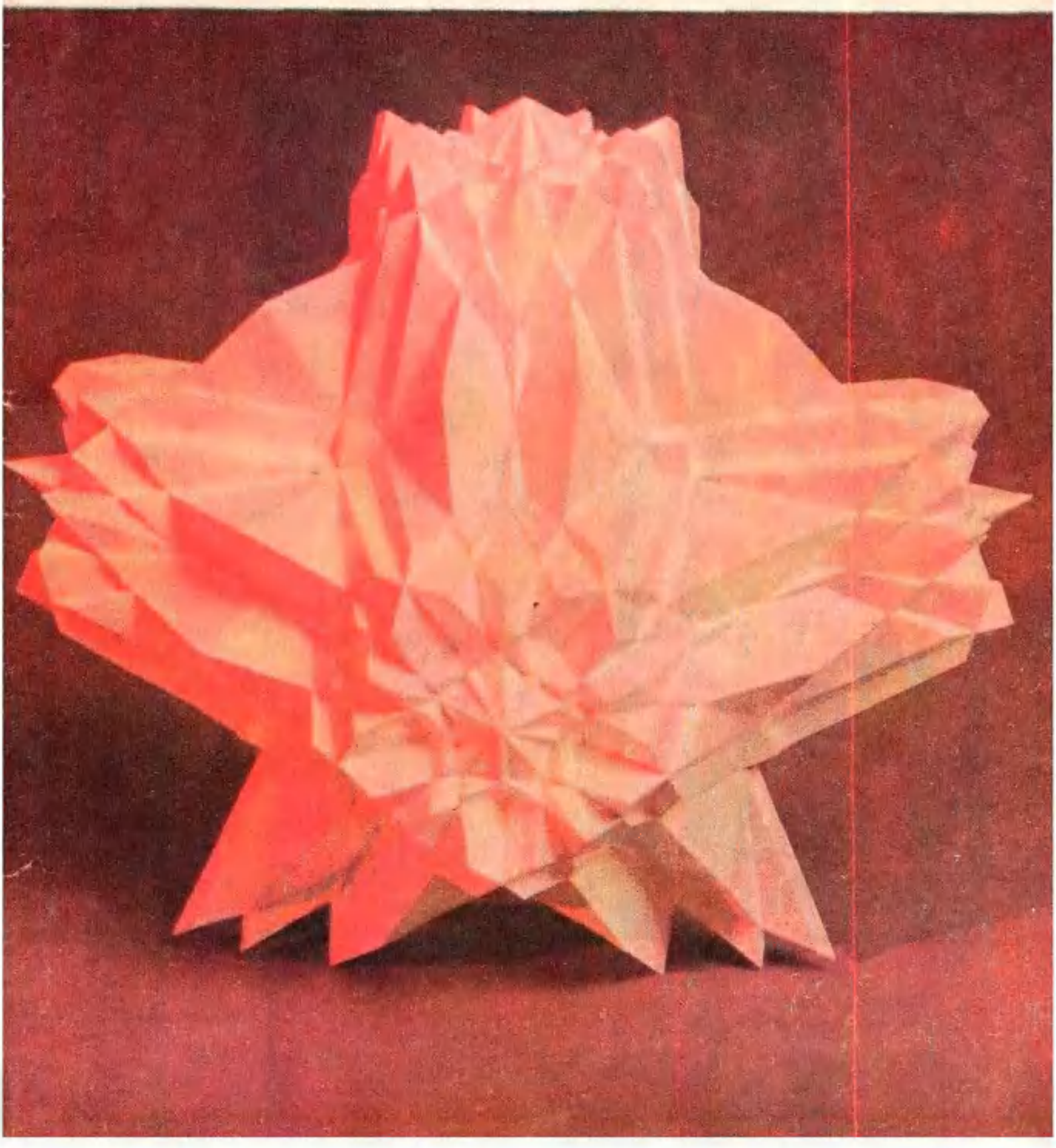
ISSN 0130-2221

Квант

1
1982

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



Красные шарики из резервуара вверху скатываясь вниз образуют кривую, которая называется ***нормальной*** или ***гауссовой*** (ее уравнение $y = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$). Эта кривая характеризует распределение мужчин и женщин по росту, горошин по размеру, новорожденных по весу, частиц газа по скоростям движения и множество других явлений и свойств физического и биологического миров.

Основан в 1970 году

Квант

1
1982

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА». ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ:

IN THIS ISSUE:

На первой странице обложки мы публикуем фотографию модели, сконструированной десятиклассником из г. Чебоксары Димой Гороховским по эпюре, которая была приведена на четвертой странице обложки двенадцатого номера «Кванта» за 1979 год

УКАЗ ПРЕЗИДИУМА ВЕРХОВНОГО СОВЕТА СССР

О награждении Генерального секретаря ЦК КПСС, Председателя Президиума Верховного Совета СССР, Маршала Советского Союза товарища Брежнева Леонида Ильича орденом Ленина и медалью «Золотая Звезда» Героя Советского Союза

За выдающиеся заслуги перед Коммунистической партией и Советским государством в деле укрепления экономического и оборонного могущества Советского Союза, большой личный вклад в достижение победы над немецко-фашистскими захватчиками в годы Великой Отечественной войны, восстановление и дальнейшее развитие народного хозяйства СССР в послевоенный период, неутомимую деятельность в борьбе за мир, за плодотворное руководство коммунистическим строительством и в связи с семидесятипятилетием со дня рождения наградить Генерального секретаря ЦК КПСС, Председателя Президиума Верховного Совета СССР, Маршала Советского Союза товарища Брежнева Леонида Ильича орденом Ленина и медалью «Золотая Звезда» Героя Советского Союза.

Первый заместитель Председателя Президиума Верховного Совета СССР
В. КУЗНЕЦОВ.

Секретарь Президиума Верховного Совета СССР
М. ГЕОРГАДЗЕ.

Москва, Кремль. 18 декабря 1981 г.

С Новым годом!

Наступил новый 1982 год, второй год одиннадцатой пятилетки. Большие надежды связывает с ним советский народ. Предстоит огромная работа по совершенствованию всех звеньев нашего народного хозяйства и переводу его на путь всесторонней интенсификации. Необходимо расширять и углублять научно-техническую революцию, эффективно использовать ее величайшие достижения. Наука теперь является главным источником разнообразных перемен в промышленности и строительстве, на транспорте, в технике связи и сельском хозяйстве. Недаром в отчетном докладе XXVI съезду КПСС Генеральный секретарь ЦК КПСС Л. И. Брежнев сказал такие слова: «Партия коммунистов исходит из того, что строительство нового общества без науки просто немыслимо». В нашей стране уделяется огромное внимание успешному развитию науки и подготовке научных кадров. «Квант» стремится внести свой вклад в решение этой важной государственной задачи — помочь воспитать побольше талантливых молодых исследователей.

В целом облик нашего журнала остается и в этом году прежним. Тем не менее некоторые его разделы будут выглядеть несколько поиному.

В 1982 году вы найдете в «Кванте» больше статей по различным разделам современной физики и математики, которыми обычно открывается каждый номер журнала. Больше будет опубликовано и статей по истории науки. Мы намерены рассказать читателям о выдающихся русских ученых М. В. Остроградском, А. М. Ляпунове и К. Э. Циолковском, а также о Гаспаре Монже, Данииле Бернулли и Симеоне Дени Пуассоне.

По иному будет выглядеть раздел «Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1981 году». Прежде всего, в нем будет значительно больше вузов, чем в прежние годы. В каждом из номеров первого полугодия вы увидите варианты вступительных экзаменов в вузы разного профиля — университеты, педагогические институты, технические вузы. Идя навстречу многочисленным пожеланиям наших читателей, мы расскажем также об экзаменах в экономические, пищевые, текстильные и некоторые другие вузы, где физика и математика не являются основными учебными дисциплинами.

Три года журнал «Квант» вел раздел «Искусство программирования», в котором, главным образом, помещались материалы школы юных программистов, организованной новосибирскими учеными. Она нашла своих энтузиастов в самых отдаленных уголках нашей страны и за рубежом. Последние уроки этой школы будут опубликованы в первом полугодии нынешнего года. Затем с сентября журнал начнет публикацию материалов новой одногодичной школы юных программистов.

В № 11 за 1981 год была опубликована небольшая анкета, адресованная читателям. Мы получили много интересных ответов. Благодарим наших читателей и надеемся, что они будут обращаться к нам со своими предложениями и пожеланиями, сообщать об интересующих их проблемах науки, присылать свои вопросы и задачи, активно участвовать в наших конкурсах.

Желаем вам больших успехов в учебе и жизни, наши дорогие читатели!

Эта статья посвящена последним достижениям в бурно развивающейся области современной науки — астрофизике. Автор — известный советский физик-теоретик академик А. Б. Мигдал — выводит читателя на самый передний край исследований, на границу между известным и неизвестным, показывает, как много интересных и важных проблем еще ждут своего решения.

А. Мигдал

Судьба нейтронных звезд

Незнание природы — величайшая неблагодарность
Плиний Старший

Я попытаюсь рассказать о сверхмощных взрывах звезд и о том, как возникают звезды, состоящие из нейтронов. Теория предсказывает, что в таких звездах может происходить еще не обнаруженный на опыте вид ядерных превращений — образование ядерного вещества с плотностью намного большей, чем плотность атомных ядер (а плотность атомных ядер — порядка 10^{14} г/см^3).

Для того чтобы разобраться в этих явлениях, нам придется обращаться ко многим областям физики. Здесь астрономия и теория тяготения переплетаются с физикой элементарных частиц и ядерной физикой. Нам понадобится узнать, что такое «вакуум» и как изменяются свойства пространства вблизи физических тел.

Можно ли об этом рассказать в одной статье так, чтобы читателю все было понятно? Автор не ставил перед собой такой задачи. Главная цель статьи — показать, хотя бы отчасти, ту внутреннюю красоту Вселенной, которая проявляется в богатстве связей между разнородными явлениями.

Предвижу, что не все будет понятно, но считаю, что беды в этом нет. Ведь слово «понимать» имеет много значений — от полной ясности до смутного ощущения. Запаситесь терпением и читайте дальше; самое интересное — в конце.

Ярче ста миллиардов солнц

Уже в древности астрономы заметили, что время от времени внезапно вспыхивают новые сверхъяркие звезды. Такая вспышка была, например, отмечена китайскими астрономами в 1054 году в Крабовидной туманности, входящей в состав нашей Галактики. Сейчас «вспышки сверхновых» хорошо изучены и обнаружены не только в нашей Галактике, но и в других звездных скоплениях. За несколько месяцев сверхновая испускает столько же света, сколько целая галактика, в которую входят десятки или сотни миллиардов солнц. По интенсивности и длительности излучения можно было установить, что полная энергия, выделяющаяся при вспышке сверхновой, составляет $10^{43} \div 10^{45}$ Дж. Между тем тепловая энергия звезды в тысячу раз меньше. Значительно меньше и энергия, которая могла бы выделиться при химических превращениях. Откуда же берется громадная энергия сверхновой? Этот вопрос долго оставался без ответа. Надежды объяснить вспышки сверхновых появились только после открытия ядерных реакций, освобождающих энергию в миллионы раз бо́льшую, чем химические превращения.

Итак, источником энергии сверхновой могли бы быть ядерные реакции, протекающие внутри звезды. Существует, впрочем, еще более мощный источник — это гравитационная энергия звезды. Однако освободить эту энергию можно только с помощью ядерных превращений. Если в ходе ядерных реакций плотность центральной части звезды увеличится, то под действием сил тяготения вещество наружных областей начнет падать к центру, приобретая кинетическую энергию. Иными словами, потенциальная энергия тяготения превратится в кинетическую энергию звездного вещества.

Плотность звезды определяется равновесием между силой тяжести и силой давления вещества звезды. Для того чтобы звезда сжалась, давление должно уменьшиться. Очень сильное уменьшение давления могло бы произойти при образовании нейтронного вещества, когда протоны и электроны превращаются в нейтроны. Попробуем в этом разобраться.

Давление пропорционально кинетической энергии частиц, из которых состоит вещество. При понижении температуры падает кинетическая энергия частиц, и поэтому падает давление. Однако даже при абсолютном нуле температуры кинетическая энергия частиц не равна нулю. Дело в том, что нейтроны, протоны и электроны имеют замечательное свойство — две одинаковые частицы не могут находиться в одном и том же состоянии («запрет Паули»). По этой причине даже при абсолютном нуле температуры частицы не покоятся и обладают различными скоростями — как говорят, разбросаны по скоростям. При этом наибольшую кинетическую энергию имеют легкие частицы. Таким образом, главный вклад в давление в звезде вносят электроны, масса которых приблизительно в две тысячи раз меньше массы протона или нейтрона. Не удивительно, что сила тяжести сжимает нейтронное вещество до гораздо большей плотности, чем обычное вещество, состоящее из атомных ядер и электронов,— ведь при этом легкие частицы заменяются тяжелыми и давление резко падает.

Поэтому, если бы в результате ядерных превращений звезда могла превратиться в нейтронную, то это привело бы к резкому сжатию звезды, и за короткое время освободилась бы громадная энергия, достаточная для объяснения вспышки сверхновой. При таком внезапном сжатии звезды должны возникать могучие упругие волны, идущие от центра. Под их действием наружная часть звезды сбрасывается, превращаясь в горячий газ, который разлетается с громадной скоростью. Свечение этого газа и объясняло бы длительность вспышек сверхновых.

Итак, вспышки сверхновых перестали казаться загадочным явлением — появились надежды объяснить их как следствие сжатия звезды в ходе ядерных превращений.

Но от догадки до прочно установленного утверждения нужно пройти долгий путь сомнений и доказательств.

В 1932 году Джеймс Чедвик открыл нейтрон. Уже два года спустя астрономы Бааде и Цвики сделали предположение, что вспышки сверхновых возникают в процессе рождения нейтронной звезды. Для того чтобы подтвердить или опровергнуть эту догадку, следовало изучить свойства нейтронного вещества и выяснить, может ли оно образоваться внутри звезды. А для этого понадобилось около тридцати лет экспериментального и теоретического исследования ядерной материи.

Что же стало известно в результате этого исследования?

Нейтронная жидкость

Сразу же после открытия нейтрона Л. Д. Ландау высказал мысль, что звезда достаточно большой массы должна состоять из нейтронного вещества. Для образования нейтронного вещества атомные ядра и электроны должны превратиться в нейтроны. Допустим, что звезда состоит из кислорода. В ядре каждого атома кислорода имеется восемь нейтронов и восемь протонов. Восемь протонов ядра и восемь электронов, окружающих атомное ядро кислорода, должны превратиться в восемь нейтронов. Эта реакция энергетически невыгодна — на образование каждого нейтрона надо израсходовать несколько миллионов электрон-вольт. Если масса звезды достаточно велика, процесс образования нейтронов с избытком обеспечивается энергией, выделяющейся при сжатии звезды. В 1937 году Ландау показал, что превращение кислорода в нейтронное вещество делается энергетически возможным уже при массе звезды, составляющей малую долю массы Солнца. Однако такое превращение не может произойти сразу, а только через целую цепь ядерных реакций; каждая из этих реакций требует сравнительно небольшой затраты энергии, которая берется из энергии теплового движения частиц звезды.

Для того чтобы убедительно доказать возможность образования нейтронной звезды, понадобились детальные сведения о ядерных реакциях и особенно о свойствах нейтронного вещества. Эти сведения были получены из анализа свойств атомных ядер и из опытов по рассеянию нейтронов и протонов на ядрах. Так, например, стало известно, что на малых расстояниях притяжение между нуклонами (нейтронами и протонами) сменяется отталкиванием, что затрудняет сжатие нейтронного вещества до плотности, в несколько десятков раз превышающей ядерную плотность. Некоторые из энергетических уровней ядра связаны с его вращением вокруг собственной оси. Измеряя энергии спектральных линий, испускаемых при переходах между такими уровнями, можно определить моменты инерции ядер.

Моментом инерции тела, вращающегося вокруг оси, называют величину, равную

$$I = \sum_i m_i r_i^2,$$

где m_i — масса отдельного элемента тела, r_i — расстояние от этого элемента до оси. С помощью момента инерции удобно выражать кинетическую энергию вращающегося тела:

$$K = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2}\left(\sum_i m_i r_i^2\right)\omega^2 = I\frac{\omega^2}{2},$$

где $v_i = \omega r_i$ — линейная скорость элемента массы m_i. Из этого выражения видно, что момент инерции при вращательном движении играет такую же роль, какую играет масса при поступательном движении тела.

Если сумма моментов внешних сил, действующих на вращающееся тело, относительно оси вращения равна нулю, то произведение момента инерции на угловую скорость (то есть величина $I\omega$) остается постоянным.

(Здесь и далее текст, напечатанный мелким шрифтом, — примечания редактора.)

Моменты инерции, найденные таким способом, оказались значительно меньше, чем они должны быть у шарика того же радиуса и той же плотности, что и ядро. Это значит, что во вращение вовлекается не все вещество ядра. Следовательно, отдельные части ядра могут двигаться без трения друг относительно друга — ведь трение обязательно вовлекло бы во вращение все вещество. Теоретический анализ экспериментальных данных по моментам инерции ядер позволил автору этой статьи в 1959 году сделать утверждение о том, что нейтронное вещество при ядерной плотности должно быть сверхтекучим, то есть двигаться без трения, вплоть до температур $T \sim 10^{10}$ К.

Итак, физики пришли к выводу, что под большим давлением из обычного вещества должна образоваться нейтронная сверхтекучая жидкость, которая сжимается в звезде до ядерных плотностей. Однако все заключения о свойствах нейтронного вещества были абстрактной игрой ума, поскольку само существование нейтронных звезд оставалось только правдоподобным предположением. Так было вплоть до 1968 года, когда астрономы обнаружили новые объекты, названные пульсарами.

Открытие пульсаров

В 1968 году группа астрономов из Кембриджа открыла звезду с пульсирующим радиоизлучением — пульсар. Уже через год десятки пульсаров были обнаружены многими обсерваториями земного шара. Это открытие стало возможным благодаря развитию радиоастрономии, позволяющей обнаруживать объекты со светимостью в 10^{10} меньше, чем у тех, которые доступны оптическим телескопам.

Пульсары — это звезды, испускающие импульсы радиоизлучения длительностью в $10 \div 30$ мкс, следующие строго периодично с периодом порядка $10^{-2} \div 1$ с. Строжайшая периодичность излучения вместе со сложной формой импульсов навели астрономов, открывших первый пульсар, на мысль о сигналах внеземной цивилизации. Однако, после того как десятки пульсаров обнаружились в разных областях Вселенной, эта мысль отпала сама собой. В самом деле, возникновение жизни — событие крайне маловероятное, и Вселенная не может быть заселена так густо. Предположить же, что инопланетяне дают о себе знать одинаковым способом, просто нелепо. Чем же объясняется поразительно точная периодичность импульсов радиоизлучения пульсаров?

Детальный анализ всех возможных типов периодических движений привел астрофизиков к однозначному заключению: период пульсара соответствует периоду обращения звезды вокруг своей оси.

Следовательно, пульсар — это звезда, вращающаяся с громадной скоростью: за земные сутки она совершает миллионы оборотов. Сейчас мы увидим, что из этого вытекает важнейшее следствие.

Пульсары — нейтронные звезды

Для того чтобы материя звезды не разлеталась при таком быстром вращении, необходимо, чтобы сила тяжести на поверхности звезды превосходила центробежную силу инерции. А это возможно только при очень большой плотности звезды.

Система отсчета, связанная с вращающейся звездой, является неинерциальной. В таких системах помимо «обычных» сил на любое тело действуют силы инерции, которые сообщают телу ускорения (в этой системе) пропорциональные массе тела. Если во вращающейся неинерциальной системе отсчета тело покоится, на него, помимо «обычных» сил, действует центробежная сила инерции, направленная от оси вращения перпендикулярно оси и равная $m\omega^2 r$, где m — масса тела, ω — угловая скорость вращения системы, r — радиус окружности, по которой вращается данное тело.

Так, рассматривая тело, находящееся на экваторе Земли и покоящееся относительно Земли, в системе отсчета, связанной с вращающейся Землей, мы запишем условие, при котором тело не слетает с поверхности Земли, так:

$$|\vec{F}_{т} + \vec{F}_{цб}| = G\frac{Mm}{R^2} - m\omega^2 R = 0$$

Простой расчет показывает, что пульсар с периодом обращения 0,1 с должен иметь плотность больше 10^{10} г/см^3 (проверьте этот расчет самостоятельно). Обычное вещество нельзя сжать до такой громадной плотности. Только нейтронное вещество, которое сжимается до ядерной плотности при массе звезды порядка массы Солнца, может вращаться с угловой скоростью пульсара, не разлетаясь при этом.

Таким образом, физики пришли к заключению, что пульсары и есть те самые нейтронные звезды, существование которых предсказал Ландау.

Подтвердилось и предсказание о сверхтекучести вещества нейтронных звезд. Оказалось, что в некоторых случаях период пульсара внезапно уменьшается. Это явление было названо «сбоем». Уменьшение периода естественно объяснить звездотрясением. Если при звездотрясении звезда внезапно сделается менее сплюснутой, то ее момент инерции уменьшится; тем самым уменьшится и период вращения.

Из определения момента инерции (мы привели его на с 6) следует, что если при звездотрясении звезда становится менее сплюснутой, момент инерции ее уменьшается. Поскольку величина $I\omega$ остается постоянной (ведь звездотрясение происходит в результате внутренних «потрясений», без участия внешних сил), уменьшение момента инерции приводит к увеличению угловой скорости вращения звезды. Значит, период вращения уменьшается.

Однако после начала сбоя, когда звездотрясение уже окончилось, период продолжает уменьшаться еще долгое время. В одном случае это время — несколько суток, в другом — несколько лет. Объяснить столь длительное изменение периода можно, лишь предположив, что после того как наружная часть звезды, состоящая из обычного вещества, ускорила свое движение, нейтронная сердцевина продолжает вращаться с прежней скоростью, и лишь за длительное время скорости сравниваются. Но это означает, что нейтронная сердцевина находится в сверхтекучем состоянии! Ведь при обычном трении скорости выравнялись бы за несколько секунд.

Связано ли образование нейтронных звезд со вспышками сверхновых, как это предполагали Бааде и Цвики?

Некоторые пульсары расположены там, где вспыхивали сверхновые — например, пульсар в Крабовидной туманности. Но в большинстве случаев такой связи нет.

Это означает, что иногда нейтронные звезды рождаются без образования сверхновых; и наоборот, некоторые вспышки возникают в результате ядерных реакций, не приводящих к образованию нейтронной звезды с пульсирующим радиоизлучением, или, быть может, появляются после взрыва нейтронной звезды. Но об этом речь пойдет дальше.

Теперь мы можем приступить к главной теме нашего рассказа — судьбе нейтронной звезды, масса которой растет. Масса звезды может увеличиваться от падения на нее небесных тел и за счет притока вещества от соседних звезд меньшей массы. Рост массы приводит к увеличению плотности в центре звезды.

Как мы увидим, при достаточно большой плотности нейтронная жидкость скачком переходит в новое сверхплотное состояние. При этом выделяется громадная энергия, и звезда взрывается. Причина этого перехода — неустойчивость вакуума в сильных полях. Эти непонятные пока слова имеют очень простой смысл.

Неустойчивость вакуума и пионная конденсация

Что такое вакуум? Не есть ли это просто пустота — пространство, в котором движутся нейтроны, протоны, электроны, кванты?

Оказалось, что это не так. Вакуум, то есть наше физическое пространство,— не просто геометрический объект, а сложная физическая система, обладающая интереснейшими свойствами.

Прежде всего, частицы своим присутствием изменяют окружающее их пространство. Вокруг заряженной частицы появляется электрическое поле, которое нужно понимать как некое состояние вакуума. В таком измененном вакууме появляется сила, действующая на другие заряженные частицы.

Вокруг тяжелых тел изменяются даже геометрические свойства пространства. Так, вблизи Солнца геометрия вакуума хоть и мало, но отличается от евклидовой. Отношение длины окружности к радиусу не равно 2π, как нас учат в школе.

Переменное электрическое поле, создаваемое в вакууме антенной радиопередатчика, вызывает переменное магнитное поле, которое, в свою очередь, приводит к появлению переменного электрического поля уже в более широкой области пространства. Таков механизм распространения в вакууме электромагнитных волн. Но вот самое замечательное свойство вакуума: в пустом пространстве, даже когда поблизости нет никаких реальных частиц и никаких посторонних полей, рождаются и исчезают кванты, электроны, позитроны, пи-мезоны и все другие частицы. Вакуум непрерывно бурлит; в нем появляются и исчезают такие не реальные, а как бы мерцающие или, как говорят физики, «виртуальные» частицы. Для того чтобы виртуальные частицы стали реальными, нужно сообщить им достаточную энергию. Для этого надо, например, столкнуть две реальные частицы, и тогда в пространстве, окружающем место столкновения, виртуальные частицы смогут получить энергию, достаточную для того, чтобы сделаться реальными. Так, два энергичных кванта света, сталкиваясь, могут извлечь из вакуума целый ливень частиц. Для рождения частицы из вакуума требуется затратить энергию, равную или большую ее энергии покоя.

Теперь зададим себе вопрос: что случится с виртуальными частицами, если в вакууме появится сильное поле? Не сделаются ли они реальными?

Допустим, что в некоторой области пространства создано сильное поле — электрическое, гравитационное или ядерное (то есть поле, создаваемое нуклонами). Пусть поле имеет вид потенциальной ямы. Самый простой пример потенциальной ямы — это впадина на поверхности земли. Когда частица попадает извне в потенциальную яму, ее кинетическая энергия увеличивается, как у камня, скатывающегося с горы. Если виртуальная частица в процессе своего появления на свет падает в потенциальную яму, то для ее реального рождения понадобится только часть энергии покоя. Недостающая часть возместится энергией, выигранной при падении. Если потенциальная яма настолько глубока, что кинетическая энергия, освобождающаяся при падении частицы, превышает энергию покоя, то вакуум потеряет устойчивость — в нем будут рождаться реальные частицы. Это будет продолжаться до тех пор, пока поле, создаваемое этими частицами, не сделает дальнейшее рождение невыгодным. Произойдет перестройка вакуума. Аналогом подобной перестройки может служить, например, переход вещества из жидкого состояния в твердое.

Особенно интересное следствие вытекает из перестройки вакуума под действие поля, создаваемого нуклонами. При достаточной плотности нуклонов глубина создаваемой ими ямы делается больше энергии покоя пи-мезонов, и вакуум становится неустойчивым по отношению к рождению этих частиц. В результате рождения пимезонов устанавливается такое поле этих частиц, что дальнейшее их рождение делается невозможным из-за отталкивания между ними.

Это явление названо пионной конденсацией. Пионная конденсация сопровождается выделением энергии (подобно тому, как это происходит, например, при замерзании воды). Выигрыш энергии при пионной конденсации мал, пока плотность нуклонов близка к той критической плотности, при которой конденсация началась. Однако при увеличении плотности нуклонов выделение энергии резко возрастает. При достаточно большой плотности выигрыш энергии может превысить работу, которую необходимо произвести, для того чтобы сжать ядерное вещество. Тогда ядерное вещество с большой плотностью будет иметь меньшую энергию, чем менее плотная ядерная материя. Но отсюда следует важное заключение: наряду с обычным состоянием ядерной материи, в котором она находится в атомных ядрах, возможно еще одно состояние — с большей плотностью. Это означает, что помимо обычных атомных ядер могут оказаться устойчивыми необычные сверхплотные ядра. Пока такие ядра не обнаружены. Их поисками заняты физические лаборатории многих стран. Теоретическое исследование пионной конденсации и ее следствий началось в 1971 году с работы автора этой статьи и продолжается до сих пор во многих научных центрах.

Как связана пионная конденсация с интересующей нас судьбой нейтронных звезд?

Пионная конденсация в нейтронной жидкости

Когда плотность в центре нейтронной звезды достигает критического значения $\varrho_к$, соответствующего пионной конденсации, должен наступить драматический поворот в судьбе звезды. Сначала в центре звезды возникает зародыш нового сверхплотного состояния нейтронного вещества. Такое состояние оказывается неустойчивым — по мере увеличения радиуса зародыша освобождается энергия тяготения. В равновесном состоянии значительная часть звезды должна стать сверхплотной. Поэтому сверхплотный зародыш начинает расти — вещество наружных частей звезды с большой скоростью устремляется к границе зародыша. К тому времени, когда радиус сверхплотной сердцевины достигает величины, соответствующей равновесному состоянию, вещество наружных областей продолжает по инерции двигаться, и радиус сердцевины проскакивает свое равновесное значение. Поскольку равновесие нарушено, начинается обратное движение. Таким образом, радиус сверхплотного зародыша сначала резко возрастает, а затем колеблется около значения, сравнимого с радиусом нейтронной звезды. Процесс образования сверхплотной звезды занимает тысячные доли секунды. При этом переходе выделяется энергия, в несколько раз бо́льшая той, которая освобождается при образовании нейтронной звезды. Можно ожидать, что под действием упругих волн, возникающих при колебании радиуса сверхплотной сердцевины, наружная часть звезды выбрасывается в сильно нагретом состоянии, и картина взрыва напоминает вспышку сверхновой.

Таким образом, помимо вспышек, вызванных ядерными реакциями и предшествующих образованию нейтронной звезды, возможны вспышки другой природы, возникающие в результате пионной конденсации и последующего взрыва нейтронной звезды.

К каким последствиям может привести взрыв нейтронной звезды?

Черные дыры

Если заключение о взрыве нейтронной звезды, вызванном пионной конденсацией, будет убедительно доказано теоретически или подтвердится наблюдениями, это будет означать, что нейтронные звезды не могут иметь плотность, превышающую критическое значение $\varrho_к$ (как показывает расчет, $\varrho_к$ имеет тот же порядок, что и ядерная плотность). Между тем, принципиально важно знать, существуют ли звезды с плотностью, значительно превышающей ядерную.

Согласно общей теории относительности при массе звезды, превышающей 2—3 массы Солнца, возникает гравитационная неустойчивость — звезда начинает сжиматься, и, после того как ее радиус сделается меньше некоторого критического значения (гравитационный радиус), никакие силы отталкивания не смогут удержать материю от падения к центру — сжимающее давление сил тяжести превышает расталкивающее давление частиц вещества. Это явление называют коллапсом звезды. Оно заканчивается образованием нового объекта — черной дыры. Черная дыра проявляет себя практически только как источник гравитационного поля. Тело, попадающее в поле черной дыры, падает к центру дыры и перестает быть видимым. Какую бы энергию ни имела частица, она не может вырваться из черной дыры — ведь с увеличением энергии частицы, согласно Эйнштейну, увеличивается ее масса, а следовательно, и притяжение к черной дыре. Из черной дыры не только нельзя отправить космический корабль, но даже нельзя подать световой сигнал. В двойных звездах материя легкой звезды перетекает к более тяжелой. Анализ излучения перетекающего вещества позволяет в нескольких случаях заподозрить, что тяжелый партнер — черная дыра.

Но если бы оказалось, что нейтронные звезды в результате взрыва, вызванного пионной конденсацией, разбрасывают материю уже при ядерных плотностях, то черные дыры не могли бы образоваться.

Другое явление, вызывающее интерес к сверхплотной материи, состоит в том, что при достаточно большой плотности нейтронное вещество может перейти в новое состояние — кварковую материю.

Еще один переход

За последние годы физики пришли к заключению, что все сильно взаимодействующие элементарные частицы — такие частицы называют адронами — состоят из нескольких типов кварков — частиц с дробным электрическим зарядом, равным $-1/3$ или $+2/3$ от заряда электрона. Нейтрон и протон (а они — адроны) состоят из трех кварков, а пи-мезон — из кварка и антикварка. Кварки, по-видимому, не существуют как свободные частицы. До сих пор все попытки обнаружить отдельный кварк давали отрицательный результат. Но зато на малых расстояниях между ними их свойства настолько хорошо изучены, что сейчас у большинства физиков нет сомнения в реальности этих частиц. Из анализа опытов по рассеянию адронов друг на друге удалось установить, что при сближении кварков взаимодействие между ними уменьшается. Это явление было названо асимптотической свободой.

Известны частицы, которые существуют длительное время в связанном состоянии, но на свободе живут недолго. Самый простой пример — это нейтрон, который в дейтроне живет неограниченно долго, а в свободном состоянии распадается за десять минут. Причина «невылетания» кварков другая. Когда расстояние между кварками делается больше радиуса адрона, притяжение между ними резко возрастает, так что они не могут удалиться друг от друга на большое расстояние, какую бы энергию они ни получили при столкновении.

Когда сталкиваются два энергичных адрона, содержащиеся в них кварки не вылетают, а превращаются в другие нуклоны или пи-мезоны.

Для наглядности можно себе представить, что адрон — это нечто вроде мешка, в котором кварки двигаются свободно, но за пределы которого они не могут удалиться. Если сблизить два нуклона на расстояние, меньшее размера мешка, то получится один общий мешок, в котором будет уже шесть кварков. При большой плотности нейтронного вещества, когда расстояния между нейтронами сравнимы с радиусом мешка, нейтроны распадаются на свои составные части — нейтронная материя превращается в кварковую. Как показывают расчеты, звезда делается кварковой, когда ее плотность в 10—20 раз превышает ядерную. При этом переходе выделяется энергия, и может произойти еще один взрыв звезды.

Осуществляется ли в природе кварковое состояние звезды? Или нейтронная материя уже при ядерной плотности взрывается и разбрасывается? Возможно ли, несмотря на это, образование черных дыр? Уже тот факт, что мы можем ставить такие вопросы, показывает, как далеко мы продвинулись в понимании структуры нейтронных звезд.

У каждого из нас есть свое ощущение красоты Вселенной. Удалось ли мне добавить новые краски к вашей картине мира, читатель?

Н. Васильев, А. Зелевинский

Многочлены Чебышева и рекуррентные соотношения

Широко распространен взгляд на математика как на человека, беспрерывно занимающегося сложнейшими арифметическими вычислениями (в более утонченном варианте — выписывающего и преобразующего длинные и сложные формулы). Читателям «Кванта» хорошо известно, что бывает красивая и важная математика «без формул», однако доля истины в таком взгляде все же есть. Умение взглянуть на формулы с неожиданной точки зрения, преобразовывать их, открывать новые, находить связи между ними — важная часть работы математика. В этой статье мы рассмотрим каскад любопытных формул, связанных со знаменитой последовательностью «многочленов Чебышева» (некоторые из этих формул предлагалось доказать в задаче М488 — «Квант», 1978, № 2), а также общие математические идеи, которые стоят за ними.

Введение. Две замечательные последовательности многочленов

Многочлены, о которых будет идти речь, встречаются во многих задачах анализа, вычислительной математики, алгебры. Они появились в 1854 году, в работе русского математика Пафнутия Львовича Чебышева в связи с таким вопросом.

Рассмотрим всевозможные многочлены данной степени n со старшим коэффициентом 1; какой из них *наименее уклоняется от нуля* на отрезке $[-1;1]$, то есть для какого многочлена $F_n(x)=x^n+\ldots$ величина

$$c_n=\max_{[-1,1]}|F_n(x)|$$

наименьшая?

Оказывается, это $\tilde{T}_n(x)=\frac{1}{2^{n-1}}T_n(x)$ — многочлен из левой колонки таблицы 1, деленный на старший коэффициент. Например, среди квадратных трехчленов — это $x^2-\frac{1}{2}$ (его *отклонение от нуля* c_2 равно $\frac{1}{2}$, а у любого другого квадратного трехчлена x^2+px+q оно больше); среди кубических многочленов — это $x^3-\frac{3}{4}x$ (для него $c_3=\frac{1}{4}$); и вообще отклонение от нуля $c_n=\frac{1}{2^{n-1}}$ многочлена $\tilde{T}_n(x)$ меньше, чем у любого другого многочлена $F_n(x)=x^n+\ldots$ степени n.*).

Таблица 1. Многочлены Чебышева первого и второго рода. Если умножить каждый из многочленов на $2x$ и вычесть предыдущий (стоящий над ним), получится следующий.

n	T_n	U_n
0	1	1
1	x	$2x$
2	$2x^2-1$	$4x^2-1$
3	$4x^3-3x$	$8x^3-4x$
4	$8x^4-8x^2+1$	$16x^4-12x^2+1$
5	$16x^5-20x^3+5x$	$32x^5-32x^3+6x$
6	$32x^6-48x^4+18x^2-1$	$64x^6-80x^4+24x^2-1$
7	$64x^7-112x^5+56x^3-7x$	. . . .
	. . . .	

Если же отклонение от нуля измерять иначе — заменить выражение c_n выражением

$$l_n=\int_{-1}^{1}|F_n(x)|\,dx,$$

то наименее уклоняющимся от нуля многочленом n-й степени со старшим коэффициентом 1 окажется многочлен $\widetilde{U}_n(x)=\frac{1}{2^n}U_n(x)$, где $U_n(x)$ берется из правой колонки таблицы 1: для многочлена $U_n(x)$ величина l_n (голубая площадь на рисунке 1) равна 2; стало быть, для $\widetilde{U}_n$ она равна $1/2^{n-1}$; для любого другого многочлена $F_n(x)=x^n+\ldots$ она больше (теорема А. Н. Коркина и Е. И. Золотарева).

Эти факты связаны с такими характеристическими свойствами *многочленов Чебышева:*

1°. *Значения многочлена T_n во всех точках экстремума и в концах отрезка* $[-1;1]$ *одинаковы по модулю. Площадь каждого из $n+1$ кусочков, ограниченных графиком многочлена* $U_n(x)=\frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x)$, *осью Ox и прямыми $x=\pm1$, одна и та же* (рис. 1).

(Подобными свойствами обладают лишь многочлены, полученные из равенств $y=U_n(x)$ и $y=T_n(x)$ линейной заменой переменных x и y.)

Свойство 1° вытекает из основных соотношений

2°. $T_n(\cos\varphi)=\cos n\varphi,\quad \sin\varphi\cdot U_{n-1}(\cos\varphi)=\sin n\varphi.$

---

*) Здесь мы доказывать этого не будем. Элементарное доказательство можно найти в [1] — первой книге из списка литературы в конце статьи.

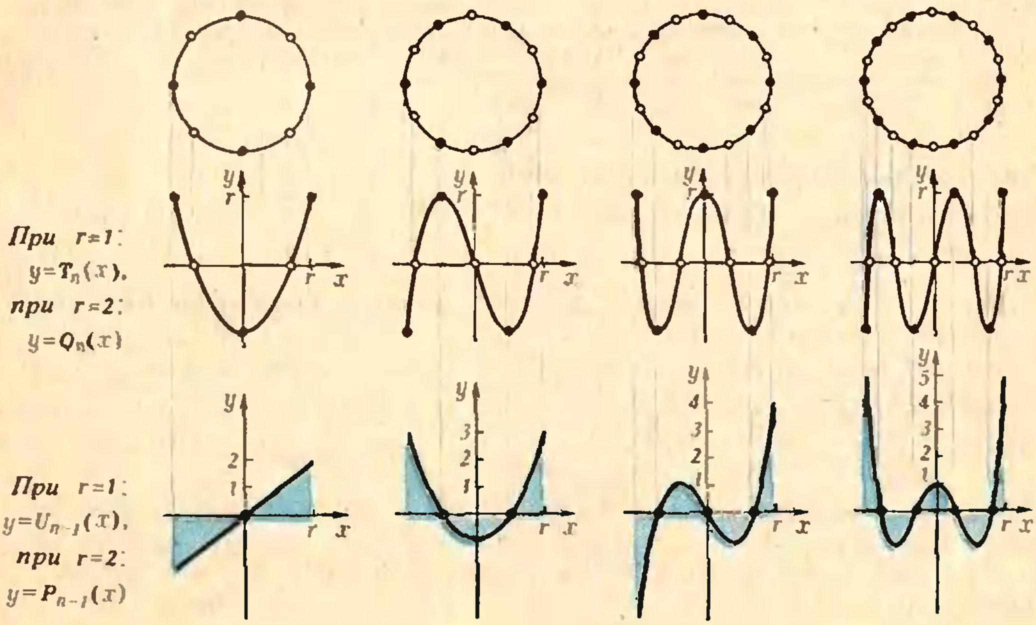


Рис. 1. Если прозрачный лист бумаги $0\leqslant x\leqslant 2\pi r$, $-r\leqslant y\leqslant r$ с нарисованным на нем графиком $y=r\cos nx$ скрутить в цилиндр (диаметра и высоты $2r$) и посмотреть на него сбоку так, чтобы графики на передней и задней половинках совместились, мы увидим график n-го многочлена Чебышева первого рода. Эти графики при $n=2,3,4,5$ изображены в верхнем ряду (при выборе масштаба $r=1$ получаются графики $y=T_n(x)$, при $r=2$ — графики $y=Q_n(x)$ — см. упражнение 3). В нижнем ряду под n-м многочленом изображена его производная, деленная на n; это — $(n-1)$-й многочлен Чебышева второго рода; у него все n голубых фигурок имеют одинаковую площадь.

В дополнение к тригонометрическим формулам 2°, которые определяют значения многочленов T_n и U_n при $|x|\leqslant 1$, для $|x|>1$ имеются совершенно иные на вид тождества:

3°. $$T_n(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^n+(x-\sqrt{x^2-1})^n}{2},$$
$$U_n(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2-1})^{n+1}-(x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Корни многочленов T_n и U_n видны из следующей пары тождеств:

4°. $$T_n(x)=2^{n-1}\left(x-\cos\frac{\pi}{2n}\right)\left(x-\cos\frac{3\pi}{2n}\right)\ldots\left(x-\cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}\right),$$
$$U_n(x)=2^n\left(x-\cos\frac{\pi}{n+1}\right)\left(x-\cos\frac{2\pi}{n+1}\right)\ldots\left(x-\cos\frac{n\pi}{n+1}\right).$$

Таким образом, корни и точки экстремума многочлена $T_n(x)$ — проекции вершин правильного $4n$-угольника с диаметром $[-1; 1]$ на этот диаметр (рис. 1).

Ниже мы докажем, наряду с другими, соотношения 2°—4° и проиллюстрируем на их примере некоторые важные методы алгебраических преобразований.

За определение многочленов Чебышева можно было бы принять любую из написанных выше формул, но нам удобнее положить в основу простое рекуррентное соотношение между ними, которое описано в подписи к таблице 1, и вывести из него все формулы.

Ниже мы предпочитаем иметь дело с многочленами, получающимися из T_n и U_n изменением масштаба (см. рис. 1): $P_n(x)=U_n(x/2)$, $Q_n(x)=2T_n(x/2)$; ту роль, которую для T_n и U_n играет отрезок $[-1; 1]$, будет играть теперь отрезок $[-2; 2]$. Новые многочлены хороши тем, что имеют целые коэффициенты, а их старшие коэффициенты равны 1. (Разумеется, формулы перехода, переписанные в «обратном» виде: $P_n(2x)=U_n(x)$, $Q_n(2x)=2T_n(x)$, — позволяют в любой момент вернуться к многочленам U_n и T_n.) Как правило, мы будем, доказывая что-то для P_n, предлагать аналогичные свойства Q_n читателю в качестве упражнений. Призываем его вооружиться карандашом и бумагой и проделывать подробно все выкладки, причем сначала — для конкретных небольших значений $n=2, 3, 4, \ldots$ (пока все не станет ясным).

Рекуррентные соотношения и индукция

Положим $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$ и

$$P_{n+1}(x)=x\cdot P_n(x)-P_{n-1}(x). \qquad (1)$$

Выпишем несколько первых членов этой последовательности. Вслед за $P_0(x)=1$ и $P_1(x)=x$ идут

$$P_2(x)=x^2-1,$$
$$P_3(x)=x(x^2-1)-x=x^3-2x,$$
$$P_4(x)=x(x^3-2x)-(x^2-1)=x^4-3x^2+1,$$
$$P_5(x)=x(x^4-3x^2+1)-(x^3-2x)=x^5-4x^3+3x$$

и т. д. (для многочленов до P_{12} вы можете проверить результаты по таблице 2).

Многочлены $P_n(x)$ возникают в разных ситуациях. Рассмотрим, например, дроби

$$R_1(x)=x,\quad R_2(x)=x-\frac{1}{x},\quad R_3(x)=x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x}},$$

$$R_4(x)=x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x}}},\quad R_5(x)=x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{x}}}},\ldots$$

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1
7	1	7	21	35	35	21	7
8	1	8	28	56	70	56	28
9	1	9	36	84	126	126	84
10	1	10	45	120	210	252	210
11	1	11	55	165	330	462	462
12	1	12	66	220	495	792	924
	...	...	...	...	...	...	...

Таблица 2. Треугольник Паскаля. О свойствах биномиальных коэффициентов, составляющих этот треугольник, подробно рассказано в брошюре [7]. Числа, стоящие на n-й красной диагонали, взятые с чередующимися знаками, — коэффициенты многочленов $P_n(x)$; про их сумму — со знаками и без — см. упражнения 6а) и 8в).

Подобные «многоэтажные» (так называемые *цепные*) дроби — полезный инструмент для различных задач о приближениях чисел и функций; ими, кстати говоря, тоже занимался П. Л. Чебышев.

После преобразований получается

$$R_2(x) = \frac{x^2-1}{x},\quad R_3(x) = \frac{x^3-2x}{x^2-1},$$

$$R_4(x) = \frac{x^4-3x^2+1}{x^3-2x},\quad R_5(x) = \frac{x^5-4x^3+3x}{x^4-3x^2+1}, \ldots$$

(проверьте!). Мы видим, что числители и знаменатели в стандартной записи этих дробей — как раз многочлены $P_n(x)$.

Другой пример: рассмотрим функцию $\sin n\varphi$ и постараемся выразить ее через $\sin\varphi$ и многочлен от $\cos\varphi$:

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cdot\cos\varphi,$$
$$\sin 3\varphi = \sin\varphi\cdot(4\cos^2\varphi - 1),$$
$$\sin 4\varphi = \sin\varphi(8\cos^3\varphi - 4\cos\varphi)$$

(проверьте!). Оказывается, $\sin n\varphi = \sin\varphi\cdot P_{n-1}(2\cos\varphi)$ для всех $n \geqslant 1$; другими словами, при $\sin\varphi \neq 0$

$$P_n(2\cos\varphi) = \frac{\sin(n+1)\varphi}{\sin\varphi}. \tag{2}$$

Полученные соотношения нетрудно получить с помощью метода математической индукции и формулы (1). Действительно, $R_{n+1}(x) = x - \dfrac{1}{R_n(x)}$. Поэтому, если предположить, что для некоторого n

$$R_n(x) = \frac{P_n(x)}{P_{n-1}(x)},$$

то из соотношения (1) легко получить аналогичное равенство для n, увеличенного на 1:

$$R_{n+1}(x) = x - \frac{P_{n-1}(x)}{P_n(x)} = \frac{xP_n(x) - P_{n-1}(x)}{P_n(x)} = \frac{P_{n+1}(x)}{P_n(x)},$$

что и требуется.

Аналогично для синусов: если предположить, что при $k = n-1$ и $k = n$

$$\sin(k+1)\varphi = \sin\varphi\cdot P_k(2\cos\varphi),$$

то из (1) следует

$$\sin\varphi\cdot P_{n+1}(2\cos\varphi) = 2\cos\varphi\cdot\sin\varphi\cdot P_n(2\cos\varphi) - \sin\varphi\cdot P_{n-1}(2\cos\varphi) =$$
$$= 2\cos\varphi\cdot\sin(n+1)\varphi - \sin n\varphi = \sin(n+2)\varphi;$$

мы воспользовались тождеством $2\cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\beta-\alpha)$.

(Заметим, что мы провели индуктивный переход не от n к $n+1$, как обычно, а от $n-1$ и n к $n+1$; при этом необходимо отдельно проверить первые два равенства при $n=0$ и $n=1$.)

Упражнения

1. Докажите с помощью индукции и рекуррентного соотношения (1), что при $|x|>2$ справедливо тождество

$$P_n(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2-4})^{n+1}-(x-\sqrt{x^2-4})^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{x^2-4}}. \qquad (3)$$

(Мы еще к нему вернемся.)

2. Докажите, что а) $P_n(2)=n+1$, б) $P_n(-2)=(-1)^n\cdot(n+1)$. (Сделайте это тремя способами: с помощью (1), а также переходя к пределу в равенстве (2) при $\varphi\to 0$ и $\varphi\to\pi$ и в равенстве (3) — при $x\to\pm 2$.)

3. Рассмотрим последовательность многочленов $Q_0(x)$, $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, ..., удовлетворяющую соотношению (1) и начальным условиям $Q_0(x)=2$, $Q_1(x)=x$. Выпишите первые 6 многочленов $Q_n(x)$. Докажите тождества

а) $$Q_n(x)/Q_{n-1}(x)=x-\cfrac{1}{x-\cfrac{1}{\ddots-\cfrac{1}{x-\cfrac{2}{x}}}} \quad (n-1 \text{ минус});$$

б) $2\cos n\varphi=Q_n(2\cos\varphi)$; (2′)

в) при $|x|>2$

$$Q_n(x)=\frac{(x+\sqrt{x^2-4})^n+(x-\sqrt{x^2-4})^n}{2^n}.$$

4. Докажите, что любая последовательность многочленов $R_0(x)$, $R_1(x)$, ..., удовлетворяющая соотношению (1), выражается через последовательность $(P_n(x))$ по формуле

$$R_n(x)=R_1(x)\cdot P_{n-1}(x)-R_0(x)\cdot P_{n-2}(x).$$

В частности, $Q_n(x)=xP_{n-1}(x)-2P_{n-2}(x)=P_n(x)-P_{n-2}(x)$. Выведите отсюда все тождества из упражнения 3.

Корни многочленов и произведения

Многие интересные формулы, в которых участвуют симметричные выражения от n чисел (или букв), оказываются легко объяснимыми, если эти числа рассматривать как корни некоторого многочлена степени n. Для n чисел $\gamma_k=2\cos\frac{k\pi}{n+1}$ (где $k=1,2,\ldots,n$) таким многочленом служит наш $P_n(x)$. В самом деле, подставляя в (2) вместо φ значения $\frac{\pi}{n+1}$, $\frac{2\pi}{n+1}$, ..., $\frac{n\pi}{n+1}$, мы видим, что числа $\gamma_k=2\cos\frac{k\pi}{n+1}$ — корни многочлена $P_n(x)$. Тут нам понадобится следствие из *теоремы Безу: если γ — корень многочлена $F(x)$, то $F(x)$ делится на $x-\gamma$.* (В самом деле, заменив переменную x на $y=x-\gamma$, мы получим многочлен $\bar F(y)=F(x-\gamma)$, у которого есть корень $y=0$, а такой многочлен, очевидно, делится на y*).) Наш многочлен $P_n(x)$ должен делиться на каждый из двучленов $x-\gamma_k$, а значит — и на их произведение; поскольку он имеет степень n и старший коэффициент 1, он просто равен произведению $\prod\limits_{1\leqslant k\leqslant n}(x-\gamma_k)$. Итак,

$$P_n(x)=\prod_{1\leqslant k\leqslant n}\left(x-2\cos\frac{k\pi}{n+1}\right). \qquad (4)$$

Упражнение 5. а) Докажите тождество

$$Q_n(x)=\prod_{1\leqslant k\leqslant n}\left(x-2\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right). \qquad (4')$$

б) Проверьте его и тождество (4) для $n=2, 3, 4$ и 5.

*) Подробнее о теореме Безу и разложении на множители многочленов см. [2]

Приведем одно любопытное тождество, которое вытекает из сопоставления формул (4) и (2).

Вычислим двумя способами $P_{2m}(0)$ при $m>0$ и приравняем полученные выражения.

С одной стороны, из (2) получаем

$$P_{2m}(0)=P_{2m}\left(2\cos\frac{\pi}{2}\right)=\left(\sin\frac{(2m+1)\pi}{2}\right)/\sin\frac{\pi}{2}=\sin\left(\frac{\pi}{2}+m\pi\right)=(-1)^m$$

С другой стороны, согласно (4),

$$P_{2m}(0)=\prod_{1\leqslant k\leqslant 2m}\left(-2\cos\frac{k\pi}{2m+1}\right).$$

Заменив каждое $\cos\frac{k\pi}{2m+1}$ при $m+1\leqslant k\leqslant 2m$ на $\left(-\cos\left(\pi-\frac{k\pi}{2m+1}\right)\right)$, получим

$$P_{2m}(0)=(-1)^m\cdot\left[2^m\cdot\prod_{1\leqslant k\leqslant m}\cos\frac{k\pi}{2m+1}\right]^2.$$

Но выражение в квадратных скобках положительно, поскольку в произведение входят косинусы только острых углов; поэтому оно равно 1, то есть

$$\prod_{1\leqslant k\leqslant m}\cos\frac{k\pi}{2m+1}=\frac{1}{2^m}. \tag{5}$$

Приведем красивую «словесную» формулировку (5): *при $m>0$ среднее геометрическое косинусов острых углов, кратных $\frac{\pi}{2m+1}$, равно $\frac{1}{2}$*.

Упражнения

6. а) Найдите $P_n(1)$, $P_n(-1)$, $Q_n(1)$, $Q_n(-1)$.

Докажите похожие на (5) равенства:

б) $\prod_{1\leqslant k\leqslant m}\sin\frac{k\pi}{2m}=\frac{\sqrt{m}}{2^{m-1}}$ $(m\geqslant 1)$;

в) $\prod_{1\leqslant k\leqslant m}\operatorname{tg}\frac{k\pi}{2m+1}=\sqrt{2m+1}$ $(m\geqslant 1)$;

г) $\prod_{1\leqslant k\leqslant m}\cos\frac{(2k-1)\pi}{4m}=\frac{\sqrt{2}}{2^m}$ $(m\geqslant 1)$.

7. Выясните, при каких m и n
а) многочлен P_n делится на P_m;
б) многочлен Q_n делится на Q_m.

Производящие функции, степенные ряды и коэффициенты

В этом разделе мы познакомим вас с очень плодотворным методом, широко применяемым в самых различных разделах математики — анализе, комбинаторике, теории вероятностей, — с *методом производящих функций*. Этот метод позволяет иногда собрать отдельные члены последовательности, как «кирпичи», в одно целостное «здание» и получить информацию сразу обо всей последовательности.

Пусть нам дана последовательность $a_0, a_1, a_2, \ldots$ Назовем ее *производящей функцией* выражение

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots=\sum_{n\geqslant 0}a_nz^n.$$

Такие выражения математики называют *формальными степенными рядами*. Эти ряды можно складывать, вычитать и перемножать как обычные многочлены, можно делить один ряд на другой (если свободный член ряда-делителя отличен от 0), любой ряд можно почленно дифференцировать и интегрировать — и все эти операции можно использовать, чтобы получать новые последовательности из уже изученных. Часто оказывается возможным из рекуррентного соотношения, которым определена последовательность, найти простую формулу для ее производящей функции, и наоборот — из производящей функции извлечь формулу или соотношения для членов последовательности.

Для конечной последовательности $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ производящей функцией будет многочлен $f(z)=a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n$. Например, многочлен $f_n(z)=(1+z)^n$ служит производящей функцией для *биномиальных коэффициентов* $C_n^0, C_n^1, \ldots, C_n^n$ — членов n-й строки треугольника Паскаля (таблица 2):

$$\sum_{0\leqslant k\leqslant n} C_n^k z^n=(1+z)^n. \tag{6}$$

Продифференцировав это тождество k раз и заложив затем $z=0$, найдем $C_n^k=n(n-1)\ldots(n-k+1)/1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k$.

Раскрывая скобки и выделяя коэффициенты при z^m в очевидном тождестве $(1+z)(1+z)^n=(1+z)^{n+1}$, записанном в виде

$$(1+z)\Big(\sum_{0\leqslant k\leqslant n} C_n^k z^k\Big)=\sum_{0\leqslant k\leqslant n+1} C_{n+1}^k z^k,$$

получим важное соотношение $C_n^m+C_n^{m-1}=C_{n+1}^m$.

Среди бесконечных последовательностей особенно простую, легко «сворачивающуюся» производящую функцию имеет геометрическая прогрессия $b_0=b,\ b_n=qb_{n-1}$. Заменив в сумме $f(z)=\sum_{n\geqslant 0} b_nz^n=b+\sum_{n\geqslant 1} b_nz^n$ каждое b_n на qb_{n-1}, получим $f(z)=b+qz\sum_{n\geqslant 1} b_{n-1}z^{n-1}=b+qzf(z)$, откуда $f(z)(1-qz)=b$, то есть

$$f(z)=\sum_{n\geqslant 0} b_nz=\frac{b}{1-qz}. \tag{7}$$

Это, конечно, известная формула для суммы бесконечной геометрической прогрессии (при $|qz|<1$). Но тем же приемом можно получить и производящую функцию для нашей последовательности многочленов $P_n(x)$.

Положим $\Phi(z)=\sum_{n\geqslant 0} P_n(x)z^n=1+xz+\sum_{n\geqslant 2} P_n(x)z^n$. (Здесь x играет роль параметра и ниже мы для краткости вместо $P_n(x)$, $P_{n-1}(x)$,... будем писать P_n, P_{n-1},...) Согласно (1), заменим каждое P_n при $n\geqslant 2$ на $xP_{n-1}-P_{n-2}$. Тогда

$$\begin{aligned}\Phi(z)&=1+xz+\sum_{n\geqslant 2} xP_{n-1}z^n-\sum_{n\geqslant 2} P_{n-2}z^n=\\&=1+xz+xz\cdot\sum_{n\geqslant 2} P_{n-1}z^{n-1}-z^2\cdot\sum_{n\geqslant 2} P_{n-2}z^{n-2}=\\&=1+xz+xz(\Phi(z)-1)-z^2\Phi(z).\end{aligned}$$

Следовательно, $\Phi(z)\cdot(z^2-xz+1)=1$ и

$$\Phi(z)=\frac{1}{z^2-xz+1}. \tag{8}$$

В этой простой формуле скрыта вся хитрая последовательность многочленов P_n, которой мы до сих пор занимались! Отдельные P_n, спрятанные в ней, мы «вытащим» двумя разными способами.

1) При $|x|>2$ квадратное уравнение $z^2-xz+1=0$ имеет два корня:

$$u=\frac{x+\sqrt{x^2-4}}{2},\qquad v=\frac{x-\sqrt{x^2-4}}{2}. \tag{9}$$

Из $z^2-xz+1=(z-u)(z-v)$, учитывая $uv=1$, получим

$$\Phi(z)=\frac{1}{(u-z)(v-z)}=\left(\frac{1}{v-z}-\frac{1}{u-z}\right)\frac{1}{u-v}=$$

$$=\left(\frac{u}{1-zu}-\frac{v}{1-zv}\right)\frac{1}{u-v}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{u^{n+1}-v^{n+1}}{u-v}z^n,$$

то есть $P_n(x)=(u^{n+1}-v^{n+1})/(u-v)$; это формула (3).

2) Найдем из (8) отдельные коэффициенты каждого многочлена $P_n(x)$. Делается это так:

$$\Phi(z)=\frac{1}{1-(xz-z^2)}=\sum_{k\geqslant 0}(xz-z^2)^k=\sum_{k\geqslant 0}\ \Big(\sum_{0\leqslant i\leqslant k}(-1)^i C_k^i x^{k-i}z^{k+i}\Big)=$$

$$=\sum_{n\geqslant 0}z^n\Big(\sum_i(-1)^i C_{n-i}^i\cdot x^{n-2i}\Big)$$

(мы воспользовались формулами суммы бесконечной геометрической прогрессии (7), бинома Ньютона (6) и выделили коэффициент при z^n, который и есть нужный нам $P_n(x)$). Следовательно,

$$P_n(x)=\sum_i(-1)^i C_{n-i}^i x^{n-2i} \qquad (10)$$

(например: $P_6(x)=C_6^0x^6-C_5^1x^4+C_4^2x^2-C_3^3=x^6-5x^4+6x^2-1$).

Конечно, *доказать* готовые формулы (3) и (10) можно без производящих функций — самое замечательное, как они возникли, почти сами собой, из короткой формулы (8).

Обоснование всех действий с бесконечными рядами, которые мы производили — а оно, разумеется, необходимо, — можно было бы провести, либо заметив, что при небольших по модулю числовых значениях z все рассматриваемые ряды *сходятся* (как (7) при $|z|<1/|q|$), то есть представляют настоящие функции от z, либо проверив, что для определенных *формально* операций сложения, умножения и т. д. (каждый коэффициент ряда выражается через конечное число других, а z — просто буква!) выполнены все обычные законы. Подробнее с методом производящих функций и степенными рядами можно познакомиться по книгам [3], [4], [6].

Упражнения

8. Рассмотрим последовательность *чисел Фибоначчи*

$$u_0=0,\ u_1=1,\ u_{n+1}=u_n+u_{n-1}.$$

а) Докажите, что ее производящая функция равна $\dfrac{z}{1-z-z^2}$. Выведите отсюда

б) *формулу Бинэ*

$$u_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

(другой вывод этой формулы см. в [5]).

в) Докажите тождество $u_n=\sum\limits_i C_{n-i-1}^i$.

9. а) Найдите производящую функцию для последовательности многочленов $Q_n(x)$ из упражнения 3 и докажите с ее помощью, что (при $|x|>2$)

$$Q_n(x)=u^n-v^n,$$

где u и v определены формулами (9) (в этом заключалось упражнение 3 в)).

б) (Для тех, кто знаком с комплексными числами; см. [1]). Проверьте, что формулы (3) и (3′) при $|x|<2$ превращаются в формулы (2) и (2′). (*Указание*. $u=\cos\varphi+i\sin\varphi$, $v=\cos\varphi-i\sin\varphi$, если $x=2\cos\varphi$.)

Литература

1. А. М. Яглом и И. М. Яглом. «Неэлементарные задачи в элементарном изложении». («Библиотека математического кружка», выпуск 5) (М., Гостехтеориздат, 1954); задачи 130—134.

2. «Избранные вопросы математики» (факультативный курс 10), раздел «Комплексные числа и многочлены» (М., «Просвещение», 1980).

3. Д. Пойа, Г. Сеге. «Задачи и теоремы из анализа» (М., «Наука», 1978).

4. Анри Картан. «Элементарная теория аналитических функций одного и нескольких комплексных переменных» (М., «ИЛ», 1963).

5. Н. Н. Воробьев. «Числа Фибоначчи» («Популярные лекции по математике», выпуск 6) (М., «Наука», 1978).

6. Н. Я. Виленкин. «Комбинаторика» (М., «Наука», 1969).

7. В. А. Успенский. «Треугольник Паскаля» («Популярные лекции по математике», выпуск 43) (М., «Наука», 1979).

Физика — наука экспериментальная. Каждое физическое исследование начинается с наблюдения и изучения какого-либо природного явления и заканчивается сравнением теории с результатами эксперимента.
Многие законы и явления природы в основе своей не так уж сложны, а их характерные черты можно проследить даже в сравнительно простых экспериментах. Галилей открыл законы падения тел, наблюдая за тем, как они падали с вершины Пизанской башни. Ньютон установил, что солнечный свет является сложной смесью различных цветов, с помощью простой стеклянной призмы. Поразительно простыми, но необычайно глубокими по содержанию и выводам были многие опыты Фарадея.
Конечно, сегодня очень мало надежды на то, что с подручными средствами можно открыть новый закон природы. Физикам наших дней нужны очень сложные экспериментальные установки — ускорители заряженных частиц, атомные реакторы, электронные и ионные микроскопы и т. п. Но многое из того, что уже известно науке, можно самому проверить в простых домашних экспериментах. Движение маятников, рост кристаллов, дифракция и интерференция волн, поверхностное натяжение или сухое трение — все это можно исследовать простыми, подручными средствами. Деревянные кубики или шары, лист бумаги, швейная игла, мыльный пузырь или струя воды из крана, не говоря уже о компасе и карманном фонаре, — все это можно использовать для разнообразных и поучительных физических экспериментов. Такие эксперименты — первая ступень к самостоятельным исследованиям. Они помогают глубже проникнуть в суть различных физических явлений, развивают наблюдательность и сообразительность.
Лаборатория «Кванта» принадлежит к числу систематических разделов нашего журнала. В нем мы стремимся дать нашим читателям возможность произвести простые, но весьма поучительные эксперименты, не требующие специального лабораторного оборудования. Из писем читателей мы видим, что многие из них охотно проделывают предлагаемые нами эксперименты и даже стремятся творчески видоизменить их (варьировать условия — менять температуру, напряжение или другие участвующие в опыте физические величины, подбирать другие вещества и материалы и т. д.). При этом у них возникает много неожиданных и интересных вопросов, с которыми они обращаются в «Квант».
При воспроизведении описываемых нами опытов необходимо обращать особое внимание на технику безопасности и строго соблюдать рекомендуемые в статьях меры предосторожности.
Мы надеемся, что Лаборатория «Кванта» поможет нашим читателям лучше разобраться в своих способностях, развить навыки исследователей природы.

А. Шмелев

Новогодний физический фейерверк

Уже несколько раз в Лаборатории «Кванта» публиковались задачи-вопросы из книги Дж. Уокера «Физический фейерверк» (см. «Квант», 1980, №№ 11 и 12). Ответы на многие из них связаны с проведением опытов или с наблюдениями.
Однако данная публикация отличается от предыдущих. Во-первых, чтобы фейерверк получился новогодним, специально выбраны те опыты, которые легко провести зимой. Во-вторых, текст Уокера существенно дополнен: приведены любопытные истории, связанные с основной темой задачи, и описаны дополнительные подготовительные эксперименты. Наконец, в-третьих, было решено не публиковать ответы сразу, а подождать писем читателей.

Когда мы идем по снегу

Многие, наверное, видели фильм «Александр Невский». Но, возможно, не все знают, что основной эпизод картины — Ледовое побоище — снимался...летом. Жара достигала тридцати градусов, а надо было показать снег и лед на Чудском озере. Однако выход был найден: большую площадку около Мосфильма засыпали смесью нафталина и соли. Когда актеры шли по такому «снегу», он

скрипел как настоящий в сильный мороз.

Можно легко повторить этот опыт, насыпав ровным слоем на тарелку сахарный песок или соль. Нажмите ложкой на такой слой и вы услышите слабый скрип. Попробуйте смочить сахар или соль или слегка расплавить сахарный песок (например, на сковородке) — скрип прекратится.

Теперь предоставим слово Уокеру: «Иногда снег скрипит под ногами, но это бывает лишь в те дни, когда температура воздуха существенно ниже нуля. Что создает этот звук, и почему его возникновение зависит от температуры?»

Тайна мороженого

Когда впервые появилось мороженое, способ его приготовления охранялся как строжайший секрет. Напрасно при многих европейских дворах пытались использовать снег или лед для замораживания смеси из сливок, сахара и фруктовых соков. Смесь охлаждалась, но не замерзала. Пришлось прибегнуть к средству, которое мы теперь называем промышленным шпионажем. Что же выяснилось?

«Когда моя бабушка делает дома мороженое, — пишет Уокер, — она обкладывает сосуд для мороженого льдом, а лед посыпает солью. Зачем она сыпет соль?»

Итак, все дело в обычной соли. Проделайте ряд простых опытов, прежде чем ответить Уокеру. Возьмите снег или истолченный лед и постепенно добавляйте к ним соль, перемешивая смесь. (Приятно, но не обязательно, чтобы опыт сопровождался приготовлением мороженого.) Оказывается, температуру такой смеси можно понизить до $-20°C$.

Чаще всего для охлаждения используют поваренную соль $NaCl$. Но подойдут и более редкие вещества: KCl, $NaNO_3$ и т. п. «Чемпионом» по понижению температуры оказывается $CaCl_2$. Смешав 42 г этой соли со 100 г истолченного льда, можно получить температуру $-55°C$!

А каковы результаты ваших опытов? И что ответить Уокеру?

Какая вода замерзнет быстрее?

«В холодных странах, таких, как Канада или Исландия, хорошо известно, что горячая вода, выставленная в мороз на улицу, замерзает скорее, чем холодная. Возможно, вам это покажется вздором, однако это отнюдь не бабушкины сказки: даже Фрэнсис Бэкон в свое время отмечал данный факт.

Наполните несколько сосудов различной формы теплой и холодной водой и поставьте их в морозный день за окно... И не удивляйтесь, если в каком-либо из сосудов теплая вода замерзнет раньше, чем холодная, а попытайтесь объяснить, почему?» (Дж. Уокер).

К этому трудно что-либо добавить, кроме, быть может, некоторых советов: в качестве сосудов различной формы возьмите бутылки с узкими горлышками и широкие банки. И еще одно: подумайте, как изменится температура жидкости, если понизить давление над ее поверхностью и, тем самым, дать возможность жидкости испаряться более интенсивно. (Можно провести и соответствующий эксперимент, используя для понижения давления обычный пылесос.)

На катке

Чтобы уменьшить трение, в технике применяются смазки. Эту роль могут выполнять различные материалы, иногда самые, казалось бы, неподходящие. Для примера расскажем о случае, когда роль смазки сыграла... сталь.

В конце прошлого века английский промышленник Гарвей прислал в Россию образцы новых броневых плит для защиты кораблей. На испытаниях снаряды тяжелых орудий вместо того, чтобы пробивать плиты, сами разбивались о броню, не принося вреда тому, что могло скрываться за ней. Но вот русские попросили повторить испытания. И снаряды начали разбивать броневые плиты (а позже, после некоторых усовершенствований,— и пробивать в них отверстия).

Все дело оказалось в том, что теперь снаряды были снабжены специальными колпачками из мягкой стали. Колпачок расплющивался, плавился и, с одной стороны, мешал снаряду расколоться, а с другой — служил своеобразной смазкой при его прохождении сквозь броневую плиту. Изобретателем колпачка был талантливый русский ученый и моряк адмирал Макаров.

Итак, при огромных давлениях сталь может служить смазкой. А «почему коньки скользят по льду?» (Дж. Уокер). Что является смазкой в этом случае?

«Сквозь волнистые туманы...»

Влажной зимой дни часто бывают туманными. Принято считать, что туман имеет серый цвет, но это не всегда так.

«Французский художник Моне приехал в Лондон и написал Вестминстерское аббатство. Работал Моне в обыкновенный лондонский туманный день. На картине Моне готические очертания аббатства едва выступают из тумана. Написана картина виртуозно.

Когда картина была выставлена, она произвела смятение среди лондонцев. Они были поражены, что туман у Моне был окрашен в багровый цвет, тогда как всем известно, что цвет тумана серый.

Дерзость Моне вызвала сначала возмущение. Но возмущавшиеся, выйдя на лондонские улицы, вгляделись в туман и впервые заметили, что он действительно багровый», — так писал К. Паустовский в своей книге «Золотая роза».

Вот и Уокер тоже согласен с Моне: «Почему дымка, витающая над городом, имеет коричневый оттенок?» — спрашивает он.

Вопрос о причинах цветного тумана — не легкий вопрос. Не случайно мы приберегли его на самый конец. Понаблюдайте за цветом тумана в городе и в сельской местности. А может быть вы даже сумеете придумать опыты и получить «туманы» разной окраски?

задачник Кванта

Этот раздел ведется с момента основания нашего журнала. В каждом номере мы помещаем пять задач по математике и пять задач по физике. (Для зарубежных читателей мы приводим тексты задач на английском языке.) Степень сложности задач различна. Наряду с относительно легкими публикуются задачи, требующие длительного размышления; встречаются задачи, которые нелегко решить и специалистам. Наиболее трудные задачи помечаются звездочкой.

Если задача вас заинтересовала, но решение ее не получается сразу — не опускайте руки, попробуйте вернуться к ней снова и снова. Не откладывайте ее даже после того, как она решена,— подумайте, как наиболее рационально и убедительно записать решение, как обобщить задачу, уточнить ее результат, какие близкие задачи она позволяет решать. Ваши решения присылайте в редакцию по адресу: 117071, Москва, Ленинский проспект, 15, Физматлит, «Квант». На конверте в графе «Кому» напишите Задачник «Кванта» и укажите, решения каких задач вы посылаете. Решения задач по разным предметам (математике и физике) или из разных номеров журнала высылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем домашним адресом (в нем вы получите ответ с результатами проверки ваших решений). В начале письма обязательно напишите свою фамилию, имя, отчество, домашний адрес; школьников просим также указывать класс и номер школы.

Мы регулярно публикуем фамилии читателей, приславших правильные решения. Журнал проводит конкурс на лучшие решения задач из Задачника «Кванта». Итоги конкурса подводятся в декабре. Победители — школьники, приславшие наиболее интересные и полные решения, — получают право участвовать сразу в республиканских турах Всесоюзной олимпиады школьников. Жюри конкурса «Кванта» принимает к рассмотрению только решения, высланные не позже срока, указанного в журнале. Крайний срок отправки ответов на задачи этого номера — 30 марта. Для учеников Всесоюзной заочной математической школы правильное решение задач из Задачника считается выполненным факультативным заданием (им необходимо в начале письма указывать свой «номер» или адрес филиала ВЗМШ).

Разумеется, не все задачи, помещаемые в Задачнике, публикуются впервые. После формулировки мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Придумать новую оригинальную задачу, пожалуй, труднее, чем решить чужую. Если вам это удастся — присылайте нам в двух экземплярах задачу и ее решение. При этом на конверте пометьте «Новая задача по математике (по физике)».

Наиболее интересные задачи наших читателей мы помещаем в Задачнике «Кванта» или в других разделах журнала.

Задачи

М721 — М725; Ф733 — Ф737

М721. Каждая сторона треугольника поделена на 3 равные части. Точки деления служат вершинами двух треугольников, пересечение которых — шестиугольник. Найдите площадь этого шестиугольника, если площадь данного треугольника равна S.

А. Золотых, ученик 10 кл.
(Москва, ФМШ № 18 при МГУ)

М722. В точках A_1, A_2, ..., A_n, расположенных по окружности, расставляются в некотором порядке числа 1, 2, ..., n. а) Докажите, что сумма n модулей разностей соседних чисел не меньше $2n-2$. б) Для какого количества расстановок эта сумма равна $2n-2$?

А. Разборов

М723*. Существует ли бесконечное множество натуральных чисел такое, что ни одно из чисел этого множества и никакая сумма нескольких из них не являются степенью натурального числа (a^k, где $k \geqslant 2$)?

Л. Гурвиц

М724. По плоскости ползут несколько черепах, скорости которых равны по величине, но различны по направлениям. Докажите, что, как бы черепахи ни были расположены вначале, через некоторое время они будут находиться в вершинах выпуклого многоугольника.

В. Прасолов

М725*. Положим $z_n = \cos^n\frac{\pi}{7} + \cos^n\frac{3\pi}{7} + \cos^n\frac{5\pi}{7}$. Найдите а) z_1 и z_2, б) z_3 и z_4. в) Докажите, что z_n — рациональное число при любом n.

Н. Васильев

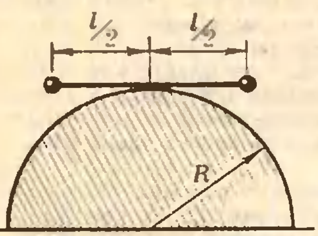


Рис. 1.

Ф733. На «полуцилиндре» с радиусом основания R лежит гантелька длины l (рис. 1). Найти период малых колебаний гантельки.

А. Фролов

Рис. 2.

Ф734. Веревка, прикрепленная одним концом к боковой поверхности цилиндра у его основания радиуса r, обмотана вокруг цилиндра k раз (k — целое число). К свободному концу веревки привязан груз. Грузу сообщают скорость v, направленную вдоль радиуса цилиндра (рис. 2). За какое время вся веревка снова намотается на цилиндр? Цилиндр закреплен на гладкой поверхности.

Б. Мукушев

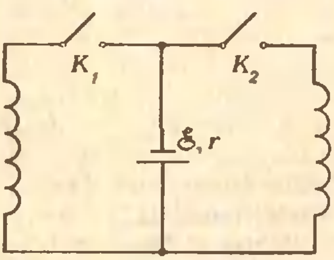


Рис. 3.

Ф735. Две одинаковые катушки индуктивности подключены через ключи K_1 и K_2 к источнику с постоянной ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r (рис. 3). В начальный момент времени оба ключа разомкнуты. Затем замыкают сначала ключ K_1, а потом ключ K_2. Определить величину тока, протекающего через ключ K_1 в момент замыкания ключа K_2, если известно, что после замыкания ключа K_2 установившийся ток через ключ K_1 в два раза больше установившегося тока через ключ K_2. Активными сопротивлениями катушек пренебречь.

В. Можаев

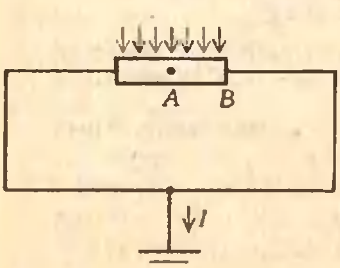


Рис. 4.

Ф736. На однородный стержень, оба конца которого заземлены, падает пучок электронов, причем на каждый сантиметр длины стержня попадает одно и то же число электронов в секунду. Сопротивление стержня R. Ток на участке заземления равен I. Найти разность потенциалов между серединой стержня A и его концом B (рис. 4).

Н. Диканский

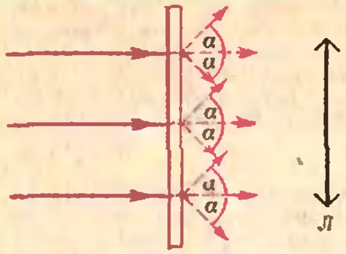


Рис. 5.

Ф737. Параллельный пучок света рассеивается, проходя пластинку $П$. Для любого луча, проходящего пластинку, максимальный угол отклонения от первоначального направления равен α. Каков наименьший радиус светлого пятна, которое можно получить, поставив за пластинкой собирающую линзу $Л$ с фокусным расстоянием F (рис. 5)?

Н. Воробьев

We have been publishing Kvant's contest problems every month from the very first issue of our magazine. The problems are nonstandard ones, but their solution requires no information outside the scope of the USSR secondary school syllabus. The more difficult problems are marked with a star (*). After the statement of the problem, we usually indicate who proposed it to us. It goes without saying that not all these problems are first publications. The solutions of problems from this issue (in Russian or in English) may be posted no later than March 30th to the following address: USSR, 117071, Москва, Ленинский проспект, 15, Физматлит, «Квант». Please send us the solutions of physics and mathematics problems, as well as solutions of problems from different issues, under separate cover; on the envelope write the words: "KVANT'S PROBLEMS" and the numbers of all the solved problems; in your letter enclose an unstamped self-addressed envelope — we shall use it to send you the correction results. At the end of the academic year we sum up the results of the Kvant problem contest. The list of prizewinners is published in the September issue.

If you have an original problem to propose for publication, please send it to us in two copies (including the solution) in an envelope inscribed "NEW PROBLEM IN PHYSICS (MATHEMATICS)".

Problems

M721 — M725; P733 — P737

M721. Each side of a given triangle is divided into three equal parts. The six division points are the vertices of two triangles whose intersection is a hexagon. Find the area of the hexagon if S is the area of the given triangle.

A. Zolotykh (Moscow Phys.— Math. School № 18, 10th grade)

M722. The integers 1, 2, ..., n are written in some order at the points A_1, A_2, ..., A_n of a circle. a) Prove that sum of the n absolute values of the differences between neighbouring numbers is no less than $2n-2$. b) What is the number of distributions for which the sum equals $2n-2$?

A. Razborov

M723*. Does an infinite set of natural numbers none of which and no sum of which is a power a^k of a natural number a, where $k\geqslant 2$, exist?

L. Gurvits

M724. Some turtles are creeping in the plane in different (constant) directions, but at the same speed. Prove that the turtles will eventually be located at the vertices of a convex polygon, no matter what their initial positions were.

V. Prasolov

M725*. Put $\Gamma_n=\cos^n\frac{\pi}{7}+\cos^n\frac{3\pi}{7}+\cos^n\frac{5\pi}{7}$. Find a) Γ_1 and Γ_2, b) Γ_3 and Γ_4. c) Prove that Γ_n is rational for any n.

N. Vassiliev

P733. A weight (used for muscle-building) of length l is balanced on a half-cylinder of base radius R (see figure Рис. 1). Find the period of small oscillations of the weight.

A. Frolov

P734. A rope attached at one end to the lateral surface of a cylinder at its base of radius r is wound about the cylinder k times (k is an integer). A weight is attached to the other end and the velocity v, directed along the radius of the cylinder, is communicated to the weight (see figure Рис. 2). How long will the rope take to wind itself around the cylinder again? The cylinder is fixed on a smooth plane surface.

B. Mukushev

P735. Two identical induction coils are connected through two switches K_1 and K_2 to a source of constant electromotive force $\mathscr{E}$ and inner resistance r (see figure Рис. 3) At the initial moment of time both switches are open, then the switch K_1 is closed, followed after a while by the switch K_2. Determine the current passing through the switch K_1 at the moment when K_2 is closed, if it is known that, after K_2 is closed, the steady-state current through the switch K_1 is twice the steady-state current through the switch K_2. The active resistances of the coils are negligible.

V. Mojaev

P736. A beam of electrons is directed on a uniform rod, both ends of which are grounded, the same amount of electrons hitting each centimeter length of the rod per second. The resistance of the rod is R. The current at the place of grounding is I. Find the difference of potential between the middle of the rod A and its extremity B (see figure Рис. 4).

N. Dikanski

P737. A parallel beam of light dissiminates as it passes through a plate Π. For any ray passing through the plate, the maximal angle of deflection is α. What is the smallest radius of a spot of light that can be obtained by placing a convergent lens of focal distance F after the plate (see figure Рис. 5)?

I. Vorobiev

Решения задач

М681 — М685; Ф692 — Ф697

М681. *а) Придумайте целые числа a, b, c, d такие, что числа a^2+b^2, $a^2+b^2+c^2$, $a^2+b^2+c^2+d^2$ — квадраты целых чисел.*

б) Существует ли последовательность, состоящая из квадратов целых чисел такая, что при любом n сумма n ее первых членов — квадрат целого числа?

Приведем сразу решение задачи б), следуя В. Серпинскому (большое количество задач такого типа содержится в его книге «Элементарная теория чисел»): построим бесконечную последовательность (a_n) натуральных чисел такую, что для любого n сумма квадратов первых n ее членов есть квадрат нечетного числа. Возьмем $a_1=3$, $a_2=4$; если первые n членов уже выбраны и

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2=(2k+1)^2,$$

положим $a_{n+1}=2k^2+2k$. Из тождества

$$(2k+1)^2+(2k^2+2k)^2=(2k^2+2k+1)^2$$

получим, что

$$a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2+a_{n+1}^2=(2k^2+2k+1)^2$$

— снова квадрат нечетного числа.

Первые пять членов этой последовательности 3, 4, 12, 84, 3612:

$$3^2+4^2=5^2,\ 3^2+4^2+12^2=13^2,$$
$$3^2+4^2+12^2+84^2=85^2,$$
$$3^2+4^2+12^2+84^2+3612^2=3613^2.$$

Из решения задачи вытекает также факт, указанный в письме *Ю. Макарова* из Ленинграда: для любого n существует $\frac{n(n+1)}{2}$ натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{n(n+1)}{2}}$ таких, что

$$a_1^2=a_2^2+a_3^2=a_4^2+a_5^2+a_6^2=\ldots=a^2_{\frac{n(n-1)}{2}+1}+\ldots+a^2_{\frac{n(n+1)}{2}}$$

Нам, как и автору письма, неизвестно, могут ли при этом все числа $a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{n(n+1)}{2}}$ быть различными.

Н. Васильев

◆

М682. *Внутри треугольника $\triangle$ нужно расположить треугольник $\triangle_1$ так, чтобы у каждого из трех квадратов, построенных на сторонах треугольника $\triangle_1$, две вершины лежали на разных сторонах треугольника $\triangle$ (рис. 1).*

а) Докажите, что медианы треугольника $\triangle$ перпендикулярны сторонам треугольника $\triangle_1$.

б) Для любого ли остроугольного треугольника $\triangle$ такое построение возможно?

а) Легко видеть, что из трех голубых треугольников (см. рис. 1) при помощи трех параллельных переносов, переводящих вершины треугольника $\triangle_1$ в некоторую точку O, можно составить треугольник $\hat{\triangle}$, подобный исходному треугольнику $\triangle$ (рис. 2). Отрезки, соединяющие вершины треугольника $\hat{\triangle}$ с точкой O, делят треугольник $\hat{\triangle}$ на три равновеликих треугольника, площадь каждого из которых равна площади треугольника $\triangle_1$. Поэтому O — точка пересечения медиан треугольника $\hat{\triangle}$ (расстояние от O до любой из сторон треугольника $\hat{\triangle}$ равно $\frac{1}{3}$ высоты, опущенной на эту сторону).

Таким образом, медианы треугольника $\triangle$ параллельны медианам треугольника $\hat{\triangle}$ и, следовательно, перпендикулярны сторонам треугольника $\triangle_1$.

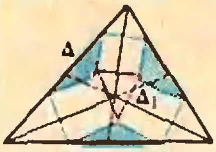


Рис. 1.

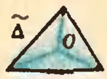


Рис. 2.

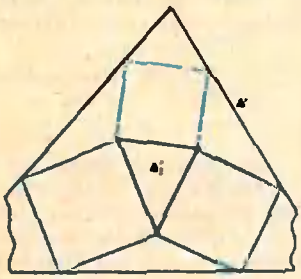


Рис. 3.

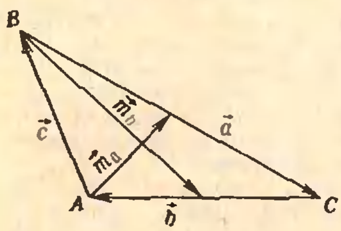


Рис. 4.

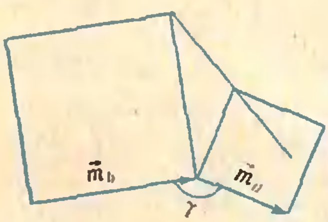


Рис. 5.

б) Ответ: для любого.

Прежде всего заметим, что медианы построенного треугольника Δ пропорциональны медианам треугольника Δ и сторонам треугольника Δ_1. Поэтому треугольник Δ_1 подобен треугольнику Δ_1', стороны которого равны по длине медианам треугольника Δ (рис. 3; такой треугольник всегда существует).

Построим на сторонах треугольника Δ_1' квадраты, после чего соединим их вершины (см. рис. 3). Ясно, что никакие две из проведенных прямых не параллельны. Если образованный ими треугольник Δ' содержит построенные квадраты, то нужное построение мы получим переведя преобразованием подобия треугольник Δ' в треугольник Δ (треугольники Δ и Δ' подобны). Если же какая-нибудь из трех прямых попадает внутрь одного из квадратов, построение окажется невозможным. Посмотрим, когда это может произойти.

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — векторы, определяемые сторонами треугольника Δ, $\vec{m}_a$ и $\vec{m}_b$ — векторы, определяемые соответствующими медианами (рис. 4), так что $\vec{m}_a=\frac{1}{2}(\vec{c}-\vec{b})$, $\vec{m}_b=-\vec{c}-\frac{\vec{b}}{2}$. Пусть, далее прямая, соединяющая вершины квадратов, построенных на векторах $\vec{m}_b$ и $\vec{m}_a$, попадает внутрь квадрата, построенного на $\vec{m}_a$ (рис. 5). Легко видеть, что это может быть тогда и только тогда, когда угол γ между векторами $\vec{m}_a$ и $\vec{m}_b$ — тупой и $m_b\cos(\pi-\gamma)>m_a$ (см. рис. 5; через x мы обозначаем длину вектора $\vec{x}$). Поскольку $\cos(\pi-\gamma)=\frac{\vec{m}_a\cdot\vec{m}_b}{m_a\cdot m_b}$, наше неравенство равносильно такому: $\vec{m}_a\cdot\vec{m}_b>m_a^2=\vec{m}_a\cdot\vec{m}_a$, или $\vec{m}_a\cdot(\vec{m}_b-\vec{m}_a)>0$.

Подставляя вместо $\vec{m}_a$ и $\vec{m}_b$ их выражения через $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, после преобразований получим $\vec{b}\cdot\vec{c}-\vec{c}^2>0$, или $b\cdot c\cos(\pi-\widehat{A})>c^2$ (см. рис. 4), то есть $\cos\widehat{A}<\frac{c}{b}$, что возможно лишь при условии, что угол A — тупой, причем $b>c$.

Таким образом, если в исходном треугольнике ABC, $a\geqslant b\geqslant c$, угол A таков, что $\cos\widehat{A}\geqslant-\frac{c}{b}$, требуемое построение возможно. В частности, оно возможно для любого остроугольного треугольника.

А. Егоров, А. Ягубьянц

◆

М683. *Несколько кружков одинакового размера положили на стол так, что никакие два не перекрываются. Докажите, что кружки можно раскрасить в четыре цвета так, что любые два касающиеся кружка будут окрашены в разные цвета. Найдите расположение кружков, при котором трех цветов для такой раскраски недостаточно.*

Доказательство возможности требуемой раскраски проведем индукцией по числу кружков n.

При $n\leqslant4$ утверждение очевидно. Предположим, что оно справедливо для любого расположения k кружков. Пусть на столе лежит $k+1$ кружков. Зафиксируем на плоскости произвольную точку M и рассмотрим кружок, центр O которого находится на наибольшем расстоянии от M (если таких кружков несколько, возьмем любой из них). Нетрудно убедиться, что выбранного кружка касается не более трех других (центры всех кружков лежат в круге $(M, |OM|)$ — рис. 1).

Отбросим кружок с центром O и раскрасим нужным образом в четыре цвета оставшиеся k кружков (по предположению индукции это можно сделать). Вернем теперь кружок с центром O на место. Поскольку он касается не более трех

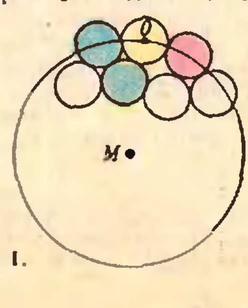


Рис. 1.

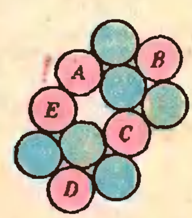


Рис. 2.

из уже покрашенных кружков, его можно раскрасить в тот цвет, который не был использован при раскраске касающихся его соседей.

Утверждение доказано.

На рисунке 2 изображены 11 кружков, для нужной раскраски которых т р е х цветов недостаточно. Действительно, предположив, что эти кружки можно раскрасить тремя цветами, получим, что кружки A, B, C, D, E должны быть окрашены одинаково. Но это невозможно, поскольку кружки A и E касаются.

В. Покровский

◆

М684. *Двое играют в следующий вариант «морского боя». Один игрок располагает на доске $n\times n$ некоторое количество непересекающихся кораблей $n\times 1$ (быть может, ни одного). Второй игрок наносит одновременно ряд ударов по полям доски и про каждое поле получает от противника ответ — попал или промахнулся. По какому минимальному количеству полей следует нанести удары, чтобы по ответам противника можно было однозначно определить расположение всех его кораблей? Рассмотрите три случая:* а) $n=4$, б) $n=10$, в) n — *любое натуральное число.*

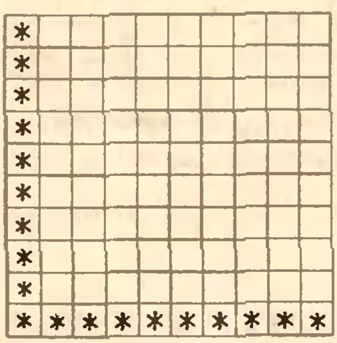
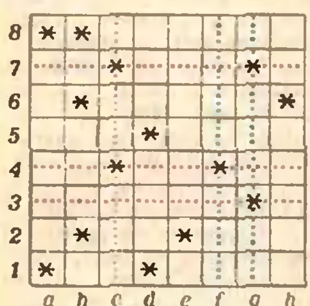
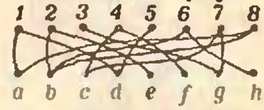


Рис. 1.



В качестве «связной компоненты» графа



можно взять ребра $B=\{c4, c7, f4, g3, g7\}$

Рис. 2.

Как показывают письма читателей, формулировка задачи допускает два одинаково осмысленных толкования — в зависимости от того, какие корабли считать «непересекающимися»: (1) те, которые не имеют общих клеток; 2) те, которые вообще не имеют общих точек, даже граничных — как это принято в обычной игре «морской бой», в которую все мы играли в детстве*). Обе задачи получились довольно интересными, хотя (1), пожалуй, попроще. С нее мы и начнем.

(1) Пусть корабли заполняют произвольное множество K из нескольких горизонталей или вертикалей доски $n\times n$; мы должны указать множество A из возможно меньшего числа клеток такое, что пересечение $A\bigcap K$ однозначно определяет множество K. (Заметим, что если кораблей n, то они занимают все клетки доски, и мы, разумеется, никак не сможем узнать, горизонтальные корабли или вертикальные.)

Легко указать множество A из $2n-1$ клеток, удары по которым позволяют найти любое K (пример для $n=10$ приведен на рисунке 1). С другой стороны, $2n-2$ клеток заведомо недостаточно. Это следует из того, что *любое множество A из $2n-2$ клеток доски $n\times n$ можно разбить на два непустых подмножества B и C, так, что ни одна из вертикалей и ни одна из горизонталей, пересекающихся* с B, *не пересекается* с C (тогда, если ответ «попал!» будет в точности на B, мы не сможем узнать, горизонтальные корабли или вертикальные). Докажем это.

Сопоставим каждой горизонтали красную, а вертикали — синюю точку (*вершину* графа) и для каждой клетки множества A (на рисунке 2 они обозначены звездочками) соединим ребром пару точек, соответствующую ее вертикали и горизонтали (рис. 2). Мы получим *граф* с $2n$ вершинами и $2n-2$ ребрами. Такой граф не может быть *связным* (см. «Квант», 1981, № 6, с. 10) — он обязательно распадается на два или больше отдельных кусков. Ребра одного из связных кусков можно принять за множество B (см. рис. 2), остальные — за множество C. (Разумеется, это рассуждение можно изложить и не пользуясь терминологией теории графов.) Итак, в случае (1) о т в е т: $2n-1$.

(2) Пусть корабли не имеют общих точек. Докажем, что в этом случае необходимое количество a ударов — клеток в множестве A — не меньше $\frac{4n}{3}$. При этом будут использованы только такие свойства множества A: в каждой горизонтали и вертикали встречается хотя бы одна клетка множества A, и для любой клетки множества A в ее горизонтали или вертикали есть еще хотя бы одна клетка A.

Расставим в клетках множества A синие и красные единицы и двойки так: на каждой горизонтали, где клеток A более одной, запишем в каждую из них красную 1, а где лишь одна клетка — запишем в нее красную 2; точно так же на каждой вертикали запишем в клетки множества A синие 1 и 2 (рис. 3). Поскольку в каждой клетке множества A стоят либо единица и двойка, либо две единицы, сумма s всех написанных чисел не больше $3a$. Поскольку на каждой линии

*) Отличие нашей игры от «детской», конечно, прежде всего в том, что нам очередной удар наносится после получения информации о предыдущем ходе.

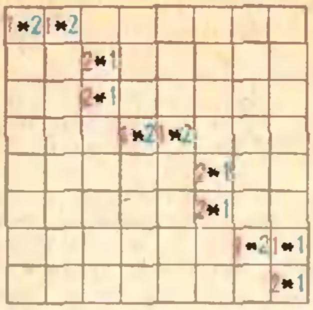


Рис. 3.

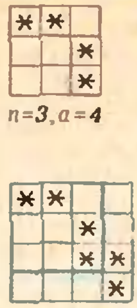


Рис. 4.

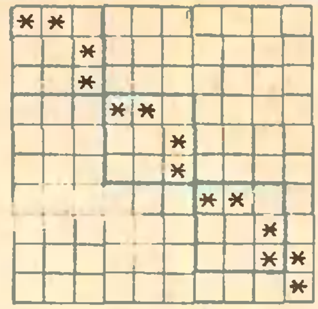


Рис. 5.

(горизонтали и вертикали) мы записали числа с суммой не меньше 2, $s\geqslant 4n$. Поэтому $a\geqslant s/3\geqslant 4n/3$*).

На рисунке 4 показано, как можно направить требуемым образом 4 удара на доске 3×3 ($n=3$). Используя этот «блок» 3×3, можно построить пример направления a ударов, где a — наименьшее целое число, для которого $a\geqslant \frac{4n}{3}$ (примеры для $n=4$, $n=8$ и $n=10$ показаны на рисунках 3 и 5).

Итак, в этом случае о т в е т: $\left[\frac{4n+2}{3}\right]$, то есть для $n=3k$, $n=3k+1$ и $n=3k+2$ нужно соответственно $4k$, $4k+2$, $4k+3$ ударов.

Н. Васильев

М685. *Два подмножества множества натуральных чисел назовем* ***конгруэнтными****, если одно получается из другого сдвигом на целое число. (Например, множества четных и нечетных чисел конгруэнтны.) Можно ли разбить множество натуральных чисел на бесконечное число (непересекающихся) бесконечных конгруэнтных подмножеств?*

О т в е т: можно. Предположим, что задача уже решена. Пусть A — то из множеств разбиения, которое содержит единицу. Остальные множества разбиения получаются из A сдвигами на некоторые натуральные числа, множество которых, дополненное нулем, мы обозначим через B. Пусть для каждого $b\in B$ множество A_b — результат сдвига множества A на b, то есть множество всех чисел вида $a+b$, где $a\in A$ (в частности, $A_0=A$). По условию, если $b_1\neq b_2$, то $A_{b_1}\cap A_{b_2}=\varnothing$, и всякое натуральное число n принадлежит одному из множеств A_b, то есть

каждое натуральное число единственным образом представляется в виде суммы $n=a+b$, (*) где $a\in A$, $b\in B$.

Если, наоборот, даны два множества A и B, обладающие свойством (*) и такие, что $0\in B$, $1\in A$, то множества A_b, где $b\in B$, образуют требуемое разбиение.

Построение множеств A и B мы осуществим двумя способами.

П е р в ы й с п о с о б. Пусть множества A и B, обладающие свойством (*), построены. Поставим в соответствие каждому натуральному числу $n=a+b$ ($a\in A$, $b\in B$) точку плоскости Oxy с координатами $(a; b)$.

Пусть M — множество всех полученных точек плоскости. Множество M, очевидно, обладает следующими свойствами:

а) если A — проекция множества M на ось Ox, а B — проекция M на ось Oy, то множество M совпадает со всем множеством пар $(a; b)$, где $a\in A$, $b\in B$;

б) пересечение множества M с каждой прямой $x+y=n$ (n — натуральное) состоит из единственной точки; в частности, при $n=1$ — это точка $(1; 0)$.

Ясно, что, построив хотя бы одно множество M, обладающее свойствами а) и б), мы получим нужное разбиение множества натуральных чисел (состоящее из множеств A_b).

*) Точно такое же рассуждение с заменой слов «больше» на «меньше» приводилось в решении задачи М262 («Квант», 1974, №5) про расстановку ладей, бьющих доску дважды.

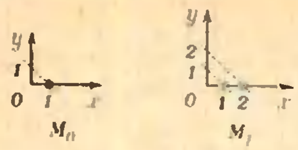


Рис. 1.

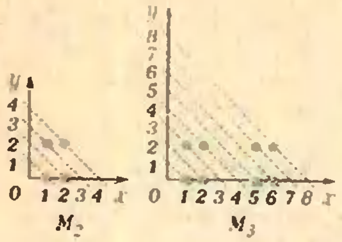


Рис. 2.

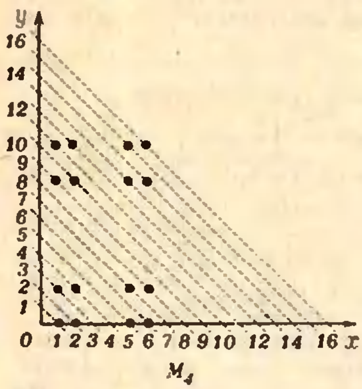


Рис. 3.

Множество M построим как объединение множеств $M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset ... \subset M_n \subset ...$, которые, в свою очередь, будем строить так:

Пусть $M_0 = \{(1; 0)\}$. Назовем *n-й диагональю* прямую $x + y = n$. Точка $(1; 0)$ попадает на первую диагональ; вычеркнем ее и в дальнейшем, строя множества M_i, будем последовательно вычеркивать диагонали, на которые попадают построенные точки.

Сдвинем множество M_0 на единицу вправо и положим $M_1 = \{(1; 0), (2; 0)\}$; при этом вычеркнем вторую диагональ (см. рисунок). Затем сдвинем множество M_1 на две единицы вверх и присоединим полученные точки к M_1: это будет множество M_2; при этом вычеркнем третью и четвертую диагонали (см. рисунок).

Множество M_2 сдвинем на четыре единицы вправо — так, чтобы вычеркнуть следующие четыре диагонали; получим множество M_3 (см. рисунок).

Вообще, множество M_{k+1} строим так: сдвигаем множество M_k (его точки принадлежат первой, второй, ..., 2^k-й диагонали) на 2^k единиц вправо или вверх (в зависимости от четности k) — так, чтобы вычеркнуть диагонали с номерами 2^k+1, 2^k+2, ..., 2^{k+1}.

Легко видеть, что объединение множеств M_0, M_1, ..., M_n,... (по всем натуральным n) обладает свойствами а), б).

Второй способ. Как известно, всякое натуральное число n представляется в виде

$$n = a_0 \cdot 2^k + a_1 \cdot 2^{k-1} + ... + a_{k-1} \cdot 2 + a_k,$$

где a_i равно 0 или 1, причем такое представление единственно. На этом основана *двоичная запись* числа n: $n_2 = \overline{a_0 a_1 ... a_{k-1} a_k}$. Например, $2_2 = 10$, $7_2 = 111$, $17_2 = 10001$ и т. д.

Рассмотрим теперь два множества натуральных чисел: множество A, состоящее из чисел, в двоичной записи которых единица находится в нечетных (считая справа) разрядах: $A = (1, 100, 101...)$, и множество B, состоящее из 0 и чисел, в двоичной записи которых единица находится в четных разрядах:

$$B = (0, 10, 1000, 1010,...).$$

Очевидно, любое натуральное n единственным образом представляется в виде суммы $n = a + b$, где $a \in A$, $b \in B$.

Множества A и B обладают свойством (*), и поэтому множества A_b $(b \in B)$ дают нужное разбиение.

А. Федоров, С. Шлосман

◆

Ф692. *Конструкция, изображенная на рисунке 1, состоит из четырех легких жестких стержней длины l каждый и легкой пружины длины $2l$. Стержни скреплены небольшими одинаковыми массивными шариками. В точке A система закреплена. В состоянии равновесия системы стержни образуют квадрат. Определить период малых колебаний системы, при которых точка C движется вдоль вертикали.*

Совместим начало системы координат с точкой A, оси X и Y направим так, как на рисунке 2.

Запишем уравнения движения грузов C и B (в проекциях на оси X и Y):

$$ma = mg - 2T_2 \cos \alpha, \qquad (1)$$

$$ma_{Bx} = mg - T_1 \cos \alpha + T_2 \cos \alpha, \qquad (2)$$

$$ma_{By} = F_{\text{упр}} - T_1 \sin \alpha - T_2 \sin \alpha, \qquad (3)$$

где $F_{\text{упр}} = k(2l - 2l \sin \alpha) = k \cdot 2l(1 - \sin \alpha)$ — сила упругости. Из уравнений (1)—(3) после несложных преобразований получим

$$ma_{Cx} + ma_{Bx} - ma_{By} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} = 2mg - F_{\text{упр}} \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} \qquad (4)$$

(это соотношение верно при любых значениях α). Преобразуем левую часть уравнения (4). Учтем, что изменения Δx_B и Δx_C координат грузов B и C связаны соотношением $\Delta x_B = \frac{1}{2} \Delta x_C$ (иными словами, таким соотношением связаны смещения грузов B и C от положения равновесия), и следовательно,

$$(x_B)'' = \frac{1}{2}(x_C)'' \text{ или } a_{Bx} = \frac{1}{2} a_{Cx}.$$

Кроме того, $y_B = l \sin \alpha$, $x_C = 2l \cos \alpha$, и при малых отклонениях от положения равновесия (то есть когда $\alpha = \alpha_0 + \Delta\alpha$,

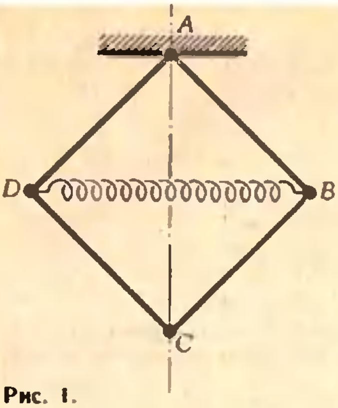


Рис. 1.

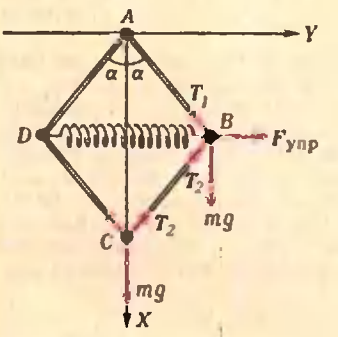


Рис. 2.

где $\alpha_0=45°$, $\Delta\alpha \ll \alpha_0$) изменения соответствующих координат равны

$$\Delta y_B = l(\cos\alpha)\cdot\Delta\alpha \approx l(\cos\alpha_0)\cdot\Delta\alpha,$$
$$\Delta x_C = -2l(\sin\alpha)\cdot\Delta\alpha \approx -2l(\sin\alpha_0)\cdot\Delta\alpha,$$

то есть $\Delta y_B \approx -\Delta x_C/2\operatorname{tg}\alpha_0 = -\Delta x_C/2$. Следовательно,

$$a_{B_y} \approx -\frac{a_{C_x}}{2\operatorname{tg}\alpha_0} = -\frac{a_{C_x}}{2}.$$

Таким образом, левая часть уравнения (4) в случае малых колебаний может быть представлена в виде

$$ma_{C_x} + \frac{1}{2}ma_{C_x} + \frac{1}{2}ma_{C_x} \approx 2ma_C = 2m(x_C)''.$$

Теперь преобразуем правую часть (4). В положение равновесия, когда $a_{C0}=0$, уравнение (4) превращается в уравнение

$$2mg = F_{упр.\,0}\frac{\cos\alpha_0}{\sin\alpha_0} = 2kl\,(1-\sin\alpha_0),$$

откуда

$$2mg = 2kl\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \qquad (5)$$

Запишем правую часть (4) в виде

$$F_{упр.\,0}\frac{\cos\alpha_0}{\sin\alpha_0} - F_{упр}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} =$$
$$= 2kl(1-\sin\alpha_0)\frac{\cos\alpha_0}{\sin\alpha_0} - 2kl(1-\sin\alpha)\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} =$$
$$= 2kl\left(\frac{\cos\alpha_0}{\sin\alpha_0} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right) + 2kl(\cos\alpha-\cos\alpha_0).$$

Заметим, что $2kl(\cos\alpha-\cos\alpha_0) = \Delta x_C$; при малых отклонениях от положения равновесия

$$\Delta x_C \approx -2l(\sin\alpha_0)\cdot\Delta\alpha;$$

а
$$\frac{\cos\alpha_0}{\sin\alpha_0} - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \approx \frac{\alpha-\alpha_0}{\sin^2\alpha_0} = \frac{\Delta\alpha}{\sin^2\alpha_0} \approx -\frac{\Delta x_C}{2l\sin^3\alpha_0}.$$

Итак, правая часть уравнения (4) в случае малых колебаний может быть представлена в виде

$$2mg - F_{упр}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \approx -k\cdot\Delta x_C\left(\frac{1}{\sin^3\alpha_0}-1\right) =$$
$$= -k\cdot\Delta x_C(2\sqrt{2}-1).$$

Учитывая, что

$$\frac{m}{k} = \frac{l}{g}(1-\sin\alpha_0) = \frac{l}{g}\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$$

(см. (5)), запишем окончательно уравнение малых колебаний системы в виде

$$\Delta x'' = -\frac{g(2\sqrt{2}-1)}{l(2-\sqrt{2})}\cdot\Delta x.$$

Период колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l(2-\sqrt{2})}{g(2\sqrt{2}-1)}}.$$

К. Сергеев

Ф693. *На неподвижном клине, образующем угол α с горизонтом, лежит нерастяжимая невесомая веревка (рис. 1). Один из концов веревки закреплен в точке A. К нижнему концу веревки (в точке B) прикреплен небольшой грузик. В некоторый момент времени клин начинает двигаться вправо с постоянным ускорением a. С каким ускорением движется грузик, пока он находится на клине?*

◆

К моменту времени t от начала движения клин проедет расстояние $S=at^2/2$ и приобретет скорость $\vec{v}_{кл}=\vec{a}t$. К этому моменту грузик переместится вдоль клина на такое же расстояние S, его скорость $v_{отн}$ относительно клина будет равна $|\vec{v}_{отн}|=|\vec{a}|t$ и направлена вдоль клина вверх. Скорость $\vec{v}_{гр}$ грузика относительно земли равна $\vec{v}_{гр}=\vec{v}_{отн}+\vec{v}_{кл}$, то есть (рис. 2)

$$|\vec{v}_{гр}| = 2|\vec{v}_{кл}|\sin\frac{\alpha}{2} = \left(2|\vec{a}|\sin\frac{\alpha}{2}\right)t,$$

а угол, который составляет $\vec{v}_{гр}$ с горизонтом, равен $\beta=(\pi-\alpha)/2=\text{const}$.

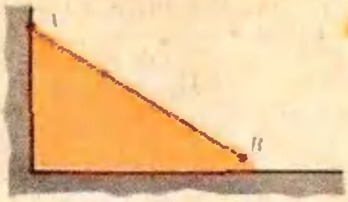


Рис. 1.

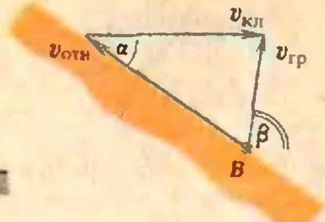


Рис. 2.

Таким образом, грузик движется вдоль прямой, составляющей угол $\beta=(\pi-\alpha)/2$ с горизонтом; ускорение грузика относительно земли равно

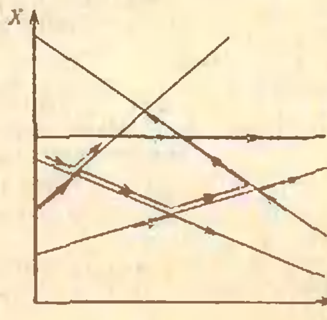
$$|\vec{b}|=2|\vec{a}|\sin\frac{\alpha}{2}.$$

С. Кротов

Ф694. *По длинному прямолинейному желобу, наклоненному под углом α к горизонту, движутся без трения N одинаковых шариков. Какое максимальное число соударений может произойти в системе при произвольных начальных положениях и скоростях шаров? Соударения шаров считать абсолютно упругими.*

Рассмотрим движение шариков в системе отсчета, которая движется вдоль желоба с ускорением $g\sin\alpha$. В этой системе шарики в промежутках времени между столкновениями движутся равномерно; при столкновениях шарики просто обмениваются своими скоростями (абсолютно упругие удары).

Нарисуем графики $x(t)$ зависимости координат всех N шариков от времени (в выбранной нами системе отсчета). Из сказанного выше ясно, что общая картина этих графиков представляет собой «сетку» из N прямых; точки пересечения этих прямых (узлы сетки) соответствуют столкновениям ша-



риков (пары шариков) друг с другом. Таким образом, общее число соударений равно числу пересечений N прямых. Нетрудно показать, что максимальное число пересечений равно

$$n_{max}=N(N-1)/2.$$

Е. Сурков

Ф695. *В простейшей модели звезда рассматривается как газовый шар, находящийся в равновесии в собственном поле тяжести. Считая, что газ состоит из полностью ионизированных атомов водорода и гелия, оценить температуру звезды. Масса звезды M, радиус r; относительное содержание водорода в газе равно n.*

Газовый шар состоит из огромного числа ионов и электронов; под действием сил тяготения между отдельными частицами газа шар должен был бы сжиматься. Равновесие шара в собственном поле тяжести возможно при условии, что силы тяготения уравновешиваются силами газового давления.

Вблизи центра шара численное значение давления p должно равняться численному значению веса газового столба с поперечным сечением $\Delta s=1$ (см²) и высотой, равной радиусу шара r (см). Масса такого столба равна $m=\varrho r\cdot\Delta s$ (кг), где ϱ (кг/см³) — плотность газа, которую для приближенной оценки будем считать постоянной. Вес столба равен силе, с которой он притягивается к центру шара:

$$F=G\frac{mM}{(r/2)^2}.$$

Эта формула не совсем точна, поскольку разные части столба притягиваются к центру, вообще говоря, по-разному. Но для наших приближенных оценок мы можем считать, что сила притяжения F такая, как если бы вся масса столба была сосредоточена в его центре (на расстоянии $r/2$ от центра шара).

Таким образом,

$$p=\frac{F}{\Delta s}=4G\frac{\rho M}{r}. \qquad (1)$$

С другой стороны, из уравнения Менделеева — Клапейрона

$$p=\frac{M}{V\mu}RT=\frac{\rho}{\mu}RT, \qquad (2)$$

где μ — молярная масса звездного газа. Приравнивая (1) и (2), находим температуру звезды T:

$$T=4G\frac{\mu M}{rR}.$$

Найдем молярную массу μ. Давление p складывается из парциальных давлений водорода и гелия, то есть

$$\frac{M}{V\mu}RT=\frac{Mn}{V\mu_H}RT+\frac{M(1-n)}{V\mu_{He}}RT,$$

откуда

$$\mu=\frac{\mu_H\mu_{He}}{n(\mu_{He}-\mu_H+\mu_H)}=\frac{2\cdot 10^{-3}}{3n+1}\ \text{кг/моль}.$$

При таком вычислении μ мы не учли давление электронного газа. Однако учет этого давления не изменит порядка величины μ, и для наших оценочных расчетов мы можем пользоваться найденным приближенным значением μ.

Таким образом,

$$T=4G\frac{2M}{rR(3n+1)}\cdot 10^{-3}\ \text{К}. \qquad (3)$$

При получении формулы (3) нами были сделаны некоторые упрощающие предположения. Для более точного расчета необходимо знать распределение плотности внутри газового шара, а это требует существенного выхода за рамки школьного курса математики. Кроме того, оценочная формула (3) предполагает, что температура в центральной области звезды не слишком резко меняется при удалении от центра к периферии, и имеет смысл говорить о некоторой средней температуре. На самом деле, в областях, удаленных от центра, температура существенно ниже, чем в центральной части звезды.

В. Тугушев

Ф696. *Емкостный вольтметр представляет собой плоский воздушный конденсатор, одна из пластин которого закреплена неподвижно, а вторая может перемещаться поступательно в направлении, перпендикулярном плоскости пластин. К подвижной пластине прикреплена пружина жесткости k (рис. 1). Мерой приложенного напряжения служит изменение зазора между пластинами. Какое максимальное напряжение можно измерить таким прибором? Площади пластин S, зазор между пластинами при нулевом напряжении d.*

Обозначим $x(U)$ смещение пластины относительно начального положения ($x_0=0$ при $U_0=0$) при данном напряжении U. Найдем силу F притяжения между пластинами конденсатора, заряженного до напряжения U. Эта сила, очевидно, не зависит от того, подсоединен конденсатор к источнику напряжения или нет.

Если конденсатор заряжен до напряжения U и отсоединен от источника, то его заряд равен $Q=UC$, а энергия — $W=Q^2/2C$. При изменении зазора между пластинами на малую величину $\Delta x \ll d$ энергия конденсатора меняется на величину

$$\Delta W=\frac{1}{2}Q^2\left(\frac{1}{C'}-\frac{1}{C}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}Q^2\left(\frac{d-\Delta x}{\varepsilon_0 S}-\frac{d}{\varepsilon_0 S}\right)=-\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\cdot\Delta x,$$

где C' — емкость того же конденсатора при зазоре между пластинами $d-\Delta x$. Это изменение энергии равно по абсолютной величине работе силы F на пути Δx, то есть $F\cdot\Delta x=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}\cdot\Delta x$, откуда

$$F=\frac{Q^2}{2\varepsilon_0 S}=\frac{U^2C^2}{2\varepsilon_0 S}=\frac{U^2\varepsilon_0 S}{2d^2}.$$

Итак, при данном напряжении U сила F обратно пропорциональна квадрату расстояния между пластинами.

Пусть конденсатор емкостного вольтметра подсоединен к источнику с напряжением U_x и при этом пластина конденсатора смещена на расстояние x от $x_0=0$. Сила притяжения между пластинами конденсатора $F_x=\frac{U_x^2\varepsilon_0 S}{2(d-x)^2}$ уравновеши-

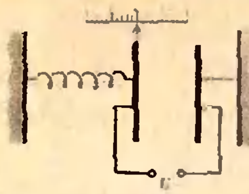


Рис. 1.

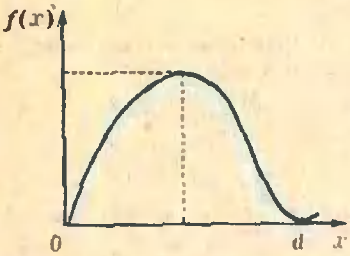
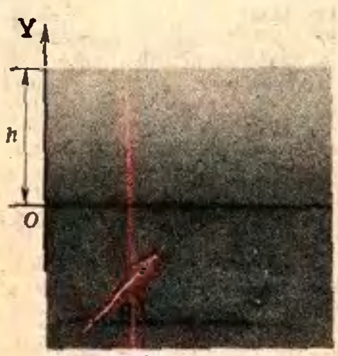


Рис. 2.

Ф697. *Между двумя средами с показателями преломления $n_0>1$ и $n_1=1$ имеется неоднородный слой высоты $h=H\left(1-\frac{1}{n_0^2}\right)$, где $H=\mathrm{const}$, внутри которого показатель преломления меняется с высотой по закону $n=n_0\sqrt{1-\frac{y}{H}}$ (см. рисунок). Из среды с показателем преломления n_0 в неоднородный слой входит луч света. При каких значениях угла α луч вернется в оптически более плотную среду? При каком значении угла α_0 расстояние между точками входа и выхода луча максимально?*



вается упругой силой пружины, то есть

$$kx=\frac{U_x^2\varepsilon_0 S}{2(d-x)^2}.$$

Отсюда находим U_x^2:

$$U_x^2=\frac{2k}{\varepsilon_0 S}x(d-x)^2.$$

Очевидно, что максимальному значению U_{max} соответствует максимум функции $f(x)=x(x-d)^2$. График функции $f(x)=x(d-x)^2$ приведен на рисунке 2. Найдем значение x, соответствующее максимуму:

$$f'(x)=3x^2-4dx+d^2=0,$$

$x_1=d$ соответствует минимуму $f(x)$, $x_2=\frac{d}{3}$ соответствует максимуму $f_{max}(x)=\frac{4}{27}d^3$.

Таким образом,

$$U_{max}^2=\frac{8kd^3}{27\varepsilon_0 S},\quad |U_{max}|=\frac{2d}{3}\sqrt{\frac{2kd}{3\varepsilon_0 S}}.$$

Д. Павлов

◆

Из закона преломления света следует, что при изменяющемся коэффициенте преломления среды изменяется угол φ отклонения луча от нормали (к границе раздела между соседними участками среды с разными значениями n), причем

$$n\sin\varphi=n\cos\alpha=n_0\sin\varphi_0=n_0\cos\alpha_0=\mathrm{const},\ \text{где}\ \alpha=\frac{\pi}{2}-\varphi$$

Для нахождения траектории луча в неоднородной среде воспользуемся следующей аналогией: тело массы m (размеры тела пренебрежимо малы) движется по траектории луча, скорость тела в точке с ординатой y равна $v(y)=v_0 n_y$ (v_0 — величина начальной скорости тела в точке с ординатой 0). Тогда проекция скорости на границу раздела (горизонтальная проекция) остается постоянной. Если при этом на точку действует постоянная сила $F=\frac{mv_0^2}{2H}$, направленная вертикально вниз, то согласно закону сохранения энергии в любой точке траектории

$$\frac{m(v(y))^2}{2}=\frac{mv_0^2}{2}-m\frac{v_0^2}{2H}y.$$

Видно, что при заданном законе изменения $n(y)$ траектория луча совпадает с траекторией тела, брошенного под углом к горизонту и движущегося под действием «силы тяжести» $F=mv_0^2/2H$. Поэтому для ответа на поставленные в задаче вопросы можно воспользоваться формулами для такого движения, учитывая, что «ускорение свободного падения» в нашем случае равно «g»$=v_0^2/2H$.

Итак, расстояние l между точками входа и выхода луча будет максимальным, если луч входит в неоднородную среду под углом $\varphi_0=45°$. При этом

$$l_{max}=\frac{2vA_0^2\sin\alpha_0\cos\alpha_0}{v_0^2/2H}=2H\quad\left(\text{так как}\ \alpha_0=\frac{\pi}{2}-\varphi_0=45°\right).$$

Для того чтобы при $\alpha_0=45°$ луч не прошел в верхнюю однородную среду, высота h неоднородной области должна удовлетворять условию $h>\frac{H}{2}$. В противном случае $\left(h<\frac{H}{2}\right)$ максимальное расстояние между точками входа и выхода луча соответствует такому углу α_0', при котором высота траектории равна h', то есть траектория касается верхней границы раздела. Этот угол α_0' находим из условия

$$n_0\cos\alpha_0'=n(y=h')\cos 0°=n_0\sqrt{1-\frac{h'}{H}};$$

$$\cos\alpha_0'=\sqrt{1-\frac{h'}{H}}.$$

П. Калугин

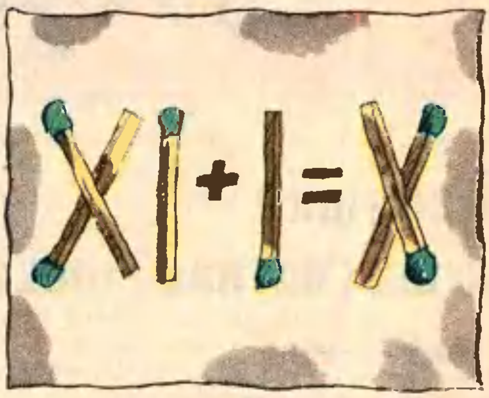
«Квант» для младших школьников

Задачи

1. Толя и Саша, сыграв партию в домино, выложили все косточки. При этом у них получилась прямоугольная рамка. Очки заменены в этой рамке буквами (пустые клетки — это «нулевые» очки). На рисунке показано, как расположены косточки в вершинах рамки (они закрашены). Положения остальных косточек неизвестны, но известно, что сумма очков по горизонтальным и вертикальным сторонам рамки одна и та же. Восстановите расположение косточек.

2. В 1982 году квадрат возраста Матлеба совпал с числом, образованным первыми тремя цифрами его года рождения. В каком году родился Матлеб?

3. В 1981 году 1 января и 31 декабря были одним и тем же днем недели. А будет ли так в этом году? И вообще, когда 1 января будет тем же днем недели, что и 31 декабря?



4. На листке бумаги из спичек выложили равенство (см. рисунок; знаки действия — не из спичек). Какое минимальное количество спичек нужно переложить, чтобы равенство стало верным?

5. Девочка подошла к переходу через улицу в тот момент, когда загорелся желтый свет, и загляделась на работу светофора. По своим часам она заметила, что красный свет горит в полтора раза меньше времени, чем зеленый, а желтый — в четыре раза меньше, чем красный. После того, как в восемнадцатый раз горел желтый свет, зажегся зеленый, и девочка, простояв 17 минут, стала переходить улицу. Сколько времени горит желтый свет?

Эти задачи нам предложили: *М. Агаев* (ученик 8-го класса Казвиинобинской сельской школы Масаллинского р-на Аз. ССР), *М. Варга, Н. Розов, А. Швецов.*

А. Савин

Камушки и шахматная доска

(воспоминания о летних каникулах)

Жарким июльским днем мы с Колей отправились на пляж. Вдоволь накупавшись, мы улеглись на песке загорать. Рядом с нами двое мужчин играли в шахматы. Естественно, мы тотчас начали обсуждать позицию на доске и подсказывать: я — одному, а Коля — другому. Но игроки были невозмутимы и на наши подсказки совершенно не реагировали. Отчаявшись превратить эту партию в шедевр шахматного искусства, мы стали думать, чем же нам заняться.

«А не сыграть ли нам в камушки?» — спросил у меня Коля. «Это что — подбрасывать и ловить?» «Да нет! — ответил он, — Гораздо интереснее! Для начала сыграем в такую игру.

Имеется кучка камней. Мы по очереди берем по одному, по два или по три камня. Выигрывает тот, кто берет последний камень».

Я решил играть так, чтобы у меня всегда было четное число камней, — и проиграл. Во второй партии я стал брать камни так, чтобы у меня все время было нечетное число камней,— и снова проиграл. Проигрывать в третий раз мне очень не хотелось, и я решил попытаться понять смысл игры.

И в первый раз, и во второй раз получилось так, что перед моим последним ходом в кучке оказывалось 4 камня. Если я брал только один камень, Коля забирал остальные три. Если же я брал два или три камня, он забирал оставшиеся два или единственный последний камень.

Как же мне сделать, чтобы вновь не оказаться перед четырьмя камнями? Оставлять ему 5, 6 или 7 камней нельзя: взяв 1, 2 или 3 камня, он вновь оставит мне 4 камня. А если я оставлю ему 8 камней? Тогда уже он будет вынужден оставить мне 5, 6 или 7 камней, а я заставлю его делать ход в ситуации, когда в кучке лежит 4 камня. И тут меня осенило! Если игрок получает на своем ходе кучку камней, количество которых делится на 4, то после любого его хода количество оставшихся камней уже не сможет делиться на 4, а его партнер вновь сможет сделать ход, приводя-

Рис. 1.

щий к кучке, количество камней в которой вновь делится на 4, и так далее, пока не исчерпаются все камни. Все ясно!

Пересчитав камни в кучке (их оказалось 25), я поднял голову, чтобы сказать Коле, что беру один камень, но ...он уже махал мне рукой с середины реки.

Когда мы, накупавшись, вернулись на старое место, я, как бы нехотя, спросил: «Сыграем еще партию в камни? Начинать должен вроде бы я?» «Что ж,— ответил Коля, — давай; только сейчас будем играть по новым правилам:

Из кучки камней снова берем по одному, по два или по три камня. Проигрывает тот, кто берет последний камень. Ну, начинай!»

Я задумался, а через минуту, еще раз пересчитав камни в кучке — их как было, так и осталось 25, поднял руки вверх. «Сдаюсь, проиграл!» «Почему?» — удивился Коля. В ответ я разложил камни так, как показано на рисунке 1 — шесть кучек по 4 камня и еще один камень.

«В первой игре я выигрывал, беря первым ходом один камень, — сказал я, — а потом — столько камней, чтобы в сумме с камнями, взятыми перед этим тобой, получилось четыре камня. А теперь, сколько бы камней я ни взял, ты, беря всякий раз столько камней, чтобы в сумме со взятыми перед этим мной камнями получалось четыре камня, оставишь мне последний камень».

«Молодец, — похвалил меня Коля. — Ты нашел выигрышную стратегию для второго игрока. Что же мы будем делать дальше?»

Тут мы заметили, что наши соседи-шахматисты ушли купаться. «Эх, жаль, не попросили у них шахматы поиграть, пока они купаются!» — сказал я, глядя на пустую шахматную доску. Фигуры наши соседи убрали в сумку. На песке валялась лишь одна забытая пешка. А мне хотелось после всех моих неудач взять реванш у Коли.

«Знаешь что, — сказал Коля, придвигая шахматную доску и устанавливая эту единственную пешку в угол доски, — давай сыграем в игру, автором которой является известный советский математик, член-корреспондент Академии наук СССР И. М. Гельфанд. Играют в нее так: *сначала пешка стоит в одном из углов доски, а затем мы ее по очереди будем передвигать на одну из соседних клеток, причем назад ходить нельзя,* — и он, поставив пешку на одно из центральных полей, показал, на какие поля ее можно передвинуть (на рисунке 2 эти ходы указаны стрелками). — *Выигрывает тот, кто поставит пешку в противоположный угол доски».*

Я тотчас согласился — ведь в шахматы я играю куда лучше Коли, а здесь не какие-то там камушки, а настоящая шахматная доска, настоящая пешка, которая, правда, ходит почти как король.

Первую партию я проиграл и решил во второй не торопиться, а хо-

Рис. 2.

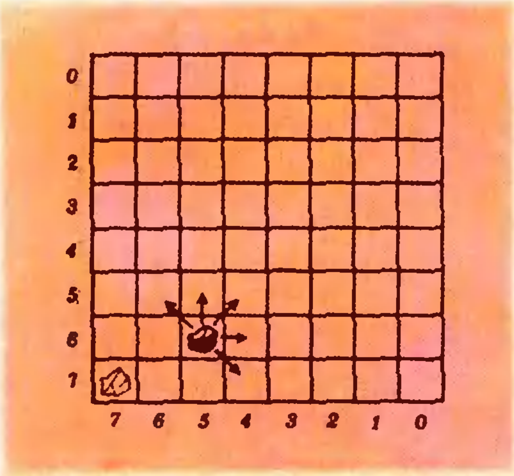


Рис. 3.

рошенько обдумывать позицию. Однако тут вернулись наши соседи, и нам пришлось, извинившись, вернуть им доску с пешкой. «Не расстраивайся, — сказал мне Коля, — в эту игру можно играть и при помощи камушков».

Я тут же расчертил на песке квадрат, провел линии, делящие его на 64 квадратика, а на угловое поле поставил камушек.

«Можно, конечно, и так, — сказал Коля, — но я имел в виду совсем другое».

Он сложил две кучки камней, по 7 камней в каждой. «*Будем по очереди брать камни: либо один камень из первой кучки, либо один камень из второй кучки, либо два камня — по одному из каждой кучки; а можно не брать камни, а переложить один камень из одной кучки в другую. Выигрывает тот, кто забирает последний камень*».

«Не хочу я играть в твои дурацкие камни, — возмутился я, — давай играть в игру Гельфанда! Ты что — боишься?» «А это и есть та же самая игра Гельфанда, — ответил Коля. — Вот смотри!» И он нарисовал на песке около начерченного мной квадрата цифры от 0 до 7 сначала вдоль одной стороны, а потом вдоль другой стороны, как на рисунке 3.

«Посмотри, что происходит. Пусть фишка стоит на поле, скажем, (5;6), то есть на пересечении вертикали, помеченной цифрой 5, и горизонтали, помеченной цифрой 6 (см. рис. 3). Положим в сторонке две кучки камней: в первой 5 камней, а во второй 6. В какие клетки я имею право передвинуть фишку? В клетки (6; 5), (5; 5), (4; 5), (4; 6) и (4;7). Как из наших двух кучек, содержащих 5 и 6 камней, получить кучки, соответствующие новым положениям фишки? Очень просто! Чтобы получить положение (6; 5), нужно один камень переложить из второй кучки в первую; положение (5; 5) получается, если взять из второй кучки один камень; (4; 5) — если взять по камню из обеих кучек; (4; 6) — если взять один камень из первой кучки; наконец, положение (4; 7) получается, если один камень переложить из первой кучки во вторую. Поскольку начальное поле занумеровано цифрами (7; 7), вначале в каждой кучке должно быть по 7 камней. Конечное же поле занумеровано цифрами (0; 0) — в кучках не остается ни одного камня».

«А мне игра на шахматной доске нравится гораздо больше, — сказал я. — Вот смотри: клетка (0; 0) — проигрышная в том смысле, что если ход мой, а фишка уже стоит в этой клетке, то я проиграл. А соседние с ней клетки (0; 1), (1; 1) и (1; 0) — выигрышные. Тогда клетки (0; 2) и (2; 0) — проигрышные, так как с них можно пойти лишь на выигрышные клетки (на рисунке 4 проигрышные клетки помечены буквой П, а выигрышные — знаком +). Продолжая эти рассуждения, я смогу для каждой клетки определить, выигрышная она или проигрышная, — сказал я, заканчивая разметку полей квадрата (в результате получился рисунок 4). — Теперь я могу с тобой сыграть и

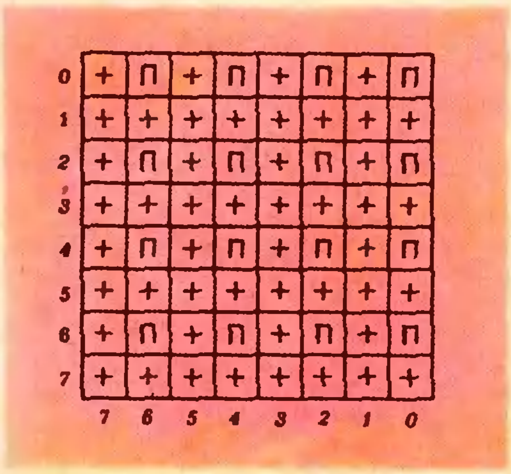


Рис. 4.

в «каменный» вариант игры Гельфанда: буду передвигать фишку по доске и соответственным образом брать или перекладывать камни». «А я могу сформулировать совсем простое правило, — сказал Коля. — Посмотри, проигрышные клетки — это те, у которых обе «координаты» четные; у выигрышных же клеток хотя бы одна «координата» нечетна. Таким образом, в «каменной» игре Гельфанда стратегия у начинающего игрока очень простая: он должен брать камни так, чтобы в обеих кучках было четное число камней, причем, если в каждой кучке нечетное число камней, то это можно сделать двумя способами: либо взяв по одному камню из каждой кучки, либо переложив камень из одной кучки в другую». «А вот этого делать как раз не следует,— сказал я,— так мы и будем перекладывать камни по очереди из одной кучки в другую до бесконечности. В этом случае нужно брать два камня, тогда общее количество камней в кучках все время будет уменьшаться и начинающий сможет торжествовать победу, если, конечно, он сделает правильный первый ход — на поле (6, 6) — и дальше будет придерживаться нашей стратегии».

Таким образом, мы полностью разобрались в «игре Гельфанда», а раз так, то играть в нее стало не интересно. Другое дело — шахматы! Там сыграны, наверно, уже миллионы партий, а выигрышной стратегии пока так и не нашли. Зато в игре с камушками можно придумывать все новые и новые правила игры, а найти стратегию, приносящую выигрыш, не менее, если не более, интересно, чем найти решение замысловатого шахматного этюда.

Попробуйте найти, кто и как выигрывает при правильной игре — начинающий или его партнер — в следующих играх:

1. *Имеется две кучки по 10 камней. Двое поочередно берут камни из какой-нибудь кучки (не обязательно всякий раз из одной и той же). Выигрывает тот, кто заберет последние камни.*

2. *Условия те же, что и в предыдущей игре, но игрокам запрещается брать такое количество камней, при котором в кучках в результате остается одинаковое количество камней.*

3. *На столе лежат две кучки по 9 конфет. Каждый из двух играющих должен сначала переложить одну конфету из одной кучки в другую, а потом съесть две конфеты из одной кучки. Проигрывает тот, кто не сможет сделать своего очередного хода.*

4. *На столе лежат две кучки очищенных орехов, в одной — 7, а в другой — 6 орехов. Двое играющих ходят по очереди. Ход состоит в том, что играющий съедает орехи в одной из кучек, а другую делит на две части (любые). Если он не сможет разделить эту кучку на две части из-за того, что в ней — один орех, то он его съедает и выигрывает.*

Задачи наших читателей

«Квант» получает много писем с новыми задачами. Часть из них мы помещаем в постоянных разделах "Задачник «Кванта»" и "«Квант» для младших школьников"; немало интересных по формулировке отдельных задач публикуется под рубриками «Задачи наших читателей» и «Задачи для исследования». Иногда это — забавные задачи-головоломки, ребусы, но нередко — и такие, над решением которых придется серьезно потрудиться; кроме школьной программы, могут понадобиться дополнительные сведения (из статей «Кванта», факультативных курсов и дополнительной литературы).

Решения этих задач обычно помещаются в следующем номере журнала.

В этом номере мы предлагаем вам несколько трудных задач по алгебре и арифметике целых чисел.

1. Доказите, что число, составленное из 1980 двоек, делится на 1982. Указание. Используйте Малую теорему Ферма: *если p — простое число и a не делится на p, то $a^{p-1}-1$ делится на p* («Квант», 1978, № 10, с. 7 или 1972, № 10, с. 2).

С. Манукян

2*. Докажите, что если $\frac{m!}{n!(m-n)!}$ делится на p^r и p — простое число, то $p^r < m$. Для каких m может достигаться равенство?

В. Лев

3. Про многочлен $8x^4+ax^3+bx^2+cx+d$ известно, что для всех x из промежутка $[-1; 1]$ его значения по модулю не превосходят единицы. Докажите, что это — многочлен Чебышева $T_4(x)$ (см. таблицу 1 из статьи Н. Васильева и А. Зелевинского на с. 12). Указание. Рассмотрите значения этого многочлена при $x=0$, $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\pm\frac{1}{2}$, ± 1.

О. Астахов

Двенадцать лет издается «Квант» — и все двенадцать лет на его страницах неизменно появляется рубрика «Практикум абитуриента». Редакционная почта, встречи с учащимися и педагогами, присылаемые в редакцию читательские анкеты показывают, что этот раздел вызывает большой интерес у многих юных читателей журнала.

В «Практикуме абитуриента» читатели найдут статьи, посвященные подробному разъяснению наиболее важных и сложных вопросов программ вступительных экзаменов по математике и физике, разбору типичных задач, главным образом взятых непосредственно из вариантов приемных экзаменов в вузы, анализу характерных, особенно часто встречающихся ошибок абитуриентов.

Познакомившись с публикациями «Практикума абитуриента», читатели смогут легко убедиться, что для успешной сдачи вступительных экзаменов никаких дополнительных — по сравнению со школьными курсами математики и физики — знаний не требуется. Однако не следует думать, что достаточно просто еще раз прочесть школьные учебники, — необходимо внимательно разобрать и глубоко усвоить теоретический материал, получить твердые и прочные навыки в решении задач. Этого можно достичь лишь настойчивым, упорным трудом, систематическими, планомерными занятиями в течение всего оставшегося до экзаменов времени.

Статьи «Практикума абитуриента» не могут (да и не ставят цели) заменить собой школьные учебники. Они написаны в расчете на то, что читатель уже усвоил школьные курсы математики и физики и хотел бы найти дополнительные пояснения и задачи для самостоятельного решения. Кроме материалов, которые появятся в «Практикуме абитуриента» в следующих номерах журнала, при подготовке к вступительным экзаменам полезно было бы познакомиться и с некоторыми статьями «Кванта», публиковавшимися в прошлые годы. Тематический список таких статей помещен ниже; в списке указаны год, номер журнала и страница, где статья начинается. (Следует иметь в виду, что в статьях, опубликованных до 1977 года, иногда встречаются термины и обозначения, отличающиеся от принятых в школе сейчас; мы надеемся, что внимательный читатель легко преодолеет это затруднение.)

Математика

Текстовые задачи: 1973 — № 1, с. 35.
Модуль: 1972 — № 9, с. 45.
Радикалы: 1970 — № 3, с. 53.
Степень: 1981 — № 2, с. 36.
Прогрессии: 1971 — № 2, с. 37; 1973 — № 4, с. 57.
Функции: 1971 — № 9, с. 41; 1972 — № 3, с. 50; № 5, с. 36; 1973 — № 5, с. 38; 1976 — № 12, с. 34; 1977 — № 1, с. 43; № 4, с. 38; 1978 — № 2, с. 49.
Предел: 1974 — № 11, с. 54; 1978 — № 9, с. 53; № 10, с. 54; № 10, с. 62; 1980 — № 6, с. 33; № 10, с. 40.
Графики: 1975 — № 2, с. 43; 1981 — № 9, с. 36.
Экстремум: 1976 — № 10, с. 41; 1979 — № 10, с. 44.
Производная: 1977 — № 2, с. 35; № 12, с. 40; 1978 — № 5, с. 44; № 6, с. 60; 1979 — № 2, с. 40; № 6, с. 24; № 10, с. 36; 1981 — № 1, с. 37.
Интеграл: 1977 — № 5, с. 30.
Уравнения, системы, неравенства: 1970 — № 4, с. 41; № 5, с. 48; № 9, с. 19; № 10, с. 53; № 12, с. 46; 1971 — № 1, с. 41; № 3, с. 40; № 4, с. 43; № 5, с. 40; № 6, с. 46; № 10, с. 45, 1972 — № 1, с. 46; № 12, с. 49; № 12, с. 51; 1973 — № 2, с. 58; 1975 — № 9, с. 49; 1976 — № 3, с. 51; 1977 — № 9, с. 53; 1979 — № 2, с. 48; № 3, с. 51; № 9, с. 29; № 12, с. 34; 1980 — № 1, с. 48; 1981 — № 1, с. 40; № 2, с. 40.
Векторы: 1978 — № 1, с. 47; 1979 — № 1, с. 45; 1980 — № 12, с. 40.
Координатный метод: 1977 — № 11, с. 82; 1978 — № 11, с. 42.
Планиметрия: 1971 — № 6, с. 52; № 12, с. 41; 1972 — № 10, с. 47; 1973 — № 11, с. 52; 1975 — № 10, с. 48; № 11, с. 45; № 12, с. 46; 1976 — № 2, с. 46; № 5, с. 57; № 9, с. 56; № 10, с. 47; № 12, с. 50; 1977 — № 10, с. 48; 1978 — № 2, с. 36; № 4, с. 36; 1979 — № 9, с. 38.
Стереометрия: 1970 — № 11, с. 54; 1972 — № 2, с. 60; № 4, с. 54; № 7, с. 40; № 11, с. 52; 1974 — № 5, с. 58; № 10, с. 32; № 12, с. 55; 1975 — № 3, с. 61; 1976 — № 1, с. 60; 1977 — № 2, с. 47; № 3, с. 38; № 12, с. 48; 1978 — № 3, с. 48; 1979 — № 1, с. 36; № 6, с. 33; 1980 — № 2, с. 46; № 4, с. 40; 1981 — № 10, с. 44.
Планиметрия и стереометрия: 1974 — № 2, с. 46; 1975 — № 1, с. 55; 1976 — № 6, с. 49; 1979 — № 5, с. 34; № 11, с. 41; 1981 — № 9, с. 46.
Анализ и алгебра: 1978 — № 6, с. 53.
Статьи для самопроверки: 1977 — № 1, с. 36; № 9, с. 44; 1978 — № 1, с. 36; № 2, с. 34; № 7, с. 44; № 12, с. 34; 1979 — № 7, с. 37; 1980 — № 9, с. 47.

Физика

Механика: 1970 — № 6, с. 39; 1971 — № 2, с. 44; № 5, с. 50; № 9, с. 47; № 11, с. 54; 1972 — № 3, с. 58; № 9, с. 51; 1973 — № 9, с. 68; № 11, с. 57; 1974 — № 3, с. 52; № 11, с. 60; 1975 — № 1, с. 60; 1976 — № 12, с. 40; 1977 — № 2, с. 50; № 3, с. 46; № 11, с. 77; № 12, с. 52; 1978 — № 3, с. 54; № 11, с. 48; № 12, с. 42; 1979 — № 10, с. 49; 1980 — № 3, с. 41; № 11, с. 38; № 12, с. 45; 1981 — № 1, с. 43; № 10, с. 47.
Жидкости и газы: 1972 — № 12, с. 53.
Молекулярная физика, тепловые явления: 1972 — № 5, с. 45; 1973 — № 1, с. 43; 1974 — № 1, с. 60; 1976 — № 3, с. 58; 1977 — № 6, с. 67; 1978 — № 1, с. 42; 1979 — № 1, с. 50; 1981 — № 2, с. 44; № 11, с. 36; № 12, с. 42.
Основы электродинамики: 1972 — № 2, с. 54; № 4, с. 62; № 6, с. 55; № 6, с. 59; № 7, с. 48; № 7, с. 51; 1973 — № 3, с. 50; № 7, с. 35; 1974 — № 5, с. 64; 1975 — № 4, с. 41; № 12, с. 51; 1978 — № 4, с. 42; № 5 с. 38; 1979 — № 2, с. 52; № 3, с. 45; № 4, с. 43; 1980 — № 6, с. 36; 1981 — № 7, с. 39.
Колебания и волны: 1974 — № 6, с. 31; 1976 — № 2, с. 51; 1981 — № 3, с. 46.
Оптика: 1971 — № 7, с. 41; 1977 — № 4, с. 50; 1979 — № 5, с. 39; № 6, с. 30; 1980 — № 4, с. 44; 1981 — № 5, с. 37; № 6, с. 45.
Кроме того, некоторым общим вопросам посвящены статьи: 1970 — № 12, с. 50; 1972 — № 6, с. 62; № 10, с. 52; 1973 — № 4, с. 52; № 5, с. 43; № 7, с. 30; 1975 — № 5, с. 60; № 11, с. 50; 1978 — № 6, с. 65; 1979 — № 7, с. 41; 1981 — № 4, с. 40; № 9, с. 42.

В. Тугушев

Электрические цепи с нелинейными элементами

При расчете любой электрической цепи основная задача состоит в определении токов и напряжений на всех участках цепи. Связь между током и напряжением на каждом участке называется вольтамперной характеристикой участка. Она обусловлена, с одной стороны, физическими процессами, происходящими при движении зарядов в веществе под действием электрического поля, а с другой — конструкцией самой цепи (то есть соединением ее элементов).

Простейшая линейная вольтамперная характеристика имеет место, например, для металлического проводника:

$$U=IR,$$

где R — коэффициент пропорциональности между напряжением и током, называемый сопротивлением. Сопротивление определяется материалом, размерами и температурой проводника.

Существуют, однако, многочисленные устройства и элементы, физические и конструктивные особенности которых приводят к нелинейной зависимости между током и напряжением. Вольтамперная характеристика таких так называемых нелинейных элементов задается обычно графически или аналитически в возможно более близкой к истинной форме. Оба способа будут использованы при решении предлагаемых ниже задач.

Задача 1. *Нелинейный элемент, вольтамперная характеристика которого приведена на рисунке 1, а (синяя линия), включен в цепь постоянного тока, содержащую источник с ЭДС $\mathcal{E}$ =200 В и два резистора сопротивлением R=10 кОм каждый (рис. 1, б). Найдите ток, текущий через нелинейный элемент.*

Обозначим через I_1, I_2 и I токи на отдельных участках цепи; их направления показаны на рисунке 1, б. Поскольку токи в цепи постоянные, заряд, поступающий в точку разветвления (точки A и B) в единицу времени, равен заряду, уходящему из этой точки за то же время, то есть

$$I=I_1+I_2.$$

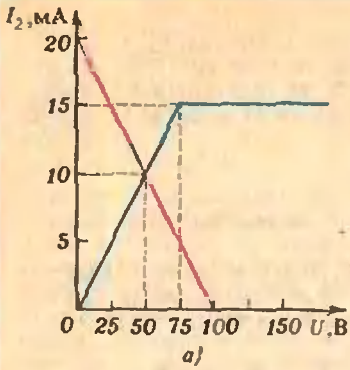
Участки AaB, AbB и AcB — параллельные; следовательно, напряжения на них одни и те же:

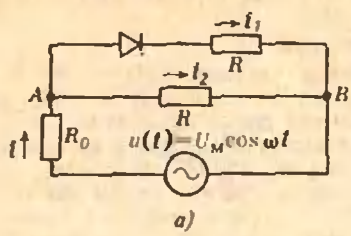
$$I_1R=U,$$
$$U=\mathcal{E}-IR,$$

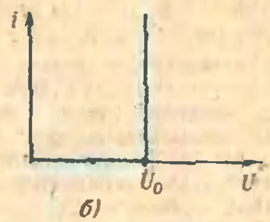
где U — напряжение на нелинейном элементе. Из полученных трех уравнений найдем I_2:

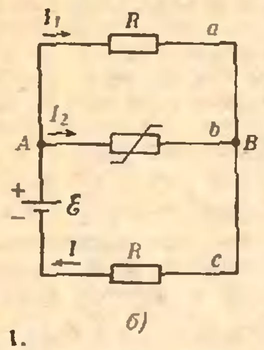
$$I_2=\frac{\mathcal{E}-2U}{R}. \qquad (*)$$

С другой стороны, величины I_2 и U связаны между собой зависимостью, изображенной на рисунке









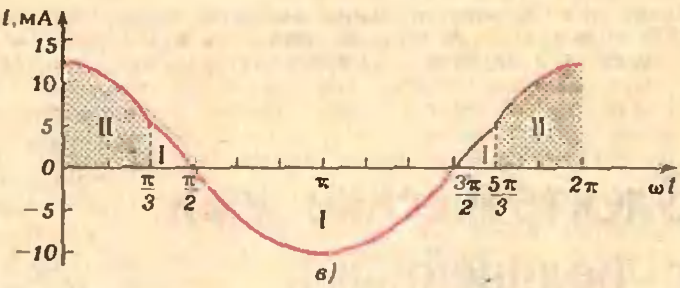


Рис. 1.

Рис. 2.

1, *а*. Изобразим на этом же рисунке прямую (красная линия), задаваемую уравнением (*). Очевидно, что существует только одна точка пересечения этой прямой с вольтамперной характеристикой нелинейного элемента, ей соответствует ток

$$I_2=10 \text{ мА}.$$

З а д а ч а 2. *Найдите ток через резистор сопротивлением R_0 в схеме, изображенной на рисунке 2, а. Вольтамперная характеристика диода (нелинейного элемента) приведена на рисунке 2, б.*

Очевидно, что схема может работать в двух режимах: когда диод заперт и когда диод открыт.

Если диод заперт, ток течет только через последовательную цепочку резисторов с сопротивлениями R_0 и R, и он равен

$$i_I=\frac{u(t)}{R_0+R}.$$

Во втором случае, когда диод открыт и напряжение на нем равно U_0 и не меняется со временем, ток i_{II} разветвляется в точках A и B так, что (см. рис. 2, *а*)

$$i_{II}=i_1+i_2.$$

Кроме того, для различных участков схемы между точками A и B выполняются равенства

$$U_0+i_1R=i_2R,$$
$$i_2R=u(t)-i_{II}R_0.$$

Из последних трех уравнений найдем i_{II}:

$$i_{II}=\frac{2u(t)-U_0}{R+2R_0}.$$

Теперь выясним, при каких условиях реализуются режимы I и II. Ясно, что в моменты отпирания и запирания диода напряжение на участке AB должно быть равно U_0, то есть

$$i_IR=U_0, \text{ или } \frac{u(t)R}{R_0+R}=U_0.$$

Отсюда следует, что при напряжениях

$$u(t)=U_0\frac{R_0+R}{R}$$

будет происходить смена режимов I и II. В частности, первая смена режимов произойдет в момент, когда

$$\cos\omega t=\frac{U_0}{U_м}=\frac{R_0+R}{R}\left(U_м>U_0\frac{R_0+R}{R}\right).$$

График зависимости искомого тока от времени для $U_м=300$ В, $U_0=100$ В, $R_0=10$ кОм и $R=20$ кОм представлен на рисунке 2, *в*.

З а д а ч а 3. *Ток I двухэлектродной лампы в определенном диапазоне* *напряжений может быть связан с разностью потенциалов U между электродами соотношением $I=aU+bU^2$ при $U>0$ (a, $b>0$) и $I=0$ при $U<0$. Две такие лампы включены в цепь, как показано на рисунке 3. Параметры a и b для обеих ламп равны соответственно $a_1=0{,}06$ мА/В, $b_1=0{,}008$ мА/В^2 и $a_2=0{,}04$ мА/В, $b_2=0{,}002$ мА/В^2. Считая $\mathscr{E}=200$ В и $R=10$ кОм, вычислите мощность, потребляемую лампами.*

Искомую мощность $P_{\text{ламп}}$ можно найти из закона сохранения энергии

$$P_{\text{ламп}}+P_R=P_{\mathscr{E}}.$$

Здесь $P_R=I_0^2R$ — мощность, расходуемая в резисторе (I_0 — ток, текущий через резистор и батарею), а $P_{\mathscr{E}}=\mathscr{E}I_0$ — мощность, отдаваемая батареей.

Согласно закону Ома,

$$I_0=\frac{\mathscr{E}-U}{R}.$$

Кроме того (см. рис. 3),

$$I_0=I_1+I_2,$$

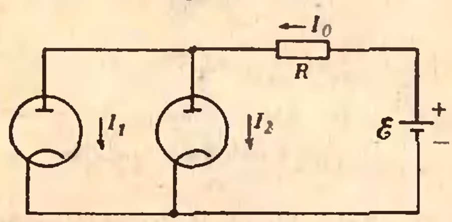


Рис. 3.

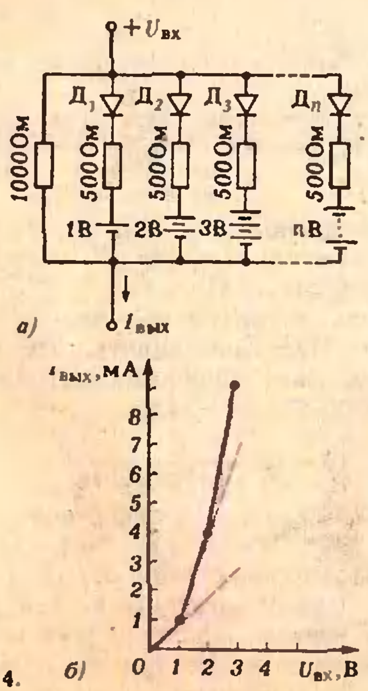


Рис. 4.

где I_1 и I_2 — токи в первой и во второй лампах соответственно.

Из последних двух уравнений, используя связь между токами в лампах и напряжением на них, получим квадратное относительно U уравнение

$$(a_1+a_2)U+(b_1+b_2)U^2=\frac{\mathscr{E}-U}{R},$$

из которого найдем U:

$$U=\frac{-(a_1+a_2+1/R)}{2(b_1+b_2)}+\frac{((a_1+a_2+1/R)^2+4\mathscr{E}(b_1+b_2)/R)^{1/2}}{2(b_1+b_2)}\approx 35{,}8\text{ В}.$$

Отрицательный корень квадратного уравнения отбрасываем, поскольку он не соответствует физическому смыслу задачи: при $U<0$ лампы заперты и тока не проводят.

Теперь из закона сохранения энергии найдем искомую мощность $P_{\text{ламп}}$, потребляемую лампами:

$$P_{\text{ламп}}=P_{\mathscr{E}}-P_R=\frac{(\mathscr{E}-U)U}{R}\approx 0{,}6\text{ Вт}.$$

Задача 4. *Нарисуйте график зависимости тока в нагрузке $I_{\text{вых}}$ от входного напряжения $U_{\text{вх}}$ в схеме, представленной на рисунке 4, а. Все диоды ($Д_1$, $Д_2$, ..., $Д_n$) — идеальные, то есть их сопротивление в одном направлении неограниченно велико, а в другом — бесконечно мало.*

Обозначим через R ($R=1000$ Ом) сопротивление крайнего левого резистора (см. рис. 4, а), через $R/2$ ($R/2=500$ Ом) — сопротивления всех остальных резисторов и через $\mathscr{E}$ ($\mathscr{E}=1$ В) — ЭДС источника, включенного последовательно с первым диодом.

Пока напряжение на входе не превышает 1 В, все диоды заперты, и ток течет только по крайней левой ветви схемы:

$$I_{\text{вых }0}=\frac{U_{\text{вх}}}{R}\quad (U_{\text{вх}}<1\text{ В})$$

— по мере роста напряжения ток линейно нарастает.

Как только входное напряжение достигнет 1 В, откроется первый диод, и через него пойдет ток, равный $\frac{U_{\text{вх}}-\mathscr{E}}{R/2}$. При этом зависимость выходного тока от напряжения на входе будет иметь вид

$$I_{\text{вых }1}=I_{\text{вых }0}+\frac{U_{\text{вх}}-\mathcal{E}}{R/2}=$$

$$=\frac{3U_{\text{вх}}}{R}-\frac{2\mathcal{E}}{R}\quad (1\ \text{В}<U_{\text{вх}}<2\ \text{В}).$$

При дальнейшем росте напряжения на входе будут открываться диоды Д$_1$, Д$_2$ и т. д. График зависимости тока $I_{\text{вых}}$ от напряжения $U_{\text{вх}}$ изображен на рисунке 4, *б*.

Посмотрите внимательно на этот график, и вы увидите, что здесь по отрезкам прямых воспроизведена парабола. Так на примере данной задачи вы познакомились с работой своеобразного электронного устройства — функционального преобразователя (квадратора). С помощью системы диодов, резисторов и источников тока он моделирует операцию возведения функции в квадрат. Подобные устройства применяются при электронном моделировании различных сложных физических процессов.

Задача 5. *Найдите связь между током и напряжением для металлического проводника с учетом зависимости его сопротивления от температуры. Скорость теплоотдачи в окружающую среду считать пропорциональной разности температур проводника и среды.*

Обычная связь между током и напряжением $U=IR$ предполагает, что сопротивление R, зависящее от температуры, берется при температуре T проводника. Но эта температура, вообще говоря, отличается от температуры T_0 окружающей среды. В результате между проводником и средой происходит теплообмен, причем при небольшой разности температур $T-T_0$ количество теплоты $\Delta Q_{\text{пер}}$, переданное среде за время Δt, дается соотношением

$$\frac{\Delta Q_{\text{пер}}}{\Delta t}=C(T-T_0),$$

где C — постоянный коэффициент пропорциональности.

Во время протекания тока проводник нагревается. (С микроскопической точки зрения это обусловлено столкновениями электронов, движущихся в проводнике под действием электрического поля, с колеблющимися ионами кристаллической решетки, с различными дефектами и неоднородностями.) Количество теплоты $\Delta Q_{\text{выд}}$, выделяемое в проводнике за время Δt, связано с током I в проводнике, с сопротивлением R проводника и с напряжением U на нем:

$$\frac{\Delta Q_{\text{выд}}}{\Delta t}=I^2R=\frac{U^2}{R}=\frac{U^2}{R_0(1+\alpha(T-T_0))}.$$

Здесь R_0 — сопротивление при температуре проводника T_0, α — температурный коэффициент сопротивления. (Если температура T_0 близка к 0° С и разность $T-T_0$ мала, то зависимость сопротивления от температуры действительно можно представить в виде $R=R_0(1+\alpha(T-T_0))$.)

Нагрев проводника будет происходить до тех пор, пока скорость выделения тепла в проводнике не сравняется со скоростью теплоотвода в окружающую среду:

$$\frac{\Delta Q_{\text{выд}}}{\Delta t}=\frac{\Delta Q_{\text{пер}}}{\Delta t},$$

или

$$\frac{U^2}{R_0(1+\alpha(T-T_0))}=C(T-T_0).$$

Отсюда разность температур

$$T-T_0=\frac{-R_0C+(R_0^2C^2+4U^2\alpha R_0C)^{1/2}}{2\alpha R_0C},$$

и связь между током и напряжением имеет вид

$$I=\frac{U}{R_0(1+\alpha(T-T_0))}=$$

$$=\frac{U}{R_0\left(1+\dfrac{(R_0^2C^2+4U^2\alpha R_0C)^{1/2}-R_0C}{2R_0C}\right)}$$

(отрицательное значение $T-T_0$ отбрасываем, так как оно не имеет физического смысла).

Проанализируем полученный результат. Нетрудно видеть, что при $U^2\ll R_0C/(4\alpha)$ зависимость тока от напряжения упрощается:

$$I=\frac{U}{R_0(1+U^2\alpha/(R_0C))}$$

(мы воспользовались известной формулой: при $x\ll 1$ $(1+x)^{1/2}=1+x/2$). Отметим, что условие $U^2\ll R_0C/(4\alpha)$ выполняется практически всегда, поскольку всегда мала поправка к сопротивлению, вызванная нагреванием проводника ($\alpha(T-T_0)\ll 1$). Чем меньше тепловая мощность U^2/R, выделяемая в проводнике, и температурный коэффициент сопротивления α и чем больше интенсивность теплоотвода C, тем при более высоких напряжениях будет выполняться закон Ома, то есть будет сохраняться прямая пропорциональность между током и напряжением.

В заключение решите самостоятельно несколько задач:

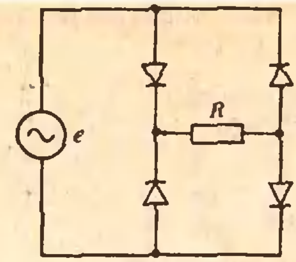


Рис. 5.

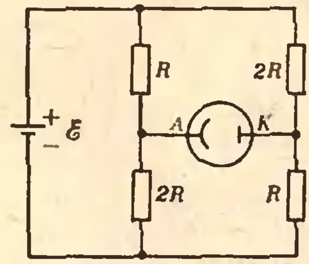


Рис. 6.

Упражнения

1. В цепь параллельно включены резистор сопротивлением R и нелинейный элемент, сопротивление которого зависит от напряжения U на нем по закону $r=r_0+\alpha U$. Найдите ток в цепи, если на нее подано напряжение U.

2. Решите предыдущую задачу при последовательном соединении нелинейного элемента и резистора.

3. На рисунке 5 изображена схема двухтактного выпрямителя переменного тока. Считая, что генератор вырабатывает переменное напряжение с амплитудой $\mathcal{E}_м=100$ В, а характеристики диодов те же, что и в задаче 2 в статье, найдите зависимость тока в резисторе сопротивлением $R=100$ Ом от времени при $U_0=25$ В.

4. В схеме, изображенной на рисунке 6, через фотоэлемент протекает ток I, если потенциал анода A больше потенциала катода K. В противном случае ток через элемент не идет. Найдите напряжение на фотоэлементе при $\mathcal{E}=10$ мВ, $I=100$ мкА и $R=10$ Ом.

Две головоломки

1. **Sapienti sat: «Мудрому достаточно» (*лат.*)** В этом примере на деление цифры заменены буквами и звездочками. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные; звездочки могут быть любыми цифрами. Восстановите пример.

```
_SAPIENTI | SAT
 ***      |---------
 ----     | *****,***
 _****
  ***
  ----
  _***
   ***
   ----
   _***
    ***
    ----
   _****
     ***
     ----
     _***
      ***
      ----
      _***
       ***
       ----
       _***
        ***
        ----
```

2. Десятизначное число *CHARLESTON*, записанное в верхней горизонтали и в левой вертикали изображенной на рисунке фигуры, обладает двумя свойствами: все его цифры различны и оно является квадратом целого числа. Заполните клетки этой фигуры (в том числе, и те, в которых записаны буквы) цифрами так, чтобы каждое из десяти: пяти горизонтальных и пяти вертикальных — десятизначных чисел обладало теми же двумя свойствами. Известно, что числа, записанные по горизонталям, равны соответствующим числам, записанным по вертикалям; что $L=2$; $CHARLESTON=EERRN^2$, следующее за ним число (то, которое начинается с A) равно $SEARC^2$, следующее — $RENLR^2$, затем $THORR^2$ и, наконец, — $CECCA^2$.

Э. Рекстин

Московский физико-технический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$2\log_4(4-x)=4-\log_2(-2-x).$$

2. В треугольнике с углом 120° длины сторон образуют арифметическую прогрессию с разностью 1 см. Найдите длины сторон треугольника.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt{7x+y}+\sqrt{x+y}=6\\ \sqrt{x+y}-y+x=2.\end{cases}$$

4. Точка D лежит на стороне AC треугольника ABC. Окружность радиуса $\frac{2}{\sqrt{3}}$, вписанная в треугольник ABD, касается стороны AB в точке M, а окружность радиуса $\sqrt{3}$, вписанная в треугольник BCD, касается стороны BC в точке N. Известно, что $|BM|=6$, $|BN|=5$. Найдите длины сторон треугольника ABC.

5. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка D — середина ребра A_1C_1. Правильная треугольная пирамида расположена так, что плоскость ее основания совпадает с плоскостью ABC, одно боковое ребро проходит через вершину B, другое — через точку D, а третье пересекает ребро CC_1. Найдите отношение объема пирамиды к объему призмы.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\operatorname{ctg}x\cdot\left(\operatorname{ctg}x+\frac{1}{\sin x}\right)=1$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}2\log_4(y+1)+\log_2 y=\log_2\left(\frac{x}{y}-2\right)\\ 5+\log_2\frac{y}{x}=\dfrac{6}{\log_2\frac{x}{y}}.\end{cases}$$

3. На продолжении стороны AB ромба $ABCD$ за точку B взята точка M, причем $|MD|=|MC|$ и $\widehat{MDC}=\operatorname{arctg}\frac{8}{5}$. Найдите отношение длин отрезков MA и MB.

4. Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точки E и F — середины ребер BC и CC_1 соответственно. Рассматриваются треугольники, вершинами которых служат точки пересечения плоскостей, параллельных основаниям куба, с прямыми A_1E, DF, AD_1. Найдите

а) площадь того треугольника, плоскость которого проходит через середину ребра AA_1;

б) наименьшее возможное значение площади рассматриваемых треугольников.

5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}6x+y^2-z^2=6\\ x^2-y-4z=-4\\ 21x^2-2y^2+3y=22z^2.\end{cases}$$

Вариант 3

1. Решите уравнение

$$\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{1+x}}+\sqrt{\frac{1+x}{x}}=\frac{5}{2}.$$

2. Решите неравенство

$$4x+\log_2 9>\log_2(9\cdot 2^{2x+1}-5).$$

3. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AC длины 2 см проведены медианы AM и CN. Около четырехугольника $ANMC$ можно описать окружность. Найдите радиус этой окружности.

4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\cos 2y+\frac{1}{2}=\left(\cos y-\frac{1}{2}\right)(1+2\sin 2x)\\ \sin y\cdot(\operatorname{tg}^3x+\operatorname{ctg}^3x)=3\operatorname{ctg}y.\end{cases}$$

5. В основании призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с боковым ребром длины 8 лежит трапеция с основаниями $|AD|=12$, $|BC|=7$; $\widehat{B_1BC}=60°$. Отрезок, соединяющий вершину B с центром O грани AA_1D_1D, перпендикулярен ей; $|BO|=9$. Рассматриваются цилиндры, расположенные внутри призмы, с основанием в грани BB_1C_1C. Найдите

а) наибольшее значение объема таких цилиндров с данной высотой h;

б) наибольшее значение объема среди всех рассматриваемых цилиндров.

Физика

Вариант 1

1. На неподвижный невозбужденный атом водорода налетает другой невозбужденный атом водорода. Какова должна быть минимальная кинетическая энергия налетающего атома, чтобы в результате столкновения мог излучиться фотон? Энергия ионизации атома водорода $E_и=13{,}6$ эВ. Частоты излучения атома водорода определяются формулой $\nu=R\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{m^2}\right)$, где R — постоянная, n и m — целые числа.

2. Одинаковые по массе количества водорода ($\mu_{H_2}=2$ г/моль) и гелия ($\mu_{He}=4$ г/моль) поместили в сосуд объемом V_1, который отделен от пустого сосуда объемом V_2 полупроницаемой перегородкой, свободно пропускающей молекулы водорода и не пропускающей гелий. После установления равновесия давление в первом сосуде упало в 2 раза. Определите V_2/V_1. Температура постоянна.

3. В плоский конденсатор, между пластинами которого поддерживается постоянная разность потенциалов, вводится диэлектрическая пластина с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=3$. Во сколько раз изменится сила

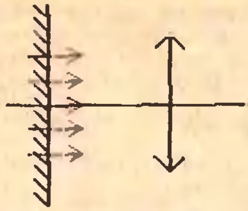


Рис. 1.

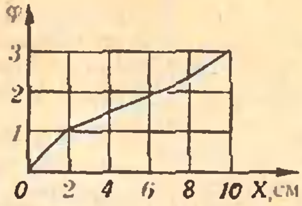


Рис. 3.

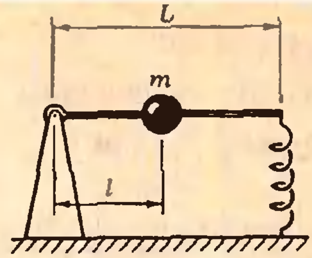


Рис. 5.

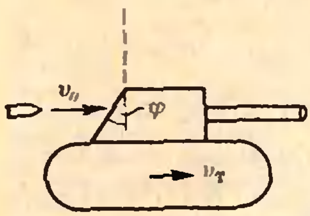


Рис. 2.

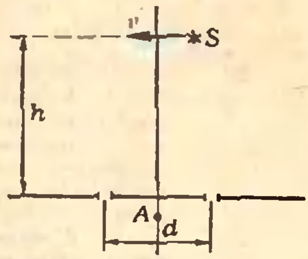


Рис. 4.

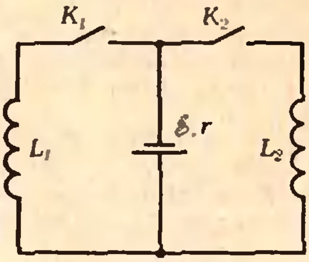


Рис. 6.

электростатического взаимодействия между пластинами конденсатора? Толщина диэлектрической пластины составляет половину расстояния между пластинами конденсатора.

4. Собирающая линза диаметром $D=2$ см и фокусным расстоянием $F=20$ см освещается широким параллельным пучком света (рис. 1). За линзой стоит идеальное плоское зеркало так, что 25% светового потока, прошедшего через линзу и отразившегося от зеркала, снова попадает на линзу. Найдите расстояние между линзой и зеркалом.

Вариант 2

1. В заднюю стенку башни танка, идущего со скоростью $v_т=72$ км/ч, ударяется горизонтально летящая со скоростью $v_0=750$ м/с пуля и упруго отскакивает от нее (рис. 2). С какой скоростью полетит отскочившая пуля? Стенка наклонена к вертикали под углом $\varphi=30°$.

2. Герметичный шар-зонд, изготовленный из нерастягивающегося материала, должен поднять аппаратуру массой $M=10$ кг на высоту около 5,5 км, где плотность воздуха ($\mu_в=29$ г/моль) вдвое меньше, чем у поверхности Земли. Шар наполняют гелием ($\mu_{He}=4$ г/моль) при внешних условиях (температура $T=300$ К, давление $p=1$ атм). Объем шара $V=100$ м^3. Определите массу квадратного метра материала оболочки шара. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(моль · К).

3. Определите разность потенциалов между электродами газоразрядной трубки, заполненной гелием, при которой начинается процесс ионизации атомов электронным ударом. Известно, что распределение потенциала (в относительных единицах) по длине трубки в этот момент имеет вид, изображенный на рисунке 3; длина свободного пробега электронов $l=10^{-4}$ м; потенциал ионизации атомов гелия $\varphi_и=24{,}5$ В.

4. Точечный источник света S равномерно движется параллельно экрану, в котором имеются два маленьких отверстия на расстоянии d друг от друга; расстояние от источника до экрана равно h (рис. 4). Приемник света A, расположенный на оси системы, регистрирует периодически изменяющуюся освещенность. Определите скорость движения источника v, если частота колебаний интенсивности $f=15$ Гц; длина волны света $\lambda=6\cdot10^{-7}$ м; $d=2$ мм; $h=1$ м. Во время измерений источник движется вблизи оси системы.

Вариант 3

1. Невесомая штанга длиной L одним концом закреплена в идеальном шарнире, а другим опирается на пружину жесткостью k (рис. 5). Определите период малых колебаний штанги в зависимости от положения l на ней груза массой m.

2. С какой максимальной силой прижимается к телу человека банка (применяемая в медицинской практике для лечения), если диаметр ее отверстия $D=4$ см? В момент прикладывания банки к телу воздух в ней прогрет до температуры $t=80$°C, а температура окружающего воздуха $t_0=20$°C. Атмосферное давление $p_0=10^5$ Па. Изменением объема воздуха в банке (из-за втягивания кожи) пренебречь.

3. Две катушки самоиндукции с индуктивностями L_1 и L_2 подключены через ключи K_1 и K_2 к источнику с постоянной ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r (рис. 6). В начальный момент времени оба ключа разомкнуты. После того как ключ K_1 замкнули и ток через катушку L_1 достиг некоторого значения I_0, замыкают ключ K_2. Определите установившиеся значения токов через катушки после замыкания ключа K_2. Активными сопротивлениями катушек пренебречь.

4. Положение звезды, видимое с Земли, немного отличается от истинного из-за преломления лучей атмосферой. Определите ошибку при фиксировании углового положения звезды, видимой с Земли под углом $\alpha=45°$ к вертикали. Среднее значение показателя преломления лучей атмосферой считать равным $n=1{,}0003$.

Публикацию подготовили А. Болибрух, А. Шеронов

Московский электротехнический институт связи

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите уравнение

$$\sqrt{\cos^2 2x+\left|\sin\left(2x-\frac{3}{2}\pi\right)\right|+\frac{1}{4}}=\cos\frac{20}{12}\pi.$$

2. Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3\\ \sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xy}+\sqrt[3]{y^2}=3.\end{cases}$$

3. Решите неравенство

$$\frac{9x-15}{19}<\int_0^x\frac{dy}{(y+1)^2}-1.$$

4. Из двух пунктов, расстояние между которыми равно 2400 км, навстречу друг другу выезжают одновременно пассажирский и скорый поезда. Каждый из них идет с постоянной скоростью, и в некоторый момент времени они встречаются. Если бы оба поезда шли со скоростью скорого поезда, то их встреча произошла бы на три часа раньше фактического момента встречи. Если бы оба поезда шли со скоростью пассажирского поезда, то их встреча произошла бы на пять часов позже фактического момента встречи. Найдите скорости поездов.

5. При переносе $\vec{m}$ треугольник ABC отображается на треугольник $A_1B_1C_1$. Докажите, что если A_0, B_0, C_0 — середины сторон BC, CA и AB, то прямые A_0A_1, B_0B_1 и C_0C_1 пересекаются в одной точке.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\left(\frac{5}{8}\sqrt{x\cdot\sqrt[5]{x^{11}}}-\frac{10}{13}\sqrt[5]{x\cdot\sqrt{x^{11}}}\right)'=56.$$

2. Решите уравнение

$$\left|\mathrm{ctg}\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right|=\frac{1}{\cos^2 2x}-1.$$

3. К окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием 12 см и высотой 8 см, проведена касательная, параллельная основанию. Найдите длину отрезка этой касательной, заключенного между сторонами треугольника.

4. Найдите целые значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\log_{0,3}(\sqrt{x+5}-x+1)>0.$$

5. Если пассажир выедет из A в B на поезде, то он прибудет в B через 20 часов. Если же он дождется самолета, а ждать более 5 часов, то он будет в пункте B через 10 часов. Самолет догоняет поезд через $\frac{8}{9}$ часа с момента отлета. Во сколько раз скорость самолета превышает скорость поезда?

Физика

Задачи устного экзамена

1. Какую начальную скорость нужно сообщить сигнальной ракете, выпущенной под углом $\alpha=45°$ к горизонту, чтобы она вспыхнула в наивысшей точке своей траектории, если время горения запала ракеты $\tau=6$ с?

2. В чашечный ртутный барометр попал пузырек воздуха, вследствие чего барометр показывает давление меньше истинного. При давлении $p_1=768$ мм рт. ст. он показывает $h_1=748$ мм, причем длина пустой части трубки равна $l=80$ мм. Каково атмосферное давление p_2, если ртуть в этом барометре стоит на высоте $h_2=734$ мм? Плотность ртути $\varrho=13{,}6\cdot10^3$ кг/м^3.

3. В поле горизонтально расположенного конденсатора, расстояние между пластинами которого $d=2$ см, влетает электрон со скоростью $v_0=10^7$ м/с, направленной параллельно пластинам. Найдите разность потенциалов между пластинами, если отклонение электрона на пути $l=5$ см вдоль пластин составило $h=2{,}5$ мм. Масса электрона $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, заряд $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

4. Имеются 25-ваттная и 100-ваттная лампочки, соединенные последовательно и включенные в сеть с напряжением, на которое рассчитана каждая лампочка в отдельности. В какой из них выделится больше тепла? Во сколько раз?

5. Емкость переменного конденсатора меняется от $C_1=56$ пФ до $C_2=667$ пФ. Какой комплект катушек индуктивности нужно иметь, чтобы колебательный контур можно было настраивать на радиостанции в диапазоне длин волн от $\lambda_1=40$ м до $\lambda_2=2600$ м?

6. На дне сосуда с водой глубиной $h=10$ см помещен точечный источник света. Каков должен быть минимальный радиус непрозрачного диска, плавающего на воде, чтобы ни один луч не вышел из воды? Показатель преломления воды $n=1{,}33$.

7. Изображение предмета, удаленного от собирающей линзы на расстояние $d=0{,}4$ м, больше предмета в $\Gamma=5$ раз. Найдите возможные значения оптической силы линзы.

Публикацию подготовили В. Рассушин, В. Славов, О. Шварцман, Р. Шишкалова

А как вы думаете

Как-то раз я предложил знакомому такую задачу: «Найди на плоскости ограниченную фигуру α*), которую некоторый поворот R (на ненулевой угол) и некоторый параллельный перенос F (отличный от тождественного) переводят в одну и ту же фигуру: $R(\alpha)=F(\alpha)$. «Это невозможно,— сразу же ответил знакомый.— Сколько раз ни поворачивай ограниченную фигуру вокруг заданного центра, она не выйдет за пределы некоторого круга. А при повторных переносах это случится непременно».

А вы как думаете?

Н. Михайленко

) Определение см. в «Геометрии 6—8», задача 17.

В разделе «Искусство программирования» мы продолжаем публиковать уроки Заочной школы программирования и статьи по информатике, языкам программирования и вычислительной технике. Уроки Заочной школы, которая в первых номерах этого года закончит свой третий, заключительный курс, вряд ли будут доступны новым читателям журнала. Остальные статьи, мы надеемся, приоткроют завесу таинственности, которой иногда еще окружены ЭВМ, и объяснят, почему освоение вычислительной техники порой называют «второй грамотностью».

Заочная школа программирования.

Урок 17: Массивы и записи в языке Паскаль

Дальнейшие возможности Паскаля связаны с наличием в нем структурных типов, а именно типов для массивов, записей и файлов. Начнем с массивов и записей.

Массивы

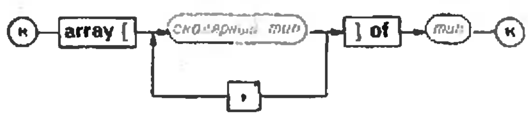
Массив — это набор некоторого определенного числа элементов; все эти элементы должны иметь один и тот же тип. При этом следует представлять себе, что элементы массива расположены некоторым регулярным образом: как строки, как прямоугольная таблица, как прямоугольная пространственная решетка и т. д. Этим разным случаям соответствуют массивы разных размерностей: одномерные (или *векторы*), двумерные (или *матрицы*), трехмерные и т. д.

Чтобы указать элемент массива, имеющего размерность n, надо задать n координат, определяющих место этого элемента в массиве; эти координаты будем называть *индексами*. Например, элемент матрицы определяется двумя индексами, один из которых обозначает строку матрицы, а другой — элемент в строке (то есть, по существу, столбец матрицы).

Значения, которые принимает индекс (например, значения, обозначающие строки нашей матрицы или ее столбцы), составляют некоторый скалярный тип (то есть, как мы видели раньше, упорядоченное множество значений). Этот скалярный тип может быть любым, кроме *real*, но наиболее естественно употреблять в этом качестве отрезок типа *integer* и понимать тогда индексы просто как номера.

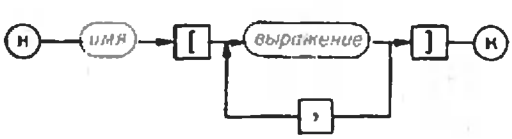
Пусть, например, в матрице строки занумерованы числами от 1 до 5, а столбцы — числами от 0 до 19. Тогда тип первого индекса есть 1..5, а второго — 0..19.

Тип массива задается следующей синтаксической диаграммой:



В этой диаграмме «скалярные типы» — это последовательно типы первого, второго и т. д. индексов, а число их, естественно, равно размерности массива. Поле *тип* содержит тип элементов массива (единый для всех элементов).

Отдельный элемент массива представляется в программе в виде переменной с индексами. Синтаксическая диаграмма ее такова:



«Имя» здесь — имя соответствующего массива. Число выражений должно быть равно числу индексов массива, а типы выражений должны совпадать с типами соответствующих индексов.

Перейдем к примерам. Пусть в программе раздел описания типов имеет вид

type *вектор1* = **array** [1..10] **of** *real*;
вектор2 = **array** [—9..0] **of** *real*;
матрица = **array** [1..5, 0..19] **of** *char*;
цвет = (*красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, синий, фиолетовый*);
волны = **array** [*цвет*] **of** *real*;
буква = 'a'..'z';
сочетания = **array** [*буква,буква*] **of** *integer*;

(обратите внимание на то, что тип *буква* мы определили как отрезок типа *char*; при этом мы считали, что латинские буквы в *char* расположены подряд и упорядочены по алфавиту.)

Пусть также в раздел описания переменных входят следующие описания:

x : *вектор1*; *y* : *вектор2*; *z* : *матрица*;
u : *волны*; *v* : *сочетания*;
i : *integer*; *b* : *boolean*;

Тогда в этой программе *x* и *y* — векторы, состоящие каждый из десяти вещественных чисел. Но типы у этих векторов разные. Элементы *x* нумеруются целыми числами начиная с 1, а элементы *y* — с — 9. Матрица *z* состоит из пяти строк, пронумерованных целыми числами от 1 до 5. Каждая строка содержит по двадцать литер, пронумерованных числами от —9 до 10.

В программе могут встретиться такие, например, операторы:

x [1] := 3.14; *y* [—5] := *x* [1] /2;
z [2,1] := '+'; *z* [1,2] := *z* [2,1];

Но более типичным случаем является использование переменных с индексами в операторах цикла. Следующий оператор заполняет *x* величинами, обратными числам первого десятка:

for *i* := 1 **to** 10 **do** *x* [*i*] := 1/*i*;

Задание 17.1. *Занесите во все элементы вектора y квадраты соответствующих (то есть одинаково расположенных относительно начала вектора) элементов вектора x.*

Задание 17.2. *Присвойте переменной b значение* **true**, *если среди элементов матрицы z имеется хоть одна литера '*', и значение* **false** *в противном случае.*

Вектор *u* состоит из семи вещественных чисел, причем в качестве индексов выступают уже не числа, а константы — названия цветов спектра. Каждый элемент этого вектора имеет, таким образом, не безликий номер, а свое, и к тому же яркое, имя. Следующее задание покажет, что такая индексация может оказаться осмысленной.

Задание 17.3. *Пусть вектор u заполнен числами, определяющими частоты колебаний для волн, соответствующих данным цветам спектра. Напишите процедуру, параметр которой имеет тип* **цвет** *и которая печатает «частоту своего параметра». Напишите оператор, обращающийся к этой процедуре и печатающий последовательно частоты рассматриваемых волн.*

Матрицу *v* мы используем в задаче, относящейся уже не к физике, а к полезному искусству дешифровки.

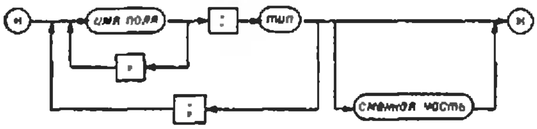
Задание 17.4. *Перехвачен весьма длинный зашифрованный текст, состоящий из латинских букв и заканчивающийся литерой '*'. Чтобы найти какие-то подходы к расшифровке текста, надо определить сколько раз встречается в нем каждое возможное двухбуквенное сочетание. Вводя текст литера за литерой, поместите в каждый элемент матрицы v число встреченных в тексте сочетаний подряд идущих букв, первая из которых совпадает с первым, а вторая — со вторым индексом этого элемента. (Если, например, в тексте 28 раз встретилось сочетание букв qu, то в строке матрицы с индексом 'q' элемент ее с индексом 'u' должен в конце работы программы содержать число 28. Пробелы в тексте следует игнорировать, а символы, разделенные пробелами, считать соседними.)*

Записи

Запись — это набор некоторого определенного числа элементов; эти элементы могут иметь разные типы. Записи состоят из полей, каждое из которых определяется своим типом и некоторым именем. С помощью имени поля (а не с помощью индексов, как в случае массивов) указывается нужный элемент записи.

Тип записи задается следующей синтаксической диаграммой:

Список полей, в свою очередь, задается диаграммой



Мы пока будем рассматривать типы записей без сменной части. Элемент записи представляется в программе в виде *выборки поля*, синтаксическая диаграмма которого такова:

«Имя» здесь есть имя соответствующей записи.

Записи удобно использовать для хранения и обработки разнородной информации о каких-то объектах. В следующем примере записи содержат сведения о различных странах мира. Пусть в программе раздел описания типов имеет вид

type *дата* = **record**
год, месяц, день: integer
end;
вузы = **record**
университеты, технические, прочие: integer
end;
страна = **record**
площадь, население:real;
устройство:boolean;
вступление:дата;
образование:вузы
end;

Заметим, что типы *дата* и *вузы* различны: хотя оба они задают тройку целых чисел, но имена их полей разные.

Пусть далее в разделе описания переменных программа имеет описание

австралия, австрия, албания, ..., япония:страна;

Под многоточием здесь спрятано перечисление всех стран, входящих в ООН. Сведения о каждой из них, хранящиеся в соответствующих полях, таковы: площадь (в тыс. кв. км.), количество населения (в млн. человек), конституционное устройство (республика — *true*, монархия — *false*), дата вступления в ООН, количество различных высших учебных заведений.

З а д а н и е 17.5 *В нашем примере у некоторых полей типы излишне «обширны». Измените описания так, чтобы диапазоны изменения индексов стали насколько возможно малы.*

Допустим, что все поля во всех записях уже заполнены. Тогда, например, оператор
writeln(украина.население/украина.площадь);
напечатает плотность населения на Украине.

Расширение понятия переменной

Пусть в нашей программе описана переменная *университеты* типа *integer*.

Это допустимо: одно и то же имя (в нашем примере *университеты*) в одной и той же программе можно употреблять для переменной и для поля записи (а также и для полей разных типов записей).

Мы хотим присвоить этой переменной общее число университетов на Пиренейском полуострове, для чего пишем оператор присваивания

университеты:=испания.образование.университеты+португалия.образование.университеты;

Каждое из слагаемых есть выборка, но не из обычной переменной, а из другой выборки.

Так, из переменной *испания* (типа *страна*) извлечено поле *образование* (типа *вузы*), а из него уже поле *университеты* (типа *integer*).

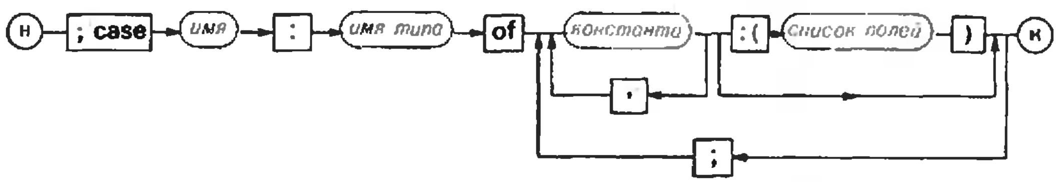
Чтобы узаконить такие конструкции, нам следовало бы внести изменения в некоторые синтаксические диаграммы. Но мы не будем это делать, а просто условимся, что понятие переменной охватывает не только обычные переменные, но также переменные с индексами и выборки полей. Условимся также, что любое действие, совершаемое в программе над переменной в прежнем смысле слова (в том числе и извлечение поля), может совершаться и над переменной в расширенном смысле.

З а д а н и е 17.6. *Напишите процедуру* **справка** *с параметром типа* **страна**, *печатающую для соответствующей страны а) республика она или монархия, б) сколько жителей приходится в ней на одно высшее учебное заведение.*

Записи с вариантами

Мы считали до сих пор, что записи, принадлежащие к одному и тому же типу, организованы совершенно одинаково. Паскаль дает, однако, возможность ослабить это ограничение. Применяя в описании типа записи «сменную часть» (см. синтаксическую диаграмму этого описания), программист может определять *записи с вариантами*.

Сменная часть имеет следующую синтаксическую диаграмму*)



Пара «имя — имя типа», стоящая после **case**, задает особое поле записи: *поле признака*. Значение этого поля будем называть *признаком*. Признаком (в каждый данный момент выполнения программы) должна быть одна из стоящих далее констант. Константа, служащая признаком, задает вариант записи, то есть определяет, каковы дальнейшие поля записи: это как раз те поля, список которых стоит в скобках после данной константы.

Пусть требуется рассмотреть совокупность всевозможных треугольников, параллелограммов и кругов, расположенных на плоскости (и свободно перемещающихся по ней). Такая совокупность задается типом *фигура*, имеющим следующее описание:

```
фигура =
  record x:real;
    case ф:форма of
      треугольник:(y, угол:real);
                  обход: boolean;
      параллелограмм: (y1,угол1:real);
      круг:()
end
```

Тип *форма* описывается при этом как

форма = (*треугольник* , *параллелограмм*, *круг*);

Поле *x* — общее у всех трех фигур: у треугольника и параллелограмма это — одна из сторон, у круга — радиус. Для треугольника и параллелограмма надо определить еще вторую, смежную сторону и угол между ними (вычисляемый в радианах: $180° = \pi$ радиан). Для треугольника укажем также, совершается ли обход от *x* к *y* по часовой стрелке или против (в поле *обход* будет соответственно *true* или *false*). Для круга дополнительных полей не требуется.

Пусть далее описана переменная *f* типа *фигура*, и пусть она с некоторого момента должна представлять прямоугольный треугольник, катеты которого, рассматриваемые при обходе прямого угла против часовой стрелки, имеют длины 10.5 и 2.3. Прежде всего, зададим для *f* вариант, связанный с нужным признаком:

f.*Ф*: = *треугольник;*

Затем придадим значения остальным полям:

f.*x*: = 10.5; *f*.*y*: = 2.3; *f*.*обход*: = false;
f.*угол*: = *pi*/2;

(Здесь и в дальнейшем считается, что в разделе описания констант программы было дано описание для числа π:*pi* = 3.14159265358.)

Обработка записей с вариантами опирается, как правило, на оператор выборки, проверяющий поле признака. Напишем описание функции, которая вычисляет площадь фигуры:

```
function площадь(z:фигура):real;
  begin case z.ф of
    треугольник : площадь: =
    z.x*z.y*sin (z.угол)/2;
    параллелограмм : площадь: =
    z.x*z.y1*sin(z.угол1);
    круг : площадь: = pi*z.x*z.x
    end
  end
```

Словарь
array — массив
record — запись

А. Рар

---

*) По техническим причинам не удалось исправить опечатку в этой диаграмме: обходная стрелка должна охватывать только одно поле *список полей*, а не три поля :(,*список полей*,).

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при Московском университете (ВЗМШ) принимаются ученики седьмых классов и учащиеся ПТУ, за исключением проживающих в Москве, Ленинграде и их ближайших пригородах.

Занятия начнутся 1 сентября 1982 г. Обучение бесплатное. Учащиеся, принятые в школу, будут регулярно получать пособия, в которых содержатся объяснения теоретических вопросов и задачи для решения. Изучив материал пособия, учащиеся ВЗМШ присылают на проверку контрольные работы, которые тщательно рецензируются преподавателями ВЗМШ — студентами, аспирантами и преподавателями МГУ и других вузов страны. Программа ВЗМШ тесно связана со школьной и направлена на углубленное изучение основных вопросов школьного курса математики.

Срок обучения — три года. Все, кто успешно выполнит контрольные задания, получат удостоверения об окончании ВЗМШ.

Ниже публикуются задачи вступительной контрольной работы. Желающие поступить в ВЗМШ должны прислать решения этих задач *не позднее 25 марта*. После проверки работ (примерно в июле) ВЗМШ сообщит всем принявшим участие в конкурсе решение Приемной комиссии. Преимуществом при поступлении пользуются школьники, проживающие в сельской местности и в рабочих поселках.

Хотя некоторые из вступительных задач отличаются по внешнему виду от обычных школьных, для их решения не требуется дополнительных знаний по математике. Для поступления в школу не обязательно решить все задачи. При оценке работы будет учитываться не только количество решенных задач, но и качество решения. Необоснованный ответ может быть не засчитан; если в задаче возможны несколько ответов, надо указать их все.

Работа должна быть выполнена на русском языке в ученической тетради в клетку. Обратно она не высылается и рецензии на нее не выдаются.

В конверт вместе с тетрадью надо вложить листок бумаги размером 14 см × 6 см с полным почтовым адресом поступающего (этот листок будет наклеен на конверт с извещением Приемной комиссии о результатах проверки вступительной работы).

На обложку тетради надо наклеить листок клетчатой бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу (иначе работа не будет отдана на проверку):

Область	*Московская*
Фамилия и имя	*Иванов Петр*
Год рождения	*1968*
Класс и школа	*7 класс «А» школы № 2 г. Клина*
Фамилия, имя и отчество учителя математики	*Никаноров Владимир Алексеевич*
Место работы и должность родителей	*Отец — шофер автобазы № 1, мать — домашняя хозяйка*
Полный почтовый адрес	*123456, Клин, ул. Строителей, д. 1, кв. 1*

Результаты проверки
(заполняется проверяющим)

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10		11	12			
									а	б		а	б	в	г

ВЗМШ имеет около 40 отделений и филиалов при университетах и педагогических институтах различных городов СССР. Учащиеся, проживающие на Северо-западе РСФСР и в Прибалтике, должны присылать работы по адресу: 199178, Ленинград, Васильевский остров, 10-я линия, 33, С.-з. ЗМШ, на конкурс. Учащиеся, проживающие на территории, относящейся к какому-либо филиалу ВЗМШ, посылают свои работы в соответствующий филиал; в случае поступления они занимаются по той же программе, что и остальные школьники, принятые в ВЗМШ. Адреса филиалов можно найти в «Кванте», 1979, № 2, с. 59. Учащиеся, проживающие на остальной части СССР, присылают свои работы в ВЗМШ по адресу: 117234, Москва, В-234, МГУ, ВЗМШ, на конкурс.

Школьники, проживающие в общей зоне действия ВЗМШ и ее филиалов с МММФ — отделением ВЗМШ при механико-математическом факультете МГУ (см. ниже), выбирают одну из этих школ по своему усмотрению.

Школьники, не прошедшие по конкурсу в ВЗМШ или в ее филиалы, имеют возможность заниматься в группах «Коллективный ученик ВЗМШ». Каждая такая группа — это школьный математический кружок, работающий под руководством своего учителя математики по программе ВЗМШ. Прием в эти группы проводится до 20 сентября 1982 г. на два потока: для тех, кто с сентября 1982 г. начнет учиться в 8 классе, и для тех, кто начнет учиться в 9 классе.

Группы «Коллективный ученик» принимаются в ВЗМШ без вступительной контрольной работы. Для организации группы достаточно заявления учителя математики, руководящего кружком, с указанием списка учащихся. Заявление должно быть заверено директором школы и печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик ВЗМШ» может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия. Заявления следует направлять в адрес ВЗМШ.

Вступительная контрольная работа

1. Найдите четырехзначное число вида $\overline{a19b}$ (с цифрами по порядку a, 1, 9, b), делящееся на 82.

2. На листе бумаги ввели прямоугольную систему координат XOY, перегнули лист бумаги по одной оси координат, затем — по другой, и сложенный таким образом вчетверо лист разрезали ножницами по ломаной с вершинами в точках (0; 1), (1; 4), (2; 2), (4; 1), (1; 0). Нарисуйте образовавшуюся при разворачивании листа «снежинку» и найдите ее площадь.

3. Известно, что $x+y+z=0$, а $xyz\neq0$. Вычислите

$$\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{xz}+\frac{z^2}{xy}.$$

4. На сторонах BC, CA и BA равнобедренного прямоугольного треугольника ABC ($\hat{C}=90°$) взяты точки A_1, B_1 и C_1 соответственно. При этом $|BA_1|:|A_1C|=|CB_1|:|B_1A|=|AC_1|:|C_1B|=2:1$. Докажите, что отрезки C_1C и B_1A_1 равны по длине и перпендикулярны.

5. Имеется три сплава. Первый содержит 40% меди и 60% никеля, второй — 60% меди и 40% кобальта, третий — 60% кобальта и 40% никеля. Из них необходимо изготовить новый сплав массой 1 кг, содержащий 40% кобальта. Какое наименьшее содержание меди может быть в этом новом сплаве?

6. Можно ли вырезать из треугольника два прямоугольника так, чтобы сумма их площадей равнялась двум третям площади треугольника?

7. Про три числа известно, что если каждое из них складывать с квадратом суммы двух других, то каждый раз будет получаться 1/2. Какими могут быть эти числа?

8. Квадрат со стороной длины 1 разрезают на 4 прямоугольника. Какие значения может принимать сумма их периметров?

9. Существует ли такое натуральное число n, что произведение $1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$ всех целых чисел от 1 до n кончается ровно 30 нулями?

10. Десять чисел записаны в ряд (среди них могут быть одинаковые). Затем под каждым числом пишем, сколько в этом ряду чисел, меньших него, и таким образом получаем новый ряд из десяти чисел. Может ли при этом получиться ряд: а) 9 0 0 2 5 3 6 3 6 6, б) 5 6 1 1 4 8 5 8 0 1?

11. Дома Андрея и Коли соединены прямой дорогой. Андрей ходит в полтора раза быстрее, чем Коля. Каждый из них ездит на велосипеде вдвое быстрее, чем ходит, при этом Андрей может пройти от своего дома до Колиного за 1 час. В 12 часов дня они оба отправляются от своих домов навстречу друг другу, и у одного из них есть велосипед (который разрешается оставлять без присмотра). Когда, самое раннее, будет так, что каждый из них уже пришел в дом другого?

12. Имеется много одинаковых круглых монет. Можно ли разложить на плоскости: а) 1980, б) 1981, в) 1982 из них так, чтобы каждая касалась т р е х других? г) Можно ли разложить на плоскости некоторое (конечное) число одинаковых круглых монет так, чтобы каждая касалась ч е т ы р е х других? (Во всех пунктах а) — г) монеты нельзя класть одну на другую и ставить на ребро.)

Новый прием на Малый мехмат

Для учащихся седьмых классов, проживающих на территории европейской части РСФСР (кроме Северо-западных областей), в Белоруссии и в Казахстане, объявляется прием в Малый механико-математический факультет (МММФ) — заочную математическую школу при механико-математическом факультете МГУ.

Программа МММФ, направленная на углубление знаний по важнейшим разделам школьной программы и развитие у школьников навыков самостоятельных занятий математикой, составлена под руководством профессоров факультета. Эта программа учитывает особенности вступительных экзаменов на механико-математический факультет МГУ.

Занятия начнутся 1 сентября 1982 года. Обучение бесплатное. Срок обучения — три года. Лица, успешно обучающиеся на Малом мехмате, могут быть приглашены на устный вступительный экзамен с целью поступления в школу-интернат № 18 при МГУ (см. «Квант», 1979, № 1). Учащиеся, успешно выполнившие все задания, получат удостоверение об окончании МММФ.

Желающие поступить на Малый мехмат должны *не позднее 15 апреля* в ы с л а т ь решение по возможности большего числа задач вступительной контрольной работы МММФ, которая публикуется ниже.

Семиклассники, проживающие в Белорусской ССР, в Астраханской, Белгородской, Брянской, Владимирской, Волгоградской, Воронежской, Горьковской, Ивановской, Калининской, Калужской, Костромской, Куйбышевской, Курской, Липецкой, Московской, Оренбургской, Орловской, Пензенской, Пермской, Ростовской, Рязанской, Саратовской, Свердловской, Смоленской, Тамбовской, Тульской, Ульяновской, Челябинской и Ярославской областях, в Башкирской, Дагестанской, Кабардино-Балкарской, Калмыцкой, Мордовской, Северо-Осетинской, Татарской, Удмуртской, Чечено-Ингушской и Чувашской АССР, в Краснодарском и Ставропольском краях, присылают работы по адресу: 117234, Москва, В-234, МГУ, мехмат, МММФ. Школьники из Казахстана обслуживаются Казахским филиалом МММФ МГУ и присылают работы по адресу: 480012, Алма-Ата, ул. Кирова-Масанчи 47/39, Казахский университет, математический факультет, Казахский филиал МММФ МГУ.

Вступительная контрольная работа должна быть выполнена в ученической тетради в клетку. На обложку тетради наклеивается лист бумаги со следующими данными:

---

1. Область (край, республика)	*Белорусская ССР, Минская обл.*
2. Фамилия и имя учащегося	*Иванов Петр*
3. Класс и школа (полное название)	*7 класс «А» школы № 13 г. Молодечно*
4. Фамилия, имя и отчество учителя математики	*Никаноров Владимир Алексеевич*
5. Полный почтовый адрес	*220456, БССР, Минская обл., г. Молодечно, ул. Строителей, д. 27, кв. 171*
6. Сведения о родителях: отец — фамилия, имя и отчество, где и кем работает	*Иванов Василий Григорьевич, шофер автокомбината № 1*
мать — фамилия, имя и отчество, где и кем работает	*Иванова Мария Николаевна, медсестра поликлиники № 10*

Результаты проверки

1	2		3	4	5	6	7	8	9	10
	а	б								

В работу вкладывается листок 14 см × 6 см, на котором пишется домашний адрес.

Участники областных олимпиад по математике могут быть приняты на Малый мехмат на основании заявления (содержащего данные 1—6) и документа, подтверждающего участие в олимпиаде.

Для московских школьников 7—10 классов на механико-математическом факультете МГУ работает Школа юного математика (справки по телефону 139-39-43).

Задачи вступительной контрольной работы на МММФ в 1982 году

1. Решить неравенство

$$\frac{x^2}{x-1}>0.$$

2. Можно ли на окружности расставить числа 1, 2, 3, ..., 11, 12 таким образом, чтобы любые два соседних числа отличались друг от друга

а) не более, чем на единицу;

б) не более, чем на два?

3. Сколькими нулями оканчивается число $25!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot24\cdot25$?

4. За 16 лимонов нужно заплатить столько рублей, сколько можно купить лимонов на один рубль. Сколько стоит один лимон?

5. Доказать, что сумма длин диагоналей выпуклого четырехугольника всегда меньше периметра этого четырехугольника.

6. Семеро гномов решили, что каждый из них подарит Белоснежке на день рождения не менее семи подснежников. Когда все цветы были вручены, Белоснежка сказала, что их число не превосходит 50. Услышав это, самый маленький из гномов сразу же заявил, что может точно назвать число подаренных подснежников. Какое количество цветов подарил Белоснежке каждый из гномов?

7. Найти сумму всех коэффициентов многочлена, который получится после раскрытия скобок в выражении

$$(x+2)(x+3)(x-5)(x-1)+4.$$

8. Расколотый арбуз весом 10 кг содержал 99% воды. После того, как он пролежал некоторое время на солнце, часть воды испарилась и ее содержание в арбузе снизилось до 98%. Сколько стал весить арбуз?

9. Площадь выпуклого четырехугольника равна S. Найти площадь параллелограмма, построенного на диагоналях этого четырехугольника (то есть параллелограмма, стороны которого параллельны и конгруэнтны указанным диагоналям).

10. Среди четырех монет имеется одна фальшивая, отличающаяся от подлинной лишь весом (но неизвестно, легче она или тяжелее подлинной монеты). Имея в распоряжении весы с двумя чашками без гирь, необходимо двумя взвешиваниями выявить фальшивую монету. Как это сделать?

Заочная физико-техническая школа

Заочная физико-техническая школа при Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся восьмилетних и средних школ, расположенных на территории РСФСР, в 8, 9 и 10 классы на 1982/83 учебный год.

Цель этой школы — помочь ученикам в самостоятельных занятиях физикой и математикой. Вот почему при приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности и рабочих поселках, где такая помощь особенно нужна.

Обучение в школе бесплатное.

ЗФТШ дает хорошие дополнительные знания по физике и математике своим выпускникам, многие из которых впоследствии становятся студентами ведущих вузов нашей страны.

Кроме отдельных учащихся, в ЗФТШ принимаются физико-технические кружки, которые могут быть организованы на месте по инициативе двух преподавателей — физики и математики. Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии руководителей кружка и поименный список членов кружка по классам (с указанием итоговых оценок за вступительное задание).

Учащиеся, принятые в ЗФТШ, и руководители физико-технических кружков будут регулярно получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания ЗФТШ содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Работы отдельных учащихся проверяют в ЗФТШ или ее филиалах, а работы членов кружка — его руководители.

С учащимися Москвы два раза в неделю проводятся очные занятия по физике и математике по программе ЗФТШ. Занятия проходят в вечерних консультационных пунктах (в ряде московских школ), набор в которые проводится или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам очного собеседования по физике и математике. Собеседование обычно проводится во второй половине сентября (справки по телефону 216-00-05, доб. 2-59).

Вступительное задание по физике и математике каждый ученик должен выполнить самостоятельно на русском языке и аккуратно переписать в одну школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании.

Тетрадь перешлите в большом конверте простой бандеролью (только не сворачивайте тетрадь в трубку). Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. Без этой справки решение рассматриваться не будет. На внешнюю сторону тетради наклейте лист бумаги, заполненный по следующему образцу:

1. Область (край или АССР)	*Челябинская область*
2. Фамилия, имя, отчество	*Гайнетдинов Павел Иванович*
3. Класс	*восьмой*
4. Номер и адрес школы	*поселок Роза, с. ш. № 19*
5. Профессия родителей и занимаемая должность	
отец	*шахтер*
мать	*библиотекарь*
6. Подробный домашний адрес	*456550, Челябинская обл., п. Роза, пер. Кооперативный, д. 2.*

Срок отправки решения — *не позднее 1 марта 1982 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются.

Зачисление в школу производится приемной комиссией Московского физико-технического института. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1982 года.

Тетрадь с выполненным заданием (обязательно по физике и математике) присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской области, Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининградской, Калининской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областей, Карельской и Коми АССР высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Камчатской, Сахалинской и Читинской областей, Красноярского, Приморского и Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР и Чукотки высылают работы по адресу: 660607, г. Красноярск, ул. Перенсона, д. 7, Пединститут, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Ниже приводятся задачи вступительного задания по физике и математике. По физике задачи 1—5 предназначены для учащихся седьмых классов, 2—8 — для восьмых классов, 6—12 — для девятых классов. По математике задачи 1—5 предназначены для седьмых классов, 4—10 — для восьмых классов, 7—13 — для девятых классов.

Вступительное задание

Физика

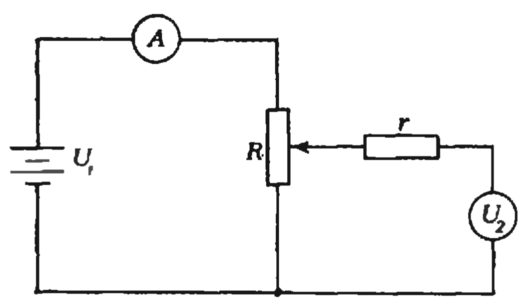
1. Эскалатор метро спускает бегущего по нему вниз человека за $t_1=1$ мин. Сколько времени спускается человек, стоящий на эскалаторе, если вверх по эскалатору, идущему вниз, он взбегает за $t_2=4$ мин?

2. Сколько балласта должен выбросить аэростат объемом $V=300$ м^3, чтобы подняться на высоту 1 км? У поверхности Земли плотность воздуха $\rho=1{,}29$ кг/м^3, давление $p=0{,}1$ МПа. При решении задачи считайте, что плотность воздуха пропорциональна давлению.

3. Льдина площадью $S=2$ м^2 и толщиной $h=30$ см плавает в воде. Какую работу надо совершить, чтобы полностью погрузить льдину в воду?

4. Найдите расход бензина автомобиля «Жигули» при скорости $v=100$ км/ч. Мощность мотора $N=60$ л. с., коэффициент полезного действия мотора $\eta=30\%$. Теплота сгорания бензина $q=45\cdot10^6$ Дж/кг. Расход бензина принято относить к пути $l=100$ км.

5. Электрическая цепь состоит из двух батарей с напряжениями $U_1=6$ В и $U_2=12$ В, реостата со скользящим контактом, полное сопротивление которого $R=1800$ Ом, проводника сопротивлением $r=200$ Ом и амперметра,



включенных как указано на рисунке. С каким полюсом второй батареи надо соединить скользящий контакт и какое положение он должен занимать на реостате, чтобы ток через амперметр был равен нулю?

6. За последнюю секунду свободно падающее тело прошло 3/4 всего пути. Сколько времени падало тело?

7. По экватору внутренней поверхности сферической оболочки массой $M=10$ кг движется шарик массой $m=2$ кг, совершая полный оборот за время $T=2$ с. Считая, что внешних сил нет и трение отсутствует, определите, с какой силой шарик давит на сферу. Расстояние между центрами тяжести шарика и оболочки $a=2$ м.

8. Футболист бьет по мячу со средней силой $F=5\cdot10^2$ Н. Мяч после удара улетает под углом $\alpha=45°$ к горизонту и приземляется на расстоянии $L=40$ м. Определите время удара по мячу. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Масса мяча $m=0{,}5$ кг.

9. Сосуд, заполненный смесью водорода ($\mu_{H_2}=2$ г/моль) и гелия ($\mu_{He}=4$ г/моль), отделен от равного ему по объему пустого сосуда полупроницаемой перегородкой, свободно пропускающей молекулы гелия и не пропускающей молекулы водорода. После установления равновесия давление в первом сосуде упало на 10%. Определите отношение масс гелия и водорода. Температура поддерживалась постоянной.

10. При одинаковом изменении температуры, один раз при постоянном давлении, а другой раз при постоянном объеме, подведенное к одной и той же порции идеального газа количество теплоты отличается на $\Delta Q=7$ Дж. Определите изменение внутренней энергии газа в этих процессах. Коэффициент пропорциональности между температурой и внутренней энергией для данного газа $C_V=20{,}75$ Дж/(моль · К).

11. Пространство между пластинами плоского конденсатора заполнили жидкостью с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=2$ и удельным сопротивлением $\rho=52$ Ом · мм^2/м. Найдите силу электрического взаимодействия между пластинами, когда через конденсатор течет ток силой $I=1$ А. Площадь пластин конденсатора $S=1$ см^2.

12. Конденсатор емкостью $C=1$ мкФ, заряженный до напряжения $U=10$ В, подключают к батарее ЭДС $\mathcal{E}=2$ В. Какое количество теплоты выделится в цепи при подключении конденсатора?

Математика

1. В классе 37 учеников; из них 25 учеников сдали нормы ГТО, 8 учеников имеют спортивные разряды и 9 учеников не сдали норм ГТО и не имеют спортивных разрядов. Сколько учеников в классе имеют спортивные разряды, но не сдали норм ГТО?

2. На плоскости даны три точки. Сколько можно построить параллелограммов с вершинами в этих точках?

3. Докажите или опровергните следующие утверждения:

а) для того чтобы число n^2-2 делилось на 7 ($n>3$), достаточно, чтобы число $n-3$ было кратным 7;

б) для того чтобы число n^2-2 делилось на 7 ($n>3$), необходимо, чтобы число $n-3$ было кратным 7.

4. В треугольнике ABC точка D лежит на отрезке AB. Докажите, что если $\widehat{BCD}=\widehat{ACD}$, то $\widehat{CDB}=90°+\frac{1}{2}(\widehat{CAD}-\widehat{CBD})$. Сформулируйте и докажите обратную теорему.

5. Существуют ли такие целые значения m, при которых дробь $\frac{12m+3}{18m+4}$ сократима?

6. Даны векторы $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}=\vec{OA}+\vec{OB}$, $\vec{OD}=\vec{OC}+\vec{OB}$, причем $|\vec{OB}|=|\vec{OC}|=|\vec{OD}|$. Найдите величину угла AOB.

7. Определите все значения параметра a, при которых промежуток $[-1; 3]$ содержится в множестве решений неравенства

$$x^2-2ax+a+1>0.$$

8. Даны два утверждения:

а) система

$$\begin{cases} ax+(1+a)y=a \\ 3x+(5+a)y=2+a \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений;

б) прямые, заданные уравнениями $4x+5y=6$ и $6x+(1+a)y=10$, пересекаются в области $x>0$, $y<0$.

При каких значениях a одно из этих утверждений ложно, а другое — истинно?

9. Докажите, что если стороны a, b, c треугольника ABC связаны зависимостью

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c},$$

то угол B равен 60°. Сформулируйте обратное утверждение. Верно ли оно?

10. Спортсмены Иванов и Петров преодолевают одну и ту же дистанцию. Петров первую половину всего времени пребывания на дистанции шел, а вторую половину времени — бежал. Иванов первую половину дистанции шел, а вторую половину — бежал. Один из них преодолел все расстояние за 16 мин, другой — за 18 мин, причем у них были одинаковы скорости ходьбы и бега. Сколько минут Иванов потратил на ходьбу и сколько на бег?

11. Для того чтобы выпуклый четырехугольник был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы сумма расстояний между серединами противоположных сторон была равна его полупериметру. Докажите.

12. Докажите, что для произвольных чисел a, b, c справедливо неравенство

$$a^4+b^4+c^4\geqslant abc(a+b+c).$$

Выясните, когда достигается знак равенства.

13. Найдите функцию $f(x)$, определенную при $x\neq0$ и удовлетворяющую при всех $x\neq0$ условию

$$f(x)-2f\left(\frac{1}{x}\right)=2^x.$$

Рецензии, библиография

Что умеет микрокалькулятор

Карманная электронная вычислительная машинка (микрокалькулятор) за последние годы все больше проникает во все отрасли человеческой деятельности, в том числе и в школу. С помощью микрокалькулятора делаются доступными такие расчеты, о которых раньше трудно было мечтать. Практически микрокалькулятор решает вычислительную задачу с той же скоростью, с которой мы ему эту задачу ставим. Однако возможности микрокалькуляторов выше, чем это следует из заводских инструкций, обычно чрезмерно кратких. Помочь неспециалистам овладеть всеми «тайнами» этого изумительного достижения последнего десятилетия призвана рецензируемая книга Г. Кройля*). Автор хорошо справился с поставленной задачей. Многочисленные примеры и задачи, решения которых приводятся в тексте, позволяют читателю научиться считать на микрокалькуляторе. Отказавшись от малореальной попытки популярно объяснить физические принципы и механизм работы карманной счетной машинки, автор подробно описывает, как наиболее экономно производить те или иные вычисления, какой класс микрокалькулятора следует выбрать для конкретной работы — инженерной, бухгалтерской, научной или учебных расчетов. Достаточно внимания уделено приемам проверки точности и правильности работы микрокалькуляторов.

В Советском Союзе выпускаются все основные модели микрокалькуляторов, от самых простых и дешевых арифметических, предназначенных в основном для школьников и домохозяек (например, Б3—23), до таких, как С3—15, и более дорогих, необходимых инженеру или научному работнику. Наши микрокалькуляторы, разумеется, отличаются системой обозначений, расположением клавиш и другими деталями от аналогичных приборов зарубежных фирм. И, хотя принципы работы и устройства всех микрокалькуляторов одинаковы, обучаться обращению с ними следует на тех моделях, с которыми придется работать.

К сожалению, издательство пошло по наиболее простому пути — перевело книгу дословно, сохранив в ней немецкие «Кройлетроны» в качестве единственных примеров микрокалькуляторов и английские обозначения на клавиатуре. Между тем, сравнительно ограниченное число отечественных моделей позволяет все их привести в тексте, соответственно видоизменив, где это необходимо, решения упражнений, данных в книге. Вероятно, было бы целесообразно подготовить второе, измененное в соответствии с этими пожеланиями издание и выпустить книгу тиражом, достаточным для того, чтобы придавать ее в дополнение к инструкции ко всем продаваемым микрокалькуляторам.

А. Зайдель

*) Г. Кройль. «Что умеет мой микрокалькулятор?» Перевод с немецкого (М., «Мир», 1981)

Камушки и шахматная доска (воспоминания о летних каникулах)

1. Выигрывает второй: если первый игрок берет из какой-нибудь кучки несколько камней, то второй берет столько же камней из другой кучки. В результате в кучках снова получается одинаковое количество камней.
2. Выигрывает первый: вначале он берет один камень из любой кучки, а потом оставляет противнику в одной кучке — нечетное число камней, а в другой — на единицу больше.
3. При любой игре выигрывает первый игрок.
4. Выигрывает первый игрок: вначале он съедает кучку с семью орехами и делит кучку с шестью орехами на две кучки по 3 ореха; противник вынужден съесть орехи в одной из одинаковых кучек и разделить кучку в 3 ореха на кучки в 1 и 2 ореха, после этого начинающий съедает кучку в 2 ореха, а затем — последний орех. Попробуйте исследовать эту игру для другого количества орехов в кучках.

Электрические цепи с нелинейными элементами

1. $I=U\left(\frac{1}{r_0+\alpha U}+\frac{1}{R}\right)$.
2. $I=\frac{1}{2R\alpha}\left((\alpha U+R+r_0)\pm\right.$
$\left.\pm\sqrt{(\alpha U+R+r_0)^2-4R\alpha U}\right)$
3. $i(t)=(|\mathcal{E}_м\cos\omega t|-2U_0)/R=$
$=|\cos\omega t|-0{,}5$ (А).
4. $U=(\mathcal{E}-4I/R)/3=2$ мВ. Указание. Потенциал анода выше потенциала катода, и через фотоэлемент идет ток I.

Московский физико-технический институт

Математика

Вариант 1

1. $\{-4\}$. Решение. Данное уравнение равносильно уравнениям
$$\log_2(4-x)=4-\log_2(-2-x)$$
$$\log_2(4-x)+\log_2(-2-x)=4. \qquad (1)$$
Поскольку тождество $\log_a(uv)=\log_a u+\log_a v$ справедливо только при $u>0$ и $v>0$, при переходе от суммы логарифмов в левой части уравнения (1) к логарифму произведения нужно дописать «условия» $4-x>0$, $-2-x>0$. Впрочем, достаточно дописать одно (любое) из этих неравенств (почему?). Таким образом, уравнение (1) равносильно системе
$$\begin{cases}\log_2[(4-x)(-2-x)]=4\\ 4-x>0.\end{cases}$$
Уравнение $\log_2[(4-x)(-2-x)]=4$ равносильно уравнениям
$$(4-x)(-2-x)=16$$
$$x^2-2x-24=0$$
Один из его корней является решением неравенства $4-x>0$, другой — не является.
2. $\frac{3}{2}$ см, $\frac{5}{2}$ см, $\frac{7}{2}$ см. Решение. Если длину наименьшей стороны обозначить через x, то против угла 120° будет лежать сторона длины $x+2$. По теореме косинусов
$$(x+2)^2=x^2+(x+1)^2-2x(x+1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right).$$
Это уравнение имеет корни $\frac{3}{2}$ и -1, из которых второй не может быть длиной.
3. $\{(2;2)\}$. Решение. Из данной системы выводными являются системы
$$\begin{cases}\sqrt{7x+y}=4+(x-y)\\ \sqrt{x+y}=2-(x-y)\end{cases}$$
$$\begin{cases}7x+y=[4+(x-y)]^2\\ x+y=[2-(x-y)]^2\end{cases} \qquad (1)$$
и, далее, уравнения
$$6x=6[2+2(x-y)]$$
$$x=2y-2. \qquad (2)$$
Подстановка во второе уравнение системы (1) дает квадратное уравнение с корнями 2 и 9. Из (2) получаем пары (2; 2) и (16; 9). Проверка (поскольку, в частности при возведении в квадрат, мы переходили к выводным системам и уравнениям, проверку делать обязательно) показывает, что вторая пара не является решением данной системы.
4. $|AB|=|AC|=|BC|=8$. Указание. Если K и L — точки касания соответственно первой и второй окружности с $[BD]$, а P и Q — их точки касания с $[AC]$, то
$$|DQ|=|DL|=|DK|+|KL|=$$
$$=|DP|+|KL|=|DP|+1.$$
Если O_1, O_2 — центры соответственно первой и второй окружности, то $O_1\widehat{D}O_2=\frac{1}{2}(\widehat{ADB}+\widehat{CDB})=90°$, $O_1\widehat{D}P=D\widehat{O_2}Q$ (задача 487 из пособия «Геометрия 6—8»), $\frac{|O_1P|}{|DP|}=\frac{|DQ|}{|O_2Q|}$. Найдя $|DP|$, воспользуйтесь далее формулой Герона и задачей 1192 из того же пособия.
5. $\frac{16}{21}$. Решение. Поскольку плоскость основания пирамиды совпадает с (ABC) и ее боковое ребро проходит через B, B является одной из вершин основания пирамиды. Обозначим остальные вершины основания пирамиды через P и Q, вершину пирамиды — через S, точку пересечения $[SQ]$ с $[C_1C]$ через K. Спроектируем ортогонально призму и пирамиду на (ABC). Обозначим проекцию точки D через D', проекцию вершины S — через O. Очевидно, $|AD'|=|D'C|$ и $[OQ]$ проходит через C (рис. 1, a, $б$). Так как O — центр

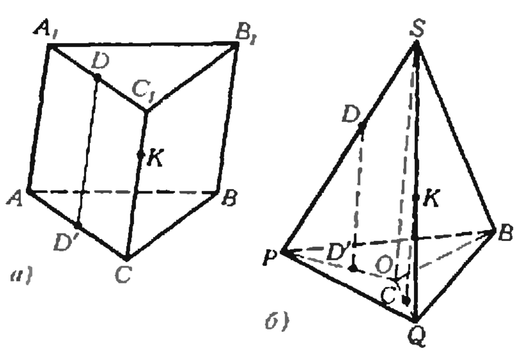


Рис. 1.

равностороннего треугольника PBQ.

$$\widehat{D'OB}=\widehat{BOC}=\widehat{COD'}=\frac{2\pi}{3}$$

Положим $|BC|=a$, $|OB|=x$, $|OC|=y$, $|OD'|=z$, $\widehat{OD'C}=\varphi$. Тогда (рис. 2) $\widehat{D'CO}=\frac{\pi}{3}-\varphi$, $\widehat{OCB}=\frac{\pi}{3}-\widehat{D'CO}=\varphi$, $\widehat{OBC}=\frac{\pi}{3}-\varphi$. По теореме синусов из $\triangle D'OC$

$$\frac{y}{\sin\varphi}=\frac{z}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)}=\frac{a}{\sqrt{3}}, \qquad (1)$$

из $\triangle BOC$

$$\frac{x}{\sin\varphi}=\frac{y}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)}=\frac{2a}{\sqrt{3}}. \qquad (2)$$

Из (1) и (2) $x=2y$, $y=2z$. Тогда из (2)

$$\frac{2}{\sin\varphi}=\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{3}-\varphi\right)} \qquad (3)$$

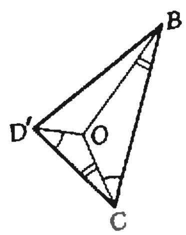


Рис. 2.

Из (3) $\operatorname{tg}\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\varphi=\sqrt{\frac{3}{7}}$. Значит, $x=\frac{2a}{\sqrt{7}}$, $y=\frac{a}{\sqrt{7}}$, $z=\frac{a}{2\sqrt{7}}$. $|BQ|=|OB|\sqrt{3}=2a\sqrt{\frac{3}{7}}$. Из подобия треугольников PDD' и PSO

$$\frac{|PD'|}{|PO|}=\frac{|DD'|}{|SO|}.$$

Поскольку

$$\frac{|PD'|}{|PO|}=\frac{|PO|-|D'O|}{|PO|}=\frac{x-z}{x}=\frac{3}{4},$$

$$|DD'|=\frac{3}{4}|SO|.$$

Дальше решение очевидно.

Вариант 2

1. $x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k$ ($k\in\mathbf{Z}$).

2. $\{(4;1),\ (16;2)\}$. Указание. Сделайте во втором уравнении подстановку $\frac{x}{y}=t$.

3. 11:1. Указание. Опустите из M перпендикуляр $[MP]$ на $[CD]$, из D — перпендикуляр $[DQ]$ на $[AB]$. Выразите через $|AB|=a$ последовательно $|QM|=|PD|$, $|DQ|=|PM|$, $|AQ|$, $|MA|=|AQ|+|QM|$, $|MB|$.

4. а) $\frac{a^2}{4}$; б) $\frac{7}{32}a^2$. Решение. Введем систему координат с началом в A и с осями, направленными по $[AD)$, $[AB)$, $[AA_1)$. Рассмотрим плоскость $z=t$. Обозначим через P, Q, R точки ее пересечения, соответственно, с (DF), (AD_1), (A_1E). Тогда $\vec{AQ}=t\vec{i}+t\vec{k}$, $\vec{AP}=a\vec{i}+2t\vec{j}+t\vec{k}$, $\vec{AR}=\vec{AE}+\vec{ER}=\vec{AE}+\frac{t}{a}\vec{EA_1}=\vec{AE}+\frac{t}{a}(\vec{AA_1}-\vec{AE})=\left(1-\frac{t}{a}\right)\vec{AE}+\frac{t}{a}\vec{AA_1}=\left(1-\frac{t}{a}\right)\left(\frac{a}{2}\vec{i}+a\vec{j}\right)+\frac{t}{a}\cdot a\vec{k}=\frac{a-t}{2}\vec{i}+(a-t)\vec{j}+t\vec{k}$, $\vec{QP}=\vec{AP}-\vec{AQ}=(a-t)\vec{i}+2t\vec{j}$, $\vec{QR}=\frac{a-3t}{2}\vec{i}+(a-t)\vec{j}$, $\vec{QP}\cdot\vec{QR}=(a-t)\cdot\frac{a-3t}{2}+2t(a-t)=\frac{a^2-t^2}{2}$, $|\vec{QP}|^2=(a-t)^2+4t^2$, $|\vec{QR}|^2=\frac{(a-3t)^2}{4}+(a-t)^2$. Обозначим через φ угол между $\vec{QP}$ и $\vec{QR}$. Тогда

$$S_{PQR}=\frac{1}{2}|\vec{QP}|\cdot|\vec{QR}|\cdot\sin\varphi=$$
$$=\frac{1}{2}|\vec{QP}|\cdot|\vec{QR}|\sqrt{1-\cos^2\varphi}=$$
$$=\frac{1}{2}|\vec{QP}|\cdot|QR|\sqrt{1-\frac{(\vec{QP}\cdot\vec{QR})^2}{|\vec{QP}|^2\cdot|\vec{QR}|^2}}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{QP}|^2\cdot|\vec{QR}|^2-(\vec{QP}\cdot\vec{QR})^2}.$$

Оказывается, для векторов $\vec{QP}$, $\vec{QR}$, параллельных плоскости xy (как в нашем случае!), подкоренное выражение всегда является «полным квадратом»: если $\vec{a}=(x_1;\ y_1;\ 0)$, $\vec{b}=(x_2;\ y_2;\ 0)$, то

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2\cdot|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1^2+y_1^2)\cdot(x_2^2+y_2^2)-(x_1x_2+y_1y_2)^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{x_1^2y_2^2-2x_1y_1x_2y_2+x_2^2y_1^2}=$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(x_1y_2-x_2y_1)^2}=$$
$$=\frac{1}{2}|x_1y_2-x_2y_1|.$$

В нашем случае

$$S_{PQR}=\frac{1}{2}|(a-t)^2-t(a-3t)|=$$
$$=\frac{1}{2}|4t^2-3at+a^2|=\frac{(4t^2-3at+a^2)}{2}.$$

Дальше решение очевидно.

5. $\left\{(1;\ 1;\ 1),\ \left(\frac{-5\pm\sqrt{11}}{2};\ \frac{10\mp\sqrt{11}}{2};\ \frac{4\mp\sqrt{11}}{2}\right)\right\}$. Указание. Прибавьте к третьему уравнению первое, умноженное на 2, и второе, умноженное на 3.

Вариант 3

1. $\left\{\frac{1}{3}\right\}$. Указание. Сделайте подстановку $\sqrt{\frac{1+x}{x}}=t$.

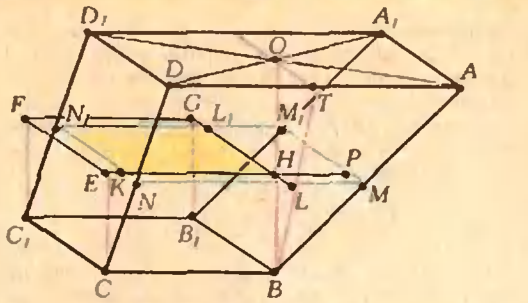


Рис. 3.

2. $\left]\log_4 \frac{5}{18};\ \log_4 \frac{1}{3}\right[\cup \left]\log_4 \frac{5}{3};\ +\infty\right[$.

3. $\frac{\sqrt{5}}{2}$ см. Указание. $ANMC$ — равнобедренная трапеция; $\frac{|AM|}{2} = R \cdot \sin \widehat{ANM}$ (R — искомый радиус).

4. $\left\{ \left(\frac{\pi}{4}+\pi k;\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi l\right),\ \left((-1)^m \times \frac{1}{2}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{\pi}{2}m;\ \pm\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}+2\pi n\right),\ \left((-1)^{p+1}\cdot\frac{1}{2}\arcsin\sqrt{\frac{2}{3}}+\frac{\pi}{2}p;\ \pm\left(\pi-\arccos\sqrt{\frac{2}{3}}\right)+2\pi q\right)\right\}$ $(k, l, m, n, p, q \in \mathbf{Z})$. Указание. $\cos 2y + \frac{1}{2} = 2\left(\cos y - \frac{1}{2}\right)\left(\cos y + \frac{1}{2}\right)$.

5. а)

$$V(h) = \begin{cases} \frac{3}{16}\pi h\left(7-\frac{h}{9}\right)^2, & \text{если } 0<h\leqslant 3 \\ 3\pi h\left(2-\frac{h}{9}\right)^2, & \text{если } 3<h\leqslant 9 \end{cases}$$

б) $\max\limits_{[0;9]} V(h) = V(6) = 32\pi$.

Решение. Рассмотрим сечение данной призмы плоскостью, находящейся на расстоянии h от грани BCC_1B_1 (на рисунке 3 призма «положена» на эту — боковую! — грань). В сечении получится «синий» параллелограмм MNN_1M_1; если $H = [BO] \cap (MNN_1M_1)$, то $|BH| = h$. Цилиндры высоты h, о которых говорится в условии, помещаются внутри призмы $MBCNM_1B_1C_1N_1$.

Спроектируем ортогонально нижнее основание этой призмы на верхнее. Точка B спроектируется, очевидно, в точку H. Обозначим проекции точек C, C_1, B_1 через, соответственно, E, F, G. Пусть $K = (EH) \cap [NN_1]$, $P = (EH) \cap [MM_1]$, $L = (GH) \cap [MN]$, $L_1 = (GH) \cap [M_1N_1]$, $T = (BL) \cap [AD]$. Прямые OT и GL_1HL параллельны как линии пересечения параллельных плоскостей MNN_1M_1 и ADD_1A_1 плоскостью BOT. Но $(GL) \parallel (BB_1) \parallel (AA_1)$. Следовательно, $(OT) \parallel (AA_1)$. Значит, $|DT| = |TA|$. Из $|BC| = 7 > 6 = |DT|$ следует $|BC| > |NL| > |DT|$. Значит, $|KH| = |NL| < |BC| = |EH|$. Поэтому точка E находится вне отрезка KH. С другой стороны, $|GH| = |BB_1| = |MM_1| = |LL_1| > |L_1H|$. Поэтому точка G находится вне отрезка L_1H.

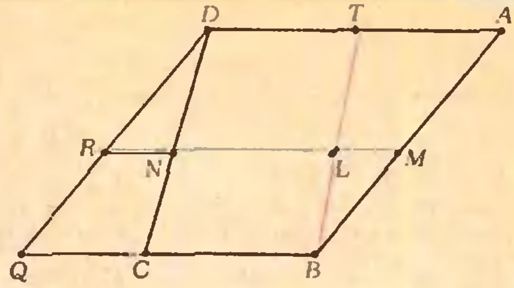


Рис. 4.

Основания рассматриваемых цилиндров лежат в пересечении «синего» параллелограмма MNN_1M_1 и параллелограмма-проекции $HEFG$, то есть в «желтом» параллелограмме HKN_1L_1 (см. рис. 3).

Легко доказать, что диаметр наибольшего круга, который можно поместить в данный параллелограмм, равен наименьшей высоте этого параллелограмма. Таким образом, нам надо найти наименьшую высоту параллелограмма HKN_1L_1.

Найдем сначала его стороны. Проведем через точку D прямую, параллельную (AB). Обозначим точки пересечения этой прямой с (MN) и (BC) через, соответственно, R и Q (рис. 4). Из подобия соответствующих треугольников

$$\frac{|BM|}{|BA|} = \frac{|BL|}{|BT|} = \frac{|BH|}{|BO|} = \frac{h}{9}$$

$$\frac{|RN|}{|QC|} = \frac{|RD|}{|QD|} = \frac{|AM|}{|AB|} = \frac{|AB|-|BM|}{|AB|} = 1 - \frac{|BM|}{|AB|} = 1 - \frac{h}{9}$$

$$|RN| = \left(1-\frac{h}{9}\right)\cdot|QC| = \left(1-\frac{h}{9}\right)\cdot(|BQ|-|BC|) = \left(1-\frac{h}{9}\right)\cdot(|AD|-|BC|) = 5\left(1-\frac{h}{9}\right)$$

$$|MN| = |MR| - |RN| = |AD| - |RN| = 7 + \frac{5}{9}h$$

$$\frac{|LM|}{|TA|} = \frac{|BL|}{|BT|} = \frac{|BH|}{|BO|} = \frac{h}{9}$$

$$|LM| = \frac{h}{9}\cdot|TA| = \frac{2}{3}h$$

$$|KH| = |KP| - |HP| = |MN| - |LM| = 7 - \frac{1}{9}h$$

$$\frac{|LH|}{|TO|} = \frac{|BH|}{|BO|} = \frac{h}{9}$$

$$|LH| = \frac{h}{9}\cdot|TO| = \frac{4}{9}h$$

$$|HL_1| = |LL_1| - |LH| = |AA_1| - |LH| = 8 - \frac{4}{9}h$$

При $0 < h \leqslant 3$

$$7 - \frac{1}{9}h < 8 - \frac{4}{9}h$$

$$|KH| < |HL_1|.$$

При $3<h<9$

$$|KH|>|HL_1|$$

Закончить решение предоставляем читателю.

Физика

Вариант I

1. Известно, что при соударениях двух тел максимальные потери кинетической энергии их движения происходят при абсолютно неупругом ударе, когда тела после столкновения двигаются с одинаковыми скоростями. Эта часть кинетической энергии может превращаться в другие виды энергии, в частности — пойти на возбуждение одного из сталкивающихся атомов. В дальнейшем, при переходе атома из возбужденного состояния в основное, может излучиться фотон. Минимальная энергия возбуждения $E_{\min}$ атома, находящегося в основном состоянии, достигается при переходе электрона с первого энергетического уровня на второй ($n=1$, $m=2$). Напротив, энергия ионизации атома, необходимая для отрыва электрона от него, соответствует переходу с первого уровня на бесконечно удаленный ($n=1$, $m\to\infty$). Поэтому из условия задачи следует, что константа R в формуле для частот излучения равна энергии ионизации $E_и$, деленной на постоянную Планка h, а минимальная энергия возбуждения атома равна

$$E_{\min}=hR\left(1-\frac{1}{2^2}\right)=\frac{3}{4}E_и.$$

Теперь из законов сохранения энергии и импульса можно получить минимальную кинетическую энергию $mv_0^2/2$ налетающего атома водорода:

$$\frac{mv_0^2}{2}=2\frac{mv^2}{2}+E_{\min},$$

$$mv_0=2mv,$$

откуда

$$\frac{mv_0^2}{2}=2E_{\min}=\frac{3}{2}E_и=20,4\text{ эВ}.$$

При решении этой задачи многие абитуриенты сделали характерную ошибку, связанную с непониманием физического смысла энергии ионизации атома, которую они считали минимальной энергией возбуждения атома. Другие абитуриенты, правильно найдя минимальную величину энергии возбуждения, не учитывали закон сохранения импульса, считая, что вся кинетическая энергия налетающего атома при столкновении превращается в энергию возбуждения и затем излучается.

2. Условием равновесия является равенство парциальных давлений водорода в первом и втором сосудах. Пусть p — начальное давление в первом сосуде. Оно складывается из парциальных давлений гелия и водорода. Так как массы и температуры газов одинаковы, отношение давлений гелия и водорода обратно отношению их молярных масс. Таким образом,

$$p_{He}+p_{H_2}=p,$$

$$\frac{p_{He}}{p_{H_2}}=\frac{\mu_{H_2}}{\mu_{He}}=\frac{1}{2},$$

откуда

$$p_{He}=\frac{p}{3},\ p_{H_2}=\frac{2p}{3}.$$

Чтобы суммарное давление гелия и оставшейся части водорода в первом сосуде было вдвое меньше начального, парциальное давление водорода должно уменьшиться до величины $p'_{H_2}=p/6$. Поскольку давление водорода обратно пропорционально объему, который он занимает, получаем

$$\frac{p_{H_2}}{p'_{H_2}}=\frac{V_1+V_2}{V_1},\text{ и }\frac{V_2}{V_1}=3.$$

Характерная ошибка многих абитуриентов состояла в том, что условием равновесия они считали равенство давлений водорода во втором и водорода и гелия в первом сосудах.

3. Сила взаимодействия между пластинами конденсатора в обоих случаях определяется произведением напряженности поля одной из пластин на заряд другой.

В отсутствие диэлектрика поле в конденсаторе $E_1=U/d$, а заряд на его пластинах $q_1=\varepsilon_0US/d$, где d — расстояние между пластинами, S — площадь пластин, ε_0 — электрическая постоянная. С учетом того, что поле одной пластины вдвое меньше поля в конденсаторе, для силы взаимодействия между пластинами получаем

$$F_1=\frac{q_1E_1}{2}=\frac{\varepsilon_0SU^2}{2d^2}.$$

После внесения диэлектрика образовавшийся конденсатор можно рассматривать как два последовательно соединенных конденсатора, один из которых заполнен диэлектриком с проницаемостью ε, а расстояния между пластинами у обоих равны $d/2$. Так как напряжение остается постоянным, изменение емкости приводит к изменению заряда на пластинах, что, в свою очередь, меняет и поле в конденсаторе. Емкость образовавшегося конденсатора $C_2=2\varepsilon\varepsilon_0S/d\,(1+\varepsilon)$ (это получается из равенства $1/C_2=d/2\,\varepsilon_0S+d/2\varepsilon\varepsilon_0S$); заряд на конденсаторе $q_2=UC_2=2\varepsilon\varepsilon_0SU/d\,(1+\varepsilon)$; поле $E_2=q_2/S\varepsilon_0=2\varepsilon U/d\,(1+\varepsilon)$; сила взаимодействия

$$F_2=\frac{Q_2E_2}{2}=\frac{2\varepsilon_0\varepsilon^2SU^2}{d^2(1+\varepsilon)^2}.$$

Отношение сил

$$\frac{F_2}{F_1}=\frac{4\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2}=2{,}25.$$

Многие абитуриенты ошибочно рассчитывали взаимодействие пластин как взаимодействие двух точечных зарядов. Некоторые также считали, что поле вблизи пластин при внесении диэлектрика не меняется.

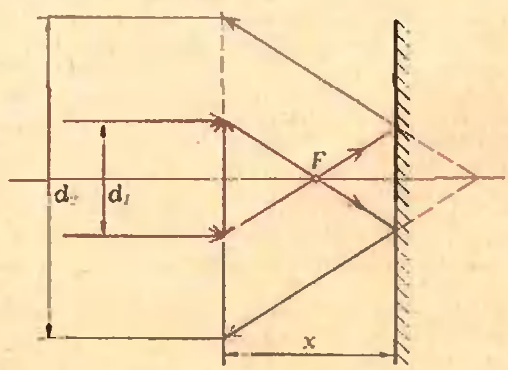


Рис. 5.

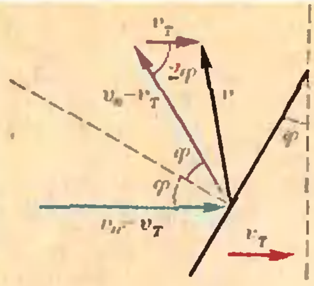


Рис. 6

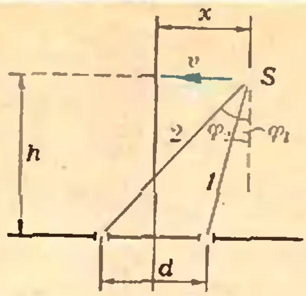


Рис. 7.

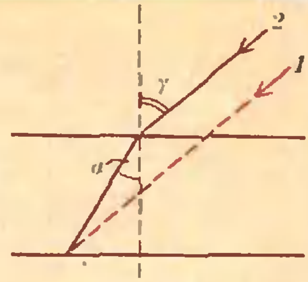


Рис. 8

4. Ход лучей, прошедших линзу и отразившихся от зеркала, показан на рисунке 5. Так как поток пропорционален квадрату линейных размеров, диаметр освещенного пятна d_2 вдвое больше диаметра линзы d_1. Если x — расстояние от линзы до зеркала, то из подобных треугольников находим

$$\frac{x+(x-F)}{F}=\frac{d_2}{d_1}=2,$$

откуда

$$x=\frac{3}{2}F=30\ \text{см}.$$

При решении этой задачи многие абитуриенты ошиблись, считая поток пропорциональным линейным размерам изображения.

Вариант 2

1. Задачу удобно сначала решить в системе координат, связанной с танком, и затем перейти в неподвижную систему координат (рис. 6). Тогда по теореме косинусов скорость пули $v=((v_0-v_т)^2+v_т^2-2v_т(v_0-v_т)\cos 2\varphi)^{1/2}\approx$ ≈ 720 м/с.

2. $m=\dfrac{((1/2\mu_в-\mu_{He})pV/RT-M)}{4\pi(3V/4\pi)^{2/3}}\approx 0{,}3$ кг/м².

3. $U>14{,}7$ кВ. Указание. Процесс ионизации начинается на участке трубки с максимальной напряженностью поля, когда на длине свободного пробега электрон набирает энергию бо́льшую, чем энергия ионизации.

4. Отверстия в экране являются источниками вторичных волн, регистрируемых приемником. Разность фаз $\Delta\varphi$ колебаний этих источников зависит от скорости v движения первичного источника, находящегося на расстоянии x от оси системы. Действительно (рис. 7), разность фаз

$$\Delta\varphi=\frac{2\pi h}{\lambda}\left(\frac{1}{\cos\varphi_2}-\frac{1}{\cos\varphi_1}\right).$$

По условию $d\ll h$ и $x\ll h$; следовательно, углы φ_1 и φ_2 малы. Тогда

$$\cos\varphi_1=1-\varphi_1^2/2=1-(d/2-x)^2/2h^2,$$
$$\cos\varphi_2=1-\varphi_2^2/2=1-(d/2+x)^2/2h^2,$$
$$\Delta\varphi=2\pi dx/\lambda h.$$

За период колебаний $1/f$ разность фаз меняется на 2π, а источник проходит расстояние до оси $x=v/f$, то есть

$$2\pi=2\pi dv/\lambda hf.$$

Отсюда находим скорость источника:

$$v=\lambda hf/d=4{,}5\cdot10^{-3}\ \text{м/с}.$$

Вариант 3

1. $T=2\pi\dfrac{l}{L}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$. Указание. При малых колебаниях отношение вертикальных смещений конца пружины и груза равно отношению их расстояний до шарнира.

2. $F_{max}=\pi D^2\Delta Tp_0/4T_0\approx 26$ Н.

3. $I_1=(L_1I_0+L_2\mathcal{E}/r)\,(L_1+L_2)$;
$I_2=(\mathcal{E}L_1/r-L_1I_0)\,(L_1+L_2)$.

Указание. В любой момент времени $L_1\Delta I_1/\Delta t=L_2\Delta I_2/\Delta t$, откуда $L_1I_1-L_2I_2=\mathrm{const}=L_1I_0$. Это — закон сохранения магнитного потока. Кроме того, $I_1+I_2=\mathcal{E}/r$.

4. Ход луча 1 в отсутствие атмосферы и луча 2 при наличии ее показан на рисунке 8. Если средний показатель преломления атмосферы записать в виде $n=1+\Delta n$, где $\Delta n=3\cdot10^{-4}$, то по закону преломления имеем

$$\frac{\sin\gamma}{\sin\alpha}=1+\Delta n=\frac{\sin(\alpha+\Delta\alpha)}{\sin\alpha}.$$

Отсюда ошибка $\Delta\alpha$ в определении углового положения звезды равна

$$\Delta\alpha=\Delta n\,\mathrm{tg}\,\alpha=\Delta n=3\cdot10^{-4}\ \text{рад}.$$

Московский электротехнический институт связи

Математика

Вариант 1

1. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k\ (k\in Z)$.
2. $\{(1;8),\ (8;1)\}$. Указание. Используйте разложения для суммы кубов и для куба суммы.
3. $]-\infty;-1[$.
4. Скорость пассажирского поезда равна 60 км/ч, скорого — 100 км/ч.
5. Указание. $\dfrac{|OA_0|}{|OA_1|}=\dfrac{1}{2}$ (O — точка пересечения прямой A_0A_1 и любой из прямых B_0B_1, C_0C_1).

Вариант 2

1. $\{2^{10}\}$.
2. $x_1=\frac{\pi}{2}k$, $x_2=\pm\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}l\ (k,l\in Z)$.
3. 3 см.
4. $\{3\}$.
5. В 10 раз. Указание. Не бойтесь составить систему, например, трех уравнений с четырьмя неизвестными, поскольку найти надо не скорости, а их отношение.

Физика

1. $v_0 = g\tau/\sin\alpha \approx 84$ м/с.

2. $p_2 = (p_1 - \varrho g h_1)\dfrac{l}{h_1 + l - h_2} + \varrho g h_2 \approx$
≈ 751 мм рт. ст.

3. $U = \dfrac{2mdhv_0^2}{el^2} \approx 22{,}7$ В.

4. В 25-ваттной лампочке тепла выделится в 4 раза больше, чем в 100-ваттной.

5. Нужно иметь две катушки, индуктивности которых

$$L_1 = \frac{\lambda_1^2}{4\pi^2c^2C_1} \approx 8{,}1 \cdot 10^{-6}\ \text{Гн}$$

и $L_2 = \dfrac{\lambda_2^2}{4\pi^2c^2C_2} \approx 2{,}9 \cdot 10^{-3}$ Гн (здесь $c = 3 \cdot 10^8$ м/с — скорость света).

6. $R_{\min} = \dfrac{h}{\sqrt{n^2-1}} \approx 11{,}5$ см.

7. $D_1 = \dfrac{\Gamma+1}{\Gamma d} = 3$ дптр; $D_2 = \dfrac{\Gamma-1}{\Gamma d} = 2$ дптр.

Шахматный конкурс

(см. «Квант», 1981, № 11)

1. Этот непростой этюд Г. Надарешвили решила программа «Пионер», разрабатываемая под руководством М. Ботвинника. Основной вариант решения состоит из 13 ходов: **1. g6 Крf6 2. g7 Сh7 3. е4!** (3. Кр:h7 Кf3 4. g8Ф Кg5+ с вечным шахом) 3...Кf3 4. е5+ **К:е5 5. Кр:h7 Кf7 6. g8Ф Кg5+ 7. Ф:g5+ Кр:g5 8. h6 с4 9. Крg7 с3 10. h7 с2 11. h8Ф с1Ф 12. Фh6+ Крf5 13. Ф:с1** и т. д.

2. Эта позиция, обнаруженная ЭВМ, является рекордной по длительности игры в эндшпиле типа «ладья против слона». При точной игре обеих сторон белые выигрывают только на 18-м ходу: **1. Кра5! Крb7 2. Лb3+ Кра7 3. Лf3! Се2** (3...Сс4 4. Лс3 и на отступление слона следует 5. Лс7+ Крb8 6. Крb6 — элементарно выигранное теоретическое окончание; на 3...Сb7 решает 4. Лf7 Крb8 5. Крb6) **4. Лf7+ Крb8 5. Крb6 Крс8 6. Крс6 Крd8** (если бы ладья не контролировала поле f3, сейчас мог последовать шах слоном, и король отгонялся) **7. Крd6 Крс8** (7...Кре8 8. Ле7+ проигрывает слона) **8. Лс7+ Крb8** (после 8...Крd8 к победе ведет 9. Лс2 Сd3 10. Лd2! Сg6 11. Лg2! Сf7 12. Лh2 Крс8 13. Лh8+ Крb7 14. Лh7+) **9. Крс6 Сс4 10. Крb6 Сb3** (дальше все просто) **11. Лс3 Са2 12. Лс2 Сb3 13. Лb2 Се6** (на 13...Са4 или Се4 следует соответственно 14. Кра5 или Крс5 и потеря слона) **14. Ле2 Сd7 15. Лf2 Се6 16. Лf8+ Сс8 17. Лh8 Кра8 18. Л:с8×.**

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
В. Герман, Л. Денисенко, М. Дубах, Г. Красиков, С. Лухин, Э. Назаров, И. Смирнова

Заведующая редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Т. Вайсберг

117071, Москва, Ленинский проспект, 15, Физматлит, «Квант», тел. 232-49-25
Сдано в набор 19.11.81 Подписано в печать 29.12.81
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 7,11 Т-27800
Цена 40 коп. Заказ 2805 Тираж 179 054 экз.

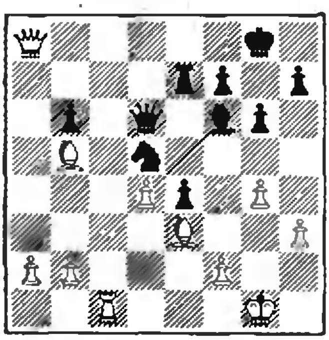
Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

ИГРАЮТ КОМПЬЮТЕРЫ

На страницах «Кванта» уже рассказывалось о принципах, заложенных в современные шахматные программы для ЭВМ, и о том, как компьютеры анализируют шахматный эндшпиль. Здесь мы расскажем о двух партиях, сыгранных ЭВМ в чемпионатах мира по шахматам.

Напомним, что уже состоялось три таких чемпионата. В 1974 году в Стокгольме первой чемпионкой мира стала советская программа «Каисса». Во втором чемпионате, состоявшемся через три года в Канаде, она уступила свое звание американской программе «Чесс». Необычный случай произошел в первом туре.



«Дачесс» — «Каисса»

Белые только что дали шах ферзем на а8. Неожиданно «Каисса» отдает целую ладью — **34...Ле8.** Комментаторы были в недоумении и смущенно объясняли зрителям, что шахматные программы пока еще далеки от совершенства и от них можно ожидать чего угодно. Каково же было всеобщее изумление, когда «Каисса» объяснила свой «зевок» следующим вариантом: 34...Крg7 35.Фf8+!! Кр:f8 36.Ch6+ и 37.Лс8+ с неизбежным матом! Ни один, как писал английский шахматный журнал, «белковый шахматист», присутствовавший на чемпионате, не обнаружил этой эффектной жертвы ферзя. Неизвестно, видела ли эту комбинацию «Дачесс» или нет, но из сугубо практических соображений в данной позиции следовало избрать ход 34...Крg7, так как игра без ладьи абсолютно бесперспективна, а ход 35. Фf8+ может найти далеко не каждая программа (и не каждый мастер!). Если белые собирались в ответ на 34...Крg7 выиграть фигуру ходом 35.g5, то они сами проигрывали (35...К:е3 36.gf+ Ф:f6 37.fe Фg5+ и Ф:b5 с решающим перевесом у черных). Таким образом, «Каисса» пала жертвой собственной тактической зоркости. Надо сказать, что вытекающие отсюда практические соображения допускают несложную программную реализацию.

В партии последовало **35.Ф:е8+ Крg7 36.g5 Cd8** и через несколько ходов черные сдались.

Третий чемпионат мира среди ЭВМ был разыгран в конце 1980 года в Австрии. Первыми на финише оказались две американские программы «Белл» и «Хаос». Дополнительная партия между ними принесла победу и звание чемпиона программе «Белл». Вот этот решающий поединок.

«Белл» — «Хаос»

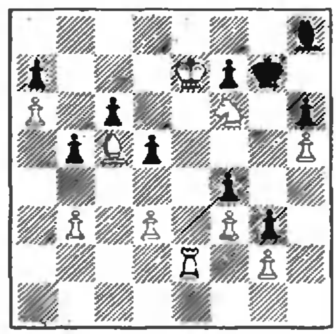
Защита Алехина

1.е4 Кf6 2.е5 Kd5 3.d4 d6 4.Кf3 de 5.К:е5 g6 6.g3 Cf5 7.с4 Кb4 8.Фа4+ К4с6 9.d5. Кажется, что черные теряют фигуру, однако они находят остроумную защиту. **9...Сс2 10.Фb5 Фd6** (лучше 10...Сg7) **11.К:с6 К:с6 12.Кс3** (12.Ф:b7 Фb4+, спасая фигуру) **12...Сg7 13.Ф:b7 0—0 14.Ф:с6** (14.dc С:с3+ 15.bc Фd1×) **14...Фb4 15.Крd2.** Белые выиграли коня, но противник вынудил их короля остаться в центре и продолжает упорное сопротивление. **15...Се4 16.Лg1 Лfb8 17. Ch3 Ch6+ 18. f4 Фа5 19.Лe1 f5 20.Фе6+ Крf8 21.b3 Cg7** (черные упускают возможность тактического удара — 21...Л:b3!) **22.Cb2 Cd4 23. g4 Лb6 24.Фd7 Лd6 25.Фа4 Фb6 26.Са3 С:с3+ 27.Кр:с3 Лdd8 28.Лаd1 Фf2 29.gf Фс2+ 30.Крd4 gf 31.Фс6 Фf2+ 32.Кре5.** Белый король скрылся от преследования черного ферзя в самом центре доски, теперь все кончено. **32...Крg8 33.Лg1+ Крh8 34.С:е7** с неизбежным матом.

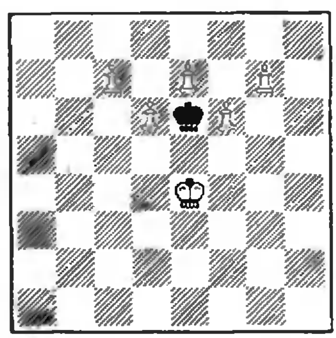
Конкурсные задания

Сегодня мы начинаем наш новый шахматный конкурс, который пройдет в течение всего года. Победители его, как и раньше, будут награждены шахматно-математической литературой с автографами ведущих шахматную страничку. Итоги шахматного конкурса 1981 года будут подведены в «Кванте», 1982, № 5.

Предлагаемая ниже задача 1 в свое время была опубликована в одной из московских газет. Интересно, что ни один из читателей не справился с ней, а программа «Каисса» ее решила. Задача 2 — одна из первых, решенных ЭВМ еще на заре шахматного программирования.



1. Мат в 4 хода.



2. Мат в 3 хода.

Срок отправки решений — 10 марта 1982 года (с пометкой на конверте: «Шахматный конкурс «Кванта», задания 1, 2»).

Цена 40 коп.
Индекс 70465

Нарисованный здесь узор получен следующим образом. Плоскость разбита параллельными прямыми на одинаковые квадраты. Каждый квадрат разбит на два конгруэнтных прямоугольника, причем направления «длинных» сторон чередуются: если в данном квадрате прямоугольники вертикальны, то в четырех соседних квадратах они горизонтальны, и наоборот. Из полученной сети прямоугольников строится покрытие плоскости восьмиугольниками с помощью следующей общей конструкции. Центр каждого прямоугольника соединяется с центрами семи соседей отрезками — их середины образуют вершины семиугольников и треугольников, которые объединяются, образуя восьмиугольники. Найдите эти семиугольники, треугольники и восьмиугольники на нашем узоре. На рисунке в декоративных целях добавлены ромбовидные «скрепки». Подумайте, какие получатся фигуры, если начинать от другой сети прямоугольников.

А. Сапич, В. Чванов