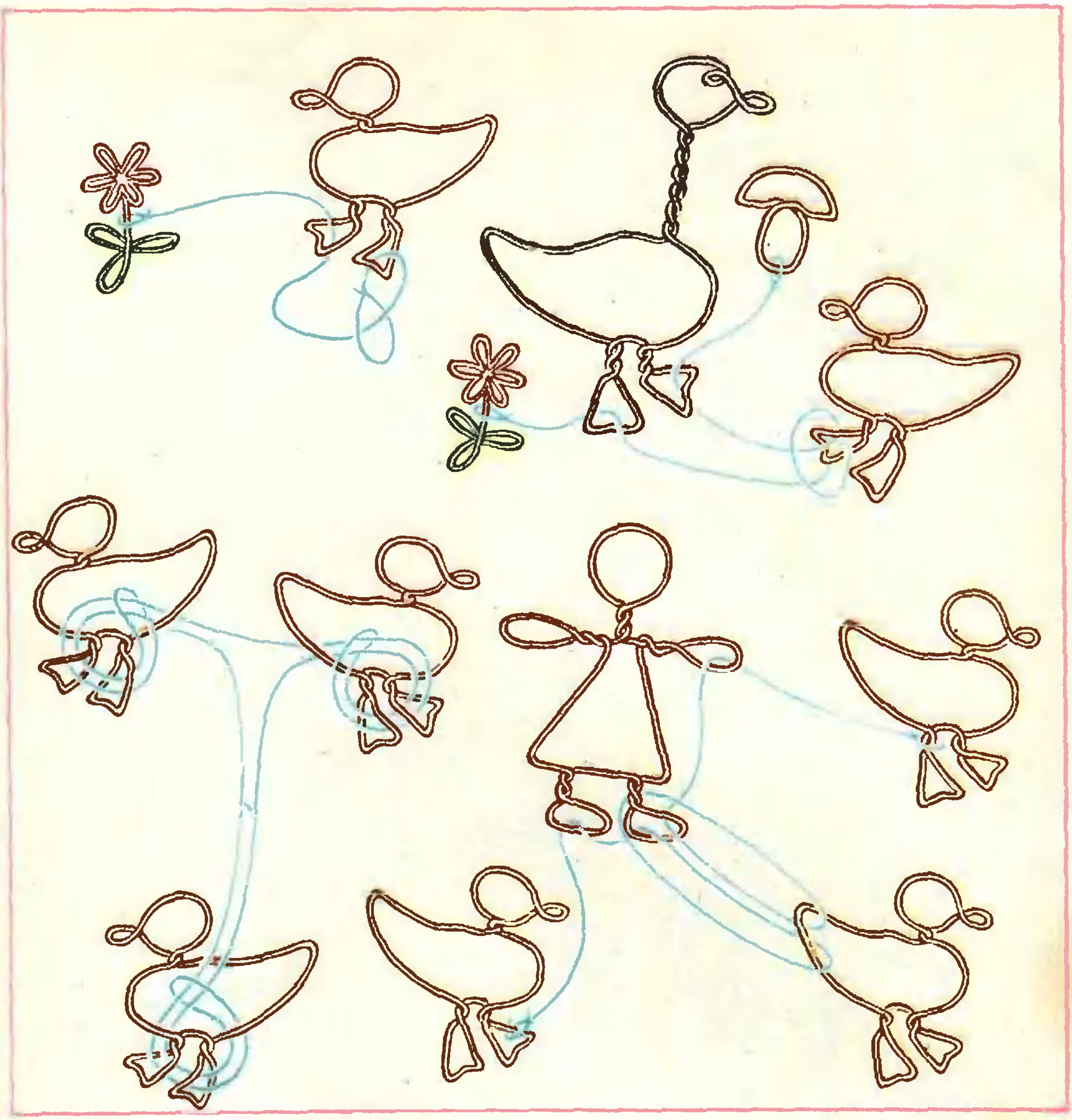
ISSN 0130-2221

Квант

5
1982

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





В этих головоломках нужно освободить проволочных утят от синих веревочек, в которых они запутались. Впрочем, в правой нижней головоломке можно освободить лишь одного утенка — двое других (привязанные за ножки) не смогут убежать от девочки. Эти головоломки легко смастерить самим из обрезков проволоки и толстых ниток или шнурков. Проволока подойдет любая, но лучше взять одножильный медный провод в цветной изоляции. Будьте особенно внимательны при связывании фигурок шнурками, точно следуйте рисунку. Имейте в виду, что иногда достаточно продеть нитку не с той стороны петли — и головоломка не получится. Необходимо выдерживать правильные, точно по рисунку, пропорции фигурок и петель, длину шнурков. Например, цветочек должен быть больше лапки утенка, но меньше петли на конце шнурка.

●

На первой странице обложки изображен исследовательский реактор МР Института атомной энергии имени И. В. Курчатова. Он используется для изучения свойств материалов, применяемых в атомной энергетике.

Квант 5 1982

Основан в 1970 году

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО·НАУКА· ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ: | **IN THIS ISSUE:**

Верность ленинским заветам, делу партии

XIX съезд Всесоюзного Ленинского Коммунистического Союза Молодежи — волнующее и важное событие в жизни молодого поколения нашей страны. Идейно и нравственно повзрослевшими приходят юноши и девушки к своему форуму. Среди них большой отряд школьников, учащихся профессионально-технических училищ, тех, кому адресован журнал «Квант».

К вам, пытливым, вдумчивым и инициативным, обращены слова Генерального секретаря Центрального Комитета КПСС, Председателя Президиума Верховного Совета СССР Леонида Ильича Брежнева: «Пусть и впредь в ваших сердцах горит чистый огонь патриотизма, живет благородное чувство личной ответственности за порученное дело, за все, что происходит в стране».

Коммунистическая партия, Советское государство предоставили молодому поколению исключительные возможности для овладения естественнонаучными и общественно-политическими знаниями. Решения XXVI съезда КПСС определили пути дальнейшего решения задачи развития творческих способностей учащихся общеобразовательных школ, привития им умения самостоятельно пополнять свои знания, ориентироваться в стремительном потоке научной информации. Завет В. И. Ленина — учиться — был и остается самым важным, самым актуальным в деятельности ВЛКСМ.

Всесоюзный Ленинский Коммунистический Союз Молодежи считает своей важнейшей задачей всемерно помогать школе в повышении качества учебно-воспитательного процесса, теснее соединять учебный процесс с подготовкой молодежи к труду, особенно в сфере материального производства. Жизнь убедительно показала преимущество образования, тесно связанного с участием школьников в производительном труде. Это способствует выработке высоких нравственных качеств и активной жизненной позиции учащихся.

Сегодня на этапе зрелого социализма, когда особенно важно соединение достижений научно-технической революции с преимуществами социализма, на первый план выдвигается задача подготовки специалистов нового типа — не только высокообразованных, но и творчески мыслящих, способных решать самые ответственные задачи современной теории и практики. Учиться коммунизму означает сегодня умение смотреть далеко вперед, быть готовым к самостоятельной творческой работе, к активному участию в общественно-политической жизни общества.

Подготовить себя к участию в коммунистическом строительстве — это значит научиться коллективизму, дисциплине, уметь реально видеть жизненные проблемы, самостоятельно разбираться в различных явлениях окружающей нас действительности, быть готовым к тому, чтобы, как говорил В. И. Ленин, суметь «достроить и довершить то, что мы начали»*).

Верность ленинским традициям, великому делу Коммунистической партии демонстрирует юность нашей Родины, собравшись на свой XIX съезд. Решения съезда, мудрое напутствие партии своему помощнику и резерву — Ленинскому комсомолу, всей советской молодежи должно стать для читателей «Кванта», как и для всего юношества, путеводной звездой в их жизни, учебе, труде.

Б. Н. Пастухов,
Секретарь ЦК ВЛКСМ

*) В. И. Ленин. Полн. собр. соч., т. 41, с. 301.

А. Боровой

Год чудес

Поль Адриен Морис Дирак.

Уравнение Дирака (1928—1931)

«Из-за того что я стал писателем, не следует думать, что я никогда не стремился к какой-либо достойной деятельности». Эту шутку Бернарда Шоу вполне мог бы повторить молодой человек из Бристоля, который стремился к весьма достойной деятельности инженера-электрика, а стал автором многих «безумных идей» физики XX века. Его полное имя Поль Адриен Морис Дирак. Лишившись места в Бристоле, он в 1925 году приехал в Кембридж, увлекся только еще рождающейся областью физики — квантовой механикой — и сыграл большую роль в создании новой науки.

На 1925—1930 годы, по выражению Нильса Бора, приходился «золотой век» квантовой механики. Позднее Дирак говорил: «Я благодарен судьбе, что родился вовремя: будь я старше или моложе на несколько лет, мне не представились бы столь блестящие возможности. Казалось, все благоприятствовало мне...». И, прежде всего, исключительная одаренность,— добавим мы.

В 24 года Дирак удостаивается докторской степени, а в 31 год — Нобелевской премии (вместе с Э. Шредингером) «за открытие новой плодотворной формы атомной теории».

Уже в 1927 году были выработаны основные принципы квантовой механики, создан ее математический аппарат. Новая теория смогла объяснить законы природы, действующие в атомных масштабах. Однако она была неприменима к частицам, движущимся со скоростью, близкой к скорости света.

И вот в январе 1928 года Поль Дирак вывел уравнение, описывающее поведение быстрых электронов. Оно объединяло в себе принципы квантовой механики и теории относительности. Это уравнение объясняло взаимодействие электрона с магнитным полем, описывало поведение внутриатомных электронов, разъясняло некоторые особенности спектральных закономерностей и т. д. Все хорошо, но... уравнение Дирака допускало решения, при которых электрон мог иметь отрицательную кинетическую энергию. Это казалось совершенным абсурдом.

Приблизительно три года шли дебаты теоретиков об этих «нефизических» решениях, пока выход не нашел сам автор. Мы не можем привести здесь его рассуждения, а сообщим только окончательный вы-

Первая часть этой статьи была опубликована в предыдущем номере журнала.

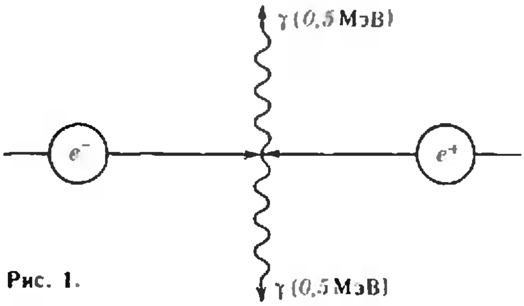


Рис. 1.

вод: согласно Дираку, наряду с электроном в природе должна существовать частица — его двойник, но с положительным зарядом $+e$.

«Антиэлектрон», или «позитрон»

Если такая частица столкнется с электроном, то обе они исчезнут — аннигилируют, а масса частиц, согласно соотношению Эйнштейна $E=mc^2$, перейдет в энергию образовавшихся гамма-квантов:

$$e^- + e^+ \to 2\gamma.$$

Символически этот процесс представлен на рисунке 1.

Пожалуй, никто, кроме Дирака (да и он не проявлял особой уверенности), не принял такого толкования отрицательных решений. Крупнейшие теоретики Нильс Бор, Вольфганг Паули не разделяли точки зрения молодого ученого. Но «год чудес» принес с собой открытие позитрона.

«Мелодия превращается в скрипку»

Это — слова академика С. И. Вавилова. На одной из лекций он рассказывал о процессе, обратном реакции аннигиляции, когда летящий гамма-квант рождает пару электрон + позитрон:

$$\gamma \to e^+ + e^-.$$

Такой процесс превращения электромагнитного поля в вещество был открыт почти одновременно в 1933 году четырьмя группами физиков — во Франции, Германии, Англии и США. На рисунке 2 — знаменитая фотография, полученная супругами Жолио-Кюри. Вы видите, как пара частиц возникает словно из ничего, поскольку сам гамма-квант невидим в туманной камере Вильсона.

Существуют два обязательных условия рождения пары. Первое — энергия гамма-кванта должна превышать сумму энергий покоя компонент пары: $E_\gamma > 2m_ec^2 = 1{,}02$ МэВ. И второе — обязательно должны присутствовать ядро или электрон, которые примут на себя избыток энергии и импульса. Иначе нарушатся законы сохранения энергии и импульса*).

Рождение e^+e^--пар объяснило один непонятный эффект, с которым еще в 1930 году столкнулись исследователи. Эксперименты показывали, что жесткие гамма-кванты поглощаются в веществе значительно сильнее, чем это предсказывала теория. Как оказалось, «аномальное» поглощение было связано с образованием пар. И вполне вероятно, что, если Андерсон и Блэкетт и Оккиалини помедлили, честь обнаружения позитрона принадлежала бы физикам, занимающимся вопросами поглощения гамма-квантов.

*) Необходимость этого требования можно доказать строго (предоставляем это читателям). А мы ограничимся следующим рассуждением: всегда можно выбрать такую систему отсчета, в которой полный импульс образовавшейся пары равен нулю; для гамма-кванта, летящего со скоростью света, такой системы выбрать нельзя; поэтому необходимо третье тело, которому он мог бы передать часть импульса и энергии.

Рис. 2.

Позитрон — первый шаг в антимир

Сейчас физики считают, что каждой из элементарных частиц соответствует своя античастица. (Иногда частица и античастица «совпадают», как это имеет место для гамма-кванта.) Открытие позитрона было первым шагом в мир античастиц, в антимир. Следующие шаги — открытие антипротона и антинейтрона — были сделаны только через четверть века. Для их осуществления потребовалось строительство огромных и дорогих приборов — ускорителей частиц. По всем своим параметрам эти приборы совершенно не соизмеримы с тем ускорителем, который создали Джон Кокрофт и Эрнест Уолтон. Этот ускоритель заработал в лаборатории Кавендиша весной 1932 года.

Почему возник вопрос об ускорителях

После того, как, обстреливая α-частицами ядра азота, Э. Резерфорд расщепил их и доказал, что из ядра вылетает протон, он продолжал опыты вместе с Чедвиком, и испытанию подверглись все легкие элементы вплоть до калия. Расщепить удалось многие из них — бор, азот, фтор, натрий и т. д., но все же далеко не все. К 1924 году исследователи пришли к двум важным выводам. Во-первых, для расщепления тяжелых ядер с большим зарядом недостаточно энергий α-частиц, испускаемых радиоактивными препаратами. Основная группа быстрых частиц обладает энергиями 8—9 МэВ, и сильное кулоновское отталкивание не позволяет им проникнуть в глубь ядра. Во-вторых, часть легких ядер, с чётными порядковыми номерами устроена более прочно и не распадается под действием облучения.

Итак, энергии снарядов не хватало. Надо было думать о том, как увеличить эту энергию. Речь шла об ускорении в электрическом поле тяжелых заряженных частиц — протонов или α-частиц. Но если не представляло особых трудностей получить ионы водорода (p) или гелия (α-частицы), то разогнать их до энергий в миллионы электронвольт (а это означало, что частицы должны пролетать огромную, $\sim 10^6$ В разность потенциалов) представлялось невероятно трудной задачей. Во-первых, в это время ни одна лаборатория не имела генераторов такого сверхвысокого напряжения. В самых совершенных рентгеновских трубках использовалось $U=0{,}35$ миллиона вольт. Во-вторых, изоляция трубок не выдерживала больших напряжений и происходил ее пробой. Тем не менее идеи витали в воздухе, и работы начались (или уже шли к 1924 г.).

Экспериментаторы ясно видели одно огромное преимущество искусственных источников. В них можно было получить гораздо больший поток частиц, чем от естественных препаратов. Например, 1 г радия испускает $3{,}7\cdot10^{10}$ α-частиц в секунду, и они летят во все стороны. А пучок ионов гелия при силе тока в 1 мкА (10^{-6} А) дал бы $3{,}1\cdot10^{12}$ α-частиц или в 2 раза больше протонов, которые все можно было бы направить непосредственно на мишень. Как мы увидим ниже, именно огромные потоки искусственных снарядов позволили на первых порах решить задачу расщепления ядра.

Туннельный переход (1928 год)

Существует рассказ о том, как один репортер попросил у Эйнштейна показать ему записную книжку, в которую ученый заносит свои выдающиеся мысли. «Выдающихся так мало,— ответил Эйнштейн,— что я вполне успеваю их запомнить».

В 1928 году произошли два события, о которых можно сказать, что они были совершенно выдающимися: Дирак создал свое уравнение, и был предсказан «туннельный переход».

Обратимся к рисунку 3. На нем представлена энергетическая картина взаимодействия налетающего протона с ядром. Исследователям важно, чтобы протон p проник внутрь ядра, то есть в область $R<R_я$, где действуют ядерные силы. Именно там лежит terra incognita (неизведанная

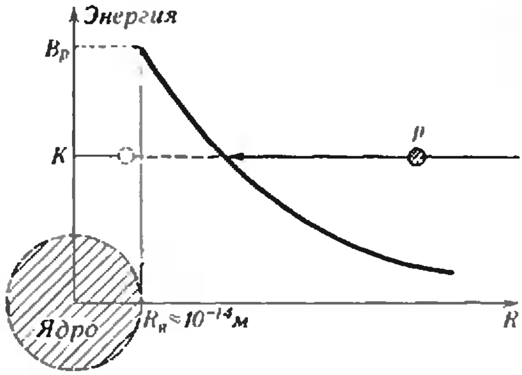


Рис. 3.

земля). Но на пути протона возникает барьер, созданный электрическими силами отталкивания. Его высота на границе ядра с зарядом eZ равна

$$B_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{e^2 Z_я}{R_я}.$$

Для разных ядер величины B_p сильно отличаются. Так, $B_p(^6_3\mathrm{Li}) \approx 2$ МэВ, $B_p(^{27}_{13}\mathrm{Al}) \approx 4{,}5$ МэВ, а $B_p(^{238}_{92}\mathrm{U}) \approx \approx 15$ МэВ.

Если протон имеет начальную кинетическую энергию $K < B_p$, то он никогда не попадет в глубь ядра. Он «отразится» от барьера. Так утверждает классическая механика.

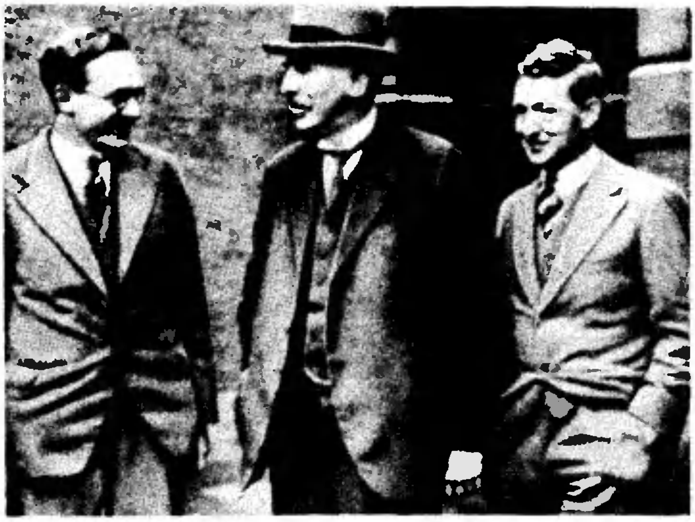
Но вот в 1928 году Г. Гамов и, независимо, Р. Генри и Э. Кондон опровергли этот, казалось бы, бесспорный вывод. Они доказали, что, согласно квантовой механике, существует определенная вероятность проникновения частицы сквозь потенциальный барьер. Эта вероятность очень быстро падает с уменьшением отношения K/B_p, но все же не равна нулю. Пусть, для примера, пучок протонов с энергией 1 МэВ испытывает лобовые соударения (запомним это условие — «лобовые соударения») с ядрами алюминия ($B_p \approx 4{,}5$ МэВ). Тогда из каждой тысячи протонов приблизительно пять проникнут в область $R < R_я$. Такой процесс получил название «туннельный переход». Частицы как бы прорывают себе туннель в потенциальном барьере. В макроскопическом мире это кажется волшебством. Ведь тогда человек, состоящий из атомов, может пройти сквозь стену собственного дома. «Может» — отвечает квантовая механика, но, увы, с очень малой вероятностью. Такой «туннельный переход» осуществится за время, неизмеримо большее, чем время существования Вселенной (поэтому обычный путь — пройти через дверь — имеет очевидные преимущества).

Резерфорд внимательно следил за развитием ускорительной техники. В 1928 году в Кавендише уже работал электронный ускоритель с разрядной трубкой на 0,5 миллиона вольт. Однако до ускорения протонов и бомбардировки ядра, казалось, было еще очень далеко. Пока не родилась идея туннельного перехода. Один из сотрудников лаборатории Г. Аллибон вспоминал: после лекции Гамова о туннельном переходе «мы с Уолтоном спустились вниз по лестнице в нашу лабораторию и подошли к Кокрофту, который работал в той же комнате. Кокрофт как раз подставлял в формулу Гамова цифры, которые можно было получить в то время для ионного тока,— это 1,0 мкА протонов, ускоренных до энергий 0,5 МэВ,— чтобы выяснить вероятность проникновения протонов через энергетический барьер ядер бора. Даже после учета возможных потерь эти цифры казались вполне приемлемыми, и через некоторое время он подал Резерфорду объяснительную записку с предложением строить трубку». Недостаток энергии можно было теперь скомпенсировать большой величиной тока. А она была очень нужна. Когда мы оценивали вероятность проникновения протона в ядро, речь шла о лобовом соударении. Но такой удар испытывает лишь весьма незначительная часть бомбардирующих частиц. К тому же, протоны тормозятся, ионизируя атомы и теряя при этом драгоценную энергию.

Резерфорд дал свое согласие, и Кокрофт и Уолтон приступили к разработке ускорителя.

Заповедь экспериментатора

Создав новый прибор, получи на нем физические результаты (пускай сначала даже посредственные), а затем занимайся его усовершенствованием. И еще — иди главным путем.


Слева направо: Э. Уолтон, Э. Резерфорд, Д. Кокрофт.

К 1932 году на пороге открытия искусственного расщепления ядер стояло несколько групп ученых. Э. Лоуренс и М. Ливингстон (США) приступили к созданию нового прибора — циклотрона. В этом ускорителе частицы разгонялись электрическим полем, а магнитное заворачивало их траекторию. Таким образом, пучок мог многократно проходить ускоряющий промежуток. Он двигался по плоской спирали, набирая энергию и увеличивая радиус. К началу «года чудес» лаборатория Лоуренса обладала протонным пучком с энергией 2,2 МэВ. Но исследователи сразу стали монтировать циклотрон с гигантским (по тому времени) магнитом весом в 74 тонны.

Замечательный электростатический генератор был еще в 1929 году построен Ван-де-Граафом в Принстонском университете (США). Модель, созданная в 1931 году, могла уже ускорять частицы до энергий 1,5 МэВ при токе в 25 мкА.

Мы не будем останавливаться здесь на работах других групп. Все они шли к одной цели, шли параллельными или почти одинаковыми путями и почти «голова в голову». Но первой пришла группа из Кавендишской лаборатории.

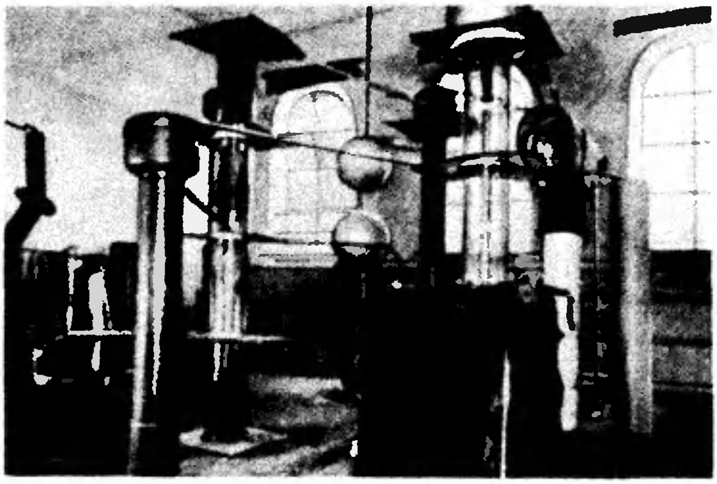
В толстом томе трудов Королевского общества напечатана подробная статья Кокрофта и Уолтона с описанием электростатического генератора для ускорения протонов и других тяжелых ионов. Она поступила в редакцию 23 февраля 1932 года. Экспериментаторы вывели из трубки через тонкое слюдяное окошко пучок протонов с энергией около 0,7 МэВ и... начали изучать их поглощение в воздухе в зависимости от величины приложенного напряжения. Одновременно рождались мысли о модернизации установки и замене ее частей (в начальной конструкции были использованы подручные детали, в частности жестянки из-под печенья).

Итак, все группы исследователей в какой-то мере нарушали приведенную выше заповедь. В Кавендише это продолжалось недолго. По воспоминаниям различных лиц, величина «шторма», который устроил Резерфорд своим ученикам, достигала разных «баллов».

Самый смягченный, «штилевой» вариант приводит тот же Аллибон: «Резерфорд все время спрашивал, ставили ли Кокрофт и Уолтон под пучок мишень; но поскольку они с головой ушли в измерения зависимости пробега от энергии, то ставить мишень даже не пробовали. Резерфорд настаивал и сердился за их медлительность. Поэтому... они сделали мишень из лития и поставили эксперимент только для того, чтобы Резерфорд перестал ворчать». В результате было открыто искусственное расщепление ядер:

$$^{7}_{3}\mathrm{Li}+p\rightarrow\alpha+\alpha.$$

Об этом извещает письмо в редакцию журнала «Nature» («Природа»), присланное 16 апреля 1932 года.



Ускоритель Д. Кокрофта и Э. Уолтона.

(За свою «покладистость» Кокрофт и Уолтон в 1951 году были удостоены Нобелевской премии.)

После этого открытия буквально в течение нескольких месяцев опыт по искусственному расщеплению был повторен несколькими группами и в том числе — советскими физиками, работавшими в Харькове: К. Синельниковым, А. Лейпунским, А. Вальтером и Г. Латышевым.

Теперь очень коротко расскажем о самом эксперименте Кокрофта и Уолтона.

Искуственное расщепление ядра лития (апрель 1932 года)

Установка Кокрофта — Уолтона располагалась в большой светлой комнате. Вы видите ее на фотографии. Слева — четыре секции электростатического генератора, справа — ускорительная трубка из двух секций. Остальные колонны — конденсаторы или изолирующие опоры.

Идея получения высокого напряжения кажется очень простой. Если зарядить n одинаковых емкостей до напряжения U_0 и соединить их последовательно, то разность потенциалов на концах цепи будет $U=nU_0$. Самое трудное — придумать механизм подзарядки такой системы. И эта задача была решена Кокрофтом и Уолтоном чрезвычайно остроумно.

Второй важнейшей частью установки была ускоряющая трубка, собранная из двух секций, к каждой из которых подводилось напряжение от генератора (до 350 тысяч вольт). Таким образом, максимальная энергия протонного пучка могла составлять $\sim$0,7 МэВ.

После «внушения», сделанного Резерфордом, на нижнем конце ускоряющей трубки появилась установка для изучения искусственного расщепления ядер лития (на фотографии она закрыта черной материей). Сначала схема опыта выглядела так, как это показано на рисунке 4. Пучок протонов падал на мишень из лития, повернутую под углом 45° к направлению пучка. Вылетающие из мишени α-частицы попадали на экран из сернистого цинка. Когда на такой экран попадает энергичная (несколько МэВ) α-частица, происходит вспышка света, которую можно увидеть с помощью микроскопа.

Приступив к опыту, исследователи начали понемногу увеличивать напряжение на трубке. Когда оно достигло величины 125 кВ, появились первые вспышки от α-частиц. Их еще было мало (5 штук в минуту при токе в 1 мкА), но чем больше увеличивалось напряжение, тем чаще появлялись световые точки. Число вспышек оказалось пропорциональным току протонов.

Ожидаемая и неожиданная удача!

После первых успешных результатов, как всегда, наступило время их кропотливой проверки. Все — яркость вспышек, величина пробега частиц, характер следов в камере Вильсона (ею был заменен счетчик вспышек) — указывало на то, что это α-излучение с энергией около 8 МэВ.

Однако изобретательные молодые физики провели еще один, контрольный, эксперимент. Согласно расчетам, α-частицы, появляющиеся при ядерной реакции $^7_3\mathrm{Li}+p\rightarrow 2\alpha$, должны разлетаться под углом 180° *). Одновременная регистрация двух таких частиц была бы полным подтверждением расщепления ядра. Для контрольного эксперимента была собрана установка, в которой использовались два счетчика (два экрана), расположенные по разные стороны от мишени (на рисунке 5 — схема такой установки).

И вот оба экспериментатора смотрят в микроскопы. У каждого из них под рукой телеграфный ключ и движущаяся бумажная лента. Увидев вспышку, надо нажать ключ, и он поставит точку на ленте. При сравнении оказалось, что точки совпадают (по времени) так часто, как это следовало из расчетов.

*) Энергия протонов много меньше, чем высвобождаемая в этом процессе и переходящая в кинетическую энергию α-частиц.

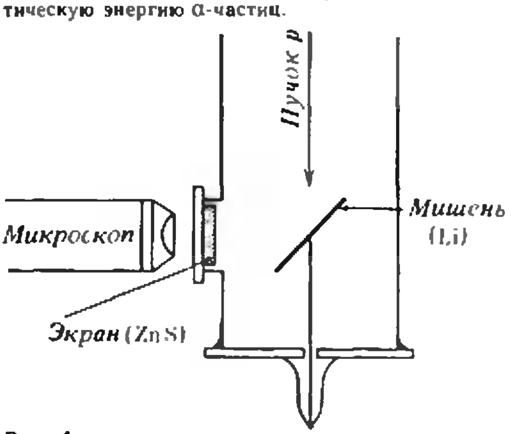


Рис. 4.

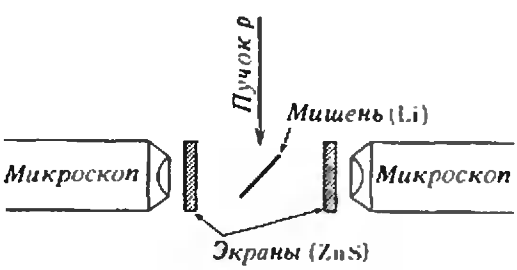


Рис. 5.

Еще немного об ускорителях

После 1932 года ускоритель зашагал семимильными шагами. В конце 1936 года разгоняемые в циклотроне α-частицы превзошли по своей энергии все, что давали естественные препараты. Шло время, рождались новые идеи, и создавались новые типы ускорителей. Как-то было подсчитано, что через каждые пять лет энергии ускоряемых частиц возрастали почти на порядок. Ускорителям стало тесно в комнатах, залах, потом в ангарах. Пришло время, когда увидеть ускоритель целиком можно только с самолета. Если установка Кокрофта и Уолтона обошлась «ужасно дорого» (приблизительно в 1000 фунтов стерлингов), то потом эта цифра обросла таким количеством нулей, что строительство ускорителей стало под силу только богатым странам. Но и они объединяются для создания новых гигантов.

В распоряжении физиков оказались пучки самых различных частиц и среди них — дейтонов (d) — ядер тяжелого водорода дейтерия D. Они состоят из одного протона и одного нейтрона, то есть имеют заряд +1 и массу 2.

Удивительная судьба связывает нейтрон и дейтон. Существование обоих было предсказано Резерфордом в 1920 году, и обе частицы были открыты в 1932 году.

Дейтон и тяжелая вода

16 февраля 1932 года в редакцию журнала Американского физического общества «Физическое обозрение» поступила статья «Изотоп водорода с массой 2 и его концентрирование».

Популярный сейчас журнал представлял во времена своей молодости довольно тонкую книжку и намного уступал своей известностью европейским изданиям.

Однако работа трех американских ученых Юри, Брикведда и Мерфи была выдающимся событием для всей физики.

Путь к обнаружению дейтона был далеко не легким. Подобно любому из путей к большому открытию, он заключал в себе и ошибки, и недоразумения.

Содержание тяжелых атомов в водороде составляет менее 1 на 6000 легких. Это и было основной причиной трудностей.

Свою работу Юри, Брикведд и Мерфи начали с того, что научились обогащать водород тяжелым изотопом. Вот почему в названии статьи стоят слова о концентрации, и недаром ее авторы работали в лаборатории низких температур. В этой лаборатории они подвергали особой перегонке жидкий водород (а он сжижается при температуре —253 °С!). Легкие молекулы $^1H^1H$ уходили первыми, а остаток обогащался тяжелым изотопом $^1H^2H$.

Затем точными спектральными методами, которые мы не можем здесь описывать, было показано, что в обогащенных образцах действительно присутствуют атомы тяжелого водорода.

Вскоре Уошборн и Юри обнаружили, что при электролизе водных растворов первым выделяется легкий водород $^1H^1H$, и вода насыщается тяжелым. Ее плотность в процессе электролиза постепенно повышается, и в конце концов можно получить почти чистую тяжелую воду — D_2O. Свойства тяжелой воды необычны: плотность ее — 1,1 г/см^3, температура замерзания равна 4 °С, температура кипения — 101,4 °С.

Необычна и судьба этого вещества, которое сначала было известно лишь узкому кругу ученых, а через 10 лет после своего открытия стало предметом пристального внимания людей, очень далеких от науки. Это объяснялось тем, что тяжелая вода понадобилась для производства атомного оружия. К началу второй мировой войны почти весь европейский запас тяжелой воды — 185 килограммов — находился на территории оккупированной Франции. И гестапо, и абвер устроили настоящую охоту за драгоценным сырьем. Французские патриоты во главе с Фредериком Жолио-Кюри сначала успешно прятали ее у себя на родине, а затем тайно переправили в Англию.

Совсем короткое заключение

Подходил к концу 1932 год — «золотой год экспериментаторов», «год чудес», «год исполнения предсказаний». Замечательные открытия этого года были подготовлены огромным трудом многих и многих людей, о подавляющем большинстве которых мы не смогли даже упомянуть в этой статье. У нас почти не было возможности рассказать и об ошибках, блужданиях и разочарованиях.

«Среди плодотворных дней, встречается много других, когда ничего не получается, когда все валится из рук, когда кажется, что даже сама природа относится к тебе враждебно. Вот именно тогда надо победить разочарованность» (Мария Кюри).

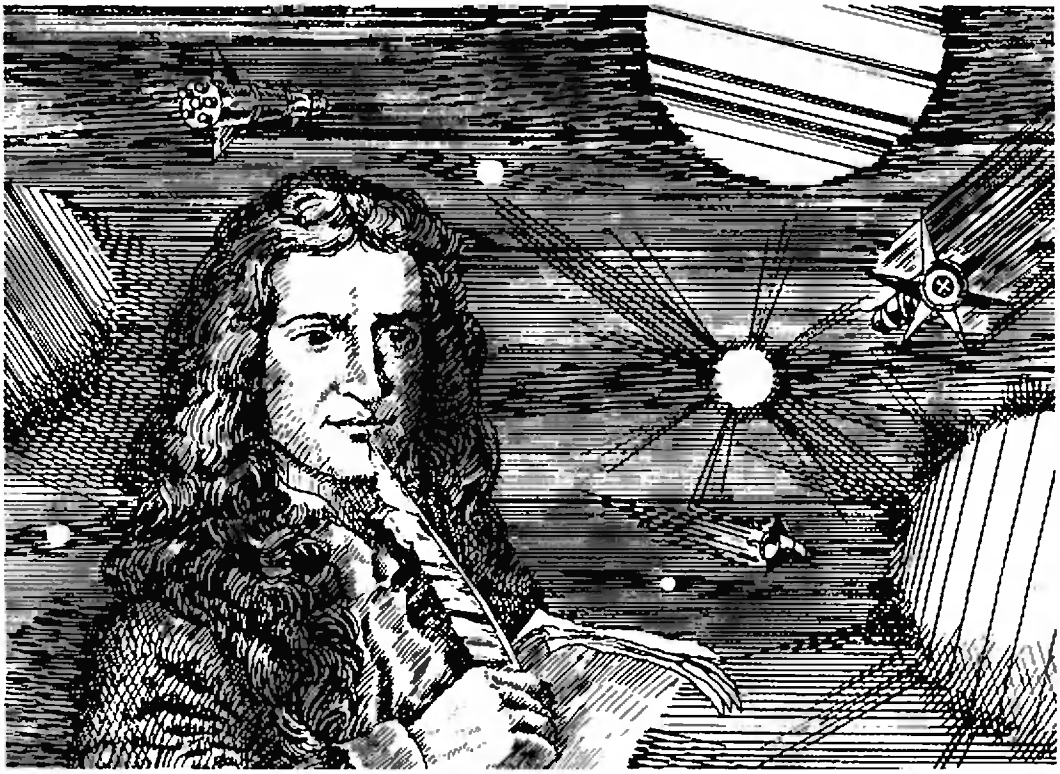
ВСТРЕЧА С ЧИТАТЕЛЯМИ

8 апреля 1982 года в Московском физико-техническом институте (г. Долгопрудный) состоялась встреча редакции нашего журнала с преподавателями и студентами МФТИ. Перед ними выступали члены редакционной коллегии и редакционного совета «Кванта». Я. А. Смородинский рассказал о последних достижениях физики. О работе редакции, ее планах на будущее рассказали М. Н. Данилычева, Н. Б. Васильев, А. Р. Зильберман, Н. Х. Розов, В. Е. Белонучкин, Р. Н. Кузьмин, Г. Н. Яковлев. А. П. Савин ознакомил участников встречи с итогами анализа анкет «Кванта», распространенных среди студентов МФТИ.

Преподаватели и студенты МФТИ — бывшие активные читатели «Кванта» — с энтузиазмом высказали свое мнение о журнале, пожелания редакции.

В дальнейшем редакция намерена провести ряд таких встреч в различных вузах и школах.

А. Виленкин



В. Тихомиров

Аэродинамическая задача Ньютона

Ошибаются ли гении? Обычно, задавая такой вопрос, предполагают утвердительный ответ. В сознании, что и гениям свойственно заблуждаться, есть нечто утешительное — об ошибках гениев нередко пишут с большим воодушевлением. Вот пример. Перу Л. Янга — замечательного математика, внесшего немалый вклад в развитие математического анализа, принадлежит книга «Лекции по вариационному исчислению и теории оптимального управления», М., «Мир», 1974. Это очень интересная и своеобразная книга*). В ней рассеяны философские рассуждения автора, обращенные ко многим, иногда удаленным от математики, темам. На вопрос «ошибаются ли гении?» Янг отвечает с запальчивой утвердительностью, ссылаясь при этом на Ньютона. На с. 42 упомянутой книги он пишет: «Ньютон сформулировал вариационную задачу о теле вращения, испытывающем наименьшее сопротивление в газе. Принятый им закон сопротивления физически абсурден, в результате чего поставленная им задача не имеет решения (чем более зазубрен профиль, тем меньше сопротивление)... Если бы выводы Ньютона были хотя бы приблизительно верны, то мы не нуждались бы сегодня в дорогостоящих экспериментах в аэродинамических трубах».

Что же это за задача, и насколько справедливы приведенные выше слова? Об этом и будет рассказано дальше.

*) Не предназначенная, разумеется, для школьников. (*Прим. ред.*)

Аэродинамическая задача Ньютона

В 1687 году вышли «Математические начала натуральной философии» Ньютона. Вряд ли какое-либо произведение научной литературы может быть сопоставлено с этой книгой — в ней Ньютону было суждено открыть систему мира. Лагранж назвал это сочинение «величайшим из произведений человеческого ума».

Обсуждая вопросы, связанные с сопротивлением, оказываемым материальным телам средой, в которой они движутся, Ньютон, как бы мимоходом, бросил следующую фразу: «Когда же фигура $DNFG$ будет кривою такого рода, что если из любой ее точки N опустить на ось перпендикуляр NM и из заданной точки G провести прямую GR, параллельную касательной к кривой в точке N и пересекающую ось в точке R, то имеет место пропорция $MN:GR = GR^3:(4BR \cdot GB^2)$, тогда тело, образующееся при обращении этой кривой около оси AB, при движении в вышеупомянутой редкой среде в направлении от A к B будет испытывать меньшее сопротивление, нежели всякое иное тело вращения, описанное на той же длине и ширине»*) (рис. 1).

Фраза Ньютона привлекла к себе внимание современников лишь после того, как в 1696 году И. Бернулли поставил свою знаменитую задачу о брахистохроне (см. напр. «Квант», 1975, № 12 или книгу Г. Н. Бермана «Циклоида», М., «Наука», 1980). Задаче о брахистохроне, а не задаче Ньютона, суждено было стать родоначальницей нового направления в математике, впоследствии названного *вариационным исчислением*.

В сиянии брахистохроны задача Ньютона заняла положение несчастной Золушки: ее как-то избегали, вспоминали о ней редко, да и то, как правило, чтобы поведать о заблуждении гения. Но, как и для Золушки, для задачи Ньютона настал свой черед.

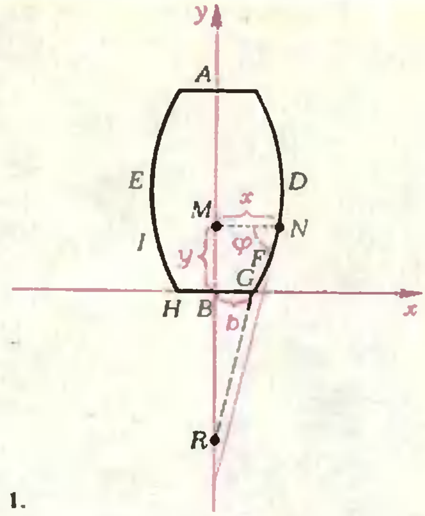


Рис. 1.

* * *

Попробуем вникнуть в замысел Ньютона.

При конструировании кораблей, снарядов, торпед или ракет естественно возникает стремление придать им такую форму, чтобы они испытывали возможно меньшее сопротивление при своем движении. Ньютон пишет: «Можно сравнивать сопротивление тел между собой и находить те, которые наиболее приспособлены к продолжению своего движения в сопротивляющейся среде». Но, если, скажем, корабль не может иметь слишком большой симметрии своего корпуса, то головки ракет, снарядов и торпед естественно делать круглыми в поперечном сечении; иными словами, им резонно придавать форму *тел вращения*. Но какую именно — сферическую, коническую, веретенообразную или еще какую-нибудь? На такой вопрос нельзя ответить без вычислений, без решения некоторой математической задачи на максимум и минимум. Именно такую задачу ставит (и решает в приведенной выше фразе) Ньютон.

В самом первом приближении задача ставится так.

З а д а ч а. *Найти тело вращения заданной длины и заданной ширины, испытывающее наименьшее сопротивление при движении в некоторой среде.*

П о я с н е н и я. Каждый из терминов, участвующий в формулировке (*длина, ширина, движение* и *сре-*

*) Подлинный текст Ньютона воспроизведен в книге В. М. Алексеева, В. М. Тихомирова, С. В. Фомина «Оптимальное управление». (М., «Наука», 1979). Перевод «Математических начал» опубликован в собрании сочинений акад. А. Н. Крылова. (М.—Л., Изд. АН СССР, 1937, т. 7). Цитируемое место содержится на с. 430. Мы чуть подкорректировали его. Рисунок 1 — копия рисунка из «Математических начал». Правда, мы расположили его «сверху вниз», а не «слева направо»; кроме того, на рисунке 1 имеются дополнительные красные линии и буквы, нанесенные нами, они понадобятся нам в дальнейшем.

да), требует полного описания. Ньютон представляет себе тело вращения одинаковым сзади и спереди, то есть симметричным относительно плоскости, проходящей через середину оси вращения и перпендикулярной этой оси. Таким образом, *длина* тела — это его длина по оси вращения, а радиус срединного сечения — это *ширина* тела. Следовательно, при всех рассмотрениях можно ограничиться лишь половинкой тела, что мы и делаем дальше. Будем считать, вслед за Ньютоном, что *движение*, совершаемое телом,— это равномерное движение с постоянной скоростью v.

Теперь — о *среде* — это наиболее тонкий и принципиальный вопрос. Среда, описанная Ньютоном, несколько необычна, он называет ее *редкой*. Ньютон представляет себе редкую среду «состоящей из равных частиц, свободно расположенных на равных друг от друга расстояниях». Неподвижные частицы имеют фиксированную массу m и являются абсолютно упругими шарами. Само тело Ньютон считает также абсолютно упругим, так что каждый шарик, столкнувшись с движущимся телом, отскакивает от него по закону «угол падения равен углу отражения».

После приведенных пояснений можно было бы сразу точно поставить и начать решать общую задачу, но мы сначала изучим более простую. С этой более простой задачи, кстати говоря, начинает и сам Ньютон.

Задача об усеченном конусе. *При данном основании и высоте усеченного конуса найти тот, который испытывает наименьшее сопротивление при движении в редкой среде.*

Формализация задачи об усеченном конусе

Только что задача была сформулирована словесно, без формул. Нам надлежит сейчас осуществить ее *перевод* с обычного языка на язык математики. Такой перевод называется *формализацией*.

Итак, пусть усеченный конус имеет высоту, равную H, и радиус

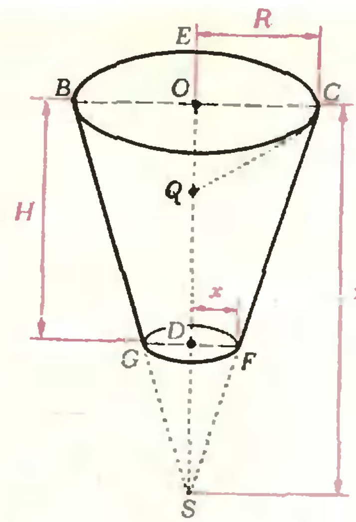


Рис. 2.

верхнего основания R (рис. 2)*).

Ньютон пишет: «Так как действие среды на тело то же самое... движется ли тело в покоящейся среде или же частицы среды ударяют с той же скоростью на покоящееся тело, то будем рассматривать тело в покое». Поступим так же и мы: оставив конус неподвижным, мы будем считать, что на него снизу вверх «надвигается» среда со скоростью v.

Поверхность конуса, испытывающая столкновения с шариками среды, состоит из его нижнего основания и боковой поверхности. Сначала вычислим сопротивление, испытываемое нижним основанием. Обозначим его радиус через x. За единичное время с этим основанием столкнутся шарики, которые первоначально находились в цилиндре с основанием, равным нижнему основанию, и высотой, равной v. Объем этого цилиндра V_0 равен $\pi x^2 v$. Пусть ϱ — плотность среды. Тогда число частиц, ударившихся о нижнее основание за единичное время, будет равно $N_0 = \frac{\varrho}{m} V_0 = \frac{\varrho}{m} \pi x^2 v$. Каждая частица после удара о нижнее основание сменит свою скорость на противоположную, то есть получит приращение импульса, равное $-2mv$. По третьему закону Ньютона конус получит противоположное прираще-

*) Часть рисунка 2, выполненная в черном цвете, содержится в «Математических началах».

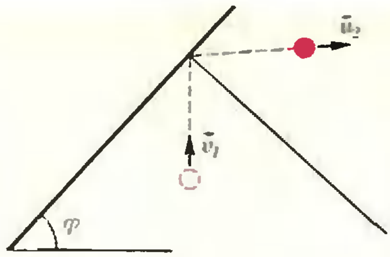


Рис. 3.

ние импульса, и, значит, общее приращение импульса от всех частиц будет равно $N_0 2mv = 2\pi\varrho x^2 v^2$. Аналогично обстоит дело и для боковой поверхности. О нее ударяются частицы, помещаемые в объем между двумя одинаковыми боковыми поверхностями, и этот объем V_1 равен $\pi(R^2 - x^2)v$. Число частиц, ударившихся о боковую поверхность, равно $N_1 = \frac{\varrho}{m} V_1 = \frac{\varrho}{m}\pi(R^2 - x^2)v$. Но здесь надо аккуратнее подсчитать приращение импульсов. Отразившись от стенки, частица получит приращение импульса $m(\vec{v_2} - \vec{v_1})$ (рис. 3). Этот вектор надо спроектировать на ось y. Из рисунка 3 легко понять, что эта проекция равна $-2mv\cos^2\varphi$, где φ — угол наклона образующей конуса к плоскости нижнего основания. Таким образом, общее приращение импульса от всех частиц, ударившихся о боковую поверхность, равно $N_1 2mv\cos^2\varphi = 2\pi\varrho(R^2 - x^2)v^2\cos^2\varphi$.

Отметим (для будущего) формулу для силы сопротивления, испытываемого боковой поверхностью усеченного конуса, получающегося при вращении вокруг оси y отрезка AB, наклоненного к оси x под углом φ с абсциссами концов, равными a и b соответственно:

$$F = K(b^2 - a^2)\cos^2\varphi,\quad K = 2\pi\varrho v^2. \quad (1)$$

В результате получаем следующее выражение для сопротивления, испытываемого всем конусом:

$$F(x) = K(x^2 + (R^2 - x^2)\cos^2\varphi),\quad K = 2\pi\varrho v^2.$$

Выражение $\cos\varphi$ через x найти очень легко: $\cos\varphi = (R-x)/\sqrt{(R-x)^2 + H^2}$.

Постоянный множитель K не влияет на поведение максимальных и минимальных величин, и мы его отбросим.

Теперь можно формализовать задачу об усеченном конусе.

Задача 1. *Найти минимум функции*

$$f(x) = x^2 + (R^2 - x^2)\,\frac{(R-x)^2}{(R-x)^2 + H^2} \quad (2)$$

при условии, что $0 \leqslant x \leqslant R$.

Второй вариант формализации задачи об усеченном конусе

Продолжим отрезок прямой, соединяющей точки C и F (рис. 2) до пересечения с осью y в точке S. Длину отрезка OS примем за новое переменное z. Из подобия треугольников SOC и SDF получаем $x/R = (z-H)/z$, откуда $(R-x) = RH/z$ и $x = R(z-H)/z$. Подставив эти выражения в (2), получим новое выражение для силы сопротивления (деленной на K) через новую переменную:

$$q(z) = R^2\,\frac{(z-H)^2 + R^2}{z^2 + R^2}. \quad (3)$$

При этом z изменяется от H до бесконечности. Таким образом, мы пришли к такой формализации задачи об усеченном конусе (постоянный множитель R^2 снова отбрасывается):

Задача 1′. *Найти минимум функции*

$$h(z) = \frac{(z-H)^2 + R^2}{z^2 + R^2} \quad (2')$$

при условии, что $z \geqslant H$.

Решение задачи 1′. Обозначим наименьшее значение функции h через m. Таким образом, $h(z) \geqslant m$ для любого $z \geqslant H$. При этом $m \leqslant h(H) = R^2/(R^2 + H^2) < 1$. Сделаем очевидные преобразования:

$$h(z) \geqslant m \text{ при } z \geqslant H \Leftrightarrow,$$
$$\Leftrightarrow (z-H)^2 + R^2 - mz^2 - mR^2 \geqslant 0 \text{ при } z \geqslant H \Leftrightarrow,$$
$$z^2(1-m) - 2zH + H^2 + R^2(1-m) \geqslant 0 \quad (4)$$

при $z \geqslant H$.

Если вдруг окажется, что существует такое $m < 1$, при котором неравенство (4) верно для всех z и если при этом m можно найти $\hat{z} \geqslant H$, которое обращает это неравенство в равенство, то это будет означать, что задача решена. Попробуем теперь отыскать нужные m и $\hat{z}$. Если имеет место неравенство $az^2+2bz+c\geqslant 0$ для всех $\hat{z}$ и при этом $a\hat{z}^2+2b\hat{z}+c=0$, то отсюда следует, что $D=b^2-ac=0$ и $z=-b/a$ (продумайте это!). У нас $a=(1-m)$, $b=-H$, $c=H^2+R^2(1-m)$. Уравнение $D=0$ приводит к соотношению

$$D=H^2-(1-m)(H^2+R^2(1-m))\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(R^2m^2-(2R^2+H^2)m+R^2)=0,$$

откуда

$$m=\frac{2R^2+H^2-H\sqrt{4R^2+H^2}}{2R^2}.$$

Знак + был отброшен, ибо то m, которое мы ищем, должно быть, как это было установлено, меньше единицы. Далее,

$$\hat{z}=-b/a=H/(1-m)=$$
$$=\sqrt{R^2+(H/2)^2}+H/2\,(>H). \quad (5)$$

В итоге нашлись такие $m<1$ и $\hat{z}>H$, что дискриминант уравнения $z^2(1-m)-2zH+H^2+R^2(1-m)=0$ равен нулю, и оно имеет единственный корень $\hat{z}\geqslant H$, то есть $h(z)\geqslant m$, $h(\hat{z})=m$. Задача 1′ решена.

Приведем ответ задачи об усеченном конусе в той форме, которую придал ему Ньютон: «Если на круговом основании $CEBH$ (рис. 2), описанном из центра O радиусом OC, требуется построить такой усеченный конус $CBFG$ с высотою OD, коего сопротивление было бы меньше сопротивления всякого другого усеченного конуса, построенного на том же основании и высоте и движущегося по оси OD в сторону D, то разделив высоту OD в точке Q пополам, продолжи OQ до S так, чтобы было $QS=QC$. S и будет вершиною искомого конуса, который усекается».

Легко убедиться, что геометрическая форма, приданная ответу Ньютоном в точности соответствует аналитической форме, заключенной в формуле (5).

Обсуждение. Получилось, что конус наименьшего сопротивления на самом деле усеченный, затупленный, а не заостренный. Ньютон при этом идет еще дальше. Он устремляет высоту H к нулю. При этом $\hat{z}$ устремляется к R и угол при основании конуса устремляется к 45°. Основываясь на этом, Ньютон делает замечание, что овальное тело следует заменять затупленным, то есть делать спереди плоскую круглую площадку, образующую угол с примыкающей к площадке поверхностью, равный 135°. «Я считаю, что это замечание,— говорит Ньютон,— может быть небесполезно при построении судов».

Задача Ньютона для ломаной

Сделаем еще один, предпоследний шаг к решению общей задачи Ньютона. Будем рассматривать не любые кривые вращения, а лишь ломаные. Для этого разделим отрезок $[0, R]$ оси Ox на N равных частей точками деления

$$x_0=0,\ x_1=\frac{R}{N},\ x_2=\frac{2R}{N},\ \ldots,\ x_N=R$$

и обозначим ординаты соответствующих вершин ломаной через y_0, y_1, ..., y_N (рис. 4). Будем предполагать, что ломаная начинается в точке $(x_0,y_0)=(0,0)$, затем может идти по оси Ox (то есть $y_0=y_1=\ldots=y_s=0$ для некоторого s, $0\leqslant s\leqslant N$), затем монотонно поднимается вверх

$$y_s<y_{s+1}\leqslant y_{s+2}\leqslant\ldots\leqslant y_N \quad (6)$$

и приходит в точку $(x_N,y_N)=(R,H)$. Ломаные, удовлетворяющие этим требованиям, назовем *допустимыми*.

Поясним, почему потребовалось *условие монотонности* (6). При его нарушении в поверхности вращения образуются «выемки», от которых некоторые шарики будут многократно отражаться, увеличивая силу сопротивления (и безнадежно усложняя ее подсчет).

Найдем теперь силу сопротивления среды F для поверхности, об-

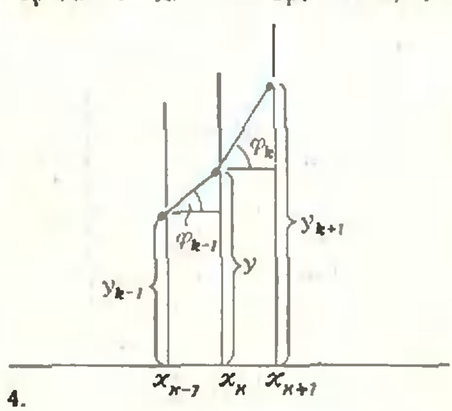


Рис. 4.

разованной вращением допустимой ломаной. Для этого, применяя формулу (1) к каждому ее звену, выразим $\cos\varphi_k$ через координаты вершин (x_k, y_k), (x_{k+1}, y_{k+1}) (см. рис. 4) и просуммируем. Получается

$$F_л = 2K\sum_{k=1}^{N-1}\frac{x_k+x_{k+1}}{2}\cdot\frac{\Delta x_k}{1+\left(\frac{\Delta y_k}{\Delta x_k}\right)^2}, \qquad (7)$$

где мы обозначили $K=2\pi\varrho v^2$, $\Delta y_k = y_{k+1}-y_k$ и $\Delta x_k = x_{k+1}-x_k=\frac{R}{N}$.

Мы не будем решать задачу минимизации силы (7), хотя для этого требуются лишь известные вам средства дифференциального исчисления — решение технически сложное, а нам для дальнейшего важна лишь постановка задачи и сама формула (7).

Формализация задачи Ньютона

Теперь мы можем подойти к задаче Ньютона в общем случае, когда поверхность вращения образована не отрезком, не ломаной, а кривой $y=f(x)$. Какие кривые мы можем рассматривать? Конечно, кривая должна начинаться в точке (0,0), затем может идти по оси Ox до некоторой точки $(b, 0)$ (где $b\geqslant 0$), затем поднимается монотонно вверх и кончается в точке (R, H). Кроме того, мы потребуем, чтобы функция f была дифференцируема во всех точках $x\in[0,R]$, кроме точки b, где угол примыкания кривой к горизонтальному участку должен быть равен 135° (вспомним замечание Ньютона «небесполезное при построении судов»). Тогда *условие монотонности* может быть записано в виде

$$f'(x)\geqslant 0 \quad x\in[0,R],\ x\neq b.$$

Кривые $y=f(x)$, удовлетворяющие этим условиям, мы будем называть *допустимыми.*

Найдем силу сопротивления среды для тела, полученного вращением допустимой кривой $y=f(x)$ около оси Oy. Возьмем достаточно большое число N и построим допустимую ломаную, положив $y_k=f(x_k)$. Эта ломаная будет мало отличаться от нашей кривой, поэтому искомая сила сопротивления F будет мало отличаться от найденной ранее силы $F_л$ (см. (7)).

Вспомнив теперь понятие интегральной суммы и заметив, что $\Delta y_k/\Delta x_k\approx f'(x_k)$, нетрудно поверить, что при неограниченном увеличении числа N сумма (7) стремится к интегралу

$$2K\int_0^R\frac{x\,dx}{1+(f'(x))^2}=F,$$

который и выражает искомую силу сопротивления. Так, мы пришли к формализации общей задачи Ньютона:

Среди всех допустимых функций $y=f(x)$ найти ту, для которой интеграл

$$\int_0^R\frac{x\,dx}{1+u^2} \qquad (8)$$

минимален, если $u=f'(x)\geqslant 0$.

Решение задачи Ньютона

Подобных задач, конечно, вы в школьном учебнике не встречали. Мы начнем, поэтому, с более простой *вспомогательной задачи:*

Среди всех допустимых функций $y=f(x)$ найти ту, для которой выражение

$$\frac{x}{1+u^2}+2cu \qquad (9)$$

минимально (для всех $x\in[0,R]$), если $u=f'(x)$ и $c>0$ — константа.

Зачем решать эту задачу? А вот зачем: если найдено ее решение $y=\bar f(x)$, $\bar u=\bar f'(x)$, то для любой другой допустимой функции $y=f(x)$ выполняется неравенство (при всех $x\in[0,R]$)

$$\frac{x}{1+u^2}+2cu>\frac{x}{1+\bar u^2}+2c\bar u, \qquad (10)$$

проинтегрировав которое на $[0,R]$ учитывая, что $u=f'(x)$, получим

$$\int_0^R u\,dx=\int_0^R\bar u\,dx=H,$$

откуда

$$\int_0^R\frac{x\,dx}{1+u^2}>\int_0^R\frac{x\,dx}{1+\bar u^2};$$

а это значит, что $\bar f(x)$ (решение вспомогательной задачи (9)) является также и решением задачи Ньютона (8)!

А вспомогательную задачу, как вы наверное догадались, решить не так уж трудно. Ответом будет линия, идущая по оси Ox до точки излома $b=4c$ и далее по кривой, точки $(x; y)$ которой выражаются по формулам

$$\begin{cases} x=c\left(\frac{1}{u}+2u+u^3\right) \\ y=c\left(\ln\frac{1}{u}+u^2+\frac{3}{4}u^4\right)-\frac{7c}{4} \end{cases} \quad (11)$$

через параметр $u\geq 1$ (константа c определяется из условия $f(R)=H$).

Задание. Докажите это.

Указание. Рассматривая выражение (9) как функцию от u, продифференцируйте его (по u) и приравняйте к нулю:

$$\frac{xu}{(1+u^2)^2}=c. \quad (12)$$

Это соотношение называется *дифференциальным уравнением Ньютона* и позволяет найти x (как функцию от u). Пользуясь правилом дифференцирования сложной функции, найдите

$$\frac{d}{du}f(x(u))=\frac{df}{dx}\cdot\frac{dx}{du}=u\frac{dx}{du}$$

и проинтегрируйте это выражение, чтобы найти y (константа $\frac{-7c}{4}$ определяется из замечания Ньютона: в точке излома, при $u=1$, f равно нулю).

Читатель, проверивший все наши рассуждения, может все же спросить: а как же догадаться, что нужно решать именно такую вспомогательную задачу? Секрет прост. На самом деле поиск экстремума вспомогательного выражения (9) — это простое применение так называемого *принципа максимума*, выдвинутого известным советским математиком Л. С. Понтрягиным в середине пятидесятых годов. Этот принцип дает общую схему для решения многих других задач подобного типа.

Подведем итоги

1. *Как же все-таки решить задачу Ньютона?* Как построить минимальную кривую, если ширина и высота заданы? Из выражения (11) видно, что совокупность всех кривых, подозреваемых на минимум — однопараметрическое семейство. При этом *все кривые подобны друг другу* и, в частности, подобны кривой, получающейся из (11), когда C равно, скажем, двум. Нарисуем эту кривую $y=f(x, 2)$ (см. рис. 5). Она обладает тем свойством, что с любой прямой $y=kx$, $k>0$ эта кривая *пересекается один раз* (это нетрудно установить из (12)). Следует провести прямую $y=\frac{Hx}{R}$, соединяющую начало координат с точкой (R, H). Пусть эта прямая пересечет график функции $y=f(x, 2)$ в точке $(\bar{x}, \bar{y})$. Тогда, положив $\bar{C}=H/\bar{y}$, построим кривую $y=f(x, \bar{C})$, которая пройдет через нужную точку (R, H). Эта кривая в семействе (11) единственная, об-

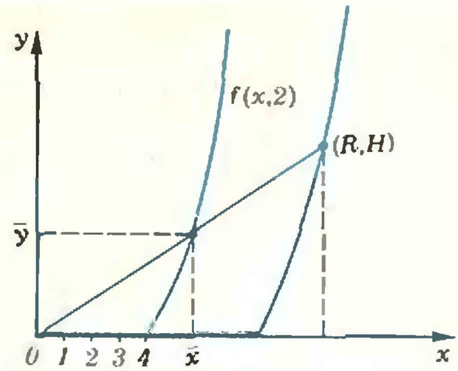


Рис. 5.

ладающая этим свойством. Она и будет решением задачи Ньютона: мы ведь доказали, что она действительно будет доставлять минимум в той задаче, которая была поставлена выше (см. раздел «Формализация задачи Ньютона»).

2. *Что же означает таинственная фраза Ньютона, цитированная в начале статьи, и какое отношение она имеет к решению задачи Ньютона?* На рисунке 1 красным цветом нанесены некоторые наши обозначения. Мы положили $|MN|=x$, $|MB|=y$, $|BG|=b$, угол между отрезком $[MN]$ и касательной к кривой в точке N обозначен через φ. Этот угол равен углу HGR. Далее, $\operatorname{tg}\varphi=f'(x)$, значит, $|BR|/|BG|=\operatorname{tg}\varphi\Rightarrow|BR|=bf'(x)$, откуда $|GR|^2=|BG|^2+|BR|^2=b^2(1+(f'(x))^2)$. Теперь из пропорции Ньютона $(|MN|:GR|=|GR|^3:(4|BR|\cdot|GB|^2)$ получаем

$$\frac{x}{b\sqrt{1+(f'(x))^2}}=\frac{b^3(1+(f'(x))^2)^{3/2}}{4bf'(x)b^2}\Leftrightarrow\frac{xf'(x)}{(1+(f'(x))^2)}=\frac{b}{4}. \quad (12')$$

Получилось дифференциальное уравнение для кривой Ньютона (см. (12) для $b=4c$). Затупленность тела вращения и излом в точке G (угол там равен, как мы помним, 135°) были также предусмотрены Ньютоном. Ранее мы видели, что дифференциального уравнения (12′) и условия в точке излома достаточно для однозначного разрешения задачи Ньютона.

Итак, *задача Ньютона была решена им полностью.*

3. *К какой области математики относится задача Ньютона?* Долгое

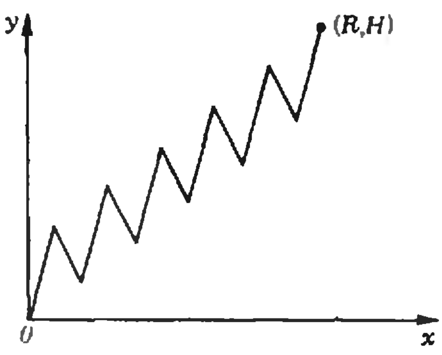


Рис. 6.

время считалось, что к вариационному исчислению: например, А. Н. Крылов, приведя процитированную вначале фразу Ньютона, сопровождает ее такими словами: «Это утверждение Ньютона всецело относится к вариационному исчислению». Далее он формализует задачу Ньютона (чуть иначе, чем мы — у него тело движется вбок, как у Ньютона, у нас — вниз) и приходит (если в его выражении заменить y на x и x на y) к задаче о минимизации интеграла

$$\int_0^R \frac{x\,dx}{1+(f'(x))^2} \qquad (13)$$

при само собой разумеющихся начальных условиях $f(0)=0$, $f(R)=H$. Минимизация такого интеграла, действительно, относится к вариационному исчислению, *но без дополнительного условия* $f'(x)\geqslant 0$ *минимизировать этот интеграл бессмысленно.* Это отметил Лежандр спустя 100 лет после выхода «Начал». Действительно, выберем в качестве f ломаную, составленную из очень крутых звеньев (по типу той, которая изображена на рисунке 6). Тогда $(f'(x))^2$ будет очень велико, а интеграл (13) мал; его вообще можно сделать сколь угодно малым. Получается, действительно, как по Янгу: «чем зазубреннее профиль, тем меньше сопротивление!» Но мы отмечали уже, что *при ньютоновской постановке задачи необходимо требовать, чтобы f была монотонной,* то есть чтобы выполнялось соотношение

$$f'(x)\geqslant 0. \qquad (14)$$

Минимизация интеграла (13) *при условии* (14) *не относится к вариационному исчислению.* Ограничения типа (14), наложенные на задачи о минимизации интегралов типа (13), были охвачены теорией лишь в середине XX века.

Итак, задача Ньютона, *не являясь первой задачей вариационного исчисления, оказалась первой задачей нового раздела математики — теории оптимального управления.*

4. *Критика и апология Ньютона.* Мы опровергли уже два обвинения в адрес Ньютона: неверно, что задача Ньютона не имеет решения (оно было им найдено), неверно, что «чем зазубреннее профиль, тем меньше сопротивление» — этот факт никак не следует из ньютоновских допущений. Но, может быть, все-таки верно, что «принятый им закон физически абсурден?» Что это за редкая среда? Бывает ли такая среда? Не является ли абсурдным то обстоятельство, что тело наименьшего сопротивления затуплено? Кто это видывал торпеды или ракеты с затупленными головками?

Справедливости ради надо сказать, что ни вода, ни окружающий нас воздух, ни какая-либо иная привычная нам газообразная или жидкая среда не обладают свойствами редкой среды Ньютона. Однако физические допущения Ньютона и сама его аэродинамическая задача оказались на самом передовом крае современной науки в середине пятидесятых годов, когда настала эра сверхзвуковых и сверхвысотных летательных аппаратов. «Там вверху», среда оказалась «редкой». И замечание Ньютона о затупленных конусах оказалось-таки «небесполезным» при построении судов, а именно — космических судов. Наконец,

5. *Ошибаются ли гении?* Конечно, ошибаются. Но, надеюсь, я сумел убедить вас в том, что постановка и решение аэродинамической задачи были не заблуждением гения, а прозрением его, позволившим ему прикоснуться через три века к нашей жизни и нашим проблемам. Над этим стоит призадуматься.

Словом, не будем торопливы: может статься, что мысль Гения, кажущаяся нам его заблуждением, несет в себе отпечаток истины, еще не открывшейся нам.

задачник Кванта

Задачи

М741—М745; Ф753—Ф757

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 31 июля 1982 года по адресу: 117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15, «Физматлит», «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5—82 и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М741, М742» или «Ф753». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М741. а) Найдите хотя бы одно натуральное число, которое делится на 30 и имеет ровно 30 различных делителей (включая 1 и само это число). б) Укажите все такие числа.

М. Левин

М742. На а) окружности, б) сфере радиуса 1 расположены n точек. Докажите, что сумма квадратов попарных расстояний между ними не больше n^2.

А. Михайловский, В. Прасолов

М743. В стране N городов. а) Между любыми двумя городами имеется прямое сообщение самолетом или пароходом. Докажите, что, пользуясь лишь каким-то одним видом транспорта, из любого города можно попасть в любой другой (быть может, с пересадками). б) Между любыми двумя городами имеется прямое сообщение самолетом, поездом или пароходом. Докажите, что можно выбрать не менее $N/2$ городов и один из трех видов транспорта так, что, пользуясь им одним, из любого выбранного города можно попасть в любой другой выбранный город. в) Приведите пример, доказывающий, что в утверждении б) заменить число $N/2$ бо́льшим, вообще говоря, нельзя.

Л. Курляндчик, С. Охитин

М744*. В треугольник ABC вписан подобный ему треугольник $A_1B_1C_1$ (вершины A_1, B_1, C_1 углов, равных по величине $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$, лежат, соответственно, на отрезках BC, CA и AB). Пусть A_0, B_0, C_0 — точки пересечения прямых BB_1 и CC_1, AA_1 и CC_1, BB_1 и AA_1. Докажите, что шесть окружностей, описанных около треугольников ABC_0, BCA_0, ACB_0, $A_1B_1C_0$, $A_1C_1B_0$, $B_1C_1A_0$, пересекаются в одной точке.

Д. Изаак

М745. а) Задана последовательность чисел (d_n) таких, что $|d_n| \leqslant 1$ $(n=1, 2, \ldots)$. Докажите, что можно выбрать последовательность (s_n) из чисел $+1$ и -1 так, что для всех n

$$|d_1s_1 + d_2s_2 + \ldots + d_ns_n| \leqslant 1.$$

б) Задана последовательность троек чисел (a_n, b_n, c_n) таких, что $|a_n| \leqslant 1$, $|b_n| \leqslant 1$, $|c_n| \leqslant 1$ и $a_n + b_n + c_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$. По ней строится новая последовательность троек (x_n, y_n, z_n), в которой $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, а каждая тройка (x_n, y_n, z_n) при $n \geqslant 1$ получается из предыдущей $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ прибавлением к x_{n-1} одного из чисел a_n, b_n, c_n по нашему выбору, к y_{n-1} — другого, к z_{n-1} — третьего. Можем ли мы всегда добиться того, что все числа x_n, y_n, z_n будут по абсолютной величине не больше 1 или хотя бы ограничены некоторой константой?
в) Выясните аналогичные вопросы для последовательностей четверок чисел.

Н. Розов

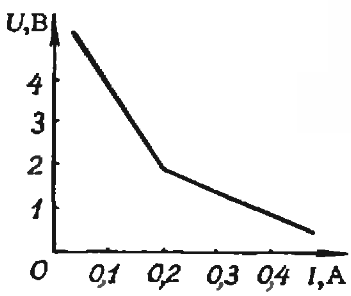


Рис. 1.

Ф753. На рисунке 1 приведена зависимость напряжения источника питания от тока нагрузки. Найти максимальную мощность, которую можно получить в нагрузке. При каком сопротивлении нагрузки она достигается? Для чего может понадобиться такой источник питания и как практически осуществить такую зависимость $U(I)$?

А. Зильберман

Ф754. Муравей бежит от муравейника по прямой так, что скорость его обратно пропорциональна расстоянию до центра муравейника. В тот момент, когда муравей находится в точке A на расстоянии $l_1 = 1$ м от центра муравейника, его скорость равна $v_1 = 2$ см/с. За какое время муравей добежит от точки A до точки B, которая находится на расстоянии $l_2 = 2$ м от центра муравейника?

С. Кротов

Ф755. Спутник представляет собой легкую жесткую сферу радиуса $R = 1$ м и масса $M = 1$ кг, наполненную воздухом при давлении $p = 10^{-3}$ атм и температуре $T = 300$ К. Одновременно в стенке сферы открываются два клапана, расположенные друг от друга на расстоянии, равном радиусу сферы. Площади клапанов $S_1 = 10^{-4}$ см^2 и $S_2 = 2 \cdot 10^{-4}$ см^2. Найти величину отклонения спутника от прежней траектории за время $\tau = 100$ с.

А. Стасенко

Ф756. Баллон объема $V = 2$ л содержит $m = 2$ г водорода и немного воды. Давление в сосуде равно $p_1 = 17$ атм. Сосуд нагревают так, что давление в нем увеличивается до $p_2 = 26$ атм. Сколько воды при этом испаряется? Чему равны начальная и конечная температуры?
Указание. Воспользуйтесь таблицей зависимости давления насыщенных паров воды от температуры.

t,°C	$p_н$, 10^5 Па
100	1
120	2
133	3
152	5
180	10

А. Буздин

Рис. 2.

Ф757. Для получения одинаковых по размеру капель воды используется капиллярная трубка, соединенная с большим резервуаром, наполненным водой (рис. 2). Жидкость вытекает из капилляра при медленном перемещении поршня в резервуаре. Снаружи на свободном конце капилляра укреплен пьезоэлемент, присоединенный к звуковому генератору и передающий колебания струе воды. При достаточно большой амплитуде колебаний струя разбивается на совершенно одинаковые капли. Найти радиус капель, если диаметр трубки $d = 0{,}2$ мм, скорость вытекающей жидкости $v = 2$ м/с, частота звуковых колебаний $\nu = 1000$ Гц.

Ю. Чернышев

Problems

M741-M745; P753-P757

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (In Russian or In English) may be posted no later than July 31, 1982 to the following address: USSR, Moscow, 117071, Москва, B-71, Ленинский проспект, 15, «Физматлит», «КВАНТ». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions of problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic

M741. a) Find at least one natural number which is divisible by 30 and has precisely 30 divisors (including 1 and the number itself). b) Find all such numbers.

M. Levin

M742. A set of n points is located on a) a circle b) a sphere of radius 1. Prove that the sum of squares of all distances between them is no greater than n^2.

A. Mikhailovski, V. Prasolov

M743. There are N cities in a certain country. a) Any two cities are joined directly by plane or boat. Prove that using one of the two means of transportation (chosen once and for all) it is possible to get from any city to any other one (with possible transfers). b) Any two cities are joined directly by plane, boat or train. Prove that we can choose one of the three means of transportation and no less than $N/2$ cities so that it is possible to get from any one of the chosen cities to any other one of them by the chosen means of transportation. c) Give an example showing that in statement b) the number $N/2$ cannot be replaced by a larger one in general.

L. Kurliandchik, S. Okhitin

M744*. The triangle $A_1B_1C_1$ is inscribed in the triangle ABC so that the vertices A_1, B_1, C_1 of the angles congruent to angles A, B, C lie respectively on the lines BC, CA and AB. Let A_0, B_0, C_0 be the intersection points of the sides BB_1 and CC_1, AA_1 and CC_1, BB_1 and AA_1 respectively. Prove that the six circles circumscribed to the triangles ABC_0, BCA_0, ACB_0, $A_1B_1C_0$, $A_1C_1B_0$, $B_1C_1A_0$ have a common point.

D. Izaak

M745. a) Given a sequence of numbers (d_n) satisfying $|d_n| < 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, show that a sequence (s_n) of numbers equal to $+1$ or -1 may be chosen so as to have

$$|d_1s_1 + d_2s_2 + \ldots + d_ns_n| < 1.$$

b) A given sequence of triples of numbers (a_n, b_n, c_n) satisfying $|a_n| < 1$, $|b_n| < 1$, $|c_n| < 1$ and $a_n + b_n + c_n = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ is used to construct a new sequence of triples (x_n, y_n, z_n) for which $x_0 = y_0 = z_0 = 0$ and each triple (x_n, y_n, z_n), $n > 1$, is obtained from the previous one $(x_{n-1}, y_{n-1}, z_{n-1})$ by adding one of the numbers (a_n, b_n, c_n) to x_{n-1}, another one to y_{n-1} and the remaining one to z_{n-1}. Can we always obtain a sequence (x_n, y_n, z_n) in this way so that the absolute values of the numbers x_n, y_n, z_n are no greater than 1 or, year we sum up the results of the Kvant problem contest. The list of prizewinners is published in the September issue.

If you have an original problem to propose for publication, please send it to us in two copies (including the solution) in an envelope inscribed "NEW PROBLEM IN PHYSICS (MATHEMATICS)".

at least, are bounded by some constant? c) Answer similar questions for sequences of quadruples of numbers.

N. Rozov

P753. The figure Рис. 1 shows the dependence of the power source's voltage on the current on the load. Find the maximal power which can be obtained on the load. For what resistance of the load is it attained? What can such a power source be used for and how can such a dependence $U(I)$ be effected in practice?

A. Zilberman

P754. An ant runs rectilinearly away from his anthill, so that his speed is inversely proportional to the distance from the anthill's centre. At the moment when the ant is at the point A, at a distance $l_1=1$m from the centre of the anthill, his velocity is $v_1=2$cm/s. How long will it take the ant to run from the point A to the point B at the distance $l_2=2$m from the anthill's centre?

S. Krotov

P755. A satellite is a light hard sphere of radius $R=1$ m and mass $M=1$ kg, filled with air under pressure $p=0{,}1$ atm and temperature $T=300$ K. Two valves located in the walls of the sphere at the distance R from each other are opened simultaneously. The areas of the valves are $S_1=1$ cm^2 and $S_2=2$ cm^2. Find how far the satellite will move away from its original trajectory in time $\tau=1$s.

A. Stasenko

P756. A receptacle of volume $V=2l$ contains $m=2$g of hydrogen and a little water. The pressure in the receptacle is $p_1=17$ atm. The receptacle is heated until the pressure increases to $p_2=26$ atm. How much water evaporates? What are the initial and terminal temperatures? Hint. Use the table giving the dependence of the pressure of saturated water vapor on temperature.

A. Buzdin

P757. A capillary pipe connected to a large reservoir filled with water (figure Рис. 2) is used to obtain drops of water of the same size. The liquid flows out of the capillary pipe when the piston moves slowly in the reservoir. Outside, on the free end of the pipe, a piezoelement is attached and connected to a sound generator so as to communicate the oscillations to the outflowing water. For a sufficient amplitude of oscillations, the flow of water slits up into absolutely identical drops. Find the radius of the drops if the diameter of the pipe is $d=0{,}2$ mm, the speed of outflowing water is $v=2$ m/s and the frequency of the sound oscillations is $\nu=1000$ Hz.

Yu. Chernyshev

Решения задач

М701—М705; Ф713—Ф717

М701. *Люда, Марина и Наташа нарисовали остроугольный треугольник LMN. Затем Люда построила свой треугольник, у которого длины двух сторон равны $|LM|$ и $|LN|$, а угол между ними на 60° больше угла L треугольника LMN. Точно так же Марина построила свой треугольник со сторонами длины $|ML|$ и $|MN|$, угол между которыми на 60° больше $\hat{M}$,*

Первое решение. Пусть O — точка внутри треугольника LMN, из которой каждая его сторона видна под углом 120° (рис. 1; такая точка существует и единственна).

Повернем треугольник LMN вокруг точки L на 60° по часовой стрелке (рис. 2). Пусть при этом повороте точка O перейдет в O', а точка N — в N'.

Поскольку треугольники LON и $LO'N'$ конгруэнтны, а треугольник LOO' — правильный, $\widehat{MOL}+\widehat{LOO'}=\widehat{OO'L}+\widehat{LO'N'}=60°+120°=180°$; поэтому точки M, O, O' и N' лежат на одной прямой. Таким образом, $|MN'|=|MO|+|OO'|+|O'N'|=|MO|+|OL|+|ON|=S$.

Аналогично доказывается, что третьи стороны треугольников, построенных Наташей и Мариной, также равны S.

а Наташа — свой, у которого угол между сторонами $|NL|$ и $|NM|$ равен $\widehat{N}+60°$. Докажите, что третьи (новые) стороны треугольников у всех трех девочек одинаковы.

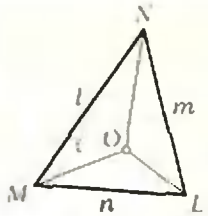


Рис. 1.

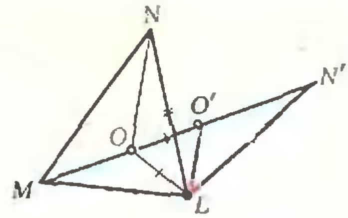


Рис. 2.

Второе решение. Пусть l, m, n — длины сторон треугольника LMN (см. рис. 1) и Δ — разность квадратов третьих сторон треугольников, построенных Людой и Мариной. Ясно, что

$$\Delta = m^2+n^2-2mn\cos(\widehat{L}+60°)-(l^2+n^2)+2ln\cos(\widehat{M}+60°)=$$
$$=m^2-l^2+2n(l\cos(\widehat{M}+60°)-m\cos(\widehat{L}+60°))=$$
$$=m^2-l^2+n(l\cos\widehat{M}-m\cos\widehat{L}+\sqrt{3}\,(m\sin\widehat{L}-l\sin\widehat{M}))=$$
$$=m^2-l^2+n(l\cos\widehat{M}-m\cos\widehat{L}),$$

поскольку по теореме синусов $l\sin\widehat{M}-m\sin\widehat{L}=0$.

А так как $\cos\widehat{L}=\dfrac{m^2+n^2-l^2}{2mn}$, $\cos\widehat{M}=\dfrac{l^2+n^2-m^2}{2ln}$, без труда получаем, что $\Delta=0$.

А. Каплан

◆

М702. *Обозначим через S_n сумму первых n простых чисел: $S_1=2$, $S_2=2+3=5$, $S_3=2+3+5=10$, $S_4=17$ и т. д. Докажите, что при любом n между S_n и S_{n+1} встречается точный квадрат.*

$$\begin{array}{ll} p_{n+1} < 2k+1 \\ p_n < 2k-1 \\ p_{n-1} < 2k-3 \\ p_{n-2} < 2k-5 \\ \dots\dots\dots \\ p_2=3 < x \\ p_1=2 \quad x-2 \end{array}$$

Первое решение. Докажем более общее утверждение, рассмотрев вместо последовательности простых чисел последовательность (p_n) такую, что $p_1=2$, $p_2\geqslant 3$, $p_{n+1}-p_n\geqslant 2$. Докажем, что при любом n между числами s_n и s_{n+1}, где $s_n=p_1+p_2+\ldots+p_n$, встречается точный квадрат.

Предположим, что при каком-то n между числами s_n и s_{n+1} нет квадратов; то есть для некоторого k

$$k^2\leqslant s_n<s_{n+1}\leqslant(k+1)^2. \qquad (*)$$

Тогда $p_{n+1}=s_{n+1}-s_n\leqslant(k+1)^2-k^2=2k+1$, поэтому $p_n\leqslant p_{n+1}-2\leqslant 2k-1$ и т. д. — выполняются все выписанные в табличке на полях соотношения. Каким числом может быть x? Если $x=3$, то все неравенства должны превратиться в равенства (при этом $k=n$) и

$$s_{n+1}=2+p_2+\ldots+p_{n+1}>1+3+\ldots+(2k+1)=(k+1)^2,$$

в противоречие с правым неравенством (*). Если же $x\geqslant 5$, то $x-2\geqslant 3$ и

$$s_n=2+p_2+\ldots+p_n<1+3+\ldots+(2k-1)=k^2,$$

в противоречие с левым неравенством (*).

Все решения, присланные читателями, так или иначе используют идею сравнения последовательности (p_n) с последовательностью $(2n-1)$, которая растет медленнее и для которой сумма первых n членов равна n^2.

S_n	
2	4
5	9
10	16
17	25
28	36
41	49
58	64
77	81
100	121
129	144
160	169
197	196

Второе решение. Пусть $S_n=p_1+p_2+\ldots+p_n$ — сумма первых n простых чисел. На полях выписаны значения S_n при $n=1, 2, \ldots, 12$ и все точные квадраты, лежащие в интервалах $]S_1; S_2[$, $]S_2; S_3[$, …, $]S_{11}; S_{12}[$. Мы видим, что все эти интервалы содержат хотя бы по одному точному квадрату, а интервал $]S_{11}; S_{12}[$ содержит даже два квадрата — 169 и 196. Условимся в дальнейшем называть интервал $]S_{k-1}; S_k[$ богатым, если он содержит по крайней мере два точных квадрата.

Для решения задачи при $n\geqslant 12$ воспользуемся методом математической индукции. Пусть каждый из интервалов $]S_1; S_2[$, $]S_2; S_3[$, …, $]S_{n-1}; S_n[$ содержит точный квадрат. Пусть, далее, $]S_{n-k-1}; S_{n-k}[$ — первый богатый интервал в последовательности интервалов $]S_{n-1}; S_n[$, $]S_{n-2}; S_{n-1}[$, $]S_{n-3}; S_{n-2}[$, … . Пусть m^2 — максимальный квадрат, принадлежащий $]S_{n-k-1}; S_{n-k}[$. Тогда $(m-1)^2\in\,]S_{n-k-1}; S_{n-k}[$, а каждый из интервалов $]S_{n-k}; S_{n-k+1}[$, $]S_{n-k+1}; S_{n-k+2}[$, …, $]S_{n-1}; S_n[$ содержит ровно по одному квадрату.

Другими словами,

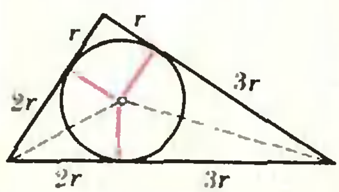
$$S_{n-k-1}<(m-1)^2<m^2<S_{n-k}<(m+1)^2<S_{n-k+1}<\ldots$$
$$\ldots<(m+k-1)^2<S_{n-1}<(m+k)^2<S_n<(m+k+1)^2.$$

Тогда $p_{n-k}=S_{n-k}-S_{n-k-1}>m^2-(m-1)^2=2m-1$. Так как, очевидно, $n-k>12$ и $p_{s+1}>p_s+2$ при $s>2$, получаем $p_{n+1}>p_{n-k}+2(k+1)>2(m+k)+1$. Следовательно, $S_{n+1}=S_n+p_{n+1}>(m+k)^2+2(m+k)+1=(m+k+1)^2$. Поэтому $S_n<(m+k+1)^2<S_{n+1}$, то есть интервал $]S_n;\ S_{n+1}[$ содержит точный квадрат.

Н. Васильев, И. Жук

М703. *Решите систему уравнений*

$$\begin{cases} 3\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=4\left(y+\dfrac{1}{y}\right)=5\left(z+\dfrac{1}{z}\right), \\ xy+yz+zx=1. \end{cases}$$



◆

Ответ: $\left\{ \left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ 1\right),\ \left(-\frac{1}{3},\ -\frac{1}{2},\ -1\right) \right\}$.

Решение. Поскольку

$$\frac{x}{3(1+x^2)}=\frac{y}{4(1+y^2)}=\frac{z}{5(1+z^2)}, \qquad (1)$$

числа x, y и z имеют одинаковые знаки, причем если (x, y, z) — решение системы, то и $(-x, -y, -z)$ — ее решение, так что можно разыскивать лишь положительные решения.

Формула $\sin 2\varphi=\dfrac{2\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi}$ наводит на мысль ввести углы α, β, γ из промежутка $]0;\ \pi[$ такие, что $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=x$, $\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=y$, $\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}=z$. Тогда (1) превратится в уравнения

$$\frac{\sin\alpha}{3}=\frac{\sin\beta}{4}=\frac{\sin\gamma}{5}. \qquad (2)$$

Из второго уравнения системы получаем $\dfrac{1}{z}=\dfrac{x+y}{1-xy}$ (ясно, что $xy\neq 1$, $z\neq 0$), что в новых обозначениях имеет вид

$$\operatorname{ctg}\frac{\gamma}{2}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2},$$

или

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\gamma}{2}\right)=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Последнее равенство при выбранных ограничениях на α, β, γ возможно тогда и только тогда, когда $\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\gamma}{2}=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, то есть $\alpha+\beta+\gamma=\pi$.

Итак, мы получили, что α, β и γ — углы треугольника, длины сторон которого относятся как 3:4:5 (см. (2)). Это — прямоугольный треугольник, у которого $\gamma=\dfrac{\pi}{2}$, $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$, $\sin\beta=\dfrac{4}{5}$ (см. рисунок), то есть $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\dfrac{\gamma}{2}=1$.

Некоторые читатели решали эту систему чисто алгебраически, но такие решения значительно длиннее приведенного.

А. Вайнтроб, А. Федоров

М704. *Вокруг квадрата описан параллелограмм (вершины квадрата лежат на разных сторонах параллелограмма). Докажите, что перпендикуляры, опущенные из вершин параллелограмма на стороны квадрата, образуют новый квадрат (рис. 1).*

◆

Пусть вокруг черного квадрата (см. рис. 1) описан голубой параллелограмм $ABCD$ и через все его вершины проведены красные прямые, перпендикулярные сторонам квадрата. Достаточно доказать, что при повороте на 90° вокруг центра O черного квадрата красные прямые переходят друг в друга.

Пусть $H=R_O^{90^\circ}(A)$. Поскольку стороны повернутого параллелограмма перпендикулярны сторонам исходного, $(HE)\perp(AB)$ и $(HF)\perp(BC)$. Поэтому H — точка пересечения высот треугольника EBF и, следовательно, H лежит на красной

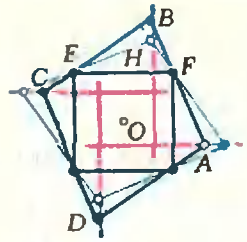


Рис. 1.

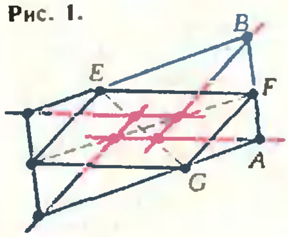


Рис. 2.

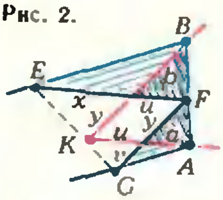


Рис. 3.

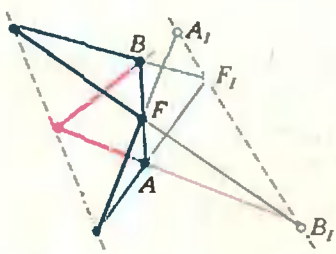


Рис. 4.

прямой, проведенной через вершину B. Таким образом, красная прямая, проведенная через точку A, переходит при повороте $R_O^{90^\circ}$ в красную прямую, проведенную через точку B. Отсюда немедленно следует утверждение задачи.

Теорема о том, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке (мы надеемся, известная нашим читателям), не доказывается в школьном учебнике. Поэтому мы приведем еще одно решение задачи М704, хотя и не столь изящное, но тоже простое.

Это решение годится и для более общего случая, когда роль квадрата играет черный параллелограмм (рис. 2): мы докажем, что красные прямые (соответственно параллельные сторонам черного параллелограмма) образуют параллелограмм, гомотетичный черному параллелограмму.

Для доказательства достаточно проверить, что красная точка K (см. *рисунок 3 — фрагмент рисунка 2*) *лежит на* диагонали параллелограмма EG. Из подобия заштрихованных треугольников следует, что $\frac{x}{a}=\frac{b}{v}$ и $\frac{a}{y}=\frac{u}{b}$ (обозначения см. на рисунке 3). Перемножив эти равенства, получим $\frac{x}{y}=\frac{u}{v}$, а это и значит, что точка K лежит на EG.

Полученный результат напоминает *теорему Паппа*, которую Д. Гильберт и С. Кон-Фоссен в своей замечательной (переизданной недавно по-русски) книге «Наглядная геометрия» формулируют так (с. 126—127): *если вершины замкнутой шестизвенной ломаной лежат попеременно на двух прямых и две пары ее противоположных звеньев параллельны, то и третья пара звеньев параллельна* (на рисунке 3 — как раз такая ломаная $AKBEFGA$).

На этом возможности обобщений не исчерпаны. Если «сфотографировать» конфигурацию рисунка 3 (то есть спроектировать ее из некоторой точки S, не лежащей в плоскости рисунка, *на непараллельную плоскость*), *мы получим конфигурацию Паскаля:* три пары параллельных на рисунке 3 прямых будут пересекаться на «фотографии» в трех точках одной прямой — нам удобно обозначить их A_1, F_1, B_1 (рис. 4) — и наша теорема о точках E, K, G превратится в такую теорему: *если каждая тройка точек A, B, F и A_1, B_1, F_1 лежит на прямой, то точки $(AB_1)\cap(A_1B)$, $(BF_1)\cap(B_1F)$ и $(AF_1)\cap(A_1F)$ также лежат на прямой.*

Н. Васильев

◆

М705. *На прямоугольном листе клетчатой бумаги расположено несколько прямоугольных карточек, стороны которых лежат на линиях сетки. Карточки покрывают лист в два слоя (то есть каждую клетку листа покрывают в точности две карточки).*

а) Пусть каждая карточка имеет размеры 1×2 клетки. Докажите, что можно выбрать часть карточек так, чтобы они покрывали лист в один слой. (Передвигать карточки нельзя).

Останется ли это верным, если карточки б) могут иметь произвольные размеры, в) имеют размеры 1×3 клетки?*

а) Мы докажем более общее утверждение: *из покрытия любого конечного множества клеток карточками размером 1×2 клетки (с выполнением условий задачи) можно выбрать часть карточек так, чтобы каждая клетка множества оказалась покрытой ровно одной карточкой.*

Рассмотрим произвольную клетку. Пусть ее покрывают карточки A_0 и A_1. Карточка A_1 покрывает еще одну клетку, которая покрыта также карточкой A_2 (A_2 может, вообще говоря, совпасть с A_0). Аналогично, карточка A_2 покрывает клетку, которую покрывает также карточка A_3, и так далее. Если очередную карточку получить нельзя, мы обрываем эту цепочку.

Ясно, что это произойдет в том случае, когда цепочка карточек замкнется, то есть когда очередная карточка окажется одной из уже выбранных. Ясно, что такой карточкой будет карточка A_0, поскольку в противном случае какая-то клетка оказалась бы покрытой трижды. Нетрудно видеть, что *в полученной цепочке* число карточек четно (убедитесь в этом!). Раскрасим все карточки цепочки в два цвета: с четными номерами — в один цвет, с нечетными — в другой. Легко видеть, что наше множество клеток карточками каждого цвета оказывается покрытым в один слой.

С оставшимися непокрытыми клетками множества поступаем аналогично до тех пор, пока все клетки исходного множества не будут покрыты карточками разного цвета. *Утверждение а) доказано.*

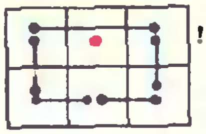


Рис. 1.

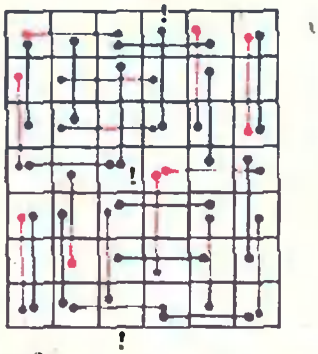


Рис. 2.

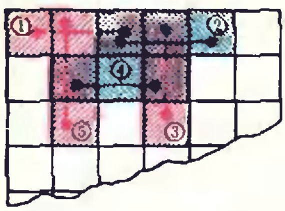


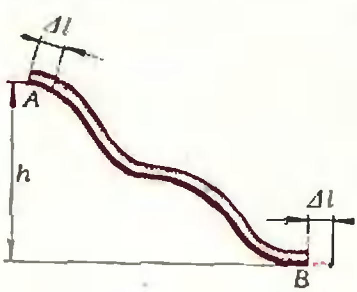
Рис. 3.

б) Ответ: нет. Соответствующий пример изображен на рисунке 1: прямоугольный лист размером 3×2 клетки покрыт в два слоя четырьмя карточками размером 1×2, одной карточкой 1×3 и одной — размером 1×1 клетки (на рисунке карточка 1×1 отмечена одной красной точкой; крайние точки карточек 1×2 и 1×3 соединены отрезками; попытка раскраски покрытия в два цвета не приводит к успеху).

в) Ответ: нет. Пример для прямоугольника 6×7 клеток, покрытого в два слоя 28 карточками 1×3 клетки, изображен на рисунке 2 (мы попытались раскрасить и его). На рисунке 3 изображен фрагмент рисунка 2 (раскрашенный иначе), на котором выделены пять «попарно зацепленных» карточек. Ни одну из этих карточек удалить нельзя. В самом деле, удалив первую карточку, мы должны оставить вторую; следовательно, должны удалить третью карточку, оставив четвертую, удалить пятую, а потому — оставить первую карточку, что приводит нас к противоречию (она имеет противоположную окраску).

Г. Гальперин, В. Произволов

Ф713. *Гибкий трубопровод длины l соединяет в пространстве точки A и B, разность высот между которыми равна h (см. рисунок). Внутри трубопровода по всей его длине лежит веревка, которую удерживают в точке A. С каким ускорением начнет двигаться веревка в первый момент времени, после того как ее отпустят? Трением между веревкой и стенками трубопровода пренебречь.*



◆

Пусть за малый интервал времени Δt после начала движения веревка переместилась на расстояние Δl и приобрела скорость v. Так как Δt мало, можно считать, что

$$v^2=2a\cdot\Delta l, \tag{1}$$

где a — ускорение всех точек веревки в момент начала движения.

Из закона сохранения энергии (трение отсутствует) следует, что

$$Mv^2/2=\Delta\Pi, \tag{2}$$

где M — масса всей веревки, $\Delta\Pi$ — изменение потенциальной энергии веревки за время Δt. Очевидно, что $\Delta\Pi$ соответствует перераспределению массы веревки, в результате которого кусок длины Δl «переходит» из точки A в точку B (см. рисунок). Таким образом,

$$\Delta\Pi=\frac{M}{l}\cdot\Delta l\cdot gh. \tag{3}$$

Из (1)—(3) находим ускорение веревки в момент начала движения:

$$a=gh/l.$$

С. Кротов

Ф714. *В закрытом сосуде на поверхности воды плавает шар. Как изменится глубина погружения шара, если в сосуд накачать воздух так, чтобы давление воздуха в сосуде увеличилось в два раза?*

◆

При равновесии равнодействующая всех сил давления, действующих на шар, равна его весу и весу вытесненной им воды; поэтому, если пренебречь сжимаемостью воды и материала шара, глубина его погружения не изменится при увеличении давления воздуха. Если же сжимаемость материала плавающего тела велика по сравнению с сжимаемостью воды, то тело будет погружаться при увеличении внешнего давления. Так происходит в известной игрушке, в которой перевернутая вверх дном пробирка плавает в наполовину заполненной водой мензурке, затянутой сверху тонкой резиновой пленкой. Если надавить на пленку пальцем, давление воздуха внутри мензурки повышается, воздух внутри пробирки, поддерживающий ее «на плаву», сжимается; в конце концов вес пробирки станет больше веса вытесненной пробиркой (и находящимся в ней воздухом) воды — пробирка начнет тонуть. Стоит отпустить палец — пробирка снова всплывает. Попробуйте сами сделать эту простую и забавную игрушку.

Е. Сурков

♦

Ф715. *Как зависит напряжение между точками A и B (рис. 1) от сопротивления резистора R?*

Построим векторную диаграмму для цепи (рис. 2). Токи, текущие через конденсатор C и резистор R, одинаковы; значит, векторы $\vec{U}_{мR}$ и $\vec{U}_{мC}$ перпендикулярны. Сумма их равна вектору $\vec{U}_м$; значит, конец вектора $\vec{U}_{мR}$ лежит на окружности,

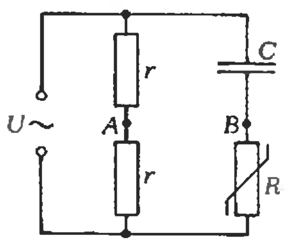


Рис. 1.

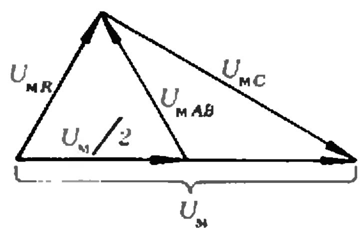


Рис. 2.

диаметр которой равен $|\vec{U}_м|$. Напряжение $U_{м}$, на резисторе с сопротивлением r равно $U_м/2$. Следовательно, искомое напряжение $U_{мAB}$ численно равно радиусу построенной окружности, то есть

$U_{мAB}=\frac{1}{2}U_м$ и не зависит от величины R.

При изменении R меняется угол сдвига фаз между векторами $\vec{U}_м$ и $\vec{U}_{мAB}$, так что предложенная схема может служить фазовращателем. (Часто в радиотехнике необходимо менять фазу переменного напряжения, оставляя неизменной амплитуду. На практике вместо делителя из резисторов r обычно используют трансформатор с отводом от середины обмотки.)

А. Зильберман

♦

Ф716. *Из куска тонкой стальной ленты ширины d, в которой пробито небольшое отверстие радиуса r, сделали обруч и поставили его на стол так, что отверстие оказалось внизу. Из этого положения обруч немного сместили и предоставили самому себе. Чему равно максимальное значение скорости качения обруча?*

Описанное в условии начальное положение обруча неустойчиво. Будучи предоставлен самому себе, обруч начнет двигаться. Если трение достаточно велико, обруч поедет без проскальзывания. Скорость обруча будет максимальной в тот момент, когда его потенциальная энергия будет минимальной, то есть когда центр тяжести обруча будет в наинизшем положении. Это условие выполняется в тот момент, когда дырка окажется наверху на расстоянии D от стола, равном диаметру обруча. Нетрудно сообразить, что уменьшение потенциальной энергии обруча при переходе дырки из нижнего положения (в начале движения) в верхнее равно

$$\Delta П=\Delta m\cdot gD=\frac{M\pi r^2}{\pi Dd}gD=\frac{Mr^2g}{d},$$

где M — масса всего обруча, $\Delta m=\frac{M}{\pi Dd}\pi r^2$ — «масса дырки» ($\Delta m\ll M$).

Это изменение потенциальной энергии равно кинетической энергии обруча в тот момент, когда дырка находится наверху. Кинетическая энергия обруча складывается из энергии поступательного движения обруча как целого $Mv^2/2$ (v — скорость центра масс обруча в данный момент) и энергии вращательного движения $Mu^2/2$ (u — линейная скорость всех точек обруча).

При качении без проскальзывания $u=v$, и кинетическая энергия обруча равна Mv^2.

Таким образом,

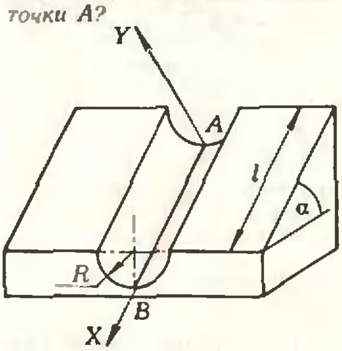
$$Mv^2_{\max}=\frac{Mr^2g}{d},$$

откуда

$$v_{\max}=r\sqrt{\frac{g}{d}}.$$

А. Зильберман

Ф717. *Маленький шарик скользит без трения по цилиндрическому желобу радиуса R, ось которого наклонена под углом α к горизонту; длина желоба равна l. Сколько раз шарик пересечет линию AB (см. рисунок), если он начал свое движение вблизи точки A?*



Разложим силу тяжести $m\vec{g}$, действующую на шарик, на две составляющие, одна из которых направлена вдоль оси желоба и равна $mg\sin\alpha$, а другая — $mg\cos\alpha\equiv mg'$ — лежит в плоскости, перпендикулярной оси. Движение шарика вдоль оси будет равноускоренным с ускорением $a=g\sin\alpha$. В плоскости, перпендикулярной оси, шарик будет совершать малые гармонические колебания с периодом

$$T=2\pi\sqrt{R/g'}=2\pi\sqrt{\frac{R}{g\cos\alpha}}.$$

Число пересечений траектории шарика с линией AB равно целой части отношения всего времени движения $t=\sqrt{2l/a}$ к полупериоду колебаний $T/2$:

$$n=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2l}{R}\operatorname{ctg}\alpha}.$$

Е. Сурков

Научный подход

Происходящая сейчас математизация многих областей знания вооружает ученых разных специальностей мощнейшим аппаратом математики. Но не всегда этот аппарат используется по назначению.

В одной публикации весьма уважаемого Института приведен полезный пример того, как ныне «ясно» и «понятно» выражается уважающий себя инженер. Мы воспроизводим этот пример в измененном виде, доступном читателям «Кванта», но полностью сохраняя иллюстрируемую идею.

Пример этот хорошо показывает, как можно (но не нужно!) без всякой нужды псевдоматематизировать простые и ясные вещи.

Каждому молодому инженеру следует твердо усвоить, что представлять сумму двух количеств в виде

$$1+1=2 \qquad (1)$$

не является признаком «хорошего тона», и вот почему. Тот, кто изучал математику, знает, что

$$1=\lg 10,$$
$$1=\sin^2 x+\cos^2 x,$$
$$2=\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2^1}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots$$

Последнее соотношение короче записывают так:

$$2=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}.$$

Поэтому равенство (1) можно представить более научно:

$$\lg 10+(\sin^2 x+\cos^2 x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}. \qquad (2)$$

Это выражение можно еще улучшить, если использовать соотношения

$$10=\lim_{y\to\infty}\frac{20y+a}{2y+b},$$
$$1=|\cos z|\cdot\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 z}.$$

Подставляя их в формулу (2), получаем:

$$\lg\lim_{y\to\infty}\frac{20y+a}{2y+b}+(\sin^2 x+\cos^2 x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|\cos z|\cdot\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 z}}{2^n}. \qquad (3)$$

Очевидно, что формула (3) гораздо красивее формулы (1). А если к ней еще сделать примечание, что для тех $z=z_0$, при которых правая часть (3) не определена, ее надо заменить на

$$\sum_{n=0}^{\infty}\lim_{z\to z_0}\frac{|\cos z|\cdot\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 z}}{2^n},$$

то дело можно считать законченным.

Разумеется, есть и другие способы улучшения формулы (1). Каждый читатель сможет быстро найти их, если он усвоил основную идею «научного» подхода.

Л. Крыжановский

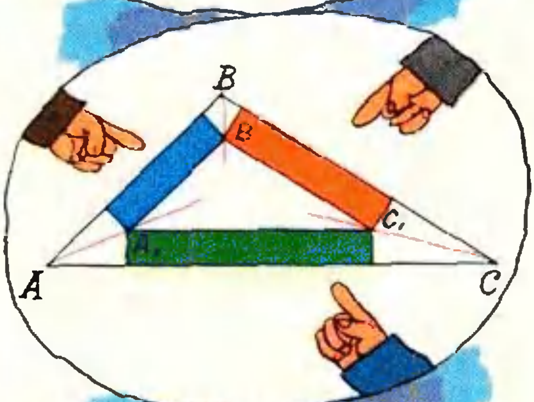
квант для младших школьников

Задачи

1. Можно ли на 24 полях обычной шахматной доски расставить крестики так, чтобы при вычеркивании любых трех горизонталей и трех вертикалей оставались невычеркнутыми не менее шести крестиков?

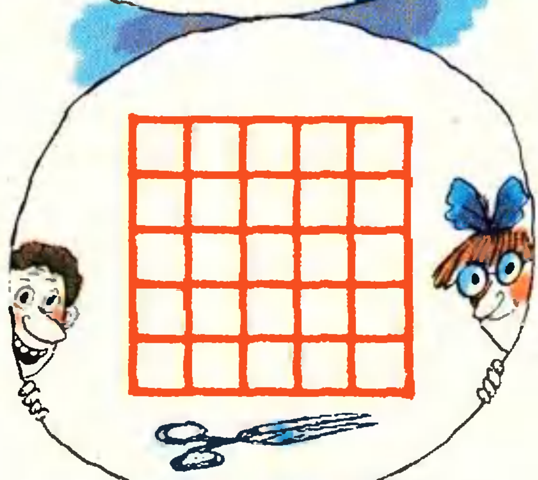
2. Пусть A — натуральное число. Обозначим через b число, образованное двумя последними цифрами числа A, через a — число, образованное остальными цифрами числа A (например, для $A=2906$ получаем $a=29$, $b=06=6$). Докажите, что число A делится на 7 тогда и только тогда, когда а) $2a+b$ делится на 7; б) $5a-b$ делится на 7.

3. Существует ли такой год, в котором тринадцатое число ни разу не является понедельником? А какое наибольшее число раз оно может быть понедельником?



4. На каждой из сторон треугольника ABC построено по прямоугольнику так, что они попарно касаются вершинами (см. рисунок). Докажите, что прямые, соединяющие вершины треугольника ABC с соответствующими вершинами образовавшегося треугольника $A_1B_1C_1$, пересекаются в одной точке.

5. Можно ли из квадрата размером 5×5 клеток вырезать одну клетку так, чтобы получившуюся фигуру можно было разрезать по линиям сетки на восемь прямоугольных полосок размером 1×3 клетки?



Эти задачи нам предложили *Ф. Бартенев, А. Картузов, А. Савин.*

Л. Луганский

«Стойте справа, проходите слева...»

Если вы живете в большом городе, где есть метрополитен — самый удобный и надежный вид городского транспорта, то вы, конечно же, много раз слышали эту фразу, усиленную громкоговорителями, гулко звучащую под сводами тоннеля. Безусловно, многие из вас, опаздывая на какое-нибудь важное дело, не останавливались, ступив на экскалатор, а, дробно стуча каблуками по ступенькам, мчались вниз, лавируя, как слаломист, между стоящими справа и проходящими слева. Но довольно часто ваше неудержимое движение вперед где-то внизу наталкивалось на плотную людскую массу, почему-то не желающую проходить ни слева, ни справа. Возможно, вы даже заметили, что в часы пик вся движущаяся лестница сверху донизу заполнена стоящими людьми, которые, несмотря на настойчивые призывы дежурного по эскалатору, никак не хотят проходить. Давайте повременим негодовать на несознательность пассажиров, а взглянем на эту ситуацию объективным взором исследователя. Но прежде — такой пример.

Рассмотрим двужущуюся ленту (транспортер), на которой примерно на одном и том же расстоянии друг от друга лежат какие-то предметы. Пусть на единице длины ленты помещается n предметов; величину n называют концентрацией. В случае расположения предметов вдоль линии ее можно назвать также линейной плотностью. Она имеет размерность 1/м или, если хотите, 1/см, 1/км, 1/ярд — в зависимости от выбора единицы длины. Пусть, далее, лента движется со скоростью v мимо наблюдателя, который считает эти предметы. (Впрочем, роль такого наблюдателя может играть и электронный счетчик с фотоэлементом, наподобие употребляемых в автоматических турникетах на станциях метро). Возникает вопрос: сколько предметов будет регистрировать наблюдатель в единицу времени? На этот вопрос ответить очень легко. За время t мимо наблюдателя пройдет участок ленты длиной $l = vt$; на нем находится $nl = nvt$ предметов. Следовательно, за единицу времени мимо наблюдателя пройдет $nvt/t = nv$ предметов. Эта величина называется потоком и имеет размерность 1/с (или 1/мин, 1/год — в зависимости от выбора единицы времени). Мы будем обозначать поток буквой Φ (это — заглавная греческая буква «фи»). Итак,

$$\Phi = nv.$$

Теперь представим себе, что наш транспортер имеет конечную длину и что расположенные на его ленте предметы, дойдя до конца, попадают на ленту другого транспортера, движущуюся с другой скоростью v'. Очевидно, что наблюдатель, стоящий около второго транспортера, в единицу времени насчитает столько же проходящих мимо него предметов, сколько их насчитает и первый наблюдатель. Если их будет меньше, то можно ручаться, что какие-то злоумышленники где-то по дороге похищают предметы. Если же их окажется больше (что значительно менее вероятно), то это значит, что неизвестные доброжелатели подкладывают на вторую ленту дополнительные предметы. Таким образом, потоки $\Phi = nv$ и $\Phi' = n'v'$, регистрируемые обоими наблюдателями, должны быть равны друг другу:

$$nv = n'v'.$$

Отсюда сразу видно, что концентрация n' предметов на втором транспортере будет не такой, как на первом, а именно

$$n' = n\frac{v}{v'}.$$

Если скорость v' меньше скорости v, то концентрация n' будет больше концентрации n. Может даже случиться, что на ленте второго транспортера предметы не смогут помещаться без интервалов, а будут громоздиться друг на друга.

Вы, конечно, понимаете, что для наблюдателя совершенно безразлично, находятся ли предметы на ленте, движущейся со скоростью v, или же они самостоятельно движутся со скоростью v по неподвижной ленте (полу, тротуару). Важно только, что их скорость относительно наблюдателя, регистрирующего поток, равна v. Следовательно, поток есть величина, зависящая от системы координат, в которой он измеряется. Так, если наблюдатель сам находится на другой ленте, движущейся параллельно первой с такой же скоростью v, то относительная скорость $v_{отн}$, а значит, и измеряемый наблюдателем поток $\Phi = nv_{отн}$ будут равны нулю.

А сейчас самое время вернуться к вопросу о том, что же происходит на эскалаторе в часы пик. Поток пассажиров, стоящих справа, равен $\Phi_1 = n_1 v_э$, где n_1 — концентрация стоящих пассажиров, $v_э$ — скорость эскалатора. Поток пассажиров, проходящих слева, равен $\Phi_2 = n_2(v_э + v_п)$, где n_2 — концентрация идущих пассажиров, $v_п$ — скорость пешеходов относительно эскалатора, а $v_э + v_п$ — скорость идущих пассажиров относительно неподвижного наблюдателя. Естественно, что по окончании спуска обе группы пассажиров начинают двигаться с одинаковой скоростью $v_п$. При этом правый поток не претерпевает каких-либо серьезных изменений, поскольку $v_п$ приблизительно равна $v_э$. А вот пассажиры, находившиеся на эскалаторе слева, теперь движутся примерно вдвое медленнее (относительно неподвижных стен), чем раньше, и, согласно вышесказанному, концентрация пассажиров в этой группе должна возрасти примерно вдвое.

По целому ряду причин люди не любят ходить, тесно прижавшись друг к другу, поэтому левый поток сможет двигаться нормально, если люди, идущие по эскалатору, держат между собой дистанцию раза в два больше, чем при обычной ходьбе по платформе, или же если внизу поток может расширяться в стороны. В часы пик обе эти возможности, как правило, не могут быть реализованы из-за большого стечения народа. Вот почему людям на эскалаторе разумнее стоять и справа, и слева. Иначе внизу обязательно возникнет затор.

Нам кажется, что теперь вы не будете сердиться на непредвиденную задержку на эскалаторе, а постараетесь выйти из дома минут на пять раньше.

* * *

Понятие потока, конечно же, имеет отношение не только к рассмотренному случаю; оно очень широко используется в физике.

Пусть есть пучок частиц, движущихся в пространстве в одном направлении с одной и той же скоростью v. Число частиц в единице объема пучка, как и в линейном случае, тоже называется концентрацией n (или объемной плотностью) и имеет размерность $1/м^3$. Произведение $\Phi = nv$ имеет теперь размерность $1/(м^2 \cdot с)$ и равно числу частиц, проходящих ежесекундно через единицу площади сечения, перпендикулярного направлению движения пучка. Поэтому величину Φ называют плотностью потока частиц; умножив ее значение на площадь сечения пучка, мы получим полный поток частиц в пучке.

Если каждая движущаяся частица обладает каким-то свойством и это свойство «переносится» вместе с ней, то целесообразно ввести понятие плотности потока этого свойства

$$\Phi_a = anv,$$

где a — количественная характеристика данного свойства. Пусть, например, $a = m$ — масса одной частицы в потоке, тогда $\Phi_m = mnv$ — это плотность потока массы (ее размерность равна $кг/(м^2 \cdot с)$). Или,

если $a = q$ — электрический заряд, переносимый каждой частицей, то $\Phi_q = qnv$ — плотность потока электрического заряда (количества электричества). Величину Φ_q, имеющую размерность Кл/(м^2 · с), называют также плотностью электрического тока, поскольку сила электрического тока — это количество электричества, проходящее в единицу времени через поперечное сечение проводника. (Это следует также и из соображений размерностей: Кл/(м^2 · с) = (Кл/с)/м^2 = А/м^2.) Аналогично определяются и другие плотности потоков (энергии, импульса и т. д.).

Рассмотрим теперь несколько конкретных задач, которые помогут лучше усвоить понятия потока или его плотности.

1. *Попробуйте оценить пропускную способность автомагистрали, то есть максимальное число автомобилей, которые могут пройти по данной дороге за час.*

Такие расчеты необходимы при проектировании дорог и для правильной организации движения, особенно в больших городах и на крупнейших междугородных трассах.

Пусть магистраль двухсторонняя, и в каждом направлении движение происходит в два ряда с максимальной допустимой скоростью $v = 60$ км/ч (таковы, например, условия движения на Московской кольцевой автомобильной дороге). Нас интересует поток автомобилей, то есть число автомашин, проходящих в единицу времени мимо неподвижного наблюдателя. Используя полученные выше формулы, мы напишем $\Phi = Nnv$, где $N = 4$ — общее число рядов движения, n — число машин на единицу длины дороги, которое можно связать с дистанцией L между автомобилями: $n = 1/L$. Таким образом, $\Phi = Nv/L$. Руководства по управлению автомобилями рекомендуют держать дистанцию между автомобилями, численно равную в метрах половине скорости, выраженной в километрах в час. В нашем случае при скорости $v = 60$ км/ч $L = 30$ м, и пропускная способность автомагистрали равна

$$\Phi = N\frac{v}{L} = 8000\ 1/\text{ч}.$$

2. *Люди стоят на эскалаторе, движущемся вниз, на расстоянии $L = 1$ м друг от друга. Какой поток пассажиров зарегистрируют: а) дежурный по эскалатору, стоящий внизу; б) наблюдатель, стоящий на другом эскалаторе, движущемся вверх? Скорость движения эскалаторов принять равной $v = 2$ м/с.*

Мы уже говорили о том, что поток зависит от системы отсчета, в данном случае — от наблюдателя. Относительно дежурного по эскалатору пассажиры спускаются со скоростью, равной скорости эскалатора, поэтому

$$\Phi_1 = nv = \frac{v}{L} = 2 \text{ 1/с}.$$

С точки зрения наблюдателя, находящегося на эскалаторе, движущемся со скоростью v вверх, поток пассажиров будет вдвое больше, так как относительно него скорость потока $v_{\text{отн}} = 2v$, и поток

$$\Phi_2 = nv_{\text{отн}} = 2nv = 4 \text{ 1/с}.$$

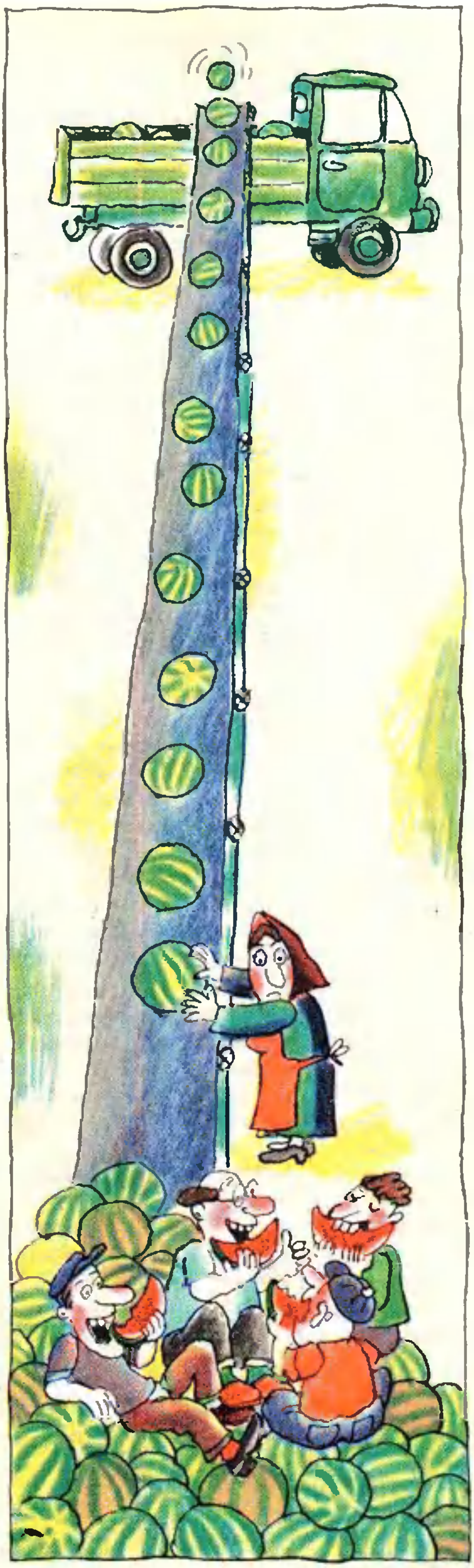
3. *Грузовую машину грузоподъемностью $M = 2$ т загружают арбузами с помощью транспортера. Средняя масса арбуза $m = 5$ кг, скорость движения транспортера $v = 0{,}5$ м/с, расстояние между арбузами на ленте $L = 0{,}75$ м. Найдите время погрузки.*

В данном случае имеем дело с потоком массы. По определению он равен $\Phi_m = mnv = mv/L$. Тогда искомое время погрузки

$$t = \frac{M}{\Phi_m} = \frac{ML}{mv} = 600 \text{ с} = 10 \text{ мин}.$$

4. *Оцените скорость движения электронов в металлическом проводнике, когда по нему протекает электрический ток.*

Будем исходить из того, что по правилам техники безопасности по проводам с естественным воздушным охлаждением разрешается пропускать электрический ток плотностью до 10 А/мм^2 = 10^7 А/м^2. Следовательно, речь пойдет о плотности тока, то есть о плотности потока электрического заряда $\Phi_q = qnv$, где q — заряд одного носителя количества электричества, n — концентрация носителей, v — скорость их упорядоченного движе-



ния под действием электрического поля. (Заметим, что плотность тока чаще обозначают буквой j.)

В металлах носителями электрического заряда являются свободные электроны. В любом справочнике можно найти, что заряд электрона $q=e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл. А какова концентрация n свободных электронов? Попробуем ее подсчитать. Сделаем вполне разумное предположение, что на каждый атом в металле приходится один свободный электрон, который и участвует в процессе прохождения электрического тока. Тогда n будет концентрацией атомов в металле. Чтобы ее найти, придется ввести несколько понятий, незнакомых большинству читателей этой статьи.

Известно, что число атомов в любом теле огромно, поэтому удобнее говорить не об абсолютном числе их, а об относительном. Договорились сравнивать число атомов в данном теле с числом атомов, содержащихся в 0,012 кг углерода, и называть это относительное число количеством вещества. Единицей измерения количества вещества является один моль; в моле любого вещества содержится столько же атомов, сколько их содержится в 0,012 кг углерода. Число атомов в одном моле называют числом Авогадро и обозначают N_A. Измерения дают, что $N_A = 6\cdot10^{23}$ 1/моль. Массу вещества, взятого в количестве одного моля, называют, соответственно, молярной массой и обозначают μ (греческая буква «мю»). Вот пожалуй и все, что нам понадобится.

Очевидно, что концентрация n атомов в металле (а значит, и концентрация свободных электронов) равна числу атомов N_A в моле, деленному на объем V, занимаемый молем, который, в свою очередь, равен молярной массе μ металла, деленной на его плотность ϱ:

$$n = \frac{N_A}{V} = N_A\,\frac{\varrho}{\mu}\,.$$

Для наиболее распространенного проводника — меди — $\mu = 64\cdot10^{-3}$ кг/моль, а $\varrho = 9\cdot10^{3}$ кг/м^3. Таким образом, концентрация свободных электронов

$$n = N_A\,\frac{\varrho}{\mu} \approx 10^{29}\ 1/\text{м}^3,$$

а их скорость

$$v = \frac{\Phi_q}{qn} = \frac{I}{en} \approx 10^{-3}\ \text{м/с} \approx 1\ \text{мм/с}.$$

Поначалу эта цифра может показаться удивительно малой и вызвать сомнения в своей правильности. Ведь известно, например, что скорости теплового движения молекул в веществе при обычных температурах составляют сотни метров в секунду, а скорости электронов (ввиду их малой массы) должны быть еще больше. Так оно и есть на самом деле — скорости теплового движения электронов действительно велики, но никакого противоречия в этом нет. Дело в том, что найденное нами значение скорости — это так называемая дрейфовая скорость, то есть скорость медленного упорядоченного движения «электронной жидкости», отдельные «молекулы» которой (электроны) участвуют в тепловом движении с огромными скоростями.

Полученный нами результат вполне правильный. Несмотря на очень малую скорость упорядоченного движения электронов, по проводнику может течь очень большой ток. И объясняется это огромной концентрацией свободных электронов.

Е. Морозов

Оптические системы

Оптической системой принято называть совокупность различных оптических элементов: линз, зеркал, призм, плоскопараллельных пластин и т. п. Их действие основано на простейших законах геометрической оптики — на законах отражения и преломления света.

Основными элементами многих оптических систем являются тонкие линзы и плоские зеркала (именно о таких системах и пойдет речь в статье). Напомним основные результаты применения для них законов отражения и преломления света.

Для тонкой линзы справедлива формула

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F},$$

которая позволяет найти расстояние f от линзы до изображения по известному расстоянию d от предмета до линзы и фокусному расстоянию линзы F. Пользуясь этой формулой, надо аккуратно соблюдать правила знаков. Так, следует иметь в виду, что фокусное расстояние F всегда положительно для собирающей линзы и отрицательно для рассеивающей. (Именно поэтому собирающую линзу называют также положительной, а рассеивающую — отрицательной.) Расстояние d считается положительным для реального (действительного) предмета или его изображения, полученного ранее с помощью какого-то другого оптического элемента и расположенного с той же стороны от рассматриваемой линзы, что и сам предмет; если же это изображение находится с другой стороны от линзы, то расстояние нужно считать отрицательным (рис. 1). При этом положительным значениям f будут соответствовать действительные изображения в данной линзе, а отрицательным — мнимые (рис. 2).

В случае плоского зеркала изображение всегда находится на таком же расстоянии от зеркала, что и предмет, но с другой стороны от него (рис. 3).

Теперь рассмотрим несколько конкретных задач. Почти все они в разное время предлагались на вступительных экзаменах в Московский физико-технический институт.

Задача 1. *Две тонкие линзы $Л_1$ и $Л_2$ с фокусными расстояниями F_1 и F_2 расположены на расстоянии l друг от друга.*

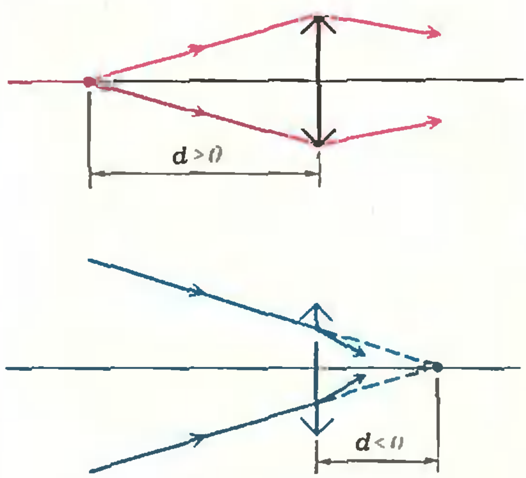


Рис. 1.

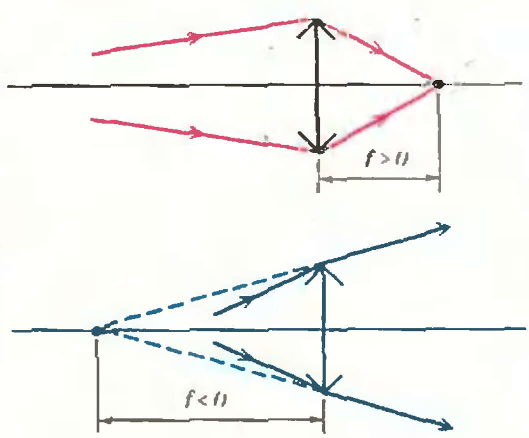


Рис. 2.

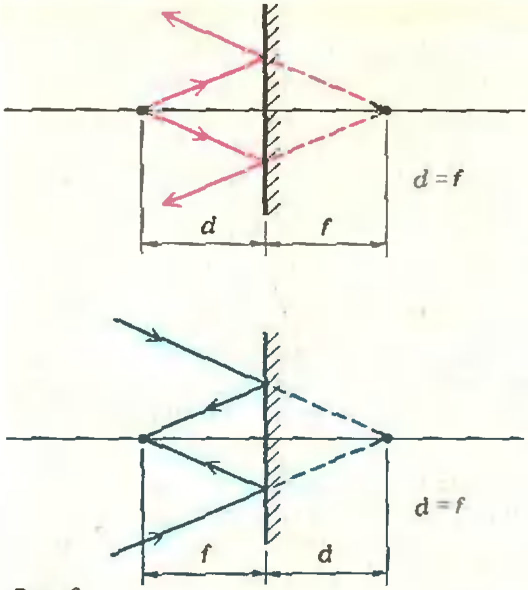


Рис. 3.

На каком расстоянии от второй линзы находится изображение S_2 предмета S, расположенного перед первой линзой на расстоянии d от нее? Какова будет оптическая сила системы этих двух линз, если расстояние l между ними станет равным нулю?

Очевидно, что решение задачи заключается в последовательном применении формулы линзы к линзам $Л_1$ и $Л_2$. Предварительно заметим, что из этой формулы простым образом выражаются не соответствующие расстояния, а обратные им величины, поэтому именно с ними и удобно оперировать. В противном случае, как показывает опыт, громоздкость вычислений часто приводит к ошибочным результатам.

Для первой линзы формула даст

$$\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F_1}-\frac{1}{d_1}=\frac{1}{F_1}-\frac{1}{d},$$

где f_1 — расстояние до изображения S_1. Это промежуточное изображение-предмет от второй линзы находится на расстоянии $d_2=l-f_1$. Применяя формулу линзы второй раз, приходим к искомому результату:

$$\frac{1}{f_2}=\frac{1}{F_2}-\frac{1}{d_2}=\frac{1}{F_2}-\frac{1}{l-f_1}=$$

$$=\frac{1}{F_2}+\frac{\frac{1}{f_1}}{1-l\frac{1}{f_1}}=\frac{1}{F_2}+\frac{\frac{1}{F_1}-\frac{1}{d}}{1-l\left(\frac{1}{F_1}-\frac{1}{d}\right)}.$$

Отсюда в принципе можно найти и само расстояние f_2.

Если линзы сложены вплотную, то есть если $l=0$, то полученное выражение упрощается:

$$\frac{1}{f_2}=\frac{1}{F_2}+\frac{1}{F_1}-\frac{1}{d}.$$

Чтобы найти фокусное расстояние такой системы, положим $d\to\infty$. Тогда

$$\frac{1}{f_2}=\frac{1}{F_{\text{системы}}}=\frac{1}{F_1}+\frac{1}{F_2},$$

или

$$D_{\text{системы}}=D_1+D_2$$

— оптическая сила системы двух сложенных вплотную тонких линз равна сумме их оптических сил. Этот результат можно обобщить и на случай большего числа линз.

Задача 2. *За положительной линзой с фокусным расстоянием F перпендикулярно оптической оси линзы на расстоянии l от нее расположено плоское зеркало (рис. 4). Перед линзой на расстоянии d находится точечный источник света S. Определите положение изображения.*

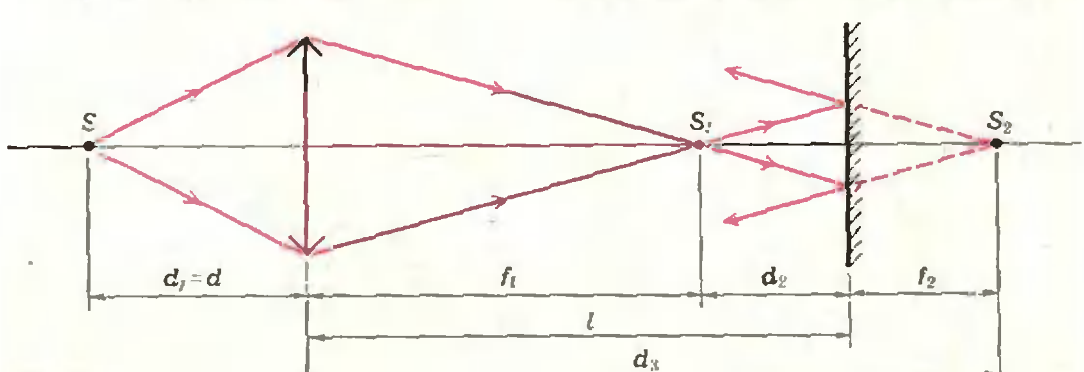


Рис. 4.

При каких значениях d изображение будет действительным и при каких — мнимым (рассмотрите случай $l=0$)?

Лучи от источника света, попав на линзу, преломляются в ней, затем отражаются от зеркала и еще раз преломляются линзой.

После первого преломления линзой лучи сойдутся в точке S_1. Величину отрезка f_1 найдем из формулы линзы:

$$\frac{1}{f_1}=\frac{1}{F}-\frac{1}{d_1}=\frac{1}{F}-\frac{1}{d}.$$

Изображением точки S_1 в плоском зеркале будет точка S_2, расположенная на таком же расстоянии от зеркала, что и точка S_1, но по другую сторону от него. Это расстояние

$$d_2=f_2=l-f_1.$$

Отразившись от зеркала, лучи снова падают на линзу, как бы исходя из точки S_2, находящейся от линзы на расстоянии

$$d_3=l+(l-f_1)=2l-f_1.$$

После второго преломления линзой лучи (или их продолжения) сойдутся на расстоянии f_3 от нее, причем

$$\frac{1}{f_3}=\frac{1}{F}-\frac{1}{d_3}=\frac{1}{F}-\frac{1}{2l-f_1}=$$

$$=\frac{1}{F}-\frac{\frac{1}{f_1}}{2l\frac{1}{f_1}-1}=\frac{1}{F}-\frac{\frac{1}{F}-\frac{1}{d}}{2l\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{d}\right)-1}=$$

$$=\frac{2l\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{d}\right)+\frac{F}{d}-2}{F\left(2l\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{d}\right)-1\right)}.$$

Отсюда искомая величина

$$f_3=\frac{F\left(2l\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{d}\right)-1\right)}{2l\left(\frac{1}{F}-\frac{1}{d}\right)+\frac{F}{d}-2}.$$

Теперь проанализируем, когда полученное изображение будет действительным, а когда — мнимым. Очевидно, что окончательное изображение окажется мнимым, если точка S_2 находится между линзой и ее правым фокусом, то есть если $d_3<F$. Следовательно, точка S_1 должна находиться справа от зеркала на расстоянии $d_2>l-F$ от него и на расстоянии $f_1>2l-F$ от линзы. Тогда из формулы линзы получим

$$\frac{1}{d}=\frac{1}{F}-\frac{1}{f_1}.$$

или

$$d=\frac{Ff_1}{f_1-F}<\frac{F(2l-F)}{2(l-F)}$$

— при таких расстояниях источника S от линзы его изображение будет мнимым.

В частном случае, когда $l=0$, изображение окажется мнимым при значениях $d<F/2$ и действительным при $d>F/2$.

Задача 3. *Из стекла с показателем преломления $n=1{,}5$ сделана толстая линза. Радиус ее первой выпуклой поверхности $R_1=20$ см, радиус второй поверхности, которая может быть как выпуклой, так и вогнутой, $R_2=5$ см. Найдите толщину линзы, если известно, что параллельный пучок света линза оставляет параллельным.*

Поскольку линза толстая, формула тонкой линзы к ней не применима. Для решения задачи нам придется пользоваться непосредственно законом преломления света.

Рассмотрим параллельный пучок лучей, падающих на первую сферическую поверхность раздела двух сред параллельно главной оптической оси линзы. После преломления лучи соберутся в некоторой точке на оптической оси. Найдем положение этой точки.

Для этого выберем один луч из пучка — луч AB, удаленный от оси на расстояние h, и найдем точку S пересечения его с осью после преломления (рис. 5, *а*). Проведем радиус OB в точку падения луча. Тогда угол α будет углом падения, а β — углом преломления, причем, согласно закону преломления,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}=n,\ \text{или}\ \sin\beta=\frac{\sin\alpha}{n}.$$

Из треугольника COB

$$\sin\alpha=\frac{h}{R_1},\ \text{и}\ \sin\beta=\frac{\sin\alpha}{n}=\frac{h}{nR_1}.$$

Заметим, что все оптические системы дают четкие изображения предметов, только если используются узкие приосевые пучки лучей. В данном случае это означает, что $h\ll R_1$, так что синусы углов падения и преломления можно заменить самими углами:

$$\alpha=\sin\alpha=\frac{h}{R_1},\ \beta=\sin\beta=\frac{h}{nR_1}.$$

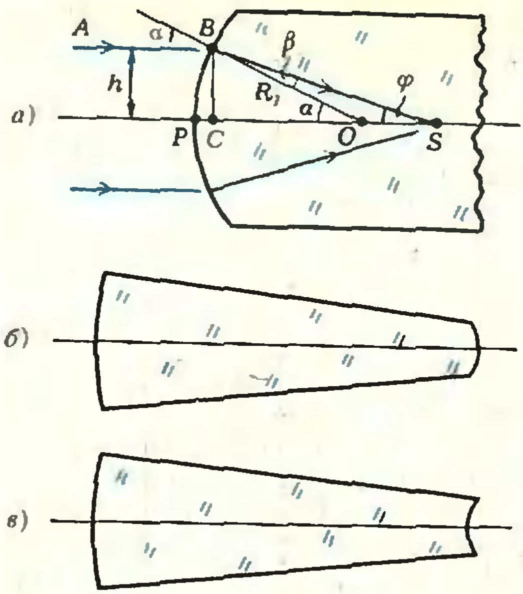


Рис. 5.

Из треугольника CSB

$$|CS| = \frac{h}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{h}{\varphi},$$

где $\varphi = \alpha - \beta = \frac{n-1}{n}\frac{h}{R_1}$,

следовательно,

$$|CS| = \frac{h}{\varphi} = \frac{n}{n-1}R_1.$$

С учетом того, что $h \ll R_1$, а значит, и $|PC| \ll |CS|$, можно записать

$$|PS| \approx |CS| = \frac{n}{n-1}R_1.$$

Таким образом, мы нашли положение точки пересечения параллельного пучка лучей после преломления сферической поверхностью. Другими словами, мы нашли фокусное расстояние этой поверхности:

$$F_1 = \frac{n}{n-1}R_1.$$

При каком условии после преломления второй сферической поверхностью лучи снова станут параллельными? Очевидно, что, если вторая поверхность выпуклая, падающие на нее лучи должны исходить из левого фокуса этой поверхности. Ее фокусное расстояние можно найти аналогично тому, как мы нашли фокусное расстояние первой преломляющей поверхности:

$$F_2 = \frac{n}{n-1}R_2.$$

Тогда толщина линзы

$$l = F_1 + F_2 = \frac{n}{n-1}(R_1 + R_2) = 75 \text{ см}.$$

В случае, когда вторая поверхность вогнутая, лучи после преломления будут параллельными, если на поверхность они падали сходящимся пучком так, что продолжения лучей пересекались в правом фокусе поверхности. Толщина линзы в этом случае равна

$$l = F_1 - F_2 = \frac{n}{n-1}(R_1 - R_2) = 45 \text{ см}.$$

Конфигурации обеих линз показаны на рисунках 5, *б* и *в*.

* * *

В заключение разберем задачу, представляющую большой практический интерес.

Для наблюдения удаленных предметов применяется телескопическая система (телескоп, зрительная труба, бинокль и т. п.). Рассмотрим одну из них — зрительную трубу Кеплера (рис. 6). Она состоит из длиннофокусной положительной линзы $Л_1$ (объектива) и короткофокусной положительной линзы $Л_2$ (окуляра). Если правый фокус объектива совпадает с левым фокусом окуляра, то говорят, что труба настроена на бесконечность. В этом случае параллельный пучок лучей (можно считать, что он исходит от бесконечно удаленного предмета) после преломления объективом соберется в его фокальной плоскости, а после преломления окуляром — снова станет параллельным.

При наблюдении предмета, находящегося на конечном расстоянии от зрительной трубы, его изображение в объективе будет уже не в фокальной плоскости, а дальше. Чтобы это изображение оказалось в фокальной плоскости окуляра, окуляр необходимо отодвинуть от объектива. Такой способ фокусировки зрительной трубы обладает существенным недостатком: при передвижении окуляра увеличивается длина трубы и теряется жесткость конструкции.

В современных зрительных трубах объектив и окуляр жестко крепятся на расстоянии $l = F_{об} + F_{ок}$ друг от друга, а внутрь трубы помещается еще одна тонкая длинно-

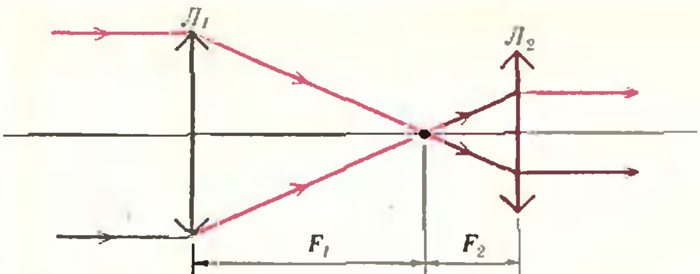


Рис. 6.

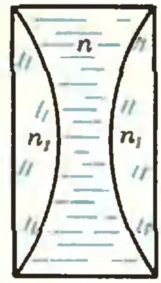


Рис. 7.

фокусная линза. Перемещением этой линзы достигается фокусировка на более или менее удаленные предметы.

Задача 4. *Найдите область фокусировки зрительной трубы с фокусирующей линзой, фокусное расстояние которой равно фокусному расстоянию объектива. В каких пределах при этом перемещается фокусирующая линза? Какова должна быть длина трубы без фокусирующей линзы, но с такой же областью фокусировки?*

Когда труба настроена на бесконечность, фокусирующая линза не должна никуда смещать изображение, создаваемое объективом; следовательно, она должна находится там, где получается это изображение, то есть в общей фокальной плоскости объектива и окуляра.

Чем дальше от этой плоскости расположить фокусирующую линзу, тем больше сместится изображение, создаваемое объективом. В предельном случае линзу можно вплотную придвинуть к объективу. Найдем, на какое минимальное расстояние d окажется при этом сфокусированной зрительная труба.

Поскольку две одинаковые линзы (фокусирующая линза и объектив) сдвинуты вплотную, их общее фокусное расстояние будет равно половине фокусного расстояния объектива, то есть $F_{об}/2$. Изображение, создаваемое системой этих линз, должно получиться на расстоянии $f=F_{об}$. Тогда из формулы тонкой линзы найдем d:

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{F_{об}}=\frac{2}{F_{об}}, \text{ и } d=F_{об}.$$

Таким образом, зрительная труба может быть сфокусирована на предметы, находящиеся от трубы на расстояниях от $d=F_{об}$ до $d\to\infty$. При этом фокусирующая линза перемещается непосредственно от объектива к общей фокальной плоскости объектива и окуляра, то есть на расстояние, равное $F_{об}$.

Очевидно, что зрительная труба без фокусирующей линзы не может иметь столь большие пределы фокусировки, так как для этого длина трубы должна быть бесконечно большой.

Упражнения

1. На систему из трех линз, главные оптические оси которых совпадают, падает параллельный пучок света. Найдите положение точки пересечения лучей после прохождения системы, если фокусные расстояния линз равны $F_1=+10$ см, $F_2=-20$ см и $F_3=+10$ см, расстояние между первой и второй линзами равно $l_1=15$ см, а расстояние между второй и третьей — $l_2=6$ см.

2. Плоская поверхность плосковыпуклой линзы с фокусным расстоянием F покрыта хорошо отражающим слоем. На расстоянии d от линзы со стороны ее выпуклой поверхности расположен точечный источник света. Определите положение изображения. При каких значениях d изображение будет действительным и при каких — мнимым?

3. Объектив с переменным фокусным расстоянием состоит из двух одинаковых тонких плосковыпуклых линз, пространство между которыми может заполняться различными жидкостями (рис. 7). Считая объектив тонкой линзой, найдите зависимость его фокусного расстояния F от показателя преломления жидкости n и изобразите эту зависимость графически. Радиусы сферических поверхностей линз $R=20$ см, показатель преломления материала линз $n_1=1{,}5$.

4. Зачем крокодилу плоские глаза?

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1}>0.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{\sin x}\cdot\cos y=0\\ 2\sin^2 x-\cos 2y-2=0.\end{cases}$$

3. В два различных сосуда налиты растворы соли, причем в первый сосуд налито 5 кг, а во второй — 20 кг. При испарении воды процентное содержание соли в первом сосуде увеличилось в p раз, а во втором сосуде — в q раз. О числах p и q известно только, что $pq=9$. Какое наибольшее количество воды могло при этом испариться из обоих сосудов вместе?

4. Трапеция $ABCD$ вписана в окружность ($BC\parallel AD$). На дуге CD взята точка E и соединена со всеми вершинами трапеции. $\widehat{CED}=120°$, $\widehat{ABE}-\widehat{BAE}=\alpha$. Найдите для треугольника ABE отношение периметра к радиусу вписанной окружности.

5. Отрезок DE, лежащий в двугранном угле AD с точками B и C на его гранях, параллелен плоскости треугольника ABC, имеющего площадь S. В тетраэдр $BCDE$ вписан шар, k — отношение расстояния от центра шара до прямой DE к расстоянию от DE до плоскости ABC. Пусть B' — проекция точки B на плоскость CDE и известно, что $\operatorname{tg}\widehat{B'DE}:\operatorname{tg}\widehat{BDE}=l$. Через середину AD проводится плоскость P, параллельная плоскости ABC. Найдите площадь сечения многогранника $ABCDE$, составленного из тетраэдров $ABCD$ и $BCDE$, плоскостью P, если известно, что сумма площадей всех граней тетраэдра $BCDE$ равна σ.

Вариант 2

(механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{[\log_{\sqrt{2}}(x-3)]^2}{x^2-4x-5}>0.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{\cos 2x}\cdot\cos x=0\\ 2\sin^2 x-\cos\left(2y-\frac{\pi}{3}\right)=0.\end{cases}$$

3. В двух различных емкостях содержались смеси воды и песка, причем в первой емкости было 1000 кг смеси, а во второй — 1960 кг. В обе емкости добавили воды. При этом процентное содержание песка в смесях уменьшилось в k раз в первой емкости и в l раз во второй. О числах k и l известно только, что $kl=9-k$. Найти наименьшее количество воды, которое могло быть долито в обе емкости вместе.

4. Пятиугольник $ABCDE$ вписан в окружность, $BD\parallel AE$, $\widehat{CAE}=2\widehat{CEA}$, $\widehat{CBD}-\widehat{CDB}=\alpha$. Найдите для треугольника ACE отношение радиуса описанной окружности к периметру.

5. Отрезок FG параллелен плоскости выпуклого пятиугольника $ABCDE$ площади S. Точки A и G лежат по разные стороны от плоскости CBF. В тетраэдр $BCFG$ вписан шар, k — отношение расстояния от центра шара до прямой FG к расстоянию от FG до плоскости $ABCDE$. Двугранный угол BF с точками C и G на гранях равен α, а $\sin\widehat{CFB}:\sin\widehat{CFG}=l$. Через середину AF проведена плоскость P, параллельная плоскости $ABCDE$. Найдите площадь сечения плоскостью P многогранника $ABCDEFG$, составленного из пирамиды $FABCDE$ с вершиной F и тетраэдра $BCFG$, если известно, что сумма площадей всех граней тетраэдра $BCFG$ равна σ.

Вариант 3

(химический факультет)

1. Решите неравенство

$$\frac{30x-9}{x-2}>25(x+2).$$

2. Решите уравнение

$$2\cos 2x+\cos^2\frac{x}{2}-10\cos\left(\frac{5\pi}{2}-x\right)+\frac{7}{2}=\frac{1}{2}\cos x.$$

3. Из города A в город B выехал автомобиль. Одновременно с ним из пункта C, расположенного между A и B, в город A выехал второй автомобиль. Первый прибыл в B одновременно с прибытием второго в A. Затем автомобили одновременно выехали навстречу друг другу, встретились в пункте D и одновременно прибыли первый в A, второй в B. Каждый автомобиль ехал со своей постоянной скоростью, но второй сделал остановку на пути от C к A, а первый — остановку той же продолжительности на пути от B к D. Найдите расстояние между C и D, если известно, что расстояние от A до C равно 270 км, а расстояние от C до B равно 180 км.

4. В прямом круговом конусе расположены два шара единичного радиуса, касающиеся основания конуса в точках, симметричных относительно центра основания. Каждый из шаров касается боковой поверхности кону-

са и другого шара. Найдите величину угла между образующей конуса и основанием, при котором объем конуса наименьший.

5. При каких значениях параметра a неравенство

$$[a^3+(1-\sqrt{2})a^2-(3+\sqrt{2})a+3\sqrt{2}]x^2+ +2(a^2-2)x+a>-\sqrt{2}$$

выполняется для любого $x>0$?

Вариант 4
(биологический факультет)

1. Решите уравнение

$$3\log_8(x-2)=\log_2\sqrt{2x-1}.$$

2. Решите уравнение

$$\cos\left(2x-\frac{7\pi}{2}\right)=\sin(4x+3\pi).$$

3. Центр O окружности радиуса 3 лежит на гипотенузе AC прямоугольного треугольника ABC. Катеты треугольника касаются окружности. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что длина отрезка OC равна 5.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной параболой $y=4x-x^2$ и касательными к этой параболе, проходящими через точку $M\left(\frac{5}{2};6\right)$.

5. В треугольной пирамиде длины двух непересекающихся ребер равны 12 и 4, а остальные ребра имеют длину 7. В пирамиду вписана сфера. Найдите расстояние от центра сферы до ребра длины 12.

Вариант 5
(факультет почвоведения)

1. Три бригады работают с постоянной производительностью, прокладывая рельсовые пути. Первая и третья бригады, работая совместно, прокладывают 15 км путей в месяц. Три бригады вместе укладывают в месяц путей в два раза больше, чем первая и вторая бригады при их совместной работе. Найдите, сколько километров путей укладывает в месяц третья бригада, если известно, что вторая бригада совместно с третьей уложили некоторый участок пути в четыре раза быстрее, чем его уложила бы одна вторая бригада.

2. Решите уравнение

$$2(\lg x)^2+(1-\sqrt{2})\lg(x^2)=2\sqrt{2}.$$

3. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2+2$, $y=4-x$.

4. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром в точке O. Радиус AO перпендикулярен радиусу OB, а радиус OC перпендикулярен радиусу OD. Длина перпендикуляра, опущенного из точки C на прямую AD, равна 9. Длина отрезка BC в два раза меньше длины отрезка AD. Найдите площадь треугольника AOB.

5. Найдите все пары чисел $(x;y)$, для которых выполнено равенство

$$\frac{3+2\cos(x-y)}{2}=\sqrt{3+2x-x^2}\cdot\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right)+\frac{\sin^2(x-y)}{2}.$$

Вариант 6
(географический факультет)

1. Решите уравнение

$$\log_3(2x+1)=2\log_{2x+1}3+1.$$

2. Найдите наибольшее значение функции $y(x)=\frac{x}{2}+\sin^2 x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

3. Сорокапроцентный раствор серной кислоты в воде слили с шестидесятипроцентным раствором, после чего добавили 5 кг чистой воды и получили раствор двадцатипроцентной концентрации. Если бы вместо 5 кг чистой воды добавили 5 кг восьмидесятипроцентного раствора серной кислоты, то получили бы раствор семидесятипроцентной концентрации. Сколько было сорокапроцентного и шестидесятипроцентного раствора серной кислоты?

4. В треугольнике ABC на стороне AC как на диаметре описана окружность, которая пересекает сторону AB в точке M и сторону BC в точке N. Известно, что длина AC равна 2, длина AB равна 3 и что точка M делит отрезок AB в отношении 2:3. Найдите длину отрезка AN.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2y^2-2x+y^2=0\\ 2x^2-4x+3+y^3=0. \end{cases}$$

Вариант 7
(факультет психологии)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-y+\sqrt{x^2-4y^2}=2\\ x^5\cdot\sqrt{x^2-4y^2}=0. \end{cases}$$

2. На плоскости лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, у которого катеты имеют длину a. Поворотом данного треугольника вокруг вершины его прямого угла на угол 45° получается другой равнобедренный прямоугольный треугольник. Найдите площадь четырехугольника, являющегося общей частью этих двух треугольников.

3. Найдите такие решения уравнения

$$\cos 7x-\sqrt{3}\sin 7x=-\sqrt{2},$$

которые удовлетворяют условию $0{,}4\pi<x<\frac{6}{7}\pi$.

4. Решите уравнение

$$\frac{4}{3}[\log_3(5x-6)^3]^2-[\log_3(5x-6)^3]\log_3 x^6=-6\left(\log_3\frac{1}{x}\right)^2.$$

5. Найдите все числа a, при каждом из которых наименьшее значение квадратного трехчлена

$$4x^2-4ax+(a^2-2a+2)$$

на отрезке $0\leqslant x\leqslant 2$ равно 3.

Вариант 8
(отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета)

1. Решите уравнение

$$\sin\left(2x-\frac{7\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}-8x\right)+\cos 6x=1.$$

2. Решите неравенство

$$\log_2^2(2-x)-8\log_{\frac{1}{4}}(2-x)>5.$$

3. В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна 6 см, а высота, проведенная к основанию AD, равна 3 см. Биссектриса угла BAD пересекает сторону BC в точке M так, что $|MC| = 4$ см. N — точка пересечения биссектрисы AM и диагонали BD. Вычислите площадь треугольника BNM.

4. Каждый из рабочих должен был изготовить 36 одинаковых деталей. Первый рабочий приступил к выполнению своего задания на 4 минуты позже второго, но $\frac{1}{3}$ задания они выполнили одновременно. Полностью выполнив свое задание, первый рабочий после двухминутного перерыва снова приступил к работе и к моменту выполнения задания вторым рабочим изготовил еще две детали. Сколько деталей в час изготавливал каждый рабочий?

5. Вычислите размеры конуса наибольшего объема, вписанного в шар радиуса R.

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Две ступеньки, возвышающиеся над горизонтальной плоскостью, имеют одинаковую высоту h и находятся на расстоянии L одна от другой (рис. 1). На краю одной ступеньки лежит маленький шарик. Тело, масса которого много больше массы шарика, налетает на шарик, соударяется с ним и сталкивает его со ступеньки. Какую скорость должно иметь тело, чтобы шарик после одного подскока от горизонтальной плоскости попал на вторую ступеньку? Все соударения абсолютно упругие. Сопротивление воздуха не учитывать.

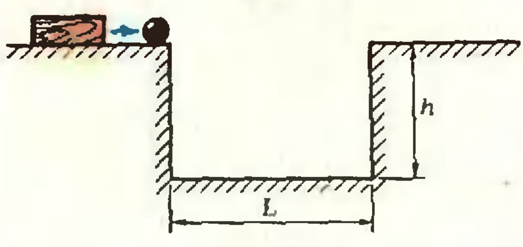


Рис. 1.

2. Маленький шарик подвешен на длинной невесомой и нерастяжимой нити. Шарик вращается по кругу в горизонтальной плоскости. Период обращения равен T_1, а угол отклонения нити от вертикали — α_1. Чему будет равен период обращения, если вся система начнет ускоренно двигаться вниз с ускорением $a < g$? Угол отклонения нити при этом равен α_2.

3. Деревянный поршень прикреплен к цилиндру с помощью невесомой пружины жесткостью k (рис. 2). При движении поршня между ним и цилиндром возникает постоянная по модулю сила трения F. Пуля, летящая со скоростью $\vec{v}$, направленной вдоль оси цилиндра, попадает в поршень и застревает в нем. На сколько при этом сместится поршень? Масса пули m, масса поршня M. Цилиндр закреплен.

4. Невесомая платформа укреплена, как на ножках, на четырех одинаковых невесомых пружинах. С высоты H падает тело массой m и, попав точно в середину платформы, прилипает к ней. Чему равна амплитуда возникших при этом колебаний, если жесткость каждой пружины k?

5. Температура газов, образующихся при сгорании топлива в цилиндрах двигателя автомобиля, равна $t_1 = 800°C$; температура выхлопных газов $t_2 = 80°C$. Расход горючего на пути $s = 100$ км при скорости $v = 90$ км/ч равен $V = 10^{-2}$ м^3; теплота сгорания топлива $q = 3{,}2 \cdot 10^{10}$ Дж/м^3. Какую мощность мог бы развить двигатель, если бы он представлял собой идеальную тепловую машину, работающую с максимально возможным коэффициентом полезного действия?

6. В схеме, изображенной на рисунке 3, ключ K сначала не замкнут. На какую величину изменится заряд конденсатора, если ключ замкнуть? Известно, что $R_1 = 10$ кОм, $R_2 = 15$ кОм, $C = 1$ мкФ, $\mathscr{E}_1 = 34$ В, $\mathscr{E}_2 = 9$ В. Внутренним сопротивлением источников можно пренебречь.

7. По участку $AБ$ цепи, изображенной на рисунке 4, течет ток, который изменяется по закону $i = \alpha t$. Здесь i — ток (в амперах), t — время (в секундах), $\alpha = 0{,}01$ А/с — постоянный коэффициент. Омическое сопротивление цепи $R = 0{,}01$ Ом, индуктивность $L = 0{,}01$ Гн, емкость $C = 0{,}1$ мкФ. Найдите заряд на конденсаторе в момент времени $\tau = 1$ с.

8. Электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. В некоторой точке A он имеет скорость $\vec{v}$, которая составляет с направлением поля угол α. При каких значениях индукции магнитного поля электрон окажется в точке $Б$? Точки A и $Б$ находятся на прямой, параллельной индукции поля; расстояние между точками равно L. Заряд электрона e, его масса m.

9. Тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $F = 10$ см находится между двумя точечными источниками на расстоянии $d = 8$ см от одного из них. Каково расстояние между источниками, если их изображения оказались в одной и той же точке?

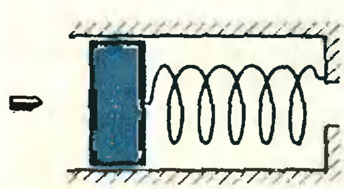


Рис. 2.

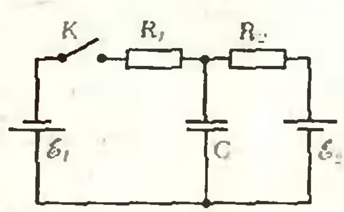


Рис. 3.

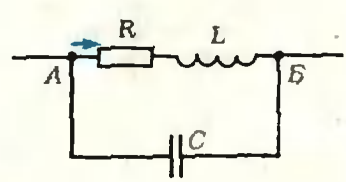


Рис. 4.

10. На сколько сместится фокус тонкой собирающей линзы, если вплотную к линзе на пути прошедших через нее лучей перпендикулярно к главной оптической оси поместить плоскопараллельную стеклянную пластинку толщиной $d=6$ мм с показателем преломления $n=1,5$? (Фокусное расстояние линзы много больше ее диаметра, поэтому тангенсы углов падения и преломления можно заменить их синусами.)

Механико-математический факультет

1. Небольшой брусок лежит на краю горизонтальной доски длиной $l=2$ м (рис. 5). Через какое время брусок соскользнет, если доска начнет двигаться по горизонтали вправо с ускорением $a=3$ м/с? Коэффициент трения между бруском и доской $\mu=0,2$.

2. Два тела с массами $m_1=0,2$ кг и $m_2=0,1$ кг связаны резиновым жгутом и находятся на гладкой горизонтальной поверхности. Система движется под действием постоянной горизонтальной силы $F=6$ Н, приложенной к первому телу. Найдите потенциальную энергию деформации жгута, если известно, что под действием силы $F_0=1$ Н он растягивается на $x_0=5$ см. Движение считать установившимся; массой резинового жгута пренебречь; трение можно не учитывать.

3. В вертикальном цилиндре объемом $V=200$ см^3 под тяжелым поршнем находится газ при температуре $T=300$ К. Масса поршня $m=50$ кг, его площадь $S=50$ см^2. Для повышения температуры газа на $\Delta T=100$ К ему было сообщено количество теплоты $Q=46,5$ Дж. Найдите изменение внутренней энергии газа. Атмосферное давление $p_0=10^5$ Па. Ускорение свободного падения принять равным $g=10$ м/с^2. Трение можно не учитывать.

4. В цилиндре под поршнем находится воздух с относительной влажностью $r_1=60\%$ при температуре $t_1=10$ °C. Какова будет относительная влажность, если температуру повысить до $t_2=100$ °C, а объем под поршнем уменьшить в $k=4$ раза? Давление насыщенного водяного пара при температуре t_1 равно $p_1=9$ мм рт. ст. Нормальное атмосферное давление $p_0=760$ мм рт. ст. $=10^5$ Па. Пар можно считать идеальным газом. Массу поршня не учитывать.

5. Проекционный аппарат дает резкое изображение диапозитива на экране, удаленном от объектива на расстояние $f=4$ м. Вплотную к объективу приставили собирающую линзу с оптической силой $D=0,25$ дптр. На какое расстояние необходимо передвинуть экран, чтобы изображение осталось резким? Расстояние от диапозитива до объектива постоянно.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. Зависимость модуля скорости v_1 первого тела от времени t изображается дугой полуокружности AMB (рис. 6). За время t_1 это тело прошло тот же путь, что и второе тело, двигавшееся с постоянной скоростью $v_2=50$ м/с. Найдите начальную скорость v_0 первого тела.

2. В схеме, изображенной на рисунке 7, $R_1=10$ Ом и $R_2=20$ Ом. Найдите отношение напряжений на конденсаторах емкостью C_1 и C_2.

3. Две батареи постоянного напряжения с ЭДС $\mathcal{E}_1$ и $\mathcal{E}_2$ соединены последовательно и замкнуты на внешний резистор. Если полярность второй батареи изменить на противоположную, то количество теплоты, выделяющееся в резисторе за $t=1$ с, уменьшится в $n=9$ раз. Найдите величину $\mathcal{E}_2$, если $\mathcal{E}_1=6$ В. Внутренним сопротивлением батарей можно пренебречь.

4. Светящиеся точки расположены на отрезке длиной l вдоль главной оптической оси тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=20$ см. Середина отрезка находится на расстоянии $d=30$ см от линзы, и линза дает действительное изображение всех точек, увеличивая отрезок в $\Gamma=5,33$ раза. Определите длину l отрезка.

5. На расстоянии $d=12$ см от полюса вогнутого сферического зеркала, радиус которого $R=16$ см, поместили точечный источник света S. Зеркало разрезали на две равные части (линия разреза проходит через главную оптическую ось зеркала) и раздвинули их на расстояние $2r=1$ см симметрично относительно оптической оси (рис. 8). Найдите расстояние между изображениями источника.

Рис. 5.

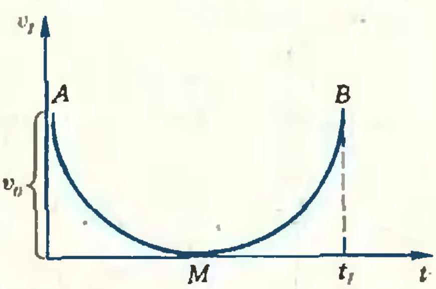


Рис. 6.

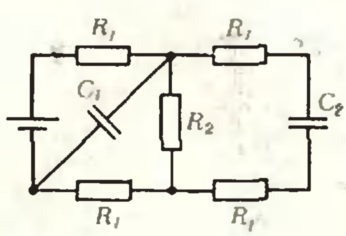


Рис. 7.

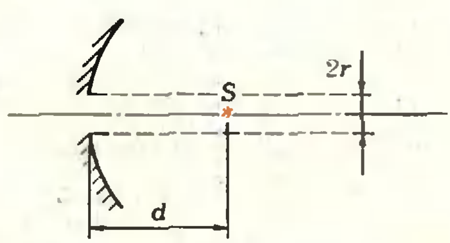


Рис. 8.

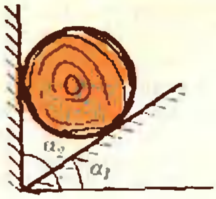


Рис. 9.

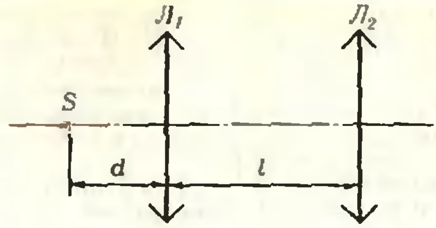


Рис. 10.

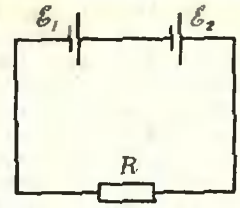


Рис. 11.

Химический факультет

1. Двугранный угол образован гладкими плоскостями, составляющими с горизонтом углы $\alpha_1=30°$ и $\alpha_2=90°$ (рис. 9). Внутри угла находится шар массой $m=0{,}173$ кг. Определите силу давления шара на вертикальную плоскость.

2. Из большого резервуара откачивают воду с помощью насоса, потребляющего мощность $N=2{,}5$ кВт. Насос соединен с гладким шлангом, наконечник которого расположен на уровне воды в резервуаре так, что струя воды выходит вертикально. Расход воды составляет $Q=108$ м^3/ч. Какой высоты достигает струя воды? Коэффициент полезного действия насоса $\eta=60\%$. Плотность воды $\rho=10^3$ кг/м^3. Влиянием обратного потока воды можно пренебречь.

3. Электрон влетает в совпадающие по направлению однородные электрическое и магнитное поля. Напряженность электрического поля $E=100$ В/м, индукция магнитного поля $B=10^{-4}$ Тл. Скорость электрона $\vec{v}$ ($v=10^6$ м/с) перпендикулярна векторам $\vec{E}$ и $\vec{B}$. Найдите ускорение электрона. Его масса $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, заряд $q=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

4. Расстояние между двумя собирающими линзами, имеющими общую главную оптическую ось и одинаковые фокусные расстояния $F=10$ см, составляет $l=40$ см (рис. 10). Точечный источник света S находится на оси на расстоянии $d=20$ см от линзы $Л_1$. На какое расстояние сдвинется изображение источника, даваемое обеими линзами, если линзы сместить перпендикулярно оси на расстояние $h=1$ см, причем $Л_1$ — вверх, а $Л_2$ — вниз?

5. Из окна поезда, идущего со скоростью $v_1=40$ км/ч, фотографируют машину, движущуюся по шоссе параллельно железной дороге и в том же направлении со скоростью $v_2=76$ км/ч. Расстояние между железной дорогой и шоссе $d=10$ м. Какой будет величина размытия изображения машины на пленке, расположенной в фокальной плоскости линзы объектива, фокусное расстояние которой $F=10$ см? Время экспозиции $\Delta t=0{,}1$ с.

Географический и геологический факультет и факультет почвоведения

1. Расположенный горизонтально закрытый цилиндр разделен на две части подвижной перегородкой. В одной части (объемом $V_1=220$ см^3) имеется $n_1=2$ моля идеального газа при температуре $t_1=-53°$С. Сколько молей того же газа находится в другой части (объемом $V_2=300$ см^3), где температура $t_2=-13°$С? Перегородка находится в равновесии.

2. В сосуде под невесомым поршнем находится $m=56$ г азота при температуре $t_1=100°$С. Газ нагревается изобарически до температуры $t_2=200°$С. Найдите работу, совершаемую газом при этом. Молярная масса азота $\mu=0{,}028$ кг/моль. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К).

3. В калориметре при температуре $t_1=0°$С находилось $m_в=500$ г воды и $m_л=100$ г льда. Сколько водяного пара при температуре $t_2=100°$С было впущено в воду, если в результате весь лед растаял и в калориметре установилась температура $t=30°$С? Теплоемкость калориметра $C_К=1600$ Дж/К, удельная теплота парообразования воды $r=2{,}3\cdot10^6$ Дж/кг, удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}4\cdot10^5$ Дж/кг, удельная теплоемкость воды $c=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К). Потерями тепла пренебречь.

4. Найдите сопротивление R, при котором напряжение на зажимах второго элемента (с ЭДС $\mathscr{E}_2$) равно нулю (рис. 11). ЭДС элементов равны $\mathscr{E}_1=5$ В и $\mathscr{E}_2=3$ В, их внутренние сопротивления $r_1=1$ Ом и $r_2=2$ Ом.

5. Для проверки правильности показаний амперметра его включают последовательно с электролитической ванной. Какую абсолютную ошибку дает амперметр, если он показывает ток $I=1{,}7$ А, а за время $t=20$ мин на катоде ванны откладывается $m=0{,}6$ г никеля? Электрохимический эквивалент никеля $k=3\times10^{-7}$ кг/Кл.

Публикацию подготовили
И. Мельников, В. Петерсон, А. Склянкин, В. Федорчук

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

На выполнение работы было предоставлено 5 часов.

Вариант 1
(механико-математический, физический и экономический факультеты)

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2^x+3^y=5 \\ 4^x+3^{2y}=2^{x+2}\cdot3^y-11. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$3+2\cos^2 x=8\sin x+3\cos 2x.$$

3. В равнобедренной трапеции $ABCD$ длина основания AB равна 2, $\hat{A}=60°$. Диагональ BD трапеции, биссектриса угла A и высота CK, опущенная из вершины C на основание AB, пересекаются в одной точке. Определите длину основания CD.

4. Касательная к графику функции $y=-x^2+4x-2$ пересекает ось абсцисс в точке A, ось ординат в точке B. Известно, что $|BO|=2|AO|$, где точка O — начало координат. Найдите длину отрезка AB.

5. В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит правильный треугольник ABC со стороной 1, ребро SA пирамиды перпендикулярно плоскости основания, $|SA|=\sqrt{3}$. Плоскость α параллельна прямым SB и AC, плоскость β параллельна прямым SC и AB. Определите величину угла между плоскостями α и β.

Вариант 2
(геолого-геофизический факультет и факультет естественных наук)

1. Из молока, жирность которого составляет 5%, изготовляют творог жирности 15,5%, при этом остается сыворотка жирности 0,5%. Определите, сколько творога получается из 1 т молока.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{3}\cos x-\sin x=2\cos 5x.$$

3. В треугольнике ABC $\hat{A}=45°$, $\hat{B}=75°$. На стороне AB как на диаметре построена окружность, которая пересекает стороны AC и BC в точках D и E. Определите площадь треугольника ABC, если $|DE|=1$.

4. Решите неравенство

$$\frac{2}{x}+3<\sqrt{41-\frac{16}{x}}.$$

5. Дана правильная треугольная пирамида $ABCD$, все ребра которой имеют длину 1. Шар радиуса $\frac{3}{2\sqrt{6}}$ касается граней трехгранного угла с вершиной A, другой шар радиуса $\frac{1}{2\sqrt{6}}$ касается граней трехгранного угла с вершиной B, ребрами которого являются продолжения отрезков AB, CB и DB за вершину B. Определите расстояние между центрами шаров.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Каждый вариант состоял из пяти задач трех типов. На решение задач давалось пять часов.

Первые три задачи — расчетные, различной трудности: от почти стандартных до сравнительно сложных, требующих смекалки, глубоких знаний, умения разобраться в непривычной или усложненной физической ситуации.

Четвертая задача — это задача-оценка. Для ее решения надо понять рассматриваемое физическое явление, сформулировать простую (так как нужна только оценка) физическую модель этого явления, выбрать разумные значения физических величин и, наконец, получить численный результат, более или менее соответствующий реальности. В тексте задачи подчеркивалось, что абитуриент может сам выбрать необходимые для решения задачи физические величины и их численные значения.

Пятая задача — это задача-демонстрация, в которой надо объяснить физическое явление, демонстрируемое в аудитории. Здесь важно понять сущность явления и среди различных физических факторов выделить главный.

Работа оценивалась в зависимости от суммы набранных баллов. За задачи разной степени трудности ставилось различное количество баллов: за № 1—4, № 2—6, № 3—8, № 4—5, № 5—3. За частичное решение задачи ставилась соответствующая часть баллов. Ниже после текста каждой задачи в скобках указан процент решивших ее (при этом задача считалась решенной, если за нее было набрано не менее половины полного количества баллов).

Вариант 1

1. Шар лежит в щели ABC (рис. 1), образованной двумя плоскими стенками, причем ребро щели горизонтально. Определите угол между плоскостями, если сила давления шара на вертикальную стенку BC вдвое превышает вес. Трение не учитывать. (84%)

2. В цилиндр, закупоренный одинаковыми плосковыпуклыми линзами (рис. 2), налита вода (ее показатель преломления равен n). Главные оптические оси линз совпадают с осью цилиндра. Вдоль этой оси на линзу параллельным пучком падает свет. При каком расстоянии l между линзами свет выйдет из устройства снова параллельным пучком? Фокусные расстояния линз, измеренные в воздухе, равны F. Считать, что углы между лучами света и осью малы, так что для них $\operatorname{tg}\alpha\approx\sin\alpha\approx\alpha$. (54%)

3. На однородный стержень, оба конца которого заземлены (рис. 3), падает пучок электронов, причем на каждый сантиметр длины стержня в секунду попадает одно и то же число электронов. Сопротивление стержня R. Ток на участке заземления CD равен I. Найдите разность потенциалов между серединой стержня A и его концом B. (28%)

4. Оцените наибольшее давление в полной цистерне для поливания улиц при ее тормо-

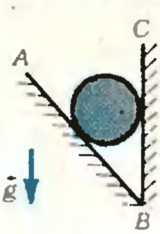


Рис. 1.

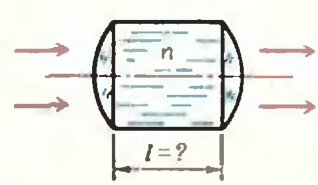


Рис. 2.

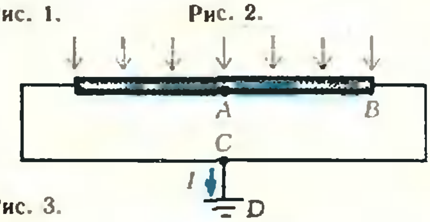


Рис. 3.

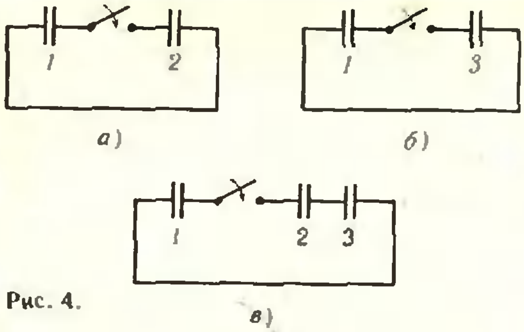


Рис. 4.

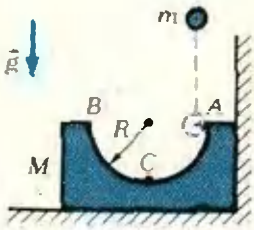


Рис. 5.

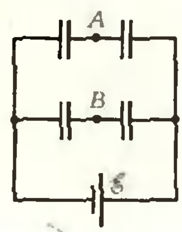


Рис. 6.

Рис. 7.

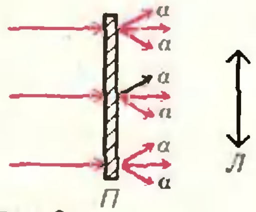


Рис. 8.

жении. При скорости $v \sim 30$ км/ч тормозной путь цистерны оказался равным $s \sim 5$ м. (70%)

5. Объясните, почему гвозди, повисшие рядом на магните, отклоняются от вертикального положения. (82%)

Вариант 2

1. На какое расстояние вверх нужно сместить поршень, чтобы слой воды (плотность воды ϱ, молярная масса μ) толщиной h под ним полностью испарился? Температура T поддерживается постоянной. Давление насыщенных паров воды при этой температуре равно p. (83%)

2. Имеется три конденсатора с емкостями C_1, C_2 и C_3. Если к незаряженному конденсатору 1 (емкостью C_1) присоединить заряженный конденсатор 2 (емкостью C_2), то на конденсаторе 1 окажется заряд q_2 (рис 4,*а*). Если же к незаряженному конденсатору 1 подсоединить заряженный конденсатор 3 (емкостью C_3), то на конденсаторе 1 окажется заряд q_3 (рис. 4, *б*). Какой заряд будет на конденсаторе 1, если к нему (незаряженному) подсоединить конденсаторы 2 и 3 (рис. 4, *в*), заряженные такими же зарядами, как и в первых двух случаях? (У конденсаторов 2 и 3 между собой соединены обкладки с противоположными знаками зарядов.) (36%)

3. Прямоугольный брусок массой M с полусферической выемкой сверху (радиус выемки R) стоит вплотную к вертикальной стенке на горизонтальной поверхности (рис. 5). С какой максимальной высоты над ближайшей к стенке верхней точкой A края выемки надо отпустить маленький шарик массой m, чтобы он не поднялся над противоположной точкой B выемки? Трением пренебречь. (38%)

4. Оцените размеры дирижабля грузоподъемностью 100 тонн, заполненного гелием. (76%)

5. После прохождения света через собирающую линзу на экране хорошо виден темный круг, окаймленный светлым кольцом. Объясните наблюдаемое явление. (45%)

Вариант 3

1. В схеме, изображенной на рисунке 6, три любые конденсатора имеют одинаковую емкость, а четвертый — в два раза большую. Найдите разность потенциалов между точками A и B, если ЭДС батареи равна $\mathscr{E}$. (62%)

2. Два одинаковых шара массой m каждый покоятся, касаясь друг друга. Третий шар налетает на них, двигаясь по прямой, касающейся обоих шаров (рис. 7). Удар происходит без потерь энергии. Найдите массу налетающего шара, если после удара он остановился. Радиусы всех шаров одинаковы. (71%)

3. Параллельный пучок света рассеивается, проходя пластинку $П$ (рис. 8). Максимальный угол отклонения лучей от первоначального направления для каждой точки пластинки равен α. Какой наименьший радиус светлого пятна можно получить, поставив за пластинкой собирающую линзу $Л$ с фокусным расстоянием F? (44%)

4. Оцените, какая масса воздуха уйдет из аудитории при повышении в ней температуры на 10 градусов. (75%)

5. Объясните, почему прекращается вращение Z-образной вертушки, на которую подано постоянное напряжение, если на нее надеть проволочный колпак, электрически соединенный с вертушкой. (29%)

Публикацию подготовили
Г. Меледин, М. Фокин

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Вариант 1

Задача 1. Маленький шарик подвешен на нерастяжимой невесомой нити. В начальный момент времени нить составляет угол $\varphi_0 = 60°$ с вертикалью, а скорость шарика равна нулю. Определите, какой угол φ с вертикалью составляет нить в тот момент времени, когда вертикальная проекция вектора скорости шарика максимальна.

Задача 2. С одним молем идеального одноатомного газа проводят процесс, уравнение которого $p = p_0 - aV$ (a — постоянная величина). Определите, на каком участке этого процесса газ получает тепло и на каком отдает. Направление процесса показано на рисунке 1.

Задача 3. В цепь синусоидального переменного тока через выпрямительную схему

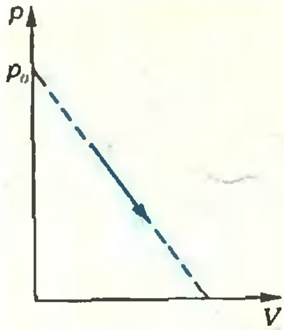


Рис. 1.

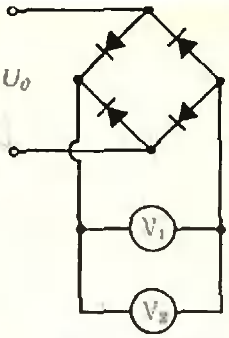


Рис. 2.

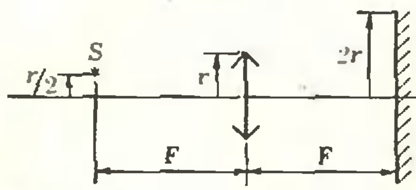


Рис. 3.

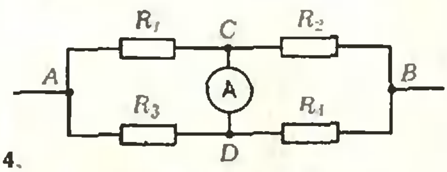


Рис. 4.

включены два вольтметра (рис. 2): V_1 — магнитоэлектрический (наблюдается поворот рамки с током в постоянном магнитном поле) и V_2 — тепловой (наблюдается удлинение проволочки, по которой течет ток). Инерционность приборов велика, так что колебания стрелок отсутствуют. Сопротивления диодов в прямом направлении пренебрежимо малы по сравнению с сопротивлениями вольтметров. Какое напряжение покажет каждый из вольтметров, если действующее напряжение $U=220$ В? Вольтметры градуированы по постоянному току.

Задача 4. Точечный источник света S находится перед тонкой собирающей линзой радиуса r в ее фокальной плоскости на расстоянии $r/2$ от оптической оси (рис. 3). В фокальной плоскости за линзой расположено плоское зеркало радиуса $2r$. Постройте изображение источника.

Теоретический вопрос. Фотоэлектрический эффект. Законы фотоэффекта. Уравнение Эйнштейна. Фотоэлементы и их применение.

Вариант 2

Задача 1. Определите угловую скорость вращения двухпланетной системы. Массы планет M_1 и M_2, расстояние между их центрами R. Найдите также ускорения, с которыми движутся планеты.

Задача 2. N молей одноатомного идеального газа помещены в герметическую упругую оболочку. Упругость оболочки такова, что квадрат объема газа оказывается пропорциональным его температуре. На сколько изменится энергия, запасенная в оболочке, если медленно нагреть газ от температуры T_1 до температуры T_2? Чему равна теплоемкость системы? Теплоемкостью оболочки пренебречь, внешнее давление не учитывать.

Задача 3. В схеме, изображенной на рисунке 4, $R_1=15$ Ом, $R_2=10$ Ом, $R_3=30$ Ом и $R_4=40$ Ом. Определите, какой ток покажет амперметр А с пренебрежимо малым сопротивлением, если между точками A и B напряжение $U=36$ В.

Задача 4. В однородном магнитном поле движется протон, скорость которого перпендикулярна полю. Происходит упругий удар протона с покоящимся ядром атома гелия. В результате удара протон отклоняется на 90° от направления своего движения непосредственно перед соударением, причем вектор его скорости остается перпендикулярным магнитному полю. Определите, во сколько раз изменится радиус кривизны траектории протона в магнитном поле после соударения. Движение нерелятивистское, массу ядра считать равной четырем массам протона. Время соударения пренебрежимо мало.

Теоретический вопрос. Дисперсия света. Спектры излучения. Спектры поглощения. Понятие о спектральном анализе.

Задачи устного экзамена

Математико-механический факультет и факультет прикладной математики — процессов управления

1. Плоский конденсатор с расстоянием между пластинками d, заполненный средой с диэлектрической проницаемостью ε и удельным сопротивлением ϱ, включен в цепь батареи с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r. Чему равна напряженность E электрического поля конденсатора, если его емкость C?

2. Определите напряжение на зажимах источника питания, если он обеспечивает в цепи ток $I=2$ А. Цепь состоит из двух параллельно включенных лампочек мощностью $P=30$ Вт каждая. Потери мощности в проводах составляют 10% полезной мощности.

3. Точечный источник света находится на главной оптической оси собирающей линзы. Когда он помещался в точке A, его изображение находилось в точке B, а когда источник поместили в точку B, его изображение оказалось в точке C. Зная, что $|AB|=a=10$ см и $|BC|=b=20$ см, найдите фокусное расстояние линзы.

Химический факультет

1. Две звезды одинаковой массы m движутся по окружности радиуса r, оставаясь одна против другой. Пренебрегая влиянием других небесных тел, найдите скорость движения этих звезд.

2. В лифте, поднимающемся с постоянным ускорением a, стоит ящик с песком. Камень массой m, находящийся на высоте h над поверхностью песка, начинает падать без начальной скорости (относительно лифта). Какое количество теплоты выделится при ударе камня о песок?

3. Какой заряд проходит через раствор $CuSO_4$ за время $t=10$ с, если величина тока за это время равномерно возрастает от 0 до $I=4$ А? Сколько меди выделяется при этом на катоде? Электрохимический эквивалент меди $k=0,33\cdot10^{-6}$ кг/Кл.

Публикацию подготовил
В. Бойцов

Ташкентский государственный университет им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1
(математический факультет)

1. Решите уравнение
$$3^x+2(\sqrt{3})^x-3=0.$$

2. Решите неравенство
$$x-17>\frac{60}{x}.$$

3. Решите уравнение
$$\sin x+\sin 3x=-2.$$

4. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=0$, $x=-\frac{\pi}{8}$, $x=\frac{\pi}{4}$ и $y=\sin 2x$.

5. Объем конуса, вписанного в правильную четырехугольную пирамиду, равен Q. Двугранный угол, образованный смежными боковыми гранями пирамиды, равен α. Найдите длину стороны основания пирамиды.

Вариант 2
(факультет прикладной математики и механики)

1. Решите уравнение
$$\sqrt{\frac{2x}{x+1}}-\sqrt{\frac{2(x+1)}{x}}=1.$$

2. Решите неравенство
$$\frac{x+1}{x-1}>\frac{x+5}{x+1}.$$

3. Решите уравнение
$$3\cos^2 4x+4\cos^2 2x-3=0.$$

4. Прямоугольный треугольник с гипотенузой d вращается вокруг одного из катетов. Какими должны быть острые углы этого треугольника, чтобы объем тела вращения был наибольшим?

5. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с периметром $2p$ и острым углом α. Найдите боковую поверхность призмы, если известно, что в нее можно вписать шар.

Вариант 3
(физический факультет)

1. Решите уравнение
$$\log_x 2\cdot\log_{2x} 2=\log_4 2.$$

2. Решите неравенство
$$\frac{x^2-4x+5}{x^2+5x+6}>0.$$

3. Решите уравнение
$$2\sin^2 x-5\sin x+2=0.$$

4. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y=2x^3-39x^2+252x+1$ на $[5;8]$.

5. Из основания высоты правильной треугольной пирамиды опущен на боковое ребро перпендикуляр, равный l. Найдите объем пирамиды, если двугранный угол между ее боковыми гранями равен φ.

Задачи устного экзамена

1. Найдите $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$, если $\sin 2\alpha=0{,}6$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$.

2. Что больше
а) $\sin 3$ или $\cos 3$?
б) $\sqrt[3]{3}$ или $\sqrt{2}$?

3. Нарисуйте график функции
а) $y=\sin|2x|$;
б) $y=-2^{-|x|}$;
в) $y=\lg|x-1|-1$.

4. Докажите, что корни уравнений $ax^2+bx+c=0$ и $cx^2+bx+a=0$ взаимно обратны.

5. Решите уравнение
а) $4^x+6^x=9^x$;
б) $\sin^3 x+\sin^2 x=1+\sin x$.

6. Сколько корней уравнения
$$\cos^2 x+\frac{\sqrt{3}+1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{4}-1=0$$
лежит в отрезке $[-\pi;\pi]$?

7. Решите неравенство
а) $\frac{x^2-7x+12}{x-4}>0$;
б) $\log_{\frac{1}{2}}(x^2-2x+4)>-2$.

8. Вычислите $y'(0)$, если $y=\ln(2-\sqrt{2x+1})$.

9. Напишите уравнение касательной к линии $y=\frac{1}{x}+3\sqrt{x}+\frac{x}{9}-\sqrt{3x^2}$ в точке с абсциссой $x_0=9$.

10. Среди всех прямоугольников с заданной площадью a найдите тот, у которого наименьший периметр.

11. Среди всех прямоугольников с заданным периметром a найдите тот, у которого наибольшая площадь.

12. Периметр кругового сектора равен l. Каким должен быть центральный угол этого сектора, чтобы его площадь была наибольшей?

13. Площадь кругового сектора равна Q. Каким должен быть центральный угол этого сектора, чтобы его периметр был наименьшим?

14. Материальная точка движется по закону $s(t)=\frac{1}{2}t^2+1980t+1981+4\ln(t+1)$, $t>0$. При каком значении t ее скорость будет минимальной?

15. При каком значении k площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-3$ и $y=kx+2$, будет минимальной? Вычислите эту площадь.

16. Вычислите площадь, ограниченную линиями $y=\sin x$, $y=\frac{2}{\pi}x$, $0<x<\frac{\pi}{2}$.

17. Квадрат со стороной a повернут вокруг своего центра на 45°. Найдите пло-

щадь общей части «старого» и «нового» квадратов.

18. Правильный треугольник со стороной a повернут вокруг своего центра на $60°$. Найдите площадь общей части.

19. Докажите, что если соединить середины сторон выпуклого четырехугольника, то получится параллелограмм. Когда этот параллелограмм будет ромбом? Квадратом?

20. При каком значении a угол между векторами $\vec{x}=\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{y}=a\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ равен $\arccos\frac{1}{2\sqrt{3}}$?

Физика

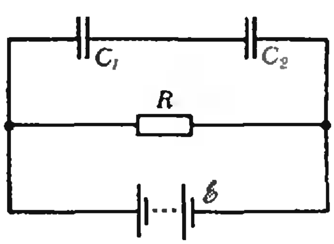
Задачи устного экзамена

1. С крыши здания высотой $H=16$ м через одинаковые промежутки времени падают капли воды, причем первая ударяется о землю в тот момент, когда пятая отделяется от крыши. Найдите расстояния между соседними каплями в момент удара первой о землю.

2. Посередине узкой запаянной с обоих концов горизонтальной трубки находится столбик ртути длиной $l=0{,}1$ м. В обеих половинах трубки содержится воздух под давлением $p=76$ мм рт. ст. На какое расстояние переместится столбик ртути, если трубку поставить вертикально? Длина трубки $L=1$ м.

3. На сколько надо нагреть воздух внутри сообщающегося с атмосферой воздушного шара, сферическая оболочка которого имеет диаметр $d=10$ м и массу $m=10$ кг, чтобы шар взлетел? Атмосферное давление $p=735$ мм рт. ст., температура $t=27°$С, молярная масса воздуха $\mu=29$ г/моль. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль · К).

4. Найдите напряжения на конденсаторах емкостью C_1 и C_2 в цепи, показанной на рисунке, если известно, что при коротком замыкании ток через источник возрастает в 3 раза. ЭДС источника равна $\mathcal{E}$.



5. Расстояние между электрической лампочкой и экраном $l=1$ м. При каких положениях собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1=0{,}21$ м изображение нити лампочки будет отчетливым? Будет ли изображение отчетливым, если фокусное расстояние линзы равно $F_2=0{,}26$ м?

Публикацию подготовили
А. Красная, М. Мирзахмедов, Р. Худайберганов, В. Ясколко

Информация

Семинар руководителей НОУ

Коллегия Министерства просвещения СССР, Секретариат ЦК ВЛКСМ, Президиум Всесоюзного совета научно-технических обществ, Правление Всесоюзного общества «Знание» провели 2—4 декабря 1981 года в г. Кишиневе межреспубликанский семинар-совещание руководителей и организаторов научных обществ учащихся. Целью совещания было дальнейшее совершенствование деятельности по развитию познавательной активности школьников, пропаганды среди них достижений науки, техники и производства, литературы и искусства, обобщение опыта работы научных обществ учащихся, укрепление связей школ и промышленных предприятий, вузов, научных учреждений.

На совещание приехали около 200 представителей из всех союзных республик. В программе совещания была работа секций, беседа «за круглым столом», посещение занятий школьных секций Молдавского НОУ «Винторул». На совещании выступали не только представители таких известных НОУ, как «Винторул», объединяющее школьников всей Молдавии, лауреат премии Ленинского комсомола Челябинское НОУ, Симферопольское, Волгоградское, но и руководители совсем молодых школьных НОУ.

В выступлениях участников отмечалось, что НОУ имеет очень большое значение, так как члены НОУ, работающие в секциях, связанных с вузами, НИИ, промышленными предприятиями, в дальнейшем избирают профессию, связанную с профилем их работы в НОУ. Велики возможности НОУ по части малой автоматизации на небольших предприятиях, на которых нет штатных специалистов в этой области. Эти возможности эффективно используются — между таким предприятием и секцией НОУ часто заключается договор, и члены секции разрабатывают приборы и устройства, которые затем внедряются на данном предприятии. При этом учащиеся чувствуют себя сопричастными к созидательному труду, видят результаты своей работы, ее общественно полезную направленность. Всего в ходе совещания было высказано более 100 предложений по улучшению и совершенствованию работы и руководства НОУ. Организаторы предоставили участникам семинара методическую литературу о работе НОУ Кишинева, Челябинска, Волгограда, Иванова, Ростова-на-Дону, Киева, Москвы и других городов.

Заметим, что материалы, освещающие опыт работы лучших НОУ, регулярно публикуются на страницах журналов «Математика в школе», «Физика в школе», «Народное образование», «Воспитание школьников», «Юный техник», «Техника и наука» и «Квант».

А. Виленкин

Заочная школа программирования

Двадцатый урок, опубликованный в предыдущем номере «Кванта», стал последним в трехлетнем цикле Заочной школы программирования. Наступило время оглянуться назад и подвести первые итоги.

* * *

Когда в 1979 г. в «Кванте» открылась рубрика «Искусство программирования» и был опубликован первый урок Заочной школы, мы, конечно, не знали, каков будет отклик наших читателей на это начинание. Нужно сказать, что среди прогнозов были и весьма скептические. Однако результаты превзошли самые оптимистические ожидания. Поток писем со всех уголков СССР и из-за рубежа с надписью «ЗШП, урок 1», все нарастая, прямо-таки наводнил помещение школы в Отделе информации ВЦ Сибирского отделения Академии наук, возглавляемом членом-корреспондентом АН СССР А. П. Ершовым. Пришло более 4000 писем, каждое из которых надо было тщательно проверить и быстро отправить ответ — и это без специального штата проверяющих! Тогда организаторов выручили пришедшие на помощь новосибирские юные программисты, такие же школьники, как учащиеся ЗШП, только с бо́льшим программистским стажем.

Постепенно наладилась организация проверки заданий, и, хотя штатных работников не прибавилось, нашлись в разных городах страны энтузиасты — было создано 5 региональных центров (филиалов ЗШП). Конечно, не все шло гладко — отсутствие специалиста по программированию среди редакторов журнала, огромное расстояние между редакцией и новосибирскими авторами уроков привело к определенным трудностям (в частности, к досадным опечаткам). Слишком большое число желающих учиться в ЗШП не позволило нам параллельно вести с 1980 года два курса, а с 1981 года — три, как первоначально планировалось.

Но все же мы довольны итогами. Около 1000 ребят — наш первый выпуск — в июне получат удостоверения об окончании трехгодичного курса ЗШП. Лучшим учащимся надолго запомнились Новосибирские летние школы юных программистов (см. «Квант», 1979, № 12 и 1980, № 12, а также статью Г. Звенигородского в следующем номере), где им довелось непосредственно поработать на современной вычислительной технике, и Ленинградская конференция по школьной информатике (о ней «Квант» еще напишет).

Заочная школа программирования продолжит свою работу (с осени) так же, как квантовская рубрика «Искусство программирования». В ней будут печататься материалы не только для учащихся ЗШП, но и для всех, кто интересуется программированием и вычислительной техникой. А доступные всем читателям материалы по этой тематике будут публиковаться в общем разделе журнала.

* * *

В качестве последнего материала нынешнего цикла ЗШП, мы в этом номере публикуем материал о сортировке, дополняющий Урок 19, но не поместившийся в «Кванте» № 3 из-за объема.

Сортировки по текстовым ключам

Включение и распределение

Значение упорядоченности обрабатываемой или выдаваемой из ЭВМ текстовой информации невозможно переоценить. Трудно себе представить, например, поиск в словаре, который не упорядочен по алфавиту. Обработка документации, связанной с учетом персонала (студентов, школьников, рабочих, служащих), основывается на упорядоченности, в которой ключом служит текстовый элемент *фамилия*. Поэтому в каждом вычислительном центре существуют программы сортировки, написанные на разных языках программирования. Сейчас известны многочисленные и разнообразные методы сортировки, используемые в различных условиях.

На практике сортировать приходится большие совокупности элементов. Такие программы требуют много памяти для обрабатываемых данных и расходуют много машинного времени. Неудивительно поэтому, что качеству программ сортировки уделяют самое серьезное внимание не только практики-прикладники, но и теоретики программирования.

Программы сортировки, как и многие другие сложные программы, можно оценивать с двух не совпадающих точек зрения. В тех случаях, когда программист не испытывает затруднений с размещением исходных данных, промежуточных величин и результатов в памяти ЭВМ, он стремится повысить быстродействие сортировки, то есть минимизировать время ее работы. Наоборот, если места в памяти не хватает, а машины вычислительного центра не перегружены, то главной задачей становится экономия памяти, на которую приходится идти, даже если это повлечет за собой снижение быстродействия. Многообразие методов сортировки обязано, в частности, этому постоянному спору между пространством и временем.

В «Кванте» № 2 рассматривался метод сортировки слиянием, использующий сведения об упорядоченности исходных, сливаемых файлов. Не менее часто, однако, встречаются ситуации, когда о порядке, в котором следуют значения ключей, ничего не известно. Один из методов, применяемых для упорядочения таких файлов (или массивов), называется сортировкой *включением*. Этот метод будет рассмотрен в применении к внутренней сортировке — упорядочению массивов.

Допустим, что в массиве m первые n элементов уже расположены в порядке возрастания значений ключа. Возьмем $(n+1)$-й элемент и попытаемся вставить этот элемент в соответствующую ему позицию среди первых n элементов. Эту работу можно поручить процедуре *включение* (m, n), полагая, что предварительно описан тип массива, состоящего, например, из 1000 элементов

```
type запись =record
                ключ: array [1..20] of char
                контекст: array [1..60] of char
                end;
     массив = array [ 1..1000 ] of запись;
```

а процедура *сравнение* (x, y) описана в уроке 18 («Квант» № 2)

```
procedure включение (m: массив; n: integer);
 var i, номер: integer; элемент:запись;
 begin
  номер: =2
  while номер< =n+1 do
  if сравнение (m [номер]. ключ, m [n+1].
                                        ключ)
   then номер: = номер + 1
   else
    begin
     элемент: = m [номер]; m [номер] :=
                                    m [n+1];
       for i: =n+1 downto номер+2 do
        m [i] : = m [i—1];
       m [номер + 1] : = элемент;
       номер: = n + 2
    end
 end;
```

После завершения процедуры *включение* (m, n) можно утверждать, что в массиве m упорядочены уже $n+1$ первых элементов.

Теперь такие же рассуждения можно повторить для $(n+2)$-го элемента, который необходимо включить с помощью процедуры *включение* $(m, n+1)$ на свое место среди $n+1$ элементов. Очевидно, задача сортировки массива m решается таким образом выполнением процедуры *включение* в цикле по n, в котором переменная n цикла имеет верхней границей число элементов массива без единицы.

Нижней границей можно считать число 2. Действительно, определить элемент с минимальным значением ключа несложно. Процедура *миним(m)* (ее описание здесь не приводится; трудолюбивый читатель сможет описать ее самостоятельно) обнаруживает в массиве m элемент с минимальным значением ключа и переставляет его на первое место в массиве, сохраняя при этом порядок всех остальных элементов. В таком массиве первые два элемента обязательно упорядочены. Тогда, начиная с $n=2$, можно применять процедуру *включение(m, n)*. Тот факт, что на первом месте с самого начала оказывается минимальный элемент, и позволяет переменную *номер* цикла в процедуре *включение* инициализировать значением 2.

При наличии описаний процедур *миним* и *включеие* алгоритм сортировки включением записывается

```
procedure сорт включ(var m: массив);
  var n:integer;
  begin
    миним(m);
    for n:=2 to 999 do
      включение (m, n)
  end;
```

Сортировка включением замечательна тем, что она практически не расходует дополнительной памяти: элементы массива сортируются, не выходя за пределы выделенной массиву памяти. Место для единственного элемента, куда приходится посылать элемент *m*[*номер*] на время смещения «хвостовой» части массива при очередном обращении к процедуре *включение*, безусловно, можно считать пренебрежимо малым.

Однако эта сортировка работает медленно. Алгоритм использует примерно k обращений к процедуре *включение* (k — число элементов массива). При n-м обращении к этой процедуре выполняется примерно n сравнений. В целом примерное число выполнений процедуры *сравнение* можно оценить

$$1+2+3+\ldots+k=\frac{(k+1)}{2}k.$$

Алгоритм сортировки, для которого требуется сравнимое с $k^2/2$ число сравнений, нельзя назвать быстродействующим: в практических задачах число k бывает очень большим. Вспомним («Квант» № 2), что сортировка слиянием обходится всего лишь k сравнениями.

Не хотите ли попробовать построить алгоритм внешней сортировки включением (упорядочение файла) и оценить его быстродействие?

С других позиций подходит к решению задачи метод сортировки *распределением*. Этот метод вообще не использует сравнений. Он рассчитан на работу с элементами, ключи которых, подобно целым числам или словам, состоят из конечных наборов символов и имеют общий вид

$$a_1a_2\ldots a_i\ldots a_l.$$

Каждый символ здесь принадлежит конечному множеству, число p элементов которого сравнительно невелико (до нескольких десятков). Таким является, в частности, буквенный алфавит.

Основу сортировки методом распределения представляет цикл с переменной i, которая имеет начальное значение l, границу 1 и шаг, равный —1: сначала рассматриваются последние буквы слов-ключей, затем предпоследние и т. д. до первой. При каждом выполнении этого цикла все элементы сортируемого файла распределяются по p файлам — «карманам»; для буквенных текстов на русском языке $p=33$ (32 буквы плюс пробел). В файл- «карман», соответствующий букве a, попадают элементы, ключи которых в i-й позиции имеют букву a, в следующий «карман» попадают элементы с ключами, в i-й позиции которых стоит буква $б$, и т. д. Завершается каждое выполнение цикла объединением p файлов-«карманов» в единый файл, который служит объктом следующего выполнения цикла.

Алгоритм предполагает, что все ключи имеют одинаковую длину. Впрочем, это не является ограничением при работе с текстами: длину каждого слова можно принять равной числу l позиций, отведенных для значений ключа в исходном документе или в памяти ЭВМ. Если длина конкретного слова меньше l, то недостающие справа позиции считаются пробелами.

Показать пример сортировки текстовых ключей методом распределения довольно сложно: пришлось бы рисовать состояния 33 «карманов» на каждом из l этапов. Поэтому предлагается рассмотреть простую ситуацию игры «в слова». Игра состоит в том, чтобы из букв заданного слова написать возможно большее число слов (существительных в канонической форме), употребляя каждую букву в составляемом слове не с бо́льшим числом повторений, чем она употреблена в исходном слове. Участники игры выбрали в качестве исходного слово *кобра*. У одного из игроков получился такой список слов:

кора, боа, акр, бок, рак, роба, бора, брак, краб, ро, ар, бак, бор, бар, раб

Этот список сортируется методом распределения. В этом конкретном случае ключи совпадают с самими элементами. Длина исходного слова определяет $l=5$ — число этапов; количество разных букв в этом

Таблица

	карман « »	карман *а*	карман *б*	карман *к*	карман *о*	карман *р*
f	*кора, боа, акр, бок, рак, роба, бора, брак, краб, ро, ар, бак, бор, бар, раб*					
$l=5$	*кора* *боа* *акр бок рак роба бора брак краб ро ар бак бор бар раб*					
f	*кора, боа, акр, бок, рак, роба, бора, брак, краб, ро, ар, бак, бор, бар, раб*					
$l=4$	*боа* *акр* *бок* *рак* *ро* *ар* *бак* *бор* *бар* *раб*	*кора* *роба* *бора*	*краб*	*брак*		
f	*боа, акр, бок, рак, ро, ар, бак, бор, бар, раб, кора, роба, бора, краб, брак*					
$l=3$	*ро* *ар*	*боа* *краб* *брак*	*раб* *роба*	*бок* *рак* *бак*		*акр* *бор* *бар* *кора* *бора*
f	*ро, ар, боа, краб, брак, раб, роба, бок, рак, бак, акр, бор, бар, кора, бора*					
$l=2$		*раб* *рак* *бак* *бар*		*акр*	*ро* *боа* *роба* *бок* *бор* *кора* *бора*	*ар* *краб* *брак*
f	*раб, рак, бак, бар, акр, ро, боа, роба, бок, бор, кора, бора, ар, краб, брак*					
$l=1$		*акр* *ар*	*бак* *бар* *боа* *бок* *бор* *бора* *брак*	*кора* *краб*		*раб* *рак* *ро* *роба*
f	*акр, ар, бак, бар, боа, бок, бор, бора, брак, кора, краб, раб, рак, ро, роба*					

слове — пять — задает число «карманов» $p=5+1=6$. В таблице показан процесс сортировки элементов этого примера.

Тем, кто разобрался в этом простом примере, несомненно понятно будет приводимое ниже описание процедуры, реализующей сортировку методом *распределения*. Несколько предварительных замечаний. Речь идет о внешней сортировке. Поэтому предполагается, что описаны

```
type запись = record
          ключ: array [1..20] of char
          контекст: array [1..60] of char
        end;
   файл = file of запись;
```

В этой процедуре оказался удобным механизм указателей (подумайте, почему). Поэтому читателю надо внимательно отнестись к уроку 19 Заочной школы в третьем номере «Кванта». Программу помогут понять комментарии , номера которых включены в программу, а тексты приведены после нее. Итак, сортировка распределением над 33-символьным алфавитом выполняется следующей процедурой:

```
procedure сортраспред (var f:файл; l:integer);
                                                    {1}
 var i, j: integer;
       карман: array [1..33] of ↑файл;              {2}
   begin
     for j to 33 do new(карман[j]);                 {3}
     for i:=l downto 1 do                           {4}
     begin
        for j to 33 do rewrite (карман[j]↑);
                                                    {5}
        reset(f);                                   {6}
        while NOT eof(f) do                         {7}
        begin
         write(карман[число(f↑.ключ[i])]
                                        ↑,f↑);      {8}
          get (f),                                  {9}
         end;
         rewrite (f).                               {10}
         for j to 33 do                             {11}
         begin
          reset (карман[j]↑);                       {12}
         while  NOT  eof(карман[j]↑)  do
         begin
           write(f, карман[j] ↑↑);                  {13}
           get(карман[j] ↑)                         {14}
         end {конец цикла, читающего
                                        карман}
       end {конец цикла, объединяющего
                                        карманы}
     end {конец основного цикла}
  end; {конец процедуры}
```

1: f — сортируемый файл; l — длина ключа.
2: *карман* — это массив, составленный из 33 указателей (по числу промежуточных файлов, создаваемых при каждом выполнении цикла по i); порядок элементов массива *карман* соответствует порядку букв в алфавите *абвг...эюя*.
3: Процедура *new* создает файлы *карман* [j]↑, являющиеся указуемыми переменными по отношению к указателям *карман* [j] — элементами массива *карман* (см. урок 19).
4: Основной цикл по буквам ключа от конца к началу.
5: Очистка всех промежуточных файлов — «карманов» в цикле; стрелка справа от *карман*[j] означает, что в круглых скобках стоит не элемент массива указателей, а значение, которое этим указателем отмечается, то есть файл.
6: Начальная установка файла f для чтения.
7: Цикл чтения записей из файла f.
8: Здесь важно разобраться. В этой строке первая и третья стрелки — это обозначения буфера, а средняя символизирует значение, отмечаемое указателем. *ключ*[i] есть буква ключа, стоящая на i-м (справа) месте; *f↑.ключ* — поле *ключ* в буферной переменной, то есть в текущей записи файла f; *число(f↑.ключ[i])* — номер буквы *ключ*[i] в алфавите абвс *абвг...эюя*, процедура *число (x)*, преобразующая букву в соответствующий номер, описана в Добавлении о сортировках («Квант» № 2); *карман*[*число*(f↑.*ключ*[i])]↑ — промежуточный файл «карман», определяемый соответствующим выбранной букве указателем; процедура *write* здесь переписывает буфер f↑ в соответствующий файл — «карман».
9: Выборка очередной записи файла f.
10. Очистка файла f перед созданием его следующего поколения.
11. Цикл объединения карманов.
12: Установка кармана для чтения из него.
13: Второй параметр процедуры *write* есть буфер (правая стрелка) файла *карман*[j]↑.
14. Выборка очередного элемента из кармана.

Читателю, заинтересовавшемуся задачами упорядочения информации, можно порекомендовать для серьезного чтения третий том фундаментального труда Д. Кнута «Искусство программирования на ЭВМ». Этот том называется «Сортировки и поиск» (М., «Мир», 1978).

Ю. Первин

Поправка

В ответе на задачу I варианта I Московского института электронного машиностроения («Квант», 1982, № 2, с. 60) допущена ошибка. Правильный ответ: $\{(c;c)\}$ $(c\in R)$ при $a=0$, $\left\{(0;0),\ \left(\frac{3}{2}a;\ \frac{9}{2}a\right),\ \left(\frac{3}{4}a;\ -\frac{9}{4}a\right)\right\}$ при $a\neq0$. В условии задачи I варианта I Ленинградского государственного педагогического института им. А. И. Герцена («Квант», 1982, № 3, с. 47) пропущена опечатка: вместо $\sqrt{ab+a}$ должно быть $\sqrt{ab}+a$.

Оптические системы

1. Из системы выходит параллельный пучок лучей (система телескопическая).
2. Изображение находится от линзы на расстоянии

$$f=\frac{Fd}{2d-F}.$$

Изображение будет действительным при $d>F/2$ и мнимым — при $d<F/2$.

3. $F=\dfrac{n_1R}{2(n_1-n)}$; график зависимости F от n показан на рисунке 1. Если $n<n_1$, фокусное расстояние объектива положительное (собирающая линза); если $n>n_1$, фокусное расстояние отрицательное (рассеивающая линза); если же $n=n_1$, объектив превращается в плоскопараллельную пластинку с бесконечно большим фокусным расстоянием.
4. Поскольку наружная поверхность глаза крокодила плоская, параллельный пучок лучей не испытывает преломления на этой поверхности, независимо от показателя преломления внешней среды. Поэтому, если даже часть глаза находится в воде, а часть — в воздухе, достаточно удаленная плавающая добыча (частично она находится в воде, а частично — в воздухе) будет хорошо видна крокодилу.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Вариант 1

1. $\{5\}\cup\,]4+\sqrt{2};\ +\infty[$. Комментарий. Многие абитуриенты успешно справлялись с

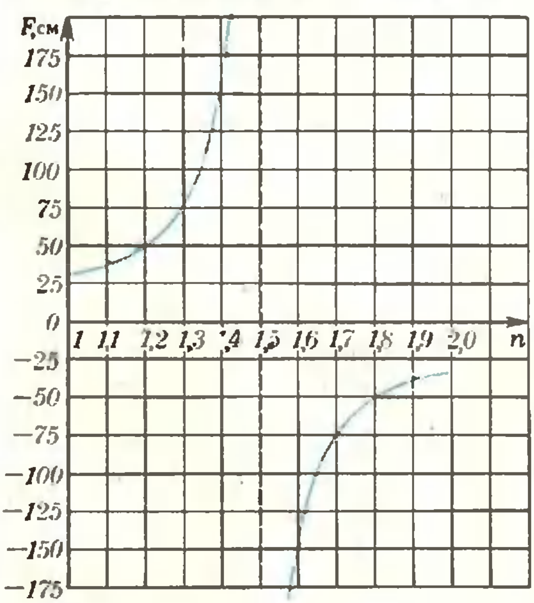


Рис. 1.

этой задачей. Однако некоторые теряли точку $x=5$, ошибочно полагая, что исходное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases}\sqrt{x-5}>0\\ \log_{\sqrt{2}}(x-4)-1>0,\end{cases}$$

упуская при этом из вида решения системы

$$\begin{cases}\sqrt{x-5}=0\\ \log_{\sqrt{2}}(x-4)-1<0.\end{cases}$$

2. $\left\{\left((-1)^k\dfrac{\pi}{4}+\pi k;\ \dfrac{\pi}{2}+\pi l\right)\right\}$ $(k, l\in\mathbb{Z})$. Решение. Данная система равносильна совокупности двух систем:

$$\begin{cases}\sin x=0\\ 2\sin^2 x-\cos 2y-2=0\end{cases}$$

$$\begin{cases}\cos y=0\\ \sin x>0\\ 2\sin^2 x-\cos 2y-2=0.\end{cases}$$

Первая из них, очевидно, решений не имеет, а вторая равносильна системе

$$\begin{cases}\cos y=0\\ \sin x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\end{cases}$$

Комментарий. Некоторые абитуриенты забывали включить во вторую систему неравенство $\sin x>0$ и поэтому получали лишние корни. Некоторые допускали ошибки при решении простейших тригонометрических уравнений; это характерно и для абитуриентов, поступавших на другие факультеты МГУ.

3. $18\frac{1}{3}$ кг. Указание. Пусть a и b — количество соли в первом и втором сосудах соответственно, а x и y — количество испарившейся воды. Тогда

$$p=\frac{a}{5-x}:\frac{a}{5},\quad q=\frac{b}{20-y}:\frac{b}{20},$$

откуда

$$x=5-5/p,\quad y=20-20/q,$$
$$x+y=25-\left(\frac{5}{p}+\frac{20}{q}\right).$$

По условию $pq=9$ и $p,q\geqslant 1$; значит, требуется найти наибольшее значение функции

$$f(p)=25-\frac{5}{p}-\frac{20p}{9}\qquad(1)$$

при $1\leqslant p\leqslant 9$. Исследованием функции при помощи производной или использованием неравенства между средним арифметическим и средним геометрическим устанавливается, что наибольшее значение функции (1) на $[1;9]$ достигается при $p=3/2$.

4. $2\left[\operatorname{ctg}(30°+a/4)+\operatorname{ctg}(30°-a/4)+\sqrt{3}\right]$. Решение. Положим $\widehat{BAE}=\alpha$, $\widehat{ABE}=\beta$, $\widehat{BEA}=\gamma$ (рис. 2). Тогда $\alpha+\beta+\gamma=180°$, $\beta-\alpha=a$. Величина дуги $CBAD$ равна 240°, поскольку угол CED опирается на эту дугу. Но $BC\parallel AD$, поэтому $\smile AmB=\smile CED=120°$ и угол BEA, опирающийся на дугу AmB, равен 60°. Итак, $\gamma=60°$, $\beta-\alpha=a$, $\alpha+\beta=120°$, откуда

$$\alpha=60°-a/2,\quad \beta=60°+a/2,\quad \gamma=60°.\quad(2)$$

Пусть P — периметр треугольника ABE, а r — радиус вписанной в него окружности (рис. 3). Из шести прямоугольных треугольников получаем

$$P=2r(\operatorname{ctg}(\alpha/2)+\operatorname{ctg}(\beta/2)+\operatorname{ctg}(\gamma/2)),$$

откуда сразу следует ответ, если воспользоваться (2).

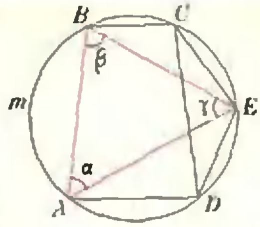


Рис. 2.

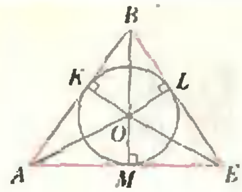


Рис. 3.

5. $\frac{1}{4}(S+\sqrt{2}\sigma k\sqrt{1-l})$. **Решение.** Рассмотрим тетраэдр $ABCD$; обозначим через K, L, M, N середины ребер AC, BC, BD, AD соответственно, через H — расстояние между прямыми AB и CD и через S_1 — площадь среднего сечения $KLMN$ (рис. 4). Покажем, что объем V тетраэдра $ABCD$ равен $\frac{2}{3}S_1H$.

Для этого достроим тетраэдр $ABCD$ до «клина» (треугольной призмы) $AA_1A_2BB_1B_2$, выбрав точки A_1, A_2, B_1, B_2 так, чтобы $A_1B_1 \| A_2B_2 \| AB$, $|A_1B_1|=|A_2B_2|=|AB|$ и C, D были серединами отрезков A_2B_2 и A_1B_1 соответственно (рис. 5). Тогда расстояние H от прямой AB до прямой CD равно расстоянию от любой точки прямой AB до плоскости $A_1B_1B_2A_2$, и поэтому объем V_2 клина равен $\frac{1}{2}S_2H$, где S_2 — площадь параллелограмма $A_1B_1B_2A_2$ (см. рис. 6; объем прямой призмы $A_3A_2'A_1B_3B_2'B_1$ очевидно равен $\frac{1}{2}S_2H$ и совпадает с объемом клина $AA_2A_1BB_2B_1$). Далее, из подобия $KLMN$ и $A_2B_2B_1A_1$ с коэффициентом $1/2$ имеем $S_2=4S_1$. Осталось показать, что $V_2=3V$. Пусть F — середина AB; тогда плоскость CDF разбивает тетраэдр $ABCD$ на два равных объема, каждый из которых равен $1/6V_2$ (например, $V_{CDFB}=$ $=\frac{1}{3}V_{CDFB_2B_1B}=\frac{1}{6}V_2$). Формула $V=\frac{2}{3}S_1H$ доказана.

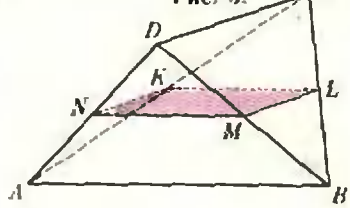


Рис. 4.

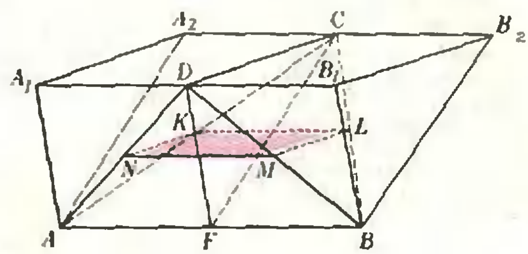


Рис. 5.

Площадь искомого сечения равна $\frac{1}{4}S+S_1$, где S_1 — площадь среднего сечения тетраэдра $BCDE$, параллельного ребрам BC и DE (которая равна площади $KLMN$), а S — дано (см. рис. 7). Объем тетраэдра $BCDE$ равен V, а расстояние между прямыми BC и DE равно H, поэтому остается вычислить V и H, чтобы найти S_1 из формулы $V=\frac{2}{3}S_1H$.

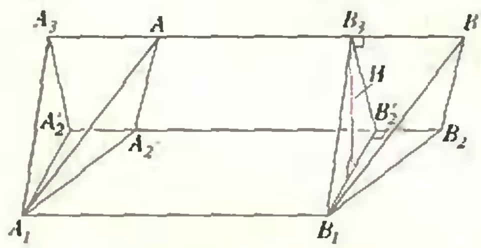


Рис. 6.

Пусть r — радиус шара, вписанного в $BCDE$, s — расстояние от центра вписанного шара до прямой DE. Тогда $\frac{s}{H}=k$, $r=s\sin\frac{\alpha}{2}$, где α — величина двугранного угла при ребре DE. Значит,

$$V=\frac{1}{3}r\sigma=\frac{1}{3}s\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sigma=$$

$$=\frac{1}{3}kH\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sigma;$$

$$S_1=\frac{3}{2}\cdot\frac{V}{H}=\frac{1}{2}k\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)\sigma.$$

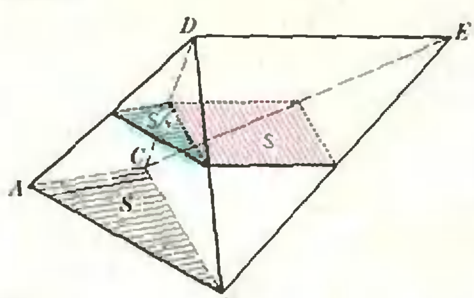


Рис. 7.

Осталось найти $\sin\frac{\alpha}{2}$. Пусть $(BF)\perp(DE)$ (рис. 8). Тогда $(B'F)\perp(DE)$. Имеем

$$\operatorname{tg}\widehat{B'DE}=\frac{|B'F|}{|DF|},\quad \operatorname{tg}\widehat{BDE}=\frac{|BF|}{|DF|},$$

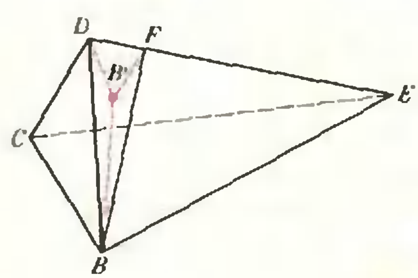


Рис. 8.

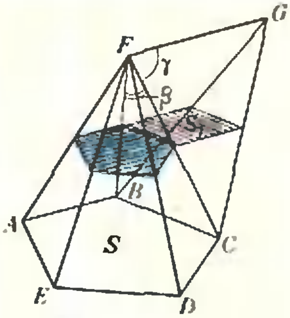


Рис. 9.

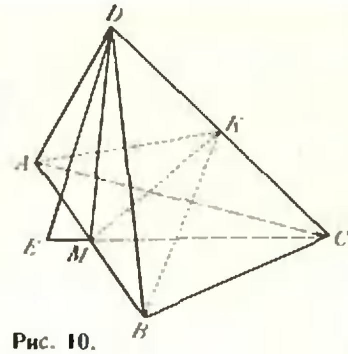


Рис. 10.

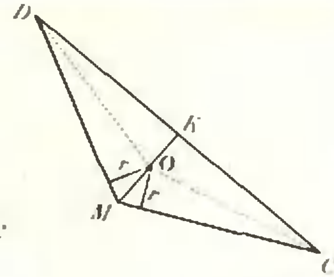


Рис. 11.

значит, $l = |B'F| : |BF| = \cos\alpha$, откуда

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \frac{\sqrt{1-l}}{\sqrt{2}}$$

и, наконец,

$$S_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} k\sqrt{1-l}\,\sigma.$$

Вариант 2

1. $\{4\} \cup]5; +\infty[$.

2. $\left\{\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k;\ \frac{\pi}{6} + \pi l\right\}$ $(k, l \in \mathbf{Z})$.

3. 3480 кг. Указание. Задача сводится к нахождению наименьшего значения функции

$$f(k) = 1000(k-1) + 1960\left(\frac{9-k}{k} - 1\right).$$

4. $\frac{1}{2(\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha)}$.

5. $\frac{1}{4}\left(S + \sqrt{2}\,\sigma k\sqrt{1-\sqrt{1-l^2\sin^2\alpha}}\right)$. Указание. Решение аналогично решению задачи 5 из варианта 1. Искомая площадь сечения снова равна $S_1 + S/4$ (рис. 9). Достраивая тетраэдр $BCFG$ до клина, находим объем $BCFG$, $V = \frac{2}{3}S_1H$, где H — расстояние между прямыми FG и BC. С другой стороны, этот объем равен $V = \frac{1}{3}\sigma r$, где r — радиус вписанного шара.

Вариант 3

1. $]-\infty; -1{,}4] \cup [2; 2{,}6]$.

2. $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$.

3. 20 км.

4. $2\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{17}-3}{2}$. Указание. Чтобы отыскать точки экстремума функции $V = \frac{2\pi}{3} \times \frac{\left(1+\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2}{\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\cdot\left(1-\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\right)}$, найдите точки экстремума функции $y = \frac{(1+t)^2}{t^2(1-t)}$.

5. $[-\sqrt{2}; 1] \cup [\sqrt{2}; +\infty[$. Указание. $a^3 + (1-\sqrt{2})a^2 - (3+\sqrt{2})a + 3\sqrt{2} = (a-\sqrt{2})(a^2+a-3)$; $(a^2-2)^2 - [a^3 + (1-\sqrt{2})a^2 - (3+\sqrt{2})a + 3\sqrt{2}](a+\sqrt{2}) = -(a^2-2)(a-1)$.

Вариант 4

1. $\{5\}$.

2. $x_1 = \pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$.

3. $\frac{147}{8}$.

4. $\frac{9}{4}$.

5. $\frac{3\sqrt{13}}{\sqrt{5}+\sqrt{13}}$. Решение. Пусть $DABC$ — данная пирамида, $|AB| = 4$, $|DC| = 12$, $|AD| = |DB| = |AC| = |CB| = 7$ (рис. 10). Пусть M — середина $[AB]$, E — основание перпендикуляра, опущенного из вершины D на плоскость ABC. Тогда $MC \perp AB$ и $EM \perp AB$, то есть точки E, M и C лежат на одной прямой. Из $\triangle ACB$ находим $|MC| = 3\sqrt{5}$, а из $\triangle ADB$ находим $|DM| = 3\sqrt{5}$. В равнобедренном треугольнике DMC высота MK имеет длину $|MK| = 3$; следовательно, $S_{\triangle DMC} = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 12 = 18$. С другой стороны, $S_{\triangle DMC} = \frac{1}{2}|DE|\cdot|MC|$. Отсюда $|DE| = \frac{12}{\sqrt{5}}$. Объем пирамиды $V = \frac{1}{3}|DE|\cdot S_{\triangle ABC} = \frac{1}{3}\cdot\frac{12}{\sqrt{5}}\cdot 6\sqrt{5} = 24$. Так как $S_{\triangle ADB} = S_{\triangle ABC} = 6\sqrt{5}$ и $S_{\triangle ADC} = S_{\triangle DBC} = 6\sqrt{13}$, сумма площадей всех граней пирамиды $S = 12(\sqrt{5}+\sqrt{13})$. Если r — длина радиуса вписанной сферы, то $V = \frac{1}{3}r\cdot S$, откуда $r = \frac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{13}}$. Поскольку плоскость DMC делит пополам двугранный угол, образованный плоскостями ADC и BDC, а плоскость AKB делит пополам двугранный угол, образованный плоскостями ADB и ACB, центр O вписанной сферы лежит на $[MK]$. Основание перпендикуляра, опущенного из O на грань ADB, лежит на $[DM]$, а основание перпендикуляра, опущенного из O на грань ABC, лежит на $[MC]$. Длины этих перпендикуляров равны r (рис. 11). Искомое расстояние $|OK|$ находим из равенства $S_{\triangle DMC} = \frac{1}{2}r\cdot|DM| + \frac{1}{2}r\cdot|MC| + \frac{1}{2}|OK|\cdot|DC|$.

Вариант 5

1. 9.

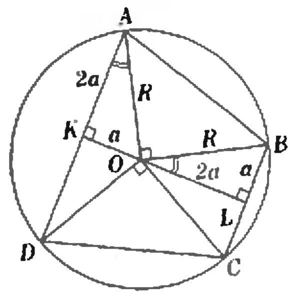


Рис. 12.

2. $\left\{10^{\frac{\sqrt{2}-1+\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{2}},\ 10^{\frac{\sqrt{2}-1-\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{2}}\right\}$. Замечание. Догадавшись (при помощи теоремы Виета), что квадратное уравнение $t^2+(1-\sqrt{2})\,t-\sqrt{2}=0$ имеет корни $\sqrt{2}$ и -1, или применив легко проверяемое тождество $\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{2}+1$, ответ можно записать в виде $\left\{\frac{1}{10},\ 10^{\sqrt{2}}\right\}$.

3. 4,5.

4. 22,5. Указание. Проведите через O перпендикуляр KL к BC (рис. 12). При симметрии относительно KL точка C перейдет в точку B, а точка D перейдет в точку A. Значит, $KL \perp AD$, откуда $\widehat{BOL}=\widehat{OAK}$.

5. $x=1$, $y=1+\frac{\pi}{2}+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$. Указание. Положите $\cos^2\frac{x-y}{2}=t$ и решите полученное уравнение относительно t.

Вариант 6

1. $\left\{-\frac{1}{3}, 4\right\}$.

2. $\frac{\pi}{4}+1$. Решение. $\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]} y = \max\limits_{\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]} y = y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{4}+1$.

3. 1 кг сорокапроцентного и 2 кг шестидесятипроцентного.

4. $\frac{24}{\sqrt{145}}$.

5. $\{(1;-1)\}$. Решение. Данная система равносильна системе

$$\left\{\begin{array}{l} y^2=\dfrac{2x}{1+x^2} \\ 2(x-1)^2+1+y^3=0. \end{array}\right. \qquad (1)$$

Поскольку $\frac{2x}{1+x^2}\leqslant 1$ при всех $x\in\mathbf{R}$, из первого уравнения системы (1) $-1\leqslant y\leqslant 1$. Из второго уравнения системы (1) $y\leqslant -1$. Значит, $y=-1$, $x=1$.

Вариант 7

1. $\left\{(4;2),\ \left(\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)\right\}$.

2. $\frac{\sqrt{2}-1}{2}a^2$.

3. $\frac{5}{12}\pi$, $\frac{53}{84}\pi$, $\frac{59}{84}\pi$.

4. $\left\{\frac{3}{2}, \frac{36}{25}\right\}$.

5. $1-\sqrt{2}$, $5+\sqrt{10}$.

Вариант 8

1. $x_1=\frac{\pi}{3}k$, $x_2=\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{4}l$ $(k, l\in\mathbf{Z})$.

2. $]-\infty; 0]\cup\left[1\frac{31}{32}; 2\right[$.

3. $\frac{27}{8}$ см². Указание. $\frac{1}{2}|AB|\cdot|AM|\times\times\sin\widehat{BAM}=\frac{1}{2}|BH|\cdot|BM|$ (H — основание высоты). Если h — высота треугольника BNM, то $\frac{|AB|}{|AD|}=\frac{|BN|}{|ND|}=\frac{h}{|BH|-h}$.

4. Первый — 20, второй — 18.

5. Высота $\frac{4}{3}R$, радиус основания $\frac{2\sqrt{2}}{3}R$.

Физика

Физический факультет

1. $v=\frac{L}{4}\sqrt{\frac{g}{2h}}$.

2. $T_2=T_1\sqrt{\frac{g}{g-a}\,\frac{\cos\alpha_2}{\cos\alpha_1}}$.

3. $x=-\frac{F}{k}+\sqrt{\left(\frac{F}{k}\right)^2+\frac{m^2v^2}{k(M+m)}}$.

4. $x_м=\sqrt{\frac{mgH}{2k}+\left(\frac{mg}{4k}\right)^2}$.

5. $N=\frac{T_1-T_2}{T_1}\,\frac{qVv}{s}\approx 54$ кВт.

6. $\Delta q=q_2-q_1=-C(\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2)\frac{R_2}{R_1+R_2}=-25{,}8$ мкКл.

7. $q=C\alpha(R\tau+L)=2\cdot10^{-11}$ Кл.

8. $B=\frac{2\pi mv\cos\alpha}{Le}n$, где $n=1, 2, 3, \ldots$

9. $l=\frac{2d^2}{2d-F}\approx 21{,}3$ см.

10. $x=d\frac{n-1}{n}=2$ мм.

Механико-математический факультет

1. $t=\sqrt{\frac{2l}{a-\mu g}}\approx 2$ с.

2. $E_п=\frac{F^2m_2^2x_0}{2(m_1+m_2)^2F_0}=0{,}1$ Дж.

3. $\Delta U=Q-\left(p_0+\frac{mg}{S}\right)V\frac{\Delta T}{T}\approx 33$ Дж.

4. $r=r_1k\frac{p_1}{p_0}\frac{T_2}{T_1}\approx 3{,}7\%$.

5. Экран надо приблизить на $\Delta f=\frac{f^2D}{1+fD}=2$ м.

Факультет вычислительной математики и кибернетики

1. $v_0 = \frac{4v}{4-\pi} \approx 233$ м/с.

2. $\frac{U_1}{U_2} = \frac{R_1+R_2}{R_2} = 1{,}5$.

3. $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 \frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n}+1} = 3$ В или

$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 \frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1} = 12$ В.

4. $l = 2\sqrt{\frac{\Gamma(d-F)^2 - F^2}{\Gamma}} \approx 10$ см.

5. $x = \frac{4rd}{2d-R} = 3$ см.

Химический факультет

1. $F = mg\,\mathrm{tg}\,\alpha_1 \approx 0{,}98$ Н.

2. $H = \frac{\eta N}{Qeg} \approx 5$ м.

3. $a = \frac{q}{m}\sqrt{E^2 + v^2B^2} \approx 2{,}5 \cdot 10^{13}$ м/с^2.

4. $a = 4h = 4$ см (в сторону смещения линзы $Л_2$).

5. $x = \frac{F(v_2 - v_1)\Delta t}{d} = 1$ см.

Географический и геологический факультеты и факультет почвоведения

1. $n_2 = n_1 \frac{V_2}{V_1}\frac{T_1}{T_2} \approx 2{,}3$ моля.

2. $A = \frac{m}{\mu} R\,(T_2 - T_1) \approx 1{,}7 \cdot 10^3$ Дж.

3. $m_п = \frac{m_л\lambda + (c(m_в + m_л) + C_к)(t - t_1)}{r + c(t_2 - t)} \approx$
$\approx 0{,}06$ кг.

4. $R = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 - \mathcal{E}_2 r_1}{\mathcal{E}_2} \approx 2{,}3$ Ом.

5. $\Delta I = I_0 - \frac{m}{kt} \approx 0{,}03$ А.

Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола

Математика

Вариант 1

1. $\{(1;1),\ (\log_2 3;\ \log_3 2)\}$.

2. $x = (-1)^k \arcsin\frac{2-\sqrt{2}}{2} + \pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$.

3. $4 - 2\sqrt{3}$. Указание. Если $M = (BD) \cap$ $\cap (CK)$, то $\frac{|MK|}{|KB|} = \frac{|MC|}{|CD|}$; $|CD| < |AB|$.

4. $\frac{7}{2}\sqrt{5}$ или $\frac{1}{2}\sqrt{5}$ или 0. Указание. Рассмотрите случаи $|AO| \neq 0$ и $\mathrm{tg}\,\alpha = 2$ (α — угол, который данная касательная образует с осью Ox); $|AO| \neq 0$ и $\mathrm{tg}\,\alpha = -2$; $|AO| = 0$.

5. $2\arcsin\frac{\sqrt{10}}{5} = \arccos\frac{1}{5} = 2\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3}$.

Указание. Проведите через вершины треугольника ABC прямые, параллельные его противоположным сторонам; обозначим через A' точку пересечения прямых, проведенных через B и C; аналогично вводятся B' и C'. Тогда угол между плоскостями $SA'C'$ и $SA'B'$ — искомый. Разные формы ответа соответствуют разным способам определения его величины.

Вариант 2

1. 300 кг.

2. $x_1 = -\frac{\pi}{36} + \frac{\pi}{3}k$, $x_2 = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{2}l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$.

3. $1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$. Указание. $\widehat{DOE} = 60°$.

4. $]-\infty; 0[\ \cup\ [1; +\infty[$.

5. $\sqrt{2}$. Указание. Пусть O — центр шара, вписанного в данную пирамиду. Тогда центр O_1 данного шара радиуса $\frac{3}{2\sqrt{6}}$ лежит на луче $[AO)$, а центр O_2 второго данного шара лежит на луче $[OB)$ (рис. 13). Вычислите радиус шара, вписанного в пирамиду. Из его величины следует, что $|AO_1| = 3|AO|$, $|OO_2| = 2|OB|$. Если $[OK]$ — высота треугольника AOB и T — такая точка на (AB), что $|KB| = |BT|$ (рис. 14), то $O_2T \perp AT$ и $O_1T \perp AT$; значит, O_2TO_1 — прямая, перпендикулярная AT. Отсюда $|O_1O_2| = 4|OK|$.

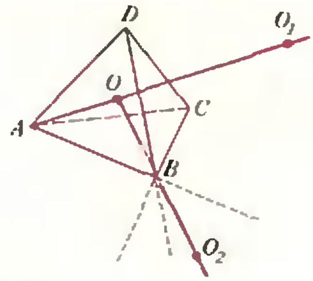


Рис. 13.

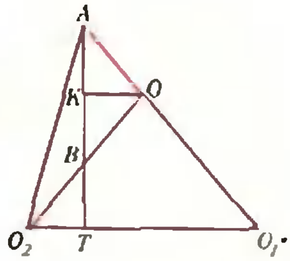


Рис. 14.

Физика

Вариант 1

1. $\widehat{ABC} = \mathrm{arctg}\ 1/2 \approx 27°$.

2. Из симметрии системы следует, что после первой линзы лучи собираются в середине цилиндра. Рассмотрим луч, который падает на границу раздела стекло — вода под углом α и выходит в воду под углом преломления β (рис. 15). Согласно закону преломления,

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{n}{n_{ст}} \approx \frac{\sin\alpha}{2h/l},$$

где h — расстояние от точки падения луча

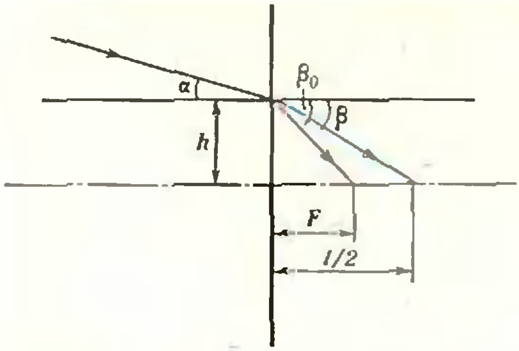


Рис. 15.

до оси, l — длина цилиндра. Для случая прохождения света из стекла в воздух можно записать

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta_0}=\frac{1}{n_{\text{ст}}}\approx\frac{\sin\alpha}{h/F},$$

где β_0 — угол преломления в воздухе. Отсюда

$$\frac{\sin\beta_0}{\sin\beta}=n=\frac{l}{2F}, \text{ и } l=2nF.$$

3. Так как электроны растекаются по стержню симметрично, в точке A ток $I_A=0$, а по мере приближения к точке B ток нарастает по линейному закону $I_l=\frac{I}{2}\,\frac{l}{L}$, где $L=|AB|$. Согласно закону Ома для участка цепи,

$$U_{AB}=I_{\text{ср}}\frac{R}{2}=\frac{I_A+I_B}{2}\,\frac{R}{2}=\frac{I}{4}\,\frac{R}{2}=\frac{IR}{8}.$$

4. Пусть длина цистерны $l\sim 5$ м, а ее высота $h\sim 1$ м. Примем для оценки, что торможение происходило с постоянным ускорением $a=v^2/2s$. Тогда «эффективное ускорение силы тяжести» равно $\vec{g}\,'=\vec{g}+\vec{a}$, и максимальное давление воды в полной цистерне при ее торможении равно

$$p=p_a+\varrho(gh+al)=p_a+\varrho\left(gh+\frac{v^2l}{2s}\right),$$

где p_a — атмосферное давление ($p_a\sim 10^5$ Па), ϱ — плотность воды ($\varrho=10^3$ кг/м^3). При выбранных параметрах $p\sim 1{,}4\cdot 10^5$ Па.

5. Гвозди, повисшие на магните, сами становятся магнитами, причем расположение одноименных полюсов у них одинаково. В точках подвеса расталкиванию препятствует трение. Нижние концы гвоздей расходятся в соответствии с действием сил магнитного отталкивания и сил тяжести.

Вариант 2

1. $x=h\left(\frac{\varrho RT}{\mu p}-1\right)$.

2. В первом и втором случаях конденсаторы соединены параллельно; следовательно,

$$\frac{q_2}{C_1}=\frac{q_{02}-q_2}{C_2} \text{ и } \frac{q_3}{C_1}=\frac{q_{03}-q_3}{C_3}.$$

Отсюда начальные заряды на конденсаторах 2 и 3 равны, соответственно,

$$q_{02}=q_2\frac{C_1+C_2}{C_1} \text{ и } q_{03}=q_3\frac{C_1+C_3}{C_1}.$$

В третьем случае конденсатор 1 оказывается подсоединенным параллельно системе заряженных конденсаторов 2 и 3 (их соединение между собой нельзя считать последовательным, так как заряды не одинаковы):

$$\frac{q_1}{C_1}=\frac{q_{02}-q_1}{C_2}+\frac{q_{03}-q_1}{C_3},$$

откуда заряд на конденсаторе 1 равен

$$q_1=\frac{q_2(C_1/C_2+1)+q_3(C_1/C_3+1)}{1+C_1/C_2+C_1/C_3}.$$

3. $h=Rm/M$. Указание. Воспользуйтесь законами сохранения энергии и импульса. (Пока шарик не пройдет нижнюю точку выемки, брусок неподвижен.)

4. Выталкивающая сила, действующая на дирижабль, должна быть приблизительно равна суммарной силе тяжести груза (массой $M=10^5$ кг), оболочки и гелия. Пренебрегая массой оболочки и гелия (плотность гелия приблизительно в 7 раз (29/4) меньше плотности воздуха), получаем $F_a\sim Mg$. Выбрав самую простую форму дирижабля — сферу, найдем ее радиус:

$$R\sim\sqrt[3]{\frac{M}{\varrho}}\sim 100 \text{ м}.$$

5. Пусть на линзу падает параллельный пучок света, а экран находится за линзой на расстоянии, большем двойного фокусного (рис. 16). Тогда на участки AB и EF — падает только прямой свет, на участок CD — только рассеянный линзой свет, а на участки BC и DE попадает как прямой, так и рассеянный свет. Вот почему в центре экрана виден темный круг, окаймленный светлым кольцом.

Вариант 3

1. $\varphi_A-\varphi_B=\pm\mathscr{E}/6$.
2. $M=3m/2$.
3. Параллельный пучок, падающий на линзу под углом α к главной оптической оси, собирается в фокальной плоскости в точке, отстоящей от оси на расстоянии $r=F\,\mathrm{tg}\,\alpha$ (рис. 17). Таким и будет наименьший радиус светлого пятна. Если же размер d линзы таков, что

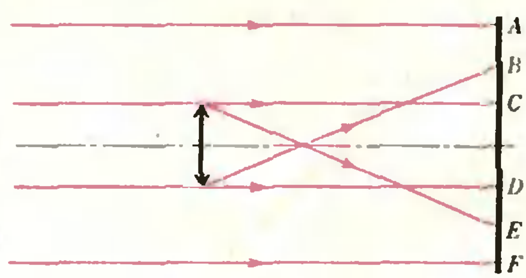


Рис. 16.

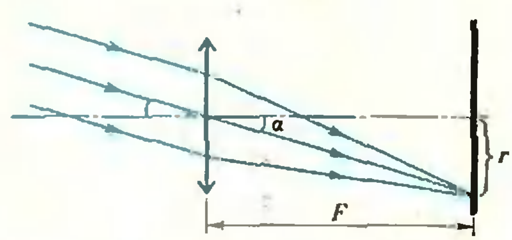


Рис. 17.

$d<F\,\mathrm{tg}\,\alpha$, минимальный радиус пятна получится, если линзу прижать к экрану вплотную.

4. Поскольку давление и объем сохраняются,

$$\frac{m-\Delta m}{\mu}R(T+\Delta T)=\frac{m}{\mu}RT,$$

откуда

$$\Delta m=m\frac{\Delta T}{T+\Delta T}\sim m\frac{\Delta T}{T}\sim\varrho V\frac{\Delta T}{T}.$$

Плотность воздуха $\varrho\sim1{,}3$ кг/м³, объем аудитории $V\sim20\times20\times5$ м³, $\Delta T=10$ К и $T\sim300$ К. Таким образом,

$$\Delta m\sim m\frac{\Delta T}{T}\sim100\text{ кг}.$$

5. После надевания колпака разность потенциалов между ним и вертушкой становится равной нулю, и заряды перестают стекать с вертушки. Момент сил, ранее заставлявший вертушку вращаться, обращается в нуль.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Физика

Физический факультет

Вариант 1

1. $\varphi=\pm\arccos\left(\frac{1}{3}(\cos\varphi_0+\sqrt{3+\cos^2\varphi_0})\right)=$

$$=\pm\arccos\left(\frac{1+\sqrt{13}}{6}\right).$$

2. По первому закону термодинамики получаемое газом количество теплоты Q идет на изменение ΔU внутренней энергии газа и на совершаемую газом работу A. Изменение внутренней энергии одноатомного газа равно $\Delta U=3/2R\Delta T$, а совершенная газом работа при малом изменении объема равна $A=p\Delta V$. Работа положительна во время всего процесса, а ΔU положительно лишь до тех пор, пока температура газа растет, после этого ΔU отрицательно. Когда уменьшение внутренней энергии станет равным совершенной работе, газ перестанет получать тепло и начнет отдавать его. Это произойдет в некоторой точке I, для которой выполняется условие

$$Q=\Delta U+A=\frac{3}{2}R\Delta T+p\Delta V=0.$$

Из уравнения состояния $pV=RT$ следует, что $R\Delta T=p\Delta V+V\Delta p$. В данном случае $p=p_0-aV$ и $\Delta p=-a\Delta V$, поэтому $R\Delta T=(p_0-2aV)\Delta V$, и

$$Q=\frac{3}{2}R\Delta T+p\Delta V=\left(\frac{5}{2}p_0-4aV\right)\Delta V.$$

Из условия $Q=0$ получаем для точки I

$$V_1=\frac{5}{8}\frac{p_0}{a},\ p_1=\frac{3}{8}p_0,\ T_1=\frac{15}{64}\frac{p_0^2}{aR}.$$

3. Выпрямительная схема обеспечивает протекание через вольтметры тока одного и того же направления в течение обоих полупериодов. Таким образом, напряжение на вольтметрах

$$u=U_м|\sin\omega t|,$$

где $U_м=\sqrt{2}\,U$, а период $T'=\pi/\omega$.

Показание теплового вольтметра пропорционально средней тепловой мощности, и, следовательно, будет таким же, как и без выпрямителя:

$$U_2=U=220\text{ В}.$$

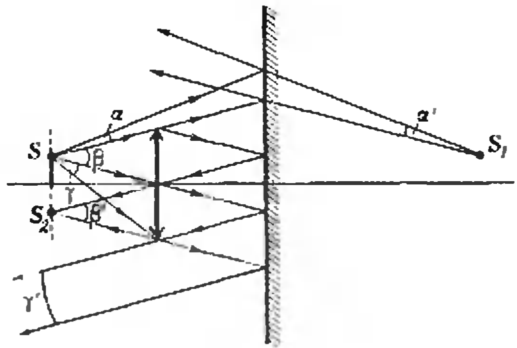


Рис. 18.

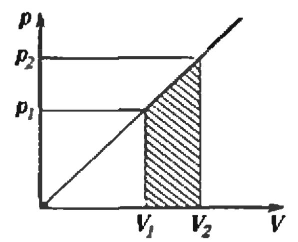


Рис. 19.

Показание магнитоэлектрического вольтметра пропорционально среднему току, то есть отношение перенесенного за период заряда q к длительности периода T'. Его показание

$$U_1=\frac{q}{T'}R=R\frac{\omega}{\pi}\int_0^{\pi/\omega}\frac{U_м}{R}\sin\omega t\,dt=$$

$$=\frac{2U_м}{\pi}=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}U\approx198\text{ В}.$$

4. Имеется три изображения источника (рис. 18): S_1 — мнимое, образованное отраженными от зеркала лучами, S_2 — действительное, образованное лучами, преломленными линзой, отраженными зеркалом и еще раз преломленными линзой, и S_3 — в бесконечности, оно образовано лучами, преломленными линзой и отраженными зеркалом.

Вариант 2

1. $\omega=\sqrt{G(M_1+M_2)/R^3}$; $a_1=GM_2/R^2$; $a_2=GM_1/R^2$ (G — гравитационная постоянная).

2. Изменение внутренней энергии газа

$$\Delta U=\frac{3}{2}NR\Delta T=\frac{3}{2}NR(T_2-T_1).$$

При нагревании газа в данном процессе совершается работа (рис. 19)

$$A=\frac{p_2V_2-p_1V_1}{2}=\frac{1}{2}NR(T_2-T_1),$$

идущая на увеличение энергии упругой деформации оболочки и совершаемая за счет полученного газом количества теплоты Q. Согласно первому закону термодинамики,

$$Q=\Delta U+A=2NR(T_2-T_1).$$

Отсюда теплоемкость системы

$$C=\frac{Q}{\Delta T}=2NR.$$

3. $I_A=4/15$ А. Указание. Поскольку сопротивление амперметра пренебрежимо мало,

напряжение между точками C и D равно нулю (см. рис. 4 в условии).
4. $R'/R=\sqrt{3/5}\approx0{,}77$. Указание. Воспользуйтесь законами сохранения кинетической энергии и импульса для замкнутой системы протон — ядро атома гелия.

Математико-механический факультет и факультет прикладной математики — процессов управления

1. $E=\frac{\mathcal{E}}{d}\frac{\varrho\varepsilon\varepsilon_0}{\varrho\varepsilon\varepsilon_0+Cr}$.
2. $U=\frac{2P(1+k)}{l}=33$ В (здесь $k=0{,}1$).
3. $F_1=\frac{2ab(b-a)}{(b+a)^2}\approx4{,}4$ см; $F_2=\frac{2ab(b+a)}{(b-a)^2}=120$ см. Указание. Изображение B — всегда мнимое, а изображение C может быть как действительным, так и мнимым.

Химический факультет

1. $v=\sqrt{\frac{Gm}{4r}}$ (здесь G — гравитационная постоянная).
2. $Q=m(g+a)h$.
3. $q=It/2=20$ Кл; $m=kq=kIt/2=6{,}6\cdot10^{-6}$ кг $=6{,}6$ мг.

Ташкентский государственный университет им. В. И. Ленина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $\{0\}$.
2. $[-3;0[\cup[20;+\infty[$.
3. $\varnothing$. Указание. Данное уравнение равносильно системе
$$\begin{cases}\sin x=-1\\ \sin 3x=-1.\end{cases}$$
4. $1-\frac{\sqrt2}{4}$.
5. $\sqrt[3]{\frac{12Q\sqrt{-2\cos\alpha}}{\pi\cdot\cos\frac{\alpha}{2}}}$.

Вариант 2

1. $\{-2\}$.
2. $]-\infty;-1[\cup]1;3]$.
3. $x_1=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $x_2=\pm\frac14\arccos\frac13+\frac{\pi}{2}l$ $(k,l\in\mathbf{Z})$.
4. $\arccos\sqrt{\frac23}$ и $\frac{\pi}{2}-\arccos\sqrt{\frac23}$.
5. $\frac{8p^2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{(1+\sin\alpha+\cos\alpha)^2}=4p^2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}\times\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

Вариант 3

1. $\left\{\frac14, 2\right\}$.
2. $]-\infty;-3]\cup]-2;+\infty[$.
3. $x=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$.
4. $\max\limits_{[5;8]} y=y(8)=545$, $\min\limits_{[5;8]}y=y(5)=536$.
5. $\frac{9l^3\cdot\mathrm{tg}^3\frac{\varphi}{2}}{4\sqrt{3\,\mathrm{tg}^2\frac{\varphi}{2}-1}}$. Указание. Если $SABC$ — данная пирамида (S — вершина) и $AP\perp SB$, то $\widehat{APC}=\varphi$.

Задачи устного экзамена

1. $\sqrt{10}-3$. 2. а) $\sin 3$; б) $\sqrt[3]{3}$.
5. а) $\left\{\log_3\frac{\sqrt5-1}{2}\right\}$; б) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$.
6. 4. 7. а) $[3;4[\cup]4;+\infty[$; б) $]0;2[$.
8. -1. 9. $y=\left(\frac{97}{162}-18\sqrt3\right)x+4\frac{13}{18}+81\sqrt3$.
10. Квадрат со стороной $\sqrt a$. 11. Квадрат со стороной $\frac a4$. 12. 2. 13. 2. 14. 1. 15. $k=0$. Указание. Сравните площади для прямых $y=2$ и $y=kx+2\ (k\ne0)$. 16. $1-\frac{\pi}{4}$.
17. $2(\sqrt2-1)a^2$. 18. $\frac{a^2\sqrt3}{6}$. 19. Ромбом, когда диагонали исходного четырехугольника конгруэнтны. Квадратом, когда они вдобавок взаимно перпендикулярны. 20. $\frac{\sqrt6}{3}$.

Физика

1. $l_{1-2}=7$ м; $l_{2-3}=5$ м; $l_{3-4}=3$ м; $l_{4-5}=1$ м.
2. $x\approx0{,}22$ м.
3. $\Delta T=T\frac{mRT}{p\mu\pi d^3/6-mRT}\approx6$ К.
4. $U_1=\frac23\mathcal{E}\frac{C_2}{C_1+C_2}$; $U_2=\frac23\mathcal{E}\frac{C_1}{C_1+C_2}$.
5. Расстояние от линзы до лампочки равно
$$d=\frac l2\pm\sqrt{\left(\frac l2\right)^2-Fl}.$$
Если $F=F_1$, то $d_1=0{,}7$ м и $d_2=0{,}3$ м. Если же $F=F_2$, отчетливого изображения не будет.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 4)

1. Масса шарика 20 г, рыбки 30 г, конуса 50 г. Система приводится в равновесие либо двумя шариками, либо рыбкой и палочкой, либо шариком и двумя палочками.
2. 60 минут $=20+10+15+15$ (см. рис. 20).

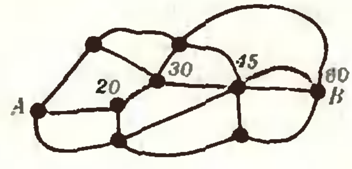


Рис. 20.

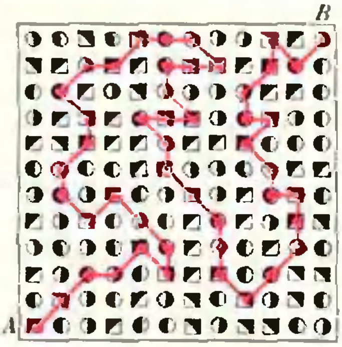


Рис. 21.

3. См. рисунок 21.
4. $4+10+5+9+8+6+7+2+1+8=60$.

Задачи наших читателей
(см. «Квант» № 4, с. 49)

1. Оторвавшийся воздушный пузырек, прежде чем вырваться из отверстия в молочном «стороже», прокатывается по всему спиралевидному (или кольцеобразному) углублению. При этом он сливается с другими пузырьками и увеличивается в размерах. А чем больше пузырек, тем более толстую пленку на закипающем молоке он способен прорвать.

(см. «Квант» № 4, с. 59)

1. Если $a>\frac{5}{4}$, то $a=\sin^3 x+\cos x<\sin^2 x+\cos x$, откуда $\cos^2 x-\cos x+a-1$, что невозможно, поскольку дискриминант трехчлена $t^2-t+(a-1)$ неположителен.

Случай $a<-\frac{5}{4}$ аналогичен предыдущему (нужно только заметить, что $-a=-\sin^3 x-\cos x<\sin^2 x-\cos x$).

2. $$\cos\frac{8\pi}{35}+\cos\frac{12\pi}{35}+\cos\frac{18\pi}{35}=\cos\left(\frac{4}{5}-\frac{4}{7}\right)\pi+\cos\left(\frac{6}{5}-\frac{6}{7}\right)\pi+\cos\left(\frac{9}{5}-\frac{9}{7}\right)\pi=\cos\frac{\pi}{5}\left(\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\right)+\sin\frac{\pi}{5}\left(\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}\right);$$ $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$ (докажите это, домножив и разделив левую часть на $2\sin\frac{\pi}{7}$).

$$\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}=2\cos\frac{2\pi}{7}\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{2\pi}{7}=2\sin\frac{\pi}{7}\left(\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}\right)=4\sin\frac{\pi}{7}\cos\frac{3\pi}{14}\cos\frac{\pi}{14}=4\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}.$$

Но $4\sin\frac{\pi}{7}\sin\frac{2\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{2}$. Докажите это, рассмотрев равенство

$$8\sin^2\frac{\pi}{7}\sin^2\frac{2\pi}{7}\sin^2\frac{3\pi}{7}=\left(1-\cos\frac{2\pi}{7}\right)\left(1-\cos\frac{4\pi}{7}\right)\times\left(1-\cos\frac{6\pi}{7}\right)$$

и сосчитав выражения

$$\cos\frac{2\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{6\pi}{7},$$

$$\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}+\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}+\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7},$$

$$\cos\frac{2\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{6\pi}{7}$$

(см. также решение задачи М725 в одном из следующих номеров «Кванта»).

3. $x=\sqrt[3]{5}$.

4. Пусть $q=\frac{m}{n}$ — знаменатель прогрессии (m и n — взаимно простые натуральные числа). Тогда первый член прогрессии имеет вид $a_1=kn^8$; следовательно, последний член равен km^8. Из неравенств $250<kn^8<7000$, $250<km^8<7000$ получаем $k=1$, $\frac{m}{n}=\frac{2}{3}$ или $\frac{m}{n}=\frac{3}{2}$. Получаем два решения:

1) $a_1=2^8$, $q=\frac{3}{2}$;

2) $a_1=3^8$, $q=\frac{2}{3}$.

«Квант» для младших школьников
(см. «Квант» № 3)

1. $4940+5940=10\,880$; $10\,579\times 6=63\,474$.
2. См. рисунок 22.
3. В третьем кубике цифрами трехзначного числа могут быть либо 1, 5, 2, 6, либо 1, 3, 2, 4, либо 5, 3, 6, 4. Поскольку сумма последних четырех чисел — наибольшая, именно они должны представлять разряды с о т е н трехзначных чисел. Сумма разрядов сотен равна 18. Для второй «выкройки» наибольшая из возможных сумм четверок соответствующих чисел равна $17=6+4+5+2$, а для третьей — $14=1+3+6+4$. Поэтому наибольшее воз-

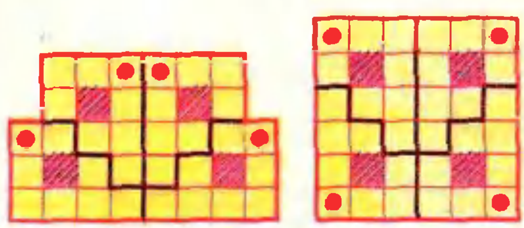


Рис. 22.

можное значение суммы всех четырех трехзначных чисел равно $1800+170+14=1984$.

4. а) Можно — см. таблицу перемещений монет (П — пятак, Д — «двушка»).

б) Нельзя. Указание. Предположите, что нужное перемещение монет осуществлено

Таблица перемещений монет

ДП	ДП	ДП		ДП	ДП	ДП
	П	ДП	ДП	ДДП	ДП	ДП
ДД	П	П	П	ДДП	ДП	ДП
ДД	ДП	ДП		ПП	ДП	ДП
ДД	ДП	ДП	ДД	П	П	ПП
ДД	ДП		ДП	ДП	ДП	ПП
ДД	Д	П	П	ДДП	ДП	ПП
ДД	ДД	ДП	ДП	П	П	ПП
ДД	ДД	П		ДПП	ДП	ПП
ДД	ДД	ДД	П	ПП	П	ПП
ДД	ДД	ДД		ПП	ПП	ПП

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 2)

Задание 3. 1. Cd3. Иначе после 1...g5 слон вырвется на свободу 1...Cg8. 2. Ce4 Ch7. На всей диагонали a2 — g8 слону не найти безопасного места и приходится снова прятаться в клетку. **3. Ke7+ Kpa7 4. Cd3 Kpb7 5. Kpf2 Kpb6 6. Kpe3 Kpb7 7. Kpd4 Kpb8 8. Cc2 Kpb7 9. Ce4+ Kpb8 10. Kpe5 h4 11. Kpf6 Kpc7 12. Kpg7 Kpd6 13. Kc6 g5 14. Kp:h7 g4 15. Ch1 h3 16. Kd4** и т. д.

Задание 4. Легкие фигуры черных находятся под ударом, но как белому коню убежать от неприятельского короля? **1. Kd4+ Kpc3 2. Kb5+ Kpc4 3. Kd6+ Kpc5.** Черный король не может становиться на одну вертикаль с конем из-за шаха ладьей снизу и поэтому вынужден преследовать коня по линии «c». **4. Kb7+ Kpc6 5. Kd8+ Kpc7 6. Ke6+ Kpd7 7. Kf8+ Kpe7 8. Kg6+ Kpf7 9. Kh8+ Kpg7.** Конь пойман, но короля удалось завлечь на неудобное место. **10. Л:e1 Kp:h8 11. Лh1.** Вот в чем дело. **11...g3 12. Kpe3 Kpg7 13. Kpf4.** Ловушка для черного коня захлопнулась. **13...g2 14. Лg1 Kf1 15. Л:g2+** и **16. Лf2** с победой.

Итоги шахматного конкурса 1981 года

Победителями конкурса признаны: Г. Бедный (Бердичев), В. Белов (Фрунзе), В. Беляев (Куйбышев), Э. Бровченко (Москва), В. Воскобойник (Тирасполь), А. Гавренков (Херсон), М. Германов (с. Чашн Курганской обл.), М. Грушко (Житомир), Р. Дайтпер (с. Каменка Целиноградской обл.), А. Каган (Ташкент), Б. Калинский (с. Нижнедевицк Воронежской обл.), А. Каневский (Херсон), С. Кипрушкин (Петрозаводск), М. Колдошов (с. Сырт Ошской обл.), М. Креймер (Житомир), А. Кузнецов (Ленинград), З. Курганов (Чирчик), Н. Малин (Баку), Х. Насыбуллин (Арзамас), А. Новоселов (Киров), А. Покидов (с. Ашап Пермской обл.), В. Прудников (Подольск), В. Семеняк (пос. Гвоздец Ивано-Франковской обл.), Б. Сидоров (Апшеронск), А. Скороход (Чернигов), С. Сундукова (Ишимбай), А. Тихонков (дер. Моисеевка Гомельской обл.), В. Чернов (Чебоксары).

Редакция поздравляет победителей. Все они награждаются шахматно-математической литературой с автографами А. Карпова и Е. Гика.

Номер подготовили
А Виленкин, А Егоров, И Клумова, Т Петрова, А Сосинский, В Тихомирова, Ю Шиханович

Номер оформили
Л Денисенко, М. Дубах, Г Красиков, Н Кузьмина, Э Назаров, И Смирнова

Заведующая редакцией Л Чернова

Художественный редактор Т Макарова

Корректор Н Дорохова

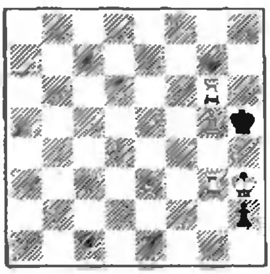
117071, Москва, Ленинский проспект, 15,
«Физматлит», «Квант» тел 234-08-21
Сдано в набор 18 3 82 Подписано в печать 16 4 82
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16 Физ печ л 4
Усл печ л 5,60 Уч изд л 7,19 Т-06862
Цена 40 коп. Заказ 668 Тираж 180 966 экз

Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
ВО «Союзполиграфпром»
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

ШАХМАТНАЯ МАШИНА ВРЕМЕНИ

Когда шахматистам предлагают решить следующую миниатюру, они моментально берутся за белую ладью и удивляются, почему все так просто.

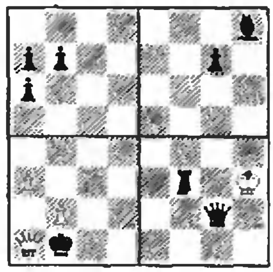


Мат в 1 ход.

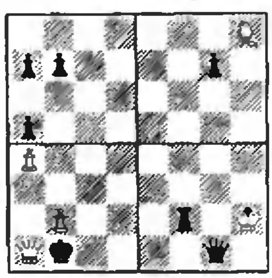
1. Лh6 × ? Не будем спешить с ответом. Действительно, белые могут дать мат в один ход. Но каким был последний ход черных? Черный король не мог пойти на поле h5 ни с h4, ни с g4 (шахматным королям контакты недоступны). Не мог он стоять и на поле h6, ибо тогда был невозможен предыдущий ход белых (в данной позиции за один ход двойной шах белой ладьей и пешкой не дать). Не могла ходить и пешка h2, ведь поля h3 и g3 заняты.

Итак, в данной позиции мы не можем указать ни одного предыдущего хода черных (это называется «ретропат» черных). Следоввтельио, предыдущий ход сделали белые, сейчас ход черных и решает **1...h1Ф×!**

Позиции, для оценки которых требуется совершить путешествие в прошлое, то есть выяснить, как они могли получиться в реальной шахматной партии, называются *ретрозадачами*, а соответствующий жанр шахматной композиции — *ретроанализом*. Главное в нем — уметь отличать возможные позиции от невозможных. Вот несколько типичных примеров «нелегальных» позиций (их можно лишь искусственно сконструировать из шахматных фигур, в настоящей партии возникнуть они не могут).

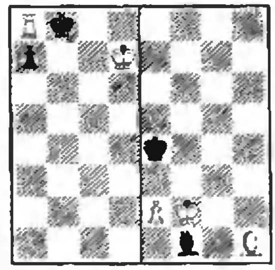


Для экономии места мы изобразили здесь сразу четыре различные невозможные конфигурации. Каждая из них ставит вопрос, на который нет ответа. Откуда появилась черная пешка на а6? Как черный слон попал на h8? Каким образом белые дали шах ферзем на а1? Могли ли черные дать двойной шах ферзем и ладьей королю на h3? Эти абстрактные позиции напоминают «невозможные объекты», которые на рисунках выглядят вполне правдоподобно, а когда начинаешь вглядываться в них внимательнее, то обнаруживаешь, что перед тобой предмет-призрак.



А вот эти позиции, незначительно отличающиеся от предыдущих, уже вполне легальны. Черная пешка с поля с7 сделала ходы **с7:b6** и **b6:а5** (другой маршрут исключен). Белая пешка дошла до поля h7 и сделала ход **h7—h8С** (слон h8 может быть только превращенным). Белый ферзь дал шах черному королю с поля а3, а черная пешка **g2** только что превратилась в ферзя с двойным шахом.

Теперь рассмотрим задачи.



Восстановить последние ходы противников.

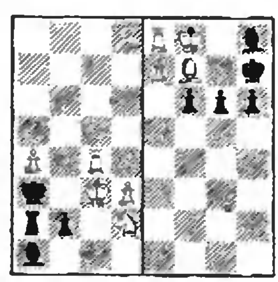
Слева на диаграмме белая пешка с поля b7 последним ходом взяла черную фигуру на а8 и превратилась в ладью — **h7:а8Л+**. Но какую именно фигуру взяла пешка? Легко найти, что только коня, причем он попал туда с поля с7. Справа белые могли дать шах только ходом **Крg2—f2**, а перед этим шаховали черные превращенным слоном — **f2—f1С+**.

Конкурсные задания

Первым заданием этого номера является остроумная задача-шутка Н. Плаксина, которую он посвятил одному из основоположников жанра ретроанализа В. Королькову (позиция на диаграмме имеет вид буквы К).

9. Добавить пешку и дать мат в 1 ход.

Второе задание — двойное.



10 а, б. Мат в 1 год.

Срок отправки решений — 25 июля 1982 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 9, 10»).

Цена 40 коп.
Индекс 70465

Хорошо известно, что на плоскости можно сделать паркет из правильных шестиугольников, равносторонних треугольников и квадратов, а правильными многоугольниками с пятью, семью, восемью или более сторонами заполнить плоскость без пробелов и перекрытий нельзя. Однако если слегка ослабить условие правильности, допуская многоугольники, у которых конгруэнтны стороны и углы между *прямыми, содержащими соседние стороны* (вместо углов между самими соседними сторонами), то такими невыпуклыми фигурами уже можно замостить плоскость. Для пятиугольника такая конструкция показана на рисунке. Подумайте, есть ли другие способы заполнить плоскость такими же пятиугольниками. А можно ли заполнить ее аналогичными семиугольниками?

А. Сапич, В. Чванов