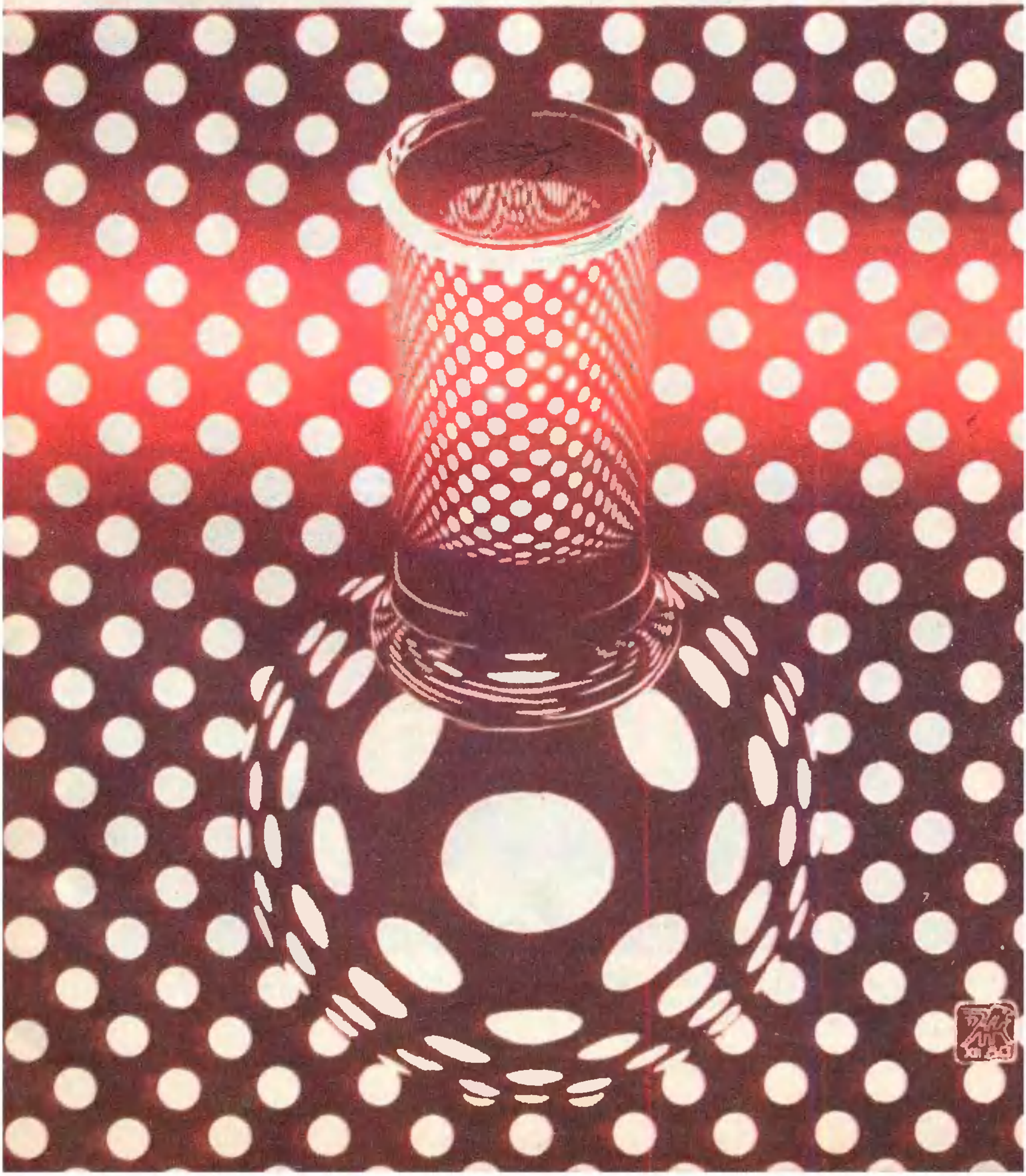
kvant.mccme.ru

ISSN 0130-2221

Квант

7
1981

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



kvant.mccme.ru

Исполнилось 275 лет со дня рождения выдающегося американского ученого Бенджамина Франклина. В этом номере мы публикуем статью о его жизни и деятельности, написанную академиком П. Л. Капицей.

kvant.mccme.ru

Квант

7

1981

Основан в 1970 году

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКОВСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО
ОРГКОМИТЕТ МОСКОВСКОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд

В НОМЕРЕ:

На первой странице обложки воспроизведен рисунок художника Л. Константинова. Автор назвал эту свою работу «Плоскость и объем».

© Издательство «Наука». Главная редакция физико-математической литературы, «Квант», 1981

kvant.mccme.ru

Л. Седов

Будьте готовы к новым условиям жизни людей

XX век ознаменовался многими событиями, в корне изменившими экономические и социальные условия жизни большей части населения земного шара. Жизнь и деятельность молодого поколения нашего времени перейдут в XXI век. Уже теперь можно предвидеть, что именно тем, кто сейчас молод, придется решать новые сложные проблемы глобального характера, особенно в области энергетики и охраны окружающей среды, поскольку запасы топлива и полезных ископаемых, так же как и ресурсы морей и рек, далеко не беспредельны, а загрязнение окружающей среды принимает угрожающие для жизни и здоровья людей размеры.

Передовые умы нашего времени верят в силу здравого смысла и в эффективность доброй воли народов мира и исключают возможность термоядерной войны. Когда такая уверенность станет всеобщей, безумие атомной войны будет действительно исключено. И здесь особенно важна активная позиция молодежи.

Вторая половина XX века характеризуется фундаментальными достижениями в различных областях науки и ее приложений.

Произошло огромное расширение фронта научных исследований и числа ученых, многие из которых совсем молоды. Теперь все острее и острее становится задача повышения качества образования в школах и вузах и эффективности научных работ, что требует высокой квалификации и продуктивности исследований.

В настоящее время накопилась огромная информация в различных областях науки и техники. Теперь даже в самой узкой специальности человек не может познать все известные факты. Поэтому возникает проблема: чему учиться? на что обращать внимание? что самое главное и что излишне?

Академик Леонид Иванович Седов — Герой Социалистического Труда, председатель Научного совета АН СССР по механике жидкостей и газов, президент Международной астронавтической федерации.

Статья с небольшими сокращениями перепечатывается из сборника «Ленин. Наука. Молодежь», выпущенного в 1980 году издательством «Наука».

kvant.mccme.ru

Вместе с тем следует сказать, что фундаментальные основы всякой отрасли науки немногочисленны и, вообще говоря, очень просты. Просты — это верно, но для понимания этих простых основ (что должно являться главным результатом образования) необходимо овладеть смыслом применяемых понятий, сущностью характеристических величин, правильным определением различных объектов и научиться операциям при теоретических и экспериментальных действиях, с помощью которых такого рода простые гипотезы и законы формулируются. Овладение современными методами и умением в теории, в эксперименте, на практике обязательно для успехов в науке и технике.

Таким образом, в образовании и в творческой работе главное — это накопление знаний, методических навыков и понимания. Следует подчеркнуть, что понимание невозможно без знаний, но одни знания разных факторов и даже рецептурных методов действий с ними не обязательно связаны с пониманием сути дела. Можно встретить людей, которые много знают и мало понимают. Серьезные успехи связаны с действительным пониманием, поэтому необходимо добиваться в жизни, в науке и на практике понимания, и особенно важны только те знания, которые совершенно необходимы для понимания. Следовательно, успехи в образовании и в творческой работе требуют максимума понимания при использовании минимума (зачастую очень большого теперь) необходимой информации. При обучении учитель должен отбирать из огромного накопленного запаса информации именно ту, которая обеспечит требуемое понимание. Тогда молодые ученые легко смогут ориентироваться в данной отрасли знания и найти нужную дополнительную информацию по ходу своей конкретной деятельности.

Во многих науках, так же как и в искусстве, требуется систематическое и правильное обучение смолоду. Неправильное или только рецептурное усвоение знаний смолоду чревато вредными последствиями, так как потом переучиваться трудно, а иногда и невозможно.

Нужно всемерно развивать энтузиазм, интерес к получению знаний, который возникает и процветает именно в коллективе — в школе и в вузе. В обучении и в практической деятельности необходимо прививать молодежи самостоятельное, критическое восприятие фактов при освоении научных знаний и самокритичное отношение к собственным поступкам.

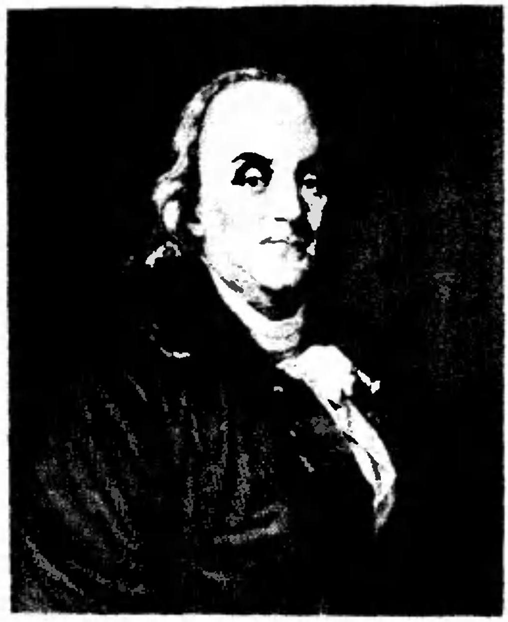
Самоотверженность, одержимость, глубокая внутренняя заинтересованность и бескорыстный при взаимной помощи стиль в коллективных стремлениях познать сущность явлений природы и научных достижений безусловно способствуют и общему прогрессу, и формированию высоких индивидуальных качеств членов коллектива.

Каждый из вас есть член коллектива, коллектива соратников, товарищей старшего и более молодого поколений. Без общения и работы в коллективе, без тесного взаимодействия с коллективом теперь вообще невозможно добиться каких-либо значительных результатов.

Фундаментальные знания приобретаются в молодости — в школе и в вузе, но процесс совершенствования и дальнейшего обучения продолжается в течение всей творческой деятельности человека. Однако нужно помнить, что именно в молодости вы получаете основные знания и методические навыки, и это наложит свой отпечаток на всю вашу дальнейшую деятельность.

Дорогие друзья! Перед вами открыты широкие двери для творческой деятельности на благо и во славу нашей Родины, на пользу всему человечеству. Не упустите смолоду такой возможности, это обязательно послужит для вас источником глубокого внутреннего удовлетворения, больших радостей и счастья, которые вы найдете в своей трудовой деятельности.

kvant.mccme.ru



В январе этого года исполнилось 275 лет со дня рождения выдающегося американского естествоиспытателя Бенджамина Франклина. В связи с этим юбилеем мы публикуем статью академика Петра Леонидовича Капицы, посвященную ученому. Статья с некоторыми сокращениями перепечатывается из брошюры «Жизнь для науки», выпущенной издательством «Знание» в 1965 году.

П. Капица

Научная деятельность Бенджамина Франклина

Франклин родился в Америке, в городе Бостоне, в 1706 году. Он умер, когда ему было 84 года. Его деятельность охватывает весь XVIII век и тесно связана с происходившим тогда быстрым развитием естественных и общественных наук. Это эпоха просветителей, эпоха, предшествующая периоду коренных общественных переворотов в Европе.

Имя Франклина вошло в историю мировой культуры не только как имя крупнейшего ученого, одного из основателей учения об электричестве, но и как имя крупнейшего прогрессивного государственного и общественного деятеля Америки, принимавшего живейшее участие в борьбе за ее освобождение от колониального положения.

Современники единодушно описывают Франклина как исключительно обаятельного человека, всесторонне образованного, с гуманными и широкими взглядами, интересного и остроумного собеседника. Франклин часто путешествовал и много лет прожил за границей, главным образом в Англии и Франции. Здесь он общался с передовыми людьми своего времени и к концу жизни стал популярнейшим лицом в Европе. На своей родине, в Америке, Франклин и по сей день является одним из наиболее почитаемых людей за все время истории США.

Основные научные открытия Франклина в области электричества были им сделаны в 50-е годы XVIII века, до работ Гальвани и Вольта, то есть до эпохи гальванического тока, и относятся к начальному периоду завоевания наукой этой могучей силы природы. За 200 с лишним лет, прошедших со времени работ Франклина, учение об электричестве настолько продвинулось вперед, что сейчас работы Франклина изучают в средней школе, в тех классах, где только начинают знакомиться с физикой. Всем

kvant.mccme.ru

нам с юности известны основы учения о статическом электричестве, хотя, возможно, некоторые из нас могли позабыть, что собственно здесь было сделано Франклином. Например, все ли из нас помнят, что наименование положительного и отрицательного полюсов было впервые введено в науку Франклином?

Подробное описание научных работ Франклина вряд ли сейчас интересно, но сама история развития работ Франклина в области электричества, мне думается, не только интересна, но и полезна для современного ученого. Следует это из того, что путь развития науки, то есть путь познания природы, по которому идет человечество, — единый. В своих исканиях научных истин мы нередко сбиваемся с правильного пути и тогда теряется время. Поэтому, чем меньше мы будем отклоняться от правильного пути, тем скорее и экономичнее будут развиваться наши познания и завоевания сил природы. Изучая историю науки, мы находим те факторы, которые способствуют быстрому развитию науки. С этой точки зрения история научных работ Франклина представляет исключительный интерес.

Работы Франклина по электричеству были им сделаны за короткий период времени, всего за 7 лет, с 1747 по 1753 год. За этот короткий срок Франклин был признан ведущим ученым своего времени. Большинство крупных научных обществ или академий отметили научные заслуги Франклина, избрав его своим членом, и ряд университетов присвоил ему почетное звание доктора.

Естественно возникает вопрос: как могло случиться, что Франклин, раньше никогда не занимавшийся физикой, в небольшом городе Америки, вдали от центров мировой науки, будучи уже человеком зрелого возраста, смог за несколько лет работы возглавить развитие целой научной дисциплины?

И это произошло в середине XVIII века, когда наука велась людьми на уровне знаний таких ученых, как Ньютон, Гюйгенс, Эйлер? О дилетантизме здесь говорить не приходится. Как же мог Франклин достичь таких результатов, которые остались недоступны профессиональным ученым?

Мне думается, что надо искать объяснение в том, что Франклин первый правильно понял существо электрических явлений и поэтому открыл правильный путь для дальнейших исследований в этой области.

До работ Франклина было уже накоплено большое количество опытного материала, но факты были разрознены, и выдвинутая им гипотеза не только объединяла эти факты в стройную картину, но и указывала правильный путь для дальнейших исследований.

Свою основную гипотезу Франклин изложил в письме к Питеру Коллинзону в 1749 году. Она дает ясную картину процессов, происходящих при электризации тел. Эта картина до сих пор в основном остается правильной. Вот выдержка из этого письма: «Электрическая материя состоит из частиц крайне малых, так как они могут пронизывать обычные вещества такие плотные, как металл, с такой легкостью и свободой, что не испытывают заметного сопротивления». В наши дни мы называем эти «крайне малые частицы» электронами. Далее Франклин рассматривал любое тело как губку, насыщенную этими частицами электричества. Электризация тел состоит в том, что тело, имеющее избыток электрических частиц, положительно заряжено; если тело имеет недостаток этих частиц, оно заряжено отрицательно.

Конечно, Франклин тогда не имел возможности на опыте воспринимать материальный характер электричества и поэтому не имел возможности определить, кто на самом деле получает электрическую материю и, следовательно, заряжен положительно, и кто ее теряет, то есть заряжен отрицательно. Поэтому он принял наугад, что наэлектризованное стекло заряжено положительно, может быть, думая, что шерстяная материя при трении о стекло втирает в него электричество. Только в конце прошлого века, после открытия частиц электричества —

kvant.mccme.ru

электронов, стало известно, что не положительный электрод, как думал Франклин, накапливает электрические частицы, но отрицательный. Чтобы не менять привычных обозначений положительной и отрицательной полярности, электрону приписали отрицательный заряд.

Свойство взаимного отталкивания одноименно заряженных тел Франклин распространил на заряды, находящиеся на металлических проводниках. Он считал, что заряды, отталкиваясь друг от друга, будут стремиться на наружную часть наэлектризованного металлического тела. Он доказал справедливость своего предположения следующим опытом.

Металлический чайник ставился на изолятор и электризовался. Требовалось найти опыт, который доказал бы, что заряд распределяется по наружной поверхности чайника. Для этого внутрь чайника помещалась цепь, которую посредством изолированной ручки можно было постепенно извлекать из чайника. Степень электризации чайника определялась по отталкиванию двух шариков, подвешенных к нему на ниточках. Опыт заключался в том, чтобы за изолированную ручку подымать цепь из чайника и наблюдать, как по мере ее вытягивания степень электризации чайника уменьшается.

Франклин рассуждал так: пока цепь находится внутри чайника, ее поверхность увеличивает внутреннюю поверхность чайника; когда цепь вытягивают наружу, то она увеличивает наружную поверхность чайника [цепь «на выходе» касается чайника — *прим. ред.*]. Франклин заключает: если заряд распространяется только по наружной поверхности наэлектризованного проводника, то только при ее увеличении наэлектризованность будет уменьшаться. Это и наблюдается на самом деле, когда производится опыт.

Описание всех своих работ Франклин дает в письмах своему другу Коллинзону в Англии. В этих письмах описывается большое количество различных опытов, которые теперь стали классическими: получение электрического ветра, свойства стекания зарядов с острия и др. В этих же письмах Франклин с точки зрения своей гипотезы дает правильное объяснение ряда уже известных электрических явлений, например картины накопления электрических зарядов в Лейденской банке, и на этом основании он делает плоский конденсатор. Коллинзон докладывал о работах Франклина в Королевском обществе ([английская Академия наук — *прим. ред.*]. Потом он издал их отдельной книгой, которая и стала основным научным трудом Франклина. Эта книга выдержала ряд изданий и была переведена на многие языки.

Ясность и правильность понимания Франклином явлений электризации дали ему возможность найти опыт, который впервые убедительно доказывал электрическую природу грозовых разрядов. Идея опыта Франклина заключалась в следующем.

Положим, между грозовой тучей и землей поставлен длинный вертикальный изолированный от земли металлический стержень. Если грозовая туча имеет электрический заряд, то заряд потивоположного знака находится в верхней части стержня. Если на этом верхнем конце стержня сделать острие, то наведенный заряд стечет и стержень зарядится электричеством того же знака, что и туча.

Франклин считал, что присутствие этого заряда можно будет обнаружить по искре, которая возникает, если прикоснуться к проводнику свободным концом заземленной проволоки. Франклин предполагал, как потом выяснилось, ошибочно, что для успеха этого опыта стержень надо поставить на возвышенность, чтобы он был ближе к облаку.

Так как вблизи его дома такой возвышенности не было, он думал, что ему не удастся сделать этот опыт. Он подробно описал, как его надо делать, и предлагал это выполнить другим. Сам же он решил проделать аналогичный опыт, но несколько другим путем, который не требовал возвышенности.

kvant.mccme.ru

Для этого опыта вместо металлического стержня он решил использовать бечевку, поднимая ее вверх змеем. Поскольку во время грозы всегда бывает ветер, змей можно запустить, а так как еще идет и дождь, то веревка, намокая, станет проводящей и может заменить металлический стержень. Чтобы бечевка легче заряжалась, была предусмотрена возможность на верхнем конце бечевки дать стекать наведенным зарядам. Для этого по углам рамки змея Франклин поместил острия. Для того чтобы изолировать бечевку от земли, внизу к ней была привязана шелковая лента, которая была защищена от дождя. К концу бечевки у земли был подвешен металлический ключ, из которого Франклин во время грозы и извлекал искру. Таким путем в присутствии своих друзей и знакомых он доказал электрическую природу грозового разряда. Опыт со змеем был сделан Франклином 12 апреля 1753 года, тогда же он впервые нашел, что грозовые облака, как правило, бывают заряжены отрицательно

Кроме чисто научных работ, у Франклина есть еще одно общепризнанное достижение: это его изобретение — громоотвод. В истории внедрения в жизнь этого изобретения есть тоже много поучительного. Это длинная история, ей посвящены многие исследовательские работы. Поэтому я могу только совсем кратко рассказать, как Франклин изобрел и внедрил громоотвод.

После того как была раскрыта сущность грозового разряда, естественно, встал вопрос, как можно рационально бороться с разрушениями и пожарами, причиняемыми молнией. Стало ясно, что когда молния ударяет в здание, корабль или любой другой возвышающийся объект, то вред причиняется тем, что мощный электрический ток, проходя по плохо проводящей среде, производит разрушения и воспламенения. Поэтому, если при ударе молнии в здание дать возможность электрическому разряду пройти в такой хорошо проводящей среде, как металл, разрушений не будет.

Несомненно, Франклин с его острым практическим умом раньше других увидел возможность найти защиту от молнии путем отвода тока. Но гораздо труднее для него было найти наиболее рациональную форму громоотвода и заставить общественное мнение признать его как действенное средство борьбы с разрушениями, вызываемыми грозой. С этой задачей Франклин блестяще справился, и его деятельность в этом направлении до сих пор может служить примером, как нужно проводить новые технические идеи в жизнь.

Франклин не только не брал патента на свой громоотвод, но дал возможность пользоваться им безвозмездно всякому, кто этого хотел. Кроме этого, он повел большую и искусную пропагандистскую работу для внедрения его в жизнь. За неимением времени нельзя рассказать полностью историю внедрения громоотвода, поэтому я остановлюсь на наиболее ярких моментах.

Вполне возможно, что ни одно изобретение не вызвало такой бури разнообразных возражений, какую вызвал 200 лет назад тот небольшой металлический стержень, который в наши дни венчает почти каждое сооружение и является стандартным элементом его конструкции.

Против громоотвода возникли как научные возражения, так и политические. Когда Франклин давал описание действия громоотвода, кроме его очевидной функции — дать беспрепятственный путь электрическому току по металлическому стержню в землю, он еще указал на возможность существования и другого процесса.

Франклин считал, что если над сооружением находится грозовая туча и если громоотвод снабжен острием, то с него может происходить медленное стекание электрического заряда. Это явление мы теперь называем тихим разрядом. Оно и будет нейтрализовать заряд облака и его разряжать. Поэтому Франклин допускал, что громоотвод не только защищает здание, но вообще может предотвратить грозовые разряды. Научные противники

kvant.mccme.ru

Франклина считали, со своей стороны, что стекание заряда с острия не только не будет нейтрализовать заряд тучи, но будет создавать более благоприятные условия для возникновения молний. Поэтому громоотвод скорее вреден, так как дает возможность возникновения грозовых разрядов, которых без него вообще не было бы.

Ученые, стоявшие на этой точке зрения, считали в особенности вредным и опасным для здания его соседство с другим, снабженным громоотводом.

Интерес общественного мнения к этим вопросам был очень велик, и это хорошо иллюстрируется известным случаем: когда в Сент-Омере, во Франции, господин де Виссери поставил громоотвод на своем доме, его соседи были этим так испуганы и возмущены, что подали на него в суд. Процесс произвел много шума и длился несколько лет в период между 1780 и 1784 годами. Интересно, что на стороне защиты громоотвода выступал молодой адвокат Максимильян Робеспьер, и это громкое дело положило начало его известности. Любопытно также, что одним из экспертов со стороны истца выступал Марат, который считал громоотвод опасной затеей и был против его установки. После долгой борьбы и апелляций де Виссери выиграл процесс.

Франклин проводит эксперименты с электричеством (французская статуэтка).

Интересна тактика Франклина во всей этой борьбе за громоотвод. Он обычно не выступал публично, но путем бесед и путем своей громадной переписки он непрерывно воздействовал на ведущих ученых и общественных деятелей. Такой пропагандой он создавал себе мощную армию из передовых людей того времени, которая боролась за проведение в жизнь его детища — громоотвода.

В Англии борьба против громоотвода приобрела резко политический характер. Английский ученый Вильсон пытался доказать, что избежать вредного действия громоотвода можно, если его конец сделать тупым и этим помешать стеканию заряда. Так как время этого спора совпало с эпохой освобождения Америки от колониального положения и Франклин стал крупной политической фигурой молодой Америки и одним из активнейших борцов за свободу, то всякий гражданин Англии, снабжавший свой громоотвод острием, а не тупым концом, считался политически неблагонадежным.

Король Англии Георг III требовал от Королевского общества, чтобы оно отказалось от своего решения в пользу острия на Франклиновском громоотводе. На это требование короля президент Королевского общества сэр Джон Прингль, лейб-медик короля и личный друг Франклина, дал следующий известный ответ: «И по своему долгу и по своим склонностям, он по мере сил всегда будет исполнять желания его величества, но он не в состоянии ни изменить законов природы, ни изменить действия их сил». За эти слова его уволили с должности королевского врача и сняли с президентства Королевского общества.

kvant.mccme.ru

Медаль Коплея, присужденная Франклину за открытия в области электричества.

В процессе борьбы по вопросу о громоотводе были использованы все методы, клевета, инсинуации и лично против Франклина, и против его друзей. Франклин сохранял большое спокойствие, не обращая внимания на личные выпады, и неизменно говорил, что в вопросах науки правда выявляется только опытом. Действительно, опыт и решил этот спор, но много десятков лет спустя, когда учение о грозовых разрядах и об электрическом поле достигло современного уровня. Теперь мы видим, что весь этот спор не имел никакого основания, так как для обычного громоотвода не имеет значения, чем он завершается, острием или тупым концом. На небольшом расстоянии от земли геометрическая форма конца громоотвода не может заметно влиять на распределение электрического поля над землей.

Но один из ведущих специалистов по грозовым разрядам доктор Шонланд указывает, что все же процесс нейтрализации заряда облака путем тихого разряда, предсказанный Франклином, возможно осуществить, но только тогда, когда острие громоотвода находится на таком большом расстоянии от земли, что оно сравнимо с высотой тучи. Это имеет место для громоотводов, помещенных на самых высоких американских небоскребах, тогда действительно удается наблюдать с острия стержня тихий разряд, не переходящий в молнию. Шонланд добавляет, что это, несомненно, дало бы Франклину чувство справедливого удовлетворения, если бы он мог это знать.

Только кратко скажу о деятельности Франклина в других областях науки, так как, кроме описанных знаменитых достижений, у него есть еще достижения и в других областях.

Франклин занимался геофизикой, дал карту течения Гольфстрима, изобрел музыкальный инструмент с трущимися стеклянными шарами, экономическую печку, до сих пор распространенную в Америке и Франции, уличные фонари, двойные очки для старческой дальнозоркости и многое другое. Кроме этого, благодаря своему общительному характеру и живому уму Франклин много консультировал и способствовал развитию науки. Конечно, сведения о большинстве этих консультаций канули в вечность, но некоторые дошли до нас.

Так, например, Людовик XVI просил Франклина быть членом комиссии по вопросу о ценности способа лечения, предложенного доктором Месмером, который использовал так называемый «животный магнетизм». Интересно, что в той же комиссии участвовал небезизвестный доктор Гильотен, изобретатель гильотины. Франклин отрицал существование животного магнетизма, но считал, что это не вредный способ лечения, так как он развлекает состоятельных людей, не принося им вреда, что не всегда можно сказать о других необоснованных лекарственных методах лечения.

Очень одобрительно Франклин отнесся к полетам братьев Монгольфье.

Франклин считал, что научные достижения есть достояние всего человечества и забота о развитии мировой науки должна стоять вне политических и военных противоре-

kvant.mccme.ru

Дом Франклина в Пасси. Рисунок Виктора Гюго.

чий между народами. Так, во время войны с Англией, когда знаменитый исследователь капитан Кук возвращался из своего плавания, Франклин дал указания всем американским кораблям и корсарам отнестись с уважением к капитану Куку, где бы они его ни встретили во время его путешествия. Для наших дней также представляет интерес, что Франклин, заседая в конгрессе, убедил не распространять на научное оборудование эмбарго, наложенное на все товары английского происхождения.

Изучая биографию Франклина, все больше и больше понимаешь, почему существует всеобщее уважение и преклонение перед этим большим человеком, которого народ Америки дал человечеству.

В эпоху быстрого роста естественных наук каждая страна дала своего великого родоначальника науки — у нас это был Ломоносов, в Англии — Ньютон, в Италии — Галилей, в Голландии — Гюйгенс, во Франции — Декарт, в Германии — Лейбниц, в Америке — Франклин. Достижения этих больших ученых являются гордостью всего человечества. И мы, советские люди, благодарны американскому народу, давшему и воспитавшему для человечества великого Франклина.

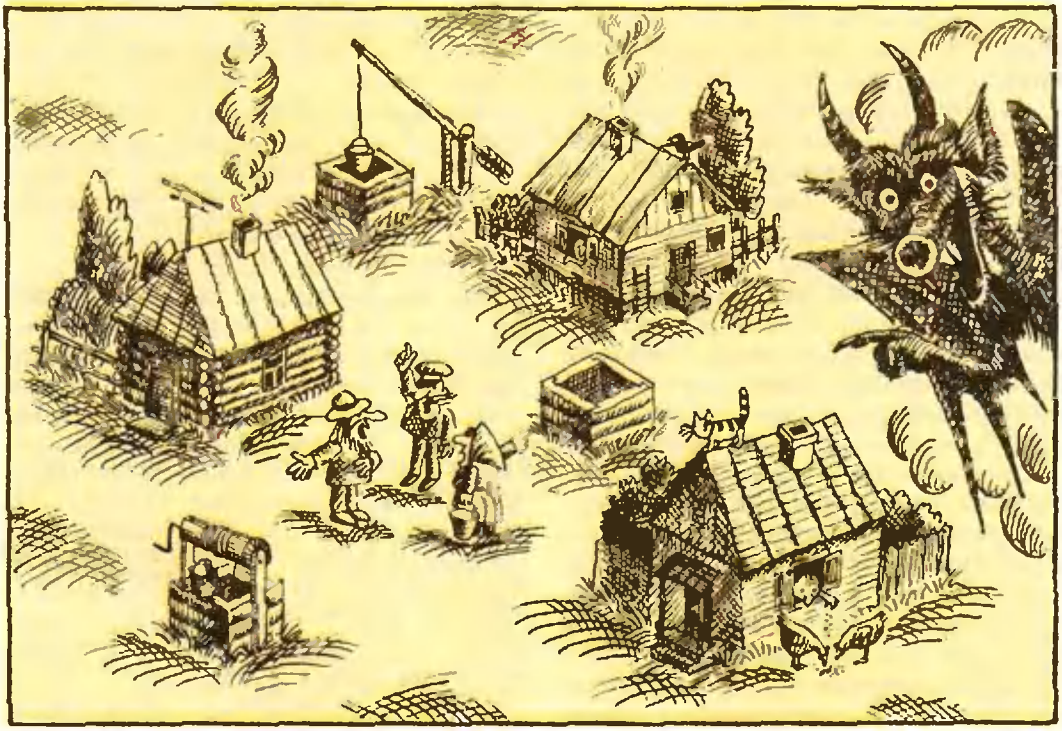
Уголок коллекционера

НА МАРКАХ — ФРАНКЛИН

Выдающийся американский естествоиспытатель и общественный деятель Бенджамин Франклин, 275-летие со дня рождения которого отмечается в этом номере «Кванта», оставил заметный след в мировой филателии. Ему посвящено несколько десятков почтовых марок. Больше всего их, естественно, выпущено в США. Первая американская марка с портретом Франклина вышла в 1847 году. Вместе с маркой, изображающей Джорджа Вашингтона, она образовала первую серию марок, имевших хождение на всей территории США. Впоследствии к ней добавилось еще 28 американских марок, посвященных Франклину. Две из них, выпущенные в 1908 и 1922 годах, приведены в нашей подборке. Марки с изображением Франклина по традиции открывали новые почтовые серии в США.

В 1956 году ряд стран торжественно отметил 250-летие со дня рождения Франклина. В нашей стране этому событию было посвящено торжественное заседание Академии наук. Юбилей Франклина был ознаменован выпуском специальных почтовых марок. Мы воспроизводим здесь марки СССР, Румынии и Болгарии, посвященные этому событию.

В. Лешковцев



В. Болтянский

Плоские графы

В этой статье мы продолжаем изучение топологических свойств графов, начатое в предыдущем номере журнала. На этот раз речь пойдет о некоторых глубоких свойствах плоских графов. Их изучение потребует вмешательства «дьявола абстрактной алгебры» и одного из его прислужников — инварианта по имени *индекс пересечения*.

Три домика и три колодца

Граф A называется ***вложимым в плоскость***, если существует на плоскости граф A', гомеоморфный A. Так, граф, составленный из ребер тетраэдра, и граф, составленный из ребер куба, вложимы в плоскость (рис. 1). Приведем два примера графов, не вложимых в плоскость.

Пример 1 («домики и колодцы»). На плоскости даны шесть точек: D_1, D_2, D_3 (домики) и K_1, K_2, K_3 (колодцы); можно ли на плоскости провести тропинки от каждого домика к каждому колодцу так, чтобы никакие две тропинки не пересекались?

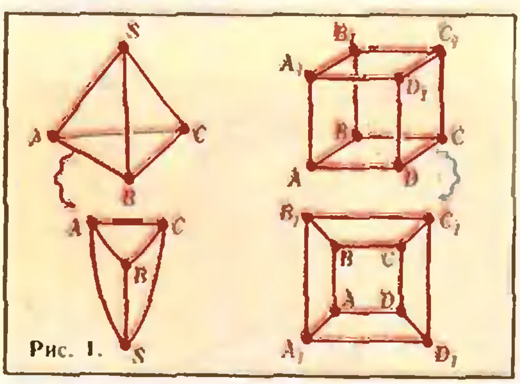


Рис. 1.

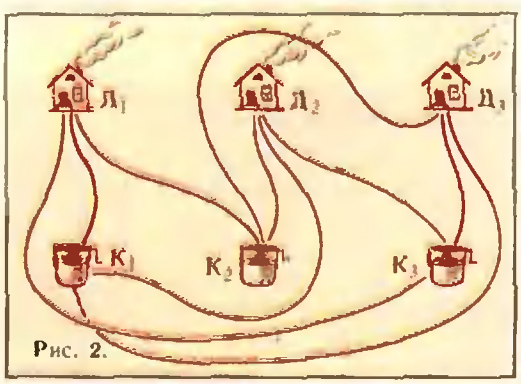


Рис. 2.

kvant.mccme.ru

Если мы проведем все тропинки, кроме одной, то для последней тропинки уже «не будет места» на плоскости. Таким образом видно, что граф P_1, изображенный на рисунке 2, не вложим в плоскость.

Пример 2. Обозначим через P_2 *полный граф* с пятью вершинами M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, то есть граф без петель, любая пара вершин которого соединена ребром. На рисунке 3 проведены девять ребер этого графа, а десятое прервано: для него «нет места» на плоскости. Снова видно, что граф P_2 не вложим в плоскость.

Оказывается, графы P_1, P_2 действительно не вложимы в плоскость. Разумеется, рассуждения, приведенные в примерах 1 и 2 («нет места» на плоскости), не являются доказательствами. К доказательству мы еще вернемся, а пока, считая невложимость графов P_1 и P_2 в плоскость известной, посмотрим на рисунок 4. На нем показан граф A с выделенным «синим» подграфом. Этот подграф гомеоморфен P_1, значит, граф A не вложим в плоскость (поясните!). Вообще, *если некоторый граф G содержит подграф, гомеоморфный P_1 или P_2, то граф G не вложим в плоскость.* Польский математик Куратовский доказал обратную теорему: *если граф не вложим в плоскость, то он содержит подграф, гомеоморфный P_1 или P_2.*

Мы не будем доказывать теорему Куратовского, а ограничимся доказательством невложимости в плоскость графов P_1 и P_2. Для этого нам потребуется

Индекс пересечения

Пусть a, b — два отрезка на плоскости, ни один из которых не содержит концов другого отрезка. Если эти отрезки пересекаются, то будем писать $I(a, b)=1$, а если нет, то $I(a, b)=0$. Число $I(a, b)$ назовем *индексом пересечения отрезков a и b*. Если один из отрезков a, b содержит конец другого отрезка, то число $I(a, b)$ не определено.

Пусть $x=\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ и $y=\{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ — два множества отрезков на плоскости, причем для любых i, j определен индекс $I(a_i, b_j)$.

Если сумма $\sum_{i,j} I(a_i, b_j)$ (то есть сумма индексов пересечения каждого из отрезков a_1, ..., a_m с каждым из отрезков b_1, ..., b_n) четна, положим $I(x, y)=0$, а если эта сумма нечетна, положим $I(x, y)=1$. Число $I(x, y)$ назовем *индексом пересечения множеств x и y*. Это число будет играть основную роль в этой статье.

Будем рассматривать графы, ребра которых являются отрезками. Если в каждой вершине такого графа сходится четное число ребер, мы будем называть его *циклом*. Докажем, что для любых циклов x, y на плоскости, индекс пересечения которых определен.

Индекс пересечения равен нулю

По определению в каждой вершине цикла сходится не меньше двух ребер. Из результата задачи 7 предыдущей статьи следует, что цикл содержит ломаную, гомеоморфную окружности. Если из цикла выбросить эту ломаную и хоть один отрезок останется, оставшийся граф по-прежнему будет циклом. В оставшемся цикле можно снова выделить ломаную, гомеоморфную окружности, и т. д. Это рассуждение показывает,

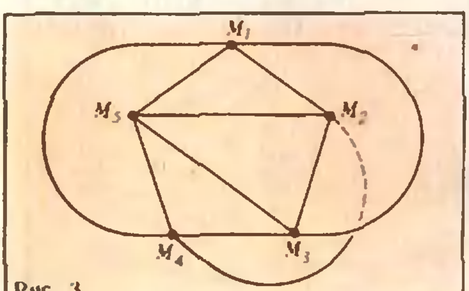


Рис. 3.

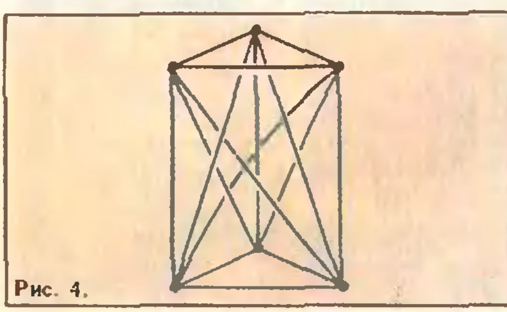


Рис. 4.

kvant.mccme.ru

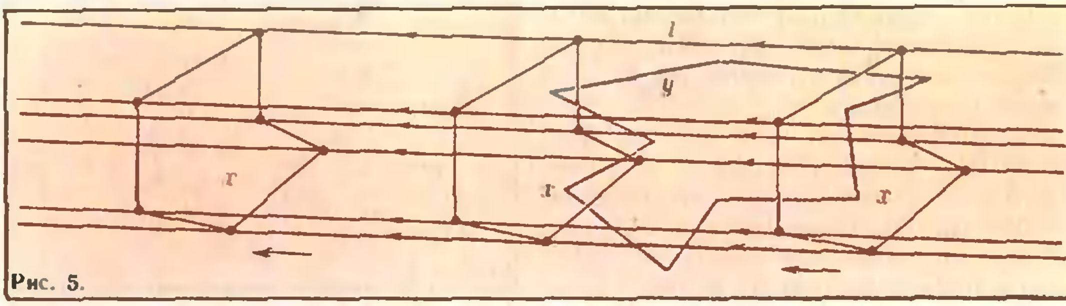


Рис. 5.

что *каждый цикл является объединением конечного числа ломаных, каждая из которых гомеоморфна окружности* (причем эти ломаные попарно не имеют общих звеньев).

Поэтому достаточно установить справедливость доказываемого утверждения в случае, когда каждый из циклов x, y состоит из одной ломаной, гомеоморфной окружности. Сдвинув чуть-чуть вершины циклов x и y, мы можем добиться того, чтобы индекс $I(x, y)$ не изменился и никакой отрезок, входящий в цикл x, не был параллелен никакому отрезку, входящему в y. Выберем теперь прямую l, не параллельную ни одной прямой, соединяющей какую-либо вершину цикла x с какой-либо вершиной цикла y, и будем непрерывно перемещать цикл x (как твердое целое) параллельно прямой l (рис. 5). Индекс пересечения $I(x, y)$ мог бы изменяться лишь в те моменты, когда вершины движущегося цикла x проходят через ребра неподвижного цикла y или когда ребра цикла x проходят через вершины цикла y (вершины цикла x не могут попасть в вершины цикла y в силу выбора прямой l). Однако, как показывает рисунок 6, в момент, когда некоторое ребро a цикла x проходит через вершину q цикла y, число точек пересечения не меняет своей четности, а потому индекс пересечения $I(x, y)$ не меняется. То же происходит и при прохождении вершин цикла x через ребра цикла y.

Итак, в течение всего движения индекс пересечения не меняется, является инвариантом. Но в конце концов цикл x попадает в положение, в котором он совсем не имеет общих точек с y (см. рис. 5), так что индекс пересечения становится равным нулю. Следовательно, и первоначально было $I(x, y)=0$.

Невложимость полного пятивершинного графа

Теперь мы в состоянии доказать, что граф P_2, рассмотренный в примере 2, не вложим в плоскость. Соединим ломаными попарно 5 точек на плоскости, не обращая пока внимания на пересечения. Ребра-ломаные, не имеющие общих концов, условимся называть *несмежными*. Обозначим через J сумму индексов пересечения по всем парам несмежных ребер. Конечно, число J зависит от того, каким образом нарисованы на плоскости ребра. Если бы их удалось нарисовать без пересечений, число J оказалось бы равным нулю. Однако мы докажем, что *при любом*

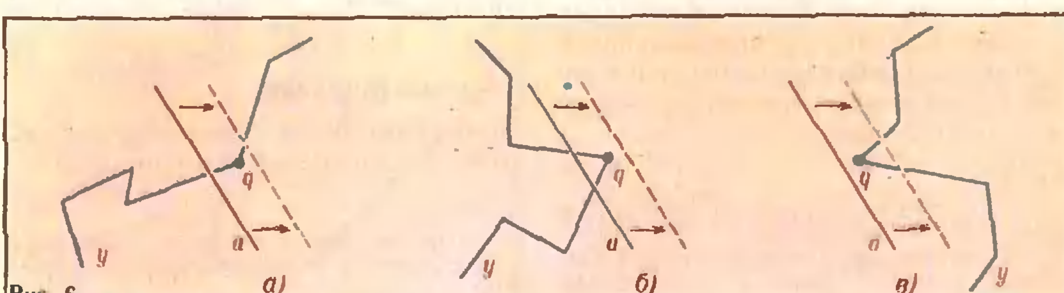


Рис. 6.

kvant.mccme.ru

способе проведения ребер число J оказывается нечетным. Тем самым будет доказано, что граф P_2 не вложим в плоскость.

Предположим, что мы меняем положение одного ребра, скажем M_1M_2. Первоначальное положение этого ребра обозначим через x, а его новое положение через x'. Несмежными с ребром M_1M_2 являются три ребра (M_3M_4, M_4M_5, M_5M_3). Замкнутая ломаная $M_3M_4M_5$ (возможно, пересекающая себя) является циклом; обозначим его через y (рис. 7). Ломаные x и x', вместе взятые, также образуют цикл. Поскольку индекс пересечения любых двух циклов равен нулю:

$$I(x \cup x', y) = 0,$$

число точек пересечения ребра x с циклом y (то есть со всеми несмежными ему ребрами) имеет ту же четность, что и число точек пересечения ребра x' с циклом y.

Таким образом, при замене ребра x ребром x' число J не меняет своей четности.

Из доказанного следует, что *при любых расположениях ребер на плоскости число J всегда имеет одну и ту же четность.* Действительно, если заданы два различных расположения ребер, то, последовательно заменяя сначала одно ребро первого расположения соответствующим ребром второго расположения, затем еще одно, еще одно и т. д., мы постепенно заменим первое расположение вторым, а четность числа I, в силу доказанного, меняться не будет.

Итак, либо для в с е х расположений ребер число J четно, либо оно для всех расположений нечетно. На рисунке 3 имеется только одна точка пересечения (разумеется, кривые ребра на этом рисунке можно заменить ломаными). Таким образом, на рисунке 3 число I равно единице, а потому для любого расположения ребер оно нечетно и, значит, *P_2 не вложим в плоскость.*

З а д а ч и

1. Докажите, что граф P_1 из примера 1 не вложим в плоскость.

2. Ребрами графа служат стороны и наименьшие диагонали правильного n-угольника ($n>3$)*). Докажите, что при четном n этот граф может быть вложен в плоскость, а при нечетном — нет.

3. Ребрами графа служат стороны и наибольшие диагонали*) правильного $2n$-угольника. Докажите, что при $n \geq 3$ этот граф не вложим в плоскость.

4. Ребрами графа служат стороны и наибольшие диагонали*) (их $2n+1$) правильного $(2n+1)$-угольника. Докажите, что этот граф не вложим в плоскость.

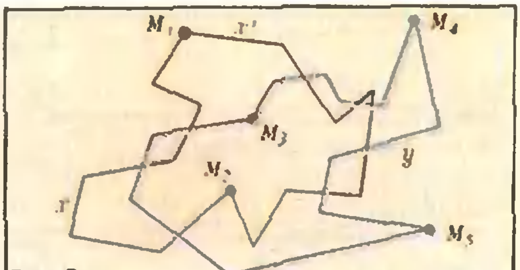


Рис. 7

Нельзя ли проще?

Выше (см. рисунки 5, 6) мы доказали, что индекс пересечения любых двух циклов на плоскости равен нулю. Возможно, читатель предложит следующее более простое доказательство: будем двигаться по замкнутой ломаной x; в каждой точке ее пересечения с замкнутой ломаной y мы будем либо в х о д и т ь во внутреннюю область ломаной y, либо в ы х о д и т ь из нее во внешнюю область; так как точки входа и точки выхода чередуются, к моменту прихода в исходную точку число точек входа будет равно числу точек выхода; значит, общее число точек пересечения ломаных x и y ч е т н о.

Однако это доказательство можно признать корректным лишь в том случае, если уже выяснен смысл понятия «внутренняя область», а это понятие вовсе не является таким простым, как кажется на первый взгляд. Выяснению смысла этого понятия посвящена

Теорема Жордана

Замкнутая линия, гомеоморфная окружности, называется *простой замк-*

*) Притом «диагонали» чуточку приподняты в пространство и поэтому попарно не пересекаются.

kvant.mccme.ru

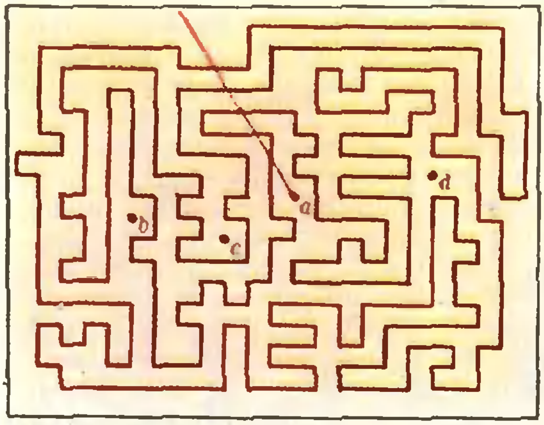


Рис. 8.

нутой линией. Теорема Жордана состоит в том, что *всякая простая замкнутая линия, расположенная на плоскости, разбивает эту плоскость на две области* (внутреннюю и внешнюю). Поясним смысл этой теоремы. Пусть l — простая замкнутая линия на плоскости. Возьмем точки, p, q, не лежащие на линии l. Если p и q можно соединить ломаной, не пересекающейся с l, то считают, что точки p и q лежат в одной и той же области относительно линии l. Если же любая ломаная, соединяющая точки p и q, обязательно пересекает l, то считают, что p и q лежат в разных областях. Теорема Жордана утверждает, что линия l определяет на плоскости ровно две области.

Не следует думать, что теорема Жордана утверждает нечто совершенно очевидное. Кажущаяся ее «очевидность» объясняется лишь тем, что на ум обычно приходят очень простые линии (окружность, контур выпуклого многоугольника и т. п.). В общем же случае утверждение теоремы Жордана не так уж очевидно. На рисунке 8 изображена простая замкнутая ломаная (это можно проверить, обведя линию карандашом). Однако вовсе не очевидно, что плоскость разрезана этой линией на две области; например, далеко не сразу можно понять, в какой области (внутренней или внешней) лежат точки a, b, c, d.

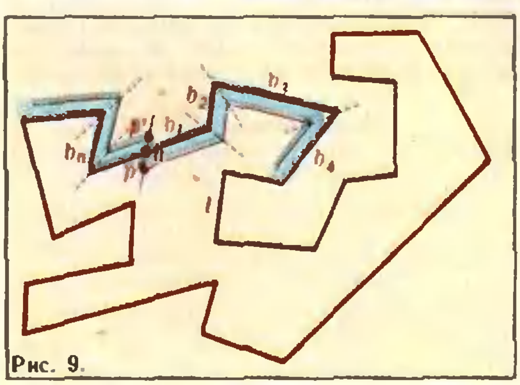


Рис. 9.

Мы приведем доказательство теоремы Жордана, основанное на применении индекса пересечения. При этом ограничимся случаем, когда l — не произвольная простая замкнутая линия на плоскости, а простая замкнутая ломаная.

Пусть b_1, b_2, ..., b_n — последовательные звенья ломаной l. Проведем отрезок, пересекающий звено b_1 в точке a, и возьмем на этом отрезке две точки p, p', расположенные по разные стороны звена b_1 на одном и том же расстоянии от него. Через точку p проведем отрезок, параллельный звену b_1, до точки его пересечения с биссектрисой угла между звеньями b_1 и b_2 (рис. 9). Из этой точки пересечения проведем отрезок, параллельный b_2, до пересечения с биссектрисой угла между звеньями b_2 и b_3 и т. д. В результате мы получим ломаную x, звенья которой находятся на одном и том же расстоянии от соответствующих звеньев ломаной l. Если при этом точка p была взята достаточно близко к a, то построенная линия x не пересекает l и, пройдя вдоль линии l, должна вернуться либо в точку p, либо в p'. Легко понять, однако, что в точку p' ломаная x прийти не может: если бы ломаная x соединяла точки p и p', то, присоединив к x отрезок pp', мы получили бы цикл, который с циклом l пересекается в единственной точке a, то есть индекс пересечения этих двух циклов был бы равен 1, что невозможно. Итак, x представляет собой замкнутую ломаную, выходящую из точки p, один раз проходящую вдоль ломаной l и возвращающуюся в точку p. Аналогично получается замкнутая ломаная x', выходящая из p', один раз проходящая вдоль ломаной l и возвращающаяся в точку p'.

kvant.mccme.ru

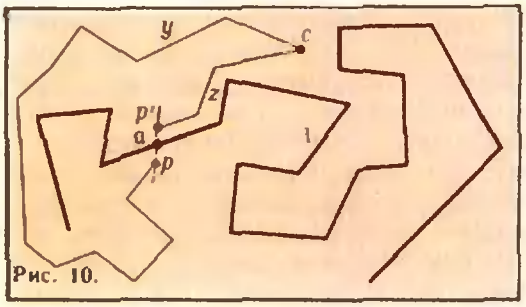


Рис. 10.

Пусть теперь c — произвольная точка, не лежащая на линии l. Тогда ее можно соединить, не пересекая l, либо с точкой p, либо с точкой p': достаточно провести из точки c луч, пересекающий линии x, x', и от точки c пройти до первой точки пересечения этого луча с какой-либо из линий x, x', а затем по этой линии дойти до точки p или p'.

Нетрудно понять, что если из точки c проведены две различные ломаные y, z, не пересекающие l и оканчивающиеся в одной из точек p, p', то обе они оканчиваются в **одной и той же** точке. В самом деле, если бы ломаная y соединяла точку c с p, а ломаная z соединяла точку c с p' (рис. 10), то ломаная $y \cup z$ вместе с отрезком pp' составляла бы цикл, индекс пересечения которого с циклом l равнялся 1, что невозможно.

Теперь уже нетрудно доказать теорему Жордана. Обозначим через U множество всех точек плоскости, которые можно, не пересекая l, соединить с точкой p, а через V — множество точек, которые можно, не пересекая l, соединить с точкой p'. Тогда U и V и будут теми двумя областями, на которые линия l разбивает плоскость. В самом деле, если точки

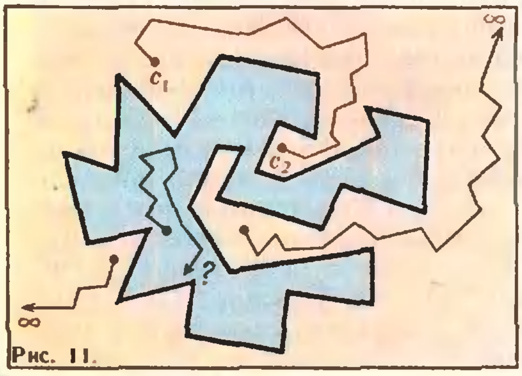


Рис. 11.

c_1, c_2 принадлежат одной области (скажем, U), то существуют ломаные y_1, y_2, не пересекающие l, которые соединяют c_1 и c_2 с точкой p. Объединение их представляет собой ломаную, соединяющую c_1 и c_2 и не пересекающую l. Итак, две точки, принадлежащие одной области, можно соединить ломаной, не пересекающей l. Если же точки c_1, c_2 принадлежат различным областям ($c_1 \in U$, $c_2 \in V$), то их нельзя соединить ломаной, не пересекающей l (иначе, как и выше, мы получили бы цикл, имеющий с l индекс пересечения 1). Тем самым теорема Жордана (для случая простой замкнутой ломаной) доказана.

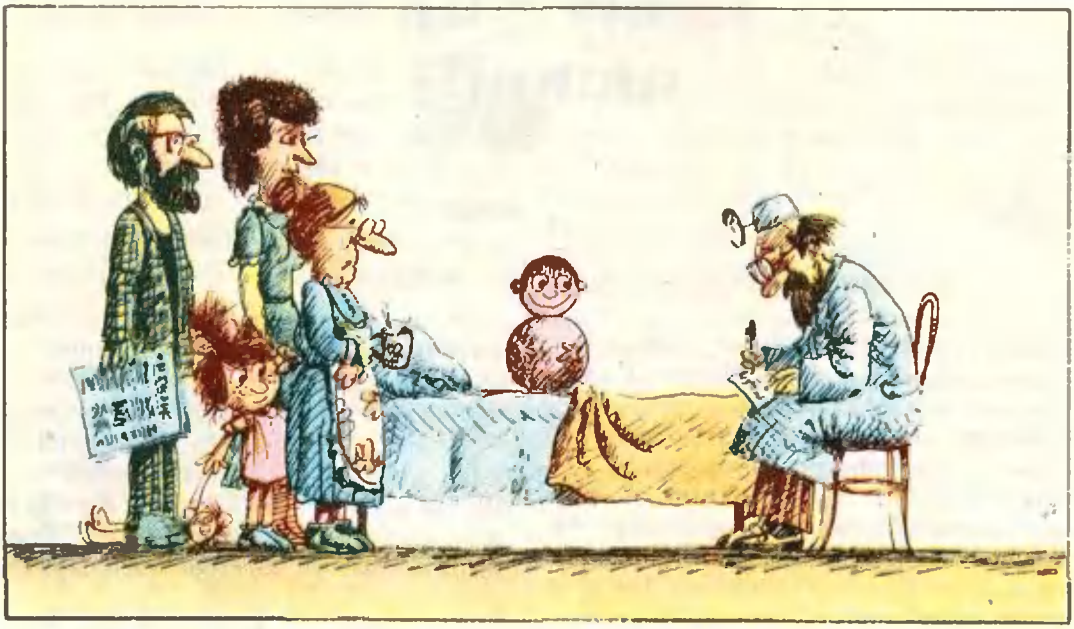
Замечание. Все «далекие» точки плоскости расположены в одной и той же области относительно линии l (рис. 11). Поэтому одна из двух областей, определяемых линией l, — неограниченная, а другая — ограниченная. Неограниченную область называют *внешней*, а ограниченную — *внутренней*. Точки внешней области характеризуются тем, что из этих точек можно провести ломаные, не пересекающиеся с l и уходящие как угодно далеко от l; точки внутренней области этим свойством не обладают.

Задачи

5. Если ломаная l — очень сложная, то определить «на глаз», в какой области (внутренней или внешней) лежит точка a, трудно: для этого нужно выяснить, можно ли, отправляясь из точки a, выйти из «лабиринта», образованного линией l (см. рис. 8). Докажите, что если луч, исходящий из точки a и не проходящий через вершины ломаной l, пересекает l в **четном** числе точек, то точка a лежит во внешней области (то есть выбраться из «лабиринта» можно), а если в **нечетном**, то точка a лежит во внутренней области.

6. На плоскости проведены k ломаных линий, каждая из которых соединяет две заданные точки p и q. Докажите, что если других общих точек ломаные попарно не имеют, то плоскость разбита на k областей.

kvant.mccme.ru



Л. Боровинский

Почему не лежится Ваньке-Встаньке?

Наверное, многие из вас помнят с раннего детства или читали недавно своим младшим братишкам и сестренкам веселые стихи Самуила Яковлевича Маршака о кукле-неваляшке — Ваньке-Встаньке:

Уснули телята, уснули цыплята,
Не слышно веселых скворчат из гнезда.
Один только мальчик — по имени Ванька,
По прозвищу Встанька — не спит никогда.

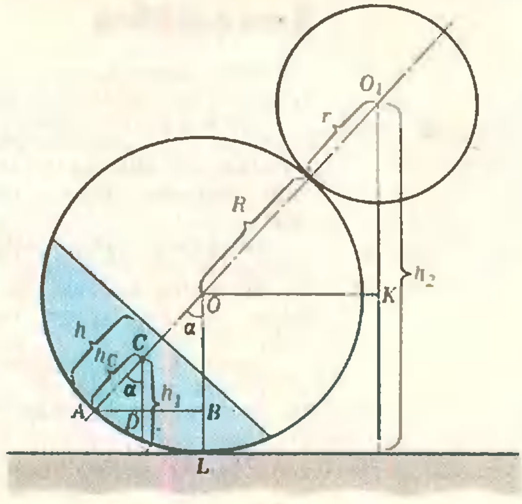
У Ваньки, у Встаньки — несчастные няньки:
Начнут они Ваньку укладывать спать,
А Ванька не хочет — приляжет и вскочит,
Уляжется снова и встанет опять.

Укроют его одеялом на вате —
Во сне одеяло отбросит он прочь
И снова, как прежде, стоит на кровати,
Стоит на кровати ребенок всю ночь.

Лечил его доктор из детской больницы.
Больному сказал он такие слова:
— Тебе, дорогой, потому не лежится,
Что слишком легка у тебя голова!

Итак, «доктор из детской больницы», по словам поэта, нашел причину странного поведения Ваньки-Встаньки. Мы же попробуем не только объяснить такое поведение с помощью законов физики, но и выяснить, при каких условиях Ванька-Встанька принимает вертикальное положение, как только прекращается действие силы, удерживающей его в любом другом положении.

Как устроена кукла-неваляшка? Представьте себе две соприкасающиеся между собой сферы (см. рисунок) с радиусами R и r ($R>r$). Бóльшая сфера — это «туловище», а меньшая — «голова». (Иногда «голове» придают форму цилиндра с горизонтальной осью, но для наших рассуждений форма



kvant.mccme.ru

«головы» не играет никакой роли.) В нижней части «туловища» находится массивное тело в форме сферического сегмента высотой h. Сегмент ограничен частью поверхности «туловища» и плоскостью, перпендикулярной оси, проходящей через центры сфер и точку их соприкосновения.

Если попытаться положить куклу на горизонтальную поверхность и предоставить ее самой себе, она немедленно встанет. Почему? Очевидно, что вертикальное положение Ваньки-Встаньки является положением устойчивого равновесия. В механике есть правило: в состоянии устойчивого равновесия центр тяжести тела должен находиться в самом низком из возможных для него положений. Это означает, что значение потенциальной энергии, вызванной силой тяжести, должно быть наименьшим из всех возможных.

Выясним, при каких условиях потенциальная энергия Ваньки-Встаньки будет минимальной, когда он занимает вертикальное положение. Выведем куклу из положения равновесия, отклонив ее ось на угол α от вертикали. Пусть h_c — высота центра тяжести массивного тела при вертикальном положении оси, M — его масса и m — масса «головы». Масса оболочки туловища не имеет значения, так как высота центра тяжести оболочки, а значит, и ее потенциальная энергия при наклоне Ваньки-Встаньки не изменяются.

Как видно из рисунка, высота центра тяжести массивного тела при наклоне оси равна

$$h_1 = |CD| + |BL| = h_c \cos\alpha + R - R\cos\alpha,$$

а высота центра тяжести головы —

$$h_2 = |LO| + |KO_1| = R + (R + r)\cos\alpha.$$

Общая потенциальная энергия массивного тела и «головы» равна

$$E_п = Mgh_1 + mgh_2 = (M + m)gR + (m(R + r) - M(R - h_c))g\cos\alpha.$$

Отсюда следует, что потенциальная энергия Ваньки-Встаньки при вертикальном положении оси, то есть при $\alpha = 0$, будет минимальной, если выражение, на которое умножается $g\cos\alpha$, отрицательно:

$$m(R + r) - M(R - h_c) < 0,$$

или

$$m < M\frac{R - h_c}{R + r}.$$

Осталась, правда, неизвестной величина h_c, но ее можно выразить через известные величины R и h (примем это без доказательства):

$$h_c = h\frac{8R - 3h}{12R - 4h}.$$

Таким образом, мы нашли точное математическое условие, показывающее, в какой мере должна быть «легка голова» у Ваньки-Встаньки, чтобы он принимал вертикальное положение, как только будет предоставлен самому себе.

Кросснамбер

Заполните белые клетки цифрами 1, 2,..., 9 так, чтобы

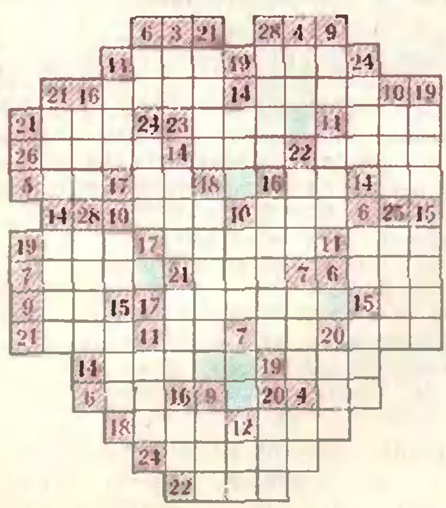
для каждого числа, получающегося по горизонтали, в розовой клетке слева от него была записана сумма его цифр;

для каждого числа, получающегося по вертикали, в розовой клетке над ним также была записана сумма его цифр;

цифры в каждом из этих чисел были различны.

Голубые клетки остаются пустыми.

Э. Рекстин



kvant.mccme.ru

Задачник Кванта

Задачи

М691—М695; Ф703—Ф707

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Задачи этого номера предлагались на заключительном туре Всесоюзной олимпиады школьников. Число в скобках обозначает класс, в котором предлагалась задача. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 сентября 1981 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7 — 81» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М691, М692» или «Ф703». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи.

М691. Будем говорить, что число обладает свойством (K), если оно разлагается в произведение K последовательных натуральных чисел, больших 1.
а) Найдите K такое, для которого некоторое число N обладает одновременно свойствами (K) и $(K+2)$.
б) Докажите, что чисел, обладающих одновременно свойствами (2) и (4), не существует. (8)

В. Федотов

М692. Точки C_1, A_1, B_1 взяты на сторонах, соответственно, AB, BC, CA треугольника ABC так, что

$$|AC_1|:|C_1B| = |BA_1|:|A_1C| = |CB_1|:|B_1A| = 1:3.$$

Докажите, что периметр P треугольника ABC и периметр P_1 треугольника $A_1B_1C_1$ связаны неравенствами а) $P_1 < \frac{3}{4}P$; б) $P_1 > \frac{1}{2}P$. (8)

В. Турчанинов

М693. В некотором поселке 1000 жителей. Ежедневно каждый из них делится узнанными вчера новостями со всеми своими знакомыми. Известно, что любая новость становится известной всем жителям поселка. Докажите, что можно выбрать 90 жителей так, что если одновременно всем им сообщить какую-то новость, то через 10 дней она станет известной всем жителям поселка. (9)

Н. Карташов, А. Савин

М694. В каждой вершине куба записано число. За один шаг к двум числам, размещенным на одном (любом) ребре, прибавляется по единице. Можно ли за несколько таких шагов сделать все восемь чисел равными между собой, если вначале были поставлены числа, как на рисунке 1? Как на рисунке 2? Как на рисунке 3? (9)

М695*. Можно ли все клетки какой-нибудь прямоугольной таблицы окрасить в белый и черный цвета так, чтобы белых и черных клеток было по-

kvant.mccme.ru

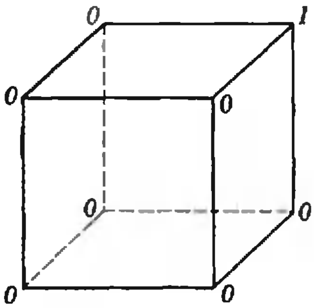


Рис. 1.

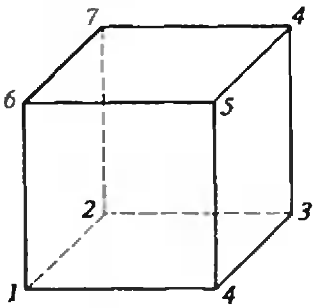


Рис. 2.

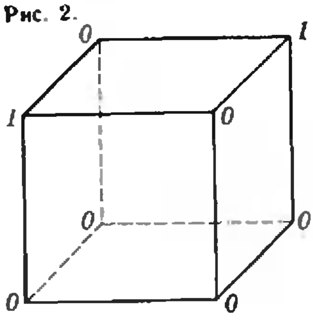


Рис. 3.

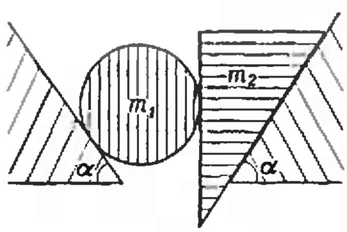


Рис. 4.

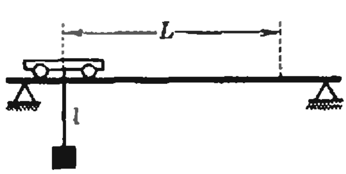


Рис. 5.

ровну, а в каждой строке и в каждом столбце было более 3/4 клеток одного цвета? (10)

С. Конягин

Ф703. Ракета запущена с поверхности Земли вертикально вверх с первой космической скоростью и возвращается на Землю недалеко от места старта. Сколько времени она находилась в полете? Радиус Земли $R_З = 6400$ км.

Примечание. Площадь эллипса с полуосями a и b равна $S = \pi ab$. (10)

Е. Сурков

Ф704. По двум гладким наклонным плоскостям, образующим одинаковые углы α с горизонтом, движутся, касаясь друг друга, цилиндр и клин (рис. 4). Найти, с какой силой клин давит на цилиндр. Масса цилиндра m_1, масса клина m_2. Трением между цилиндром и клином пренебречь. (8)

С. Кротов

Ф705. Горизонтально расположенный цилиндрический теплоизолированный сосуд объема $V_0 = 100$ л, заполненный гелием, разделен на две части теплонепроницаемым поршнем, который может перемещаться без трения. Газу, находящемуся в левой части сосуда, сообщают количество тепла $\Delta Q = 100$ Дж. Найти изменение давления в сосуде к тому моменту, когда поршень перестанет двигаться. (9, 10)

А. Зильберман

Ф706. Для горизонтального перемещения грузов на расстояние $L = 20$ м используется самоходная тележка, перемещающаяся по горизонтальным рельсам. На тросе длины $l = 5$ м к тележке подвешивают перемещаемый груз (рис. 5). Тележка половину времени движется равноускоренно, а половину — равнозамедленно. Определить возможные значения ускорения тележки, при которых груз после остановки тележки в конце пути будет неподвижным. (10)

В. Можаев

Ф707. Объектив телескопа Гейла имеет диаметр $D = 250$ см и фокусное расстояние $F = 160$ м. Телескоп используется для фотографирования искусственного спутника Земли, имеющего диаметр $d = 200$ см и находящегося на расстоянии $L = 320$ км.

1) На каком расстоянии от фокуса должна быть расположена фотопластинка?

2) Каким будет размер изображения искусственного спутника?

3) Каков будет диаметр размытых (несфокусированных) изображений звезд на фотографии? (10)

С. Козел

kvant.mccme.ru

Решения задач

М645—М655; Ф663—Ф667

М645. *В подвале три коридора (рисунок 1; $|OA|=|OB|=|OC|=l$), все выходы из которых закрыты. В нем находятся инспектор Варнике и преступник. Варнике замечает преступника, если расстояние между ними не превосходит r. Он знает, что максимальная скорость преступника в два раза меньше его собственной максимальной скорости. В начальный момент инспектор находится в точке O и не видит преступника. Как должен действовать Варнике, чтобы наверняка поймать преступника, если а) $r=l/3$, б) $r=l/4$, в)* $r>l/5$, г) $r>l/7$. Шириной коридоров и размерами людей пренебречь. (Варнике должен придумать такой план действий, чтобы, даже если преступник о нем заранее знает, он все равно не смог ускользнуть.)*

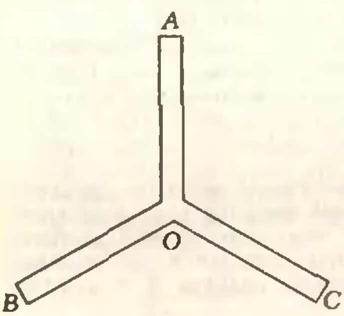


Рис. 1.

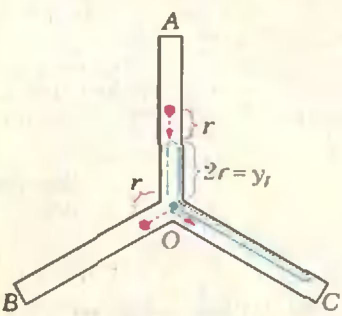


Рис. 2.

1. **Решение задачи при** $r>l/5$ (в частности, при $r=l/3$ и $r=l/4$).

Сначала Варнике «прочесывает» коридор OC. Убедившись, что преступника там нет, Варнике удаляется в коридор OA на расстояние $2r$ и затем возвращается в точку O, двигаясь с максимальной скоростью (в дальнейшем будет подразумеваться, что инспектор всегда движется с максимальной скоростью). Предположим, что, вернувшись в точку O, инспектор не увидел преступника; что ему в таком случае известно о возможном местонахождении преступника?

1) Преступник не может находиться в коридоре OC: легко проверить, что если бы он за время отсутствия инспектора в точке O попытался перебежать из коридора OB в коридор OC, то к моменту возвращения инспектора в точку O расстояние от преступника до O было бы не больше, чем r.

2) Если преступник находится в коридоре OA, то на расстоянии от O, большем $2r$: действительно, когда инспектор был в коридоре OA на расстоянии $2r$ от O, то преступник (если он находился в OA) был на расстоянии от O, большем $3r$, а к моменту возвращения инспектора в точку O расстояние от преступника до O могло уменьшиться не более чем на r (рис. 2).

Если же $r\geq l/3$, то преступник вообще не может находиться в OA и тем самым задача а) решена: чтобы поймать преступника, инспектору достаточно исследовать до конца коридор OB.

Если $r<l/3$, то смысл дальнейших действий инспектора заключается в том, чтобы углубляться то в коридор OB, то в коридор OA на все большие расстояния, но так, чтобы преступник не смог перебежать в коридор OC. Каждое такое «углубление» вместе с последующим возвратом в точку O будем называть *циклом*. Первый цикл уже описан. Во втором цикле инспектор отправляется в коридор OB на расстояние $3r$. Вернувшись в точку O и не увидев преступника, инспектор знает, что

1) в коридоре OC преступника нет (если преступник находится в коридоре OA, то — на расстоянии от O, большем $2r$, и потому до возвращения Варнике в точку O, при удалении его на расстояние $3r$ в коридор OB, преступник не сможет перебежать в коридор OC так, чтобы при этом оказаться на расстоянии от O, большем r);

2) если преступник находится в коридоре OB, то расстояние от него до O больше $5r/2$ (больше $(3r+r)-3r/2$).

Если же $r\geq l/4$, то преступник вообще не может находиться в коридоре OB (поскольку тогда его длина больше $3r+r=4r\geq l$ — противоречие); тем самым решена задача б).

Пусть после цикла с номером n инспектор знает, что в коридоре OC преступника нет, а в коридоре OX (где $X=A$ при n нечетном и $X=B$ при n четном) преступник не может находиться на расстоянии от O, меньшем или равном y_n. Тогда в следующем цикле инспектор отправляется в другой коридор на расстояние y_n+r (рис. 3). Вернувшись в точку O, инспектор знает, что

1) в коридоре OC преступника нет;

2) в только что исследованном коридоре преступник не может находиться на расстоянии от O, меньшем или равном

$y_{n+1}=\frac{y_n+3r}{2}=\left(\frac{y_n+r}{2}+r\right)$; если же $y_n+r\geq l-r$, то в исследованном коридоре преступника вообще нет.

Найдем формулу для y_n. Так как $y_{n+1}=\frac{y_n+3r}{2}$, $3r-y_{n+1}=\frac{3r-y_n}{2}$, откуда $3r-y_n=\frac{3r-y_1}{2^{n-1}}=\frac{r}{2^{n-1}}$, то есть

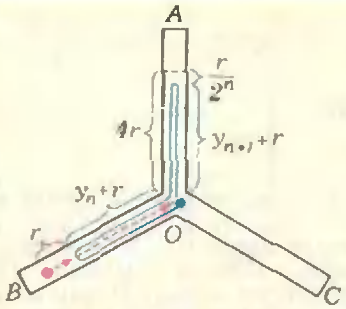


Рис. 3.

$y_n=3r-\frac{r}{2^{n-1}}$. Преступник ловится, если $y_n+r\geqslant l-r$ при каком-нибудь n, то есть $\frac{r}{2^{n-1}}<5r-l$. Отсюда видно, что если $5r>l$, то после достаточно большого числа циклов преступник ловится.

2. Решение задачи при $l/7<r<l/5$ использует следующую новую идею: после достаточно большого числа циклов, описанных в разделе 1, инспектор должен углубиться в очередной коридор на расстояние не y_n+r, а $l-r$ (то есть «прочесать» его до конца), не обращая внимания на то, что преступник может перебежать в коридор OC.

Положим $\varepsilon=\frac{7r-l}{2}$. Инспектор должен действовать так, как описано в разделе **1**, до тех пор, пока не будет выполняться неравенство $y_n\geqslant 3r-\varepsilon$. После этого инспектор углубляется в очередной коридор (скажем, OA) на расстояние $l-r$. Вернувшись в точку O и не увидев преступника, инспектор знает, что в коридоре OA преступника нет, а в коридоре OC преступник не может находиться на расстоянии от O, большем $(l-r)-(3r-\varepsilon)=3r-\varepsilon$. Затем инспектор углубляется в коридор OC на расстояние $4r-2\varepsilon$. Вернувшись в точку O и не увидев преступника, инспектор знает, что в коридоре OC преступника нет (поскольку в противном случае преступник был бы пойман, оказавшись в коридоре OC от Вариике на расстоянии, меньшем $(3r-\varepsilon)+(4r-2\varepsilon)/2-(4r-2\varepsilon)=r$), а в коридоре OA преступник не может находиться на расстоянии от O, большем $3r-2\varepsilon\,(=(4r-2\varepsilon)-r)$. Затем инспектор идет в коридор OA на расстояние $4r-4\varepsilon$, затем в коридор OC на расстояние $4r-8\varepsilon$, снова в коридор OA на расстояние $4r-16\varepsilon$ и т. д. Когда инспектор увидит, что ему надо идти на отрицательное расстояние, он должен сделать вывод, что преступник находится в коридоре OB.

З а м е ч а н и е. Удалось доказать, что при $r<l/7$ не существует способа наверняка поймать преступника. Доказательства этого факта, принадлежащие И. Голубчику и В. Прасолову, сложные и поэтому здесь не приводятся.

В. Дринфельд,
В. Соколов

◆

М646. *От точки O на плоскости отложены $2n$ векторов длины l. Они раскрашены попеременно в красный и синий цвета. Пусть $\vec{s}$ — сумма n красных векторов, $\vec{r}$ — сумма n синих векторов. Докажите, что $|\vec{s}-\vec{r}|\leqslant 2$.*

Представим вектор $\vec{s}-\vec{r}$ в виде суммы n черных векторов (см. рисунок), каждый из которых является разностью красного вектора и ближайшего к нему (по часовой стрелке) синего вектора. Черные векторы опираются на попарно непересекающиеся дуги окружности радиуса 1 с центром в точке O.

Предположим теперь, что вектор $\vec{s}-\vec{r}$ — ненулевой (иначе все доказано). Спроектируем полученные черные векторы на направление вектора $\vec{s}-\vec{r}$. Легко заметить, что проекции, направление которых совпадает с направлением вектора $\vec{s}-\vec{r}$, не пересекаются и умещаются на диаметре окружности. Следовательно, сумма их длин не превосходит 2. С другой стороны, длина вектора $\vec{s}-\vec{r}$ не превосходит этой суммы. Поэтому $|\vec{s}-\vec{r}|\leqslant 2$.

Е. Шустин

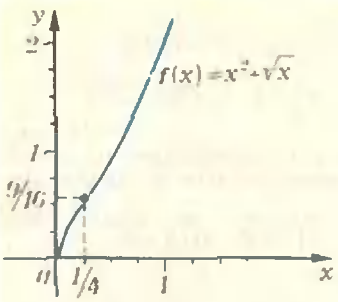
◆

М647. *Докажите, что при любых $a\geqslant\frac{1}{2}$, $b\geqslant\frac{1}{2}$ справедливо неравенство*

$$\left(\frac{a^2-b^2}{2}\right)^2\geqslant\sqrt{\frac{a^2-b^2}{2}}-\frac{a+b}{2}.$$

П е р в о е   р е ш е н и е. Рассмотрим функцию $f(x)=x^2+\sqrt{x}$. Вычислив ее вторую производную $f''(x)=2-\frac{1}{4}x^{-3/2}$, видим, что $f''(x)\geqslant 0$ при $x\in\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$. Отсюда следует, что на промежутке $\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$ функция f выпукла вниз (для интер-

kvant.mccme.ru



вала см. «Алгебра и начала анализа 10», п. 79); на рисунке изображен ее график. Поэтому («Квант», 1980, № 3, с. 21) для любых точек x, y этого промежутка

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right).$$

Применив последнее неравенство к точкам a^2, b^2, получим утверждение задачи.

Второе решение. Снова заменим a^2 на x и b^2 на y. Рассмотрим функцию

$$\varphi(x, y) = \left(\frac{x-y}{2}\right)^2 - \sqrt{\frac{x+y}{2}} + \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{2}.$$

Будем считать, что $x \geqslant y \geqslant 1/4$, и исследуем функцию $\varphi(x, y)$ на «монотонность по x», считая переменную y параметром.

$$\varphi'_x(x, y) = \frac{x-y}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2(x+y)}} + \frac{1}{4\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x-y+\frac{\sqrt{2(x+y)}-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}\cdot\sqrt{2(x+y)}}\right) =$$

$$= \frac{x-y}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{\sqrt{x}\cdot\sqrt{2(x+y)}\cdot(\sqrt{2(x+y)}+2\sqrt{x})}\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{x-y}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2}\right) = 0,$$

то есть функция $\varphi(x, y)$ — неубывающая функция по x.

Поскольку при $x=y=\frac{1}{4}$ функция φ обращается в нуль, $\varphi(x, y) \geqslant 0$ при $x \geqslant y \geqslant \frac{1}{4}$, что дает нам требуемое неравенство.

И. Клумова

◆

М648. *Докажите, что если диагонали вписанного четырехугольника перпендикулярны, то середины его сторон и основания перпендикуляров, опущенных из точки пересечения его диагоналей на стороны, лежат на одной окружности.*

Прежде всего заметим, что если $ABCD$ — вписанный четырехугольник с перпендикулярными диагоналями (рис. 1), то подобные треугольники AKB и CKD (K — точка пересечения диагоналей) расположены таким образом, что продолжение высоты, опущенной на гипотенузу одного из них, является медианой другого. (Этот факт, немедленно вытекающий из равенства отмеченных на рисунке 1 углов, по существу уже использовался в решениях задач **М546** и **М592** — см. «Квант», 1980, №№ 1, 8.)

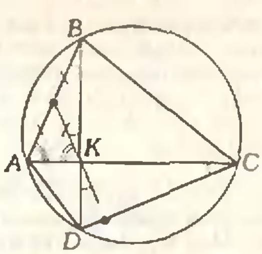


Рис. 1.

Далее: середины L, P, M, Q сторон четырехугольника $ABCD$, являясь вершинами прямоугольника (рис. 2), лежат на одной окружности. Покажем, что центр O_1 этой окружности делит пополам отрезок OK (O — центр окружности, в которую вписан наш четырехугольник).

Для этого достаточно, например, показать, что четырехугольник $LKMO$ — параллелограмм. Поскольку LK — медиана треугольника AKB, ее продолжение является высотой треугольника CKD, то есть $(LK) \perp (DC)$. Но и $(OM) \perp (DC)$ (диаметр, проходящий через середину хорды); поэтому отрезки LK и OM параллельны. Аналогично доказывается параллельность отрезков LO и KM.

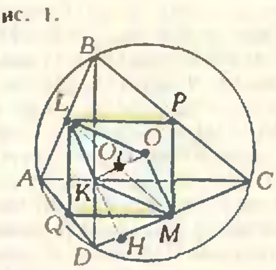


Рис. 2.

Теперь для окончания решения задачи нам достаточно установить, например, что $|O_1M| = |O_1H|$, где H — основание перпендикуляра, опущенного из точки K на сторону CD. Но это следует из того, что O_1 — середина гипотенузы LM прямоугольного треугольника LMH (рис. 3).

Итак, все восемь точек, упомянутых в условии задачи, лежат на одной окружности. Интересно, что радиус этой «окружности восьми точек» целиком определяется радиусом R данной окружности и величиной $|OK| = a$. В самом деле, искомый радиус равен половине длины $[LM]$, а

$$|LM|^2 = |LP|^2 + |PM|^2 = \frac{1}{4}(|AC|^2 + |BD|^2) =$$

$$= \frac{1}{4}((|AK| + |KC|)^2 + (|BK| + |KD|)^2) =$$

kvant.mccme.ru

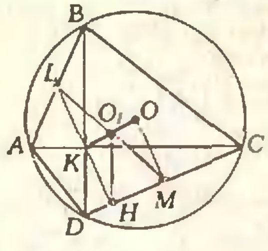


Рис. 3.

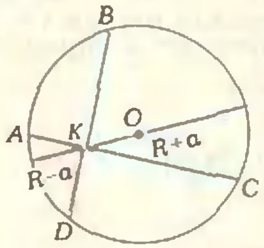


Рис. 4.

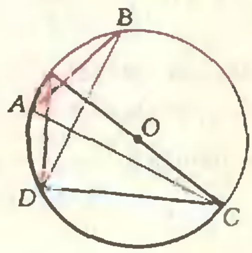


Рис. 5.

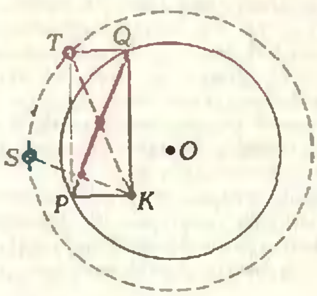


Рис. 6.

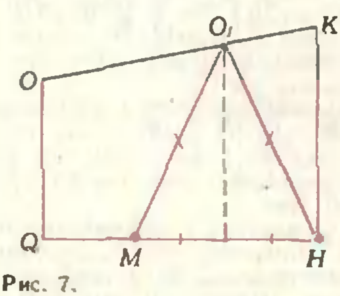


Рис. 7.

$$= \frac{1}{4}\left(|AB|^2+|CD|^2+2(|AK|\cdot|KC|+|BK|\cdot|KD|)\right) =$$

$$= \frac{1}{4}\left(|AB|^2+|CD|^2+4(R^2-a^2)\right) = \frac{1}{4}\left(4R^2+4(R^2-a^2)\right) = 2R^2-a^2.$$

[В этой выкладке мы вначале воспользовались тем, что произведение длин отрезков хорд, пересекающихся в одной и той же точке, постоянно:

$$|AK|\cdot|KC| = |BK|\cdot|KD| = (R-a)(R+a)$$

(рис. 4), а затем, сообразив, что

$$90^\circ = \widehat{BCA}+\widehat{DBC} = \frac{\smile{AB}+\smile{CD}}{2},$$

и дополнив $\smile{CD}$ до полуокружности дугой, конгруэнтной $\smile{AB}$, получили равенство

$$|AB|^2+|CD|^2 = (2R)^2 = 4R^2,$$

см. рисунок 5.]

Наметим другое решение. Сделаем гомотетию наших восьми точек с центром в точке K и коэффициентом 2. Тогда утверждение задачи **М648** превращается в такую теорему: *Пусть два взаимно перпендикулярных луча с началом в точке K внутри данной окружности, вращаясь вокруг K, пересекают окружность в переменных точках P и Q. Тогда четвертая вершина T прямоугольника $PKQT$* (точка, симметричная точке K относительно середины $[PQ]$), *а также точка S, симметричная точке K относительно прямой PQ, двигаются по окружности, концентричной с данной* (рис. 6). Второй факт (про S) следует из первого, так как S симметрична точке T относительно серединного перпендикуляра к $[PQ]$, а первый (про T) установлен в решении задачи **М539** («Квант», 1979, № 11).

Эта «теорема о восьми точках» допускает следующее стереометрическое обобщение:

Если три взаимно перпендикулярных луча с началом в фиксированной точке K внутри данной сферы, вращаясь вокруг K, пересекают сферу в переменных точках A, B и C, то точка пересечения медиан треугольника ABC и основание перпендикуляра, опущенного из K на плоскость ABC, двигаются по сфере, центр которой находится в точке O_1 отрезка OK (O — центр данной сферы) *такой, что $|O_1K| = \frac{1}{3}|OK|$, а радиус равен $\frac{1}{3}\sqrt{3R^2-2a^2}$, где $a = |OK|$, R — радиус данной сферы.*

Доказать это можно, например, следующим образом.

Пусть D — вершина параллелепипеда, определенного отрезками KA, KB и KC, диагонально противоположная к K. Все такие точки D лежат на сфере с центром в той же точке O, что у исходной сферы, и радиусом $\sqrt{3R^2-2a^2}$ (см. решение задачи **М639** — «Квант», 1979, № 11). При гомотетии с центром K и коэффициентом $\frac{1}{3}$ точка D будет все время переходить в точку пересечения медиан треугольника ABC (докажите!), а точка O перейдет в точку O_1. Таким образом, точка пересечения медиан треугольника ABC все время лежит на указанной сфере.

Осталось показать, что проекция точки K на плоскость треугольника ABC также все время лежит на этой сфере. Поскольку отрезки KA, KB и KC взаимно перпендикулярны, проекция точки K совпадает с точкой H пересечения высот треугольника ABC. Утверждение будет доказано, если мы, например, получим равенство $|O_1H| = |O_1M|$, где M — точка пересечения медиан треугольника ABC. Для этого заметим, что центр сферы O проектируется в центр Q описанной вокруг треугольника ABC окружности, и воспользуемся таким известным фактом: *точки Q, M и H лежат на одной прямой* (прямой Эйлера), *точка M — между точками Q и H, причем $2|QM| = |MH|$.* (Если этот факт вам неизвестен, докажите его.) Остальное легко следует из рисунка 7: поскольку

$|O_1K|=\frac{1}{3}|OK|$, а $|QM|=\frac{1}{3}|QH|$, точка O_1 проектируется в середину отрезка MH, то есть O_1 равноудалена от M и H.

И. Шарыгин

◆

М649. *Докажите равенство*

$$\frac{1}{2}c_n^2+(c_n-c_1)^2+(c_n-c_2)^2+\ldots+(c_n-c_{n-1})^2=\frac{n}{2},$$

где $c_1=1$, $c_2=1+\frac{1}{3}$, $c_3=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$, ..., $c_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}$.

Докажем, что

$$c_n^2+2(c_n-c_1)^2+2(c_n-c_2)^2+\ldots+2(c_n-c_{n-1})^2=n.$$

Для этого подставим в левую часть значения c_i $(i=1, \ldots, n)$:

$$\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)^2+2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)^2+$$
$$+2\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)^2+\ldots+2\cdot\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2=$$
$$=1\cdot\left(\left(1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)^2-\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)^2\right)+$$
$$+3\cdot\left(\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)^2-\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)^2\right)+$$
$$+5\cdot\left(\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{2n-1}\right)^2\right)+\ldots$$
$$\ldots+(2n-1)\cdot\left(\frac{1}{2n-1}\right)^2=$$
$$=1\cdot\left(1+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\ldots+\frac{2}{2n-1}\right)+$$
$$+3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}+\ldots+\frac{2}{2n-1}\right)+$$
$$+5\cdot\frac{1}{5}\cdot\left(\frac{1}{5}+\frac{2}{7}+\frac{2}{9}+\ldots+\frac{2}{2n-1}\right)+\ldots+\frac{1}{2n-1}=$$
$$=1+\frac{3}{3}+\frac{5}{5}+\frac{7}{7}+\ldots+\frac{2n-1}{2n-1}=1+1+1+\ldots+1=n.$$

С. Манукян

◆

М650. *Существует ли последовательность*

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

а) натуральных чисел такая, что любое натуральное число единственным образом записывается в виде суммы нескольких ее членов:

$$a_{i_1}+\ldots+a_{i_k}\quad (i_1<\ldots<i_k,\ k\geq 1);\qquad (*)$$

б) натуральных чисел такая, что 1 не представляется в виде (*), а любое натуральное число, большее 1, представляется в виде (*) единственным образом;

в) целых чисел такая, что 0 не представляется в виде (*), а любое целое число, отличное от 0, представляется в виде (*) единственным образом;

г) целых чисел такая, что 0 и 1 не представляются в виде (*), а любое целое число, отличное от 0 и 1, представляется в виде (*) единственным образом?

а) $\{1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots\}$.

б) $\{2, 3, 4, 8, 16, 32, 64, \ldots\}$. Из подпоследовательности $\{4, 8, 16, \ldots\}$ можно получить числа вида $4k$, а из $\{2, 3\}$ — числа 2, 3 и 5.

в) $\{-1, 2, -4, 8, -16, 32, -64, \ldots\}$.

Доказательство. Покажем по индукции, что из набора $(-1, 2, -4, \ldots, \pm 2^n)$ можно единственным образом получить в виде (*) все целые числа (кроме нуля) из промежутка от $-1-4-16-\ldots-$ (последний отрицательный член набора) до $2+8+32+\ldots+$ (последний положительный член набора).

Базис индукции $(n=1)$ очевиден.

Индукционный шаг. Предположим, для определенности, что при 2^n — знак «плюс» (то есть n — нечетное) и что из набора $(-1, 2, -4, \ldots, 2^n)$ можно единственным образом получить все целые числа (кроме нуля) от $-1-4-16-\ldots-2^{n-1}$ до $2+8+32+\ldots+2^n$.

Добавив к набору $(-1, 2, -4, \ldots, 2^n)$ член -2^{n+1}, мы получим серию новых целых чисел, представляемых в виде (*) единственным образом (содержащих член -2^{n+1} в качестве слагаемого): от $-1-4-16-\ldots-2^{n-1}-2^{n+1}$ до $2+8+32+\ldots+2^n-2^{n+1}$. Объединяя их со «старыми» числами, мы получим все целые числа от $-1-4-16-\ldots-2^{n-1}-2^{n+1}$ до $2+8+32+\ldots+2^n$: поскольку $(2+8+32+\ldots+2^n-2^{n+1})+1=-1-4-16-\ldots-2^{n-1}$, числа «состыковываются» (напоминаем, что мы взяли n нечетным).

Утверждение доказано.

г) Такой последовательности не существует.

Доказательство от противного. Пусть такая последовательность существует и пусть a_1 — ее член, отличный от -1. Тогда числа $1+a_1$ и $1-a_1$ представляются в виде (*)

единственным образом, поскольку $a_1 \neq 0$ и $a_1 \neq 1$. Если a_n — член последовательности, отличный от -1 и a_1, не входящий в представления чисел $1+a_1$ и $1-a_1$, то числа $1+a_1+a_n$ и $1-a_1+a_n$ допускают разложения (*), в которых участвует a_n. С другой стороны, в представлении (*) числа $1+a_n$ не участвует a_n (иначе, выкинув a_n, мы получили бы представление единицы). Если в этом представлении встречается член a_1, то выкинем его, а если не встречается, то добавим. В любом случае мы получим разложение (*) для одного из чисел $1+a_1+a_n$, $1-a_1+a_n$, в которое не входит член a_n. Получили противоречие с единственностью представления в виде (*).

А. Разборов

◆

М651. *Дама сдавала в багаж диван, чемодан, саквояж, корзину, картину, картонку и маленькую собачонку. Диван весил столько же, сколько чемодан и саквояж, вместе взятые, и столько же, сколько картина, корзина и картонка, вместе взятые. Картина, корзина и картонка весили поровну и каждая из них — больше, чем собачонка. Когда выгружали багаж, дама заявила, что собака не той породы. При проверке оказалось, что собака перевешивает диван, если к ней на весы добавить саквояж или чемодан. Докажите, что претензия дамы была справедлива.*

Пусть диван, чемодан, саквояж и маленькая собачонка весят соответственно $Д$, $Ч$, $С$ и $М$ килограммов, а картина, корзина и картонка — по $К$ килограммов (по условию они весят одинаково). Запишем данные задачи в этих обозначениях: (1) $Д=Ч+С$; (2) $Д=3К$; (3) $К>М$; (4) $М+С>Д$; (5) $М+Ч>Д$. Из (1)—(3) получаем

$$(6)\quad Ч+С>3М.$$

Складывая затем неравенства (4)—(6), учитывая (1), приходим к неравенству $М<0$, что невозможно, так что претензия дамы справедлива.

Заметим, что задача **М651** не очень реалистична. По условию получается, что картонка всего в три раза легче дивана. (Приходится предположить, что в картонке лежат не шляпы, а что-то более увесистое.) Кроме того, в решении мы считаем, что собачонка д о и п о с л е путешествия весит одинаково (чтобы условия не противоречили друг другу, собачонка за время пути должна была подрасти, по крайней мере, в полтора раза, что, конечно, маловероятно).

В. Гутенмахер

◆

М652. *Женя разрезал выпуклый картонный многогранник на грани (по ребрам) и послал этот набор граней по почте Вите. Витя склеил из всех этих граней выпуклый многогранник. Может ли случиться так, что многогранники Жени и Вити не конгруэнтны?*

Да, так может случиться. Один пример такого набора восьми граней, из которого можно склеить два разных по форме выпуклых многогранника, приведен на рисунке 1. Соответствующие многогранники представляют из себя одинаковые неправильные четырехугольные пирамиды, склеенные п о - р а з н о м у общим основанием — прямоугольником размерами 2×5: один из этих многогранников симметричен относительно плоскости этого прямоугольника, а другой — относительно его центра (рис. 2).

Подумайте, из какого наименьшего числа граней может состоять набор, допускающий неконгруэнтные многогранники. Обязательно ли многогранники Жени и Вити имеют равные объемы?

Заметим, что если бы все ребра многогранника имели разную длину или просто были обозначены различными помет-

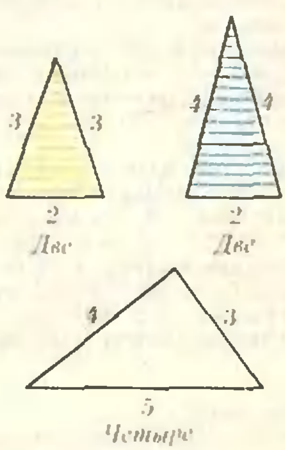


Рис. 1.

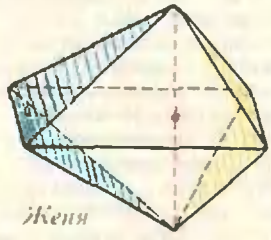


Рис. 2.

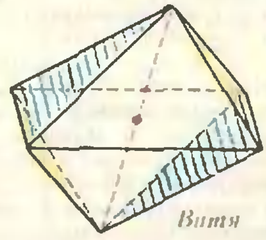


Рис. 3.

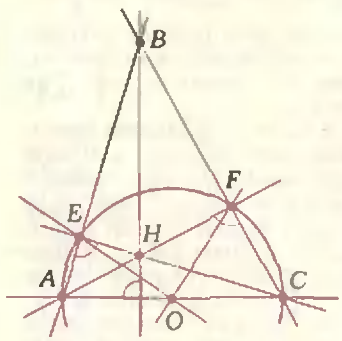
Задачи **М651—М655** взяты из книги «Заочные математические олимпиады» (М., «Наука», 1981).

ками на гранях, — чтобы было точно известно, какое ребро с каким склеивать, — то многогранники Жени и Вити обязательно получились бы конгруэнтными. Это далеко не простая *теорема Коши о выпуклых многогранниках*; ее доказательство можно прочесть в книге Л. А. Люстерника «Выпуклые фигуры и многогранники» (второе издание этой книги должно выйти в этом году в Библиотечке «Квант»).

Н. Васильев

◆

М653. *Имеется линейка с двумя делениями. С помощью линейки можно проводить произвольные прямые и отрезки определенной длины. Постройте с ее помощью*
а) какой-нибудь прямой угол;
б) прямую, перпендикулярную данной прямой.



Будем считать длину данного отрезка между отметками равной 1.

а) Проведем две пересекающиеся прямые и отложим на них от точки их пересечения O отрезки OA, OB, OC, OD длины 1. Тогда все углы четырехугольника $ABCD$ будут прямыми (каждый из них опирается на диаметр AC или BD окружности радиуса 1 с центром O).

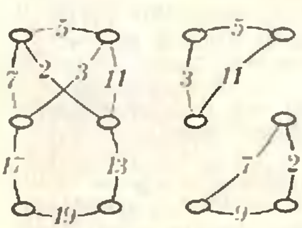
б) Отложим на данной прямой от точки O отрезки OA и OC длины 1. Затем на каких-нибудь прямых, проходящих через O, отложим в одной полуплоскости отрезки OE и OF длины 1 (см. рисунок). Проведем теперь прямые AE и CF, пересекающиеся в некоторой точке B, и прямые AF и CE, пересекающиеся в некоторой точке H. Тогда прямая BH будет перпендикулярна данной прямой, поскольку три высоты треугольника всегда пересекаются в одной точке (точки E и F служат вершинами прямых углов, опирающихся на диаметр AC окружности радиуса 1 с центром O).

Теория геометрических построений линейкой и эталоном длины подробно обсуждается в знаменитой книге Д. Гильберта «Основания геометрии» (М., Гостехиздат, 1948) в связи с анализом системы аксиом. Этими инструментами решаются многие задачи на построение (в частности, через данную точку можно провести прямую, параллельную данной; от данной прямой можно отложить угол, конгруэнтный данному), но, оказывается, не все те задачи, которые разрешимы с помощью циркуля и линейки.

В. Гутенмахер

◆

М654. *Верно ли такое утверждение: из любых шести натуральных чисел можно выбрать три числа, каждые два из которых не имеют общих делителей, больших 1, или три числа, имеющие общий делитель, больший 1?*



а) б)

Это утверждение неверно. Вот пример шестерки чисел, среди которых никакие три не имеют общего делителя (большего 1) и нет трех попарно взаимно простых: 70, 165, 247, 286, 323, 357; еще один пример, с меньшими числами: 14, 15, 18, 33, 55, 63. Покажем, как строить подобные примеры.

Изобразим наши числа шестью точками; те, у которых есть общий множитель, соединим «ребром» (дугой) и напишем на ребре этот общий множитель. При этом нужно, чтобы все написанные множители были взаимно просты — скажем, это могут быть различные простые числа (иначе три из наших чисел будут иметь общий множитель) — и, кроме того, чтобы из каждых трех точек по крайней мере две были соединены ребром (иначе найдутся три попарно взаимно простых числа). Построить такой граф — соединить шесть точек ребрами так, чтобы выполнялось последнее условие — нетрудно; для этого вовсе не обязательно проводить все 15 ребер между шестью точками — можно обойтись восемью или даже шестью ребрами (рисунки *а*), *б*) соответствуют двум приведенным выше примерам); остается перемножить числа на всех ребрах, подходящих к каждой из шести вершин, — и пример готов.

Некоторые читатели ошиблись в решении этой задачи, сославшись на такой факт (мы приводим его в формулировке, предлагавшейся на одной из старых венгерских олимпиад и с тех пор ставшей классической): из шести людей можно выбрать трех попарно знакомых или трех попарно незнакомых. Этот факт верен, но дело в том, что три целых числа, попарно имеющих общий множитель, не обязаны иметь общий для всех множитель (больший 1).

Н. Васильев

kvant.mccme.ru

М655. *На столе у чиновника Министерства околичностей лежит n томов Британской энциклопедии, сложенных в несколько стопок. Каждый день, придя на работу, чиновник берет из каждой стопки по одному тому и складывает взятые тома в новую стопку, затем располагает стопки по количеству томов (в невозрастающем порядке) и заполняет ведомость, в которой указывает количество томов в каждой стопке. Кроме сказанного выше, чиновник никогда ничего не делает.*

а) Какая запись будет сделана в ведомости через месяц, если общее количество томов $n=3$, $n=6$, $n=10$ (начальное расположение произвольно)?

б) Докажите, что если общее число томов $n=k(k+1)/2$, где k — натуральное, то, начиная с некоторого дня, ведомость будет заполняться одинаковыми записями.

в) Исследуйте, что будет через много дней работы при других значениях n.

$n=3$, $m=3$, $T=2$

Рис. 1.

$n=6$, $m=11$, $T=6$

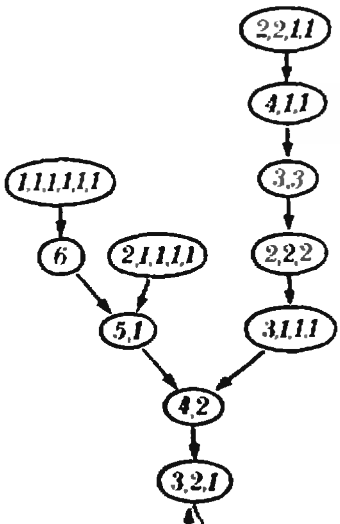


Рис. 2.

При $n=3$ возможны всего три расположения:

(1,1,1) — три стопки по одному тому;

(3) — одна стопка из трех томов;

(2,1) — одна стопка из двух и одна из одного тома.

Стрелки на рисунке 1 показывают, во что каждое расположение переходит на следующий день. Из рисунка видно, что, с чего бы мы ни начали, не позже, чем через два дня (что записано как $T=2$), возникнет расположение (2,1), и затем оно будет повторяться. На рисунке 2 показан аналогичный граф для $n=6$. Число m возможных расположений (вершин графа) здесь равно 11. Не позже, чем через $T=6$ дней после начала работы возникнет расположение (3,2,1), и затем оно будет повторяться. Аналогичный граф для $n=10$ имеет $m=42$ вершины (для экономии места он не нарисован); в этом случае не позже, чем через $T=12$ дней после начала, возникнет расположение (4,3,2,1), и затем оно будет повторяться.

Разумеется, далеко не каждый ориентированный граф, из каждой вершины которого выходит одна стрелка, обладает единственной «конечной» вершиной, то есть не всегда, идя по его стрелкам, мы придем в одну и ту же вершину и там останемся (рис. 3). Граф может распадаться на отдельные части, не связанные между собой ни одной стрелкой, может содержать циклы. Поэтому тот факт, что при $n=\dfrac{k(k+1)}{2}$, начиная с некоторого дня, получается одно и то же расположение $(k, k-1, \ldots, 3, 2, 1)$ совсем не очевиден, и мы сейчас его докажем, тем самым решив пункт *б)* условия задачи. Рассмотрим сразу произвольное значение n.

Вообразим четверть бесконечного листа клетчатой бумаги (рис. 4), клетки которого пронумерованы парами натуральных чисел слева направо и снизу вверх: клетка с номером (x, y) стоит в столбце с номером x и в строке с номером y. Изготовим n фишек и разместим их в клетках нашей бумаги следующим образом: в первом столбце столько фишек, сколько томов в первой стопке, во втором столбце столько фишек, сколько томов во второй стопке, и т. д. Размещение фишек на рисунке 4 означает, что в стопках соответственно 8, 3, 3, 1, 1, 1 томов. Преобразование, которое каждый день делает на своём столе чиновник, можно представить на нашем листе в виде следующих трех операций:

1. Уберем фишки, находящиеся в самой нижней строке (на рисунке 4 они помечены римскими цифрами).

2. Передвинем оставшиеся фишки (они помечены латинскими буквами) на одну клетку вниз и на одну клетку вправо.

3. Теперь выложим на бумагу убранные фишки, но не на нижнюю строку, откуда они были взяты, а на самый левый (освободившийся) столбец в том порядке снизу вверх, в каком они лежали в строке слева направо.

В результате этих операций рисунок 4 перейдет в рисунок 5. Правда, результат действия наших трех операций отличается от того, что делает чиновник, тем, что стопки могут получиться расположенными не в том порядке, какой нужен: на рисунке 5 в самой левой стопке 6 томов, а в следующей за ней — 7 томов. Это легко исправить, передвинув фишку M на одну клетку влево (что показано стрелкой на рисунке 5), но мы таких передвижений пока делать не будем, а ограничимся преобразованием, состоящим из трех описанных операций. При этом преобразовании фишка, бывшая в клетке (x, y), переходит в клетку $(1, x)$, если $y=1$, или $(x+1, y-1)$, если $y>1$.

Назовем *i-й диагональю* совокупность тех клеток (x, y), для которых $x+y=i+1$. Под действием нашего преобразования фишки, находящиеся на i-й диагонали, не сойдут с нее, а будут перемещаться по ней по правилу:

$$(1, i) \to (2, i-1) \to (3, i-2) \to \ldots \to (i, 1)$$

Теперь дополним наше преобразование:

4. В каждой строке, где это возможно, сдвинем все фишки на одно место влево.

Дополненное преобразование уже точно соответствует тому, что делает чиновник. Теперь для некоторых фишек

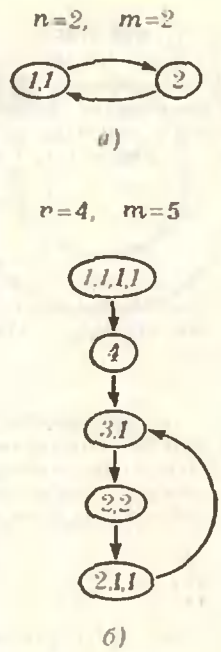


Рис. 3.

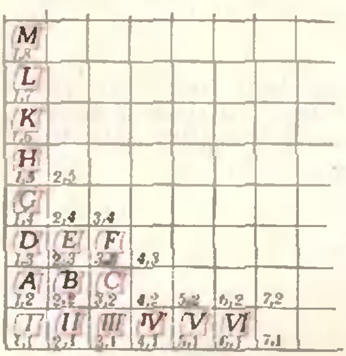


Рис. 4.

Рис. 5.

величина $x+y$ может уменьшаться, но она по-прежнему не может увеличиваться. Но величина $x+y$ — натуральное число. Поэтому она не может уменьшаться бесконечно много раз. Когда-нибудь для всех фишек величина $x+y$ уже не будет больше уменьшаться. Докажем, что тогда для всякого i будет выполняться следующее условие: **если i-я диагональ не полностью заполнена фишками, то в $(i+1)$-й диагонали нет ни одной фишки.**

Докажем это от противного: пусть в i-й диагонали есть пустая клетка, а в $(i+1)$-й диагонали есть фишка. Фишки на i-й диагонали (если они есть) передвигаются, попадая через каждые i шагов на прежние места. Фишка на $(i+1)$-й диагонали передвигается, попадая через каждые $(i+1)$ шагов на прежнее место. Посмотрим, что делается в моменты 0 (начало отсчета), $(i+1)$, $2(i+1)$, $3(i+1)$, ..., $i(i+1)$. Фишка на $(i+1)$-й диагонали в эти моменты оказывается там же, где была в нулевой момент. Пустое место на i-й диагонали как бы двигается вместе с фишками, и в перечисленные выше моменты времени оно побывает на всех клетках i-й диагонали, в том числе окажется слева от клетки, где находится фишка. Но тогда эта фишка передвинется влево, а мы предположили, что все такие передвижения уже закончились. Утверждение доказано.

Что же это за расположение фишек, при котором за неполной диагональю может идти только пустая? Если $n=\frac{k(k+1)}{2}$, то такое расположение только одно: все диагонали от 1-й до k-й заполнены фишками, а все следующие диагонали пусты. Это доказывает утверждение б).

Пусть теперь $n \neq \frac{k(k+1)}{2}$. Тогда существует такое k, что

$$\frac{k(k+1)}{2}<n<\frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Положим $r=n-\frac{k(k+1)}{2}$. В этом случае расположение фишек, при котором за неполной диагональю следуют пустые, таково: все диагонали от 1-й до k-й заполнены фишками, на $(k+1)$-й диагонали находится r фишек, а следующие диагонали пусты. Фишки, находящиеся на $(k+1)$-й диагонали, перемещаются по ней, попадая через каждые $(k+1)$ шагов на свои прежние места. Это ответ на вопрос в).

Если число фишек на $(k+1)$-й диагонали определяется только общим числом фишек, то их расположение зависит от начального расположения фишек, поэтому при $n \neq \frac{k(k+1)}{2}$ в зависимости от начального расположения томов могут получиться различные наборы периодически повторяющихся записей чиновника (в том числе при одном и том же n может получиться разная длина периода).

Интересно выяснить вдобавок, каково время, достаточное, чтобы из любого начального состояния с n фишками прийти к описанному. Для простоты ограничимся случаем $n=\frac{k(k+1)}{2}$ и обозначим через $T(k)$ наименьшее время, за которое из любого начального расположения томов получается расположение $(k, k-1, ..., 3, 2, 1)$.

Докажем, что $T(k) \geqslant k(k-1)$. Для этого приведем для каждого k конкретное распределение $\frac{k(k+1)}{2}$ томов в стопках, превращающееся в окончательное лишь за $k(k-1)$ шагов: $(k-1, k-1, k-2, k-3, k-4, ..., 3, 2, 1, 1)$. Его изображение на нашей клетчатой бумаге отличается от изображения окончательного распределения лишь тем, что одна фишка находится не там, где надо: в клетке $(k+1, 1)$ вместо клетки $(1, k)$. Под действием нашего преобразования лишняя фишка на $(k+1)$-й диагонали и «дырка» (то есть «отсутствие фишки») на k-й диагонали начнут передвигаться каждая по своей диагонали. Поскольку k-я диагональ короче $(k+1)$-й на единицу, дырка будет опережать фишку и догонит ее ровно через $k(k-1)$ шагов.

kvant.mccme.ru

Подсчет для случаев $k=1, 2, 3, 4$ дает значения $T(k)=k(k-1)$, но неясно, как ведет себя $T(k)$ при больших значениях k. Можно доказать, что $T(k) \leqslant C_0 \cdot k^5$, где C_0 — конкретное число, которое не хочется выписывать, так как, вероятнее, что $T(k)$ ведет себя как степень k, меньшая пяти. Интересно было бы доказать или опровергнуть, что $T(k) \leqslant C \cdot k^2$.

А. Тоом

◆

Ф664.*) *При фотографировании удаленного точечного источника на фотографии из-за невысокого качества объектива и применяемого фотоматериала получается светлый кружок диаметром $d=0{,}1$ мм. С какого максимального расстояния можно сфотографировать в тех же условиях два точечных источника, расположенных на расстоянии $l=1$ см друг от друга, так, чтобы на фотографии их изображения не перекрывались? Фокусное расстояние объектива $F=5$ см.*

Расстояние между центрами пятен на пленке тем меньше, чем дальше от фотоаппарата расположены источники. Наименьшее расстояние между центрами пятен

$$\Delta l = d = 0{,}1 \text{ мм}$$

(при этом пятна касаются друг друга, не перекрываясь) во много раз меньше, чем расстояние l между источниками; следовательно, источники расположены далеко от фотоаппарата, и можно считать, что изображения лежат в фокальной плоскости объектива. Тогда искомое расстояние L можно определить из соотношения

$$\frac{L}{F}=\frac{l}{\Delta l}=\frac{l}{d} \Rightarrow L=\frac{Fl}{d}=500 \text{ см}.$$

При меньших расстояниях пятна на пленке будут частично перекрываться.

А. Зильберман

◆

Ф665. *В теплоизолированном сосуде имеются две жидкости с удельными теплоемкостями c_1 и c_2, разделенные нетеплопроводящей перегородкой. Температуры жидкостей различны. Перегородку убирают, и после установления теплового равновесия разность между начальной температурой одной из жидкостей и установившейся в сосуде температурой оказывается в два раза меньше разности начальных температур жидкостей. Найти отношение масс m_1 и m_2 первой и второй жидкостей.*

Пусть в результате смешивания жидкостей, начальные температуры которых были t_1 и t_2, температура смеси в сосуде стала равной t. Так как сосуд теплоизолирован ($\Delta Q=0$),

$$c_1m_1(t-t_1)+c_2m_2(t-t_2)=0;$$

отсюда

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{c_2}{c_1}\cdot\frac{t-t_2}{t_1-t}.$$

Согласно условию задачи

$$2(t_1-t)=t_1-t_2 \Rightarrow t-t_2=t_1-t \Rightarrow \frac{t-t_2}{t_1-t}=1.$$

Таким образом,

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{c_2}{c_1}$$

— отношение масс жидкостей равно обратному отношению теплоемкостей.

А. Буздин

◆

Ф666. *Радиус внутренней обоймы шарикоподшипника равен r, а внешней — R (см. рисунок). Сколько оборотов сделает шарик между этими обоймами, если внешняя обойма сделает n_1, а внутренняя — n_2 оборотов вокруг оси?*

Условимся считать число оборотов, сделанных каждой обоймой против часовой стрелки, положительным, по часовой стрелке — отрицательным.

В соответствии с принципом независимости движений окончательное положение шарика будет одним и тем же при любой последовательности поворотов каждой из обойм. Важно только, чтобы суммарный угол поворота внешней обоймы был равен $\varphi_1=2\pi n_1$, а внутренней — $\varphi_2=2\pi n_2$. Поэтому представим каждый из углов в виде суммы двух слагаемых

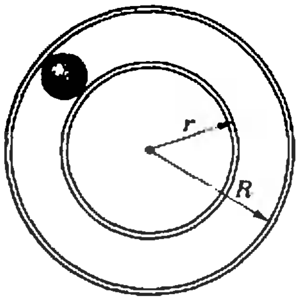
$$\varphi_1=\alpha+\beta,\ \varphi_2=\alpha+\gamma.$$

Поворот обеих обойм на один и тот же угол $\alpha=2\pi n_0$ соответствует перемещению $\alpha\dfrac{R+r}{2}$ центра шарика по дуге

---

*) Решение задачи **Ф663** вы найдете в заметке С. Кротова «Математический маятник в неинерциальной системе отсчета» (с. 32).

kvant.mccme.ru



окружности радиуса $(R+r)/2$. При этом точка, в которой шарик соприкасается с обоймой, не перемещается по ней. Иными словами, качение шарика по поверхностям обойм отсутствует, а относительно неподвижной системы отсчета шарик поворачивается вместе с обоймами на тот же угол α.

Углы $\beta=2\pi n_3$ и $\gamma=2\pi n_4$ выберем таким образом, чтобы при $\alpha=0$ последовательные повороты внешней обоймы на угол β, а внутренней — на угол γ возвращали центр шарика в исходную точку. В этом случае шарик будет катиться по поверхностям обеих обойм.

Задача допускает однозначное решение лишь при условии отсутствия проскальзывания. Это означает, что длины дуг, представляющих собой следы точек касания на шарике и на обоймах, должны быть одинаковыми, то есть

$$|\beta|R=|\gamma|r=|\Theta|\frac{R-r}{2} \text{ и } \beta R+\gamma r=0.$$

Здесь Θ — угол поворота шарика относительно неподвижной системы отсчета при $\alpha=0$, а $\frac{R-r}{2}$ — радиус шарика. Из написанных уравнений следует:

$$n_1=n_0+n_3,\ n_2=n_0+n_4,\ n_3R+n_4r=0.$$

Отсюда найдем число оборотов центра шарика вокруг общей оси обойм:

$$n_0=\frac{n_1R+n_2r}{R+r}.$$

За тот же промежуток времени шарик повернется относительно неподвижной системы отсчета на угол $\varphi=\alpha-\Theta$, где $\Theta=\beta\frac{2R}{R-r}$, $\varphi=2\pi n$.

Следовательно, если внешняя обойма сделает n_1, а внутренняя — n_2 оборотов, шарик, не проскальзывающий по обоймам, совершит

$$n=\frac{n_1R-n_2r}{R-r}$$

оборотов относительно неподвижного наблюдателя.

Б. Буховцев

◆

Ф667. *Электрон находится внутри соленоида на расстоянии r от его оси. За малое время Δt индукция поля внутри соленоида увеличилась от B до $2B$. Как при этом изменилась скорость электрона? Насколько мала должна быть величина Δt, чтобы решение было верным?*

При изменении магнитного поля возникает вихревое электрическое поле. Напряженность E этого поля в точках, находящихся на расстоянии r от оси соленоида, можно найти, зная ЭДС индукции в контуре, представляющем окружность радиуса r:

$$|\mathscr{E}_и|=\left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right|=2\pi rE \Rightarrow E=\frac{B\pi r^2}{2\pi r\cdot\Delta t}=\frac{Br}{2\Delta t}$$

(E — абсолютное значение напряженности $\vec{E}$). Сила, действующая на электрон со стороны этого поля, сообщает электрону ускорение, направленное по касательной к окружности радиуса r и равное по абсолютной величине $a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{eE}{m}$. Таким образом, за малое время Δt скорость электрона изменяется на величину

$$\Delta v=\frac{eE\cdot\Delta t}{m}=\frac{eBr}{2m}.$$

(Эта формула справедлива для скоростей, существенно меньших скорости света c, то есть $\frac{eBr}{2m}\ll c$.)

При решении задачи мы не учли действия магнитного поля на движущийся электрон. Сила, действующая со стороны магнитного поля, сообщает электрону ускорение, направленное вдоль радиуса соленоида. Чтобы приведенное выше решение было верным, необходимо выполнение следующего условия: за время Δt изменение Δv_r скорости вдоль радиуса

kvant.mccme.ru

должно быть много меньше изменения Δv скорости вдоль касательной, то есть

$$\Delta v_r \approx a_r \Delta t = \left(\frac{ev_{ср}B}{m}\right)\Delta t = \frac{e \cdot \Delta v \cdot B \cdot \Delta t}{2m} \ll \Delta v.$$

Отсюда находим ограничение для Δt:

$$\Delta t \ll \frac{2m}{eB}.$$

Так, для $B = 10^{-4}$ Тл

$$\Delta t \ll \frac{2 \cdot 9 \cdot 10^{-31}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-4}} \approx 10^{-7}\ с.$$

При $r = 10^{-2}$ м

$$\Delta v = \frac{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 10^{-4} \cdot 10^{-2}}{2 \cdot 9 \cdot 10^{-31}} \approx 10^5\ м/с \ll c.$$

А. Зильберман

Математический маятник в неинерциальной системе отсчета

В чем состоит задача описания движения математического маятника — небольшого груза на невесомой нити? Мы должны, зная начальное положение и начальную скорость груза, суметь определить его положение в любой последующий момент времени. Иначе говоря, мы должны определить явный вид зависимостей $x = x(t)$ и $y = y(t)$, где x и y — координаты, определяющие положение грузика в плоскости его движения.

Рассмотрим уравнения, описывающие движение математического маятника длины l, когда точка его подвеса неподвижна относительно земли. Выберем оси координат OX и OY так, как указано на рисунке 1. Пусть в некоторый момент времени в процессе движения маятника нить составляет с вертикалью угол φ (угол φ отсчитывается от оси OY против часовой стрелки). Уравнение движения груза — уравнение II закона Ньютона

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T} \qquad (1)$$

($\vec{T}$ — сила натяжения нити) в проекциях на оси OX и OY имеет вид

$$ma_x = -T\sin\varphi, \qquad (2)$$
$$ma_y = mg - T\cos\varphi. \qquad (3)$$

Поскольку при движении маятника длина нити неизменна, между координатами x и y выполняется соотношение (кинематическая связь)

$$x^2 + y^2 = l^2,$$

и для описания движения маятника достаточно знать зависимость от времени какой-нибудь одной координаты.

Более естественной координатой, описывающей движение маятника, является угол φ. Найдя зависимость $\varphi(t)$, мы тем самым определим и зависимость от времени координат x и y:

$$x(t) = l\sin(\varphi(t)),$$
$$y(t) = l\cos(\varphi(t)).$$

Перепишем уравнения (2) и (3), подставив в них значения

$$a_x = v_x' = x'' = -l(\varphi')^2\sin\varphi + l\varphi''\cos\varphi,$$
$$a_y = v_y' = y'' = -l(\varphi')^2\cos\varphi - l\varphi''\sin\varphi$$

и умножив (2) на $\cos\varphi$, а (3) — на $\sin\varphi$. Получим

$$l\varphi''\cos^2\varphi - l(\varphi')^2\sin\varphi\cos\varphi + \frac{T}{m}\sin\varphi\cos\varphi = 0, \qquad (2')$$

$$-l\varphi''\sin^2\varphi - l(\varphi')^2\sin\varphi\cos\varphi + \frac{T}{m}\sin\varphi\cos\varphi - g\sin\varphi = 0. \qquad (3')$$

Вычтя (3′) из (2′), получим дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет функция $\varphi(t)$:

$$\varphi'' + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \qquad (4)$$

В случае малых отклонений нити маятника от вертикали $\sin\varphi \approx \varphi$, и уравнение (4) переходит в уравнение

$$\varphi'' + \frac{g}{l}\varphi = 0,$$

которое представляет собой уравнение гармонических колебаний с частотой $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$. Общее решение такого уравнения имеет вид

$$\varphi = \varphi_0\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}t + \Phi\right),$$

где φ_0 — амплитуда колебаний, Φ — начальная фаза. Величины φ_0 и α_0 определяются однозначно начальными условиями.

Пусть теперь точка подвеса математического маятника движется с ускорением $\vec{b}$ относительно неподвижной — инерциальной системы отсчета (рис. 2). Ускорение $\vec{a}$ грузика (точки A) относительно этой системы мож-

kvant.mccme.ru

но представить в виде векторной суммы

$$\vec a = \vec a\,' + \vec b,$$

где $\vec a\,'$ — ускорение точки A относительно неинерциальной системы отсчета, которая движется с ускорением $\vec b$ относительно неподвижной системы отсчета. Уравнение (1) теперь запишется так:

$$m\vec a\,' + m\vec b = m\vec g + \vec T.$$

Отсюда

$$m\vec a\,' = m\vec g + \vec T - m\vec b = m(\vec g - \vec b) + \vec T. \quad (5)$$

Уравнение (5) по форме отличается от уравнения (1) наличием постоянного вектора $m(-\vec b)$, имеющего размерность силы. Таким образом, если мы хотим пользоваться II законом Ньютона в неинерциальной системе отсчета, движущейся относительно инерциальной системы с постоянным ускорением $\vec b$, то к реальным силам, действующим на грузик — силе тяжести $m\vec g$ и силе натяжения нити $\vec T$, мы должны добавить постоянный вектор $m(-\vec b)$. Этот вектор называют силой инерции. В уравнении (5) мы объединили вектор $m(-\vec b)$ с вектором силы тяжести $m\vec g$. В такой записи (5) представляет собой уравнение II закона Ньютона для грузика, на который действуют сила натяжения нити $\vec T$ и сила $m(\vec g - \vec b)$, играющая роль силы тяжести. Введение такой новой «силы тяжести» $m(\vec g - \vec b)$ задает нам новое направление «вертикали», определяемое вектором $\vec g - \vec b$; то есть роль вектора $\vec g$ переходит к вектору $\vec g - \vec b$. Соответственно появляется и новое направление «горизонтали» — перпендикулярное новой вертикали.

Преобразования, которые привели нас от уравнения (1) к уравнению (4), применимы и к уравнению (5). Надо только помнить, что положение равновесия маятника в неинерциальной системе отсчета задается направлением новой вертикали; от этой вертикали отсчитывается и угол отклонения маятника от положения равновесия; скорость маятника (грузика) — это его скорость относительно движущейся с ускорением $\vec b$ системы отсчета.

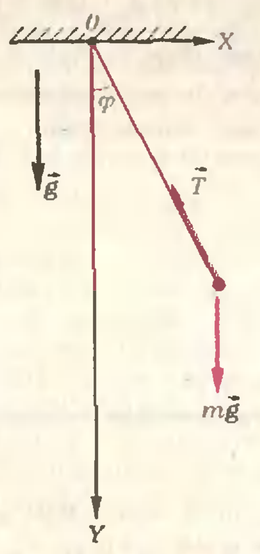


Рис. 1.

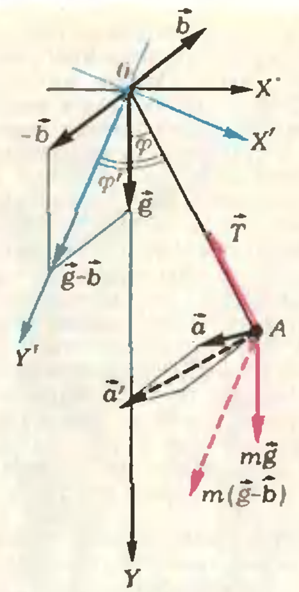


Рис. 2

При использовании энергетических соотношений (закона сохранения механической энергии) в неинерциальной системе отсчета мы можем пользоваться формальной записью

$$mg'h' + \frac{m(v')^2}{2} = \text{const},$$

где $g' = |\vec g - \vec b|$, h' — высота, отсчитываемая по новой вертикали, v' — скорость тела относительно неинерциальной системы отсчета. Эквипотенциальными поверхностями теперь становятся плоскости, перпендикулярные вектору $\vec g - \vec b$.

Перейдем теперь к решению задачи **Ф663** из Задачника «Кванта». Напомним ее условие.

Ф663. *Тяжелая тележка движется со скоростью v_0 по горизонтальной плоскости и въезжает на наклонную плоскость, составляющую угол α с горизонтом. Переход между плоскостями плавный. На тележке на нити длиной l висит шарик. Какова будет амплитуда колебаний шарика, когда тележка въедет на наклонную плоскость?*

Мы должны, очевидно, рассмотреть движение маятника относительно неинерциальной системы отсчета — тележки, движущейся рав-

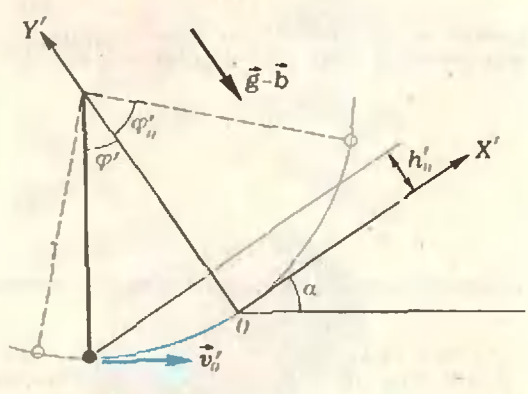


Рис. 3. $v_0' = v_0(1-\cos\alpha)$; $h_0' = l(1-\cos\alpha)$.

kvant.mccme.ru

нозамедленно вдоль наклонной плоскости (мы считаем массу маятника много меньше массы тележки). Будем считать, что переход от горизонтальной поверхности к наклонной плоскости очень гладкий и время движения тележки по закруглению много меньше периода колебаний маятника, так что практически мгновенно точка подвеса маятника начинает двигаться вверх по наклонной плоскости с начальной скоростью v_0 и с ускорением, равным по абсолютной величине $b=g\sin\alpha$ и направленным вниз вдоль наклонной плоскости. Относительно тележки маятник имеет в начальный момент скорость $v_0(1-\cos\alpha)$; вектор относительной скорости перпендикулярен нити (считаем, что параллельная составляющая скорости гасится). Новое ускорение свободного падения равно $|\vec{g}-\vec{b}|=g\cos\alpha$. Эквипотенциальные уровни энергии, как нетрудно видеть, параллельны наклонной плоскости.

Максимальный угол φ_0' отклонения маятника относительно нового положения равновесия найдем из закона сохранения энергии, записанного в неинерциальной системе отсчета (рис. 3):

$$\frac{m(v_0(1-\cos\alpha))^2}{2}+mgl\cos\alpha\cdot(1-\cos\alpha)=$$
$$=mg\cos\alpha\cdot l(1-\cos\varphi_0'),$$

откуда

$$\cos\varphi_0'=\cos\alpha-\frac{v_0^2}{2gl\cos\alpha}(1-\cos\alpha)^2=$$
$$=\cos\alpha-\frac{v_0^2\,2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{gl\cos\alpha},$$
$$\varphi_0'=\arccos\left(\cos\alpha-\frac{2v_0^2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}}{gl\cos\alpha}\right).$$

С. Кротов

Несколько лет назад в «Кванте» была опубликована заметка «Чему равен $\sqrt[0,5]{4}$?» (1976, № 11), в которой рассматривались ошибки, связанные с определением корня из числа. В математике это определение вполне однозначно: «Корень уравнения $x^n=a$, где n — натуральное число, называют *корнем n-й степени из a*» («Алгебра 8», 1980, п. 24). О словах «где n — натуральное число» часто забывают абитуриенты. Так, если уравнение содержит $\sqrt[x]{a}$, то в предлагаемых ответах можно встретить такие числа, как 0,5, —3 и т. д.

К сожалению, подобного рода ошибки встречаются не только в ответах абитуриентов. Рассмотрим два примера из книги Л. В. Кованцовой и И. Г. Малышева «Сборник задач по математике» (Киев, «Вища школа», 1980).

На с. 101 приводится следующее «решение» неравенства

$$\sqrt[\lg x]{x}>10x^4. \qquad (1)$$

«Запишем неравенство в виде

$$x^{\frac{1}{\lg x}}>10x^4. \qquad (2)$$

Сейчас хорошо видно, что область допустимых значений $x>0$, $x\neq 1$. Прологарифмируем обе части неравенства по основанию 10 (знак неравенства сохранится):

$$\frac{1}{\lg x}\cdot\lg x>1+4\lg x\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\lg x<0\ \Rightarrow\begin{cases}x<1\\x>0\end{cases}\Rightarrow 0<x<1$$

Отв. $X=]0;1[$»

Ответ не верен, так как при $x\in]0;1[$ число $\lg x$ (показатель корня в (1)!) — не натуральное. Где же ошибка? Указанный в книге ответ является **правильным** ответом для неравенства (2), но неравенства (1) и (2) не равносильны. Правда, на множестве $\{10^n\}$ ($n\in\mathbf{N}$), являющемся областью допустимых значений неравенства (1), они равносильны. Учитывая это, получаем **ответ**: $\varnothing$.

На стр. 97 ответ к системе уравнений

$$\begin{cases}x^2+xy+y^2=a^2,\\ \log_{\frac{x}{\sqrt{a}}}\sqrt{a}+\log_{\frac{y}{\sqrt{b}}}\sqrt{b}=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\end{cases}$$

записан в виде «При $a>0$, $b>0$, a, $b\neq 1$: $\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\ \frac{a}{\sqrt{3}}\right)$», что также, очевидно, неверно.

Аналогичные неточности по существу содержатся в решении примеров № 153 и № 183.

В. Хлобыстов

Поправка

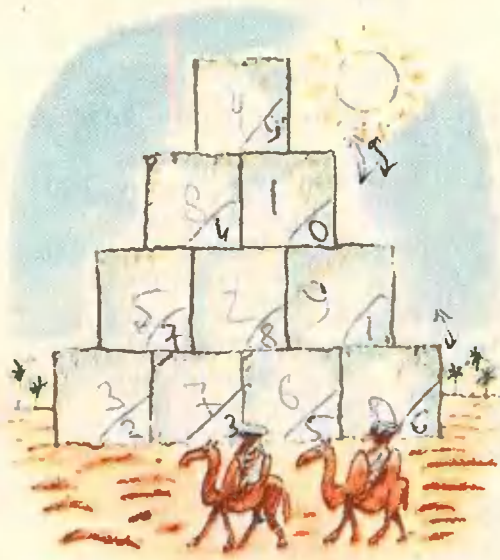
В «Кванте» № 6 в Задачнике «Кванта» имеются неточности. В задаче **М686** в левой части равенства должно быть $\left[\sqrt{[\sqrt{x}]}\right]$. В задаче **М688** сумма $a_1+a_2+\ldots+a_n$ четна. Срок присылки решений этих задач продлевается до 1 октября 1981 года.

Квант для младших школьников

Задачи

1. «Переставляшки». Приходилось ли вам когда-нибудь переставлять буквы в словах, чтобы получались другие осмысленные слова? Например, так: *мать — тьма, река — каре, серп — перс, угар — рагу.* Подберите парное слово к словам: *соха, клеш, соль, фазан, весна, салат, плеск, треск, ремонт, нищета, иголка, кордон, вектор, сектор, телескоп, искра, секта, скала, пират, топор, капор, сокол, лодка, доска.*

Иногда «переставляшки» дают не пару, а тройку, четверку, пятерку или даже шестерку слов:
марш — ? — ?, *спрут* — ? — ?, *рост* — ? — ? — ?, *колун* — ? — ? — ?, *автор* — ? — ? — ? — ? — ?.
Какие «переставляшки» вы сумеете придумать еще?



2. В клеточки «пирамиды», изображенной на рисунке, впишите все десять цифр (0,1,...,9) так, чтобы по горизонталям получились четыре квадрата натуральных чисел. Сколько решений имеет задача?

3. Из десяти спичек без труда можно сложить два пятиугольника. А вот сложить из того же количества спичек два пятиугольника и пять треугольников не так-то просто. Попробуйте!

4. На листе бумаги расположены 1980 точек, являющихся вершинами правильного 1980-угольника. Двое игроков по очереди соединяют эти точки отрезками. За один ход разрешается соединить любые две точки так, чтобы проведенные отрезки не пересекались. Проигрывает тот, у кого нет хода. Кто выигрывает при правильной игре: начинающий или его партнер?

Эти задачи нам предложили
А. Аббасов, М. Гервер, А. Кравчатый, Л. Мочалов

kvant.mccme.ru

М. Гервер

Как сделать из мухи слона?

Цепочки Кэрролла

Гора — горе — море

— вот как можно сделать *море* из *горы*.

Коза — поза — пола — полк — волк — и из *козы* получился *волк*.

О превращении *льва* в *дога* сочинена даже детская считалочка

Царь зверей — красавец лев,
Желтый цветик — львиный зев,
Громкий зов — удачный лов,
Старый лом — новый дом...
Вместо них — широкий лог,
Там гуляет черный дог,

содержащая такие цепочки:

лев — зев — зов — лов —
— лом — дом — дог.
лог

Автором игры в цепочки является, по-видимому, Льюис Кэрролл. Пользуясь правилами Кэрролла — вы уяснили их из приведенных примеров? — можно превратить *ночь* в *день*, *винт* в *болт* или *курда* в *перса*, можно сделать из *руки ногу* (или из *ноги руку* — как вам больше нравится), изготовить *фунт* из последнего *пенса* (и даже из экзотического *юаня*) или из одного-единственного *судна* (будь то большой, быстроходный *бриг* или маленький *ялик*) получить целый *флот*...

Правда-правда! Проверьте сами.

Можно даже — хотя это и посложней — сделать из *мухи слона*.

Почему посложней? Из-за различного расположения гласных в этих словах. С такими же сложностями вы столкнетесь, если захотите превратить *негра* в *араба* или получить *уран* из *серы*.

Слон, *араб* и *уран* относятся к одной группе слов, *муха*, *негр* и *сера* — к другой: в каждой из этих двух групп слова сравнительно легко переводятся друг в друга, а из одной группы в другую, насколько мне известно, ведет один-единственный переход. К его отысканию и сводятся последние три из предложенных выше задач.

Как только он найден, играть в «цепочки Кэрролла» становится, честно говоря, не особенно интересно.

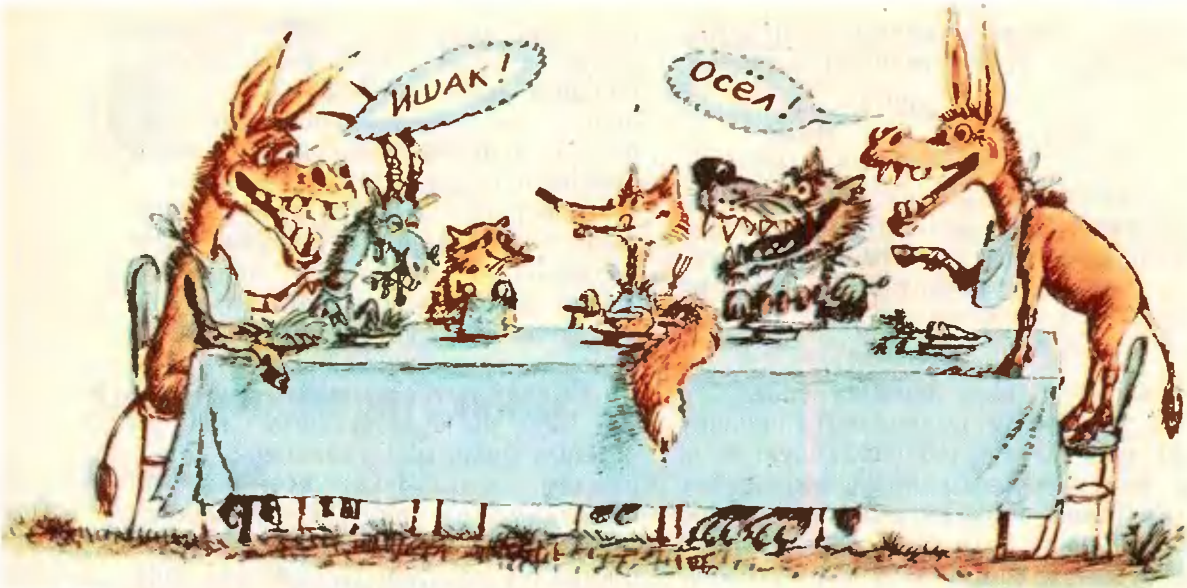
Новые правила

Чтобы вдохнуть жизнь в старинную игру, введем новые правила преобразования слов. Меняя по-прежнему по одной букве, разрешим, кроме того, на каждом ходу менять порядок букв:

река — мера — море,
(к — м) (а — о)

враг — град — друг.
(в — д) (а — у)

Сделать из *мухи слона*, используя новые правила, ничего не стоит:



муха — хула — луна —
(м — л) (х — н) (а — ь)
лунь — ноль — слон
(у — о) (ь — с)

так что, на первый взгляд, мы просто испортили хорошую задачу, заменив интересную игру тривиальной.

На самом деле, после введения новых правил сразу возникает несколько новых игр и задач. Однако, прежде чем познакомить вас с ними, я хочу предложить вам следующие задания (чтобы вы привыкли к новым правилам):

а) превратите *осла* в *козу*, *козу* в *енота*, *енота* в *лису*, *лису* в *волка*, *волка* в *ишака*, а *ишака* — снова в *осла*;

б) смастерите *халат* из *парчи*;

в) соедините цепочкой *леди* и *лорда*;

г) вот вам *станок* — сделайте *шпагат*;

д) найдите путь от *старта* к *финишу*.

Кратчайшие цепочки

Интересно, за сколько ходов вы добрались от *старта* до *финиша*? Самая первая цепочка, которой мне удалось соединить их, состояла из пятнадцати слов:

старт — трест — перст —
(а — е) (т — п) (е — о)

спорт — опрос (или просо) —
(т — о) (р — к)
покос — кокос — кокон —
(п — к) (с — н) (о — а)
конка — гонка — книга —
(к — г) (о — н) (г — ф)
финка — финал — филин —
(к — л) (а — и) (л — ш)
финиш.

Потом ее удалось сократить до девяти слов:

старт — сатир — риска — кирка —
факир (фиакр) — финка

и т. д. Вариант: сатир — тираж — жираф — рифма (фирма) — нимфа — финал т. д.

Можно и еще короче. Рекорд — 7 слов. Сумеете повторить или улучшить его? Попробуйте найти 2—3 цепочки минимальной длины.

Чем вообще определяется минимальная длина цепочки? Рассмотрим примеры.

Начнем с превращения *енота* в *лису*. Представим себе, что буквы *е*, *н*, *о*, *т*, *л*, *и*, *с*, *а* написаны на карточках: первые четыре карточки на столе, остальные четыре — у нас в руках. Мы должны сделать четыре замены — следовательно, искомая цепочка содержит не менее пяти слов. Значит, цепочка

енот — лето — село — сало — лиса — кратчайшая.

Для превращения *козы* в *енота* нужно сделать лишь три замены (*«о»* — общее), минимальная длина цепочки — 4. Кратчайшие цепочки:

нота
коза — зона   енот
зонт

Для превращения *козы* в *волка* необходимы как будто всего две замены: нужно *«з»* и *«а»* заменить на *«в»* и *«л»*. Если бы хоть одна из замен

з — в; з — л; а — в; а — л

привела к осмысленному слову, то мы, тем самым, получили бы цепочку из трех слов, превращающую *козу* в *волка*. Однако после указанных замен мы приходим соответственно к наборам

к, о, в, а; к, о, з, л; к, о, л, а; к, о, з, в,

ни один из которых — как ни переставляй в нем буквы — не дает осмысленного слова. Поэтому минимальная длина искомой цепочки — больше трех. Тем самым, цепочки

коса — воск
коза   волк
кора — кров

кратчайшие.

Упражнение. Найдите кратчайшие цепочки для всех остальных заданий предыдущего пункта.

Ну, а как обстоит дело с нашим главным превращением — *мухи* в *слона*? Цепочка, соединяющая их, должна содержать минимум 5 слов. Выше мы нашли цепочку, в которой всего на одно слово больше. По пять слов в цепочках

хлам — мало — сало
муха   слон
сума — само — сонм

но они, разумеется, должны быть отвергнуты: *мало* — наречие, *само* — местоимение, а мы по неписанной традиции пользуемся лишь существительными (нарицательными) в именительном падеже, в единственном числе*!

Как же быть? Ищите и обрящете!

Неожиданная трудность. Слова-изгои

Задачи на составление цепочек, которые вам предлагались, были устроены так: даны два слова — нужно соединить их цепочкой (произвольной или кратчайшей). Слова подбирались специально — так, чтобы их действительно можно было превратить друг в друга.

Наверное, это трудно — подбирать такие пары? Наверное, для большинства пар слова́, входящие в них, невозможно превратить одно в другое (не существует ни одной цепочки, соединяющей их)?

Попробуйте составлять пары сами. Если вы будете брать слова из четырех букв, то с удивлением обнаружите, что, пользуясь новыми правилами, их почти всегда удается превратить друг в друга. Против ожидания трудность — не в том, чтобы подобрать слова, которые м о ж н о соединить цепочкой, а наоборот — в том, чтобы найти слова из четырех букв, которые соединить цепочкой н е л ь з я.

Для длинных слов это не так. Среди них обычны «слова-изгои», которые (даже по новым правилам) невозможно соединить цепочкой н и с к а к и м д р у г и м с л о в о м. Кстати, само слово *изгой* как будто является таким словом-изгоем. Мне, во всяком случае, не удалось превратить его ни в какое пятибуквенное слово (*избой, иглой, визой, изгоя* — не именительный падеж, *розги, мозги* — множественное число, *козий* — не существительное; по нашему соглашению все это — н е с л о в а). Попробуйте — может быть, вам удастся? Посмотрите заодно, являются ли словами-изгоями

добро, зебра, егоза, ягода.

Найти слова-изгои среди четырехбуквенных слов несравненно труднее, чем среди длинных — попытайтесь отыскать несколько, а среди слов из трех букв их, видимо, вообще нет! Более того, по-видимому любые два слова из трех букв можно превратить друг в друга.

Что значит «по-видимому»? Нельзя ли это строго доказать? И что вообще значит *доказать* подобное утверждение? Возможно, через некоторое время мы еще вернемся к этим вопросам.

---

*) Множественное число допускается только при условии, что нет единственного: *сани, ножницы, щи.*

kvant.mccme.ru

В. Данилин

Электроизмерительные приборы

Во всех электроизмерительных приборах действие электрического тока сводится к перемещению подвижной части измерительного механизма. Обычно подвижная часть и связанная с ней стрелка прибора поворачиваются вокруг своей оси. Момент сил, вызывающий этот поворот, называют вращающим моментом. Для того чтобы стрелка отклонялась не беспредельно, а угол отклонения соответствовал измеряемой величине, необходимо противодействовать вращению стрелки. Момент сил, оказывающий такое действие, называют противодействующим моментом.

Практически всегда противодействующий момент создается силами упругости пружины. А вот вращающий момент может создаваться по-разному. В зависимости от способа возникновения вращающего момента электроизмерительные приборы относят к той или иной системе. Рассмотрим некоторые из них.

Принцип действия приборов *магнитоэлектрической* системы основан на взаимодействии проводника с током и магнитного поля. Поле создается постоянным магнитом *1* (рис. 1), ток проходит через катушку в виде рамки *2*. Рамка является подвижным элементом прибора и находится на одной оси со стрелкой *3*.

Вращающий момент, действующий на рамку, благодаря специально сконструированному магниту не зависит от угла поворота рамки и равен

$$M_{вр} = |\vec{B}|INS,$$

где $\vec{B}$ — индукция магнитного поля, I — ток, N — число витков в рамке, S — ее площадь. Под действием этого момента рамка начинает поворачиваться. При этом спиральная пружина *4* закручивается и возникает противодействующий момент, пропорциональный углу поворота рамки α:

$$M_{пр} = k\alpha,$$

где k — коэффициент пропорциональности, зависящий от упругих свойств пружины.

Когда противодействующий момент становится равным вращающему моменту, рамка останавливается. При этом угол поворота рамки, а значит и стрелки, равен

$$\alpha = \frac{|\vec{B}|SN}{k}I,$$

то есть прямо пропорционален току в рамке. Это обеспечивает равномерность шкалы прибора.

Магнитоэлектрические приборы пригодны только для постоянного тока, что, безусловно, является их недостатком. К достоинствам этих приборов относятся малое потребление энергии и высокая чувствительность.

Наиболее чувствительные приборы магнитоэлектрической системы — зеркальные гальванометры. В них на оси вращения вместо стрелки укреплено маленькое плоское зеркало. Узкий пучок света от лампочки

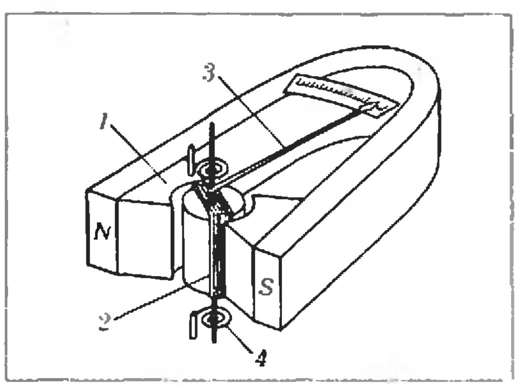


Рис. 1.

kvant.mccme.ru

падает на зеркало, а отраженный от него зайчик попадает на удаленную шкалу. Чувствительность зеркальных гальванометров может достигать 10^{-12} А/мм.

Задача 1. *Зеркальный гальванометр имеет рамку площадью $S=a\times b=40\times 30$ мм², на которую намотано $N=100$ витков медной проволоки диаметром $d=0{,}1$ мм. Рамка подвешена на нити, в которой возникает противодействующий момент $M_{0\,пр}=10^{-7}$ Н·м при закручивании нити на угол $\alpha_0=1°$. Магнитное поле перпендикулярно оси вращения рамки при всех ее возможных положениях; индукция магнитного поля $|\vec{B}|=10^{-1}$ Тл. На расстоянии $L=1$ м от гальванометра находится миллиметровая шкала. 1) На какой угол α повернется рамка, если по ее обмотке пропустить ток $I=0{,}1$ мА? 2) Какой мощности P, потребляемой прибором, соответствует отклонение зайчика по шкале на $l=1$ мм?*

1) При равновесии рамки вращающий момент $M_{вр}=|\vec{B}|INS$ уравновешивается противодействующим моментом $M_{пр}=k\alpha=M_{0\,пр}\alpha/\alpha_0$:

$$|\vec{B}|INS=\frac{M_{0\,пр}}{\alpha_0}\alpha.$$

Отсюда

$$\alpha=\frac{|\vec{B}|INS\alpha_0}{M_{0\,пр}}=12°.$$

2) Потребляемая гальванометром мощность зависит от тока I, текущего по обмотке рамки, и от ее сопротивления R:

$$P=I^2R.$$

Найдем, какой ток I соответствует отклонению зайчика по шкале на расстояние l. При повороте рамки, а значит, и зеркала, на угол α отраженный луч поворачивается на угол 2α (проверьте это самостоятельно), а зайчик перемещается по шкале на расстояние $l=2\alpha L$ (мы учли, что $l\ll L$). Таким образом,

$$I=\frac{k\alpha}{|\vec{B}|NS}=$$

$$=\frac{M_{0\,пр}}{\alpha_0}\frac{l}{2L}\frac{1}{|\vec{B}|NS}\approx 2{,}4\cdot 10^{-7}\ \text{А}.$$

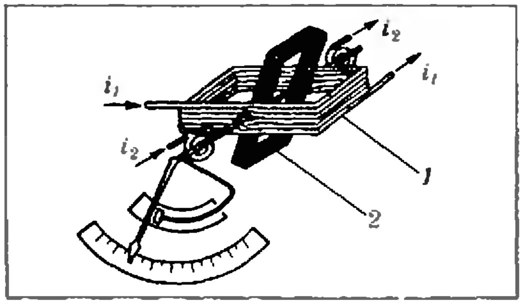


Рис. 2.

Сопротивление обмотки рамки равно

$$R=\rho\frac{l'}{s}=\rho\frac{2(a+b)N}{\pi d^2/4}\approx 31\ \text{Ом}.$$

Окончательно

$$P=I^2R\approx 1{,}8\cdot 10^{-12}\ \text{Вт}.$$

* * *

В приборах *электродинамической* системы вращающий момент возникает при взаимодействии токов i_1 и i_2, протекающих по двум катушкам: неподвижной катушке *1* и подвижной *2* (рис. 2). В общем случае токи — переменные и изменяются по законам $i_1=I_{1м}\cos\omega t$ и $i_2=I_{2м}\cos(\omega t-\varphi)$.

Мгновенное значение вращающего момента пропорционально произведению обоих токов: $M_{вр}\sim i_1 i_2$. Из-за инертности подвижная катушка не успевает следовать за мгновенными изменениями вращающего момента, так что ее отклонение пропорционально среднему за период значению

$$M_{вр\,ср}=kI_1I_2\cos\varphi.$$

Здесь k — постоянный коэффициент, I_1 и I_2 — действующие значения токов, φ — сдвиг фаз между ними. Если обе катушки соединить последовательно, показание прибора будет пропорционально квадрату тока. Следовательно, шкала такого прибора — неравномерная.

Очевидно, что приборами электродинамической системы можно измерять мощность в цепях переменного тока ($P_{ср}=IU\cos\varphi$, где U — действующее значение напряжения). Для этого достаточно одну катушку (неподвижную) включить *последовательно* с выбранным участком цепи, а вторую катушку (подвижную) — параллельно этому участку. Именно

kvant.mccme.ru

таково принципиальное устройство всех ваттметров.

Задача 2. *Наибольшая мощность, измеряемая ваттметром, равна $P_1=300$ Вт. Определите, какое дополнительное сопротивление $R_д$ нужно включить последовательно с параллельной катушкой ваттметра, чтобы увеличить предел измерения до $P_2=500$ Вт. Сопротивление параллельной катушки $R=10$ кОм; последовательная катушка не изменяется.*

Показание ваттметра пропорционально действующим значениям токов, протекающих по параллельной и последовательной катушкам, и косинусу сдвига фаз между этими токами.

Поскольку речь идет о верхнем пределе измерений ваттметра, угол поворота подвижной (последовательной) катушки и связанной с ней стрелки прибора в обоих случаях должен быть одним и тем же. Это означает, что токи в катушках тоже не должны изменяться.

Действующее значение тока в параллельной катушке равно

$$I=\frac{U}{R},$$

где U — напряжение на нагрузке, в которой измеряется мощность, а R — сопротивление параллельной катушки. При включении дополнительного сопротивления изменяется напряжение, поданное на ваттметр, но ток остается одним и тем же:

$$\frac{U_1}{R}=\frac{U_2}{R+R_д}.$$

С учетом того, что

$$\frac{U_2}{U_1}=\frac{P_2}{P_1},$$

получим

$$\frac{R+R_д}{R}=\frac{P_2}{P_1},$$

или

$$R_д=R\left(\frac{P_2}{P_1}-1\right)=\frac{2}{3}R\approx 6{,}7 \text{ кОм}.$$

* * *

Практически во всех наиболее распространенных электроизмерительных приборах показания приборов связаны с током, протекающим по их катушкам. Поэтому один и тот же прибор, в зависимости от схемы его включения в цепь, можно использовать как для измерения тока (то есть в качестве амперметра), так и для измерения напряжения (то есть в качестве вольтметра).

Задача 3. *В схему, показанную на рисунке 3, включены два одинаковых амперметра и два одинаковых вольтметра. Показание первого амперметра $I_1=200$ мА, а показания вольтметров $U_1=100$ В и $U_2=2$ В соответственно. Найдите показание I_2 второго амперметра. Сопротивлением подводящих проводов можно пренебречь.*

При решении этой задачи нужно ясно понимать, что показания и амперметров, и вольтметров всегда пропорциональны протекающему через них току.

Ток I_1, протекающий через первый вольтметр, дает показание на шкале прибора U_1. Следовательно, внутреннее сопротивление вольтметров равно

$$R_V=\frac{U_1}{I_1}.$$

Показание второго вольтметра соответствует протекающему по нему току

$$I_{V2}=\frac{U_2}{R_V}=\frac{U_2}{U_1}I_1.$$

Ток I_2, протекающий по второму амперметру, равен разности токов I_1 и I_{V2}:

$$I_2=I_1-I_{V2}=I_1\left(1-\frac{U_2}{U_1}\right)=196 \text{ мА}.$$

* * *

Наиболее важными характеристиками прибора являются его внутреннее сопротивление и предельное значение тока, при котором подвижная часть измерительного прибора отклоняется на максимальный угол. Требования, предъявляемые к внутренним сопротивлениям амперметра и вольтметра, противоположны. Ам-

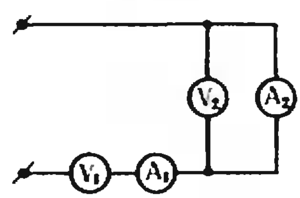


Рис. 3.

kvant.mccme.ru

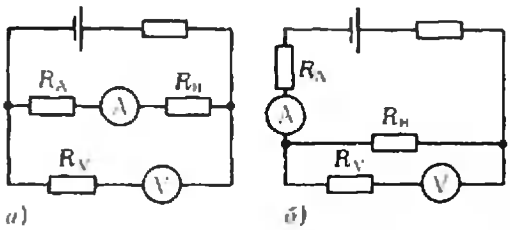


Рис. 4.

перметр включается в цепь последовательно, и через него проходит весь измеряемый ток. Поэтому, чтобы не вносить дополнительного сопротивления в цепь, сопротивление амперметра должно быть как можно меньше. Вольтметр включается параллельно тому участку цепи, на котором следует измерить напряжение. Следовательно, его сопротивление должно быть как можно больше, чтобы не шунтировать исследуемый участок цепи.

З а д а ч а 4. *Оцените, какие ошибки возникают при измерениях токов и напряжений с учетом конкретных значений сопротивлений амперметра и вольтметра (рис. 4).*

В схеме на рисунке 4,*а* ток, текущий через амперметр A и нагрузочное сопротивление $R_н$, один и тот же. Следовательно, ошибки в показаниях амперметра нет. А вот напряжение на нагрузке, измеренное вольтметром, отличается от истинного:

$$U_н = IR_н, \; U_V = I(R_н + R_A).$$

Таким образом, абсолютная ошибка в измерении напряжения на нагрузке равна

$$\Delta U = |U_н - U_V| = IR_A,$$

а относительная ошибка

$$\delta = \frac{\Delta U}{U_н} = \frac{IR_A}{IR_н} = \frac{R_A}{R_н}.$$

В схеме на рисунке 4, *б* показание вольтметра истинно, а амперметр показывает сумму токов, протекающих через нагрузку и через вольтметр:

$$I_A = I_н + I_V = \frac{U_н}{R_н} + \frac{U_н}{R_V}.$$

Абсолютная и относительная ошибки в измерении тока равны соответственно

$$\Delta I = |I_н - I_A| = I_V = \frac{U_н}{R_V}$$

и

$$\delta = \frac{\Delta I}{I_н} = \frac{U_н}{R_V} : \frac{U_н}{R_н} = \frac{R_н}{R_V}.$$

З а д а ч а 5. *Вольтметр с неизвестным внутренним сопротивлением подключают сначала к резистору сопротивлением R_1, затем к резистору сопротивлением R_2 и, наконец, к резистору сопротивлением R (рис. 5). При этом показания вольтметра $U_1 = 4$ В, $U_2 = 6$ В и $U = 12$ В соответственно. Пренебрегая внутренним сопротивлением источника, определите напряжения U_{01} и U_{02} на первом и втором резисторах в отсутствие вольтметра.*

При подключении к резистору сопротивлением R показание вольтметра равно ЭДС источника (так как внутренним сопротивлением источника можно пренебречь).

Когда вольтметр подключен к первому резистору, сопротивление этого участка R_1' таково, что

$$\frac{1}{R_1'} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_V},$$

где R_V — внутренее сопротивление вольтметра. Напряжение на этом участке равно показанию вольтметра $U_1 = 4$ В, а напряжение на втором резисторе равно $U - U_1 = 8$ В $= 2U_1$. Так как через оба участка цепи течет один и тот же ток, имеем $R_2 = 2R_1'$, или

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_V} = \frac{2}{R_2}.$$

Если вольтметр подключен ко второму резистору, то, проведя аналогичные рассуждения, получаем

$$\frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_V} = \frac{1}{R_1}.$$

Вычитая из последнего уравнения предыдущее, найдем

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{U_{01}}{U_{02}} = \frac{2}{3}.$$

Кроме того,

$$U_{01} + U_{02} = U.$$

Следовательно,

$$U_{01} = \frac{2}{5}U = 4{,}8 \text{ В}, \; U_{02} = \frac{3}{5}U = 7{,}2 \text{ В}.$$

* * *

На практике часто используются приборы с несколькими пределами

kvant.mccme.ru

измерения токов и напряжений. Для этого при измерении напряжений последовательно с прибором включаются дополнительные сопротивления, а при измерении токов к прибору подключаются параллельные сопротивления — шунты. В некоторых случаях возможно одновременное подключение дополнительных сопротивлений и шунтов. (Заметим, что подключение добавочных сопротивлений и шунтов не только позволяет сделать приборы многошкальными, но также уменьшает ошибки измерений, соответственно увеличивая или уменьшая внутренние сопротивления приборов.)

З а д а ч а 6. *Гальванометр с внутренним сопротивлением $R_г=50$ Ом имеет цену деления измерительной шкалы $C=50$ мкА. Шкала разбита на $N=100$ делений. Как из этого прибора сделать вольтметр для измерения напряжений до $U=200$ В или амперметр для измерения токов до $I=800$ мА?*

При отклонении стрелки на всю шкалу через гальванометр течет предельный допустимый ток

$$I_{пр}=CN=5 \text{ мА},$$

при этом напряжение на гальванометре равно

$$U_{пр}=I_{пр}R_г=250 \text{ мВ}.$$

Чтобы с помощью этого гальванометра можно было измерять напряжения до значения U, последовательно с гальванометром надо включить дополнительное сопротивление $R_д$. Напряжение $U_д$ на нем равно разности напряжений в цепи и на гальванометре, а ток, текущий через гальванометр и дополнительное сопротивление, один и тот же. Поэтому

$$\frac{U_д}{U_г}=\frac{R_д}{R_г},$$

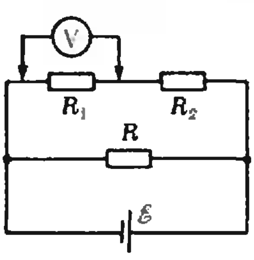


Рис. 5.

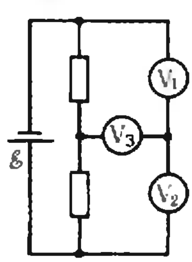


Рис. 6.

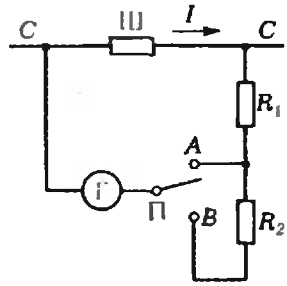


Рис. 7.

откуда

$$R_д=R_г\frac{U_д}{U_г}=R_г\left(\frac{U}{U_г}-1\right)\approx 40 \text{ кОм}.$$

Для работы гальванометра в качестве амперметра параллельно гальванометру надо подключить шунт сопротивлением $R_ш$. Ток I, текущий в цепи, равен сумме токов $I_г$ в гальванометре и $I_ш$ в шунте, а напряжения на гальванометре и на шунте одинаковы. Следовательно,

$$I_гR_г=I_шR_ш,$$

откуда

$$R_ш=R_г\frac{I_г}{I_ш}=R_г\frac{I_г}{I-I_г}=$$

$$=\frac{R_г}{\frac{I}{I_г}-1}\approx 0{,}31 \text{ Ом}.$$

Упражнения

1. В схеме, показанной на рисунке 6, все вольтметры одинаковые. ЭДС батареи $\mathscr{E}=5$ В, ее внутреннее сопротивление мало. Первый вольтметр показывает $U_1=2$ В. Что показывают остальные вольтметры?

2. Для измерения больших токов в цепи CC используют шунт Ш, параллельно которому подключается измерительный прибор Г через сопротивления $R_1=2$ Ом и $R_2=90$ Ом (рис. 7). В положении A переключателя П вся шкала прибора соответствует току в цепи $I_1=10$ А, в положении B — току $I_2=100$ А. Найдите внутреннее сопротивление r прибора Г. Сопротивление шунта много меньше R_1 и R_2.

3. При включении шунта сопротивлением $R_{ш1}=100$ Ом параллельно измерительному прибору стрелка отклоняется на всю шкалу при токе во внешней цепи $I_1=3$ А. При включении добавочного сопротивления $R_д=300$ Ом к незашунтированному гальванометру шкала прибора становится в четыре раза грубее, чем без добавочного сопротивления и шунта. Какой шунт надо взять для того, чтобы стрелка отклонилась на всю шкалу при токе во внешней цепи $I_2=7{,}5$ А?

4. Гальванометр с внутренним сопротивлением $r_г$, шунтированный сопротивлением $R_ш$ и соединенный последовательно с добавочным сопротивлением $R_{д1}$, используется в качестве вольтметра. При напряжении $U_1=1$ В стрелка гальванометра отклоняется на одно деление. Какое нужно взять добавочное сопротивление, чтобы стрелка гальванометра отклонилась на одно деление при напряжении $U_2=10$ В?

kvant.mccme.ru

Б. Кордемский

Семнадцать задач на смекалку

Среди задач, предлагаемых пособиями для поступающих в вузы, встречаются и такие, при решении которых можно проявить находчивость и остроумие.

Разумеется, как правило, эти задачи можно решать и стандартными методами, однако решения, использующие нестандартные, остроумные соображения, часто оказываются более короткими и красивыми, чем традиционные.

Несколько таких задач мы предлагаем нашим читателям.

Задача **1.** Пройдя 3/8 длины моста AB, человек услышал за спиной гудок автомобиля, приближающегося к мосту с постоянной скоростью 60 км/ч. Если этот человек побежит обратно, то встретится с автомобилем в A; если побежит вперед, то автомобиль нагонит его в B. С какой скоростью бегает этот человек?

Задача **2.** Из пункта A реки одновременно поплыли мяч по течению и спортсмен против течения. Через 10 минут пловец повернул назад и догнал мяч под мостом, находящимся в 1 км от A. Известно, что пловец не изменял своих усилий на протяжении всего времени движения. Найдите скорость течения этой реки.

Задача **3.** В колбе имеется раствор соли. Из колбы отливают $1/n$ часть раствора в пробирку и выпаривают до тех пор, пока процентное содержание соли в пробирке не повысится вдвое. После этого получившийся раствор возвращают в колбу и смешивают с тем раствором, который там оставался. В результате содержание соли в растворе повысилось на $p\%$. Определите процентное содержание соли в первоначальном растворе.

Задача **4.** 27 одинаковых механизмов могут выполнить определенное задание за 35 часов непрерывной работы. Но через 11 часов к выполнению этого задания подключили еще несколько таких же механизмов, и работа была закончена на 6 часов раньше. Сколько механизмов было подключено дополнительно?

Задача **5.** От двух кусков сплава одинаковой массы, но с различным процентным содержанием меди отрезали по куску равной массы. Каждый из отрезанных кусков сплавили с остатком другого куска, после чего процентное содержание меди в обоих кусках стало одинаковым. Во сколько раз отрезанный кусок меньше целого куска?

Задача **6.** Имеются два сплава серебра и золота: в одном количества этих металлов находятся в отношении 2:3, в другом — в отношении 3:7. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 8 кг нового сплава, в котором серебро и золото были бы в отношении 5:11?

Задача **7.** На стороне BC квадрата $ABCD$ взята произвольная точка E. Биссектриса угла DAE пересекает сторону CD в точке F, $|AE|=a$. Найдите $|BE|+|DF|$.

Задача **8.** Дан $\triangle ABC$. а) Докажите, что существует треугольник $A_1B_1C_1$, длины сторон которого равны длинам медиан треугольника ABC.

б) Докажите, что треугольник $A_2B_2C_2$, длины сторон которого равны длинам медиан треугольника $A_1B_1C_1$, подобен треугольнику ABC.

в) Найдите площадь треугольника $A_2B_2C_2$, если площадь треугольника ABC равна S.

Задача **9.** Пусть точка K — середина медианы AM треугольника ABC, L — точка пересечения прямой (BK) со стороной AC. Найдите площадь четырехугольника $LKMC$, если $S_{ABC}=1$.

Задача 10. В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла проведена высота CD. Периметры треугольников ACD и CBD равны P_1 и P_2 соответственно. Найдите периметр треугольника ABC.

Задача 11. Докажите неравенство

$$\underbrace{\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6+\ldots\sqrt[3]{6+\sqrt[3]{6}}}}}_{n}+\underbrace{\sqrt{6+\sqrt{6+\ldots\sqrt{6+\sqrt{6}}}}}_{m}<5.$$

Задача 12. Докажите, что для всякого треугольника ABC

а) $\cos\hat{A}+\cos\hat{B}+\cos\hat{C}\leqslant\frac{3}{2}$;

б) $\cos 2\hat{A}+\cos 2\hat{B}+\cos 2\hat{C}\geqslant-\frac{3}{2}$.

Задача 13. Найдите предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{n!}$.

Задача 14. Упростите выражение

$$\frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}+\frac{(x-a)(x-c)}{(b-a)(b-c)}+\frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)},$$

где $a\neq b$, $b\neq c$, $c\neq a$.

Задача 15. Упростите выражения

а) $\sin^3\alpha\cos 3\alpha+\cos^3\alpha\sin 3\alpha$;

б) $\sin^2 x+\sin^2\alpha+\sin^2(x+\alpha)+2\cos\alpha\cos x\cos(\alpha+x)$.

Задача 16. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\ln x$, $y=0$, $x=2$.

Задача 17. Решите уравнение

$$x^3+1=2\sqrt[3]{2x-1}.$$

Московский автомеханический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найти площадь фигуры, множество точек $(x;y)$ которой удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2\leqslant r^2 \ (r>0)\\ x-y\leqslant 0\\ y\geqslant 0.\end{cases}$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4^x=\left(\frac{1}{3}\right)^x\cdot 1728\\ \log_4 x=\frac{1}{2}-\log_4 y+\log_4 3\end{cases}$$

3. Написать уравнение параболы, симметричной параболе $y=\frac{x^2}{2}-2$ относительно прямой $x=4$.

4. Найти область определения функции

$$f(x)=\frac{\sqrt{2x-4}}{\sqrt[3]{x-1}-2}.$$

5. Упростить выражение

$$\frac{\sin\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}+1-\cos\alpha$$

и найти возможные значения α.

Вариант 2

1. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $x=1$, $x=2$, $y=0$, $\log_2 x+\log_2 y=0$.

2. Найти уравнение образа параболы $y=x^2+2x+2$ при параллельном переносе $\vec{p}=\vec{i}-\vec{j}$.

3. В арифметической прогрессии (a_n) известны $a_8=11{,}2$ и $a_{15}=19{,}6$. Каково число членов этой прогрессии, меньших 30?

4. Найти область определения функции

$$y(x)=\sqrt{\frac{3^x-4^x}{2x^2-x+5}}.$$

5. Упростить выражение

$$\frac{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}{2\cos\alpha+\sin 2\alpha}\cdot\frac{1-\cos\alpha}{1-\sin\alpha}$$

и найти возможные значения α.

Задачи устного экзамена

1. Указать множество целых x, удовлетворяющих неравенству

$$\frac{1}{16}<\left(\frac{1}{2}\right)^x<1.$$

2. Указать множество точек $(x;y)$ плоскости, для которых

$$\log_{\frac{1}{16}}(x^2+y^2)=-\frac{1}{2}.$$

3. Между какими целыми числами расположено число $\lg 283$?

4. Последовательность (x_n) задана с помощью рекуррентного соотношения $x_1=2$, $x_{n+1}=x_n+3$. Задайте последовательность формулой n-го члена.

5. Написать уравнение горизонтальной касательной к параболе $y=x^2-3x+2$.

6. Найти первообразную функции

$$\varphi(x)=\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)^2.$$

kvant.mccme.ru

7. Зная, что $\sqrt{2} \approx 1,41$ и $\sqrt[5]{3} \approx 1,44$, вычислить $\sqrt[5]{72}$.

8. При каких a график функции $y = ax^2 - 6x + 7$ не имеет общих точек с осью Ox?

Физика

Задачи устного экзамена

1. Два однородных шара массой $m_1 = 3$ кг и $m_2 = 5$ кг с радиусами $R_1 = R_2 = R = 5$ см соединены однородным стержнем массой $m_3 = 2$ кг и длиной $l = 30$ см. Найдите центр тяжести системы.

2. Куб массой $m = 2$ кг и объемом $V = 10^3$ см^3 находится в озере на глубине $H = 5$ м. Считая плотность воды равной $\rho = 10^3$ кг/м^3, определите, какая работа совершается при подъеме куба на высоту $h = 5$ м над уровнем озера. Поверхностными явлениями можно пренебречь.

3. Холодильник за время $\tau_1 = 20$ мин работы охлаждает $V = 1,5$ л воды, помещенной в морозильную камеру, от $t_1 = 16$°C до $t_2 = 4$°C. Найдите массу льда, образовавшегося в камере, если процесс охлаждения был продолжен еще на $\tau_2 = 60$ мин при том же режиме. Удельная теплоемкость воды $c = 4,2 \times 10^3$ Дж/(кг · К). Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,35 \cdot 10^5$ Дж/кг.

4. Автомобиль мощностью $N = 76,5$ кВт, имеющий коэффициент полезного действия $\eta = 32\%$, при движении с постоянной скоростью на пути $s = 120$ м расходует $m = 64$ г бензина. Определите скорость движения автомобиля, если теплота сгорания бензина $q = 4,6 \cdot 10^7$ Дж/кг.

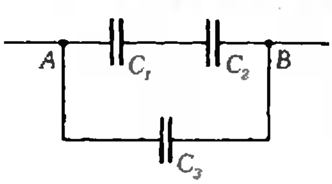
5. Расстояние между зарядами $q_1 = 2 \cdot 10^{-8}$ Кл и $q_2 = 1,6 \cdot 10^{-7}$ Кл равно $R = 5$ см. Найдите напряженность поля в точке, удаленной от первого заряда на расстояние $R_1 = 3$ см и от второго — на расстояние $R_2 = 4$ см.

6. В схеме, показанной на рисунке, разность потенциалов между точками A и B равна $U = 250$ В. Электроемкости конденсаторов равны $C_1 = 1,5$ мкФ, $C_2 = 3$ мкФ, $C_3 = 4$ мкФ. Определите суммарный заряд на обкладках конденсаторов.

7. На лампочке для карманного фонаря написано: $U = 3,5$ В, $I = 0,28$ А. Температура накала нити $t = 425$°C, сопротивление нити при нуле градусов Цельсия $R_0 = 4$ Ом. Определите температурный коэффициент сопротивления нити.

8. Какую массу льда, имеющего температуру $t = -10$°C, можно растопить за $\tau = 10$ мин в электрокипятильнике, работающем от сети с напряжением $U = 220$ В и силой тока $I = 3$ А? Коэффициент полезного действия электрокипятильника $\eta = 80\%$. Удельная теплоемкость льда $c = 2,1 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К); удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,35 \cdot 10^5$ Дж/кг.

9. Луч света, угол падения которого на границу раздела двух сред равен $\alpha = 30°$, преломляется во второй среде так, что угол между преломленным и отраженным лучами составляет $\gamma = \pi/2$ рад. Определите показатель преломления n_2 второй среды, если показатель преломления первой среды $n_1 = 2,4$.



10. Найдите изображение точки, расположенной на расстоянии $d = 2,8$ м от сферического вогнутого зеркала на главной оптической оси. Радиус кривизны зеркала $R = 90$ см.

В. Антипенко, М. Бодунов, А. Рязановский, Б. Яров

Московский гидромелиоративный институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на кривой $y = x^2$ заданы две точки A и B такие, что $\overrightarrow{OA} \cdot \vec{i} = 1$ и $\overrightarrow{OB} \cdot \vec{i} = -2$, где $\vec{i}$ — единичный вектор оси Ox. Найти длину вектора $12\overrightarrow{OA} - 3\overrightarrow{OB}$.

2. Найти все решения уравнения $\dfrac{2x^2 - 5|x| + 2}{x + 2} = 0$, принадлежащие области определения функции $y = \dfrac{x}{4x^2 - 1}$.

3. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy задана фигура F, ограниченная осью Ox, кривой $y = 2x^2$ и касательной к кривой $y = 2x^2$ в точке $A(x_0; y_0)$, где $x_0 = 2$. Найти площадь фигуры F.

4. Вычислить $\sin^2\left(\dfrac{12\pi}{8} + \dfrac{3}{2}\alpha\right) - \sin^2 3(\pi + 0,5\alpha)$ при $\alpha = \dfrac{7\pi}{12}$.

Вариант 2

1. В декартовой прямоугольной системе координат Oxy на части кривой $y = x^2 - 2x + 3$, лежащей в первой четверти, заданы точка $A(x_1; y_1)$ с абсциссой $x_1 = 1$ и точка $B(x_2; y_2)$ с ординатой $y_2 = 11$. Найти скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.

2. Решить неравенство

$$\log_2 \log_3 \frac{x - 1}{x + 1} < \log_{\frac{1}{2}} \log_{\frac{1}{3}} \frac{x + 1}{x - 1}.$$

3. Найдите все решения уравнения $3^{2x+1} - 4 \cdot 3^x + 1 = 0$, удовлетворяющие условию $\sin \dfrac{9 + x}{x + 0,5} > 0$.

4. Из всех конусов, вписанных в шар радиуса R, найти тот, у которого площадь боковой поверхности наибольшая.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Тело, брошенное вертикально вверх, вернулось на землю через время $t=3$ с. Какова была начальная скорость тела? На какой максимальной высоте побывало тело? Сопротивление воздуха не учитывать.

2. Тележка с песком катится со скоростью $|\vec{v}_1|=1$ м/с по горизонтальной поверхности без трения. Навстречу тележке летит шар массой $m=2$ кг с горизонтальной скоростью $|\vec{v}_2|=7$ м/с. После встречи с тележкой шар застрял в песке. С какой скоростью и в какую сторону покатится тележка после встречи с шаром? Масса тележки $M=10$ кг.

3. Посередине между двумя точечными положительными зарядами $q_1=q_2=q=2\times\times10^{-10}$ Кл поместили отрицательный заряд. Какова величина этого заряда, если вся система находится в равновесии?

4. Шарик массой $m=10^{-3}$ кг перемещается из точки A с потенциалом $\varphi_1=600$ В в точку B, потенциал которой $\varphi_2=0$. Определите скорость шарика в точке A, если в точке B его скорость $|\vec{v}|=0{,}2$ м/с. Заряд шарика $q=10^{-8}$ Кл.

А. Назаретов, Г. Ткачев, Г. Шадрин

Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(факультет оптического приборостроения)

1. Решить уравнение

$$\frac{3(x-2)+4\sqrt{2x^2-3x+1}}{2(x^2-1)}=1.$$

2. Найти область определения функции

$$y=(x+0{,}5)^{\log_{x+0,5}\frac{x^2+2x-3}{4x^2-4x-3}}.$$

3. Доказать, что $\triangle ABC$, вершины которого расположены в точках $A(1;\ 0;\ 1)$, $B(1;\ 1;\ 0)$ и $C(1;\ 1;\ 1)$,— прямоугольный. Найти расстояние от начала системы координат до центра окружности, описанной около этого треугольника.

4. Решить уравнение

$$\frac{1+\lg x}{1-\lg x}=(\sin x+\cos x)^2.$$

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x^2+1$, $y=x+2$ и $y=1{,}5$.

Вариант 2

(геодезический факультет)

1. Решить уравнение

$$3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x.$$

2. Найти область определения функции

$$y=\log_{0,01}\frac{2\lg x+2}{-x}.$$

3. Даны векторы $\vec{a}(1;\ 1;\ -1)$, $\vec{b}(5;\ -3;\ -3)$ и $\vec{c}(3;\ -1;\ 2)$. Найти векторы, коллинеарные вектору $\vec{c}$, длина которых равна длине вектора $\vec{a}+\vec{b}$.

4. Решить уравнение

$$(\sin x+\cos x)^2+(\sin x-\cos x)^2=1-\cos 2x.$$

5. Исследовать на монотонность функцию

$$y=\frac{x^2-2}{2x+3}.$$

Вариант 3

(аэрофотогеодезический и картографический факультеты)

1. Решить уравнение

$$-\frac{1}{3}\lg 0{,}001+\lg\sqrt[3]{27}1+3^{\sqrt{2x}}=2.$$

2. Решить неравенство

$$x<\sqrt{3-2x}.$$

3. Решить уравнение

$$\frac{1}{\cos x}=\sin x+\cos x.$$

4. При каких x и y вектор $\vec{a}=x\vec{i}+y\vec{j}+2\vec{k}$ ортогонален вектору $\vec{b}=\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ и скалярное произведение $\vec{a}$ на $\vec{c}=\vec{i}-2\vec{j}$ равно четырем?

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{4}{x}$, $y=0$, $x=2$ и $x=4$.

Н. Болотина,
И. Журкин

Московский институт стали и сплавов

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-химический факультет)

1. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}\frac{x+1}{2x-5}>0.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{3y^2+6y+16}+\sqrt{y^2+2y}=2\sqrt{y^2+2y+4}.$$

3. Плоский угол при вершине правильной шестиугольной пирамиды равен углу между боковым ребром и плоскостью основания. Найти этот угол.

4. Четыре точки A, B, C и D в указанном порядке лежат на параболе $y=ax^2+bx+c$. Координаты точек A, B и D известны: $A(-2;3)$, $B(-1;1)$, $D(2;7)$. Определить координаты точки C, когда площадь четырехугольника $ABCD$ наибольшая.

5. Найти все значения x и y, удовлетворяющие уравнению

$$12\sin x+5\cos x=2y^2-8y+21.$$

Вариант 2
(факультет полупроводниковых материалов и приборов)

1. Решить уравнение

$$\sqrt{17+x}-\sqrt{17-x}=2.$$

2. Решить неравенство

$$x+\log_2(12-2^x)>5.$$

3. Из города A в город B вышел пассажирский поезд. В то же время из B в A вышел товарный поезд. Скорость каждого из поездов на всем участке движения постоянна. Через 2 часа после того, как поезда встретились, расстояние между ними составило 280 км. Пассажирский поезд прибыл к месту назначения через 9 часов, а товарный — через 16 часов после встречи. Определить, какое время в пути находился каждый поезд.

4. В треугольнике ABC точка H — точка пересечения высот. Известно, что $\vec{AB}=(6;-2)$, $\vec{AC}=(3;4)$. Найти координаты вектора $\vec{AH}$.

5. При каких значениях a функция

$$y(x)=(1+a)x+2\sin\frac{x}{2}-(8a+4)\sin\frac{x}{4}+\frac{a\pi}{2}$$

имеет на интервале $x\in]-5\pi;11\pi[$ четыре экстремума?

Вариант 3
(факультет металлургии цветных и редких металлов и сплавов)

1. Упростить выражение

$$\left(\frac{m\sqrt{m}+n\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}-\sqrt{m\cdot n}\right)\cdot\left(\frac{m-n}{\sqrt{m}+\sqrt{n}}\right)^{-2}.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{x+7}-x+3=0.$$

3. Решить систему

$$\begin{cases}\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}=1-\sin x\\ \left|\dfrac{x}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right|<\dfrac{3\pi}{4}.\end{cases}$$

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{6}\log_2(5^x-4)+\frac{1}{2}\log_{5^x-4}2<\frac{\log_{\sqrt{2}}\sqrt[3]{4}}{\log_9 729}.$$

5. Объем прямой треугольной призмы $ABCA'B'C'$ равен 3. Определить координаты вершины A', если координаты вершин одного из оснований призмы известны: $A(1;0;1)$, $B(2;0;0)$, $C(0;1;0)$.

Вариант 4
(технологический факультет)

1. Решить неравенство

$$(0{,}4)^x-(2{,}5)^{x+1}>1{,}5.$$

2. Решить уравнение

$$\sin^4 x-\cos^4 x=\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right).$$

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\log_2 x-\log_4 y=\log_4(4-x)\\ \log_3(x+y)=\log_{\frac{1}{3}}\dfrac{y}{x}.\end{cases}$$

4. Парабола $y=x^2+px+q$ пересекает прямую $y=2x-3$ в точке с абсциссой 1. При каких p и q расстояние от вершины параболы до оси Ox минимально? Найти это расстояние.

5. Найти площадь треугольника, если длины двух его сторон соответственно равны 1 см и $\sqrt{15}$ см, а длина медианы третьей стороны равна 2 см.

Вариант 5
(факультет металлургии черных металлов и сплавов)

1. Решить уравнение

$$2\cos^2 2x-\cos 2x-1=0.$$

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}(8-3x-2x^2)<-1.$$

3. В правильную четырехугольную пирамиду вписан шар. Расстояние центра шара от вершины пирамиды равно a, а угол наклона боковой грани к плоскости основания равен α. Определить полную поверхность пирамиды.

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченную параболой $y=x^2-2x+2$, касательной к ней в точке $M(3;5)$ и осью ординат. Сделать рисунок.

5. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}2^y\cos x+2^{-y}\sin x=\dfrac{3}{2}\\ 2^y\sin x-2^{-y}\cos x=\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

Физика

Задачи устного экзамена

1 (факультет металлургии черных металлов и сплавов). Сколько молекул находится в сосуде объемом $V=1$ см^3 при температуре $t=10°$С, если давление в сосуде $p=10^{-11}$ мм рт. ст.?

2 (факультет металлургии цветных и редких металлов и сплавов). Определите стоимость получения $m=12$ кг меди при электролизе $CuSO_4$, если КПД установки $\eta=80\%$, электролиз идет при напряжении $U=10$ В, тариф $B=2$ коп/(кВт · ч), молярная масса меди $M=63{,}5\cdot10^{-3}$ кг/моль.

3 (технологический факультет). Камень брошен с башни со скоростью $|\vec{v}_0|=32{,}6$ м/с в горизонтальном направлении. Найдите радиус кривизны траектории камня в точке, в которой он будет через $\tau=5$ с после начала движения. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.

4 (физико-химический факультет). Пучок электронов, ускоренных разностью потенциалов $\Delta\varphi=300$ В, влетает в плоский горизонтально расположенный конденсатор параллельно его пластинам. Найдите разность потенциалов $\Delta\varphi_1$, приложенную к пластинам конденсатора, если пучок смещается на экране на $h=3{,}6$ см. Длина пластин конденсатора $l=4$ см, расстояние от конца конденсатора до экрана $l_1=10$ см, расстояние между пластинами конденсатора $d=1{,}2$ см.

kvant.mccme.ru

5 (факультет полупроводниковых материалов и приборов). Через медную пластинку сечением $S=ab$ пропускается ток $I=10$ А, направленный перпендикулярно к плоскости пластинки. Пластинка помещена в магнитное поле, перпендикулярное ребру b и направлению тока. Индукция магнитного поля $|\vec{B}|=0{,}6$ Тл, толщина пластинки $a=0{,}1$ мм. Определите возникающую поперечную разность потенциалов, считая при этом, что на каждый атом меди приходится один электрон проводимости. Плотность меди $\rho=8{,}6\cdot10^3$ кг/м^3, молярная масса $M=63{,}5\cdot10^{-3}$ кг/моль.

В. Бузанов, Н. Квачева, О. Малючков, В. Треногин

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найти площадь фигуры, заключенной между графиками функций $y=2x^2-3x+2$ и $y=x+8$.

2. Решить уравнение
$$7^{2x\cdot\lg 2}-10=|2^{x\cdot\lg 7+3}-10|.$$

3. Проверить, удовлетворяет ли условию $y'=\dfrac{2}{y^2}$ функция $y=\sqrt[3]{6x+1}$, и найти функцию $y=f(x)$, удовлетворяющую этому же условию, график которой проходит через точку M (4; 3).

4. Прямая l проходит через точки (3; 0), (0; 4). Точка A лежит на параболе $y=2x-x^2$. Найти расстояние от точки A до прямой l в случае, когда A совпадает с началом координат, и указать координаты точки A на параболе, при которых расстояние от нее до прямой l будет наименьшим.

5. Найти при $a=1$ все решения уравнения
$$\sin 2(x-\pi)-\sin(3x-\pi)=a\cdot\sin x,$$
расположенные на отрезке $\left[0;\dfrac{\pi}{2}\right]$, и выяснить, при каких a данное уравнение имеет единственное решение на этом отрезке.

Вариант 2

1. Написать уравнение касательной к графику функции $y=\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{3}\right)+2$ в точке с абсциссой $x_0=\dfrac{\pi}{2}$.

2. Какие из следующих функций $2x^2-1$, $\cos 2^x$, $2^{\cos x}$, $2x^3+x+2$, $1-5\lg\dfrac{x}{2}$, $3\sin x-\cos 2x$ являются и какие не являются периодическими? Для периодических функций указать их период.

3. На координатной плоскости даны точки A (−2; 0) и B (0; 4) и прямая $l: y=x$. Найти периметр треугольника AMB, где M — точка с абсциссой 3, лежащая на прямой l. При каком положении точки M на прямой l периметр треугольника AMB наименьший?

4. При $n=1, 2, 3$ сравнить числа $\sin^n 1°+\sin^n 4°$ и $\sin^n 2°+\sin^n 3°$.

5. Обозначим через A_α, где $\alpha\in\mathbf{R}$, множество точек координатной плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $y=\dfrac{x-\alpha}{\alpha x-1}$, через B_α — множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $\alpha(1+xy)=x+y$. Изобразить множества A_1 и B_1, а также множество C всех точек, которые не принадлежат ни одному из множеств A_α, но принадлежат хотя бы одному множеству B_α.

В. Тонян

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростив выражение, найти предел
$$\lim_{x\to a}\left[\frac{(x^3-2ax^2-a^2x+2a^3)(x-2a)^{-1}+2a(x+a)}{x^3-a^2x}-\frac{2}{x-a}\right].$$

2. Найти область определения функции
$$f(x)=\log_3[(3\cdot2^x)^x+3\cdot2^{x^2+1}-2\cdot3^{x+1}-9^x].$$

3. Среди всех прямоугольных треугольников площади S найти тот, для которого площадь описанного круга будет наименьшей.

4. Найти все корни уравнения
$$\cos^4 x-3\cos 3x=3\cos x-\cos^3 x\cdot\cos 3x,$$
лежащие на отрезке $\left[-\pi;\dfrac{\pi}{2}\right]$.

5. Определить объем параллелепипеда, если все его грани — ромбы, длины сторон которых равны a и острые углы равны α.

Вариант 2

1. Упростив выражение для $f(x)$, найти $f'(x)$, если
$$f(x)=\left[\left(\frac{x-4}{x^2-8\sqrt{x}+2\sqrt{x^3}+16}\right)^{-1}+\sqrt{2}^{\,2+\log_2 x}\right]^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\sqrt{x^3}-4\sqrt{x}}{\sqrt[4]{4x^3}-2\sqrt[4]{4x}}.$$

2. Решить уравнение
$$2(\lg 2-1)+\lg(5^{\sqrt{x}}+\lg 10)=\lg(5^{1-\sqrt{x}}+5).$$

3. Число 26 представить в виде суммы трех положительных слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей и чтобы второе слагаемое было втрое больше первого.

4. Найти все корни уравнения

$$(\mathrm{tg}^2 x-1)^{-1}=1+\cos 2x,$$

удовлетворяющие неравенству $2^{x+1}-8>0$.

5. В круг вписана равнобедренная трапеция так, что диаметр круга служит основанием трапеции. Найти отношение площадей круга и трапеции, если тупой угол трапеции равен α.

Задачи устного экзамена

1. Решить неравенство

а) $\dfrac{x^2(x+2)}{2x+3}<0$;

б) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-2\sqrt{x}-3}>1$;

в) $\log_{1-x^2}(x^2+x+5)<0$.

2. Решить графически систему неравенств

$$\begin{cases} y-x^2\geqslant-5 \\ x+y\leqslant 0 \\ \sqrt{x^2-4}\geqslant x. \end{cases}$$

3. Построить график функции

а) $y=x^2+5|x|$;

б) $y=\lg|x-2|$;

в) $y=\log_{1-\sin^2 x}\cos x$;

г) $y=3^{x+\frac{x^2}{|x|}}$.

4. Построить прямоугольный треугольник по данному острому углу и противолежащему катету.

5. Упростить выражение

$$\left(\frac{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}\right)^{-\frac{1}{2}}+\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},$$

если $3\pi<\alpha<4\pi$.

6. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x)=|x^2-|x||$ в точке с абсциссой -2.

7. При каких a справедливо неравенство

$$\int_1^a \frac{dx}{2\ [illegible]\ 1}<\ln(a-2)\ \ ?$$

Физика

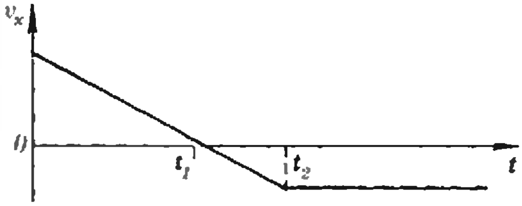
В зависимости от избранного факультета абитуриенты сдавали экзамен по физике либо письменно, либо устно. На письменный экзамен отводилось 4 астрономических часа.

Письменный экзамен

Вариант

1. Законы отражения и преломления света. Показатель преломления, его физический смысл.

2. Материальная точка может перемещаться прямолинейно вдоль оси X. По известному графику зависимости проекции v_x скорости данной точки от времени t (см. рис.) постройте графики зависимости проекции a_x ускорения и координаты x точки от времени. Начальные условия: при $t=0$ $x=0$.



3. Каждая из двух одинаковых сферических капелек воды имеет заряд, равный заряду электрона, причем сила электрического отталкивания капелек уравновешивает силу их взаимного тяготения. Определите радиус r капельки. Заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, гравитационная постоянная $G=6{,}67\times\times10^{-11}$ м^3/(кг · с^2), электрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м, плотность воды $\rho=1000$ кг/м^3.

4. Электродуговая печь потребляет ток $I=200$ А от сети, имеющей напряжение $U=220$ В. Последовательно с печью включен ограничивающий резистор сопротивлением $R=0{,}2$ Ом. Определите мощность P, потребляемую печью.

5. На тележку с песком общей массой $M=20$ кг, двигающуюся прямолинейно по горизонтальной плоскости со скоростью $|\vec{v}|=5$ м/с, падает вертикально с высоты $H=3$ м камень массой $m=5$ кг и застревает в песке. Определите количество теплоты Q, выделившееся при этом.

Задачи устного экзамена

1. Конькобежец, разогнавшись до скорости $|\vec{v}|=6$ м/с, въезжает накатом на ледяную горку. На какую максимальную высоту h он поднимется, если угол между наклонной плоскостью горки и горизонтом $\alpha=30°$, а коэффициент трения коньков о лед $\mu=0{,}1$?

2. Вертикальный прямой цилиндр закрыт сверху тяжелым поршнем. В цилиндре находится кислород, масса которого $m=2\cdot10^{-2}$ кг. После увеличения температуры на $\Delta T=100$ К поршень, имеющий площадь $S=10^{-2}$ м^2, поднялся на высоту $h=0{,}14$ м. Определите массу M поршня, если внешнее давление во время процесса не изменялось и равнялось $p_0=10^5$ Па. Трение поршня о стенки цилиндра можно не учитывать. Молярная масса кислорода $\mu=32\times\times10^{-3}$ кг/моль. Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль · К).

3. Рамка, имеющая форму равностороннего треугольника, помещена в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ ($|\vec{B}|=0{,}1$ Тл). Перпендикуляр к плоскости рамки составляет с направлением магнитного поля угол $\alpha=30°$. Определите длину a стороны рамки, если при равномерном уменьшении магнитного поля до нуля за время $\tau=0{,}01$ с в рамке индуцируется ЭДС $\mathscr{E}=10^{-3}$ В.

В. Нитусов,
В. Прохоренко,
В. Чудов

kvant.mccme.ru

kvant.mccme.ru

А. Салтовский

ЕС ЭВМ-семейство универсальных вычислительных машин

В настоящее время универсальные ЭВМ обычно проектируются и производятся семействами. Каждый представитель семейства имеет единые для всей семьи основные технические характеристики, но отличается от «родственников» производительностью.

В СССР и странах социалистического содружества наибольшее распространение получило семейство универсальных ЭВМ серии ЕС (Единая Система). Более десятка типов ЭВМ этой серии, имеющих различную производительность, совместимы с точки зрения используемых программ и данных. Семейство располагает широким набором периферийных устройств, применяемых практически во всех машинах серии. Все машины имеют единые конструктивно-технологические принципы построения.

Главная цель, которая ставилась при проектировании семейства, — охватить как можно больше областей применения ЭВМ так, чтобы стоимость машин и затраты на их изготовление находились в экономическом соответствии со скоростью решения, важностью и сложностью решаемых задач. Этой же цели служит единое программное обеспечение семейства, стоимость которого в наши дни превосходит стоимость технических средств. Принципиально важным в таких условиях оказывается общий *интерфейс* ввода-вывода — стандартизованная совокупность технических и программных средств связи между каналом и внешними устройствами, которая дает возможность организовать обмен информацией между ними в стандартной форме; это позволяет использовать в одной ЭВМ самые разнообразные по своему назначению внешние устройства.

Состав семейства

С 1969 года, когда между странами СЭВ было достигнуто соглашение о сотрудничестве в области вычислительной техники, за сравнительно небольшой промежуток времени были разработаны модели ЕС ЭВМ первой очереди — Ряд-1, а с 1973 года была начата разработка более совершенных моделей этой серии — Ряд-2.

Сегодня состав семейства выглядит так:

малые ЭВМ:
модели — ЕС-1010, ЕС-1020, ЕС-1021;
быстродействие — 10÷100 тысяч операций в секунду;
объем оперативной памяти — 64÷512 килобайтов;

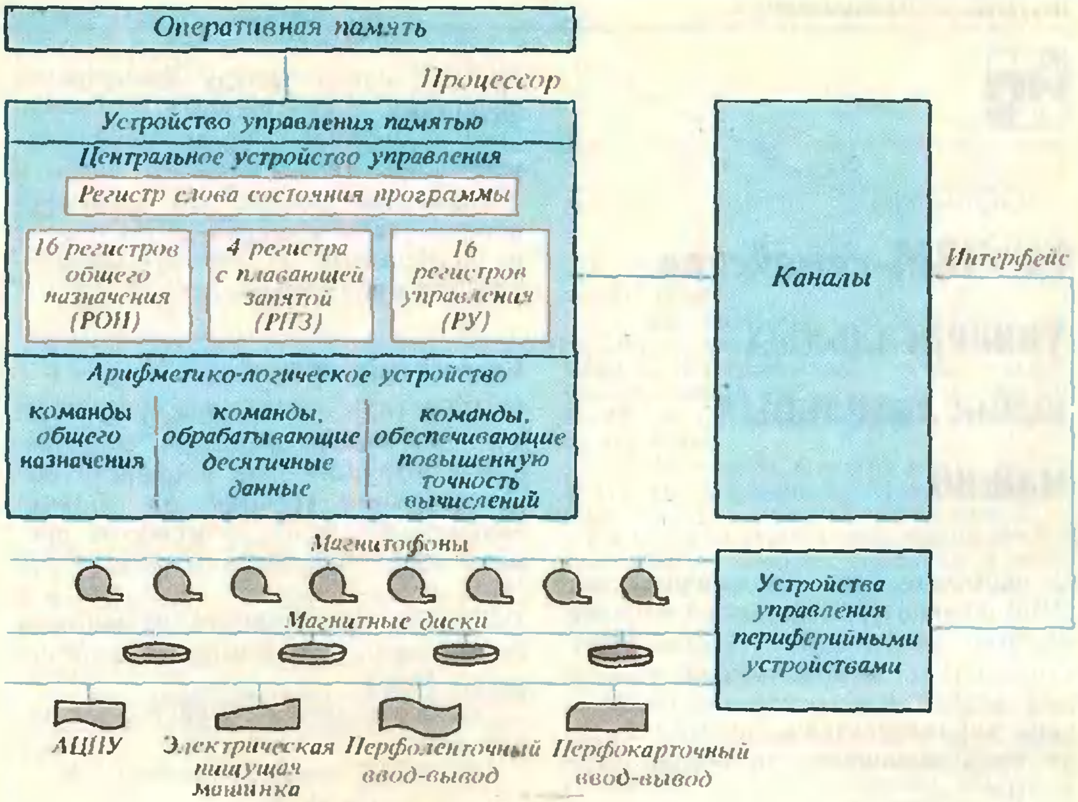
средние ЭВМ:
модели — ЕС-1022, ЕС-1030, ЕС-1032, ЕС-1033, ЕС-1035, ЕС-1040, ЕС-1045, ЕС-1055;
быстродействие — 80÷500 тысяч операций в секунду;
объем оперативной памяти — 128—2048 килобайтов;

большие ЭВМ:
модели — ЕС-1050, ЕС-1052, ЕС-1060, ЕС-1065;
быстродействие — 500 тысяч÷3 миллиона операций в секунду;
объем оперативной памяти — 512÷8192 килобайта.

Единство внешних устройств

Устройства ввода и вывода информации, применяемые в современных ЭВМ, многочисленны и разнообразны. Это и АЦПУ (алфавитно-циф-

kvant.mccme.ru



ровые печатающие устройства), и перфокарточные устройства ввода-вывода, и устройства ввода-вывода на перфоленте. В последние годы стали широко использоваться устройства непосредственного, диалогового общения оператора с ЭВМ — электрические пишущие машинки и алфавитно-цифровые дисплеи*). Все эти устройства существуют в семействе ЕС ЭВМ. Устройства ввода-вывода ЕС ЭВМ однотипны: каждое из них может быть с равным успехом подключено к любой из машин семейства. Точно так же соединяются с машинами внешние запоминающие устройства, которые в семействе ЕС ЭВМ представлены магнитными дисками и накопителями на магнитной ленте. Благодаря стандартности интерфейса они могут использоваться в разных моделях независимо от их производительности. Отличие, как правило, чисто количественное: более мощным парком внешних устройств располагают машины большей производительности. Так, например, объем внешней памяти на магнитных дисках составляет 15÷100 мегабайтов для ЕС ЭВМ малой производительности, а для машин большей производительности достигает нескольких сотен мегабайтов.

*) Более подробно о внешних устройствах рассказано в статье «Организация ввода и вывода в ЭВМ» («Квант», 1980, № 6).

Единство архитектуры

«Семейная» преемственность различных моделей ЕС ЭВМ хорошо видна на схеме (см. рисунок), где показан ряд обязательных для каждой модели устройств.

В качестве примера рассматривается общая структура моделей ЕС ЭВМ Ряда-2.

Основные элементы архитектуры ЕС ЭВМ Ряда-2 таковы: 1) процессор; 2) оперативная память; 3) канал ввода-вывода; 4) управление внешними устройствами; 5) внешние устройства.

Ядро системы — центральный процессор («Квант», 1980, № 5).

kvant.mccme.ru

Внутренняя организация процессора может отличаться от одной модели к другой. Это связано с тем, что производительность модели отражает стоимость затрат на ее изготовление. По аналогии, скажем, с кораблестроением, можно сказать, что совсем не обязательно придавать корпусу прогулочного катера ледокольную прочность — у каждого свои функции.

Программная совместимость между машинами разных моделей семейства ЕС ЭВМ обеспечивается тем, что для всех моделей реализована одна и та же система команд и использована одна и та же структура данных (см. статью «Трехадресные, одноадресные и... безадресные машины» в № 4 «Кванта» за этот год). В частности, каждый процессор в машинах ЕС ЭВМ имеет 16 регистров общего назначения и 4 регистра с «плавающей запятой»*) для обеспечения повышенной точности вычислений, а последние модели ЕС ЭВМ (Ряд-2) располагают в процессорах шестнадцатью регистрами управления; эти регистры недоступны обычным программам, но активно используются управляющей программой для организации вычислительного процесса и управления им.

Обязательной принадлежностью всех процессоров моделей ЕС ЭВМ является *регистр слова состояния программы*. Слово состояния программы, которое хранится в этом 64-разрядном регистре, предназначено для управления последовательностью исполнения команд, извлекаемых из оперативной памяти.

Обмен данными между оперативной памятью и внешними устройствами достигается с помощью канала (специализированного процессора ввода-вывода — см. упомянутую статью в «Кванте», 1980, № 6). Вмешательство процессора в эту процедуру минимально — он запускает операцию и анализирует результат в конце ее исполнения.

*) Это значит, что запятую, стоящую перед дробной частью числа, можно расположить в разных местах регистра.

Единство программного обеспечения

Система команд ЕС ЭВМ, единая для всего семейства, позволяет осуществлять широкий набор операций над числовыми данными повышенной точности, необходимыми в научных задачах и в учетно-экономических приложениях, и над произвольными символами, характерными для задач обработки текстовой информации.

Та же общая линия на стандартизацию внутри семейства и универсальность применений видна и в системах программирования на языках высокого уровня, которыми оснащаются машины ЕС ЭВМ. С незначительными модификациями на всех машинах семейства можно работать на языках программирования Фортран, Кобол, Алгамс, ПЛ/1. Сейчас многие пользователи машин ЕС получают возможность работать на языке Паскаль. Об этом языке будет подробно идти речь в Заочной школе программирования после летних каникул.

Говоря о программной совместимости машин семейства, важно отметить, что не все программы, написанные для ЕС ЭВМ Ряда-2, будут работать на машинах ЕС ЭВМ Ряда-1, так как старшие модели семейства содержат дополнительную группу команд, реализованную только на этих последних моделях. А вот программы ЕС ЭВМ Ряда-1 без всяких изменений могут обрабатываться на машинах ЕС ЭВМ Ряда-2. В этом случае говорят о программной преемственности «снизу — вверх».

В настоящее время ЕС ЭВМ представляет собой развитую систему вычислительных машин социалистических стран, систему, которая нашла широкое применение во всех отраслях народного хозяйства. Разработка новых поколений семейства продолжается. Основные устремления конструкторов сейчас направлены как на повышение производительности, так и на снижение себестоимости. Это связано прежде всего с переходом на новую конструктивно-технологическую базу — большие интегральные схемы.

kvant.mccme.ru

10-летие летней ФМШ в Белоруссии

«Если ты попал в «Зубренок»,
То талантлив был с пеленок.
Почитай статьи из «Кванта»
И проявятся таланты».

Так поется в шуточном гимне Республиканской летней физико-математической школы. Создана эта ФМШ в 1971 году по инициативе молодых ученых Академии наук БССР и Белорусского государственного университета, поддержанной ЦК ЛКСМ Белоруссии и Министерством просвещения республики. Начиная с того времени, каждый август юных математиков и физиков гостеприимно встречают хозяева пионерского лагеря ЦК ЛКСМ Белоруссии «Зубренок».

Пожалуй, нет в республике более подходящего места для летней ФМШ. Лагерь расположен в сосновом лесу на берегу живописнейшего озера Нарочь. Для занятий ФМШ предоставляются прекрасно оборудованные классные комнаты и кабинеты. «Зубренок» позволяет удачно сочетать отдых и творчество школьников.

В летнюю ФМШ приглашаются победители областных олимпиад школьников и лучшие учащиеся Республиканской заочной физико-математической школы. Преподаватели ФМШ — научные сотрудники институтов математики, тепло- и массообмена, физики Академии наук БССР. Они проявляют много выдумки и изобретательности в организации работы школы, постоянно ищут новые формы преподавания, но вместе с тем бережно сохраняют традиции школы.

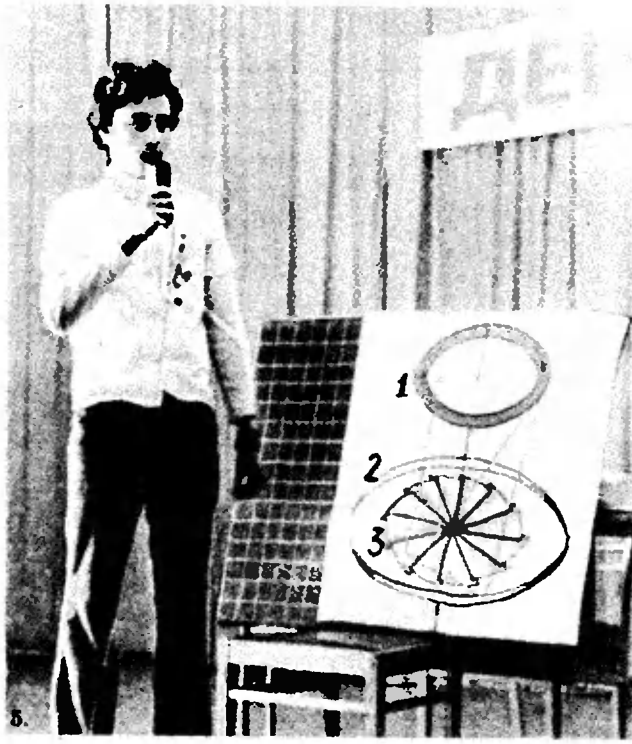
Учебная программа школы состоит из двух общих курсов (читаются утром поочередно, один по математике и один по физике) и нескольких специальных курсов (читаются вечером). Общие курсы близки к школьной программе, но не являются ее повторением. Открывать в известном неизвестное, учить видеть вещи и явления с разных сторон, прививать навыки исследования, учить думать — вот те задачи, которые решаются при изложении общего курса.

Специальные курсы, как правило, выходят за рамки школьной программы. Основное требование к ним — доступность и увлекательность. Они должны раскрывать красоту предмета, развивать у ребят стремление к расширению своих знаний, побуждать мыслить. Спецкурсы читаются как преподавателями общих курсов, так и специально приглашенными учеными АН БССР, Московского и Белорусского государственных университетов. Вот темы спецкурсов последних лет: «Введение в механику микромира», «Что такое гидро-аэродинамика», «Мир необычных жидкостей», «Элементы физики плазмы», «Специальная теория относительности», «Основы астрофизики», «Кварки и глюоны», «Начала топологии», «Неевклидовы геометрии», «Теория графов», «Элементы теории групп», «О раскраске карт», «Элементы теории Галуа» и др. Одновременно читается несколько спецкурсов (не меньше числа учебных отрядов), причем через две недели цикл спецкурсов полностью обновляется. Чтению спецкурсов предшествует их представление — «реклама». Ребята выбирают спецкурс по вкусу и интересам. За смену каждый учащийся может прослушать два специальных курса.

Кроме учебных занятий для ребят демонстрируются научно-популярные фильмы, организуются встречи с ведущими учеными республики. Так, в последние годы в гостях у летней ФМШ побывали вице-президент АН БССР академик АН БССР В. А. Белый, академик-секретарь физико-математического отделения АН БССР Герой Социалистического Труда, академик АН БССР Ф. И. Федоров, директор Института математики АН БССР, лауреат Ленинской премии, академик АН БССР В. П. Платонов, директор Института физики АН БССР, Герой Социалистического Труда, академик АН БССР Б. И. Степанов, лауреат Ленинской премии, академик АН БССР А. К. Красин и др. Приезжают и ребята в гости к белорусским ученым, для них организуются экскурсии в НИИ АН БССР. Обязательным для летней ФМШ является проведение физико-математической олимпиады.

Заканчивает свою работу летняя ФМШ традиционным праздником — Днем науки. Начинается он торжественной линейкой, на которой подводятся итоги школы, награждаются победители олимпиад. «Архимед» принимает у учащихся полушуточную-полусерьезную клятву на верность науке и обещание «всегда докапываться до истины, как бы глубоко она ни была зарыта». Нелегко при-

kvant.mccme.ru



5.

3.

1. Академик АН БССР Ф. И. Федоров поздравляет победителей олимпиады.
2. Пионерский салют «Архимеду».
3. Награды «Архимеда» — лучшим!
4. Конкурс отрядных гимнов.
5. «Защита» проекта вечного двигателя.

Фото О. Багинского и О. Рабиновича

ходится преподавателям на «уроке-наоборот» — своеобразной пресс-конференции — когда учащимся разрешается задавать своим преподавателям самые невероятные и каверзные вопросы. Конкурсы отрядных гимнов, «околонаучных» миниатюр, научных проектов, захватывающие эстафеты, острейшие физматбои, непременно сопровождаемые шутками и весельем, превращают День науки в неповторимый и надолго запоминающийся праздник.

Разъезжаются ребята домой, увозя новые знания, адреса друзей, веру в собственные силы, желание служить науке, добрую память о «Зубренке» и летней ФМШ.

За десять лет работы в летней ФМШ побывало около 1500 школьников республики. Сегодня многие из них уже работают в научно-исследовательских институтах республики, являются студентами различных вузов страны. Немало бывших учеников летней ФМШ и среди нынешних ее преподавателей.

Можно с уверенностью сказать, что летняя ФМШ в «Зубренке» оказывает значительное влияние на повышение интереса к физико-математическим наукам и развитие творческих способностей школьников Белоруссии, и накануне вступления в новое десятилетие пожелать ее ученикам и преподавателям дальнейших успехов.

4.

В. Гороховик, О. Рабинович, Т. Фисенко

kvant.mccme.ru

Математические соревнования в ФМШ при ЛГУ

Школьные олимпиады

В физико-математической школе-интернате № 45 при Ленинградском университете ежегодно, начиная с 1965 года проводятся школьные математические олимпиады.

На первом туре такой олимпиады предлагается восемь задач, пять из которых близки к задачам, решаемым на уроках. На решение задач первого тура отводится 5 часов.

Второй тур, в отличие от «письменного» первого тура, — «устный». Разумеется, никого не заставляют решать задачи устно, однако окончательное, «чистовое» решение задачи не записывается участником, а рассказывается двум членам жюри. Когда участник олимпиады начинает рассказывать решение какой-либо задачи, против его фамилии ставится знак «—», который на жаргоне жюри именуется «подход». Если задача решена правильно, то «—» перечеркивается вертикальной линией. Если же в решении обнаружена ошибка, то участник, возвратившись на место, может постараться исправить свое решение. В зависимости от того, решена задача с первого, второго или третьего подхода, участник получает оценку «+», «╪» или «$\ddagger$». Как правило, более трех подходов по одной задаче не допускается.

Эта форма проведения олимпиады имеет определенные преимущества. Ведь часто случается, что школьнику кажется, будто он решил задачу, и, записав неверное решение, он больше к задаче не возвращается. На устной олимпиаде участник имеет возможность исправить неверное решение, так что в итоге оказывается больше правильно решенных задач. Кроме того, устная олимпиада компактна: ее итоги подводятся через час-полтора после завершения тура.

Приведем несколько задач из школьных олимпиад разных лет (в скобках указываются номер олимпиады и номер тура).

1. Найдите множество центров окружностей радиуса 5, пересекающих данную полуокружность радиуса 2 в двух разных точках. (I, I).

2. Докажите, что $\sqrt{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}=\frac{1}{3}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{20}-\sqrt[3]{25})$. (II, 1)

3. Из точки A, не лежащей на прямой l, проведено 9 отрезков, концы которых лежат на l. Докажите, что, передвигая эти отрезки параллельно самим себе, нельзя составить из них девятиугольника. (III, 1)

4. Четыре деревни расположены в вершинах квадрата со стороной 10 км. Жители хотят соединить деревни системой дорог, но имеющихся в их распоряжении материалов достаточно для сооружения лишь 28 км дорог. Как они должны поступить? (IV, 2)

5. Сколько раз в сутки нельзя определить время по часам, если неизвестно, какая из стрелок — часовая, а какая — минутная? (V, 2)

6. Сколько цифр имеет наименьшее натуральное число, кратное 225, сумма цифр которого равна 225? (VI, 1)

7. Расстоянием от точки до фигуры называется расстояние от этой точки до ближайшей к ней точки фигуры. Найдите множество точек плоскости, равноудаленных от контура данного квадрата и отрезка, соединяющего середины двух противоположных сторон этого квадрата. (VII, 1)

8. Имеются двое песочных часов. На одних песок пересыпается за 7 минут, на других — за 11 минут. Отмерьте 17 минут, начиная с заданного момента времени. (VIII, 1)

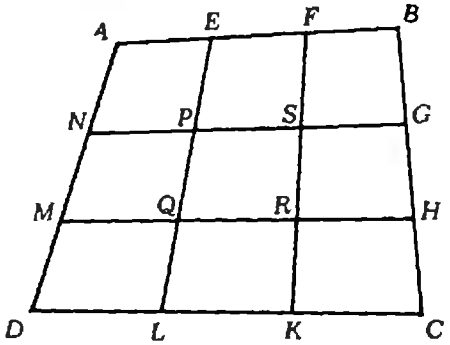
9. Существует ли такая функция f, что $D(f)=\mathbf{R}$ и для любого числа a уравнение $f(x)=a$ имеет ровно два корня? (IX, 1)

10. Существует ли такая функция f, что $D(f)=\mathbf{R}$ и для любого числа x $f(f(x))=x^2+2$? (X, 2)

11. Прямая разбита на отрезки, каждый из которых окрашен в красный или синий цвет (концы отрезков окрашены в оба цвета). Докажите, что хотя бы один из цветов таков, что среди расстояний между точками этого цвета встречаются все положительные расстояния. (XI, 1)

12. a и b — натуральные числа. Докажите, что существует такое натуральное число n, что у чисел na и nb одинаковая сумма цифр. (XII, 2)

13. Каждая сторона выпуклого четырехугольника поделена на три равные части и точки деления соединены, как показано на рисунке. Докажите, что $(PR)\parallel(AC)$ и $(QS)\parallel(BD)$. (XIII, 2)



kvant.mccme.ru

14. $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — положительные числа. Докажите, что

$$a_1^{na_1} a_2^{na_2} \cdot \ldots \cdot a_n^{na_n} \geqslant (a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_n)^{a_1+a_2+\ldots+a_n}.$$

(XIV, 1)

15. Докажите, равенство

$$\frac{\left(1^4+\frac{1}{4}\right)\left(3^4+\frac{1}{4}\right)\left(5^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(11^4+\frac{1}{4}\right)}{\left(2^4+\frac{1}{4}\right)\left(4^4+\frac{1}{4}\right)\left(6^4+\frac{1}{4}\right)\cdot\ldots\cdot\left(12^4+\frac{1}{4}\right)}=\frac{1}{313}.$$

(XV, 2)

16. В выпуклом шестиугольнике $ABCEHK$ углы A, C и H равны. Кроме того, $|AB|=|BC|$, $|CE|=|EH|$, $|HK|=|KA|$. Докажите, что в этот шестиугольник можно вписать окружность. (XVI, 2)

Математические бои

О правилах проведения математического боя «Квант» уже писал (1972, № 10). У нас в школе в бое обычно участвуют команды двух классов. Основное отличие математического боя от олимпиады состоит в том, что задачи здесь решаются коллективно. С утра обе команды получают один и тот же комплект задач и в двух разных помещениях начинают их решать. После четырех-пяти часов, отводимых на решение задач, начинается вторая часть математического боя, в которой команды защищают свои решения и ищут ошибки в решениях соперников.

Приведем несколько задач одного из математических боев.

1. Докажите, что уравнение $x^3+y^3+z^3=2$ имеет бесконечно много решений в целых числах.

2. Правильный треугольник площади 1 лежит внутри выпуклого семиугольника площади 1,0000001. Докажите, что хотя бы один из углов семиугольника больше 139°.

3. Все десятизначные числа выписаны в порядке возрастания без пропусков на бумажной ленте. При каком наименьшем n по любому куску ленты, на котором написано n цифр, можно определить, откуда этот кусок вырван?

4. m, n — натуральные числа. Докажите, что если m нечетно, то числа 2^m-1 и 2^n+1 взаимно просты.

Заочные конкурсы

В течение всего учебного года в школе проводится заочный конкурс по решению задач. Каждую неделю участники конкурса получают очередное задание из пяти задач. Решения этих задач представляются через неделю в письменном виде. Вместе с формулировкой очередного задания объявляются баллы и проводится разбор задач, предложенных две недели назад. Решение каждой задачи оценивается по пятибалльной системе.

Вот пример одного из заданий 1979/80 учебного года:

1. Дана окружность, точка C на ней и точки A и B, не лежащие на этой окружности. Построить на окружности такую точку S, что прямая SC делит пополам угол ASB.

2. Натуральное число n не является степенью простого числа. Докажите, что число $\underbrace{11\ldots1}_{n\text{ единиц}}$ имеет по крайней мере 8 различных натуральных делителей.

3. Докажите, что прямоугольник с иррациональным отношением сторон нельзя разрезать на квадраты.

4. При каких натуральных m и n в десятичной записи каждого из чисел m^n и n^m ровно $\frac{m+n}{2}+1$ цифр?

5. Требуется огородить забором длины a прямоугольный участок и затем к построенному забору пристроить еще один забор длины a так, чтобы его стороны шли параллельно сторонам первого забора и чтобы общая площадь, огороженная двумя заборами, была наибольшей.

Л. Курляндчик

Вечерняя физическая школа

Вечерняя физическая школа (ВФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 8—10 классы на 1981/82 учебный год.

Основная цель ВФШ — помочь учащимся глубже изучить физику в объеме школьной программы. Занятия проводятся в форме лекций и семинаров. Кроме того, на лекциях ведущих ученых факультета учащиеся ВФШ ознакомятся с основными направлениями современной физики, смогут посетить научные лаборатории.

Успешно закончившие обучение получают справку об окончании ВФШ.

Прием в ВФШ производится по результатам собеседования, которое будет проводиться с 23 сентября. Для поступления в школу необходимо лично заполнить заявление в комитете ВЛКСМ физфака МГУ и сдать две фотокарточки размером 3×4 см. Заявления будут приниматься с 3 по 21 сентября ежедневно (кроме воскресенья) с 16.00 до 18.00.

Адрес ВФШ: 117234, Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ВФШ. Телефон для справок: 139-26-56.

kvant.mccme.ru

Спрашивайте — отвечаем

Много делает «Квант» для совершенствования математических знаний учащихся, оказывает большое содействие учителям в обучении школьников. Но вопросы письменного оформления решений задач, доказательств теорем, особенно с использованием современной символики, еще ждут своего рассмотрения на страницах журнала.

...В этом отношении журнал мог бы серьезно помочь и ученикам и учителям. Например, параллельно с изложением теоретического материала и публикацией заданий экзаменационных вариантов, стоило бы давать образцы письменных решений задач и доказательств теорем, показать, как абитуриентам следует оформлять свои работы на вступительных экзаменах в вузы.

В. П. Данищук,
учитель математики ПТУ
(п. Отыня
Ивано-Франковской обл.)

Письма многих читателей в «Квант» в той или иной форме содержат тот же вопрос: как нужно оформлять письменную работу на вступительном экзамене в вуз по математике? Школьники, абитуриенты, учителя просят редакцию опубликовать «образцы экзаменационных решений», объяснить, как требуют решать конкурсные задачи экзаменационные комиссии вузов.

Ответ на этот вопрос очень короток и прост: экзаменационные комиссии требуют решать задачи правильно. Экзаменаторов интересует уровень знаний поступающего в пределах, предусмотренных программой вступительных экзаменов по математике, его умение верно решать задачи и проводить доказательства, математически грамотно излагать свои рассуждения. Нет, да и быть не может каких-то особых канонов, регламентирующих формальный порядок записи решений, рассуждений или вычислений в экзаменационной работе, требующих обязательного использования специальной «современной символики» и т. п.

Конечно, это не значит, что в экзаменационной работе допустимо писать как попало. Следует придерживаться естественных общечеловеческих норм — оформлять работу аккуратно, чтобы ее легко было читать. Слишком часто приходится видеть небрежно выполненные работы, в которых формулы записаны беспорядочно, без объяснений, текст написан настолько неразборчиво, что поступающий потом с трудом расшифровывает его сам! Все это свидетельствует о несерьезном отношении абитуриента к делу, о его неумении работать, о неуважении прежде всего к собственному труду. И результат такого «труда» обычно бывает печальным, поскольку мало кому удается точно ориентироваться в подобном хаосе собственных записей и не допустить ошибки.

Читатели часто спрашивают, насколько подробно надо излагать решение. Детальные рекомендации здесь дать трудно, но ясно одно: следует стремиться исчерпывающе и логически правильно объяснить все этапы необходимых рассуждений. Так, в алгебраическом примере полезно пояснить, что из чего и каким образом получается при преобразовании, указать возникающие ограничения на значения переменных; в геометрической задаче целесообразно назвать применяемые по ходу дела теоремы, доказать используемые промежуточные геометрические факты, при необходимости сделать вспомогательные чертежи и т. д.

Иногда школьников приучают к неким формальным «схемам записи решений», отступать от которых не дозволяется. Вот только один (довольно распространенный) пример такого формализма: перед решением уравнения обязательно выписывать область допустимых значений переменной, независимо от того, понадобится это в ходе решения или нет. Понятно, что подобные рекомендации не диктуются ни соображениями здравого смысла (иногда исчерпывающее решение уравнения бывает много проще, чем отыскание его ОДЗ), ни требованиями математической строгости.

И последний, интересующий многих, вопрос: если задача допускает несколько разных решений, то какое из них предпочтительнее? Например, девятиклассница Е. Серебряник (Москва) прислала в редакцию четыре решения одной геометрической задачи и спрашивает: «Хотелось бы знать,... какой способ наиболее подходящий в девятом классе, а какой — в десятом?» И в девятом, и в десятом классе и на вступительных экзаменах хорош любой способ решения, лишь бы он был правильным. Подчеркнем, что решение задач приемных экзаменов не требует использования каких-либо сведений, выходящих за рамки школьной программы.

Н. Розов

kvant.mccme.ru

Электроизмерительные приборы

1. $U_2=3$ В; $U_3=1$ В.

2. $r=\dfrac{I_1(R_1+R_2)-I_2R_1}{I_2-I_1}=8$ Ом.

3. $R_{ш2}=\dfrac{I_1R_{ш1}R_д/3}{I_2(R_{ш1}+R_д/3)-I_1R_{ш1}}=25$ Ом.

4. $R_{д2}=\dfrac{U_2}{U_1}R_{д1}+\left(\dfrac{U_2}{U_1}-1\right)\dfrac{r_гR_ш}{r_г+R_ш}=$
$=10R_{д1}+\dfrac{9r_гR_ш}{r_г+R_ш}.$

Семнадцать задач на смекалку

1. Из условия следует, что $\frac{5}{8}-\frac{3}{8}=\frac{1}{4}$ длины моста человек пробегает за время, в течение которого автомобиль проезжает всю длину моста. Следовательно, скорость человека равна $\frac{1}{4}\cdot 60=15$ (км/ч).

2. Если предположить, что мяч покоится в пункте A, вода неподвижна, а мост подплывает к мячу со скоростью течения реки, то спортсмен плывет десять минут в одну сторону и столько же времени — обратно (вода неподвижна), «догоняя» мяч в пункте A под мостом. Значит, мост «плыл» со скоростью $\frac{1000}{20}=50\ \frac{м}{мин}$. Это и есть скорость течения реки.

3. Пусть первоначально в колбе было $x\%$ соли, то есть $\frac{x}{100}=\frac{X}{V}$, где X — масса соли, а V — масса раствора. После указанных в задаче действий масса раствора станет равной $V-\frac{V}{n}+\frac{V}{2n}$, а так как масса соли X не изменится, мы получим

$$\frac{x+p}{100}=\frac{X}{V-\frac{V}{n}+\frac{V}{2n}}=$$
$$=\frac{X}{V}\cdot\frac{2n}{2n-1}=\frac{x}{100}\cdot\frac{2n}{2n-1},$$

откуда $x=p(2n-1)$.

4. Пусть прямоугольник $OABC$ (рис. 1) изображает количество заданной работы, $OAED$ — количество работы, выполненной до подключения x добавочных механизмов. Остальную работу, изображенную прямоугольником $CBED$, выполнили $27+x$ механизмов. Следовательно, второй период работ изобразится прямоугольником $DHGF$ ($|DH|=27+x$), равновеликим прямоугольнику $DEBC$, у которого $|DF|=(35-11)-6=18$, так как эта часть работы выполнена на 6 часов раньше срока. Далее,

$$S_{FKBC}=S_{EHGK}$$
$$27\cdot 6=18\cdot x$$
$$x=9.$$

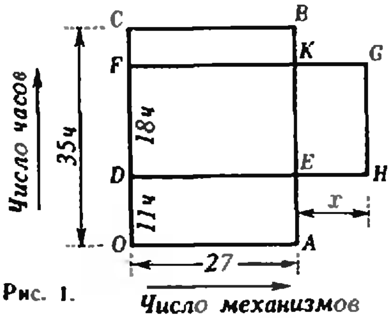


Рис. 1.

5. Если x — масса куска, отрезаемого от каждого из кусков сплава массы m, а p и q — процентные содержания меди в первом и втором кусках соответственно, то, как легко понять,

$$p(m-x)+qx=q(m-x)+px,$$

откуда $x=\frac{m}{2}$.

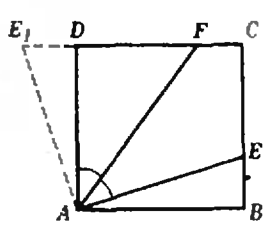
6. Каждый кусок сплава серебра и золота характеризуется двумя числами: массой серебра x и массой всего куска y, то есть вектором $(x; y)$. Когда мы сплавляем вместе два куска, соответствующие векторы, очевидно, складываются. Если m_1 и m_2 — искомые массы первого и второго сплава, то мы должны получить вектор $\left(8\cdot\frac{5}{11+5};\ 8\right)=\left(\frac{5}{2};\ 8\right)$, складывая векторы $\left(m_1\cdot\frac{2}{5};\ m_1\right)$, $\left(m_2\cdot\frac{3}{10};\ m_2\right)$, что приводит к системе

$$\begin{cases} m_1+m_2=8\\ \dfrac{3m_2}{10}+\dfrac{2m_1}{5}=\dfrac{5}{2}\end{cases}$$

откуда $m_1=1$, $m_2=7$.

7. Поворотом $R_A^{90°}$ отобразим $\triangle ABE$ на $\triangle ADE_1$ (рис. 2): из $\widehat{AFD}=\widehat{FAB}=\widehat{FAE_1}$ следует $|AE_1|=|E_1F|$. Из свойств поворота $|AE|=|AE_1|$ и $|BE|=|DE_1|$. Значит, $|DF|+|BE|=|DF|+|DE_1|=|E_1F|=|AE_1|=|AE|=a$.

8. а) Пусть AM, BN и CP — медианы данного $\triangle ABC$ (рис. 3), O — точка их пересечения. На продолжении AM за точку M возьмем точку O' такую, что $|MO'|=|MO|$. Длины сторон треугольника BOO' составляют по $\frac{2}{3}$ длин медиан $\triangle ABC$. Легко видеть, что длины медиан треугольника BOO' равны половинам



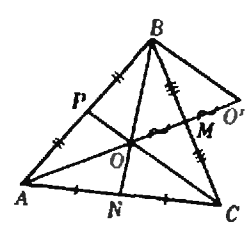


Рис. 2. Рис. 3.

kvant.mccme.ru

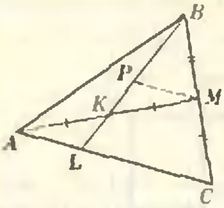


Рис. 4.

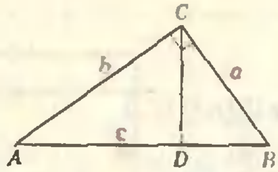


Рис. 5.

длин сторон $\triangle ABC$. Поэтому в треугольнике, полученном из $\triangle BOO'$ подобием с коэффициентом $\frac{3}{2}$, длины сторон будут равны длинам медиан $\triangle ABC$ (значит, это искомый $\triangle A_1B_1C_1$), а длины его медиан — $\frac{3}{4}$ длин сторон $\triangle ABC$.

б) Значит, в треугольнике, полученном из $\triangle ABC$ подобием с коэффициентом $\frac{3}{4}$, длины сторон как раз будут равны длинам медиан $\triangle A_1B_1C_1$, то есть этот треугольник и есть $\triangle A_2B_2C_2$.

в) По построению $S_{\triangle A_2B_2C_2} = \frac{9}{16} S_{\triangle ABC} = \frac{9}{16} S$. Треугольник $A_1B_1C_1$ можно построить также при помощи векторов: $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$; $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; следовательно, $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} = 0$; значит, если от какой-нибудь точки A_1 отложить вектор $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AM}$ и затем от точки B_1 отложить вектор $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{BN}$, получим $\overrightarrow{C_1A_1} = \overrightarrow{CP}$, причем, ввиду неколлинеарности векторов $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{BN}$, $\overrightarrow{CP}$, точки A_1, B_1, C_1 не лежат на одной прямой; треугольник $A_1B_1C_1$ будет искомым.

9. Ясно, что $S_{AMC} = \frac{1}{2}$ (см. рис. 4). Для нахождения S_{LKMC} достаточно найти площадь треугольника AKL и вычесть ее из $\frac{1}{2}$. Проведем $[MP] \parallel (AC)$; $\triangle AKL$ очевидно, конгруэнтен $\triangle PMK$ и поэтому (PM — средняя линия в $\triangle BLC$) $|AL| = \frac{1}{3}|AC|$. Значит, $S_{AKL} = S_{ALB} - S_{AKB} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$, $S_{KLMC} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$.

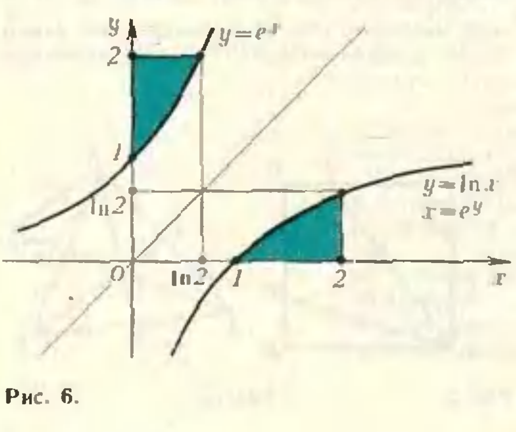


Рис. 6.

10. Пусть P — периметр $\triangle ABC$. Поскольку $\triangle ACD \sim \triangle CBD \sim \triangle ABC$, их периметры относятся как сходственные стороны. Поэтому (см. рис. 5) $\frac{b}{P_1} = \frac{a}{P_2} = \frac{c}{P}$. Отсюда $\frac{P_1}{P} = \frac{b}{c}$, $\frac{P_2}{P} = \frac{a}{c}$. Возведя в квадрат полученные пропорции и складывая их, получим

$$\frac{P_1^2 + P_2^2}{P^2} = \frac{a^2+b^2}{c^2} = 1,$$

$$P = \sqrt{P_1^2 + P_2^2}$$

11. Заметим, что $\sqrt[3]{6} < 2$, а $\sqrt{6} < 3$. Заменив теперь последний кубический корень в первом слагаемом на 2, а последний из квадратных корней второго слагаемого на 3, сразу получим требуемое.

12. а) Рассмотрим единичные векторы $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$, коллинеарные векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{CA}$ соответственно. Поскольку $(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3)^2 \geqslant 0$, $\vec{e}_1^{\,2} + \vec{e}_2^{\,2} + \vec{e}_3^{\,2} + 2\vec{e}_1\vec{e}_2 + 2\vec{e}_2\vec{e}_3 + 2\vec{e}_1\vec{e}_3 = 3 + 2\cos(\pi - B) + 2\cos(\pi - C) + 2\cos(\pi - A) \geqslant 0$, откуда и следует нужное неравенство.

б) Указание. Воспользуйтесь неравенством $(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})^2 \geqslant 0$, где O — центр описанной окружности.

13. При $n \geqslant 3$

$$0 < \frac{2^n}{n!} = \frac{2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} < 2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}.$$

Так как $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} \to 0$, искомый предел существует и равен нулю.

14. Очевидно, функция, приведенная в условии, — многочлен степени $\leqslant 2$. Поскольку $f(a) = f(b) = f(c) = 1$, $f(x) = 1$ при всех x.

15. а) $F'(\alpha) = 3\sin^2\alpha \cdot \cos 3\alpha \cdot \cos\alpha - 3\sin^3\alpha \sin 3\alpha + 3\cos 3\alpha \cdot \cos^3\alpha - 3\cos^2\alpha \cdot \sin 3\alpha \cdot \sin\alpha = 3\sin^2\alpha(\cos 3\alpha \times \cos\alpha - \sin 3\alpha \cdot \sin\alpha) + 3\cos^2\alpha(\cos 3\alpha \times \cos\alpha - \sin 3\alpha \sin\alpha) = 3\cos 4\alpha$. Поэтому $F(\alpha) = \frac{3}{4}\sin 4\alpha + C$. Для нахождения C заметим, что $F(\alpha) = 0$. Значит, $C = 0$ и $F(\alpha) = \frac{3}{4}\sin 4\alpha$.

б) Решая аналогично предыдущей задаче, получаем $f(x) = 2$.

16. Чтобы найти искомую площадь, надо либо проделать симметрию около прямой $y = x$ (рис. 6), либо рассматривать криволинейную трапецию «над осью ординат» (тогда ее будет ограничивать кривая $x = e^y$). Вычитая из площади прямоугольника $2\ln 2$ площадь криволинейной трапеции:

$\int_0^{\ln 2} e^x dx$ (при первом способе) или $\int_0^{\ln 2} e^y dy$ (при втором способе), получаем ответ $2\ln 2 - 1$.

17. Запишем уравнение, равносильное исходному:

$$x = \sqrt[3]{2\sqrt[3]{2x-1} - 1}.$$

Пусть $f(x) = \sqrt[3]{2x-1}$. Наше уравнение имеет вид $x = f(f(x))$. Докажем, что оно равносильно уравнению $x = f(x)$. Ясно, что всякий корень второго уравнения удовлетворяет исходному. Если же x_0 — корень уравнения $x=f(f(x))$, но $f(x_0)\neq x_0$, то либо $f(x_0)>x_0$, либо $f(x_0)<x_0$. Поскольку f возрастает, в первом случае получаем $x_0=f(f(x_0))>f(x_0)$, во втором $f(x_0)>f(f(x_0))=x_0$ — противоречие. Решая уравнение $x^3=2x-1$ или $x^3-2x+1=(x-1)(x^2+x-1)=0$, получаем ответ $\left\{1, \frac{-1\pm\sqrt5}{2}\right\}$.

Московский автомеханический институт

Математика

Вариант 1

1. $\frac{3}{8}\pi r^2$. 2. $\{(3;2)\}$. 3. $y=\frac{(8-x)^2}{2}-2$. Указание. Выразите координаты $(x';y')$ образа точки $(x;y)$ при симметрии относительной прямой $x=a$. 4. $[2;9[\ \cup\ ]9;+\infty[$. 5. 2; $\alpha\neq\frac{\pi}{2}k$ $(k\in\mathbf{Z})$.

Вариант 2

1. $\ln 2$. 2. $y=x^2$. Указание. Выразите координаты $(x';y')$ образа точки $(x;y)$ при параллельном переносе $\vec{p}=a\vec{i}+b\vec{j}$. 3. 23. 4. $]-\infty;0]$. 5. $\operatorname{tg}^3\alpha$; $\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$.

Задачи устного экзамена

1. $\{0,1,2,3,4\}$. 2. Окр $(0,2)$. 3. $2<\lg 283<3$. 4. $x_n=3n-1$. 5. $y=-\frac{1}{4}$. 6. $x-\cos x+C$. 7. $\approx 2{,}03$. 8. $\left]\frac{9}{7};+\infty\right[$.

Физика

1. Центр тяжести системы находится на расстоянии

$$x=\left(R+\frac{l}{2}\right)\frac{m_2-m_1}{m_1+m_2+m_3}=4\ \text{см}$$

от середины стержня, ближе к более тяжелому шару.

2. $A=(m-\varrho V)g(H-0{,}5\sqrt[3]{V})+(m-0{,}5\varrho V)g\sqrt[3]{V}+mg(h-0{,}5\sqrt[3]{V})=147$ Дж. Указание. При выходе куба из воды значение силы Архимеда изменяется от ϱVg до 0.

3. $m=\frac{c\varrho V(t_1-t_2)}{\lambda}\frac{\tau_2}{\tau_1}-\frac{c\varrho Vt_2}{\lambda}\approx 0{,}6$ кг.

4. $|\vec{v}|=\frac{Ns}{\eta mq}\approx 9{,}7$ м/с.

5. $|\vec{E}|=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\left(\frac{q_1}{R_1^2}\right)^2+\left(\frac{q_2}{R_2^2}\right)^2}\approx 9{,}2\cdot 10^5$ В/м.

6. $q=\left(\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}+C_3\right)U=1{,}25$ мКл.

7. $\alpha=\frac{U/I-R_0}{R_0t}\approx 0{,}005$ К

8. $m=\frac{\eta UI\tau}{c|t|+\lambda}\approx 0{,}9$ кг.

9. $n_2=n_1\operatorname{tg}\alpha\approx 1{,}4$.

10. $f=\frac{Rd}{2d-R}=54$ см.

Московский гидромелиоративный институт

Математика

Вариант 1

1. 18. 2. $\{2\}$. 3. $\frac{4}{3}$. 4. $\frac{\sqrt2}{2}$.

Вариант 2

1. 26. 2. $]-\infty;-2[$. 3. $\{-1\}$. 4. Высота конуса равна $\frac{4}{3}R$.

Физика

1. $|\vec{v}_0|=gt/2\approx 15$ м/с; $h_{max}=gt^2/8\approx 11{,}2$ м.

2. $|\vec{v}|=\frac{|M|\vec{v}_1|-m|\vec{v}_2||}{m+M}\approx 0{,}3$ м/с; тележка покатится в сторону первоначального движения шара.

3. $|Q|=q/4=5\cdot 10^{-11}$ Кл.

4. $|\vec{v}_0|=\sqrt{|\vec{v}|^2-\frac{2q(\varphi_1-\varphi_2)}{m}}\approx 0{,}17$ м/с.

Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии

Математика

Вариант 1

1. $\left\{\frac{3-\sqrt{73}}{4}, 0, \frac{3}{2}, \frac{3+\sqrt{73}}{4}\right\}$. 2. $\left]-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right[\ \cup\ \left]\frac{1}{2};1\right[\ \cup\ \left]\frac{3}{2};+\infty\right[$. 3. $\sqrt{\frac{3}{2}}$. Указание. Центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина его гипотенузы. 4. $x_1=-\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x_2=\pi l$ $(k, l\in\mathbf{Z})$. 5. $\frac{19}{24}$.

Вариант 2

1. $\left\{0, \frac{1}{2}\right\}$. 2. $\left]0;\frac{1}{100}\right[\ \cup\ \left]\frac{1}{100};\frac{1}{10}\right[$. 3. $(6;-2;4)$, $(-6,2,-4)$. 4. $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$. 5. На промежутках $]-\infty;-2]$ и $[-1;+\infty[$ функция возрастает, на промежутках $\left[-2;-\frac{3}{2}\right[$ и $\left]-\frac{3}{2};-1\right]$ — убывает.

Вариант 3

1. $\{18\}$. 2. $]-\infty;1[$. 3. $x_1=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x^2=\pi l$ $(k, l\in\mathbf{Z})$. 4. $x=0$, $y=2$. 5. $4\ln 2$.

Московский институт стали и сплавов

Математика

Вариант 1

1. $]-\infty;-1[\ \cup\ ]6;+\infty[$. 2. $\{0,-2\}$. 3. $2\arcsin\frac{\sqrt3-1}{2}$. 4. $\left(\frac{1}{2};\frac{7}{4}\right)$. Указание. Касательная к данной параболе в точке C параллельна (BD). 5. $x=\arccos\frac{5}{13}+2\pi k$

kvant.mccme.ru

$(k \in \mathbf{Z})$, $y=2$. Указание. $a \sin x + b \cos x \leqslant \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$.

Вариант 2

1. $\{8\}$. **2.** $[2; 3]$. **3.** Пассажирский — 21 ч, товарный — 28 ч. **4.** $(2; 1)$. Указание. $\overline{BH} = \overline{AH} - \overline{AB}$. 5. $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$.

Указание. Уравнение $\cos \frac{x}{4} = \frac{1}{2}$ имеет на интервале $]-5\pi; 11\pi[$ четыре корня; при $a \neq \frac{1}{2}$ они являются точками экстремума, при $a = \frac{1}{2}$ — не являются.

Вариант 3

1. 1. **2.** $\left\{\frac{7+\sqrt{41}}{2}\right\}$. **3.** $\left\{\frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi, \frac{5}{2}\pi\right\}$. **4.** $]\log_5 4; 1[\cup]\log_5 6; \log_5 12[$. **5.** $(0; -2; 0)$ или $(2; 2; 2)$.

Вариант 4

1. $]-\infty; -1[$. **2.** $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x_2 = (-1)^l \frac{\pi}{6} + \pi l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$. **3.** $\left\{\left(\frac{4}{3}; \frac{2}{3}\right)\right\}$.
4. Минимальное расстояние (при $p=-2$, $q=0$) равно 1. **5.** $\frac{\sqrt{15}}{2}$ см^2. Указание. Продолжите медиану — достройте до параллелограмма.

Вариант 5

1. $x_1 = \pi k$, $x_2 = \pm \frac{\pi}{3} + \pi l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$. **2.** $\left]-\frac{5}{2}; 1\right[$. **3.** $8a^2 \cos \alpha \cdot \cos^2 \frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}$. **4.** 9.
5. $\left\{\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi k; \frac{1}{2}\right), \left(\operatorname{arctg} 7 + 2\pi l; -\frac{1}{2}\right)\right\}$ $(k, l \in \mathbf{Z})$. Указание. Обозначив 2^y через u, 2^{-y} — через v, выразите u и v через $\sin x$ и $\cos x$; затем из равенства $u \cdot v = 1$ получится уравнение относительно x. Учтите, что годятся только те корни этого уравнения, при которых $u > 0$.

Физика

1. $N = N_A \frac{pV}{RT} \approx 3{,}7 \cdot 10^5$ (здесь $N_A = 6{,}02 \times \times 10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро и $R = 8{,}31$ Дж/(моль · К) — универсальная газовая постоянная).

2. $C = B \frac{UFnm}{\eta M} \approx 2{,}53$ рубля (здесь $F = 96\,500$ Кл/моль — постоянная Фарадея).

3. $R = \frac{(|\vec{v}_0|^2 + g^2\tau^2)^{3/2}}{g|\vec{v}_0|} \approx 638$ м.

4. $\Delta\varphi_1 = \Delta\varphi \frac{2hd}{l(l_1 + l/2)} = 54$ В.

5. $\Delta\varphi = \frac{IM|\vec{B}|}{eN_A\rho a} \approx 4{,}6 \cdot 10^{-6}$ В (здесь $e = 1{,}6 \times \times 10^{-19}$ Кл — заряд электрона, $N_A = 6{,}02 \cdot 10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро).

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Вариант 1

1. 2) $\frac{1}{3}$.

2. $\frac{3}{\lg 7}$. Указание. $7^{\lg 2} = 2^{\lg 7}$.

3. 1) Удовлетворяет. 2) $y = \sqrt[3]{6x+3}$. Указание. $(y^3)' = 3y^2 \cdot y'$.

4. 1) 2,4. 2) $\left(\frac{5}{3}; \frac{5}{9}\right)$. Указание. Выразите расстояние между искомой точкой A $(x_0; 2x_0 - x_0^2)$ на параболе и прямой l как расстояние между точкой A и точкой пересечения перпендикуляра, опущенного из нее на прямую l (угловые коэффициенты k_1, k_2 перпендикулярных прямых связаны соотношением $k_1 k_2 = -1$). Можно также показать, что касательная к данной параболе в точке A параллельна прямой l (приравняв к нулю производную квадрата расстояния, вы получите условие перпендикулярности соответствующих векторов).

5. 1) $\left\{0; \frac{\pi}{3}\right\}$. 2) $]-\infty; -1[\cup [5; +\infty[$.

Указание. Данное уравнение равносильно уравнению $\sin x\,[4\cos^2 x + 2\cos x - (a+1)] = 0$. Поэтому a удовлетворяет требуемому условию, если трехчлен $f(t) = 4t^2 + 2t - (a+1)$ не имеет корней на промежутке $[0; 1[$. Из того, что вершина графика этого трехчлена имеет абсциссу $-\frac{1}{4}$, следует, что должно быть $f(0) \cdot f(1) > 0$ (рис. 7, *а*—*б*) или $f(1) = 0$ (рис. 7, *в*).

Вариант 2

1. $y = -\sqrt{3}x + \frac{\pi\sqrt{3}+3}{2}$.

2. Периодические: $2^{\cos x}$, $1 - 5 \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ и $3 \sin x - \cos 2x$, период — 2π, это можно проверить непосредственным расчетом. Непериодичность функций $2x^2 - 1$ и $2x^3 + x + 2$ следует из того, что свои значения они принимают не бесконечное число раз. Непериодичность функции $\cos 2^x$ — из того, что $\cos 2^x > 0$ при $x < 0$ и $\cos 2^x = 0$ при $x = \log_2 \frac{\pi}{2}$.

3. 1) $\sqrt{10} + 2\sqrt{5} + \sqrt{34}$. 2) $(0; 0)$. Замечание. Точку можно искать исследованием производной, но можно и геометрически: введем точку C $(0; -2)$; $|AM| + |MB| = |CM| + |MB| > |CB|$, если $M \notin (BC)$; если же

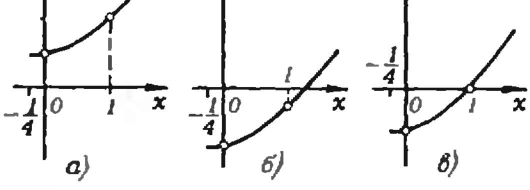


Рис. 7.

$M \in (BC)$, то есть M — начало координат, то $|AM| + |MB| = |CB|$.

4. 1) $\sin 1° + \sin 4° < \sin 2° + \sin 3°$. 2) $\sin^2 1° + \sin^2 4° > \sin^2 2° + \sin^2 3°$. 3) $\sin^3 1° + \sin^3 4° > \sin^3 2° + \sin^3 3°$. Решение. Чтобы доказать неравенство $\sin^3 1° + \sin^3 4° > \sin^3 2° + \sin^3 3°$, перепишем его в виде $\sin^3 4° - \sin^3 3° > \sin^3 2° - \sin^3 1°$; переведем его «в радианы»: $\sin^3\left(4\frac{\pi}{180}\right) - \sin^3\left(3\frac{\pi}{180}\right) > \sin^3\left(2\frac{\pi}{180}\right) - \sin^3\left(\frac{\pi}{180}\right)$ или $\sin^3(4\alpha) - \sin^3(3\alpha) > \sin^3(2\alpha) - \sin^3\alpha$, где $\alpha = \frac{\pi}{180}$. Введем функцию $f(x) = \sin^3(x+\alpha) - \sin^3 x$. Тогда неравенство, которое мы хотим доказать, примет вид $f(3\alpha) > f(\alpha)$. Значит, нам достаточно доказать, что функция f возрастает на $]0; 4\alpha[$. Поскольку $f'(x) = 3[g(x+\alpha) - g(x)]$, где $g(x) = \sin^2 x \cdot \cos x$, нужно доказать, что g возрастает на $]0; 5\alpha[$, а это вытекает из того, что $g'(x) = \sin x \times (2 - 3\sin^2 x) > 0$ на $]0; 5\alpha[$. $\left(\sin 5\alpha = \sin\frac{\pi}{36} < \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} < \sqrt{\frac{2}{3}}.\right)$

5. 1) A_1 — это прямая $y=1$ без точки $(1; 1)$. 2) B_1 — объединение прямых $x=1$ и $y=1$. 3) C — объединение прямой $x=1$ без точки $(1; -1)$ и прямой $x=-1$ без точки $(-1; 1)$. Решение. B_a — это множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $(ax-1)y = x - a$. Значит,

$$(M \in A_a) \Leftrightarrow (M \in B_a \text{ и } ax - 1 \neq 0).$$

Если $M \in C$, то $M \in B_\beta$ и $M \notin A_\beta$ при некотором β. Тогда $\beta x - 1 = 0$, $x = \beta$, $\beta = \pm 1$. Итак, $M \in B_1$, $M \notin A_1$, $M \in B_{-1}$ и $M \notin A_{-1}$. Кроме того, у точки M $x=1$ или $x=-1$. Если $M \in A_a$ при каком-нибудь a и $x=1$, то $y=-1$; поскольку $M \in A_a$, $y \neq -1$. Если $M \in A_a$ и $x=-1$, то $y=1$; поскольку $M \notin A_a$, $y \neq 1$.

Московский энергетический институт

Математика

Вариант 1

1. $-\frac{1}{a}$, если $a \neq 0$; если $a=0$, нет предела.
2. $]-\infty; 0[\cup]\log_2 3; +\infty[$.
3. Равнобедренный, с катетами длины $\sqrt{2S}$.
4. $\left\{-\frac{3}{4}\pi, -\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right\}$.
5. $2a^3 \sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2} \cdot \sin\frac{3\alpha}{2}}$.

Вариант 2

1. При $x>0$, $x \neq 4$ $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{2}\sqrt[4]{x^3}}$.
2. $\{9\}$.
3. $4+12+10$.
4. $x = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k$ $(k \in \mathbf{N})$.
5. $-\frac{a}{4\sin^3\alpha \cdot \cos\alpha}$.

Задачи устного экзамена

1. а) $\left[-2; -\frac{3}{2}\right[\cup \{0\}$. б) $[0; 9[$. в) $[-1; 0[\cup]0; 1[$. 5. $2\operatorname{ctg}\alpha$. 6. $y = -3x - 4$. 7. $]5; +\infty[$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант

2. См. рис. 8.
3. $r = \sqrt[6]{\frac{9e^2}{64\pi^3\varepsilon_0 G\rho^2}} \approx 0{,}76 \cdot 10^{-4}$ м.
4. $P = UI - I^2R = 36$ кВт.
5. $Q = \frac{Mm|\vec{v}|^2}{2(M+m)} + mgH = 164{,}7$ Дж.

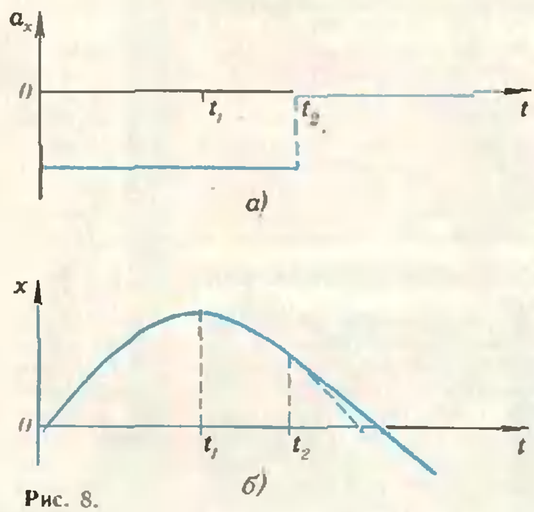


Рис. 8.

Задачи устного экзамена

1. $h = \frac{|\vec{v}|^2}{2g(1+\mu\operatorname{ctg}\alpha)} = 1{,}56$ м.
2. $M = \frac{mR\Delta T}{\mu gh} - \frac{p_0S}{g} = 360$ кг.
3. $a = \sqrt{\frac{2\mathscr{E}\tau}{|B|\sin\alpha\cos 60°}} \approx 1{,}63 \cdot 10^{-2}$ м.

Метод размерностей помогает решать задачи
(*см. «Квант» № 6*)

1. Минимальный период вращения соответствует максимальной угловой частоте: $\omega_0 = 2\pi/T_0$. Связь между ω_0, M, R и гравитационной постоянной γ находится из соображений размерности однозначно и имеет вид $\omega_0^2 \sim \gamma M/R^3$ (размерность γ легко находится из закона всемирного тяготения). Численные оценки для планеты с параметрами Земли получаются, если учесть, что $\gamma \approx 6{,}7 \cdot 10^{-11}$ Н·м²/кг², $M \approx 6 \cdot 10^{24}$ кг, $R \approx 6{,}4 \cdot 10^3$ км. Читателю предлагается самому вычислить, во сколько раз медленнее вращается наша Земля, чем могла бы, и обдумать вопрос о том, что случилось бы, если бы мы умудрились закрутить Землю с $\omega > \omega_0$.

kvant.mccme.ru

2. Кроме геометрического подобия камертонов мы должны учесть, что сделаны они из одного материала, а потому для них одинаковы упругие характеристики и плотность ϱ. Естественной упругой характеристикой является модуль Юнга E. Если L — длина ножки камертона, то из соображений размерности получается однозначная формула для частоты: $\omega \sim \frac{1}{L}\left(\frac{E}{\varrho}\right)^{1/2}$. Отношение частот геометрически подобных камертонов, следовательно, обратно пропорционально отношению их характерных длин и равно 1:3. Можно заметить еще, что отношение E/ϱ есть квадрат скорости звука в твердом теле. Тогда предыдущая формула становится совсем понятной. Период колебаний камертона $T \sim \omega^{-1}$, то есть определяется просто временем прохождения звуковой волны в ножке камертона.

Подумайте теперь, для чего в условии задачи подчеркнуто геометрическое подобие камертонов. Может ли что-либо измениться, если поперечные сечения ножек камертона не будут геометрически подобными?

3. Будем предполагать, что период T определяется давлением p, выделившейся при взрыве энергией E и плотностью воды ϱ. Плотность играет здесь роль массовой характеристики. Записывая $T \sim p^x \varrho^y E^z$ и сравнивая размерности левой и правой частей этой формулы, получим $T \sim p^{-5/6}\varrho^{1/2}E^{1/3}$. Если учесть, что давление воды p связано с глубиной H соотношением $p = \varrho g H$, то получим формулу $T \sim \left(gH\right)^{-5/6}\left(\frac{E}{\varrho}\right)^{1/3}$.

Газовый пузырь, образовавшийся при взрыве, будет расширяться до тех пор, пока внутреннее давление в нем не станет равным давлению окружающей его воды на глубине H. Грубую, но разумную оценку для внутреннего давления мы можем получить опять из соображений размерности, разделив энергию E на объем пузыря: $p_{вн} \sim E/r^3$. Напишем условие равенства (по порядку величин) $p_{вн}$ внешнему давлению $p = \varrho g H$: $(E/r^3) \sim \varrho g H$. Отсюда $r^3 \sim E/\varrho g H$. Размер газового пузыря при заданной величине E пропорционален $H^{-1/3}$. Мы, конечно, пренебрегаем для таких оценок изменением плотности воды ϱ с глубиной.

4. Давление в центре звезды с массой M и радиусом R выражается формулой $p \sim \gamma M^2/R^4$, однозначно получаемой из соображений размерности.

Численные оценки в этой задаче и в задаче 5 мы предлагаем читателям сделать самим.

ШАХМАТНАЯ ФИЛАТЕЛИЯ

В спортивной филателии марки, посвященные шахматам, занимают не столь уже большое место. Однако они выходят регулярно. Только в нашей стране их было выпущено пятнадцать (с беззубцовками и блоком). В большинстве случаев выпуск таких марок приурочен к крупным международным шахматным соревнованиям, но встречаются и другие сюжеты.

В нашей подборке на третьей странице обложки сверху размещена серия кубинских марок, посвященная выдающимся шахматистам — чемпионам мира Капабланке и Ласкеру, а также Филидору, Стейницу и Сегуре. Далее следуют марки и блок арабского княжества Аль-Фуджайра, на которых изображены шахматные фигуры, выполненные из кости или ценных пород дерева и представляющие прекрасные произведения прикладного искусства. Внизу размещены румынские марки, посвященные шахматной олимпиаде, состоявшейся в 1980 году на острове Мальта.

В. Рудов

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, Н. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Т. Кольченко, Г. Красиков, Э. Назаров, М. Сидоров

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественные редакторы Т. Макарова, Н. Семенчинская

Корректор В. Сорокина

113035, Москва, Б. Ордынка 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 20.05.81
Подписано в печать 24.06.81
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7. Т-22034
Цена 30 коп. Заказ 1182
Тираж 232 272 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли
г. Чехов Московской области

kvant.mccme.ru

kvant.mccme.ru

Цена 30 коп.

Индекс 70465

Наш художник нарисовал этот замысловатый узор, пользуясь только циркулем (и кисточкой для закраски тушью отдельных участков). Правда, часть дуг он потом стер. Изучая узор, вы, возможно, сумеете восстановить порядок построения. Впрочем, эту картинку лучше воспринимать не как условие задачи, а как декоративный орнамент с геометрическими мотивами.