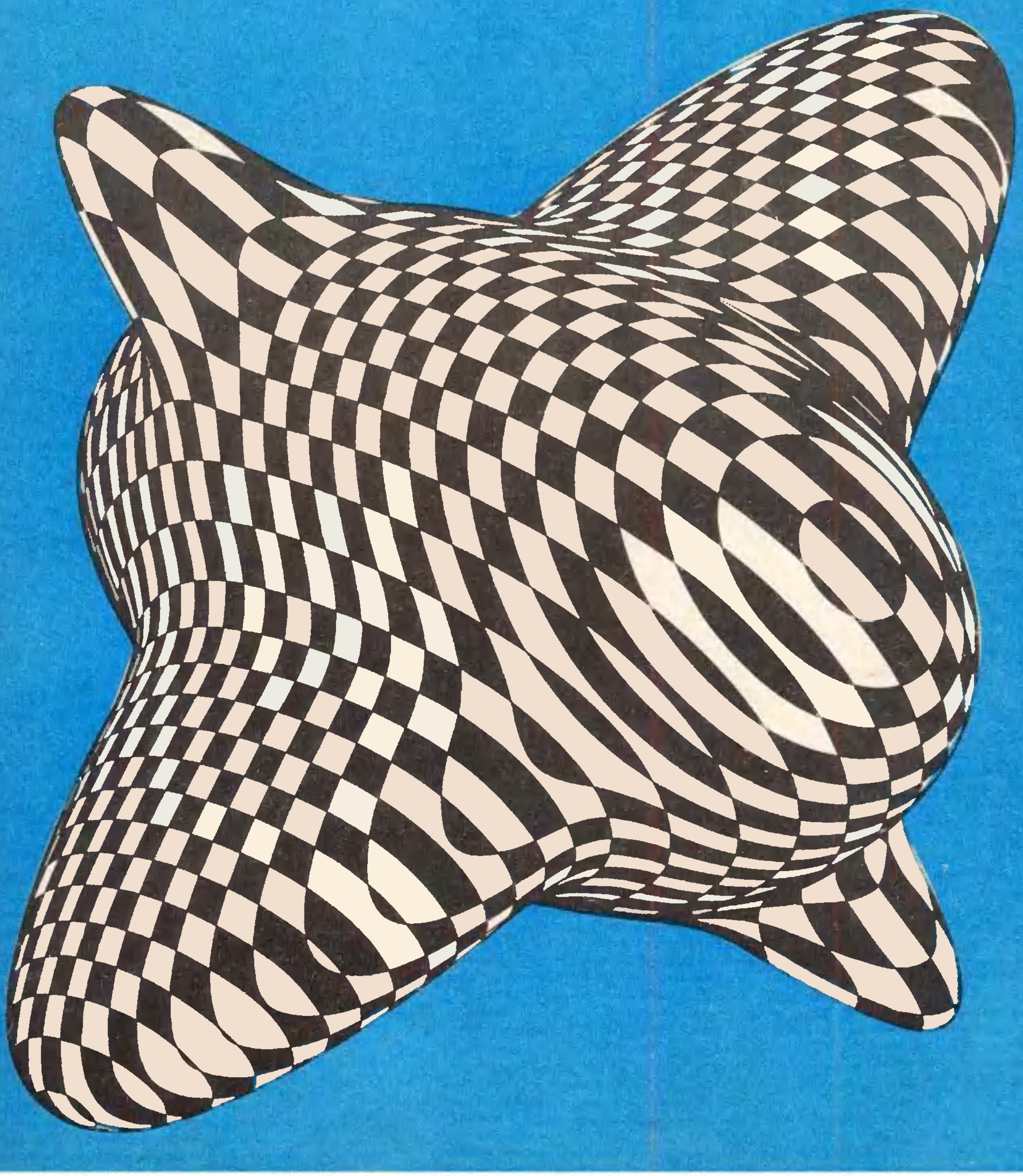
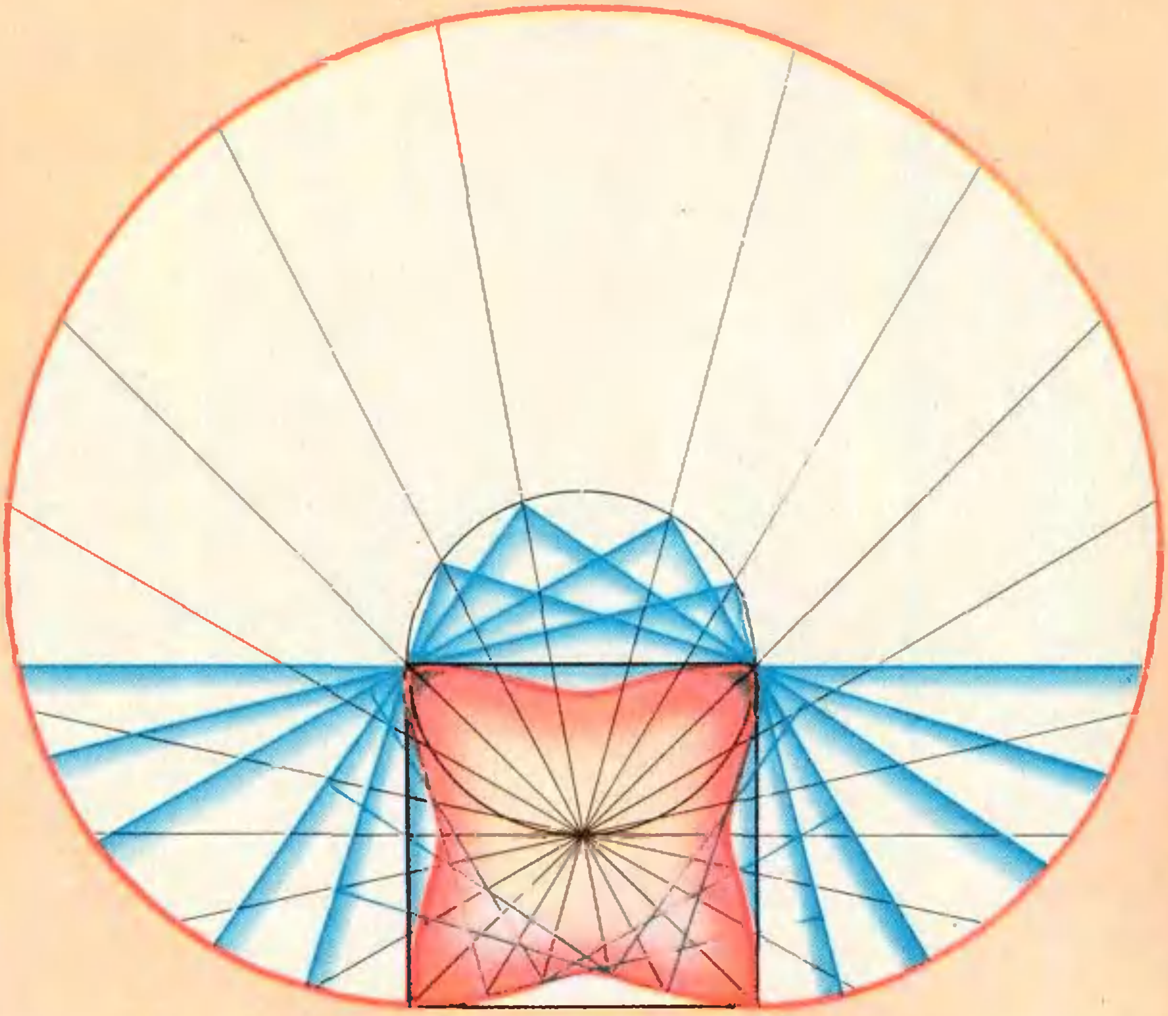
ISSN 0130-2221

Квант

5
1981

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





«Объемлющая» кривая, нарисованная на этой странице обложки, давно известна в математике — это так называемая *улитка Паскаля*. Получается она следующим образом: для каждого прямого угла, опирающегося на «горизонтальный» диаметр «порождающей окружности» (на рисунке все эти углы — голубые), отложим на прямой, содержащей его биссектрису, от вершины угла в обе стороны отрезки заданной (одинаковой для всех углов!) длины (от этой длины зависит *форма кривой*); *множество концов этих* отрезков и есть нужная кривая.

(Между прочим, все описанные прямые пересекаются в одной точке окружности: это точка называется *полюсом* улитки Паскаля.)

А «звездочка», симметрично составленная из дуг улитки Паскаля, обладает следующим замечательным свойством: она может вращаться внутри любого из описанных прямых углов так, что ее граница все время будет касаться сторон угла и проходить через точку пересечения биссектрисы этого угла с улиткой Паскаля.

Почему это так, вы узнаете, прочитав статью А. Бабичева «Об одной задаче Колмогорова».

Основан в 1970 году

Квант

5
1981

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

В НОМЕРЕ:

Клетчатую поверхность на первой странице обложки нарисовал «электронный художник» по программе Ю. Котова, подробнее см. с. 16

М. Лаврентьев

Приглашение в науку

Какие качества отличают ученого, какие черты характера должен воспитывать в себе молодой человек, решивший посвятить себя науке? Нелегко коротко ответить на этот вопрос.

Давайте посмотрим на ученых, которые много сделали в науке. Характерно, что независимо от специальности и дарования каждый из них вложил в науку огромный личный труд. В определенные периоды жизни (а эти периоды продолжались годами) напряженность труда достигает вершины. Исследователь, забывая об отдыхе, ежедневно работает по 14—16 часов. Так что слова о труде в науке — это не фраза. Это закон. Он остается в силе и для нашего времени.

Что еще характерно для исследователя? Полное отключение от «посторонних» дел, которые помешали бы ему реализовать выношенную идею. Такие «периоды отключения» длятся, как показывает жизнь, по нескольку месяцев. От осады крепости ученый переходит к ее штурму. Это очень ответственный этап, и тут проверяется умение человека завершить начатое. В такие периоды исследователь еще и еще раз тренирует себя, учится преодолевать внезапно появляющиеся трудности, быстро решать головоломные загадки, которые всегда окружают проблему невидимой с первого взгляда, но очень стойкой крепостной стеной. Кажется, что стена пала, ты уже в крепости, но перед тобой новый пояс укреплений, который прежде был не виден. Как на войне: рвы, проволока, бездорожье... Так бывает и в математике, и в инженерном деле — в любой области. Поэтому молодому ученому надо готовить себя к великому терпению, к тому, чтобы быстро ориентироваться и вовремя менять тактику, вызывать на помощь или самому строить новые «осадные орудия».

Академик Михаил Алексеевич Лаврентьев (1900—1980) — лауреат Государственной премии, почетный председатель Сибирского отделения АН СССР.

Статья с небольшими сокращениями перепечатывается из сборника «Ленин. Наука. Молодежь», выпущенного в 1980 году издательством «Наука».

Я думаю, человек, который хочет стать ученым, должен как можно скорее развить в себе способность много работать. Надо научиться работать даже во время отдыха.

Итак, воспитание в себе большой работоспособности. К этому я добавил бы еще одно качество, особенно важное для ученого,— абсолютная честность. Человек, склонный искажать факты, приписывать себе не принадлежащие ему идеи, никогда не сможет стать настоящим ученым...

Так вот, трудолюбие и честность идут вне конкурса. Это ясно без слов. Сложнее — со способностями. Когда юношу или девушку отбирают в балет, в школу пения, в консерваторию — это делается сравнительно просто. Способности в этих областях у людей проявляются открыто. Их видят, подмечают все, помогает их проявить и наша довольно развитая система художественной самодеятельности. Но и тут, конечно, нужен большой знаток искусства, чтобы определить, выйдет ли из молодого человека крупный музыкант или художник. В науке дело обстоит во много раз сложнее.

В США предлагали разные способы отбора людей для творческой научной работы. Там вообще для каждой профессии стараются найти свой «тест», характерную задачку-упражнение, выполняя которую человек проверяет себя, какие вещи ему лучше удаются. К сожалению, подобные «тесты» мало что дают для отбора в науке. Ту часть способностей, которая нужна для творчества, они затрагивают лишь поверхностно. Как же быть? Какими методами пользоваться, из каких конкретных принципов исходить? Ждать, покуда педагогика через десятилетия даст нам эти методы и «приметы», мы не можем. Нам нужны специалисты сегодня же. И поэтому ученые Сибири обобщают свой личный опыт, действуют коллективно, когда дело доходит до отбора молодежи, проявляющей склонности, например, к математике, физике.

I Всесибирская физико-математическая олимпиада учащихся средних школ была для ученых не забавой и не просто «общественной нагрузкой». Все, кто проводил эту олимпиаду, думали о будущем советской науки, о пополнении, которое должно прийти нам на смену. Отрадно, что большинство победителей олимпиады оказались из деревни, из небольших городков, из дальних областей. Около 120 ребят, проявивших склонность к математике и физике, учатся по особой, ускоренной программе в специально созданной школе-интернате. Она открыта у нас, в Академгородке СО АН СССР.

Нам нужны теоретики, специализирующиеся в разных областях науки. А они не рождаются готовенькими. Их надо выявлять и растить смолоду. Мы ищем не «вундеркиндов», а людей с определившимися склонностями. И исходим из того, что способностями одарено большинство людей. Нам остается лишь прийти к молодежи и определить, к чему лежит у человека душа. А уж дальше все зависит от школы, от ученых, которые берутся помогать такой школе, и, безусловно, от самого молодого человека.

Я не сказал об одной примете, которой наши ученые пользуются, отыскивая способных ребят. Пока эта примета нас не подводила. Не простое усердие, не заучивание (пусть даже блестящее) готовых стандартных решений, а самостоятельность мышления интересны ученому в молодом человеке. Юноше или девушке поручают сделать опыт, решить задачу, просят объяснить природное явление. Ничего необычного в самой задаче или в опыте нет. Опыт может быть проделан, задача решена, а «необычное» может при этом и не проявиться. Но вот юноша предлагает свой собственный путь решения. Иного учителя такая необычность может отпугнуть. А ученых она радует. Лишь бы вывод был верным, а уж пути к выводу могут быть разные. И чем больше путей перебирает в уме молодой человек, чем свободнее он находит кратчайший, самый экономный, самый рациональный, я бы добавил, самый красивый, тем больше у нас уверенности, что из него выйдет толк.

Однажды, когда мне было лет десять, друг нашей семьи академик Николай Николаевич Лузин рассказал мне забавную историю о том, как Сократ открыл Платона, своего лучшего ученика. Лузин был настолько хорошим рассказчиком, что отличить, где у него правда, а где вымысел, было невозможно. Слушая его, я живо представлял себе, как Сократ, прогуливаясь, шел по родному городу. Вот он подошел к стройке и вдруг остановился. Ему бросилось в глаза что-то необычное. Все каменщики возводили стены, проделывая одни и те же движения. И только один из них клал камни по-особому. Сократ присмотрелся. Молодой рабочий берег силы. У него все было рассчитано. Там, где другие делали два движения, он обходился одним. И стена у него росла быстрее, и работал он с меньшим напряжением. Сократ подозвал рабочего, взял его к себе жить. А через несколько лет из рабочего-каменщика получился ученый, философ, имя и идеи которого живы до наших дней.

Николай Николаевич давно умер. Но я часто вспоминаю эту историю, которую впервые услышал от него.

Легенды легендами, а дело делом. Сейчас ученым и педагогам пришлось всерьез столкнуться с проблемой: как определить, есть ли у человека внутренняя тяга к разгадыванию новых для него явлений, к раскрытию больших и малых тайн природы? Когда педагоги станут делать это повсеместно, гораздо легче пойдет обновление школы, повысится и качество обучения.

Я предвижу вопрос: не слишком ли много мы требуем от ребят? Не будут ли они перегружены?

Нет, если соблюсти два условия.

Первое. Ребята должны идти в те или иные специализированные школы по склонности, а не вопреки ей. И тогда материал они усваивают вдвое, втрое быстрее и проще. Любимое занятие — это удовольствие, а не нудная, обязательная работа.

Второе. Опытный руководитель, само окружение, обстановка, в которых воспитываются ребята, должны помогать им быстрее формироваться в ученых. Полное развитие целеустремленности и приобретение достаточно широких знаний не должны идти за счет переутомления. Среди математиков особенно много случаев, когда молодой человек перенапрягается настолько, что на долгое время выходит из строя. Непрерывность работы нужно сочетать с разумным отдыхом и «переключением» сознания на другие области.

Надо много трудиться, но делать это разумно. Надо создать новую систему воспитания молодых ученых, но внутри этой системы отказаться от стандартов, от шаблонов.

Старший товарищ, руководитель обязан с самого начала воспитывать у юных подопечных качества, характерные для большинства наших ведущих советских ученых. Надо ли еще раз говорить о них здесь? Они известны всему миру. Мы хотим, чтобы для будущих, подрастающих ученых наибольшим стимулом творчества было желание не только сделать открытие, но и как можно быстрее поставить это открытие на службу Отчизне, народу. С этим качеством неразрывно связаны чувство товарищества и удовлетворения не только личным успехом, радость не только за себя, но и за успех соседа, за успех своего института.

В. Эдельман

Металлы

1. Что такое металлы?

«Металлом называется светлое тело, которое ковать можно.» — писал в 1763 году Ломоносов. Загляните в ваш учебник химии, и вы увидите, что металлы обладают характерным металлическим блеском («светлое тело»), хорошо проводят тепло и электрический ток. Правда, тут же вы прочтете, что существуют элементы, проявляющие свойства как металлов, так и неметаллов. Другими словами, нет четкой грани, отделяющей одно от другого. Химика, который интересуется, в первую очередь, химическими реакциями и для которого каждый элемент — свой особый мир, такая неоднозначность не очень смущает. А вот физика это не устраивает. Если физика делит тела на металлы и неметаллы, то нужно понять, в чем их принципиальное различие. Поэтому надо так определить, что такое металл, чтобы, как и в других случаях в области точных наук, удовлетворить двум требованиям:

1. все металлы должны обладать всеми без исключения приписываемыми им признаками;
2. иные объекты должны не обладать хотя бы одним из признаков.

Вооружившись этими соображениями, посмотрим, все ли металлы без исключения имеют все свойства, приписываемые им учебником. Начнем с «ковать можно», то есть с пластичности, говоря современным языком. И тут же, по созвучию, мы вспомним пластмассы: ведь не зря они так названы, многим из них свойственна пластичность — способность необратимо изменять форму без разрушения. Конечно, медь, железо, алюминий ковать легко, со свинцом еще проще, индий — довольно редкий и дорогой металл — можно мять почти как воск (а воск ведь — не металл!), щелочные металлы и того мягче. А попробуйте стукнуть по обычному чугуну — и он разлетится на кусочки! Ну, тут металлурги скажут: это потому, что чугун — не простое вещество. Он состоит из кристаллов железа, разделенных прослойками углерода, то есть графита. Вот по этим-то прослойкам чугун и ломается. Ну что же, все верно. Только вот беда — хрупкий графит, как оказывается, современная физика относит к металлам! Да и не один графит: числятся, например, среди металлов мышьяк, сурьма и висмут, но ковать их можно с таким же успехом, как стекло — разлетаются на мелкие кусочки!

Проделайте такой простой опыт: разбейте баллон сгоревшей лампы, достаньте оттуда вольфрамовую спираль и попробуйте ее раскрутить. Ничего не выйдет, она рассыпется в пыль! Но ведь как-то ее сумели скрутить на заводе? Значит, может быть и такое — то можно деформировать, то нельзя, в зависимости от того, что происходило с образцом в прошлом. Что ж, придется, видимо, с этим признаком — пластичностью — расстаться. Тем более, что он присущ многим неметаллам; ведь то же стекло — нагрей его, и оно станет мягким и податливым.

Итак, укорачиваем формулировку и двигаемся дальше. На очереди — «блеск», или, говоря научным языком, оптические свойства. Блестящих предметов много: и вода, и стекло, и полированные камни, да мало ли что еще. Так что просто «блеском» не обойтись, вот и говорится: для металлов характерен *металлический* блеск. Ну, это совсем хорошо: получается, что металл — это металл. Правда, интуитивно мы чувствуем, что металлическим блеском блестят полированные медь, золото, серебро, железо. А широко распространенный минерал пирит — разве не блестит, как металлы? Про типичные полупроводники германий и кремний и говорить не приходится, по внешнему виду их от металлов никак не отличишь. С другой стороны, не так давно научились получать хорошие кристаллы таких соединений, как двуокись молибдена; кристаллы эти коричнево-фиолетовые и на обычный металл мало похожи. Оказывается, это вещество надо считать металлом. Почему — будет ясно чуть дальше.

Так что блеск как чисто «металлический» признак отпадает.

На очереди — теплопроводность. Пожалуй, этот признак можно отбросить сразу — все без исключения тела проводят тепло. Правда, про металлы говорится, что они *хорошо* проводят тепло. Но, боюсь, на вопрос «что такое хорошо и что такое плохо?» в этом случае ни один папа не ответит.

Хорошо ли проводит тепло медь? Посмотрим в таблицу и сразу же столкнемся со встречным вопросом: а какая медь и при какой температуре? Если взять чистую медь, например ту, из которой делают провода для радиоприборов, нагреть ее до красного каления, то есть отжечь, то при комнатной температуре она да еще чистое серебро будут проводить тепло лучше любого другого металла. Но погните такой медный образец, стукните или зажмите в тисках — и его теплопроводность станет заметно хуже. А что произойдет, если кусочек отожженной меди начать охлаждать? Сначала теплопроводность будет расти, увеличится в десятки раз при температуре около 10 К, а потом начнет быстро падать (рис. 1) и при достижении абсолютного нуля должна стать нулевой.

Возьмем теперь другой металл — висмут. Картина для него очень похожа на ту, которую мы видели для меди, только максимум теплопроводности лежит при 3 К; а при комнатной температуре висмут проводит тепло плохо, не многим лучше, чем кристалл кварца. Но кварц-то — не металл! И тот же кварц, как видно из рисунка 1, по своим теплопроводным свойствам иногда оказывается не хуже меди. А плавленный кварц, то есть кварцевое стекло, проводит тепло плохо, примерно как нержавеющая сталь.

Кварц — не исключение. Все кристаллы хорошего качества ведут себя подобным образом, только числа будут немного различными. У алмаза, например, уже при комнатной

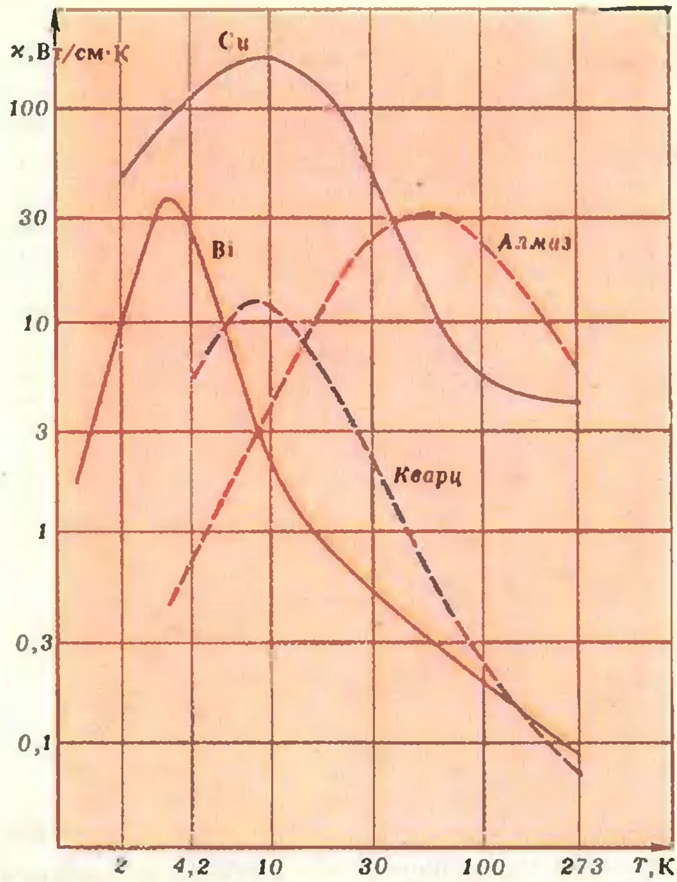


Рис. 1. Зависимость удельной теплопроводности от температуры для различных веществ. (Удельная теплопроводность — это количество тепла, которое протекает между противоположными гранями кубика со стороной 1 см при разности температур между этими гранями в 1 К.)

температуре теплопроводность лучше, чем у меди.

Отбрасываем с чистым сердцем теплопроводность и жалеть об этом не будем. И не только потому, что по этому признаку металл от неметалла не так уж легко отличить, но и потому, что, оказывается, специфические черты в теплопроводности металлов (а такие есть) являются следствием его электропроводности — последнего оставшегося свойства.

И опять в формулировке, приведенной в начале статьи, уточнение — не просто электропроводность, а *хорошая* электропроводность. А ведь когда речь шла о теплопроводности, эпитет «хорошая» нас насторожил и, как оказалось, не напрасно. Что же — и последнее свойство под подозрением? Надо обязательно его спасать, а то мы останемся вообще без металлов, а заодно без полупроводников, без изоляторов. Вот это наука получается! Любой школьник в большинстве случаев не задумываясь скажет, с чем он имеет дело, а копнули поглубже — и остановились в недоумении.

И есть от чего. Возьмем таблицы физических величин и посмотрим на числа. Вот, к примеру, при комнатной температуре удельное сопротивление ϱ (Ом · см) меди $\sim 1{,}55 \times \times 10^{-6}$; у висмута $\varrho \sim 10^{-4}$; у графита $\varrho \sim 10^{-3}$; у чистых кремния и германия $\varrho \sim 10^{2}$ (но, добавляя примеси, его можно довести до $\sim 10^{-3}$); у мрамора $\varrho = 10^{7} \div 10^{11}$; у стекла $\varrho = 10^{10}$; а где-то в конце списка — янтарь с удельным сопротивлением до 10^{19}. И где же тут кончаются металлы-проводники и начинаются диэлектрики? А мы еще не упомянули про электролиты. Обычная морская вода неплохо проводит ток. Что же — и ее считать металлом?

Посмотрим, не поможет ли нам температура. Если повышать температуру, то различия между веществами начнут сглаживаться: у меди

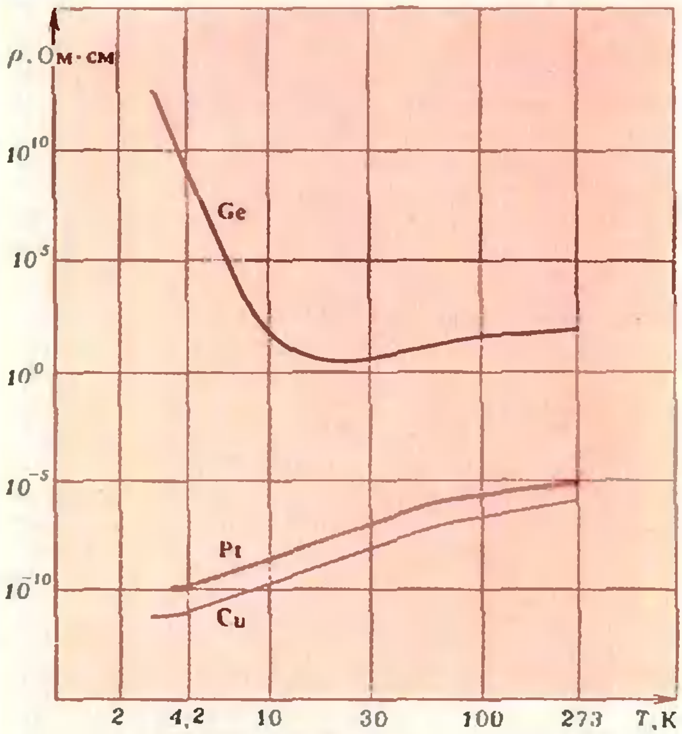


Рис. 2. Зависимость удельного сопротивления чистых металлов (меди и платины) и полупроводника (чистого германия) от температуры.

сопротивление начнет расти, у стекла, например, уменьшаться. Значит, надо проследить за тем, что произойдет при охлаждении. И вот тут мы наконец-то увидим качественные различия. Посмотрите на рисунок 2: при температурах жидкого гелия, вблизи абсолютного нуля, вещества разделились на две группы. У одних сопротивление остается небольшим, у сплавов или у не очень чистых металлов ϱ почти не изменяется при охлаждении, для чистых металлов сопротивление сильно уменьшается. Чем чище и совершеннее кристалл, тем значительнее это изменение. Иногда ϱ при температуре, близкой к абсолютному нулю, меньше, чем при комнатной, в сотни тысяч раз. У других веществ, например у полупроводников, с понижением температуры сопротивление начинает стремительно возрастать, и чем ниже температура, тем оно больше. Если бы можно было добраться до абсолютного нуля, то ϱ стало бы бесконечно большим. Впрочем, достаточно и того, что сопротивление реально становится столь большим, что никаким современным прибором его уже не измеришь.

Итак, мы добрались до ответа:

металлы — это такие вещества, которые проводят электричество при любой температуре.

В противоположность этому диэлектрики перестают проводить ток, если их охладить до абсолютного нуля. Если пользоваться таким определением, то и графит, и двуокись молибдена оказываются металлами. А куда же отнести полупроводники? Если речь идет о чистых, совершенных кристаллах, то они, строго говоря, диэлектрики. Но если в них содержится много примесей, то они могут стать металлами, то есть сохранять проводимость при самых низких температурах.

Что же у нас осталось в конце концов? Нам удалось выявить *единственный* существенный признак, руководствуясь которым мы можем, если не в повседневной практике, то хотя бы в принципе, всегда отличить металл от неметалла. А раз этот признак единственный, то оказываются автоматически удовлетворенными оба условия, выполнения которых мы потребовали в начале статьи.

2. Почему металлы проводят ток?

Уже давно было замечено, что одни элементы, такие как медь, золото, серебро, железо, свинец, олово, и в чистом виде, и при сплавлении друг с другом образуют металлы. Другие, например фосфор, сера, хлор, азот, кислород, не только сами металлами не являются, но и соединяясь с металлами превращают их в диэлектрики. Пример тому — обыкновенная соль NaCl. Поэтому в химии появилось деление элементов на металлы и неметаллы.

Такая классификация, однако,— не более чем констатация фактов, хотя на первый взгляд она претендует на то, чтобы объяснить свойства веществ исходя только из строения атомов. В самом деле, посмотрим на таблицу Менделеева. Элементы, расположенные в одном столбце, очень похожи по своим химическим свойствам. А вот будут ли изготовленные из них кристаллы или сплавы проводить электрический ток? Глядя на таблицу, ответить на этот вопрос нельзя. Так, все элементы первой группы образуют металлы, за исключением первого — водорода. Но ведь закон, который кому-то разрешено нарушать,—уже не закон. Правда, во второй группе дело обстоит лучше: здесь все элементы — привычные металлы; а в третьей группе опять сбой: бор — полупроводник, а алюминий — прекрасный металл. Дальше еще хуже. Первый элемент четвертой группы — углерод; мы уже упоминали, что графит — так называют кристалл углерода — это металл. А вот алмаз — тоже кристалл, составленный из атомов углерода, но расположенных иначе, чем в графите,— изолятор. Кремний и германий — классические полупроводники. Олово — казалось бы, типичный металл. Однако... Если всем знакомое белое блестящее олово долго подержать при температуре —30°С, то его кристаллическая структура изменится, а внешне оно посереет. И это олово — его так и называют «серое олово» — полупроводник! А свинец всегда металл.

Если начать смешивать разные элементы, то картина совсем усложнится. Возьмем, например, и сплавим два металла индий и сурьму — в пропорции один к одному. Получим широко применяемый в технике полупроводник InSb. С другой стороны, мы уже говорили, что двуокись молибдена MoO_2 при $T \approx 0$К проводит ток, то есть MoO_2 — металл. (И WO_2, и Re_2O_3 и некоторые другие оксиды — тоже металлы.) А если получающиеся из атомов кристаллы сильно сжать, сдавить, то, оказывается, чуть ли не все вещества становятся металлами, даже такие типичные металлоиды, как сера. Правда, для нее давление перехода в металлическое состояние очень велико — несколько сотен тысяч атмосфер (а для водорода еще больше).

Похоже, что разделить элементы на металлы и неметаллы — не такая уж простая задача. Во всяком случае, ясно, что рассматривая отдельные атомы, мы не можем сказать, будет ли вещество, составленное из этих атомов, проводить ток при $T \approx$ ≈ 0К, потому что огромную роль играет то, как расположены атомы друг относительно друга. Поэтому для ответа на вопрос «почему металлы проводят ток?» надо изучать, как атомы взаимодействуют между собой, образуя твердое тело.

Посмотрим, как обстоит дело с простейшим из элементов, образующих металлы,— литием. Порядковый номер Li — три. Это означает, что ядро атома Li содержит три протона и положительный заряд ядра компенсируют три электрона. Два из них образуют заполненную *s*-оболочку, ближайшую к ядру, и сильно связаны с ядром. Оставшийся электрон расположен на второй *s*-оболочке. На ней мог бы поместиться еще один электрон, но его у лития нет. Все остальные разрешенные состояния энергии свободны, и электроны на них попадают только при возбуждении атома (например, при сильном нагреве паров лития). Схема уровней в атоме лития показана на рисунке 3.

Рассмотрим теперь множество атомов лития, находящихся в ограниченном объеме. Они могут образовывать газ (пар), жидкость или твердое тело. При достаточно низкой температуре силы взаимного притяжения препятствуют тепловому движению атомов, образуется кристалл. Это наверняка происходит при абсолютном нуле температуры, когда все известные вещества, кроме гелия,— кристаллы.

Итак, из опыта известно, что при низких температурах твердое тело — устойчивое состояние для лития. Но, как известно, устойчивым всегда является такое состояние вещества, в котором его внутренняя энергия меньше, чем в других возможных агрегатных состояниях при той же температуре. Суммарное уменьшение энергии при переходе из одного состояния в другое легко измерить — ведь это и есть теплота испарения или плавления.

С микроскопической точки зрения при низких температурах внутренняя энергия вещества есть, в первую очередь, сумма энергий электронов атомов, составляющих тело. Но электроны в атомах занимают строго определенные уровни энергии. Значит, мы можем ожидать, что при сближении атомов изменятся уровни энергии. При этом распределение электронов по уровням должно оказаться таким, чтобы их суммарная энергия была меньше, чем сумма энергий электронов в таком же количестве изолированных друг от друга атомов.

Что произойдет с уровнями, можно понять исходя из аналогии движения электрона в атоме с любой колебательной системой, например с маятником. Пусть у нас есть два совершенно одинаковых маятника. Пока они не взаимодействуют друг с другом, частота колебаний обоих маятников одна и та же. Введем теперь взаимодействие между ними — свяжем их, например, мягкой пружинкой. И сразу же вместо одной частоты появятся две. Посмотрите на рисунок 4: связанные маятники могут колебаться синфазно, а могут навстречу друг другу. Очевидно, в последнем случае их движение будет более быстрым, то есть частота колебаний такой системы выше собственной частоты колебаний одного маятника. Таким образом, связь приводит к расщеплению частот. Если связать три маятника, то станет уже три собственных частоты; у системы из четырех связанных маятников четыре собственных частоты и так далее до бесконечности.

Поведение любых колебательных систем подобно. Если мы заменим маятники, например, на электрические колебательные контуры, то, как хорошо знают радиолюбители, при введении связи между ними их собственные частоты также расщепляются. Электроны в атоме — это тоже своеобразная колебательная система. Как и маятник, электроны имеют массу, есть сила Кулона, возвращая их к положению равновесия; и этим определяется движение электронов в атоме, характеризуемое, согласно квантовой механике, собственной частотой. Для электронов включение взаимодействия при взаимном сближении приводит к тому, что частоты, бывшие до того одинаковыми, становятся немного разными.

В квантовой механике имеется прямая связь между энергией и частотой колебаний, выражаемая формулой $E = h\nu$, где $h = 6{,}62 \times \times 10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка, а ν — частота колебаний. Поэтому надо ожидать, что при сближении двух атомов лития каждый

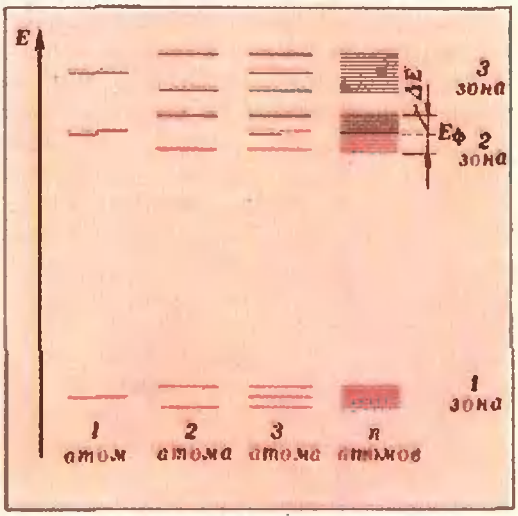


Рис. 3. Схема уровней энергии атома лития и их трансформации в зоны при объединении атомов в кристалл. Красным цветом нарисованы занятые состояния.

из уровней, показанных на рисунке 3, расщепится на два. Каждому новому уровню энергии будет соответствовать своя электронная оболочка теперь уже не отдельного атома, а «молекулы». Оболочки заполняются электронами по тому же правилу, что и у атома,— по два электрона на оболочку. Та пара оболочек, которая получилась из самого нижнего уровня, будет полностью заполнена электронами. Действительно, на них можно разместить четыре электрона, а их у двух атомов лития — шесть. Остаются два электрона, которые теперь расположатся на нижнем из уровней второй пары. Заметьте, какой произошел качественный скачок: раньше эти два электрона занимали два из четырех состояний, имеющих одинаковую энергию. Теперь у них появилась возможность выбирать, и они расположились так, чтобы их суммарная энергия была поменьше. Нетрудно сообразить, что произойдет при добавлении следующих атомов: для трех атомов каждый исходный уровень расщепится на три (см. рис. 3). Девять электронов расположатся так: шесть на нижней триаде уровней, возникших из уровня ближайшей к ядру внутренней заполненной оболочки атома; еще два электрона — на нижнем уровне следующей триады; оставшийся электрон — на среднем уровне той же триады. Еще одно место на этом уровне остается свободным, а верхний уровень полностью пуст. Если взять n атомов ($n \gg 1$), то каждый уровень расщепится на n тесно расположенных уровней, образующих, как говорят, полосу или зону разрешенных значений энергии. В нижней полосе все состояния окажутся занятыми, а во второй — только половина, и именно те, энергия которых лежит ниже. Следующая полоса — полностью пустая.

Расстояние между соседними уровнями в зоне легко оценить. Естественно считать, что при сближении атомов изменение энергии электронов атома примерно равно теплоте испарения вещества, пересчитанной на один атом. Она составляет для металлов обычно несколько электронвольт, а значит,

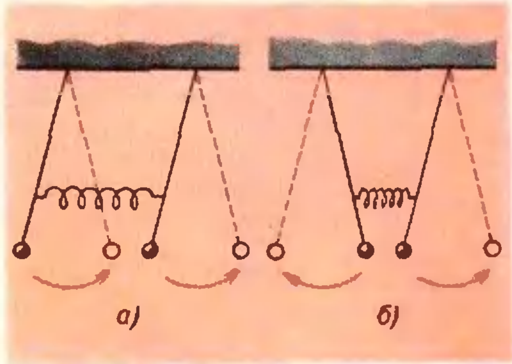


Рис. 4.

и полная ширина зон ΔE, определяемая взаимодействием соседних атомов, должна иметь тот же масштаб, то есть $\Delta E \sim 1$ эВ $\approx 10^{-19}$ Дж. Для расстояния между уровнями получим $\delta E \sim \Delta E/n$, где n — число атомов в образце. Это число чрезвычайно велико: межатомное расстояние составляет всего несколько ангстремов, и объем, приходящийся на один атом, оказывается всего $\sim 10^{-22}$ см^3. Если наш образец имеет, для определенности, объем 1 см^3, то для него $n \approx 10^{22}$. Поэтому численно оказывается $\delta E \approx 10^{-22} \cdot \Delta E \approx 10^{-41}$ Дж. Эта величина столь мала, что всегда можно пренебречь квантованием энергии внутри зоны и считать, что в пределах зоны разрешены любые значения энергии.

Итак, в кристалле уровни энергии размываются в зоны, имеющие ширину, сравнимую с расстоянием между ними. Разрешенными для электронов являются состояния внутри зоны, и здесь электроны могут иметь практически любую энергию (разумеется, в пределах ширины зоны). Но очень важно, что число мест в каждой зоне строго ограничено и равно удвоенному числу атомов, составляющих кристалл. И это обстоятельство, совместно с принципом минимума энергии, определяет распределение электронов по зонам.

Теперь у нас все готово, чтобы наконец понять, почему литий проводит ток. Взглянем опять на рисунок 3. Что же получилось? Пока атомы были сами по себе, все электроны находились во вполне определенных состояниях, строго одинаковых для всех атомов. Теперь атомы объединились в кристалл. Сами атомы в кристалле не только одинаковы, но и совершенно одинаково расположены относительно соседей (за исключением, конечно, тех, которые попали на поверхность кристалла). А все электроны имеют теперь разные энергии. Это может быть только в том случае, если электроны больше не принадлежат отдельным атомам, а каждый электрон «поделили» между собой все атомы. Другими словами, электроны свободно передвигаются внутри идеального кристалла, образуя как бы жидкость, которая заполняет весь объем образца. И электрический ток — это направленный поток этой жидкости, аналогичный текущей по трубам воде.

Чтобы заставить воду течь по трубе, надо создать разность давлений у концов трубы. Тогда под действием внешних сил молекулы приобретут направленную скорость — вода потечет. Очень важно здесь появление именно направленной скорости, ведь сами по себе молекулы хаотически движутся с громадными скоростями — при комнатной температуре средняя скорость теплового движения молекулы порядка 10^3 м/с. Так что дополнительная энергия, приобретаемая молекулой в потоке, мала по сравнению с энергией теплового движения.

Дополнительная энергия, которую надо сообщить электрону, чтобы он участвовал в общем направленном движении электронов в кристалле (а это и есть ток), также мала по сравнению с «собственной» энергией электрона. В этом нетрудно убедиться. Мы уже говорили, что энергия электрона по порядку величины равна $1 эВ = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Дж. Если вспомнить, что для свободного электрона $E = mv^2/2$ и $m = 9{,}1\times\times 10^{-31}$ кг, то легко найти скорость: $v\sim 10^6$ м/с. Предположим что все электроны участвуют в токе, а их в 1 м^3 проводника $n\sim 10^{28}\ Z$ (Z — заряд ядра). Тогда в проводе с поперечным сечением $S = 10^{-6}$ м^2 при токе $I\approx 10$ А (при большем токе провод расплавится) направленная скорость электронов равна $v_н = I/neS \approx 10^{-2} \div 10^{-3}$ м/с. Значит, энергия электрона, участвующего в токе, больше энергии E свободного электрона всего на $10^{-8}\ E$, то есть на $1{,}6\cdot 10^{-27}$ Дж.

И тут мы сталкиваемся с удивительным фактом: оказывается электроны, которые расположены в нижней зоне, называемой обычно валентной, не могут изменить свою энергию на малую величину. Ведь если какой-то электрон увеличит свою энергию, то это значит, что он должен перейти на другой уровень, а все соседние уровни в валентной зоне уже заняты. Свободные места есть только в следующей зоне. Но чтобы туда попасть, электрон должен изменить свою энергию сразу на несколько электронвольт. Вот так и сидят электроны в валентной зоне и ждут журавля в небе — энергичного кванта. А кванты нужной энергии бывают у электромагнитных волн высокой частоты — у видимого света или у ультрафиолетового света.

Итак, жидкость есть, а течь она не может. И если бы у лития было всего два электрона в атоме, то есть если бы мы строили нашу картинку для атомов, то и получили бы мы изолятор. Но твердый гелий — действительно изолятор, так что мы можем уже поздравить себя с некоторым успехом: мы еще не объяснили, почему в металлах может течь ток, зато поняли, почему диэлектрики, где электронов полным-полно и все они «размазаны» по всему кристаллу, не проводят ток.

А что же литий? Да ведь у него есть вторая зона, которая заполнена только наполовину. Энергию, разделяющую занятые и свободные уровни внутри этой зоны, называют энергией Ферми $E_Ф$. Как мы уже говорили, разность энергий между уровнями в зоне очень невелика. Электрону, который расположен в зоне возле уровня Ферми, достаточно чуть-чуть увеличить свою энергию — и он на свободе, там, где состояния не заняты. Электронам из приграничной полосы ничто не мешает увеличить энергию под действием электрического поля и приобрести направленную скорость. А ведь это и есть ток! Но так же легко этим электронам и потерять направленную скорость, столкнувшись с атомами-примесями (которые всегда есть) или с другими нарушениями идеальной структуры кристалла. Этим объясняется сопротивление току.

Кажется, ясно, почему гелий — изолятор, а литий — проводник. Попробуем-ка наши представления применить к следующему элементу — бериллию. И тут — осечка, модель не сработала. У бериллия — четыре электрона, и, казалось бы, должны быть полностью заняты первая и вторая зоны, а третья обязана быть пустой. Получается изолятор, в то время как берилий — металл.

Дело вот в чем. Если ширина зон достаточно велика, то они могут налезть друг на друга. Про такое явление говорят, что зоны перекрываются. У бериллия так и происходит: минимальная энергия электронов в третьей зоне меньше, чем максимальная во второй. Поэтому электронам оказывается энергетически выгодно оставить пустой часть второй зоны и занять состояния внизу третьей. Вот и получается металл.

А что будет с другими элементами? Перекрываются зоны или нет, заранее сказать нельзя, для этого нужны громоздкие расчеты на ЭВМ, и то не всегда можно получить достоверный ответ. Но вот что примечательно: из нашей схемы следует, что если брать элементы с нечетным числом электронов, то всегда должен получаться металл, если только структурной единицей в кристалле является отдельный атом. А вот водород, например, азот и фтор не желают кристаллизоваться в такую решетку. Они предпочитают сначала объединиться попарно, а уже молекулы, содержащие по четному числу электронов, выстраиваются в кристалл. И законы квантовой механики не мешают ему быть диэлектриком.

Итак, мы теперь знаем, что такое металл с точки зрения физики, и разобрались в самой сути явления, поняв, почему в принципе существуют изоляторы и проводники. Мы увидели, что нельзя предложить простой способ объяснения, почему какое-то конкретное вещество оказалось диэлектриком или металлом. Сделать это можно, лишь вооружившись всей мощью аппарата современной квантовой механики и вычислительной техники, но это уже задача специалистов.

Сила Архимеда и диффузия в жидкостях

Возьмите стеклянную литровую банку и наполовину наполните ее соленой водой. Концентрация поваренной соли в растворе должна быть такой, чтобы куриное яйцо плавало в нем, погрузившись примерно на девять десятых своего объема.

Выньте яйцо из банки, а на поверхность соленой воды аккуратно положите бумажный круг, закрывающий всю воду. Теперь осторожно налейте в банку пресной воды и удалите бумажный круг (лучше всего это сделать пинцетом).

Рис. 1.

Рис. 2.

Минут через 5—10 опустите в банку яйцо. Вы увидите, что оно как бы повиснет на границе двух слоев, почти не погружаясь в нижний слой (рис. 1).

С течением времени, в результате диффузии, граница пресного и соленого слоев будет перемещаться к поверхности воды в банке. Вместе с границей будет перемещаться и яйцо. Через двое-трое суток, когда граница между слоями совсем исчезнет, яйцо поднимется к поверхности воды и всплывет (рис. 2).

Подумайте, какое практическое применение могло бы найти описанное выше явление.

С. Селицер

А. Бабичев

Об одной задаче Колмогорова

От редакции

Десять лет назад в «Кванте» рассказывалось о проблеме, которую поставил на лекции для школьников академик А. Н. Колмогоров. Вот ее формулировка:

Фиксируем на плоскости угол и точку O внутри него (рис. 1.). Существуют ли отличные от круга фигуры, которые могут вращаться внутри данного угла так, чтобы граница фигуры все время касалась сторон угла и проходила через точку O?

А. Н. Колмогоров отметил, что решение этой проблемы имеет и практическое значение: «На некоторых заводах производят проверку цилиндрических деталей следующим образом: деталь укладывают в лоток и вращают так, чтобы она касалась обеих сторон лотка, затем сверху подводится «щуп» (стержень, которой может совершать продольное перемещение) до соприкосновения с деталью. Если во время вращения щуп сдвигается, то деталь бракуется. Таким образом, если существуют отличные от круга фигуры, удовлетворяющие условиям задачи, то цилиндры, имеющие в сечении такую фигуру, будут великолепно проходить через ОТК» («Квант», 1971, № 3, с. 20).

В статье дается частичное решение проблемы Колмогорова.

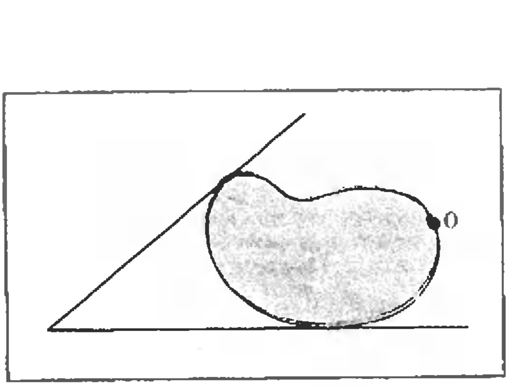


Рис. 1.

Для некоторых видов углов и положений точки O внутри угла мне удалось найти фигуры, отличные от круга и удовлетворяющие условиям, сформулированным А. Н. Колмогоровым. Построение таких фигур может быть произведено следующим образом:

Рассмотрим правильный многоугольник; продолжим две его непараллельные стороны до пересечения. Полученный угол и возьмем в качестве заданного угла. В качестве точки O возьмем одну из вершин многоугольника, например так, как это сделано для пятиугольника на рисунке 2,*а*. Теперь начнем вращать многоугольник так, чтобы при этом он касался обеих сторон угла некоторыми своими вершинами. Наша задача — деформировать многоугольник в такую фигуру, при повороте которой внутри угла точка O все время оставалась бы на ее границе; при этом, конечно, разумно «сохранить вершины» многоугольника, поскольку ими он касается сторон угла.

Будем поворачивать многоугольник до тех пор, пока сторона BC не вернется на исходную сторону угла (начало этого поворота см. на рисунках 2, *а* — *г*). При этом поместим в точку O острие карандаша и проследим за тем, какие кривые будет рисовать этот карандаш при нашем повороте.

Полный поворот (на угол от 0 до 2π) пятиугольника естественно разбивается на пять этапов: поворот на угол от 0 до $2\pi/5$, от $2\pi/5$ до $4\pi/5$ и т. д. После первого этапа на исходной стороне угла оказывается соседняя со стороной BC сторона AB пятиугольника, после второго этапа — соседняя с ней сторона AE и т. д. В каждый из этих этапов наш угол опирается на какую-нибудь одну из диагоналей пятиугольника: в первый — на диагональ BE, затем — на AD, потом на EC, на DB и, наконец, на CA. Точка O при этом все время находится на биссектрисе нашего угла.

При повороте пятиугольника из положения, изображенного на рисунке 2, *а*, в положение, изображенное на рисунке 2, *г*, острие карандаша

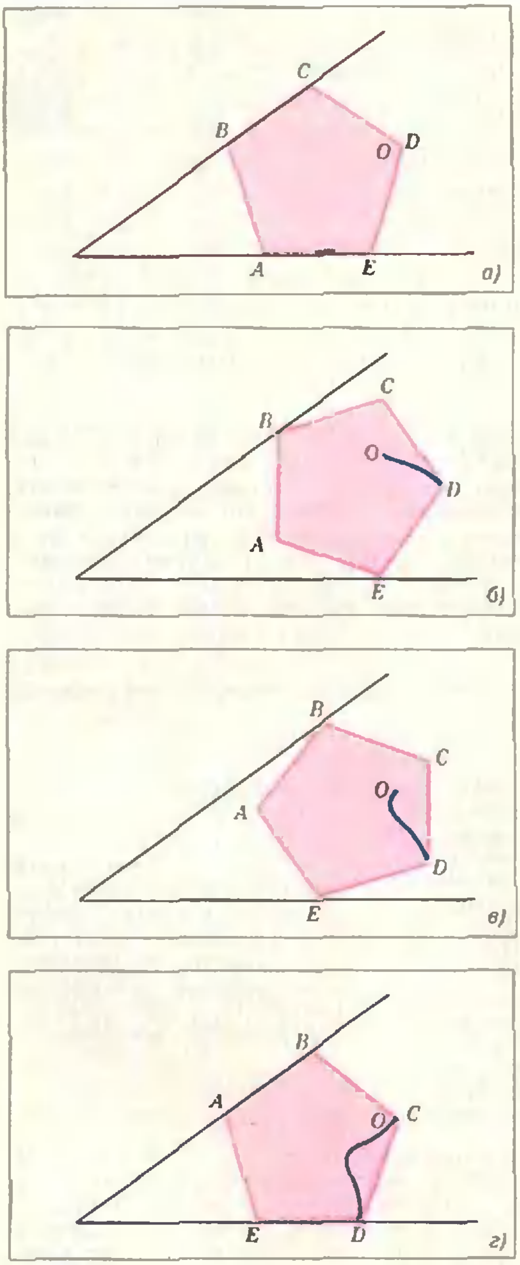


Рис. 2.

прочертит некоторую кривую (см. рисунки 2, *а*—*г*). При полном же повороте пятиугольника карандаш нарисует на нем «звездочку», которая, очевидно, и будет ограничивать искомую фигуру в силу самого способа построения.

Что же за кривые образуют границу этой фигуры?

Чтобы это понять, поступим следующим образом: оставим пятиугольник неподвижным, а вращать будет плоскость с нарисованным на ней углом и гвоздем в точке O. Мы

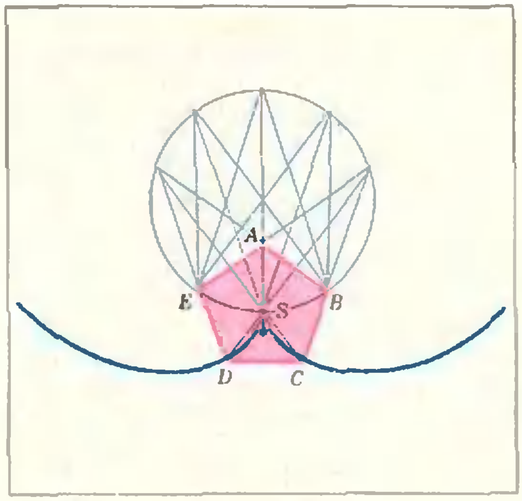


Рис. 3.

уже отмечали, что при повороте на величину от 0 до $2\pi/5$ наш угол будет опираться на диагональ BE; следовательно, его вершина будет скользить по дуге окружности, показанной на рисунке 3.

Точка O находится на биссектрисе угла и удалена от его вершины на заданное расстояние. Биссектриса угла при движении вершины угла по большей из дуг BE рассматриваемой окружности будет проходить через середину S меньшей дуги BE этой окружности. Таким образом, метод построения искомой кривой ясен: нужно через каждую точку большей дуги BE нашей окружности и середину S меньшей дуги провести прямую и от точки большей дуги отложить отрезок, равный расстоянию от точки O до вершины угла; тогда концы этих отрезков будут описывать искомую кривую.

Затем ту же процедуру нужно проделать с диагоналями AD, EC, DB и CA пятиугольника, поворачивая наш угол соответственно на величины от $2\pi/5$ до $4\pi/5$, от $4\pi/5$ до $6\pi/5$ и от $6\pi/5$ до $8\pi/5$ и от $8\pi/5$ до 2π.

Получающаяся при этом кривая (см. рис. 3) давно известна в математике, о ней «Квант» уже писал на своих страницах. Она называется *улиткой Паскаля* (см. «Квант», 1977, № 5).

Подобным же образом исследуется форма ограничивающей кривой и для других правильных многоугольников. Во всех случаях соот-

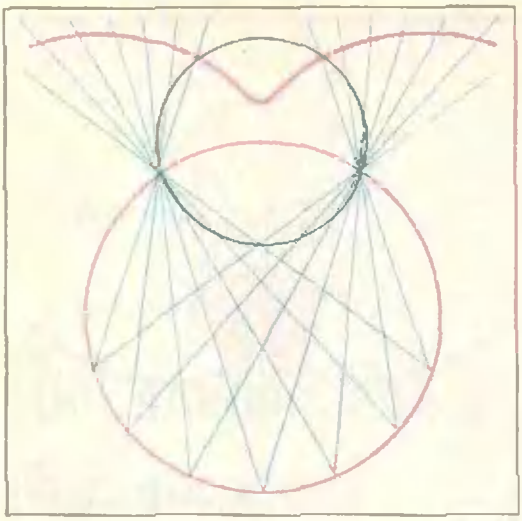


Рис. 4.

ветствующие фигуры ограничиваются дугами улитки Паскаля.

На рисунке 4 изображена «звездочка», соответсвующая пятиугольнику. На второй странице обложки журнала — «звездочка», соответствующая квадрату. Желающие могут нарисовать «звездочки», соответствующие другим правильным многоугольникам, при этом в качестве точки O не обязательно брать вершину на биссектрисе угла. Получающиеся кривые также будут кусками улитки Паскаля, но ее «зубцы» уже не будут симметричными.

Заключение от редакции

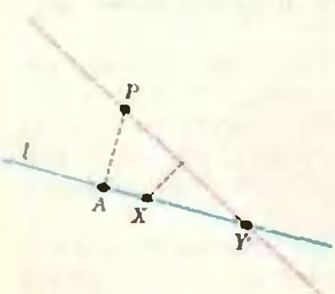
Итак, А. Бабичев частично решил задачу Колмогорова. Однако его решение ставит новый вопрос: существуют ли выпуклые фигуры, отличные от круга, удовлетворяющие условиям задачи? (Фигуры, полученные А. Бабичевым, все невыпуклы.) Ждем ваших писем.

Легкое решение трудной проблемы

В конце прошлого века английский математик Дж. Сильвестр поставил следующую проблему:

Пусть S — конечное множество точек на плоскости такое, что не все его точки лежат на одной прямой. Обязательно ли существует прямая, на которой лежат ровно две точки множества S?

Более сорока лет проблема Сильвестра оставалась нерешенной, а затем около полустолетия считалась очень трудной задачей. Но вдруг возникла следующая прозрачная идея.



Проведем всевозможные прямые через пары точек множества S (быть может, на некоторых из них лежит больше двух точек). Рассмотрим всевозможные расстояния от точек множества S до проведенных прямых. Их — конечное число. Пусть r — наименьшее из этих расстояний ($r>0$). Возьмем ту точку P и ту прямую l, расстояние между которыми равно r. Докажем, что на прямой l лежат ровно две точки из множества S.

Предположим, что на ней лежат три или более точек из множества S. Опустим перпендикуляр из точки P на прямую l; пусть A — основание этого перпендикуляра (см. рисунок). Легко видеть, что $A \notin S$. Значит, на прямой l по крайней мере с одной стороны от точки A лежит не менее двух точек из множества S; обозначим две из них через X и Y, причем пусть X лежит ближе к A, чем Y. Проведем теперь прямую через точки P и Y. Очевидно, расстояние от точки X до этой прямой меньше, чем расстояние от точки P до прямой l, что противоречит выбору P и l.

Следовательно, на прямой l лежат лишь две точки из множества S.

А. П.

Наша обложка

Поверхность причудливой формы, нарисованная на первой странице обложки, получена приемом, который уже описывался на страницах нашего журнала («Квант», 1980, № 10, с. 62): левые части уравнений трех эллипсоидов

$$\frac{x^2}{a_k^2}+\frac{y^2}{b_k^2}+\frac{z^2}{c_k^2}-1=0 \quad (k=1, 2, 3)$$

перемножены и приравнены к нулю, после чего свободный член полученного уравнения шестой степени чуточку изменен.

ЭВМ ЕС-1030, выполняя чертеж по уравнению, показала два семейства линий на поверхности: их отсекают плоскости, расположенные через равные промежутки, параллельные координатным плоскостям Oxz и Oyz. Получившиеся кусочки поверхности машина раскрасила в шахматном порядке.

Машина считала поверхность непрозрачной. На рисунке мы видим, таким образом, «внешнюю часть» поверхности. Подумайте — а что у нее «внутри»?

Ю. Котов

Г. Григорьев

Телевизор — стробоскоп

Как вы думаете: что вы увидите, если будете смотреть на вращающийся предмет через отверстие во вращающемся диске? Оказывается, все зависит от скоростей предмета и диска. И это нетрудно понять.

Пусть диск за время $T_д$ (период обращения диска) совершает один оборот, а предмет — один или несколько оборотов, так что его период обращения $T_п = T_д/n$ ($n>1$). В этом случае перед глазом наблюдателя предмет будет появляться все время в одном и том же положении. И если частота вращения велика, из-за инерции зрительного восприятия предмет будет казаться неподвижным.

Если же период вращения диска не кратен периоду вращения предмета, то есть

$$\Delta T = T_д - nT_п \neq 0,$$

и эта разница во времени мала:

$$\Delta T \ll T_д,$$

наблюдатель увидит предмет медленно поворачивающимся по направлению вращения или против него (в зависимости от знака ΔT).

Такое несоответствие кажущегося и истинного движений предмета получило название *стробоскопического эффекта* (от греческих слов στροβος — кружение и σχοπεω — смотрю). Очевидно, его можно наблюдать различными способами, но всегда процесс наблюдения должен быть периодическим.

Практическое использование стробоскопов как демонстрационных устройств началось еще в начале прошлого века. Именно из этих устройств, демонстрировавших «пляшущих человечков», «кошек-мышек» и другие забавные картинки, родился современный кинематограф.

На кинопленку кадр за кадром снимают последовательные фазы движения. Принятая при съемке частота смены кадров — 24 кадра в секунду (24 Гц). При такой частоте глаз еще замечает мелькание изображения, поэтому во время демонстрации кинофильма каждый остановленный кадр затеняется специальным устройством еще раз. Таким образом, частота мельканий становится 48 Гц, и зритель воспринимает движение как непрерывное.

Явление стробоскопии нашло свое применение и во многих областях современной техники. Сейчас на смену вращающимся дискам пришли стробоскопы с лампами-вспышками. Современный стробоскопический источник света может работать с частотой до 1 кГц. С помощью таких приборов можно исследовать различные машины и механизмы с быстро вращающимися или колеблющимися деталями. Например, можно измерить скорость вращения двигателя, «остановить» и рассмотреть зацепление зубчатых колес, измерить амплитуду вибраций какого-либо механизма и т. д.

Принцип стробоскопии используется и в телевидении. Однако формирование кадра в телевизоре происходит совсем не так, как в кино. В проекционном кино кадр демонстрируется целиком и затем заменяется следующим. В телевизоре кадр «рисуется» электронным лучом на люминесцирующем экране строка за строкой слева направо и сверху вниз (причем интенсивность луча меняется в соответствии с информацией о яркости изображения в данном месте кадра). Говорят, что изображение разворачивается на экране.

По радиотехническим причинам частота смены кадров в телевизоре выбрана равной 25 Гц, но при такой частоте глаз замечает мелькание изображения. Какой выход был найден для кинопроектора, мы уже говорили, а как быть с телевизором? Ведь

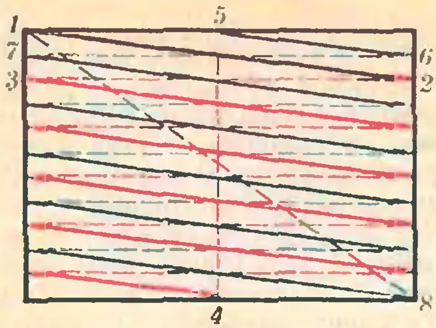


Рис. 1. Ход луча при чересстрочной развертке: *1—2* — начало нечетного полукадра; *5—6* — начало четного полукадра; *2—3*, *4—5*, *6—7* и *8—1* — обратный ход луча.

нельзя затенить электронный луч где-то на середине кадра, так как в этом случае просто пропадет часть изображения. Создателями телевидения был найден оригинальный выход: кадр передается не весь сразу, а полукадрами, так что электронный луч рисует сначала нечетные, а затем четные строки изображения. При этом полукадры меняются с частотой 50 Гц, и глаз воспринимает изображение движения непрерывным. Такой способ формирования кадра на телевизионном экране получил название чересстрочной развертки (рис. 1).

С телевизором в домашних условиях можно провести ряд экспериментов, демонстрирующих стробоскопический эффект.

В первом опыте попробуйте посмотреть на экран телевизора через «классический» стробоскоп — вращающийся диск с отверстиями. Его нетрудно изготовить из куска картона, насаженного на вал микроэлектродвигателя (рис. 2). Для регулировки частоты вращения двигателя его нужно питать от плоской батарейки (с ЭДС 4,5 В) через реостат (с полным сопротивлением 100 Ом). Расстояние от стробоскопа до экрана телевизора должно быть таким, чтобы через отверстие был виден весь экран.

Наблюдаемую картину можно проанализировать с помощью графиков, изображенных на рисунке 3. Первый график (рис. 3, *а*) демонстрирует, как изображение заполняет экран сверху вниз (по оси ординат отложено положение строки в кадре, по оси абсцисс — время). Пунктиром показан обратный ход луча (луч в этот момент гасится). График «видности» стробоскопа (рис. 3, *б*) представляет собой отрезки прямых, верхняя из которых отвечает положению «видно», нижняя — «не видно». Третий и четвертый графики (рис. 3, *в* и *г*) получены наложением первых двух при разном сдвиге фаз между ними. Они объясняют, почему мы видим (при совпадении частот, конечно) лишь половину экрана.

При небольшом изменении частоты вращения диска темная полоса будет пробегать вверх или вниз по экрану, в зависимости от нашего желания.

Попробуйте самостоятельно объяснить, при каком соотношении частот полоса будет бежать вверх, а при каком — вниз. Как будет выглядеть картинка при частоте стробоскопа 100 Гц? 150 Гц? Почему по экрану телевизора, снятого на кинопленку, пробегает темная полоса? Почему иногда на кино- или телеэкране у движущегося вперед авто-

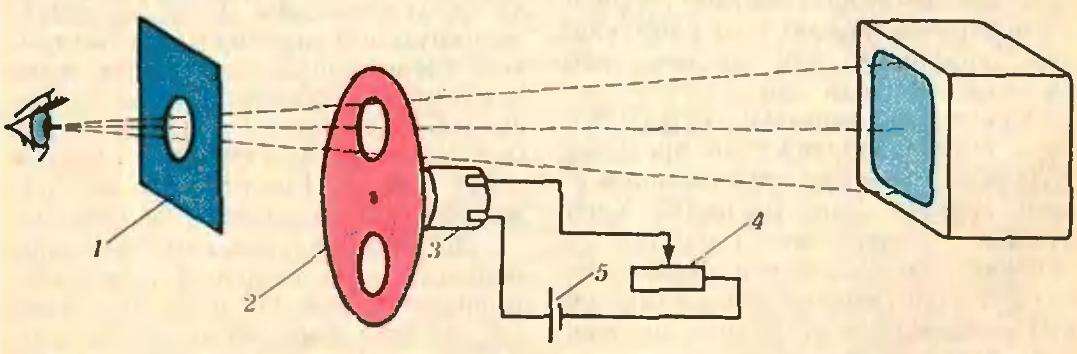


Рис. 2. Схема опыта с «классическим» стробоскопом: *1* — непрозрачный экран; *2* — вращающийся диск с отверстиями; *3* — микроэлектродвигатель; *4* — реостат; *5* — плоская батарейка.

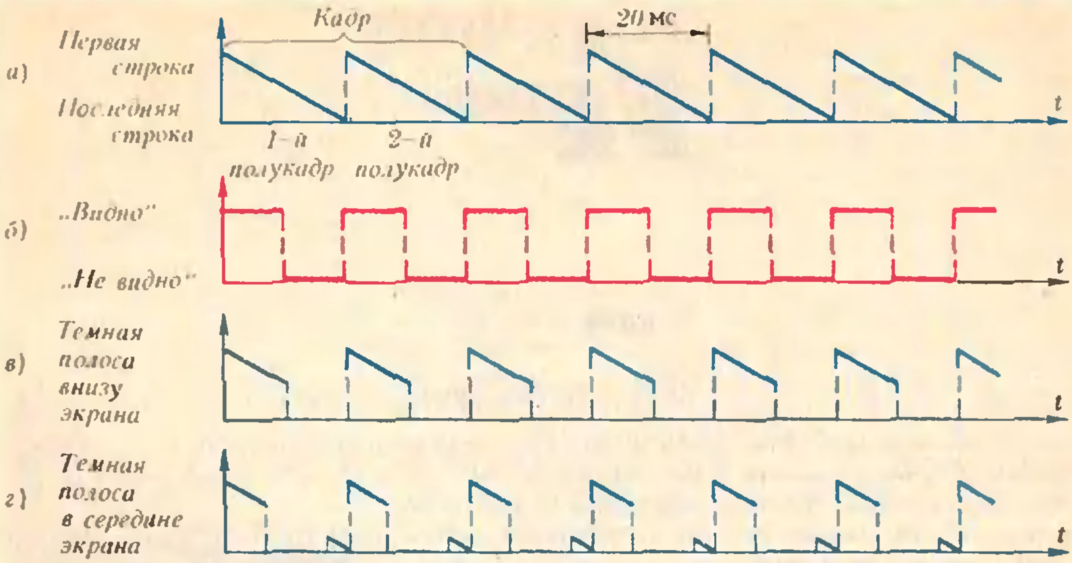


Рис. 3.

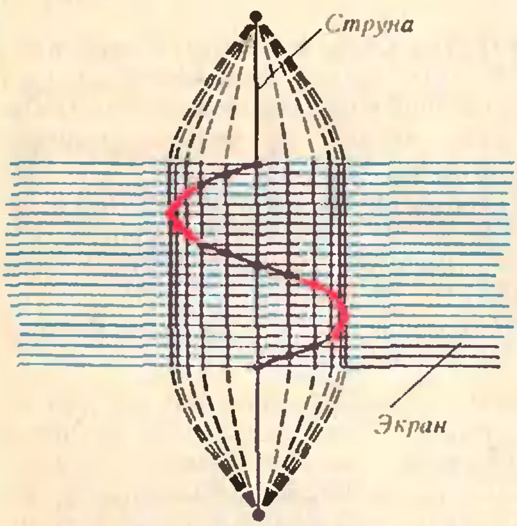


Рис. 4. На рисунке изображена только 21 строка, на самом деле в полукадре 312,5 (а в целом кадре — 625) строк.

мобиля колеса медленно вращаются назад?

Проведите еще один эксперимент. Для этого вам понадобится струна длиной 0,3—0,5 м (можно использовать резинку для авиамоделей). Как будет выглядеть вертикально расположенная колеблющаяся струна на фоне экрана телевизора?

Пусть в момент начала полукадра струна находится в положении равновесия. Пока луч пробежит строку, струна сместится и встретится с лучом в новом месте. В следующей строке «место встречи» опять сместится и так далее. Если период колебаний струны 20 мс (частота 50 Гц), то за это время заполнится весь полукадр, а струна вернется в исходное положение, совершив полное колебание. Многократное повторение этой ситуации приведет к тому, что тень от струны, которую мы увидим на фоне экрана телевизора, будет иметь форму синусоиды (рис. 4).

Что вы увидите, если частота колебаний струны удвоится? утроится? Что вы увидите, если струна будет расположена по диагонали экрана? по горизонтали? Проделайте эти опыты и попробуйте объяснить полученные результаты. Набравшись опыта, попробуйте сообразить, как будет выглядеть на фоне экрана палочка, вращающаяся вокруг своей поперечной оси. Проверьте свои соображения экспериментально.

Задачник Кванта

Задачи

М681 — М685; Ф693 — Ф697

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 июля 1981 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5—81» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М681, М682» или «Ф693». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М681. а) Придумайте целые числа a, b, c, d такие, что числа a^2+b^2, $a^2+b^2+c^2$, $a^2+b^2+c^2+d^2$ — квадраты целых чисел.
б) Существует ли последовательность, состоящая из квадратов целых чисел, такая, что при любом n сумма n ее первых членов — квадрат целого числа?

Г. Григорьев

М682. Внутри треугольника Δ нужно расположить треугольник Δ_1 так, чтобы у каждого из трех квадратов, построенных на сторонах треугольника Δ_1, две вершины лежали на разных сторонах треугольника Δ (рис. 1).
а) Докажите, что медианы треугольника Δ перпендикулярны сторонам треугольника Δ_1.
б) Для любого ли остроугольного треугольника Δ такое построение возможно?

А. Ягубьянц

М683. Несколько кружков одинакового размера положили на стол так, что никакие два не перекрываются. Докажите, что кружки можно раскрасить в четыре цвета так, что любые два касающихся кружка будут окрашены в разные цвета. Найдите расположение кружков, при котором трех цветов для такой раскраски недостаточно.

Г. Рингель

М684*. Двое играют в следующий вариант «морского боя». Один игрок располагает на доске $n\times n$ некоторое количество непересекающихся «кораблей» $n\times 1$ (быть может, ни одного). Второй игрок наносит одновременно ряд ударов по полям доски и про каждое поле получает от противника ответ — попал или промахнулся. По какому минимальному количеству полей следует нанести удары, чтобы по ответам противника можно было однозначно определить расположение всех его кораблей? Рассмотрите три случая: а) $n=4$, б) $n=10$, в) n — любое натуральное число.

Е. Гик

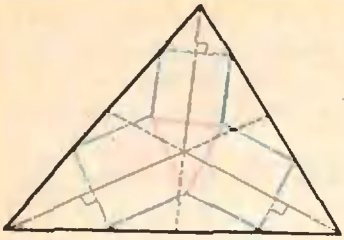


Рис. 1.

М685*. Два подмножества множества натуральных чисел назовем *конгруэнтными*, если одно получается из другого сдвигом на целое число. (Например, множества четных и нечетных чисел конгруэнтны.) Можно ли разбить множество натуральных чисел на бесконечное число (непересекающихся) бесконечных конгруэнтных подмножеств?

А. Федоров

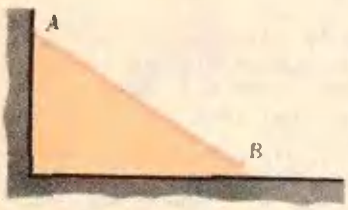


Рис. 2.

Ф693. На неподвижном клине, образующем угол α с горизонтом, лежит нерастяжимая невесомая веревка (рис. 2). Один из концов веревки закреплен в точке A. К нижнему концу веревки (в точке B) прикреплен небольшой грузик. В некоторый момент времени клин начинает двигаться вправо с постоянным ускорением a. С каким ускорением движется грузик, пока он находится на клине?

С. Кротов

Ф694. По длинному прямолинейному желобу, наклоненному под углом α к горизонту, движутся без трения N одинаковых шариков. Какое максимальное число соударений может произойти в системе при произвольных начальных положениях и скоростях шаров? Соударения шаров считать абсолютно упругими.

Е. Сурков

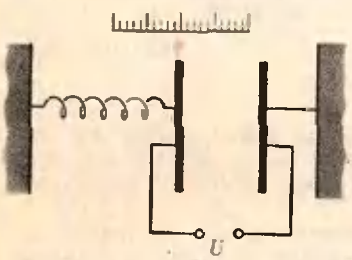


Рис. 3.

Ф695. В простейшей модели звезда рассматривается как газовый шар, находящийся в равновесии в собственном поле тяжести. Считая, что газ состоит из полностью ионизованных атомов водорода и гелия, оценить температуру звезды. Масса звезды M, радиус r; относительное содержание водорода в газе равно n.

В. Тугушев

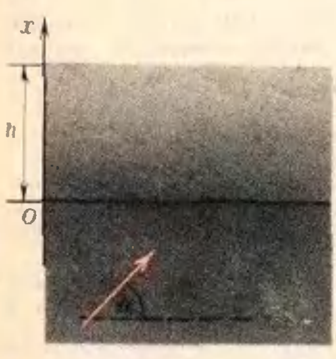


Рис. 4.

Ф696. Емкостный вольтметр представляет собой плоский воздушный конденсатор, одна из пластин которого закреплена неподвижно, а вторая может перемещаться поступательно в направлении, перпендикулярном плоскости пластин. К подвижной пластине прикреплена пружина жесткости k (рис. 3). Мерой приложенного напряжения служит изменение зазора между пластинами. Какое максимальное напряжение можно измерить таким прибором? Площади пластин S, зазор между пластинами при нулевом напряжении d.

Д. Павлов

Ф697. Между двумя средами с показателями преломления $n_0 > 1$ и $n_1 = 1$ имеется неоднородный слой высоты $h = H\left(1 - \frac{1}{n_0^2}\right)$, где $H = \text{const}$, внутри которого показатель преломления меняется с высотой по закону $n = \sqrt{1 - \frac{x}{H}}\, n_0$ (рис. 4). Из среды с показателем преломления n_0 в неоднородный слой входит луч света. При каких значениях угла α (см. рис. 4) луч вернется в оптически более плотную среду? При каком значении угла α_0 расстояние между точками входа и выхода луча максимально?

П. Калугин, ученик 10 кл. (Москва, с. ш. № 444)

Решения задач

М636—М640; Ф647—Ф655

М636. *Множество А состоит из целых чисел, его наименьший элемент равен 1, а наибольший элемент равен 100. Каждый элемент А, кроме 1, равен сумме двух (возможно, равных) чисел, принадлежащих А. Укажите среди всех множеств А, удовлетворяющих этим условиям, множество с минимальным числом элементов.*

Множество {1, 2, 3, 5, 10, 20, 25, 50, 100} удовлетворяет условиям задачи. Значит, искомое множество содержит не более девяти элементов. Упорядочим его элементы по возрастанию:

$$1=k_1<k_2<\ldots<k_n=100,\ n\leqslant 9.$$

Так как $k_j\leqslant 2\cdot k_{j-1}$ $(j=2, 3, \ldots, n)$, для любого j имеем $k_j\leqslant 2^{j-1}$. Пусть r — наибольший индекс такой, что $k_r\neq 2k_{r-1}$. Тогда $100=k_n=2^{n-r}\cdot k_r\leqslant 2^{n-r}(k_{r-1}+k_{r-2})\leqslant$ $\leqslant 2^{n-r}\cdot 2(2^{r-2}+2^{r-3})=3\cdot 2^{n-3}$. Из неравенства $100\leqslant$ $\leqslant 3\cdot 2^{n-3}$ следует, что $n\geqslant 9$. Итак, $n=9$ и множество {1, 2, 3, 5, 10, 20, 25, 50, 100} является искомым.

Отметим, что существуют и другие множества из девяти элементов, удовлетворяющие условию задачи. Например, годится и множество {1, 2, 4, 6, 10, 20, 30, 50, 100}.

Ю. Нестеренко

◆

М637. *Дан правильный треугольник ABC. Некоторая прямая, параллельная прямой AC, пересекает прямые AB и BC в точках M и P соответственно. Точка D — центр треугольника PMB, точка E — середина отрезка AP. Определите углы треугольника DEC.*

Прямая MP может пересекать как сами стороны AB, BC, так и их продолжения (см. рисунки 1—3). Во всех трех случаях ответ одинаков: $\widehat{EDC}=60^\circ$, $\widehat{DEC}=90^\circ$, $\widehat{DCE}=30^\circ$. Приведем несколько решений.

[Мы ограничимся описаниями решений для случая, соответствующего рисунку 1 (решения для случаев, изображенных на рисунках 2 и 3, находятся по аналогии).]

Первое решение. Достроим трапецию $MPCA$ до параллелограмма $PCAK$ (рис. 4). $|DK|=|DC|$, поскольку треугольник KDM конгруэнтен треугольнику CDP ($|KM|=$ $=|MA|=|PC|$, $|MD|=|DP|$, $\widehat{KMD}=150^\circ=\widehat{DPC}$). Следовательно, треугольник KDC — равнобедренный, а так как E — середина $[KC]$, получаем $[DE]\perp[KC]$, $\widehat{EDC}=\frac{1}{2}\cdot$ $\cdot\widehat{KDC}=\frac{1}{2}\cdot 120^\circ=60^\circ$ $(\widehat{KDC}=\widehat{MDP}=120^\circ)$.

Замечание. Можно было бы сделать поворот треугольника DPC по часовой стрелке на 120° относительно центра D. При этом $P\to M$, $C\to K$, $\widehat{KDC}=120^\circ$; остальное очевидно.

Второе решение. Осуществим поворот треугольника ABC на 60° против часовой стрелки вокруг центра B (рис. 5). При этом $D\to D_1$, $M\to P=M_1$, $P\to P_1$, $E\to E_1$, $C\to C_1$, $A\to C=A_1$.

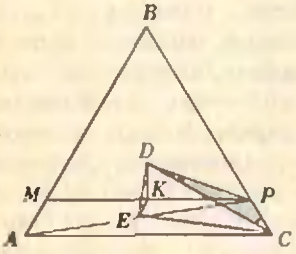


Рис. 1.

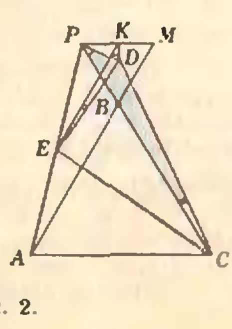


Рис. 2.

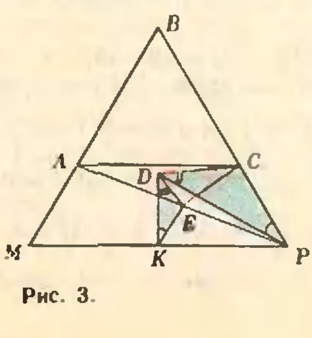


Рис. 3.

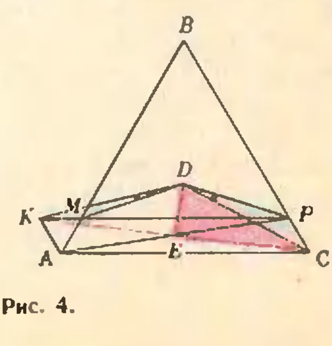


Рис. 4.

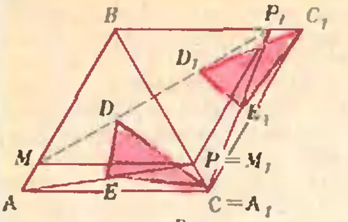


Рис. 5.

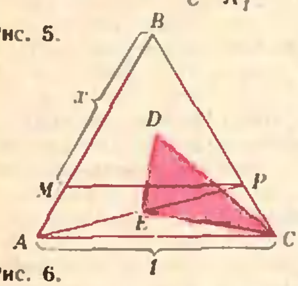


Рис. 6.

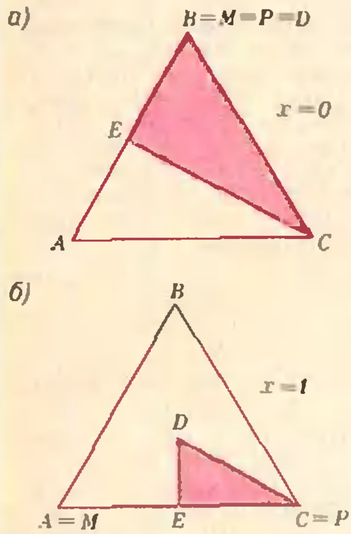


Рис. 7.

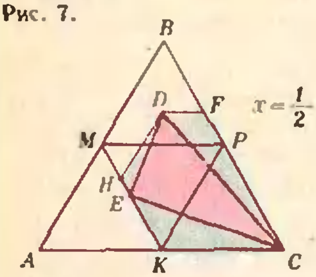


Рис. 8.

Точки D и D_1 как центры треугольников MBP и M_1BP_1 соответственно лежат на отрезке MP_1 и делят его на три равные части. Следовательно, D_1E_1 — средняя линия в треугольнике DP_1C, $|D_1E_1|=\frac{1}{2}|DC|=|DE|$, причем $[D_1E_1]\parallel[DC]$. Но $[D_1E_1]$ получается из $[DE]$ поворотом на 60°; следовательно, $\widehat{EDC}=60°$. Остальное очевидно.

Третье решение (алгебраическое, но почти без вычислений).

Пусть 1 — длина стороны треугольника ABC, x — длина стороны треугольника MBP (рис. 6). При $x=0$ и $x=1$ (см. рис. 7)

$$|DC|^2-|DE|^2-|EC|^2=0. \qquad (1)$$

Равенство (1) несложно проверяется и для $x=\frac{1}{2}$ (рис. 8). В этом месте надо немного повычислять: проведем $(DH)\parallel(AB)$ и $(DF)\parallel(AC)$. Имеем $|DH|=\frac{1}{3}$, $|HE|=\frac{1}{12}$, $|EK|=\frac{1}{4}$, $|DF|=\frac{1}{6}$, а каждый из углов $\widehat{DHE}$, $\widehat{EKC}$ и $\widehat{DFC}$ равен 120°. По теореме косинусов в треугольниках DHE, EKC и DFC

$$|DE|^2=\frac{1}{9}+\frac{1}{144}+\frac{1}{36}=\frac{21}{144}, \quad |EC|^2=\frac{1}{16}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{63}{144},$$

$$|DC|^2=\frac{1}{36}+\frac{4}{9}+\frac{1}{9}=\frac{84}{144},$$ откуда следует (1).

Левая часть соотношения (1) является квадратным трехчленом от x (квадраты длин сторон можно выразить из соответствующих треугольников при помощи теоремы косинусов). В силу сказанного выше, этот трехчлен в трех точках ($x=0$, $x=\frac{1}{2}$ и $x=1$) обращается в нуль. Значит, он тождественно равен нулю.

Следовательно, (1) выполняется при всех x, то есть при всех x треугольник DEC — прямоугольный: $\widehat{DEC}=90°$.

Аналогично проверяется, что квадратный трехчлен

$$|DE|^2-\frac{1}{4}\cdot|DC|^2 \qquad (2)$$

в трех точках ($x=0$, $\frac{1}{2}$, 1) также принимает нулевое значение, а потому тождественно равен нулю. Значит, $|DE|=\frac{1}{2}|DC|$, то есть $\widehat{CDE}=60°$.

Еще одно, четвертое, решение основано на таком наблюдении: треугольник DPC получается из треугольника DKE таким *центральноподобным поворотом:* композицией поворота на угол 60° с центром D и гомотетии с коэффициентом 2. Попробуйте записать это решение так, чтобы оно годилось сразу для всех трех случаев (см. рис. 1, 2, 3).

Л. Купцов

◆

М638. *Некоторые клетки бесконечного листа клетчатой бумаги выкрашены в красный цвет, остальные — в синий, причем так, что каждый прямоугольник из 6 клеток размером 2×3 содержит в точности две красные клетки. Сколько красных клеток может содержать прямоугольник из 99 клеток размером 9×11?*

Ответ. В любом прямоугольнике 9×11 содержится 33 красные клетки.

Доказательство. Рассмотрим произвольную красную клетку K_0 и рассмотрим квадрат 3×3 с центром в этой клетке. Соседние с K_0 по горизонтали или вертикали клетки не могут быть красными: если, например, как на рисунке 1, красной оказалась клетка K, то в правом и левом прямоугольниках 2×3 больше красных клеток не будет, поэтому в нижнем таком прямоугольнике окажется всего одна красная клетка (K_0) — противоречие с условием. Итак, соседние с K_0 клетки — синие.

Далее, в правом прямоугольнике должна быть еще одна красная клетка — пусть, например, это будет клетка K_1, как на рисунке 2. Рассматривая верхний и левый прямо-

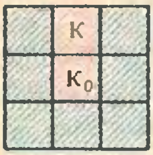


Рис. 1.

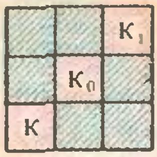


Рис. 2.

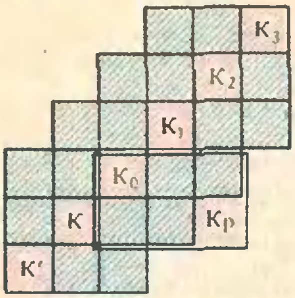


Рис. 3.

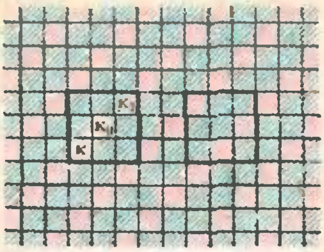


Рис. 4.

угольники 2×3, из условия задачи выводим, что в углу нашего квадрата 3×3, противоположном клетке K_1, тоже должна стоять красная клетка — K, и красные клетки в этом квадрате расположены по диагонали. Рассматривая такие же квадраты с центрами в клетках K_1 и K и сдвигая эти квадраты далее по «красной диагонали», из приведенного рассуждения получаем, что весь диагональный ряд KK_0K_1 состоит из красных клеток, а по два диагональных ряда выше и ниже красного — из синих клеток, как показано на рисунке 3. Рассуждая аналогично (см. рис. 3), получаем, что два следующих (сверху и снизу) ряда — красные, затем два ряда — синие, потом опять идут красные ряды, и так далее, как показано на рисунке 4.

Легко видеть, что раскраска рисунка 4 удовлетворяет условию задачи. При этом каждый квадрат 3×3 содержит в точности три красные клетки, а так как прямоугольник 9×11 можно разбить на 9 квадратов 3×3 и 3 прямоугольника 2×3, заключаем, что в этом прямоугольнике $9\cdot3+3\cdot2=33$ красные клетки.

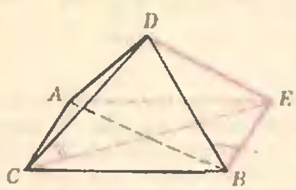
В приведенном рассуждении доказано больше, чем требовалось условием задачи — фактически нами описаны все возможные раскраски.

Большинство читателей рассуждали иначе: прямоугольник 9×11 легко разбить на 16 прямоугольников 2×3, после чего останется полоска 1×3. Из условия нетрудно получить, что в этой полоске может содержаться только одна красная клетка, поэтому во всем прямоугольнике — только $16\cdot2+1=33$ красные клетки. После этого достаточно привести пример раскраски, которая удовлетворяет условию задачи.

Отметим, что в этой задаче совсем не обязательно рассматривать раскраску всей плоскости — можно было ограничиться раскраской 99 клеток прямоугольника 9×11.

А. Земляков

М639. *В тетраэдре $ABCD$ $(AC)\perp(BC)$ и $(AD)\perp(BD)$. Докажите, что косинус угла между прямыми AC и BD меньше, чем $|CD|/|AB|$.*



◆

Проведем $(BE)\parallel(CA)$ и $(AE)\parallel(CB)$ (см. рисунок). Косинус угла между прямыми AC и BD — это $|\cos\widehat{DBE}|$.

С другой стороны, четырехугольник $ACBE$ — прямоугольник, поэтому $|AB|=|CE|$ и $|CD|/|AB|=|CD|/|CE|$.

Заметим, что вершины прямых углов ACB, ADB, AEB лежат на сфере с диаметром AB. Отрезок CE тоже является диаметром этой сферы, поэтому угол CDE — прямой и $|CD|/|CE|=\cos\widehat{DCE}$. Нужное неравенство принимает теперь вид $|\cos\widehat{DBE}|<\cos\widehat{DCE}$.

Пусть R — радиус сферы и r — радиус окружности, получающейся в сечении сферы плоскостью BDE. Так как эта плоскость не проходит через центр сферы, $r<R$ и из равенств $2r\cdot\sin\widehat{DBE}=|DE|=2R\cdot\sin\widehat{DCE}$ получаем $\sin\widehat{DBE}>\sin\widehat{DCE}$. Значит, $|\cos\widehat{DBE}|<|\cos\widehat{DCE}|=\cos\widehat{DCE}$.

Ю. Нестеренко

М640. *Число $x\in[0;1]$ записано в виде бесконечной десятичной дроби. Переставив ее первые 5 цифр после запятой в произвольном порядке, получим новую бесконечную десятичную дробь, отвечающую некоторому числу x_1. Переставив в десятичной записи числа x_1 цифры со 2-й по 6-ю после запятой, получим десятичную запись числа x_2. Вообще, десятичная*

◆

а) Очевидно, у всех чисел x_k с номерами $k>m$ первые m цифр после запятой одинаковы — обозначим эти цифры через $b_1, b_2, \ldots, b_m$. Здесь m — произвольное, и мы можем рассмотреть число y, записывающееся бесконечной дробью $0, b_1b_2\ldots b_m\ldots$ Тогда при $k>m$ выполнено неравенство $|x_k-y|<10^{-m}$, откуда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} x_k=y$. Этот пункт задачи носит подготовительный характер — он позволяет понять, как при последовательном «перемешивании» пятерок цифр дроби x получается новая бесконечная десятичная дробь y.

б) Ответ. Можно. Приведем пример. Возьмем дробь $x=0,(10)$ и «перемешаем» ее только на участках цифр с номерами $10^n<k<10^n+5$ при всех натуральных n: вместо 1010 на этих местах поставим 1100. Участки цифр с номера-

запись числа x_{k+1} получается перестановкой цифр в записи x_k с $(k+1)$-й по $(k+5)$-ю после запятой.

а) Докажите, что как бы ни переставлялись цифры на каждом шаге, получающаяся последовательность чисел x_k всегда имеет некоторый предел.

Обозначим этот предел через y.

б) Выясните, можно ли с помощью описанного процесса из рационального числа x получить иррациональное число y.

в) Придумайте такую дробь x, для которой данный процесс всегда приводит к иррациональным числам, каковы бы ни были перестановки пятерок цифр на каждом шаге.

ми $10^n+5<k<10^{n+1}$ по-прежнему будут периодическими. Допустим, что в результате получилась периодическая дробь $y=0, b_1b_2b_3...$ с p цифрами в периоде: $b_{i+p}=b_i$ для всех $i>N$. Выберем n так, чтобы выполнялись неравенства $10^n>N$ и $10^{n+1}-10^n-4>p$; тогда хотя бы один полный период y попадет на оставленный участок периодичности x, поэтому дробь y должна иметь период (10). Но по построению у дроби y сколь угодно далеко от запятой встречаются две единицы подряд — противоречие.

в) Пусть у дроби x на местах с номерами $10^n<k<10^n+5$ при всех натуральных n стоят единицы, остальные цифры — нули. Покажем, что ни при каком перемешивании дробь x не превращается в периодическую. Предположим противное: при каком-то последовательном перемешивании пятерок цифр получилась периодическая дробь y. Заметим, что при перемешивании номер данной цифры (нуля или единицы) не может уменьшиться более, чем на четыре. Среди цифр от первой до (10^n+5)-й после запятой всего $5n$ единиц, и, в силу предыдущего замечания, их число на этом участке не может увеличится. Если бы в периоде дроби y было p цифр и среди них $q>0$ единиц, то при достаточно большом n на участке цифр с номерами $1<k<10^n$ было бы по крайней мере $q\cdot\left[\frac{10^n-N}{p}\right]$ единиц, где N — номер цифры y, с которой начинается периодичность. Таким образом, получаем неравенство $q\cdot\left[\frac{10^n-N}{p}\right]<5n$, неверное при достаточно больших n. Следовательно, единиц в периоде дроби y быть не может: начиная с некоторого места должны идти одни нули.

Теперь покажем, что при любом перемешивании дроби x сколь угодно далеко от запятой должны остаться единицы Среди цифр дроби x от первой до (10^n+1)-й после запятой имеется некоторое количество нулей. Так как более далекие от запятой нули имеют номера, начиная с 10^n+6, после перемешивания они не могут попасть в указанный участок; число нулей на нем не увеличится, а число единиц соответственно не уменьшится. Следовательно, стоящие в дроби x на участке цифр с номерами $10^n+1<k<10^n+5$ единицы не могут все сдвинуться вправо — хотя бы одна единица должна остаться на участке от первой до (10^n+1)-й цифры. С другой стороны, сдвинуться влево более чем на четыре места они тоже не могут, поэтому при любом n на участке цифр с номерами $10^n-3<k<10^n+1$ у дроби y останется хотя бы одна единица. Очевидно, это противоречит тому, что период дроби состоит только из нуля.

А. Земляков

◆

Ф647. *Крупная дождевая капля покинула облако в безветренную погоду на большой высоте. В момент, когда ускорение капли было равным 7,5 м/с², ее скорость составляла 20 м/с. Вблизи земли капля падала с постоянной скоростью и, попав на боковое стекло автомобиля, оставила на нем след под углом 30° к вертикали. Оштрафует ли инспектор ГАИ водителя за превышение скорости, если разрешенная скорость движения автомобиля 60 км/ч? Силу сопротивления воздуха считать пропорциональной квадрату скорости капли.*

Запишем второй закон Ньютона для момента, когда ускорение капли равно $a=7{,}5$ м/с², а скорость $v_1=20$ м/с:

$$ma=mg-kv_1^2, \tag{1}$$

где kv_1^2 — значение силы сопротивления в этот момент.

Вблизи земли капля движется с некоторой постоянной скоростью v_2, следовательно:

$$mg=kv_2^2. \tag{2}$$

Так как след, оставленный каплей на стекле, составляет с вертикалью угол $\alpha=30°$, скорость капли и скорость автомобиля v связаны соотношением

$$v=v_2\,\mathrm{tg}\,\alpha. \tag{3}$$

Из уравнений (1) — (3) найдем скорость автомобиля:

$$v=\frac{v_1\,\mathrm{tg}\,\alpha}{\sqrt{1-a/g}}\approx 23{,}8\text{ м/с}\approx 85{,}7\text{ км/ч}.$$

Штраф придется заплатить.

В. Белонучкин

Ф648. *Шарнирная конструкция состоит из трех ромбов, стороны которых относятся как 3:2:1 (рис. 1). Вершина A_3 перемещается в горизонтальном направлении со скоростью v_0. Определить скорости вершин A_1, A_2, B_1 в тот момент, когда все углы конструкции прямые.*

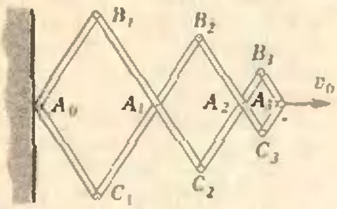


Рис. 1.

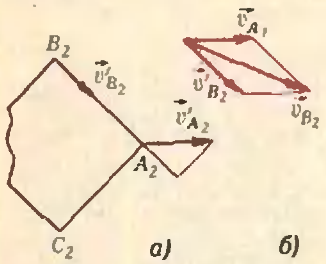


Рис. 2.

Из условия задачи следует, что во время движения конструкции между длинами l_1, l_2, l_3 отрезков A_0A_1, A_0A_2, A_0A_3 сохраняется соотношение

$$l_1:l_2:l_3=3:5:6.$$

Поэтому скорости точек A_1, A_2, A_3 соотносятся как

$$|\vec v_{A1}|:|\vec v_{A2}|:|\vec v_{A3}|=3:5:6,$$

и следовательно,

$$|\vec v_{A_1}|=\frac{v_0}{2},\ |\vec v_{A_2}|=\frac{5v_0}{6}.$$

Рассмотрим теперь движение среднего звена $(A_1B_2A_2C_2)$ в тот момент, когда углы конструкции прямые. В системе отсчета, движущейся со скоростью $\vec v_{A1}$, в этот момент скорость $\vec v'_{B2}$ точки B_2 направлена вдоль стороны B_2A_2; скорость точки A_2 направлена горизонтально и равна

$$|\vec v'_{A_2}|=|\vec v_{A2}-\vec v_{A1}|=\frac{v_0}{3}.$$

Из условия нерастяжимости стержня B_2A_2 следует (рис. 2, *а*):

$$|\vec v'_{B2}|=|\vec v'_{A2}|\sin 45^\circ=\frac{v_0\sqrt{2}}{6}.$$

Скорость точки B_2 относительно неподвижной системы отсчета найдем, воспользовавшись теоремой косинусов (рис. 2, *б*):

$$|\vec v_{B2}|^2=|\vec v_{A_1}|^2+|\vec v'_{B_2}|^2+2\frac{\sqrt{2}}{2}|\vec v_{A_1}||\vec v'_{B2}|=\frac{17}{36}v_0^2.$$

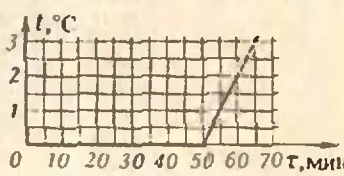
$$|\vec v_{B2}|=\frac{v_0}{6}\sqrt{17}.$$

С. Кротов

◆

Ф649. *В ведре находится смесь воды со льдом. Масса смеси 10 кг. Ведро внесли в комнату и сразу же начали измерять температуру смеси. Получившийся график зависимости $t(\tau)$ изображен на рисунке. Известны удельная теплоемкость воды $c_в=4200$ Дж/(кг · К) и теплота плавления льда $\lambda=3{,}4\cdot10^5$ Дж/кг. Определите, сколько льда было в ведре, когда его внесли в комнату. Теплоемкостью ведра пренебречь.*

Как видно из графика, первые 50 мин температура смеси не менялась и оставалась равной 0° С. Все это время тепло, получаемое смесью из комнаты, шло на таяние льда. Через 50 мин весь лед растаял, температура воды начала повы-



шаться. За 10 мин (от $\tau_1=50$ мин до $\tau_2=60$ мин) температура повысилась на $\Delta t=2°$ С. Тепло, поступившее к воде из комнаты за это время, равно $q=c_в M\Delta t=8{,}4\cdot10^4$ Дж ($M=10$ кг — масса воды). Значит, за первые 50 мин к смеси из комнаты поступило количество тепла $Q=5q=42\cdot10^5$ Дж. Это тепло и пошло на таяние массы m льда: $Q=\lambda m$. Таким образом,

$$m=\frac{Q}{\lambda}\approx 1{,}23 \text{ кг}.$$

А. Буздин

◆

Ф650. *Для получения напряжения, величина которого мало зависит от температуры, собрана схема по рисунку 1. Вольтамперные характеристики диода Д при трех различных температурах окружающей среды $t_1=125°$ С, $t_2=25°$ С, $t_3=-60°$ С приведе-*

Диод подключен к источнику последовательно с резисторами, сопротивление которых $R_{общ}=5{,}2\cdot10^3$ Ом. Следовательно, в любой момент времени (при любой температуре) ток в цепи равен

$$I=\frac{U-U_д}{R_{общ}},$$

где U, $U_д$ — значения напряжения на источнике и на диоде в данный момент.

ны на рисунке 2. Напряжение источника $U=6$ В при температуре 25° С и с увеличением температуры возрастает на $25\cdot10^{-3}$ В/град. Найти напряжение между зажимами А и В при $t=25°$ С и зависимость этого напряжения от температуры.

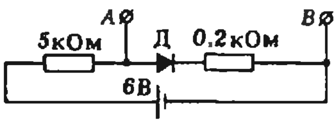


Рис. 1.

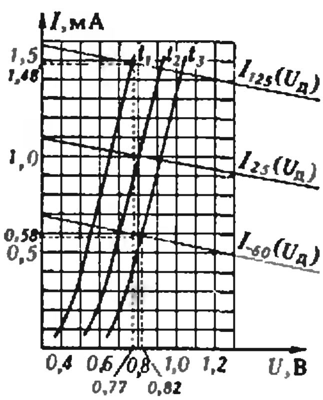


Рис. 2.

Построим на рисунке 2 графики зависимости $I(U_д)$ для трех различных температур:

$$t_1=+125°\text{C}\quad -U_{125}=8{,}5\ \text{В},\ I_{125}=\frac{8{,}5-U_{д,125}}{5{,}2}\ \text{мА};$$

$$t_2=+25°\text{C}\quad -U_{25}=6\ \text{В},\ I_{25}=\frac{6-U_{д,25}}{5{,}2}\ \text{мА};$$

$$t_3=-60°\text{C}\quad -U_{-60}=3{,}875\ \text{В},\ I_{-60}=\frac{3{,}875-U_{д,-60}}{5{,}2}\ \text{мА}.$$

Точки пересечения этих графиков с вольтамперными характеристиками диода (для соответствующих температур) определяют значения напряжения на диоде и ток в цепи при данной температуре. Из рисунка 2 находим (разумеется, приближенно):

$U_{д,125}=0{,}77$ В, $\qquad I_{125}=1{,}48$ мА;
$U_{д,25}=0{,}8$ В, $\qquad I_{25}=1$ мА;
$U_{д,-60}=3{,}875$ В, $\qquad I_{-60}=0{,}58$ мА.

Соответствующие значения напряжения $U_{AB}=U_д+I\cdot0{,}2$ (В) между зажимами A и B —

$U_{AB,125}=1{,}07$ В;
$U_{AB,25}=1$ В;
$U_{AB,-60}=0{,}94$ В.

Таким образом, температурный коэффициент, характеризующий относительное (относительно $U_{AB,25}$) изменение напряжения U_{AB} при изменении температуры от $-60°$С до $+125°$С, равен

$$\alpha=\frac{\Delta U_{AB}}{\Delta t\cdot U_{AB,25}}\approx7\cdot10^{-4}\ \text{град}^{-1}.$$

По сравнению с исходным температурным коэффициентом $\alpha_c=\frac{25\cdot10^{-3}}{6}\approx4\cdot10^{-3}$ град$^{-1}$ полученное значение α примерно в 6 раз меньше.

Подумайте, как надо изменить сопротивления резисторов, чтобы практически полностью скомпенсировать температурную нестабильность источника.

А. Зильберман

Ф651. *В научно-фантастической повести описывается аварийная ситуация, в которой астронавт массы $M=100$ кг оказался на расстоянии $l=100$ м от корабля со стаканом замерзшей воды. Обеспечивая сублимацию (испарение) льда, астронавт возвращается на корабль. Реален ли такой способ возвращения? Оцените, за какое время астронавт возвращается на корабль. Считайте, что сублимация льда происходит при постоянной температуре $T=272$ К. Давление насыщающих паров при этой температуре $p_н=550$ Па. Универсальная газовая постоянная равна $R=8{,}3\times10^3$ Дж/(кмоль·К). Размеры стакана и массу льда задайте самостоятельно.*

◆

Если плотно закрыть стакан, то число молекул, падающих на поверхность льда в единицу времени, будет равно числу молекул, сублимирующих с поверхности (динамическое равновесие); при этом условии и измерено давление насыщающих паров $p_н$. Оба указанных потока массы равны по модулю $\frac{1}{6}\varrho_н\bar{v}S$ (кг/с), где $\varrho_н=p_н\mu/RT$ — плотность насыщенных паров, S — площадь поверхности льда, μ — молярная масса воды, $\bar{v}\approx\sqrt{3RT/\mu}$ — средняя скорость молекулы, множитель 1/6 (или, точнее, 1/4) учитывает направленность движения «в одну сторону из шести возможных». Когда стакан открыт, поток улетающих молекул прежний, а возвращающихся молекул нет; давление теперь равно $1/2p_н$. Оценим время полного испарения, подставляя начальную массу льда $m\sim0{,}2$ кг, площадь стакана $S\sim30$ см^2, $\mu=18$ кг/кмоль:

$$\tau\sim\frac{m}{\frac{1}{6}\varrho_н\bar{v}S}\approx\frac{6m}{p_нS}\sqrt{\frac{RT}{3\mu}}\approx$$

$$\approx\frac{6\cdot0{,}2}{550\cdot3\cdot10^{-3}}\sqrt{\frac{8{,}3\cdot10^3\cdot272}{3\cdot18}}\ \text{с}\approx150\ \text{с}$$

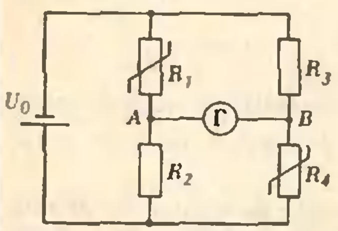
Заметим, что в реальности время испарения будет больше, так как вероятность для молекулы, попавшей на поверхность льда, «прилипнуть» к ней, равна так называемому коэффициенту конденсации и, естественно, меньше 1; соответственно и в поток испарения должен быть введен множитель, меньший 1. Далее, возможно, не все молекулы, испарившись, смогут сразу улететь на бесконечность; часть из них за счет столкновений в паровой фазе может вернуться назад. Таким образом, мы получили для времени испарения оценку снизу.

Пока лед испаряется, ускорение космонавта равно $a=p_{н}S/2M$. За это время он пролетит расстояние $L=a\tau^2/2\approx\approx 100$ м $=l$.

Учитывая приближенность наших оценок, можно сказать, что космонавт вернется на корабль за время $\gtrsim 100$ с.

А. Стасенко

Ф652. *Схема, изображенная на рисунке, состоит из двух одинаковых резисторов $R_2=R_3=R$ и двух одинаковых нелинейных резисторов R_1 и R_4, вольтамперная характеристика которых имеет вид $U=\alpha I^2$, где α — некоторый известный постоянный коэффициент. При каком напряжении источника питания U_0 сила тока через гальванометр Г равна нулю?*



◆

Пусть через ветвь схемы течет ток I. Поскольку одинаковы и линейные, и нелинейные резисторы, в ветвях цепи текут одинаковые токи. Напряжение источника питания равно

$$U_0=IR+\alpha I^2. \qquad (*)$$

Ток через гальванометр равен нулю, когда потенциал точки A равен потенциалу точки B. Поэтому

$$IR=\alpha I^2 \Rightarrow I=\frac{R}{\alpha}.$$

Подставив это значение тока в уравнение (*), найдем напряжение источника, при котором ток через гальванометр равен нулю:

$$U_0=2\frac{R^2}{\alpha}.$$

В. Скороваров

Ф653. *Некоторый элемент Z, соединенный с батареей с ЭДС $\mathcal{E}=10$ В и внутренним сопротивлением $r=10$ кОм, подключен к внешнему источнику тока так, как показано на рисунке 1. Вольтамперная характеристика такой цепи показана на рисунке 2 (черная кривая). Постройте вольтамперную характеристику элемента Z.*

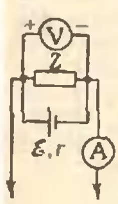


Рис. 1.

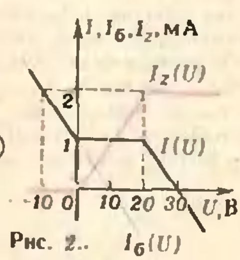


Рис. 2.

◆

Построим вольтамперную характеристику батареи. Согласно закону Ома для полной цепи, напряжение $U_б$ на батарее и ток $I_б$, текущий через батарею, связаны соотношением

$$U_б=\mathcal{E}-I_б r.$$

Поскольку элемент Z и батарея соединены параллельно, $U_б=U_z=U$ (U — напряжение внешнего источника).

На рисунке 2 вольтамперная характеристика батареи — синяя прямая.

Ток I_z, текущий через элемент Z, равен алгебраической разности $I-I_б$. Для построения вольтамперной характеристики элемента Z надо при каждом фиксированном значении напряжения U найти значение I_z вычитанием ординаты $I_б$ соответствующей точки вольтамперной характеристики $I_б(U)$ из ординаты соответствующей точки вольтамперной характеристики цепи.

На рисунке 2 вольтамперная характеристика $I_z(U)$ — красная кривая.

В. Можаев

Ф654. *Штатив массы M стоит на гладком столе. К штативу на легкой нити длины l прикреплен шарик массы m. Нить отклоняют на малый угол α и отпускают (рис. 1). Нари-*

◆

При малом угле отклонения α перемещение шарика мало отличается от горизонтального. В горизонтальном направлении на систему не действуют внешние силы, и импульс системы (точнее — проекция импульса на горизонтальную ось) остается постоянным — равным нулю. Следовательно, при движении шарика штатив движется в противоположную *совать график зависимости скорости штатива от времени. Столкновения шарика с основанием штатива абсолютно упругие.*

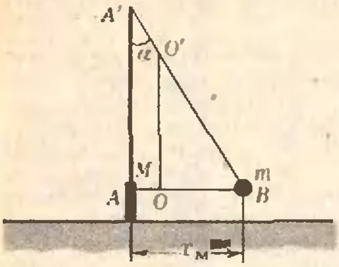


Рис. 1.

$$\left.\begin{array}{l}|AO|:|OB| = m : M;\\ |A'O'|:|O'B| = m : M\\ |A'O'| + |O'B| = l\end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |O'B| = l\frac{M}{m+M}.$$

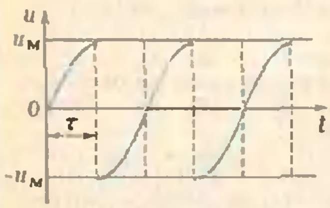


Рис. 2. $\tau = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}\,\frac{M}{m+M}}$.

сторону; абсолютные значения v и u скоростей шарика и штатива (точнее — проекций соответствующих скоростей на горизонтальную ось) связаны соотношением

$$mv = Mu. \qquad (*)$$

Центр масс системы (точка O на рисунке 1) остается неподвижным; значит, неподвижной остается и точка O'.

Таким образом, движение шарика — это колебания маятника с длиной нити

$$l' = |O'B| = l\frac{M}{m+M}$$

(см. рис. 1). Частота этих колебаний равна

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l'}} = \sqrt{\frac{g}{l}\,\frac{m+M}{M}};$$

скорость шарика —

$$v = v_м \sin\sqrt{\frac{g}{l}\,\frac{m+M}{M}}\,t,$$

где $v_м = \omega x_м = \sqrt{\frac{g}{l}\,\frac{m+M}{M}}\,l\sin\alpha$ — максимальное (по модулю) значение скорости, $x_м = l\sin\alpha$ — амплитуда смещения шарика.

Воспользовавшись соотношением (*), найдем скорость штатива:

$$u = \left(\frac{m}{M}\sqrt{\frac{g}{l}\,\frac{m+M}{M}}\,l\sin\alpha\right)\sin\sqrt{\frac{g}{l}\,\frac{m+M}{M}}\,t =$$
$$= u_м \sin\sqrt{\frac{g}{l}\,\frac{m+M}{M}}\,t.$$

После каждого упругого соударения направления скоростей $v_м$ и $u_м$ меняются на противоположные (проверьте это).

График зависимости скорости штатива от времени приведен на рисунке 2.

А. Зильберман

◆

Ф655. *В настоящее время используются соленоиды со сверхпроводящей обмоткой. Такие соленоиды могут длительное время создавать магнитное поле без затраты энергии. Однако, если вследствие каких-либо причин участок обмотки соленоида утратит сверхпроводящие свойства, произойдет авария. На этом участке током будет выделяться большое количество тепла и произойдет взрыв. Придумайте простейшее приспособление, исключающее подобные аварии (не пытайтесь придумывать какие-либо схемы с реле, размыкающим цепь, — они не помогут).*

Простейший способ исключить аварию при утере каким-либо участком обмотки сверхпроводящих свойств — шунтировать обмотку. Раньше в качестве шунтов использовали массивные медные проводники, которые размещали снаружи обмотки.

В настоящее время сверхпроводящую обмотку делают из пучка тонких жил из сверхпроводника, заключенных в матрицу из металла с высокой электро- и теплопроводностью,— из меди или алюминия. При утрате каким-либо участком обмотки сверхпроводящих свойств ток идет по массивному медному проводнику с малым сопротивлением.

Г. Мякишев

К конкурсу «Малый интеркосмос»

В предыдущем номере нашего журнала помещена информация о Всесоюзном конкурсе учащихся школ и профтехучилищ под названием «Малый интеркосмос». Ниже мы приводим примерный перечень проблем, предложенных специалистами участникам этого конкурса.

1. Земля — Космос — Земля

— Известно, что «потолок» авиации около 30 км, а нижняя граница полета спутников — около 180 км. Предложите физический принцип полета на промежуточных высотах.

— При запуске космических аппаратов первые ступени ракет бесполезно пропадают, падая на Землю. Разработайте варианты использования этих ступеней ракет.

Предложите:

— экономичные способы доставки грузов на орбиту, проект космического самолета, который можно использовать не только для полетов на орбиту, но и как межконтинентальное транспортное средство;

— направления и формы совместной работы школьников и экипажей космических станций в интересах народного хозяйства (например, параллельные наблюдения школьников на Земле, а космонавтов с орбиты за состоянием посевов, водных бассейнов, лесных массивов и т. д.);

— способ спасения космонавтов при возникновении аварийной ситуации на орбитальном космическом корабле. Один из вариантов спасения — возвращение космонавтов на Землю с использованием индивидуальных средств;

— способы моделирования различных условий космоса на Земле;

— метод определения химического состава почвы по изучению площади из космоса, выявления недостатка или избытка питательных веществ;

— формы участия космической науки и техники в решении экологических проблем;

— методы исследования природных ресурсов Земли.

2. Дом на орбите

— При длительных полетах на состояние космонавтов отрицательно действует однообразие обстановки. Предложите способ изменения обстановки на станции по желанию космонавтов.

— Досуг космонавтов можно занять играми, головоломками. Разработайте космическую игру, которая была бы применима в космосе, использовала бы особые условия полета (невесомость, вакуум, перепад температур). Игра может быть и подвижной, рассчитанной, например, на состязание двух команд.

— В настоящее время физические упражнения для космонавтов на орбитальной станции монотонны и непривлекательны. Предложите комплект малогабаритных трансформируемых тренажеров, занятия на которых были бы интересными для космонавтов и обеспечивали нагрузку на возможно большее число мышц (попытайтесь использовать опыт создателей игральных автоматов).

— Космонавты на станции «Салют» тратят много времени на переноску различного оборудования из грузового корабля «Прогресс» и установку его на борту станции. Предложите способ автоматизации этого процесса.

— Сейчас на «Салюте» есть душ. Предложите способ создания на орбитальной станции будущего бассейна для купания космонавтов.

Предложите:

— как наглядно для космонавтов отобразить аварийную ситуацию на корабле, орбитальной станции;

— режим труда и отдыха космонавтов на орбитальной станции в длительном полете;

— устройства, системы для самоконтроля психофизиологического состояния космонавтов, снятия раздражения, эмоциональной напряженности;

— программу и методы исследования влияния литературы и искусства на самочувствие космонавтов;

— методы отдыха космонавта в период его нахождения и работы вне корабля;

— проекты решения проблемы пребывания домашних животных на корабле;

— новые способы космического растениеводства;

— средства и способы приготовления в полете любимых блюд (блинов, жареной картошки, яичницы...);

— проекты создания в малом объеме с помощью технических средств эффекта присутствия космонавтов в различных наземных ситуациях (лес, родной дом, улица, театр);

— свои варианты создания экологически замкнутой системы в космосе;

— как извлечь вредные примеси из атмосферы обитаемого космического корабля;

— варианты космической архитектуры;

— конструкцию долговременной обитаемой космической станции нового поколения. Обоснуйте ее функционально.

Подумайте над проблемами:

— синтетическая пища;

— композиционные материалы и их применение в космонавтике;

— стекло для иллюминаторов;

— генная инженерия в космосе.

3. Индустрия в космосе

— В условиях космического полета в настоящее время проводятся эксперименты с целью выращивания кристаллов и получения сплавов из материалов с разным удельным весом Предложите другие технологические процессы, которые могут быть налажены в космосе

— Применение обычных земных инструментов в невесомости затруднено (например, забить гвоздь молотком тяжело) Придумайте инструменты (молоток, отвертка, гаечный ключ и т д), которые можно использовать в невесомости

— На различных орбитах вокруг Земли обращается большое количество отработавших свой ресурс космических аппаратов Разработайте проекты их использования

Предложите

— конструкцию прибора для быстрого охлаждения жидкого металла (до твердого состояния), находящегося во взвешенном состоянии на борту орбитальной станции,

— способ измерения частоты колебаний капли воды, свободно плавающей в кабине станции,

— методы измерения поверхностного натяжения в условиях невесомости, а также температуры жидкого металла бесконтактным способом,

— конструкцию ампулы (из стекла или кварца), в которую можно поместить твердый материал (металл или полупроводник), полностью заполняющий объем этой ампулы Важно, чтобы при нагреве она не растрескалась в связи с изменением объема материала,

— как получить солнечную энергию в условиях космоса в большом количестве и переправить на Землю,

— как непосредственно в космосе использовать энергию, которую станут получать солнечные электростанции на орбите,

— химические процессы, успешно протекающие в невесомости,

— проект космического химического производства, сырьем которого служил бы материал планет солнечной системы и астероиды

4. В открытом космосе

— Разработайте средства фиксации и перемещения космонавтов на поверхности космического аппарата

— По Земле, в воздухе и в воде с помощью специальных устройств (например, велосипеда) человек может передвигаться, используя только свою мускульную силу Придумайте способ передвижения в космосе между двумя близкорасположенными кораблями, основанный на этом принципе

— Разработайте конструкцию робота манипулятора с дистанционным или программным управлением для проведения монтажных работ на околоземной орбите в открытом космосе

— Если спутник имеет высоту орбиты 36000 км и запущен в плоскости экватора в сторону суточного вращения Земли, то он все время будет находиться над одной и той же точкой земного экватора Это очень удобно для использования таких спутников в качестве ретрансляторов радио и телевидения Предложите другие способы применения таких космических аппаратов

— Наблюдая один и тот же объект одновременно двумя или более радиотелескопами, астрономы получают высокое угловое разрешение (метод радиоинтерферометрии) Можно ли и как именно создать такой же оптический интерферометр на базе двух или нескольких телескопов?

— Известно, что связь с космонавтом вне корабля можно поддерживать по радио и телевизионным каналам, предложите дополнительный (аварийный) вид связи космонавта с экипажем станции

— Большое значение в научной программе выходящего в открытый космос космонавта придается фото- и киносъемкам В то же время современная конструкция скафандра не позволяет поднести окуляр кинокамеры к глазу наблюдателя Разработайте способы приближения условий киносъемки в космосе к земным

Предложите транспортные средства для сообщения между двумя космическими кораблями (космическая шлюпка)

Продумайте

— какими должны быть органы управления, организация рабочего места в этих аппаратах,

— конструкцию индивидуального транспортного средства для перемещения космонавтов-монтажников в открытом космосе в околоземном пространстве,

— конструкцию портативного съемного устройства для транспортировки грузов при осуществлении монтажных работ в открытом космосе,

— способы передвижения, помимо реактивного, которые можно использовать в открытом космосе,

— метод и аппаратуру для проведения эксперимента в открытом космосе по оценке зрительно-двигательной координации, скорости двигательной реакции космонавта,

— свой проект астрономической обсерватории в космосе,

— способы применения лазеров в космическом пространстве,

— средства для вынесения исследовательских приборов за борт космического аппарата на расстояние нескольких десятков метров с последующим возвращением их на борт аппарата

5. Освоение Солнечной системы

— Через несколько десятилетий станут возможны полеты на любое тело Солнечной системы Подумайте, где и по каким причинам лучше всего организовать обсерваторию для

а) изучения физики Солнца,

б) изучения явлений в атмосферах планет,

в) изучения звезд и далеких галактик

— В литературе высказывалась мысль о создании на Луне атмосферы искусственным путем Разработайте проект реализации этой идеи

— На Земле самый быстрый вид транспорта — самолет Разработайте проект аппарата, приспособленного для быстрой транспортировки людей и грузов в условиях Венеры и Марса

— На планетах гигантах сила тяжести значительно превосходит земную Предложите способы облегчения работы астрономов на такой планете

— Известно, что запасы сырья на Земле ограничены. Предложите способ организации массовой транспортировки редких металлов, нефти и других ресурсов с других планет на Землю.

— Существуют предложения провести исследования Солнца в непосредственной близости от него. Разработайте технические средства, необходимые для понижения температуры внутри космического аппарата.

Предложите:

— проект обитаемой научно-исследовательской станции на поверхности Луны или одной из ближайших планет;

— способы посадки на астероиды, ядра комет, спутники планет, транспортные средства для перемещения по поверхности малых тел Солнечной системы;

— программу, методы и технические средства прямого исследования ядра кометы Галлея, которая сблизится с Землей в 1986 г.;

— способы использования силы тяжести на Луне;

— конструкцию исследовательского аппарата для изучения вулканов на Марсе или на спутниках Юпитера;

— конструкцию научно-исследовательской станции, которая могла бы работать в специфических условиях Юпитера;

— методы и технические средства для непосредственного исследования вещества колец Сатурна, Юпитера и Урана;

— конструкцию аппарата для исследования, транспортировки метеорных тел в поясе астероидов;

— свои варианты конструкции вездехода для передвижения на поверхности планет;

— средства охлаждения аппаратов, работающих на поверхности Венеры;

— конструкции передвижных автоматических исследовательских аппаратов для работы на поверхности и в атмосфере Венеры;

— принципы конструирования аппаратуры, способной работать без охлаждения при температуре около 500° С.

Список рекомендуемой литературы

В. И. Алимов, В. П. Денисов, А. А. Ермилов, А. В. Кирсанов. Советские пилотируемые корабли и орбитальные станции. М., «Машиностроение», 1976.

А. Антрушин. Космические ракеты будущего. В книге «Хочу все знать». Л., 1973.

В. Алексеев, И. С. Миничин. Венера раскрывает тайны. М., «Машиностроение», 1975.

А. Н. Бушко и В. С. Городинская. Год в звездолете. М., «Молодая гвардия», 1975.

М. Борисов. На космической верфи. М., «Машиностроение», 1976.

В. П. Бурдаков, Ф. Ю. Зигель. Физические основы космонавтики. «Атомиздат», 1975.

В. С. Губарев. Хроника одного путешествия, или повесть о первом Луноходе. М., «Молодая гвардия», 1971.

Ю. А. Гагарин. Есть пламя! (статьи, речи, письма, интервью). М., «Молодая гвардия», 1971.

Ю. А. Гагарин, В. Лебедев. Психология и космос. М., «Молодая гвардия», 1976.

И. Н. Галкин. Геофизика Луны. М., «Наука», 1978.

К. А. Гильзин. Электрические межпланетные корабли. М., «Наука», 1970.

Ю. Н. Глазков, Л. С. Хачатурьянц, Е. В. Хрунов. На орбите вне корабля. М., «Знание», 1977.

В. П. Глушко. Путь в ракетной технике. М., «Машиностроение», 1977.

А. Ф. Евич. Индустрия в космосе. «Московский рабочий», 1978.

Ю. И. Зайцев. Спутники «Космос». М., «Наука», 1975.

Ф. Зигель. Занимательная космонавтика. М., «Машиностроение», 1970.

А. Д. Коваль, В. П. Сенкевич. Космос далекий и близкий. Л., «Лениздат», 1977.

А. Л. Кемурджиан, В. В. Громов, И. И. Черкасов, В. В. Шварев. Автоматические станции для изучения поверхности Луны. М., «Машиностроение», 1976.

А. Д. Коваль, Ю. А. Тюрин. Космос — Земле. М., «Знание», 1979.

А. Д. Коваль, Г. Р. Успенский. Космос — человеку. М., «Машиностроение», 1974.

Ю. В. Колесников, Ю. Н. Глазков. На орбите космический корабль. М., «Педагогика», 1980.

А. А. Космодемьянский. К. Э. Циолковский. М., «Просвещение», 1980.

Л. Ксанфомалите. Планеты, открытые заново. М., «Просвещение», 1978.

Н. Н. Крупенио. Радиофизические исследования планет. М., «Наука», 1978.

Е. П. Левитан. Астрофизика школьникам. М., «Просвещение», 1977.

В. И. Левантовский. Механика космического полета в элементарном изложении. М., «Наука», 1980.

А. Д. Марленский. Основы космонавтики. М., «Просвещение», 1975.

В. И. Мороз. Физика планеты Марс. М., «Наука», 1978.

Г. Нагаев. Пионеры Вселенной. Трилогия Кибальчич, Циолковский, Цандер. М., «Художественная литература», 1976.

Наука плюс фантазия — рассказы советских ученых. Комментирует журналист Е. Кнорре. М., «Детская литература», 1978.

Л. Николаев. Химия космоса. М., «Просвещение», 1974.

Орбиты сотрудничества. Под ред. Б. Н. Петрова. М., «Машиностроение», 1975.

Освоение космического пространства в СССР. М., «Наука», 1975—1979.

Н. М. Романтеев, Е. В. Хрунов. Астрономическая навигация пилотируемых космических кораблей. «Машиностроение», 1976.

Е. М. Савицкий, В. С. Клячко. Металлы космической эры. М., «Металлургия», 1978.

«Союз-22» исследует Землю. Под ред. Р. З. Сагдеева, И. Х. Штиллера. М., «Наука», 1980.

Физика Вселенной. М., «Наука», 1976.

В. Шаталов, М. Ребров. Космос — рабочая площадка. М., «Детская литература», 1978.

В. Шаталов, М. Ребров. Люди и космос. М., «Молодая гвардия», 1975.

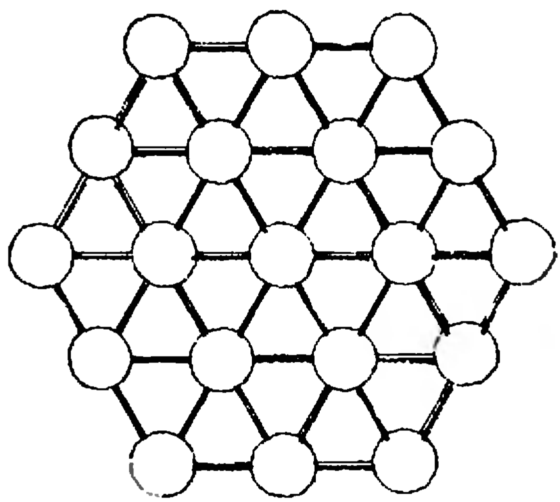
«Квант» для младших школьников

Задачи

1. Расшифруйте арифметический пример, изображенный на рисунке. Здесь разным буквам соответствуют разные цифры, одинаковым — одинаковые, а про букву A известно, что ей соответствует четная цифра.

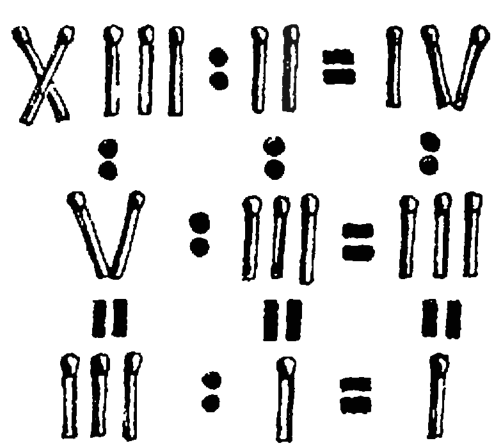
2. Найдите десять последовательных натуральных чисел, среди которых а) нет ни одного простого числа; б) ровно одно простое число; в) два простых числа; г) три простых числа; д) четыре простых числа.
Сколько вообще простых чисел может быть среди десяти последовательных натуральных чисел?

3. На плоскости вокруг точек A и B в одну и ту же сторону поворачиваются два стержня, причем стержень AA_1 поворачивается вдвое медленнее стержня BB_1 и в начальный момент $ABB_1=90°$ и $BAA_1=45°$. В точке M пересечения этих стержней на них надето колечко. Докажите, что колечко будет двигаться по дуге окружности с центром в точке B. Найдите радиус этой окружности.

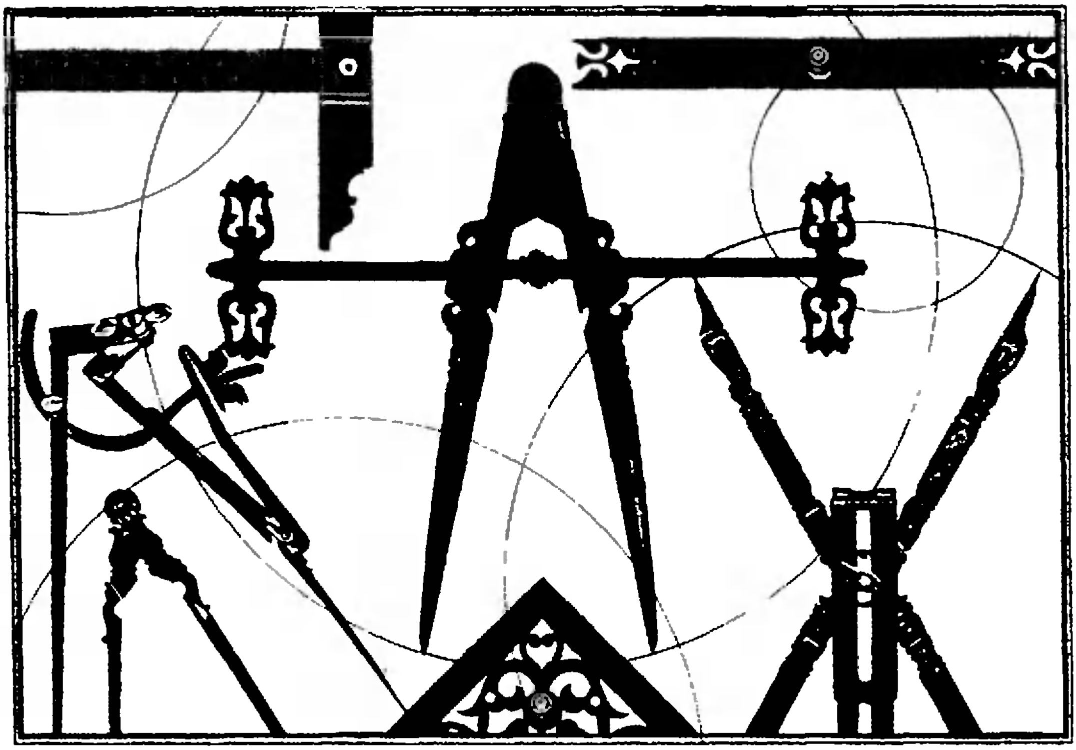


4. В кружках фигуры, изображенной на рисунке, расставьте числа от 1 до 19 так, чтобы сумма чисел, расположенных в кружках-вершинах всех правильных шестиугольников (их девять!), была постоянной.

5. В каждом из трех горизонтальных рядов (см. рисунок) переложите по одной спичке так, чтобы все шесть равенств (вертикальных и горизонтальных) оказались верными.



Эти задачи нам предложили *Н. Авилов, Н. Антонович, Н. Михайленко, С. Савастюк.*



А. Савин

Циркулем и линейкой

Циркуль и линейка — вот первые чертежные инструменты, которыми пользовался человек. Что может быть проще? Гладкая дощечка — это линейка, а две заостренные палки, связанные на одном конце, — циркуль. Сейчас и циркуль, и линейка стали изящнее, но назначение у них осталось прежним: по линейке проводят прямые (точнее, отрезки прямых), а циркулем рисуют окружности.

В школе изучают ряд простейших построений циркулем и линейкой. Строят прямую, проходящую через заданную точку и перпендикулярную (или параллельную) данной прямой, делят отрезок на несколько равных частей, делят пополам заданный угол.

А вот пример более сложной задачи: *построить треугольник по высоте, биссектрисе и медиане, выходящим из одной вершины.*

Решение задачи возможно, как не трудно убедиться, лишь в том случае, когда длины высоты h, биссектрисы b и медианы m удовлетворяют соотношению $h \leqslant b \leqslant m$; в противном случае искомого треугольника не существует.

Проведем на плоскости произвольную прямую l и восставим из некоторой ее точки H перпендикуляр к этой прямой. Отложим на нем отрезок AH длины h. Точка A будет одной из вершин искомого треугольника, а прямая l будет содержать его основание. Отметим точки K и M пересечения прямой l с окружностями радиусов b и m с центром в точке A (рис. 1) и соединим их с точкой A. Это будут биссектриса и медиана нашего треугольника. Заметим, что биссектриса будет лежать между медианой и высотой.

Дальнейшее построение основано на довольно простом, но редко отмечаемом факте: *биссектриса угла треугольника и срединный перпендикуляр к стороне, противолежащей этому углу, пересекаются на окружно-*

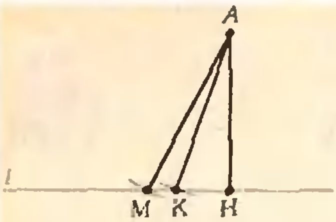


Рис. 1.

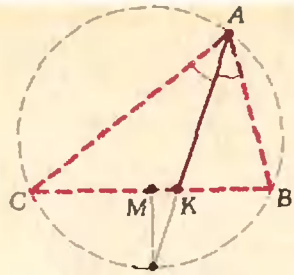


Рис. 2.

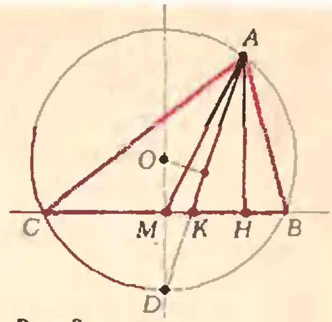


Рис. 3.

сти, описанной вокруг треугольника (эти биссектриса и перпендикуляр делят пополам дугу описанной окружности, опирающуюся на указанную сторону и не содержащую вершины A,— см. рисунок 2).

Кончить построение теперь уже просто. Проводим через точку M перпендикуляр к прямой l и продолжаем биссектрису AK до пересечения с ним в точке D (рис. 3). Итак, точки A и D лежат на окружности, описанной вокруг искомого треугольника, а ее центр O, очевидно, находится на прямой MD — срединном перпендикуляре к одной из ее хорд, и на срединном перпендикуляре к отрезку AD, который также является одной из ее хорд. Построив точку O, как точку пересечения указанных прямых, можно провести окружность, описанную вокруг искомого треугольника, поскольку мы знаем ее центр O и радиус $|OA|$. Точки B и C пересечения этой окружности с прямой l дадут недостающие вершины B и C искомого треугольника.

Искусство построения геометрических фигур при помощи циркуля и линейки было развито в Древней Греции в высокой степени. Одной из труднейших задач на построение, которые тогда умели выполнять, является задача построения окружности, касающейся трех данных окружностей. Эта задача носит название *задачи Аполлония* по имени выдающегося греческого геометра Аполлония из Перги (около 260—170 г. до н. э.)

Однако древнегреческим геометрам никак не удавалось выполнить некоторые построения, используя лишь циркуль и линейку, а построения, выполненные с помощью других инструментов, не считались геометрическими. К числу таких построений относятся построение квадрата, равновеликого данному кругу («квадратура круга»); деление произвольного угла на три равные части («трисекция угла») и построение стороны куба, объем которого вдвое больше объема заданного куба («удвоение куба»).

Эти три знаменитые задачи привлекали внимание выдающихся математиков на протяжении столетий, но окончательное решение получили лишь в середине прошлого века, когда была доказана их неразрешимость, то есть невозможность указанных построений лишь с помощью циркуля и линейки. Эти результаты были получены средствами не геометрии, а алгебры, что еще раз подчеркнуло единство математики.

Еще одной интереснейшей задачей на построение с помощью циркуля и линейки является задача построения правильного многоугольника с заданным числом сторон. Древние греки умели строить правильный треугольник, квадрат, правильные пятиугольник и пятнадцатиугольник, а также все многоугольники, которые получаются из них удвоением числа сторон,— и только их.

Новый шаг в этой области был сделан лишь в 1801 году великим немецким математиком К. Ф. Гауссом. Он указал способ построения циркулем и линейкой правильного 17-угольника и все значения n, при которых построение правильного n-угольника возможно указанными средствами. Этими многоугольниками оказались лишь те многоуголь-

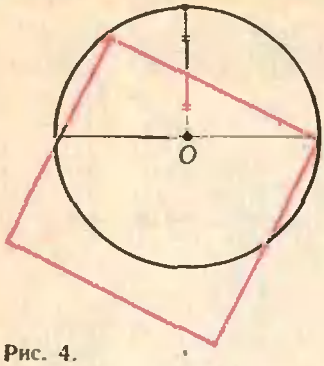


Рис. 4.

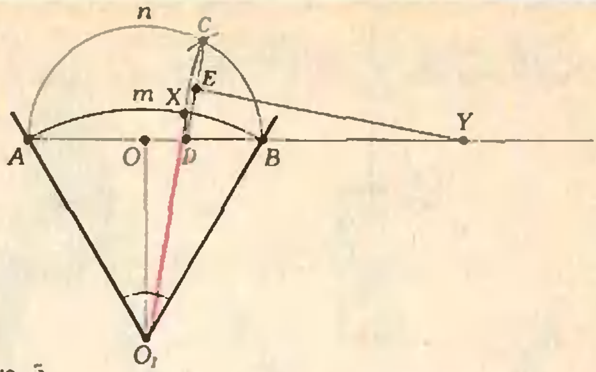


Рис. 5.

ники, у которых количество сторон является простым *числом Ферма**) или произведениями нескольких различных простых чисел Ферма, а также те, которые получаются из них удвоением числа сторон. Таким образом, была доказана невозможность построения с помощью циркуля и линейки правильных семиугольника, девятиугольника, одиннадцатиугольника, тринадцатиугольника.

Теория построений при помощи циркуля и линейки получила широкое развитие в конце XIX века. Например, было показано, что любое построение, выполняемое с помощью циркуля и линейки, можно выполнить с помощью лишь одной линейки, если в плоскости построения задана некоторая окружность и указан ее центр.

Все эти исследования внесли огромный вклад в развитие математики. Однако в практических построениях никто не ограничивает нас в наборе инструментов. Для большинства построений вполне достаточно линейки с делениями и транспортира.

Довольно любопытны некоторые приближенные способы построений. Например, приближенная квадратура круга получается, если за сторону квадрата взять хорду, проходящую через конец одного из диаметров круга и середину перпендикулярного ему радиуса (рис. 4). Этому построению соответствует значение $\pi = 3{,}2$.

Способ приближенной трисекции угла при помощи циркуля и линейки предложил наш читатель *А. Падалко*. Вот его метод: «Чтобы провести трисекцию угла с вершиной O_1 (см. рис. 5), описываем дугу AmB с центром O_1 произвольного радиуса и проводим хорду AB; пусть O — ее середина. Радиусом, равным $|AO|$, описываем полуокружность AnB с центром O. Из точки B делаем на этой полуокружности засечку C радиусом $|AO|$; легко видеть, что $\smile{BC} = \frac{\smile{AnB}}{3}$. Затем находим точку D такую, что $|BD| = \frac{|AB|}{3}$. Соединяем точки C и D и из середины E отрезка CD восстанавливаем перпендикуляр к $[CD]$. Пусть Y — точка пересечения этого перпендикуляра с продолжением $[AB]$. Радиусом $|DY|$ проводим из Y дугу; пусть X — пересечение этой дуги с дугой AmB. Тогда $\smile{BX} = \frac{\smile{AmB}}{3}$, то есть $\widehat{BO_1X} \approx \frac{\widehat{AO_1B}}{3}$.»

Оценку точности этого построения мы поручили ЭВМ. Машина выдала следующий результат: точность построения не менее 0,1°, наихудший результат — при угле около 78°, относительная ошибка, то есть отношение величины отклонения к величине самого угла, не превосходит 0,01 и максимальна при угле около 158°.

*) См. «Квант», 1979, № 12.

Б. Ерицпохов

Построение изображений наклонных предметов

Чтобы найти изображение светящейся точки в оптической системе, например в линзе или в зеркале, достаточно построить ход двух лучей, вышедших из точки. Обычно выбирают два из трех характерных лучей, ход которых после системы известен. Это луч, проходящий через оптический центр системы, луч, падающий на систему параллельно ее оптической оси, и луч, проходящий через передний фокус системы.

А как быть, если источник света не точечный, а протяженный? Можно, конечно, строить изображения отдельных его точек, но иногда возможны некоторые упрощения. Так, если предмет перпендикулярен к главной оптической оси, изображение тоже перпендикулярно к ней. А если предмет наклонен к оси под произвольным углом? Остановимся подробнее на этом случае.

Пусть предмет AB опирается на ось в точке A и составляет с осью угол α. Построим изображение $A'B'$ этого предмета в оптической системе, например в собирающей линзе (рис. 1). Интуитивно можно предположить, что изображение будет располагаться симметрично предмету относительно оси. Однако это не так. Найдем зависимость угла β от угла α.

Направим оси координат XOY в пространстве предметов и $X'OY'$ в пространстве изображений соответственно правилу знаков, принятому в школьном учебнике. При этом координата x соответствует расстоянию d от предмета до линзы, а координата x' — расстоянию f от линзы до изображения.

Углы α и β будем определять по их тангенсам*). Из рисунка 1

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{d-d_0},\quad \operatorname{tg}\beta = -\frac{y'}{f_0-f} = \frac{y'}{f-f_0},$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{f}{d}.$$

Из формулы линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$ и $\frac{1}{d_0}+\frac{1}{f_0}=\frac{1}{F}$ выразим f и f_0:

$$f=\frac{Fd}{d-F},\quad f_0=\frac{Fd_0}{d_0-F}.$$

Окончательно получим

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha\left(1-\frac{d_0}{F}\right).$$

*) При этом угол α отсчитывается в направлении поворота от оси OX к оси OY, а угол β — от оси OX' к оси OY'.

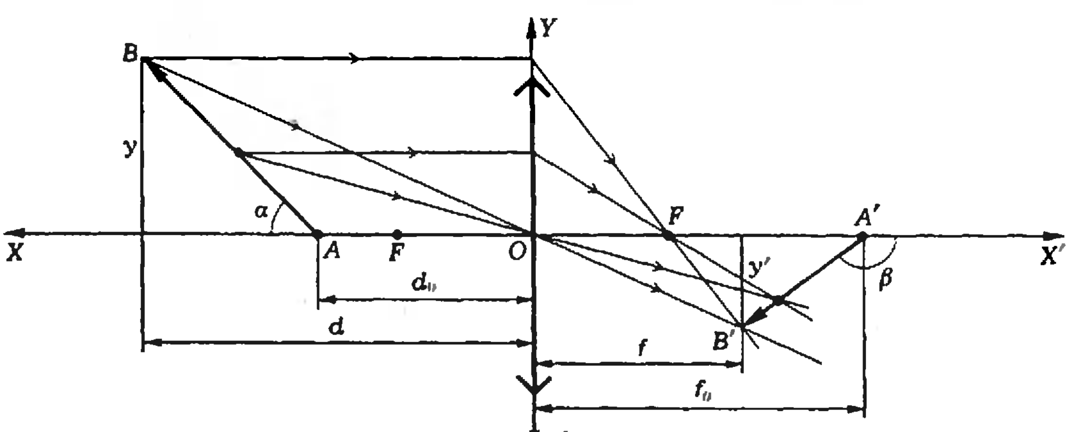


Рис. 1.

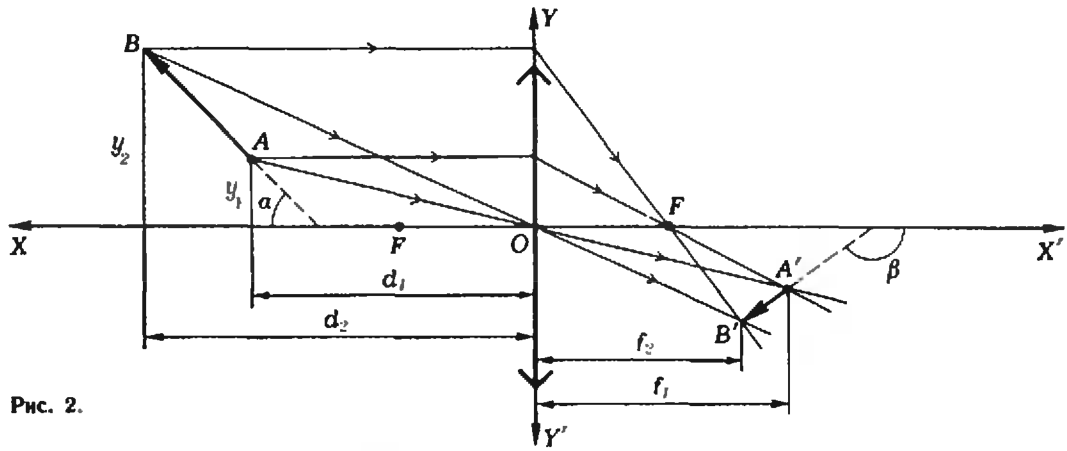


Рис. 2.

На рисунке 2 изображен более общий случай, когда предмет AB и его изображение $A'B'$ не касаются оптической оси. Рассмотрите этот случай самостоятельно и получите более общую формулу для тангенса угла β:

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{y_1(d_2-F)-y_2(d_1-F)}{F(d_2-d_1)}.$$

Предположим, что источником света является светящаяся прямая (рис. 3). Уравнение этой прямой имеет вид $y=kx+b$, где $b=-kd_0$, а $x=d$. Найдем функцию y' в пространстве изображений:

$$y'=y\frac{f}{d}=y\frac{f-F}{F}=$$

$$=k\left(\frac{fF}{f-F}-d_0\right)\frac{f-F}{F}=$$

$$=k\left(1-\frac{d_0}{F}\right)f+kd_0,$$

или

$$y'=k'x'+b',$$

где $k'=k\left(1-\frac{d_0}{F}\right)$ и $b'=kd_0$.

Очевидно, что это уравнение прямой; следовательно, изображением прямой является тоже прямая. Коэффициенты k и k' это тангенсы углов α и β соответственно:

$$k=\operatorname{tg}\alpha,\ k'=\operatorname{tg}\beta.$$

Таким образом, еще раз выведена связь между тангенсами углов α и β.

Заметим, что в геометрической оптике рассматриваются только параксиальные лучи, то есть очень близкие к главной оптической оси. Однако из соображений наглядности на всех рисунках (предыдущих и последующих) углы α изображены достаточно большими.

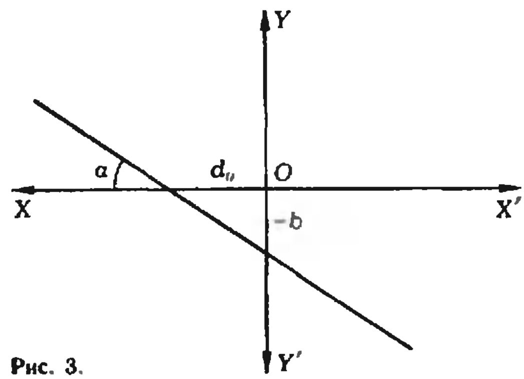


Рис. 3.

Перейдем теперь к конкретным примерам. Договоримся на всех рисунках светящиеся предметы показывать черным цветом, их действительные изображения — красным цветом, а мнимые — синим.

Пример 1. Пусть светящаяся прямая пересекает оптическую ось собирающей линзы в точке с координатой $d_0=2F$ (рис. 4). Тогда

$$k'=k\left(1-\frac{d_0}{F}\right)=k\left(1-\frac{2F}{F}\right)=-k,$$

или

$$\operatorname{tg}\beta=k'=-k=-\operatorname{tg}\alpha.$$

Пример 2. Пусть $d_0=0$. Тогда

$$k'=k\left(1-\frac{d_0}{F}\right)=k.$$

Соответствующая светящаяся прямая и ее изображение в собирающей линзе показаны на рисунке 5.

Пример 3. Найдем изображение прямой линии в вогнутом сферическом зеркале, если $d_0=F/2$ (рис. 6).

Отметим, что в случае вогнутого зеркала ось OX' в пространстве изображений направлена в ту же сторону, что и ось OX в пространстве предметов.

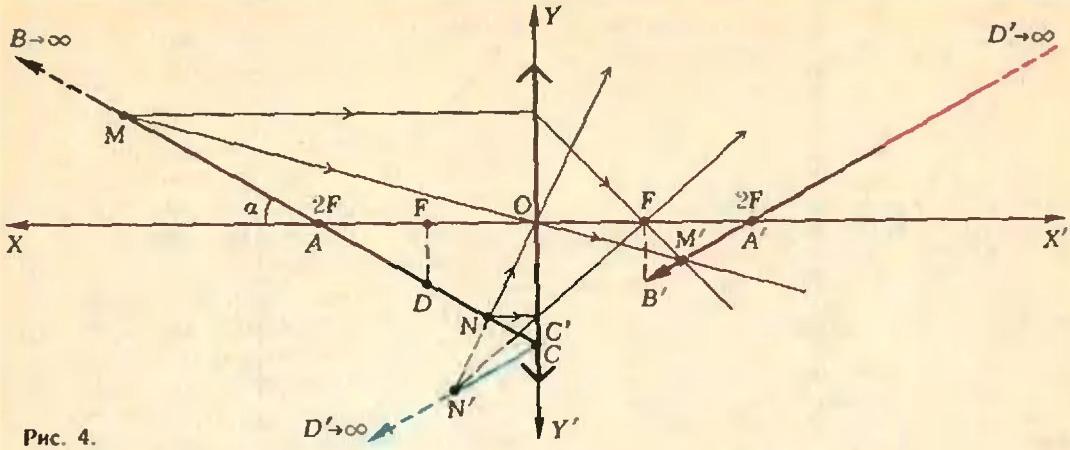


Рис. 4.

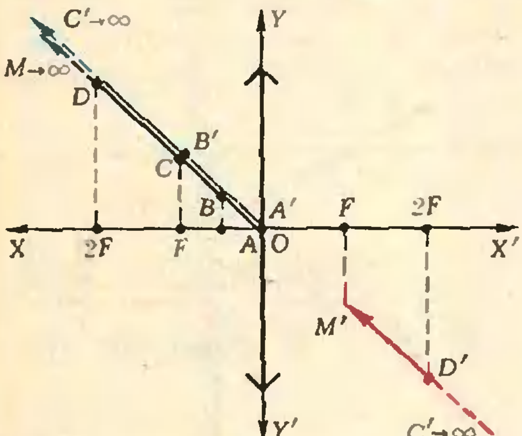


Рис. 5.

Пример 4. Построим изображение прямой в рассеивающей линзе и в выпуклом зеркале при условии, что $d_0=F$.

Для рассеивающих систем формула линзы имеет вид

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=-\frac{1}{F},$$

поэтому

$$k'=k\left(1+\frac{d_0}{F}\right).$$

В нашем случае

$$k'=k\left(1+\frac{d_0}{F}\right)=2k.$$

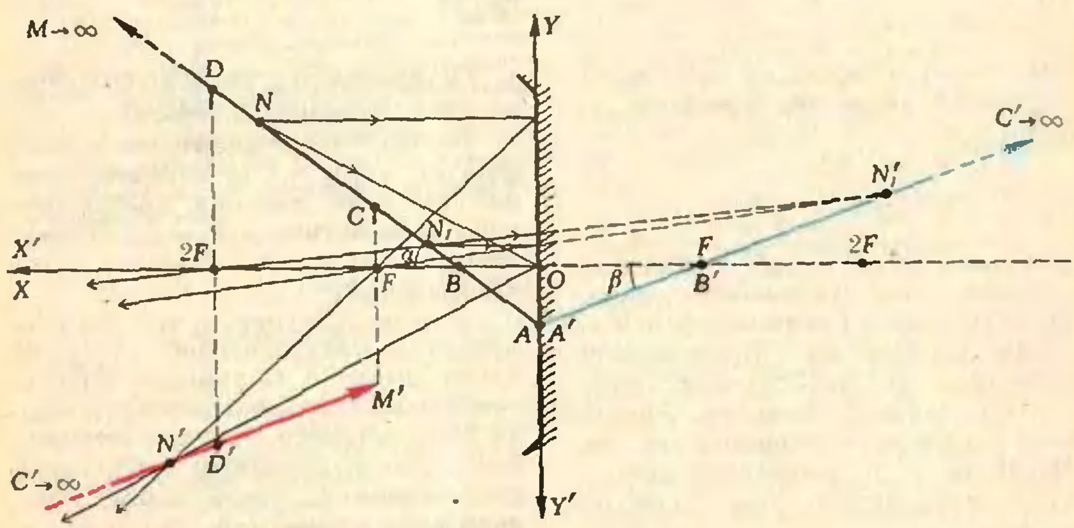


Рис. 6.

Поскольку все формулы для вогнутого зеркала такие же, как и для собирающей линзы, получаем

$$k'=k\left(1-\frac{d_0}{F}\right)=\frac{k}{2}.$$

Соответствующие построения для рассеивающей линзы и выпуклого зеркала приведены на рисунках 7 и 8.

Пример 5. Пусть светящаяся прямая проходит через точку с координатой $d_0=F$. Каким будет ее изо-

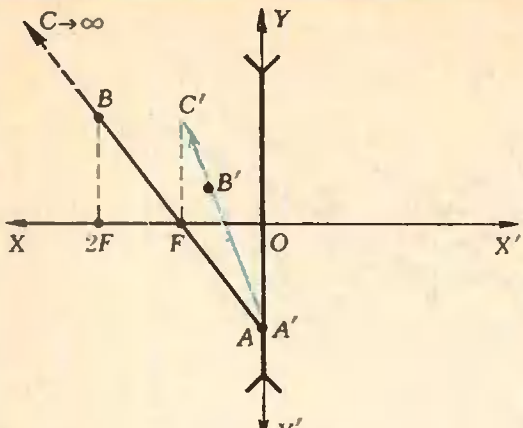


Рис. 7.

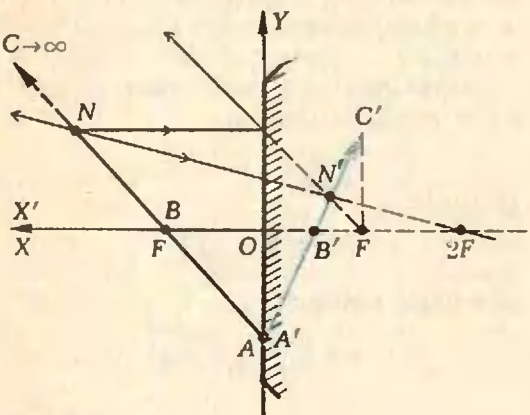


Рис. 8.

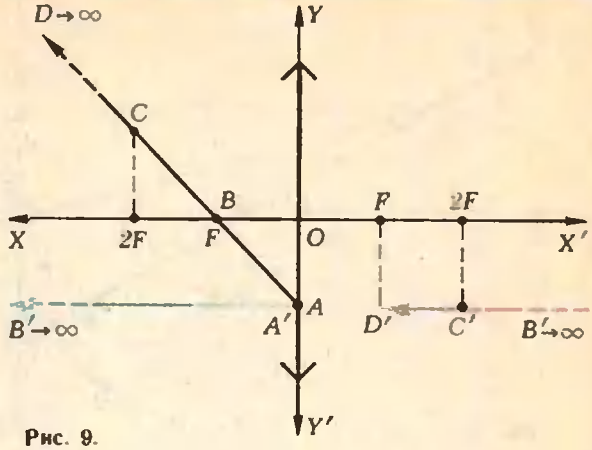


Рис. 9.

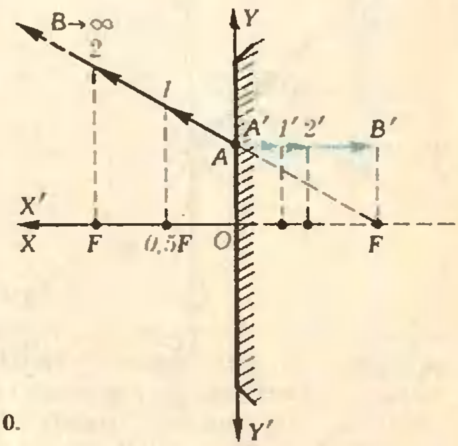


Рис. 10.

бражение в собирающей системе (собирающей линзе или вогнутом зеркале)?

Если $d_0=F$, то

$$k'=k\left(1-\frac{d_0}{F}\right)=0.$$

Это означает, что изображением наклонной линии будет прямая, параллельная главной оптической оси системы. На рисунке 9 проведено построение для собирающей линзы.

Пример 6. Выясним, при каком расположении прямой ее изображение в рассеивающей системе будет параллельно оптической оси системы.

Поскольку для рассеивающей системы

$$k'=k\left(1+\frac{d_0}{F}\right),$$

то k' будет равным нулю при $d_0=-F$. Соответствующее построение для выпуклого зеркала показано на рисунке 10.

Остановимся чуть более подробно на двух последних примерах.

Во-первых, из рисунков 9 и 10 следует, что $y'=F\operatorname{tg}\alpha$. Значит, чем больше угол наклона светящейся прямой к оптической оси системы, тем дальше от оси находится линия изображения.

Во-вторых, отметим, что при равномерном распределении точек на линии предмета на линии изображения точки распределены неравномерно (см., например, рис. 10). Это связано с так называемым продольным увеличением (с увеличением в направлении оптической оси), которое определяется формулой $\Gamma_{\text{прод}}=$ $=\lim\limits_{d_2-d_1\to 0}\frac{f_2-f_1}{d_2-d_1}$. Другими словами, продольное увеличение равно производной от f по d:

$$f'=\left(\frac{Fd}{d-F}\right)'=-\left(\frac{F}{d-F}\right)^2=-\Gamma^2_{\text{попер}}$$

— горизонтальное увеличение равно квадрату вертикального увеличения, взятому с обратным знаком.

* * *

В заключение заметим, что все сказанное в этой статье имеет практическое значение только тогда, когда расстояние от предмета до линзы или зеркала сравнимо с фокусным расстоянием линзы или зеркала. Если же указанное расстояние велико (по сравнению с фокусным), изображение предмета, независимо от его наклона к оптической оси, будет находиться в фокальной плоскости, перпендикулярной оптической оси системы. Это хорошо знают, например, фотолюбители: используя короткофокусные объективы, они получают практически одинаково резкими изображения и близких, и далеких предметов.

Упражнения

1. Постройте изображение светящейся прямой в собирающей линзе, если $d_0=-F$.

2. Найдите изображение прямой в вогнутом зеркале при $d_0=0$.

3. Сделайте построение предмета и изображения для $k=2$ и $d_0=F$ в случае вогнутого зеркала.

4. Сделайте построение для $k=0{,}5$ и $d_0=-F$ в случае рассеивающей линзы.

5. Постройте изображение прямой, параллельной главной оптической оси системы. Рассмотрите все возможные случаи. Указание. Воспользуйтесь принципом обратимости световых лучей.

Как экзаменуют по физике в МФТИ

В редакцию нашего журнала приходит много писем с просьбой рассказать о том, как проходят вступительные экзамены по физике в различные вузы. Предлагаем вниманию читателей интервью, взятое корреспондентом газеты «За науку» Московского физико-технического института Л. Санаевым у заместителя заведующего кафедрой общей физики этого института профессора С. Козела. Интервью перепечатывается с небольшими изменениями и сокращениями.

— Скажите, сколько лет вы уже принимаете вступительные экзамены?

— С небольшими перерывами двадцать лет.

— В чем, по-вашему, заключается отличительная особенность физтеховской системы приема?

— МФТИ готовит кадры для работы на передовых рубежах современной науки. Этим и объясняются высокие критерии приема: отбираются самые способные.

Контингент абитуриентов очень широк: от выпускников сельских школ до выпускников московских физико-математических школ. Мы учитываем это и стремимся выяснить прежде всего наличие не формальных знаний, а способностей, которые впоследствии можно развивать. Задача, конечно, трудная. Но, по-видимому, приемная комиссия решает ее довольно успешно.

— Расскажите, пожалуйста, о письменном и устном экзаменах и связи между ними.

— Письменный экзамен проводится первым, он отсекает определенную часть слабо подготовленных абитуриентов — процентов 30—40. Затем идет устный экзамен. Следует оговориться, что оценка, полученная за письменную работу, никоим образом не влияет на оценку за устный экзамен. Часто получивший тройку за письменную работу затем получает пятерку; бывает и наоборот, но гораздо реже.

— Несколько подробнее о задачах письменной работы.

— По традиции, мы даем четыре задачи, соответственно основным разделам физики: механика, теплота, электричество, оптика. Из них, по крайней мере, две — средней трудности, одна — чуть труднее и одна — трудная. Это приводит к сильной дифференциации оценок.

Перед началом письменной работы экзаменующихся предупреждают: начинайте решать с наиболее простых для вас задач.

— Что больше всего вы цените в ответе на устном экзамене?

— Устный экзамен состоит из коротких, наполовину качественного характера вопросов экзаменатора. Нет возможности заслушивать пространные выступления. Больше всего мы ценим, когда экзаменующиеся дают не заученный ответ, а проявляют понимание физики.

— Среди старшеклассников обычно ходят слухи, что для поступления в МФТИ школьной подготовки недостаточно. Так ли это?

— Задачи и вопросы, предлагаемые на экзаменах, не выходят за рамки школьной программы, но мы требуем более глубокого понимания, что, к сожалению, редко достигается при изучении предмета в школе. В общем, нужна определенная подготовка, а лучшая подготовка — решение задач повышенной трудности, например из физтеховских сборников или журнала «Квант».

Я. Суконник, П. Горнштейн

Можно решить проще!

Тот, кто готовится к вступительным экзаменам по математике, не раз встречался, вероятно, с трудными экзаменационными задачами, решение которых требует долгих рассуждений и длинных вычислений. И каждого, конечно, занимал вопрос: а нельзя ли для такой задачи придумать простое, рациональное и короткое решение?

Довольно часто — можно. Но додуматься до такого решения не просто — нужен долгий и упорный поиск. Зато каждое красивое решение трудной задачи всегда вызывает чувство удовлетворения, свидетельствует о глубоких знаниях и творческих способностях абитуриента. Именно поэтому при подготовке к экзаменам пытаться отыскивать или, в крайнем случае, разбирать такие решения особенно полезно.

Тем более досадно, что в книгах для абитуриентов иногда приводятся неоправданно громоздкие и нерациональные решения.

Возьмем, к примеру, книгу Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехника и М. К. Потапова «Задачи вступительных экзаменов по математике» (М., «Наука», 1980), где воспроизведены варианты по математике, предлагавшиеся в 1977—1979 гг. поступавшим в Московский университет, и указываются решения части вариантов. Решения некоторых задач занимают в этой книге одну, две, даже три страницы. Между тем, зачастую их можно решить много проще и короче.

В настоящей статье приведены восемь задач из указанной книги с более простыми решениями.

Свойства фигур

При решении геометрических задач абитуриенты часто, не особенно размышляя, затевают длинные и громоздкие вычисления, которые, впрочем, обычно и приводят к цели. Между тем, такие задачи иногда удается решить очень быстро, если догадаться применить некую теорему, суметь воспользоваться спецификой конфигурации, увидеть нужное дополнительное построение. В геометрии мы тем успешнее будем продвигаться вперед, чем шире будет наш «геометрический кругозор», чем лучше мы научимся видеть свойства фигур, которые можно «обыграть» в решении.

Задача 1 (МГУ, физфак, 1977). *Дана равнобедренная трапеция, в которую вписана окружность и около которой описана окружность. Отношение высоты трапеции к радиусу описанной окружности равно $\sqrt{\frac{2}{3}}$. Найти углы трапеции.*

Решение. Пусть $ABCD$ — данная трапеция (рис. 1). Проведем диагональ BD и высоту BE. Обозначим $\widehat{DAB}$ через x, $\widehat{ADB}$ — через y. Опустив перпендикуляр из центра O описанной окружности (обозначим ее радиус через R) на BD и продолжив его до пересечения с этой окружностью, можно увидеть, что

$$|BD|=2R\cdot\sin x. \qquad (1)$$

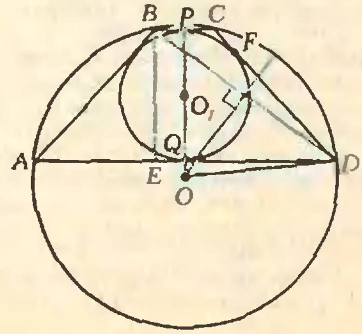


Рис. 1.

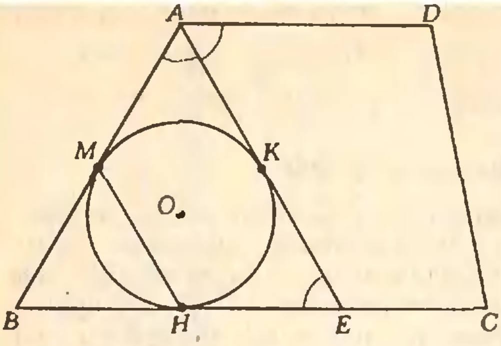


Рис. 2.

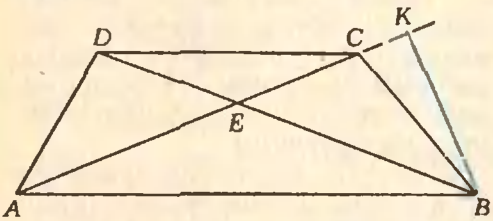


Рис. 3.

Из $\triangle DBE$

$$|BE|=|BD|\cdot\sin y. \qquad (2)$$

Из (1) и (2)

$$|BE|=2R\cdot\sin x\cdot\sin y,$$

то есть высота треугольника равна диаметру описанной окружности, умноженному на произведение синусов углов, прилегающих к стороне, к которой проведена высота. Таким образом,

$$\frac{|BE|}{R}=2\sin x\cdot\sin y=\sqrt{\frac{2}{3}}. \quad (3)$$

Проведем высоту трапеции PQ через центр O_1 вписанной окружности ((PQ) пройдет и через O, но это нам не понадобится). Тогда $|ED|=|EQ|+|QD|=|BP|+|QD|=|PC|+|QD|=|CF|+|FD|=|CD|$, то есть проекция диагонали описанной равнобедренной трапеции на большее основание равна боковой стороне. Из $\triangle BED$

$$\operatorname{tg} y=\frac{|BE|}{|ED|}=\frac{|BE|}{|CD|}=\frac{|BE|}{|AB|}=\sin x. \quad (4)$$

Из (3) и (4) получаем уравнение

$$2\operatorname{tg} y\cdot\sin y=\sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$2\cos^2 y+\sqrt{\frac{2}{3}}\cos y-2=0,$$

$$\cos y=\frac{-\sqrt{2}\pm 5\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}.$$

Окончательно $\cos y=\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\sin x=\operatorname{tg} y=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\hat{A}=\hat{D}=x=\frac{\pi}{4}$, $\hat{B}=\hat{C}=\frac{3}{4}\pi$.

З а м е ч а н и е. Решая задачу, мы попутно усмотрели следующее важное усиление т е о р е м ы с и н у с о в (см. (1)):

$$a=2R\cdot\sin\hat{A}$$

или

$$\frac{a}{\sin\hat{A}}=\frac{b}{\sin\hat{B}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}=2R.$$

Рассмотрев все случаи расположения центра описанной окружности относительно треугольника, его легко доказать.

З а д а ч а 2 (МГУ, химфак, 1978). *В трапеции $ABCD$ с основаниями AD и BC длина боковой стороны AB равна 2 см. Биссектриса угла BAD пересекает прямую BC в точке E. В треугольник ABE вписана окружность, касающаяся стороны AB в точке M и стороны BE в точке H. Длина отрезка MH равна 1 см. Найти величину угла BAD.*

Р е ш е н и е. Поскольку $\widehat{BAE}=\widehat{DAE}=\widehat{BEA}$ (рис. 2), $\triangle ABE$ — равнобедренный. Значит, $|BE|=|BA|=2$ и $[MH]\parallel[AE]$. Из подобия треугольников BMH и BAE

$$\frac{|BM|}{|MH|}=\frac{|BA|}{|AE|}.$$

Так как $|BM|=|BA|-|MA|=|BA|-|AK|=|BA|-\frac{1}{2}|AE|=2-\frac{1}{2}|AE|$,

$$\frac{2-\frac{1}{2}|AE|}{1}=\frac{2}{|AE|}.$$

Отсюда $|AE|=2$, $\widehat{BAE}=\frac{\pi}{3}$, $\widehat{BAD}=\frac{2}{3}\pi$.

З а д а ч а 3 (МГУ, ф-т почвоведения, 1979). *В трапеции $ABCD$ отрезки AB и DC являются основаниями. Диагонали трапеции пересекаются в точке E. Найти площадь треугольника BCE, если $|BA|=30$ см, $|DC|=24$ см, $|AD|=3$ см и $\widehat{DAB}=\frac{\pi}{3}$.*

Р е ш е н и е. Из подобия треугольников ECD и EAB (рис. 3)

$$\frac{|CE|}{|EA|}=\frac{|CD|}{|AB|}.$$

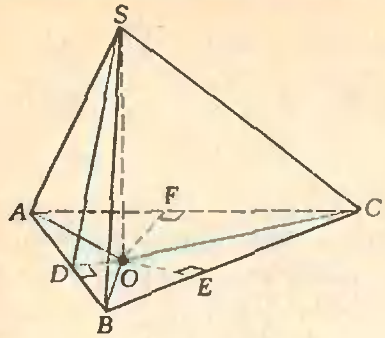


Рис. 4.

Значит, $\frac{|CE|}{|EA|}=\frac{4}{5}$, $\frac{|CE|}{|CA|}=\frac{4}{9}$. Так как $[BK]$ — общая высота треугольников BCE и BCA,

$$\frac{S_{\triangle BCE}}{S_{\triangle BCA}}=\frac{|CE|}{|CA|}.$$

Значит, $S_{\triangle BCE}=\frac{4}{9}S_{\triangle BCA}$. Но $S_{\triangle BCA}=$

$=S_{\triangle ADB}=\frac{1}{2}|AD|\cdot|AB|\cdot\sin\widehat{DAB}$.

Следовательно, $S_{\triangle BCE}=10\sqrt{3}$.

Задача 4 (МГУ, отд. общей геологии геолог. ф-та, 1979). *Основанием пирамиды $SABC$ является правильный треугольник, длина стороны которого равна $\sqrt{3}$. Основанием высоты, опущенной из вершины S, является точка O, лежащая внутри треугольника ABC. Расстояние от точки O до стороны AC равно 1. Синус угла OBA относится к синусу угла OBC как 2:1. Площадь грани SAB равна $\sqrt{\frac{5}{6}}$. Найти объем пирамиды.*

Решение. Обозначим основания перпендикуляров, опущенных из O на стороны AB, BC, CA соответственно через D, E, F (рис. 4). Из треугольников OEB и ODB

$$\frac{|OE|}{|OD|}=\frac{\sin\widehat{OBC}}{\sin\widehat{OBA}}.$$

Значит, $|OE|=\frac{1}{2}|OD|$. Из равенства $S_{\triangle ABC}=S_{\triangle OAB}+S_{\triangle OBC}+S_{\triangle OAC}$ следует, что $|OD|+|OE|+|OF|=h$, где h — длина высоты треугольника ABC. (Замечание. Это равенство, очевидно, верно для любой точки O внутри равностороннего треугольника.) Поскольку $h=|BC|\times$ $\times\sin 60^\circ=\frac{3}{2}$ и $|OF|=1$, получаем $|OD|=\frac{1}{3}$. Зная $|AB|$ и $S_{\triangle SAB}$, находим $|SD|$. Затем из $\triangle SOD$ находим $|SO|$. Ответ. $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

Помогает график

Нередко на вступительных экзаменах предлагаются уравнения-системы-неравенства, содержащие две переменные (скажем, x и a), причем требуется найти все значения одной переменной (например, a), при которых вторая переменная (соответственно, x) или, если угодно, уравнение-система-неравенство обладает некоторым свойством. (В подобных задачах переменная a обычно называется *параметром*.)

Почему-то многие авторы учебных пособий, в том числе авторы вышеназванной книги, сводят решение таких задач к громоздким исследованиям формулы, выражающей x через a, в то время как более целесообразно «геометрическое решение» — построение графика на плоскости Oxa (поэтому этот способ называют иногда «методом Oxa»). Искомое множество «считывается» с оси Oa, чем и заканчивается решение.

Задача 5 (МГУ, отд. политэкономии эконом. ф-та, 1977). *Найти все a, при каждом из которых неравенство*

$$3-|x-a|>x^2$$

имеет хотя бы одно отрицательное решение.

Решение. Данное неравенство равносильно неравенству

$$|x-a|<3-x^2,$$

и, следовательно, системе

$$-(3-x^2)<x-a<3-x^2.$$

Поэтому задачу можно переформулировать так: найти все a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x-a<3-x^2 \\ x-a>-(3-x^2) \\ x<0 \end{cases}$$

или система

$$\begin{cases} a>x^2+x-3 \\ a<-x^2+x+3 \\ x<0 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение. Нари-

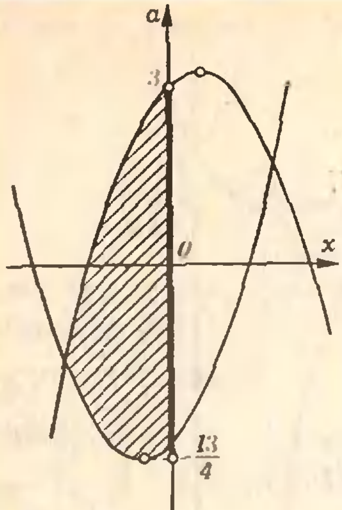


Рис. 5.

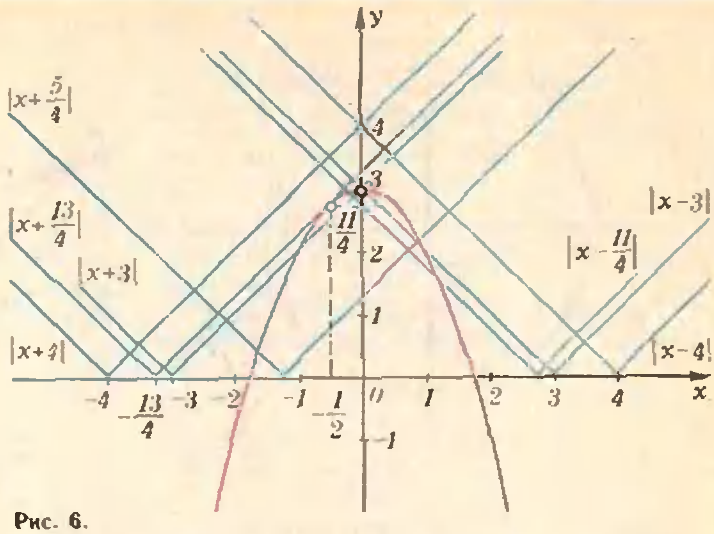


Рис. 6.

совав на плоскости Oxa параболы $a=x^2+x-3$ и $a=-x^2+x+3$ и спроектировав на ось Oa множество решений системы (на рисунке 5 оно заштриховано), получаем ответ: $]-\frac{13}{4};\ 3[$.

Замечание. Поскольку в данное неравенство параметр a входит в одном месте, задачу можно решить и так: на плоскости Oxy нарисуем параболу $y=3-x^2$ и начнем двигать вдоль оси Ox слева направо «уголок» $y=|x-a|$ (рис. 6); очевидно, у неравенства $|x-a|<3-x^2$, равносильного данному, отрицательные решения начнут появляться после того, как «уголок» коснется параболы [абсцисса точки касания находится из равенства $y'=-2x=1$, абсцисса вершины «уголка» — из уравнения касательной $y=\frac{11}{4}+1\cdot\left(x-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$], и кончат появляться, когда «уголок» дойдет до вершины параболы.

Задача 6 (МГУ, отд. общей геологии геолог. ф-та, 1978). *Найти все значения параметра a, при каждом из которых существует хотя бы одно x, удовлетворяющее условиям*

$$\begin{cases} x^2+(5a+2)x+4a^2+2a<0 \\ x^2+a^2=4. \end{cases}$$

Решение. Многочлен, стоящий в левой части неравенства, входящего в данную систему, распадается в произведение двух множителей: $x^2+(5a+2)x+4a^2+2a=(a+x)(4a+x+2)$. Поэтому данная система равносильна системе

$$\begin{cases} (a+x)(4a+x+2)<0 \\ x^2+a^2=4 \end{cases}$$

или совокупности («Алгебра и начала анализа 9—10», п. 74) систем

$$\begin{cases} a+x>0 \\ 4a+x+2<0 \\ x^2+a^2=4 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} a+x<0 \\ 4a+x+2>0 \\ x^2+a^2=4 \end{cases} \qquad (2)$$

Перепишем системы (1), (2) в виде

$$\begin{cases} a>-x \\ a<-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2} \\ x^2+a^2=4 \end{cases} \qquad (1')$$

$$\begin{cases} a<-x \\ a>-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2} \\ x^2+a^2=4 \end{cases} \qquad (2')$$

Нарисуем на плоскости Oxa окружность $x^2+a^2=4$ и прямые $a=-x$, $a=-\frac{1}{4}x-\frac{1}{2}$. Спроектировав на ось Oa множество решений системы (1′) («синяя дуга» на рисунке 7) и множество решений системы (2′) («красная дуга») и объединив проекции, получим ответ: $]-\sqrt{2};\ -\frac{16}{17}[\ \cup\ ]0;\ \sqrt{2}[$.

Задача 7 (МГУ, биофак, 1978). *Найти все значения a, при каждом из которых уравнение*

$$x|x+2a|+1-a=0$$

имеет единственное решение.

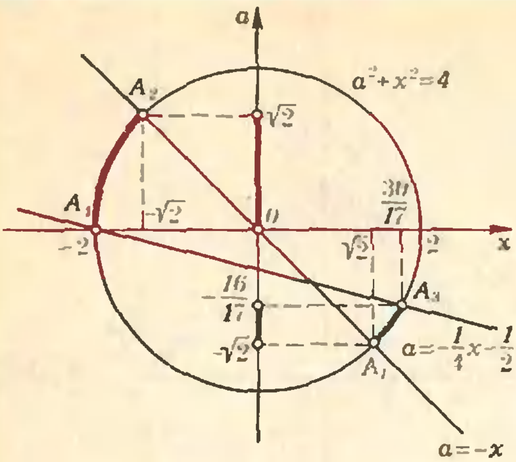


Рис. 7.

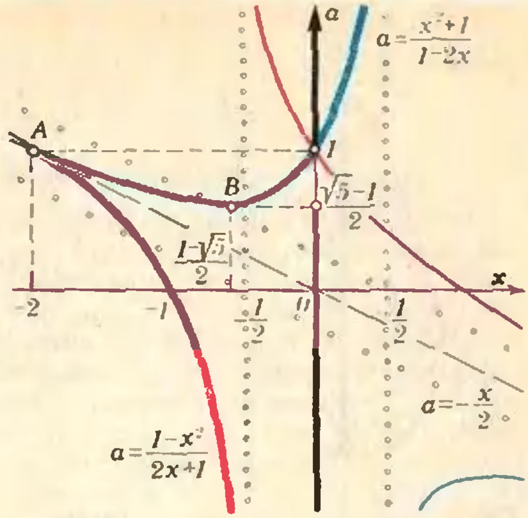


Рис. 8.

Решение. Данное уравнение равносильно совокупности систем

$$\begin{cases} x+2a\geqslant 0\\ x(x+2a)+1-a=0\end{cases}$$

$$\begin{cases} x+2a<0\\ x(-x-2a)+1-a=0\end{cases}$$

или систем

$$\begin{cases} a=\dfrac{x^2+1}{1-2x}\\ a\geqslant-\dfrac{x}{2}\end{cases}\qquad(1)$$

$$\begin{cases} a=\dfrac{1-x^2}{2x+1}\\ a<-\dfrac{x}{2}\end{cases}\qquad(2)$$

Построим на плоскости Oxa прямую $a=-\frac{x}{2}$ и, при помощи средств дифференциального исчисления, кривые $a=\frac{x^2+1}{1-2x}$ («синяя кривая» на рисунке 8) и $a=\frac{1-x^2}{2x+1}$ («красная кривая»). Решением системы (1) является «толстая часть» синей кривой, системы (2) — «толстая часть» красной кривой. Прямые, параллельные оси Ox, пересекают объединение этих «толстых кривых» один раз при $a>1$ и при $a<\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, два раза — при $a=1$ и при $a=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, три раза — при $\frac{\sqrt{5}-1}{2}<a<1$. Ответ. $\left]-\infty;\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right[\cup$ $\cup\left]1;+\infty\right[$.

* *
*

Задача 8 (МГУ, отд. планирования и эконом. кибернетики эконом. ф-та, 1977). *Определить, при каких a уравнение*

$$\log_3(9^x+9a^3)=x$$

имеет ровно два решения.

Решение. Данное уравнение равносильно уравнению

$$3^x=9^x+9a^3.$$

Положив $3^x=t$, получим вспомогательное квадратное уравнение

$$t^2-t+9a^3=0.\qquad(1)$$

Поскольку уравнение $3^x=t$ (относительно x) имеет решения только при $t>0$, причем при каждом таком t оно имеет единственное решение, задача принимает вид: *определить, при каких a уравнение* (1) *имеет ровно два положительных корня*, а для этого необходимо и достаточно, чтобы a удовлетворяло системе

$$\begin{cases} 1-36a^3>0\\ 9a^3>0\end{cases}$$

(достаточность вытекает из теоремы Виета и того, что второй коэффициент в уравнении (1) отрицателен). Ответ. $\left]0;\frac{1}{\sqrt[3]{36}}\right[$.

Горьковский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(радиофизический факультет)

1. Найти все действительные значения x, удовлетворяющие неравенству

$$x-3<\sqrt{x^2+4x-5}\,.$$

2. Решить уравнение

$$\cos x=\sqrt{3}\sin x+2\cos 3x.$$

3. Определить размеры цилиндра, имеющего наибольший объем, если площадь его полной поверхности равна 2π.

4. Для уборки урожая было выделено несколько одинаковых комбайнов, которые могли убрать поле за 24 часа, если бы приступили к работе одновременно. Но случилось так, что они приступали к работе один за другим через равные промежутки времени, и затем каждый работал до окончания уборки. За какое время была проведена уборка урожая, если первый комбайн работал в 5 раз больше времени, чем последний?

5. Доказать, что $53^{53}-33^{33}$ делится на 10.

Вариант 2

(факультет вычислительной математики и кибернетики)

1. Решить уравнение

$$\sin 2x+\sin^4\frac{x}{2}=\cos^4\frac{x}{2}\,.$$

2. Найти все действительные значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\log_{0,25}\frac{35-x^2}{x}>-\frac{1}{2}\,.$$

3. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна наименьшему значению трехчлена $2x^2-4x+10$. Найти сумму одиннадцати первых членов этой прогрессии.

4. Вычислить площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна h, а боковая сторона видна из центра описанной окружности под углом 60°.

5. Трое рабочих участвовали в соревновании. Первый и третий из них произвели продукции в два раза больше, чем второй, а второй и третий в 3 раза больше, чем первый. Какое место занял каждый рабочий в соревновании?

Вариант 3

(механико-математический и физический факультеты)

1. Найти все действительные значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\log_3\log_{1/2}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}>1.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\cos x+\cos y=1/2,\\ \sin^2x+\sin^2y=7/4.\end{cases}$$

3. Диаметр окружности радиуса R является основанием правильного треугольника. Вычислить площадь той части треугольника, которая лежит вне данного круга.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=5+4\cos x-\sin^2x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

5. Представить число 19 в виде разности кубов натуральных чисел.

Физика

Задачи устного экзамена

1. На бруске массой $2m$ установлена невесомая вертикальная стойка, к которой на невесомой нити длиной l подвешен шарик массой m (рис. 1). Брусок без трения может скользить по горизонтальному столу. Чему будет равна скорость бруска в момент прохождения шариком нижней точки, если первоначально брусок покоился, а шарик был отпущен из точки A без начальной скорости?

2. Два тела массами $m_1=4$ кг и $m_2=8$ кг, связанные нитью, съезжают по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол $\alpha=30°$. Коэффициенты трения между наклонной плоскостью и телами различны: для первого тела он равен $\mu_1=0,1$, а для второго $\mu_2=0,2$. Какова сила натяжения нити, если тело массой m_1 двигается впереди?

3. К потолку вагона на двух невесомых нитях подвешен шарик массой m (рис. 2). Найдите натяжение каждой нити, если вагон движется с горизонтальным ускорением $|\vec{a}|=g/2$.

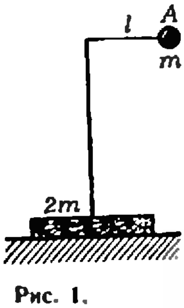


Рис. 1.

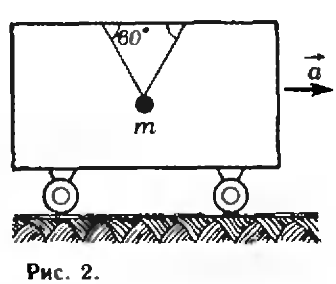


Рис. 2.

4. Однородный стержень покоится, опираясь на гладкую стену и шероховатый пол (рис. 3). Масса стержня $m=10$ кг, угол между стержнем и полом $\alpha=45^\circ$. Найдите силу трения.

5. Положительно заряженный металлический шар создает в точке A напряженность $|\vec{E}_A|=100$ В/м, а в точке C — напряженность $|\vec{E}_C|=36$ В/м (рис. 4). Какова напряженность поля в точке B, лежащей посередине между точками A и C?

6. Большая шарообразная капля воды получена в результате слияния $n=125$ одинаковых шарообразных капелек. До какого потенциала были заряжены капельки, если потенциал большой капли оказался равным $\varphi=2,5$ В?

7. Конденсатор емкостью C заряжен до разности потенциалов U. Конденсатор подключают к батарее, ЭДС которой равна $\mathcal{E}$. При этом положительно заряженная пластина конденсатора соединяется с отрицательным полюсом, а отрицательно заряженная — с положительным полюсом батареи. Какой заряд пройдет через батарею?

8. В схеме, приведенной на рисунке 5, ЭДС батареи $\mathcal{E}=12$ В, ее внутреннее сопротивление $r=0$, а сопротивления R одинаковы. Вольтметр, подключенный параллельно к одному из сопротивлений, показал $U=4$ В. Что покажет этот же вольтметр, включенный в цепь последовательно (например, между точками A и $Б$)?

9. С помощью аккумулятора, ЭДС которого $\mathcal{E}=12$ В и внутреннее сопротивление $r=3$ Ом, подогревают воду. Необходимая мощность нагревателя $P=9$ Вт. Рассчитайте сопротивление спирали нагревателя и коэффициент полезного действия данной установки.

10. Имеется два колебательных контура с одинаковыми катушками и конденсаторами. В один из контуров в катушку вставили железный сердечник, увеличивший ее индуктивность в $n=4$ раза. Найдите отношение резонансных частот контуров и их энергий, если максимальные заряды на конденсаторах равны.

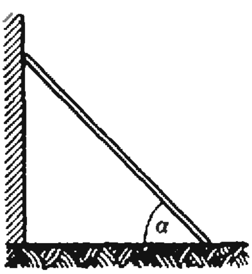


Рис. 3.

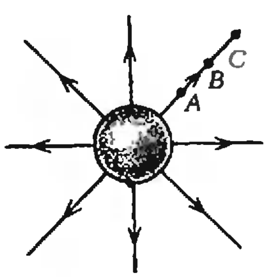


Рис. 4.

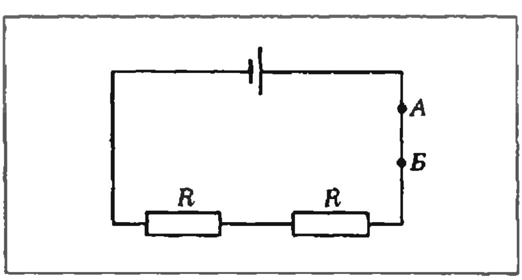


Рис. 5.

С. Бирагов, В. Голубев,
В. Скворцов, Ю. Сорокин

Красноярский государственный университет

Математика

Письменный экзамен

Математический факультет

1. Решить уравнение
$$(2,5)^x-2\cdot(0,4)^{x+1}+1,6=0.$$

2. Решить систему неравенств
$$\begin{cases} f'(x)<\dfrac{2}{5-2x}, \\ e^{f(x)}<\sqrt{\dfrac{x}{2}}, \end{cases}$$
где $f(x)=\ln(3-x)$.

3. Хорда параболы $y=-a^2x^2+5ax-4$ касается кривой $y=\dfrac{1}{1-x}$ в точке $x=2$ и делится этой точкой пополам. Найти a.

4. В окружность радиуса R вписан равнобедренный треугольник. При каком значении угла α при вершине треугольника высота, проведенная к боковой стороне, имеет наибольшую длину? Найти эту длину.

5. В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при ребрах BC, BD и AC прямые, а величина двугранных углов при ребрах AB и CD равна 15°. Найти радиус шара, вписанного в тетраэдр, если $|CD|=2$.

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Из пушки, свободно соскальзывающей с гладкой наклонной плоскости и прошедшей путь l, производится выстрел в горизонтальном направлении. При какой скорости $\vec{v}$ вылета снаряда пушка остановится после выстрела? Масса пушки M, масса снаряда m, угол наклона плоскости к горизонту α.

2. Сфера радиусом R с находящимся в ней шариком вращается вокруг вертикальной оси с угловой скоростью ω. Пренебрегая трением шарика о сферу, определите, в каком месте сферы он находится.

3. На pV-диаграмме изображен замкнутый цикл для идеального газа (рис. 1). Кривая $3-1$ — изотерма. Изобразите этот цикл в координатах T, V и p, T.

4. Электрон влетает со скоростью $\vec{v}$ ($|\vec{v}|=10^7$ м/с) в плоский конденсатор, между пластинами которого поддерживается постоянная разность потенциалов $U=425$ В (рис. 2). Расстояние между пластинами

$d=1$ см, угол $\alpha=30^\circ$, удельный заряд электрона $e/m=1{,}76\cdot10^{11}$ Кл/кг. На какое максимальное расстояние l удалится электрон от положительной пластины?

5. Над столом висит небольшая лампочка, расположенная в вершине конусообразного абажура с углом при вершине $\varphi=60^\circ$. На пути лучей параллельно поверхности стола поместили плоскопараллельную стеклянную пластину с показателем преломления $n=1{,}5$. При этом диаметр светового пятна на столе уменьшился на $a=2$ см. Какова толщина d пластины?

Математический и биолого-химический факультеты

1. Цикл идеального газа состоит из двух изохор и двух изобар (рис. 3). Определите работу A, совершенную одним молем газа за цикл, если известно, что точки 2 и 4 лежат на одной изотерме, соответствующей температуре T, а температуры в точках 1 и 3 равны соответственно T_1 и T_2.

2. На внешнем сопротивлении аккумулятора выделялась тепловая мощность $P_1=10$ Вт. Когда к концам этого сопротивления параллельно присоединили второй такой же аккумулятор, выделяемая мощность P_2 увеличилась вдвое. Определите мощность P_3, выделяемую на сопротивлении, если параллельно ему присоединить третий такой же аккумулятор.

3. Пройдя ускоряющую разность потенциалов $U=3{,}52\cdot10^3$ В, электрон влетает в однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$ ($|\vec{B}|=0{,}01$ Тл) перпендикулярно линиям индукции и движется по окружности радиусом $r=2$ см. Вычислите отношение e/m заряда электрона к его массе.

4. С помощью тонкой линзы получают двукратно увеличенное действительное изображение предмета. Затем линзу передвигают на $a=10$ см и получают мнимое изображение такого же размера. Определите фокусное расстояние F линзы.

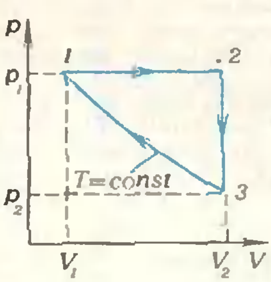


Рис. 1.

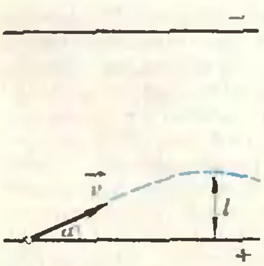


Рис. 2.

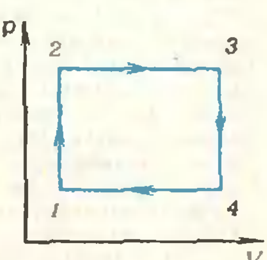


Рис. 3.

5. У данного металла фотоэффект начинается при частоте света $\nu_0=6\cdot10^{14}$ Гц. Определите частоту ν облучения металла, если вылетающие с поверхности металла фотоэлектроны полностью задерживаются сеткой, потенциал которой относительно металла равен $\varphi=3$ В.

В. Бытев, С. Качин, Ю. Макаров, Г. Пынько

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Математика

Письменный экзамен

Математико-механический факультет

Вариант 1

1. Решить неравенство

$$\sqrt{x+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\frac{1}{x^2}}>\frac{2}{x}.$$

2. При каких $a>0$ уравнение $\cos ax=\frac{1}{4}$ имеет ровно одно решение на отрезке $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$?

3. Пусть $ABCD$ — квадрат единичной площади, точки K и M лежат соответственно на продолжениях сторон $[AD]$ и $[BC]$, по одну сторону от прямой AB, $|BM|=a+1$, $|CM|=a$. Пусть L — точка пересечения прямых AM и BK, N — точка пересечения прямых DM и CK. При каком выборе точки K площадь четырехугольника $KLMN$ имеет наименьшее значение?

4. Найти все пары действительных чисел x, y, для которых

$$\log_{|x|}\cos 1>\log_y\cos 1.$$

5. Пусть $ABCA'B'C'$ — прямая призма с основанием ABC и высотой $|AA'|=h$. Найти площадь сечения, проходящего через середины ребер $[AB]$, $[BB']$ и $[B'C']$, если известно, что $|AB|=|BC|=h$, а $\widehat{ABC}=90^\circ$.

Вариант 2*)

1. Параллельные прямые l_1 и l_2 пересечены перпендикулярной им прямой l_3. Точка A удалена на расстояние $a>0$ от каждой из прямых l_1, l_2 и на расстояние $b>0$ от прямой l_3. Прямая l проходит через точку A и пересекает каждую из прямых l_1, l_2, l_3. Какое наименьшее значение может иметь

*) Этот вариант был также на факультете прикладной математики — процессов управления.

сумма периметров многоугольников, образованных прямыми l_1, l_2, l_3, l?

2. Решить уравнение

$$\sqrt{8x^3+4x^2+1}-\sqrt{8x^3-4x^2+1}=\sqrt{13}x^3-\sqrt{5}x^3.$$

3. Решить неравенство $(b<0)$

$$b\cdot\log_3 x+\log_{3x}3+b>0.$$

4. Через ребро $[AB]$ правильной пирамиды $ABCS$ с вершиной S проведено плоское сечение, имеющее наименьший периметр. Найти площадь этого сечения, если известно, что высота пирамиды равна h, а $|AB|=a$.

5. При каких действительных a уравнение

$$\cos x\cdot\cos 2x\cdot\cos 3x+a=\cos 2x$$

имеет более одного корня на отрезке $\left[\frac{\pi}{8};\ \frac{3\pi}{8}\right]$?

Физический факультет

Вариант 3

1. В момент времени $t>0$ счетчик показывает дозу облучения, полученного объектом за промежуток $[0;\ t]$. Построить график зависимости дозы облучения P от времени, если интенсивность облучения меняется по закону

$$I=\frac{dP}{dt}=|t-a|+|t-2a|,\ t>0\ (a>0).$$

2. Решить уравнение

$$\sin^2 x+\frac{(1+\cos 2x)^2}{2\sin 2x}=a\cos 2x.$$

3. Решить неравенство

$$x^{\cos_3(x^2-2x-2)}>1.$$

4. Длины сторон параллелограмма равны a и b $(a>b)$, а острый угол при вершине равен α. Найти радиус окружности, проходящей через вершину этого угла и касающейся двух несмежных с ней сторон параллелограмма (или их продолжений).

5. При каких $a<0$ неравенства $2\sqrt{ax}<3a-x$ и $x-\sqrt{\frac{x}{a}}>\frac{6}{a}$ имеют общие решения?

Вариант 4

1. Два парохода движутся в тумане навстречу друг другу с одинаковыми скоростями. На расстоянии 4 км капитаны включают на 4 мин обратный ход с ускорением 0,1 м/с^2, после чего пароходы продолжают движение с достигнутыми скоростями. При каких значениях начальной скорости V_0 суда не столкнутся?

2. Решить уравнение
$\sin 2x(0{,}1-\cos x)=\sin 2x+0{,}2\sin^3 x.$

3. Вычислить предел

$$\lim_{x\to\pi}\frac{\sin x}{\int\limits_{\pi/2-x}^{\pi/2} t\,dt}.$$

4. В треугольнике ABC $|AB|=|AC|=a$, $|BC|=b$, $AM\perp BC$. Высота $[AM]$ разделена на 5 равных частей. Через вершину B и точки деления проведены прямые. Найти длины отрезков, на которые эти прямые делят сторону $[AC]$.

5. Решить неравенство

$$2^{\frac{1}{\cos^2 x}}\sqrt{y^2-y+\frac{1}{2}}<1.$$

Задачи из вариантов других факультетов

1. На ребрах $[CC']$, $[AB]$ и $[AD]$ куба $ABCDA'B'C'D'$ выбраны соответственно точки P, Q и R так, что $|AQ|=2|BQ|$, $|DR|=2|AR|$, $|PC|=|PC'|=a$. Найти площадь сечения куба, проходящего через точки P, Q и R.

2. При каком значении параметра $a\in R$ площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс, графиком функции $y=x^3+3x^2+x+a$ и прямыми, параллельными оси ординат и пересекающими ось абсцисс в точках экстремума этой функции, будет наименьшей?

3. В основании правильной призмы лежит треугольник, вершины которого являются серединами ребер основания правильной пирамиды. Какая часть объема призмы находится вне пирамиды, если известно, что высота пирамиды в 3 раза меньше высоты призмы?

4. Решить неравенство

$$\frac{1}{\sqrt{x}+1}+\frac{1}{\sqrt{x}-1}>\frac{a}{\sqrt{x}}.$$

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=\frac{1}{\sin x+4}-\frac{1}{\cos x-4}.$$

6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}2^{\log_x 7}=y^{\log_2 u}\\ 2^{\log_y 10}=x^{\log_2 x}.\end{cases}$$

7. Две окружности радиуса R расположены таким образом, что радиус наименьшей окружности, касающейся их обеих, равен r. Найти радиус окружности, касающейся всех трех данных.

8. Равносторонний треугольник разбит на три части одинакового периметра прямыми, перпендикулярными одной из его сторон. Найти отношение площадей этих частей.

9. Сколько тупых углов может иметь выпуклый двадцатиугольник? Указать все возможности.

Физика

Письменный экзамен

Физический факультет

Вариант А

1. Задача. В вертикально стоящей цилиндрической трубе, закрытой с обоих концов, на высоте $h_0=1$ м от дна закреплен поршень массой $M=40$ кг. Под ним находятся $m=0{,}16$ г гелия при температуре $t=27$°C, над поршнем — вакуум. На какой высоте h окончательно установится поршень, если его освободить? Стенки трубы и поршень считать не поглощающими и не проводящими тепло. Газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(К·моль); ускорение свободного падения g принять равным 10 м/с^2.

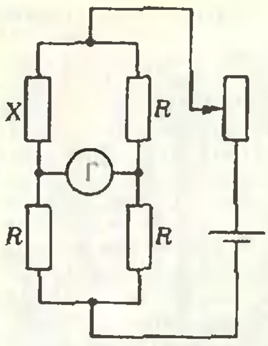


Рис. 1.

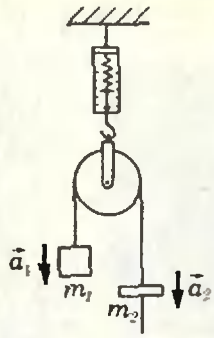


Рис. 2.

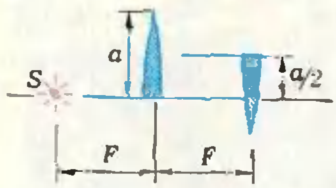


Рис. 3.

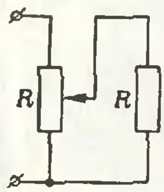


Рис. 4.

Рис. 5

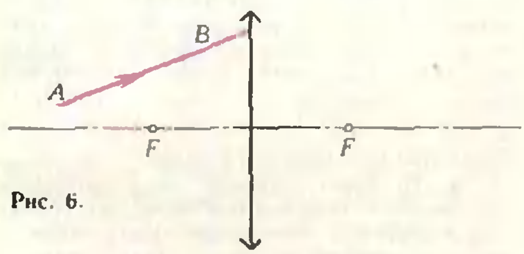


Рис. 6.

2. Задача. Груз массой $m=10^3$ кг опускают вниз на упругом стальном тросе с постоянной скоростью $|\vec{v}|=10$ м/с. Какова будет максимальная сила $\vec{F}_{max}$ натяжения троса, если внезапно остановить его верхний конец? Коэффициент упругости троса $k=10^6$ Н/м. Массой троса пренебречь. Считать ускорение свободного падения g равным 10 м/с^2.

3. Задача. В сверхпроводящем соленоиде, замкнутом на малое сопротивление, течет ток. Магнитная индукция $|\vec{B}|$ в соленоиде уменьшается на 2% за сутки. Оцените величину сопротивления R. Индуктивность соленоида $L=5$ Гн.

4. Задача. На рисунке 1 показана схема для измерения сопротивлений (мост Уитстона). Для резистора X закон Ома не справедлив и зависимость тока I через него от приложенного напряжения U имеет вид: $I=\frac{U}{R_0}+\alpha U^3$ $(\alpha>0)$. В остальные плечи моста включены одинаковые сопротивления R $(R<R_0)$. При каком токе I_0 через батарею будет отсутствовать ток в гальванометре Г?

5. Теоретический вопрос. Понятие о волновых свойствах света.

Вариант В

1. Задача. В закрытый баллон емкостью $V=24{,}9$ л, в котором при атмосферном давлении находятся $m_1=4$ г гелия, попала льдинка массой $m_2=1$ г, имеющая температуру $t_0=0$°С. Каким будет давление гелия, когда льдинка растает? Газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(К · моль), удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}3\cdot10^5$ Дж/кг. Стенки баллона не проводят и не поглощают тепло.

2. Задача. Через легкий, вращающийся без трения блок перекинут шнурок, массой которого можно пренебречь (рис. 2). На одном конце шнурка висит груз массой m_1. По другому концу шнурка скользит с направленным вниз постоянным относительно шнурка ускорением $\vec{a}_2$ кольцо массой m_2. Найдите ускорение $\vec{a}_1$ груза и силу трения $\vec{F}$ кольца о шнурок. Какую силу покажет динамометр Д, если движение кольца относительно оси блока равномерное?

3. Задача. Точечный источник света S находится в фокусе собирающей линзы, радиус круговой апертуры которой $a=2$ см. Линзу разрезают пополам, и нижнюю половину ее помещают в плоскости второго фокуса — так, как показано на рисунке 3. Постройте изображение источника. Фокусное расстояние линзы $F=3$ см.

4. Задача. Для регулирования напряжения на нагрузке собрана схема, изображенная на рисунке 4. Сопротивления нагрузки и регулировочного реостата одинаковы и равны R. Нагрузка подключена к половине реостата. Во сколько раз изменится напряжение на нагрузке, если ее сопротивление уменьшить вдвое?

5. Теоретический вопрос. Основные положения молекулярно-кинетической теории, ее опытное обоснование.

Задачи устного экзамена

Математико-механический факультет и факультет прикладной математики — процессов управления

1. Математический маятник длиной l находится в поезде, движущемся с постоянным ускорением $\vec{a}$, направленным вправо. Каков период колебаний маятника?

2. Когда газ, объем которого оставался неизменным, нагрели на $\Delta T=30$ К, его давление увеличилось на 10%. Какова начальная температура газа?

3. Два сосуда, содержащие одинаковую массу одного и того же газа, соединены трубкой с краном. В первом сосуде давление газа $p_1=4000$ Па, а во втором — $p_2=6000$ Па. Какое установится давление после открытия крана? (Температура газа постоянна.)

4. Определите напряжение на зажимах источника питания, если он обеспечивает в цепи ток $I=2$ А. Цепь состоит из двух параллельно включенных лампочек мощностью $P=30$ Вт каждая. Потери мощности в проводах составляют 10% полезной мощности.

5. Переменный ток изменяется со временем так, как показано на рисунке 5. Каково действующее значение этого тока?

6. На рисунке 6 показана тонкая собирающая линза, находящаяся в воздухе; F — ее фокусы. Найдите построением ход произвольного луча AB после линзы.

В. Бойцов, С. Валландер

Уральский государственный университет им. А. М. Горького

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(математико-механический факультет)

1. При каких значениях параметра a неравенство $ax^2+2ax+0{,}5>0$ выполняется на всей числовой оси?

2. Решить уравнение

$$\log_{(x^2)}[(2x-1)^2]+\log_{(x^3)}\left[\left(\frac{1}{2}-x\right)^3\right]=2\int_{1/4}^{3/4}(4t-1)\,dt.$$

3. В полукруг радиуса R вписана трапеция $ABCD$ так, что ее основание AD является диаметром, а вершины B и C лежат на окружности. Какова величина угла при основании у трапеции $ABCD$, имеющей наибольший периметр?

4. Найти все решения уравнения

$$1+(\sin x-\cos x)\sin\frac{\pi}{4}=2\cos^2\frac{5}{2}x,$$

которые удовлетворяют условию $\sin 6x<0$.

Вариант 2

(физический факультет)

1. Решить неравенство

$$|2^x-1|+x>x\cdot 2^x.$$

2. Решить уравнение

$$3\log_{27}(3^{x^2-2x+2})=\left[\sin^2\left(x-1+\frac{\pi}{4}\right)\right]'.$$

3. Какой угол образует хорда AC с диаметром AB, если произведение длины AC на длину перпендикуляра CD, опущенного на диаметр AB, имеет наибольшее значение?

4. Найти все значения α из отрезка $[-\pi;\,0]$, удовлетворяющие равенству

$$\sin\alpha+\int_{\alpha}^{2\alpha}\cos 2x\,dx=0.$$

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Газ массой $m=1$ кг, имеющий удельную теплоемкость при постоянном объеме $c_V=700$ Дж/(кг·К), нагревают при постоянном давлении $p=2\cdot10^5$ Па. Какова удельная теплоемкость газа в этом процессе, если его температура повысилась на $\Delta T=2$ К, а объем увеличился на $\Delta V=0{,}001$ м^3?

2. Чему равны напряжения на клеммах аккумулятора, электродвижущая сила которого $\mathcal{E}=12$ В, а внутреннее сопротивление $r=2$ Ом, при зарядке и разрядке током $I=1$ А?

3. На высоте h над поверхностью воды (показатель преломления $n=4/3$) расположен точечный источник света. Где будет находиться изображение этого источника, даваемое плоским зеркальным дном сосуда, если глубина сосуда с водой d?

4. Расстояние между двумя точечными источниками света $L=48$ см. Где между ними нужно поставить собирающую линзу с фокусным расстоянием $F=18$ см, чтобы изображения обоих источников попали в одну точку на главной оптической оси?

Математико-механический факультет

1. Три одинаковых маленьких шарика массой $m=0{,}02$ г каждый подвешены в одной точке на шелковых нитях длиной $L=30$ см. Какие равные заряды следует сообщить шарикам, чтобы каждая нить составляла с вертикалью угол $\alpha=30°$?

2. При замыкании аккумулятора на сопротивление $R_1=5$ Ом в цепи идет ток $I_1=5$ А. Параллельное подключение к сопротивлению R_1 сопротивления $R_2=10/3$ Ом увеличивает ток до $I_2=8$ А. Найдите внутреннее сопротивление аккумулятора r и его электродвижущую силу $\mathcal{E}$.

3. Квадратная металлическая рамка со стороной $a=0{,}02$ м находится в однородном магнитном поле, индукция которого перпендикулярна к плоскости рамки и с течением времени меняется по закону $|\vec{B}|=0{,}02t$ (в единицах СИ). Определите напряженность электрического поля $|\vec{E}|$ в рамке.

4. Точечный источник света находится на главной оптической оси выпуклого сферического зеркала. Расстояние между источником и оптическим центром зеркала равно L_1, а между источником и его изображением — L_2. Чему равен радиус кривизны зеркала?

Э. Голубов, Р. Емлин

Г. Звенигородский,
Е. Кузнецов

Что такое мини-ЭВМ?

Не так уж давно, всего 15—20 лет назад, большинство специалистов в области вычислительной техники считали, что магистральный путь развития ЭВМ — это создание супермашин, обладающих огромной емкостью памяти и способных выполнять сотни миллионов и даже миллиарды операций в секунду. На рубеже шестидесятых годов многим казалось, что спустя одно-два десятилетия все вычислительные потребности страны будут удовлетворяться несколькими такими гигантами.

Действительность оказалась совершенно иной. Разумеется, большие и сверхбольшие машины продолжают создаваться и успешно работают во многих отраслях. Но наряду с ними (а в ряде случаев — вытесняя их) в последние десятилетия начали бурно развиваться малые вычислительные машины — мини-ЭВМ.

Не миниатюрные, а минимальные

Если судить по названию, можно подумать, что мини-ЭВМ — это маленькие, миниатюрные ЭВМ. С одной стороны, конечно, почти все современные мини-компьютеры*) имеют весьма скромные размеры и занимают один — два небольших шкафчика, а некоторые из них помещаются в ящике стола. С другой стороны, в наш век микроэлектроники даже так называемые «большие ЭВМ» имеют не на много бо́льшие габариты. Тогда, может быть, мини-машины — это дешевые ЭВМ с малыми возможностями? Дешевые — это верно, а что касается малых возможностей, то это как посмотреть: по объему оперативной памяти и быстродействию «мини» практически не уступают своим «коллегам» средней мощности, а по возможностям работы с внешними устройствами намного их превосходят.

Так в чем же особенность мини-машин, почему их выделяют в особый класс?

---

*) Не следует путать мини-ЭВМ (мини-компьютер) — машину, способную исполнять самые разнообразные программы, с *микрокалькулятором* — карманным или настольным прибором, предназначенным для числовых расчетов («Квант», 1978, № 4, с. 23).

По словам Н. П. Брусенцова, автора книги «Мини-компьютеры» (М., «Наука», 1979), приставка «мини» в обозначении этого класса ЭВМ означает не *миниатюрные*, а *минимальные*. Разработчики этих машин исключили из их архитектуры все элементы, предназначенные для выполнения вычислений и не обязательные при других формах использования ЭВМ. К таким элементам относится, прежде всего, арифметический блок, позволяющий быстро и с большой точностью выполнять сложение, вычитание, умножение и деление рациональных чисел. Большая длина машинного слова в машинах средней и высокой мощности (32, 36, 45 и даже 48 двоичных разрядов) тоже связана с обеспечением высокой точности представления таких чисел. Для представления других видов данных иметь такое длинное слово совсем не обязательно: для любого стандартного символа, например, достаточно одного байта*), а целые числа, встречающиеся в большинстве практических задач, вполне помещаются в двух байтах. В большинстве мини-машин принята длина слова в два байта (16 битов), а иногда и того меньше.

Сокращение длины слова и отказ от специального арифметического оборудования позволили сделать мини-машины простыми по конструкции, а следовательно, дешевыми и надежными, сохранив высокое быстродействие и достаточный объем памяти.

А как же они считают?

Вероятно, у читателя возникли вопросы: неужели мини-ЭВМ совсем не умеют выполнять точные вычисления с рациональными числами? А если умеют, то как у них это получается без арифметического оборудования? Как организовать хранение чисел с высокой точностью при коротком машинном слове?

Ответ очень прост: если в какой-то задаче нужно работать с такими числами, то их записывают не в одно слово, а в несколько последовательных машинных слов, а операции над ними выполняют при помощи процедур, составленных из более простых машинных команд. Разумеется, такие вычисления происходят в несколько раз медленнее, чем на средних и больших машинах. Но ведь выполнять такие операции современным ЭВМ приходится не так уж часто (об этом уже говорилось в одной из первых статей нашего раздела), поэтому «в среднем» быстродействие мини-машин почти не снижается.

Бегемот в спичечном коробке

Сокращение длины машинного слова ставит перед разработчиками мини-ЭВМ проблему, которая, на первый взгляд, может показаться неразрешимой. Это проблема адресации: как обеспечить возможность обращения к любому слову памяти, если длина команды — всего 2 байта? В машинах среднего класса с небольшим числом слов и с большой длиной каждого слова такая проблема не возникала.

Например, в одной из самых распространенных советских ЭВМ начала шестидесятых годов — машине М-20 — было всего 4096 45-разрядных слов. При таких параметрах для адреса*) любого слова достаточно двенадцать битов (проверьте это!). Поэтому в каждой команде этой машины указывались адреса трех слов, шесть битов выделялись для записи кода операции, что позволяло закодировать 64 разных команды, и еще оставалось место!

В мини-машинах, разумеется, о трех адресах речи быть не может: даже для одного адреса не хватает места. Действительно, если отвести для кода операции всего 4 разряда (а это — всего 16 различных команд!), то для адреса остается 12 битов, то есть удается указать адреса тех же 4096 слов. Но ведь объем памяти современных мини-машин бывает в 30 раз больше (см. таблицу на с. 55), да и 16 команд маловато для работы. Если же записывать команду не в одно, а в два или три последовательных сло-

*) Напоминаем, что *байт* — это 8 битов, то есть 8 двоичных разрядов.

*) См. статью Ю. Первина в предыдущем номере.

ва, то она будет выполняться очень медленно и быстродействие резко снизится.

Ухищрения разработчиков ЭВМ, направленные на решение этой проблемы, напоминают попытки запихнуть бегемота в спичечный коробок: огромный адрес слова 256-килобайтной памяти пытаются «засунуть» в те несколько разрядов, которые остаются после размещения кода операции. Укажем лишь несколько приемов:

1. Используются безадресные команды для работы со специальными ячейками памяти — регистрами, обращение к которым происходит очень быстро. В машинах СМ-1 и СМ-2 — по два таких регистра, в СМ-3 и СМ-4 — семь.

2. Выделяется несколько форматов команд: с коротким кодом операции и длинной адресной частью (загрузка регистров, передача управления) и с длинным кодом, но с коротким адресом. В последнем случае обычно указывается относительный адрес, то есть число, которое нужно прибавить к адресу исполняемой в данный момент команды, чтобы получить адрес нужного слова.

3. Применяется косвенная адресация: требуемый адрес записывают в отдельное слово (тогда он может занимать все 16 битов), а адрес этого слова указывают в команде (например, с помощью относительной адресации).

Однако ни один из этих способов не позволяет одной программе работать с памятью, превышающей 64 К. Большая память обычно используется для работы в многопрограммном режиме: каждой программе выделяется некоторая часть памяти — сегмент (не больше 64 К), а внутри этой программы достаточно указать адрес слова относительно начала сегмента. Где применяются мини-ЭВМ? Ответить на этот вопрос не так уж просто. Пожалуй, проще было бы перечислить те отрасли, где мини-ЭВМ пока еще не применяются. Приведем лишь несколько примеров, которые помогут в какой-то степени представить себе разнообразие форм использования этих машин:

— управление атомными и гидроэлектростанциями;

— диспетчерское управление энергосистемами страны;

— управление доменными печами;

— управление технологическими процессами в цветной металлургии, горной, цементной, целлюлозно-бумажной, легкой промышленности;

— резервирование мест и продажа билетов на авиалиниях страны (система «Сирена»);

— управление городским автобусным движением (в Омске, Алма-Ате, Ворошиловграде);

— управление метрополитеном (в Ленинграде, Харькове);

— управление нефтепроводом (например, нефтепровод «Дружба»);

— в информационно-вычислительных центрах АСУ «Олимпиада-80».

Наш технический справочник

СМ — Система Мини-ЭВМ социалистических стран

Показатель	Модель / Единица	СМ-1	СМ-2	СМ-3	СМ-4
Производительность	тыс. оп./сек	400	500	200	700
Прямо адресуемая память	К(=1024) слов	32	32	32	32
Длина слова	бит	16	16	16	16
Минимальный объем оперативной памяти	К байт	8	64	32	32,64
Максимальный объем оперативной памяти	К байт	64	256	64	248
Скорость обмена с устройствами ввода — вывода	К слов/сек	250	700	800	800

Модели СМ-1, 2 отличаются от моделей СМ-3, 4. Есть разница в архитектуре машин — в системе команд, в способах адресации, в системах программного обеспечения, в организации и структуре систем ввода—вывода. Это означает, что программы, написанные для ЭВМ СМ-1, 2, не подходят для ЭВМ СМ-3, 4, и обратно, то есть эти модели ЭВМ несовместимы.

Заочная физическая школа

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова (МГУ) объявляет набор учащихся в 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме школьной программы, а также лучше подготовиться к вступительным экзаменам по физике в высшие учебные заведения, в первую очередь — на физический факультет МГУ.

Прием в ЗФШ проводится на основании результатов решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать до *15 сентября* по адресу: *117234, Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет, ЗФШ.* В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим домашним адресом и два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 7×12 см и заполненной по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество	*Сидоров Петр Иванович*
Класс	*9-й*
Профессия родителей	*отец — инженер, мать — врач*
Подробный домашний адрес	*248016, Калуга, ул. К. Либкнехта, д. 4, кв. 73*
Номер и адрес школы	*школа № 10, ул. Пушкина, д. 3*

Решение приемной комиссии ЗФШ о зачислении будет сообщено до 5 октября 1981 года. Проверенные вступительные задания обратно не высылаются.

Вступительное задание

Поступающим в 9 класс предлагаются задачи 1—5, поступающим в 10 класс — 3—7.

1. С высоты H на землю начинает свободно падать тяжелый камень (рис. 1). Одновременно стрелок, находящийся на расстоянии L от линии падения камня, производит выстрел и попадает в камень. Какова зависимость высоты h камня от поверхности земли в момент попадания в него пули от модуля v скорости пули и угла α?

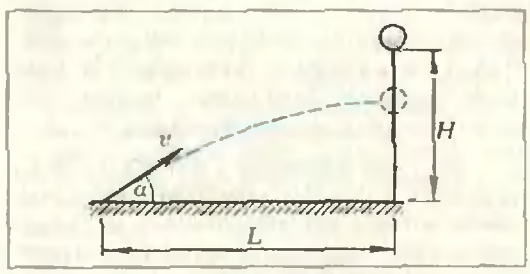


Рис. 1.

2. Три человека несут однородный по плотности и толщине лист железа массой M, имеющий форму треугольника с углами α, β и γ. Каким образом можно сделать так, чтобы испытываемые каждым человеком нагрузки были одинаковыми?

3. Оцените, какой высоте свободного падения соответствует по скорости приземления прыжок парашютиста с большой высоты.

4. Тело массой m соскальзывает без начальной скорости с горки массой M и высотой H, оканчивающейся горизонтальным трамплином высотой h (рис. 2). Горка гладкая, но на трамплине имеется участок длиной L с коэффициентом трения μ. Сама горка может скользить без трения по горизонтальной плоскости. Какую работу совершит сила трения за время движения тела по горке?

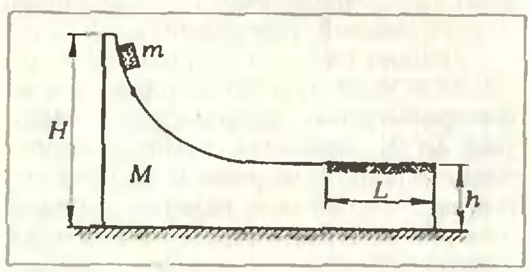


Рис. 2.

5. Доска массой M прикреплена к пружине жесткостью k (рис. 3). На доску налетает шарик массой m, движущийся со скоростью $\vec{v}$ под углом α к вертикали. Под каким углом отлетит шарик, если удар о доску абсолютно упругий?

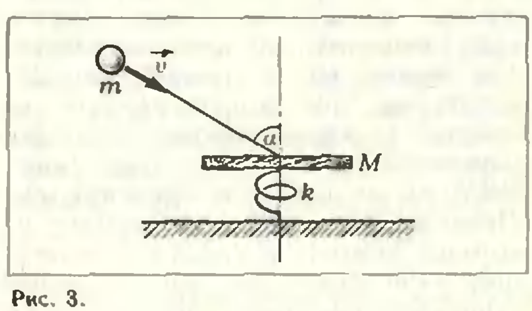


Рис. 3.

6. Кубический сосуд с ребром l и массой M, в котором находится азот при температуре T, покоится на горизонтальной поверх-

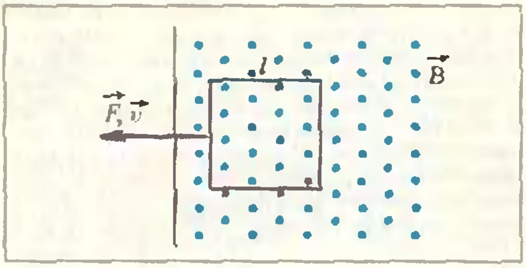


Рис. 4.

ности. Коэффициент трения сосуда о поверхность μ, масса азота в сосуде m. Вне сосуда находится воздух с обычным содержанием азота при атмосферном давлении p_0 и температуре T_0. В некоторый момент времени верхняя и одна из боковых граней сосуда стали проницаемыми для азота. При каких значениях m и T сосуд начнет двигаться?

7. В однородном магнитном поле с индукцией $\vec{B}$ ($|\vec{B}|=0{,}1$ Тл) находится квадратная рамка со стороной $l=5$ см (рис. 4). Сопротивление рамки $R=1$ Ом. Какую силу необходимо прикладывать к рамке, чтобы выдвигать ее из магнитного поля с постоянной скоростью $\vec{v}$ ($|\vec{v}|=4$ см/с)? Плоскость рамки остается перпендикулярной к направлению магнитных линий; поле имеет резко очерченную границу, две стороны рамки перпендикулярны к этой границе.

Московская городская олимпиада по физике

В марте 1980 года состоялась традиционная 41-я олимпиада по физике, проводимая физическим факультетом МГУ. Начиная с 1978 года, для учащихся 8—10 классов эта олимпиада одновременно является и Московской городской олимпиадой.

Первый отборочный тур проводится по районам города, а три последующих — на физическом факультете МГУ. На первом, втором и третьем турах каждому участнику олимпиады предлагается по пять теоретических задач. Последний тур — экспериментальный; на него приглашаются победители предыдущих туров.

На дне открытых дверей физического факультета МГУ проходит награждение победителей: им вручаются дипломы и книги по физике. Из призеров городской олимпиады формируется команда Москвы для участия во Всесоюзной олимпиаде по физике.

Вашему вниманию предлагаются наиболее интересные теоретические задачи Московской городской олимпиады 1980 года. После каждой задачи указан класс, в котором предлагалась эта задача, и ее автор.

1. На горизонтальной поверхности находится куб. Сверху на него положили стержень, нижний конец которого шарнирно прикреплен к поверхности (рис. 1). При каких углах α между стержнем и поверхностью система будет находиться в равновесии, если коэффициенты трения μ_1 между стержнем и кубом и μ_2 между кубом и поверхностью удовлетворяют соотношению $\mu_1\mu_2=1$? (8 кл.)

В. Ильин

2. Тело соскальзывает без начальной скорости с вершины наклонной плоскости с углом наклона α. Коэффициент трения μ между телом и плоскостью изменяется с увеличением расстояния x от ее вершины по закону $\mu=bx$. Тело останавливается, не дойдя до основания наклонной плоскости. Найдите время t, прошедшее с начала движения тела до его остановки. (10 кл.)

Г. Пустовалов

3. Лифтер высотного здания, будучи человеком пунктуальным, повесил на стенку своего лифта точные маятниковые часы, чтобы знать, когда кончается рабочий день. Как вы думаете, закончит он работу точно в срок, переработает или недоработает? Время движения (по неподвижным часам) с ускорением, направленным вверх и направленным вниз, одинаково; одинаковы также модули ускорений. (10 кл.)

М. Семенов

4. Длина математического маятника медленно меняется со временем следующим образом: $l=l_0(1+\alpha t)$, где α — постоянная величина и $\alpha t \ll 1$. Запишите формулу зависимости от времени смещения s маятника от положения равновесия. Маятник выведен из положения равновесия толчком и в начальный момент смещение маятника равно нулю. Амплитуду колебаний s_0 считать постоянной. (10 кл.)

Г. Мякишев

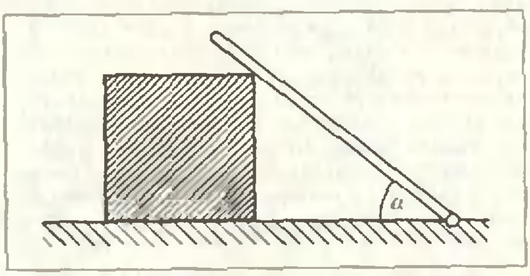


Рис. 1.

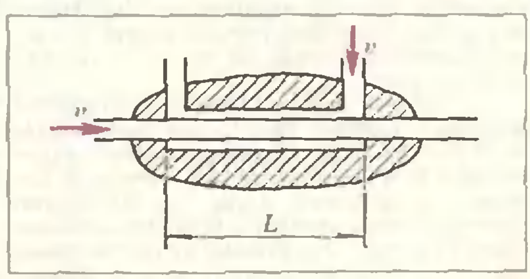


Рис. 2.

5. Теплообменник длиной L состоит из трубы с площадью сечения $2S$, внутри которой проходит труба с площадью сечения S (рис. 2). Трубы тонкостенные. Вся конструкция теплоизолирована от внешней среды. В трубах со скоростью v прокачивается жидкость плотностью ϱ с удельной теплоемкостью c. Температуры жидкости при входе в теплообменник $T_{1н}$ и $T_{2н}$ соответственно. Определите температуры жидкости при выходе из теплообменника. Жидкости в трубах текут в противоположных направлениях. Считать, что количество теплоты, переданное в единицу времени через единичную площадку, пропорционально разности температур с коэффициентом пропорциональности k; теплопроводностью жидкости пренебречь. (10 кл.)

А. Крюков

6. Имеются две елочные гирлянды с последовательным соединением лампочек. Гирлянды потребляют одинаковую мощность, но первая предназначена для включения в электрическую сеть с напряжением 127 В, а вторая — с напряжением 220 В. Что произойдет, если две лампочки из разных гирлянд поменять местами и включить гирлянды в соответствующие им электрические сети? Число лампочек в каждой гирлянде более 10. (9 кл.)

В. Петерсон

7. Если смотреть на освещенную поверхность через широкое отверстие корпуса шариковой ручки, то вокруг узкого отверстия в корпусе видно несколько концентрических темных и светлых колец. Почему наблюдаются эти кольца? (10 кл.)

А. Пухов

С углубленным изучением

В школе № 13 города Саратова — только 7—10 классы. При конкурсном отборе поступающих проводятся вступительное собеседование и письменная работа по математике. Заявлений обычно вдвое больше, чем мест.

Учащиеся классов с углубленным изучением математики, физики, химии, биологии — постоянные участники всероссийских и даже всесоюзных олимпиад. Несмотря на «несчастливый» номер, аттестаты этой школы давно пользуются признанием в вузах Саратова, а их обладатели всегда уверенно сдают вступительные экзамены.

Большой интерес восьмиклассников вызвал задачник под названием «Радикал». Однажды на стенде, выполненном в форме радикала, было вывешено условие задачи, а спустя несколько дней — ее решение, данное одним из учащихся. Вначале это было задумано как помощь в разъяснении более сложных задач; участвовали в решении и разборе лишь наиболее сильные учащиеся. Но постепенно заинтересовались остальные — и «Радикал» приобрел широкую популярность. А если для решения задачи не хватало каких-либо сведений, учительница указывала дополнительную литературу.

— Позже мы стали вывешивать 2—3 решения, выполненных разными учащимися и отобранных редколлегией, — рассказывает учительница математики Виктория Иосифовна Игумнова. — А всеобщее обсуждение позволяло определить, какие из этих решений наиболее рациональны.

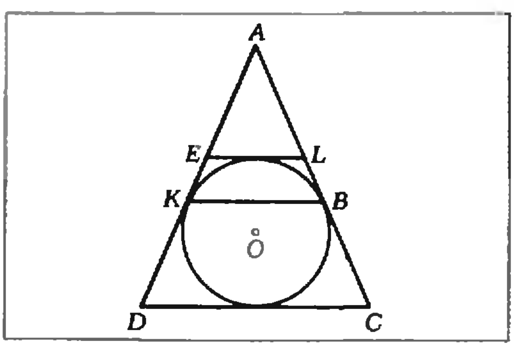
— Многие ребята, заметив недочеты в вывешенных решениях, предлагают свои поправки,— рассказывает член редколлегии «Радикала» Ира Азаренко.— Если редколлегия не находит опровержения, автор тут же вносит красной пастой поправку и безмерно гордится своим участием. А некоторые приносят новые задачи, отобранные из разных книг и научно-популярных журналов.

Порой против поправки или новой задачи находятся возражения, начинается бурное обсуждение. Однако, как только раздается негромкая речь Виктории Иосифовны, все страсти мгновенно утихают.

Остается добавить, что почти каждый ученик физматклассов выписывает «Квант», а потом, поступив в вуз, оставляет собранный комплект школе.

В заключение приведем две задачи из «Радикала»:

1. В треугольнике CAD вписана окружность радиуса $r=5$ см. Расстояние $|BK|$ между точками касания (см. рисунок) равно 8 см. Касательные LE и CD параллельны BK. Найти стороны трапеции $EDCL$.



2. В треугольнике ABC даны точки O — точка пересечения высот, O_1 — точка пересечения медиан и O_2 — центр описанной окружности. Доказать, что $O_2\widehat{O_1}O=180°$ и $|O_2O_1|:|O_1O|=1:2$. Примечание. Это — одно из утверждений теоремы Эйлера (см. «Квант», 1972, № 11, с. 33).

А. Яковлев

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

Играет Гарик Каспаров

В прошлом году бакинский школьник Гарик Каспаров добился замечательных успехов. Одержав победу в крупном международном турнире, он стал самым юным гроссмейстером в мире, блестяще выступил за сборную страны в начале года — на первенстве Европы, а в конце — на шахматной Олимпиаде. Все это не помешало Гарику с золотой медалью закончить школу (в очередной раз опровергнув мнение, будто шахматы мешают учебе) и поступить в Институт иностранных языков.

Ведущий страничку встретился с Каспаровым у него дома в Баку, вскоре после его возвращения из ФРГ, где Гарик одержал еще одну победу — завоевал звание чемпиона мира среди юношей. Конечно, хотелось задать много шахматных вопросов, но, имея в виду публикацию в «Кванте», я начал с математической головоломки. Дело в том, что было время, когда Гарик увлекался математикой.

— Итак, Гарик, — сказал я, — из доски вырезаны два противоположных угловых поля. Можно ли оставшуюся часть доски покрыть костями домино размером 2×1?

Каспаров думал меньше минуты.

— Нельзя, — твердо ответил он. Как и в шахматах, интуиция не подвела молодого гроссмейстера.

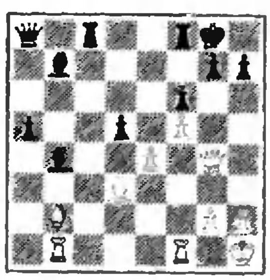
— Гарик, известно ли тебе, что весь шахматный мир обсуждает возможность будущего матча на первенство мира Карпов — Каспаров?

— Не скрою, такие разговоры до меня доходят. Но я всегда планирую свои шахматные дела только на один ход вперед — сыграть получше в данном соревновании. В крайнем случае можно помечтать о межзональном турнире.

В беседе с Гариком обнаружилось, что он знает на память множество стихов, увлекается историей, географией, не лишен чувства юмора. Кумиром семнадцатилетнего шахматиста является А. Алехин (которому, кстати, посвящен сегодняшний тур нашего шахматного конкурса).

По наследству юноше должны были передаться и «научные» и «художественные» гены — его отец К. Вайнштейн (он умер, когда Гарику было всего семь лет) был разносторонне развитым человеком, но посвятил себя технике, как и его мать К. Каспарова. Дедушка Гарика был известным в Азербайджане композитором, дядя, тоже композитор, только что написал очередную песню, которую исполняет Муслим Магомаев. Талант же Гарика Каспарова проявился в смежной области — ведь шахматы, как известно, сочетают в себе элементы и науки, и искусства.

На следующий день в обществе «Знание» Каспаров делился своими впечатлениями о юношеском чемпионате мира. Лекция была интересной, но особенно охотно Гарик показывал свои партии. Лучшей из них он назвал победу над шведским шахматистом, финал которой мы приводим.



Каспаров — Акессон

Белые пожертвовали пешку, а теперь отдают еще и слона **1.С:f6! Л:f6 2.e5 Лh6.** Спасало только 2...Лf7, вот основной вариант, показанный белыми сразу после партии: 3.f6 Лcf8 4.Лf3 Сc8 5.Фg5 Крh8 6.Л:b4! gf 7.Фh6 ab 8.С:h7 Сg4! 9.Сb1+ Крg8 10.ef С:f3 11.Фg5+ с вечным шахом. Видите, какими счетными способностями обладает Гарик. **3.f6 Лc7 4.e6 Фd8 5.e7 Л:e7 6.fe Ф:e7 7.Лbc1 Фd8 8.Фf5 Фb8? 9.Фf7+ Крh8 10.Лc7. Черные сдались.**

Следующий эпизод взят из партии Каспарова, сыгранной им на чемпионате Европы.

Каспаров — Пшибыл

1.d7! Как и в предыдущем примере, белые вслед за пешкой жертвуют слона. **1...fg 2.Фc4+ Крh8 3.K:g5 Сf6** (3...Сd4 4.Л:d4! cd 5.Ф:d4+ Крg8 6.Кe6) **4.Кe6 Кc7 5.К:f8 Л:f8 6.Лd6 Сe7 7.d8Ф!** Эффектное завершение атаки: белые расстаются с гордостью своей позиции — проходной пешкой. **7...С:d8 8.Фc3+ Крg8 9.Лd7 Сf6 10.Фc4+ Крh8 11.Фf4 Фa6 12.Фh6. Черные сдались.**

На Всемирной шахматной олимпиаде в Мальте Каспаров внес наибольший вклад в копилку сборной СССР — 9,5 очков в двенадцати сыгранных им партиях. Эффектно завершил он поединок в матче с югославами.

Каспаров — Марьянович

1.К:h7 Фd4 (1...Кр:h7 2.Фh5+) **2.Фh5 g6 3.Фh4 С:a1 4.Кf6+. Черные сдались.**

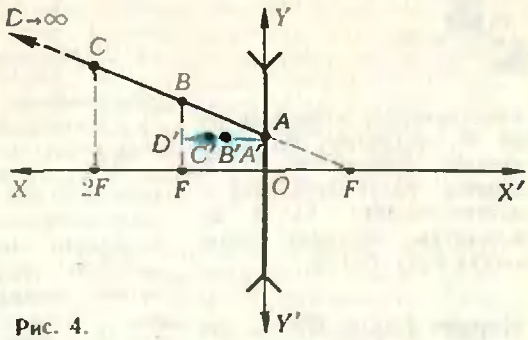


Рис. 4.

Построение изображений наклонных предметов

1. См. рис. 1.
2. См. рис. 2.
3. См. рис. 3.
4. См. рис. 4.
5. См. рис. 5 (рисунок сделан для собирающей линзы).

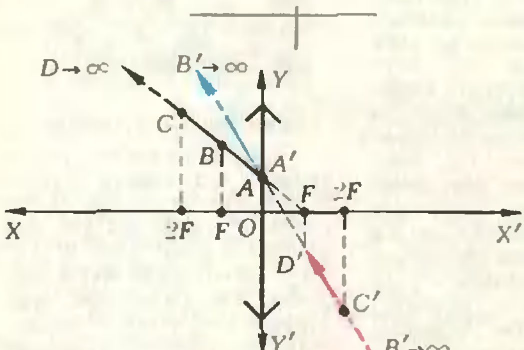


Рис. 1.

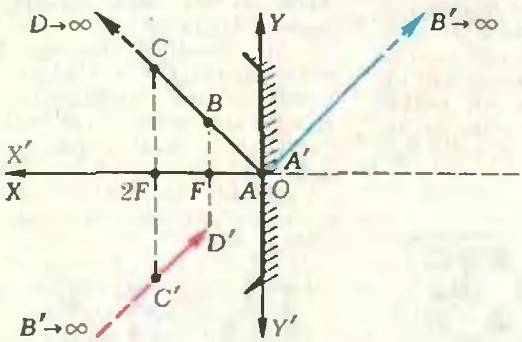


Рис. 2.

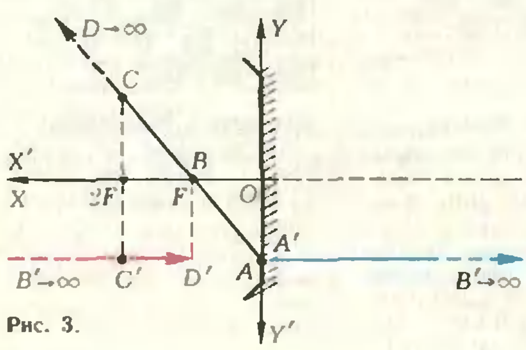


Рис. 3.

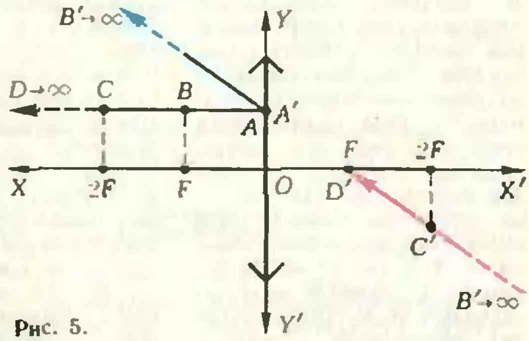


Рис. 5.

Горьковский государственный университет им. Н. И. Лобачевского

Математика

Вариант 1

1. $]-\infty;-5]\quad[1;+\infty[$.
2. $x_1=-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi}{2}k,\ x_2=\frac{\pi}{6}+\pi l\ (k, l\in \mathbf{Z})$.
3. Диаметр основания и высота цилиндра равны $\frac{2}{\sqrt{3}}$.
4. 40 часов.
5. **Указание.** Докажите, что последние цифры десятичной записи чисел 53^{53} и 33^{53} равны 3.

Вариант 2

1. $x_1=(-1)^k\frac{\pi}{6}+\pi k,\quad x_2=\frac{\pi}{2}+\pi l\ (k, l\in \mathbf{Z})$.
2. $[-7;-\sqrt{35}]\bigcup[5;\sqrt{35}]$. 3. 44.
4. $h^2\sqrt{3}$. 5. На первом месте — третий рабочий, на втором — второй, на третьем — первый.

Вариант 3

1. $\left[\frac{63}{65};1\right[$.
2. $\left\{\left(\frac{\pi}{2}+\pi k,\ \pm\frac{\pi}{3}+2\pi l\right);\quad\left(\pm\frac{\pi}{3}+2\pi m,\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right)\right\}\ (k, l, m, n\in \mathbf{Z})$.
3. $\left(\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6}\right)R^2$. **Указание.** Докажите, что $|AM|=|CM|=|CN|=|NB|=R$ (рис. 6).
4. $\max\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}y=9,\quad\min\limits_{\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}y=4$.

5. $19=3^3-2^3$. Разложив левую часть равенства $m^3-n^3=19$ на множители и воспользовавшись тем, что 19 — простое число, можно доказать, что такое представление единственно.

Физика

1. $|\vec{v}|=\sqrt{gl/3}$.
2. $|\vec{T}|=\dfrac{m_1m_2g(\mu_2-\mu_1)\cos\alpha}{m_1+m_2}\approx 2{,}3$ Н.
3. $|\vec{T}_1|=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2}\right)mg$;

$|\vec{T}_2|=\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{2}\right)mg$.

4. $|\vec{F}_{\text{тр}}|=mg/2\approx 50$ Н.
5. $|\vec{E}_B|=\dfrac{4|\vec{E}_A||\vec{E}_C|}{|\vec{E}_A|+|\vec{E}_C|+2\sqrt{|\vec{E}_A||\vec{E}_C|}}=56{,}25$ В/м.
6. $\varphi_0=\varphi/\sqrt[3]{n^2}=0{,}1$ В.
7. $q=C(\mathscr{E}+U)$.
8. $U'=\dfrac{\mathscr{E}U}{2\mathscr{E}-3U}=4$ В.
9. $R_1=9$ Ом; $R_2=1$ Ом; $\eta_1=75\%$; $\eta_2=25\%$.
10. $\nu_1/\nu_2=\sqrt{n}=2$; энергии контуров одинаковы.

Красноярский государственый университет

Математика

1. $\{-1\}$. 2. $\left[2;\ \dfrac{5}{2}\right[\ \cup\ \left]\dfrac{11}{4};3\right[$. 3. 1. Указание. Поскольку абсциссы x_1 и x_2 концов хорды удовлетворяют уравнению $x-3=a^2x^2+5ax-4$, задача сводится к решению системы $D=(5a-1)^2-4a^2>0$, $\dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{5a-1}{2a^2}=2$. 4. При $\alpha=2\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ длина равна $\dfrac{8R}{3\sqrt{3}}$. 5. $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}+\sqrt{3}+1}$. Указание. Для нахождения радиуса r вписанного шара воспользуйтесь формулой $V=\dfrac{1}{3}rS$, где V — объем, а S — площадь полной поверхности тетраэдра (см. «Геометрия 9—10», задача 346).

Физика

Физический факультет

1. $|\vec{v}|=\dfrac{M+m}{m\cos\alpha}\sqrt{2gl\sin\alpha}$.
2. Возможны два случая: 1) $\alpha=\arcsin 0=0$; 2) $\alpha=\arccos\dfrac{g}{\omega^2R}$. Здесь α — угол, который образует с вертикалью радиус, проведенный в точку нахождения шарика.
3. См. рис. 7.
4. $l=\dfrac{|\vec{v}|^2d\sin^2\alpha}{2Ue/m}\approx 0{,}17$ см.
5. $d=\dfrac{a/2}{\operatorname{tg}\varphi/2-\dfrac{\sin\varphi/2}{\sqrt{n^2-\sin^2\varphi/2}}}\approx 4{,}5$ см.

Математический и биолого-химический факультеты

1. $A=R(T_1+T_2-2T)$.
2. $P_3\approx 27$ Вт.
3. $\dfrac{e}{m}=\dfrac{2U}{|\vec{B}|^2r^2}=1{,}76\cdot 10^{11}$ Кл/кг.
4. $F=a=10$ см.
5. $\nu=\nu_0+\dfrac{e\varphi}{h}\approx 1{,}3\cdot 10^{15}$ Гц. Здесь $h=6{,}62\times 10^{-34}$ Дж·с — постоянная Планка.

Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова

Математика

Вариант 1

1. $\left[\sqrt[3]{\dfrac{5}{4}};\ +\infty\right[$.
2. $[\alpha;\ 2\alpha]\cup[2-\alpha;\ 2+\alpha]\cup]4-2\alpha;\ 4-\alpha[$, где $\alpha=\dfrac{1}{\pi}\arccos\dfrac{1}{4}$. Решение. Данное уравнение имеет решение

$$x=\pm\frac{1}{a}\arccos\frac{1}{4}+\frac{2\pi}{a}k\ (k\in\mathbf{Z})$$

или

$$x=\pm\frac{\pi}{a}\alpha+\frac{2\pi}{a}k\ (k\in\mathbf{Z}).$$

Для дальнейшего заметим, что

$$0<\arccos\frac{1}{4}<\frac{\pi}{2}$$

$$0<\alpha<\frac{1}{2}$$

$$0<3\alpha<\frac{3}{2}<2$$

Если длина отрезка $\left[\dfrac{\pi}{2};\ \pi\right]$ больше периода $\dfrac{2\pi}{a}$ функции $y=\cos ax$, то на этом отрезке данное уравнение имеет больше

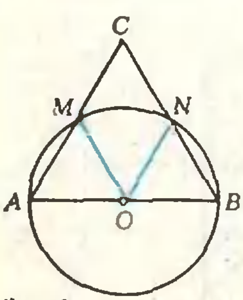


Рис. 6.

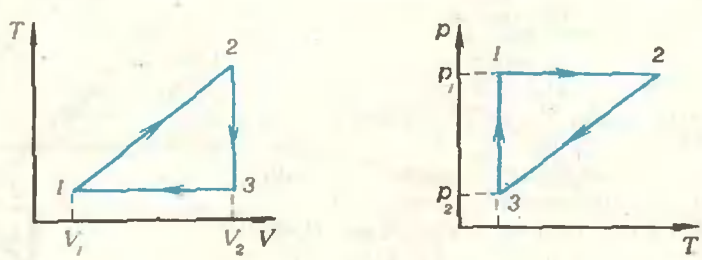


Рис. 7. а) б)

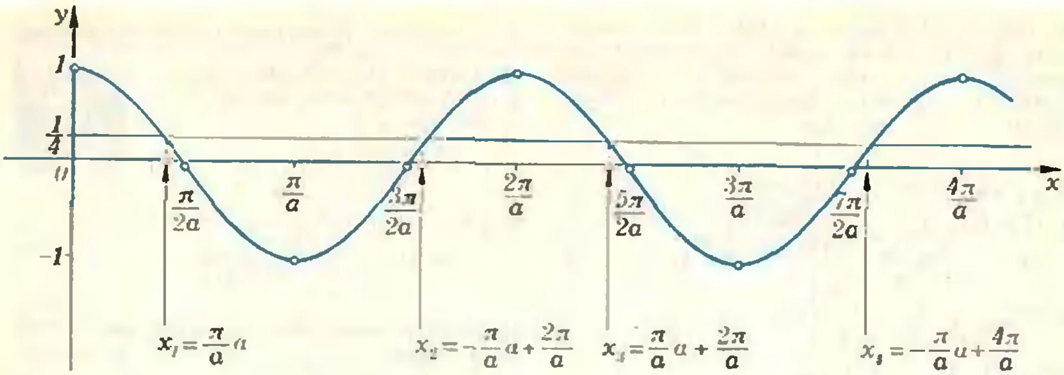


Рис. 8.

одного корня. Следовательно, если $a>0$ удовлетворяет требуемому условию, то

$$\frac{\pi}{2}<\frac{2\pi}{a}$$

$$a<4$$

Поэтому наибольший из корней, который может — в одиночку — попасть на отрезок $\left[\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$, есть $x_3=\frac{\pi}{a}\alpha+\frac{2\pi}{a}$ (рис. 8): если

$$\frac{\pi}{a}\alpha+\frac{2\pi}{a}<\frac{\pi}{2}\leqslant-\frac{\pi}{a}\alpha+\frac{4\pi}{a}\leqslant\pi,$$

то $a>2\alpha+4>4$. Значит, надо рассмотреть три возможности:

$$\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{a}\alpha\leqslant\pi<-\frac{\pi}{a}\alpha+\frac{2\pi}{a} \qquad (1)$$

$$\frac{\pi}{a}\alpha<\frac{\pi}{2}\leqslant-\frac{\pi}{a}\alpha+\frac{2\pi}{a}\leqslant\pi<\frac{\pi}{a}\alpha+\frac{2\pi}{a} \qquad (2)$$

$$-\frac{\pi}{a}\alpha+\frac{2\pi}{a}<\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{a}\alpha+\frac{2\pi}{a}\leqslant\pi<-\frac{\pi}{a}\alpha+\frac{4\pi}{a} \qquad (3)$$

В случае (1)

$$a\leqslant 2\alpha$$
$$a\geqslant\alpha$$
$$a<-\alpha+2$$

Поскольку $2\alpha<-\alpha+2 \Leftrightarrow 3\alpha<2$,

$$\alpha\leqslant a\leqslant 2\alpha \qquad (4)$$

В случае (2)

$$a>2\alpha$$
$$a\leqslant-2\alpha+4$$
$$a\geqslant-\alpha+2$$
$$a<\alpha+2$$

Поскольку $-\alpha+2>2\alpha \Leftrightarrow 3\alpha<2$ и $\alpha+2<-2\alpha+4 \Leftrightarrow 3\alpha<2$,

$$-\alpha+2\leqslant a<\alpha+2 \qquad (5)$$

В случае (3)

$$a>-2\alpha+4$$
$$a\leqslant 2\alpha+4$$
$$a\geqslant\alpha+2$$
$$a<-\alpha+4$$

Поскольку $-2\alpha+4>\alpha+2 \Leftrightarrow 3\alpha<2$ и $-\alpha+4<2\alpha+4 \Leftrightarrow 3\alpha>0$,

$$-2\alpha+4<a<-\alpha+4. \qquad (6)$$

Из (4), (5), (6) получаем ответ.

3. $|AK|=a+1$, $|DK|=a$. Указание. Пусть $|DK|=x$, тогда $2S_{KLMN}=1-\frac{(1+a)^2}{2+x+a}+\frac{a^2}{x+a}$.

Полученную функцию исследуйте с помощью производной.

4. 1) $0<x<1$, $0<y<x$; 2) $0<x<1$, $y>1$; 3) $x>1$, $1<y<x$; 4) $-1<x<0$, $0<y<-x$; 5) $-1<x<0$, $y>1$; 6) $x<-1$, $1<y<-x$. Множество точек $(x;\ y)$ показано на рисунке 9.

5. $\frac{3\sqrt{3}}{8}h^2$. Указание. Если дополнить основание призмы до квадрата, получится куб.

Вариант 2

1. $2a+2b+2\sqrt{a^2+b^2}$. Указание. Рассмотрите два случая: а) прямая l_4 пересекает отрезок прямой l_3, заключенный между l_1 и l_2; б) прямая l_4 пересекает продолжение этого отрезка.

2. $\left\{0,\ 1,\ \frac{1}{2}\left(-1+\sqrt{\frac{\sqrt{65}-5}{2}}\right)\right\}$

3. $]\,0;\ 3^{-1-\sqrt{-17b}}]\cup[\frac{1}{3};\ 3^{-1+\sqrt{-17b}}]$.

4. Замечание. Поскольку в условии задачи говорится о периметре сечения, это сечение должно быть многоугольником. Значит, оно не может быть отрезком $[AB]$. Ответ. Если $h>\frac{a}{\sqrt{6}}$, то $S=\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3a^2}}$; если $h\leqslant\frac{a}{\sqrt{6}}$, то $S=\frac{a}{2}\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}}$. Указание. Рассмотрите отдельно случай, когда плоские углы при вершине пирамиды — тупые.

5. $[\frac{2\sqrt{2}-1}{4};\ \frac{19\sqrt{19}-28}{108}[$. Указание.

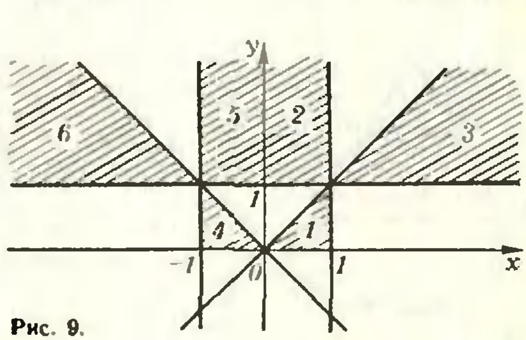


Рис. 9.

Положив $t=\cos 2x$, приведем уравнение к виду $-2t^3-t^2+3t=a$. Осталось выяснить, какие значения многочлен $f(t)=-2t^3-t^2+3t$ принимает на отрезке $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ более одного раза.

Вариант 3

1.
$$P(t)=\begin{cases} 3at-t^2 & \text{при } t\in[0,\ a] \\ at+a^2 & \text{при } t\in[a,\ 2a] \\ t^2-3at+5a^2 & \text{при } t\in[2a,\ +\infty[\end{cases}$$

2. $x=\operatorname{arctg}\frac{a+1\pm\sqrt{a^2-2a-3}}{2(a+1)}+\pi k\quad(k\in\mathbf{Z})$ при $a\in]-\infty;\ -1[\ \cup\ [3;\ +\infty[$, $x=-\frac{\pi}{4}+\pi l$ $(l\in\mathbf{Z})$ при $a\in[-1;\ 3[$.

3. $]3;\ +\infty[$.

4. $\left(a+b\pm 2\sqrt{ab}\sin\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

5. $\left[-\frac{2}{3};\ 0\right[$.

Вариант 4

1. $[0;\ 20]$ (м/с).

2. $x_1=\pi k$, $x_2=\pm\arccos\frac{-3\pm\sqrt{5}}{6}+2\pi l\ (k,\ l\in\mathbf{Z})$ (годятся четыре комбинации знаков).

3. $\frac{2}{\pi}$.

4. $\frac{a}{9},\ \frac{5a}{36},\ \frac{5a}{28},\ \frac{5a}{21},\ \frac{a}{3}$.

5. $x=\pi k,\ y=\frac{1}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$.

Задачи из вариантов других факультетов

1. $\frac{16\sqrt{241}}{63}a^2$. Указание. Найдите косинус угла между секущей плоскостью и плоскостью основания куба. 2. -1. 3. Весь объем, если пирамида и призма лежат по разные стороны от плоскости основания пирамиды, и $\frac{29}{36}$ объема — в противном случае. 4. $\left]0;\ \frac{|a|}{2+|a|}\right[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$ при $a\in]-\infty;\ 0[$; $]1;+\infty[$ при $a\in[0;\ 2]$; $\left]1;\ \frac{a}{a-2}\right[$ при $a\in]2;\ +\infty[$. 5. $\min\limits_{x\in R} y=\frac{4}{8+\sqrt{2}}$, $\max\limits_{x\in R} y=\frac{4}{8-\sqrt{2}}$. 6. $\{(2^{\log_7^{2/3}10\,\cdot\,\log^{-1/3}7},\ 2^{\log_7^{2/3}7\,\cdot\,\log_e^{-1/3}10})\}$. 7. $r+R$, $r\frac{r+R}{|R-r|}(r\neq R)$. 8. $1:\frac{8-3\sqrt{3}}{3}:1$. 9. 17, 18, 19, 20.

Физика

Физический факультет

Вариант А

1. $h=\frac{2}{5}h_0+\frac{3}{5}\ \frac{m}{\mu}\ \frac{RT}{Mg}\approx 0{,}55$ м.

2. $|\vec{F}_{max}|=mg+|\vec{v}|\sqrt{km}\approx 3{,}2\cdot 10^5$ Н.

Указание. При равномерном движении сила натяжения троса $|\vec{F}_0|=kx_0=mg$. В момент внезапной остановки энергия системы складывается из кинетической энергии груза $m|\vec{v}|^2/2$ и потенциальной энергии растянутого троса $kx_0^2/2$ (потенциальную энергию тяготения груза считаем равной нулю в этот момент). Максимальная сила натяжения $|\vec{F}_{max}|=kx$ соответствует моменту, когда груз занимает самое низкое положение и покоится. В этот момент энергия системы равна сумме потенциальной энергии троса $kx^2/2$ и потенциальной энергии груза $mg(x-x_0)$. Из закона сохранения механической энергии следует уравнение

$$x^2-\frac{2mg}{k}x+\left(\frac{mg}{k}\right)^2-\frac{m|\vec{v}|^2}{k}=0,$$

или

$|\vec{F}_{max}|^2-2mg|\vec{F}_{max}|+(mg)^2-km|\vec{v}|^2=0$,

откуда и получается искомое значение $|\vec{F}_{max}|$ (второй корень уравнения — отрицательный и физического смысла не имеет):

3. $R=\frac{L}{\Delta t}\ \frac{|\Delta\vec{B}|}{|\vec{B}|}\approx 1{,}16\cdot 10^{-6}$ Ом.

4. $I_0=\frac{2}{R}\sqrt{\frac{1}{a}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R_0}\right)}$.

Вариант В

1. $p=\frac{3/2p_0+(cT_0-\lambda)m_2/V}{3/2+cm_2\mu_1/(m_1R)}\approx 90$ кПа.

2. $|\vec{a}_1|=\frac{g(m_1-m_2)+m_2|\vec{a}_2|}{m_1+m_2}$;

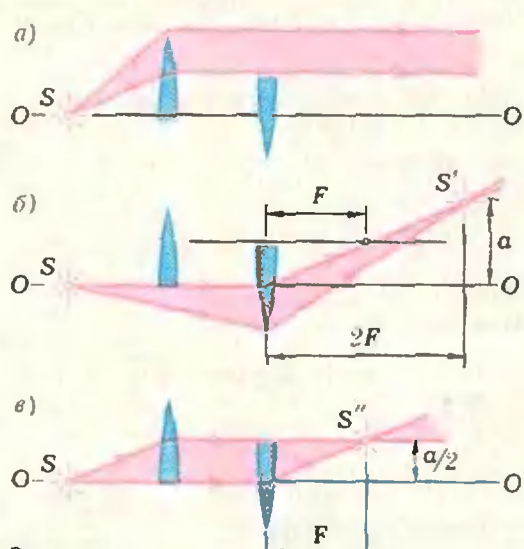


Рис. 10.

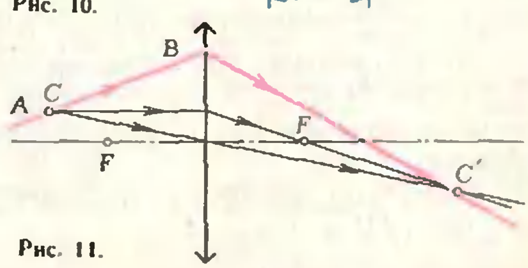


Рис. 11.

$$|\vec F| = \frac{m_1 m_2 (2g - |\vec a_2|)}{m_1 + m_2};\ |\vec T| = 2m_2 g.$$

Указание. Сила натяжения шнурка равна силе трения кольца о шнурок; ускорение кольца относительно оси блока направлено вверх и равно по модулю $|\vec a_1| - |\vec a_2|$.

3. Существуют три изображения источника. Первое изображение (рис. 10, *а*) образовано лучами, проходящими только через левую половину линзы. После преломления лучи идут параллельным пучком вдоль оптической оси OO. Второе изображение (рис. 10, *б*) создано лучами, проходящими только через правую половину линзы. Оно находится на расстоянии $2F = 6$ см от правой половины на высоте $a = 2$ см над оптической осью OO. Третье изображение создают лучи, испытавшие преломление в обеих половинах линзы (рис. 10, *в*). Оно расположено на расстоянии $F = 3$ см от правой половины на высоте $a/2 = 1$ см над осью OO.

4. $U_2/U_1 = 5/6$.

Математико-механический факультет и факультет прикладной математики — процессов управления

1. $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{l}{\sqrt{g^2 + |\vec a|^2}}}$.
2. $T = \dfrac{\Delta T}{0{,}1} = 300$ К.
3. $p = \dfrac{2p_1 p_2}{p_1 + p_2} = 4800$ Па.
4. $U = 2{,}2P/I = 33$ В.
5. $I = I_0/\sqrt{3}$.
6. Один из способов построения (построение изображения точки C) показан на рисунке 11.

Уральский государственный университет им. А. М. Горького

Математика

Вариант 1

1. $\left[0; \frac{1}{2}\right]$. 2. $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$. 3. $\frac{\pi}{3}$. 4. $x = \frac{5}{16}\pi + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Вариант 2

1. $[-1; 1]$. 2. $\{1\}$. 3. $\arcsin\sqrt{\frac{1}{3}}$. 4. $\{-\pi, -\frac{\pi}{3}, 0\}$.

Физика

Физический факультет

1. $c_p = c_V + \dfrac{p\Delta V}{m\Delta t} = 800$ Дж/(кг · К).
2. $U_з = Ir + \mathscr{E} = 14$ В; $U_р = \mathscr{E} - Ir = 10$ В.
3. Изображение источника будет находиться на расстоянии $x = h + \dfrac{2d}{n} = h + \dfrac{3}{2}d$ от поверхности воды.
4. Линза должна находиться на расстоянии $d_1 = \dfrac{L}{2} + \sqrt{\dfrac{L^2}{4} - \dfrac{LF}{2}} = 36$ см или $d_2 = \dfrac{L}{2} - \sqrt{\dfrac{L^2}{4} - \dfrac{LF}{2}} = 12$ см от первого источника.

Математико-механический факультет

1. $q = 2L\sin\alpha\sqrt{2\pi\varepsilon_0 mg\,\mathrm{tg}\,\alpha\cos 30^\circ} \approx 2{,}2 \cdot 10^{-8}$ Кл.
2. $r = \dfrac{I_1 R_1 - I_2 \dfrac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}{I_2 - I_1} = 3$ Ом; $\mathscr{E} = I_1(R_1 + r) = 40$ В.
3. $|\vec E| = \dfrac{a}{4}|\vec B|' = 10^4$ В/м.
4. $R = \dfrac{2L_1(L_1 - L_2)}{2L_1 - L_2}$.

Московская городская олимпиада по физике

1. Система находится в равновесии при любых углах α.
2. $t = \dfrac{\pi}{\sqrt{bg}\cos\alpha}$.
3. Лифтер переработает.
4. $s = s_0 \sin(\omega_0 t - \omega_0 \alpha t^2/4)$, где $\omega_0 = \sqrt{g/l_0}$.
5. Конечные температуры жидкости равны $T_{1к} = \dfrac{T_{1н} - \eta L T_{2н}}{1 - \eta L}$ и $T_{2к} = \dfrac{T_{2н} - \eta L T_{1н}}{1 - \eta L}$, где $\eta = \dfrac{2k}{\varrho S v c}\sqrt{\dfrac{\pi}{S}}$.
6. Лампочка, включенная в первую гирлянду, перегорит, а включенная во вторую гирлянду будет гореть с недокалом.
7. Отверстие в корпусе ручки можно считать источником света. Светлые кольца представляют собой изображения этого источника, полученные в результате однократного, двукратного и т. д. отражений от внутренней поверхности ручки.

Номер подготовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шихanович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, И. Смирнова, Л. Черниевская

Зав. редакцией Л. Чернова
Художественный редактор Т. Макарова
Корректор О. Кривенко
113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, «Квант», тел. 231-83-62

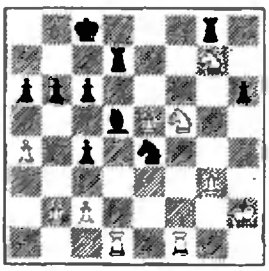
Сдано в набор 23.3.81
Подписано в печать 18.4.81
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 6,96 Т-05768
Цена 30 коп. Заказ 617 Тираж 237 464 экз.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

ШАХМАТНЫЙ КОНКУРС

ЭРА АЛЕХИНА

Свой первый матч в ранге чемпиона мира А. Алехин провел с Е. Боголюбовым в 1929 году. В то время в шахматном мире у Алехина не было равных соперников, что подтвердилось и в данном поединке. Матч, в котором планировалось 30 партий, был интересным, но закончился крупной победой чемпиона со счетом 15,5:9,5. Повторный матч, состоявшийся через пять лет, мало чем отличался от предыдущего. Перевес Алехина вновь был бесспорным — 15,5:10,5. Вот эпизод из шестнадцатой партии второго матча.



Алехин — Боголюбов

Последним ходом Лh8 — g8 черные решили отогнать коня (к сложной игре вело Kg5), однако он не тронулся с места. **30.e6!!** (красивая комбинация, опровергающая маневр черных) **30...Л:g7 31.K:g7 Л:g7 32.Л:d5!** (еще один эффектный удар, на котором строится вся комбинация) **32...cd 33.Лf8+ Kpc7 34.Лf7+ Kpd6** (иначе белая пешка проходит в ферзи) **35.Л:g7 Kp:e6 36.Лg6+ Kpe5 37.Kpg2 b5 38.a5! d4 39.Л:a6 b4 40.Kpf3 c3 41.bc bc 42.Лe6+** (весьма прозаический финал) **42... Kp:e6 43.Kp:e4. Черные сдались.**

В 1935 году, встречаясь с голландским гроссмейстером М. Эйве, Алехин явно недооценил своего соперника и в результате на два года уступил чемпионское звание (счет матча 14,5:15,5). Макс Эйве стал пятым в истории чемпионом мира.

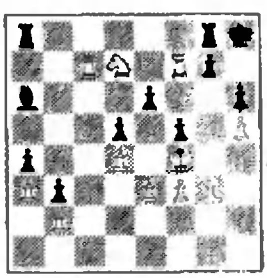
Матч-реванш, состоявшийся в 1937 году, закончился убедительной победой великого русского шахматиста со счетом 15,5:9,5. Алехин играл в своем лучшем стиле и легко вернул себе корону. Быстро закончилась шестая партия матча.

Александр Алехин (1892 — 1946)

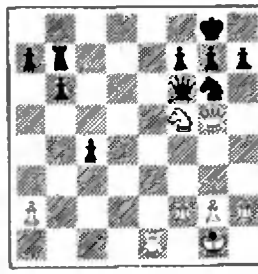
Алехин — Эйве

1.d4 d5 2.c4 c6 3.Kc3 dc 4.e4 e5 5.C:c4 ed. Этот вариант славянской защиты не сулит белым особых достижений. Видимо, Алехин связывал свои надежды со следующим ошеломляющим продолжением — **6.Kf3!?** Такие ходы обычно встречаются в сеансах одновременной игры. Впоследствии была доказана некорректность жертвы коня, однако во время партии Эйве не решился принять ее и тут же допустил решающую ошибку. **6...b5? 7.K:b5 Ca6** (7...cb 8.Cd5) **8.Фb3 Фe7 9.0—0 C:b5 10.C:b5 Kf6 11.Cc4 Kbd7 12.K:d4 Лb8 13.Фc2.** Итак, у белых лишняя пешка и огромный позиционный перевес. Через десять ходов черные сдались.

Признаемся, что выбрать всего три конкурсных задания из богатейшего шахматного наследия Алехина было чрезвычайно сложно.



1. Белые начинают и выигрывают.



2. Белые начинают и выигрывают.

3. Белые начинают и выигрывают.

Срок отправки решений — 30 июня 1981 г.

Итоги шахматного конкурса 1980 года

Победителями конкурса признаны: Г. Бедный (Бердичев), И. Варвус (Черновцы), В. Васильев (Бугульма), Й. Вутев (Ловеч, НРБ), А. Груздев (Ленинград), М. Грушко (Житомир), В. Зеньковнч (Новая Каховка), Б. Калинский (с. Нижнедевицк Воронежской обл.), Б. Каплан (Москва), И. Кваша (Новочеркасск), А. Котлов (Киев), М. Креймер (Житомир), А. Кузнецов (Ленинград), З. Курганов (Чирчик), М. Мельцын (Ленинград), В. Погосян (с. Верин-Арташат Арм. ССР), Г. Полиевец (Колпино), В. Попов (с. Субботино Красноярского края), А. и Ж. Прокопчук (Ужгород), Р. Самборский (Тернополь), В. Семененко (Ставрополь), А. Скороход (Чернигов), А. Солдатов (Пермь), В. Спирин (Караганда), А. Тихонков (д. Моисеевка Гомельской обл.), Ю. Тищенко (Мелитополь), И. Ченцов (Кирово-Чепецк).

Редакция поздравляет победителей. Все они осенью этого года будут награждены шахматно-математической литературой с автографами А. Карпова и Е. Гика.

Цена 30 коп.
Индекс 70465

Глубокого математического смысла в этой конструкции, выполненной из тонкого картона В. Гамаюновым, мы не сумели найти. Но это не мешает нам восхищаться тем, как удивительно порой взаимодействуют совсем непохожие геометрические формы: шесть длинных балок с квадратным сечением пронизывают каркас сложного звездчатого многогранника, (объединения пяти кубов — см. статью «Сложный многогранник» в «Кванте», 1979, № 1, с. 27), касаясь его ребер, но нигде не разрушая их замысловатую сеть. Не только математиков привлекает эта конструкция — советский архитектор В. А. Сомов взял ее за основу проекта административного здания в одном из итальянских городов.