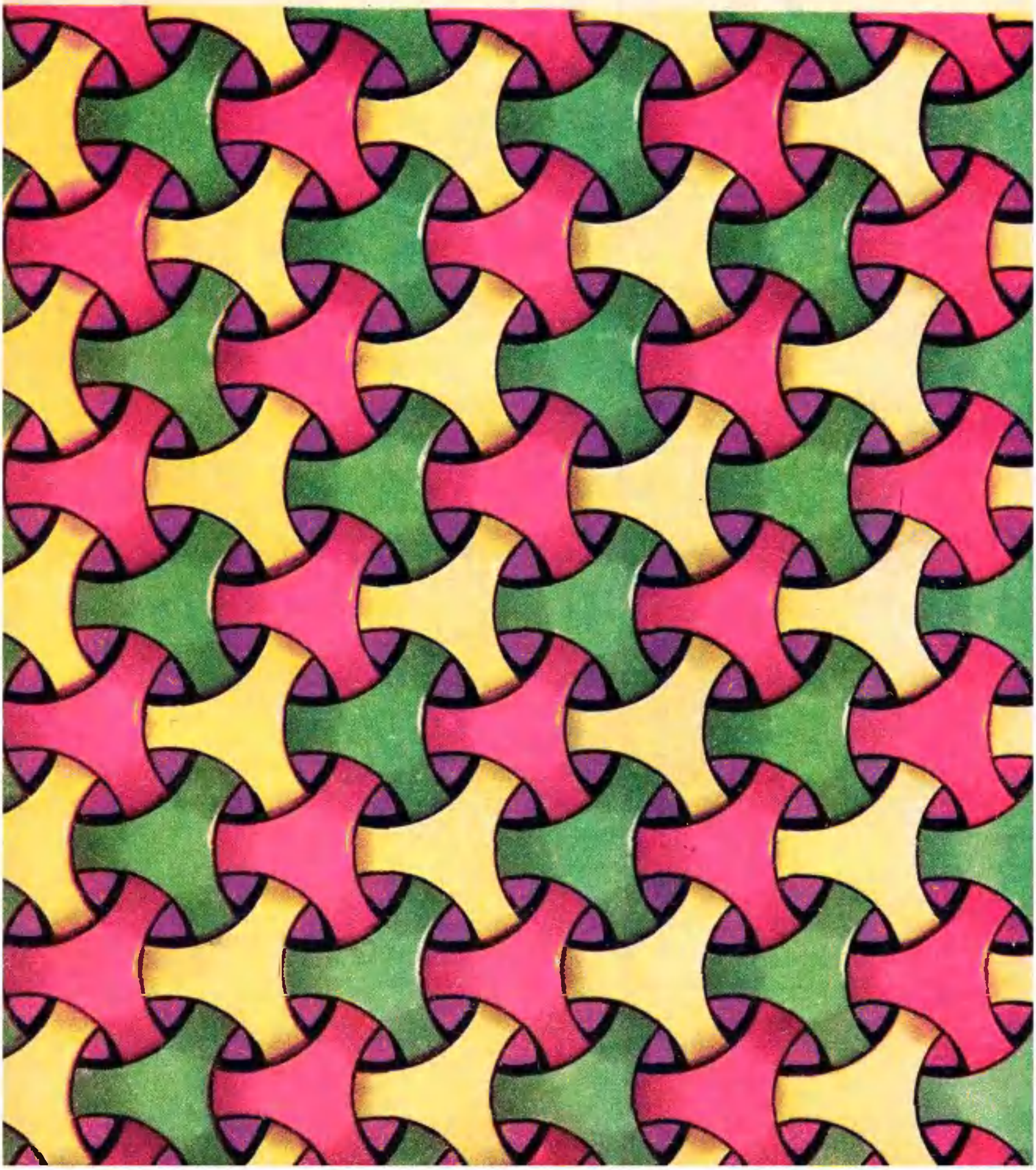
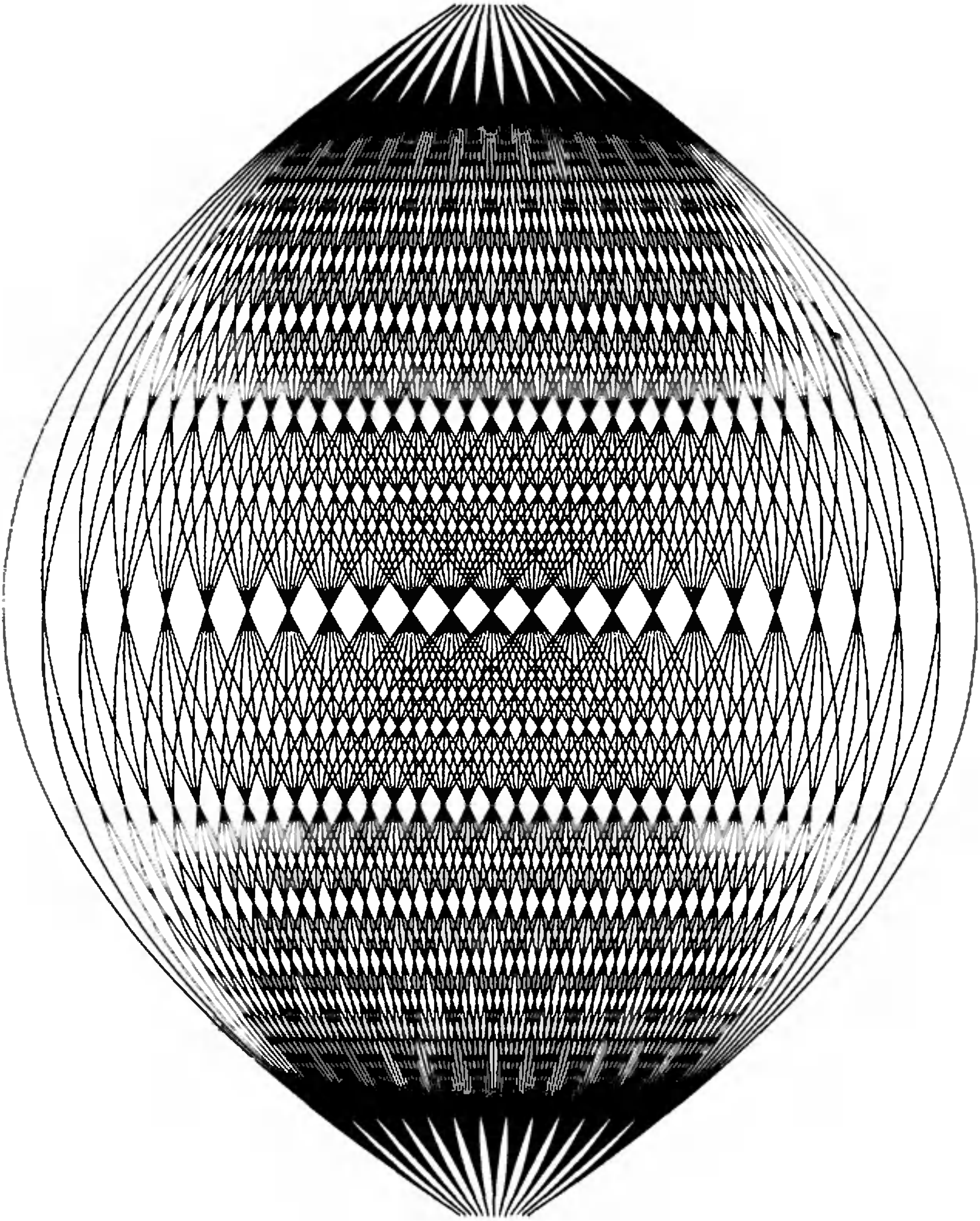
ISSN 0130-2221

Квант

7
1980

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





По поводу этого узора, нарисованного ЭВМ, см. с. 18

Основан в 1970 году

Квант

7
1980

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

На первой странице обложки показана разноцветная кольчуга из сцепленных колец. О сцепленных кольцах можно прочитать на с. 38

Праздник молодежи мира

Сейчас внимание всего мира приковано к Москве, где спортсмены ведут прекрасный спор в силе, ловкости и быстроте.

Избрание столицы СССР в качестве хозяйки XXII летних Олимпийских игр — явление закономерное, обусловленное историческим ходом развития спорта. Сегодня весь мир признает огромный вклад, который спортсмены нашей страны внесли в укрепление современного олимпийского движения.

Четыре года назад, когда подобный праздник мирового спорта проходил в Монреале, в своей телеграмме членам Международного олимпийского комитета, Организационному комитету и участникам XXI летних Олимпийских игр Леонид Ильич Брежнев писал:

«СССР поддерживал и будет поддерживать современное олимпийское движение. Сейчас советские люди ведут подготовку Московской Олимпиады 1980 года и сделают все для того, чтобы она прошла на высоком уровне, дала новые импульсы благородным идеям дружбы и мира».

Советская столица сделала все, чтобы гостеприимно подготовиться к празднику олимпийцев планеты. Все москвичи, более того — все советские люди, восприняли Олимпиаду как свое родное, кровное дело.

И вот годы труда, годы волнений позади. Завершена грандиозная созидательная работа. Да, грандиозная: ведь одновременно сооружались или реконструировались 76 различных крупных объектов; некоторые из них не имеют себе равных и, по существу, являются уникальными. Среди них крытый стадион на 45 000 зрителей и плавательный бассейн на проспекте Мира, футбольно-легкоатлетический комплекс ЦСКА, гребной канал, кольцевая трасса и крытый велодром в Крылатском, Дворцы спорта в Измайлове и Сокольниках, конно-спортивная база профсоюзов в районе Битцы, спортивный зал «Дружба». Проведена генеральная реконструкция Центрального стадиона имени В. И. Ленина, где состоялась церемония открытия Игр, проходят состязания по семи видам спорта. Возведены новые гостиницы и отели, построен олимпийский аэровокзал «Шереметьево-2», приведены в образцовый порядок все службы огромного города, одевшегося в праздничный наряд.

Одной из важнейших черт Олимпиады-80 является ее культурная программа, выполнение которой началось еще в прошлом году. В лучших театрах и концертных залах, на открытых сценических площадках, в музеях, выставочных залах идет широкий показ советского многонационального искусства. Разве не знаменательно, что только в дни Олимпиады в нашей столице состоится около 600 спектаклей и 1500 концертов! Все это, включая показ произведений советского киноискусства, вернисажи, экскурсии по историческим местам города и его окрестностям, позволит участникам и гостям Олимпиады ощутить духовное богатство нашего народа, нашей страны, понять, какое место занимает удовлетворение культурных запросов советских людей в нашем образе жизни, представить, какой значительный вклад мы вносим в сокровищницу мировой культуры.

И все-таки Олимпиада — это, прежде всего, праздник спорта, состязание лучших в извечном стремлении Человека быть выше, дальше, быстрее. По самым скромным подсчетам на старты состязаний по 25 видам программы вышли более 10 000 лучших спортсменов, представляющих все континенты нашей планеты. Это юноши и девушки, для которых жизненно важным является стремление к духовному и физическому совершенству, к разносторонности, к красоте и силе. Студент физического факультета Берлинского университета пловец Ганс Кнаппе, кандидат биологических наук советская спортсменка Елена Петушкова, будущий астроном студент Парижского университета Луи Жемель, лаборантка Мельбурнского центра математических исследований Гейл Нилл... Среди участников молодые ученые и поэты, государственные служащие, художники — люди самых разнообразных профессий, различных жизненных интересов. Их объединил спорт, спорт собирает их в одну семью под сенью пяти олимпийских колец.

Москва раскрыла им, их тренерам, официальным лицам, сотням тысяч гостей, собравшимся на призывный свет Олимпийского огня, свои дружеские объятия. И совсем не трудно понять, почему столько заботы, любви, сердечности мы проявляем ко всему, что касается начавшегося праздника. Советские люди видят в нем не только крупнейшее спортивное событие, но и еще один важный шаг в сторону упрочения взаимопонимания, мира и дружбы между народами в полном соответствии с высокими идеалами олимпийского движения.

«В советской столице мне довелось быть летом 1979 года,— рассказывает аспирант кафедры теоретической физики государственного университета в Гаване, выдающийся мастер волейбола Э. Родригес.— Мы приняли участие в турнире женских команд по программе VII летней спартакиады народов СССР. Это был великолепный праздник спорта. Он прошел в новом игровом комплексе «Дружба» и на площадках переоборудованной малой арены стадиона в Лужниках. Организация, судейство соревнований были отличными. Все это гарантирует проведение Олимпиады на еще более высоком уровне.»

Да, то, что сделала олимпийская Москва, вызывает восхищение и одобрение всех честных людей в мире.

«Готовность советской столицы к проведению Олимпиады никогда не вызывала сомнения,— пишет болгарская газета «Народен спорт».— И все-таки не может не приводить в изумление все, что сделано здесь. Участников соревнований и многочисленных гостей ждут первоклассные стадионы, Дворцы спорта, плавательные бассейны. А главное — их ждет истинное радушие великого города».

Да, истинное радушие великого города ждет спортсменов около ста государств всех пяти континентов, направляющихся на XXII летние Олимпийские игры. Среди них представители ГДР и Франции, Великобритании и Австралии, Индии и Социалистической Республики Вьетнам, Болгарии и Демократической Республики Афганистан, Сирии и Кубы... Дети разных стран и народов направляются в Москву, чтобы встретиться здесь под олимпийским стягом.

Наперекор администрации президента США Картера и ее немногочисленным последователям из лагеря империализма, наперекор явным и тайным врагам Игр, олимпийский огонь, зажженный в столице первого в мире социалистического государства рабочих и крестьян, несомненно, согреет нашу планету, заставит отступить поборников «холодной войны».

Олимпийские игры стали большим и важным событием в общем процессе сближения народов. Организаторы XXII Олимпиады, широкие слои советской общественности сделали все, чтобы идеалы братства и дружбы, которыми руководствуется олимпийское движение, восторжествовали и на этот раз, найдя реальное воплощение в празднике мирового спорта, проходящем в нашей Москве.

В. Болтянский

Транзитивные множества и правильные многогранники

Группа самосовмещений фигуры

Перемещение f называется *самосовмещением* фигуры F, если оно переводит эту фигуру в себя: $f(F) = F$. Легко доказать, что множество всех самосовмещений фигуры F является группой (определение *группы* см., например, в «Кванте», 1976, № 10); условимся обозначать *группу самосовмещений* фигуры F через $\Gamma(F)$.

Задачи

1. Укажите все самосовмещения: а) окружности; б) прямой; в) отрезка.

2. Укажите фигуру F, для которой группа $\Gamma(F)$ содержит ровно три самосовмещения.

Группа самосовмещений фигуры F существенно связана с «геометрией» этой фигуры. Пусть, например, P — параллелограмм, не являющийся ни прямоугольником, ни ромбом. Существуют два перемещения, переводящие P в себя: тождественное отображение e и симметрия r относительно точки пересечения диагоналей.

Задача **3.** Докажите, что не существует самосовмещений такого параллелограмма P, отличных от e и r.

Из того, что $\Gamma(P)$ содержит центральную симметрию r, вытекают все основные свойства параллелограмма: конгруэнтность и параллельность противоположных сторон, конгруэнтность противоположных углов и т. д.

Группа самосовмещений ромба Q, не являющегося квадратом, содержит, кроме e и r, две осевые симметрии s_1, s_2 относительно диагоналей, то есть $\Gamma(Q) = \{e, r, s_1, s_2\}$. Из наличия в группе $\Gamma(Q)$ дополнительных (по сравнению с параллелограммом общего вида) самосовмещений вытекают специфические свойства ромба (помимо свойств, присущих всякому параллелограмму): перпендикулярность диагоналей, совпадение диагоналей с биссектрисами углов и т. д.

Задачи

4. Перечислите все четырехугольники, у которых группа самосовмещений содержит ровно два элемента.

5. Докажите, что если фигура F является ограниченной (то есть содержится в некотором круге), то $\Gamma(F)$ не может содержать параллельный перенос, отличный от e.

Транзитивные множества на плоскости

Множество H называется *транзитивным*, если любая точка этого множества может быть переведена в любую другую его точку некоторым самосовмещением множества H. На рисунке 1 изображен квадрат, от которого отрезаны четыре конгруэнтных равнобедренных прямоугольных треугольника. Множество всех вершин получившегося восьмиугольника транзитивно.

Теорема 1. *Если H — ограниченное транзитивное множество на плоскости, то существует окружность, содержащая H.*

Доказательство. Поскольку H — ограниченное множество, оно, по определению, содержится в некотором круге. Тогда существует и круг наименьшего радиуса,

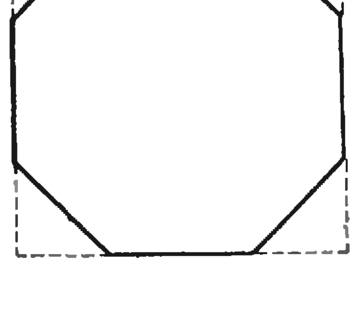


Рис. 1.

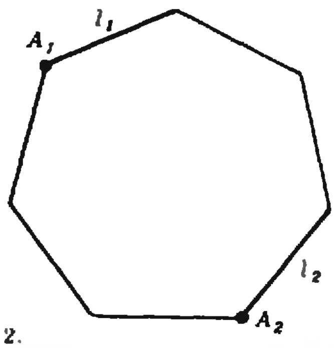


Рис. 2.

содержащий H. Пусть K — такой наименьший круг, O его центр.

Возьмем две произвольные точки A, B множества H. Покажем, что $|AO|=|BO|$. Отсюда будет следовать, что H лежит на некоторой окружности (легко видеть, что эта окружность ограничивает круг K).

В силу транзитивности множества H существует такое самосовмещение $f \in \Gamma(H)$, что $f(A)=B$. Из $H \subset K$ следует $f(H) \subset f(K)$. Но $f(H)=H$. Значит, $H \subset f(K)$. Таким образом, $H \subset K \cap f(K)$.

Поскольку f — перемещение, $f(K)$ — круг, конгруэнтный кругу K. Если бы круги K, $f(K)$ не совпадали, существовал бы круг меньшего радиуса, содержащий $K \cap f(K)$, а потому и H, что противоречило бы выбору круга K. Итак, $f(K)=K$, а значит, и $f(O)=O$.

Из $f(A)=B$, $f(O)=O$, и того, что f — перемещение, следует $|AO|=|BO|$.

Очевидно, пустое, любое одноэлементное и любое двухэлементное множества транзитивны.

Задачи

6. Докажите, что если транзитивное множество содержит $2k+1$ точек ($k>0$), то эти точки служат вершинами правильного многоугольника.

7. а) Докажите, что если транзитивное множество содержит 4 точки, то эти точки являются вершинами прямоугольника.

б) Докажите, что если транзитивное множество содержит $2k$ точек ($k>2$), то эти точки служат вершинами двух правильных k-угольников, вписанных в одну окружность.

8. Докажите, что бесконечное ограниченное транзитивное множество H всюду плотно заполняет содержащую его окружность (то есть не существует дуги этой окружности, свободной от точек множества H).

А существуют ли неограниченные транзитивные множества? Конечно, существуют: например, вся плоскость и любая прямая на ней. Попробуйте придумать хотя бы еще один пример.

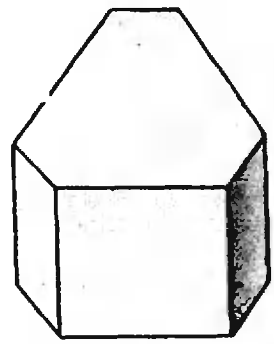


Рис. 3.

Многоугольник, множество всех вершин которого транзитивно, условимся называть *транзитивным многоугольником*. Очевидно, любой правильный многоугольник является транзитивным. Однако правильный многоугольник P обладает более глубоким свойством, которое можно назвать *сильной транзитивностью:* если A_1, A_2 — две произвольные вершины, а l_1, l_2 — стороны, примыкающие к этим вершинам (рис. 2), то существует самосовмещение $f \in \Gamma(P)$, удовлетворяющее условиям: $f(A_1)=A_2$, $f(l_1)=l_2$.

Если многоугольник P обладает свойством сильной транзитивности, то он правильный.

Задача 9. Докажите, что для правильного n-угольника P группа $\Gamma(P)$ содержит $2n$ перемещений. Убедитесь, что ровно половина из этих перемещений — осевые симметрии.

Транзитивные множества в пространстве

Можно рассматривать транзитивные множества и в пространстве. Например, множество всех вершин прямой призмы, в основании которой лежит транзитивный многоугольник (рис. 3), транзитивно.

Теорема 2. *Если H — ограниченное транзитивное множество в пространстве, то существует сфера, содержащая H.*

Доказательство — то же, что и на плоскости, только вместо наименьшего круга надо рассматривать наименьший шар, содержащий H. Придирчивый читатель может, однако, заметить, что доказательства эти — неполные: надо еще установить существование наименьшего круга (или шара), содержащего заданное ограниченное множество H (это можно вывести, например, из теоремы Вейерштрасса). Приведем поэтому другое доказательство; оно не содержит пробелов, но пригодно лишь для конечного множества H.

Лемма. *Пусть* $H=\{A_1, \ldots, A_n\}$ — *конечное множество точек. Тогда существует, и притом только одна, точка* O, *для которой*

$$\vec{OA_1}+\ldots+\vec{OA_n}=\vec{0}.$$

(Такая точка называется *центром тяжести* точек $A_1, \ldots, A_n$.)

Доказательство. Возьмем произвольную точку Q и обозначим через $\vec{a}$ вектор $\frac{1}{n}(\vec{QA_1}+\ldots+\vec{QA_n})$, а через O — такую точку, что $\vec{QO}=\vec{a}$. Тогда

$$\vec{OA_1}+\ldots+\vec{OA_n}=(\vec{OQ}+\vec{QA_1})+\ldots+(\vec{OQ}+\vec{QA_n})=n\vec{OQ}+(\vec{QA_1}+\ldots+\vec{QA_n})=n(-\vec{a})+n\vec{a}=\vec{0},$$

то есть точка O — искомая.

Докажем ее единственность. Пусть $\vec{O'A_1}+\ldots+\vec{O'A_n}=\vec{0}$. Тогда

$$(\vec{O'O}+\vec{OA_1})+\ldots+(\vec{O'O}+\vec{OA_n})=\vec{0},$$

то есть $n\vec{O'O}=\vec{0}$, а потому $\vec{O'O}=\vec{0}$, и значит, точки O и O' совпадают.

Докажем теперь теорему 2. Пусть $H=\{A_1, \ldots, A_n\}$ — транзитивное множество и O — центр тяжести точек $A_1, \ldots, A_n$. Возьмем произвольное самосовмещение f множества H и обозначим образы точек $A_1, \ldots, A_n$, O при перемещении f через $A_1', \ldots, A_n'$, O'. Из равенства $\vec{OA_1}+\ldots+\vec{OA_n}=\vec{0}$ следует, что $\vec{O'A_1'}+\ldots+\vec{O'A_n'}=\vec{0}$. Но ведь $A_1', \ldots, A_n'$ — это те же точки $A_1, \ldots, A_n$, только взятые в каком-то другом порядке (поскольку $f(H)=H$). Поэтому соотношение $\vec{O'A_1'}+\ldots+\vec{O'A_n'}=\vec{0}$ можно, переставляя нужным образом слагаемые, записать в виде $\vec{O'A_1}+\ldots+\vec{O'A_n}=\vec{0}$. Согласно лемме O' совпадает с O, то есть $f(O)=O$. Итак, при любом самосовмещении множества H точка O переходит в себя. Отсюда, как и в доказательстве теоремы 1, вытекает, что все точки множества H находятся на одинаковом расстоянии от O.

Из нашего доказательства видно, что *если* $H=\{A_1, \ldots, A_n\}$ — *транзитивное множество, не расположенное в одной плоскости, и* O — *центр сферы, содержащей множество* H, *то* $\vec{OA_1}+\ldots+\vec{OA_n}=\vec{0}$.

Многогранник, множество всех вершин которого является транзитивным, условимся называть *транзитивным многогранником*. Согласно теореме 2 существует сфера, проходящая через все его вершины (*описанная сфера*). А из сделанного замечания вытекает, что если $A_1, \ldots, A_n$ — все вершины транзитивного многогранника и O — центр описанной около него сферы, то $\vec{OA_1}+\ldots+\vec{OA_n}=\vec{0}$.

Правильные многогранники

Для многогранников свойство *сильной транзитивности* формулируется следующим образом: пусть A_1, A_2 — произвольные вершины многогранника M, l_1, l_2 — ребра, примыкающие к A_1, A_2, и γ_1, γ_2 — грани, примыкающие к l_1, l_2; тогда должно существовать самосовмещение $f\in\Gamma(M)$, удовлетворяющее условиям $f(A_1)=A_2$, $f(l_1)=l_2$, $f(\gamma_1)=\gamma_2$. Многогранник, обладающий свойством сильной транзитивности, называется *правильным многогранником* *).

Задачи

10. Докажите, что самосовмещение $f\in\Gamma(M)$, удовлетворяющее условиям $f(A_1)=A_2$, $f(l_1)=l_2$, $f(\gamma_1)=\gamma_2$ (о которых идет речь в определении сильной транзитивности), единственно.

11. Докажите, что число элементов группы $\Gamma(M)$ вчетверо больше числа ребер правильного многогранника M.

Пусть M — правильный многогранник, γ — его грань, A_1 и A_2 — две ее вершины и l_1, l_2 — стороны многоугольника γ, примыкающие к вершинам A_1, A_2. В силу свойства сильной транзитивности существует самосовмещение $f\in\Gamma(M)$, удовлет-

*) Данное определение правильного многогранника эквивалентно школьному («Геометрия 9—10», § 54). «В одну сторону» это будет сейчас доказано.

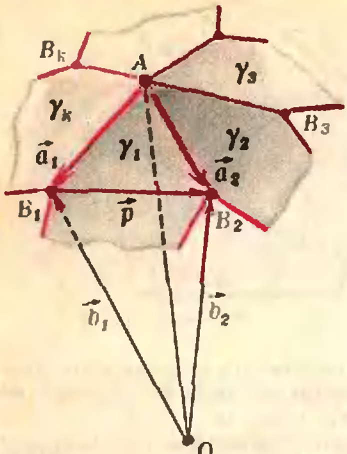


Рис. 4.

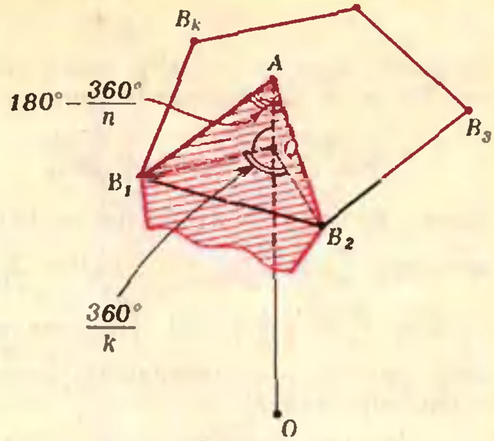


Рис. 5.

воряющее условиям $f(\gamma)=\gamma$, $f(A_1)=A_2$, $f(l_1)=l_2$. Первое из этих равенств означает, что $f\in\Gamma(\gamma)$. Мы видим, что многоугольник γ сильно транзитивный, то есть правильный.

Из свойства сильной транзитивности многогранника M вытекает также, что все его грани конгруэнтны. Далее, из свойства транзитивности (даже обычной, не сильной) следует, что к каждой вершине примыкает одинаковое число граней. Итак, *все грани правильного многогранника являются конгруэнтными правильными многоугольниками и к каждой вершине примыкает одинаковое число граней.*

Лемма. *Пусть M — правильный многогранник, A — одна из его вершин, AB_1, ..., AB_k — примыкающие к ней ребра. Тогда многоугольник $B_1...B_k$ — правильный.*

Доказательство. Обозначим через γ_1, ..., γ_k грани, примыкающие к вершине A, а через O центр описанной около многогранника M сферы (рис. 4). Так как $|OB_1|=|OB_2|=R$, где R — радиус описанной сферы, векторы $\vec{b}_1=\overrightarrow{OB_1}$, $\vec{b}_2=\overrightarrow{OB_2}$ и $\vec{p}=\overrightarrow{B_1B_2}$ удовлетворяют условию $\vec{b}_1^2=\vec{b}_2^2=(\vec{b}_1+\vec{p})^2$, то есть $2\vec{b}_1\vec{p}=-\vec{p}^2$. Так как, кроме того, $|AB_1|=|AB_2|=a$, где a — длина ребра многогранника M, векторы $\overrightarrow{AB_1}=\vec{a}_1$, $\overrightarrow{AB_2}=\vec{a}_2$ удовлетворяют условию $\vec{a}_1^2=\vec{a}_2^2=(\vec{a}_1+\vec{p})^2$, то есть $2\vec{a}_1\vec{p}=-\vec{p}^2$. Таким образом, $2\vec{a}_1\vec{p}=2\vec{b}_1\vec{p}$, то есть $\vec{p}(\vec{a}_1-\vec{b}_1)=0$, а это означает, что $(AO)\perp(B_1B_2)$. Такой же подсчет показывает, что каждая из прямых (B_1B_3), ..., (B_1B_k) перпендикулярна (AO). Следовательно, плоскость Π, проходящая через точку B_1 и перпендикулярная прямой AO, содержит все точки B_1, B_2, ..., B_k. Далее, в силу свойства сильной транзитивности существует самосовмещение $f\in\Gamma(M)$, переводящее вершину A, ребро AB_1 и грань γ_1 соответственно в вершину A, ребро AB_2 и грань γ_2. В частности, $f(B_1)=B_2$. При этом самосовмещении две стороны грани γ_1, примыкающие к A, перейдут в две стороны грани γ_2, примыкающие к A, то есть AB_1 перейдет в AB_2, а AB_2 — в AB_3 (рис. 4). Итак, $f(B_2)=B_3$. Рассуждая аналогично, находим, что при перемещении f точки B_1, ..., B_k циклически переставляются: $f(B_1)=B_2$, $f(B_2)=B_3$, ..., $f(B_{k-1})=B_k$, $f(B_k)=B_1$. Отсюда и вытекает, что многоугольник $B_1...B_k$, расположенный в плоскости Π, является правильным.

Доказанная лемма позволяет легко вычислить основные параметры правильных многогранников. Найдем, например, радиус сферы, описанной около правильного многогранника с k гранями при каждой вершине, являющимися правильными n-угольниками (длину ребра обозначим через a). Имеем: $\widehat{AB_1B_2}=\frac{180°}{n}$ (грань γ_1 является правильным n-угольником). Из треугольника AB_1B_2 находим длину $|B_1B_2|$ стороны правильного k-угольника $B_1B_2...B_k$:

$|B_1B_2| = 2a\cos\frac{180^\circ}{n}$, после чего *находим радиус* $r = |QB_1|$ описанной около него окружности (рис. 5):

$$r = \frac{|B_1B_2|}{2\sin 180^\circ/k} = a\cdot\frac{\cos 180^\circ/n}{\sin 180^\circ/k}.$$

Далее, из треугольника QAB_1 и OAB_1 находим $\frac{r^2}{a^2}+\frac{|AQ|^2}{a^2}=1$, $|AQ| = \frac{a^2}{2R}$, то есть $\frac{r^2}{a^2}+\left(\frac{a}{2R}\right)^2=1$. Подставляя сюда вместо r его значение, получаем после упрощений:

$$R = \frac{a}{2\sqrt{1-\left(\frac{\cos 180^\circ/n}{\sin 180^\circ/n}\right)^2}}. \qquad (*)$$

Формула (*) не только дает выражение для радиуса сферы, описанной около данного правильного многогранника, но и позволяет указать, какие значения могут принимать n и k. В самом деле, поскольку $n\geqslant 3$, $\frac{180^\circ}{n}\leqslant 60^\circ$, $\cos\frac{180^\circ}{n}\geqslant\frac{1}{2}$; следовательно, $\sin\frac{180^\circ}{k}>\frac{1}{2}$ (иначе подкоренное выражение не будет положительным), откуда $k<6$. Придавая числу k возможные значения $k=3, 4, 5$, находим, что подкоренное выражение положительно лишь в пяти случаях, которые и соответствуют пяти возможным правильным многогранникам (см. «Геометрию 9—10», с. 133).

Задачи

12. Пользуясь формулой (*), найдите радиус сферы, описанной около каждого из правильных многогранников. (Ответы к этой и последующим задачам будут приведены в следующем номере «Кванта».

Указание. *Найдите длины сторон* треугольников на рисунке 6 и выведите отсюда, что $\cos 36^\circ = \frac{\xi}{2}$, $\sin 36^\circ = \frac{\sqrt[4]{5}}{2\sqrt{\xi}}$, $\sqrt{3-4\cos^2 36^\circ} = \frac{1}{\xi}$, где $\xi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

13. Для каждого правильного многогранника найдите угол, под которым его ребро видно из центра описанной сферы.

14. Вычислите площадь поверхности каждого из правильных многогранников, зная длину a его ребра.

15. Докажите, что для каждого правильного многогранника существует сфера, касающаяся всех его ребер.

16. Вычислите высоту h правильной пирамиды, основанием которой служит грань правильного многогранника, а вершина совпадает с центром O описанной около многогранника сферы. Докажите, что сфера радиуса h с центром O содержится в правильном многограннике и касается всех его граней *(вписанная сфера)*.

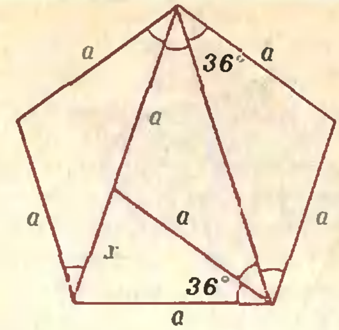


Рис. 6.

17. Вычислите объем каждого из правильных многогранников, зная длину a его ребра.

18. Пусть M — правильный многогранник. Через M^* обозначим многогранник, вершинами которого служат центры окружностей, описанных вокруг граней многогранника M. *Докажите, что многогранник* M^* (он называется *двойственным* к многограннику M) является правильным. Какой многогранник двойствен кубу? Додекаэдру?

19. Пусть α — величина двугранного угла правильного многогранника M, а β^* — угол, под которым ребро двойственного многогранника *M^* видно из центра* описанной сферы. Докажите, что $\alpha+\beta^*=180^\circ$. Пользуясь этим, вычислите двугранный угол каждого из правильных многогранников.

20. Докажите, что середины ребер правильного многогранника служат вершинами транзитивного многогранника.

На рисунке 7 изображен кубооктаэдр — многогранник, вершинами которого служат середины ребер куба (или середины ребер октаэдра). Форму кубооктаэдра имеют многие кристаллы: например, при определенных условиях — кристаллы поваренной соли.

В нашем рассказе о правильных многогранниках остался невыясненным вопрос о их *существовании*. Ведь все вычисления проведены в предположении, что **существует** правильный многогранник, гранями *которого служат правильные* n-угольники, и у которого к каждой вершине примыкает k граней. Конеч-

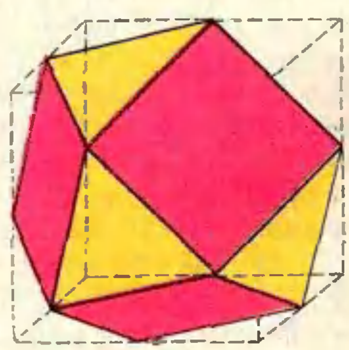


Рис. 7.

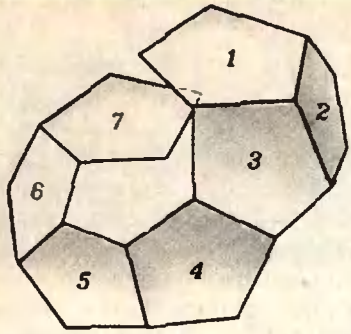


Рис. 8.

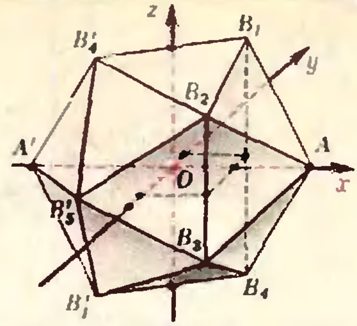


Рис. 9.

но, зная величину двугранного угла (задача 19), можно попытаться склеить требуемый правильный многогранник: один правильный n-угольник приклеиваем под нужным углом к другому, к ним приклеиваем третий и т. д. Но где уверенность, что склеиваемый многогранник «замкнется», а не получится что-то вроде изображенного на рисунке 8?

Существование можно доказать фактическим построением правильного многогранника в координатах. Поместим начало координат в центр описанной около будущего многогранника сферы. Будем считать, для простоты, что вершина A лежит на положительной полуоси абсцисс, то есть имеет координаты (R; 0; 0), а соседние с ней вершины B_1, ..., B_k имеют абсциссу $x = R\cos\alpha$, где α — угол, под которым ребро видно из центра описанной сферы. Так как многоугольник $B_1 \ldots B_k$ — правильный и находится в плоскости, перпендикулярной (OA), можно считать, что точка B_l имеет координаты $\left(R\cos\alpha;\ r\cos\frac{2\pi l}{k};\ r\sin\frac{2\pi l}{k}\right)$; $l = 1, \ldots, k$, где r — радиус описанной около многоугольника $B_1 \ldots B_k$ окружности. В случае, например, икосаэдра это дает вершины A, B_1, ..., B_5. Остальные вершины симметричны этим относительно начала координат (рис. 9). Наиболее простые выражения для координат получаются при $R = \sqrt{5}$ (тогда $R\cos\alpha = 1$, $r = 2$): $A = (\sqrt{5};\ 0;\ 0)$; $B_5 = (1;\ 2;\ 0)$;

$$B_1 = \left(1;\ \frac{\sqrt{5}-1}{2};\ \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right);$$

$$B_2 = \left(1;\ -\frac{1+\sqrt{5}}{2};\ \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{2}}\right);$$

координаты остальных точек получаются изменением знаков. Чтобы проверить, что действительно получился правильный икосаэдр, достаточно убедиться в конгруэнтности всех ребер; это нетрудно сделать с помощью формулы расстояния между двумя точками в координатах.

Задачи наших читателей

1. Найдите все выпуклые четырехугольники, удовлетворяющие следующему условию: четыре прямые, проходящие через вершины четырехугольника и делящие его

а) площадь

б) периметр

пополам, пересекаются в одной точке.

В. Дубровский, И. Жук

2. а) Впишите квадрат в правильный пятиугольник.

б) Докажите, что правильный пятиугольник нельзя вписать в правильный шестиугольник.

в) Докажите, что при $n > 5$ правильный n-угольник нельзя вписать в правильный $(n+1)$-угольник.

3. Положим

$\sin_1(x) = \sin x$,
$\sin_2(x) = \sin(\sin_1(x))$,
$\sin_3(x) = \sin(\sin_2(x))$, ...
$\cos_1(x) = \cos x$,
$\cos_2(x) = \cos(\cos_1(x))$,
$\cos_3(x) = \cos(\cos_2(x))$, ...

а) Постройте графики функций

$y = \sin_2(x)$, $y = \sin_3(x)$, $y = \cos_2(x)$, $y = \cos_3(x)$.

б) При каких n уравнение $\sin_n(x) = \cos_n(x)$ имеет решение на $[0;\ \pi/2]$?

И. Жук

4. Докажите неравенства

$$9r < h_a + h_b + h_c < \frac{2}{3}\,\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{R},$$

где h_a, h_b, h_c — длины высот данного треугольника, m_a, m_b, m_c — длины его медиан, r — радиус вписанной в треугольник окружности, R — радиус окружности, описанной около него.

М. Ибрагимов

В. Орлов

Голография

Кто, волны, вас остановил,
Кто оковал ваш бег могучий,
Кто в пруд безмолвный и дремучий
Поток мятежный обратил?
. . . .
Взыграйте, ветры, взройте воды,
Разрушьте гибельный оплот!
Где ты, гроза — символ свободы?
Промчись поверх невольных вод.

А. С. Пушкин

А. С. Пушкин, написав в 1823 году строки, вынесенные нами в эпиграф, безусловно, не думал о голографии. А вот современные физики смогли бы ответить на вопросы, поставленные в стихотворении, следующим образом. «Остановил» волны и «оковал» их «бег могучий» английский физик Деннис Габор в 1947 году, предложив метод записи и восстановления волнового фронта. «Пруд безмолвный и дремучий» — это голограмма. Достаточно посмотреть на вид голограммы (рисунок 1), чтобы убедиться в правоте пушкинских слов,— разобраться в «дремучем» переплетении сложного интерференционного узора на голограмме, кажется, невозможно. «Гроза — символ свободы» — это луч лазера, разрушающий «гибельный оплот» и восстанавливающий изображение, скрытое в голограмме.

За свое открытие Габор в 1971 году получил Нобелевскую премию.

Что это такое — голография

Голография — это метод записи и восстановления изображений. Но то же самое можно сказать о фотографии. Чем же отличается голография от фотографии?

При фотографировании предмета регистрируется, по существу, распределение в плоскости фотопластинки амплитуд световых волн, отраженных предметом,— ведь почернение пластинки определяется интенсивностью света, а интенсивность пропорциональна квадрату амплитуды световой волны.

При голографировании на пластинке фиксируется распределение в плоскости пластинки амплитуд, фаз и частот колебаний в световых волнах, отраженных предметом.

Для получения устойчивой волновой картины в плоскости пластинки Габор предложил использовать явление интерференции. В результате сложения падающей на предмет световой волны — ее называют опорной волной — с отраженной от предмета волной — ее называют сигнальной — возникает устойчивая интерференционная картина. При этом в разных точках пространства амплитуды результирующих колебаний различны, но в каждой точке амплитуда остается неизменной во времени. Для расчета амплитуды проще всего воспользоваться методом векторных диаграмм (см. «Физика 10», с. 51).

При сложении двух колебаний с одной и той же частотой ω и начальными фазами φ_1 и φ_2 результирующее колебание, согласно принципу суперпозиции, будет иметь вид

$$x_p = x_1 + x_2 = X_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + X_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = X_p \cos(\omega t + \varphi)$$

(см. рисунок 2). Амплитуду X_p и фазу φ результирующего колебания можно найти из векторной диаграммы:

$$X_p^2 = X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2\cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X_1 \sin\varphi_1 + X_2 \sin\varphi_2}{X_1 \cos\varphi_1 + X_2 \cos\varphi_2}.$$

Следовательно, «запись» интенсивности результирующей волны содержит информацию о разности фаз между составляющими волнами. Если фаза одной из них (опорной) известна, то по разности фаз $\Delta\varphi$ или по фазе φ результирующего ко-

Рис. 1.

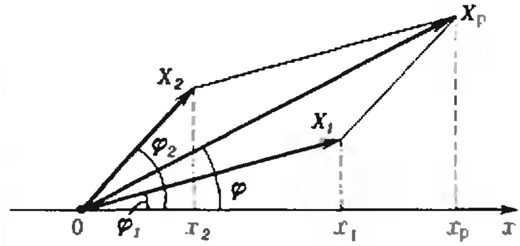


Рис. 2.

лебания можно, в принципе, определить фазу второй (сигнальной) волны, рассеянной объектом. Как образно сказал профессор В. А. Фабрикант, «интерференция переводит на язык интенсивностей фазовые соотношения световых волн, что и делает возможной их запись на фотопластинке».

Анализ явления интерференции позволил Габору доказать, что амплитуду и фазу монохроматической волны, рассеянной объектом, можно зарегистрировать фотографическим способом, если эта волна проинтерферирует с опорной монохроматической волной той же частоты. Фотопластинка с зарегистрированной на ней интерференционной картиной называется голограммой. В дословном переводе с греческого это означает «полная запись» — запись пространственной структуры волны, отраженной предметом.

Световую волну, рассеянную любым предметом, можно рассматривать как совокупность вторичных волн, источниками которых являются отдельные точки этого предмета. Следовательно, для того чтобы понять образование голограммы сложного объекта, надо детально разобраться, как получается простейшая голограмма — голограмма точки.

Простейшая голограмма — зонная решетка Френеля

На рисунке 3 изображена картина наложения двух монохроматических волн одинаковой частоты: сферической волны, испускаемой точкой S, и плоской опорной волны. Сплошные черные окружности и прямые показывают положения волновых фронтов сферической и плоской волны через время T, равное периоду колебаний. Штриховые окружности и прямые показывают положения волновых фронтов через время, равное $T/2$. (Более точно — эти линии фиксируют сечение волнового фронта плоскостью чертежа.)

В точках пересечения сплошных окружностей и сплошных прямых, а также штриховых окружностей и штриховых прямых, выполняются условия интерференционных максимумов:

$$\Delta\varphi = 0,\ \pm 2\pi,\ \pm 4\pi\ldots \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X_p^2 = X_1^2 + X_2^2 + 2X_1X_2 = (X_1+X_2)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X_p = X_1 + X_2.$$

Красные линии на рисунке 3, соединяющие эти точки, являются множеством точек, для которых выполняются условия интерференционных максимумов.

В точках пересечения сплошных окружностей и штриховых прямых, а также штриховых окружностей и сплошных прямых, выполняются условия интерференционных минимумов:

$$\Delta\varphi = \pm\pi,\ \pm 3\pi,\ \pm 5\pi\ldots \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X_p^2 = X_1^2 + X_2^2 - 2X_1X_2 = (X_1-X_2)^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X_p = X_1 - X_2.$$

Синие линии на рисунке 3, соединяющие эти точки, являются множеством точек, для которых выполняются условия минимумов.

Расположив фотопластинку в плоскости NN', перпендикулярной к плоскости чертежа, мы получим на ней чередующиеся светлые и темные кольца. Радиусы светлых колец, как видно из рисунка 3, определяются выражением

$$r_k = \sqrt{(a+k\lambda)^2 - a^2} = \sqrt{2ka\lambda + k^2\lambda^2} \approx$$
$$\approx \sqrt{2ka\lambda}, \qquad (*)$$

где a — расстояние от точки S до фотопластинки, λ — длина волны,

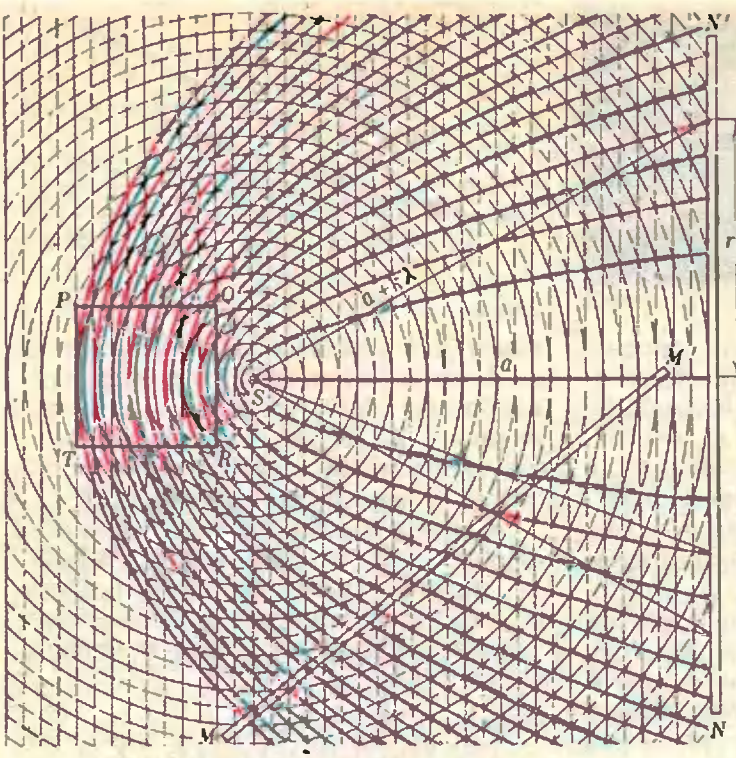


Рис. 3.

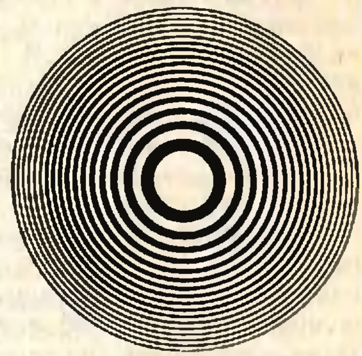


Рис. 4.

k — порядковый номер кольца; мы пренебрегли величиной $k^2\lambda^2$ по сравнению с $2ka\lambda$, так как $a \gg k\lambda$.

Полученное выражение для радиусов колец интерференционной картины совпадает с выражением для радиусов колец так называемой зонной пластинки (зонной решетки) Френеля, хорошо известной в физике более 150 лет*).

Итак, простейшая голограмма — голограмма точки — представляет собой зонную пластинку Френеля. (Увеличенная фотография зонной пластинки представлена на рисунке 4.) Единственным отличием голограммы точки от классической зонной пластинки является плавный переход от темных колец к светлым.

Восстановление сферической волны с помощью простейшей голограммы — зонной пластинки

Для восстановления изображения по голограмме Габор предложил освещать голограмму опорной волной.

*) Со свойствами зонных пластинок вы познакомитесь, прочитав статью О. Кабардина и Н. Шефера, опубликованную в «Кванте» № 1 за 1979 год.

Рассмотрим процесс восстановления изображения точки с помощью зонной пластинки. Осветим пластинку такой же плоской волной (такой же длины), как и опорная, с помощью которой была получена голограмма точки. Пластинку при этом расположим так, чтобы она была параллельна фронту плоской волны (рисунок 5).

Любой малый участок зонной пластинки можно рассматривать как дифракционную решетку. Выделим на пластинке узкую полоску. Она представляет собой решетку, период которой непостоянен — он равен $d_k = \Delta r_k = r_{k+1} - r_k$ и, как видно из выражения (*), уменьшается по мере удаления от центра пластинки к периферии. Рассмотрим небольшой участок решетки. Поскольку r_k медленно меняется с ростом k, можно считать, что на малом участке решетки период ее постоянен и равен приблизительно постоянной величине $d = \Delta r_k$ — расстоянию между двумя соседними светлыми полосами (то есть расстоянию по радиусу между двумя соседними кольцами).

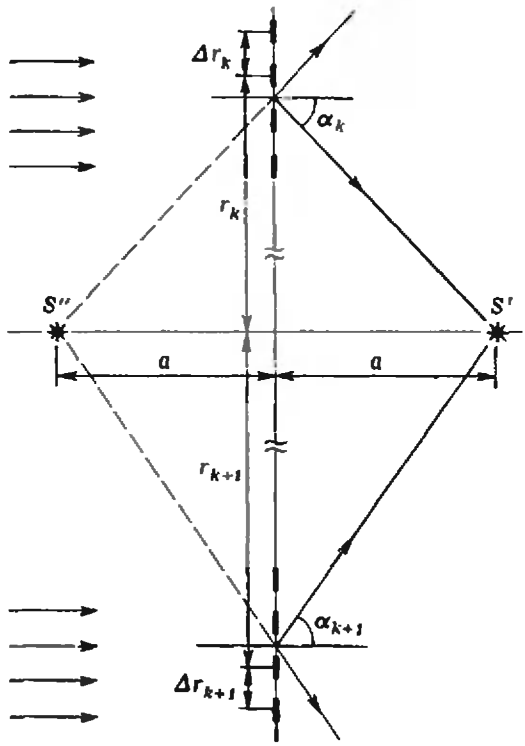


Рис. 5.

Каждая точка в щели решетки, на которую падает световая волна, является источником вторичных световых волн, распространяющихся во всех направлениях. Направления, распространяясь по которым вторичные световые волны от выбранного нами участка решетки усиливают друг друга, определяются условием

$d \sin \alpha_k = \pm n\lambda \ (n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ (**)

(см. «Физика 10», с. 183). Максимум энергии приходится на световые пучки нулевого ($n=0$) и первого ($n=1$) порядков. Следовательно, наибольшее усиление вторичных световых волн происходит по направлениям, определяемым углами

$$\alpha_0 = 0,\ \sin \alpha_k = \pm \frac{\lambda}{d} = \pm \frac{\lambda}{\Delta r_k}.$$

Значение Δr_k найдем, воспользовавшись (*):

$$\Delta r_k = r_{k+1} - r_k = \frac{r_{k+1}^2 - r_k^2}{r_{k+1} + r_k} \approx \frac{2a\lambda}{2r_k} = \frac{a\lambda}{r_k}.$$

Таким образом,

$$\sin \alpha_k = \pm \frac{r_k}{a}.$$

Как видно из выражения для $\sin \alpha_k$, с ростом k величина α_k растет. Иными словами, чем дальше от центра пластинки, тем больше угол, под которым распространяются лучи из пучков первого порядка. В результате все лучи, отклоненные на углы $\sin \alpha_k = +\frac{r_k}{a}$, пересекаются в одной точке S', создавая действительное изображение точки S; лучи, отклоненные на углы $\sin \alpha_k = -\frac{r_k}{a}$, пересекаются на своих продолжениях в точке S'', создавая мнимое изображение точки S. При этом точки S' и S'' находятся на расстоянии a от пластины.

Докажем это. Как видно из рисунка 5, расстояние x от зонной пластинки до точек S' и S'' равно

$$x = r_k \operatorname{ctg} \alpha_k = \frac{r_k\sqrt{1-\sin^2 \alpha_k}}{\sin \alpha_k} = \frac{r_k\sqrt{1-r_k^2/a^2}}{r_k/a} \approx a.$$

Таким образом, при освещении голограммы точки S опорной плоской волной мы получим два изображения точки S: действительное изображение S' и мнимое изображение S'', находящиеся по разные стороны от пластинки на расстоянии a от нее.

Свойство зонных пластинок фокусировать волны, создавая действительное изображение предмета, было хорошо известно еще в XIX веке. Свойство их создавать мнимое изображение было оценено лишь в голографии, так как именно расходящиеся пучки света восстанавливают неискаженное изображение объекта, являясь точной копией сигнальной световой волны.

Для пояснения сказанного рассмотрим две точки A и B предмета, расположенные при получении голограммы на расстояниях a и b от фотопластинки. Эти точки рассеивают световые волны, которые, интерферируя с опорной плоской волной, создадут на голограмме две зонные пластинки с различными радиусами колец. (Это следует из выражения для r_k.) Действительные и мнимые изображения точек A и B при восстановлении полученной голограммы окажутся на расстояниях a и b от голограммы. Как видно из

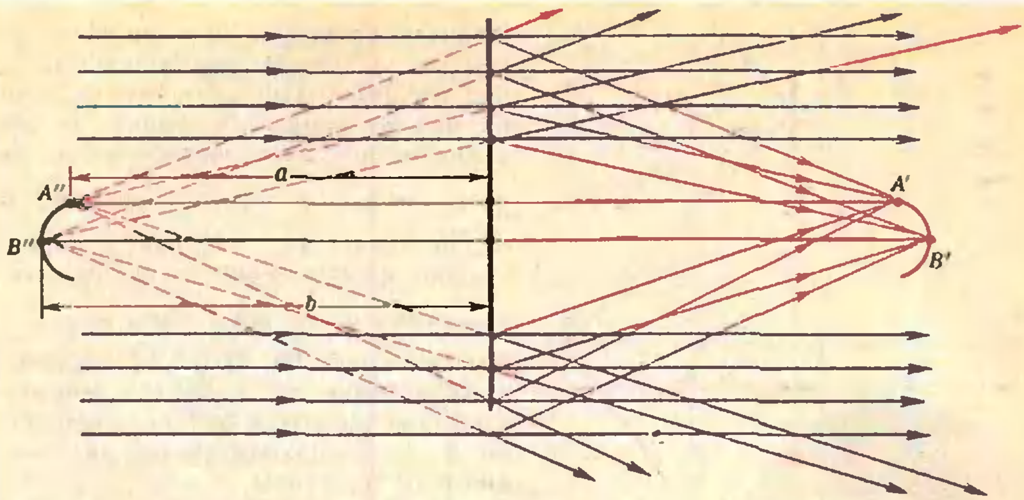


Рис. 6.

рисунка 6, в мнимом изображении предмета мы видим точку B'' дальше точки A''. Именно так и были взаимно расположены точки A и B при получении голограммы. В действительном изображении точка B'' расположена ближе к нам, чем точка A'. Таким образом, действительное изображение предмета, получаемое с помощью голограммы, является искаженным: выпуклые места воспринимаются как вогнутые и наоборот. Такое искажение получило название псевдоскопичности.

Рассмотренная нами схема получения голограммы была предложена и впервые осуществлена самим Габором. Эта схема обладает существенными недостатками. Действительное и мнимое изображения предмета при рассмотрении «анфас» оказываются на одной прямой и создают взаимные помехи.

Для разделения действительного и мнимого изображений американские ученые Э. Лейт и Дж. Ю. Упатниекс в 1961 году предложили, а в 1963 году осуществили двухлучевую схему голографирования. По этой схеме луч лазера разделяется на два луча — опорный и сигнальный (рисунок 7, *а*). Сигнальный луч направляется на предмет, отражается от него и попадает на фотопластинку, где интерферирует с опорным лучом. Как видно из рисунка 7, *б*, действительное изображение предмета не мешает наблюдателю рассматривать мнимое изображение этого предмета.

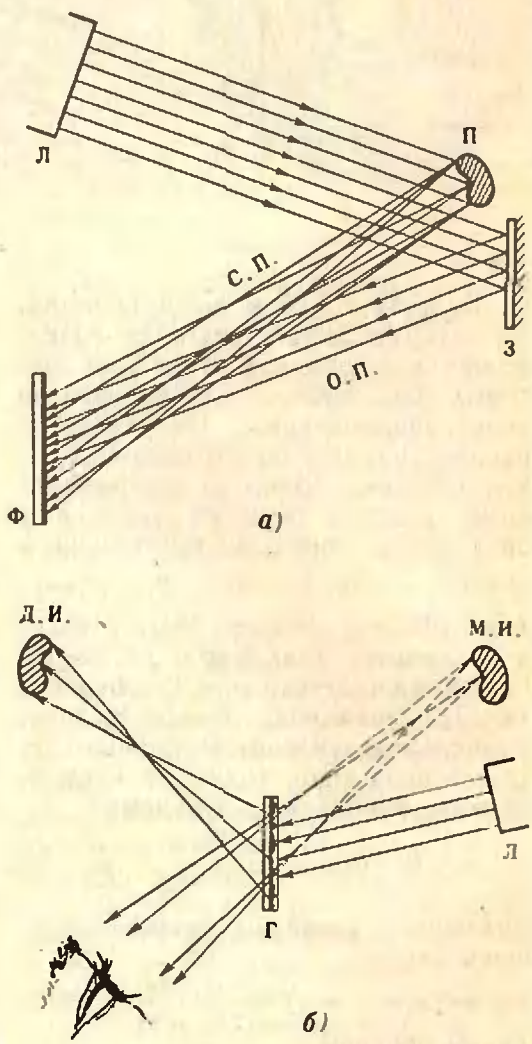


Рис. 7. П — предмет, Л — лазер, З — зеркало, С. П.— сигнальный пучок, О. П.— опорный пучок; Г — голограмма, Д. И.— действительное изображение, М. И.— мнимое изображение.

Голограмму по схеме Лейта и Уатниекса можно получить, расположив фотопластинку в плоскости MM' (см. рисунок 3).

Голография с записью в трехмерной среде

В 1962 году советский физик Ю. Н. Денисюк предложил запись интерференционной картины на фотопластинку с толстым эмульсионным слоем. Толщина эмульсионного слоя может быть порядка 20 длин волн света.

На рисунке 3 прямоугольник $PQRT$ — участок толстослойной эмульсии (сечение плоскостью рисунка). При достаточной толщине эмульсионного слоя опорная и сигнальная волна интерферируют внутри слоя. При этом в местах интерференционных максимумов выделяется максимальное количество серебра. Множество точек максимумов на рисунке 3 (красные кривые) — это параболы*). Так что в пространстве (в объеме эмульсии) точки интерференционных максимумов образуют параболоиды. Иными словами, в эмульсионном слое образуется как бы система соосных полупрозрачных параболических зеркал с общим фокусом — точкой S.

Голограмму, полученную на пластинке с толстослойной эмульсией, называют объемной. Чтобы получить изображение точки S с помощью объемной голограммы, надо осветить голограмму плоской световой волной, фронт которой параллелен плоскости пластинки. При этом длина плоской волны совсем не обязательно должна быть равна длине опорной волны. В этом состоит основное преимущество объемной голограммы и оно приводит к замечательным следствиям. Чтобы понять, о чем

*) Напомним, что парабола есть множество точек на плоскости, одинаково удаленных от некоторой точки — фокуса — и прямой — директрисы. Точка S на рисунке 3 — фокус всего семейства парабол (и синих, и красных); прямые линии, изображающие фронт плоской волны,— директрисы разных парабол.

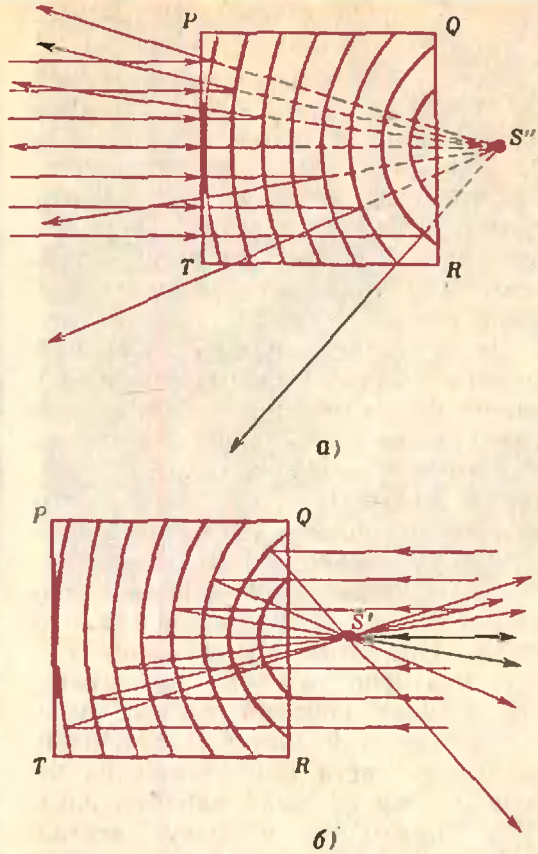


Рис. 8.

идет речь, разберемся, как восстанавливается изображение с помощью объемной голограммы.

Параллельные лучи света, проникая внутрь эмульсии, попадают на первое параболическое зеркало; частично они отражаются от него, частично проходят дальше, попадая на второе параболическое зеркало; здесь опять часть лучей отражается, часть проникает в глубь эмульсии, попадая на третье зеркало, и т. д. На рисунке 8 изображен ход лучей при освещении голограммы с двух противоположных сторон. Если плоская волна падает на поверхность PT голограммы (рисунок 8, *а*), то лучи, отраженные от выпуклых поверхностей зеркал, на своих продолжениях собираются в фокусе параболоидов — в точке S'', которая и является мнимым изображением точки S. При освещении голограммы со стороны поверхности QR (рисунок 8, *б*) лучи, отражающиеся от вогнутых поверхностей зеркал, собираются в точке S', создавая действительное изображение точки S*).

Как видно, с помощью объемной голограммы создается отдельно либо действительное, либо мнимое изображение предмета, а не оба вместе, как это имеет место в плоских голограммах. Действительное изображение псевдоскопично, поэтому работают, как правило, с мнимым изображением.

В принципе для восстановления фронта волны достаточно образования в эмульсионном слое одной поверхности интерференционных максимумов (одного параболического зеркала). Тот факт, что в толстослойной эмульсии образуется несколько таких поверхностей, позволяет восстанавливать изображение с помощью белого света. При этом изображение будет получено в том же цвете, что и цвет опорной волны. Волны именно этой цветовой компоненты белого света при отражении от разных зеркальных параболоидов будут приходить в фокус всегда в фазе и, складываясь, усиливаться. Волны всех остальных цветовых компонент, отраженные от зеркал, будут приходить в фокус в разных фазах, и усиления их не будет.

Наиболее эффективны объемные голограммы при получении цветных изображений. С этой целью объект освещают светом от трех лазеров, длины волн которых λ_1, λ_2, λ_3 подобраны так, чтобы наиболее полно передать цвет предмета. Обычно используют сочетание красного, желтого и синего цветов. Каждый лазер создает в эмульсионном слое свою систему полупрозрачных зеркальных поверхностей. При освещении такой голограммы светом от трех лазеров, использовавшихся при ее создании, три «одноцветных» изображения оказываются совмещенными в пространстве и образуют цветное изображение предмета.

*) О замечательном свойстве параболических зеркал фокусировать параллельные лучи рассказывалось в статье М. Файнгольда «Этот удивительный параболоид» («Квант», 1975, № 12)

Цветное изображение получается и в том случае, если осветить такую голограмму солнечным светом. В этом случае система зеркал, выделяя и отражая компоненты солнечного света с длинами волн λ_1, λ_2, λ_3, создает в определенном месте пространства цветное изображение предмета.

За создание теории объемных голограмм Ю. Н. Денисюк в 1970 году был удостоен Ленинской премии.

Свойства и особенности голограмм

Демонстрация изображений, восстановленных с помощью голограммы, поражает воображение любой аудитории. Изображение настолько «реально», что хочется пощупать его, чтобы убедиться, что это только изображение, а не сам предмет. Изображение можно рассматривать под различными углами; можно, перефокусировав глаз, рассматривать близкие и далекие части предмета, наблюдать игру световых бликов на предмете. На рисунках 9 и 10 представлены фотографии изображения, полученного с помощью одной голограммы, сделанные из различных точек наблюдения.

Очень важными свойствами голограммы являются возможность восстановления всего изображения с помощью отдельных участков голограммы и слабая чувствительность голограммы к пылинкам, царапинам и мелким дефектам регистрирующей среды. Эти свойства обусловлены тем, что каждая точка пластинки при экспонировании облучается светом, рассеянным всеми точками предмета, и свет, отраженный каждой точкой предмета, освещает всю пластинку. Эти свойства голограммы легко проверить с помощью самодельной зонной пластинки: изображение, полученное с помощью пластинки, сохраняется при экранировании части пластинки.

Перечисленные нами замечательные свойства голограмм обеспечивают возможность широкого применения голографического метода не только в области оптических длин

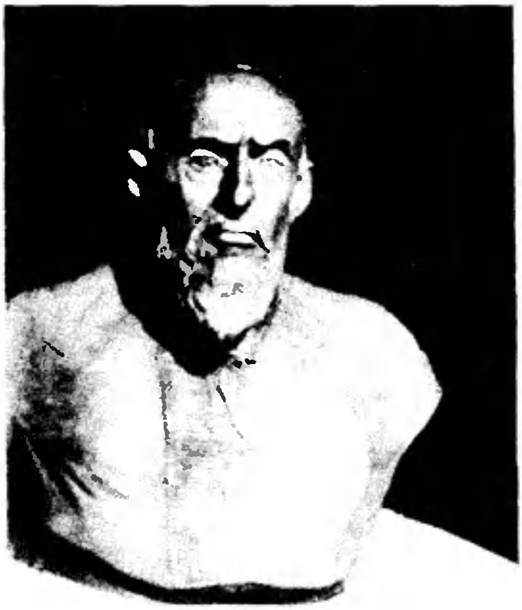


Рис. 9.

Рис. 10.

волн, но и в любых волновых процессах (в акустике, в радиодиапазоне, в сейсмических процессах и т. д.). Голографический метод позволяет решать задачи, которые не могут быть решены никакими другими методами.

Заключение

В заключение статьи хотелось бы ответить на такой вопрос: почему голография — в принципе простой способ фотозаписи интерференционной картины, образованной двумя когерентными пучками,— создана лишь совсем недавно? Действительно, явления интерференции и дифракции были хорошо исследованы еще в XIX веке; в середине XIX века была изобретена фотография; так что Габору для открытия голографии не потребовались знания каких-либо новых достижений науки. Однако потребовались глубокое понимание явлений интерференции и дифракции и, конечно, изобретательный ум, чтобы объединить все известные элементы голографии в одну яркую идею. Пример создания голографии хорошо иллюстрирует мысль, что в наше время многие новые и ценные идеи и открытия рождаются на основе старых, хорошо известных понятий.

Кроме того, необходимо подчеркнуть, что наряду с принципиальными трудностями в развитии голографии существуют и чисто технические. Даже в 1947 году идея Габора была еще преждевременной, так как для изготовления качественных голограмм были необходимы источники монохроматического когерентного света. Такие источники — лазеры — появились лишь в 1960 году. Для создания голограмм хорошего качества необходимы фотоматериалы с высокой разрешающей способностью. Как мы видели, при получении объемных голограмм расстояния между параболическими зеркалами внутри эмульсионного слоя оказываются порядка длины волны. Именно этой величиной и должна определяться разрешающая способность эмульсии. Для видимого света $\lambda \sim 10^{-6}$ м; это означает, что на одном миллиметре фотопластинки должно разрешаться («видеться» разделенными) $\sim 10^3$ линий. Такие материалы созданы лишь в последние годы. Большое количество технических трудностей стоит в настоящее время перед создателями голографического кино и телевидения. Но очень многое уже сделано, чтобы эти трудности преодолеть.

(Список литературы см. на с. 18.)

Литература

1. Л. Д. Бахрах, Г. А. Гаврилов. Голография. М., «Знание», серия «Физика», 1979, № 6.
2. У. Кок. Лазеры и голография. М., «Мир», 1971.
3. Р. Кольер, К. Берхарт, Л. Лин. Оптическая голография. М., «Мир», 1973.
4. Э. Лейт, Дж. Ю. Упатниекс. Фотография в лучах лазера (в сб. «Над чем думают физики», выпуск 11, М., «Наука», 1977).
5. Ю. И. Островский. Голография. М., «Знание», 1970.
6. Дж. Строук. Введение в когерентную оптику и голографию. М., «Мир», 1967.
7. Л. В. Тарасов. Оптика, рожденная лазером. М., «Просвещение», 1977.
8. М. Франсон. Голография. М., «Мир», 1972.
9. С. Э. Фриш. Проблемы волновой оптики. М., «Знание», 1973.
10. А. М. Васильев, А. Т. Глазунов, В. А. Фабрикант. Физика и техника. М., «Знание», 1977.

Наша обложка

Семейство кубических парабол

Посмотрите на вторую страницу обложки — на ней показано семейство из 169 кубических парабол, образующее замысловатый узор, «автор» которого — ЭВМ. В этой заметке будет рассказано, как подобные кривые используются на практике.

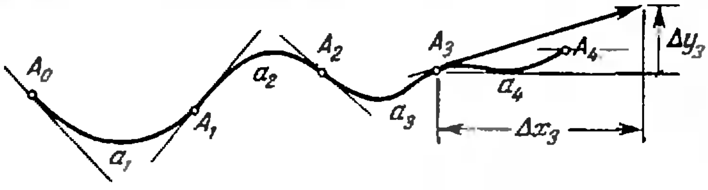
В машинной графике нередко возникает потребность вычерчивать плавные кривые линии. Иногда это должны быть вполне определенные кривые, соответствующие заданным уравнениям. В других случаях кривая первоначально задается «на глаз» или получается по результатам экспериментальных измерений. Такие «неизвестные» кривые обычно заменяют близким к ним известным и, по возможности, несложными для расчетов кривыми. Если исходная кривая имеет сложную конфигурацию, ее разбивают на ряд дуг и каждую дугу заменяют аналитически несложной линией. Конечно, смежные дуги должны сопрягаться плавно, то есть в общих точках они должны иметь общую касательную. Допустим, экспериментально полученную или нарисованную художником кривую a мы разбили на дуги a_1, a_2, a_3, a_4 (см. рисунок). В точках сопряжения A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 нарисованы касательные. Сами точки сопряжения мы можем задать для ЭВМ координатами, направление касательных — угловыми коэффициентами или компонентами их направляющих векторов (для точки A_3 нарисован такой вектор и указаны его компоненты Δx_3, Δy_3). Как известно, угловой коэффициент равен $k_i = \Delta y_i/\Delta x_i$. Таким образом, каждую из четырех дуг, которые составят общую кривую, нам надо провести по четырем начальным условиям (положение двух точек и наклон касательных в двух точках). Какой выбрать для этого тип кривой? В аналитическом смысле это должна быть «четырехпараметрическая» кривая, то есть, грубо говоря, ее уравнение должно иметь 4 коэффициента. Чтобы получить конкретную дугу, надо определить соответствующие значения этих четырех коэффициентов и указать интервал изменения аргумента. Наверное, простейшим решением нашей задачи является дуга кубической параболы, точнее, часть графика кубического полинома:

$$y = A + B \cdot x + C \cdot x^2 + D \cdot x^3.$$

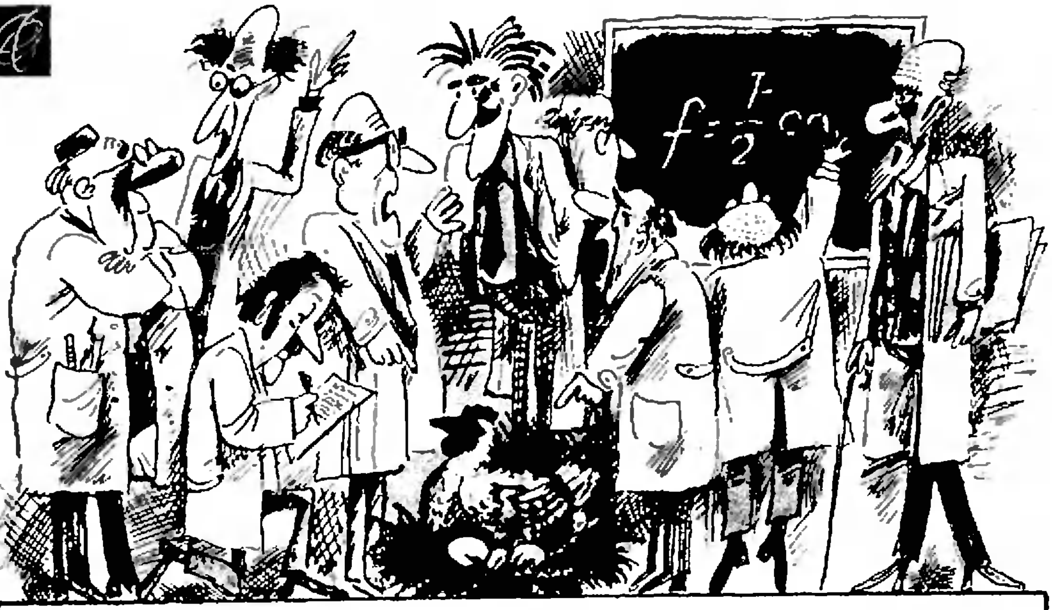
Зная координаты начальной и конечной точки, а также направление касательных в этих точках, легко получить систему из четырех уравнений для определения коэффициентов A, B, C, D.

Этот простой способ построения кривых не вполне универсален. Точки с вертикальными касательными для него «недоступны». Провести замкнутую или самопересекающуюся линию, даже если разделить ее на ряд дуг, этим способом сложно. Но, конечно, у математиков-программистов есть в запасе много более хитрых и усовершенствованных способов построения различных кривых.

На нашей обложке — машинный чертеж из дуг кубического полинома (рисунок повернут на 90°). Каждая из 13 верхних точек соединена дугой с 13-ю нижними точками. В каждой из 26 исходных точек задана своя касательная. Дуги, пересекаясь, неожиданно образуют кружевной узор с рядами «узелков». Подумайте, почему так происходит. Как расположены горизонтальные прямые, содержащие «узелки»?



Ю. Котов



А. Варламов
А. Шапиро

ОБ „OVO“

Главное в том, что, как бы осторожно мы ни старались вбить яйцо в чашку, мы не можем изменить законов физики. Яйцо может не растечься, а у умелого кулинара никогда не растечется, но оно неизбежно будет падать по вертикали с ускорением силы тяжести согласно закону Джоуля — Ленца.

Из книги В. Похлебкина «Тайны хорошей кухни».

«Ab ovo» — в переводе с латыни это буквально означает «от яйца». В переносном же смысле это выражение употребляют, когда хотят указать на изначальность, первичность чего-либо. Именно этот переносный смысл и вкладывали древние как основной в слова «ab ovo». Сами того не ведая, они тем самым разрешили в пользу яйца существующий с незапамятных времен софизм: что появилось раньше — курица или яйцо? Мы этот вопрос оставим в стороне, а займемся некоторыми физическими явлениями, избрав в качестве орудия исследования... куриное яйцо.

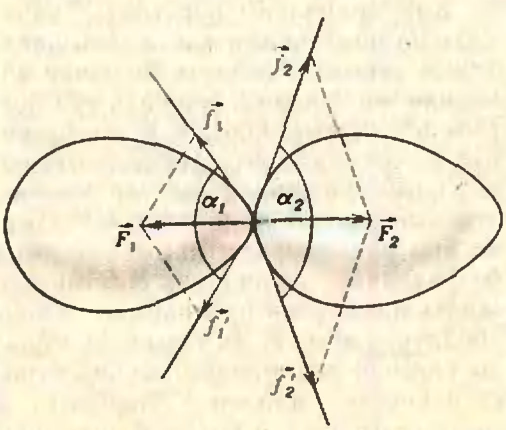
Кто не помнит роковой причины раздора между Лилипутией и империей Блефуску, описанного в «Путешествиях Гулливера»? Этой причиной был указ императора Лилипутии, предписывающий всем его подданным под страхом смертной казни разбивать яйца с острого конца. Гулливер полагал, что выбор конца, с которого следует разбивать яйцо,— дело хозяйское. С какого хочешь — с того и разбивай. Авторы полностью согласны с Гулливером, но все-таки: с какого конца яйцо легче разбить? Решение этой задачи поможет вам выбрать правильную тактику при «сражениях на вареных яйцах», которые так часто возникают за завтраком в пионерских лагерях.

Как правильно поступать: нападать на противника или ждать нападения самому? выбрать большое яйцо или маленькое? держать его острым или тупым концом к противнику? — вот основные вопросы тактики в таком сражении. Бытует мнение, что выигрывает нападающий. Однако при равномерном движении яйца безразлично — нападать самому или ждать нападения противника. Чтобы убедиться в этом, не надо бить яйца; достаточно вспомнить принцип относительности Галилея и «перейти» в систему отсчета, в которой нападающий покоится. В такой системе он автоматически из «агрессора» превращается в «пострадавшую сторону».

Рассмотрим теперь сам процесс столкновения двух яиц. Мы будем считать, что яйца совершенно одинаковые — и по размерам, и по форме, и скорлупа у них «рассчитана» на одну и ту же предельную нагрузку T. Сталкиваются яйца разными концами — одно тупым, другое острым.

Согласно III закону Ньютона силы, действующие в процессе столкновения со стороны одного яйца на другое, равны по абсолютной величине и направлены в противоположные стороны. Представим силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ как суммы сил $\vec{f}_1, \vec{f}_1'$ и $\vec{f}_2, \vec{f}_2'$, соответственно направленных по касательным к соприкасающимся поверхностям яиц. Абсолютная величина силы $\vec{f}$ зависит от угла между касательными: $f = \frac{F}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$. Таким образом, чем больше угол между касательными, тем больше «разрывающие» силы, возникающие при соударении. Так что, действительно, выгоднее сражаться, держа яйцо острым концом к противнику. Имеется и еще один довод в пользу такой стратегии: в яйце у тупого конца расположен «воздушный мешок», и из-за этого тупой конец менее прочный (попробуйте объяснить этот факт).

Обратим внимание читателя на то, что приведенный анализ сил указывает путь к победе с помощью маленькой хитрости. Не нарушая принципа относительности Галилея, нападающий имеет дополнительный шанс на победу, даже если его противник опытен и сражается острым концом: воспользовавшись своей активной позицией, он может ударить противника не в острие, а чуть сбоку, где кривизна и яйцо колется легче.



...Несколько лет назад в магазинах продавалась забавная игрушка — изготовленный из пластмассы волчок с хвостиком. Раскрутив его за хвостик, можно было наблюдать необычное явление: в некоторый момент волчок переворачивается и становится «вверх ногами» — на свой хвостик. При этом потенциальная энергия волчка в поле тяжести земли возрастает! Объяснение этому явлению много лет назад дал английский физик Томсон. (С тех пор такой волчок называют волчком Томсона.)

Оказывается, вареное яйцо может вести себя так же, как волчок Томсона. Возьмем гладкую кафельную плитку и быстро раскрутим на ней сваренное вкрутую яйцо. После двух — трех оборотов яйцо встанет на свой острый конец и будет вращаться вдоль продольной оси! И только после значительного замедления вращения яйцо, под влиянием сил тяжести и трения, начнет все больше раскачиваться из стороны в сторону, пока его боковая сторона не коснется подставки. Этот опыт удается только в том случае, если яйцо хорошо «проварено». Сырое яйцо так вращаться не будет. Трение между слоями жидкости в яйце и между жидкостью и скорлупой существенно тормозит вращение, поэтому раскрутить сырое яйцо до нужной скорости не удается. Благодаря такому различию в поведении вареного и сырого яиц их всегда можно различить, не разбивая,— для этого яйцо достаточно просто раскрутить на столе. Сырое яйцо, совершив несколько оборотов, остановится, а вареное будет вращаться долго.

...В предыдущих опытах нам нужно было вареное яйцо. А как правильно его сварить, чтобы яйцо не треснуло? Почему опытная хозяйка варит яйца в соленой воде? На эти кулинарные вопросы вы не найдете ответа даже в толстой поваренной книге.

При варке яйца в пресной воде оно лежит на дне (его плотность больше плотности воды). При кипении вблизи дна возникают вихревые потоки воды, которые могут привести к раскалыванию скорлупы при ударе о стенки или дно кастрюли. При этом белок выливается через образовавшуюся трещину и затвердевает хлопьями.

Один мой знакомый шестиклассник Вася объяснил необходимость соления воды так: «Если в кастрюлю с яйцом сыпать соль ложками, то при достаточном количестве соли, растворившейся в воде, яйцо всплывет, так как плотность соленой воды станет больше плотности яйца. И яйцо не будет стукаться о дно».

Коля, член кружка юных физиков, предложил свое объяснение: «Наличие соли в воде приводит к увеличению ее теплопроводности, а это способствует более спокойному кипению и равномерному обогреву яйца».

Увлеченная биологией Валя отнесла влияние соли совсем к другой области явлений: «Присутствие соли в воде приводит к лучшей сворачиваемости белка. Поэтому если яйцо и треснет, то в соленой воде немедленно образуется пробка из свернувшегося белка, которая закупорит трещину, и яйцо не вытечет».

Как видите, объяснения самые разные. А вы что думаете по этому поводу?

...Итак, яйцо сварилось. Выньте его ложкой из кипятка и быстро, пока яйцо еще влажное, возьмите его в руки. Хотя яйцо горячее, удержать его в руках можно. Однако, когда яйцо высохнет (это произойдет очень быстро), вы не сможете его держать в руках — очень горячо. С чем связано это явление?

Ответив на предыдущий вопрос, попытайтесь яйцо очистить. Вы увидите, что скорлупа накрепко прилипла и вырывается только с кусками белка. Этого можно было избежать, если бы вы сразу из кипятка опустили яйцо в холодную воду: у белка и скорлупы различные коэффициенты объемного расширения, и при резком охлаждении белок сжимается сильнее, чем скорлупа, и сам от нее «отлипает». Яйцо легко чистится.

...Пока мы видели, как проявляются в свойствах куриного яйца законы механики, гидродинамики и молекулярной физики. А какие электрические явления можно наблюдать с помощью яйца?

Яйцо — диэлектрик. Именно это свойство яичной скорлупы и использовал Майкл Фарадей для демонстрации явления электризации.

Возьмите сырое яйцо и проколите иглой в нем две дырочки. Дуя в одну из них, вы можете вылить все содержимое яйца, и у вас в руках останется пустая целая скорлупа. Поднесите теперь к ней наэлектризованную эбонитовую палочку или обыкновенную пластмассовую расческу, которой вы только что причесались. Теперь, куда бы вы ни перемещали палочку или расческу, скорлупа, как собачонка на привязи, неотступно будет следовать за ними. Подумайте, почему.

...Можно, не разбивая яйца, узнать — свежее оно или нет? Можно. Опустите сырое яйцо в воду. Если яйцо тонет — оно свежее, если всплывает — испортившееся. Дело в том, что в несвежем яйце происходят процессы разложения белка и желтка. Эти процессы сопровождаются выделением сероводорода, который «улетучивается» из яйца через мельчайшие поры в скорлупе. Поэтому плотность яйца уменьшается.

Но ведь не придешь же в магазин со своей кастрюлей, чтобы проверять, свежие яйца или нет?! Можно поступить проще: посмотрите яйцо «на просвет»; если оно просвечивает — значит, свежее, если оно темное — значит, несвежее. Сероводород, выделяющийся в испорченном яйце, уменьшает его прозрачность.

В заключение попробуйте проделать следующий опыт-фокус. Возьмите две рюмки для яиц и поставьте их вплотную. В одну из них положите сваренное вкрутую яйцо. Сильно дуньте в зазор между яйцом и стенкой рюмки. Яйцо выпрыгнет из рюмки и перепрыгнет в соседнюю. Попытайтесь объяснить этот фокус.

Пытливому и наблюдательному человеку в самых простых вещах может открыться много новых и сложных явлений. Поэтому почаще удивляйтесь окружающему вас миру, задавайте вопросы и стремитесь прежде всего сами отыскивать ответы.

задачник Кванта

Задачи

М631 — М635; Ф643 — Ф647

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих из рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 сентября 1980 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 7 — 80», и номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М631, М632» или «Ф643». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи.

Задачи этого номера предлагались на заключительном туре Всесоюзной олимпиады школьников. Число в скобках обозначает класс, в котором предлагалась задача.

М631. Двузначные числа от 19 до 80 выписаны подряд. Делится ли получающееся число 192021... ...7980 на 1980? (8)

В. Федотов

М632. Груз, упакованный в контейнеры, нужно доставить на орбитальную космическую станцию «Салют». Число контейнеров не меньше 35, общая масса груза 18 тонн. Имеется семь транспортных кораблей «Прогресс», каждый из которых может доставить на орбиту 3 тонны груза. Известно, что эти корабли могут одновременно доставить любые 35 из имеющихся контейнеров. Докажите, что они смогут доставить на орбиту сразу весь имеющийся груз. (8—9)

А. Колотов

М633. На диаметре AC некоторой окружности дана точка E. Проведите через нее хорду BD так, чтобы площадь четырехугольника $ABCD$ была наибольшей. (9)

И. Шарыгин

М634. Обозначим через $S(n)$ сумму всех цифр натурального числа n.

а) Существует ли натуральное n такое, что $n+S(n)=1980$?

б) Докажите, что хотя бы одно из любых двух последовательных натуральных чисел представимо в виде $n+S(n)$ для некоторого третьего натурального числа n. (8)

С. Конягин

М635. Коротышки, проживающие в Цветочном городе, вдруг стали болеть гриппом. В один день несколько коротышек простудились и заболели, и хотя потом уже никто не простужался, здоровые коротышки заболевали, навещая своих больных друзей. Известно, что каждый коротышка болеет гриппом ровно день, причем после этого у него по крайней мере еще один день есть иммунитет — т. е. он здоров и заболеть опять в этот день не может. Несмотря на эпидемию, каждый здоровый коротышка ежедневно навещает всех своих больных друзей. Когда началась эпидемия, коротышки забыли о прививках и не делают их. Докажите, что:

а) если до первого дня эпидемии какие-нибудь коротышки сделали прививку и имели в первый день иммунитет, то эпидемия может продолжаться сколь угодно долго:

б) если же в первый день иммунитета ни у кого не было, то эпидемия рано или поздно кончится. (8)

А. Колотов

Ф643. С южного и северного полюсов Земли одновременно стартуют две ракеты с одинаковыми начальными скоростями, направленными горизонтально. Через время $\tau = 3$ ч 20 мин ракеты оказались на максимальном удалении друг от друга. Определить максимальное расстояние между ракетами. Ускорение свободного падения на Земле считать известным. Радиус Земли $R_з = 6400$ км. (10)

С. Козел

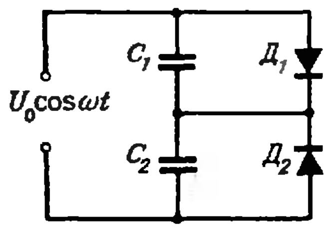


Рис. 1.

Ф644. Цепь, состоящая из двух конденсаторов с емкостями C_1 и C_2 ($C_2 > C_1$) и двух идеальных диодов $Д_1$ и $Д_2$ (рис. 1) подключена к источнику переменного напряжения $u = U_0 \cos \omega t$. Определите зависимость напряжения на конденсаторах от времени в установившемся режиме. Изобразите полученные зависимости на графике. Сопротивление идеального диода в прямом направлении равно нулю, в обратном — бесконечности. (10)

В. Скороваров

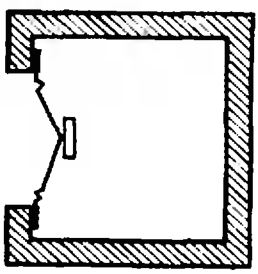


Рис. 2.

Ф645. Громкоговоритель имеет диффузор с площадью поперечного сечения $S = 300$ см^2 и массой $m = 5$ г. Резонансная частота диффузора $\nu_0 = 50$ Гц. Какой окажется его резонансная частота, если поместить громкоговоритель на стенке закрытого ящика объема $V = 40$ л (рис. 2). Расчет провести в предположении, что температура воздуха внутри ящика не изменяется при колебании диффузора. (10)

А. Зильберман

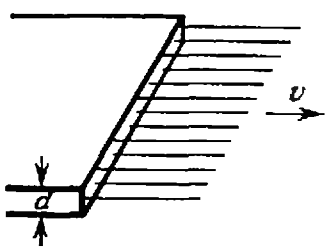


Рис. 3.

Ф646. Направленный поток электронов вылетает из тонкой широкой щели со скоростью $v = 10^5$ м/с (рис. 3). Концентрация электронов в потоке $n = 10^{10}$ частиц/м^3. На каком расстоянии от щели толщина пучка увеличится в 2 раза? Масса электрона $m = 9 \cdot 10^{-31}$ кг, заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, диэлектрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м. (9)

А. Зильберман

Ф647. Крупная дождевая капля покинула облако в безветренную погоду на большой высоте. В момент, когда ускорение капли были равным 7,5 м/с^2, ее скорость составляла 20 м/с. Вблизи Земли капля падала с постоянной скоростью и, попав на боковое стекло автомобиля, оставила на нем след под углом 30° к вертикали. Оштрафует ли инспектор ГАИ водителя за превышение скорости, если разрешенная скорость движения автомобиля 60 км/ч? Силу сопротивления воздуха считать пропорциональной квадрату скорости капли. (9)

В. Белонучкин

Решения задач

М573, М575—М577; Ф583—Ф585, Ф588

М573. *Через точку O а) на плоскости; б) в пространстве проведено 1979 прямых, никакие две из которых не перпендикулярны друг другу. На прямой l_1 взята произвольная точка A_1, отличная от O. Докажите, что можно выбрать на каждой из остальных прямых по точке $A_i \in l_i$ ($i=2, 3, \ldots, 1979$) так, чтобы следующие 1979 пар прямых были взаимно перпендикулярны:*

$$(A_1A_3) \perp l_2,\quad (A_2A_4) \perp l_3, \ldots,\quad (A_{i-1}A_{i+1}) \perp l_i, \ldots$$
$$\ldots, (A_{1977}A_{1979}) \perp l_{1978},\quad (A_{1978}A_1) \perp l_{1979},\quad (A_{1979}A_2) \perp l_1.$$

Выберем на каждой прямой l_i по единичному вектору e_i. Тогда для точек $A_i \in l_i$ можно написать $\overrightarrow{OA_i} = a_i\overrightarrow{e_i}$. Условие перпендикулярности прямых A_iA_{i+2} и l_{i+1} можно записать в виде $\overrightarrow{A_iA_{i+2}} \cdot \overrightarrow{e_{i+1}} = 0$, или, поскольку

$$\overrightarrow{A_iA_{i+2}} = \overrightarrow{OA_{i+2}} - \overrightarrow{OA_i},$$
$$(a_{i+2}\overrightarrow{e_{i+2}} - a_i\overrightarrow{e_i}) \cdot \overrightarrow{e_{i+1}} = 0,$$

то есть

$$a_{i+2}\overrightarrow{e_{i+1}} \cdot \overrightarrow{e_{i+2}} = a_i\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_{i+1}}.$$

Положим $\overrightarrow{e_i} \cdot \overrightarrow{e_{i+1}} = c_i$ ($i=1, 2, \ldots, 1979$; c_i — косинус угла между вектором $\overrightarrow{e_i}$ и следующим по номеру вектором $\overrightarrow{e_{i+1}}$; $c_i \neq 0$). Мы получим формулу

$$a_{i+2} = a_i \frac{c_i}{c_{i+1}}, \qquad (*)$$

которая позволяет последовательно определить по точке A_1 точки $A_3, A_5, \ldots, A_{1977}, A_{1979}, A_2, A_4, \ldots, A_{1978}$, и, наконец, снова точку A_1' на прямой l_1, которая будет совпадать с точкой A_1: в силу формулы $(*)$

$$a_1' = a_1 \frac{c_1}{c_2} \cdot \frac{c_3}{c_4} \cdot \ldots \cdot \frac{c_{1979}}{c_1} \cdot \frac{c_2}{c_3} \cdot \ldots \cdot \frac{c_{1978}}{c_{1979}} = a_1.$$

(Формулу $(*)$, конечно же, можно получить, рассматривая также проекции точек A_i, A_{i+2} на прямую l_{i+1}, — эти проекции должны совпадать, так как $(A_iA_{i+2}) \perp l_{i+1}$).

Н. Васильев

◆

М575. *На прямой по порядку расположены точки $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_n$ так, что длины отрезков $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1}A_n$ не превосходят 1. Требуется отметить $k-1$ из точек $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ красным цветом так, чтобы длины любых двух из k частей, на которые отрезок A_0A_n разбивается красными точками, отличались не более, чем на 1. Докажите, что это всегда можно сделать*

а) для $k=3$;

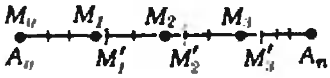
б) для каждого натурального $k<n$.

Сначала сформулируем условие задачи несколько иначе. Будем рассматривать всевозможные расстановки $k+1$ фишек $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_k$ в точках $A_0, A_1, \ldots, A_n$. Расстановку назовем *правильной*, если M_i расположена не правее, чем M_{i+1}, и расстояния между M_i и M_{i+1} различаются не более, чем на 1 ($0<i<k$). Тогда исходная задача превратится в такую: *доказать, что существует правильная расстановка фишек $M_0, M_1, \ldots, M_k$ такая, что M_0 находится в A_0, а M_k — в A_n.* Может, конечно, оказаться, что в этой расстановке M_i и M_j попали в одну точку, но тогда, очевидно, $|A_0A_n| < k-1$ (подумайте сами, что надо делать в этом случае).

Покажем, как из произвольной правильной расстановки фишек получить другую правильную, в которой часть фишек сдвинется вправо, а M_0 останется на месте. Введем предварительно некоторые обозначения.

Пусть мы имеем расстановку фишек $M_0, M_1, \ldots, M_k$. Будем через M_i обозначать также ту точку A_j, в которой находится фишка M_i, а через M_i' — точку A_{j+1} (если она существует — см. рисунок). В частности, $|M_iM_i'| < 1$. Мы покажем, как часть фишек переставить с M_i на M_i' с сохранением правильности расстановки.

Выберем среди расстояний $|M_iM_{i+1}|$ минимальное; пусть это $|M_sM_{s+1}| = a$. Тогда $a \leq |M_iM_{i+1}| \leq a+1$ при всех i (так как расстановка правильная). Если нам удастся передвинуть часть фишек вправо с сохранением этих неравенств, то новая расстановка будет правильной. Посмотрим, нет ли среди фишек $M_1, M_2, \ldots, M_k$ такой фишки M_i, для которой $|M_{i-1}M_i'| \leq a+1$, то есть такой, при сдвиге которой вправо все новые расстояния между фишками не превысят $a+1$. Все такие фишки назовем *левоподвижными*. Оказывается, левоподвижные фишки существуют. Действительно, такова, например, фишка M_{s+1}: $|M_sM_{s+1}'| = |M_sM_{s+1}| + |M_{s+1}M_{s+1}'| = a + |M_sM_{s+1}'| \leq a+1$.



Теперь посмотрим, нет ли среди фишек $M_0, M_1, \ldots, M_{k-1}$ такой, для которой $|M_i'M_{i+1}|\geqslant a$, то есть такой, при сдвиге которой вправо ни одно из расстояний между фишками не станет меньше a. Такие фишки назовем *правоподвижными*. Правоподвижной, естественно, будет и фишка M_k.

Заметим, что если M_i не является левоподвижной, то $|M_{i-1}'M_i'|>a$. В самом деле,

$$|M_{i-1}'M_i'| = |M_{i-1}M_i'| - |M_{i-1}M_{i-1}'| > (a+1) - |M_{i-1}M_{i-1}'| \geqslant (a+1)-1=a.$$

А если фишка M_i не является правоподвижной, то

$$|M_i'M_{i+1}'| = |M_i'M_{i+1}| + |M_{i+1}M_{i+1}'| \leqslant a+1.$$

Теперь из всех левоподвижных фишек выберем самую правую. Пусть это будет M_l. Среди всех правоподвижных фишек из $M_l, M_{l+1}, \ldots, M_k$ выберем самую левую. Пусть это будет M_r (возможно, $l=r$). Теперь сдвинем фишки $M_l, M_{l+1}, \ldots, M_r$ в положения $M_l', M_{l+1}', \ldots, M_r'$ соответственно и покажем, что последовательность $M_0, \ldots, M_k$ останется правильной.

$$|M_{l-1}M_l'| > |M_{l-1}M_l| \geqslant a \quad \text{и} \quad |M_{l-1}M_l'| \leqslant a+1,$$

так как фишка M_l — левоподвижная.

$$|M_r'M_{r+1}| < |M_rM_{r+1}| \leqslant a+1 \text{ и } |M_r'M_{r+1}| \geqslant a,$$

так как фишка M_r — правоподвижная.

При $l\leqslant i<r$, согласно сделанным выше замечаниям относительно свойств неподвижных фишек, $a<|M_i'M_{i+1}'|\leqslant a+1$, так как фишка M_{i+1} — не левоподвижная (она стоит правее M_l — самой правой левоподвижной фишки), а M_i — не правоподвижная (она стоит левее M_r — самой левой правоподвижной фишки). Поэтому для всех расстояний $|M_{i-1}M_i|$ остается верным неравенство $a\leqslant|M_{i-1}M_i|\leqslant a+1$, $i=1, 2, \ldots, k$. Надо, правда, еще доказать, что фишка M_i не может оказаться правее фишки M_{i+1}, но это понятно, так как если раньше было $M_i=M_{i+1}$, то фишка M_{i+1} — левоподвижная и, значит, фишка M_i двигаться не могла. Итак, мы добились следующего: из любой правильной последовательности сдвигом некоторой части фишек $M_1, M_2, \ldots, M_k$ на соседние точки (M_i сдвигалось в M_i') вправо получена новая правильная последовательность.

Отметим интересную роль, которую сыграли в этом процессе фишки M_0 и M_k. Они сами в операции, быть может, не участвовали, но их наличие обеспечило существование необходимых нам фишек M_l и M_r.

Теперь завершить доказательство совсем просто. Поместим все фишки $M_0, \ldots, M_k$ в A_0*) — эта последовательность, очевидно, правильная — и начнем применять процесс.

Расстановка фишек по точкам все время меняется, причем каждая фишка движется лишь вправо. Ясно, что после некоторого количества таких операций фишка M_k придет в точку A_n, что и требовалось.

Другие известные решения задачи используют такую процедуру (говоря в терминах приведенного выше решения): сначала фишки M_0 и M_k закрепляют в точках A_0 и A_n соответственно, а остальные расставляют произвольно; затем передвижением фишек $M_1, M_2, \ldots, M_{k-1}$ добиваются требуемого. (Этот подход сразу кажется наиболее естественным, поэтому так неожиданна идея изложенного решения: не закреплять фишку M_k.)

В. Гальперин

◆

М576. *На плоскости дано несколько точек. Для некоторых пар $(A; B)$ этих точек взяты векторы $\vec{AB}$, причем так, что в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Докажите, что сумма всех выбранных векторов равна $\vec{0}$.*

Эту задачу можно решать многими различными способами. Приведем два из них.

Первое решение. Применим индукцию по числу векторов. Для $n=2$ имеем векторы $\vec{AB}$ и $\vec{BC}$, сумма которых есть $\vec{0}$. Пусть утверждение справедливо для n векторов. Рассмотрим систему из $n+1$ векторов. Заменим в этой системе

---

*) Или в точки $A_0, A_1, A_2, \ldots, A_k$.

два вектора $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ их суммой $\overrightarrow{AC}$. Векторы новой системы будут продолжать удовлетворять условию задачи. Поэтому, по предположению индукции, их сумма равна $\vec{0}$. Но сумма векторов исходной системы, очевидно, равна сумме векторов полученной системы.

Второе решение. Запишем каждый из данных векторов в виде $\overrightarrow{A_iA_j} = \overrightarrow{OA_j} - \overrightarrow{OA_i}$, где O — произвольная фиксированная точка. В силу условия задачи, в рассматриваемую сумму каждый из векторов $\overrightarrow{OA_i}$ войдет со знаком «+» столько же раз, сколько со знаком «—». Значит, вся сумма равна $\vec{0}$.

В. Произволов

◆

М577. *Какое наименьшее число фишек нужно поставить на поля шахматной доски размерами*
а) 8×8 клеток,
б) n×n клеток
для того, чтобы на каждой прямой, проходящей через центр произвольного поля и параллельной какой-либо стороне или диагонали доски, стояла хотя бы одна фишка? (Фишки ставятся в центры полей.)

Ответ: $2n$ фишек при n четном (в частности, 16 при $n=8$), и $2n+1$ — при n нечетном.

Одна из возможных расстановок фишек показана на рисунках 1 и 2. Докажем, что меньшим количеством фишек обойтись не удается.

Начнем с более трудного случая нечетного n (рис. 2). Очевидно, на каждом из красных отрезков, параллельных диагоналям и расположенных вне голубого квадрата, должно стоять по фишке; этих отрезков $2n-2$. На каждом из голубых отрезков тоже должна стоять фишка. Покажем, что для этого придется добавить еще не менее трех фишек: действительно, чтобы двумя фишками «закрыть» все четыре стороны голубого квадрата, их пришлось бы поставить в противоположные вершины этого квадрата, но тогда осталась бы свободной одна диагональ квадрата.

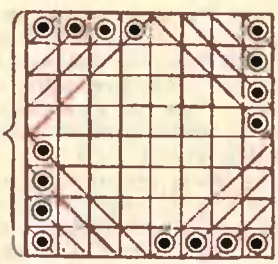


Рис. 1.

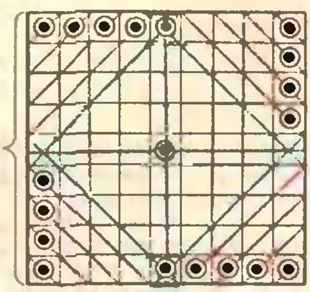


Рис. 2.

Случай четного n теперь очевиден: здесь просто указывается $2n$ непересекающихся отрезков, параллельных диагоналям (рис. 1).

Предлагаем читателям выяснить, сколько существует различных расстановок наименьшего количества фишек, удовлетворяющих условию (для разных n), и обобщить задачу на случай прямоугольных досок размером $m \times n$. Было бы также интересно исследовать различные пространственные аналоги этой задачи (возникающие здесь вопросы, видимо, очень трудны; см. статью «Расстановка кубиков» — «Квант», 1972, № 4).

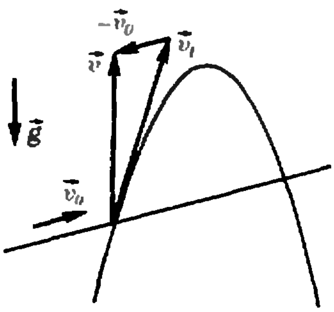
Н. Васильев

◆

Ф583. *Наблюдатель движется с постоянной скоростью вдоль некоторой наклонной прямой. Брошенное под углом к горизонту тело пересекает траекторию наблюдателя дважды с интервалом времени τ. Оба раза тело нахо-*

В системе отсчета, связанной с Землей, обозначим $\vec{v}_0$ скорость наблюдателя, а $\vec{v}_1$ скорость тела в тот момент времени t_0, в который оно в первый раз пересекает траекторию наблюдателя. В системе отсчета, движущейся равномерно со скоростью $\vec{v}_0$, наблюдатель неподвижен, а тело в момент времени t_0 имеет скорость $\vec{v} = \vec{v}_1 + (-\vec{v}_0) = \vec{v}_1 - \vec{v}_0$. Так как эта система отсчета движется относительно Земли равномерно, ускорение

дится впереди наблюдателя на одном и том же расстоянии от него. Как выглядит с точки зрения наблюдателя траектория тела?
После второго пересечения наблюдатель измеряет пути, пройденные телом за последовательные равные промежутки времени длительностью τ. Найдите отношение этих путей.



тела в этой системе такое же, как ускорение относительно Земли, то есть равно $\vec{g}$ ($g = 9{,}8$ м/с²).

Следовательно, в системе отсчета, движущейся с постоянной скоростью $\vec{v}_0$ относительно Земли, тело движется по параболе.

По условию задачи тело пересекает наклонную прямую оба раза на одном и том же расстоянии от наблюдателя впереди него. Это означает, что с точки зрения наблюдателя тело движется по вертикальной прямой, то есть как тело, брошенное вертикально вверх.

Векторы $\vec{v}_0$ и $\vec{v}_1$ таковы, что вектор $\vec{v}$ вертикален (см. рисунок).

В движущейся системе отсчета уравнение движения тела в проекции на вертикальную ось Y, направленную вверх, имеет вид

$$y = y_0 + vt - \frac{gt^2}{2}.$$

При $t = t_0 = 0$ (отсчет времени начинаем с момента первого пересечения телом траектории наблюдателя) и при $t = \tau$ значения координаты тела совпадают: $y = y_0$, то есть

$$y_0 = y_0 + vt - \frac{g\tau^2}{2}.$$

Отсюда

$$v\tau - \frac{g\tau^2}{2} = 0 \Rightarrow v = \frac{g\tau}{2}.$$

Следовательно, уравнение движения тела в движущейся системе отсчета имеет вид

$$y = y_0 + \frac{g\tau}{2}t - \frac{gt^2}{2}.$$

Найдем отношение путей, проходимых телом за последовательно равные промежутки времени τ. При $t = n\tau$

$$y_n = y_0 + n\frac{g\tau^2}{2} - n^2\frac{g\tau^2}{2};$$

при $t = (n+1)\tau$

$$y_{n+1} = y_0 + (n+1)\frac{g\tau^2}{2} - (n+1)^2\frac{g\tau^2}{2};$$

таким образом,

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = ng\tau^2.$$

За первый промежуток времени τ изменение координаты тела равно нулю: $\Delta y_0 = y_1 - y_0 = 0$ $(n = 0)$; за второй промежуток времени τ (после второго пересечения телом траектории наблюдателя) — $\Delta y_1 = g\tau^2$; $\Delta y_2 = 2g\tau^2$ и т. д.

Следовательно, отношение путей, проходимых телом после второго пересечения траектории наблюдателя за последовательно равные промежутки времени τ, равно

$$\Delta y_1 : \Delta y_2 : \Delta y_3 ... = 1 : 2 : 3...$$

М. Кацай

Ф584. *В небольшую тонкостенную металлическую кастрюлю налили 0,5 л воды, поставили кастрюлю на плиту и, измеряя температуру воды в различные моменты времени, построили график зависимости температуры от времени. Затем воду вылили, в кастрюлю налили 0,7 кг спирта и, поставив кастрюлю на ту же самую плиту, построили график зависимости температуры спирта от времени. Оба графика приведены на рисунке 1. Пользуясь этими графиками,*

Обозначим q количество теплоты, отдаваемое плитой за единицу времени. За малый промежуток времени $\Delta\tau$ количество теплоты, отдаваемое плитой, равно $Q = q\Delta\tau$. Это тепло расходуется на подогрев кастрюли, на подогрев жидкости и на теплоотдачу в окружающее пространство. При малом $\Delta\tau$ температура Θ кастрюли с жидкостью меняется незначительно, и поэтому можно считать, что теплоотдача Q_1 пропорциональна разности температур кастрюли (Θ) и окружающей среды (Θ_0) и времени $\Delta\tau$, то есть $Q_1 = \alpha(\Theta - \Theta_0)\Delta\tau$, где α — коэффициент пропорциональности.

Запишем закон сохранения энергии для случая, когда на плите стоит кастрюля с водой:

$$Q = q\Delta\tau = c_в m_в \Delta\Theta + C\Delta\Theta + \alpha(\Theta - \Theta_0)\Delta\tau, \qquad (1)$$

где $c_в = 4{,}2 \cdot 10^3$ Дж/(кг · К) — удельная теплоемкость воды, $m_в = 0{,}5$ кг — масса воды, $\Delta\Theta$ — изменение температуры воды *определите удельную теплоемкость спирта и удельную теплоту его парообразования, если за 30 минут кипения количество спирта в кастрюле уменьшилось вдвое. Теплоемкость кастрюли 200 Дж/К. Испарением с поверхности жидкости пренебречь.*

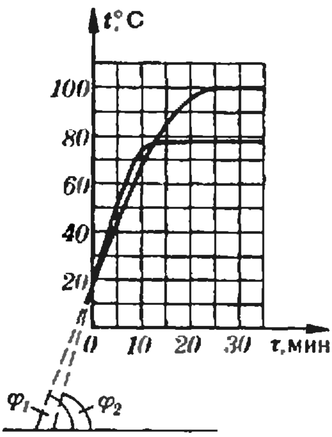


Рис. 1.

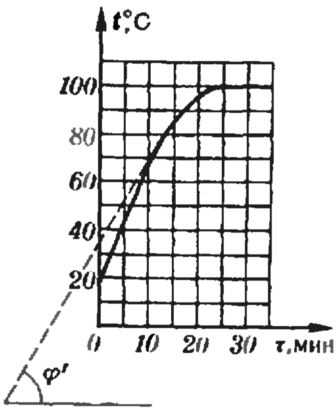


Рис. 2.

и кастрюли за время $\Delta\tau$, C — теплоемкость кастрюли, Θ — «начальная» температура воды и кастрюли.

В том случае, когда на плите стоит кастрюля со спиртом,

$$Q = q\Delta\tau = c_с m_с \Delta\Theta' + C\Delta\Theta' + \alpha(\Theta - \Theta_0)\Delta\tau, \qquad (2)$$

где $c_с$ — удельная теплоемкость спирта, $m_с$ — масса спирта, $\Delta\Theta'$ — изменение температуры спирта и кастрюли за время $\Delta\tau$, Θ — «начальная» температура спирта и кастрюли.

Из (1) и (2) найдем отношения $\Delta t/\Delta\tau$ и $\Delta t'/\Delta\tau$:

$$\frac{\Delta\Theta}{\Delta\tau} = \frac{q - \alpha(\Theta - \Theta_0)}{c_в m_в + C}, \qquad (3)$$

$$\frac{\Delta\Theta'}{\Delta\tau} = \frac{q - \alpha(\Theta - \Theta_0)}{c_с m_с + C}. \qquad (4)$$

Поделим (3) на (4):

$$\frac{\Delta\Theta/\Delta\tau}{\Delta\Theta'/\Delta\tau} = \frac{c_с m_с + C}{c_в m_в + C}.$$

Отсюда

$$c_с = \frac{\Delta\Theta/\Delta\tau}{\Delta\Theta'/\Delta\tau}\,\frac{c_в m_в + C}{m_с} - \frac{C}{m_с}.$$

Отношение $\Delta\Theta/\Delta\tau$ при $\Delta\tau \to 0$ стремится к тангенсу угла наклона касательной к графику зависимости $t(\tau)$ для кастрюли с водой в точке с ординатой Θ. Аналогично, $\Delta\Theta'/\Delta\tau$ при $\tau \to 0$ стремится к тангенсу угла наклона касательной к графику зависимости $t(\tau)$ для кастрюли со спиртом в точке с ординатой Θ.

Таким образом,

$$c_с = \frac{\operatorname{tg}\varphi_1}{\operatorname{tg}\varphi_2}\,\frac{c_в m_в + C}{m_с} - \frac{C}{m_с}. \qquad (5)$$

Для большей точности касательные к графику будем проводить при низких Θ (см. рис. 1; на этом участке графики $t(\tau)$ практически прямые линии). Определив значения $\operatorname{tg}\varphi_1$ и $\operatorname{tg}\varphi_2$ и подставив в (5) численные значения величин, найдем

$$c_с \approx 2{,}4 \cdot 10^3\ \text{Дж/(кг} \cdot \text{К)}.$$

Теперь найдем удельную теплоту парообразования спирта. При кипении температура спирта не меняется. Тепло, выделяемое плитой за время T, расходуется на испарение спирта и на теплоотдачу. Согласно закону сохранения энергии,

$$qT = \Delta m\lambda + \alpha(\Theta_к - \Theta_0)T, \qquad (6)$$

где $\Delta m = 0{,}35$ кг — масса спирта, испарившегося за время $T = 30$ мин, λ — удельная теплота парообразования спирта, $\Theta_к = 78\,°C$ — температура кипения спирта. Из (6) находим выражение для λ:

$$\lambda = \frac{q - \alpha(\Theta_к - \Theta_0)}{\Delta m/T}. \qquad (7)$$

Теплоотдачу $\alpha(\Theta_к - t_0)$ за единицу времени при температуре $\Theta_к$ мы можем найти из выражения (1), подставив в него $\Theta = \Theta_к$ и учтя, что $\Delta\Theta/\Delta\tau$ при $\tau \to 0$ стремится к тангенсу угла наклона касательной к графику $t(\tau)$ (для кастрюли с водой), проведенной в точке с ординатой $\Theta_к = 78\,°C$. Таким образом, из (1) находим

$$\alpha(\Theta_к - \Theta_0) = q - (c_в m_в + C)\operatorname{tg}\varphi'$$

(множитель $\operatorname{tg}\varphi'$ имеет размерность К/мин).

Подставив это выражение в (7), получим окончательное выражение для удельной теплоты парообразования спирта:

$$\lambda = \frac{c_в m_в + C}{\Delta m/T}\operatorname{tg}\varphi'.$$

Определив по графику (рис. 2) φ' и подставив численные значения величин, найдем λ.

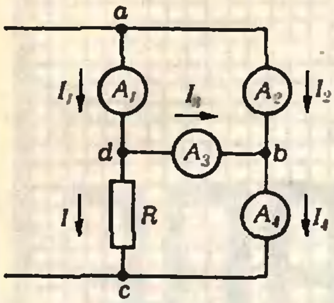
И. Слободецкий

◆

Ф585. *Четыре одинаковых амперметра и резистор включены так, как показано на рисунке. Амперметр A_1 показывает 2 А, амперметр A_2 по-*

Будем считать, что токи в цепи направлены так, как показано на рисунке.

Напряжение между точками b и a равно $U_{ba} = I_2 r$, где r — внутреннее сопротивление амперметра; в то же время, $U_{ba} = I_1 r + I_3 r$. Таким образом, *казывает 3 А. Какие токи протекают через амперметры A_3, A_4 и резистор? Найдите отношение внутреннего сопротивления амперметра к сопротивлению резистора.*



$$I_1r + I_3r = I_2r \Rightarrow I_3 = I_2 - I_1 = 1\ \text{А}.$$

Через амперметр A_4 течет ток

$$I_4 = I_2 + I_3 = 4\ \text{А}.$$

Через резистор течет ток

$$I = I_1 - I_3 = 1\ \text{А}.$$

Напряжение между точками c и d равно $U_{cd} = IR$; в то же время $U_{cd} = I_3r + I_4r$. Таким образом,

$$IR = (I_3 + I_4)r.$$

Отсюда находим отношение r/R:

$$\frac{r}{R} = \frac{I}{I_3 + I_4} = \frac{1}{5}.$$

В. Скороваров

Ф588. *Рисунок 1 (вид сверху) сделан с фотографии шлейфов дыма, тянущихся от трех паровозов, которые движутся по прямолинейному участку железнодорожного пути. Скорость первого паровоза $|\vec{v}_1| = 50$ км/ч, а второго — $|\vec{v}_2| = 70$ км/ч; направления их движения указаны на рисунке стрелками. Какова скорость третьего паровоза?*

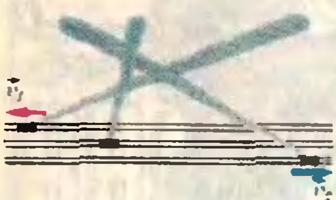


Рис. 1.

◆

Прежде всего выясним, чем определяется направление шлейфа дыма. Клуб дыма, выпущенный паровозом в точке A, через время t будет снесен ветром в точку C такую, что $\vec{AC} = \vec{u}t$, где $\vec{u}$ — скорость ветра (рис. 2). Поезд же через время t окажется в точке B такой, что $\vec{AB} = \vec{v}t$, где $\vec{v}$ — скорость поезда. Очевидно, что направление шлейфа дыма идет вдоль вектора разности векторов $\vec{AC}$ и $\vec{AB}$, или, что то же, вдоль вектора $\vec{d}$, равного разности векторов $\vec{u}$ и $\vec{v}$.

Найдем скорость ветра. Нарисуем в произвольном масштабе вектор $\vec{v}_1$; затем из начала O вектора $\vec{v}_1$ проведем в том же масштабе вектор $\vec{v}_2$; из концов векторов $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$

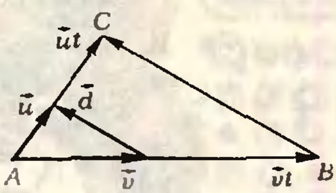


Рис. 2.

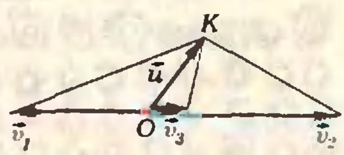


Рис. 3.

проведем прямые, параллельные соответствующим шлейфам дыма (рис. 3). Точку K пересечения этих прямых соединим с точкой O. Вектор $\vec{OK}$ и представляет в выбранном нами масштабе вектор скорости ветра, так как вектор разности $\vec{OK} - \vec{v}_1$ идет вдоль шлейфа дыма от первого паровоза, а вектор разности $\vec{OK} - \vec{v}_2$ идет вдоль шлейфа дыма от второго паровоза. Теперь нетрудно найти скорость $\vec{v}_3$ третьего паровоза. Направление шлейфа дыма, выпускаемого им, должно идти вдоль вектора разности $\vec{OK} - \vec{v}_3$. Проведем через K прямую, параллельную шлейфу дыма от третьего паровоза. Пересечение этой прямой с вектором $\vec{v}_2$ определяет $\vec{v}_3$. Измерив длину $\vec{v}_3$, зная масштаб, в котором построены все векторы, найдем $|\vec{v}_3|$:

$$|\vec{v}_3| = 40\ \text{км/ч}.$$

И. Слободецкий


КВАНТ
ОЛИМПИАДЕ
салют, олимпиада !

ЭВМ на Олимпиаде

Спортивные применения ЭВМ необычайно широки — от статистического анализа итогов футбольного чемпионата до вычерчивания схем защиты и нападения, от составления расписания баскетбольного турнира до обработки результатов наблюдений за психофизиологическим состоянием спортсменов, от прогнозирования результатов спортивных игр до оформления протоколов боксерских поединков.

На XXII Олимпийских играх в Москве вычислительные машины будут полноправными членами Оргкомитета, судейских коллегий, пресс-центров.

Раздел «Искусство программирования» олимпийского номера «Кванта» предлагает рассказ о двух рядовых задачах Олимпиады, решаемых ЭВМ на переднем крае спортивных сражений — у судейских столиков в прыжковом секторе стадиона и на фехтовальной дорожке. Здесь помещены алгоритмы двух задач, связанных с обработкой оперативных документов спортивных состязаний. Эти алгоритмы были в свое время запрограммированы на Коболе и Бэйсике — языках программирования, возможно, знакомых некоторым из наших читателей, но, во всяком случае, еще не описывавшихся на страницах квантовской Заочной школы программирования.

Предлагаем по каждому из этих алгоритмов составить программу на языке Рапира, который знаком читателям «Кванта» по урокам 5—8 Заочной школы программирования («Квант», 1980, №№1—3). Ваши программы вы можете присылать по тому же адресу, по которому вы пишете в Заочную школу.

Робик и Рапира, которые вы проходили на уроках Заочной школы — это *диалоговые* языки программирования: составлять, запускать и исправлять программы на этих языках можно прямо за пультом терминала.

В примерах программ, приводившихся на уроках Заочной школы, предполагалось, что за терминалом работает автор программы или, во всяком случае, пользователь, знакомый с соответствующими языком программирования. В статьях, публикуемых в этом номере, рассказывается о программах, с которыми работают судьи и спортсмены, то есть пользователи, как правило, с программированием не знакомые.

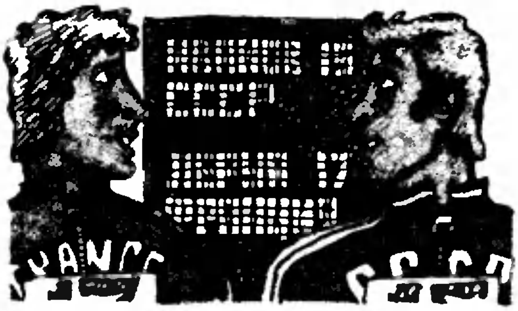
Поэтому диалог должен быть организован так, чтобы пользователю не приходилось задумываться над присваиваниями, вызовами процедур и другими особенностями программ. Если же во время работы программы понадобилось выяснить у пользователя значение некоторого имени, необходимо воспользоваться стандартной функцией ВВОД. Например, если в какой-либо процедуре встретится оператор

ВВОД(0)→ФАМИЛИЯ;

то на экране терминала появится приглашение к диалогу — символ «—», и машина будет ждать, пока пользователь наберет на клавиатуре нужный текст. Этот текст и будет считаться *результатом* функции, то есть он будет присвоен имени ФАМИЛИЯ.

Если в качестве параметра функции ВВОД указано число 0, как в приведенном выше примере, то набранная на клавиатуре информация считается *текстом*, то есть к ней добавляются апострофы справа и слева. Если, например, пользователь в ответ на приглашение набрал слово ИВАНОВ, то значением имени ФАМИЛИЯ станет текст 'ИВАНОВ', а если пользователь наберет 510, значением имени станет *текст* '510'.

В том случае, если нужно спросить у пользователя *число*, с которым будут потом выполняться какие-либо арифметические действия, парамет-



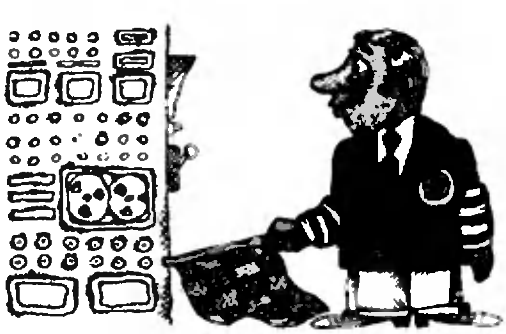
ром функции ВВОД должна быть единица, а не ноль.

Приведем пример небольшой процедуры с использованием функции ВВОД и протокол диалога пользователя с ЭВМ при выполнении этой процедуры.

Допустим, нужно запомнить фамилию, стартовый номер, название страны. Сведения о каждом участнике удобно запоминать в виде кортежа, а сведения по всем участникам образуют множество таких кортежей. Дадим этому множеству имя СПИСОК. В приведен-

ном ниже примере текст, печатаемый машиной, выделен красным шрифтом.

```
ПРОЦ ЗАПИСЬ;
<* *> — > СПИСОК;
ПЕЧАТЬ ('УКАЖИТЕ ЧИСЛО
УЧАСТНИКОВ');
ВВОД (1) — > ЧИСЛО; 1 — > СЧЕТЧИК;
ПОКА СЧЕТЧИК = <ЧИСЛО::
   ПЕЧАТЬ ('ФАМИЛИЯ УЧАСТНИКА');
   ВВОД (0) — >ФАМИЛИЯ;
   ПЕЧАТЬ ('СТАРТОВЫЙ НОМЕР');
   ПЕЧАТЬ ('СТРАНА'); ВВОД(0) — >
СТРАНА;
   СЧЕТЧИК+1 — > СЧЕТЧИК;
 —СПИСОК +<*<ФАМИЛИЯ, НОМЕР,
   СТРАНА>*>—>СПИСОК;
ВСЕ
КНЦ;
ЗАПИСЬ:
УКАЖИТЕ ЧИСЛО УЧАСТНИКОВ
—3
ФАМИЛИЯ УЧАСТНИКА
   ИВАНОВ
СТАРТОВЫЙ НОМЕР
   15
СТРАНА
— СССР
ФАМИЛИЯ УЧАСТНИКА
— ЛЕРУА
СТАРТОВЫЙ НОМЕР
—17
СТРАНА
—ФРАНЦИЯ
```



В результате будет сформировано множество СПИСОК: <*< ИВАНОВ, 15, СССР>, <ЛЕРУА, 17, ФРАНЦИЯ>*>

Обратите внимание, что мы не приводим здесь пример программы, печатающей список участников. Программирование красивых, «форматированных» распечаток — достаточно серьезная задача, которая будет рассматриваться на уроках Заочной школы программирования в «Кванте» после летних каникул. Но это не мешает вам, конечно, попытаться найти способы красивой выдачи списков, таблиц, протоколов.

Итак, попробуйте применить свои знания Рапиры и те правила ввода, которые вам сегодня были рассказаны. Читатели, приславшие лучшие спортивные программы, будут награждены олимпийскими сувенирами.

Представляем авторов, выступающих сегодня в разделе «Искусство программирования»:

о прыжках в высоту написал Ю. А. Первин, кандидат технических наук, старший научный сотрудник Вычислительного центра Сибирского отделения АН СССР, судья республиканской категории по легкой атлетике;

о фехтовании пишет Илона Лапушонок, студентка III курса Московского физико-технического института, воспитанница Сибирского фехтовального клуба «Виктория»; программу для турниров своего клуба она сделала, когда училась в 10 классе 130 школы г. Новосибирска.

Ю Первин

Обработка протоколов соревнований по прыжкам в высоту

Прыжки в высоту — один из наиболее захватывающих видов легкоатлетических соревнований, где соперники демонстрируют не только свою физическую и техническую подготовку, но и разные тактические приемы. Так, участник может вступить в соревнование не обязательно с начальной высоты, пропустить высоту уже в ходе соревнований или даже, после сделанной им первой или второй неудачной попытки на данной высоте, не использовать на ней свои остальные попытки (соответственно две или одну) и прыгать на следующей высоте.

Такие отклонения от «стандартного» хода соревнований существенно усложняют распределение мест при одинаковых результатах участников.

При определении мест судьи руководствуются такими правилами:

1. Лучшим из участников является тот, кто взял наибольшую установленную в ходе соревнований высоту

2. Среди участников, показавших одинаковый результат, лучшим считается спортсмен, взявший последнюю высоту с наименьшего числа попыток

3. Если у нескольких участников окажется равное число попыток на последней высоте, то преимущество дает наименьшее число неудачных попыток по всем высотам этого соревнования

4 Если и после этого некоторые участники окажутся в равном положении, то впереди будет считаться тот, кто сделал наименьшее общее количество попыток (удачных и неудачных) по всем высотам

Теоретически возможна, конечно, ситуация, когда даже последнее правило не определяет победителя однозначно Тогда правила соревнований предусматривают так называемую *перепрыжку* Наша же программа в этом случае удовлетворяется назначением всем таким участникам одинакового (наилучшего) места

Легко заметить «циклический» характер применения правил 1—4 сначала они применяются для определения победителя (или распределения мест среди участников, показавших одинаковый с победителем результат), затем эти же правила используются для определения лучшего из оставшихся участников с результатом, меньшим, чем у победителя Поэтому при хранении в памяти ЭВМ строки протокола соревнования, соответствующей каждому отдельному участнику, рекомендуется иметь служебные пометки, используемые при обработке протокола и формируемые программой (а не судьей[1])

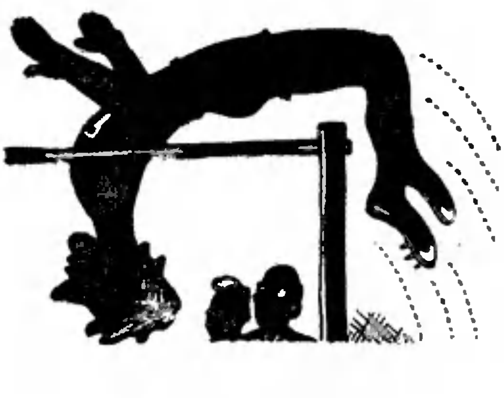
Одна из этих пометок — «*» — фиксирует тех участников, места которых уже определены Нужна эта пометка для исключения из рассмотрения уже обработанных строк протокола Другая пометка — «[1]» — временно ставится (тоже программным путем) для всех участников с одинаковым результатом Правила 2, 3, и 4 из перечисленных выше применяются к тем строкам протокола, которые имеют пометку «[1]» Важно подчеркнуть, что эти рассуждения о служебных пометках представляют собой не изложение судейских правил, а только рекомендацию программисту для составления программы — перечисленные пометки судья не только не проставляет, но и не видит — ими оперирует программа

Кроме описанных выше правил соревнований, для создания алгоритма обработки судейских протоколов по прыжкам в высоту важно принять соглашения

— о способе ввода данных в память ЭВМ,

— о структуре данных (форме описания протокола).

Будем считать, что судья на этом виде соревнований вводит результаты в машину, набирая их непосредственно на клавиатуре терминала-дисплея, при этом используется стандартная функция ВВОД (см с 00) Работа начинается вводом установленной высоты. Затем, следуя сообщениям машины — вызов на старт участника (его фамилия, стартовый номер, клубная принадлежность и номер попытки) и предупреждение к готовности следующего участника — судья приглашает к прыжку спортсменов одного за другим в том порядке, в котором они внесены в протокол



Список вызываемых на попытку спортсменов может оказаться неполным: по правилам часть участников может пропустить начальную высоту.

Если вызванный участник отказывается от попытки, судья вводит прочерк «—», который записывается программой на места, предусмотренные для отметок о результатах соответствующих попыток на этой высоте.

Неудачная попытка отмечается судьей, который вводит при этом символ «X». Три «X» на одной высоте означают, что участник не справился с этой высотой и закончил соревнование (в памяти машины эта информация преобразуется в служебную пометку «.»).

Если участник отказался от одной или двух оставшихся попыток, перенеся их на следующую высоту, то на следующей высоте он может получить пометку «.» после, соответственно, двух или одной неудач. Результатом спортсмена, закончившего соревнование, считается наибольшая взятая им высота. Служебная пометка «.» («закончил») позволяет ЭВМ приглашать к прыжкам только участников, продолжающих соревнование (у них нет пометки «.»). После завершения всех прыжков перед подсчетом результатов пометки «.» должны быть стерты.

Удачную попытку — покорение высоты — судья отмечает вводом символа «V».

Структуру данных можно без труда описать, посмотрев на форму протокола (см. таблицу). В таком городском соревновании могли бы принять участие герои романа И. Ильфа и Е. Петрова «Золотой теленок». Результаты спортсменов, конечно, значительно ниже олимпийских: ведь ни весьма подвижный О. Бендер, ни заботившийся о своей спортивной форме А. Корейко никогда не претендовали на олимпийские медали. Зато составленная по предполагаемому заданию программа может с равным успехом обслу-

Протокол соревнований по прыжкам в высоту на первенство г. Черноморска

стадион «Олимп», 19 июля 1980 г.

№ п/п	Фамилия участника	Стартовый номер	Спортклуб	Результаты																					Лучший результат	Место
				175			180			185			190			195			200			205				
				1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3		
1.	Птибурдуков	114	Пегас	X	X	V	X	X	V	X	V		V			X	X	X								
2.	Бендер	116	Антилопа	—	—	—	X	V		V			X	V		—	—	—	X	X	V	X	X	X		
3.	Лоханкин	117	Воронья слободка	—	—	—	V			V			X	X	V	X	X	V	X	X	X					
4.	Берлага	118	Геркулес	V			V			V			X	—	—	X	V		X	X	V	X	X	X		
5.	Борисохлебский	122	Геркулес	V			V			X	X	V	X	X	V	X	X	V	X	X	X					
6.	Бомзе	123	Геркулес	X	V		X	X	V	X	X	V	X	X	X											
7.	Корейко	124	Геркулес	V			V			X	—	—	V			X	X	V	X	X	V	X	X	X		
8.	Паниковский	127	Антилопа	X	X	V	V			V			V			X	V		X	X	X					
9.	Гигиенишвили	128	Воронья слободка	V			—	—	—	—	—	—	X	X	V	X	X	V	X	V		X	X	X		

Главный судья соревнований
А. Балаганов

живать как первенство школы, так и Олимпийские игры.

Для описания данных полезно воспользоваться понятиями, введенными в языке Рапира («Квант», 1980, № 2). Несколько рекомендаций:

— Результат каждого участника на одной высоте, то есть сведения о выполнении им, вообще говоря, трех попыток, представляется в виде кортежа

<ВЫСОТА, 'ПОПЫТКИ'>

здесь ВЫСОТА — значение (в сантиметрах) высоты под планкой, а 'ПОПЫТКИ' — строка, состоящая из трех символов; значениями этих символов могут быть знаки «×», «V», «—» или пробел; если ПОПЫТКИ содержат сведения только об одной или двух попытках (например, высота взята с первой попытки и, следовательно, нет необходимости что-либо отмечать на месте остальных попыток этой высоты), то на месте остальных попыток записывается пробел, например:

<190, '××V'>, <195, 'V␣␣'>, <200,'␣␣␣'>

(символ «␣» — изображение невидимого пробела).

— Совокупность результатов одного участника представляется кортежем, имя которого РЕЗУЛЬТАТЫ, а элементы — отдельные результаты.

— Каждая строка протокола — это сведения об одном участнике; они образуют кортеж, именуемый УЧАСТНИК:

<№, ФАМИЛИЯ, СТАРТОВЫЙ НОМЕР, СПОРТИВНЫЙ КЛУБ, РЕЗУЛЬТАТЫ, ЛУЧШИЙ РЕЗУЛЬТАТ, МЕСТО>

— Совокупность кортежей УЧАСТНИК образует множество с именем ПРОТОКОЛ, которое, собственно, и представляет собой результат работы программы — это множество надо отпечатать в виде заполненной таблицы.

— Кортеж УЧАСТНИК необходим только для формирования окончательного результата; для промежуточных же этапов работы сведения об участнике должны быть дополнены

а) односимвольной строкой СЛУЖЕБНАЯ ПОМЕТКА, значениями которой могут быть «.», «!», «^» или пробел,

б) целым значением ЧИСЛО НЕУДАЧНЫХ ПОПЫТОК,

в) целым значением ОБЩЕЕ ЧИСЛО ПОПЫТОК;

последние две величины используются в программе при применении правил 3 и 4 распределения мест.

Попробуйте составить на Рапире программу, обеспечивающую обработку протоколов соревнований по прыжкам в высоту и состоящую из трех (неравных) частей:

1) ввод постоянной части протокола — порядковые номера, фамилии и стартовые номера участников, их клубная принадлежность;

2) ввод результатов соревнований — заполнение центральной части протокола;

3) распределение участников по местам — заполнение последних граф протокола.

Для программирования второй части программы полезно будет проанализировать распечатку фрагментов имевшего место на наших соревнованиях диалога между судьей и ЭВМ (его сообщения набраны для определенности красным шрифтом):

—175
ПРЫГАЕТ ПТИБУРДУКОВ № 114
«ПЕГАС»
ПЕРВАЯ ПОПЫТКА
ПРИГОТОВИТЬСЯ БЕРЛАГА № 118
—×
ПРЫГАЕТ БЕРЛАГА № 118
«ГЕРКУЛЕС»
ПЕРВАЯ ПОПЫТКА
ПРИГОТОВИТЬСЯ
БОРИСОХЛЕБСКИЙ № 122
—V
...
ПРЫГАЕТ ГИГИЕНИШВИЛИ
№ 128
«ВОРОНЬЯ СЛОБОДКА»
ТРЕТЬЯ ПОПЫТКА
—×
УЧАСТНИК ГИГИЕНИШВИЛИ
№ 128
СОРЕВНОВАНИЯ ЗАКОНЧИЛ

И. Лапушонок

Программное обеспечение фехтовальных турниров

В соревнованиях по фехтованию все участники разбиваются на первоначальные группы (пульки), в которых они ведут бои каждый с каждым по установленному порядку. В пульке может быть от пяти до десяти человек, причем желательно, чтобы во всех пульках было равное количество спортсменов. Место, которое занял участник в пульке, определяется числом побед, а при равном числе побед — по коэффициенту k:

$$k = \frac{\text{нанесенные уколы}}{\text{полученные уколы}}$$

Определенное количество лучших участников из каждой пульки (обычно 3 или 4) выходит в следующую ступень. В следующей ступени участники опять разбиваются на пульки (если участников больше десяти) и снова ведут бои. Когда очередная ступень будет состоять меньше, чем из 10 человек, она объявляется финальной и победители в ней объявляются победителями турнира.

Программное обеспечение соревнований по фехтованию состоит из следующих процедур:

— расчет возможных вариантов пулек (ПУЛЬКА);

— ввод фамилий участников и запись их в множество (УЧАСТНИКИ);

— распределение фамилий участников по пулькам (ГРУППЫ);

— определение порядка боев для каждой пульки и запись результатов этих боев в кортеж (СЧЕТ);

— подсчет количества побед каждого участника и в конечном счете места в пульке (БАЛЛЫ);

— выдача протокола пульки (ПРОТОКОЛ);

— запись участников следующей ступени в множество (СТУПЕНЬ);

— управляющая процедура УПРАВЛЕНИЕ с процедурой ПЕРЕБОЙ (повторный бой).

Система работает в диалоговом режиме. Она была первоначально написана на языке Бэйсик. Читателям мы предлагаем повторить эти программы на Рапире.

Контроль над ведением соревнований и включение процедур в нужной последовательности осуществляет процедура УПРАВЛЕНИЕ.

Полуформально эту программу можно было бы описать так:

```
ПРОЦ УПРАВЛЕНИЕ;
   .УЧАСТНИКИ;
   1—> ПРИЗНАК;
   ПОКА ПРИЗНАК > =0::
      .ПУЛЬКА; .ГРУППЫ;
      ДЛЯ ВСЕХ ГРУПП::
         .СЧЕТ; .БАЛЛЫ; ПРОТОКОЛ
         ВСЕ;
         ЕСЛИ ЧИСЛО УЧАСТНИКОВ <10
         ТО ПРИЗНАК —1—> ПРИЗНАК
         ИНАЧЕ .СТУПЕНЬ
         ВСЕ
      ВСЕ;
   ПРОВЕРКА НЕОБХОДИМОСТИ
   ВЫЗОВА ПРОЦЕДУРЫ ПЕРЕБОЙ
КНЦ;
```

Не формальными (с точки зрения Рапиры) являются здесь всего два места. Они выделены курсивом. Во-первых, это строка

ДЛЯ ВСЕХ ГРУПП::

означающая обязательное, повторяющееся выполнение всех трех последующих процедур СЧЕТ, БАЛЛЫ и ПРОТОКОЛ для всех пулек одной ступени; ваша задача — реализовать это неформальное предписание известными вам средствами Рапиры.

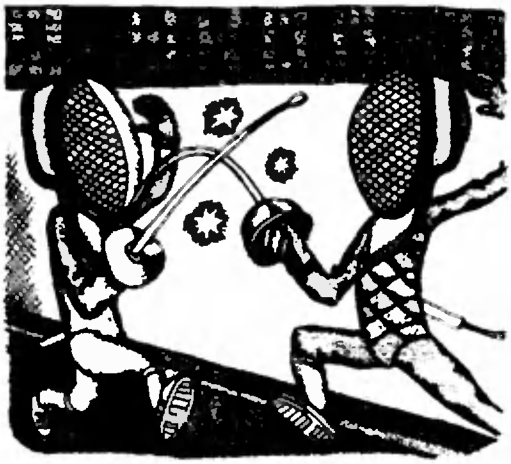
Во-вторых, строки

ПРОВЕРКА НЕОБХОДИМОСТИ
ВЫЗОВА ПРОЦЕДУРЫ ПЕРЕБОЙ

вам не трудно будет развернуть в формальное описание условного оператора ЕСЛИ, учитывающего, что процедура ПЕРЕБОЙ начинает работу в случае, если у 2—4 участников (у любой пары из них, у троих или даже у четверых) равное количество побед и равные коэффициенты.

Кроме того, в описании процедуры УПРАВЛЕНИЕ нужны, по-видимому, пояснения двух переменных. Переменная ЧИСЛО УЧАСТНИКОВ вводится судьей в начале работы программы (в процедуре УЧАСТНИКИ) и может быть изменена (уменьшена) только в ходе выполнения процедуры СТУПЕНЬ. Переменная ПРИЗНАК используется для того, чтобы зафиксировать финальную пульку.

Процедура УЧАСТНИКИ служит для начального ввода и запоминания фамилий участников. Вводятся они с терминала в порядке, установленном жеребьевкой (для программиста



важно, что порядок в списке участников к моменту ввода его в память точно известен). Процедура ГРУППЫ выбирает из записанных участников состав пульки. Например, в первую пульку будут записаны участники, чьи фамилии вводились, скажем, с номерами 1, 7, 13, 19, 25, 31, 37. Перед началом пульки выдается распечатка — номера и фамилии участников. Пример:

ПУЛЬКА 1
№ 1 ИВАНОВ Д.
№ 2 ВОЛКОВ И.
№ 3 КУЗНЕЦОВ М.
№ 4 ЛЕБЕДЕВ А.
№ 5 ЛЬВОВ В.

Наиболее интересными являются процедуры ПУЛЬКА, СЧЕТ и БАЛЛЫ, так как в них отражена специфика фехтовальных турниров. ПУЛЬКА выводит возможные варианты разбивки участников по пулькам. Пример машинной выдачи этой процедуры:

СКОЛЬКО ЧЕЛОВЕК ПРИНИМАЕТ УЧАСТИЕ В ТУРНИРЕ?
— 43
6 ЧЕЛОВЕК В КАЖДОЙ ИЗ 6 ГРУПП И 7 ЧЕЛОВЕК В КАЖДОЙ ИЗ 1 ГРУПП.
7 ЧЕЛОВЕК В КАЖДОЙ ИЗ 5 ГРУПП И 8 ЧЕЛОВЕК В КАЖДОЙ ИЗ 1 ГРУПП.
5 ЧЕЛОВЕК В КАЖДОЙ ИЗ 5 ГРУПП И 6 ЧЕЛОВЕК В КАЖДОЙ ИЗ 3 ГРУПП.

Здесь судья ввел только одно число — 43.

СЧЕТ выводит таблицу порядка боев для каждой пульки. Кроме того, эта процедура непосредственно предписывает ведение боев, вызывает участников на дорожку, предупреждает о следующем бое, принимает результаты, записывая их в кортеж. Этот же кортеж используется и в процедуре БАЛЛЫ, которая подсчитывает число побед, коэффициенты, места.

Ниже показана распечатка таблицы боев и хода турнира с записью результатов. Результат — это пара чисел. Первое из них означает число уколов, нанесенных первым из вызванных участников второму; второй элемент пары — число уколов, полученных первым участником; например, результат 3,5 в бое участников 1—2 означает, что участник № 1 нанес 3 укола, а получил 5. Сообщения судьи в приводимом диалоге набраны красным шрифтом.

СКОЛЬКО ЧЕЛОВЕК УЧАСТВУЕТ В ЭТОЙ ПУЛЬКЕ?
— 5
ПОРЯДОК БОЕВ ДЛЯ 5 УЧАСТНИКОВ
1—2, 3—4, 5—1, 2—3, 5—4, 1—3, 2—5, 4—1, 3—5, 4—2,*)
НА ДОРОЖКУ 1—2 ПРИГОТОВИТЬСЯ 3—4
РЕЗУЛЬТАТ?
— 3,5
НА ДОРОЖКУ 3—4 ПРИГОТОВИТЬСЯ 5—1
РЕЗУЛЬТАТ?
— 5,0
...**)
ПОСЛЕДНЯЯ ПАРА 4—2
РЕЗУЛЬТАТ?
— 5,3

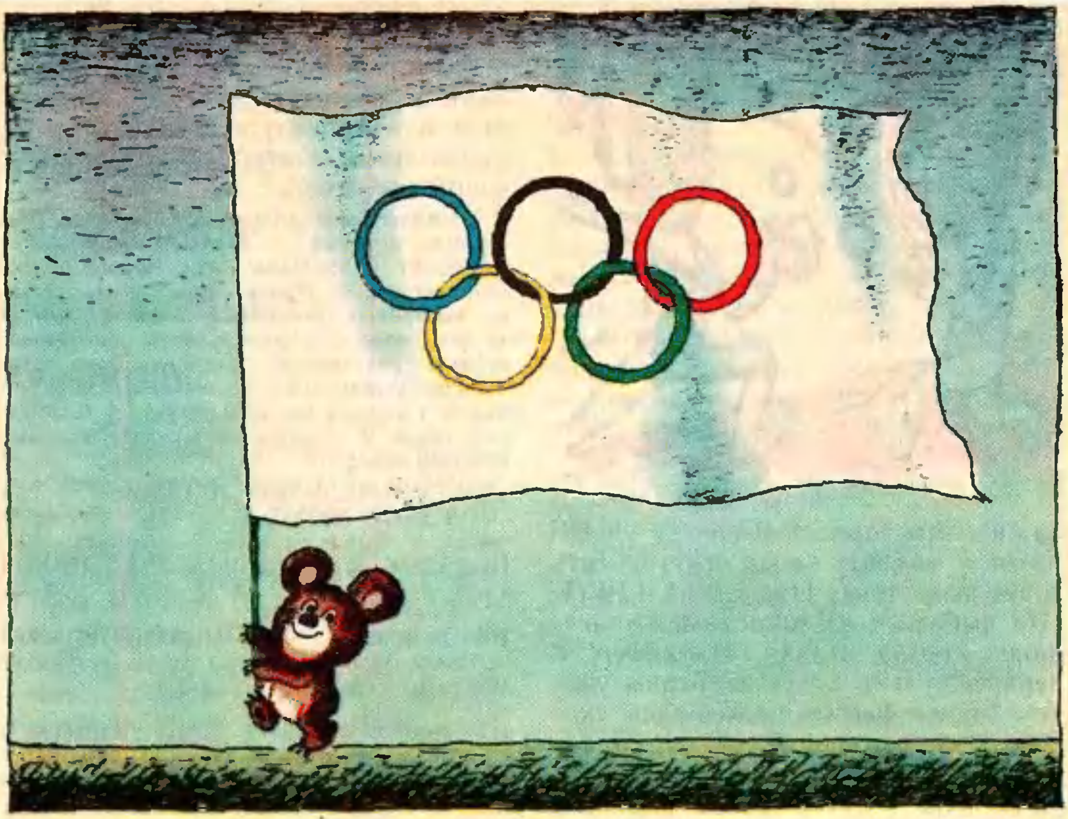
Протокол, оформленный по итогам этой пульки, показан в таблице.

Участники	№	1	2	3	4	5	П	НУ	ПУ	М
Иванов Д.	1	*	3	5	2	0	1	10	19	5
Волков И.	2	5	*	5	3	1	2	14	21	3
Кузнецов М	3	4	3	*	5	1	1	13	15	4
Лебедев А.	4	5	5	0	*	3	2	13	15	2
Львов В.	5	5	5	5	5	*	4	20	5	1

П — число побед
НУ — число нанесенных уколов
ПУ — число полученных уколов
М — место

*) На самом деле ЭВМ печатает эти цифры в колонку без запятых.

**) Здесь аналогично ЭВМ печатает результаты боев еще семи пар.



А. Савин

Олимпийские кольца

1980-й год — год проведения XXII Олимпийских игр в Москве. Неудивительно, что не только москвичи, но и жители всех городов и сел нашей страны уже привыкли видеть на страницах газет и журналов, на плакатах и сувенирах эмблему олимпиады — пять сцепленных колец, символизирующих пять обитаемых континентов земного шара.

Давайте повнимательнее приглядимся к этой лаконичной эмблеме (рис. 1): три кольца сверху, два снизу — вот, вроде бы, и все. Но взгляните на рисунок 2. Здесь вновь пять сцепленных колец — три сверху, два снизу, но что-то не то. Что именно? Эти кольца *сцеплены более сложно* — рисунок, который они образуют, напоминает часть кольчуги древнего воина, тогда как кольца олимпийской эмблемы сцеплены в обычную цепочку.

Конечно же, пять колец можно сцепить и не только так, как на рисунках 1 и 2.

На рисунках 3 и 4 изображены *зацепления*, в которых каждое кольцо сцеплено с одинаковым количест-

Рис. 1.

Рис. 2.

вом колец — с д в у м я на рисунке 3 и с ч е т ы р ь м я на рисунке 4. Первое зацепление легко получить из колец олимпийской эмблемы, сцепив между собой концевые кольца цепочки, а второе можно получить, сцепив сначала два кольца, затем сцепив с каждым из них третье, потом с каждым из трех четвертое, и наконец, с каждым из четырех — пятое кольцо.

А можно ли так сцепить пять колец, чтобы каждое было сцеплено ровно с т р е м я другими? Попробуйте, однако должен вас предупредить, что все ваши попытки окажутся безуспешными. Почему? А вот почему.

Предположим, что такое сцепление удалось осуществить. Привяжем к какому-нибудь кольцу ярлычок с номером 1; это кольцо у нас сцеплено еще с тремя кольцами и не сцеплено ровно с одним. Давайте к этому кольцу привяжем ярлычок с номером 2. В свою очередь кольцо с номером 2 должно быть сцеплено со всеми остальными кольцами, кроме кольца с номером 1. Возьмем какое-нибудь из еще не пронумерованных колец и прицепим к нему ярлычок с номером 3 — оно, как мы знаем, сцеплено с кольцами № 1 и № 2, поэтому должно быть сцеплено с одним из еще не пронумерованных колец (которому мы дадим номер 4) и не сцеплено с последним кольцом (ему мы дадим номер 5). Посмотрим на кольца № 4 и № 5. Если они сцеплены, то тогда кольцо № 4 сцеплено со всеми четырьмя оставшимися кольцами, а мы предположили, что каждое кольцо сцеплено ровно с тремя другими. Значит, кольца № 4 и № 5 не сцеплены, но в таком случае кольцо № 5 будет не сцеплено с двумя кольцами: № 3 и № 4, а сцеплено только с двумя, что опять противоречит предположению. Таким образом, наше предположение о возможности сцепления пяти колец так, чтобы каждое было сцеплено ровно с тремя, оказалось неверным.

А на рисунке 5 изображено совершенно удивительное зацепление трех колец. Никакие два из них не сцеплены между собой, но попробуйте их расцепить — у вас ничего не получится. Однако если разрезать любое из этих колец, то все кольца окажутся расцепленными. Эти кольца называются *кольцами Борромео*. (Подобным же образом зацеплены и три дырчатые плоскости на первой странице обложки этого номера журнала. Присмотритесь — никакие две из них не зацеплены, а разнять их невозможно.)

Рис. 3.

Рис. 4.

Рис. 5.

Ну, а можно ли подобный «фокус» устроить с пятью кольцами? Взглянув на рисунок 6, вы увидите пример такого зацепления. Если разрезать среднее (зеленое) кольцо, то все кольца можно будет разнять, а если разрезать какое-либо другое кольцо, то можно будет снять его и еще одно кольцо, а остальные три образуют кольца Борромео. Конечно же, у вас уже возник вопрос: «А можно ли так сцепить пять колец, чтобы никакие два не были сцеплены и при разрезании любого кольца все кольца можно было бы разнять?» Оказывается, и это возможно. Посмотрите на

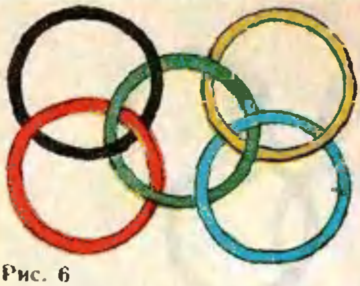


Рис. 6

Рис. 7.

рисунок 7. Из него хорошо виден процесс такого сцепления; кроме того, на нем прекрасно видно, что никакие два кольца не сцеплены между собой и что разорвав любое кольцо, можно разъединить все кольца. Более того, такой процесс можно совершить с любым количеством колец, больших двух.

К сожалению, мне не удалось расположить эту конструкцию на столе в виде розетки (как сцепления колец на предыдущих рисунках). Попробуйте сделать это сами и, если получится, присылайте в редакцию ваши рисунки — лучшие мы опубликуем.

И еще несколько задач:

1. Имеется 6 колец. Докажите, что их можно сцепить так, чтобы каждое было сцеплено

а) с двумя другими кольцами;
б) с тремя другими кольцами;
в) с четырьмя другими кольцами;
г) с пятью другими кольцами;

2. Имеется 7 колец. Докажите, что их можно сцепить так, чтобы каждое было сцеплено

а) с двумя другими кольцами;
б) с четырьмя другими кольцами;
в) с шестью другими кольцами,

и невозможно сцепить так, что каждое было сцеплено

г) с тремя другими кольцами;
д) с пятью другими кольцами.

3. Докажите, что n колец можно сцепить так, чтобы каждое было сцеплено ровно с k другими кольцами, в том и только в том случае, если хотя бы одно из чисел n и k является четным.

Дело каждого из нас

По традиции, ежегодные итоговые сессии Малой академии наук школьников Крыма «Искатель» посвящаются одной теме. Состоявшаяся прошлым летом XVII сессия проходила под девизом «Охрана окружающей среды — дело каждого из нас».

На сессии были подведены итоги длившейся почти год необычной экспедиции членов «Искателя» по родному Крыму. Тысячи школьников знакомились с тем, как охраняется чистота горных рек и озер, как укрепляются берега и благоустраиваются замечательные черноморские пляжи, как сохраняются птичьи базары, как люди берегут леса и пополняют их животный мир. Участники экспедиции узнали о том, как регулируется отлов рыбы в Черном море, как ведется исследование жизни дельфинов и многое-многое другое.

Проблему охраны окружающей среды с равной заинтересованностью изучали юные биологи и астрономы, химики и кибернетики, археологи и математики. Более двухсот сообщений, так называемых творческих взносов, подготовили члены всех девяти секций «Искателя». Вот некоторые из них: «Биологическая защита земли — тонкий озоновый слой», «Опасность биологического загрязнения других планет», «Исследование астроклимата в Ялте» — доклады, подготовленные юными астрономами; «ЭВМ на службе у ихтиологов», «Экологические границы космических экспериментов» — работы юных кибернетиков; «Роль земных растений в очистке воздуха», «Исследование фитонцидных свойств растений», «Лекарственные растения» — примеры творческих взносов юных биологов; «Физико-химические проблемы утилизации мусора», «Солнечное будущее энергетики», «Водородная энергетика» — взносы членов секции физики.

В работе сессии участвовала большая группа ученых Крыма, Киева и Москвы. Представительная комиссия в составе четырех докторов и десяти кандидатов наук отвечала на многочисленные вопросы школьников на пресс-конференции.

Члены «Искателя» обратились ко всем школьникам с призывом:

изучайте природу родного края, особенности его растительности и животного мира;

будьте пропагандистами охраны природы;

учитесь основам ухода за растениями и животными, воспитывайте в себе любовь к природе;

будьте активными помощниками взрослых в деле охраны окружающей среды;

личным трудом содействуйте увеличению числа зеленых насаждений, проявляйте заботу о птицах;

будьте нетерпимыми к проявлениям безответственного отношения к природе.

В. Касаткин

В. Приходько,
В. Пыж,
О. Уваров

Поупражняйся и проверь себя

Попробуйте решить задачи, предлагавшиеся в 1978—1979 гг. на письменных вступительных экзаменах на физическом, физико-техническом и радиофизическом факультетах Харьковского государственного университета им. А. М. Горького — одного из старейших вузов нашей страны, который в этом году отмечает свой 175-летний юбилей.

1. Найти наибольшее в примере а) и наименьшее в примере б) значения функции $\varphi_q(x)$ в зависимости от параметра q:

а) $\varphi_q(x)=\frac{q^2}{x}-\frac{1}{x-2}$, $x\in[3;\ 4]$, $q\in\ ]1;\ +\infty[$;

б) $\varphi_q(x)=\frac{1}{x^4-4qx^2+5q^2}$, $x\in[-1;\ 2]$, $q\in\mathbf{R}$.

2. При каком значении параметра a касательные к параболам $y_1(x)$ и $y_2(x)$ в точке их пересечения образуют угол φ:

а) $y_1(x)=x^2+3x$, $y_2(x)=x^2+x+a$, $\varphi=\pi/3$, $a>-1$;

б) $y_1(x)=x^2+3x-4$, $y_2(x)=x^2-x+a$, $\varphi=\pi/4$, $a>-2$.

3. Для всех допустимых значений параметра a найти значения x, удовлетворяющие уравнениям:

а) $\int\limits_0^{2^x}(t-\log_2 a)\,dt=2\log_2\frac{2}{a}$;

б) $4\cdot\int\limits_0^{\log_{2-a}x}(t^3-2at)\,dt=5a^2$.

4. Найти $L(a)$, выполнив предельный переход при всех допустимых значениях параметра a:

а) $L(a)=$

$$=\sqrt{\lim_{x\to a}\frac{3(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(x^2-4ax+3a^2)}{2x(x^3-a^3)}};$$

б) $L(a)=$

$$=\log_{2a}\left[\lim_{x\to 0}\frac{ax(a^2-a+x)}{\sqrt{1-ax}-\sqrt{1+ax}}\right].$$

5. Найти наибольшее значение минимума функции $f(x)$:

а) $f(x)=a^{2x}-2\cdot a^{x+2}+4\cdot a^2+7$;

б) $f(x)=\log_a^2 x+\log_a x^{4a}-6a+2$.

6. а) Найти сумму S всех попарных скалярных произведений различных векторов, начала которых находятся в одной из вершин октаэдра, а концы — в остальных его вершинах, если длина ребра октаэдра равна l.

б) Найти сумму S всех попарных скалярных произведений различных векторов, начала которых находятся в одной из вершин куба, а концы — в остальных его вершинах, если длина ребра куба равна l.

7. а) Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным a. $P\in[C_1D_1]$, $|C_1P|=|PD_1|$, Q — центр грани AA_1B_1B. Найти:

1° расстояние между скрещивающимися прямыми (PQ) и (AC);

2° расстояние между скрещивающимися прямыми (PQ) и (AC_1).

б) Расстояние между двумя скрещивающимися под углом α прямыми l_1 и l_2 равно h. Найти расстояние между точками $A\in l_1$ и $B\in l_2$, равноотстоящими от оснований $C\in l_1$ и $D\in l_2$ общего перпендикуляра (CD) к этим прямым, если $|AC|=|BD|=a$.

8. Найти p и q из условий:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{px^2+1}{qx+2}+x-2\right)=-1$;

б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2-1}{x+1}+px+q\right)=1$.

9. Исследовать функцию $y(x)$ и построить ее график:

а) $y=\cos(3\arcsin x)$;

б) $y=\sin(2\operatorname{arctg} x)$.

10. Решить неравенство для всех допустимых значений параметра a:

а) $\sqrt{1-x^2} \geqslant 2x+a$;

б) $\sqrt{a^2-x^2} > 4-2x$.

11. Доказать, что при $x \in]0;\ 4]$ справедливы неравенства:

а) $6x-4\ln x \geqslant x^2$;

б) $8x-6\ln x \geqslant x^2$.

12. Решить уравнения:

а) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\sin^2 x\right)+\operatorname{tg}(\pi\sin x)=0$;

б) $\sin 5x+\sin x = 2\operatorname{ctg} 2x\cdot\sin 11x\cdot\sin 10x$.

13. а) Две вершины треугольника ABC находятся в точках $A\ (-1;\ -1)$ и $B\ (4;\ 5)$, а третья вершина лежит на прямой $y=5(x-3)$. Площадь треугольника равна 9,5. Найти координаты вершины C.

б) Через три точки $A\ (0;\ 4)$, $B\ (1;\ 9)$, $C\ (3;\ 7)$ проведена парабола $y=ax^2+bx+c$. Найти уравнение прямой, проходящей через точку A так, что площадь фигуры, ограниченной этой прямой и параболой, равна 8/3.

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1979 году

Московский институт инженеров железнодорожного транспорта

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Площадь прямоугольного поля равна S кв. м. Если его длину увеличить на b метров, а ширину уменьшить на c метров, то площадь не изменится. Определить его длину и ширину, если известно, что $S=\frac{k^3}{b^3c^3}-\frac{k}{bc}$, $k>b^2c^2$.

2. Через диагональ боковой грани правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость AKD_1 под углом α к плоскости основания $ABCD$, пересекающая его по прямой AK, $K\in CD$, составляющей угол $\beta<45°$ с ребром AD длиной a. Определить расстояние от вершины D до плоскости сечения.

3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} xy=20 \\ x^{\lg y}=2. \end{cases}$$

4. Доказать тождество

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}}-1=\frac{\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

5. В какой точке кривой $y=ax^2+bx+c$ нужно провести касательную к ней для того, чтобы касательная проходила через начало координат?

Вариант 2

1. Два велосипедиста выехали одновременно из пункта A в пункт $Б$. Первый остановился через 42 минуты, не доехав 1 км, а второй через 52 минуты, не доехав 2 км до $Б$. Если бы первый велосипедист проехал столько же километров, сколько второй, а второй столько, сколько первый, то первому потребовалось бы на 17 минут меньше, чем второму. Сколько километров между пунктами A и $Б$?

2. Доказать, что если длины сторон треугольника ABC удовлетворяют соотношению $a^2+b^2=5c^2$, то две его медианы, проведенные из вершин A и B, взаимно перпендикулярны.

3. Решить уравнение

$$\log_x\sqrt{5}+\log_x 5x=2\frac{1}{4}+\log_x^2\sqrt{5}.$$

4. Решить уравнение

$$\sin(45°+x)-\sin(45°-x)=\frac{\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\operatorname{ctg}\frac{x}{2}}{2\sqrt{2}}.$$

5. К кривой $y=1-\frac{x^2}{a^2}$ проведены касательные в точках ее пересечения с осью абсцисс. Определить координаты точки пересечения касательных.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Найти начальную и конечную скорости камня, брошенного горизонтально с высоты

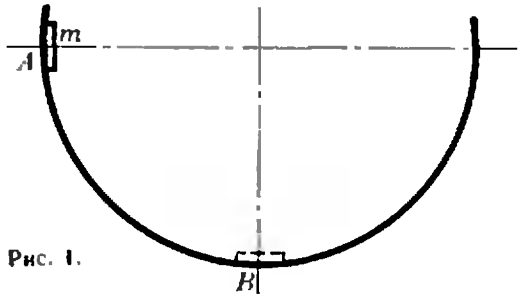


Рис. 1.

$H=5$ м, если по горизонтали он пролетел расстояние $s=10$ м.

2. Плоское тело массой $m=1$ кг скользит по круговому желобу, расположенному в вертикальной плоскости (рис. 1). С какой силой давит тело на желоб в наинизшей точке B, если оно отпущено из точки A, находящейся на горизонтальной оси желоба, без начальной скорости?

3. Тело брошено вертикально вверх со скоростью $|\vec{v}_0|=49$ м/с. На какой высоте его кинетическая энергия будет равна потенциальной?

4. Сколько молекул воздуха выходит из комнаты объемом V_0 при повышении температуры от T_1 до T_2? Атмосферное давление p_0.

5. На рисунке 2 дан график изменения состояния идеального газа в координатах V, T. Представьте этот процесс на графиках в координатах p, V и p, T.

6. Конденсатор емкостью $C_1=20$ мкФ, заряженный до разности потенциалов $U_1=100$ В, соединили параллельно с заряженным до разности потенциалов $U_2=40$ В конденсатором, емкость которого неизвестна. Определить емкость C_2 второго конденсатора, если разность потенциалов после соединения оказалась равной $U=80$ В.

7. Электрический чайник имеет две обмотки. При включении одной из них вода в чайнике закипает через $t_1=1500$ с, при включении другой — через $t_2=3000$ с. Через какое время закипит вода в чайнике, если включить обе обмотки: а) последовательно; б) параллельно?

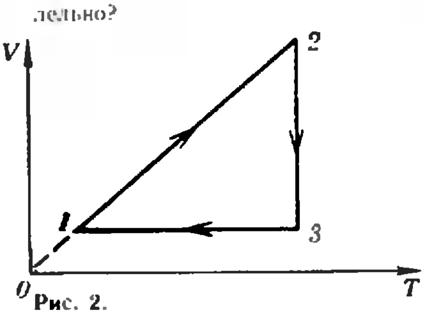


Рис. 2.

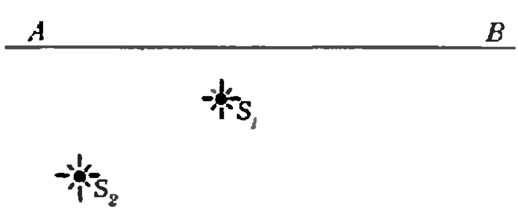


Рис. 3.

8. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U=1000$ В, влетает в однородное магнитное поле, перпендикулярное к направлению его движения. Индукция поля $|\vec{B}|=1{,}19\times 10^{-4}$ Тл. Найти радиус кривизны траектории электрона и период обращения его по окружности.

9. На рисунке 3 даны положения оптической оси AB линзы, источника света S_1 и его изображения S_2. Найти построением положение центра линзы и ее фокусов.

10. Линза дает действительное изображение предмета с увеличением $\Gamma=2$. Определить фокусное расстояние линзы, если расстояние между линзой и изображением $f=0{,}24$ м.

Р. Лагидзе, Н. Паньшин, В. Шишов, В. Шубко

Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе

В этом году Московскому ордена Ленина авиационному институту им. Серго Орджоникидзе (МАИ) исполняется 50 лет. За сравнительно небольшой срок институт превратился в один из крупнейших машиностроительных вузов страны. Выпускники института работают на переднем крае авиационной промышленности, в новейших областях науки и техники. Достаточно сказать, что в МАИ учились летчики-космонавты СССР В. Н. Волков, А. С. Иванченков, В. Н. Кубасов, В. В. Лебедев, В. И. Севастьянов.

Институт имеет девять факультетов: самолетостроения и вертолетостроения, летательных аппаратов, двигателей летательных аппаратов, систем автоматического управления летательными аппаратами, радиоэлектроники летательных аппаратов, экономики и организации производства летательных аппаратов, установок летательных аппаратов, прикладной математики, общеинженерной подготовки.

С первых курсов студенты института широко привлекаются к научно-исследовательской работе на кафедрах и в студенческих конструкторских бюро. Так, студенты спроектировали и построили легкий спортивный самолет «Квант», который в 1979 году установил два мировых рекорда, участвовали в разработке аэробуса ИЛ-86. 26 октября 1978 года на космическую орбиту был выведен первый студенческий искусственный спутник Земли, разработанный студентами МАИ.

Большие возможности предоставлены любителям спорта: в спортивном клубе МАИ насчитывается более 30 секций.

Во Дворце культуры института студенты всегда могут найти занятия по душе: играть в студенческом театре миниатюр или агиттеатре, вокально-инструментальном ансамбле или театральном коллективе.

Ниже приводятся материалы вступительных экзаменов в МАИ.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(экзамен по алгебре и началам анализа на общетехнических факультетах)

1. Дайте определение показательной функции. Сформулируйте и докажите свойства функции $y=a^x$, $0<a<1$.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{6x-x^2-5}=2x-6.$$

3. Сформулируйте правило для отыскания наименьшего и наибольшего значений функции, дифференцируемой на промежутке. Вычислите наибольшее и наименьшее значения функции $y=2-3x^2-x^3$ на отрезке $[-3;\ 1]$. Постройте на этом отрезке график функции.

4. Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_4\frac{x+1}{x+2}}<\frac{1}{\log_4(x+3)}.$$

5. Найдите множество всех чисел $a\in\mathbf{R}$, для каждого из которых прямая, проходящая через точку $M\ (1;\ 2)$, пересекает график функции $y=\frac{a}{x}$ в двух точках, сумма ординат которых равна a.

Вариант 2

(экзамен на факультете прикладной математики)

1. Исследуйте на экстремумы и монотонность функцию $y=\frac{2x}{x^2+9}$ и постройте ее график.

2. Найдите все решения уравнения

$$(4\cos x+1)^2-2|4\cos x+1|=3,$$

принадлежащие отрезку $[0;\ 7]$.

3. Решите неравенство

$$\log_{(3x+5)}(9x^2+8x+8)>2.$$

4. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S величина угла между смежными боковыми гранями равна α и боковые ребра имеют длину, равную 1. Найдите: 1) скалярное произведение $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AB}$; 2) длину вектора $\overrightarrow{AK}$, если точка K — середина ребра BS.

5. Прямая касается параболы $y=-x^2+4x+1$ и параболы $y=3x^2+4x+7/3$. Напишите уравнение этой прямой. При каких целых значениях k и b прямая $y=kx+b$ не имеет общих точек ни с одной из парабол?

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Законы отражения света. Построение изображений в сферических зеркалах. Фокус зеркала.

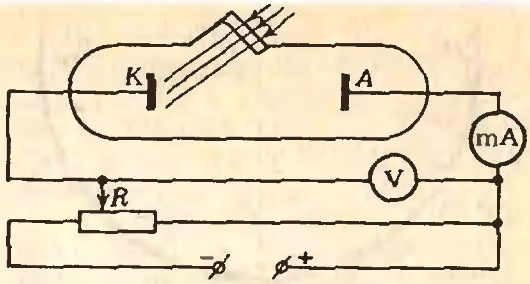


Рис. 1.

2. Для подготовки летчиков-космонавтов к перегрузкам применяют специальные центрифуги. При какой частоте вращения центрифуги радиусом $R=5$ м спинка сидения давит на летчика с такой же силой, которая возникает при ускорении ракеты $|\vec{a}|=3g$?

3. Рамка площадью $S=100$ см^2 находится в поперечном магнитном поле с индукцией $|\vec{B}_0|=0{,}1$ Тл. Какова зависимость от времени индукционного тока, возникающего в рамке, если магнитное поле начинает изменяться по закону $|\vec{B}|=|\vec{B}_0|\frac{mt}{n+t^2}$, где $m=1$ с, $n=3$ с^2? Сопротивление рамки $R=10^{-3}$ Ом. Чему равно максимальное значение тока?

4. Сухой атмосферный воздух состоит из кислорода, азота и аргона (доля остальных газов мала). Определить массу и число молекул этих газов в объеме $V=1$ м^3 атмосферного воздуха при нормальных условиях. Парциальные давления и молярные массы газов соответственно равны $p_{O_2}=2{,}1\cdot10^4$ Па, $p_{N_2}=7{,}8\cdot10^4$ Па, $p_{Ar}=10^3$ Па, $\mu_{O_2}=32\times\times10^{-3}$ кг/моль, $\mu_{N_2}=28\cdot10^{-3}$ кг/моль, $\mu_{Ar}=40\cdot10^{-3}$ кг/моль.

5. На рисунке 1 изображена схема опыта, в котором вырываемые с поверхности катода K фотоэлектроны оказываются в задерживающем электрическом поле. Величина поля может меняться передвижением движка реостата R. Подсчитать разность потенциалов между катодом K и анодом A, при которой

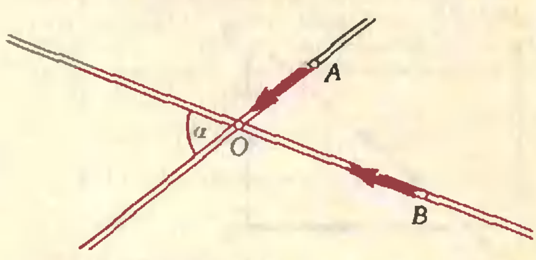


Рис. 2.

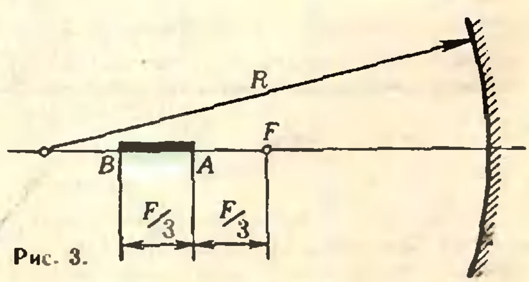


Рис. 3.

фототок в цепи прекратится, если катод облучается светом с длиной волны $\lambda = 8{,}2 \cdot 10^{-8}$ м, а работа выхода электронов из металла катода $A_{вых} = 5{,}6 \cdot 10^{-19}$ Дж.

Вариант 2

1. Закон всемирного тяготения. Гравитационная постоянная. Сила тяжести.

2. Автомобили A и B движутся равномерно с одинаковыми скоростями по прямым, пересекающимся в точке O дорогам (рис. 2). Определить минимальное расстояние между автомобилями, если в начальный момент времени $|AO| = 1$ км, $|BO| = 2$ км, угол между дорогами $\alpha = 60°$. Скорость автомобилей $|\vec{v}| = 60$ км/ч.

3. Вагон освещается пятью последовательно соединенными лампами, на каждой из которых написано: 110 В, 25 Вт. Одна из ламп перегорела и ее заменили новой, на которой написано: 110 В, 40 Вт. Будет ли она гореть ярче прежней?

4. В кабине космического корабля «Восток-2» были созданы атмосферные условия, близкие к нормальным. Температура в кабине во время полета колебалась в пределах $10°\ C \div 22°\ C$. На сколько процентов при этом изменялось давление?

5. На главной оптической оси вогнутого сферического зеркала находится отрезок AB, размеры которого и расположение указаны на рисунке 3. Найти положение изображения этого отрезка в зеркале, если фокус зеркала F.

В. Котельников,
Р. Молодожникова

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростив выражение, найти предел

$$\lim_{x \to 1} \left[\left(\frac{4}{x^2 - x - 1} - \frac{1 - 3x + x^2}{1 - x^3} \right)^{-1} + 3\frac{x^4 - 1}{x^3 - x - 1} \right].$$

2. Найти область определения функции

$$f(x) = \log_2 \left[-\log_{\frac{1}{2}} \left(1 + \frac{6}{\sqrt[4]{x}} \right) - 2 \right].$$

3. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна наибольшему значению функции $f(x) = x^3 + 3x - 9$ на отрезке $[-2; 3]$; разность между первым и вторым членами прогрессии равна $f'(0)$. Найти знаменатель прогрессии.

4. Найти все корни уравнения

$$2\cos 4x + 5\cos 2x - 1 = 2\sin^2 x,$$

лежащие на отрезке $\left[-\pi; \frac{7}{6}\pi \right]$.

5. Длина меньшей стороны параллелограмма равна a, острый угол параллелограмма равен α, угол между меньшей диагональю и большей стороной равен β. Найти объем тела, полученного вращением параллелограмма вокруг его большей стороны.

Вариант 2

1. Упростив выражение для $f(x)$, найти $f'(x)$, если

$$f(x) = \left(\frac{2\sqrt{x} + 3\sqrt[4]{x}}{\sqrt{16x} + 12\sqrt[4]{x} + 9} + \frac{\sqrt[4]{x} - 3}{2\sqrt[4]{x} + 3} \right)(2 \cdot 3^{\log_{81} x} + 3).$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4^{\frac{x}{y} - \frac{3y}{x}} = 16, \\ \sqrt{x} - \sqrt{2y} = \sqrt{12} - \sqrt{8}. \end{cases}$$

3. При каком значении длины высоты прямоугольная трапеция с острым углом 45° и периметром 4 имеет наибольшую площадь?

4. Найти все корни уравнения

$$\sin x \operatorname{tg} 2x + \sqrt{3}(\sin x - \sqrt{3}\operatorname{tg} 2x) = 3\sqrt{3},$$

удовлетворяющие неравенству $2 + \log_{\frac{1}{2}} x < 0$.

5. Определите площадь боковой поверхности конуса, вписанного в правильную треугольную пирамиду, если длина бокового ребра пирамиды равна l и боковая грань пирамиды образует с плоскостью основания угол α.

Физика

На разных факультетах экзамен по физике проводился по-разному: на одних — письменно, на других — устно.

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Механическая работа. Мощность. Энергия. Единицы работы, мощности и энергии. Кинетическая энергия. Потенциальная энергия. Закон сохранения энергии в механике.

2. Написать уравнение первого закона термодинамики для изобарного и изотермического процессов. Как определить работу, совершенную газом при весьма малом изменении объема?

3. При электролизе раствора серной кислоты за время $t = 50$ мин выделилась $m = 3 \cdot 10^{-4}$ кг водорода. Определить количество теплоты, выделившееся при этом в электролите, если его сопротивление $R = 0{,}4$ Ом, а электрохимический эквивалент водорода $k = 10^{-8}$ кг/Кл.

4. Столб вбит в дно водоема так, что его верхняя часть возвышается над поверхностью воды на $h = 1$ м. Определить длину тени столба на дне водоема, если высота Солнца над горизонтом $\varphi = 30°$, глубина водоема $H = 2$ м, а относительный показатель преломления воды $n = 4/3$.

5. Два одинаково заряженных шарика, подвешенных на тонких невесомых нитях равной длины, разошлись на некоторый угол. Определить плотность материала шариков, если при погружении их в керосин угол между

нитями не изменился? Плотность керосина $\rho_к = 800$ кг/м³, его диэлектрическая проницаемость $\varepsilon = 2$.

Вариант 2

1. Идеальный газ. Законы Бойля—Мариотта, Гей-Люссака, Шарля. Графики этих законов. Уравнение состояния идеального газа.

2. Совпадает ли траектория движения заряженной частицы в электростатическом поле с силовой линией этого поля?

3. В однородном магнитном поле, индукция которого $|\vec{B}| = 0{,}1$ Тл, расположен горизонтальный проводник длиной $l = 0{,}2$ м и массой $m = 2 \cdot 10^{-4}$ кг. Линии индукции магнитного поля горизонтальны и перпендикулярны к проводнику. Какой ток должен идти через проводник, чтобы он висел в магнитном поле?

4. ЭДС батареи $\mathscr{E} = 2$ В, ее внутреннее сопротивление $r = 1$ Ом. Определить силу тока, протекающего через источник, если внешняя нагрузка потребляет мощность $P = 0{,}75$ Вт?

5. Лестница, масса которой $m = 20$ кг, прислонена к гладкой вертикальной стене под углом $\alpha = 30°$. Центр тяжести лестницы находится на 1/3 ее длины от основания. Какую минимальную силу необходимо приложить к середине лестницы, чтобы оторвать ее верхний конец от стены? Нижний конец лестницы при этом не скользит.

Задачи устного экзамена

1. Два тела одинаковой массой $m = 1$ кг соединены невесомой пружиной, имеющей коэффициент упругости $k = 200$ Н/м. Тела находятся на абсолютно гладкой горизонтальной поверхности. К одному из тел приложена горизонтальная сила $\vec{F}$ ($|\vec{F}| = 20$ Н). Определить удлинение пружины при движении тел с постоянным одинаковым ускорением.

2. Закрытый с обоих концов цилиндр наполнен газом при температуре $t = 30°$ С. Цилиндр разделен подвижным теплонепроницаемым поршнем на две равные части длиной $l = 0{,}5$ м. На сколько градусов необходимо нагреть газ в одной половине цилиндра, чтобы поршень сместился на $x = 0{,}2$ м?

3. В электрическом поле плоского воздушного конденсатора, пластины которого расположены горизонтально, находится во взвешенном состоянии капелька масла, несущая заряд, равный заряду электрона. Определить радиус капельки, если разность потенциалов между пластинами конденсатора $U = 5 \times 10^3$ В, расстояние между пластинами $d = 5 \cdot 10^{-3}$ м, плотность масла $\rho = 900$ кг/м³. Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл.

4. Динамомашина питает током $n = 100$ ламп, соединенных параллельно, имеющих сопротивление $R = 1200$ Ом каждая и рассчитанных на напряжение $U = 220$ В. Сопротивление подводящих проводов $R_{пр} = 0{,}4$ Ом. Внутреннее сопротивление динамомашины $r = 0{,}8$ Ом. Найти электродвижущую силу машины и напряжение на ее зажимах.

5. Проекционный аппарат имеет объектив в виде тонкой одиночной линзы с фокусным расстоянием $F = 0{,}05$ м. Квадратный диапозитив площадью $S = 10^{-4}$ м² находится на расстоянии $d = 0{,}051$ м от линзы. Определить площадь изображения на экране.

С. Манчха,
В. Прохоренко,
В. Чудов

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$|x-10|\log_2(x-3) = 2(x-10).$$

2. Доказать, что точки $A(3;0)$, $B(0;1)$, $C(2;7)$ и $D(5;6)$ являются вершинами прямоугольника $ABCD$. Вычислить его площадь и указать все перемещения плоскости, при которых он переходит в себя.

3. Решить уравнение

$$4\cos x(2-3\sin^2 x) = -(\cos 2x + 1),$$

и найти наименьшее расстояние между его положительными корнями.

4. Расположить в порядке возрастания следующие числа:

$$1;\ 0{,}37;\ \frac{65}{63};\ \frac{61}{59};\ \operatorname{tg} 33°;\ \operatorname{tg}(-314°).$$

5. Обозначим через $S(k)$ площадь, заключенную между параболой $y = x^2 + 2x - 3$ и прямой $y = kx + 1$. Найти $S(-1)$ и вычислить наименьшее значение $S(k)$.

Вариант 2

1. Найти все значения x из промежутка $[\pi;\ 2\pi]$, удовлетворяющие уравнению

$$2x - 11 = \frac{2|\cos x|}{\cos x}.$$

2. Доказать, что точки $A(5;\ 0)$, $B(0;\ 2)$ и $C(2;\ 7)$ являются вершинами прямоугольного треугольника. Найти его площадь и указать все перемещения плоскости, переводящие его в треугольник с вершинами $(-5;\ 0)$, $(0;\ -2)$ и $(-2;\ -7)$.

3. Решить уравнение

$$\sin \pi x^2 - \sin \pi(x^2 + 2x) = 0,$$

и найти 7-й член возрастающей последовательности его положительных корней.

4. Расположить в порядке возрастания следующие числа:

$$0;\ \sqrt{0{,}8};\ 1{,}2;\ \frac{11}{30};\ 0{,}91846;\ \ln\frac{7}{5}.$$

5. Доказать, что кривая $y = x^4 + 3x^2 + 2x$ не пересекается с прямой $y = 2x - 1$, и найти расстояние между их ближайшими точками.

В. Тонян

Московский институт стали и сплавов

В нашем журнале неоднократно рассказывалось о различных факультетах и кафедрах Московского ордена Трудового Красного Знамени института стали и сплавов (МИСиС). Здесь мы хотели бы рассказать немного о кафедре инженерной кибернетики, сравнительно недавно созданной на физико-химическом факультете.

Институт стали и сплавов — институт комплексный. Здесь изучают физику твердого тела и получение особо чистых веществ, производство стали и цветных металлов и рентгеноструктурный анализ, экономику металлургического производства и охрану окружающей среды, кристаллографию и инженерную психологию.

Назрела необходимость в подготовке специалистов, способных взглянуть на это многообразие с единых позиций — с позиций теории управления и системного анализа. Вот почему и появилась в МИСиСе кафедра инженерной кибернетики, готовящая специалистов по кибернетике металлургических процессов.

Анализ сложных технологических и производственных процессов, их моделирование и управление ими на базе широкого использования ЭВМ,— вот что мы называем инженерной кибернетикой. Комплексность задач, которые приходится решать инженерам-кибернетикам, диктует и специфику обучения. Студенты должны изучать не отдельные дисциплины, а целые комплексы взаимосвязанных дисциплин, такие как

— математический комплекс, включающий в себя математический анализ, современную алгебру, дискретную математику, функциональный анализ и топологию;

— кибернетический комплекс, содержащий теорию оптимизации и вычислительные методы, математическую экономику, моделирование металлургических процессов и производств, теорию обучения машин, распознавание образов, системный анализ, теорию автоматического управления и инженерную психологию;

— вычислительный комплекс, включающий теорию и практику программирования на цифровых и аналоговых вычислительных машинах.

На кафедре инженерной кибернетики научной работой студенты начинают заниматься уже со второго курса (а наиболее успевающие — и с первого), поэтому дипломные работы являются, как правило, законченными научно-исследовательскими или инженерными разработками, часто имеющими практическую ценность. Выполняются они обычно в тех научно-исследовательских институтах, вузах или на предприятиях, куда позднее будут распределены студенты.

Кафедра имеет и свой вычислительный центр, оборудованный современными отечественными и зарубежными вычислительными машинами.

Ниже приводятся материалы вступительных экзаменов в МИСиС.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(физико-химический факультет)

1. Решить неравенство

$$\log^2_{0.5}x+6>5\log_{0.5}x.$$

2. В арифметической прогрессии четвертый член равен 4. При каком значении разности этой прогрессии сумма попарных произведений первых трех членов прогрессии будет наименьшей?

3. Из точки $(3/2;\ 0)$ к параболе $y=2x^2-6x+9$ проведена касательная, образующая острый угол с положительным направлением оси Ox. Определить площадь фигуры, заключенной между параболой, осью Oy, осью Ox и этой касательной.

4. В равнобедренную трапецию, длины оснований которой равны a и b $(a>b)$, можно вписать окружность. Найти расстояние между центрами вписанной и описанной около этой трапеции окружностей.

5. При каких значениях a уравнения $\sin 2x(\sin 2x+1)=0$ и $|a+3|\sin^2 2x-\sin 2x\times\times\cos 4x-(a+4)\sin 2x=0$ равносильны?

Вариант 2

(факультет полупроводниковых материалов и приборов)

1. Решить уравнение $f'(x)=0$, если $f(x)=2x-\frac{\sin 4x}{4}+\frac{\sin 2x}{2}$

2. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{2}}(x^2-4x+6)<-2.$$

3. Найти корни уравнения

$$\sqrt[10]{512}\cdot\sqrt{15x-21}-\sqrt{13}\cdot\sqrt[5]{15-6x}=0,$$

представимые несократимой дробью $\frac{a}{6}$, где a — целое число.

4. Найти кратчайшее расстояние от параболы $y=x^2-8x+16$ до прямой $y=-2x+1$.

5. В пирамиде $ABCS$ даны $|\overrightarrow{AB}|=1$, $|\overrightarrow{AC}|=2$, $|\overrightarrow{AS}|=4$, $(\widehat{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AC}})=(\widehat{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{AS}})=\frac{\pi}{3}$; $(\widehat{\overrightarrow{AC};\ \overrightarrow{AS}})=\frac{\pi}{2}$. Найти объем пирамиды.

Физика

Задачи устного экзамена

(физико-химический факультет и факультет полупроводниковых материалов и приборов)

1. На стержень длиной $l=0{,}9$ м надета бусинка, которая может перемещаться по стержню без трения. В начальный момент бусинка находилась на середине стержня. Стержень начал двигаться поступательно в горизонтальной плоскости с ускорением $\vec{a}$ ($|\vec{a}|=0{,}6$ м/с^2) в направлении, составляющем угол $\alpha=60°$ со стержнем. Через сколько времени бусинка упадет со стержня?

2. На тележке стоит бак кубической формы, целиком заполненный водой и сверху плотно закрытый крышкой. Тележка движется с постоянным ускорением $\vec{a}(|\vec{a}|=0{,}5$ м/с$^2)$. Определить давление на глубине $h=0{,}4$ м в точке M, отстоящей от передней стенки на расстоянии $L=0{,}6$ м.

3. По наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha=45°$ с горизонтом, с высоты h соскальзывает небольшое тело массой m, заряженное отрицательным зарядом $-q$. В точке пересечения вертикали, проведенной через начальное положение тела, с основанием плоскости закреплен положительный заряд $+Q$. Определить скорость, с которой тело достигнет основания плоскости. Трением пренебречь.

4. Двояковыпуклая линза формирует на экране изображение предмета. Между линзой и экраном поместили плоскопараллельную пластинку толщиной $a=3$ см из материала с показателем преломления $n=1{,}5$. В каком направлении и на сколько нужно сдвинуть экран, чтобы снова получить отчетливое изображение предмета?

С. Емельянов, В. Докучаева, Н. Квачеви

Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\log_x 2-\log_4 x+\frac{7}{6}=0.$$

2. Решить уравнение

$$\sin^4 x+\cos^4 x=\frac{1}{2}-\sin 2x.$$

3. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{\frac{x^2-7x+12}{x^2-2x-3}}.$$

4. Вычислить угол между векторами $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}$ и $\vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}$ и определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на этих векторах как на сторонах.

5. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\frac{x}{3}+\frac{3}{x}$ на отрезке $[-5;\ -1]$.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$2\sin^3 x-\cos 2x=\sin x.$$

2. Найти область определения функции

$$y=\sqrt{\log_{0,3}\frac{x-1}{x+5}}.$$

3. Решить уравнение

$$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}=\frac{3}{2}.$$

4. Вершины треугольника находятся в точках A (2; -3; 0), B (2; -1; 1) и C (0; 1; 4). Найти величину угла φ, образованного медианой DB с основанием AC.

5. С помощью производной исследовать на монотонность функцию $y=\frac{3}{2}x-\sin^2 x$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $|\vec{v}_0|=24$ м/с. Какой путь пройдет тело за время $t=4$ с?

2. Шар массой $m=1$ кг подвешен на нерастяжимой нити. Нить отклонили от вертикального положения на угол $\alpha=60°$. Определите натяжение нити в момент, когда шар будет проходить положение равновесия.

3. За какое время маятник удалится от положения равновесия на расстояние, равное половине амплитуды, если период его колебаний $T=3{,}0$ с?

4. В сообщающиеся сосуды налита ртуть, поверх которой в один из сосудов налита вода. Разность уровней ртути $\Delta h=20$ мм. Плотность ртути $\rho=13{,}6$ г/см^3. Найти высоту столба воды.

5. Сколько молекул водорода содержится в объеме $V=1$ м^3 при нормальных условиях? Какова масса одной молекулы водорода? Число Авогадро $N_A=6{,}02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$.

6. В вертикальном цилиндре под поршнем с поперечным сечением $S=20$ см^2 находится столб газа высотой $h=60$ см при температуре $t=27°$ С. Поршень может перемещаться без трения. Масса поршня $M=10$ кг. Цилиндр нагрели на $\Delta T=50$ К. Определить работу A, совершенную газом. Атмосферное давление $p=10^5$ Па.

7. Шар радиусом $r=5$ см заряжен до потенциала $\varphi=150$ В. Найти потенциал в точке, удаленной от поверхности шара на расстояние $l=10$ см.

8. Квадратная рамка со стороной $l=10$ см вращается в однородном магнитном поле с угловой скоростью $\omega=300$ рад/с. Определить максимальное значение тока в рамке, если ее сопротивление $R=10$ Ом, а индукция магнитного поля $|\vec{B}|=0{,}02$ Тл. Ось вращения рамки перпендикулярна к линиям магнитной индукции.

9. На дне реки лежит камень. Какова истинная глубина реки H, если человеку, смотрящему перпендикулярно к ее поверхности, она кажется равной $h=1$ м? Показатель преломления воды $n=4/3$.

10. Определить массу фотона видимого света, длина волны которого $\lambda=0{,}6$ мкм. Постоянная Планка $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с.

Ю. Нейман, И. Стрижкин

Московский архитектурный институт

Математика

Задачи устного экзамена

1. Построить общий перпендикуляр диагонали куба и не пересекающей ее диагонали грани этого куба. Найти длину общего перпендикуляра, если ребро куба равно a.

2. Доказать тождество

$\sin 5x \cdot \cos 3x \cdot \cos 6x =$

$$= \frac{1}{4}(\sin 14x + \sin 2x + \sin 8x - \sin 4x).$$

3. Сумма трех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 30. Если от первого отнять 5, от второго 4, а третье оставить без изменения, то получим геометрическую прогрессию. Найти эти числа.

4. Решить уравнение

$$\lg(6 \cdot 5^x + 25 \cdot 20^x) = x + \lg 25.$$

5. Вычислить предел

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}}.$$

6. Исследовать функцию $y = \frac{e^x}{x}$ и построить её график.

7. Объем правильной треугольной призмы равен V. Какова должна быть сторона основания, чтобы полная поверхность призмы была наименьшей?

8. Изобразите множество точек $(x; y)$, координаты которых удовлетворяют соотношению $|x| + |y| = 1$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. К веревке AB в точке B привязаны груз P и шнур BCD, перекинутый через блок C (рис. 1). К другому концу шнура привязан груз D массой $m_1 = 10$ кг. Определить натяжение веревки AB и массу m_2 груза P, если углы, составленные веревкой и шнуром с вертикалью, равны $\alpha = 45°$ и $\beta = 60°$ соответственно. Трением пренебречь.

2. Конический маятник имеет длину $|OA| = l = 1$ м (рис. 2). Может ли его период равняться: 1 с; 3 с?

3. Летящая свинцовая пуля, ударившись о препятствие, расплавилась. С какой скоростью летела пуля, если 50% выделившегося при ударе количества теплоты пошло на ее нагревание? Начальная температура пули $t = 17°$C, температура плавления свинца $t_{пл} = 327°$C, удельная теплоемкость $c = 0{,}13 \times 10^3$ Дж/(кг · К), удельная теплота плавления $\lambda = 25 \cdot 10^3$ Дж/кг.

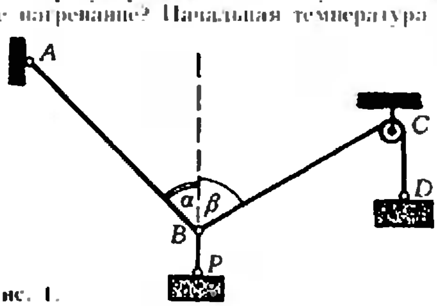


Рис. 1.

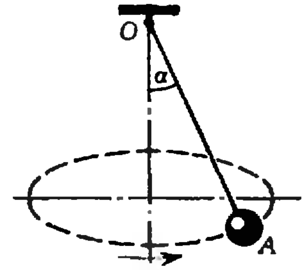


Рис. 2.

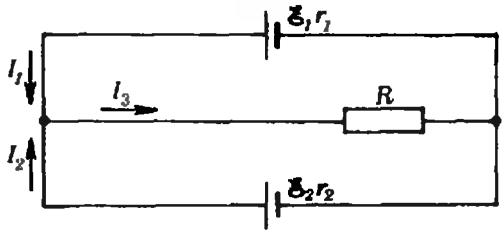


Рис. 3.

4. Определить токи I_1, I_2 и I_3 в цепи (рис. 3), если $\mathcal{E}_1 = 5$ В, $\mathcal{E}_2 = 3$ В, $r_1 = r_2 = 2$ Ом, $R = 1$ Ом.

5. Два плоских зеркала образуют двугранный угол γ. Произвольно выбранный луч, лежащий в плоскости, перпендикулярной к плоскостям зеркал, отражается по очереди от обоих зеркал. Выразить угол δ между лучом, падающим на первое зеркало, и лучом, отраженным от второго, через плоский угол γ.

Ю. Мещеряков,
В. Смирнов

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Московскому ордена Ленина и ордена Трудового Красного Знамени высшему техническому училищу им. Н. Э. Баумана (МВТУ) — старейшему техническому вузу страны — в этом году исполняется 150 лет. За это время училище стало всемирно известной школой инженерных кадров. Фактически оно превратилось в технический университет, готовящий инженеров по самым разным современным машиностроительным и приборостроительным специальностям.

В МВТУ имеется пять факультетов: автоматизации и механизации производства, конструкторско-механический, машиностроительный, приборостроения и энергомашиностроения.

Расскажем немного о факультете приборостроения, самом большом по числу студентов. Факультет сравнительно молод — ему недавно исполнилось 50 лет. За этот короткий промежуток времени ученым факультета удалось создать научную школу приборостроения, охватывающую целый ряд научных направлений. Среди них вычислительная и информационно-измерительная техника, оптические и оптико-электронные приборы, радиоэлектроника и электротехника, точная механика, гироскопические приборы, управление и техническая кибернетика, технология приборостроения.

Упомянем о некоторых завершенных научных работах.

В Советском Союзе создан крупнейший в мире зеркальный телескоп. Площадь его зеркала составляет 28 квадратных метров. Учеными факультета была решена задача, казавшаяся многим неразрешимой — разработано устройство для контроля погрешности формы зеркала с точностью до одной десятой микрона.

На ряде предприятий Москвы внедрены новые технологические процессы и станки, что позволило существенно повысить чистоту обработки деталей электронных устройств и принесло огромный экономический эффект.

В процессе обучения на факультете широко используется добрая традиция училища — сочетание глубокой теоретической подготовки с практической работой в избранной области. Студенты проходят четыре практики на предприятиях приборостроительной промышленности, выполняют три курсовых проекта и несколько курсовых работ, а также курсовую научно-исследовательскую работу.

Многие студенты участвуют в работе студенческих конструкторских бюро (их на факультете семь) и не без успеха. Так, работа «Лазерный телефон» была удостоена золотой медали ВДНХ, работа «Измеритель момента» принесла немалый экономический эффект и была удостоена бронзовой медали ВДНХ, а работа «Биоэлектростимулятор» нашла практическое использование для лечения некоторых заболеваний.

Ниже приводятся материалы вступительных экзаменов в МВТУ.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Сумма бесконечной геометрической прогрессии, составленной из членов данной бесконечной геометрической прогрессии с нечетными номерами, равна $\frac{64}{3}$, а сумма прогрессии, составленной из членов той же прогрессии с четными номерами, равна $\frac{32}{3}$. Найти прогрессию.

2. Одно из оснований правильной треугольной призмы принадлежит большому кругу шара радиуса R, а вершины другого основания принадлежат поверхности этого шара. Определить высоту призмы, при которой сумма длин всех ее ребер будет наибольшей.

3. Решить уравнение
$$\cos 3x - \cos 7x = \sqrt{3}\,\sin 2x.$$

4. Найти область определения функции
$$y = \log_2\left(2^{-x} - \frac{1}{2}\right).$$

5. Определить, при каких значениях a верно неравенство
$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int_1^a \left(\frac{3}{2}\sqrt{x}+1-\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx < 4.$$

Вариант 2

1. Все члены арифметической прогрессии — натуральные числа. Сумма ее девяти последовательных членов, начиная с первого, больше 200, но меньше 220. Найти прогрессию, если ее второй член равен 12.

2. В сферу вписана правильная треугольная призма, длины всех ребер которой равны a. Подобная ей призма нижним основанием лежит на верхнем основании данной призмы, а вершины ее верхнего основания принадлежат сфере. Найти длину ребра второй призмы.

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$$f(x) = 4x^3 - 9x^2 - 12x$$
в промежутке $[-1;\ 1]$.

4. Решить уравнение
$$\log_3(5-x) + 2\log_3\sqrt{3-x} = 1.$$

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями (сделайте рисунок) $y = (x-1)^2$, $y = x+1$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Два тела брошены вертикально вверх из одной точки, одно вслед за другим с интервалом $\tau = 2$ с, с одинаковыми начальными скоростями $|\vec{v}_0| = 50$ м/с. Через сколько времени и на какой высоте тела встретятся?

2. Небольшое тело соскальзывает без трения с вершины полусферы радиусом R. На какой высоте оно оторвется от поверхности полусферы?

3. Орудие, масса ствола которого $M = 450$ кг, стреляет в горизонтальном направлении. Масса снаряда $m = 5$ кг и начальная скорость его $|\vec{v}_0| = 450$ м/с. При выстреле ствол откатывается на $s = 45$ см. Определить среднее значение силы торможения, развивающейся в противооткатном устройстве орудия.

4. В баллоне объемом $V = 10$ л содержится водород при температуре $t = 20°$ С под давлением $p = 10^7$ Па. Какое количество водорода было выпущено из баллона, если при полном сгорании оставшегося образовалось $m = 50$ г воды?

5. На какой глубине пузырек воздуха имеет диаметр, втрое меньший, чем у поверхности воды, если барометрическое давление на уровне воды равно $p_0 = 10^5$ Па? Температура воды считается неизменной на любой глубине. Плотность воды $\varrho = 10^3$ кг/м^3.

6. Измерительный прибор с внутренним сопротивлением $R = 75$ Ом имеет шкалу на $n = 150$ делений. Цена деления $U_0 = 10$ мВ. Как этим прибором измерить: а) токи до $I = 1{,}5$ А; б) напряжение до $U = 750$ В?

7. Прямолинейный проводник массой $m = 3$ кг, по которому протекает ток $I = 5$ А, поднимается вертикально вверх в однородном магнитном поле с индукцией $|\vec{B}| = 3$ Тл, двигаясь под углом $\alpha = 30°$ к магнитным линиям. Через $t = 2$ с после начала движения он приобретает скорость $|\vec{v}| = 10$ м/с. Определить длину проводника.

8. При падении на плоскую границу двух сред с абсолютными показателями преломления n_1 и n_2 луч света частично отражается, частично преломляется. При каком угле падения α отраженный луч перпендикулярен к преломленному лучу?

9. У призмы с преломляющим углом $\varphi=30°$ одна грань посеребрена. Луч, падающий на другую грань под углом $\alpha=45°$, после преломления и отражения от посеребренной грани вернулся назад по прежнему направлению. Чему равен показатель преломления материала призмы?

10. При бомбардировке изотопа азота с атомной массой 14 протонами образуются ядра кислорода с атомной массой 15. Полученные ядра кислорода обладают позитронной активностью. В какие ядра превращаются ядра кислорода? Записать реакцию.

Л. Паршев, Г. Тимошков

Московский институт нефтехимической и газовой промышленности им. академика И. М. Губкина

В этом году Московский ордена Трудового Красного Знамени институт нефтехимической и газовой промышленности (МИНХиГП) отмечает свое 50-летие. Подготовка будущих специалистов для нефтяной, газовой, нефтехимической и других отраслей народного хозяйства осуществляется как на общеобразовательных, так и на специальных кафедрах. Расскажем немного о кафедре физики, которая за несколько последних лет превратилась в одну из ведущих кафедр института.

На кафедре физики МИНХиГП ведется большая научно-исследовательская работа и прикладного, и фундаментального характера. Основное научное направление — теоретическое и экспериментальное изучение фазовых переходов. Для проведения серьезных экспериментальных исследований на кафедре имеется необходимое оборудование, например, уникальный лазерный спектрометр оптического смещения или прецизионное калориметрическое оборудование. Это позволяет измерять кинетические и термодинамические характеристики газов и жидкостей с большой точностью.

К научной работе активно привлекаются студенты. Так, в рамках студенческого научного общества функционирует Клуб физиков. На его заседаниях обсуждаются актуальные проблемы физики. Ежегодно в институте проводится студенческая олимпиада по физике. Команда МИНХиГП успешно выступает на городских физических олимпиадах.

Студенты, интересующиеся физикой, выполняют свои курсовые работы на кафедре физики, а в этом году на кафедре были защищены и первые дипломные проекты.

Для учащихся 8—10 классов при институте работает вечерняя физико-математическая школа. Ежегодно для школьников проводятся олимпиады по физике, а в помощь абитуриентам читаются обзорные лекции по различным разделам физики.

Ниже приводятся материалы вступительных экзаменов в МИНХиГП.

Математика

Письменный экзамен

1. При каком значении a площадь, ограниченная кривой $y=a^2x^2+ax+1$ и прямыми $y=0$, $x=0$, $x=1$, будет наименьшей?

2. При каком значении параметра a значения функции $y=x^3-6x^2+9x+a$ в точке $x=2$ и в точках экстремума, взятые в некотором порядке, образуют геометрическую прогрессию?

3. Три пункта A, B и C расположены в вершинах равностороннего треугольника со сторонами 168 км. Из пункта A в пункт B выезжает машина со скоростью 60 км/час, из пункта B в пункт C одновременно выезжает машина со скоростью 30 км/час. Через сколько времени после выезда расстояние между этими машинами будет наименьшим?

4. Биссектриса прямого угла прямоугольного треугольника равна l. При каких величинах острых углов треугольника его гипотенуза будет наименьшей?

5. При каких значениях параметра p вершина параболы $y=x^2+2px+13$ лежит на расстоянии 5 от начала координат?

Физика

Задачи устного экзамена

1. Однородная прямая призма, площадь основания которой $S=1$ м² и высота $h=0{,}4$ м, плавает на поверхности воды так, что в воде находится половина ее объема. Найти наименьшую работу, необходимую для полного погружения призмы в воду.

2. Идеальный газ находится при температуре $t_1=27°$ С. Найти температуру t_2 этого газа, если в результате расширения, происходящего по закону $pV^{3/2}=\text{const}$, объем газа увеличился в 4 раза.

3. Электрон, ускоренный разностью потенциалов $U=1000$ В, попадает в пространство, в котором созданы скрещенные однородные электрическое и магнитные поля ($\vec{E}\perp\vec{B}$). Напряженность электрического поля $|\vec{E}|=1{,}9\cdot10^7$ В/м, индукция магнитного поля $|\vec{B}|=1$ Тл. Скорость электрона перпендикулярна к направлениям полей и при движении в этих полях не меняется ни по величине, ни по направлению. Определить удельный заряд электрона e/m.

4. Неоновая лампа включена в сеть переменного тока с частотой $\nu=50$ Гц и действующим напряжением $U=127$ В. Продолжительность вспышки лампы составляет $\tau=1/200$ с. Напряжения зажигания и гашения лампы одинаковы. Найти эти напряжения.

5. В микроскоп резко видна верхняя грань плоскопараллельной пластины толщиной $H=3$ см. Чтобы получить резкое изображение нижней грани, тубус микроскопа опустили на $h=2$ см. Определить показатель преломления пластины.

А. Кулькин, В. Нагаев, Б. Писаревский

Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(математический факультет)

1. Доказать, что числа $\frac{1}{\log_3 2}$, $\frac{1}{\log_6 2}$, $\frac{1}{\log_{12} 2}$ образуют арифметическую прогрессию.

2. Найти все значения α, принадлежащие отрезку $[0; 2\pi]$ и удовлетворяющие уравнению

$$\int_{\pi/2}^{\alpha} \sin x\, dx = \sin 2\alpha.$$

3. Две стороны треугольника равны 6 см и 8 см. Медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найти длину третьей стороны треугольника.

4. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=20, \\ x^2+y^2=136. \end{cases}$$

5. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды $SABCD$ равна 2, высота $\sqrt{2}$. Найти расстояние между боковым ребром SA и диагональю основания BD.

Вариант 2

(физический факультет)

1. Найти множество положительных значений a, удовлетворяющих уравнению

$$\int_0^a (3x^2+4x-5)\, dx = a^3-2.$$

2. Решить уравнение

$$\sqrt{\log_2 x} - 0{,}5 = \log_2 \sqrt{x}.$$

3. Боковые стороны равнобедренной трапеции при их продолжении пересекаются под прямым углом. Определить стороны трапеции, если ее площадь 12 см^2, а длина высоты 2 см.

4. Решить уравнение

$$\sin 2x = \cos^4 \frac{x}{2} - \sin^4 \frac{x}{2}.$$

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Вычислить величину угла между прямыми BC_1 и BK, где K — середина ребра AA_1.

Физика

Задачи устного экзамена

(физический факультет)

1. Тело массой $m_1=3{,}0$ кг скользит по горизонтальной плоскости под действием груза массой $m_2=1{,}0$ кг, прикрепленного к концу шнура. Шнур привязан к телу массой m_1 и перекинут через неподвижный блок. Определить ускорение системы и силу натяжения шнура. Трением пренебречь.

2. В лодке массой $m_1=240$ кг стоит человек массой $m_2=60$ кг. Лодка плывет со скоростью $\vec{v}_1$ ($|\vec{v}_1|=2$ м/с). Человек прыгает с лодки в горизонтальном направлении со скоростью $\vec{v}$ ($|\vec{v}|=4$ м/с) относительно лодки. Найти скорость движения лодки после прыжка человека вперед по движению лодки.

3. При какой посадочной скорости самолеты могут приземляться на посадочной полосе аэродрома длиной $l=800$ м при торможении с ускорением $\vec{a}$ ($|\vec{a}|=5{,}0$ м/с^2)?

4. При нагревании некоторой массы газа на $\Delta T=1$ К при постоянном давлении объем этой массы газа увеличился на $n=1/350$ часть первоначального объема. Найти начальную температуру газа.

5. Баллон емкостью $V=20$ л содержит углекислый газ массой $m=500$ г под давлением $p=1{,}3$ МПа. Определить температуру газа.

6. В сосуд, содержащий $m_1=2{,}35$ кг воды при $t_1=20°$ С, опускают кусок олова, нагретого до $t_2=230°$ С. Температура воды в сосуде повысилась на $\Delta t=15°$. Вычислить массу олова m_2. Испарением воды пренебречь. Удельные теплоемкости воды и олова равны $c_1=4{,}19\cdot10^3$ Дж/(кг·К) и $c_2=2{,}5\cdot10^2$ Дж/(кг·К) соответственно.

7. Расстояние между двумя точечными зарядами $q_1=10^{-6}$ Кл и $q_2=-10^{-6}$ Кл равно $r=10$ см. Определить силу, действующую на точечный заряд $q=10^{-7}$ Кл, удаленный на $r_1=6$ см от первого и на $r_2=8$ см от второго зарядов ($\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м).

8. Гальванический элемент дает на внешнее сопротивление $R_1=4$ Ом ток $I_1=0{,}2$ А. Если же внешнее сопротивление равно $R_2=7$ Ом, то элемент дает ток $I_2=0{,}14$ А. Какой ток он даст, если его замкнуть накоротко?

9. Какое увеличение дает проекционный фонарь, если его объектив с фокусным расстоянием $F=18$ см расположен на расстоянии $f=6{,}0$ м от экрана?

10. Солнечные лучи падают на поверхность воды при угловой высоте Солнца над горизонтом $\alpha=30°$. Как пойдут эти лучи в воде после преломления? Показатель преломления воды $n=1{,}33$.

М. Петрова,
В. Редкозубов

Новые книги

Мы продолжаем публиковать аннотации на книги по математике и физике, доступные и интересные нашим читателям. В этом номере мы рассказываем о книгах, вышедших во втором квартале 1980 года.

Математика

Издательство «Наука»

1. Маркушевич А. И. *Комплексные числа и конформные отображения.* Издание 3-е. Объем 3 л., тираж 50 000 экз., цена 10 к.

В основу книжки положена лекция, читанная автором для школьников 9—10 классов. Она знакомит читателей с комплексными числами и простейшими функциями от них (включая функцию Н. Е. Жуковского с применением к построению профиля крыла самолета). Изложению придана геометрическая форма: комплексные числа рассматриваются как направленные отрезки. Чтобы привести читателя к такому пониманию комплексных чисел, автор начинает с геометрического истолкования действительных чисел и действий над ними.

2. Воробьев Н. Н. *Признаки делимости.* (Популярные лекции по математике.) Издание 3-е. Объем 4 л., тираж 200 000 экз., цена 20 к.

В брошюре популярно излагаются некоторые вопросы теории чисел и связанные с ними вопросы теории отношений и теории алгоритмов.

Признаки делимости описываются систематически и с общей точки зрения.

3. Шилов Г. Е. *Простая гамма (устройство музыкальной шкалы).* (Популярные лекции по математике.) Издание 2-е. Объем 2 л., тираж 100 000 экз., цена 10 к.

Основой музыки является музыкальный звук, или тон, представляющий собой колебание определенной частоты.

Ухо человека способно воспринимать лишь весьма ограниченное число тонов.

Вопросу о том, какие именно тоны должна содержать музыкальная шкала, посвящена данная брошюра, возникшая на основе лекции автора, прочитанной для школьников.

4. Бекишев Г. А., Кратко М. И. *Элементарное введение в геометрическое программирование.* Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 35 к.

В книге элементарно излагаются общие методы отыскания экстремальных значений функций нескольких переменных. Изложение основано на классическом неравенстве между средним арифметическим и средним геометрическим и некоторых обобщениях этого неравенства.

Физика

Издательство «Наука»

1. Сибрук В. *Роберт Вуд — современный чародей физической лаборатории.* Перевод с английского. Издание 4-е. Объем 16 л., тираж 200 000 экз., цена 1 р. 10 к.

Роберта Вуда по праву считают одним из самых дерзких и оригинальных экспериментаторов. Его выдающиеся экспериментальные исследования оставили глубокий след в оптике, молекулярной физике, астрофизике и других разделах науки.

Вуд был не только крупным ученым, но и интереснейшим человеком. Рассказ о научной работе Вуда искусно переплетается в книге с рассказом о его интересной, полной приключений жизни. Здесь и разгадка тайны пурпурного золота царя Тутанхамона, и раскрытие преступлений, и разоблачение «изобретателей» N—лучей и «лучей смерти», и интересные путешествия Вуда и другие не менее интересные вещи.

2. Самсонов В. А. *Очерки о механике: некоторые задачи, явления и парадоксы.* Объем 3 л., тираж 40 000 экз., цена 10 к.

Брошюра содержит три очерка, в каждом из которых обсуждается некоторый круг вопросов механики. В живой и увлекательной беседе о знакомых каждому явлениях автор подводит читателя к математической задаче, описывающей эти явления. Затем, в процессе истолкования решения задачи, вскрываются новые, иногда парадоксальные, стороны обсуждаемых явлений.

3. Воронцов-Вельяминов Б. А. *Очерки о Вселенной.* Издание 8-е, переработанное. Объем 38 л., тираж 100 000 экз., цена 1 р. 60 к.

В книге в живой и занимательной форме рассказывается о многих важных вопросах астрономической науки, привлекающих в настоящее время наибольшее внимание астрономов. Учитывая разнообразный круг рассматриваемых в книге проблем, ее можно считать популярной астрономической энциклопедией. Восьмое издание переработано и дополнено с учетом последних достижений астрономии. Издание выпускается с большим количеством иллюстраций, в том числе и цветных. Книга удостоена первой премии общества «Знание».

4. Климишин И. А. *Астрономия наших дней.* Издание 2-е, переработанное. Объем 29 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 30 к.

Книга охватывает очень широкий круг вопросов, изучаемых современной астрономией. В ней изложены основные представления, понятия и законы, на которых базируются наблюдательная и теоретическая астрономия, астрофизика, радиоастрономия. Описываются практически все известные небесные объекты — Солнце, Луна, планеты, строение и эволюция звезд и галактик. Много внимания уделено недавно открытым объектам — пульсарам, черным дырам, квазарам, галактикам Сейферта, взаимодействующим галактикам и другим небесным телам. Книга дает достаточно полное представление об успехах современной астрономии.

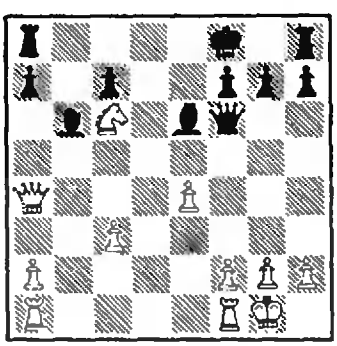
А. Егоров,
М. Смолянский

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

Ход конем

Конь — самая необычная и удивительная шахматная фигура, и не случайно выражение «ход конем» давно стало крылатым. «Презренный шут шахматной доски» — так называл коня известный изобретатель математических и шахматных головоломок Г. Дьюдени. А славившийся своим остроумием гроссмейстер С. Тартаковер как-то заметил, что «вся шахматная партия — это один замаскированный ход конем».

На наших шахматных страничках мы нередко будем встречаться с различными задачами и комбинациями на шахматной доске, главный участник которых — конь. Одна из самых старинных шахматных комбинаций носит название «спертый мат». Заключительный аккорд в такой комбинации всегда принадлежит коню. Интересный пример на спертый мат представляет собой одна из задач Блаты (см. «Квант», 1980, № 5). Приведем теперь эпизод из партии П. Морфи.

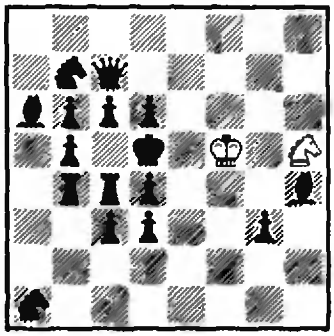


Морфи — Брэйн

Все готово к проведению комбинации, осталось отвлечь ферзя от поля e7.

1. e5! Фg5 2. h4! Фg4 3. Фa3+ Крg8 4. Кe7+ Крf8 5. Кg6+ Крg8 6. Фf8+! Л:f8 7. Кe7×. Мат объявляет конь, а все поля отступления для неприятельского короля заняты собственными фигурами и пешками.

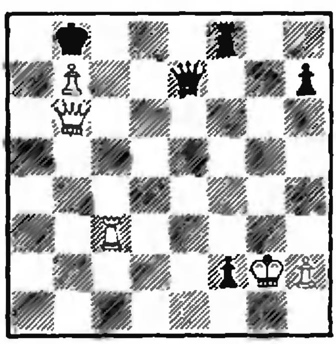
Один белый конь может справиться со всей армией неприятельских фигур.



О. Блаты, 1922. Мат в 12 ходов.

1. Кf4+Крc5 2. Кe6+ Крd5 3. К:c7+Крc5 4. К:a6+Крd5 5. Кc7+Крc5 6. Кe6+Крd5 7. Кf4+Крc5 8. Крe4 d5+ 9. Крe5 Сf6+ 10. Крe6 Кd8+ 11. Крd7 и 12. К:d3×.

Следующие два примера (первый из области дебюта, второй — эндшпиля) относятся к другой теме. В них конь появляется на доске в результате неожиданного превращения пешки, после чего партия сразу заканчивается.

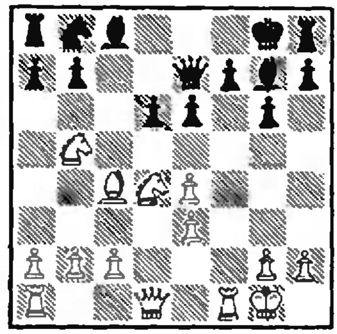


Белые выигрывают.

1. Лc8+! Л:c8 2. Фa7+! Кр:a7 3. bcК+!! и после **4. К:e7** белые остаются с лишним конем и легко выигрывают.

В дебюте, который называется «контргамбитом Альбина», после ходов **1. d4 d5 2. c4 e5 3. de d4 4. e3 Сb4+ 5. Сd2 de! 6. С:b4 ef+ 7. Крe2** решает **7... fgК+!! 8. Л:g1** (8 Крe1 Фh4+ и т. д.) **Сg4+** с выигрышем ферзя.

В предыдущих примерах дело решало появление на доске коня, а теперь, наоборот, комбинация, в которой кони эффектно приносят себя в жертву.



Злотник — Гик.

В этой партии, игранной двенадцать лет назад в Дубне, черные весьма оптимистически расценивали свои шансы, полагая, что перевод слона на e5 и короля на g7 сделает их позицию неприступной. Однако последовали два удара коней, сразу решившие исход поединка.

1. К:d6! Ф:d6 2. К:e6! Ф:e6 (после 2...Ф:d1 3. Ла:d1 у черных нет защиты от многочисленных угроз). **3. Фd8+ Сf8 4. Л:f7! Кр:f7 5. Ф:c8 Ф:c4 6. Ф:c4+ Крg7 7. Фd4+. Черные сдались.**

В сегодняшней «Шахматной страничке» мы умышленно не приводим позиций для самостоятельного решения. Дело в том, что в этом номере журнала мы начинаем наш шахматный конкурс, в котором вы сможете проявить все свое умение играть в шахматы и решать шахматные задачи и головоломки. Итак, приглашаем вас принять участие в шахматном конкурсе «Кванта»!

Олимпийские кольца

Очевидно, решив задачу 3, мы тем самым решим и обе предыдущие задачи.
Сначала покажем, что сцепить n колец так, чтобы каждое было сцеплено ровно с k другими, можно только при условии, что произведение $n \cdot k$ четно. Действительно, представим каждое кольцо как вершину правильного n-угольника и соединим отрезками те вершины многоугольника, которым соответствуют сцепленные кольца. Теперь посчитаем количество таких отрезков. Из каждой вершины их выходит k штук, а вершин n; перемножив эти два числа, получаем $n \cdot k$ — удвоенное количество отрезков, поскольку каждый отрезок при этом мы посчитали дважды. Но количество отрезков — целое число, поэтому число $n \cdot k$ должно делиться на 2.
Теперь покажем, что если $n \cdot k$ четно, то нужное сцепление произвести можно. Пусть сначала число k четно, $k=2p$, где p — целое число. Соединив каждую вершину с p ближайшими соседями слева и с p ближайшими соседями справа, получим точное указание, какие кольца с какими нужно сцепить. Если же k — нечетное число, то оно представляется в виде $k=2p+1$; при этом n обязано быть четным. В этом случае вновь соединяем каждую вершину с p ближайшими соседями слева и с p ближайшими соседями справа, а также с диаметрально противоположной вершиной (такая есть, так как n — четное число).

Поупражняйся и проверь себя

1. а) $\frac{q^2-2}{4}$ при $q \in]1;\ 2]$; $\frac{(q-1)^2}{2}$ при $q \in]2;\ 3[$; $\frac{q^2-3}{3}$ при $q \in]3;\ +\infty[$.

Указание. Так как $\varphi_q'(x) = \frac{1-q^2}{x^2(x-2)^2} \times \left(x - \frac{2q}{1+q}\right)\left(x - \frac{2q}{1-q}\right)$ и $x_1 = \frac{2q}{1+q} < 3$, поведение функции φ_q на отрезке $[3;\ 4]$ определяется положением точки $x_2 = \frac{2q}{1-q}$.
Именно: если $x_2 \leq 3$, то $\varphi_q'(x) < 0$ при $x \in]3;\ 4]$, то есть $\max\limits_{[3,\ 4]} \varphi_q(x) = \varphi_q(3) = \frac{q^2-3}{3}$; если $3 < x_2 < 4$, то φ_q возрастает на $[3;\ x_2[$ и убывает на $]x_2;\ 4]$; поэтому $\max\limits_{[3,\ 4]} \varphi_q(x) = \varphi_q(x_2) = \frac{(q-1)^2}{2}$; если же $x_2 \geq 4$, то φ_q возрастает на отрезке $[3;\ 4]$, а это значит, что $\max\limits_{[3,\ 4]} \varphi_q(x) = \varphi_q(4) = \frac{q^2-2}{4}$.

б) $\frac{1}{5q^2-16q+16}$ при $q \in]-\infty;\ 1[$; $\frac{1}{5q^2}$ при $q \in [1;\ +\infty[$.

2. а) $-2+\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$. Указание. Параболы пересекаются при $x_0 = \frac{a}{2}$. Тангенсы углов наклона α_1 и α_2 касательных к параболам в этой точке равны $\operatorname{tg} \alpha_1 = y_1'(x_0) = 2x_0+3 = a+3$ и $\operatorname{tg} \alpha_2 = y_2'(x_0) = 2x_0+1 = a+1$. Так как $a > -1$, $0 < \alpha_2 < \alpha_1 < \frac{\pi}{2}$. Величина угла φ между касательными равна $\alpha_1 - \alpha_2$. Поэтому $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg}(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{2}{(a+2)^2} = \sqrt{3}$

б) $-6+2\sqrt{7}$.

3. а) $x=1$ при $a \in]0;\ 2]$; $x_1 = 1$, $x_2 = \log_2 \log_2 \frac{a^2}{4}$ при $a \in]2;\ +\infty[$.

Указание. Пусть $2^x = u$. Вычисляя интеграл, получим уравнение $u^2 - 2u \cdot \log_2 a + 4 \log_2 \left(\frac{a}{2}\right) = 0$. Корни этого уравнения $u_1 = 2$ и $u_2 = 2(\log_2 a - 2)$. Осталось решить уравнения $2^x = 2$ и $2^x = 2(\log_2 a - 2)$.

б) $x_{1,2} = (2-a)^{\pm\sqrt{a}}$ при $a \in]-\infty;\ 0[$; $x=1$ при $a=0$; $x_{1,2} = (2-a)^{\pm\sqrt{5a}}$ при $a \in]0;\ 1[\cup]1;\ 2[$.

4. а) $-\frac{1}{a}\sqrt{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}}$ при $a \in [-1;\ 0[$.

Указание. Разложив на множители $x^2-4ax+3a^2$ и x^3-a^3, приведите функцию, стоящую под знаком предела, к виду $\frac{3(\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x})(x-3a)}{2x(x^2+ax+a^2)}$. При $a=0$ предел не существует. При $a \neq 0$, $|a| < 1$ получим $L(a) = \sqrt{\frac{\sqrt{1-a}-\sqrt{1+a}}{a^2}}$, откуда $a < 0$.

б) $\log_{2a} a(1-a)$ при $a \in \left]0;\ \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2};\ 1\right[$.

5. а) 11 при $a=2$.

б) 17/4 при $a = -\frac{3}{4}$.

6. а) 6. Указание. Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ — векторы, идущие из некоторой вершины октаэдра в соседние вершины, а $\vec{R}$ — вектор, идущий в противоположную ей вершину. Рассмотрите $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{R})^2 = \vec{a}^2+\vec{b}^2+\vec{c}^2+\vec{d}^2+\vec{R}^2+2S$ и воспользуйтесь тем, что $\vec{a}^2=\vec{b}^2=\vec{c}^2=\vec{d}^2=1$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}=2\vec{R}$ и $\vec{R}^2=2$.

б) 18.

7. а) 1°. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. 2°. $\frac{a}{2\sqrt{14}}$. Указание к 1°.
Пусть (MN) — общий перпендикуляр к прямым (рис. 1) (AC) и (PQ), $|\overrightarrow{MN}|$ — искомое расстояние. Ясно, что $\overrightarrow{CM} = \alpha\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{NP} = \beta\overrightarrow{QP}$, где α и β — некоторые пока неизвестные числа. Так как $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CP} - \alpha\overrightarrow{CA} - \beta\overrightarrow{QP}$. Умножая скалярно обе части этого равенства на $\overrightarrow{QP}$ и $\overrightarrow{CA}$, получим $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{QP} - \alpha(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{QP}) - \beta|\overrightarrow{QP}|^2 = 0$ и $\overrightarrow{CP} \cdot \overrightarrow{CA} - \alpha|\overrightarrow{CA}|^2 - \beta(\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{QP}) = 0$. Мы получили систему линейных уравнений относи-

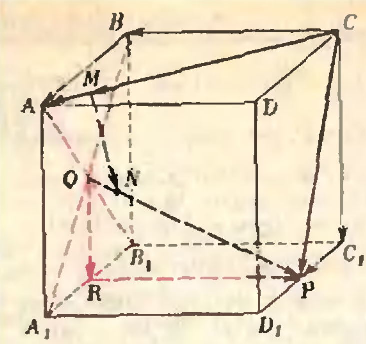


Рис. 1.

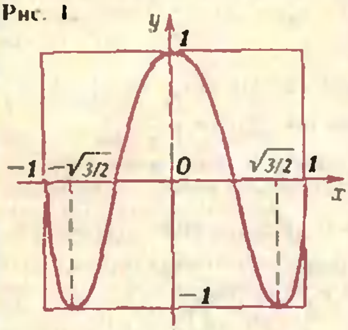


Рис. 2.

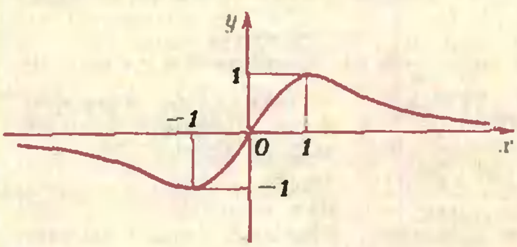


Рис. 3.

тельно α и β. Вычисляя коэффициенты этой системы и затем решая ее, получим $\alpha=\frac{3}{4}$, $\beta=1$. Для нахождения $|\overrightarrow{MN}|$ удобно воспользоваться соотношением $|\overrightarrow{MN}|^2=\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{CP}=|\overrightarrow{CP}|^2-\alpha(\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA})-\beta(\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{QP})$.

б) $\sqrt{2a^2(1\pm\cos\alpha)+h^2}$.

8. а) $p=-2$, $q=2$. Указание. Сначала докажите, что для существования предела необходимо и достаточно условие $p=-q$.
б) $p=-2$, $q=3$.

9. а) См. рис. 2. Указание. Докажите сначала, что $\cos(3\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}(1-4x^2)$, после чего исследуйте полученную функцию с помощью производной.
б) См. рис. 3.

10. а) $x\in[-1;\ 1]$ при $a\in\,]-\infty;\ -2]$; $x\in[-1;\ x_1]$ при $a\in\,]-2;\ 2]$; $x\in[x_2;\ x_1]$ при $a\in\,]2;\ \sqrt{5}[$; $x=-\frac{2}{\sqrt{5}}$ при $a=\sqrt{5}$; нет решений при $a>\sqrt{5}$, где $x_{1,2}=\frac{-2a\pm\sqrt{5-a^2}}{5}$. Указание. Кривая $y=\sqrt{1-x^2}$ является полуокружностью радиуса 1 с центром в начале координат. Уравнение $y=2x+a$ задает прямую с угловым коэффициентом 2. Ясно, что решениями данного неравенства будут те точки отрезка $[-1;\ 1]$, для которых ординаты точек прямой не больше ординат точек полуокружности.
б) $x\in[x_2;\ |a|]$ при $|a|\in[2;\ +\infty[$; $x\in[x_2;\ x_1]$ при $|a|\in\left]\frac{4}{\sqrt{5}};\ 2\right[$; нет решений при $|a|\in\left[0;\ \frac{4}{\sqrt{5}}\right]$, где $x_{1,2}=\frac{-8\pm\sqrt{5a^2-16}}{5}$.

11. а) Указание. Исследуйте функцию $y=6x-x^2-4\ln x$ на монотонность при $x\in\,]0;\ 4]$.
б) решается аналогично с а).

12. а) $x=(-1)^n\arcsin(1-\sqrt{2+2k})+\pi n$, где $k\in\{-1,\ 0,\ 1\}$, $n\in\mathbf{Z}$.
б) $x_1=\frac{\pi}{13}n$, $x_2=\frac{\pi}{8}m$, где $m\neq 4p$ и $m,\ n,\ p\in\mathbf{Z}$.

13. а) $C_1(5;\ 10)$, $C_2(3;\ 0)$. Указание. Поскольку $\overrightarrow{AB}=(5;\ 6)$, $\overrightarrow{BC}=(x-4;\ y-5)$ и $y=5(x-3)$, имеем $\overrightarrow{BC}=(x-4;\ 5(x-4))$,

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{BC}|\cdot\sin(\widehat{\overrightarrow{AB};\ \overrightarrow{BC}})=\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2\cdot|\overrightarrow{BC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC})^2}.$$

Осталось решить уравнение $S_{ABC}=\frac{19}{2}$.

б) $y=3x+4$ и $y=11x+4$. Указание. Уравнение параболы, проходящей через заданные точки, имеет вид $y=-2x^2+7x+4$. Уравнение искомой прямой $y=kx+4$. Найдите теперь точки пересечения прямой и параболы и запишите требуемую площадь в виде интеграла.

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1979 году

Московский институт инженеров железнодорожного транспорта

Математика

Вариант 1

1. Если x и y — длины сторон поля, то $x=\frac{k}{bc^2}-b$, $y=\frac{k}{b^2c}$. **2.** $a\cdot\sin\alpha\cdot\sin\beta$.

3. $\{(2;\ 10),\ (10;\ 2)\}$. **5.** В точках $\left(\sqrt{\frac{c}{a}};\ b\sqrt{\frac{c}{a}}+2c\right)$ или $\left(-\sqrt{\frac{c}{a}};\ 2c-b\sqrt{\frac{c}{a}}\right)$ при $ac>0$; в точке $(0;\ 0)$ при $c=0$; при $ac<0$ решений нет.

Вариант 2

1. 15 км. **2.** Указание. Пусть точки H и G — середины сторон BC и AC соответственно. Выразите векторы $\overrightarrow{AH}$ и $\overrightarrow{BG}$ через векторы $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$ и рассмотрите $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BG}$. **3.** $\{5,\ \sqrt[5]{5}\}$. **4.** $x=\pm\frac{\pi}{4}+\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$. **5.** $(0;\ 2)$.

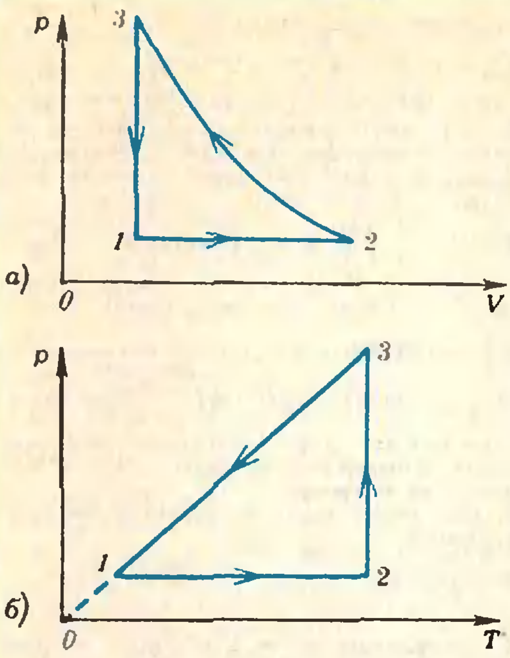


Рис. 4.

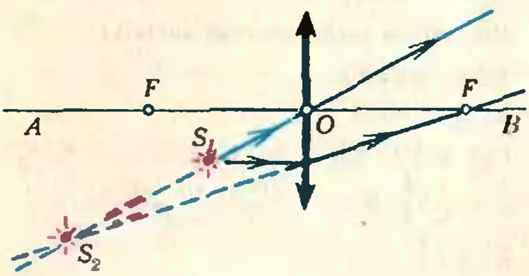


Рис. 5.

Физика

1. $|\vec{v}_н| = s\sqrt{\dfrac{g}{2H}} \approx 10$ м/с; $|\vec{v}_к| = \sqrt{|\vec{v}_н|^2 + 2gH} \approx 14$ м/с.

2. $|\vec{F}| = 3mg \approx 30$ Н.

3. $h = \dfrac{|\vec{v}_0|^2}{4g} = 61{,}25$ м.

4. $N = N_A \dfrac{p_0 V_0 (T_2 - T_1)}{R T_1 T_2}$,
где N_A — число Авогадро, R — универсальная газовая постоянная.

5. См. рис. 4.

6. $C_2 = C_1 \dfrac{U_1 - U}{U - U_2} = 10$ мкФ.

7. $t_3 = t_1 + t_2 = 4500$ с; $t_4 = \dfrac{t_1 t_2}{t_1 + t_2} = 1000$ с.

8. $R = \dfrac{1}{|\vec{B}|}\sqrt{\dfrac{2mU}{e}} \approx 9 \cdot 10^{-2}$ м;
$T = \dfrac{2\pi m}{|\vec{B}|e} \approx 3 \cdot 10^{-8}$ с.

9. См. рис. 5.

10. $F = \dfrac{f}{\Gamma + 1} = 0{,}08$ м.

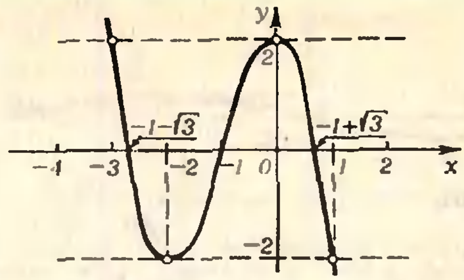


Рис. 6.

Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе

Математика

Вариант 1

2. $\left\{3 + \dfrac{2}{5}\sqrt{5}\right\}$. 3. $\max\limits_{[-3;1]} y = 2$, $\min\limits_{[-3;1]} y = -2$; график см. на рисунке 6. 4. $]-1;\ +\infty[$. Решение. Область определения неравенства задается условиями $\dfrac{x+1}{x+2} > 0$, $\dfrac{x+1}{x+2} \neq 1$, $x+3>0$, $x+3 \neq 1$. Решением этой системы служит объединение $]-3;\ 2[\,\cup\,]-1;\ +\infty[$. Пусть $x > -1$; тогда $x+3>1$, $x+2>x+1>0$, поэтому $\log_4 (x+3) > 0$, $\log_4 \dfrac{x+1}{x+2} < 0$. Значит, исходное неравенство справедливо при любых $x > -1$. Если $-3<x<-2$, то $0<x+3<1$, $-1<x+2<0$, $-2<x+1<-1$ и $\log_4 (x+3) < 0$, $\log_4 \dfrac{x+1}{x+2} > 0$.

5. $]0;\ 2[\,\cup\,]2;\ \dfrac{8}{3}[$. Решение. Прямая проходит через точку $M\,(1;\ 2)$ и пересекает график функции $y = \dfrac{a}{x}$ в двух точках, сумма ординат $y_1 + y_2$ которых равна a. Уравнение этой прямой: $y = k(x-1)+2$, поэтому $\dfrac{y-2}{k} + 1 = \dfrac{a}{y}$ $(k \neq 0)$, откуда $y^2 - (2-k)\,y - ak = 0$ и $y_1 + y_2 = 2 - k = a$, что дает $k = 2 - a$ $(a \neq 2)$. Уравнение $\dfrac{a}{x} = k\,(x-1)+2$ должно иметь два корня, поэтому дискриминант $D = (2-k)^2 + 4ak > 0$, то есть $8a - 3a^2 > 0$. Значит, $a \in \left]0;\ \dfrac{8}{3}\right[$, $a \neq 2$.

Вариант 2

1. $y_{max} = \dfrac{1}{3}$ при $x = 3$; $y_{min} = -\dfrac{1}{3}$ при $x = -3$. График см. на рисунке 7.
2. $\left\{\dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi\right\}$. 3. $\left]-\dfrac{4}{3};\ -\dfrac{17}{22}\right[$.
4. 1) $\dfrac{2\cos\alpha}{\cos\alpha - 1}$; 2) $\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1-9\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$.
Решение. Согласно рисунку 8 $\widehat{AMC} = \alpha$, $\widehat{SAB} = \varphi$. Тогда $\vec{AS} \cdot \vec{AB} = |\vec{AS}| \cdot |\vec{AB}| \cdot \cos\varphi = 2\cos^2\varphi$. Из ΔAMO $\dfrac{\sqrt{2}}{2}|\vec{AB}| = |\vec{AM}|\sin\dfrac{\alpha}{2}$.

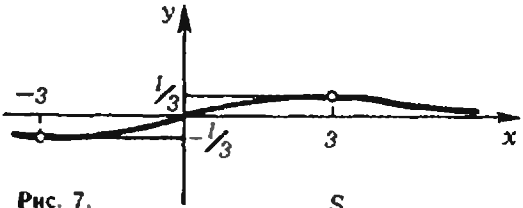


Рис. 7.

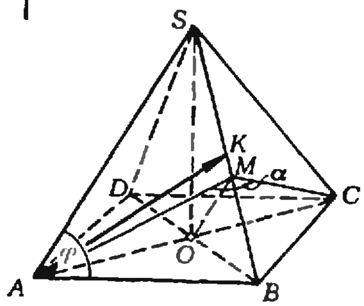


Рис. 8.

С другой стороны, из $\triangle AMB$ $|\overrightarrow{AM}| = |\overrightarrow{AB}|\sin\varphi$. Значит, $\sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sin\alpha/2}$ и $\cos^2\varphi = \frac{\cos\alpha}{\cos\alpha-1}$, то есть $\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{2\cos\alpha}{\cos\alpha-1}$. Поскольку $\overrightarrow{AK} = \frac{\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{AB}}{2}$, $\overrightarrow{AK}^2 = \frac{\overrightarrow{AS}^2+\overrightarrow{AB}^2+2\overrightarrow{AS}\cdot\overrightarrow{AB}}{4} = \frac{9\cos\alpha-1}{4(\cos\alpha-1)}$, откуда $|\overrightarrow{AK}| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-9\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$.

5. Если прямая $y=kx+b$ касается двух парабол $y=-x^2+4x+1$ и $y=3x^2+4x+\frac{7}{3}$, то каждое из двух уравнений относительно неизвестного x:

$$-x^2+4x+1=kx+b$$

и

$$3x^2+4x+\frac{7}{3}=kx+b$$

должно иметь единственный корень, то есть

$$D_1=(k-4)^2+4(1-b)=0,$$

$$D_2=(k-4)^2-12\left(\frac{7}{3}-b\right)=0,$$

откуда $k_1=2$, $b_1=2$; $k_2=6$, $b_2=2$. Имеем две прямые $y=2x+2$ и $y=6x+2$. Легко показать, что пары $(k;\ b)$, где $k\in\{3,\ 4,\ 5\}$ и $b=2$, и только эти пары, являются решениями системы неравенств $D_1<0$, $D_2<0$.

Физика

Вариант 1

2. $n=\frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{g}{R}}\approx 0,45$ об/с.

3. $I(t)=\frac{S|\overrightarrow{B_0}|m(t^2-n)}{R(n+t^2)^2}$;

$I_{max}=\frac{S|\overrightarrow{B_0}|m}{8Rn}\approx 4,2$ А. Указание. Для нахождения максимального значения тока надо функцию $I=I(t)$ исследовать на экстремум.

4. $m_{O_2}=\frac{p_{O_2}V\mu_{O_2}}{RT}\approx 0,295$ кг; $m_{N_2}\approx 0,96$ кг; $m_{Ar}\approx 0,017$ кг;

$N_{O_2}=N_A\frac{m_{O_2}}{\mu_{O_2}}\approx 0,55\cdot10^{25}$ м$^{-3}$; $N_{N_2}\approx 2,1\cdot10^{25}$ м$^{-3}$; $N_{Ar}\approx 0,26\cdot10^{24}$ м$^{-3}$ (здесь $R=8,31$ Дж/(К · моль) — универсальная газовая постоянная, $T=273$ К — температура газов, $N_A=6,02\cdot10^{23}$ моль$^{-1}$ — число Авогадро).

5. $U=\frac{1}{e}\left(\frac{hc}{\lambda}-A_{вых}\right)\approx 11,6$ В (здесь $h=6,62\cdot10^{-34}$ Дж · с — постоянная Планка, $c=3\cdot10^8$ м/с — скорость света).

Вариант 2

2. $L_{min}=(|BO|-|AO|)\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}\approx 850$ м.

Указание. Для определения минимального расстояния надо функцию $L=L(t)$ исследовать на экстремум.

3. Нет, новая лампа не будет гореть ярче прежней.

4. $\frac{p_2-p_1}{p_2}=1-\frac{T_1}{T_2}\approx 0,04=40\%$.

5. Изображение точки A находится на расстоянии $4F$ от зеркала, а изображение точки B — на расстоянии $5/2\ F$ от зеркала.

Московский энергетический институт

Математика

Вариант 1

1. 3. 2. $]0;\ 16[$. 3. $\frac{2}{3}$. 4. $\left\{-\frac{5}{6}\pi,\ -\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{6},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi\right\}$. 5. $\pi a^3\cdot\frac{\sin^2\alpha\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin\beta}$.

Вариант 2

1. $f(x)=2\sqrt[4]{x}-3$, $f'(x)=\frac{\sqrt[4]{x}}{2x}$. 2. $\{(12;\ 4)\}$.

3. $2(\sqrt{2}-1)$. 4. $x=-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}k$ $(k=3,\ 4,\ \ldots)$.

5. $\frac{\pi l^2\cos\alpha}{3\cos^2\alpha+1}$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

2. $Q=A+\Delta U$; $Q=A$; $\Delta A=p\Delta V$.

3. $Q=\frac{m^2R}{k^2t^2}=40$ Дж.

4. $l=h\operatorname{ctg}\varphi+H\frac{\cos\varphi}{\sqrt{n^2-\cos^2\varphi}}\approx 3,4$ м.

5. $\rho=\rho_ж\frac{\varepsilon}{\varepsilon-1}=1,6\cdot10^3$ кг/м^3.

Вариант 2

2. Нет, в общем случае не совпадает.

3. $I=\frac{mg}{|\overrightarrow{B}|l}=0,98$ А.

4. Из уравнения $I^2r-I\mathcal{E}+P=0$ получаем $I_1=1,5$ А и $I_2=0,5$ А.

5. $|\overrightarrow{F}|=2/3mg\sin\alpha=65,3$ Н.

Задачи устного экзамена

1. $x=\frac{|\overrightarrow{F}|}{2k}=0,05$ м.

2. $\Delta T = T\frac{2x}{l-x} = 404$ К

3. $r = \sqrt[3]{\frac{3eU}{4\pi d\varrho g}} \approx 3{,}5\cdot 10^{-6}$ м.

4. $\mathcal{E} = U\left(1+\frac{n(R_{\text{пр}}+r)}{R}\right) = 242$ В;

$U_1 = U\left(1+\frac{nR_{\text{пр}}}{R}\right) \approx 227{,}3$ В.

5. $S' = S\frac{F^2}{(d-F)^2} = 2{,}5$ м^2.

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Вариант 1

1. $\left\{10, \frac{13}{4}\right\}$.

2. Указание. Легко видеть, что $\vec{AB} = \vec{DC}$ и $|\vec{AC}| = |\vec{BD}|$. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 20. Пусть теперь l и m — серединные перпендикуляры его сторон AB и BC, O — его центр. Прямоугольник $ABCD$ переходит в себя при перемещениях E, S_l, S_m и Z_O.

3. $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi l$, $x_3 = \pm\left(\pi - \arccos\frac{2}{3}\right) + 2\pi m$ $(k,\ l,\ m \in \mathbf{Z})$; наименьшее расстояние между его положительными корнями равно $\frac{\pi}{6}$. Указание. $\frac{\pi}{4} < \arccos\frac{2}{3} < \frac{\pi}{3}$.

4. 0,37; tg 33°; 1; 65/63; 61/59; tg (—314°). Указание.

$\operatorname{tg}(-314^\circ) = \operatorname{tg}46^\circ = \frac{1+\operatorname{tg}1^\circ}{1-\operatorname{tg}1^\circ} = \frac{1+\operatorname{tg}\frac{\pi}{180}}{1-\operatorname{tg}\frac{\pi}{180}} > \frac{1+\frac{\pi}{180}}{1-\frac{\pi}{180}} > \frac{1+\frac{1}{60}}{1-\frac{1}{60}} = \frac{61}{59}$.

5. $S(-1) = \frac{125}{6}$, $\min S(k) = S(2) = \frac{32}{3}$.

Вариант 2

1. $\left\{\frac{9}{2}\right\}$ 2. Площадь $\triangle ABC$ равна $\frac{29}{2}$. Перемещения, переводящие $\triangle ABC$ в другой данный треугольник,— это Z_O и $Z_O \cdot S_l$ (l — ось симметрии $\triangle ABC$). 3. $x_1 = k$ $(k \in \mathbf{Z})$, $x_2 = \frac{-1\pm\sqrt{4l+3}}{2}$ $(l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$; искомый член равен $\frac{\sqrt{23}-1}{2}$. 4. 0; $\ln\frac{7}{5}$; $\frac{11}{30}$; $\sqrt{0{,}8}$; 0,9186; 1,2. Указание. $\ln\frac{7}{5} = \ln 7 - \ln 5 =$

$= \int_5^7 \frac{dx}{x} = \int_5^6 \frac{dx}{x} + \int_6^7 \frac{dx}{x} < \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{11}{30}$.

5. Наименьшее расстояние получается при $x_0 = 0$ и равно $\frac{1}{\sqrt{5}}$.

Московский институт стали и сплавов

Математика

Вариант 1

1. $\left]0;\ \frac{1}{8}\right] \cup \left[\frac{1}{4};\ +\infty\right[$. 2. $\frac{23}{11}$. 3. $\frac{45}{4}$.

4. $\frac{a^2-b^2}{8\sqrt{ab}}$. Указание (рис. 9). Пусть O_1 и O_2 — центры вписанной и описанной окружностей соответственно, EF — средняя линия трапеции. Найдите длины отрезков EG, GO_1, EO_1 и воспользуйтесь подобием треугольников EGO_1 и EO_1O_2.

5. $a < -7$, $a = -5$. Указание. Из первого уравнения получаем, что $\sin 2x = 0$, либо $\sin 2x = -1$. Преобразуем второе уравнение. Полагая $y = \sin 2x$, получим уравнение $y\cdot(2y^2 + |a+3|y - (a+5)) = 0$. Для корней y_1 и y_2 уравнения $2y^2 + |a+3|y - (a+5) = 0$ возможны три случая: а) $y_1 = -1$, $y_2 = 0$; б) $y_1 = y_2 = -1$; в) $y_1 = -1$, $|y_2| > 1$.

Вариант 2

1. $x = \pm\frac{\pi}{2} + \pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$. 2. $]-\infty;\ 2-\sqrt{2}[\ \cup\ ]2+\sqrt{2};\ +\infty[$. 3. $\left\{\frac{11}{6}\right\}$. Указание. Областью определения левой части уравнения является отрезок $\left[\frac{7}{5};\ \frac{5}{2}\right]$, поэтому $\frac{7}{5} < \frac{a}{6} < \frac{5}{2}$, то есть $9 < a < 15$. 4. $\frac{6\sqrt{5}}{5}$. Указание. Проведите касательную к параболе, параллельную прямой $y = -2x+1$.

5. $V = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Указание (см. рис. 10). Пусть $(SO) \perp (ABC)$. Тогда $\vec{SO} = \vec{AO} - \vec{AS} = \alpha\vec{AB} + \beta\vec{AC} - \vec{AS}$. Для нахождения чисел α и β воспользуйтесь соотношениями $\vec{SO}\cdot\vec{AB} = 0$ и $\vec{SO}\cdot\vec{AC} = 0$.

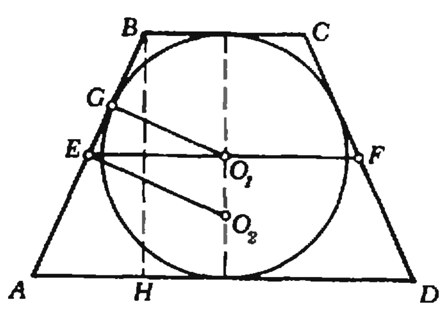


Рис. 9.

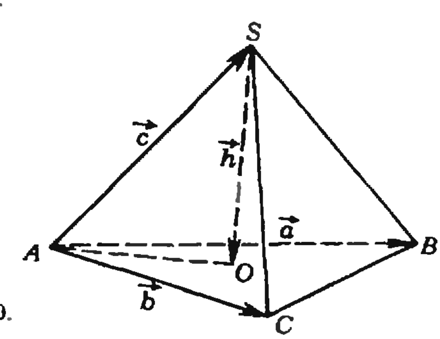


Рис. 10.

Физика

1. $t=\sqrt{\dfrac{l}{|\vec a|\cos\alpha}}\approx 1{,}7$ с.
2. $p_M=\varrho\,(gh+|\vec a|L)\approx 4{,}3\cdot 10^3$ Па (здесь $\varrho=10^3$ кг/м^3 — плотность воды).
3. $|\vec v|=\sqrt{2gh}$.
4. Экран нужно отодвинуть от линзы на расстояние $l=a\,(1-1/n)=1$ см.

Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии

Математика

Вариант 1

1. $\left\{8,\ \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}\right\}$. 2. $x=\dfrac{(-1)^{k+1}}{2}\arcsin(\sqrt{2}-1)+\dfrac{\pi}{2}k\ (k\in\mathbf{Z})$. 3. $]-\infty;\,-1[\,\cup\,[4;\,+\infty[$.
4. $(\widehat{\vec a;\ \vec b})=\dfrac{\pi}{2}$, длина диагонали прямоугольника равна $|\vec a+\vec b|=\sqrt{10}$. 5. $\min\limits_{[-5;\,-1]} y=y(-1)=-\dfrac{10}{3}$, $\max\limits_{[-5;\,-1]} y=y(-3)=-2$.

Вариант 2

1. $x_1=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}k$, $x_2=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi l\ (k,\ l\in\mathbf{Z})$.
2. $]1;\ +\infty[$. 3. $\left\{\dfrac{5}{3}\right\}$. 4. $\dfrac{\pi}{4}$. Указание. Найдите скалярное произведение векторов $\overrightarrow{BD}$ и $\overrightarrow{AC}$. 5. Функция возрастает на $\mathbf{R}$.

Физика

1. $s=|\vec v_0|^2/g-|\vec v_0|t+gt^2/2\approx 41{,}6$ м.
2. $|\vec T|=mg\,(3-2\cos\alpha)\approx 20$ Н.
3. $t=T/12=0{,}25$ с.
4. $h_в=\Delta h\varrho/\varrho_в=2{,}72\cdot 10^{-1}$ м (здесь $\varrho_в=1$ г/см^3 — плотность воды).
5. $N=N_A\dfrac{pV}{RT}\approx 2{,}7\cdot 10^{25}$ м$^{-3}$; $m=\mu/N_A\approx 3{,}3\cdot 10^{-27}$ кг (здесь $\mu=2\cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса водорода).
6. $A=(pS+Mg)\,h\Delta T/T=30$ Дж.
7. $\varphi'=\varphi\dfrac{r}{r+l}=50$ В.
8. $I_м=|\vec B|l^2\omega/R=6\cdot 10^{-3}$ А.
9. $H=nh=4/3$ м $\approx 1{,}3$ м.
10. $m=\dfrac{hc}{\lambda}\approx 3{,}7\cdot 10^{-36}$ кг.

Московский архитектурный институт

Математика

1. $\dfrac{a\sqrt{6}}{6}$. Указание. Проведите плоскость AD_1C_1B, опустите перпендикуляр MN на (BD_1) и докажите, что $(MN)\perp(B_1C)$ (рис. 11).
2. Воспользуйтесь формулами $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$ и $\sin\alpha\times\cos\beta=\dfrac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$.
3. 8, 10, 12; 17, 10, 3.
4. $\left\{\dfrac{\lg 3-\lg 5}{\lg 2},\ \dfrac{\lg 2-\lg 5}{\lg 2}\right\}$.

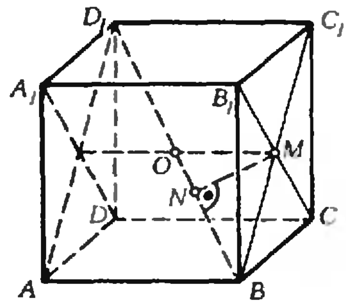


Рис. 11.

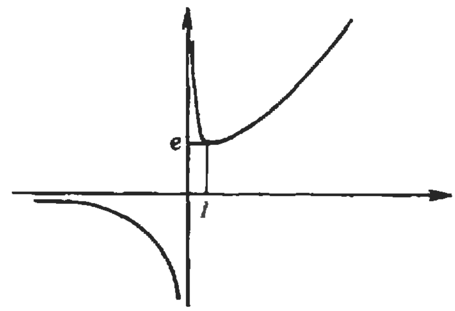


Рис. 12.

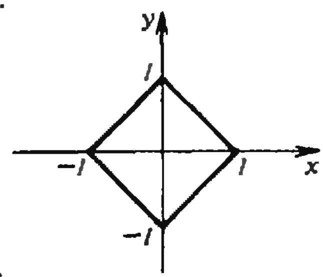


Рис. 13.

5. $\dfrac{3}{2}$. Указание. Домножьте числитель и знаменатель дроби на $(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})\times(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{(1-x)(1+x)}+\sqrt[3]{(1-x)^2})$.
6. См. рис. 12.
7. $\sqrt[3]{4V}$. Указание. Пусть a — длина стороны основания, h — высота призмы, S — полная поверхность. Тогда $h=\dfrac{4V}{a^2\sqrt{3}}$ и $S(a)=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}+3\cdot\dfrac{4V}{a\sqrt{3}}$.
8. См. рис. 13.

Физика

1. $|\vec T_{AB}|=m_1g\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}\approx 122$ Н;
$$m_2=m_1\left(\frac{\sin\beta\cos\alpha}{\sin\alpha}+\cos\beta\right)\approx 135\ \text{кг}.$$
2. $0<T=2\pi\sqrt{\dfrac{l\cos\alpha}{g}}<2$ с.
3. $|\vec v|=2\sqrt{c(t_{пл}-t)+\lambda}=507$ м/с.
4. $I_1=\dfrac{\mathscr{E}_1(r_2+R)-\mathscr{E}_2R}{r_2(r_1+R)+r_1R}=1{,}5$ А; $I_2=\dfrac{\mathscr{E}_1-I_1(r_1+R)}{R}=0{,}5$ А; $I_3=I_1+I_2=2$ А.
5. $\delta=2\gamma$.

Московское высшее техническое училище им. Н. Э. Баумана

Математика

Вариант 1

1. $q = \frac{1}{2}$, $a = 16$ 2. $\frac{R}{\sqrt{13}}$ 3. $x_1 = \frac{\pi}{2}k$, $x_2 = (-1)^l \frac{\pi}{15} + \frac{\pi}{5}l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$ 4. $]-\infty, 1[$ 5. $[0, 4[$

Вариант 2

1. $d = 4$, $a = 8$ 2. $\frac{a}{4}$ 3. $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{4}$, $\min\limits_{[-1;1]} f(x) = f(1) = -17$ 4. $\{2\}$ 5. $\frac{9}{2}$

Физика

1. $t_1 = \frac{|\vec{v_0}|}{g} + \frac{\tau}{2} = 6$ с, $h = \frac{|\vec{v_0}|^2}{2g} - \frac{g\tau^2}{8} = 120$ м
2. $H = 2R/3$
3. $|\vec{F}_{ц}| = \frac{m^2|\vec{v_0}|^2}{2Ms} = 12{,}5$ кН
4. $m_{вып} = \frac{pV\mu_{H_2}}{RT} - m\frac{\mu_{H_2}}{\mu_{H_2O}} \approx 0{,}076$ кг $= 76$ г
5. $h = \frac{(3^3 - 1)p_0}{\varrho g} = 260$ м
6. а) Параллельно прибору надо включить шунт сопротивлением $R_ш = R\frac{nU_0}{IR - nU_0} = 1{,}01$ Ом, б) последовательно с прибором надо включить дополнительное сопротивление $R_{доп} = R\left(\frac{U}{nU_0} - 1\right) = 37425$ Ом
7. $l = \frac{m(g + |\vec{v}|/t)}{|\vec{B}|I \sin\alpha} = 6$ м
8. $\alpha = \operatorname{arctg}\frac{n_2}{n_1}$
9. $n = \sin\alpha/\sin\varphi \approx 1{,}4$
10. Неизвестным элементом является изотоп азота $^{14}_{7}N + ^{1}_{1}p \to ^{15}_{8}O$, $^{15}_{8}O \to ^{0}_{+1}e + ^{15}_{7}N$

Московский институт нефтехимической и газовой промышленности им. академика И. М. Губкина

Математика

1. $\frac{3}{4}$ 2. $-\frac{4}{3}$ 3. Через 2 часа. Указание. Пусть в момент времени t машины находятся в точках M_1 и M_2. Тогда $|M_1M_2|^2 = |M_1B|^2 + |BM_2|^2 - |M_1B|\cdot|M_2B|$
4. $\alpha = \beta = \frac{\pi}{4}$. Указание. Если α — один из острых углов треугольника, то длина гипотенузы равна $\frac{l}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}\right)$. Исследуйте затем эту функцию с помощью производной на интервале $]0, \frac{\pi}{2}[$ 5. $\{-4, -3, 3, 4\}$

Физика

1. $A_{min} = \varrho g S h^2/8 = 200$ Дж
2. $T_2 = T_1\sqrt{V_1/V_2} = 150$ К, $t_2 = -123°$ С
3. $\frac{e}{m} = \frac{|\vec{E}|^2}{2U|\vec{B}|^2} \approx 1{,}8 \cdot 10^{11}$ Кл/кг
4. $U_з = U_г = \sqrt{2}\,U \sin\pi\left(\frac{1}{2} - \tau\nu\right) = 127$ В
5. $n = H/h = 1{,}5$

Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской

Математика

Вариант 1

2. $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi\right\}$ 3. $2\sqrt{5}$ 4. $\{(6, 10), (10, 6)\}$ 5. 1. Указание. Если O — основание высоты пирамиды и $[OH]$ — высота треугольника ASO, то $(OH) \perp (BD)$

Вариант 2

1. $\left\{\frac{1}{2}, 2\right\}$ 2. $\{2\}$ 3. Основания — 4 см и 8 см, боковые стороны — по $2\sqrt{2}$ см 4. $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k$, $x_2 = (-1)^l\frac{\pi}{6} + \pi l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$ 5. $\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}$

Физика

1. $|\vec{a}| = g\frac{m_2}{m_1 + m_2} = 2{,}5$ м/с^2,
$|\vec{T}| = \frac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2} = 7{,}5$ Н
2. $|\vec{v_1'}| = \frac{m_1|\vec{v_1}| - m_2|\vec{v}|}{m_1} = 1$ м/с
3. $|\vec{v}| = \sqrt{2|\vec{a}|l} \approx 89$ м/с
4. $T = \Delta T/n = 350$ К
5. $T = pV\mu/(mR) \approx 276$ К
6. $m_2 = m_1\frac{c_1\Delta t}{c_2(t_2 - t_1 - \Delta t)} \approx 3$ кг
7. $|\vec{F}| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{q_1^2}{r_1^4} + \frac{q_2^2}{r_2^4}} \approx 0{,}29$ Н
8. $I = \frac{I_1 I_2 (R_2 - R_1)}{I_2 R_2 - I_1 R_1} \approx 0{,}47$ А
9. $\Gamma = f/F - 1 \approx 32$
10. $\beta = \arcsin\frac{\sin(90° - \alpha)}{n} \approx 41°$

Ростовский государственный университет (механико-математический факультет)

(см. «Квант» № 6)

Математика

Вариант 1

1. $\frac{1}{3}H$ 2. $\{-\log_2 3\}$ 3. $x_1 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4}k$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + \pi l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$

Вариант 2

1. $\frac{2}{3}\sqrt{3}R$ 2. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{15}{32}\right)$ 3. $]\log_2(5+$

$+\sqrt{33})-1;\ +\infty[$. 4. $\left\{\frac{\pi}{8}\right\}$.

Вариант 3

1. $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. 2. $p=1,\ q=1$. 3. $]-\infty;\ -1[\cup\,]-\frac{1}{10};\ 0[$. 4. $x_1=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ x_2=\pm\frac{2}{3}\pi+2\pi l,$ $x_3=(-1)^m\frac{\pi}{6}+\pi m\ (k,\ l,\ m\in \mathbf{Z})$.

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

(см. «Квант» № 6)

Математика

Вариант 1

1. $2\frac{2}{3}$. 2. Уравнение не имеет решений. 3. $X\in\,]-\sqrt{5};\ -2[\cup]1;\ \sqrt{5}[$. 4. $|BD|=2\sqrt{6}$. 5. $\arccos\frac{a\sqrt{17}}{\sqrt{17a^2+2h^2}}$. 6. $X=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{pmatrix}$.

Вариант 2

1. 12. 2. См. рисунок 14. 3. 4. 5. 4. $V=\frac{a^3\sqrt{\cos\alpha}}{6\sin\frac{\alpha}{2}}$; $S_б=a^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. 5. $x=\frac{\pi}{4}(1+(-1)^k)+\pi k,\ k\in\mathbf{Z}$.

Физика

1. $t=(2+\sqrt{2})\tau\approx3{,}4$ с; $h=gt^2/2\approx58$ м.
2. $\omega=\sqrt{\mu g/R}\approx0{,}7$ рад/с.
3. $Q=m|\vec{a}|^2t^2/2=2\cdot10^8$ Дж.
4. $t=\frac{m_3(r+ct_3)-\lambda m_2}{c(m_1+m_2+m_3)}\approx13{,}3°$ С.
5. $h=\frac{|\vec{v}_0|^2-4\lambda}{2g}=3\cdot10^3$ м.
6. $T=2T_0=546$ К.
7. $A=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r}\right)\approx1{,}2\cdot10^{-6}$ Дж.
8. $I_0=I(R+r)/R=5{,}025$ А.
9. $U_1=U_2=U/3\approx73$ В; $U_3=2U/3\approx147$ В; наибольшая мощность выделяется в третьей лампочке.
10. $I=\frac{c\rho V(t_2-t_1)}{\eta U\tau}100\%\approx11$ А (здесь $\rho=10^3$ кг/м³ — плотность воды).

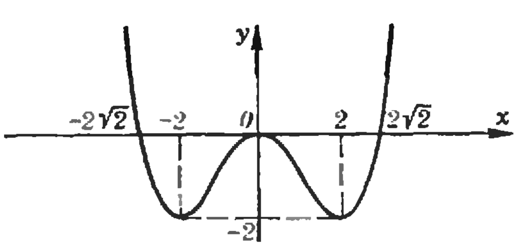


Рис. 14.

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

(см. «Квант» № 6)

Математика

Вариант 1

1. n^2/m^2. 2. $x=14$. 3. $S=4-\frac{3}{2\ln 2}$. 4. Точки максимума $x_{max}=\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$; при этом $y_{max}=\frac{\pi}{3}+k\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$. Точки минимума $x_{min}=-\frac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in\mathbf{Z}$; при этом $y_{min}=-\frac{\pi}{3}+k\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 5. Объем пирамиды равен

$$\frac{V}{4\pi}\,\frac{\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\varphi}{\operatorname{tg}^3\frac{\varphi}{2}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi-\alpha}{4}\right)}.$$

Вариант 2

1. 1. 2. $\{(2;\ 4),\ (4;\ 2)\}$. 3. $x_{1,2}=2\pm\sqrt{\frac{7}{2}}$. 4. $y=2$. 5. $V=\frac{1}{4}Sd\cos\frac{\alpha}{2}$.

Физика

1. $|\vec{v}_{max}|=\frac{2s}{2s/v_{ср}-t_1-t_2}\approx58{,}3$ км/ч $\approx16{,}2$ м/с.
2. $\Delta\varphi=2\pi l\nu/v=\pi$.
3. $m=\frac{pV\mu}{RT}\approx0{,}13$ г (произведение pV определяется из рисунка к условию задачи).
4. $m=(\rho_{к1}r/100\%-\rho_{к2})\,Sh\approx1{,}6\cdot10^7$ кг.
5. $q=mgd/U\approx8{,}2\cdot10^{-16}$ Кл.
6. $I=\frac{n\mathscr{E}}{R+nr+\rho l/S}\approx0{,}09$ А; $U=IR\approx8{,}1$ В.
7. $I=\frac{mgh}{\eta Ut}\approx30$ А (здесь $\eta=0{,}9$).
8. $t=\frac{\rho d}{kj}\approx9\cdot10^4$ с ≈25 ч.
9. $L=\frac{T}{2\pi}\sqrt{\mathscr{E}^2_{max}/I^2_{max}-R^2}\approx0{,}01$ Гн.
10. $f=\frac{d}{Dd-1}=0{,}6$ м $=60$ см.

Заочная школа программирования

(см. «Квант» № 3)

Урок 7

7.1 Ответ: 7.

7.2
```
0—>X; ПОКА X=<6.29::
ПЕЧАТЬ ('X=',X,' COS(X)=',
COS(X),'SIN(X)=',SIN(X));
X+0,1—>X ВСЕ;
```

7.4
```
ПРОЦ КАМЕНЬ T V=>H;
V*T—(G*T!2)/2—>H;
КНЦ;
9.81—>G;V!2/(2*G)—>МАКС;
P(2*V/G. МАКС);П(0,0);
ПОКА T=<МАКС ::Л(T,КАМЕНЬ(T));
```

ПЕЧАТЬ('T=',T,' H=',КАМЕНЬ(T));
T+0.1—>T ВСЕ;
.КОНЕЦ;

7.5 Ответ: 'САРДЕЛЬКА'

7.6 'КАРАУЛ'—>X;X[5]+X[3:4]—>X;

Урок 8

8.1 ИМЯ ЗНАЧЕНИЕ
A <•'КИНОКАДР', 'КЕДР', 'ДРАКОН'•>
B <•<•'КИНОКАДР','КЕДР', 'ДРАКОН'•>, 14,23•>

8.2 КАК ВЫ НИ САДИТЕСЬ... ПРОИЗВЕДЕНИЕ НЕ МЕНЯЕТСЯ

8.3 ≠КЕНГУРУ-2
<•РУ, КРОЛИК, ВИННИ-ПУХ•>
КУДА УБЕЖАЛ ПЯТАЧОК?

8.4 ЗЕБРА БЕЛКА

8.5 ДЛЯ УЧ ИЗ ШКОЛА ::
ЕСЛИ УЧ[6]=1969 ТО
ПЕЧАТЬ (УЧ[1],' ',УЧ[2],' ',УЧ[7], '',УЧ[4],'/',УЧ[5],' ',УЧ[6])
ВСЕ
ВСЕ;

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 6)

1. Cf6!! Ф:h5 2. Л:g7+ Kph8 3. Л:f7 + (жернова мельницы заработали) **3...Kpg8 4. Лg7+Kph8 5. Л:b7+Kpg8 6. Лg7+Kph8 7. Лg5+** (седьмой ряд черных достаточно разрушен, теперь белые возвращают ферзя, брать пешку a7 не имело смысла) **7...Kph7 8. Л:h5 Kpg6 9. Лh3 Kp:f6 10. Л:h6+**. Черные сдались, так как у них не хватает целых трех пешек.

2.1. Фg4!! Пользуясь слабостью последней горизонтали черных (они забыли сделать «форточку»), белые хотят отвлечь их ферзя от защиты ладьи на e8 — 1...Ф:g4 2. Л:e8+ с матом. **1...Фb5** (единственное поле для отступления ферзя) **2. Фc4!!** (эффектное продолжение темы отвлечения) **2...Фd7 3. Фc7!! Фb5 4. a4!** (поспешное 4. Ф:b7? губило все старания — 4...Ф:e2!, и мат получают уже белые: 5. Л:e2 Лc1+ 6. Ke1 Л:e1+7. Л:e1 Л:e1×) **4...Ф:a4 5. Лe4! Фb5 6. Ф:b7!** (белая ладья покинула поле e2, и теперь это взятие решает). Черные сдались.

Задачи наших читателей

(См. «Квант» № 6, с. 13)

5. Поскольку p — нечетно, $p^{60}-1$ делится на 4. Согласно Малой теореме Ферма (*если p — простое число и a не делится на p, то $a^{p-1}-1$ делится на p*), разность $p^{60}-1$ при $p>11$ делится на 5 и 11. По той же теореме разность $p^{20}-1$ делится на 3, откуда легко вывести, что $p^{60}-1$ делится на 9. Поэтому $p^{60}-1$ делится на $4\cdot5\cdot9\cdot11=1980$.

6. Поскольку $199879=101\cdot1979$ и числа 101 и 1979 взаимно просты, достаточно доказать, что данное выражение одновременно делится на 101 и 1979.

Делимость на 1979 вытекает из следующего представления:

$$1979^{100}-(1978^{100}-1^{100})+(1977^{100}-2^{100})-\\-(1976^{100}-3^{100})+\ldots-(990^{100}-989^{100})$$

(каждая разность $a^{2n}-b^{2n}$ делится на $a+b=1979$).

Для доказательства делимости на 101 заметим, что в данном выражении имеется 10 чисел

$$101^{100},\ 303^{100},\ \ldots,\ 1919^{100},$$

делящихся на 101 со знаком «плюс», и 9 чисел

$$202^{100},\ 404^{100}\ \ldots,\ 1818^{100}$$

— со знаком «минус», так что среди оставшихся 1960 чисел имеется по 980 чисел со знаками «плюс» и «минус». Поэтому данное выражение можно (прибавив и отняв по 980 единиц) представить в виде

$$(1^{100}-1)-(2^{100}-1)+(3^{100}-1)-\ldots\\\ldots+(1979^{100}-1)+101A,$$

где каждая из разностей делится на 101 (см. Малую теорему Ферма́, упомянутую в решении задачи 5).

(см. «Квант» № 6, 3-ю с. обложки)

1. Среди медных монет (1, 2, 3 и 5 коп) двухкопеечная является единственной «четной монетой». Кроме того, нечетным количеством нечетных монет нельзя составить четную сумму, а их четным количеством — нечетную сумму. Поэтому если числа M и N имеют разные четности, в копилке должна быть наверняка хоть одна двухкопеечная монета (более того, двухкопеечных — обязательно нечетное количество). В случае же, если числа M и N имеют одинаковую четность, то двухкопеечная может как быть, так и не быть (а если двухкопеечные монеты есть, то их обязательно четное количество; заметим, что две двухкопеечные монеты могут быть заменены однокопеечной и трехкопеечной монетами без изменения количества и суммы монет).

2. Средний срок службы лампочки можно довести до двух месяцев. Для этого нужно включить свет в первый вечер и выключить в четвертый вечер и так далее. В течение двух месяцев лампочка будет гореть в среднем месяц и будет включаться и выключаться около 30 раз. Такой режим обеспечивает, очевидно, максимальный срок службы лампочки.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 6)

1. На билет в кино школьник истратил не менее 30 коп; за обед он заплатил в два раза больше, то есть не менее 60 коп. Но так как обед был оплачен тремя монетами, получаем, что обед стоил ровно 60 коп., а билет в кино 30 коп. Учитывая теперь, что двадцатикопеечных монет у школьника было больше, чем пятнадцатикопеечных, находим, что у него было две монеты по 15 коп. и шесть монет по 20 коп.

2. См. рисунок 15.

Поправка. По вине типографии в диаграмму к партии Рети — Тартаковер вкралась ошибка: на поле b8 должен стоять черный конь.

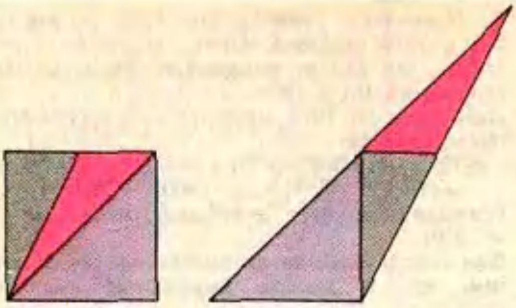


Рис. 15.

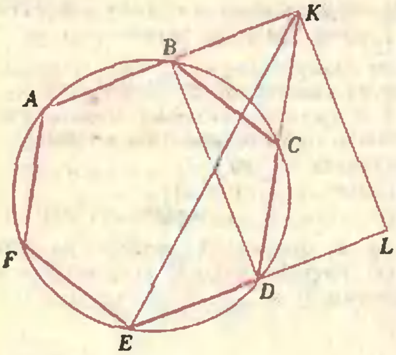


Рис. 16

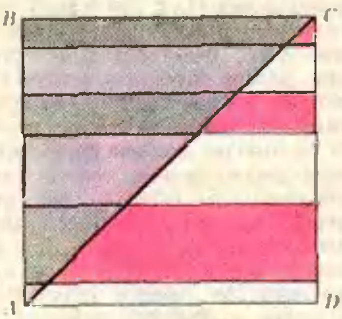


Рис. 17

3. Соединим точки B и D (рис. 16). Треугольник BDK — прямоугольный, причем $|BK| = 1$, $|DK| = 2$. По теореме Пифагора

$$|BD| = \sqrt{|DK|^2 - |BK|^2} = \sqrt{3}.$$

Треугольник ELK — тоже прямоугольный, причем $|EL| = 2|DE| = 2$, $|KL| = |BD| = \sqrt{3}$. Поэтому

$$|EK| = \sqrt{|EL|^2 + |KL|^2} = \sqrt{4+3} = \sqrt{7}.$$

4. $5329 = 73^2$.

5. Обозначим площадь квадрата через S. Тогда суммарная площадь серых и красных «полосок» (рис. 17) равна $S/2$. Но и площадь треугольника ABC равна $S/2$. Поскольку треугольник ABC составлен из серых и синих «полосок», получаем, что суммарная площадь синих «полосок» та же, что суммарная площадь красных «полосок».

Головоломка «Цветной кубик»

(см. «Квант» № 5, 2-ю с. обложки)

См. рисунки 18, 19.

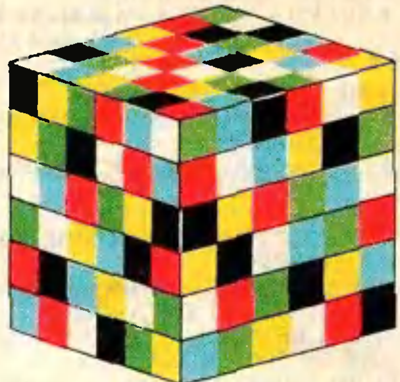


Рис. 18

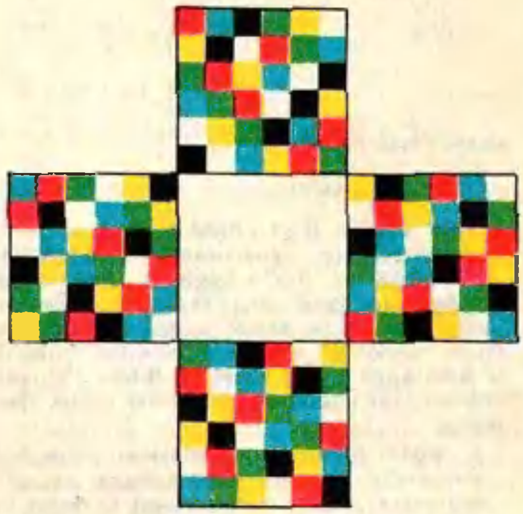


Рис. 19

Номер готовили:
А. Виленкин, А. Егоров, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шихановия

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Н. Румянцева

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 20/V-80
Подписано в печать 2/VII-80
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,06. Т-13048
Цена 30 коп. Заказ 1187. Тираж 260 103 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

В этом номере журнала открывается шахматный конкурс. Вам будут предложены различные шахматные задачи, этюды, комбинации и головоломки. Мы будем стремиться к тому, чтобы задачи и позиции конкурса служили как бы дополнением и иллюстрацией к материалам «Шахматной странички», выпускаемой в том же номере журнала.

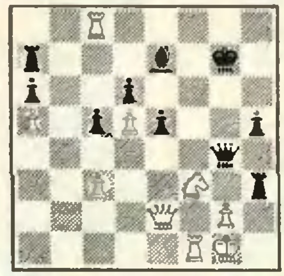
В этом году шахматный конкурс «Кванта» будет состоять из шести туров.

Итоги конкурса будут подведены в мае 1981 года. Победители конкурса будут награждены шахматной и математической литературой с автографом чемпиона мира по шахматам Анатолия Карпова.

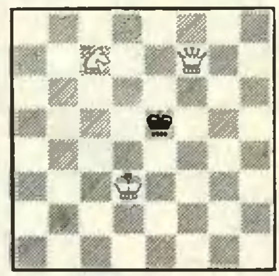
Читатели журнала, которые придумают свои собственные интересные задачи с шахматно-математическим сюжетом, получат дополнительные очки.

Решение конкурсных заданий следует присылать в одном экземпляре, в отдельном конверте по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, «Квант». На конверте обязательно должна быть пометка «Шахматный конкурс № 7-80».

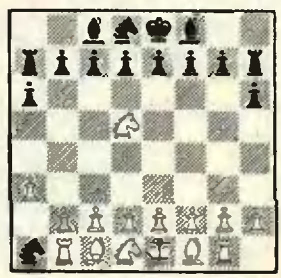
Крайний срок отправления ответов на конкурсные задания этого номера — 31 августа 1980 г.



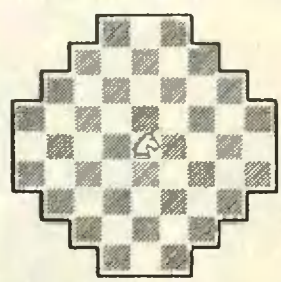
1. Белые начинают и выигрывают.



2. Мат в 3 хода.



3. Мат в 1 ход.



4. Может ли конь обойти все поля этой доски, посетив каждое из них по одному разу?

Задача 1 — позиция из партии А. Карпова, игранная им с Жолдошем в 1973 году в Венгрии. Эффектный удар, который провел здесь будущий чемпион мира, сразу решил исход поединка.

Найдите его.

Задача 2, составленная почти сто лет назад, в 1885 году, принадлежит известному немецкому проблемисту В. Шинкману. В № 2 за 1980 год мы приводили одну любопытную головоломку Шинкмана, связанную с перестановкой фигур на доске. Данная задача представляет собой настоящее шахматное произведение, так сказать, без «фокусов».

Задача 3 В. Королькова не совсем обычная. Мат в один ход здесь могут поставить и белый, и черный конь. Задача состоит в том, чтобы выяснить, чей сейчас ход. Если белые и черные сделали поровну ходов, то мат ставят белые. Если же белые сделали на ход больше, то тогда, очевидно, их король получает мат. Вам придется произвести соответствующий расчет.

Задача о путешествии коня по всем полям шахматной доски является классической как в занимательной математике, так и в занимательных шахматах. Ей посвящена обширная литература (см., например, «Квант», 1971 г., № 9). В задаче 4, которую мы предлагаем вам решить, доска довольно необычная; прежде чем обходить ее конем, подумайте, можно ли это сделать.

Цена 30 коп.
Индекс 70465

Как многие произведения голландского художника Эшера, эта гравюра больше всего поражает воображение математиков и физиков. Глядя на нее, нам сразу хочется спросить — каким образом художник «увидел» сферически выпуклый кусок сказочного города? Физик, любящий оптику, наверное, предложит такой ответ — автор смотрел на свой город через стеклянную пластину, плоско параллельную по краям и утолщенную в центре (вроде линзы, но не сферической, а с переменной кривизной). Геометр, возможно, подумает, что геометрия пространства на глазах художника «сошла с ума» и из евклидовой по краям превратилась в сферическую в центре. А математик-тополог скажет, наверное, что картина была нарисована правильно на тонкой резиновой пленке, а хитрец-автор подкрался к ней сзади и стал раздувать, как мыльный пузырь. А вы как воспринимаете эту странную гравюру Эшера?