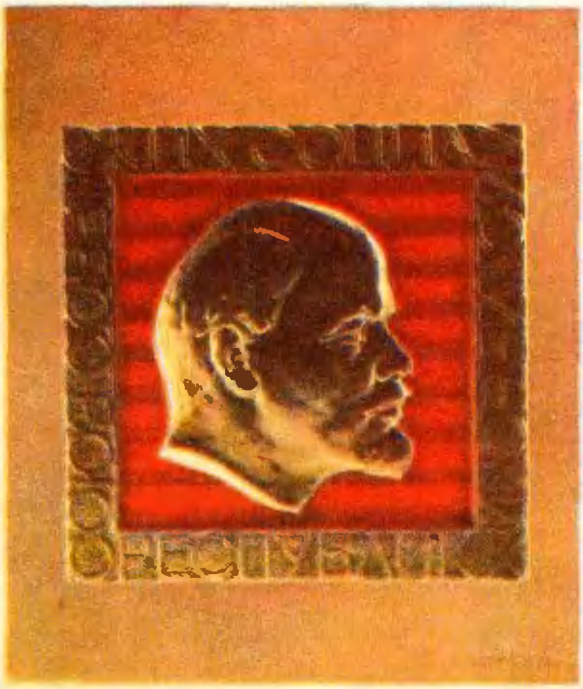
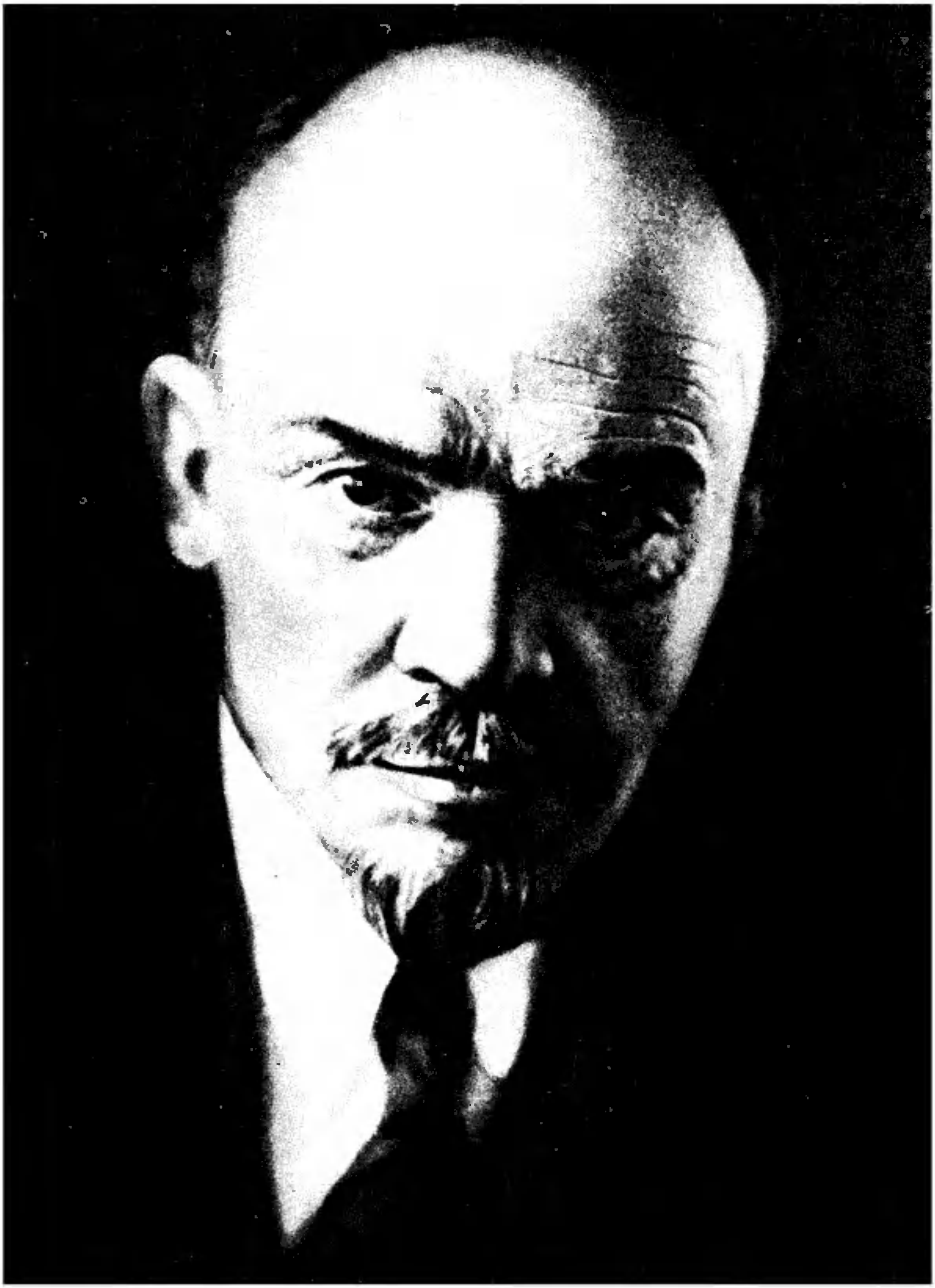
ISSN 0130-2221

Квант

4
1980

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





1870–1980

Основан в 1970 году

Квант

4
1980

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

На первой странице обложки вверху изображен вымпел с барельефом В. И. Ленина и Государственным гербом СССР, доставленный на поверхность Венеры. Внизу изображен вымпел, находившийся на станции «Луна-12».
Фото В. Германа, Ю. Никерина

В. И. Ленин произносит речь на Красной площади в день празднования 1-ой годовщины Великой Октябрьской Социалистической революции.

Великий ученый и мыслитель

110 лет отделяют нас от дня рождения Владимира Ильича Ленина — вдохновителя и руководителя поворотного события всемирной истории — Великой Октябрьской социалистической революции, создателя первого государства рабочих и крестьян.

Социализм и коммунизм строятся на научной основе. И в эту науку внес огромный вклад В. И. Ленин. Он глубоко и всесторонне разработал вопрос о роли науки в строительстве социалистического и коммунистического общества.

Ленин уделял огромное внимание развитию молодой советской науки. По его указанию в первые годы Советской власти были созданы многие научные центры, получившие затем всемирную известность. Среди них упомянем созданные в Петрограде Физико-технический, Оптический, Радиевый и Физико-математический институты, Центральный аэрогидродинамический институт в Москве, специальную радиолабораторию в Нижнем Новгороде (Горьком).

Величие гения характеризуется способностью предвидеть будущее развитие событий. Этой способностью Ленин обладал в полной мере. Так, научный анализ развития событий в России в 1917 году позволил Ленину почти с математической точностью определить момент совершения социалистической революции. Его знаменитые слова: «Промедление в восстании смерти подобно» были не просто фразой, а точной формулировкой, результатом глубокого анализа конкретной политической ситуации.

Труды гениальных ученых характеризуются еще и тем, что они с течением времени не только не утрачивают своего значения, а, наоборот, служат основой для дальнейшего развития идей, заложенных в этих трудах. Так было с трудами Ньютона, Максвелла, Эйнштейна. Это в еще большей степени относится к работам Ленина. И хотя нас отделяет от момента его смерти более полувека, вся последующая история нашей Родины, вся последующая мировая история явили бесспорные доказательства бессмертия ленинского учения. Прав был Владимир Маяковский:

«Ленин
и теперь
живее всех живых —
наше знанье,
сила
и оружие.»

Жизнь и деятельность В. И. Ленина служат для всех советских людей ярким примером мужественной борьбы за самые высокие и светлые человеческие идеалы. Его научное наследие является неисчерпаемым источником вдохновляющих идей. Отсюда — живое, неподдельное внимание к каждому событию, связанному с именем Владимира Ильича, естественное желание проникнуть в суть каждого ленинского высказывания.

Читателям «Кванта» особенно интересно и важно познакомиться с некоторыми мыслями В. И. Ленина, касающимися математики и физики, подробнее узнать о фактах его биографии, связанных с этими науками.

Математика и физика пользовались в семье Ульяновых большой любовью. Прежде всего это объяснялось тем, что отец В. И. Ленина — Илья Николаевич Ульянов — учился на физико-математическом факультете Казанского университета и потом долгие годы преподавал математику в гимназии. С уважением и теплотой И. Н. Ульянов вспоминал выдающегося русского математика Николая Ивановича Лобачевского, который во время его учебы был ректором Казанского университета. Лобачевский чутко отнесся к молодому студенту и даже рекомендовал привлечь его к работе на метеорологической станции — делу, по тому времени, сложному и ответственному. По свидетельству Анны Ильиничны Ульяновой-Елизаровой, старшей сестры В. И. Ленина, «почти благоговейное отношение к науке» отличало Илью Николаевича всю жизнь и с детства внушалось всем в семье Ульяновых.

Илья Николаевич Ульянов много времени уделял занятиям с детьми и, в частности, постоянно старался глубже разъяснять им уроки физики и математики, знакомил с астрономическими и физическими приборами, ставил интересные опыты. В доме Ульяновых увлекались составлением и решением остроумных логических задач, математических головоломок, игрой в шахматы, что безусловно способствовало развитию строгости мышления у детей. Большое влияние на Володю Ульянова оказал и его старший брат Александр, который с детства проявлял незаурядные математические способности и учился на естественном отделении физико-математического факультета Петербургского университета.

В гимназии Володя Ульянов учился отлично. Один из его товарищей впоследствии вспоминал: «Мы часто не могли разобраться во всем заданном. Тут на помощь и приходил Владимир Ильич. Он любил заниматься математикой...». Помимо обязательных занятий математикой, Володя Ульянов принимал активное участие в гимназическом математическом кружке, где решал трудные задачи и даже сам их составлял. В июне 1887 года он блестяще сдал выпускные экзамены (в том числе три экзамена по математике) и был награжден — один из всего выпуска — золотой медалью (в 1921 году Ленин передал эту медаль в фонд помощи голодающим).

В воспоминаниях о В. И. Ленине есть многочисленные свидетельства о том, что он проявлял большой интерес к математике. Например, летом 1887 года он встречался и подолгу беседовал с Г. Н. Шебуевым, который читал лекции по математике в Казанском университете. Не однажды Шебуев с увлечением уверял, что Владимиру Ильичу непременно следует поступить на математический факультет, что у него «определенно математический склад ума». Однако, несмотря на свои успехи в математике, В. И. Ленин решил продолжать образование на юридическом факультете. «Теперь такое время: нужно изучать науки права и политическую экономию. Может быть, в другое время я избрал бы другие науки...», — писал он сам.

Избрав путь профессионального революционера, В. И. Ленин прекрасно понимал, что основную теоретическую задачу русских марксистов — углубленный анализ общественного строя России и выявление роли различных классов в революции — можно решить только на твердой основе кропотливого изучения фактов и точного анализа цифр, характеризующих русскую действительность. Поэтому одновременно с углубленным изучением идей марксизма он начал усиленно заниматься статистикой — наукой, использующей математические методы для количественного выражения закономерностей социально-экономических процессов.

В. И. Ленин был крупнейшим представителем экономической и социальной статистики. С его именем связан новый этап в теории и практике экономической статистики, в её приложении к социологии. Он мастерски умел пользоваться статистическими данными и постоянно подчеркивал необходимость их систематического использования для углубленного исследования социальных явлений. Им был выдвинут целый ряд принципиальных положений о приемах и способах статистической обработки данных, о точности цифрового анализа, о соотношении конкретного и абстрактного в статистике. Количественное описание характеристик массовых социально-экономических явлений, происходящих в обществе, В. И. Ленин всегда рассматривал в неразрывной связи с их качественной сутью. Во всех ленинских работах четко прослеживается мысль о том, что цифры, статистический материал должны наглядно раскрывать реальное положение вещей в экономической и политической жизни, в классовой борьбе, должны служить убедительным доказательством того или иного конкретного вывода.

Ленин впервые ввел в социальную статистику понятие функции распределения, которое лежит в основе физической статистики. Это и позволило ему в работе «Развитие капитализма в России» опровергнуть идею народников об особом пути развития России и научно обосновать утверждение о том, что она, как и многие другие страны, идет по капиталистическому пути. Этим же методом Ленин успешно воспользовался в работе «Империализм как высшая стадия капитализма», где он предсказал неизбежность распада мировой колониальной системы. Это гениальное предвидение осуществляется на наших глазах.

Основополагающие мысли В. И. Ленина по методологическим вопросам статистики не потеряли своего значения и в наше время, хотя математический аппарат статистики сегодня гораздо более развит, чем это было на рубеже XX века. Превосходные образцы критики В. И. Лениным субъективизма, ненаучности, фетишизации чисел в полной мере относятся к тем буржуазным исследователям, которые, прикрываясь пестротой цифр, сознательно извращают действительные факты, формально используют статистические сведения, строят математические модели, игнорирующие связь, причинность и источники изменений в обществе.

Среди огромного числа ленинских произведений нет ни одного, где бы исследовалось конкретное физическое явление. И тем не менее влияние В. И. Ленина на развитие физики трудно переоценить. По существу, Ленин заложил научные основы философии и методологии этой науки в своей знаменитой работе «Материализм и эмпириокритицизм».

В конце XIX — начале XX века в центре внимания естествоиспытателей и философов находилось большое число экспериментальных фактов, не укладывающихся в привычные рамки физических представлений (открытие радиоактивности и рентгеновских лучей, создание теории относительности и открытие вытекающей из этой теории зависимости массы электрона от его скорости). Ряд крупных ученых того времени утверждали, что эти экспериментальные факты отрицают объективность внешнего мира или, по крайней мере, объективность наших знаний об окружающем нас мире и его явлениях. Создавая «Материализм и эмпириокритицизм», Ленин поставил перед собой цель — показать ошибочность подобных взглядов, вскрыть социальные и гносеологические корни физического идеализма, указать верный выход из кризиса физики, продемонстрировать справедливость диалектико-материалистического подхода в физике и математике.

В. И. Ленин видел кризис физики «в отступлении... от прямого решительного и бесповоротного признания объективной ценности» физических теорий. Одну из причин идеализма в физике он усматривал в усилении связи физики (и вообще естествознания) с математикой. Обладая чрезвычайно умозрительным, абстрактным характером, математика создает предпосылки для возможности рассматривать математические абстракции как существующие самостоятельно, в полном отрыве от реальной действительности, независимо от нее. Отсюда и возникло идеалистическое решение основного вопроса философии теми учеными, для которых «то обстоятельство, что эти физики ограничивают свою теорию системой уравнений, есть опровержение материализма; уравнения и все тут, никакой материи, никакой объективной реальности, одни символы... «Материя исчезает», остаются одни уравнения».

И в наши дни, в период бурного процесса математизации знаний, особое значение имеет указание Ленина о том, что вопрос, отделяющий материализм от различных идеалистических направлений, состоит не в том, каким "функциональным соотношением" можно математически описать причинные связи и другие категории различных наук, «...а в том, является ли источником нашего познания этих связей объективная закономерность природы или свойство нашего ума». Человек, несомненно, познает закономерности, существующие в природе объективно, вне нашего сознания.

Философские идеи В. И. Ленина благотворно влияют на всю современную науку, они стали прочным идеологическим фундаментом физики наших дней. Это является еще одним подтверждением гениального предвидения В. И. Ленина, сделанного семьдесят лет тому назад, о том, что «Современная физика лежит в родах. Она рожает диалектический материализм». Сейчас можно утверждать, что роды состоялись именно в таком виде, как это предвидел Ленин.

Советские ученые свято чтут заветы В. И. Ленина. Выступая на торжественном заседании, посвященном 250-летнему юбилею Академии наук СССР, Генеральный секретарь ЦК КПСС Л. И. Брежнев сказал: «Советский ученый, если, разумеется, это подлинно советский ученый, во всей своей научной деятельности исходит из научного мировоззрения марксизма-ленинизма, является активным борцом за дело коммунизма, против любых сил реакции и мракобесия». Нет сомнения, что и те юные читатели нашего журнала, которые со временем придут в большую науку, с честью оправдают высокое звание советского ученого, будут успешно служить своему народу, нашей Родине.

М. Барская

Ленин и школа

«Задачи молодежи вообще и союзов коммунистической молодежи и всяких других организаций в частности можно было бы выразить одним словом «Задача состоит в том, чтобы учиться».» Эти слова, произнесенные В. И. Лениным на III Всероссийском съезде Российского Коммунистического Союза Молодежи 2 октября 1920 года, являются ключевыми для понимания отношения молодого Советского государства во главе с В. И. Лениным к делу образования. Мысли о необходимости образования народных масс были высказаны Владимиром Ильичом еще задолго до победы революции... Конец прошлого века. Повальные аресты и облавы выводят из строя марксистские кружки. А в далекой сибирской ссылке молодой революционер, которому еще нет и тридцати, пишет о невозможности построения нового общества без коренного изменения старой школы, набрасывает план создания новой системы образования.

Прошло время. В стране восторжествовала Великая Октябрьская социалистическая революция. Власть перешла в руки народа. Наступили героические годы борьбы и созидания. На всех фронтах велась ожесточенная борьба с интервентами и белогвардейскими бандами. Повсюду были разруха и голод, не хватало топлива и электроэнергии. Но даже в это трудное для страны время В. И. Ленин считал необходимым, в качестве первоочередной задачи, поднять вопрос о создании новой системы народного образования.

На II Всероссийском съезде советов 26 октября 1917 года было на-

В. И. Ленин и Н. К. Крупская среди крестьян деревни Кашино в день открытия сельской электрической станции.

◀

мечено создание комиссариата просвещения, а 9 ноября того же года был принят Декрет Государственной комиссии по народному образованию. Было создано 15 отделов народного образования. Среди них отделы по введению всеобщей грамотности, внешкольного воспитания, школьной медицины и гигиены, школьного строительства, технических школ и политического образования. Ленин пишет: «Наше дело в области школьной есть та же борьба за свержение буржуазии: мы открыто заявляем, что школа вне жизни, вне политики — это ложь и мещанство»*).

Под руководством Владимира Ильича работники комиссариата просвещения проводили большую работу в области строительства новой школы. Ленин неоднократно указывал на важность и сложность этой работы, всячески старался предостеречь своих соратников от ошибок и перегибов. Владимир Ильич постоянно говорил о необходимости умелого использования культурного наследия старого строя.

В эти годы ленинские положения о школе были организационно закреплены в «Положении об Единой трудовой школе РСФСР» от 30 сентября 1918 года.

Статья 1. *Всем школам Российской Социалистической Федеративной Советской Республики, состоящим в ведении Народного комиссариата по просвещению, присваивается наименование «Единая трудовая школа».*

Статья 2. *Единая школа разделяется на 2 ступени: 1-я — для детей от 8 до 13 лет и 2-я — от 13 до 17 лет.*

Статья 3. *Обучение в школе 1 и 2 ступеней бесплатное.*

Статья 5. *В школе 1 и 2 ступеней вводится совместное обучение.*

Статья 6. *Преподавание в стенах школы какого бы то ни было вероучения и исполнения в школе обрядов культа не допускаются.*

Статья 12. *Основой школьной жизни должен служить производительный труд не как средство оплаты издержек на содержание детей и не только как метод преподавания, но именно как производительный общественно-необходимый.*

Статья 18. *Никакие наказания в школе не допускаются.*

Статья 22. *Все школы как 1, так и 2 ступени должны состоять под регулярным наблюдением врачей.*

Статья 32. *Внутренняя жизнь школы должна строиться на началах полной свободы объединения всех членов коллектива в группы и кружки, преследующие образовательные и воспитательные цели, — например, союзы преподавателей, молодежи и т. п.*

В системе нового школьного образования большое внимание уделялось трудовому воспитанию молодежи. В статье «Перлы народного прожектерства» Ленин пишет о том, что «нельзя себе представить идеала будущего общества без соединения

В. И. Ленин — гимназист.

* В. И. Ленин. ПСС, т. 36, с. 77.

Семья Ульяновых. Мария Александровна, Илья Николаевич и их дети: Ольга, Мария, Александр, Дмитрий, Анна и Владимир. 1879 г.

обучения с производственным трудом молодого поколения*)».

Говоря о том вкладе, который внес В. И. Ленин в дело народного образования, нельзя не остановиться на его отношении к народному учителю. Эта тем с детства близка Владимиру Ильичу. Отец В. И. Ленина И. Н. Ульянов более 50 лет своей жизни отдал делу народного образования, и его отношение к народному учителю не могло не сказаться на взглядах Владимира Ильича. В. И. Ленин понимал, что нельзя создать новую школу без завоевания учительства на сторону Советской власти. В ноябре 1917 года был создан Союз учителей-интернационалистов. Ленин одобрял и всячески его поддерживал. На I Всероссийском съезде учителей-интернационалистов он говорил о том, что «задача новой педагогики — связать учительскую деятельность с задачей социалистической организации общества»**).

Еще не раз будет Владимир Ильич обращаться к этому вопросу. «Народный учитель должен у нас быть поставлен на такую высоту, на которой бы никогда не стоял и не стоит и не может стоять в буржуазном обществе. Это — истина, не требующая доказательства. К этому положению дел мы должны идти систематической, неуклонной, настойчивой работой и над его духовным подъемом, и над его всесторонней подготовкой к его действительно высокому званию, и главное, главное и главное, над поднятием его материального положения» — пишет В. И. Ленин в статье «Странички из дневника»*) (январь 1923 года).

Нет вопроса, связанного с народным образованием, который бы не волновал Владимира Ильича. 16 августа 1921 года В. И. Ленин подписывает декрет СНК «О порядке издания учебников». Он заботится о том, чтобы библиотеки страны были снабжены новейшей научной и технической зарубежной литературой.

Для восстановления народного хозяйства необходимо было подготовить знающих специалистов из рабочих и крестьян. Чтобы привлечь молодежь в высшие учебные заведения, нужно было создать новую высшую школу. 2 августа 1918 г.

*) В. И. Ленин. ПСС, т. 2, с. 185.
**) В. И. Ленин. ПСС, т. 36, с. 420.

*) В. И. Ленин. ПСС, т. 45, с. 364.

В. И. Ленин подписал декрет «О приеме в высшие учебные заведения РСФСР» и «Постановление СНК о преимущественном приеме в высшие учебные заведения представителей пролетариата и беднейшего крестьянства». Следующим шагом на пути привлечения трудящихся в высшие учебные заведения было «Постановление СНК о рабочих факультетах», принятое 17 сентября 1920 года.

Рабфаки сыграли огромную роль в преобразовании высшей школы, пополнив вузовские аудитории рабочими и крестьянами.

Все меры, принятые для перестройки системы образования, были направлены на то, чтобы воспитать молодых специалистов, которые с большим подъемом примутся за восстановление народного хозяйства и экономики, добьются успехов в социалистической науке, литературе и технике. Выступая на III Всероссийском съезде Российского Коммунистического Союза Молодежи 2 октября 1920 года, В. И. Ленин сказал: «Только преобразуя коренным образом дело учения, организацию и воспитание молодежи, мы сможем достигнуть того, чтобы результатом усилий молодого поколения было бы создание общества, не похожего на старое, то есть коммунистического общества»*).

В. И. Ленин во дворе Кремля. Москва, октябрь 1918 г.

Со дня проведения III съезда Союза Молодежи прошло почти 60 лет, но мысли, высказанные В. И. Лениным по поводу воспитания молодежи, не потеряли своей актуальности и в наши дни. Продолжая дело В. И. Ленина, Советское правительство постоянно проявляет заботу о школьниках и студентах. Школьные классы и аудитории снабжены новейшим оборудованием. С каждым годом увеличивается тираж школьных учебников, которые теперь бесплатно выдаются учащимся. Постоянно проводится большая работа по привлечению в высшие учебные заведения рабочей и крестьянской молодежи. Почти при всех вузах страны организованы подготовительные отделения.

Выступая на XXV съезде КПСС, Л. И. Брежнев сказал: «Очевидна необходимость дальнейшего серьезного совершенствования всей общеобразовательной системы и, в первую очередь, средней школы. В современных условиях, когда объем необходимых для человека знаний резко и быстро возрастает, уже невозможно делать главную ставку на усвоение определенной суммы фактов. Важно прививать умение самостоятельно пополнять свои знания, ориентироваться в стремительном потоке научной и политической информации. Тут нас ждет большая работа. Конечно, работа осмотрительная, вдумчивая, без ненужной ломки или поспешных решений. Что здесь требуется? Видимо, и улучшение подготовки преподавателей, и приведение самих методов обучения в соответствие с требованиями жизни, и обеспечение школы современными учебными пособиями, в том числе наглядными»**).

*) В. И. Ленин. ПСС, т. 41, с. 301.
**) Материалы XXV съезда КПСС (М., Политиздат, 1976), с. 77.

С. Вавилов

Ленин и физика

Сопоставление имени В. И. Ленина и физики не случайно и не искусственно. Великий теоретик и практик социализма, Ленин, точно так же как Маркс и Энгельс, не мог пройти мимо физики. Среди прочих естественных наук физика занимает центральное место — положение штаба, получающего сведения о периферии и посылающего свои итоги-директивы обратно на периферию. Абстрактная по существу, но опирающаяся на опыт и наблюдение, физика вследствие своей общности служит естественно-научным основанием одновременно философии и техники. Так было во времена Архимеда, Ньютона, Максвелла, и это совершенно очевидно в новой физике.

Борьба за философию диалектического материализма, продолжавшаяся Лениным, вслед за Марксом и Энгельсом, с неизбежностью должна была развертываться на материале этапов новой физики. С другой стороны, как величайший политический деятель, создавший социалистическое государство, В. И. Ленин необходимо должен был встретиться с физикой как основой техники.

Коренная техническая перестройка страны требовала прежде всего укрепления научного, физического фундамента, и, конечно, не случайно в самом начале революции,

Эта статья написана выдающимся советским физиком, президентом Академии наук СССР с 1945 по 1951 год академиком С. И. Вавиловым. Она была опубликована в первом номере журнала «Природа» за 1934 год. Статья перепечатывается с небольшими сокращениями.

Вице-президент Академии наук академик В. А. Стеклов, начальник Военно-медицинской академии В. Н. Тонков, непременный секретарь Академии наук академик С. Ф. Ольденбург и писатель А. М. Горький (слева направо) на приеме у В. И. Ленина 27 января 1921 года.

◄

в момент исключительно тяжелого состояния промышленности, ранее, чем многое другое, были учреждены большие физические научно-исследовательские институты в Москве и Петрограде и при живом участии В. И. Ленина было предпринято широкое физическое обследование Курской магнитной аномалии *).

До сего времени, по-видимому, еще не обработаны документы, конкретно обрисовывающие организующую роль В. И. Ленина в развитии советской физики. Значительно больше известно относительно взглядов Ленина на физику в связи с анализом основ марксистской философии. Книга «Материализм и эмпириокритицизм», опубликованная еще в 1909 году в Москве, на всем своем значительном протяжении касается физики и физиков, а предпоследняя ее часть «Новейшая революция в естествознании и философский идеализм» специально посвящена физике начала XX столетия.

Эпоха опубликования «Материализма и эмпириокритицизма» была исключительно напряженной для физики во всем мире. В эти годы на неожиданных фактах радиоактивности, на явлениях газовых разрядов и на удивительных свойствах света создавалась «новая физика». Строились первые варианты теории атомов, уточнялось понятие об электроне, шли споры о существовании положительного электрона. В это время сформулирован принцип относительности, отпугнувший своей необычностью многих самых смелых, и возникла теория квантов, встреченная в штыки почти со всех сторон, начиная от ее создателя — М. Планка. Это была эпоха фактического крушения классической физики, когда заколыхались ее, казалось, навеки несокрушимые устои — ньютоновская схема абсолютного пространства и времени, постоянство массы и непрерывность действия.

Факт зависимости массы электрона от скорости казался совершенно сокрушительным для «материи» классической физики... Еще несколько лет спустя после опубликования книги Ленина, в 1911 году, в речи на втором менделеевском съезде профессор Н. А. Умов так характеризовал положение дела: «Последующее развитие физики есть процесс против материи, окончившийся ее изгнанием. Но рядом с такой отрицательной деятельностью текла работа реформирования электромагнитной символики: она должна была оказаться способной к изображению свойств материального мира, его атомистического строя, инерции, излучения и поглощения энергии»*).

В этой речи встречаются восклицания, на которые несколькими годами раньше были направлены стрелы «Материализма и эмпириокритицизма». «Не пора ли изгнать материю?... Материя исчезла, ее разновидности заменены системами родственных друг другу электрических индивидов, и перед нами рисуется вместо привычного материального глубоко отличный от него мир электромагнитный»**). Нет сомнения, что для Н. А. Умова как физика электромагнитный мир был объективным миром, что под «исчезновением материи» мыслилось только исчезновение ньютоновской постоянной массы. Но не так воспринимались эти лозунги философами и философствующими естествоиспытателями. «Исчезновение материи» считалось экспериментальным доказательством крушения материализма.

*) В настоящее время Курская магнитная аномалия стала одним из основных источников железной руды в нашей стране. *(Примечание редакции.)*

*) Н. А. Умов. Сочинения, т. III, с. 408.
**) Там же, с. 403—404.

В. И. Ленин у карты ГОЭЛРО.

Разрушая основные представления классической физики, являющиеся вместе с тем привычными образами вненаучного мышления, развивающимися у каждого человека в результате обыденного опыта, новая физика порывала в нескольких пунктах с возможностью представить себе процессы наглядно, на моделях. По словам великого представителя классической, механической физики В. Томсона: «Истинный смысл вопроса: понимаем ли мы, или мы не понимаем физическое явление? — сводится к следующему: можем ли мы построить собственную механическую модель, или нет?». Новые факты были, однако, и остаются теперь в этом смысле непонятными. При таком положении дела на известной фазе развития возможен единственный путь создания физической теории — математическое описание найденных законов и дальнейшая экстраполяция полученных математических форм вплоть до нового опыта, подтверждающего или отвергающего экстраполяцию. Комбинируя опытные данные и математические формы и опираясь на классическую схему, современный физик строит свою теорию. Но на этом неизбежном пути чрезвычайно легко увлечься по ложному следу.

«Крупный успех естествознания, — пишет Ленин, — приближение к таким однородным и простым элементам материи, законы движения которых допускают математическую обработку, порождает забвение материи математиками. «Материя исчезает», остаются одни уравнения. На новой стадии развития и, якобы, по-новому получается старая кантианская идея: разум предписывает законы природе»*).

Крах механического миросозерцания и громадный рост математической символики увлекали физиков либо в сторону упорного, упрямого непризнания новой физики, безнадежных попыток механического объяснения немеханических явлений,

*) В. И. Ленин. ПСС, т. 18, с. 326.

либо к идеализму разных форм и оттенков. Иных путей, если не говорить о стихийных дорогах экспериментаторов, не задумывавшихся о методологических уроках новой физики, не было.

Идеалистические течения, сопровождающие развитие новой физики, нашли весьма благодарную почву в России после революционных неудач 1905 года. В пессимистической и реакционной атмосфере буйно зацвели идеализм и мистика всех видов и во всех областях науки, литературы, искусства и общественных движений. Неустойчивость физического мировоззрения после великих открытий начала века получила в России несомненное общественное и даже политическое значение как идеологическое оправдание реакционных настроений.

Резко полемическая книга Ленина имела прежде всего политическую цель борьбы с реакцией. Ее стрелы направлялись главным образом в гущу идеалистических теорий со всевозможными защитными названиями, создававшимися и в среде рабочей партии под влиянием общей реакции и внешним образом опиравшимися на новую физику.

Вместе с этой политической задачей «Материализм и эмпириокритицизм» разрешал методологические затруднения новой физики. Полемизируя с идеалистическими противниками, Ленин одновременно излагает точку зрения диалектического материализма. Ленин пишет, что «Гартман правильно чувствует, что идеализм новой физики — именно *мода*, а не серьезный философский поворот прочь от естественноисторического материализма»*); даже Мах и Авенариус тайком протаскивают материализм посредством словечка «элемент». Недоразумения новой физики в значительной мере происходят от неправильного понимания философского термина «материя». «Единственное свойство» материи, с признанием которого связан философский материализм, есть свойство быть объективной реальностью, существовать вне нашего сознания. «Это определение сразу раскрывает философскую бессмыслицу утверждений об исчезновении материи».

*) В. И. Ленин ПСС, т 18, с. 304.

Не являясь физиком, Ленин, естественно, не анализирует конкретных трудностей, связанных с новыми фактами, но развивает поразительно правильную общую точку зрения на положение дела, резко отмежевывающую взгляды диалектического материализма от классического механицизма.

«...Диалектический материализм, — говорится в «Материализме и эмпириокритицизме», — настаивает на приблизительном, относительном характере всякого научного положения о строении материи и свойствах ее, на отсутствии абсолютных граней в природе, на превращении движущейся материи из одного состояния в другое, по-видимому, с нашей точки зрения, непримиримое с ним и т. д. Как ни диковинно с точки зрения «здравого смысла» превращение невесомого эфира в весомую материю и обратно, как ни «странно» отсутствие у электрона всякой иной массы, кроме электромагнитной, как ни необычно ограничение механических законов движения одной только областью явлений природы и подчинение их более глубоким законам электромагнитных явлений и т. д., — все это только лишнее *подтверждение* диалектического материализма. Новая физика свихнулась в идеализм, главным образом, именно потому, что физики не знали диалектики. Они боролись с метафизическим ...материализмом, с его односторонней «механичностью»*). «Это, конечно, сплошной вздор,— пишет Ленин в другом месте книги, — будто материализм утверждал «меньшую» реальность сознания или обязательно «механическую», а не электромагнитную, не какую-нибудь еще неизмеримо более сложную кар-

*) В. И. Ленин. ПСС, т. 18, с. 276—277.

В. И. Ленин на испытании первого советского электроплуга в учебно-опытном хозяйстве Московского высшего зоотехнического института 22 октября 1921 года.

тину мира, как *движущейся материи»* *). Этот ясный и простой анализ устраняет все мистические туманы, грезившиеся на путях развития новой физики. Сегодняшний «физический» идеализм «...означает только то, что одна школа естествоиспытателей в одной отрасли естествознания скатилась к реакционной философии, не сумев прямо и сразу подняться от метафизического материализма к диалектическому материализму. Этот шаг делает и сделает современная физика, но она идет к единственно верному методу и единственно верной философии естествознания не прямо, а зигзагами... Современная физика лежит в родах. Она рожает диалектический материализм» **). Таков окончательный диагноз, поставленный Лениным новой физике.

Книга Ленина, своевременно прочтенная физиками, конечно, освободила бы науку от многих последующих воображаемых «кризисов», от тех панических выводов, примеры которых приводились выше; но «Материализм и эмпириокритицизм» по-настощему, внимательно и много стали читать только после Октябрьской революции, и теперь нет надобности подробно излагать книгу, по которой вся Советская страна, в том числе все советские физики, учится диалектическому материализму.

Не утратив для нас и сейчас своего политического значения, «Материализм и эмпириокритицизм» попрежнему весьма актуален для новой фазы развития физики. Диалектический ход ее стремительного роста, предсказанный Лениным, оправдался с потрясающей убедительностью, и снова, как и прежде, «непримиримость» новых фактов с привычным шаблоном, противоречие хотя и несколько усовершенствовавшемуся «здравому смыслу» загоняет нередко физиков в болото идеализма... Дорога диалектического материализма доступна далеко не всем. О ней знают очень многие, но по ней еще надо научиться ходить, ленинский метод должен быть применен к конкретной работе...

*) В. И. Ленин. ПСС, т. 18, с. 296.
**) Там же, с. 331—332.

А. Колмогоров

Диалектико-материалистическое мировоззрение в школьных курсах математики и физики

Владимиру Ильичу Ленину принадлежат слова, в которых выражено первейшее требование к настоящему ученому: «...без солидного философского обоснования никакие естественные науки, никакой материализм не может выдержать борьбы против натиска буржуазных идей и восстановления буржуазного миросозерцания. Чтобы выдержать эту борьбу и провести ее до конца с полным успехом, естественник должен быть современным материалистом, сознательным сторонником того материализма, который представлен Марксом, то есть должен быть диалектическим материалистом». Эти слова в полной мере относятся и к юным читателям «Кванта», любителям физики и математики: их задача состоит не только в том, чтобы накапливать конкретные научные факты и знания, но и в том, чтобы воспитывать в себе диалектико-материалистическое мировоззрение. Вопросы, входящие в школьные курсы математики и физики, дают достаточно много возможностей для того, чтобы на элементарном уровне познакомиться с материалистическим пониманием научных проблем, с элементами диалектического мышления.

О некоторых из этих вопросов рассказывается в докладе академика А. Н. Колмогорова, прочитанном в 1977 году на IV пленуме Ученого методического совета Министерства просвещения СССР. Ниже приводится (с незначительными сокращениями) текст этого доклада. Хотя доклад не предназначался для школьников, мы уверены, что он заинтересует и их.

Обсуждая диалектико-материалистическое мировоззрение в школьных курсах математики и физики , я хочу сделать ударение на более трудной стороне дела: на знакомстве с элементами диалектического мышления. К обсуждению этой темы обычно относятся с некоторым недоверием, так как часто разговор о диалектике остается очень поверхностным.

Например, ссылаются на то, что по словам Энгельса, с появлением в математике переменных величин в математику вошли движение и диалектика. Отсюда делают вывод, что раннее введение переменных в современных учебниках является достижением в смысле внедрения диалектики в школьную математику. При этом забывают о том, что переменная в этих учебниках трактуется просто как буква, вместо которой можно поставить наименование любого элемента некоторого множества. Диалектика здесь кроется глубже — за этим формальным определением. Ее понимание требует развернутого исторического подхода к делу.

Я хочу на конкретных примерах проиллюстрировать свою мысль.

1. Вы все хорошо знаете дифференциальное уравнение показательного роста или убывания («Алгебра и начала анализа 10», п. 110)

$$f'(t)=kf(t),$$

в краткой записи

$$y'=ky.$$

В качестве первого примера в учебнике приводится радиоактивный распад вещества: $f(t)$ обозначает количество распадающегося вещества, сохранившего к моменту времени t. Здесь коэффициент k отрицателен. В виде второго примера с положительным k рассмотрен рост населения страны на 2% в год. Вот этот второй пример и вызывает у многих недоумение или даже резкий протест. Как же, говорят ревнители математической строгости, дифференцировать функцию, принимающую только целые значения! Возмущение сменяется замешательством после напоминания, что в случае радиоактивного распада речь идет тоже о целом числе атомов, сохранившихся к моменту времени t.

Между тем это хороший повод для того, чтобы подчеркнуть: математическая модель явления, как правило, это явление схематизирует. Поэтому она дает правильные предсказания лишь в некоторых пределах (в нашем случае лишь при большой численности населения и для не слишком малых промежутков времени). За этими пределами математическая модель теряет реальный смысл и при ее бездумном применении приводит к ошибочным или бессмысленным результатам.

2. Общеизвестны ставшие классическими примеры: ньютоновская механика при обычных земных скоростях объективно правильно отражает реальные явления, но при скоростях, сравнимых со скоростью света, перестает быть применимой — приводит к противоречию с опытом. За пределами годности ньютоновской механики действует уже другая — механика теории относительности Эйнштейна. Но крайне важно проиллюстрировать и на более простых примерах этот диалектический процесс перехода от одних моделей, объективно правильных в некоторых пределах, к новым. Разберу подробно один пример из механики, который я разбирал со школьниками в летней школе в Пущино в этом году.

В курсе физики для VIII класса правильно говорится, что во многих задачах достаточно маленькое материальное тело можно считать «материальной точкой» — пренебрегать его размерами. Таким является подброшенный вверх мяч, двигающийся по закону

$$z = v_0 t - \frac{gt^2}{2}.$$

Его скорость меняется по закону

$$v = v_0 - gt,$$

а ускорение постоянно

$$a = -g.$$

Координата z и скорость v меняются непрерывно. В учебнике говорится, что так и должно быть в общем случае движения материальной точки. Действующие на тело силы всегда конечны. Поэтому конечно и ускорение, откуда уже вытекает непрерывность зависимости от времени скорости и координаты z. Но на практике мяч, ударившись об пол, сразу меняет направление движения и подпрыгивает вверх. Так как мяч не совершенно упругий, при втором прыжке его начальная скорость будет

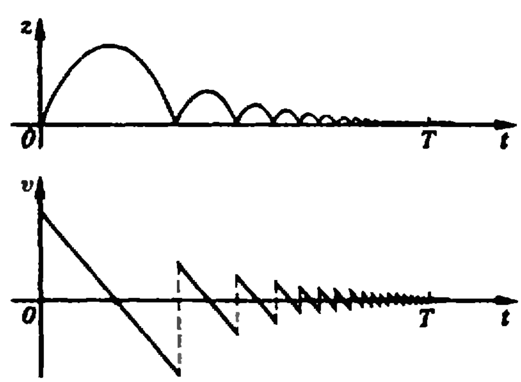
$$v_1 = kv_0,$$

где коэффициент k меньше единицы. Приняв, что коэффициент k постоянен при последовательных прыжках, можно рассчитать весь дальнейший ход процесса. Школьникам было предложено проделать расчеты и нарисовать графики зависимости z, v и a от времени при различных коэффициентах k. С этим заданием они справились самостоятельно, хотя результаты их очень удивили и вызвали много споров.

Оказалось, что последовательные моменты ударов об пол t_n при растущем n сходятся к конечному пределу T: за промежуток времени $[0;\ T]$ происходит бесконечная последовательность подскоков все уменьшающейся высоты.

Конечно, эта модель идеализирована; для подскоков на высоту того же порядка, что и диаметр мяча, она не применима. Но модель вполне реалистична. Быстрое учащение моментов удара об пол и полная остановка мяча через время T наблюдаются достаточно явственно даже просто «на слух». На рисунке представлены схематические графики зависимости z и v от времени t.

В момент удара t_n скорость меняется скачком от отрицательного значения $-v_{n-1}$ к значению $v_n = kv_{n-1}$. Ускорение все время равно $-g$, за исключением моментов удара t_n. В эти моменты мяч получает мгновенные импульсы конечной величины.



Обращение к мгновенным импульсам, сразу меняющим скорость, имеет длительную традицию. Все старые учебники физики содержат трактованные таким образом задачи о столкновении шаров и ударах бильярдных шаров о стенки. При желании говорить об ускорениях в моменты удара, приходится далеко выходить за рамки школьного курса и обращаться к так называемым «дельта-функциям».

После обсуждения мы со школьниками сделали вывод, что вообще говоря правильный тезис о конечности сил (и вытекающей из нее непрерывности зависимости скорости от времени) пришел в противоречие с рассмотрением нашего мяча как материальной точки. Но практически правильным оказался не переход к рассмотрению мяча как конечного деформируемого тела, а введение в модель мгновенных импульсов.

С точки зрения математики задача интересна тем, что дает пример употребления в реальной задаче разрывных функций: для скорости $v(t)$ точки разрыва t_n сгущаются в точке T, где функция $v(t)$ непрерывна. Функция $z(t)$ в точке T оказывается даже дифференцируемой с производной z', равной нулю.

Последние замечания интересны уже только для математика. Здесь мы исследуем построенную модель за пределами ее применимости. Это, однако, типично для подхода чистого математика.

Чтобы до конца разобраться в этом примере, предлагаю решить следующую задачу.

З а д а ч а. *Произвести полный расчет движения мяча из примера 2. Найти зависимость T от v_0 и k. Начертить графики $z(t)$, $v(t)$ и $a(t)$ при различных k (например, 0,9, 0,5 и 0,2). Исследовать эти функции на непрерывность и дифференцируемость.*

Я выше употребил выражения «с точки зрения математика», «с точки зрения физика». Конечно, и математики, и физики исследуют конкретные явления природы, которые безусловно едины в своей основе. Но подход математика и физика к изучению явления различен. Это отличие хорошо видно на следующем примере. При изучении числа π — отношения длины окружности к ее диаметру — в младших классах мы, по существу, следуем подходу к делу физика: измеряем диаметр блюдца и его периметр, после деления получаем приблизительно $\pi \approx 3{,}14$. Современная наука и техника требуют знания этого отношения с много большей точностью.

Но на уроках математики учащиеся знакомятся с приемами вычисления π с любой точностью. Им рассказывают, что математики при помощи вычислительных машин нашли 2000 десятичных знаков числа π. Здесь уместно спросить учащихся, какой реальный смысл они связывают с этими достижениями математиков. Являются ли они надежным предсказанием результата каких-то будущих реальных измерений? Это элементарный подход к проблематике, которая возникает перед учащимися при обсуждении смысла неевклидовых геометрий в математике и вопроса о геометрии Вселенной в целом.

Суть различия между подходами к делу математика и физика популярно можно объяснить так. И тот и другой отправляются от некоторого запаса наблюдений, создают схематические модели реальных явлений. Математик, взявшись за изучение такой модели, изучает последовательно все следствия из положенных в основу модели допущений, хотя бы они далеко выходили за рамки исходных наблюдательных данных. Физик проверяет соответствие модели новым наблюдениям и при обнаружении расхождений переключается на создание более гибкой модели, содержащей первоначальную лишь в качестве первого приближения. Раскрыть все пути плодотворного сотрудничества математиков и физиков и является увлекательной задачей межпредметных связей. Когда-то мне случалось преподавать в одном и том же классе математику и физику. Но я при этом любил подчеркнуто делать различие, говоря, что сейчас я буду рассуждать как математик, а в другой раз выступать как убежденный физик.

3. Общеизвестно, что воспитание научного материалистического мировоззрения невозможно без ознакомления учащихся с историей науки и понимания учащимися основных этапов развития науки. Именно из этих соображений в новую программу по математике введено понятие о простейших дифференциальных уравнениях. Изучаются детально лишь три уравнения: равномерно-ускоренного движения

$$y''=a,$$

гармонических колебаний

$$y''=-k^2y$$

и показательного роста или убывания

$$y'=ky.$$

Напомню, что для Ньютона существовали две основные задачи анализа: 1) нахождение по функциям их производных, 2) нахождение по соотношениям между функциями и их производными самих этих функций. Вторая задача и есть задача интегрирования дифференциальных уравнений. Задачу нахождения первообразных Ньютон рассматривал как простой частный случай.

С понятием дифференциального уравнения неразрывно связана вся идеология математического естествознания от Ньютона до Лапласа. Общий принцип детерминизма Лаплас излагал, исходя из того, что основные законы природы выражаются в форме дифференциальных уравнений, а их интегрирование позволяет по-настоящему предсказывать будущее. Интегрирование соответствующих дифференциальных уравнений, как известно, представляет собой грандиозную задачу, решаемую лишь численными методами. Но ясное представление о задаче дать нетрудно. Без достаточно конкретного понимания этого этапа развития математического естествознания невозможно и понимание дальнейших этапов, появления статистической физики, квантовой физики.

4. Со времени Платона существование чистой математики с ее абсолютно достоверными выводами, выходящими за пределы эмпирической проверки, которая всегда лишь приближенна, использовалось как аргумент в пользу идеализма. Мы обязаны показать вполне конкретное, материальное происхождение математических предложений. В частности, не следовать за старыми учебниками, выдававшими аксиомы геометрии за «истины, не требующие доказательства в силу своей очевидности».

В учебниках геометрии VI и VII классов говорится об аксиомах лишь в историческом плане. Лишь в VIII классе обсуждается задача выделения небольшого числа предложений, достаточных для вывода всех остальных, то есть выбора системы аксиом. Как известно, вне такой постановки вопроса подчеркивание различия между «аксиомами» и «теоремами» лишено ясного смысла.

Отметим далее, что в вопросе взаимоотношений аксиоматической теории и действительности, математической модели и реального мира проявляется глубокая диалектическая взаимосвязь теории и практики. Слово «модель» получило широкое распространение в популярной литературе и вполне доступно учащимся. Следует подчеркнуть, что, создавая схематизированные модели действительности, мы получаем вполне реальное знание о самой действительности. Лишь за пределами своей применимости модель теряет реальное значение и должна быть заменена новой, более совершенной.

М. Смолянский

Умножение... точек на плоскости

«Умножать точки — разве это возможно? — спросит удивленный читатель. — Ведь умножают (и складывают) числа, а не точки!» Такому читателю легко возразить: во-первых, действительные числа часто рассматривают как точки на числовой оси, поэтому в этом смысле можно умножить точки; во-вторых, в современной математике умножают не то что точки, а почти все что угодно: функции, матрицы, перемещения...

В этой статье мы постараемся показать читателю, как и зачем нужно умножать точки на плоскости. На этом пути мы получим геометрическую модель комплексных чисел и изучим некоторые их свойства. А кроме того, мы покажем, что разумно умножать точки в пространстве уже нельзя.

Прежде чем научиться умножать точки на плоскости, будет полезно посмотреть...

Как умножаются точки на прямой

Чтобы сложить две точки на прямой, достаточно фиксировать начало O: тогда точки можно складывать как векторы. Если зафиксировать точку A и прибавить ее к каждой точке X на прямой, получим отображение $X \to X+A$ прямой на себя. Ясно, что это будет *параллельный перенос всей прямой на вектор* $\overrightarrow{OA}$ (рис. 1а). Для умножения нужно еще фиксировать единицу I: тогда точки приобретают координаты, и с их помощью точки можно перемножать (как числа); при этом, как легко видеть, *умножение всех точек прямой на фиксированную точку A — это гомотетия с центром O, переводящая точку I в точку A* (рис. 1, б).

Определим умножение на плоскости

Прежде всего выясним, какое умножение мы хотим определить на нашей плоскости, в которой уже выбрана числовая ось Ox с единицей I (рис. 2). (Заметим, что сложение точек уже определено: наличие начала O позволяет складывать точки как векторы, по правилу параллелограмма.) Мы, конечно, хотим, чтобы новое умножение совпадало с тем, которое уже есть на оси Ox (мы будем называть эту ось *действительной*). Поэтому мы потребуем:

I. *Умножение на любую точку A действительной оси Ox есть гомотетия с центром O и коэффициентом x, где x — абсцисса точки A.*

Но этого, конечно, мало. Нам еще нужно, чтобы наше умножение обладало обычными свойствами арифметических операций. Именно:

II. *Умножение ассоциативно, дистрибутивно относительно сложения, и определено деление на любую точку A, отличную от O.*

Запишем эти свойства более подробно:

IIа. Ассоциативность. Для любых точек A, B, C: $A(BC) = A(BC)$.

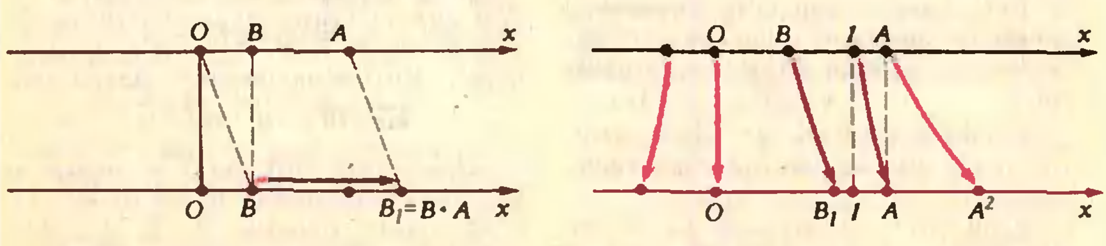


Рис. 1.

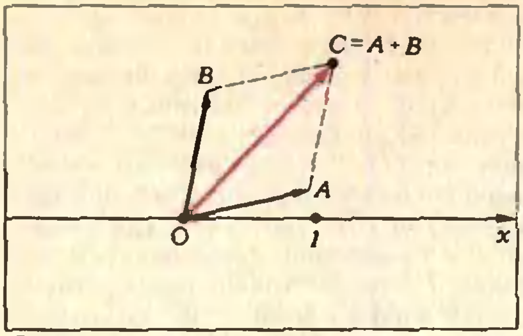


Рис. 2.

IIб. Дистрибутивность. Для любых точек A, B, C

$$A(B+C)=AB+AC,$$

$$(B+C)A=BA+CA.$$

IIв. Деление (существование обратного). Для любой (отличной от O) точки A существует точка A^{-1} такая, что

$$A^{-1}A=AA^{-1}=1.$$

Итак, нам нужно построить операцию умножения на плоскости, удовлетворяющую условиям I и II. Стоп: пока не читайте дальше, а подумайте сначала, как это сделать.

Ну как, придумали? Конечно же, проще всего определить умножение «так же», как для точек на действительной оси. Именно, *умножение на точку A — это подобие плоскости, переводящее точку I в точку A, оставляющее на месте точку O и сохраняющее ориентацию.* Наглядно можно себе представить, что мы поворачиваем плоскость около начала так, чтобы луч $[OI)$ совпал с лучом $[OA)$, а затем делаем гомотетию, переводящую точку I в точку A.

Ясно, что для такого умножения выполняется условие I.

Упражнение 1. *Докажите, что выполнено также II и, более того, умножение коммутативно.*

Прежде чем читать дальше, разберите, как устроено умножение на конкретные точки, например, $I(0,1)$, $J(-1,0)$, $C(1,1)$.

Естественно спросить, является ли введенное нами умножение единственным, обладающим свойствами I и II.

Упражнение 2*. *Докажите, что такое умножение не единственное.*

Если это упражнение не будет получаться, то советуем вернуться к нему после прочтения дальнейшего. В следующем же разделе мы выясним...

Можно ли определить умножение в пространстве?

Как и плоскость, наше пространство снабжено числовой осью Ox с единицей I; мы будем искать умножение, удовлетворяющее тем же условиям, что и в предыдущем разделе, то есть отвечать на такой вопрос: *можно ли в пространстве ввести умножение, удовлетворяющие условиям I и II?*

Окрыленные предыдущими успехами, вы скажете: конечно, можно, притом так же, как раньше: умножение на точку A — это подобие пространства, переводящее I в A и O в O. Но тут получится небольшая загвоздка:

Упражнение 3. *Покажите, что при A, не лежащей на действительной оси, существует бесконечно много таких подобий.*

Какое из них брать? Да возьмем любое, скажет оптимист. На это мы ему возразим, что вряд ли из этого выйдет что-либо путное: ведь умножения на разные точки должны быть согласованы (так, чтобы выполнялось условие II). Как их согласовать?

Не пробуйте — не получится. Дело в том, что *умножения в пространстве со свойствами I и II не существует!* Мы докажем это от противного.

Допустим, нам удалось определить некоторое умножение. Возьмем произвольную точку X вне оси Ox и рассмотрим ее степени X^2 и X^3 (то есть точки $X\cdot X$ и $(X\cdot X)\cdot X$).

В силу одной из аксиом геометрии, предложенных Г. Вейлем («Геометрия 9—10», с. 234), для любых четырех векторов пространства $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ можно найти такие действительные числа k, l, m, n, не все равные нулю, что выполняется равенство

$$k\vec{a}+l\vec{b}+m\vec{c}+n\vec{d}=\vec{0}.$$

Применим этот факт к четырем векторам, соединяющим точку O с четырьмя точками I, X, X^2, X^3; тогда существуют действительные числа (в нашей терминологии —

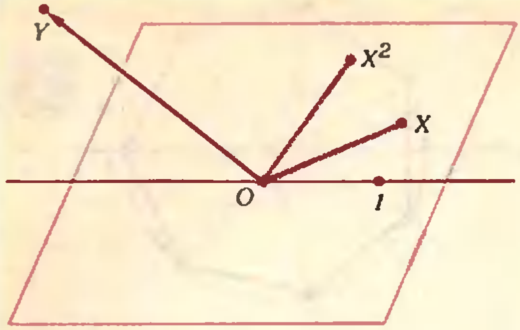


Рис. 3.

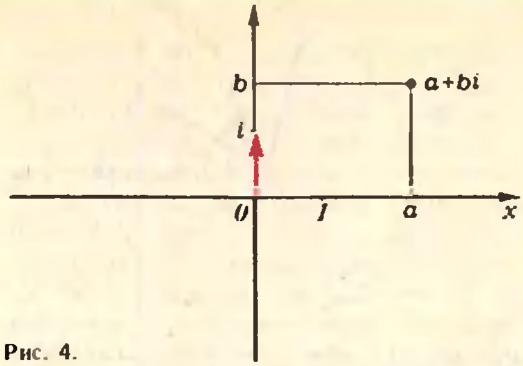


Рис. 4.

точки действительной оси) A, B, C, D такие, что выполняется равенство:

$$A+BX+CX^2+DX^3=0 \quad (1)$$

Упражнение 4. *Объясните, почему $A\cdot I=A$.*

Теперь нам потребуется следующий факт:

Упражнение 5*. *Любое уравнение третьей степени имеет действительный корень.*

(Если вам трудно решить это упражнение, посмотрите «Квант», 1980, № 2, с. 20.)

Обозначим этот корень (точку на действительной оси) через X_0; тогда для некоторых чисел (точек на действительной оси) C', B'

$$(X-X_0)(DX^2+C'X+B')=$$
$$=A+BX+CX^2+DX^3.$$

Так как произведение ненулевых сомножителей не может дать нуль (это следует из условий IIа, IIв: если $Q\neq 0$, $P\neq 0$ и $P\cdot Q=0$, то $0=0\cdot Q^{-1}=P\cdot Q\cdot Q^{-1}=P\cdot I=P\neq 0$), одна из этих скобок равна нулю. Так как X — не «действительная» точка, $D\neq 0$ и точки 0, I, X и X^2 лежат в одной плоскости. Рассмотрим теперь точку Y, не лежащую в этой плоскости (рис. 3).

Рассмотрим четыре точки I, X, Y, YX, лежащие в пространстве; еще раз применяя (ту же) аксиому, можно подобрать такие точки B_1, B_2, B_3, B_4 на действительной оси, не все равные нулю, что

$$B_1+B_2X+B_3Y+B_4YX=0.$$

Иначе это можно записать так:

$$(B_1+B_2X)+Y(B_3+B_4X)=0. \quad (2)$$

Заметим, что в плоскости, содержащей 0, I, X, есть точка Y_0, удовлетворяющая уравнению (2).

Упражнение 6. *Запишите ее в виде C_1+C_2X и найдите C_1 и C_2, воспользовавшись уравнением $DX^2+C'X+B'=0$.*

Но тогда $(Y-Y_0)(B_3+B_4X)=0$, откуда $Y=Y_0$, то есть точка Y лежит в той плоскости, вне которой она была выбрана. Противоречие. Нет нужного нам умножения в пространстве!

Для тех, кто знает, что такое четырехмерное пространство, отметим, что в нем ввести умножение (удовлетворяющее условиям I и II) можно, но это умножение не будет коммутативным. Это не просто, но попробуйте это сделать!

Вернемся теперь на плоскость. Что же мы там получили?

Точки как комплексные числа

Будем считать, что действительная прямая горизонтальна, и рассмотрим вектор единичной длины, торчащий вверх (рис. 4). Обозначим его через i. Легко видеть, что $i^2=-1$. Итак, для плоскости разрешимо уравнение $x^2+1=0$; расширив действительную прямую до плоскости, мы получили возможность решать уравнение, которое для прямой не разрешимо.

Любую точку плоскости можно записать в виде $a+bi$, где a и b — действительные точки; сложение и умножение точек, записанных таким образом, задается формулами:

$$(a_1+ib_1)+(a_2+ib_2)=$$
$$=(a_1+a_2)+i(b_1+b_2),$$
$$(a_1+ib_1)\cdot(a_2+ib_2)=$$
$$=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+b_1a_2).$$

Упражнение 7. *Выведите эти формулы из геометрических определений.*

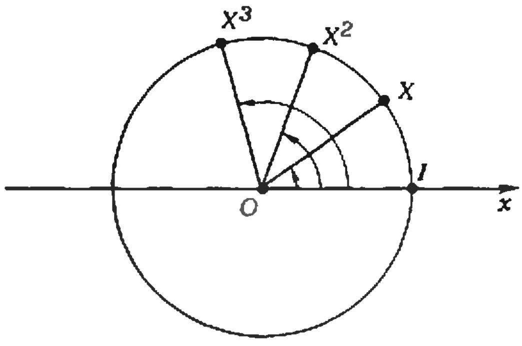


Рис. 5.

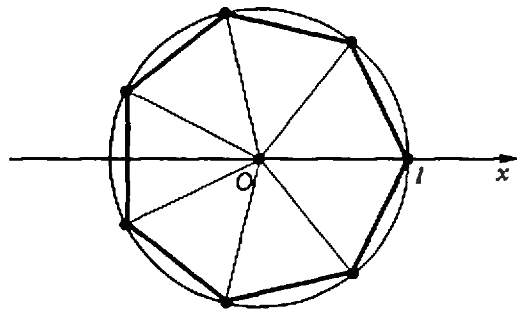


Рис. 6.

Эти формулы показывают, что наши точки, их сложение и умножение — геометрическая модель *комплексных чисел* *). Легко получить такой замечательный факт: *любое уравнение $AX^2+BX+C=0$ (где A, B, C — точки плоскости и $A\neq 0$) разрешимо* — на плоскости существует точка, обращающая его в тождество. На самом деле на плоскости разрешимо любое алгебраическое уравнение (см. «Квант», 1980, № 2, с. 17).

Упражнение 8. *Напишите формулу для решения квадратных уравнений на плоскости.*

Формулы для корней n-й степени

Как вы знаете, для действительных чисел, а значит и для действительной прямой, уравнение $X^n=A$ при $A\neq 0$ и четных n не всегда разрешимо. Причем оно либо неразрешимо, либо разрешимо двузначно. (Например, 1 и −1 в квадрате дают единицу.) Для плоскости ситуация намного изящней: *для каждой отличной от нуля точки A у уравнения $X^n=A$, n — натуральное число, существует ровно n корней.*

Для того чтобы доказать это, научимся сперва возводить в степени точки, лежащие на окружности Г единичного радиуса с центром в нуле (рис. 5). Эта окружность обладает таким замечательным свойством: *произведение двух точек из Г — вновь точка окружности* Г. В самом деле, умножение плоскости на точку этой окружности — просто поворот с центром в нуле. Поскольку при поворотах единичная окружность, как и все другие окружности с центром в нуле, переходит в себя, наше утверждение справедливо. Заодно мы получили новый способ записи поворота — как умножения на соответствующую точку.

Теперь ясно, что такое X^n для $X\in\Gamma$. Умножение на X^n — это композиция n поворотов на угол, соответствующий точке X, поэтому точке X^n соответствует угол в n раз больший угла XOI. Итак, X^n — это точка Г, для которой

$$X^n\widehat{O}I=n\cdot X\widehat{O}I.$$

С учетом знака угла точка X^n определяется этой формулой однозначно.

Но теперь понятно и как отыскать корень уравнения $X^n=A$, если $A\in\Gamma$: это такая точка $X\in\Gamma$, что

$$X\widehat{O}I=\frac{1}{n}A\widehat{O}I.$$

Ну, а где же обещанные n значений? Оказывается, они спрятаны в этой формуле. Действительно, мы можем определять величину угла AOI с точностью до числа радиан, кратных 2π: углам $A\widehat{O}I$, $A\widehat{O}I+2\pi$, $A\widehat{O}I+4\pi$, ..., вообще $A\widehat{O}I+2\pi k$, где k — целое, соответствует одна и та же точка. А при определении X для разных k получатся разные точки. Легко видеть, что получится как раз n разных точек, отвечающих углам величины $\frac{1}{n}A\widehat{O}I+2\pi\frac{k}{n}$ ($k=0, 1, \ldots, n-1$). На рисунке 6 изображены корни седьмой степени из единицы. Видно, что они образуют вершины правильного семиугольника.

*) См. «Квант», 1980, № 2, с. 17.

(Окончание см. на с. 29)

В. Майер

Оптические опыты с глазом

Экспериментальное исследование

После проведения модельных опытов и их тщательного анализа (см. «Квант» № 3, с. 19) можно приступать к экспериментам непосредственно с глазом.

1. Зажгите настольную лампу с матовым колпаком (или какой-нибудь другой протяженный и довольно резко очерченный источник света) и поставьте ее на расстоянии около метра от себя. Перед глазом расположите небольшое плоское зеркало так, чтобы оно не перекрывало прямых лучей, падающих от лампы на глаз. В зеркале вы увидите изображение лампы на зрачке глаза.

Ясно, что это изображение создано отраженными от глаза лучами. Но почему оно одно? Ведь модельные опыты показали, что должно быть четыре изображения!

Сравним между собой яркости всех возможных изображений. Для этого в формулу для коэффициента отражения света k подставим конкретные значения показателей преломления роговицы, водянистой жидкости, хрусталика и стекловидного тела. Получим, что от передней поверхности роговицы отражается 2,5%, от задней поверхности роговицы — 0,02%, а от передней и задней поверхностей хрусталика — по 0,03% падающего на глаз светового потока. Это означает, что яркость первого изображения приблизительно в сто раз больше яркости остальных изображений. Вот почему в опыте видно только одно изображение — полученное отражением света от передней поверхности роговицы.

Теперь оцените радиус кривизны передней поверхности роговицы. Вплотную к глазу приставьте линейку (как показано на рисунке 1) и вместе с линейкой и зеркалом приближайтесь к лампе (или удаляйтесь от нее) до тех пор, пока ширина l_1 изображения лампы не станет равной, например, 1 мм. Измерьте расстояние d между глазом и лампой и поперечный размер l лампы. По формуле для увеличения предмета $\Gamma = \frac{l_1}{l} = \frac{R}{2d}$ вычислите радиус кривизны R передней поверхности роговицы.

В одном из наших опытов измерения дали следующее: $l = 120$ мм, $l_1 = 1$ мм, $d = 450$ мм; отсюда радиус кривизны

$$R = \frac{2dl_1}{l} = 7{,}5 \text{ мм}.$$

2. В затемненной комнате на расстоянии около полуметра от себя посадите партнера и попросите его, не отрываясь, смотреть, например левым глазом, на какой-нибудь предмет, находящийся на расстоянии нескольких метров за вами. Сбоку от его глаза на расстоянии 10—20 см поместите лампочку для карманного фонаря и зажгите ее. Своим правым глазом вы сразу увидите маленькое довольно яркое изображение нити лампочки на зрачке глаза партнера.

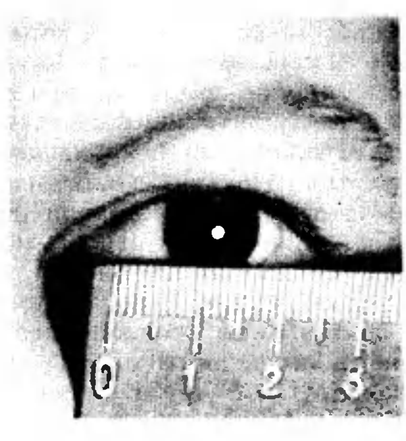


Рис. 1.

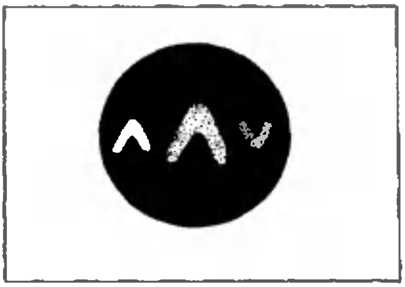


Рис. 2.

Перемещайте лампочку вверх и вниз, вправо и влево (при этом ваш партнер должен непрерывно смотреть на удаленный предмет, а не водить глазами вслед за лампочкой). При внимательном наблюдении вы заметите в зрачке еще два, правда гораздо более слабых, изображения: большее и меньшее по сравнению с первым.

На рисунке 2 схематически изображены зрачок глаза и все три изображения нити лампочки: первые два — прямые, а третье — перевернутое.

Обратите внимание, что при движении лампочки второе изображение перемещается в том же направлении, что и первое, а третье — в противоположном направлении.

Сопоставьте результат этого опыта с результатами модельных экспериментов. Очевидно, что первое — прямое и самое яркое — изображение создается передней поверхностью роговицы (как и в предыдущем опыте). Третье изображение (перевернутое) может быть создано только вогнутым зеркалом, то есть задней поверхностью хрусталика. Второе изображение (прямое, как и первое) создается либо задней поверхностью роговицы, либо передней поверхностью хрусталика. Чем же именно?

Как мы уже говорили, на самом деле в глазу должны быть четыре изображения, а в опыте наблюдаются только три. Почему? Оказывается, все дело в том, что роговица очень тонка и задняя ее поверхность имеет практически такую же кривизну, как передняя. Следовательно, изображения, создаваемые обеими поверхностями, должны находиться очень близко друг от друга. Поскольку яркость изображения, создаваемого передней поверхностью роговицы, гораздо больше яркости изображения, полученного от ее задней поверхности, увидеть последнее изображение на фоне первого практически невозможно. Точные измерения показали, что для среднего глаза толщина роговицы составляет 0,5 мм, а радиусы кривизны ее передней и задней поверхностей — 7,7 мм и 6,8 мм соответственно. (Сравните первое значение радиуса кривизны с тем, которое вы получили в опыте 1.)

Таким образом, второе изображение нити лампочки (см. рис. 2) обусловлено отражением света от передней поверхности хрусталика. Но отсюда и из того, что третье изображение получается при отражении света от задней поверхности хрусталика, следует, что хрусталик действительно существует!

3. Для проведения следующего опыта нужна предварительная подготовка. На расстоянии 20—30 см от глаза партнера поставьте небольшой предмет (например, белый бумажный диск диаметром около 1 см, закрепленный пластилином на конце карандаша). Попросите партнера посмотреть сначала на удаленный предмет, затем — на близкий предмет, а сами наблюдайте за его глазом. Если зрачок глаза и оба предмета находятся на одной прямой, при аккомодации глаза партнера сам глаз будет оставаться неподвижным. Постарайтесь добиться этого, иначе эксперимент окажется неубедительным.

На деревянной палочке (или карандаше) резиновыми колечками закрепите две лампочки для карманного фонаря на расстоянии 5—10 см друг от друга. Лампочки будут обозначать концы предмета, изображения которого вы будете наблюдать при отражении света от глаза партнера.

Попросите партнера смотреть на удаленный предмет. Перемещая горящие лампочки сбоку от глаза партнера, получите в его зрачке три изображения лампочек. На фотографии, приведенной на рисунке 3, изображены сами лампочки и их первые изображения, создаваемые роговицей глаза (остальные изображения сфотографировать не удалось, потому что они слишком слабые). На рисунке 4, *а* схематически показаны все три изображения лампочек в зрачке.

Теперь попросите партнера посмотреть исследуемым глазом на близкий предмет. Вы увидите, что вторые изображения лампочек, созданные передней поверхностью хрусталика, окажутся значительно ближе друг к другу (рис. 4, *б*). Первые изображения, полученные от передней поверхности роговицы, останутся практически на том же расстоянии друг от друга, а третьи изображения, созданные задней поверхностью хрусталика, слегка сблизятся.

Получается, что при аккомодации глаза на более близкое расстояние сильно уменьшается изображение предмета, созданное передней поверхностью хрусталика, слегка уменьшается изображение, созданное задней поверхностью хрусталика, и практически не изменяется изображение, образованное передней поверхностью роговицы. Отсюда можно сделать вывод: аккомодация глаза на более близкое расстояние происходит, в основном, за счет уменьшения радиуса кривизны передней поверхности хрусталика.

Рис. 3.

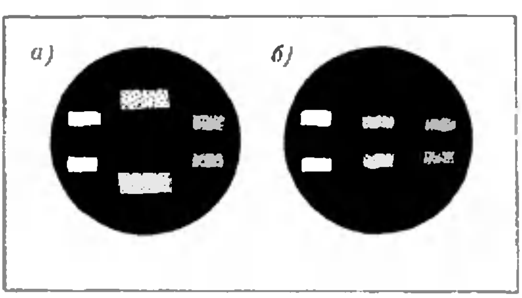


Рис. 4.

Таким образом, не видя самого хрусталика, вы не только доказали, что он существует, но и выяснили, как он действует.

Анализ полученных результатов

Подведем итоги. Что же можно доказать, проделав указанные эксперименты? Во-первых, что в глазу действительно есть хрусталик. Во-вторых, что роговица глаза очень тонкая и кривизна ее обеих поверхностей практически одна и та же. В-третьих, что показатели преломления водянистой жидкости и стекловидного тела очень мало отличаются от показателей преломления роговицы и хрусталика. В-четвертых, что аккомодация глаза обусловлена изменением кривизны поверхности хрусталика.

Заключение

Обычно в заключении выполняют то, что обещано во введении. Мы не хотим нарушать разумных традиций.

Сядьте так, чтобы настольная лампа находилась за вами, точнее — немного в стороне, на расстоянии 1,5—2 м от вашей головы. Перед собой на расстоянии около полуметра посадите вашего терпеливого партнера. Дайте ему в руку кусок старого зеркала, у которого сзади удален слой защитной краски и серебра с участка диаметром 5—7 мм. Попросите партнера смотреть в ваш глаз через отверстие в зеркальном слое и поворачивать зеркало до тех пор, пока на ваш глаз не попадет отраженный зеркалом свет лампы (вы без труда сумеете это зафиксировать). Именно в этот момент партнер и увидит, что зрачок вашего глаза светится... красным светом!

С. Александров

Измельчающиеся узоры

Посмотрите внимательно на первую страницу обложки — на ней в правильном пятиугольнике расположен бесконечный набор пятиконечных звезд, измельчающихся к его сторонам. Цель очередного занятия математического кружка — разобраться в этом красивом построении и понять, как можно строить сходные узоры.

Задача о звездной площади

Узор на обложке получен следующим образом:

Рассмотрим правильный пятиугольник, в котором проведены все 5 диагоналей (центральный «черный» пятиугольник на обложке). Концы диагоналей назовем *внешними вершинами* образовавшейся пятиконечной звезды, а точки пересечения диагоналей, лежащие внутри пятиугольника, назовем *внутренними вершинами* этой звезды.

К этой звезде (назовем ее звездой *нулевого порядка*) присоединим 5 подобных ей звезд меньшего размера (звезды *первого порядка*) так, что три внешние вершины каждой звезды первого порядка совпадают с тремя смежными вершинами звезды нулевого порядка: двумя внешними и одной внутренней.

Вокруг звезд первого порядка подобным же образом построен пояс из 15 еще меньших звезд второго порядка, причем некоторые из этих звезд по необходимости частично перекрывают друг друга, так что у пары таких звезд общими являются одна сторона и, кроме того, одна внешняя вершина. Назовем такую фигуру — объединение двух частично перекрывающихся звезд — *двойной звездой.*

Вокруг звезд второго порядка точно так же построен пояс звезд третьего порядка, тоже содержащий как одиночные, так и двойные звезды, затем — пояс звезд четвертого порядка и т. д.

Задача 1. *Определить отношение суммарной площади всех звезд (одиночных и двойных) к площади исходного пятиугольника.*

Площадь «человечка»

Для решения этой задачи полезно рассмотреть не звезды, а тот фон, который не занят ими. Фигура, напоминающая лист дикого винограда или смешного человечка с приподнятой шляпой, повторяется многократно во все уменьшающемся размере и притом так, что эти фигуры попарно не пересекаются, а их объединение составляет весь фон. Вокруг каждой такой фигуры можно описать ромб с углом 72° при вершине (рис. 1).

Задача 2. *Найти отношение площади части ромба, дополняющей человечка (и его шляпу!), к площади всего ромба.*

(Возможно, вы угадали, что ответ к задаче 2 равен... ответу к задаче 1.) На рисунке 2 читатель найдет самостоятельно*):

$$\alpha = 36^\circ,\ a = dq,$$
$$b_1 = a \operatorname{tg} \alpha = a\sqrt{5-2\sqrt{5}},$$
$$b_2 = b_1 q,\ b_3 = b_2 q = b_1 q^2,$$
$$b_4 = b_3 q = b_1 q^3,\ b_5 = b_1 q^4,$$

где $q = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0{,}618034$. В результате искомое отношение p равно

$$p = 77\sqrt{5} - \frac{343}{2} \approx 0{,}677234.$$

*) Если эти вычисления вызовут у вас трудности, прочитайте сначала следующий раздел

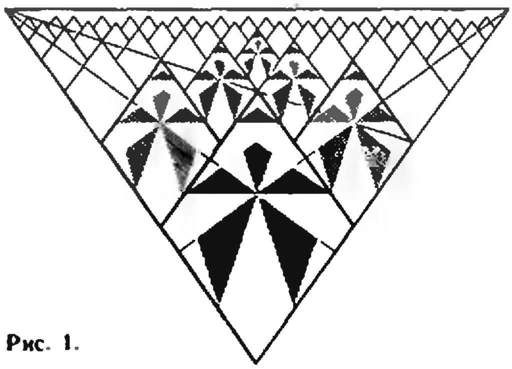


Рис. 1.

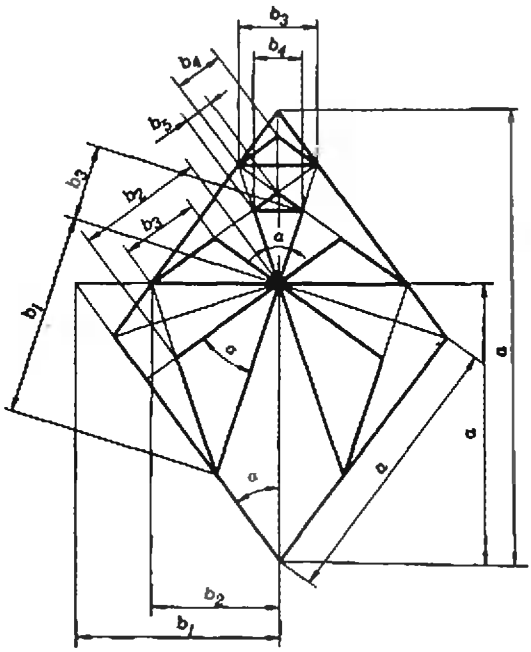


Рис. 2.

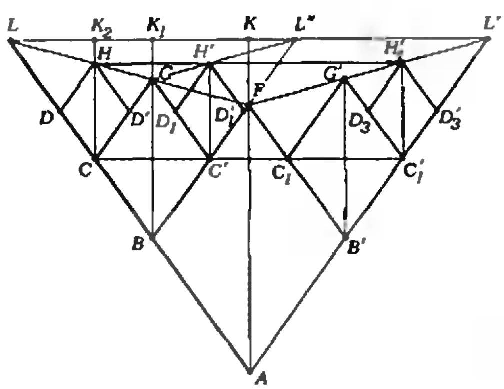


Рис. 3.

Измельчающиеся ромбы

Вернемся к рисунку 1 и посмотрим, как нужно получить показанную на нем сеть ромбов, а также сходные измельчающиеся узоры. Для этого обратимся к рисунку 3, несколько отличающемуся от рисунка 1. В угол LAL' вписан ромб *нулевого порядка* $ABFB'$, у которого $|AB| = a_0$.

В два образовавшихся угла LBF и $FB'L'$ вписаны два ромба *первого порядка* $BCGC'$ и $B'C_1G'C_1'$ со стороной $a_1 = a_0q$, где

$$0{,}5 \leqslant q \leqslant 1. \qquad (1)$$

Для построения ромбов *второго порядка* проведем прямые FG и FG', которые отсекут на прямых CH и $C_1'H_1'$, параллельных диагонали AF исходного ромба, отрезки, служащие диагоналями ромбов $CDHD'$ и $C_1'D_3H_1'D_3'$, подобных исходному. Эти два ромба принадлежат ряду конгруэнтных ромбов второго порядка со стороной $a_2 = a_1q = a_0q^2$.

Точно так же построим ряд ромбов третьего порядка со стороной $a_3 = a_0q^3$ и т. д.

Если $q < 1$, то прямые FG и FG' не параллельны сторонам исходного угла и пересекают их в некоторых точках L и L'. Точка L является центром гомотетии для ромбов $ABFB'$, $BCGC_1'$, $CDHD'$, ...

В силу симметрии таким же центром гомотетии для соответствующих фигур является и точка L'. На прямой LL' расположено, кроме этих двух точек, бесконечное множество других центров гомотетии для различных рядов ромбов. Одним из таких центров, например, является точка L''.

Задача 3. *Найти такой коэффициент гомотетии q, чтобы ромбы сплошь застилали внутренность треугольника LAL' (без просветов и наложений).*

Для этого необходимо и достаточно, чтобы при некотором натуральном n длина стороны a_i ромба любого порядка равнялась сумме длин сторон n ромбов следующих порядков:

$$a_i = a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_{i+n-1} + a_{i+n},$$

откуда вытекает, что q должно удовлетворять уравнению

$$q^n + q^{n-1} + \ldots + q^2 + q - 1 = 0. \quad (2)$$

При $n = 1$ уравнение (2) принимает вид $q - 1 = 0$, откуда $q = 1$. В этом случае точки C' и C_1 на рисунке 3

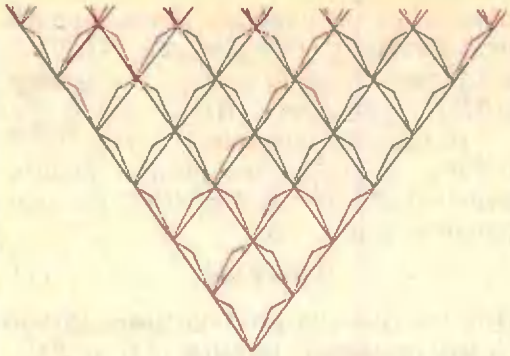


Рис. 4.

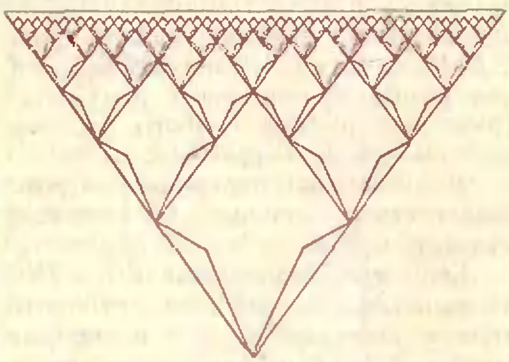


Рис. 5.

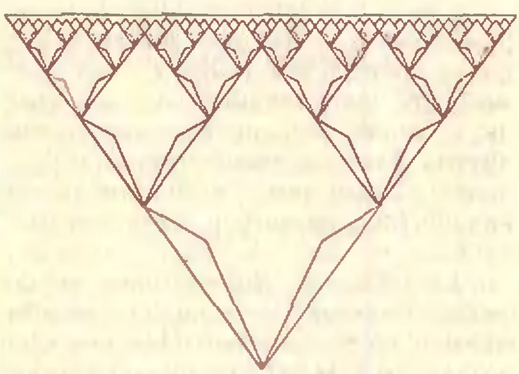


Рис. 6.

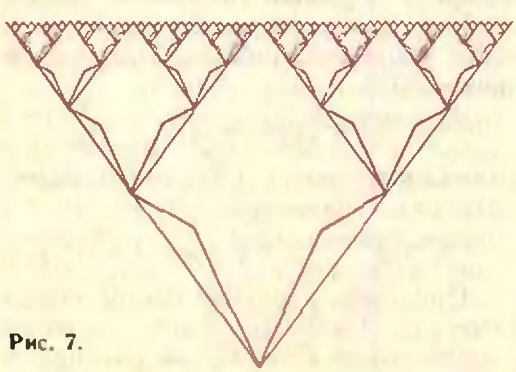


Рис. 7.

совпадают с точкой F, точки L и L' «уходят в бесконечность», а ромбы всех порядков становятся конгруэнтными (рис. 4)*).

При $n=2$ уравнение (2) имеет вид $q^2+q-1=0$, а его корень, удовлетворяющий условию (1), равен:

$$q_2=\frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Теперь на рисунке 3 с вершиной F исходного ромба совпадает точка D_1', а укладка ромбов внутри угла LAL' приобретает вид, показанный на рисунке 5. Это — уже разобранный нами основной случай.

При $n=3$ корень кубического уравнения

$$q^3+q^2+q-1=0,$$

ограниченный условием (1), приблизительно равен $q_3=0{,}543689$, а сплошная укладка ромбов иллюстрируется рисунком 6.

Легко видеть, что для $n>1$ левая часть уравнения (2) отрицательна при $q=\frac{1}{2}$ и положительна при $q=1$. Следовательно, это уравнение имеет корень q_n, удовлетворяющий условию (1), причем единственный (так как левая часть уравнения (1) возрастает при $q>0$). Нетрудно также доказать, что $q_1>q_2>q_3>\ldots$ $\ldots>q_n>\ldots$, причем $\lim\limits_{n\to\infty} q_n=1/2$.

По мере возрастания числа n прямая LL' все более приближается к вершине F исходного ромба.

Сетка ромбов, заполняющих внутренность угла в предельном случае $q_\infty=1/2$, изображена на рисунке 7. Точка F и аналогичные ей вершины ромбов всех порядков оказываются теперь на одной прямой LL'.

Решение задачи 1

Легко проследить связь между сеткой плотно уложенных ромбов на рисунке 5 и орнаментом, изображенным на обложке. Эту связь иллюстрирует

---

*) На рисунках 4—8 для красоты выделен красным цветом орнамент, не влияющий на математическую суть дела.

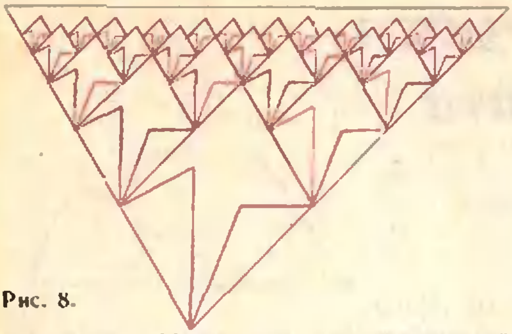


Рис. 8.

рисунок 1. Центр каждой одиночной звезды ненулевого порядка лежит в общей вершине четырех ромбов. Центр каждой из двух компонент двойной звезды совпадает с общей вершиной ровно двух ромбов, лежащей на стороне третьего. Каждая характерная повторяющаяся фигура фона («человечек со шляпой») вписана в соответствующий ромб.

Поскольку подобны между собой не только ромбы, но и вписанные в них фигуры, отношение суммарной площади частей фона f, заключенных в каждом ромбе, к площади F этого ромба есть величина постоянная, вычисленная нами при решении задачи 2.

Теперь, чтобы решить задачу 1, то есть обосновать ее ответ

$$p = 77\sqrt{5} - \frac{343}{2},$$

остается только решить следующую несложную задачу:

З а д а ч а 4. *Покажите, что при любом целом $n>1$ предел суммы площадей всех ромбов всех порядков равен площади соответствующего треугольника LAL'.*

У к а з а н и е. Для этого не нужно вычислять и суммировать эти площади — следует рассуждать геометрически.

Заключение

Выше мы встретили некоторый класс плоских регулярных структур, элементарные ячейки которых, подобно паркету, без просветов заполняют часть плоскости. Эти ячейки при $n>1$ (рисунки 5—7) получаются одна из другой гомотетиями.

В пределе при $n\to\infty$ коэффициенты гомотетии являются целыми степенями двойки; конфигурации, возникающие в этом случае, можно встретить в народных орнаментах.

Элементарные ячейки структуры в форме ромбов вместе с заключенным в них рисунком могут иметь ось симметрии, перпендикулярно прямой LL' (рис. 3), и тогда весь орнамент (рисунки 2 или 4—7) обладает осевой симметрией. Но ячейки могут содержать и асимметричный рисунок или даже иметь форму произвольного параллелограмма. Пример такой структуры без осевой симметрии приведен на рисунке 8.

Умножение... точек на плоскости

(Начало см. на с. 19)

Пусть теперь точка A не принадлежит Г. Соединим ее лучом с точкой O. Этот луч пересечет окружность Г в точке B. Тогда $A=RB$, где R — положительная действительная точка, а $A^n=R^nB^n$. Поэтому $A^n\widehat{O}I=nA\widehat{O}I$, а расстояние от 0 до A^n — n-я степень расстояния от 0 до A. Аналогично, корни уравнения $X^n=A$ можно записать в виде $R^{1/n}Y$, где Y — корень уравнения $Y^n=B$.

У п р а ж н е н и е 9. *Покажите, что любую точку можно представить в виде*

$$A=R\,(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

где R — точка действительной оси и $\varphi\in[0, 2\pi)$. Пользуясь этой записью и предыдущими формулами, покажите, что

$$A^n=R^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$$

У п р а ж н е н и е 10. *Найдите квадратные и кубические корни из чисел -1, i, $-i$, 1, 2.*

Задачник Кванта

Задачи

М616 — М620; Ф628 — Ф632

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 июня 1980 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 4—80» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М616, М617» или «Ф628». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М616. Можно ли числа 1, 2, ..., 30 разбить на группы

а) по пять чисел,

б) по шесть чисел

так, чтобы суммы чисел во всех группах были одинаковыми?

в) При каких n и k числа 1, 2, ..., nk можно разбить на n групп по k чисел так, чтобы суммы чисел во всех группах были одинаковыми?

С. Берколайко

М617. Внутри треугольника расположены окружности α, β, γ, δ одинакового радиуса так, что каждая из окружностей α, β, γ касается двух сторон треугольника и окружности δ (рис. 1). Докажите, что центр окружности δ принадлежит прямой, проходящей через центры вписанной в данный треугольник окружности и окружности, описанной около него.

В. Ягубьянц

М618. а) Докажите, что существует бесконечно много натуральных n таких, что $n!$ делится на n^2+1.

б) Докажите, что для любого $\alpha>0$ существует бесконечно много натуральных n таких, что $[\alpha n]!$ делится на n^2+1. (Здесь $m! = 1\cdot 2\cdot \ldots \cdot m$; $[x]$ — целая часть числа x.)

А. Сивацкий,
ученик 10 класса

М619. Докажите, что если для вписанного четырехугольника $ABCD$ выполнено равенство $|CD| = |AD| + |BC|$, то биссектрисы его углов A и B пересекаются на стороне CD.

И. Шарыгин

М620. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — действительные числа такие, что $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2=1$. Докажите, что сумма модулей 2^n чисел

$$\pm x_1 \pm x_2 \pm \ldots \pm x_n$$

(со всевозможными комбинациями знаков «+» и «—») не превосходит 2^n.

Я. Касаковских

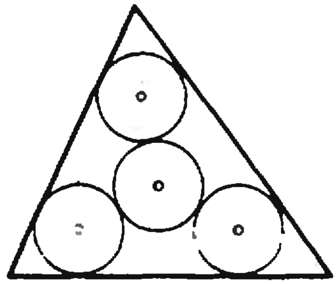


Рис. 1.

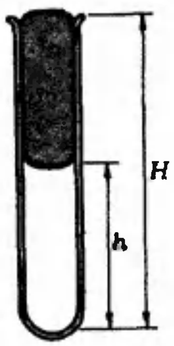


Рис. 2.

Ф628. В вертикальной трубке длины $H=152$ см, запаянной с нижнего конца, имеется столбик воздуха высоты $h=76$ см, запертый столбиком ртути (рис. 2). Атмосферное давление равно 10^5 Па, а температура $t_0=17°$C. До какой температуры t_1 следует нагреть воздух в трубке, чтобы вся ртуть вылилась?

Е. Бутиков, А. Быков, А. Кондратьев

Ф629. Шарик массы m подвешен на пружине жесткости k (пружинный маятник). Точка подвеса пружины совершает вертикальные гармонические колебания с амплитудой a и частотой ω. Как движется шарик при установившихся колебаниях?

Ф630. Элемент атомной батареи представляет собой конденсатор, на одну из пластин которого нанесен радиоактивный препарат, испускающий α-частицы со скоростью $v_0=2{,}2\cdot10^6$ м/с. Определить ЭДС этого элемента. Отношение заряда α-частицы к ее массе $k=4{,}8\cdot10^7$ Кл/кг.

Ф631. Проволочная спираль, присоединенная к городской сети, нагревается электрическим током. Половину спирали начинают охлаждать (например, водой). Как это отражается на количестве тепла, выделяемого этой половиной спирали? другой половиной? всей спиралью?

В. Горбунова

Ф632. Оценить, во сколько раз освещенность солнечного зайчика, который получают на вертикальной стене в полдень, меньше освещенности прямыми солнечными лучами, если солнечный зайчик посылается на стену зеркалом с диаметром $d=10$ см с расстояния $l=50$ см.

Шахматный конкурс

Дорогие ребята!

За несколько месяцев существования шахматной странички «Кванта» мы убедились, что среди вас имеется много поклонников шахмат, этой древней и вечно юной игры. Мы получили от вас немало писем с решениями задач, опубликованных на шахматной страничке. В своих письмах вы задаете различные вопросы на шахматную тему, а также предлагаете увеличить число задач для самостоятельного решения. Все это привело нас к идее объявить Шахматный конкурс «Кванта». Этот конкурс мы начнем со второго полугодия. В нем вам будут предложены шахматные и шахматно-математические задачи, этюды, комбинации, головоломки.

Решения конкурсных заданий следует присылать (в одном экземпляре и в отдельном конверте) по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». На конверте не забывайте сделать пометку: «Шахматный конкурс» и номер журнала (например: «№ 7—80»).

Крайний срок отправки ответов на задания — последний день следующего месяца. Так, решения позиций из № 7 вам надо будет отправить не позднее 31 августа 1980 года.

Итоги Шахматного конкурса «Кванта» будут подведены в начале следующего года. Победителей конкурса мы пригласим в редакцию журнала на встречу с чемпионом мира по шахматам Анатолием Карповым. Победители будут награждены шахматной и математической литературой с автографом А. Карпова.

Решения задач

М562—М565; Ф573, Ф574, Ф576, Ф577

М562. *На отрезке $[0;\ 1]$ задано множество M, являющееся объединением нескольких отрезков, такое, что расстояние между любыми двумя точками из M не равно $0{,}1$. Докажите, что сумма длин отрезков, составляющих M, меньше а) $0{,}55$; б) $0{,}5$.*

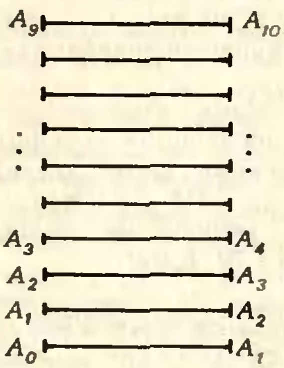


Рис. 1.

а) Обозначим сумму длин отрезков, составляющих множество M, через S. Сдвинем множество $M \subset [0;\ 1]$ вправо на расстояние 0,1. Полученное множество N не имеет общих точек с M, поскольку в M нет двух точек на расстоянии 0,1. Но оба конгруэнтных множества M и N помещаются на отрезке $[0;\ 1{,}1]$ длины 1,1. Таким образом, $2S < 1{,}1$, откуда $S < 0{,}55$.

б) Разобьем отрезок $[0;\ 1]$ на десять одинаковых отрезков A_0A_1, A_1A_2, ..., A_9A_{10}. Расположим эти отрезки один над другим, как на рисунке 1, после чего спроектируем все отрезки на самый нижний отрезок A_0A_1. Докажем, что в любую точку отрезка A_0A_1 спроектируется не более пяти точек из множества M. В самом деле, если некоторая вертикальная прямая пересекает не менее шести отрезков, принадлежащих M, то найдутся два соседних отрезка A_iA_{i+1} и $A_{i+1}A_{i+2}$, пересекающихся с этой прямой в точках, принад-

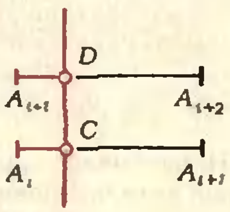


Рис. 2.

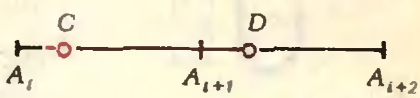


Рис. 3.

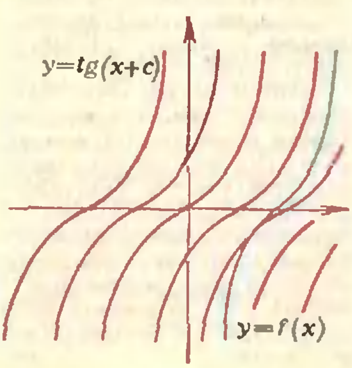
лежащих множеству M (рис. 2). На отрезке $[0;\ 1]$ расстояние между этими точками будет равно 0,1 (рис. 3), что противоречит условию. Поэтому в каждую точку отрезка A_1A_2 длины 0,1 проектируется не более пяти точек из множества M. Из этого сразу следует, что суммарная длина отрезков, составляющих множество M, меньше $0{,}1 \cdot 5 = 0{,}5$.

А. Кац

◆

М563. *Функция f определена на отрезке $[a;\ b]$ длины 4 и имеет на нем непрерывную производную f'. Докажите, что внутри отрезка $[a;\ b]$ найдется точка x, для которой*

$$f'(x) - (f(x))^2 < 1.$$



Предположим, что утверждение задачи неверно, то есть что во всех точках $x \in [a;\ b]$ выполнено неравенство

$$f'(x) - (f(x))^2 \geq 1,$$

или

$$\frac{f'(x)}{1 + (f(x))^2} \geq 1.$$

Поскольку $(\operatorname{arctg} y)' = \frac{1}{1+y^2}$, слева стоит производная сложной функции $\Phi(x) = \operatorname{arctg} f(x)$. Итак, мы знаем, что во всех точках отрезка $[a;\ b]$

$$\Phi'(x) \geq 1.$$

Воспользуемся формулой Ньютона — Лейбница:

$$\Phi(b) - \Phi(a) = \int_a^b \Phi'(x)\,dx \geq \int_a^b dx = b - a = 4.$$

Но arctg принимает лишь значения из интервала $\left]-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right[$, значит, $\Phi(b) - \Phi(a) < \pi$. Получили противоречие.

Из нашего решения ясно, что утверждение задачи верно для отрезка $[a;\ b]$ длины π (или больше). Кроме того, в нашем решении мы нигде не пользовались непрерывностью производной функции f.

Наглядную интерпретацию задачи можно получить, заметив, что дифференциальное уравнение $\frac{y'}{1+y^2} = 1$ имеет решение $y=\lg(x+c)$; если в каждой точке $(x;\ y)$ график функции f имеет наклон более крутой, чем график функции $y=\lg(x+c)$, то f нельзя продолжить на отрезок длины π (см. рисунок) — график «уходит в бесконечность».

Ф. Вайнштейн

◆

М564. *Для каких точек M стороны BC треугольника ABC верно утверждение: $\triangle MPQ \sim \triangle ABC$, если точки P и Q являются:*
а) центрами окружностей, описанных соответственно около треугольников ABM и ACM;
б) точками пересечения их медиан;
в) точками пересечения их высот?

а) Покажем, что точку M на стороне BC можно выбрать произвольно.

Треугольники MPQ и APQ конгруэнтны ($|AP|=|MP|$, $|AQ|=|MQ|$, рис. 1). Докажем подобие треугольников APQ и ABC. Пусть K, L, O — середины сторон AB, AC и AM соответственно. Без ограничения общности можно считать, что $\widehat{AMB}<\pi/2$ (случай $[AM]\perp[BC]$ тривиален).

Вокруг каждого из четырехугольников $AOLQ$ и $AKPO$ можно описать окружность ($\widehat{AOQ}=\widehat{ALQ}=\widehat{AOP}=\widehat{AKP}=\pi/2$ — см. рис. 1). Поэтому $\widehat{LAQ}=\widehat{LOQ}$ и $\widehat{POK}=\widehat{PAK}$. Но $\widehat{LOQ}=\widehat{POK}$ — как вертикальные углы. Отсюда $\widehat{LAQ}=\widehat{PAK}$ и

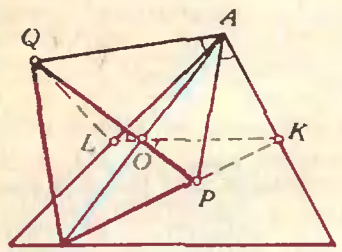


Рис. 1.

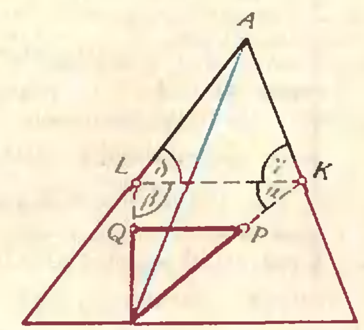


Рис. 2.

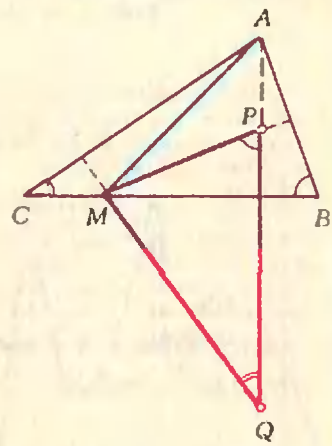


Рис. 3.

$\dfrac{|AL|}{|AQ|}=\dfrac{|AK|}{|AP|}$. Поэтому композиция поворота на угол $\widehat{PAK}$ с центром в точке A и гомотетии с коэффициентом $k=\dfrac{|AK|}{|AP|}$ с тем же центром A переводит треугольник APQ в подобный ему треугольник AKL. Итак, $\triangle APQ \sim \triangle ABC$.

б) Гомотетия с коэффициентом $\frac{3}{2}$ и центром в точке M переводит $\triangle PQM$ в подобный ему $\triangle KLM$ (рис. 2). Допустим, что $\triangle KLM$ подобен $\triangle AKL$. Разберем три случая:

1°. $\alpha=\delta$ (см. рис. 2). Тогда $(AL)\parallel(KM)$, так что $|MB|=|MC|$, то есть M — середина $[BC]$.

2°. $\alpha=\gamma$. Тогда $(AM)\perp(KL)$, так что M — проекция вершины A на сторону BC.

3°. $\alpha=\widehat{A}$. Тогда либо $\beta=\gamma$ и $|MB|=|MC|$, либо $\beta=\delta$ и M — проекция вершины A (на $[BC]$).

Нетрудно убедиться, что верно и обратное: *если M — середина стороны BC или проекция на $[BC]$ вершины A, то треугольники MPQ и ABC подобны.*

в) В этом случае, как и в случае а), точку M на стороне BC можно выбрать произвольно. В самом деле (рис. 3), $\widehat{MPQ}=\widehat{ABC}$, $\widehat{MQC}=\widehat{ACB}$ (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами); значит, $\triangle MPQ \sim \triangle ABC$.

К сожалению, при публикации условия этой задачи наборщик перепутал знаки подобия и конгруэнтности (он учился *еще по старой программе*); *мы приносим извинения читателям,* которым эта опечатка помешала понять условие.

Э. Туркевич

М585. *Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — различные положительные числа. Обозначим через b_k среднее арифметическое всевозможных произведений по k данных чисел ($k=1, 2, \ldots, n$):*

$$b_1=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n},$$

$$b_2=\frac{a_1a_2+a_1a_3+\ldots+a_{n-1}a_n}{\frac{n(n-1)}{2}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

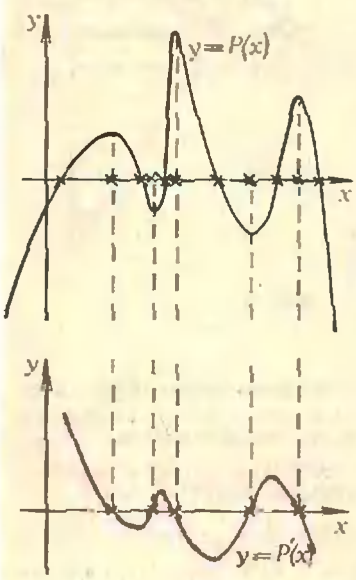
$$b_n=a_1a_2\ldots a_n.$$

Докажите неравенства:

а) $b_1>\sqrt{b_2}$,

б) $b_k^2>b_{k-1}b_{k+1}$ $(k=2, \ldots, n-1)$;

в) $\sqrt[k]{b_k}>\sqrt[k+1]{b_{k+1}}$ $(k=2, \ldots, n-1)$.



Пусть $s_1=nb_1$, $s_2=\frac{n(n-1)}{2}b_2, \ldots$

$\ldots, s_k=C_n^kb_k, \ldots, s_n=b_n$ *).

Рассмотрим многочлен

$$P(x)=x^n-s_1x^{n-1}+\ldots+(-1)^{n-1}s_{n-1}x+(-1)^ns_n. \quad (1)$$

Поскольку $P(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdot\ldots\cdot(x-a_n)$, (2)

$P(x)$ имеет n различных положительных корней $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

а) Продифференцируем его $n-2$ раза, после чего поделим на $n(n-1)\ldots\cdot 4\cdot 3$. Мы получим квадратный трехчлен

$$x^2-\frac{2}{n}s_1x+\frac{2}{n(n-1)}s_2, \quad (3)$$

имеющий различные положительные корни (между двумя корнями многочлена всегда есть корень его производной — см. рисунок). Значит, у многочлена (3) положительный дискриминант $D=\frac{s_1^2}{n^2}-\frac{2s_2}{n(n-1)}$, откуда $\frac{s_1}{n}>\sqrt{\frac{s_2}{\frac{n(n-1)}{2}}}$, то есть $b_1>\sqrt{b_2}$.

б) Продифференцируем теперь многочлен $P(x)$ $(n-k-1)$ раз $(k=2, \ldots, n-1)$. Получим многочлен $n(n-1)\cdot\ldots\cdot(k+2)x^{k+1}-(n-1)\cdot\ldots\cdot(k+1)s_1x^k+\ldots+(-1)^{k-1}s_{k-1}\times$ $\times\frac{(n-k+1)!}{2}x^2+(-1)^ks_k(n-k)!\,x+(-1)^{k+1}s_{k+1}(n-k-1)!$, (4) имеющий $k+1$ различных положительных корней. Поэтому многочлен $(-1)^{k+1}(n-k-1)!s_{k+1}y^{k+1}+$ $+(-1)^k(n-k)!s_ky^k+(-1)^{k-1}\frac{(n-k+1)!}{2}s_{k-1}y^{k-1}+\ldots$ $\ldots+1$, (4′) получающийся из многочлена (4) заменой $y=\frac{1}{x}$, также имеет $k+1$ различных положительных корней. Продифференцируем теперь $k-1$ раз многочлен (4′). Получим квадратный трехчлен $(-1)^{k+1}(n-k-1)!\frac{(k+1)!}{2}s_{k+1}y^2+$ $+(-1)^k(n-k)!k!s_ky+(-1)^{k-1}\frac{(n-k+1)!}{2}(k-1)!s_{k-1}$, (5) имеющий два различных положительных корня. Разделим его на $(-1)^{k-1}(n-k-1)!(k-1)!$; получим трехчлен

$$\frac{k(k+1)}{2}s_{k+1}y^2-k(n-k)s_ky+\frac{(n-k+1)(n-k)}{2}s_{k-1}.$$

Дискриминант его положителен, так что

$$k(n-k)s_k^2-(k+1)(n-k+1)s_{k-1}s_{k+1}>0$$

или

$$\frac{s_k^2}{(C_n^k)^2}-\frac{(k+1)(n-k+1)}{k(n-k)}\frac{s_{k-1}s_{k+1}}{(C_n^k)^2}>0,$$

то есть

$$\left(\frac{s_k}{C_n^k}\right)^2-\frac{s_{k-1}}{C_n^{k-1}}\cdot\frac{s_{k+1}}{C_n^{k+1}}>0 \quad (6)$$

(поскольку

$$\frac{n-k}{k+1}C_n^k=C_n^{k+1} \text{ и } \frac{k}{n-k+1}C_n^k=C_n^{k-1}\Big).$$

Таким образом,

$$b_k^2>b_{k-1}b_{k+1} \quad (k=2, \ldots, n-1).$$

Неравенство б) называется *неравенством Ньютона.*

в) Будем доказывать в) по индукции. Базисом индукции ($k=1$) служит неравенство а). Предположим теперь, что нера-

---

*) Выражения $s_1, s_2, \ldots, s_n$ называются *элементарными (основными) симметрическими функциями* от n переменных $a_1, a_2, \ldots, a_n$, а тот факт, что они с чередующимися знаками служат коэффициентами многочлена с корнями $a_1, \ldots, a_n$ — *теоремой Виета.*

венство в) выполняется для $i=2, 3, \ldots, k-1$, в частности что

$$\sqrt[k-1]{b_{k-1}} > \sqrt[k]{b_k},$$

и докажем его для $i=k$.

Перепишем неравенство из пункта б) в виде

$$b_{k-1} < \frac{b_k^2}{b_{k+1}}.$$

Последние два неравенства дают

$$b_k^{k-1} < b_{k-1}^k < \frac{b_k^{2k}}{b_{k+1}^k},$$

то есть

$$b_{k+1}^k < b_k^{k+1},$$

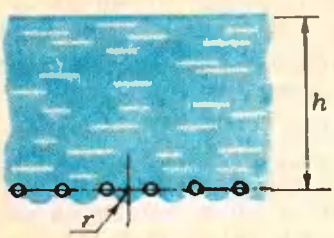
что и требовалось доказать.

Неравенство в) называется *неравенством Маклорена.*

М. Розенберг

◆

Ф573. *Оцените, какое количество воды можно унести в решете с квадратными ячейками размером 2×2 мм. Диаметр D решета равен 20 см. Нити решета не смачиваются водой.*



Жидкость между нитями решета будет образовывать мениск. Радиус этого мениска не может быть больше половины расстояния между нитями, то есть $r_{max}=1$ мм. Поэтому максимальное давление, которое может быть в жидкости над мениском, превышает атмосферное давление на величину $\Delta p=\frac{2\sigma}{r}$ (σ — поверхностное натяжение воды). Эта формула справедлива для круглого мениска, то есть для решета с круглыми ячейками. Однако для оценки мы можем не учитывать сложной формы мениска на квадратной сетке и пользоваться этой формулой.

Итак, $\Delta p=\frac{2\sigma}{r}$. С другой стороны, Δp равно гидростатическому давлению столба жидкости высоты h, налитой в решето:

$$\frac{2\sigma}{r}=\varrho gh.$$

Отсюда находим $h=\frac{2\sigma}{\varrho gr}$. Масса же жидкости в решете равна произведению ее объема V на плотность ϱ, то есть

$$m=V\varrho=\frac{\pi D^2}{4}h\varrho=\frac{\pi D^2\sigma}{2gr}\approx 0{,}458 \text{ кг}.$$

◆

Ф574. *Два шара с массами $m_1=0{,}2$ кг и $m_2=0{,}3$ кг летят навстречу друг другу со скоростями $v=20$ м/с каждый. График зависимости от времени силы взаимодействия шаров при столкновении показан на рисунке 1. Какое количество тепла выделилось при столкновении шаров?*

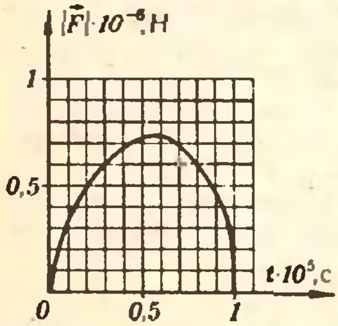


Рис. 1.

Изменение импульса каждого из шаров равно импульсу действующей на этот шар силы. Импульс силы $\vec{F}$, действующей на шар в течение времени Δt, равен $|\vec{F}|\Delta t$. Следовательно, полный импульс силы, действующей на шар за время столкновения, равен по абсолютной величине площади фигуры под графиком зависимости $|\vec{F}|(t)$. Из рисунка 1 находим импульс силы $|p_c|$:

$$|p_c|\approx 10^5 \cdot 10^{-6} \cdot 54 \text{ Н} \cdot \text{с} = 5{,}4 \text{ Н} \cdot \text{с}$$

(под графиком зависимости $|\vec{F}|(t)$ приблизительно 54 квадратика; площадь каждого квадратика $10^5 \cdot 10^{-6}$ Н · с).

Для проекций импульсов на ось X (рис. 2) можно записать:

$$p_1=m_1v-|p_c|, \qquad (1)$$
$$p_2=-m_2v+|p_c|. \qquad (2)$$

Здесь $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ — импульсы шаров после столкновения; m_1v, m_2v — модули импульсов шаров до столкновения. Из (1) и (2) находим скорости шаров после столкновения:

$$v_1=\frac{p_1}{m_1}=v-\frac{|p_c|}{m_1}=-7 \text{ м/с},$$
$$v_2=\frac{p_2}{m_2}=-v+\frac{|p_c|}{m_2}=-2 \text{ м/с}.$$

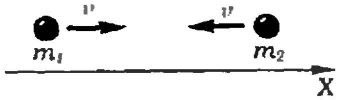


Рис. 2.

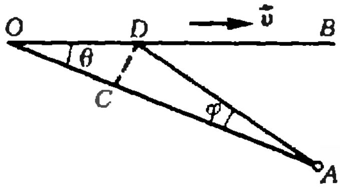
Теперь воспользуемся законом сохранения энергии. Кинетическая энергия системы до столкновения равна $E=\frac{m_1v^2}{2}+\frac{m_2v^2}{2}$, а после столкновения — $E'=\frac{m_1v_1^2}{2}+\frac{m_2v_2^2}{2}$. Разность $E-E'$ равна количеству тепла Q, выделившегося при столкновении. Следовательно,

$$Q=\frac{m_1+m_2}{2}v^2-\frac{m_1v_1^2}{2}-\frac{m_2v_2^2}{2}=94{,}5\ \text{Дж}.$$

И. Слободецкий

◆

Ф576. *По прямой OB равномерно движется самолет со скоростью $v>c$ (c — скорость звука). Наблюдатель следит за полетом из точки A. В тот момент, когда самолет находится в точке O, специальное устройство, установленное на самолете, испускает два коротких звуковых импульса: сначала импульс с малой амплитудой, затем — с большой. Временной интервал между импульсами равен τ. При каких условиях наблюдатель сможет зарегистрировать сначала импульс с большой амплитудой, а потом с малой? Расстояние OA равно L, угол AOB равен θ.*



Пусть за время τ самолет переместился из точки O в точку D.

Отложим на отрезке AO отрезок AC такой, что $|AC|=|AD|$. Если к моменту испускания второго импульса (с большой амплитудой) первый импульс (с малой амплитудой) успеет «пройти» расстояние $|OC|$ и окажется в точке C, то оба импульса будут зарегистрированы в точке A одновременно. Если же расстояние, «пройденное» первым импульсом за время τ, будет меньше $|OC|$, то второй импульс будет зарегистрирован в точке A раньше, чем первый. Таким образом, нас интересует, при каких условиях выполняется неравенство

$$c\tau<|OC|. \qquad (*)$$

Поскольку время τ мало, можно считать, что углы, под которыми наблюдатель видит самолет в точках O и D, практически одинаковы, то есть угол φ (см. рисунок) очень мал. Следовательно, можно считать, что $\widehat{ACD}=\widehat{ADC}=90°$. Тогда

$$|OC|=|OD|\cos\theta=v\tau\cos\theta.$$

Подставим это выражение для $|OC|$ в (*):

$$c\tau<v\tau\cos\theta.$$

Отсюда находим, что второй импульс будет зарегистрирован в точке A раньше, чем первый, если

$$v>c/\cos\theta.$$

Это неравенство означает, что скорость самолета должна быть во всяком случае больше, чем скорость звука. Тогда, как показывает наше рассмотрение, может оказаться, что самолет приближается к наблюдателю, а наблюдатель будет слышать, как самолет удаляется.

Б. Болотовский

Ф577. *При температуре на улице $t_0=-20°C$ работающая батарея поддерживает в комнате температуру $t_1=16°C$. Когда кроме батареи включили электроплитку мощностью $P_1=1$ кВт, в комнате установилась температура, равная $t_2=22°C$. Определить тепловую мощность батареи.*

Примечание. *Теплоотдача от одного тела к другому пропорциональна разности температур этих тел ($\Delta P=k\Delta t$, $k=\text{const}$).*

При установившейся температуре в комнате тепловая энергия, выделяющаяся на приборах, равна тепловым потерям (потерям на теплоотдачу). Следовательно, тепловая мощность батареи равна

$$P=k(t_1-t_0). \qquad (1)$$

При включенной электроплитке и работающей батарее

$$P+P_1=k(t_2-t_0). \qquad (2)$$

Из (1) и (2) находим тепловую мощность батареи:

$$P=P_1\frac{t_1-t_0}{t_2-t_1}=6\ \text{кВт}.$$

И. Слободецкий

Задачи

1. Реши ребус — составь ребус! Расшифруйте ребус, изображенный на рисунке (одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные). Затем, используя найденные значения букв, замените в записи

$$*О*Л*И*М*П*И*А*Д*А*=80$$

звездочки арифметическими знаками, скобками или «пустым местом» (то есть уберите их) так, чтобы получилось тождество.

2. Докажите, что число $63!-61!$ делится на 71.

Запись $n!$ означает произведение всех целых чисел от 1 до n, например, $5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5$.

3. Из шестнадцати спичек сложили пять квадратов — см. рисунок. Переложите две спички так, чтобы число квадратов уменьшилось на единицу.

4. В очереди за билетами в кино стоят друзья: Юра, Миша, Володя, Саша и Олег. Известно, что Юра купит билет раньше, чем Миша, но позже Олега. Володя и Олег не стоят рядом, а Саша не находится рядом ни с Олегом, ни с Юрой, ни с Володей. Кто за кем стоит?

5. В какой системе счисления верно равенство: $10+10=10\cdot10$?

6. Равносторонний треугольник нетрудно разрезать на четыре равносторонних треугольника. Для этого нужно соединить отрезками середины его сторон. Но можно ли разрезать его на 8, или 10, или 11 равносторонних треугольников? И вообще, на какое число равносторонних треугольников можно разрезать данный равносторонний треугольник?

Эти задачи нам предложили
Ф. Бартенев, Ф. Вайнштейн, В. Радунский, Д. Филонов

Н. Михайлова

Плоды «просвещения»

В воскресенье днем я подсчитал, что после утреннего похода с Федькой в кино у меня осталось четыре копейки, а к среде нам велели принести в школу новую тетрадку для рисования. У меня испортилось настроение. Нужно идти к папе и опять просить деньги.

«Пап, — сказал я, — мне деньги нужны на тетрадку для рисования. Дай, пожалуйста». «Интересно, — ответил папа. — А кому мы с мамой выдали вчера полтинник?»

«Мы, пап, сегодня с Федькой в кино были. А как Федька любит лимонад и слоеные трубочки, ты просто не представляешь!»

«Все ясно, — сказал папа. — Ты пал жертвой дружбы. Тебя, бедняжку, пить лимонад заставить невозможно, а трубочки ты и в рот не берешь. Но для друга готов на все!»

«Пап, ну, хватит издеваться. Я лимонад люблю и трубочки тоже. Просто у Федьки денег сегодня не было, и мы мой полтинник прогуляли».

«Другой разговор! — ответил папа. — Однако, если ты еще на полтинник претендуешь, придется попотеть. Вот реши задачу — получишь полтинник. Договорились?».

«Договорились. Давай скорей задачу, а то вдруг я не успею решить».

«Ладно, дам тебе время до вторника. А задача такая: *Представь себе, что вы с Федькой пошли сейчас в магазин. Каждому из вас нужна тетрадка для рисования. Пришли в магазин и вдруг выясняется, что Феде не хватает одной копейки, чтобы купить тетрадку, а тебе целых тридцати. Вы сложили ваши деньги, чтобы купить хоть одну тетрадку, но денег все равно не хватило. Сколько стоит тетрадка?»*

Папа написал мне условие на листе бумаги. Я пошел в свою комнату и стал думать, но до обеда так ничего и не придумал. Потом пришли гости, а потом меня отправили спать.

В понедельник я сразу после школы прибежал домой, достал условие задачи и снова сел ее решать.

Значит так, — сказал я себе — у меня остались 4 копейки. А на тетрадь мне не хватило 30 копеек:

$$4+30=34.$$

Тетрадь стоит 34 копейки. Тогда у

Федьки $34-1=33$ копейки. У нас с ним вместе $33+4=37$ копеек. Как раз хватит на 2 эскимо в шоколаде по 18 копеек и еще одна копейка останется. Красота!

Хотя нет. Ведь по условию задачи нам на тетрадку не хватило, даже когда мы сложили деньги.

Значит, получилась ерунда. Неверно я решаю. Попробую еще раз. Ага... Папа ведь не знает, что у меня осталось 4 копейки. Почему же я тридцать к четырем прибавлял? Ошибка!

Начну по-другому. Я не знаю, сколько стоит тетрадка. Это число обозначу буквой x. Значит, у меня было $(x-30)$ *копеек, а у Федьки* $(x-1)$ копейка. Складываем мои деньги и Федькины. Получится

$$x-30+x-1=(2x-31) \text{ копейка.}$$

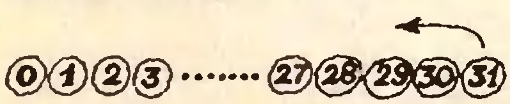
Но по условию задачи этих денег нам все равно не хватило на одну тетрадку. Значит,

$$2x-31<x.$$

Правильно? Да, ну а что дальше? Ага! Теперь уберем x из правой части:

$$2x-x-31<x-x,$$
$$x-31<0,$$
$$x<31.$$

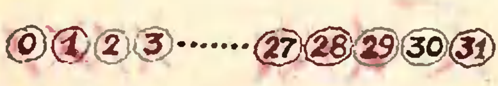
Что значит, что тетрадка стоит меньше 31 копейки? Сейчас я себе нарисую. Все числа, которые меньше 31, лежат слева от него:



Тетрадка не может стоить 31 копейку — я это число зачеркну. А меньше, ну, например, 29 копеек, она может стоить? Нет, потому что тогда у меня было бы

$$29-30=-1 \text{ копейка!}$$

Вот умора — минус одна копейка! *Так не бывает. Зачеркну* 29. И все, что левее 29, тоже нужно зачеркнуть. Тогда получается такая картинка:



Остается только 30. Значит, тетрадь стоит 30 копеек.

Сколько же у меня денег было?

$$30-30=0 \text{ копеек.}$$

Ни одной копейки. Это папа так думает. Он думает, что я такой же бедный, как дядя Эдик. Мама его всегда жалеет. «Бедный Эдик! Он купил машину — теперь у него ни копейки. Бедный Эдик! Он отдыхал с семьей в Болгарии — теперь у него ни копейки».

Но я совсем не такой бедный. И я скорей побежал к папе, чтобы его успокоить.

У папы сидят гости. Дядя Олег с сыном Тарасом. Тарас плохо решает задачи, но ему и не нужно: он будет скрипачом.

«Так, — сказал я, — во-первых, я не такой бедный, как дядя Эдик. У меня есть четыре копейки. Во-вторых, тетрадь стоит 30 копеек. Вот решение. Если ты теперь дашь мне 26 копеек, то я смогу ее купить.» Папа и дядя Олег сначала долго смеялись, а потом решили дать эту задачу Тарасу. *Сказали, ее можно решить проще.*

По-моему, давать Тарасу задачу без толку. Но пусть попробует, раз они так хотят.

А Тарас глаза вытаращил и говорит: «Так в чем же задача? У Федьки не хватало 1 копейки, а у Женьки 30. Они сложились, но на тетрадку снова не хватило. Значит, Женька ни копейки не добавил к Федькиным деньгам. То есть у него ничего не было. А на тетрадку ему не хватало 30 копеек. Значит, она стоила 30 копеек. Вот и вся задача».

«Молодец!» — похвалил папа этого воображалу.

«Лев Толстой называл это "Плоды просвещения". — сказал он мне. — Да, ладно, Женька, не расстраивайся. Ведь ты задачу решил? Решил. Запомни теперь, что иногда надо не школьную науку в ход пускать, а просто подумать. И еще одно. Ты ведь, небось, думал, что Тарас эту задачу не решит. Нехорошо, брат. Высокомерие — паршивая штука и всегда бывает посрамлено. Рано или поздно. А теперь бери полтинник на тетрадь и текущие расходы».

Деньги я взял. Ведь я все-таки решил задачу, но и урок этот я запомнил. Наверное, на всю жизнь.

И. Мельник

Где расположено основание высоты?

Решая стереометрические задачи, важно уметь правильно определять взаимное расположение элементов возникающих в них фигур. Многие ошибки, допускаемые при решении этих задач, связаны с изображением высоты пирамиды (или призмы). Неверно расположив основание высоты относительно основания пирамиды (или призмы), поступающий вследствие этого неправильно определяет угол наклона бокового ребра к плоскости основания, ошибается при построении линейного угла двугранного угла и т. д.

Цель предлагаемых ниже задач и примеров — научить вас решать стереометрические задачи, избегая подобных ошибок. Для этого в начале статьи мы предлагаем три задачи со списком возможных ответов, из которых нужно выбрать правильный. Разумеется, здесь нельзя ограничиться угадыванием правильного ответа: его нужно обосновать. Разобравшись с этими задачами, вы легко поймете решения следующих за ними примеров, взятых из практики вступительных экзаменов.

Задача 1. *Какая точка плоскости ABC является основанием высоты пирамиды $SABC$, если:*

а) *боковые ребра конгруэнтны;*

б) *боковые ребра образуют равные углы с плоскостью основания;*

в) *боковые грани образуют с плоскостью основания конгруэнтные углы;*

г) *плоские углы при вершине S прямые;*

д) *две пары противоположных ребер взаимно перпендикулярны;*

е) *боковые ребра конгруэнтны между собой и*

$\widehat{ASB}=\widehat{ASC}=60°$, $\widehat{BSC}=90°$;

ж) $\widehat{ACB}=90°$, $(AC)\perp(BS)$;

з) $\vec{SO}=\frac{1}{3}(\vec{SA}+\vec{SB}+\vec{SC})$?

Возможные ответы:

1) точка пересечения медиан треугольника ABC;

2) точка пересечения его высот;

3) центр окружности, описанной вокруг треугольника ABC;

4) центр окружности, вписанной в треугольник ABC;

5) центр окружности, вписанной в треугольник ABC, или одной из вневписанных *);

6) середина отрезка BC;

7) точка прямой BC.

Для решения задачи часто бывает существенно установить, принадлежит ли основание высоты пирамиде или находится вне ее.

Задача 2. *В пирамиде $SABC$ углы наклона боковых ребер к плоскости основания конгруэнтны между собой. При каком достаточном условии основание высоты SO пирамиды принадлежит треугольнику ABC?*

Возможные ответы:

1) $\triangle ABC$ — равнобедренный;

2) $\triangle ABC$ — равносторонний;

3) $\triangle ABC$ — прямоугольный или остроугольный;

4) $\triangle ABC$ — тупоугольный;

5) в каждом из этих случаев.

Задача 3. *В основании пирамиды $SABCD$ лежит трапеция $ABCD$ ($[BC]\parallel[AD]$, $|BC|<|AD|$). Боковые ребра пирамиды конгруэнтны между собой. При каком достаточном условии основание высоты SO пирамиды лежит вне трапеции $ABCD$?*

Возможные ответы:

1) если $\widehat{ABD}<90°$;

2) если $\widehat{ABD}>90°$;

3) если $(\widehat{\vec{BD},\vec{CA}})>90°$;

4) если $(\widehat{\vec{BA},\vec{CD}})>90°$;

5) ни при каком.

---

*) Вневписанной окружностью треугольника называется окружность, касающаяся одной из его сторон и продолжений двух других сторон.

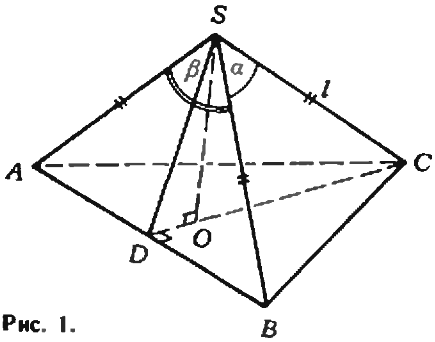


Рис. 1.

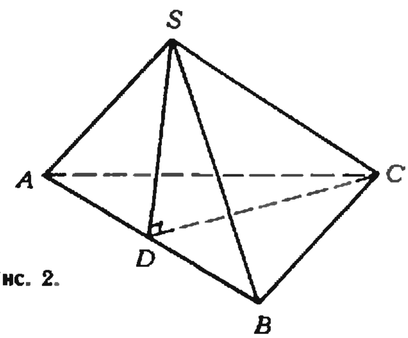


Рис. 2.

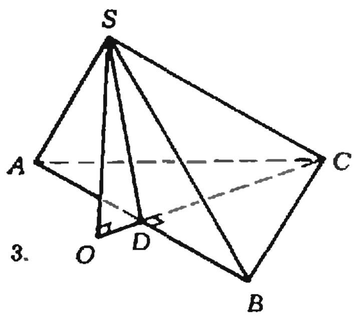


Рис. 3.

Перейдем теперь к разбору двух примеров, характерных для вступительных экзаменов.

Пример 1 (КГУ, 1975). *Боковые ребра треугольной пирамиды имеют одинаковую длину l. Два плоских угла при вершине пирамиды равны α, а третий — β. Найти объем пирамиды.*

Решение. Пусть $SABC$ — данная пирамида, $\widehat{ASB}=\beta$, $\widehat{ASC}=\widehat{BSC}=\alpha$. Из условия задачи находим:

$$(\triangle ASC \cong \triangle BSC) \Rightarrow \Rightarrow ([AC] \cong [BC]);$$

основание O высоты SO находится в центре окружности, описанной вокруг треугольника ABC (задача 1а). Возможны три случая (см. задачу 2):
а) $\widehat{ACB}<90°$ — основание высоты расположено внутри $\triangle ABC$ (рис. 1);
б) $\widehat{ACB}=90°$ — основанием высоты служит середина $[AB]$ (рис. 2);
в) $\widehat{ACB}>90°$ — основание высоты лежит вне треугольника ABC (рис. 3).
Обозначим через D середину отрезка AB.

Случай а). Исходя из условия, находим

$$|AB|=2l\sin\frac{\beta}{2};\ |SD|=l\cos\frac{\beta}{2};$$

$$|AC|=|BC|=2l\sin\frac{\alpha}{2};$$

$$|CD|=\sqrt{4l^2\sin^2\frac{\alpha}{2}-l^2\sin^2\frac{\beta}{2}}= =l\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\frac{\beta}{2}}.$$

Положим $|OD|=x$. Из треугольника SOD

$$|SO|^2=l^2\cos^2\frac{\beta}{2}-x^2;$$

из треугольника CSO

$$|SO|^2=l^2-(|CD|-x)^2= =l^2-l^2+2l^2\cos\alpha-l^2\cos^2\frac{\beta}{2}- -x^2+2xl\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\frac{\beta}{2}}.$$

Отсюда

$$l^2\cos^2\frac{\beta}{2}-x^2=2l^2\cos\alpha-l^2\cos^2\frac{\beta}{2}- -x^2+2xl\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\frac{\beta}{2}};$$

$$x=l\frac{\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos\alpha}{\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\frac{\beta}{2}}};$$

$$h=|SO|= =\sqrt{l^2\cos^2\frac{\beta}{2}-l^2\frac{(\cos^2\beta/2-\cos\alpha)^2}{1-2\cos\alpha+\cos^2\beta/2}}= = l\frac{\sqrt{\cos^2\beta/2-\cos^2\alpha}}{\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\beta/2}}.$$

Значит,

$$V=\frac{1}{3}Sh= =\frac{1}{3}l^3\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos^2\alpha}. \quad (1)$$

Замечание. Поскольку $\widehat{ASB}<\widehat{ASC}+\widehat{BSC}$, выполняется неравенство $\beta<2\alpha$ и подкоренное выражение положительно. Вырачем, в задачах подобного рода исследование области определения выражения, полученного в ответе, не требуется.

Случай б). Этот случай возможен тогда и только тогда, когда

$$\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad (2)$$

Действительно, если $\widehat{C}=90°$, $|CD|=|AD|=l\sin\frac{\beta}{2}$; $|CD|=|AC|\frac{\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\,l\sin\frac{\alpha}{2}$ (рис. 2).

Отсюда $\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$. Наоборот, если $\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$, то

$$|CD|=l\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\frac{\beta}{2}}=$$
$$=l\sqrt{2-2\cos\alpha-\sin^2\frac{\beta}{2}}=$$
$$=\sqrt{2}\,l\sqrt{1-\cos\alpha-\sin^2\frac{\alpha}{2}}=$$
$$=\sqrt{2}\,l\sqrt{\sin^2\frac{\alpha}{2}}=\sqrt{2}\,l\sin\frac{\alpha}{2}.$$

Поэтому $\cos\widehat{ACD}=\frac{|CD|}{|AC|}=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Отсюда $\widehat{ACD}=45°$, $\widehat{C}=90°$. Если $\sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}$, то $h=|SD|=l\cos\frac{\beta}{2}$ (рис. 2), $V=\frac{l^2}{3}\sin^2\frac{\beta}{2}\times l\cos\frac{\beta}{2}$, $V=\frac{l^3}{6}\sin\beta\sin\frac{\beta}{2}$.

Случай в). Положим $x=|OD|$ (рис. 3). Как в случае а), находим:

$$x=l\frac{\cos\alpha-\cos^2\frac{\beta}{2}}{\sqrt{1-2\cos\alpha+\cos^2\frac{\beta}{2}}};$$

$$h=|SO|=l\frac{\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos^2\alpha}}{\sqrt{1-2\cos\alpha-\cos^2\frac{\beta}{2}}};$$

$$V=\frac{1}{3}l^3\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos^2\alpha}.$$

Мы видим, что ответы в случаях а) и в) совпадают, хотя получены они не одинаково. Более того, в случае б) этот ответ тоже годится, что не трудно проверить (избавляясь от α в (1) с помощью соотношения (2), получаем (3)).

Ответ:

$$V=\frac{l^3}{3}\sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\cos^2\frac{\beta}{2}-\cos^2\alpha}.$$

Подчеркнем, что решение, при котором разобран только случай а), не может считаться полным.

Пример 2. *Основанием пирамиды $SABC$ служит треугольник, у которого $|AB|=|BC|=20$ см, $|AC|=32$ см; углы между плоскостью основания и каждой из боковых граней равны 45°. Найдите объем пирамиды.*

Решение. Основанием высоты пирамиды служит точка, равноудаленная от прямых AB, AC, BC, то есть центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$, или одной из вневписанных (задача 16). Поэтому условию задачи удовлетворяют четыре пирамиды, основаниями высот которых служат точки O_1, O_2, O_3, O_4 (рис. 4). Для вычисления объема этих пирамид достаточно определить высоты SO_1, SO_2, SO_3, SO_4, так как площадь основания равна $S=S_{\triangle ABC}=192$ см². Поскольку боковые грани наклонены к плоскости основания под углом 45°, высота пирамиды равна радиусу окружности, вписанной в $\triangle ABC$, или одной из вневписанных, центр которой — основание высоты пирамиды.

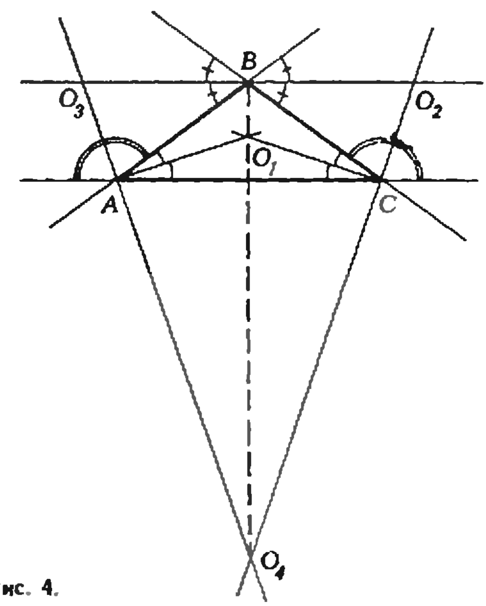


Рис. 4.

1) Пирамида с высотой SO_1.

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(20+20+32)\,r_1=$$
$$=36\,r_1\ (\text{см}^2);\ 36\,r_1=192;$$
$$r_1=h_1=5\frac{1}{3}\ \text{см}.$$

Отсюда $V=341\frac{1}{3}$ (см^3).

2) Пирамиды с высотами SO_2 и SO_3 конгруэнтны. Имеем

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(|AC|r_2-|BC|r_2)=$$
$$=16\,r_2\ (\text{см}^2);$$

$16\,r_2=192$; $r_2=h_2=12$ см; отсюда $V_2=V_3=768$ (см^3).

3) Пирамида с высотой SO_4. Имеем

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}(|AB|r_4+|BC|r_4-$$
$$-|AC|r_4)=4\,r_4\ (\text{см}^2).$$
$$4r_4=192;\ r_4=h_4=48\ \text{см};$$
$$V_4=3072\ (\text{см}^3).$$

Ответ: $\{341\frac{1}{3}$ см^3; 768 см^3; 3072 см$^3\}$.

Упражнения

1. Основанием пирамиды служит равнобедренная трапеция, основания которой равны a и $2a$. Боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания; высота пирамиды равна a. Найти боковую поверхность пирамиды. («Квант», 1974, № 4, с. 50).

2. Основанием пирамиды $SABC$ служит треугольник ABC, у которого $|AB|=a$, $|BC|=b$. Боковая грань, которая проходит через сторону AC, перпендикулярна к плоскости основания, а две другие боковые грани образуют с плоскостью основания конгруэнтные углы. Найти отношение объемов пирамид $SABC$ и $SOBC$, где O — основание высоты пирамиды $SABC$.

3. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой $|AB|=c$ и острым углом α. Найти объем пирамиды, если известно, что боковое ребро SC наклонено к плоскости основания под углом β, а направленные отрезки $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{CO}$ при последовательном их расположении образуют замкнутую ломаную линию.

4 (МВТУ, 1977). Основания параллелепипеда — квадраты со стороной b, а все боковые грани — ромбы. Одна из вершин верхнего основания одинаково удалена от всех вершин нижнего основания. Найти объем параллелепипеда.

5 (НГУ, 1977). В основании треугольной призмы лежит равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, длины катетов AB и AC которого равны a. Боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1 образуют с плоскостью основания угол в 60°, а диагональ BC_1 боковой грани CBB_1C_1 перпендикулярна ребру AC. Найти объем призмы, если длина диагонали BC_1 равна $a\sqrt{6}$.

Наша обложка

Советские вымпелы — на станции «Луна-12» и на Венере

22 октября 1966 года в Советском Союзе был осуществлен запуск космической ракеты в сторону Луны. На борту ракеты была установлена автоматическая станция «Луна-12», которая вышла на селеноцентрическую орбиту и стала третьим советским искусственным спутником Луны. Одной из задач этой станции являлись получение и передача на Землю фотоснимков отдельных участков лунной поверхности, сделанных со сравнительно близкого расстояния. Специальное фототелевизионное устройство, установленное на борту станции, произвело фотографирование лунной поверхности и передало снимки на Землю по телевизионному каналу. 19 января 1967 года программа полета станции «Луна-12» была успешно завершена. За три месяца полета станция провела ряд научных исследований и передала на Землю уникальные фотографии лунной поверхности.

* * *

В целях более полного изучения Венеры и получения о ней большого объема научной информации 10 января 1969 года в Советском Союзе был осуществлен запуск автоматической станции «Венера-6». Станция «Венера-6» производила научные исследования планеты совместно со станцией «Венера-5», запущенной 5 января 1969 года. 16 и 17 мая 1969 года спускаемые аппараты станций совершили плавный спуск в атмосфере Венеры, выполнили обширный комплекс научных измерений и передали на Землю ценную информацию о характеристиках и свойствах атмосферы этой, до сих пор еще во многом загадочной, планеты. На поверхность Венеры были доставлены вымпелы с барельефом В. И. Ленина и Государственным гербом СССР. Новый выдающийся успех советской науки и техники, одержанный благодаря героическому труду всего советского народа, был посвящен столетию со дня рождения организатора коммунистической партии, основателя советского государства, вождя трудящихся всего мира В. И. Ленина.

М. Шубелева

Е. Кузнецов

Фотоаппарат на вступительных экзаменах

Принципиальную схему фотоаппарата можно представить в виде, изображенном на рисунке 1.

Как известно, фотоаппарат представляет собой светонепроницаемую камеру (очень часто фотоаппарат так и называют камерой). В передней части камеры находится объектив O. Объектив устроен довольно сложно: часто он содержит до двадцати различных линз. Однако для решения большинства задач объектив можно считать тонкой собирающей линзой. Так мы и будем делать в этой статье.

Для открывания и закрывания объектива служит затвор. Время, в течение которого объектив остается открытым, называется временем экспозиции, или просто экспозицией. Продолжительность экспозиции обусловлена освещенностью снимаемого объекта и чувствительностью фотопленки.

Поток световой энергии, проходящий через объектив, регулируется диафрагмой D. Изменяя диаметр диафрагмы, можно открывать более или менее значительную часть объектива. Оказывается, при этом изменяется не только освещенность изображения, но и глубина резкости изображаемого пространства (более подробно об этом мы поговорим немного позже).

В задней части камеры располагается фотопленка (или фотопластинка) *Фп*, на которой и получается изображение h фотографируемого объекта H (см. рис. 1). Для того чтобы изображение оказалось точно в плоскости фотопленки, в большинстве фотоаппаратов предусмотрена возможность перемещения объектива в некоторых пределах, вдоль его оптической оси. Этим осуществляется наводка на резкость.

Рассмотрим несколько конкретных задач, связанных с фотоаппаратом и предлагавшихся абитуриентам на вступительных экзаменах.

З а д а ч а 1. *Точечный объект был сфотографирован дважды на один и тот же кадр при двух положениях фотоаппарата. При втором положении аппарат был перемещен вверх на $h=10$ см относительно первого положения. Расстояние между двумя изображениями объекта на пленке оказалось равным $p=2$ мм. Определить расстояние до объекта, если фокусное расстояние объектива фотоаппарата $F=5$ см.*

Пусть объект S и его первое изображение S_1 расположены так, как показано на рисунке 2. Найдем положение изображения объекта во втором случае.

Поскольку фотоаппарат сместили перпендикулярно главной оптической оси объектива, второе изображение S_2 так же, как и изображение S_1, должно лежать в плоскости фотопленки. Проведем побочную оптическую ось, проходящую через объект и оптический центр объектива при втором положении фотоаппарата. В точке пересечения этой оси и плоскости пленки и находится изображение S_2.

Как видно из рисунка 2,

$$\frac{h}{p}=\frac{d}{f},$$

где d — искомое расстояние от объ-

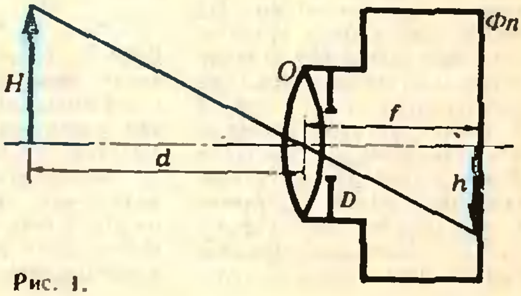


Рис. 1.

екта до фотоаппарата; f — расстояние от аппарата до плоскости изображений.

По формуле линзы

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}.$$

Из этих двух уравнений найдем d:

$$d=F\frac{p+h}{p}=255\ \text{см}=2{,}55\ \text{м}.$$

Задача 2. *При фотографировании предмета с расстояния $d_1=15$ м высота его изображения на фотопленке оказалась равной $h_1=30$ мм, а при фотографировании с расстояния $d_2=9$ м — $h_2=51$ мм. Найти фокусное расстояние объектива фотоаппарата.*

По определению линейное увеличение объектива

$$\Gamma=\frac{h}{H},$$

где h — линейный размер изображения, H — линейный размер предмета.

С другой стороны (это следует, например, из рисунка 1),

$$\Gamma=\frac{f}{d},$$

где f — расстояние от изображения до объектива, d — расстояние от объектива до предмета.

Таким образом,

$$\frac{h}{H}=\frac{f}{d},$$

или, с учетом формулы линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$ (F — фокусное расстояние),

$$\frac{h}{H}=\frac{F}{d-F}.$$

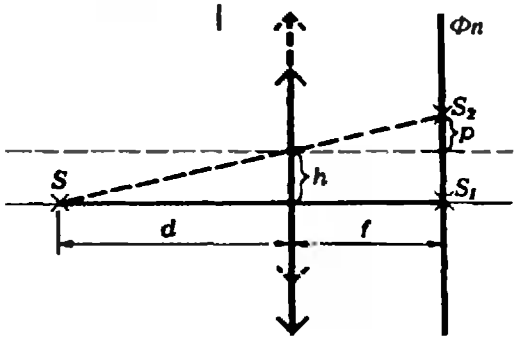


Рис. 2.

Запишем последнее соотношение для двух случаев, указанных в условии задачи:

$$\frac{h_1}{H}=\frac{F}{d_1-F}\ \text{и}\ \frac{h_2}{H}=\frac{F}{d_2-F}.$$

Отсюда получим

$$F=\frac{d_2h_2-d_1h_1}{h_2-h_1}\approx0{,}43\ \text{м}=43\ \text{см}.$$

Задача 3. *При аэрофотосъемках используется фотоаппарат, объектив которого имеет фокусное расстояние $F=8$ см. Минимальный размер различимых деталей изображения на фотопленке (разрешающая способность пленки) $\delta=10^{-2}$ мм. На какой высоте должен лететь самолет, чтобы на фотографии можно было различить листья деревьев размером $l=5$ см? При какой скорости самолета изображение еще не будет размытым, если время экспозиции $\tau=10^{-3}$ с?*

Прежде всего поговорим немного о разрешающей способности фотопленки. Светочувствительная эмульсия фотопленки представляет собой кристаллики бромистого серебра, взвешенные в слое желатины. Эти кристаллики и являются светочувствительными центрами фотослоя. Если на кристаллик попал свет, при проявлении фотопленки он разлагается на металлическое серебро (имеющее черный цвет) и бром.

Кристаллики, хотя они и малы, все же имеют конечные размеры. Поэтому, если изображения двух различных точек попадут на один и тот же кристаллик, на фотопленке мы получим одну точку — один почерневший кристаллик. Иначе говоря, фотопленка эти две точки не разрешает.

Есть и еще одна особенность. Кристаллики бромистого серебра не только поглощают, но и рассеивают свет, вот почему засвеченными оказываются и близлежащие соседние кристаллики, на которые прямой свет не попадает. Из-за этого минимальная область почернения, соответствующая изображению светящейся точки, всегда оказывается больше размеров одного кристаллика.

Так или иначе, любая пленка имеет определенную *разрешающую способность*.

В нашем случае пленка разрешит две точки, если расстояние между их изображениями превышает $\delta=10^{-2}$ мм, в противном случае после проявления на пленке получится одна точка (точнее — одно небольшое пятно).

Теперь давайте выясним, что означает фраза «на фотографии можно различить листья деревьев». Обычно критерий различимости — вопрос договоренности. Договоримся считать, что листья деревьев будут различимы на пленке, если изображение одного листа будет иметь размер минимальной области почернения. (Разумеется, в этом случае можно говорить только о том, есть ли в этом месте лист или его нет, а не о том, какой это лист.)

Это означает, что в данной задаче лист размером $l=5$ см должен изобразиться на области размером не менее $\delta=10^{-2}$ мм, иначе два соседних листа дадут одно пятно почернения.

Увеличение, создаваемое линзой, определяется по формуле

$$\Gamma=\frac{f}{d}=\frac{\delta}{l},$$

где d — расстояние от предмета до объектива, f — расстояние от объектива до фотопленки.

Поскольку самолет в момент аэрофотосъемки летает на высотах не ниже нескольких десятков метров, можно считать, что $d\gg f$. Тогда из формулы линзы $\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}$ следует, что $f=F$, то есть изображение находится в фокальной плоскости объектива аппарата.

Таким образом,

$$d=f\frac{l}{\delta}=F\frac{l}{\delta}=400 \text{ м}.$$

По поводу второго вопроса задачи договоримся так. Будем считать изображение различимым, если за время экспозиции изображение одного листа сместится не более чем на размер минимального пятна почернения:

$$|\vec{v}|\tau\frac{F}{d}\leqslant\delta,$$

где $\vec{v}$ — искомая скорость самолета. Отсюда

$$|\vec{v}|\leqslant\frac{\delta d}{\tau F}=100 \text{ м/с}=360 \text{ км/ч}.$$

Задача 4. *Ближайшая точка, на которую может быть сфокусирован (наведен) фотоаппарат, находится на расстоянии $d=2$ м от объектива. Куда переместится эта точка, если к объективу вплотную приставить тонкую положительную линзу с оптической силой $D=+5$ дптр?*

Как мы уже говорили, фокусирование фотоаппарата (наводка на резкость) осуществляется механическим перемещением объектива. Но это перемещение ограничено, поэтому аппарат нельзя сфокусировать на точки, находящиеся ближе некоторого расстояния. В данном случае это расстояние равно $d=2$ м.

Пусть предмет находится от объектива на расстоянии $d_1<d$. Очевидно, что насадочная линза должна создать изображение этого предмета на расстоянии d, на которое наведен объектив без дополнительной линзы.

По формуле линзы

$$\frac{1}{d_1}-\frac{1}{d}=D$$

(знак «минус» взят потому, что изображение мнимое), откуда

$$d_1=\frac{d}{Dd+1}\approx 0{,}18 \text{ м}.$$

Эту задачу можно решить по-другому. Обозначим через D_0 оптическую силу объектива. По формуле линзы

$$D_0=\frac{1}{d}+\frac{1}{f},$$

где f — расстояние от объектива до фотопленки. Известно, что, если две тонкие линзы расположены вплотную друг к другу, их оптические силы суммируются. Поэтому для объектива с насадочной линзой формулу линзы можно записать так:

$$D_0+D=\frac{1}{d_1}+\frac{1}{f}.$$

Вычитая из этого равенства предыдущее, найдем d_1.

Задача 5. *При фотографировании на пленке получаются одинаково резко изображенными не только* *те предметы (находящиеся на расстоянии d_0), на которые наведен объектив фотоаппарата, но также и предметы, находящиеся несколько ближе и несколько дальше этого расстояния. Другими словами, резкими получаются предметы, лежащие внутри некоторой области $d_1 \div d_2$ ($d_1 < d_0$, $d_2 > d_0$); d_1 называется ближней границей глубины резкости, d_2 — дальней границей. Оказалось, что при наведении объектива фотоаппарата на предметы, находящиеся на расстоянии $d_0 = 10$ м, ближняя граница глубины резкости равна $d_1 = 7{,}8$ м. Найти дальнюю границу.*

Предположим, что с помощью объектива DE получены изображения трех точек, лежащих на оптической оси объектива на разных расстояниях от него (рис. 3). Пусть это будут точки C_0, C_1 и C_2. Поместим фотопленку в точку C_0. Будем считать, что размер минимальной области почернения фотопленки равен $|AB|$ (на рисунке для наглядности он сильно увеличен). Если диаметр объектива таков, что лучи, образующие точки C_1 и C_2, не выходят за пределы области AB, при фотографировании любой из этих точек почернеет вся эта область, то есть изображения этих точек будут одинаково резкими.

Очевидно, чем меньше диаметр объектива, тем легче выполняется это условие. Вот почему при диафрагмировании объектива увеличивается глубина резкости.

Перейдем теперь к количественным расчетам. Из подобия треугольников DC_2O и AC_2C_0 следует

$$\frac{|AC_0|}{|DO|} = \frac{|C_2C_0|}{|OC_2|}.$$

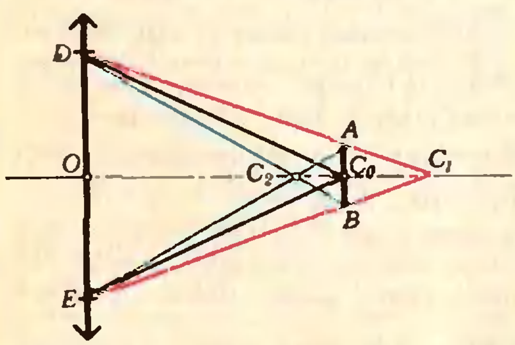


Рис. 3.

Аналогично, для треугольников DC_1O и AC_1C_0

$$\frac{|AC_0|}{|DO|} = \frac{|C_1C_0|}{|OC_1|}.$$

Отсюда получаем

$$\frac{|C_2C_0|}{|OC_2|} = \frac{|C_1C_0|}{|OC_1|},$$

или
$$\frac{1}{|OC_2|} + \frac{1}{|OC_1|} = \frac{2}{|OC_0|} \qquad (*)$$

(так как $|C_2C_0| = |OC_0| - |OC_2|$ и $|C_1C_0| = |OC_1| - |OC_0|$).

По формуле линзы

$$\frac{1}{d_0} + \frac{1}{|OC_0|} = \frac{1}{F},$$

откуда

$$|OC_0| = \frac{Fd_0}{d_0 - F},$$

где F — фокусное расстояние объектива. Аналогично получаем

$$|OC_1| = \frac{Fd_1}{d_1 - F} \text{ и } |OC_2| = \frac{Fd_2}{d_2 - F}.$$

Подставляя полученные выражения для $|OC_0|$, $|OC_1|$ и $|OC_2|$ в соотношение (*) и проведя несложные преобразования, получаем

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{2}{d_0}.$$

Отсюда найдем d_2:

$$d_2 = \frac{d_0 d_1}{2d_1 - d_0} \approx 13{,}9 \text{ м}.$$

Упражнения

1. Фотографом был сфотографирован пробегающий мимо бегун. Расстояние до бегуна $d = 10$ м, фокусное расстояние объектива фотоаппарата $F = 50$ мм. Размытость изображения на пленке оказалась равной $\delta = 1$ мм. Время экспозиции $\tau = 1/50$ с. Определить скорость бегуна.

2. Небольшой предмет фотографируют аппаратом «Зенит» с объективом, имеющим фокусное расстояние $F = 50$ мм, дважды. Сначала — с наименьшего допустимого для данного объектива расстояния $d = 0{,}5$ м. Второй раз — присоединив объектив к камере через удлинительное кольцо высотой $h = 25$ мм. Чему равно отношение размеров изображений, полученных на фотопленке?

3. При фотографировании одинаково резко получаются предметы, находящиеся на расстояниях от $d_1 = 15$ м до $d_2 = 30$ м от фотоаппарата. Не меняя наводки фотоаппарата, объектив задиафрагмировали (то есть уменьшили диаметр открытой части объектива). Ближняя граница глубины резкости стала равна $d_1' = 10$ м. Найти дальнюю границу.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Письменный экзамен

Механико-математический факультет

Вступительных экзаменов по математике на механико-математический факультет МГУ многие боятся, считая, что поступающим предлагают головоломно-трудные задачи. Эти опасения не обоснованы. Вступительные экзамены проводятся в соответствии с «Программой вступительных экзаменов для поступающих в высшие учебные заведения СССР». Задачи, предлагаемые на приемных экзаменах, требуют для решения лишь хорошего знания этой программы, умения пользоваться правилами и приемами, изученными в школе. Никаких дополнительных знаний от поступающих не требуется. Нередко молодые люди, напуганные программами физико-математических кружков и задачами различных олимпиад, не решаются подавать заявления на мехмат МГУ. Между тем, многие из них бывают неплохо подготовлены и могли бы успешно участвовать в конкурсе.

Две-три задачи в вариантах письменного экзамена достаточно просты и вполне доступны каждому, кто усвоил школьную программу. Однако на письменном экзамене получить высокую оценку нелегко, так как, наряду с нетрудными задачами, в варианты включаются и более сложные задачи, решение которых требует достаточно высокой математической культуры.

В 1979 году на выполнение письменной работы отводилось четыре часа. Для получения положительной оценки достаточно было правильно решить две задачи.

Вариант I

1. Найти все решения уравнения

$$1-5\sin x+2\cos^2 x=0,$$

удовлетворяющие неравенству $\cos x>0$.

2. Отрезок KL является диаметром некоторой окружности. Через его концы K и L проведены две прямые, пересекающие окружность соответственно в точках P и Q, лежащих по одну сторону от прямой KL. Найти радиус окружности, если $\widehat{PKL}=\frac{\pi}{3}$ и точка пересечения прямых KP и QL удалена от точек P и Q на расстояние 1.

3. Найти точки минимума функции $y=x^3-2x|x-2|$, определенной на отрезке $[0;\ 3]$, и ее наибольшее значение на этом отрезке.

4. Решить неравенство

$$\frac{6}{2x+1}>\frac{1+\log_2(2+x)}{x}.$$

5. Основанием треугольной пирамиды $ABCD$ является треугольник ABC, в котором $\hat{A}=\frac{\pi}{2}$, $\hat{C}=\frac{\pi}{6}$, $|BC|=2\sqrt{2}$. Длины ребер AD, BD, CD равны между собой. Сфера радиуса 1 касается ребер AD, BD, продолжения ребра CD за точку D и плоскости ABC. Найти величину отрезка касательной, проведенной из точки A к сфере.

Разберем подробно этот вариант.

1. Ответ. $x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$ $(k\in\mathbf{Z})$. Указание. Данное уравнение равносильно квадратному (относительно $\sin x$) уравнению:

$$2\sin^2 x+5\sin x-3=0,$$

которое имеет два решения: $\sin x=-3$ и $\sin x=\frac{1}{2}$. Подходит, конечно, только второе. Решая его относительно x, находим

$$x=(-1)^m\arcsin\frac{1}{2}+\pi m\quad(m\in\mathbf{Z}),\quad(1)$$

что в данном случае удобно записать в виде двух серий решений:

$$x_1=\frac{\pi}{6}+2\pi k\quad(k\in\mathbf{Z}),$$

$$x_2=\frac{5\pi}{6}+2\pi l\quad(l\in\mathbf{Z}).$$

Условию $\cos x>0$ удовлетворяет только первая серия.

В целом абитуриенты с этой задачей справились успешно. Некоторые поступающие, записавшие решение уравнения $\sin x=\frac{1}{2}$ в виде (1), затем не сумели отобрать значения x, удовлетворяющие условию $\cos x>0$.

2. Ответ. 1. Решение. Из условия задачи следует, что $P\neq Q$, так как в противном случае точка пересечения прямых KP и QL (точка $P=Q$) была бы удалена от точек P и Q на расстояние 0. Нарисуем окружность, диаметр KL и, под углом $\frac{\pi}{3}$, хорду KP (рис. 1).

Рассмотрим два случая расположения точки Q: $Q\in\smile KP$ (рис. 2) и $Q\in\smile PL$ (рис. 3). Пусть $(LQ)\cap(KP)=A$.

В первом случае $\widehat{PQL}=\widehat{PKL}$ (вписанные углы, опирающиеся на одну дугу) и $\widehat{APQ}=\widehat{PQL}$ ($|AP|=|AQ|$); значит, $\widehat{QAP}=\pi-2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$ $\left(\widehat{PKL}=\frac{\pi}{3}\right)$, что невозможно, так как $\angle QAP$ — внешний угол в прямоугольном

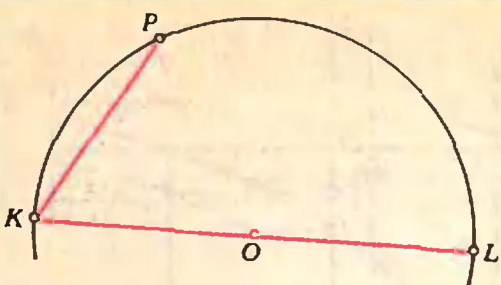


Рис. 1.

треугольнике PAL $\left(\widehat{KPL}=\frac{\pi}{2}\right)$. Итак, первый случай невозможен.

Во втором случае $\widehat{PQL}=\pi-\widehat{PKL}$ (четырехугольник $PQLK$ вписан в окружность), $\widehat{PQA}=\pi-\widehat{PQL}=\widehat{PKL}=\frac{\pi}{3}$, $\widehat{QPA}=\frac{\pi}{3}$ ($|AP|=|AQ|$), $\widehat{QAP}=\pi-2\cdot\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$, $\widehat{ALK}=\pi-2\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$. Значит, ΔAKL — равносторонний ($\widehat{ALK}=\widehat{LAK}=\widehat{AKL}$). В этом треугольнике LP — высота $\left(\widehat{LPK}=\frac{\pi}{2}\right)$, *поэтому* LP — медиана. Следовательно, $|AK|=2|AP|=2$, $|KL|=|AK|=2$, откуда $|OK|=1$.

Многие абитуриенты решали эту задачу, сразу считая, что точки P и Q расположены так, как изображено на рисунке 3. Чертеж есть лишь иллюстрация к решению геометрической задачи. Если решение использует какое-то свойство чертежа (например, равенство $\widehat{PQL}=\pi-\widehat{PKL}$, верное в случае, изображенном на рисунке 3, и неверное в случае, изображенном на рисунке 2), то наличие этого свойства должно быть обосновано. Иначе решение задачи будет неполным.

3. Ответ. Функция $f(x)=x^3-2x\cdot|x-2|$ $(x\in[0;\ 3])$ имеет одну точку минимума $x=\frac{2}{3}$, ее наибольшее значение на $[0;\ 3]$ равно 21 $\left(\max\limits_{[0;\ 3]} f(x)=f(3)=21\right)$. Решение. По условию областью определения исследуемой функции f является отрезок $[0;\ 3]$. По определению модуля

$$f(x)=\begin{cases}x^3+2x^2-4x, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant 2,\\ x^3-2x^2+4x, & \text{если } 2<x\leqslant 3.\end{cases} \qquad (2)$$

Значит,

$$f'(x)=\begin{cases}3x^2+4x-4, & \text{если } 0<x<2,\\ 3x^2-4x+4, & \text{если } 2<x<3.\end{cases}$$

На $]0;\ 2[$ функция f имеет одну критическую точку $x=\frac{2}{3}$, причем $f'(x)<0$ на $\left]0;\ \frac{2}{3}\right[$, $f'\left(\frac{2}{3}\right)=0$ и $f'(x)>0$ на $\left]\frac{2}{3};\ 2\right[$. Значит, $x=\frac{2}{3}$ — точка минимума.

На $]2;\ 3]$ $f'(x)>0$. Значит, на $]2;\ 3[$ функция f не имеет критических точек.

Рассмотрим теперь точку $x=2$. Эта точка не может быть точкой минимума, так как в любой окрестности точки 2 функция f принимает значения, меньшие $f(2)$; действительно, при $0\leqslant x\leqslant 2$ функция f совпадает с многочленом $f_1(x)=x^3+2x^2-4x$, который на $\left]\frac{2}{3},\ +\infty\right[$ возрастает.

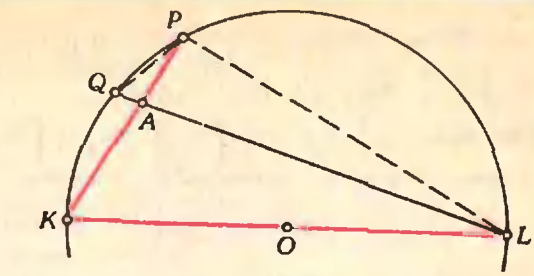


Рис. 2.

Наибольшее значение $\max\limits_{[0;\ 3]} f(x)$ функции f на $[0;\ 3]$, очевидно, равно наибольшему из чисел $\max\limits_{[0;\ 2]} f_1(x)$, $\max\limits_{[2;\ 3]} f_2(x)$, где $f_2(x)=x^3-2x^2+4x$; эти числа легко найти: они равны $f_1(0)=0$ и $f_2(3)=21$, поэтому $\max\limits_{[0;\ 3]} f(x)=f(3)=21$.

Значительная часть ошибок в решении этой задачи связана с формальным усвоением соответствующих разделов школьной программы. Например, некоторые абитуриенты дифференцировали функцию f в областях, содержащих точку $x=2$, где функция в действительности производной не имеет. Многие абитуриенты не смогли правильно объяснить, почему точка $x=2$ не является точкой минимума данной функции.

Отметим также нечеткое знание определений. Некоторые абитуриенты путали понятия «точка минимума» и «наименьшее значение» (характерное рассуждение: «точка $x=2$ не является точкой минимума, так как $f(2)=8>f\left(\frac{2}{3}\right)=-\frac{40}{27}$»).

Часть абитуриентов под точкой минимума понимала точку с координатами $\left(\frac{2}{3};\ -\frac{40}{27}\right)$, а не точку $x=\frac{2}{3}$ из области определения функции, как должно быть в соответствии со школьным учебником.

4. Ответ. $\left]-\frac{1}{2};\ 0\right[$. *Решение. Обе* части данного неравенства определены при

$$\begin{cases}2x+1\neq 0,\\ 2+x>0,\\ x\neq 0.\end{cases}$$

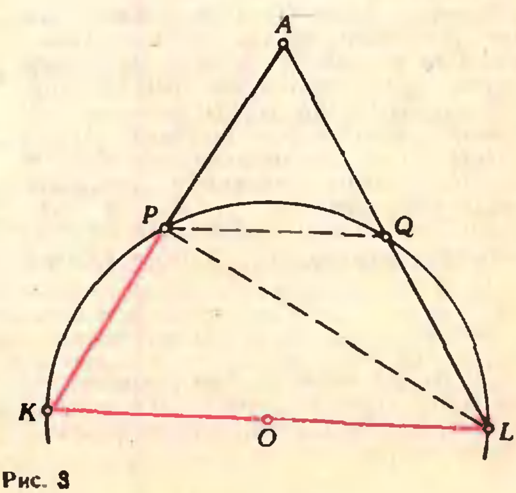


Рис. 3

то есть на множестве $\left]-2;\ -\frac{1}{2}\right[\ \cup$ $\cup\ \left]-\frac{1}{2};\ 0\right[\ \cup\ ]0;\ +\infty[$.

На множестве $\left]-2;\ -\frac{1}{2}\right[\ \cup\ \left]-\frac{1}{2};\ 0\right[$ данное неравенство равносильно неравенству

$$\frac{6x}{2x+1} < 1+\log_2(2+x)$$

или

$$\frac{4x-1}{2x+1} < \log_2(2+x). \qquad (1)$$

На множестве $]0;\ +\infty[$ оно равносильно неравенству

$$\frac{4x-1}{2x+1} > \log_2(2+x). \qquad (2)$$

Нарисуем примерные графики функций $y=\frac{4x-1}{2x+1}=2+\frac{-\frac{3}{2}}{x+\frac{1}{2}}$ и $y=\log_2(2+x)$ на одном рисунке (рис. 4*).

При $x<-\frac{1}{2}$ имеем $\frac{4x-1}{2x+1}>2$, $\log_2(2+x)<1$. Значит, на $\left]-2;\ -\frac{1}{2}\right[$ неравенство (1) решений не имеет.

При $-\frac{1}{2}<x<0$ имеем $\frac{4x-1}{2x+1}<0$, $\log_2(2+x)>0$. Значит, неравенство (1) справедливо при всех $x\in\left]-\frac{1}{2};\ 0\right[$.

При $0<x<1$ имеем $\frac{4x-1}{2x+1}<1$, $\log_2(2+x)>1$ — на $]0;\ 1[$ неравенство (2) решений не имеет.

При $1\leqslant x<2$ имеем $\frac{4x-1}{2x+1}<\frac{7}{5}$, $\log_2(2+x)>\log_2 3$, но неравенство $\frac{7}{5}<\log_2 3$ равносильно неравенствам $2^{7/5}<3$, $2^7<3^5$, $128<243$; значит, на $[1;\ 2[$ неравенство (2) тоже решений не имеет.

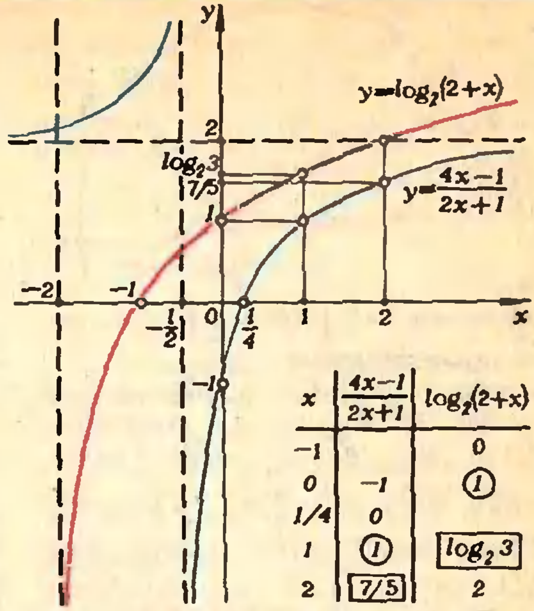
Наконец, при $x\geqslant 2$ имеем $\frac{4x-1}{2x+1}<2$, $\log_2(2+x)>2$ — тоже нет решений.

5. Ответ. $\sqrt{3}-1$. Решение. Обозначим через H основание высоты пирамиды, проведенной из вершины D, и через M — точку касания сферы с плоскостью ABC (рис. 5). Так как $|AD|=|BD|=|CD|$ и равные наклонные имеют равные проекции, $|AH|=|BH|=|CH|$. Это означает, что точка H является центром окружности, описанной вокруг прямоугольного треугольника ABC, то есть H — середина гипотенузы BC. Обозначим через A_1, B_1, C_1 точки касания сферы с прямыми AD, BD, CD соответственно. Из условия следует, что

$$\begin{cases} |AA_1|=|AD|-|DA_1|, \\ |BB_1|=|BD|-|DB_1|, \\ |CC_1|=|CD|+|DC_1|. \end{cases} \qquad (1)$$

Так как отрезки касательных, проведенных из одной точки к сфере, равновелики, то

*) При дальнейшем решении никаких ссылок на этот рисунок не будет — тем не менее фактически именно он подсказывает все дальнейшие рассуждения.



x	$\frac{4x-1}{2x+1}$	$\log_2(2+x)$
-1		0
0	-1	1
$1/4$	0	
1	1	$\boxed{\log_2 3}$
2	$\boxed{7/5}$	2

Рис. 4.

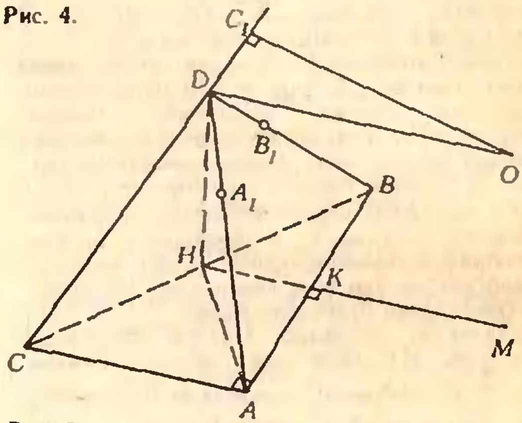


Рис. 5.

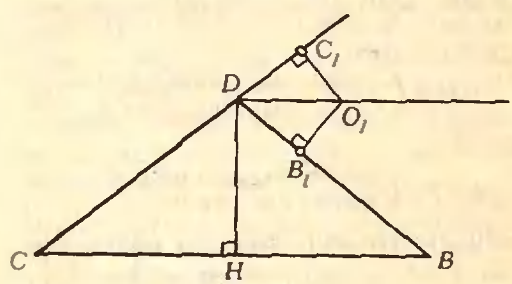


Рис. 6.

$|DA_1| = |DB_1| = |DC_1|$, $|AM| = |AA_1|$, $|BM| = |BB_1|$ и $|CM| = |CC_1|$. Из последних равенств и равенств (1) находим

$$|AM| = |AA_1| = |BB_1| = |BM|.$$

Это означает, что точка M лежит в плоскости ABC на серединном перпендикуляре к отрезку AB. Далее из равенств (1) следует

$$|CM| = |CC_1| > |CD| = |BD| > |BB_1| = |BM|.$$

Значит, точка M лежит на луче HK, где K — середина отрезка AB.

Обозначим через O — центр сферы и через O_1 — ортогональную проекцию точки O на плоскость BCD.

Из равенства $|OB_1| = |OC_1|$ следует $|O_1B_1| = |O_1C_1|$. Так как $|DC_1| = |DB_1|$, треугольники $D\widehat{O_1}C_1$ и $D\widehat{O_1}B_1$ (рис. 6) конгруэнтны. Значит, $C_1DO_1 = B_1DO_1$, то есть DO_1 — биссектриса угла C_1DB_1.

Треугольник BCD — равнобедренный, следовательно, DH — биссектриса угла CDB. Таким образом,

$$H\widehat{DO_1} = \frac{1}{2}\,C\widehat{D}B + \frac{1}{2}\,B_1\widehat{D}C_1 = \frac{1}{2}\,(C\widehat{D}B + B_1\widehat{D}C_1) = \frac{\pi}{2}$$

или $HD \perp DO_1$. Так как прямая OO_1 перпендикулярна плоскости BCD, то $HD \perp OO_1$. Значит, прямая DH перпендикулярна плоскости OO_1D. Но плоскость ABC также перпендикулярна прямой DH. Значит, плоскости ABC и OO_1D параллельны.

Прямые DH и OM параллельны, как два перпендикуляра к одной плоскости ABC. Значит, точки D, H, O, M лежат в одной плоскости. Эта плоскость пересекает параллельные плоскости ABC и OO_1D по прямым HM и DO. Значит, $HM \parallel DO$. Отсюда следует, что четырехугольник $HMOD$ — параллелограмм и, в частности, $|DH| = |OM|$, $|HM| = |DO|$. Поскольку $|OM|$ — радиус сферы, $|DH| = |OM| = 1$. Это дает возможность вычислить боковые ребра пирамиды:

$$|AD| = |BD| = |CD| = \sqrt{|CH|^2 + |DH|^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}.$$

Из $DO \parallel HM$ и $HM \parallel AC$ следует $DO \parallel AC$ и $O\widehat{D}C_1 = A\widehat{C}D$. Из прямоугольного треугольника ABC находим

$$|AC| = |BC| \cdot \cos\widehat{C} = 2\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{6}.$$

Отсюда следует, что равнобедренный треугольник ADC является прямоугольным ($|AC|^2 = |CD|^2 + |DA|^2$) и, в частности, $A\widehat{C}D = \frac{\pi}{4}$. Из прямоугольного треугольника ODC_1

$$|OD| = \frac{|OC_1|}{\sin O\widehat{D}C_1} = \frac{|OC_1|}{\sin A\widehat{C}D} = \frac{|OC_1|}{\sin \pi/4} = \frac{1}{\sqrt{2}/2} = \sqrt{2},$$

откуда $|HM| = \sqrt{2}$.

Из $\triangle HBM$ по теореме косинусов находим

$$|BM|^2 = |BH|^2 + |HM|^2 - 2|BH|\cdot|HM|\cdot\cos B\widehat{H}M = 2 + 2 - 4\cdot\cos\frac{\pi}{6} = 4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3}-1)^2.$$

И, наконец, $|AM| = |BM| = \sqrt{3} - 1$. Так как отрезки всех касательных, проведенных из точки A к сфере, равновелики, искомая величина равна $\sqrt{3} - 1$.

Неумение представить себе конфигурацию в пространстве — основная причина, из-за которой многие абитуриенты слабо продвинулись в решении этой задачи.

Вариант 2

1. Найти все решения уравнения

$$4 - 5\cos x - 2\sin^2 x = 0,$$

удовлетворяющие неравенству $\sin x > 0$.

2. Отрезок AB является диаметром некоторой окружности. Через его концы A и B проведены две прямые, пересекающие окружность соответственно в точках C и D, лежащих по одну сторону от прямой AB. Точка O, в которой пересекаются эти прямые, равноудалена от концов диаметра AB. Найти радиус окружности, если $|CD| = 1$ и $O\widehat{C}D = \frac{\pi}{3}$.

3. Найти точки минимума функции $y = 4x^3 - x|x-2|$, определенной на отрезке $[0;\ 3]$, и ее наибольшее значение на этом отрезке.

4. Решить неравенство

$$\frac{2 + \log_3 x}{x-1} < \frac{6}{2x-1}.$$

5. Основанием пирамиды $PQRS$ является прямоугольный треугольник PQR, в котором гипотенуза QR равна 2 и катет PQ равен 1. Длины ребер PS, QS, RS равны между собой. Сфера радиуса $\frac{\sqrt{2}}{2}$ касается ребра RS, продолжений ребер PS, QS за точку S и плоскости PQR. Найти величину отрезка касательной, проведенной из точки Q к сфере.

Ответы

1. $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$ $(n \in \mathbf{Z})$. **2.** 1. **3.** Точка минимума $x = \frac{1}{3}$, $\max\limits_{[0,\ 3]} f(x) = f(3) = 105$. **4.** $\left]\frac{1}{2};\ 1\right[$. **5.** $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$.

И. Мельников, Ю. Нестеренко

Физика

Задачи устного экзамена

Физический факультет

1. Небольшое тело соскальзывает по наклонной поверхности с высоты $H = 1{,}2$ м. Наклонная поверхность переходит в петлю, как показано на рисунке 1. Найти величину работы силы трения, если известно, что сила давления тела на петлю в верхней точке равна нулю, масса тела $m = 10$ г, радиус петли $R = 0{,}4$ м. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с^2.

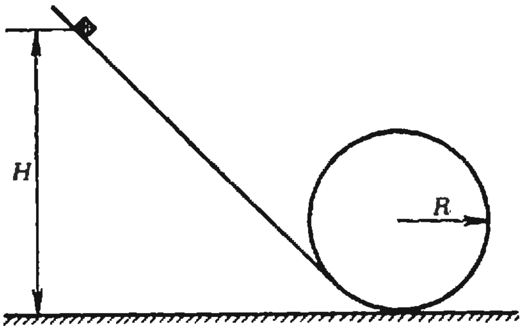


Рис. 1.

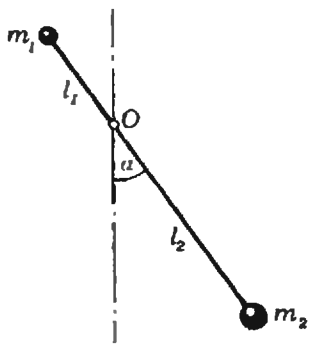


Рис. 2.

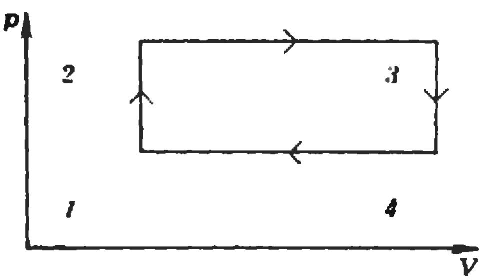


Рис. 3.

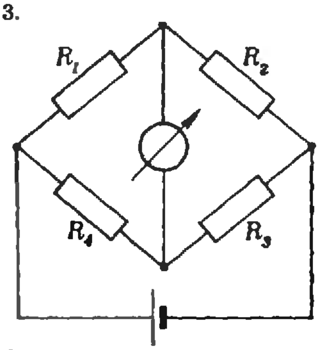


Рис. 4.

2. Невесомый рычаг может свободно вращаться в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через точку O (рис. 2). Массы m_1 и m_2, закрепленные на концах рычага, находятся, соответственно, на расстояниях l_1 и l_2 от оси. В начальном положении рычаг отклонен на угол α от вертикального положения. После освобождения рычаг совершает колебания. Определить линейную скорость массы m_2 в момент прохождения положения равновесия.

3. С каким ускорением будут двигаться по наклонной плоскости два жестко скрепленных между собой тела, имеющих массы m_1 и m_2? Коэффициенты трения между телами и наклонной плоскостью равны, соответственно, k_1 и k_2. Угол наклонной плоскости равен α.

4. Идеальный газ совершает работу. При этом состояние газа меняется по замкнутому циклу, состоящему из двух изохор и двух изобар (рис. 3). Температуры газа в точках 1 и 3 равны, соответственно, T_1 и T_3. Определить работу, совершаемую одним молем газа, если известно, что точки 2 и 4 лежат на одной изотерме.

5. Смешали $V_1=1$ м^3 воздуха с влажностью $\alpha_1=20\%$ и $V_2=2$ м^3 воздуха с влажностью $\alpha_2=30\%$. Обе порции были взяты при одинаковых температурах. Определить относительную влажность α получившейся смеси.

6. В цилиндре под поршнем в пространстве объемом $V_1=1{,}5$ л находится воздух и насыщенный водяной пар при температуре $t_1=20°C$. Какова будет относительная влажность воздуха α в цилиндре, если объем уменьшить до величины $V_2=0{,}1$ л, а температуру повысить до $t_2=100°C$? Давление насыщенного водяного пара при 20°C равно $p_{н1}=2{,}2\cdot10^3$ Па. (Ненасыщенный пар, содержащийся в воздухе, считать идеальным газом.)

7. Плоский конденсатор подключили к источнику постоянного напряжения $U=300$ В. Затем источник отсоединили. Какую работу необходимо совершить, чтобы раздвинуть пластины конденсатора на расстояние в два раза больше первоначального? Начальная емкость конденсатора $C_0=100$ пФ $=10^{-10}$ Ф.

8. В схеме, изображенной на рисунке 4, сопротивления равны $R_1=2$ Ом, $R_2=6$ Ом, $R_3=8{,}95$ Ом и $R_4=3$ Ом. До какой температуры необходимо нагреть сопротивление R_3, чтобы через гальванометр не шел ток? Температурный коэффициент сопротивления равен $\alpha=0{,}1\cdot10^{-3}$ К$^{-1}$. Начальная температура сопротивления R_3 равна $t_0=20°C$.

9. Оптическая система состоит из тонкой собирающей линзы с фокусным расстоянием $F_1=4$ см и тонкой рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F_2=-3$ см. Расстояние между линзами $l=2$ см. Определить, в каких точках (на каком расстоянии от линз) сойдутся параллельные лучи света, падающие на систему с одной и с другой стороны?

10. В концы отрезка трубы, внутренняя сторона которой зачернена, вставлены собирающая (с одной стороны) и рассеивающая (с другой стороны) линзы. Диаметр трубы $D=3$ см, длина отрезка трубы $l=12$ см. Со стороны собирающей линзы на трубу вдоль ее оси падает широкий пучок параллельных лучей. Лучи, прошедшие через трубу, выходят из нее параллельным пучком диаметром $d=1$ см. Чему равны фокусные расстояния линз?

Механико-математический факультет

1. Клин с углом при основании, равным $\alpha=45°$, может скользить вдоль горизонтальной плоскости. На клине находится брусок

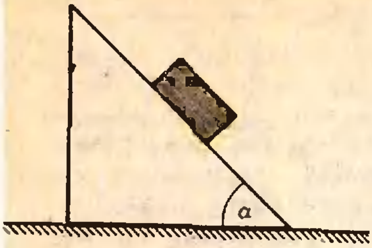


Рис. 5.

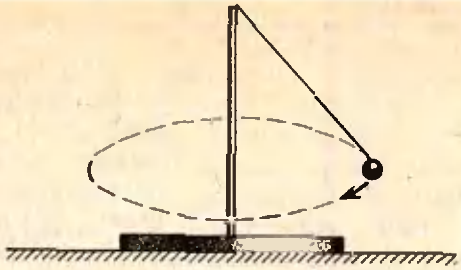


Рис. 6.

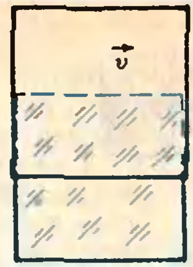


Рис. 7.

(рис. 5). С каким ускорением $\vec{a}$ должен двигаться клин в горизонтальном направлении (в плоскости рисунка), чтобы брусок относительно клина находился в покое, если коэффициент трения между поверхностями клина и бруска равен $\mu = 0{,}1$?

2. На горизонтальном столе лежит тонкий диск массой $M = 500$ г и радиусом $R = 15$ см (рис. 6). В центре диска укреплен тонкий невесомый вертикальный стержень длиной $l = 40$ см. К верхнему концу стержня на невесомой нерастяжимой нити подвешен маленький шарик массой $m = 300$ г. Длина нити меньше длины стержня. Шарик приводится в движение так, что он описывает окружность в горизонтальной плоскости вокруг стержня. Какой максимальный угол α может при этом составлять нить со стержнем, чтобы диск не отрывался от стола? Считать, что вследствие трения диск не может скользить по столу.

3. Теннисный мяч ударяют ракеткой у самой поверхности Земли, сообщая ему начальную скорость $\vec{v}$ ($|\vec{v}| = 20$ м/с), направленную под углом $\alpha = 45°$ к горизонту. Мяч летит к вертикальной стене, двигаясь в плоскости, перпендикулярной к этой стене, и испытывает со стеной абсолютно упругое соударение. Стена находится от места удара на расстоянии $l = 15$ м. На каком расстоянии x от места удара мяч упадет на Землю? Сопротивлением воздуха пренебречь.

4. Сухой воздух заполняет закрытый сосуд объемом $V = 25$ л при давлении $p_1 = 10^5$ Па и температуре $t_1 = -23°$С. В сосуд кладут кусок льда массой $m = 9$ г и нагревают сосуд до температуры $t_2 = 127°$С. Определить давление влажного воздуха. Газовая постоянная $R = 8{,}3$ Дж/(моль·К), давление насыщенных паров воды при температуре $t_2 = 127°$С равно $p_н = 2{,}5 \cdot 10^5$ Па.

5. Алюминиевый конус с углом между осью и образующей, равным $\alpha = 30°$, стоит на горизонтальном столе. На конус надето тонкое железное кольцо, плоскость которого находится на расстоянии $h = 5$ см ниже вершины конуса. На какую величину Δh изменится расстояние от вершины конуса до плоскости кольца, если температура конуса и кольца повысится на величину $\Delta t = 100°$С? Коэффициенты линейного расширения алюминия $\alpha_1 = 2{,}4 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$ и железа $\alpha_2 = 1{,}2 \cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$. Трение кольца о поверхность конуса отсутствует.

6. Пластины плоского конденсатора имеют форму квадрата со стороной $a = 20$ см. Расстояние между ними $d = 6$ мм. Пластины присоединены к источнику постоянного тока, ЭДС которого $\mathcal{E} = 500$ В. В пространство между пластинами вдвигают, как показано на рисунке 7, с постоянной скоростью $\vec{v}$ ($|\vec{v}| = 2$ мм/с) квадратную стеклянную пластинку, размеры которой таковы, что она в конце концов заполняет все пространство внутри конденсатора. Найти силу тока I, текущего по проводам от источника к конденсатору, пока пластинка движется. Сопротивление проводов не учитывать. Краевыми эффектами пренебречь. Диэлектрическая проницаемость стекла $\varepsilon = 7$. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}$ Ф/м.

7. Электрическая цепь состоит из соединенных последовательно источника постоянного напряжения, сопротивления $R = 500$ Ом и плоского конденсатора, у которого площадь пластин $S = 4$ см², а расстояние между пластинами можно изменять. Если пластины сдвинуты до соприкосновения друг с другом, в цепи течет ток силы $I = 0{,}2$ А. Какой величины заряды будут на пластинах, если пластины раздвинуть на расстояние $d = 2$ мм? Внутренним сопротивлением источника пренебречь. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.

8. Жесткая проводящая рамка квадратной формы лежит на горизонтальной непроводящей поверхности и находится в магнитном поле, линии индукции которого параллельны двум сторонам рамки. Масса рамки $m = 20$ г, длина ее стороны $a = 4$ см, абсолютная величина магнитной индукции $|\vec{B}| = 0{,}5$ Тл. Какой силы I постоянный ток нужно пропускать по рамке, чтобы одна из ее сторон начала приподниматься?

9. Внутренняя поверхность конуса, покрытая отражающим слоем, образует коническое зеркало. Вдоль оси конуса внутри него протянута тонкая светящаяся нить. При каком минимальном угле α раствора конуса лучи, идущие от нити, будут отражаться от поверхности конуса не более одного раза?

10. Предмет находится на расстоянии $d = 10$ см от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F = 20$ см. Во сколько раз изменится величина изображения, если на место собирающей линзы поставить рассеивающую с тем же по модулю фокусным расстоянием?

С. Кротов. Л. Михеева

Ю. Первин, А. Салтовский

Память ЭВМ

Современная электронная вычислительная машина — завод в миниатюре. Под словом «завод» подразумевается, конечно, не только комплекс производственных зданий, которые заполнены станками и оборудованием; завод — это еще и технологический процесс (описываемый перечнем правил обработки изделий, инструкциями, наставлениями, чертежами), выполнение которого приводит к чудесному превращению сырья в готовую продукцию.

В ЭВМ сырьем, полуфабрикатами на всех стадиях технологического процесса, а также готовой продукцией является *информация*, то есть записанные в символьной форме сведения об объектах, явлениях и процессах окружающего мира.

Если ЭВМ — завод по переработке информации, то складом, на котором хранятся заготовленное для переработки сырье, заготовки, прошедшие часть технологического процесса, а также готовая к отправке продукция, является *память* или *запоминающее устройство* (ЗУ).

Таким образом, память или ЗУ — техническое устройство, предназначенное для хранения информации. Разумеется, это устройство должно своевременно выдавать и записывать информацию. Расторопность, а точнее быстродействие, памяти выражают названиями типов запоминающих устройств — *сверхоперативная память, оперативная память, внешняя память*.

Чем быстрее работает память, тем она обходится дороже. В больших ЭВМ, в которых применяют память различного быстродействия, отношения между центральной частью ЭВМ и различными видами памяти построены иерархически, так что обращение в более дешевую и емкую внешнюю память напоминает переговоры короля с королевой в «Балладе о королевском бутерброде».

Кодирование

Физическим носителем информации является *сигнал* (в ЭВМ — электрический сигнал). Преобразование информации из одной формы в другую осуществляется при помощи *кодирования*. Наши знания об окружающем мире в известной степени определяются способностью воспринимать и анализировать информацию, т. е. умением правильно истолковывать *код*. Механизм кодирования может быть значительно сложнее того, который разгадал Шерлок Холмс в «Пляшущих человечках». Так, например, генетики считают, что в хромосомах клетки эмбриона записан полный «план-чертеж» будущего человека.

Создатели первых ЭВМ должны были решить, как лучше всего кодировать обрабатываемую и хранимую информацию, чтобы обеспечить

— простоту и надежность;
— наибольшее быстродействие;
— минимум затрат оборудования (экономичность).

Наиболее полно всем этим требованиям удовлетворяет система *двоичного кодирования*, где для изображения информации используются числовые комбинации, состоящие всего из двух цифр — 0 и 1. Более подробно об этом можно прочесть в книге Ф. Бауэра и Г. Гооза «Информатика» (М., «Мир», 1976).

С точки зрения удобства общения с ЭВМ разумнее всего было бы использовать традиционную десятичную систему счисления (между прочим, она привычна нам лишь потому, что именно десять пальцев служили древнему человеку первыми портативными ЗУ). Но перечисленные выше технические требования оказали решающее значение при выборе системы кодирования — пришлось смириться с тем фактом, что с точки зрения машинной обработки информации наиболее разумной является не десятичная, а двоичная система счисления.

Материал запоминает

Материал, с помощью которого человек организовывал запись и хранение информации, был самым разнообразным — камни, пальцы и палочки, а позднее — бумага и перо. Все эти материалы обладали разнообразными достоинствами, в числе которых была, например, наглядность, но общим главным недостатком подобных систем хранения оставалось очень низкое быстродействие: попробуйте-ка пересчитать несколько раз сотню камней или отыскать нужный материал в толстой книге.

Современная техника располагает материалами, которые дают возможность изготовить компактные и высокоскоростные устройства памяти, позволяющие хранить большие объемы информации. Целый ряд материалов и простых устройств обладает замечательным свойством сравнительно долго сохранять одно из двух устойчивых состояний: феррит (см. ниже) сохраняет свою намагниченность и после того, как выключен ток в катушке намагничивания; конденсатор остается заряженным после того, как отключено подведенное к нему напряжение; электромеханическое реле сохраняет замкнутыми свои контакты до тех пор, пока через соленоидную катушку протекает ток.

Феррит

Способность материала «запоминать» результаты предыдущего опыта основана на замечательном свойстве, которое называют *гистерезисом*.

В качестве запоминающего материала, использующего явление гистерезиса, в ЭВМ довольно распространен феррит — искусственный материал с исключительно яркими магнитными свойствами. На рисунке 1 представлена зависимость направления и величины магнитного потока в феррите от величины и направления тока в катушке намагничивания. Эта зависимость имеет ступенчатый (прямоугольный) характер.

В памяти обычно используются кольцеобразные ферриты: замкнутый в ферритовом кольце магнитный поток наилучшим образом сохраняет энергию, затрачиваемую на перемагничивание (рис. 2).

При хранении информации на ферритах договариваются, что коль-

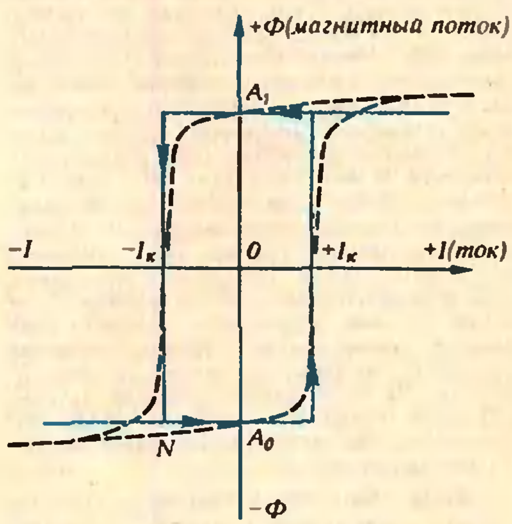


Рис. 1. Прямоугольная петля гистерезиса — характеристика ферритов: материалов с особенно яркими магнитными свойствами.

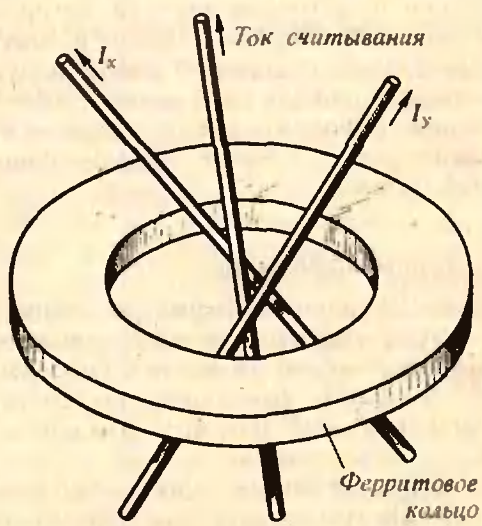


Рис. 2. Ферритовое кольцо — наиболее распространенный элемент магнитных запоминающих устройств.

цо хранит «1», если значение магнитного потока внутри кольца соответствует точке A_1 (рис. 1), и «0» при значении магнитного потока, соответствующем точке A_0.

Чтобы записать в ферритовое кольцо информацию, надо изменить направление и величину магнитного потока, для чего через катушку намагничивания пропускается электрический ток соответствующей величины и направления. Как видно из графика, резкое изменение значения магнитного потока произойдет в тот момент, когда величина тока в катушке достигнет некоторого критического значения $+I_K$ (рис. 1). Узнать, что именно хранит ферритовое кольцо, можно, перемагничивая кольцо в определенном направлении, например к точке A_0. Из курса физики известно, что изменение магнитного потока в замкнутом контуре вызывает появление ЭДС. Именно по величине ЭДС можно узнать, «0» или «1» хранило ферритовое кольцо. В самом деле, если кольцо хранило «единицу» (значение магнитного потока равно A_1), а перемагничивание (при считывании) выполнено к точке A_0 (для этого через катушку пропускают ток $-I_K$), в кольце произойдет быстрое изменение величины и направления магнитного потока. Это изменение магнитного потока отзовется появлением ЭДС в замкнутом контуре считывания. Если кольцо хранило «нуль», а по условиям считывание производится перемагничиванием током $-I_K$, то изменение потока от точки N до точки A_0 не разрушит хранимый «нуль». Изменение магнитного потока в кольце от точки N до A_0 вызовет столь же незначительное значение ЭДС.

Итак, мы познакомились с элементом машинной памяти — ферритом, который может помнить только одно из двух возможных состояний, обозначаемых нулем и единицей. Знание о состоянии объекта, который может быть только в одном из двух положений, составляет наименьшую порцию информации — один *бит**! Таким образом, феррит физически представляет 1 бит, т. е. один двоичный разряд.

Единицы информации

Для измерения информации, наряду с битом, употребляются производные единицы — *байт* (8 битов), *килобайт* (2^{10} байтов), сокращенно — Кбайт, и мегабайт (2^{20} байтов). Это единицы — «внемашинные».

Стандартная порция информации, которую выдает или принимает ЭВМ,— *машинное слово*. «Длина» машинного слова (то есть число двоичных разрядов) обычно фиксирована в каждой ЭВМ: в «Минске-32 машинное слово состоит из 37 битов, а в «БЭСМ-6» — из 48 битов.

Машинное слово — это та единица измерения объема памяти, которую часто использует программист. Для самой же машины, для работы ее устройств более важной оказывается порция информации, называемая *ячейкой*. Впрочем, во многих машинах понятия машинного слова и ячейки оказываются совпадающими. Но не во всех. Например, в машинах серии ЕС ячейка содержит один байт, так что одно 32-разрядное машинное слово ЕС ЭВМ располагается в четырех рядом расположенных ячейках.

Адреса ячеек

Важнейшая характеристика ячейки — ее номер во множестве всех ячеек. Этот номер называется *адресом* ячейки. По адресу в памяти отыскиваются ячейка или машинное слово, начинающееся в этой ячейке.

Адрес играет основную роль при поиске информации в памяти. Когда известен адрес ячейки, добраться до ее содержимого, при определенном устройстве памяти, столь же просто, как найти заданную клеточку в игре «Морской бой» или увидеть фигуру на указанном шахматном поле. Устроенная таким образом память (ее обычно делают на ферритах) называется памятью с *прямым* (или *произвольным*) доступом.

Аналогичную роль играет адрес при определении места в памяти для хранения информации.

Быстродействие

Физические процессы, протекающие в памяти в моменты записи или считывания информации, требуют определенного времени. Именно это время определяет быстродействие памяти, а зачастую и быстродействие ЭВМ в целом. Время поиска ячейки в памяти прямого доступа (выполненной на ферритовых кольцах) составляет 2—5 микросекунд (1 микросекун-

*) Слово «бит» произошло от английских слов «BInary digiT» («двоичная цифра»).

да $=10^{-6}$ секунд), а в сверхоперативной памяти оно еще меньше — 10—100 наносекунд (1 наносекунда $=10^{-9}$ секунд).

Память на ферритовых кольцах в настоящее время не является самой скоростной. Успехи полупроводниковой интегральной технологии позволили широко использовать в современных ЭВМ принципиально новые материалы и устройства. Пока стоимость таких устройств высока, новые элементы памяти применяются при создании сверхоперативной памяти — небольших по объему, но весьма быстродействующих запоминающих устройств, в которые записывают, как правило, информацию, наиболее часто используемую при решении данной задачи на ЭВМ. Рассказу об интегральных схемах, используемых в памяти ЭВМ, будет посвящена отдельная статья в одном из следующих номеров «Кванта».

Магнитофон

Хорошими характеристиками с точки зрения объема и дешевизны памяти обладает магнитофон. С «домашним» родственником этого типа памяти — бытовым магнитофоном — вы, вероятно, знакомы. Правда, в отличие от бытового собрата, магнитофон, применяемый в ЭВМ, солиднее не только по внешнему виду: высококачественная магнитофонная лента позволяет записывать информацию с очень высокой плотностью (например, 64 бита на одном миллиметре). Если учесть, что длина магнитофонной ленты достигает в магнитофонах 750 метров, то можно понять, насколько емкой является такая внешняя память.

Информация располагается на магнитофонной ленте последовательно, и каждый участок фиксированной длины, именуемый *зоной*, имеет свой собственный номер. Зона состоит, как правило, из большого числа (сотен и тысяч) ячеек. При хранении на ленте индивидуальность ячеек и их адреса игнорируются; порцией обрабатываемой информации становится зона; отличить ячейку одну от другой можно по относительному номеру, отсчитываемому от начала зоны, после того как зона с ленты будет переписана в оперативную память. Размер зоны, вообще говоря, произволен (в некоторых пределах), но фиксируется на время решения одной или нескольких задач. Разбивка магнитной ленты на зоны, называемая *разметкой*, выполняется программистом не во время вычислений, а до них: в этом, по существу, состоит предварительная подготовка физического носителя информации — ленты — к участию в вычислительном процессе.

При разметке магнитной ленты в начале каждой ленты автоматически расставляются номера зон. В дальнейшем это позволяет записать информацию в конкретную зону и прочитать ее оттуда, когда она потребуется. При считывании информации магнитофону заказывают номер зоны, тогда он начинает перемещать ленту в нужном направлении. Время поиска информации занимает десятки секунд, а иногда доходит до минут. Дело в том, что для поиска нужной ячейки памяти на ленте надо сначала просмотреть все предшествующие зоны, а затем в нужной зоне, вызванной в оперативную память, просмотреть последовательно все ячейки, предшествующие искомой. Такого вида память называют памятью с *последовательным доступом*.

Иерархия запоминающих устройств

В состав ЭВМ входят устройства, промежуточные по своему быстродействию между сверхоперативной и оперативной памятью — устройствами прямого доступа, с одной стороны, и магнитофонами — памятью с последовательным доступом, с другой стороны. Это, прежде всего, *магнитные диски* и *магнитные барабаны*. Оба этих устройства используют тот же принцип работы, что и магнитофоны: информация записывается на ферромагнитное покрытие благодаря тому, что изменение величины или направления тока в катушке намагничивания вызывает изменение магнитного поля, которое формирует на магнитном покрытии «отпечаток» информации;

считывание происходит, когда магнитное покрытие перемещается мимо контура считывания. В роли катушки намагничивания во всех этих устройствах выступает магнитная головка записи, в роли контура считывания — магнитная головка воспроизведения. Отличие этих устройств от магнитофона состоит в том, что у них сравнительно небольшая поверхность цилиндра вращается с большой скоростью, то есть время доступа к информации нормировано прежде всего временем оборота барабана или диска. Платить за это ускоренное быстродействие приходится меньшей, чем у магнитофона, информационной емкостью, но в то же время емкость магнитного диска и даже барабана значительно превосходит стандартные объемы оперативной памяти.

Все перечисленные причины и послужили основными аргументами при создании иерархических систем памяти. На самом верху этой лестницы находятся сверхоперативная и оперативная память («король» и «королева»), ниже — барабан и диск («королевская молочница»), в самом низу — магнитофон («королевская корова»).

Современные ЭВМ рассчитаны на многопрограммную работу. По аналогии с заводом можно сказать, что изготавливаются одновременно несколько разных изделий (по разным технологическим планам). Чтобы детали к самолету не попали в цех, где производят детские велосипеды, необходимо организовать контроль выдачи со склада: кому, что и когда выдавать. Функции охраны содержимого в памяти ЭВМ выполняет *ключ*. Представьте себе длинный коридор склада (памяти). Каждая комната, выходящая в коридор, имеет свой замо́к, а следовательно, свой ключ. Каждая ЭВМ имеет свое понятие «комнаты» — свой стандартный размер блока охраняемой памяти. В ЕС ЭВМ такой «комнатой» является объем памяти в 2 Кбайта. Каждое обращение к памяти, кроме адреса, содержит и ключ. Это позволяет различным программам мирно сосуществовать в памяти, не мешая друг другу.

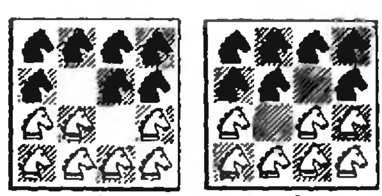
Память является самой дорогой частью ЭВМ. Ее характеристики определяют производительность всей машины. Нетрудно понять, что задача будет решена быстрее, если программа ее решения и все необходимые данные будут находиться в оперативной памяти, а наиболее используемая информация в сверхоперативной, нежели в том случае, когда программа или данные будут размещаться на внешней памяти (диск, барабан, магнитофон). Если в ЭВМ решаются сразу несколько задач (многопрограммный режим), то оперативной и сверхоперативной памяти не хватает. Попытки поднять эффективность работы ЭВМ за счет более полного использования всех возможностей иерархических систем памяти привели к интересной организации, называемой ***виртуальной*** (кажущейся) ***памятью***.

Существо этой организации состоит в том, что программист работает словно с памятью прямого доступа (например, оперативной), а на деле в момент выполнения программы работают все устройства памяти ЭВМ (если, конечно, программа достаточно большая). Высокая эффективность достигается за счет того, что в сверхоперативной памяти хранится «общий план» памяти — нечто вроде географической карты. Программа, управляющая решением задач в ЭВМ (ее называют *операционной системой*), пользуется этим планом, доставляя информацию в тот момент, когда она требуется для решения конкретной задачи (или незначительно позже). Виртуальная память — сложный сплав программных средств и электронного оборудования.

ПЕРЕГОНИТЕ КОНЕЙ

Перегоните коней из позиции 1 в позицию 2. Сколько ходов вам потребуется?

Л. Мочалов



1   *2*

XVI лингвистическая олимпиада

Ее порядковый номер показывает, что эта олимпиада — традиционная. А полностью она называется «Олимпиада по языковедению и математике».

На первый тур такой олимпиады в воскресенье 28 октября 1979 года пришли 290 московских школьников в здание филологического факультета МГУ и 237 ленинградских школьников в здание филологического факультета ЛГУ. Впервые эта олимпиада прошла одновременно по одним и тем же заданиям в Москве и в Ленинграде. (Могла бы пройти и в других городах, если бы представители филологических факультетов вузов этих городов заранее связались с коллегами из МГУ. Будем надеяться, что в ближайшее время это произойдет.) Олимпиада проводилась силами преподавателей и студентов кафедры структурной и прикладной лингвистики филфака МГУ и кафедры математической лингвистики филфака ЛГУ.

Прикладная лингвистика занимается исследованиями по машинному переводу, анализу и синтезу речи, информационному поиску и др. Ее идеи и методы очень разнообразны, многие из них почерпнуты из математики, кибернетики, психологии. Это отражали и задачи, предложенные на олимпиаде. Для их решения не требуется специальных знаний, но нужна смекалка, умение упорядочить факты, логика мышления. Многие призеры предыдущих олимпиад сейчас учатся на филфаке МГУ.

Ниже приводятся несколько задач первого тура.

2 (7 класс). Даны грузинские слова (в латинской транскрипции) и их переводы на русский язык в перепутанном порядке: xerxva, mγebavi, bari, mxerxavi, γebva, mtibavi, xerxi, barva — лопата, маляр, косарь, пилить, красить, пила, копать, пильщик.

Установите, какой перевод соответствует каждому грузинскому слову (γ — особый согласный звук грузинского языка).

3 (7 класс). Ниже приведены некоторые родственные слова русского и сербскохорватского языков (знаки ´, ˝, ^ обозначают различные виды сербско-хорватского ударения). Часть слов пропущена.

	русск.		серб.
1.	вода	—	во̀да
2.	гроза	—	гро̏за
3.	терем	—	трêм
4.	колоть	—	кла̏ти
5.	брат	—	бра̏т
6.	?	—	сре́бро
7.	?	—	вра̂н
8.	?	—	гра̏х
9.	?	—	вра̏на
10.	?	—	кла́с
11.	?	—	гра̂д
12.	?	—	гра̏д
13.	бородат	—	?
14.	порог	—	?
15.	порох	—	?
16.	волос	—	?

Заполните пропуски

4 (7 класс). Даны некоторые числа в системе записи, которая использовалась в русской письменности до начала XVIII века:

ФЛВ—532, ТЛЕ—335, РКВ—122, ФМД—544, ХМЕ—645.

Определите, каким числам соответствовали записи:

ХКД, СЛВ, ТЛГ.

7 (8 класс). Даны обозначения некоторых дат на языке суахили и их переводы на русский язык в перепутанном порядке: tarehe tano Oktoba Jumapili; tarehe tatu Disemba Jumamosi, tarehe tano Oktoba Jumatatu; tarehe pili Aprili Jumanne; tarehe tano Oktoba Jumatano; tarehe nne Aprili Jumanne — 5 октября, понедельник; 5 октября, среда; 5 октября, воскресенье; 2 апреля, вторник; 4 апреля, вторник; 3 декабря, суббота.

1) Установите, какой перевод соответствует каждому сочетанию на языке суахили.

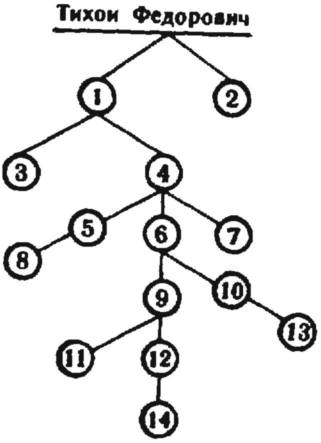
2) Переведите на суахили: 3 апреля, среда; 1 декабря, воскресенье.

10 (9 класс). В языке хева названия некоторых частей тела имеют числовые значения. Ниже приведены: в левой колонке — слова языка хева в латинской транскрипции, в средней — числовые значения этих слов, в правой — названия частей тела, которые эти слова обозначают. В каждой колонке имеются пропуски.

namalu	— 2 —	указательный палец левой руки
keli	— 5 —	мизинец левой руки
tagu	— 7 —	?
aluene	— 8 —	локоть левой руки
kolu	— ? —	?
opey	— 12 —	левое ухо
?	— 1 —	?
aley	— 10 —	?
ilaw	— 11 —	левая сторона шеи
favalo	— 3 —	средний палец левой руки
kay-maluene	— 22 —	запястье правой руки
?	— ? —	часть правой руки от запястья до локтя
ni	— ? —	левый глаз
?	— 24 —	указательный палец правой руки
?	— 6 —	?
kay-name	— 23 —	?
kay-kolu	— 26 —	?
kay-keli	— ? —	?
patapa	— ? —	переносица

Заполните пропуски.

15 (8—10 классы). На рисунке приводится часть родословного дерева одной семьи коми, родоначальником которой был некий «Тихон Федорович». В этом дереве для каждого мужчины линиями указаны все его дети, а для женщин никакие потомки не указаны. Члены этой семьи, заштрихованные в дереве цифрами, перечисляются также на языке коми:



а) Остап Тикон
б) Остап Падей
в) Остап Марпа
г) Падей Марпа
д) Падей Остап
е) Тикон Падей
ж) Тикон Пекла
з) Илля Епрем
и) Илля Катя
к) Педот Вась
л) Тикон Закар
м) Падей Илля
н) Падей Педот
о) Епрем Пиль

1) Поставьте имена в соответствие узлам дерева. Сколькими способами это можно сделать?

2) Напишите на языке коми имя родоначальника семьи — «Тихона Федоровича».

* *
*

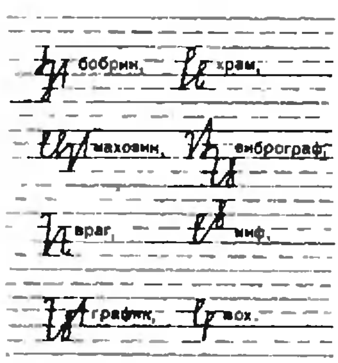
На второй тур было допущено около половины участников первого тура. Задачи второго тура были существенно труднее задач первого тура. Жюри, в состав которого входили представители филфаков МГУ и ЛГУ, мехмата МГУ, институтов востоковедения и языкознания АН СССР, пришлось немало потрудиться, чтобы выявить победителей — школьников, наиболее полно и оригинально решивших наибольшее число задач. Некоторым школьникам были присуждены «отдельные призы» за решения отдельных задач. Наилучшие результаты показали москвичи М. Черкасов (шк. № 7, 7 кл.), Д. Ногин (шк. № 91, 8 кл.), М. Толстая (спецшк. № 19, 8 кл.), С. Власов (шк. № 91, 9 кл.), М. Волович (шк. № 2, 9 кл.), Г. Левин (шк. № 10, 9 кл.), М. Гельфанд (шк. № 109, 10 кл.), К. Зоркий (шк. № 438, 10 кл.), Ю. Яголим (шк. № 91, 10 кл.) и ленинградцы И. Штеренберг (шк. № 132, 7 кл.) и И. Жуков (шк. № 227, 7 кл.). Победителям были вручены дипломы или грамоты и объемистые призы — книги по лингвистике и математике. На этом олимпиада закончилась, но не кончились занятия ее участников лингвистикой. Выпускники школ будут поступать на филфак МГУ или ЛГУ, а остальные — заниматься в кружках прикладной лингвистики и участвовать в олимпиаде 1980 года.

В заключение приведем несколько задач второго тура олимпиады.

2 (10 класс). Даны слова на венгерском языке и все их переводы на русский язык в перепутанном порядке: valakiröl, kik; ezekböl, kiktöl; ezekröl, akárkik; kikböl; ki; kiböl, ezen; valakikröl; kitöl — кто? из кого? любые; об этих; о ком-нибудь; от кого? из этих; на этом.

Установите, какой перевод соответствует каждому венгерскому слову. Объясните, почему в некоторых случаях разные венгерские слова переведены одним русским словом.

3 (9, 10 класс). Стенографией называется особая система письма, предназначенная для быстрой записи устной речи. Ниже застенографировано несколько русских слов.



Застенографируйте слова: микроб, комок, химик, крабик, гриф.

7 (8, 9 класс). Даны словосочетания на тайском языке (государственном языке Таиланда) в упрощенной русской транскрипции и их переводы на русский язык в перепутанном порядке: кратхинтхет сам док; кратхинтхет си док; накленг нынг кхон; наиглак си кхон; кабин нынг туа; чаба нынг док, нак сам туа; дуронг сонг туа; чалэй сам кхон; дуронг си туа; сэ сонг док; накленг си кхон; чанг нынг кхон; чанг сам кхон; буа сам док; чанг си кхон; кабин сам туа — 3 акации; 4 акации; 3 выдры; 1 китайская роза; 3 лотоса; 2 лошади; 4 лошади; 4 людоедки; 1 обезьяна; 3 обезьяны; 2 орхидеи; 3 пленника; 1 слесарь; 3 слесаря; 4 слесаря; 1 хулиган; 4 хулигана.

Установите, какой перевод соответствует каждому тайскому словосочетанию.

13 (7 класс). Ниже приводится разговор трех братьев: Володи (старшего), Андрея (среднего) и Миши (младшего) — и его перевод на японский язык, записанный в русской транскрипции. В японском тексте имеются пропуски. Заполните их.

Андрей. Володя, Боря этим летом отдыхает в лесу?
Вородзя-сан, котоси-но нацу Боря-ва мори-ни ясумимас ка?

Володя. Да, Андрей, Боря отдыхает в лесу. Миша, Боря гуляет по лесу?
Ээ, Андорэй-кун, Боря-ва мори-ни ясуму. Мися-кун, Боря-ва мори-ни сампосуру ка?

Миша. Нет, Володя, Боря рыбачит.
Иий, Вородзя-сан, Боря-ва цуримас.

Андрей. Миша, Боря спит в палатке?
. . . ., Боря-ва тэнто-ни нэмуру ка?

Миша. Нет, Андрей, Боря спит в лодке. Андрей, палатка находится на берегу?
Иэ, Андорэй-сан, Боря-ва бооте-ни... . Андорэй-сан, тэнто-ва киси-ни аримас ка?

Андрей. Да, Миша. Вещи находятся в палатке. Миша, Боря рыбачит на берегу?
. . . . . Моно-ва тэнто-ни ару. Мися- . . . ., ... ?

Миша. Нет, Андрей. Боря рыбачит в лодке. Лодка находится в воде.
. . . .
Бооте- . . . . . . мидзу-ни аримас

А. Виленкин

Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

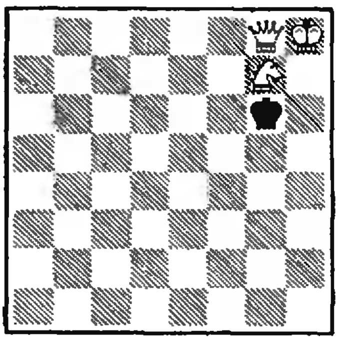
Среди множества задач, этюдов и необычных позиций на шахматной доске особый интерес представляют так называемые *символические* или, иначе, *изобразительные* задачи. Начальная или заключительная расстановка фигур в таких задачах или сам ход решения изображают собой какой-нибудь рисунок, символ, число или букву. Обычно символические задачи посвящаются выдающимся личностям, юбилейным датам или важным событиям.

В этом месяце, как вы знаете, в нашей стране празднуется День космонавтики. И именно 12 апреля 1964 года впервые были опубликованы 1—3 задачи международного мастера по шахматной композиции Э. Погосянца. Автор посвятил их Юрию Гагарину, первому человеку на Земле, побывавшему в космосе. Начальное расположение фигур в каждой из трехходовок изображает букву «Г». Предлагаем вам решить эти символические задачи. Любопытно, что в них использованы всего 4 фигуры.

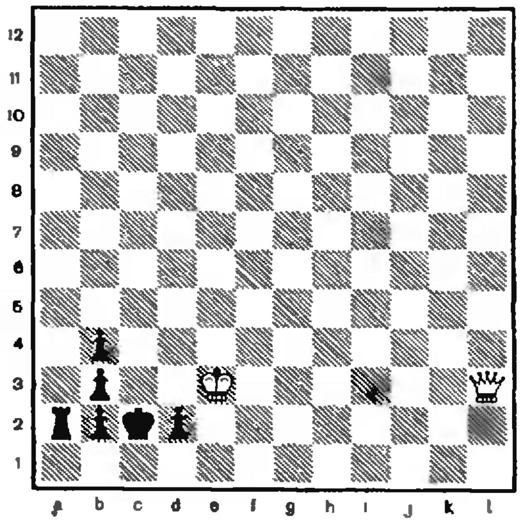
В нашей февральской страничке мы уже предлагали вам одну задачу — многоходовку, в которой белый ферзь после долгих и утомительных маневров объявляет мат неприятельскому королю на 14-м ходу. Такие задачи в шахматной композиции называются *виражами*. Необычная задача 4 также представляет собой вираж. Доска здесь, как обычно, квадратная, но размеры ее необычайно велики. В результате ферзь идет по виражу более двадцати ходов!

Весьма любопытна задача 5, принадлежащая известному шахматному композитору Г. Доусону. Ее тоже можно назвать изобразительной, только рисунок здесь образуют не фигуры, а сама доска.

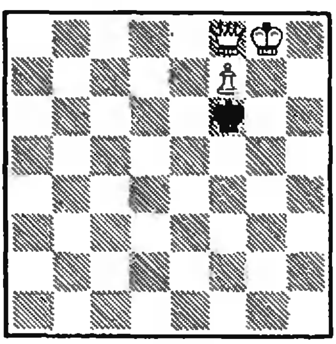
Задачи 1—3, как мы видели, содержали всего четыре фигуры. Однако минимальный материал, позволяющий создать шахматное произведение, состоит из трех фигур (при двух королях на доске просто нечем давать мат). Одна из рекордных в этом смысле — задача 6. Она решается очень просто, но учтите, что это самая старая трехфигурная задача — она придумана 135 лет назад!



1. Э. Погосянц. Мат в 3 хода.

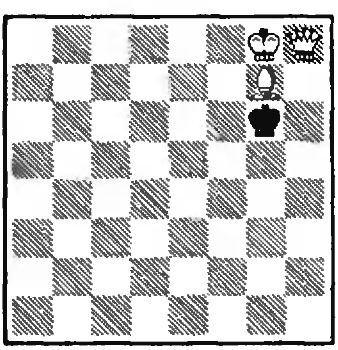


4. Я. Мортенс. Мат в 21 ход.

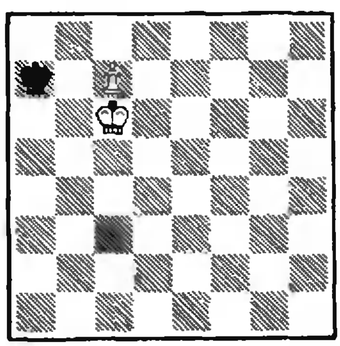


2. Э. Погосянц. Мат в 3 хода.

5. Пистолет Доусона. Мат в 21 ход.



3. Э. Погосянц. Мат в 3 хода.



6. К. Томлинсон. Мат в 2 хода.

Где расположено основание высоты?

Задачи (мы приводим номер правильного ответа, а вслед за ним — указание).

1а—3 (основание высоты должно быть равноудаленным от вершин основания;

1б—3 (по той же причине, что 1а).

1в—5 (основание высоты равноудалено от прямых AB, BC, AC).

1г—2 (достаточно показать, что основание высоты O принадлежит одной из высот треугольника, скажем CH, но

$(SC)\perp(SA)$, $(SC)\perp(SB)\Rightarrow$
$\Rightarrow(SC)\perp(ASB)\Rightarrow(SC)\perp(AB)$;
$(AB)\perp(SC)$, $(AB)\perp(SO)\Rightarrow(AB)\perp$
$\perp(SOC)\Rightarrow(AB)\perp(CO)\Rightarrow O\in(CH)$.

1д—2 (решение аналогично 1г)

1е—6 (покажите, что $\widehat{BAC}=\widehat{BSC}=90°$, и воспользуйтесь 1а).

1ж—7($(AC)\perp(BC)$, $(AC)\perp(BC)\Rightarrow(AC)\perp$
$\perp(BSC)\Rightarrow(ABC)\perp(BSC)\Rightarrow(SO)\subset(BSC)\Rightarrow$
$\Rightarrow O\in(BC)$).

1з—1 (см. «Геометрия 9—10» § 22).

2—3 (ср. 1а).

3—2 (основание высоты — центр окружности, описанной вокруг $ABCD$).

Упражнения

1. $\frac{3\sqrt{6}}{2}a^2$. (Основание высоты — центр окружности, вписанной в трапецию.)

2. $\frac{1}{2}$, если $a=b$,

$\left\{\frac{b}{a+b}, \frac{b}{a-b}\right\}$, если $a>b$,

$\left\{\frac{a}{a+b}, \frac{a}{b-a}\right\}$, если $a<b$.

(Покажите, что $O\in(AC)$; далее, при $a>b$, разберите два случая: $O\in[AC]$ и $C\in[AO]$.)

3. $\frac{c^3}{36}(\sin 2\alpha)\operatorname{tg}\beta$. (Примените задачу 1з.)

4. $\frac{\sqrt{2}}{2}b^3$. (Основание равноудаленной вершины — центр квадрата.)

5. (См. «Квант», 1978, № 6, с. 93.)

Фотоаппарат на вступительных экзаменах

1. $|\vec{v}|=\frac{\delta d}{F\tau}=10$ м/с.

2. $\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}=1+\frac{h(d-F)}{F^2}=5{,}5$.

3. $d_2'=\frac{d_1d_2d_1'}{d_1'(d_1+d_2)-d_1d_2}\to\infty$, то есть дальняя граница глубины резкости бесконечно удалена.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Физика

Физический факультет

1. $A=mg(H-5/2R)=2\cdot10^{-2}$ Дж.

2. $V_2=l_2\sqrt{\frac{2g(1-\cos\alpha)(m_2l_2-m_1l_1)}{m_1l_1^2+m_2l_2^2}}$, если в положении устойчивого равновесия масса m_1 находится выше оси вращения, и

$V_2=l_2\sqrt{\frac{2g(1+\cos\alpha)(m_1l_1-m_2l_2)}{m_1l_1^2+m_2l_2^2}}$, если в положении устойчивого равновесия масса m_1 находится ниже оси вращения.

3. $|\vec{a}|=g\left(\sin\alpha-\frac{(k_1m_1+k_2m_2)\cos\alpha}{m_1+m_2}\right)$.

4. $A=R(\sqrt{T_3}-\sqrt{T_1})^2$, где R — универсальная газовая постоянная.

5. $\alpha=\frac{\alpha_1V_1+\alpha_2V_2}{V_1+V_2}\approx27\%$.

6. $\alpha=\frac{p_{н1}}{p_{н2}}\frac{V_1}{V_2}\frac{T_2}{T_1}\approx0{,}44=44\%$, где $p_{н2}=10^5$ Па — давление насыщенного водяного пара при температуре 100°C.

7. $A=C_0U^2/2=4{,}5\cdot10^{-6}$ Дж.

8. $t=\frac{(1+\alpha t_0)}{\alpha}\frac{R_2R_4}{R_1R_3}-\frac{1}{\alpha}\approx76$°C.

9. $f_1=\frac{F_2(F_1-l)}{F_1-l+F_2}=6$ см от рассеивающей линзы, $f_2=\frac{F_1(l-F_2)}{l-F_1-F_2}=20$ см от собирающей линзы.

10. $F_1=\frac{Dl}{D-d}=18$ см; $F_2=l-F_1=-6$ см.

Механико-математический факультет

1. $|\vec{a}_1|<|\vec{a}|<|\vec{a}_2|$, где $|\vec{a}_1|=g\frac{\operatorname{tg}\alpha-\mu}{1+\mu\operatorname{tg}\alpha}\approx8$ м/с² (сила трения направлена вверх по поверхности клина) и $|\vec{a}_2|=g\frac{\operatorname{tg}\alpha+\mu}{1-\mu\operatorname{tg}\alpha}\approx12$ м/с² (сила трения направлена вниз по поверхности клина).

2. $\alpha<\operatorname{arctg}\frac{R(M+m)}{lm}=\frac{\pi}{4}$.

3. $x=|\vec{v}|^2/g\sin2\alpha-2l=10$ м.

4. $p_2=p_1T_2/T_1+m/\mu RT_2/V\approx2{,}3\cdot10^5$ Па.

5. $\Delta h=h\alpha_2\Delta t=6\cdot10^{-3}$ см.

6. $I=\varepsilon_0(\varepsilon-1)|\vec{v}|a\mathcal{E}/d=1{,}77\cdot10^{-9}$ А.

7. $q=\varepsilon_0SIR/d=1{,}77\cdot10^{-10}$ Кл.

8. $I=\frac{mg}{2|\vec{B}|a}=5$ А.

9. $\alpha>2\pi/3$.

10. Величина изображения уменьшится в 3 раза.

Блуждающие фишки
(см. «Квант» № 3)

1. Можно за 32 хода:
1. c1—e1,
2. e1—f1,
3. a1—c1—e1—g1,
4. b1—c1 и т. д.

2. Первые две фишки надо поставить рядом, третью — через одну пустую клетку впра-

во от второй, четвертую — через одну пустую клетку вправо от третьей и т. д.

3. Нужно сделать три хода, чтобы расположить фишки на трех левых крайних полях, например, верхней горизонтали. Затем потребуется 33 хода, чтобы эти фишки переместить по горизонтали в крайнее правое положение. Наконец, необходимо сделать еще три хода, чтобы переместить фишки в конечное положение. Таким образом, перемещение может быть выполнено за 39 ходов.

4. Можно:
1. d3—d5,
2. d5—e5,
3. c4—e4—e6,
4. e6—f6,
5. b1—b3—d3—d5—f5—f7,
6. f7—g7,
7. a2—c2—c4—e4—e6—g6—g8,
8. g8—h8,
9. a1—b1,
10. b1—b3—d3—d5—f5—f7—h7,
11. b2—c2 и т. д.

5. Чтобы «растянуть» все фишки в цепочку по большой диагонали, потребуется 8 ходов (см. задание 4). Перемещение цепочки по диагонали из первоначального положения на 92 клетки потребует 92 • 3 = 276 ходов. Нужно сделать еще 8 ходов, чтобы расположить фишки на конечных позициях. Требуемое перемещение может быть выполнено за 292 хода.

6. Достаточно 19 ходов:
1. c1—c2,
2. a1—c1—c3,
3. b1—c1 и т. д.

7. Перемещение может быть выполнено за 20 ходов:
1. b1—b2,
2. b2—b3,
3. a1—a3—c3,
4. a2—b2 и т. д.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 3)

1. См. статью Н. Михайловой «Плоды «просвещения»».

2. Семь слонов расставить можно — см. рисунок 1. Восемь же слонов расставить нельзя.

3. При каждом разрезе количество многоугольников увеличивается на единицу. Следовательно, после сотого разреза получится 101 многоугольник. Общее число вершин у них будет наименьшим, если все многоугольники будут треугольниками. Минимальное число вершин после 100 разрезов равно 101 • 3 = 303, а поэтому результат подсчета неверен.

4. $1+2-3-4+5+6-7-8+9+10-11-12+ +13+14-\ldots+301+302=1+(2-3-4+5)+ +(6-7-8+9)+(10-11-12+13)+\ldots +(298-299-300+301)+302=303$ (содержимое каждой скобки равно нулю).

5. См. рисунок 2.

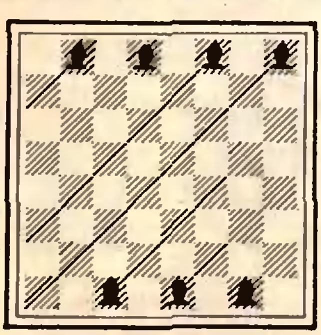


Рис. 1.

Заочная школа программирования. Урок 5

(см. «Квант» № 1)

5.1 15—>А; 24—>В; 3*А+А!3*В!2+(А+В)!5—А!6/25+33*А!6—>С;
8*С+А!2*(А+В+С)!7—33+(76*А—34)/58+С!9—>К;
К!8/38+5*А/8+(А+К+В)!9—76+58*С—>Л;

5.2 А=857 В=4 С=200

5.3 (—В+(В!2—4*А*С)!0.5)/(2*А)—>Х1;
(—В—(В!2—4*А*С)!0.5)/(2*А)—>Х2;

5.4 ЕСЛИ А>В ТО А—>МАКС;
В—>МИН ИНАЧЕ А—>МИН;
В—>МАКС ВСЕ;

5.5 1—>N; 0—>СЧ;
ПОКА N=<100:: N!2+СЧ—>СЧ;
N+1—>N ВСЕ;

5.6 ПОКА А/=В:: ЕСЛИ А>В ТО
В—А—>А ИНАЧЕ А—В—>В ВСЕ ВСЕ;

Заочная школа программирования. Урок 6

(см. «Квант» № 2)

6.1 Р(100,100);0—>А;
ПОКА А=<100:: П(А,0);
Л(А,100);А+2—>А ВСЕ; 0—>А;

Р	О	М	А	Н
Н	М	А	Р	О
А	Н	О	М	Р
О	А	Р	Н	М
М	Р	Н	О	А

А	Н	О	М	Р
Р	О	М	А	Н
М	Р	Н	О	А
Н	М	А	Р	О
О	А	Р	Н	М

Н	Р	А	М	О
О	А	Н	Р	М
Р	О	М	А	Н
М	Н	Р	О	А
А	М	О	Н	Р

О	М	Н	Р	А
А	Н	О	М	Р
М	А	Р	Н	О
Р	О	М	А	Н
Н	Р	А	О	М

О	А	Р	Н	М
М	Р	Н	О	А
Н	М	А	Р	О
А	Н	О	М	Р
Р	О	М	А	Н

Н	М	А	Р	О
О	А	Р	Н	М
Р	О	М	А	Н
М	Р	Н	О	А
А	Н	О	М	Р

Рис. 2.

```
ПОКА А=<100::П(0,А);
Л(100,А);А+5—>А ВСЕ;
.КОНЕЦ;
6.2 0—>Х:ПОКА Х=<25::
ПЕЧАТЬ('Х=',Х,'У=',
(Х*(Х!2+1)+(Х+2)*(Х!2—1)!2)/
((Х!3+4)!2) ВСЕ;
```

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 3)

1. В кубке города после каждой партии выбывает ровно один участник. Поэтому всего будет сыграна $n-1$ партия, и организаторам нужно заказать $2n-2$ бланка. Ответ не зависит ни от числа районов в городе, ни от распределения шахматистов в них.

2. Обозначим через n число участников турнира. Тогда $n-2$ шахматиста, которые довели турнир до конца, сыграли между собой $(n-2)(n-3)/2$ партий. А два интересующих нас шахматиста провели 10 или 11 встреч — в зависимости от того, сыграли они между собой или нет. Натуральное решение $n=12$ имеет лишь уравнение $(n-2)(n-3)/2+$ $+10=55$, откуда и следует, что указанная партия состоялась.

3. Пешка е7 беззащитна, и единственный шанс черных заключается в том, чтобы на неизбежное Кр:а7 ответить Крс7, не выпуская короля противника из заточения. Путь белого короля до пешки а7 занимает пять ходов, и существует 30 способов взять эту пешку за столько ходов, но лишь один из них приводит к цели: **1. Кре6! Крс3 2. Крd5!** Белый король, как говорят шахматисты, «отталкивает плечом» своего черного оппонента. Теперь тот не может пойти на d4 и теряет решающий темп: **2...Крd3 3. Крс6 Крd4 4. Крb7 Крс5 5. Кр:а7 Крс6 6. Крb8** и т. д. Не проходит, например, 1. Кре6 Крс3 2. Крd6 Крd4 3. Крс6 Кре5! 4. Крb7 Крd6 5. Кр:а7 Крс7 с ничьей. В этом этюде, как и в следующем, мы вновь сталкиваемся с тем, что кратчайшее расстояние на шахматной доске измеряется не обязательно по прямой.

4. У черных подавляющий материальный перевес, и для победы белых их король, очевидно, должен через поле е8 прорваться в неприятельский лагерь и уничтожить все черные фигуры. **1. Крb7!** (но не 1. Крb8?). **1...Крd4** (препятствуя движению белой пешки, не проходит ни 1...Крf4 2. с5 Крg3 3. с6 Кр:h3 4. с7 Кр:g4 5. с8Ф Сg7 6. Фе8 Крf4 7. Фf7 g4 8. Ф:g7 g3 9. Ф:h8 и т. д., ни 1...Крd6 2. Крb6 и 3. с5). **2. Крс6!** Сравните этот ход со вторым ходом решения предыдущего этюда. Белый король направляется на е8 зигзагообразным маршрутом, не теряя при этом времени! В случае 2. Крс7 следует 2...Лh7 3. Крd7 Сg7 4. Кре8 Сh8! 5. Крf8 Лg7!, и фигуры черных неуязвимы, они сами легко выигрывают, уничтожая беззащитные белые пешки. Теперь же грозит 3. с5, и черные, как и в предыдущем этюде, вынуждены потерять решающий темп. Впрочем, до победы еще далеко...

2...Кр:с4 3. Крd7 Крd4 (уже не спасает 3...Лh7 4. Кре8 Сg7 5. Крf7 Сh8+ 6. Кр:g8 и т. д. или 5...Крd4 6. Крg6 Кре3 7. Кр:h7 и т. д.). **4. Кре8 Кре3 5. Кр:f8 Крf3 6. Крg7 Крg3 7. Кр:h8 Кр:h3 8. Кр:g8 Кр:g4 9. Крf7 Кр:f5** (9...Кр:h5 10. Кр:е7 g4 11. Кр:f6 g3 12. е7 g2 13. е8Ф+, и белая пешка превращается в ферзя с шахом, в случае 9...Крf4 теперь после 13. е8Ф g1Ф 14. Фg6 у белых легкий выигрыш) **10. Кр:е7 g4 11. Крd7 g3 12. е7 g2 13. е8Ф g1 Ф 14. Фе6+ Крf4** (14...Крg5 15. Фg8+) **15. Ф:f6+ Крg3** (15...Кре4 16. Фg6+; 15...Кре3 16. Фb6+) **16. Фg6+ Крf2 17. Ф:g1+ Кр:g1 18. Кре6 Крf2 19. Крf6 Крf3 20. Крg6 Крf4 21. Кр:h6 Крf5 22. Крg7 Крg5 23. h6**, и черные должны сдаться, так как белая пешка h проходит в ферзи.

Задачи наших читателей

(см. «Квант» № 3, с. 8)

1. О т в е т: $R_S =]1;\ n-1[$.

2. Если $n \neq 3m$, то многочлен $x^{2n}+x^n+1$ делится на многочлен x^2+x+1 (верно также и обратное). Значит, число $2^{2k}+2^k+1$ может быть простым лишь при $k=3^l$. Но число $2^{3^l}+1$ делится на 3^{l+1}. Следовательно, $2^{2^{3^l+1}}-1$ делится на $2^{3^{l+1}}-1=2^{3k}-1=(2^k-1)(2^{2k}+2^k+1)$.

3. Докажите равенства $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}+$ $+\cos\frac{5\pi}{7}=\frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}=\frac{\sqrt{7}}{8}$.

Затем $\cos\frac{8\pi}{35}+\cos\frac{12\pi}{35}+\cos\frac{18\pi}{35}=\cos\left(\frac{3\pi}{7}-\right.$ $\left.-\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{5}\right)+\cos\left(\frac{5\pi}{7}-\frac{\pi}{5}\right)=$ $=\left(\cos\frac{3\pi}{7}+\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{5\pi}{7}\right)\cos\frac{\pi}{5}+\left(\sin\frac{3\pi}{7}-\right.$ $\left.-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}\right)\sin\frac{\pi}{5}$.

Осталось показать, что $\sin\frac{3\pi}{7}-\sin\frac{\pi}{7}+\sin\frac{5\pi}{7}=$ $=4\sin\frac{\pi}{7}\cdot\sin\frac{2\pi}{7}\cdot\sin\frac{3\pi}{7}$.

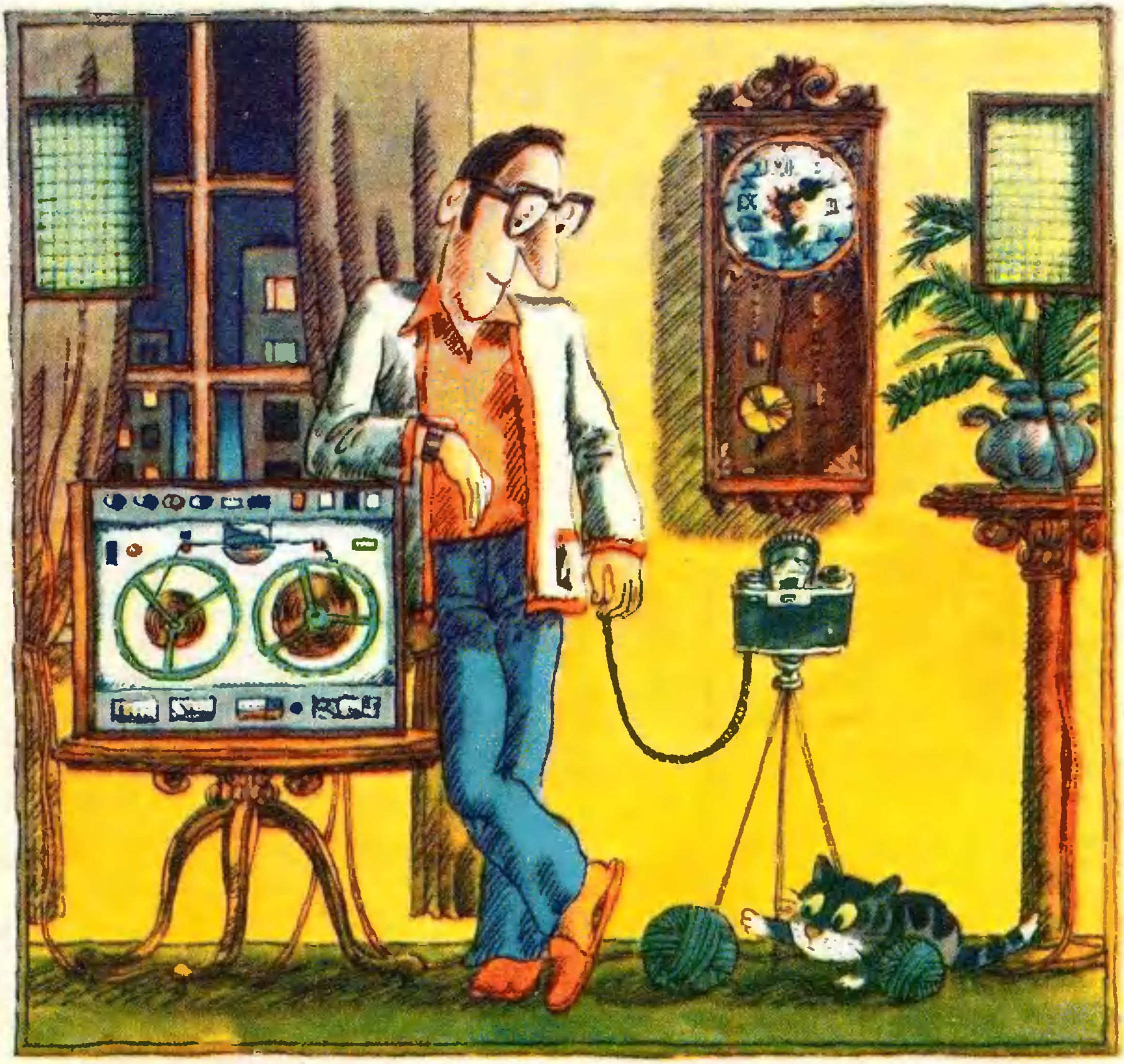
Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова
Художественные редакторы Т. Макарова, Н. Вершинина
Корректоры Е. Сидоркина, В. Сорокина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-82-62
Сдано в набор 08.02.80.
Подписано в печать 18.03.80. Т-01192.
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,26
Цена 30 коп. Заказ 359
Тираж 267 569 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
г. Чехов Московской области



1. Магнитофонная лента и клубок ниток. Магнитофонная лента перематывается с одной бобины на другую. Докажите, что в течение всего времени перемотки сумма квадратов радиуса R круга, образованного намотанной частью ленты, и радиуса r круга на другой бобине постоянна:

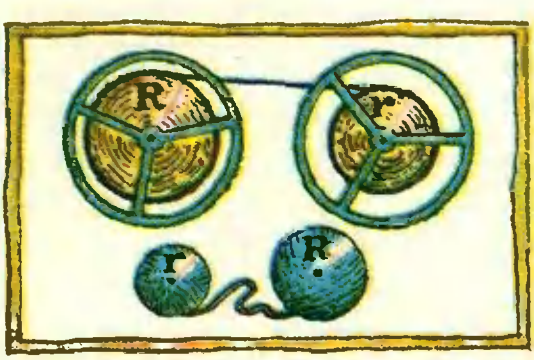
$$R^2 + r^2 = \text{const}.$$

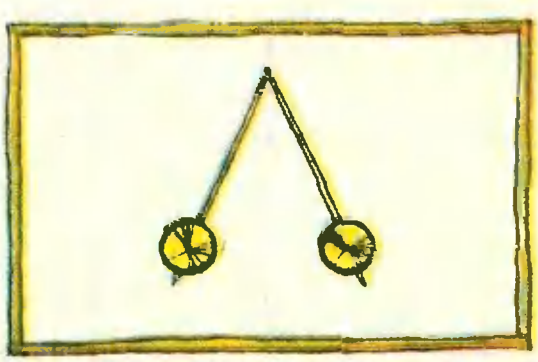
Аналогичный закон сохранения для кубов радиусов $(R^3 + r^3 = \text{const})$ приближенно выполняется при перематывании нитки с одного клубка на другой. Почему?

2. Маятник. Перед качающимся маятником неподвижно установлена камера и на один и тот же кадр сделано множество снимков. Снимки делались точно через каждую секунду один за другим с мгновенными экспозициями. В результате наложений получилась такая картина, как *на рисунке — два положения* маятника, симметричные относительно вертикали.

Каково наибольшее возможное значение периода колебаний маятника?

М. Мамикон





Индекс 70465
Цена 30 коп.

На этом рисунке изображен узор, состоящий из пятиконечных звезд, лежащих внутри правильного пятиугольника и «бесконечно измельчающихся» к его границе. С одной стороны, это декоративный материал, связанный с народными орнаментами; с другой — источник интересных математических задач, о которых вы можете прочитать на с. 26.