

Квант

4
1982

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





На рисунке показано семейство линий, нарисованное ЭВМ по параметрическим уравнениям

$$x = F(t, u), \quad y = G(t, u),$$

где $0 < t < 1$ и $0 < u < 1$. При изменении t от 0 до 1, точка с координатами $(x, y) = (F(t, 0), G(t, 0))$ (конец пера на графопостроителе) движется по некоторому пути, описывая верхнюю кривую, а точка с координатами $(F(t, 1), G(t, 1))$ — по другому пути (кривая с двумя петлями внизу). Последовательно

придавая параметру u промежуточные значения, возрастающие от 0 до 1, ЭВМ начертила более тонким пером 38 промежуточных кривых. В целом рисунок иллюстрирует процесс деформации одного пути в другой; нужно только себе представить, что кривые меняются при изменении параметра u не скачками, а непрерывно. О деформации путей можно прочитать в статье Л. Понтрягина «Основная теорема алгебры», опубликованной в этом номере.

Ю. Котов

Квант

4

1982

Основан в 1970 году

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО НАУКА · ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ



В НОМЕРЕ : IN THIS ISSUE :

- Космическая весна человечества 2 *Humanity's cosmic spring*
Л. Понтрягин. Основная теорема алгебры 3 *L. Pontriagin. The main theorem of algebra*
А. Боровой. Год чудес 10 *A. Borovoy. The year of miracles*
 На орбите — новый музей 18 *A new museum on orbit*
В. Фабрикант. Можно ли услышать рея мамонта? 20 *V. Fabrikant. Can we hear the mamouth's roar?*
- Лаборатория «Кванта»** *Kvant's lab*
М. Людомирский, А. Панфилов. Почему висит кольцо? 22 *M. Liudomirski, A. Panfilov. Why does the ring stay hanging?*
- Задачник «Кванта»** *Kvant's problems*
 Задачи М736—М740; Ф748—Ф752 25 *Problems M736—M740; P748—P752*
 Решения задач М696—М700; Ф708—Ф712 28 *Solutions M696—M700; P708—P712*
А. Зильберман. Два способа расчета электрических цепей 33 *A. Zilberman. Two ways of calculating electric circuits*
- «Квант» для младших школьников** *Kvant for the younger school-children*
 Задачи 35 *Problems*
А. Калинин. Причеша ежа 36 *A. Kalinin. Combing a hedgehog*
- Практикум абитуриента** *College applicant's section*
В. Рыжик. Надо ли искать ОДЗ? 39 *V. Ryjik. Should one find the domain?*
- Варианты вступительных экзаменов в вузы** *College entrance exams*
 Ереванский государственный университет 43 *Erevan state university*
 Московский институт стали и сплавов 44 *Moscow institute of steel and alloys*
 Московский гидромелиоративный институт 45 *Moscow hydromeliorative institute*
 Московский технологический институт пищевой промышленности 46 *Moscow food industry technological institute*
 Мурманское высшее инженерное морское училище им. Ленинского комсомола 47 *Murmansk Lenin Komsomol higher naval engineering school*
 Рижский институт инженеров гражданской авиации им. Ленинского комсомола 48 *Riga Lenin Komsomol civil aviation institute*
- Искусство программирования** *The art of programming*
 Заочная школа программирования. Урок 20 50 *Computer programming correspondence school*
- Информация** *Information*
 Об итогах конкурса «Малый интеркосмос» 52 *“Maly intercosmos” contest results*
 XIII конференция юных математиков в Батуми 54 *The 13th young mathematician's conference in Batumi*
 Заочная физическая школа 57 *Physics correspondence school*
- Рецензии, библиография** *Book reviews*
А. Зорич. Астрономия: наука и ее творцы 58 *A. Zorich. Astronomy: science and creators*
- Ответы, указания, решения** 60 *Answers, hints, solutions*
 Новости науки (42) *Science news (42)*
 Смесь (17, 49, 53, 59) *Miscellaneous (17, 49, 53, 59)*
 Шахматная страничка *The chess page*
 Патовые рекорды (3-я с. обложки) *Stalemate records (3rd cover page)*

Космическая весна человечества

Для всех нас апрель отмечен двумя выдающимися событиями — днем рождения В. И. Ленина и первым полетом человека в космос. 12 апреля 1961 года космический корабль «Восток», пилотируемый Ю. А. Гагариным, совершил первый в мире орбитальный космический полет, продолжавшийся 108 минут. 21 год отделяет нас от этого выдающегося события в истории человечества, и каждый из них отмечен замечательными успехами на пути в космос.

В нашей стране запущено более 1300 искусственных спутников Земли и несколько десятков пилотируемых и автоматических космических кораблей. В семидесятые годы основным направлением развития советских космических исследований стало создание орбитальных научных станций «Салют». По словам Л. И. Брежнева «Советская наука рассматривает создание орбитальных станций со сменяемыми экипажами как магистральный путь человека в космос».

Более четырех лет успешно работает в околоземном космическом пространстве орбитальная научная станция «Салют-6». Первоначально предполагалось, что она сможет успешно функционировать в течение полутора лет. Однако к настоящему моменту этот срок превзойден почти в три раза. Постоянно возрастала продолжительность работы основных экспедиций на станции «Салют-6» — 96, 140, 175, 185 суток! Последний рекорд принадлежит космонавтам Леониду Ивановичу Попову и Валерию Викторовичу Рюмину.

На станции «Салют-6» впервые были испытаны такие сложные научные приборы, как субмиллиметровый телескоп БСТ-1 и радиотелескоп КРТ-10 с диаметром антенны 10 м.

Достижения космонавтики являются достоянием всего человечества, способствуют укреплению мира и развитию прогресса. Поэтому наша страна вносит огромный вклад в развитие международного сотрудничества в космосе. Вместе с советскими космонавтами на «Салюте-6» работали космонавты Чехословакии, Польши, Германской Демократической Республики, Болгарии, Венгрии, Румынии, Вьетнама, Кубы и Монголии. Успешно проходит подготовка к совместному советско-французскому космическому полету; развивается советско-индийское сотрудничество в области исследований космоса.

Советские космические исследования прокладывают человечеству путь к созданию специализированных орбитальных станций, предназначенных для разработки космической технологии, использующей невесомость и глубокий вакуум, а также специальных медико-биологических лабораторий. Появятся еще более тяжелые и долгоживущие орбитальные станции с совершенным научным оборудованием для разнообразных астрофизических исследований. Развитие цивилизации потребует создания орбитальных космических производств, мощных энергетических установок, межпланетных научных поселений, освоения ближайшего спутника Земли — Луны.

Космос ждет и вас, наши дорогие читатели. Профессия космонавта нелегка; она требует глубокой научной подготовки и совершенного здоровья. И тот, кто хотел бы овладеть ею, должен готовиться к этому еще в школьные годы.

Л. Понтрягин

Основная теорема алгебры

Здесь будет доказана основная теорема алгебры, утверждающая, что *всякий многочлен с комплексными коэффициентами имеет по крайней мере один комплексный корень*. При этом действительные числа считаются частным случаем комплексных чисел. Эта теорема впервые была доказана Гауссом в 1799 году для частного случая многочленов с действительными коэффициентами. Гаусс показал, что всякий такой многочлен имеет по крайней мере один действительный или комплексный корень. С точки зрения современной абстрактной алгебры теорема эта показывает, что поле комплексных чисел алгебраически замкнуто: это значит, что, рассматривая корни алгебраических уравнений (то есть корни многочленов) в этом поле, мы не можем получить новых чисел.

В этом смысле поле комплексных чисел радикально отличается от поля действительных чисел, которое не является алгебраически замкнутым. При этом стоит заметить, что поле комплексных чисел получено из поля действительных чисел присоединением лишь корня одного уравнения $z^2 + 1 = 0$.

Доказательство основной теоремы алгебры основано не на соображениях абстрактной алгебры, а на

Настоящая статья является продолжением статьи академика Л. С. Понтрягина «Комплексные числа», опубликованной в предыдущем номере.

конкретном рассмотрении поля комплексных чисел. Строгое ее доказательство должно опираться на точное определение действительного числа и на точное определение непрерывности функции. Я здесь привожу не строгое, но геометрически убедительное доказательство, основанное на рассмотрении путей в плоскости комплексного переменного и их деформаций. Доказательство это не только доказывает теорему, но до некоторой степени объясняет, почему она верна.

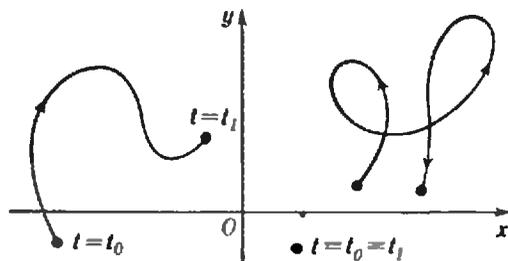
Как следствие основной теоремы алгебры мы покажем, как многочлен с комплексными (в частности, действительными) коэффициентами раскладывается на множители.

Пути в плоскости комплексного переменного

Если точка z в плоскости P комплексного переменного перемещается во времени, когда время t меняется в пределах $t_0 < t < t_1$, то мы считаем, что в плоскости P задан путь (рис. 1). Таким образом, *путь* есть функция $z(t)$ действительного переменного t , принимающая комплексные значения, заданная на отрезке $t_0 < t < t_1$.

$$z(t); t_0 < t < t_1.$$

Формула эта задает путь. Речь идет здесь о движении точки, осуществляемом, естественно, без скачков. Так что функция $z(t)$ является **непрерывной** функцией. Мы не уточняем здесь понятие непрерывности, считая, что оно интуитивно ясно, как движение точки. Следует отчетливо понимать, что путь есть процесс



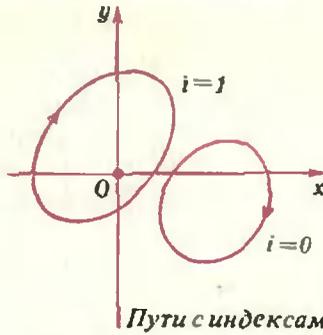
Примеры путей

Рис. 1



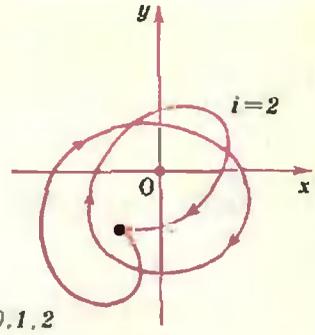
Замкнутые пути

Рис. 2.



Пути с индексами 0, 1, 2

Рис. 3.



движения, а не та линия, которую описывает движущаяся точка. Одну и ту же линию можно описать разными способами.

В процессе движения точка $z(t)$ в разные моменты времени может попадать в одну и ту же точку плоскости, так что не исключается равенство

$$z(t_2) = z(t_3) \text{ при } t_2 \neq t_3.$$

Таким образом, путь может иметь самопересечения. Он может даже состоять из одной точки, именно в случае, когда точка $z(t)$ вовсе не перемещается при изменении t . В дальнейшем, если это не будет оговорено специально, мы всегда будем предполагать, что *путь не проходит через начало координат*, то есть что величина $z(t)$ ни при каком значении t не обращается в нуль. Точка $z(t_0) = z_0$ называется *началом* пути, а точка $z(t_1) = z_1$ — его *концом*. Если имеет место равенство $z_0 = z_1$, то путь называется *замкнутым* (рис. 2).

Так как комплексное число $z(t)$ не обращается в нуль, для всякого значения t определен аргумент $\varphi(t)$ комплексного числа $z(t)$; но он определен лишь с точностью до слагаемого $2\pi k$. Эта неоднозначность для нас не желательна. Для того чтобы освободиться от нее, мы выберем для начальной точки z_0 вполне определенный аргумент $\varphi_0 = \varphi(t_0)$.

Затем по мере возрастания t будем выбирать аргумент $\varphi(t)$ точки $z(t)$ так, чтобы при малых изменениях t он менялся мало. Этим неоднозначность выбора аргумента будет устранена. Добавление к аргументу числа

$2k\pi$ при $k \neq 0$ привело бы сразу к резкому изменению величины $\varphi(t)$. Выбрав начальное значение аргумента $\varphi(t_0) = \varphi_0$ и следя за тем, чтобы аргумент $\varphi(t)$ точки $z(t)$ менялся вместе с t непрерывно, мы получаем вполне определенную функцию $\varphi(t)$, меняющуюся непрерывно, то есть без скачков. Если выбрать начальное значение аргумента φ_0 иначе, изменив его на $2k\pi$, то он будет отличаться от ранее выбранного ровно на $2k\pi$ на всем протяжении изменения t . Отсюда следует, что при таком способе построения функции $\varphi(t)$ величина

$$\varphi(t_1) - \varphi(t_0) \quad (1)$$

не зависит от случайно выбранного начального значения аргумента числа z_0 .

Если путь замкнут, то точки z_0 и z_1 совпадают и, следовательно, их аргументы $\varphi(t_0)$ и $\varphi(t_1)$ могут отличаться лишь на $2k\pi$. Поэтому число (1) в случае замкнутого пути есть $2k\pi$. Целое число k называется *индексом* замкнутого пути в плоскости комплексного переменного z . Следует еще раз подчеркнуть, что индекс замкнутого пути можно определить лишь в том случае, когда путь не проходит через начало координат.

Индекс k имеет простой геометрический смысл. Именно, он указывает, сколько раз точка $z(t)$, описывая замкнутый путь, обходит начало координат (рис. 3).

Рассмотрим простой пример. Путь

$$1 + r(\cos t + i \sin t); \quad 0 < t < 2\pi \quad (2)$$

является замкнутым. Он описывает окружность с центром в точке 1 и радиусом r и проходит окружность

с течением времени t равномерно против часовой стрелки. Если число r меньше 1, то окружность не содержит внутри себя начала координат и индекс пути равен 0. Если $r > 1$, то окружность содержит внутри себя начало координат, и индекс пути равен 1 (проверьте это самостоятельно). В случае $r=1$ путь проходит через начало координат и его индекс не определен. Если число r меняется, то путь (2), как говорят, деформируется (рис. 4). Мы видим на этом примере, что во время деформации замкнутого пути его индекс не меняется, если только путь в какой-то момент деформации не проходит через начало координат.

Говоря, что путь описывается движением точки во времени, мы лишь хотели придать более интуитивный характер определению пути. В действительности же речь идет о зависимости комплексного переменного z от некоторого действительного параметра t (который можно обозначить и другой буквой). Так, например, путь (2) можно записать в виде

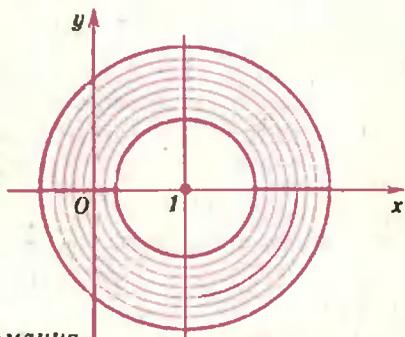
$$1 + r(\cos \alpha + i \sin \alpha); 0 \leq \alpha < 2\pi, (3)$$

где параметром уже является не t , а α . Ясно, что путь (3) описывается точкой $1 + z$, когда точка z описывает путь

$$r(\cos \alpha + i \sin \alpha); 0 \leq \alpha < 2\pi.$$

Здесь r есть числовой параметр, от которого зависит сам путь. Говорят, что при изменении r путь (3) деформируется.

Введем понятие *деформации пути*. Будем считать, что путь *деформируется*, если он постепенно меняется



Деформация пути $1+r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ при изменении r

Рис. 4.

без скачков в зависимости от некоторого параметра, который для пути (3) обозначен через r , а вообще может быть обозначен и другой буквой, например, s (рис. 5). Таким образом, деформирующийся путь записывается формулой

$$z(\alpha, s); \alpha_0 \leq \alpha \leq \alpha_1; s_0 \leq s \leq s_1. (4)$$

Здесь при каждом фиксированном значении параметра s мы имеем определенный путь, описываемый во время изменения α от α_0 до α_1 , а при изменении s сам путь меняется, деформируясь. Ясно, что если путь (4) замкнут, то есть если при любом значении s имеет место равенство

$$z(\alpha_0, s) = z(\alpha_1, s),$$

то в течении деформации индекс пути должен меняться без скачков. А так как он есть целое число, то индекс этот остается постоянным. Конечно, это верно только в том случае, когда для произвольного значения s путь (4) не проходит через начало координат. В противном случае для этого значения s индекс пути не определен. Таким образом, мы можем высказать следующее утверждение:

Если замкнутый путь непрерывно деформируется, не проходя в процессе деформации через начало координат, то индекс его не меняется.

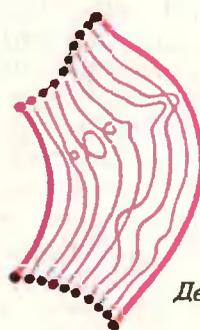
Дадим еще один пример замкнутого пути

$$r^n(\cos n \alpha + i \sin n \alpha); 0 \leq \alpha < 2\pi. (5)$$

Ясно, что путь этот описывается точкой z^n , когда точка z описывает замкнутый путь

$$r(\cos \alpha + i \sin \alpha); 0 \leq \alpha < 2\pi.$$

Видно, что когда α меняется от 0



Деформация пути

Рис. 5.

до 2π , аргумент точки z^n меняется от 0 до $2n\pi$. Таким образом, индекс пути (5) равен n (см. рис. 6, где схематически показан случай $n=3$).

Комплексные функции комплексного переменного

Если числовое значение комплексной переменной величины w можно найти, зная числовое значение другой комплексной переменной величины z , то переменная величина w называется *функцией* переменной величины z , что записывается в форме

$$w = f(z).$$

Если комплексная функция $f(z)$ комплексного переменного z имеет производную, то она называется аналитической функцией. Теория аналитических функций является теперь одним из важнейших разделов математики. Здесь нас будут интересовать лишь аналитические функции очень частного вида, именно, многочлены.

Рассмотрим многочлен

$$w = f(z) = z^n + a_1 z^{(n-1)} + \dots + a_{(n-1)} z + a_n, \quad (6)$$

где a_1, a_2, \dots, a_n суть комплексные коэффициенты, а n — неотрицательное целое число, которое называется *степенью* многочлена. Целью нашего исследования будет доказательство того, что многочлен (6) положительной степени имеет корень, то есть что уравнение

$$f(z) = 0,$$

где $f(z)$ — многочлен (6) и $n > 0$, имеет решение. Для доказательства этого мы рассмотрим замкнутый путь

$$f(r(\cos \alpha + i \sin \alpha)); \quad 0 \leq \alpha < 2\pi, \quad (7)$$

который описывает точка $f(z)$, когда точка z описывает замкнутый путь

$$r(\cos \alpha + i \sin \alpha); \quad 0 \leq \alpha < 2\pi.$$

Случай, когда свободный член a_n многочлена $f(z)$ равен 0, не требует рассмотрения, так как в этом случае многочлен $f(z)$ имеет очевидный корень $z=0$. Поэтому мы будем считать, что $a_n \neq 0$. Замкнутый путь (7) зависит от параметра r и при изменении параметра r деформируется. При $r=0$ число z равно 0, и путь $f(z)$ состоит из неподвижной точки a_n . Таким образом, его индекс при $r=0$ равен 0. Мы докажем, что если взять r достаточно большим, то индекс пути (7) равен n . Но по предположению $n \neq 0$, поэтому при изме-

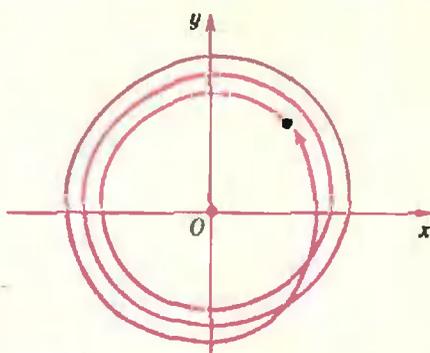


Рис. 6.

нению числа r от большого значения к нулю путь (7), деформируясь, пройдет при каком-то значении r через начало координат, а это и значит, что при некотором значении z функция $f(z)$ обратится в нуль, то есть корень u этого многочлена существует (рис. 7).

Для доказательства того, что при достаточно большом r замкнутый путь (7) имеет индекс, равный n , продеформируем этот путь в более простой, индекс которого легко сосчитать.

Прежде всего мы разобьем многочлен f на сумму двух

$$f(z) = z^n + g(z),$$

где $g(z)$ задается формулой

$$g(z) = a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n.$$

Так как коэффициенты a_1, a_2, \dots, a_n многочлена $g(z)$ суть вполне определенные числа, то они все не превосходят по модулю некоторую константу C . Из доказанного в предыдущей статье (см. «Квант», 1982, № 3) неравенства (8), распространенного на произвольное число слагаемых, следует, что при $|z| > 1$

$$|g(z)| < nC|z^{n-1}|. \quad (8)$$

Рассмотрим многочлен $f(z, s)$, зависящий от параметра s , $0 \leq s \leq 1$, задаваемый следующей формулой:

$$f(z, s) = z^n + sg(z).$$

Мы имеем равенство

$$z^n = f(z, s) - sg(z),$$

откуда

$$\begin{aligned} |z^n| &< |f(z, s)| + |-sg(z)| < \\ &< |f(z, s)| + nC|z^{n-1}|s < \\ &< |f(z, s)| + nC|z^{n-1}|, \end{aligned}$$

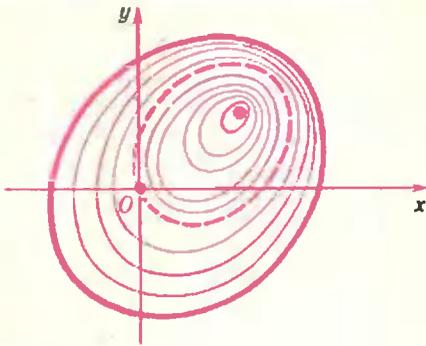


Рис. 7.

(см. (8)). Отсюда следует

$$|f(z, s)| \geq |z^n| - nC|z^{n-1}|.$$

Обозначим $|z|$ через r , тогда последнее неравенство принимает вид $|f(z, s)| \geq r^n - nCr^{n-1} = r^{n-1}(r - Cn)$.

Таким образом, при $r > Cn$ правая часть предыдущего неравенства положительна. Следовательно, модуль функции $f(z, s)$ не обращается в нуль ни при каком значении S , если только $0 < s \leq 1$.

Обратим внимание теперь на тот факт, что при $s=0$ многочлен $f(z, s)$ превращается в известный нам многочлен z^n . А индекс пути z^n , когда z описывает окружность $r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$, нами уже сосчитан (см. (5)). Он равен n . При $s=1$ многочлен $f(z, s)$ превращается в многочлен $f(z)$ и определяемый им путь (7) имеет индекс, тоже равный n . Итак, мы доказали, что индекс пути (7), определяемый многочленом $f(z)$, при $r > Cn$ равен n . Из этого, как сказано выше, уже следует, что многочлен $f(z)$ обращается в нуль при некотором значении z , где $|z| < Cn$.

Итак, основная теорема алгебры доказана.

Деление многочленов

При делении целого положительного числа a на целое положительное число b мы приходим к равенству

$$a = bh + k, \quad (9)$$

где h и k — целые неотрицательные числа и $k < b$. Число h называется частным, а k — остатком при делении числа a на число b .

Способ деления целых чисел хорошо известен из арифметики. Но так же, как целые числа, можно делить друг на друга и многочлены. Будем исходить из двух многочленов

$$\begin{aligned} a(z) &= a_0 z^p + a_1 z^{p-1} + \dots + a_p, \\ b(z) &= b_0 z^q + b_1 z^{q-1} + \dots + b_q. \end{aligned}$$

Мы будем предполагать здесь, что числа a_0 и b_0 не равны нулю, так что многочлен $a(z)$ имеет степень p , а многочлен $b(z)$ имеет степень q . В результате деления многочлена $a(z)$ на многочлен $b(z)$ мы можем прийти к следующему равенству, аналогичному равенству (9):

$$a(z) = b(z)h(z) + k(z), \quad (10)$$

где степень многочлена $k(z)$ меньше q . Многочлены $h(z)$ и $k(z)$ называются, соответственно, *частным* и *остатком* при делении многочлена $a(z)$ на многочлен $b(z)$.

Если $k(z) \equiv 0$, то говорят, что многочлен $a(z)$ *делится* на многочлен $b(z)$, а $h(z)$ является частным от их деления.

Равенство (9) доказано в арифметике, а равенство (10) должно доказываться в алгебре. Но деление многочленов не входит в ныне действующую школьную программу. Чтобы доказать (10), мы должны построить такие многочлены $h(z)$ и $k(z)$, которые удовлетворяют этому равенству. Процесс этого построения представляет собою очень важный алгоритм. Опишем его.

Если $p < q$, то тогда $h(z) = 0$, $k(z) = a(z)$, и равенство (10) выполнено.

Теперь мы будем строить многочлены $h(z)$ и $k(z)$ в предположении, что $p \geq q$. Сперва построим равенство

$$a(z) = b(z)h_1(z) + a_1(z), \quad (11)$$

в котором степень многочлена $a_1(z)$ меньше p . Для этого положим

$$h_1(z) = \frac{a_0}{b_0} z^{(p-q)}.$$

Тогда разность

$$a(z) - b(z)h_1(z) = a_1(z)$$

имеет степень меньше, чем p , так как в этом многочлене коэффициент при z^p равен нулю, а остальные степени z , входящие в этот многочлен, очевидно, меньше p . Таким образом, равенство (11) построено.

Если многочлен $a_1(z)$ имеет степень меньшую, чем q , то равенство (11) уже является равенством (10). В противоположном случае к многочлену $a_1(z)$ применим ту же процедуру, которая применена к многочлену $a(z)$ при построении равенства (11). И тогда мы получим для него равенство

$$a_1(z) = b(z) h_2(z) + a_2(z),$$

причем степень многочлена $a_2(z)$ уже меньше, чем степень многочлена $a_1(z)$. Если многочлен $a_2(z)$ уже имеет степень меньшую, чем q , то подставляя $a_1(z)$ из последнего равенства в равенство (11), мы получим

$a(z) = b(z) (h_1(z) + h_2(z)) + a_2(z)$, которое уже является равенством (10). Если многочлен $a_2(z)$ тоже имеет степень большую, чем q , то мы продолжим наше построение дальше, и в конце концов докажем нужное равенство (10).

Здесь мы описали процесс деления многочлена $a(z)$ на многочлен $b(z)$, то есть нахождение многочленов $h(z)$ и $k(z)$, входящих в равенство (10). Докажем теперь, что они однозначно определены многочленами $a(z)$ и $b(z)$. Допустим, что наряду с равенством (10) имеет место равенство

$$a(z) = b(z) h_0(z) + k_0(z), \quad (12)$$

причем степень многочлена $k_0(z)$ меньше q . Вычитая равенство (12) из равенства (10), получим

$$b(z) (h(z) - h_0(z)) = k_0(z) - k(z).$$

Так как степень многочлена $b(z)$ равна q , а степень многочлена $k_0(z) - k(z)$ меньше q , то последнее равенство может иметь место лишь при условии $h(z) - h_0(z) \equiv 0$, так что и $k(z) - k_0(z) \equiv 0$.

Многочлены с произвольными комплексными коэффициентами

Теперь существующий по основной теореме алгебры корень многочлена $f(z)$ с комплексными коэффициентами обозначим через z_1 . Докажем, что многочлен $f(z)$ делится на двучлен $(z - z_1)$. Производя деление многочлена $f(z)$ на многочлен первой степени $(z - z_1)$ по правилам, описан-

ным в предыдущем разделе, мы получим частное, которое обозначим через $f_1(z)$, и некоторый остаток в виде многочлена нулевой степени, то есть числа, которое мы обозначим через k . Таким образом, имеем

$$f(z) = f_1(z) (z - z_1) + k.$$

Так как $f(z_1) = 0$, то полагая в предыдущем равенстве $z = z_1$, получаем $k = 0$.

Итак, многочлен $f(z)$ разделился на $(z - z_1)$, и мы имеем

$$f(z) = (z - z_1) f_1(z),$$

где $f_1(z)$ — многочлен степени $n - 1$, который, очевидно, начинается с члена z^{n-1} . Если $n > 1$, то $n - 1 > 0$; тогда многочлен $f_1(z)$ будет положительной степени и, по доказанному ранее, имеет некоторый корень z_2 . Таким образом, по только что доказанному, многочлен $f_1(z)$ разлагается на множители

$$f_1(z) = (z - z_2) f_2(z). \quad (13)$$

Продолжая этот процесс дальше, мы получим разложение $f(z)$ на n линейных множителей

$$f(z) = (z - z_1) (z - z_2) \dots (z - z_n).$$

Числа z_1, z_2, \dots, z_n являются корнями многочлена $f(z)$, и других корней многочлен $f(z)$, очевидно, не имеет. Может, однако, оказаться, что один и тот же корень встречается в этом разложении несколько раз. Группируя равные между собой корни, мы получаем разложение $f(z) = (z - z_1)^{k_1} (z - z_2)^{k_2} \dots (z - z_q)^{k_q}$, где все корни z_1, z_2, \dots, z_q различны. Число k_1 называется кратностью корня z_1 , число k_2 — кратностью корня z_2 , и так далее, число k_q — кратностью корня z_q . Таким образом, число различных корней многочлена $f(z)$ может быть и меньше, чем n . Однако если учитывать кратность каждого корня, то сумма кратностей в точности равна n . В этом смысле многочлен $f(z)$ имеет ровно n корней.

Многочлены с действительными коэффициентами

Рассмотрим теперь случай, когда все коэффициенты многочлена $f(z)$ — действительные числа. О корнях та-

кого многочлена можно высказать некоторые весьма интересные дополнительные соображения.

Для рассмотрения многочлена с действительными коэффициентами введем понятие числа \bar{z} , комплексно сопряженного данному комплексному числу z . Именно, если

$$z = x + iy,$$

то, по определению, число

$$\bar{z} = x - iy \quad (14)$$

называется *комплексно сопряженным* с z . Таким образом, число \bar{z} , комплексно сопряженное с числом z , является зеркальным образом числа z относительно оси действительных чисел.

Если

$$z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

то

$$\begin{aligned} \bar{z} &= r(\cos \alpha - i \sin \alpha) = \\ &= r(\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)). \end{aligned} \quad (15)$$

Таким образом, аргументы двух комплексно сопряженных чисел отличаются лишь знаком. Из формулы (14) следует, что

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2.$$

Из формулы (15) следует, что

$$\overline{\bar{z}_1 \bar{z}_2} = z_1 \cdot z_2.$$

Заметим еще, что равенство

$$\bar{\bar{z}} = z$$

имеет место тогда и только тогда, когда z есть действительное число.

Из трех предыдущих формул легко получить, что для многочленов $f(z)$ с действительными коэффициентами имеет место равенство

$$\overline{f(z)} = f(\bar{z}).$$

Из этого равенства следует, что *если z_1 есть корень многочлена $f(z)$ с действительными коэффициентами, то \bar{z}_1 есть также его корень*. В случае, если z_1 есть действительное число, то это утверждение бессодержательно. В случае, если z_1 не есть действительное число, то утверждение указывает на существование наряду с корнем z_1 отличного от него корня \bar{z}_1 . Таким образом, если z_1 — не действительное число, то многочлен $f_1(z)$ (см. (13)) имеет делителем $(z - \bar{z}_1)$, и мы получаем разложение на множители

$$f(z) = (z - z_1)(z - \bar{z}_1)f_2(z).$$

Полагая в этом равенстве

$$z_1 = x_1 + iy_1,$$

получаем

$$f(z) = (z^2 - 2x_1z + x_1^2 + y_1^2)f_2(z).$$

Таким образом, мы выделили у многочлена $f(z)$ действительный квадратичный множитель $z^2 - 2x_1z + x_1^2 + y_1^2$. Отсюда следует, что многочлен $f_2(z)$ — также многочлен с действительными коэффициентами, так как он получается в результате деления многочлена $f(z)$ на действительный квадратичный трехчлен. Следовательно, у этого многочлена $f_2(z)$ комплексные корни опять попарно сопряжены. Если у него найдется корень, равный уже ранее найденному корню z_1 , то найдется и корень \bar{z}_1 . Таким образом, в этом случае из многочлена $f_2(z)$ выделится еще один квадратичный множитель, равный прежнему квадратичному множителю. Из этого видно, что кратность комплексного корня многочлена $f(z)$ с действительными коэффициентами равна кратности сопряженного корня, и мы получаем разложения многочлена $f(z)$ на действительные множители:

$$\begin{aligned} f(z) &= (z^2 - 2x_1z + x_1^2 + y_1^2)^{k_1} \dots \\ &\dots (z^2 - 2x_\rho z + x_\rho^2 + y_\rho^2)^{k_\rho} \times \\ &\times (z - z_{\rho+1})^{k_{\rho+1}} \dots (z - z_q)^{k_q}. \end{aligned}$$

Заметим, что квадратичные множители вида

$$z^2 - 2x_i z + x_i^2 + y_i^2, \quad i = 1, 2, \dots, \rho,$$

в которых все y_i не равны нулю, уже не разлагаются на действительные множители.

А. Боровой

Год чудес

(пятьдесят лет назад)

То, что уже открыто, часто кажется очень простым... Но поиск, идущий в темноте и длящийся годами, при котором на смену уверенности приходит отчаяние, при котором следуют бесконечные прорывы к ясности, — все это знает лишь тот, кто прошел этот путь.

А. Эйнштейн

В летопись экспериментальной физики 1932 год вошел совершенно особо, как год многих выдающихся открытий. Его называли «годом чудес», «золотым годом экспериментаторов», позднее — «годом информационного взрыва».

В начале года успех пришел в Англию, в старинный университетский город Кембридж. Там, в стенах Кавендишской лаборатории, которой руководил Эрнест Резерфорд, были сделаны два открытия. Они последовали друг за другом: сначала был открыт нейтрон; затем, приблизительно через месяц, пучок протонов, полученный на новом приборе ускорителя, расщепил атомное ядро.

Это открыло неведомые ранее возможности для проникновения в глубины вещества, для исследования атомных ядер. Физики во всех странах мира поняли это. В Советском Союзе академик А. Ф. Иоффе посоветовал некоторым из своих учеников оставить прежние исследования и заняться ядерной физикой. Вот что вспоминает президент Академии наук СССР академик А. П. Александров:

«Новая ситуация в ядерной физике привлекла к ней усиленное внимание советских ученых. Точка роста науки пропущена не была — с 1932 года в Институте А. Ф. Иоффе молодые И. В. Курчатов, А. И. Алиханов и другие ученые начали развивать работы по ядерной физике».

Работы в Кавендишской лаборатории открыли список замечательных открытий 1932 года. Осенью этого же года ученый Калифорнийского института обнаружил в космическом излучении частицу антиматерии — позитрон. И еще один успех, тоже американских физиков и химиков, — открытие дейтона, получение первых капель тяжелой воды.

За экспериментальные достижения 1932 года были присуждены четыре Нобелевские премии. Три из них — почти сразу, в 1934, 1935 и 1936 годах. Четвертая — позднее, в 1951 году.

Нейтрон (июнь 1920 — февраль 1932)

1932 год был и годом исполнения предсказаний. Это, в первую очередь, относится к нейтрону, существование которого было предсказано Резерфордом в июне 1920 года. Чтобы читатель понял, на чем основывалось это предсказание, нам придется ненадолго обратиться к еще более раннему времени.

Открытие радиоактивности дало в руки физикам инструмент для проникновения в глубь вещества, созданный самой природой. Это были α -частицы (ядра атома гелия), испускаемые радиоактивными элементами (радием, полонием и другими).

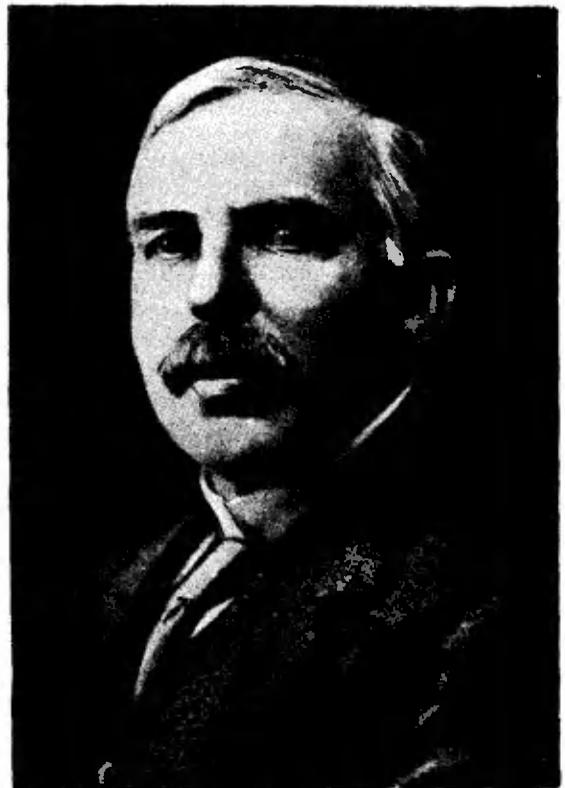
В лаборатории Резерфорда α -частицами, как снарядами, обстреливались различные вещества, и результатом опытов стало величайшее событие в науке — открытие атомного ядра. Оказалось, что в атоме облако легких электронов окружает положительно заряженное ядро, в котором и сосредоточена практически

вся масса атома. А размеры ядра в сто тысяч раз (!) меньше, чем размеры электронного облака.

Теперь все усилия исследователей сосредоточились на следующем шаге — понять, из чего состоит ядро. И опять на помощь пришли α -частицы. Резерфорд со своими сотрудниками облучал ими азот и другие легкие газы и наблюдая расщепление ядер. При этом из них вылетали ядра водорода — протоны, как их позднее назвал Резерфорд. Первые работы по расщеплению ядер были опубликованы в 1919 году, и уже в них ученый сделал вывод, что протоны являются структурной частью более тяжелых ядер.

А через год Резерфорд выступил с лекцией, в которой рассказал, как он представляет себе устройство ядра. По мнению Резерфорда, ядра более сложные, чем водород, должны состоять из положительно заряженных протонов и электронов. Для такого предположения имелись веские причины. Наличие протонов подтверждали опыты самого Резерфорда. Существование электронов казалось естественным, поскольку они вылетали из ядра при β -распаде. Наконец, эта гипотеза помогала объяснить накопившиеся к тому времени данные о соотношении между массами и зарядами ядер. Так, заряд ядра гелия в два раза превышал заряд протона, а масса была в четыре раза больше, чем масса ядра водорода. Для углерода эти соотношения составляли соответственно 6 и 12 и т. п.

Предположение Резерфорда все объясняло:



Эрнест Резерфорд

скольку другого набора элементарных частиц для построения ядер у физиков тогда и не было. Но вот дальше...

Дальше, размышляя о том, какие силы удерживают в ядре отталкивающиеся друг от друга положительные протоны, Резерфорд предположил, что один электрон может связать собой два протона, и тогда получится ядро с $Z=1$ и $A=2$ — тяжелый водород, поскольку по всем химическим свойствам такой элемент будет подобен обычному водороду

Элемент					
	Водород	Гелий	...	Углерод	...
Состав ядра	p (протон)	$4p+2e^-$...	$16p+6e^-$...
Заряд ядра (Z)	+1	+2	...	+6	...
Относительная масса ядра (A)	~ 1	~ 4	...	~ 12	...

Гипотеза была вполне логичной (она существовала и раньше), по-

(одинаковые заряды ядер!). А может существовать ядро из протона и элек-

трона — «нейтральный дублет». Масса такой пары близка к массе протона, но сама она будет сильно отличаться от известного всем атома водорода. Если в атоме водорода протон и электрон разделены расстоянием 10^{-10} м, то в дублете частицы ближе друг к другу на целых пять порядков (радиус ядра — 10^{-15} м) и, значит, связаны очень сильно. Такое ядро должно было бы обладать удивительными свойствами: поскольку внешнее поле, создаваемое им, практически равно нулю, это ядро могло бы не только свободно проходить через толщу вещества, «не чувствуя» атомных электронов, но и проникать в глубь самих ядер, соединяться с ними и подвергать ядра неким неизвестным превращениям.

Так Резерфорд дал законченный портрет нейтрона. Надо сказать, что для части физиков предсказание Резерфорда осталось неизвестным, а другие не отнеслись к нему достаточно серьезно. В двадцатых годах стало общепризнанным, что ядро состоит из протонов и электронов. Нейтрон же ожидало почти полное забвение.

Но все-таки не полное, а «почти полное». В Кавендишской лаборатории в «нейтральный дублет» поверили и его искали.

В это время в лаборатории проводились эксперименты по искусственному расщеплению ядер, в которых участвовала молодой сотрудник (и ученик) Резерфорда Джеймс Чедвик. Исследователи были вынуждены часами сидеть в темноте, наблюдая слабые вспышки света от протонов, попадающих в экран из сернистого цинка. И часто при этой довольно скучной процедуре Резерфорд говорил с Чедвиком о нейтроне. Идея буквально захватила молодого физика. И вот в течение следующих десяти лет, иногда совместно с учителем, иногда в одиночку, Чедвик обдумывал и проводил эксперименты, стараясь обнаружить неуловимую частицу «либо в момент ее образования, либо в момент ее испускания из ядра атома».

1923 год, 1925 год, 1928 год...

Эксперименты, новые эксперименты (некоторые из них сам Чедвик



Джеймс Чедвик

называет почти абсурдными), и... постоянные отрицательные результаты.

Проходили годы, а Чедвик продолжал сохранять уверенность в правоте учителя.

В 1930 году немецкие физики Боте и Беккер наблюдали странное, далеко проникающее излучение. Они назвали это излучение «бериллиевые лучи» (поскольку оно появлялось при бомбардировке α -частицами бериллия) и решили, что это гамма-кванты с большой энергией. (Сейчас мы записали бы этот процесс так: ${}^9_4\text{Be} + \alpha = {}^{12}_6\text{C} + n$.)

Следующий шаг сделали французские ученые Ирен и Фредерик Жолио-Кюри. Молодые физики обнаружили, что бериллиевое излучение выбивает из парафина протоны. (Так была обнаружена еще одна отличительная черта нейтрона — взаимодействие с атомными ядрами. Все, как предсказывал Резерфорд!) Но супруги Жолио-Кюри продолжали считать, что новое излучение — гамма-кванты.

Истину обнаружил Чедвик. Через пять недель после доклада Жолио-Кюри на заседании Парижской Академии наук и через 12 лет после выступления Резерфорда. Остроумными количественными опытами и расчетами он показал, что «бериллиевые лучи» состоят из нейтральных

частиц с массой, близкой к массе протона.

Жолио-Кюри впоследствии говорил:

«Большинство физиков, в том числе и мы, не обратили внимания на гипотезу Резерфорда. Но она все еще блуждала под сводами здания лаборатории Кавендиша, где работал Чедвик, и вполне естественно и справедливо, что последняя точка в открытии нейтрона была поставлена именно здесь. Идеи, высказанные когда-то нашими учителями — как живущими, так и ушедшими от нас, — много раз вспоминаются и забываются в их лабораториях, сознательно или подсознательно проникая в мысли тех, кто постоянно там присутствует. Постепенно идеи созревают: тогда совершается открытие».

О том, в каких экспериментах был обнаружен нейтрон и почему он оказался вполне «самостоятельной» частицей, а не просто объединением протона и электрона, можно прочитать в статье Л. Тарасова «Открытие нейтрона», которая была опубликована в «Кванте» № 5 за 1979 год. Нам же осталось отметить, что в 1935 году Джеймс Чедвик стал лауреатом Нобелевской премии по физике, а доказательство существования нейтрона сразу привлекло всеобщее внимание. Стало ясно, что ядра состоят из нейтронов и протонов и что эти частицы должны быть объединены новым, еще неизвестным видом сил. Так родилось понятие о «ядерном» или «сильном» взаимодействии.

Исполнилось и предсказание Резерфорда о том, что нейтрон станет для исследователей прекрасным инструментом, проникающим в глубь ядер. Во многих лабораториях мира стали обстреливать вещество нейтронами и получили интереснейшие результаты.

Нарушим немного хронологию и перейдем теперь к открытию другой частицы. Среди уже известных элементарных частиц — фотона (квант электромагнитного излучения), элек-

трона, протона, весьма причудливого (но уже предсказанного) нейтрино и, наконец, нейтрона — возник еще один удивительный феномен.

О «случайных» открытиях

Часто говорят, что позитрон обнаружили случайно. Писать так стало почти традиционным. Действительно, Карл Андерсон, который и совершил это открытие, проводил эксперименты, «цель которых состояла в измерении энергетического спектра электронов, образующихся в атмосфере и в материалах благодаря приходящему из космоса излучению». Ни о каких позитронах речь не шла.

Однако любое физическое открытие, как бы оригинально и неожиданно оно ни было, всегда только звено в бесконечной цепочке успехов и ошибок науки. И примером тому как раз может служить обнаружение позитрона. Мы расскажем только о некоторых звеньях цепочки, приведших к цели.

О первых исследованиях космических лучей.

О приборе, с помощью которого было сделано открытие.

О работах советского физика Д. В. Скобельцына.

И конечно же, о предсказании существования позитрона — ведь 1932 год — год исполняющихся предсказаний!

Космические лучи (1901—1927)

Всем, наверное, знаком школьный прибор — электроскоп. Если его зарядить, то листочки со временем опадают, и это происходит, как бы хорошо ни была изолирована подставка и каким бы герметичным ни был кожух. Напрашивается естественный вывод, что в воздухе среди нейтральных молекул всегда присутствуют носители заряда — ионы. Воздух хоть и плохо, но проводит электрический ток, и поэтому электроскоп разряжается. Каково происхождение этих ионов? Попытка ответить на этот вопрос сыграла важную роль в обнаружении космического излучения.

В начале нашего века, после открытия радиоактивности, положение, казалось, прояснилось. Ведь ничтожное количество радиоактивных элементов всегда присутствует в почве, в стенах здания, в материалах установок, и наконец, в самих экспериментаторах. В атмосферу попадают радиоактивные газы (правда, они быстро распадаются). Это идущее отовсюду излучение «разбивает» молекулы и приводит к ионизации воздуха.

Экспериментальная техника улучшалась, на смену относительно простым приборам пришли сложные — электрометры, которые могли уловить присутствие даже нескольких десятков ионов в кубическом сантиметре воздуха. Чтобы еще больше увеличить чувствительность электрометров и избавиться от внешнего фона, их окружали слоем свинца, поглощавшим внешнее излучение, и выдерживали несколько суток, чтобы внутри прибора распались радиоактивные газы. И тем не менее ток разрядки шел. Была высказана гипотеза, что через свинец проникает энергичное излучение земных пород. А поскольку начало нашего века ознаменовалось удивительными успехами в воздухоплавании, то почему бы не подняться над поверхностью Земли и тем самым удалиться от ее излучения? Так и было сделано. Сначала пытались использовать Эйфелеву башню (300 м), затем, в 1909-10 годах К. Геккель поднялся на воздушном шаре на высоту около 4 км. Наиболее точные измерения в то время провел В. Гесс. Согласно его данным, ток разрядки вначале уменьшался, а затем быстро возрастал; на высоте 5 км он был уже в три раза больше, чем у поверхности Земли. Гесс высказал предположение, что существует проникающее ионизирующее излучение, идущее сверху и ослабляемое атмосферой.

В 1922—26 годах работы, которые велись группой американских физиков под руководством Р. Милликена на воздушных шарах-зондах (они поднимались до 5 км), в горных местностях, под водой, позволили с точностью установить, что на Землю

из мирового пространства падает неизвестное излучение. Милликен назвал его космическим. Для того чтобы понять природу этого излучения, ионизационный метод уже не годился — он регистрировал только следствие (ионизацию), которое могло быть вызвано самыми разными причинами. Чтобы продвинуться дальше в изучении космических лучей, физикам понадобился «самый оригинальный и удивительный инструмент» (это — слова Резерфорда), существовавший в то время для регистрации частиц — туманная камера Вильсона

Камера Вильсона (1911—1912)

Поток влажного воздуха, нагретого землей, поднимается вверх. В более высоких слоях атмосферы воздушные массы расширяются и одновременно охлаждаются. Теперь водяной пар находится в пересыщенном состоянии и начинает конденсироваться, собираться в капли влаги. Мы говорим: «небо затянулось пеленой тумана». Процесс роста капель в пересыщенном паре оказался не простым. Так, ученые выяснили, что для образования тумана необходимы центры конденсации, иначе пар может значительное время оставаться пересыщенным. Чаще всего центрами конденсации становятся мелкие частицы пыли.

Этими вопросами занимался и английский физик Чарльз Вильсон. Именно он открыл, что центрами конденсации пара могут стать ионы, образовавшиеся при облучении пересыщенного пара рентгеновскими лучами или радиацией других видов (α , β , γ). Со свойственным ему упорством и огромным экспериментальным искусством (а Вильсон славился тем, что почти всю аппаратуру делал сам), проработав над этой темой много лет, ученый создал новый прибор для регистрации частиц. Он назвал его «туманной камерой», но очень скоро экспериментаторы переименовали его в «камеру Вильсона».

Опишем теперь в самых общих чертах принцип работы камеры Вильсона. Объем, наполненный парами

жидкости (вода, спирт и т. п.), с помощью поршня или диафрагмы резко увеличивается. Пар, тщательно очищенный от пыли, некоторое время ($0,1 \div 1$ с) находится в пересыщенном состоянии и не конденсируется. Если в этот момент через объем пролетает частица, ионизирующая молекулы пара, то на образовавшихся ионах начинают возникать капли воды. След частицы становится видимым и может быть сфотографирован. Для этого стенка камеры делается прозрачной. За счет теплопроводности стенок температура пара довольно быстро новышается, след исчезает, и иногда всю камеру заполняет туман. Надо опять готовить прибор к работе, и подготовка требует уже десятков секунд. В этом и состоит главный недостаток прибора — у него, как говорят физики, «большое мертвое время». (Внешне простой принцип работы туманной камеры (его описание есть даже в школьных учебниках) не дает ни малейшего представления о тех физических и технических трудностях, которые возникали при ее изготовлении и наладке.) Но прежде чем более совершенные установки вытеснили «туманную камеру», прошли десятки лет, и с ее помощью были сделаны выдающиеся открытия. Поэтому Чарльз Томсон Рис Вильсон «за метод делать видимыми пути заряженных частиц с помощью конденсации пара» получил в 1927 году Нобелевскую премию по физике.

Итак, у физиков появилась возможность наблюдать частицы и определять многие их характеристики. Вот на снимке (рис. 1) «жирный след» α -частицы, а слева — прерывистый след из редких капель, образованных быстрым электроном. Разницу легко объяснить, если воспользоваться приближенной формулой для числа ионов N , образующихся на пути длиной в l см:

$$N \sim Z^2 / v^2, \quad (1)$$

где Z — заряд частицы, v — ее скорость ($[v] = \text{см/с}$). Электрон с энергией 5 МэВ движется практически со скоростью света, а α -частица с той же энергией — в 20 раз медленнее. Кроме того, она имеет в 2 раза больший заряд.



Рис. 1. Следы электрона и α -частицы в камере Вильсона.

Но по снимкам нельзя измерить энергию быстрых электронов или определить знак заряда частицы. След протона, летящего со скоростью $v \approx c$, выглядит так же, как и след быстрого электрона (хотя при одной и той же скорости энергия протона должна быть в 2000 раз больше, чем энергия электрона).

«Ультра β -лучи» Скобельцына (1923—1929)

Молодой ленинградский физик Дмитрий Скобельцын решил использовать камеру Вильсона для фотографирования электронов отдачи, которые появлялись в газе при облучении его гамма-лучами. Это явление называется комптон-эффект — по имени открывшего его английского физика Артура Комптона. По словам самого Комптона, оно напоминает игру на бильярде, когда шарик (γ -квант) сталкивается с другим шариком (электроном), отдавая ему часть энергии и импульса.

Чтобы измерять импульсы электронов p (и их энергию), Скобельцын поместил камеру в магнитное поле. Из школьного курса известно, что частица с зарядом q , влетающая со скоростью \vec{v} (импульсом \vec{p}) в поле с индукцией \vec{B} так, что, $\vec{v} \perp \vec{B}$ ($\vec{p} \perp \vec{B}$), движется по окружности с радиусом

$$R = \frac{p}{qB}. \quad (2)$$

Измеряя кривизну траектории электронов на фотографиях, можно найти их импульс. Мы сейчас не будем останавливаться на исследованиях комптон-эффекта, которые сами по себе дали исключительно интересные

результаты, а вспомним о космическом излучении.

Вот что писал Д. В. Скобельцын:

«...на снимках обнаруживались время от времени прямые пути частиц неизвестного происхождения, почти не отклоняемые магнитным полем, но по своему ионизирующему действию не отличающиеся сколько-нибудь от быстрых β -лучей, фотографии которых имеются на тех же снимках. Дальнейшие наблюдения, результаты которых были опубликованы в 1925 году, позволили установить, что появление путей таких «ультра β -лучей» отнюдь не связано с прохождением через камеру Вильсона γ -лучей, что налицо поток частиц, пронизывающих атмосферу».

Частиц такой большой энергии, что они практически не отклонялись в относительно слабом поле камеры.

Скобельцын доказал, что ионизация, создаваемая космическим излучением, может быть объяснена «ультра β -частицами».

На ряде снимков Скобельцына был виден целый поток быстрых частиц. Их назвали космическими ливнями.

Итак, звенья цепочки, ведущей к позитрону, собраны:

1. Открыты космические лучи.
2. Создан прибор — камера Вильсона, помещенная в магнитное поле.

3. Этот прибор позволил доказать, что в состав космического излучения входят заряженные частицы.

Вот только поле пока еще было мало и не отклоняло «ультра β -лучи».

Открытие позитрона

Мы уже упоминали имя Роберта Эндрюса Милликена. Это был выдающийся физик, получивший в 1923 году Нобелевскую премию «за работы по изучению элементарного заряда электричества и фотоэлектрического эффекта». По воспоминаниям друзей, он сочетал в себе (кроме многих других исключитель-

ных черт) два качества, которые трудно было не заметить: разговорчивость, во много раз превышающую среднюю норму, и выдающуюся физическую интуицию. Сыграло ли первое какую-нибудь роль для открытия позитрона — осталось неизвестным. Но второе оказалось решающим. Узнав об опытах Скобельцына, Милликен сразу же поручил одному из своих сотрудников — Карлу Андерсону — начать исследование космического излучения с помощью камеры Вильсона, но уже помещенной в значительно более сильное, чем в опытах Скобельцына, магнитное поле. Это потребовало и экспериментального искусства, и исключительных для того времени технических средств.

И вот получены фотографии, на которых видны искривленные траектории космических частиц. Рисунок 2 сделан с такой фотографии. Плотность ионизации, радиус кривизны траектории — все говорило о том, что следы I и II принадлежат электронам. Но как объяснить появ-

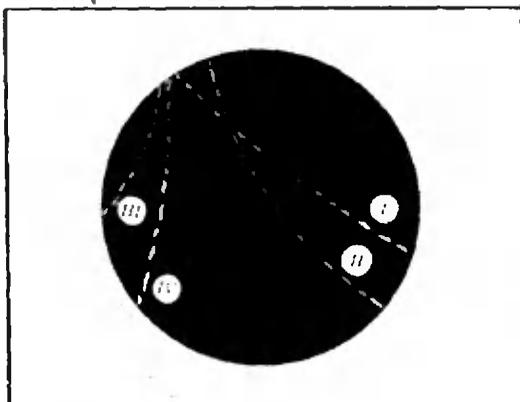


Рис. 2. Следы электронов (I, II) и позитронов (III, IV) в камере Вильсона. (Магнитное поле направлено на нас.)



Рис. 3. Фотография следа позитрона в камере Вильсона (светлая горизонтальная полоса — свинцовая пластинка).



К. Андерсон около своей установки.

ление следов III и IV с «неправильной» кривизной? На фотографиях их было приблизительно столько же, сколько и электронных.

Первое предположение, и весьма естественное, заключалось в том, что это следы протонов. Другой знак заряда — другой знак кривизны траектории. Но исследование фотографий привело к выводу, что ионизирующая способность у положительных частиц практически та же, что у электронов. Если предположить, что это протоны, то скорость их должна быть столь же велика, что и скорость электронов (см. (1)), то есть $\sim c$; импульс же таких протонов — в 10^3 раз больше импульса электронов, и следовательно, радиусы кривизны их траекторий-следов в магнитном поле должны быть в тысячу раз больше, чем у электронов (см. (2)).

Вывод один — не протоны.

Второе предположение заключалось в том, что «неправильные частицы» — электроны, но летящие в противоположном направлении. Тогда и траектория у них будет иметь противоположную кривизну. Чтобы проверить это предположение, Андерсон придумал остроумный опыт. Он поместил посередине камеры свинцовую пластину. Проходя через нее, частица теряет энергию,

замедляется и магнитное поле сильнее искривляет ее траекторию. По фотографии (рис. 3) можно определить направление движения частицы, а зная, что поле направлено «от нас», убедиться, что она имеет положительный заряд.

И вот в 1932 году Андерсон пришел к выводу, что новые частицы — не что иное как «положительные электроны» с массой m_e и зарядом e^+ . Сначала это предположение было высказано довольно робко. Но вскоре оно было убедительно подтверждено в экспериментах самого Андерсона, а также Блэккетта и Оккиалини. Кроме того, эти ученые показали, что появление позитронов в камере связано с ливнями космического излучения.

Самым поразительным в этой истории было даже не открытие новой частицы, хотя в физике, особенно в то время, это было событием первостепенной важности. Поразительным было то, что обнаружилась частица, предсказанная в 1931 году, в существование которой никто не верил — слишком необычным было это предсказание. Но об этом — в следующем номере журнала.

Литература

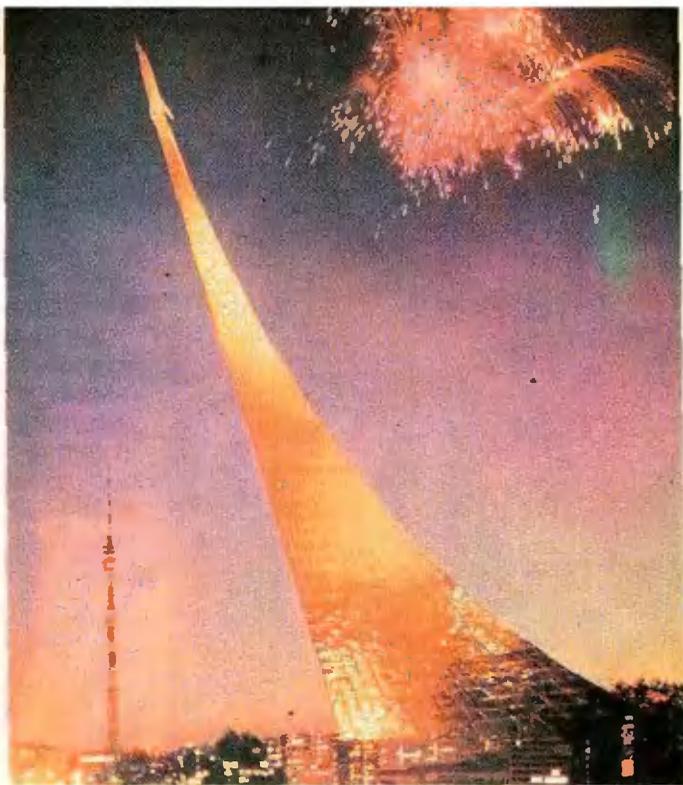
1. Л. Тарасов. Открытие нейтрона. «Квант», 1979, № 5.
2. Д. Юз. История нейтрона. М., Атомиздат, 1964.
3. Нейтрон. Предыстория, открытие, последствия. М., «Наука», 1975.
4. И. Дорман. Космические лучи. М., «Наука», 1981.

Только у нас!

В кунсткамеру «Кванта» поступила знаменитая свеча, являвшаяся эталоном единицы силы света до 1967 года (когда она была заменена канделями) и хранившаяся в платиновом цилиндре близ Парижа. Платиновый цилиндр нам пока не прислали.



В 1981 году, в канун 20-летия полета Юрия Гагарина, в Москве, рядом со станцией метро «ВДНХ», в цоколе обелиска Героям космоса, открылся мемориальный музей космонавтики. Его экспонатами стали образцы космической техники, оригиналы документов, в которых отражен путь нашей страны к высотам космоса, личные вещи космонавтов. Рассказ чуть ли не о каждом экспонате



НА ОРБИТЕ – НОВЫЙ МУЗЕЙ

можно начать со слов «первый», «впервые». Но эти слова во многом относятся и к самому музею.

В нем впервые в практике музейного дела в таком всеобъемлющем виде используются звук, освещение, оптические эффекты, проекционная аппаратура, новейшие конструкции. Цель, которая при этом преследуется, — человек, пришедший сюда, должен пережить максимально возможное «погружение» в космос на земле.

Уже в вестибюле в витринах, напоминающих скафандры, посетителей встречают документы, памятные медали и другие реликвии, отмечающие основные этапы в развитии советской космонавтики. Затем, через оригинальный «шлюз», посетители попадают в главный зал, который напоминает внутреннюю часть космического корабля. В глубине зала находится монументальная композиция, которая состоит из витража, излучающего «космическое» синее-голубое сияние, полупрозрачной сферы «Знаки зодиака», олицетворяющей наши прошлые представления о Вселенной, и скульптуры космонавта (часть этой композиции воспроизведена на первой странице нашей обложки).

Витрины в музее мало. Проходя вдоль зала, посетители видят экспонаты как бы через иллюминаторы космического корабля. Зеркальные проемы из нержавеющей стали создают иллюзию «невесомости», в которой находятся демонстрируемые образцы космической техники. Голубая светящаяся лента отделяет экспозицию от зрителей. Акустическая и телевизионная аппаратура позволяют вести красочный рассказ о буднях и праздниках нашей космонавтики.

Знакомство с музеем завершается в кинозале. Над полупрозрачным зеркальным экраном парит симметричная модель планетоплана с солнечной батареей. Поверхность стен зала выподелена в виде рельефа с цветодинамической системой освещения.

В этом зале с помощью новейших средств лазерной, электронной и полнэкранной техники зрителю показывается художественная композиция, отражающая гуманистические идеалы человека в освоении космического пространства. В течение 20 минут посетители совершают путешествие в прошлое, настоящее и будущее космических исследований.

В создании экспозиции музея участвовали художники, скульпторы, архитекторы, конструкторы: О. Ломоко (главный художник), Г. Шульц, Н. Ломоко, Ж. Канкаян, Н. Рудько, И. Казанский. Научное руководство по созданию музея осуществляла З. Кострикина.

В. Колейчук

Кинозал

Общий вид экспозиционного зала музея

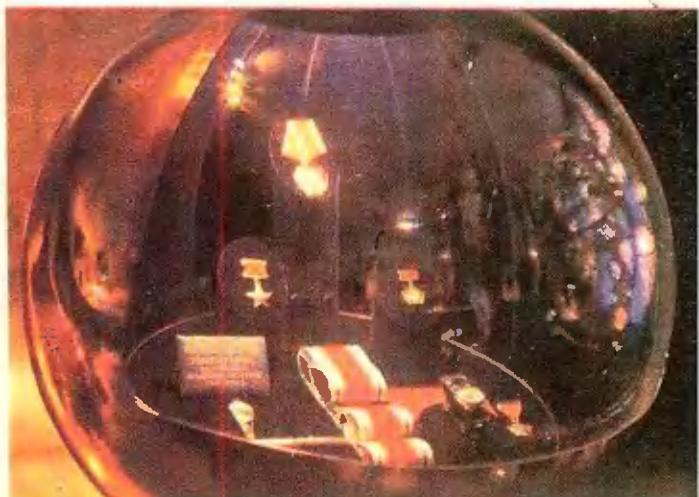
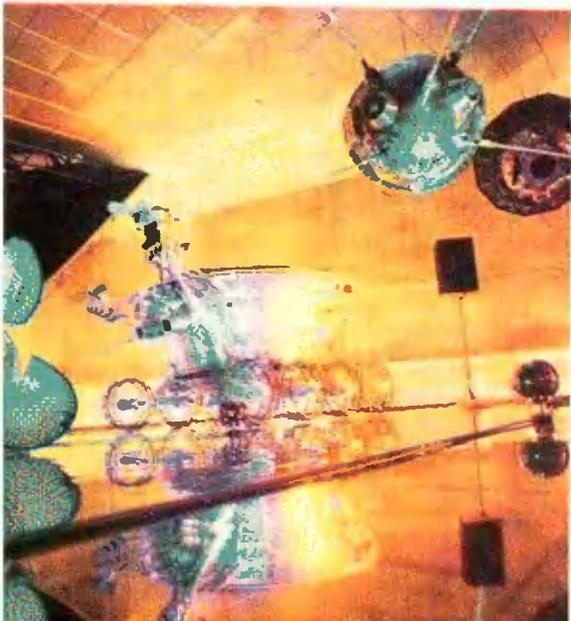
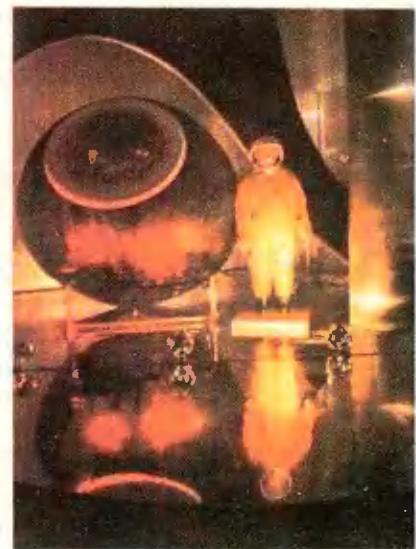
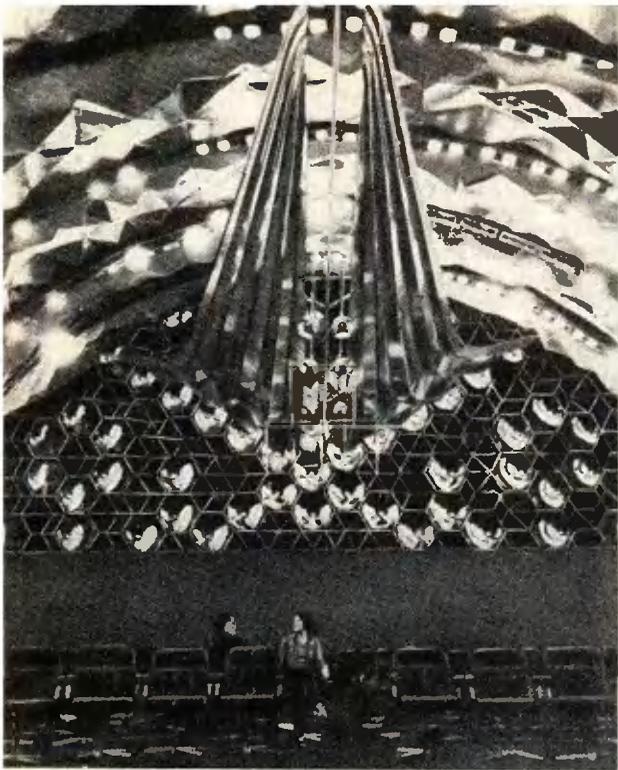
Скульптурная композиция «Знаки зодиака»

Скафандр космонавта и спускаемый аппарат

Луноход и первый искусственный спутник

Личные вещи первого в мире космонавта Ю. А. Гагарина

Фото Г. Макарычева



В. Фабрикант

Можно ли услышать рев мамонта?

Я обязан высшим духовным вдохновением сочинениям Гете, Фауст которого является, быть может, величайшим художественным произведением, Шекспиру и др., но лишь благодаря Шиллеру, я стал собой. Без него я был бы человеком с тем же носом и бородой, но я никогда бы не был собой.

Л. Бальцман

Довольно давно мой бывший студент И. А. Полетаев, ставший крупным специалистом в области кибернетики, опубликовал, из озорства, статью, в которой противопоставил физику лирике. В этой статье он доказывал, что время лирики прошло и настало время монополии физики. К его удивлению, статья была принята всерьез и вызвала целую бурю. Насколько были уязвлены поэты, можно судить по задорному стихотворению Ильи Сельвинского «Физики и лирики», написанному явно в отместку физикам:

Да, брат, физики в почете,
Им теперь и черт не брат:
Будто демоны в полете
О Венере говорят.
Но Венера, дура баба,
Их не жалует. Отнюдь.
Поглядишь, поэтик слабый
С нею скрещивает путь.
Вон несется астрофизик
На свиданье под часы.
Треплет ветер... Дождик высек...

«Петухов» дают басы.
Но глядит, глядит, глядит он
На заветное окно,
А Венера с троглодитом
Уж давно сидит в кино.

Вывод
Электронем опаленный,
Открывает физик новь!
Рвется к лире Аполлона
Старомодная любовь.

Такой остроумный писатель, как И. Г. Эренбург, в беседе с И. А. Полетаевым старался привести убедительные аргументы, опровергающие основной вывод его статьи. Как говорил Полетаев, для него главное было не рассмеяться во время этой беседы.

Вряд ли следует подчеркивать, что физики с полным уважением относятся к лирике. Академик Л. И. Мандельштам знал почти всю поэзию своего любимца Пушкина наизусть. Его друг академик Н. Д. Папалекси выше всех поэтов ставил Лермонтова. (Насколько я знаю, это был единственный пункт разногласий между друзьями.) Академик Г. С. Ландсберг, сидя часами в абсолютно темной спектроскопической лаборатории, подряд декламировал всего «Евгения Онегина». Академик С. И. Вавилов даже на фронте не расставался с гетевским «Фаустом». В его книге «Глаз и Солнце» много искусно подобранных поэтических цитат. Он критиковал качество стихотворного перевода поэмы «О природе вещей» с латинского на русский язык.

Поэты, в свою очередь, проявляли и проявляют интерес к физике. Вот об этом-то и пойдет речь в настоящей заметке. Поэты не всегда в ладах с физикой, но, критикуя их, следует помнить притчу Пушкина «Сапожник», где сказано Критику: «Суди, дружок, не свыше сапога!»

Вначале мы напомним стихи, посвященные относительности движения.

Прежде всего — шутивное стихотворение М. В. Ломоносова:

Случились вместе два Астронома в пиру
И спорили весьма между собой в жару.
Один твердил: Земля, вертясь, круг Солица ходит;
Другой, что Солице все с собой планеты водит:
Один Копёрник был, другой слыл Птоломей.
Тут повар спор решил усмешкою своей.

Хозяин спрашивал: «Ты звезд теченье знаешь?
Скажи, как ты о сем сомненье рассуждаешь?»
Он дал такой ответ: «Что в том Коперник прав,
Я правду докажу, на Солице не бывав,
Кто видел простака из поваров такова,
Который бы вертел очаг вокруг жаркова?»

Пушкин, как всегда, поразительно точен и тонок в известном стихотворении «Движение». Вдумайтесь еще раз в содержание пушкинского шедевра:

Движенья нет, сказал мудрец брадатый.
Другой смолчал и стал пред ним ходить,
Сильнее бы не мог он возразить:
Хвалили все ответ замысловатый.

Но, господа, забавный случай сей
Другой пример на память мне приводит:
Ведь каждый день пред нами солнце ходит,
Однакож прав упрямец Галилей.

Поэт Евгений Винокуров, вероятно считая, что Пушкин не исчерпал тему, написал стихотворение «Очевидности»:

Меня со всех сторон
окурили очевидности.
— Это же очевидно, — я слышал,
как восклицают то тут, то там...
Я не верю, что земля
стоит на месте,

а солнце всходит,
хотя и убеждаюсь в этом
всякий раз —
стоит лишь мне
выглянуть в окно.

Поэтов, естественно, поражает конечность величины скорости света и эффекты, с этим связанные. Фет в стихотворении «Угасшим звездам» пишет:

Может быть, нет вас под теми
огнями:
Давняя вас погасила эпоха, —
Так и по смерти лететь к вам
стихами,
К призракам звезд, буду призраком
вздоха!

Иначе обыгрывает ту же тему Степан Щипачев в стихотворении «Свет звезды»:

Вечерний свет звезды
Мерцает в вышине.
Задумались сады,
И стало грустно мне.
Он здесь, в моем окне,
Звезды далекой свет,
Хотя бежал ко мне
Сто сорок тысяч лет,
А вам езды-то час,
И долго ли собратья!
А нет, чтоб догадаться
Приехать вот сейчас.

(Окончание см. на с. 24)



М. Людомирский,
А. Панфилов

Почему висит кольцо?

«Почему повисает алюминиевое кольцо, свободно надетое на незамкнутый сердечник трансформатора?» — такой вопрос был предложен участникам III Московского турнира юных физиков. Наверное, любой девятиклассник, не задумываясь, ответил бы примерно следующее: «В кольце индуцируются токи, которые взаимодействуют с внешним магнитным полем. Согласно правилу Ленца, индукционный ток всегда направлен так, чтобы своим действием мешать причине, его породившей. В данном случае индукционные токи имеют такое направление, что сила Ампера как бы отталкивает кольцо от катушки трансформатора. В некотором положении эта сила уравнивает силу тяжести кольца, и оно повисает в воздухе».

В том, что такое поведение кольца обусловлено именно индукционными токами, убедиться нетрудно. Для этого достаточно просто разрезать кольцо поперек — оно не будет висеть ни при каких условиях. Однако в приведенном объяснении есть два момента, на которые мы хотели бы обратить внимание. Во-первых, не ясно, какое именно сопротивление кольца — активное или индуктивное — играет решающую роль. Во-вторых, требует объяснения существование лишь одного положения равновесия кольца. Попытаемся разобраться в этих вопросах.

1. Покажем, что эффекта повисания кольца не было бы, если бы кольцо обладало только активным

сопротивлением. Проведем некоторые вычисления.

Сила Ампера, действующая на тонкое кольцо длиной l , по которому течет ток I , равна

$$F = B_r l,$$

где B_r — горизонтальная проекция вектора магнитной индукции внешнего поля (рис. 1). Индукционный ток I определяется законом Ома:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

Здесь \mathcal{E} — электродвижущая сила индукции, R — активное сопротивление кольца. Согласно закону электромагнитной индукции, ЭДС индукции равна скорости изменения магнитного потока, взятой с противоположным знаком:

$$\mathcal{E} = -\Phi' = -(B_v S)'$$

(B_v — вертикальная проекция вектора магнитной индукции, S — площадь, ограниченная кольцом). Пусть магнитное поле изменяется по гармоническому закону с частотой ω , тогда

$$\begin{aligned} B_r &= B_{r\max} \cos \omega t, \\ B_v &= B_{v\max} \cos \omega t, \\ \mathcal{E} &= -(B_v S)' = B_{v\max} S \omega \sin \omega t, \\ I &= \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B_{v\max} S \omega}{R} \sin \omega t, \end{aligned}$$

и

$$F = B_r l = \frac{B_{r\max} B_{v\max} S \omega l}{2R} \sin 2\omega t,$$

где $B_{r\max}$ и $B_{v\max}$ — максимальные значения горизонтальной и вертикальной проекций вектора индукции.

Так как среднее за период значение синуса равно нулю, среднее значение сила Ампера тоже равно нулю. Следовательно, кольцо висеть не сможет.

Это противоречие устраняется, если предположить, что кольцо обладает не только активным, но и ин-

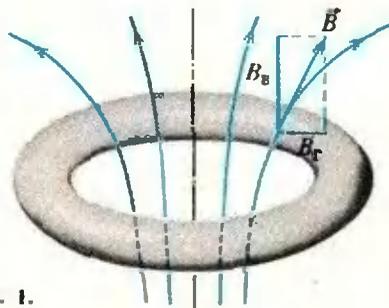


Рис. 1.

дуктивным сопротивлением тоже, которое и играет первостепенную роль. В таком случае ток в кольце будет изменяться со сдвигом по фазе относительно ЭДС, и для мгновенного значения силы Ампера получится другое выражение:

$$I = \frac{B_{\text{вн}} S \omega}{Z} \sin(\omega t + \varphi),$$

и

$$F = B_r I l = \frac{B_{\text{гн}} B_{\text{вн}} S \omega l}{Z} \cos \omega t \times$$

$$\times \sin(\omega t + \varphi) = \frac{B_{\text{гн}} B_{\text{вн}} S \omega l}{2Z} \times$$

$$\times (\sin(2\omega t + \varphi) + \sin \varphi)$$

(здесь Z — полное сопротивление кольца, φ — сдвиг по фазе между током и электродвижущей силой). Среднее значение силы за период будет равно

$$F_{\text{ср}} = \frac{B_{\text{гн}} B_{\text{вн}} S \omega l}{2Z} \sin \varphi,$$

что, безусловно, не равно нулю.

В наших опытах использовались кольца, изготовленные из нескольких слоев алюминиевой фольги общей толщиной около 1 мм. Внутренний радиус колец был равен 15 мм, а внешний — 30 мм. По оценкам на частоте 50 Гц активное сопротивление таких колец составляло миллиомы, а индуктивное — десятки миллиом. При таких параметрах сила Ампера получалась порядка 10^{-2} Н, что вполне достаточно для удержания кольца массой в несколько граммов. Это и наблюдалось на опыте.

2. Почему же кольцо находится в равновесии только в одном положении, на одной определенной высоте? Ответ на этот вопрос мы получили из опыта.

В выражение для силы Ампера входят амплитудные значения вертикальной и горизонтальной проекций вектора магнитной индукции. Необходимо было выяснить, как эти значения изменяются с высотой.

Мы работали на установке, фотография которой представлена на рисунке 2. В катушку (ее внутренний радиус 10 мм, радиус шек 40 мм, высота 70 мм) с обмоткой из медного эмалированного провода (диаметром 1,2 мм) вставлен цилиндрический сердечник, набранный из железных стержней (длиной 200 мм, диаметром 2 мм). На катушку подавалось напряжение (100—120 В)

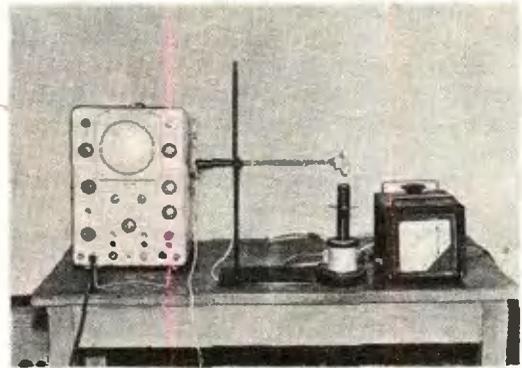


Рис. 2.



Рис. 3.

от лабораторного автотрансформатора. Нам удалось измерить вертикальную и горизонтальную проекции магнитного поля в непосредственной близости от сердечника на различных расстояниях от катушки. В качестве датчика мы использовали катушку (из 300 витков медного эмалированного провода диаметром 0,2 мм), в которой наводилась ЭДС индукции. Для измерения этой ЭДС катушка подключалась ко входу осциллографа.

Оказалось, что вертикальная проекция вектора магнитной индукции практически не меняется с высотой, а горизонтальная проекция изменяется так, как показано на рисунке 3. Здесь по оси абсцисс отложена высота H над катушкой (измеренная в сантиметрах), а по оси ординат — амплитудное значение $B_{\text{гн}}$ горизонтальной проекции магнитного поля (в миллитесла). Полученный график и позволяет объяснить существование единственного положения устойчивого равновесия кольца.

Пусть кольцо имеет такую массу, что для компенсации силы тяжести, действующей на кольцо, необходима горизонтальная проекция поля, равная приблизительно 0,9 мТл. На графике лишь одна точка *A* соответствует этому значению; значит, кольцо повиснет на высоте 4 см над катушкой. Это положение равновесия устойчиво, так как при случайном опускании кольца оно попадет в более сильное магнитное поле, сила Ампера увеличится и поднимет кольцо до прежней высоты.

А что, если для равновесия кольца потребуется горизонтальная проекция, равная приблизительно 0,75 мТл? Этому значению со-

ответствуют две точки на графике — *C* и *D*. Однако и в этом случае устойчивое равновесие только одно — в точке *C*, то есть на высоте 6 см над катушкой. А в точке *D* равновесие — неустойчивое. Действительно, если кольцо опустится чуть ниже высоты 11,5 см, сила Ампера уменьшится и не сможет уравновесить силу тяжести; следовательно, кольцо опустится еще ниже (до точки *C*).

Заметим, что опытным путем положение неустойчивого равновесия обнаружить довольно трудно. Это связано с наличием различных внешних воздействий, выводящих кольцо из этого положения.

Можно ли услышать рев мамонта?

(Начало см. на с. 20)

Леонид Мартынов, поэт, внимательно следивший за развитием физической науки, в такой форме отобразил соотношение скоростей звука и света:

Это почти неподвижности мука.
 Мчатся куда-то со скоростью звука,
 Зная прекрасно, что есть уже где-то
 Некто,
 Летящий
 Со скоростью
 Света!

А вот стихотворение Михаила Светлова «Голоса», наталкивающее на мысль, что человек со временем, благодаря космическим полетам, сможет услышать голоса ранее живших людей и животных:

И возможно, что за небосклоном
 Он живет среди звездных миров —
 Не записанный магнитофоном
 Околевшего мамонта рев.
 Мы — живущие вместе на свете —
 Разгадали не все чудеса.
 И бредут от планеты к планете
 Крепостных мужиков голоса.
 И быть может, на всех небосклонах
 Повторяется снова сейчас
 Несмолкающий шепот влюбленных
 И густой Маяковского бас.

Пусть звезда не одна раскололась,
 Но понятный и вечно живой
 С хрипотцой Цюлковского голос
 Не замолк на волне звуковой.
 С детства не был силен я в науке;
 Не вступая с учеными в спор,
 Я простер постаревшие руки
 В нестареющий синий простор.

.....
 Небо полнится голосами
 Тех, кто жил и любил на Земле.

Если Светлов прав, то нетрудно рассчитать, с какой сверхзвуковой скоростью должен удаляться космонавт от Земли, чтобы, скажем, за десять лет полета догнать ушедший в космос рев мамонтов. Как известно, мамонты исчезли примерно десять тысяч лет назад.

Дорогой читатель, сделай прикидку и оцени трудности запуска ракеты, летящей с соответствующей скоростью.

К сожалению, самокритика поэта, имеющаяся в данном стихотворении, не лишена оснований. Помня о пушкинской притче, не будем строги к поэту, но, все же, в чем основная физическая ошибка Светлова? Ответ на вопрос настолько прост, что не стоит присылать его к нам в журнал. Подумайте о том, насколько усложнилась бы жизнь на Земле, если бы Светлов был прав.

Задачник Кванта

Задачи

М736—М740; Ф748—Ф752

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 30 июня 1982 года по адресу: 117071, Москва, Ленинский проспект, 15, «Физматлит», «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4—82» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М736, М737» или «Ф748». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М736. Медиана BK и биссектриса CL треугольника ABC пересекаются в точке P . Докажите равенство

$$\frac{|PC|}{|PL|} - \frac{|AC|}{|BC|} = 1.$$

З. Анджапаридзе

М737. Обозначим через d_k количество таких домов в вашем городе, в которых живет не меньше k жителей ($d_1 \geq d_2 \geq d_3 \geq \dots$), и через c_m — количество жителей в m -м по величине населения доме ($c_1 \geq c_2 \geq c_3 \geq \dots$). Докажите равенства

$$\begin{aligned} \text{а) } c_1 + c_2 + c_3 + \dots &= d_1 + d_2 + d_3 + \dots; \\ \text{б) } c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \dots &= d_1 + 3d_2 + 5d_3 + \dots + (2k-1)d_k + \dots \\ d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \dots &= c_1 + 3c_2 + 5c_3 + \dots \\ &\dots + (2m-1)c_m + \dots \end{aligned}$$

А. Зелевинский

М738*. Докажите, что а) количество прямых различных направлений, на которые данный n -угольник дает одинаковые по величине проекции, не превосходит $2n$; б) максимальное число таких прямых для любого многоугольника четно; в) для треугольника это число больше 3 тогда и только тогда, когда он остроугольный.

В. Прасолов

М739. Докажите, что при любом значении x , для которого правая часть имеет смысл, выполнены равенства

$$\begin{aligned} \text{а) } \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)} &= 3; \\ \text{б) } \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{n}\right) + \dots + \operatorname{tg}\left(x + \frac{(n-1)\pi}{n}\right)}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \cdot \dots \cdot \operatorname{tg}\left(x + \frac{(n-1)\pi}{n}\right)} &= c_n, \end{aligned}$$

где n — нечетное число, c_n — константа (зависящая от n).

в) * Найдите c_n для каждого нечетного $n = 5, 7, \dots$

В. Алексеев

М740. Сережа насыпал в цилиндрическую кастрюлю немного пшена и спросил соседку тетю

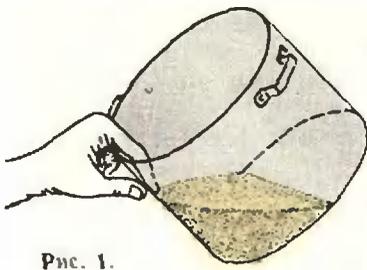


Рис. 1.

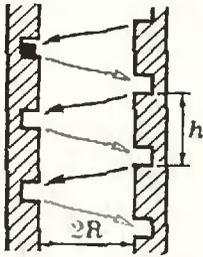


Рис. 2.

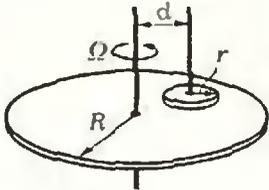


Рис. 3.

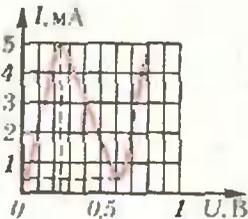


Рис. 4.

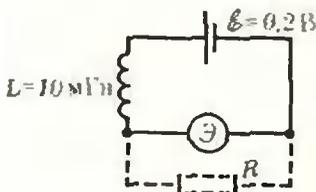


Рис. 5.

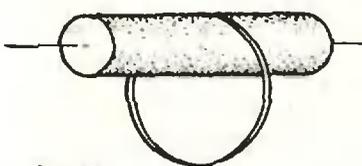


Рис. 6.

Люда: «Сколько нужно налить воды, чтобы получилась вкусная каша?» — «Это очень просто, — отвечала соседка. — Наклони кастрюлю — вот так; постучи, чтобы крупа пересыпалась и закрыла ровно половину дна. Теперь заметь точку на стенке кастрюли, ближайшую к краю, до которой поднялась крупа — и зажми ее пальцем! До этого уровня и надо налить воду» (рис. 1). — «Так ведь пшеница можно насыпать побольше и поменьше, да и кастрюли бывают разные — широкое и узкие», — усомнился Сережа. — «Все равно, мой способ годится в любом случае!» — гордо ответила тетя Люда.

а) Докажите, что тетя Люда права: отношение объемов воды и пшеницы по ее рецепту всегда получается одинаковым.

б) Чему равно это отношение?

В. Семенова

Ф748. По винтообразному желобу с прямоугольным профилем, вырезанному на внутренней поверхности бесконечного длинного полого цилиндра, скользит маленький кубик (рис. 2). Радиус основания цилиндра равен R , шаг винта — h , коэффициент трения скольжения — μ . Найти установившуюся скорость движения кубика. (Размер кубика и глубина желоба много меньше R .)

Р. Энфиаджин

Ф749. Массивный диск вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью Ω . На него сверху опускают диск радиуса r массы m , ось которого направлена строго вертикально (рис. 3). Расстояние между осями дисков равно d ($d > r$). Коэффициент трения между поверхностями дисков равен μ . Определить установившуюся угловую скорость малого диска. Какой момент сил необходимо приложить к оси большого диска, чтобы скорость его вращения оставалась неизменной? Трение в осях отсутствует.

С. Кротов

Ф750*. При изменении напряжения на элементе \mathcal{E} ток через него меняется так, как показано на рисунке 4. Как будет меняться со временем напряжение на элементе \mathcal{E} , если его включить в схему, приведенную на рисунке 5 (параметры схемы указаны на рисунке)? Какого минимального сопротивления резистор можно подключить параллельно элементу \mathcal{E} , чтобы напряжение на элементе не оставалось постоянным?

З. Рафаилов

Ф751. На очень шероховатый цилиндр радиуса r , расположенный горизонтально, надет тонкий обруч радиуса R (рис. 6). Найти период колебаний обруча в вертикальной плоскости.

К. Сергеев

Ф752. На расстоянии $L_1 = 5$ м от тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 10$ см расположена равномерно освещенная вертикаль-

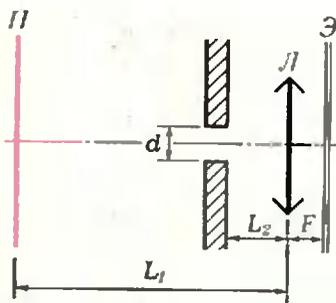


Рис. 7.

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than June 30 th, 1982 to the following address: USSR, Moscow, 117071 МОСКВА, ЛЕНИНСКИЙ ПРОСПЕКТ, 15, «ФИЗМАТЛИТ», «КВАНТ». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions from different issues under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. The List of prizewinners is published in the September issue.

ная плоскость Π (рис. 7). Между линзой и плоскостью на расстоянии $L_2=1$ м от линзы расположена вертикально непрозрачная пластинка толщины $l=5$ см, в которой проделано отверстие диаметра $d=1$ см (центр отверстия находится на главной оптической оси линзы). Как будет выглядеть пятно на экране \mathcal{E} , помещенном в фокальной плоскости линзы справа от нее? (Внутренние стенки отверстия не отражают свет.)

A. Зильберман

Problems

M736—M740; P748—P752

M736. The median BK and the bissector CL of triangle ABC intersect at the point P. Prove that

$$\frac{|PC|}{|PL|} - \frac{|AC|}{|BC|} = 1$$

Z. Andjaparidze

M737. Denote by d_k the number of houses in our city in which no less than k people live ($d_1 > d_2 > d_3 > \dots$) and by c_m the m -th house (in decreasing order of the number of inhabitants, $c_1 > c_2 > c_3 > \dots$). Prove the relations

- a) $c_1 + c_2 + c_3 + \dots = d_1 + d_2 + d_3 + \dots$
- b) $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 + \dots = d_1 + 3d_2 + 5d_3 + \dots + (2k-1)d_k + \dots$
- c) $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + \dots = c_1 + 3c_2 + 5c_3 + \dots + (2m-1)c_m + \dots$

A. Zelevinski

M738*. Prove that a) the number of lines of different directions on which a given n -sided polygon gives projections of the same length is no greater than $2n$; b) the maximal number of such lines for any polygon is even; c) for a triangle, this number exceeds 3 if and only if all its angles are acute.

V. Prasolov

M739. Prove the following relations for any value of x such that the right-hand sides are defined

- a) $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \cdot \operatorname{tg}\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)} = 3;$
- b)* $\frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{n}\right) + \dots + \operatorname{tg}\left(x + \frac{(n-1)\pi}{n}\right)}{\operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \cdot \dots \cdot \operatorname{tg}\left(x + \frac{(n-1)\pi}{n}\right)} = C_n$

where n is odd and C_n is a constant (depending on n).

c)* Find C_n for each odd $n=5, 7, 9, \dots$

V. Alexeev

M740. Serge poured some groats into a cylindrical pot and asked aunt Luda:

— How much water must I pour in to make tasty groat porridge?

— That's easy enough, the aunt answered, just incline the pot like this, knock on it so that the groats level out and cover exactly half the pot's bottom. Now put your finger on the pot's inner wall at the highest spot where the groats reach. That will be the level up to which water must be poured (see figure пс. 1).

— But I could have poured in a different amount of groats, and pots are wider or narrower, said Serge, expressing his doubts.

— No matter, said aunt Luda proudly, my recipe always works!

a) Prove that aunt Luda is right: the volume ratio of water and groats obtained by her recipe is constant.

b) Find this ratio.

V. Semionova

If you have an original problem to propose for publication, please send it to us in two copies (including the solution) in an envelope inscribed "NEW PROBLEM IN PHYSICS (MATHEMATICS)".

P748. A small cube slides along a helicoidal trough with rectangular cross-section cut in the inner surface of a long hollow cylinder* (see figure Рис. 2 p. 26). The radius of the cylinder is R , the step of the helicoid is h and the friction coefficient is μ . Find the steady-state speed of the cube. (The size of the cube and the depth of the trough are far smaller than R .)

R. Enjiadjan

P749. A massive disk rotates about its vertical axis with angular velocity Ω . Another disk (of mass m and radius r) whose axis is strictly vertical is lowered on the first one (see figure Рис. 3). The distance between the axes is d ($d > r$). The friction coefficient between the disks is μ . Determine the steady-state angular velocity of the small disk. What moment of force must be applied to the axis of the large disk for its angular velocity to remain constant? There is no friction in the axles.

S. Krotov

P750*. When the voltage on the element \mathcal{E} varies, the current through it varies as shown on the figure Рис. 4. How will the voltage on the element \mathcal{E} vary with time if it is in the circuit on figure Рис. 5, where the parameters of the circuit are indicated? What is the minimal resistance of a resistor parallel to the element \mathcal{E} so that the voltage on it doesn't remain constant?

Z. Rafailov

P751. A thin hoop of radius R is put on a horizontal rough-surfaced cylinder of radius r (see figure Рис. 6). Find the oscillation period of the hoop in the vertical plane.

K. Sergeev

P752. A uniformly lighted vertical plane Π is placed at the distance $L_1 = 5\text{m}$ from a thin convergent lens of focal distance $F = 10\text{cm}$ (see figure Рис. 7). A vertical opaque plate of thickness $l = 5\text{cm}$ with an aperture of diameter $d = 1\text{cm}$ is located between the plane and the lens at the distance $L_2 = 1\text{m}$ from the latter, with the centre of the aperture on the optical axis of the lens. Describe the spot which appears on a screen placed in the focal plane of the lens to its right. (The inner walls of the aperture do not reflect light.)

A. Zilberman

Решения задач

M696—M700; Ф708—Ф712

M696. Можно ли таблицу 10×10 клеток заполнить 100 различными натуральными числами так, чтобы для любого квадрата $k \times k$ клеток ($2 < k < 10$) а) суммы, б) произведения k чисел на его диагоналях были одинаковы?

а) Ответ: можно. Назовем таблицу *подходящей*, если для любого квадрата $k \times k$ клеток ($2 < k < 10$) суммы k чисел на его диагоналях одинаковы.

Примером подходящей таблицы является таблица 1 (убедитесь в этом). Заметим теперь, что, если ко всем числам какой-либо строки подходящей таблицы прибавить одно и то же число, таблица останется подходящей.

В самом деле, если квадрат $k \times k$ не пересекается с измененной строкой, то суммы чисел на его диагоналях не меняются. В противном случае обе диагонали этого квадрата пересекаются с измененной строкой ровно по одной клетке, и суммы чисел, стоящих на его диагоналях, остаются равными.

Теперь легко построить таблицу, удовлетворяющую условию задачи. Для этого достаточно к строкам таблицы 1 добавить некоторые числа так, чтобы в результате все числа таблицы оказались различными. Например, первую строку оставляем неизменной, ко второй добавляем 10, к третьей 20, и так далее. Полученная таблица 2 удовлетворяет условию.

Таблица 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Таблица 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

б) Решается аналогично пункту а) (нужно только все числа a , стоящие в клетках таблиц 1, 2, заменить на числа 2^a).

А. Балковский

M697. Назовем пузатостью прямоугольника отношение его меньшей стороны к большей (пузатость квадрата равна 1). Докажите, что, как бы ни разрезать квадрат на прямоугольники, сумма их пузатостей будет не меньше 1.

Будем считать, что длина стороны квадрата равна 1. Пусть $a_k \times b_k$ — размеры прямоугольников разбиения, причем $a_k > b_k$ ($k=1, 2, \dots, n$). Поскольку $a_k < 1$ при всех k ,

$$\frac{b_1}{a_1} + \frac{b_2}{a_2} + \dots + \frac{b_n}{a_n} > a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n = 1$$

(в правой части стоит площадь квадрата).

Отметим, что равенство в написанном неравенстве возможно лишь, если все $a_k=1$ ($k=1, 2, \dots, n$), то есть если квадрат разбит на полосы отрезками, параллельными его сторонам.

Интересно выяснить, какую оценку суммы пузатостей прямоугольников разбиения можно дать для данного прямоугольника площади 1 и пузатости k .

С. Фомин

M698. На сторонах a, b, c, d вписанного в окружность четырехугольника «наружу» построены прямоугольники размерами $a \times c, b \times d, c \times a, d \times b$. Докажите, что центры этих прямоугольников являются вершинами а) параллелограмма, б) прямоугольника.

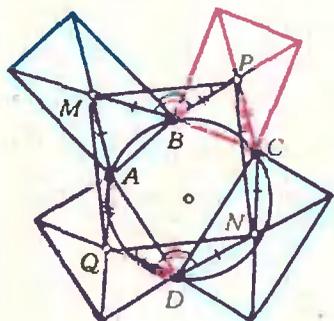
а) Пусть M, P, N, Q — центры прямоугольников, построенных на сторонах AB, BC, CD и DA вписанного четырехугольника $ABCD$ (см. рисунок).

Поскольку в четырехугольнике, вписанном в окружность, суммы противоположных углов равны 180° , а прямоугольники, построенные на противоположных сторонах, конгруэнтны, то $\widehat{MBP} = \widehat{NDQ}$ и $\widehat{NCP} = \widehat{MAQ}$ (мы рассматриваем углы, меньшие 180°). Таким образом, $\triangle MBP \cong \triangle NDC$ и $\triangle NCP \cong \triangle MAQ$. Отсюда $|MP| = |NQ|$ и $|NP| = |MQ|$, а это означает, что четырехугольник $MPNQ$ — параллелограмм.

б) Можно считать, что сторона MQ параллелограмма видна из точки A изнутри параллелограмма, сторона PN видна из точки C снаружи и, аналогично, сторона MP видна из точки B изнутри, а сторона NQ из точки D видна снаружи. Тогда расположение всех отрезков и треугольников будет таким, как показано на рисунке.

Докажем, что $\widehat{MPN} + \widehat{MQM} = 180^\circ$ (отсюда будет следовать, что $\widehat{MPN} = \widehat{MQM} = 90^\circ$). Эта сумма, очевидно, равна $\widehat{BPC} + \widehat{DQA} = 180^\circ$, поскольку $\widehat{BPM} = \widehat{DQN}$, а $\widehat{CPN} = \widehat{AQM}$.

О. Пенкин



M699. Полуокруг с диаметром AB разрезан отрезком CD , перпендикулярным AB , на два криволинейных треугольника ACD и BDC , в которые вписа-

а) Пусть O — центр данного полуокруга. Будем считать, что $|AO| = 1$. Пусть, для определенности, точка C лежит между точками B и O и $|OC| = a$ (см. рисунок).

Применяя теорему Пифагора к треугольникам ADC и ODC , получаем $|AD|^2 - |AC|^2 = |OD|^2 - |OC|^2$, то есть

ны окружности, касающиеся AB в точках E и F (см. рисунок). Докажите, что а) $|AD| = |AF|$, б) $|DF|$ — биссектриса угла BDC , в) величина угла EDF не зависит от выбора точки C и AB .

$$|AD|^2 = |AC|^2 + |OD|^2 - |OC|^2, \text{ или } |AD|^2 = (1+a)^2 + 1 - a^2 = 2+2a.$$

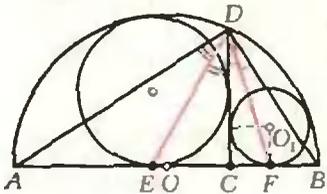
Пусть O_1 — центр окружности, вписанной в криволинейный треугольник BDC , r — ее радиус. Из прямоугольного треугольника OO_1F находим $(1-r)^2 = r^2 + (a+r)^2$, или $(a+r)^2 + 2r = 1$. Поскольку $|AF|^2 = (1+a+r)^2 = 1+2a+2r+(a+r)^2 = 2+2a$, получаем $|AF| = |AD|$. (Аналогично доказывается $|BD| = |BE|$.)

б) Треугольник ADF — равнобедренный, так что $\widehat{AFD} = \widehat{ADF}$. Далее, $\widehat{AFD} = \widehat{BDF} + \widehat{DBF}$, $\widehat{ADF} = \widehat{ADC} + \widehat{CDF}$ и $\widehat{ADC} = \widehat{DBF}$; поэтому $\widehat{CDF} = \widehat{BDF}$.

в) из решения пункта б) следует, что $\widehat{EDF} = \widehat{EDC} + \widehat{CDF} = \frac{1}{2} \widehat{ADB} = \frac{\pi}{4}$.

В. Сендеров

М700. Можно ли множество всех конечных десятичных дробей разбить на а) два, б) три класса так, чтобы в один класс не попали два числа с разностью 10^m (ни при каком целом $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$)?



Ф708. Для исследования свойств нелинейного резистора был произведен ряд экспериментов. Вначале была исследована зависимость сопротивления резистора от температуры. При повышении температуры до значения $t_1 = 100^\circ\text{C}$ мгновенно происходил скачок сопротивления от величины $R_1 = 50$ Ом до величины $R_2 = 100$ Ом; при охлаждении обратный скачок происходил при температуре $t_2 = 99^\circ\text{C}$ (рис. 1).

Во втором опыте к резистору приложили постоянное напряжение $U_1 = 60$ В, при котором его температура оказалась равной $t_3 = 80^\circ\text{C}$.

Наконец, когда к резистору приложили постоянное напряжение $U_2 = 80$ В, в цепи возникли самопроизвольные колебания тока. Определите период этих колебаний, а также максимальное значение тока. Температура воздуха в лаборатории постоянная и равна $t_0 = 20^\circ\text{C}$. Теплоотдача от резистора пропорциональна разности температур резистора и окружающего воздуха. Теплоемкость резистора $c = 3$ Дж/К.

а) Ответ: нельзя. Достаточно заметить, что уже числа $0, 1, 2, \dots, 10$ невозможно разбить на две части так, чтобы числа 0 и 10 находились в разных частях и чтобы никакая часть не содержала двух последовательных чисел (убедитесь в этом).

б) Ответ: можно. Разобьем множество всех конечных десятичных дробей на 3 класса, объединив в один класс те дроби, суммы цифр которых дают одинаковые остатки при делении на 3. Легко видеть, что разность двух любых дробей, принадлежащих одному классу, имеет сумму цифр, делящуюся на 3, и поэтому не равна 10^k ни при каком $k \in \mathbb{Z}$.

А. Лейдерман

Тепловая мощность, выделяющаяся при прохождении тока через резистор, частично идет на нагревание резистора, частично рассеивается в окружающее пространство. В состоянии теплового равновесия (когда температура резистора остается постоянной) вся выделяющаяся мощность рассеивается.

Обозначим через α коэффициент пропорциональности между рассеиваемой на резисторе мощностью и разностью температур резистора и окружающего воздуха.

При температуре $t_3 = 80^\circ\text{C}$ сопротивление резистора равно $R_1 = 50$ Ом (см. рис. 1), и $U_1^2/R_1 = \alpha(t_3 - t_0)$ (где $U_1 = 60$ В), откуда

$$\alpha = U_1^2/R_1(t_3 - t_0) = 1,2 \text{ В}^2/(\text{Ом} \cdot \text{град}).$$

Самопроизвольные колебания тока при напряжении на резисторе $U_2 = 80$ В происходят в результате колебаний значения сопротивления резистора. Когда температура резистора становится равной $t_1 = 100^\circ\text{C}$, сопротивление его скачком увеличивается от $R_1 = 50$ Ом до $R_2 = 100$ Ом. В результате уменьшается тепловая мощность, выделяющаяся на резисторе, резистор начинает охлаждаться (отвод тепла происходит быстрее, чем выделение). Когда температура резистора падает до 99°C , сопротивление его скачком уменьшается от 100 Ом до 50 Ом. Тепловая мощность, выделяющаяся на резисторе, увеличивается, резистор вновь нагревается (выделение тепла происходит быстрее, чем отвод). При температуре $t_1 = 100^\circ\text{C}$ вновь происходит скачок сопротивления, и процесс повторяется.

Период колебаний тока в цепи равен $T = \tau_1 + \tau_2$, где τ_1 — время нагрева резистора от 99°C до 100°C , τ_2 — время охлаждения от 100°C до 99°C .

Запишем уравнение теплового баланса:

$$\frac{U_2^2}{R_1} \tau_1 = \tau_1 \alpha (t_1 - t_0) + c(t_1 - t_2),$$

$$\frac{U_2^2}{R_2} \tau_2 = \tau_2 \alpha (t_1 - t_0) - c(t_1 - t_2)$$

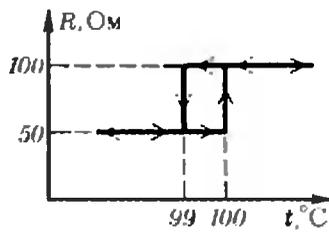


Рис. 1.

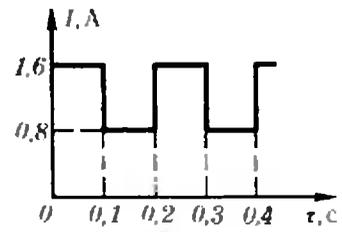


Рис. 2.

(поскольку температура резистора меняется очень незначительно, можно считать, что отводимая тепловая мощность постоянна и равна $\alpha(t_1 - t_0)$).

Подставляя числовые данные, находим:

$$\bar{\tau}_1 = \bar{\tau}_2 \approx 0,1 \text{ с} \Rightarrow T \approx 0,2 \text{ с.}$$

Максимальное значение тока равно, очевидно,

$$I_{\text{max}} = U_2 / R_1 = 1,6 \text{ А.}$$

Минимальное значение —

$$I_{\text{min}} = U_2 / R_2 = 0,8 \text{ А.}$$

На рисунке 2 приведен график изменения тока в цепи со временем.

А. Буздин

Ф710.*) При наблюдении в облаке за падением капли, которая увеличивается в размерах, поглощая мельчайшие капельки, встречающиеся на ее пути, было установлено, что капля движется все время с постоянным ускорением. Определите это ускорение, считая начальным размер капли малым. Сопротивлением воздуха при движении капли пренебречь.

Изменение импульса падающей капли переменной массы за малое время Δt равно

$$\Delta(mv) = mg \cdot \Delta t. \tag{1}$$

По условию задачи изменение массы капли за время Δt равно

$$\Delta m = \alpha q v_{\text{ср}} s \cdot \Delta t, \tag{2}$$

где q — плотность воды, $v_{\text{ср}}$ — средняя скорость капли за время Δt , $s = 4\pi r^2$ — площадь поверхности капли, α — безразмерный коэффициент пропорциональности. С другой стороны, поскольку $m = 4/3\pi r^3 \rho$ (r — радиус капли),

$$\Delta m = 4\pi r^2 \rho \cdot \Delta r = s \rho \cdot \Delta r.$$

Если за время Δt капля проходит расстояние Δy , то $\Delta t = \Delta y / v_{\text{ср}}$. Подставив выражения для Δm и Δt в (2), получим

$$\Delta r = \alpha \cdot \Delta y \sim \Delta y.$$

Следовательно, радиус капли растет пропорционально пройденному пути, то есть $r \sim y$.

Поскольку капля движется с постоянным ускорением a , $y = at^2/2 \sim t^2$. Значит, $r \sim t^2$, $m \sim r^3 \sim t^6$. Учитывая эти соотношения, из (1) получаем

$$\Delta(t^6 a t) \sim t^6 g \cdot \Delta t.$$

Выполняя слева дифференцирование, находим a :

$$\Delta(at^7) = 7at^6 \cdot \Delta t = t^6 g \cdot \Delta t \Rightarrow a = g/7.$$

А. Стасенко

Ф711. В таблице приведены экспериментальные данные о теплоемкостях и молярных массах некоторых твердых тел (первые две строки таблицы). На основании этих данных установить некоторую физическую закономерность и заполнить три пустые клеточки

Если внимательно посмотреть на таблицу, то можно увидеть, что произведение удельной теплоемкости c (Дж/(г·К)) на молярную массу A (г/моль), то есть молярная теплоемкость $C = cA$ (Дж/(моль·К)), для всех приведенных в таблице металлов есть величина, примерно постоянная (значения C приведены в третьей строке таблицы) и близкая к $3R = 24,93$ Дж/(моль·К). Этот экспериментальный факт известен как закон Дюлонга и Пти. Среднее значение C для десяти приведенных в таблице металлов равно 25,02 Дж/(моль·К). Максимальное отклонение от среднего равно $-0,7$ для алюминия и $+0,8$ для никеля, то есть относительное отклонение не превышает $3 \div 4\%$. Разумно ожидать, что и для таких металлов, как титан, железо, магний, молярная теплоемкость должна быть близка к 25 Дж/(моль·К) с такой же примерной точностью.

*) Решение задачи Ф709 — в статье А. Знайбермана «Два способа расчета электрических цепей» на с. 33.

таблицы. Какова предполагаемая точность ваших предсказаний (в процентах)? Универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$.

Теперь легко заполнить оставшиеся пустыми клеточки таблицы: для железа $A \approx 56 \text{ г}/\text{моль}$; для магния $c \approx 1,04 \text{ Дж}/(\text{г} \cdot \text{К})$; для титана $c \approx 0,52 \text{ Дж}/(\text{г} \cdot \text{К})$.

Приведем экспериментальные значения молярной теплоемкости этих металлов: для железа $C = 25,02 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$;

	Серебро	Алюминий	Золото	Висмут	Кобальт	Медь	Железо	Литий	Магний	Никель	Платина	Титан	Ванадий
c , Дж/(г · К)	0,238	0,90	0,128	0,122	0,417	0,383	0,447	3,52		0,43	0,131		0,484
A , г/моль	107	27	197	209	59	64		7	24	60	196	48	51
C , Дж/(моль · К)	25,47	24,31	25,22	25,5	24,6	24,5		24,64		25,8	25,7		24,7

для магния $C = 24,6 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$; для титана $C = 25,02 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{К})$.

Е. Сурков

Ф712. Небольшой шарик движется с постоянной скоростью \vec{v}_0 по гладкой горизонтальной поверхности и попадает в точку A в цилиндрический вертикальный колодец глубины H и радиуса R . Вектор скорости шарика составляет угол α с диаметром колодца, проведенным в точку A (рис. 1). При каком соотношении между \vec{v}_0 , H , R и α шарик после упругих соударений со стенками и дном сможет «выбраться» из колодца?

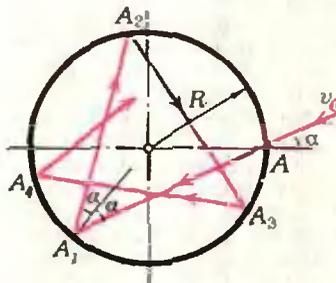


Рис. 1.

На рисунке 1 приведен вид сверху на траекторию движения шарика.

Поскольку соударения шарика со стенкой и дном колодца упругие, абсолютное значение горизонтальной проекции скорости шарика остается неизменным и равным v_0 . Расстояния по горизонтали между точками, в которых происходят два последовательных соударения, равны $|AA_1| = |A_1A_2| = \dots = |A_2A_3| = \dots = 2R \cos \alpha$. Время между двумя последовательными соударениями шарика со стенкой колодца равно $t_1 = 2R \cos \alpha / v_0$.

Вертикальная проекция скорости шарика при соударениях со стенкой не изменяется, а при соударении с дном меняет знак на противоположный. Абсолютное значение вертикальной проекции при первом ударе о дно равно $\sqrt{2gR}$; время движения от вершины колодца до дна равно $t_2 = \sqrt{2H/g}$.

На рисунке 2 представлена вертикальная развертка многогранника $A_1A_2A_3\dots$. Следы траектории шарика на такой развертке — параболы (целые параболы — следы траектории между последовательными ударами о дно). Понятно, что шарик сможет «выбраться» из колодца, если момент максимального подъема по параболе совпадет с моментом соударения со стенкой (то есть в момент максимального подъема шарик окажется в точке A_n на границе колодца). Это означает, что времена t_1 и t_2 должны быть связаны

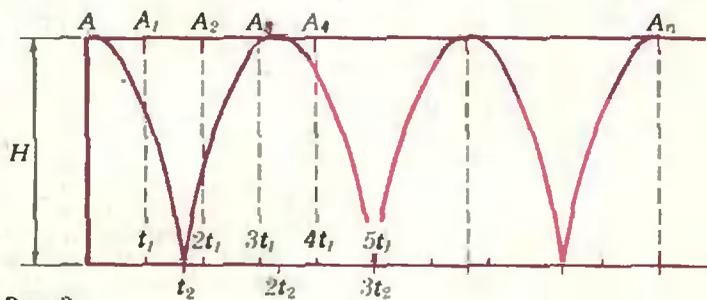


Рис. 2.

соотношением

$$n t_1 = k 2 t_2,$$

где n и k — целые взаимно простые числа. Подставляя значения t_1 и t_2 , находим соотношение между v_0 , H , R и α , при котором шарик может «выбраться» из колодца:

$$n \frac{R \cos \alpha}{v_0} = k \sqrt{\frac{2H}{g}}$$

С. Кротов

А. Зильберман

Два способа расчета электрических цепей

Для расчета электрических цепей часто пользуются уравнениями Кирхгофа. Однако в случае сложных цепей (с большим числом ветвей) уравнения эти содержат много неизвестных, довольно громоздки. На практике удобно применять более простой способ — *метод узловых потенциалов*. В качестве неизвестных при этом выбираются потенциалы узлов цепи. Поскольку нас всегда интересуют не сами потенциалы, а их разности, то потенциал одного из узлов (любого) можно считать равным нулю. Тогда число неизвестных окажется на единицу меньше числа узлов. Выразив токи в ветвях через введенные потенциалы (закон Ома для участков цепи) и записав уравнения для узлов — сумма токов, втекающих в узел, равна сумме вытекающих из узла токов, — мы получим как раз столько уравнений, сколько неизвестных величин. Найдя потенциалы, мы легко сможем найти токи в ветвях.

Для примера решим методом узловых потенциалов несложную задачу.

Задача. В схеме, показанной на рисунке 1, найти ток, текущий через резистор с сопротивлением R .

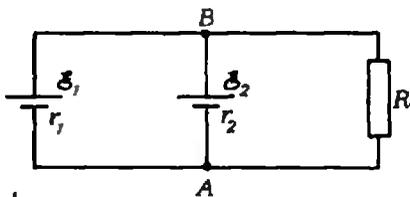


Рис. 1.

Обозначим потенциалы точек A и B соответственно $\varphi_A = 0$, $\varphi_B = \varphi$. Тогда токи, текущие через батареи и резистор, равны, соответственно,

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1 - \varphi}{r_1}, \quad I_2 = \frac{\mathcal{E}_2 - \varphi}{r_2}, \quad I_R = \frac{\varphi}{R}.$$

Запишем уравнение для узла B :

$$\frac{\mathcal{E}_1 - \varphi}{r_1} + \frac{\mathcal{E}_2 - \varphi}{r_2} = \frac{\varphi}{R}.$$

Отсюда находим φ :

$$\varphi = \frac{(\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1) R}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)}.$$

Ток, текущий через резистор, равен

$$I_R = \frac{\varphi}{R} = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)}.$$

Метод узловых потенциалов дает особенно большую «экономню» уравнений для схем с малым числом узлов. (Например, если в предыдущей задаче включить в цепь сколько угодно батарей, уравнение все равно получится только одно!)

У этого метода есть «близнец» — метод контурных токов, позволяющий «экономить» уравнения для узлов. Подумайте сами: как выбирать неизвестные величины в этом методе (его название — это подсказка)? Однако на практике метод узловых потенциалов оказывается все-таки удобнее.

Еще один способ расчета цепей — *метод наложения*. Он основан на принципе суперпозиции и подходит только для цепей, не содержащих нелинейные элементы (если в схеме есть, например, диод или лампа накаливания, то этот способ применить нельзя). Метод наложения используется для расчета цепей, содержащих несколько источников ЭДС, и позволяет свести задачу к нескольким простым.

Расчет проводят так. Рисуют и рассчитывают упрощенные схемы, в каждую из которых включен только один из источников, а ЭДС остальных равны нулю; при этом внутреннее сопротивление «выкинутых» источников включают в соответствующие участки схем. Ясно, что число таких схем равно числу источников в начальной схеме. Искомый ток в ветви находят, суммируя токи, текущие по этой ветви во всех простых схемах.

В качестве примера решим методом наложения предыдущую задачу.

На рисунке 2 приведены простые схемы. Ток, текущий через R , в схеме 2,а равен

$$I_1 = \frac{\mathcal{E}_1}{r_{\text{общ.1}}(R+r_2)} = \frac{\mathcal{E}_1}{r_1+r_2} \frac{r_2}{(R+r_2)} = \frac{\mathcal{E}_1 r_2}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)},$$

а в схеме 2,б —

$$I_2 = \frac{\mathcal{E}_2}{r_{\text{общ.2}}(R+r_1)} = \frac{\mathcal{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)}.$$

В исходной схеме (см. рисунок 1) ток, текущий через резистор, равен

$$I = I_1 + I_2 = \frac{\mathcal{E}_1 r_2 + \mathcal{E}_2 r_1}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)}.$$

И все же обычно удобнее оказывается метод узловых потенциалов. Однако для некоторых специальных задач — например, для

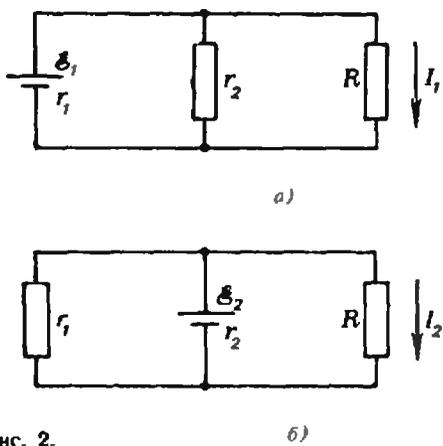


Рис. 2.

расчета изменения тока в какой-либо ветви схемы при изменении ЭДС одного из источников — метод наложения очень удобен. Изменение ЭДС на величину $\Delta \mathcal{E}$ можно представить как добавление к данному источнику последовательно батареи без внутреннего сопротивления с ЭДС, равной $\Delta \mathcal{E}$. Понятно, что в этом случае нет надобности рассчитывать все простые схемы; достаточно рассмотреть только одну — с ЭДС $\Delta \mathcal{E}$. Полученные при этом значения токов в ветвях и будут искомыми изменениями токов.

Найдем, например, изменение тока через батарею \mathcal{E}_2 (в предыдущей задаче) при изменении ЭДС первой батареи (\mathcal{E}_1) на $\Delta \mathcal{E}$. Воспользуемся схемой, аналогичной 2, а, в которой на месте \mathcal{E}_1 включена батарея с ЭДС $\Delta \mathcal{E}$. В такой схеме ток, текущий через r_2 , равен

$$\Delta I = \frac{\Delta \mathcal{E}}{r_{\text{общ}}} \cdot \frac{R}{(r_2 + R)} = \frac{\Delta \mathcal{E} \cdot R}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)}$$

Это и есть изменение тока через батарею \mathcal{E}_2 при изменении ЭДС \mathcal{E}_1 на $\Delta \mathcal{E}$.

Решим методом наложения задачу Ф709. Напомним ее условие.

Ф709. Собрана схема, показанная на рисунке 3. ЭДС батареи \mathcal{E}_1 уменьшили на 1,5 В, после чего токи на различных участках цепи изменились. Как нужно изменить ЭДС батареи \mathcal{E}_2 , чтобы

- 1) ток через батарею \mathcal{E}_2 стал прежним?
 - 2) ток через батарею \mathcal{E}_1 стал прежним?
- Внутренними сопротивлениями батарей пренебречь.

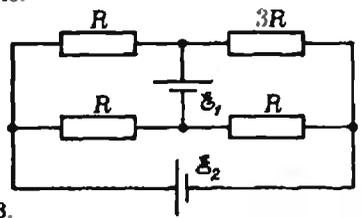


Рис. 3.

На рисунке 4 представлены простые схемы для цепи, в которой \mathcal{E}_1 заменено на $\Delta \mathcal{E}_1$, а \mathcal{E}_2 — на $\Delta \mathcal{E}_2$, где $\Delta \mathcal{E}_2$ и есть искомое изменение ЭДС \mathcal{E}_2 . Для того чтобы ток через вторую батарею остался прежним, токи, текущие через эту батарею (то есть через ветви, из которых эта батарея «выкинута») в схемах 4, а и 4, б, должны быть равными по величине и противоположными по направлению.

В схеме 4, а ток, текущий от батареи $\Delta \mathcal{E}_1$, разветвляется, и в диагональ получившегося моста течет ток ΔI , равный разности токов-разветвлений:

$$\Delta I = \frac{\Delta \mathcal{E}_1}{R_{\text{ли}}} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{\Delta \mathcal{E}_1}{5R/4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\Delta \mathcal{E}_1}{5R}$$

В схеме 4, б

$$\Delta I = \frac{\Delta \mathcal{E}_2}{R_{\text{сд}}} = \frac{\Delta \mathcal{E}_2}{5R/4} = \frac{4\Delta \mathcal{E}_2}{5R}$$

Приравняв полученные выражения для ΔI , найдем $\Delta \mathcal{E}_2$:

$$\Delta \mathcal{E}_2 = \Delta \mathcal{E}_1 / 4$$

Знаки изменений найдем, сравнив полярность батарей в исходной схеме (рис. 3) и в схемах 4, а и 4, б. В нашем случае батарея $\Delta \mathcal{E}_1$ включена против батареи \mathcal{E}_1 (суммарная ЭДС меньше \mathcal{E}_1), и батарея $\Delta \mathcal{E}_2$ условно нарисована против батареи \mathcal{E}_2 , при этом мы получили $\Delta \mathcal{E}_2 < 0$ — ЭДС батареи \mathcal{E}_2 следует уменьшить. Если бы оказалось, что $\Delta \mathcal{E}_2 > 0$, это означало бы, что ЭДС \mathcal{E}_2 следует увеличить.

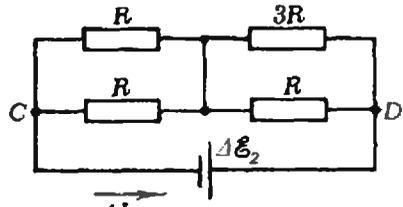
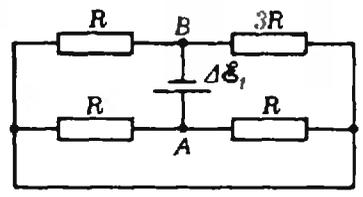


Рис. 4.

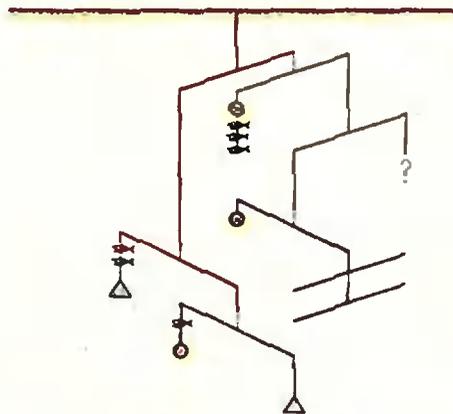
Аналогично находится изменение \mathcal{E}_2 для случая сохранения тока через батарею \mathcal{E}_1 .

Эту задачу можно решать и любым другим способом, но метод наложения дает, пожалуй, самое простое и наглядное решение.

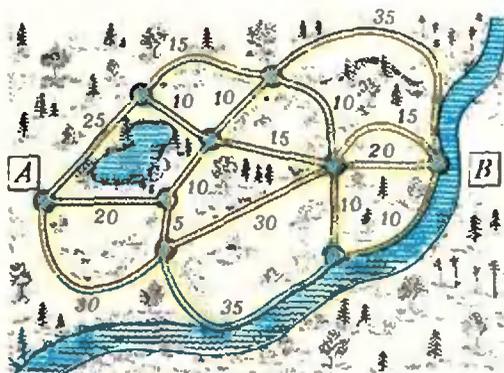
Методы узловых потенциалов и наложения можно использовать и для расчета цепей переменного тока. При этом, суммируя токи, нельзя забывать про фазы.

Задачи

1. Английский популяризатор математики Бернارد назвал эту конструкцию из рыбок, шариков, конусов и палочек (см. рисунок) «Эквилябр», объединив слова «Эквилибристика» и «Канделябр». Какую массу надо привесить к «свободной палочке» (знак ? на рисунке), чтобы «Эквилябр» находился в равновесии? Найдите массу каждой фигурки, если известно, что масса палочки 10 г.



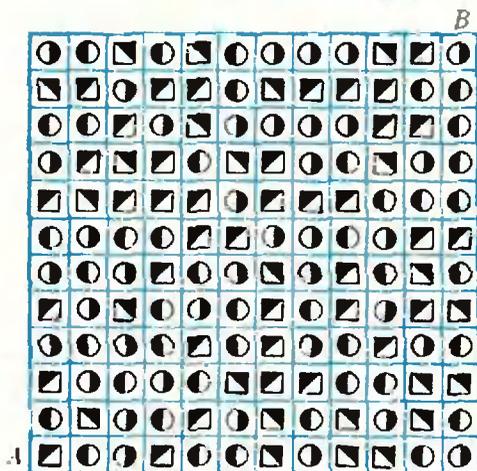
2. Группа туристов хочет попасть из деревни А в деревню В за кратчайшее время (см. рисунок; рядом с каждой дорогой указано время, которое тратится на ее прохождение). Какой маршрут должны избрать туристы?



3. От основания башни в верхнем красном углу нужно за 10 шагов пройти в нижний красный угол (см. рисунок; шаг — это проход через один участок с числом внутри) так, чтобы сумма чисел на пройденных участках равнялась 60. Как это сделать?



4. Найдите путь от А до В, проходящий через расположенные в квадрате 12×12 кружочки и квадратики (см. рисунок), чтобы он состоял из четверок $\blacksquare \blacksquare \circ \circ$ (именно в такой последовательности).



Эти задачи заимствованы из книги Лемана (Z. Lehman) «Kurzweil durch Mathe» (Берлин, 1980).

А. Калинин

Причеши ежа

Обратили ли вы внимание на рисунок на четвертой странице обложки? Многогранник с причудливо торчащими колючими гранями и есть тот самый «еж», который нам предстоит «причесать». Еж-головоломка состоит из 8 деревянных пятигранников, скрепленных резинкой: поворачивая друг относительно друга половинки ежа, ему нужно придать правильную, «причесанную» форму (рис. 1).

Но прежде чем причесывать ежа, его нужно изготовить.

Сделаем ежа

Проще всего нашу головоломку изготовить из детских деревянных кубиков. Для этого понадобится восемь кубиков (для тех, кто хорошо разбирается в геометрии, достаточно трех). Нужны еще обрезки тонкой резинки и восемь колечек, которые можно нарезать из пластмассовой трубки. Вместо колечек подойдут и маленькие пуговицы. Мы советуем головоломку делать в следующей последовательности:

1. Из кубиков выпилите 8 пятигранников (рис. 2).

2. Закруглите ножом и напильником края взаимно перпендикулярных граней, чтобы они не задевали друг за друга при вращении.

3. Просверлите внутри каждого пятигранника канал, идущий от вершины, в которой сходятся три пря-

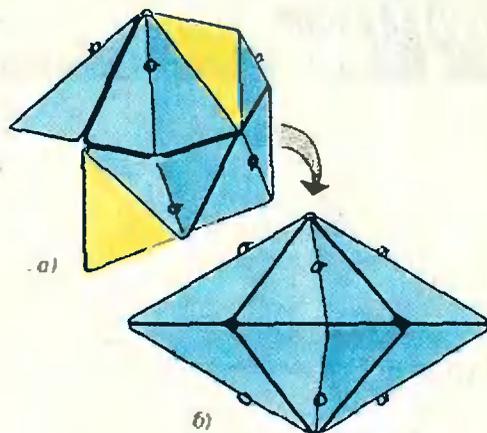


Рис. 1.

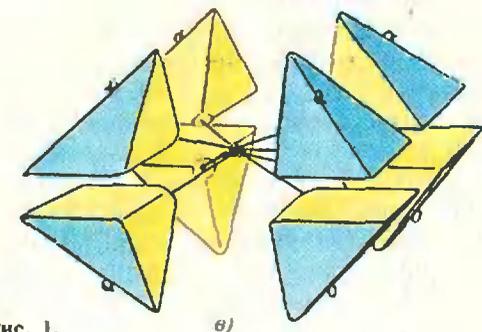


Рис. 2.

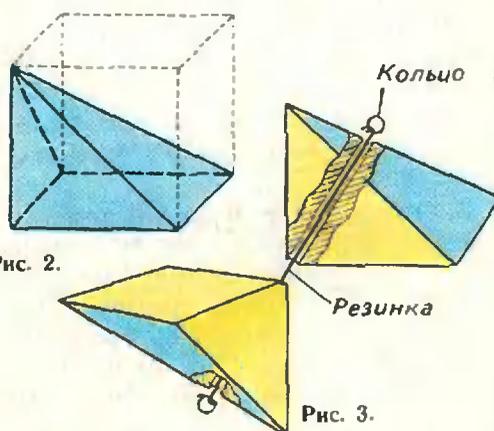


Рис. 3.

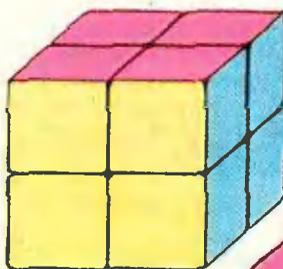


Рис. 4.

Рис. 5.



мых угла, в точку на противоположном ребре (рис. 3). Каналы можно просверлить гвоздем или тонким сверлом.

4. Через каналы двух пятигранников пропустите резинку и завяжите ее за колечки или пуговицы так, как показано на рисунке 3. То же самое сделайте с тремя остальными парами. Учтите, что на рисунке 3 резинка показана в растянутом виде. Нужно, чтобы она прижимала пятигранники друг к другу.

5. Раскрасьте грани головоломки, трущиеся части зачистите шкуркой, покройте лаком, и снова зачистите.

6. Соберите головоломку, зацепив друг за друга соединенные резинками четыре пары пятигранников, так, чтобы получился «причесанный» еж (рис. 1, в).

Теперь вы можете играть: несколько раз поверните одну половинку головоломки относительно другой. Делайте это в разных плоскостях. После поворотов грани головоломки начинают «торчать» в разные стороны. Это видно на обложке журнала и на рисунке 1, а. Теперь попробуйте вернуть головоломку в первоначальное положение. Для вас будет неожиданным, что это окажется трудной задачей. Трудной, но и очень интересной.

При игре имейте в виду, что резиновый шарнир выдерживает около 100 поворотов, после чего необходимо потратить несколько минут на распутывание резинок — и головоломка будет снова готова к игре.

Откуда взялся еж?

В науке и технике бывает так, что одно открытие дает толчок к быстрому появлению множества новых интересных идей и изобретений. Что-то похожее произошло и с головоломкой «Волшебный кубик». Можно считать, что наш еж является родственником знаменитого кубика.

В «Волшебном кубике» 26 маленьких кубиков группами по девять вращаются в шести плоскостях. При этом получается очень трудная головоломка, так как число возможных расположений маленьких кубиков

в большом превышает 43 квинтиллиона, то есть $43 \cdot 10^{18}$ (поэтому нахождению единственного правильного состояния кубика и приходится посвящать несколько страниц журнала).

Если уменьшить количество кубиков, расположенных вдоль ребра головоломки, с трех до двух, получится головоломка из восьми кубиков (рис. 4). Она тоже не тривиальна — ей посвящена другая статья в нашем журнале: «Поворачиваем кубики» («Квант», 1981, № 12)

Рассмотрим еще несколько идей, с помощью которых можно получить новые оригинальные головоломки. Наша цель — научиться придумывать и делать самим волшебные головоломки разной сложности.

Идея первая: изменим форму

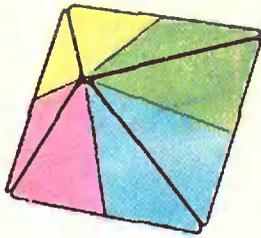
Если поставить себе целью придумать новую головоломку, то нетрудно прийти к мысли, что подвижными элементами головоломки не обязательно должны быть кубики. Да и сама головоломка может иметь вид не куба, а например, сферы (рис. 5). Сложность разгадывания головоломок на рисунках 4 и 5 одинакова. А вот если за основу головоломки вместо куба брать другие многогранники, то появятся новые головоломки различной сложности (рис. 6). В переходе от раскрашенного куба к другим цветным многогранникам состоит первая идея получения новых головоломок.

Чтобы понять, как и какие многогранники можно использовать для получения головоломок, отметим четыре их свойства:

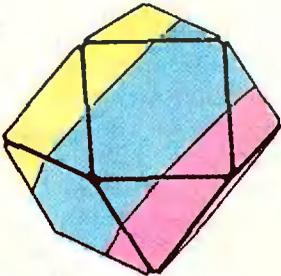
1. Все сечения, которые делают пополам цветной многогранник и позволяя его поворачивать, являются конгруэнтными правильными многогранниками, центры которых совпадают.

2. Таких сечений должно быть не менее трех.

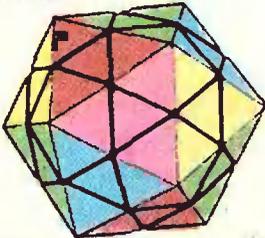
3. Сечения могут проходить по ребрам многогранника, как на рисунке 6 у октаэдра, кубооктаэдра и икосододекаэдра, или пересекать грани, как на том же рисунке у икосаэдра.



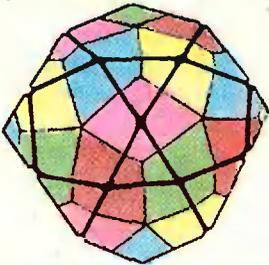
Октаэдр



Кубооктаэдр



Икосаэдр



Икосододекаэдр

Рис. 6.

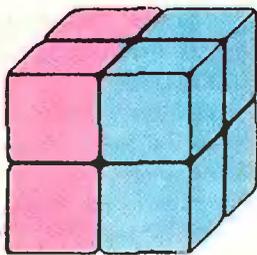


Рис. 7.

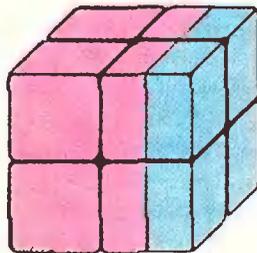


Рис. 8.

4. Каждый подвижный элемент цветного многогранника сам является многогранником, часть граней которого всегда находится снаружи головоломки, а остальные грани всегда целиком находятся внутри.

На основании описанных свойств и примеров, показанных на рисунке 6, вы сможете придумать свои варианты цветных многогранников-головоломок. Если у вас есть склонность к конструированию, подумайте о том, как сделать шарнирный механизм, обеспечивающий более надежную работу головоломки, чем наши резиночки. Советую в этой связи посмотреть статью М. Евграфова «Механика волшебного кубика» в предыдущем номере «Кванта».

Идея вторая: изменим раскраску

Если в одном из наших цветных многогранников все грани окрасить в один цвет, то никакой головоломки не будет. Головоломка с двухцветной окраской на рисунке 7 может находиться в семи различных состояниях. Это, конечно, очень простая головоломка. Но она резко усложняется, если, всего-навсего, сдвинуть границу окраски (рис. 8). Почему это происходит?

Дело в том, что красно-синие кубики головоломки из рисунка 8 могут оказаться, после серии поворотов, на своих местах, но иначе развернутыми (например, иметь горизонтальную синюю грань). Если ту же серию поворотов выполнить с головоломкой из рисунка 7, то соответствующие синие кубики будут выглядеть так же, как в первоначальном положении. Другими словами, одинаковым состояниям головоломки из рисунка 7 отвечают разные состояния головоломки со сдвинутой окраской. Головоломка усложнилась!

Комбинируя идеи изменения раскраски и формы, пользуясь идеей «торчащих граней», вы сможете придумать много разнообразных головоломок.

Рисунки ваших головоломок присылайте в редакцию. А, может быть, вы предложите и оригинальную конструкцию шарнирного механизма для них?



В. Рыжик

Надо ли искать ОДЗ?

Традиционный вид задач на вступительных экзаменах в вузы — уравнения, неравенства, системы (уравнений или неравенств).

Многочисленные пособия для школьников и абитуриентов при их решении часто дают безоговорочную рекомендацию: «Сначала ищем ОДЗ!» По-видимому, отголоском этой рекомендации является художественно оформленный призыв «Помни ОДЗ!», висевший в одном из ленинградских ПТУ.

Прежде всего заметим, что аббревиатуры ОДЗ в нынешних школьных учебниках нет. Словосочетание «Область Допустимых Значений» означает «область определения».

ОДЗ уравнения или неравенства — это, по определению, пересечение ОДЗ его левой и правой части.

Так, надо ли решение уравнения (неравенства, системы) начинать с поиска ОДЗ? Обязательно ли, решая уравнение (неравенство, систему), искать ОДЗ?

Мой ответ на эти вопросы состоит из трех частей: решая уравнение (неравенство, систему), искать ОДЗ, тем более — начинать решение с поиска ОДЗ, **не обязательно; как правило**, то есть в большей части уравнений (неравенств, систем), предлагаемых обычно на вступительных экзаменах, начинать решение с поиска ОДЗ **не надо; иногда**, в некоторых специально подобранных или более трудных уравнениях (неравенствах, си-

стемах), **полезно** начинать решение с установления ОДЗ.

Как правило, не надо

$$\sqrt{x^2-3x+4}=1-3x. \quad (1)$$

Уравнение (1) равносильно системе

$$\begin{cases} x^2-3x+4=(1-3x)^2 \\ 1-3x \geq 0, \end{cases} \quad (2)$$

решить которую уже нетрудно. (Между прочим, неравенство $x^2-3x+4 \geq 0$, определяющее ОДЗ уравнения (1), вытекает из уравнения, входящего в систему (2).) Можно также при желании от уравнения (1) перейти к выводному*) уравнению $x^2-3x+4=(1-3x)^2$ и найденные корни проверить. (Решив вместо уравнения (1) равносильную ему систему (2), проверку делать, конечно, не нужно.) Этот прием: переходить не к равносильному, а к выводному и делать проверку — надо иметь в виду и в других рассматриваемых примерах.

Легко доказать, что любое уравнение вида

$$\sqrt{f(x)}=g(x) \quad (3)$$

равносильно системе

$$\begin{cases} f(x)=[g(x)]^2 \\ g(x) \geq 0. \end{cases} \quad (4)$$

В самом деле. Если x_0 является корнем уравнения (3), то есть справедливо числовое равенство $\sqrt{f(x_0)}=g(x_0)$, то $f(x_0)=[g(x_0)]^2$ и $g(x_0) \geq 0$; значит, x_0 является решением системы (4). Если же, наоборот, x_0 является решением системы (4), то есть справедливо числовое равенство $f(x_0)=[g(x_0)]^2$ и $g(x_0) \geq 0$, то $\sqrt{f(x_0)}=\sqrt{[g(x_0)]^2}=|g(x_0)|$; поскольку $g(x_0) \geq 0$, $|g(x_0)|=g(x_0)$; значит, x_0 является корнем уравнения (3).

В уравнении (1) поиск ОДЗ приводит к ненужному, но легко выполняемому расчету. Однако иногда перед абитуриентом, привыкшим всегда искать ОДЗ, возникают непреодолимые трудности. Так, устанавливая ОДЗ уравнения $\sqrt{x^3-x+1}=\sqrt{1-x}$, он, вероятно, не справится с неравенством $x^3-x+1 \geq 0$, в то время как рассматриваемое уравнение равно-

* См. п. 74 пособия «Алгебра и начала анализа 9—10» (М., «Просвещение», 1981).

сильно системе

$$\begin{cases} x^3 - x + 1 = 1 - x \\ 1 - x \geq 0, \end{cases}$$

решаемой мгновенно.

Вообще, любое уравнение вида $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ равносильно «на выбор» каждой из систем

$$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) \geq 0. \end{cases}$$

Выбирая «более легкую» из них, обычно удается обойтись без поиска ОДЗ.

Уравнение $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-1} = 1$ равносильно уравнению

$$\sqrt{x+4} = 1 + \sqrt{x-1}, \quad (5)$$

которое, в свою очередь, равносильно уравнению

$$x + 4 = (1 + \sqrt{x-1})^2. \quad (6)$$

В самом деле, если x_0 является корнем уравнения (5), то оно, конечно, является и корнем уравнения (6): уравнение $[f(x)]^2 = [g(x)]^2$ в с е г д а, то есть при любых f и g , является выводным из уравнения $f(x) = g(x)$. Если же наоборот, x_0 является корнем уравнения (6), то есть справедливо числовое равенство $x_0 + 4 = (1 + \sqrt{x_0 - 1})^2$, то, прежде всего, $x_0 + 4 \geq 0$; значит, $\sqrt{x_0 + 4} = \sqrt{(1 + \sqrt{x_0 - 1})^2} = |1 + \sqrt{x_0 - 1}|$; поскольку $1 + \sqrt{x_0 - 1} \geq 0$, $|1 + \sqrt{x_0 - 1}| = 1 + \sqrt{x_0 - 1}$; следовательно, x_0 является корнем уравнения (5).

Уравнение (6) равносильно каждому из уравнений

$$\begin{aligned} x + 4 &= 1 + 2\sqrt{x-1} + x - 1, \\ \sqrt{x-1} &= 2, \\ x - 1 &= 4. \end{aligned}$$

Уравнение $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x-2} = 7$ равносильно, конечно, уравнению

$$\sqrt{x+3} = 7 - \sqrt{3x-2}, \quad (7)$$

но, в отличие от предыдущего случая, уравнение (7) не равносильно уравнению $x + 3 = (7 - \sqrt{3x-2})^2$; оно равносильно, ввиду доказанной выше равносильности (3) и (4), системе

$$\begin{cases} x + 3 = (7 - \sqrt{3x-2})^2 \\ 7 - \sqrt{3x-2} \geq 0 \end{cases}$$

и, далее, каждой из систем

$$\begin{cases} x + 3 = 49 - 14\sqrt{3x-2} + 3x - 2 \\ \sqrt{3x-2} \leq 7, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7\sqrt{3x-2} = x + 22 \\ \sqrt{3x-2} \leq 7, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 49(3x-2) = (x+22)^2 \\ 3x-2 \leq 49. \\ x+22 \geq 0. \end{cases}$$

Аналогично можно решить уравнение $\sqrt{x-2} + \sqrt{1-x} = 3$, однако в данном случае проще сразу заметить, что его ОДЗ есть пустое множество и, следовательно, корней оно не имеет.

* * *

Перейдем к неравенствам

$$3\sqrt{6+x-x^2} > 4x-2. \quad (8)$$

Неравенство (8) равносильно совокупности*) систем

$$\begin{cases} 4x-2 \geq 0 \\ 9(6+x-x^2) > (4x-2)^2 \end{cases} \quad (9)$$

$$\begin{cases} 4x-2 < 0 \\ 6+x-x^2 \geq 0. \end{cases}$$

(Решая вторую из систем (9), мы заодно находим ОДЗ неравенства (8).)

В самом деле, пусть сначала x_0 является решением неравенства (8), то есть справедливо числовое неравенство $3\sqrt{6+x_0-x_0^2} > 4x_0-2$. Докажем, что тогда x_0 является решением одной из систем (9). Рассмотрим два случая: $4x_0-2 > 0$ и $4x_0-2 < 0$. Если $4x_0-2 \geq 0$, то по одному из свойств числовых неравенств (если $a > b > 0$ и $n \in \mathbb{N}$, то $a^n > b^n$) $9(6+x_0-x_0^2) > (4x_0-2)^2$; таким образом, в этом случае x_0 является решением первой из систем (9). Если же $4x_0-2 < 0$, то x_0 является решением второй из систем (9), поскольку из справедливости неравенства $3\sqrt{6+x_0-x_0^2} > 4x_0-2$ вытекает, что выражение $\sqrt{6+x_0-x_0^2}$ имеет смысл, то есть $6+x_0-x_0^2 \geq 0$.

Пусть теперь x_0 является решением одной из систем (9). Докажем, что тогда x_0 является решением неравенства (8). Если x_0 является решением первой из систем (9), то по одному из свойств числовых неравенств (если $a > b \geq 0$, то $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$) $\sqrt{9(6+x_0-x_0^2)} > \sqrt{(4x_0-2)^2}$; поскольку $4x_0-2 \geq 0$, $3\sqrt{6+x_0-x_0^2} > 4x_0-2$, то есть x_0 является решением неравенства (8). Если же x_0 является решением второй из систем (9), то $\sqrt{6+x_0-x_0^2}$ имеет смысл и, естественно, $\sqrt{6+x_0-x_0^2} \geq 0$; из $4x_0-2 < 0$ следует $\sqrt{6+x_0-x_0^2} > 4x_0-2$, то есть x_0 опять является решением неравенства (8).

Легко доказать, что любое неравенство вида $\sqrt{f(x)} > g(x)$ равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > [g(x)]^2 \end{cases} \quad \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0. \end{cases}$$

(Неравенство $\sqrt{f(x)} \geq g(x)$ решается аналогично.)

Проще обстоит дело с решением неравенства вида $\sqrt{f(x)} < g(x)$; та-

*) См. сноску на с. 229 вышеуказанного пособия.

кое неравенство равносильно одной системе

$$\begin{cases} f(x) < [g(x)]^2 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Неравенство $\sqrt{x^3-x-1} > \sqrt{x^3-1}$ равносильно системе

$$\begin{cases} x^3-x-1 > x^3-1 \\ x^3-1 > 0. \end{cases}$$

Любое неравенство вида $\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)}$ равносильно системе

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0. \end{cases}$$

Решим два более сложных неравенства. (Проверьте, научились ли вы доказывать равносильность, — докажите каждую из указанных ниже равносильностей.)

$$18\sqrt{2x-3} - 9\sqrt[4]{(2x-3)(x-2)} > 2\sqrt{x-2}. \quad (10)$$

Неравенство (10) равносильно неравенствам

$$18 - 9\frac{\sqrt[4]{(2x-3)(x-2)}}{\sqrt{2x-3}} > 2\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2x-3}},$$

$$18 - 9\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2x-3}} - 2\left(\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2x-3}}\right)^2 > 0. \quad (11)$$

Множество решений вспомогательного неравенства $18 - 9t - 2t^2 > 0$ равно $[-6; \frac{3}{2}]$. Следовательно, неравенство (11) равносильно неравенству

$$0 < \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{2x-3}} < \frac{3}{2}. \quad (12)$$

Неравенство (12) равносильно системам

$$\begin{cases} 0 < \sqrt[4]{\frac{x-2}{2x-3}} < \frac{3}{2} \\ x-2 > 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases}$$

(чтобы написать систему, равносильную неравенствам (12), мы были вынуждены приписать неравенства, задающие фактически ОДЗ неравенствам (10))

$$\begin{cases} 0 < \frac{x-2}{2x-3} < \left(\frac{3}{2}\right)^4 \\ x-2 > 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{x-2}{2x-3} < \frac{81}{16} \\ x-2 > 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16(x-2) < 81(2x-3) \\ x-2 > 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16(x-2) < 81(2x-3) \\ x > 2. \end{cases}$$

Дальнейшее решение очевидно. Неравенство

$$\frac{(x-1)^2}{(3+\sqrt{8+x})^2} > x-7$$

равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} \frac{(x-1)^2}{(3+\sqrt{8+x})^2} > x-7 \\ 3-\sqrt{8+x} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(x-1)^2}{(3+\sqrt{8+x})^2} > x-7 \\ 3-\sqrt{8+x} \neq 0. \end{cases}$$

Первая из этих систем имеет решение $x=1$. Вторая система равносильна системам

$$\begin{cases} \frac{(x-1)^2(3-\sqrt{8+x})^2}{(3+\sqrt{8+x})^2(3-\sqrt{8+x})^2} > x-7 \\ 3-\sqrt{8+x} \neq 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{(x-1)^2(3-\sqrt{8+x})^2}{(1-x)^2} > x-7 \\ x \neq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} (3-\sqrt{8+x})^2 > x-7 \\ x \neq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{8+x} < 4 \\ x \neq 1. \end{cases}$$

С неравенством $\sqrt{8+x} < 4$ мы уже справляться научились.

Иногда полезно

Решать уравнение

$$\sqrt{2-x+x-3} = \sqrt{x-1} \quad (13)$$

возведением в квадрат «кисло» (получается полное уравнение четвертой степени). Поэтому найдем сначала ОДЗ уравнения — $[1; 2]$. На ОДЗ $\sqrt{2-x+x-3} \leq \sqrt{2-1+x-3} = x-2 \leq 0$.

С другой стороны, $\sqrt{x-1} \geq 0$. Следовательно, уравнение (13) равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{2-x+x-3} = \sqrt{x-1} \\ \sqrt{x-1} = 0. \end{cases}$$

которая, очевидно, не имеет решений.

И в уравнении

$$x^2 + x + \sqrt{x+1} = 2 + \sqrt{2} \quad (14)$$

возводить в квадрат плохо. ОДЗ уравнения (14) — луч $[-1; +\infty[$. На отрезке $[-1; 0]$

$$x^2 + x + \sqrt{x+1} < 0 + 1 = 1.$$

Значит, на этом отрезке уравнение (14) корней не имеет. При $x > 0$ функция $x^2 + x + \sqrt{x+1}$ возрастает, и поэтому уравнение (14) не может иметь на луче $[0; +\infty[$ больше одного корня. Один корень: $x=1$ — легко угадывается.

Уравнение

$$\sqrt{x-5} - \sqrt{2x-1} = x^2 + 3 \quad (15)$$

равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{x-5} - \sqrt{2x-1} = x^2 + 3 \\ \sqrt{x-5} > \sqrt{2x-1}, \end{cases} \quad (16)$$

поскольку добавление к уравнению (неравенству, системе) его следствия приводит к равносильной системе. На ОДЗ $[5; +\infty[$ система (16) равносильна системам

$$\begin{cases} \sqrt{x-5} - \sqrt{2x-1} = x^2 + 3 \\ x-5 > 2x-1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt{x-5} - \sqrt{2x-1} = x^2 + 3 \\ x < -4. \end{cases}$$

Значит, уравнение (15) корней не имеет.

Неравенство $\sqrt{x^2-2x} + \sqrt{4-x^2} < x$ равносильно системе

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-2x} + \sqrt{4-x^2} < x \\ x > 0 \end{cases}$$

Его ОДЗ — $[-2; 0] \cup \{2\}$. На $[-2; 0]$ система решений не имеет, а $x=2$ является ее решением.

* * *

В заключение два совета. При изложении решения во всех не очень сложных случаях доказывать «равносильности» (\Leftrightarrow) и «следования» (\Rightarrow) не надо; достаточно — словами или символами — указать, что чему равносильно или что из чего следует. Если в уравнении (неравенстве, системе) есть выражение, область определения которого задает область определения всего уравнения (неравенства, системы), пока это выражение участвует в решении в неизменном виде, находить его область определения не стоит.

Новости науки

Протонная радиоактивность

Это явление было обнаружено учеными сравнительно недавно, но уже имеет свою историю.

В 1962 году в Объединенном институте ядерных исследований в Дубне была открыта так называемая запаздывающая протонная радиоактивность, когда протон вылетал из возбужденного ядра, образовавшегося после испускания ядром позитрона.

В 1970 году был сделан следующий шаг — зафиксирована протонная радиоактивность ядерных изомеров, то есть ядер с длительным временем жизни в возбужденном состоянии.

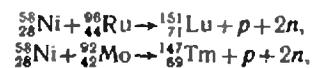
Наконец, в 1981 году физики из ФРГ наблюдали испускание протона ядром, на-

ходящимся в состоянии с минимальной возможной энергией, или, как принято говорить, в основном состоянии.

Заметим, что протонный распад «разрешен» только ядрам, у которых число нейтронов значительно меньше, чем у самого легкого стабильного изотопа данного элемента. Такие ядра называют нейтронодефицитными. Например, у ^{118}Cs , излучателя запаздывающих протонов, на 15 нейтронов меньше, чем у стабильного изотопа ^{133}Cs .

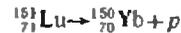
Протонный распад из основного состояния испытывают ядра с еще большим дефицитом нейтронов, а их получить нелегко. Ученые пошли по такому пути. Пучок протонов никеля, ускоренных в мощном ускорителе, направлялся на мишень из рутения или молибдена. Ядра никеля, сливаясь с ядрами мишеней,

превращались в нейтронодефицитные изотопы лютеция или тулия:



которые и испытывали потом протонный распад.

Измерения показали, что при превращении лютеция и иттербий:



энергия протонов равна 1,22 МэВ, а его период полураспада равен 85 ± 10 мс. Для изотопа тулия эти величины равны 1,04 МэВ и 420 ± 100 мс соответственно.

Теперь физикам осталось обнаружить последний предсказываемый теорией вид протонного распада — дупротонную радиоактивность, то есть испускание ядром одновременно двух протонов.

В. Кузнецов

Ереванский государственный университет

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(механико-математический факультет)

1. Решите неравенство

$$\sqrt{-x^2+x+2}+2x-1>0.$$

2. Решите уравнение

$$2\sin x + \cos x = 4\sqrt{2} \cos x \cdot \sin x.$$

3. Найдите экстремумы функции $y = (x-4)^2 \cdot x^2$.

4. Найдите объем фигуры, полученной при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, граница которой задана уравнениями $y = \sqrt{\cos 2x}$, $x=0$, $x = \frac{\pi}{8}$, $y=0$.

5. В равнобедренном треугольнике ABC высота BD , опущенная на основание, равна h , радиус вписанной окружности равен r . Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника.

Вариант 2

(факультет прикладной математики)

1. Решите уравнение

$$\cos x + \operatorname{tg} x = 1 + \sin x.$$

2. Найдите область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{6x-x^2-5}}{5x-2-1}.$$

3. В какой точке кривой $y = \sqrt{1+x^2}$ касательная параллельна прямой $y = \frac{x}{2} + 1$?

4. Найдите x и y , если $\vec{u} \neq \vec{w}$ и

$$x\vec{u} + y\vec{w} = (3-2y)\vec{u} + (4x-3)\vec{w}.$$

5. Площадь круга, описанного около равнобедренного треугольника, в 9 раз больше площади круга, вписанного в этот треугольник. Найдите углы треугольника.

Вариант 3

(химический, географический, биологический факультеты)

1. Решите уравнение

$$\log_{\sqrt{3}}(\sqrt{2x+3} + \sqrt{x+5}) = \log_3 9.$$

2. Решите уравнение

$$4 \cos^2 3x = 1.$$

3. Найдите все числа $a > 0$, удовлетворяющие условию

$$\int_0^a (2x-1) dx > 12.$$

4. Вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 6x}{\sin^2 5x}.$$

5. Вывод формулы объема цилиндра.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Найдите ускорения тел и натяжения нитей в устройстве, изображенном на рисунке 1. Массы тел равны $m_1 = 100$ г и $m_2 = 300$ г. Массой блоков можно пренебречь.

2. Небольшое тело соскальзывает по наклонной поверхности, переходящей в «мертвую петлю», с высоты $H = 2R$, где R — радиус петли. На какой высоте тело оторвется от петли?

3. Тонкий резиновый шар радиусом $r_1 = 2$ см наполнен воздухом при температуре $t_1 = 20^\circ\text{C}$ и нормальном атмосферном давлении. Каким станет радиус шара, если его опустить в воду с температурой $t_2 = 4^\circ\text{C}$ на глубину $h = 20$ м? Натяжением резины можно пренебречь.

4. Найдите количество теплоты, которое выделилось при абсолютно неупругом соударении двух шаров, двигавшихся навстречу друг другу. Масса первого шара $m_1 = 0,4$ кг, его скорость $v_1 = 3$ м/с. Масса второго шара $m_2 = 0,2$ кг, его скорость $v_2 = 12$ м/с.

5. Проволочное кольцо радиусом $R = 10$ см заряжено отрицательно и несет заряд $q = -5 \cdot 10^{-9}$ Кл. Найдите напряженность электрического поля на оси кольца в точках, расположенных от центра кольца на расстоянии L , равном 0; 5; 15 см.

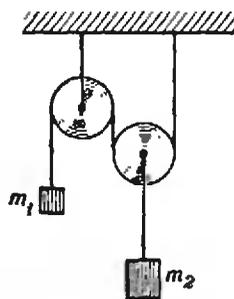


Рис. 1.

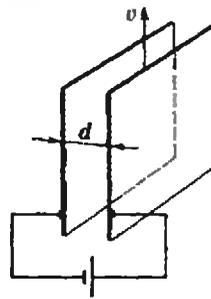


Рис. 2.

6. Пластины плоского конденсатора присоединены к батарее, напряжение которой $U = 600$ В. Какой величины ток будет проходить по проводам при сдвигании одной пластины вдоль другой (рис. 2), если скорость движения $v = 6$ см/с? Пластины конденсатора квадратные, площадью $S = 100$ см²; расстояние между пластинами, равное $d = 0,1$ см, во время движения остается постоянным.

7. По катодной трубке течет ток I , когда напряжение на ней равно U . Определите силу, с которой действуют электроны на единицу поверхности анода, если известно отношение e/m .

8. В магнитном поле, индукция которого $B = 5 \cdot 10^{-2}$ Тл, вращается стержень длиной $l = 1$ м с постоянной угловой скоростью $\omega = 20$ рад/с. Ось вращения проходит через конец стержня и параллельна линиям магнитной индукции. Найдите ЭДС индукции, возникающую на концах стержня.

Публикацию подготовили
Г. Варданян, Д. Седракян, Г. Тоноян

Московский институт стали и сплавов

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите систему

$$\begin{cases} 2x + 3y = 4 \\ 5x + 4y = 3. \end{cases}$$

2. Решите уравнение

$$4^{2x-3} = 0,5.$$

3. Решите уравнение

$$2 \sin^2 x = 3 \sin x.$$

4. Найдите область определения функции

$$y = \log_3 \frac{x^2 - 4x + 3}{5 - x}$$

5. В шар радиуса R впишите цилиндр наибольшего объема.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$2 + \log_{\frac{1}{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} (x + 3) = 0.$$

2. Решите неравенство

$$x < \frac{6}{x-5}.$$

3. Решите уравнение

$$4 \cos x = \sin 2x.$$

4. Решите систему

$$\begin{cases} x - 6^y = 5 \\ x \cdot 6^y = 6. \end{cases}$$

5. В круг радиуса 4 с центром в точке $(4; 0)$ вписана трапеция наибольшей площади так, что две ее соседние вершины лежат в точках пересечения окружности с осью абсцисс, а две другие — на окружности. Найдите координаты вершин и площадь трапеции.

Физика

Задачи устного экзамена

1. К потолку лифта, масса которого $m = 100$ кг, подвешен груз. Сила $F = 1500$ Н заставляет лифт двигаться вверх. Груз находится на расстоянии $l = 1$ м от пола лифта. Нить внезапно обрывается. Сколько времени

пройдет от момента разрыва нити до удара груза об пол?

2. Нейтрон (его масса m_1) ударяется о неподвижное ядро атома углерода ($m_2 = 12m_1$). Считая удар центральным и упругим, найдите, во сколько раз уменьшится кинетическая энергия нейтрона при ударе.

3. В баллоне объемом $V = 10$ л находится гелий под давлением $p_1 = 10$ атм и при температуре $t_1 = 27^\circ\text{C}$. После того как из баллона было взято $m = 10$ г гелия, температура в баллоне понизилась до $t_2 = 17^\circ\text{C}$. Определите давление гелия, оставшегося в баллоне.

4. Шар, диаметр которого $d = 1$ см и заряд $q = 10^{-6}$ Кл, помещен в масло плотностью $\rho_m = 0,8$ г/см³. Плотность материала шара $\rho = 8,6$ г/см³. В какое электрическое поле, направленное вертикально вверх, надо поместить шар, чтобы он плавал в масле?

5. Между пластинами плоского конденсатора, находящимися на расстоянии $d = 1$ см друг от друга, приложена разность потенциалов $U = 300$ В. В пространство между пластинами помещается плоскопараллельная пластинка из стекла толщиной $d_1 = 0,3$ см и плоскопараллельная пластинка из парафина толщиной $d_2 = 0,7$ см. Найдите напряжения на каждом слое. Диэлектрические проницаемости равны, соответственно, $\epsilon_1 = 6$ и $\epsilon_2 = 2,6$.

6. Найдите количество теплоты, выделяющееся каждую секунду в единице объема медного провода при плотности тока $j = 30$ А/см². Удельное сопротивление меди $\rho = 1,71 \times 10^{-8}$ Ом · м.

7. Электрон влетает в плоский горизонтальный конденсатор, параллельно его пластинам, со скоростью $v_0 = 2 \cdot 10^7$ м/с. Длина конденсатора $l = 10$ см, напряженность электрического поля конденсатора $E = 200$ В/см. При вылете из конденсатора электрон попадает в магнитное поле, линии которого перпендикулярны силовым линиям электрического поля. Индукция магнитного поля $B = 2 \times 10^{-2}$ Тл. Найдите радиус винтовой траектории электрона в магнитном поле.

8. Катушка, индуктивность которой $L = 3 \cdot 10^{-5}$ Гн, присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин $S = 100$ см² и расстоянием между ними $d = 0,1$ мм. Чему равна диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между пластинами, если контур настроен на волну длиной $\lambda = 750$ м?

9. Свет, падающий из воздуха на стеклянную плоскопараллельную пластинку, отражается (от пластинки) под углом $\gamma = 60^\circ$ и преломляется (в пластинке) под углом $\beta = 30^\circ$. Определите скорость света в пластинке.

10. Заряженное тело массой $m = 0,02$ кг и зарядом $q_1 = 5 \cdot 10^{-6}$ Кл движется из бесконечности со скоростью $v_0 = 3$ м/с по главной оптической оси вогнутого зеркала с радиусом кривизны $R = 1$ м к его полюсу, где расположен другой заряд q_2 . Определите величину заряда q_2 , при которой заряженное тело останавливается в тот момент, когда его изображение совпадает с ним самим.

Публикацию подготовили В. Бузанов,
О. Малюков, Б. Разумейко

Московский гидромелиоративный институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найдите косинусы углов, которые образует с базисными векторами вектор $\vec{a} = 6\vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

2. Решите уравнение

$$7 \cdot 10^{2x+3} - 5 \cdot 4^{2x+3} = 2 \cdot 25^{2x+3}.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \sin \frac{x}{2}.$$

4. Вокруг оси Ox вращается касательная, проведенная к параболе $y = x^2$ в точке $A(1; 1)$. Найдите объем тела, полученного вращением отрезка касательной, ограниченно-го точкой касания и точкой пересечения касательной с осью Ox .

5. Объем прямой треугольной призмы равен V . В основании призмы лежит равно-сторонний треугольник. Какова должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?

Вариант 2

1. В плоскости Oxy найдите вектор \vec{b} , перпендикулярный вектору $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j} + 5\vec{k}$ и имеющий с ним одинаковую длину.

2. Найдите все решения уравнения

$$2^{1+2x} - 9 \cdot 2^x + 4 = 0,$$

удовлетворяющие условию $\cos \frac{5x-2}{2+x} < 0$.

3. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$ на промежутке $[-2; +2]$, постройте ее график.

4. Решите уравнение

$$\sqrt{6 - \sin x - 7 \cos^2 x} + \sin x = 0.$$

5. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy задана фигура F , ограниченная линиями $y = 0$, $x = 6$, $y = \frac{4}{x}$ и касательной к кривой $y = \frac{4}{x}$ в точке $A(x_0; y_0)$, в которой $x_0 = 2$. Найдите площадь фигуры F .

Задачи устного экзамена

1. Найдите $f(g(x))$ и $g(f(x))$, если $f(x) = 2^x$, $g(x) = x^2$.

2. Найдите линейную функцию $f(x)$, если $f(-1) = 2$, $f(2) = -3$.

3. Найдите квадратичную функцию $f(x)$, если $f(0) = 1$, $f(1) = 0$, $f(3) = 5$.

4. Найдите функцию, обратную функции

а) $y = 2x - 4$;

б) $y = \lg \frac{x}{2}$;

в) $y = x^2 - 1$, $x \in]-\infty; 0]$.

5. Выясните, является ли четной или нечетной функция

а) $f(x) = \frac{1}{2}(2^x + 2^{-x})$;

б) $f(x) = \sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}$;

в) $f(x) = \lg \frac{1+x}{1-x}$.

6. Найдите область определения функций

а) $y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$;

б) $y = \sqrt{6x - x^2 - 5}$;

в) $y = \log_2 \frac{x^2 - 3x + 2}{x + 1}$;

г) $y = \log_{|x|-4} 2$;

д) $y = \sqrt{\frac{3^x - 4^x}{2x^2 - x + 5}}$.

7. Постройте график функции

а) $y = \frac{1-2x}{3}$;

б) $y = |x^2 - x - 6|$;

в) $y = |x| + |x-1|$.

8. Найдите предел

а) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 5x - 6}{x - x^2}$;

б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin \frac{x}{3}}$;

в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$.

9. Найдите производную функции

а) $y = (\sin 2x + 8)^2$;

б) $y = \sqrt{\ln x}$;

в) $y = \sqrt{\sin 2x}$.

10. Найдите уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 7x + 3$, если эта касательная параллельна прямой $5x + y - 3 = 0$.

11. Найдите первообразную функции $\left(\sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}\right)^2$.

12. При каких положительных значениях параметра a площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \cos ax$, $y = 0$, $x = \frac{\pi}{6a}$, $x = \frac{\pi}{2a}$, больше 3?

13. Найдите все значения a , при которых множество $\{(x; y) | x^2 + y^2 + 2x \leq 1\} \cap \{(x; y) | x - y + a = 0\}$ содержит только одну точку. Найдите эту точку.

14. Вычислите длину вектора \vec{a} , если $\vec{b} = (3; -2; 1)$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 7$ и $|\vec{a}| = |\vec{b}|$.

15. Отрезок AB единичной длины является хордой сферы радиуса 1 и расположен под углом $\frac{\pi}{3}$ к диаметру CD этой сферы. Расстояние от конца C диаметра CD до ближайшего к нему конца A хорды AB равно $\sqrt{2}$. Определите $|BD|$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Из орудия вылетает снаряд со скоростью $v_0 = 600$ м/с под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту. Определите наибольшую высоту и время полета снаряда. Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Автомашина массой m движется с постоянной скоростью v : 1) по горизонтальному плоскому мосту; 2) по выпуклому мосту; 3) по вогнутому мосту. Радиус кривизны моста в последних двух случаях равен R . С какой силой давит машина на мост, проезжая через его середину, в каждом из случаев?

3. Конькобежец массой $M = 70$ кг, стоя на коньках на льду, бросает в горизонтальном направлении камень массой $m = 3$ кг со скоростью $v = 8$ м/с. На какое расстояние откатится при этом конькобежец, если коэффициент трения коньков о лед $\mu = 0,02$?

4. В баллонах объемом $V_1 = 20$ л и $V_2 = 44$ л содержится газ. Давление в первом баллоне $p_1 = 2,4$ мПа, во втором — $p_2 = 1,6$ мПа. Определите общее давление после соединения баллонов, если температура газа осталась прежней.

5. В воздухе на расстоянии $r = 10$ см расположены два точечных электрических заряда $q_1 = 8 \cdot 10^{-9}$ Кл и $q_2 = -6 \cdot 10^{-9}$ Кл. Найдите напряженность электрического поля в точке, находящейся посередине между зарядами.

6. Определите внутреннее сопротивление аккумулятора, если известно, что при его замыкании на внешнее сопротивление $R_1 = 1$ Ом напряжение на зажимах аккумулятора $U_1 = 2$ В, а при замыкании на сопротивление $R_2 = 2$ Ом напряжение на зажимах $U_2 = 2,4$ В. Сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь.

7. Найдите мощность электрического нагревателя, если с его помощью за время $t = 20$ мин можно вскипятить $V = 2$ л воды. Начальная температура воды $t = 20^\circ\text{C}$; КПД нагревателя $\eta = 70\%$; удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К).

8. Прямолинейный проводник с током помещен в однородное магнитное поле индукцией $B = 0,2$ Тл. Определите силу, действующую на проводник, если длина проводника $l = 10$ см, сила тока $I = 3$ А, а направление тока составляет с направлением индукции поля угол $\alpha = 45^\circ$.

9. В дно озера вбита свая высотой $H = 4$ м, выступающая из воды на $h = 1$ м. Найдите длину тента сваи на дне озера, если лучи Солнца падают на поверхность воды под углом $\alpha = 45^\circ$. Показатель преломления воды $n = 4/3$.

10. Как с помощью вогнутого сферического зеркала получить уменьшенное изображение предмета?

Публикацию подготовили
В. Ковалев, А. Назаретов,
Г. Ткачев, Г. Шадрик

Московский

технологический институт
пищевой промышленности

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(первый экзамен на механическом факультете)

1. Упростите выражение

$$\frac{a^{\frac{3}{2}} + b^{\frac{3}{2}}}{(a^2 - ab)^{\frac{2}{3}}} : \frac{a^{-\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{a-b}}{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}$$

и вычислите при $a = 1$, 2 и $b = 3/5$.

2. Корни квадратного уравнения $x^2 - 12x + c = 0$ оба целые, причем один корень вдвое больше другого. Чему равен свободный член c ?

3. Вычислите x , если

$$\log_2 \log_3 \log_4 x = 0.$$

4. Решите уравнение

$$\log_6 (5 + 6^{-x}) = x + 1.$$

5. Найдите наибольшее целое значение x , удовлетворяющее неравенству

$$3 \cdot 5^{2x-1} - 2 \cdot 5^{x-1} < 0,2.$$

6. Решите уравнение

$$\sqrt{3-x} + \frac{6}{\sqrt{3-x}} = \sqrt{9-5x}.$$

7. Найдите наименьшее значение функции $y = x^4 - 2x^2 + 5$ на отрезке $[-2; 2]$.

8. Какой угол φ образует с осью абсцисс касательная к кривой $y = x - x^2$ в точке с абсциссой $x = 1$?

9. Постройте график функции $y = \frac{x-1}{x+1}$.

Сколько общих точек имеет график с осью Ox ?

10. Найдите сумму геометрической прогрессии, если известно, что второй член $a_2 = -5/9$, знаменатель прогрессии $q = -1/9$.

Вариант 2

(второй экзамен на механическом факультете)

1. Периметр равнобедренного треугольника 32 см, основание относится к боковой стороне как 6:5. Определите площадь треугольника.

2. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 9 - x^2$, $y = 0$.

3. Вычислите $\frac{87}{3 + 4 \cos 2\alpha}$, если $\lg \alpha = 0,2$.

4. Вычислите $\cos 45^\circ \cdot \cos 15^\circ - \sin 45^\circ \cdot \sin 15^\circ$.

5. Упростите выражение

$$\frac{\lg(\alpha + \beta) - \lg \alpha - \lg \beta}{\lg \alpha \cdot \lg(\alpha + \beta)} \cdot \operatorname{ctg} \beta.$$

6. Найдите наименьший положительный корень уравнения

$$\lg(x + 20^\circ) + \lg(70^\circ - x) = 2.$$

Ответ запишите в градусах.

7. Найдите длину медианы треугольника, проведенной из вершины B , если $A(2; -1)$, $B(0; -3)$ и $C(4; 3)$ — вершины треугольника.

8. Найдите сумму квадратов диагоналей параллелограмма, построенного на сторонах $a=5$, $b=3$.

9. Вычислите объем цилиндра, если диаметр его основания есть $D=10$ см и высота равна $H=16$ см. Примечание. Считайте $\pi=3,14$.

10. В полукруг вписан прямоугольник с наибольшей площадью. Определите эту максимальную площадь, если $R=2$.

Вариант 3
(экзамен на остальных факультетах)

1. При каком значении k уравнение $kx^2+12x-3=0$ будет иметь корень, равный $1/5$?

2. Упростите выражение

$$\left(\frac{a^2}{a+b} - \frac{a^3}{a^2+2ab+b^2}\right) : \left(\frac{a}{a+b} - \frac{a^2}{a^2-b^2}\right)$$

и вычислите при $a=-2,5$ и $b=0,5$.

3. Решите уравнение

$$\lg x - \frac{1}{2} \lg\left(x - \frac{1}{2}\right) = \\ = \lg\left(x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} \lg\left(x + \frac{1}{8}\right).$$

4. Решите уравнение

$$\sqrt{x-7} - \frac{6}{\sqrt{x-7}} - 1 = 0.$$

5. Найдите наибольшее целое значение x , удовлетворяющее неравенству

$$\sqrt{(0,8)^{x+1} - 3} > 1.$$

6. Вычислите $\lg 110^\circ + \operatorname{ctg} 20^\circ$, не используя таблиц.

7. Найдите корень уравнения

$$\cos 4x = -2 \cos^2 x,$$

лежащий в интервале $50^\circ < x < 90^\circ$. Ответ запишите в градусах.

8. Через точку, которая делит гипотенузу в отношении 1:2, проведен перпендикуляр, который делит катет длиной 6 см на два отрезка. Определите длину большего из этих отрезков, если длина гипотенузы равна 9 см.

9. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны основания равны 5 и 11, а диагональ пирамиды 12. Определите боковую поверхность.

10. Найдите угловой коэффициент касательной к графику функции

$$y = \frac{4}{3} \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^2$$

в точке с абсциссой $x=1$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант

1. Два одинаковых груза массой $m_1=2$ кг каждый связаны нитью, перекинутой через блок с неподвижной осью. На один из грузов кладут перегрузок массой $m_2=1$ кг. С каким ускорением будут двигаться грузы? Принять $g=10$ м/с².

2. Веревка длиной $l=20$ м переброшена через блок. В начальный момент веревка висит симметрично и покоится, а затем, в результате незначительного толчка, начинает двигаться по блоку. Какова будет скорость ве-

ревки в момент, когда она сойдет с блока? Массой блока пренебречь. Считать $g=10$ м/с².

3. Маховик диаметром $d=1$ м вращается равномерно, при этом точки на ободе маховика имеют скорость $v=10$ м/с. Определите период вращения маховика. Считать $\pi=3,14$. Ответ округлить до десятых долей.

4. Определите КПД нагревателя, расходующего $m_1=0,08$ кг керосина на нагревание $m_2=3$ кг воды на $\Delta T=90$ К. Теплота сгорания керосина $q=4,2 \cdot 10^7$ Дж/кг. Удельная теплоемкость воды $c=4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К). Ответ дать в процентах, с точностью до целого числа.

5. Два элемента с ЭДС $\mathcal{E}_1=1,7$ В и $\mathcal{E}_2=1,4$ В и внутренними сопротивлениями $r_1=0,8$ Ом и $r_2=0,4$ Ом соединены последовательно и подключены к резистору сопротивлением $R=5$ Ом. Определите напряжение на внешнем участке цепи.

6. Проводник длиной $l=1$ м движется со скоростью $v=5$ м/с перпендикулярно к линиям индукции однородного магнитного поля. Определите величину индукции магнитного поля, если на концах проводника возникает разность потенциалов $U=0,2$ В.

7. Радиус кривизны выпуклого зеркала $R=1,5$ м. Предмет находится на расстоянии $d=5$ м от него. На каком расстоянии от зеркала будет изображение предмета? Ответ дать с точностью до двух знаков после запятой.

8. Луч света переходит из стекла в воду, причем угол падения $\alpha=45^\circ$, а угол преломления $\beta=53^\circ$. Найдите показатель преломления стекла, если показатель преломления воды $n_2=1,3$. Ответ дать с точностью до 0,1. Принять $\sin 45^\circ=0,7$; $\sin 53^\circ=0,68$.

Публикацию подготовили

З. Кузьменко, А. Узиков

Мурманское высшее инженерное морское училище им. Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение

$$\frac{(a^{-1}+b^{-1})(a+b)^{-1}}{\sqrt{a^4} \cdot \sqrt{a^{-2}}}$$

2. Решите уравнение

$$\lg \sqrt{75+5\sqrt{x-1}} = 1.$$

3. Решите неравенство $f'(x) > g'(x)$, если $f(x)=10x^3-13x^2+7x$, $g(x)=11x^3-15x^2-3$.

4. Решите уравнение

$$5 \cos 2x = 4 \sin x.$$

5. Сумма длин радиуса основания и образующей конуса равна π ; образующая составляет с основанием угол α . Найдите полную поверхность конуса.

Вариант 2

1. Упростите выражение

$$\left(-\sqrt[3]{x^{0.4}}\right)^5 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} \sqrt[3]{x^2} - x^{-1} \left(\frac{-3x^3}{\sqrt{x^{-0.6}}}\right)^2.$$

2. Решите уравнение

$$\log_5(x^2 - 11x + 43) = 2.$$

3. Решите неравенство $f'(x) > g'(x)$, если

$$f(x) = 5 - 3x + \frac{5}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}, \quad g(x) = 3x - 7.$$

4. Решите уравнение

$$\sin x - \cos x - 4 \cos^2 x \cdot \sin x = 4 \sin^3 x.$$

5. Найдите объем конуса, высота которого 12 дм, а площадь осевого сечения 48 дм².

Задачи устного экзамена

1. Постройте график функции

а) $y = 2^{\log_2 x}$;

б) $y = \log_{1-\cos^2 x} \sin^2 x$.

2. Найдите знак числа $\lg x$, если $x^3 < x^2$.

3. Решите неравенство

$$\frac{(x-1)^2 x}{x+1} < 0.$$

4. На какое множество отображает производная функции $y = \sqrt{x^3}$ промежутки $\left[\frac{1}{16}; 81\right]$?

5. Найдите все значения a , для которых выполняется неравенство

$$\int x \, dx < a + 4.$$

6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x}$, $y = 2$, $x = 9$.

7. Найдите угол между непересекающимися ребрами правильной треугольной пирамиды.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Два корабля движутся относительно берега со скоростями $v_1 = 9$ уз и $v_2 = 12$ уз, направленными под углами $\alpha_1 = 30^\circ$ и $\alpha_2 = 60^\circ$ к меридиану. С какой скоростью второй корабль движется по отношению к первому? (1 уз = 0,514 м/с — прим. ред.).

2. Торговое судно, взяв груз в порту Мурманск ($\varphi = 70^\circ$ северной широты), перевезло его в порт, расположенный на экваторе. Во сколько уменьшился вес груза на экваторе по сравнению с весом груза в порту Мурманск? (При решении задачи учесть эффект, создаваемый вращением Земли; Землю считать шаром.)

3. При подъеме корабля в док попала большая льдина. Что произойдет с уровнем воды в доке, когда льдина растает?

4. Сколько молекул содержится: 1) в 1 см³ пресной воды; 2) в 1 см³ воздуха (при нормальных условиях)?

5. Три одинаковых заряда $q = 10^{-6}$ Кл расположены по вершинам равностороннего треугольника со стороной $r = 20$ см. Какую

работу надо совершить, чтобы расположить эти заряды в одну линию с расстоянием 10 см между соседними? Заряды находятся в вакууме.

6. Заряженный шар радиусом $r_1 = 1$ см соединяют тонким длинным проводником с незаряженным шаром, радиус которого $r_2 = 2$ см. После того как шары разъединили, энергия второго шара оказалась равной $W = 0,3$ Дж. Какой заряд был на первом шаре до соединения? Электроемкостью соединительного проводника пренебречь.

7. Лифт массой $m = 0,5$ т поднимается на высоту $h = 25$ м за $t = 30$ с. Напряжение на зажимах электродвигателя $U = 127$ В, КПД мотора $\eta = 90\%$. Определите мощность, потребляемую мотором, и силу тока в обмотках электродвигателя.

8. Контур радиоприемника судовой радиостанции настроен на частоту $f = 9$ МГц. Как нужно изменить емкость переменного конденсатора колебательного контура приемника, чтобы он был настроен на длину волны $\lambda = 50$ м?

9. Левый фонарь бортовых огней излучает электромагнитные волны длиной $\lambda = 7 \cdot 10^{-7}$ м, что соответствует красному цвету. Какова длина волны этих лучей в воде ($n = 1,33$)?

10. На паруса какой окраски, черной или белой, свет будет оказывать большее давление?

Публикацию подготовили
Е. Банная, А. Панков, В. Цилик

**Рижский институт
инженеров
гражданской авиации
им. Ленинского комсомола**

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Через вершину правильной треугольной пирамиды и середины двух сторон основания проведено сечение. Найдите площадь сечения и объем пирамиды, зная сторону основания a и угол α между сечением и основанием.

2. Решите уравнение

$$\lg 3x - \lg x = 4 \sin x.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{\lg(35 - x^2)}{\lg(5 - x)} = 3.$$

4. Решите уравнение

$$\sqrt{x+8} + 2\sqrt{x+7} + \sqrt{x+1} - \sqrt{x+7} = 4.$$

5. Вычислите предел

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{x-5}.$$

Вариант 2

1. В правильной треугольной пирамиде проведена плоскость через боковое ребро и высоту. Отношение площади сечения к полной поверхности пирамиды равно k . Найдите двугранный угол при основании.

2. Решите уравнение

$$\left(\sin \frac{x}{2} - \cos \frac{x}{2}\right)^2 = \frac{2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x+\pi}{2}}$$

3. Решите неравенство

$$\log_x \frac{3x+2}{4(1-x)} > 0.$$

4. Найдите $\log_{30} 8$, если известно, что $\lg 5 = a$ и $\lg 3 = b$.

5. Найдите угол между векторами \vec{OA} и \vec{OB} , если O — начало координат, вектор \vec{OA} составляет с осями Ox , Oy , Oz углы, соответственно равные $\alpha = \frac{\pi}{3}$, $\beta = \frac{\pi}{3}$, $\gamma = \frac{\pi}{4}$, и точка B имеет координаты $(-2; -2; -2\sqrt{2})$.

Физика
Письменный экзамен
Вариант 1

1. Законы Бойля — Мариотта, Гей-Люссака, Шарля. Графики этих законов. Понятие об абсолютной температуре. Абсолютная температурная шкала. Уравнение состояния идеального газа.

2. Прямой постоянный магнит падает сквозь металлическое кольцо. Будет ли магнит падать с ускорением свободного падения? Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Ответ объясните.

3. Самолет описывает «мертвую петлю» в вертикальной плоскости. Определите наименьшую скорость самолета, при которой летчик не оторвется от самолета в верхней точке петли. Радиус петли $R = 180$ м. Ускорение свободного падения $g = 9,8$ м/с².

4. Определите максимальные значения кинетической энергии и скорости электронов, вылетающих из металла под действием гамма-лучей с длиной волны $\lambda = 0,03$ нм. Постоянная Планка $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Дж · с. Скорость света

$c = 3 \cdot 10^8$ м/с. Масса электрона $m = 9,1 \times 10^{-31}$ кг.

Вариант 2

1. Законы отражения света. Построение изображений в сферических зеркалах. Фокус зеркала.

2. Как будет меняться период колебаний маятника, представляющего собой сосуд малой массы, подвешенный на длинной нити и наполненный водой, если вода постепенно вытекает из отверстия в дне сосуда?

3. Свинцовая пуля пробивает доску, при этом скорость пули падает с $v_0 = 400$ м/с до $v = 300$ м/с. Какая часть пули расплавилась? Нагреванием доски можно пренебречь. Начальная температура $t_0 = 27^\circ\text{C}$. Температура плавления свинца $t = 327^\circ\text{C}$. Удельная теплоемкость свинца $c = 0,126$ кДж/(кг · К). Удельная теплота плавления свинца $\lambda = 0,25 \times 10^5$ Дж/кг.

4. Электрон (заряд $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл, масса $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ кг) влетает со скоростью $v = 1,5 \cdot 10^7$ м/с в однородное магнитное поле с индукцией $B = 6,28 \cdot 10^{-4}$ Тл перпендикулярно линиям поля. Найдите радиус окружности, которую электрон опишет в этом поле.

Вариант 3

1. Переменный ток. Генератор переменного тока. Период и частота переменного тока. Действующие значения напряжения и силы тока. Трансформатор. Передача и распределение энергии.

2. Лучи красного и зеленого света переходят из воды в воздух. Покажите ход лучей. Ответ объясните.

3. Снаряд массой $m_1 = 50$ кг, летящий под углом $\alpha = 30^\circ$ к вертикали со скоростью $v_0 = 800$ м/с, попадает в платформу, нагруженную песком, и застревает в нем. Найдите скорость платформы после падения снаряда, если ее масса $m_2 = 16$ т.

4. Электрон в невозбужденном атоме водорода получил энергию $E = 12$ эВ. На какой энергетический уровень он перешел? Сколько линий можно будет увидеть в спектре излучения при переходе электрона на более низкие энергетические уровни? Энергия основного состояния атома водорода $E_1 = -13,5$ эВ.

Публикацию подготовили
Л. Гущик, Н. Ларионова, Я. Шайцан

Задачи
наших читателей

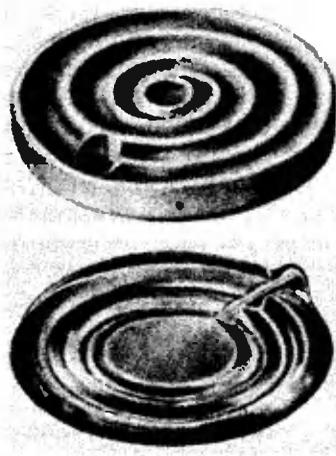
Многие хозяйки при кипячении молока пользуются так называемым молочным сторожем. Два таких «сторожа» показаны на рисунке. Первый (более старинного образца) сделан из фаянса, сверху на нем имеется спиралевидное углубление, а сбоку — небольшое отверстие. Второй (современный вариант) внешне похож на небольшую пе-

ревернутую металлическую тарелку, в дне которой имеется два кольцеобразных углубления, соединенных радиальным каналом.

Воздушные пузырьки, оторвавшись от дна кастрюли или от самого «сторожа» (положенного на дно кастрюли), выходят из бокового отверстия «сторожа», поднимаются вверх и разрывают пенку на молоке, спасая молоко от «убегания».

Казалось бы, все ясно. Только зачем в «стороже» спиралевидное (или кольцеобразное) углубление?

Л. Ашкинази





Заочная школа программирования

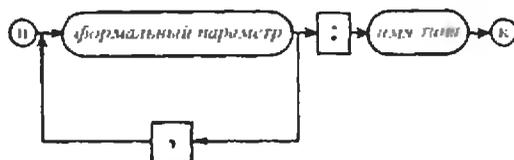
Урок 20: Параметры процедур и функций

В языке Паскаль как процедура, так и функция могут иметь список параметров. Каждый из параметров процедуры*) изображается внутри описания процедуры некоторым именем, называемым формальным параметром. Формальный параметр играет роль обозначения, позволяющего описать ту последовательность действий, которую мы хотим применить при разных выполнениях процедуры к различным фактическим величинам. Эти величины задаются в операторе вызова процедуры или в обращении к функции в виде списка фактических параметров, длина которого совпадает с длиной списка формальных параметров. Между формальными и фактическими параметрами устанавливается простое позиционное соответствие: первый фактический параметр соответствует первому формальному, второй — второму и т. д. Каждый формальный параметр процедуры осмыслен только внутри данной процедуры. В начале выполнения процедуры формальный параметр связывается с величиной, заданной соответствующим фактическим параметром и существующей вне этой процедуры. В Паскале имеется четыре вида параметров: параметры-значения, параметры-переменные, параметры-процедуры и параметры-функции. Вид того или иного параметра процедуры задается в ее заголовке (см. урок 16).

*) Все, что здесь и ниже говорится о параметрах процедуры, полностью переносится на параметры функции.

Параметры-значения

Параметры-значения описываются диаграммой:



Параметр-значение процедуры является ее локальной переменной (о локальных и глобальных именах в Рапире см. Урок 7). Формальный параметр представляет эту переменную в пределах описания процедуры. Фактический параметр в этом случае должен быть выражением того же типа, что и переменная, обозначаемая соответствующим формальным параметром. В момент вызова процедуры происходит вычисление этого выражения, и полученное значение присваивается переменной в качестве начального значения. В дальнейшем при выполнении процедуры эта переменная ничем не отличается от других локальных переменных этой процедуры.

Поиск наибольшего общего делителя двух целых положительных чисел может быть осуществлен с помощью следующей функции:

```
function mod(x, y: integer): integer;
  {0 < y < x}
  begin if y = 0
    then mod := x
    else mod := mod(x, x mod y)
  end;
```

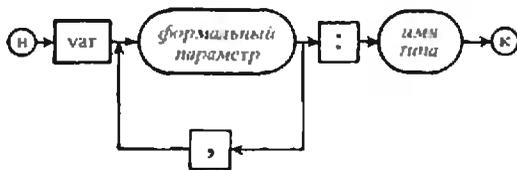
Задание 20.1. Имеется следующее описание функции:

```
function a(x, y: integer): integer;
  {x > 0, y > 0}
  begin if x = 0
    then a := y + 1
    else if y = 0
      then a := a(x - 1, 1)
      else a := a(x - 1, a(x, y - 1))
  end;
```

Определить максимальное число экземпляров параметра x , одновременно существующих при выполнении обращения $a(2, 2)$.

Параметры-переменные

Диаграмма, описывающая параметры-переменные, имеет вид:



В этом случае фактический параметр должен быть переменной заданного типа, а формальный параметр служит обозначением этой переменной во все время данного выполнения процедуры. Если в фактическом параметре имеются индексы, то они вычисляются в момент вызова процедуры.

Параметр-переменная необходим во всех случаях, когда параметр используется для представления результата процедуры или функции.

В программах сортировок, рассматривавшихся во втором номере «Кванта», уже использовался такой вид параметров.

Пусть имеются следующие описания:

```

var k:integer;
      b:array [1..100]of real;
procedure max(var i:integer);
  {1 < i < 100}
  var j:integer;
  begin
    for j:=i+1 to 100 do
      if b[i] < b[j] then i:=j
  end;
  
```

Тогда после выполнения операторов
 $k := 20; \text{max}(k)$

переменной k будет присвоен индекс наибольшего элемента из

$$b[20], b[21], \dots, b[100].$$

Задание 20.2. Можно ли использовать процедуру

```

procedure замена (var x,y:integer);
  var z:integer;
  begin
    z:=x;
    x:=y;
    y:=z
  end
  
```

для обмена значениями y любых двух переменных целого типа? Например, поменяются ли значения y переменных k и $a[20]$ после вызова замена ($k, a[k+1]$), если до его выполнения k было равно 19?

Задание 20.3. Пусть имеются описания

```

type таблица = array[1..2,1..2] of integer;
procedure умножение (var x,y,z:таблица);
  begin
  
```

```

z[1,1]:=x[1,1]*y[1,1]+x[1,2]*y[2,1];
z[1,2]:=x[1,1]*y[1,2]+x[1,2]*y[2,2];
z[2,1]:=x[2,1]*y[1,1]+x[2,2]*y[2,1];
z[2,2]:=x[2,1]*y[1,2]+x[2,2]*y[2,2]
end;
  
```

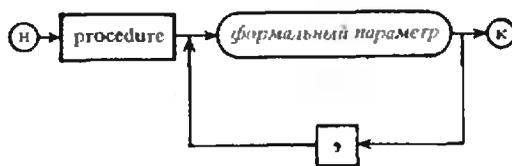
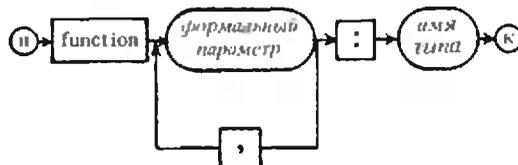
и даны три таблицы

$$a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad c = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}.$$

Определить вид таблиц a, b и c после каждого из вызовов: умножение (a, b, c), умножение (a, b, a), умножение (a, b, b). Что произойдет при этих же вызовах, если параметры x и y сделать параметрами-значениями? Что будет, если z станет параметром-значением?

Параметры-процедуры и параметры-функции

Диаграммы, описывающие параметры-процедуры и параметры-функции, имеют вид:



Фактическим параметром должно быть имя процедуры или функции (в зависимости от вида параметра), а соответствующий формальный параметр служит ее обозначением во все время выполнения оператора вызова.

Параметры-процедуры и параметры-функции используются в тех случаях, когда в процедуру или функцию требуется передать не результат некоторого вычисления, а правила этого вычисления.

Следующая функция

```

function корень(эпсилон, a,b:real);
  function f:real):real;
  {f(x) — вещественная функция с одним параметром типа real. Функция непрерывна в интервале a < x < b и имеет в точках a и b значения разных знаков}
  
```

```

var c:real; d:boolean;
begin
  if f(a) > 0 then
    begin c:=a; a:=b; c:=b end;
  d:=true;
  
```

```

while(abs(a-b)>эпсилон)AND d do
begin
  c:=(a-b)/2;
  if f(c)=0
  then d:=false
  else if f(c)>0
  then b:=c
  else a:=c
end;
корень:=(a+b)/2
end;

```

позволяет находить корень уравнения $f(x)=0$ для любой функции f на отрезке $a \leq x \leq b$ с точностью ϵ методом половинного деления (y является корнем уравнения $f(x)=0$ с точностью ϵ , если $f(y-\epsilon)$ и $f(y+\epsilon)$ имеют значения разных знаков).

Информация



Об итогах конкурса «Малый интеркосмос»

ЦК ВЛКСМ, Академия наук СССР, Министерство просвещения СССР, Государственный Комитет СССР по профессионально-техническому образованию, Всесоюзное общество «Знание» с февраля по ноябрь 1981 г. провели первый Всесоюзный конкурс учащихся школ, профтехучилищ на лучший проект космического эксперимента, посвященный 20-летию первого полета в космос человека, гражданина СССР Ю. А. Гагарина^{*)}. Активное участие в конкурсе приняли юноши и девушки Украины, Белоруссии, Казахстана, Горьковской, Калужской, Московской, Ростовской, Саратовской, Ташкентской областей, гг. Москвы, Тбилиси. В целом в адрес оргкомитета конкурса поступило свыше 2 тысяч проектов научных, технических, прикладных и техникологических экспериментов.

С 3 по 6 ноября в Москве состоялся заключительный этап конкурса, в котором участвовало 400 руководителей научно-технических объединений, юных любителей авиации и космонавтики из всех союзных республик страны. Среди них 94 члена ВОИР и НОУ, 44 участника ВДНХ СССР, 26 лауреатов смотра НТТМ. По возрасту подавляющее большинство составили учащиеся 8—10 классов. Самый юный участник финала — Дурманова Ира — ученица 3 класса с. ш. № 6 г. Херсона. На заключительный этап конкурса прибыли также делегации учащихся НРБ, ВНР, ГДР, ЛНДР, МНР, СРВ, ЧССР.

Защита предложенных проектов проходила по 8 секциям. Их возглавляли автори-

^{*)} Условия конкурса публиковались в «Кванте», 1981, №№ 4, 5.

Задание 20.4. Заданы описания процедур:

```

procedure p;
begin writeln (15) end;
procedure r(x:integer;procedure g);
procedure q;
begin writeln(x) end;
begin
  if x=1
  then g
  else if x=10
  then r(x-1,q)
  else r(x-1,g)
end;

```

Что будет напечатано в результате выполнения каждого из операторов вызова

$r(20,p)$, $r(5,p)$?

В. Касьянов

тетные жюри из видных ученых во главе с летчиком-космонавтом СССР, председателем Федерации космонавтики СССР Н. Н. Рукавишниковым. Жюри высоко оценило представленные работы, например, космическую дрель киевлянина Виктора Аврутица, цветомузыкальные очки группы юных техников пос. Новомихайловский Краснодарского края, автоматический регистратор микрометеоритов москвича Александра Стеркина, рекомбинационный ракетный двигатель Аидрея Воронина из г. Ивантеевка Московской области.

Наши болгарские друзья Тошо Недялков и Святослав Божиллов сделали математические расчеты запуска зонда перпендикулярно плоскости эклиптики. Исполнение этого проекта позволит получить много новой информации. За свою работу юные исследователи награждены призом имени М. В. Келдыша.

Члены кружка космического проектирования Московского городского Дворца пионеров и школьников под руководством специалистов на основании физико-математических расчетов предложили серию проектов конструкций, обеспечивающих деятельность космонавтов вне корабля, таких как специальное космическое кресло, устройство для закрепления космонавтов на любом месте поверхности орбитальной станции.

Интересны, оригинальны, устремлены в будущее работы учащихся г. Москвы, Белгородской, Калужской, Челябинской областей, Украинской ССР, ЧССР, ГДР.

Авторы лучших проектов награждены призами им. К. Э. Циолковского, М. В. Келдыша, С. П. Королева, Ю. А. Гагарина, вымпелами ЦК ВЛКСМ, побывавшим в космосе, дипломами, специальными призами, учрежденными различными организациями.

В программе работы с участниками финала особое внимание было уделено пропаганде среди учащихся достижений Советского Союза и стран социалистического сотрудничества в науке и технике, успехов в исследовании и освоении космического пространства. Ребята посетили Мавзолей В. И. Ленина, побывали в «Звездном городке», научных учреждениях, музеях, на ВДНХ СССР,

встретились с учеными, специалистами, летчиками-космонавтами СССР. Была организована выставка работ юных космонавтов, на которой экспонировалось около 200 моделей, макетов, конструкций, приборов.

В пленарном заседании приняли участие академик АН СССР, Герой Социалистического Труда Г. И. Петров, летчик-космонавт СРВ Фам Туан, летчики-космонавты СССР Г. С. Титов, Н. Н. Рукавишников, В. Д. Зудов, заместитель министра просвещения СССР Ф. Е. Штыкало, заместитель председателя правления Всесоюзного общества «Знание» Ю. С. Карабасов, секретарь ЦК ВЛКСМ Л. И. Швецова, ученые, специалисты, комсомольские работники, ответственные работники органов народного и профессионально-технического образования. Участникам конкурса прислали приветствия мать первого в мире космонавта А. Т. Гагарина, летчики-космонавты Г. Иванов, З. Яен, М. Гермашевский, В. Ремек.

Обращаясь к ребятам, Зигмунд Яен писал: «Я убежден, что вы будете принадлежать когда-нибудь к славной плеяде ученых, инженеров, техников, специалистов и космонавтов. Своим пытливым умом, интересными идеями, экспериментами, открытиями в области науки и техники, а также своей страстью, активным личным участием будете способствовать продвижению вперед дела освоения космического пространства, путь в которое нам открыл незабываемый Ю. А. Гагарин».

Всесоюзный конкурс учащихся школ и профтехучилищ на лучший проект космического эксперимента способствовал развитию познавательной активности, фантазии учащихся, воспитанию у них через увлеченность космонавтикой творческого отношения к труду вообще, чувства сопричастности к делам народа, углублению обществу полезной направленности деятельности юных любителей науки и техники, привлечению к работе с детьми и подростками специалистов, ученых, новаторов производства, студентов.

Конкурс показал, что с течением времени интерес детей и подростков к космонавтике не ослабевает. На смену массовому увлечению космическими полетами приходит углубленный и осмысленный интерес к существу проблем и задач космонавтики. Все более широкое распространение получают школы и клубы юных авиаторов и космонавтов, музеев космонавтики, развивается новая область детского технического творчества — космическое моделирование. Сложился опыт этой работы в ряде школ и внешкольных учреждений Удмуртской АССР, Белгородской, Калининградской, Карагандинской, Киевской, Львовской областей.

Ученые, руководители кружков и клубов, участники конкурса высказали предложение о проведении подобного конкурса в 1985—86 гг. в честь 25-летия полета Ю. А. Гагарина.

Ю. Иванов
член оргкомитета конкурса

Уголок коллекционера

Коллекции филателистов, собирающих марки по тематике «советская наука», пополнились новыми марками, посвященными создателям нашей космической науки и техники. В 1981 году, к 70-летию со дня рождения, была выпущена марка с портретом Президента АН СССР академика М. В. Келдыша, кото-



рый был теоретиком отечественной космонавтики. А в самом начале 1982 года появилась марка с портретом генерального конструктора космических аппаратов и систем академик С. П. Королева.



Выпуск ее приурочен к 75-летию со дня рождения этого выдающегося ученого и организатора отечественной науки и техники. Светлые образы двух героев штурма космоса навсегда увековечены советской филателией.

В. Р.



XIII конференция юных математиков в Батуми

Могут ли старшеклассники заниматься математикой сверх школьной программы? Хотят ли они это делать? Интересует ли их это? Письма и анкеты, поступающие в «Квант», показывают: примерно 10% школьников 9–10 классов интересуются математикой и физикой за рамками школьной программы. Особенно ясно это видно на конференциях, летних лагерях и слетах, куда приезжают школьники из разных городов. На этих слетах школьники сами делают доклады, увлеченно обсуждают работы таких же ребят, как они, сравнивают свои достижения с работами сверстников, обмениваются опытом, погружаются в атмосферу научного творчества, встречаются с учеными и — отдыхают. Велико и воспитательное значение таких контактов старшеклассников разных городов и республик.

Один из таких слетов традиционно проводится в ноябре в г. Батуми. Подготовка и организация этого нелегкого, но очень полезного дела требует немало труда. Организацию слета взяли на себя Совет профсоюзов и Министерство просвещения Аджарии, Аджарское отделение Всесоюзного общества «Знание», обком профсоюза работников просвещения, отдел просвещения и городской комитет комсомола г. Батуми, Дворец пионеров и школьников Аджарии и ФМШ-интернат № 2 г. Батуми. Вдохновителем слета была бессменный член жюри, заслуженный педагог Аджарии М. И. Жгенти; массу труда вложили в него учащиеся школы № 7 г. Батуми.

В XIII празднике юных математиков (так назвали этот слет его организаторы), кроме школьников Аджарии, участвовали около 350 школьников Москвы, Тбилиси, Киева, Свердловска, Перми, Сухуми и других городов, а из Ленинграда приехали не только школьники, но и учащиеся ПТУ № 24, выступившие на одном уровне с командами школьников. Активное участие в празднике приняли члены редколлегии журнала «Квант»,

ученые из Москвы, Ленинграда, Тбилиси, Свердловска, лекторы Всесоюзного общества «Знание», представители ВЗМШ.

Праздник открыл министр просвещения Аджарии В. М. Цулукидзе. Он рассказал ребятам о заботе, которую проявляет о молодежи партия и правительство, пожелал участникам успешной работы.

Программа конференции была традиционной, хотя некоторые коррективы внесла погода — три дня дождя и града способствовали первоочередному проведению математической части праздника.

Работа секций началась в актовом зале Батумского дворца пионеров с доклада девятиклассника ФМШ № 2 г. Батуми Мераба Путкацадзе «Можно ли сказать, что седьмое ноября чаще выпадает на воскресенье, чем на понедельник?». Затем в течение двух дней состоялось большинство докладов, распределенных жюри по секциям А и Б. Более трудные доклады, предназначенные десятиклассникам, проходили в секции Б, но слушатели часто переходили из одной секции в другую — послушать доклад, привлечший их названием, или просто побывать на докладе одноклассника. Уровень докладов был достаточно высоким, слушались они с интересом и вниманием. Члены жюри, комментируя доклады, говорили о связях затронутых вопросов с сегодняшней математикой и ее приложениями.

Расскажем кратко о докладах, вызвавших наибольший интерес. Олег Чалых (ФМШ

Открытие конференции.

Доклад читает М. Путкацадзе.

КВН. Представление команды школы № 91 г. Москвы.

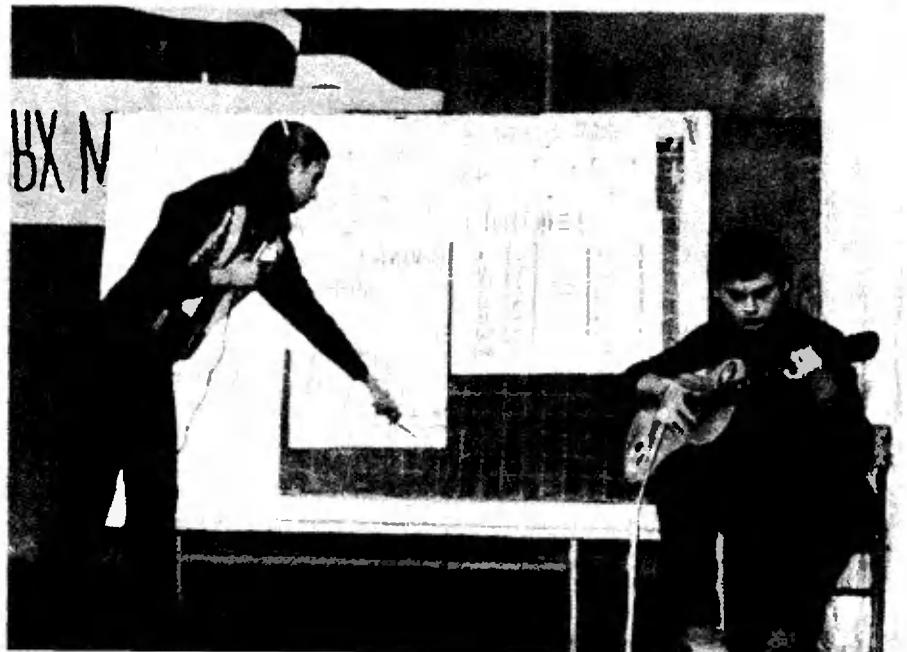
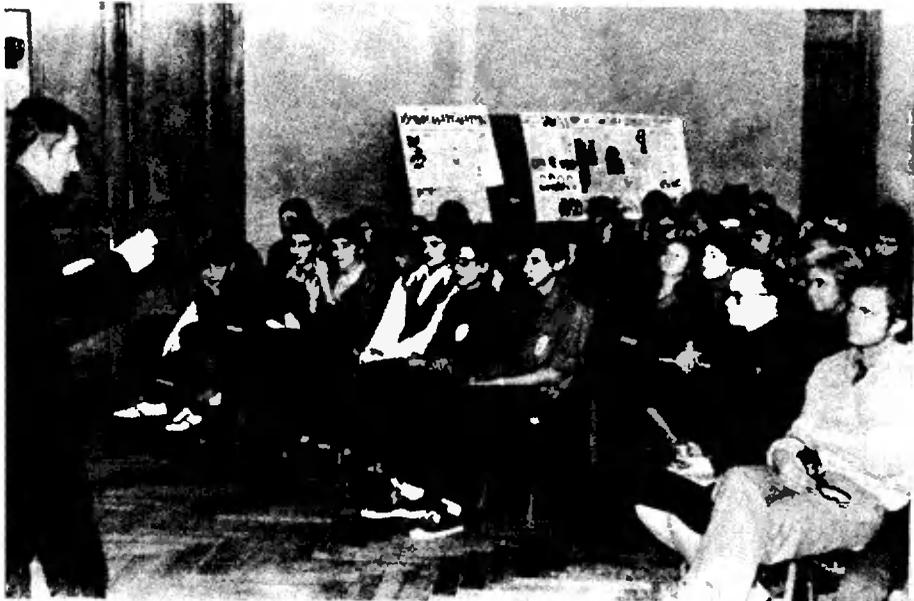
Встреча с «Квантом». Выступление А. Б. Социнского.

Награды вручает член редколлегии «Кванта» Н. Б. Васильев.

Момент КВН.

В. Ракова читает доклад под аккомпанемент В. Еремеева.

Фото А. Виленкина и Т. Волосюк



№ 18 при МГУ, 10 кл.) в докладе «Разре-
заине конгруэнтных блинов» решал такую за-
дачу: *каким должно быть r , чтобы при лю-
бом расположении n кругов радиуса r внутри
круга радиуса 1 нашлась прямая, пересе-
кающая все круги?* Олег установил, что при
нечетном n прямая существует тогда и толь-
ко тогда, когда

$$r > \left(1 + \cos \frac{\pi}{n}\right) / \left(3 \cos \frac{\pi}{n}\right),$$

а для четных n нашел оценки сверху и сни-
зу для r .

Миша Вировец (с. ш. № 91 г. Моск-
вы, 10 кл.) исследовал замкнутые ломаные,
такие, что сумма квадратов проекций их сто-
рон на любую прямую одинакова. Миша на-
звал такие фигуры (то ли в шутку, то ли
всерьез) *изоскверными*. Он показал, что все
правильные n -угольники изоскверны, привел
примеры других изоскверных многоугольников
и дал некоторую алгебраическую характери-
зацию изоскверных фигур в терминах комп-
лексных чисел.

Разумеется, в этих докладах (и в боль-
шинстве других) речь шла или о решении
пусть трудных, но элементарных задач, или
об известных классических результатах. Но вот
к доске вышел Алеша Павлов (ФМШ № 30
при ЛГУ, 10 кл.) и рассказал о своих соб-
ственных исследованиях сумм вида

$$S_N(\varphi) = \sum_{n=1}^N \varepsilon_n e^{in\varphi}$$

($\varepsilon_n = \pm 1$), которые тесно связаны с так назы-
ваемыми тригонометрическими суммами. До-
кладчику удалось улучшить оценку
 $\max_{\varphi} S_N(\varphi) < 5\sqrt{N}$, недавно полученную двумя

американскими математиками (правда, не для
всех N). Слушателей очень заинтересовал
комментарий члена жюри (и редколлегии
«Кванта») Н. Б. Васильева, который объяс-
нил, как эта тематика связана с недавни-
ми результатами бывшего победителя многих
математических олимпиад, ныне аспиранта
МГУ В. Конягина.

Большой интерес у слушателей вызвал
доклад Вероники Раковой (с. ш. № 2
г. Свердловска, 9 кл.). Жюри отметило так-
же мастерство ее одноклассника и содо-
кладчика Володи Еремеева, который... акком-
панировал ей на гитаре. Доклад, однако, был
совсем серьезным и назывался «Математиче-
ский подход к проблеме нового гитарного
струя».

Когда Лаша Эпремидзе (Тбилиси, ФМШ
им. Комарова, 10 кл.) начал свой доклад
«Непрерывная функция без производной», жу-
ри собралось выслушать обычный рассказ о
так называемой функции Ван-дер-Вардена.
Однако докладчик стал строить совсем дру-
гую функцию $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$, утверждая, что

она тоже непрерывна и не имеет производ-
ной ни в одной точке отрезка $[0; 1]$.

Жюри усомнилось в правильности этого
утверждения, но Лаша сумел парировать все
нападки. Позже, при обстоятельном обсуж-

дении подробного текста доклада выяснилось,
что предложенная конструкция вполне кор-
ректна и ее обоснование проще традицион-
ного; этот доклад мы надеемся опубликовать
в «Кванте».

Следующий из отмеченных нами докла-
дов связан со сравнительно недавним иссле-
дованием известных математиков В. Борсука
и В. Г. Болтянского. В нем Антон Баков
(с. ш. № 104 г. Свердловска, 9 кл.) рас-
сказал о делении плоских фигур на фигуры
меньшего диаметра и на фигуры меньшей
ширины.

Пожалуй, наибольшее оживление в зале
вызвал доклад Мити Ногина (с. ш. № 91
г. Москвы, 10 кл.) «О справедливости ки-
дания на пальцах». Митя объяснил, почему
при большом количестве участников этот об-
щепринятый способ выбрать человека по жре-
бию весьма несправедлив — при кидании на
пяти пальцах предпочтительнее шансы участ-
ника, с которого начинается подсчет, при ки-
дании на десяти — стоящего напротив. Мы
надеемся, что последние два упомянутых до-
клада тоже найдут отражение в «Кванте».

7 ноября, как по заказу, погода улуч-
шилась, и началась праздничная, спортивная
и культурная часть конференции. В ее про-
грамме был футбольный матч, экскурсия,
встреча с «Квантом», математический КВН,
вечер занимательной математики. Большое
впечатление на ребят произвели Ботанический
сад, в котором собраны растения из всех
частей света, дельфинарий, в котором дрес-
сированные черноморские афалины группа-
ми прыгали через перекладину и кольца, прино-
сили мячи, катали дрессировщика в лодке.
Не упустили ребята и возможности иску-
паться в море (это в ноябре!).

На встрече с «Квантом» перед ребятами
выступили члены редколлегии «Кванта»
М. И. Башмаков, Н. Б. Васильев, В. Л. Гу-
тенмахер, А. П. Савин, зав. отделом мате-
матики А. Б. Соснинский. Они рассказали ре-
бятам о работе журнала, о некоторых ин-
тересных вопросах математики, успехах ЭВМ
в игре в шахматы. В небольшой анкете, про-
веденной на месте, ребята высказали свое мнe-
ние о журнале, ряд пожеланий.

На вечере занимательной математики ре-
бят ждали выступления свердловчан, сухум-
цев и пьеса о математических приключени-
ях Старика Хоттабыча и Вольки, подготов-
ленная школой № 7 г. Батуми под руковод-
ством заслуженного педагога Аджарии
С. К. Кикава. Очень активно прошел мате-
матический КВН. Тема домашнего задания
«Математика как спорт», как оказалось, до-
пускала много разных трактовок, и если после
прекрасного исполнения восточного танца впе-
ред вышли хозяева праздника, то потом их
чуть обошла команда школы № 91 г. Моск-
вы. Второе место заняла школа № 7 г. Ба-
туми, третье — сухумцы.

На торжественном закрытии праздника
секретарь Батумского горкома комсомола
З. Н. Карселадзе вручила участникам гра-
моты и призы. Выступавшие особо отмечали
радостную, дружелюбную атмосферу этого
праздника для ребят, принесшего им много
радости и пользы.

А. Виленкин, А. Соснинский

Заочная физическая школа

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете МГУ им. М. В. Ломоносова объявляет набор учащихся в 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме школьной программы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в высшие учебные заведения, в первую очередь — на физический факультет МГУ.

Прием в ЗФШ проводится на основании результатов решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать до 15 сентября по адресу: 117234, Москва, В-234, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, Заочная физическая школа. В письмо вложите два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 7×12 см и заполненной по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество
Класс
Профессия родителей и
занимаемая должность
Подробный домашний адрес

Номер и адрес школы

Сидоров Иван Петрович
9-й
отец — инженер
мать — врач
248016, г. Калуга, ул.
К. Либкнехта, д. 4, кв. 73
школа № 10, ул. Пушкина, д. 3д.

Решение приемной комиссии ЗФШ о зачислении будет сообщено до 15 октября. Проверенные вступительные задания обратно не высылаются.

Зачисленным в ЗФШ в течение года высылаются методические разработки и контрольные задания по различным разделам физики, изучаемым в средней школе. Решенные задания оцениваются, рецензируются и возвращаются учащимся. Учащиеся 9 класса по окончании года переводятся в 10 класс на основании оценок, полученных за решение контрольных заданий. Успешно закончившие обучение получают справку об окончании ЗФШ.

Вступительное задание

Поступающим в 9 класс для решения предлагаются задачи 1—4, поступающим в 10 класс — задачи 3—6.

1. Тело массой m соскальзывает без начальной скорости с горки высотой H (рис. 1). Коэффициент трения между телом и горкой μ . Горка может перемещаться по горизонтальной поверхности без трения; масса горки M ; угол наклона к горизонту α . Найдите расстояние, на которое переместится горка за время движения тела по горке.

2. Два пластилиновых шарика с массами m и M движутся перпендикулярно друг другу со скоростями u и V соответственно. Происходит их столкновение, в результате которого шарики слипаются и далее движутся как единое целое. Определите энергию, выделившуюся при столкновении в виде тепла.

3. Однородный куб массой m с длиной ребра a покоится на горизонтальной поверхности; коэффициент трения между поверхностью и кубом $\mu = 0,8$. Груз массой M прикрепляется к кубу с помощью нерастяжимой нити, перекинутой через неподвижный блок (рис. 2). При какой минимальной высоте h крепления нити основание куба оторвется от

поверхности, а двигаться поступательно куб не будет? Трением нити о блок пренебречь.

4. Известно, что ускорение силы тяжести на поверхности Луны примерно в 6 раз меньше, чем на поверхности Земли. Исходя из этого, оцените, какие результаты показали бы на Луне рекордсмены мира по прыжкам в высоту и длину, по метанию копья, в беге на 100 метров.

5. Цилиндр, изготовленный из теплоизоляционного материала, разделен на три части с объемами V_1 , V_2 и V_3 нетеплопроводными заслонками. Во всех трех частях находится один и тот же газ, при этом его давление и температура в первой части равны p_1 и T_1 , во второй — p_2 и T_2 , а в третьей — p_3 и T_3 . Какое давление установится в цилиндре, если заслонки открыть?

6. Металлическое кольцо массой m и сопротивлением R начинает падать под действием силы тяжести с высоты H в магнитном поле с индукцией, изменяющейся с высотой x по закону $B(x) = B_0(1 - x/H)$ (рис. 3). Определите установившуюся скорость падения кольца, если его радиус l , а плоскость кольца остается перпендикулярной линиям магнитной индукции.

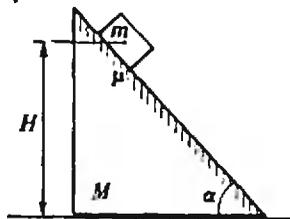


Рис. 1.

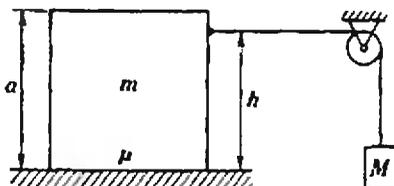


Рис. 2.

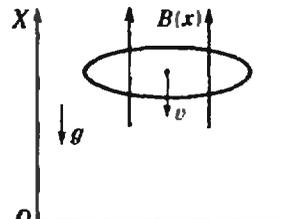


Рис. 3.



Астрономия: наука и ее творцы

«Пути, которыми люди проникают в суть небесных явлений, представляются мне почти столь же удивительными, как и сами эти явления» — эти слова, принадлежащие одному из величайших астрономов Иоганну Кеплеру, служат как бы эпиграфом в книге Д. Хермана «Открыватели неба»^{*}). Книга посвящена истории накопления и развития астрономических знаний; в ней рассказывается об открытиях и заблуждениях, о столкновениях и борьбе идей, о счастливых и горьких судьбах творцов науки.

Астрономия — одна из древнейших, едва ли не самая древняя наука. Своими истоками она уходит в те незапамятные времена, когда человек впервые задал себе вопрос: а что это такое — раскинувшееся над ним звездное небо? И еще: откуда по утрам приходит и куда прячется солнце? Почему луна ночь от ночи меняет свой облик, постепенно превращаясь из едва заметного серпа в яркий серебряный диск, а затем вновь становясь ущербной, будто пожиремое каким-то чудовищем? Может, и впрямь в этом участвуют неземные существа, неведомые силы? И вот возникают мифы, рождаются божества, которые требуют поклонения и которых надо задабривать, ибо от них зависят здоровье людей и хороший урожай, удачная охота и благополучное возвращение из похода. В свою очередь мифы дают названия многим звездам, созвездиям, туманностям.

Это наивное обращение к звездам, как и попытки жрецов интерпретировать не-

бесные явления с целью предсказания грядущих событий, еще даже не прелюдия астрономии. А что же следует принять за ее начало? Автор книги считает первым, принципиально важным шагом на пути становления астрономии как науки систематическое составление списков созвездий, видимых в ночное время; такие списки появились в Древнем Египте около 2000 г. до н. э. Таким образом, история развития астрономии насчитывает почти четыре тысячелетия. Долгие века рутинный сложившийся представлений сменялись периодами бурного подъема, революционных потрясений, ломки привычных, устоявшихся взглядов и концепций. Такой подъем эта наука переживает и сегодня. Он знаменуется проникновением в далекие глубины Вселенной, открытием пульсаров, квазаров и других экзотических объектов, выведением астрономических инструментов за пределы Земли — на спутники и космические станции.

Разумеется, на 200 страницах своей книги автор не мог осветить всю 40-вековую историю астрономии с исчерпывающей полнотой, но он сделал максимум возможного, нарисовав логически стройную картину совершенствования представлений о мире, показав взаимосвязь этих представлений с общественно-экономическим развитием человечества. Что же касается самих творцов, «открывателей неба», то в предметно-именном указателе к книге фигурирует более 250 имен ученых, внесших заметный вклад в астрономию. Список, возможно, и не исчерпывающий, но достаточно полный. И что самое главное — повествование ведется в стиле непринужденного рассказа, беседы с читателем. В книге даже отсутствует нумерация глав и разделов, а сами заголовки — нестандартные, броские, завлекательные. Например, в главе «От гармонии мира к всемирному закону» есть такие разделы: «Исследователь из Ураниборга» (о Тихо Браге), «Браге ищет компромиссное решение», «Геометрический мир» (о построениях Кеплера), «Встреча в Праге», «На

пороге небесной механики», «Еретик» (о Джордано Бруно), «Конфликт разума и силы» (о Галилее).

Очень сложно пересказать содержание такой книги, поэтому мы ограничимся кратким обзором ее и лишь на некоторых моментах остановимся подробнее.

В открывающей книгу главе «Звезды над Вавилоном» речь идет о предистории астрономии: о наблюдениях за Солнцем, Луной и звездами в Вавилоне и Египте, о древних календарях и пророчествах жрецов, о первых обсерваториях и монументальных сооружениях вроде «вычислительной машины каменного века», позволявшей предсказывать движение Солнца и Луны и даже, по предположениям ученых, — их затмения.

В главе «Кинга с картинками и система колес» рассказывается о возникновении астрономии как науки, источником для которой послужили систематические наблюдения за положением и перемещением звезд, проводившиеся в Древней Греции, группировка звезд в созвездия, составление каталогов звезд и карт звездного неба и т. п. — вплоть до попытки построения единой картины мира. Венцом древнегреческой астрономии явилась геоцентрическая система Птолемея, согласно которой в центре мироздания находится Земля. Несмотря на все свое несовершенство, система Птолемея продержалась полтора тысячелетия. Сейчас, с высоты наших знаний, она кажется предельно ненаучной, абсурдной, но, если мысленно перенестись на двадцать столетий назад и представить себе, что в распоряжении астрономов были лишь примитивные угломерные приборы да собственные глаза, можно только восхищаться глубокомыслием и мудростью древних ученых — Евдокса, Аристотеля, Гиппарха и того же Птолемея, строивших сложные траекторные движения небесных тел в виде эпициклов, эксцентров, гомоцентрических сфер и т. п.

Недостатки геоцентрической системы сознавали многие ученые, и она не продержалась бы столь долго,

^{*}Д. Херман. Открыватели неба. Перевод с немецкого. М., «Мир», 1981.

если бы не яростная защита со стороны всемогущей церкви, ибо концепция Земли как центра мира полностью отвечала догматам религии. Потребовался не только гений ученых, но и великое мужество, чтобы заявить: «В центре господствует Солнце!». Именно это изречение автор взял в качестве названия для следующей главы, посвященной, в основном, описанию жизни и творческого подвига Николая Коперника, который сформулировал истинно научные принципы гелиоцентрической системы мира. (Любопытна рассказанная в книге история публикации фундаментального труда Коперника, особенно авторского предисловия, которое увидело свет лишь триста лет спустя.)

XVI-XVII века — период бурного расцвета коперниковской астрономии, ее развития и совершенствования. Он насыщен драматическими и даже трагическими событиями (сожжение на костре инквизиции Джордано Бруно, вынужденное отречение от своих взглядов Галилео Галилея). Но ни запреты, ни травля, ни расправы с инакомыслящими не могли остановить поступательное движение науки, а вместе с ней — перестройку человеческого сознания, торжество материалистических идей. Этот период, которому посвящена глава «От гармонии мира к всемирному закону», завершается открытием Исааком Ньютоном «формулы мира» — закона всемирного тяготения. В результате родилась не только механика как наука о движении под действием сил, но и небесная механика как наука о движении небесных тел под влиянием «центральных» сил тяготения.

Принято считать — и совершенно справедливо, что

наше время характеризуется взаимным проникновением наук. Но такой процесс начался не сегодня. Еще в 1800 году знаменитый английский астроном Вильям Гершель поставил интересный и необычный по тем временам опыт: пропустив солнечный свет через призму, с помощью термометра он измерил температуру различных участков образовавшегося спектра. Выяснилось, что за пределами наиболее теплого красного участка видимой части спектра имеется еще более «горячая» область. Так было открыто инфракрасное (а вскоре и ультрафиолетовое) излучение. Но главное, опыты Гершеля показали, что можно, не покидая Землю, узнать об астрономических объектах нечто значительно большее, чем их положение на небосводе. Можно сказать, что эти опыты на службу астрономии поставили сугубо земную науку — физику и заложили основы астрофизики. Об астрофизических исследованиях небесных объектов рассказано в главе «Физика неба».

Следующий принципиально важный этап связан с применением в астрономии спектроскопии. К этим исследованиям причастны многие физики, химики и астрономы второй половины XIX века. Изучая спектры звезд, удалось установить их многие физические и химические свойства такие, как химический состав, температуру, физическое строение, скорости движения. Полученные сведения о звездах настолько обширны, что дают богатую пищу для суждения об их происхождении и эволюции. Этой теме посвящена глава «Рождение и жизнь звезд».

Продолжительность жизни звезд исчисляется миллиардами лет, и даже едва заметные изменения в их

состоянии происходят за миллионы лет. Лишенные возможности наблюдать за развитием звезд непосредственно, мы вынуждены судить об этом процессе косвенно, изучая звезды, находящиеся на различных этапах эволюции.

Эта глава, как и две последние — «В мире галактик» и «Новый Колумб», подводит читателя к сегодняшнему дню астрономии. Здесь описаны новейшие астрономические инструменты: крупнейший в мире 6-метровый зеркальный телескоп, установленный на Северном Кавказе, гигантские радиотелескопы, позволяющие проникать на расстояния в миллионы световых лет, рентгеновские и гамма-телескопы и даже установка для улавливания гравитационных волн. Подробно рассказано о выходе человека в космос, об исследовании Луны и планет Солнечной системы.

Но основное в заключительных главах — картина Вселенной, какой мы представляем ее сейчас. Автор знакомит читателя с теорией Фридмана о нестационарной Вселенной, с работами Хаббла и других ученых, доказавших эффект разбегания галактик, с теорией «большого взрыва» и ее подтверждением — наличием реликтового излучения, с гипотезой Амбурцумяна о возникновении звездных систем в ядрах галактик и т. д.

В заключение хочется подчеркнуть, что книга богата иллюстрирована красочными фотографиями и рисунками. Здесь и старинные астрономические карты, и различные инструменты — от простейших секстантов до гигантских радиотелескопов, и портреты ученых, и снимки туманностей, и многое-многое другое.

И. Зорич

Задачи наших читателей

1. Докажите, что уравнение

$$\sin^3 x + \cos x = a$$

при $|a| > \frac{5}{4}$ не имеет решений.

В. Пикунин

2. Докажите тождество

$$\begin{aligned} \cos \frac{8\pi}{35} + \cos \frac{12\pi}{35} + \cos \frac{18\pi}{35} = \\ = \frac{1}{2} \cos \frac{\pi}{5} + \frac{\sqrt{7}}{2} \sin \frac{\pi}{5}. \end{aligned}$$

М. Розенберг

3. Решите уравнение $x^x = 5^*$.

Р. Лозанов

4. Существует ли геометрическая прогрессия из девяти различных натуральных чисел, заключенных между 250 и 7000?

И. Бараш

*) Здесь $a^{b^c} = a^{(b^c)}$.

Ответы, указания, решения



Ереванский государственный университет

Математика

Вариант 1

1. $\left] \frac{5-3\sqrt{5}}{10}; 2 \right]$.

2. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

3. Точки минимума $x=0$ и $x=4$, точка максимума $x=2$.

4. $\frac{\pi\sqrt{2}}{4}$.

5. $\frac{(h-r)^2}{2(h-2r)}$.

Вариант 2

1. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k$, $x_2 = 2\pi l$ ($k, l \in \mathbb{Z}$).

2. $\{1; 2 \cup \{2; 5\}$

3. $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{2}{\sqrt{3}} \right)$.

4. $x=1$, $y=1$.

5. Угол при основании равен $\arccos \frac{3+\sqrt{3}}{6}$
или $\arccos \frac{3-\sqrt{3}}{6}$.

Вариант 3

1. $\{-1\}$.

2. $x = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{\pi}{3}k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

3. $]4; +\infty[$.

4. $\frac{2}{5}$.

Физика

1. $a_1 = 2g \frac{m_2 - 2m_1}{4m_1 + m_2} \approx 2,8 \text{ м/с}^2$;

$a_2 = g \frac{m_2 - 2m_1}{4m_1 + m_2} \approx 1,4 \text{ м/с}^2$;

$T_1 = \frac{3m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2} \approx 1,3 \text{ Н}$;

$T_2 = 2T_1 = \frac{6m_1 m_2 g}{4m_1 + m_2} \approx 2,6 \text{ Н}$.

2. $h = 5R/3$.

3. $r_2 = r_1 \sqrt[3]{\frac{\rho}{\rho + \rho g h} \frac{T_2}{T_1}} \approx 1,4 \text{ см}$

($\rho = 10^5 \text{ Па}$ — нормальное атмосферное давление, $\rho = 10^3 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды).

4. $Q = \frac{m_1 m_2 (v_1 + v_2)^2}{2(m_1 + m_2)} = 15 \text{ Дж}$.

5. Для любой точки на оси кольца напряженность электрического поля направлена вдоль оси к центру кольца, а модуль напряженности равен

$$E = \frac{|q|L}{4\pi\epsilon_0(R^2 + L^2)^{3/2}}.$$

Для трех данных значений L получим, соответственно, $E=0$; 1600; 1150 В/м.

6. $I = \frac{\epsilon_0 U v \sqrt{S}}{d} \approx 3,2 \cdot 10^{-8} \text{ А}$.

7. $F = I \sqrt{\frac{2U}{e/m}}$.

8. $\phi = B\omega l^2/2 = 0,5 \text{ В}$.

Московский институт стали и сплавов

Математика

Вариант 1

1. $\{(-1; 2)\}$.

2. $\left\{ \frac{5}{4} \right\}$.

3. $x = \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

4. $]-\infty; 1[\cup]3; 5[$.

5. Плоскости, в которых расположены основания искомого цилиндра, удалены от центра шара на $\frac{\sqrt{3}}{3}R$.

Вариант 2

1. $\{1\}$.

2. $]-\infty; -1] \cup]5; 6[$.

3. $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$).

4. $\{(6; 0)\}$.

5. $(0; 0)$, $(2; 2\sqrt{3})$, $(6; 2\sqrt{3})$, $(8; 0)$ и $(0; 0)$, $(2; -2\sqrt{3})$, $(6; -2\sqrt{3})$, $(8; 0)$; $12\sqrt{3}$.

Физика

1. $t = \sqrt{\frac{2l}{g + F/m}} \approx 0,28 \text{ с}$.

2. $E/E' = 169/121$.

3. $p_2 = T_2 \left(\frac{\rho_1}{T_1} - \frac{mR}{\mu V} \right) \approx 3,6 \cdot 10^5 \text{ Па}$.

4. $E = (q - q_m) \frac{\pi d^3 g}{6q} \approx 4 \cdot 10^4 \text{ В/м}$.

5. $U_1 = U \frac{\epsilon_2 d_1}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2} \approx 47 \text{ В}$;

$U_2 = U \frac{\epsilon_1 d_2}{\epsilon_2 d_1 + \epsilon_1 d_2} \approx 253 \text{ В}$.

6. $Q = qI^2 \approx 1,54 \cdot 10^3 \text{ Вт/м}^2$.

7. $R = \frac{El}{v_0 B} \approx 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$.

8. $e = \frac{\lambda^2 d}{4\pi^2 c^2 L \epsilon_0 S} \approx 6$ (здесь $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ — скорость света).

9. $v = c \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \approx 1,7 \cdot 10^5 \text{ м/с}$.

10. $q_2 = \frac{2\pi\epsilon_0 R m v_0^2}{q_1} \approx 2 \cdot 10^{-6} \text{ Кл}$.

Московский гидромелиоративный институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. $\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}$.

2. $\left\{-\frac{3}{2}, -1\right\}$.
3. $x=2\pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$).
4. $\frac{\pi}{6}$.
5. $\sqrt[3]{4V}$.

Вариант 2

1. $\pm \sqrt{2} (4i + 3j)$.
2. {2}.
3. $\max_{[-2; 2]} y = y(2) = 4$, $\min_{[-2; 2]} y = y(-2) = -24$.
4. $x = (-1)^{k+1} \arcsin \frac{1}{3} + \pi k$ ($k \in \mathbb{Z}$).
5. $4 \ln 3 - 2$.

Задачи устного экзамена

1. $2^{2^x}, 2^{2x}$.
2. $y = -\frac{5}{3}x + \frac{1}{3}$.
3. $y = \frac{7}{6}x^2 - \frac{13}{6}x + 1$.
4. а) $y = \frac{1}{2}x + 2$; б) $y = 2 \cdot 10^x$; в) $y = -\sqrt{x+1}$.
5. а) Четная; б) и в) Нечетная.
6. а) $]-\infty; \frac{1}{2}[$; б) $\{1; 5\}$; в) $]-1; 1[\cup]2; +\infty[$; г) $]-\infty; -5[\cup]-5; -4[\cup]4; 5[\cup]5; +\infty[$; д) $]-\infty; 0]$.
8. а) -7 ; б) 3 ; в) 1 .
9. а) $6(\sin 2x + 8)^2 \cdot \cos 2x$; б) $\frac{1}{2x \cdot \sqrt{\ln x}}$;
- в) $\frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$.
10. $y = -5x + 2$.
11. $-\cos x + x + C$.
12. $]-0; \frac{1}{6}[$.
13. $\{-1; 3\}$. При $a = -1$ ($0; -1$), при $a = 3$ ($-2; 1$).
14. $\frac{\sqrt{14}}{2}$.

15. 1. Решение. Проведем диаметр AO (рис. 1). Поскольку $|AO|^2 + |CO|^2 = |AC|^2$, $(AO) \perp (CD)$. Введем систему координат с началом в центре сферы O , осью абсцисс $[OD]$, осью ординат $[OA]$ и перпендикулярной к

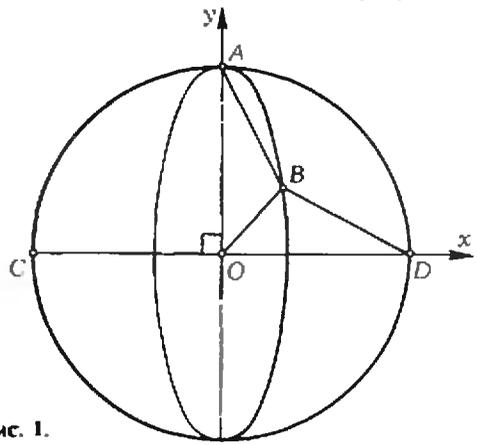


Рис. 1.

ним осью аппликат. Поскольку $\vec{OD} = (1; 0; 0)$, $\vec{AB} \cdot \vec{OD} = \vec{OB} \cdot \vec{OD}$. Но $\vec{AB} \cdot \vec{OD} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$. Значит, $\vec{OB} \cdot \vec{OD} = \cos \widehat{BOD} = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\widehat{BOD} = \frac{\pi}{3}$ и $\triangle BOD$ — равнобедренный.

Физика

1. $h_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g} = 4,5$ км; $t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g} = 60$ с.
2. $F_1 = mg$; $F_2 = m(g - v^2/R)$; $F_3 = m(g + v^2/R)$
3. $s = \frac{m^2 v^2}{2\mu g M^2} \approx 0,3$ м.
4. $\rho = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{V_1 + V_2} \approx 1,9$ мПа.
5. $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 + |q_2|}{(r/2)^2} \approx 5 \cdot 10^4$ В/м.
6. $r = \frac{R_1 R_2 (U_2 - U_1)}{U_1 R_2 - U_2 R_1} = 0,5$ Ом.
7. $P = \frac{cQV(t_k - t)}{\eta \tau} = 800$ Вт (здесь $t_k = 100^\circ\text{C}$ — температура кипения воды; $\eta = 0,7$).
8. $F = lIB \sin \alpha \approx 0,04$ Н.
9. $l = h \operatorname{tg} \alpha + (H - h) \operatorname{tg} \beta =$
 $= h + \frac{(H - h) \sin \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \approx 2,9$ м.
10. Изображение будет уменьшенным, если предмет находится за центром зеркала.

Московский технологический институт пищевой промышленности

Математика

Вариант 1

1. 2,52. 2. 32. 3. 64. 4. {0}. 5. -1. 6. {-3}.
7. 4. 8. 135° . 9. 1. 10. 4,5.

Вариант 2

1. 48. 2. 36. 3. 13. 4. $\frac{1}{2}$. 5. 1. 6. 25° . 7. 5.
8. 68. 9. 1256. 10. 4.

Вариант 3

1. 15. 2. 3,75. 3. {1}. 4. {16}. 5. 2. 6. 0.
7. 60° . 8. 4,5. 9. 160. 10. 0.

Физика

1. $a = g \frac{m_2}{2m_1 + m_2} = 2$ м/с².
2. $v = \sqrt{gl/2} = 10$ м/с.
3. $T = \pi d/v = 0,3$ с.
4. $\eta = \frac{cm_2 \Delta T}{qm_1} 100\% = 34\%$.
5. $U = \frac{(\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2)R}{r_1 + r_2 + R} = 2,5$ В.
6. $B = \frac{U}{vI} = 0,04$ Тл.

$$7. f = -\frac{Rd}{R+2d} = -0,65 \text{ м (знак «минус» говорит о том, что изображение предмета мнимое).}$$

$$8. n_{\text{ст}} = n_a \frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = 1,5.$$

Мурманское высшее инженерное морское училище им. Ленинского комсомола

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

$$1. \frac{1}{ab\sqrt{a^2}}$$

$$2. \{9\}.$$

$$3. \left[-1; \frac{7}{3}\right].$$

$$4. x_1 = (-1)^k \arcsin \frac{-2+3\sqrt{6}}{10} + \pi k,$$

$$x_2 = (-1)^{l+1} \arcsin \frac{2+3\sqrt{6}}{10} + \pi l \quad (k, l \in \mathbb{Z})$$

$$5. \frac{\pi \lambda^2 \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Вариант 2

$$1. -12\sqrt{x^2}.$$

$$2. \{2, 9\}.$$

$$3. [2; 3].$$

$$4. x = -\arctg \frac{1}{3} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$5. 64\pi \text{ дм}^3.$$

Задачи устного экзамена

$$2. \text{ — } 3.]-1; 0] \cup \{1\}. \quad 4. \left[\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right].$$

$$5. [-2; 4]. \quad 6. \frac{8}{3}. \quad 7. 90^\circ. \text{ Указание. Используйте теорему о трех перпендикулярах.}$$

Физика

$$1. v_{21} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2 \cos(\alpha_2 - \alpha_1)} \approx 6,2 \text{ уз.}$$

$$2. \frac{P_1}{P_2} = \frac{gT^2 - 4\pi^2 R \cos \varphi}{gT^2 - 4\pi^2 R} \approx 1,002 \quad (\text{здесь } T = 24 \text{ ч — период обращения Земли; } R = 6400 \text{ км — радиус Земли}).$$

3. Уровень воды останется прежним.

$$4. N_1 = N_A \frac{Q_B V}{\mu_B} \approx 3,3 \cdot 10^{22},$$

$$N_2 = N_A \frac{p_0 V}{RT_0} \approx 2,7 \cdot 10^{19} \quad (\text{здесь } Q_B = 1 \text{ г/см}^3 \text{ — плотность пресной воды, } \mu_B = 18 \text{ г/моль — ее молярная масса, } p_0 = 10^5 \text{ Па и } T_0 = 273 \text{ К — давление и температура при нормальных условиях, } R = 8,31 \text{ Дж/(моль} \cdot \text{К) — универсальная газовая постоянная}).$$

$$5. A = \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 r} \approx 0,09 \text{ Дж.}$$

$$6. q = (r_1 + r_2) \sqrt{\frac{8\pi\epsilon_0 W}{r_2}} \approx 1,7 \cdot 10^{-6} \text{ Кл.}$$

$$7. N = \frac{mgh}{\eta t} \approx 4,5 \text{ кВт; } I = \frac{N}{U} \approx 35,8 \text{ А.}$$

8. Емкость конденсатора надо увеличить в $(N/c)^2 = 2,25$ раз (здесь $c = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ — скорость света).

$$9. \lambda_n = \lambda/n \approx 5,3 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

10. Давление света больше на паруса белой окраски.

Рижский институт инженеров гражданской авиации им. Ленинского комсомола

Математика

Вариант 1

$$1. S = \frac{\sqrt{3}}{48 \cos \alpha} a^2, \quad V = \frac{\lg \alpha}{48} a^3.$$

$$2. x_1 = \pi k, \quad x_2 = \pm \frac{\pi}{9} + \frac{2\pi}{3} l \quad (k, l \in \mathbb{Z}).$$

$$3. \{2, 3\}.$$

4. {2}. Указание. Обозначьте $\sqrt{x+7}$ через t .

$$5. \frac{1}{4}.$$

Вариант 2

$$1. 2 \operatorname{arctg}(2\sqrt{3}k).$$

$$2. x = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

$$3. \left] 0; \frac{2}{7} \right[.$$

$$4. \frac{3(1-a)}{1+b}.$$

$$5. \pi.$$

Физика

Вариант 1

2. Нет, не будет.

$$3. v = \sqrt{Rg} = 42 \text{ м/с.}$$

$$4. E_{\text{к max}} = hc/\lambda = 6,62 \cdot 10^{-15} \text{ Дж} \approx 41 \text{ эВ;}$$

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2hc}{\lambda m}} \approx 1,2 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Вариант 2

2. Период колебаний будет увеличиваться.

$$3. \frac{m_{\text{расп}}}{m} = \frac{2c(t-t_0) + v^2 - v_0^2}{v^2 - 2\lambda} \approx 0,14.$$

$$4. R = \frac{mv}{eB} \approx 0,13 \text{ м.}$$

Вариант 3

2. См. рис. 1.

$$3. v = \frac{m_1 v_0 \sin \alpha}{m_1 + m_2} \approx 1,2 \text{ м/с.}$$

4. Электрон перешел на третий энергетический уровень. В спектре излучения можно будет увидеть три линии.

Задачи наших читателей

(см. «Квант» № 1, с. 39)

$$1. \text{ Поскольку } 22\dots 2 = 2 \cdot \frac{100^{991} - 1}{9}, \quad 100^{991} - 1 = 1980 \text{ «двоек»}$$

по Малой теореме Ферма делится на 991 и числа 9 и 991 взаимно просты, число $22\dots 2$ делится на $2 \cdot 991 = 1982$.

1980 «двоек»

2. Пусть q — простое число и l — показатель степени, с которым q входит в разложение числа $l! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot l$ на простые множители. Среди чисел, не превосходящих l , равно

$\left[\frac{l}{q}\right]$ делится на q ; из чисел, кратных q , ровно $\left[\frac{l}{q^2}\right]$ делится на q^2 ; из чисел, кратных q^2 , ровно $\left[\frac{l}{q^3}\right]$ делится на q^3 и т. д.; поэтому

$$l = \left(\left[\frac{l}{q}\right] - \left[\frac{l}{q^2}\right]\right) + 2\left(\left[\frac{l}{q^2}\right] - \left[\frac{l}{q^3}\right]\right) + 3\left(\left[\frac{l}{q^3}\right] - \left[\frac{l}{q^4}\right]\right) + \dots = \left[\frac{l}{q}\right] + \left[\frac{l}{q^2}\right] + \left[\frac{l}{q^3}\right] + \dots$$

(очевидно, здесь все слагаемые, начиная с некоторого, — нули). Поэтому, если s — показатель степени, в которой p входит в $\frac{m!}{n!(m-n)!}$, то $s = \sum_k \left(\left[\frac{m}{p^k}\right] - \left[\frac{n}{p^k}\right] - \left[\frac{m-n}{p^k}\right]\right)$, причем при $k > \log_p m$ слагаемые обращаются в нуль, а при $k \leq \log_p m$ — не превосходят 1, ибо являются целыми числами, меньшими 2:

$$\left[\frac{m}{p^k}\right] - \left[\frac{n}{p^k}\right] - \left[\frac{m-n}{p^k}\right] = \left\{\frac{n}{p^k}\right\} + \left\{\frac{m-n}{p^k}\right\} - \left\{\frac{m}{p^k}\right\} < 2.$$

В силу этого s не превосходит числа слагаемых, то есть $s \leq \log_p m$. Поэтому $r \leq s \leq \log_p m$, то есть $p^r \leq m$. Равенство $p^r = m$ достигается для всех m , являющихся степенью простого числа.

Задачи наших читателей

(см. «Квант» № 3, с. 58)

1. Доказательство основано на неравенстве $(a+b)^n > a^n + nba^{n-1}$, а в случае $x=5$, кроме того, на небольшом переборе.

2. $x^3 + 4x^2 + 4 = (x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 2)(x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 2x + 2)$.

3. Равенство $\frac{m}{S(m)} = \frac{n}{S(n)}$ выполнено при $m=69=1000101_2$ и $n=92=1011100_2$. Поэтому множество A натуральных чисел k , удовлетворяющих равенству $\frac{3k}{S(3k)} = \frac{4k}{S(4k)}$, не пусто (последнее равенство выполнено при $k=23$).

Покажем, что множество A бесконечно. Если $k \in A$, $k = a_1 a_2 \dots a_p$ — двоичная запись числа k и, аналогично, $3k = b_1 b_2 \dots b_q$ ($q = p+1$ или $p+2$), то

$$\frac{+a_1 a_2 \dots a_p \ 0}{a_1 \dots a_p} \\ \frac{b_1 b_2 \dots b_{q-1} b_q}{b_1 b_2 \dots b_{q-1} b_q}$$

Возьмем $l \geq 0$ и рассмотрим числа $N = (2^{p+l+2} + 1)k = a_1 \dots a_p 0 \dots 0 0 a_1 \dots a_p$. Двоичное разложение числа $3N$ получается как результат сложения

$$\frac{+a_1 a_2 \dots a_p \ 0 \ 0 \dots 0 0 a_1 a_2 \dots a_p \ 0}{a_1 \dots a_p \ 0 \ 0 \dots 0 0 a_1 \dots a_p} \\ \frac{b_1 \dots b_q \ 0 \dots 0 b_1 \dots b_q}{b_1 \dots b_q \ 0 \dots 0 b_1 \dots b_q}$$

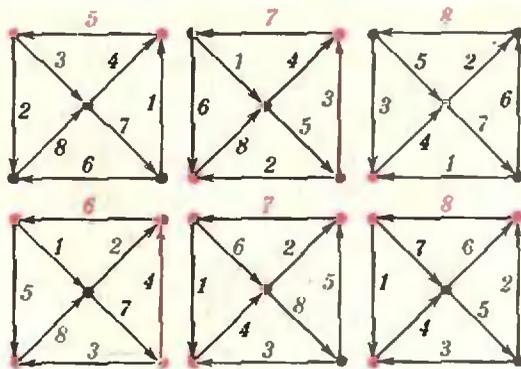


Рис. 2.

где $i=l$ или $l+1$. Отсюда $S(3N) = 2S(3k)$. Кроме того, $S(4N) = 2S(4k)$. Поэтому $N \in A$.

4. $\frac{\sqrt{m^2 - 2n^2}}{4}$

6. а) Если направления всех потоков на рисунке 1 (см. «Квант», № 3, с. 58) заменить на противоположные, получится фигура, совпадающая с зеркальным отражением данной относительно вертикальной оси. Поэтому каждому решению соответствует симметричное. Шесть решений показаны на рисунке 2 (еще шесть им симметричны).

б) По условию должно быть $c=d+h$, $h=e+f+g$, то есть $c=d+e+f+g$. Но даже $1+2+3+4 > 8$. Поэтому требуемая расстановка невозможна.

7. Докажем следующую теорему: *Кинетическая энергия плоского тела, вращающегося вокруг оси, перпендикулярной плоскости тела, равна сумме кинетических энергий вращения (с той же угловой скоростью) вокруг взаимно перпендикулярных пересекающихся осей, лежащих в плоскости тела.*

Доказательство. Кинетическая энергия тела, вращающегося с угловой скоростью ω , равна

$$K = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_i^2,$$

где m_i — масса i -й точки тела, r_i — расстояние от i -й точки до оси вращения. Если вращение происходит вокруг оси l_1 (рис. 3), то

$$K_{l_1} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_{i1}^2.$$

Но $r_{i1}^2 = r_{i2}^2 + r_{i3}^2$. Так что

$$K_{l_1} = \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_{i2}^2 + \frac{\omega^2}{2} \sum_i m_i r_{i3}^2,$$

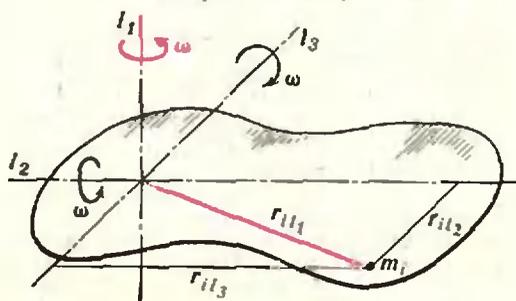


Рис. 3.

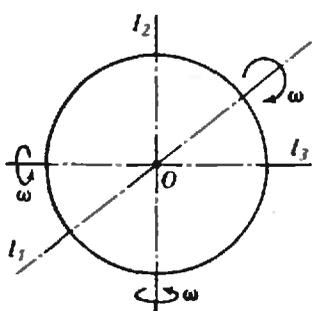


Рис. 4.

то есть

$$K_{l_1} = K_{l_2} + K_{l_3},$$

что и требовалось доказать.

Теперь вернемся к кольцу. Кинетическая энергия кольца, вращающегося вокруг своей оси (оси l_1 ; рис. 4), равна $K_{l_1} = \frac{m\omega^2 r^2}{2}$

(кольцо однородно по массе и все его точки находятся на одном и том же расстоянии от оси l_1 , поэтому $\sum_i m_i r_i^2 = m r^2$). При вращении же вокруг осей l_2 и l_3 кинетические энергии, очевидно, одинаковы. Так что

$$K_{l_2} = K_{l_3} = \frac{K_{l_1}}{2} = \frac{m\omega^2 r^2}{4}.$$

Это и есть искомая кинетическая энергия.

8. а) Рассмотрим два многочлена степени p с целыми коэффициентами: многочлен $x(x+1)(x+2) \cdot \dots \cdot (x+(p-1))$ и многочлен $x^p - x$. Первый многочлен, очевидно, делится на p при всех целых x , второй делится на p

при всех целых x согласно Малой теореме Ферма (см. с. 39 в «Кванте» № 1). Разность этих многочленов — многочлен с целыми коэффициентами степени меньше p , делящийся на p при всех целых x . Поэтому его коэффициенты делятся на p . Но эти коэффициенты — интересные нас суммы.

б) Суммы $\sum_{1 < k_1 < k_2 < \dots < k_q < p-1} \prod_{i=1}^q k_i$ и $\sum_{1 < k_1 < k_2 < k_q < p-1} \prod_{i=1}^{q-1} (p-k_i)$ отличаются только порядком слагаемых (если $k < p$, то и $p-k < p$). Поэтому при нечетном q ($3 < q < p-2$)

$$\begin{aligned} S_q &= \sum_{1 < k_1 < k_2 < \dots < k_q < p-1} \prod_{i=1}^q k_i = \\ &= \sum_{1 < k_1 < k_2 < \dots < k_q < p-1} \prod_{i=1}^{q-1} (p-k_i) = \\ &= C_{p-1}^q p^q + \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^i C_{p-1-i}^{q-1} p^{q-i} S_i - S_q, \end{aligned}$$

то есть

$$2S_q = C_{p-1}^q p^q + \sum_{i=1}^{q-1} (-1)^i C_{p-1-i}^{q-1} p^{q-i} S_i,$$

откуда, учитывая, что все S_i делятся на p , получаем, что S_q делится на p^2 .

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 1)

Задание 1. 1. Ла2! b4 2. Ла5! d4 3. Крd7! Кр:f6 4. С:d4×.

Задание 2. 1. e8С! Кр:d6 2. e8Л! Крe6 3. Лсб× (1...Кр:f6 2. g8Л! Крe6 3. Лгб×).

Главный редактор — академик И. К. Кихонин
 Первый заместитель главного редактора — академик А. Н. Колмогоров
 Заместители главного редактора: М. Н. Данилычева, В. А. Лешковцев, Ю. П. Соловьев

Редакционная коллегия: Л. Г. Асламазов, М. И. Башмаков, В. Е. Белонучкин, В. Г. Болтянский, А. А. Боровой, Ю. М. Брук, В. В. Вавилов, Н. Б. Васильев, С. И. Воронин, Б. В. Гиеденко, В. Л. Гутенмахер, Н. П. Долбилин, В. Н. Дубровский, А. Н. Земляков; А. Р. Зильберман, А. И. Климанов, С. М. Козел, С. С. Кротов, Л. Д. Кудрявцев, А. А. Михайлов, Е. М. Никишин, С. П. Новиков, М. К. Поталов, В. Г. Разумовский, Н. А. Родина, Н. Х. Розов, А. П. Савин, Я. А. Смородинский, А. Б. Сосиский, В. М. Уроев, В. А. Фабрикант

Редакционный совет: А. М. Балдин, С. Т. Беляев, Б. Б. Буховцев, Е. П. Велихов, И. Я. Верченко, Б. В. Воздвиженский, Г. В. Дорофеев, Н. А. Ермолаева, А. П. Ершов, В. Г. Зубов, Ю. Б. Иванов, Л. В. Канторович, П. Л. Капица, В. А. Кириллин, Г. Л. Коткин, Р. Н. Кузьмин, А. А. Логунов, В. В. Можаяев, В. А. Орлов, Н. А. Патрикеева, А. В. Перышкин, Р. З. Сагдеев, С. Л. Соболев, А. Л. Стасенко, И. К. Суриц, Е. Л. Сурков, Л. Д. Фаддеев, В. В. Фирсов, Г. Н. Яковлев

Номер подготовили:
 А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова,
 А. Сосиский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
 М. Дубах, Г. Красников, Н. Кузьмина, С. Лукhin,
 А. Пономарева, И. Смирнова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор М. Медведская

117071, Москва, Ленинский проспект, 15,
 «Физматлит», «Квант», тел. 234-08-21
 Сдано в набор 18.2.82 Подписано в печать 25.3.82.
 Печать офсетная
 Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
 Усл. печ. л. 5,80 Уч.-изд. л. 7,02 Т-07857
 Тираж 180 724 Цена 40 коп. Заказ 394

Ордена Трудового Красного Знамени
 Чеховский полиграфический комбинат
 ВО «Союзполиграфпром»
 Государственного комитета СССР
 по делам издательства, полиграфии
 и книжной торговли
 г. Чехов Московской области



Консультирует — чемпион мира по шахматам международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гнк.

ПАТОВЫЕ РЕКОРДЫ

Любая шахматная партия может кончиться двумя исходами: победой одного из партнеров или ничьей. Ничья, в частности, фиксируется, когда на доске стоит пат. Здесь мы рассмотрим ряд (искусственных) кратчайших партий, заканчивающихся патом.

Чтобы поставить сопернику мат, надо с шахом «запереть» одного его короля. На это вполне может хватить двух ходов (1. f4 e6 2. g4 Фh4×). Чтобы возник пат, все фигуры одной из сторон не должны иметь возможности двигаться (при этом их король не должен быть под шахом). Сколько же ходов надо сделать, чтобы «запереть» все фигуры одного цвета? Оказывается, не так много — пат может получиться уже на десятом ходу! Следующую рекордную партию Сэм Лойд придумал около ста лет назад.

1. e3 a5 2. Фh5 Лa6 3. Ф:a5 h5 4. Ф:c7 Лa6 5. h4 f6 6. Ф:d7+ Kpf7 7. Ф:b7 Фd3 8. Ф:b8 Фh7 9. Ф:c8 Kpg6 10. Фе6. Пат.

Здесь «замурованы» все оставшиеся на доске черные фигуры, но если заменить первые 2,5 хода на 1. a3 e6 2. a4 Фh4 3. Лa3 Ф:a4 (и далее 4. h4 Ф:c2 и т. д.), то партия кончится патом белых.

Этой идее можно придать и несколько иное оформление.

1. c3 d5 2. Фb3 h5 3. Ф:b7 Cf5 4. Ф:a7 Ch7 5. Ф:b8 Лa6 6. Ф:c7 Лh6 7. h4 f6 8. Ф:d8+

Kpf7 9. Ф:d5+ Kpg6 10. Фе6. Пат. Здесь на h7 замурован не ферзь, а слон черных.

В следующем «поединке» черные также запатовывают противника на десятом ходу, но тут уже нельзя поменять цвет фигур — белые ставят аналогичный пат только на 11-м ходу.

1. h4 e5 2. c4 d5 3. Фb3 dc 4. e4 cb 5. ab Ф:h4 6. Лa4 Ф:h1 7. g4 C:g4 8. Kf3 C:f3 9. Ka3 C:a3 10. Лb4 C:b4. Пат.

Потребуем теперь, чтобы ни одна из фигур ни белых, ни черных не была взята. За сколько ходов возможен пат в этом случае?

Кажется, что дополнительное условие намного затянет партию, однако, как ни странно, пат получается всего на два хода позднее.

1. d4 d6 2. Фd2 e5 3. a4 e4 4. Фf4 f5 5. h3 Ce7 6. Фh2 Ce6 7. Лa3 c5 8. Лg3 Фa5+ 9. Kd2 Ch4 10. f3 Cb3 11. d5 e3 12. c4 f4. Пат.

А как обстоит дело с взаимным запатованием королей? Партия, которая заканчивается патом обоим сторонам, продолжается 19 ходов.

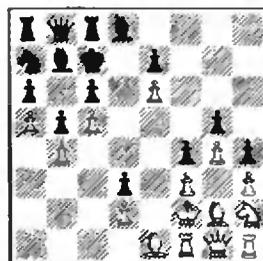
1. e4 d5 2. e5 d4 3. c3 f6 4. Фf3 Kpf7 5. Ф:b7 Фd5 6. Kpd1 Ф:g2 7. Kpc2 Ф:f1 8. Ф:c8 Ф:g1 9. Ф:b8 Л:b8 10. Л:g1 Лb3 11. Лg6 Лa3 12. Лh6 gh 13. ba Kpg7 14. Kpb2 d3 15. e6 a5 16. h4 a4 17. h5 c5 18. f4 c4 19. f5. Пат белым и черным.

В последнем примере в заключительной позиции симметрично запатованными оказались оба короля. При этом сама игра была несимметричной (ходы противника копируются то белыми, то черными), и по пять фигур исчезли с доски. Уникальной является следующая патовая партия, в которой, во-первых, доску покидают только по одному коню, во-вторых, оба короля вновь оказываются симметрично запатованными, и, в-третьих, что самое удивительное, все ходы белых и черных центрально симметричны.

1. Kf3 Kc6 2. Kc3 Kf6 3. Kb5 Kg4 4. h3 a6 5. Ka7 Kh2 6. K:h2 K:a7 (первый и последний размены) 7. g4 b5 8. Cg2 Cb7 9. e4 d5 10. Kpe2 Kpd7! 11. Фg1 Фb8! (исходные расположения королей и ферзей не были цент-

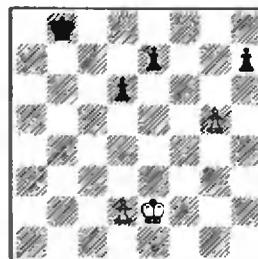
рально симметричны, теперь же на доске установлен полный порядок) 12. b4 g5 13. Cb2 Cg7 14. Jlf1 Jlc8 15. Cd4 Ce5 16. f3 c6 17. Cf2 Cc7 18. Cel Cd8 19. Kpf2 Kpc7 20. a4 h5 21. a5 h4 22. c4 f5 23. c5 f4 24. e5 d4 25. e6 d3.

Пат обоим королям.

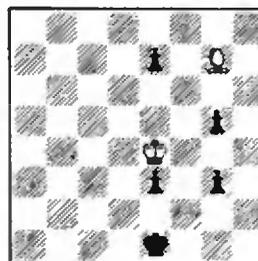


Доказать математически строго, что приведенные паты — самые быстрые, очень сложно, так как для этого необходимо перебрать миллионы партий. Тем не менее нет практически никаких сомнений в том, что эти рекорды никогда не будут превзойдены.

Конкурсные задания



7. Белые начинают и делают ничью.



8. Белые начинают и делают ничью.

Срок отправки решений — 25 июня 1982 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс «Кванта», задания 7, 8»).

На рисунке показан процесс решения головоломки «Причеси ежа», о которой рассказано в этом номере. Еж составлен из восьми деревянных пятигранников, две грани которых окрашены в голубой цвет, две другие — в желтый. Пятигранники склеплены резинками, позволяющими поворачивать (в разных плоскостях) одну половину ежа относительно другой. Первоначально еж представляет собой синий немного сплюснутый октаэдр, но после нескольких случайно выбранных поворотов

часть желтых граней выходит наружу и острые углы пятигранников начинают торчать как колючки. В центре показан такой «растрепанный» еж, а вокруг него — другие его положения; соседние получены друг из друга поворотом на 90° (направление поворота указано черной стрелкой). Если двигаться от центра, следуя серым стрелкам, мы увидим, как постепенно убираются колючки ежа и получается «причесанный» еж: синий многогранник слева в среднем ряду.

