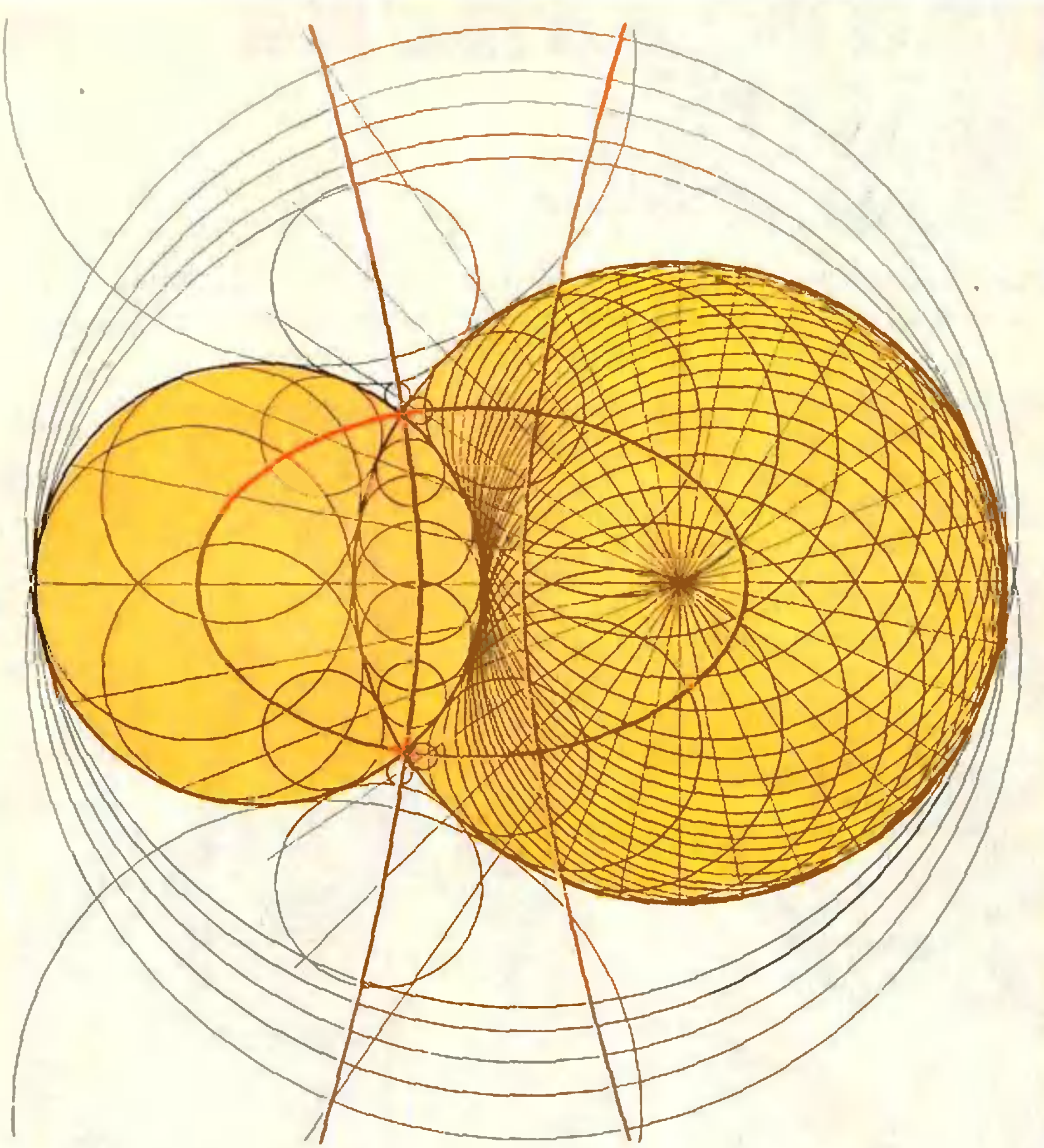
ISSN 0130-2221

КВАНТ

2
1980

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



Красные линии: эллипс и гипербола — проходят через центры двух семейств окружностей. Окружности этих семейств (они обозначены тонкими черными линиями) касаются двух пересекающихся кругов, закрашенных желтым цветом. Получившаяся конфигурация — не просто причудливая выдумка художника; она тесно связана с математической «классикой»: коническими сечениями и задачей Аполлония. Подробнее см. с. 33.

Основан в 1970 году

Квант

2
1980

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

На первой странице обложки показано оригинальное замощение плоскости многоугольниками. Подробнее о нем можно прочитать на с. 25

Б. Гнеденко

Математика в Московском государственном университете

25 января 1980 г. исполнилось 225 лет со дня подписания указа об учреждении Московского университета. При университете были созданы две гимназии: одна — для дворянских детей, другая — для детей разночинцев. Торжественное открытие университета состоялось 26 апреля 1755 г. Но это было лишь открытие гимназий. Занятия же со студентами начались только летом 1755 г., когда в университете собрались 30 молодых людей, откомандированных духовными семинариями (других подготовленных абитуриентов для университетских занятий в ту пору в стране не было).

Московский университет был открыт благодаря кипучей деятельности М. В. Ломоносова, добивавшегося широкого распространения просвещения в России, не связанного с сословными ограничениями. Однако в ту пору правительство крепостнической империи категорически отказало крестьянству в самой возможности получения высшего образования. Ломоносов же утверждал, что «в университете тот студент почтеннее, кто больше научился; а чей он сын в том нет нужды».

На первых порах университет состоял из трех факультетов: философского, юридического и медицинского — и, формально, двух гимназий. Фактически же гимназия была одна. Только занятия проводились раздельно для дворянских детей и детей разночинцев. Объединение разрешалось только в последнем, так называемом «ректорском» классе. Этот последний класс давал дополнительную подготовку для поступления в университет, и занятия в нем продолжались один-два года.

Все студенты должны были начинать занятия на философском факультете, являвшемся своеобразной общеобразовательной ступенью для перехода на медицинский и юридический факультеты. Занятия на философском факультете продолжались три года, а на медицинском и юридическом — четыре года. Таким образом, обучение в университете продолжалось 7 лет. Медицинский и юридический факультеты назывались в ту пору «высшими» факультетами.

Преподавание в университете было лекционным; лекция продолжалась два часа. В первые годы лекции студентам

читались на латинском, французском и немецком языках, и только с 1767 года, когда в университете стали работать в качестве профессоров многие воспитанники самого Московского университета, преподавание стало вестись на русском языке.

Уже в первый год своего существования университетская гимназия приняла несколько сот учащихся, а к концу XVIII века их число возросло до трех тысяч. В 1758 г. по настоянию Московского университета была открыта гимназия в Казани. Она фактически была составной частью Московского университета. Университет обеспечивал ее средствами, учебными пособиями, преподавательским составом. Интересно, что в это время гимназии не было даже в Петербурге — столице Российской империи.

В последней четверти XVIII века Московский университет принял активное участие в организации гимназий в ряде губернских городов России — Ярославле, Твери, Владимире, Костроме, Вологде. Выпускники университета становились первыми преподавателями вновь созданных гимназий. Таким образом, в первое время университет был основным центром подготовки научных и педагогических кадров.

Первоначально кафедры математики в университете не было. Математика входила в ведение кафедры физики и преподавалась лишь на философском факультете. Содержание курса математики не выходило за пределы элементарной математики и включало в себя арифметику, элементарную алгебру, геометрию и начала тригонометрии. Для преподавания этого курса был приглашен один из учеников М. В. Ломоносова Антон Алексеевич Барсов (1730—1791).

Но уже через три года (в 1758 г.) было принято решение о создании специальной кафедры чистой математики.

В первые годы математику преподавали не профессионалы. Так, первый профессор математики А. А. Барсов был специалистом в области синтаксиса русского языка. Преподавание курса прикладной математики было поручено Ивану Акимовичу Росту, преподававшему до того английский язык.

В первые пятьдесят лет существования Московского университета лектор обычно строго придерживался раз и навсегда избранного им учебника. Традиционными оставались даже дни и часы лекций. Так, А. А. Барсов еще в 1757 году избрал для лекций по чистой математике среду и субботу. В те же дни и часы после А. А. Барсова читал его ученик Дмитрий Сергеевич Аничков (1733—1788), а затем и другой выпускник университета Василий Кондратьевич Аршеневский (1758—1807). То же самое случилось и с лекциями по прикладной математике: И. А. Рост читал их по понедельникам, вторникам, четвергам и пятницам. Эти же дни для курса сохранил и его преемник Михаил Иванович Панкевич (1757—1812).

Кафедру чистой математики от А. А. Барсова принял Д. С. Аничков. Для него преподавание математики было делом жизни. В связи с этим он не только преподавал, передавая содержание учебников, уже написанных другими авторами, но стремился как можно лучше приспособить изложение к психологическим особенностям учащихся. Им были написаны четыре учебника, пользовавшихся в ту пору широкой известностью: «Арифметика» (1764), «Геометрия» (1780), «Тригонометрия» (1780) и «Алгебра» (1781). В то время книги не назывались так просто, их заголовки были многословными и звучали очень торжественно. Вот как звучит заголовок учебника по геометрии: «Теоретическая и практическая геометрия, в пользу и употребление не токмо юношества, но и тех, кои упражняются в землемерии, фортификации и артиллерии, из разных авторов собранная. . Дмитрием Аничковым».

Как ни распространены были учебники Аничкова в XVIII веке, все же основную известность ему принесла его диссертация на тему «Рассуждения из натуральной богословии о начале и происшествии натурального богопочитания», которая за атеистическую направленность была по распоряжению Синода сожжена на Лобном месте.

Сейчас, спустя два столетия, мы яснее видим недостатки учебников того времени, в первую очередь — их формализм и оторванность от жизненных проблем, волновавших в ту пору практику. На этот недостаток книг по математике не уставали указывать и передовые мыслители того времени. В частности, М. В. Ломоносов неоднократно указывал на необходимость теснейшей связи математики с естествознанием, с практическими потребностями. Об этом же очень красочно сказал один из видных русских философов второй половины XVIII века Яков Козельский: «Хотя главный и единственный всех физических наук предмет есть натура, однако вы найдете там не натуру, изъясненную математикой, как бы то надлежало, а математику, налагающую натуре свои законы: натура никогда не училась математике, а, напротив, математика — у натуры, которая всех наук умнее и превосходнее»

В XIX веке Россия переживала годы быстрого промышленного и хозяйственного развития. Это вызвало появление большого числа гимназий в губернских и уездных городах. Появилась большая потребность в преподавателях естественного цикла.

Все это привело к выработке нового университетского Устава (1804 г.). Согласно этому уставу, Московский университет разделялся уже на четыре отделения (факультета): 1) нравственных и политических наук, 2) словесных наук, 4) врачебных, или медицинских наук, 4) физических и математических наук.

В то время, как правило, учитель математики преподавал также и естественные дисциплины — физику, астрономию, ботанику, зоологию, географию. Это обстоятельство неизбежно приводило к своеобразию обучения на физико-математическом факультете того времени. В неделю студент факультета имел всего-навсего шесть-восемь лекций по математике, раза в три больше лекций по физике, ботанике, минералогии, а также другим предметам естественнонаучного цикла. В те годы стремились придать школьному и университетскому обучению практический характер, чтобы молодой человек после окончания гимназии мог сразу начать работу в сфере коммерции или промышленного производства. Заметим, что новый устав университета вменял профессорам в обязанность на занятиях обращать внимание студентов на связь теории с практикой.

На вновь открытом физико-математическом факультете были созданы такие кафедры: 1) опытной и теоретической физики, 2) чистой математики, 3) прикладной математики, 4) астрономии, 5) химии, 6) ботаники, 7) минералогии и сельского хозяйства, 8) технологии и наук, относящихся к торговле и фабрикам.

По уставу от профессоров требовалось не только читать лекции и проводить практические занятия со студентами, но и заниматься научными исследованиями, пополняя свои курсы результатами новых открытий. Это обстоятельство существенно меняло направление деятельности университета.

Уже в начале XIX века ряд профессоров Московского университета начали читать лекции по новой математике. Так, профессор И. А. Иде (1775—1806) начал чтение курсов аналитической геометрии и математического анализа. Профессор В. К. Аршеневский сообщил, что три раза в неделю он будет «преподавать слушателям своим высшую геометрию, в которой покажет пользу и употребление дифференциальных и интегральных исчислений». Кроме того, студенты слушали курсы артиллерии и баллистики, математической географии. В результате физико-математический факультет дал стране выдающихся ис-

Д. М. Перевощиков

следователей в области математики, биологии, физики, химии, механики, внешней баллистики и артиллерии.

Отечественная война 1812 года тяжело отразилась на Московском университете: наполеоновская армия разграбила и сожгла коллекции, библиотеку, здания. Многие студенты и преподаватели ушли защищать страну. Занятия в университете прекратились. Для восстановления достигнутого уровня преподавания потребовалось длительное время, и дальнейший прогресс математической жизни Московского университета относится уже к двадцатым годам. Этот прогресс в значительной степени связан с именем профессора Дмитрия Матвеевича Перевощикова (1790—1880), автора ряда учебников по математике и тринадцатитомной «Ручной математической энциклопедии», служившей настольной книгой математиков, инженеров, артиллеристов, естествоиспытателей. В течение более чем пятнадцати лет он был деканом физико-математического факультета, а затем последовательно проректором и ректором университета. Он возглавлял строительство астрономической обсерватории, а затем с 1830 по 1851 год был ее директором, совмещая эту работу с работой декана, проректора, ректора. Ему принадлежит более семидесяти научных (математических и астрономических), педагогических и научно-популярных работ.

Среди непосредственных учеников Перевощикова в первую очередь следует упомянуть Николая Ефимовича Зернова (1804—1862). С его именем связан значительный прогресс математического образования, его существенное обновление. В частности, именно Зернов по настоянию своего учителя впервые начал чтение в университете курса теории вероятностей. Тема магистерской диссертации Зернова «О суточном и годовом движении Земли» была предложена ему учителем, а тему докторской диссертации — «Рассуждение об интеграции уравнений с частными дифференциалами» (1837) — выбрал он сам. Интересно отметить, что это была первая докторская диссертация по математике, защищенная в Московском университете.

Декабрьские события 1825 года сильно сказались на жизни университета. Достаточно сказать, что среди воспитанников университета было по меньшей мере шестьдесят декабристов и треть из них — студенты и бывшие студенты физико-математического факультета. За университетом было установлено полицейское наблюдение, вместо прогрессивного устава 1804 года был введен новый, так называемый цензурный устав. Согласно этому уставу университету запрещалось печатать научные работы по естественным наукам, философии и медицине. Разрешалось печатать только учебники (конечно, после соответствующего досмотра).

В известном произведении «Былое и думы» выпускника физико-математического факультета Московского университета А. И. Герцена содержатся ценные воспоминания о профессорах, однокурсниках и своеобразии университетской жизни 1829—1833 гг. Герцен высоко оценил роль Московского университета в развитии русской культуры:

«В истории русского образования и в жизни двух последних поколений Московский университет и Царскосельский лицей играют значительную роль.

Московский университет вырос в своем значении вместе с Москвою после 1812 года; разжалованная императором Петром из царских столиц, Москва была произведена Наполеоном (сколько волею, а более неволею) в столицы народа русского... В ней университет больше и больше становился средоточием русского образования».

По словам Герцена, Николай I не любил Московский университет и называл его «волчьим гнездом». Его царствование резко отрицательно сказалось на жизни Московского университета: поступление в университет было затруднено, число студентов в университете сократилось. Особенно это сказалось на

Н. Д. Брашман

детях разночинцев. Однако, вопреки политике правительства, молодежь университета вырабатывала с помощью прогрессивных профессоров общественные, научные и педагогические идеалы и стремилась осуществлять их в жизни.

Дух творческих исканий, обновления математического образования вдохнул в Московский университет, наряду с Перевощиковым, выходец из Моравии Николай Дмитриевич Брашман (1796—1866). Почти сразу же после окончания Венского университета он переехал в Россию. Сначала он проработал совсем короткий срок в Петербурге, затем перевелся в Казанский университет и, наконец, в 1834 году переехал в Москву и стал профессором Московского университета. Москва стала как бы второй его родиной. Здесь он проявил свои способности ученого, организатора науки и воспитателя научной молодежи. Он публиковал научные статьи, писал оригинальные учебные руководства, читал лекции и настойчиво искал талантливых студентов, которых стремился побудить к самостоятельным научным поискам. Ему удалось воспитать ряд выдающихся математиков — ученых и педагогов. Среди его учеников в первую очередь следует указать академиков П. Л. Чебышева (1821—1894) и И. И. Сомова (1815—1876), а также профессора А. Ю. Давидова (1823—1886). Они все внесли значительный вклад в развитие математической культуры России. От Брашмана идет интерес московских математиков к задачам механики, в частности к задачам гидродинамики. В какой-то мере это обстоятельство повлияло на постепенное формирование московской школы механиков, давших во второй половине XIX века серьезные результаты в разработке гидравлики, механики твердого тела и гидродинамики.

Взгляды Н. Д. Брашмана на математику хорошо изложены им в речи «О влиянии математических наук на развитие умственных способностей», которая была произнесена им в университете 17 июня 1841 г.: «Геометр не трудится просто для удовлетворения своего любопытства: богатый запас форм геометрии, символов анализа и его сложных действий — не простая роскошная уродливость умственной изобретательности, не собрание редкостей для любителей; напротив, это могущественный арсенал, из которого исследователи природы и техники берут лучшие свои орудия».

В 1864 г. Брашман вышел на пенсию, но он не хотел и психологически не мог порвать с университетом. Для него университет был всем: домом, семьей, самой жизнью. Он добился разрешения на учреждене премии за лучшую студенческую научную работу по математике, на что он передал все свои сбережения. Эта премия регулярно присуждалась в течение пятидесяти лет.

Непосредственно перед выходом на пенсию он предложил своим ученикам, сослуживцам и другим близким ему математикам собираться у него на дому для обмена научными и педагогическими мыслями, а также для реферирования наиболее интересных исследований, которые появлялись в печати. На заседании 15 сентября 1864 г. было решено этот частный кружок превратить в регулярно действующее математическое общество. Президентом общества единогласно был избран Брашман. Члены общества разделили между собой области математики, за которыми они обязались регулярно следить и своевременно сообщать товарищам о всех мало-мальских интересных новых результатах.

Помимо «взаимного содействия в занятиях математическими науками», вновь организованное общество развернуло широкую популяризаторскую, просветительскую и литературную деятельность. Вскоре назрела необходимость в издании печатного органа общества. Такое решение было принято в апреле 1865 г. Предполагалось, что ежегодно будут выходить два выпуска нового журнала под названием «Математический сборник». Это был первый специализированный математический журнал в Рос-

Н. Е. Жуковский

сии. Так возник один из авторитетнейших математических журналов мира, в котором с первых номеров печатались статьи, сыгравшие значительную роль в развитии математики. Для примера укажем, что во втором томе была опубликована знаменитая статья П. Л. Чебышева, в которой содержалось изложение закона больших чисел и исключительное по простоте его доказательство.

Последующие годы дали математическим наукам весьма многое. В первую очередь мы должны отметить замечательные исследования Николая Егоровича Жуковского (1847—1921) в области гидродинамики и аэродинамики. Им были созданы основы теории полета аппаратов тяжелее воздуха и созданы основы советского самолетостроения. Недаром В. И. Ленин назвал Жуковского «отцом русской авиации». Далее следует заметить, что традиционные для Московского университета исследования по теории дифференциальных уравнений и геометрии продолжали развиваться в течение всего XIX и истекших десятилетий текущего XX века. Об этом мы еще скажем.

Сейчас же хотелось бы отметить работы Виктора Викторовича Бобынина (1849—1919), посвященные истории математики. Он впервые проблемы истории науки воспринял как поиск закономерностей развития научных идей, а не только как изложение научных биографий выдающихся ученых. Большое внимание он уделил изучению развития математики в нашей стране. В частности, ему принадлежит научное описание ряда древних русских математических рукописей. После Великой Октябрьской революции Бобынин начал деятельно сотрудничать с советскими органами просвещения. Наркомпрос поручил ему написание однотомной «Истории русской математики» и трехтомного труда «Всеобщая история математики». К сожалению, эта работа не была завершена в связи с кончиной автора.

Серьезная работа по истории математики возродилась в Московском университете уже в тридцатые годы, когда ее возглавила профессор Софья Александровна Яновская (1896—1966).

Существенный сдвиг в содержании и характере математического образования произошел в начале XX века и связан с именами профессоров Дмитрия Федоровича Егорова (1869—1931) и Болеслава Корнелиевича Млодзеевского (1859—1923). Они начали, наряду с чтением лекций и ведением упражнений, проведение занятий специальных семинаров, посвященных новым областям математики. Участники получали задания ознакомиться с определенными работами и на их базе подготовить доклады. Это нововведение оказалось исключительно полезным, поскольку дало возможность весьма эффективно приближать студентов и аспирантов к активной научной деятельности. На семинаре каждый доклад, а вместе с ним и каждая математическая идея подвергаются всестороннему обсуждению. В результате возникают новые вопросы, требующие дополнительных исследований, у участников семинаров появляются возможности активно включиться в самостоятельное творчество. Эта форма работы в настоящее время занимает видное место в жизни университета.

Уже в 1901 году Млодзеевский прочитал первый специальный курс, посвященный начавшей развиваться в ту пору теории функций действительного переменного. В следующем десятилетии эта область математики стала для Московского университета основным направлением творческих интересов молодых математиков. Дальнейшее развитие этого направления связано с Д. Ф. Егоровым и Н. Н. Лузиным (1883—1950). Школа теории функций действительного переменного является одной из наиболее ярких страниц в истории математики Московского университета. Если толчком к созданию этой школы явились упомянутый курс Млодзеевского и работа Егорова, то ее основателем и многолетним вдохновителем, несомненно, являлся Николай Николаевич Лузин. Его исследования 1911—1915 гг. составили предмет докторской диссертации «Интеграл и тригонометрический ряд» (1915), которая не только стала вехой в развитии теории функций в Московском университете, но и надолго определила развитие этой теории как в Советском Союзе, так и за его пределами. Большое число нерешенных вопросов, выдвинутых Лузиным в этой диссертации, явилось предметом последующих исследований многих математиков.

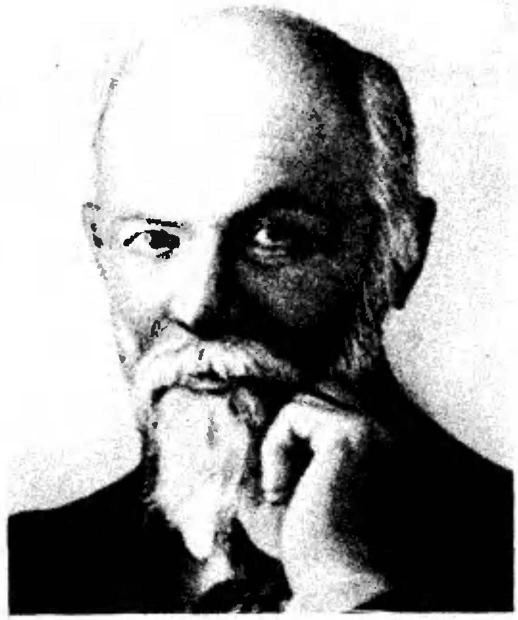
Идеи теории множеств оказали существенное влияние на развитие теории функций комплексного переменного. Яркими представителями этого направления исследований в Московском университете, которое получило значительные применения в аэро- и гидродинамике, были В. В. Голубев (1884—1954), И. И. Привалов (1891—1941), М. В. Келдыш (1911—1978). Крупнейшим представителем этого направления исследований является М. А. Лаврентьев, исследования которого по теории функций комплексного переменного тесно связаны не только с аэро- и гидродинамикой, но и с теорией дифференциальных уравнений.

Большие успехи были получены учеными Московского университета в теории дифференциальных уравнений — как обыкновенных, так и в частных производных. Классическими считаются работы В. В. Степанова (1889—1950), воспитавшего сильную школу в качественной теории дифференциальных уравнений, И. Г. Петровского (1901—1973) и А. Н. Тихонова, с разных позиций разрабатывавших теорию дифференциальных уравнений в частных производных высших порядков.

Значительные успехи получены математиками университета в области теории чисел. А. Я. Хинчин (1894—1959) получил ряд фундаментальных результатов в области метрической теории чисел; Л. Г. Шнирельман (1905—1938) совсем элементарным путем доказал замечательный факт на пути решения задачи Гольдбаха: каждое целое число представимо в виде суммы ограниченного числа простых слагаемых. А. О. Гельфонд (1906—1968) разработал замечательный метод исследования, позволивший ему доказать следующую гипотезу, высказанную в начале века Д. Гильбертом: всякое число вида α^{β}, где α и β — алгебраические числа, причем $\alpha \neq 0$ и $\alpha \neq 1$, а β иррационально, является трансцендентным.

Начиная с 1923 года, в круг интересов московских математиков вошла теория вероятностей. А. Я. Хинчин был пионером в этой области. Через два года вопросами теории вероятностей заинтересовался А. Н. Колмогоров. С этого времени началась интенсивная работа по преобразованию теории вероятностей: были найдены необходимые и достаточные условия для закона больших чисел; в связи с задачами физики было введено понятие случайного процесса и дано широкое развитие основ теории случайных процессов; разработано аксиоматическое построение теории вероятностей. Так возникла Московская школа теории вероятностей, преобразившая лицо этой науки. За пятьдесят с небольшим лет удалось воспитать многочисленных исследователей, с успехом разрабатывающих как теоретические проблемы теории вероятностей, так и многочисленные ее применения. Достаточно сказать, что только через аспирантуру кафедра теории вероятностей подготовила свыше 250 аспирантов, защитивших кандидатские диссертации. Многие ее воспитанники стали профессорами высших учебных заведений, избраны академиками и членами-корреспондентами. В настоящее время выпускниками Московского университета созданы сильные теоретико-вероятностные школы за пределами МГУ: в ГДР, Болгарии и некоторых союзных республиках.

Усилиями О. Ю. Шмидта (1891—1956) и А. Г. Куроша (1908—1971) в университете и далеко за его пределами создана обширная школа современной алгебры, оказавшая и оказывающая сильнейшее влияние на развитие практически всех направлений алгебраических исследований.



Д. Ф. Егоров

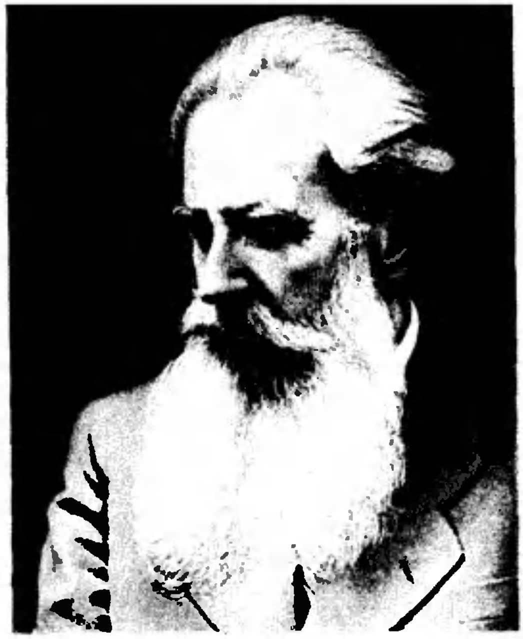
В качестве одного из крупнейших успехов современной математики следует назвать создание Л. С. Понтрягиным и его учениками математической теории оптимального управления. Его предшествовавшие работы заслуженно принесли ему положение одного из ведущих топологов.

В Московском университете успешно развиваются и многочисленные другие направления, которые принесли математике новые идеи и глубокие результаты: функциональный анализ, математическая логика, математическая кибернетика, геометрия, оптимизационные проблемы и вопросы управления.

Несколько слов необходимо сказать о вычислительной математике. До Великой Отечественной войны здесь развивались классические подходы, в том числе методы номографии. Начиная с конца сороковых — начала пятидесятых годов стало ясно, что основной путь приближенных вычислений связан с электронной вычислительной техникой и программированием. Буквально на пустом месте за исключительно короткие сроки удалось создать мощную школу современной вычислительной математики, которая разработала новые методы программирования вычислительных и логических задач для постановки их на ЭВМ, методы статистического моделирования и автоматизации программирования. Усилиями А. Н. Тихонова из механико-математического факультета в начале семидесятых годов был выделен особый факультет вычислительной математики и кибернетики, который с каждым годом набирает силы и тесно связан с актуальными прикладными задачами современности.

Математика в Московском университете в настоящее время развивается не только на двух математических факультетах, но также на физическом и экономическом факультетах, на которых имеются специальные кафедры математики, а также на биологическом факультете, где создана специализированная лаборатория математической статистики.

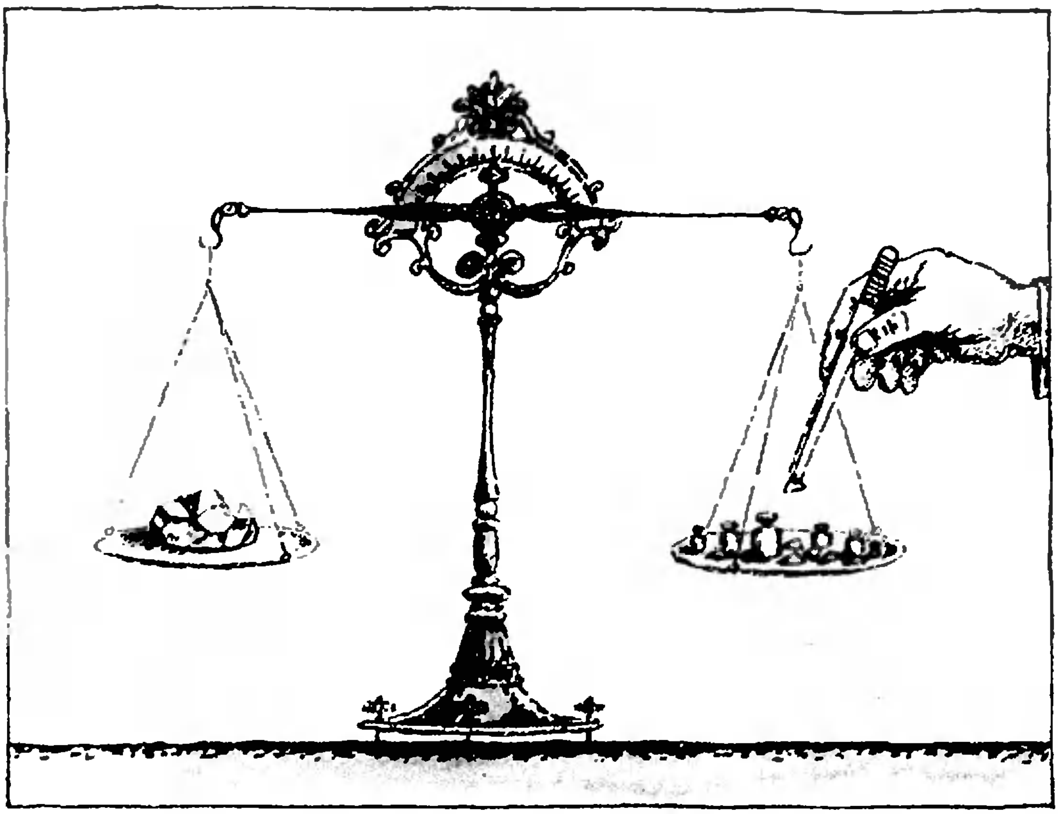
В настоящее время на каждом из двух математических факультетов Московского университета обучается значительно больше студентов, чем во всем дореволюционном университете. Московский университет принимает сейчас ежегодно студентов-математиков больше, чем до революции было студентов-математиков во всей России. Вот это-то обстоятельство — постоянный приток молодежи — делает университет вечно молодым, способным к восприятию и разработке новых идей как в науке и применениях, так и в педагогическом процессе.



О. Ю. Шмидт

К своему двухсотдвадцатипятилетию Московский университет пришел полным сил и научной свежести. Работники университета с гордостью могут оглянуться на пройденный путь. Воспитанники Московского университета принимали деятельное и непосредственное участие в становлении Советской власти в стране, борьбе с разрухой, создании научно-технической базы нашей страны, на фронтах гражданской и Великой Отечественной войн и в совершенствовании обороны страны. Его работники и воспитанники с успехом работают во всех областях народного хозяйства, просвещения, науки и культуры; во многих областях научного творчества они проложили новые пути и довели до логического завершения ранее начатые фундаментальные исследования.

Московский университет знает, что его будущее теснейшими нитями связано с воспитанием интереса к науке и прикладной деятельности у теперешних школьников. Именно поэтому ученые и аспиранты уделяют столь большое внимание работе с учащимися школ, преподавателями школ и вузов, а также научно-пропагандистской работе.



В. Гуревич

Флуктуации физических величин

Рассмотрим физическую систему, состоящую из очень большого числа атомов или молекул. Такие системы называются макроскопическими. Газ, заполняющий сосуд, жидкость, налитая в сосуд, твердый кристалл — это все примеры макроскопических систем.

Представим себе, что требуется измерить какую-нибудь физическую величину, характеризующую макроскопическую систему. Это могут быть, например, ее масса, электрический заряд, давление или температура.

Любое физическое измерение производится с определенной точностью. Мы привыкли к тому, что точность измерения, как правило, определяется конструкцией измерительного прибора. «Плохие» приборы дают низкую точность, «хорошие» — высокую. Например, аналитические весы дают точность измерения массы примерно в десять тысяч раз бóльшую, чем обычные торговые весы.

Но всегда ли точность измерения определяется конструкцией измерительного прибора? Можно ли беспредельно повышать точность измерения физических величин, совершенствуя эту конструкцию? Или есть принципиальные ограничения, коренящиеся в самой природе вещей, которые кладут предел возможной точности измерений?

Для того чтобы понять, каким может быть ответ на этот вопрос, давайте разберем простейший пример. Рассмотрим сосуд, наполненный газом. Пусть газ находится при атмосферном давлении и комнатной температуре, а объем сосуда равен двум литрам. Разделим мысленно сосуд на две части, правую и левую, и будем наблюдать за газом, например, в левой половине сосуда. Сколько молекул газа имеется в этой половине сосуда? Можно подсчитать, что приблизительно $2{,}5\cdot10^{22}$. А можем ли мы рассчитать или измерить это число более точно? Например, можно ли в принципе указать все 23 цифры этого числа, предполагая, что и температура, и давление газа известны с достаточной точностью?

Чтобы понять это, вообразим, что существует очень точный измерительный прибор, который может определить, сколько молекул газа имеется в данный момент в выбранной половине сосуда. С другой стороны, мы знаем, что молекулы газа совершают беспорядочное, хаотическое движение (так называемое тепловое движение) во всех направлениях, время от времени сталкиваясь друг с другом и со стенками сосуда. Поэтому, многократно повторяя измерения, мы будем, как правило, всякий раз получать разные числа. Это неудивительно: молекулы движутся беспорядочно, и их число в каждой половине сосуда будет, вероятнее всего, меняться от опыта к опыту. Точного числа молекул мы не можем указать заранее. Зато всегда можно вычислить вероятность того, что их там будет какое-то определенное число. Ниже мы вычислим эту вероятность. Но сначала попробуем ответить на более простой вопрос: при каком числе молекул эта вероятность наибольшая, то есть каково наиболее вероятное распределение молекул между обеими половинами сосуда?

Большинство читателей, наверное, скажет, что над ответом на такой вопрос и думать нечего. Если полное число молекул обозначить через $2N$, то они, вероятнее всего, распределятся поровну между обеими половинами сосуда, так что в каждой из них окажется по N молекул.

Какова же вероятность этого наиболее вероятного распределения? Чтобы понять, как вычислять такие вероятности, начнем с самого простого случая, когда $N=1$, то есть всего в сосуде две молекулы. Эти молекулы можно распределить между обеими половинами сосуда четырьмя способами, которые изображены на рисунке 1. В двух случаях из четырех в каждой половине сосуда оказывается по одной молекуле. Если молекулы можно считать невзаимодействующими, то их положения независимы, и каждый из изображенных четырех способов равновероятен. Следовательно, вероятность равного распределения молекул равна $\frac{1}{2}$.

Когда полное число молекул есть $2N$, то число способов их распределения между двумя половинами сосуда есть 2^{2N}. Число же способов, приводящих к равнораспределению, когда в каждой половине сосуда окажется по N молекул, равно числу сочетаний из $2N$ по N: $C_{2N}^{N}=\frac{(2N)!}{(N!)^2}$. Вероятность интересующего нас события получится, если число способов, осуществляющих равное распределение между обеими половинами, разделить на полное число способов:

$$w=\frac{(2N)!}{2^{2N}(N!)^2}. \qquad (1)$$

При $N=1$ эта общая формула дает уже полученную величину $\frac{1}{2}$.

Вероятность легко сосчитать по формуле (1), когда N равно небольшому числу. Но как рассчитать ее, когда N порядка 10^{22}? В этом случае существует приближенная формула для $N!$, которая «работает» тем точнее, чем больше число N. Вычисления, проделанные с помощью этой формулы в Приложении, дают

$$w=\frac{1}{\sqrt{\pi N}}. \qquad (2)$$

Для любого реального сосуда с газом это очень маленькая величина. Если, как в нашем примере, $N=2{,}5\cdot10^{22}$, то $w=3{,}7\cdot10^{-12}$. А это ничтожно малое число. Почему же наиболее вероятное распределение оказалось совершенно невероятным? Чтобы понять это, вычислим вероятность $w(n)$ такого распределения, когда в левой половине сосуда число частиц немного отличается от N, а именно, равно $N+n$, а в правой половине, соответственно, $N-n$. Слова «немного отличается» означают, что мы будем вычислять вероятность $w(n)$ только для таких n, которые по абсолютной величине гораздо меньше N.

Выкладки, проделанные в Приложении, дают для этого случая

$$w(n)=\frac{1}{\sqrt{\pi N}}e^{-n^2/N}. \qquad (3)$$

где $e=2{,}71\ldots$ — основание натуральных логарифмов.

График этой функции изображен на рисунке 2. Он симметричен относительно оси ординат и имеет максимум

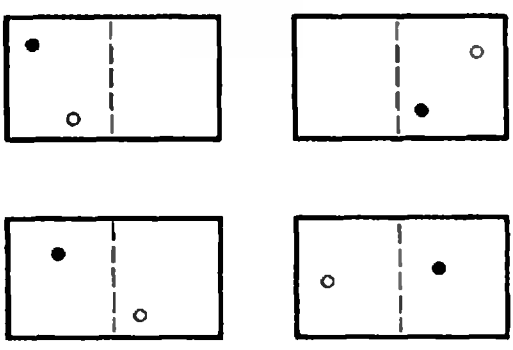


Рис. 1.

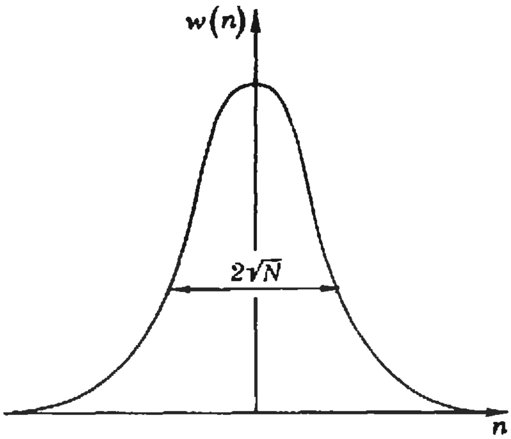


Рис. 2

при $n=0$. Вблизи максимума кривая изменяется плавно, а затем начинает спадать резко. Быстроту убывания обычно характеризуют так называемой полушириной максимума. Это — половина расстояния между абсциссами тех точек кривой, ординаты которых в e раз ниже ординаты максимума. Полуширина кривой на рисунке 2 равна $\sqrt{N}$. Когда n заметно превышает $\sqrt{N}$, $w(n)$ оказывается гораздо меньше своего максимального значения.

А теперь вспомним, что суммарная вероятность всех возможных событий по определению равна единице:

$$\sum_{n=-N}^{N} w(n) = \frac{1}{\sqrt{\pi N}} \sum_n e^{-n^2/N} = 1.$$

Сколько же надо учитывать слагаемых в этой сумме? Казалось бы, вопрос не имеет большого смысла. Достаточно взглянуть на пределы суммирования, чтобы увидеть, что всего слагаемых $2N+1$. На самом деле, задавая такой вопрос, мы хотим понять, какое число слагаемых фактически дает в сумму заметный вклад. Ведь при n^2, гораздо бóльших чем N, слагаемые становятся очень маленькими, и их можно попросту отбросить. Число же существенных слагаемых в этой сумме — порядка $\sqrt{N}$. Это значит, что если взять в сумме число слагаемых в несколько раз больше $\sqrt{N}$, то допущенная погрешность, то есть отличие суммы от единицы, будет очень маленькой.

За этим математическим фактом кроется следующая интересная физика. Многократно измеряя число молекул в данной половине сосуда, мы, скорее всего, никогда не получим числа N. Всякий раз будет получаться новое число молекул — то немного больше N, то немного меньше N. Как говорят, число молекул будет *флуктуировать* около значения N.

Как можно охарактеризовать величину таких флуктуаций? Ведь n принимает разные значения, положительные и отрицательные. Поэтому естественно для описания флуктуаций использовать средние величины. Усреднение будем производить по большому числу измерений или, что то же самое, по достаточно большому промежутку времени — ведь можно представить себе, что измерения делаются последовательно, одно за другим, в течение этого промежутка. Усреднение будет обозначаться чертой над усредняемой величиной. Наша цель — найти количественную меру величины флуктуаций, то есть какое-то число, которое характеризовало бы их «размах», так чтобы мы могли сравнивать величины флуктуаций в разных случаях. Не может ли такой мерой служить средняя величина $\bar{n}$? Чтобы найти $\bar{n}$, каждое значение n надо умножить на вероятность появления этого значения и просуммировать по всем n. В итоге мы получаем:

$$\bar{n} = \sum_{n=-N}^{N} n w(n) = \sum_n \frac{1}{\sqrt{\pi N}} n e^{-n^2/N}.$$

Легко видеть, что эта сумма равна нулю. Действительно, каждому слагаемому суммы с некоторым номером n можно подобрать «пару» — слагаемое с номером $-n$, а два таких слагаемых в сумме дадут нуль. Это значит, что $\bar{n}$ не может служить мерой интенсивности флуктуаций. Это значит также, что N есть не только наиболее вероятное число частиц в данной половине сосуда, а также и среднее их число.

Мерой интенсивности флуктуаций может служить средний квадрат флуктуаций числа частиц, то есть среднее значение n^2, равное

$$\overline{n^2} = \sum_{n=-N}^{N} n^2 w(n). \qquad (4)$$

Эта величина равна $N/2$ *), так что формулу (3) можно теперь переписать в виде

$$w(n) = w(0) e^{-n^2/2\overline{n^2}}. \qquad (5)$$

где $w(0) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi N}} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi \overline{n^2}}}$. Квадратный корень из $\overline{n^2}$ называется среднеквадратичной флуктуацией числа частиц. В нашем случае среднеквадратичная

*) Мы вычислим эту величину в Приложении

флуктуация равна

$$\sqrt{\overline{n^2}}=\frac{\sqrt{N}}{\sqrt{2}}.$$

Эта величина имеет наглядный физический смысл: если измерять число частиц в одной половине сосуда, то оно, вероятнее всего, будет отличаться от среднего числа частиц на величину порядка среднеквадратичной флуктуации (причем знак соответствующей разности может быть любым).

Таким образом, чем больше частиц в системе, тем больше и среднеквадратичная флуктуация. Однако с ростом числа частиц среднеквадратичная флуктуация растет не пропорционально N, а гораздо медленнее — пропорционально $\sqrt{N}$.

Теперь понятно, с какой максимальной точностью имеет смысл измерять число молекул в данной половине сосуда. Эта точность определяется величиной среднеквадратичной флуктуации. В нашем случае (когда объем половины сосуда равен одному литру) среднеквадратичная флуктуация составляет приблизительно $2{,}2\cdot10^{11}$. Это значит, что в выражении для числа молекул следует сохранять, самое большее, 11 первых значащих цифр. Если же выполнить серию измерений с большей точностью, то 11 первых цифр будут повторяться практически во всех измерениях (флуктуации, заметно превышающие среднеквадратичную, имеют очень малую вероятность), в то время как прочие цифры будут меняться от одного измерения к другому случайным образом.

В приведенном примере максимальное число значащих цифр, которые можно удержать в ответе, очень велико, и реально, конечно, предел точности измерения ставится конструкцией прибора. Однако это число может быть и небольшим, если измерять среднее число молекул газа в малом объеме. Так, например, среднее число молекул в одном кубическом микроне (10^{-18}м^3) равно при тех же условиях $2{,}5\cdot10^7$. Среднеквадратичная флуктуация в этом случае равна приблизительно $4\cdot10^3$, так что определять число молекул в таком объеме имеет смысл, самое большее, с четырьмя значащими цифрами.

На явление флуктуаций можно взглянуть и с несколько иной точки зрения. Рассмотрим мысленный эксперимент, в процессе которого некоторое число n молекул перемещается из правой половины сосуда в левую не в результате самопроизвольной флуктуации, а под действием внешней силы. (Число n по-прежнему мало по сравнению с N.) Какая работа совершается при таком перемещении?

На вопрос, поставленный в такой форме, ответа дать нельзя. Совершенная работа зависит от того, каким способом перемещать молекулы, и даже от формы сосуда. Дело в том, что в зависимости от условий опыта, в первую очередь — от скорости перемещения газа, мы должны будем совершать различную работу против сил трения, препятствующих газу перетекать под давлением из одной половины сосуда в другую. Поскольку величина сил трения в газе пропорциональна скорости, чем меньше скорость, тем меньшую работу против сил трения приходится совершать. Наименьшая работа A_{min} будет совершена, если перемещать газ предельно медленно. И если мы скажем, что хотим вычислить именно эту наименьшую работу, то тем самым задача будет сформулирована вполне определенно.

А как можно было бы переместить указанное число молекул газа? Представим себе, что в сосуд с газом вставлен очень тонкий поршень. Он делит весь объем не точно пополам, а таким образом, что слева от него имеется $N+n$ молекул, а справа $N-n$. Начнем двигать поршень влево, как показано стрелкой на рисунке 3, пока он не займет положения, показанного пунктиром, при котором он делит объем сосуда пополам. Требуется вычислить работу, которую совершает поршень против сил давления газа.

Что происходит при движении поршня? Перемещаясь влево, поршень сжимает газ в левой части сосуда и расширяет в правой. В результате давление слева повышается, а справа понижается. Сила, действующая на поршень, равна произведению его площади S на разность давлений в левой и правой частях сосуда. По условию n гораздо меньше N, а значит, и путь, пройденный поршнем, мал по сравнению с размерами сосуда. Поэтому в первом приближении разность давлений можно считать пропорциональной этому пути. (Попробуйте оценить сами, с какой точностью справедливо это утверждение.) Тогда работа A_{min}

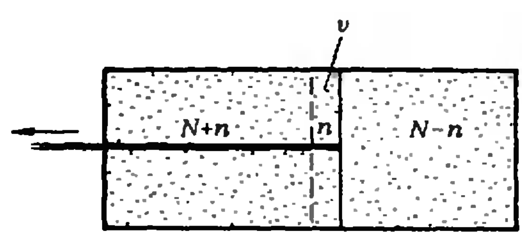


Рис. 3.

есть произведение пути на среднюю силу. Средняя же сила равна половине силы, действующей на поршень в конце его перемещения, то есть половине величины $(p_1-p_2)S$, где p_1 и p_2 — соответственно конечные значения давлений в левой и правой половинах сосуда. Отсюда работа

$$A_{\min}=\frac{1}{2}\,(p_1-p_2)\,v,$$

где v — объем области, ограниченной сплошной и пунктирной линиями на рисунке 3.

Обозначим полный объем сосуда через $2V$. Согласно закону Бойля — Мариотта

$$p_1V=p(V+v),\quad p_2V=p(V-v),$$

откуда

$$p_1-p_2=2p\,\frac{v}{V}.$$

Таким образом,

$$A_{\min}=p\,\frac{v^2}{V}.$$

Принимая во внимание уравнение Клапейрона — Менделеева, которое мы запишем в виде $pV=NkT$, и учитывая, что $v:V=n:N$, мы можем представить выражение для $A_{\min}$ в следующем окончательном виде:

$$A_{\min}=kT\,\frac{n^2}{N}. \qquad (6)$$

Вернемся теперь к формуле (3) для $w(n)$. Сравнивая (3) и (6), мы видим, что (3) можно переписать так:

$$w(n)=w(0)\,e^{-A_{\min}/kT} \qquad (7)$$

(напомним, что $w(0)=1/\sqrt{\pi N}$). Для вероятности $w(n)$ у нас есть еще одно выражение — через среднеквадратичную флуктуацию числа частиц (см. (5)):

$$w(n)=w(0)\,e^{-n^2/2\overline{n^2}}.$$

(напомним, что среднеквадратичная флуктуация — это $\sqrt{\overline{n^2}}$) Сравнивая это выражение с (7), мы находим, что

$$\frac{n}{\sqrt{\overline{n^2}}}=\sqrt{\frac{2A_{\min}}{kT}} \qquad (8)$$

Соотношение (8) означает, что каждой флуктуации можно сопоставить некоторую работу, которая требуется, чтобы создать данное флуктуационное отклонение с помощью внешних сил! Источник этой работы в случае самопроизвольных флуктуаций — тепловая энергия, запасенная в системе. В нашем примере это — энергия хаотического движения молекул газа. Чем больше работа $A_{\min}$, тем менее вероятна флуктуация.

Возникает очень интересный вопрос: нельзя ли за счет флуктуаций получить *полезную* работу? Было бы очень заманчиво отбирать таким образом энергию от макроскопической системы, имеющей конечную температуру. Ведь во всякой такой системе происходят флуктуации каких-либо величин.

Если обратиться к нашему примеру, то можно было бы предложить такую конструкцию двигателя. Поместим в сосуд с газом поршень, разделяющий сосуд на две половины, как на рисунке 4. Дальнейшая идея устройства заключается в следующем: при перемещении влево вследствие флуктуаций поршень вращает храповое колесо, которое может совершать полезную работу, а при перемещении поршня вправо колесо удерживается собачкой, на которую давит пружина.

Такой двигатель, однако, работать не будет. Дело в том, что наши рассуждения не учитывали флуктуаций в устройстве, препятствующем обратному ходу храпового колеса; благодаря им это устройство время от времени «отпускает» колесо. Если же учесть эти флуктуации, то окажется, что колесо совершает движение по часовой стрелке в среднем столь же часто, как и против часовой стрелки, так что никакой полезной работы не производится. Этот вывод находится в полном соответствии с известным из школьного курса утверждением, что никакой тепловой двигатель не может работать при одинаковой температуре его рабочего тела и окружающей среды.

Можно спросить: зачем мы занимались всем этим переписыванием формул для вероятности флуктуационного отклонения? Чем выражение (7) лучше эквивалентного ему выражения (3)? Дело в том, что флуктуировать могут самые различные физические величины, а не только число молекул в какой-то части сосуда, наполненного газом. Формула (3) справедлива только для описания конкретных рассмотренных выше флуктуаций в газе. Формула же (7)

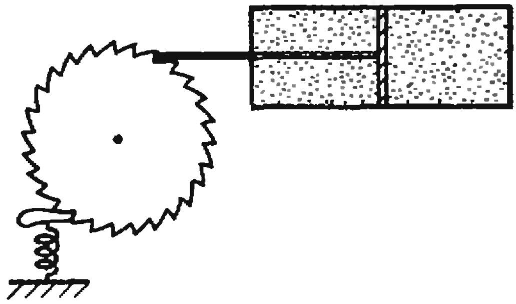


Рис. 4.

представлена в столь общем виде, не зависящем от конкретного устройства физической системы, что, пользуясь ею, можно вычислять флуктуации любых физических величин. Для этого необходимо только получить формулу для работы A_{min}, которую нужно затратить, чтобы создать данное флуктуационное отклонение. Как это делается, мы сейчас проследим на нескольких примерах.

Начнем с того, что рассмотрим флуктуации числа частиц в объеме V, содержащем в среднем N частиц газа. Но при этом будем считать, что он сообщается не с другим в точности таким же объемом, а является малой частью большого сосуда с газом. Как должна измениться в этом случае среднеквадратичная флуктуация числа частиц по сравнению со случаем, рассмотренным выше? Из физических соображений ясно, что она должна увеличиться: появились дополнительные возможности для притока молекул в объем V или оттока из него. Но на сколько?

Подсчитаем работу A_{min}, которую нужно затратить для перемещения n молекул в объем V. Считается она, по существу, так же, как и выше. Единственное различие состоит в том, что внешнее давление p_2, которое установилось после перемещения, можно с достаточной точностью считать равным первоначальному давлению p; поскольку объем всего сосуда гораздо больше объема V, изменение давления в сосуде гораздо меньше, чем изменение давления в объеме V, и им можно пренебречь. Проведя расчеты, мы найдем, что

$$A_{min} = \frac{1}{2} kT \frac{n^2}{N},$$

то есть получим величину, вдвое меньшую, чем выше. Воспользовавшись формулой (8), находим среднеквадратичную флуктуацию числа частиц

$$\sqrt{\overline{n^2}} = \sqrt{N}.$$

Эта величина в $\sqrt{2}$ раз больше, чем полученное ранее значение среднеквадратичной флуктуации числа частиц в половине сосуда.

В качестве другого примера рассмотрим флуктуации в электрической цепи, изображенной на рисунке 5. Цепь состоит из конденсатора емкости C и резистора с сопротивлением R, соединенных в замкнутый контур. Электрические заряды в резисторе совершают тепловое движение, вследствие которого через резистор течет флуктуационный ток, а значит, на конденсаторе возникает флуктуационный электрический заряд. Среднюю квадратичную флуктуацию этого заряда мы и хотим вычислить.

Подсчитаем работу A_{min}, которую надо затратить, чтобы сообщить конденсатору заряд Q, то есть зарядить его до напряжения Q/C. Среднее значение напряжения в процессе зарядки

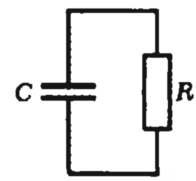


Рис. 5.

есть $Q/2C$ (конденсатор в начальный момент не заряжен), и $A_{min} = Q^2/2C$. Вероятность того, что на конденсаторе флуктуационным образом возникает заряд Q, равна

$$w(Q) = w(0)\, e^{-Q^2/2CkT},$$

и по аналогии с (8) мы можем сразу написать выражение для среднеквадратичной флуктуации заряда:

$$\sqrt{\overline{Q^2}} = Q\sqrt{\frac{kT}{2A_{min}}} = \sqrt{CkT}.$$

В качестве еще одного примера найдем среднеквадратичную скорость частиц, участвующих в броуновском движении.

Представим себе, что мы интересуемся среднеквадратичной скоростью броуновского движения частицы в направлении какой-нибудь оси, например оси X. Проекцию скорости на это направление мы обозначим через v_x. Очевидно, в данном случае A_{min} равна кинетической энергии частицы $mv_x^2/2$, где m — масса частицы. Среднеквадратичную скорость мы можем вычислить сразу — по аналогии с формулой (8). Она равна

$$\sqrt{\overline{v_x^2}} = \sqrt{\frac{kT}{m}}.$$

Так, если масса частицы 10^{-15} кг, при комнатной температуре $\sqrt{\overline{v_x^2}} \approx 0{,}002$ м/с.

В заключение обратим внимание на одно интересное и важное обстоятельство. И среднеквадратичная флуктуация заряда на конденсаторе, и среднеквадратичная флуктуация скорости тем больше, чем выше температура. Это естественно, поскольку температура — это мера интенсивности беспорядочного теплового движения молекул, которое служит причиной флуктуаций. Для газа же среднеквадратичная флуктуация числа молекул не зависит от температуры. Но сама формула (5) справедлива только при достаточно высоких температурах. При понижении температуры газ конденсируется в жидкость, и формула (5) становится неприменимой, потому что движения отдельных молекул нельзя считать независимыми.

Подведем некоторые итоги. Из сказанного следует важный вывод. Не все физические величины в принципе определяются со сколь угодно высокой точностью. Принципиально можно, например, измерить с любой точностью массу, заряд или число атомов какого-нибудь изолированного тела. Эти величины не флуктуируют, если только тело не обменивается частицами с другими телами.

Мы здесь встретились с примерами величин, способных флуктуировать. Их значения в принципе не имеет смысла задавать с неограниченной точностью. Мы видели, что число молекул в какой-то части сосуда с газом имеет смысл задавать только с точностью до среднеквадратичной флуктуации. То же самое можно сказать и относительно давления газа на стенку сосуда. Флуктуирует, и потому по самой своей природе не может быть измерена со слишком высокой точностью, и температура. Чем меньше размеры физической системы или число атомов в ней, тем больше относительные флуктуации характеризующих ее физических величин и с тем меньшей относительной точностью они могут быть заданы или измерены.

Приложение

Чтобы получить выражение (1), воспользуемся приближенной формулой Стирлинга для $N!$, справедливой при больших значениях N. Эта формула имеет вид:

$$N! = \sqrt{2\pi N}\, e^{N(\ln N - 1)},$$

где ln обозначает логарифм, взятый по основанию e. Относительная точность этой формулы тем выше, чем больше число N; можно показать, что относительная погрешность, которую она дает, меньше $\frac{1}{8N}$. Воспользовавшись ею для вычисления вероятности (1), мы получаем выражение (2).

Применяя ту же формулу для расчета вероятности

$$w(n) = \frac{(2n)!}{2^{2N}(N+n)!(N-n)!},$$

мы получаем

$$w(n) = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{\pi(N^2-n^2)}} \times$$
$$\times e^{2N\ln 2N - (N+n)\ln(N+n) - (N-n)\ln(N-n)}.$$

В выражении под корнем мы пренебрегли малой величиной n^2 по сравнению с большой величиной N^2; тогда коэффициент перед экспонентой оказывается равным $\frac{1}{\sqrt{\pi N}}$. Для того чтобы вычислить выражение в показателе, представим фигурирующие там логарифмы в виде

$$\ln(N \pm n) = \ln N + \ln\left(1 \pm \frac{n}{N}\right).$$

Для вычисления $\ln\left(1 \pm \frac{n}{N}\right)$, в свою очередь, воспользуемся следующей приближенной формулой, справедливой для любых малых по абсолютной величине положительных или отрицательных x:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2}$$

(например, при $|x| < 0{,}1$ эта формула дает погрешность, не превышающую $0{,}4x^3$). В итоге получается выражение (3), приведенное в тексте.

Нам осталось еще доказать, что средний квадрат флуктуации числа частиц (см. (4)) равен $N/2$. Идея доказательства проста. Сначала вспомним, как доказывается известное соотношение

$$\sum_{n=-N}^{N} C_{2N}^{N+n} = 2^{2N}.$$

Для этого рассматривается биномиальное разложение функции $f(x) = (1+x)^{2N}$. Оно имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=-N}^{N} C_{2N}^{N+n} x^{N+n}.$$

Отсюда немедленно следует, что сумма ΣC_{2N}^{N+n} есть $f(1) = 2^{2N}$.

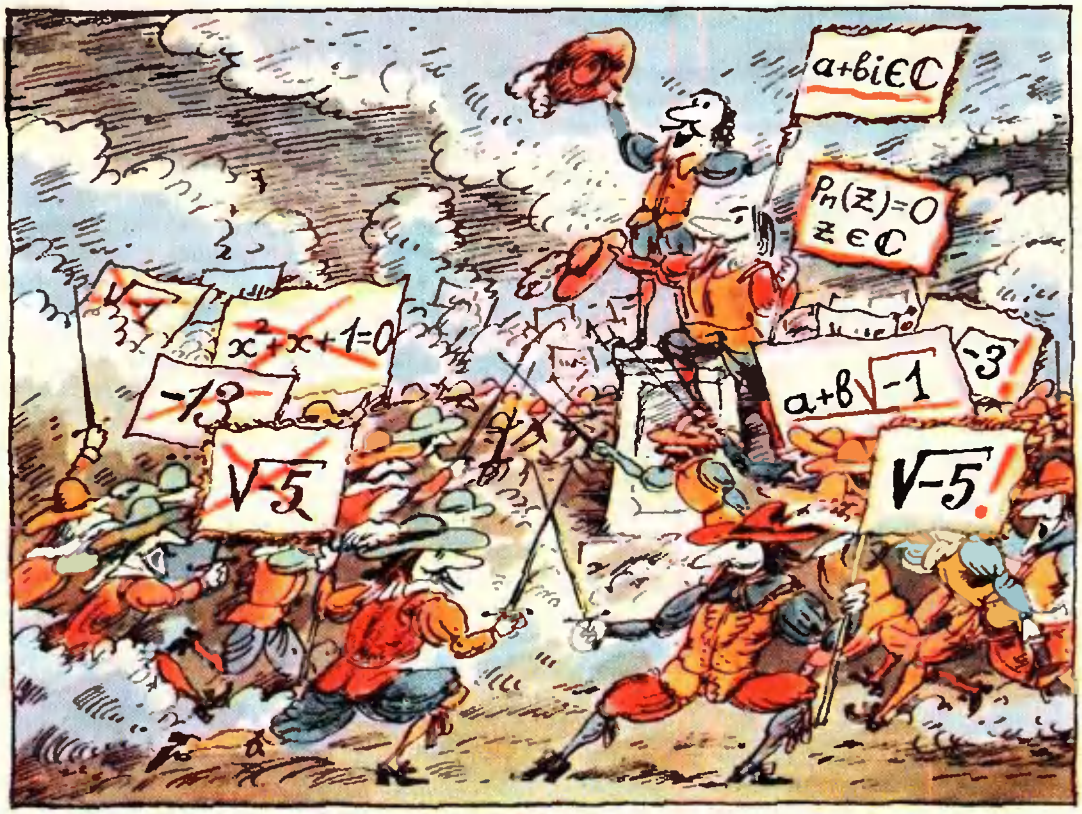
В нашем же случае для вычисления суммы (4), равной $2^{-2N}\sum_{n=-N}^{N} n^2 C_{2N}^{N+n}$, требуется найти функцию, биномиальное разложение которой имело бы вид

$$g(x) = \frac{1}{2^{2N}}\sum_{n=-N}^{N} C_{2N}^{N+n} n^2 x^n.$$

Тогда $g(1)$ дает искомое среднее значение $\overline{n^2}$. Проверьте сами, что $g(x)$ имеет вид

$$g(x) = \frac{N}{2^{2N}x^N}(1+x)^{2N-2}[N(1+x)^2 - 2(2N-1)x].$$

Отсюда $g(1) = \frac{N}{2}$.



С. Ашманов

Числа и многочлены

В этой статье мы расскажем о том, каким образом в математике переплелись комплексные числа и многочлены.

Когда чисел не хватает

Числа бывают разные: положительные и отрицательные, рациональные и иррациональные, алгебраические и трансцендентные. История появления каждого нового класса чисел весьма поучительна и даже драматична.

Такой привычный для нас объект, как отрицательные числа, являлся предметом дискуссий в течение столетий. *О них знали в древности* в Индии, Китае и Вавилоне, однако споры о природе отрицательных чисел, о их праве на существование велись еще во времена Ньютона в конце XVII века.

Поводом для введения отрицательных чисел явилось, по-видимому, желание решать уравнения вида $x+a=b$ для *любых* положительных чисел a и b.

Введение рациональных чисел дало возможность решать уравнения вида $ax=b$, где a и b — целые числа ($a\neq 0$).

После того как в Древней Греции была доказана *иррациональность* числа $\sqrt{2}$, то есть невозможность решить уравнение $x^2=2$, имея в своем распоряжении только рациональные числа, человечество вновь столкнулось с необходимостью расширить свой числовой запас.

Расширить множество рациональных чисел так, чтобы уравнение $x^2=2$ в новом, более широком, множестве имело корень, можно не только так, как это делается в учебнике, но и следующим образом:

Введем символ j и положим $j^2=2$. Будем рассматривать выражения вида $a+bj$, где a и b — произвольные рациональные числа.

Сформулируем правила действий над нашими кандидатами в новые числа:

$$(a_1+b_1j)+(a_2+b_2j)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)j;$$

$$(a_1+b_1j)(a_2+b_2j)=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)j.$$

(Определяя умножение, мы воспользовались тем, что $j^2=2$.)

Сумма и произведение наших выражений вновь оказались выражениями того же вида. Таким образом в множестве выражений $a+bj$ мы определили две операции — сложение и умножение. Нетрудно проверить, что эти операции обладают всеми привычными свойствами сложения и умножения (коммутативность, ассоциативность и т. д.). Роль нуля играет выражение $0+0j$.

Легко проверить, что выражения вида $a+0j$ *ведут себя так же, как рациональные числа*. Поэтому рациональное число a и выражение $a+0j$ можно отождествить друг с другом. Значит, можно считать, что множество $\mathbf{Q}$ рациональных чисел является подмножеством множества выражений $a+bj$.

Покажем, что в этом множестве возможно и деление, т. е. что уравнение

$(a+bj)x=c+dj$, где $a+bj\neq 0+0j$, имеет решение

$$\frac{c+dj}{a+bj}=\frac{(c+dj)(a-bj)}{(a+bj)(a-bj)}=\frac{(ac-2bd)+(ad-bc)j}{a^2-2b^2}=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}j.$$

Значит, $x=\frac{ac-2bd}{a^2-2b^2}+\frac{ad-bc}{a^2-2b^2}j$.

(Из $a+bj\neq 0+0j$ следует, что $a\neq 0$ или $b\neq 0$; тогда из рациональности чисел a, b вытекает $a^2-2b^2\neq 0$.)

Обозначим множество новых «чисел» — выражений вида $a+bj$ ($a, b\in\mathbf{Q}$) — через $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$. В таком множестве уравнение $x^2=2$ имеет решение: легко проверить, что $(0+1j)^2=2$. Выражение $0+1j=j$ естественно обозначить через $\sqrt{2}$.

Мы добились, чего хотели. Более того, некоторые другие уравнения, которые не имели корней в множестве $\mathbf{Q}$ рациональных чисел, также стали обладать корнями в множестве $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$; например, уравнение $x^2-2x-1=0$ имеет корень $1+\sqrt{2}$. Но вот уравнение $x^2=3$, не имевшее корней в множестве $\mathbf{Q}$, не имеет их и в множестве $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ (докажите!).

Таким образом, если мы пойдем тем же путем, то, чтобы получить возможность решать все уравнения вида $x^n=k$, где k — натуральное число, нам пришлось бы расширять множество $\mathbf{Q}$ бесконечное число раз. Человечество, введя понятие *действительного числа*, решило эту проблему по-другому, «одним махом».

Однако уравнение x^2+1 и в множестве $\mathbf{R}$ действительных чисел не имеет решений.

Числа, не похожие ни на что

В школьном учебнике говорится: если дискриминант квадратного уравнения отрицателен, то оно не имеет корней. Так считали со времен Вавилона. Лишь в XVI веке математики поняли, что корни четной степени из отрицательных чисел могут быть полезными. Им в ряде случаев для получения обычного (действительного!) корня уравнения приходилось оперировать с бессмысленными выражениями вроде $5+2\sqrt{-3}$.

Конечно, математики делали это не с легким сердцем — необычные «числа» долго сохраняли несколько мистическую окраску (им даже придумали название — мнимые). Сначала выражения вида $a+b\sqrt{-1}$ применялись исключительно во вспомогательных целях, и по-прежнему считалось, что уравнение $x^2+1=0$ не имеет корней. Однако постепенно у математиков крепло убеждение, что всякое уравнение

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0=0$$

с действительными коэффициентами должно иметь корни. «Пусть это будут даже не числа»,— говорили они. Стоп! Что значит «не числа»? Что имели в виду дерзкие математики? Еще и отрицательные числа не получили «гражданских прав», а тут какие-то новые «не числа».

А в самом деле, что требуется от объектов, претендующих на звание «корень алгебраического уравнения»? Нужно, чтобы их можно было подставить вместо переменной x, произвести вычисления и сравнить с нулем.

Другими словами, нужны какие-то объекты, обладающие свойствами действительных чисел, но чтобы их было «больше», чем последних, с тем чтобы в тех случаях, когда для решения алгебраических уравнений «не хватает» действительных чисел, прибегнуть к помощи таких объектов.

Какие же свойства действительных чисел важны? Оказывается, множество действительных чисел является полем*). Множество $\mathbf{Q}$ рациональных чисел тоже является полем.

*) Напомним, что *полем* называется более чем одноэлементное множество $\mathbf{M}$ с двумя операциями — сложением и умножением,— удовлетворяющими следующим аксиомам:

Если добавить i

Попробуем подобно тому, как мы поступили с полем рациональных чисел и уравнением $x^2=2$, расширить поле **R** действительных чисел, присоединив к нему «корень» уравнения $x^2+1=0$.

Пусть i — символ, единственным свойством которого является то, что он — корень уравнения $x^2+1=0$; то есть $i^2=-1$.

Рассмотрим выражения вида $a+bi$, где a и b — произвольные действительные числа; назовем их *комплексными числами*. Введем правила действий над комплексными числами:

$$(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i;$$

$$(a_1+b_1i)(a_2+b_2i)=(a_1a_2-a_1b_2)+(b_1b_2+a_2b_1i.)$$

Читатель без труда докажет, что множество комплексных чисел с так определенными сложением и умножением является полем.

Легко проверить, что комплексные числа вида $a+0i$ *ведут себя так же, как действительные числа*. Поэтому действительное число a и комплексное число $a+0i$ можно отождествить друг с другом. Значит, можно считать, что мы действительно расширили поле действительных чисел до поля комплексных чисел. В этом более широком поле уравнение $x^2+1=0$ имеет корень: $i^2+1=0$ (и даже два корня: $(-i)^2+1=0$).

Но чего мы добились? Только того, что уравнение $x^2+1=0$ приобрело корни? Оказывается, мы добились гораздо большего. Имеет место замечательная

Основная теорема алгебры

Любой многочлен $P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0$ *ненулевой степени имеет в множестве комплексных чисел хотя бы один корень* (который, конечно, может быть и действительным числом).

Первую попытку доказательства этой теоремы предпринял Даламбер в 1746 году. Строгое же доказательство привел Гаусс в 1799 году.

Оказывается, основная теорема алгебры верна не только для многочленов с действительными коэффициентами, но и для многочленов с комплексными коэффициентами (или, как принято говорить, для многочленов *над полем комплексных чисел*).

Основная теорема алгебры позволяет дать изящный ответ на вопрос, сколько корней имеет произвольный многочлен n-й степени, *если рассматривать многочлены над полем комплексных чисел*.

Чтобы сформулировать этот ответ, нам понадобится понятие «кратности» (корня многочлена), а это понятие определяется через понятие «один многочлен *делится* на другой». Говорят, что *многочлен* $P_1(x)$ *делится на многочлен* $P_2(x)$, если существует такой многочлен $q(x)$, что $P_1(x)=q(x)\cdot P_2(x)$.

Понятия «делится» и «корень» тесно связаны:

Теорема 1. *Число α тогда и только тогда является корнем многочлена $P(x)$, когда $P(x)$ делится на $x-\alpha$.*

Теорему 1 нетрудно доказать самостоятельно. (Указание. Делите «уголком».)

Может случиться, что многочлен $P(x)$ степени n будет делиться не только на $x-\alpha$, то и на некоторую степень $x-\alpha$. В соответствии с этим условимся α называть *k-кратным корнем* многочлена $P(x)$, если $P(x)$ делится на $(x-\alpha)^k$, но не делится на $(x-\alpha)^{k+1}$. (Например, число 1 является двукратным корнем многочлена

$$P(x)=x^3+x^2-5x+3=(x-1)^2(x+3).$$

Теперь легко может быть доказана

Теорема 2. *Всякий многочлен $P(x)$ степени n* (с действительными или комплексными коэффициентами) *имеет в поле комплексных чисел ровно n корней* (среди которых, разумеется, могут быть и действительные числа), *если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.*

Доказательство. По основной теореме алгебры многочлен $P(x)$ имеет в поле комплексных чисел хотя бы один корень. Допустим, что α_1 есть корень многочлена $P(x)$. По теореме 1 $P(x)=(x-\alpha_1)q(x)$, где $q(x)$ — многочлен степени $n-1$. (Даже если коэффициенты многочлена $P(x)$ — действительные числа, многочлен $q(x)$ будет, если α_1 — комплексный корень, иметь комплексные коэффициенты.)

Применим дальше то же рассуждение к многочлену $q(x)$. По основной теореме алгебры существует корень α_2 многочлена $q(x)$, так что $q(x)=(x-\alpha_2)h(x)$, где $h(x)$ — многочлен, степень которого уже $n-2$. Повторяя это рассуждение $n-1$ раз (применяя, конечно, при

сложение: 1. *коммутативно*, 2. *ассоциативно*, 3. *существует ноль*, 4. *для каждого элемента из* **М** *существует противоположный;*

умножение: 5. *коммутативно*, 6. *ассоциативно*, 7. *существует единица*, 8 *для каждого ненулевого элемента из* **М** *существует обратный*, 9. *дистрибутивно по отношению к сложению.*

строгом изложении принцип математической индукции), мы, в конце концов, придем к разложению

$$P(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\dots(x-\alpha_n), \qquad (*)$$

где a_n — коэффициент при старшей степени x^n многочлена $P(x)$.

Из тождества (*) следует не только то, что комплексные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ (среди них могут быть и равные!) являются корнями многочлена $P(x)$, но и то, что иных корней этот многочлен не имеет. В самом деле, если число β — корень многочлена $P(x)$, то

$$P(\beta)=a_n(\beta-\alpha_1)(\beta-\alpha_2)\dots(\beta-\alpha_n).$$

Но произведение комплексных чисел равно нулю в том и только в том случае, когда один из сомножителей равен нулю (докажите это). Поэтому один из множителей $\beta-\alpha_i$ равен нулю, то есть $\beta=\alpha_i$. Это завершает доказательство теоремы 2.

По мере развития науки стало ясно, что без комплексных чисел нельзя обойтись в самых что ни на есть «действительных» делах. Когда появились самолеты, потребовалась теория обтекания крыла самолета потоком воздуха. Выяснилось, что самым естественным языком описания подобного процесса, т. е. языком аэродинамики, является теория функций комплексного переменного! Поэтому, когда вы видите современный авиалайнер, знайте, что его сделали гений конструкторов, инженеров, рабочих и... комплексные числа. То же можно сказать и о науке об обтекании судна водой — гидродинамике. Знаете такую игрушку — Ванька-встанька? Положишь Ваньку спать, а он тут же вскочит — у него самое устойчивое положение, когда он стоит. Подобными вопросами для гораздо более сложных механических, электрических и других систем занимается математическая теория устойчивости. И вновь оказывается, что ответ на то, является ли система устойчивой, кроется в свойствах комплексных чисел, являющихся корнями некоторого многочлена, характеризующего рассматриваемую систему.

Современный самолет и Ванька-встанька — таков диапазон действия комплексных чисел. Мы привели только несколько областей их применения, поскольку все перечислить невозможно. Вот тебе и мнимые числа!

Мы расскажем сейчас для примера, как комплексные числа помогли ответить на некоторые важные вопросы относительно многочленов с действительными коэффициентами.

Многочлены, похожие на простые числа

Рассмотрим множество всех многочленов произвольной степени от переменной x. Вы умеете складывать и перемножать элементы этого множества, то есть многочлены, умеете разлагать их на множители.

Это очень похоже на то, что вы умеете делать с натуральными числами. Натуральные числа вы еще умеете разлагать на простые множители. Вы, наверное, знаете, что это можно сделать всегда и притом единственным образом.

Роль простых чисел в теории многочленов играют так называемые неприводимые многочлены. Говорят, что многочлен $P(x)$ степени $n>0$ *неприводим*, если он не делится ни на какой многочлен степени $0<s<n$.

Аналог утверждения о разложении любого натурального числа в произведение простых множителей звучит так:

Теорема 3. *Всякий многочлен ненулевой степени разлагается в произведение неприводимых многочленов:*

$$P(x)=P_1(x)P_2(x)\dots P_m(x),$$

и это разложение является единственным с точностью до порядка и множителей нулевой степени).*

Доказывая теорему 2, мы получили, что *всякий многочлен $P(x)$ степени n раскладывается над полем комплексных чисел в произведение линейных* (т. е. первой степени) *сомножителей* (см. равенство (*)).

Таким образом, *над полем комплексных чисел неприводимы только многочлены первой степени.*

А какие многочлены неприводимы над полем действительных чисел? Ответить на этот вопрос нам помогут, как ни странно, комплексные числа.

Пусть $z=a+bi$ — произвольное комплексное число. Назовем комплексное число $\bar{z}=a-bi$ *сопряженным* к числу z.

Нам понадобится

Теорема 4. *Если z — корень многочлена $P(x)$ с действительными коэффициентами, то и $\bar{z}$ — его корень.*

Для доказательства отметим следующие свойства операции взятия сопряженного числа $\bar{z}$:

1. Число $\bar{\bar{z}}$, сопряженное к сопряженному числу $\bar{z}$, совпадает с исходным комплексным числом z.

2. Число z равно своему сопряженному $\bar{z}$ тогда и только тогда, когда z является действительным числом.

3. Сопряженное к сумме комплексных чисел равно сумме чисел, сопряженных к слагаемым:

$$\overline{z_1+z_2}=\bar{z}_1+\bar{z}_2.$$

4. Число, сопряженное к произведению, равно произведению сопряженных к сомножителям:

$$\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2.$$

*) Доказательство теоремы 3 см., например, в «Кванте», 1976, № 8, с. 15.

С помощью метода математической индукции можно показать, что правила 3 и 4 распространяются на сумму и произведение более чем двух чисел:

$$\overline{z_1+z_2+\ldots+z_m}=\overline{z_1}+\overline{z_2}+\ldots+\overline{z_m},$$
$$\overline{z_1\cdot z_2\cdot\ldots\cdot z_m}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}\cdot\ldots\cdot\overline{z_m},$$

в частности, $\overline{z^m}=(\overline{z})^m$.

5. Произведение многочленов $x-z$ и $x-\overline{z}$ является многочленом с действительными коэффициентами:

$$(x-z)(x-\bar{z})=x^2-2ax+(a^2+b^2).$$

Доказательство теоремы 4. Пусть

$$P(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_2x^2+a_1x+a_0,$$

где $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_2, a_1, a_0$ — действительные числа, z — корень этого многочлена. Тогда

$$0=P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_2z^2+a_1z+a_0.$$

Воспользуемся свойствами операции сопряжения:

$$0=\overline{0}=\overline{P(z)}=$$
$$=\overline{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\ldots+a_2z^2+a_1z+a_0}=$$
$$=\overline{a_nz^n}+\overline{a_{n-1}z^{n-1}}+\ldots+\overline{a_2z^2}+\overline{a_1z}+\overline{a_0}=$$
$$=\overline{a_n}\,\overline{z^n}+\overline{a_{n-1}}\,\overline{z^{n-1}}+\ldots+\overline{a_2z^2}+\overline{a_1z}+\overline{a_0}=$$
$$=a_n\overline{z^n}+a_{n-1}\overline{z^{n-1}}+\ldots+a_2\overline{z^2}+a_1\overline{z}+a_0=P(\overline{z}).$$

Теорема 4 доказана.

Из теоремы 4 легко следует

Теорема 5. *Многочлен с действительными коэффициентами имеет четное число не действительных корней.*

В самом деле, по теореме 4 не действительные корни многочлена с действительными коэффициентами «ходят парами»: $(z;\ \overline{z})$.

Из теоремы 5 немедленно вытекает

Теорема 6. *Многочлен нечетной степени с действительными коэффициентами имеет по крайней мере один действительный корень.*

По основной теореме алгебры этот многочлен имеет нечетное число корней (равное его степени), следовательно, по теореме 5, они не могут быть все не действительными*).

С помощью комплексных чисел мы доказали вполне «действительную» теорему. Но гораздо более важным и интересным является следующий факт:

Теорема 7. *Любой многочлен с действительными коэффициентами, степень которого больше двух, приводим над полем действительных чисел.*

Доказательство. Если у многочлена $P(x)$ имеется действительный корень α, то $P(x)=q(x)\cdot(x-\alpha)$. Из придуманного вами доказательства теоремы 1 видно, что $q(x)$ — многочлен с действительными коэффициентами. Следовательно, в этом случае $P(x)$ есть призведение двух многочленов с действительными коэффициентами, то есть $P(x)$ приводим над полем действительных чисел.

Пусть теперь все корни $z_1, z_2, \ldots, z$ многочлена $P(x)$ — не действительные. По теореме 6 n — четное и

$$P(x)=a_n(x-z_1)(x-z_2)\ldots(x-z_n).$$

Разобьем корни $z_1, \ldots, z_n$ на сопряженные пары вида $(z_i;\ \overline{z_i})$ и запишем $P(x)$ так:

$$P(x)=a_n(x-z_1)(x-\bar{z}_1)(x-z_2)(x-\bar{z}_2)\times\ldots$$
$$\ldots\times(x-z_k)(x-\bar{z}_k);$$

здесь $k=\frac{n}{2}$.

Каждый многочлен $P_i(x)=(x-z_i)\times\times(x-\overline{z_i})$, $i=1, 2, \ldots, k$, имеет, как мы видели, действительные коэффициенты. Следовательно, многочлен $P(x)==a_nP_1(x)P_2(x)\ldots P_k(x)$ приводим над полем действительных чисел — ведь в этом произведении не менее двух сомножителей (из $n>2$ следует $k>1$).

Поэтому окончательный вывод о неприводимости многочленов над полем действительных чисел таков:

Теорема 8. *Над полем действительных чисел неприводимыми являются лишь многочлены первой степени и многочлены второй степени с отрицательным дискриминантом.*

Следствие. *Любой многочлен с действительными коэффициентами разложим в произведение многочленов первой и второй степени с действительными коэффициентами.*

О чем мы еще не рассказали? О том, какую роль сыграли многочлены в решении знаменитых задач древности — задач о трисекции угла, квадратуре круга и удвоении куба. О том, как юным Нильсом Абелем было доказано, что формул для нахождения корней многочленов степени выше четвертой не существует; как еще более юный Эварист Галуа полностью решил проблему о решении уравнений в радикалах. Наконец, мы ведь еще не доказали основную теорему алгебры...

Нет, автор должен признаться, что взялся за непосильную задачу; он в изнеможении откладывает перо и просит читателя не быть слишком взыскательным.

*) Попробуйте доказать эту теорему при помощи понятия непрерывности.

З. Керимов

Как найти целый корень?

Пусть нам надо решить уравнение

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0. \quad (1)$$

Если $n=1$ или $n=2$, мы это умеем — в школьных учебниках есть формулы. Если $n=3$ или $n=4$, тоже существуют формулы («Квант», 1976, № 9), правда, довольно громоздкие. Если же $n>4$, то таких формул просто не существует — не «не найдено», а доказано, что не существует («Квант», 1976, № 5, с. 6). Как же быть? Как находить корни уравнений «высших степеней»?

Для отыскания целых корней уравнения с целыми коэффициентами*) можно воспользоваться следующим достаточным условием: *если l — целый корень уравнения* (1) ***с целыми коэффициентами***, *то l является делителем свободного члена a_n.*

В самом деле, если l — корень уравнения (1), то

$$a_n=l(-a_0l^{n-1}-a_1l^{n-2}-\ldots-a_{n-1}). \quad (2)$$

Если $l\in\mathbf{Z}$ и коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n$ — тоже целые числа, то $-a_0l^{n-1}-a_1l^{n-2}-\ldots-a_{n-1}\in\mathbf{Z}$ и (2) означает, что a_n делится на l**).

Таким образом, если мы рассмотрим все — положительные и отрицательные! — делители числа a_n и каждый из них проверим, не является ли он корнем, мы найдем (если они есть!) все целые корни.

*) Впрочем, уравнение с рациональными коэффициентами легко заменяется равносильным уравнением с целыми коэффициентами. Как?

**) Понятия «делитель», «делится» определяются для целых чисел.

Пример 1. У свободного члена уравнения

$$3x^3+5x^2+x-46=0 \quad (3)$$

следующие делители: ±1, ±2, ±23, ±46. Проверив «маленькие» делители (±1, ±2), мы увидим, что 2 является корнем уравнения (3). Дальше можно было бы проверять «большие» делители (впрочем, для данного конкретного уравнения легко увидеть, не вычисляя до конца, что ни одно из чисел ±23, ±46 корнем не является), но проще, как говорят, понизить степень уравнения, воспользовавшись легко доказываемым утверждением: *число l тогда и только тогда является корнем многочлена $f(x)$, когда $f(x)$ делится на $x-l$**). Поскольку 2 является корнем уравнения (3), многочлен $3x^3+5x^2+x-46$ делится на $x-2$. Найдем частное.

$$\begin{array}{r|l} 3x^3+5x^2+x-46 & x-2 \\ \cline{2-2} -\,3x^3-6x^2 & 3x^2+11x+23 \\ \cline{1-1} 11x^2+x-46 & \\ -\,11x^2-22x & \\ \cline{1-1} 23x-46 & \\ -\,23x-46 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Итак, $3x^3+5x^2+x-46=(x-2)(3x^2+11x+23)$. Значит, вместо кубического уравнения (3) мы можем решать теперь квадратное уравнение $3x^2+11x+23=0$. Это последнее уравнение корней (действительных) не имеет. Значит, уравнение (3) имеет один корень 2.

Пример 2. У свободного члена уравнения

$$x^4-17x^3+77x^2-85x+360=0 \quad (4)$$

очень много делителей: ±1, ±2, ±3, ±4, ±5, ±6, ±8, ±9, ±10, ±12, ±15, ±18, ±20, ±24, ±30, ±36, ±40, ±45, ±60, ±72, ±90, ±120, ±180, ±360. Подставлять их все в левую часть уравнения — не очень благодарный труд. Правда, сразу видно, что у данного уравнения не может быть отрицательных корней, но остаются еще 24 делителя.

Воспользуемся следующим обобщением сформулированного выше утверждения о целых корнях: *если l — целый корень уравнения* (1) ***с целыми коэффициентами***, *то для любого $m\in\mathbf{Z}$ разность $m-l$ является делителем числа $f(m)$* (здесь через $f(x)$ обозначен много-

*) См. статью С. Ашманова *«Числа и многочлены»*, с. 17

член, стоящий в левой части уравнения (1) *).

В самом деле, если l — корень уравнения (1), то $f(l)=0$ и

$$f(m)=f(m)-f(l)=$$
$$=a_0(m^n-l^n)+a_1(m^{n-1}-l^{n-1})+\ldots$$
$$\ldots+a_{n-1}(m-l).$$

При целых m и l каждая скобка делится на $m-l$, значит, и $f(m)$ делится на $m-l$.

Таким образом, *целые корни достаточно искать среди чисел вида $m+p$* **), *где p — делитель числа* $f(m)$, причем «степень свободы» — выбор числа m — в нашей власти. Впрочем, по-видимому, проще не перебирать делители числа $f(m)$, а рассмотреть разности $m-l$ для делителей l свободного члена.

Вернемся к примеру 2. Пусть

$$f(x)=x^4-17x^3+77x^2-85x+360.$$

Начнем с наименьшего делителя 1. Проверяем: $f(1)=336$. Значит, 1 — не корень.

Применим обобщенное правило к $m=1$. Выберем из положительных делителей числа 360 такие l, для которых число $336=2^4\cdot3\cdot7$ делится на $1-l$. Таких делителей семь: 2, 3, 4, 5, 8, 9, 15.

Проверяем наименьший делитель: $f(2)=378$. Значит, 2 — не корень. Применим теперь обобщенное правило к $m=2$: из семи оставшихся «кандидатов в корни» отберем те l, для которых число $378=2\cdot3^3\cdot7$ делится на $2-l$. Остается пять «кандидатов»: 3, 4, 5, 8, 9.

Любопытно, что, если мы сделаем еще шаг по тому же пути: вычислим $f(3)=420$ и рассмотрим разности $3-l$, мы не получим сужения проверяемого множества.

Дальше вам предоставляется выбор: либо брать наугад еще какие-нибудь m и применять обобщенное правило, либо «в лоб» подставлять пять «подозрительных» чисел в $f(x)$, либо делить $f(x)$ на $x-3$, $x-4$, $x-5$, $x-8$, $x-9$.

Оказывается, у уравнения (4) два целых корня: 8 и 9. Разделив $f(x)$ на $(x-8)(x-9)$, получим x^2+5. Значит, больше целых корней у него нет.

*) При $m=0$ отсюда легко получается первоначальное утверждение.

**) Почему мы написали $m+p$, а не $m-p$?

М. В. Ломоносов и Московский университет

Создание Московского университета неразрывно связано с именем великого помора, выдающегося русского ученого-самородка М. В. Ломоносова (1711—1765).

Еще к 1748 году относится письмо М. В. Ломоносова, где он формулирует свое мнение об университетском регламенте и, в частности, указывает, что «в университете неотменно должно быть трем факультетам: юридическому, медицинскому и философскому (богословский оставляю синодальным училищам), в которых бы производились в магистры лиценциаты и докторы». В 1754 году М. В. Ломоносов составляет проект организации в Москве университета и двух гимназий при нем. Наконец, в январе 1755 года энергичные усилия М. В. Ломоносова увенчались успехом: публикуется указ об учреждении Московского университета. Символично, что здание, в котором сначала разместился первый русский университет, стояло на Красной площади, рядом с Кремлем — на том месте, где сегодня возвышается Исторический музей.

В 1940 году Указом Президиума Верховного Совета СССР Московскому государственному университету присвоено имя его основателя. В 1961 г. в связи с 250-летием со дня рождения М. В. Ломоносова, была выпущена памятная настольная бронзовая медаль, на которой, в частности, изображен контур Главного здания МГУ на Ленинских горах (эту медаль вы видите на снимке).

Н. Х.

А. Митрофанов

Вверх по наклонной плоскости

Предлагаем вам провести опыт, очень старый и очень похожий на фокус.

Возьмите два одинаковых конуса, например из дерева, пластмассы или металла (материал не имеет решительно никакого значения). Конусы могут быть сплошными или пустотелыми, лишь бы они не были *слишком легкими*. Прочно соедините конусы основаниями (например, склейте), причем так, чтобы оси конусов обязательно совпадали. Для опыта вам понадобятся также толстая книга и два одинаковых достаточно длинных стержня.

Положите книгу на стол, а стержни расположите так, чтобы они одними концами опирались на ребро книги, другими — на стол, причем в одном и том же месте. Короче говоря, стержни и ребро книги должны образовать своеобразную «наклонную плоскость» в форме равнобедренного треугольника (рис. 1).

Теперь возьмите скрепленные конусы и положите их на стержни, при этом ось конусов должна быть горизонтальной. Как только вы это сделаете, вы увидите, что конусы сами, без подталкивания, покатятся по наклонной плоскости... не вниз, а вверх, вопреки привычному опыту и здравому смыслу.

В чем же секрет этого фокуса? Чудес здесь, конечно, никаких нет. Просто оказывается, что при выполнении некоторых условий центр тяжести конусов в процессе их «скатывания» вверх будет не подниматься, а опускаться. Именно сила тяжести и является причиной такого, на первый взгляд, необычного движения.

Какие же условия должны выполняться? Рассмотрим этот вопрос подробнее. Обозначим угол наклона плоскости к горизонту через α, угол между стержнями — через 2β и угол при вершине конусов — через 2γ (рис. 2). Пусть конусы перемещаются вверх по направляющим стержням из положения *I* в положение *II*. l_1 и l_2 — соответствующие расстояния между точками касания конусов со стержнями.

Из рисунка 2, *а* видно, что по отношению к точкам касания центр тяжести конусов о п у с к а е т с я (по вертикали) на величину

$$H=\frac{l_2-l_1}{2}\operatorname{tg}\gamma.$$

Сами же точки касания при этом естественно п о д н и м а ю т с я, высота их поднятия равна (см. рис. 2, *б*)

$$h=|MN|\sin\alpha=\frac{l_2-l_1}{2}\operatorname{ctg}\beta\sin\alpha.$$

Теперь нетрудно сформулировать условие «скатывания» конусов вверх по наклонной плоскости. Очевидно, что для этого должно выполняться требование $H>h$:

$$\frac{l_2-l_1}{2}\operatorname{tg}\gamma>\frac{l_2-l_1}{2}\operatorname{ctg}\beta\sin\alpha,$$

или

$$\sin\alpha<\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma.$$

Только в таком случае центр тяжести конусов будет о п у с к а т ь с я при движении конусов в в е р х по плоскости.

Если выполняется противоположное неравенство

$$\sin\alpha>\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma,$$

конусы будут *по-настоящему скатываться* с плоскости, то есть опускаться вниз.

При условии

$$\sin\alpha=\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma$$

конусы будут находиться на наклонной

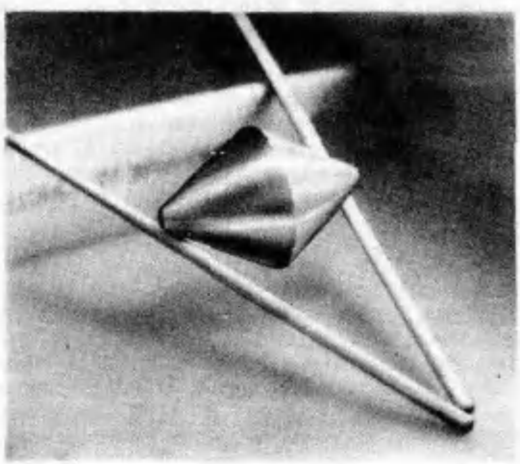


Рис. 1.

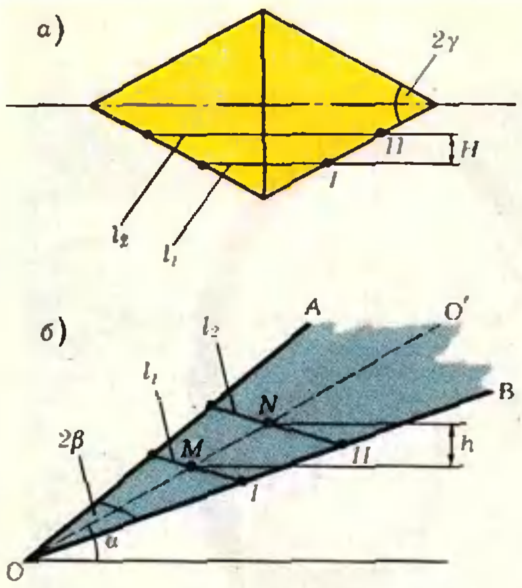


Рис. 2.

плоскости в безразличном равновесии, то есть покоиться (как, например, покоится цилиндр на горизонтальной плоскости). На фотографии, приведенной на рисунке 1, запечатлен как раз этот случай.

В заключение предлагаем вам несколько экспериментальных задач, связанных с уже проделанным вами опытом.

1. Проверьте экспериментально, что при безразличном равновесии конусов на наклонной плоскости $\sin\alpha = \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma$. С какой точностью удается проверить это соотношение?

2. Покажите с помощью расчетов и проверьте на опыте, что условие безразличного равновесия будет также выполняться, если точка упора стержней переместится по столу по направлению к книге, а точки касания стержней ребра книги останутся на прежних местах.

3. Теоретически можно подобрать углы γ и β так, что условие поднятия конусов по плоскости будет выполняться при угле $\alpha = 90°$ ($\sin\alpha = 1$), то есть когда плоскость вертикальна. А что дает в таких условиях опыт?

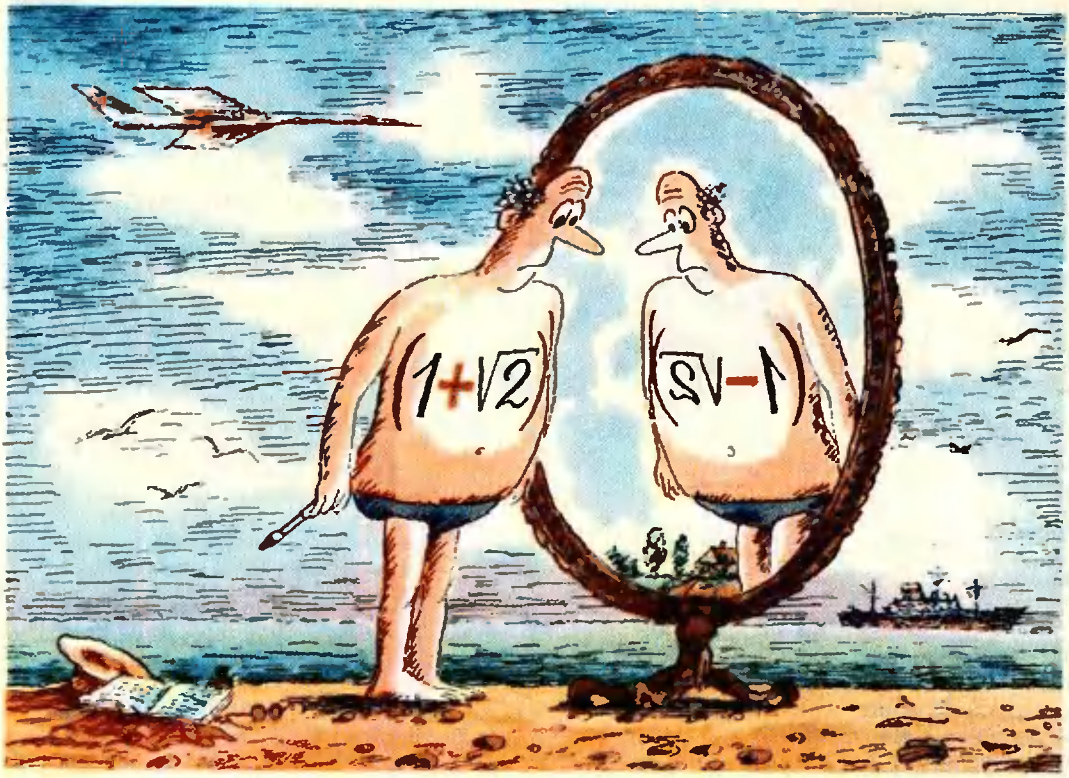
4. Пусть наклонная плоскость образована стержнями, сходящимися кверху, а не книзу. Тела какой формы смогут «скатываться» вверх по таким направляющим?

ЗАПОЛНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ МНОГОУГОЛЬНИКАМИ.

Посмотрите внимательно на конфигурацию, изображенную на первой обложке: она составлена из большого числа конгруэнтных девятиугольников. Эти девятиугольники — невыпуклы, их неправильная форма напоминает латинскую букву S (см. обложку). Оказывается, конфигурация может быть продолжена до бесконечности; при этом девятиугольники продолжают разворачиваться по «двойной спирали» и заполняют всю плоскость (без пробелов и наложений друг на друга). Это доказано в 1937 г. ее создателем, немецким математиком Х. Ворденбергом.

Задача о заполнении плоскости многоугольниками уже не раз обсуждалась на страницах нашего журнала. В частности, в «Кванте» 1979, № 2, с. 9 приводилась классификация паркетов, в «Кванте» 1972, № 8, с. 41 — калейдоскопов. В отличие от нашей конфигурации, паркеты и калейдоскопы обладают простыми свойствами регулярности и периодичности. В частности, все вершины у них устроены одинаково, их можно сдвигать самих в себя с помощью различных перемещений. Наша же конфигурация обладает набором вершин разных типов (к ним примыкают 18, 7, 6 или 5 многоугольников) и лишь одно нетождественное перемещение (какое?) переводит фигуру в себя.

Попробуйте самостоятельно придумать подобные нерегулярные замощения плоскости одинаковыми многоугольниками. Если эта тематика вас заинтересует или если у вас получатся красивые картинки — напишите нам. Мы тогда вернемся к этим вопросам.



Н. Вагутен

Сопряженные числа

Читать эту статью (или проводить на ее основе занятие математического кружка) можно по-разному. Простейший способ — разобрать решения предложенных в ней задач, пропустив мелкий шрифт, а затем закрепить продемонстрированные приемы, перерешав предложенные в конце статьи упражнения. Но если вас заинтересовала та или иная задача или серия задач, можно поступить и иначе: внимательно прочитать помещенный вслед за ней мелким шрифтом текст и, пользуясь указанной автором дополнительной литературой, более глубоко разобраться в существе затронутых вопросов.

Читателю, вероятно, известны на первый взгляд трудные геометрические задачи, которые мгновенно решаются, если заменить одну данную точку другой, симметричной ей относительно какой-то прямой. Соображения симметрии очень важны и в алгебре.

В этой статье мы рассмотрим ряд ситуаций, в которых число вида $a+b\sqrt{d}$ полезно заменить *сопряженным* $a-b\sqrt{d}$. Мы увидим, как этот простой прием — замена знака перед радикалом — помогает в решении разнообразных задач алгебры и анализа — от нехитрых оценок и преобразований до трудных олимпиадных задач и замысловатых придумок составителей конкурсных экзаменов.

Большинство наших примеров может служить первым знакомством с глубокими математическими теориями (кое-где мы указываем статьи и книги для продолжения знакомства). Среди задач, включенных в статью, две — из Задачника «Кванта» и несколько — из писем читателей, уже испытавших удовольствие от трюков с радикалами и желающих поделиться им с другими.

Пары сопряженных чисел появляются вполне естественным образом, когда мы решаем квадратное уравнение, а корень из дискриминанта не извлекается: скажем, уравнение $\lambda^2-\lambda-1=0$ имеет пару «сопряженных» корней: $\lambda_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ и $\lambda_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. К этому мы еще вернемся, а начнем с примеров другого рода: займемся «перебросками»...

...Из числителя в знаменатель (и обратно)

Если в книжке указан ответ к задаче $\frac{3+\sqrt{7}}{2}$, а у вас получилось $\frac{1}{3-\sqrt{7}}$ — не спешите искать ошибку в решении: ответ правильный — эти числа равны, потому что

$$(3+\sqrt{7})(3-\sqrt{7})=3^2-7=2.$$

Вот несколько характерных примеров, где полезно перенести «иррациональность» из числителя в знаменатель или наоборот.

1. *Найти сумму*

$$\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

Эта сумма мгновенно «сворачивается», если переписать ее так:

$$(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\ldots$$
$$\ldots+(\sqrt{100}-\sqrt{99})=-1+10=9.$$

По выражению из статьи [1] «остаются крайние» (см. также [5]).

2. *Доказать, что для любых натуральных m и n*

$$\left|\frac{m}{n}-\sqrt{2}\right|>\frac{1}{\alpha n^2}, \qquad (1)$$

где $\alpha=\sqrt{3}+\sqrt{2}$.

Подобный факт мы использовали недавно в решении трудной задачи M514 ([2]).

В самом деле, всегда

$$\left|\frac{m-n\sqrt{2}}{n}\right|=$$
$$=\frac{|m^2-2n^2|}{(m+n\sqrt{2})n}>\frac{1}{(m+n\sqrt{2})n}, \qquad (2)$$

поскольку число $|m^2-2n^2|$ — целое и отлично от 0 (равенство $m^2=2n^2$ невозможно — подумайте, почему!). Если бы выполнялось неравенство, противоположное (1), то должно было бы быть $m<n\sqrt{2}+\frac{1}{\alpha n}$ и

$$n(m+n\sqrt{2})<n\left(2n\sqrt{2}+\frac{1}{\alpha n}\right)=$$
$$=2n^2\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=2n^2\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{2}<$$
$$<n^2(\sqrt{2}+\sqrt{3})=\alpha n^2. \qquad (3)$$

Но из (2) и (3) следует (1). Значит, наше предположение неверно, то есть (1) выполнено.

Неравенство (1) показывает, что число $\sqrt{2}$ сравнительно плохо приближается дробями с небольшими знаменателями; аналогичное неравенство (только с другим коэффициентом α)*) выполнено не только для $\sqrt{2}$, но и для любой «квадратичной иррациональности». Вопросы о приближениях квадратичных иррациональностей рациональными числами — далеко продвинутая и важная для приложений область теории чисел ([3], [4]); с приближениями числа $\sqrt{2}$ мы еще встретимся ниже (см. упражнение 4).

3. *Найдите предел последовательности* $a_n=(\sqrt{n^2+1}-n)n$.

Преобразуем a_n так:

$$(\sqrt{n^2+1}-n)n=$$
$$=\frac{n}{\sqrt{n^2+1}+n}=\frac{1}{1+\sqrt{1+1/n^2}}.$$

Теперь ясно, что a_n убывает и стремится к пределу 1/2.

В противоположность предыдущему примеру здесь мы имеем дело с хорошим приближением: $\sqrt{n^2+1}-n<1/2n$.

4 (M532). *Даны две последовательности* $a_n=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$ *и* $b_n=\sqrt{4n+2}$. *Докажите, что*

а) $[a_n]=[b_n]$,

б) $0<b_n-a_n<1/16n\sqrt{n}$.

В разности b_n-a_n появляется «тройная иррациональность»; к таким иррациональностям мы еще вернемся (см. задачу 8), но пока мы будем рассматривать $\sqrt{n+1}+\sqrt{n}=a_n$ как одно целое. Заметим, что величина $a_n^2=2n+1+2\sqrt{n(n+1)}$, очевидно, заключена между $4n+1$ и $4n+2=b_n^2$, поскольку $n<\sqrt{n(n+1)}<n+1$. Итак, мы уже получили $a_n<b_n$ — левое неравенство в б). Кроме того, число $b_n^2=4n+2$, дающее при делении на 4 в остатке 2, не может быть полным квадратом (проверьте!), поэтому квадрат целого числа $[b_n]$ не больше $4n+1$; из неравенств $[b_n]<\sqrt{4n+1}<a_n<b_n$ вытекает а). Теперь осталось оценить разность b_n-a_n сверху. Посмотрите, как здесь дважды работает переброска «сопряженного» числа в знаменатель:

$$\sqrt{4n+2}-\sqrt{n}-\sqrt{n+1}=$$
$$\frac{2n+1-2\sqrt{n(n+1)}}{\sqrt{4n+2}+\sqrt{n}+\sqrt{n+1}}=$$
$$=\frac{1}{(\sqrt{4n+2}+\sqrt{n}+\sqrt{n+1})}\times$$
$$\frac{1}{(2n+1+2\sqrt{n(n+1)})}\leqslant$$

*) Разумеется, (1) выполнено и при всех $\alpha>\sqrt{3}+\sqrt{2}$, но константа $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ здесь не наименьшая из возможных.

(тут, конечно, нам повезло: разность квадратов $(2n+1)^2-4n(n+1)$ равна 1)

$$< \frac{1}{(2\sqrt{n}+\sqrt{n}+\sqrt{n})\,(2n+2n)} = \frac{1}{16n\sqrt{n}}.$$

Заметим, что и эта оценка очень точная. Но убедиться в этом (и вообще исследовать поведение функции с многими радикалами) лучше уже не с помощью алгебраических преобразований, а средствами анализа — заменить переменную n на $h = 1/n$ и воспользоваться формулой Тейлора $\sqrt{1+h} = 1+h/2-h^2/8+\ldots$ (См. [6].)

Заменим плюс на минус

Мы уже говорили о пользе симметрии в геометрических задачах. Своего рода симметрией в а л г е б р е является замена плюса на минус.

Так, если какое-либо выражение от $\sqrt{d}$ равно $p+q\sqrt{d}$ и мы всюду в этом выражении заменим $\sqrt{d}$ на $-\sqrt{d}$, то естественно ожидать, что новое выражение окажется равным сопряженному числу $p-q\sqrt{d}$. Мы будем пользоваться таким очевидным частным случаем этого свойства (a и b — рациональны, $\sqrt{d}$ — нет):

$$(a+b\sqrt{d})^n = p+q\sqrt{d} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (a-b\sqrt{d})^n = p-q\sqrt{d}. \quad (4)$$

5. *Доказать, что уравнение*

$$(x+y\sqrt{5})^4+(z+t\sqrt{5})^4 = 2+\sqrt{5}$$

не имеет решений в рациональных числах x, y, z, t.

Можно, конечно, найти отдельно сумму членов левой части, не содержащих $\sqrt{5}$ (она должна быть равна 2), и отдельно — коэффициент при $\sqrt{5}$ (он должен равняться 1). Но что делать с полученной громоздкой системой, неясно. Вместо этого воспользуемся (4) и заменим плюс перед $\sqrt{5}$ на минус!

$$(x-y\sqrt{5})^4+(z-t\sqrt{5})^4 = 2-\sqrt{5}.$$

Слева стоит неотрицательное число, справа — отрицательное.

6. *Доказать, что существует бесконечно много пар $(x; y)$ натуральных чисел, для которых x^2 отличается от $2y^2$ на 1:*

$$|x^2-2y^2| = 1. \quad (5)$$

Несколько таких пар с небольшими $(x; y)$ легко найти подбором: это (1; 2), (3; 2), (7; 5), (17; 12),... (рис. 1). Как продолжить этот набор? Можно ли записать общую формулу для этих решений?

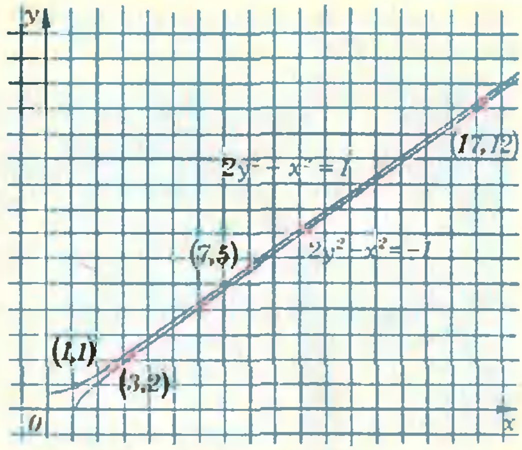


Рис. 1. Проходят ли эти гиперболы через бесконечное число узлов клетчатой бумаги?

Найти ответы на эти вопросы нам поможет число $1+\sqrt{2}$. Закономерность, позволяющая получать все новые и новые решения $(x; y)$, указана в таблице:

n	$(1+\sqrt{2})^n$	x_n	y_n	$x_n^2-2y_n^2$	$(1-\sqrt{2})^n$
1	$1+\sqrt{2}$	1	1	$1-2=-1$	$1-\sqrt{2}$
2	$3+2\sqrt{2}$	3	2	$9-8=1$	$3-2\sqrt{2}$
3	$7+5\sqrt{2}$	7	5	$49-50=-1$	$7-5\sqrt{2}$
4	$17+12\sqrt{2}$	17	12	$289-288=1$	$17-12\sqrt{2}$
5	$41+29\sqrt{2}$	41	29	$1681-1682=-1$	$41-29\sqrt{2}$
..	...	...	..	.....	.....

Какой будет шестая строчка?

Видно, что коэффициенты x_n, y_n в числе

$$x_n+y_n\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^n$$

будут давать нужную пару. Доказать это поможет колонка таблицы из сопряженных чисел (мы снова применяем (4)):

$$x_n-y_n\sqrt{2} = (1-\sqrt{2})^n.$$

Перемножив два последних равенства, получим

$$x_n^2-2y_n^2 = (1+\sqrt{2})^n(1-\sqrt{2})^n =$$
$$= ((1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2}))^n = (-1)^n,$$

и интересующее нас выражение попеременно равно то 1, то -1. Складывая и вычитая эти же два равенства, мы получим явное выражение для x_n и y_n:

$$x_n = ((1+\sqrt{2})^n+(1-\sqrt{2})^n)/2$$
$$y_n = ((1+\sqrt{2})^n-(1-\sqrt{2})^n)/2\sqrt{2}.$$

Можно ли в решении этой задачи про целые числа обойтись без иррациональных чисел $1+\sqrt{2}$ и $1-\sqrt{2}$? Теперь, зная ответ, мы можем легко выразить $(x_{n+1};\ y_{n+1})$ через предыдущую пару $(x_n;\ y_n)$: из $x_{n+1}+y_{n-1}\sqrt{2} = (x_n+y_n\sqrt{2})(1-\sqrt{2})$ вытекает

$$x_{n+1}=x_n+2y_n,\ y_{n+1}=x_n+y_n. \qquad (6)$$

До этого рекуррентного соотношения можно было, видимо, догадаться по нескольким первым решениям, а потом проверить, что

$$|x_n^2-2y_n^2| = |x_{n+1}^2-2y_{n+1}^2|.$$

Добавив начальное условие $x_1=1$, $y_1=1$, отсюда (по индукции) можно было бы заключить, что $|x_n^2-2y_n^2|=1$ для любого n. Далее, выразив обратно $(x_n;\ y_n)$ через $(x_{n+1};\ y_{n+1})$, «методом спуска» ([8]) можно доказать, что найденной серией исчерпываются все решения уравнения (5) в натуральных числах $(x;\ y)$. Подобным же образом решается любое «уравнение Пелля» $x^2-dy^2=c$ (а к уравнениям такого типа сводится любое квадратное уравнение в целых числах x, y), но у исходного уравнения может быть несколько серий решений ([7]).

Рекуррентные соотношения типа (6) возникают не только в теории чисел, но и в разных задачах анализа, теории вероятности. Вот характерный пример комбинаторной задачи такого типа (она предлагалась на последней международной олимпиаде в Лондоне):

7(М595). *В вершине A правильного восьмиугольника сидит лягушка. Из любой вершины восьмиугольника, кроме вершины E, противоположной A, она может прыгнуть в любую из двух соседних вершин. Попав в E, лягушка останавливается и остается там. Найти количество e_m различных способов, которыми лягушка может попасть из вершины A в E ровно за m прыжков.*

Если раскрасить вершины восьмиугольника через одну в черный и белый цвет (рис. 2), сразу станет ясно, что $e_{2k-1}=0$ при любом k: цвет вершины при каждом прыжке меняется. Обозначим через a_n и c_n количество способов, которым лягушка может за $2n$ прыжков попасть из вершины A, соответственно, в вершину A и в одну из вершин C (из соображений симметрии ясно, что в каждую из вершин, обозначенных на рисунке буквой C, можно попасть одним и тем же числом способов). Как легко проверить (см. рисунки 2*а*, *б*, *в*, *г*)),

$$a_1=2,\quad c_1=1;$$

$$\left.\begin{aligned} a_{n+1}&=2a_n+2c_n,\\ c_{n+1}&=a_n+2c_n. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

А интересующее нас число e_{2n} равно, очевидно, $2c_{n-1}$ (рис. 2*д*).

Как же найти явную формулу для a_n и c_n? Запишем наше рекуррентное соотношение (7) так:

$$a_{n+1}+c_{n+1}\sqrt{2} = (a_n+c_n\sqrt{2})(2+\sqrt{2}) \qquad (8)$$

и — как вы уже, конечно, догадались — еще так:

$$a_{n+1}-c_{n+1}\sqrt{2} = (a_n-c_n\sqrt{2})(2+\sqrt{2}). \qquad (9)$$

Отсюда по индукции, пользуясь (7), по-

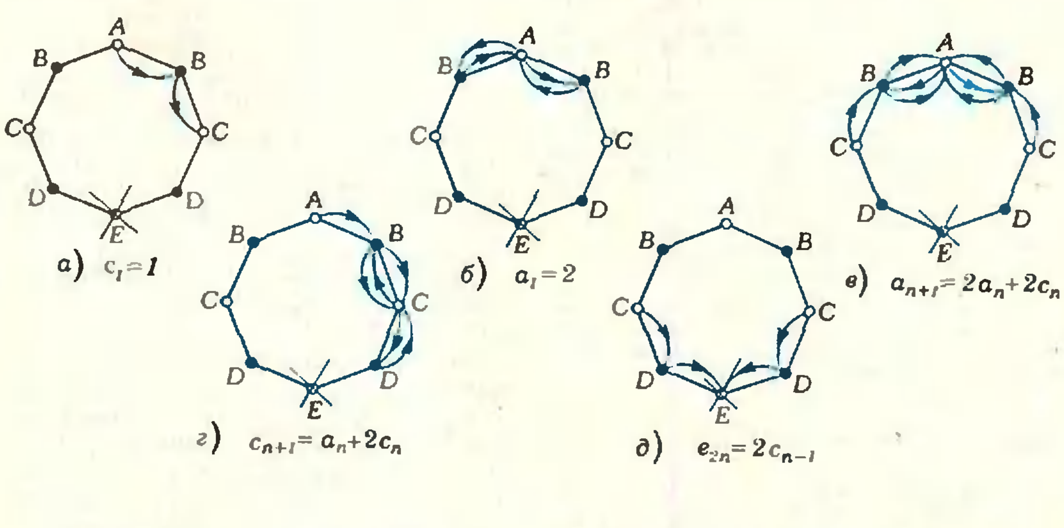


Рис. 2. а) Из A в C за два прыжка можно попасть только одним способом: $c_1=1$.

б) Из A в A за два прыжка можно попасть двумя способами: $a_1=2$.

в) В A можно попасть из C двумя способами и из A двумя способами: $a_{n+1}=2a_n+2c_n$.

г) В C можно попасть из A одним способом и из C — двумя: $c_{n+1}=a_n+2c_n$.

д) В E можно попасть из C двумя способами: $e_{2n}=2c_{n-1}$.

лучаем:

$$a_n + c_n\sqrt{2} = (2+\sqrt{2})^{n-1}(a_1 + c_1\sqrt{2}) = (2+\sqrt{2})^n;$$

$$a_n - c_n\sqrt{2} = (2-\sqrt{2})^{n-1}(a_1 - c_1\sqrt{2}) = (2-\sqrt{2})^n.$$

Поэтому $c_n = [(2+\sqrt{2})-(2-\sqrt{2})^n] : 2\sqrt{2}$, а так как $e_{2n} = 2c_{n-1}$, получаем окончательно

$$e_{2n} = [(2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1}]/\sqrt{2}; \qquad e_{2n-1} = 0.$$

Задача решена. Неясно только, как в этой задаче (и в предыдущей задаче 6) можно было додуматься до формул, содержащих $\pm\sqrt{2}$, — ведь в задаче речь идет о целых числах! (Для участников олимпиады и читателей «Кванта» задача 7 была облегчена тем, что в формулировке указывался ответ — «Квант», 1979, № 11, М595).

Однако «сопряженные числа» возникли бы совершенно автоматически, если бы мы владели началами линейной алгебры (см. [12]), и применили стандартные правила этой науки к решению уравнений (7). Эти правила предлагают сначала выяснить, какие геометрические прогрессии ($a_n = a_0\lambda^n$, $c_n = c_0\lambda^n$) удовлетворяют данному рекуррентному соотношению. Значения, для которых такие прогрессии существуют,— они называются *характеристическими значениями* или *собственными числами* — определяются из некоторого уравнения (оно тоже называется *характеристическим*). Для (7) характеристическое уравнение имеет вид $\lambda^2+2-4\lambda=0$, его корни — как раз $2+\sqrt{2}$ и $2-\sqrt{2}$. Зная эти корни, любое решение рекуррентного соотношения мы можем получить как «линейную комбинацию» соответствующих геометрических прогрессий ([11]). «Начальное условие» (в нашем случае $a_1=2$, $c_1=1$) определяет нужное нам решение однозначно.

Неудивительно, что даже самые простые рекуррентные целочисленные последовательности, для которых характеристическое уравнение — квадратное с целыми коэффициентами (примеры — те же (6) и (7) или последовательность Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8,..., $\Phi_{n+1} = \Phi_n + \Phi_{n-1}$ — см. [9], [10]), выражаются, как функции номера, с помощью «сопряженных» квадратичных иррациональностей.

Заметим, что большее характеристическое число определяет скорость роста последовательности: при больших n в задаче 7 $e_n \approx (2+\sqrt{2})^n/\sqrt{2}$. Можно сказать это еще так: $\lim\limits_{n\to\infty}(e_{n+1}/e_n) = 2+\sqrt{2}$.

Для задачи 6 аналогичное наблюдение: $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n/y_n) = \sqrt{2}$ — показывает, что оба члена суммы $x_n + y_n\sqrt{2}$ при больших n примерно равны друг другу. Интересное продолжение этого факта мы увидим в следующей задаче с большим числом «сопряженных» иррациональностей.

Поочередно меняем все знаки

8 (М520). *Пусть* $(1+\sqrt{2}+\sqrt{3})^n = q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6}$, *где* q_n, r_n, s_n *и* t_n *— целые числа. Найти пределы* $\lim\limits_{n\to\infty} r_n/q_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n/q_n$, $\lim\limits_{n\to\infty} t_n/q_n$.

Конечно, мы здесь можем выразить (q_{n+1}; r_{n+1}; s_{n+1}; t_{n+1}) через (q_n; r_n; s_n; t_n), пользуясь тем, что

$$q_{n+1} + r_{n+1}\sqrt{2} + s_{n+1}\sqrt{3} + t_{n+1}\sqrt{6} = (1+\sqrt{2}+\sqrt{3})(q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6}).$$

Но, наученные опытом, мы уже знаем, что более простые формулы получаются не для самих чисел q_n, r_n, s_n, t_n, а для некоторых их комбинаций. Одну такую комбинацию мы уже знаем: это $q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6} = (1+\sqrt{2}+3)^n$. Нетрудно сообразить, каковы будут другие. Рассмотрим вместе с данным числом $\lambda_1 = 1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$ еще три «сопряженных»: $\lambda_2 = 1-\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\lambda_3 = 1+\sqrt{2}-\sqrt{3}$, $\lambda_4 = 1-\sqrt{2}-\sqrt{3}$. Тогда

$$q_n - r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} - t_n\sqrt{6} = \lambda_2^n,$$
$$q_n + r_n\sqrt{2} - s_n\sqrt{3} - t_n\sqrt{6} = \lambda_3^n,$$
$$q_n - r_n\sqrt{2} - s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6} = \lambda_4^n.$$

Мы можем выразить q_n, r_n, s_n, t_n через λ_1, λ_2, λ_3, λ_4:

$$q_n = (\lambda_1^n + \lambda_2^n + \lambda_3^n + \lambda_4^n)/4,$$
$$r_n = (\lambda_1^n - \lambda_2^n + \lambda_3^n - \lambda_4^n)/4\sqrt{2},$$
$$s_n = (\lambda_1^n + \lambda_2^n - \lambda_3^n - \lambda_4^n)/4\sqrt{3},$$
$$t_n = (\lambda_1^n - \lambda_2^n - \lambda_3^n + \lambda_4^n)/4\sqrt{6}.$$

Теперь заметим, что $\lambda_1 > |\lambda_2|$, $\lambda_1 > |\lambda_3|$, $\lambda_1 > |\lambda_4|$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r_n}{q_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1-(\lambda_2/\lambda_1)^n + (\lambda_3/\lambda_1)^n - (\lambda_4/\lambda_1)^n}{1+(\lambda_2/\lambda_1)^n + (\lambda_3/\lambda_1)^n + (\lambda_4/\lambda_1)^n} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Аналогично найдем, что $\lim\limits_{n\to\infty} s_n/q_n = 1/\sqrt{3}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} t_n/q_n = 1/\sqrt{6}$.

Мы говорили выше, что сопряженные числа $a \pm b\sqrt{d}$ возникают часто как корни квадратного уравнения с целыми коэффициентами. В связи с последней задачей возникает такое желание:

9. *Написать уравнение с целыми коэффициентами, один из корней которого равен* $1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$.

Возникает подозрение, что вместе с этим числом λ_1 уравнению с целыми коэффициентами удовлетворяют и сопряженные, которые в решении предыдущей задачи мы обозначили λ_2, λ_3, λ_4. Нужное уравнение можно записать так:

$$(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)(x-\lambda_3)(x-\lambda_4) = 0;$$

то есть

$$(x-1-\sqrt{2}-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{2}-\sqrt{3}) \times (x-1-\sqrt{2}+\sqrt{3}) \times (x-1+\sqrt{2}+\sqrt{3}) = 0;$$

после преобразований получаем

$$((x-1)^2-5-2\sqrt{6})(x-1)^2-5+2\sqrt{6})=0,$$
$$(x^2-2x-4)^2-24=0,$$
$$x^4-4x^3-4x^2-16x-8=0.$$

Именно такое уравнение получилось бы в качестве характеристического, если бы мы применяли упомянутую мелким шрифтом на с. 30 общую теорию к исследованию линейного преобразования $(q_n; r_n; s_n; t_n) \to (q_{n+1}; r_{n+1}; s_{n+1}; t_{n+1})$ в предыдущей задаче. Заметим, кроме того, что мы на самом деле получили уравнение наименьшей степени (с целыми коэффициентами) с корнем $\lambda_1=1+\sqrt{2}+\sqrt{3}$. Попробуйте это доказать!

Алгебраическое послесловие

Мы разобрали несколько примеров, в которых затрагивались пограничные вопросы алгебры, математического анализа и теории чисел. (Каждому направлению, которое мы наметили, можно было бы посвятить более подробную статью в «Кванте»!) В заключение покажем еще, как можно смотреть на основных героев статьи — «сопряженные числа» — с чисто алгебраической точки зрения.

Предположим, что у нас есть множество P чисел (или выражений с буквами, или еще каких-то элементов), с которыми можно выполнять четыре действия арифметики с соблюдением обычных арифметических правил. Такое множество называется *полем* (точное определение см. в сноске на с. 18); поля образуют, например, рациональные и действительные числа. Если в поле P не разрешимо, скажем, уравнение $x^2-d=0$, то можно расширить его, рассматривая элементы вида $p+q\sqrt{d}$, где $p, q \in P$, а $\sqrt{d}$ — новый символ, который при умножении сам на себя дает d, т. е. $\sqrt{d}\sqrt{d}=d$, так что $(p+q\sqrt{d})(p'+q'\sqrt{d})=(pp'+qq'd)+(pq'+qp')\sqrt{d}$. Подробно эта конструкция, для $d=2$ и $d=-1$, описана в статье С. Ашманова в этом номере «Кванта». Во втором случае, то есть при $d=-1$, расширением поля вещественных чисел получаются *комплексные числа*. К ним мы еще вернемся в следующих номерах «Кванта».

В новом поле P_1 — «квадратичном расширении» поля P — есть интересное отображение $\lambda=p+q\sqrt{d} \to \bar{\lambda}=p-q\sqrt{d}$ (своеобразная «алгебраическая симметрия»), называемое *сопряжением*, с такими свойствами:

1°. Все элементы старого поля P переходят в себя;

2°. Все равенства, содержащие арифметические операции, при этом отображении сохраняются:

$$\overline{\lambda+\mu}=\bar{\lambda}+\bar{\mu}; \quad \overline{\lambda\mu}=\bar{\lambda}\cdot\bar{\mu}. \qquad (10)$$

Это отображение является частным случаем так называемых *автоморфизмов Галуа* расширения P_1 поля P.

В задачах 8 и 9 мы видели пример «двукратного» расширения — присоединения $\sqrt{2}$ и затем $\sqrt{3}$,— в результате которого получилось поле с бо́льшим количеством автоморфизмов Галуа: кроме тождественного отображения, их уже три

$$(\sqrt{2}\to-\sqrt{2},\ \sqrt{3}\to\sqrt{3},$$
$$\sqrt{2}\to\sqrt{2},\ \sqrt{3}\to-\sqrt{3};$$
$$\sqrt{2}\to-\sqrt{2},\ \sqrt{3}\to-\sqrt{3}),$$

и их «взаимодействие» устроено так же, как во множестве самосовмещений прямоугольника.

Оказывается, к основному полю можно присоединять корни любого алгебраического уравнения. Автоморфизмы возникающего нового поля — предмет одной из красивейших ветвей алгебры XIX—XX века, теории Галуа, которая позволяет, в частности, исследовать вопрос о разрешимости уравнений в радикалах ([13], [14]).

Мы закончим эту статью набором задач, в основном продолжающих уже затронутые темы, но требующих иногда и новых соображений, и обещанным списком литературы.

Упражнения

1. Что больше: $\sqrt{1979}+\sqrt{1980}$ или $\sqrt{1978}+\sqrt{1981}$?

2. Докажите, что при всех положительных x

$$|\sqrt{x^2+1}-x-1/2x|<1/8x^3.$$

3. Постройте график функции $y=\sqrt{x^2-1}$ и докажите, что при $|x|>1$

$$0<|x|-\sqrt{x^2-1}<1/|x|.$$

4. В формуле $\sqrt{2}=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$ заменим $\sqrt{2}$, стоящий в правой части (в знаменателе), по той же формуле:

$$\sqrt{2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}.$$

В этой формуле снова заменим нижний $\sqrt{2}$ на $1+\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$, и т. д. n раз. Если теперь нижний корень заменить на 1 или на 2, мы получим два рациональных числа p_n, q_n. Докажите, что $\sqrt{2}$ лежит между ними и $\lim p_n=\lim q_n=\sqrt{2}$. (Не встречались ли мы с этими числами в одной из задач?)

5. Докажите, что уравнения а) $x^2-3y^2=1$, б) $x^2-3y^2=2$ имеют бесконечное множество решений в целых числах.

6. Докажите, что функция $y=\ln(\sqrt{1+x^2}+x)$ — нечетная, и постройте ее график.

7. а) Докажите, что для любого натурального n

$$2(\sqrt{n+1}-1)<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1.$$

б) (*С. Майзус*, Запорожье) Докажите, что последовательность

$$U_n=1+\frac{1}{\sqrt[4]{2^3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{3^3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt[4]{n^3}}-4\sqrt[4]{n}$$

убывает и стремится к пределу.

8. а) (*В. Комов*, Александров) Докажите, что последовательность $\{(2+\sqrt{3})^n\}$ сходится, и найдите ее предел.

б) Каковы первые 100 десятичных знаков после запятой в записи числа $(\sqrt{50}+7)^{100}$?

9. Докажите, что для любого натурального d, не являющегося полным квадратом, найдется такое α, что для любых m и n

$$|m/n-\sqrt{d}|>1/\alpha n^2.$$

10. (*Н. Жук*, Минск) Докажите, что при любом натуральном n число $[(35+\sqrt{1157})^n/2^n]$ делится на 17, и вообще для любых натуральных k и n число $[(2k+1+\sqrt{4k^2+1})^n/2^n]$ делится на k.

11. (*С. Манукян*, с. Малый Памач ГССР). Докажите, что для любого числа $p>2$ найдется такое число β, что для каждого n

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\dots+\sqrt{2+\sqrt{2+p}}}}}_{n\ \text{радикалов}}=\beta^{2^n}+\beta^{-2^n}.$$

12. (*Н. Жук*, Минск) Докажите, что последовательность $b_m=1+17m^2$ содержит бесконечно много квадратов целых чисел.

13. Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, один из корней которого $(3+\sqrt{5})/4$.

14. Составьте уравнение 4-й степени с корнями $\pm\sqrt{p}\pm\sqrt{q}$ и решите его, как биквадратное уравнение. Сравнивая ответ с данными корнями, докажите популярные формулы для двойных радикалов:

$$\sqrt{A\pm\sqrt{B}}=\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}}\pm\sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\quad(A^2>B>0,\ A>0).$$

15. (*А. Земляков*, Москва) Освободитесь от иррациональности в знаменателе:

а) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}$; б) $\dfrac{1}{\sqrt{10}+\sqrt{14}+\sqrt{21}+\sqrt{15}}$.

16. Лягушка может прыгнуть из каждой вершины правильного треугольника ABC в любую из двух других вершин. Найдите число a_n способов, которым она может совершить прогулку из n прыжков, начинающуюся и заканчивающуюся в вершине A. Докажите, что существует предел $\lim a_{n+1}/a_n$, и найдите его.

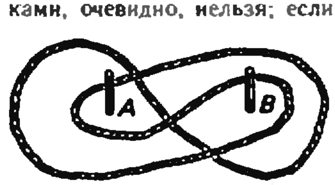
Задание для учеников ВЗМШ (факультативное): упражнения 1, 3, 5а, 6, 7а, 8а, 11, 13, 15, 16.

Список дополнительной литературы

1. Л. Курляндчик, А. Лисицкий «Суммы и произведения» («Квант», 1978, № 10).
2. Второе решение задачи М514 («Квант», 1979, № 5, с. 26).
3. Р. Нивен «Числа рациональные и иррациональные» (М., «Мир», 1966).
4. Д. Фукс, М. Фукс «О наилучших приближениях» («Квант», 1971, №№ 6, 11) и «Рациональные приближения и трансцендентность» («Квант», 1973, № 1).
5. Н. Васильев, В. Гутенмахер «Прямые и кривые» (М., «Наука», 1978), с. 103—105.
6. А. И. Маркушевич «Ряды» (М., «Наука», 1979).
7. Избранные задачи из журнала American Mathematical Monthly (М., «Мир», 1977), с. 560—561.
8. Л. Курляндчик, Г. Розенблюм «Метод бесконечного спуска» («Квант», 1978, № 1).
9. В. Березин «Филлотаксис и последовательность Фибоначчи», («Квант», 1979, № 5, с. 53).
10. Н. Н. Воробьев «Числа Фибоначчи» (Популярные лекции по математике, вып. 6) (М., «Наука», 1978).
11. А. И. Маркушевич «Возвратные последовательности» (Популярные лекции по математике, вып. 1) (М., «Наука», 1978).
12. Л. И. Головина «Линейная алгебра и некоторые ее приложения» (М., «Наука», 1979).
13. М. М. Постников «Теория Галуа» (М., Физматгиз, 1963).
14. Ван-дер-Варден «Алгебра» (М., «Наука», 1976).

Стяните петлю

В плоскость воткнуты два колышка A и B, на них накинута веревочная петля (см. рисунок). Снять петлю с колышков, не разрывая ее и не поднимая ее над колышками, очевидно, нельзя; если же убрать любой из них, то это сделать можно.



З а д а ч а. *Нарисуйте петлю, наброшенную на три колышка, которая с них не снимается, но, если убрать любой колышек, снимается с оставшихся двух.*

В. Березин

Конические сечения и задача Аполлония

В истории науки имя греческого геометра и астронома Аполлония Пергского в течение многих столетий учеными ставилось чуть ли не в один ряд с именем Архимеда.

Когда живший в XVI веке алгебраист Ф. Виет нашел свое решение задачи Аполлония, он в восторге воскликнул: «Я Аполлоний Галльский!» (то есть французский). О задаче Аполлония из утерянной рукописи «О касании», знакомой нам только по комментариям его современников, уже рассказывалось в «Кванте» (1971, № 8). Вот ее условие: *построить окружность, касательную к трем другим окружностям, произвольно расположенным на плоскости.*

Аполлоний внес много нового и в теорию конических сечений. Напомним, что конические сечения определяются как линии, представляющие собой сечения плоскостью поверхности конуса. Названия этих линий — эллипс, гипербола и парабола — были придуманы им («Квант», 1975, №№ 1, 3, 4).

Однако сейчас более привычны другие определения этих линий. *Эллипс* — множество точек плоскости P, находящихся на таких расстояниях r_1 и r_2 от двух фиксированных точек — фокусов $F_1 \in P$ и $F_2 \in P$, что $r_1+r_2=2a$ ($a>0$ — постоянная). *Гипербола* — множество точек в плоскости P, находящихся на таких расстояниях r_1 и r_2 от фокусов $F_1 \in P$ и $F_2 \in P$, что $|r_2-r_1|=2a$. Наконец, *парабола* — множество точек в плоскости P, находящихся на равных расстояниях от фокуса $F \in P$ и от прямой (так называемой *директрисы*) $d \in P$.

Можно обойтись без конуса и совсем необязательно выходить в пространство, чтобы найти скрепляющий эти три так непохожих друг на друга кривых (эллипс замкнут, парабола состоит из одной «бесконечной ветви», гипербола — из двух) математический цемент.

Именно, рассмотрим на плоскости две пересекающиеся окружности *) ε_1 и ε_2 с центрами в точках F_1 и F_2. Оказывается, центры всевозможных окружностей, касающихся одной из окружностей ε_1, ε_2 внутренним образом, а другой — внешним, образуют некоторый эллипс. Действительно, пусть окружность с центром в F_1 имеет радиус R_1 (рис. 1), а окружность с центром в F_2 — радиус R_2. Пусть T_1 и T_2 — соответственно, точки касания этих окружностей с окружностью с центром M. Тогда ясно, что

$$R_1+R_2=|F_1T_1|+|F_2T_2|= \\ =|F_1T_1|+|MF_2|+|T_1M|= \\ =r_1+r_2=\text{const}.$$

Если же рассмотреть множество центров M окружностей, касающихся обеих окружностей ε и ε_2 внешним образом (или обеих внутренним образом), то это множество оказывается гиперболой. Проведем доказательство для точки M_1 (рис. 2):

$$R_2-R_1= \\ =|F_2M_1|+|M_1N_2|- \\ -|F_1M_1|-|M_1N_2|= \\ =|F_2M_1|-|F_1M_1|= \\ =r_2-r_1=\text{const}.$$

Докажите самостоятельно, что точка M_3 лежит на правой ветви той же гиперболы.

А в каких же случаях возникает парабола как семейство центров окружностей? Чтобы ответить на этот вопрос, постараемся представить прямую как окружность бесконечного радиуса. Множество центров окружностей, касающихся прямой произвольного положения и некоторой окружности, есть парабола (рис. 3). Докажите это!

Принятое здесь представление конических сечений в виде семейств центров окружностей оказывается полезным, например, для решения приведенной выше задачи Аполлония. Действительно, центр окружности, касательной к трем данным, можно найти так. Выберем две из данных трех окружностей. Множество точек — центров окружностей, которые касаются этих двух, есть коническое сечение, как нами уже установлено. Рассмотрим другую пару из данных трех окружностей. Множество центров касающихся их окружностей — опять-таки коническое сечение. Центр окружности, касающейся трех данных, получим, таким образом, как пересечение двух конических сечений. Теперь соединяем центры искомых окружностей с центрами данных отрезками прямых и получаем в пересечении точки касания искомой окружности с данными тремя.

Конечно, такое решение задачи Аполлония не могло бы удовлетворить древнегреческих геометров. Почему? Да потому, что не ясно, как построить точку пересечения двух кривых с помощью только линейки и циркуля. Потому так и радовался Ф. Виет, когда ему удалось найти решение задачи Аполлония, использующее только циркуль и линейку. А вы можете это сделать?

В. Березин

*) Они показаны желтым цветом на второй странице обложки.

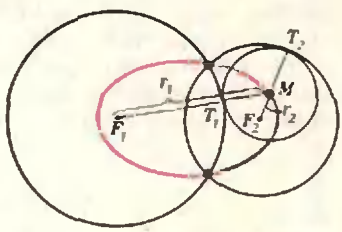


Рис. 1.

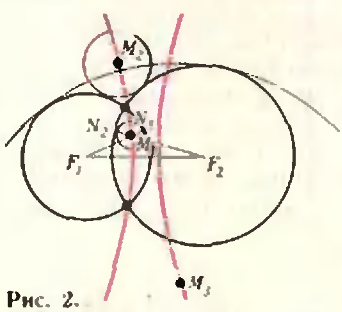


Рис. 2.

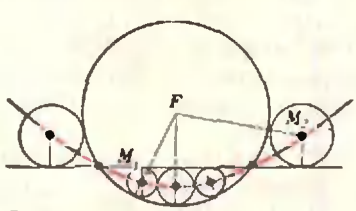


Рис. 3.

задачник Кванта

Задачи

М606 — М610; Ф618 — Ф622

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 апреля 1980 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 2 — 80» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М606, М607» или «Ф618». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

М606. Функция f такова, что для всех действительных x

$$f(x+1)+f(x-1)=\sqrt{2}\,f(x).$$

Докажите, что f — периодическая функция.

Э. Туркевич

М607. а) Разрежьте квадрат на равнобедренные трапеции.
б) Разрежьте равнобедренный прямоугольный треугольник на равнобедренные трапеции.
в) Докажите, что любой многоугольник можно разрезать на равнобедренные трапеции.

В. Лев

М608. На клетчатой бумаге (сторона клетки 1) нарисован n-угольник, все стороны которого лежат на линиях сетки и имеют нечетную длину.
а) Докажите, что n делится на 4.
б)* Докажите, что при $n=100$ площадь этого n-угольника обязательно нечетна. Выясните, какова четность площади при других n.

М. Концевич, ученик 10 класса

М609. а) Длины проекций выпуклого многоугольника площади S на две взаимно перпендикулярные прямые равны l_1 и l_2. Докажите, что $S\leqslant l_1l_2$.
б) Длины проекций выпуклого многогранника объема V на три взаимно перпендикулярные прямые равны l_1, l_2 и l_3. Докажите, что $V\leqslant l_1l_2l_3$.
в)* Площади проекций выпуклого многогранника объема V на три взаимно перпендикулярные плоскости равны S_1, S_2 и S_3. Докажите, что $V\leqslant\sqrt{S_1S_2S_3}$.

Ю. Смирнов

М610. Фиксируем $k\in\mathbf{N}$. а) Рассмотрим множество всех наборов целых чисел $a_1,\ldots,a_k$ таких, что $0<a_1<a_2<\ldots<a_k<k$; обозначим число таких наборов через N. Рассмотрим среди них те, для которых $a_k=k$; пусть их число равно M. Докажите, что $N=2M$.
б) Наложим на рассматриваемые наборы дополнительное ограничение: сумма $a_1+\ldots+a_k$ делится на k. Пусть соответствующие числа равны N' и M'. До-

0 0 0	0 0 3
0 0 1	0 1 3
0 1 1	0 2 3
1 1 1	0 3 3
0 0 2	1 1 3
0 1 2	1 2 3
0 2 2	1 3 3
1 2 2	2 3 3
2 2 2	3 3 3

Рис. 1.

кажите, что $N'=2M'$. (Из рисунка 1 видно, что при $k=3$ эти числа равны $M=9$, $N=18$; $M'=4$, $N'=8$.)

А. Толпыго

Ф618. Можно ли две лампы накаливания мощностью 60 Вт и 100 Вт, рассчитанные на напряжение 110 В, включить последовательно в сеть напряжением 220 В, если допустимо превышение напряжения на каждой из ламп не более 10% от номинального? Вольт-амперная характеристика лампы мощностью 100 Вт показана на рисунке 2.

А. Зильберман

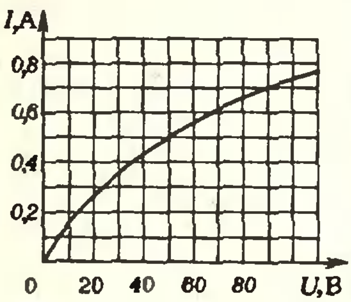


Рис. 2.

Ф619. Светящаяся точка находится на главной оптической оси на расстоянии $d=40$ см от рассеивающей линзы с фокусным расстоянием $F=10$ см. Точку сместили на расстояние $h=5$ см в плоскости, перпендикулярной главной оптической оси. На сколько и куда надо сместить линзу, чтобы изображение светящейся точки вернулось в старое положение?

Ленинградская городская олимпиада по физике, 1979 г.

Ф620. Если в центр квадратного стола поставить предмет массой, большей m_0, ножки стола сломаются. Найти множество точек стола, куда можно поставить предмет массой $m_0/2$, не боясь поломки стола.

О. Батищев

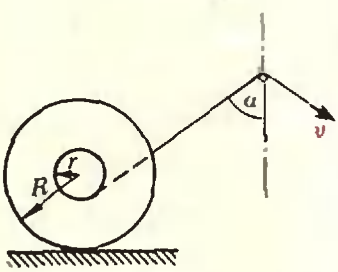


Рис. 3.

Ф621. Конец нити, намотанной на катушку, перекинут через вбитый в стену гвоздь (рис. 3). Нитку тянут с постоянной скоростью v. С какой скоростью движется центр катушки в тот момент, когда нить составляет угол α с вертикалью? Внешний радиус катушки равен R, внутренний — r.

Ф622. Когда и во сколько раз больше абсолютная влажность воздуха (плотность водяных паров): в ноябре при температуре $t_1=0°C$ и влажности 95% или в июле при $t_2=35°C$ и влажности 40%, если давление насыщенного пара при $t_1=0°C$ равно $p_1=6\cdot10^2$ Па, а при $t_2=35°C$ равно $p_2=5{,}5\cdot10^3$ Па?

ВНИМАНИЕ, ЧИТАТЕЛИ!

По вине типографии в условии задачи **М598** и в сноске к условию задачи **М599** («Квант», 1979, № 12, с. 20) были допущены опечатки. В условии задачи **М598** вместо буквы n должна быть буква R, а сноску к **М599** следует читать так:

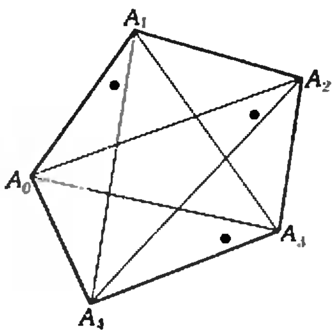
a^{b^c} *означает* $a^{(b^c)}$.

Срок присылки решений этих задач продлевается до 1 апреля.

Решения задач

М551 — М556; Ф563 — Ф567

М551. *а) Какое наименьшее число точек достаточно отметить внутри выпуклого пятиугольника, чтобы внутри любого треугольника с вершинами в вершинах пятиугольника содержалась хотя бы одна отмеченная точка?*
б) Тот же вопрос для выпуклого n-угольника.



Решим сразу задачу б). Ответ. $n-2$.

Ясно, что необходимо поставить по крайней мере $n-2$ точки, поскольку n-угольник можно разрезать на $n-2$ треугольника и в каждом должно быть по точке. Покажем, как в n-угольнике $A_0A_1\ldots A_{n-1}$ расставить точки нужным образом. Поставим k-ю точку B_k ($k=1, 2, \ldots, n-2$) вблизи вершины A_k внутри угла $A_0A_kA_n$ (см. рис.), точнее,— в пересечении этого угла с полуплоскостью, ограниченной прямой $A_{k-1}A_{k+1}$ и содержащей точку A_k. Ясно, что треугольник $A_iA_kA_j$, где $0\leqslant i<k<j\leqslant n-1$, содержит точку B_k: угол $A_iA_kA_j$ содержит угол $A_0A_kA_n$, а диагональ $A_{k-1}A_{k+1}$ пересекает отрезки A_iA_k и A_kA_j.

Н. Васильев

◆

М552. *а) Найдите хотя бы одну пару $(p; q)$ целых чисел, отличных от нуля, для которой трехчлены x^2+px+q и x^2+qx+p имеют целые корни.*
б) Найдите все такие пары $(p; q)$.

Мы будем решать сразу пункт б). Пусть x_1, x_2, y_1, y_2 — целые корни трехчленов x^2+px+q и x^2+qx+p соответственно. По теореме Виета

$$x_1+x_2=-p,\ y_1+y_2=-q,\ x_1x_2=q,\ y_1y_2=p.$$

Разделив произведение первых двух равенств на произведение двух других ($pq\neq 0$), получим:

$$\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right)\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{y_2}\right)=1.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\left|\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right|\geqslant 1 \text{ и } \left|\frac{1}{x_1}\right|\geqslant\frac{1}{2}, \text{ то есть } |x_1|\leqslant 2.$$

Возможны два случая: $|x_1|=1$ и $|x_1|=2$.

1°. Пусть $|x_1|=1$. Тогда из неравенства $\left|\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right|\geqslant 1$ получаем $|x_2|=n$, где $n\in\mathbf{N}$, $x_1x_2>0$. Отсюда по теореме Виета для первого трехчлена получаем $p=\pm(n+1)$, $q=n$. Трехчлен $x^2+nx-(n+1)$ имеет целые корни при всех $n\in\mathbf{N}$, а трехчлен $x^2+nx+n+1$ имеет целые корни лишь при $n=5$. Действительно, дискриминант этого трехчлена $(n-2)^2-8$ должен быть полным квадратом: $(n-2)^2-8=b^2$, то есть $(n-2)^2-b^2=8$; отсюда $(n-2-b)(n-2+b)=8$, причем $n\in\mathbf{N}$ и $b\in\mathbf{N}$. Поэтому

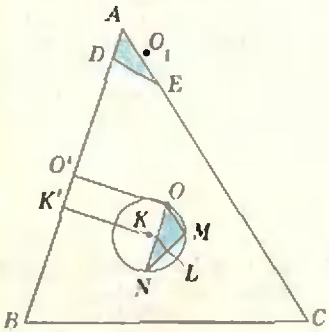
$$\begin{cases} n-2-b=2 \\ n-2+b=4 \end{cases} \Rightarrow n=5.$$

2°. Пусть $|x_1|=2$. Тогда из неравенства $\left|\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}\right|\geqslant 1$ следует, что $|x_2|\leqslant 2$. Случай $|x_2|=1$ с точностью до обозначений рассмотрен выше, а случай $|x_2|=2$ приводит к парам $(4, 4)$ и $(-4, 4)$, вторая из которых не подходит (у многочлена x^2+4x-4 — не целые корни).

Итак, полный ответ в задаче б): пары (4, 4); (5, 6); $(n, -n-1)$, $n \in \mathbf{Z}$.

Э. Туркевич

М553. *Дан треугольник ABC, причем $|BC|<|AC|<|AB|$. На лучах BA и CA отложены отрезки BD и CE такие, что $|BD|=|CE|=|BC|$. Докажите, что радиус окружности, описанной около треугольника ADE, равен расстоянию между центрами окружности, описанной около треугольника ABC, и окружности, вписанной в него.*



◆

Пусть O — центр окружности, описанной около треугольника ABC, O_1 — центр окружности описанной около треугольника ADE, K — центр окружности, вписанной в $\triangle ABC$ (см. рис.). Нужно доказать, что $|KO|=|O_1A|$.

Пусть $|BC|=|BD|=|CE|=a$, $|AC|=b$, $|AB|=c$.

Рассмотрим окружность с центром в точке K радиуса $|KO|$. Проведем хорды $[OM]\parallel[AC]$ и $[ON]\parallel[AB]$. Докажем, что треугольники OMN и ADE с конгруэнтными при вершинах O и A углами конгруэнтны.

Опустим из центров O и K перпендикуляры OO' и KK' на сторону AB ($L=[ON]\cap[KK']$). Легко проверить, что

$$|AK'|=\frac{a+b+c}{2}-a=\frac{b+c-a}{2},$$

$$|O'K'|=|AK'|-|AO'|=\frac{b+c-a}{2}-\frac{c}{2}=\frac{b-a}{2},$$

$$|ON|=2|OL|=2|O'K'|=b-a=|AE|.$$

Аналогично доказывается, что $|OM|=|AD|$.

Таким образом, треугольники OMN и ADE конгруэнтны по двум сторонам и углу между ними. Поэтому $|KO|=|O_1A|$.

С. Мейдман

М554. *Назовем натуральное число n хорошим, если существуют такие натуральные числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (не обязательно различные), что*

$$a_1+a_2+\ldots+a_k=n$$

и

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}=1.$$

Известно, что все числа от 33 до 73 — хорошие. Докажите, что все числа, большие 73,— тоже хорошие.

◆

Утверждение задачи сразу следует из двух лемм:

1°. *если число n — хорошее, то и $2n+2$ — хорошее;*

2°. *если число n — хорошее, то и $2n+9$ — хорошее.*

Докажем их.

Из равенств

$$n=a_1+a_2+\ldots+a_k,$$
$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_k}=1$$

следует

$$2n+2=2a_1+2a_2+\ldots+2a_k+2,$$
$$\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}+\ldots+\frac{1}{2a_k}+\frac{1}{2}=1$$

— тем самым доказано 1°;

$$2n+9=2a_1+2a_2+\ldots+2a_k+3+6,$$
$$\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{2a_2}+\ldots+\frac{1}{2a_k}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$$

— тем самым доказано 2°.

Пользуясь 1° и 2°, очевидной индукцией (начинающейся с $2\cdot 36+2=74$ для четных n и с $2\cdot 33+9=75$ для нечетных n) доказываем, что любое число, большее 73,— хорошее.

Любопытно, однако, выяснить, какие числа, меньшие 73, хороши, в частности — проверить правильность предпосылки, высказанной в условии. Без труда доказывается, что k^2 — всегда хорошее число и что если m и n — хорошие числа, то и mn —

$4 = 2^2$
$9 = 3^2$
$10 = 2\cdot 1 + 8 = 4\cdot 1 + 6$
$11 = 3\cdot 1 + 8 = 6\cdot 1 + 5$
$16 = 4^2$
$17 = 2\cdot 4 + 9 = 4\cdot 1 + 13$
$18 = 3\cdot 4 + 6$
$20 = 3\cdot 4 + 8$
$22 = 4\cdot 4 + 6$
$24 = 2\cdot 11 + 2$
$25 = 5^2$
$26 = 2\cdot 9 + 8$
$27 = 2\cdot 9 + 9$
$28 = 2\cdot 10 + 8$
$29 = 2\cdot 10 + 9$
$30 = 2\cdot 11 + 8$
$31 = 2\cdot 11 + 9$
$32 = 2 + 3 + 9 + 18$
$33 = 3\cdot 9 + 6$
$34 = 2\cdot 16 + 2$
$35 = 3\cdot 9 + 8$
$36 = 4\cdot 9$
$37 = 2 + 5 + 10 + 10 + 10$
$38 = 3\cdot 10 + 8$
$39 = 3\cdot 11 + 6$
$40 = 4\cdot 10$
. . . .

хорошее. Кроме того, аналогично тому, как это сделано в 1° и 2°, проверяется, что если n — хорошее, то хорошими будут также: $2n+8(8=4+4)$, $2n+20$ $(20=4+8+8)$, $3n+6$ $(6=3+3)$, $3n+8$ $(8=2+6)$, $4n+6$ $(6=2+4)$, $4n+13$ $(13=3+4+6)$, $6n+5$ $(5=2+3)$.

Пользуясь этим, а также подбирая представления для «недостающих» чисел, легко доказать, что хорошими будут числа 1, 4, 9, 10, 11, 16, 17, 18, 20, 22 и все числа от 24 до 73 (эти доказательства поясняют формулы на полях).

Подумайте, как проверить, будут ли хорошими числа 19, 21 и 23. Может быть, те, кто занимаются в нашей Заочной школе программирования, найдут более полезным составить программу, проверяющую, имеет ли система

$$\begin{cases} x_1 + \ldots + x_k = 23, \\ \dfrac{1}{x_1} + \ldots + \dfrac{1}{x_k} = 1 \end{cases}$$

решение в натуральных числах. (Если решение есть, то программа должна напечатать хотя бы одно решение, если нет — выдать «0».) Можете рассматривать это как дополнительную задачу к очередному уроку программирования; разумеется, полезно также дать оценку времени работы (числа тактов) и постараться, чтобы оно было как можно меньше.

M555. *Рассмотрим пересечение*
а) двух;
б) трех
цилиндров одинакового радиуса r, оси которых взаимно перпендикулярны и проходят через одну точку. Сколько плоскостей симметрии имеет это пересечение? Каков его объем?

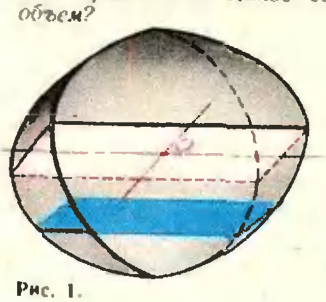


Рис. 1.

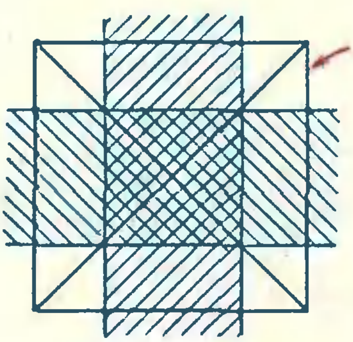


Рис. 2.

◆

а) Сечение нашего тела Ф плоскостью α_0, проходящей через оси цилиндров (будем считать, что α_0 горизонтальна, рис. 1),— квадрат со стороной $2r$. Тело Ф имеет, очевидно, те же пять плоскостей симметрии, что и квадрат $\Phi\cap\alpha_0$: это — сама плоскость α_0 и еще четыре перпендикулярные α_0 плоскости, проходящие через оси симметрии квадрата. А сечение тела Ф горизонтальной плоскостью α_x, отстоящей от α_0 на расстояние $|x|\leqslant r$,— квадрат со стороной длины $2\sqrt{r^2-x^2}$: каждый из цилиндров пересекается с этой плоскостью по полосе ширины $2\sqrt{r^2-x^2}$ (рис. 2, 3), а пересечение двух таких полос со взаимно перпендикулярными краями дает квадрат (рис. 2). Поэтому объем нашего тела равен

$$\int_{-r}^{r} 4(r^2-x^2)\,dx = 8r^3 - 8r^3/3 = 16r^3/3.$$

Для нахождения объема тела Ф считать интеграл вовсе не обязательно. Нужно только заметить, что сечение шара радиуса r (который, разумеется, можно вписать в тело Ф) плоскостью α_x — круг площади $\pi(r^2-x^2)$. Поэтому отношение искомого объема к объему шара радиуса r равно $4/\pi$. Отсюда объем тела Ф равен $16r^3/3$ (объем шара — $4\pi r^3/3$).

б) Чтобы представить себе пересечение Ψ трех цилиндров, удобно поступить так: взять куб (с диагональю грани длины $2r$, то есть с ребром $r\sqrt{2}$) и через каждую четверку параллельных ребер провести цилиндрическую поверхность (рис. 4). Ψ имеет те же девять плоскостей симметрии, что и куб. В вершинах куба будут пересекаться по три цилиндрических поверхности, а «над» каждой гранью возникнет купол, имеющий такую же форму, как часть тела Ф, расположенная над плоскостью $\alpha_{r\sqrt{2}/2}$. Объем одного купола равен

$$\int_{r\sqrt{2}/2}^{r} 4(r^2-x^2)\,dx = 4r^3\left[\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3\cdot 4}\right)\right] = r^3(8-5\sqrt{2})/3,$$

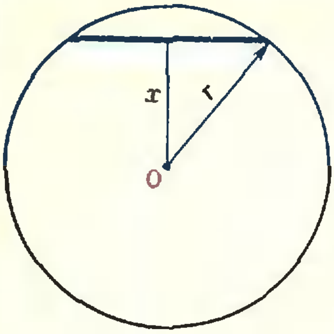


Рис. 3.

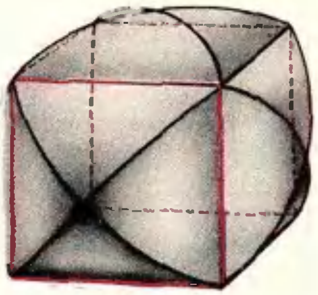


Рис. 4.

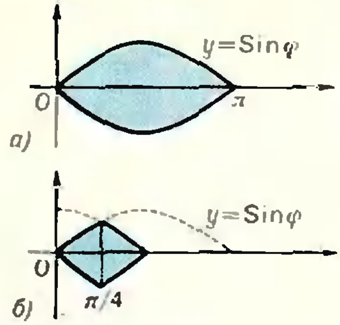


Рис. 5.

шести куполов $r^3(16-10\sqrt{2})$, куба $2r^3\sqrt{2}$, поэтому объем нужного нам тела $(16-8\sqrt{2})r^3 \approx 4{,}69r^3$ (объем шара радиуса r, который, разумеется, можно вписать в тело Ψ, равен $4\pi r^3/3 \approx 4{,}18r^3$).

Можно посчитать и площадь поверхности тел Φ и Ψ. Для этого нужно заметить, что если полосу бумаги шириной 2π свернуть цилиндрической трубкой (радиуса 1), разрезать этот цилиндр плоскостью под углом $\pi/4$ к оси и вновь развернуть бумагу на плоскость, то край ее будет иметь форму синусоиды. Для изготовления бумажной модели тела Φ надо взять четыре «лепестка» площади $2r^2\int\limits_0^\pi \sin\varphi\, d\varphi = 4r^2$ каждый (рис. 5, а), так что общая его поверхность $16r^2$, а бумажную модель тела Ψ можно сделать из двенадцати «лепестков» площади $4r^2\int\limits_0^{\pi/4} \sin\varphi\, d\varphi = (4-2\sqrt{2})r^2$ каждый (рис. 5, б), так что площадь поверхности тела Ψ равна $(48-24\sqrt{2})r^2$.

Н. Васильев

◆

М556. *Обязательно ли конгруэнтны два остроугольных равнобедренных треугольника, имеющих равные по длине боковые стороны и равные радиусы вписанных окружностей?*

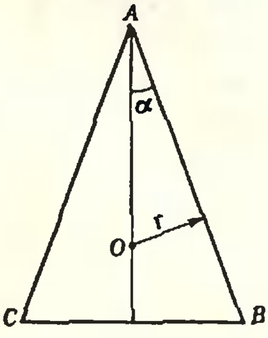


Рис. 1.

О т в е т. Вообще говоря, не обязательно.

Пусть в равнобедренном треугольнике ABC (рис. 1) $|AB| = |AC| = 1$, $\widehat{BAC} = 2\alpha$, O — центр вписанной окружности, r — ее радиус.

Для вычисления радиуса воспользуемся известной формулой $S = rp$, где S — площадь треугольника, p — его полупериметр. В нашем случае

$$S = \frac{1}{2}|AB|\cdot|AC|\sin 2\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha,$$

$$p = \frac{|AB|+|BC|+|AC|}{2} = 1+\sin\alpha.$$

Таким образом,

$$r(\alpha) = \frac{S}{p} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2\alpha}{1+\sin\alpha}.$$

Треугольник ABC, по условию, должен быть остроугольным, так что нас будут интересовать значения α, принадлежащие промежутку $]0;\ \pi/4[$. Нам надо выяснить, будет ли функция $r = r(\alpha)$ на $]0;\ \pi/4[$ монотонна или она на этом промежутке принимает некоторые значения дважды.

Исследуем функцию r с помощью производной. Вычислив производную, получим:

$$r'(\alpha)=\frac{1-\sin\alpha-\sin^2\alpha}{1+\sin\alpha}$$

(убедитесь в этом). Приравнивая $r'(\alpha)$ нулю, получаем

$$\sin^2\alpha+\sin\alpha-1=0,$$

и, поскольку $\alpha\in\,]0;\pi/4]$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ или $\arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}=$ $=\alpha_0\approx 38{,}2^\circ$.

Легко видеть, что $r'(\alpha)>0$ при $0<\alpha<\alpha_0$ и $r'(\alpha)<0$ при $\alpha_0<\alpha<\pi/4$. Таким образом, r возрастает при $\alpha\in\,]0;\alpha_0[$ и убывает при $\alpha\in\,]\alpha_0;\pi/4[$, то есть α_0 — точка максимума функции r (примерный ее график изображен на рисунке 2).

Теперь ясно, что внутри промежутка $]0;\pi/4[$ существуют такие α_1 и α_2, для которых $r(\alpha_1)=r(\alpha_2)$ (см. рис. 2).

А. Егоров

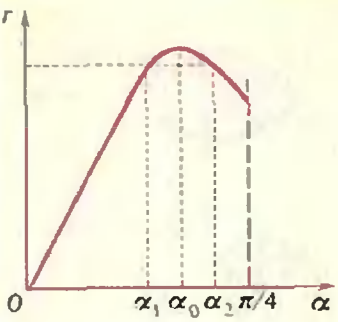
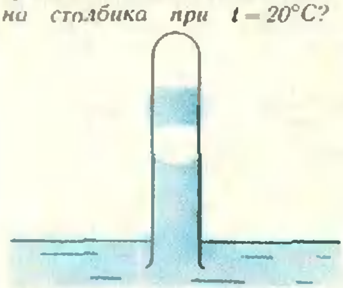


Рис. 2.

◆

Ф563. *Посередине барометрической трубки имеется столбик воздуха. При температуре $t_0=0^\circ C$ длина столбика равна $l_0=10$ см. Какой станет длина столбика при $t=20^\circ C$?*



Давление в столбике воздуха равно весу столбика жидкости над воздухом, деленному на площадь сечения трубки. При изменении температуры изменится и высота столбика жидкости, и его плотность. Но масса останется прежней. Прежним останется и вес столбика, а следовательно, не изменится и давление воздуха. Поэтому отношение объемов воздушного столбика при температурах $T=293$ К и $T_0=$ $=273$ К равно отношению температур, и следовательно,

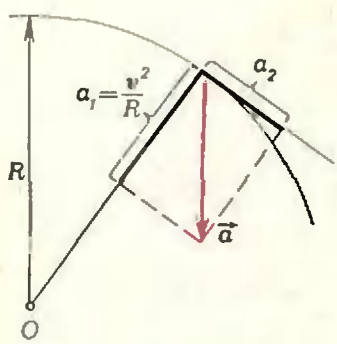
$$\frac{l}{l_0}=\frac{T}{T_0}.$$

Отсюда

$$l=l_0\frac{T}{T_0}\approx 10{,}7\ \text{см}.$$

◆

Ф564. *Автомобиль движется по повороту дороги радиуса R. Внезапно водитель увидел на дороге препятствие и начал тормозить. Какое расстояние автомобиль пройдет до остановки, если его скорость равна v_0, коэффициент трения колес о дорогу k и автомобиль тормозит с максимально возможным постоянным ускорением?*



Единственная внешняя сила, действующая на автомобиль в горизонтальной плоскости, это сила трения. Так как колеса автомобиля не проскальзывают относительно дороги, то это — сила трения покоя. Эта сила сообщает автомобилю ускорение $\vec{a}$ такое, что модуль проекции $\vec{a}$ на радиус, проведенный к точке, в которой находится автомобиль, равен центростремительному ускорению $a_1=v^2/R$; модуль проекции $\vec{a}$ на касательную к дороге равен $a_2=\sqrt{a^2-a_1^2}$. «Линейное» ускорение $\vec{a}_2$ обеспечивает уменьшение скорости автомобиля. Согласно условию задачи a_2 остается постоянным и максимально возможным. В момент начала торможения возможное ускорение a_2 определяется условием $a_2=\sqrt{a^2-v_0^4/R^2}$. Эта величина максимальна при $a=kg$ (максимальное значение силы трения покоя равно kmg).

Следовательно, автомобиль тормозит с постоянным «линейным» ускорением $a_2=\sqrt{(kg)^2-v_0^4/R^2}$. Расстояние l, пройденное автомобилем до остановки, равно

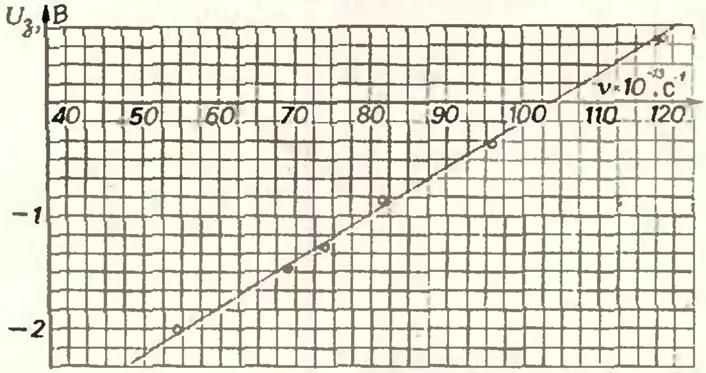
$$l=\frac{v_0^2}{2a_2}=\frac{v_0^2R}{2\sqrt{(kgR)^2-v_0^4}}.$$

Ф565. *На рисунке, взятом из работы Миликена, приведена зависимость задерживающего напряжения от частоты света в опытах по фотоэффекту. Определить из этого графика отношение постоянной Планка h к заряду электрона e.*

Согласно формуле Эйнштейна для фотоэффекта

$$h\nu = A + \frac{mv^2}{2},$$

где A — работа выхода электрона из катода и $mv^2/2$ — кинетическая энергия, которую имеет вылетевший электрон. Максимальное напряжение между анодом и катодом, при котором электрон еще может попасть на анод, — задержи-



вающее напряжение — определяется условием $U_з e = mv^2/2$. В нашем случае

$$h\nu = A + U_з e.$$

Для двух частот света ν_1 и ν_2 мы можем записать:

$$h\nu_1 = A + U_{з1}e, \quad h\nu_2 = A + U_{з2}e.$$

Вычитая из первого равенства второе, получим

$$h\Delta\nu = e\Delta U_з,$$

откуда

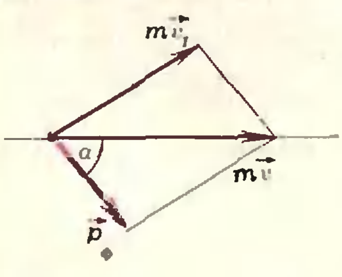
$$\frac{h}{e} = \frac{\Delta U_з}{\Delta\nu}.$$

Определив по графику соответствующие значения $\Delta U_з$ и $\Delta\nu$, находим:

$$\frac{h}{e} \approx 4\cdot10^{-15}\ \text{В}\cdot\text{с}.$$

◆

Ф566. *Атом, движущийся со скоростью v ($v \ll c$), испускает фотон под малым углом α к направлению своего движения. Доказать, что если ω_0 — частота излучения покоящегося атома, а ω — частота волны фотона, то для видимого света $\frac{\omega_0-\omega}{\omega} \approx \frac{v}{c}\cos\alpha$.*



В результате излучения фотона меняются импульс атома, его кинетическая энергия и внутренняя энергия.

Согласно закону сохранения импульса $m\vec{v} = m\vec{v}_1 + \vec{p}_ф$ ($m\vec{v}_1$ — импульс атома после излучения, $|\vec{p}_ф| = \hbar\omega/c$ — импульс излученного фотона), то есть

$$(mv_1)^2 = (mv)^2 + \left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2 - 2mv\frac{\hbar\omega}{c}\cos\alpha. \qquad (1)$$

Согласно закону сохранения энергии

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + \hbar\omega + \Delta E \qquad (2)$$

($\hbar\omega$ — энергия излученного фотона, ΔE — изменение внутренней энергии атома).

Изменение ΔE внутренней энергии атома — это изменение энергии первоначально неподвижного атома после излучения фотона с энергией $\hbar\omega_0$. После излучения атом, согласно закону сохранения импульса, приобретает импульс $m\vec{u}$ такой, что $m\vec{u} + (\hbar\omega_0/c) = \vec{0}$ и $mu = \hbar\omega_0/c$. Так что изменение внутренней энергии атома, согласно закону сохранения энергии, равно

$$\Delta E = -\left[\hbar\omega_0 + \frac{(\hbar\omega_0)^2}{2mc^2}\right] = -\hbar\omega_0\left(1 + \frac{\hbar\omega_0}{2mc^2}\right)$$

($\Delta E < 0$, так как внутренняя энергия атома уменьшилась).

Подставляя значение ΔE в (2) и исключая из (1) и (2) v_1, получаем:

$$\omega\left(1 + \frac{\hbar\omega}{2mc^2} - \frac{v}{c}\cos\alpha\right) = \omega_0\left(1 + \frac{\hbar\omega_0}{2mc^2}\right). \qquad (3)$$

При сравнительно малых значениях частот ω и ω_0 (порядка оптических) величины $\hbar\omega/2mc^2$ и $\hbar\omega_0/2mc^2$ много меньше единицы. Пренебрегая этими величинами, из (3) находим, что при малых углах α (когда $\cos\alpha \approx 1$)

$$\frac{\omega - \omega_0}{\omega} \approx \frac{v}{c}.$$

◆

Ф567. На рисунке 1 приведена зависимость тока через автомобильную лампочку от напряжения на ней. Лампочку включают в цепь, показанную на рисунке 2. Найти мощность, выделяющуюся на лампочке.

Чтобы найти мощность, выделяющуюся на лампочке, надо определить напряжение на лампочке и текущий через нее ток.

Если на лампочке и на резисторе с сопротивлением R_2 напряжение равно U, то на резисторе с сопротивлением R_1 напряжение равно $\mathscr{E} - U$. Ток, текущий через R_1, равен $I_1 = (\mathscr{E} - U)/R_1$; ток, текущий через R_2, равен $I_2 = U/R_2$. Следовательно, ток, текущий через лампочку при напряжении на ней U, равен

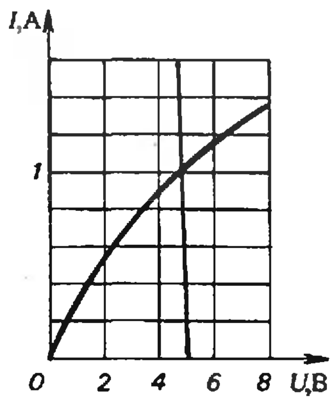


Рис. 1

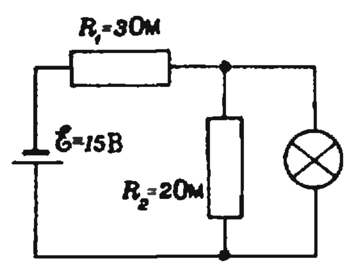


Рис. 2

$$I = I_1 - I_2 = \frac{\mathscr{E} - U}{R_1} - \frac{U}{R_2} = \frac{\mathscr{E}}{R_1} - U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \ (*)$$

Лампочка горит только в том случае, если значения U и I, связанные соотношением (*), соответствуют точке на вольтамперной характеристике лампочки. Эти значения определяют точку пересечения графика функции $I = 5 - \frac{5}{6}U$ (мы подставили в (*) численные значения) с вольтамперной характеристикой лампочки. Построив график (см. рис. 1), находим: $U \approx 4{,}8$ В, $I \approx 1$ А.

Таким образом, мощность, выделяющаяся на лампочке, равна

$$P = IU \approx 4{,}8 \text{ Вт}.$$

И. Слободецкий

Квант для младших школьников

Задачи

1. а) Два натуральных числа отличаются на 2, а их квадраты на 100. Какие это числа?
б) Квадраты двух последовательных натуральных чисел отличаются лишь перестановкой последних двух цифр. Найдите эти числа.

2. Для нумерации страниц книги потребовалось всего 1392 цифры. Сколько в этой книге страниц?

3. На улице, став в кружок, беседуют 4 девочки: Аня, Валя, Галя и Надя. Девочка в зеленом платье (не Аня и не Валя) стоит между девочкой в голубом платье и Надей. Девочка в белом платье стоит между девочкой в розовом платье и Валей. Какое платье носит каждая из девочек?

4. Если головоломка, которую вы разгадали перед тем, как вы разгадали эту, была труднее, чем головоломка, которую вы разгадали после того, как вы разгадали головоломку, которую вы разгадали перед тем, как вы разгадали эту, то была ли головоломка, которую вы разгадали перед тем, как вы разгадали эту, труднее, чем эта?

5. Разрежьте параллелограмм по прямой, проходящей через его центр, так, чтобы из полученных двух кусков можно было сложить ромб.

А. Бендукидзе, А. Савин

Производные пропорции

— Здравствуй, Ира!

— А, это ты, Витя! Заходи, садись.

— Как твоя ангина?

— Врач говорит, что в понедельник уже можно идти в школу. А что новенького в классе?

— Сегодня смеху было! Наталья Николаевна вызвала к доске Сережу Казакова. Уже не помню, какую он решал задачу, но по ходу дела ему нужно было сложить $^2/_3$ и $^5/_4$. Он взял и сложил числитель с числителем, а знаменатель со знаменателем,— получил в результате $^7/_7$, то есть единицу. А Наталья Николаевна и говорит: «Дай-ка, Сережа, дневник, я эту единицу поставлю туда тебе на память».

— Постой-ка, Витя, а это же любопытно!

— Это точно! Единиц у нас давно уже никто не получал.

— Да я не про то. Смотри, одна дробь была меньше единицы, а вторая больше, а в результате получилась единица. Подай, пожалуйста, со стола тетрадку и ручку! Спасибо. А ну-ка, возьмем $^2/_3$ и $^2/_5$. Так... Складываем числители, потом знаменатели...

— Тебе лавры Казакова не дают покоя?

— Обожди, мы получаем $^4/_8$, то есть $^2/_4$, то есть $^1/_2$. Ага! $^1/_2$ больше, чем $^2/_5$, но меньше, чем $^2/_3$. Ура! Витя, я придумала новую теорему: *если у двух дробей сложить числители, а потом знаменатели, то получится дробь, которая больше меньшей дроби, но меньше большей.*

— Постой, а откуда ты знаешь, что это верно?

— А я еще не знаю, я чувствую, что это так.

— Давай проверим. Если две дроби равны, то такое «сложение» по твоей теореме должно давать равную им дробь. Возьмем $^2/_3$ и $^4/_6$. Так... Получаем $^6/_9$, то есть снова $^2/_3$.

— А зачем брать частный случай? Возьмем несократимую дробь a/b.

— Почему несократимую?

— Хорошо, я умножу числитель и знаменатель на какое-нибудь число n. Теперь возьму другую, равную ей дробь. Для этого умножу числитель и знаменатель на число m. Получим

$$\frac{na}{nb} \text{ и } \frac{ma}{mb}.$$

Сложим числители и знаменатели, разделим. Получилось

$$\frac{na+ma}{nb+mb}.$$

— Теперь я вижу, что нужно сделать! В числителе вынесем множитель a, а в знаменателе b. Запишем это:

$$\frac{a(n+m)}{b(n+m)}.$$

Теперь можно сократить на $(n+m)$; видно, что получилась дробь, равная первоначальной.

— Витя, а ведь это тоже прекрасная теорема! Послушай формулировку: *если* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, *то* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$.

— А я думаю, что еще лучше ее сформулировать так: *если* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, *то*

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{na+mc}{nb+md}.$$

В понедельник Ира и Витя показали Наталье Николаевне свое открытие.

— Что ж, молодцы,— сказала Наталья Николаевна,— свойство которое вы открыли, конечно же, известно. Оно называется *производной пропорцией*. В дальнейшем оно может вам не раз пригодиться. И конечно же, следует написать о нем в нашу математическую стенгазету. Там же мы поместим и твою, Ира, теорему: *если* $\frac{a}{b}<\frac{c}{d}$, *то* $\frac{a}{b}<\frac{a+c}{b+d}<\frac{c}{d}$. Ты верно угадала. Только докажи ее сама.

А от себя я добавлю еще несколько теорем на производные пропорции. Запиши, Витя. Первой теоремой пусть будет такая:

если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, *то* $\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}$.

— Ну, Наталья Николаевна, это же совсем просто! Разделим почленно левую часть на b, а правую — на d, получим $\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1$. Но ведь дроби же равны, значит, прибавив по единице к обеим частям верного равенства, мы снова получим верное равенство.

— Вторая будет посложнее: *если* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, *то* $\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}$.

Запиши и третью: *если* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, *то* $\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}$.

— А вот тебе пропорция даже не с двумя, а с четырьмя произвольными числами: *если* $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ *и* n, m, p *и* r — *произвольные числа, то*

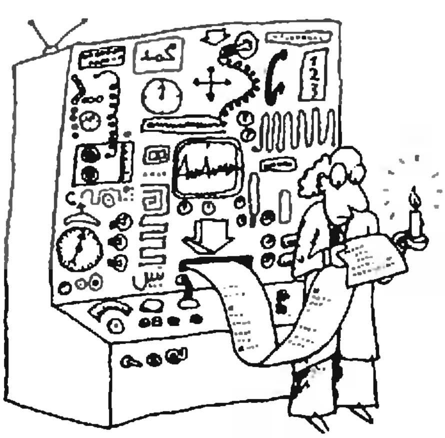
$$\frac{na+mb}{pa+rb}=\frac{nc+md}{rc+rd}.$$

— Наталья Николаевна,— сказала Ира,— а ведь предыдущие ваши теоремы являются частными случаями этой. В первой теореме n, m и r равны единице, а p — нулю, во второй m равняется нулю, а остальные числа — единице. А в третьей n, m и p равны единице, а r — минус единице. Стало быть, доказав эту теорему, я докажу и все остальные.

— Нет,— протянул Витя,— лучше я попробую рассмотреть частные случаи, а потом, глядишь, и станет ясно, как доказывать теорему в общем виде, чем сразу ломать голову над трудной теоремой,— тем более, одну я уже доказал.

И вас, читатели, приглашаем подумать над теоремами, о которых шла здесь речь.

ИЗ ИНОСТРАННОГО ЮМОРА



«Альфа» № 6 — 76

В. Дубровский

Неожиданный ракурс

Я видел озеро, стоящее отвесно.
О. Мандельштам

Чертежи в стереометрии обычно стараются делать как можно более наглядными, выбирая такой ракурс, чтобы все важные точки, линии, плоскости были хорошо видны. Однако для обширной группы задач выгодней другой ракурс: такой, при котором некоторые прямые и плоскости вырождаются, т. е. изображаются, соответственно, точками и прямыми. О таких задачах мы и расскажем.

Идея предлагаемого приема — специальный выбор параллельной проекции. Поэтому сформулируем сначала основное свойство параллельной проекции, непосредственно вытекающее из свойств, указанных в § 12 «Геометрии 9»:

*Пусть A', B', C', D' — образы точек A, B, C, D при параллельной проекции на плоскость π вдоль прямой l. Тогда, если $\overrightarrow{AB}=k\,\overrightarrow{CD}$, то и $\overrightarrow{A'B'}=k\,\overrightarrow{C'D'}$**) (рис. 1, *а*).

В частности, проекции трех точек, лежащих на одной прямой, также лежат на прямой; проекция прямой a — прямая, если $a \nparallel l$, и точка, если $a \parallel l$; проекция плоскости, параллельной l — прямая.

Мы будем пользоваться также *параллельной проекцией на прямую l вдоль плоскости π* ($l \nparallel \pi$). По определению, образом произвольной точки X при такой проекции является точка пересечения X' прямой l с плоскостью, проходящей через X и параллельной π. Нетрудно доказать, что сформулированное выше основное свойство имеет место и для проекции на прямую вдоль плоскости (рис. 1, *б*)*).

Задача 1. (МГУ, мехмат, 1978). *Дан тетраэдр $ABCD$. Через середины K и M ребер AB и CD тетраэдра проведена плоскость, пересекающая ребра BC и AD соответственно в точках L и N. Расстояние от вершины B до этой плоскости равно 2. Диагонали четырехугольника $KLMN$ пересекаются в точке Q, причем $|KQ|:|QM|=0{,}2$. Вычислить площадь четырехугольника $KLMN$, если известно, что объем тетраэдра $BKMC$ равен* 12.

Решение (рис. 2). Найдем сначала отношения, в которых точки L и Q делят, соответственно, отрезки BC и NL. Для этого построим параллельные проекции тетраэдра на некоторую плоскость

*) В дальнейшем это свойство используется так часто, что ссылаться на него при его использовании мы не будем; при оформлении письменной работы школьники (и абитуриенты) должны непосредственно ссылаться на свойства из § 12 учебника.

*) Поскольку параллельная проекция на прямую вдоль плоскости в школе не изучается (в отличие от проекции на плоскость вдоль прямой), абитуриент, применяющий ее на экзамене, должен обосновать те ее свойства, на которые он ссылается. В этой связи, однако, мы советуем посмотреть мелкий шрифт на с. 48.

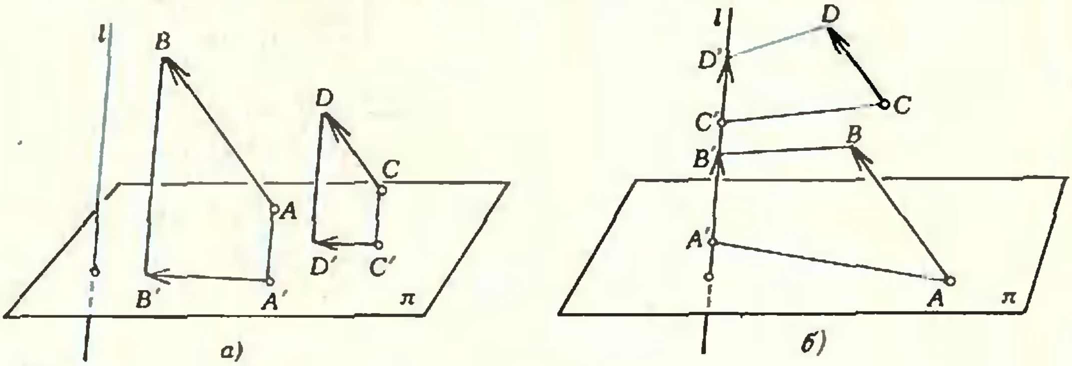


Рис. 1.

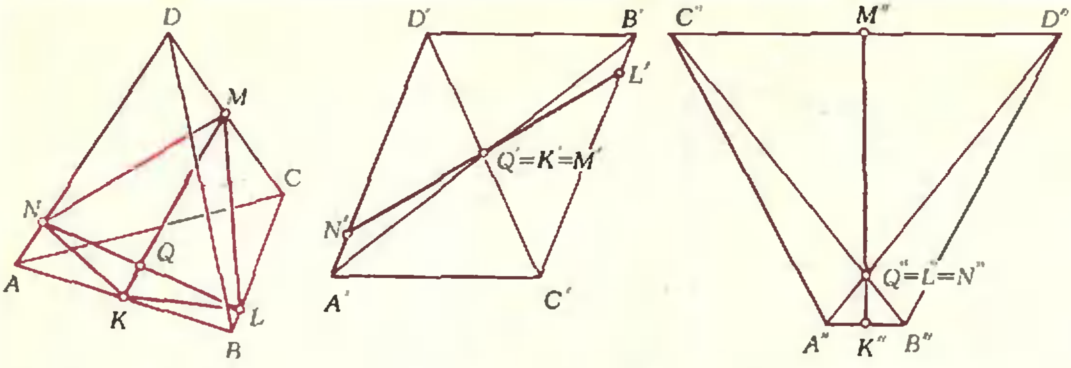


Рис. 2. а) б) в)

вдоль прямой KM (рис. 2, *б*) и вдоль прямой NL (рис. 2, *в*). Эта плоскость (которую естественно отождествлять с плоскостью чертежа), конечно, должна пересекать прямую KM (соответственно, прямую NL), но в остальном ее выбор не влияет ни на решение, ни на ответ — продумайте, почему.

Например, можно считать, что мы смотрим на тетраэдр, повернув его так, что точки K и M (или L и N) совместились.

На проекции вдоль прямой KM образы точек Q, K и M совпадают, сечение изображается отрезком $L'N'$, а тетраэдр — параллелограммом $A'C'B'D'$ с проведенными диагоналями, ведь, по условию, K и M — середины отрезков AB и CD. Из рисунка 2, *б* немедленно следует, что Q' — середина отрезка $L'N'$ (значит, Q — середина отрезка NL) и что точки L' и N' делят проекции ребер тетраэдра в равных отношениях: $|D'N'|:|N'A'| = |C'L'|:|L'B'|$. Это равенство сохраняется и при проекции вдоль (LN), то есть на рисунке 2, *в*: $|D''N''|:|N''A''| = |C''L''|:|L''B''|$; следовательно, на этом рисунке $(A''B'') \parallel (C''D'')$ и поэтому $\frac{|C''L''|}{|L''B''|} = \frac{|M''Q''|}{|Q''K''|}$. Значит, $\frac{|CL|}{|LB|} = \frac{|MQ|}{|QK|}$. Но по условию $\frac{|MQ|}{|QK|} = 5$. Следовательно, $|CL|:|LB| = 5$. Отсюда расстояние от точки C до плоскости сечения равно $5 \cdot 2 = 10$. Объем тетраэдра $BKMC$ равен сумме объемов тетраэдров $BKML$ и $CKML$, высоты которых, опущенные на грань KML, равны, как мы видели, 2 и 10. Таким образом, $V_{BKMC} = 12 = \frac{1}{3} S_{\Delta KML} \cdot (2+10)$; следовательно, площадь треугольника KML равна 3. Но площади треугольников KMN и KML равны, так как треугольники имеют общее основание KM и равные высоты, опущенные на это основание (напомним, что Q — середина $[NL]$), поэтому $S_{KLMN} = 2S_{\Delta KML} = 6$.

В дальнейшем, чтобы не перегружать формулы штрихами, мы будем одинаково обозначать изображение одной и той же точки во всех проекциях.

Для следующей задачи мы приведем два решения: одно — при помощи проекции вдоль прямой, другое — вдоль плоскости.

Задача 2. (МГУ, мехмат, 1964). *Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, где AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 — боковые ребра. В каком отношении делит ребро B_1C_1 точка E, которая принадлежит плоскости про-*

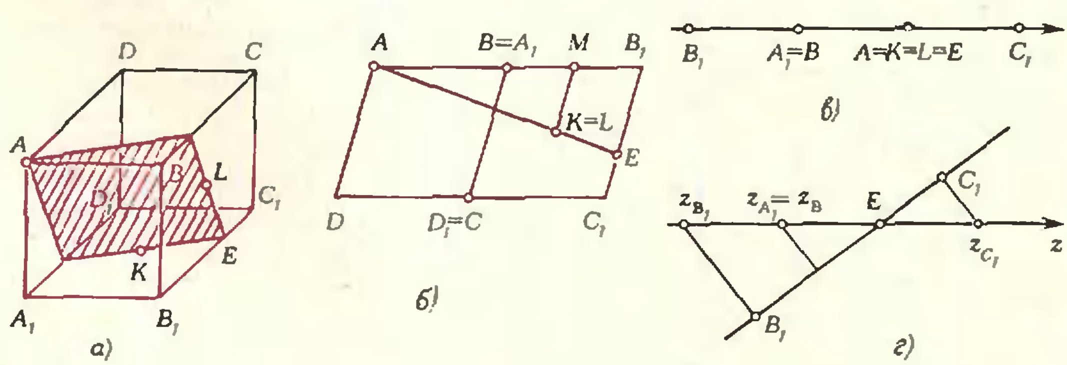


Рис. 3.

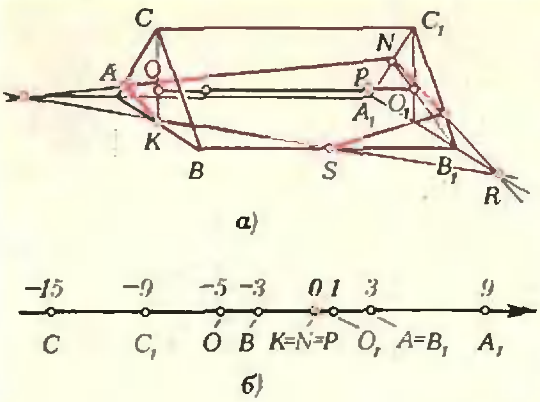


Рис. 4.

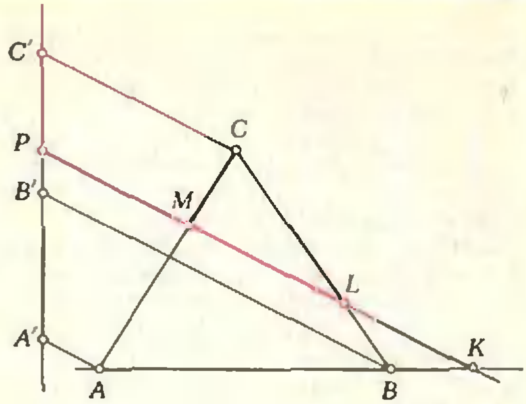


Рис. 5.

ходящей через вершину A и центры граней $A_1B_1C_1D_1$ и B_1C_1CB?

Первое решение. Построим проекцию куба (рис. 3, *а*) вдоль прямой KL, где K — центр грани $A_1B_1C_1D_1$, L — центр грани B_1C_1CB (рис. 3, *б*). Проекции этих граней изобразятся в виде параллелограммов с общей стороной B_1C_1 и общим центром $K=L$; следовательно, проекции вершин B и A_1, C и D_1 также совпадут. Положение на рисунке 3, *а* точек A и D определяется из условий $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{DD_1}=\overrightarrow{BB_1}$. Плоскость сечения проектируется в прямую AK, пересекающую отрезок B_1C_1 в точке E. Обозначим через M середину отрезка BB_1, тогда (рис. 3, *б*) $\frac{|B_1E|}{|B_1C_1|}=\frac{|B_1E|}{2|KM|}=\frac{1}{2}\cdot\frac{|B_1A|}{|MA|}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}=\frac{2}{3}$. Отсюда $|B_1E|:|EC_1|=2$.

Второе решение (рис. 3, *в*). Выберем систему координат с началом E так, чтобы оси абсцисс и ординат лежали в плоскости EKL. Тогда аппликаты точек E, K, L и A равны нулю. Воспользуемся основным свойством для проекции вдоль плоскости EKL. Из условия $\overrightarrow{KC_1}=-\overrightarrow{KA_1}$ и $\overrightarrow{LC_1}=-\overrightarrow{LB}$ получаем $z_{A_1}=z_B$ и $z_{C_1}=-z_{A_1}=-z_B$ (здесь z_P обозначает аппликату точки P). Далее из условия $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}$ и равенства $z_{A_1}=z_B$ получаем $z_{B_1}=2z_{A_1}$. Таким образом, точки C_1, E, B_1 на отрезке C_1B_1 имеют аппликаты z_{C_1}, 0, $-2z_{C_1}$ соответственно. Вновь применяя основное свойство, получаем $|B_1E|:|EC_1|=2$.

Чтобы избежать ссылки на основное свойство проекции вдоль плоскости (которая не упомянута в школьном учебнике), предыдущий текст можно написать так: вместо фразы «Воспользуемся основным свойством для проекции вдоль плоскости...» написать «Воспользуемся теперь тем, что равные векторы имеют равные координаты и что координаты вектора равны разности координат его конца и начала» («Геометрия 10», § 42), а вместо последней фразы — написать: «Поэтому из подобия треугольников (рис. 3, *г*) получаем $|B_1E|:|EC_1|=2$». Аналогичные изменения можно внести в текст следующего решения, где также используются координаты.

Задача 3 (МГУ, мехмат, 1965). *Дана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ с боковыми ребрами AA_1, BB_1 и CC_1. Пусть точка P делит ось OO_1 призмы в отношении 5:1. Через точку P и середины ребер AB и A_1C_1 проведена плоскость. В каком отношении эта плоскость делит объем призмы?*

Решение. Пусть K — середина $[AB]$, N — середина $[A_1C_1]$. Спроектируем призму на некоторую прямую l вдоль плоскости сечения (PKN). Рассмотрим на прямой l координаты, приняв за начало отсчета проекцию плоскости PKN (рис. 4, *б*). Определим координаты проекций всех вершин призмы. Выбор масштаба в нашей воле; пусть, например, $x_{O_1}=1$. Тогда $x_O=-5$, поскольку $\overrightarrow{PO}=-5\overrightarrow{PO_1}$; далее,

$\overrightarrow{NB_1}=3\overrightarrow{NO_1}$ $\quad x_{B_1}=3x_{O_1}=3$; $\overrightarrow{B_1B}=\overrightarrow{O_1O}\Rightarrow x_B=x_{B_1}+x_{O_1}-x_O=-3$.

Аналогично, $x_A=-x_B=3$, $x_{A_1}=x_A+x_{O_1}-x_O=9$, $x_{C_1}=-x_{A_1}=-9$, $x_C=x_{C_1}+x_O-x_{O_1}=-15$.

Теперь, для того чтобы найти, в каком отношении делит плоскость сечения некоторый отрезок XY, достаточно найти отношение координат его концов $x_X:x_Y$. Например, $x_B:x_{B_1}=-1$, следовательно, сечение проходит через середину отрезка BB_1; $x_{B_1}:x_{A_1}=\frac{1}{3}$, следовательно, плоскость сечения пересекает продолжение отрезка A_1B_1 за точку B_1 в такой точке R, что $|B_1R|:|A_1R|=1:3$ и т. д. Далее надо..., впрочем, не будем лишать читателя удовольствия дорешать эту задачу до конца самостоятельно. Ответ. 49/95.

Теперь можно сформулировать п р а в и л о, на основе которого решались все разобранные задачи: *чтобы узнать, в каком отношении плоскость* π (соответственно, *прямая* l) *делит непараллельный ей отрезок, следует рассмотреть проекцию вдоль плоскости* π *или вдоль какой-либо известной прямой, лежащей в плоскости* π (соответственно, *вдоль прямой* l).

В качестве примера применения этого правила в планиметрии будет доказана

Т е о р е м а М е н е л а я. *Если прямая* l *пересекает стороны* AB, BC *и* CA *треугольника* ABC *или их продолжения в точках* K, L, M *соответственно, то* $\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BL}}{\overrightarrow{LC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MA}} = -1$*).

Д о к а з а т е л ь с т в о (рис. 5). Спроектируем треугольник параллельно прямой l на какую-либо пересекающую ее прямую. Тогда

$$\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BL}}{\overrightarrow{LC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MA}} = \frac{\overrightarrow{A'P}}{\overrightarrow{PB'}} \cdot \frac{\overrightarrow{B'P}}{\overrightarrow{PC'}} \cdot \frac{\overrightarrow{C'P}}{\overrightarrow{PA'}} = (-1)^3 = -1.$$

(Отметим, что верна и обратная теорема, ее можно доказать от противного.)

Разберем теперь задачу, в которой важны не только о т н о ш е н и я длин параллельных отрезков, как это было выше, но и сами эти длины, а также углы между отрезками. В отличие от предыдущих задач, здесь играют роль и направление проекции, и плоскость, на которую мы проектируем.

З а д а ч а 4. (МФТИ, 1977) *Сторона основания* $ABCD$ *правильной призмы* $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *имеет длину* $2a$, *боковое ребро — длину* a. *Рассматриваются отрезки с концами на диагонали* AD_1 *грани и диагонали* DB_1 *призмы, параллельные плоскости* AA_1B_1B.

1) *Один из этих отрезков проведен через такую точку* M *диагонали* AD_1, *что* $|AM|:|AD_1| = 2:3$. *Найти его длину.*

2) *Найти наименьшую длину рассматриваемых отрезков.*

Р е ш е н и е (рис. 6). Спроектируем призму вдоль диагонали B_1D на плоскость грани ABB_1A_1. Легко видеть, что получится чертеж, изображенный на рисунке 6, *б*. Ясно, что любой отрезок, параллельный плоскости ABB_1A_1, спроектируется в отрезок той же длины (!). Поэтому рассматриваемые отрезки будут конгруэнтны своим проекциям $[DX]$, где $X \in [AD_1]$. Очевидно, кратчайший из них есть перпендикуляр DH, опущенный из точки D на (AD_1). Треугольник DHD_1, как и $\triangle ABD_1$,— прямоугольный и равнобедренный, поэтому $|DH| = \frac{\sqrt{2}}{2}|DD_1| = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ (это ответ на второй вопрос). Длину отрезка DM можно найти из прямоугольного треугольника MPD, в котором $|DP| = \frac{1}{3}|DD_1| = \frac{a}{3}$, $|MP| = \frac{1}{3}|AB| = \frac{2a}{3}$. Таким образом,

$$|DM| = \frac{a\sqrt{5}}{3}.$$

В заключение приведем короткое и поучительное доказательство одной из красивейших теорем стереометрии, основанное на методе проектирования.

З а д а ч а 5. *Доказать, что если все грани тетраэдра равновелики (имеют одинаковые площади), то они попарно конгруэнтны**).

---

*) Через $\frac{\vec{a}}{\vec{b}}$ мы обозначаем такое число k, что $\vec{a} = k\vec{b}$, если оно существует, т. е. если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны и $|\vec{b}| \neq 0$.

*) Тетраэдры, удовлетворяющие условию задачи, называются *равногранными*. Заметим, что они вовсе не обязаны быть правильными, хотя многие их свойства очень напоминают свойства правильных тетраэдров.

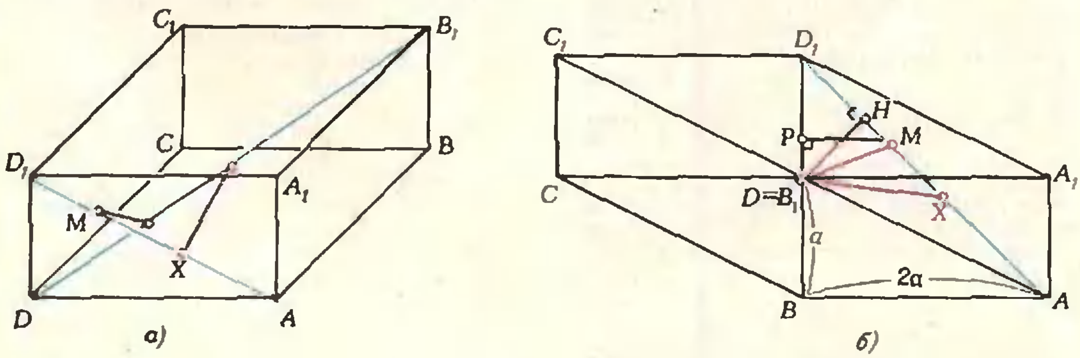


Рис. 6.

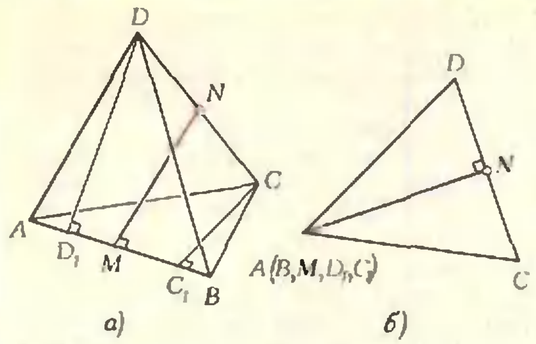


Рис. 7.

Решение. Пусть MN — общий перпендикуляр к ребрам AB и CD тетраэдра $ABCD$ с равновеликими гранями (рис. 7, *а*). Легко понять, что ортогональная проекция тетраэдра вдоль прямой AB является треугольником ADC (рис. 7, *б*), в котором сторона AD конгруэнтна высоте DD_1 грани ABD, а сторона AC — высоте CC_1 грани ABC, причем отрезок MN проектируется в высоту AN треугольника ADC. Поскольку треугольники ABC и ABD имеют одинаковые площади и общее основание AB, их высоты, опущенные на это основание, равны, значит, на рисунке 7, *б* $|AD|=|AC|$; а значит, точка N (основание высоты равнобедренного треугольника) делит отрезок CD пополам. Пользуясь основным свойством проекции и повторяя это рассуждение применительно к остальным ребрам тетраэдра, заключаем, что общие перпендикуляры всех пар скрещивающихся ребер тетраэдра $ABCD$ проходят через середины соответствующих ребер и, стало быть, являются осями симметрии тетраэдра. Например, при осевой симметрии с осью MN (рис. 7, *а*) вершина A перейдет в B, B — в A, C — в D, D — в C, поэтому грань ABC конгруэнтна грани ABD, а грань ACD — грани BCD. Точно так же доказывается, что $\triangle ABD \cong \triangle ACD$.

Задачи в этой заметке в основном подобраны так, чтобы читатель мог сравнить их решения, полученные с помощью параллельной проекции, с «традиционными» (чисто геометрическими) и векторными решениями. Так, задачи 2 и 3 разобраны в книге Г. В. Дорофеева, М. К. Потапова и Н. Х. Розова «Пособие по математике для поступающих в вузы» (М., «Наука», 1976), с. 340 и 514, задача 3 — также в статье С. Овчинникова «Принадлежность точек прямой и плоскости» («Квант», 1978, № 3), задача 4 — в статье И. Габовича «Векторы помогают на экзамене» («Квант», 1979, № 1) и в статье Г. Бевза «Задачу можно решить проще» («Квант», 1979, № 11).

Упражнения

1. Даны две скрещивающиеся прямые a и b. Найти множество точек X, делящих в постоянном отношении отрезки AB ($|AX|:|XB|=k$), где а) точка A пробегает прямую a, B пробегает прямую b; б) то же самое, но с условием, что прямая AB остается все время параллельной данной плоскости α.

2. Дана замкнутая неплоская четырехзвенная ломаная $ABCD$ («пространственный четырехугольник»). Доказать, что точки K, L, M, N, взятые на ее звеньях AB, BC, CD и DA соответственно, лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда $\frac{\overrightarrow{AK}}{\overrightarrow{KB}} \cdot \frac{\overrightarrow{BL}}{\overrightarrow{LC}} \cdot \frac{\overrightarrow{CM}}{\overrightarrow{MD}} \cdot \frac{\overrightarrow{DN}}{\overrightarrow{NA}} = 1$.

3. Дана правильная шестиугольная пирамида $SABCDEF$ с вершиной S. На ребрах SA и SC взяты точки K и L так, что $|SK|:|KA|=3$, $|SL|:|LC|=1/3$, точка M — середина а) ребра SF, б) ребра SE. Определить, какие ребра пирамиды пересекаются плоскостью (KLM) и в каком отношении они ею делятся.

4. (МФТИ, 1975). Площадь трапеции $ABCD$ равна S, отношение длин оснований $|AD|:|BC|=3:1$. Отрезок MK расположен так, что он параллелен стороне CD и пересекает сторону AB, а отрезок AM параллелен отрезку BK. Определить площадь треугольника BKC, если $|AM|:|BK|=3:2$, $|MK|:|CD|=1:3$ (найти все решения).

5. (МФТИ, 1976). На диагоналях AB_1 и CA_1 боковых граней треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ расположены, соответственно, точки D и E так, что $(DE) \parallel (BC_1)$. Определить отношение $|DE|:|BC_1|$.

6. (МФТИ, 1977). Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ имеет длину a, боковое ребро — длину $2a$. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали BD основания и боковом ребре SC, параллельные (SAD). Найти наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

7. (М462). Плоскость пересекает боковые ребра правильной четырехугольной пирамиды в точках, отстоящих от вершины на расстояния a, b, c и d. Доказать, что $\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}$.

8. (МГУ, мехмат, 1978). Объем тетраэдра $ABCD$ равен 5. Через середины ребер AD и BC проведена плоскость, пересекающая ребро CD в точке M. При этом отношение длины отрезка DM к длине отрезка MC равно $\frac{2}{3}$. Вычислить площадь сечения тетраэдра указанной плоскостью, если расстояние от нее до вершины A равно 1.

9. (МГУ, геол. ф-т, 1974). Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, длина ребра которого равна 1 см. На ребрах AA_1, BB_1, DD_1 взяты, соответственно, точки K, P и M — так, что $|AK|:|A_1K|=1:3$, $|BP|:|B_1P|=3:1$, $|DM|:|D_1M|=3:1$. Найти объем пирамиды, у которой основанием служит сечение куба плоскостью, проходящей через точки K, P и M, а вершина расположена в точке A_1.

10. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ площади граней ABB_1A_1 и BCC_1B_1 равны, соответственно, S_1 и S_2, а площади «диагональных сечений» ACC_1A_1 и BDD_1B_1 — s_1 и s_2. Показать, что $s_1^2+s_2^2=2(S_1^2+S_2^2)$. Выразить двугранный угол при ребре AA_1 через эти площади.

Московский физико-технический институт

Ниже публикуются материалы письменных вступительных экзаменов 1979 года. На работу как по математике, так и по физике отводилось пять часов.

Математика

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\sqrt{2-x}+\frac{4}{\sqrt{2-x}+3}=2.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{x-1}{\log_3(9-3^x)-3}\leqslant 1.$$

3. Найти все решения уравнения

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\sin^3 x,$$

удовлетворяющие неравенству

$$\log_{\cos^2 3}(1+\sin(7x+5))<\sin 8x.$$

4. Продолжения высот AM и CN остроугольного треугольника ABC пересекают описанную около него окружность в точках P и Q. Найти радиус описанной окружности, если $|AC|=a$, $|PQ|=\frac{6}{5}a$.

5. В тетраэдре $ABCD$ двугранные углы при ребрах AB и BD прямые, $\widehat{ACD}=\alpha$. Вершина конуса совпадает с одной из вершин тетраэдра, окружность основания конуса вписана в одну из граней. Найти угол в осевом сечении конуса.

6. Пункт N расположен на берегу реки, ширина которой 1 км, а скорость течения 1 км/час. Не менее чем на 3 км ниже по течению на другом берегу находится пункт M. Из пункта M выходит рыбак и идет вдоль берега по направлению к N со скоростью 4 км/час. Одновременно из пункта N отплывает на лодке перевозчик, пересекает реку и, дождавшись рыбака, переправляет его в пункт N. Туда и обратно лодка двигалась по прямой, причем направление движения было выбрано так, что от отплытия до возвращения прошло наименьшее возможное время, равное $\frac{9}{8}$ часа. Скорость лодки в стоячей воде равна 4 км/час. Найти расстояние (по течению) между пунктами M и N.

Вариант 2

1. Решить неравенство

$$0{,}4^x-2{,}5^{x+1}>1{,}5.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\log_2 y=\log_4(xy-2),\\ \log_9 x^2+\log_3(x-y)=1.\end{cases}$$

3. Окружность радиуса R, проведенная через вершины A, B и C прямоугольной трапеции $ABCD$ $\left(\widehat{A}=\widehat{B}=\frac{\pi}{2}\right)$, пересекает отрезки AD и CD соответственно в точках M и N так, что $|AM|:|AD|=|CN|:|CD|=1:3$. Найти площадь трапеции.

4. Решить уравнение

$$\sin x+\sin^2 x+\cos^3 x=0.$$

5. Из пунктов A и B навстречу друг другу вышли одновременно два поезда. Каждый из них двигался сначала равноускоренно (начальные скорости поездов равны нулю), а затем, достигнув некоторой скорости,— равномерно. Отношение скоростей равномерного движения поездов равно $\frac{4}{3}$. В момент встречи поезда имели равные скорости, а в пункты B и A прибыли одновременно. Найти отношение ускорений поездов.

6. Основанием прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является квадрат $ABCD$. Найти наибольший возможный угол между прямой BD_1 и плоскостью BDC_1.

Физика

Вариант 1

1. Три одинаковых гладких биллиардных шара радиусом R расположены на гладкой горизонтальной плоскости, как показано на рисунке 1. Шару 1 сообщается скорость $\vec{v}_0$, он ударяется сначала о шар *2*, затем о шар *3* и останавливается. Определите расстояние r между центрами шаров *2* и *3* и скорости, которые приобретут после удара шары *2* и *3*. Соударения абсолютно упругие.

2. В цилиндре под поршнем содержится $n=0{,}5$ моля воздуха при температуре $T_0=300$ К. Во сколько раз увеличится объем газа при сообщении ему количества теплоты $Q=13{,}2$ кДж? Молярная теплоемкость воздуха при постоянном давлении $C_p=29{,}1$ Дж/(моль·К).

3. Параллельно соединенные катушка с индуктивностью L и сопротивление R подключены через ключ K к источнику с постоянной ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r (рис. 2). В начальный момент времени ключ K разомкнут и тока в цепи нет. Какой заряд Q протечет через сопротивление R после замыкания ключа K? Омическим сопротивлением катушки пренебречь.

4. Экспериментально определяется зависимость величины, обратной линейному увеличению, от расстояния d от предмета до

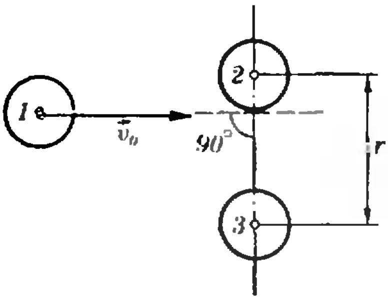


Рис. 1

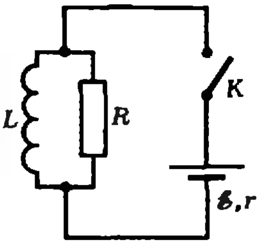


Рис. 2.

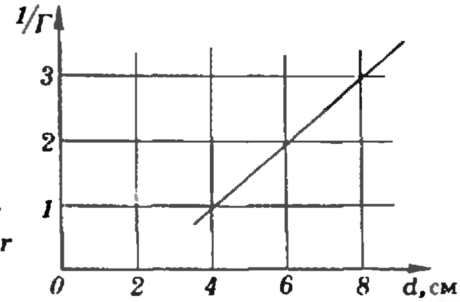


Рис. 3.

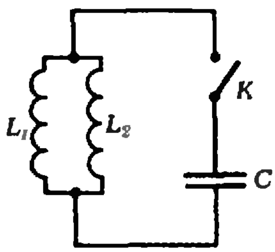


Рис. 4.

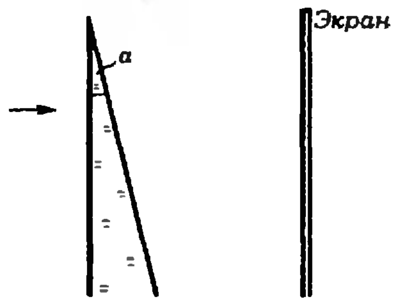


Рис. 5.

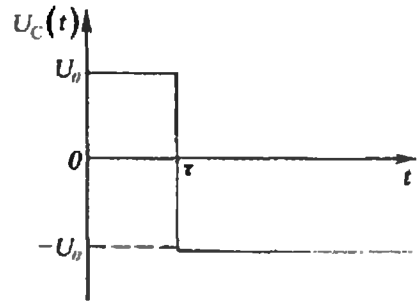


Рис. 6.

тонкой линзы. Эта зависимость показана на рисунке 3. Определите фокусное расстояние линзы.

Вариант 2

1. В результате взаимодействия ядер дейтерия и трития образуются ядро гелия и нейтрон: $^2H+^3H=^4He+n$. При этом выделяется значительная энергия. Какую часть ее уносит с собой нейтрон? Кинетическими энергиями дейтерия и трития до реакции можно пренебречь по сравнению с выделившейся энергией.

2. Лазерные трубки объемом $V_0=60$ см^3 должны заполняться смесью гелия и неона в молярном отношении 5:1 при общем давлении $p_0=6$ мм рт. ст. Имеются баллоны этих газов, каждый объемом $V_C=2$ л. Давление в баллоне гелия $p_1=50$ мм рт. ст., неона — $p_2=200$ мм рт. ст. Какое число трубок можно заполнить?

3. Заряженный конденсатор емкостью C подключен через ключ K к двум параллельно соединенным катушкам с индуктивностями L_1 и L_2 (рис. 4). В начальный момент времени ключ разомкнут. Если замкнуть ключ K, через катушки потекут токи. Известно, что максимальная величина силы тока, протекающего через катушку с индуктивностью L_1, оказалась равной I_1. Найдите первоначальный заряд на конденсаторе. Омическим сопротивлением катушек пренебречь.

4. На стеклянный клин перпендикулярно его грани падает тонкий луч света (рис. 5). Показатель преломления стекла $n=1{,}41$, угол $\alpha=10°$. Сколько светлых пятен будет видно на экране, поставленном за клином?

Вариант 3

1. При какой продолжительности суток тела на экваторе Земли весили бы в два раза меньше, чем на полюсе? Радиус Земли $R=6400$ км.

2. Ампула с радиоактивным препаратом ^{24}Na (период полураспада $\tau_{1/2}=15$ ч) охлаждается потоком воздуха. В начале опыта воздух нагревается на $\Delta t_0=2$°С. Через какое время охлаждающий ампулу воздух будет нагреваться на $\Delta t_1=1{,}8$°С?

3. Неподвижная заряженная частица (протон) находится посередине между пластинами плоского конденсатора, помещенного в вакуум. На конденсатор подается напряжение $U_C(t)$ прямоугольной формы (рис. 6). Определите амплитуду напряжения U_0 и энергию частицы E в момент удара о пластину конденсатора, если известно, что за время $\tau=10^{-6}$ с частица прошла расстояние $3/8L$, где L — расстояние между пластинами конденсатора, $L=5$ см. Масса протона $m_p=1{,}67\cdot10^{-24}$ г, его заряд $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

4. В тонкостенном стеклянном шарике диаметром $2R=4$ см видны два изображения пламени свечки, обусловленные отражением от ближней и дальней стенок шарика. Размеры изображений относятся как 19/21. Определите расстояние между центром шарика и свечкой.

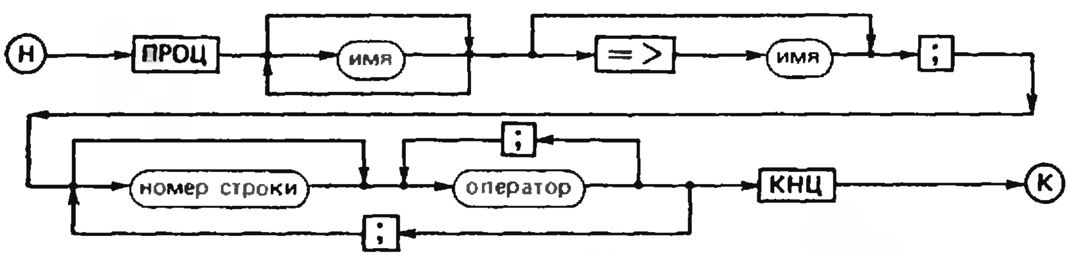
В. Можаев,
Б. Федосов,
В. Чехлов

Заочная школа программирования

Урок 6: Описание и вызов процедур на Рапире

На этом уроке мы продолжаем наше изучение учебно-производственного языка программирования Рапира, начатое на пятом уроке («Квант», № 1).

Описание процедуры в Рапире определяется такой диаграммой:



Описание начинается со слова ПРОЦ (вместо слов ЗАПОМНИТЬ ПРОЦЕДУРУ в Робике), после которого указывается *имя процедуры*. Затем перечисляются, если это необходимо, имена параметров. Отделяются они друг от друга пробелами; скобки и запятые, используемые в Робике, здесь не нужны.

Дальше может следовать стрелка =>, после которой указывается еще одно имя — так называемое *имя-результат*. На этом уроке мы будем рассматривать процедуры, в которых имя-результат не используется. Поэтому разбор этой конструкции мы отложим до следующего урока.

Слово ПРОЦ, имя процедуры, параметры и имя-результат образуют так называемый *заголовок процедуры*. После заголовка следуют операторы, разделяемые точками с запятой.

Вот пример описания процедуры на Рапире:

```
ПРОЦ ВЫБОР А В; А+В—>С;
А*В—>Д;
ЕСЛИ С>Д ТО С—>Д ИНАЧЕ Д—>С
ВСЕ;
КНЦ;
```

Для *вызова процедуры* в Рапире есть два способа. Применяя первый способ, следует написать в качестве очередного предписания *имя процедуры* и п о с л е него поставить *круглые скобки*. Если у процедуры есть параметры, то их значения перечисляются через запятую внутри этих скобок, как и в Робике, например:

ВЫБОР (10,X+5);

Если параметров нет, скобки при этом способе вызова все равно обязательны:

СБРОС ( );

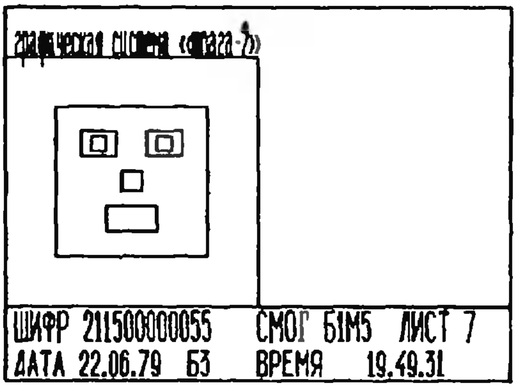
Если процедура имеет не более одного параметра, ее можно вызвать вторым способом: поставить п е р е д именем процедуры *точку*. Значение параметра, если он есть, указывается перед точкой:

СБРОС; 5. КРУГ;

В Рапире предусмотрено большое число *стандартных процедур*, которые можно вызывать в любой программе. К их числу принадлежит, в частности, процедура ПЕЧАТЬ, у которой может быть любое число параметров. В результате исполнения этой процедуры значения всех параметров будут отпечатаны на новой строке, вплотную друг к другу (точно так же, как в предписании ОТПЕЧАТАТЬ языка Робик). Стандартными являются и все процедуры графической системы Шпага, описанной в статье А. Салиховой и Н. Соколовой в предыдущем номере журнала.

Рассмотрим некоторые п р и м е р ы:

1°. Предположим, что нам нужно составить программу на Рапире, используя процедуры системы Шпага, *для изображения вот такого робота:*



Можно, разумеется, сделать это при помощи одних только лучей и подводов. Однако в этом случае программа получится довольно-таки большой. Ее можно существенно сократить, если заметить, что на рисунке многократно повторяется одна и та же фигура — прямоугольник. Поэтому достаточно один раз описать процедуру ПРЯМ, чтобы затем нарисовать любой нужный прямоугольник. У приведенной ниже процедуры четыре параметра: Х, У, В и Д. Х и У — это координаты левого нижнего угла, В — высота и Д — длина прямоугольника:

ПРОЦ ПРЯМ Х У В Д;
П(Х;У); Л(Х+Д,У); Л(Х+Д; У+В); Л(Х,У+В); Л(Х,У); КНЦ;

Теперь программа, выполняющая рисунок, может быть записана очень просто:

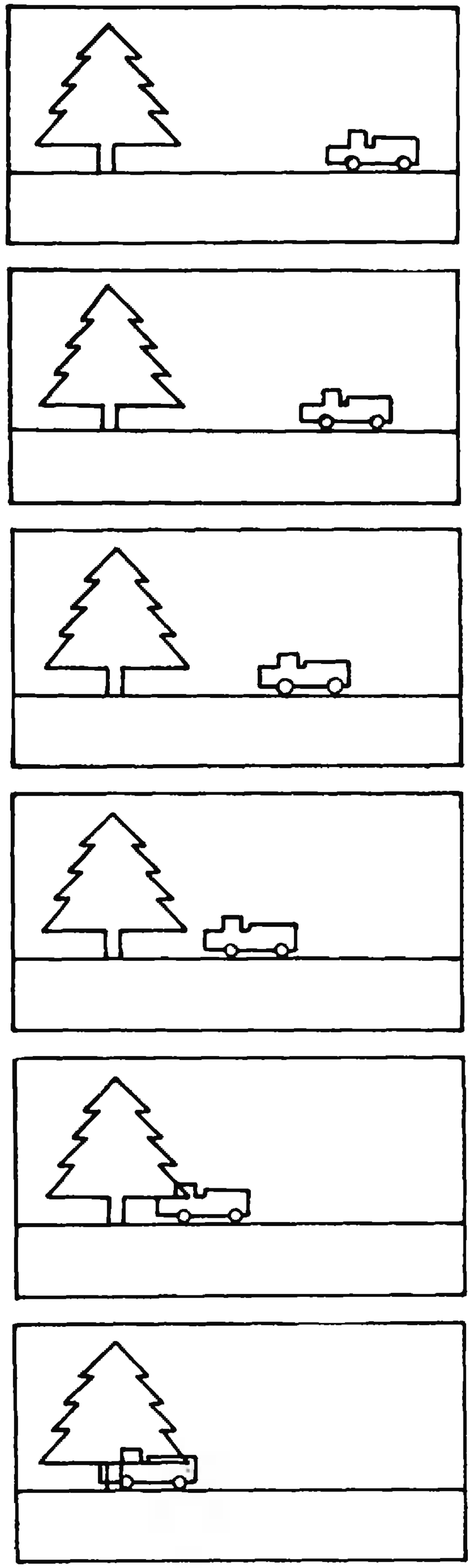
Р(50,50); ПРЯМ(10,10,30,30);
ПРЯМ(20,15,5,10); ПРЯМ(23,23,4,4);
ПРЯМ(15,30,5,7); ПРЯМ(28,30,5,7);
ПРЯМ(17,31,3,3); ПРЯМ(30,31,3,3);
.КОНЕЦ;

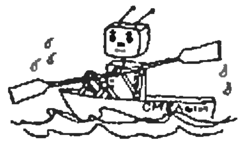
2°. Следующая задача — *заполнить рамку размером 100 на 100 мм прямоугольной сеткой с шагом 5 мм по вертикали и по горизонтали* (такая сетка может служить, например, координатной сеткой). Здесь удобно использовать цикл:

Р(100,100); 5—>А; ПОКА А=<100:: П(А,0); Л(А,100); П(0,А); Л(100,А), А+5—>А ВСЕ; .КОНЕЦ;

3°. Другой пример использования цикла — *печатание таблицы умножения:*

2—>А; 2—>В;
ПЕЧАТЬ ('ТАБЛИЦА УМНОЖЕНИЯ'),
ПОКА А=<10:: ПОКА В=<10::





```
ПЕЧАТЬ (А, '*',В,'=',А*В); В+1—>В
ВСЕ;
2—>В; А+1—>А
ВСЕ;
```

4°. Одно из интересных применений машинной графики — *автоматизация изготовления мультфильмов*. Отдельно кинокадры, конечно, удобно рисовать в цикле. Как правило, в кадре есть несколько неподвижных предметов и один или несколько движущихся. Каждый движущийся предмет можно задавать отдельной процедурой, параметры которой определяют его размеры и положение в кадре.

Приведем очень простой пример: нужно изобразить *движущийся грузовик на фоне неподвижного дерева*.

Программу для такого мини-мультфильма составил второклассник В. Фишелев:

```
ПРОЦ МАШИНА Х У; П(Х,У);
Л(Х,У+15);          Л(Х+15,У+15);
Л(Х+15,У+25);       Л(Х+30,У+25);
Л(Х+30,У+15);       Л(Х+35,У+15);
Л(Х+35,У+20);       Л(Х+70,У+20);
Л(Х+70,У); Л(Х+65,У);
П(Х+57.5,У); К(7.5);     П(Х+50,У);
Л(Х+30,У); П(Х+22.5,У);
К(7.5); П(Х+15,У); Л(Х,У); КНЦ;
43—>У; 100—>Х; 0—>А;
ПОКА А/=6::   Р(170,90);   П(0,27);
Л(170,27); П(35,27);
Л(35,37.5);     Л(10,37.5);     Л(20,50);
Л(15,50); Л(25,60);
Л(20,60);   Л(30,70);           Л(25,70);
Л(37.5,82.5); Л(50,70);
Л(45,70); Л(55,60); Л(50,60); Л(60,50);
Л(55,50); Л(65,37.5);
Л(40,37.5);   Л(40,27.5);     МАШИНА
(Х,У); Х—10—>Х; А+1—>А ВСЕ;
.КОНЕЦ;
```

Задание 6.1. *Составить программу для заполнения рамки 100 на 100 мм прямоугольной сеткой с шагом 2 мм по оси абсцисс и 5 мм по оси ординат.*

Задание 6.2. *Составить программу для печати таблицы значений выражения*

$$\frac{X(X^2+1)+(X+2)(X^2-1)^2}{(X^3+4)^2}$$

для натуральных X от 1 до 25.

Задание 6.3. *Составить программу для рисования мультфильма, изображающего два перегоняющих друг друга самолета.*

Г. Звенигородский

На пути в большую науку

В начале октября 1979 года во всероссийском пионерском лагере «Орленок» проходил IV Всесоюзный слет юных астрономов и космонавтов. На слет приехали 560 учащихся 6—8 классов из всех союзных республик — члены кружков астрономии и космонавтики при дворцах и домах пионеров и школьников, планетариях и народных обсерваториях, дворцах и домах культуры, станциях юных техников и средних школах, а также при различных отделениях Всесоюзного астрономо-геодезического общества (ВАГО).

Характерная особенность современных астрономических кружков и кружков юных космонавтов — их тесная связь с учеными. Активное участие в деятельности кружков принимают Сибирское отделение АН СССР, Государственный астрономический институт имени Штернберга, Одесская и Шемахинская астрономические обсерватории, Лаборатория космических исследований Ужгородского университета, Научно - исследовательский институт ядерной физики МГУ и другие научные учреждения и организации. Это позволяет кружковцам не только углубленно изучать астрономию и космонавтику, строить различные приборы и модели, знакомиться с методикой научных наблюдений и исследований, но и самим выполнять ряд научных наблюдений, представляющих интерес для астрономии и космонавтики.

Так, члены юношеской секции ВАГО из Томска с 1963 года осуществляют интересную программу наблюдений серебристых облаков. Эти облака, открытые в 1885 году русским астрономом В. Цераским, образуются на высоте 70—95 километров. Их изучение может дать ценную информацию о физических процессах, протекающих в верхних слоях земной атмосферы. За 16 лет наблюдений кружковцы зарегистрировали 162 случая появления серебристых облаков, в том числе 10 случаев — летом 1979 года. В процессе этих наблюдений было проверено высказанное одним из специалистов по серебристым облакам предположение о связи между частотой образования серебристых облаков и солнечной активностью. Оказывается, число появлений серебристых облаков через 1—2 года после очередного максимума солнечной активности сильно убывает, а через 1—2 года после минимума — возрастает.

На протяжении ряда лет систематические метеорные наблюдения проводят юные кружковцы Крымского общества любителей астрономии. Только в 1979 году было зарегистрировано 14 тысяч метеоров, в том числе 2300 из метеорного потока Персеид. Наблюдения кружковцев подтвердили прогноз американских ученых о предстоящем в 1979 году повышении активности этого потока (активность потока Персеид в 1979 году возросла приблизительно в 2 раза по сравнению с 1978 годом).

Интересную программу наблюдений искусственных спутников Земли, по заданию местной станции слежения за искусственными спутниками, выполнили члены астрономического кружка дворца пионеров Ужгорода. В частности, была выявлена определенная зависимость между отклонениями от расчетного времени прохождения спутников через меридиан и высотой кульминации: чем ниже эта высота, тем больше отклонение от расчетных данных. Отсюда следует важный практический вывод — при низких прохождениях искусственных спутников через меридиан необходимо значительно увеличивать время, в течение которого ведется их поиск.

Очень насыщенной была программа очередного слета юных астрономов и космонавтов. В течение шести дней участники слета выступали с докладами и сообщениями о своей работе, принимали участие в диспутах о жизни во Вселенной и космическом будущем человечества, в конкурсе астрономов-наблюдателей и в астрономической олимпиаде.

Впервые на слете была проведена научно-фантастическая игра «Звездный десант». Все участники игры были разбиты на «экипажи звездолетов», которым предстояло совершить рейсы в далекий космос. На линейке открытия игры «Руководитель полетов» летчик-космонавт СССР Н. Н. Рукавишников вручил командирам экипажей полетные задания и объявил 10-часовую готовность. Три часа спустя была объявлена 7-часовая готовность, и командиры получили бортжурналы. При объявлении 4-часовой готовности «звездолетчикам» раздали запасы космической пищи и...«путешествие» началось. А в последний день слета на заседании «Ученого совета 2007 года» (состоящего из ученых, приехавших в гости к ребятам) экипажи представили отчеты о своих «космических экспедициях». В них вошли описания хода полета, придуманного экипажем космического эксперимента, а также предъявление вещественных доказательств пребывания на других планетах.

Без сомнения, эта оригинальная игра произвела самое яркое впечатление на всех участников и гостей слета.

В. Комаров

II Всероссийский слет актива НОУ

В июле 1979 года в г. Челябинске Министерство просвещения РСФСР, ЦК ВЛКСМ, Всесоюзный совет научно-технических обществ и Челябинский областной совет народных депутатов провели II Всероссийский слет актива научных обществ учащихся *). Напомним, что первые НОУ появились в 1964 году. В 1975 году в Москве был проведен первый Всероссийский слет актива НОУ. В марте 1977 года ЦК ВЛКСМ, Министерство просвещения СССР, ВС НТО и Правление Всесоюзного общества «Знание» утвердили Примерное положение о НОУ. В результате этих мер число НОУ за последнее время значительно выросло, и ныне успешно действуют уже около 300 НОУ.

Место второго слета было выбрано не случайно — Челябинское НОУ, одно из первых в стране, является лауреатом премии Ленинского комсомола, в его 73 секциях и 37 филиалах занимается более 5 тысяч школьников. На счету членов Челябинского НОУ около 2 тысяч творческих работ, около 200 из них опубликованы.

На слете работали 11 секций, на которых было заслушано по 6—15 докладов. Характерным для слета было отличное руководство работой секций. В жюри были представители научных учреждений Москвы, Ленинграда, Челябинска и других городов, и каждый докладчик сразу на секции получал подробный квалифицированный отзыв о достижениях и промахах, допущенных им в работе, о возможных дальнейших усовершенствованиях и изменениях созданного им прибора, о научной ценности поданных им идей.

Итак, всероссийский слет. Собрались лучшие из лучших. Какие же доклады привезли они на слет? Очень разные по тематике и, к сожалению, по качеству. Были доклады, отражающие большую самостоятельную работу ребят, создавших что-то свое, новое, нужное школе, колхозу или заводу. Но были и рефераты по опубликованным в популярной литературе статьям, для «создания» которых достаточно было прочитать статью, даже не решая приведенных в ней задач. Председатель совета кураторов Челябинского НОУ Н. Н. Михайлов, выступая на закрытии слета, отметил следующие четыре критерия, которыми руководствовалось жюри слета при оценке работ.

Первый — полезность. Начиная исследование, прямо и мужественно спросите себя — кому это нужно? Что даст ваше исследование? Когда пятиклассник решает занимательные головоломки или изобретает занимательные поделки — этому можно и нужно радоваться. Он играет. Но когда в науку начинает играть старшеклассник, когда он берет для исследования задачу, решение которой удовлетворяет лишь его собственное любопытство, но не представляет ни малейшего интереса для науки и практики,— это досадно. Любопытство, интуиция, воображение — необходимые качества исследователя. Но хотелось бы, чтобы эффективность и качество — два слова, ставшие девизом десятой пятилетки — стали девизом и юношеской науки, чтобы результаты ваших исследований, какими бы скромными они ни были, оказались бы полезными. Поэтому жюри очень высоко оценивало исследования, имеющие выход в производство, в школьную жизнь, в решение реальных проблем вашей собственной жизни — учебы, досуга, быта, отдыха. Хотелось бы, чтобы таких исследований было больше, чтобы союз «школа + + наука + производство» был крепче.

Второй критерий — серьезность работы. Здесь жюри решительно выступило против верхоглядства. Когда человек берется за решение глобальных проблем, не усвоив знаний, содержащихся в школьном учебнике, это производит удручающее, даже комическое впечатление. Ему кажется, что он высказывает гениальные откровения, а он неуч. Он хочет поразить, а оказывается смешным. Помните слова К. Маркса о том, что в науке нет широкой столбовой дороги и что только тот сможет достичь ее сияющих вершин, кто, не боясь усталости и трудностей, карабкается по ее каменистым тропам. Карабкается, а не перепрыгивает, не взлетает! Надо много читать, заниматься самообразованием, надо терпеливо овладевать тем богатством знаний, которое накоплено наукой, надо уметь делать большую, трудную, иногда скучную, но необходимую подготовительную работу. А гениальные, глобальные, масштабные открытия не уйдут. Они только приблизятся.

Третий критерий — самостоятельность, творческий характер работы. Ряд работ, представленных на слет, к сожалению, носил слишком общий, реферативный характер. Школьник добросовестно прочитал и систематизировал то, что написано по заинтересовавшей его проблеме. Это совершенно необходимо. Исследователь должен знать историю вопроса. Но эрудиция — это еще не научное творчество. Жюри особо приветствовало тех авторов, в работах которых отчетливо присутствует эвристическое начало, где присутствует пусть небольшой, но собственный вклад в науку.

Четвертый критерий — культура работы. Любая, самая плодотворная, идея может «не прозвучать», если докладчик не умеет донести ее до слушателей. Культура умственного труда — это и

*) О НОУ см. «Квант», 1975, № 9, 1977, № 9, 1979, №№ 2, 3.

умение работать с литературой, пользоваться словарями и справочниками, это и знание основ библиографии и умение работать в библиотеке, это владение навыками научного анализа и даже умение оформить свою работу надлежащим образом, в частности, указать использованную литературу. Небрежности, неряшливости не должно быть места.

Какие же работы были отмечены жюри?

По математике таких работ было около десяти. Среди них работа Т. Вайнштейн и А. Величко (Новосибирск, школа № 130, 8 класс) «Система анализа первичной структуры белков». Эта работа выполнялась по заказу отдела биохимии НИОХ АН СССР в лаборатории проектирования прикладных систем вычислительного центра. Ребята разработали справочно-информационную систему «Бельчонок-1», позволяющую быстро находить информацию о данном белке *).

И. Нестерова и И. Щербакова (Магнитогорск, школа № 28, 9 класс) в докладе «Опыт применения математических методов для определения уровня развития дошкольников и школьников» рассказали о проведенной ими работе в подготовительной группе детского сада № 137 и с первоклассниками своей школы. Девочки предложили анкету из 5 вопросов и затем обработали ее математическими методами (даже без ЭВМ). Оказалось, что общее развитие дошкольников больше всего характеризуется умением отгадывать загадки и осуществлять классификацию, а первоклассников — умением решать задачи («оперативное мышление»). Эту работу магнитогорские школьницы намерены продолжить далее.

Кафедре химической кибернетики Казанского химико-технологического института передал для использования результаты своей работы О. Максимов (Казань, школа № 18, 9 класс). В своем докладе «Использование уравнений с лимитирующими факторами при моделировании микробиологических процессов» он рассказал о математической модели роста дрожжевых клеток в условиях лимитирования поступающего азота и углерода, по которой была составлена программа для ЭВМ «Наири-К». Работа эта была выполнена в кружке программирования клуба юных химиков и механиков, члены которого занялись математическим обеспечением научно-исследовательской работы, проводимой студентами и сотрудниками на кафедре химической кибернетики КХТИ.

По секции физики также было немало интересных работ. Так, Л. Майстренко (Волгоград, школа № 111, 9 класс) в докладе «Исследование токов электрохимической коррозии и разработка измерителя скорости коррозии» рассказала о работе, выполненной группой учащихся ее школы совместно с кафедрой физики Волгоградского инженерно-строительного института. А. В. Шильников, зав. кафедрой физики ВИСИ, дал о ней такой отзыв: «Новый способ, исследованный авторами, после всесторонней проверки должен быть предложен для внедрения в практику». Эта работа выполнялась по теме «Разработка и внедрение электрохимической защиты нефтяных резервуаров от коррозии» для объединения «Нижневолжскнефть».

По поручению научно-исследовательской лаборатории Московского института радиотехники, электроники и автоматики выполнял свою работу «Отработка метода регистрации инфракрасных спектров пропускания для изучения зонной структуры твердых тел» А. Михин (Москва, школа № 7, 9 класс). Родному колхозу поможет измеритель влажности почвы, созданный К. Магдой (Городовиковская школа № 1 Калмыцкой АССР, 9 класс).

Не забывают ребята и про школы — на слет был представлен ряд приборов, которые можно использовать на уроке. Это и установка для демонстрации силы Лоренца с помощью телевизора и сильного магнита, сделанная С. Безвительных (Глазов, школа № 13, 8 класс), и учебно-наглядное пособие «Работа радиолампы», изготовленное О. Тишковым (Орджоникидзе, школа № 7, 8 класс), и демонстрационный ламповый генератор релаксационных колебаний, в процессе создания которого А. Михайлов (Уфа, школа № 62, 8 класс) по заданию учителя физики самостоятельно разобрался в литературе, выбрал схему, «доработал» ее, собрал прибор и определил его характеристики. Назовем еще стенд для исследования законов колебаний маятника, представленный Д. Быховцевым, С. Нечаевым и П. Скобелевым (Куйбышев, школа № 81, 9 класс), и целый конструктор по курсу физики 6 класса, созданный из самых доступных материалов И. Котырло (Шахты, школа № 43, 9 класс).

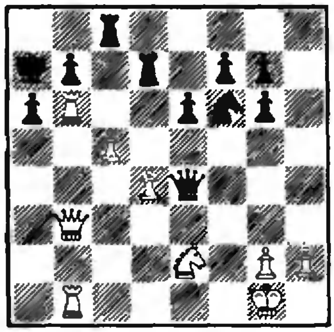
Из реферативных работ по обеим секциям жюри отметило доклады О. Шильникова (Ленинград, школа № 496, 9 класс) «Шарм» (об элементарных частицах), А. Коваля и Л. Мецгера (Челябинск, школа № 31, 10 класс) «Удержание заряженных частиц переменным магнитным полем», А. Коваля «Сфера в нормированных пространствах» и другие.

Но не только работой секций жил слет. За неделю, проведенную в Челябинске, ребята познакомились со сверстниками, побывали на промышленных предприятиях, в институтах и вузах Челябинска, даже сыграли партию в шахматы с ЭВМ в вычислительном центре политехнического института, осмотрели Всероссийскую выставку творчества школьников. Домой ребята увезут массу впечатлений, новые знания, опыт общения с учеными. И можно быть уверенным, что на следующий слет приедет еще больше ребят, для которых творчество стало неотъемлемой частью их жизни, и, где бы они потом ни работали, кем бы ни стали, они будут творцами и исследователями.

А. Виленкин

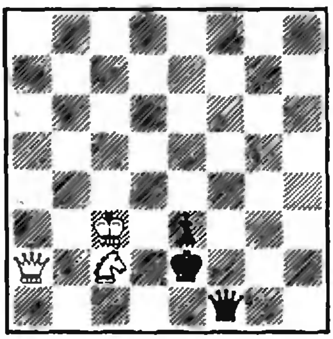
---

*) См. «Квант», 1979, № 12.

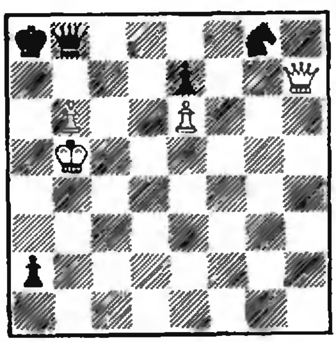


1. М. Таль — М. Ботвинник. Белые выигрывают.

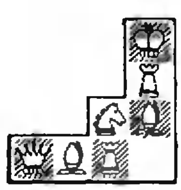
Консультирует — чемпион мира по шахматам, международный гроссмейстер А. Карпов.
Ведет страничку — мастер спорта СССР по шахматам, кандидат технических наук Е. Гик.



2. М. Таль, Э. Погосянц. Белые выигрывают.



3. И. Клинг. Мат в 14 ходов.



4. В. Шинкман. Поменять местами короля и ферзя.

Не успели утихнуть страсти после матча в Багио, в котором Анатолий Карпов отстоял свое чемпионское звание, а сильнейшие шахматисты планеты вновь сели за шахматные столики, чтобы в длительном марафоне выявить нового соперника чемпиона мира. В конце прошлого года закончился предпоследний этап этого марафона — два межзональных турнира (один из них проходил в СССР, другой в Бразилии).

Успешнее всех в межзональных турнирах сыграл экс-чемпион мира Михаил Таль. Он набрал 14 очков из семнадцати возможных, проведя турнир без единого поражения и превзойдя результат Р. Фишера в межзональном турнире 1970 года, который считался выдающимся. Напомним, что на матче в Багио М. Таль был тренером А. Карпова, и, как мы видим, творческий союз гроссмейстеров оказался весьма удачным для обоих.

В школьные годы М. Таль обладал незаурядными математическими способностями, но в дальнейшем ради шахмат «пожертвовал» математикой. О взглядах Таля на шахматное искусство, о занятиях математикой и шахматами можно прочитать в его интервью «Когда катет длиннее гипотенузы» («Квант», 1975, № 9).

Михаила Таля часто называют волшебником комбинаций и, разумеется, среди сотен его блестящих шахматных произведений трудно выделить какое-то одно. Мы решили остановиться на партии, сыгранной М. Талем в самом памятном для него соревновании — матче с М. Ботвинником, в котором он завоевал титул сильнейшего шахматиста мира. Интересно, что в этом году исполняется ровно 20 лет со времени того матча.

В позиции № 1 найдите победную комбинацию М. Таля, которой он завершил 17-ю партию матча (ход белых).

Редко случается, чтобы сильные шахматные практики являлись одновременно и шахматными композиторами. Они охотнее решают задачи и этюды, чем составляют их. Тем интереснее вам будет ознакомиться с единственным этюдом М. Таля (№ 2), составленным им совместно с международным мастером по шахматной композиции Э. Погосянцем (кстати говоря, математиком по образованию). Любопытно, что решение этого этюда содержит геометрические мотивы.

Приведем теперь две необычные шахматные задачи. В № 3 все 14 ходов делает белый ферзь. Если вы нарисуете путь, который проходит ферзь в процессе решения, то обнаружите, что он имеет довольно забавный вид.

Задача № 4 относится к жанру сказочных шахмат и напоминает известную игру С. Лойда «15». В ней требуется поменять местами короля и ферзя так, чтобы остальные фигуры обязательно вернулись на первоначальные места.

Решение этой задачи, принадлежащее ее автору, состоит из 107 (!) перемещений. Об этом было указано в книге «Математика на шахматной доске». Однако двум читателям «Кванта» — В. Герасеву из Ленинграда и А. Смулько из Пинска удалось почти втрое ускорить необходимую перестановку — 45 ходов вместо 107. Предлагаем вам найти это рекордное решение (а, может быть, и еще более быстрое!).

Московский физико-технический институт

Математика

Вариант 1

1. $\{1\}$.

2. $]\log_3 0{,}9;\ 2[$. Указание. Данное неравенство равносильно неравенствам

$$\frac{x+2-\log_3(9-3^x)}{\log_3(9-3^x)-3}\leqslant 0,$$

$$x+2-\log_3(9-3^x)\geqslant 0.$$

(поскольку в области определения $\log_3(9-3^x)-3<0$).

$$\log_3(9-3^x)\leqslant\log_3 3^{x+2},$$

$$0<9-3^x\leqslant 3^{x+2}.$$

3. $x=\frac{5}{4}\pi+2\pi k\ (k\in\mathbf{Z})$.

Указание. $\pi<5-\frac{\pi}{4}<2\pi$.

4. $\frac{5}{8}a$. Решение. Пусть R — радиус окружности и $\widehat{ABC}=\alpha$ (рис. 1). Из $\widehat{BAP}=\frac{\pi}{2}-\alpha$ и $\widehat{QAB}=\widehat{QCB}=\frac{\pi}{2}-\alpha$ вытекает $\widehat{PAQ}=\pi-2\alpha$.
Имеем $|AC|=a=2R\cdot\sin\alpha$, $|PQ|=\frac{6}{5}a=2R\cdot\sin(\pi-2\alpha)=2R\cdot\sin 2\alpha$. Отсюда $\frac{|PQ|}{|AC|}=\frac{6}{5}=2\cos\alpha$, $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$.

Тогда $R=\frac{a}{2\sin\alpha}=\frac{5}{8}a$.

5. $2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Решение. Из того, что плоскости (ABC) и (DBC) перпендикулярны плоскости (ADB), следует, что $(BC)\perp(ADB)$. Высота конуса, о котором говорится в условии, совпадает с высотой тетраэдра, и основанием этой высоты является центр окружности, вписанной в ту грань, на которую опущена высота. Высоты тетраэдра, проведенные из вершин A, D и C, лежат в плоскостях граней; следовательно, вершина конуса может находиться только в вершине B тетраэдра. Пусть O — центр окружности, вписанной в треугольник ACD (рис. 2), тогда $[BO]$ — высота конуса и тетраэдра. Пусть M, N и P — точки касания этой окружности со сторонами треугольника ACD. Тогда $[BM]\perp(AC)$, $[BN]\perp(DC)$ (по теореме о трех перпендикулярах) и $[BM]\cong[BN]$ (как образующие конуса). Отсюда следует, что прямоугольные треугольники BMC и BNC конгруэнтны и, в частности, $\widehat{BCA}=\widehat{BCD}$. Последнее означает, что прямоугольные треугольники ABC и DBC также конгруэнтны. Но тогда $|AC|=|DC|$, то есть треугольник ACD — равнобедренный, а значит, точка O лежит на отрезке $[CP]$, который является высотой, медианой и биссектрисой треугольника ACD, проведенной из вершины C. Положим $|CO|=a$, тогда $|OP|=|OM|=a\cdot\sin\frac{\alpha}{2}$. Отрезок $[BO]$ является высотой в прямоугольном треугольнике CPB, поэтому $|BO|=\sqrt{|PO|\cdot|OC|}=a\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Если β — угол в осевом сечении конуса, то $\widehat{PBO}=\frac{\beta}{2}$ и $\mathrm{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{|OP|}{|BO|}=\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}}$. Отсюда $\beta=2\,\mathrm{arctg}\sqrt{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

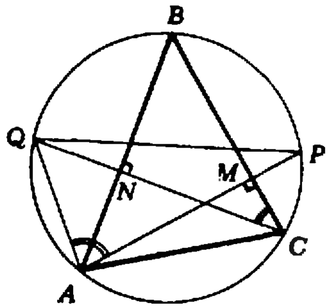


Рис. 1.

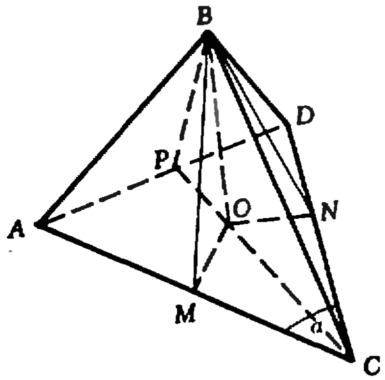


Рис. 2.

6. $\frac{15}{4}$ км. Решение. Введем систему координат с началом в точке N, как показано на рисунке 3. Точка M имеет координаты $(a;\ 1)$, где a — искомое расстояние, точка K, в которой перевозчик ожидает рыбака, имеет координаты $(x;\ 1)$, причем $x<a$. (Здесь и далее расстояния выражены в километрах, время — в часах, скорости — в км/час.) Пусть $\vec{v}_т$, $\vec{v}_c$, $\vec{v}$ — векторы скорости течения, скорости лодки относительно воды и скорости лодки относительно берега. Вектор $\vec{v}_т$ имеет координаты $(1;\ 0)$, координаты векторов $\vec{v}_c$ и $\vec{v}$ обозначим, соответственно, $(v_{cx};\ v_{cy})$ и $(v_x;\ v_y)$. Из $\vec{v}=\vec{v}_c+\vec{v}_т$ следует $v_x=v_{cx}+1$ и $v_y=v_{cy}$. Пусть T_1 — время движения лодки

из N в K. Тогда $v_x = \frac{x}{T_1}$, $v_y = \frac{1}{T_1}$ и, следовательно, $v_{cx} = \frac{x}{T_1} - 1$, $v_{cy} = \frac{1}{T_1}$. Но $v_{cx}^2 + v_{cy}^2 = v_c^2 = 16$; поэтому $\left(\frac{x}{T_1} - 1\right)^2 + \frac{1}{T_1^2} = 16$, откуда

$$T_1 = \frac{-x + \sqrt{16x^2 + 15}}{15}.$$

Рассмотрев движение лодки из точки K в точку N, аналогично найдем время T_2 этого движения:

$$T_2 = \frac{x + \sqrt{16x^2 + 15}}{15}.$$

Время T_3 движения рыбака от точки M до точки K равно $\frac{a-x}{4}$. По условию $T_1 < T_3$. Множество решений этого неравенства есть интервал $]x_1;\ x_2[$, где $x_{1,2} = \frac{-11a \mp 4\sqrt{16a^2-9}}{9}$.

Заметим, что $x_1 < 0$, а $x_2 = \frac{-11a + 4\sqrt{16a^2-9}}{9} > \frac{-11a + 4\sqrt{15}a}{9} > 1$, поскольку $a > 3$.

Для $x \in\ ]x_1;\ x_2[$ время $T(x)$ от отплытия до возвращения лодки определяется формулой $T(x) = T_2 + T_3$.

Находим критическую точку функции T: $x_0 = \frac{11}{12}$. Значит, $x_0 \in\ ]x_1;\ x_2[$. Поскольку $T'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $T'(x) > 0$ при $x > x_0$, $T(x_0)$ — наименьшее значение функции T на интервале $]x_1;\ x_2[$. Следовательно, $T(x_0) = \frac{9}{8}$, откуда $a = \frac{15}{4}$.

Вариант 2

1. $]-\infty;\ -1[$.

2. $\{(3;\ 2)\}$. Указание. Данная система равносильна системе

$$\begin{cases} y^2 = xy - 2, \\ x(x-y) = 3, \\ x > y > 0. \end{cases}$$

3. $\frac{4\sqrt{5}}{3} R^2$. Решение. Поскольку $\widehat{ABC} = 90°$, диагональ AC трапеции является диаметром окружности, то есть $|AC| = 2R$. Треугольники

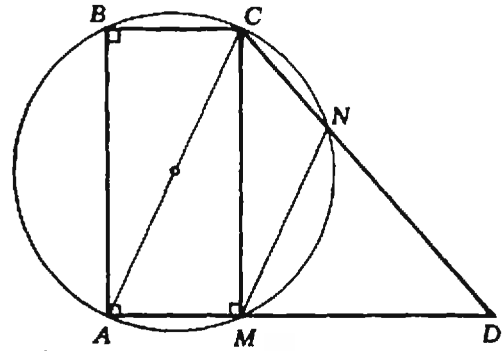


Рис. 4.

MND и ACD (рис. 4) имеют общий угол ADC и $|MD| : |AD| = |ND| : |CD|$, поэтому эти треугольники подобны. Отсюда $\widehat{MND} = \widehat{ACD}$, а значит, $[MN] \parallel [AC]$. Но тогда дуги NC и MA, а следовательно, и хорды NC и MA конгруэнтны, то есть $|AM| = |CN|$. Пусть $|AM| = a$, тогда $|BC| = a$, $|AD| = 3a$, $|MD| = 2a$, $|CD| = 3a$. Из прямоугольного треугольника CMD ($\widehat{CMD} = 90°$) $|CM| = \sqrt{5}a$. Из прямоугольного треугольника AMC $6a^2 = 4R^2$.

4. $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $x_2 = -\frac{\pi}{4} + (-1)^l \times \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right) + \pi l\ (k, l \in \mathbf{Z})$. Указание. Данное уравнение равносильно уравнению

$$\sin x\,(1 + \cos x) + \cos x\,(1 - \sin^2 x) = 0.$$

Уравнение $\sin x + \cos x - \sin x \cdot \cos x = 0$ равносильно уравнению $(\sin x + \cos x)^2 - 2(\sin x + \cos x) - 1 = 0$.

5. $\frac{9}{7}$. Решение. Графики скоростей поездов как функций времени изображены на рисунке 5. Здесь T_1, T_2 — время равноускоренного движения поездов, T_0 — момент встречи, T — время прохождения всего пути, v_1, v_2 — скорости равномерного движения поездов. По условию $\frac{v_2}{v_1} = \frac{4}{3}$, отсюда для искомого отношения ускорений получаем

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{3}{4} \cdot \frac{T_2}{T_1}. \qquad (1)$$

Из равенства скоростей в момент T_0 следует, что $v_1 = \frac{v_2}{T_2} \cdot T_0$, то есть

$$T_0 = \frac{3}{4} T_2. \qquad (2)$$

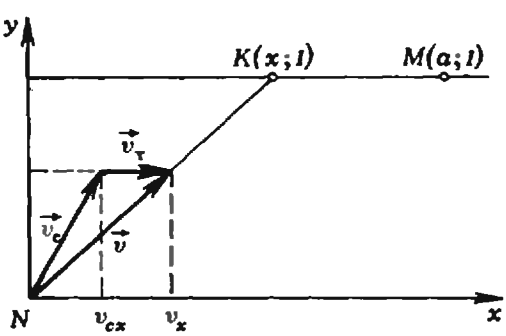


Рис. 3.

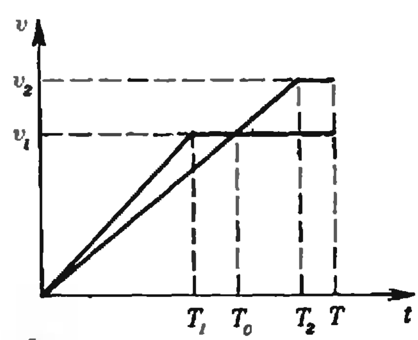


Рис. 5.

Обозначим через S_1, S_2 — пути, пройденные поездами к моменту встречи, а через S — весь путь. Для первого поезда $S_1=\frac{1}{2}v_1T_1+$ $+v_1(T_0-T_1)$, $S=\frac{1}{2}v_1T_1+v_1(T-T_1)$. Для второго $S_2=\frac{1}{2}v_1T_0$, $S=\frac{1}{2}v_2T_2+v_2(T-$ $-T_2)=\frac{4}{3}v_1\left(T-\frac{1}{2}T_2\right)$. Приравнивая выражение для S_1+S_2 к каждому из двух выражений для S и подставляя значение T_0 из (2), получаем два уравнения:

$$\frac{9}{8}T_2-\frac{1}{2}T_1=T-\frac{T_1}{2}=$$
$$=\frac{4}{3}\left(T-\frac{1}{2}T_2\right).$$

Отсюда $T_1=\frac{14}{27}T$, $T_2=\frac{8}{9}T$. Тогда из (1) $\frac{a_1}{a_2}=\frac{9}{7}$.

6. $\arcsin\frac{1}{3}$. Решение. Обозначим через α угол между прямой BD_1 и плоскостью BDC_1. По определению $\alpha\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$. Пусть $|BC|=$ $=a$, $|CC_1|=b$. Поместим начало координат в точку C, а оси x, y, z направим по векторам $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{CC_1}$. Имеем $\overrightarrow{BD_1}=(-a;\ a;\ b)$. Плоскость (BDC_1) задается уравнением $\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{b}=1$. Тогда вектор $\vec{n}$, перпендикулярный к этой плоскости, имеет координаты $\left(\frac{1}{a};\frac{1}{a};\frac{1}{b}\right)$. Следовательно,

$$\sin\alpha=\cos\left(\widehat{\vec{n},\overrightarrow{BD_1}}\right)=\frac{\vec{n}\cdot\overrightarrow{BD_1}}{|\vec{n}|\cdot|\overrightarrow{BD_1}|}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{1}{b^2}}\cdot\sqrt{2a^2+b^2}}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\left[\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]+5}}.$$

Легко проверить, что $\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2\geqslant 2$, причем $\left(\frac{a}{b}\right)^2+\left(\frac{b}{a}\right)^2=2$ только при $a=b$ (напоминаем, что $a>0$, $b>0$). Следовательно, $\sin\alpha<\frac{1}{3}$ при $a\neq b$ и $\sin\alpha=\frac{1}{3}$ при $a=b$.

Итак, $\alpha=\arcsin\frac{1}{3}$ при $a=b$; поскольку sin возрастает на $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, при $a\neq b$ имеем $\alpha<\arcsin\frac{1}{3}$. Значит, $\arcsin\frac{1}{3}$ — наибольшее возможное значение для α.

Замечание. $\sin\alpha$ можно найти и чисто геометрически. Очевидно, $\sin\alpha=\frac{h}{|BD_1|}$, где

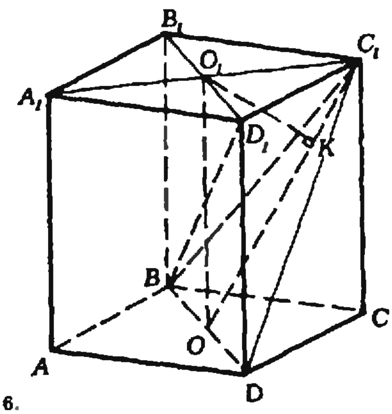


Рис. 6.

h — расстояние от точки D_1 до плоскости BDC_1 (на рисунке 6 $h=|O_1K|$).

Физика

Вариант 1

1. $r=4R$; $|\vec{v_2}|=|\vec{v_0}|\cos 30^\circ=|\vec{v_0}|\sqrt{3}/2$; $|\vec{v_3}|=$ $=|\vec{v_0}|\sin 30^\circ=|\vec{v_0}|/2$; направления скоростей $\vec{v_2}$ и $\vec{v_3}$ очевидны из рисунка 7.

2. $\frac{V}{V_0}=\frac{Q}{\nu C_pT_0}+1\approx 4$;

3. В любой момент времени после замыкания ключа напряжение на сопротивлении R равно по модулю ЭДС индукции на концах катушки: $Ri_R=L\left|\frac{\Delta i_L}{\Delta t}\right|$. Отсюда заряд, протекший через сопротивление R за время Δt, равен $\Delta Q=i_R\Delta t=L/R|\Delta i_L|$. При постоянных значениях L и R полученное соотношение между изменением тока в катушке и зарядом через сопротивление остается справедливым в течение всего времени t установления стационарного режима в цепи. За время t ток через катушку возрастет от нуля до величины $\mathcal{E}/r$. Следовательно, полный заряд, прошедший через сопротивление, равен $Q=\frac{L}{R}\frac{\mathcal{E}}{r}$.

4. $F=2$ см.

Вариант 2

1. $\frac{E_n}{E}=\frac{m_{He}}{m_{He}+m_n}=0{,}8$.

2. $n=\frac{p_1V}{5/6p_0V_0}=333$. Указание. Количество заполненных трубок лимитируется гелием.

3. По закону сохранения энергии $\frac{Q^2}{2C}=$ $=\frac{L_1I_1^2}{2}+\frac{L_2I_2^2}{2}$, где Q — первоначальный заряд на конденсаторе, I_1 и I_2 — максимальные значения силы тока через первую и вторую катушки соответственно. Связь между I_2 и I_1 можно найти двумя способами. 1) В любой момент токи через катушки 1 и 2 обратно пропорциональны индуктивным сопротивлениям катушек: $i_1\sim 1/L_1\omega$ и $i_2\sim 1/L_2\omega$, где ω — частота колебаний контура. Отсюда $i_1/i_2=L_2/L_1$, и $I_1/I_2=L_2/L_1$. 2) В любой

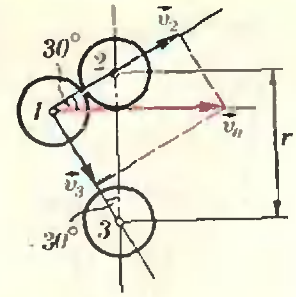


Рис. 7.

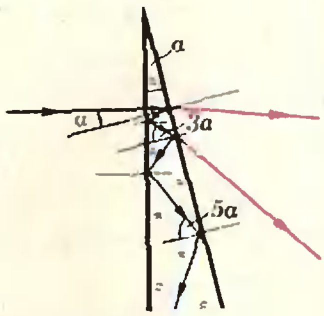


Рис. 8.

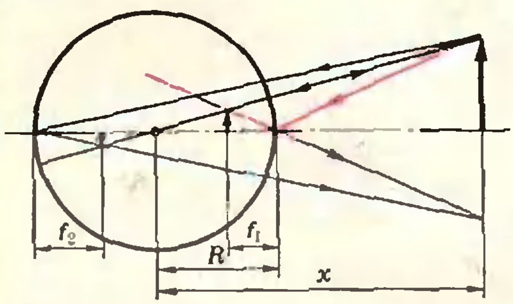


Рис. 9.

момент времени ЭДС индукции на концах обеих катушек одинаковы: $L_1\Delta i_1/\Delta t = L_2\Delta i_2/\Delta t$. Следовательно, $\Delta(L_1i_1 - L_2i_2) = 0$, или $L_1i_1 - L_2i_2 = \text{const}$. Но в начальный момент $i_1 = i_2 = 0$, поэтому $L_1i_1 - L_2i_2 = 0$, и $L_1I_1 = L_2I_2$. Таким образом, $I_2 = I_1L_1/L_2$, и

$$Q = I_1\sqrt{CL_1(L_1 + L_2)/L_2}.$$

4. На экране будет видно 2 светлых пятна. Указание. Число лучей, выходящих из клина, ограничивается углом полного отражения (рис. 8).

Вариант 3

1. $T = 2\pi\sqrt{2R/g} \approx 7150$ с ≈ 2 ч.

2. $\tau = \tau_{1/2}\log_2\frac{\Delta t_0}{\Delta t_1} \approx 2$ч. Указание. Изменение температуры воздуха пропорционально скорости радиоактивного распада.

3. $U_0 = \frac{3mL^2}{4e\tau^2} = 19{,}5$ В;

$E = \frac{1}{4}eU_0 \approx 4{,}9$ эВ.

4. $x = 10R = 20$ см. Указание. Увеличение мнимого изображения, полученного в результате отражения от передней стенки шарика (от выпуклого зеркала радиусом R), равно (рис. 9) $\Gamma_1 = \frac{f_1}{x-R} = \frac{R}{2x-R}$. Аналогично, увеличение действительного изображения, полученного отражением от задней стенки шарика (от вогнутого зеркала радиусом R), равно $\Gamma_2 = \frac{f_2}{x+R} = \frac{R}{2x+R}$.

Шахматная страничка

(см. «Квант» № 1)

1. После **1. Лf5!!** выяснилось, что черные гибнут на поле f7, находящемся на пересечении двух линий — вертикали f и диагонали a2 — g8. Пока что на f7 напала ладья (грозит 2.Ф:f7×), а при взятии ее пешкой — 1... ef в игру неожиданно вступает слон b3. После вынужденного **1... Ф:b3+** последовало **2. cb ef 3. Kf4 Лd8 4. Фh6+ Кре8 5. К:g6 fg 6. Ф:g6+ Кре7 7. Фg5+ Кре8 8. ef Лc8 9. Фg8+ Кре7 10. Фg7+**, и черные сдались, так как решает марш пешки f.

2. **1. Крg7! h4 2. Крf6! Крb6** (2... h3 3. Кре6 h2 4. c7 Крb7 5. Крd7 с ничьей) **3. Кре5 Кр:c6** (3... h3 4. Крd6 h2 5. c7 с ничьей) **4. Крf4 h3 5. Крg3 h2 6. Кр:h2** ничья. Этот парадоксальный этюд построен на «геометрических» свойствах шахматной доски — кратчайшее расстояние на ней измеряется не обязательно по прямой. В данном примере путь короля от h8 до h2 занимает 6 ходов как при прямолинейном движении, так и при зигзагообразном; однако во втором случае черные вынуждены потратить два темпа, и их «неудержимую» пешку удается догнать.

3. Задача называется «Погони любви». После **1. Фf1!** белый ферзь всюду преследует черного слона. В случае 1... Сb2 или при движении пешки h решает 2. Фb1! с неизбежным матом Ф:h7× или Ф:a1× (при 2... g6). Аналогично на 1... Сc3 (Сd4) следует 2. Фd3!, а на 1... Сe5 (Сf6) — 2. Фf5!; в обоих случаях с двойным нападением на слона и пешку h7. Наконец, 1...g3 (1... g6, g5 2. Ф:a1×) 2. Кg6+! hg 3. Фh3×.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 1)

2. 18.

3. Поскольку каждый раз количество листочков увеличивается на $4n$, мы можем получить только числа, представимые в виде $4n+1$. Значит, 1980 листочков получить нельзя.

4. Общая масса гирь может достигать 30 кг — если мы возьмем 3 гири по 10 кг. Покажем, что больше 30 кг общая масса гирь не может быть. Предположим противное — пусть общая масса больше 30 кг. Возьмем одну из гирь и будем добавлять к ней по одной гире. Остановимся в тот момент, когда масса получившейся кучки впервые превысит 10 кг. В этот момент масса кучки не может быть больше 20 кг, поскольку на предыдущем шаге она была меньше 10 кг, а масса одной гири не превосходит 10 кг. Поскольку общая масса гирь больше 30 кг, масса остальных гирь также больше 10 кг.

Итак, мы получили разбиение на две кучки, масса каждой из которых больше 10 кг. Противоречие.

5. $16^2=256$.

6. Поскольку B^2 — четырехзначное число, $B>31$. Поскольку kB — двузначное число и $B>31$, $k<4$. Кроме того, $B<50$.

Вычитая равенства

$$\begin{cases}(kB)^2=\overline{dcba},\\ B^2=\overline{abcd},\end{cases}$$

получаем

$$B^2(k^2-1)=9(111d+10c-10b-111a).$$

Отсюда следует, что B делится на 3.

Складывая те же два равенства, получаем

$$B^2(k^2+1)=11(91a+10b+10c+91d),$$

откуда B делится на 11.

Поэтому $B=33$.

7. Нет, не имеет. Докажите это, рассмотрев два возможных случая: а) все числа x, y, z — четные; б) два из этих чисел — нечетные, а одно — четное.

Арифметика по-рыбацки

(см. «Квант» № 1, 3-ю страницу обложки)

1. $4\cdot 18324=73296$.
2. $561092:7=80156$.
3. $10295\cdot 8=82360$.
4. $\begin{cases}408\cdot 22=8976,\\ 8976\cdot 2=17952.\end{cases}$
5. $(128)^2=16384$.
6. $\begin{cases}3612\cdot 6=21672,\\ 3612:6=602.\end{cases}$
7. $69730+69730=139460$.
8. $\begin{cases}6804\cdot 6=40824,\\ 6804:36=189.\end{cases}$

Поговорим о дифференциальных уравнениях

(см. «Квант» № 1)

1. $y=2+3e^{-3t}$.

2. $t=\dfrac{30\ln 100}{\ln 2}\approx 199$ (дней).

3. Дифференциальное уравнение $T'(t)=-k(T(t)-20)$; начальное условие $T(0)=100$; решение $T(t)=20+80e^{-kt}$.
Ответ. Через 40 минут.

4. В 729 раз.

5. Искомая высота равна $h=\dfrac{b\ln 2}{g}\approx 5{,}45$ км.

6. Дифференциальное уравнение $V'=-kV$; начальное условие $V(0)=2$; решение $V(t)=2e^{-kt}$; так как $V(4)=1$, $k=\dfrac{\ln 2}{4}$ и $V(t)=2^{1-\frac{1}{4}t}$. Следовательно, $V(t)=0{,}25$, если $1-\frac{1}{4}t=-2$, то есть при $t=12$ с. Длина пути дается формулой

$$S(t)=\int_0^t V(u)\,du=\frac{8}{\ln 2}\left(1-2^{-\frac{1}{4}t}\right),$$

поэтому лодка может пройти путь, не больший $\dfrac{8}{\ln 2}\approx 11{,}5$ м.

7. Так как $\omega^2\cdot 1$ м $=4$ м/с^2, $\omega=2c^{-1}$ и период $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\pi\approx 3{,}14$ с; так как $\omega^2=g/l$, $l=g/\omega^2\approx 2{,}45$ м.

8. Для функции $z=y\frac{a}{\omega^2}$ получаем дифференциальное уравнение $z''=-\omega^2 z$, поэтому $y=\dfrac{a}{\omega^2}+A\cos(\omega t+\varphi)$.

В чем дело?

(см. «Квант» № 1, с. 17)

Васин способ доказывает только, что *если $a<5$, то уравнение* (1) *не имеет решений*, но он не доказывает обратного утверждения: *если уравнение* (1) *не имеет решений, то $a<5$*, а без него ответ: *уравнение* (1) *тогда и только тогда не имеет решений, когда $a<5$* — не получается.

Заочная школа программирования

Ответы к урокам 4 и 5 будут опубликованы в следующих номерах журнала.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Т. Кольченко, Г. Красиков, Э. Назаров, И. Смирнова

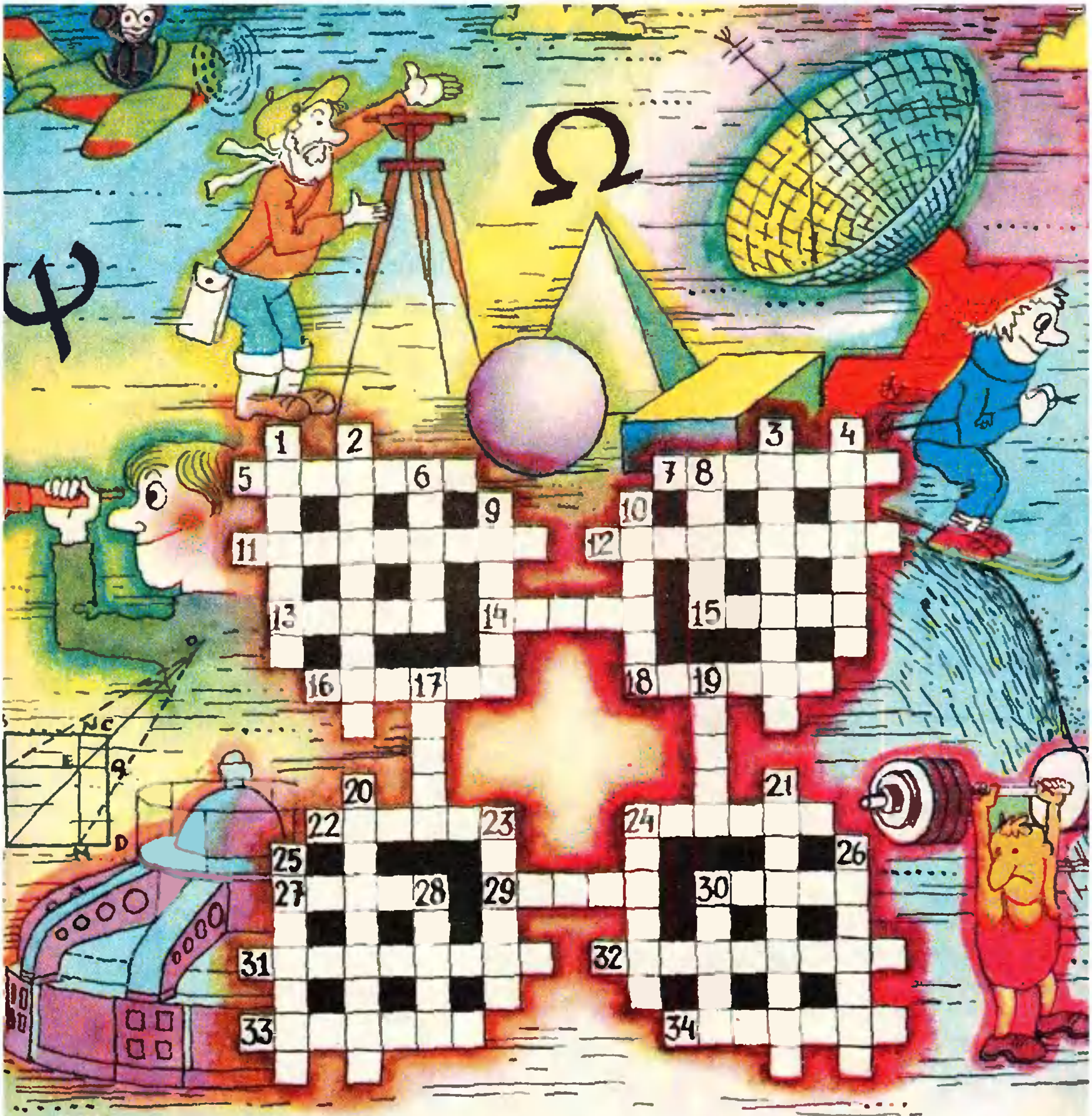
Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректоры О. Кривенко, Т. Панькова

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16.
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 19.12.79. Подписано в печать 24.01.80.
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 7,03. Т-01115.
Цена 30 коп. Заказ 3010.
Тираж 265 682 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
Государственного комитета
СССР по делам издательств, полиграфии
и книжной торговли,
г. Чехов Московской области



КРОССВОРД

По горизонтали: 5. Магнитоэлектрический генератор переменного тока. 7. Французский математик и механик XVIII—XIX вв. 11. Отрезок прямой, соединяющий две вершины многоугольника, не лежащие на одной стороне. 12. Прибор для измерения расстояний. 13. Одно из основных исходных понятий геометрии. 14. Французский физик и математик, один из основателей электродинамики. 15. Норвежский математик XIX в. 16. Тригонометрическая функция. 18. Простейшее устройство для фиксации направления на предмет. 22. Немецкий астроном, открывший законы движения планет. 24. Американский математик XX в. 27. Диффузия растворителя через полупроницаемую мембрану, разделяющую раствор и растворитель. 29. Английский физик—теоретик, один из основателей квантовой механики. 30. Французский физик, в честь которого названа единица количества электричества в международной системе единиц. 31. Наибольшее или наименьшее значения функции. 32. Искусственно полученный радиоактивный элемент семейства актиноидов. 33. Математический знак для обозначения действия извлечения корня. 34. Определение местоположения объекта по отражению от него звука.

По вертикали: 1. Французский физик XVII в. 2. Выражение вида $a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots$ $\ldots+a_{n-1}x+a_n$, где x — переменная. 3. Точка пересечения высот треугольника. 4. Польский физик—теоретик. 6. Единица массы. 8. Первая буква греческого алфавита. 9. Один из языков программирования. 10. Место, занимаемое цифрой при письменном обозначении числа. 17. Сокращенное название ряда языков программирования. 19. Химический элемент VIII группы периодической системы Менделеева. 20. Раздел математики, изучающий пространственные отношения и формы. 21. Прямая, пересекающая заданную прямую под острым углом. 23. Отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром. 24. Общее название частиц, образующих атомные ядра. 25. Гидравлический механизм для подъема тяжелых штучных грузов. 26. Гипотетический мир, состоящий из антивещества. 28. Замкнутая поверхность, все точки которой одинаково удалены от одной точки. 30. Французский физик, один из основателей термодинамики.

А. Жуков

Индекс 70465
Цена 30 коп.

МГУ НА ЗНАЧКАХ

Главное здание Московского университета на Ленинских горах, замечательное произведение архитектуры, ставшее символом советской науки и высшей школы, неоднократно изображалось на художественных значках (1,2). Интересны «профессиональные» значки факультетов и научных подразделений МГУ. Вот некоторые из них: (3) — механико-математический факультет, (4) — факультет вычислительной математики и кибернетики, (5) и (6) — физический факультет (на первом — стилизованное изображение популярного среди студентов-физиков символа $\sqrt{!}$, идею второго подсказала известная фраза Архимеда «Дайте мне точку опоры, и я сдвину Землю!»), (7) — научно-исследовательский институт механики, (8) — научно-исследовательский институт ядерной физики (значок выпущен к 25-летию НИИЯФ). При МГУ создана специализированная физико-математическая школа-интернат № 18; ее выпускники получают специальный значок (9). В МГУ проходят всесоюзные и международные научные конференции и конгрессы. На членских значках участников этих форумов часто можно видеть силуэт главного здания МГУ (10) — значок участника конгресса Международного союза теоретической и прикладной механики). Последний значок (11) был выпущен в связи с 200-летним юбилеем Московского университета.

Н. Розов