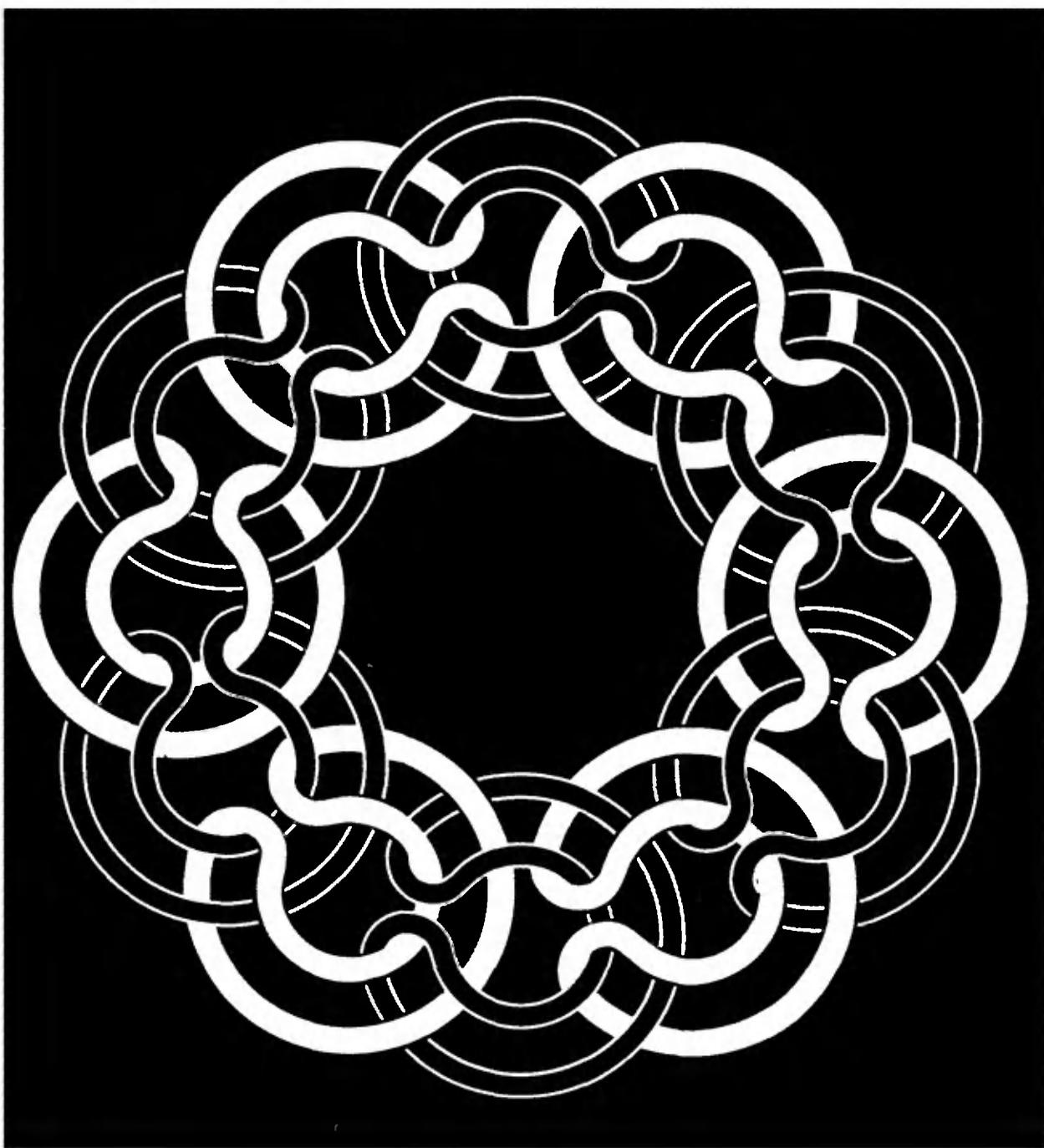
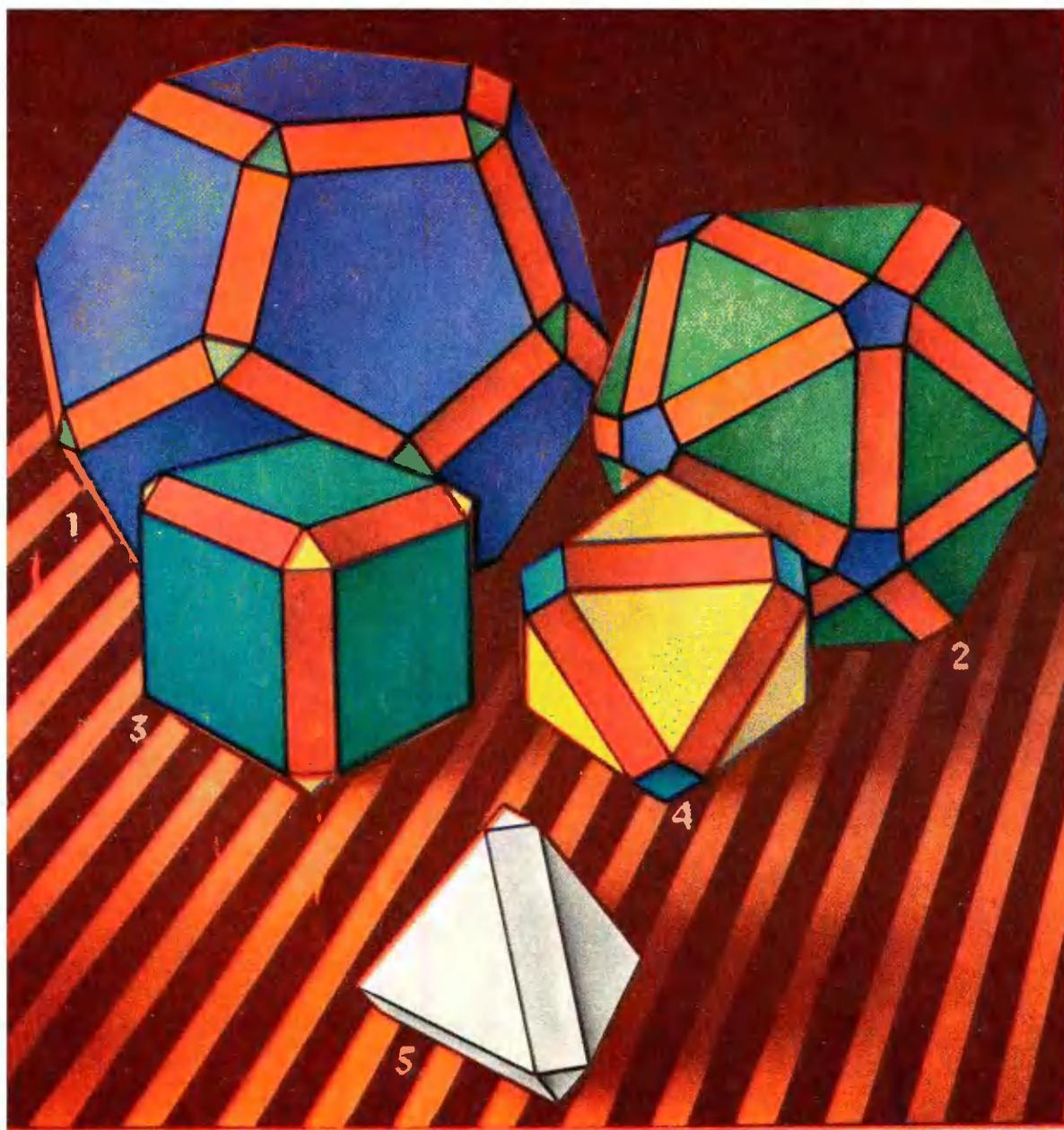


Квант

12
1980

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





Изображенные здесь многогранники получены из пяти правильных многогранников срезанием их вершин и ребер (подумайте, как это сделано). Эти многогранники обладают замечательным свойством: вершины каждого из них «устроены одинаково». Это означает, что любую вершину такого многогранника при помощи поворота вокруг некоторой оси можно перевести в любую другую его вершину так, что многогранник при этом совместится с самим собой.

Многогранники, устроенные подобным образом, называются положительно транзитивными. О таких многогранниках см. на с. 9

К первой странице обложки

В статье А. Савина «Олимпийские кольца» («Квант», 1980, № 7) ставился вопрос о расположении на плоскости в виде «розетки» нескольких колец, зацепленных так, что никакие два кольца не сцеплены, в то время как все кольца в совокупности — сцеплены.

Редакция получила несколько писем, содержащих примеры таких зацеплений. Пример киевлянина М. Корнилова мы публикуем на обложке этого номера журнала, такой же пример прислал нам и А. Азимов из Ташкента.

Основан в 1970 году

Квант

12
1980

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР



Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

В НОМЕРЕ:

Главный редактор
академик И. К. Киконин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбург
А. И. Ширшов

- 2 Н. Шефер. Цезевый эталон частоты (времени)
9 А. Шкляр. О транзитивных многогранниках

Лаборатория «Кванта»

- 15 Дж. Уокер. Физический фейерверк

Математический кружок

- 17 В. Залгаллер, С. Залгаллер. Венгерский шарнирный кубик

Задачник «Кванта»

- 22 Задачи М656—М660; Ф668—Ф672
24 Решения задач М609, М610; Ф613—Ф617

«Квант» для младших школьников

- 31 Задачи
32 М. Зельманзон, Л. Хлабыстова. Самосовмещения
квадрата и тайнопись

По страницам школьных учебников

- 36 Ю. Иванов. Сколько вариантов?

Практикум абитуриента

- 40 В. Чехлов. Эти «коварные» векторы
45 С. Кротов. Задачи на столкновения тел

Искусство программирования

- 50 Г. Звенигородский, Ю. Первин, А. Сосинский.
V Всесоюзная летняя школа юных программистов
55 Призеры Олимпиады по программированию

Рецензии, библиография

- 56 А. Егоров, М. Смолянский. Новые книги

Шахматная страничка

- 58 Ответы, указания, решения

62 Напечатано в 1980 году

Шахматный конкурс (3-я с. обложки)

Смесь (14, 29, 30, 34, 35, 44, 55)

Н. Шефер

Цезиевый эталон частоты (времени)

Наука начинается... с тех пор, как начинают измерять.

Д. И. Менделеев

Любые научные исследования — и в области микромира, и в космосе, — все производственные процессы — от изготовления скрепок до постройки атомного ледокола — опираются в конечном счете на измерения. Развитие техники и расширение научных исследований требуют все более совершенных методов измерений. Например, с появлением сверхзвуковой авиации диспетчерским службам аэропортов приходится иметь дело с миллионными долями секунды. Изучение атомных и ядерных процессов требует измерения промежутков времени в тысячи раз меньших миллиардной доли секунды.

Измерение физических величин по существу сводится к их сравнению с соответствующими эталонами. Поэтому от точности, с которой устанавливаются основные единицы измерения, зависит точность физического эксперимента.

Первый эталон времени

В отличие от измерений длины и массы, которые можно производить неоднократно, измерение прошедшего промежутка времени нельзя повторить и время невозможно измерить путем непосредственного сравнения с эталоном. О времени можно судить по изменениям в окружающем нас мире, например, по перемещениям, совершаемым телом, движущимся прямолинейно и равномерно. В основу измерения времени может быть

положен также периодический процесс, например, равномерное вращение, колебания маятника.

Из-за того что движение тел происходит не в пустом пространстве и на них всегда действуют силы, в природе не существует абсолютно равномерных движений и идеально строгих периодических процессов. Отсюда и неизбежные неточности в любом способе измерения времени.

В качестве образцовых «часов», с которыми сверяются все часы на земном шаре, была принята система Земля — Солнце. За опорные точки отсчета промежутков времени приняты моменты времени, когда Солнце находится в определенном положении относительно земного наблюдателя. Первым эталоном времени было выбрано суточное вращение Земли. Промежуток времени между двумя последовательными верхними положениями центра солнечного диска (кульминациями) называют истинными солнечными сутками. Однако продолжительность этих суток в течение года меняется (движение Земли вокруг Солнца происходит неравномерно). Поэтому для отсчета времени было решено пользоваться средними солнечными сутками, длительность которых условились считать равной средней длительности истинных солнечных суток за год. За единицу времени — секунду — принималась $1/86400$ часть средних солнечных суток. Для хранения времени в промежутках между астрономическими наблюдениями и воспроизведения единицы времени — секунды — применялись маятниковые часы. В лучших экземплярах особо точных часов изменение хода в течение суток составляло $\sim 0,001$ секунды, что соответствовало относительной погрешности $\frac{\Delta t}{t} \approx 10^{-8}$.

Кварцевые часы

Развитие радиоэлектроники позволило создать более точные хранители времени — кварцевые часы, в которых вместо колебаний маятника используются упругие колебания кварца.

У кварцевой пластинки, вырезанной определенным образом из кристалла, при деформации на противоположных гранях возникают разноименные заряды. Величина и знак заряда грани зависят, соответственно, от величины и направления деформации (рисунок 1). Это явление, называемое прямым пьезоэффектом, обратимо: если к пьезокварцевой пластинке приложить разность потенциалов, то пластинка, в зависимости от полярности напряжения, либо сожмется, либо расширится. Такая пластинка, подключенная к источнику переменного напряжения, совершает вынужденные колебания с частотой, равной частоте электрических колебаний. При совпадении частоты ν электрических колебаний с собственной частотой ν_0 колебаний пластинки амплитуда A ее упругих колебаний будет наибольшей (рисунок 2). Частота собственных колебаний пластинки, определяемая ее размерами и формой, слабо зависит от температуры и внешних воздействий.

С точки зрения радиотехники пьезокварцевая пластинка эквивалентна обычному резонансному контуру, содержащему индуктивность и емкость, но отличается от него очень острым резонансом. Это свойство пьезокварца давно используется в радиотехнике для стабилизации частоты генераторов в радиопередатчиках. Это же свойство пьезокварца — высокое постоянство собственной частоты колебаний — было использовано для создания астрономических кварцевых часов. Основой таких часов является генератор элек-

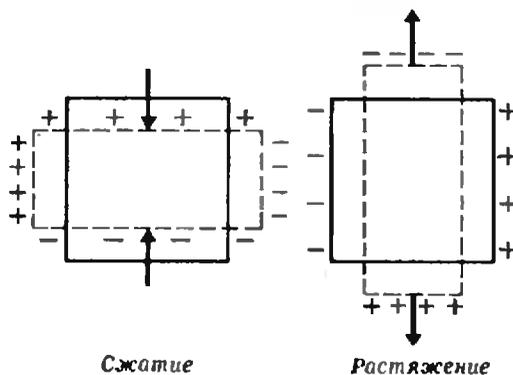


Рис. 1.

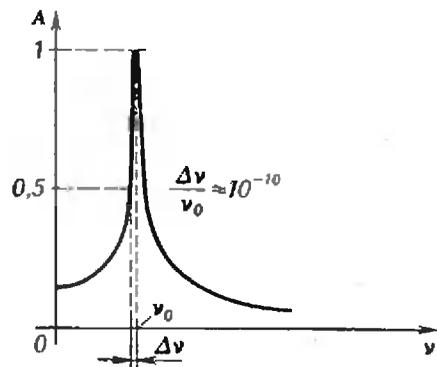


Рис. 2.

тромагнитных колебаний, стабилизированный пьезокварцем. Схема генератора показана на рисунке 3.

Кварцевая пластинка через нанесенные на противоположные грани электроды включается между сеткой и катодом радиолампы. После замыкания переключателя K ток в анодной цепи начинает заряжать конденсатор C . При разряде конденсатора через катушку индуктивности L в анодном контуре $L-C$ возникают затухающие электромагнитные колебания с частотой $\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

Для получения незатухающих колебаний нужно, чтобы колебания анодного тока совершались согласованно с колебаниями в анодном контуре и компенсировали потери энергии в нем. Это осуществляется посредством обратной связи. По цепи обратной связи «емкость C_{a-c} — анод — сетка лампы» колебания в анодном контуре создают на кварцевой пластинке переменное напряжение той же частоты. Изменением емкости конденсатора C производится

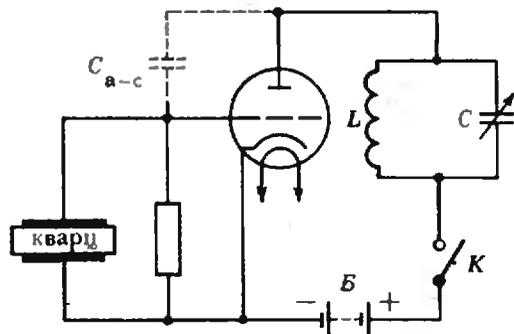


Рис. 3.

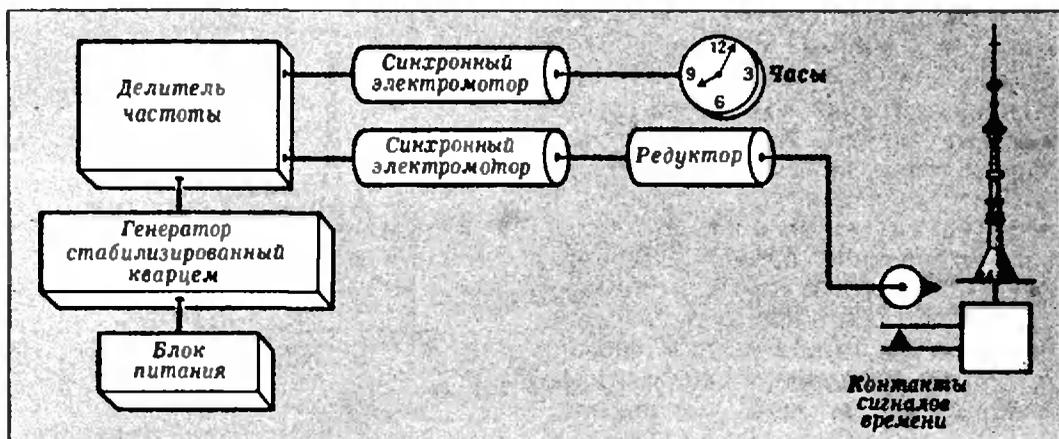


Рис. 4.

настройка анодного контура в резонанс с собственными колебаниями пластинки, сопровождаемыми синхронными изменениями величины зарядов на ее электродах. А это вызывает колебания потенциала сетки, управляющей анодным током. Пульсации анодного тока поддерживают (за счет энергии батареи *Б*) незатухающие колебания в анодном контуре и в пластинке.

Поскольку пьезокварц обладает острым резонансом (см. рисунок 2), то даже при небольшом различии в частотах анодного контура и пластинки амплитуда колебаний пластинки резко уменьшается и изменение зарядов на электродах становится недостаточным для управления анодным током. Вот почему генератор работает только на строго определенной частоте, равной частоте ν_0 собственных колебаний пластинки.

Частоты колебаний, вырабатываемые кварцевыми генераторами, обычно порядка 10^4 — 10^6 Гц. Для получения более редких отметок времени необходим электронный делитель частоты, уменьшающий частоту колебаний в строго известное число раз*). Синхронные электромоторы, работающие на переменном токе этой пониженной частоты, вращают стрелки часов и замыкают контакты реле, подающего сигнал точного времени. Упрощенная схема кварцевых часов показана на рисунке 4.

*) Радиолюбителям известно, что деление частоты возможно с помощью триггерных схем.

Относительная погрешность лучших кварцевых часов $\frac{\Delta t}{t} \approx 10^{-9}$ — 10^{-10} . За сутки они отстают или уходят вперед на 10^{-5} с.

Сомнительный эталон

Наблюдения за группой маятниковых часов и первых кварцевых часов еще в 1937 году показали, что длительность суток скачкообразно меняется в среднем за год на 0,002 с и одновременно плавно возрастает на 0,0016 с за 100 лет*). Значит, предельная точность определения секунды по часам «вращающаяся вокруг своей оси Земля» не превышает $\frac{2 \cdot 10^{-3} \text{ с}}{86400 \text{ с}} \approx 0,2 \cdot 10^{-7}$.

Поэтому Международное бюро мер и весов в 1956 году решило перейти к более стабильному эталону времени — вращению Земли вокруг Солнца. В качестве эталона использовалась длительность тропического года — промежутка времени между двумя последовательными прохождением центра Солнца через точку весеннего равноденствия. Поскольку продолжительность тропического года не является строго постоянной из-за возмущений, оказываемых планетами на движение Земли, то был выбран один из них — 1900 год.

*) Неравномерность вращения Земли, в основном, вызвана тем, что при приливах и отливах часть энергии вращательного движения расходуется на преодоление сил упругой деформации основной твердой части Земли и сил внутреннего трения при перемещениях больших масс воды в океанах и воздуха в атмосфере.

Точность определения секунды как $1/31556925,9747$ части тропического года ограничивалась точностью астрономических наблюдений и достигала 10^{-10} .

Но все возрастающий уровень физического эксперимента и развитие техники требовали дальнейшего повышения точности установления основных единиц измерения. Например, успехи в исследовании космоса не были бы так значительны без возможности измерять время с точностью до 10^{-12} с. Это стало возможным после перехода к новым методам стандартизации частоты, основанным на атомных процессах.

Почему атомные часы точнее «земных» и кварцевых?

В отличие от макромира, где нет даже двух совершенно одинаковых тел, в микромире все частицы одного сорта, например электроны, принципиально неразличимы. Совершенно одинаковы и атомы, состоящие из одинакового числа элементарных частиц. Молекулы, представляющие собой одинаковые комбинации одного и того же числа одних и тех же атомов, также оказываются совершенно неразличимыми.

Одинаковые атомы или молекулы обладают одинаковыми и исключительно постоянными наборами собственных частот колебаний; они могут излучать или поглощать электромагнитные волны одинаковых и строго определенных длин, зависящих только от строения данного сорта частиц. Важно, что эти генераторы электромагнитных колебаний не подвержены износу и старению.

Вот почему так заманчиво было использовать атомные системы для стандартизации частоты (времени) и длины. Поскольку поведение микрочастиц определяется законами квантовой механики, эталоны, созданные на основе атомных систем, назвали квантовыми.

Первым квантовым эталоном стал эталон длины. Оказалось, что международный эталон длины — метр — содержит $1650763,73$ длин волн излучения, возникающего при перехо-

де между двумя определенными состояниями атома криптона (^{86}Kr).

Казалось бы, стандартизацию частоты и установление единицы времени следовало бы произвести по той же оранжевой линии криптона-86, которая используется для установления единицы длины. Однако удобнее использовать радиоизлучение, так как это дает возможность объединить эталон частоты с радиосхемой, контролирующей ход кварцевых часов или позволяющей сравнивать неизвестные частоты с эталонной. Учитывая эти обстоятельства, Международная конференция мер и весов в 1967 году решила отказаться от природного эталона времени «вращающаяся вокруг Солнца Земля» и перейти к искусственно созданному и не связанному с астрономическими наблюдениями квантовому эталону, в котором используется одна из длин волн электромагнитного излучения атомов цезия, лежащая в радиодиапазоне ($\lambda \approx 3,27 \cdot 10^{-2}$ м). Для того чтобы понять принцип действия квантовых часов, нам придется рассмотреть, как ведут себя атомы в магнитном поле.

Атом и магнитная стрелка

Электроны и ядра атомов помимо электрического поля создают в окружающем пространстве магнитные поля. Вектор индукции магнитного поля атома является геометрической суммой векторов магнитной индукции полей составляющих его частиц. У части атомов результирующий вектор индукции равен нулю, но многие атомы, в том числе и атомы цезия, обладают магнитным полем. Такие атомы в грубом приближении подобны магнитным стрелкам.

При отсутствии внешнего магнитного поля векторы индукции магнитных полей атомов цезия, как и у достаточно удаленных друг от друга магнитных стрелок, ориентированы хаотично. На языке квантовой механики это означает, что на одном энергетическом уровне находятся атомы с различным направлением магнитных полей (рисунок 5).

Известно, что стрелка компаса устанавливается в направлении сило-

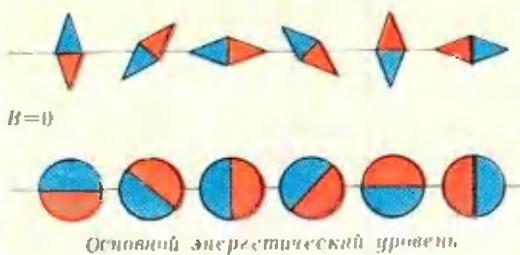


Рис. 5.

вых линий магнитного поля. Если, совершив работу против сил взаимодействия стрелки и магнитного поля, отклонить стрелку на некоторый угол и отпустить, то под действием этих сил она после нескольких колебаний вернется в первоначальное положение. Это положение равновесия устойчиво, потому что ему соответствует минимальное значение потенциальной энергии стрелки — в любом другом положении ее потенциальная энергия больше на величину работы, затраченной на изменение первоначальной ориентации.

Согласно квантовым представлениям, у атомов, помещенных во внешнее магнитное поле, возможны лишь две ориентации их собственных магнитных полей: либо «по полю» (как у магнитных стрелок в магнитном поле Земли), либо «против поля». Если ориентации «по полю» соответствует энергия атома E_1 , то ориентации «против поля» будет соответствовать несколько большее значение энергии атома E_2 (подобно тому как энергия магнитной стрелки, принудительно расположенной «против поля», больше энергии магнитной стрелки, самопроизвольно ориентированной «по полю», на величину работы, затраченной на эту переориентацию). Иначе говоря, помещение атома цезия во внешнее магнитное поле вызывает расщепление основного энергетического уровня на два подуровня с энергиями E_1 и E_2 , причем $E_2 > E_1$ (рисунок 6).

Переходы атомов $E_2 \rightarrow E_1$ (с подуровня E_2 на подуровень E_1) сопровождаются излучением, а переходы $E_1 \rightarrow E_2$ — поглощением волн с частотой $\nu_0 = \frac{E_2 - E_1}{h} = \frac{\Delta E}{h}$. Разность энергий $E_2 - E_1$ не велика, и частота ν_0 лежит в диапазоне радиоволн.

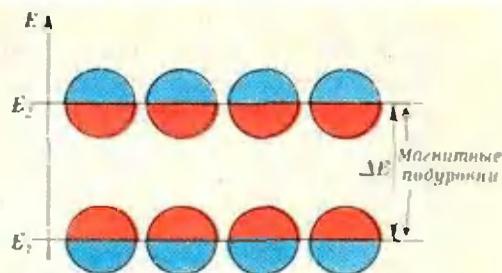


Рис. 6.

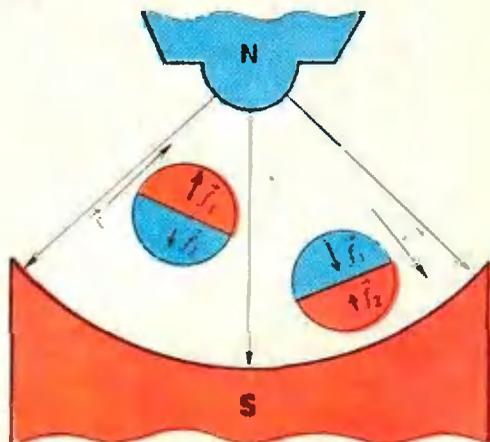


Рис. 7.

Величина ΔE очень слабо зависит от внешних воздействий. Поэтому излучение с частотой $\nu_0 = \frac{\Delta E}{h}$ можно использовать как эталонное. Но чтобы осуществить это на практике, необходимо пространственно «рассортировать» атомы по энергиям.

В силу того, что электрическое поле не оказывает действия на нейтральные атомы, а однородное магнитное поле способно вызывать только ориентацию магнитных полей атомов, «сортировка» атомов по энергиям производится с помощью неоднородного магнитного поля. Например, такого, как на рисунке 7. Как видно из рисунка, атомы, ориентированные «по полю», втягиваются в область большей его индукции, а атомы, ориентированные «против поля», смещаются в сторону меньшей индукции. Смещение вызвано неравенством сил, действующих на «северную» и «южную» части атома ($|\vec{J}_1| > |\vec{J}_2|$).

Цезиевый эталон

Схема устройства цезиевого эталона частоты показана на рисунке 8.

Через узкую щель нагревателя (1), в котором происходит испарение металлического цезия, атомы цезия вылетают в виде плоского пучка и попадают в область неоднородного магнитного поля \vec{B}_1 , создаваемого магнитом (2) специальной формы. Для простоты на рисунке изображены только траектории атомов по краям этого пучка. Движение атомов происходит внутри вакуумной трубки, не показанной на рисунке.

В неоднородном магнитном поле \vec{B}_1 атомы цезия ориентируются «по полю» и «против поля», принимая, соответственно, значения энергии E_1 и E_2 . Но кроме ориентации происходит разделение атомов по энергиям. Часть атомов верхнего края пучка, ориентированных «по полю» и имеющих энергию E_1 , втягивается в область большей индукции и в работе прибора не участвует. Другая часть атомов верхнего края пучка, ориентированных «против поля» и обладающих энергией E_2 , выталкивается из области с большей индукцией, и их траектории искривляются вниз. В нижней части пучка атомы с энергией E_2 (ориентация «против поля») отклоняются в сторону меньшей индукции и выходят из игры, а к оси прибора отклоняются атомы, ориентированные «по полю» (с энергией E_1).

Рассортированные по энергиям E_1 и E_2 атомы цезия попадают в резонатор (3), где создается однородное магнитное поле B (магнит (4)), в котором атомы движутся прямолинейно и сохраняют расщепление

по энергиям. В области резонатора создается также электромагнитное поле, частота которого может плавно изменяться. Если эта частота в точности равна частоте $\nu_0 = \frac{E_2 - E_1}{h}$, то

часть атомов с энергией E_1 , поглотив квант энергии $h\nu_0 = E_2 - E_1$, перейдет в состояние E_2 и примет ориентацию «против поля», а часть атомов с энергией E_2 другого пучка под действием кванта $h\nu_0$ в результате вынужденного излучения перейдет в состояние E_1 , изменив ориентацию «против поля» на ориентацию «по полю»^{*}). За резонатором находится область неоднородного магнитного поля \vec{B}_2 (магнит (5)), подобного полю \vec{B}_1 . В этом поле происходит расфигуровка атомов по энергиям, в результате которой появившиеся вследствие взаимодействия с электромагнитным полем атомы с энергиями E_2 и E_1 отклоняются к оси пучка и попадают на приемник. Атомы с энергией E_1 , не поглотившие квант электромагнитного поля $h\nu_0$, и атомы с энергией E_2 , не испытавшие вынужденного излучения, отклоняются неоднородным магнитным полем B_2 в сторону от оси прибора и не попадают на приемник. Таким образом, если частота электромагнитного поля не равна частоте $\nu_0 = \frac{\Delta E}{h}$, то взаимодействия электромагнитного поля с атомами цезия нет. В этом случае в приемник атомы не попадают.

^{*}) В. А. Фабрикант. «Что происходит в гелий-неоновом лазере». («Квант», 1978, № 6.)

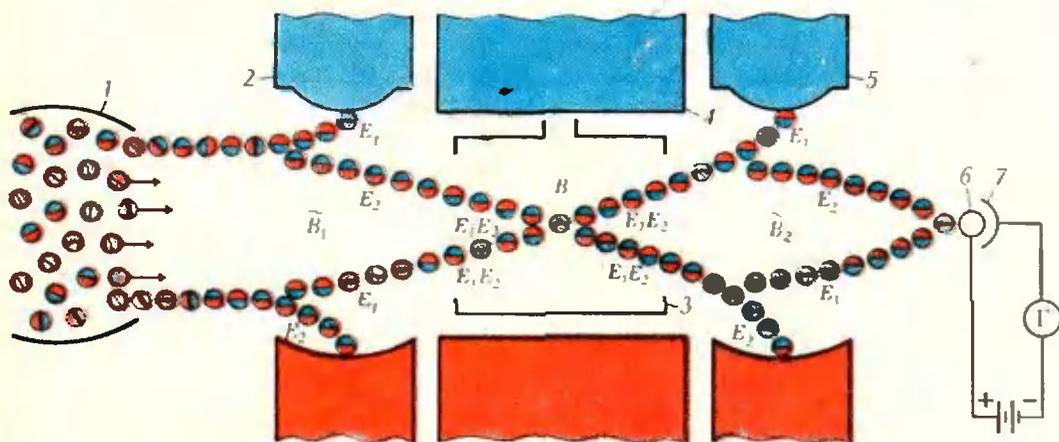


Рис. 8.

Приемник представляет собой нагретую вольфрамовую проволоку (6), расположенную вдоль оси электрода полуцилиндрической формы (7). Атомы цезия, соприкоснувшись с раскаленным вольфрамом, отдают ему валентные электроны, становятся положительными ионами и притягиваются к отрицательно заряженному электроду — коллектору (7). Очевидно, что ток через гальванометр I пропорционален числу атомов цезия, изменивших свою энергию путем поглощения или испускания в области резонатора кванта радионизлучения $h\nu_0$. Кривая зависимости тока через гальванометр от частоты электромагнитного поля в резонаторе по форме аналогична кривой на рисунке 2, но обладает еще более узким максимумом: $\frac{\Delta\nu}{\nu_0} \approx 10^{-13}$.

Частоту $\nu_0 = (E_2 - E_1)/h = 9192631770,0$ Гц, при которой ток достигает максимального значения и происходят квантовые переходы $E_1 \leftrightarrow E_2$ атомов изотопа цезия-133 (^{133}Cs), Международная конференция мер и весов приняла за эталонную. Единица времени — атомная секунда — это 9 192 631 770,0 периодов таких электромагнитных колебаний.

Цезиевая трубка и высокочастотный генератор связаны с электронным устройством — дискриминатором, автоматически подстраивающим частоту генератора к эталонной частоте ν_0 , на которую реагируют атомы цезия. Высокая степень стабилизации частоты обусловлена тем, что даже самая незначительная расстройка генератора резко влияет на величину сигнала с цезиевой трубки.

Поскольку период колебаний, соответствующий эталонной частоте ν_0 , на много порядков отличается от единицы времени — секунды, то возникает задача получения низкочастотного сигнала, управляющего ходом стрелочных часов и устройством для выработки сигналов точного времени. Для этого генератор связан с резонатором не непосредственно, а через цепи умножения. Поэтому его частота в известное число раз меньше эталонной. Этот генератор контролирует ход кварцевых часов, управляю-

щих стрелочными часами и устройством для выработки сигналов точного времени.

Первый квантовый цезиевый стандарт частоты был создан в 1955 году английским физиком Л. Эссеном. За создание и применение этого прибора он был удостоен Золотой медали имени А. С. Попова.

Один из четырех самых лучших в мире цезиевых эталонов, являющийся основой Государственного первичного эталона частоты и времени, находится в Главном метрологическом центре нашей страны в подмосковном поселке Менделеево. Он воспроизводит атомную секунду с относительной точностью до $3 \cdot 10^{-13}$, что соответствует ошибке в одну секунду за 100 000 лет. Для хранения времени, то есть непрерывного счета секунд, минут и часов, подачи сигналов точного времени и проверок служат вторичные цезиевые эталоны частоты и времени и целая группа аммиачных, водородных, рубидиевых и других квантовых генераторов — лазеров, ширина спектральных линий которых очень узка ($\sim 10^{-7}$ Å). Для измерения частоты излучения лазера, отличающейся от эталонной на несколько порядков, сближают эти частоты путем многократного увеличения меньшей из них в строго известное число раз. Сравнение двух близких по величине частот производится путем измерения их частоты биений с помощью осциллографа и другими методами*).

В последние годы выяснилось, что параметры часов, основанных на водородном квантовом генераторе, лучше, чем у цезиевых. Их нестабильность в течение суток порядка 10^{-14} , то есть в 10 раз меньше, чем у цезиевого эталона. Предполагается, что ее можно уменьшить до 10^{-16} . Поэтому обсуждается вопрос о замене цезиевого стандарта частоты другим, еще более точным и стабильным эталоном.

В наши дни точность измерения времени в десятки тысяч раз превышает точность измерения других физических величин.

*) Об этом можно прочитать в статье А. В. Елецкого «Скорость света и ее измерение» («Квант», 1975, № 2).

А. Шкляр

О транзитивных многогранниках

В прошлом году киевский школьник А. Шкляр прислал в редакцию нашего журнала статью «Геометрический способ нахождения всех конечных групп положительных перемещений пространства», в основу которой были положены его собственные результаты, доложенные им на заседаниях математического кружка Киевского ИОУ.

Публиковать статью на столь нешкольническую тему мы бы не стали, но теорема, доказанная А. Шкляром, допускает переформулировку, связанную со школьной темой «Многогранники».

Ниже публикуется статья А. Шкляра, переработанная членом редколлегии «Кванта» профессором В. Г. Болтянским.

В п. 3 дается простое геометрическое описание «устройства» граней положительно транзитивных многогранников. В п. 4 все они перечисляются.

1. Перемещения, имеющие неподвижную точку

Прежде чем формулировать задачу, о которой пойдет речь в этой заметке, напомним (см. статью А. Сосинского «Перемещения пространства» в «Кванте» № 8) некоторые факты, связанные с перемещениями пространства. Будем предполагать, что в пространстве фиксирована точка O , и рассмотрим лишь такие перемещения пространства, при которых точка O остается неподвижной, то есть переходит в себя. Примером такого перемещения может служить поворот f на некоторый угол вокруг прямой l , проходящей через точку O . При перемещении f каждая точка прямой l переходит в себя, а других неподвижных точек нет

(если только угол поворота не кратен 2π).

Заметим, что поворот представляет собой перемещение, сохраняющее ориентацию. (Это можно пояснить следующим образом: правый винт переходит при повороте снова в правый винт.) В статье Сосинского было доказано, что *среди перемещений, оставляющих неподвижной точку O , повороты вокруг прямых, проходящих через O , и только они, сохраняют ориентацию*. Поскольку композиция двух перемещений, сохраняющих ориентацию, также сохраняет ориентацию, мы заключаем, что *композиция двух поворотов вокруг прямых, проходящих через точку O , также представляет собой поворот вокруг некоторой прямой, проходящей через O* .

2. Положительно транзитивные многогранники

Некоторое (непустое) множество перемещений G называется *группой перемещений*, если оно обладает следующими свойствами:

- 1) $f \in G \Rightarrow f^{-1} \in G$;
- 2) $f_1 \in G$ и $f_2 \in G \Rightarrow f_2 \circ f_1 \in G$.

Из сказанного в предыдущем пункте ясно, что множество поворотов (на всевозможные углы) вокруг прямых, проходящих через O , представляет собой группу перемещений.

Пусть теперь M — некоторая фигура в пространстве. Множество всех самосовмещений фигуры M обозначим $\Gamma(M)$ см. («Квант», 1980, № 7, стр. 4), а через $\Gamma_+(M)$ обозначим множество самосовмещений фигуры M , сохраняющих ориентацию. Очевидно, каждое из множеств $\Gamma(M)$, $\Gamma_+(M)$ представляет собой группу перемещений.

Множество M называется *транзитивным*, если для любых точек A , B этого множества в группе $\Gamma(M)$ имеется перемещение, переводящее A в B . Аналогично, множество M назовем *положительно транзитивным*, если для любых A , $B \in M$ найдется такое самосовмещение $f \in \Gamma_+(M)$, что $f(A) = B$.

Назовем многогранник *положительно транзитивным*, если множе-

ство всех его вершин является положительно транзитивным. Если многогранник M положительно транзитивен, то он, конечно, транзитивен, и потому (см. «Квант», 1980, № 7, с. 5, теорема 2) вокруг него можно описать сферу. Каждое самосовмещение многогранника M переводит центр O этой сферы в себя. Поэтому каждое сохраняющее ориентацию самосовмещение многогранника M представляет собой поворот вокруг некоторой прямой, проходящей через точку O . Теперь определение положительно транзитивного многогранника можно сформулировать следующим образом: многогранник M называется *положительно транзитивным*, если вокруг него можно описать сферу и при этом для любых двух его вершин A, B имеется поворот (вокруг некоторой прямой, проходящей через центр описанной сферы), который переводит этот многогранник в себя, а вершину A переводит в B .

Целью нашей статьи является описание всех положительно транзитивных многогранников.

3. Какие бывают грани

Пусть M — положительно транзитивный многогранник. Фиксируем его грань γ . Одно из двух: либо существует поворот $f \in \Gamma_+(M)$, отличный от тождественного, который переводит грань γ в себя, либо такого поворота не существует.

Пусть сначала такой поворот f существует и l — ось этого поворота. Прямая l проходит через центр O описанной сферы и пересекает грань γ в некоторой точке P .

Точка P не может, очевидно, быть вершиной многогранника M .

Точка P не может также быть и внутренней точкой некоторого ребра AB , принадлежащего грани γ . Допустим противное. Поскольку $f(P) = P$, ребро AB тоже должно перейти в себя (поскольку других ребер, проходящих через точку P , нет). Следовательно, $f(A) = B$, $f(B) = A$. Отсюда вытекает, что ребро AB перпендикулярно прямой l и делится точкой P пополам, а f представляет собой поворот на угол π вокруг

прямой l . Однако в этом случае очевидно, $f(\gamma) \neq \gamma$.

Значит, точка P является внутренней точкой грани γ . Поскольку $f(\gamma) = \gamma$, прямая l перпендикулярна плоскости грани γ . Пусть $g \in \Gamma_+(M)$ — поворот на наименьший (по величине) угол, переводящий грань γ в себя, и α — величина этого угла. Тогда поворот на каждый из углов $2\alpha, 3\alpha, \dots$ также переводит грань γ в себя. Отсюда можно заключить, что $\alpha = \frac{2\pi}{k}$, где k — некоторое натуральное число. В самом деле, если k — такое число, что $(k-1)\alpha < 2\pi$, но уже $k\alpha \geq 2\pi$, то при $k\alpha > 2\pi$ получилось бы, что поворот на угол $k\alpha - 2\pi$ переводит грань γ в себя, чего, однако, не может быть, поскольку $k\alpha - 2\pi < \alpha$. Следовательно, $k\alpha = 2\pi$, то есть g есть поворот на угол $\frac{2\pi}{k}$. Возьмем произвольную вершину A_0 грани γ и положим $A_1 = g(A_0)$, $A_2 = g(A_1), \dots, A_{k-1} = g(A_{k-2})$ (тогда $g(A_{k-1}) = A_0$). Вершины многоугольника γ между A_0 и A_1 обозначим через B_1, B_2, \dots, B_{m-1} . Ломаная $p_0 = A_0 B_1 B_2 \dots B_{m-1} A_1$ (состоящая из m звеньев) переходит при повороте g в аналогичную ломаную $p_1 = g(p_0)$ (идущую от точки A_1 до A_2) и т. д.; наконец, ломаная $p_{k-1} = g(p_{k-2})$ соединяет точки A_{k-1} и A_0 . Из этого видно, что многоугольник γ имеет km вершин, причем m вершин $A_0, B_1, B_2, \dots, B_{m-1}$ «различны» в том смысле, что никакие две из них не могут быть совмещены каким-либо поворотом из $\Gamma_+(M)$, переводящим грань γ в себя. Остальные же вершины «одинаковы» с какой-либо из вершин $A_0, B_1, B_2, \dots, B_{m-1}$. Число k будем называть *числом периодов* грани γ .

Если $m=1$, то есть поворот g переводит вершину A_0 в соседнюю вершину грани γ , то существует и поворот, переводящий A_0 в любую другую вершину этой грани. Такая грань называется *транзитивной*. Легко видеть, что транзитивная грань является правильным многоугольником, а все вершины, принадлежащие этой грани, устроены одинаково.

Если же не существует поворота $f \in \Gamma_+(M)$, отличного от тождествен-

ного, который переводит грань γ в себя, то есть в себе вершины грани γ «различны», положим $k=1$ и через m обозначим число ее вершин.

Теперь числа k и m определены для любой грани любого положительно транзитивного многогранника.

Лемма 1. Для любой грани γ числа k и m могут принимать только следующие значения: 1) $k=1, m=3$; 2) $k \geq 2, m=2$; 3) $k > 2, m=1$.

Доказательство. Поскольку M — положительно транзитивный многогранник, существует поворот $h_i \in G_+(M)$, переводящий B_i в A_0 ($i=1, 2, \dots, m-1$). Грань $h_i(\gamma)$ конгруэнтна γ , но не совпадает с ней, поскольку вершины A_0 и B_i «различны». Более того, все грани $\gamma, h_1(\gamma), \dots, h_{m-1}(\gamma)$ попарно различны (если $h_1(\gamma) = h_2(\gamma)$, то $h_2^{-1}h_1(B_1) = h_2^{-1}(A_0) = B_2$), и все они примыкают к вершине A_0 . Поэтому сумма величин углов многоугольников $\gamma, h_1(\gamma), \dots, h_{m-1}(\gamma)$ при вершине A_0 меньше 2π . Это означает, что сумма величин углов многоугольника γ при вершинах A_0, B_1, \dots, B_{m-1} меньше 2π . Но сумма величин всех углов многоугольника γ равна $(km-2)\pi$, а потому сумма величин его углов при вершинах A_0, B_1, \dots, B_{m-1} равна $\sigma = \frac{1}{k}(km-2)\pi$. Следовательно, $\frac{1}{k}(km-2)\pi < 2\pi$, то есть $m-2 < \frac{2}{k}$. Кроме того, $km \geq 3$. Из полученных неравенств $m-2 < \frac{2}{k}$, $km \geq 3$ вытекает, что для k и m возможны только указанные значения. (Убедитесь в этом.)

Лемма 2. Если к вершине A_0 примыкает нетранзитивная грань γ , то все остальные нетранзитивные грани при вершине A_0 конгруэнтны ей; а количество примыкающих к A_0 нетранзитивных граней равно m .

Доказательство. При доказательстве леммы 1 мы видели, что сумма величин углов грани γ при «различных» вершинах A_0, B_1, \dots, B_{m-1} равна $\sigma = \frac{\pi}{k}(km-2)$. При $m=3, k=1$ (первая возможность в лемме 1) имеем $\sigma = \pi$; при $m=2, k \geq 2$ (вторая возможность) имеем

$\sigma = \frac{k-1}{k} \cdot 2\pi \geq \pi$. Таким образом, при $m > 1$ (то есть для нетранзитивной грани) $\sigma \geq \pi$. Применяя к γ повороты h_1, h_2, \dots, h_{m-1} из доказательства леммы 1, получаем при вершине A_0 m конгруэнтных нетранзитивных граней $\gamma, h_1(\gamma), \dots, h_{m-1}(\gamma)$ и заключаем, что второго «комплекта» нетранзитивных граней в точке A_0 примыкать не может (сумма плоских углов при вершине A_0 была бы больше или равна 2π).

При формулировке следующей леммы условимся о термине *смежные грани*: так будем называть две грани, имеющие общую сторону (то есть две грани, имеющие лишь общую вершину, смежными считать не будем).

Лемма 3. Любые две грани, смежные с некоторой транзитивной гранью γ , могут быть совмещены некоторым поворотом из $G_+(M)$, переводящим γ в себя.

Доказательство этой простой и важной леммы мы предоставляем читателю.

4. Описание всех положительно транзитивных многогранников

Чтобы перечислить все положительно транзитивные многогранники, рассмотрим четыре возможности.

А) Многогранник M содержит нетранзитивную грань γ , отличную от треугольника, причем для этой грани число периодов (то есть k) больше 2. Следовательно, по лемме 1, $m=2$.

Пусть A_0 — какая-либо вершина грани γ . Тогда, по лемме 2, к вершине A_0 примыкают две конгруэнтные нетранзитивные грани γ, γ_1 , а остальные примыкающие к A_0 грани транзитивны. Ясно, что хотя бы одна транзитивная грань имеется (так как в каждой вершине сходятся не менее трех граней). При доказательстве леммы 1 мы видели, что сумма величин углов грани γ при «различных» вершинах (или, что то же самое, сумма величин углов граней γ, γ_1 при вершине A_0) равна

$$\sigma = \frac{\pi}{k}(km-2) = \frac{\pi}{k}(2k-2) = = 2\pi - \frac{2\pi}{k}. \text{ Так как } k > 2, \sigma \geq 2\pi - \frac{2\pi}{3}$$

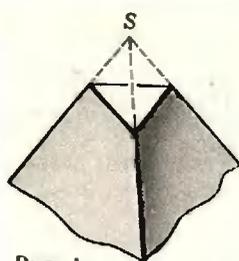


Рис. 1.

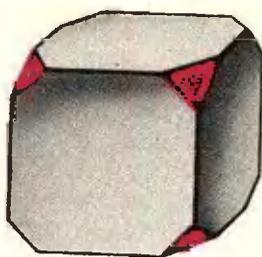


Рис. 2.

Так как сумма всех углов, сходящихся в вершине A_0 , меньше 2π , на сумму углов транзитивных граней при вершине A_0 приходится меньше $\frac{2\pi}{3}$, откуда видно, что к A_0 может примыкать только одна транзитивная грань γ . Если эта грань является правильным l -угольником, то есть имеет угол $\alpha = \pi - \frac{2\pi}{l}$, то, согласно сказанному, $\sigma + \alpha < 2\pi$, то есть $(2\pi - \frac{2\pi}{k}) + (\pi - \frac{2\pi}{l}) < 2\pi$. Иначе говоря, $\frac{1}{k} + \frac{1}{l} > \frac{1}{2}$. Учитывая, что $k > 2$, $l > 2$, находим отсюда следующие пять возможностей:

- 1) $m=2, k=3, l=3$;
- 2) $m=2, k=3, l=4$;
- 3) $m=2, k=3, l=5$;
- 4) $m=2, k=4, l=3$;
- 5) $m=2, k=5, l=3$.

Положительно транзитивные многогранники, соответствующие этим случаям, легко построить: для этого нужно «срезать» вершины у пяти правильных многогранников (о правильных многогранниках см. «Геометрия 9–10», § 54 или «Квант», 1980, № 7, с. 6).

Чтобы срезать вершину, нужно отложить на всех ребрах, выходящих из нее, отрезки равной длины, меньшей половины длины ребра, и провести плоскость через полученные точки (рис. 1). Например, на рисунке 2 изображен многогранник, соответствующий случаю 4: он получается срезанием вершин куба. Легко видеть, что все самосовмещения куба переводят в себя этот многогранник и наоборот. Поэтому группа самосовмещений многогранника совпадает с группой самосовмещений куба. То же относится к остальным из перечисленных пяти случаев.

Таким образом, положительно транзитивные многогранники, соответствующие случаю А, — это *правильные многогранники со срезанными вершинами*.

Б) Многогранник M содержит нетранзитивную грань γ , отличную от треугольника, причем для этой грани $k=2$. Здесь также $m=2$, то есть грань γ является параллелограммом ($m=2, k=2$), причем $\sigma = \frac{\pi}{k}(km - 2) = \pi$. Следовательно, к вершине A_0 примыкают не более двух транзитивных граней.

Рассмотрим сначала подслучай, когда к вершине A_0 примыкают 2 транзитивные грани. Эти грани не являются смежными (иначе по лемме 3 все грани были бы конгруэнтны одной из них и были бы транзитивными, что невозможно, так как имеется нетранзитивная грань γ). Положим, что эти грани являются правильным l_1 -угольником и правильным l_2 -угольником, тогда $\sigma + (\pi - \frac{2\pi}{l_1}) + (\pi - \frac{2\pi}{l_2}) < 2\pi$, то есть $\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} > \frac{1}{2}$. Это дает еще три возможности (мы можем считать, что $l_1 < l_2$:

- 6) $m=2, k=2, l_1=3, l_2=3$;
- 7) $m=2, k=2, l_1=3, l_2=4$;
- 8) $m=2, k=2, l_1=3, l_2=5$.

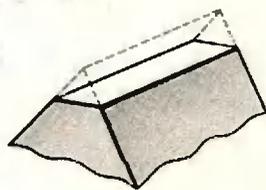


Рис. 3.

Соответствующие положительно транзитивные многогранники можно получить «срезанием» вершин и ребер у правильных многогранников (на рисунке 1 показана процедура срезания вершин, на рисунке 3 — процедура срезания ребра).

На второй странице обложки изображены многогранники, полученные таким способом из пяти правильных многогранников. Многогранники 1 и 2 с точки зрения нашей классификации «одинаковы» — к каждой вершине примыкают оди-

наковые наборы граней (на языке «высшей» алгебры: группы самосомещений этих многогранников *изоморфны* — «Квант», 1976, № 10, с. 10; «одинаковы» в том же смысле многогранники 3 и 4).

Итак, в этом подслучае получаем три типа положительно транзитивных многогранников — *правильные многогранники со срезанными вершинами и ребрами*.

Если же к вершине A_0 примыкает лишь одна транзитивная грань (l -угольник), то $\sigma + (\pi - \frac{2\pi}{l}) < 2\pi$, то есть $-\frac{2\pi}{l} < 0$. Иначе говоря, в этом случае никаких ограничений на l не накладывается. Мы получаем

9) $m=2, k=2, l \geq 3$ — любое.

Соответствующий многогранник является *правильной l -угольной призмой* (рис. 4).

В) Многогранник M содержит *нетранзитивную грань γ , являющуюся треугольником* ($k=1, m=3$). В этом случае $\sigma = \pi$, и потому к вершине $A_0 \in \gamma$ примыкают три треугольника $\gamma, \gamma_1, \gamma_2$ и еще могут примыкать две, одна или ни одной транзитивных граней.

Если к вершине A_0 примыкают две транзитивные грани (правильный l_1 -угольник и правильный l_2 -угольник, причем $l_1 < l_2$), то имеются три возможности (на рисунке 5 схематически показано, как примыкают друг к другу грани в вершине A_0):

10) $m=3, k=1, l_1=3, l_2=3$;

11) $m=3, k=1, l_1=3, l_2=4$;

12) $m=3, k=1, l_1=3, l_2=5$.

Схемы вершин многогранников 10), 11), 12) показаны на рисунках 6—8. Многогранник 10) — «неправильный икосаэдр».

Если к вершине A_0 примыкает одна транзитивная грань — правильный l -угольник, то соотношение $\sigma + (\pi - \frac{2\pi}{l}) < 2\pi$ не дает никаких ограничений на l . Получаем еще один случай:

13) $m=3, k=1, l \geq 3$.

На рисунке 9 изображен соответствующий многогранник (*антипризма*).

Если же у многогранника вообще нет транзитивных граней, то к каж-

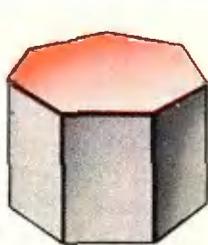


Рис. 4.

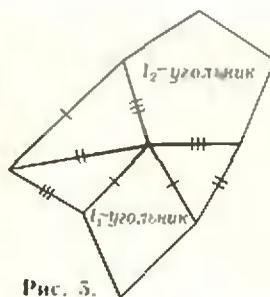


Рис. 5.

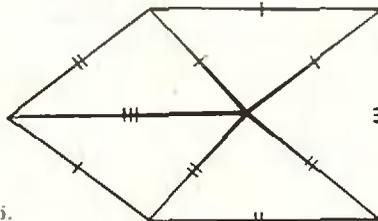


Рис. 6.



Рис. 7.

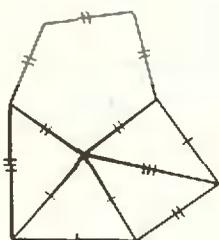
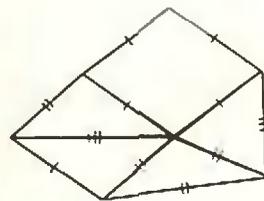


Рис. 8.

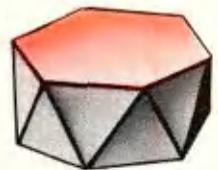
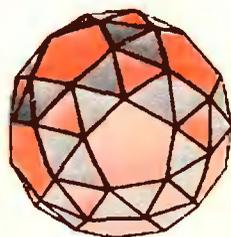


Рис. 9.

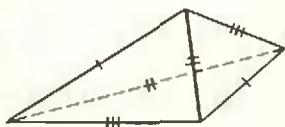


Рис. 10.

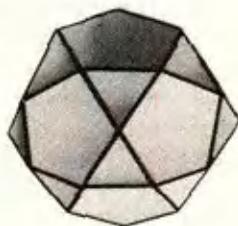


Рис. 11.

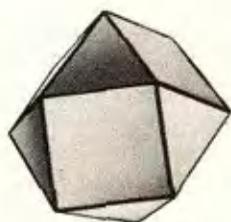


Рис. 12.

дой вершине примыкают различными углами три конгруэнтных остроугольных треугольника, и многогранник оказывается *тетраэдром* (убедитесь в этом), изображенным на рисунке 10. Разверткой этого тетраэдра) служит произвольный остроугольный треугольник с проведенными средними линиями. Таким образом, получен еще один тип положительно транзитивных многогранников:

14) $m=3, k=1$.

Г) Многогранник M не содержит нетранзитивных граней.

Согласно лемме 3, либо все грани конгруэнтны — это дает *пять правильных многогранников* (случаи 15—19), либо же имеются два вида граней: правильные l_1 -угольники и правильные l_2 -угольники, причем смежными с l_1 -угольниками являются только l_2 -угольники и наоборот (здесь $l_1 < l_2$). В этом последнем случае в каждой вершине сходятся l_1 -угольник, затем l_2 -угольник, затем снова l_1 -угольник и т. д. Отсюда легко заключить, что в вершине схо-

дятся по два l_1 -угольника и l_2 -угольника. Следовательно, $2\left(\pi - \frac{2\pi}{l_1}\right) + 2\left(\pi - \frac{2\pi}{l_2}\right) < 2\pi$, откуда $\frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_1} > \frac{1}{2}$, что дает 2 возможности:

20) $l_1=3, l_2=4$;

21) $l_1=3, l_2=5$.

Соответствующие многогранники получаются *отсечением вершин правильных многогранников*, причем так, что отсекающие плоскости проходят через середины ребер. Эти многогранники изображены на рисунках 11 и 12.

Итак, все положительно транзитивные многогранники описываются случаями 1—21.

В заключение заметим, что приведенными рассуждениями дается также перечисление всех конечных групп положительных перемещений пространства: все они либо совпадают с группами положительных самосовмещений правильных многогранников, призм и антипризм, либо же являются подгруппами этих групп.

* Иногда такие тетраэдры называют *полуправильными*.

Задачи наших читателей

1. Известно, что

$$F\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 2F\left(\frac{x-2}{x+1}\right) = x.$$
 Найдите $F(x)$.

Н. Адигезалов

2. Пусть дано равенство $x^{2m} + y^{2m} = z^{2m}$, где $x, y, z, m > 1$ — натуральные числа. Докажите, что x, y, z не могут образовывать прогрессию — ни арифметическую, ни геометрическую.

М. Ибрагимов

3. Обозначим через $S(A)$ сумму цифр числа A . Докажите, что последовательность $\left(\frac{S(n^2)}{S(n)}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ не ограничена.

Верно ли аналогичное утверждение для последовательности $\left(\frac{S(n)}{S(n^2)}\right)$?

Э. Туркенич

Когда под рукой нет ЭВМ

Очевидное тождество

$$a^2 = (a-d)(a+d) + d^2$$

может оказаться полезным при возведении чисел в квадрат:

$$\begin{aligned} 43^2 &= (43-3)(43+3) + 3^2 = \\ &= 40 \cdot 46 + 9 = 1849, \\ 43^2 &= (43+7)(43-7) + 7^2 = \\ &= 50 \cdot 36 + 49 = 1849, \\ 257^2 &= (257+43)(257-43) + \\ &+ 43^2 = 300 \cdot 214 + 43^2 = \\ &= 64200 + 1849 = 66049. \end{aligned}$$

А. Криц



Дж. Уокер

Физический фейерверк

Задачи-вопросы, публикуемые ниже, взяты из книги Дж. Уокера «Физический фейерверк», выпущенной недавно издательством «Мир».

1. С карандашом в ванне

Если, купаясь в ванне, вы захотите немного развлечься, захватите с собой карандаш и наблюдайте за его тенью на дне ванны. Погрузив карандаш в воду наполовину, вы увидите, что его тень не имеет с ним ничего общего — она скорее похожа на два стержня с закругленными концами, которые разделены светлым промежутком (рис. 1). Откуда возник этот светлый промежуток и чем определяется его ширина?

2. Изображение монеты в воде

Положите монету на дно прозрачной широкой банки, наполненной водой,



Рис. 1.

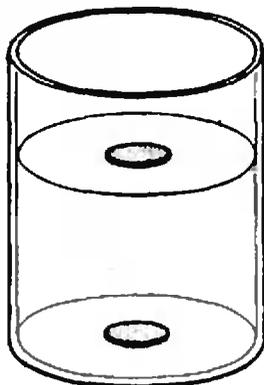


Рис. 2.

и посмотрите на монету сквозь воду под разными углами зрения. При некотором угле вы увидите изображение монеты на поверхности воды (рис. 2). Теперь приложите к банке с обратной стороны руку. Скорее всего, это не повлияет на изображение монеты, однако, если рука будет мокрой, изображение исчезнет. Почему?

3. «Призраки» в окнах с двойными рамами

Почему отдаленные предметы кажутся раздвоенными, если смотреть на них через окно с двойной рамой? В некоторых случаях, например при наблюдении через окно диспетчерской аэропорта, подобное раздвоение изображения не просто неприятно — оно может привести к весьма опасным ситуациям. Попробуйте, хотя бы ориентировочно, оценить угловое расстояние между истинным предметом и его «призраком». Как оно зависит от времени суток и погодных условий?

4. Светящийся дождь

Возможно вам приходилось когда-нибудь видеть дождь, идущий вдаль. Когда эта далекая стена дождя освещена прямым солнечным светом, можно заметить, что выше некоторой отчетливой горизонтальной линии дождь кажется гораздо более светлым, чем внизу. Как это можно объяснить?

5. Солнечные очки и искажение видимого движения

Закрыв темным фильтром, например стеклом от солнечных очков, один глаз, посмотрите на качание простого маятника. Хотя вы точно знаете, что маятник качается в одной плоскости, у вас создастся впечатление, что он описывает эллипс (рис. 3). Непосвященному это наблюдение может показаться удивительным, даже загадочным.

Если вам как-нибудь придется сидеть за рулем автомобиля в солнечных очках с одним стеклом, вы обя-

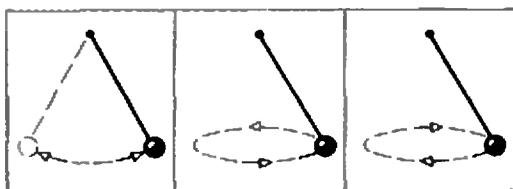


Рис. 3.

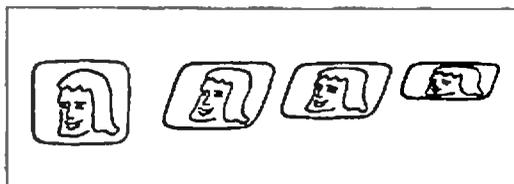


Рис. 4.

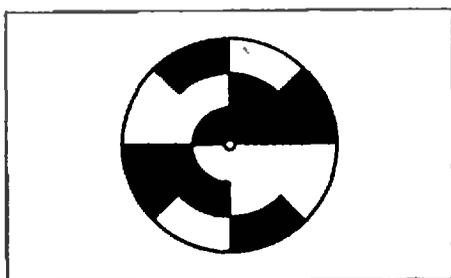


Рис. 5.

ружите, что скорость автомобиля, идущего слева от вас, заметно отличается от скорости автомобиля, идущего справа, хотя на самом деле они движутся с одинаковыми скоростями. Скорости обоих автомобилей вы оцениваете неверно.

Более того, в рассмотренном случае вы неправильно оцените расстояния до окружающих предметов. Ошибка в оценке зависит даже от того, справа или слева от вас находится предмет.

Чем объясняется кажущееся трехмерное движение маятника? Какую роль играет световой фильтр или стекло очков в оценке этого движения, скорости автомобиля и расстояния до предметов?

6. Вращающийся волчок перед экраном телевизора

Если в темной комнате перед экраном телевизора, изображение на котором сохраняется неизменным, запустить плоский волчок с узором на верхней поверхности, то на волчке возникнут умопомрачительные картинки. Нет сомнения в том, что

они обусловлены узором на поверхности волчка, но причем тут свет телевизионного экрана?

7. «Плавающие» телевизионные изображения

Глядя в темной комнате на экран телевизора, быстро переведите глаза сначала на полметра влево от экрана, а потом тут же на полметра вправо. Вы увидите детальное призрачное изображение телевизионного кадра, «висящее» в воздухе справа от экрана (рис. 4). Иногда даже возникают три-четыре изображения, каждое в виде наклоненного вправо параллелограмма. Почему появляются эти изображения и почему они наклонены? Сохранятся ли их наклон, если вы переведете глаза в другую сторону? Возникнут ли аналогичные призрачные изображения, если перевести глаза вверх или вниз?

8. Цвета черно-белого диска

Можно ли различить какие-либо цвета на черно-белой поверхности? Как правило, нет. Однако сделайте диск с чередующимися черными и белыми секторами и, вращая его с относительно небольшой скоростью, пристально смотрите на него, стараясь не замечать отдельных секторов. Через несколько минут передние по отношению к направлению вращения края белых секторов станут красными, задние — синими. (При разных уровнях освещенности оттенки будут различными.) При вращении с большей скоростью белые секторы становятся красными, а черные частично окрашиваются в зеленовато-голубой цвет. При дальнейшем увеличении скорости вращения цвета уже не удастся различить, но по диску начинают прыгать искорки фиолетово-розового и зеленовато-серого цветов. На диске, изображенном на рисунке 5, можно наблюдать все три эффекта одновременно. Почему мы видим эти цвета? Почему, чтобы диск «окрасился», нужно прежде в течение нескольких минут посмотреть на него?



В. Залгаллер.
С. Залгаллер

Венгерский шарнирный кубик

В Венгерской Народной Республике распространена занятная математическая головоломка, созданная в 1975 г. венгерским архитектором, профессором Эрнё Рубиком. Ее внешний вид показан на четвертой странице обложки: это пластмассовый куб, разбитый на 27 конгруэнтных кубиков. Внутренний кубик удален, а 26 наружных кубиков с помощью специальных выступов сцеплены так, что любая плитка из 9 кубиков, прилегающих к одной грани куба, может быть повернута в любую сторону на 90° . (Начало двух таких поворотов изображено на рисунке 1.) После поворота на 90° вся система сохраняет прежнюю свободу вращений: снова любую плитку в любую сторону можно повернуть в ее плоскости на 90° .

Об устройстве шарнирного скрепления этих кубиков можно написать отдельную статью — сейчас же мы будем обсуждать другой вопрос.

Первоначально каждая из граней большого куба была окрашена в свой цвет (красный, оранжевый, желтый, зеленый, синий, белый). После ряда случайно выбранных вращений окраска граней куба становится нестрой: на грани присутствуют клетки разных цветов. Головоломка состоит в том, чтобы, получив в руки такой нестройный куб, добиться с помощью вращений *правильной* расстановки кубиков, то есть такой расстановки,

при которой каждая грань куба снова будет одного цвета.

Задача эта совсем не проста. Не вооруженному теорией человеку, даже способному, редко удается сразу собрать более одной грани. Число расстановок кубиков, которые можно получить (подсчитано, что их $N = 43\,252\,003\,274\,489\,856\,000$), делает ее недоступной для перебора даже на ЭВМ. Заметим, впрочем, что не любая расстановка может быть получена вращениями плиток куба: если разрешить разборку куба на составляющие его 26 кубиков, то можно составить $12 \cdot N = 529\,024\,039\,393\,878\,272\,000$ разных расстановок (см. задачу 8 из Добавления).

В настоящей заметке мы предлагаем читателю правила (они не являются самыми экономными по числу вращений), позволяющие от любой из N возможных расстановок кубиков вернуться к их *правильной* расстановке.

Описание вращений

Чтобы изложить предлагаемые правила, условимся сначала о терминологии.

Будем называть *центральными* кубики, стоящие в центрах граней куба. Каждый центральный кубик всегда (при любых вращении) остается центральным и смотрит наружу одной клетки определенного цвета.

Поскольку нас интересуют не изменения положения всего куба в пространстве, а лишь изменения взаимного расположения его частей, мы будем считать его положение в пространстве фиксированным. Это озна-

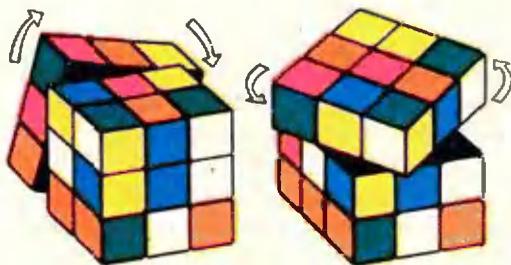


Рис. 1.

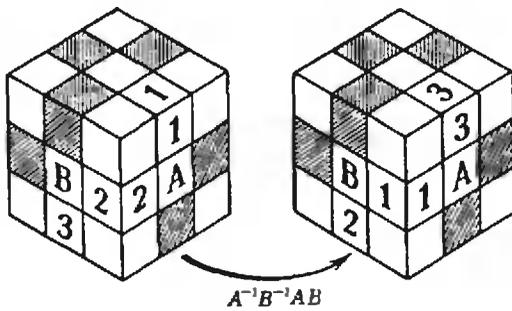


Рис. 2.

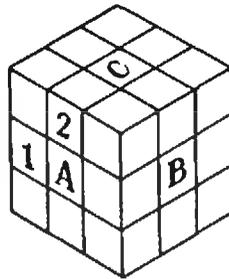


Рис. 3.

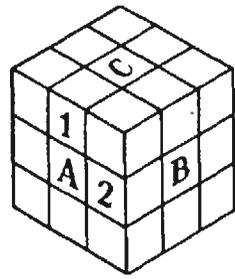


Рис. 4.

чает, что положение всех центральных кубиков в пространстве остается неизменным. Это означает также, что из девяти плоскостей куба мы будем поворачивать только шесть.

Если на рисунке некоторая центральная клетка отмечена буквой А, то поворот (не «средней») плитки, содержащей эту клетку, на 90° по часовой стрелке мы будем обозначать через А, а поворот этой же плитки на 90° против часовой стрелки будем обозначать через A^{-1} . Очевидно, $A^{-1}A^{-1}A^{-1}A^{-1}=A$ и $A^2=A^{-2}$, где $A^2=A \cdot A$ и $A^{-2}=A^{-1} \cdot A^{-1}$.

Кубики, содержащие среднюю часть ребра большого куба, будем называть *средними*. Средний кубик всегда остается средним и смотрит наружу двумя клетками определенного цвета. Для каждой пары цветов (кроме тех пар цветов, которыми первоначально были раскрашены противоположные грани куба) имеется единственный средний кубик с клетками этих цветов.

Угловыми назовем кубики, занимающие в составе куба угловые места. Каждый угловой кубик всегда остается угловым и смотрит наружу тремя клетками, окрашенными в разные цвета. Сочетание этих трех цветов у каждого из угловых кубиков свое.

Основные этапы

Заманчивый, на первый взгляд, путь: постепенно увеличивая пятно одноцветных клеток, получить одноцветную грань, а потом взяться за другую — видимо, приводит лишь к непреодолимым трудностям. Не справившись с головоломкой, ее нередко портят — от злости или из любопытства к устройству шарнира. Мы на-

деемся, что предлагаемый ниже способ решения сделает головоломку доступной, но и он требует определенных усилий при реализации.

Предлагаемые действия разобьем на четыре больших этапа. Мы уже договорились, что в ходе решения головоломки центральные кубики не меняют своего положения в пространстве. Что касается средних кубиков, то каждый из них должен в процессе решения занять вполне определенное место: оказаться на ребре между двумя «своими» гранями куба, то есть теми гранями, чьи центральные клетки такого же цвета, как две клетки данного среднего кубика. Кроме того, он должен быть правильно повернут: его цветные клетки должны прилегать к центральным клеткам того же цвета. Совершенно аналогично обстоит дело с угловыми кубиками: у каждого из них есть свое место (на стыке трех граней с центральными клетками его цветов) и единственный правильный разворот. В соответствии с этим порядок наших действий будет следующим:

Этап 1: *поставить на нужные места все средние кубики.*

Этап 2: *правильно повернуть на своих местах все средние кубики.*

Этап 3: *поставить на нужные места все угловые кубики.*

Этап 4: *правильно повернуть все угловые кубики.*

Каждый из этапов мы будем выполнять только после того, как предыдущий этап полностью закончен. При этом очередной этап будем выполнять так, чтобы после его завершения оказались не нарушенными достижения предшествующих этапов.

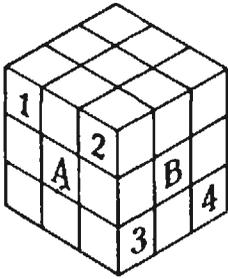


Рис. 5.

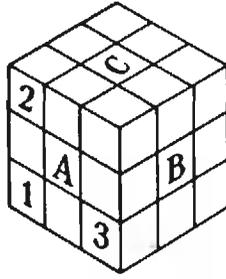


Рис. 6.

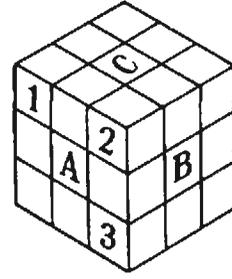


Рис. 7.

После выполнения второго этапа на каждой из граней куба образуется крест из пяти клеток одного цвета. После выполнения четвертого этапа задача окажется решенной — каждая грань куба станет одноцветной.

Невозможные положения

Достаточность предлагаемых ниже «комбинаций» для выполнения перечисленных этапов опирается на три свойства рассматриваемого шарнирного куба. В рамках этой статьи мы будем считать эти свойства экспериментальными фактами. Их можно, однако, доказать, решив задачи, придуманные В. Дубровским (см. Приложение).

Если кубики выведены из правильного положения только допустимыми вращениями (а не разборкой и новой сборкой всего устройства или перекраской граней), то не может возникнуть положение, при котором:

I. все средние кубики стоят на своих местах и только один из них повернут неправильно;

II. все средние кубики и стоят, и повернуты правильно, а все угловые кубики, кроме двух, стоят (в любых положениях) на своих местах;

III. все средние кубики и стоят, и повернуты правильно, а все угловые кубики стоят на своих местах и только один из них повернут неправильно.

Предварительные комбинации

Чтобы привыкнуть к тому, как записываются повороты, мы сначала рассмотрим несколько важных для дальнейшего стандартных комбинаций.

Первая комбинация $A^{-1}BA$ (в отличие от школьного учебника, это будет означать, что сначала совершается поворот A^{-1} , затем B , затем A) называется сопряжением элемента B с помощью элемента A . На рисунке 2 показано, как эта комбинация позволила собрать белую грань целиком, поставив белую клетку 1 на место желтой 2.

Вторая комбинация $A^{-1}B^{-1}AB$ называется коммутатором элементов A, B . Проверьте, что в положении куба, изображенном на рисунке 2, серые клетки остаются на месте, а средние кубики 1, 2, 3 циклически переставляются, то есть переходят по схеме $1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$. Проследите еще, как переставляют средние кубики комбинации $ABA^{-1}B^{-1}$, $AB^{-1}A^{-1}B$, $A^2B^2A^2B^2$, $A^2BA^2B^{-1}$, $A^2B^{-1}A^2B$, $AB^2A^{-1}B^2$, $A^{-1}B^2AB^2$ — коммутаторы других поворотов (каких?).

Этап I: средние кубики — на место

Комбинация из семи поворотов

$$K_1 = A^{-1}C^{-1}B^{-1}A^{-1}BAC$$

взаимно переставляет местами средние кубики 1, 2 (рис. 3) и сохраняет местоположение остальных средних кубиков (проверьте!*).

Комбинация K_1 фактически позволяет менять местами любые два средних кубика. Если они не прилегали к одной грани куба или не были на ней соседними, то всегда можно вспомогательными поворотами (запомнив эти повороты по цвету центра поворачиваемой плитки) привести желаемые кубики в положение 1, 2 (рис. 3), переставить их комбинацией K_1 , а затем, в обратной очередности и обратных направлениях повторить сделанные вспомогательные повороты.

* Если у вас нет экземпляра игрушки, советуем нарисовать развертку куба (чернилами на хорошем листе бумаги) и, пользуясь карандашом и ластиком, следить за передвижением клеток на развертке.

Очевидно, попарные перестановки средних кубиков позволяют осуществить этап 1: поставить на свои места все средние кубики.

Этап 2: повернем средние кубики

Комбинация из двенадцати поворотов

$$K_2 = (AB^{-1}A^{-1}B)(BC^{-1}B^{-1}C)(CA^{-1}C^{-1}A)$$

одновременно поворачивает в своих гнездах кубики 1, 2 (рис. 4) и не меняет ни местоположений, ни поворотов остальных средних кубиков (проверьте!).

Комбинация K_2 позволяет повернуть на своих местах любые два средних кубика. Действительно, если они не прилегали к одной грани куба или не были на ней соседними, то всегда можно вспомогательными поворотами (запомним эти повороты по цвету центра поворачиваемой плитки) привести желаемые два кубика в положение 1, 2 (рис. 4), повернуть их комбинацией K_2 , а затем, в обратной очередности и в обратных направлениях повторить вспомогательные повороты.

Попарные совместные повороты средних кубиков позволяют осуществить этап 2, поскольку (ввиду свойства I) не может случиться, чтобы требовал поворота только один средний кубик.

Этап 3: угловые кубики — на место

Комбинация из двенадцати поворотов

$$K_3 = (ABA^{-1}B^{-1})^3$$

осуществляет одновременно перестановки кубиков 1, 2 и кубиков 3, 4 (рис. 5), сохраняет все достижения этапов 1, 2 и не изменяет местоположения угловых кубиков, отличных от 1, 2, 3, 4 (проверьте!).

Комбинация из двадцати четырех поворотов

$$K_4 = (ACA^{-1}C^{-1})^3(B^{-1}A^{-1}BA)^3$$

осуществляет перестановку кубиков 1, 2, 3 (рис. 6) по схеме $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, сохраняет все достижения этапов 1, 2 и не изменяет местоположения угловых кубиков, отличных от 1, 2, 3.

Поясним, как, пользуясь комбинациями K_3 и K_4 , осуществлять этап 3.

Допустим, что после завершения этапа 2 часть угловых кубиков не стоит на своих местах. Ввиду свойства II таких кубиков будет не менее, чем три. Выберем один из них и отметим его номером 1. Кубик, занимающий то место, куда должен встать кубик 1, отметим номером 2.

Если кубик 2 сам должен перейти на место кубика 1, то номером 3 отметим любой, отличный от первых двух и стоящий не на своем месте угловой кубик, а номером 4 — кубик, стоящий там, куда должен перейти кубик 3. Затем, с помощью вспомогательных поворотов (запомним их) поставим кубики 1, 2 и 3, 4 в положение пар 1, 2, и 3, 4, изображенных на рисунке 5. С помощью комбинации K_3 осуществим перестановку $1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 4$, после чего в обратной очередности и обратных на-

правлениях повторим вспомогательные повороты. В итоге, кроме ранее стоявших на своих местах угловых кубиков, заведомо попадут на свои места кубики 1, 2, 3.

Если же кубик 2 не должен был перейти на место кубика 1, то отметим номером 3 кубик, стоящий там, куда должен перейти кубик 2. Если кубик 3 не должен перейти на место кубика 1, то отметим номером 4 кубик, который стоит там, куда должен перейти кубик 3. После этого, как и выше, то есть с помощью вспомогательных поворотов и комбинации K_3 , осуществляем перестановку $1 \leftrightarrow 2, 3 \leftrightarrow 4$, которая ставит на свои места кубики 1 и 3.

Остается случай, когда требуется перестановка кубиков $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$. В этом случае, с помощью вспомогательных поворотов (запомним их) ставим кубики 1, 2, 3 в каком-то порядке на места 1, 2, 3 (рис. 6). Одна из двух комбинаций K_4, K_4^{-1} , которые осуществляют перестановку мест $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1, 1 \rightarrow 3 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, будет осуществлять перестановку кубиков $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 1$ (находящихся сейчас на местах 1, 2, 3). Выполним именно эту комбинацию. После этого в обратной очередности и обратных направлениях повторим вспомогательные повороты. В итоге кубики 1, 2, 3 станут на место.

Повторяя указанный процесс, мы выполним этап 3 — поставим на свои места все угловые кубики.

Этап 4: повернем угловые кубики

Нам потребуются следующие две комбинации:

$$K_5 = [(A^{-1}CAC^{-1})(C^{-1}BCB^{-1})(B^{-1}ABA^{-1})]^2, \\ K_5^{-1} = [(AB^{-1}A^{-1}B)(BC^{-1}B^{-1}C)(CA^{-1}C^{-1}A)]^{-2}.$$

Комбинация K_5 поворачивает одновременно каждый из кубиков 1, 2, 3 (рис. 7) вокруг оси, идущей от его центра к центру куба, на 120° по часовой стрелке. Комбинация K_5^{-1} поворачивает те же кубики против часовой стрелки. Местоположение и поворот любого из остальных кубиков при этом не меняются.

Знание комбинаций K_5 и K_5^{-1} позволяет совместно повернуть в желаемом направлении (но в одну и ту же сторону) любые три угловых кубика. Достаточно собрать их с помощью вспомогательных поворотов в одну грань, совместно повернуть с помощью комбинации K_5 или K_5^{-1} (в зависимости от нужного направления поворота), а затем вернуть на своим места поворотами, обратными вспомогательным.

Поясним теперь, как, пользуясь комбинациями K_5 и K_5^{-1} , осуществить этап 4.

Если после завершения этапа 3 имеются неправильно повернутые угловые кубики, то, ввиду свойства III, таких кубиков не менее двух.

Допустим, что их больше двух. Возьмем любые три из них. Хотя бы два из этих трех кубиков требуют поворота в одну и ту же сторону. Повернув в эту сторону все три кубика, мы уменьшим число неверно повернутых кубиков. Так мы приходим к положению, когда неверно повернутых кубиков либо нет, либо ровно два.

Если неверно повернутых кубиков только два, они не могут оба требовать поворота в одну и ту же сторону. Иначе мы бы совместно повернули их и еще один кубик — появилось бы положение с одним неверно повернутым кубиком, что невозможно в силу III.

Итак, два неверно повернутых кубика требуют поворота в разные стороны. Повернем в нужную сторону один из этих кубиков и два кубика, ранее стоявших правильно. А затем — в другую сторону — эти два новых кубика и второй из ранее повернутых неправильно. В результате все кубики займут правильное положение!

Приложение*

Обозначим через S_0 правильное состояние куба. Заномеруем числами $i=1, 2, \dots, 8$ его вершины (угловые кубики) и числами $j=1, 2, \dots, 12$ его ребра (средние кубики). На ребрах выберем (и запомним) любую ориентацию (и нарисуем соответствующие стрелки на средних кубиках) так, чтобы параллельные ребра были сонаправлены.

Предположим, что в некотором законном состоянии** S куба j -й средний кубик попал на ребро j' ; сравним ориентацию ребра j' (которую мы запомнили) со стрелкой, нарисованной на j -м кубике. Обозначим через $n_j(S)$ величину, равную 0, если указанные ориентации совпадают, и равную 1 в противном случае. Если сумма

$$n_1(S) + n_2(S) + \dots + n_{12}(S)$$

четна, мы полагаем $n(S) = 0$, иначе $n(S) = 1$; можно сказать, что $n(S) = 0$ — это «четность суммарного поворота средних кубиков». Докажите, что

1. Величина n является инвариантом, то есть одинакова при всех законных состояниях куба: $n(S) = n(S_0) = 0$. (Указание. Достаточно показать, что $n(S)$ не меняется при любом повороте одной плитки).

2. В законном состоянии куба не может быть повернут ровно один средний кубик (свойство I, с. 19). (Указание. В таком состоянии $n(S) = 1$).

Вспомним, что положение центральных клеток куба в пространстве не меняется при поворотах; для определенности предположим, что нижний центральный кубик — зеленый, верхний — синий; эти два цвета будем считать выделенными. Возьмем i -й угловой кубик нашего куба, находящегося в состоянии S . Ровно одна клетка углового кубика выделена (почему?). Если эта клетка горизонтальна, положим (по определению) $N_i(S) = 0$; если эта клетка становится горизонтальной при повороте кубика на 120° (по часовой стрелке) вокруг диагонали большого куба, положим $N_i(S) = 1$; если же горизонтальность получается поворотом на

240° , то $N_i(S) = -1$. Если сумма

$$N_1(S) + N_2(S) + \dots + N_8(S)$$

при делении на 3 дает в остатке 0, 1, 2, мы полагаем величину $N(S)$ равной 0, 1, -1 соответственно. Можно сказать, что величина N — это «направление суммарного поворота угловых кубиков». Докажите, что

3. Величина N является инвариантом, то есть одинакова при всех законных состояниях куба: $N(S) = N(S_0) = 0$.

4. В законном состоянии у куба не может быть повернут неправильно ровно один угловой кубик (свойство III, с. 19).

Предположим теперь, что в состоянии S средние кубики с номерами 1, 2, ..., 12 занимают места с номерами j_1, j_2, \dots, j_{12} соответственно, а угловые кубики 1, 2, ..., 8 — места i_1, i_2, \dots, i_8 . Наборы $I(S) = (i_1, i_2, \dots, i_8)$ и $J(S) = (j_1, j_2, \dots, j_{12})$ — это просто номера кубиков, записанные в другом порядке; математики такие наборы называют перестановками. Перестановку называют четной, если в ней имеется четное число беспорядков, то есть четное число пар цифр, стоящих не в порядке возрастания, и нечетной в противном случае. Например, перестановка (12453687) нечетна, так как она содержит 3 беспорядка: (4, 3), (5, 3), (8, 7). Обозначим через $\epsilon(S)$ число, равное 0, если $I(S)$ и $J(S)$ имеют одинаковую четность, и равное 1 в противном случае. Можно сказать, что ϵ — это «четность расстановки всех кубиков». Докажите, что

5. Величина ϵ является инвариантом, притом $\epsilon(S) = \epsilon(S_0) = 0$ для любого законного состояния S . (Указание. Покажите, что при любом повороте плитки меняется четность I и четность J).

6. Ровно два угловых кубика не могут поменяться местами (свойство II, с. 19).

7*. Состояние S куба законно тогда и только тогда, когда

$$n(S) = N(S) = \epsilon(S) = 0.$$

8*. Все состояния (в том числе полученные разборкой и сборкой куба) разбиваются на 12 классов; при этом два состояния S, S' переводятся друг в друга поворотами плитки тогда и только тогда, когда $n(S) = n(S')$, $N(S) = N(S')$, $\epsilon(S) = \epsilon(S')$.

*Автор Приложения — В. Дубровский.

** То есть в состоянии, полученном из правильного поворотами плиток (без перекрашивания клеток или разборки кубика).

Задачник Кванта

Задачи

М656—660; Ф668—Ф672

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 февраля 1981 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 12—80» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М656, М657» или «Ф668». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М656. В пространстве имеются 30 ненулевых векторов. Докажите, что среди них найдутся два, угол между которыми меньше 45° .

А. Толыго

М657. В таблице $n \times n$, заполненной числами, все строки различны. Докажите, что из таблицы можно вычеркнуть некоторый столбец так, что в оставшейся таблице все строки также будут различны.

А. Анджан

М658. В квадрате со стороной 1 проведено конечное число отрезков (рис. 1), параллельных его сторонам. Отрезки могут пересекать друг друга. Сумма длин проведенных отрезков равна 18. Докажите, что среди частей, на которые квадрат разбивается этими отрезками, найдется такая, площадь которой не меньше 0,01.

А. Анджан

М659. Докажите следующие свойства последовательности Фибоначчи $f_1=1, f_2=2, \dots, f_{k+1} = f_k + f_{k+1}$:

- Каждое натуральное число $n \geq 3$ представляется в виде суммы различных чисел Фибоначчи.
- * Обозначим количество таких представлений числа n в виде суммы четного числа слагаемых через K_n , в виде суммы нечетного числа слагаемых — через H_n ; тогда $|K_n - H_n| < 1$ при всех n .
- * Если перемножить несколько подряд стоящих двучленов из последовательности

$$1-x, 1-x^2, 1-x^4, 1-x^8, \dots, 1-x^{2^k}, \dots$$

(в показателях стоят числа Фибоначчи), то в полученном многочлене все коэффициенты будут равны 0, -1 или $+1$.

Известное нам доказательство утверждений б) и в) опирается на такое свойство:

- Для любого $n \geq 3$ существует единственное представление n в виде суммы различных чисел Фибоначчи, которое вместе с каждым слагаемым

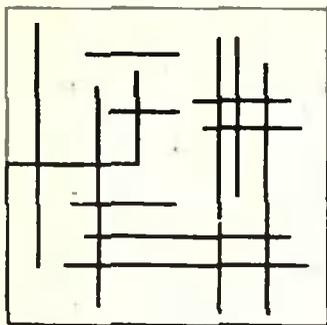


Рис. 1.



Рис. 2а.

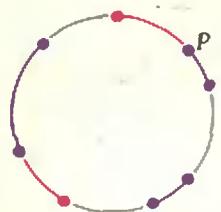


Рис. 2б.



Рис. 2в.

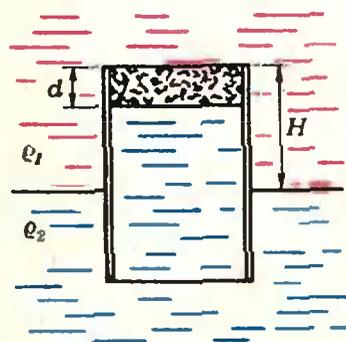


Рис. 3.

$f_k (k \geq 3)$ содержит хотя бы одно из двух предыдущих чисел Фибоначчи f_{k-1} или f_{k-2} .

А. Одесский, ученик 9 класса, Д. Фукс

М660. На окружности расставляются синие и красные точки (рис. 2а). Разрешается добавлять новую красную точку и одновременно менять цвет у каждой из двух соседних с ней точек (рис. 2б), либо убрать красную точку и поменять цвет у каждой из соседних точек (рис. 2в). Пусть первоначально было всего две красные точки (меньше двух точек оставлять не разрешается). Можно ли несколькими такими операциями получить на окружности

- две точки — синюю и красную;
- 8 красных точек;
- одну красную и 6 синих точек;
- * две синих точки?

К. Казирновский

Ф668. Через неподвижный блок перекинута невесомая нить. К одному концу нити прикреплен груз массы m_1 . К другому концу на пружине с жесткостью k подвешен груз массы m_2 . Длина пружины в нерастянутом состоянии равна l_0 . Найти амплитуду колебаний, которые будет совершать груз m_2 , когда систему предоставят самой себе. Качаний поперек нити нет.

Г. Коткин

Ф669. Перевернутый тонкостенный стакан с пробковым дном толщиной d плавает на границе раздела двух жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 . Верхняя часть стакана находится на высоте H над границей раздела (рис. 3). Сечение стакана S . На какое расстояние поднимется стакан, если в дне стакана появится дырка?

Ф670. Покажите, что максимальная скорость, которую при столкновении может сообщить протону α -частица, составляет 1,6 начальной скорости α -частицы.

Ф671. Имеется 1 л горячей воды с температурой T_1 и 1 л холодной воды с температурой T_2 . При помощи горячей воды нагревают холодную. Можно ли сделать так, чтобы окончательная температура воды, бывшей сначала холодной, стала выше температуры воды, которая была сначала горячей?

А. Кравчатый, ученик 9 кл.

Ф672. Ко вторичной обмотке включенного в сеть понижающего трансформатора с коэффициентом трансформации $K=220/127$ подключена нагрузка с сопротивлением $R_n=10$ Ом. Напряжение в сети $U=220$ В, сопротивление первичной обмотки трансформатора $R_1=3,6$ Ом, сопротивление вторичной обмотки $R_2=1,2$ Ом. Определите напряжение на нагрузке.

В. Скороваров

Решения задач

М609, М610; Ф613—Ф617

М609. а) Длины проекций выпуклого многоугольника площади S на две взаимно перпендикулярные прямые равны l_1 и l_2 . Докажите, что $S < l_1 l_2$.

б) Длины проекций выпуклого многогранника объема V на три взаимно перпендикулярные прямые равны l_1 , l_2 и l_3 . Докажите, что $V < l_1 l_2 l_3$.

в) Площади проекций выпуклого многогранника объема V на три взаимно перпендикулярные плоскости равны S_1 , S_2 и S_3 . Докажите, что $V < \sqrt{S_1 S_2 S_3}$.

Утверждения пунктов а) и б) непосредственно следуют из того, что в случае а) многоугольник содержится в прямоугольнике со сторонами l_1 и l_2 , а в случае б) многогранник содержится в прямоугольном параллелепипеде с ребрами l_1 , l_2 , l_3 .

в) Пусть π_1, π_2, π_3 — взаимно перпендикулярные плоскости, S_1, S_2, S_3 — площади проекций многогранника M на эти плоскости, а l_1, l_2, l_3 — длины проекций многогранника M на прямые $\pi_2 \cap \pi_3, \pi_1 \cap \pi_3, \pi_1 \cap \pi_2$ соответственно. $V = V(M)$ — его объем. Плоскости, параллельные π_i , будем в дальнейшем называть *горизонтальными*.

Первое решение. Справедливость неравенства

$$V < \sqrt{S_1 S_2 S_3} \tag{1}$$

для прямой призмы с горизонтальными основаниями легко следует из а): для такой призмы $S_1 < l_2 l_3, S_2 = l_1 l_3, S_3 = l_1 l_2$ и $V^2 = (S_1 l_1)^2 = S_1 \cdot S_1 l_1^2 < S_1 \cdot l_1 l_2 \cdot l_1 l_3 = S_1 S_2 S_3$.

Чтобы доказать (1) для произвольного многогранника, нам понадобится

Лемма. Пусть многогранник M разрезан горизонтальными плоскостями на n многогранников M_1, \dots, M_n . Если для каждого из них выполнено неравенство (1), то оно выполнено и для M .

Докажем лемму сначала для $n=2$. Пусть площади проекций многогранников M_1 и M_2 на плоскость π_2 равны a_1^2 и a_2^2 , на плоскость π_3 — b_1^2 и b_2^2 соответственно ($a_i > 0, b_i < 0$).

Площадь проекций M_1 и M_2 на π_1 не превосходит S_1 . Поэтому

$$V(M) = V(M_1) + V(M_2) < \sqrt{S_1} (a_1 b_1 + a_2 b_2) \leq \sqrt{S_1} \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2} = \sqrt{S_1 S_2 S_3}.$$

Неравенство

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2)^2 < (a_1^2 + a_2^2) (b_1^2 + b_2^2), \tag{2}$$

которым мы воспользовались, эквивалентно очевидному $(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 > 0$.

Доказательство леммы для любого n можно провести либо индукцией по n , либо аналогично случаю $n=2$ с использованием вместо (2) неравенства Коши («Квант», 1972, № 1)

$$(a_1 b_1 + \dots + a_n b_n)^2 < (a_1^2 + \dots + a_n^2) (b_1^2 + \dots + b_n^2). \tag{3}$$

Теперь доказательство неравенства (1) завершается так. Разрежем многогранник M на горизонтальные слои. При малой толщине слоев объемы многогранника M и объединения некоторых поставленных друг на друга призм (а также площади их соответствующих проекций) отличаются сколь угодно мало. Именно:

Пусть h — малое положительное число. Проведем достаточно густо горизонтальные плоскости (в том числе — через все вершины многогранника M) так, чтобы M оказался разрезанным на n слоев толщиной $h_i < h$ ($l_i = h_1 + h_2 + \dots + h_n$). Заклучим i -й слой в прямую призму высотой h_i с горизонтальным основанием, совпадающим с проекцией этого слоя на i -ю секущую плоскость.

Пусть M' — объединение построенных призм. Проекция M' на π_1 совпадает с проекцией многогранника M на π_1 : $S'_1 = S_1$, а площади S'_2 и S'_3 проекций M' на плоскости π_2 и π_3 не меньше площадей S_2 и S_3 соответственно и отличаются от них на сумму площадей прямоугольных треугольников, заштрихованных на рисунке 1. Эта сумма не больше $cl_1 h$, где c — наибольший из тангенсов острых углов, образуемых проекциями ребер многогранника M на плоскости π_2 и π_3 с вертикалью. Поэтому

$$V(M) < V(M') < \sqrt{S'_1 S'_2 S'_3} < \sqrt{S_1 (S_2 + cl_1 h) (S_3 + cl_1 h)}.$$

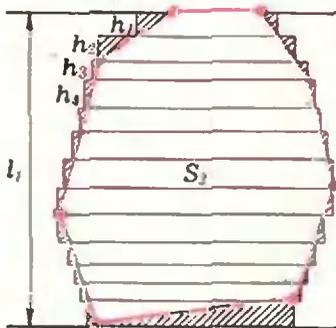


Рис. 1.

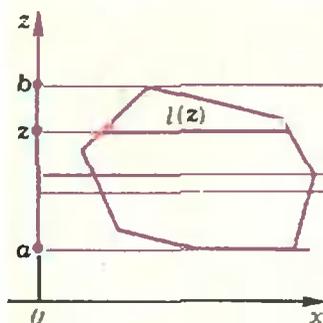


Рис. 2.

Поскольку это неравенство верно при любом h , $V < \sqrt{S_1 S_2 S_3}$.

Второе решение. Введем в пространстве прямоугольную систему координат, приняв $\pi_1 \cap \pi_2$, $\pi_1 \cap \pi_3$, $\pi_2 \cap \pi_3$ за оси Ox , Oy и Oz соответственно. Пусть $[a; b]$ — отрезок оси Oz , на который проектируется многогранник M . Через каждую точку $z \in [a; b]$ проведем горизонтальную плоскость. Пусть $S(z)$ — площадь сечения многогранника этой плоскостью, а $l_2(z)$ и $l_3(z)$ — длины проекций этого сечения на плоскости π_2 и π_3 соответственно. Можно доказать, что

$$V = \int_a^b S(z) dz. \quad (4)$$

В учебнике «Геометрия 9—10» (§ 58 и § 66) эта формула выведена для пирамиды и для тел вращения; для произвольных многогранников доказательство аналогичное. Мы еще воспользуемся формулой (докажите ее самостоятельно!)

$$S = \int_a^b l(z) dz, \quad (5)$$

где S — площадь выпуклого многоугольника, лежащего в плоскости xOz , а $l(z)$ — длина отрезка, по которому пересекается с многоугольником прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку $z \in [a; b]$ (рис. 2). Кроме того, нам понадобится интегральное неравенство Буняковского, являющееся аналогом неравенства (3):

$$\left| \int_a^b f(z)g(z) dz \right| < \sqrt{\int_a^b f^2(z) dz} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(z) dz}.$$

Мы докажем его для непрерывных функций f и g . Доказательство. Пусть $\lambda \in \mathbb{R}$. Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= \int_a^b (f(z) - \lambda g(z))^2 dz = \\ &= \lambda^2 \int_a^b g^2(z) dz - 2\lambda \int_a^b f(z)g(z) dz + \int_a^b f^2(z) dz = A\lambda^2 - 2B\lambda + C \end{aligned}$$

$$\left(A = \int_a^b g^2(z) dz, B = \int_a^b f(z)g(z) dz, C = \int_a^b f^2(z) dz \right).$$

Функция φ — квадратный трехчлен, принимающий при любых λ неотрицательные значения. Поэтому $\frac{D}{4} = B^2 - AC \leq 0$ или $B \leq \sqrt{A} \cdot \sqrt{C}$, а это и есть требуемое неравенство. (Докажите аналогично неравенство (3).)

Теперь завершим второе решение задачи.

$$V = \int_a^b S(z) dz = \int_a^b \sqrt{S(z)} \cdot \sqrt{S(z)} dz.$$

Так как $S(z) \leq S_1$ при любом $z \in [a; b]$, получаем

$$V < \sqrt{S_1} \cdot \int_a^b \sqrt{S(z)} dz.$$

В силу пункта а) $S(z) \leq l_2(z)l_3(z)$. Поэтому

$$V < \sqrt{S_1} \cdot \int_a^b \sqrt{l_2(z)} \cdot \sqrt{l_3(z)} dz.$$

Применяя интегральное неравенство Буняковского и формулу (5), получим

$$\int_a^b \sqrt{f_2(z)} \cdot \sqrt{f_3(z)} dz \leq \sqrt{\int_a^b f_2(z) dz} \cdot \sqrt{\int_a^b f_3(z) dz} = \sqrt{S_2} \cdot \sqrt{S_3},$$

так что $V < \sqrt{S_1 S_2 S_3}$.

Н. Васильев,
А. Егоров

М610. Фиксируем $k \in \mathbb{N}$.
 а) Рассмотрим множество всех наборов целых чисел a_1, \dots, a_k таких, что $0 < a_1 < a_2 < \dots < a_k < k$; обозначим число таких наборов через N . Рассмотрим среди них те, для которых $a_k = k$; пусть их число равно M . Докажите, что $N = 2M$.
 б) Наложим на рассматриваемые наборы дополнительное ограничение: сумма $a_1 + \dots + a_k$ делится на k . Пусть соответствующие числа равны N' и M' . Докажите, что $N' = 2M'$ (Из рисунка 1 видно, что при $k=3$ эти числа равны $M=10, N=20; M'=4, N'=8$.)

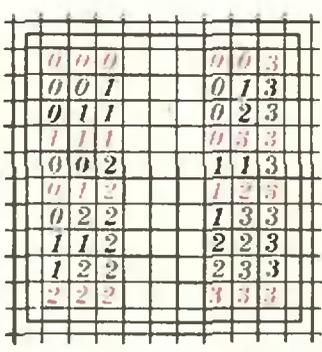


Рис. 1.

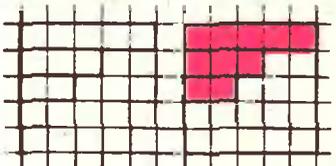


Рис. 2.

Рис. 3.

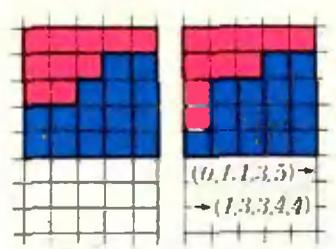


Рис. 4.

Рис. 5.

Как известно, если два множества имеют одинаковое число элементов, между ними можно установить взаимно однозначное соответствие. Собственно говоря, это и есть определение того, что в множествах элементов поровну, но этот факт иногда забывается. А между тем довольно часто равенство двух чисел устанавливается именно через взаимно однозначное соответствие подходящих множеств.

Нам нужно доказать, что наборов, в которых $a_k = k$, ровно половина. Поэтому попробуем установить взаимно однозначное соответствие между этими наборами и оставшимися теми, у которых $a_k < k$.

Сопоставить набору (a_1, a_2, \dots, a_k) набор $(a_k, a_{k-1}, \dots, a_1)$ нельзя, так как новый набор — невозрастающий. Можно попробовать сопоставить набору (a_1, \dots, a_k) набор $(k-a_k, k-a_{k-1}, \dots, k-a_1)$: он уже — невозрастающий, но $k-a_1$ не обязано быть меньше k . Поэтому это соответствие не решает задачу. (Вопрос: какую задачу решает это соответствие?)

Значит, необходимо более сложное соответствие. Для его построения нам понадобится понятие диаграммы Юнга данного набора.

Что это такое, проще всего объяснить на примере: набору $(0, 0, 2, 3, 5)$ соответствует диаграмма, изображенная на рисунке 2 — в каждой строке столько квадратиков, каково соответствующее число.

Дополним диаграмму Юнга до квадрата (рис. 3). Тогда становится ясно, что наша первоначальная идея заключалась в том, чтобы отсчитывать диаграмму не из красных, а из белых квадратиков (и, соответственно, не слева-снизу, а справа-сверху).

Попытаемся теперь дополнить рисунок 3 вертикальной диаграммой — как на рисунке 4. Отсчитывая эту диаграмму снизу-слева, получим набор $(2, 2, 3, 4, 4)$. Назовем этот набор *дополнительным* к набору $(0, 0, 2, 3, 5)$.

Еще один пример изображен на рисунке 5. Ясно, что если исходный набор (a_1, \dots, a_k) , а дополнительный — (b_1, \dots, b_k) , то $a_k = k$ тогда и только тогда, когда $b_k < k$. В самом деле, $a_k = k$, если верхняя правая клетка входит в основную диаграмму Юнга, и $a_k < k$, если она входит в дополнительную.

Установленное нами соответствие между наборами, у которых $a_k = k$, и наборами, у которых $a_k < k$, очевидно, взаимно однозначно. Тем самым мы решили а). Кроме того, сумма чисел исходного и дополнительного наборов равна k^2 (в наших примерах — 25). Поэтому сумма чисел дополнительного набора делится на k тогда и только тогда, когда делится на k сумма чисел исходного набора. Это решает б).

З а м е ч а н и е. Задача а) имеет и другое решение: можно непосредственно посчитать числа N и M . Именно:

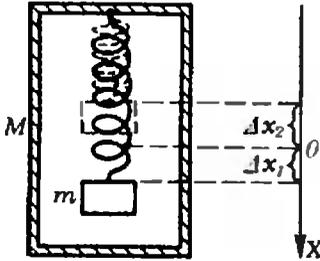
Л е м м а. Число наборов целых чисел a_1, \dots, a_m таких, что $0 < a_1 < \dots < a_m < k$, равно C_{k+m}^m .

Доказательство. Рассмотрим набор (b_1, \dots, b_m) , где $b_i = a_i + i$: $b_1 = a_1 + 1, b_2 = a_2 + 2$ и т. д. Тогда, очевидно, $1 < b_1 < b_2 < \dots < b_m < k + m$, то есть (b_1, \dots, b_m) — произвольный возрастающий набор m целых чисел их первых $k+m$ чисел. Число таких наборов равно C_{k+m}^m .

Поэтому число наборов, в которых $a_k < k$, по деиме равно C_{2k}^k . Если же $a_k = k$, то нам остается выбрать числа a_1, \dots, a_{k-1} так, что $0 < a_1 < \dots < a_{k-1} < k$; их число равно C_{2k-1}^{k-1} . Остается посчитать, что $2C_{2k-1}^{k-1}$ равно C_{2k}^k .

А. Толыго

Ф613. Коробка массы M стоит на горизонтальном столе. В коробке на пружине с жесткостью k подвешен груз массы m . При какой амплитуде колебаний груза коробка начнет подпрыгивать на столе?



Ф614. В замкнутом сосуде находился газообразный азот при комнатной температуре $t_0 = 20^\circ\text{C}$ и давлении $p_0 = 10^5$ Па. В сосуд впрыснули некоторое количество жидкого азота с температурой $t_1 = -196^\circ\text{C}$ (температурой кипения азота при нормальном атмосферном давлении). Жидкий азот быстро испарился, после чего температура в сосуде оказалась равной $t_2 = -140^\circ\text{C}$. После того как сосуд прогрелся до комнатной температуры, в нем установилось давление $p = 1,5 \cdot 10^5$ Па. Определить молярную теплоту испарения жидкого азота. Теплоемкость газообразного азота при постоянном объеме $C_V = 20,8$ Дж/(моль \cdot К).

Ф615. В случае несамостоятельного газового разряда зависимость тока I через газоразрядную трубку от напряжения U между электродами трубки имеет вид, показанный на рисунке 1. Трубка с последовательно соединенным балластным сопротивлением $R = 3 \cdot 10^5$ Ом подключена к источнику с постоянной ЭДС $\mathcal{E} = 6$ кВ. Найдите, какой ток установится через трубку и чему будет равно при этом напряжение на трубке. Внутренним сопротивлением источника пренебречь.

Так как к пружине подвешен груз массы m , в состоянии равновесия пружина растянута на величину Δx_1 (см. рисунок) такую, что $k \cdot \Delta x_1 = mg$, то есть

$$\Delta x_1 = mg/k.$$

На коробку действуют сила тяжести \vec{Mg} и сила \vec{T} реакции со стороны пружины. Сила \vec{T} равна по абсолютной величине силе упругости — $T = kx$ — и направлена вниз, когда пружина растянута, и вверх — когда пружина сжата. Коробка начнет подпрыгивать, когда сила \vec{T} начнет превышать силу Mg : $T > Mg$. В тот момент, когда $T = Mg$, сжатие Δx_2 пружины равно

$$\Delta x_2 = Mg/k.$$

Следовательно, коробка начнет подпрыгивать, когда амплитуда колебаний пружины равна

$$A = \Delta x_1 + \Delta x_2 = (M + m) \frac{g}{k}.$$

Л. Бикинина

Так как испарение жидкого азота, согласно условиям задачи, произошло быстро, теплообменом с окружающей средой можно пренебречь. Испарение впрыснутой массы азота Δm и нагрев ее от температуры t_1 до температуры t_2 происходили за счет тепла, отнятого у первоначальной массы азота m . Запишем уравнение теплового баланса:

$$C_V \frac{m}{M} (t_0 - t_2) = \frac{\Delta m}{M} [\lambda + C_V (t_2 - t_1)].$$

Отсюда находим молярную теплоту испарения жидкого азота λ :

$$\lambda = \left[\frac{t_0 - t_2}{\Delta m/m} - (t_2 - t_1) \right] C_V. \quad (*)$$

Согласно условию задачи, окончательное давление в сосуде оказалось в 1,5 раза больше начального давления p_0 при той же комнатной температуре t_0 . Это означает, что масса азота в сосуде возросла в 1,5 раза, то есть $(m + \Delta m)/m = 1,5$, и $\Delta m/m = 0,5$. Подставляя эту величину и известные из условия значения t_0 , t_1 , t_2 и C_V в выражение (*), находим

$$\lambda = 5500 \text{ Дж/моль.}$$

В. Белонучкин

Схема включения газоразрядной трубки показана на рисунке 2.

Найдем минимальное значение ЭДС источника, при котором ток через трубку будет достигать насыщения. Для этого запишем закон Ома для цепи:

$$\mathcal{E}_{\text{мин}} = U_n + I_n R,$$

где $U_n = 10^3$ В, $I_n = 10^{-6}$ А (см. рис. 1). Подставляя численные значения, находим $\mathcal{E}_{\text{мин}} = 4$ кВ.

В нашем случае ЭДС источника $\mathcal{E} > \mathcal{E}_{\text{мин}}$. Следовательно, ток через трубку равен току насыщения. Напряжение U на трубке при этом определяется условием $\mathcal{E} = U + I_n R$, откуда

$$U = \mathcal{E} - I_n R = 3 \text{ кВ.}$$

Величину тока через трубку можно определить другим способом. Предположим, что ток I в цепи меньше тока насыщения. Запишем закон Ома для этого случая:

$$\mathcal{E} = I(R_{\text{тр}} + R),$$

где $R_{\text{тр}}$ — внутреннее сопротивление трубки. Значение $R_{\text{тр}}$ находится по наклону линейного участка вольт-амперной ха-

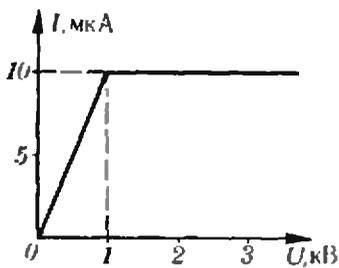


Рис. 1.

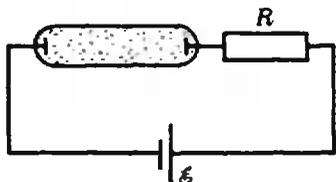


Рис. 2.

характеристики трубки (см. рис. 1):

$$R_{\text{тр}} = \frac{U_{\text{н}}}{I_{\text{н}}} = 10^8 \text{ Ом.}$$

Таким образом,

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{\text{тр}} + R} = 15 \text{ мкА.}$$

Найденное значение тока больше $I_{\text{н}}$. Следовательно, наше предположение о том, что $I < I_{\text{н}}$, неверно. Ток через трубку равен току насыщения.

В. Можжев

Ф616. Длина нити накаливания электрической лампочки равна l , а диаметр — d . Каковы длины l_1 и диаметр d_1 другой лампочки, рассчитанной на то же напряжение сети, но с вдвое большим световым потоком, если КПД обеих лампочек один и тот же?

Пусть W и W_1 — мощности, потребляемые от сети первой и второй лампами. Тогда энергии, излучаемые лампами в виде света (световые потоки), равны, соответственно, $E = \eta W$ и $E_1 = \eta W_1$, где η — КПД ламп.

В состоянии равновесия мощность W (W_1), получаемая лампочкой от сети, должна быть равна мощности P (P_1), излучаемой лампочкой в виде света и тепла. Мощность P (P_1), очевидно, пропорциональна площади S (S_1) поверхности нити и некоторой функции температуры $f(T)$ ($f(T_1)$). Следовательно,

$$P = W = k_1 S f(T), \quad W_1 = k_1 S_1 f(T_1),$$

где k_1 — коэффициент пропорциональности. Световой поток, излучаемый лампочкой, также пропорционален площади поверхности нити и некоторой (уже другой) функции температуры:

$$E = k_2 S \varphi(T), \quad E_1 = k_2 S_1 \varphi(T_1).$$

И так как $E = \eta W$, то

$$k_2 \varphi(T) = \eta k_1 f(T), \quad k_2 \varphi(T_1) = \eta k_1 f(T_1).$$

Из этих равенств видно, что КПД лампочки определяется температурой нити. Следовательно, при одинаковых КПД двух лампочек температуры их нитей накала одинаковы, то есть $T_1 = T$. Это означает, что

$$\frac{E_1}{E} = \frac{k_2 S_1 \varphi(T)}{k_2 S \varphi(T)} = \frac{S_1}{S} = \frac{d_1 l_1}{d l}.$$

По условию задачи $E_1 : E = 2$, то есть

$$\frac{d_1 l_1}{d l} = 2. \tag{1}$$

При напряжении в сети U

$$E = \eta W = \eta \frac{U^2}{R}, \quad E_1 = \eta W_1 = \eta \frac{U^2}{R_1},$$

где $R = \rho \frac{4l}{\pi d^2}$, $R_1 = \rho \frac{4l_1}{\pi d_1^2}$ — сопротивления нитей ламп (ρ — удельное сопротивление материала нитей при температуре работы ламп). Следовательно, $\frac{E_1}{E} = \frac{l d_1^2}{l_1 d^2}$, и согласно условию,

$$\frac{l d_1^2}{l_1 d^2} = 2. \tag{2}$$

Решая совместно уравнения (1) и (2), находим

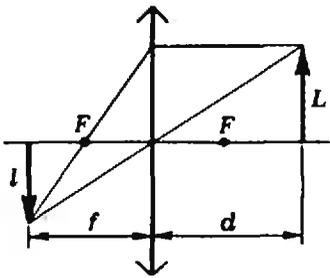
$$l_1 = l \sqrt{2}, \quad d_1 = d \sqrt{4}.$$

И. Слободецкий

Ф617. Газетный текст фотографируется аппаратом «Зенит» с объективом, имеющим фокусное расстояние 50 мм, дважды:

1) с наименьшего допустимого для этого объектива расстояния $a = 0,5$ м;

2) после присоединения объектива к камере через удлинительное кольцо высотой $h = 25$ мм (также с минимально возможным расстоянием). Найдите отношение размеров изображений, полученных на фотопленке в этих двух случаях.



Для решения задачи воспользуемся формулой линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F},$$

где d — расстояние от фотографируемого предмета до объектива, f — расстояние от объектива до изображения, F — фокусное расстояние объектива (см. рисунок).

При фотографировании текста в первом случае (без удлинительного кольца) $d_1 = a$, и резкое изображение получается на расстоянии

$$f_1 = \frac{aF}{a-F}.$$

Линейный размер изображения в этом случае равен (см. рисунок).

$$l_1 - L \frac{f_1}{a} = L \frac{F}{a-F}.$$

При присоединении объектива к камере через удлинительное кольцо высотой h резкое изображение текста получается на расстоянии

$$f_2 = f_1 + h = \frac{aF}{a-F} + h$$

от объектива. Минимально возможное расстояние от объектива, на котором может находиться при фотографировании текст, в этом случае равно

$$d_2 = \frac{f_2 F}{f_2 - F} = \frac{(aF + h(a-F)) F}{F^2 + h(a-F)}.$$

Размер изображения в этом случае

$$l_2 = L \frac{f_2}{d_2} = L \left(\frac{F}{a-F} + \frac{h}{F} \right).$$

Таким образом, отношение размеров изображений, полученных на фотопленке в двух случаях, равно

$$\frac{l_2}{l_1} = \frac{h(a-F)}{F^2} + 1 = 5,5.$$

В. Дерябкин

Неоконченная криптограмма

Перед вами криптограмма, которую можно прочесть с помощью некоторой решетки (что это такое, вы узнаете, прочтав статью «Самосовмещения квадрата и тайнопись» на с. 31), накладывая ее по-

е	м	ы	в	л	е	о	р
г	б	н	а	и	о	я	л
ч		о	о	в	л		е
е	ь		м		в	а	ш
	г	р	е	х	в		о
и	о		л		о	о	м
в	е	е	д	б	а		г
р		а		о		ж	б

следовательно 4 раза (каждый раз — с поворотом на 90°). В зашифрованном в ней сообщении букв меньше, чем клеток квадрата, так что некоторые его клетки оказываются «лишними». Здесь все «лишние» клетки оставлены пустыми.

Расшифруйте зашифрованное сообщение.

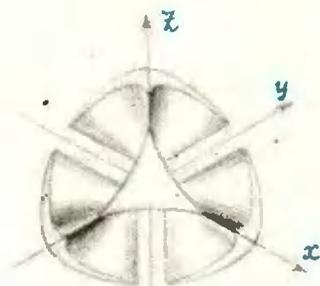
Э. Ректин

Видоизменение поверхности Штейнера

На обложке первого номера «Кванта» за этот год был напечатан чертеж поверхности Штейнера, выполненный ЭВМ. В заметке по этому поводу читателям было предложено нарисовать и описать поверхности, получающиеся из поверхности Штейнера заменой нуля в правой части ее уравнения на $\pm 0,001$, то есть поверхности

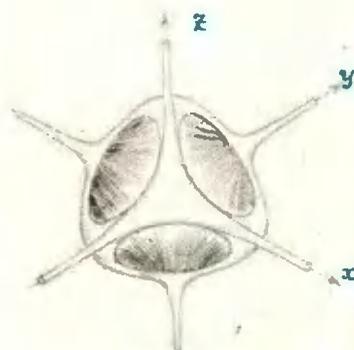
$$x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + xyz = \pm 0,001.$$

Десятиклассник Олег Мороров из Челябинска прислал нам свои чертежи (см. рисунки 1 и 2) и такое описание поверхностей: Поверхность $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + xyz = 0,001$ — двусторонняя, незамкнутая, так как имеет



$$x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + xyz = -0,001.$$

Рис. 1.



$$x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + xyz = 0,001.$$

Рис. 2.

около координатных осей «выросты», уходящие в бесконечность. Сечения поверхности координатными плоскостями представляют из себя гиперболы (всего 12 ветвей). «Впадины» на поверхности не соприкасаются друг с другом и с координатными осями (...).

Поверхность $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + xyz = -0,001$ состоит из четырех конгруэнтных замкнутых непересекающихся частей, которые также не пересекаются ни с одной координатной плоскостью. «Впадины» на ней как бы пересекают друг друга и в местах пересечения исчезают.

параметр, момент перехода «через нуль», в который и появляется поверхность Штейнера, любопытен. В этот момент «исчезают» бесконечные «выросты» и поверхность распадается на четыре плоскости.

Но надо внести некоторое уточнение: четыре части, на которые распадается поверхность при $T < 0$, — гладкие, у них нет ребер, изображенных на Вашем рисунке. Нет и ребер, отделяющих «впадины» от остальной поверхности для $T > 0$. Поперечные сечения «выростов» при достаточном удалении от начала координат приближа-

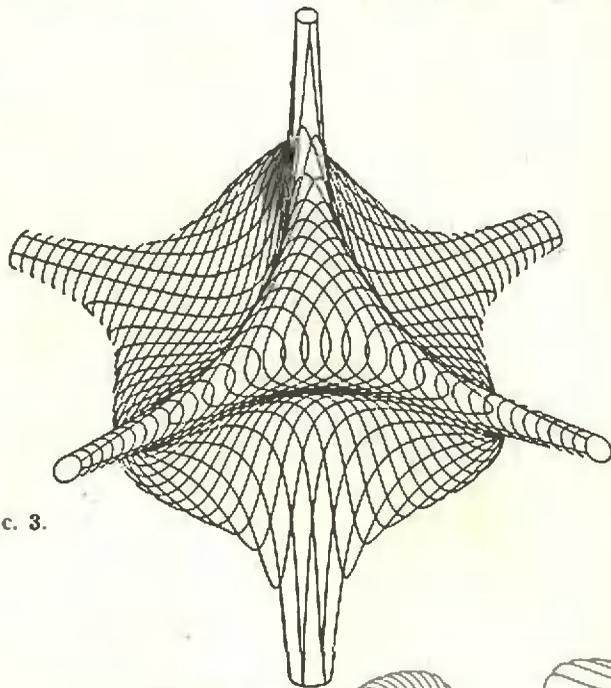


Рис. 3.

Редакция обратилась к автору заметки Ю. Котову с просьбой прокомментировать это письмо. Юрий Владимирович в свою очередь обратился к своему коллеге, компьютеру ЕС-1022, с просьбой нарисовать нужные поверхности. В результате компьютер представил два чертежа (рисунки 3 и 4), а автор заметки ответил нашему читателю так:

• Дорогой Олег, Вы, в основном, правильно представляете себе поверхности, о которых идет речь, и достаточно убедительно их изобразили, подметив их основные геометрические свойства. По нашему мнению, если рассмотреть изменяющуюся во времени поверхность $x^2y^2 + x^2z^2 + y^2z^2 + xyz = T$, где T —

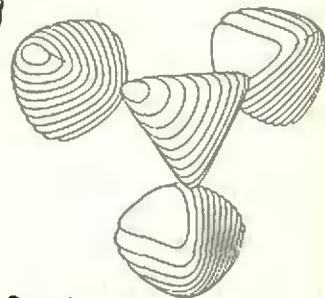


Рис. 4.

ются не к четырем окружностям, а к четырем эллипсам.

На рисунках 3 и 4 представлены машинные изображения поверхности данного вида при $T > 0$ и $T < 0$, но в немного измененном ракурсе по сравнению с рисунками 1 и 2.

Ю. Котов

Задачи

1. Заполните клетки нарисованного квадрата натуральными числами так, чтобы суммы чисел по каждой строке, каждому столбцу и диагоналям квадрата были одинаковыми (такие квадраты называются *магическими*) и равнялись 1980.

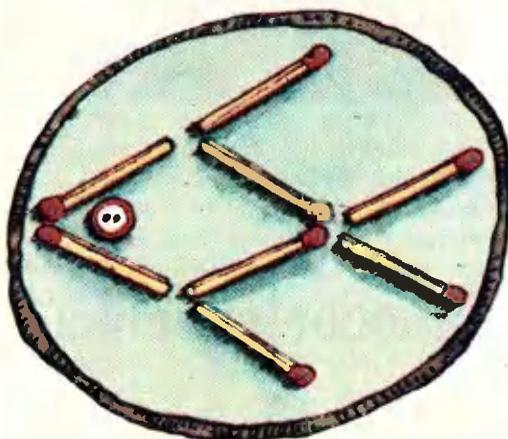
2. Что это за цифра, приписав которую в конце произвольного натурального числа, мы получим то же число, сложенное с этой цифрой и произведением данного числа на эту цифру?

3. Возьмите восемь спичек и пуговицу и сложите из них рыбку, как показано на рисунке. А теперь переложите три спички и пуговицу так, чтобы рыбка выглядела точно так же, но плыла в противоположном направлении.

4. По кругу записано больше трех натуральных чисел, сумма которых равна 37. Известно, что суммы любых трех последовательных чисел равны между собой. Какие числа записаны по кругу?

5. В будильнике, кроме часовой и минутной стрелок, есть еще стрелка звонка. Один часовщик устроил механизм, с помощью которого эта стрелка начала равномерно двигаться так, что все время делила пополам угол между часовой и минутной стрелками.

Сколько оборотов сделает такая стрелка за сутки?



Эти задачи нам предложили А. Бабоян, Ф. Бартечев, С. Белый, А. Кабризок, А. Савин



*М. Зельманзон,
Л. Хлабыстова*

Самосовмещения квадрата и тайнопись

— Сегодня мы будем решать необычную задачу, — сказал учитель, прикрепляя к доске таинственный квадрат (рис. 1). — Попробуйте прочитать записку, зашифрованную в этом квадрате.

— Наверное, надо читать буквы через одну, — сказал с задней парты Володя.

— Нет, так ничего не получится, — возразил Витя.

— Может быть, надо читать буквы по столбцам? — неуверенно предложила Катя.

Ребята загудели, каждый предлагал свой способ, но ни одно из предложений не помогло прочесть записку.

Учитель улыбался, стоя у доски. Наконец, он сказал:

— Гайну способа написания этой записки, то есть шифр, которым пользовался ее автор, нам поможет разгадать вот эта решетка — квадрат с вырезанными «окошками» (рис. 2).

Учитель совместил решетку с таинственным квадратом.

— «Мы овладели способ» — прочитали шестиклассники.

— А что же дальше? Это же не все, — раздалось сразу несколько голосов.

Учитель повернул решетку вокруг центра квадрата на 90° по часовой стрелке. Ребята продолжали читать записку. Затем он снова повернул решетку на 90°, а потом еще раз.

о	м	о	ы	л	м	о	в
а	и	т	р	в	с	ь	а
л	з	а	и	с	р	д	б
а	я	у	е	б	е	д	о
ю	л	т	р	е	п	к	а
с	м	э	и	п	п	у	о
м	т	о	л	н	а	с	й
н	ь	о	о	з	!	о	б

Рис. 1.

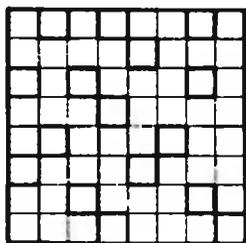


Рис. 2.

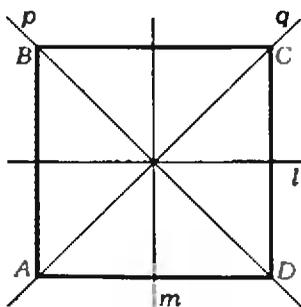


Рис. 3.

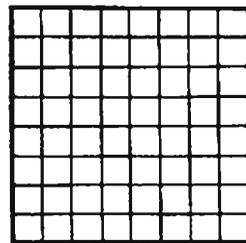


Рис. 4.

— «Мы овладели способом разработки тайнописи. Будем пользоваться ею разумно!» — прочитали ребята.

— Ура!

— Как все просто! — зашумели они.

Улыбка сошла с лица учителя.

— Нет, это еще не решение проблемы, — сказал он. — Вы же еще не овладели способом разработки тайнописи! Если я не дам вам этой решетки, то вы больше ни разу не сможете ни прочесть, ни написать записку, зашифрованную подобным способом.

Зазвенел звонок.

— Те, кто в самом деле хотят разобраться в тайнописи, пусть приходят на занятие математического кружка.

Класс явился на занятие в полном составе.

— Вспомните задачу, которую мы решали недавно, — начал учитель. *Сколько существует самосовмещений квадрата ABCD* (то есть таких перемещений плоскости, при которых квадрат переходит в себя)? Поскольку при самосовмещениях квадрата его вершины должны переходить в вершины, таких самосовмещений восемь: вершина A переходит в одну из четырех вершин, в каждом из четырех случаев для B есть две возможности (рис. 3); например, если A переходит в A , то B переходит в B или в D ; если же A переходит в B , то B переходит в C или в A ; и т. д. Получается восемь самосовмещений — тождественное отображение, три поворота вокруг центра квадрата: R^{90° , R^{180° (центральная симметрия), R^{270° — и четыре осевые симметрии (рис. 3): S_b , S_m и S_q .

Как производится шифровка?

Возьмем «пустой» квадрат 8×8 (рис. 4) и такого же размера *решетку* — квадрат, в котором некоторые клетки вырезаны (пример решетки — на рисунке 2). Наложим решетку на квадрат. В клетки, находящиеся под «окошечками», впишем начало сообщения, которое мы хотим зашифровать. Затем применим к квадрату-решетке некоторое самосовмещение. Если решетка изготовлена «хорошо», клетки квадрата, находившиеся под «окошечками» в первый раз, закроются и под «окошечками» окажутся новые клетки. Впишем в них продолжение шифруемого сообщения. Затем поставим решетку в первоначальное положение и применим к ней другое самосовмещение. И так далее.

При «дешифровке» мы накладываем решетку на «заполненный» квадрат (пример — на рисунке 1) и, применяя последовательно те же самосовмещения, которые применялись при шифровании, читаем «по кускам» зашифрованное сообщение.

Каждая конкретная решетка изготавливается для некоторого конкретного набора (упорядоченного!) самосовмещений. Например, решетка на рисунке 2, которую мы применяли на уроке, изготовлена для набора $R^{270^\circ} = R^{-90^\circ}$ (ведь мы поворачивали решетку по часовой стрелке), $R^{180^\circ} = R^{-180^\circ}$, $R^{90^\circ} = R^{-270^\circ}$.

Чтобы — при шифровании или при дешифровке — решетку применить, надо, конечно, знать «ее» набор самосовмещений.

Любые ли решетки годятся для шифрования?

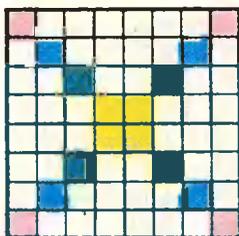


Рис. 5.

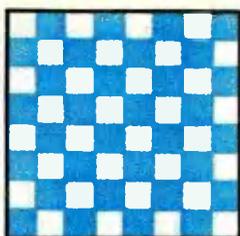


Рис. 6.

1	2	3	4	13	9	5	1
5	6	7	8	14	10	6	2
9	10	11	12	15	11	7	3
13	14	15	16	16	12	8	4
4	8	12	16	16	15	14	13
3	7	11	15	12	11	10	9
2	6	10	14	8	7	6	5
1	5	9	13	4	3	2	1

Рис. 7.

К шифровальным решеткам естественно предъявить следующее требование: если решетка наложена на квадрат всеми «ее» способами, то каждая клетка квадрата оказывается в какой-то момент под «окошечком», причем — по одному разу. Будем рассматривать только такие решетки. А тогда мы сможем сразу сделать два вывода.

При каждом из восьми самосовмещений квадрата клетки, закрашенные на рисунке 5 одинаковым цветом, переходят в себя. Поэтому в каждой решетке на двух диагоналях вместе должны быть вырезаны ровно 4 клетки — по одной клетке каждого цвета на рисунке 5.

Кроме того, в набор самосовмещений, соответствующий любой решетке, не может входить больше трех самосовмещений, отличных от тождественного. Можно, конечно, изготовить решетку для одного самосовмещения (тождественное са-

мосовмещение мы каждый раз подразумеваем); тогда в решетке должно быть 32 вырезанные клетки (например, для каждого из самосовмещений R^{90° , R^{270° , S_1 и S_m годится «шахматная» решетка — см. рисунок 6). А для двух самосовмещений — нельзя, потому что 64 не делится на 3. При максимальном числе — при трех самосовмещениях — вырезанных клеток должно быть $\frac{64}{4} = 16$ (см. например, рис. 2).

Для набора R^{270° , R^{180° , R^{90° существует 16^4 решеток! Попробуйте сообразить, почему. (У к а з а н и е. См. рис. 7.)

Задачи

1. Постройте решетку для набора
 - а) R^{180° , S_1 , S_m ;
 - б) R^{180° , R^{270° , S_1 .
2. Докажите, что нельзя построить решетку для набора, включающего
 - а) R^{180° , S_p ;
 - б) R^{180° , S_q ;
 - в) S_p , S_q .

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии читателей, приславших правильные решения задач М601—М615 и Ф603—Ф617 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Почти все читатели, приславшие решения задач М601—М615, успешно справились с задачами М601—М603, М606, М611, М612. Остальные задачи правильно решили: Н. Абдрафикова (Белорецк) 13, 14; Э. Абдуллаев (Масаллы) 13, 14; А. Акоюн (Ереван) 07;

В. Алексеев (Москва) 07, 13; М. Алексеев (Москва) 14; И. Альтерголт (Алма-Ата) 07; Д. Андриенко (Коростень) 14; М. Арасланов (Запорожье) 10, 13; А. Ашпатов (Ангарск) 13; Я. Базаля (Донецк) 14; А. Балацкий (Львов) 05, 10; А. Барг (Николаев) 07, 13—15; Б. Бегун (Москва) 05; А. Белозеров (Одесса) 07, 13; Ю. Белоцерковский (Минск) 13, 14; В. Бережной (Киев) 10, 13, 14; Ю. Беспалов (Шостка) 13; В. Бобов (Ленинград) 13; А. Болдырихин (Могилев-Подольский) 13, 14; А. Брудный (Ярославль) 13, 14; Э. Вайслеб (Киев) 14; С. Волков (Алма-Ата) 07, 13; С. Волосивец (Саратов) 13; С. Вулкова (Алма-Ата) 14; М. Габриелян (Ереван) 07; М. Гайсинский (Ташкент) 04, 13; М. Гапонова (Горький) 13; В. Гешкенбейн (Москва) 13; Э. Гунашвили (Тбилиси) 13; М. Гликман (Книшнев) 13, 14; С. Горшков (Москва) 13, 14; Е. Горшкова (Пермь) 13, 14; Д. Гоцко (Львов) 14; А. Григорьян (Ленинград) 14; С. Гульчук (Киев) 14; И. Гусейнов (Саатлы) 14; В. Денисов (Москва) 13; С. Дипчик (Ташкент) 13; А. Дмитриева (Ленинград) 13; О. Дранко (Киев) 13, 14;

А. Ермолин (Петрозаводск) 04, 05; О. Ерошкин (Днепропетровск) 04, 07; И. Жуков (Ленинград) 14; Б. Зальцман (Хабаровск) 14; М. Заплетин (Алма-Ата) 07; М. Захаров (Щелково) 14; А. Зега (Минск) 13, 14; А. Зильберберг (Кременчуг) 14; А. Золотых (Курск) 14; П. Зусманович (Алма-Ата) 14; И. Зябрев (Кролевец) 14; З. Ибрагимов (Масаллы) 13—15; Т. Иванов (Плевен, НРБ) 04; В. Ивлев (Донецк) 14; Ю. Ильясов (Сназань) 14; А. Искандеров (с. Ньюсньюс АзССР) 14; А. Кагарманов (Белорецк) 07; А. Калашников (Артемовск Донецкой обл.) 13, 14; Д. Камунтаицус (Вильнюс) 13, 14; А. Каплан (Сумгаит) 04, 10, 13; Е. Карзова (Ленинград) 13; А. Карпович (Киев) 14; Н. Качан (д. Якимовка Минской обл.) 13, 14; С. Ким (бектемир) 13, 14; Л. Киричук (с. Мошурово Черкасской обл.) 14; З. Коза (Еленя-Гура, ПНР) 13; И. Колпаков (Сочи) 13; И. Компанейцев (Алма-Ата) 13; О. Кондратьева (Ташкент) 14; А. Корнилов (Ростов-на-Дону) 14; Д. Короткин (Ленинград) 0, 4, 0, 8, 13, 14; А. Коротков (Горький) 13, 14; А. Крапиди (Рустави) 13; О. Крижановский (Харьков) 10; Е. Кузнецов (Ижевск) 07, 08; П. Курасов (Ленинград) 13, 15; О. Кушнир (Киев) 13; А. Левик (Ленинград) 05, 07, 08, 10; А. Лейцин (Чернигов) 13, 14; В. Лихачев (Львов) 13; О. Лысенко (Минусинск) 14; О. Любель (Орша) 14; О. Малов (Казань) 13; А. Мамедов (Саатлы) 13, 14; С. Мамедов (Баку) 13; В. Мангазеев (Кемерово) 13, 14; С. Матюшов (Вологда) 13; Е. Мельничук (с. Черноводы Хмельницкой обл.) 13, 14; Л. Мерквявичус (Лентварис) 04, 05, 13, 14; А. Мильман (Одесса) 13, 14; Э. Мирзоян (Ереван) 07; С. Морейно (Москва) 04, 07, 09, 13, 14; Ю. Назаренко (Киев) 07, 10, 13—15; А. Наурызбаев (Алма-Ата) 07; А. Николаевский (Харьков) 14; А. Никонов (Кировград) 13—15; Л. Новик (Гродно) 14; П. Овчинников (Вязники) 13, 14; А. Одесский (Ташкент) 04, 13; М. Окроян (Ереван) 08, 13, 14; А. Ошемков (Фрязино) 13; Н. Пендюрич (Пенза) 13; Г. Перельман (Ленинград) 08, 13, 14; В. Подстригач (Львов) 04; И. Пиковский (Киев) 10; А. Поезд (Москва) 10, 13, 14; Е. Поляков (Калининград) 13, 14; Ю. Прохоров (Москва) 13, 14; В. Радченко (Киев) 04, 10, 14; О. Райчев (Киев) 13; П. Ремидько (Ангарск) 07, 10, 14; В. Романюк (с. Куснише Волынской обл.) 13; Б. Рублев (Киев) 07, 08, 10; Н. Сайгина (Саратов) 13, 14; Э. Салимов (Кировабад) 13; М. Салтанов (Москва) 07; М. Свердликов (Новосибирск) 07, 13; В. Светлицкий (Запорожье) 10; И. Скрипник (Ивано-Франковск) 14; М. Слинкин (Москва) 13; А. Смирнов (Курган) 13, 14; А. Соловьев (Ленинград) 07, 08, 13, 14; А. Спивак (Стерлитамак) 07, 13, 14; С. Спичак (Припять) 07, 13—15; А. Сромин (Ленинград) 13, 14; Э. Степанян (Баку) 07, 13; А. Сыкса (Киев) 13, 14; Ю. Талденко (Сумы) 13, 14; Д. Талис (Свердловск) 13; С. Тимофеев (с. Саханка Донецкой обл.) 13, 14; С. Ткаченко (Могилев-Подольский) 13, 14; К. Томилин (Москва) 14; Ю. Торхов (Ижевск) 14; Ю. Трофимчук (Калиновка Винницкой обл.) 14; Р. Угриновский (Хмельник) 13; В. Ушаков (Харьков) 13, 14; Н. Федин (Омск) 13, 14; Я. Фельдман

(Киев) 07, 13; О. Фонарев (Сумгаит) 07, 13, 14; С. Фурсаев (Таллин) 14; А. Харитонский (Киев) 04, 13, 14; В. Харченко (Новосибирск) 13; А. Хилков (Новомосковск Тульской обл.) 13, 14; С. Хомич (Ангарск) 07, 13; С. Хосид (Алма-Ата) 14; А. Хохлов (Москва) 14; И. Хускутдинов (Термез) 07, 13; В. Цекановский (Донецк) 10; И. Цимох (Кировград) 14; В. Цолов (Панагюрище, НРБ) 13, 14; О. Чалых (Витебск) 13, 14; А. Чернышов (Москва) 08; А. Чистоклетов (п. Муллово Ульяновской обл.) 14; С. Шаратов (Ташкент) 13, 14; Н. Шаромет (Москва) 08, 10; В. Шах (с. Замшаны Волынской обл.) 13, 14; И. Швецов (Петропавловск) 13, 14; З. Шибзухов (Нальчик) 04; Ю. Шиккарь (Киев) 13; А. Шиханян (Джермук) 14; А. Шухат (Одесса) 14; А. Элькун (Ташкент) 13, 14; А. Эпремидзе (Тбилиси) 13; М. Эскеров (Хасавюрт) 14; Ф. Эфендиев (Баку) 13, 14; В. Юдаков (п. Армянск) 04, 05, 08, 10, 13, 14; И. Ядешко (Гродно) 14; В. Яковлев (Пермь) 14; Г. Ямурзин (Уфа) 13; К. Янакиев (Ямбол, НРБ) 13; А. Яшпатов (Ангарск) 07.

Физика

Почти все читатели, приславшие решения задач Ф603—Ф617, справились с задачами Ф603, Ф605, Ф613—Ф615. Остальные задачи правильно решили: А. Авакьянц (Донецк) 6, 7, 9, 11, 12; В. Аветисов (Баку) 6—9, 11, 12; М. Агапова (Мурманск) 17; И. Алашуллин (Москва) 16; В. Аксенов (Великие Луки) 7; З. Али-Заде (Баку) 11; И. Аполонский (Жуковский) 7; Л. Арушанов (Баку) 11; А. Бабаев (Баку) 7, 11; Р. Бабаев (Баку) 7—9, 11; О. Бабий (Киев) 16, 17; П. Байков (Балашиха) 17; О. Барабаш (Киев) 9, 11, 12; Л. Белянский (Светловодск) 17; В. Бережной (Киев) 4, 6—9, 11, 12, 17; А. Бессарабский (п. Запрудня Московской обл.) 4, 6—9, 11, 12; И. Бессонов (Реутов) 4, 6, 7, 9, 11; А. Божко (Алма-Ата) 16, 17; А. Бойко (Киев) 8, 9, 17; С. Боханов (Новополонк) 7, 11, 12; Л. Брагинский (Киев) 4, 9, 11, 12; Е. Буторин (Казань) 12; С. Вагнер (Джезказган) 11, 12; В. Васильев (Великие Луки) 4, 6; 8—12, 17; И. Вакшин (Иваново) 16; В. Вачев (Ямбол, НРБ) 8, 9, 16; Б. Вейцман (Одесса) 4, 6, 11, 12; Ю. Вовкягон (п. Любеч Черниговской обл.) 17; С. Вовник (Харьков) 17; Е. Войтенко (Киев) 9, 11, 17; В. Воропа (Славянск) 11, 12, 17; Р. Вырбанов (Тервел, НРБ) 16, 17; Е. Выродов (Подольск Московской обл.) 4, 6—9, 11, 12; А. Габриелян (п. Мартуня АзССР) 16, 17; Г. Гаев (Саратов) 7, 9, 11, 12; И. Галич (Москва) 4, 7, 9, 11, 12, 16, 17; Е. Гасимова (п. Ярдымлы АзССР) 12; С. Голощапов (Запорожье) 6, 9, 11, 12, 17; В. Горбунов (Коммунарск) 4, 7—9, 12; А. Градинер (Баку) 11, 12; А. Григоренко (Макеевка Донецкой обл.) 7—9, 11, 12, 16, 17; Д. Григорьев (Москва) 4, 6—10, 12, 16, 17; И. Губин (Ереван) 4, 8, 11; Г. Гунромский (Минск) 16, 17; А. Гусев (Киев) 9, 11, 12; И. Даниловский (Горький) 4, 6—9, 12; В. Дворцовой (Липецк) 7, 9, 11, 16, 17; В. Дегтярь (Донецк) 17; И. Дерebas (Магнитогорск) 17; А. Долинин (Владимир) 16, 17;

(Продолжение см. на с. 44)

Ю. Иванов

Сколько вариантов?

Здесь продолжается изучение комбинаторных задач по программе факультатива для IX класса, начатое в предыдущем номере.

Во всех разобранных в предыдущей статье задачах (и предложенных вам для решения упражнениях) для получения ответа требовалось лишь одно арифметическое действие — умножение. Покажем, в каких случаях для подсчета числа вариантов применяются другие арифметические действия.

Вычитание и сложение

Задача 1. Сколько имеется четырехзначных чисел, в десятичной записи которых встречаются одинаковые цифры?

Решение. Действуя по той же схеме, что и в предыдущей статье, разобьем построение четырехзначного числа на четыре шага: выбор первой, второй, третьей, четвертой цифр. На первом шаге у нас 9 возможностей, на втором и третьем шагах — по 10 возможностей. Но число вариантов осуществления четвертого шага зависит от результата первых трех шагов: если среди первых трех цифр были равные, то на четвертом шаге у нас 10 возможностей, если же первые три цифры были различными, то в качестве четвертой цифры мы обязаны взять одну из этих цифр, и, следовательно, у нас будет на этом шаге лишь три возможности.

Таким образом, правило произведения здесь не применимо. Не поможет и перестановка шагов: мы все равно встретимся с такой же трудностью. Однако вспомним, что в начале предыдущей статьи мы решили задачу, противоположную разбираемой, — нашли число четырехзначных чисел, в которых нет одинаковых цифр. Вычитая это число (оно равно $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536$) из числа всех четырехзначных чисел (оно равно $9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000$) мы получим, что число четырехзначных чисел, удовлетворяющих условию задачи, равно $9000 - 4536 = 4464$.

Упражнения

1. Сколько имеется шестизначных чисел, в записи которых хотя бы одна цифра четна?

2. Сколько имеется перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в которых хотя бы одна из первых трех цифр делится на 3?

Задача 2. Сколько имеется натуральных чисел, меньших 10^5 , в десятичной записи которых соседние цифры различны?

Решение. Если разбить построение такого числа на шаги, на каждом из которых выбирается одна цифра, то для разных чисел число шагов будет разным. Вместе с тем с помощью правила произведения нетрудно найти по отдельности число однозначных, двузначных, трехзначных, четырехзначных и пятизначных чисел, удовлетворяющих условию задачи: $9, 9^2, 9^3, 9^4, 9^5$. Значит, всего есть $9 + 9^2 + 9^3 + 9^4 + 9^5 = 66429$ натуральных чисел, меньших 10^5 , с различными соседними цифрами.

Упражнения

3. Алфавит состоит из 10 букв. Назовем *цепочкой* любую последовательность букв этого алфавита, в которой никакая буква не встречается три раза подряд. Сколько имеется цепочек, состоящих не более чем из четырех букв?

4. Сколько имеется шестизначных чисел, в которых четные и нечетные цифры чередуются?

В задаче 2 и упражнениях 3, 4 не удастся непосредственно применить правило произведения. В каждой из этих задач множество пере-

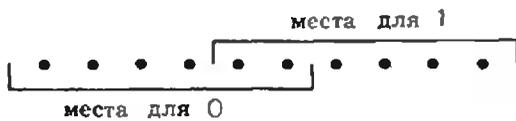


Рис. 1.

считываемых предметов удастся разбить на несколько частей таким образом, что для подсчета числа элементов в каждой из этих частей уже можно применить правило произведения. Сложив получившиеся числа, мы находим решения этих задач.

Задача 3. Сколько имеется перестановок из цифр 0, 1, 2, ..., 9, в которых цифра 0 занимает одно из первых шести мест, а цифра 1 — одно из шести последних мест (рис. 1)?

Решение. Если мы сначала выберем место для нуля, затем — место для единицы, а после этого расставим на оставшихся восьми местах остальные восемь цифр, то на втором шаге число возможностей будет зависеть от решения, принятого на первом шаге; именно, если на первом шаге мы поставим цифру 0 на одно из первых четырех мест, то место для единицы мы сможем выбрать шестью способами; если же цифра 0 займет пятое или шестое место, то для единицы будет лишь пять возможных мест. Поэтому с самого начала разобьем множество всех перестановок, удовлетворяющих условию задачи, на два подмножества: перестановки, в которых цифра 0 занимает одно из первых четырех мест, и перестановки, в которых эта цифра занимает пятое или шестое место. Число элементов в каждом из этих подмножеств легко подсчитывается с помощью правила произведения: $4 \cdot 8! = 24 \cdot 8!$ и $2 \cdot 5 \cdot 8!$. Ответ: $24 \cdot 8! + 10 \cdot 8! = 34 \cdot 8!$.

Упражнения

5. Сколько имеется четных шестизначных чисел, в десятичной записи которых все цифры различны?

6. Сколько имеется перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, удовлетворяющих условию
а) цифры 0 и 1 стоят рядом, а цифры 1 и 2 не стоят рядом;

б) между цифрами 0 и 1 стоят три другие цифры, а между цифрами 1 и 2 — две другие цифры?

7. Сколько имеется функций f , удовлетворяющих следующим условиям: область определения функции f — множество $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, каждое значение функции f принадлежит множеству $\{1, 2, 3, 4\}$, число $f(5)$ делится без остатка на $f(3)$?

Деление

Четвертое арифметическое действие тоже бывает полезным при решении комбинаторных задач.

Задача 4. Сколькими способами можно рассадить 12 человек за круглым столом, если за столом 12 стульев?

Решение. Число различных расположений 12 человек на 12 местах, то есть число перестановок этих двенадцати человек, равно $12!$, независимо от того, где эти стулья находятся, — за столом, или у стены, или где-нибудь еще. Зачем в таком случае в задаче отмечается, что стулья стоят именно за круглым столом? В задаче 4 — ни за чем. Но круглый стол позволяет дать естественные «варианты» задачи.

А. Если для каждого человека важно не место, которое он занимает за столом, а лишь то, кто является его соседом справа и кто является его соседом слева, то два расположения следует отождествить, если при переходе от одного из этих расположений к другому у каждого из сидящих за столом не меняется ни сосед справа, ни сосед слева.

Б. Если для каждого человека важно лишь то, кто является его соседями (и не важно, кто из этих соседей сидит справа, а кто — слева), то два расположения следует отождествить, если каждый из сидящих за столом имеет в обоих случаях одних и тех же соседей.

В. Если для каждого человека важно лишь то, кто сидит напротив него, то два расположения нужно отождествить, если любые два человека, занимающие диаметрально противоположные места при одном расположении, занимают также диаметрально противоположные места при другом расположении.

Перейдем к варианту **А**. Разобьем все $12!$ расположений на группы, относя к одной группе те и только те расположения, которые нужно отождествить. Число получаемых та-

ким образом группы и есть ответ задачи. Чтобы его найти, выясним сначала, сколько расположений окажется в одной группе. Выберем произвольную такую группу и рассмотрим расположения, которые в нее попали. У каждого человека во всех этих расположениях фиксирован сосед справа и сосед слева. Поэтому, чтобы построить произвольное расположение из данной группы, достаточно указать человека, который займет стул № 1 (и в этом варианте задачи, и в вариантах Б и В будем считать, что стулья занумерованы по кругу числами от 1 до 12), после чего места остальных людей определятся уже однозначно. Так как на место № 1 можно посадить любого из 12 человек, каждая группа составлена из 12 расположений. Чтобы найти теперь число групп, остается разделить общее число расположений на число расположений в одной группе: $\frac{12!}{12} = 11!$

Разберем теперь вариант Б. И здесь мы разобьем все $12!$ расположений на группы так, чтобы два расположения попали в одну группу в том и только в том случае, когда их нужно отождествить. Выберем какую-нибудь группу и подсчитаем, сколько в ней расположений. Так как у каждого человека в этих расположениях постоянные соседи, произвольное расположение из данной группы можно построить в два шага: сначала выберем человека, который займет стул № 1 (12 возможностей), затем решим, кто из двух его соседей займет место № 2 (2 возможности), после чего места остальных десяти человек определятся «по цепочке» однозначно. В соответствии с правилом произведения каждая группа состоит из 24 расположений и, следовательно, число групп равно $\frac{12!}{24} = \frac{11!}{2}$.

И, наконец, в варианте В, как и в предыдущих вариантах, подсчитаем, сколько расположений оказалось в одной группе этого варианта. Пусть во всех расположениях из этой группы A должен сидеть напротив A' , B — напротив B' , C — напротив

C' , D — напротив D' , E — напротив E' , и, наконец, F — напротив F' . Эти шесть пар человек нужно рассадить на шесть пар стульев: (1, 7), (2, 8), (3, 9), (4, 10), (5, 11) и (6, 12) — по одной паре стульев на каждую пару человек. Построение произвольного расположения из данной группы можно поэтому разбить на семь шагов: сначала распределить 6 пар мест между шестью парами человек ($6!$ возможностей), на втором шаге распределить A и A' на отведенных для них двух местах, на третьем шаге распределить B и B' на отведенных для них местах, и т. д., на седьмом шаге — распределить места между F и F' . Так как на каждом из шести последних шагов у нас есть по две возможности, в силу правила произведения в данной группе (как и в любой другой) будет $6! \cdot 2^6$ расположений. Искомое число групп равно, следовательно,

$$\frac{12!}{6! \cdot 2^6} = 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 = 10395.$$

Задача 5. Каждую из сторон $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ и диагональ $[AC]$ квадрата $ABCD$ требуется окрасить в один из данных пяти цветов, причем все цвета должны быть использованы. Две раскраски считаются одинаковыми, если одну из другой можно получить некоторым перемещением. Сколько имеется различных раскрасок?

Решение. Если не обращать внимания на перемещения, то речь идет о распределении пяти цветов по пяти отрезкам. Таких распределений, очевидно, $5!$. Условие задачи разбивает эти $5!$ распределений на группы, каждая из которых состоит из всех распределений цветов, определяющих неразличимые раскраски. Число этих групп и служит ответом задачи. Найдем, как и преж-

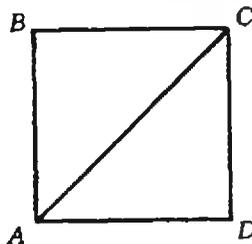


Рис. 2.

де, число элементов в одной группе. Это число равно, очевидно, числу различных перемещений, которые переводят фигуру, изображенную на рисунке 2, в себя. Так как при каждом таком перемещении диагональ $[AC]$ должна переходить в себя, вершины A и C либо останутся на месте, либо поменяются местами. Для вершин B и D поэтому останутся тоже две возможности: остаться на месте или поменяться местами. Комбинируя каждый из двух вариантов перемещения вершин A и C с каждым из двух вариантов перемещения вершин B и D , мы получим четыре различных перемещения: тождественное (A и C остались на месте, B и D остались на месте), симметрию относительно прямой BD (A и C поменялись местами, а B и D остались на месте), симметрию относительно прямой AC (A и C остались на месте, B и D поменялись местами) и композицию этих двух симметрий — симметрию относительно центра квадрата (при этом поменяются местами как A с C , так и B с D). Таким образом, каждая группа состоит из четырех элементов и ответом задачи является число $\frac{5!}{4} = 30$.

Упражнения

8. Сколько попарно неконгруэнтных фигур можно построить из данного правильного n -угольника и n кругов попарно различных радиусов, если каждая сторона n -угольника должна касаться в своей середине одного и только одного из данных кругов?

9. Для банкета на 100 человек приготовлено девять круглых столов: три восьмиместных, четыре десятиместных и два восемнадцатиместных. Два варианта расположения людей за столами считаются одинаковыми, если у каждого человека в обоих вариантах один и тот же сосед справа и один и тот же сосед слева. Сколько имеется различных вариантов расположения ста человек за этими столами?

Задача 6. Сколько имеется шестизначных чисел, в записи которых цифры 1 и 2 встречаются по два раза, а цифры 3 и 4 — по одному разу?

Решение. Шестизначное число, все цифры которого заданы, — это, по существу, перестановка этих шести цифр. Но мы знаем формулу для числа перестановок различных предметов, в то время как среди

цифр рассматриваемых шестизначных чисел есть одинаковые. Чтобы все-таки использовать формулу для числа перестановок, будем считать, что у нас есть две разных единицы: 1 и 1 и две разных двойки: 2 и 2, так что речь идет о $6!$ перестановках шести цифр: 1, 1, 2, 2, 3, 4. Однако искомое число шестизначных чисел не равно числу таких перестановок, так как некоторые перестановки, например 3 1 2 1 4 2 и 3 1 2 1 4 2, приводят к одному и тому же числу. Две перестановки будут определять одно и то же шестизначное число, если одну из другой можно получить, лишь меняя местами 1 и 1 или 2 и 2. Мы приходим к знакомой ситуации: все $6!$ перестановок разбиваются на группы, число которых и есть искомое число шестизначных чисел. Так как в каждой группе четыре перестановки, ответ: $\frac{6!}{4} = 30$.

Упражнения

10. Сколько разных семibuквенных слов можно получить, переставляя буквы слова «колокол»? (В математике словом называют любую конечную последовательность букв некоторого алфавита.)

11. Сколько имеется семизначных чисел, в записи которых цифра 1 встречается трижды, а цифра 0 — дважды?

12. Сколько имеется пятизначных чисел, делящихся на 25, в записи которых не встречаются цифры 0 и 2?

13. В некотором алфавите — 5 букв. Сколько имеется в этом алфавите шестibuквенных слов, в каждом из которых встречаются только две разные буквы, причем одна из них — пять раз?

14. Сколько имеется перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в которых цифры 0, 1, 2, 3 стоят подряд

а) в порядке возрастания;

б) в произвольном порядке?

15. Сколько четырехзначных чисел, делящихся на 9, можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 при условии, что

а) в каждом числе каждая цифра встречается не более одного раза;

б) в каждом числе каждая цифра встречается не более двух раз?

16. Сколько имеется перестановок цифр 0, 1, 2, ..., 9, в которых цифра 0 занимает одно из первых восьми мест, цифра 1 — одно из первых пяти мест и между цифрами 0 и 1 расположено две другие цифры?

17. Сколько $(m+n)$ -буквенных слов можно составить из m букв A и n букв B ?



В. Чехлов

Эти «коварные» векторы

Эта заметка посвящена некоторым особенностям применения векторов к решению геометрических задач.

Применение векторов основано на том, что различные утверждения о взаимном расположении точек, прямых и плоскостей могут быть сформулированы на «векторном языке», в частности с помощью понятий коллинеарности и компланарности. Это позволяет свести геометрическую задачу к векторному равенству. В свою очередь векторное равенство можно свести (в частности, на основе теоремы единственности разложения) к алгебраическому равенству или к системе алгебраических равенств.

Задача 1. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. Плоскость пересекает боковые ребра SA , SB , SC и SD пирамиды соответственно в точках M , N , P и Q так, что $|SM|:|SA|=a$, $|SN|:|SB|=b$, $|SP|:|SC|=c$,

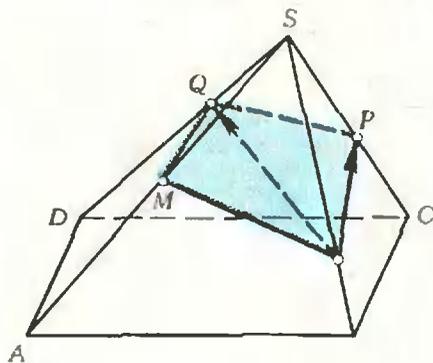


Рис. 1.

$|SQ|:|SD|=d$. Доказать, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$.

Решение. Отрезки NM , NP и NQ (рис. 1) лежат в одной плоскости. Согласно определению компланарных векторов, векторы \vec{NM} , \vec{NP} и \vec{NQ} компланарны. Векторы \vec{NM} и \vec{NP} , очевидно, не коллинеарны, поэтому по теореме о разложении компланарных векторов существуют числа x и y такие, что

$$\vec{NQ} = x\vec{NM} + y\vec{NP}. \quad (1)$$

Разложим эти векторы по трем некопланарным векторам \vec{SA} , \vec{SB} и \vec{SC} . Имеем $\vec{SM} = a\vec{SA}$, $\vec{SN} = b\vec{SB}$, $\vec{SP} = c\vec{SC}$, $\vec{SQ} = d\vec{SD}$, откуда

$$\vec{NM} = \vec{SM} - \vec{SN} = a\vec{SA} - b\vec{SB}, \quad (2)$$

$$\vec{NP} = \vec{SP} - \vec{SN} = c\vec{SC} - b\vec{SB}, \quad (3)$$

$$\vec{NQ} = \vec{SQ} - \vec{SN} = d\vec{SD} - b\vec{SB}. \quad (4)$$

Поскольку $\vec{SD} = \vec{SA} + \vec{AD}$, а $\vec{AD} = \vec{BC} = \vec{SC} - \vec{SB}$, из (4) следует, что

$$\vec{NQ} = d\vec{SA} - (d+b)\vec{SB} + d\vec{SC}. \quad (5)$$

Подставляя (2), (3), (5) в (1), получаем

$$\vec{NQ} = d\vec{SA} - (d+b)\vec{SB} + d\vec{SC} = ax\vec{SA} - b(x+y)\vec{SB} + cy\vec{SC}. \quad (6)$$

В силу единственности разложения векторное равенство (6) равносильно системе

$$\begin{cases} d = ax; \\ d+b = b(x+y); \\ d = cy. \end{cases} \quad (7)$$

Отсюда $x+y = \frac{d}{a} + \frac{d}{c} = \frac{d+b}{b}$, или $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$.

В рассмотренном примере векторное равенство (6) было сведено к системе (7). Следует помнить, что равенство для векторов в пространстве равносильно именно системе трех алгебраических равенств. Поэтому если хотя бы одно из равенств этой системы неверно при любых значениях переменных, то и векторное равенство неверно, а исходная геометрическая задача решений не имеет. Следующий простой пример подтверждает это.

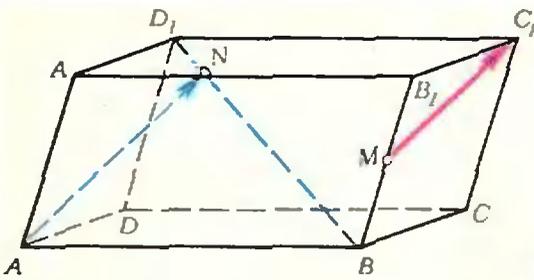


Рис. 2.

Задача 2. $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ — параллелепипед, точка M — середина ребра BB_1 , точка N принадлежит прямой BD_1 . При каком отношении $|BN| : |BD_1|$ прямые AN и C_1M параллельны?

Решение. Векторы \vec{BN} и \vec{BD}_1 (рис. 2) коллинеарны, поэтому при некотором λ

$$\vec{BN} = \lambda \vec{BD}_1. \quad (8)$$

Положим $\vec{BA} = \vec{a}$, $\vec{BC} = \vec{b}$, $\vec{BB}_1 = \vec{c}$; все остальные векторы будем раскладывать по этим трем некопланарным векторам. Поскольку $\vec{BD}_1 = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$, $\vec{BN} = \lambda(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$. Далее, $\vec{AN} = \vec{AB} + \vec{BN} = -\vec{a} + \lambda(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) = (\lambda - 1)\vec{a} + \lambda\vec{b} + \lambda\vec{c}$. Кроме того, $\vec{MC}_1 = \vec{MB}_1 + \vec{B}_1C_1 = \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{b}$. Если прямые AN и MC_1 параллельны, то векторы \vec{AN} и \vec{MC}_1 коллинеарны и, значит, при некотором x верно равенство $\vec{AN} = x\vec{MC}_1$, откуда

$$(\lambda - 1)\vec{a} + \lambda\vec{b} + \lambda\vec{c} = x\vec{b} + \frac{x}{2}\vec{c}. \quad (9)$$

Из (9) сразу следует, что $\lambda - 1 = 0$, $\lambda = 1$. Теперь из (8) получаем $|BN| : |BD_1| = 1$.

Казалось бы, задача решена. Но не тут-то было. Действительно, равенство (9) равносильно системе

$$\begin{cases} \lambda - 1 = 0, \\ \lambda = x, \\ \lambda = \frac{x}{2}. \end{cases}$$

Легко видеть, что эта система относительно λ и x решений не имеет. Из первых двух уравнений следует, что $x = \lambda = 1$, а подстановка в третье уравнение приводит к неверному

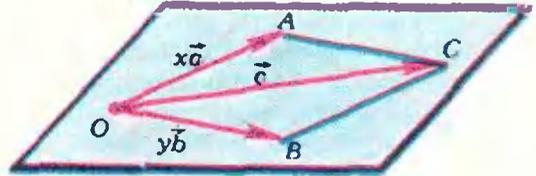


Рис. 3.

равенству $1 = \frac{1}{2}$. Таким образом, ни при каком положении точки N прямые AN и MC_1 не параллельны.

Этот результат для данной задачи, конечно, очевиден. Достаточно, вместо того чтобы записывать соотношения между векторами, немного подумать. В самом деле, прямая MC_1 пересекает плоскость AD_1C_1B и, следовательно, не может быть параллельна прямой AN , лежащей в этой плоскости.

Выше уже использовалась теорема о разложении компланарных векторов: если векторы \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны, то любой вектор \vec{c} , компланарный с векторами \vec{a} и \vec{b} , можно представить единственным образом в виде

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b} \quad (10)$$

(см. «Геометрия 9—10», § 21). В ряде случаев векторное решение геометрических задач приводит к такому вопросу: компланарны ли векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , если имеет место (10)? Соответствующей теоремы в школьном учебнике нет, но легко понять, что ответ на этот вопрос — утвердительный:

(*) если при некоторых x и y верно (10), то векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарны.

Докажем это для случая, когда векторы \vec{a} и \vec{b} не коллинеарны и $x \neq 0$, $y \neq 0$. От некоторой точки O отложим векторы $\vec{OA} = x\vec{a}$ и $\vec{OB} = y\vec{b}$ (рис. 3). Их суммой является вектор \vec{OC} , где OC — диагональ параллелограмма $OACB$. Таким образом, лучи, задающие направления векторов \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} , параллельны соответственно прямым OA , OB , OC , ле-

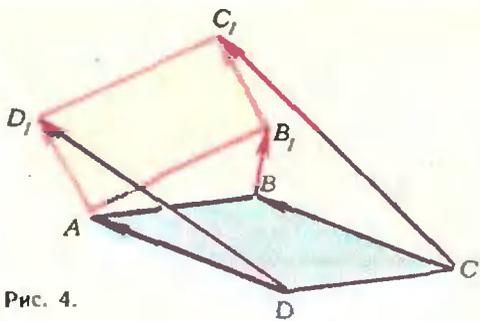


Рис. 4.

жанием в плоскости OAB . Значит, векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны. В исключенных выше случаях доказательство еще проще, и мы оставляем его читателю.

Задача 3 («Геометрия 9–10», № 247). Точка A — общая вершина параллелограммов $ABCD$ и $AB_1C_1D_1$. Докажите компланарность векторов BB_1 , CC_1 , DD_1 .

Решение. Имеем $\vec{CC}_1 = \vec{CB} + \vec{BB}_1 + \vec{B}_1C_1$ (рис. 4) и, так как $\vec{CB} = \vec{DA}$ и $\vec{B}_1C_1 = \vec{AD}_1$, получаем $\vec{CC}_1 = \vec{BB}_1 + (\vec{DA} + \vec{AD}_1)$. Но $\vec{DA} + \vec{AD}_1 = \vec{DD}_1$, поэтому $\vec{CC}_1 = \vec{BB}_1 + \vec{DD}_1$. Отсюда следует по (*), что векторы \vec{CC}_1 , \vec{BB}_1 и \vec{DD}_1 компланарны.

Задача 4. Даны три единичных вектора \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} такие, что $(\vec{a}, \vec{c}) = (\vec{b}, \vec{c}) = \frac{\pi}{3}$, $(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\pi}{2}$. Компланарны ли эти векторы?

Предлагаем сначала найти ошибку в следующем рассуждении:

«Докажем, что \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны. Будем искать числа x и y , для которых

$$\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}. \quad (11)$$

Для этого умножим обе части (11) скалярно на вектор \vec{a} . Получим $\vec{c} \cdot \vec{a} = x\vec{a} \cdot \vec{a} + y\vec{b} \cdot \vec{a}$, откуда $x = \frac{1}{2}$. Умножив обе части (11) на \vec{b} , получим $\vec{c} \cdot \vec{b} = x\vec{a} \cdot \vec{b} + y\vec{b} \cdot \vec{b}$, откуда $y = \frac{1}{2}$. Значит,

$$\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}, \quad (12)$$

то есть по (*) векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарны».

То, что это рассуждение ошибочно, установить легко. Достаточно попытаться отложить в одной плоскости от некоторой точки векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} с заданными углами между ними. Сразу станет ясно, что это невозможно. Значит, векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} не компланарны.

Для того чтобы понять, где была допущена ошибка, вернемся к началу рассуждения. Там было высказано намерение найти такие числа x и y , при которых равенство (11) верно. Но это намерение не было осуществлено. Действительно, последующие выкладки доказывают только то, что из (11) следует (12), и не более. Ни существование чисел x и y , для которых верно (11), ни справедливость равенства (12) не доказаны. И значит, вывод «по (*) векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} компланарны» не обоснован.

Ошибка здесь состоит в том, что из проведенных рассуждений делается вывод, не соответствующий доказанному утверждению.

Приведем теперь векторное решение задачи 4.

Докажем от противного, что векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} не компланарны. Предположим, что существуют такие числа x и y , что равенство (11) верно. Тогда, как и ранее, получим, что верно и (12). Умножив (12) скалярно на \vec{c} , получим, что верно равенство $1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$, то есть $1 = \frac{1}{2}$. Это противоречие показывает, что (11) неверно ни при каких x и y , то есть векторы \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} не компланарны.

Рассмотрим еще пример того, как неполный перевод условия геометрической задачи на «векторный язык» может привести к ошибке.

Задача 5. При какой длине ребра AD в тетраэдре $ABCD$ выполнены соотношения

$$\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}, \quad \widehat{BCD} = (\widehat{AB}, \widehat{CD}) = \arccos \frac{5}{7},$$

$$|AB| = |BC| = |CD| = a? \quad (13)$$

«Решение». Поскольку $\vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}$, мы получаем $AD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC} + 2\vec{AB} \cdot \vec{CD} + 2\vec{BC} \cdot \vec{CD}$. Здесь $AB^2 = BC^2 = CD^2 = a^2$, $\vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0$, $\vec{BC} \times \vec{CD} = a^2 \cos(\pi - \widehat{BCD}) = -\frac{5}{7}a^2$, $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = a^2 \cos(\widehat{AB, CD})$, а так как возможны два случая: $(\widehat{AB, CD}) = \arccos \frac{5}{7}$ или $(\widehat{AB, CD}) = \pi - \arccos \frac{5}{7}$, получаем либо $\vec{AB} \times \vec{CD} = \frac{5}{7}a^2$, либо $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = -\frac{5}{7}a^2$. Отсюда следует, что либо $AD^2 = 3a^2$, либо $AD^2 = \frac{a^2}{7}$. Значит, $|AD| = \sqrt{3}a$, или $|AD| = \frac{a}{\sqrt{7}}$.

На первый взгляд в этом решении не было возможности ошибиться. Тем не менее ошибка в нем есть. Дело в том, что поставленная геометрическая задача равносильна задаче о решении векторной системы:

$$\begin{cases} |\vec{AB}| = |\vec{BC}| = |\vec{CD}| = a, \\ \vec{AB} \cdot \vec{BC} = 0, \\ \vec{AB} \cdot \vec{CD} = \pm \frac{5}{7}a^2, \\ \vec{BC} \cdot \vec{CD} = -\frac{5}{7}a^2, \\ \vec{AD} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD}. \end{cases} \quad (14)$$

Это система с четырьмя неизвестными векторами \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{CD} и \vec{AD} , и геометрическая формулировка задачи 5 может быть теперь заменена на алгебраическую (векторную) формулировку: чему равна дли-

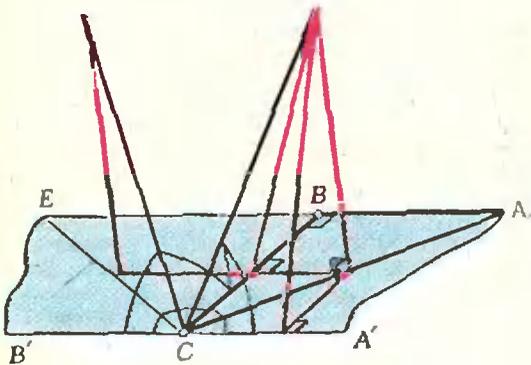


Рис. 5.

на вектора \vec{AD} , если векторы \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{CD} и \vec{AD} удовлетворяют системе (14)?

Теперь ясно, что указанная постановка вопроса требует либо нахождения решений системы (14), либо доказательства их существования.

В проведенном «решении» было взято последнее уравнение и после возведения в квадрат преобразовано с помощью других уравнений.

Сама же система решена не была. Иначе говоря, было доказано, что если система (14) имеет решение, то $|AD| = a\sqrt{3}$, или $|AD| = \frac{a}{\sqrt{7}}$.

Читатель без труда поймет, что здесь допущена по существу та же ошибка, что и в «решении» задачи 4: сделанный вывод не соответствует тому, что в действительности было доказано.

Мы докажем, что система (14) не имеет решений. Приведем сначала геометрическое доказательство.

Построим прямоугольный треугольник ABC (рис. 5): $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}$, $|AB| = |BC| = a$. Через точку C проведем прямую $(A'B') \parallel (AB)$. Пусть прямая CD образует с прямыми BC и $A'B'$ (или, что то же, с AB) равные углы величины α . Тогда легко заключить, что ортогональная проекция прямой CD на плоскость ABC лежит либо на биссектрисе CA угла BCA' , либо на биссектрисе CE угла BCB' . Отсюда следует, что в первом случае $\widehat{BCD} > \widehat{BCA}$, а во втором случае $\widehat{BCD} > \widehat{BCE}$. Так как $\widehat{BCA} = \widehat{BCE} = \frac{\pi}{4}$, получаем $\alpha > \frac{\pi}{4}$. Величина

$\alpha = \arccos \frac{5}{7}$ этому условию не удовлетворяет, и, значит, ни при какой длине ребра AD требуемые соотношения не выполняются. Это и есть ответ к задаче 5.

Векторное исследование системы (14) можно провести, например, так. Пусть вектор \vec{h} перпендикулярен векторам \vec{AB} и \vec{BC} и $|\vec{h}| = a$ (такой вектор в пространстве существует). Векторы \vec{AB} , \vec{BC} и \vec{h} не компланарны, поэтому при некоторых x , y , z

$$\vec{CD} = x\vec{AB} + y\vec{BC} + z\vec{h}. \quad (15)$$

Умножив обе части (15) скалярно на \vec{AB} , получим, что $x = \pm \frac{5}{7}$, а умножив (15) на \vec{BC} , найдем $y = -\frac{5}{7}$. Тогда

$$|\vec{CD}|^2 = (x^2 + y^2 + z^2)a^2 = \left(\frac{50}{49} + z^2\right)a^2 > a^2,$$

а это противоречит условию $|\vec{CD}| = a$.

Значит, система (14) решений не имеет, и мы получаем тот же ответ, что и ранее.

Приложенные к этой заметке задачи можно решать и с помощью векторов и чисто геометрически.

Упражнения

1. Даны точки A, B, C , не лежащие на одной прямой, и точки D и O ,

$O \neq D$. Доказать, что для того, чтобы точка D принадлежала плоскости ABC , необходимо и достаточно, чтобы $\vec{OD} = x\vec{OA} + y\vec{OB} + z\vec{OC}$, где $x + y + z = 1$.

2. Основание пирамиды $SABCD$ — параллелограмм $ABCD$. На ребрах AB, AS и SC расположены соответственно точки M, N и P так, что $|BM| : |AB| = |AN| : |AS| = |SP| : |SC| = 2 : 3$. Через середину Q ребра BC проведена прямая, параллельная плоскости MNP и пересекающая прямую SD в точке R . Найти отношение $|DR| : |DS|$.

3. Все ребра правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину a . Прямая, перпендикулярная плоскости BA_1C_1 , пересекает прямые BC_1 и AB_1 соответственно в точках M и N . Найти $|MN|$.

4. Даны три прямые, не лежащие в одной плоскости. Сколько существует прямых, проходящих через данную точку и составляющих с данными прямыми равные углы?

5. В тетраэдре $ABCD$ $|AB| = |BC| = |CD|$, $\widehat{ABC} = \alpha$, $\widehat{BCD} = (\widehat{AB}, \widehat{CD}) = \beta$. Найти угол между прямыми AD и BC . При каких α и β задача а) не имеет решений; б) имеет одно решение; в) имеет два решения?

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта» (Начало см. на с. 34)

С. Доронин (Днепропетровск) 17; А. Дремин (п. Черноголовка Московской обл.) 12; А. Дурбак (Рогатин) 16; С. Дышяков (Шадринск) 16, 17; Ю. Елисеев (Великие Луки) 4; И. Елишевич (Чернигов) 4, 6, 7; И. Ельканович (Баку) 17; Т. Енчев (Ямбол, НРБ) 9, 12; В. Жордочкин (Орск) 4, 6—8; В. Заварзин (Чимкент) 16; А. Заневский (Ленинград) 4, 6—9, 11, 16, 17; М. Зейфман (Вологда) 4, 6, 7, 9, 11, 12, 16; И. Зильберберг (Алма-Ата) 6; В. Золотаревский (п/о Березовское Харьковской обл.) 7; И. Зыбцев (Ужур) 9, 11, 12, 17; Т. Иванов (Плевен, НРБ) 16, 17; А. Иванов (Воронеж) 8, 12; В. Иващенко (Киев) 11; В. Изергин (Новосибирск) 7, 9, 11, 12, 16, 17; В. Израилит (Днепропетровск) 9, 16, 17; В. Кагаловский (Харьков) 11, 12; С. Калмыков (Копейск) 6, 12; А. Каплан (Сумгаит) 8, 17; Д. Каплан (Зеленоград) 7; А. Карасев (Белгород) 7, 17; М. Кичкашвили (Рустави) 12; Э. Кашапов (Уфа) 4; А. Кечеджан (Ереван) 6, 7, 9, 11, 12, 16; М. Кибирев (Тула) 8, 9, 12; Ю. Кирпач (Киев) 4, 6, 7, 11, 17; Ю. Коверник (Запорожье) 6; Е. Козан (Днепропетровск) 8, 9, 11, 12; А. Кожевников (Днепропетровск) 8, 9, 12; В. Козловский (Новолукомль) 8—12; Т. Кожоридзе (Телави) 12; Д. Коломойцев (Сумгаит) 4, 6—9, 11; В. Комов (Александров) 4, 6—12, 16, 17; Т. Кондрацкая (Киев) 4, 6—8; С. Копкин (Арзмас) 4, 9, 11, 12; В. Коробов (Кировоград) 16; К. Корчагин

(Ереван) 16; М. Костин (Саратов) 12; И. Костюкевич (Ленинград) 4, 6, 9, 12, 17; Д. Котельников (Магнитогорск) 4, 6, 7, 16, 17; М. Кравцов (Коммунарск) 16; К. Крапивной (Запорожье) 6, 7; И. Красилов (Киев) 8, 9, 11, 12; А. Крейнес (Кольчугино) 17; Л. Креминская (Ровно) 8; Е. Кренцель (Москва) 17; Р. Крис (Киев) 4, 7, 8, 11, 12; И. Кроливец (Краматорск) 11, 12; Е. Кузнецов (Кишинев) 6, 8, 11, 12; П. Кузнецов (Киев) 4, 6, 8—12; А. Кузьмин (Алма-Ата) 6, 7, 11; Д. Куксенков (Ленинград) 16, 17; С. Курчатов (Саратов) 4, 7; Б. Лapidус (Москва) 11, 12, 17; М. Левенков (Верещагино) 17; Б. Лейтес (Москва) 4, 6, 7; И. Леонов (Воронеж) 6, 11, 12; Д. Лецинский (Магнитогорск) 16; Ф. Ломая (Симферополь) 9, 12; И. Лукьянчук (Киев) 4, 6, 17; Е. Любовицкий (Кострома) 16; А. Ляпин (Гомель) 4, 6, 16, 17; А. Мазуркевич (Лыткарино) 6, 9, 11, 12; Э. Максимов (Ташкент) 16, 17; А. Малыгин (Горький) 16; В. Мальцев (Уфа) 17; О. Мануйленко (Киев) 17; С. Масленников (п. Мешон Тюменской обл.) 4; С. Махортых (Лисичанск) 9; А. Микула (Жидачов) 4, 6, 12, 17; С. Милованов (Запорожье) 17; С. Михайловский (Виноградовский р-н Архангельской обл.) 7, 11, 12, 16; Г. Молчанов (Саратов) 7—9, 11, 12; Д. Мяхишев (Ангартск) 11; Р. Набоков (Москва) 4, 7; С. Надточий (Москва) 4, 6—9, 11, 12; А. Назаренко (Киев) 6—9, 11; М. Найговзен (Баку) 16; Д. Нишнянидзе (Кутаиси) 8; Д. Ноздрин (Саратов) 4, 6; С. Обогуев (Ленинград) 6, 7; Д. Овсянников (Ленинград) 4, 6—9, 12; С. Одинцова (Киев) 4, 6, 7, 11; А. Орлов

(Окончание см. на с. 55)

С. Кротов

Задачи на столкновения тел

Довольно часто на вступительных экзаменах абитуриентам предлагаются задачи, в которых рассматривается столкновение тел (иногда столкновение называют ударом, или соударением, или рассеиванием). Обычно речь идет о соударении двух тел; если же соударяющихся тел больше, их взаимодействие можно представить как совокупность попарных соударений.

Прежде чем решать любую задачу по физике, и в частности задачу на соударение, нужно понять, какие явления, рассматриваемые в задаче, играют главную роль, а какими явлениями можно пренебречь. В соответствии с этим нужно выбрать идеализированную картину и установить для нее применимость соответствующих физических законов.

Процесс столкновения тел можно разделить на три стадии: первая стадия — тела налетают друг на друга с постоянными скоростями и в какой-то момент соприкасаются друг с другом; вторая стадия (собственно соударение) — появляются силы взаимодействия между телами, которые действуют в течение некоторого промежутка времени; третья стадия — тела разлетаются с новыми неизменными во времени скоростями. Обычно формулировка задачи на соударение предполагает по заданным начальным скоростям тел определить их конечные скорости (или наоборот). При этом стадия собственно соударения фактически

не рассматривается, а обсуждается лишь ее характер: удар упругий или неупругий, центральный или нецентральный и т. д.

В качестве примера рассмотрим *упругий* удар. Пусть небольшое тело произвольной формы налетает на другое тело. Придя в соприкосновение, тела начинают деформироваться. Возникающие упругие деформации передаются от одних частей тел к другим со скоростью распространения звука (то есть достаточно быстро), причем различные части тел получают различные скорости. Наконец, импульсы деформации достигают противоположных границ тел, отражаются от них, и тела отскакивают друг от друга подобно сжатым пружинам. Что же при этом происходит с первоначальным запасом механической энергии тел?

Из-за неодинаковости скоростей движения различных частей тел возникают колебания, они отбирают определенную энергию, которая при затухании колебаний превращается в тепло. Кроме того, всякое колеблющееся тело становится источником звуковых волн, которые тоже уносят часть энергии. Если удар нецентральный, то есть если относительная скорость соударяющихся тел не проходит по линии центров тел, тела начнут вращаться. Энергия, необходимая для этого, черпается тоже из кинетической энергии поступательного движения тел. Вращение могут вызвать также силы трения. Однако, если отношение потерь к первоначальному запасу механической энергии мало, всеми необратимыми превращениями механической энергии в другие виды энергии пренебрегают и удар считают абсолютно упругим. Идеализированная картина такого удара состоит в следующем: кинетическая энергия поступательного движения налетающих тел частично переходит в потенциальную энергию упругих деформаций: потенциальная энергия растёт до тех пор, пока не сравняются скорости движения обоих тел, а затем она переходит в кинетическую энергию разлетающихся тел. Таким образом, при *абсолютно*

упругом ударе общая механическая энергия тел сохраняется.

Заметим, что при *неупругом* ударе в телах возникают неупругие деформации, которые частично сохраняются и после соударения тел. При этом внутренняя энергия тел изменяется, а значит, их полная механическая энергия не сохраняется.

Теперь перейдем к рассмотрению конкретных задач. Решая их, мы не будем каждый раз детально обсуждать все происходящее. Надеемся, что читатель сумеет самостоятельно сделать подробный анализ и обобщать выбранную модель явления.

Задача 1. Два шара одинаковых радиусов движутся по гладкой, горизонтальной поверхности (рис. 1). Массы шаров m_1 и m_2 , их скорости \vec{v}_1 и \vec{v}_2 направлены по линии центров шаров. Определите скорости шаров после их абсолютно упругого удара.

Поскольку удар абсолютно упругий и горизонтальная поверхность гладкая, импульс и кинетическая энергия системы сохраняются. До удара оба шара двигались по линии, соединяющей их центры; следовательно, удар центральный и после него шары тоже движутся вдоль линии центров. Направим ось координат по этой линии, спроектируем на нее все скорости и запишем законы сохранения импульса и кинетической энергии:

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 v'^2_1}{2} + \frac{m_2 v'^2_2}{2} \end{cases}$$

Здесь v'_1 и v'_2 — проекции новых скоростей первого и второго шаров соответственно.

Для решения полученной системы в каждом уравнении в левой части соберем слагаемые, содержащие m_1 , а в правой — слагаемые, содержа-

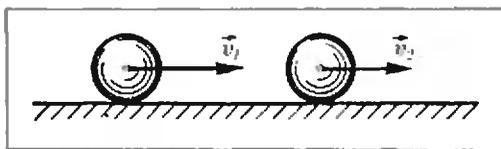


Рис. 1.

щие m_2 :

$$\begin{cases} m_1 v_1 - m_1 v'_1 = m_2 v'_2 - m_2 v_2 \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} - \frac{m_1 v'^2_1}{2} = \frac{m_2 v'^2_2}{2} - \frac{m_2 v_2^2}{2} \end{cases}$$

Поделив почленно второе уравнение на первое, получим

$$v_1 + v'_1 = v'_2 + v_2.$$

Объединим это уравнение с первым уравнением предыдущей системы в новую систему:

$$\begin{cases} v_1 + v'_1 = v'_2 + v_2 \\ m_1 v_1 - m_1 v'_1 = m_2 v'_2 - m_2 v_2 \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} v'_1 &= \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \\ v'_2 &= \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

Анализируя выражения для v'_1 и v'_2 , можно сделать следующие выводы:

1) При столкновениях тел одинаковых масс ($m_1 = m_2$)

$$v'_1 = v_2 \text{ и } v'_2 = v_1$$

— тела обмениваются скоростями.

2) При соударении легкого и тяжелого тел ($m_1/m_2 \rightarrow 0$)

$$v'_1 = -v_1 + 2v_2 \text{ и } v'_2 = v_2$$

— тяжелое тело не изменяет своей скорости.

3) Если в исходной системе уравнений сделать замену $v_1 \rightarrow -v'_1$ и $v_2 \rightarrow -v'_2$, то новые скорости тел будут такими: $v''_1 = -v_1$ и $v''_2 = -v_2$. Физически это означает обратимость механического движения: если тела налетают друг на друга со скоростями, обратными тем, с которыми они двигались после удара в задаче 1, то разлетаться после удара тела будут со скоростями, обратными тем, с которыми они двигались до удара в задаче 1.

$$4) v'_2 - v'_1 = -(v_2 - v_1)$$

— при ударе модуль относительной скорости тел не изменяется, а направление этой скорости меняется на противоположное.

Задача 2. Небольшой шарик лежит на дне ящика, касаясь его правой стенки. В результате толчка извне ящик начинает двигаться впра-

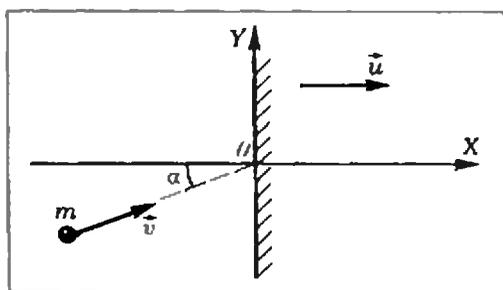


Рис. 2.

во по гладкой горизонтальной поверхности со скоростью \vec{v} . Через какое время τ шарик займет первоначальное относительно ящика положение, если его соударения с ящиком абсолютно упругие, дно ящика гладкое, а расстояние между его стенками равно L ?

Шарик будет попадать в первоначальное относительно ящика положение перед каждым четным соударением с ящиком. Поскольку модуль скорости шарика относительно ящика при ударе не меняется и все время равен $|\vec{v}|$, время τ найдем по формуле

$$\tau = \frac{2L}{|\vec{v}|} n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Задача 3. Гладкая вертикальная стенка движется в горизонтальном направлении со скоростью \vec{u} (рис. 2). В стенку попадает шарик массой m , летящий со скоростью \vec{v} , которая составляет угол α с перпендикуляром к стенке. Считая удар абсолютно упругим, определите модуль v' скорости шарика после удара и угол β , под которым шарик отлетит от стенки.

Введем систему координат XOY , как показано на рисунке 2. Обозначим через M массу стенки, через v и u — модули скоростей шарика и стенки до соударения, через u' — модуль скорости стенки после соударения, а через v'_x и v'_y — соответствующие проекции скорости шарика после удара. Запишем законы сохранения импульса и кинетической энергии:

$$\begin{cases} mv \sin \alpha = mv'_y \\ mv \cos \alpha + Mu = mv'_x + Mu' \\ \frac{mv^2}{2} + \frac{Mu^2}{2} = \frac{mv'^2_x}{2} + \frac{mv'^2_y}{2} + \frac{Mu'^2}{2} \end{cases}$$

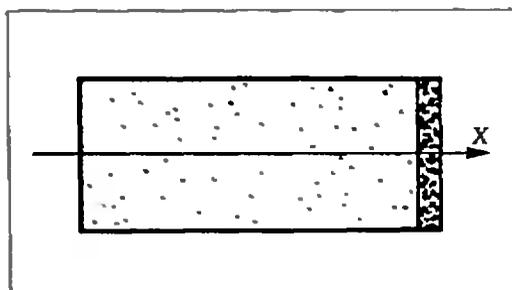


Рис. 3.

Из этой системы найдем

$$\begin{aligned} v'_y &= v \sin \alpha, \\ v'_x &= \frac{(m-M)v \cos \alpha + 2Mu}{m+M}, \\ u' &= \frac{(M-m)u + 2mv \cos \alpha}{m+M}. \end{aligned}$$

Очевидно, что масса шарика мала по сравнению с массой стенки, то есть $m/M \rightarrow 0$. С учетом этого получим

$$\begin{aligned} v'_y &= v \sin \alpha, \\ v'_x &= -v \cos \alpha + 2u, \\ u' &= u \end{aligned}$$

(сравните последние два выражения с выводом 2 из задачи 1). Отсюда

$$v' = \sqrt{v'^2_x + v'^2_y} = \sqrt{v^2 - 4uv \cos \alpha + 4u^2}$$

и

$$\beta = \arctg \frac{v'_y}{-v'_x} = \frac{v \sin \alpha}{v \cos \alpha - 2u}.$$

Задача 4. Пробирка массой M содержит моль идеального газа массой m при температуре T . Пробирку открывают, вынимая из нее пробку пренебрежимо малой массы. Оцените скорость пробирки после того, как весь газ выйдет из нее. Влияние окружающего воздуха можно не учитывать.

Направим ось X вдоль оси пробирки (рис. 3). Половина общего числа молекул газа имеют проекцию скорости $v_x > 0$. Эти молекулы уйдут из пробирки, не передав ей никакого импульса. Другая половина молекул передаст задней стенке пробирки своей двойной импульс, а затем также покинет пробирку. Следовательно, пробирка получит импульс (в проекции на ось X)

$$MV = 2m_0 \bar{v}_x N_A / 2,$$

где V — проекция скорости пробир-

ки, m_0 — масса молекулы газа, \bar{v}_x^2 — средняя квадратическая проекция ее скорости и N_A — число Авогадро.

Учитывая, что $\bar{v}_x^2 = 1/3\bar{v}^2$, то есть средний квадрат проекции скорости равен 1/3 среднего квадрата самой скорости, и что $\bar{v}^2 = 3kT/m_0$ (k — постоянная Больцмана), получим

$$MV = m_0 N_A \sqrt{kT/m_0}$$

Отсюда

$$V = \frac{m_0 N_A}{M} \sqrt{\frac{kT}{m_0}} = \frac{1}{M} \sqrt{(m_0 N_A)(k N_A) T} = \frac{1}{M} \sqrt{mRT},$$

где R — универсальная газовая постоянная.

Задача 5. Гладкий неупругий шарик (из мягкого свинца) падает на такой же шарик, находящийся в покое (рис. 4). Скорость первого шарика направлена под углом α к линии центров. Под каким углом β разлетаются шарики после удара?

В отличие от предыдущих задач, в этой задаче рассматривается неупругое соударение. Поскольку удар неупругий, кинетическая энергия системы не сохраняется (часть ее превращается во внутреннюю). Для решения задачи воспользуемся законом сохранения импульса.

Вследствие гладкости шариков силы их взаимодействия направлены по линии центров (по оси X) и не имеют проекций на перпендикулярное направление, то есть на ось Y . Следовательно,

$$mv \sin \alpha = mv'_{1y},$$

где m — масса каждого шарика, v — модуль скорости первого шарика до удара, а v'_{1y} — проекция на ось Y скорости этого шарика после удара ($v'_{2y} = 0$).

Действие же сил взаимодействия между шариками при их неупругом соударении приводит к выравниванию проекций скоростей шариков на ось X . Тогда

$$mv \cos \alpha = (m + m) v'_x,$$

где $v'_x = v'_{1x} = v'_{2x}$ — соответствующая проекция скоростей обоих шариков после соударения.

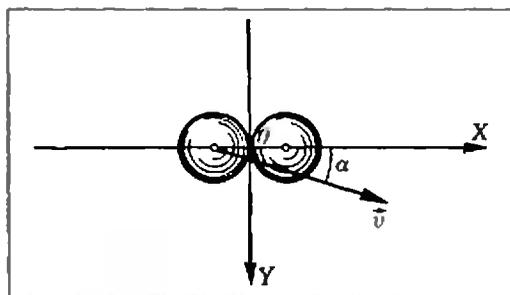


Рис. 4.

Из полученных уравнений можно найти v'_{1y} и v'_x , а значит и $\text{tg } \beta$:

$$\text{tg } \beta = \frac{v'_{1y}}{v'_x} = \frac{v \sin \alpha}{1/2v \cos \alpha} = 2 \text{tg } \alpha.$$

Отсюда

$$\beta = \text{arctg}(2 \text{tg } \alpha).$$

Задача 6. Ядро массой m , летящее со скоростью \vec{v} , распадается на два одинаковых осколка. Внутренняя энергия ядра E_1 , внутренняя энергия каждого из осколков E_2 ($E_1 > 2E_2$). Определите максимально возможный угол между векторами скоростей осколков.

Процесс распада ядра на два осколка представляет собой как бы обращенный во времени процесс неупругого столкновения. Сначала оба осколка летят вместе, образуя единую систему (первая стадия). В результате действия внутренних сил система распадается на две части (вторая стадия). Осколки, образованные в результате разрыва ядра, разлетаются в разные стороны с постоянными скоростями (третья стадия).

Обозначим через \vec{v}_1 и \vec{v}_2 скорости осколков ядра и запишем законы сохранения импульса и полной энергии системы:

$$m\vec{v} = \frac{m}{2} \vec{v}_1 + \frac{m}{2} \vec{v}_2,$$

$$\frac{mv^2}{2} + E_1 = \frac{m}{2} \frac{v_1^2}{2} + \frac{m}{2} \frac{v_2^2}{2} + 2E_2.$$

Изобразим графически скорости ядра и его осколков (рис. 5). В параллелограмме $ACB'D$ $\vec{AC} = \vec{v}_1$ — вектор скорости первого осколка, $\vec{AD} = \vec{v}_2$ — вектор скорости второго осколка и $\vec{AB} = \vec{v}$ — вектор скорости ядра до разрыва ($|\vec{AB}| = 1/2 |\vec{AB}'|$). Введем дополнительные векторы \vec{BC}

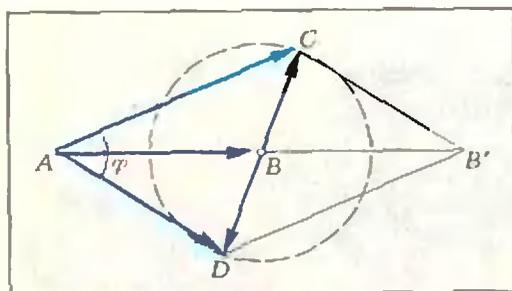


Рис. 5.

и \vec{BD} ($\vec{BC} = -\vec{BD}$) и обозначим $|\vec{BC}| = |\vec{BD}| = v_0$. Закон сохранения полной энергии и теорема о том, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон, приводят к соотношениям

$$v_1^2 + v_2^2 = 2v^2 + \frac{4}{m} (E_1 - 2E_2)$$

и

$$v_1^2 + v_2^2 = 2v^2 + 2v_0^2,$$

откуда

$$v_0 = \sqrt{\frac{2}{m} (E_1 - 2E_2)}.$$

Очевидно, возможны два случая: а) $v \geq v_0$; б) $v < v_0$. Рассмотрим сначала случай а), которому как раз и соответствует рисунок 5, и найдем максимально возможный угол φ . Для этого воспользуемся теоремой косинусов для треугольников ACD , ABD и ACB и получим

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{v_1^2 + v_2^2 - (2v_0)^2}{2v_1 v_2} = \\ &= \frac{v^2 - v_0^2}{\sqrt{(v^2 + v_0^2)^2 - (2vv_0 \cos \alpha)^2}} \end{aligned}$$

Отсюда

$$\cos \varphi \geq \frac{v^2 - v_0^2}{v^2 + v_0^2}$$

и

$$\varphi_{\max} = \arccos \frac{v^2 - v_0^2}{v^2 + v_0^2},$$

где $v_0^2 = \frac{2}{m} (E_1 - 2E_2)$.

При этом $v_1 = v_2 = \sqrt{v^2 + v_0^2}$.

Случай б) рассмотрите самостоятельно и убедитесь в том, что $\varphi_{\max} = \pi$.

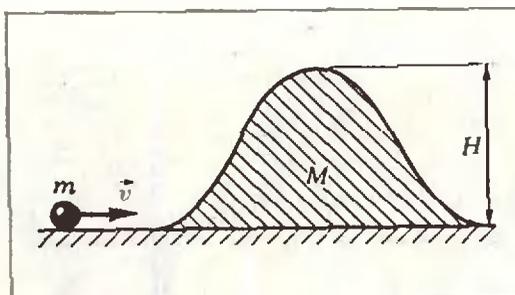


Рис. 6.

Упражнения

1. На пути тела массой m , скользящего по гладкому столу со скоростью \vec{v} , находится неподвижная незакрепленная горка массой M и высотой H (профиль горки изображен на рисунке 6). Определите скорости тела и горки после того, как тело покинет горку. Тело движется, не отрываясь от горки, трение между телом и горкой отсутствует.

2. Под каким углом β разлетаются два одинаковых гладких шарика после абсолютно упругого удара? До удара один из шариков покоился, а другой двигался со скоростью \vec{v} , направленной под углом α к линии центров шариков.

3. По гладкой поверхности стола могут двигаться кольцо радиусом R и находящийся внутри кольца маленький шарик. В некоторый момент шарик упруго соударяется с кольцом. До удара кольцо покоится, а шарик движется со скоростью \vec{v} , которая составляет угол α с радиусом, проведенным в точку удара. Найдите время до следующего удара.

4. Два гладких одинаковых шара массой M каждый покоятся на гладкой горизонтальной поверхности, касаясь друг друга. Третий шар такого же радиуса, но массой m движется по поверхности со скоростью \vec{v} , проходящей через точку касания неподвижных шаров. Определите скорости шаров после абсолютно упругого удара.

Поправка

В формулировке задачи М649 («Квант» № 10) допущена опечатка: пропущен множитель $\frac{1}{2}$ перед выражением c^2 . Срок присылки решения этой задачи продлевается до 1 февраля 1981 года.



Г. Звенигородский,
Ю. Первин,
А. Сосинский

V Всесоюзная летняя школа юных программистов

С 25 июля по 10 августа 1980 года в Новосибирском академгородке состоялась V Всесоюзная летняя школа юных программистов, организованная Сибирским отделением Академии наук СССР, редакцией журнала «Квант», Новосибирским государственным университетом и Министерством просвещения СССР. Впервые отбор участников производился через Заочную школу программирования, материалы которой публикуются на страницах нашего журнала. Лучшие учащиеся ЗШП, а также победители Олимпиады по программированию («Квант», 1979, № 3), были приглашены на Летнюю школу. Таким образом были отобраны все 145 участников Летней школы. Они приехали со всего Союза: от Калининграда до Сахалина, от Норильска до Ташкента; были ребята из крупных городов и из сельской местности. В основном, это были школьники 6—9 классов, но было немало и учащихся 4—5 классов. С том, как проходила эта необычная школа, и рассказано в этой статье.

Знакомство

Вычислительный центр СО АН СССР. Одна из терминальных комнат. Мерцают экраны трех дисплеев, в сосредоточенной тишине слышится гудение вентилятора и тихое постукивание клавиш терминалов. За первым терминалом черноволосая смуглая девочка «разговаривает» с ЭВМ БЭСМ-6:

ПРОГРАММА РЕГИСТРАТОР
НАЧИНАЕТ РАБОТУ

ВАШЕ ИМЯ?

высвечивается на экране. Девочка неуверенно набирает на клавиатуре ответ:

— ЛБДРАХМАНОВА ГУЛЯ

ВАШ АДРЕС?

— КАЗАХСТАН, АКТЮБИНСКАЯ
ОБЛАСТЬ, ПОС. КУРАЙЛИ
КАКИЕ ЯЗЫКИ ПРОГРАММИРОВАНИЯ
ВЫ ЗНАЕТЕ?

Разговор теперь идет увереннее, быстрее, и не только у Гули: бойко стучат клавиши на двух других терминалах. За их работой следит консультант, опытный программист Сергей Гавриленко; он отвечает на вопросы и исправляет ошибки.

Для Гули — это первая очная встреча с компьютером; с програм-

мированием она познакомилась на страницах журнала «Квант» год назад и была приглашена на Летнюю школу как одна из лучших участниц Заочной школы программирования из Казахстана. Она — ученица девятого класса.

В том, что Гуля оказалась здесь, наверное, нет ничего удивительного. Но вот ее «собеседник», система РЕГИСТРАТОР, разработана... пятиклассницей Аней Вайнштейн (Новосибирск), а «опытный программист» Сережа Гавриленко недавно окончил...четвертый класс!

...Так в первое же рабочее утро Школы ребята познакомились с вычислительной техникой. Перед этим было торжественное официальное знакомство на открытии Школы, где выступали директор ВЦ СО АН, чл.-корр. АН СССР А. С. Алексеев и научный руководитель Летней школы, чл.-корр. АН СССР А. П. Ершов. А вечером было более непринужденное знакомство: в лесу, у костра состоялся конкурс рассказов о родном крае, и многие ребята впервые услышали песни нового жанра — программистско-лирические, звучавшие в исполнении новосибирцев и харьковчан.

Ну, погоди!

Наиболее волнующей и напряженной формой занятий была терминальная практика — диалог с ЭВМ через терминалы. В ходе первых разговоров с машиной ребята запускали и отлаживали программы машинной графики. Выход на графопостроитель осуществлялся посредством системы НУ ПОГОДИ. Об этой системе (ее название расшифровывается так: «система Непосредственного Управления Организацией Графической Отладки в Диалоге») рассказал ее разработчик, новосибирский школьник Виталий Цикоза.

Для выполнения зачетных заданий ребята объединялись в бригады по 3-4 человека; 4 бригады составляли «регион», к которому прикреплялись два консультанта из числа наиболее опытных школьников-программистов Новосибирской ШЮП. Особо хочется отметить высокую

квалификацию и старательность этих ребят.

Последующие зачетные задания (на языках СЕТЛ и АЛГОЛ) были уже сложнее. О наиболее интересных из них — в сущности, о небольших самостоятельных исследованиях на ЭВМ — ребята рассказали на итоговой конференции Летней школы.

За партой на каникулах

В амфитеатре Большой математической аудитории Новосибирского университета непривычная для летних каникулярных дней деловая обстановка: сто сорок пять школьников слушают лекции по программированию. Учебная программа напряженная: Летняя школа коротка, а за это время надо изучить языки СЕТЛ и АЛГОЛ, познакомиться с операционной системой ДИСПАК/ДИАПАК, узнать правила работы на терминалах, научиться перфорировать и снимать запрограммированные мультфильмы. В обязательную лекционную программу для школьников включены также рассказы о моделировании на ЭВМ дискретных и непрерывных процессов, о программировании геометрических задач.

Кроме того, для желающих предусмотрены факультативные занятия. Два факультатива, проведенные новосибирскими старшеклассниками В. Цикозой и А. Салиховой, предназначались для тех, кому необходимо было вспомнить трудные вопросы из материалов Заочной школы. Два лектора Летней школы: доц. А. Б. Сосинский (Москва) и доц. Н. Н. Непейвода (Ижевск) — дали своим факультативам такие названия, что участникам пришлось думать, как разорваться на две половинки: один назывался «Взгляд математика на программирование», другой — «Взгляд программиста на математику».

Конечно, непросто было такую учебную программу вложить в тесные рамки двух недель. Но ведь недаром на Школу собрались лучшие учащиеся Заочной школы и победители Олимпиады по программированию.*)

*) Список победителей см. на с. 54

Поэтому о новых языках и системах программирования оказалось возможным рассказывать очень кратко: достаточно было отметить отличия от уже известных по «Кванту» Рапиры и Шпаги.

Где-то посередине между напряженной учебной и интересным отдыхом нашлось место для проблемных лекций. Так назывались встречи участников Школы с учеными Сибирского отделения АН СССР. Научный сотрудник новосибирского филиала Института точной механики и вычислительной техники АН СССР к.ф.-м.н. В. А. Евстигнеев интересно рассказал, как прикладную науку — программирование — обогащает такая чисто математическая дисциплина, как теория графов. Заведующий научно-исследовательской группой ВЦ СО АН СССР А. А. Берс выступил с лекцией о перспективах применения ЭВМ в полиграфии. Зав. лабораторией математического обеспечения вычислительных центров коллективного пользования к.т.н. Л. Б. Эфрос перечислил главные направления работы системных программистов ВЦ СО АН СССР.

Не остались в стороне от учебного процесса Летней школы и взрослые — воспитатели и руководители делегаций, родители. Предназначенный для них цикл лекций о проблемах школьного программирования вызвал живую дискуссию слушателей. Озатеянным директором Летней школы Ю. А. Первинным споре взрослых на тему «Зачем детей учат программированию?» мы напишем подробнее в следующем номере.

Научная конференция школьников

Пожалуй, наиболее интересными событиями Летней школы стали конференции, состоявшиеся 28 июля и 8 августа. На первой юные программисты рассказали о работах, выполнившихся в течение учебного года, на второй — непосредственно на Летней школе.

Доклады первой конференции были распределены по пяти секциям: системное программирование, моде-

лирование и оптимизация на ЭВМ, применение ЭВМ в учебном процессе и прикладные задачи обработки данных, управление технологическими процессами, игровые и спортивные программы. Заседание каждой секции проводил ученый или специалист, хорошо знакомый со спецификой применения ЭВМ в соответствующей области: проректор Новосибирского государственного университета д.т.н., проф. Н. Г. Загоруйко, с.н.с. НИИ ЭВМ (Минск) М. В. Ходош, с.н.с. ВЦ СО АН В. Э. Малышкин, сотрудник Ленинградского института авиационного приборостроения Н. Н. Бровин, с.н.с. Института кибернетики АН УССР Л. Н. Иваненко.

Слово — системным программистам

По общему мнению наиболее сильной оказалась первая секция (системное программирование): три из пяти докладов на этой секции были удостоены дипломами I степени.

Девятиклассник *Виталий Цикоца* (Новосибирск, диплом I степени) рассказал о разработанной им новой версии графической системы Шпага, получившей название Шпага-5. Учащимся Летней школы очень понравилась включенная им в Шпагу-5 процедура ДУГАТ, позволяющая проводить дугу окружности через три заданные точки: теперь отпала необходимость возиться с определением радиуса и направления дуги. В своем докладе Виталий говорил и о прог-



Рис. 1.

рамных особенностях системы НУ ПОГОДИ, с которой все участники перед этим уже работали на терминальной практике (рис. 1).

Десятиклассник *Михаил Эпикте-тов* (Алма-Ата, диплом I степени) разработал систему SONAR для отладки программ на ЕС ЭВМ. Для ускорения отладки во многих языках и системах программирования (например, в ОС ЕС, в АЛГОЛЕ — БАРРОУЗ) предусмотрена возможность следить за значением различных имен, обращениями к процедурам и т. п., но в операционной системе ДОС ЕС программист сам должен организовывать отладку. Для этого можно после каждого присваивания в программе ставить оператор печати и следить по распечатке, как исполнялась программа, но объем программы тогда возрастает вдвое, а при выбрасывании дополнительных операторов печати часто в программу «заносятся» новые ошибки. Система SONAR позволяет программисту при помощи одного — двух операторов организовать отладочную печать для всей программы или заданных ее участков и так же просто «выключить» эту печать после окончания отладки.

Девятиклассник *Сергей Котов* (Новосибирск, диплом I степени) по заказу лаборатории экспериментальной информатики ВЦ СО АН разработал комплекс для анализа программ микропроцессора INTEL-8080. Микропроцессоры — крохотные вы-

числительные машины, построенные на больших интегральных схемах — за последние годы получили широчайшее распространение в самых разных областях. Микропроцессоры управляют исследовательской аппаратурой космических аппаратов и крупнейшими прокатными станами, определяют экспозицию при фотосъемках, регулируют работу автомобильных двигателей и карманных калькуляторов. Разумеется, качество их работы зависит от управляющей ими программы. Часто оказывается нужным разобраться в такой программе, понять лежащий в ее основе алгоритм и, возможно, внести необходимые изменения. Но понять незнакомую программу, составленную в машинных командах, совсем не просто: для этого нужно заменить команды их мнемоническими обозначениями, снабдить комментариями, отделить команды от данных, разбить программу на отдельные блоки и выявить связи между ними и т. д. Вся эту работу и выполняет комплекс, созданный Сергеем.

Дипломами II степени и III степени были удостоены доклады *Михаила Симбирского* (Харьков, 9 кл.) о работе с числами нестандартной длины и *Светланы Урюпиной* (Новосибирск, 5 кл.) о ее программе для лексического анализа текстов на различных языках программирования.

Программы моделируют и помогают на производстве

На второй секции диплом I степени получила *Ольга Хорошевская* (Новосибирск, 9 кл.), рассказавшая об оптимизации структуры вычислительной сети, связывающей несколько ВЦ. Построив на языке АЛГОЛ-ГДР подробную модель работы сети и удачно применив стохастическую оптимизацию (метод Пейджа), Оля показала, что из нескольких вариантов организации связи между ВЦ самой выгодной является кольцевая структура. По общему мнению Олин доклад был лучшим по исполнению; в нем удачно использовались плакаты и диапозитивы (выполненные ЭВМ на Шпаге — см. рис. 2).

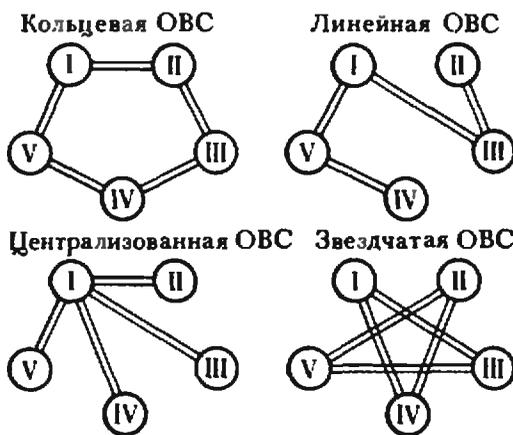


Рис. 2.

Большой интерес на третьей секции вызвал доклад *Сергея Гавриленко* (Новосибирск, 5 кл.), удостоенный диплома II степени. Серезина программа «Вопрос — ответ» позволяет вносить в машину определенным образом записанные данные из любой предметной области, а затем спрашивать ЭВМ про эти данные, получая при этом, как выразился докладчик, «ответы на уровне здравого смысла».

Диплом I степени на четвертой секции получили друзья-соавторы *Михаил Дун* и *Андрей Кагал* (Харьков, 9 кл.) за два доклада: «Моделирование технологических процессов изготовления изделий из терморезистивных полимеров» и «Автоматизация проектирования и изготовления центрально-роликовых кулачковых механизмов». Эти работы уже внедрены на производстве: они были отмечены специальной премией как разработки с наибольшим практическим значением.

Много еще было интересных работ. Мы отметим лишь доклады *Павла Земцова* (Новосибирск, 6 кл.), который на языке «Симула — I» промоделировал работу производственного цеха, *Игоря Мезенцева* (Ангарск, 9 кл.) о системе регистрации «Прогульщик», *Николая Вербы* (Харьков, 6 кл.), нашедшего на ЭВМ все 92 решения «задачи о 8 ферзях» (см. «Квант», 1977, № 12, с. 22), *Виктории Волковой* (Новосибирск, 5 кл.) о применении метода Эйлера к решению уравнения движения самолета и, наконец, знакомой нашим читателям (как разработчицы Шаги-I) *Асии Салиховой*, рассказавшей про перспективную работу о моделировании случайных блужданий по кристаллической решетке.

Чему мы научились

На первой конференции высоким уровнем выделялись доклады школьников из Новосибирска и Харькова, где издавна работают свои школьные юных программистов. И хотя были интересные работы из Эстонии (Нюосская с. ш.), Анггарска, Алма-Аты, Москвы, Туймазы, Куйбышева, большинство участников — учащихся

ЗШП — до Летней школы не имели возможностей для подобных совместных работ с компьютером.

Иная картина наблюдалась на итоговой конференции. Здесь все было в равных условиях. Каждой бригаде предоставлялись большие порции терминального времени на запуск и отладку программ на выбранную тему. Разработка и отладка этих программ служила одним из зачетных заданий, а наиболее интересные работы были вынесены на итоговую конференцию.

Руководители делегаций (педагоги и специалисты по применению ЭВМ) были поражены тем, какие интересные и сложные программы сумели составить и отладить за две недели школьники, впервые перед этим вышедшие на машину. Не имея возможности рассказать о всех интересных работах, мы назовем лишь несколько из них.

Диплом I степени получили три бригады за работы «Экзаменатор-консультант по химии» (докладчик — *М. Эпиктетов*), «Школьный журнал» (докладчица — *С. Бродецкая*) и «Задачи по реакциям окисления» (докладчик — *Е. Корнилин*). Из интересных работ, получивших дипломы II степени, отметим следующие три: «Робот-домохозяйка» (*Н. Наварова*), «Дешифратор» (*Е. Забокрицкий*), «Шахматный судья» (*Л. Нехамкин*).

* * *

По общему мнению участников, гостей и руководителей V Летняя школа безусловно удалась. Нам приятно здесь отметить, что, кроме прекрасных условий, организационного опыта и традиционного гостеприимства Академгородка, этому способствовал достаточно ровный и высокий уровень учащихся, достигнутый на занятиях Заочной школы программирования нашего журнала.

Призеры Олимпиады по программированию

Дипломы I степени

Баталов С. (Арзамас, с. ш. № 2, 8 кл.).
Вейцман Б. (Одесса, с. ш. № 53, 8 кл.).
Забокрицкий Е. (Ленинград, с. ш. № 536, 7 кл.).
Земцов Н. (Новосибирск, с. ш. № 25, 5 кл.).
Куприков Ю. (Подольск Московской обл., с. ш. № 3, 7 кл.).
Лиешиньш Я. (п. Вангажи Латвийской ССР, с. ш., 8 кл.).
Робсман Д. (Москва, с. ш. № 91, 9 кл.).
Цикоза В. (Новосибирск, с. ш. № 130, 8 кл.).

Дипломы II степени

Антонов В. (Нальчик, с. ш. № 19, 8 кл.).
Бубнова М. (Москва, с. ш. № 254, 4 кл.).
Вайнштейн Т. (Новосибирск, с. ш. 130, 9 кл.).
Гавлик Р. (ЧССР, Горжице, 3 кл. гимназии).
Ганелин П. (Москва, с. ш. № 91, 9 кл.).
Гильман М. (Москва, с. ш. № 57, 9 кл.).
Глаголева Н. (Новосибирск, с. ш. № 166, 8 кл.).
Горелик И. (Москва, с. ш. № 521, 5 кл.).
Крижановский О. (Харьков, с. ш. № 27, 9 кл.).
Кузьминов Т. (Новосибирск, с. ш. № 130, 7 кл.).
Петруничева А. (Москва, с. ш. № 19, 7 кл.).
Пискарев И. (Баку, с. ш. № 153, 8 кл.).
Салихова А. (Новосибирск, с. ш. № 130, 8 кл.).
Чевелев К. (Москва, с. ш. № 7, 9 кл.).
Эликетгов М. (Алма-Ата, РФМШ, 9 кл.).

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта» (Начало см. на с. 44)

(п. Черноголовка Московской обл.) 8—12;
А. Осипов (Сосновый Бор Ленинградской обл.) 8, 11, 12, 17; *И. Осовяк* (с. В. Дедекалы Тернопольской обл.) 6; *Ю. Павлов* (Ленинград) 16; *А. Накалн* (Тукумс) 16, 17; *О. Панащенко* (Киев) 4, 6—12; *А. Пантелеев* (Ростов-на-Дону) 9, 11, 12; *С. Пащенко* (Киев) 16, 17; *В. Пентегов* (Киев) 6, 11, 16, 17; *Г. Перельман* (Ленинград) 6; *К. Пивницкая* (Москва) 4; *С. Погорелов* (Киев) 11, 12; *А. Полицкий* (Киев) 4, 6, 11, 12, 17; *Е. Поляков* (Калининград Московской обл.) 9, 12; *А. Пономаренко* (Киев) 8, 9, 11, 12, 17; *О. Потылицина* (Жуковский) 11, 12; *С. Равняго* (Золочев Львовской обл.) 9; *В. Романчук* (Запорожье) 17; *С. Ромашкин* (Александров) 17; *Б. Рублев* (Киев) 4, 6—9, 11, 12; *Г. Рыбкин* (Смоленск) 4, 6, 7; *С. Рязинцева* (Борисоглебск) 7, 9, 11, 12, 17; *Б. Сафронов* (Донецк) 17; *Ю. Свистунов* (Запорожье) 16, 17; *С. Селифанова* (с. Попелево Калужской обл.) 9—12; *Т. Сергейцев* (Челябинск) 4, 6—12; *А. Середа* (Донецк) 4; *В. Середа* (Львов) 6, 7, 9, 11, 12, 16, 17; *Ф. Серкис* (Оргеев) 11, 12; *А. Сидоренков* (Смоленск) 4; *В. Сидорин* (Реутов) 7; *И. Сирых* (Ярославль) 6—8; *А. Скок* (Талгар) 4, 6—9, 12, 16, 17; *О. Скопцов* (Ангарск) 4, 8, 12, 16; *А. Смирнов* (Курган) 9, 11, 12; *И. Смирнов* (Москва) 8, 9, 11, 12, 16; *Р. Смирнов* (Москва) 4, 6; *С. Смирнов* (Ташкент) 7—9, 11, 12; *А. Сокол* (п. Черноголовка Московской обл.) 17; *Г. Солдак* (Минск) 4, 6; *С. Соломко* (Мелеуз) 17; *И. Соловей* (Донецк) 16; *Д. Сорока* (Запорожье) 4, 6—9, 12; *А. Сливик* (Стерлитамак) 7, 12; *И. Ставицкий* (Фрунзе) 6, 8, 9, 17; *П. Страдынь* (Рига) 4, 17; *А. Стрешинский* (Донецк) 6—9, 11, 12; *Д. Стяркас* (п. Черноголовка Московской

обл.) 9, 11, 12; *Е. Сыричева* (Вышний Волочек) 16, 17; *Ю. Талденко* (Сумы) 16, 17; *А. Уливанов* (Горький) 11, 12, 16, 17; *В. Троицкий* (Киев) 9, 11, 12; *Л. Уткин* (Вологда) 4, 9, 11, 12; *В. Фарбер* (Баку) 6, 9, 11, 12; *Н. Федин* (Омск) 4, 6—9, 11, 12, 16, 17; *А. Федоров* (с. Спольцы ЯАССР) 17; *В. Федюкович* (Киев) 8, 9, 11, 12, 16, 17; *А. Фетискин* (Рязань) 7; *А. Флеров* (Рига) 4, 6, 7, 9, 17; *И. Фоменко* (Днепропетровск) 4, 7, 9, 10, 12; *О. Фонарев* (Сумгаит) 6; *А. Фролов* (Тула) 8, 9, 11, 12; *А. Харченко* (Киев) 16, 17; *С. Хосид* (Алма-Ата) 4, 6, 7, 17; *Л. Хризман* (Киев) 4, 9, 11, 12; *А. Цеханский* (п. Запрудня Московской обл.) 16; *М. Цолик* (Орск) 6, 7, 9, 12; *Ю. Цыганков* (Дрожжановский р-н ТАССР) 4, 6—10, 12, 17; *А. Чепуров* (ст. Григорополисская Ставропольского кр.) 4; *А. Чулков* (р. п. Мучкапский Тамбовской обл.) 17; *А. Чумадин* (Баку) 6—9, 11, 12; *А. Чумаков* (Куйбышев) 8, 11; *В. Шаблинский* (Киев) 4, 6, 7; *Я. Шапиро* (Ворошиловград) 17; *В. Шаповал* (Винница) 7; *С. Шарый* (Семипалатинск) 8, 12; *А. Шевченко* (Артемовск Донецкой обл.) 12, 17; *М. Шевченко* (Артемовск Донецкой обл.) 17; *А. Шеринев* (Москва) 4; *С. Шитов* (Пенза) 17; *И. Шкраджок* (Ногинск) 4, 6—9; *С. Шлаков* (Саратов) 7, 9, 12, 17; *А. Щуцкий* (Душанбе) 7—9, 11, 12, 16, 17; *М. Эскеров* (Махачкала) 7; *К. Яковлев* (Киев) 16; *С. Якуш* (Краснодар) 17.



Новые книги

Мы продолжаем публиковать аннотации на книги по математике и физике, доступные и интересные нашим читателям. В этом номере мы рассказываем о книгах, вышедших в четвертом квартале 1980 года.

Математика

Издательство «Наука»

1. Понтрягин Л. С. *Анализ бесконечно малых*. Объем 15 л., тираж 100 000 экз., цена 55 к.

Написанная выдающим советским математиком академиком Л. С. Понтрягиным, эта книга посвящена изложению некоторых вопросов математического анализа в форме, доступной для школьников. Свообразие книги в одновременном изложении теории функций действительной и комплексной переменных.

2. Фомин С. В. *Системы счисления* (Популярные лекции по математике). Издание 4-е. Объем 2 л., тираж 100 000 экз., цена 10 к.

В брошюре увлекательно рассказывается об истории возникновения, свойствах и применениях разных систем счисления.

В связи с двоичной системой счисления сообщаются некоторые сведения об ЭВМ.

3. Лурье М. В., Александров Б. И. *Задачи на составление уравнений*. Издание 2-е. Объем 5 л., тираж 300 000 экз., цена 15 к.

В книге разбираются методы решения так называемых текстовых задач. Задачи эти классифицированы авторами по нескольким основным типам. Подробно разбирается каждый тип таких задач. Все задачи, разбираемые в этой книге, взяты из вариантов письменных вступительных экзаменов по математике на различные факультеты МГУ в 1967—1978 гг.

В книге приведено большое количество задач для самостоятельного решения с ответами.

Издательство «Мир»

4. Реньи А. *Трилогия о математике*. Пер. с венгерского. Объем 20 л., тираж 15 000 экз., цена 1 р. 40 к.

В книге объединены ранее выходившие на русском языке популярные произведения крупного венгерского математика А. Реньи «Диалоги о математике» (М., «Мир», 1969) и «Письма о вероятности» (М., «Мир», 1970), а также «Дневник (записи по теории информации)», изданный на родине авторами посмертно и публикуемый в СССР впервые.

В книгу включены также несколько научно-популярных статей А. Реньи.

Очень живое и доступное изложение помогает читателю познакомиться с некоторыми фундаментальными идеями современной математики.

Физика

Издательство «Наука»

1. Левантовский В. И. *Механика космического полета в элементарном изложении*. Издание 3-е, исправленное и дополненное. Объем 32 л., тираж 20 000 экз., цена 1 р. 30 к.

В доступной форме, без применения сложного математического аппарата, но логически последовательно в книге излагаются основы теории космического полета. Рассказывается об околоземных полетах, полетах к Луне, внутри Солнечной системы и о вылете за ее пределы. Особо рассмотрены полеты пилотируемых кораблей и орбитальные станции. Дается представление о методах исследования и проектирования космических траекторий, о выведении спутников на орбиты. Третье издание дополнено сведениями о всех новых достижениях космонавтики. Книга удостоена премии общества «Знание».

Издательство «Мир»

2. Либшер Д.-Е. *Теория относительности с циркулем и линейкой*. Перевод с немецкого. Объем 7 л., тираж 50 000 экз., цена 40 к.

В этой небольшой книге дается геометрическая интерпретация основных понятий и соотношений специальной теории относительности. Читатель встретится здесь со многими применениями хорошо известных простых геометрических соотношений, а также с понятиями неевклидовой геометрии.

3. *Узоры симметрии*. Перевод с английского. Объем 12 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 20 к.

В книге, основанной на материале Фестиваля симметрии (Нортгемптон, США), на доступном для широких кругов читателей уровне изложены проблемы симметрии. Основная направленность книги — выявление глубокого смысла симметрии как общего принципа гармонии в молекулах, кристаллах, живой природе, произведениях искусства. Современность непременно соединяется с историческим материалом. С большим изяществом выполнены иллюстрации.

4. Беккерт М. *Мир металлов*. Перевод с немецкого. Объем 20 л., тираж 50 000 экз., цена 2 р. 90 к.

Книга ученого из ГДР, профессора Манфреда Беккерта — живо написанная, увлекательно и богато иллюстрированная история металлов и их роли в жизни человека и развитии человеческого общества от древних времен до наших дней. В ней рассказывается также о выдающихся достижениях современной науки в изучении свойств и структуры металлов, о перспективах «космической металлургии» будущего.

5. Гордон Дж. *Конструкции, или Почему не ломаются вещи*. Перевод с английского. Объем 22 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 50 к.

Автор книги — английский ученый, профессор Джордж Гордон — живо и интересно, с привлечением большого иллюстративного материала рассказывает о конструкциях, конструктивных материалах и их аналогах в природе.

А. Егоров,
М. Смолянский

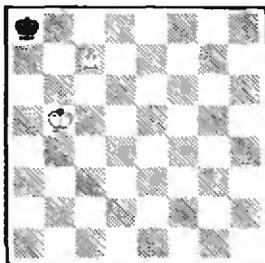


Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов.
Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

Трио на шахматной доске

Минимальный материал, который позволяет создать серьезное шахматное произведение, — три фигуры на доске (при двух королях просто нечем ставить мат). Приведенная в «Кванте», 1980, № 4 задача далеко не исчерпывает возможности трио на шахматной доске. Рассмотрим еще несколько позиций с рекордным количеством фигур. Напомним сначала уномянутую задачу Томлинсона. **Белые:** Крс6, п. с7; **черные:** Кра7. Мат в 2 хода. 1. с8J! Кра6 2. Ла8×.

Задача Х. Мейера совершенствует предыдущую двухходовку.



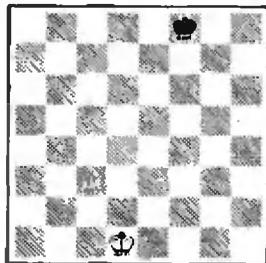
Х. Мейер. Мат в 3 хода

Появление ладьи задерживается на один ход — 1. Крс6! Кра7 2. с8J! Кра6 3. Ла8×.

В следующем примере вступление несколько грубовато, но зато дальний маневр новоявленного ферзя на следующем ходу однозначен. Д. Хофман. **Белые:** Крс6, п. с7. **Черные:** Кра5. Мат в 3 хода. 1. с8Ф Кра4 2. Фh3! Кра5 3. Фа3×.

Встречаются ли среди трио настоящие этюды? Разумеется, речь может идти только о материале «король» с пешкой против короля. Обычно позиции такого типа

относят к теоретическим, однако некоторые из них принято считать этюдами.

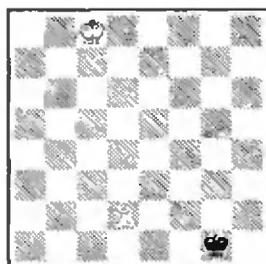


И. Дртина. Выигрыш

1. Крс2! Кре7 2. Крb3! (обходный маневр с целью занять оппозицию, к ничьей ведет 2. Крд3? Крд7 3. Крд4 Крд6!) 2...Крд6 3. Крb4 Крс6 4. Крс4, и белые выигрывают. При перестановке белой пешки с с3 на b4 решающий маршрут короля удлиняется на один ход: 1. Крс2 Кре7 2. Крb3 Крд6 3. Кра4! Крс6 4. Кра5! и т. д.

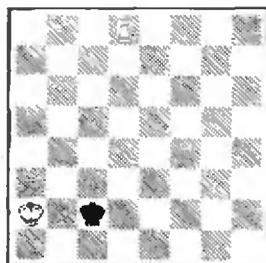
Рассмотрим теперь такой этюд. А. Мандлер. **Белые:** Кра2; **черные:** Кра6, п. g6. Ничья. После переброски королей на другой фланг — 1. Крb2! Крb6 2. Крс2! Крс6 3. Крд2! Крд6 4. Кре2 Кре6 5. Крf2 Крf6 6. Крg2! черные теряют господство над полими соответствия и вынуждены смириться с ничьей. Конечно, решение совсем простое, хотя пример уникален — белые представлены в этюде одним королем.

Кооперативные трио-задачи, в которых черные помогают белым поставить мат черному королю, могут оказаться увлекательнее позиций с обычным заданием, так как в них точная игра требуется не только от двух белых фигур, но и от черного короля.

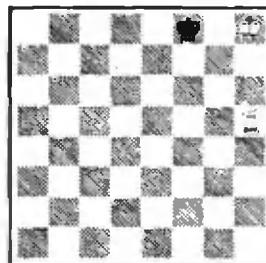


Е. Бон. Ход белых. Кооперативный мат в 7 ходов

Разумеется, пешка должна идти вперед, но она не спешит — 1. d3! При таком миниматериале эта популярная идея проигрыша темпа производит сильное впечатление. 1...Крf2 2. d4 Кре3 3. d5 Крд4 4. d6 Крс5 5. d7 Крb6 (при поспешном 1. d4 черный король сейчас не успел бы проскочить через поле b6, контролируемое появляющимся на доске ферзем) 6. d8Ф + Кра7 7. Фа5×.



Л. Цаглер. Мат в 12 ходов. Заматовать ладьей голого короля сумеет каждый, но сделать это кратчайшим путем не всегда легко: 1. Кра3! Крс3 2. Кра4 Крс4 3. Jld1! Крс5 4. Крb3 Крb5 5. Jlc1 Кра5 6. Крс4 Крb6 7. Крb4 Кра6 8. Крс5 Крb7 9. Крb5 Кра7 10. Крс6 Кра8 11. Крс7 Кра7 12. Ла1×.



М. Вукович. Ход черных. Кооперативный мат в 3 хода

Если бы в этой позиции черный король «сопротивлялся», то для матования не хватило бы и двенадцати ходов. Его помощь заметно ускоряет развязку: 0...Кре7! (начинают черные) 1. Крg7 Кре8! 2. Крf6 Крf8 3. Jlh8×.

Коллекцию трио на шахматной доске вы сможете пополнить позициями, рассматриваемыми в сегодняшнем конкурсе.

Ответы, указания, решения



Физический фейерверк

1. Вследствие капиллярных эффектов вода поднимается по карандашу и ее поверхность вблизи карандаша искривляется. Лучи света преломляются на искривленной поверхности воды так, что на тени карандаша появляется светлый промежуток.

2. Лучи, идущие от монеты, отражаются от задней стенки сосуда и идут вверх. Преломившись на поверхности воды, они попадают в глаз, создавая ощущение того, что монета находится на поверхности воды. Если к задней стенке сосуда приложить мокрую ладонь, отражения от стенки не будет. Сухая рука оказывает гораздо меньшее влияние, так как, вообще говоря, рука соприкасается со стеклом в ограниченном числе точек. Но когда рука мокрая, пустоты между ладонью и стеклом заполняются водой. Поскольку коэффициенты преломления света у воды и стекла примерно одинаковые, такое заполнение пустот водой увеличивает площадь поверхности контакта руки с сосудом практически до 100%. Поэтому большая часть лучей, идущих от монеты и попадающих на этот участок стенки, поглощается (или равномерно рассеивается во все стороны), и изображение монеты исчезает.

3. Лучи, проходящие сквозь первое (наружное) стекло в раме, частично отражаются от внутренней поверхности второго стекла. Обычно это частичное отражение не имеет значения, так как большая часть света проходит сквозь второе стекло и доходит до глаза. Однако, если давление воздуха снаружи отличается от давления воздуха между стеклами, стекла перестают быть параллельными, и часть света, претерпевающая отражение между стеклами, создает едва различимое «призрачное» изображение-двойник.

Рассмотрим луч, который идет от находящегося за окном предмета и падает на первое стекло горизонтально. Большая часть света проходит через стекло в помещение. Если бы в комнату попадал только этот свет, мы видели бы изображение предмета неискаженным. Однако часть света, отражаясь от внутренней поверхности второго стекла, возвращается к первому, снова отражается, идет ко второму и, наконец, проходя сквозь него, попадает в помещение. В результате возникает второе, более слабое, изображение. Если стекла не параллельны, изображение-двойник смещено относительно основного изображения. Подобный же эффект возникает, если толщина стекла не везде одна и та же.

4. Эта горизонтальная линия соответствует высоте, на которой падающий снег превращается в дождь. А снег отражает свет лучше, чем водяные капли.

5. Кажущееся движение маятника по зллан-су объясняется тем, что восприятие маятника глазом, закрытым темным фильтром, на несколько миллисекунд отстает от действительного положения маятника. Предположим, что маятник совершает качание вправо, а фильтром закрыт левый глаз. Правый глаз воспринимает действительное положение маятника, в то время как левый видит его в том положении, в котором маятник был несколько миллисекунд назад. Мысленно вы проводите линии до пересечения лучей, воспринятых каждым глазом, так, как если бы они исходили из одной точки. Получается, что маятник оказывается дальше от вас, чем на самом деле. Когда маятник совершает качание влево, то вследствие той же задержки в восприятии левым глазом маятник кажется теперь ближе, чем на самом деле. В целом создается впечатление, будто маятник движется по зллан-су. Причина задержки восприятия пока еще до конца не выяснена. В основе одной из моделей системы зрительного восприятия лежит последовательность линий задержки, временное разрешение которых улучшается при увеличении количества попадающего в глаз света. Уменьшение количества света, попадающего в глаз, приводит к ухудшению его временной разрешающей способности.

6. Экран телевизора освещен не постоянно, так как электронный луч последовательно создает на экране строку за строкой. Такой мигающий свет может служить стробоскопическим осветителем для вращающегося волчка. Поэтому вы увидите на волчке либо застывший узор, либо узор, движущийся в ту или другую сторону (в зависимости от отношения частоты телевизионной развертки к частоте вращения волчка).

7. Изображение на телевизионном экране появляется не сразу целиком, а быстро «рисует» электронным лучом, который движется по экрану строка за строкой и сверху вниз. Развертка осуществляется так быстро, что глаз не успевает ее заметить. Если быстро перевести глаза вправо, каждая горизонтальная строка оставляет на сетчатке изображение, сохраняющееся в течение примерно 75 мс. Так как глаза движутся одновременно с разверткой изображения по вертикали, изображение всякой линии оказывается чуть правее изображения линии, лежащей ниже, так как верхняя линия появилась на экране чуть раньше. Поэтому все изображение, «записанное» на сетчатке, оказывается перекошенным. Кратные (двойные, тройные и т. д.) изображения возникают поэтому, что за время поворота головы электронный луч успевает «зарисовать» на экране несколько изображений, которые вы переносите одно за другим вправо.

8. До недавнего времени считалось, что такое «окрашивание» вращающегося диска связано с тем, что при переходе от темноты к свету нервные клетки воспринимают разные цвета с различной временной задержкой. В частности, предполагалось, что восприятие красного цвета «включается» чуть быстрее, чем восприятие синего. Однако теперь установлено, что такой разницы в восприятии

разных цветов не существует. Согласно одной из современных гипотез, цветовой эффект, создаваемый вращающимся диском, обусловлен тем, что частота следования белых и черных полос либо сама по себе соответствует частоте кодирования нервных импульсов, передающих цветовое ощущение, либо заставляет фоторецепторы посылать последовательности импульсов, соответствующие закодированной информации о цвете. Другими словами, удачно подобранная частота следования световых импульсов соответствует как бы сигналу «азбуки Морзе», который мозг расшифровывает в виде определенных цветов. Как видно, зрительное восприятие цвета весьма тонкая штука!

«Квант» для младших школьников
(см. с. 31)

1. На рисунке 1 изображен магический квадрат, заполненный первыми девятью натуральными числами. Для него «магическая сумма» равна 15. Умножив каждое число этого квадрата на $\frac{1980}{15} = 132$, получим нужный магический квадрат.

2. Обозначив искомую цифру через x , а число — через A , приходим к уравнению

$$\overline{Ax} = A + x + Ax,$$

то есть

$$10A + x = A + x + Ax,$$

откуда $x = 9$.

3. См. рисунок 2.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

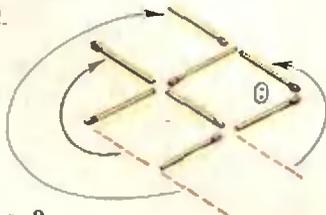


Рис. 1. Рис. 2.

4. Пусть по кругу записано n чисел: a_1, a_2, \dots, a_n . Поскольку $a_1 + a_2 + a_3 - a_2 + a_3 + a_4, a_4 - a_1 = a$. Аналогично, $a_5 - a_2 = b, a_6 - a_3 = c, a_7 - a_4 = a$ и т. д.

Если $a_n = c$, то $n = 3k$ и $k(a + b + c) = 37$, что при $k > 1$ невозможно.

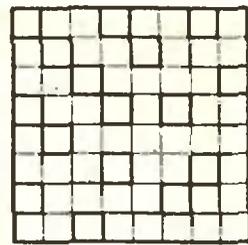
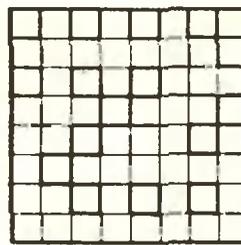
Если $a_n = a$, то и $a_{n-1} = a$ (покажите). Тогда $a_{n-1} - a_n = a_1$, а потому все числа равны, причем каждое из них равно 1.

Тот же вывод справедлив в случае $a_n = b$.

5. Минутная стрелка за сутки делает 24 оборота, часовая — 2 оборота. Стрелка, которая все время делит угол между ними пополам, делает «среднее» число оборотов, то есть $(24 + 2) : 2 = 13$ оборотов за сутки.

Самосовмещения квадрата и тайнопись

1. а) См. рис. 3. б) См. рис. 4. 2. Вырезать в решетке клетки на диагонали BD нельзя, так как соответствующие клетки в квадрате будут «открываться» дважды — при исходном наложении решетки и при симметрии S_p . Нельзя их вырезать и на диагонали AC , так как образы соответствующих клеток квадрата



стр. 3.

Рис. 4.

при симметрии S_p и при повороте R^{180° совпадают и, значит, опять будут «открываться» дважды.

Сколько вариантов

1. $9 \cdot 10^5 - 5^5 = 884\,375$.

2. $10! - 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 7! = 7! \cdot 600 - 8! \cdot 75$.

3. $10 + 10^2 + (10^3 - 10) + (10^4 - 10 \cdot 9 \cdot 2 - 10) = 10\,910$. $10 \cdot 2 \cdot 9$ — это число четырехбуквенных слов, в которых есть две разные буквы, одна из которых встречается три раза подряд.

4. $5^6 + 4 \cdot 5^5 = 28\,125$. Разбиваем все числа на две группы в зависимости от того, четна или четна первая цифра.

5. $1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 + 4 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 68\,880$. Разбиваем все числа на две группы в зависимости от того, равна последняя цифра нулю или нет. Построение числа начинаем с последней цифры, затем строим первую, вторую, третью, четвертую, пятую цифры.

6. а) $2 \cdot 1 \cdot 8 \cdot 7! + 8 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 7! = 16 \cdot 8!$. Сначала ставим 1, затем 0, 2 и остальные семь цифр. Разбиваем все перестановки на две группы в зависимости от того, занимает цифра 1 одно из двух крайних мест или нет.

б) $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 7! + 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 7! + 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 7! = 18 \cdot 7!$. Сначала ставим 1, затем 0, 2 и остальные семь цифр. Разбиваем все перестановки на три группы в зависимости от того, занимает ли 1 пятое или шестое место (в этом случае по две возможности для 0 и 2), четвертое или седьмое место (одна возможность для 0 и две для 2), одно из трех первых или трех последних мест (по одной возможности для 0 и 2).

7. $1 \cdot 4 \cdot 4^3 + 1 \cdot 2 \cdot 4^3 + 2 \cdot 1 \cdot 4^3 = 8 \cdot 4^3 = 512$. Сначала выбираем $f(3)$ затем $f(5)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(4)$. Рассмотрим три случая: $f(3) = 1$ (четыре возможности для $f(5)$), $f(3) = 2$ (две возможности для $f(5)$), $f(3) = 3$ или 4 (одна возможность для $f(5)$).

8. $\frac{n! \cdot 2^n}{2n} = (n-1)! \cdot 2^{n-1}$. По существу, нужно «рассадить» n разных кругов за круглым столом, но учесть при этом, что каждый круг может касаться многоугольника как внутренним, так и внешним образом. Отсюда множитель 2^n в числителе.

9. $\frac{100!}{3! \cdot 4! \cdot 2! \cdot 8! \cdot 10! \cdot 18!}$. Во всех отождествленных между собой расположениях людей все 100 человек разбиты на 9 компаний, каждая из которых занимает один стол. Произвольное расположение из одной группы отождествленных расположений можно построить в следующие 12 шагов: распределить три восьмиместных стола между тремя компаниями

из 8 человек ($3!$ возможностей), распределить четыре десятиместных стола между четырьмя компаниями из 10 человек ($4!$ возможностей), распределить два восемнадцатиместных стола между двумя компаниями из 18 человек (две возможности), затем поочередно за каждым из девяти столов выбрать человека на место №1 (8, 8, 8, 10, 10, 10, 10, 18 и 18 возможностей).

10. $\frac{7!}{2 \cdot 2! 3!} = 210$. Сначала считаем, что у нас два разных «к», два разных «л» и три разных «о», а затем производим отождествление.

11. $\frac{6 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 7}{2! \cdot 3!} = 8400$. Числитель

этой дроби — число семизначных чисел, составленных из двух разных нулей, трех разных единиц и еще двух других цифр (сначала выбираем место для первого нуля, затем — для второго, после этого выбираем последовательно места для каждой из трех единиц и, наконец, выбираем одну из оставшихся восьми цифр на первое из оставшихся мест и одну из семи оставшихся цифр на последнее место). Знаменатель дроби — количество чисел в одной группе после отождествления.

12. $8^3 = 512$.

13. $5 \cdot 6 \cdot 4 = 120$. Сначала выбираем букву, которая входит в данное слово один раз, затем выбираем место для этой буквы и, наконец, выбираем букву, занимающую остальные пять мест.

14. а) $7!$. Заменяем цифры 0, 1, 2, 3 одной «цифрой» 0123. б) $7! \cdot 4!$.

15. а) 60. Сумма цифр такого числа равна 18 или 9. Поэтому возможны варианты цифр: 6, 5, 4, 3 (24 числа); 6, 2, 1, 0; 5, 3, 1, 0 и 4, 3, 2, 0 (по 12 чисел). б) Возможны варианты цифр: 6, 6, 5, 1; 6, 6, 4, 2 (по 12 чисел); 6, 6, 3, 3 (6 чисел); 6, 5, 5, 2 (12 чисел); 6, 5, 4, 3 (24 числа); 6, 3, 0, 0 (6 чисел); 6, 2, 1, 0 (18 чисел); 5, 5, 4, 4; 5, 4, 0, 0 (по 6 чисел); 5, 3, 1, 0 (18 чисел); 5, 2, 2, 0 (9 чисел); 5, 2, 1, 1 (12 чисел); 4, 4, 1, 0 (9 чисел); 4, 3, 2, 0 (18 чисел); 4, 3, 1, 1; 4, 2, 2, 1; 3, 3, 2, 1 (по 12 чисел).

16. $2 \cdot 2 \cdot 8! + 3 \cdot 1 \cdot 8! = 7 \cdot 8!$. Сначала ставим 1, затем 0 и остальные восемь цифр. Рассматриваем два случая: 1 занимает четвертое или пятое место (две возможности для 0), 1 занимает одно из первых трех мест (одна возможность для 0).

17. $\frac{(m+n)!}{m!n!}$.

Эти «коварные» векторы

2. 1, 1.

3. $\sqrt{\frac{7}{3}} a$.

4. 4.

5. Если $\alpha < \frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{2} < \beta < \frac{\pi - \alpha}{2}$, то $(AD, BC) = \arccos \frac{|1 - \cos \alpha - \cos \beta|}{\sqrt{3 - 2 \cos \alpha}}$; (1)

если $\frac{\pi}{2} < \alpha$, $\frac{\pi - \alpha}{2} < \beta < \frac{\alpha}{2}$, то $(AD, BC) = \arccos \frac{|1 - \cos \alpha - \cos \beta|}{\sqrt{3 - 2 \cos \alpha - 4 \cos \beta}}$; (2)

если $0 < \alpha < \pi$, $\beta > \frac{1}{2} \left| \alpha - \frac{\pi}{2} \right| + \frac{\pi}{4}$, то задача имеет два решения, задаваемые формулами (1) и (2).

Задачи на столкновения тел

1. Возможны два случая: а) тело преодолет горку; б) тело не преодолет горку. Из законов сохранения импульса и механической энергии следует, что тело сумеет переехать через горку, если модуль его начальной скорости $v > \sqrt{2gH(m+M)/M}$. Тогда модули искомого скорости тела и горки будут равны, соответственно,

$$\begin{aligned} v_1 &= v \\ v_2 &= 0 \quad \text{при } v > \sqrt{2gH(m+M)/M} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{(m-M)v}{m+M} \\ v_2 &= \frac{2mv}{m+M} \end{aligned} \quad \text{при } v < \sqrt{2gH(m+M)/M}.$$

Заметим, что оба ответа являются решениями одной и той же системы уравнений, описывающей абсолютно упругое центральное соударение. В статье (см. задачу 1) мы ничего не говорили о первом решении, поскольку там оно описывало тривиальную ситуацию — отсутствие соударения.

2. $\beta = \pi/2$.

3. $t = 2R \cos \alpha/v$.

4. Первый шар будет двигаться в прежнем направлении, но модуль его скорости изменится и будет равен $v_1 = \frac{(2m-3M)v}{2m+3M}$. Вто-

рой и третий шары разлетятся под одинаковыми углами $\pi/6$ к направлению движения первого шара с одинаковыми по модулю скоростями $v_2 = v_3 = \frac{2\sqrt{3}mv}{2m+3M}$.

Неоконченная криптограмма

Расшифрованное сообщение выглядит так:

*«В голове Архимеда
было больше воображения
чем в голове Гомера»
(слова Вольтера).*

Задачи наших читателей

(см. с. 14)

2. Обозначив $\frac{x-2}{x+1}$ через t , получим

$$F\left(\frac{1}{t}\right) + 2F(t) = \frac{t+2}{1-t}, \quad (1)$$

$$t \neq 0, t \neq 1.$$

Значит, заменив в (1) t на $\frac{1}{t}$, получим

$$F(t) + 2F\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1+2t}{t-1}. \quad (2)$$

Из равенств (1) и (2) находим

$$F(t) = \frac{4t+5}{3(1-t)},$$

то есть $F(x) = \frac{4x+5}{3(1-x)}$. Это выражение для $F(x)$ мы получили при $x \neq 0$ и $x \neq 1$. При $x=1$ выражение для $F(x)$ теряет смысл. Однако непосредственная проверка показывает, что при $x=0$ найденное выражение для $F(x)$ удовлетворяет данному равенству.

«Квант» для младших школьников (см. «Квант» № 11)

1. Данное предположение ложно только в том случае, если есть карточка, на одной стороне которой — гласная буква, а на другой — нечетное число. Поэтому перевернуть надо первую или четвертую карточку. Если на обороте первой карточки окажется нечетное число, то утверждение ложно, если же — четное, то надо перевернуть четвертую карточку. Если на обороте четвертой карточки окажется согласная буква, то утверждение истинно; если гласная, то ложно.

2. Заполненная таблица изображена на рисунке 5.

Команды	Игры		Победа	Ничья	Пораж	Мячи	Очки	
Старт	x	2:0 5:3	3:1	3	0	0	10-4 6	
Комета	0:2	x	1:1	1:0	1	1	1	2-3 3
Ракета	3:5	1:1	x	2:2	0	2	1	6-8 2
Вымпел	1:3	0:1	2:2	x	0	1	2	3-6 1

Рис. 5.

3. Ответ. Нет, нельзя.

Решение. Четное число, возведенное в четную степень, делится на 4 (дает при делении на 4 остаток 0), а нечетное число, возведенное в четную степень, при делении на 4 дает в остатке 1. Поэтому $1980:2 \times 990$ членов рассматриваемой суммы делится на 4, а каждый из остальных 990 членов при делении на 4 дает в остатке 1. Но поскольку 990 при деле-

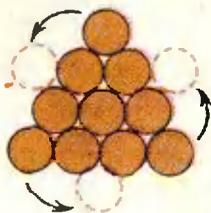


Рис. 6.

нии на 4 дает в остатке 2, при делении на 4 данная сумма также дает в остатке 2. Однако квадрат натурального числа, как вытекает из сказанного выше, дает при делении на 4 остаток либо 0, либо 1. Поэтому данная сумма не может быть квадратом натурального числа.

4. См. рисунок 6.

Всероссийская олимпиада школьников (см. «Квант» № 10), Физика

Теоретический тур

8 класс

1. Максимальное удаление точки от начального положения было равно 5 м в конце 8-й секунды ее движения.

2. См. решение задачи Ф640, которое будет опубликовано позже.

3. $t_2 = t_3$; $t_1 = t_4$.

4. $\eta = \frac{m(c_3(t_{\text{пл}} - t_2) + \lambda + c_2(t_2 + t_3)/2)}{P\tau} \cdot 100\% \approx 48\%$.

9 класс

$$1. v_x = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3} gL}; \quad v_y = \frac{1}{3} \sqrt{\frac{46}{3} gL}.$$

Указание. Пока сила реакции со стороны горизонтальной поверхности не станет равной нулю, шарик будет двигаться по окружности, затем — по параболе.

2. В обоих случаях выделяется одно и то же количество теплоты. Указание. Воспользуйтесь рисунком 1, на котором график процесса а) изображен красной линией, а график процесса б) — синей.

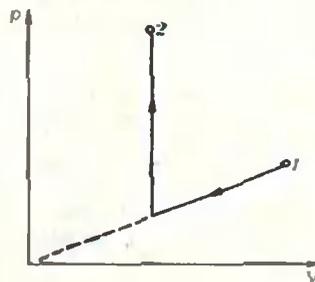


Рис. 7.



Рис. 8.

3. $|\vec{v}_2| = v\sqrt{10}$; направление скорости \vec{v}_2 показано на рисунке 2. Указание. Поскольку суммарный заряд рассматриваемой системы тел равен нулю, однородное внешнее электрическое поле не меняет ее полного импульса.

4. См. решение задачи Ф650, которое будет опубликовано позже.

10 класс

1. Период колебаний уменьшится в $\sqrt{2}$ раз. Указание. Согласно закону сохранения энергии мгновенные скорости точек кольца во втором случае увеличатся в $\sqrt{2}$ раз по сравнению с соответствующими скоростями в первом случае, а период колебаний соответственно уменьшится.

2. См. решение задачи Ф662, которое будет опубликовано позже.

3. См. решение задачи Ф621, которое будет опубликовано позже.

4. Частота ЭДС индукции равна 2ω .

Напечатано в 1980 году

Великий ученый и мыслитель
Победа, которая спасла мир
Праздник молодежи мира
Иосиф Шаевич Слободецкий
(некролог)
Учиться коммунизму!

4 2
5 2
7 2
9 2
10 2

Барская М. Ленин и школа
Вавилов С. Ленин и физика
Гнеденко Б. Математика в Московском государственном университете
Кикоин И. Наука — дело молодых
Колмогоров А. Диалектико-материалистическое мировоззрение в школьных курсах математики и физики
Лешковцев В. Физика в Московском государственном университете
Пирогов И., Тюлина И. Мехмат МГУ в годы Великой Отечественной войны
Регель В., Ткаченко Б. Размагничивание кораблей в годы Великой Отечественной войны
Тарзимова Г. Стихотворение Лобачевского

4 6
4 10
2 2
9 4
4 15
1 2
5 10
5 5
8 18

Статьи по математике

Ашманов С. Числа и многочлены
Блехер П. О людях правдивых, лгунах и обманщиках
Болтянский В. Перемещения плоскости
Болтянский В. Транзитивные множества и правильные многогранники
Быстрый И. Площадь сегмента параболы Нейля
Вертегейм Б. Метод неподвижных точек
Вышенский В., Перестюк Н., Самойленко А. Поговорим о дифференциальных уравнениях
Глушанков Е., Певзнер П. Переключателъная игра Шеннона
Керимов З. Как найти целый корень?
Смолянский М. Умножение ... точек на плоскости
Сосинский А. Перемещения пространства
Усманов З., Ходжиев И. Математика в трудах великого медика
Халмош И. Логика от А до Г
Шкляр А. О транзитивных многогранниках

2 17
11 8
3 2
7 4
6 14
6 5
1 10
9 14
2 22
4 19
8 2
9 7
5 18
12 9

Статьи по физике

Ашкинази Л. МГД-генератор
Болтянский В. Оптика черных дыр
Варламов А., Шапиро А. Метод виртуальных перемещений
Воробьев Н. Гора и ветер
Гиндикин С. История о том, как Галилей открыл законы движения
Гродко Л. Устойчивость автомобиля
Гуревич В. Флуктуации физических величин
Иоффе А. Электрон
Иоффе В. Мой отец — о моем будущем
Кикоин И. Абрам Федорович Иоффе
Кузнецов Е., Рубенчик А. О волнах на море и ряби на лужах
Михайлов А. Когда день равен ночи?
Можаев В. Тепловое расширение твердых тел
Орлов В. Голография
Сморodinский Я., Урков А. Эффект Доплера
Фабрикант В. Физика люминесцентных ламп
Шефер Н. Цезиевый эталон частоты (времени)

11 2
8 8
9 9
1 15
1 18
5 26
2 10
10 22
10 21
10 4
9 22
6 2
6 10
7 10
8 12
3 9
12 2

Лаборатория «Кванта»

Варламов А., Шапиро А. Об «ово»
Вафин Ф. Еще раз о реакции вытекающей и втекающей струй
Дозоров А. Физика без приборов
Майер В. Автоколебания в потоке воздуха
Майер В. Оптические опыты с глазом
Матизен В. О пользе скатывания шариков
Митрофанов А. Вверх по наклонной плоскости
Уокер Дж. Физический фейерверк

7 19
9 27
8 20
1 26
3 18
4 23
5 32
2 24
11 12
12 15

Математический кружок

Александров С. Измельчающиеся узоры
Вагутен Н. Сопряженные числа
Вайнтроп А. Лучше — поровну
Гегелия Г. Принцип сжимающих отображений
Залгаллер В. Задача о треугольниках с общим основанием
Залгаллер В., Залгаллер С. Венгерский шарнирный кубик
Курляндчик Л., Лисицкий А. Как придумать комбинаторное тождество
Мамикон М. Обобщенная задача о фальшивых монетах
Михайлов И. О диофантовом анализе
Михеев Ю. Одной линейкой
Ольхов В. Как придумать геометрическое неравенство
Шкапенюк М. Выпуклость функций и доказательство неравенств

4 26
2 26
8 23
9 28
11 15
12 17
5 34
1 27
6 16
10 26
5 33
3 21

Искусство программирования*Заочная школа программирования*

Урок 5	1	52
Урок 6	2	53
Урок 7	3	48
Урок 8	3	51
Урок 9	9	52
Урок 10	10	47
Урок 11	11	42

Олимпиада по программированию
Призеры Олимпиады по программированию

<i>Звенигородский Г., Первин Ю., Сосинский А.</i> V Всесоюзная летняя школа юных программистов	12	55
<i>Первин Ю., Салтовский А.</i> Память ЭВМ	4	54

Первин Ю., Салтовский А. Как работает процессор
Салихова А., Соколова Н. Графическая система Шнага
Салтовский А. Организация ввода и вывода в ЭВМ

«Квант» — Олимпиаде

ЭВМ на Олимпиаде	7	31
<i>Лапценок И.</i> Программное обеспечение фехтовальных турниров	7	36
<i>Первин Ю.</i> Обработка протоколов соревнований по прыжкам в высоту	7	33
<i>Савин А.</i> Олимпийские кольца	7	38

Задачник «Кванта»

Задачи М601—М660; Ф613—Ф672	1—12	
Решения задач М520, М532, М546—М577, М579—М603, М605—М610, М625; Ф558—Ф574, Ф576—Ф617	1—12	

Письмо в редакцию	8	45
<i>Лердиков А.</i> Арифметические прогрессии в треугольнике Паскаля	11	27

Фамилии решивших	3, 6, 9, 12	
Победители конкурса «Кванта»	3	25
Премии «Кванта»	9	40

«Квант» для младших школьников

Задачи	1—6, 8—12	
--------	-----------	--

<i>Бартенев Ф.</i> Блуждающие фишки	3	38
<i>Белый С.</i> Разноцветная математика	6	30
<i>Бендукидзе А., Савин А.</i> Производные пропорции	2	44
<i>Гик Е.</i> Морской бой	11	30
<i>Зельманзон М., Хлабыстова Л.</i> Самосовмещения квадрата и тайнопись	12	32
<i>Изиак Д., Уткина Т.</i> Кружочки Степы Мошкина	1	42
<i>Михайлова Н.</i> Плоды «просвещения»	4	38
<i>Никольская И.</i> «Неверно, что...» — как это понимать?	9	42

<i>Алексеев Д.</i> Физика в каникулы	8	48
--------------------------------------	---	----

<i>Дозоров А.</i> По страницам старого учебника	5	44
<i>Юфанова И.</i> Волшебная сказка с физическими вопросами	10	38

Наша обложка

<i>Березик В.</i> Конические сечения и задача Аполлония	2	33
<i>Вашков В.</i> Эволюта	9	61
<i>Котов Ю.</i> Картины на воде	6	15
<i>Котов Ю.</i> Семейство кубических парабол	7	18
<i>Котов Ю.</i> Умножим уравнения	10	62
<i>Кривошеев Е.</i> Магические восьмиугольники	11	37
<i>Усов В., Чубарев А.</i> Закрученные многоугольники	3	47
<i>Шубалева М.</i> Советские вымпелы — на станции «Луна-12» и на Венере	4	43

По страницам школьных учебников

<i>Габониц И.</i> Предел функции	10	40
<i>Земляков А.</i> Проверьте себя	9	47
<i>Иванов Ю.</i> Сколько вариантов?	11	33
	12	36

Практикум абитуриента

<i>Виленкин Н.</i> Три точки, три точки, три точки...	1	48
<i>Дубровский В.</i> Неожиданный ракурс	2	46
<i>Матизен В.</i> Найдем ошибку	10	43
<i>Медвиль И.</i> Где расположено основание высоты?	4	40
<i>Метт Ю.</i> Три стандартные задачи	9	51
<i>Перевалов Г.</i> Что значит «знать»?	6	33
<i>Приходько В., Пыж В., Уваров О.</i> Поупражняйся и проверь себя	7	41
<i>Розов Н.</i> Читатели советуют	5	46
<i>Чехлов В.</i> Эти «коварные» векторы	12	40

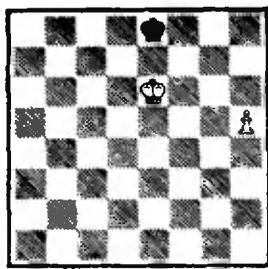
<i>Асламизов Л.</i> Электромагнитная индукция	6	36
<i>Асламизов Л.</i> Силы трения и движение	11	38
<i>Кротов С.</i> Задачи на столкновения тел	12	45
<i>Кузнецов Е.</i> Фотоаппарат на вступительных экзаменах	4	44
<i>Можаев В.</i> Закон всемирного тяготения	3	41
<i>Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1979 году</i>		
Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина	5	53
Вильнюсский государственный университет им. В. Капсукаса	5	55
Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко	6	43
Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена	6	45
Ленинградский государственный университет им. А. А. Жданова	6	42
Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе	7	43
Московский архитектурный институт	7	49

Московский инженерно-физический институт	1	51	Дополнительный прием в заочные математические школы	8	61
Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии	7	48	Олимпиады		
Московский институт инженеров железнодорожного транспорта	7	42	<i>XIV Всесоюзная олимпиада</i>		
Московский институт нефтехимической и газовой промышленности им. академика И. М. Губкина	7	51	Олимпиада по математике	11	45
Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской	7	52	Задачи, предлагавшиеся на математическом бое	11	7
Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина	6	45	Олимпиада по физике	11	51
Московский институт стали и сплавов	7	47	Экспериментальный тур олимпиады по физике	11	54
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова	3	44	Призеры олимпиады	11	59
	4	48	***		
	6	56	Всероссийская олимпиада	10	52
Московский физико-технический институт	2	51	XVI лингвистическая олимпиада	4	59
Московский институт электронного машиностроения	7	46	Олимпиада ОмПИ + МФТИ	8	58
Московский энергетический институт	7	45	Шахматная страничка		1—12
Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана	7	49	Шахматный конкурс «Кванта»		7—12
Новосибирский государственный университет им. Ленинского комсомола	5	51	Смесь		
Ростовский государственный университет (механико-математический факультет)	6	44	<i>Бабенко Ю.</i> Задача для исследования	11	11
Спрашивайте — отвечаем	3	17	<i>Гайдук Ю.</i> Забытая теорема (софизм-шутка)	5	17
Рецензии, библиография	8	46	<i>Касаткин В.</i> Дело каждого из нас	7	40
<i>Бровиков И.</i> Задачи комбинаторики	8	51	<i>Котов Ю.</i> Видоизменение поверхности Штейнера	12	30
<i>Гук Е.</i> Серии — 14 лет	8	52	<i>Криц А.</i> Когда под рукой нет ЭВМ	12	14
<i>Зорич И.</i> Твой первый робот	9	59	<i>Михайленко Н.</i> Несколько вопросов по астрономии	5	42
<i>Левитан Е.</i> Школьникам об астрономической картине мира	8	51	<i>Лобожий Ю.</i> О числе π	6	47
<i>Розов Н.</i> Прикладная математика: интересно, актуально, перспективно!	3	59	<i>Рыжик В.</i> В чем дело?	1	17
<i>Розов Н., Смолянский М.</i> Полезное начинание	10	50	<i>Сморodinский Я.</i> Повторение опыта Майкельсона и Морли	10	51
			<i>Штеренберг М.</i> Замечательные треугольники	5	31
			М. В. Ломоносов и Московский университет	2	23
			Заполнение плоскости многоугольниками	2	25
			Полупустое равно полуполному (письмо в редакцию)	3	40
			Советуем купить!	2,	5
			<hr/>		
			<i>Номер готовили:</i>		
			А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович		
			<hr/>		
			<i>Номер оформили:</i>		
			М. Дубах, Т. Кольченко, Г. Красиков, С. Лукин, Э. Назаров, И. Смирнова		
			<hr/>		
			<i>Зав. редакцией</i> Л. Чернова		
			<hr/>		
			<i>Художественный редактор</i> Т. Макарова		
			<hr/>		
			<i>Корректор</i> Н. Дорохова		
			<hr/>		
			113035 Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62		
			<hr/>		
			Сдано в набор 16.10.80		
			Подписано в печать 28.11.80		
			Печать офсетная		
			Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4		
			Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 7,07 Т-17858		
			Цена 30 коп. Звквз 2548 Тираж 260 463 экз.		
			<hr/>		
			Человеческий полиграфический комбинат		
			Союзполиграфпрома		
			Государственного комитета		
			СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли,		
			г. Чехов Московской области		

ШАХМАТНЫЙ КОНКУРС «КВАНТА»

Задания предыдущих пяти туров нашего шахматного конкурса были довольно серьезные. Ну, а сейчас, накануне Нового года, можно позволить себе и немного пошутить. Тем более, что трио и даже дуэты на шахматной доске служат неплохим источником шахматного юмора. В сегодняшних примерах и задачах игроки будут брать ходы назад, давать другому игроку фору, бить свои фигуры и т. д. и т. п.

Целая серия забавных сверхминиатюр связана со взятием ходов назад.



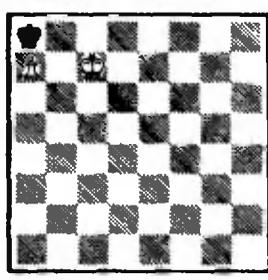
3. Погосянци. Белые берут назад последний ход и дают мат в 1 ход.

Данная позиция как раз возникла после того, как рассеянный Ленский нарушил

лый король взял с g6 черную ладью на h5 (Kpg6:Lh5) которая, в свою очередь, только что побила с h8 белого ферзя на h5 (Lh8:Фh5). В восстановленной позиции черные делают короткую рокировку 0—0! и сразу получают мат — 1.Фh5—h7× Вот вам и дуэт на шахматной доске!

В конкурсной задачке № 1 нелегко догадаться, что последним ходом белых была... короткая рокировка! Но и с такой подсказкой вам еще предстоит поломать голову (на рисунке ошибка нет!).

Новогодние шутки



Белые берут назад последний ход и дают мат в 1 ход.

а) позиция на диаграмме; б) короля с c7 переставить на c8.

В этих задачах-близнецах берется назад взятие пешкой b6:a7, вместо чего следует 1.b6—b7×, причем в случае а) на a7 мог стоять только черный конь, а в случае б) — только черный слон. Заменяя в б) пешку a7 белым конем, получаем третьего близнеца — вместо Kb5:Ca7 решает 1.Kb5—c7×.

Следующую задачу-шутку можно рассматривать как иллюстрацию к роману в стихах Пушкина «Евгений Онегин». Надеемся, что вы хорошо знаете не только математику, но и литературу, и поэтому помните известную «партию» между Ленским и Ольгой:

*Уединясь от всех далеко,
Они над шахматной доской,
На стол облакотьясь порой,
Сидят, задумавшись глубоко,
И Ленский пешкою ладью
Берет в рассеяньи свою*

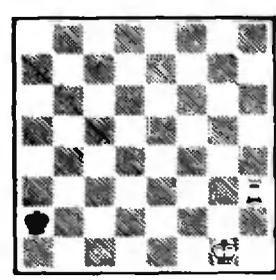


правила игры и взял пешкой g4 свою ладью на h5. Теперь он умоляет Ольгу простить его, берет назад ход g4:Lh5 и объявляет ошеломленной девушке шах и мат: 1.Lh8×!

Хотя задача эта и шуточная, но интересно, что она не допускает криво толков. Например, предположение, что Ленский взял на h5 своего ферзя, а не ладью, приводит к тому, что Ольга тоже играла рассеянно — иначе не объяснить, почему черный король отправился под шах. Однако у Пушкина об этом ничего не сказано!

Поставим теперь на доску всего два короля — белого на h5 и черного на e8. Задание такое: белые и черные берут назад последний ход, затем черные делают ход, и белые дают мат в 1 ход.

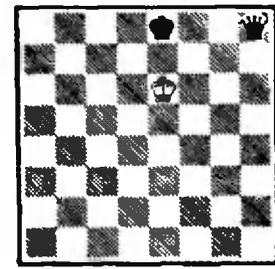
Это обычное задание настолько расширяет возможности сторон, что одних королей хватает без всяких шуток! Своим последним ходом бе-



1. Белые берут назад последний ход и дают мат в 2 хода.
2. Белый конь на f5, черный король на h2. Белые и черные берут назад последний ход, затем черные делают ход, и белые дают мат в 1 ход.

Для решения конкурсных позиций № 3 и № 4 от вас потребуется не только знакомство с дробными числами, но и...чувство юмора (вот вам и подсказка!).

3. На доске два короля — белый на e8 и черный на f8. Белые дают мат в 1/2 хода.



4. Белые дают мат в 2/3 хода.

Срок присылки решений — 31 января 1981 г.

Наш художник изобразил здесь «жизнеописание» венгерского шарнирного кубика. Внутри этой пластмассовой математической игрушки-головоломки спрятан остроумно устроенный шарнирный механизм, позволяющий поворачивать любую «плитку» из девяти цветных кубиков. В центре крупным планом показано начало поворота (примерно на 60°) «ближней» плитки против часовой стрелки.

Окаймляют большой куб более мелкие изображения превращений куба, полученные подобными поворотами. Вверху в центре показан куб в «начальной позиции» (все грани одноцветные); справа от него изображен куб после

поворота двух горизонтальных плиток (верхней и нижней); затем повернули две вертикальные плитки (какие?). Как развивались события дальше — проследите сами. Обратите внимание на симметричные раскраски, получившиеся в середине вертикальных рядов. Проследите, как при повороте двух горизонтальных плиток второго слева куба в верхнем ряду вновь возникает начальная позиция, — закончился своеобразный жизненный цикл шарнирного кубика!

О правилах игры в эту головоломку и о возникающих при этом задачах см. с. 32

В. Дубровский

