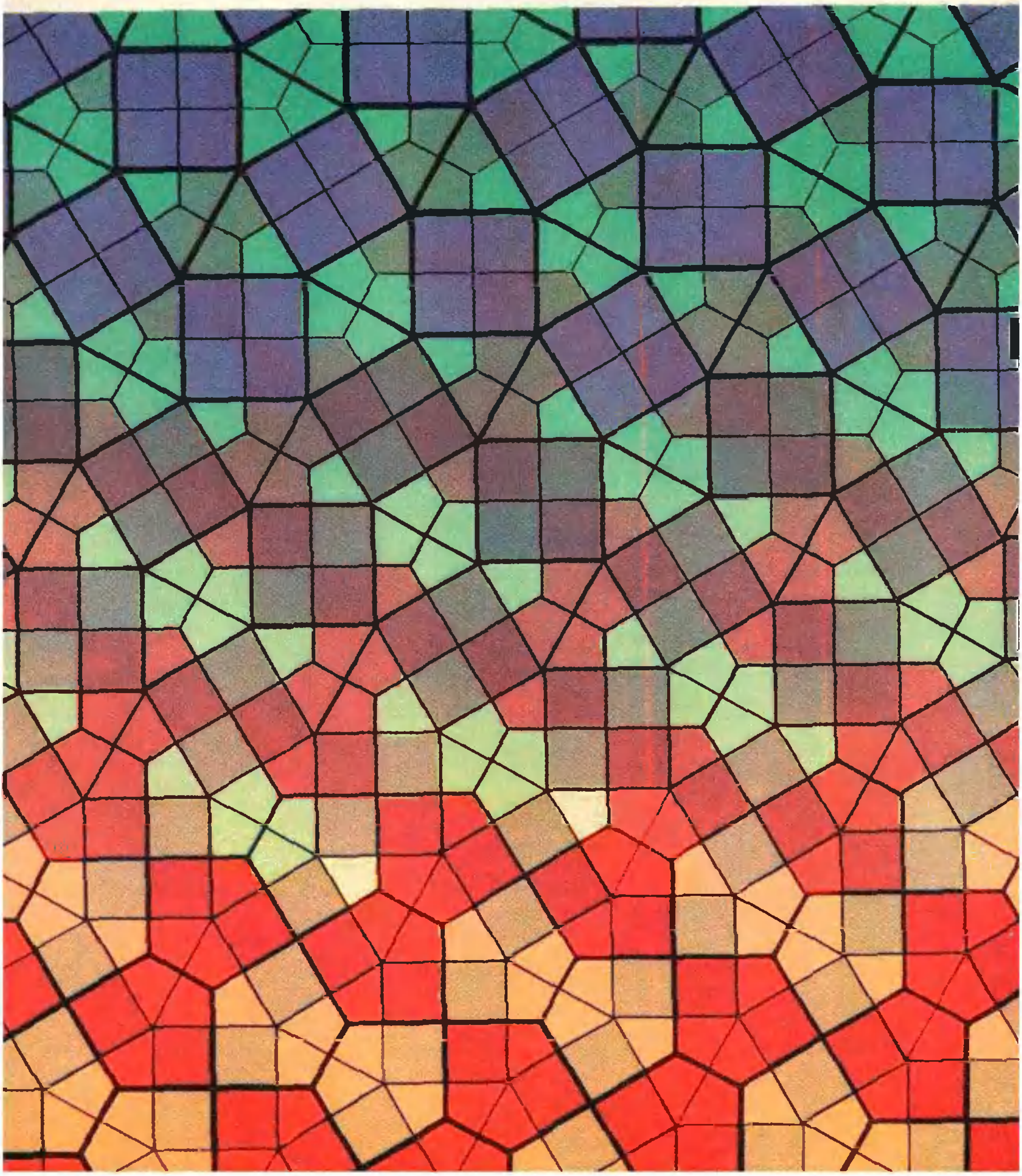
ISSN 0130-2221

Квант

9
1981

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



Надгробье великого живописца, ваятеля и зодчего Микеланджело заинтересовало нас не столько симметрией общего рисунка, сколько одной деталью своего декоративного убранства: зацепленными венками из лавровых, оливковых и дубовых листьев (см. статью А. Калинина «Эта удивительная вязь колец»).

Квант

9
1981

Основан в 1970 году

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ:

О математическом смысле узора, показанного на первой странице обложки, вы можете прочитать на с. 41

С новым учебным годом!

Быстро пролетели прекрасные летние дни. Отшумели школьные каникулы. И снова звонок приглашает вас в просторные светлые классы, вы встречаетесь со старыми друзьями, делитесь впечатлениями, строите планы на будущее.

У многих из вас школьное лето было не только месяцами отдыха, но и месяцами упорного труда. Около трех миллионов учащихся провели каникулы в лагерях труда и отдыха, помогали колхозам и совхозам выращивать и убирать урожай. В 45 тысячах школ были созданы ученические школьные бригады. Они объединяли 2,5 миллиона учащихся 8—10 классов. Ребята работали на полях, в лесничествах, на производственных предприятиях, стройках, в сфере обслуживания. Школа трудовой закалки на пороге самостоятельной жизни необычайно полезна для нашей молодежи.

Нынешний год — знаменательный в жизни нашего народа. Это год XXVI съезда КПСС, первый год новой, одиннадцатой пятилетки. Съезд уделил большое внимание состоянию школьных дел. В отчетном докладе Генерального секретаря ЦК КПСС Л. И. Брежнева, в частности, сказано: «Взят важный рубеж — завершен переход к обязательному всеобщему среднему образованию. Главное сегодня в том, чтобы повысить качество обучения, трудового и нравственного воспитания в школе, изжить формализм в оценке результатов труда учителей и учащихся, на деле укрепить связь обучения с жизнью, улучшить подготовку школьников к общественно полезному труду».

В одиннадцатой пятилетке наша страна должна добиться новых крупных успехов на пути повышения эффективности и улучшения качества продукции во всех звеньях народного хозяйства. Эти требования продиктованы жизнью и, прежде всего, происходящей сейчас научно-технической революцией. Используя ее достижения, можно коренным образом изменить эффективность любого труда, любой профессиональной деятельности. А это значит, что растут требования к работникам практически на любом рабочем месте. Удовлетворить этим требованиям можно лишь успешно овладевая достижениями современной науки и техники.

Присмотритесь внимательно к тому, о чем пишут наши газеты, прислушайтесь к тому, о чем рассказывают радио и телевидение — комплексно автоматизированные линии и цеха, роботы и промышленные манипуляторы, станки с программным управлением, новые технологические процессы, рождающие небывалую продукцию, применение ЭВМ в управлении, торговле, обслуживании, здравоохранении, новые, все более мощные и разнообразные машины в сельском хозяйстве... Может ли в будущем все это успешно использовать тот, кто сегодня учится плохо, перебиваясь с двойки на тройку? Конечно, есть еще у нас профессии, не требующие глубоких знаний и специальной подготовки, но с каждым годом потребность в них будет все меньше и меньше.

Ребята иногда спрашивают: «Почему все должны знать математику и физику — ведь не всем же эти науки понадобятся в их будущей работе?» Конечно, для того, чтобы подсчитать в магазине сдачу, достаточно и знания элементарной арифметики. Зачем же алгебра и геометрия будущему повару, закройщице или рабочему на конвейере? Работать можно по-разному. Можно день за днем, ни над чем не задумываясь, класть одни и те же продукты в котел, разрезать ткань по стандартным шаблонам и завертывать гайки примитивным инструментом. А можно уже сегодня подсчитывать калорийность продуктов, составлять оптимальные и недорогие пищевые рационы, искать наиболее экономные методы раскройки тканей, совершенствовать инструменты и приемы труда. Вот тут-то без хорошего знания школьных дисциплин шагу не сделаешь!

Изучение математики дает человеку не узко профессиональные знания и навыки, пригодные для какой-то одной профессии, а развивает, тренирует и совершенствует его ум — учит правильно рассуждать, анализировать прочитанное или услышанное, обосновывать и убедительно доказывать свои суждения, принимать правильные решения в сложных жизненных ситуациях. Математика учит человека думать и думать правильно, а это необходимо всем.

Не менее важна и физика. Она дает человеку знания об основных законах природы, являющихся теоретическим фундаментом всей современной техники. И если шофер хочет не просто крутить руль и нажимать ногою на педали, а хоть немного разбираться в своей машине, ему безусловно нужны хорошие знания школьной физики. А электричество — ведь мы с ним неразрывно связаны и дома, и на работе. Как же не знать его основных законов!

Школа не готовит профессиональных физиков, математиков или историков. Чтобы стать ученым, надо много и упорно трудиться. Но многовековой опыт человечества позволил отобрать и ввести в школьные программы то, что нужно всем членам общества, независимо от их будущих профессий.

Наши читатели имеют более глубокий интерес к математике и физике, — иначе они не были бы подписчиками нашего журнала. Многие из вас увлечены этими науками, с удовольствием прорабатывают наши статьи и решают предлагаемые нами задачи. Но нам хотелось бы, чтобы даже те, кто по-настоящему влюблен в математику или физику, не пренебрегали остальными школьными предметами, а старались и в них искать основные закономерности, причинные связи, анализировать ход доказательств, словом, как сказал наш великий поэт, алгеброй поверять гармонию. И еще нам хотелось бы, чтобы ваш интерес к этим наукам не оставался внутри вас, не был бы только вашим личным достоянием. Постарайтесь увлечь этим ваших товарищей, привлекайте их к постановке опытов, о которых мы рассказываем в «Лаборатории «Кванта», к решению задач, головоломок, кроссвордов, ребусов. Пусть и они почувствуют «радость скромных побед», поверят в свои силы, проверят свои способности.

Выступая на третьем съезде комсомола, В. И. Ленин призывал молодежь активно отдавать свои знания другим, помогать товарищам успешно учиться. «Только в такой работе превращается молодой человек или девушка в настоящего коммуниста» — говорил Владимир Ильич. Мы строим коммунизм, и каждый школьник может с успехом и большой пользой участвовать в этом строительстве уже сегодня.

Н. Семенов

Смелее, не отступайте перед трудностями!

Каждый год в советскую науку вступают тысячи юношей и девушек.

При воспитании молодежи, начинающей научную работу, самое важное — последовательное и неуклонное развитие у нее инициативы и самостоятельности.

Конечно, это не значит, что мы, ученые, должны предоставить молодежь самой себе: пусть, мол, привыкает к самостоятельности, пусть самоопределяется в науке. При таком «самотечном» методе первые же шаги молодежи могли бы привести к цепи ошибок и глубоких разочарований. Однако еще хуже вторая крайность — передача огромного теоретического и экспериментального наследства в готовом виде.

Необходимо, чтобы молодежь до многого доходила сама, изыскивая свои, пусть еще не лучшие, но самостоятельные решения. Это после первых неуверенных шагов даст возможность молодым ученым почувствовать свою силу, свою способность хоть с трудом, но уже самостоятельно шагать в науке. Наш долг — давать им задачи не с очевидным ответом, а те, которые бы требовали серьезных размышлений, коренного изменения и усовершенствования методики работы и глубокого самостоятельного анализа.

Мы стараемся ни в коем случае не навязывать «безоговорочных» суждений и путей решения и не требуем, чтобы результаты решения строго соответствовали точке зрения руководителя — и никакой другой.

Академик Николай Николаевич Семенов — дважды Герой Социалистического Труда, лауреат Нобелевской, Ленинской и Государственных премий, директор Института химической физики АН СССР.

Статья перепечатывается из сборника «Ленин. Наука. Молодежь», выпущенного в 1980 году издательством «Наука».

Мы обязаны помогать, но не диктовать. Научная догма вредна. Она мешала развитию науки и в древности, и во времена Ломоносова, и в наши дни.

Однако среди молодых ученых встречаются такие, которые с первых же шагов сами стараются не искать «нехоженных троп». Они недовольны такой постановкой, жалуются на недостаточное руководство, склонны к движению по «автострадам» науки, ошибочно полагая, что такое движение быстрее и результативнее.

В большинстве случаев подобные молодые ученые через год-два начинают чувствовать, что пути настоящей науки не здесь, что нужно идти иной раз по полному бездорожью, по целинным землям, где каждый шаг стоит огромного труда. Но ведь именно в этом труде формируются воля ученого и твердое стремление к самостоятельной работе. Если в сознании юноши или девушки не произойдет такого крутого поворота, им не следует посвящать себя науке.

Научное руководство никогда не должно достигать уровня, при котором приходится вести молодежь за руку. Я отверг навсегда этот метод еще в те времена, когда был старше своих молодых учеников всего на пять-шесть лет. И никогда в жизни не жалел об этом.

Работать творчески, с огоньком можно во всех областях науки и техники. Это подтверждается множеством замечательных примеров труда нашей молодежи, строящей огромные города и заводы, поднимающей миллионы гектаров целины, создающей сложные машины и новые материалы. И не следует думать, что молодой ученый — это только тот, кто работает в соответствующем институте под руководством академиков и профессоров, имеет научное звание или ученую степень. Науку движут вперед и молодые новаторы, рационализаторы, изобретатели, упорно работающие каждый в своей области, создающие немало нового, ложащегося в фундамент величественного здания науки.

В поисках нового неизбежны неудачи. Но истинный ученый не должен их бояться, опускать руки. Ведь именно неудачи часто помогают в поисках правильного пути, показывают, в каком направлении не следует двигаться, а в каком надо работать еще упорнее. Нередко поэтому бывает так, что анализ ряда неудачных экспериментов приводит к великим открытиям.

Научная работа в любой области открывает неиссякаемый источник радости. Открытия и достижения, умножая славу нашей великой Родины, тем самым приносят славу и огромное удовлетворение отдельным ученым.

Будьте же смелее в науке, не отступайте в ней перед трудностями! Перед молодежью лежит еще неистощимая целина, которая принесет народу урожаи невиданного изобилия.

С. Пикин

Снова о жидких кристаллах

В августовском номере журнала в статье «Жидкие кристаллы» было рассказано об одном типе жидких кристаллов — нематической жидкости, о том, что из себя представляют молекулы такой жидкости, как они взаимодействуют между собой, о важнейших областях применения этих жидких кристаллов. Теперь мы хотим познакомить вас с двумя другими типами жидких кристаллов, которые играют исключительно важную роль в науке, технике и жизни. Речь пойдет о холестерических и смектических жидких кристаллах.

Холестерическим называют состояние жидких кристаллов, впервые наблюдавшееся в эфирах холестерина. Смектическое состояние берет свое название от греческого слова σμηγμα — «мыло» и обозначает жидкость, структура которой подобна жидкой мыльной пленке, состоящей на самом деле из множества тонких слоев, легко скользящих друг по другу.

Холестерическая жидкость

Структура холестерической жидкости (холестерика) во многом сходна с нематической, но имеет одно существенное отличие. Можно сказать, что холестерик обладает нематическим состоянием послойно, то есть состоит из стопки нематических слоев (рис. 1, *а*). Но оси этих параллельных друг другу слоев развернуты на некоторый угол, причем для двух соседних слоев этот угол составляет малую величину $\alpha \approx 0{,}5°$. Расстояние между соседними слоями примерно равно поперечному размеру молекулы a. Если двигаться вдоль оси Z, перпендикулярной плоскости слоев (см. рис. 1, *а*), то через число слоев $N = \pi/\alpha$ ориентация молекул станет такой же, как в самом первом слое (направления $\vec{n}$ и $-\vec{n}$ физически эквивалентны). Расстояние $h = a \cdot 2\pi/\alpha$, через которое повторяется ориентация молекул в пространстве, представляет собой удвоенный период своеобразной решетки (рис. 1, *б*). Величину h принято называть шагом спирали, которую образуют в пространстве концы молекул, лежащих в последовательных слоях.

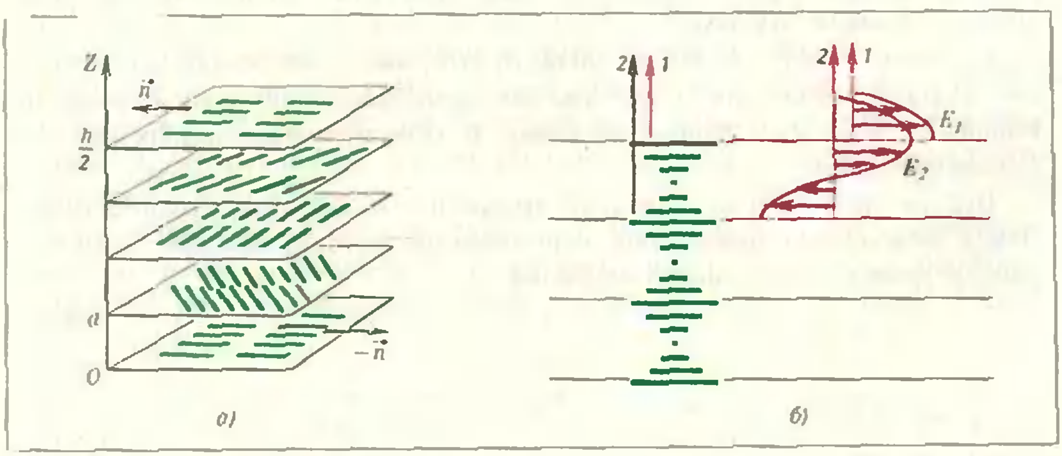


Рис. 1. Холестерический жидкий кристалл. *а)* холестерическая спираль; *б)* селективное отражение света холестериком.

Описанная периодическая решетка — ее называют холестерической спиралью — удивительна тем, что четкая периодичность в ней касается только ориентации молекул. В то же время в каждом нематическом слое молекулы могут свободно перемещаться, меняться местами; словом, холестерическая жидкость свободно течет вдоль таких плоскостей, но спираль при этом почти не нарушается. Молекулы могут перескакивать и из слоя в слой, поворачиваясь при этом на угол α, но это дается им не так легко. Все это и определяет особые свойства холестерической жидкости, схожие со свойствами твердого кристалла. Особенности структуры холестерической жидкости наиболее сильно проявляются при изменении температуры вещества и при различных внешних воздействиях. Холестерическая спираль обладает яркими оптическими свойствами, чувствительными к малейшим повреждениям столь своеобразной решетки. Все это вызвало громадный интерес к изучению и применению холестерических жидких кристаллов. Однако, прежде чем говорить о применениях холестерических жидких кристаллов, разберемся, чем вызвана такая структура холестерика.

Мы знаем сегодня, что объяснение заключается в особенности строения молекул, из которых состоят эти вещества. Молекулы холестерика — почти такие же, как в нематической жидкости, но имеют на своем конце небольшой отросток (рис. 2, *а*). Этот отросток образуется обычно одним или несколькими атомами, которые выступают из основной плоскости, содержащей подавляющее большинство атомов молекулы. Симметрия молекулы нарушается из-за отростка и напоминает симметрию руки, которая, как известно, бывает только правой или только левой.

Как сказывается такая форма молекул на ориентационном порядке жидкости? Подобные молекулы можно расположить параллельно друг другу в определенной плоскости, например в плоскости, в которой лежат сами молекулы. Именно эти плоскости и образуют отдельные слои холестерика (рис. 2, *б*). А как могут быть «пристроены» друг к другу эти слои? Очевидно, что молекулы слоя *2* могут быть параллельны молекулам слоя *1* (речь идет об основных, плоских, участках молекул), если слои расположены друг от друга на расстоянии, примерно равном высоте отростков. В этом случае отростки не мешают молекулам оставаться параллельными. Если расстояние между слоями меньше высоты отростков, то векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ не могут быть строго параллельны — мешают отростки. Поэтому между векторами $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ имеется малый угол α.

Таким образом, мы приходим к выводу, что несимметричные молекулы должны образовывать стопку нематических слоев, причем от слоя к слою молекулы должны поворачиваться на определенный угол α. В за-

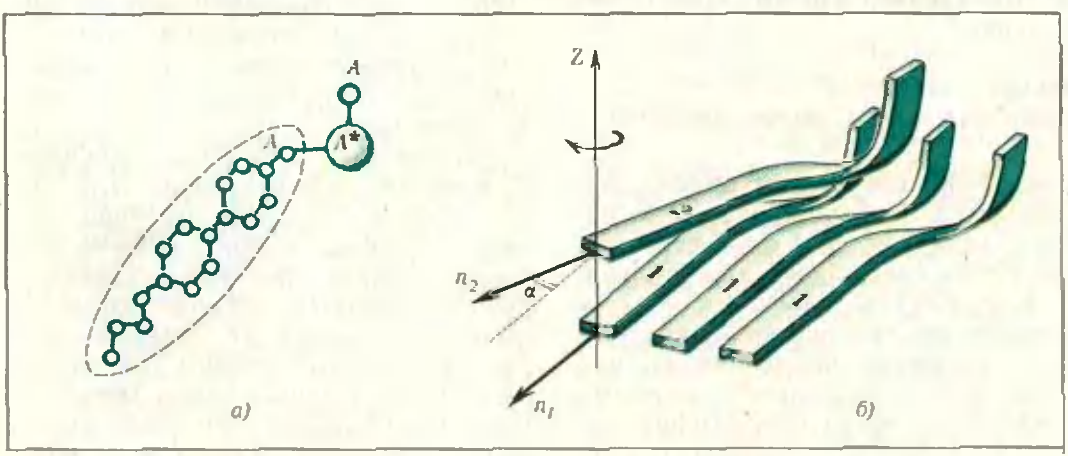


Рис. 2. Молекулы холестерика. *а*) атомная структура; *б*) ориентация в соседних слоях.

висимости от того, как изогнуты отростки отдельных молекул, холестерические спирали могут быть либо правыми, либо левыми. (Кстати, на рисунках 1, *а* и 2, *б* изображена левая спираль — продвигаясь вдоль оси спирали, мы видим, что молекулы поворачиваются своими длинными осями против часовой стрелки.)

Конечно, подобные рассуждения об устройстве холестерической жидкости — довольно грубые и приближенные, но они дают наглядное представление об особенностях структуры таких веществ. В этих рассуждениях можно пойти дальше и поинтересоваться, чему же равны угол α и шаг спирали h. Разумеется, эти величины — параметры вещества, состоящего из конкретных молекул. Но приближенно их можно оценить, если исходить из разумного предположения, что угол α тем меньше, чем меньше энергия взаимодействия отростков с основными участками молекул и чем больше взаимодействие плоских участков между собой. Поскольку, грубо говоря, в отросток входит примерно один атом, а в плоский участок — примерно 100 атомов, то отношение этих энергий взаимодействия составляет около 1/100. Соответственно, угол α примерно равен сотой доле радиана, то есть половине градуса. В свою очередь шаг спирали h при поперечном размере молекулы $a \approx 10$ Å составляет несколько тысяч ангстрем, то есть сравним с длиной волны света в видимой части спектра. Мы увидим, что это чрезвычайно ценно.

Избирательное отражение света холестериками

Важнейший оптический эффект, наблюдаемый в холестерической жидкости, заключается в избирательном отражении света слоем холестерика. Холестерические плоскости, как и обычные кристаллические плоскости, могут отражать падающие на них волны. Волны, отраженные разными плоскостями, могут при интерференции и ослаблять, и усиливать друг друга. Если свет падает перпендикулярно плоскостям, то условие усиления таково: между соседними эквивалентными плоскостями должно укладываться строго полволны падающего света. Из рисунка 1, *б* видно, почему так происходит. Мы хотим, чтобы колебания в волнах, отраженных от первой и второй плоскостей, происходили в одинаковых фазах, то есть значения электрического поля $\vec{E}$ в каждой точке и в любое время были одинаковы. При этом амплитуды $\vec{E}_0$ обеих волн складываются — происходит усиление света. Так будет, если волна *2* (см. рис. 1, *б*), вошедшая в кристалл, на пути от первой ко второй плоскости и обратно отстанет от волны *1* ровно на длину волны λ. Но в холестерике такие плоскости находятся на расстоянии $h/2$ друг от друга (на этом расстоянии ось $\vec{n}$ поворачивается на 180°). Поэтому условие усиления в данном случае есть $h/2=\lambda/2$, или $h=\lambda$.

Свойство холестерика отражать свет с избранной длиной волны ($\lambda=h$) обуславливает соответствующую окраску вещества, которая зависит от шага холестерической спирали. А шаг спирали очень сильно зависит от температуры. Обычно вещество при высокой температуре (в изотропном состоянии) бесцветно, затем, в момент перехода в холестерик (при меньшей температуре), синеет (вспомним наблюдение Ф. Рейницера) и при дальнейшем понижении температуры последовательно приобретает все цвета спектра, от синего до красного. Это означает, что по мере охлаждения холестерической жидкости шаг спирали увеличивается, а при нагревании — уменьшается. Такое поведение холестерической спирали нетрудно объяснить.

Напомним, что в силу особенностей взаимодействия молекул с отростками оси $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ не могут образовать между собой слишком малый угол (как, скажем, в кристаллической решетке соседние атомы не могут сближаться на слишком малое расстояние, меньшее диаметра атома). Но с повышением температуры в результате тепловых колебаний молекул в каждом нематическом слое увеличивается разброс молекулярных ориентаций относительно выделенного направления $\vec{n}$ (как в кристалле увеличиваются амплитуды тепловых колебаний атомов). Иными словами, оси отдельных молекул в нематическом слое оказываются не параллельными выделенному направлению $\vec{n}$. Поэтому при нагревании угол между осями $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ соседних слоев должен увеличиваться, чтобы тепловые колебания не приводили к критическому угловому сближению молекул (в кристаллической решетке при нагревании увеличивается среднее расстояние между атомами и наблюдается тепловое расширение тела). Увеличение угла α, характеризующего закручивание осей $\vec{n}$ в пространстве, и вызывает уменьшение шага холестерической спирали по мере увеличения температуры.

Это замечательное явление лежит в основе широкого применения холестериков в качестве простых и эффективных термоиндикаторов для медицинской диагностики, отыскания повреждений в сложных электронных схемах, контроля температурного поля в лопатках турбин и т. п. Сейчас синтезированы холестерические вещества, в которых весь спектр цветов, от красного до синего, наблюдается при изменении температуры всего на 0,01 градуса, что говорит о большой чувствительности устройств на их основе.

Шаг холестерической спирали также очень чувствителен к содержанию примесей в холестерике, и поэтому эти вещества могут служить надежными индикаторами загрязнений в атмосфере.

Жидкие кристаллы — растворы

Жидкокристаллическое состояние можно получить и при растворении подходящих веществ в растворителе, например в воде, который сам по себе не образует жидкий кристалл. При этом получаются самые разные жидкие кристаллы. Если молекулы растворяемого вещества имеют форму стержней — получается нематическая жидкость; если у стержнеобразных молекул имеются отростки — холестерическая жидкость. Можно получить и более сложные состояния.

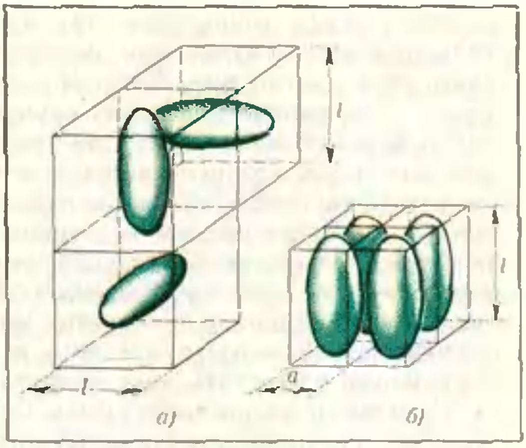


Рис. 3. Зависимость ориентации молекул от их плотности.
а) **низкая плотность;** *б)* **высокая плотность.**

В таких жидких кристаллах важную роль играют не только силы притяжения между молекулами, уже обсуждавшиеся нами, но и силы отталкивания молекул на близких расстояниях. Роль сил отталкивания можно наглядно представить себе следующим образом. В большом объеме при высокой температуре молекулы, например стержнеобразные, не подчиняются никакому ориентационному порядку, то есть поворачиваются в пространстве как угодно. Но чтобы при всевозможных поворотах молекулы не мешали друг другу, не задевали друг друга, надо каждой молекуле отвести в жидкости определенный объем. Этот объем представляет собой кубик с размером ребра, примерно равным длине молекулы l; в пределах такого кубика с объемом l^3 молекула действительно может быть ориентирована как угодно (рис. 3, *а*).

Поместим теперь то же число молекул при той же температуре в меньший объем, то есть повысим плотность системы. В результате на каждую молекулу станет приходиться объем, меньший чем l^3. Как будут размещаться молекулы в этом случае? Естественно, они смогут разместиться в меньшем объеме, если не будут поворачиваться как угодно, задевая друг друга, а займут более или менее параллельные положения. Если размер поперечного сечения молекул a заметно меньше l и на каждую молекулу приходится объем $\sim a^2 l$, то все молекулы должны быть ориентированы одинаково, так как только в этом случае они не задевают друг друга (рис. 3, *б*). Но это может произойти лишь в случае очень высокой плотности. При средней плотности, когда на каждую молекулу приходится объем, меньший чем l^3, но больший чем a^2l, ориентационный порядок будет, конечно, неполным, но все-таки заметным. И связан этот порядок с тем, что молекулы не могут из-за сильного отталкивания проникать друг в друга.

Плотность стержнеобразных молекул можно изменять без заметного изменения общего объема жидкости, когда такие молекулы растворяются в каком-нибудь обычном растворителе, например в воде. Повышая содержание воды в соответствующем растворе, мы получаем обычную неориентированную жидкость. При очень малом же содержании растворителя образуется нематическая или холестерическая жидкость, в зависимости от деталей структуры молекул. Обсуждавшиеся в предыдущей статье растворы полимерных молекул являются как раз такими нематическими жидкими кристаллами.

Работу клеток живого организма во многом определяют жидкие кристаллы — растворы, которые образуются из специальных молекул. Эти молекулы устроены более сложно. Их взаимодействие друг с другом и с молекулами растворителя характеризуется силами отталкивания и силами электростатического притяжения. Такая молекула схематически изображена на рисунке 4, *а*. Она состоит из небольшой головки, представляющей собой электрический диполь, и длинного незаряженного хвоста. Напомним, что молекулы воды — тоже электрические диполи. Противоположно заряженные концы диполей притягиваются друг к другу, и поэтому молекулярные головки притягивают воду. В то же время хвосты молекул химически устроены так, что они отталкивают воду, как молекулы жиров или воска.

Частично твердые жидкие кристаллы

Строение особых молекул, описанных выше, объясняет большое разнообразие структуры жидких крис-

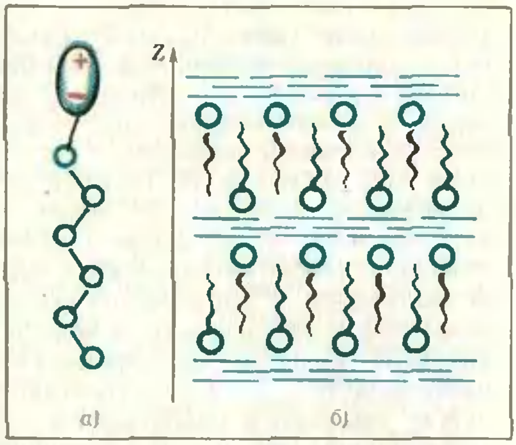


Рис. 4. Водный раствор — жидкий кристалл. *а)* **дипольная молекула;** *б)* **стопка жидких слоев (смектик).**

таллов — растворов. Например, при определенной концентрации таких молекул в воде могут получаться жидкие кристаллы, в которых молекулы не только одинаково ориентируются, но и образуют жесткую кристаллическую решетку. Только эта решетка лишь отчасти похожа на обычную решетку твердого тела, периодическую в трех взаимно перпендикулярных направлениях. Таких направлений в особых жидких кристаллах может быть только два или даже одно.

На рисунке 4, *б* изображена стопка слоев, образующихся при не очень малой концентрации молекул в воде. Хвосты молекул как бы «прячутся» от воды за оболочками из дипольных головок. Вода является прослойкой между двойными слоями молекул. Стопка таких слоев образует кристаллическую решетку, периодическую только в одном направлении — вдоль оси Z. В этом направлении жесткость решетки почти такая же, как в твердом теле, в то время как в поперечных направлениях слои могут свободно скользить, то есть вдоль слоев система ведет себя как жидкость. Такая структура сродни мылу, поэтому такие жидкие кристаллы называются смектическими. Они похожи на холестерики своей слоистостью, но периоды решеток в этих двух случаях совершенно различны. В холестериках период составляет несколько тысяч ангстрем, а в смектиках —

несколько десятков ангстрем (что соответствует длине молекулы).

При определенной концентрации раствора возникает кристаллическая решетка, периодическая в двух направлениях. При этом дипольные молекулы собираются в жидкие столбики или «нити», которые, собственно, и образуют такую решетку, похожую на стопку карандашей (рис. 5, *а*). Подобные отчасти твердые кристаллы существуют не только в растворах. Ими могут быть и отдельные вещества, изменяющие свое состояние при изменении температуры. При этом обычно с понижением температуры состояния меняются в такой последовательности: обыкновенная жидкость — нематическая жидкость или холестерик — смектик — твердый кристалл. Долгое время не находили жидкокристаллических веществ с решетками, периодическими в двух направлениях, но недавно были обнаружены и они. На рисунке 5,*б* изображена такая решетка, образованная жидкими столбиками дискообразных молекул. Интересно, что в последнем случае существует и ориентационный порядок: плоскости дисков в столбике параллельны друг другу, хотя центры дисков располагаются совершенно хаотически вдоль оси жидкого столбика.

Структура жидких кристаллов — растворов имеет огромное значение для жизнедеятельности организма, например для циркуляции крови, переноса ею кислорода, функционирования клеток мозга, для работы разнообразных клеточных мембран. Такие мембраны часто имеют структуру типа изображенной на рисунке 4,*б*; дефекты этой структуры приводят к заболеванию организма. Образование холестерических и тем более смектических жидких кристаллов в крови вызывает сердечно-сосудистые заболевания. При неблагоприятной концентрации различных компонент в желчи образуются сначала неполностью твердые кристаллы, а затем и «камни». Эти примеры можно было бы продолжить. Вот еще два.

Первый пример связан с выражением «холестерин в крови», которым пользуются и врачи, и не специалисты, чтобы указать на заболевание, выражающееся в закупорке кровеносных сосудов. Это как раз тот случай, когда «хороший» (то есть с совершенной структурой) холестерический жидкий кристалл, образовавшийся в результате болезни, является плохим симптомом. Действительно, мы уже отмечали, что холестерик обладает хорошей текучестью только вдоль нематических слоев, в то время как в поперечном направлении он скорее походит на твердое тело. Поэтому, когда в кровеносном сосуде появляются кусочки холестерических спиралей, расположенные так, что поток крови должен протекать сквозь нематические слои, сопротивление этому потоку очень сильно возрастает — сосуд закупоривается.

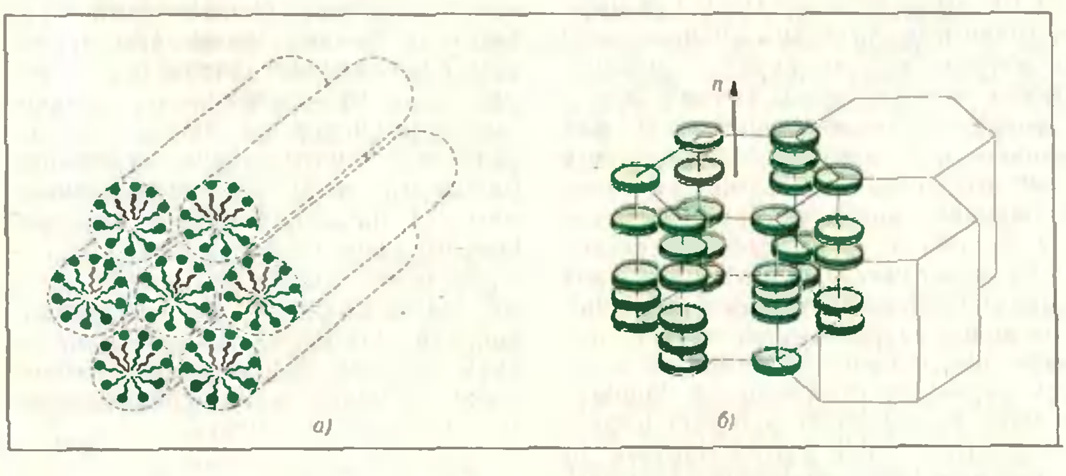


Рис. 5. Кристаллическая решетка, периодическая в двух направлениях. *а)* жидкие «нити» в растворе; *б)* жидкие «нити» из молекул-дисков.

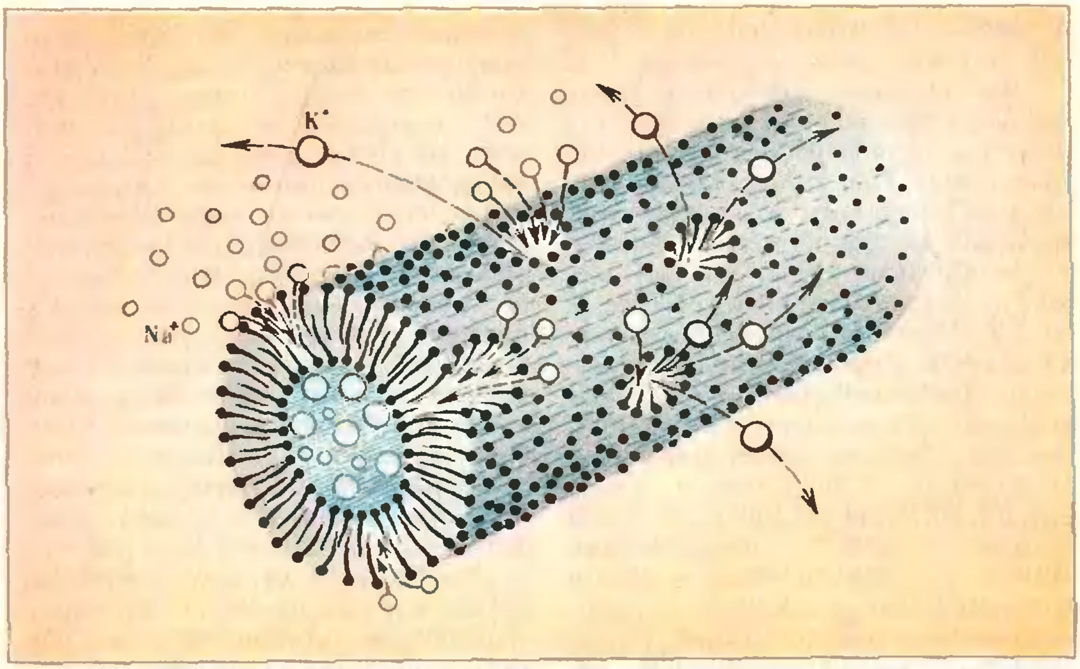


Рис. 6. Нервное волокно в состоянии возбуждения. Показаны «каналы» в жидкокристаллической оболочке, сквозь которые проходят ионы K^+ и Na^+.

Другой пример — мембраны в нервных волокнах и в волокнах сердечной мышцы. В таких волокнах распространяются возбуждения, представляющие собой электрические импульсы. В волокне смектик в виде цилиндрической оболочки (мембраны) окружает канал с протоплазмой, хорошо проводящей электрический ток. Основная роль в распространении электрических импульсов принадлежит мембране. В состоянии покоя между наружной поверхностью волокна и протоплазмой существует разность потенциалов (около 0,1 В), вызванная различной концентрацией положительных ионов калия и натрия вне и внутри волокна. Внутри волокна ионов калия в 50 раз больше, а ионов натрия в 10 раз меньше, чем снаружи. Это связано с тем, что ионы калия гораздо легче проникают сквозь мембрану, чем ионы натрия. В возбужденном состоянии резко увеличивается натриевая проницаемость мембраны, причем поток ионов натрия внутрь клетки сначала выравнивает потенциалы, а затем заряжает протоплазму положительно. После этого начинает нарастать поток ионов калия наружу до восстановления первоначальной разности потенциалов.

Какую же роль здесь играет смектик? Есть основания полагать, что во время возбуждения молекулы с длинными хвостами поворачиваются в месте воздуждения на 90° и даже на 180°. Это сильно облегчает прохождение ионов сквозь смектический слой, так как на участке возбуждения смектик как бы расплавляется. Сквозь такие жидкие каналы в первую очередь проникают ионы натрия, имеющие небольшой диаметр; затем наступает очередь больших ионов калия (рис. 6). Процесс перехода ионов должен завершиться полным «залечиванием» смектической мембраны в данном месте. Тем временем возбуждение передается соседнему участку мембраны, на котором повторяется тот же процесс. В результате электрические колебания распространяются по нервным волокнам и в сердечной мышце (так же, как это происходит в кабеле).

Хочется подчеркнуть, что здесь мы только прикоснулись к проблеме, которая еще далеко не решена, но путь решения, несомненно, проходит через изучение жидкокристаллического состояния вещества.

М. Крейн, А. Нудельман

Замечательные пределы, порождаемые классическими средними

Для двух положительных чисел a и b, как известно, *средним арифметическим* называется число $\frac{a+b}{2}$, *средним геометрическим* — число $\sqrt{ab}$. Реже, чем эти средние, встречается *среднее гармоническое* $\frac{2ab}{a+b}$ (ему равна, например, средняя скорость автомобиля, проехавшего первую половину пути со скоростью a, вторую — со скоростью b). Каждое из этих средних расположено между числами a и b (убедитесь в этом).

Легко проверяется справедливость неравенств

$$\frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} \qquad (1)$$

для любых положительных $a \neq b$*).

Мы займемся здесь следующим вопросом. Пусть даны два положительных числа a и b, $a < b$. Вычислив какую-нибудь пару средних этих чисел, получим числа a_1 и b_1. Затем для чисел a_1 и b_1 вычислим те же средние — получим числа a_2 и b_2. С ними повторим ту же процедуру и так далее. В результате получим последовательности (a_n) и (b_n).

Например, взяв среднее геометрическое и среднее арифметическое и отправляясь от чисел 1 и 3, получаем

$$\begin{aligned} &a_1 = \sqrt{3} \approx 1{,}732050808, && b_1 = 2;\\ &a_2 \approx 1{,}861209718, && b_2 \approx 1{,}866025404;\\ &a_3 \approx 1{,}863616006, && b_3 \approx 1{,}863617561;\\ &a_4 \approx 1{,}863616784, && b_4 \approx 1{,}863616784;\end{aligned}$$

и т. д.

Мы видим, что в нашем примере последовательности (a_n) и (b_n) очень быстро сближаются. Всегда ли так будет? Оказывается, подобные последовательности всегда имеют общий предел — это доказывается сравнительно легко. Но как найти значение этого предела?

Арифметико-гармоническое среднее

Мы начнем со случая, когда выбранная пара средних — это среднее г а р м о н и ч е с к о е и среднее а р и ф м е т и ч е с к о е; таким образом, члены последовательностей (a_n) и (b_n) определяются формулами

$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}, \quad b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \qquad (2)$$

$$(n=0, 1, 2, \ldots;\ a_0 = a,\ b_0 = b).$$

Задача о нахождении их общего предела предлагалась на II командной олимпиаде школ города Омска («Квант», 1979, № 12).

Из неравенств (1) следует

$$a < a_n < a_{n+1} < b_{n+1} < b_n < b,$$

то есть последовательность (a_n) возрастает «навстречу» убывающей последовательности (b_n).

Таким образом, обе последовательности монотонны и ограничены; следовательно, по теореме Вейерштрасса («Алгебра и начала анализа 9», п. 32) они имеют пределы $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\beta = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Перейдя к пределу в одном из равенств (2), получим

$$\beta = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n+b_n}{2} = \frac{1}{2}\left(\lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n\right) = \frac{1}{2}(\alpha+\beta),$$

откуда $\alpha = \beta$: последовательности (a_n), (b_n) имеют общий предел. Этот предел называется *арифметико-гармоническим средним* чисел a и b. Найдем его. Из (2)

*) Неравенствам (1) посвящена интересная статья З. А. Скопеца «Сравнение различных средних двух положительных чисел» («Квант», 1971, № 2).

$a_{n+1}\cdot b_{n+1}=a_n\cdot b_n=\ldots=a_1b_1=ab$, поэтому $\alpha^2=(\lim\limits_{n\to\infty}a_n)^2=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\times\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\times b_n)=ab$, откуда

$$\boxed{\alpha=\sqrt{ab}=\beta,}$$

(арифметико-гармоническое среднее совпадает со средним геометрическим).

Упражнение 1. *Докажите, что* $b_n-a_n<\frac{b-a}{2^n}$.

Таким образом, последовательности (a_n) и (b_n) достаточно быстро сходятся к $\sqrt{ab}$. Поэтому они могут оказаться полезными для приближенного вычисления квадратных корней. Для вычисления $\sqrt{c}$ нужно начинать последовательности (a_n), (b_n) с таких чисел a и b, что $c=ab$ (например, $a=1$, $b=c$), причем процесс будет сходиться тем быстрее, чем меньше разность между этими множителями (например, для вычисления $\sqrt{56}$ лучше брать не $a=1$, $b=56$, а $a=7$, $b=8$). Легко убедиться, что последовательности (a_n) и (b_n) получаются по формулам

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}\left(b_n+\frac{c}{b_n}\right),\quad a_{n+1}=\frac{c}{b_n}.$$

Для иллюстрации вычислим $\sqrt{12}$, положив $b=4$. Получаем $b_1=\frac{1}{2}\left(4+\frac{12}{4}\right)=3{,}5$, $b_2\approx3{,}464285715$, $b_3\approx\approx3{,}464101620$, $b_4\approx3{,}464101615$ и далее все знаки стабилизируются: $\sqrt{12}\approx3{,}464101615$.

Арифметико-геометрическое среднее

Четырнадцатилетний Карл Фридрих Гаусс*) обнаружил на числовых примерах, что при вычислении последовательностей (a_n) и (b_n) с помощью геометрических и арифметических средних:

$$a_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},\quad b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}\qquad(3)$$

$$(n=0,1,2,\ldots;\ a_0=a,\ b_0=b)$$

эти последовательности очень быстро сближаются.

*) Биографию «Короля математиков» и интересные сведения о его научной деятельности читатель найдет в статье С. Гиндикина «Карл Фридрих Гаусс» («Квант», 1977, № 8).

Упражнение 2. *Докажите существование и совпадение пределов последовательностей* (3).

Этот общий предел называется *арифметико-геометрическим средним* чисел a и b и обозначается через $\mu(a,b)$. Найти явное выражение для $\mu(a,b)$ через a и b очень не просто. Впервые оно было получено Гауссом в результате необычайно остроумных и виртуозных рассуждений и преобразований, использующих свойства так называемых эллиптических интегралов. Приведем это выражение без доказательства*):

$$\boxed{\mu(a,b)=\frac{\pi}{2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{a^2\sin^2x+b^2\cos^2x}}}.}$$

Геометрическо-гармоническое среднее

Если строить последовательности (a_n) и (b_n) с помощью средних гармонических и средних геометрических:

$$a_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n},\quad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}\qquad(4)$$

$$(n=0,1,2,\ldots;\ a_0=a,\ b_0=b),$$

то в этом случае легко доказать, что они сходятся к общему пределу. Назовем его *геометрическо-гармоническим средним* чисел a и b и обозначим через $\nu(a,b)$. Однако ничего существенно нового по сравнению с последовательностями (3) здесь нет, так как из (4) усматриваем, что

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}}{2},\quad\frac{1}{b_{n+1}}=\sqrt{\frac{1}{a_n}\cdot\frac{1}{b_n}}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{\nu(a,b)}=\mu\left(\frac{1}{b},\frac{1}{a}\right),$$

или же, в силу формулы Гаусса,

$$\boxed{\nu(a,b)=\frac{2ab}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{dx}{\sqrt{a^2\cos^2x+b^2\sin^2x}}.}$$

*) Если это выражение использовать «в обратном направлении», получится быстрый способ приближенного вычисления интеграла, стоящего в знаменателе: он равен $\frac{\pi}{2\mu(a,b)}$, а среднее $\mu(a,b)$ вычисляется приближенно с помощью последовательностей (a_n) и (b_n). В наш век ЭВМ эти вычисления можно провести с огромной скоростью и точностью.

Среднее Шваба — Шенберга

Итак, из трех средних: арифметико-гармонического, арифметико-геометрического и геометрическо-гармонического — только первое элементарно выражается через исходные числа a и b. Тем удивительнее, что небольшое изменение последовательностей (3) приводит к последовательностям, общий предел которых также элементарно выражается через a и b («элементарно» не означает, что он находится просто!). Положим

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\quad b_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}b_n} \qquad (5)$$

$(n=0, 1, 2, \ldots;\ a_0=a,\ b_0=b)$.

Упражнение 3. *Докажите существование и совпадение пределов последовательностей (5).*

Этот предел называется *средним Шваба — Шенберга*. Найдем его. Любопытно, что он получается из простых геометрических соображений.

На рисунке 1 изображены равнобедренный треугольник AOB с боковыми сторонами $|OA|=|OB|=b$ и высотой $|OD|=a$ (угол при вершине O обозначен через 2φ), дуга окружности ACB с центром в вершине O и радиуса b ($[OC]\perp[AB]$) и средняя линия $[A_1B_1]$ треугольника ABC.

$$|OD_1|=|OD|+|DD_1|=$$
$$=|OD|+\frac{|DC|}{2}=a+\frac{b-a}{2}=\frac{a+b}{2}=a_1.$$

Из прямоугольного треугольника OA_1C

$$|OA_1|^2=|OD_1||OC|=a_1b,$$
$$|OA_1|=\sqrt{a_1b}=b_1.$$

Таким образом, числа a_1 и b_1 получаются из a и b простым геометрическим построением, причем отрезок длины a_1 опять является высотой из вершины равнобедренного треугольника с боковой стороной длины b_1. Для дальнейшего заметим, что

$$\widehat{A_1OB_1}=\varphi,\ |A_1B_1|=\frac{1}{2}|AB|.$$

Проделав то же построение, отправляясь от треугольника A_1OB_1, получим равнобедренный треугольник A_2OB_2 (рис. 2), у которого $|OD_2|=a_2$, $|OA_2|=|OB_2|=b_2$, $\widehat{A_2OB_2}=\frac{\varphi}{2}$, $|A_2B_2|=\frac{1}{2}|A_1B_1|=\frac{1}{2^2}|AB|$.

Повторив эти построения n раз, придем к треугольнику A_nOB_n, у которого высота $|OD_n|=a_n$, боковые стороны $|OA_n|=|OB_n|=b_n$, $\widehat{A_nOB_n}=\frac{\varphi}{2^{n-1}}$, $|A_nB_n|=\frac{1}{2^n}|AB|$.

Построим теперь дугу окружности радиуса b_n с центральным углом величины 2φ и разделим ее на 2^n конгруэнтных дуг. Последовательно соединив точки деления хордами, получим правильную 2^n-звенную ломаную линию, вписанную в эту дугу; ее длина равна $2^n|A_nB_n|=|AB|$. Эта же ломаная является описанной для дуги окружности радиуса a_n с тем же центром и центральным углом (рис. 3). Так как периметр ломаной заключен между длинами этих дуг,

$$2\varphi a_n<|AB|<2\varphi b_n,$$

откуда

$$2\varphi\lim_{n\to\infty}a_n\leqslant|AB|\leqslant2\varphi\lim_{n\to\infty}b_n.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n$, получаем для общего предела u:

$$u=\frac{\sqrt{b^2-a^2}}{\arccos\dfrac{a}{b}}.$$

Заметим в заключение, что при $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{\sqrt{2}}$ получаем $u=\frac{2}{\pi}$; таким образом, последовательности (5) позволяют вычислять значение π с любой степенью точности.

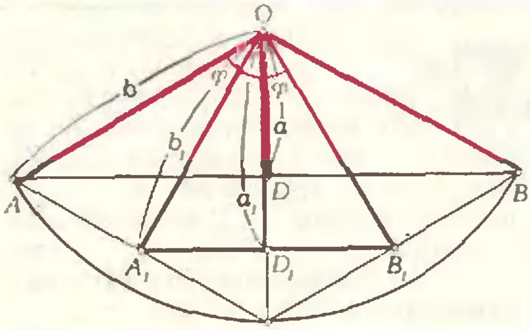


Рис. 1.

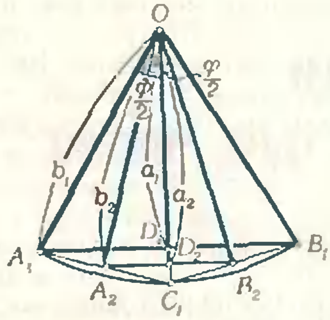


Рис. 2.

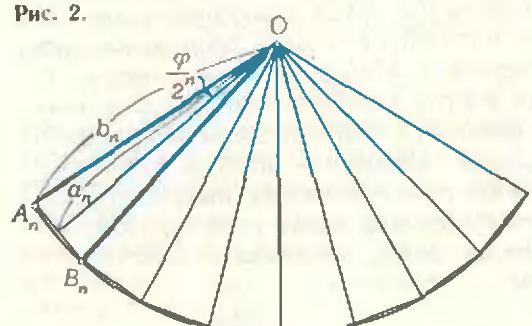


Рис. 3.

И. Яглом

Почти простые числа

Как в математике делаются открытия? Часто — так же, как в других науках: подмеченный факт исследователь пытается включить в качестве частного случая в общую закономерность. Найти эту закономерность не всегда удается, и математик, как и любой другой исследователь, действует «методом проб и ошибок». Как при этом могут выглядеть его рассуждения, когда речь идет о делимости чисел, рассказано в этой статье.

1. Малая теорема Ферма

Ясно, что квадрат n^2 натурального числа n будет четным или нечетным одновременно с самим числом n. Таким образом, числа n^2 и n всегда будут одновременно четными или одновременно нечетными, то есть справедливо

Утверждение 1. *Разность n^2-n делится на 2 при любом n.*

Рассмотрим теперь разность n^3-n. Конечно, на 2 эта разность тоже всегда будет делиться: ведь числа n^3 и n также будут четными или нечетными одновременно. Но, более того, эта разность всегда делится и на 3. В самом деле, число n либо делится на 3 (то есть имеет вид $3k$), либо дает при делении на 3 остаток 1 (имеет вид $n=3k+1$), либо дает при делении на 3 остаток 2 (тогда его можно представить в виде $n=3k+2=3(k+1)-1=3(k'-1)$.

Если n делится на 3, то и n^3 делится на 3. Если же n имеет вид $3k\pm1$, то

$$n^3=(3k\pm1)^3=3(9k^3\pm9k^2+3k)\pm1,$$

то есть $n^3=3l\pm1$.

Во всех случаях разность n^3-n кратна 3. Итак, имеет место

Утверждение 2. *Разность n^3-n делится на 3 при любом n.*

Упражнения

1. Докажите утверждения 1 и 2 разложением многочленов n^2-n и n^3-n на множители.
2. Докажите, что разность n^3-n делится на 6 при любом n.

Утверждения 1 и 2 внушают надежду, что справедлива

Гипотеза 1. *Разность n^m-n делится на m при любых m и n.*

Увы! Легко набрести на контрпример, опровергающий эту гипотезу: разность $2^4-2=14$ не делится на 4.

Все же хотелось бы надеяться, что сходство между утверждениями 1 и 2 не является случайным. Попробуем проверить разность n^5-n. Например, $2^5-2=30$ делится на 5. Легко установить, что это не случайно, и справедливо

Утверждение 3. *Разность n^5-n делится на 5 при любом n.*

В самом деле, число n либо делится на 5, либо дает при делении на 5 один из остатков 1, 4 (в этих случаях оно представимо в виде $5k\pm1$), либо дает при делении на 5 один из остатков 2, 3 (тогда $n=5k\pm2$). Если n делится на 5, то и n^5 делится на 5. Если $n=5k\pm1$, то

$$n^2=(5k\pm1)^2=5(5k^2\pm2k)+1.$$

Если $n=5k\pm2$, то

$$n^2=(5k\pm2)^2=5(5k^2\pm4k+1)-1.$$

Таким образом, если n не делится на 5, то число n^2 имеет вид $5L\pm1$ и

$$n^4=(5L\pm1)^2=5(5L^2\pm2L)+1$$

дает при делении на 5 остаток 1. Отсюда следует, что разность n^4-1, а значит и разность $n^5-n=n(n^4-1)$, делится на 5.

Теперь мы имеем уже три похожих утверждения. Это заставляет нас продолжать поиск. Разность

$2^6-2=62$ на 6 не делится, зато $2^7-2=126$ на 7 делится. Случайно ли это? Попробуем исследовать разность n^7-n.

Если n делится на 7, то и n^7-n, разумеется, тоже делится на 7.

Если же n не делится на 7, оно должно иметь один из трех видов: $7k\pm1$ (такой вид имеют числа, дающие при делении на 7 остатки 1 и 6), $7k\pm2$ (в случае остатков 2 и 5), $7k\pm3$ (при остатках 3 и 4). Поскольку

$$(7k\pm a)^2=7(7k^2\pm2ka)+a^2,$$

квадраты n^2 всех чисел n, не делящихся на 7, имеют при делении на 7 либо остаток 1, либо остаток 4, либо остаток 2 $(3^2=7+2)$. Таким образом, для таких n число n^2 имеет вид $7L+c$, где c равно 1, 2 или 4. Для всех этих значений c число c^3 дает при делении на 7 остаток 1. Поэтому

$$n^6=(n^2)^3=(7L+c)^3=\\=7(49L^3+21L^2c+3Lc^2)+c^3$$

при делении на 7 дает остаток 1. Отсюда следует, что разность n^6-1, а значит и разность $n^7-n=n(n^6-1)$, делится на 7. Итак, имеет место

Утверждение 4. *Разность n^7-n делится на 7 при любом n.*

Упражнения

3. Докажите утверждения 3 и 4 разложением многочленов n^5-n и n^7-n на множители.

4. Докажите, что разность n^5-n делится на 30 при любом n.

Теперь нас больше не смущает, что $2^8-2=258$ не делится на 8 — возможно, утверждение 1 было исключением, и у нас на основании утверждений 2 — 4 возникает

Гипотеза 2. *Разность n^m-n делится на m при любом n и любом нечетном m.*

Впрочем, и эта гипотеза, увы!, не выдерживает дальнейшей проверки: разность $2^9-2=510$ не делится на 9. Зато снова оказываются верными

Утверждение 5. *Разность $n^{11}-n$ делится на 11 при любом n.*

Утверждение 6. *Разность $n^{13}-n$ делится на 13 при любом n.*

Упражнение 5. Докажите утверждения 5 и 6.

Поскольку мы сейчас занимаемся гипотезой 2, нас не очень огорчит, что разности $2^{10}-2=1022$, $2^{12}-2=4094$ и $2^{14}-2=16\,382$ не делятся соответственно на 10, 12, 14. Несколько обиднее, что и разность $2^{15}-2=32\,766$ не делится на 15: значит, гипотеза 2 «существенно неверна» — случай $n=9$ является не единственным контрпримером.

Если мы не поленимся возводить число 2 в достаточно большие степени, мы сможем проверить, что разности $2^{17}-2=131\,070$ и $2^{19}-2=$ $=524\,286$ делятся соответственно на 17 и 19. Возникают гипотезы:

Гипотеза 3. *Разность $n^{17}-n$ делится на 17 при любом n.*

Гипотеза 4. *Разность $n^{19}-n$ делится на 19 при любом n.*

Упражнение 6. Докажите гипотезы 3 и 4.

Просуммируем полученные результаты: разность n^m-n делится на m при любом n, если

$$m=2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19,\quad (*)$$

для остальных рассмотренных нами значений m ($m=4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15$) это утверждение оказалось ложным. Но числа (*) нам хорошо знакомы, это — не что иное, как простые числа. Возникает гипотеза, что верна

Теорема 1. *Разность n^m-n делится на m при любом n и любом простом m.*

Эта теорема действительно верна. Замечательный французский математик Пьер Ферма*) сформулировал ее (без доказательства) в 1640 г. в одном из своих писем. Ныне она называется *малой теоремой Ферма*. Первое дошедшее до нас ее доказательство принадлежит Леонарду Эйлеру (опубликовано в 1741 г.). Доказательство малой теоремы Ферма можно прочесть и в «Кванте» — 1972, № 10 с. 2, или 1978, № 10, с. 7.

Упражнение 7. Докажите, что разность $m^{61}\cdot n-m\cdot n^{61}$ делится на 56 786 730 при любых m и n.

*) О Ферма можно прочесть в «Кванте», 1976, № 8.

2. Почти простые числа

Вспомним, как мы в предыдущем пункте пришли к малой теореме Ферма. Фиксировав m, мы выяснили, все ли разности n^m-n делятся на m. Чтобы сформулировать правдоподобную гипотезу, мы каждый раз сначала проверяли, делится ли на m число 2^m-2. При всех рассмотренных п р о с т ы х m разность 2^m-2 делилась на m, при с о с т а в н ы х — не делилась. Естественно возникает

Г и п о т е з а 5. *Разность 2^m-2 делится на m при простом m и не делится — при составном**).

Гипотезу 5 высказали еще древнекитайские математики — около 2,5 тысячи лет назад.

В древнем Китае, как и во всех других предшествующих древней Греции цивилизациях (Вавилоне, Древнем Египте и т. д.), математика была не дедуктивной, а рецептурной наукой. Основную роль в математике играли не выводы, а факты, причем вопрос о том, как тот или иной факт был установлен, не считался особенно важным: достаточно правдоподобная догадка вполне могла заменить доказательство. Выписав несколько десятков первых чисел $N_m=2^m-2$ $(m=2,\ 3,\ 4,\ \ldots)$ и проверив, какие из них делятся на m, а какие не делятся, древнекитайские математики уверились в справедливости гипотезы 5 и зафиксировали ее как теорему. Однако мы с вами — не древние китайцы. Великие Евклид и Архимед (а еще ранее их — и Пифагор, и Платон, и Аристотель) убедили нас, что сущность математики состоит именно в д о к а з а т е л ь с т в а х, без которых никакое утверждение нельзя считать верным.

Назовем натуральное число $m\neq 1$ *почти простым*, если разность 2^m-2 делится на m.

В силу малой теоремы Ферма любое простое число является почти простым. Поэтому гипотезу 5 можно переформулировать так:

Г и п о т е з а 5′. *Каждое почти простое число является простым.*

*) Первая «половина» гипотезы 5 является, конечно, частным случаем малой теоремы Ферма.

Мы уже сказали, что древнекитайские математики рассмотрели делимость на m нескольких десятков первых чисел N_m и не нашли опровергающих примеров. Сегодня, с помощью ЭВМ, нетрудно было бы проверить делимость на m нескольких с о т е н первых чисел N_m. Однако и тут опровергнуть гипотезу 5 было бы непросто: среди первых 300 натуральных чисел мы бы не нашли почти простых чисел, не являющихся простыми. Однако гипотеза 5 все-таки неверна, то есть справедлива

Т е о р е м а 2. *Существуют почти простые числа, не являющиеся простыми.*

Самым маленьким таким числом является 341. Найти его было нелегко, доказать же, что оно — почти простое, совсем несложно, если к нашим услугам будет

Л е м м а 1. *Разность n^m-1 делится на $n-1$ при любых m и n*, вытекающая из тождества

$$n^m-1=(n-1)(n^{m-1}+n^{m-2}+\ldots+n+1).$$

В силу этой леммы

$$N_{341}=2^{341}-2=2(2^{340}-1)=2[(2^{10})^{34}-1]$$

делится на $2^{10}-1=1023=3\cdot 341$, а значит, и на 341.

Теперь легко может быть доказана гораздо более сильная

Т е о р е м а 3. *Существует бесконечно много почти простых чисел, не являющихся простыми.*

Эта теорема, очевидно, следует из такой леммы:

Л е м м а 2. *Если m — почти простое число, не являющееся простым, то и $m_1=2^m-1$ — почти простое число, не являющееся простым, причем $m_1>m$.*

В самом деле, так как m — не простое, $m=kL$, где $k>1$, $L>1$. Тогда, в силу леммы 1,

$$m_1=2^m-1=2^{kL}-1=(2^k)^L-1$$

делится на 2^k-1. Из $L>1$ следует $2^k-1<m_1$. Из $k>1$ вытекает $2^k-1>1$. Значит, m_1 — не простое.

Так как m — почти простое, $m_1-1=2^m-2=N_m$ делится на m: $N_m=mn$. Поэтому, в силу леммы 1,

$$2^{m_1-1}-1=2^{mn}-1=(2^m)^n-1$$

делится на $m_1=2^m-1$, а значит, и

$$N_{m_1}=2^{m_1}-2=2(2^{m_1-1}-1)$$

также делится на m_1, то есть m_1 — почти простое.

Наконец, из $m_1>1$ вытекает $m_1>m$.

Из теоремы 2 и леммы 2 следует *бесконечность множества нечетных почти простых чисел, не являющихся простыми.*

В 1926 г. француз П. Пуле (P. Poulet) составил полную таблицу всех нечетных почти простых чисел, не являющихся простыми и не превосходящих 5 000 000 000 (этих чисел оказалось довольно много); в 1928 г. он опубликовал таблицу всех таких чисел в пределах от 50 000 000 до 100 000 000. Однако вопрос о существовании четных почти простых чисел, отличных от простого числа 2, долго оставался открытым. Первое такое число 161 038 нашел в 1950 г. американец Д. Лемер (D. Lehmer). В 1951 г. голландец Н. Бегер (N. G. W. Beeger) доказал *бесконечность множества четных почти простых чисел.*

Упражнения

8. Докажите, что следующие (составные) числа являются почти простыми: а) 561, б) 2047, в) 161 038.

9. Существуют ли такие числа $m>1$, что на m делится число: а) 2^m-1, б) 2^m+1, в) 2^m+2, г) $2^{m-1}-1$?

3. Совсем почти простые числа

Все делители простого числа m, отличные от 1, — простые числа (такой делитель один — само m). Назовем натуральное число $m\neq 1$ *совсем почти простым*, если все его делители, отличные от 1, являются почти простыми числами.

Ясно, что *каждое простое число* одновременно *является и совсем почти простым, а каждое совсем почти простое число — почти простым.* Легко устанавливается

Теорема 4. *Существуют совсем почти простые числа, не являющиеся простыми.*

Например, $341=11\cdot 31$ — такое число, причем, очевидно, наименьшее из таких чисел.

В 1936 г. уже упоминавшийся американский математик Д. Лемер доказал, что существует бесконечно много почти простых чисел, разлагающихся, подобно числу 341, в произведение двух простых множителей. Так как все эти числа, очевидно, являются совсем почти простыми, *существует бесконечно много совсем почти простых чисел, не являющихся простыми.*

Упражнения

10. Являются ли совсем почти простыми следующие почти простые числа: а) 561, б) 2047?

11. Докажите, что ни одно четное почти простое число, отличное от 2, не может быть совсем почти простым.

Из результата упражнения 10 вытекает, что не все почти простые числа являются совсем почти простыми. Из упражнения 11 и указанного выше результата Н. Бегера следует, что *существует бесконечно много почти простых чисел, не являющихся совсем почти простыми.*

Заключительная серия упражнений связана с изучением тех чисел m, для которых выполняется утверждение малой теоремы Ферма, то есть таких m, что при любом n разность n^m-n делится на m.

Упражнения

12. Существуют ли такие составные числа m, что разность 3^m-3 делится на m?

13. Для любого ли натурального n существуют такие составные m, что разность n^m-n делится на m?

14. Докажите, что $3^{341}-3$ не делится на 341.

15. Докажите, что существуют такие составные числа m, что при любом n разность n^m-n делится на n.

Указание. Рассмотрите числа 561, 2821, 10 585, 15 841.

Отметим, наконец, что ни один человек в мире не знает сегодня:

I. Конечно ли множество чисел, названных в задаче 15?

II. Есть ли среди них четные числа?

В заключение считаю необходимым указать, что термины «почти простые» и «совсем почти простые» были введены автором при написании данной статьи.

задачник Кванта

Задачи

М701 — М705; Ф713 — Ф717

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 ноября 1981 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 9—81» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М701, М702» или «Ф713». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М701. Люда, Марина и Наташа нарисовали остроугольный треугольник LMN. Затем Люда построила свой треугольник, у которого длины двух сторон равны $|LM|$ и $|LN|$, а угол между ними на 60° больше угла L треугольника LMN. Точно так же Марина построила свой треугольник со сторонами длины $|ML|$ и $|MN|$, угол между которыми на 60° больше $\hat{M}$, а Наташа — свой, у которого угол между сторонами $|NL|$ и $|NM|$ равен $\hat{N}+60°$. Докажите, что третьи (новые) стороны треугольников у всех трех девочек одинаковы.

А. Каплан

М702. Обозначим через S_n сумму первых n простых чисел: $S_1=2$, $S_2=2+3=5$, $S_3=2+3+5=10$, $S_4=17$ и т. д. Докажите, что при любом n между S_n и S_{n+1} встречается точный квадрат.

И. Жук

М703*. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3\left(x+\frac{1}{x}\right)=4\left(y+\frac{1}{y}\right)=5\left(z+\frac{1}{z}\right), \\ xy+yz+zx=1. \end{cases}$$

А. Федоров

М704*. Вокруг квадрата описан параллелограмм (вершины квадрата лежат на разных сторонах параллелограмма). Докажите, что перпендикуляры, опущенные из вершин параллелограмма на стороны квадрата, образуют новый квадрат (рис. 1).

Н. Васильев

М705. На прямоугольном листе клетчатой бумаги расположено несколько прямоугольных карточек, стороны которых лежат на линиях сетки. Карточки покрывают лист в два слоя (то есть каждую клетку листа покрывают в точности две карточки).
а) Пусть каждая карточка имеет размеры 1×2 клетки. Докажите, что можно выбрать часть карточек так, чтобы они покрывали лист в один слой. (Передвигать карточки нельзя.)
Останется ли это верным, если карточки
б) могут иметь произвольные размеры,
в)* имеют размеры 1×3 клетки?

Г. Гальперин, В. Произволов

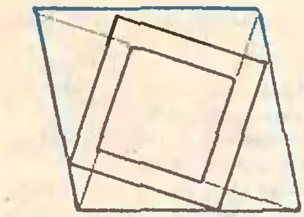


Рис. 1.

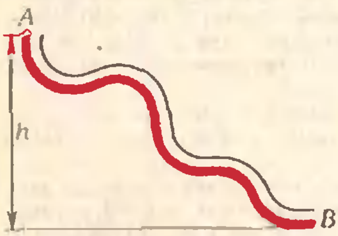


Рис. 2.

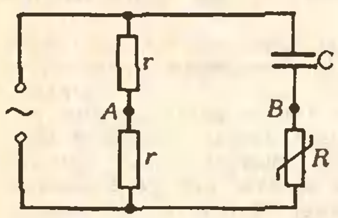


Рис. 3.

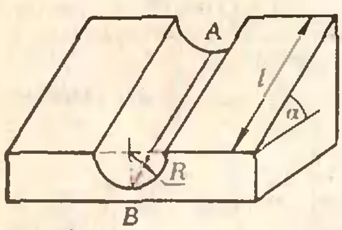


Рис. 4.

Ф713*). Гибкий трубопровод длины l соединяет в пространстве точки A и B, разность высот между которыми равна h (рис. 2). Внутри трубопровода по всей его длине лежит веревка, которую удерживают в точке A. С каким ускорением начнет двигаться веревка в первый момент времени, после того как ее отпустят? Трением между веревкой и стенками трубопровода пренебречь.

Ф714. В закрытом сосуде на поверхности воды плавает шар. Как изменится глубина погружения шара, если в сосуд накачать воздух так, чтобы давление воздуха в сосуде увеличилось в два раза?

Ф715. Как зависит напряжение между точками A и B (рис. 3) от сопротивления резистора R?

Ф716. Из куска тонкой стальной ленты ширины d, в которой пробито небольшое отверстие радиуса r, сделали обруч и поставили его на стол так, что отверстие оказалось внизу. Из этого положения обруч немного сместили и предоставили самому себе. Чему равно максимальное значение скорости качения обруча?

Ф717. Маленький шарик скользит без трения по цилиндрическому желобу радиуса R, ось которого наклонена под углом α к горизонту; длина желоба равна l (рис. 4). Сколько раз шарик пересечет линию AB, если он начал свое движение вблизи точки A?

---

*) Задачи по физике, вошедшие в этот выпуск Задачника «Кванта», взяты из архива И. Ш. Слободецкого, который в течение многих лет вел этот раздел в нашем журнале.

Решение задач

М661 — М665; Ф673 — Ф677

М661. *На берегу круглого озера четыре пристани: K, L, P, Q. От пристани K отплывает катер, от L — лодка. Если катер поплывет прямо в P, а лодка — прямо в Q, то они столкнутся в некоторой точке X озера. Докажите, что если катер поплывет в Q, а лодка — в P, то они достигнут этих пристаней одновременно.*

Разумеется, в условии предполагается, что катер движется с постоянной скоростью u, а лодка — с постоянной скоростью v. Из подобия треугольников KXQ и LXP $\frac{|KX|}{|LX|}=\frac{|KQ|}{|LP|}$. Поскольку катер и лодка достигают точки X одновременно, $\frac{|KX|}{u}=\frac{|LX|}{v}$, откуда $\frac{|KQ|}{|LP|}=\frac{u}{v}$, то есть $\frac{|KQ|}{u}=\frac{|LP|}{v}$.

Н. Васильев

М662. *В копилке собрано четыре рубля медными монетами. Докажите, что этими монетами можно заплатить три рубля без сдачи.*

Достаточно доказать, что можно заплатить без сдачи один рубль.

В копилке могут находиться монеты четырех видов: однокопеечные, двухкопеечные, трехкопеечные и пятаки. Поэтому монет какого-то вида не меньше рубля.

Если это — пятаки, двухкопеечные или однокопеечные, то ясно, что можно заплатить рубль без сдачи.

Рассмотрим поэтому случай, когда больше, чем на рубль, трехкопеечных монет, а монет каждого другого вида меньше, чем на рубль.

Если в копилке есть хотя бы одна однокопеечная монета, то, добавляя ее к 33 трехкопеечным, получаем рубль.

Если есть две двухкопеечные или два пятака, то, добавляя к 32 (соответственно к 30) трехкопеечным, получаем рубль.

Остается, таким образом, один случай, когда однокопеечных монет нет, двухкопеечных меньше двух, пятаков тоже меньше двух.

Если пятаков нет, то двухкопеечных монет не меньше двух (398 не делится на 3); если двухкопеечных нет, то пятаков не меньше двух (395 не делится на 3). Итак, в рассматриваемом случае есть один пятак и одна двухкопеечная, и мы можем набрать рубль, добавив один пятак и одну двухкопеечную к 31 трехкопеечной монете.

Интересно разобраться, какие вообще суммы могут быть уплачены без сдачи при четырехрублевом наборе медных монет в копилке.

Например, если в копилке только двухкопеечные монеты, то не может быть уплачена никакая нечетная сумма; если только пятаки, то — никакая сумма, не делящаяся на 5; если, наконец, в копилке 133 трехкопеечных и одна однокопеечная, то не может быть уплачена никакая сумма, которая при делении на 3 дает в остатке 2.

Значит, если некоторая сумма может быть уплачена при любом четырехрублевом наборе медных монет в копилке, то она делится на 10 и при делении на 3 не дает в остатке 2. Все ли такие суммы могут быть уплачены?

А. Кушниренко

◆

М663. *Найдите все простые числа p, для которых число 2^p+p^2 — тоже простое.*

При $p=2$ получается составное число 8, при $p=3$ — простое число 17.

Докажем, что при простом $p>3$ число 2^p+p^2 всегда делится на 3.

Действительно, $p=3k\pm 1$ при некотором натуральном k. Поэтому

$$2^p+p^2=(3-1)^{3k\pm 1}+(3k\pm 1)^2=(3M-1)+(3N+1)=3(M+N).$$

Можно рассуждать иначе. Из нечетного p следует, что $2^p+1=(2+1)(2^{p-1}-2^{p-2}+\ldots+1)$. Значит, 2^{p-1} делится на 3. Поскольку p не делится на 3, $p^2-1=(p-1)(p+1)$ делится на 3. Отсюда следует делимость на 3 суммы $(2^p+1)+(p^2-1)=$ $=2^p+p^2$.

С. Майзус

◆

М664. *Дан четырехугольник $ABCD$ площади S. Обозначим точки пересечения высот треугольников ABC, BCD, CDA, DAB через H, K, L, M соответственно. Докажите, что площадь прямоугольника $HKLM$ тоже равна S.*

Самое простое аналитическое решение этой задачи получается с помощью операции *псевдоскалярного произведения векторов:* $\vec{a}\wedge\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\sin\varphi$, где φ — угол, на который нужно повернуть вектор $\vec{a}$ против часовой стрелки, чтобы его направление совпало с направлением вектора $\vec{b}$. Геометрический смысл числа $\vec{a}\wedge\vec{b}$ — ориентированная площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 1). Нужные нам свойства:

1°. $(\vec{a}+\vec{b})\wedge\vec{c}=\vec{a}\wedge\vec{c}+\vec{b}\wedge\vec{c}$,

2°. $\vec{a}\wedge\vec{b}=-\vec{b}\wedge\vec{a}$.

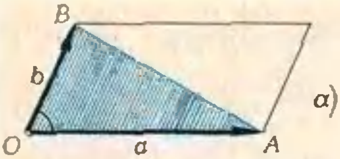


Рис. 1,а. $\vec{a} \wedge \vec{b} = 2S_{\triangle AOB}$, **если $\triangle AOB$ ориентирован положительно — против часовой стрелки.**

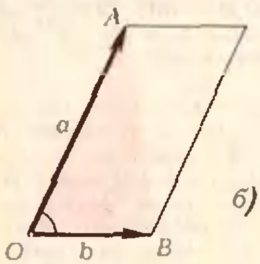


Рис. 1,б. $\vec{a} \wedge \vec{b} = -2S_{\triangle AOB}$, **если $\triangle AOB$ ориентирован отрицательно.**

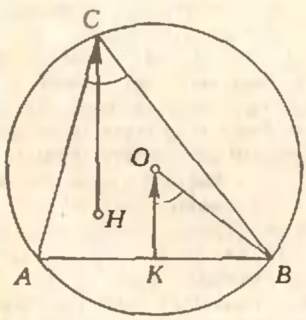


Рис. 2. $\overrightarrow{HC} = 2\overrightarrow{KO} - \operatorname{ctg} \hat{C} \times R^{90^\circ}(\overrightarrow{AB})$.

3°. $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны следуют из того, что $\vec{a} \wedge \vec{b}$ равно скалярному произведению векторов $\vec{b}$ и $R^{90^\circ}(\vec{a})$.

Удобно ввести «симметричные» обозначения: пусть $A_1A_2A_3A_4$ — данный четырехугольник, H_1, H_2, H_3 и H_4 — точки пересечения высот треугольников $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ и $A_1A_2A_3$ соответственно, а $\vec{a}_i$ и $\vec{h}_i$ — векторы, идущие из фиксированной точки O в A_i и H_i ($i = 1, 2, 3, 4$).

Докажем, что треугольники $A_1A_2A_3$ и $H_1H_2H_3$ равновелики (имеют одинаковую площадь) и одинаково ориентированы. Поскольку удвоенная площадь $\triangle A_1A_2A_3$ (с учетом ориентации) равна $\overrightarrow{A_1A_2} \wedge \overrightarrow{A_1A_3} = (\vec{a}_2 - \vec{a}_1) \wedge (\vec{a}_3 - \vec{a}_1) = \vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 + \vec{a}_2 \wedge \vec{a}_3 + \vec{a}_3 \wedge \vec{a}_1$, мы должны доказать равенство

$$\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 + \vec{a}_2 \wedge \vec{a}_3 + \vec{a}_3 \wedge \vec{a}_1 = \vec{h}_1 \wedge \vec{h}_2 + \vec{h}_2 \wedge \vec{h}_3 + \vec{h}_3 \wedge \vec{h}_1. \qquad (1)$$

Для этого мы используем лишь тот факт, что $[A_iH_j] \parallel [A_jH_i]$ при всех $i \neq j$. Скажем, $[A_1H_2] \parallel [A_2H_1]$, поскольку они перпендикулярны $[A_3A_4]$; поэтому $(\vec{a}_1 - \vec{h}_2) \wedge (\vec{a}_2 - \vec{h}_1) = 0$. Сложив три равенства:

$$\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2 - \vec{h}_1 \wedge \vec{h}_2 = \vec{a}_1 \wedge \vec{h}_1 - \vec{a}_2 \wedge \vec{h}_2,$$
$$\vec{a}_2 \wedge \vec{a}_3 - \vec{h}_2 \wedge \vec{h}_3 = \vec{a}_2 \wedge \vec{h}_2 - \vec{a}_3 \wedge \vec{h}_3,$$
$$\vec{a}_3 \wedge \vec{a}_1 - \vec{h}_3 \wedge \vec{h}_1 = \vec{a}_3 \wedge \vec{h}_3 - \vec{a}_1 \wedge \vec{h}_1,$$

получим (1).

Разумеется, так же доказывается вообще, что треугольники $A_iA_jA_k$ и $H_iH_jH_k$ равновелики и одинаково ориентированы (для всех $i \neq j \neq k$); в частности, это относится к треугольникам $A_3A_4A_1$ и $H_3H_4H_1$. Отсюда следует равенство площадей четырехугольников $A_1A_2A_3A_4$ и $H_1H_2H_3H_4$.

Более того, оба эти четырехугольника будут одновременно либо (а) выпуклыми, либо (б) невыпуклыми, но несамопересекающимися, либо (в) самопересекающимися: если все четыре треугольника $A_1A_2A_3$, $A_2A_3A_4$, $A_3A_4A_1$, $A_4A_1A_2$ имеют одинаковую ориентацию, то (а), если один отличается по ориентации от трех других — (б); если «счет ничейный» 2:2 — (в).

Если бы мы попытались перевести это решение на элементарно геометрический язык, получилась бы громоздкая картина из множества параллелограммов, очевидные соотношения между площадями которых запутаны из-за особенностей расположения. Более элегантное г е о м е т р и ч е с к о е решение (требующее, однако, некоторых вычислений; в частности, оно использует формулу $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = (1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta) \operatorname{tg}(\alpha + \beta)$) основано на полезных соотношениях, показанных на рисунке 2, где H — точка пересечения высот треугольников ABC, O — центр описанной вокруг него окружности, K — середина стороны AB*). На этом пути сразу ясно, что для четырехугольника $A_1A_2A_3A_4$, вписанного в окружность, «ортоцентрический» четырехугольник $H_1H_2H_3H_4$ будет ему не только равновелик, но и конгруэнтен (в общем случае, как следует из равенства площадей треугольников $A_iA_jA_k$ и $H_iH_jH_k$, эти четырехугольники *аффинно эквивалентны*, то есть один получается из другого линейным преобразованием координат).

Б. Батырев, Н. Васильев, В. Трофимов

◆

М665. *Световое табло состоит из нескольких лампочек, каждая из которых может находиться в двух состояниях (гореть или не гореть). На пульте несколько кнопок, при нажатии каждой из которых одновременно меняется состояние у некоторого набора лампочек*

Пусть число лампочек равно N, количество кнопок — n. Обозначим через A_i подмножество лампочек, которое переключает i-я кнопка, то есть узор, который получается из начального состояния B_0 — «все лампочки не горят» — при нажатии i-й кнопки; мы будем также говорить об «операции A_i», понимая под этим нажатие i-й кнопки.

*) Это решение будет приведено в книге И. Ф. Ш а р ы г и н а «Задачи по геометрии», выходящей в Библиотечке «Квант».

(для каждой кнопки — своего). Вначале лампочки не горят.

а) Докажите, что число различных узоров, которые можно получить на табло, — степень двойки.

б) Сколько различных узоров можно получить на табло, состоящем из $m \times n$ лампочек, расположенных в форме прямоугольника, если кнопками можно переключить каждый горизонтальный и каждый вертикальный ряд лампочек (проверьте ваш ответ для небольших значений m, n)?

в) Придумайте другие примеры табло и наборов (переключаемых кнопками), в которых можно найти число узоров.

Мы получили много доказательств утверждения а), основанных на разных соображениях. Приведем вкратце некоторые из них.

1°. Всего существует 2^N различных узоров светового табло, потому что каждая из N лампочек может находиться в двух состояниях — гореть или не гореть. Пусть нажатием кнопок из начального узора B_0 можно получить m разных узоров B_0, B_1, ..., B_{m-1}. Тогда из любого начального узора X можно получить такое же количество узоров — это те узоры, которые отличаются от X на множествах B_0, B_1, ..., B_{m-1}. Таким образом, если все 2^N узоров разбить на несколько к л а с с о в: отнести к одному классу те узоры, которые можно получить друг из друга нажатием кнопок, то в каждом классе будет по m узоров. Поэтому 2^N делится на m; следовательно, m — степень двойки.

2°. Пусть кнопки занумерованы так, что ни один из s узоров A_1, A_2, ..., A_s нельзя получить комбинацией предыдущих (с меньшими номерами), а каждый из остальных $k-s$ узоров A_{s+1}, ..., A_k можно получить комбинацией некоторых из операций A_1, A_2, ..., A_s. Тогда общее число узоров m, которое можно получить из начального состояния B_0, равно 2^s. В самом деле, все комбинации операций A_1, A_2, ..., A_s, соответствующие 2^s различным подмножествам множества $\{1, 2, ..., s\}$, дают различные узоры: если бы какие-то два из них совпадали:

$$A_{i_1}A_{i_2}...A_{i_m}=A_{j_1}A_{j_2}...A_{j_l},$$

то узор A с наибольшим из входящих в это равенство номеров можно было бы получить комбинацией предыдущих.

3°. Посмотрим вначале не на все N лампочек, а на первые L из них. Пусть на этих лампочках из начального состояния B_0 можно получить m_L различных узоров. Затем посмотрим на $(L+1)$-ю лампочку. Если состояние $(L+1)$-й лампочки вполне определяется набором состояний первых L лампочек, то $m_{L+1}=m_L$. Если же хотя бы два узора совпадают на первых L лампочках, но отличаются на $(L+1)$-й, то можно получить узор, в котором первые L лампочек не горят, а $(L+1)$-я горит. Тогда из каждого узора наших L лампочек можно получить два различных узора из первых $L+1$ лампочек, то есть $m_{L+1}=2m_L$. Поскольку одна (первая) лампочка может находиться в двух состояниях, ясно, что интересующее нас $m=m_N$ будет степенью двойки.

Многие читатели заметили, что операции A_i и состояния табло («узор») удобно представлять как наборы из N чисел $+1$ и -1 (при этом операция нажатия кнопки соответствует умножению наборов) или как наборы из N чисел 0 и 1 (тогда наборы складываются почленно «по модулю 2», то есть $1+1=0$).

Применим первое из этих представлений для решения задачи б).

Будем считать, что $x_{ij}=-1$, если лампочка в i-й строке и j-м столбце горит, и $x_{ij}=1$ — в противном случае ($1<i<m$, $1<j<n$). Докажем, что общее число узоров, которые можно получить из начального состояния «все $x_{ij}=1$», равно 2^{m+n-1}.

Допустимые операции (их $m+n$) — это умножение строки или столбца на -1. Очевидно, мы можем получить произвольный набор из $m+n-1$ чисел ± 1 в первой строке и в первом столбце: x_{11}, x_{12}, ..., x_{1n}, x_{21}, x_{31}, ..., x_{m1}. Но каждое из остальных x_{ij} этими $m+n-1$ числами определяется уже однозначно, поскольку при любых допустимых операциях будет сохраняться равенство $x_{ij}x_{11}=x_{i1}x_{1j}$.

Аналогичное рассуждение (с использованием тождества $x_{ijk}x_{1jk}x_{i1k}x_{ij1}=x_{111}x_{11k}x_{1j1}x_{i11}$) показывает, что для табло, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, состоящего из $m \times n \times p$ лампочек, у которого разрешается переключать любой ряд лампочек, параллельный ребру параллелепипеда, число узоров в о д н о м к л а с с е равно $2^{mnp-(m-1)(n-1)(p-1)}$, то есть ч и с л о к л а с с о в узоров равно $2^{(m-1)(n-1)(p-1)}$ (см. решение 1° задачи а)).

Н. Васильев

Ф673. *Груз висит на упругой нити. Если к грузу прикладывать силу, медленно нарастающую от нулевого значения, то нить оборвется, когда величина силы достигнет значения F_1. При какой минимальной величине силы оборвется нить, если прикладываемая сила мгновенно достигает некоторого значения и в дальнейшем остается неизменной?*

Упругую нить можно рассматривать как пружину. Пусть жесткость этой пружины равна k. Согласно условию задачи при медленном нарастании силы нить обрывается, когда полная сила $F_п$, приложенная к ней, равна

$$F_п = mg + F_1, \qquad (*)$$

где m — масса подвешенного груза. Посмотрим, что происходит в том случае, когда прикладываемая сила мгновенно достигает некоторого значения F и в дальнейшем не меняется.

В начальный момент (когда сила равна нулю) нить растянута под действием силы тяжести груза mg на величину x_0, определяемую условием $kx_0 = mg$, то есть координата конца нити в положении равновесия равна $x_0 = mg/k$ (за начало отсчета принято положение конца нити в отсутствие груза). При приложении силы F координата конца нити в положении равновесия будет равна $x' = mg/k + F/k$. Однако в состояние равновесия система перейдет лишь после затухания возникающих колебаний. Начальная амплитуда этих колебаний определяется начальным отклонением системы от положения равновесия, то есть $A = x' - x_0 = F/k$. Так как затухание колебаний мало, через половину периода полное растяжение пружины будет равно

$$x_п = \frac{mg+F}{k} + A = \frac{mg}{k} + 2\frac{F}{k}.$$

Это означает, что к нити приложена суммарная сила

$$F'_п = mg + 2F.$$

Нить оборвется, если эта сила больше чем сила $F_п$ (см. (*)), определяющая предел прочности нити. Таким образом, минимальная сила F_{min}, при которой произойдет обрыв нити, находится из условия $F'_п = F_п$, то есть

$$mg + 2F_{мин} = mg + F_1;$$

отсюда

$$F_{min} = F_1/2.$$

Г. Баронов

◆

Ф674. *Серный ангидрид SO_3 в количестве $\nu_1 = 1$ моль поместили в замкнутый сосуд и нагрели до температуры $T_1 = 1000$ К, при которой SO_3 частично диссоциирует на сернистый ангидрид SO_2 и кислород: $SO_3 = SO_2 + \frac{1}{2} O_2$. Степень диссоциации в этих условиях оказалась равной $\alpha_1 = 0{,}2$ (то есть диссоциировали 20% первоначально имевшихся молекул SO_3). Когда в тот же сосуд поместили $\nu_2 = 0{,}4$ моль SO_3, то оказалось, что для получения такого же, как в первом опыте, давления газ надо нагреть до температуры $T_2 = 2000$ К. Определить степень диссоциации SO_3 во втором опыте. Все вещества в обоих опытах находятся в газообразном состоянии.*

При полной диссоциации из 1 моля SO_3 получается 1,5 моля газов (SO_2 и O_2). Следовательно, если диссоциировало $\alpha\nu$ молей SO_3, то в сосуде находятся $1{,}5\alpha\nu$ молей SO_2 и O_2 и $(1-\alpha)\nu$ молей SO_3; полное число молей газов в сосуде равно

$$n = 1{,}5\alpha\nu + (1-\alpha)\nu = (1+0{,}5\alpha)\nu.$$

Запишем уравнения состояния газов в сосуде в первом ($\nu_1 = 1$ моль, $T_1 = 1000$ К, $\alpha_1 = 0{,}2$) и во втором ($\nu_2 = 0{,}4$ моль, $T_2 = 2000$ К, $\alpha_2 = ?$) случаях (давления и объемы в обоих случаях одинаковы):

$$pV = n_1RT_1, \quad pV = n_2RT_2.$$

Следовательно, $n_1T_1 = n_2T_2$, то есть

$$(1+0{,}5\alpha_1)\nu_1T_1 = (1+0{,}5\alpha_2)\nu_2T_2,$$

откуда

$$\alpha_2 = 2\left((1+0{,}5\alpha_1)\frac{\nu_1T_1}{\nu_2T_2} - 1\right) = 0{,}75 = 75\%.$$

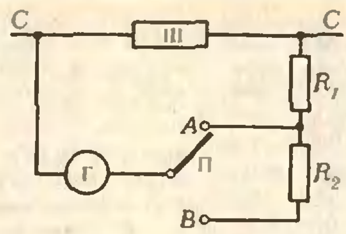
В. Белонучкин

◆

Ф675. *Для измерения больших токов в цепи СС (см. рисунок) используется шунт Ш,*

Так как сопротивление шунта много меньше сопротивления подключенной к нему измерительной схемы, напряжение на участке CC равно $U = Ir_ш$.

параллельно которому через сопротивления $R_1=2$ Ом и R_2 подключается измерительный прибор Г с внутренним сопротивлением $r=10$ Ом. В положении А переключателя П вся шкала прибора соответствует току в цепи $I_1=10$ А. Каким надо взять сопротивление R_2, чтобы в положении В переключателя П вся шкала прибора соответствовала току $I_2=100$ А? Сопротивление шунта считать много меньше внутреннего сопротивления прибора.



Если стрелка прибора при двух вариантах замыкания схемы отклоняется на полную шкалу, то токи, текущие через прибор, в обоих случаях одинаковы. Следовательно,

$$\frac{I_1 r_ш}{R_1+r}=\frac{I_2 r_ш}{R_1+R_2+r},$$

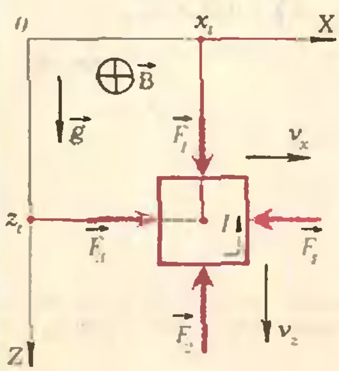
откуда

$$R_2=\left(\frac{I_2}{I_1}-1\right)(R_1+r)=108 \text{ Ом}.$$

Л. Луганский

◆

Ф676. *Проволочной квадратной рамке с периметром $4a$ и массой m сообщают в горизонтальном направлении некоторую начальную скорость. Рамка движется в вертикальной плоскости, все время находясь в магнитном поле, перпендикулярном плоскости рамки (см. рисунок). Индукция поля меняется по закону $B(z)=B(0)+kz$, где $k=$ const. Сопротивление рамки равно R. Через некоторое время скорость рамки становится постоянной и равной v. Найти начальную скорость, сообщаемую рамке. Ускорение свободного падения g.*



В отсутствие магнитного поля рамка двигалась бы в поле тяжести Земли с постоянной горизонтальной скоростью $\vec{v}_0$ вдоль оси X и равноускоренно с ускорением свободного падения $\vec{g}$ вдоль оси Z. Очевидно, что движение рамки не изменилось бы, если бы она падала в однородном магнитном поле. В нашем случае поле — не однородное (вдоль оси Z): $B(z)=B_0+kz$, то есть индукция поля линейно растет с ростом z; поэтому при падении рамки поток магнитной индукции Φ, пронизывающий контур рамки, будет меняться и в контуре рамки будет возникать ЭДС индукции. Поскольку рамка является замкнутым проводящим контуром, по ней потечет индукционный ток. В этом случае, согласно закону Ампера, на стороны рамки будут действовать силы со стороны магнитного поля. Найдем направления и величины этих сил.

Пусть в некоторый момент времени центр масс рамки находится в точке с координатами x_t, z_t и проекции скорости центра масс на оси X и Z равны v_x и v_z (см. рисунок). Поток магнитной индукции Φ, пронизывающий рамку в этот момент времени, равен

$$\Phi=\frac{(B_0+k(z_t-a/2))+(B_0+k(z_t+a/2))}{2}a^2=(B_0+kz_t)a^2.$$

Здесь $B_0+k(z_t-a/2)$ и $B_0+k(z_t+a/2)$ — значения индукции магнитного поля соответственно у верхней и нижней сторон рамки; поскольку зависимость $B(z)$ — линейная, для вычисления Φ мы пользуемся средним (по высоте z) значением индукции.

ЭДС индукции в рамке в данный момент времени равна

$$|\mathscr{E}|=\frac{|\Delta\Phi|}{\Delta t}=ka^2\frac{|\Delta z|}{\Delta t}=ka^2|v_z|.$$

индукционный ток равен

$$I=\frac{|\mathscr{E}|}{R}=\frac{ka^2}{R}|v_z|.$$

Согласно правилу Ленца, возникающий в рамке индукционный ток будет течь против часовой стрелки. По закону Ампера со стороны магнитного поля на верхнюю сторону рамки будет действовать сила

$$|\vec{F}_1|=(B_0+k(z_t-a/2))Ia=(B_0+k(z_t-a/2))\frac{ka^3}{R}|v_z|,$$

на нижнюю сторону — сила

$$|\vec{F}_2|=(B_0+k(z_t+a/2))Ia=(B_0+k(z_t+a/2))\frac{ka^3}{R}|v_z|.$$

Силы $\vec{F}_3$ и $\vec{F}_4$, действующие на боковые стороны рамки, очевидно, будут равны по величине и противоположны по знаку:

$$|\vec{F}_3|=|\vec{F}_4|=\frac{(B_0+k(z_l-a/2))+(B_0+k(z_l+a/2))}{2}\,Ia=$$

$$=(B_0+kz_l)\,\frac{ka^3}{R}\,|v_z|,$$

$$\vec{F}_3+\vec{F}_4=0.$$

Следовательно, $v_x=\text{const}$, то есть рамка будет двигаться вдоль оси X с постоянной скоростью, равной начальной скорости v_0.

Таким образом, характер движения рамки в направлении оси Z определяется силами $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ и силой тяжести $m\vec{g}$. При установившейся скорости v рамки проекция скорости на ось Z постоянна, то есть ускорение $\vec{a}_z$ вдоль оси Z равно нулю:

$$m|\vec{a}_z|=m|\vec{g}\,|+|\vec{F}_1|-|\vec{F}_2|=mg-\frac{k^2a^4}{R}|v_z|=0.$$

Отсюда находим проекцию $v_{\text{уст. }z}$ на ось Z установившейся скорости рамки:

$$v_{\text{уст. }z}=mgR/k^2a^4.$$

Установившаяся скорость рамки равна $v=\sqrt{v_0^2+v_{\text{уст. }z}^2}$, где v_0 — проекция скорости v на ось X, равная, как мы показали, начальной скорости, сообщенной рамке. Таким образом,

$$v_0=\sqrt{v^2-v^2_{\text{уст. }z}}=\sqrt{v^2-\left(\frac{mgR}{k^2a^4}\right)^2}.$$

Скорость $v_{\text{уст. }z}$ может быть найдена и из энергетических соображений. При установившемся движении рамки изменение за время Δt потенциальной энергии рамки в поле тяжести Земли равно тепловой энергии, выделяющейся за это время в рамке:

$$mgv_{\text{уст. }z}\Delta t=I^2_{\text{уст.}}R\Delta t=\left(\frac{ka^2}{R}\right)^2 v^2_{\text{уст. }z}R\Delta t.$$

Отсюда

$$v_{\text{уст. }z}=\frac{mgR}{k^2a^4}.$$

В. Можаев

◆

Ф677. *С помощью системы концентрических зеркал (рис. 1) на экране получено изображение Солнца. Радиусы зеркал $R_1=12$ см, $R_2=30$ см. Каково должно быть фокусное расстояние тонкой линзы, чтобы с ее помощью получалось изображение Солнца такого же размера?*

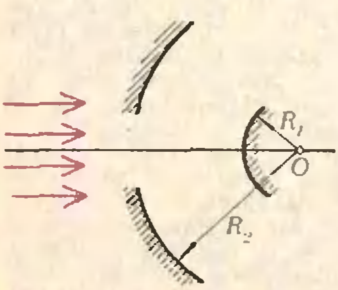


Рис. 1.

Задача может быть решена двумя способами.

1. В фокальной плоскости первого зеркала (радиуса R_1) получается изображение Солнца, которое является предметом для второго зеркала (радиуса R_2). Если угловой размер Солнца равен α, то размер этого изображения равен $l=\alpha F_1=\alpha R_1/2$; находится изображение на расстоянии $d_2=R_2-R_1/2$ от второго зеркала. Увеличение второго зеркала равно $\Gamma_2=F_2/(d_2-F_2)=R_2/(R_2-R_1)$. Размер изображения, получающегося в системе зеркал, равен

$$L_3=l\Gamma_2=\frac{\alpha R_1}{2}\,\frac{R_2}{R_2-R_1}=\alpha\,\frac{R_2R_1}{2(R_2-R_1)}.$$

Тонкая линза создает в своей фокальной плоскости изображение Солнца размера

$$L_л=\alpha F_л.$$

Чтобы получить изображение размера $L_л=L_3$, надо взять линзу с фокусным расстоянием

$$F_л=\frac{R_2R_1}{2(R_2-R_1)}=10\text{ см}.$$

2. На рисунке 2 показан ход одного из лучей (AB), параллельных оптической оси системы зеркал. Точка M — точка пересечения падающего на систему луча AB (его продолжения) с лучом DF, выходящим из системы. Поместим в плоскость NN', проходящую через точку M и перпендикулярную оптиче-

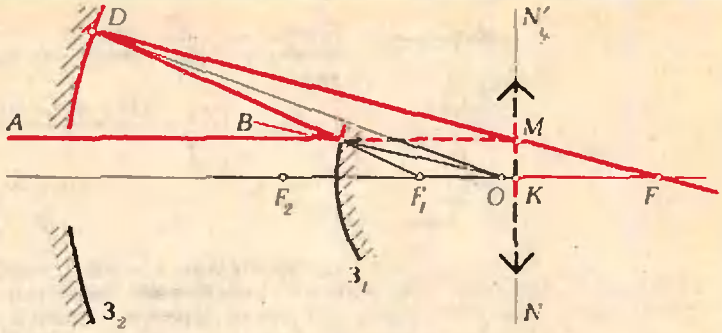


Рис. 2.

ской оси системы, тонкую линзу с фокусным расстоянием $F_л = |KF|$.

Луч AB, падающий на линзу (в отсутствие зеркал), после преломления пройдет через точку F, то есть ход луча будет тот же, что и на выходе системы зеркал. Следовательно, изображение Солнца, полученное с помощью линзы, будет иметь те же размеры, что и изображение, даваемое системой зеркал.

Нетрудно рассчитать, что фокусное расстояние линзы должно быть равно $F_л = 10$ см.

Е. Кузнецов

Список читателей, приславших правильные решения

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М646—М660; Ф663—Ф677 {жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач}.

Математика

Большинство читателей, приславших свои решения, справились с задачами **М647**, **М648**, **М651**. Остальные задачи решили: *Е. Абакумов* (Ленинград) **52—54**; *Э. Абдуллаев* (Масаллы) **53, 54**; *В. Авербах* (Донецк) **58**; *В. Александров* (Саратов) **53**; *М. Алексеев* (Москва) **50а) — в), 52, 54**; *А. Аляев* (с. Пачелма Пензенской обл.) **53**; *М. Араслинов* (Запорожье) **53, 54**; *Я. Базалий* (Донецк) **46**; *А. Барг* (Николаев) **46**; *Ю. Баркаган* (Пенза) **54**; *Е. Белова* (Видное) **53, 54**; *А. Бердюгин* (Ангарск) **53**; *И. Бинус* (Пенза) **52, 54, 56**; *Н. Близнюк* (Пятигорск) **53**; *А. Болдырихин* (Могилев-Подольский) **53, 56**; *А. Брудный* (Ярославль) **50а)—в), 52, 53, 56, 58**; *В. Будовский* (Харьков) **53**; *В. Валуев* (Тула) **53, 54**; *О. Васюра* (Калиновка) **53**; *М. Володинская* (Киев) **54**; *М. Гайсинский* (Ташкент) **46, 50а)—в), 52, 54, 55а), б)**; *В. Гапонов* (Москва) **53, 54**; *М. Гапонова* (Горький) **50а), б)**; *О. Гарифуллин* (Пенза) **52, 54**; *В. Геншенбейн* (Москва) **52, 54, 55а), 56**; *Г. Головин* (Славянск) **52, 54**; *А. Гольденшлюгер* (Фрунзе) **52, 53**; *С. Горшков* (Москва) **50а), б), 52, 54**; *Е. Горшков* (Пермь) **54**; *Л. Гоцко* (Львов) **50а)—в), 53, 54, 55а)**; *О. Гринив* (Киев) **46, 50а)—в), 52—54, 56, 58**; *А. Гутин* (Клинцы) **46, 50а)—в), 52—54, 55а)**; *А. Даниленко* (Харьков) **54**; *В. Денисов* (Москва) **46, 50а), 52—54**; *С. Долгополов* (Полтава) **53**; *Т. Доложина* (Херсон) **52**; *О. Дранко* (Киев) **46, 50а), б), 52—54**; *А. Дробышев* (Ленинград) **54**; *А. Дубицкас* (Таураге) **46, 53, 54**; *О. Ерошкин* (Днепропетровск) **53, 54, 56, 58, 59**; *И. Жуков* (Ленинград) **46, 50а)—в), 52, 54, 57, 58, 60**; *Б. Зальцман* (Хабаровск) **53**; *А. Зеге* (Минск) **50а) — в), 53, 54, 56**; *А. Золотых* (Курск) **52—54, 56, 58, 60**; *И. Зябрев* (Кролевец) **52—54, 56**; *З. Ибрагимов* (Масаллы) **50а), 53**; *В. Ивлев* (Донецк) **50а), б), 53**; *А. Ишханян* (Джермук) **53, 54**; *М. Каган* (Пенза) **52, 54**; *А. Кагарманов* (Белорецк) **52—54, 56**; *А. Казмерчук* (Киев) **54**; *А. Карпович* (Киев) **54**; *А. Кац* (Ташкент) **52, 54**; *Н. Качан* (д. Якимовка Минской обл.) **53, 54**; *А. Кернерман* (Киев) **53**; *В. Ким* (Бектемир) **46**; *С. Ким* (Бектемир) **46, 50а), б), 53, 54**; *А. Киселев* (Ташкент) **52—54**; *В. Кисиль* (Одесса) **52—54, 56**; *М. Климовицкий* (Пермь) **54**; *В. Козловский* (д. Н. Двор Гродненской обл.) **52, 54, 56**; *И. Колпаков* (Сочи) **50а), б), 52, 54**; *А. Корнилов* (Ростов-на-Дону) **50а)—в), 52—54, 60**; *Д. Короткин* (Ленинград) **46, 50а), б), 52—54; 56—59**; *И. Кривицкий* (п. Березка Владимирской обл.) **50а), б)**; *О. Крижановский* (Харьков) **50а), б), 52—54**; *Е. Кузнецов* (Ижевск) **46**; *Ю. Куприков* (Подольск) **53, 54**; *С. Ламихов* (Ташкент) **50а), б), 52—54**; *И. Ланджев* (Дургас, НРБ) **53**; *Л. Лейцин* (Чернигов) **53, 54, 57**; *О. Мазуров* (Новосибирск) **53, 54**; *О. Малов* (Казань) **53**; *С. Мамедов* (Баку) **53, 54**; *Е. Мендрелюк* (Могилев-Подольский) **53**; *Л. Меркявичус* (Лентварис) **46, 52—60**; *А. Мильман* (Одесса) **53, 54, 56—58**; *Л. Мильман* (Минск) **53, 54**; *Э. Мирзоян* (Ереван) **46, 50а), б), 53, 54**; *А. Насретдинов* (Свердловск) **53**; *Г. Непомнящий* (Винница) **50а)**; *Ю. Николаевский* (Харьков) **50а), б), 54,** 55а); *А. Никонов* (Кировград) 50а), б), 52—54, 56, 58; *М. Овецкий* (Донецк) 56, 58; *П. Овчинников* (Вязники) 46, 52, 54, 55а), 56, 58; *В. Образцов* (Москва) 60; *М. Окроян* (Ереван) 46, 50а), б); *В. Перевалов* (Ангарск) 53; *Г. Перельман* (Ленинград) 46, 50а), б), 52—54; *Е. Попов* (Белорецк) 52—54; *Л. Потемкина* (Киев) 50а), б), 52, 53; *В. Поярков* (Николаев) 50а), б), 52, 53; *Ю. Прохоров* (Москва) 50а), 52, 54; *Н. Розенвайн* (Киев) 53; *В. Романюк* (С. Куснище Волынской обл.) 54; *А. Руденский* (Донецк) 46, 50а)—в); *П. Савельев* (Ногинск) 53; *А. Савкин* (п/о Воейково Ленинградской обл.) 46, 50а)—в), 52, 54, 56, 58; *Н. Сайгина* (Саратов) 46, 50а)—в), 53, 54; *К. Салий* (Саратов) 53; *Р. Самборский* (Тернополь) 52—54; *М. Сафаров* (Новосибирск) 52—54; *М. Свердликов* (Новосибирск) 52, 53, 56, 58; *А. Сикса* (Киев) 46, 52—54; *А. Смирнов* (Курган) 52; *Н. Солодовникова* (Долгопрудный) 53; *А. Сохет* (Харьков) 50а), б), 52, 54, 55а); *С. Спичак* (Припять) 50а)—в); *В. Стафеев* (Челябинск) 52; *Э. Степанян* (Баку) 50а)—в), 52—54, 58; *Ю. Талденко* (Сумы) 46, 52, 54; *Л. Тимофеев* (Клин) 52, 54, 55а), 56; *С. Тимофеев* (совх. Саханка Донецкой обл.) 54; *В. Титенко* (д. Блужа Минской обл.) 52, 54, 56, 58; *С. Ткаченко* (Могилев-Подольский) 53, 56; *Ю. Трофимчук* (Калиновка Винницкой обл.) 53; *Г. Трунов* (Москва) 54; *Р. Угриновский* (Хмельник) 53, 54, 55а), 56; *Я. Фельдман* (Киев) 53, 54, 56; *А. Филановский* (Ленинград) 52; *В. Финогеев* (Москва) 53; *Д. Фомин* (Ленинград) 46, 50а)—в), 52—54, 55а), б), 56, 58; *О. Фонарев* (Сумгаит) 46, 50а)—в), 55а); *А. Харитонский* (Киев) 50а), в); *А. Хасанов* (с. Колатан АзССР) 53; *А. Хилков* (Новомосковск) 50а), б), 52—54, 56; *О. Хорошевская* (Новосибирск) 52—54; *А. Хохлов* (Москва) 53, 54, 56; *В. Цекановский* (Донецк) 50а)—в); *И. Цимох* (Кировград) 52—54; *О. Чалых* (Витебск) 46, 50а), б), 53, 54, 55а), 57; *Е. Черненко* (Пенза) 54; *А. Чистоклетов* (п. Мулловка Ульяновской обл.) 56; *А. Шайдеров* (Калининград) 56; *В. Шах* (с. Замшаны Волынской обл.) 46; *З. Шибзухов* (Нальчик) 50а), б); *А. Шигарев* (Сибай) 56; *В. Штейнбок* (Москва) 52, 54; *Л. Элькун* (Ташкент) 50а), 52—54; *Л. Эпремидзе* (Тбилиси) 46, 53, 54, 56—58; *Ф. Эфендиев* (Баку) 54; *С. Юровский* (Мытищи) 52; *А. Ярхина* (Москва) 54; *Н. Яцкевич* (Саратов) 53; *А. Яшпатров* (Ангарск) 53.

Физика

Почти все читатели, приславшие свои решения, справились с задачами **Ф664, Ф665, Ф671** и **Ф675**. Остальные задачи решили: *В. Абаджев* (Львов) 73—77; *В. Аветисов* (Баку) 66, 70—77; *И. Аглиуллин* (Москва) 66; *Э. Алиев* (Баку) 66, 69, 70, 73, 76, 77; *Г. Андрян* (с. Н. Оратаг Аз.ССР) 73; *Э. Аносин* (Латв.ССР) 73, 76; *К. Аракелов* (Моздок) 70, 73, 74, 76; *Т. Аракелян* (Ереван) 73, 76, 77; *Д. Асмус* (Челябинск) 73, 74; *А. Ахмедзянов* (Уральск) 63, 66, 68, 72—74, 76; *О. Ахремов* (Вильнюс) 73, 74, 76; *А. Бабаев* (Баку) 73; *Э. Багдасарян* (Баку) 73; *Я. Базалий* (Донецк) 73, 74, 76, 77; *Д. Басалаев* (Черногорск) 66; *О. Бендер* (Запорожье) 66, 67, 73, 74, 76; *П. Бибиков* (Ленинград) 73, 74; *Л. Бураковский* (Киев) 72; *Б. Вейцман* (Одесса) 63, 66, 68—77; *В. Вермул* (Душанбе) 74; *А. Вернета* (ст. Старошнинская Краснодарского кр.) 67, 69, 72; *Р. Вилеев* (Пермь) 73, 74; *А. Владимиров* (Пущино) 66, 74, 76, 77; *Ю. Воеводов* (Гомель) 74; *С. Вознюк* (Харьков) 74, 76, 77; *А. Воробьев* (Тихвин) 66, 67; *Р. Върбанов* (Тервел, НРБ) 69—72; *Г. Гаев* (Саратов) 74, 76, 77; *Н. Гасанов* (Баку) 70; *А. Григоров* (Ямбол, НРБ) 72; *К. Григоришин* (Запорожье) 73, 74; *Д. Григорьев* (Москва) 67—77; *И. Губин* (Ереван) 67, 69; *А. Гутин* (Клинцы) 67—72; *Ю. Гуревич* (Кемерово) 73, 74, 76; *И. Гурович* (Одесса) 73, 74; *И. Дамм* (Черновцы) 66, 67, 70, 73, 74; *А. Денисов* (Новосибирск) 66; *А. Добряков* (Житомир) 70, 76; *М. Догадов* (Арзамас) 66; *С. Дубинский* (Керчь) 74, 77; *С. Евдокимов* (Витебск) 66, 67, 69, 70, 72; *В. Евстратов* (Ленинград) 73, 74, 76; *Т. Енчев* (Ямбол, НРБ) 73, 77; *И. Еськов* (Таганрог) 74; *А. Жупинский* (Молодечно) 66; *Д. Зайцев* (Ясногорск) 69; *В. Зац* (Ташкент) 74; *Ю. Звегинцев* (Харьков) 66, 69, 72; *М. Зейфман* (Вологда) 63, 66, 73—77; *И. Златогорский* (Саратов) 66; *П. Здоманович* (Алма-Ата) 74; *Е. Ильмер* (Ленинград) 66; *Л. Иосипов* (Киев) 66, 73; *В. Каталовский* (Харьков) 67; *А. Клейман* (Бердичев) 73, 74; *И. Климкович* (с. Чернелица Ивано-Франковской обл.) 66; *С. Козлов* (Москва) 63, 66, 67, 69, 73—77; *А. Колежук* (Киев) 76; *В. Комов* (Александров) 63, 66, 69, 72—77; *И. Компанейцев* (Алма-Ата) 72; *М. Копп* (Мичуринск) 66; *С. Королев* (Кирсанов) 66; *Г. Костылин* (Минск) 69; *А. Костюковский* (Харьков) 67; *А. Кубышкин* (Киев) 69, 72—74; *Л. Кудрявцев* (Нефтекамск) 69, 74; *С. Кудрявцев* (Магадан) 66; *В. Курганов* (п. Усть-Куйга Як.АССР) 66, 72; *Л. Кучук* (Минск) 73, 76; *И. Куянов* (Казань) 66; *А. Латынин* (Киев) 73, 74; *В. Леков* (Ямбол, НРБ) 70; *Ю. Логвин* (Лида) 72, 74, 76; *А. Ляпин* (Москва) 66, 67; *И. Маркичев* (Киржач) 73, 74, 76; *Д. Мансуров* (ст. Акстафа Аз.ССР) 66; *Е. Мельничук* (с. Черноводы Хмельницкой обл.) 73; *А. Мильман* (Одесса) 67, 68, 70, 74, 76, 77; *В. Михайлов* (Опочка) 73, 74, 76; *П. Морозов* (Тула) 73, 74; *А. Мосупов* (п. Магнитка Челябинской обл.) 66; *Д. Набутовский* (Новосибирск) 73, 74, 77; *Г. Напобашвили* (Тбилиси) 73; *М. Найговзин* (Баку) 66; *К. Немченко* (Донецк) 73—77; *С. Нестеренко* (Красноярск) 66, 74; *К. Никашев* (Салават) 73, 74; *Л. Никитин* (Великие Луки) 74; *Ю. Остапчук* (Здолбунов) 66, 73, 74, 76; *А. Охапкин* (Львов) 66; *С. Пащенко* (Киев) 69, 74, 76, 77; *В. Пентегов* (Киев) 66, 69, 73; *В. Пешикова* (Запорожье) 66; *В. Петров* (Свердловск) 76; *М. Пинскер* (Москва) 73; *А. Пироженко* (Мытищи) 63, 66, 67, 73—77; *О. Плотникова* (Волгоград) 66; *И. Полюбин* (Иваново) 73—77; *А. Попов* (Климовск) 69; *Л. Потемкина* (Киев) 66; *В. Прилипко* (Киев) 66; *А. Ривилис* (Киев)

(Окончание см. на с. 56)

Премии «Кванта»

В 1980/81 учебном году редакция получила более 13 тысяч писем с решениями задач из Задачника «Кванта». Школьники, решившие наибольшее число задач или приславшие наиболее оригинальные решения, награждаются специальными премиями, учрежденными редакционной коллегией журнала.

Книгами серии «Библиотечка «Квант» с автографами авторов награждаются:

АБДУЛАЕВ Эльмар (г. Масаллы, с. ш. № 2)
АХМЕДЗЯНОВ Аскат (г. Уральск, с. ш. № 6)
БРУДНЫЙ Александр (г. Ярославль, с. ш. № 33)
ГРИГОРЬЕВ Дмитрий (г. Москва, с. ш. № 57)
ГУТИН Александр (г. Клинцы, с. ш. № 2)
ЕВДОКИМОВ Сергей (г. Витебск, с. ш. № 3)
ЗЕЙФМАН Михаил (г. Вологда, с. ш. № 9)
ИБРАГИМОВ Захид (г. Масаллы, с. ш. № 2)
КИМ Сергей (г. Бектемир, с. ш. № 2)
КОЗЛОВ Сергей (г. Москва, ФМШ № 18 при МГУ)
МЕРКЯВИЧУС Ляонас (г. Лентварис, с. ш. № 2)
ОВЧИННИКОВ Павел (г. Вязники, с. ш. № 11)
РОМАНЮК Виктор (с. Куснище Волынской обл.)
СМИРНОВ Алексей (г. Курган, с. ш. № 28)
ФОНАРЕВ Олег (г. Сумгаит, с. ш. № 11)
ФРОЛОВ Александр (г. Тула, с. ш. № 36)

Подпиской на журнал «Квант» на 1982 год награждаются:

БАГДАСАРЯН Эмин (г. Баку, с. ш. № 46)
ВЕЙЦМАН Борис (г. Одесса, с. ш. № 53)
ЕРОШКИН Олег (г. Днепропетровск, с. ш. № 15)
ЖУКОВ Игорь (г. Ленинград, с. ш. № 227)
ЗВЕГИНЦЕВ Юлий (г. Харьков, с. ш. № 118)
КОРОТКИН Дмитрий (г. Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ)
ПЕНТЕГОВ Всеволод (г. Киев, с. ш. № 145)
СОКОЛ Александр (п. Черноголовка Моск. обл., с. ш. № 82)
СПИВАК Александр (г. Москва, ФМШ № 18 при МГУ)
ТАЛДЕНКО Юрий (г. Сумы, с. ш. № 10)
ТИТЕНКО Владимир (д. Блужа Минской обл.)
УГРИНОВСКИЙ Роман (г. Хмельник, с. ш. № 3)
ЧАЛЫХ Олег (г. Москва, ФМШ № 18 при МГУ)

За успешное участие в XV Всесоюзной физико-математической олимпиаде подпиской на «Квант» на 1982 год награждаются:

АБДРАФИКОВА Надежда (г. Белорецк, с. ш. № 14)
АВДЫЕВ Марат (г. Мары, с. ш. № 5)
АСЛАНЯН Ашот (г. Ереван, ФМШ)
ВИКТОРОВ Виктор (г. Рязань, с. ш. № 45)
ДЕШКОВСКИЙ Александр (г. Барановичи, с. ш. № 6)
ЖИТОМИРСКИЙ Виктор (г. Харьков, с. ш. № 27)
КИМ Сергей (г. Алмалык, с. ш. № 15)
КОЛПАКОВ Андрей (п. Почет Красноярского края, с. ш. № 1)
КУДИНОВ Олег (г. Заринск, с. ш. № 2)
КУДЯ Андрей (р. п. Таловая Воронежской обл., с. ш. № 51)
МАКСИМУК Михаил (г. Торопец, с. ш. № 2)
МАЛЫШЕВ Владимир (г. Иркутск, с. ш. № 21)
МАРЧЕНКО Оксана (г. Талас, с. ш. № 2)
МАТЧАНОВ Ходжабай (колхоз им. Хамсы Хорезмской обл.)
МЕЛЬНИК Юрий (г. Единцы, с. ш. № 1)
МИЛЕНИНА Наталья (г. Кропоткин, с. ш. № 45)
МОСКАЛЕНКО Людмила (г. Стерлитамак, с. ш. № 27)
ПУКЛИНА Елена (г. Киев, с. ш. № 24)
РОДИОНОВ Юрий (г. Новоалтайск, с. ш. № 12)
САНГАДЖИ-ГОРЯЕВ Баатр (п. Ики-Бурул Калмыкской АССР, с. ш. № 1)
СТАХОВСКИЙ Виталий (г. Капустин-Яр, с. ш. № 231)
СУЛЕЙМАНОВ Рустам (г. Янгиабад, с. ш. № 10)
СУХОРУЧКИН Михаил (г. Киров, с. ш. № 37)
ТЕТЕРИНА Ирина (г. Ангрен, с. ш. № 33)
ШМЕЛЕВ Евгений (п. Надежный Якутской АССР, с. ш. № 19)
ШУМИЛОВ Павел (г. Минск, с. ш. № 50)
Республиканская ФМШ (г. Ташкент)

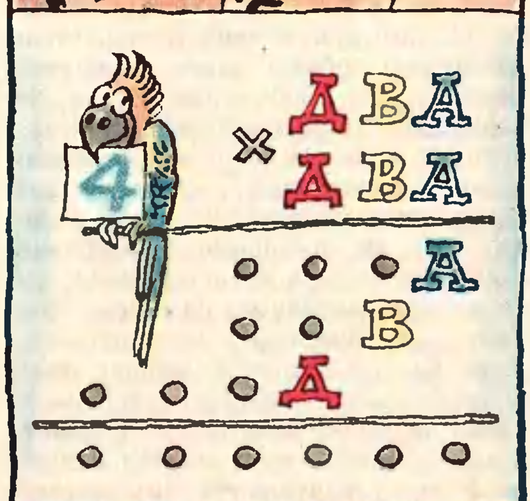
Задачи

1. В магазин привезли муку в мешках. Известно, что в первом, втором и третьем мешках не менее 60 кг муки, первом, втором и четвертом — не более 50 кг муки, первом, третьем и четвертом — не более 40 кг муки, а во втором, третьем и четвертом — не более 30 кг муки. Сколько муки было в каждом мешке?

2. Расшифруйте ребус ДВА×ДВА, изображенный на рисунке. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные. Точки могут быть любыми цифрами.

3. Однажды придворный Математик, получив свое жалованье за год серебряными талерами, разложил монеты в девять неравных столбиков (см. рисунок) так, что числа монет в столбиках образовали магический квадрат третьего порядка*); при этом некоторые столбики получились довольно высокими, но все же столбика, который насчитывал бы больше трехсот монет, не было. Королю понравилась затея Математика; он только пожалел, что все числа получились составными. «Если бы Ваше величество, — сказал Математик, — добавило к моему жалованью еще 9 талеров, я положил бы в каждый столбик еще по монете, и тогда сохранился бы магический квадрат, но все числа монет в столбиках были бы уже простыми». Король совсем уж было собрался увеличить жалованье Математику, как в разговор вмешался Шут. Он взял из каждого столбика по монете и новые числа все оказались простыми (а квадрат, разумеется, остался магическим)! Как сложил свои монеты Математик?

Эти задачи нам предложили
В. Бережной и *Б. Рублев*
(ученики 9 класса ФМШ
при КГУ, Киев),
А. Швецов, Г. Шишкина



---

*) Квадрат 3×3 из девяти чисел, суммы которых по строкам, столбцам и диагоналям одинаковы.

А. Калиник

Эта удивительная вязь колец

«Квант» уже рассказывал о *кольцах Борромео* (А. Савин «Олимпийские кольца» — «Квант», 1980, № 7). Это три кольца, переплетенные между собой так, что их не расцепишь, хотя любые два из них не зацеплены. Известны они издавна — когда-то они так поразили воображение основателей древних родов Нормандии, Бургундии и Ломбардии, что те помещали эти кольца в свои гербы. По древнему итальянскому роду патрициев из города Милана, роду Борромео, чьи воины носили на одежде нашивки из трех переплетенных колец, эти кольца и стали называть кольцами Борромео. А на надгробье великого Микеланджело (см. вторую страницу обложки) три венка: лавровый, оливковый и дубовый, переплетаясь между собой, как кольца Борромео, символизируют три взаимосвязанных вида искусства, в которых прославился Микеланджело Буонарроти, — скульптуру, живопись и архитектуру. Такое же переплетение венков показано и на одной из медалей, отчеканенной в честь этого великого художника эпохи Возрождения (рис. 1).

Но нас интересует не эстетическая или символическая сторона дела, а математическая. Почему кольца Борромео не расцепляются? Можно ли аналогично зацепить большее число колец? Имеются ли у зацепленных колец полезные применения? Ответить на эти вопросы нам помогут

Рис. 1.

Проволочные модели

Изготовим кольца Борромео из гибкой проволоки (или веревки). Выбрав какие-нибудь два кольца (скажем, красное и синее), разведем их, не изгибая, друг от друга (рис. 2). При этом третье (желтое) кольцо изогнется, образуя нечто вроде двойной скобы. Эта скоба вставлена в синее кольцо, а красное кольцо служит замком, не позволяя нам вынуть скобу из синего кольца. Но оборвешь любое кольцо — все развалится!

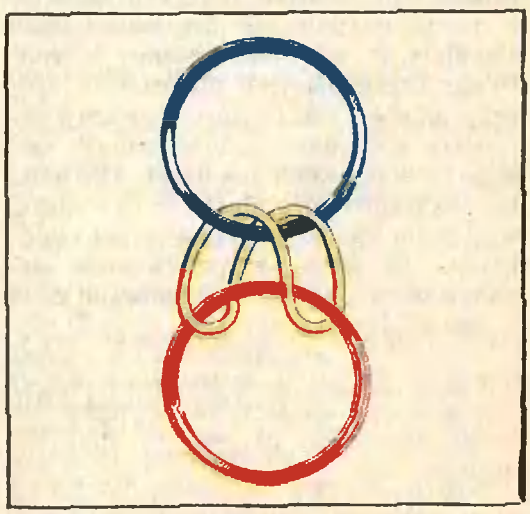


Рис. 2.

Фото 1.

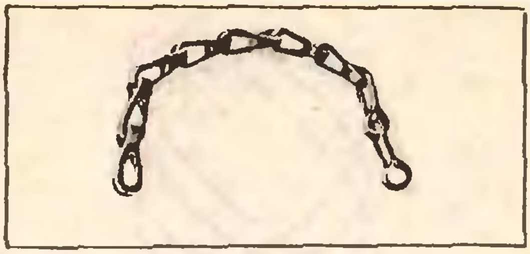


Фото 2.

Будем говорить, что совокупность проволочных колец образует *тривиальное зацепление*, если они на самом деле не зацеплены, то есть их можно отделить друг от друга (разрешается их гнуть и как угодно двигать, но рвать нельзя). В противном случае мы скажем, что кольца образуют *нетривиальное зацепление* или что они *зацеплены*. На языке этих терминов мы можем о кольцах Борромео сказать, что, во-первых, они зацеплены и, во-вторых, удаление любого кольца приводит к тривиальному зацеплению.

Нетрудно изготовить переплетение любого числа колец, обладающих тем же свойством, если расположить кольца в виде

Цепочки

Цепочка на рисунке 3, *а* — наиболее естественное и известное зацепление, но возможны и другие варианты (рис. 3, *б*, *в*). Может быть, вы придумаете какой-нибудь новый вариант?

Подобные цепочки значительно проще изготовить, чем обычные цепи. Действительно, у обычной цепи приходится сваривать внутренние звенья, предварительно зацепив их с соседними, в то время как у наших цепочек все звенья (кроме двух концевых) изготовляются независимо. Недаром эта конструкция издавна применяется в быту (дверные цепочки — см. фото 2) и для украшений (древние подвески народностей Кавказа — см. фото 1).

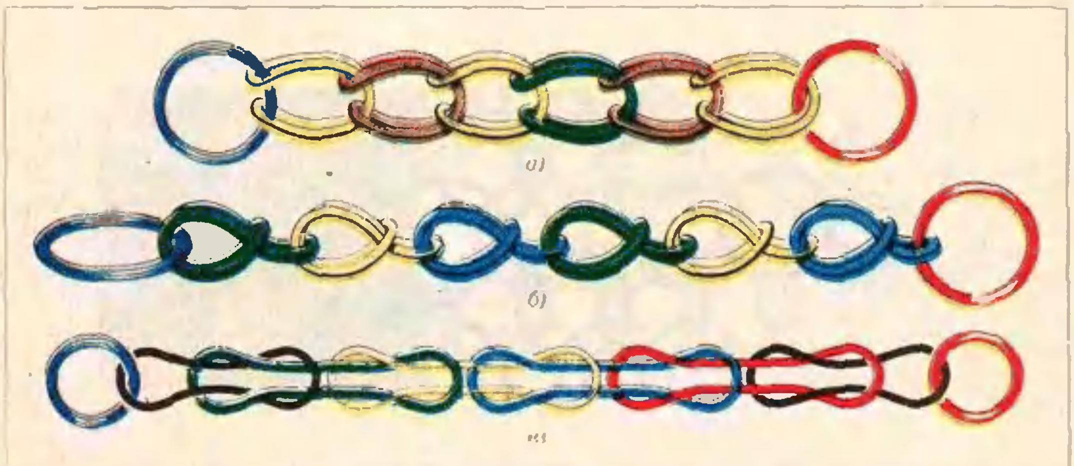


Рис. 3.

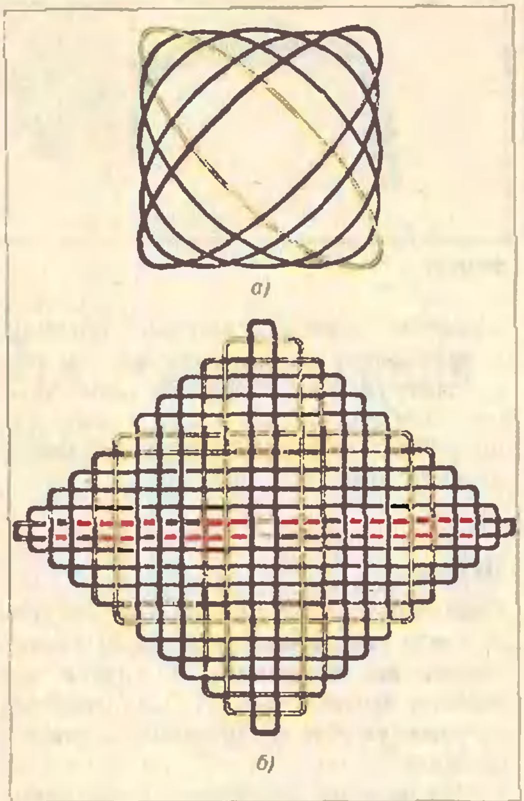


Рис. 4.

Цепочки полезны, конечно, но менее красивы, чем кольца Борромео. Однако, если звенья цепочки попробовать расправить так, чтобы они снова стали плоскими, то цепочки разворачиваются в красивые

Розетки

На рисунках 4,*а* и 4,*б* изображены розетки, полученные соответственно из 5-звенной и 12-звенной цепочки типа той, что на рисунке 3, *а*. Пользуясь цветными проводами, попробуйте осуществить переход от переплетения 3,*а* к 4,*б*. Постарайтесь получить розетки и из цепочек 3,*б* и 3,*в*.

«Коврик», получившийся на рисунке 4,*б*, сплетен не из одной или двух нитей, а из 12 довольно больших колец: удаление любого из них приводит к тривиальному зацеплению — весь «коврик» рассыпается. Из последнего рисунка видно, что количество колец, из которых состоит «коврик», может быть сколь угодно большим, и тем не менее достаточно разорвать одно (притом любое!) кольцо, чтобы «коврик» распался на отдельные кольца.

Построения типа колец Борромео можно использовать и для изготовления

Кольчуги

Здесь уже нужны маленькие, жесткие колечки; переплетать их можно по-разному (см., например, рисунки 5,*а* и 5,*б*). Возможны и другие интересные варианты. Подумайте!

Заметим, что, хотя построение на рисунке 5,*а* основано на повторении рисунка колец Борромео, удаление одного колечка не приводит к полному распадению кольчуги. Например, при удалении красного кольца кольчуга 5, *а* распадается на два куска; впрочем, если бы в кольчу-

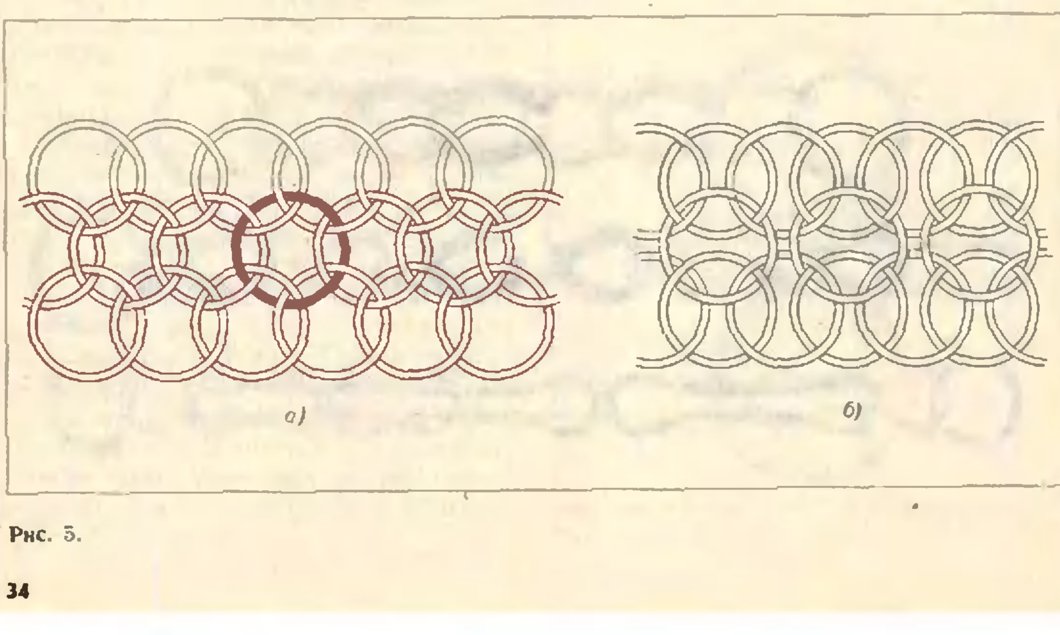


Рис. 5.

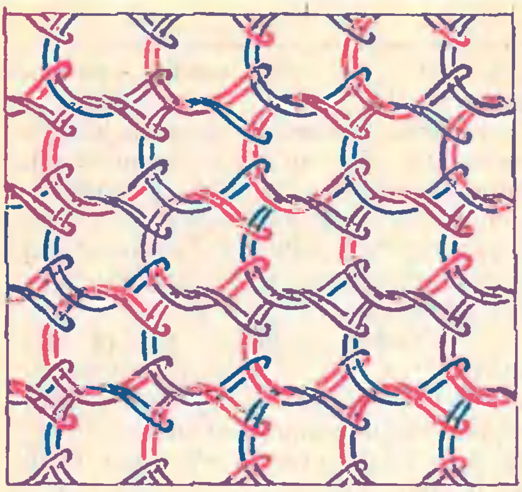


Рис. 6.

ге было больше трех рядов, удаление одного колечка привело бы лишь к небольшой дырке или разрыву.

Иначе ведет себя кольчуга на рисунке 6, составленная из «двойных скобок» — при удалении любой из них она полностью рассыпается!

Как здесь не вспомнить трикотажные изделия или капроновые чулки — разорвалась петелька, и по ткани «поползла стрелка». Как хорошо было бы женщинам, если бы капроновые чулки делали не из одной нитки, а из множества мелких колечек, как на кольчуге 5,*а*! В решении такой задачи может помочь математическое исследование зацеплений колец. Этими вопросами занимается ветвь математики, называемая *топологией*, вернее, ее раздел — *теория узлов и зацеплений*, сочетающий в себе тонкую геометрию и остроумную алгебру.

К примеру, старшеклассники, прочитавшие статью О. Виро («Квант», 1981, № 3), без труда дадут строгое математическое доказательство того, что кольца Борромео образуют нетривиальное зацепление: они не имеют «правильной раскраски».

Не вникая в непростые алгебраические методы этой науки, начать можно с изобретения новых интересных зацеплений разных типов. Так, красивые «зацепления плоскости», показанные на первой странице обложки «Кванта» № 7 за 1980 год, придуманы совсем недавно А. Савиным, хотя они основаны на древней идее колец Борромео. Это легко понять, изучив наш последний рисунок (рис. 7).

Если эта тематика вас заинтересует, присылайте нам ваши соображения и рисунки.

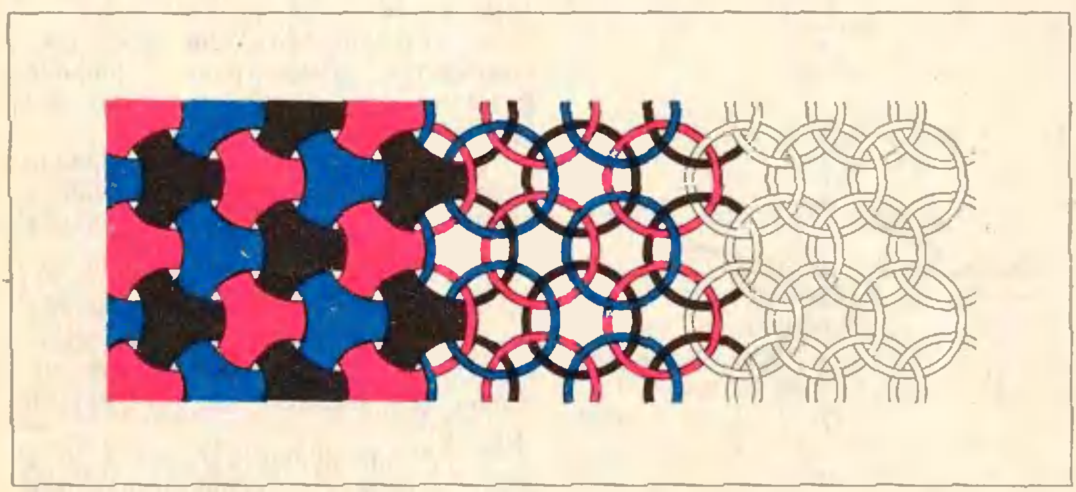


Рис. 7.

Г. Перевалов

Можно и без производной

Преобразование графика

На вступительных экзаменах одному из абитуриентов было предложено построить график функции $f(x)=2\lg(x-1)$. Он, как рекомендует учебное пособие «Алгебра и начала анализа 9—10» (п. 27), нашел область определения функции f, вычислил производную f', увидел, что она всюду на $D(f)$ положительна, сделал вывод, что функция f на $D(f)$ возрастает, нашел точку пересечения графика с осью абсцисс, записал результаты исследования в виде таблицы и построил график (рис. 1, *а*).

x	$]1;2[$	2	$]2;+\infty[$
$f'(x)$	+	+	+
$f(x)$	↗	0	↗

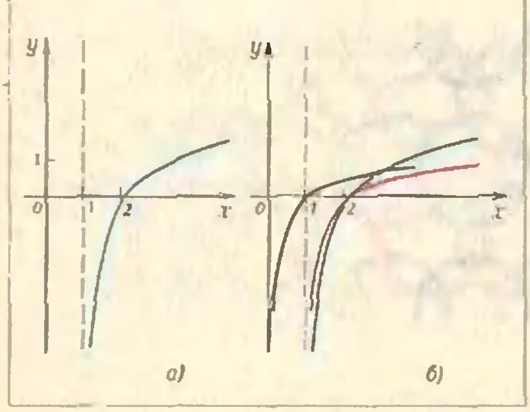


Рис. 1.

Однако искомый график можно построить без всяких вычислений, если применить правила преобразования графиков, изложенные в конце упомянутого пособия («Материал для повторения», п. 9). Перечислим эти правила:

1. График функции $y=f(x)+B$ получается из графика функции $y=f(x)$ переносом $\vec{r}\,(0;\ B)$, то есть переносом параллельно оси ординат на B — вверх, если $B>0$; вниз, если $B<0$ (рис. 2).

2. График функции $y=f(x+b)$ получается из графика функции $y=f(x)$ переносом $\vec{s}\,(-b;\ 0)$, то есть переносом параллельно оси абсцисс на $-b$ — влево, если $b>0$; вправо, если $b<0$ (рис. 3).

3. График функции $y=A\cdot f(x)$ получается умножением каждой ординаты графика функции $y=f(x)$ на A, то есть растяжением от оси абсцисс в A раз, если $A>1$, и сжатием к оси абсцисс в $\frac{1}{A}$ раз, если $0<A<1$ (рис. 4).

3′. График функции $y=-f(x)$ получается симметрией графика функции $y=f(x)$ относительно оси абсцисс (рис. 5).

4. График функции $y=f(ax)$ получается сжатием графика функции $y=f(x)$ к оси ординат в a раз, если $a>1$, и растяжением от оси ординат в $\frac{1}{a}$ раз, если $0<a<1$ (рис. 6).

4′. График функции $y=f(-x)$ получается симметрией графика функции $y=f(x)$ относительно оси ординат (рис. 7).

Заодно уж приведем два гораздо менее важных, менее универсальных правила, которые могут пригодиться в «абитуриентских» задачах:

5. График функции $y=|f(x)|$ совпадает с графиком функции $y=f(x)$ там, где $f(x)\geqslant 0$, и получается из него симметрией относительно оси абсцисс там, где $f(x)<0$ (рис. 8).

6. График функции $y=f(|x|)$ при $x\geqslant 0$ совпадает с графиком функции $y=f(x)$; при $x<0$ он получается

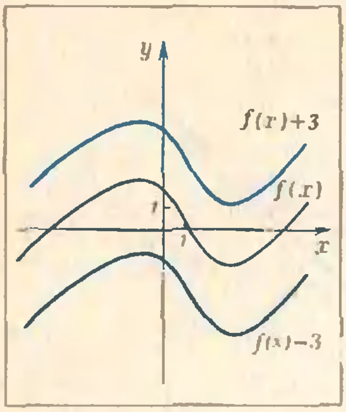


Рис. 2.

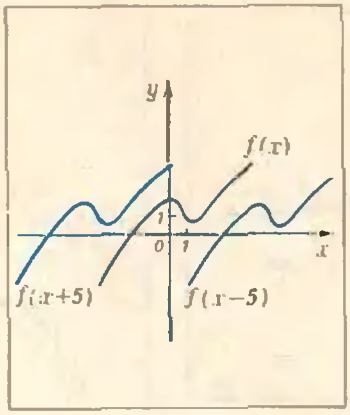


Рис. 3.

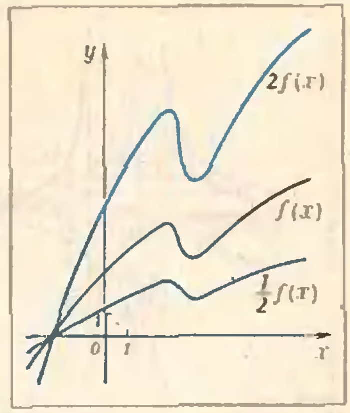


Рис. 4.

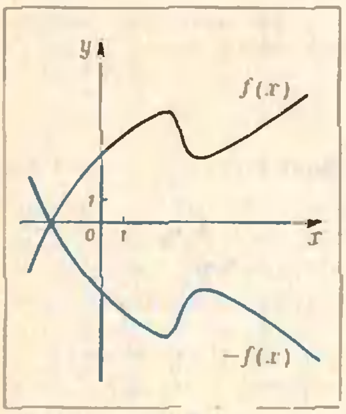


Рис. 5.

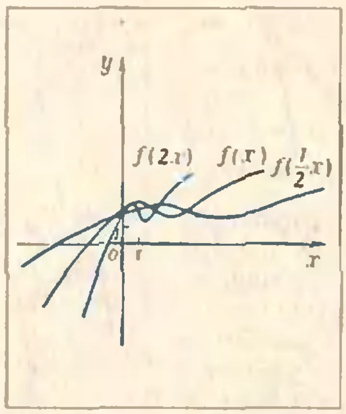


Рис. 6.

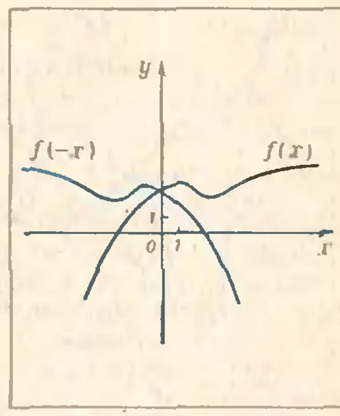


Рис. 7.

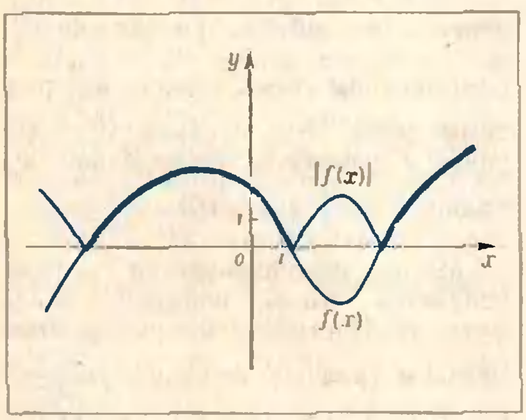


Рис. 8.

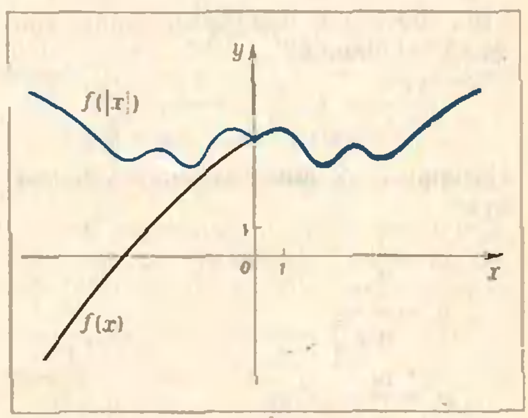


Рис. 9.

симметрией «правой половины» графика функции $y=f(x)$ относительно оси ординат (рис. 9).

Чтобы построить график функции $y=2\lg(x-1)$ *методом преобразования графика*, надо график функции $y=\lg x$ перенести параллельно оси абсцисс вправо на 1 и растянуть полученный график от оси абсцисс в 2 раза (рис. 1, *б*). Сравните, читатель, «общий» способ построения этого графика (см. начало статьи) с изложенным здесь. Не правда ли, этот намного приятнее!

Иногда, чтобы применить этот метод, надо сначала выражение, при помощи которого задана функция, преобразовать. Например, график функции $y=\frac{2x-3}{3x+5}$ легко стро-

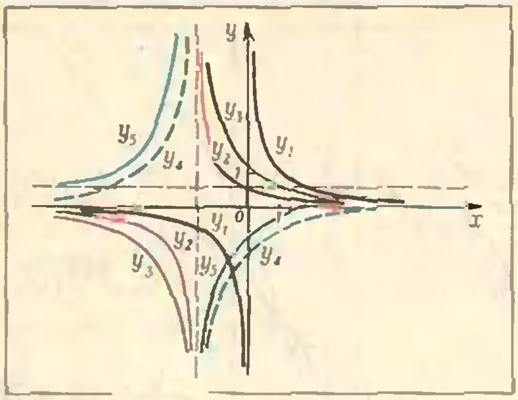


Рис. 10.

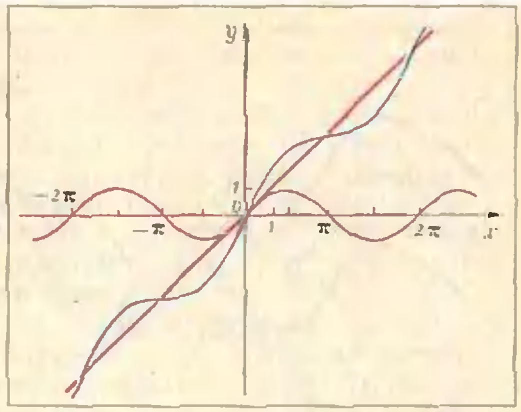


Рис. 11.

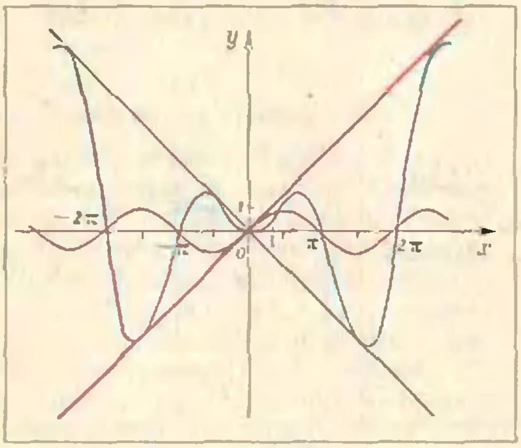


Рис. 12.

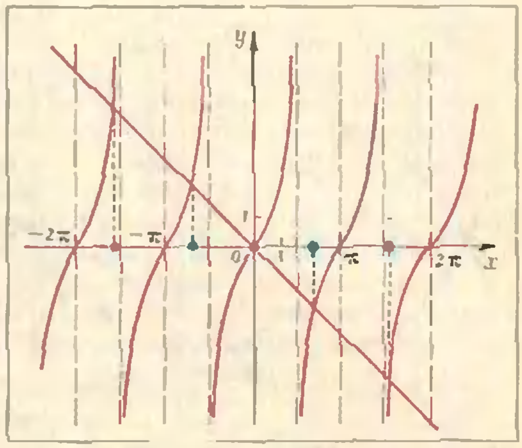


Рис. 13.

ится методом преобразования графика, поскольку

$$\frac{2x-3}{3x+5}=\left(-\frac{19}{9}\right)\cdot\frac{1}{x+\frac{5}{3}}+\frac{2}{3}.$$

Напишем «вспомогательную цепочку»:

$$y_1=\frac{1}{x}$$

$$y_2=\frac{1}{x+\frac{5}{3}}$$

$$y_3=\frac{19}{9}\cdot\frac{1}{x+\frac{5}{3}}$$

$$y_4=-\left(\frac{19}{9}\cdot\frac{1}{x+\frac{5}{3}}\right)$$

$$y_5=\left(-\frac{19}{9}\right)\cdot\frac{1}{x+\frac{5}{3}}+\frac{2}{3}$$

Таким образом, нужный график получается из графика функции $y=\frac{1}{x}$ четырьмя последовательными преобразованиями: переносом параллельно оси абсцисс влево на $\frac{5}{3}$, растяжением от оси абсцисс в $\frac{19}{9}$ раз, симметрией относительно оси абсцисс и переносом параллельно оси ординат на $\frac{2}{3}$ (рис. 10).

Методу преобразования графика поддается очень широкий класс функций. Постройте, например, этим методом графики функций $y=\frac{1}{2^x-2}$, $y=\lg(-x)+2$, $y=3\sin(2x-1)+5$, $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

Не ошибитесь: график функции $y=f(ax+b)$ получается, конечно, переносом графика функции $y=f(ax)$ параллельно оси абсцисс, но переносом не на $-b$, а на $-\frac{b}{a}$ (почему?).

Правила преобразования графиков, перечисленные выше, позволяют сообразить, что если число T является периодом функции $y=f(x)$, то периодом функции $y=A\cdot f(ax+b)+B$ является число $\frac{T}{a}$; из всех преобра-

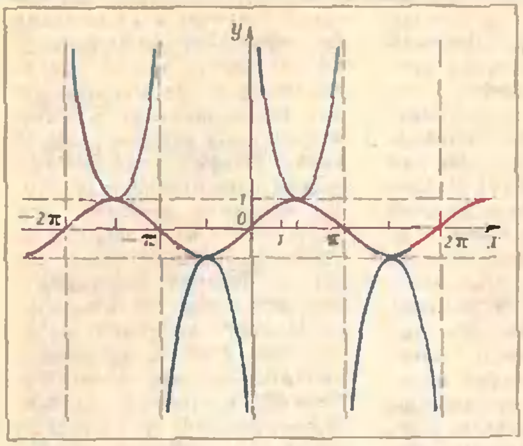


Рис. 14.

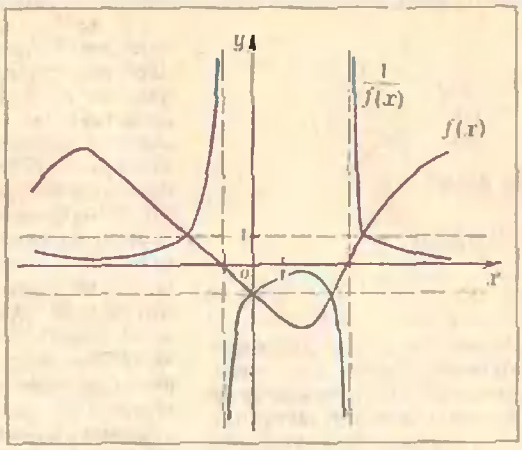


Рис. 15.

зований, перечисленных в этих правилах, на период влияет только преобразование из правила 4.

Действия над графиками

Иногда нужный график можно получить, произведя над «составляющими графиками» арифметические действия, указанные в формуле, задающей функцию.

Пример 1. Попробуем построить график функции $f(x)=x+$ $+\sin x$ сложением ординат графиков функций $y=x$ и $y=\sin x$ (рис. 11). Заметим, прежде всего, что функция f — нечетная, и будем поэтому «складывать графики» только при $x\geqslant 0$. Очевидно, там, где $\sin x>0$, искомый график будет лежать над прямой $y=x$; на промежутках, на которых $\sin x<0$, он будет лежать под этой прямой; в точках $x=\pi k$ ($k\in \mathbf{N}$) он будет пересекать ее. На отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ оба слагаемых возрастают — значит, будет возрастать и их сумма f. Но на отрезке, скажем, $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$ первое слагаемое возрастает, второе убывает — что будет с суммой f, не ясно. Без вычислений здесь не обойтись. $f'(x)=1+\cos x>0$ всюду, кроме точек $x=\pi+2\pi k$ ($k\in \mathbf{N}$). Значит, функция f возрастает на $[0;\ +\infty[$.

Пример 2. Попробуем теперь построить график функции $f(x)=$ $=x\cdot\sin x$ умножением ординат соответствующих графиков (рис. 12). Функция f — четная, поэтому будем «перемножать графики» при $x\geqslant 0$. На промежутке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ оба сомножителя положительны и возрастают — значит, на этом промежутке будет возрастать и функция f. Но на промежутке $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$ один из положительных сомножителей растет, второй убывает. Что будет с произведением? Если в предыдущем примере еще можно было обойтись без производной (докажите без производной, что из $x_1<x_2$ следует $x_1+\sin x_1<x_2+\sin x_2$), то здесь это сделать вряд ли удастся. Исследование производной ($f'(x)=\sin x+$ $+x\cdot\cos x$, $f'(x)=0 \Longleftrightarrow \operatorname{tg} x=-x$) показывает, что точки экстремума функций f и $y=\sin x$ не совпадают (рис. 13).

Пример 3. График функции $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ легко строится делением единицы на ординаты функции $y=\sin x$ (рис. 14). Так же легко строится любой график вида $g(x)=$ $=\frac{1}{f(x)}$, если график функции f известен (рис. 15).

Попробуйте аналогичным способом построить графики функций $y=x+\lg x$, $y=2^x\cdot\sin x$, $y=\frac{\sin x}{1+x^2}$.

Задача Дирака

Будучи студентами Московского государственного университета, мы почти всегда присутствовали на заседаниях Физического общества имени П. Н. Лебедева, где обсуждались новейшие работы по физике. Это были памятные годы быстрого становления квантовой механики; одна за другой появлялись основополагающие работы Дирака, Гейзенберга, де Бройля и других, вскоре ставшие классическими. На заседаниях часто горячо выступал недавно приехавший в Москву Игорь Евгеньевич Тамм, впоследствии академик, лауреат Государственных и Нобелевской премий.

Именно на этих собраниях московские физики ввели единицу скорости речи «1 Тамм», равную пяти нормальным единицам. Впрочем, вскоре появилась еще более крупная единица: «1 Глаголева-Аркадьева», равная пяти «Таммам».

В 1926 году, прослушав блестящий систематический курс электродинамики у профессора Н. Н. Андреева (впоследствии также академика), мы — несколько четверокурсников МГУ — решили прослушать курс и у И. Е. Тамма. Узнав, что большинство его слушателей кое-что смыслят в электродинамике, И. Е. не стал читать систематический курс, а излагал лишь отдельные вопросы, казавшиеся ему чем-то интересными или наиболее трудными. При этом он избегал обычных доказательств, прямо у доски искал новые пути рассуждений, иногда запутывался, иногда сам себя опровергал. Словом, мы смогли полностью оценить точность пушкинского высказывания: «Следить за мыслью великого человека есть наука самая занимательная».

Позже, по окончании университета, мне довелось встречаться с Игорем Евгеньевичем и на научных заседаниях, и в частной жизни: в альпинистских лагерях Кавказа, на Черноморском побережье, куда он обычно выходил после очередного восхождения (И. Е. был превосходным альпинистом), а также в Подмосковье.

Как-то раз мы ехали в полупустом вагоне дачного поезда, и Игорь Евгеньевич увлекательно рассказывал о своих встречах с известными физиками. Вдруг он спросил: «А вы знаете задачу Дирака: как представить любое целое число двойками и математическими знаками?». Я не знал, и Игорь Евгеньевич уже достал записную книжку, чтобы показать решение, как вдруг вошел контролер. И. Е. долго безуспешно искал билет. Я шепнул контролеру, что перед ним — член-корреспондент Академии наук, но тот был непреклонен. Заплатив штраф, Игорь Евгеньевич растерянно сказал: «Как странно! Я отчетливо помню, что купил билет. Но совсем не помню, клал ли его в карман».

Почему-то эта забывчивость очень расстроила И. Е., о Дираке он не вспомнил, а мне спросить о решении было неловко. И только позже, зимой, встретив Игоря Евгеньевича на концерте в Доме ученых, мне удалось узнать решение задачи Дирака. Вот оно:

$$\log_2(\log_2 2)=0,$$
$$\mp\log_2(\log_2\sqrt{2})=\pm1,$$
$$\mp\log_2(\log_2\sqrt{\sqrt{2}})=\pm2$$

и так далее.

А теперь вопрос к читателям. Как вы думаете, можно ли заменить двойку какой-нибудь другой цифрой?

Н. Малов

Нейтрон → антинейтрон?

В шестом номере «Кванта» было рассказано о том, как физики пытаются обнаружить распад протона, то есть его превращение в легкие частицы (например, в положительный мю-мезон и нейтрино). И хотя такой распад (если он действительно существует) — чрезвычайно редкое явление, есть реальная надежда обнаружить его, если в течение года распадается хотя бы один из 10^{31} протонов.

Но если окажется, что протон действительно превращается в легкие частицы, то почти наверняка похожее превращение должен претерпевать и нейтрон. Однако накопить тонны нейтронов и обнаружить распад нейтрона — задача, по крайней мере сейчас, безнадежная.

Несколько лет назад сотрудник Института ядерных исследований АН СССР В. А. Кузьмин заметил, что существуют реальные шансы обнаружить другой процесс — превращение нейтрона в антинейтрон. Протон не может сам по себе превратиться в антипротон: для этого у него должен был бы измениться знак заряда; заряд же в природе сохраняется. У нейтрона нет заряда, как нет его и у антинейтрона, поэтому процесс превращения $n\to\tilde{n}$ в принципе может происходить. Летящий нейтрон может периодически превращаться в антинейтрон и обратно без того, чтобы нарушить фундаментальные законы природы.

Подсчеты показали, что, если работать с нейтронами, летящими со скоростью 100 м/с (это так называемые холодные нейтроны: такую среднюю скорость имели бы молекулы идеального газа при температуре ~0,8 К), то на расстоянии 5 м от реактора можно было бы зарегистрировать антинейтроны, если превращение нейтрон→антинейтрон происходит не реже, чем один раз за 10^7 с, то есть примерно раз в 4 месяца.

Это один из самых интересных и неожиданных опытов, который сейчас подготавливается физиками.

Я. С.

Геометрические задачи наших читателей

1. Пусть a, b, c — длины, соответственно, сторон BC, CA и AB произвольного треугольника ABC. Пусть O_1 — точка пересечения его биссектрис, O_2 — точка пересечения медиан. Обозначим через K, L и M точки пересечения прямой O_1O_2 с прямыми BC, CA и AB. Пусть, наконец, λ, μ и ν — числа, для которых $\vec{BK}=\lambda\cdot\vec{KC}$, $\vec{CL}=\mu\cdot\vec{LA}$, $\vec{AM}=\nu\cdot\vec{MB}$. Докажите, что $\lambda=\frac{a-c}{a-b}$, $\mu=\frac{a-b}{c-b}$, $\nu=\frac{c-b}{c-a}$.

2. Пусть в треугольнике ABC длины a, b, c сторон BC, CA, AB удовлетворяют соотношению $a>c>b$. Пусть $h_a=|AA_0|$, $h_b=|BB_0|$, $h_c=|CC_0|$ — длины высот AA_0, BB_0, CC_0 треугольника, а H_a, H_b, H_c — проекции их оснований A_0, B_0, C_0 на биссектрисы углов A, B и C соответственно. Докажите, что для площадей треугольников с вершинами в этих точках справедливы следующие равенства:

а) $a^3\cdot S_{AH_aA_0}+b^3\cdot S_{BH_bB_0}=c^3\cdot S_{CH_cC_0}$;

б) $\frac{S_{AH_aA_0}}{h_a^3}+\frac{S_{BH_bB_0}}{h_b^3}=\frac{S_{CH_cC_0}}{h_c^3}$.

3. Известно, что в четырехугольник $ABCD$ можно вписать окружность. Пусть E — точка пересечения его диагоналей AC и BD. Докажите, что

$$\frac{|AE|}{|EC|}=\frac{\operatorname{ctg}\hat{A}/2}{\operatorname{ctg}\hat{C}/2}.$$

У. Алла

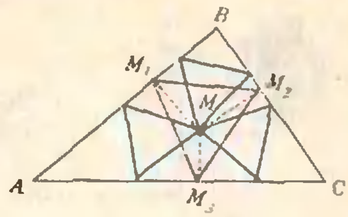
4. а) Пусть ABC — треугольник, M — точка внутри него, являющаяся общей вершиной трех конгруэнтных равносторонних треугольников, две другие вершины каждого из которых лежат на смежных сторонах треугольника ABC (см. рис.). Докажите, что длина стороны этих равносторонних треугольников равна

$$\frac{2abc}{a^2+b^2+c^2+4S\sqrt{3}},$$

где S — площадь треугольника ABC, a, b, c — длины его сторон.

б) Обозначим через M_1, M_2 и M_3 проекции точки M на стороны данного треугольника (см. рис.). Докажите, что треугольник $M_1M_2M_3$ — равносторонний.

А. Ягубьянц



5. Через центр O окружности, вписанной в треугольник ABC, проведен отрезок MN с концами на сторонах треугольника, $M\in[AB]$, $N\in[AC]$. На прямых BO и CO взяты, соответственно, точки D и E такие, что отрезки DN и ME параллельны стороне BC. Докажите, что точки A, D и E лежат на одной прямой.

(Обобщение этой задачи — замечательная теорема из проективной геометрии: *Если прямые BC, ME и DN проходят через одну точку и прямые BD, CE и MN проходят через одну точку, то и прямые BM, NC и DE также проходят через одну точку.*)

С. Мейдман

6. В треугольнике ABC проведены биссектрисы внутренних углов A, B, C до пересечения с описанной вокруг него окружностью в точках A_1, B_1 и C_1 соответственно. Обозначим через O точку пересечения этих биссектрис. Докажите, что середины отрезков AO, BO, CO, A_1O, B_1O, C_1O, A_1B_1, B_1C_1 и A_1C_1 лежат на одной окружности.

Н. Кушнир

Наша обложка

Двойственность

На первой странице обложки показаны один из 11 правильных паркетов («Квант», 1979, № 2, с. 9) и «двойственное» к нему покрытие плоскости конгруэнтными многоугольниками. Тонкой игрой красок и линий наш художник В. Лухин сумел осуществить постепенный переход от паркета, составленного из квадратов и правильных треугольников (синий и зеленый цвета вверху), к покрытию плоскости одинаковыми пятиугольниками (желтый и красный — внизу).

Этот переход известен в топологии как *двойственность Пуанкаре*. Она позволяет перейти от любого покрытия плоскости выпуклыми многоугольниками к другому такому покрытию. Геометрически этот переход описывается так: в одной из внутренних точек каждого многоугольника (*грани*) ставится точка (новая *вершина*); две новые вершины соединяются (новым) *ребром* тогда и только тогда, когда их грани имеют общее (старое) ребро. При этом каждой старой вершине будет соответствовать многоугольник — новая грань.

В нашем случае новые вершины выбирались в ц е н т р е старых граней, что обеспечило конгруэнтность всех новых граней (почему?).

Посмотрите, какие покрытия плоскости получаются, если применить эту конструкцию к другим правильным паркетам, и подумайте, что будет, если ее применить дважды подряд.

О. М.

В. Нахшин

Уравнения думают за нас

Решение любой расчетной задачи по физике состоит из двух частей — физической и математической.

Пока мы обдумываем условие задачи, анализируем, в соответствии с какими физическими законами происходит данное явление, и составляет соответствующую систему уравнений, мы — физики. После этого физика временно отходит на задний план. Теперь мы — математики, и перед нами стоят иные проблемы: как наиболее рационально решить полученную систему уравнений и найти ответ? Причем ответ нужно найти в общем (буквенном) виде, чтобы слева от знака равенства стояла только искомая величина (в буквенном обозначении), а справа — комбинация из только известных величин (тоже в соответствующих буквенных обозначениях).

Но вот ответ в общем виде получен, и мы снова обращаемся к физике: прежде чем подставить числовые данные, надо проверить размерность искомой величины и проанализировать ответ с точки зрения его правдоподобности. Если размерность верна и ответ правдоподобен, можно подставлять данные и считать.

Описанные этапы решения присущи практически всем задачам. Однако иногда — а именно о таких случаях и будет рассказано в статье — после расчетов получается неожиданный абсурдный результат, что свидетельствует о неверном решении. Так бывает, например, когда ни условие задачи, ни интуиция, ни здравый смысл не могут подсказать, в какую сторону протекает тот или иной процесс или каков конечный результат.

Приступая к решению такой задачи, мы вынуждены предположить какой-то вариант и в соответствии с ним составить систему уравнений. Если ответ получится абсурдным, отчаиваться не стоит. Просто нам не повезло: наше предположение оказалось неверным. Однако определенную информацию мы все же получили — в предполагаемом направлении процесс не идет. Что же, допустим другой вариант и так далее. Задача превращается в небольшое исследование, а уравнения — как бы в товарищей по размышлению. В конце концов они нас не подведут (разумеется, если мы их не подведем, то есть не ошибемся в составлении и решении) и расскажут нам об истинном направлении процесса или о конечном результате.

Рассмотрим несколько конкретных задач.

Задача 1. *На вершине шероховатой наклонной плоскости укреплен блок, через который переброшена нить (рис. 1). К концам нити прикреплены два тела массами $m_1=3$ кг и $m_2=2$ кг. Найдите ускорение системы и силу трения между первым телом и плоскостью, если коэффициент трения $\mu=0,5$ и угол наклона плоскости к горизонту $\alpha=30°$.*

Куда ускоряется система и движется ли она вообще? Из условия задачи не ясно. Между тем, знать это очень важно. Так, если система

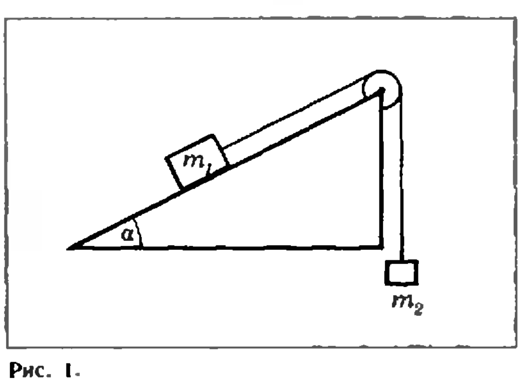


Рис. 1.

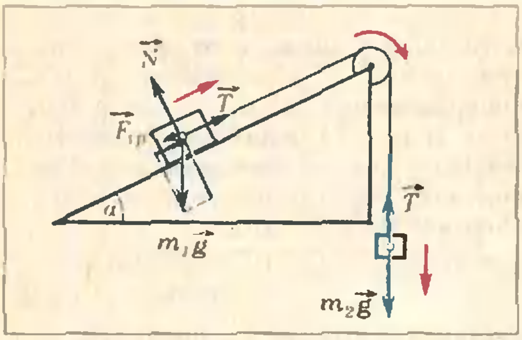


Рис. 2.

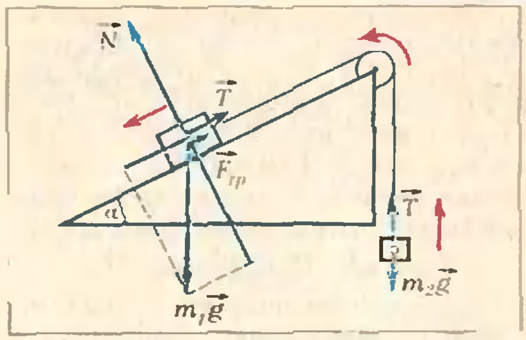


Рис. 3.

движется, имеет место трение скольжения и модуль этой силы равен $F_{тр}=\mu N$ (N — модуль силы нормальной реакции). Если же система покоится, на первое тело действует сила трения покоя, про которую известно только, что она не больше силы трения скольжения.

Может быть, поможет интуиция? С одной стороны, первое тело тяжелее второго, но, с другой стороны, второе тело висит в воздухе, а первое лежит на наклонной плоскости, да к тому же есть трение. Нет, интуиция нас не выручит, нужен анализ. Попробуем переложить наши заботы на уравнения.

Предположим, что блок вращается по часовой стрелке, то есть второе тело опускается с ускорением, а первое — с тем же по модулю ускорением поднимается по плоскости. Изобразим силы, действующие на каждое тело (рис. 2), и запишем систему уравнений второго закона Ньютона в проекциях на соответствующие направления (для первого тела это — направления вдоль плоскости и перпендикулярно к ней, а для второго тела это — вертикальное направление):

$$\begin{cases} T-m_1g\sin\alpha-\mu N=m_1a, \\ N-m_1g\cos\alpha=0, \\ m_2g-T=m_2a. \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем

$$a=g\frac{m_2-\mu m_1\cos\alpha-m_1\sin\alpha}{m_1+m_2}\approx-1{,}6\ \text{м/с}^2$$

— проекция ускорения на выбранное направление отрицательна. Значит, наше предположение неверно. Что же тогда происходит с системой? Движется в противоположном направлении? А с каким ускорением?

В этом месте многие допускают ошибку, считая, что система ускоряется в противоположном направлении с тем же по модулю ускорением ($\approx 1{,}6$ м/с^2). Иногда так действительно можно считать. Например, если бы в данной системе не было силы трения, при изменении выбранного направления движения на противоположное проекции всех сил изменили бы свой знак, и ускорение получилось бы таким же по модулю, но с противоположным знаком. В нашем же случае при новом предположении проекция силы трения по-прежнему отрицательна, поэтому соответствующая система уравнений будет другой (рис. 3):

$$\begin{cases} m_1g\sin\alpha-T-\mu N=m_1a, \\ N-m_1g\cos\alpha=0, \\ T-m_2g=m_2a. \end{cases}$$

Отсюда

$$a=g\frac{m_1\sin\alpha-\mu m_1\cos\alpha-m_2}{m_1+m_2}\approx$$

$$\approx-3{,}6\ \text{м/с}^2.$$

И вновь проекция ускорения оказалась отрицательной; следовательно, новое предположение тоже неверно.

Итак, уравнения, «подумав» за нас, привели к выводу, что система не ускоряется, то есть

$$a=0.$$

Значит, для нахождения силы трения, точнее — силы трения покоя, нельзя пользоваться формулой $F_{тр}=\mu N$, справедливой для силы трения скольжения.

Для определения искомой силы посмотрим, какие еще силы (или их проекции) действуют на первое тело в направлении вдоль наклонной плоскости. Это — проекция силы тяжести, равная по модулю $m_1 g \sin\alpha = 15$ Н, и сила натяжения нити, модуль которой можно найти из условия покоя второго тела: $T = m_2 g = 20$ Н. Следовательно, сила трения покоя направлена вдоль плоскости вниз и равна по модулю

$$F_{\text{тр.п}} = T - m_1 g \sin\alpha = 5 \text{ Н}.$$

Кстати, нетрудно убедиться в том, что в данном случае сила трения $F_{\text{тр.п}} = 5$ Н действительно меньше $\mu N = \mu m_1 g \cos\alpha \approx 13$ Н.

Задача 2. *В калориметр, содержащий $m_1 = 3$ кг льда при температуре $t_1 = -10°$ C, вливают $m_2 = 2$ кг воды при температуре $t_2 = 80°$C. Какая температура установится в результате теплообмена? Теплоемкость калориметра не учитывать.*

Ясно, что конечная температура t находится в промежутке от — 10 до +80° С:

$$-10°\text{C} < t < 80°\text{C}.$$

Следовательно, она может быть больше 0°С — температуры таяния льда, меньше этой температуры или равной ей. Какой именно она окажется, заранее сказать нельзя. Будем к цели пробираться «на ощупь», перебирая возможные варианты и полагаясь на волю уравнений.

Предположим, что $t > 0°$C, то есть что в калориметре будет только вода. Тогда лед получает тепло в три этапа: будучи собственно льдом, нагреваясь от —10 до 0°С, превращаясь в воду при 0°С и, будучи уже водой, нагреваясь от 0° С до t. При этом вода отдает тепло только при охлаждении от температуры t_2 до t. Запишем соответствующее уравнение теплового баланса:

$$c_1 m_1 (0 - t_1) + \lambda m_1 + c_2 m_1 (t - 0) + c_2 m_2 (t - t_2) = 0,$$

где $c_1 = 2{,}1 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К) и $c_2 = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К) — удельные теплоемкости льда и воды, а $\lambda = 3{,}4 \cdot 10^5$ Дж/кг — удельная теплота плавления льда. Отсюда найдем

$$t = \frac{c_1 m_1 t_1 + c_2 m_2 t_2 - \lambda m_1}{c_2 (m_1 + m_2)}.$$

Подставив числовые данные, получаем $t < 0°$C. Значит, наше предположение неверно.

Теперь допустим, что $t < 0°$C. В таком случае вода отдает тепло в три этапа — охлаждаясь до 0°С, превращаясь в лед при 0°С и в качестве льда охлаждаясь до искомой температуры t, а первоначальный лед получает тепло только в один этап — нагреваясь от t_1 до t:

$$c_1 m_1 (t - t_1) + c_2 m_2 (0 - t_2) - \lambda m_2 + c_1 m_2 (t - 0) = 0.$$

Решив это уравнение, получаем

$$t = \frac{c_1 m_1 t_1 + c_2 m_2 t_2 + \lambda m_2}{c_1 (m_1 + m_2)}.$$

Подставим числовые данные и убедимся, что $t > 0°$ С. Следовательно, и второе наше предположение было неверным.

Остается единственный вариант: $t = 0°$C. Это и будет ответом задачи.

Здесь мы предвидим некоторое чувство досады у читателя: почему автор нарочито подбирает примеры, где все первоначальные предположения оказываются неверными, и оба столь громоздких решения приводят к сравнительно простым результатам ($a = 0$, $t = 0°$С)? Почему бы, в самом деле, не предположить заранее именно эти простейшие варианты?

Такой путь возможен, но облегчения он не сулит. Так, в первой задаче, предположив покой и не имея при этом формулы для силы трения покоя, мы должны будем составить систему из трех уравнений равновесия, но, решив ее и найдя силу трения, надо обязательно проверить, действительно ли она меньше силы трения скольжения. Если окажется, что нет, придется все решение, описанное выше, начинать сначала.

Во второй задаче, предположив $t = 0°$С, мы должны подтвердить это уравнением теплового баланса, но неизвестно, как его составить. Мы не знаем, что раньше дошло до нуля: лед «снизу» или вода «сверху», и как следствие — расплавилась ли часть (и какая часть) льда или замерзла часть воды? Можно, конечно, опять что-то предположить, но число вариантов будет не меньше, а даже больше, чем в приведенном выше решении.

Задача 3. *Найдите токи во всех ветвях схемы, изображенной на рисунке 4. Здесь* $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_2 = \mathscr{E} = 1$ В,

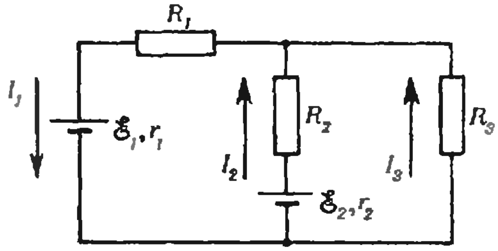


Рис. 4.

$r_1 = r_2 = r = 1$ Ом и $R_1 = R_2 = R_3 = R = 10$ Ом.

Предположим, что токи I_1, I_2 и I_3 направлены так, как показано на рисунке 4, хотя мы достоверно этого и не знаем. Если мы ошиблись, соответствующие уравнения нас поправят.

Поскольку в точках разветвления (узлах) электрический заряд не накапливается, заряд, поступающий в единицу времени в узел, равен заряду, уходящему из узла за то же время, то есть

$$I_1 = I_2 + I_3.$$

Выделим в данной схеме два простых замкнутых контура, например левый и правый, и выберем в них направления обхода, например против часовой стрелки. Согласно закону сохранения энергии, алгебраическая сумма ЭДС равна алгебраической сумме падений напряжения:

$$\mathcal{E} - \mathcal{E} = I_1R + I_1r + I_2r + I_2R,$$
$$-\mathcal{E} = -I_2R - I_2r + I_3R.$$

Объединим полученные уравнения в систему и для простоты подставим числовые данные:

$$\begin{cases} I_1 = I_2 + I_3, \\ 10I_1 + I_1 + I_2 + 10I_2 = 0, \\ 10I_2 + I_2 - 10I_3 = 1. \end{cases}$$

Решив эту систему, найдем

$$I_1 = -\frac{1}{31}\text{ А}, \; I_2 = \frac{1}{31}\text{ А}, \; I_3 = -\frac{2}{31}\text{ А}.$$

Первый и третий токи получились отрицательными. Это означает, что наши предположения об их направлениях оказались неверными. Числовые значения мы нашли верно, а направления этих токов — противоположны предполагаемым.

З а д а ч а 4. *Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 25$ м/с. Через какое время оно будет на высоте $h = 40$ м?*

Запишем известную формулу для координаты тела, брошенного вертикально вверх (положительным считаем направление вверх):

$$h = v_0t - \frac{gt^2}{2}.$$

Решая его относительно t, получим

$$t = \frac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}.$$

Однако при подстановке числовых данных выясняется, что выражение под корнем отрицательно. Что это означает?

Оказывается, это уравнение на своем языке подсказывает нам, что данное тело вообще не достигает такой высоты. В самом деле, максимальная высота подъема $h_{max} = v_0^2/2g \approx 31{,}5$ м, что меньше $h = 40$ м.

Так что бывают случаи, когда уравнения «думают» неожиданно, незапланированно.

Английский естествоиспытатель Томас Гексли однажды сравнил математику с жерновами, перемалывающими только то, что в них засыпано, не более того. Приведенные примеры иллюстрируют эту мысль — если в уравнение была заложена неверная идея, решение выдаст «шелуху» и тем самым подтолкнет нас к поиску рационального «зерна».

Упражнения

1. Однородный рычаг массой $m = 10$ кг опирается на опору, находящуюся на расстоянии $l_1 = 25$ см от его левого конца. Длина рычага $l = 1$ м. К левому концу рычага подвешен груз массой $m_1 = 2$ кг. С какой силой надо действовать на правый конец вниз под углом $\alpha = 30°$ к горизонту, чтобы рычаг находился в равновесии?

2. В калориметр, где находится $m_1 = 1$ кг льда при температуре $t_1 = 0°$C, впускают $m_2 = 500$ г водяного пара при температуре $t_2 = 100°$C. Какая температура установится после того, как произойдет теплообмен? Теплоемкостью калориметра можно пренебречь.

3. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 15$ м/с. Какой путь пройдет оно за $t = 2$ с полета? Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2.

И. Габович

Вспомогательные отрезки и углы

При решении геометрических задач часто бывает полезно помимо величин, данных в условии, ввести вспомогательные величины (длины отрезков, величины углов и т. п.) и выразить через них искомую величину. При этом в одних случаях вспомогательные величины в ходе решения «исчезают» (например, сокращаются), в других — определяются через данные.

Задача 1 (МФТИ, 1979). *Вписанная в треугольник ABC окружность касается его сторон AC и BC соответственно в точках M и N и пересекает биссектрису BD в точках P и Q. Найти отношение площадей треугольников PQM и PQN, если* $\widehat{A}=\frac{\pi}{4}$, $\widehat{B}=\frac{\pi}{3}$ (рис. 1).

Решение. Проведем в треугольниках PQM и PQN высоты $[MM_1]\perp[PQ]$ и $[NN_1]\perp[PQ]$. Поскольку треугольники PQM и PQN имеют общее основание,

$$\frac{S_{\triangle PQM}}{S_{\triangle PQN}}=\frac{|MM_1|}{|NN_1|}.$$

Пусть O — центр вписанной окружности и $|OM|=|ON|=x$. Поскольку $\widehat{BON}=\frac{\pi}{3}$, а $\triangle ONN_1$ — прямоугольный, $|NN_1|=\frac{x\sqrt{3}}{2}$. Так как $\widehat{C}=\frac{5}{12}\pi$, из четырехугольника $NOMC$ получаем $\widehat{MON}=\frac{7\pi}{12}$. Поэтому $\widehat{MOM_1}=\frac{\pi}{12}$. Из $\triangle MOM_1$ получаем $|MM_1|=$

$$=x\sin\frac{\pi}{12}=x\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=$$
$$=x\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{6}}$.

Задача 2 (МОПИ, 1978). *Высота правильной четырехугольной пирамиды составляет с боковой гранью угол 30°. Через сторону основания пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная противолежащей грани. Найти отношение объемов многогранников, полученных при пересечении пирамиды этой плоскостью.*

Решение. Легко видеть, что четырехугольник $CDMN$ (рис. 2), получающийся в сечении, является трапецией. Через высоту SO и апофему SE проведем плоскость. Эта плоскость перпендикулярна боковым граням SAB и SCD (почему?). Поэтому $\widehat{FSO}=30°$. Так как $|SF|=|SE|$ и $\widehat{FSE}=60°$, треугольник FSE — правильный. Пусть $|AB|=|AD|=|EF|=x$. Тогда $|MN|=\frac{x}{2}$, $|EP|=\frac{x\sqrt{3}}{2}$. Найдем объем четырехугольной пирамиды $SCDMN$. Отрезок SP — высота этой пирамиды (почему?), а трапеция $CDMN$ — ее основание. Поэтому $V_{SCDMN}=\frac{1}{3}|SP|\cdot S_{CDMN}$.

Так как $|SP|=\frac{x}{2}$ и $S_{CDMN}=\frac{\left(x+\frac{x}{2}\right)}{2}\cdot\frac{x\sqrt{3}}{2}=\frac{3x^2\sqrt{3}}{8}$, получаем

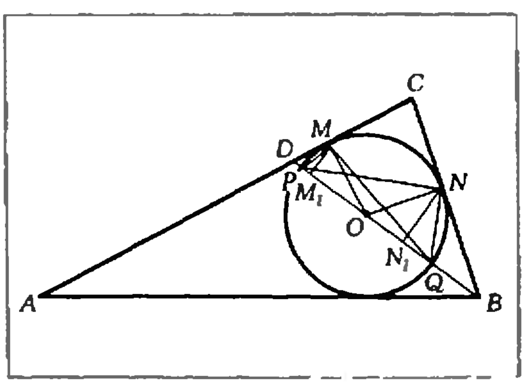


Рис. 1.

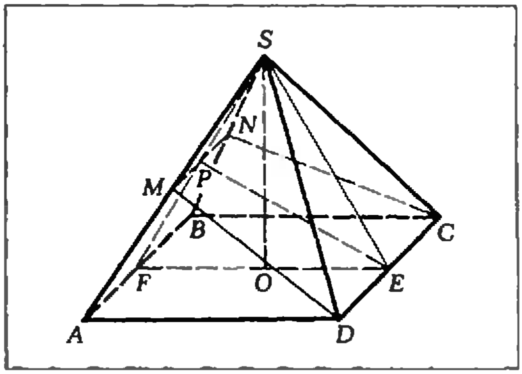


Рис. 2.

$V_{SCDMN}=\frac{x^3\sqrt{3}}{16}$. Легко видеть, что $V_{SABCD}=\frac{1}{3}|SO|\cdot x^2=\frac{x^3\sqrt{3}}{6}$.

Теперь ясно, что

$$\frac{V_{SCDMN}}{V_{ABCDMN}}=\frac{V_{SCDMN}}{V_{SABCD}-V_{SCDMN}}=\frac{3}{5}.$$

Иногда введение вспомогательного отрезка оказывается полезным при решении задач, в которых требуется найти некоторый угол.

З а д а ч а 3 (КПИ, 1979). *В правильную треугольную пирамиду вписан шар. Определить угол наклона боковой грани пирамиды к плоскости основания, зная, что отношение объема пирамиды к объему шара равно* $\frac{27\sqrt{3}}{4\pi}$.

Р е ш е н и е. Если шар вписан в правильную пирамиду, то его центр лежит на высоте пирамиды, шар касается основания в его центре, а боковых граней — в точках, принадлежащих апофемам пирамиды («Геометрия 9—10», с. 181). Пусть $\widehat{SDO}=\varphi$ (рис. 3), $|BC|=x$. Так как $|OD|=\frac{x\sqrt{3}}{6}$, $|SO|=\frac{x\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\varphi$. Поэтому $V_{SABC}=\frac{1}{3}|SO|\cdot S_{ABC}=\frac{x^3}{24}\operatorname{tg}\varphi$. Поскольку O_1D — биссектриса угла SDO, $\widehat{O_1DO}=\frac{\varphi}{2}$. Поэтому $|O_1O|=\frac{x\sqrt{3}}{6}\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ и объем шара равен $\frac{\pi x^3\sqrt{3}}{54}\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}$. Из условия получаем уравнение

$$\frac{\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}}=9.$$

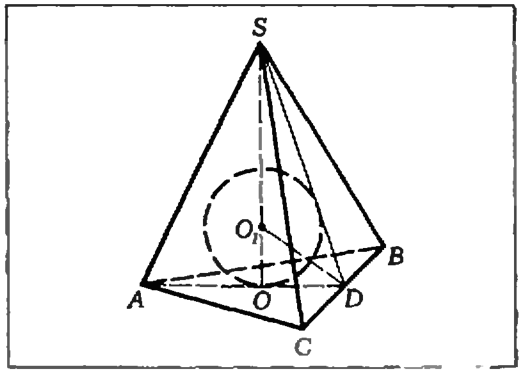


Рис. 3.

Заменив $\operatorname{tg}\varphi$ его выражением через $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$, получаем

$$9\operatorname{tg}^4\frac{\varphi}{2}-9\operatorname{tg}^2\frac{\varphi}{2}+2=0,$$

откуда $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$ или $\varphi_1=\frac{\pi}{3}$ и $\varphi_2=2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{6}}{3}$. Подумайте, почему условию этой задачи соответствуют д в а возможных значения φ.)

Введение вспомогательного элемента (отрезка или угла) часто бывает полезно в случаях, когда данные в условии задачи отрезки и углы лежат в разных плоскостях. При этом желательно, чтобы вводимые и данные элементы входили в один треугольник.

З а д а ч а 4 (КГУ, физфак, 1978). *Плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды равен α, а высота — h. Определить объем пирамиды.*

Р е ш е н и е. Пусть $|SD|=x$ (рис. 4). Проведем апофему SE. Из

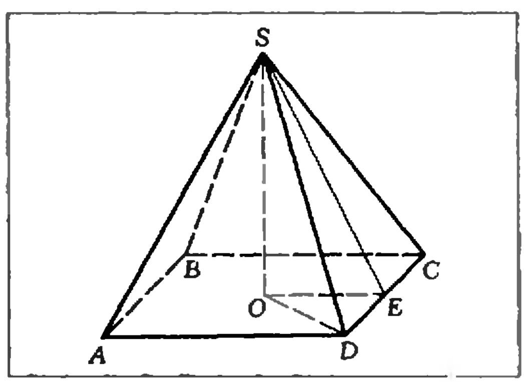


Рис. 4.

$\triangle SDE$ находим $|DE| = x\sin\frac{\alpha}{2}$. $|CD| = 2x \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$. Таким образом, $V = \frac{4}{3}x^2h\sin^2\frac{\alpha}{2}$. Теперь выразим x^2 через h и α. Для этого рассмотрим треугольник SOD. Имеем $|SD|^2 = |SO|^2 + |OD|^2$, но $|OD| = |CD| \times \frac{\sqrt{2}}{2} = x\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$. Поэтому $x^2 = h^2 + 2x^2\sin^2\frac{\alpha}{2}$, откуда $x^2 = \frac{h^2}{\cos\alpha}$. Следовательно, $V = \frac{4}{3}h^3\frac{\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

Приведем решение этой задачи, использующее введение вспомогательного угла. Пусть $\widehat{SDO} = \varphi$. Из $\triangle SDO$ получаем $|DO| = h\operatorname{ctg}\varphi$, $|CD| = h\sqrt{2}\operatorname{ctg}\varphi$. Таким образом, $V = \frac{2}{3}h^3\operatorname{ctg}^2\varphi$. Осталось выразить $\operatorname{ctg}^2\varphi$ через функции угла α. Для этого введем вспомогательный отрезок SD. Пусть $|SD| = x$. Тогда $|DE| = x\sin\frac{\alpha}{2}$, $|OD| = x\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\varphi = \frac{|OD|}{|SD|} = \sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$. Поэтому

$\operatorname{ctg}^2\varphi = \frac{\cos^2\varphi}{1-\cos^2\varphi} = \frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$, что приводит к полученному ранее ответу.

В данном случае второе решение задачи оказалось несколько длиннее первого.

Введение вспомогательного отрезка часто помогает при решении задач, в условии которых даны угол и какой-нибудь нелинейный элемент (например, объем) и требуется найти другой нелинейный элемент (поверхность, площадь сечения, объем исходной или как-нибудь связанной с ней фигуры).

З а д а ч а 5 (КГУ, физфак, 1978). *В шар, площадь поверхности которого S, вписан конус. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен α. Определить площадь полной поверхности конуса.*

Р е ш е н и е. Если конус вписан в шар, то центр шара лежит на высоте конуса либо на ее продолжении за плоскость основания («Геометрия 9—10», с. 108). Осевым сечением рассматриваемой комбинации фигур

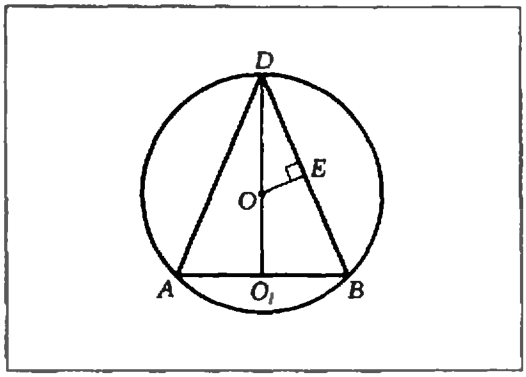


Рис. 5.

является равнобедренный треугольник, вписанный в окружность большого круга.

Если $\alpha \geqslant 45°$, то центр шара O лежит на высоте конуса (рис. 5). Пусть $|DB| = x$; тогда из $\triangle DBO_1$ находим $|O_1B| = x \cdot \cos\alpha$.

$$S_п = \pi|O_1B| \cdot (|DB| + |O_1B|) = \pi x\cos\alpha(x + x\cdot\cos\alpha) = 2\pi x^2\cos\alpha \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Очевидно, $\widehat{DOE} = \widehat{DBO_1} = \alpha$ и $|DE| = \frac{x}{2}$. Из $\triangle DOE$ получаем $|DO| = \frac{x}{2\sin\alpha}$ и $S = 4\pi \cdot \frac{x^2}{4\sin^2\alpha} = \frac{\pi x^2}{\sin^2\alpha}$, откуда $\pi x^2 = S\sin^2\alpha$. Таким образом,

$$S_п = 2S\sin^2\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2} = S\sin\alpha \cdot \sin 2\alpha \cdot \cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Легко видеть, что проведенные рассуждения остаются в силе и при $\alpha < 45°$.

Упражнения

1 (МФТИ, 1979). В $\triangle ABC$ дано $\hat{A} = \frac{\pi}{3}$, $\hat{B} = \frac{\pi}{4}$. Продолжения высот треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках M, N и P. Найти отношение площадей треугольников ABC и MNP.

2 (КПИ, 1978). Найти отношение объема правильной n-угольной пирамиды к объему вписанного в нее шара, зная, что окружности, описанные около основания и боковых граней пирамиды, конгруэнтны.

3 (КГУ, мехмат, 1978). Вершина правильной треугольной пирамиды является центром сферы, которая касается плоскости основания пирамиды. Отношение площади боковой поверхности пирамиды к площади поверхности сферы равно a. Определить угол наклона бокового ребра пирамиды к плоскости основания.

4 (ЛВУ ж.-д. войск и военных сообщений, 1978). В конус вписан шар, поверхность которого равна площади основания конуса. Найти косинус угла при вершине в осевом сечении конуса.

5 (КГУ, физфак, 1978). Найти объем правильной треугольной пирамиды, зная плоский угол α при вершине и расстояние a от боковой грани до противоположной ей вершины основания.

6 (КАИ, 1978). Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, у которой сторона основания равна a, а двугранный угол между боковыми гранями равен α.

7 (КПИ, 1979). Основание пирамиды — прямоугольный треугольник с площадью Q и острым углом α. Боковая грань, проходящая через катет, который прилежит к данному углу, перпендикулярна к плоскости основания, две другие грани образуют с основанием углы, равные β. Найти объем пирамиды.

8 (КГУ, физфак, 1978). В шар, площадь поверхности которого S, вписан конус. Угол между образующей конуса и плоскостью основания равен α. Определить площадь полной поверхности конуса.

Числовые ребусы

1. *Ребусы — перевертыши*

а)

```
             круг
  ×    окружность
 ----------------
            у****
           ь****
          т****
         н****
        с****
       р****
      к***
     о****
    о****
   н****
 ----------------
   **************
```

б)

```
       окружность
  ×          круг
 ----------------
      р********тг
     н*********у
    с*********к
   о**********к
 ----------------
   **************
```

В. Радунский

2. Следующие числовые ребусы:

I.

```
_игрек | три
 три     три
 _ске
  сте
  _гек
   гек
```

II.

```
_******** | икс
 икс        пиявка
  ***
 _три
   ****
  _пять
     ***
    _два
     ****
    _****
     кот
```

III.

```
_тысяча | икс
 люкс     икс
 _тлтч
  тяна
  _юрча
   юрча
```

IV.

```
_четыре | зет
 чраз     зет
 _аар
  зет
  _ызбе
   ызбе
```

составлены в двенадцатиричной системе счисления. В каждом примере цифры заменены буквами и звездочками; одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные; звездочки могут быть любыми цифрами.

Чтобы вам было легче решить задачу, мы помещаем таблицу умножения в двенадцатиричной системе. Новые цифры (10_{10} и 11_{10}) обозначены соответственно символами X и Y.

	2	3	4	5	6	7	8	9	X	Y
2	4	6	8	X	10	12	14	16	18	1X
3	6	9	10	13	16	19	20	23	26	29
4	8	10	14	18	20	24	28	30	34	38
5	X	13	18	21	26	2Y	34	39	42	47
6	10	16	20	26	30	36	40	46	50	56
7	12	19	24	2Y	36	41	48	53	5X	65
8	14	20	28	34	40	48	54	60	68	74
9	16	23	30	39	46	53	60	69	76	83
X	18	26	34	42	50	5X	68	76	84	92
Y	1X	29	38	47	56	65	74	83	92	X1

Э. Рекстин

К СВЕДЕНИЮ ЧИТАТЕЛЕЙ

С 1 января 1982 года цена за экземпляр нашего журнала устанавливается в размере 40 копеек, стоимость годовой подписки — 4 рубля 80 копеек. Это связано с увеличением стоимости бумаги для печати, затрат на полиграфическое исполнение журнала, расходов на подготовку рукописей и художественно-графическое оформление издания.

А. Рар

Какие бывают языки программирования

От редакции. Публикуемая ниже статья доступна и тем читателям, которые не занимаются в Заочной школе программирования.
Свой третий и заключительный курс Заочная школа начнет в следующем номере.

Хотя первые ЭВМ были созданы только в сороковых годах, в настоящее время языков программирования развелось видимо-невидимо (неполный список этих языков изображен на заставке к этой статье).

Учащиеся ЗШП хорошо знают язык Рапира, мы будет ссылаться на него в сносках. Остальные читатели могут эти сноски игнорировать.

Наш рассказ мы начнем с того далекого времени, когда языков программирования еще не было, а были только

Машинные языки

Машинный язык ЭВМ — это не что иное, как система ее машинных команд (см. «Квант», 1981, № 4 — «Трехадресные, одноадресные и... безадресные машины»). Правила «понимания» машиной этих команд заложены в саму конструкцию ЭВМ так же, как, например, в конструкцию автомобиля заложено «понимание» того, что «означает» поворот руля.

Приведем пример работы программиста, использующего язык одной из трехадресных машин. Допустим, что этот программист должен по ходу решения своей задачи вычислить, на какой высоте H находится свободно падающая материальная точка через T секунд после начала падения, если начальная высота точки — A м, начальная скорость — V м/с. Соответствующая физическая формула хорошо известна:

$$H=9{,}81\cdot T^2/2+V\cdot T+A,$$

но программисту удобнее переписать ее в другом виде:

$$H=(9{,}81\cdot T/2+V)\cdot T+A.$$

В самом начале работы над программой программист должен выполнить для нее «распределение памяти», то есть определить адреса ячеек, которые будут служить для хранения тех или иных величин.

Пусть, например, он распределил память следующим образом:

Величина	Адрес ячейки
Константа 9,81	1001
Константа 2	1002
Переменная A	1101
Переменная V	1102
Переменная T	1103
Переменная H	1104

Пусть, далее, в нашей машине (это, кстати, заслуженный ветеран отечественной вычислительной техники — машина М-220, используемая еще кое-где и в наши дни) операция сложения имеет код 01, деления — 04, умножения — 05. Тогда в соответствующем месте своей программы, например начиная с ячейки 0101, программист пишет:

0101	05	1001	1104
0102	04	1104	1104
0103	01	1104	1104
0104	05	1103	1104
0105	01	1101	1104

Как видим, в целях экономии места ячейка 1104 использована не только для переменной H, но и для хранения промежуточных результатов.

Работая на машинном языке, программист встречается с большими трудностями: ему приходится самому заботиться о распределении памяти, он должен все время помнить, в какой ячейке хранится та или иная величина, каков адрес той или иной команды из программы. Еще существеннее то, что программа и данные к ней жестко связаны с расположением в машинной памяти, так что переместить какую-либо их часть на другое место без изменения адресов во многих командах нельзя. Поэтому вставить в программу какой-то новый кусок трудно, еще труднее составить большую программу из частей, заготовляемых отдельно разными людьми. Частично избавиться от этих затруднений помогли

Первые языки программирования — автокоды

Автокод — язык программирования, тесно связанный с конкретной машиной и ее системой команд. Поэтому для разных машин должны существовать разные автокоды, но для одной и той же машины можно создать несколько автокодов. Мы здесь рассмотрим пример автокода самого низкого уровня, то есть автокода, наиболее близкого к машинному языку.

Желая запрограммировать приведенную выше формулу на автокоде для машины М-220, программист напишет, например, такую последовательность операторов автокода:

У $=$E'9.81',T,H
Д H,$=$E'2',H
С H,V,H
У H,T,H
С H,A,H

(С — сложение, У — умножение, Д — деление; с помощью конструкции $=$E'...' изображается числовая константа).

Уже на этом примере видны как удобства автокода, так и его недостатки. С одной стороны, программист не заботится больше ни о каких адресах. Изменяя программу или соединяя несколько программ в одну, он должен беспокоиться только о том, чтобы разные величины не имели одного и того же имени, и может не обращать внимания на их перемещение по памяти. Но, с другой стороны, тексты на автокоде еще слишком близки к текстам на машинном языке, действия на нем слишком мелки, непривычны для математика.

Как бы ни был низок уровень автокода, написанные на нем программы машиной уже непосредственно не воспринимаются, и их, как и программы, написанные на любом другом языке программирования, надо перед исполнением переводить на машинный язык. Для такого перевода (*трансляции*) разработаны специальные программы — *трансляторы*. Трансляторы с автокодов называются *ассемблерами*. Близость автокода к машинному языку обеспечивает сравнительную простоту ассемблера.

Фортран и Алгол

Первым языком, не зависящим от машины, стал язык *Фортран*, предназначенный для программирования вычислительных задач. Он был создан в 1956 г. в США. В 1958—1960 гг. группой математиков из разных стран был разработан для тех же целей язык *Алгол-60*. Эти два языка и сейчас еще широко распространены во всем мире. На них написано огромное количество программ из различных областей применения вычислительной математики. Языки эти во многом отличаются друг от друга, но мы не будем здесь касаться их различий. Вместо этого вернемся к нашему примеру. Нам приятно будет узнать, что для вычисления искомой величины теперь достаточно всего лишь одного оператора:

$$H=(9.81*T/2+V)*T+A$$

(пример записан на Фортране).

Наряду с обычными переменными объектами рассматриваемых языков могут быть также массивы — одномерные, двумерные и т. д. Одномерный массив — это числовая последовательность определенной длины*). Двумерный массив — это последовательность, состоящая из одномерных массивов одной и той же длины, и т. д. Массив должен быть описан в программе; такое описание должно полностью определять его размеры. Пусть, например, в программе на Фортране описан некоторый двумерный массив с именем ТАБЛИЦА и в описании этого массива указаны его размеры: 3 — по первому измерению и 4 — по второму**). Удобно представлять этот массив как таблицу (матрицу) из 3 строк и 4 столбцов, заполненную числами (*элементами массива*). В некоторый момент исполнения программы эта матрица может быть, например, такой:

$$\begin{matrix} -4 & 0 & 5 & 8 \\ 6 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 15 & 11 \end{matrix}$$

Элемент на пересечении I-й строки и J-го столбца задается *переменной с индексами* ТАБЛИЦА (I, J). Над переменной с индексами можно производить такие же действия, как и над обычными переменными, так что пара операторов

K=2
ТАБЛИЦА (1,1)=ТАБЛИЦА (K+1,4)+ТАБЛИЦА (K,K)

заменит верхний левый элемент матрицы на число 9.

В языках Алгол-60 и Фортран существуют *условные операторы*, позволяющие определять дальнейший ход исполнения программы в зависимости от текущих значений тех или иных переменных, а также *операторы цикла*, осуществляющие многократное исполнение некоторой части программы***). В Алголе-60 существуют *процедуры*, позволяю-

*) На Рапире одномерные массивы называются *кортежами* (см. «Квант», 1980, № 3, ЗШП, урок 8).

**) На Рапире — 3 составляющих кортежа, каждый из которых имеет по 4 элемента.

***) О подобных средствах в Рапире см. «Квант», 1980, № 9, ЗШП, урок 9.

щие вызывать в разных местах программы исполнение одной и той же группы операторов*); сходные средства (подпрограммы) есть и в Фортране.

Еще одно вавилонское столпотворение

Вслед за созданием Фортрана в разных странах начали возникать все новые и новые языки программирования. Сейчас, пожалуй, счет их надо вести на сотни. По поводу этого обилия языков часто вспоминают библейское сказание о Вавилонском столпотворении. Согласно этому сказанию, жители Вавилона решили построить башню (столп) до самого неба. Но из этого ничего не получилось. Бог, не желая допустить людей на небо, разделил единый человеческий язык на языки разных народов, и строители перестали понимать друг друга. На заставке к статье изображена новая Вавилонская башня.

Есть две причины для такого усердного языкотворчества. Во-первых, ЭВМ — это универсальные вычислительные устройства, предназначенные для решения произвольных задач, возникающих в самых различных сферах человеческой деятельности. Конечно, все эти задачи можно решить при помощи машинных языков, но мы видели, что это весьма трудно. Языки же Фортран и Алгол-60, сильно облегчая программирование обычных вычислительных задач, для других задач подходят плохо. Поэтому и стали появляться специализированные языки для все новых и новых классов задач, порой весьма узких и специфичных. Во-вторых, существенно то, что программирование — очень молодая область человеческой деятельности. Многое в нем еще не устоялось, и поэтому программисты творят, выдумывают, пробуют, подбирая наиболее подходящие для тех или иных целей языковые средства. И эти пробы в конечном счете полезны, так как дают возможность оценивать и сравнивать разные подходы в расчете на использование их в будущих, более совершенных языках. А языки, которыми не пользуются, естественным образом отмирают.

Приглядимся теперь внимательней к отдельным кирпичам новой Вавилонской башни и рассмотрим сначала

Специализированные языки

Вычислительные задачи тоже бывают разными. Это могут быть инженерные и научно-технические задачи, в которых надо производить большое количество вычислений над сравнительно небольшим количеством данных. Для этих целей как раз хорошо подходят Алгол-60 и Фортран. Есть также бухгалтерско-экономические и учетные задачи, где производимые операции несложны, но должна перерабатываться большая и сложно организованная информация, например ведомости расчета заработной платы. Для таких задач еще в 1960 г. был разработан язык *Кобол*. Программы на Коболе задают формат (способ расположения) информации на входных и выходных документах и определяют с помощью фраз, близких к фразам английского (или русского) языка, какие действия надо выполнять над числовыми величинами и над текстами, входящими в эту информацию.

Распространены в то же время и такие задачи, в которых обработка текстов или другой нечисловой (*символьной*) информации занимает центральное место. Таким задачам был посвящен один из уроков Заочной школы программирования («Квант», 1980, № 11), но мы несколько расширим тематику этого урока, упомянув еще два круга задач.

Полушутя можно сказать, что Алгол-60, Фортран и Кобол знают арифметику, но не знают алгебры: они в состоянии вычислить значение выражения x^2-y^2 при конкретных значениях x и y, но им не под силу преобразовать это выражение в $(x+y)(x-y)$. Мы столкнулись

*) О процедурах в Рапире см. «Квант», 1980, № 2, ЗШП, урок 6.

здесь с одной из важных задач обработки символьной информации — формульными преобразованиями.

Другой круг задач — это применение программирования к самому программированию. Программы, написанные на каком-либо языке, нуждаются в редактировании разного рода и, самое важное, в трансляции, переводе на машинный язык. Но программы — это тексты, и все эти задачи относятся к области текстовой обработки, зачастую сложной и специфичной. Существует много языков, предназначенных для работы с текстами. Наиболее известен из них *Снобол*.

Некоторые языки программирования характеризуются не столько областью применения, сколько структурой обрабатываемых данных. Таков *Лисп* — язык, специально предназначенный для работы с информацией, организованной в списки. Список отличается от одномерного массива большей гибкостью. Длина его не фиксируется заранее, его можно пополнять в любом месте новыми элементами и из любого его места можно удалять элементы. Практически это означает, что элементы списка не располагаются в памяти вплотную друг к другу (как это обычно имеет место для массивов), но зато каждый элемент снабжен ссылкой, указывающей, где находится следующий элемент. Ясно, что местные изменения в списке не приводят к сдвигу списка по памяти — меняются всего лишь отдельные ссылки.

Универсальные языки

С середины 60-х годов наряду со стремлением к созданию специализированных языков программирования возникло и противоположное стремление: стали появляться универсальные языки, пригодные для любых задач — инженерных или бухгалтерских, редакторских или трансляторских — с произвольной структурой обрабатываемой информации.

Употребленное здесь понимание выражения «универсальный язык» не общепринято. Например, упоминаемая в списке литературы книга С. С. Лаврова даже Алгол-60 называет универсальным языком.

Сразу можно сказать, что в соревновании между специализированными и универсальными языками не может быть победителя. И те, и другие языки хороши в одних условиях и плохи в других. Если программисту часто приходится переходить с одного класса задач на другой или если в пределах одной и той же задачи приходится, скажем, и производить сложные вычисления, и редактировать текст, то, конечно, надо пользоваться универсальным языком. С другой стороны, ясно, что нет смысла запускать громоздкий универсальный инструмент, если имеешь дело с каким-то ограниченным видом работ. Из универсальных языков программирования упомянем здесь *ПЛ/1, Алгол-68, Сетл* и *Паскаль*.

Несколько огрубляя, можно сказать, что ПЛ/1 произошел из Фортрана, а предшественником Алгола-68 был Алгол-60. ПЛ/1 и Алгол-68 могут работать с данными, организованными весьма сложным образом. Например, можно задать массив, элементы которого являются списками, каждый из которых состоит последовательно из целого числа, строки символов, числового массива, снова целого числа и т. д. Алгол-68 характерен также тем, что программист может в своей программе придавать операциям языка (например, сложению с его обычным знаком +) новый или дополнительный смысл (например, поэлементное сложение массивов), а также задавать новые операции. Программист может также, определив новый набор операций, нужных для некоторого класса задач, сделать этот набор доступным для всех программ, решающих задачи этого класса. Таким образом, Алгол-68 оказывается языком саморасширяющимся и (так как могут появляться новые операции) в то же время самонастраивающимся (на определенную область применения).

Главной особенностью языка Сетл является использование нового типа данных — *множеств**). Язык Паскаль выбран для подробного изучения в следующих номерах «Кванта».

С языками, о которых шла речь в этой статье, более основательно читатель может познакомиться по следующей литературе:

Первин Ю. А. «Основы Фортрана» (М., «Наука», 1973).
Лавров С. С. «Универсальный язык программирования (Алгол-60)» (М., «Наука», 1972).
Коддингтон Л. «Ускоренный курс Кобола» (М., «Мир», 1974).
Грисуолд Р. и др. «Язык программирования Снобл-4» (М., «Мир», 1980).
Маурер У. «Введение в программирование на языке Лисп» (М., «Мир», 1976).
Лепин-Дмитрюков Г. Л. «Программирование на языке ПЛ/1» (М., «Советское радио», 1978).
Пейган Ф. «Практическое руководство по Алголу-68» (М., «Мир», 1979).
Левин Д. Я. «Сетл — язык программирования весьма высокого уровня» («Программирование», 1976, № 5).
Б. Хигман «Сравнительное изучение языков программирования» (М., «Мир», 1974).

*) Рапира, которая отовсюду взяла понемножку, воспользовалась и этой новинкой — см «Квант», 1980, № 3, ЗШП, урок 8

Конкурс машинных рисунков

Редакция журнала «Квант» и Вычислительный центр СО АН СССР объявляют конкурс на лучший рисунок, выполненный на ЭВМ с использованием систем машинной графики.

Участниками конкурса могут быть школьники и учащиеся профессионально-технических училищ.

На конкурс могут быть представлены реалистические или стилизованные рисунки, орнаменты, семейства математических кривых, изображения поверхностей и т. д. Рисунки должны быть оригинальными (повторения рисунков, публиковавшихся в нашем журнале, на конкурс не принимаются), в орнаментах и узорах математический интерес должен сочетаться с эстетическими достоинствами.

К рисунку необходимо приложить полную распечатку программы, подробный комментарий к ней, поясняющий математическую идею и порядок работы программы, подробные сведения об авторе (авторах) — фамилию, имя, отчество, номер школы и класса, полный домашний адрес.

Учащиеся, не имеющие самостоятельного выхода на ЭВМ с графопостроителем, могут присылать программы для построения рисунков с приложением примерного эскиза. Программы могут быть выполнены на Рапире, Паскале или Алголе с использованием системы Шпага (см. «Квант», 1980, № 1, с. 56) или на Фортране с использованием описываемой ниже графической системы. Объем программы — не более 100 операторов, размер рисунка — не менее 100×100 мм и не более 300×300 мм.

Тщательно проверьте программу вручную, прежде чем направлять на конкурс: ошибки в конкурсных работах исправляться не будут.

Все участники конкурса (в том числе и учащиеся Заочной школы программирования и ее филиалов) должны выслать работы не позднее 15 ноября 1981 года по адресу: 630090, Новосибирск, 90, Вычислительный центр СО АН СССР, Группа школьной информатики, на конкурс.

Желаем удачи! Ждем рисунки и программы!

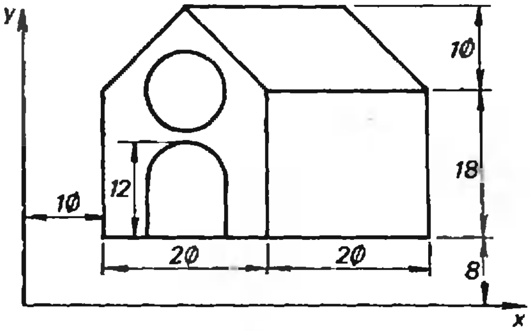
Для пишущих на Фортране

Для выхода на графическую систему из программы на Фортране надо соблюдать следующие правила:

1. В начале программы должен быть инициирующий оператор CALL SBROS, перед ее логическим завершением — оператор CALL STR.

2. Для прямолинейных перемещений пера в указываемые точки используется оператор CALL LINX (X, Y), где X, Y — координаты точки в мм; если перо при этом выключено — осуществляется холостой ход, если включено — чертится отрезок. Включать и выключать перо в нужные моменты можно операторами CALL PERO и CALL VP.

3. Для черчения отрезков «со свободными концами» используется также вызов модуля CALL OTREZ (XN, YN, XK, YK),



где параметрами являются координаты начальной и конечной точек отрезка; данный модуль сам включает перо в начальной точке отрезка и сам выключает после черчения.

4. Целую окружность можно чертить оператором CALL OKR (XC, YC, R), где XC, YC — координаты центра, R — радиус, причем перо также включается и выключается автоматически. Дугу можно начертить, записав строку CALL OKRI (XC, YC, R, ALF, DALF); здесь ALF — начальный центральный угол, DALF — угловая величина дуги со знаком, определяющим направление обхода. Угловые размеры задаются в градусах, хотя градусная мера, конечно, не ставится. После черчения дуги перо само не выключается; если надо, его можно выключить оператором CALL VP; включается перо в начале дуги автоматически; если оно было включено до обращения к данному модулю, от отработанной точки к началу дуги дополнительно чертится отрезок.

5. Для выполнения чертежа в двух или более цветах или несколькими толщинами линий пользуются оператором CALL NPERA (N), где N может принимать значения 0,1,2,3. Этот оператор сам не включает пера, а лишь запоминает, каким пером надо работать дальше. Основным пером считается перо № 0; им выполняется чертеж, если оператора смены пера нет в программе.

Уже несколько отмеченных подпрограмм позволяют чертить разнообразные изображения; нужные вычисления, логические действия, одну-две подпрограммы можете подготовить сами средствами Фортрана. Кривые линии представляются последовательностью малых отрезков; модуль LINX при этом может работать в цикле.

В целом программа не должна быть длиннее 60—100 операторов, к ней следует приложить пояснения — какие перья должны быть установлены, ожидаемый размер рисунка, начальное положение пера (оно соответствует началу координатной системы).

В качестве примера приводится программа для простейшего рисунка (конечно, такой рисунок не годится для конкурса):

```
DIMENSION X (1Ø), Y (1Ø)
CALL SBROS
DO 1 K=1,9
CALL LINX (X (K), Y (K))
CALL PERO
CALL VP
DATA X/2Ø., 1Ø., 1Ø., 5Ø., 5Ø., 4Ø.,
     2Ø., 3Ø., 3Ø./, Y/36., 26, 8.,
     26., 36., 36., 26., 8./
CALL OTREZ (3Ø., 26, 5Ø., 26.)
CALL NPERA (1)
CALL OKR (2Ø., 26., 5.)
CALL LINX (15., 8.)
CALL PERO
CALL OKR 1(2Ø., 7., 5., 18Ø., —18Ø.)
CALL LINX (25., 8.)
CALL VP
CALL STP
END
```

Примечание. Для машин серии ЕС нули следует перечеркивать.

Список читателей...

(Начало см. на с. 28)

73, 74; *Н. Розенвайн* (Киев) **63, 66**; *Л. Ростока* (Хуст) **72, 74, 77**; *М. Рябчиков* (Саратов) **73—77**; *А. Салтанов* (Новополоцк) **63, 66, 67, 73—77**; *А. Санжур* (Киев) **66, 67**; *В. Свадеба* (Ровно) **66**; *А. Сидоренков* (Смоленск) **74**; *В. Сидорин* (Реутов) **70**; *Ю. Синюков* (ст. Селезни Тамбовской обл.) **74**; *Н. Сливка* (с. Ефремовка Павлодарской обл.) **73**; *А. Смирнов* (Курган) **66, 68, 72—77**; *А. Сокол* (п. Черноголовка Московской обл.) **66, 69, 72—74**; *О. Сомин* (Саратов) **66, 69, 72—77**; *С. Стрелецкий* (Львов) **69**; *Л. Стрешинский* (Донецк) **66**; *Р. Тазитдинов* (Ижевск) **73**; *Ю. Талденко* (Сумы) **66, 69, 72—74**; *А. Терещенко* (с. Нерудсталь Днепропетровской обл.) **69, 73**; *А. Тимченко* (Одесса) **72—77**; *И. Тихоненко* (с. Котуркуль Кокчетавской обл.) **69, 72, 73, 76, 77**; *А. Тищенко* (Днепропетровск) **66, 68, 69, 72—76**; *Г. Трунов* (Москва) **74**; *В. Усачев* (Ромны) **72—77**; *В. Ухов* (д. Морозовка Ленинградской обл.) **66, 73, 74**; *Н. Федин* (Омск) **66, 67, 69—77**; *Н. Фесун* (Золотоношский р-н Черкасской обл.) **66, 69**; *С. Фокин* (Верхний Уфалей) **74, 77**; *О. Фонарев* (Сумгаит) **66**; *М. Фридман* (Львов) **66, 69, 73, 76, 77**; *А. Фролов* (Тула) **67—69, 72—77**; *К. Фролов* (Москва) **66**; *С. Фролов* (Москва) **70**; *А. Ходарин* (п. Нововоронежский Воронежской обл.) **69**; *Б. Хорец* (Ташкент) **66**; *А. Цымбалюк* (Винница) **73, 74, 76**; *О. Черкасов* (Алма-Ата) **74**; *А. Черныщев* (Свердловск) **73**; *С. Шалаберидзе* (Тбилиси) **72, 73**; *А. Шевченко* (Артемовск Донецкой обл.) **69, 72, 74**; *М. Шевченко* (Артемовск Донецкой обл.) **69, 72, 74**; *В. Шелудько* (Днепропетровск) **69**; *М. Шепетько* (Давид-Городок) **73**; *Ю. Шефтель* (Киев) **73**; *П. Шихалиев* (с. Беюк-Дахна Аз.ССР) **73**; *М. Шокуров* (с. Ельники Морд.АССР) **73, 76, 77**; *А. Шрамков* (п. Волоконовка Белгородской обл.) **73, 74**; *А. Шугай* (Запорожье) **74**; *А. Элькин* (Минск) **69**; *Р. Эфендиев* (Баку) **66**; *Ф. Ямаев* (с. Байряки Тат.АССР) **69**.

Веселая мозаика Сэма Лойда

Рис. 1.

В этом году исполняется 140 лет со дня рождения и 70 лет со дня смерти прославленного мастера головоломок, изобретателя знаменитой «игры в 15», одного из родоначальников занимательной математики, классика этого жанра Сэма Лойда. В 1980 г. издательство «Мир» выпустило в свет «Математическую мозаику» Лойда — сборник его лучших математических задач и головоломок.

Публикуемая ниже статья, навеянная чтением этого нешаблонного сборника, не является рецензией в общепринятом смысле слова. Ее автор, математик-профессионал, вместо обычного обсуждения содержания, достоинств и недостатков книги предпочитает вольно пересказывать Лойда и подробно рассматривать конкретные головоломки, по ходу предлагая новые. Несмотря на многочисленные отступления от буквы задач Лойда (а может, и благодаря им), статья, как нам кажется, лучше обычной рецензии передает праздничный дух вольного изобретательства, острословия и веселья, характерный для книги Лойда.

Друзья дали мне «Математическую мозаику» Сэма Лойда, когда «позавчера» еще было «завтра», попросив при этом вернуть ее, когда «послезавтра» станет «позавчера»*), так что, когда «завтра» станет «сегодня», мне придется расстаться с этой захватывающей книжкой, так, видимо, и не прочитав ее целиком — а в магазинах ее уже нет! Какого числа мне дали книжку, догадайтесь сами — сообщу лишь, что оно *ни разу в году не выпадает на день недели, с которого начинается тот месяц, когда я пишу эти строки; только учтите: с того же дня начинаются и два других месяца того же года.*

Разгадав эту головоломку, вы вместе со мной подивитесь, как быстро разошлась «Математическая мозаика», выпущенная в марте 1980 года стотысячным тиражом.

Многие головоломки Лойда — похитрее этой. Попробуйте-ка, например, решить задачу № 45 про пони и белую лошадь, которую Лойд поистине окружает загадочным ореолом (рис. 1).

Скопируйте пони на бумагу, вырежьте 6 частей и расположите их так, чтобы получилась наилучшая из возможных фигура лошади. Вот и все! Однако весь мир смеялся целый год над теми гротескными фигурами, которые получались из этих 6 частей. Были проданы миллионы экземпляров этой головоломки.

Красивое (вовсе не гротескное) решение этой задачи — типичная каверза Сэма Лойда. Коварный подвох ожидает нас и в следующей остроумной миниатюре:

№ 48. Корова, коза и гусь
Один датчанин с козой на веревке и гусем под мышкой повстречал молочницу, которая вела корову. Вдруг девушка испуганно вскрикнула.

— Ты чего? — спросил Ганс.

— Так ты же хотел поцеловать меня против моей воли,— ответила скромница.

— Как бы я мог это сделать с этими вот строптивыми животными? — кивнул Ганс на козу и гуся.

— А что мешает тебе воткнуть посох в землю, привязать к нему козу, а гуся посадить под мое ведро? — настаивала девушка.

— Да твоя корова косится на меня и в это время непременно бы меня боднула,— оправдывался Ганс.

— О, эта глупая корова не бодается, а что если ты вдруг возьмешь и выгонишь всех троих на мое пастбище? — не унималась Кристина.

Вот здесь-то и возникает одна крайне интересная головоломка, ибо во время последовавшего затем разговора выяснилось, что коза и гусь вместе съедают столько же травы, сколько и корова. Поэтому скажите, если данное пастбище прокормит корову и козу в течение 45 дней, либо корову и гуся в течение 60 дней, либо козу и гуся в течение 90 дней, то сколько дней на нем смогут одновременно пастись корова, коза и гусь?

Если бы не веселое вступление, вряд ли мы стали бы решать такую задачу — эка невидаль: $x = y + z$ (корова съедает ежедневно столько же, сколько коза и гусь),

$$45(x+y) = 60(x+z) = 90(y+z),$$

откуда

$$45(2y+z) = 60(y+2z) = 90(y+z),$$

$$3(2y+z) = 4(y+2z) = 6(y+z)\ldots$$

*) Эта просьба навеяна «головоломным лепетом» малышки Присиллы из задачи № 183 (читатели, у которых нет под рукой книжки Лойда, могут познакомиться с Присиллой на с. 50 в предыдущем номере «Кванта»), а всего в «Математической мозаике» 280 занимательных задач и головоломок, если не считать возникших случайно при подготовке книги к печати (речь о них пойдет особо).

Стоп!

Если $6y+3z=6y+6z$, то $z=0$, но тогда $6y=4y$; значит, и $y=0$, и $x=y+z=0$. Бедные животные не едят травы!? Но как же они тогда объедают пастбище, да еще за различное число дней?

Ерунда какая-то!

Не испытывай мы симпатии к только что так славно насмешившим нас Ганцу и Кристине, мы бы, наверно, бросили их несуразных травоядных подопечных. Рассуждали мы верно — значит, в условии ошибка или опечатка!

Нет-нет! Не ошибка, не опечатка, а преднамеренный подвох насмешника Лойда.

Гусь ест траву: $z>0$. Значит, $45(x+y)=45(2y+z)<90(y+z)$ — корова и коза в течение 45 дней съедят травы меньше, чем коза и гусь за 90 дней!

Как же меньше? Ведь сказано же: «Данное пастбище прокормит корову и козу в течение 45 дней, либо козу и гуся в течение 90 дней».

Ну, и что? Едят-то не само пастбище, а траву. А откуда трава? Растет. Вот то-то и оно, что растет! И за 90 дней травы вырастет больше, чем за 45 дней!

Так что обозначайте-ка через t ежедневный прирост травы, составляйте новые уравнения и решайте их*)! А заодно определите, *сколько времени росла трава на пастбище до начала трапезы***), и, кстати уж, скажите, *чему примерно равна высота посоха, к которому на рисунке 2 привязана коза.*

*) Можно обойтись и без уравнений, применив чисто арифметические рассуждения. Отметим, кстати, что некоторые задачки Лойда (в отличие от рассматриваемой) требуют находчивости, только если решать их арифметически, и несколько тускнеют при использовании языка элементарной алгебры, оставаясь, впрочем, много занимательней стандартных задач на составление уравнений.

**) У меня получилось 1/2 года, даже если Кристина все это время кормила свою корову в другом месте — так что как бы к концу пиршества не выпал снег! Впрочем, такого рода несоответствия мало смущают Лойда, у которого жене Смита 15 лет (задача № 99), а некоторые школьницы не достигли двухлетнего возраста (задача № 32).

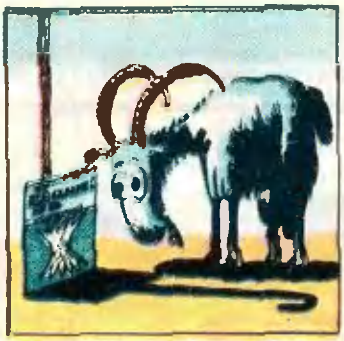


Рис. 2.

Педант рассердится: «Это не научно — и сама задача, и ваши объяснения! Следовало просто составить 4 уравнения с 3 неизвестными: $x=y+z$, $1=45(x+y)$, $1=60(x+z)$, $1=90(y+z)$, обозначив через x, y, z доли пастбища, объедаемые животными ежедневно. Задача переопределена и в связи с этим противоречива. А если нужно учитывать прирост травы, то это *должно быть оговорено заранее!*».

Что ответить ему? Предупредим его, что в задаче № 32 из книжки Лойда ответ — *не* 3,5 года — пусть знает об этом *заранее*. А насчет того, что «головоломки — не наука», отошлем к авторитетам: «...не все то, что не наука, уж обязательно плохо» («Фейнмановские лекции по физике», том 1, с. 55).

Конечно же, головоломки — не наука (хотя именно в науке — в отличие от стандартного задачника — условия задачи обычно не раз меняются в процессе решения), это совсем другой жанр — развлекательный, легкий, веселый! Лойд отнюдь и не претендует на научность, когда сообщает (в задаче № 65), где искать истоки известной истории про колумбово яйцо, или рассказывает (в задаче № 107) о нравах испанских монахинь, плененных франками.

№ 65. Задача Колумба

В XV веке страстно увлекались азартными играми. Среди них была и игра с куриными яйцами, позволяющая, видимо, найти истоки известной истории про колумбово яйцо, которая наряду с открытием Америки увековечила имя великого мореплавателя.

Два игрока по очереди выкладывают яйца одинаковых размеров на квадратную салфетку, пока на ней есть место для очередного яйца. Нельзя передвигать ранее выложенные яйца или класть яйца друг на друга. Выигрывает тот, кто положит последнее яйцо.

Найдите выигрывающую стратегию для первого игрока.

Имейте в виду — мало знать решение аналогичной задачи с монетами: форма яиц, уже породившая однажды войну между «остроголовыми» и «тупоголовыми», вносит сумятицу и в задачу Колумба.

№ 107. Монастырская задача

На каждом из двух жилых этажей старинного испанского монастыря по 8 келий; в угловых кельях по два окна, в «средних» — по одному (рис. 3). Мать-настоятельница следит за тем, чтобы 1) каждая келья была занята, 2) на верхнем этаже жило вдвое больше монахинь, чем на нижнем, 3) в 6 кельях с окнами на каждую из четырех сторон здания жило ровно по 11 монахинь.

После исчезновения девяти молодых и хорошеньких монахинь, видимо во всех смыслах плененных франками, оставшиеся, чтобы не огорчать мать-настоятельницу, расселились так, что настоятельница не заметила

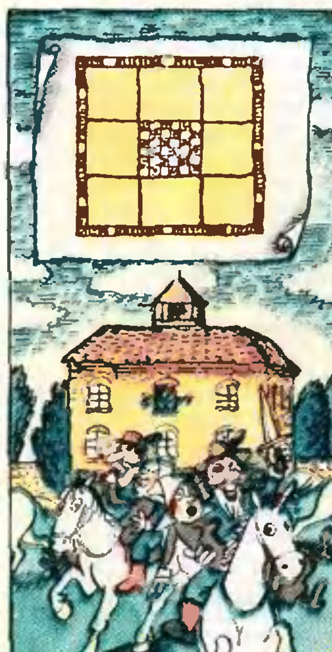


Рис. 3.

Рис. 4

перемен: ее 3 требования остались выполненными, хотя девять монахинь отсутствовало.

Сколько монахинь проживало в монастыре и как они размещались по кельям? Единственно ли решение? Постарайтесь строго обосновать ответ.

Специфика Лойда — яркие, полные остроумия тексты, не слишком связанные с существом задач, но создающие у читателя приподнятое настроение и вдохновляющие его на штурм весьма замысловатых и каверзных вопросов. «То, что познается с удовольствием и интересом,— говорит Лойд в одной из головоломок устами шута Беппо, — никогда не забывается... Учитель, заставляющий зазубривать правила, годен лишь для попугаев!»

Иногда Лойд изменяет этому принципу, сообщая рецепты для решения своих головоломок без всяких объяснений. Вот, например, задача № 145 про Тома, сына трубача. В англоязычных странах каждый с детства помнит немудреный стишок: «Том, Том — сын трубача, Украл свинью и дал стрекача...» Конец у этой истории печальный: свинью съели, а Тома побили. Лойд рассказывает нам ее начало: как происходила погоня Тома за свиньей (рис. 4).

...Том, сын трубача, решил украсть свинью. Когда он побежал за свиньей, то находился в 250 ярдах к югу от нее. И свинья, и Том побежали одновременно с постоянными скоростями (Том — в 4/3 раза быстрее свиньи). Свинья бежит на восток. Вместо того чтобы бежать наперерез*), Том сгоряча бежит так, что в каждый момент движется точно на свинью. Как далеко убежит свинья, прежде чем ее удастся схватить?

Далее, в условии говорится: «Простое правило, позволяющее решать задачи такого типа, основано на элементарной арифметике, однако оно может оказаться новым для многих любителей головоломок».

Не знаю, как математика-любителя, но математика-профессионала такое заявление настораживает: обозначим через R_T и R_C расстояния, которые пробегут Том и свинья; Том бежит по довольно сложной кривой (по так называемой «линии погони»), и обещание *вычислить* R_C (*а значит, и* $R_T=\frac{4}{3}R_C$) *с помощью элементарной арифметики* вызывает недоверие.

Введем вместо числовых данных буквенные: пусть r — начальное расстояние между Томом и свиньей, v_T и v_C — их скорости и $\omega=|v_C|/|v_T|$ (в задаче $r=250$ ярдов, $\omega=3/4$).

Рассмотрим две вспомогательные задачи:

Пусть Том и свинья бегут по одной прямой, один раз — Том *вдогонку* за свиньей, другой раз — *навстречу* друг другу. Тогда (проверьте), прежде чем схватить свинью, Том пробежит соответственно расстояния $R_1=r/(1-\omega)$ и $R_2=r/(1+\omega)$.

В решении задачи № 145 Лойд без объяснений и доказательств сообщает правило: $R_T=(R_1+R_2)/2$.

Едва заглянув на эту неправдоподобно простую формулу, большинство искушенных математиков (никогда не занимавшихся задачей о погоне) воскликнет: «Этого не может быть!», — и удивится, как редактор книги Мартин Гарднер и переводчик Ю. Н. Сударев (вообще заслуживающий самых высоких похвал) не заметили столь явной ошибки!

Самое удивительное, что правило-то... верное! Как ни странно, R_T действительно равно $r/(1-\omega^2)=(R_1+R_2)/2$, откуда и для R_C получается столь же неправдоподобно простая формула:

$$R_C=r(\omega)/(1-\omega^2)=(R_1-R_2)/2.$$

И все же вряд ли можно сказать, что формулы для R_C и R_T основаны на элементарной арифметике: их вывод*) требует знакомства с началами математического анализа.

Да, весьма непроста задача про Тома, сына трубача! Но вот головоломка еще труднее:

Дочке фермера Смита мисс Покахонт 24 года, ее братишке маленькому Капитану Джону 3 года. Сколько лет каждому из остальных 13 фермерских отпрысков, если все 15 детей Смита родились с интервалом в 1 год?

Поистине загадочная ситуация! Будь еще фамилия фермера Хонт, а не Смит, можно было бы заподозрить, что здесь есть какое-то сверхзамысловатое решение с игрой слов. Но нет! На с. 162 черным по белому написано, что фамилия фермера — Смит (в полном соответствии с набившей оскомину каждому американцу историей о том, как когда-то дочь вождя *индианка по имени Покахонт* полюбила некоего *капитана Джона Смита*).

На с. 162? Позвольте-позвольте, скажете вы, здесь совсем не та задача:

№ 154. Сколько лет мисс Покахонт?

15 детей фермера Смита родились с интервалом в 1 год. Покахонт, старший ребенок, в 8 раз старше Капитана Джона, самого младшего из детей. Сколько лет мисс Покахонт?

И никакой другой головоломки про мисс Покахонт, кроме № 154, у Лойда нет!

*) В книжке вместо «наперерез» по ошибке напечатано «на север».

*) Мы приведем его в одном из следующих номеров среди решений остальных головоломок, предлагаемых в этой заметке.

Откуда же взялась головоломка, в которой мисс Покахонт 24 года? Как вы, наверное, уже догадались,— это опечатка в ответе к задаче № 154.

Увы, это не единственная головоломка, невзначай возникшая таким способом при подготовке книги к печати. Столь же досадное недоразумение произошло и с Мэри (сестрой Энн), возраст которой Лойд просит вычислить по запутанным условиям задачи № 127:

— Видите ли,— заметил дедушка,— суммарный возраст Мэри и Энн составляет 42 года, а Мэри вдвое старше, чем была Энн, когда Мэри была вдвое моложе, чем будет Энн, когда Энн станет втрое старше, чем была Мэри, когда Мэри была втрое старше Энн. Сколько лет Мэри?

Считаем нужным предупредить читателя, с честью выпутавшегося из этих хитросплетений: пусть не заглядывает в ответ — Мэри не 27,5 лет.

Жаль, конечно, и бедняжку Покахонт, и до слез обиженную Мэри, но их незавидная судьба — ничто в сравнении с участью великолепной Лу Диллон и странностями задачи № 215, главная из которых, разумеется, ответ к этой задаче, напечатанный на с. 324:

Лошадь пробежала следующие друг за другом четверти мили соответственно за 27 1/4, 27, 27 1/8 с, а всю милю — за 1 мин 48 1/2 с.

Чтобы вы могли оценить его, приведем и условие:

№ 215. На бегах

Однажды на бегах с участием королевы ипподрома Лу Диллон возникла довольно странная задача, оказавшаяся слишком трудной для не очень-то поднаторевших в математике судей. Первый судья засек время (81 3/8 с), понадобившееся Лу, чтобы пробежать только первые 3/4 мили, а второй — время (81 1/4 с), которое Лу потратила только на последние 3/4 мили. Предположим, что первую половину мили Лу пробежала за то же время, что и вторую. Многие ли сумеют определить, за сколько секунд Лу пробежала всю милю?

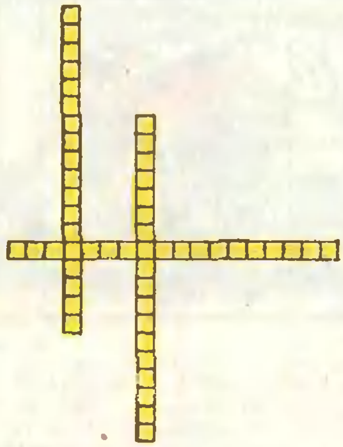


Рис. 5.

Раз уж мы заговорили о задаче № 215, решите-ка (только быстро!) следующую (почти такую же странную) задачку:

Альбом дороже карандаша на 47 копеек. На сколько дороже карандаша 2 альбома?

Номера 154, 127, 215,... Этот грустный список можно было бы продолжить. Сборник занимательных задач Лойда был опубликован его сыном уже после смерти автора. Книга пестрела неточностями и опечатками. Исправить ошибки (и сократить объем книги, выбрав лучшее) взялся Мартин Гарднер. Некоторых ошибок, проникших, к сожалению, и в русское издание, он все-таки не заметил. Поэтому тем, кто будет готовить новое издание*), мы адресуем следующую шифровку (надеясь, что ее правильно поймут — издатели головоломок должны любить головоломки):

ИВСЬПТРЕА СРТЫАЕ ОБШКИИ И ОАПТЕКЧИ И НЕ ДИЕТЛЕА НЫОХВ!

Читателям же (учитывая, что в «Математическую мозаику» не вошел ряд языковых, сугубо английских задач) мы предлагаем еще несколько головоломок — подражаний Лойду — под общим названием

КОЛОКОЛОКОЛОКОЛА

Здесь 3 слова, «случайно» написанные слитно. Вставьте между ними 2 просвета, чтобы получилась в меру осмысленная фраза. Напишите ее на 18 кубиках (16 букв и 2 просвета), положите кубики в один из вертикальных желобов на рисунке 5 и начинайте играть (не вынимая кубики из желобов и передвигая их по очереди).

Если вы правильно выбрали фразу и желоб, то можно *за 18 ходов «переписать» фразу по горизонтали, а потом — снова за 18 ходов — перенести ее во второй вертикальный желоб**).*

Если игра покажется вам сложной, потренируйтесь сначала с «апельсином» (рис. 6) и «переправой» (рис. 7): *за наименьшее число ходов переправьте все кубики из вертикальных желобов в горизонтальные (не вынимая из желобов и передвигая по очереди) так, чтобы слова можно было прочесть слева направо.*

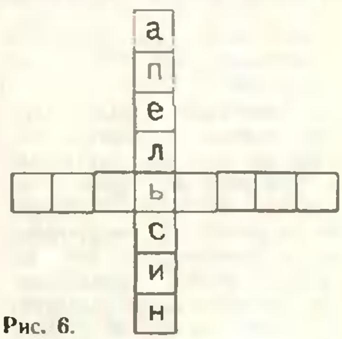


Рис. 6.

Поиграв некоторое время, вы, возможно, научитесь перегонять кубики на место за 9 и за 8 ходов соответственно (передвигая тем самым каждый кубик сразу туда, где ему надлежит оставаться). Лойд сказал бы об этой игре: «Просто, как апельсин!». Именно так говаривал, бывало, этот фокусник и острослов, вынимая из шляпы очередного кролика, а то и конку — или даже собаку!

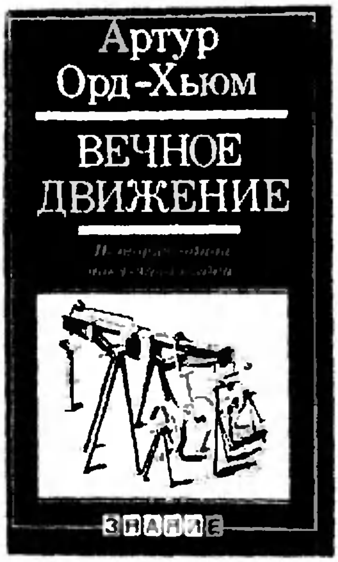
М. Гервер

Рис. 7.

*) Можно не сомневаться — оно разойдется так же быстро, как первое. Что Лойду стотысячный тираж? Он был привычен к миллионным!

**) Предупреждаем читателя — не только Лойд любит подвохи!

История одного заблуждения



Все мы с удовольствием читаем книги о выдающихся личностях — политических деятелях и полководцах, ученых и мыслителях, писателях и художниках. Доказательством тому служит широкая популярность, которую приобрела биографическая серия «Жизнь замечательных людей», насчитывающая не одну сотню томов. Не менее интересно знакомиться с историей зарождения и развития научных концепций, узнавать о столкновении взглядов и идей. Этому тоже посвящено множество книг, в том числе книги недавно возникшей серии «Жизнь замечательных идей».

Однако мало кому довелось держать в руках книгу, повествующую об истории... научных заблуждений. А между тем на пути становления науки, совершенствования человеческих знаний таких заблуждений было не так уж мало. Взять хотя бы алхимию, астрологию, теорию всепроникающего эфира. Это и в самом деле были заблуждения, химеры, дороги, ведущие в никуда. Но можно ли утверждать, что они оказались абсолютно бесплодными? Вовсе нет. Средневековые алхимики в стремлении открыть «философский камень» заложили основы истинной науки — химии; астрологи, пытавшиеся по расположению планет предсказывать судьбы людей и целых народов, дали богатый наблюдательный материал для астрономии; а из концепции эфира родилась современная электродинамика.

Перед нами книга английского инженера и популяризатора науки Артура Орд-Хьюма*), посвященная еще одной ошибочной идее — попытке создания перпетуум мобиле, или вечного двигателя. Этой навязчивой идее, истоки которой уходят в глубокую древность, оказались подверженными тысячи людей. Нет-нет да и сейчас в комитеты по изобретениям, патентные бюро, академии наук, а чаще в редакции научно-популярных журналов поступают письма с изложением идеи нового варианта перпетуум мобиле.

«Вечное движение,— справедливо пишет автор,— проблема серьезная. Это вовсе не та явная глупость, которую некоторые изобретатели преподносят публике». История идеи вечного движения чрезвычайно поучительна хотя бы по двум причинам. Во-первых, в процессе рождения и главным образом опровержения тех или иных конкретных конструкций возникали и уточнялись многие положения механики и термодинамики, проверялись фундаментальные законы физики. Среди тех, кто своими исследованиями опровергал выдвигавшиеся принципы вечных двигателей, были Галилей и Гюйгенс, Фарадей и Карно, Больцман и Гельмгольц. Во-вторых, многие предлагавшиеся конструктивные решения вечных двигателей весьма хитроумны и нетривиальны. Читателям книги Орд-Хьюма будет полезно попытаться самим найти изъяны в описанных «вечных двигателях», доказать их неосуществимость, что, кстати, не всегда так уж легко сделать.

Обратимся к содержанию книги.

В первой главе, названной «Вечное движение и физика», излагаются законы природы, ставшие непреодолимой преградой на пути создания перпетуум мобиле. Прежде всего это закон сохранения энергии. Чтобы вечный двигатель мог работать, он должен сам себя обеспечивать энергией, вырабатывать ее в большем количестве, чем получает извне. Но это противоречит закону сохранения энергии. Еще одним общим положением, с ходу перечеркивающим любой проект вечного двигателя, является второе начало термодинамики. Любой процесс, будь то механический, электрический или химический, неизбежно сопровождается передачей тепла от более теплого тела к менее теплому. Ни в коем случае не наоборот! Нагрев трущихся тел, электрических проводов, стенок химического реактора — все это примеры проявления второго начала термодинамики. Исследования ученых, технические решения инженеров нацелены на сокращение этих потерь, но никому и в голову не придет попытаться исключить их полностью, ибо это означало бы попытку создания вечного двигателя. Сейчас это стало очевидной истиной.

По-видимому, первый вечный двигатель был описан в санскритской рукописи по астрономии «Сиддхаита Сиромани» (V век нашей эры). На внешнем ободе колеса имелись два ряда отверстий, расположенных зигзагообразно на равном расстоянии друг от друга. Отверстия были заполнены ртутью и плотно закрыты. Утверждалось, что такое колесо, установленное на оси и пущенное в движение, будет вращаться бесконечно долго.

Но расцвет идеи механических вечных двигателей относится к позднему Возрождению, к XVI—XVII столетиям. Им посвящены вторая и третья главы книги. Итальянский философ, врач, астролог и алхимик Марио Антонио Зимара составил «Руководство к конструированию Машины Вечного Движения, не требующей для

*) Артур Орд-Хьюм. Вечное движение (История одной навязчивой идеи). Перевод с английского. — М: Знание, 1980. — 272 с. — Цена 60 к.

работы ни воды, ни грузов» — своеобразной «вечной» ветряной мельницы. Она приводилась в движение воздухом от кузнечных мехов, раздуваемых крыльями той же самой мельницы. Вообще надо отметить, что в те времена предлагалось много различных конструкций «вечных» мельниц, насосов, подъемников.

В XVIII—XIX веках на смену механическим пришли вечные двигатели, в которых предлагалось использовать пар, природные магниты, а также электромагнитные явления. О них идет речь в четвертой главе книги. Пожалуй, наибольшее распространение получили различные варианты такой системы: электромотор приводит в действие генератор, который в свою очередь обеспечивает этот мотор энергией. Нет нужды доказывать, что потери на трение, нагрев проводов и замыкающих контактов сводят на нет эту идею.

И еще одно явление — капиллярность — пытались использовать изобретатели вечных двигателей. Об этом рассказывается в пятой главе. Удивительно, но теоретические предпосылки для подобного устройства сформулировал известный физик Роберт Бойль, считавший, что вечное движение в самом прямом понимании этого термина осуществляется в масштабах всей нашей Земли в виде непрерывного круговорота поднимающихся вверх и вновь стекающих вниз вод. (Он не учел такой «мелочи», что поставщиком энергии для круговорота воды является Солнце.) Высокий авторитет Бойля стимулировал рождение многих проектов перпетуум мобиле со смачиваемыми губками, то есть использующих капиллярные силы. Впрочем, Бойль был далеко не единственным ученым — настоящим ученым! — верившим в возможность реализации вечного движения. Можно назвать хотя бы замечательного математика, механика и философа Иоганна Бернулли — одного из тех, кто заложил научные основы современной гидродинамики и гидравлики. Тем непостижимее факт, что именно Бернулли выдвинул идею создания гидродинамического перпетуум мобиле.

В следующих главах читатель найдет почти детективные истории мошенников и авантюристов, погревших руки на поприще создания вечных двигателей, а в одиннадцатой главе познакомится с различными вариантами «вечных» часов, например с часами замечательного английского механика и изобретателя Джеймса Кокса, подзаводившимися от ...перепада атмосферного давления.

Завершают книгу главы, посвященные некоторым общим вопросам. Здесь рассказывается, в частности, о заявках на проекты вечных двигателей, поступивших в патентные бюро Англии, Франции, США и других стран, и постепенном прекращении приема к рассмотрению таких заявок. Так, Парижская академия наук отказалась от рассмотрения любых проектов вечных двигателей еще в 1775 году, а патентное бюро США — столетием позже. Тем не менее изобретатели вечных двигателей не исчезли и, как утверждает автор, никогда не исчезнут. Он даже одну из глав книги назвал многозначительно: «Вечность проблемы вечного движения». Орд-Хьюм говорит: «Дело в том, что сегодня те, кто, по существу, заняты проблемой поиска вечного движения, очень часто не отдают себе в этом отчета, полагая, что предметом их исследований является какой-то другой вопрос, успешное решение которого вызовет сенсацию в научном мире». Очень важно, приступая к решению той или иной научной проблемы, с самого начала четко сформулировать постановку задачи и, конечно же, досконально изучить выполненные в данной области исследования. Именно так и работают настоящие ученые, а без этого можно пополнить изрядно поредевшие ряды изобретателей вечного двигателя.

Книга Артура Орд-Хьюма написана живо, занимательно и снабжена многочисленными иллюстрациями. Она, без сомнения, не оставит равнодушным ни одного из читателей.

И. Зорич

Задачи наших читателей

1. Не пользуясь таблицами, докажите неравенство

$$\frac{1}{\log_2 \pi}+\frac{1}{\log_5 \pi}>2.$$

П. Сальников

2. Найдите все числа вида $\overline{\underbrace{axx\ldots x}_{n}\underbrace{yy\ldots y}_{n}b}$ $(n=0,1,2,\ldots)$, являющиеся полными квадратами.

К. Крайнюков

3. Найдите

а) пять последних цифр числа 15^{1981};

б) шесть последних цифр числа 5^{1981};

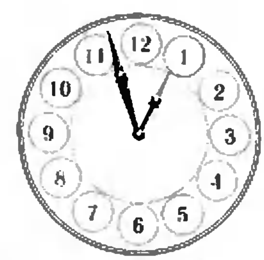
в) семь последних цифр числа 15^{1983}.

С. Манукян

4. Докажите, что если n делится на 11^{k-1}, то число $A=1\ldots1$, состоящее из $2n$ единиц, делится на 11^k.

В. Панфилов

5. Проведя три прямые, разделите циферблат часов



(см. рисунок) на четыре участка, содержащие по три числа так, чтобы суммы чисел в каждом из участков были кратны трем и образовывали арифметическую прогрессию. Сколькими способами это можно сделать?

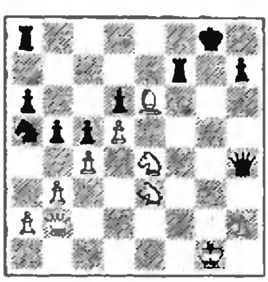
А. Пасенов

Консультирует — чемпион мира, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

Петросян — Спасский — Фишер

В 1954 году семнадцатилетним юношей Борис Спасский впервые участвовал в отборе к первенству мира и сразу дошел до турнира претендентов. Однако следующие два цикла сложились для него драматически — в первенстве СССР, являющемся зональным турниром, он оба раза проигрывал решающие партии последнего тура и выбывал из борьбы. Четвертая попытка оказалась успешнее — Спасский вышел победителем претендентских матчей. Однако его звездный час еще не настал. В матче 1966 года Петросян играл сильнее, тоньше и, несмотря на минимальный перевес в счете (12,5:11,5), уверенно сохранил корону.

В десятой партии чемпион мира провел комбинацию, вошедшую во все учебники шахматной тактики.

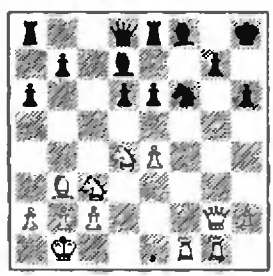


Петросян — Спасский

Хорошо известно пристрастие Петросяна жертвовать качество ради инициативы. На этот раз обе ладьи были отданы за легкие фигуры.

27. К:d6 Фg5+ 28. Kph1 Ла7 29. С:f7+Л:f7. Теперь, отыгрывая путем 30. К:f7 второе качество, белые оставались с лишней пешкой, но тогда борьба затягивалась. **30. Фh8+!!** Кажется, самый длинный ход в матчах на первенство мира! Белые жертвуют ферзя — не частый случай для соревнований столь высокого ранга. Черные немедленно сдались, так как после 30...Кр:h8 31. К:f7+ и 32. К:g5 они остаются без фигуры.

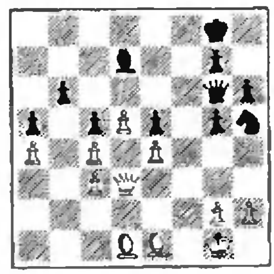
Прошло еще три года, и, наконец, пятнадцатилетняя титаническая борьба за мировую корону принесла Борису Спасскому полный успех. Обыграв Петросяна со счетом 12,5:10,5, в 1969 году он стал десятым чемпионом мира. Эффектно завершилась девятнадцатая партия матча.



Спасский — Петросян

21. е5! (освобождая место для коня) **21...de 22. Ке4!** Оба белых коня неприкосновенны: 22... ed 23. К:f6 Ле7 24. Фg6; 22...К:е4 23. Л:f8+, и в обоих случаях черный король получает мат на следующем ходу. **22... Kh5 23. Фg6! ed** (23...Kf4 24 Л:f4 ef 25. Kf3! Фb6 26. Лg5! Фd8 27. Ке5, и белые выигрывают) **24 Kg5! Черные сдались** (после 24...hg 25. Ф:h5+Kpg8 26. Фf7+Kph8 27. Лf3 мат неизбежен).

В начале 70-х годов американский гроссмейстер Роберт Фишер поразил мир своими фантастическими победами — Тайманова и Ларсена в претендентских матчах он обыграл со счетом 6:0, а Петросяна — 6,5:2,5. Рождение одиннадцатого чемпиона шахматный мир воспринял как должное. Превосходство Фишера в матче 1972 года за мировую корону было ощутимо (12,5:8,5). Но справедливости ради надо отметить, что американец предпринял ряд психологических атак на своего противника и не только за шахматной доской. Это явно отразилось на игре Спасского. Приведем эпизод из пятой партии матча.



Спасский — Фишер

26...Kf4 27. Фс2? Инициатива на стороне черных, но после 27. Фb1 позиция белых была еще вполне обороноспособной. Спасский совершает грубую ошибку, позволяющую черным элегантным ударом завершить партию — **27...С:а4! Белые сдались** — после 28. Ф:а4 (28. Фb1 С:d1 29. Ф:d1 Ф:е4) 28...Ф:е4 их король не может избежать мата.

К сожалению, после этого матча поклонников древней игры ждало горькое разочарование — новый король оставил шахматы. Каковы причины этого странного поступка? Вот одна из точек зрения.

Чемпионская корона закрепила за Фишером, по его мнению, роль шахматного мессии на Земле. В результате он счел, что теперь не имеет права неудачно выступать в турнирах и вообще проиграть хотя бы одну партию. Короче говоря, чемпион взвалил на себя такой груз обязательств, что просто согнулся под ним и стал бояться шахмат — не какого-то конкретного шахматиста, а самих фигур и доски.

Телеграмма Фишера в 1975 году, накануне матча с Карповым, о том, что он отказывается от звания чемпиона мира ФИДЕ, подвела черту его царствованию.

Уравнения думают за нас

1. $F\approx-53{,}3$ Н. Знак «минус» означает, что силу надо направлять не вниз, а вверх под тем же углом к горизонту.
2. $t=100°$ С.
3. $s=12{,}5$ м. Указание. Прежде чем решать задачу, надо выяснить, куда (вверх или вниз) движется тело в момент времени $t=2$ с. В этом может помочь, например, уравнение для проекции скорости: $v=v_0-gt=-5$ м/с. Знак «минус» означает, что тело движется вниз. Следовательно, за 2 с тело успеет подняться до максимальной высоты и немного опуститься вниз.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 8)

1. Для $n=4k$ и $n=4k+1$ при любой расстановке знаков «+» и «—» четности левой и правой частей не совпадают.

Для $n=4k+2$ возможна следующая расстановка знаков:

$$1+2-3-4+5+6-\ldots-(2k+1)-(2k+2)+(2k+3)+(2k+4)-\ldots+(4k+1)+(4k+2)=4k+3.$$

Для $n=4k+3$ — следующая:

$$-1+2+3-4-5+6+\ldots+(4k+3)=4k+4.$$

2. Обозначим исследуемую сумму через S. $3S-(x+y+z)=45$ (рис. 1), то есть

$$S=15+\frac{x+y+z}{3}.$$

S принимает минимальное значение, когда $x+y+z=1+2+3=6$, и максимальное — когда $x+y+z=7+8+9=24$; таким образом, $S_{min}=17$, $S_{max}=23$.

Нетрудно убедиться, что S не может равняться 18. Действительно, если $S=18$, то $x+y+z=9$. Возьмем тот из четырех треугольников (со стороной 2), в который входит 9; пусть остальные числа в нем x, y и t (рис. 2). Тогда $x+y+t+9=18$, откуда $t=z$ — противоречие.

Рис. 1.

Рис. 2.

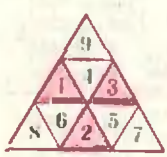


Рис. 3.

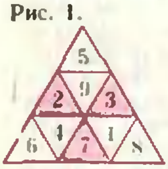


Рис. 4.

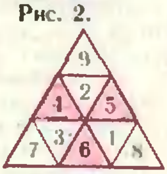


Рис. 5.

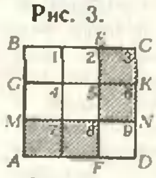


Рис. 6.

Расположения чисел, соответствующие значениям $S=17, 19$ и 20, изображены на рисунках 3—5. Расположения, соответствующие значениям $S=23$ и 21, получаются из рисунков 3 и 4 заменой каждого числа A числом $10-A$. Расположения для $S=22$, как и для $S=18$, не существует.

4. Нельзя. В самом деле, предположим, что такую раскраску выполнить можно. Выделим из нашей сетки квадрат $ABCD$ размером 3×3 и занумеруем его клетки числами 1, 2, ..., 9 (рис. 6). В прямоугольниках $MBCN$ и $ABEF$ клетки с номерами 3, 6 и 7, 8 окрашены в одинаковые два цвета. Но тогда в прямоугольнике $AGKD$ обязательно будут две клетки одного цвета: клетка с номером 6 окрашена либо так же, как клетка 7, либо так же, как клетка 8. Противоречие.

5. Карабасов больше. Представим, что все карабасы вручили своим друзьям-барабасам по визитной карточке. Обозначим число карабасов через X, а число барабасов — через Y. Теперь ясно, что карабасы раздали $9X$ карточек (каждый — девяти друзьям-барабасам), а барабасы получили всего $10Y$ карточек (каждый — от десяти друзей-карабасов). Значит, $9X=10Y$ и $X>Y$.

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
А. Вольфкович, Г. Кованов, Г. Красиков, И. Кузьмина, С. Лухин, Э. Назаров, М. Сидоров, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Т. Вайсберг

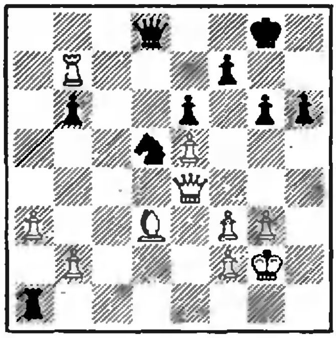
113035, Москва, Б. Ордынка 21/16, «Квант», тел 231-83-62
Сдано в набор 22.7.81.
Подписано в печать 4.09.81.
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,73 Т-25014
Цена 30 коп. Заказ 1786
Тираж 232 602 экз.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Чехов Московской области

ШАХМАТНЫЙ КОНКУРС

ПЯТЬ ПОБЕД КАРПОВА

В апреле этого года состоялся Московский международный шахматный турнир. Он был примечателен в нескольких отношениях. Прежде всего, турнир отличался выдающимся составом участников: четырнадцать знаменитых гроссмейстеров, среди которых чемпион мира, два экс-чемпиона — Т. Петросян и В. Смыслов, претенденты на мировую корону прошлых и настоящих лет — Л. Портиш, Е. Геллер, Л. Полугаевский, У. Андерссон и, возможно, будущие претенденты — Ю. Балашов, А. Белявский, Г. Каспаров, Я. Тимман. Для А. Карпова соревнование являлось как бы генеральной репетицией перед матчем на первенство мира, и, естественно, он вынужден был играть сдержанно, не раскрывая раньше времени дебютные секреты (может быть, поэтому чемпион мира лишь однажды начал партию своим любимым ходом 1.е2 — е4). Однако «особые» условия не помешали Карпову одержать очередную блестящую победу, опередив ближайших соперников на полтора очка (2 — 4-е места разделили Г. Каспаров, Л. Полугаевский и В. Смыслов). И дело не только в первом призе и заметном отрыве от преследователей, а в исключительно содержательной игре чемпиона мира, который выиграл пять встреч без единого поражения, причем каждая победа представляет собой истинное произведение шахматного искусства. В первом же туре Карпов технично переиграл одного из своих тренеров Ю. Балашова, а в третьем создал маленький шедевр в партии с Е. Геллером.

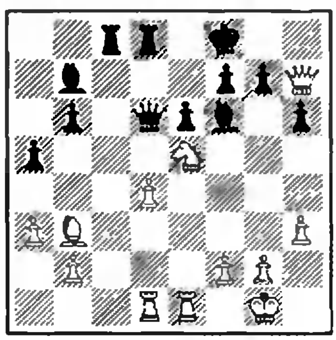


Карпов — Геллер

31.Л:f7!! Эффектная жертва ладьи. У белых почти не остается фигур на доске, и они завершают сражение малыми силами.

31...Кр:f7 32.Ф:g6+ Крf8 33.Ф:h6+. Черные сдались, так как мат неизбежен.

В отличном позиционном стиле были повергнуты гроссмейстеры А. Белявский и В. Смыслов, наконец изящно завершил чемпион мира поединок против своего постоянного конкурента в турнирах голландца Я. Тиммана.



Карпов — Тимман

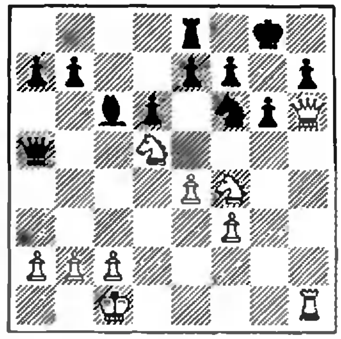
28.d5!! Фс7 (28...С:d5 29.Л:d5 ed 30.Кd7+ и 31.Фh8×) **29.de Л:d1 30.Кg6+!** Черные сдались, их король не может спастись от мата.

А теперь найдите сами четыре комбинации из партий А. Карпова.

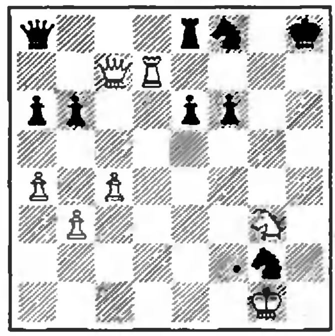
*

* *

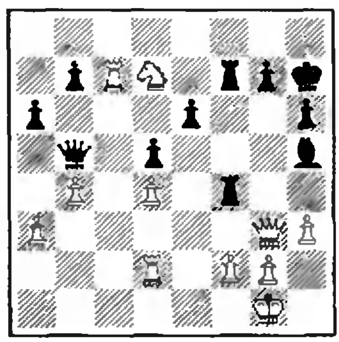
Срок отправки решений — 30 октября 1981 г. (с пометкой на конверте «Шахматный конкурс № 9 — 81»).



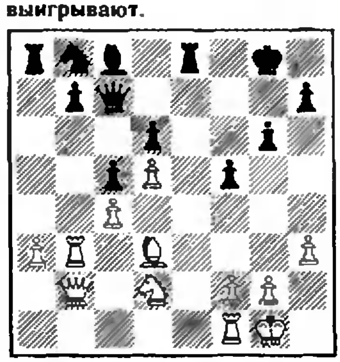
1. Белые начинают и выигрывают.



2. Белые начинают и выигрывают.

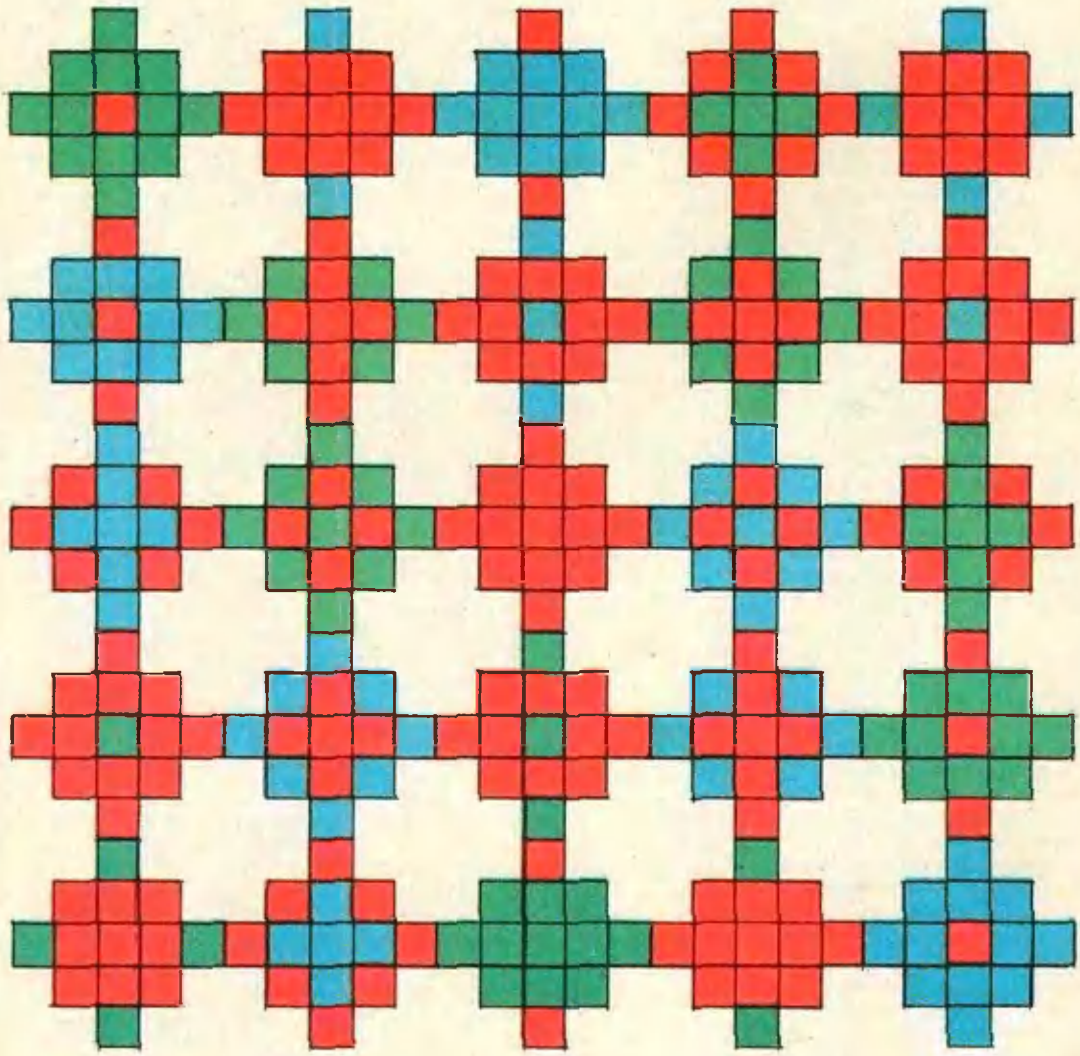


3. Белые начинают и выигрывают.



4. Белые начинают и выигрывают.

Цена 30 коп.
Индекс 70465



Если в зеленые клетки изображенной здесь трехцветной мозаики вписать 0, в красные — 1, в синие — 2 и сложить числа внутри каждой тринадцатиклеточной «зубчатой» фигуры, получится магический квадрат 5×5.

А. Кривошеев