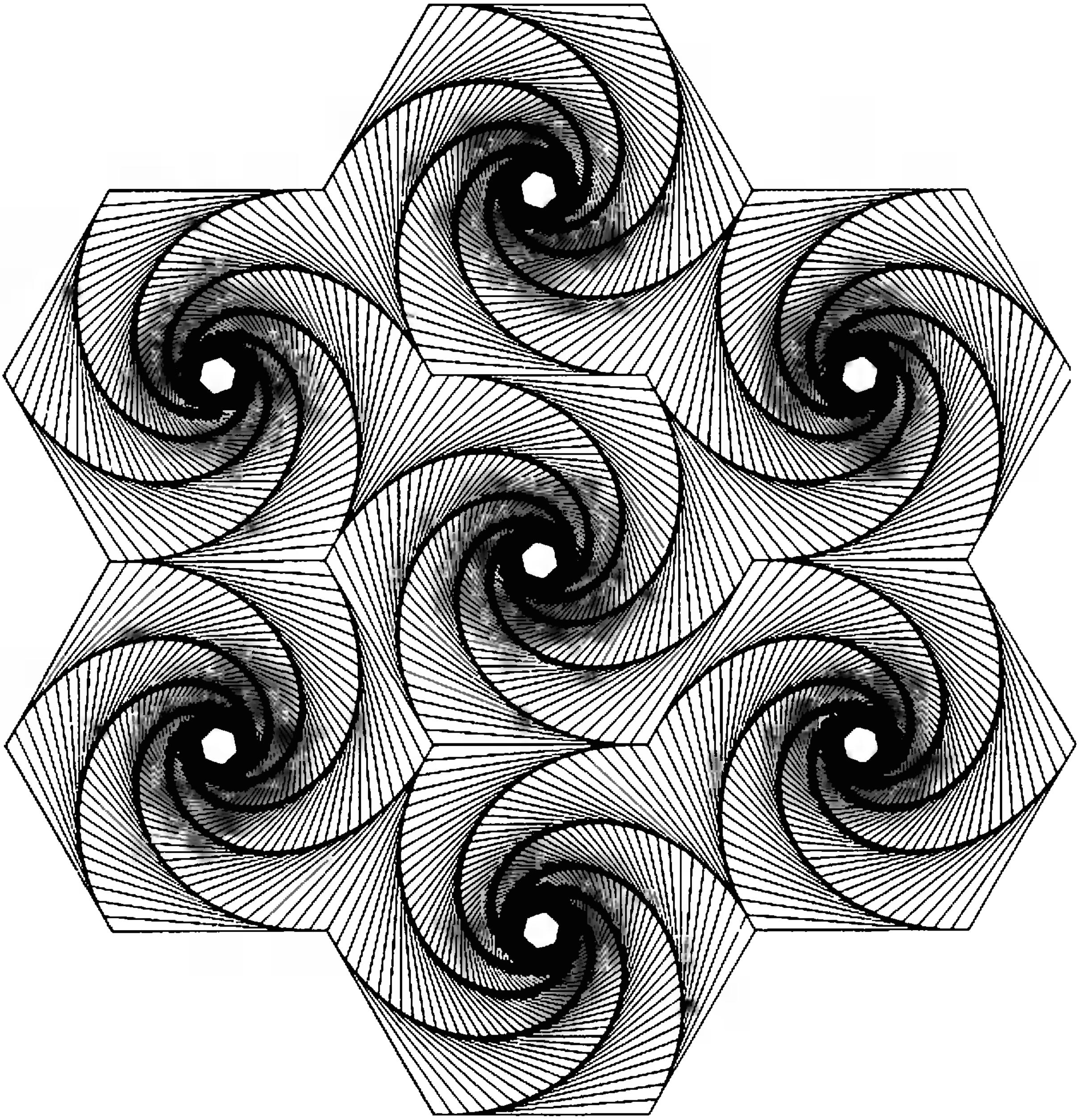
ISSN 0130-2221

квант

3
1980

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



Этот чертеж выполнен ЭВМ по программе, составленной учащимися Заочной школы программирования. Подробнее об этом можно прочитать на с. 47

Основан в 1970 году

Квант

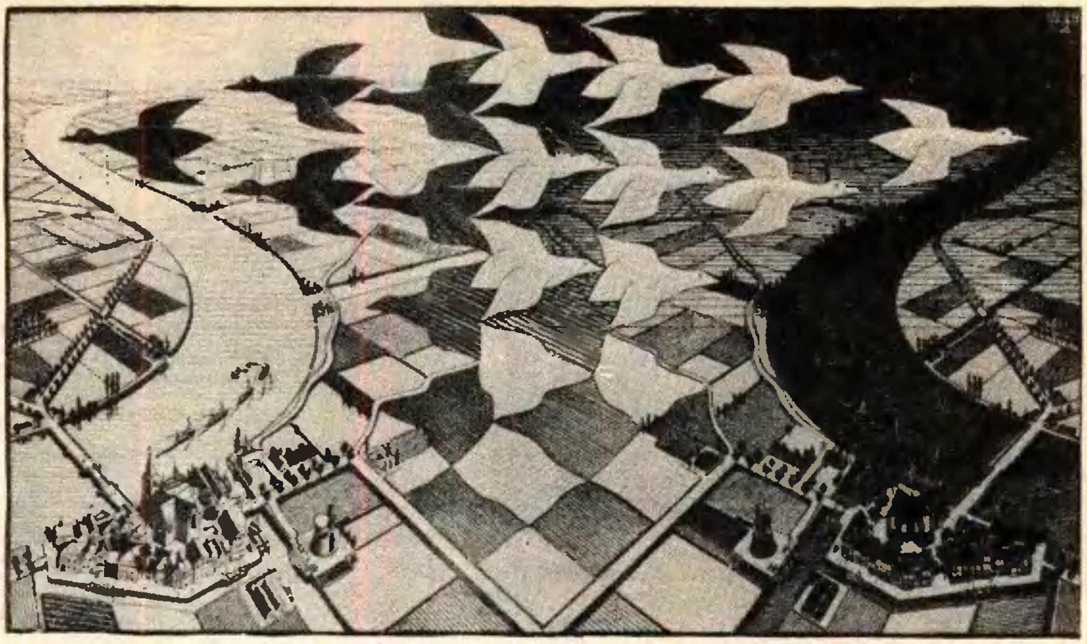
3
1980

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

Повторяющийся узор голландского художника Эшера, изображенный на первой странице обложки, самосовмещается многими перемещениями плоскости. О перемещениях плоскости вы можете прочитать на с. 2



В. Болтянский

Перемещения плоскости

Перемещение плоскости естественно представлять с точки зрения механики как движение одного нерастяжимого листа по другому. Оказывается, такие движения бывают только четырех типов. Об этом и о свойствах перемещений, полезных для решения задач, рассказано в этой статье.

1. *Наглядное описание перемещений*

Пусть g — произвольное отображение плоскости на себя. Отображение g называется *перемещением плоскости,* если оно сохраняет расстояния, то есть для любых точек A, B этой плоскости справедливо равенство

$$|g(A)g(B)| = |AB|.$$

Наглядно перемещение плоскости можно описать следующим образом. Будем представлять себе плоскость в виде двух наложенных один на другой листов, верхний из которых прозрачен. На нижнем листе отмечены несколько точек; те же точки отмечены и на верхнем листе. Переложив прозрачный лист в новое положение, мы увидим как первоначальные положения точек (на нижнем, непрозрачном листе), так и новые их положения (на прозрачном листе). При этом (если материал листов нерастяжим) расстояние между любыми двумя точками в первоначальном положении равно расстоянию между точками, в которые они перешли в результате перекладывания прозрачного листа в новое положение. Таким образом, это перекладывание сохраняет расстояния, то есть оно представляет собой наглядную модель перемещения.

Заметим, что описанное перекладывание не обязательно осуществлять с *помощью «непрерывного скольжения»* прозрачного листа по непрозрачному. Мы можем также снять прозрачный лист, перевернуть

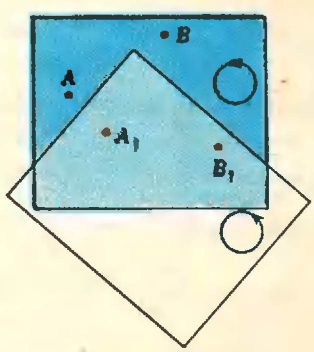


Рис. 1.

его на другую сторону («изнанку») и снова наложить на непрозрачный.

Пусть теперь в плоскости заданы две пары точек A, B и A_1, B_1, причем $|AB|=|A_1B_1|\neq 0$. Описанная выше наглядная модель перемещения подсказывает, что существуют ровно два перемещения плоскости, переводящие точку A в A_1 и точку B в B_1.

В самом деле, при помощи скольжения прозрачного листа по непрозрачному можно найти только одно положение прозрачного листа, при котором отмеченные на нем точки A, B совпадут соответственно, с точками A_1, B_1 на непрозрачном листе (рис. 1). Можно поступить и иначе: сначала перевернуть прозрачный лист на обратную сторону, а затем совместить отмеченные на нем точки A, B с точками A_1, B_1 на непрозрачном листе. Других перемещений (кроме двух указанных), переводящих точки A, B соответственно в A_1, B_1, не существует. Мы видим, что:

Если $|AB|=|A_1B_1|$ (причем $A\neq B$), то существуют ровно два перемещения плоскости, переводящие точки A, B соответственно в A_1, B_1.

Разумеется, проведенный «мысленный эксперимент» с описанной наглядной моделью нельзя считать математическим доказательством сформулированного утверждения — это можно считать лишь опытным подтверждением. В математике же сформулированное утверждение принимается (в рамках школьной геометрии) без доказательства, т. е. представляет собой аксиому; ее называют *аксиомой подвижности* *) плоскости.

2. Классификация перемещений плоскости

Три вида перемещений известны еще из курса 5 класса: *осевая симметрия, центральная симметрия* и *параллельный перенос*. Центральная симметрия является частным случаем *поворота* (она представляет собой поворот на 180°), который изучается в 6 классе.

Нам понадобится еще один вид перемещений — так называемая скользящая симметрия. Именно, пусть l — некоторая прямая на плоскости, s — симметрия относительно прямой l, а t — параллельный перенос в направлении прямой l, не являющийся тождественным отображением. Композиция $s\circ t$ этих перемещений и называется *скользящей симметрией* с осью l. Заметим, что перемещения s и t перестановочны: $s\circ t=t\circ s$. Заметим также, что l — единственная прямая, которая при скользящей симметрии $s\circ t$ переходит сама в себя.

Итак, мы имеем четыре частных случая перемещений: поворот, параллельный перенос, осевая симметрия, скользящая симметрия. Следующая теорема показывает, что этими частными случаями и исчерпываются все перемещения плоскости:

Теорема 1. *Произвольное перемещение плоскости представляет собой либо поворот, либо параллельный перенос, либо осевую симметрию, либо скользящую симметрию.*

Доказательство. Пусть g — перемещение плоскости, отличное от тождественного (тождественное перемещение можно считать параллельным переносом на нулевой вектор). Тогда существует такая точка A, что $g(A)\neq A$. Положим $B=g(A)$, $C=g(B)$. Рассмотрим теперь три возможных случая:

а) Точки A, B, C не лежат на одной прямой, то есть являются вершинами треугольника ABC. Обо-

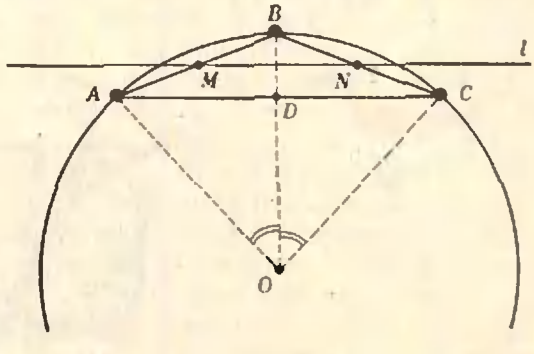


Рис. 2.

*) В учебнике «Геометрия 6—8» (М., «Просвещение», 1979) эта аксиома сформулирована несколько иначе (с. 374); предоставляем читателю убедиться, что приведенная здесь формулировка равносильна имеющейся в учебнике.

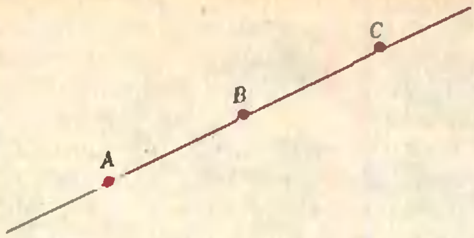


Рис. 3.

значим через O центр окружности, описанной около этого треугольника (рис. 2), а через l — прямую, проходящую через середины M, N сторон $[AB]$ и $[BC]$. Треугольник ABC — равнобедренный (перемещение g переводит точки A, B в B, C, поэтому $|AB|=|BC|$). Следовательно, поворот r с центром O, переводящий точку A в B, переводит точку B в C. Далее, обозначим через s симметрию относительно прямой l, через t — параллельный перенос, переводящий точку M в N. Тогда скользящая симметрия $h=s\circ t$ переводит точку A в B, а точку B в C. Итак, мы нашли два перемещения r и h, каждое из которых переводит точки A, B соответственно в B, C. Третьего такого перемещения не существует (согласно аксиоме подвижности плоскости). Следовательно, перемещение g, которое тоже переводит A, B соответственно в B, C, должно совпадать либо с r, либо с h, то есть в рассматриваемом случае g является либо поворотом, либо скользящей симметрией.

б) Точки A, B, C лежат на одной прямой, причем $A\neq C$. Так как $|AB|=|BC|$, то B — середина отрезка AC (рис. 3). Обозначим через s_1 симметрию относительно прямой (AC), а через t_1 — параллельный перенос, переводящий точку A в B. Каждое из перемещений t_1 и $h_1=s\circ t_1$ переводит точки A, B соответственно в B, C. Как и в случае а), отсюда следует, что g совпадает либо с t_1, либо с h_1, то есть в рассматриваемом случае g является либо параллельным переносом, либо скользящей симметрией.

в) Точки A и C совпадают, то есть $g(A)=B$, $g(B)=A$ (рис. 4). Обозначим через r_2 центральную симметрию относительно середины O отрезка AB, а через s_2 — симметрию относительно прямой l_2, проходящей через O и перпендикулярной (AB). Каждое из перемещений r_2, s_2 переводит точки A, B соответственно в B, A. Отсюда, как и в предыдущих случаях, вытекает, что g совпадает с одним из перемещений r_2, s_2, то есть в этом случае g является либо центральной симметрией (и, значит, поворотом), либо осевой симметрией. Теорема доказана.

3. Перемещения и ориентация

Продолжим наглядные рассуждения, связанные с моделью, рассмотренной в начале статьи. Условимся считать, что на плоскости задано положительное направление отсчета углов. (Обычно на чертежах за положительное направление принимают направление против часовой стрелки.) Чтобы не забыть об этом соглашении, можно в уголке чертежа изобразить окружность, на которой стрелкой указано положительное направление отсчета углов.

Если некоторое перемещение описывается в нашей наглядной модели как результат скольжения плоско-

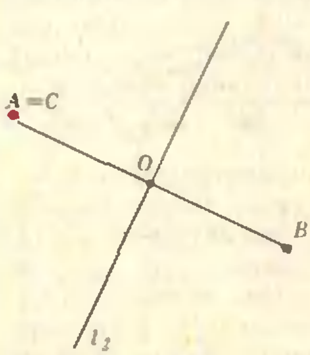


Рис. 4.

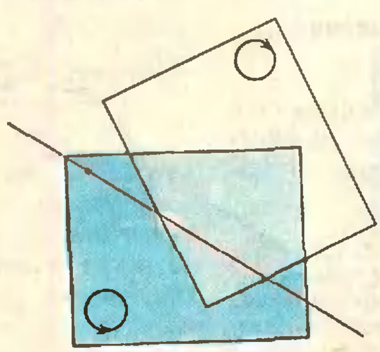


Рис. 5.

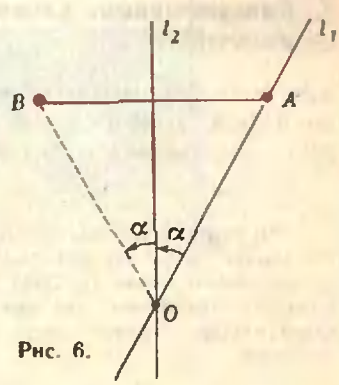


Рис. 6.

сти по себе, то положительное направление отсчета углов при таком перемещении не меняется (рис. 1). В этом случае говорят, что произведено перемещение, *сохраняющее ориентацию*. Например, поворот и параллельный перенос могут быть осуществлены в результате скольжения плоскости по себе, то есть они являются перемещениями, сохраняющими ориентацию.

Если же для осуществления перемещения мы перекладываем верхний (прозрачный) лист на обратную сторону, то окружность, на которой вначале было изображено направление обхода против часовой стрелки, перейдет в окружность с изображенным на ней направлением обхода по часовой стрелке. В этом случае говорят, что произведено перемещение, *меняющее ориентацию*. Например, осевая симметрия является перемещением, меняющим ориентацию (рис. 5).

Легко понять, что если каждое из перемещений f, g сохраняет ориентацию, то и их композиция $g \circ f$ будет перемещением, сохраняющим ориентацию. В самом деле, окружность l, на которой отмечено направление обхода против часовой стрелки, перейдет при перемещении f в окружность l_1 с направлением обхода также против часовой стрелки (так как f сохраняет ориентацию). В свою очередь при перемещении g окружность l_1 перейдет в окружность l_2 с направлением обхода также против часовой стрелки (так как g сохраняет ориентацию). При перемещении $g \circ f$ окружность l (с имеющимся на ней направлением обхода против часовой стрелки) перейдет в окружность l_2 с тем же направлением обхода. Таким образом, перемещение $g \circ f$ сохраняет ориентацию. Рассуждая аналогично, мы получим следующее утверждение:

Теорема 2. *Если каждое из перемещений f, g сохраняет ориентацию или если каждое из них меняет ориентацию, то их композиция $g \circ f$ является перемещением, сохраняющим ориентацию. Если же одно из перемещений f, g сохраняет, а другое меняет ориентацию, то $g \circ f$ является перемещением, меняющим ориентацию.*

Чтобы проще было запомнить эту формулировку, условимся считать перемещения, сохраняющие ориентацию, «положительными», а перемещения, меняющие ориентацию, — «отрицательными». Тогда для композиции перемещений будет действовать то же правило знаков, что и для умножения действительных чисел: если f и g имеют одинаковые «знаки», то результат «положителен», а если разные — «отрицателен».

Заметим, что скользящая симметрия (она определялась, как композиция осевой симметрии и параллельного переноса) является, согласно теореме 2, перемещением, меняющим ориентацию. Таким образом, из всех перемещений плоскости, которые перечислены в теореме 1, поворот и параллельный перенос сохраняют ориентацию, а осевая и скользящая симметрия меняют ориентацию.

4. Задачи о композиции перемещений

Применим сказанное в предыдущем пункте к вопросу о нахождении композиции разных перемещений: двух осевых симметрий, поворота и параллельного переноса и т. д. Мы решим три задачи такого рода, а другие задачи предложим читателю для самостоятельного решения.

Задача 1. *Найти композицию $s_2 \circ s_1$ симметрий s_1, s_2 относительно двух пересекающихся прямых l_1, l_2.*

Решение. Пусть O — точка пересечения прямых l_1 и l_2 (рис. 6). Через α обозначим угол, на который нужно повернуть прямую l_1, чтобы она перешла в l_2. Возьмем точку $A \in l_1$, отличную от O, и положим $B = s_2(A)$. Мы имеем $s_1(O) = O$, $s_2(O) = O$, и потому перемещение $g = s_2 \circ s_1$ переводит точку O в себя. Далее, $s_1(A) = A$, $s_2(A) = B$, то есть $g(A) = B$. Ясно, что поворот r с центром O на угол 2α переводит точку A в B, а точку O в себя. Итак, мы имеем два перемещения r, s_2, каждое из которых переводит точки O, A соответственно в O, B. Так как перемещение $g = s_2 \circ s_1$ тоже пере-

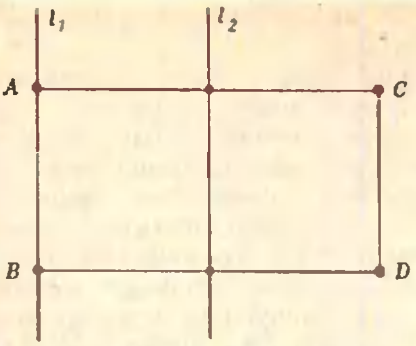


Рис. 7.

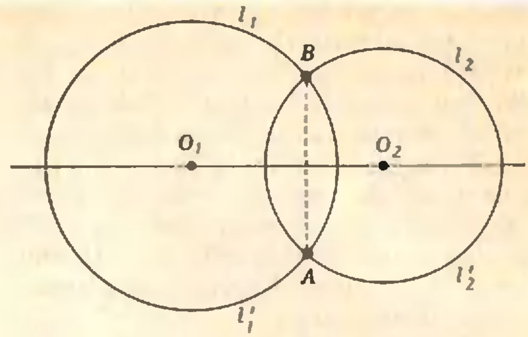


Рис. 9.

водит O, A в O, B, в силу аксиомы подвижности) g совпадает либо с r, либо с s_2. Но с s_2 перемещение g совпадать не может, так как s_2 меняет ориентацию, а g сохраняет (по теореме 2). Следовательно, $g=r$, то есть $s_2 \circ s_1$ есть поворот на угол 2α вокруг точки O.

Задача 2. *Найти композицию $s_2 \circ s_1$ симметрий s_1, s_2 относительно двух параллельных прямых l_1, l_2.*

Решение*). Возьмем две точки A, $B \in l_1$ (рис. 7) и положим $C=s_2(A)$, $D=s_2(B)$. Тогда $ABDS$ — прямоугольник. Обозначим через t параллельный перенос, переводящий точку A в C. Тогда $t(A)=C$, $t(B)=D$. Итак, мы имеем два перемещения t, s_2, каждое из которых переводит точки A, B соответственно в C, D. Так как $g=s_2 \circ s_1$ тоже переводит A, B в C, D, g совпадает либо с t, либо с s_2. Так как при этом g сохраняет ориентацию, то $g=t$. Итак, $s_2 \circ s_1$ есть параллельный перенос.

Задача 3. *Найти композицию поворота и параллельного переноса.*

*) Другое решение этой задачи см. в «Кванте», 1980, № 1, с. 44.

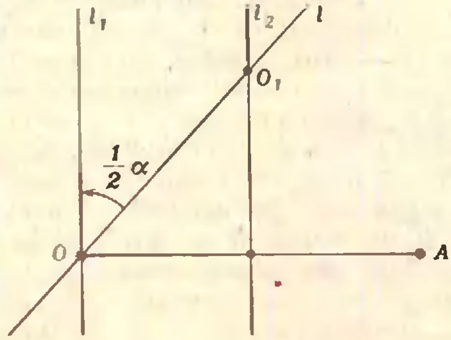


Рис. 8.

Решение. Пусть r — поворот с центром O на угол α (рис. 8), а t — параллельный перенос. Положим $A=t(O)$. Далее, проведем прямые l_1, l_2, перпендикулярные (OA), первая из которых проходит через точку O, а вторая — через середину отрезка OA. Симметрии относительно прямых l_1, l_2 обозначим через s_1, s_2. Тогда из задачи 2 следует $s_2 \circ s_1=t$. Далее, через l обозначим прямую, проходящую через точку O, из которой l_1 получается поворотом на угол $\frac{1}{2}\alpha$, а через s обозначим симметрию относительно прямой l. Тогда из задачи 1 следует $s_1 \circ s=r$. Значит,

$$t \circ r=(s_2 \circ s_1)\circ(s_1 \circ s)= \\ =s_2(s_1 \circ s_1)\circ s=s_2 \circ s,$$

откуда следует (в силу задачи 1), что $t \circ r$ есть поворот на угол α вокруг точки O_1, в которой пересекаются прямые l_2 и l.

Заметим, что при решении мы воспользовались, во-первых, ассоциативностью операции композиции перемещений (то есть возможностью произвольно расставлять скобки; это свойство справедливо не только для перемещений, но и для любых отображений) и, во-вторых, тем, что для осевой симметрии s_1 обратное отображение совпадает с s_1, в связи с чем $s_1 \circ s_1$ есть тождественное отображение. Этот прием — разложение перемещений на осевые симметрии, оси которых выбираются так, чтобы в окончательном результате произошло «сокращение» — применяется и при решении других задач на отыскание композиции перемещений*).

* Подробнее об этом см. «Квант», 1980, № 1 с. 42.

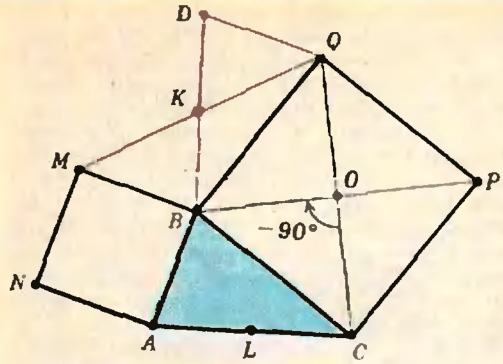


Рис. 10.

5. Применение перемещений к решению задач

Задача 4. *Две окружности с центрами O_1, O_2 пересекаются в точках A и B. Доказать, что прямая O_1O_2 перпендикулярна отрезку AB и делит его пополам.*

Решение. Обозначим через l_1, l_2 полуокружности, лежащие по одну сторону прямой O_1O_2, через l_1', l_2' — полуокружности, лежащие по другую сторону (рис. 9), а через s — симметрию относительно (O_1O_2). Тогда $l_1' = s(l_1)$, $l_2' = s(l_2)$. Так как $s(l_1 \cap l_2) = s(l_1) \cap s(l_2) = l_1' \cap l_2'$, получаем $s(A) = B$, то есть точки A и B симметричны относительно (O_1O_2). Отсюда и вытекает требуемое утверждение.

В этом решении мы воспользовались тем, что для любого перемещения f и любых фигур M, N справедливо соотношение $f(M \cap N) = f(M) \cap f(N)$. Докажите это самостоятельно.

Задача 5. *На сторонах AB и BC произвольного треугольника ABC построены вне его квадраты $ABMN$ и $BCPQ$. Точка K — середина отрезка MQ. Доказать, что отрезок BK перпендикулярен основанию AC и вдвое короче его.*

Решение. Пусть L — середина отрезка AC (рис. 10). Надо доказать, что отрезки BK и CL перпендикулярны друг другу и конгруэнтны. Для этого удобнее всего установить, что первый отрезок получается из второго поворотом на $\pm 90°$ вокруг некоторой точки. Итак, нам желательно найти точку, поворот на $90°$ или $-90°$ вокруг которой переводит точку C в B, а точку L в K. Но ясно, что поворот r на $-90°$ вокруг центра квадрата $BCPQ$ переводит точку C в B. Значит, остается установить, что $r(L) = K$.

Мы имеем $r(C) = B$, $r(B) = Q$; положим $r(A) = D$. Тогда $r([BA]) = [QD]$, то есть отрезки AB и DQ перпендикулярны и конгруэнтны. Значит, отрезки BM и QD параллельны и конгруэнтны, то есть $BMDQ$ — параллелограмм. Следовательно, точка K (середина диагонали MQ) является также серединой отрезка BD. Так как $r([CA]) = [BD]$, получаем $r(L) = K$. Итак, $r(C) = B$, $r(L) = K$, то есть $r([CL]) = [BK]$, и потому отрезки CL и BK перпендикулярны и конгруэнтны.

Задача 6. *Восстановить пятиугольник, зная точки M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, являющиеся серединами последовательных его сторон.*

Решение. Пусть $ABCDE$ — искомый пятиугольник (рис. 11). Обозначим через s_1, s_2, s_3, s_4, s_5 центральные симметрии относительно точек M_1, M_2, M_3, M_4, M_5. Тогда $s_1(A) = B$, $s_2(B) = C$, $s_3(C) = D$, $s_4(D) = E$, $s_5(E) = A$, то есть перемещение $f = s_5 \circ s_4 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_1$ переводит точку A в себя. Но композиция $s_5 \circ s_4 \circ s_3 \circ s_2 \circ s_1$ пяти перемещений,

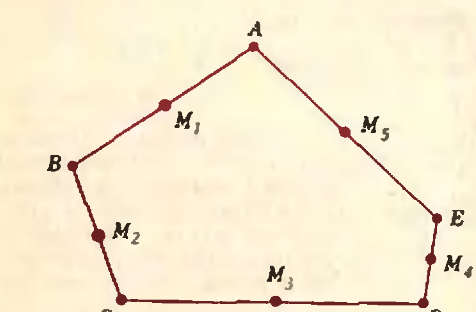


Рис. 11.

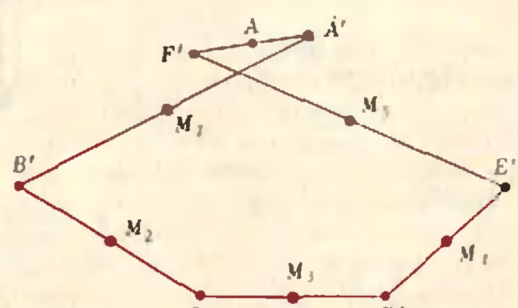


Рис. 12.

каждое из которых есть центральная симметрия, то есть поворот на 180°, представляет собой поворот на $180° \cdot 5 = 2 \cdot 360° + 180°$ (см. ниже задачу 9). Следовательно, f есть центральная симметрия, и потому A есть центр этой симметрии. Как же найти точку A? Берем произвольную точку A' и строим точки $B' = s_1(A')$, $C' = s_2(B')$, $D' = s_3(C')$, $E' = s_4(D')$, $F' = s_5(E')$. Тогда $f(A') = E'$, то есть точки A' и F' симметричны относительно искомой точки A (рис. 12), и потому A есть середина отрезка $A'F'$. Найдя A, легко затем отыскать и остальные вершины искомого пятиугольника.

Задачи

1. Сколько существует перемещений плоскости, переводящих данный отрезок AB в себя?

2. Докажите следующее уточнение аксиомы подвижности: если $|AB| = |A_1B_1|$, причем $A \neq B$, то существует ровно одно сохраняющее ориентацию перемещение, переводящее точки A, B соответственно в A_1, B_1, и ровно одно меняющее ориентацию перемещение, переводящее точки A, B соответственно в A_1, B_1.

3. Сколько существует перемещений, переводящих правильный n-угольник в себя? Сколько из них сохраняют ориентацию? меняют ориентацию? Указание. Воспользуйтесь тем, что каждое из этих перемещений переводит центр описанной окружности в себя.

4. Точка A называется *неподвижной точкой* перемещения f, если $f(A) = A$. Сколько неподвижных точек имеет каждое из перемещений, перечисленных в теореме 1?

5. Прямая l называется *неподвижной прямой* перемещения f, если $f(l) = l$. Сколько неподвижных прямых имеет каждое из перемещений, перечисленных в теореме 1?

6. Докажите, что любое перемещение плоскости можно представить в виде композиции нескольких осевых симметрий.

7. Докажите, что перемещение в том и только в том случае сохраняет ориентацию, если оно может быть представлено в виде композиции четного числа осевых симметрий; перемещение в том и только в том случае меняет ориентацию, если оно может быть представлено в виде композиции нечетного числа осевых симметрий.

8. Найдите композицию $f_2 \circ f_1$, если:

а) f_1 — параллельный перенос, f_2 — поворот;

б) f_1 — поворот вокруг точки O_1 на угол α_1, f_2 — поворот вокруг точки O_2 на угол α_2;

в) f_1 и f_2 — скользящие симметрии с параллельными осями;

г) f_1 и f_2 — скользящие симметрии с пересекающимися осями;

д) f_1 — скользящая симметрия, f_2 — параллельный перенос;

е) f_1 — поворот, f_2 — скользящая симметрия.

9. Пусть $f_1, f_2, \ldots, f_k$ — повороты (с некоторыми центрами) на углы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ соответственно. Докажите, что $f_k \circ \ldots \circ f_2 \circ f_1$ есть поворот на угол $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_k$, если α не кратно 360, и параллельный перенос, если α кратно 360.

10. Докажите, что диаметр, перпендикулярный хорде, делит эту хорду пополам.

11. Постройте равносторонний треугольник, одна вершина которого лежит в данной точке, а две другие — на данных окружностях.

12. Даны две точки M, N, не лежащие на окружности l, и хорда AB этой окружности. Постройте для окружности l такую хорду CD, конгруэнтную хорде AB, что $(CM) \upuparrows (DN)$.

13. В окружности l даны две хорды AB и CD; M — внутренняя точка отрезка CD. Постройте на окружности l такую точку N, что вписанный угол ANB высекает на прямой CD отрезок, имеющий точку M своей серединой.

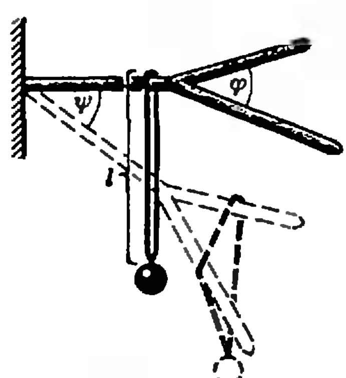
Задачи наших читателей

1. Какие значения может принимать сумма $S = \frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \ldots + \frac{1}{1+a_n}$, где все числа a_i положительны и $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = 1$?

А. Ермилов

2. Если число $2^{2k} + 2^k + 1$ простое, то оно — делитель числа $2^{2k+1} - 1$. Докажите.

Г. Карнаух



3. Докажите равенства:

а) $\cos\frac{2\pi}{21} + \cos\frac{8\pi}{21} + \cos\frac{10\pi}{21} = \frac{\sqrt{21}+1}{4}$.

б) $\cos\frac{8\pi}{35} + \cos\frac{12\pi}{35} + \cos\frac{18\pi}{35} = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{5} + \frac{\sqrt{7}}{2}\sin\frac{\pi}{5}$.

М. Розенберг

4. На рогатку подвешен груз (рис. 1). Широкий конец рогатки медленно опускают. Определите, при каком угле наклона ψ груз соскользнет с рогатки. Угол развода рогатки φ, длина нити, на которой подвешен груз, l.

М. Баксман

В. Фабрикант

Физика люминесцентных ламп

И свет, и жар

Мы так привыкли к электрическому освещению, что порой не ценим его должным образом и забываем его историю.

Первой появилась электрическая *лампа накаливания*.

«Вынимает
паршивую
запаянную склянь.
«Это,— говорит,—
электрическая лампа»...
Вижу —
склянка.
В склянке —
волос.
Но, между прочим,
не из бороды и не из усов...
Сверху
из склянки
и свет,
и жар —
солнце,
ей-богу, солнце!»

— так писал Маяковский в стихотворении «Горящий волос».

Поэт прав, указывая, что «из склянки и свет, и жар», но, как и положено поэтам, он преувеличивает, сравнивая лампу накаливания с Солнцем. Между светом лампы накаливания и солнечным светом имеются очень важные различия. Прежде всего, свет лампы накаливания гораздо желтее солнечного света. Кроме того, в излучении лампы накаливания «жар» гораздо сильнее по отношению к «свету», чем в излучении Солнца. Оба отличия вызваны одной и той же причиной: температура нити («волоса») лампы накаливания (3000°C) примерно в два раза ниже температуры поверхности Солнца (6000°C).

Перейдем от поэзии к цифрам, и мы натолкнемся на интересный парадокс. Лампа накаливания представляет почти идеальный преобразователь электрической энергии в энергию излучения (с коэффициентом полезного действия близким к единице) и вместе с тем лампа накаливания — очень неэкономичный источник света. Как же такое возможно?

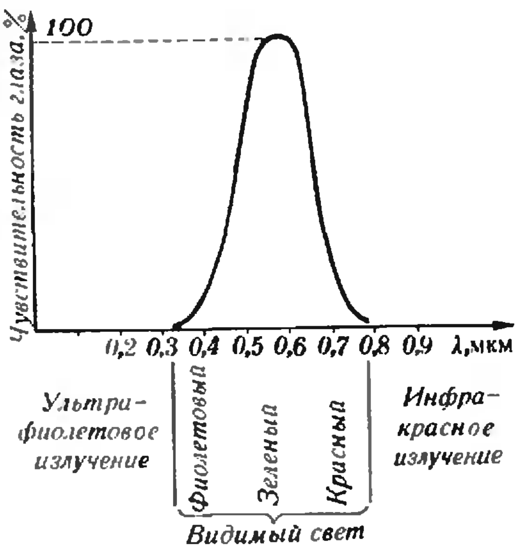


Рис. 1. Кривая чувствительности глаза человека.

Оказывается, все дело в том, что человеческий глаз реагирует не на любое излучение, а только на узкий участок спектра электромагнитных волн (рис. 1) с длинами волн от 0,4 мкм до 0,8 мкм (от фиолетовых до красных лучей). Только такое излучение является светом в точном смысле этого слова.

На рисунке 2 показан баланс энергии современной лампы накаливания. Мы видим, что, хотя лампа накаливания превращает в излучение 86% подводимой к ней электроэнергии, только 12% превращается в видимый свет. В невидимое тепловое излучение (инфракрасные лучи), то есть в «жар» по Маяковскому, превращается 74%! Как источник лучистого «жара» лампа накаливания близка к идеалу. Это было учтено, и сейчас на производстве широко применяют быструю сушку окрашенных изделий (например, корпусов автомобилей) с помощью инфракрасных лучей, испускаемых лампами накаливания.

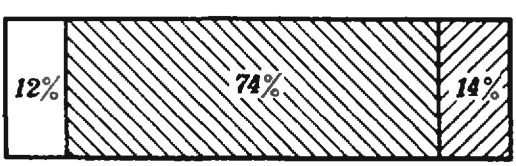


Рис. 2. Баланс энергии в лампе накаливания: 12% — световое излучение, 74% — инфракрасное излучение, 14% — тепловые потери через вводы и держатели и через газ.

Холодный свет

Недостатки лампы накаливания как источника видимого света заставили ученых искать новые источники света, более экономичные в смысле преобразования электрической энергии в световую и дающие свет, более близкий к солнечному по цветовым свойствам. Таким образом, задача состояла как в увеличении светоотдачи, так и в улучшении качества света.

У С. И. Вавилова возникла идея использовать в этих целях явление холодного свечения, называемое *люминесценцией* (см., например, «Физику-10», с. 210—212). Если Солнце или лампа накаливания представляют тепловые источники, в которых излучение возникает за счет нагрева до высокой температуры, то свечение люминофора (люминесцирующего тела) не связано, как правило, с его нагревом.

Нас будут интересовать так называемые *фотолюминофоры,* свечение которых вызывается облучением их светом от внешнего источника. Фотолюминофоры преобразуют излучение с одними длинами волн в излучения с другими длинами волн. Многие органические красители (например, оранжевая краска родамин) обладают яркой люминесценцией под действием дневного света.

Современное учение о фотолюминесценции многим обязано С. И. Вавилову. В частности, С. И. Вавилов показал, что люминофоры — как преобразователи энергии излучения — могут обладать очень высоким коэффициентом полезного действия. Это свойство, очевидно, очень важно для практического применения люминофоров.

Принцип действия люминесцентной лампы

Казалось бы, можно улучшить характеристики лампы накаливания, нанеся на стенки ее колбы слой люминофора и превратив с помощью фотолюминесценции инфракрасное излучение раскаленной нити в видимый свет. К сожалению, такой путь нереален. Существует закон (так называемое правило Стокса), согласно которому люминофоры, как правило, преобразуют более короткие волны в более длинные, а длины волн инфракрасных лучей всегда больше, чем длины волн видимого света (>0,8 мкм).

Следовательно, для возбуждения свечения во всем диапазоне видимой части спектра необходимо использовать ультрафиолетовое излучение, обладающее меньшими длинами волн (<0,4 мкм). Тогда задача распадается на две: 1) отыскание экономичного источника ультрафиолетового излучения; 2) создание люминофора, эффективно преобразующего ультрафиолетовое излучение в видимый свет (при этом нельзя забывать и о цветовых свойствах видимого света).

Исследования показали, что подходящим источником ультрафиолетового излучения является электрический разряд в парах ртути. Правда, состав излучения ртутного разряда очень сильно зависит от давления паров.

При высоком давлении (равном или превышающем атмосферное давление 10^5) Па преобладает длинноволновое ультрафиолетовое излучение (>0,3 мкм). Кроме него возникает также видимое излучение, состоящее из желтых, зеленых и синих лучей. Так происходит, в частности, в ртутных кварцевых лампах, применяемых для медицинских целей. Свет этих ламп имеет мертвящий сине-зеленый оттенок, объясняемый составом видимого излучения ртутного разряда. Превратив с помощью люминофора ультрафиолетовое излучение в красное, можно частично смягчить недостатки цветовых свойств света ртутных ламп высокого давления и использовать эти

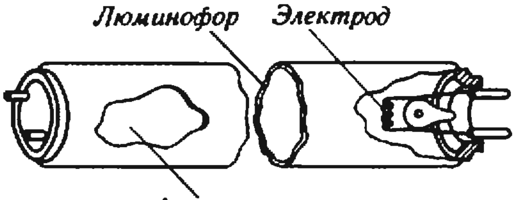


Рис. 3. Разрез люминесцентной лампы.

лампы для уличного и частично для промышленного освещения.

При низком давлении ртутных паров основную роль играет коротковолновое ультрафиолетовое излучение (с длиной волны ≈0,25 мкм), а видимое излучение очень слабое. Такой разряд в сочетании с люминофорами может обеспечить высокие цветовые свойства видимого света. Именно так и устроены так называемые *люминесцентные лампы* (рис. 3). Основным источником видимого света в люминесцентной лампе служит люминофор, который наносится на внутреннюю поверхность стеклянной колбы лампы. Оптимальное давление паров ртути равно примерно 1,33 Па. По причинам, которые станут ясны позднее, в колбе, кроме паров ртути, содержится также инертный газ аргон при давлении 5,32 Па.

В люминесцентной лампе происходят два последовательных преобразования энергии. Сначала подводимая электроэнергия в парах ртути превращается в энергию коротковолнового ультрафиолетового излучения (около 60%), затем энергия этого излучения в люминофоре превращается в энергию видимого светового излучения.

На рисунке 4 изображен баланс энергии такой лампы. Если сравнить рисунки 2 и 4, можно подумать, что световая эффективность люминесцентной лампы менее чем в два раза превышает световую эффективность лампы накаливания (21/12). Оказывается, это не так. Благодаря свойствам глаза отношение световых эффективностей значительно превышает отношение энергетических коэффициентов полезного действия.

Любопытно, что тепловые потери в обеих лампах приблизительно одинаковы (79% и 88%). Однако имеется различие в составе этих потерь — доля л у ч и с т о г о тепла в люминесцентной лампе в три раза меньше, чем в лампе накаливания. Поэтому при люминесцентном освещении легче избежать нагрева освещаемых предметов («жар» и свет идут по разным путям).

Рассмотрим по отдельности, как возникает ультрафиолетовое излу-

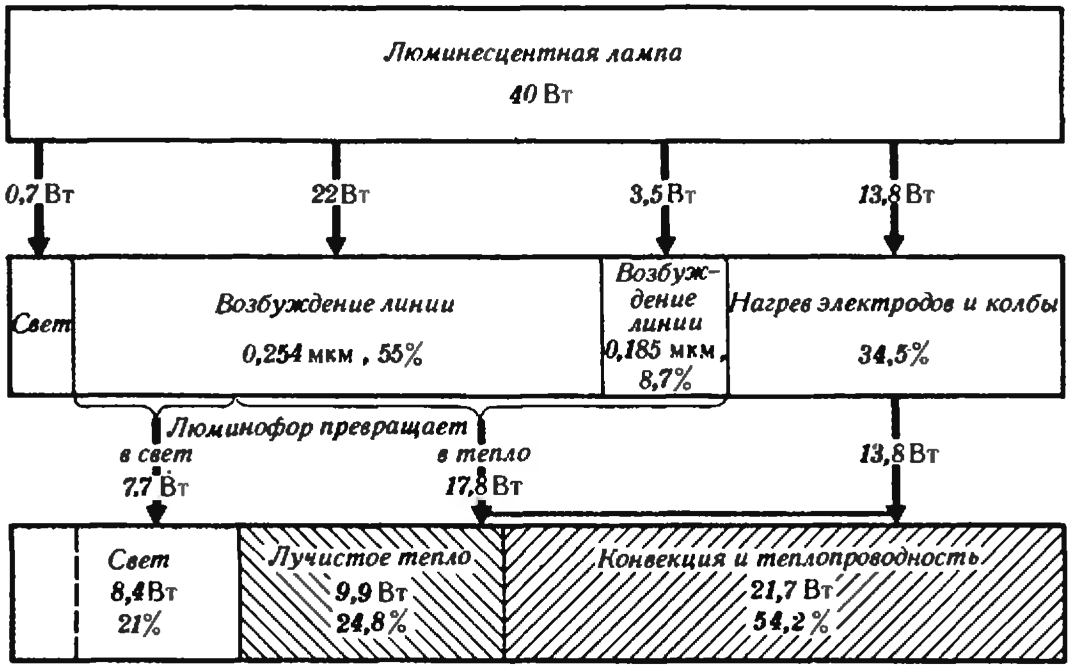


Рис. 4. Баланс энергии 40-ваттной «белой» люминесцентной лампы.

чение и как оно преобразуется в видимый свет.

Механизм генерации излучения в газовом разряде

Как уже говорилось, источником ультрафиолетового излучения в люминесцентной лампе является электрический разряд в ртутных парах при низком давлении*). Электроны, вырвавшиеся с катода и разогнанные электрическим полем, встретив на своем пути атомы ртути, испытывают с ними соударения.

Характер соударений, оказывается, зависит от энергии электронов**). Если энергия электрона меньше 4,9 эВ, соударение его с атомом ртути носит упругий характер — кинетическая энергия электрона практически не изменяется, а изменяется лишь направление его движения. При энергии, равной (или превышающей) 4,9 эВ, соударение электрона с атомом ртути становится неупругим — электрон отдает всю (или почти всю) свою энергию атому ртути. Это — одно из проявлений квантовых свойств атомов.

Согласно квантовым представлениям каждый атом может обладать лишь определенными запасами энергии, или, как говорят, он может находиться лишь на вполне определенных энергетических уровнях. Следовательно, и принимать атом может лишь определенные порции энергии. Так, для атома ртути такой минимальной порцией является энергия 4,9 эВ. Меньшую энергию атом ртути не принимает (проявляется его «квантовая гордость»). Что же происходит с атомом дальше?

На рисунке 5 изображена очень грубая схема энергетических уровней атома ртути. В результате неупругого столкновения с электроном атом переходит в возбужденное состояние, соответствующее энергетическому уровню *3*, «живет» на этом уровне примерно 10^{-7} с и возвращается обратно на уровень *1*.

Заметим, что атомы аргона, хотя их число превышает число атомов ртути в сотни раз, совершенно не возбуждаются. Связано это с тем, что минимальная энергия возбуждения атомов аргона значительно выше, чем у атомов ртути.

*) О том, как возникает такой разряд, см., например, «Физику-9», с. 184.

**) Подробнее об этом см., например, статью А. Левашова «Опыты Франка и Герца» («Квант», 1979, № 6).

Возникает вопрос: почему для генерации излучения с длиной волны 0,25 мкм выгодно использовать низкое давление ртутных паров? Ведь с увеличением давления растет число атомов ртути и, как будто, должно расти число неупругих столкновений электронов с атомами. Однако это не так. Рассмотрим более подробно судьбу возбужденного атома и испускаемого им фотона.

Жизнь возбужденного атома чревата опасностями. При столкновениях с другими частицами (электронами, атомами) или со стенками колбы атом может потерять свою энергию и перейти в нормальное (невозбужденное) состояние. Такие безызлучательные («тушащие») переходы бесполезны с точки зрения генерации излучения. Очевидно, что с ростом давления число безызлучательных переходов растет. Этому же способствует явление «пленения» излучения, связанное со своеобразной фотонной «эстафетой». Фотон, испущенный возбужденным атомом в объеме газа, как правило, не вылетает сразу наружу. Его перехватывает какой-либо нормальный атом и переходит при этом в возбужденное состояние. Через 10^{-7} с этот атом возвращается в нормальное состояние, испуская новый фотон, который опять может быть поглощен другим нормальным атомом, и так далее. В среднем происходит несколько сот актов переизлучения фотонов. При каждом акте меняется направление полета фотонов, что делает их путь в газе зигзагообразным (рис. 6). Это, естественно, увеличивает вероятность безызлучательных переходов, которые могут происходить только во время «остановок» фотонов в атомах. Ясно, что число «остановок» растет с ростом концентрации атомов, то есть с ростом давления газа.

Механизм преобразования излучения в люминофоре

Преобразование невидимого ультрафиолетового излучения в видимый свет происходит в люминофоре. Характер свечения люминофора определяется его составом.

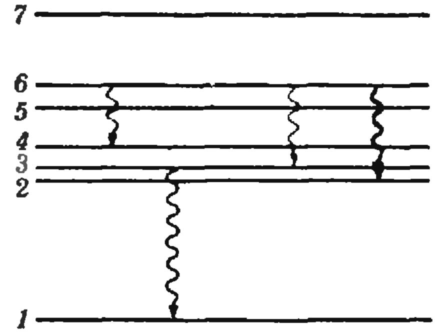


Рис. 5. Схема энергетических уровней атома ртути. Переход *3*→*1* дает ультрафиолетовую линию с длиной волны 0,25 мкм; переход *6*→*2* дает фиолетовую линию с длиной волны 0,40 мкм; переход *6*→*3* дает синюю линию с длиной волны 0,45 мкм; переход *6*→*4* дает зеленую линию с длиной волны 0,55 мкм; переход *7*→*5* дает желтую линию с длиной волны 0,58 мкм.

В современных люминесцентных лампах чаще всего применяются галофосфаты кальция. Это сложные соединения, сходные с апатитами ($3Ca(PO_4)_2CaF_2$), в которых часть атомов фтора заменена атомами хлора и, главное, в которые введены активаторы. *Активаторами* называют атомы примесей, вызывающие свечение люминофора. Концентрация атомов активатора очень невелика — порядка процента, иногда даже долей процента, но без активатора люминофор мертв и свечения не дает.

В качестве активаторов в галофосфаты вводятся одновременно атомы сурьмы и марганца. В кристалле галофосфата эти атомы превращаются в ионы. Поглотив ультрафиолетовое излучение, ионы возбуждаются, а возвращаясь в исходное нормальное состояние, высвечивают поглощенную энергию в виде

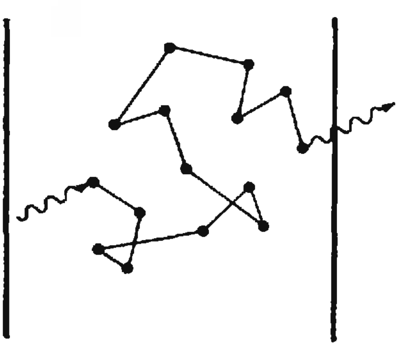


Рис. 6. Путь фотона в объеме разряда.

света. При этом в спектре излучения такого люминофора наблюдаются две широкие полосы, соответствующие излучению ионов сурьмы и марганца. Широкие полосы возникают за счет воздействия на ионы активаторов атомов окружающей среды, прежде всего — атомов хлора, без этого они испускали бы узкие линии. Часть ионов сурьмы, возбужденных в результате поглощения ультрафиолетового излучения, передают свою энергию ионам марганца, побуждая их к свечению. Варьируя концентрацию активаторов и содержание хлора в люминофоре, можно в широких пределах изменять спектральный состав свечения.

Надо откровенно сказать, что далеко не все детали процесса преобразования излучения в люминофорах типа галофосфатов уже выяснены. Однако следует помнить замечание известного математика О. Хевисайда: «Стану ли я отказываться от своего обеда только потому, что я не полностью понимаю процесс пищеварения?»

В последнее время для повышения светоотдачи люминесцентных ламп все шире стали применять люминофоры, активированные редкоземельными элементами (такими как европий, тербий, церий). Спектральные полосы излучения ионов редкоземельных элементов довольно узки, поэтому для заполнения видимого спектра приходится применять смесь из двух или даже трех люминофоров. Высокая цена редкоземельных элементов и усложненная технология нанесения смеси люминофоров приводит к повышению стоимости ламп, но считается, что повышение светоотдачи ламп с лихвой компенсирует эти недостатки.

Схема включения люминесцентной лампы

Для включения люминесцентной лампы в сеть применяется остроумная, но довольно сложная схема, что, конечно, является недостатком этой лампы. Необходимость специальной схемы включения объясняется двумя обстоятельствами: 1) большой длиной лампы, 2) падающей вольтамперной характеристикой электрического разряда.

Большая длина лампы необходима для получения высокой светоотдачи, поскольку источником излучения служит положительный столб разряда и потери энергии в приэлектродных частях разряда имеют тем меньший удельный вес, чем длиннее разрядная трубка. Так, сороковаттная лампа имеет длину 110 см. Вместе с тем зажечь электрический разряд в длинной трубке, когда расстояние между электродами велико, не так просто.

Как видно из рисунка 3, на концах лампы имеется по два штырька, к которым приварены вольфрамовые спирали. Если такую спираль нагреть, она начинает испускать электроны, что облегчает зажигание разряда. Однако когда разряд возник, надобность в постороннем нагреве спиралей отпадает — спирали нагреваются за счет их бомбардировки положительными ионами. Так как лампы обычно работают на переменном токе, каждая спираль один полупериод служит катодом, а другой — анодом. Как же осуществляется предварительный нагрев спиралей?

На рисунке 7 изображена схема включения люминесцентной лампы: как видно из схемы, параллельно лампе *Л* включен стартер *С*, а последовательно с лампой — дроссель *Д*. Стартер представляет собой миниатюрную лампу тлеющего разряда, наполненную неоном, с электродами, сделанными из биметаллических пластинок (рис. 8). Когда подается напряжение, в стартере возникает разряд (расстояние меж-

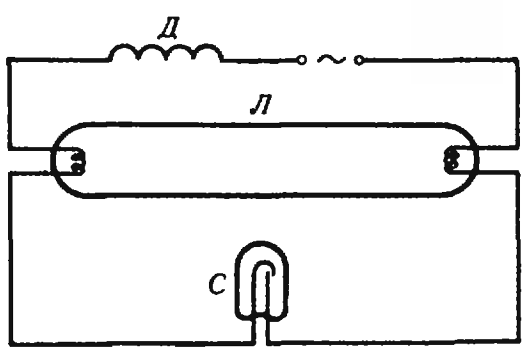


Рис. 7. Схема включения люминесцентной лампы.

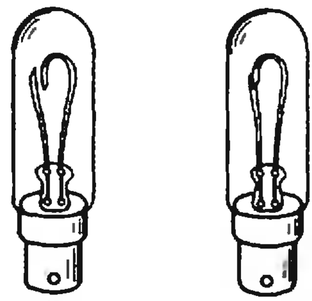


Рис. 8. Стартер: *а*) электроды холодные; *б*) электроды нагреты.

ду электродами стартера порядка миллиметра). Электроды стартера нагреваются, изгибаются навстречу друг другу и закорачивают разрядный промежуток. В цепи возникает большой ток, достаточный для нагрева спиралей люминесцентной лампы. Пока спирали ламп нагреваются, электроды стартера, наоборот, охлаждаются (ведь разряда в стартере нет). Охлаждаясь, электроды стартера выпрямляются, контакт между ними нарушается, и цепь разрывается. Теперь опять имеются два конкурирующих между собой разрядных промежутка — в лампе и в стартере. Но ситуация резко отличается от начальной: электроды лампы накалены и дают большую эмиссию электронов, поэтому разряд возникает не в стартере, а в лампе.

Заметим, что зажигание разряда в люминесцентной лампе сильно облегчено присутствием аргона: возбужденные электронами атомы аргона при столкновении с атомами ртути ионизуют их и тем самым увеличивают число свободных носителей зарядов.

Зачем в схеме включения нужен дроссель? Отличительной особенностью электрического разряда в газе при низком давлении является его *падающая* вольтамперная характеристика — с ростом тока напряжение на лампе уменьшается. Чтобы ограничить рост тока, последовательно с лампой надо включить сопротивление. Применение с этой целью дросселя энергетически более выгодно, чем включение омического сопротивления (гораздо меньше тепловые потери). Правда, наличие дросселя снижает коэффициент мощности электрической цепи, но при установке большого числа люминесцентных ламп для компенсации этого недостатка в сеть питания дополнительно включают специальные конденсаторы. Важно отметить также, что благодаря индуктивности дросселя при размыкании цепи стартером на электродах лампы возникает напряжение, превышающее напряжение от источника, что весьма благоприятно для зажигания разряда в лампе.

Применение люминесцентных ламп

Чернобелые телевидение и кино наглядно показывают, насколько было бы обеднено наше восприятие мира в отсутствие цветного зрения. Замечательная способность человеческого глаза различать цвета не только является источником эстетического наслаждения, но имеет и важное практическое значение.

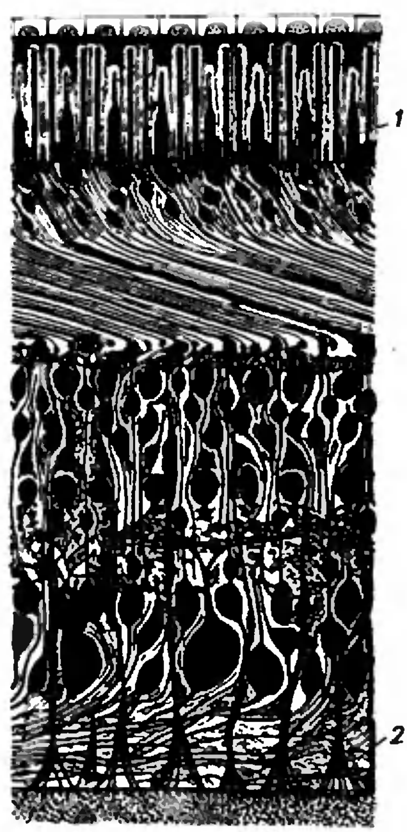


Рис. 9. Строение сетчатки глаза человека: *1* — слой палочек и колбочек; *2* — слой волокон зрительного нерва.

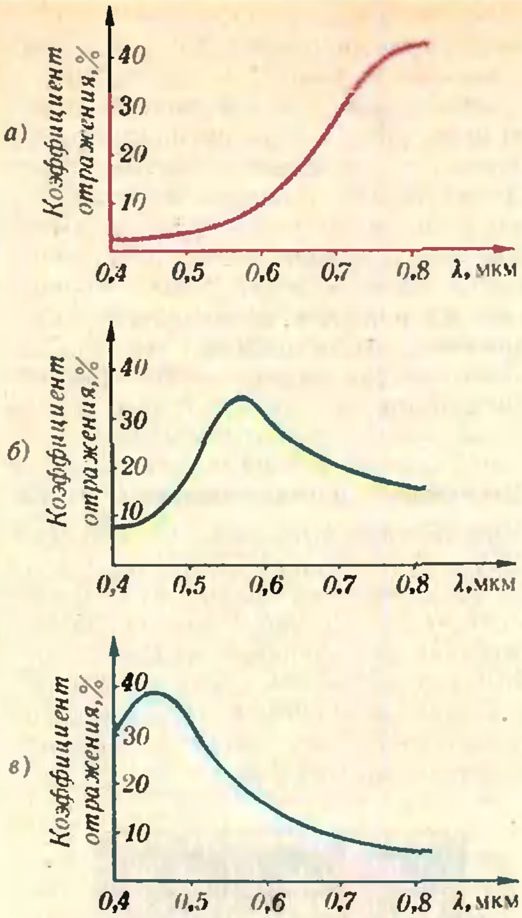


Рис. 10. Спектральные кривые коэффициента отражения красителей: а) красного; б) зеленого; в) синего.

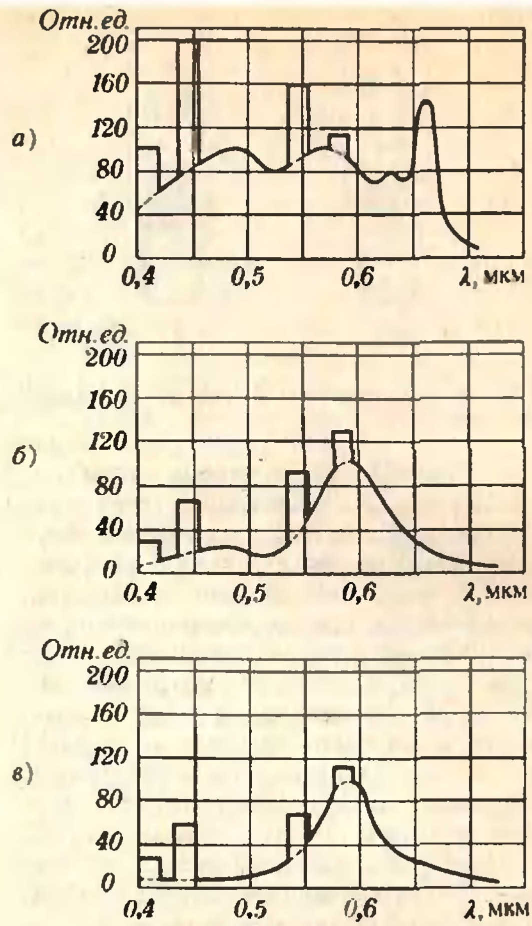


Рис. 11. Распределение энергии в спектре люминесцентных ламп: а) «дневного» света; б) «белого» света; в) «теплобелого» света.

Цветовое зрение связано со сложной структурой сетчатки человеческого глаза. В ее состав входят *палочки* и *колбочки* — светочувствительные клетки, связанные с окончаниями разветвленного в сетчатке зрительного нерва (рис. 9). Палочки более чувствительны и работают даже в условиях слабой освещенности (ночное зрение), но при этом цвета практически не различаются («ночью все кошки серы»). Колбочки менее чувствительны и работают только при достаточно большой освещенности (дневное зрение), но зато обеспечивают различение цветов. Для сравнения укажем, что у сов имеются только палочки, поэтому днем они должны щурить глаза. У кур, наоборот, — только колбочки, вот почему они ложатся спать с заходом солнца.

Считается, что в человеческом глазу имеется три типа колбочек. При поглощении света колбочкой одного из этих типов возникает ощущение синего цвета, другого — зеленого цвета и третьего — красного цвета. Воспринимаемый нами цвет предмета зависит от соотношения интенсивностей возбуждения трех указанных типов колбочек. Это соотношение в свою очередь зависит от спектрального состава света, отраженного от предмета и попадающего в глаз. А спектральный состав отраженного света определяется зависимостью коэффициента отражения предмета от длины волны (рис. 10) и спектральным составом падающего на предмет света. Так, многие ткани при дневном свете и при свете ламп накаливания имеют совсем разные цвета. Поэтому опытные покупатели в магазине часто подносят покупку к окну, чтобы избежать неожиданностей в дальнейшем. Неприятны изменения цвета при свете ламп накаливания на производстве окрашенных изделий (в текстильной промышленности, при цветной печати в типографии). То же относится и к картинным галереям.

С помощью люминесцентной лампы можно получить искусственный дневной свет довольно высокого качества. На рисунке 11 изображены кривые распределения энергии в спектре люминесцентных ламп различных типов. К сожалению, ртутный разряд испускает видимые линии спектра (их интенсивность на рисунке изображена прямоугольниками). Наиболее яркие линии — желтая, зеленая и синяя — несколько портят цветовые свойства люминесцентных ламп.

Спектральные кривые люминесцентных ламп показывают, что в их излучении гораздо больше зеленых лучей, чем в излучении ламп накаливания. Это дает дополнительный выигрыш, так как максимум чувствительности глаза лежит именно в зеленой части спектра (см. рис. 1). В результате светоотдача люминесцентных ламп в 3—4 раза выше светоотдачи ламп накаливания.

Когда были сделаны первые советские люминесцентные лампы, С. И. Вавилов предложил испытать эти лампы в Третьяковской галерее. Помню, когда мы вместе с известным художником и искусствоведом И. Э. Грабарем впервые приехали в Третьяковку, я поймал себя на мысли — откуда вечером здесь дневной свет? — хотя знал, что незадолго до этого была смонтирована специальная установка. Потом мы брали картины, и И. Э. Грабарь оценивал качество цветопередачи при свете люминесцентных ламп. Много хлопот нам доставил известный портрет Мусоргского работы Репина — отвороты его халата имеют сиреневый оттенок, очень чувствительный к освещению.

В настоящее время на всех предприятиях, где нужна высокая освещенность и хорошая цветопередача, используются люминесцентные лампы. Наряду с лампами «дневного» света (соответствующими рассеянному дневному свету без прямых солнечных лучей), имеются «белые» и «теплобелые» лампы, вполне пригодные для освещения жилых помещений. Выпуск люминесцентных ламп достиг сотен миллионов штук в год и продолжает расти. Вместе с тем продолжается совершенствование их качества — повышается светоотдача, растет срок службы и улучшаются цветовые характеристики.

Спрашивайте — отвечаем

Дорогая редакция! Напишите, пожалуйста, когда будут проводиться вступительные экзамены в вуз г. Москвы в олимпийском 1980 году. Правда ли, что прием иногородних абитуриентов будет ограничен?

А. Кушик (пос. Комсомольский Ворошиловградской обл.) и др.

Редакция попросила первого заместителя министра высшего и среднего специального образования СССР Николая Федоровича Краснова ответить на эти вопросы, интересующие многих наших читателей.

Прием на дневные отделения высших учебных заведений Москвы в 1980 году будет проводиться в следующие сроки:

прием документов от поступающих — с 20 июня по 31 июля;
вступительные экзамены — с 20 августа по 10 сентября;
зачисление — с 11 по 14 сентября;
начало 1980/81 учебного года для 1 курса — с 15 сентября, для остальных курсов — с 1 сентября.

Отдельным вузам утвержден индивидуальный график работы по новому приему. Так, в Московском инженерно-физическом институте прием документов будет осуществляться с 20 июня по 4 июля, вступительные экзамены — с 1 по 12 июля, зачисление — с 14 по 15 июля.

Никаких ограничений в приеме документов от иногородних поступающих в вузы Москвы в 1980 году не предполагается. При этом следует учитывать, что зачисление иногородних будет осуществляться, исходя из наличия мест в общежитиях.

Примечание редакции. Как нам сообщили в Московском физико-техническом институте (г. Долгопрудный Московской области), вступительные экзамены в МФТИ в 1980 году будут проводиться в обычные сроки (прием документов — с 20 июня по 10 июля, вступительные экзамены 1-го потока — с 1 июля)

В. Майер

Оптические опыты с глазом

Если рассуждение это покажется слишком длинным для прочтения за один раз, то его можно разделить на шесть частей.

Декарт. Рассуждение о методе

Введение

Пожалуй, самое трудное в предлагаемых ниже экспериментах — найти достаточно терпеливого партнера. Нам кажется, вы сумеете уговорить кого-нибудь побыть «подопытным кроликом», если пообещаете ему доказать, что ваши глаза светятся в темноте, как у кошки (правда, не зеленым, а красным светом).

Обсуждение проблемы

Посмотрите на кончик карандаша, расположенного на расстоянии 15—30 см от глаза, при этом более удаленные предметы вы будете видеть нерезко. Переведите взгляд на далекие предметы — нерезким станет кончик карандаша. Обычно мы не замечаем этого: все предметы, на которые мы смотрим, кажутся нам вполне резкими. Это означает, что глаз сам, независимо от нашего сознания, как бы настраивается на резкость. Такой процесс называют *аккомодацией* глаза. Как же она осуществляется?

Оптическая система глаза (рис. 1) состоит из роговицы *2*, водянистой жидкости *3*, хрусталика *6* и стекловидного тела *8*. Ясно, что глаз обладает регулирующейся оптической системой, иначе аккомодация была бы невозможна: на сетчатке глаза *9* получились бы резкими изображения предметов, расположенных лишь на вполне определенном расстоянии от глаза, и нерезкими — изображения всех остальных предметов.

Исследования показали, что за аккомодацию ответствен хрусталик глаза. Если на сетчатке глаза появляется нерезкое изображение наблюдаемого предмета, соответствующий сигнал по зрительному нерву поступает в мозг, обрабатывается там и подается на так называемую циллиарную мышцу *7*, которая, сокращаясь или растягиваясь, изменяет кривизну поверхностей хрусталика до тех пор, пока на сетчатке не получится резкое изображение.

Можно ли экспериментально доказать, что именно хрусталик осуществляет аккомодацию? Как удостовериться в том, что аккомодация вызывается изменением кривизны поверхностей хрусталика?

Наверное, прежде всего нужно убедиться, что хрусталик действительно существует. Возьмите зеркало и посмотрите в него на свой глаз. Вы легко обнаружите в нем белую плотную оболочку — склеру *1*, прозрачный участок этой оболочки — роговицу *2*, радужную оболочку *4* (которая служит регулятором светового потока, создающего изображение, и определяет цвет глаз че-

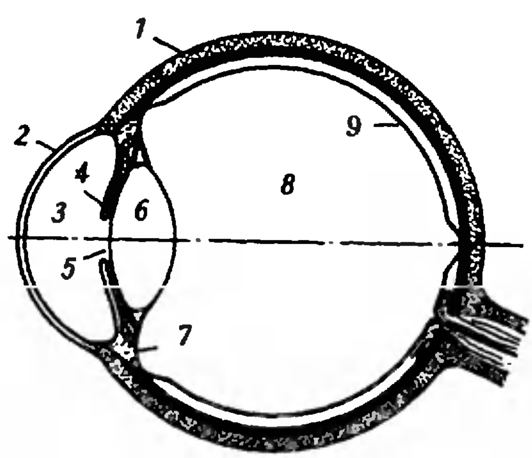


Рис. 1. Схема устройства глаза человека: *1* — склера; *2* — роговица; *3* — водянистая жидкость; *4* — радужная оболочка; *5* — зрачок; *6* — хрусталик; *7* — циллиарная мышца; *8* — стекловидное тело; *9* — сетчатка.

ловека), зрачок *5* — отверстие в радужной оболочке. Но хрусталика вы не увидите! Как же быть?

Поскольку оптическая система глаза создает на сетчатке изображения предметов, показатели преломления элементов системы должны отличаться от показателя преломления окружающей среды. (И действительно, согласно измерениям показатели преломления роговицы, хрусталика, водянистой жидкости и стекловидного тела равны соответственно $n_р = 1{,}376$, $n_{хр} = 1{,}386$, $n_{в.ж} = n_{с.т} = 1{,}336$.) При переходе света из одной среды в другую, помимо преломления, наблюдается и отражение света. Это означает, что, поместив перед глазом источник света, можно надеяться увидеть его изображение в отраженном свете. В первом приближении границы раздела различных сред в глазу представляют собой сферические поверхности. Следовательно, они должны действовать как сферические зеркала.

Итак, мы приходим к выводу, что оптическая система глаза не только формирует изображение предмета на сетчатке, но еще и создает несколько побочных изображений за счет отражения света от поверхностей роговицы и хрусталика. Обнаружив эти изображения на опыте, вы сумеете доказать существование хрусталика. А исследовав изменение этих изображений при «наводке» глаза на резкость, сможете уяснить оптическую сущность аккомодации.

Модельные опыты

Прежде чем приступить к экспериментальному исследованию самого глаза, попробуйте смоделировать его роговицу и хрусталик.

В качестве модели хрусталика глаза можно использовать двояковыпуклую лупу с увеличением 2—3,5 (она называется часовой и продается в магазинах фототоваров). На расстоянии 10—20 см от лупы расположите подключенную к батарейке лампочку для карманного фонаря. Глядя на лупу со стороны лампочки, вы увидите два ее изображения:

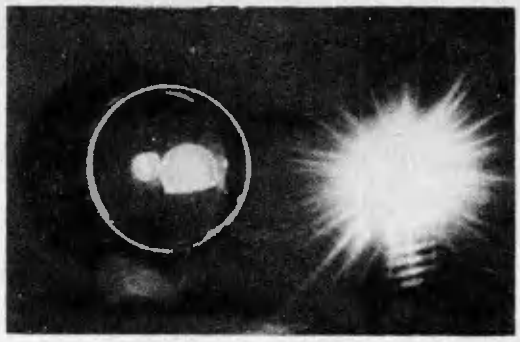


Рис. 2.

прямое и перевернутое (рис. 2). Попробуйте перемещать лампочку перпендикулярно оптической оси лупы — вы заметите, что изображения смещаются в разные стороны.

На рисунке 3 представлен ход лучей при образовании изображений l_1 и l_2 предмета l поверхностями лупы (построение проведено без учета преломления в лупе). Прямое изображение l_1 создает передняя поверхность *1* лупы, действующая как выпуклое зеркало, а перевернутое изображение l_2 — задняя поверхность *2*, представляющая собой вогнутое зеркало.

Как правило, в опыте одно изображение источника получается больше другого. Попробуем объяснить, почему.

Для сферических зеркал справедливы все те же самые соотношения, что и для тонкой линзы. Увеличение предмета, даваемое передней поверхностью лупы (выпуклым зеркалом), равно (см. рис. 3)

$$\Gamma_1 = \frac{l_1}{l} = \frac{f_1}{d_1}.$$

Расстояние d_1 от предмета до зерка-

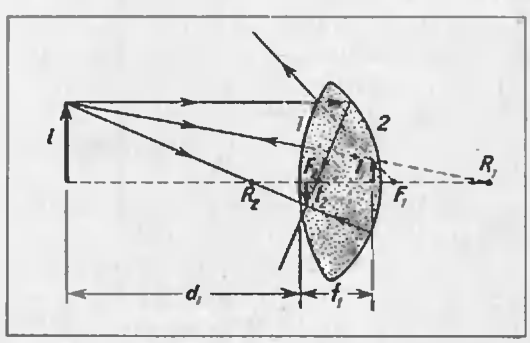


Рис. 3.

ла и расстояние f_1 от зеркала до изображения связаны соотношением

$$\frac{1}{d_1} - \frac{1}{f_1} = -\frac{1}{F_1}.$$

Учитывая, что фокусное расстояние зеркала равно половине радиуса кривизны R_1 первой сферической поверхности лупы, получим

$$\Gamma_1 = \frac{F_1}{F_1 + d_1} = \frac{R_1}{R_1 + 2d_1}.$$

Если предмет находится на большом расстоянии от зеркала по сравнению с его радиусом кривизны ($d_1 \gg R_1$), в знаменателе предыдущей формулы первым слагаемым по сравнению со вторым можно пренебречь и считать, что увеличение выпуклого зеркала равно

$$\Gamma_1 = \frac{R_1}{2d_1}.$$

Аналогично, увеличение предмета, даваемое задней поверхностью лупы (вогнутым зеркалом), выражается такой же формулой, только вместо R_1 должно быть R_2, а вместо d_1 — d_2:

$$\Gamma_2 = \frac{R_2}{2d_2}.$$

Поскольку лупа — тонкая линза, то есть ее толщина мала по сравнению с радиусами кривизны, различием в расстояниях d_1 и d_2 можно пренебречь. Тогда для увеличений предмета, даваемых поверхностями лупы, имеем

$$\Gamma_1 = \frac{l_1}{l} = \frac{R_1}{2d} \quad \text{и} \quad \Gamma_2 = \frac{l_2}{l} = \frac{R_2}{2d},$$

где $d = d_1 = d_2$ — расстояние от предмета до лупы.

Следовательно, если изображения l_1 и l_2 получаются разных размеров, то различны радиусы кривизны лупы. Зная расстояние от предмета до лупы и измерив увеличения, даваемые поверхностями лупы, можно определить радиусы кривизны ее поверхностей.

Советуем вам провести еще один опыт с моделью хрусталика глаза.

Слепите из пластилина небольшую прямоугольную камеру, в боковую стенку камеры вставьте лупу. Получите изображения горящей лампочки в отраженном от поверхностей лупы свете и обратите внимание на их яркость. Теперь налейте в камеру воду — яркость изображения, создаваемого задней поверхностью лупы, заметно уменьшится. Оказывается, интенсивность света, отраженного от границы раздела двух сред, зависит от показателей преломления этих сред *). В данном случае при замене воздуха на воду интенсивность отраженного света уменьшилась.

Мы достаточно подробно разобрали, что должно было бы наблюдаться в отраженном свете, если бы оптическая система глаза состояла из одного хрусталика. Однако глаз имеет еще и роговицу, и две камеры, заполненные водянистой жидкостью и стекловидным телом.

Смоделировать действие роговицы можно, поместив перед лупой, на расстоянии 2—4 мм от нее, очковое стекло, имеющее оптическую силу +1 диоптрия (продается во всех аптеках). На получившуюся оптическую систему направьте свет от лампочки для карманного фонаря. Проводя наблюдения со стороны лампочки, вы увидите четыре ее изображения, три из которых прямые и одно перевернутое. Обратите внимание на то, что изображения, образованные отражением света от поверхностей очкового стекла, расположены очень близко друг от друга.

Заполните водой полость между очковым стеклом и лупой, а также пластилиновую камеру за лупой. Пронаблюдайте, как при этом изменяются яркости изображений, создаваемых различными сферическими поверхностями вашей оптической системы.

Советуем вам ни в коем случае не торопиться при постановке модельных опытов. Чем тщательнее вы их проведете, тем лучше будете представлять, что должны наблюдать в живом глазу, и тем легче сможете обнаружить нужные изображения.

---

*) Строгий расчет для коэффициента отражения света k от границы раздела двух сред дает $k = \frac{(n_1 - n_2)^2}{(n_1 + n_2)^2}$, где n_1 и n_2 — показатели преломления граничащих сред.

М. Шкапенюк

Выпуклость функций и доказательство неравенств

В этой статье исследуются свойства выпуклых функций. В частности, устанавливается неравенство между средним арифметическим значений выпуклой функции в n точках и ее значением в среднем арифметическом этих точек. Из этого неравенства легко получаются классические соотношения между средним гармоническим, средним геометрическим, средним арифметическим и средним квадратическим.

Выпуклые функции

Рассмотрим функцию f, дифференцируемую в любой точке отрезка $[a; b]$, и обозначим через Γ часть графика функции f, отвечающую этому отрезку:

$\Gamma = \{(x; y) | x \in [a; b]$ и $y = f(x)\}$.

Функция f называется *выпуклой вверх* на отрезке $[a; b]$ («Алгебра и начала анализа 10», п. 79), если для любой точки $T \in \Gamma$ кривая Γ лежит ниже касательной к Γ в точке T (рис. 1 *а*). Аналитически, как легко видеть (рис. 2), это условие записывается в виде неравенства

$$f(x_2) < f(x_1) + f'(x_1)(x_2 - x_1), \quad (1)$$

которое должно выполняться при любых (различных) $x_1, x_2 \in [a; b]$. Аналогично определяется *выпуклость вниз* на отрезке (рис. 1, *б*); для нее знак $<$ в неравенстве (1) нужно заменить на $>$.

В том же пункте учебника формулируется достаточный признак выпуклости функции: *если на промежутке вторая производная положительна (отрицательна), то график обращен выпуклостью вниз (вверх)*. Геометрически первому случаю отвечает ускоренное возрастание или замедленное убывание, а второму — замедленное возрастание или ускоренное убывание.

Примеры. 1) *Функция* $f(x) = x^2$ *выпукла вниз на любом отрезке* $[a; b]$. 2) *Функция* $f(x) = \lg x$ *выпукла вверх на* $[a; b]$, если $0 < a < b$. 3) *Функция* $f(x) = \sin x$ *выпукла вверх на* $[0; \pi]$ *и выпукла вниз на* $[\pi; 2\pi]$.

Рассмотрим теперь несколько простых свойств выпуклых функций; мы их формулируем для случая функций, выпуклых вверх, оставляя читателю их переформулировки для функций, выпуклых вниз.

I. *Если f выпукла вверх на* $[a; b]$, *то для любых (различных) точек*

$$f\left(\frac{1}{2}(x_1 + x_2)\right) > \frac{1}{2}(f(x_1) + f(x_2)).$$

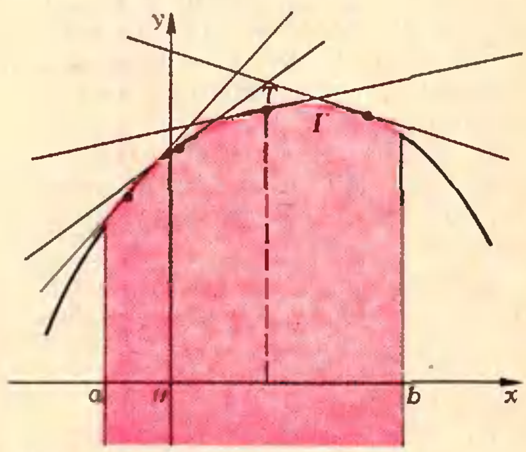


Рис. 1 а

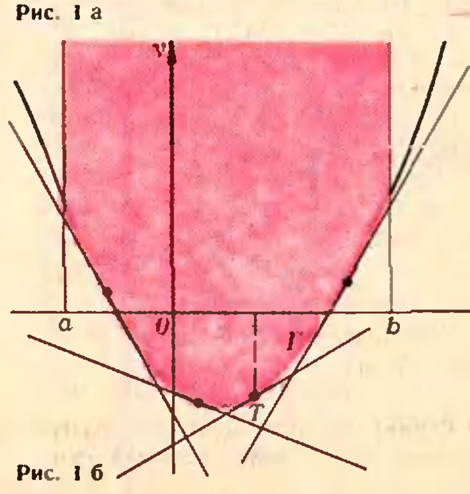


Рис. 1 б

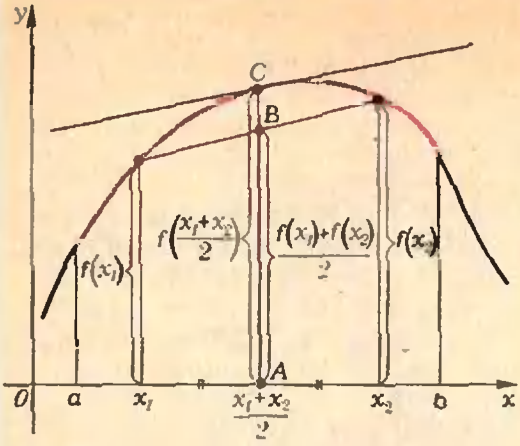


Рис. 2.

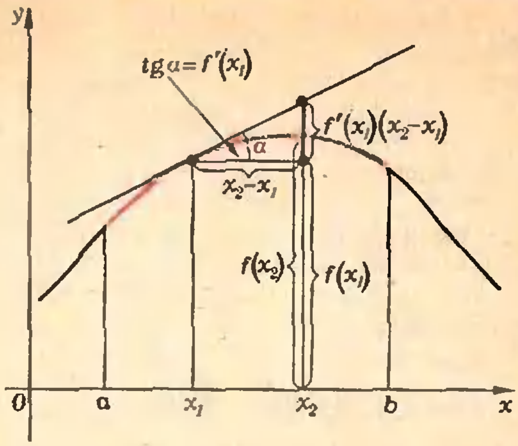


Рис. 3.

Доказательство очевидно: достаточно провести касательную к графику функции в точке $\frac{1}{2}(x_1+x_2)\in[a;b]$ и заметить, что длина отрезка $|AB|$ равна $\frac{1}{2}(f(x_1)+f(x_2))$ (рис. 3).

Можно показать, что *дифференцируемая на отрезке $[a;b]$ функция, обладающая свойством I, обязательно будет выпуклой вверх.* Нам этот факт не потребуется, поэтому доказательство мы не приводим.

II. *Если функции $f(x)$, $g(x)$ выпуклы вверх на $[a;b]$, то их сумма $h(x)=f(x)+g(x)$ тоже выпукла вверх на $[a;b]$.*

Действительно, складывая неравенства (1) для f и g и пользуясь тем, что $h'(x)=f'(x)+g'(x)$, мы сразу получим неравенство (1) для функции h.

III. *Если функция $f(x)$ выпукла вверх на $[a;b]$, то функция $h(x)=-f(x)$ выпукла вниз на $[a;b]$.*

Это сразу следует из определения выпуклости функции. Из свойств II и III сразу вытекает следующее свойство:

IV. *Если функция $f(x)$ выпукла вверх на $[a;b]$, а функция $g(x)$ выпукла вниз на этом отрезке, то функция $h(x)=f(x)-g(x)$ на нем выпукла вверх.*

А вот и обещанное основное неравенство.

Теорема. *Если функция выпукла вверх на $[a;b]$ и числа x_1, x_2, ..., $x_n\in[a;b]$ $(n\geqslant2)$ не все равны между собой, то*

$$f\left(\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)\right)>\frac{1}{n}[f(x_1)+\ldots+f(x_n)].\quad(*)$$

Эта теорема — неиссякаемый источник неравенств: достаточно подставить любую конкретную выпуклую вверх функцию вместо функции f в $(*)$ и... неравенство готово! Например, взяв вместо f функцию sin, получим, что для любых (различных) x_1, ..., $x_n\in[0;\pi]$ выполняется такое неравенство:

$$\sin\left(\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)\right)>\frac{1}{n}(\sin x_1+\ldots+\sin x_n).$$

Мы отложим доказательство теоремы до конца статьи, а сейчас посмотрим, как из нее получаются

Классические неравенства

Напомним несколько определений, часто встречающихся в математике и играющих важную роль в ее приложениях (теории вероятностей, математической статистике и т. д.).

Средним гармоническим положительных чисел x_1, x_2, ..., x_n называется число

$$P_{-1}=\left(\frac{1}{n}(x_1^{-1}+x_2^{-1}+\ldots+x_n^{-1})\right)^{-1}=n/(x_1^{-1}+x_2^{-1}+\ldots+x_n^{-1}).$$

Средним геометрическим положительных чисел x_1, x_2, ..., x_n называется число

$$P_0=\sqrt[n]{x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_n}.$$

Средним арифметическим чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется число

$$P_1=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n).$$

Средним квадратическим чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется число

$$P_2=\sqrt{\frac{1}{n}(x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2)}.$$

Оказывается, эти четыре величины связаны следующими неравенствами:

$$P_{-1}\leqslant P_0\leqslant|P_1|\leqslant P_2. \qquad (2)$$

Здесь в первых двух неравенствах предполагается, что числа $x_1, \ldots, x_n$ положительны (для последнего они могут быть любыми), причем знаки равенства будут иметь место тогда и только тогда, когда $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

Читателям мы советуем эти неравенства написать в развернутом виде.

Докажем сперва второе неравенство — его часто называют неравенством Коши,— утверждающее, что *среднее геометрическое положительных $x_1, \ldots, x_n$ не больше их среднего арифметического.*

Для этого рассмотрим функцию $f(x)=\lg x$, которая, как мы видели, выпукла вверх на любом отрезке $[a; b]$, $0<a<b$. Согласно (*), если не все x_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ совпадают,

$$\lg\left(\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)\right)>\frac{1}{n}(\lg x_1+\ldots+\lg x_n)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lg\left(\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)\right)>\lg\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}.$$

Так как функция $\lg x$ возрастает, отсюда следует

$$\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)>\sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n},$$

т. е. второе из неравенств (2).

Для доказательства третьего применим основную теорему (в ее варианте для выпуклости в н и з) к функции $f(x)=x^2$. Получим

$$\left(\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)\right)^2<\frac{1}{n}(x_1^2+\ldots+x_n^2)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{1}{n}|x_1+\ldots+x_n|<\sqrt{\frac{1}{n}(x_1^2+\ldots+x_n^2)}.$$

Для доказательства первого из неравенств (2) следует вновь взять $f(x)=\lg x$ и применить основную теорему к числам $x_1^{-1}, \ldots, x_n^{-1}$. Детали предоставляем читателю.

То, что равенства в (2) достигаются только при совпадении всех x_i, проверить совсем просто, и эту проверку мы тоже оставляем читателю.

Доказательство основной теоремы

Пусть даны числа $x_1, x_2, \ldots, x_n\in[a; b]$, не все совпадающие между собой, и функция f, выпуклая вверх на $[a; b]$. Так как $\frac{1}{n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)$ заключено между наименьшим и наибольшим из этих чисел (докажите это самостоятельно), $f((x_1+\ldots+x_n)/n)$ имеет смысл.

Сначала докажем справедливость неравенства (*) при $n=2^k$ $(k\in\mathbf{N})$. Доказательство проведем индукцией по k.

При $k=1$ справедливость формулы (*) вытекает из свойства I.

Пусть формула (*) верна при $k=p$ $(p\in\mathbf{N})$. Тогда

$$f\left(\frac{1}{2^p}(x_1+x_2+\ldots+x_{2^p})\right)>\frac{1}{2^p}\left(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{2^p})\right).$$

Докажем справедливость утверждения при $k=p+1$, т. е. докажем, что

$$f\left(\frac{1}{2^{p+1}}(x_1+\ldots+x_{2^p}+x_{2^p+1}+\ldots+x_{2^{p+1}})\right)>\frac{1}{2^{p+1}}\left(f(x_1)+\ldots+f(x_{2^p})+f(x_{2^p+1})+\ldots+f(x_{2^{p+1}})\right).$$

Рассмотрим левую часть неравенства:

$$f\left(\frac{1}{2^{p+1}}(x_1+\ldots+x_{2^p}+x_{2^p+1}+\ldots+x_{2^{p+1}})\right)=f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^p}(x_1+\ldots+x_{2^p})+\frac{1}{2^p}(x_{2^p+1}+\ldots+x_{2^{p+1}})\right)\right).$$

Ввиду того, что неравенство справедливо при $k=1$, получим

$$f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^p}(x_1+\ldots+x_{2^p})+\frac{1}{2^p}(x_{2^p+1}+\ldots+x_{2^{p+1}})\right)\right)>\frac{1}{2}\left(f\left(\frac{1}{2^p}(x_1+\ldots+x_{2^p})\right)+f\left(\frac{1}{2^p}(x_{2^p+1}+\ldots+x_{2^{p+1}})\right)\right)$$

В силу предположения индукции

$$f\left(\frac{1}{2^p}(x_1+\ldots+x_{2^p})\right)>\frac{1}{2^p}\left(f(x_1)+\ldots+f(x_{2^p})\right), f\left(\frac{1}{2^p}(x_{2^p+1}+\ldots+x_{2^{p+1}})\right)>\frac{1}{2^p}\left(f(x_{2^p+1})+\ldots+f(x_{2^{p+1}})\right).$$

Таким образом, окончательно имеем

$$f\left(\frac{1}{2^{p+1}}(x_1+\ldots+x_{2^p}+x_{2^p+1}+\ldots+x_{2^{p+1}})\right)>\frac{1}{2^{p+1}}(f(x_1)+\ldots+f(x_{2^p})+f(x_{2^p+1})+\ldots+f(x_{2^{p+1}})),$$

т. е. при $n=2^k$ теорема доказана.

Теперь докажем теорему для любого $n\in\mathbf{N}$. Очевидно, всегда найдется такое число $k_0\in\mathbf{N}$, что $n<2^{k_0}$. Положим $m=2^{k_0}-n$ и рассмотрим числа

$$x_1,\ldots,\quad x_n,\quad \underbrace{\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n),\ldots,\quad \frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)}_{m}.$$

Легко видеть, что все они принадлежат $[a;\ b]$. В силу того, что их количество равно 2^{k_0}, по доказанной первой части теоремы

$$f\left(\frac{1}{n+m}(x_1+\ldots+x_n+\overbrace{+\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)+\ldots+\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)}^{m})\right)>$$

$$>\frac{1}{n+m}(f(x_1)+\ldots+f(x_n)+$$

$$+mf\left(\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)\right)\Big)\Rightarrow$$

$$f\left(\frac{1}{n(n+m)}(n(x_1+\ldots+x_n)+m(x_1+\ldots+x_n))\right)>$$

$$>\frac{1}{n+m}\Big(f(x_1)+\ldots+f(x_n)+$$

$$+mf\left(\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)\right)\Big)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)\right)>\frac{1}{n+m}\Big(f(x_1)+\ldots$$

$$\ldots+f(x_n)+mf\left(\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)\right)\Big)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+m}nf\left(\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)\right)>$$

$$>\frac{1}{n+m}(f(x_1)+\ldots+f(x_n)),$$

$$f\left(\frac{1}{n}(x_1+\ldots+x_n)\right)>\frac{1}{n}(f(x_1)+\ldots+f(x_n)).$$

Теорема доказана.

Разобрались ли вы с выпуклостью?

Теперь сформулируем ряд контрольных вопросов. Несмотря на их кажущуюся простоту, с ответом не спешите.

Можно ли утверждать, что:

а) произведение положительных и выпуклых вверх на $[a;\ b]$ функций — выпуклая вверх на $[a;\ b]$ функция?

б) если функция $f(x)$ положительная и выпукла вниз на $[a;\ b]$, то функция $g(x)=1/f(x)$ выпукла вверх на $[a;\ b]$?

в) если $f(x)$ выпукла вниз на $[a;\ b]$ и имеет обратную функцию $g(x)$, то $g(x)$ выпукла вверх на $E(f)$ ($E(f)$ — множество значений функции $f(x)$)?

г) если $f(x)$ выпукла вверх на $[a;\ b]$, то $g(x)=f(-x)$ выпукла вверх на $[-b;\ a]$?

Упражнения

Докажите следующие утверждения:

1. Если к выпуклой вверх на $[a;\ b]$ функции прибавить линейную функцию $kx+b$, то полученная сумма выпукла вверх на $[a;\ b]$.
2. Функция $f(x)=ax^2+bx+c$ выпукла вниз при $a>0$ и выпукла вверх при $a<0$.
3. Функция $f(x)=k/x$ при $k<0$ выпукла вверх на $]0;\ +\infty[$ и выпукла вниз на $]-\infty;\ 0[$.
4. Функция $f(x)=a^x$ $(a>0,\ a\neq 1)$ выпукла вниз на $]-\infty;\ \infty[$.
5. Функция $f(x)=\cos x$ выпукла вверх на отрезках $\left[-\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ и выпукла вниз на отрезках $\left[\frac{\pi}{2}+2k\pi;\ \frac{3\pi}{2}+2k\pi\right]$, где $k\in\mathbf{Z}$.
6. Функция $f(x)=\operatorname{tg} x$ выпукла вниз на $\left[k\pi;\ \frac{\pi}{2}+k\pi\right[$ и выпукла вверх на $\left]-\frac{\pi}{2}+k\pi;\ k\pi\right]$, где $k\in\mathbf{Z}$.
7. Функция $f(x)=(3x+1)/(x-2)$ выпукла вниз на $]2;\ +\infty[$ и выпукла вверх на $]-\infty;\ 2[$.
8. Функция $f(x)=x^{-2}$ выпукла вниз на $]0;\ +\infty[$.
9. При неотрицательных значениях x_1, $x_2,\ldots,x_n$ справедливо неравенство
$$n(x_1+\ldots+x_n)^2>(\sqrt{x_1}+\ldots+\sqrt{x_n})^2,$$
причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $x_1=x_2=\ldots=x_n$.
10. Если $x_1,\ldots,x_n$ — положительные числа, то справедливо неравенство
$$n^3/(x_1+\ldots+x_n)^2<\frac{1}{x_1^2}+\ldots+\frac{1}{x_n^2},$$
причем знак равенства достигается тогда и только тогда, когда $x_1=x_2=\ldots=x_n$.

Победители конкурса «Кванта»

Ниже публикуется список школьников — победителей нашего конкурса. В соответствии с решением оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьников победители конкурса «Кванта» получают право участвовать в четвертом (республиканском) этапе Всесоюзной олимпиады 1980 года.

Математика

А. АГАЕВ — с. Покровка АзССР, 10 кл.
Р. АРДАН — Львов, с. ш. № 11, 10 кл.
Л. АРУШАНОВ — Баку, с. ш. № 151, 10 кл.
А. БАЛИНСКИЙ — Львов, с. ш. № 11, 10 кл.
А. БАРГ — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 9 кл.
С. БЕСПАМЯТНЫХ — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
А. БРАГИНСКИЙ — Волгодонск, с. ш. № 13, 10 кл.
Я. БРЕГМАН — Киев, с. ш. № 208, 10 кл.
С. ВАХРИН — Новосибирск, ФМШ № 165 при НГУ, 9 кл.
М. ГАЙСИНСКИЙ — Ташкент, с. ш. № 103, 9 кл.
Л. ГИТЛИН — Витебск, с. ш. № 3, 10 кл.
А. ЕРМОЛИН — Петрозаводск, с. ш. № 30, 10 кл.
А. ЖИЛИНСКИЙ — пос. Крупки Минской обл., с. ш. № 2, 10 кл.
А. КАПЛАН — Сумгаит, с. ш. № 11, 10 кл.
А. КЕЛАРЕВ — Свердловск, с. ш. № 141, 10 кл.
И. КУЗЬ — Львов, с. ш. № 11, 10 кл.
А. МЕГРЕЦКИЙ — Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ, 10 кл.
Р. НАБОКОВ — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
С. НОВАКОВСКИЙ — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.
А. ПАВЛЫЧЕВ — Рига, с. ш. № 1, 10 кл.
В. ПИДСТРИГАЧ — Львов, с. ш. № 11, 10 кл.
К. ПОДДУБНЫЙ — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
А. ПОПЕЛЮХИН — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
В. РАДЧЕНКО — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
И. РОЙЗМАН — пос. Калиновка Винницкой обл., с. ш. № 2, 10 кл.
С. СТАДНИЧЕНКО — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
Л. ТЕПЕР — с. Ялтушков Винницкой обл., 10 кл.
В. ТИТЕНКО — д. Блужа Минской обл., 8 кл.
В. ЦЕКАНОВСКИЙ — Донецк, с. ш. № 17, 9 кл.

Физика

А. БЕССАРАБСКИЙ — пос. Запрудня Московской обл., 10 кл.
И. БЕССОНОВ — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 10 кл.
Б. ВЕЙЦМАН — Одесса, с. ш. № 53, 8 кл.
И. ДАНИЛОВСКИЙ — Горький, с. ш. № 82, 10 кл.
Н. ЖИТЕНЕВ — пос. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.
Е. КОГАН — Днепропетровск, с. ш. № 23, 10 кл.
А. ЛЯПИН — Москва, ФМШ № 18 при МГУ, 9 кл.
Г. МОЛЧАНОВ — Саратов, с. ш. № 13, 10 кл.
Д. ОВСЯННИКОВ — Ленинград, ФМШ № 45 при ЛГУ, 10 кл.
О. ПАНАЩЕНКО — Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
В. СЕРЕДА — Львов, с. ш. № 1, 10 кл.
Г. СОЛДАК — Минск, с. ш. № 50, 10 кл.
М. СТРЕШИНСКИЙ — Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.
И. ФОМЕНКО — Днепропетровск, с. ш. № 23, 10 кл.
В. ШАБЛИНСКИЙ — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.
И. ШВЕЦ — Киев, ФМШ № 2 при КГУ, 10 кл.

задачник Кванта

Задачи

М611—М615; Ф623—Ф627

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 мая 1980 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 3—80» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М611, М612» или «Ф623». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М611. На хорде AB окружности с центром O берется произвольная точка M. Через точки A, M и O проводится окружность, пересекающая первую окружность в точках A и C. Докажите, что $|MB|=|MC|$.

С. Колпаков, ученик 10 класса

М612. Возрастающая последовательность натуральных чисел (a_n) такова, что $a_{n+1}\leqslant 10a_n$. Докажите, что если все числа a_n записать рядом (без пробелов и запятых), то полученная последовательность цифр не будет периодической.

А. Карагулян

М613. На сторонах треугольника ABC во внешнюю сторону построены подобные между собой треугольники

$$ADB,\ BEC \text{ и } CFA\ (|AD|/|DB|=|BE|/|EC|=|CF|/|FA|=k;$$
$$\widehat{ADB}=\widehat{BEC}=\widehat{CFA}=\alpha).$$

Докажите, что:

а) середины отрезков AC, DC, BC и EF — вершины параллелограмма;

б) у этого параллелограмма два угла имеют величину α, а отношение длин сторон равно k.

Л. Купцов

М614. Для каждого натурального n через $S(n)$ обозначим сумму цифр всех натуральных чисел от 1 до n (в десятичной записи):

$$S(1)=1,\ S(2)=3,\ S(3)=6,\ \ldots,\ S(9)=45,$$
$$S(10)=46,\ S(11)=48,\ S(12)=51,\ \ldots$$

а) Найдите $S(100)$.

б) Докажите, что $S(10^k-1)=45k\cdot 10^{k-1}$ для всех $k=1, 2, \ldots$

в) Докажите, что для двузначного числа $\overline{ab}$

$$S(\overline{ab})=5a^2+ab+4(a+b(b+1))/2.$$

г) Найдите аналогичную формулу для трехзначных чисел.

д) Вычислите $S(1980)$.

Анджей Пашевич
(Польша)

М615. Докажите, что периметр любого сечения треугольной пирамиды плоскостью не превосходит наибольшего из периметров ее граней.

В. Сендеров

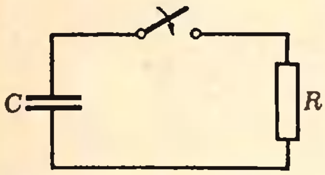


Рис. 1.

Ф623. Переменный конденсатор с начальной емкостью C_0, заряженный до напряжения U, замыкают на резистор с сопротивлением R (рис. 1). Как нужно изменять со временем емкость конденсатора, чтобы в цепи шел постоянный ток? Какую мощность развивают внешние силы, благодаря которым изменяется емкость конденсатора?

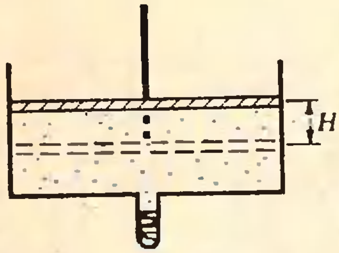


Рис. 2.

Ф624. В отростке сосуда, закрытого плоским поршнем диаметра $D=5$ см, имеется небольшое количество воды (рис. 2). Диаметр отростка $d=2$ мм. Если при постоянной температуре $t=20°C$ поршень опустить на $H=10$ см, то уровень воды в отростке повысится на $h=1$ мм. Найти давление насыщенных паров воды при температуре $t=20°C$.

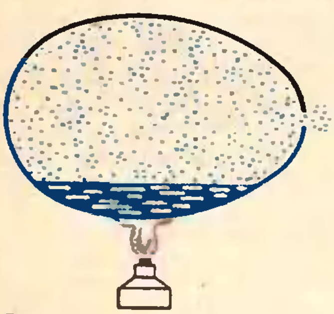


Рис. 3.

Ф625. Из яичной скорлупы сделан реактивный двигатель, показанный на рисунке 3. Площадь отверстия в скорлупе $s=3$ мм^2. Какова наибольшая сила тяги такого двигателя, если температура воды в скорлупе поддерживается равной 100°C?

Ф626. Гимнаст падает с высоты $H=12$ м на горизонтальную натянутую упругую сетку, которая прогибается при этом на величину $h=1$ м. Оценить, во сколько раз максимальная сила, действующая на гимнаста со стороны сетки, больше силы тяжести, если размеры сетки много больше h и масса сетки мала по сравнению с массой человека.

Ленинградская городская олимпиада, 1979 г.

Ф627. Пока вы решали задачи из «Кванта», картошка, которая варилась на плите, сварилась, вода выкипела и кастрюля изнутри пригорела. Куда надо лить холодную воду, чтобы нагар легче отскочил — внутрь кастрюли или на ее внешнюю поверхность?

Л. Ашкинази

Решения задач

М557—М561; Ф568—Ф572

М557. *Дано n попарно взаимно простых чисел, больших 1 и меньших $(2n-1)^2$. Докажите, что среди них обязательно встретится простое число.*

Утверждение задачи докажем методом «от противного». Допустим, что все данные числа $a_1, a_2, \ldots a_n$ — составные. Сопоставим каждому из них его минимальный простой делитель: $a_i \to q_i$. Пусть $q = \max\limits_{1 \le i \le n} \{q_i\}$. Тогда $q \geqslant p_n$, где p_n — n-е простое число (поскольку числа $a_1, \ldots, a_n$ попарно взаимно просты).

Индукцией по k легко доказывается неравенство $p_k \geqslant 2k-1$. (Действительно, оно верно для $p_2=3$. Далее $p_{k+1} \geqslant p_k+2$ при $k \geqslant 2$.) Тем самым $q \geqslant 2n-1$. Следовательно, для того a_j, для которого $q_j = q$,

$$a_j \geqslant q_j^2 \geqslant (2n-1)^2$$

— противоречие. Значит, среди данных чисел обязательно встретится простое.

А. Колотов

◆

М558. *В круге расположено $k>1$ черных секторов, угол каждого из которых меньше $180°/(k^2-k+1)$. Докажите, что круг можно повернуть вокруг центра O так, что все черные секторы перейдут в белую часть круга.*

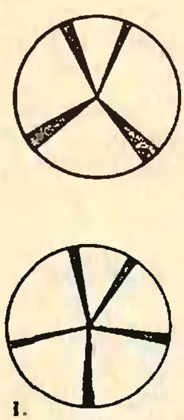


Рис. 1.

Пусть вместе сложены два круга, на одном из которых отмечено r черных секторов с центральными углами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_r$, на другом — s синих с углами $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ (рис. 1). Попробуем найти достаточные условия, при которых круг с синими секторами можно повернуть на такой угол φ $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$, чтобы ни один из синих секторов не пересекался с черным.

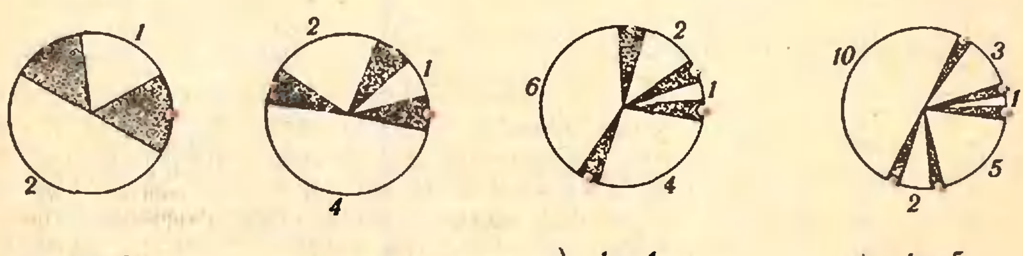
Углы поворота φ удобно отмечать на специальной окружности c длины 2π с данной на ней точкой 0 (нулем). «Повернем» задачу иначе. Отметим на c все запретные углы φ — такие, при повороте на которые какой-то синий радиус совпадает с каким-то черным. Каждая пара (черный сектор с углом α_i, синий сектор с углом β_j) дает интервал запретных φ длиной $\alpha_i+\beta_j$. Поэтому, если*)

$$\sum_{i,j}(\alpha_i+\beta_j) = s\sum_i \alpha_i + r\sum_j \beta_j < 2\pi, \qquad (1)$$

то множество запретных углов не покрывает всю окружность c $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$, и заведомо найдется «незапретный» угол φ.

Нужное достаточное условие (1) найдено. Но прямо применить его к нашей задаче (когда множества черных и синих секторов совпадают, $r=s=k$, $\alpha_i=\beta_i$) можно, лишь если $\sum\limits_i \alpha_i < \pi/k$, в частности, если каждое $\alpha_i < \pi/k^2$. Доказать утверждение и для секторов с углами $\alpha_i < \gamma = \pi/(k^2-k+1)$ можно, слегка уточнив в этом случае оценку

*) Суммирование $\sum\limits_{i,j}$ производится по всем $i=1, 2, \ldots, r$, $j=1, 2, \ldots, s$.



а) $k=2$ б) $k=3$ в) $k=4$ г) $k=5$

Рис. 2.

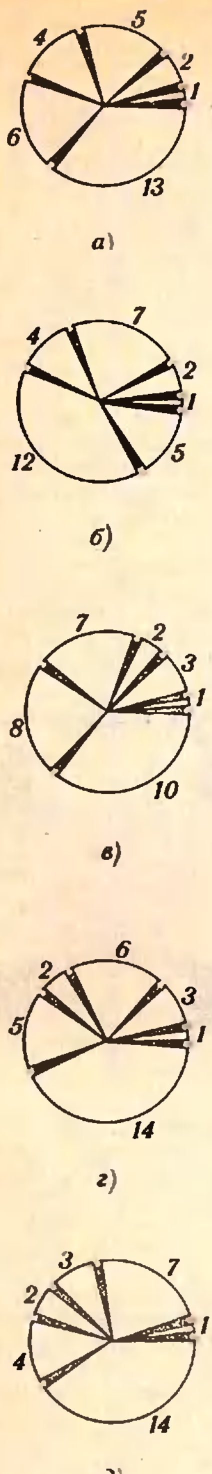


Рис. 3.

длины «запретного» множества. Все «запретные» интервалы, соответствующие парам совпадающих секторов (α_i, α_i), содержатся в одном интервале длины 2γ с центром O. А сумма всех остальных величин запретных углов

$$\sum_{i,\,j,\,i\neq j}(\alpha_i+\alpha_j)=2(k-1)\sum_i \alpha_i$$

меньше $2(k-1)k\gamma=2\pi-2\gamma$, так что и в этом случае найдется «незапретное» значение φ.

Задача решена, но возникает вопрос, нельзя ли еще поднять границу для α_i? Утверждение задачи, вообще говоря, не сохранится, если углы всех k секторов взять по величине равными $\gamma=\pi/(k^2-k+1)$. Опровергающие примеры для $k=2$, 3, 4, 5 весьма любопытны (рис. 2): красные точки — концы биссектрис секторов — должны быть расположены в k вершинах правильного (k^2-k+1)-угольника, выбранных так, что для любого $m=1, 2, \ldots, k^2-k$ найдется пара красных точек, между которыми расположено (в ту или иную сторону по окружности) m сторон (k^2-k+1)-угольника. Проверьте, что тогда «запретное множество» — все $\varphi\in[0;\,2\pi]$.

Сама по себе комбинаторная задача: *при каких k можно расположить k красных точек на окружности длины $2C_k^2+1=k^2-k+1$ так, чтобы для любого $m=1, 2, \ldots, k^2-k$ нашлась дуга длины m с красными концами?* — видимо, очень трудна, и решение ее в общем виде нам неизвестно. Для $k=6$, например, существует 5 различных примеров (они найдены с помощью ЭВМ *Б. Ходулевым*, рис. 3), а для $k=7$ их вообще не существует, и вот почему.

Пусть для некоторого k такое красное множество Π_0 существует. Тогда Π_0 и его образы Π_m $(m=1, 2, \ldots, k^2-k)$ при поворотах на углы $m\gamma$, $\gamma=\pi/(k^2-k+1)$, обладают такими свойствами:

1°. Для любых $i\neq j$ пересечение $\Pi_i\cap\Pi_j$ состоит из одной точки.

2°. Любые две из точек множества $\Pi=\bigcup\limits_m \Pi_m$ (вершин правильного (k^2-k+1)-угольника) принадлежат ровно одному из Π_m.

3°. Существуют четыре точки множества Π, не содержащиеся в одном Π_i.

Множество Π с такой системой подмножеств $\Pi_m\subset\Pi$ называется *конечной проективной плоскостью**). Известно, что конечные проективные плоскости существуют для $k=p^r+1$, где p — простое, r — натуральное числа (например, $k=3$, 4, 5, 6, 8, 9) и не существует, если $k=7$, 15; понятно теперь, что в последнем случае не может существовать и опровергающего примера в задаче М558 (так что, например, для семи секторов с углами $\pi/43$ ее утверждение верно). Но уже для $k=10$ вопрос пока не удается решить даже с помощью ЭВМ.

Отметим, что конечная проективная плоскость не обязана иметь такую «циклическую» нумерацию точек, при которой прямые Π_m получаются друг из друга сдвигом номеров — это дополнительное требование, возможно, облегчит доказательство отсутствия таких «циклических плоскостей» для некоторых k. (Заметим, что все проективные плоскости над конечным полем из p^r элементов имеют такую циклическую нумерацию; см. об этом в главе «Разностные множества» книги М. Холла.)

Н. Васильев, Г. Гальперин, В. Произволов

---

*) Мы уже встречались в «Кванте» с тем, что разные по содержанию задачи затрагивают это понятие — см., например, задачи М5 («Квант», 1970, № 1) и М335 («Квант», 1975, № 7). Число $n=k-1$ называется «порядком» проективной плоскости; здесь $k=n+1$ — число точек на «прямой» Π_n (и число «прямых», проходящих через данную точку; эти числа всегда одинаковы для всех точек и «прямых»). Про конечные проективные плоскости см. в книге Э. Артина *«Геометрическая алгебра»* (М., «Наука», 1969) и книге М. Холла *«Комбинаторика»* (М., «Мир», 1970).

М559. *Докажите, что если x, y, z — длины сторон треугольника, то*

$$\left|\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}-\frac{y}{x}-\frac{z}{y}-\frac{x}{z}\right|<1.$$

Левую часть удобно разложить на множители:

$$B=\left|\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}-\frac{y}{x}-\frac{z}{y}-\frac{x}{z}\right|=$$
$$=\frac{|z(x^2-y^2)+x(y^2-z^2)+y(z^2-x^2)|}{xyz}=$$
$$=\frac{|(y-z)(z-x)(x-y)|}{xyz}.$$

$B<1$, поскольку $|y-z|<x$, $|z-x|<y$ и $|x-y|<z$.

Уменьшить оценку 1 нельзя: например, при $x=\varepsilon$, $y=1+\varepsilon^2$, $z=1+\varepsilon$ (ε — малое положительное число) B будет больше $(1-\varepsilon)^3$.

В. Сендеров

◆

М560. *В дне ящика имеется дырка. Нужно сделать выпуклую заслонку наименьшей площади, при любом положении которой на дне ящика дырка будет закрыта. Решите эту задачу, если:*
а) дно ящика — квадрат 4×4, а дырка расположена так, как показано на рисунке 1.
б) дно ящика — квадрат $n\times n$ (n — нечетно), а дырка расположена в центре (рис. 2).

а) Если заслонка покрывает единичный квадрат A_1 при любом положении внутри квадрата 4×4, то она покрывает и образы A_1 при симметриях относительно диагоналей и средних линий большого квадрата и при поворотах на 90°, 180° и 270° относительно его центра — квадраты A_2, A_3, ..., A_8 на рисунке 3. Поскольку заслонка выпуклая, она покрывает при этом и треугольники B_1, B_2, B_3, B_4, и центральный квадрат P со стороной длины 2 (рис. 3). Так как площадь заслонки не меньше суммарной площади покрываемых ею фигур, она не меньше 14. Очевидно, заслонка площади 14 в форме выпуклого восьмиугольника, составленного из перечисленных выше квадратов и треугольников (он выделен на рисунке 3), всегда покрывает квадрат A_1. Следовательно, она является искомой.

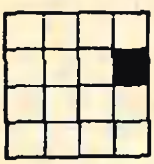


Рис. 1.

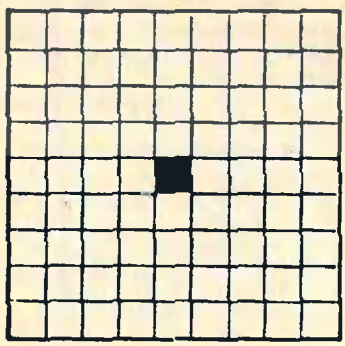


Рис. 2.

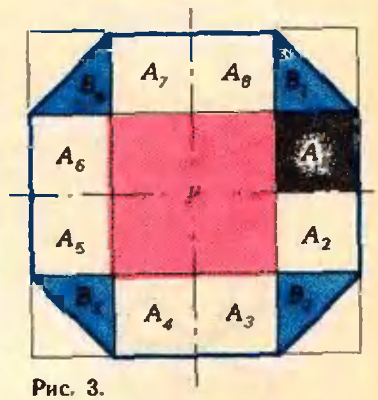


Рис. 3.

б) Допустим, что у нас есть выпуклая заслонка, при любом положении которой на дне ящика $n\times n$ дырка A полностью закрыта.

Рассмотрим наименьший прямоугольник $П$ со сторонами, параллельными сторонам квадрата, содержащий нашу заслонку. Пусть его размеры $(n-x)\times(n-y)$. Параллельно сдвигая $П$ вместе с заслонкой, легко убедиться, что весь прямоугольник, получаемый переносом клетки A на расстояние не более x влево-вправо и y — вверх-вниз, должен принадлежать заслонке: длины сторон этого прямоугольника $u=1+x$, $v=1+y$. Кроме того, на каждой стороне $П$ должна быть точка заслонки; поэтому заслонка должна включать еще по крайней мере четыре треугольника (рис. 4) общей площадью $(n-u-x)v/2+(n-v-y)u/2$. Итак, площадь заслонки не меньше

$$uv+(n-u-x)v/2+(n-v-y)u/2=$$
$$=(n-x)(1+y)/2+(n-y)(1+x)/2=$$
$$=n+x(n-y-1)/2+y(n-x-1)/2\geqslant n.$$

(ведь, очевидно, x и y не превосходят даже $(n-1)/2$).

На рисунке 5 изображена фигура M, которая всегда покрывает центральный квадрат A. Площадь ее, очевидно,

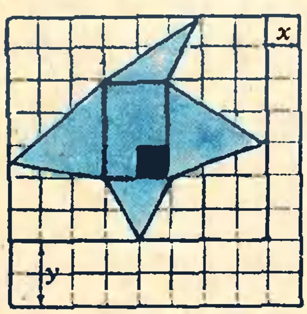


Рис. 4.

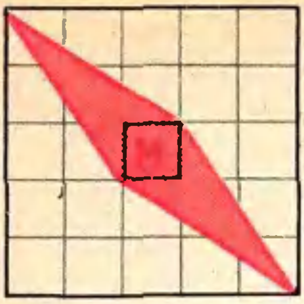


Рис. 5.

равна n, то есть минимально возможная. Таким образом, это — искомая заслонка.

Заметим, что в решении не использовалось, что сторона квадрата n — целое число, важно лишь, что $n>1$.

Было бы интересно решить эту задачу для других пар фигур; например, вполне правдоподобно, что если «дыра» и «дно ящика» — концентрические круги радиусов r и R, то выпуклая заслонка наименьшей площади — наименьшая выпуклая фигура, содержащая меньший круг и диаметр большего круга (ее площадь равна $2r\sqrt{R_2-r^2}+2r^2\arcsin r/R$).

В. Батырев

M561. *Два треугольника* $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$, площади которых равны S_0 и S_1, расположены так, что лучи A_0B_0 и A_1B_1, B_0C_0 и B_1C_1, C_0A_0 и C_1A_1 параллельны, но противоположно направлены. Найдите площадь треугольника с вершинами в серединах отрезков A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1.

◆

Ответ. Искомая площадь

$$S=\left(\frac{\sqrt{S_0}-\sqrt{S_1}}{2}\right)^2. \qquad (1)$$

Из условий задачи следует, что треугольники $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$ гомотетичны (рис. 1), причем коэффициент гомотетии отрицателен и по модулю равен

$$k=\frac{|A_1B_1|}{|A_0B_0|}=\frac{|B_1C_1|}{|B_0C_0|}=\frac{|C_1A_1|}{|C_0A_0|}=\frac{\sqrt{S_1}}{\sqrt{S_0}}.$$

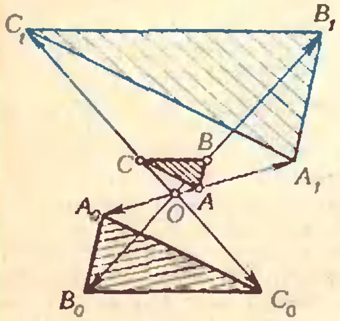


Рис. 1.

Пусть O — центр этой гомотетии, то есть

$$\overrightarrow{OA_1}=-k\overrightarrow{OA_0},\ \overrightarrow{OB_1}=-k\overrightarrow{OB_0},\ \overrightarrow{OC_1}=-k\overrightarrow{OC_0}.$$

Тогда, если A, B, C — середины отрезков A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 соответственно, то

$$\overrightarrow{OA}=(\overrightarrow{OA_0}+\overrightarrow{OA_1})/2=\overrightarrow{OA_0}(1-k)/2$$

и аналогично

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB_0}(1-k)/2,\quad \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC_0}(1-k)/2.$$

Следовательно, треугольник ABC гомотетичен треугольнику $A_0B_0C_0$, и коэффициент гомотетии по модулю равен $\frac{|1-k|}{2}$; поэтому

$$\frac{\sqrt{S}}{\sqrt{S_0}}=\frac{|1-k|}{2}=\frac{\left|1-\sqrt{\frac{S_1}{S_0}}\right|}{2}=\frac{|\sqrt{S_0}-\sqrt{S_1}|}{2\sqrt{S_0}}.$$

Отсюда следует формула (1).

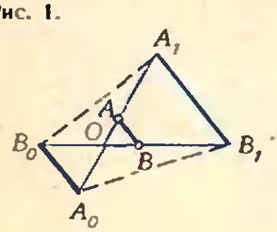


Рис. 2.

Замечания. 1°. Треугольники $A_0B_0C_0$ и $A_1B_1C_1$ могут лежать в параллельных плоскостях; им будет параллельна и плоскость треугольника ABC. Все приведенные выше рассуждения и ответ (1) остаются в силе.

2°. Наше решение тесно связано с таким полезным фактом: отрезок AB, соединяющий середины диагоналей A_0A_1 и B_0B_1 трапеции с основаниями A_0B_0 и A_1B_1, параллелен основаниям и равен по длине полуразности их длин (рис. 2).

3°. Пусть точки A_t, B_t, C_t делят отрезки A_0A_1, B_0B_1, C_0C_1 в одном и том же заданном отношении; пусть, например,

$$\frac{\overrightarrow{A_0A_t}}{\overrightarrow{A_0A_1}}=\frac{\overrightarrow{B_0B_t}}{\overrightarrow{B_0B_1}}=\frac{\overrightarrow{C_0C_t}}{\overrightarrow{C_0C_1}}=t.$$

Тогда площадь S_t треугольника $A_tB_tC_t$ будет выражаться формулой

$$S_t=(t\sqrt{S_1}-(1-t)\sqrt{S_0})^2, \qquad (2)$$

обобщающей формулу (1) (соответствующую случаю $t=1/2$).

Подумайте, что получается при $t=\frac{\sqrt{S_0}}{\sqrt{S_0}+\sqrt{S_1}}$.

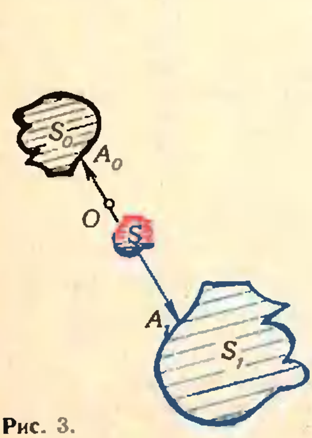


Рис. 3.

4°. То обстоятельство, что в задаче даны треугольники, не является существенным: треугольники могут быть замене-

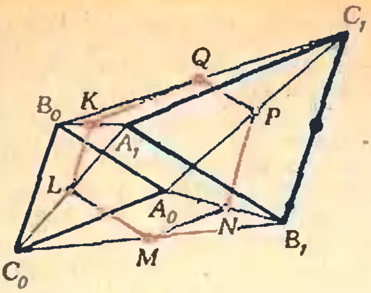


Рис. 4.

ны другими фигурами, гомотетичными относительно некоторого центра O. Более точно: пусть дана точка O и точка A_0 описывает некоторую замкнутую несамопересекающуюся кривую, охватывающую фигуру площади S_0 (см. рис. 3). Одновременно точка A_1, определяемая вектором $\overrightarrow{OA_1} = -k\cdot\overrightarrow{OA_0}$, $k=\sqrt{S_1/S_0}$, описывает другую кривую (охватывающую фигуру площади S_1). Тогда середина A отрезка A_0A_1 опишет кривую, охватывающую фигуру площади (1). Аналогично точка A_t такая, что $\overrightarrow{A_0A_t}=t\overrightarrow{A_0A_1}$ (то есть $\overrightarrow{OA_t}=t\overrightarrow{OA_0}+(1-t)\overrightarrow{OA_1}=(t-k+kt)\overrightarrow{OA_0}$; t — фиксированное число), опишет кривую, охватывающую фигуру площади, определяемой по формуле (2).

5°. Интересен следующий факт: в условиях задачи М561 площадь шестиугольника $KLMNPQ$, где K, L, M, N, P, Q — середины отрезков B_0A_1, A_1C_0, C_0B_1, B_1A_0, A_0C_1, C_1B_0 соответственно (рис. 4), равна

$$S_{KLMNPQ}=\left(\frac{\sqrt{S_0}+\sqrt{S_1}}{2}\right)^2$$

(ср. с формулой (1))*).

Л. Купцов

Ф568. *При бомбардировке литиевой мишени протонами с энергией не меньше 1,88 МэВ может происходить ядерная реакция*

$$^7\mathrm{Li}+p\to{}^7\mathrm{Be}+n.$$

При какой энергии протонов образующиеся в реакции нейтроны могут лететь назад от литиевой мишени?

◆

Согласно законам сохранения энергии и импульса

$$E_p=E_{\mathrm{Be}}+E_n+Q, \quad (1)$$

$$\vec{p}_p=\vec{p}_{\mathrm{Be}}+\vec{p}_n, \quad (2)$$

где E_p, E_{Be}, E_n — соответственно энергии протона, ядра бериллия и нейтрона, $\vec{p}_p$, $\vec{p}_{\mathrm{Be}}$, $\vec{p}_n$ — импульсы этих частиц. При энергии протона $E_p=E_0=1{,}88$ МэВ суммарная энергия E ядра бериллия и нейтрона минимальна. Найдем ее.

Для этого рассмотрим процесс в системе отсчета, движущейся со скоростью центра масс системы протон — ядро лития. В этой системе протон и ядро лития движутся навстречу друг другу. При минимально возможной энергии взаимодействующих частиц (протона и ядра лития) энергия образовавшихся в процессе реакции ядра бериллия и нейтрона равна нулю — эти частицы покоятся.

Теперь перейдем к системе отсчета, в которой литиевая мишень неподвижна. В этой системе ядро бериллия и нейтрон, образовавшиеся в результате бомбардировки мишени протоном с энергией $E_p=E_0$, движется как одно целое со скоростью, равной скорости центра масс системы протон — ядро лития. Их суммарная энергия E, согласно закону сохранения энергии, определяется равенством

$$E_0=E+Q, \quad (1')$$

а их суммарный импульс $\vec{p}$, согласно закону сохранения импульса, равен

$$\vec{p}=\vec{p}_0 \quad (2')$$

($\vec{p}_0$ — импульс протона с энергией E_0). Учитывая, что импульс частицы и ее энергия связаны соотношением $p=|\vec{p}|=\sqrt{2mE}$ $\left(E=\frac{mv^2}{2}=\frac{(mv)^2}{2m}=\frac{p^2}{2m}\right)$, равенство (2′) мы можем переписать так:

$$\sqrt{2mE_0}=\sqrt{2(m+M)E}$$

(здесь m обозначены масса протона и масса нейтрона, M — масса ядра лития и масса ядра бериллия). Отсюда находим $E=\frac{m}{m+M}E_0$. Подставив это значение в (1′), на-

---

*) Прим. ред. О далеко идущих обобщениях подобных формул рассказывалось в статье «Семейство параллельных n-угольников» («Квант», 1974, № 11).

ходим значение Q:

$$Q=\frac{M}{m+M}E_0$$

Таким образом, при энергии протона $E_p>E_0$ закон сохранения энергии (1) мы можем записать так:

$$E_p=E_{\rm Be}+E_n+\frac{M}{m+M}E_0 \qquad (3)$$

Если образовавшийся в результате реакции нейтрон летит назад от литиевой мишени, то закон сохранения импульса (2) можно записать так:

$$p_p=p_{\rm Be}-p_n \quad (p=|\vec{p}|),$$

или

$$\sqrt{2mE_p}=\sqrt{2ME_{\rm Be}}-\sqrt{2mE_n}\,. \qquad (4)$$

Из равенства (4) найдем

$$E_{\rm Be}=\frac{m}{M}\left(E_p+E_n+2\sqrt{E_pE_n}\right)$$

и подставим это значение в (3). В результате получим

$$E_p=E_n+\frac{m}{M}\left(E_p+E_n+2\sqrt{E_pE_n}\right)+\frac{M}{m+M}E_0.$$

Из последнего равенства видно, что E_p минимально при $E_n=0$. При этом

$$E_p=\frac{M^2}{M^2-m^2}E_0\approx 1{,}92 \ \ (\text{МэВ})$$

Таким образом, при $E_p\approx 1{,}92$ МэВ образующийся в реакции нейтрон покоится. При $E_p>1{,}92$ МэВ нейтрон может лететь назад от литиевой мишени

И. Слободецкий

◆

Ф569. *Электрическим кипятильником мощностью $W=500$ Вт нагревают воду в кастрюле. За две минуты температура воды увеличилась от $t_1=85°$C до $t_2=90°$C. Затем кипятильник выключили и за одну минуту температура воды упала на один градус. Сколько воды находится в кастрюле? Удельная теплоемкость воды $c=4{,}19\times10^3$ Дж/(кг·К)*

Обозначим τ_1 время нагрева воды ($\tau_1=2$ мин). Из закона сохранения энергии следует, что

$$W\tau_1=cm(t_2-t_1)+Q_1, \qquad (*)$$

где m — масса воды, Q_1 — потери энергии, связанные с теплоотдачей в окружающее пространство. Q_1 пропорционально времени τ_1 и разности температур воды и окружающей среды

При остывании воды (когда нагреватель выключен) выделяемая в окружающее пространство энергия равна

$$Q_2=cm\,\Delta t,$$

где $\Delta t=1$°C — изменение температуры воды за время $\tau_2=1$ мин. Так как разность температур воды и окружающей среды меняется незначительно, а $\tau_2=0{,}5\,\tau_1$, $Q_2=0{,}5Q_1$, так что

$$Q_1=2Q_2=2cm\,\Delta t.$$

Подставив это выражение для Q_1 в равенство (*), получим

$$W\tau_1=cm(t_2-t_1+2\,\Delta t).$$

Отсюда

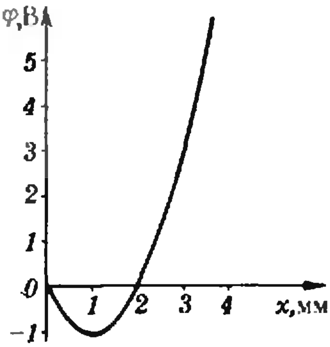
$$m=\frac{W\tau_1}{c(t_2-t_1+2\,\Delta t)}\approx 1{,}8 \text{ кг}$$

Е. Сурков

◆

Ф570. *Из-за наличия объемного заряда в межэлектродном пространстве плоского диода распределение потенциала $\varphi(x)$ между катодом и анодом имеет вид $\varphi(x)=x^2-2x$ (x — в миллимет-*

Нарисуем график зависимости $\varphi(x)$. Из графика видно, что вначале потенциал уменьшается и отрицателен, затем начинает возрастать. Он минимален при $x=1$ мм, $\varphi_{\min}=1$ В. Это означает, что вначале (при малых x), пока потенциал убывает, электрическое поле при перемещении электрона совершает отрицательную работу, препятствуя перемещению электрона. При $x>1$ мм, когда потенциал начинает возрастать, поле *рах, φ — в вольтах). Расстояние между катодом и анодом $d = 10$ мм. Координата x совпадает с расстоянием до катода. Определить, при какой минимальной кинетической энергии электрон с поверхности катода сможет достичь анода. Каким будет максимальное ускорение электронов, которые достигнут анода?*



совершает положительную работу, разгоняя электрон. Следовательно, для того чтобы электрон попал на анод, он должен достичь точки с координатой $x = 1$ мм. Из закона сохранения энергии следует, что для этого он должен иметь энергию не меньше чем

$$W_{min} = e\varphi_{min} = 1 \text{ эВ}.$$

Ускорение электрона определяется действующей на электрон силой, то есть напряженностью поля. Поэтому ускорение электрона максимально в той точке, в которой максимальна напряженность электростатического поля. Так как $\Delta\varphi = E\,\Delta x$,

$$E = \frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^2 - 2(x+\Delta x) - (x^2 - 2x)}{\Delta x} = \frac{2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 - 2\Delta x}{\Delta x}.$$

При малых Δx можно пренебречь Δx^2, так что

$$E(x) = 2x - 2 \quad (x \text{ — в мм, } E \text{ — в В/мм}).$$

Направлено поле от катода к аноду при $x < 1$ мм и от анода к катоду при $x > 1$ мм. Так как заряд электрона отрицателен, сила, действующая на электрон, направлена противоположно полю.

Итак, напряженность электростатического поля пропорциональна координате. Она максимальна при $x = d$ и равна при этом $E_{max} = 18$ В/мм. Следовательно, при $x = d$ ускорение электрона максимально и равно

$$a = \frac{F}{m} = \frac{eE}{m} \approx 3{,}2 \cdot 10^{15} \text{ м/с}^2.$$

Ф571. *Батареи и резисторы собирают в цепь двумя способами: как на рисунке 1 и как на рисунке 2. Определить токи, текущие через резисторы в обоих случаях. Сопротивлениями источников тока и соединительных проводов пренебречь. Как изменятся токи в первом случае, если разрезать провода в точках A и B?*

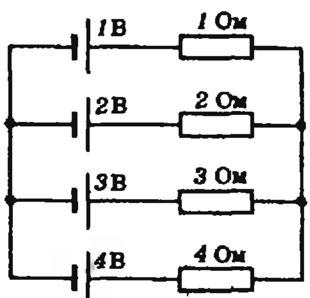


Рис. 1.

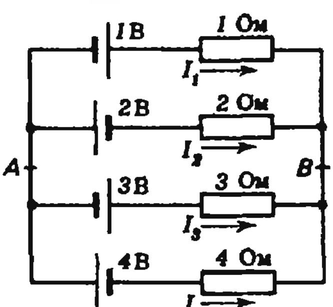


Рис. 2.

◆

1) Примем направления токов через резисторы такими, как показано на рисунке 1, и обозначим U напряжение между точками A и B. Тогда

$$U = -\mathscr{E}_1 + I_1R_1, \quad (1)$$
$$U = \mathscr{E}_2 + I_2R_2, \quad (2)$$
$$U = -\mathscr{E}_3 + I_3R_3, \quad (3)$$
$$U = \mathscr{E}_4 + I_4R_4. \quad (4)$$

Так как сумма токов, приходящих в точку B, равна нулю (заряд не накапливается в точке B), то

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0. \quad (5)$$

Из системы уравнений (1)—(5) нетрудно найти токи и напряжение U. Для этого подставим в уравнения (1)—(4) известные значения ЭДС (в вольтах) и сопротивлений (в омах):

$$U = -1 + I_1,$$
$$U = 2 + 2I_2,$$
$$U = -3 + 3I_3,$$
$$U = 4 + 4I_4,$$
$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0.$$

Решая эту систему, найдем

$$U + \frac{1}{2}U + \frac{1}{3}U + \frac{1}{4}U = 0 \Rightarrow U = 0.$$

Поэтому

$$I_1 = 1\text{А}; \; I_2 = -1\text{А}; \; I_3 = 1\text{А}; \; I_4 = -1\text{А}.$$

(Токи I_2 и I_4 направлены противоположно стрелкам.)

Если провода разрезаны в точках A и B, то

$$-\mathscr{E}_1 + I_1'R_1 = \mathscr{E}_2 + I_2'R_2,$$
$$I_1' + I_2' = 0,$$

так что

$$I_1' = 1\text{А}, \; I_2' = -1\text{А};$$

аналогично

$$-\mathscr{E}_3+I_3'R_3=\mathscr{E}_4+I_4'R_4,$$
$$I_3'+I_4'=0,$$

так что

$$I_3'=1\text{A},\ I_4'=-1\text{A}.$$

2) В случае схемы, приведенной на рисунке 2, решение аналогично.

◆

Ф572. *Перрен исследовал зависимость от высоты числа шарообразных частиц особой смолы — гуммигута — во взвеси этих частиц в воде. Для частиц радиусом $r_1=0{,}13$ мкм он получил зависимость, график которой показан на рисунке 1 (n — концентрация частиц на высоте h, n_0 — их концентрация у дна кюветы). Такой же график получается для частиц с радиусом $r_2=0{,}065$ мкм, только картина растянута по высоте в 8 раз. В то же время известно, что плотность кислорода в земной атмосфере убывает с высотой так, как показано на рисунке 2 (ϱ — плотность кислорода на высоте H, ϱ_0 — у поверхности кюветы). Определить массу молекулы кислорода*

Плотность гуммигута $\varrho_г=1{,}194$ г/см³. Из рисунка 1 видно, что число частиц гуммигута с радиусом r_1 уменьшается вдвое каждый раз при уменьшении высоты на $\Delta h_1=30$ мкм. Число частиц гуммигута с радиусом r_2 уменьшается в 8 раз медленнее, то есть число частиц уменьшается вдвое при уменьшении высоты на $\Delta h_2=240$ мкм. Но $r_2=\frac{1}{2}r_1$, а $\Delta h_2=8\Delta h_1$. Отсюда можно заключить, что

$$\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2}=\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$$

Так как кубу радиуса пропорциональна масса частицы,

$$\frac{\Delta h_1}{\Delta h_2}=\frac{m_2}{m_1}$$

(m_1, m_2 — массы частиц гуммигута с радиусами r_1 и r_2 соответственно)

Изменение с высотой плотности кислорода в атмосфере аналогично изменению с высотой числа частиц гуммигута. Из рисунка 2 видно, что плотность кислорода уменьшается вдвое при изменении высоты на $\Delta H=5{,}5$ км. Поэтому

$$\frac{\Delta h_1}{\Delta H}=\frac{m}{m_1},$$

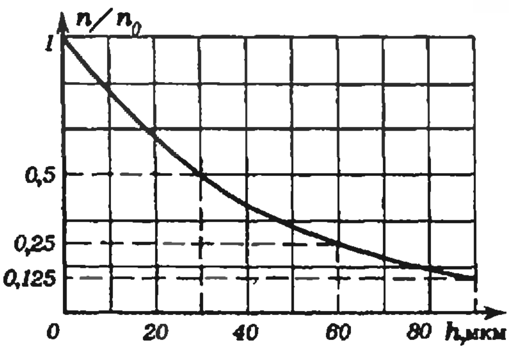


Рис. 1.

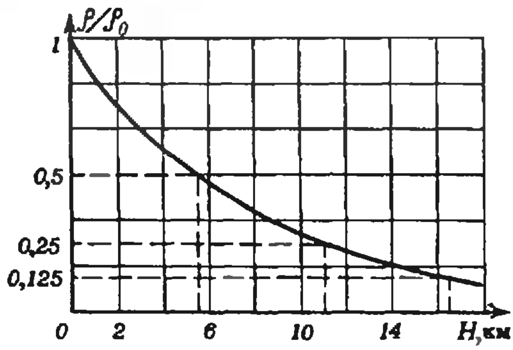


Рис. 2.

где m — масса молекулы кислорода. Отсюда

$$m=m_1\frac{\Delta h_1}{\Delta H}=\frac{4}{3}\pi r_1^3\varrho_г\frac{\Delta h_1}{\Delta H}\approx 5{,}8\cdot10^{-26}\text{ кг}$$

И. Слободецкий

СПИСОК ЧИТАТЕЛЕЙ, ПРИСЛАВШИХ ПРАВИЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ИЗ ЗАДАЧНИКА «КВАНТА»

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М546—М565 и Ф558—Ф572 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Большинство читателей, приславших письма в редакцию, успешно справились с задачами **М559—М561**. Остальные задачи решили: *Е. Абрамочкин* (Куйбышев) **55а), 56**; *С. Августинович* (Львов) **53, 56**; *А. Авербах* (Донецк) **48а), 49, 53, 54, 57, 58, 60а), 64**; *А. Агаев* (с. Покровка АзССР) **46, 47, 48а), 53, 54, 57, 60а), 64**; *В. Александров* (Саратов) **64**; *А. Андреасян* (с. Бюрегаван АрмССР) **47, 56**; *Р. Ардан* (Львов) **54, 56—58, 60а), 62**; *Л. Арушанов* (Баку) **64**; *А. Ахметхозин* (Андижан) **53**; *П. Ахметьев* (Москва) **46, 48а), 51, 54, 55, 58, 60а), б)**; *Б. Баасандорж* (МНР) **47, 49, 57**; *А. Бабакулов* (Термез) **47**; *К. Бакланов* (Тула) **47**; *А. Балинский* (с. Дубляны Львовской обл.) **46—54, 55а), 56—58, 62, 63, 65**; *А. Барг* (Николаев) **47, 51, 52, 55, 57, 60а), 62, 64**; *Д. Батуров* (Орел) **54**; *А. Безпалко* (Рига) **46, 47**; *И. Бекшиев* (Киев) **60а)**; *А. Белозеров* (Одесса) **51, 52, 60а)**; *А. Белюга* (Кривой Рог) **53, 55а)**; *Н. Березовский* (Черновцы) **54**; *С. Беспамятных* (Артемовский Свердловской обл.) **46—54, 55а), 57, 58, 60а), 64, 65**; *В. Бобов* (Ленинград) **53, 55а)**; *А. Боричев* (Ленинград) **62, 63**; *А. Боровских* (Воронеж) **47**; *О. Бохонов* (Кобрин) **57, 63**; *А. Брагинский* (Волгодонск) **46, 47, 50, 56, 57, 64**; *Я. Брегман* (Киев) **46—49; 51—54; 56—58; 60а), 62, 64**; *Г. Бродская* (Донецк) **47, 49, 51, 57**; *С. Буленова* (Алма-Ата) **47**; *А. Бурин* (Москва) **46—48, 50—52, 55а), 60б)**; *Э. Вайслер* (Киев) **46, 47, 51, 52, 57, 60а)**; *С. Василовский* (Ашхабад) **47, 48а), 49, 50, 56—58**; *С. Вахрин* (с/х Бобровский КазССР) **57**; *И. Владимиров* (Москва) **46, 53, 54, 55а), 57, 60а), 64**; *А. Влэдеску* (СРР) **46, 48**; *Х. Вoктор* (Днепродзержинск) **47**; *А. Вольнов* (Киев) **57**; *А. Воронов* (Москва) **46, 47, 48а), 51, 54—56, 60а)**; **62—64**; *М. Гайсинский* (Ташкент) **47, 52, 62**; *П. Ганелин* (Москва) **62**; *Н. Гасилов* (Баку) **46, 47, 49, 50, 53, 54**; *Х. Гафуров* (Ура-Тюбе) **51**; *В. Гельфанд* (Могилев) **57, 58**; *Л. Гитлин* (Витебск) **47, 48а), 50, 54, 57, 58**; *М. Гликман* (Кишинев) **46, 47, 48а), 49, 50**; *О. Головинская* (Киев) **46, 47, 62**; *Д. Голуб* (Сумы) **54, 57, 58**; *О. Горбачев* (Кустанай) **47**; *С. Городько* (Днепропетровск) **47**; *Н. Гринберг* (Киев) **46—50; 57, 60а)**; *Л. Гройсман* (Харьков) **47, 51, 53—57, 60а)**; *В. Грушевский* (д. Новый Двор Гродненской обл.) **57**; *В. Губа* (Вологда) **46—50**; *С. Гузов* (Львов) **47, 51, 55а)**; *Л. Гуральник* (Житомир) **64**; *В. Джалоян* (с. Урцадзор АрмССР) **53, 54**; *М. Джермакян* (Ереван) **58**; *С. Довбыш* (Москва) **46—49, 53—57, 60а), б), 62, 63**; *А. Дороговцев* (Киев) **46—48**; *С. Дорфман* (Киев) **46, 47**; *А. Дробышев* (Ленинград) **47**; *В. Дубовик* (Львов) **53, 60а)**; *Ю. Дудко* (Симферополь) **46, 47, 57, 60а)**; *Д. Дуниев* (с. Аркиван АзССР) **46, 47, 54**; *И. Елишевич* (Черннгов) **52, 64**; *А. Ермолик* (Петрозаводск) **46, 47, 48а), б), 49, 51—54, 55а), 57, 58, 60а), б), 62, 64**; *А. Жилинский* (Крупки) **51, 53, 56—58**; *Е. Жиляев* (Москва) **46—50, 54**; *А. Жоров* (Орск) **51**; *А. Забаринов* (Заволжск) **46**; *А. Золотых* (Курск) **57, 60а)**; *Е. Илларионов* (Белорецк) **46**; *Ф. Кабдыкаиров* (Алма-Ата) **46—49, 56, 60а); 63**; *А. Кагарманов* (Белорецк) **46, 47, 48а), б), 49, 50, 53, 54, 63—65**; *А. Калашников* (Артемовск Донецкой обл.) **46, 60а)**; *П. Калугин* (Москва) **47, 48, 50, 52, 56—58, 62, 64**; *А. Канель* (Москва) **46—49, 62—65**; *А. Каплан* (Сумгаит) **46—50, 53, 54, 55а), 56, 57, 60а), 62—64**; *А. Келарев* (Свердловск) **47—50, 52, 56—58, 60а), б), 62, 64**; *С. Ким* (Бектемир) **51**; *А. Колдоркин* (Куйбышев) **57, 60а), 62**; *И. Колпаков* (Сочи) **46, 47, 48а), б), 49—51, 53, 54, 64, 65**; *Ю. Кондрахин* (Новосибирск) **46**; *М. Концевич* (Химки) **47—50**; *Д. Корнеев* (Саратов) **46, 47, 48а)**; *О. Крижановский* (Харьков) **46, 47, 49, 51, 52, 60а)**; *И. Кроливец* (Краматорск) **60а)**; *О. Крылов* (В. Устюг) **46, 47, 49**; *Е. Кузнецов* (Ижевск) **47, 48а), 49, 53, 57, 60а), 64**; *И. Кузь* (Львов) **47, 50, 54, 55а), 56, 57, 60а)**; *С. Курчатов* (Саратов) **51—57; 60а), 62, 64**; *В. Кухарчук* (с. Малый Шпаков Ровенской обл.) **47, 48а), 50**; *А. Кушнеров* (Москва) **46, 57, 60а)**; *А. Латифуллин* (п. Азнакаево ТатАССР) **46, 56, 57**; *Б. Лейтес* (Москва) **46—58, 60а), б), 62—64**; *А. Липин* (Ленинград) **46, 47, 49, 51, 54, 56, 57, 62, 63**; *Д. Лихачев* (Новосибирск) **46—50, 53, 55а)**; *А. Логунов* (Калининград) **46, 47, 49, 50**; *С. Логунов* (Москва) **46, 47**; *Ю. Макаров* (Ленинград) **62**; *А. Макеев* (Арзамас) **53, 64**; *А. Малах* (Казань) **62**; *Г. Малхасян* (с. Цалпа ГССР) **46, 60а)**; *Е. Мамедов* (с. Аркиван АзССР) **51—53, 57**; *Л. Маноян* (Ереван) **50, 57**; *В. Матчишин* (Целиноград) **56**; *А. Мегрецкий* (Ленинград) **51, 53—58, 60а), б), 62—65**; *Е. Меденников* (Ульяновск) **56, 60а)**; *М. Меламед* (Запорожье) **46**; *В. Мельник* (Гайсин) **47, 48а), б), 49, 53, 56**; *Ш. Мирзалиев* (Сальяны) **53, 54**; *В. Мировский* (Москва) **60а), 62**; *А. Михайлов* (Москва) **46, 47, 48а), 49—54, 55а), 56, 57, 63**; *С. Мокроусов* (Ленинград) **46, 50, 51, 58, 60а), 64**; *Б. Монхоо* (МНР) **47**; *С. Морейно* (Москва) **46—50, 52—54, 55а), 56, 57, 60а), б)**; *Б. Мынбаев* (Алма-Ата) **47**; *А. Мясников* (Челябинск) **55а)**; *Р. Набоков* (Саратов) **46—49, 51—53, 55—57, 60а), б), 62**; *О. Намазов* (с. Фахралю ГССР) **47**; *Г. Непомнящий* (Винница) **60а)**; *И. Нестеров* (Пскент) **46, 47**; *С. Новаковский* (Саратов) **46—57, 60а), 64**; *С. Новиков* (Херсон) **56**; *А. Нурсеитов* (Алма-Ата) **47**; *В. Оринянский* (п. г. т. Ясиполь Винницкой обл.) **63**; *А. Павлычев* (Рига) **46, 47, 48а), 49, 52, 57, 60а), 62, 63**; *Е. Палош* (Ворошиловград) **51**; *М. Пантаев* (Москва) **46, 50—54**; *А. Пашкевич* (ПНР) **46, 47, 53**; *Г. Пельц* (Ленинград) **51, 53, 54**; *Г. Перельман* (Ленинград) **46, 47, 52, 54, 57, 58, 60а)**.

(Продолжение см. на с. 58)

Квант для младших школьников

Задачи

1. Два школьника пришли покупать себе буквари. Одному не хватило семи копеек, другому — копейки. Они сложили свои деньги вместе, но все равно денег не хватило. Сколько стоит букварь?

2. Можно ли на черных клетках шахматной доски расставить семь белых слонов (напоминаем: слон ходит по диагонали) так, чтобы они не били друг друга? А восемь таких слонов?

3. Прямоугольник делится прямой на два многоугольника. Затем один из них делится прямой на две части. Потом один из имеющихся трех многоугольников вновь делится на две части и т. д. Операция разрезания многоугольников повторяется 100 раз. После окончания операции подсчет показал, что полученные многоугольники содержат всего 302 вершины (вершины каждого многоугольника считаются отдельно). Может ли такое быть?

4. Вычислите $1+2-3-4+5+6-7-8+9+10-11-12+13+14-\ldots+301+302$.

5. В квадратах на рисунках заполните пустые клетки буквами Н, О, Р, М, А так, чтобы в каждой строке, в каждом столбце и в каждой из двух диагоналей квадрата встречались все эти буквы и каждая по одному разу.

А нельзя ли, заполнив клетки одного квадрата, получить заполнения остальных квадратов автоматически?

Ф. Бартенев

Блуждающие фишки

Мы часто замечаем, что люди проявляют больше всего изобретательности в играх, и потому математические игры заслуживают внимания не сами по себе, а потому, что развивают находчивость.

Лейбниц

Наверное, многие из читателей знакомы с игрой «уголки» на шахматной доске. Она является прообразом разнообразных игр, развлечений, задач с интересным и поучительным содержанием. Далее мы рассмотрим некоторые из них.

В качестве *досок* мы будем рассматривать произвольные прямоугольники, разбитые на конгруэнтные квадратики (см. рисунки). Начальные положения фишек мы будем указывать черными кружками, конечные — пунктиром.

Каждое из полей (клеток) доски имеет свое обозначение, свой «адрес», свои «координаты», как и на шахматной доске. Например, на рисунке 1 одна из фишек стоит на поле c2. Конечно, обычно эти обозначения не пишутся на полях доски, но их нетрудно определить, поскольку на рисунке всегда указываются буквенные обозначения вертикалей и номера горизонталей.

Теперь расскажем о правилах перемещений фишек. Каждая фишка может ходить на любое соседнее (по горизонтали или вертикали) поле. Например, фишка, стоящая на поле c2, может ходить на одно из следующих полей: b2; d2; c3; c1. Соответствующие ходы мы будем записывать так:

c2—b2; c2—d2; c2—c3; c2—c1.

Фишка может «перепрыгивать» через свою «соседку» (в одном из указанных направлений) на свободное поле. Например, на рисунке 1 возможен ход d6—d8. Одним ходом фишка может сделать даже несколько таких прыжков, причем направления их могут быть различными. Так, на рисунке 1 фишка с поля d6 может переместиться ходом d6—f6—f8 на поле f8 или ходом d6—f6—h6 на поле h6.

Пример 1. На рисунке 2 изображена доска 1×25, задано положение трех фишек и указано положение, в которое их нужно перевести.

Оказывается, требуемое перемещение можно осуществить за 33 хода: нужно перемещать всю конфигурацию фишек как единое целое на два поля вправо следующими тремя ходами:

1. c1—d1;
2. a1—c1—e1;
3. b1—c1.

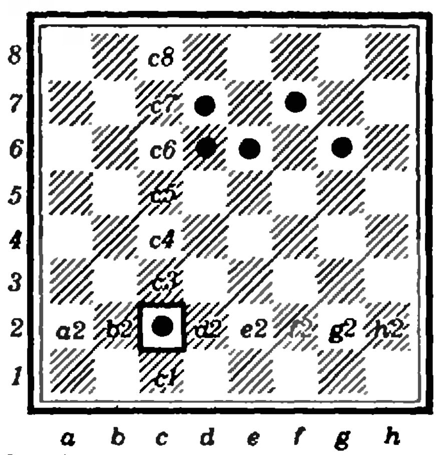


Рис. 1.

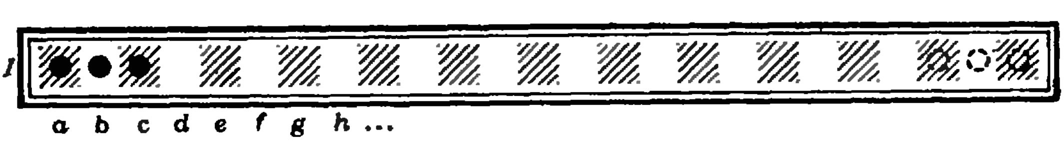


Рис. 2.

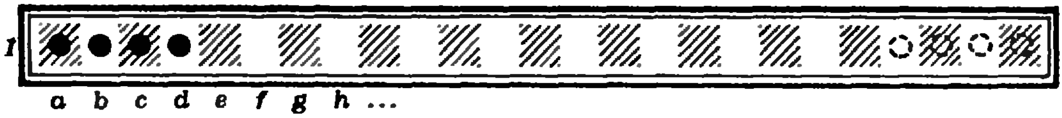


Рис. 3.

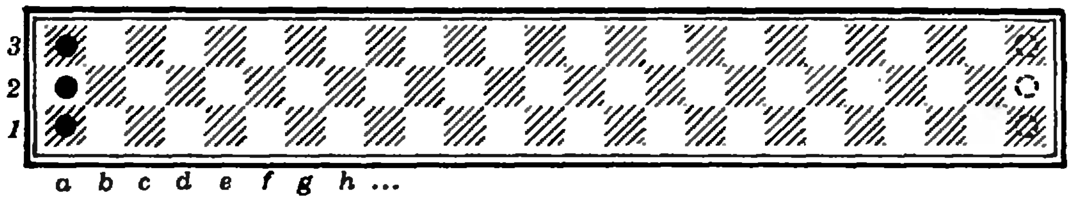


Рис. 4.

Так как конфигурацию нужно переместить на 22 поля вправо, можно 11 раз применить указанный прием, затратив на все перемещение ровно 33 хода.

Задание 1. *На той же доске* 1×25 *поставлены четыре фишки* (рис. 3). *Можно ли осуществить соответствующее перемещение меньше, чем за 33 хода?*

Задание 2. *Имеется бесконечная доска, ширина которой равна* 1. *Покажите, что всегда можно расставить на ней n фишек* ($n\geqslant3$) *так, что, сделав три хода, можно получить первоначальную конфигурацию фишек, сдвинутую на две клетки вправо.*

Мы рассмотрели несколько примеров перемещения фишек на доске, ширина которой была равна единице. Если же рассматривать перемещения фишек на доске размером $m\times n (m>2,\ n>2)$, появляется возможность применять более разнообразные приемы. Обратимся к примерам.

Задание 3. *Можно ли перемещение, указанное на рисунке* 4, *осуществить меньше чем за* 40 *ходов?*

Пример 2. Требуется каждую фишку переместить из центральной части доски (рис. 5) на одно из угловых полей.

Оказывается, заданное перемещение можно выполнить за 22 хода, например, следующим образом:

1. d4—d6;	7. c8—b8;
2. d5—d7;	8. b8—a8;
3. d6—d8;	9. e8—f8;
4. d8—e8;	10. f8—g8;
5. d7—d8;	11. g8—h8;
6. d8—c8;	12. e5—e3 и т. д.

Здесь мы столкнулись с необходимостью видеть шаги или этапы, на которые желательно разбить процесс решения задачи. При этом мы не ставили вопрос об определении наименьшего числа ходов, необ-

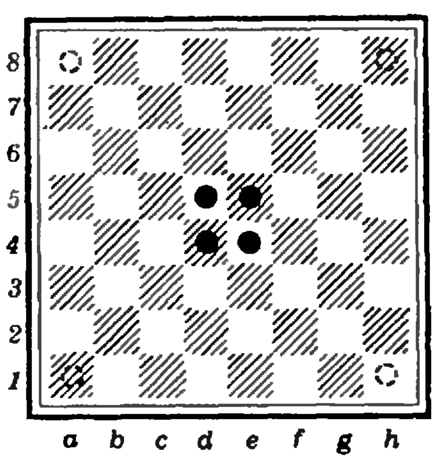


Рис. 5.

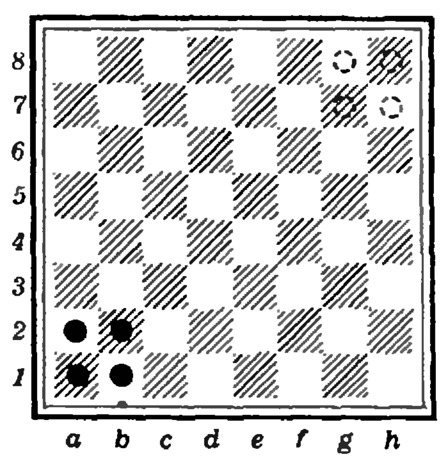


Рис. 6.

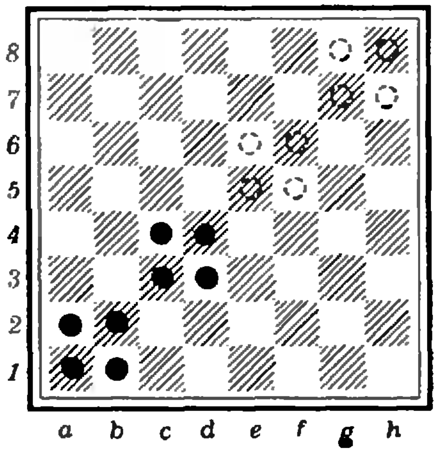


Рис. 7.

ходимого для достижения цели. «Почти» очевидно, что задание не может быть выполнено меньше чем за 22 хода, однако это требуется доказать.

Пример 3. Перемещение, указанное на рисунке 6, может быть выполнено за 13 ходов.

Укажем один из возможных вариантов:

1. a2—c2;
2. a1—c1—c3;
3. b1—b3—d3;
4. b2—d2—d4;
5. c2—c4—e4 и т. д.

В этом случае, как и в предыдущих, мы последовательно чередовали одни и те же конфигурации фишек. В следующем задании такого чередования уже не будет.

Задание 4. *Можно ли перемещение, указанное на рисунке 7, выполнить меньше чем за 18 ходов?*

Если последовательно перемещать всю конфигурацию фишек как единое целое, потребуется 18 ходов. Мы рекомендуем вначале расположить все восемь фишек по большой диагонали, а затем использовать образовавшуюся цепочку как мостик для перебрасывания фишек.

Задание 5. *Решите предыдущую задачу меньше чем за 300 ходов, если дана доска размером* 100×100, *а начальное положение восьми фишек относительно левого нижнего угла этой доски остается прежним.*

Приведем еще два задания, на вид почти одинаковые, но требующие для достижения поставленных целей различных приемов.

Задание 6. *Выполните не больше чем за 20 ходов перемещение трех фишек с полей a1, b1, c1 на поля f6, g6, h6.*

Задание 7. *Выполните не больше чем за 20 ходов перемещение трех фишек с полей a1, a2, b1, на поля g8, h7, h8.*

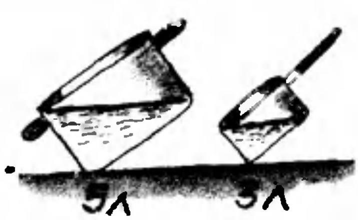
Полупустое равно полуполному

(письмо в редакцию)

В «Кванте» № 9 за 1979 г. на с. 34 есть задача: *даны две емкости: 3 литра и 5 литров — и цистерна молока; как налить 4 литра?*

Наша читательница из Улан-Удэ студентка Валя Коршунова прислала нам письмо:

«Задачу, решаемую там, можно решить во много раз легче. Для этого надо вспомнить другую задачу: "Имеется полная бочка воды. Как отлить из нее ровно половину?" В данном случае задача решается аналогично: каждой емкости надо слить ровно половину (см. рисунок). В итоге остается $\frac{5}{2}+\frac{3}{2}=4$ литра!».



Заметим, что красивое Валино решение годится только в том случае, когда «емкости», о которых говорится в условии задачи, имеют определенную форму, например, форму цилиндра (именно так было на рисунках в «Кванте»).

О. М.

В. Можаев

Закон всемирного тяготения

Среди различных сил, действующих во Вселенной, самой фундаментальной и величественной является сила тяготения. Под действием этой силы планеты Солнечной системы, включая нашу Землю, движутся по своим орбитам вокруг Солнца. Эта сила притягивает к центру Земли все находящиеся на ней тела. Против этой силы была направлена вся мощь двигателей космического корабля, когда 4 октября 1957 года впервые в мире на околоземную орбиту был выведен первый советский искусственный спутник Земли.

Первым, кто понял роль силы тяготения, был Ньютон. Анализируя законы Кеплера, которые описывают движение планет по своим орбитам вокруг Солнца, он пришел к заключению, что для удержания планеты на орбите должна существовать сила, направленная точно от планеты к Солнцу и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними. Однако главная заслуга Ньютона в том, что он сумел понять, что сила притяжения планеты к Солнцу — это частный случай силы тяготения, действующей между любыми двумя телами. Не случайно закон, открытый Ньютоном, называется законом всемирного тяготения. Это один из самых фундаментальных законов природы.

В простейшем случае, когда взаимодействующие тела можно считать материальными точками (размеры тел малы по сравнению с расстоянием между ними), закон всемирного тяготения формулируется так — *любые две материальные точки притягивают друг друга с силой $\vec{F}$, направленной по линии, их соединяющей, прямо пропорциональной их массам m_1 и m_2 и обратно пропорциональной квадрату расстояния r между ними:*

$$|\vec{F}| = G\frac{m_1 m_2}{r^2}. \qquad (*)$$

Здесь $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}$ Н $\cdot$ м²/кг² — гравитационная постоянная; впервые она была измерена Кавендишем.

Если же размерами тел пренебречь нельзя, тела нужно мысленно разбить на небольшие участки такие, чтобы их можно было считать материальными точками. Для каждой пары материальных точек нужно записать закон тяготения в виде (*) и найти соответствующую силу притяжения, а затем — все полученные результаты сложить. Оказывается, для центрально симметричных тел (например, для шара или сферического слоя) силу притяжения можно считать непосредственно по формуле (*), понимая под r расстояние между центрами масс взаимодействующих тел.

Как известно, гравитационные поля (поля тяготения) являются потенциальными, то есть работа поля по перемещению тела из точки *1* в точку *2* не зависит от формы траектории, а определяется лишь разностью потенциальных энергий тела в точках *1* и *2* соответственно:

$$A_{12} = E_{p1} - E_{p2}.$$

Из этого равенства ясно, что определенный физический смысл имеет лишь разность потенциальных энергий в различных точках поля. Численное же значение потенциальной энергии в отдельной точке особого смысла не имеет, оно всегда определяется с точностью до некоторой постоянной величины. Вот почему при решении конкретных задач нулевой уровень потенциальной энергии можно выбирать произвольно, в наиболее удобной точке.

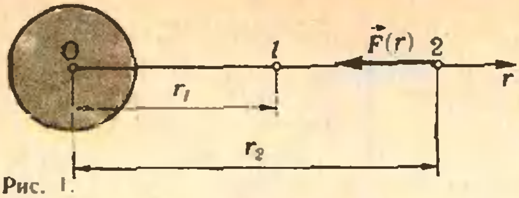


Рис. 1.

Обычно для определения потенциальной энергии тела массой m, поднятого на высоту h над нулевым уровнем, пользуются формулой

$$E_p = mgh.$$

Однако это равенство справедливо лишь для значений h, много меньших радиуса Земли $R_З$ ($h \ll R_З$). Если такое условие не выполняется, потенциальную энергию надо считать по-другому. Поясним это на конкретной задаче.

Задача 1. *Полагая в бесконечности (то есть на большом расстоянии от Земли, где сила тяготения пренебрежимо мала) потенциальную энергию тела равной нулю, найдите зависимость потенциальной энергии E_p от расстояния r от центра Земли.*

Ограничимся областью $r \geqslant R_З$. Потенциальная энергия E_p тела массой m, находящегося на расстоянии r от центра Земли, равна работе, которую совершает поле тяготения, перемещая это тело из данной точки в бесконечность. Поскольку в потенциальном поле работа не зависит от формы траектории, будем считать, что тело перемещается вдоль радиального направления. При перемещении тела из точки 1, находящейся на расстоянии r_1 от центра Земли (рис. 1), в точку 2, отстоящую от центра Земли на расстояние r_2, поле совершает работу

$$A_{12} = \int_{r_1}^{r_2} -|\vec{F}(r)|\,dr = \int_{r_1}^{r_2} -G\frac{mM_З}{r^2}dr = G\frac{mM_З}{r_2} - G\frac{mM_З}{r_1}.$$

При условии, что точка 2 бесконечно удалена, первое слагаемое равно нулю (при $r_2 \to \infty$ $\frac{1}{r_2} \to 0$). Таким образом, зависимость потенциальной энергии от расстояния r от центра Земли имеет вид

$$E_p(r) = -G\frac{mM_З}{r},$$

где $M_З$ — масса Земли. График этой зависимости изображен на рисунке 2.

Разберем еще несколько задач.

Задача 2. *Определите, какую минимальную скорость надо сообщить находящемуся на поверхности Земли телу для того, чтобы оно ушло из сферы действия гравитационного поля Земли.*

Прежде всего заметим, что искомую скорость называют *второй космической скоростью* $\vec{v}_{2к}$. Для определения ее модуля $v_{2к}$ воспользуемся законом сохранения энергии.

Сразу же после запуска, то есть непосредственно у поверхности Земли, кинетическая энергия тела равна $mv_{2к}^2/2$, а его потенциальная энергия равна $-GmM_З/R_З$. Полная механическая энергия

$$E = \frac{mv_{2к}^2}{2} - G\frac{mM_З}{R_З}.$$

Когда тело удалится от Земли на бесконечно большое расстояние (уйдет за пределы действия поля тяготения Земли), потенциальная энергия тела станет равной нулю. Очевидно, что при этом кинетическая энергия тоже обратится в нуль (мы ищем минимальную начальную скорость тела). Поскольку полная энергия тела не изменяется, получаем

$$\frac{mv_{2к}^2}{2} - G\frac{mM_З}{R_З} = 0.$$

Отсюда

$$v_{2к} = \sqrt{2G\frac{M_З}{R_З}} = \sqrt{2gR_З} \approx 11{,}2 \text{ км/с}$$

($g = 9{,}8$ м/с^2 — ускорение свободного падения у поверхности Земли).

Задача 3. *Искусственный спутник, используемый в системе*

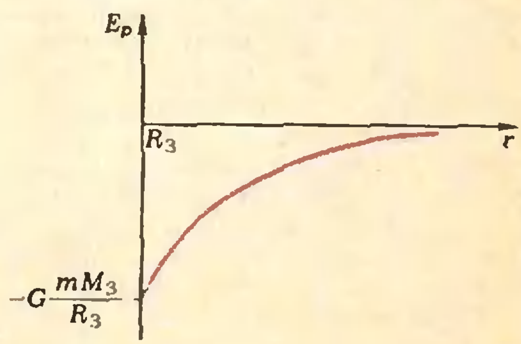


Рис. 2.

телесвязи, запущен в плоскости земного экватора так, что все время находится в зените одной и той же точки земного шара. Во сколько раз радиус R орбиты спутника больше радиуса Земли $R_З=6400$ км? Ускорение свободного падения у поверхности Земли $g=9{,}8$ м/с^2.

По условию задачи спутник все время находится в зените одной и той же точки земного шара. Следовательно, спутник движется по круговой орбите радиусом R с постоянной угловой скоростью, причем его угловая скорость ω равна угловой скорости вращения Земли $\omega_З$.

На спутник массой m действует одна сила тяжести $\vec{F}$, ее модуль $|\vec{F}|=G\frac{mM_З}{R^2}$. Эта сила и сообщает центростремительное ускорение спутнику:

$$G\frac{mM_З}{R^2}=m\omega^2R.$$

Отсюда найдем ω^2:

$$\omega^2=G\frac{M_З}{R^3}=G\frac{M_З}{R_З^2}\frac{R_З^2}{R^3}=\frac{g}{R_З}\left(\frac{R_З}{R}\right)^3.$$

С другой стороны,

$$\omega^2=\omega_З^2=\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2,$$

где T — период обращения Земли вокруг собственной оси (сутки).

Приравнивая два последних выражения, получим

$$\left(\frac{R}{R_З}\right)^3=\frac{g}{R_З}\left(\frac{T}{2\pi}\right)^2\approx 300$$

и

$$\frac{R}{R_З}\approx 6{,}7.$$

Задача 4. *Космонавты, высадившиеся на Луну, должны возвратиться на базовый космический корабль, который летает по круговой орбите на высоте, равной радиусу Луны $R_Л=1740$ км. Какую начальную скорость на поверхности Луны необходимо сообщить лунной кабине, чтобы стыковка с базовым кораблем стала возможной без дополнительной коррекции величины скорости кабины? Ускорение свободного падения на поверхности Луны $g_Л=1{,}7$ м/с^2.*

Запишем уравнение движения космического корабля:

$$G\frac{mM_Л}{(2R_Л)^2}=\frac{mv_к^2}{2R_Л},$$

где m — масса корабля, $M_Л$ — масса Луны, а $v_к$ — линейная скорость движения корабля по круговой орбите. Из этого уравнения найдем

$$v_к^2=G\frac{M_Л}{2R_Л}=G\frac{M_Л}{R_Л^2}\frac{R_Л}{2}=g_Л\frac{R_Л}{2}.$$

Для того чтобы стыковка лунной кабины с базовым кораблем произошла без дополнительной коррекции, скорость кабины в момент сближения с кораблем должна быть равна по модулю скорости корабля $v_к$.

Связь между начальной скоростью кабины $|\vec{v}|$ на поверхности Луны и ее скорость $v_к$ на орбите корабля можно найти из закона сохранения полной энергии кабины:

$$\frac{m|\vec{v}|^2}{2}-G\frac{mM_Л}{R_Л}=\frac{mv_к^2}{2}-G\frac{mM_Л}{2R_Л}.$$

Подставляя в это уравнение выражение для $v_к^2$, получим

$$|v|=\sqrt{{}^3\!/_2 g_ЛR_Л}\approx 2{,}1\ \text{км/с}.$$

Упражнения

1. Спутник массой $M=200$ кг движется по круговой орбите вокруг Земли. Его расстояние от поверхности Земли мало по сравнению с радиусом Земли. На сколько можно изменить это расстояние, если из спутника произвести выстрел? Масса пули $m=5$ г, ее скорость $|\vec{u}|=1$ км/с. Стреляют в направлении, противоположном полету спутника.

2. Один из спутников Юпитера движется по орбите радиусом $R_1=4{,}22\cdot10^5$ км и совершает полный оборот за время $T_1=1{,}77$ дня. Во сколько раз масса Юпитера больше массы Земли? Известно, что Луна движется по орбите радиусом $R_2=3{,}8\cdot10^5$ км с периодом $T_2=27{,}3$ дня.

3. На какое максимальное расстояние от Солнца удаляется комета Галлея? Период обращения ее вокруг Солнца равен $T=76$ годам, минимальное расстояние кометы от Солнца равно $r_{min}=1{,}8\cdot10^8$ км. Радиус орбиты Земли равен $R=1{,}5\cdot10^8$ км.

4. Искусственный спутник вращается вокруг Земли по круговой орбите радиусом R. Какую минимальную дополнительную скорость $\vec{u}$ необходимо сообщить спутнику, чтобы он ушел из зоны притяжения Земли (на бесконечность)?

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика на гуманитарных факультетах

Письменный экзамен

Окончивший среднюю школу должен уметь при решении задач объединять знания различных разделов математики, то есть подходить к решению задач творчески. Практика вступительных экзаменов по математике на гуманитарных факультетах показывает, что абитуриенты еще недостаточно хорошо справляются с этим.

Ниже проводится подробный разбор одного из вариантов отделения политэкономии экономического факультета с указанием типичных ошибок и некоторой статистики: доли абитуриентов (в процентах к общему числу сдававших экзамен), решивших данную задачу полностью и не решивших ее совсем. Другие факультеты также представлены каждый — одним вариантом, но лишь с ответами и краткими указаниями.

Отделение политической экономии экономического факультета

1. *Решить уравнение*

$$\sqrt{37-48\operatorname{ctg} x}=8\operatorname{ctg} x-5.$$

Решение. Обозначим $\operatorname{ctg} x$ через z и решим вспомогательное уравнение

$$\sqrt{37-48z}=8z-5z.$$

Возведем обе его части в квадрат (при этом могут появиться посторонние корни). Решая полученное квадратное уравнение

$$16z^2-8z-3=0,$$

найдем $z_1=3/4$, $z_2=-1/4$. Корень z_2 является посторонним, так как $8z_2-5<0$, а $\sqrt{37-48z_2}>0$ (арифметическое значение корня!). Значение z_1, как показывает проверка, удовлетворяет уравнению. Решая уравнение $\operatorname{ctg} x=3/4$, находим ответ: $x=\operatorname{arcctg} 3/4+\pi n$ $(n\in \mathbf{Z})$.

Основная ошибка при решении этой задачи — приобретение посторонних корней (отсутствие проверки) при неравносильном преобразовании (возведении обеих частей уравнения в квадрат). 44% абитуриентов решили эту задачу полностью, 8% не решили ее совсем.

2. *В равнобедренном треугольнике ABC ($|AB|=|BC|=8$) точка E делит боковую сторону AB в отношении $3:1$ (считая от вершины B). Найти угол между векторами $\vec{CE}$ и $\vec{CA}$, если $|CA|=12$.*

Решение (рис. 1). Из определения скалярного произведения следует, что

$$\cos\alpha=\frac{\vec{CE}\cdot\vec{CA}}{|\vec{CE}|\cdot|\vec{CA}|},$$

где α — угол между векторами $\vec{CE}$ и $\vec{CA}$. Введем систему координат так, как указано на рисунке 1; по свойству высоты равнобедренного треугольника $|OA|=|OC|$. Из $\triangle OBC$

$$|OB|=\sqrt{|BC|^2-|OC|^2}=2\sqrt{7}.$$

Поскольку $\vec{AE}=1/4\,\vec{AB}$, имеем $\vec{CE}=\vec{CA}+1/4\,\vec{AB}$. В системе координат Oxy: $\vec{CA}=(-12;\ 0)$, $\vec{AB}=(6;\ 2\sqrt{7})$, $\vec{CE}=(-21/2;\ 2\sqrt{7}/4)$. Подставляя в выражение для $\cos\alpha$, находим

$$\cos\alpha=\frac{(-12)(-21/2)}{12\cdot\sqrt{(21/2)^2+7/4}}=\frac{3\sqrt{7}}{8}.$$

Ответ. Угол между векторами $\vec{CA}$ и $\vec{CE}$ равен $\arccos\frac{3\sqrt{7}}{8}$.

Практически никто из абитуриентов не использовал здесь координатный метод; отыскание угла α, как правило, производилось традиционными планиметрическими методами, в качестве ответа предлагалось выражение $\alpha=\pm\arccos\frac{3\sqrt{7}}{8}+2\pi n$ $(n\in\mathbf{Z})$, что свидетельствует о механическом применении формул, без понимания смысла задачи. 27% абитуриентов решили задачу полностью, 34% не решили совсем.

3. *Из сосуда, до краев наполненного чистым глицерином, отлили 2 литра глицерина, а к оставшемуся глицерину долили 2 литра воды. После перемешивания снова отлили 2 литра смеси и долили 2 литра воды. Наконец, опять, после перемешивания, отлили 2 литра смеси и долили 2 литра воды. В результате этих операций объем воды в сосуде стал на 3 литра больше объема оставшегося в нем глицерина. Сколько литров глицерина и воды оказалось в сосуде в результате проделанных операций?*

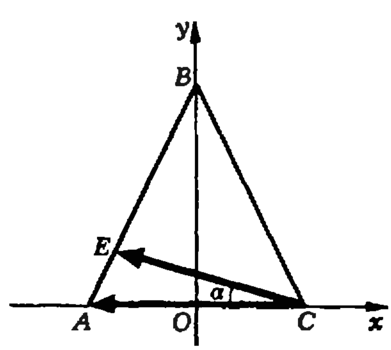


Рис. 1.

Решение. Если через V л обозначить объем сосуда, то после первой операции (замена двух литров глицерина водой) глицерин займет $\frac{V-2}{V}$ часть сосуда. Отлив 2 литра смеси, получим $(V-2)\frac{V-2}{V}$ литров глицерина в сосуде и после доливания воды глицерин будет занимать $\left(\frac{V-2}{V}\right)^2$ часть сосуда. После третьей операции глицерин займет $\left(\frac{V-2}{V}\right)^3$ часть сосуда, а количество глицерина в сосуде будет равно $V\left(\frac{V-2}{V}\right)^3$ литров. По условию задачи воды в сосуде на 3 литра больше, то есть $V\left(\frac{V-2}{V}\right)^3+3$. Складывая эти количества, приходим к уравнению $2V\left(\frac{V-2}{V}\right)^3+3=V$, откуда $V^3-9V^2+24V-16=0$; левую часть этого уравнения легко разложить на множители; уравнение примет вид

$$(V-1)(V-4)^2=0.$$

Отсюда следует, что $V=4$ л, так как $V=1$ л не подходит по смыслу задачи; значит, объем глицерина равен $V\left(\frac{V-2}{V}\right)^3=0{,}5$ л.

Ответ. Объем глицерина равен 0,5 л, объем воды — 3,5 л. Эта задача оказалась наиболее трудной из пяти задач, предложенных абитуриентам. Хотя, как видите, она решается очень просто, лишь 7% абитуриентов решили ее, а 80% не знали, что с ней делать.

4. *Найти наибольшее и наименьшее значения функции* $y=|x^2+2x-3|+\frac{3}{2}\ln x$ *на отрезке* $[1/2;\ 4]$.

Решение. Прежде всего заметим, что один из корней квадратного трехчлена x^2+2x-3, а именно $x=1$, принадлежит отрезку $[1/2;\ 4]$. Тогда справедлива запись

$$y=\begin{cases}-x^2-2x+3+3/2\ln x, & x\in[1/2;\ 1];\\ x^2+2x-3+3/2\ln x, & x\in[1;\ 4].\end{cases}$$

Производную функции $y(x)$ можно написать в виде

$$y'=\begin{cases}-2x-2+\frac{3}{2x}, & x\in[1/2;\ 1[,\\ 2x+2+\frac{3}{2x}, & x\in]1;\ 4].\end{cases}$$

(Обратите внимание на скобки: в точке $x=1$ производная не определена) Так как $\frac{-4x^2-4x+3}{2x}<0$ при $x\in]1/2;\ 1[$ (это следует из рассмотрения корней квадратного трехчлена $-4x^2-4x+3$), на отрезке $[1/2;\ 1]$ функция $y(x)$ убывает. Аналогично при $x\in]1;\ 4[$ $y'(x)>0$. Это означает (см. «Алгебра и начала анализа 9» п. 54), что на отрезке $[1;\ 4]$ функция $y(x)$ возрастает. Кроме того, как легко видеть, функция y непрерывна при $x=1$. Значит, наименьшее значение функции на $[1/2;\ 4]$ достигается при $x=1$ и равно $y(1)=0$, а наибольшее значение может достигаться только на концах отрезка $[1/2;\ 4]$. Но $y(4)=21+3\ln 2>y\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{4}-\frac{3}{2}\ln 2$.

Ответ. Наименьшее значение функции равно 0, наибольшее равно $21+3\ln 2$.

Характерные ошибки: многие абитуриенты не заметили критической точки $x=1$ (где производная $y'(x)$ не существует), другие приняли максимум функции при $x=1/2$ ($y'(1/2)=0$) за наибольшее значение (не исследовав функцию на другом конце отрезка). Почти никто из абитуриентов не попытался нарисовать график этой функции, что избавило бы многих от неверных ответов. 17% абитуриентов справились с этой задачей, 38% не решили ее совсем.

5. *Решить уравнение*

$$\log_{3x+7}(9+12x+4x^2)+\log_{2x+3}(6x^2+23x+21)=0.$$

Решение. Прежде всего заметим, что $9+12x+4x^2=(2x+3)^2$ и $6x^2+23x+21=(2x+3)(3x+7)$. Если обозначить $\log_{3x+7}(2x+3)$ через z, исходное уравнение можно переписать в виде $2z+1+\frac{1}{z}=4$; умножая на z, находим $2z^2-3z+1=0$, откуда $z_1=1/2$, $z_2=1$. Имеем

$$z_1=1/2\Rightarrow\sqrt{3x+7}=2x+3,$$
$$z_2=1\Rightarrow 3x+7=2x+3.$$

Возводя первое уравнение в квадрат, приходим к квадратному уравнению, корни которого $x_1=1/4$, $x_2=-2$. Корень второго уравнения $x_3=-4$. При наших преобразованиях множество корней могло расшириться, поэтому нужно сделать проверку; она показывает, что значения $x_2=2$ и $x_3=-4$ — посторонние.

Ответ. $\{-1/4\}$.

Типичные ошибки: многие запутались при попытке привести логарифмы к общему основанию, неверно преобразовали логарифмические выражения, приобретали посторонние корни и затем не делали проверки. Эту задачу правильно решили 39% абитуриентов. «Решения» 47% абитуриентов были признаны полностью ошибочными.

Отметим, что весь вариант без ошибок решили лишь 6% абитуриентов.

Отделение экономической кибернетики планирования и экономического факультета

1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}4\sin y-6\sqrt{2}\cos x=5+4\cos^2 y,\\ \cos 2x=0.\end{cases}$$

2. Площадь прямоугольника $ABCD$ равна 48, а длина диагонали равна 10. На плоскости, в которой расположен прямоугольник, выбрана точка O так, что $|OB|=|OD|=13$. Найти расстояние от точки O до наиболее удаленной от нее вершины прямоугольника.

3. Известно, что вклад, находящийся в банке с начала года, возрастает к концу года на определенный процент (свой для каждого банка). В начале года 5/6 некоторого количества денег положили в первый банк, а оставшуюся часть — во второй банк. К концу года сумма этих вкладов стала равной

670 денежным единицам, к концу следующего года — 749 денежным единицам. Было подсчитано, что если бы первоначально 5/6 исходного количества денег положили во второй банк, а оставшуюся часть в первый банк, то по истечении одного года сумма вкладов в эти банки стала бы равной 710 денежным единицам.

В предположении, что исходное количество денег первоначально целиком положено в первый банк, определить величину вклада по истечении двух лет.

4. Найти значения параметра a $(a>1)$, при которых площадь фигуры, ограниченной прямыми $y=1$, $y=2$ и кривыми

$$y=ax^2,\ x>0,$$
$$y=\frac{1}{2}ax^2,\ x>0,$$

будет наибольшей, и найти эту площадь.

5. Решить неравенство

$$\frac{\log_5(x^2-4x+11)^2-\log_{11}(x^2-4x-11)^3}{2-5x-3x^2}>0.$$

Факультет психологии

1. Найти все решения уравнения

$$\sqrt{2+\sqrt{6}-(6\sqrt{2}-2\sqrt{3})\sin x}=2\sin x-\sqrt{2}.$$

2. При каком значении параметра $a>0$ площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=a\sqrt{x}$ и $y=2-\sqrt{x}$ и осью OY, будет равна числу b? При каких b задача имеет решение?

3. Решить неравенство

$$\frac{4}{|x+1|-2}>|x-1|.$$

4. Точка M равноудалена от вершин A, B, C правильного тетраэдра $ABCD$: $|MA|=|MB|=|MC|=2\sqrt{\frac{3}{2}}$. Известно, что отрезок MA перпендикулярен высоте треугольника BCD, опущенной из вершины B. Вычислить объем тетраэдра $ABCD$.

5. Найти все тройки целых чисел $(x;\ y;\ z)$ для которых выполняется соотношение

$$5x^2+y^2+3z^2-2yz=30.$$

Отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета

1. Даны две пересекающиеся окружности. К ним проведены две общие касательные, которые пересекаются в точке A отрезка, соединяющего центры окружностей. Радиус меньшей окружности равен R. Расстояние от точки A до центра окружности большего радиуса равно $6R$. Точка A делит длину отрезка касательной, заключенного между точками касания, в отношении 1:3. Найти площадь фигуры, ограниченной отрезками касательных и большими дугами окружностей, соединяющими точки касания.

2. Решить уравнение

$$\sin\left(2x+\frac{5}{2}\pi\right)-3\cos\left(x-\frac{7}{2}\pi\right)=1+2\sin x.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{1/2}(4-x)\geqslant\log_{1/2}2-\log_{1/2}(x-1).$$

4. Три автоматические линии выпускают одинаковую продукцию, но имеют различную производительность. Производительность всех трех одновременно действующих линий в 1,5 раза выше производительности первой и второй линий, работающих одновременно. Сменное задание для первой линии вторая и третья линии, работая одновременно, могут выполнить на 4 часа 48 минут быстрее, чем его выполняет первая линия; это же задание вторая линия выполняет на 2 часа быстрее по сравнению с первой линией. Найти время выполнения первой линией своего сменного задания.

5. Пусть m и n — натуральные числа, причем $\frac{m}{n}$ — правильная несократимая дробь. На какие натуральные числа можно сократить дробь $\frac{3n-m}{5n+2m}$, если известно, что она сократима?

Н. Болотина, В. Вильке

Физика на естественных факультетах

Задачи устного экзамена

Химический факультет и отделение геофизики геологического факультета

1. Проволока изогнута так, что она состоит из двух дуг (рис. 1). Радиусы этих дуг $R_1=1$ м и $R_2=2R_1$. Дуги расположены в одной вертикальной плоскости так, что их центры O_1 и O_2 лежат на одной вертикальной прямой с точкой A сопряжения этих дуг. На проволоку надета бусинка B, которая может скользить по ней без трения. Бусинку помещают на небольшое по сравнению с R_1 расстояние от точки A и отпускают. Найти время t, которое потребуется бусинке, чтобы достигнуть наибольшей высоты по другую сторону точки A.

2. Человек перемещает куб с длиной ребра $a=1{,}8$ м вверх по наклонной плоскости, составляющей угол $\alpha=45°$ с горизонтом, прикладывая силу $\vec{F}$ перпендикулярно грани куба и обеспечивая равномерное поступательное движение куба. На каком расстоянии x от наклонной плоскости он может прикладывать силу, чтобы основание куба не отрывалось от наклонной плоскости? Коэффициент трения между поверхностями куба и наклонной плоскости $\mu=0{,}2$.

3. В цилиндрическом сосуде под невесомым поршнем находится газ при температуре $t=20°$ С. Газ занимает объем $V=1$ л. При увеличении температуры газа на величину $\Delta t=10°$ С поршень поднимается. Найти работу A, совершенную газом. Атмосферное давление $p_0=10^5$ Па, трение поршня о стенки сосуда отсутствует.

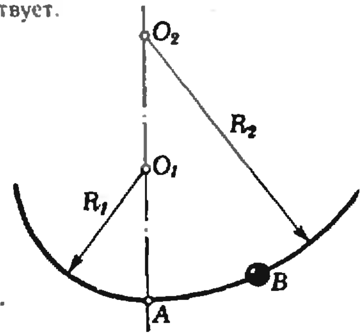


Рис. 1.

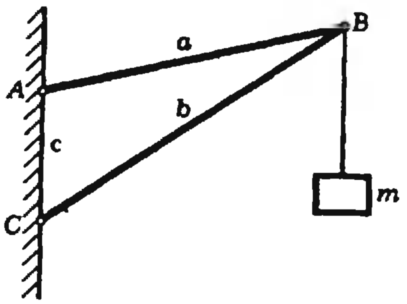


Рис. 2.

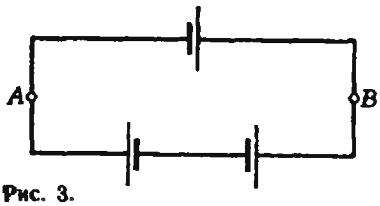


Рис. 3.

4. Источник постоянного тока замкнут на сопротивление $R=2$ Ом. Мощность, выделяемая во внешней цепи, не изменяется, если параллельно сопротивлению R подключить еще одно такое же сопротивление. Найти внутреннее сопротивление r этого источника.

5. Тело имеет форму конуса, у которого угол между осью и образующей равен $\alpha=60°$. Его погрузили целиком в прозрачную жидкость вершиной вниз. При этом оказалось, что боковую поверхность конуса нельзя видеть ни из одной точки пространства над поверхностью жидкости. Каково должно быть минимальное значение n показателя преломления жидкости, чтобы выполнялось это условие?

Географический факультет, отделение общей геологии геологического факультета и факультет почвоведения

1. Груз массой $m=10$ кг висит на кронштейне, состоящем из двух стержней AB и CB, концы которых заделаны в стену. Устройство кронштейна показано на рисунке 2. Длины стержней AB и CB равны соответственно $a=0{,}8$ м и $b=1{,}0$ м. Расстояние AC между концами стержней, заделанными в стену, равно $c=0{,}4$ м. Найти силы $\vec{F}_a$ и $\vec{F}_b$, действующие на стержни.

2. Маленький шарик, подвешенный на невесомой нерастяжимой нити длиной $l=1{,}1$ м, выводят из положения равновесия так, что нить составляет с вертикалью малый угол, а затем отпускают без толчка. Через какой промежуток времени t угол между нитью и вертикалью уменьшится вдвое?

3. На какую величину Δm уменьшится масса воздуха в открытом сосуде, если его нагреть от температуры $t_1=0°$ С до температуры $t_2=100°$ С? Начальная масса воздуха $m_1=100$ г. Изменением объема сосуда при нагревании пренебречь.

4. Три одинаковых источника постоянного тока, ЭДС которых равны $\mathcal{E}=6$ В, соединены, как указано на рисунке 3. Определить разность потенциалов между точками A и B. Сопротивлением соединительных проводов пренебречь.

5. Посередине плоского экрана находится точечный источник света. Параллельно экрану расположено плоское зеркало в форме равностороннего треугольника со стороной $a=20$ см. Центр зеркала находится напротив источника. Определить площадь S светлого пятна, образованного на экране отраженными от зеркала лучами.

С. Кротов

Наша обложка

Закрученные многоугольники

Узор, изображенный на второй странице обложки, составлен из «закрученных многоугольников». Закрученный многоугольник состоит из цепочки правильных многоугольников: каждый последующий многоугольник M' вписан в предыдущий M (вершины M' лежат на сторонах M), притом M' подобен M (коэффициент подобия фиксирован для данной цепочки).

Такие цепочки выглядят особенно эффективно, если они построены на семействе одинаковых многоугольников, покрывающих плоскость (без перекрытий и пробегов), скажем, на семействе квадратов, правильных треугольников или шестиугольников.

Каким образом ЭВМ, нарисовавшая наш узор, строит закрученные многоугольники? Машине «дается» исходный многоугольник $P_1P_2 \ldots P_n$ (назовем его многоугольником первого ранга), то есть список вершин, заданных своими координатами

$$P_1(x_1;\ y_1),\ P_2(x_2;\ y_2), \ldots, P_n(x_n;\ y_n).$$

Далее, пользуясь графопостроителем, машина рисует стороны многоугольника, последовательно соединяя вершины отрезками. Затем она находит координаты вершин $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ следующего многоугольника (второго ранга) по такому правилу:

$$(x'_i;\ y'_i) = (x_i;\ y_{i-1}) + k(x_{i+1}-x_i;\ y_{i+1}-y_i)$$
$(i=1, 2, \ldots, n-1)$.

(Мы советуем читателю сделать чертеж, например, для $n=6$, и убедиться в том, что коэффициент k в предыдущей формуле равен

$$k=\frac{|P_iP'_i|}{|P_iP_{i+1}|}.)$$

Далее машина последовательно соединяет вершины $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n, P'_1$, получая тем самым рисунок многоугольника второго ранга. Из многоугольника второго ранга ЭВМ получает многоугольник третьего ранга. И так далее.

Чтобы избежать кляксы (которая получится при скоплении мелких многоугольников к центру многоугольника первого ранга), в программе число многоугольников в цепочке ограничивается.

Учащимся Заочной школы программирования мы предлагаем составить программу на Рапире (с использованием Шпаги) для построения узора такого типа и прислать ее нам в качестве необязательного задания.

В. Усов, А. Чубарев

Заочная школа программирования

Урок 7: Функции, графики, локальные имена и тексты на Рапире

Функции и графики

На уроке 6 («Квант», № 2) мы изучали описание процедур на языке Рапира. При этом мы рассматривали только такие процедуры, в которых не указывается имя-результат. Однако синтаксической диаграммой предусмотрен вариант описания процедуры, в котором используется имя-результат. Такими процедурами мы сейчас и займемся.

Процедура, в описании которой указано имя-результат, называется на языке Рапира *функцией*. *Значением* функции считается то значение, которое присваивается имени-результату (т. е. имени, стоящему вслед за знаком =>) после исполнения функции. Это значение, вообще говоря, зависит от значений параметров, указанных в заголовке процедуры.

Посмотрим сперва, что делает ЭВМ, когда ей впервые сообщают описание функции. Например, если в программе написано:

```
ПРОЦ КВАТ X => РЕЗ;
2*X! 2—5*X+10 —> РЕЗ;  КНЦ;
```

ЭВМ выберет у себя блок памяти, даст ему имя КВАТ и напишет в этом блоке

```
X => РЕЗ;  2*X!2—5*X+10  —>
РЕЗ; КНЦ;
```

Теперь посмотрим, как машина будет вызывать хранящуюся в памяти функцию. Важно помнить, что, в отличие от обычной процедуры, вызов функции может встречаться внутри выражения. Например, если в той же программе встретились такие предписания

```
28.5 — > A;
5*(A+КВАТ(2)) —> C;
```

ЭВМ сперва запишет число 28.5 в блок памяти с именем A (то есть присвоит имени A значение 28.5). Чтобы выполнить второе предписание, ЭВМ должна сложить значение выражений A и КВАТ(2). Первое из них ЭВМ просто прочитает в блоке памяти с именем A. Второе выражение — это вызов функции. Чтобы узнать его значение, ЭВМ должна найти в памяти описание этой функции, присвоить значения ее параметрам (в нашем случае параметру X будет присвоено значение 2), выполнить все операторы и *прочитать значение имени-результата*. Легко подсчитать, что имя РЕЗ получит значение 8. Это число и будет использовано в качестве значения выражения КВАТ(2). В конце концов имя C получит значение 182.5.

Возможны и более сложные выражения с функциями: КВАТ(2+ +КВАТ(1*(—КВАТ(2)))

Задание 7.1. *Вычислить значение этого выражения.*

В языке Рапира есть стандартные функции SIN (X), COS (X), EXP (X), LN (X), ARCTAN (X) и некоторые другие. Значением показательной функции EXP (X) будет e^{X}, где $e \approx 2.71828$, словом ARCTAN обозначен арктангенс, LN обозначает натуральный логарифм. Учащиеся шестого и седьмого классов пока не

знакомы с этими функциями, но это сейчас не важно: пока нам достаточно знать, что эти функции определены для всех $X \in \mathbf{R}$ (кроме функции LN, которая определена лишь для $X > 0$).

Задание 7.2. *Составить программу, которая отпечатает таблицу значений тригонометрических функций* (SIN (*X*) и COS (*X*)) *для значений X от 0 до 2π с шагом 0.1.*

Параметрами и результатами функций могут быть не только числа, но и тексты, описания функций и процедур и некоторые другие объекты. Опишем, например, функцию, значением которой будет название школьной отметки:

```
ПРОЦ ОТМ А => В;
ЕСЛИ А=5 ТО 'ОТЛИЧНО' —>
В ВСЕ; ЕСЛИ А=3 ТО
'УДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО' —>В
ВСЕ; ЕСЛИ А=2 ТО
'НЕУДОВЛЕТВОРИТЕЛЬНО'
—> В ВСЕ, ЕСЛИ А= 1 ТО
'ПЛОХО'—> В ВСЕ;
КНЦ;
```

Выполняя предписание

```
ПЕЧАТЬ ('ВАША ОЦЕНКА—',
ОТМ (5));
```

ЭВМ отпечатает:

```
ВАША ОЦЕНКА — ОТЛИЧНО.
```

Несколько позже мы вернемся к этой функции и опишем ее в более компактном виде.

Графики числовых функций с одним параметром очень удобно строить при помощи процедур графической системы Шпага. Например, если функция ФУН — имя такой функции, то программа

```
Р(100, 100); П(0, 0); 0 —> Х;
ПОКА Х=<100:: Л(Х, ФУН(Х));
Х+1 —> Х
ВСЕ; КОНЕЦ;
```

будет строить график этой функции на отрезке [0; 100] с шагом 1 мм.

Задание 7.3. *Выполнить вручную эту программу, пока параметр X не примет значение 20, считая, что* ФУН (*X*) *описана так:*

```
ПРОЦ ФУН X => У;
ЕСЛИ X<10 ТО X+2 —> У ИНАЧЕ X!2—3 —> У ВСЕ;
КНЦ;
```

Задание 7.4. *Описать на Рапире функцию от времени t, равную высоте камня в момент времени t, если камень брошен вертикально вверх со скоростью V при $t=0$. Составить программу для вычерчивания графика этой функции с одновременной печатью ее значений. Шаг 0.1 сек.**).

Процедуры и функции в Рапире могут быть **рекурсивными**, то есть могут вызывать сами себя. Например, функцию с целым параметром *X*, вычисляющую произведение всех целых чисел от 1 до значения параметра *X* (так называемый *факториал* $X! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot X$), можно описать так:

```
ПРОЦ ФАКТ Х=> РЕЗ;
ЕСЛИ Х=1 ТО 1 —> РЕЗ;
ИНАЧЕ Х*ФАКТ (Х—1)—> РЕЗ
ВСЕ;
КНЦ;
```

Постарайтесь сами разобраться в этом описании и убедитесь, что если параметр этой функции — натуральное число, то ее результатом действительно будет факториал этого числа.

Локальные имена

При составлении больших программ очень часто бывает так, что процедуру, написанную одним программистом, должен использовать другой. Если при этом случайно оказалось, что одно или несколько имен использовалось ими обоими, то может возникнуть очень неприятная ситуация.

Предположим, что один программист описал такую процедуру:

```
ПРОЦ КВАКУБ Х=>У;
Х!2 —>А; Х!3 —>В;
ЕСЛИ А>В ТО А—>У ИНАЧЕ
В—>У ВСЕ; КНЦ;
```

Эту процедуру попытался использовать другой программист в такой

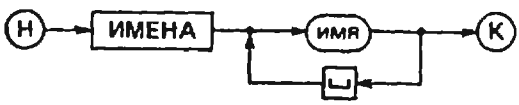
*) Учащимся 6—7 классов сообщаем, что такой функцией будет $h(t) = Vt - 4{,}9t^2$

программе:

5.21*3 —> A; 2*A—> B;
КВАКУБ (2)—>C;
ПЕЧАТЬ ('A=', A, 'B=', B, C=',
C);

Вероятно, он будет очень удивлен, когда ЭВМ отпечатает:
A=4 B=8 C=8,
ведь он хотел присвоить именам A и B совсем другие значения!

Чтобы избежать таких неприятностей, можно *объявить имена*, используемые в процедуре, с помощью такого предписания (знак ␣ обозначает пропуск):



Например, процедура КВАКУБ с объявленными именами выглядела бы так:

ПРОЦ КВАКУБ X=>У;
ИМЕНА A B;
X!2 —> A; X!3 —> B;
ЕСЛИ A>B ТО A—>У ИНАЧЕ B—>У ВСЕ; КНЦ;

Объявленные имена известны только внутри процедуры и не влияют на другие части программы. Это значит, во-первых, что после исполнения процедуры значения этих имен прочитать невозможно. Во-вторых, если в программе встречаются другие имена с такими же обозначениями, то их значения не изменятся при исполнении процедуры. Например, если приведенная выше программа будет исполняться с новым вариантом процедуры КВАКУБ, то ЭВМ отпечатает
A=15.63 B=31.26 C=8,
то есть именно то, что требовалось второму программисту.

Такими же свойствами, как объявленные имена, обладают параметры процедуры и имя-результат, поэтому объявлять их не нужно.

Имена, известные только внутри процедуры, называются *локальными* (то есть местными, внутренними) *именами*. Если какая-либо процедура должна использоваться много раз в большой программе, то все имена в ней стоит сделать локальными — тогда можно не опасаться случайных совпадений в обозначениях имен. Именно так организованы все стандартные процедуры и функции.

Работа с текстами

Если слово «караул» хорошенько отредактировать, получится «ура».

В состав выражений языка Рапира могут входить не только числа, но и тексты, а также имена, значениями которых являются тексты. Разумеется, обычные арифметические операции — сложение, вычитание, умножение, деление и т. д.— к ним не применимы. В то же время существуют специальные операции для работы с текстами:

1. *Конкатенация* («склеивание») *текстов*. Эта операция обозначается знаком +, как и сложение. Например, после выполнения предписаний

'ИЛ'—>A; 'КОД'—>B;
'КРО'+B+A—>C;

значением имени C станет текст 'КРОКОДИЛ'.

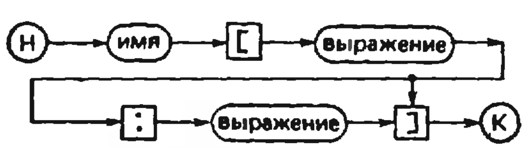
2. *Определение длины текста*, то есть количества символов в нем. Эта операция обозначается знаком ≠.
Например:

≠'КРОКОДИЛ'—>A;
'ЗАЙЧИК'—>B;
≠B+≠'БЕЛКА'—>K;
ПЕЧАТЬ('A=', A,' K=', K);

по этой программе ЭВМ отпечатает:

A=8 K=11

3. *Вырезание участка текста*. Это, пожалуй, самая интересная операция над текстами. Ее можно описать такой диаграммой:



Значением **имени** должен быть текст, а значениями выражений, стоящих в квадратных скобках,— натуральные числа. Эти числа считаются номерами н а ч а л ь н о г о и конечного символов вырезаемого участка. Если в скобках указано одно выражение, вырезается один символ с соответствующим номером. Пусть, например, выполнены такие присваивания:

'КРОКОДИЛ'—>К; 'ЛАНЬ'—>Л;
'СОВА'—>С;
'ЕЛКА'—>Е;

тогда значением выражения К [4:6] будет текст 'КОД', значением выражения Л [2] будет текст 'А', а значением выражения К [4:5] +К[2:3]+ +С[3:4] будет текст, 'КОРОВА'.

Задание 7.5. *Найти значение выражения*

С[1]+Л[2]+К[2]+К[6]+Е[1:2]+ +Л[4]+Е[3:4]

Выражения над текстами можно использовать и в условном предписании. Попробуем, например, описать функцию, параметром которой будет текст, а результатом количество букв 'А' в этом тексте:

```
ПРОЦ БУКВА ТЕК=>РЕЗ;
ИМЕНА НОМЕР;
0—>РЕЗ; 1—>НОМЕР;
ПОКА НОМЕР=<(#ТЕК)::
ЕСЛИ ТЕК [НОМЕР]='А' ТО
РЕЗ+1—>РЕЗ ВСЕ;
НОМЕР +1—>НОМЕР;
ВСЕ;
КНЦ;
```

Операция вырезания участка текста, в отличие от большинства других операций, может использоваться справа от стрелки присваивания. Таким способом можно изменять значения отдельных букв и участков текста. Пусть, например, значение имени К — текст 'КРОКОДИЛ'. Тогда после присваивания

'Я'—>К[3]

значением этого имени будет текст 'КРЯКОДИЛ', а после следующего присваивания

К[1:3]—>К[4:6];

значением этого имени станет текст 'КРЯКРЯИЛ'.

Задание 7.6. *«Отредактировать текст* 'КАРАУЛ' *так, чтобы получилось* 'УРА'.

Урок 8: Множества и кортежи на Рапире

В статье о IV Всесоюзной летней школе юных программистов («Квант», 1979, № 2) мы уже писали, для чего нужны множества, кортежи и другие сложные типы данных. Восьмой урок заочной школы посвящен описанию средств работы с множествами и кортежами в языке Рапира.

Задание множеств

Значениями любых имен в языке Рапира, наряду с числами, текстами и описаниями процедур, могут быть сложные структуры данных: *множества* и *кортежи*.

Множество обозначается угловыми скобками со звездочками: ⟨* и *⟩. Внутри скобок перечисляются через запятую все элементы множества. Например, после выполнения предписания

⟨*1, 'ЮНЫЙ ПРОГРАММИСТ',
2, 'КВАНТ' *⟩—> А;

значением имени А станет множество. Элементы этого множества — числа 1 и 2 и тексты 'ЮНЫЙ ПРОГРАММИСТ' и 'КВАНТ'.

Все, что может быть значением имени в Рапире, может быть и элементом множества. В частности, элементами одних множеств могут быть другие множества:

⟨*1, 2, ⟨*4, 5, ТЕКСТ*⟩*⟩—>В;

В этом примере значение имени В — это множество из трех элементов: двух чисел и одного множества.

Если в списке элементов множества указано имя или более сложное выражение, то элементом множества станет значение такого выражения; например, после выполнения предписаний

5—>А; 10—>В;
'КАРАУЛ'—>С;
⟨*А, 4, 40*А+В, С[5]+
С[3:4]*⟩—>А;

значением имени А станет множество

⟨*5, 4, 210, 'УРА'*⟩

Задание 8.1. *Чему будут равны значения имен А и В после выпол-*

нения программы:

'КРОКОДИЛ' + '' + 'ГЕНА' —> А; ≠А —> В;
⟨*А[(В+1)/2—3] + А[(В—1)/2+1] + А[≠А—1] + А[3] + А[В] + А[6] + А[2], А[4] + А[11] + А[2*3] + А[8/4], А[2*2+2] + А[1+1] + А[В] + А[4:5] + А[В—1]*⟩ —> А;
⟨*А, В+1, В+10*⟩ —> В;

Сравнение множеств и проверка принадлежности

Множества и их имена можно использовать в условиях (в циклических и условных предписаниях). В частности, два множества можно сравнивать при помощи знака =. Как известно из школьного курса математики, два множества считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов, независимо от порядка, в котором перечисляются эти элементы: множества

⟨*'НЕЗНАЙКА', 'ВОРЧУН', 'ЗНАЙКА'*⟩,
⟨*'ЗНАЙКА', 'НЕЗНАЙКА', 'ВОРЧУН'*⟩

равны между собой, а множества ⟨*1, 2, 3*⟩ и ⟨*1 ⟨*2, 3*⟩*⟩ не равны.

Процедура ПЕЧАТАТЬ печатает множество в таком же виде, в каком оно записывается в программе (то есть все элементы печатаются в уголковых скобках со звездочками через запятую, при этом тексты будут напечатаны без кавычек). Порядок элементов при печати может быть произвольным, так что заранее нельзя предсказать, например, будет ли множество КВАРТЕТ из задания 8.2, приведенного ниже, напечатано как

⟨*ОСЕЛ, КОЗЕЛ, МАРТЫШКА, МИШКА*⟩

или

⟨*МИШКА, ОСЕЛ, КОЗЕЛ, МАРТЫШКА*⟩

или как-нибудь еще.

Задание 8.2. *Что отпечатает машина, исполняя такую программу:*
⟨*1, 2*⟩ —> Х; ⟨*'МАРТЫШКА', 'ОСЕЛ', 'КОЗЕЛ', 'МИШКА'*⟩ —> КВАРТЕТ; ⟨*Х, КВАРТЕТ*⟩ —> СМЕСЬ1; ⟨*КВАРТЕТ, ⟨*1+1, 1*⟩, КВАРТЕТ*⟩ —> СМЕСЬ2; ЕСЛИ СМЕСЬ1 = СМЕСЬ2 ТО ПЕЧАТЬ ('КАК ВЫ НИ САДИТЕСЬ...') ИНАЧЕ ПЕЧАТЬ ('2*2=4') ВСЕ; ЕСЛИ КВАРТЕТ = СМЕСЬ2 ТО ПЕЧАТЬ ('ОТ ПЕРЕМЕНЫ МЕСТ СЛАГАЕМЫХ') ИНАЧЕ ПЕЧАТЬ ('ПРОИЗВЕДЕНИЕ НЕ МЕНЯЕТСЯ') ВСЕ;

Условие принадлежности элемента множеству записывается с помощью ключевого слова ИЗ, которое соответствует символу ∈ в обычных математических обозначениях. Например, условие

'МИШКА' ИЗ КВАРТЕТ

будет истинным только в том случае, если среди элементов множества КВАРТЕТ есть текст 'МИШКА'.

Операции над множествами

Операция объединения множеств обозначается в Рапире знаком +, а пересечение множеств — знаком *. Например, по программе ⟨*17, 1, 8, 27, 36, 5*⟩ —> ТИРАЖ1; ⟨*5, 25, 11, 17, 35, 4*⟩ —> ТИРАЖ2; ПЕЧАТЬ ('ОБЪЕДИНЕНИЕ=', ТИРАЖ1 + ТИРАЖ2); ПЕЧАТЬ ('ПЕРЕСЕЧЕНИЕ=', ТИРАЖ1 * ТИРАЖ2); ЭВМ отпечатает:

ОБЪЕДИНЕНИЕ=
= ⟨*17, 1, 5, 25, 11, 36, 27, 4, 35, 8*⟩
ПЕРЕСЕЧЕНИЕ = ⟨*5, 17*⟩

Знак — обозначает разность множеств: из первого множества удаляются все элементы, присутствующие во втором множестве; например, по программе:

⟨*'ЛЕВ', 'ВОЛК', 'ЛИСА', 'ЗАЯЦ'*⟩ — ⟨*'БЕЛКА', 'ЗАЯЦ', 'КРОЛИК'*⟩ —> ХИЩНИК; ПЕЧАТЬ (ХИЩНИК);

будет отпечатано:

⟨*ВОЛК, ЛИСА, ЛЕВ*⟩

Число элементов множества обозначается значком ≠, как и для текстов. Напомним, что одинаковые элементы в множестве учитываются только один раз, так что мощность множеств

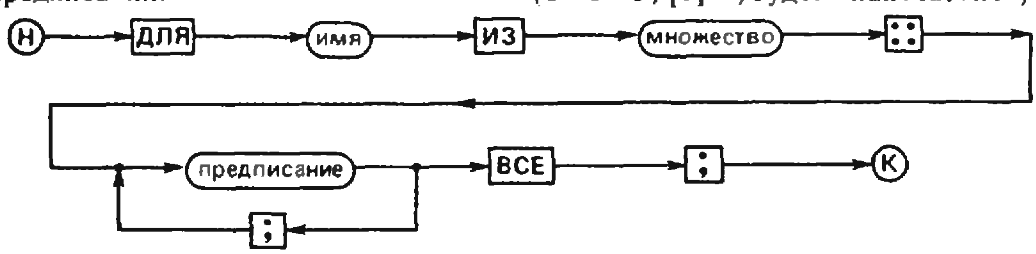
⟨*'КРОКОДИЛ', 'ГЕНА'*⟩,
⟨*1, 1, 2, 1, 2, 1+1, 1, 1, 3—1, 3—2*⟩

одинакова и равна 2.

Задание 8.3. *Указать, что отпечатает ЭВМ по программе:*

(*'ВИННИ-ПУХ', 'ПЯТАЧОК'*) —> ГОСТИ; (*'КРОЛИК'*)—> КРОЛИК; (*'КЕН' + 'ГА', 'Р', 'У', 'РУ', 'КЕ' + 'Н' + 'ГА', 'КЕНГА'*) —> КЕНГУРУ; ПЕЧАТЬ ('≠КЕНГУРУ=', ≠КЕНГУРУ); ГОСТИ + КРОЛИК —> ДОМ; ДОМ + КЕНГУРУ —> ВСТРЕЧА; ВСТРЕЧА — (*'КЕНГА', 'ПЯТАЧОК'*)—> ИГРА; ПЕЧАТЬ(ИГРА); ЕСЛИ 'ПЯТАЧОК' ИЗ ИГРА ТО ПЕЧАТЬ ('ВСЕ НА МЕСТЕ') ИНАЧЕ ПЕЧАТЬ ('КУДА УБЕЖАЛ ПЯТАЧОК?') ВСЕ;

Для работы с множествами есть специальная форма циклического предписания:



Имя, указанное после слова ДЛЯ, принято называть *переменной цикла*, а множество, записанное между ИЗ и ::, — *базовым множеством цикла*. Все действия, выполняемые над переменной цикла, на самом деле будут выполнены над каждым элементом базового множества поочередно. Например, по программе

(*5, 3, 7*)—>А; ДЛЯ Х ИЗ А :: Х+2—>Х ВСЕ; ПЕЧАТЬ (А);

будет отпечатано

(*7, 9, 5*)

а по программе

(*'ЗАЯЦ', 'ЛИСА', 'ЗЕБРА', 'БЕЛКА'*)—> ЛЕС;
ДЛЯ ЗВЕРЬ ИЗ ЛЕС
:: ЕСЛИ ЗВЕРЬ[1] = '3'
ТО ПЕЧАТЬ(ЗВЕРЬ) ВСЕ ВСЕ;

будет отпечатано:

ЗЕБРА ЗАЯЦ

Задание 8.4. *Что будет отпечатано по той же программе, если циклическое предписание записать так:*

ДЛЯ ЗВЕРЬ ИЗ ЛЕС :: ЕСЛИ ЗВЕРЬ[2] = 'Е' ТО ПЕЧАТЬ (ЗВЕРЬ) ВСЕ ВСЕ;

Кортежи и операции над ними

Кортеж, в отличие от множества, это упорядоченный набор данных: каждый элемент кортежа имеет порядковый номер, при помощи которого можно прочитать или изменить этот элемент. По форме записи кортеж в Рапире очень напоминает множество, только скобки используются другие — угловые без звездочек:

⟨ТАНЯ', 'ВИТЯ', 'САША', 'ОЛЯ' 'САША'⟩—> ЗВЕНО;

Значением имени ЗВЕНО стал кортеж из пяти элементов. Для обращения к одному элементу используются квадратные скобки: при исполнении предписания ПЕЧАТЬ (ЗВЕНО)[1])будет напечатано*) ТАНЯ. Значение элемента кортежа можно изменить:

'ПЕТЯ' —> ЗВЕНО[2]; 'ТОЛЯ' ЗВЕНО[3]; ПЕЧАТЬ(ЗВЕНО);
Результат: ⟨ТАНЯ', 'ПЕТЯ', 'ТОЛЯ', 'ОЛЯ', 'САША'⟩

Элементы кортежа всегда печатаются в порядке возрастания номеров.

Для кортежей, как и для множеств, можно использовать операции =, ≠, +, ИЗ и цикл ДЛЯ. Нужно только иметь в виду, что два кортежа считаются равными, если они состоят из одних и тех же элементов, расположенных в том же порядке. Кортежи ⟨1, 2, 1⟩ и ⟨2, 1, 1⟩ не равны между собой. Обратите внимание, что мощность кортежа ⟨1, 1, 1, 1, 1⟩ равна 5 (сравните с множествами!).

Операцию + для кортежей, как и для текстов, называют *конкатенацией* или *приписыванием*; в результа-

*)Так же, как для множеств, при исполнении процедуры ПЕЧАТЬ для кортежей кавычки, окаймляющие тексты, пропадают.

те получается новый кортеж. По программе

⟨5, 7⟩+⟨1, 3⟩—> А;
ПЕЧАТЬ(А);

будет отпечатано: ⟨5, 7, 1, 3⟩

В заключение приведем простой пример совместного использования множеств и кортежей для хранения в памяти ЭВМ списка учащихся школы. Для каждого школьника нужно помнить фамилию, имя и отчество, дату рождения и класс.

Сведения об одном школьнике можно хранить в кортеже такого вида:

⟨ФАМИЛИЯ, ИМЯ, ОТЧЕСТВО, ДЕНЬ, МЕСЯЦ, ГОД, КЛАСС⟩

например:

⟨'ОШИБОЧКИНА', 'СВЕТЛАНА', 'ИГОРЕВНА', 1, 4, 1969, '3-Б'⟩

Множество ШКОЛА, элементами которого являются такие кортежи, содержит весь список учащихся. Теперь для получения любой справки по этому списку достаточно составить очень несложную программу: например, чтобы отпечатать фамилии и инициалы всех учеников 6-Г класса, достаточно написать:

ДЛЯ УЧ ИЗ ШКОЛА :: ЕСЛИ УЧ[7] = '6-Г' ТО ИМЯ = УЧ[2]; ОТЧ = УЧ[3]; ПЕЧАТЬ (УЧ[1], ИМЯ [1], '.', ОТЧ [1], '.') ВСЕ; ВСЕ;

Задание 8.5. *Составить программу, печатающую список всех учеников из множества ШКОЛА, которые родились в 1969 году, с указанием фамилии, имени, класса и даты рождения.*

Г. Звенигородский

Олимпиада по программированию

Редакция журнала «Квант» и Вычислительный центр Сибирского отделения Академии наук СССР проводят олимпиаду по программированию. Участвовать в ней могут учащиеся Заочной школы программистов и другие школьники, изучавшие программирование в школе, на кружках, факультативах или самостоятельно.

Программы для решения задач олимпиады желательно, но не обязательно, составлять на Рапире; они могут быть составлены на любом распространенном языке программирования или в системе команд любой стандартной ЭВМ. Нужно только обязательно указать в комментарии, на каком именно языке составлена программа.

Знаком + отмечены задачи, решение которых обязательно для учащихся Заочной школы. Для перевода на второй курс школы необходимо решить не менее 5 таких задач.

Знаком * отмечены задачи повышенной трудности. Для участия в конкурсе достаточно решить одну-две задачи повышенной трудности и несколько обычных задач. *Не старайтесь решить все задачи!*

Решения должны быть отправлены не позднее 20 апреля 1980 г. по адресу: 630090, Новосибирск 90, Проспект Науки 6, ВЦ СОАН, Отдел информатики, Олимпиада юных программистов. Условия задач переписывать не нужно: достаточно указать номер решаемой задачи.

Участников олимпиады, которые не выполняли заданий Заочной школы, просим указать фамилию, имя, отчество, место учебы и домашний адрес и сообщить, где и когда они изучали программирование, с какими языками и системами команд знакомы, на каких ЭВМ работали.

25 победителей Олимпиады по программированию будут премированы участием во Всесоюзной летней школе юных программистов, которая будет проходить с 25 июля по 10 августа 1980 года в Новосибирском академгородке.

Имена победителей будут опубликованы в «Кванте».

Кроме того, на эту Летнюю школу будут приглашены 15 лучших школьников, активно участвовавших в работе Заочной школы программирования на протяжении всего учебного года и регулярно присылавших правильные ответы. Все приглашенные на Летнюю школу получат уведомление об этом по почте.

Желаем вам удачи!!

Оргкомитет

Задачи олимпиады

Задача 1. Пусть *А* — множество, элементами которого являются положительные числа.

+ а) Доказать, что программа на Рапире

```
0 —> МАКС;
ДЛЯ ЧИС ИЗ А::
ЕСЛИ ЧИС > МАКС
ТО ЧИС —> МАКС ВСЕ
ВСЕ;
ПЕЧАТЬ (МАКС);
```

отпечатает *наибольшее* из этих чисел.

+ б) Составить программу, которая отпечатает все числа из множества А в столбик в порядке убывания (рис. 1).

Задача 2. Допустим, что в программе описана функция с одним параметром ФI(М). Значениями функции могут быть целые числа от 0 до 100. Составить программы для решения таких задач:

+ а) Отпечатать таблицу значений функции для целых значений параметра М, лежащих на отрезке [0; 100].

б) Найти и отпечатать целые корни уравнения ФI(М)=0, лежащие на том же отрезке.

+ в) Построить с помощью процедур системы Шпага график функции.

* г) Найти и отпечатать площадь под графиком функции (рис. 2).

* Задача 3. Составить программу для изображения правильного 16-угольника, в котором проведены все диагонали, не проходящие через центр (рис. 3).

Задача 4. В памяти вычислительных машин можно хранить газетные и журнальные статьи, документы, книги и другие печатные материалы в виде текстов. Составить программы для решения следующих задач:

+ а) Подсчитать, сколько раз встречаются буквы 'А' и 'О' в тексте с именем ОБРЫВ.

+ б) Подсчитать, сколько раз встречается слово 'СИНЕГЛАЗКА' в тексте с именем НЕЗНАЙКА.

* в) Всюду в тексте с именем ПРИКАЗ заменить слова 'КАПИТАН ИВАНОВ' на 'МАЙОР ИВАНОВ'.

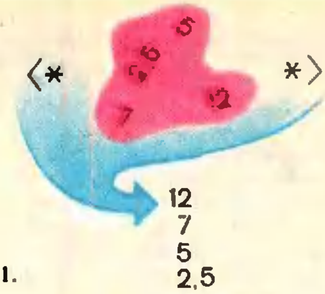


Рис. 1.

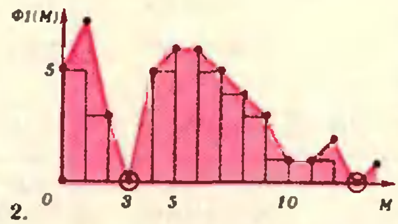


Рис. 2.

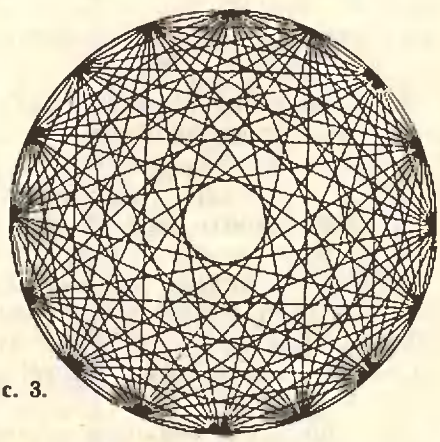


Рис. 3.

*г) Разбить текст с именем ЧАПАЕВ на строки по 60 символов и составить из них кортеж. Если какое-либо слово попадает на границу строки, то его нужно «передвинуть» в начало следующей строки, добавив в текст нужное число пробелов.

**д) В условиях предыдущей задачи предусмотреть автоматическое «растягивание» строк: если в конце строки есть пробелы, то их необходимо ликвидировать, увеличив для этого интервалы между словами внутри строки (по возможности равномерно).

Задача 6. Межпланетная станция движется параллельно оси ОХ в некоторой координатной плоскости ОХУ с постоянной скоростью *V*. К ней в автоматическом режиме летит транспортный корабль с постоянной по величине скоростью *V*1, которая в каждый момент времени направлена на станцию (рис. 4).

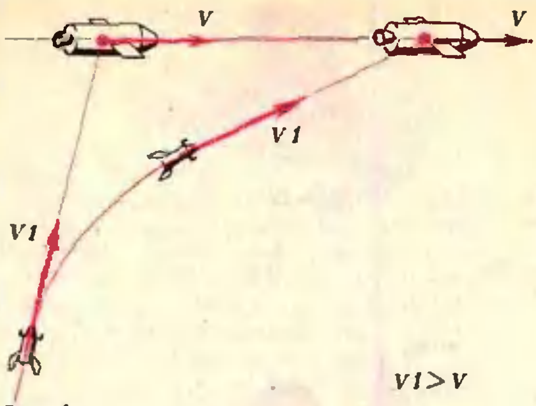


Рис. 4.

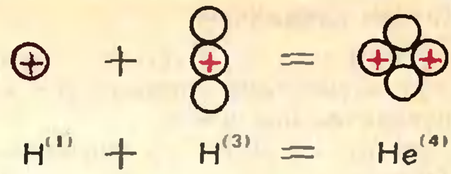


Рис. 5.

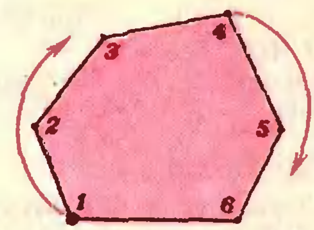


Рис. 6.

В начальный момент T=0 станция находится в точке (0, H), а корабль — в начале координат (0, 0). Составить программы, решающие следующие задачи:

* а) Нарисовать траекторию полета корабля.

* б) Нарисовать кадры мультфильма, изображающие приближение корабля к станции (скорость проекции — 24 кадра в секунду).

* в) Определить время полета корабля до встречи со станцией.

* г) Решить задачи а) — в) для случая, когда в начальный момент корабль находится в точке (A, 0), где A>0, то есть корабль летит навстречу станции.

* д) Решить предыдущие задачи, когда корабль совершает маневр, то есть его ордината У(T) является известной функцией времени T, а составляющая скорости по оси OX остается постоянной.

Указание. При составлении программ можно считать, что скорость корабля меняет направление не непрерывно, а через равные промежутки времени T1, например T1=1/24 с.

Задача 7. Придумать способ хранения в памяти ЭВМ (желательно с использованием множеств и кортежей) следующей информации:

а) таблицы планет Солнечной системы (название, среднее расстояние от Солнца, радиус, масса, состав атмосферы).

\+ б) таблицы Менделеева (обозначение, название, атомный номер, атомный вес каждого элемента).

С использованием этих таблиц составить программы для решения следующих задач:

в) Отпечатать список планет в порядке возрастания их радиусов.

г) Отпечатать список планет, в атмосфере которых имеется углекислый газ.

\+ д) Отпечатать список химических элементов, атомный вес которых меньше, чем у кислорода.

* е) Определить название и обозначение химического элемента, ядро которого может быть получено при слиянии ядер двух заданных элементов (рис. 6).

Указание. Программу для пункта е) удобно оформить как процедуру, параметрами которой будут обозначения элементов, ядра которых участвуют в реакции.

Задача 8. Точку на плоскости удобно представлять в виде кортежа из координат: <X, У>. Выпуклый многоугольник можно представить в виде множества таких кортежей. Пусть M — такое множество, а T — кортеж координат некоторой точки. Составить программы для решения следующих задач:

* а) Построить по множеству M кортеж K, в котором вершины многоугольника будут расположены в том порядке, в каком они встречаются при обходе контура многоугольника по часовой стрелке, начиная с самой «нижней» вершины (если таких вершин две, начиная с самой левой из них).

* б) Проверить, находится ли точка T внутри многоугольника, определяемого множеством M.

** в) Проверить, находится ли точка T внутри невыпуклого многоугольника, заданного кортежем K.

Новые книги

Мы продолжаем публиковать аннотации на книги по математике и физике, доступные и интересные нашим читателям. В этом номере мы рассказываем о книгах, выходящих в первом квартале 1980 года.

Математика

Издательство «Наука»

1. Берман Г. Н. *Циклоида.* Издание 3-е. Объем 6 л., тираж 100 000 экз., цена 20 к.

Циклоидой называется кривая, которую описывает точка окружности, катящейся без скольжения по прямой. Изучению свойств этой замечательной кривой и некоторых родственных ей кривых и посвящена эта книга.

Чем же так замечательна циклоида? Прежде всего — своим исключительным значением для техники. По их практической ценности циклоидальные кривые можно поставить рядом с эллипсом, параболой, баллистической траекторией.

Во-вторых, циклоидальные кривые были пробными камнями, на которых испытывались новые математические идеи, новые приемы вычислений, возникшие в XVII веке и сформировавшиеся к концу этого века в дифференциальное и интегральное исчисления. С изучением циклоиды связаны имена, известные любому школьнику: ею занимались Галилей, Торричелли, Гюйгенс.

Изложение в книге совершенно элементарное, рассуждения близки к рассуждениям великих итальянских и французских математиков, которые занимались циклоидой. Например, приводя рассуждения Гюйгенса, который ответил на вопрос, *по какой кривой должна двигаться точка, чтобы период ее колебаний не зависел от амплитуды* (этой кривой оказалась циклоида), автор пишет: «Мы излагаем рассуждения Гюйгенса, несколько упрощая их и выражаясь современными терминами. При этом наше изложение более доступно, но очень теряет в выразительности, — это лишь «...с живой картины список бледный».»

Яркая, талантливая книга Георгия Николаевича Бермана, помимо интересных математических и физических фактов, содержит много исторических сведений. Безусловно, ее читатели получат удовольствие.

2. Понтрягин Л. С. *Математический анализ для школьников.* Объем 6 л., тираж 100 000 экз., цена 25 к.

Эта брошюра включает в себя материал, охватывающий все разделы математического анализа, изучаемые в школе. В ней рассматриваются производные многочленов, тригонометрических функций, показательной и логарифмической функций. Интеграл определяется как операция, обратная к дифференцированию, как площадь под графиком и как предел конечных сумм. В конце каждого параграфа даются упражнения. В книге делается упор не на строгость изложения, а на технику вычислений.

Издательство «Мир»

3. Лойд С. *Математическая мозаика.* Перевод с английского. Объем 18 л., тираж 100 000 экз., цена 1 р. 30 к.

Сборник занимательных математических задач и головоломок составлен из двух книг, принадлежащих классику этого жанра, знаменитому американскому математику Сэму Лойду. Его головоломки пользуются большой популярностью во всем мире. Известны они и любителям занимательной математики в нашей стране (некоторые головоломки публиковались в «Кванте»), хотя и без имени автора — книги Лойда до сих пор на русский язык не переводились.

Собрал лучшие задачи и головоломки Сэма Лойда и отредактировал их известный американский популяризатор математики Мартин Гарднер.

Физика

«Атомиздат»

1. Имянитов И., Тихий Д. *За гранью законов науки.* Издание 2-е, переработанное. Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 40 к.

Шаровая молния — это редкое метеорологическое явление — всегда привлекала внимание человека. Почему она возникает? Каковы ее свойства? Как она взаимодействует с окружающей средой?

На пути изучения этого явления стоит много трудностей, и самая основная из них — недостаточность достоверных, научных сведений.

Книга ставит своей целью заинтересовать читателя проблемой, описать условия возникновения шаровых молний, рассказать о теориях, их объясняющих, включить читателей в круг поисков решения увлекательной и трудной задачи.

Издательство «Просвещение»

2. Зигель Ф. Ю. *Звездная азбука.* Объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 50 к.

В книге изложены основные сведения о Земле и небесной сфере, о планетах, кометах и метеорах. Дано описание простейших астрономических приборов и способов проведения наблюдений.

И. Клумова,
М. Смолянский

Список читателей...

(Начало см. на с. 36)

6), 64; *Д. Пивоваров* (Солнцево) **46**; *И. Пиковский* (Киев) **46, 47, 57, 60а)**; *К. Поддубный* (Желтые Воды) **54—57, 60а)**; *В. Подстригач* (Львов) **46—50, 54, 55а), 58, 60а), 62, 63**; *А. Поезд* (Москва) **46, 47, 50, 51, 53, 55а), 62**; *М. Пономаренко* (Рудный Кустанайской обл.) **60а)**; *А. Попелюхин* (Киев) **46, 47, 54, 55а), 56, 57, 60а), 62, 64**; *Е. Попов* (Белорецк) **63**; *В. Потапов* (Новосибирск) **46—48, 52, 53, 57**; *Л. Потемкин* (Донецк) **47, 50—52, 57, 58**; *М. Привороцкий* (Киев) **57**; *Ю. Прохоров* (Орехово-Зуево) **47**; *Ю. Прохоров* (Новосибирск) **47**; *В. Радченко* (Киев) **47, 50, 52—54, 57, 60а), 62, 64**; *Ф. Ратников* (Ленинград) **62**; *И. Ройзман* (п. г. т. Калиновка Виницкой обл.) **46, 47, 51, 52, 54, 56, 60а), 62, 64**; *Н. Рыбалко* (Новосибирск) **53, 62**; *С. Савченко* (Киев) **51, 54**; *Н. Салахов* (Сумгаит) **55а)**; *И. Сафаров* (с. Кергелян АзССР) **46, 47, 53**; *Н. Севастьянов* (Саратов) **46, 48а)**; *М. Семенченко* (Новочеркасск) **57**; *С. Семенякин* (Киев) **46**; *Н. Сивакова* (Макеевка) **47**; *А. Сивацкий* (Ленинград) **46—49**; *А. Сивенцев* (Свердловск) **47**; *В. Скребенкова* (Киев) **46, 47**; *А. Смирнов* (Курган) **56, 60а)**; *О. Софьянов* (Пенза) **46**; *А. Сромин* (Ленинград) **47, 49, 50**; *С. Стадниченко* (Пенза) **46, 47, 48а), 49, 50, 52, 53, 57, 64**; *С. Стешенко* (п/о Малоданиловское Харьковской обл.) **55а)**; *И. Страдынь* (Рига) **56**; *М. Стрешинский* (Донецк) **56**; *С. Танкеева* (Кокчетав) **53**; *В. Тарунин* (Пермь) **55, 62**; *С. Тарутин* (Пенза) **46**; *Й. Твилдис* (Каунас) **51, 55а)**; *Л. Тепер* (с. Ялтушков Винницкой обл.) **53, 56, 57, 62**; *Л. Тимофеев* (Клин) **46, 56, 57**; *В. Титенко* (д. Блужа Минской обл.) **51, 54, 57**; *В. Трофимов* (Москва) **54**; *Ю. Трофимчук* (п. г. т. Калиновка Винницкой обл.) **46**; *Д. Тураев* (Горький) **46, 47, 49**; *Р. Угриновский* (Хмельник) **46, 51, 56**; *А. Уливанов* (Горький) **47**; *В. Ушаков* (Харьков) **46**; *Д. Файнгауз* (Ленинград) **51, 53, 55а), 56—58**; *В. Фарбер* (Баку) **47**; *Н. Федин* (Омск) **46, 47, 55**; *Д. Фурман* (Мозырь) **56**; *А. Харитонов* (Горький) **53, 54**; *А. Харитонский* (Киев) **46, 47**; *С. Хомич* (Ангарск) **48а)**; *О. Хоружий* (Черновцы) **46**; *И. Хускутдинов* (Термез) **60а)**; *В. Цекановский* (Донецк) **53, 54, 56, 57, 60а), 62, 63**; *З. Цихиставн* (Телави) **46, 47**; *С. Чеботарев* (Москва) **56, 57, 60а)**; *И. Черная* (Ленинград) **46—49, 53, 54, 63, 64**; *М. Чернецкий* (Москва) **56—58, 60а)**; *О. Чечель* (Москва) **51—54, 55а), 57, 60б)**; *Н. Читашвили* (Тбилиси) **46, 48а)**; *А. Чулков* (п. Мучкап Тамбовской обл.) **46, 47**; *Н. Шаромет* (Москва) **51, 56, 57, 60а), 64**; *А. Шихкеримов* (Сумгаит) **47**; *Ю. Школьников* (Киев) **47**; *С. Шмелев-Агинский* (Москва) **46, 47, 48а), 51, 52, 54—58, 60а), 62, 64**; *А. Эльберт* (Киев) **46**.

Физика

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф558—Ф572**, справились с задачами **Ф563, Ф565, Ф567** и **Ф569**. Остальные задачи правильно решили: *А. Абрамочкин* (Киев) **71**; *А. Азаркевич* (Фаниполь) **70**; *М. Алексеев* (Обнинск) **60**; *И. Аполонский* (Жуковский) **58, 60**; *А. Аржанова* (Сызрань) **72**; *А. Астахов* (Железнодорожный Московской обл.) **71**; *Р. Бабаев* (Баку) **66**; *В. Байран* (Александровский р-н Херсонской обл.) **59**; *М. Белая* (Москва) **71**; *В. Белоус* (Днепропетровск) **64, 66**; *А. Беляев* (Витебск) **70**; *М. Беркинбаев* (Шуманайский р-н УзССР) **66, 68, 71, 72**; *А. Бессарабский* (п. Запрудня Московской обл.) **64, 66, 68, 70, 72**; *И. Бессонов* (Реутов) **64, 68, 72**; *А. Божко* (Алма-Ата) **71**; *Л. Брагинский* (Волгодонск) **64, 71**; *С. Вагнер* (Джезказган) **72**; *А. Велько* (п. Сахарный Завод Минской обл.) **66, 68**; *Е. Велько* (п. Сахарный Завод Минской обл.) **68**; *Е. Войтенко* (Киев) **61, 72**; *М. Гаврилов* (п. Черноголовка Московской обл.) **58, 59, 61, 62, 64, 66, 70—72**; *С. Глушко* (Дрогобыч) **58, 59, 61**; *А. Глушков* (Йошкар-Ола) **66**; *И. Голубцов* (Елгава) **71**; *С. Городько* (Днепропетровск) **60**; *Д. Григорьев* (Москва) **64, 70**; *И. Грузберг* (Пермь) **66, 71**; *С. Грязнов* (Киев) **64**; *А. Гуляев* (Москва) **62, 70, 71, 72**; *И. Даниловский* (Горький) **58, 61, 62, 64**; *И. Деребас* (Магнитогорск) **71**; *В. Джалоян* (с. Урцадзор АрмССР) **66**; *В. Дидух* (Львов) **59, 62, 64, 66**; *С. Довбыш* (Москва) **58—62, 64, 66, 70—72**; *А. Дремин* (п. Черноголовка Московской обл.) **70—72**; *А. Егоров* (Осинники) **64, 66**; *И. Елишевич* (Чернигов) **64**; *Е. Желиговская* (Москва) **71, 72**; *Н. Житенев* (п. Черноголовка Московской обл.) **58, 61, 62, 64, 66, 70—72**; *В. Жордочкин* (Орск) **71**; *Г. Заславский* (Тбилиси) **64, 66, 71**; *И. Зильберберг* (Алма-Ата) **64, 70, 71**; *Е. Зудин* (Александров) **58—61, 64, 66**; *И. Иванов* (Саратов) **59, 62**; *В. Израилит* (Днепропетровск) **64, 70**; *О. Исупова* (Оренбург) **64**; *Р. Камалян* (Ереван) **64**; *В. Катин* (Житомир) **70, 72**; *И. Кечов* (Сухуми) **62, 64**; *Е. Коган* (Днепропетровск) **58, 59, 61, 62, 64, 66**; *Г. Кожаридзе* (Телави) **70, 71**; *А. Кожевников* (Днепропетровск) **62, 70, 71**; *В. Колевзон* (Харьков) **64**; *Г. Коломойцев* (Сумгаит) **62**; *В. Комов* (Александров) **59—61, 64, 66**; *Ю. Кондрахин* (Новосибирск) **60**; *И. Красиков* (Киев) **60, 61, 66, 70**; *Р. Крис* (Киев) **64, 66, 72**; *Е. Кузнецов* (Кишинев) **66, 72**; *А. Кузьмин* (Алма-Ата) **71**; *С. Курчатов* (Саратов) **64, 66, 68, 71, 72**; *А. Кушнеров* (Москва) **62**; *В. Ланских* (Бобруйск) **58**; *А. Левинштейн* (Запорожье) **64**; *М. Левитин* (Москва) **64**; *В. Лемберг* (Одесса) **66**; *В. Леонов* (Воронеж) **58, 60, 62, 66, 71**; *Е. Лисянская* (Харьков) **64**; *С. Логунов* (Москва) **62, 64**; *И. Лукьянчук* (Киев) **66, 72**; *Д. Людмирский* (Киев) **58**; *Л. Ляпин* (Гомель) **58, 60—62, 68, 70, 71**; *С. Маломанов* (Ленинград) **62, 66**; *Е. Матчишин* (Целиноград) **71**; *Е. Меденников* (Ульяновск) **70, 71**; *М. Межуева* (Челябинск) **59, 66**; *А. Минаев* (Саратов) **61, 71**; *В. Мирзоев* (п. Ярдымлы АзССР) **70, 72**; *А. Михайлов* (Москва) **59, 60, 62, 64, 66, 72**; *И. Михайлов* (Кемерово) **64**; *С. Михайловский* (Виноградовский р-н Архангельской обл.) **61, 64, 66, 70**; *Г. Молчанов* (Саратов) **58—60, 62, 66, 68, 71, 72**; *С. Надточий* (Москва) **64, 71**; *А. Назаренко* (Киев) **62, 64, 70, 71**; *В. Наталич* (Ашхабад) **59, 61**; *Г. Нечаева* (Курск) **70**; *А. Новиков* (с. Шарлык Оренбургской обл.) **58, 62**; *Д. Овсянников* (Ленинград) **58, 60, 71**; *О. Одинцов* (Курск) **58, 62**; *А. Орлов* (п. Черноголовка Московской обл.) **64, 66, 70—72**; *О. Панащенко* (Киев) **58, 62, 64, 66, 70, 72**; *И. Педак*

(Окончание см. на с. 60)

Прикладная математика: интересно, актуально, перспективно!

В книге А. Н. Тихонова и Д. П. Костомарова «Рассказы о прикладной математике» (М., «Наука», 1979) раскрывается содержание работы математика-прикладника, той его профессиональной, творческой деятельности, которая предшествует машинному счету задачи и делает этот счет возможным. Сами авторы видят цель своей книги в том чтобы «в популярной форме рассказать широкому кругу читателей и прежде всего учащейся молодежи о прикладной математике, об идеях, методах, трудностях исследований, связанных с применением математических методов и вычислительной техники к изучению законов природы и их использованию в практической деятельности людей».

Теперь юный читатель получит информацию о специальности «прикладная математика», что называется, из первых рук. Ведь один из авторов книги, академик А. Н. Тихонов, директор Института прикладной математики АН СССР, был инициатором создания факультета вычислительной математики и кибернетики Московского университета и является его бессменным деканом, а другой автор, Д. П. Костомаров,— профессор этого факультета, видный специалист по вычислительной математике и математической физике. Совсем, к сожалению, не часто авторы такого ранга считают необходимым и, главное, находят время написать книгу, адресованную школьникам.

Такая книга нужна была уже давно. По крайней мере с начала семидесятых годов, когда в различных университетах нашей страны открылись факультеты прикладной (вычислительной) математики. Ведь для юного любителя математики, выбирающего свой путь после школы, очень важен конкретный, заинтересованный и компетентный рассказ о современной науке.

...Нельзя сказать, что для широкого круга читателей про электронно - вычислительные машины написано недостаточно. Имеется довольно большое число научно-популярных книг и брошюр, где рассказывается о принципах внутреннего устройства компьютеров, об их широком использовании в различных областях науки и техники, о том, какие практически важные результаты они «выдавали», решая многочисленные народнохозяйственные задачи. Часто материалы об ЭВМ публикуют газеты и журналы, но, как правило, в этих материалах лишь в самых общих фразах говорится, что реально дают ЭВМ, насколько много они могут.

Во всех этих рассказах об ЭВМ остается за кадром деятельность математика, не объясняется, как фактически «заставить» компьютер решить нужную задачу. Именно поэтому у многих юношей и девушек (да и не только у них) создается впечатление, что вычислительная машина в состоянии (или не сегодня-завтра будет в состоянии) сама справиться с любой задачей, а работа специалиста по прикладной математике состоит лишь в том, чтобы изложить на языке машины («запрограммировать») условие задачи и нажать кнопку «Пуск».

Чем же, прежде всего, занимается прикладная математика? Авторы книги отвечают так: современная прикладная математика «включает круг вопросов, связанных с использованием математических методов и вычислительной техники... в самых различных областях человеческой деятельности». И этот круг вопросов непрерывно расширяется — на наших глазах бурно протекает процесс, который называют математизацией науки и производства. Сегодня невозможно достаточно полно познавать закономерности как неживой, так и живой природы, обеспечивать прогресс техники, управлять производственными процессами и развитием народного хозяйства без широкого и систематического привлечения математического аппарата и электронно-вычислительных машин.

Совершенно ясно, что математические методы непосредственно применить к исследованию реального объекта (явления природы, работы машины, технологического процесса, составления экономического плана) невозможно. Сначала интересующей нас задаче надо придать математическую форму — описать наиболее существенные черты и свойства объекта на языке математических понятий и соотношений. Вот почему первым основным элементом прикладной математики является, как говорят, формализация исследуемого объекта, построение соответствующей математической модели. Построение такой модели требует сочетания глубоких знаний о реальном объекте с высокой математической культурой. Именно поэтому прикладной математик должен обладать не только всесторонней математической подготовкой, но и по-настоящему разбираться в той области знаний или производства, задачами которой он занимается.

В книге приведено несколько конкретных примеров построения математических моделей (использующих доступные школьникам математические понятия и факты). Читатель имеет возможность подробно познакомиться с различными аспектами этой работы, в частности с проблемой выяснения степени соответствия модели реальному объекту. Одна из задач (о движении тела, которому сообщили начальную скорость под углом к поверхности Земли) — к ней авторы возвращаются несколько раз — дает возможность рассказать, как процесс изменения требований практики, углубления человеческого знания влечет за собой последовательное уточнение математической модели, все глубже и всесторонне описывающей реальный процесс.

Но допустим, что математическая модель уже построена. Тогда перед нами возникает типично математическая задача, которая, грубо говоря, заключается в том, чтобы по известным исходным данным и определенным соотношениям найти интересующий нас ответ. Поиск метода решения сформулированной математической задачи — дело человека. Если этот метод неизвестен, то наивно думать, что его может найти машина.

Что же нового в таком случае в прикладной математике по сравнению с математикой классической? Ведь и классическая математика (ее иногда очень неудачно пытаются называть «чистой») возникла из практических потребностей людей, имела дело с математическими моделями, решала математические задачи.

В прошлом при решении задач основной метод состоял в получении нужных следствий из данных посылок с помощью законов формальной логики, а главная цель виделась в выводе «точной формулы», явно связывающей искомые величины с заданными. Между тем в подавляющем большинстве задач найти явную формулу, точный ответ по разным причинам нельзя в принципе. Тогда естественно попытаться указать правило выполнения бесконечной последовательности вычислительных операций, позволяющей за конечное число шагов получить приближенное решение с требующейся точностью. Однако такой подход применялся раньше очень редко — не потому, что математики считали вычисления недостойным занятием, а из-за чрезвычайной их трудоемкости и даже практической неосуществимости на имевшихся вычислительных средствах.

Создание современных ЭВМ кардинально изменило ситуацию: сейчас имеется реальная возможность проводить исчерпывающий анализ широких классов математических задач не только путем формально-логических умозаключений, но и на основе фактического осуществления вычислений. Вторым основным элементом прикладной математики как раз и является разработка алгоритмов — точных описаний последовательностей вычислительных операций, позволяющих получить с помощью ЭВМ приближенные решения задач. Выбрав несколько достаточно типичных задач, авторы прослеживают весь путь от предварительного осмысления задачи и возникновения идеи, положенной в основу численного метода, до окончательной формулировки алгоритма, его обоснования и сравнения с другими алгоритмами решения той же задачи. Этот материал представляет несомненный интерес для юного любителя математики, поскольку содержит строгое и одновременно вполне посильное для понимания изложение важных математических вопросов. Особое внимание хочется привлечь к главе, содержащей введение понятия определенного интеграла и описание алгоритмов численного интегрирования.

Авторы книги убедительно показывают, что задачи прикладной математики — это сложные и серьезные математические задачи, требующие широких познаний в самых различных разделах теоретической математики и умения учитывать все возможности вычислительной техники.

Третьему основному элементу прикладной математики — электронно-вычислительным машинам — посвящена небольшая, но ярко написанная глава. Здесь рассказывается об истории вычислительной техники, о принципах действия ЭВМ (но без описания технической стороны дела), о проблеме общения человека с машиной, о самых разнообразных применениях компьютеров.

Электронно-вычислительные машины — одно из наиболее значительных творений науки и техники XX века, открывающее огромные возможности прогресса. Однако сами по себе ЭВМ ни одной задачи решить не могут, они не работают без направляющего воздействия человека. Поэтому сегодня особенно актуально привлечь к прикладной математике внимание и интерес талантливой молодежи — тех, кто через несколько лет сможет превратить возможности прогресса в реальность жизни. Замечательная книга А. Н. Тихонова и Д. П. Костомарова как раз и служит этой высокой цели.

Н. Розов

Список читателей...

(Начало см. на с. 36, 58)

(Запорожье) **59**; *А. Перов* (Москва) **60, 62, 70, 72**; *А. Полисский* (Киев) **60, 66**; *Ф. Ратников* (Ленинград) **58, 59, 62, 68, 70—72**; *С. Рафонов* (Киев) **72**; *И. Рзаев* (Гардимлинский р-н АзССР) **70**; *Е. Рудь* (Грозный) **64**; *А. Рыбин* (Талды-Курган) **64**; *Г. Рыбкин* (Смоленск) **71**; *А. Сагаутдинов* (Алма-Ата) **58, 60, 62**; *А. Сагура* (Запорожье) **66**; *С. Сафонов* (Киев) **60**; *В. Семенов* (Киев) **62**; *Т. Сергейцев* (Челябинск) **68, 70—72**; *В. Середа* (Львов) **62, 64, 66, 71, 72**; *Ю. Сиренко* (Киев) **58, 59, 62**; *А. Скок* (Талгар) **64**; *Ю. Скосарев* (Новоузский р-н Ярославской обл.) **66**; *Е. Смирнов* (Александров) **64**; *С. Смирнов* (Ташкент) **72**; *А. Смычкович* (Минск) **71**; *Г. Солдак* (Минск) **64, 66, 71, 72**; *Д. Соляков* (Курчатов) **59, 66**; *Д. Сорока* (Запорожье) **62, 70, 71**; *А. Сромин* (Ленинград) **58, 62, 68**; *С. Стешенко* (с. Малоданиловское Харьковской обл.) **59, 66**; *А. Стрешинский* (Донецк) **58, 72**; *Д. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) **60, 64, 66, 71, 72**; *С. Суров* (Оренбург) **66**; *А. Тагаев* (Новосибирск) **60**; *Д. Файнгауз* (Ленинград) **64, 70—72**; *А. Фарбер* (Баку) **64, 70—72**; *Н. Федин* (Омск) **58—60, 62, 64, 66, 68, 70, 71**; *А. Флеров* (Рига) **64, 70—72**; *И. Фоменко* (Днепропетровск) **60, 62, 64, 66**; *М. Фурман* (Мозырь) **70, 71**; *О. Хоружий* (Череповец) **62**; *В. Целиков* (Череповец) **58, 59, 64, 66, 68, 70, 72**; *Ю. Цыганков* (Дрожжановский р-н ТаССР) **64, 72**; *В. Чебоксаров* (Владивосток) **64, 66**; *Е. Чулкин* (п. Рябово УдАССР) **60, 64**; *А. Чумадин* (Баку) **64, 70**; *В. Шаблинский* (Киев) **58—60, 62, 64, 66, 70, 72**; *А. Шайхулов* (Ижевск) **72**; *С. Шарый* (Семипалатинск) **62, 70, 71**; *И. Швец* (Желтые Воды) **60, 64, 68, 70, 71**; *В. Шехетов* (Караганда) **71**; *А. Шимановский* (Гомель) **64, 66, 68**; *В. Шиков* (Боготол) **64**; *С. Шишков* (Москва) **66**; *И. Шкрадюк* (Ногинск) **64, 71**; *М. Эргашов* (Фергана) **70**; *М. Яковлев* (Кемерово) **62**; *А. Яценко* (Тбилиси) **60**.

Консультирует чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов. Ведет страничку мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.

В марте должны закончиться четвертьфинальные матчи претендентов и претенденток. На рисунках 1, 2 приведены схемы, на которых вы можете отмечать результаты этих матчей. К концу года знаки вопросов будут сняты, и тогда мы узнаем, с кем в матчах на первенство мира в 1981 году предстоит отстаивать свои чемпионские звания Анатолию Карпову и Майе Чибурданидзе.

Заметим, что из всех этапов борьбы за первенство мира только соревнования претендентов проходят по кубковой (олимпийской) системе. Зональные и межзональные турниры проводятся по круговой системе, при которой все шахматисты играют друг с другом. В статье «Кто поедет в Рио?» («Квант», 1972, № 8) рассматривался ряд интересных задач про кубковые турниры в предположении, что верен «принцип транзитивности»: если А играет сильнее Б, а Б играет сильнее С, то А играет сильнее С. К сожалению, на практике этот принцип не всегда выполняется. Так, любой неудачник третьей пары (см. рис. 1) имеет более высокий коэффициент Эло, чем участники второй пары, но, увы, борьбу за мировую корону после четвертьфинала продолжит только один из двух выдающихся шахматистов — М. Таль или Л. Полугаевский.

Предлагаем вам теперь решить четыре задачи — одну про кубковый турнир, одну про круговой и две на шахматной доске.

1. В розыгрыше кубка города участвуют n шахматистов. Предварительно пройдут кубки районов (в городе p районов с числом шахматистов $n_1, n_2, \dots, n_p$), и победители уже разыграют главный кубок города. Оба этапа соревнования проводятся по такой системе: еще не выбывшие шахматисты жеребьевкой разбиваются на пары и противники играют одну партию, проигравший выбывает из розыгрыша кубка (в случае ничьей борьбу продолжают черные; если одному игроку нет пары, то он выходит в следующий круг без игры) и т. д.

Организаторам кубка предстоит заказать бланки для записи каждым участником каждой своей партии, и они оказались в затруднительном положении. Сколько бланков нужно заказать, чтобы все партии были записаны?

2. В круговом турнире всего было сыграно 55 партий. Два участника по болезни выбыли из него, причем один успел сыграть 10 партий, а другой только одну. Встречались ли эти шахматисты между собой?

3.4. Этюды (рис. 3, 4) совершенно не похожи друг на друга, и решение второго намного сложнее, чем первого. Однако основная идея у них одна и та же и она является чисто геометрической.

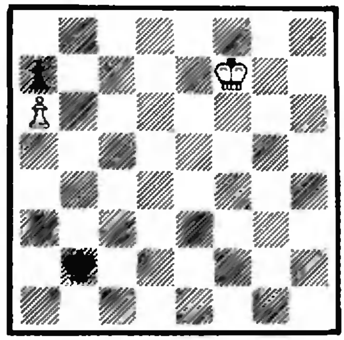


Рис. 3. И. Майзелис. Белые начинают и выигрывают.

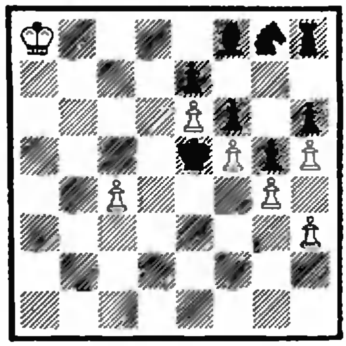


Рис. 4. Б. Гургенидзе, В. Корольков. Белые начинают и выигрывают.

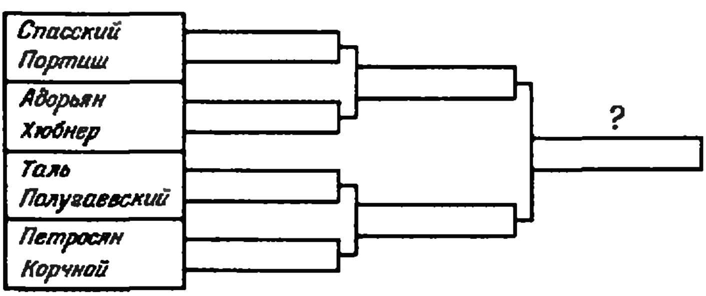


Рис. 1. Матчи претендентов среди мужчин.

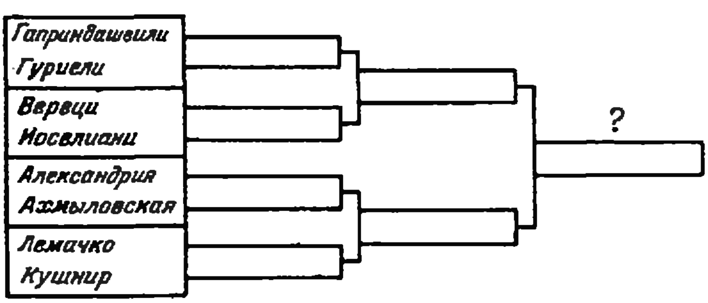


Рис. 2. Матчи претендентов среди женщин.

Закон всемирного тяготения

1. $\Delta R \approx \frac{2m|\vec{u}|}{M}\sqrt{\frac{R_З}{g}} \approx 40$ м.

Указание. Изменение скорости спутника $\Delta|\vec{v}|$ и изменение радиуса его орбиты ΔR связаны соотношением $2|\vec{v}|\Delta|\vec{v}| = g\Delta R$.

2. $\frac{M_Ю}{M_З} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2\left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 \approx 320$.

3. $r_{max} = 2R\left(\frac{T}{T_З}\right)^{2/3} - r_{min} \approx 52 \cdot 10^8$ км,

где $T_З = 1$ год — период обращения Земли вокруг Солнца.

Указание. Воспользуйтесь первым и третьим законами Кеплера.

4. $|\vec{u}| = (\sqrt{2}-1)\sqrt{gR_З^2/R}$, направление вектора $\vec{u}$ должно совпадать с направлением движения спутника по орбите.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика на гуманитарных факультетах Отделение планирования и экономической кибернетики экономического факультета

1. $x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2\pi n, \quad n \in \mathbf{Z},$

$y = (-1)^k\frac{\pi}{3} + \pi k, \quad k \in \mathbf{Z}.$

2. $\frac{1}{5}\sqrt{7105}$. Указание. Полезно ввести систему координат Exy так, как указано на рисунке 1.
3. 726 денежных единиц.
4. Площадь будет наибольшей и равной $\frac{2}{3}(5-3\sqrt{2})$ при $a = 1$. Указание. Здесь удобнее выразить площадь S через y (а не через x), тогда площадь $S(a)$ находится сразу:

$$S(a) = \int_1^2\left(\sqrt{\frac{2y}{a}} - \sqrt{\frac{y}{a}}\right)dy = \frac{2}{3}(5-3\sqrt{2})\frac{1}{\sqrt{a}}.$$

5. $]^1/_3;\ 2+\sqrt{15}[$.

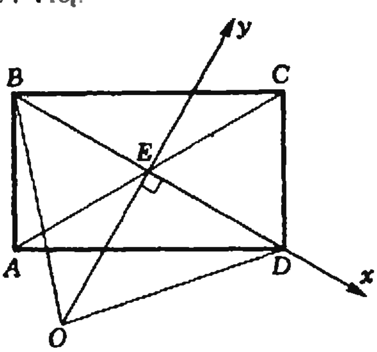


Рис. 1.

Факультет психологии

1. $x = (-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n \quad (n \in \mathbf{Z})$.
2. Площадь фигуры равна b при $a = \sqrt{\frac{8}{3b}} - 1$, задача имеет решение при $0 < b < \frac{8}{3}$.
3. $]-1-2\sqrt{2};\ -3\ [\cup]\ 1;\ 3]$.
4. $\frac{16}{3}\sqrt{2}$.
5. $\{(1;\ 5;\ 0),\ (1;\ -5;\ 0),\ (-1;\ 5;\ 0),\ (-1;\ -5;\ 0)\}$.

Указание. Полезно сделать замену $n = y - z$.

Отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета

1. $10R^2(\sqrt{3} + \frac{2}{3}\pi)$.
2. $x_1 = \pi k \quad (k \in \mathbf{Z})$;

$x_2 = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n \quad (n \in \mathbf{Z})$.

3. $]1;\ 2]\ \cup\ [3;\ 4[$.
4. Первая линия выполняет сменное задание за 8 часов.
5. Дробь $\frac{3n-m}{5n+2m}$ можно сократить на 11.

Указание. Из условия задачи следует, что $3n - m = kp$ и $5n + 2m = kq$, где p и q взаимно просты. Умножая первое уравнение на 2 и складывая со вторым, получим $11n = k(2p+q)$; умножая первое на 5, второе на 3 и складывая, получим $11m = k(-5p+3q)$. Из полученных уравнений не сложно вывести, что k делится на 11 и даже, что $k = 11$.

Физика на естественных факультетах

Химический факультет и отделение геофизики геологического факультета

1. $t = \frac{\pi(1+\sqrt{2})}{2}\sqrt{\frac{R_1}{g}} \approx 1{,}2$ с.
2. $x < \frac{a}{\sqrt{2}(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)} = 1{,}5$ м.
3. $A = p_0V\Delta t/T \approx 3{,}46$ Дж.
4. $r = R/\sqrt{2} \approx 1{,}4$ Ом.
5. $n_{min} = 1/\sin\alpha \approx 1{,}15$.

Географический факультет, отделение общей геологии геологического факультета и факультет почвоведения

1. $|\vec{F_a}| = mga/c = 200$ Н (стержень AB растянут); $|\vec{F_b}| = mgb/c = 250$ Н (стержень CB сжат).
2. $t = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{l}{g}} \approx 0{,}35$ с.
3. $\Delta m = m_1(t_2 - t_1)/T_2 \approx 27$ г.
4. $U_{AB} = -{}^2/_3\mathscr{E} = -4$ В.
5. $S = a^2\sqrt{3} \approx 692$ см^2.

Заочная школа программирования, урок 4

(см. «Квант», 1979, № 11)

4.1

ЗАПОМНИТЬ ПРОЦЕДУРУ ЧЕТВЕРКА;
10 СЛОЖИТЬ А С А И ПРИСВОИТЬ А;

```
20 СЛОЖИТЬ А С А И ПРИСВОИТЬ А;
ЗАКОНЧИТЬ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕДУРЫ;
```

4.2

```
1 ПРИСВОИТЬ N; 0 ПРИСВОИТЬ М;
0 ПРИСВОИТЬ S;
ЗАПОМНИТЬ РЕЛЬС;
10 ПРОЕХАТЬ 24М;
20 СЛОЖИТЬ 1 С N И ПРИСВОИТЬ N;
30 СЛОЖИТЬ 24 С М И ПРИСВОИТЬ М;
40 :ПРОВЕРКА; ЗАКОНЧИТЬ;
ЗАПОМНИТЬ СИГНАЛ;
10 ОТПЕЧАТАТЬ 'СТЫК НОМЕР',
   N, 'НЕИСПРАВЕН';
20 ОТПЕЧАТАТЬ 'РАССТОЯНИЕ',
   М, 'МЕТРОВ';
30 СЛОЖИТЬ S С 1 И ПРИСВОИТЬ S;
ЗАКОНЧИТЬ;
ЗАПОМНИТЬ ПРОВЕРКА;
10 ЕСЛИ СТЫК НЕИСПРАВЕН
   ТО :СИГНАЛ;
20 ЕСЛИ ВПЕРЕДИ ТУПИК
   ТО ОТПЕЧАТАТЬ 'ВСЕГО
   СТЫКОВ', S, ИЗ НИХ НЕИСПРАВНО',
   N ИНАЧЕ :РЕЛЬС;
ЗАКОНЧИТЬ; :ПРОВЕРКА;
```

4.3

```
ЗАПОМНИТЬ ДЕЛ(А, В);
10 0 ПРИСВОИТЬ ЧАСТ;
20 ПОКА А БОЛЬШЕ В ПОВТОРЯТЬ
   :СЧЕТ;
30 ОТПЕЧАТАТЬ 'ЧАСТНОЕ РАВНО',
   ЧАСТ, 'ОСТАТОК РАВЕН', А;
ЗАКОНЧИТЬ;
ЗАПОМНИТЬ СЧЕТ;
10 СЛОЖИТЬ 1 С ЧАСТ И
   ПРИСВОИТЬ ЧАСТ;
20 ВЫЧЕСТЬ В ИЗ А И ПРИСВОИТЬ А;
ЗАКОНЧИТЬ;
```

4.4

```
ЗАПОМНИТЬ НОД(А, В);
10 ПОКА А НЕ РАВНО В ПОВТОРЯТЬ
   ЕСЛИ А БОЛЬШЕ В ТО ВЫЧЕСТЬ
   В ИЗ А И ПРИСВОИТЬ В;
   ИНАЧЕ ВЫЧЕСТЬ А ИЗ В И
   ПРИСВОИТЬ В;
20 ОТПЕЧАТАТЬ А; ЗАКОНЧИТЬ;
```

Заочная школа программирования, урок 5

(см. «Квант» № 1)

```
5.1. 15—>A; 24—>B;
     3*A+A!3*B!2+(A+B)!5—A!6/25+
     +33*A!6—>C;
     8*C+A!2*(A+B+C)!7—33+(76*A—
     —34)/58+C!9—>K;
     K!8/38+5*A/8+(A+K+B)!9—76+
     +58*C—>Л;
5.2. A=857 B=4 C=200.
5.3. (—B+(B!2—4*A*C)! 0.5)/(2*A)—>X1;
     (—B—(B!2+4*A*C)! 0.5)/(2*A)—>X2;
5.4. ЕСЛИ А>В ТО А—>МАКС;
     В—> МИН ИНАЧЕ А—>МИН;
     В—>МАКС ВСЕ;
5.5. 1—>N; 0—>СЧ;
     ПОКА N=<100 :: N! 2+СЧ—>СЧ;
     N+1—>N ВСЕ;
5.6. ПОКА А/=В :: ЕСЛИ А>В ТО
     В—А—>А ИНАЧЕ А—В—>В ВСЕ ВСЕ;
```

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 2)

1. а) 24 и 26; б) 13 и 14.

2. Для страниц с однозначными номерами потребуется 9 цифр, для страниц с двузначными — 2 · 90 = 180 цифр. Остается 1392 — —189 = 1203 цифры — по 3 на страницу. Их хватит на 401 страницу. Всего в книге 401 + 90 + 9 = 500 страниц.

3. Аня носит белое платье, Валя — голубое, Галя — зеленое, а Надя — розовое.

4. Ответ. Да.

Решение. Пусть *«эта головоломка»* = головоломка *A*; *«головоломка, которую вы разгадали перед тем, как вы разгадали головоломку A»*. = головоломка *B*.

Тогда задача переформулируется так: «Если головоломка *B* была труднее, чем головоломка *A*, то была ли головоломка *B* труднее, чем головоломка *A*?»

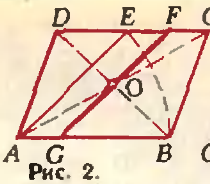


Рис. 2.

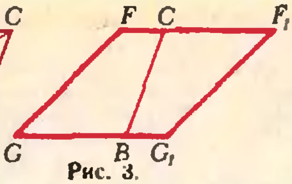


Рис. 3.

5. См. рисунки 2 и 3: $|AE| = |AB|$, $[FG] \parallel [AE]$, $|FG| = |AE|$, $O \in [FG]$.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 2)

1. После 1. **Л:a6+!Kpb8** (1...ba 2. Фb6+ Kpa8 3. Ф:a6+ Лa7 4. Ф:c8×) **2. Фa4** черные сдались, так как от матовых угроз нет защиты.

2. **1. Kd4+ Kpc1 2. Фh2! Kpd1! 3. Фh7!** (геометрические движения ферзя довольно интересны) **Kpe1! 4. Фh4+** (4. Фe4? Kpf2 5. Фf3+ Kpg1 6. Ke2+ Kph2 7. Ф:f1 пат!). Теперь возникают два основных варианта: а) 4... Kpd1 5. Фe4! Фe1+ 6. Kpb3 Фf2 (6...Фd2 7. Фh1+ Фc1 8. Фh5+ e2 9. Kf3) 7. Фb1+ Kpd2 8. Фc2+ Kpe1 9. Фc1×; б) 4...Фf2 5. Kc2+ Kpe2 6. Фh5+ Kpf1 7. Фh1+ Фg1 8. Фf3+ Фf2 9. K:e3+ Kpg1 10. Фd1+ Kph2 11. Kg4+.

3. Решение содержит 14 движений белого ферзя: **Фe4+, Фa4+, Фf4+, Фf8+, Фf3+, Фa3+, Фg3+, Ф:g8+, Фg2+, Ф:a2+, Фh2+, Фh8+, Фa1+ и 14. Фa6×** (все ходы черных вынужденные и поэтому не приводятся). Заметим, что такие сложные возвратно-поступательные движения ферзя (на достаточно широких просторах доски) шахматные композиторы называют виражом.

4. Будем считать, что наша необычная доска расположена в левом нижнем углу обычной шахматной доски. В этом случае 45 необходимых перемещений фигур можно записать следующим образом: **Л, С, Л3d2** (на d2 могут пойти две ладьи), **Кр, К, Кр, Л, С, Кр, С, Кр, С, Л1d2, С, К, Л, Л2d3, С, Кр, Ф, К, Ф, Кр, Ф, К, Кр, Ф, С, Л, Л4d3, К, С, Л, С, Ф, С, Ф, С, Л3d2, Ф, К, Ф, Л, С, Л.** Король и ферзь поменялись местами, все остальные фигуры вернулись на первоначальные поля.

Неожиданный ракурс

(см. «Квант» № 2)

1. а) Плоскость *л*, параллельная прямым *a* и *b*; б) прямая, лежащая в плоскости *л*. Рассмотреть две параллельные проекции: вдоль прямой *a* (или *b*) и вдоль прямой, соединяющей точки пересечения плоскости *a* с прямыми *a* и *b*.

2. Рассмотреть параллельную проекцию вдоль плоскости KLM.

3. а) Боковые ребра пирамиды; ребра SB, SD и SE делятся соответственно в отношениях 3:4, 3:11 и 3:8, считая от вершины S. б) Боковые ребра SA, SB, SC, SD и стороны основания AF и FE; ребра SB и SD делятся в отношениях 9:17 и 9:23, считая от S, ребра FA и FE — в отношениях 1:2 и 1:9, считая от F. Рассмотреть параллельную проекцию вдоль плоскости сечения на числовую ось, считая $x_K=x_L=x_M=0$, $x_S=1$. Зная координаты A, C и F (или E), определить координату проекции центра основания, а затем координаты остальных вершин.

4. Если точка K лежит вне трапеции, то $\frac{1}{15}S$, если внутри — то $\frac{2}{15}S$. Спроектировать трапецию вдоль прямой, параллельной основаниям на пересекающую их прямую; определить отношение высоты треугольника, опущенной из вершины K к высоте трапеции.

5. 1:2. Рассмотреть проекции вдоль (BC_1) и вдоль боковых ребер призмы.

6. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{3}}\,a$. Спроектировать пирамиду вдоль (BD) на (SAD).

7. Спроектируйте вдоль секущей плоскости.

8. 3.

9. $\frac{7}{32}$ см^3.

10. Косинус угла при ребре AA_1 равен $\frac{S_1^2-S_2^2}{4S_1S_2}$.

Кроссворд

(см. «Квант» № 2, 3-ю с. обложки)

По горизонтали: 5. Магнето. 7. Лагранж. 11. Диагональ. 12. Дальномер. 13. Точка. 14. Ампер. 15. Абель. 16. Секанс. 18. Диоптр. 22. Кеплер. 24. Нейман. 27. Осмос. 29. Дирак. 30. Кулон. 31. Экстремум. 32. Лоуренсий. 33. Радикал. 34. Локация.

По вертикали: 1. Мариотт. 2. Многочлен. 3. Ортоцентр. 4. Инфелью. 6. Тоника. 8. Альфа. 9. Алгамс. 10. Разряд. 17. Алгол. 19. Осмий. 20. Геометрия. 21. Наклонная. 23. Радиус. 24. Нуклон. 25. Домкрат. 26. Антимир. 28. Сфера. 30. Карно.

Задачи наших читателей

(см. «Квант» № 1, с. 55)

1. $b_n=2\cdot\frac{10^{6n-3}-1}{9}$, $n=1, 2, 3, \ldots$.

3. Имеем: $S=2xy$ (обозначения см. на рисунке 1). Найдем произведение xy. Построим $[O_1E]\perp[AB]$, где $|AE|=|EB|$ (рис. 1). Тогда по условию $|O_1B|=R$, $|O_2A|=r$ $(O_2=[AO]\cap[O_1E])$. Треугольники AO_2E, O_1BE и BOC подобны, поэтому

$$\begin{cases}\dfrac{z}{2r}=\dfrac{x}{z},\\ \dfrac{z}{2R}=\dfrac{y}{z}.\end{cases}$$

Отсюда

$$z^2=\frac{4r^2R^2}{R^2+r^2},$$

$$xy=\frac{z^4}{4rR},$$

то есть

$$S=\frac{8r^3R^3}{(R^2+r^2)^2}.$$

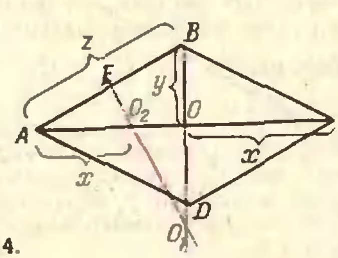


Рис. 4.

4. Доказательство проведем методом математической индукции. Для $n=1$ утверждение задачи очевидно. Предположим, что оно верно для некоторого $n=k$. Докажем, что тогда оно верно для $n=k+1$. Пусть имеется $3(k+1)!$ городов, для связи между которыми используется $k+1$ видов транспорта. Возьмем некоторый город C. Он связан с $3(k+1)!-1$ городами. Докажем, что найдется не менее $3k!$ городов, с которыми город C связан одинаковыми видами транспорта. Предположим противное: пусть таких городов менее $3k!$, т. е. не более $3k!-1$. Так как всех видов транспорта $k+1$, то город C будет соединен не более чем с $(3k!-1)\cdot(k+1)$ городами. Но $(3k!-1)\cdot(k+1)=3(k+1)!-k-1<3(k+1)!-1$, т. к. $k\geqslant1$. Получили противоречие, поскольку знаем, что город C соединен с $3(k+1)!-1$ городами.

Итак, найдется не менее чем $3k!$ городов, с которыми город C связан одинаковыми видами транспорта. Предположим, что среди этих $3k!$ городов имеются города A и B, связанные между собой тем же видом транспорта, что и с городом C. Значит, выехав из города C, мы, не меняя вида транспорта, побываем в городах A и B и вернемся обратно в C. Если же двух таких городов не найдется, то придем к случаю, когда имеется $3k!$ городов и k видов транспорта, что дает утвердительный ответ на вопрос задачи по предположению индукции.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович
Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров,
И. Смирнова, В. Чернов

Зав. редакцией Л. Чернова

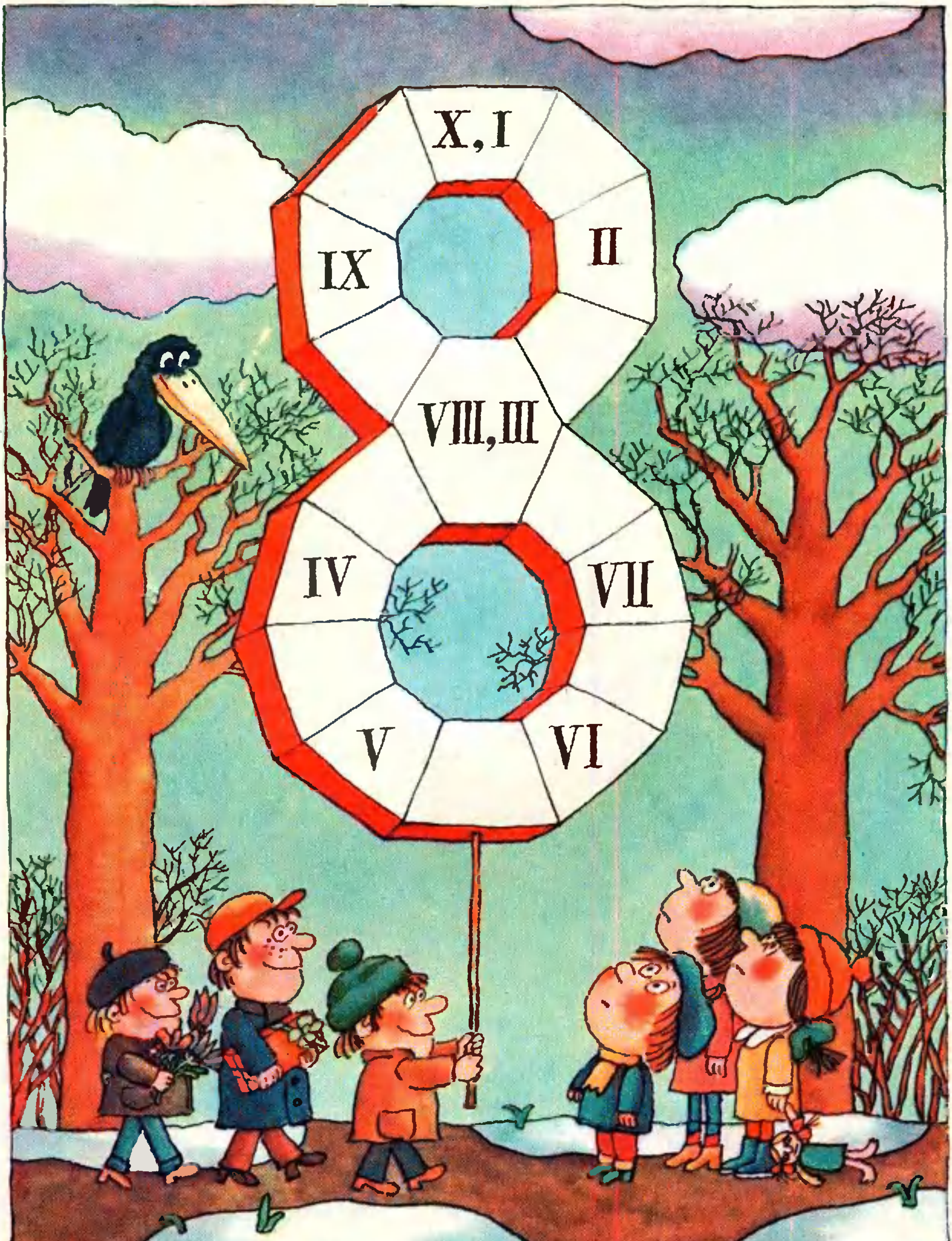
Художественный редактор Т. Макарова

Корректоры О. Кривенко, Т. Панькова

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16.
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 17.I.80
Подписано в печать 27.II.80
Печать офсетная

Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,02. Т-01179
Цена 30 коп. Заказ 61. Тираж 266 907 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета СССР
по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
г. Чехов Московской области



ЧАЙН-НАМБЕР «ВОСЬМОЕ МАРТА»

Заполните «восьмерку» квадратами целых чисел так, чтобы каждый квадрат начинался в клетке с римской цифрой и оканчивался в клетке со следующей цифрой, причем все квадраты были различными.

Слово «чайн-намбер» происходит от английских слов chain («цепочка»), number («число»).

В. Радунский

Цена 30 коп.
Индекс 70465

На этот раз красный геометрический орнамент, который мы предлагаем вниманию читателей, не основан ни на какой сложной математической теории. Однако он показывает, какую красоту и какое разнообразие форм можно получить из простейшей геометрической фигуры — окружности.