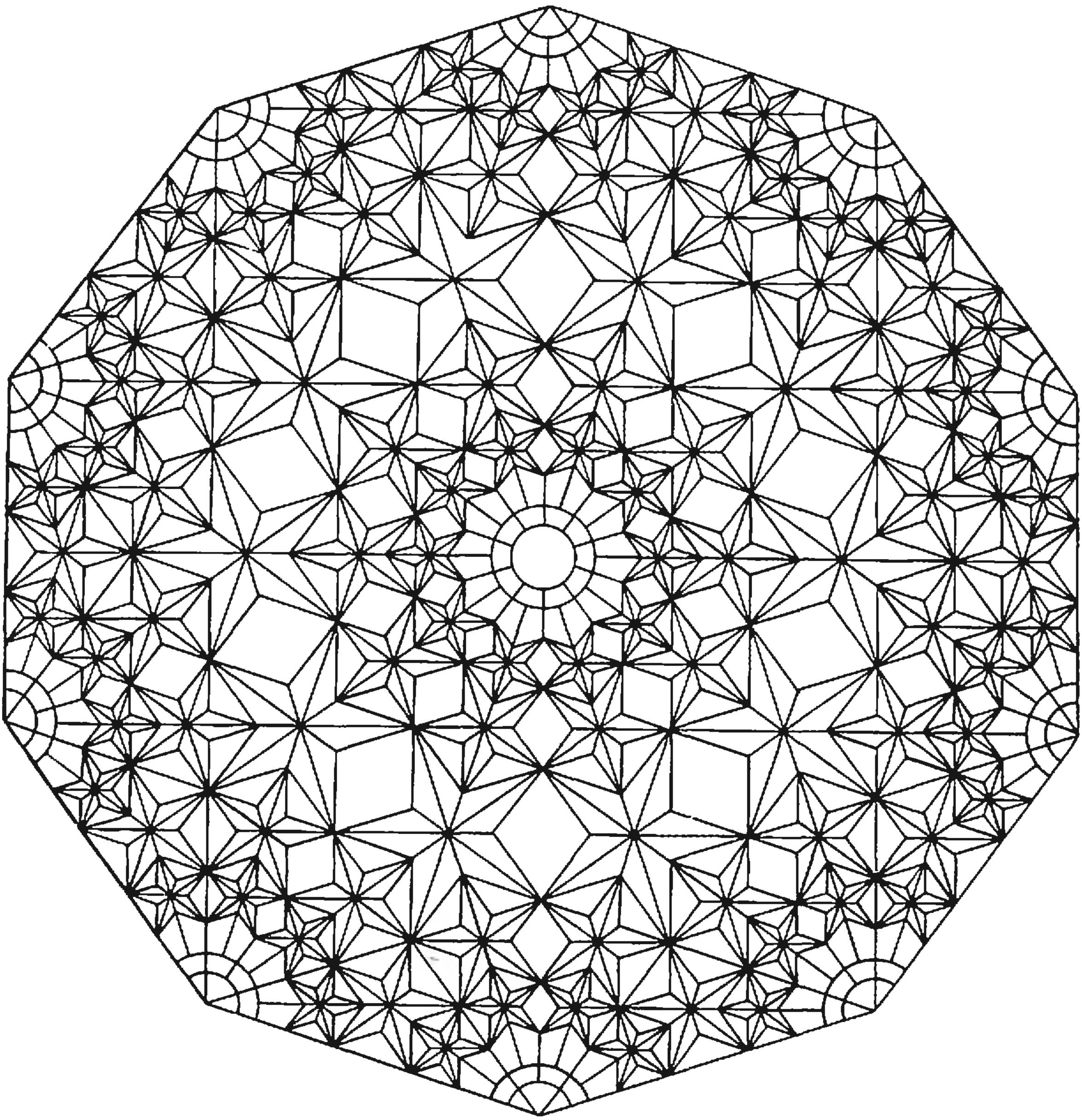
ISSN 0130-2221

Квант

12
1979

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



Фигура на этой странице обложки составлена из ста пятиконечных звезд. О том, как построить пятиконечную звезду циркулем и линейкой, рассказывается на с. 48.

Основан в 1970 году

Квант

12
1979

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

Как получить красный многогранник, изображенный на первой странице обложки, посмотрите на четвертой странице обложки

В НОМЕРЕ:

Первая научная работа Максвелла

5 ноября 1979 года исполнилось 100 лет со дня смерти великого английского ученого Джеймса Клерка Максвелла. Разгадка природы колец Сатурна, теория цветового зрения, знаменитый закон распределения молекул газа по скоростям и, прежде всего, теория электромагнетизма входят сейчас в сокровищницу мировой науки. Имя Максвелла, как говорил Макс Планк, «блещет на вратах классической физики».

Для молодежи особый интерес представляют ранние работы крупных ученых. И не потому, что эти работы более просты и понятны, чем фундаментальные открытия, принесшие славу их авторам. А потому, что они учат труду, творчеству, раскрывают красоту научного поиска. Сам Максвелл заметил, что «наука захватывает нас только тогда, когда, заинтересовавшись жизнью великих исследователей, мы начинаем следить за историей развития их открытий».

Свою первую научную работу Максвелл выполнил, когда ему было четырнадцать лет. Биографы Максвелла так описывают это событие. После ранней смерти матери (она умерла, когда Джеймсу было 8 лет) воспитанием сына занимался его отец, глубоко образованный человек, сам увлекавшийся научными и техническими вопросами. У Джеймса очень рано пробудился интерес к технике и развились практические навыки. В немалой степени этому способствовали постоянное общение с отцом, чтение и, конечно, детские игры и первые «научные» игрушки. До десяти лет Джеймс жил в деревне, и это было для него счастливым временем. Потом отец отвез его в Эдинбург, в школу, которая называлась академией.

Поначалу в академии Джеймс чувствовал себя неважно. Он сразу натолкнулся на отчужденный прием одноклассников, для которых он был простым деревенским парнем. Джеймс приехал в академию в середине учебного года, по одежде и по поведению он сильно отличался от сверстников, был необщительным, а в науках на первых порах не блистал. У него даже появилось прозвище «дуралей». Мальчик скучал по дому, по отцу, по вольной жизни в деревне. Но потом Джеймс удивил одноклассников. Он увлекся геометрией и стал первым учеником в школе по математике. В 14 лет за блестящие успехи по этому предмету он был награжден медалью.

Отец Джеймса иногда посещал заседания Эдинбургского королевского общества. Однажды он взял с собой сына. Тема заседания оказалась интересной для Джеймса: ученые обсуждали замечательные способности древних этрусков. Не владея высшей математикой, они знали сложные математические кривые: сечения этрусских погребальных урн являлись совершенными овалами! Каким образом древние делали такие построения? Какова связь искусства и математики? Никто из ученых мужей толком не мог ответить на эти вопросы.

Дискуссия ученых так взволновала мальчика, что он целыми днями размышлял над загадкой древних художников. Джеймс загорелся идеей построения красивых фигур при помощи законов геометрии и механических устройств. Несколько недель упорной работы (и увлекательнейшей игры) — и вот первое открытие: овалы можно чертить с помощью карандаша и булавок с нитью! Так Максвелл, будучи знаком только с основами алгебры и геометрией Евклида, решил задачу о построении овалов. Задачу, для решения которой Ньютон и Декарт применяли гораздо более сложный математический аппарат. Причем Максвелл предложил действительно новый способ, ранее неизвестный математикам.

Значение этого способа оказалось бóльшим, чем одно из возможных решений загадки древних этрусков. Действительно, геометрические построения юного Максвелла открывают перед нами удивительные оптические свойства овалов и вводят нас в круг интереснейших задач геометрической оптики, над которыми трудилось немало замечательных ученых прошлого.

Профессор Форбс, покровительствовавший молодым талантам, 6 апреля 1846 года доложил об исследовании Максвелла на заседании Эдинбургского королевского общества.

Перевод изложения этого доклада, напечатанного в Трудах общества, помещен ниже.

К описанию овалов и многофокусных овальных кривых

(с замечаниями профессора Форбса)

Мистер Клерк Максвелл остроумно предлагает распространить обычную теорию фокусов конических сечений на более сложные кривые следующим образом:

(1) По аналогии с эллипсом и гиперболой, у которых постоянны соответственно сумма и разность расстояний от произвольной точки кривой до двух точек, называемых фокусами, автор приходит к выводу, что в некоторой степени похожие кривые могут быть определены и построены из условия равенства постоянной величине суммы расстояния от произвольной точки кривой до одного фокуса и многократно повторенного расстояния от этой же точки до другого фокуса или же, в общем случае, m-кратное расстояние от одного фокуса$+n$-кратное расстояние до другого фокуса$=$const.

(2) Автор изобрел простой механический способ построения таких кривых с помощью булавок и нити, которая петлей обертывает две булавки, воткнутые в доску в точках f и F, как показано на рисунках 1 и 2. Затем автору пришла мысль распространить этот принцип на другие кривые, у которых сумма однократных или многократных расстояний от произвольной точки кривой до трех или более фокусов постоянная. И эти сложные кривые он предложил строить с помощью такого же простого механического приспособления, состоящего из нити заданной длины,

Перевод, подготовка к публикации и подстрочные примечания А. Митрофанова

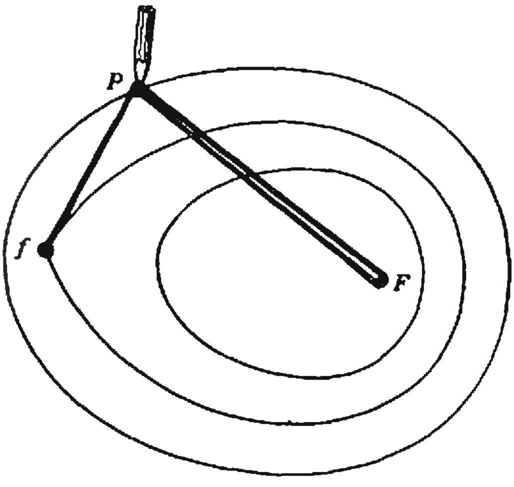


Рис. 1.

охватывающей три или более закрепленные булавки и ограничивающей подвижную точку P, которая при своем движении вычерчивает искомую кривую. Смотри рисунок 3. Далее, автор рассматривает кривые с двумя фокусами как частный случай класса кривых с многими фокусами, у которых два или более фокусов совпадают; фокус, где две нити встречаются, рассматривается как двойной фокус, если три нити встречаются, то это тройной фокус, и т. д.

Профессор Форбс заметил, что уравнение кривой с двумя фокусами легко приводится к виду

$$\sqrt{x^2+y^2} = a + b\sqrt{(x-c)^2+y^2}\ ,$$

т. е. такому же, как семейства кривых, известных как овалы Декарта первого рода *). Мистер Максвелл

*) Овалами в широком смысле слова называют плоские кривые яйцеобразной формы: сам термин «овал» происходит от латинского слова «*ovum*» (яйцо). Овалы Декарта первого и второго рода — некоторый класс овалов (см. «Квант», 1977, № 6, с. 43).

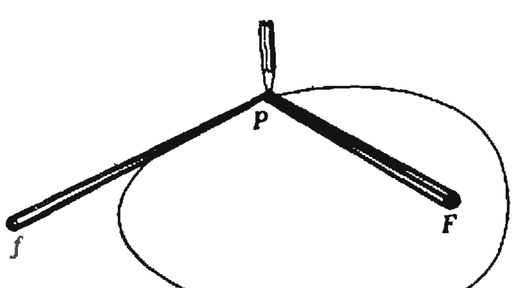


Рис. 2.

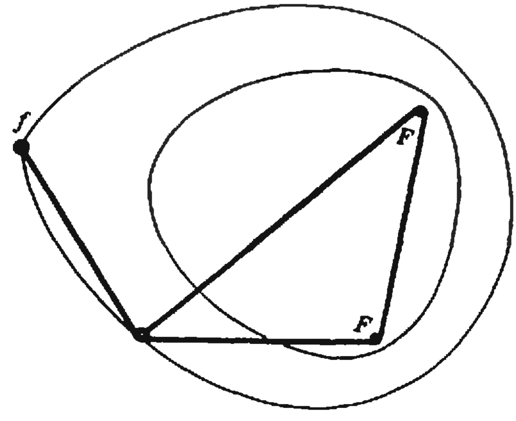


Рис. 3.

установил, что когда один из фокусов находится в бесконечности (или когда нить при построении кривой движется почти параллельно самой себе и ограничивается только максимальным размером стола), вычерчивается кривая, похожая на эллипс, — факт, натолкнувший профессора Форбса на вывод о тождественности построенного овала и декартового овала, так как последний, как хорошо известно, имеет такое же свойство. Но наиболее отчетливо идентичность овалов вытекает из принципа построения, т. е. из равенства

$$mr+nr'=\mathrm{const}$$

(r и r' — расстояния от произвольной точки кривой до фокусов), на самом деле ясно выражающего оптическое свойство рассматриваемых поверхностей *), вытекающее из волновой теории, а именно: свет, испущенный из одного фокуса, расположенного в свободном пространстве, сходится точно в фокусе, находящемся в среде, и отношение $\frac{n}{m}$ равно коэффициенту преломления среды.

Назовем *степенью* (или *порядком*) фокуса количество отрезков нити, которые подходят к булавке, закрепленной в этом фокусе для построения кривой по схеме Максвелла. Если один из двух фокусов находится в бесконечности и если степени фокусов равны, то построенная кривая является параболой; если степень конеч-

*) То есть поверхностей тел вращения овалов.

ного фокуса больше, чем бесконечного, то кривая — эллипс; если же степень удаленного в бесконечность фокуса больше, то кривая — гипербола. Очевидно, первый случай соответствует отражению параллельных лучей в фокус, когда при отражении от поверхности скорость света не изменяется; второй случай — это преломление параллельных лучей в фокус тела, оптически более плотного, чем окружающее пространство; третий — это преломление параллельного пучка в оптически менее плотную среду.

Декарт описал свои овалы в «Геометрии», предложив также способ их построения, но только в частном случае, и его метод оказался менее простым, чем метод мистера Максвелла. Иллюстрация оптических свойств овалов была дана Ньютоном с помощью синусов и Гюйгенсом (в его «Трактате о свете»). Но вряд ли кто подозревал, что существует такой легкий и изящный способ построения овалов с помощью булавок и нити в любом случае, когда порядки фокусов соизмеримы. Например, на рисунке 2 кривая с фокусами второго и третьего порядка задает форму сечения поверхности тела из стекла с коэффициентом преломления 1,5, подходящую для того, чтобы лучи, испущенные из точки f, собрались в точке F.

Что же касается сложных кривых с тремя и более фокусами, то мы не в состоянии на сегодняшний день дать им четкую физическую интерпретацию, но такой метод построения кривых, удовлетворяющих уравнению

$$mr+nr'+pr''+\ldots=\text{const},$$

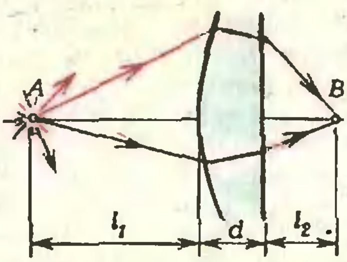
в силу своей простоты представляет самостоятельный интерес. И если, следуя мистеру Максвеллу, считать овалы Декарта предельным случаем овальных кривых со многими фокусами, то мы имеем дальнейшее обобщение того же сорта, как у Монтюкла *), предлагавшего рассматривать конические сечения как частный случай овалов Декарта.

*) Жан-Этьен Монтюкла — французский ученый XVIII века, механик, автор многотомной «Истории точных наук».

Построим овал

Для тех, кого заинтересовала работа Дж. Максвелла (с. 3), мы здесь приводим несколько геометрических задач на построение овалов различными чертежными средствами. Для выполнения чертежей, кроме карандаша, циркуля и линейки, вам потребуется ровная доска, булавки или тонкие гвоздики, суровая нитка и тонкий длинный металлический пруток (можно прямой кусок жесткой проволоки) со свободно скользящим по нему колечком. А для решения задач — смекалка! (Впрочем, нетерпеливые любители черчения могут подглядеть решения на с. 63.)

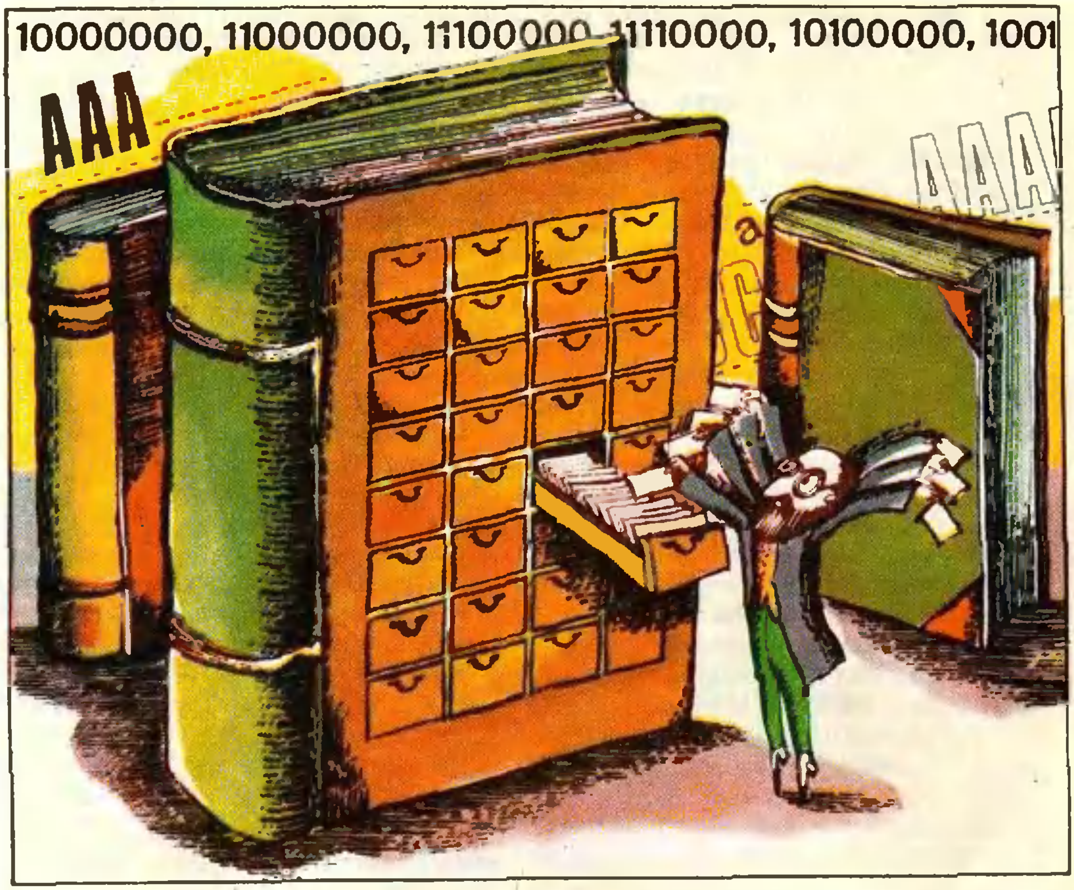
Для разминки начните с повторения конструкций Максвелла: прикрепите кнопками лист чертежной бумаги к доске, воткните в него две булавки, обмотайте нитку так, как показано на рисунке 2 на с. 4, и проведите овал Декарта первого рода типа $m:n=2:3$. (Если у вас нитка будет соскальзывать с карандаша, рекомендуем на его кончике проделать круговую лунку, по которой нить будет скользить не выскакивая.)



Задача 1. Укажите способ построения точек лежащих на овале Декарта первого рода, с помощью только циркуля и линейки. Проверьте его экспериментально, построив несколько точек на нарисованном методом Максвелла овале Декарта типа 2 : 3.

Задача 2. Укажите способ вычерчивания профиля плосковыпуклой линзы (см. рис.) толщины d (по оси), фокусирующей точечный источник A (расположенный по оси на расстоянии l_1 от выпуклой поверхности) в точку B (на расстоянии l_2 от плоской поверхности), если коэффициент преломления материала, из которого сделана линза, равен 1,5 или 2. (Здесь, кроме нитки и булавок, вам пригодится стержень с колечком!)

А. Митрофанов



М. Цаленко

Комбинаторные задачи информационного поиска

Научно-техническая революция, происходящая сейчас в промышленно развитых странах, тесно связана с появлением и развитием электронных вычислительных машин (ЭВМ). Современные ЭВМ могут выполнять миллионы арифметических действий в секунду. Однако ЭВМ вторгаются также в такие области человеческой деятельности, в которых нет больших и сложных вычислений и которые вроде бы далеки от математики. Поучительным примером служит библиотечное дело. В настоящей статье рассказывается, почему ЭВМ начали широко применяться в библиотеках и какие интересные и трудные математические задачи возникают при этом.

1. Что такое информационный поиск?

В крупных современных библиотеках хранятся миллионы книг, журналов, газет и других печатных материалов. Для того чтобы не запутаться в этом огромном собрании литературы, сотрудники библиотек создают справочную систему из каталогов с аннотированными карточками.

Теперь представим себе читателя, который пришел в библиотеку, чтобы прочесть какую-нибудь популярную книгу о решении уравнений в радикалах. Он может знать, что этой трудной задачей занимались многие математики и что ее решение связано с именами Абеля и Галуа, однако его математическое образование недостаточно для чтения специальной литературы. Таким образом, появление нашего читателя в библиотеке приводит к так называемому *информационному запросу:* «НАЙТИ ПОПУЛЯРНУЮ ЛИТЕРАТУРУ О РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ В РАДИКАЛАХ», и прежде чем читатель удовлетворит свою любознательность, он должен решить задачу информационного поиска: среди всех хранящихся в библиотеке книг отыскать ту, которая в наибольшей степени его удовлетворит. Здесь на помощь ему приходит система каталогов. В тематическом каталоге он найдет раздел, содержащий перечень книг по математике, а внутри него — часть, содержащую перечисление книг по алгебре. И вот среди каталожных карточек этой части нужно выбрать те, которые, указывают на отыскиваемую литературу.

Теперь проведем несколько простых расчетов. Допустим, что на ознакомление с карточкой, расходуется в среднем всего 20 секунд. Это значит, что читатель работает очень быстро: считается, что на выполнение одной арифметической операции человек тратит порядка 10 секунд. Если читатель должен просмотреть 200 карточек, то он потратит около 67 минут только на отбор интересующей его литературы. Этот отбор составляет непроизводительную часть общего процесса поиска интересующих читателя сведений. Сам процесс называют *информационным поиском;* проведенный расчет показывает, что при информационном поиске с помощью каталогов значительная часть времени тратится непродуктивно. Так как читальные залы крупных библиотек в течение одного дня посещают сотни людей, а их информационные запросы бывают гораздо более сложными, чем в приведенном выше примере, непроизводительные затраты времени при информационном поиске выражаются сотнями и тысячами часов.

Чтобы проиллюстрировать сложность информационного поиска, приведем еще одну цифру. Сейчас во всем мире издается свыше 750 журналов и других периодических изданий, посвященных только вычислительной технике. Это значит, что в течение года на различных языках публикуются десятки тысяч статей, занимающих сотни тысяч печатных страниц, которые относятся только к одной области человеческой деятельности. Однако эта область представляет интерес для специалистов самых различных специальностей: инженеров-конструкторов, физиков, химиков, математиков, социологов, философов и многих других. Разобраться в нарастающем потоке литературы, найти необходимые сведения, использовать их в своей работе и не повторять уже выполненные работы очень трудно. Системы каталогов оказывается недостаточно, и во многих странах мира создаются специальные институты информации.

2. ЭВМ и информационный поиск

Замечательной особенностью ЭВМ является ее умение «читать» и сравнивать слова, устанавливать, одинаковы они или различны. Дело в том, что для написания любого слова русского языка нужно уметь изображать всего 33 буквы. С другой стороны, ЭВМ легко распознать последовательности из единиц и нулей. Рассмотрим, как это принято, во многих современных вычислительных машинах, все последовательности из единиц и нулей, имеющие ровно восемь членов. Например, сюда войдут такие последовательности:

00000000, 01010101, 11110000

(для краткости между членами последовательностей запятая не ставится).

Так как в каждой последовательности ровно восемь членов, а любой член равен нулю или единице, общее число рассматриваемых последовательностей равно $2^8=256$. Условимся вместо первых букв *а*, *б*, *в*, *г*, *д*, *е* русского алфавита писать соответственно последовательности

10000000, 11000000, 11100000,
11110000, 10100000, 10010000

Подчеркнем, что каждую последовательность мы рассматриваем как один, а не восемь символов. Теперь с помощью новой символики можно записывать слова так, что их может «узнавать» ЭВМ. Например, слово *беда* будет выглядеть так:

1100000 10010000 10100000 10000000

Разумеется, подобный способ записи неудобен для человека, но он позволяет ЭВМ «читать». При этом машина может читать тексты на многих языках, поскольку с помощью 256 последовательностей она может запомнить не только русские буквы, но и цифры, латинские буквы и многие специальные знаки, например знаки арифметических действий.

Наученная человеком читать, машина немедленно обгоняет его по скорости чтения: если человеку нужно 67 минут на прочтение 200 каталожных карточек, то ЭВМ справляется с этой работой за несколько секунд. При чтении машина может сравнивать два текста, устанавливать наличие в них общих слов или выражений, определять частоту появления отдельных слов и т. д.

Однако естественные языки (русский, английский, немецкий или любой другой) машине «понимать» очень трудно: каждую мысль на них можно выразить многими способами. Поэтому лингвисты разрабатывают искусственные языки, называемые *информационно-поисковыми*, которые свободны от этого недостатка.

Основной частью информационно-поискового языка является совокупность понятий, терминов, словосочетаний, которые постоянно используются в конкретной предметной области — в математике, химии, биологии и т. д. Составляя аннотацию книги или реферат научной статьи, можно вместо предложений естественного языка дать перечисление тех терминов, которые в наибольшей степени отражают содержание книги или статьи. То же самое можно сделать и с информационными запросами читателей. Например, в серии «Популярные лекции по математике» была выпущена брошюра А. Г. Куроша «Алгебраические уравнения высших степеней». Ее аннотация могла бы быть записана следующим образом:

> *Комплексные числа, решение в радикалах уравнений второй и третьей степени, теорема Абеля о неразрешимости в радикалах общего уравнения пятой степени, приближенное вычисление корней, группа, кольцо, поле.*

Аннотация статьи Б. Н. Делоне «Алгебра (теория алгебраических уравнений)», помещенной в первом томе коллективного трехтомного труда «Математика, ее содержание, методы и значение», может выглядеть так:

> *Решение в радикалах уравнений низших степеней, формула Кардано, теорема Абеля о неразрешимости в радикалах общего уравнения пятой степени, теория Галуа, расположение корней уравнения на комплексной плоскости, основная теорема алгебры, приближенное вычисление корней.*

Вспомним теперь о читателе, желавшем получить литературу о решении уравнений в радикалах. Его запрос можно описать так:

> *Решение в радикалах уравнений низших степеней, теорема Абеля о неразрешимости в радикалах общего уравнения пятой степени.*

Сравнение запроса с двумя приведенными выше аннотациями показывает, что почти все встречающиеся в нем словосочетания входят в аннотации. Поэтому с большой вероятностью можно предположить, что брошюра А. Г. Куроша и статья Б. Н. Делоне содержат интересующие читателя сведения.

Теперь становится ясным, какую часть информационного поиска можно передать вычислительной машине: машина должна проверять, содержатся ли термины и словосочетания запроса в аннотациях книг или статей, хранящихся в библиотеке. Термины, понятия, словосочетания информационно-поискового языка называются *ключевыми словами*.

3. ЭВМ нужно использовать эффективно

Теперь рассмотрим несколько подробнее выполнение операций в ЭВМ. В каждой современной вычислительной машине имеются четыре главные компоненты: центральный процессор, оперативная память, внешняя память и устройство ввода — вывода. Центральный процессор управляет работой всей системы, и в нем совершаются арифметические и логические операции, причем на отдельную операцию расходуются миллионные доли секунды. Данные (числа, слова), с которыми оперирует процессор, находятся в оперативной памяти. Она имеет сравнительно небольшой объем, поскольку ее стоимость очень высока.

Напомним, что на запись отдельного символа (буквы, цифры, специального знака) уходит восьмичленная последовательность единиц и нулей. В оперативной памяти современных ЭВМ обычно можно записать 256000 или 512000 таких последовательностей, или знаков. Много это или мало? Как показывает практика, библиографическая карточка вместе с аннотацией содержит 1000—1500 знаков. Следовательно, в оперативной памяти можно в лучшем случае разместить около 500 карточек. Ясно, что это очень мало.

Остальные карточки помещаются во внешней памяти, объем которой в сотни раз больше объема оперативной памяти. Однако на передачу данных уходит времени в тысячу раз больше, чем на работу центрального процессора, который во время передачи попросту простаивает. Ясно, что передача данных непосредственного отношения к информационному поиску не имеет и является непроизводительной тратой времени. Таким образом, возникает задача об уменьшении числа обращений к внешней памяти. Существуют различные подходы к ее решению. Один из них приводит к красивой и трудной математической задаче, о которой и будет рассказано в заключение.

4. Как уменьшить «вес» множества слов?

Пусть A — какое-то множество из n элементов. Элементы будем обозначать малыми латинскими буквами a, b, c, ... Произвольное подмножество элементов из A будем называть *словом* и вместо традиционной записи $\{a, b, c, d\}$ будем писать просто *abcd*; разумеется, с одинаковым успехом можно написать *bdac* или *dcab* и т. д. Слово, в котором нет букв, т. е. пустое слово, рассматриваться не будет. Поэтому имеется всего 2^n-1 слов.

Для связи с предыдущими рассмотрениями укажем, что буквами мы стали обозначать ключевые слова информационно-поискового языка, т. е. термины, понятия, словосочетания. Их число может быть очень большим, например порядка 10000. Набор ключевых слов может быть аннотацией или информационным запросом.

Предположим, что некоторое множество слов M размещено во внешней памяти ЭВМ и что необходимо найти все слова из M, в которых встречаются буквы a, b и c. Чтобы справиться с этой задачей, нужно поочередно «прочесть» все слова из M, предварительно переписав их в оперативную память. Если M невелико, то можно сразу все множество M переместить туда. В общем же случае такое перемещение осуществляется порциями, размер которых заранее определен. Следовательно, число обращений к внешней памяти определяется размером M и размером передаваемой порции. Это число можно было бы уменьшить, если бы при помещении слов во внешнюю память слова с буквами a, b и c записывались отдельно. Однако для задачи: найти все слова с буквами b, c и d — проделанная работа бесполезна.

Тем не менее предварительная сортировка слов при их записи во внешнюю память оказывается полезной, если иметь в виду не отдельный запрос, а все возможные запросы. Разобьем множество M на части и поместим каждую часть в отдельный конверт, а на конверте перечислим все буквы, встретившиеся в положенных в конверт словах. Теперь при поиске слов с буквами a, b и c сначала отбираются конверты, на которых надписаны эти буквы, а потом прочитываются слова из этих конвертов. Слова по конвертам следует разместить таким образом, чтобы общее число «вскрытий» конвертов для всех возможных запросов оказалось наименьшим.

Проиллюстрируем эту идею на простом примере. Пусть множество M состоит всего из трех слов ab, ac и bc, а запросы, которые мы будем делать, должны быть непустыми подмножествами множества $\{a, b, c\}$. Тогда общее число запросов равно семи. Поместим сначала каждое слово в отдельный конверт. Тогда конверт со словом ab откроется три раза: при поиске слов с a, слов с b и слов с a и b. Так как все конверты равноправны, то общее число вскрытий равно 9. Теперь поместим слова ab и ac в один конверт, а слово bc в другой. В этом случае первый конверт придется открывать семь раз, а второй по-прежнему три раза, и общее число вскрытий равно 10.

Наконец, поместим все слова в один конверт. Тогда общее число вскрытий равно 7: при каждом запросе надо открыть конверт, а всего запросов 7. Таким образом, в нашем примере лучше всего держать M в одном конверте. (Изменится ли результат, если к M добавить слова a и abc или удалить из M слово bc?)

Теперь мы готовы к рассмотрению общей задачи. Пусть M — произвольное множество слов. Число k различных букв, встречающихся в словах из M, называется *уровнем* множества M и обозначается $l(M)$. Например, если

$$M = \{abc, bcd, cde, dea, eab\}, \qquad (1)$$

то уровень M равен 5.

Весом множества M называется число $2^{l(M)}-1$. В приведенном выше примере вес M равен 31. Ясно, что вес M равен числу слов, которые можно составить из $l(M)$ букв.

Задачу, которая возникает при попытках уменьшить число обращений к внешней памяти ЭВМ, можно сформулировать так: для любого множества слов M указать метод его разбиения на такие непересекающиеся подмножества $S_1, S_2, \ldots, S_k$, что сумма весов

$$P = (2^{l(S_1)}-1) + \ldots + (2^{l(S_k)}-1) = \sum_{i=1}^{k} (2^{l(S_i)}-1) \qquad (2)$$

является наименьшей.

Разумеется, если M фиксировано, то теоретически можно перебрать все его разбиения на непересекающиеся подмножества, для каждого разбиения подсчитать сумму весов и выбрать разбиение с наименьшей суммой. Однако при большом количестве слов такой перебор становится практически неосуществимым (попробуйте оценить число возможных разбиений!). Поэтому задача состоит в том, чтобы указать метод нахождения искомого разбиения, во много раз сокращающий перебор всех вариантов.

Сразу же отметим, что удовлетворительного решения задачи пока найти не удалось, хотя общий подход к решению уже определился. Прежде всего, легко сообразить, что в искомом разбиении не могут появляться любые подмножества множества M, а только подмножества S, для которых наименьшее значение суммы (2) равно весу S. Такие подмножества будем называть *блоками*. Таким образом, блок — это такое множество слов, для которого искомое разбиение состоит из самого этого множества.

Блоков внутри множества M оказывается довольно много, но можно показать, что отыскивать надо сначала так называемые минимальные блоки: блок S называется *минимальным*, если он не содержит блоков того же уровня, что и S. Ниже будет показано, что множество (1) является минимальным блоком.

Разыскание минимальных блоков связано с трудоемким перебором вариантов и конкретными расчетами, однако эта работа должна быть проделана только один раз, а затем ее результаты можно использовать для любых множеств M. Чтобы понять причину этого явления, помимо множества (1), рассмотрим также множество

$$M_1 = \{xyz, yzu, zuv, uvx, vxy\}.$$

Эти множества различны, однако при замене букв a, b, c, d, e на буквы x, y, z, u, v соответственно множество M переходит в множество M_1. Зная, что M — блок, можно сразу сказать, что M_1 — блок. Поэтому естественно считать, что M и M_1 являются раз-

a	b			
a				
a				
	b			
	b			

Табл. 1а.

a	b	c		
a		c		
a				
	b	c		
	b			

Табл. 1б.

a	b	c		
a		c	d	
a			d	e
	b	c		e
	b		d	e

Табл. 1в.

ными экземплярами одного и того же минимального блока. В дальнейшем такие блоки для нас равноправны.

Докажем теперь одну из теорем, дающих представление об устройстве минимальных блоков.

Теорема. Минимальные блоки уровня 5, состоящие из трехбуквенных слов, с точностью до замены букв исчерпываются следующим списком:

$S_1=\{abc,\ bcd,\ cde,\ dea,\ eab\}$;
$S_2=\{abc,\ abd,\ abe,\ acd,\ ace,\ ade\}$;
$S_3=\{abc,\ abd,\ abe,\ acd,\ ace,\ bde\}$.

Доказательство. Каждое трехбуквенное слово имеет вес $2^3-1=7$. Вес любого множества уровня 5 равен 31. Поэтому в любой блок уровня 5 входит не менее пяти слов: в противном случае сумма весов отдельных слов была бы меньше 31.

Далее, в любом блоке уровня 5 каждая буква должна встречаться не менее трех раз. В самом деле, пусть буква a встречается менее трех раз. Тогда вес множества слов, в которых нет a, не превосходит 15, а сумма весов слов с a не превосходит 14. Значит, общая сумма весов меньше 29, что противоречит определению блока.

Теперь рассмотрим два случая.

Случай 1. Минимальный блок S содержит пять слов. Так как число всех букв в S равно 15, в силу предыдущего замечания каждая буква встречается ровно три раза. Введем для наглядности рассуждений квадратную таблицу размера 5×5, в первом столбце которой будет записываться буква a, во втором — b и т. д. (см. таблицы 1а—1в).

Предположим, что какая-то пара букв, например a и b, встречается только один раз. Тогда возникает ситуация, изображенная на таблице 1а. Обозначим через c ту букву, которая входит в первое слово. Эта буква обязана встретиться еще по разу с a и b: если бы она еще два раза встретилась с a, то в двух последних строках таблицы стояло бы одно и то же слово, что невозможно. Поэтому от таблицы 1а мы переходим к таблице 1б.

Ясно, что в третью и пятую строки таблицы нужно поставить слова ade и bde. Но тогда во вторую строку следует поместить d (или e), а в четвертую — e (или d); ввиду симметрии между a и b на таблице 1б обе возможности равноправны. Таблица 1в дает возможного кандидата в минимальный блок. Построенное множество слов S действительно является минимальным блоком, поскольку любое его подмножество из трех слов имеет вес 31. Оно переходит в S_1, если d заменить на e, e на a и a на d.

Никакая пара букв не может встретиться три раза, так как не хватит букв для пятого слова; поэтому остается предположить, что *каждая* пара букв встречается дважды. Однако и этот вариант невозможен: буквы a, b и c можно разместить только так, как показано на таблице 2, и для последнего слова недостаточно букв.

Случай 2. В минимальном блоке S шесть слов. Тогда в словах

a	b	c		
a	b			
a		c		
	b	c		

Табл. 2.

из S встречается всего 18 букв. Число 18 можно следующими способами представить в виде суммы пяти слагаемых, каждое из которых равно 3, 4, 5 или 6:

а) $18=6+3+3+3+3$;

б) $18=5+4+3+3+3$;

в) $18=4+4+4+3+3$.

При способе а) одна буква, например a, встречается шесть раз. Поэтому S совпадает с S_2; предлагаем читателю самостоятельно доказать, что S_2 — минимальный блок.

Перейдем к способу б). Пусть для определенности пять раз встречается буква a, четыре раза—буква b. Тогда сразу получаем таблицу 3а. В четвертой и пятой строках какая-то из букв: c, d или e — появляется дважды; обозначим ее через c. В шестой строке может стоять только слово bde, и в результате мы приходим к таблице 3б.

a	b	c		
a	b		d	
a	b			e
a				
a				
	b			

Табл. 3а.

a	b	c		
a	b		d	
a	b			e
a		c	d	
a		c		e
	b		d	e

Табл. 3б.

Для доказательства того, что построенное множество слов S_3 является блоком, достаточно заметить, что в S любое подмножество уровня 4 содержит не больше трех слов, а остальные слова образуют подмножество уровня 5 и потому сумма весов не может быть меньше $36=15+7\times3$, а вес S равен 31. Минимальность следует из того, что, какое бы слово ни удалить, в оставшихся словах буква a встречается не менее четырех раз, чего не может быть в блоках уровня 5 из пяти слов в силу первого случая.

Переходим к способу в). Пусть буквы a, b и c встречаются по четыре раза. Тогда либо какая-то пара этих букв встречается три раза, либо любая пара встречается ровно два раза. В соответствии с этим мы приходим к таблицам 4а и 4б (с точностью до переименования букв).

a	b	c		
a	b		d	
a	b			e
a		c	d	
	b	c		e
		c	d	e

Табл. 4а.

a	b		d	
a	b			e
a		c	d	
a		c		e
	b	c	d	
	b	c		e

Табл. 4б.

Первое построенное множество является блоком, но неминимальным: после удаления из него слова abc получится блок типа S_1. Второе множество вообще не является блоком, так как оно является объединением своих подмножеств $\{abd, acd, bcd\}$ и $\{abe, ace, bce\}$ уровня 4, и для этого разбиения сумма весов равна $30<31$.

Теперь остается доказать, что других минимальных блоков уровня 5 из трехбуквенных слов не существует. Если в множестве S девять или десять слов, то хотя бы одна буква встречается шесть раз, и потому в S содержится блок типа S_2. Значит, S — всегда неминимальный блок.

Если в S семь или восемь слов и ни одна буква не встречается шесть раз, то всегда найдется такая пара букв, скажем a и b, что a встречается пять раз, b — не менее четырех раз, а пара a, b встречается три раза (проверьте!). Поэтому можно считать (убедитесь в этом!), что в S входят следующие пять слов: abc, abd, abe, acd, ace. К ним надо добавить не менее двух слов из следующих четырех: bcd, bce, bde, cde. Если добавится одно из слов bde или cde, то в S попадет минимальный блок типа S_3. Если же добавятся слова bcd и bce, то в словах из S вообще не встретится пара букв d и e, чего не может быть в блоке (см. ниже задачу 3).

Задачи

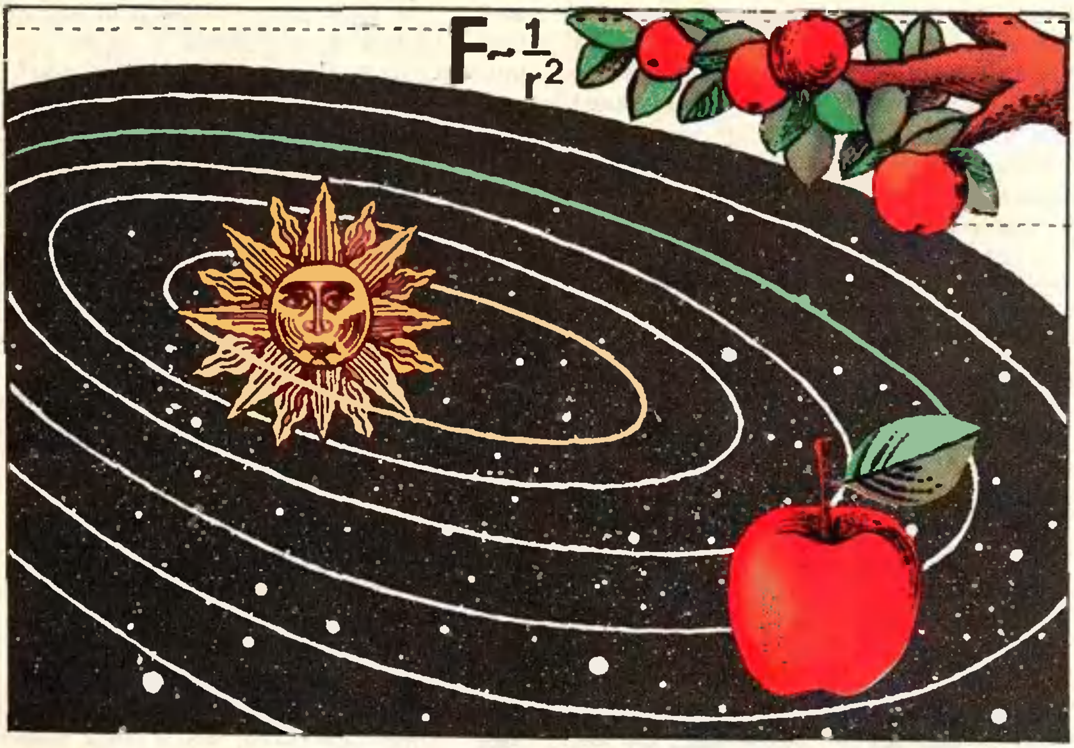
1. Описать все минимальные блоки уровня 5 из двухбуквенных слов.

2. Множество S' получено из слов множества S приписыванием к ним новой буквы. Доказать, что если S — минимальный блок, то и S' — минимальный блок.

3. Если в словах блока S встречаются буквы a и b, то в S найдется слово, содержащее a и b.

4**. Описать все минимальные блоки уровней 6 и 7 из трехбуквенных слов

5*. Доказать, что не существует блоков уровня 8 из трехбуквенных слов.



Я. Смородинский

Планеты движутся по эллипсам

«Каждая планета обращается вокруг Солнца по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце».

Этот закон природы был открыт Кеплером в XVI веке. Как «первый закон Кеплера» он вошел во все учебники, стал привычным и «само собой разумеющимся». И для нас нет ничего странного в поведении планет.

А ведь на самом деле этот факт удивителен. Почему по эллипсу? Конечно, по какой-то кривой планета должна двигаться. Но почему она движется по замкнутой кривой? Почему планета, сделав полный оборот вокруг Солнца, возвращается в ту же точку? Как она эту точку запоминает? Почему движение планеты в поле тяжести Солнца оказывается периодическим? Это свойство весьма необычно. Если бы сила притяжения планеты к Солнцу не была обратно пропорциональна квадрату расстояния, а изменялась бы, например, по закону $1/r^3$ или даже $1/r^{2,01}$, то орбита планеты не была бы замкнутой.

Отсюда, между прочим, следует, что в Солнечной системе планеты, вообще говоря, не могут двигаться по эллипсу. Притяжение других планет, и особенно такого гиганта, как Юпитер, должно как-то сказываться на движении планеты. И оно сказывается: сделав полный оборот вокруг Солнца, планета не возвращается точно на старое место, а «проскакивает» его. Именно этим объясняется смещение перигелия Меркурия в направлении его движения примерно на 1,2″ за один оборот (на 5″ за земной год). (К счастью, Кеплер об этом не знал — его наблюдения Марса, для которого он строил свою теорию, были недостаточно точны, чтобы заметить столь маленькую «прецессию».)

Нелегко было Кеплеру в XVI веке освободиться от старого убеждения, что небесные тела — самые «идеальные» тела в нашем мире — должны и двигаться по самым идеальным кривым, то есть по окружностям. Даже Коперник, отбросивший представление о покоящейся Земле и приписавший ей такое же круговое движение, какое совершают другие планеты, не смог отказаться от идеальных кривых и использовал для точного описания движения планет систему катящихся окружностей.

Но ни Коперник, ни его предшественники не проводили тщательного сравнения своих моделей с наблюдениями. А небольшие расхождения их не смущали. Только Кеплер поставил перед собой дерзкую по тому времени задачу: описать движение планет точно, не примиряясь ни с какими расхождениями наблюдений с теорией. Решить такую задачу ему помогло сотрудничество с датским астрономом Тихо Браге, который, изо дня в день наблюдая в течение почти 25 лет положение планет, собрал необычайно полный по тому времени материал *).

Кеплер задумался о том, почему планеты искривляют свой путь вокруг Солнца. Он догадался, что Солнце действует на планеты, несмотря на то, что планеты находятся на больших расстояниях от него. Но установить правильную зависимость силы этого действия на расстоянии Кеплер не смог — он думал, что эта сила обратно пропорциональна расстоянию. О выводе формулы орбиты Кеплер не мог даже подумать — у него не было уравнений движения.

Только спустя более чем полвека Ньютон в своей замечательной книге «Начала натуральной философии» (так тогда называли физику) показал, как вывести все законы движения планеты из уравнений **). Вывод Ньютона лежит в основе небесной механики и в наши дни. Только сейчас для вывода используют дифференциальные уравнения, а Ньютон в своем сочинении пользовался лишь простыми геометрическими теоремами. Вывод Ньютона в принципе вполне элементарен, но понять его не очень легко. Может быть, поэтому сложилось убеждение, что для вывода первого закона Кеплера элементарных средств не хватает. На самом деле это неверно. Если использовать закон сохранения энергии (который Ньютону был еще не известен) и закон сохранения момента импульса (углового момента), то вывод закона Кеплера можно сильно упростить. Это мы и сделаем.

Что же нам нужно доказать? Во-первых, нам нужно доказать, что существует некий вектор, связанный с орбитой планеты, который остается при движении планеты постоянным. Он определит нам неподвижную большую полуось эллипса. Во-вторых, нам нужно доказать, что сумма расстояний от любой точки орбиты до двух заданных точек (фокусов эллипса) остается постоянной. Если воспользоваться обозначениями, введенными на рисунке 1, то наша задача такова: нужно доказать, что разность двух переменных векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}$ равна постоянному вектору $2\vec{c}$, а сумма r_1+r длин векторов $\vec{r}_1$ и $\vec{r}$ постоянна и равна $2a$.

Чем мы можем воспользоваться при доказательстве? Это мы уже сказали: законами сохранения энергии и момента импульса. И еще уравнением движения Ньютона.

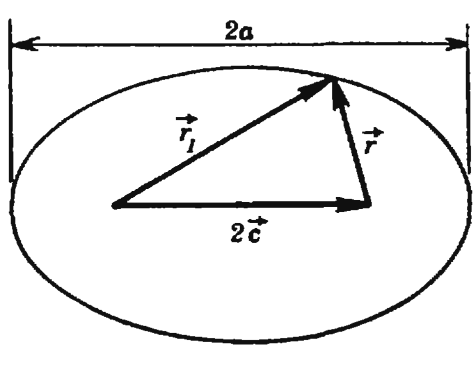


Рис. 1. $\vec{r}_1-\vec{r}=2\vec{c}$, $r_1+r=2a$.

*) Тихо Браге был последним великим астрономом, у которого не было телескопа. Все наблюдения он проводил, просто смотря на небо и измеряя углы с помощью астролябии.

**) Ньютон решил обратную задачу: какова должна быть зависимость действующей на планету силы притяжения к Солнцу от расстояния между планетой и Солнцем чтобы планета двигалась по эллипсу? Он показал, что сила должна быть обратно пропорциональна квадрату расстояния.

Закон сохранения энергии

При движении планеты ее полная энергия E остается постоянной:

$$E = \text{const}.$$

Эта энергия равна сумме кинетической энергии $K = \frac{mv^2}{2}$ и потенциальной энергии планеты в поле силы тяжести Солнца

$$\Pi = -\gamma \frac{mM}{r} = -\frac{\alpha m}{r} \qquad (\alpha = \gamma M)^{*})$$

(m — масса планеты, M — масса Солнца, r — расстояние между ними и γ — гравитационная постоянная). Итак,

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{\alpha m}{r}. \qquad (1)$$

Для удобства вместо постоянной E введем другую постоянную v_0 такую, что

$$E = -\frac{mv_0^2}{2}.$$

Мы поставили в этой формуле знак минус, потому что полная энергия планеты отрицательна, а $v_0^2 > 0$.

Формулу (1) мы теперь можем записать так, что масса «выпадет» из уравнения:

$$-\frac{v_0^2}{2} = \frac{v^2}{2} - \frac{\alpha}{r},$$

или

$$\frac{v^2}{2} + \frac{v_0^2}{2} = \frac{\alpha}{r}. \qquad (1')$$

Разделив обе части этого равенства на $v_0^2/2r$, получим

$$\left(\frac{v}{v_0}\right)^2 r + r = \frac{2\alpha}{v_0^2}.$$

Постоянную $2\alpha/v_0^2$ обозначим через $2a$, а отношение v/v_0 — буквой u.

---

*) Напомним, что потенциальная энергия принимается равной нулю при бесконечно большом r. Поэтому в случае сил притяжения потенциальная энергия оказывается отрицательной. По абсолютной величине потенциальная энергия больше кинетической — планета не может «оторваться» от Солнца.

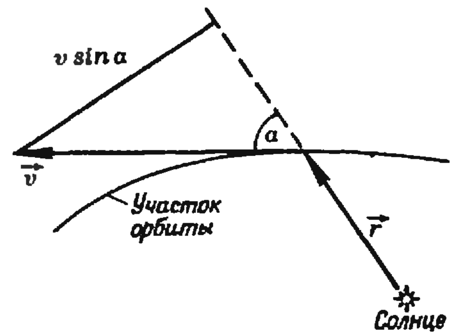


Рис. 2.

Получим простую формулу

$$\boxed{ru^2 + r = 2a}. \qquad (*)$$

В таком виде закон сохранения энергии очень удобен для наших целей.

Момент импульса

При движении планеты остается постоянной еще одна величина — момент импульса:

$$L = mvr \sin\alpha,$$

где α — угол между радиус-вектором $\vec{r}$ планеты и вектором $\vec{v}$ ее скорости (о моменте импульса рассказано в Приложении).

Нам удобнее будет вместо L ввести другую величину, которая тоже остается постоянной,—

$$L_0 = L/m = rv \sin\alpha.$$

Из рисунка 2 видно, что $v \sin\alpha$ — это проекция вектора $\vec{v}$ на направление, перпендикулярное радиус-вектору $\vec{r}$. Это означает, что величина $(v \sin\alpha)/r$ равна угловой скорости ω планеты в тот момент, когда ее положение определяется радиус-вектором $\vec{r}$. Таким образом,

$$L_0 = \omega r^2. \qquad (2)$$

Уравнение движения

Согласно второму закону Ньютона под действием силы притяжения к Солнцу $F = -\gamma \frac{mM}{r^2}$ планета движется с ускорением

$$w = -\gamma \frac{M}{r^2} = -\frac{a}{r^2}.$$

Это уравнение движения планеты правильнее записывать в векторном виде. Чтобы сделать это, введем вектор $\vec{n}$ такой, что

$$\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}.$$

Эта запись означает, что длина вектора $\vec{n}$ равна единице, а направлен этот вектор по радиус-вектору $\vec{r}$. Таким образом, в векторном виде уравнение движения планеты можно записать так:

$$\vec{w} = -\frac{\alpha}{r^2}\vec{n}. \qquad (3)$$

Вектор Лапласа

Теперь мы можем приступить непосредственно к нашей задаче. Попытаемся найти вектор, связанный с орбитой планеты, который при движении планеты остается постоянным и которому мы можем сопоставить вектор $2\vec{c}$.

При движении по круговой орбите угловая скорость постоянна и векторы $\vec{v}$ и $\vec{n}$ все время остаются взаимно перпендикулярными. При движении же по некруговой орбите (например, по эллипсу) угловая скорость изменяется со временем и угол между векторами $\vec{v}$ и $\vec{n}$ не остается постоянным.

Найдем, по какому закону изменяется вектор $\vec{n}$. Для определенности будем считать, что движение по орбите происходит против часовой стрелки.

Пусть за малый промежуток времени Δt планета переместилась по орбите из точки B в точку C (рис. 3) так, что радиус-вектор ее $\vec{r}$ повернулся на угол $\omega\,\Delta t$ (время Δt мало настолько, что угловую скорость ω можно считать неизменной). Вектор $\vec{n}$ в результате поворота перейдет в новый вектор $\vec{n}+\Delta\vec{n}$, но длина этого нового вектора, разумеется, равна единице. Изменение $\Delta\vec{n}$ вектора $\vec{n}$ найти нетрудно: $\Delta n = \omega\,\Delta t\, n$, а направление $\Delta\vec{n}$ перпендикулярно $\vec{n}$. Так что мы можем записать $\Delta\vec{n}$ так:

$$\Delta\vec{n} = \omega\,\Delta t\,\vec{n}',$$

где через $\vec{n}'$ мы обозначили единичный вектор, направление которого перпендикулярно $\vec{n}$. Подставим в эту формулу $\omega = L_0/r^2$ (см. (2)):

$$\Delta\vec{n} = \frac{L_0}{r^2}\,\Delta t\vec{n}'. \qquad (4)$$

(Сравним изменение вектора $\Delta\vec{n}$ с изменением вектора скорости

$$\Delta\vec{v} = -\frac{\alpha}{r^2}\,\Delta t\vec{n} \qquad (5)$$

(это выражение мы получили из (3), учтя, что $\vec{w} = \Delta\vec{v}/\Delta t$). И Δn, и Δv пропорциональны $1/r^2$; направления же $\Delta\vec{n}$ и $\Delta\vec{v}$ взаимно перпендикулярны.

В этом месте мы применим простую хитрость: повернем векторы $\vec{v}$ и $\vec{n}$ против часовой стрелки на 90°. Тогда вектор $\vec{n}$ перейдет в вектор $\vec{n}'$, а вектор $\vec{v}$ перейдет в новый вектор $\vec{v}'$, равный по длине v/n и перпендикулярный $\vec{v}$. Векторы $\vec{v}'$ и $\vec{n}'$ связаны между собой так же, как векторы $\vec{v}$ и $\vec{n}$. «Повернутое» уравнение (5) мы можем записать так:

$$\Delta\vec{v}' = -\frac{\alpha}{r^2}\,\Delta t\vec{n}'. \qquad (6)$$

Дальше будем рассматривать формулы (4) и (6). Из них следует, что

$$-L_0\Delta\vec{v}' - \alpha\Delta\vec{n} = \vec{0}.$$

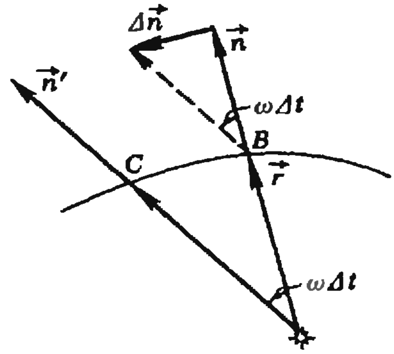


Рис. 3.

Это выражение, очевидно, можно записать так:

$$\Delta(-L_0\vec{v}'-\alpha\vec{n})=\vec{0}.$$

Но это означает, что вектор

$$\vec{A}=-L_0\vec{v}'-\alpha\vec{n} \qquad (7)$$

при движении планеты остается постоянным. Как мы увидим дальше, это и есть тот вектор, который мы ищем.

Преобразуем формулу (7). Прежде всего избавимся от вектора $\vec{v}'$. Сделаем мы это с помощью рисунка 4. Как видно из рисунка,

$$\vec{v}'=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\vec{v}-\frac{v}{\sin\alpha}\vec{n}.$$

Учитывая, что $\sin\alpha=L_0/rv$, а $\cos\alpha=\frac{\vec{r}\cdot\vec{v}}{rv}$, выражение для $\vec{v}'$ мы можем записать так:

$$\vec{v}'=\frac{1}{L_0}[(\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{v}-v^2\vec{r}]$$

(поскольку $r\vec{n}=\vec{r}$). Подставляя это $\vec{v}'$ в формулу (7), получим:

$$\vec{A}=v^2\vec{r}-(\vec{r}\cdot\vec{v})\vec{v}-\alpha\vec{r}/r. \qquad (8)$$

Этот вектор в механике называют вектором Лапласа.

Выражение (8) мы еще преобразуем. Из формулы (1′) для закона сохранения энергии находим:

$$\frac{\alpha}{r}=\frac{v^2+v_0^2}{2}.$$

Подставим это выражение в (8), разделим обе стороны на $v_0^2/2$, перейдем к новой переменной $u=v/v_0$ и обозначим вектор $2\vec{A}/v_0^2$ через $2\vec{c}$:

$$2\vec{c}=u^2\vec{r}-2(\vec{r}\cdot\vec{u})\vec{u}-\vec{r}$$

(здесь $\vec{u}=\vec{v}/v_0$). Если ввести и еще одно обозначение:

$$\vec{r}_1=u^2\vec{r}-2(\vec{r}\cdot\vec{u})\vec{u},$$

то последнее равенство запишется совсем просто:

$$\boxed{\vec{r}_1-\vec{r}=2\vec{c}}. \qquad (**)$$

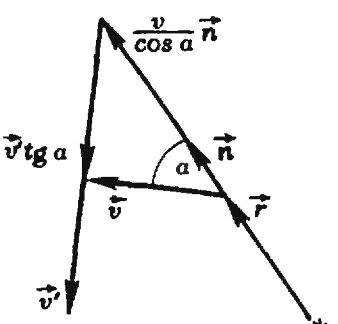


Рис. 4.

Уравнение эллипса

Если читателю надоели преобразования, то ему будет приятно узнать, что задача уже решена. Траектория планеты заключена в двух формулах в рамках: в формуле (*), которую мы получили из закона сохранения энергии,

$$u^2r+r=2a$$

и в формуле (**).

Для того чтобы убедиться в этом, вычислим квадрат длины вектора $\vec{r}_1$:

$$\vec{r}_1^{\,2}=u^4\vec{r}^{\,2}-4u^2(\vec{r}\cdot\vec{u})^2+4(\vec{r}\cdot\vec{u})^2u^2=u^4r^2.$$

Отсюда следует, что длина вектора $\vec{r}_1$ равна u^2r, то есть как раз первому члену в равенстве (*).

Теперь это равенство (*) выглядит как уравнение эллипса

$$r_1+r=2a.$$

Итак, мы доказали, что три вектора $\vec{r}$, $\vec{r}_1$ и $2\vec{c}$ образуют треугольник, сумма двух сторон которого постоянна и равна $2a$. Но это и значит, что геометрическое место концов всевозможных радиус-векторов $\vec{r}$ (при постоянном векторе $\vec{c}$) есть эллипс.

Теперь выясняется геометрический смысл введенных постоянных. $a=\alpha/v_0^2$ — это большая полуось эллипса. Она зависит только от полной энергии планеты и не зависит от момента импульса. Вектор $2\vec{c}$ соединяет два фокуса эллипса. Длина c равна фокусному расстоянию (половине расстояния между фокусами). По-

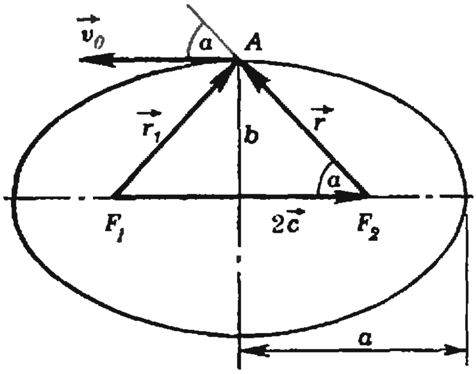


Рис. 5. F_1, F—фокусы эллипса; $r_1=r$. В точке A $L_0=v_0 r \sin\alpha=v_0 b$.

стоянная v_0 — это значение скорости планеты в тот момент, когда планета находится на конце малой полуоси. Покажем это. На конце малой полуоси, по определению, длины радиус-векторов $\vec{r}$ и $\vec{r}'$ равны. Следовательно, $u^2=1$ (так как $r_1=u^2 r$). Это и означает, что $v=v_0$. Отсюда, в частности, следует, что малая полуось эллипса b равна

$$b=L_0/v_0$$

(это равенство разъясняет рисунок 5).

Итак, подведем итог. Мы показали, что планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце. Параметры этого эллипса таковы:

большая полуось: $a=\alpha/v_0^2$,
малая полуось: $b=L_0/v_0$,

где $\alpha=\gamma M$ (M — масса Солнца), L_0, v_0 — константы для данной планеты.

Последнее замечание

Мы получили практически все формулы, которые описывают движение планеты по эллипсу. Все, кроме одной, — мы не знаем, как изменяется во времени положение планеты на орбите. Это — более сложная задача, и мы не станем ею заниматься. По крайней мере сейчас.

Приложение

Закон, о котором пойдет речь, впервые был установлен И. Кеплером. Изучая движение планет вокруг Солнца, Кеплер обнаружил, что площадь, «заметаемая» радиус-вектором планеты в единицу времени, постоянна. Она не зависит от положения планеты на орбите. Обозначим через $\vec{r}$ радиус-вектор планеты и через $\vec{v}$ ее скорость в момент времени t (рис. 6). За маленький промежуток времени Δt планета совершит перемещение $\vec{v}\,\Delta t$. При малых Δt площадью сектора эллипса совпадает с площадью треугольника, построенного на векторах $\vec{r}$ и $\vec{v}\Delta t$, то есть

$$\Delta S=\frac{1}{2}rv\,\Delta t\sin\alpha,$$

где α — угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{v}$ (см. рис. 6). Площадь, заметаемая за единицу времени (ее называют *секториальной скоростью*), очевидно, равна

$$\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{1}{2}rv\sin\alpha.$$

Следовательно, второй закон Кеплера состоит в том, что при движении планеты секториальная скорость постоянна:

$$\frac{1}{2}rv\sin\alpha=\text{const}.$$

Этот закон можно доказать с помощью несложной геометрии. Построим на векторах $\vec{r}$ и $\vec{v}$ параллелограмм (рис. 7). Площадь этого параллелограмма равна $rv\sin\alpha$. Вычислим, какой будет площадь параллелограмма через маленький интервал времени Δt. За это время будут изменяться скорости и углы. Так как время Δt мы выбрали очень малым, будем считать, что оба вектора изменяются пропорционально Δt (иначе говоря, будем считать, что векторы изменяются с постоянными скоростями); ускорениями же, т. е. членами, пропорциональными $(\Delta t)^2$, мы будем пренебрегать.

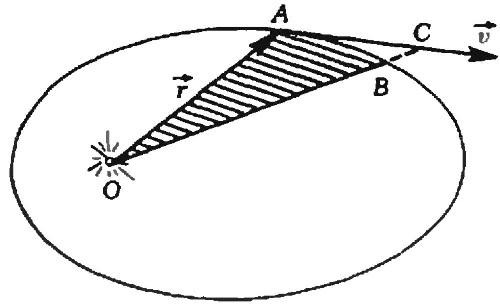


Рис. 6.

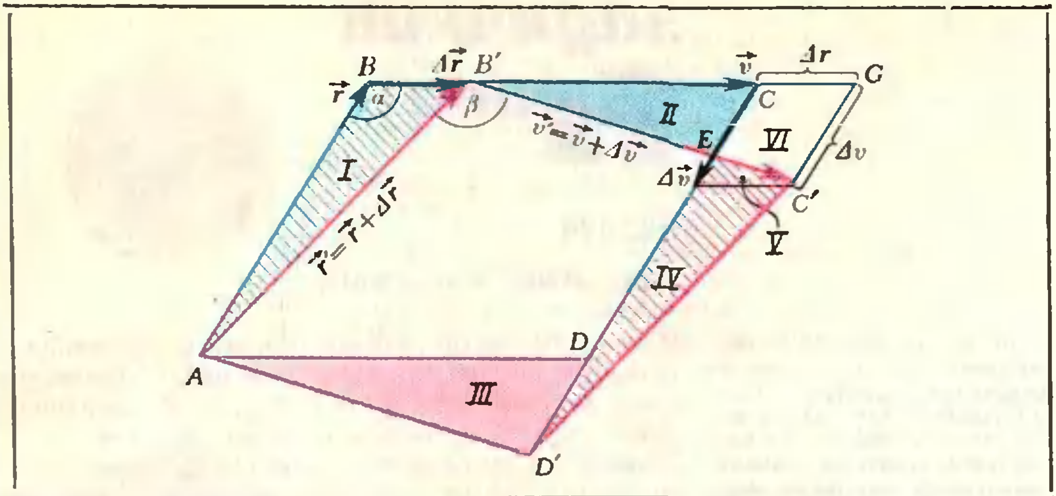


Рис. 7.

Таким образом, мы будем считать, что

$$\Delta\vec r = \vec v\,\Delta t,$$
$$\Delta\vec v = \vec w\,\Delta t \text{ *)}.$$

Естественно, что при вычислении изменения площади параллелограмма нас также будет интересовать только скорость изменения площади, а ускорения (величины, пропорциональные $(\Delta t)^2$) мы будем отбрасывать. Ускорение планеты пропорционально силе $\vec F$, действующей на планету. Сила же направлена к Солнцу, т. е. противоположна по направлению радиус-вектору. Следовательно, вектор $\Delta\vec v$ параллелен вектору $\vec r$. Направлен же он противоположно вектору $\vec r$. Теперь нетрудно нарисовать векторы $\Delta\vec r$ и $\Delta\vec v$, затем векторы $\vec r' = \vec r + \Delta\vec r$ и $\vec v' = \vec v + \Delta\vec v$ и построить на них параллелограммы (рис. 7). Площади этих параллелограммов равны соответственно $S_2 = v'r' \sin\beta$, где β—угол между векторами $\vec v'$ и $\vec r'$, и $S_3 = \Delta r\Delta v \sin\alpha$. Нетрудно показать, что

$$S_2 = S_1 + S_3.$$

Теперь мы заметим, что площадь S_3 пропорциональна Δt^2, так как и Δr, и Δv пропорциональны Δt. Так как мы условились *величинами, пропорциональными* $(\Delta t)^2$, пренебрегать, мы можем выкинуть и площадь S_3. Мы получаем нужное нам утверждение

$$S_2 = S_1,$$

т. е. площадь параллелограмма не изменяется со временем.

Наше рассуждение, конечно, не очень строгое, но его можно сделать точным, особенно если уметь дифференцировать.

Вернемся теперь к физике. Если Δt *мало, то площадь маленького параллелограмма* можно считать очень маленькой. Так что при движении планеты площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec r$ и $\vec v$, остается постоянной:

$$vr \sin\alpha \approx v'r' \sin\beta = \text{const}.$$

Остается только заметить, что площадь треугольника, построенного на тех же векторах, вдвое меньше площади параллелограмма, и мы приходим ко второму закону Кеплера: $\frac{1}{2}\,vr\sin\alpha = \text{const}$.

При доказательстве мы использовали только то обстоятельство, что сила, действующая на планету, направлена вдоль радиус-вектора. В таких случаях говорят, что тело движется *под действием центральной силы*, т. е. силы, направленной всегда в одну точку (или от нее). Поэтому доказанное нами утверждение можно сформулировать так:

Для материальной точки, которая движется под действием центральной силы, величина $rv\sin\alpha$ ***остается постоянной.*** Остается постоянной и величина $mvr\sin\alpha$, где m — масса материальной точки. Но $m\vec v = \vec p$ — это импульс частицы. Величина же $L = pr\sin\alpha$ называется ***моментом импульса.*** Так мы пришли к закону сохранения момента импульса:

При движении материальной точки в поле центральной силы момент импульса остается постоянным.

Этот закон играет для движения в поле центральной силы роль, похожую на роль закона сохранения импульса для движения в отсутствие сил.

*) w есть ускорение для вектора $\vec r$, но это — скорость изменения скорости $\vec v$.

задачник Кванта

Задачи

М596—М600; Ф608—Ф612

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 февраля 1980 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 12—79» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М596, М597» или «Ф607». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М596. Дана пятиугольная призма с основаниями $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $B_1B_2B_3B_4B_5$. Все ребра оснований и все отрезки $A_iB_j(i, j=1, 2, 3, 4, 5)$ окрашены либо в красный, либо в зеленый цвет так, что в каждом треугольнике вершинами в вершинах призмы, стороны которого окрашены, есть две стороны разного цвета. Докажите, что все десять ребер оснований окрашены одинаково.

XXI Международная олимпиада по математике, 1979 г.

М597. Положим

$$x_n = 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}.$$

а) Докажите существование предела

$$\gamma=\lim_{n\to\infty}(x_n-\ln n).$$

б) Докажите, что для любых n, $m\in\mathbb{N}$

$$\gamma<x_n+x_m-x_{nm}\leqq 1.$$

в) Найдите γ с точностью до 0,1.

В. Ясинский

М598. Даны плоскость π, точка P на этой плоскости и точка Q вне плоскости π. Найдите все точки R в плоскости π, для которых отношение $(|QP|+|PR|)/|QR|$ максимально.

XXI Международная олимпиада по математике 1979 г.

М599. а) Сколькими нулями оканчивается число*)

$$4^{5^6}+6^{5^4}?$$

б)* Укажите наибольшую степень числа 1979, на которую делится число

$$1978^{1979^{1980}}+1980^{1979^{1978}}.$$

П. Гусятников

М600. Два велосипедиста едут по двум пересекающимся окружностям. Каждый едет по своей окружности с постоянной скоростью. Выехав одновременно из одной из точек их пересечения и сделав по одному обороту, велосипедисты вновь встретились в этой точке. Докажите, что на плоскости, в которой лежат окружности, существует такая неподвижная точка, расстояния от которой до велосипедистов все время одинаковы, если они едут: а) в одном направлении (против часовой стрелки); б) в разных направлениях.

Н. Васильев, И. Шарыгин

---

*) a^{b^c} означает $a^{(b^c)}$

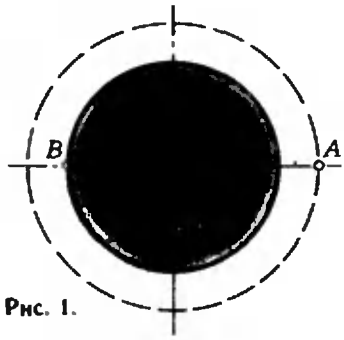


Рис. 1.

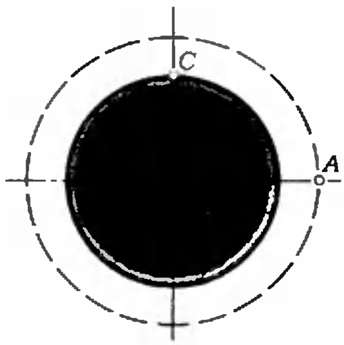


Рис. 2.

Ф608. Космический корабль массой $M=12$ т движется вокруг Луны по круговой орбите на высоте $h=100$ км. Для перехода на орбиту прилунения на короткое время включается реактивный двигатель. Скорость вылетающих из сопла ракеты газов $u=10^4$ м/с. Радиус Луны $R_Л=1{,}7\cdot10^3$ км, ускорение свободного падения у поверхности Луны $g_Л=1{,}7$ м/с^2.

1) Какое количество топлива необходимо израсходовать для того, чтобы при включении тормозного двигателя в точке A траектории корабля он опустился на Луну в точке B (рис. 1)?

2) Во втором варианте прилунения кораблю в точке A сообщается импульс в направлении на центр Луны, чтобы перевести корабль на орбиту, касающуюся Луны в точке C (рис. 2). Какое количество топлива необходимо израсходовать в этом случае?

XI Международная олимпиада по физике, 1979 г.

Ф609. Деталь, изготовленная из алюминия, взвешивается на аналитических весах с помощью латунных гирь. При одном взвешивании воздух внутри весов сухой, при другом — влажный, давление водяных паров в котором равно $p_в=15{,}2$ мм рт. ст.. Внешнее давление ($p=760$ мм рт. ст.) и температура ($t=20$ °C) воздуха в обоих случаях одинаковы.

При какой массе детали можно заметить разницу в показаниях весов, если их чувствительность $m_0=0{,}1$ мг? Плотность алюминия $\rho_1=2{,}7$ г/см^3, латуни $\rho_2=8{,}5$ г/см^3

XI Международная олимпиада по физике, 1979 г.

Ф610. В советско-французском эксперименте по оптической локации Луны импульсное излучение рубинового лазера на длине волны $\lambda=0{,}69$ мкм направлялось с помощью телескопа с диаметром зеркала $D=2{,}6$ м на лунную поверхность. На Луне был установлен отражатель, который работал как идеальное зеркало диаметра $d=20$ см, отражающее свет точно в обратном направлении. Отраженный свет улавливался тем же телескопом и фокусировался на фотоприемник.

1) С какой точностью должна быть установлена оптическая ось телескопа в этом эксперименте?

2) Пренебрегая потерями света в атмосфере Земли и в телескопе, оценить, какая доля световой энергии лазера будет после отражения от Луны зарегистрирована фотоприемником.

3) Можно ли отраженный световой импульс зарегистрировать невооруженным глазом, если пороговую чувствительность глаза принять равной $n=100$ световых квантов, а энергия, излучаемая лазером в течение импульса, равна $E=1$ Дж?

4) Оценить выигрыш, который дает применение отражателя. Считать, что поверхность Луны рассеивает $\alpha=10$ % падающего света равномерно в телесный угол 2π стер.

Расстояние от Земли до Луны $L=380\cdot10^3$ км. Диаметр зрачка глаза принять равным $d=5$ мм. Постоянная Планка $h=6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж·с.

XI Международная олимпиада по физике, 1979 г.

Ф611. Акробат, находясь на боковой поверхности цилиндра, лежащего на очень шероховатом полу, перебирает ногами и движется с постоянной скоростью вправо. Считая коэффициент трения ботинок акробата о поверхность цилиндра равным μ, определить предельный угол α, который может составить с вертикалью радиус цилиндра, проведенный в точку, в которой находится акробат. Чему будет равна при этом сила трения ботинок акробата о цилиндр?

Ф612. Какое количество теплоты необходимо сообщить 0,1 кг неона для его нагревания на 5°С, если при нагревании давление неона прямо пропорционально его объему?

Решения задач

М540—М544; Ф553—Ф557

М540. *Международное общество состоит из представителей шести различных стран. Список членов общества состоит из 1978 фамилий, занумерованных числами 1, 2,..., 1978.*

Докажите, что существует хотя бы один член общества, номер которого равняется сумме номеров двух членов из его страны или удвоенному номеру некоторого члена из его страны.

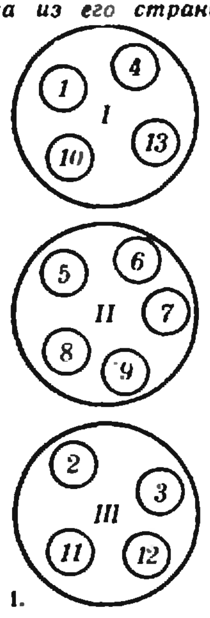


Рис. 1.

Предположим, что заключение задачи не выполняется. Заметим, что одна из стран представлена в обществе не менее чем 330 членами. Действительно, если бы каждая делегация состояла не более чем из 329 членов, то всего в обществе было бы не больше чем $329\times6=1974$ члена. Аналогичным рассуждением (известным под названием *принципа Дирихле*) мы будем пользоваться еще несколько раз, не поясняя его специально. Расположим номера ученых этой страны в порядке возрастания: $a_1, a_2, \ldots, a_{330}, \ldots$ В силу нашего предположения ученые с номерами $a_2-a_1, a_3-a_1, \ldots, a_{330}-a_1$ представляют оставшиеся пять стран. Среди них не менее 66 представляют одну страну; пусть это ученые с номерами $b_1, b_2, \ldots, b_{66}$. Тогда ученые с номерами $b_2-b_1, \ldots, b_{66}-b_1$ представляют оставшиеся четыре страны. Среди них не меньше 17 ученых представляют одну страну; пусть их номера $c_1, c_2, \ldots, c_{17}$. Тогда ученые с номерами $c_2-c_1, \ldots, c_{17}-c_1$ живут в оставшихся трех странах. Из них мы аналогичным образом найдем 5 ученых, представляющих две страны, а затем двух представителей одной страны, разность номеров которых не может быть номером ученого ни одной из стран. Противоречие!

Задача решена.

Если поставить теперь вопрос о том, сколько должно быть членов в обществе из представителей k стран, чтобы заключение задачи наверняка выполнялось, то приведенный выше метод решения дает ответ $n_k=[k!e]=k!\left(2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}\right)$ (проверьте это самостоятельно). Однако эта оценка может быть улучшена уже для $k=3$. Как сообщил нам *А. Ходулев*, для трех стран достаточно не $16=[3!e]$, а 14 представителей. Для тринадцати представителей трех стран заключение задачи не выполняется; соответствующий пример приведен на рисунке 1. А для четырех стран достаточно 45 представителей; для 44 же представителей четырех стран можно привести пример, когда заключение задачи не выполняется. Оценка снизу для количества членов общества из k стран, для которых возможна такая нумерация, что заключение задачи **М540** будет неверно, очень далека от верхней оценки. Лучшей пока является оценка $m_k = (3^k - 1)/2$.

Л. Лиманов

◆

М541. *В компании из N человек у каждого ровно трое друзей.*

а) *Докажите, что N четно.*

б) *Всегда ли такую компанию можно разбить на $N/2$ пар так, чтобы люди в каждой паре были друзьями?*

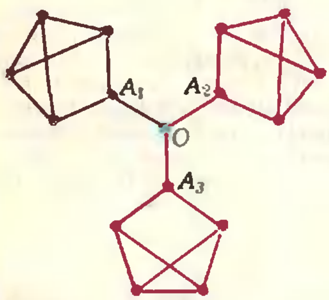


Рис. 2.

а) Подсчитаем число пар друзей. Поскольку каждый имеет трех друзей, то есть входит в 3 такие пары, то общее число пар равно $3N/2$. Отсюда следует, что N четно.

Если изображать людей точками — *вершинами*, а друзей соединять отрезками — *ребрами*, то конфигурация, удовлетворяющая условию задачи, будет *однородным графом степени* 3 (от каждой вершины отходит 3 ребра). На языке графов наше решение можно записать так: поскольку у каждого из M ребер графа два конца и каждая из N вершин служит концом трех ребер, $2M=3N$, откуда $M=3N/2$.

б) О т в е т. Не всегда. Простейший пример, который привели почти все читатели, правильно решившие задачу, содержит 16 вершин и, стало быть, 24 ребра (рис. 2). Если выбрать пару OA_1, то пятерки, содержащие A_2 и A_3, уже нельзя разбить на пары. Как отметил десятиклассник *В. Губа* из Вологды, такие примеры существуют при всех четных $N \geqslant 16$.

Во всех контрпримерах, приведенных читателями, на графе имеется *перешеек* — ребро, после выбрасывания которого граф распадается на два куска (в нашем примере три перешейка: OA_1, OA_2 и OA_3). Это не случайно. Можно доказать — предлагаем это как задачу читателям, — что *в однородном графе степени 3 без перешейков всегда существует совершенное паросочетание*, то есть множество ребер, содержащих все вершины графа и не имеющих общих вершин. (См., например, главу 18 книги К. Б е р ж а «Теория графов и ее применения» (М., ИЛ, 1962).)

Задачи о паросочетаниях — достаточно продвинутый раздел теории графов. О некоторых из этих задач рассказывалось в «Кванте» (1970, № 4, с. 14; 1974, № 11, с. 23).

◆

М542. *Дан прямоугольный треугольник $A_0A_1A_2$ с катетами $|A_0A_2|=a$ и $|A_1A_2|=b$. Муравей ползет по бесконечной ломаной $A_2A_3A_4A_5\ldots$, где A_nA_{n+1} — высота треугольника $A_{n-2}A_{n-1}A_n$.*

а) *Найдите длину его пути (из бесконечного числа отрезков).*

б) *Постройте предельную точку L, к которой приближается муравей. На каких расстояниях от катетов она находится?*

Рассмотрим преобразование подобия $П$, переводящее треугольник $A_0A_1A_2$ в треугольник $A_2A_3A_4$. Его коэффициент подобия

$$k = \frac{|A_2A_3|}{|A_0A_1|} = \frac{ab}{a^2+b^2}.$$

Преобразование $П$, очевидно, отображает интересующую нас красную ломаную $Г$, дополненную двумя начальными звеньями $[A_0A_1]$ и $[A_1A_2]$, в точности на $Г$, поскольку $П(A_n)=A_{n+2}$ для $n=0, 1, 2, \ldots$ (рис. 3). Поскольку $П$ сокращает все расстояния в k раз, длина z ломаной $Г$ определяется из уравнения

$$k\,(|A_0A_1|+|A_1A_2|+z)=z,$$

откуда

$$z = \frac{k\,(\sqrt{a^2+b^2}+b)}{1-k} = \frac{(\sqrt{a^2+b^2}+b)\,ab}{a^2+b^2-ab}.$$

(В этом рассуждении завуалирован обычный способ отыскания суммы бесконечной геометрической прогрессии: $(\sqrt{a^2+b^2}+b)(k+k^2+k^3+\cdots)=z$.)

Заметим, что каждый треугольник $A_nA_{n+1}A_{n+2}$ содержит следующий ($n=0, 1, \ldots$), а пересечение всех этих треугольников—точка L, к которой в пределе стремится муравей. Поскольку $П(\triangle A_nA_{n+1}A_{n+2}) = \triangle A_{n+2}A_{n+3}A_{n+4}$, получаем $П(L)=L$, то есть точка L является *неподвижной точкой* преобразования $П$.

Преобразование $П$ — *центрально подобное вращение*: его можно получить как композицию поворота на 90°

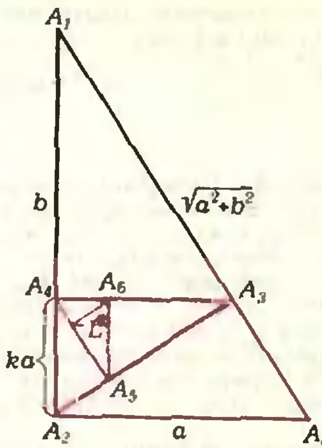


Рис. 3.

и гомотетии (с коэффициентом k) с центром L. Отсюда следует, что $\widehat{A_0LA_2} = \widehat{A_2LA_4} = 90°$; таким образом, точку L можно построить как пересечение двух полуокружностей с диаметрами $[A_0A_2]$ и $[A_2A_4]$ или еще проще — опустить из A_2 перпендикуляр A_2L на отрезок A_0A_4. А найти расстояния x и y от точки L до катетов длины a и b треугольника $A_0A_1A_2$ можно, воспользовавшись либо тем, что $L \in [A_0A_4]$ и $|LA_4| : |LA_0| = k^2$, либо тем, что перпендикуляры, опущенные из L на отрезки A_0A_2, A_2A_4, A_4A_6, получаются друг из друга преобразованием Π, откуда

$$\begin{cases} y = kx, \\ ka - x = ky \end{cases}$$

(на рисунке 3 отрезок длины x голубой, отрезок длины $y=kx$ — зеленый, отрезок длины ky — снова голубой). Таким образом,

$$x = \frac{ka}{k^2+1} = \frac{a^2b\,(a^2+b^2)}{a^4+3a^2b^2+b^4},$$

$$y = \frac{k^2a}{k^2+1} = \frac{a^3b^2}{a^4+3a^2b^2+b^4}.$$

В ряде писем эти ответы получены как суммы геометрической прогрессии со знаменателем k^2 — коэффициентом гомотетии преобразования Π^2.

◆

М543. *Пусть*
$$\rho(x, y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}.$$
Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c выполнено неравенство
$\rho(a, c) \leqslant \rho(a, b) + \rho(b, c)$.

Формулу для «расстояния» ρ можно существенно упростить, установив взаимно однозначное соответствие $y = \operatorname{tg}\alpha$ между числами $y \in \mathbf{R}$ и числами $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Если $y_1 = \operatorname{tg}\alpha_1$, $y_2 = \operatorname{tg}\alpha_2$, то, заменив $\operatorname{tg}\alpha$ на $\sin\alpha/\cos\alpha$, получим

$$\rho(y_1, y_2) = \frac{|\operatorname{tg}\alpha_1 - \operatorname{tg}\alpha_2|}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_1}\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_2}} = |\sin(\alpha_1-\alpha_2)|. \quad (1)$$

Таким образом, нужное нам *неравенство треугольника* для расстояния ρ вытекает из следующего неравенства:

$$|\sin(\alpha_1-\alpha_3)| \leqslant |\sin(\alpha_1-\alpha_2)| + |\sin(\alpha_2-\alpha_3)|; \quad (2)$$

справедливость последнего неравенства (для всех $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$) не вызывает сомнений: для любых β и γ

$$|\sin(\beta+\gamma)| = |\sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\beta| \leqslant |\sin\beta\cos\gamma| + |\sin\gamma\cos\beta| \leqslant |\sin\beta| + |\sin\gamma|;$$

положив здесь $\beta = \alpha_1-\alpha_2$, $\gamma = \alpha_2-\alpha_3$, получим (2).

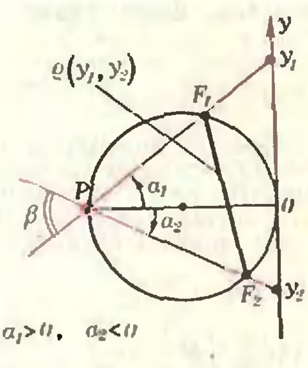


Рис. 4.

Эти формальные тригонометрические выкладки, как заметили многие читатели, можно прояснить с помощью геометрической интерпретации нашего расстояния ρ. Начертим на плоскости окружность, касающуюся координатной прямой Oy в точке O ($y=0$), с диаметром $|OP|=1$ и каждой точке Y (с координатой y) нашей прямой поставим в соответствие пересечение $F=F(y)$ отрезка PY с этой окружностью (рис. 4). Пусть $F_1=F(y_1)$, $F_2=F(y_2)$. Тогда $\rho(y_1, y_2)$ есть просто *длина хорды* $|F_1F_2|=\sin\beta$. (Это сразу ясно из (1), поскольку $\widehat{F_1PF_2} = |\alpha_1-\alpha_2| = \beta$, но легко установить и геометрически — например, заметив, что площадь треугольника на рисунке 4 с длиной основания $|y_1-y_2|$ и высотой длины 1 равна половине произведения $\sqrt{1+y_1^2}\sqrt{1+y_2^2}\sin\beta$.) Теперь «неравенство треугольника» очевидно.

Отображение $y \to F(y)$ прямой на окружность и аналогичное отображение плоскости на сферу — «стереографическая проекция» — очень важный инструмент для решения разнообразных геометрических задач *).

Читатели, знакомые с комплексными числами, оценят и такое решение (которое указал десятиклассник *В. Губа* из Вологды). После преобразования $y \to \frac{1}{y+i} = z(y)$ расстояние ρ переходит в обычное расстояние между точками на комплексной плоскости: $\rho(y_1, y_2) = \left| \frac{1}{y_1+i} - \frac{1}{y_2+i} \right|$; заметим, что геометрическая интерпретация этого отображения приводит, по существу, к тому же рисунку 4.

Н. Васильев

◆

М544. *Какое наибольшее число вершин, из которых нельзя провести ни одной диагонали (лежащей целиком внутри многоугольника), может иметь выпуклый n-угольник? Решите эту задачу сначала для $n=4,5,6,7$.*

Докажем, что число таких вершин не превосходит $\left[\frac{n}{2}\right]$. Это сразу вытекает из следующей леммы:

Лемма. *Если A и B — соседние вершины невыпуклого многоугольника M, то из A или из B можно провести диагональ.*

Доказательство. Пусть B и C — вершины многоугольника M, соседние с A.

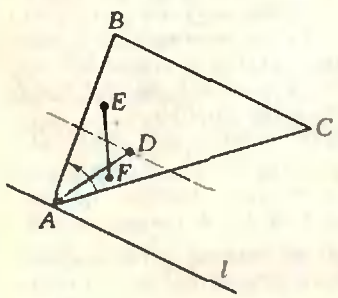


Рис. 5.

Предположим сначала, что $\widehat{BAC} < 180°$. Если в треугольнике ABC (включая его стороны) нет других вершин многоугольника M, то искомая диагональ — $[BC]$. Если же в треугольнике ABC есть другие вершины многоугольника M, то выберем среди них вершину D, находящуюся на минимальном расстоянии от прямой l, проходящей через точку A параллельно $[BC]$. Тогда $[AD]$ — искомая диагональ, поскольку в противном случае отрезок AD пересекала бы какая-то сторона EF многоугольника M (рис. 5), один из концов которой лежал бы ближе к прямой l, чем точка D, что противоречило бы выбору последней.

Пусть теперь $\widehat{BAC} > 180°$. Покажем, что в этом случае всегда можно провести диагональ из вершины A. Для этого продолжим сторону BA многоугольника M за вершину A до первого пересечения со сторонами многоугольника M в некоторой точке D. Если D — вершина многоугольника M, то $[AD]$ — искомая диагональ. В противном случае точка D лежит на стороне EF многоугольника. Пусть вершина E расположена по разные стороны от прямой BA с вершиной C (рис. 6). Будем двигать переменную точку P на стороне EF от точки D к точке E. Тогда переменный отрезок AP заметет треугольник ADE. Если в треугольнике ADE нет вершин многоугольника M, то $[AE]$ — искомая диагональ. Если же таковые найдутся, то мы обязательно наткнемся на одну из них при повороте отрезка AP от положения $[AD]$ до положения $[AE]$. Отрезок от вершины A до ближайшей к A вершине на отрезке AP, впервые «встретившем» вершины многоугольника M, будет искомой диагональю.

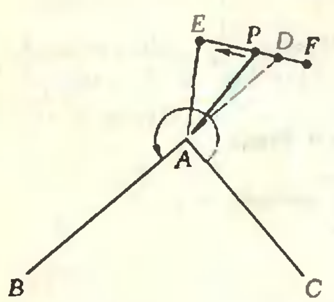
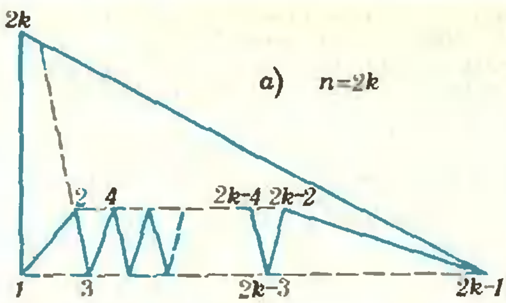


Рис. 6.

Лемма доказана.

---

*) См., например, книгу И. М. Яглома «Геометрические преобразования. II. Линейные и круговые преобразования» (М., ГТТИ, 1956); брошюру Б. А. Розенфельда и Н. Д. Сергеевой «Стереографическая проекция» («Популярные лекции по математике», вып. 53, М., «Наука», 1973); статьи из «Кванта»: 1977, № 10, с. 14; 1978, № 12, с. с. 1, 50 и 2-я с. обложки.



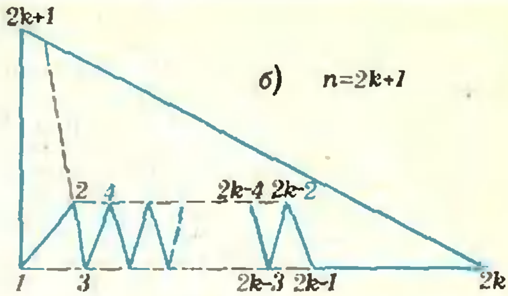


Рис. 7.

На рисунках 7, *а* и 7, *б* приведены примеры невыпуклых ($2k$)-угольника и ($2k+1$)-угольника, для которых оценка $\left[\frac{n}{2}\right]$ достигается.

Таким образом, наибольшее число вершин невыпуклого n-угольника, из которых нельзя провести ни одной диагонали, равно $\left[\frac{n}{2}\right]$.

С. Бычков

Ф553. *Тяжелая доска массы M лежит на двух тонкостенных катках радиусов r и R и равных масс m. Расстояние между центрами катков l. С каким ускорением начнет двигаться доска, если ее отпустить? Трение между всеми поверхностями такое, что проскальзывания нет.*

◆

Так как проскальзывание между всеми поверхностями отсутствует, при движении доски и катков будут оставаться неизменными расстояние $|AB|$ между точками касания катков и горизонтальной плоскостью и равное ему расстояние $|A'B'|$ между точками касания катков и доски (рис. 8). Следовательно, не будет изменяться и расстояние $|O_1O_2|=l$ между центрами катков. А это означает, что скорости центров обоих катков в любой момент времени одинаковы и направлены по прямой O_1O_2.

Найдем направление скорости центра масс доски O. Пусть скорость центров катков равна $\vec{v}$. Тогда в системе отсчета, движущейся с этой скоростью, центры катков неподвижны, скорости же точек A' и B', а значит, и скорость $\vec{v}'$ центра масс доски равны по модулю $|\vec{v}|$ и направлены вдоль доски. В неподвижной относительно горизонтальной плоскости системе отсчета скорость $\vec{u}$ центра масс доски равна векторной сумме скоростей $\vec{v}'$ и $\vec{v}$. Из рисунка 8 видно, что скорость $\vec{u}$ направлена параллельно прямой O_1O_2. Так же направлены перемещение доски и ее ускорение.

Обозначим через $\vec{s}$ перемещение центра масс доски в тот момент, когда его скорость равна $\vec{u}$. В этот момент модуль скорости центров катков $|\vec{v}| = |\vec{u}|/2\cos\alpha$ и кинетическая энергия всей системы равна

$$2\frac{m|\vec{v}|^2}{2}+\frac{M|\vec{u}|^2}{2}=\frac{|\vec{u}|^2}{4}(m\cos^2\alpha+2M).$$

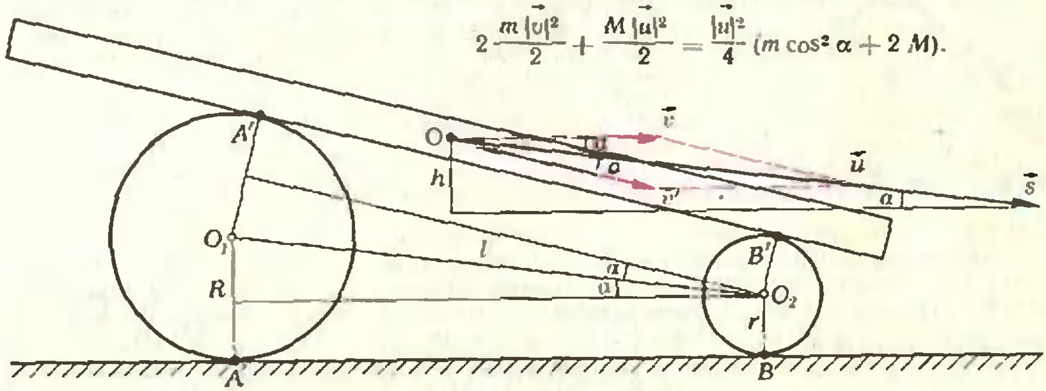


Рис. 8.

Изменение кинетической энергии системы происходит за счет изменения потенциальной энергии доски:

$$\frac{|\vec{u}|^2}{4}(m\cos^2\alpha + 2M) = Mgh,$$

$$\text{где } h = |\vec{s}|\sin\alpha, \text{ а } \sin\alpha = \frac{R-r}{l}.$$

Так как доска движется равноускоренно (действующие на систему силы постоянны), справедливо равенство

$$|\vec{u}|^2 = 2|\vec{a}|\,|\vec{s}|$$

($\vec{a}$ — ускорение доски).

Используя полученные соотношения, найдем

$$|\vec{a}| = g\frac{2(R-r)}{l\left(2+\frac{m}{M}(1-(R-r)^2/l^2)\right)}.$$

И. Слободецкий

◆

Ф554. *Брусок массы m_1 лежит на доске массы m_2, которая находится на гладкой горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между бруском и доской равен μ. На доску действует сила $\vec{F}$, изменяющаяся со временем по закону $|\vec{F}| = bt$, где b — постоянная величина. Нарисовать графики зависимости ускорений бруска и доски от времени t.*

На брусок в горизонтальном направлении действует только одна сила — сила трения $\vec{F}_1$ (рис. 9), поэтому он движется с ускорением

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_1}{m_1}.$$

Так как $|\vec{F}_1| \leqslant \mu m_1 g$, то

$$|\vec{a}_1| \leqslant \mu g.$$

На доску действуют две силы: сила $\vec{F}$ и сила трения, равная $-\vec{F}_1$, поэтому ускорение доски равно

$$\vec{a}_2 = \frac{\vec{F}-\vec{F}_1}{m_2}.$$

Вначале, пока сила $\vec{F}$ мала, брусок и доска движутся вместе: $\vec{a}_1 = \vec{a}_2$, то есть

$$\frac{\vec{F}_1}{m_1} = \frac{\vec{F}-\vec{F}_1}{m_2}.$$

Отсюда

$$\vec{F}_1 = \vec{F}\frac{m_1}{m_1+m_2}$$

и

$$|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = \frac{|\vec{F}|}{m_1+m_2} = \frac{b}{m_1+m_2}t$$

— модуль ускорения бруска и доски растет пропорционально времени.

В некоторый момент времени t_0 модуль этого ускорения оказывается равным $|\vec{a}_{1\max}| = \mu g$, а сила $\vec{F}_1$ становится равной по модулю $\mu m_1 g$. После этого ускорение бруска перестает расти и остается равным

$$|\vec{a}_1| = \mu g,$$

а ускорение доски растет п закону

$$|\vec{a}_2| = \frac{bt-\mu m_1 g}{m_2}.$$

Найдем t_0. Так как в этот момент $|\vec{a}_1| = \mu g$, то

$$\frac{bt_0}{m_1+m_2} = \mu g.$$

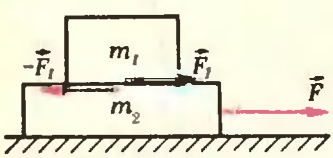


Рис. 9.

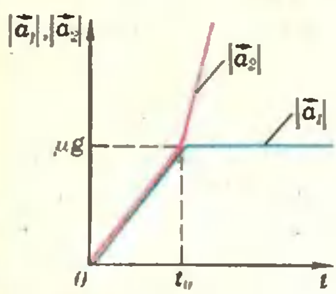


Рис. 10.

откуда

$$l_0 = \frac{\mu g}{b}(m_1 + m_2).$$

Теперь нетрудно построить графики зависимости $|\vec{a}_1|$ и $|\vec{a}_2|$ от времени t (рис. 10).

И. Слободецкий

◆

Ф555. *а) Легкий жесткий стержень длины l с грузом массы m наверху закреплен шарнирно в нижней точке и удерживается в вертикальном положении двумя горизонтальными пружинами жесткости k, скрепленными с его верхним концом (рис. 11). В направлении, перпендикулярном к пружинам, стержень двигаться не может. При какой массе груза вертикальное положение стержня перестанет быть устойчивым?*

б) Стальная спица длины l заделана в пол так, что стоит вертикально. Если к ее верхнему концу приложить небольшую горизонтальную силу $\vec{F}$, верхний конец спицы отклонится на величину $a \ll l$. Оценить, груз какой массы может выдержать, не согнувшись, спица на своем верхнем конце. Различием формы, которую принимает спица при действии на нее горизонтальной или вертикальной сил, пренебречь.

а) Вертикальное положение стержня становится неустойчивым, если при небольшом отклонении стержня от положения равновесия момент силы тяжести груза относительно оси, проходящей через точку O закрепления стержня, будет больше момента сил упругости пружин.

Обозначим через x малое горизонтальное смещение груза (рис. 12). Тогда момент силы тяжести равен mgx, а момент сил упругости равен приблизительно $|\vec{F}|\,l = 2\,kxl$.

Таким образом, равновесие стержня неустойчиво при

$$mgx > 2\,kxl,$$

то есть при

$$m > \frac{2\,kl}{g}.$$

б) В действительности форма спицы изменяется в зависимости от того, горизонтальная или вертикальная сила удерживает ее в равновесии, однако для оценки этим

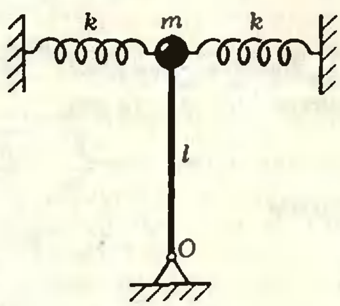


Рис. 11.

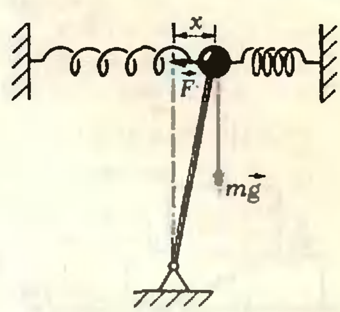


Рис. 12.

можно пренебречь. Тогда задача становится аналогичной задаче а), в которой величину $2k$, характеризующую жесткость пружин на растяжение (сжатие), нужно заменить жесткостью k' спицы на изгиб, равной отношению модуля силы упругости, уравновешивающей силу $\vec{F}$, к смещению конца стержня, то есть $\dfrac{|\vec{F}|}{a}$.

Следовательно, максимальная масса груза, который может выдержать спица, равна приблизительно

$$m \approx \frac{|\vec{F}|\,l}{ag}.$$

Г. Коткин

Ф556. *Если на ледяной брусок надеть проволочную петлю, к которой подвешен груз (рис. 13), проволока начинает резать лед. Это объясняется тем, что при повышении давления температура плавления льда понижается, лед под проволокой начинает таять, а над проволокой — вновь смерзаться.*
Однако если петлю сделать не из проволоки, а из капроновой нити такого же или даже меньшего диаметра, лед практически не режется. Почему? Попробуйте провести описанный опыт.

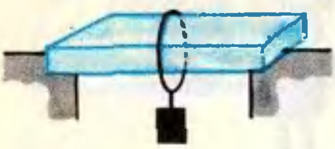


Рис. 13.

При повышении давления температура плавления льда действительно понижается. Однако при плавлении льда поглощается теплота плавления, и температура льда под проволокой начинает падать. Это происходит до тех пор, пока температура льда в области повышенного давления не упадет до температуры плавления при этом давлении. Дальнейшее плавление льда будет определяться теплом, которое вследствие теплопроводности будет приходить к области пониженной температуры.

В случае проволоки это тепло будет проводиться за счет хорошей теплопроводности металла от замерзающей сверху воды, и процесс разрезания льда будет быстрым. В случае капроновой нити, обладающей малой теплопроводностью, тепло будет подводиться главным образом за счет охлаждения всего бруска льда в целом, и процесс разрезания пойдет очень медленно.

И. Слободецкий

◆

Ф557. *В схеме, изображенной на рисунке 14, ключ K замыкают. Найти максимальный ток в цепи и максимальное напряжение на конденсаторе.*

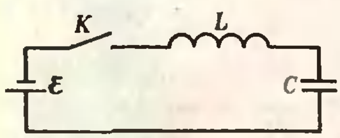


Рис. 14.

После замыкания ключа в цепи потечет ток. Из-за наличия индуктивности ток вырасти мгновенно не может; он будет увеличиваться постепенно, пока не достигнет максимального значения.

Ток, текущий через индуктивность, заряжает конденсатор. Согласно закону сохранения энергии в любой момент времени

$$\frac{LI^2}{2}+\frac{CU^2}{2}=q\mathscr{E}=CU\mathscr{E}. \qquad (*)$$

Здесь I — ток, текущий через индуктивность в данный момент, $LI^2/2$ — энергия, запасенная к этому моменту в магнитном поле индуктивности, U — напряжение на конденсаторе, $CU^2/2$ — энергия конденсатора в данный момент, $q=CU$ — заряд, прошедший через батарею, $q\mathscr{E}$ — работа, совершенная батареей.

При некотором значении тока I_0 напряжение на конденсаторе становится равным $\mathscr{E}$. С этого момента конденсатор продолжает заряжаться за счет энергии магнитного поля индуктивности. При этом ток через индуктивность начинает уменьшаться.

Следовательно, I_0 и есть максимальный ток в цепи. Из (*) при $U=\mathscr{E}$ находим

$$I_0=\mathscr{E}\sqrt{C/L}.$$

Зарядка конденсатора продолжается до тех пор, пока в цепи течет ток. Максимальное напряжение на конденсаторе находим из (*) при условии $I=0$:

$$U_{max}=2\mathscr{E}.$$

П. Зубков

а) ДВЕСТИ + ТРИСТА = ПЯТЬСОТ

б) ЧЕТЫРЕ + ЧЕТЫРЕ = ВОСЕМЬ

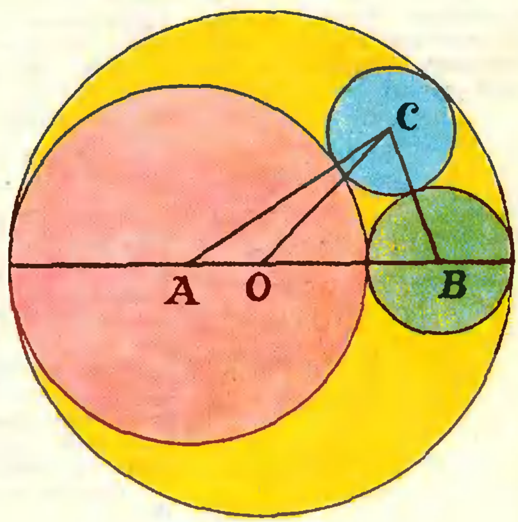
Задачи

1. В обоих примерах, приведенных на рисунке, использованы все десять цифр. В первом примере буква 0 является цифрой нуль, буква П равна букве И, а буква В — букве Я, остальные буквы имеют самостоятельные цифровые значения. Во втором примере нет букв, имеющих одинаковые значения, зато известно, что $Ч^{Е}=С$, причем Е — нечетная цифра.

Определите значения всех букв в каждом примере.

2. Мальчик купил на рубль почтовых марок, причем двухкопеечных марок он купил в 10 раз меньше, чем однокопеечных, остальные же марки были пятикопеечными. Сколько марок каждого достоинства купил мальчик?

3. На диаметре окружности с центром в точке O находятся центры A и B еще двух окружностей, касающихся первоначальной окружности и друг друга (см. рисунок). Еще одна окружность, центр которой обозначим через C, касается всех трех рассмотренных ранее окружностей, как на рисунке. Докажите, что периметры треугольников AOC и BOC равны длине диаметра первой окружности.



4. Ученик 6 класса Петя Иванов придумал две новые теоремы:

а) если натуральное число делится на 27, то и сумма его цифр делится на 27;

б) если сумма цифр натурального числа делится на 27, то и само число делится на 27.

Сможет ли Петя доказать эти теоремы?

О. Оре

Простые числа Ферма

Вероятно, одним из первых свойств чисел, открытых людьми, был тот факт, что некоторые числа раскладываются на два меньших множителя, например

$$6=2\cdot3,\ 9=3\cdot3,\ 30=2\cdot15=3\cdot10,$$

в то время как другие, например

$$3,\ 7,\ 13,\ 37,$$

на множители подобным образом не раскладываются.

Если число c является произведением двух чисел a и b ($c=a\cdot b$), мы называем числа a и b *множителями* или *делителями* числа c. Каждое число имеет *тривиальное* (простейшее) разложение на множители:

$$c=1\cdot c=c\cdot 1.$$

Соответственно числа 1 и c мы называем *тривиальными делителями числа* c.

Эта статья является отрывком из книги О. Оре «Приглашение в теорию чисел», выходящей в 1980 г. в Библиотечке «Квант» (перевод Л. Савиной под ред. А. Савина).

Любое число $c>1$, у которого существует **нетривиальное** разложение на множители, называется *составным*. Если число, большее единицы, имеет только тривиальное разложение на множители, то оно называется *простым*. Среди первых ста чисел простыми являются следующие 25 чисел:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97,

а все остальные числа, кроме 1, являются составными.

За последние 200 лет было издано много таблиц простых чисел. Наиболее обширной из них является таблица Д. Н. Лехмера, содержащая все простые числа до 10000000.

Некоторые энтузиасты составили таблицы простых чисел, превосходящих 10000000, однако, по-видимому, нет большого смысла публиковать эти таблицы. Лишь в очень редких случаях математику, даже специалисту по теории чисел, приходится решать вопрос, является ли какое-то большое число простым. Кроме того, большие числа, о которых математик хочет узнать, являются ли они простыми или составными, не возникают произвольно. Они обычно появляются в специальных математических задачах и поэтому имеют очень специфичную форму.

Расскажем об одном из типов простых чисел, имеющем большую и интересную историю. Эти числа впервые были введены Пьером Ферма (1601—1665), французским юристом, который был одновременно и выдающимся математиком *). Первыми пятью простыми числами Ферма являются

$$F_0 = 2^{2^0} + 1 = 3,\ F_1 = 2^{2^1} + 1 = 5,$$
$$F_2 = 2^{2^2} + 1 = 17,$$
$$F_3 = 2^{2^3} + 1 = 257,\ F_4 = 2^{2^4} + 1 = 65\,537.$$

В соответствии с этой последовательностью общая формула для простых чисел Ферма должна иметь вид

$$F_n = 2^{2^n} + 1.$$

Ферма был абсолютно уверен, что все числа такого вида являются простыми, хотя он не вычислял других чисел, кроме указанных пяти. Но после того, как Леонард Эйлер сделал еще один шаг, показав, что следующее число Ферма:

$$F_5 = 4294967297 = 641 \cdot 6700417$$

не является простым, это предположение было сдано в архив неоправдавшихся математических гипотез. Возможно, этим история чисел Ферма была бы закончена, если бы числа Ферма не появились в совсем другой задаче — задаче построения правильных многоугольников при помощи циркуля и линейки.

Правильным многоугольником называется многоугольник, вершины которого лежат на некоторой окружности на одинаковых расстояниях друг от друга (см. рисунок). Если у правильного многоугольника n вершин, то мы называем его *правильным* n-угольником. Если мы проведем n радиусов, соединяющих центр окружности с вершинами, то получим n центральных углов величиной $\frac{1}{n} \cdot 360^\circ$ каждый. Если можно построить угол, имеющий эту величину, то можно построить и сам многоугольник.

Древние греки очень хотели найти методы построения правильных многоугольников с помощью циркуля и линейки. Разумеется, они умели строить простейшие из них — равносторонний треугольник и квадрат. С помощью повторного деления пополам центрального угла они могли также построить правильные многоугольники с

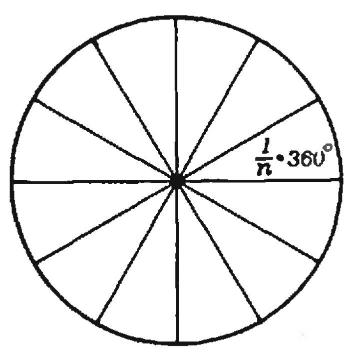
8, 16, 32, ...,
6, 12, 24, ...

вершинами. Кроме того, они умели строить правильный пятиугольник и, следовательно, также правильные многоугольники с

10, 20, 40, ...

вершинами. Был также получен еще один тип правильного многоугольника. Центральный угол в правильном 15-угольнике равен

$$\frac{1}{15} \cdot 360^\circ = 24^\circ,$$



Леонард Эйлер (1707—1783).

---

*) См. «Квант», 1976, № 8 (прим. ред.).

Карл-Фридрих Гаусс (1777—1855).

и он может быть получен с помощью угла в 72°, соответствующего правильному пятиугольнику, и угла в 120°, соответствующего правильному треугольнику, если удвоить первый угол и вычесть из него второй. Следовательно, мы можем построить правильные многоугольники с 15, 30, 60, 120, ... сторонами.

В таком состоянии проблема оставалась до 1801 года. В том году молодой немецкий математик Карл-Фридрих Гаусс (1777—1855) опубликовал работу по теории чисел «Арифметические исследования». Эта работа открыла новую эпоху в математике. В ней Гаусс превзошел греческих геометров не только тем, что указал метод для построения циркулем и линейкой правильного 17-угольника — он пошел гораздо дальше. Для всех чисел n он определил, какие n-угольники могут быть построены таким образом, а какие нет. Сейчас мы опишем результаты, полученные Гауссом.

Мы уже говорили, что, деля каждый центральный угол пополам, из правильного n-угольника можно получить правильный $2n$-угольник. С другой стороны, из $2n$-угольника можно получить n-угольник, используя лишь каждую вторую вершину. Это показывает, что достаточно провести поиск многоугольников, которые могут быть построены с помощью циркуля и линейки, только среди многоугольников с нечетным числом вершин. Гаусс показал, что *правильный многоугольник с нечетным числом вершин может быть построен с помощью циркуля и линейки тогда и только тогда, когда число n является простым числом Ферма или произведением нескольких различных простых чисел Ферма.*

Что это нам дает для небольших значений n? Очевидно, треугольник и пятиугольник могут быть построены, в то время как семиугольник не может быть построен, так как 7 не является простым числом Ферма. Не может быть построен и девятиугольник, так как $9=3\cdot3$ является произведением двух равных простых чисел Ферма. Для $n=11$ и $n=13$ соответствующий n-угольник не может быть построен, но он может быть построен для $n=15=3\cdot5$ и $n=17$.

Открытие Гаусса, естественно, возродило интерес к числам Ферма. За последнее столетие были предприняты поистине героические поиски «вручную», без помощи машин, новых простых чисел Ферма. В настоящее время эти вычисления ведутся со все возрастающей скоростью при помощи ЭВМ, однако до сих пор результаты были отрицательными. Ни одного нового простого числа Ферма пока не найдено. И сейчас многие математики склонны считать, что их больше нет.

Задачи

1. Найдите все нечетные числа $n<100$, для которых можно построить правильный n-угольник.

2. Как построить правильный 51-угольник, имея правильный 17-угольник?

3. Если не существует простых чисел Ферма, кроме вышеуказанных пяти, то сколько существует правильных n-угольников (n нечетно), которые могут быть построены циркулем и линейкой? Каково наибольшее нечетное n, для которого может быть построен правильный n-угольник?

В. Иванов

Преобразование решений тригонометрического уравнения

Очевидно, произвольное натуральное число n представимо в виде либо $n=2l$, либо $n=2l+1$. Кроме того, любое натуральное число n представимо в виде либо $n=3l$, либо $n=3l+1$, либо $n=3l+2$. Далее, всякое натуральное число n представимо в виде либо $n=4l$, либо $n=4l+1$, либо $n=4l+2$, либо $n=4l+3$. И т. д. Эта серия утверждений является теоретической основой преобразования, которое приходится иногда делать с решениями тригонометрического уравнения.

Пример 1 (НГУ, мехмат, 1974). *Решить уравнение*

$$\sqrt{\cos 2x-\sin 4x}=\sin x-\cos x. \quad (1)$$

Напрашивающийся путь решения уравнения (1) — возведение обеих частей уравнения в квадрат:

$$\cos 2x-\sin 4x=(\sin x-\cos x)^2. \quad (2)$$

После легких равносильных преобразований получаем

$$\sin x\,(\sin x+\cos 3x)=0.$$

Таким образом, уравнение (2) имеет ответ:

$$\left[\begin{array}{ll} x_1=\pi k & (k\in\mathbf{Z}), \\ x_2=\frac{\pi}{4}+\pi l & (l\in\mathbf{Z}), \\ x_3=-\frac{\pi}{8}+\frac{\pi}{2}m & (m\in\mathbf{Z}). \end{array}\right. \quad (3)$$

Но уравнение (2), вообще говоря, не равносильно уравнению (1); оно является лишь выводным из (1). Поэтому необходимо сделать проверку.

Наименьший общий период функций $\cos 2x$, $\sin 4x$, $\sin x$ и $\cos x$ — 2π. Значит, если число a является корнем уравнения (1), то и все числа $a+2\pi t$ ($t\in\mathbf{Z}$) являются его корнями. Поэтому запишем решения (3) «с периодом 2π».

Заменив в x_1 переменную k на $k=2t$ и $k=2t+1$, получим

$$\left\{\begin{array}{l} x_{11}=2\pi t, \\ x_{12}=\pi+2\pi t. \end{array}\right. \quad (3_1)$$

Аналогично из x_2 получим

$$\left\{\begin{array}{l} x_{21}=\frac{\pi}{4}+2\pi t, \\ x_{22}=\frac{5}{4}\pi+2\pi t. \end{array}\right. \quad (3_2)$$

Заменив в x_3 переменную m на $m=4t$, $m=4t+1$, $m=4t+2$ и $m=4t+3$, получим

$$\left[\begin{array}{l} x_{31}=-\frac{\pi}{8}+2\pi t, \\ x_{32}=\frac{3}{8}\pi+2\pi t, \\ x_{33}=\frac{7}{8}\pi+2\pi t, \\ x_{34}=\frac{11}{8}\pi+2\pi t. \end{array}\right. \quad (3_3)$$

Из (3_1), (3_2), (3_3) видно, что, ввиду вышесказанного, достаточно проверить числа 0, π, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$, $-\frac{\pi}{8}$, $\frac{3}{8}\pi$, $\frac{7}{8}\pi$, $\frac{11}{8}\pi$. Можно просто подставить эти 8 чисел в (1). Проще, однако, сообразить, что уравнение (1) равносильно «смешанной системе»

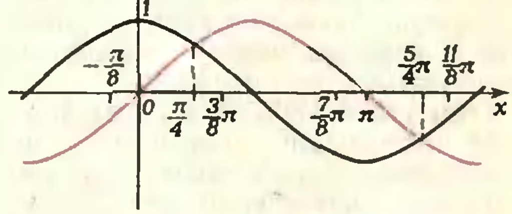


Рис. 1.

$$\begin{cases}\cos 2x-\sin 4x=(\sin x-\cos x)^2,\\ \sin x-\cos x\geqslant 0.\end{cases}$$

Таким образом, достаточно посмотреть (рис. 1), какие из выписанных чисел удовлетворяют неравенству $\sin x\geqslant\cos x$. «Выдерживают» это неравенство π, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5}{4}\pi$, $\frac{3}{8}\pi$ и $\frac{7}{8}\pi$. Значит, в ответ уравнения (1) входят x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{32} и x_{33}. При желании x_{21} и x_{22} можно объединить «обратно».

Пример 2. *Решить уравнение*

$$\sin 7x+\cos 2x=-2. \qquad (4)$$

Поскольку $\min\limits_{\mathbf{R}}\sin 7x=\min\limits_{\mathbf{R}}\cos 2x=-1$, уравнение (4) равносильно системе

$$\begin{cases}\sin 7x=-1,\\ \cos 2x=-1.\end{cases}$$

Решение первого уравнения системы

$$x_1=\frac{3}{14}\pi+\frac{2\pi}{7}k\ (k\in\mathbf{Z}), \qquad (5)$$

решение второго уравнения

$$x_2=\frac{\pi}{2}+\pi l\ (l\in\mathbf{Z}). \qquad (6)$$

Чтобы найти пересечение множеств (5), (6), запишем их «с периодом 2π». Заменив в (5) переменную k на $7t$, $7t+1$, $7t+2$, $7t+3$, $7t+4$, $7t+5$ и $7t+6$, получим

$$\begin{cases}x_{11}=\frac{3}{14}\pi+2\pi t,\\ x_{12}=\frac{\pi}{2}+2\pi t,\\ x_{13}=\frac{11}{14}\pi+2\pi t,\\ x_{14}=\frac{15}{14}\pi+2\pi t,\\ x_{15}=\frac{19}{14}\pi+2\pi t,\\ x_{16}=\frac{23}{14}\pi+2\pi t,\\ x_{17}=\frac{27}{14}\pi+2\pi t.\end{cases} \qquad (7)$$

Заменив в (6) переменную l на $l=2t$ и $l=2t+1$, получим

$$\begin{cases}x_{21}=\frac{\pi}{2}+2\pi t,\\ x_{22}=\frac{3}{2}\pi+2\pi t.\end{cases} \qquad (8)$$

Из сравнения (7) и (8) виден ответ: x_{12}.

Пример 3 (МГУ, химфак, 1977) *Найти решения уравнения*

$$2-\sqrt{3}\cos 2x+\sin 2x=4\cos^2 3x, \qquad (9)$$

удовлетворяющие неравенству

$$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)>0.$$

Уравнение (9) равносильно уравнению

$$1-\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)=1+\cos 6x.$$

Поэтому его ответ:

$$\begin{cases}x_1=\frac{5}{48}\pi+\frac{\pi}{4}k\ \ (k\in\mathbf{Z}),\\ x_2=\frac{7}{24}\pi+\frac{\pi}{2}l\ \ (l\in\mathbf{Z}).\end{cases}$$

Чтобы $2x-\frac{\pi}{4}$ имело период 2π, запишем этот ответ «с периодом π». Заменив в x_1 переменную k на $k=4t$, $k=4t+1$, $k=4t+2$ и $k=4t+3$, получим

$$\begin{cases}x_{11}=\frac{5}{48}\pi+\pi t,\\ x_{12}=\frac{17}{48}\pi+\pi t,\\ x_{13}=\frac{29}{48}\pi+\pi t,\\ x_{14}=\frac{41}{48}\pi+\pi t.\end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases}2x_{11}-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{24}+2\pi t,\\ 2x_{12}-\frac{\pi}{4}=\frac{11}{24}\pi+2\pi t,\\ 2x_{13}-\frac{\pi}{4}=\frac{23}{24}\pi+2\pi t,\\ 2x_{14}-\frac{\pi}{4}=\frac{35}{24}\pi+2\pi t.\end{cases}$$

Видно, что нужному неравенству удовлетворяют x_{11} и x_{12}.

Аналогично, заменив в x_2 переменную l на $l=2t$ и $l=2t+1$, получим

$$\begin{cases} x_{21} = \frac{7}{24}\pi + \pi l, \\ x_{22} = \frac{19}{24}\pi + \pi l. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{cases} 2x_{21} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2\pi l, \\ 2x_{22} - \frac{\pi}{4} = \frac{4}{3}\pi + 2\pi l. \end{cases}$$

Нужному неравенству удовлетворяет x_{21}.

Упражнения

Решить уравнения:

1 (МГУ, мехмат, 1974). $\sqrt{2\sin 2x} + 2\sin x = 0$.

2 (МФТИ, 1974). $\frac{\cos x}{\cos 3x} - \frac{\cos 5x}{\cos x} = 8\sin x \cdot \sin 3x$.

3 (МГУ, географич. ф-т, 1977). $2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{1 + 8\sin 2x \cdot \cos^2 2x}$.

4 (МИЭМ, 1977). $\sqrt{1 - \sqrt{2}\sin x} + 2\cos x = 0$.

5 (МГУ, химфак, 1976). Найти все решения уравнения

$$4\sin^2\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3}\,(1 - \cos x - \sin x) = 4 - \sin x - 3\cos x,$$

которые являются и решением уравнения

$$\operatorname{ctg}^2 x + \left(\frac{4}{3} + \sqrt{3}\right)\cos x = 1 - \sin x.$$

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии читателей, приславших правильные решения задач Ф548—Ф557 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф548—Ф557**, справились с задачами **Ф548**, **Ф554** и **Ф555**. Остальные задачи правильно решили: *М. Агиштейн* (Москва) **56**; *М. Алексеев* (Обнинск) **51**; *И. Аполонский* (Жуковский) **50, 51**; *Р. Бабаев* (Баку) **51**; *Л. Бараз* (Свердловск) **49, 50**; *С. Баргуев* (Улан-Удэ) **49, 51, 53, 57**; *А. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) **49, 51, 52**; *М. Башкин* (Тула) **51**; *А. Браурман* (Баку) **51**; *Е. Викторов* (Москва) **51**; *С. Власенко* (Бобруйск) **56**; *М. Гаврилов* (п. Черноголовка Московской обл.) **49, 51—53, 57**; *С. Глушко* (Дрогобыч) **56**; *А. Глушков* (Йошкар-Ола) **57**; *М. Гоганов* (Караганда) **51**; *М. Гольцман* (Днепропетровск) **51, 52**; *И. Гопич* (Новосибирск) **51**; *В. Горшков* (Среднеуральск) **57**; *Д. Григорьев* (Москва) **53**; *М. Данилин* (Москва) **57**; *В. Дидух* (Львов) **56, 57**; *В. Димантман* (Баку) **51**; *С. Довбыш* (Москва) **56**; *С. Довженко* (Донецк) **50**; *Н. Житенев* (п. Черноголовка Московской обл.) **51**; *В. Жордочкин* (Орск) **51, 56**; *С. Журавель* (Североморск) **56**; *Г. Заславский* (Тбилиси) **51, 53, 56**; *Е. Зудин* (Александров) **49—52**; *Г. Ирисов* (Донецк) **51**; *Я. Каминский* (Тула) **53, 57**; *А. Канель* (Москва) **50**; *В. Кельман* (Москва) **51**; *Л. Клейман* (Москва) **51**; *Е. Коган* (Днепропетровск) **50, 51, 53, 56**; *Г. Кожаридзе* (Телави) **54**; *В. Комов* (Александров) **53, 56, 57**; *В. Коробов* (Кировоград) **50**; *О. Кравец* (Воронеж) **51**; *В. Кригер* (Кайраккум) **51**; *Р. Крис* (Киев) **53, 56**; *В. Курьян* (Ростов-на-Дону) **51**; *А. Кушнеров* (Москва) **50**; *А. Леонович* (Лида) **50, 51**; *С. Логунов* (Москва) **50, 52**; *М. Локсин* (Баку) **51**; *Д. Людмирский* (Киев) **51, 52**; *Л. Ляпин* (Гомель) **49—51, 56**; *А. Мазуркевич* (п. Лыткарино Московской обл.) **50, 51**; *З. Максумов* (Ташкент) **53**; *А. Масленников* (п. Н-Тарьял Марийской АССР) **52; 57**; *В. Матчишин* (Целиноград) **50, 51**; *Е. Мельничук* (с. Черные Воды Хмельницкой обл.) **56**; *А. Минаев* (Саратов) **52**; *А. Могильнер* (Свердловск) **51, 56, 57**; *Г. Молчанов* (Саратов) **56**; *М. Морозов* (Ашхабад) **51, 52**; *Ю. Морозов* (Бугульма) **50**; *И. Муромцев* (Москва) **51, 52**; *А. Мухачев* (Салават) **56**; *А. Мыльников* (п. Черноголовка Московской обл.) **56**; *М. Наймарк* (Первоуральск) **53**; *В. Наталич* (Ашхабад) **53**; *Д. Овсянников* (Ленинград) **50, 51, 53**; *А. Оглоблин* (Кутаиси) **56, 57**; *А. Одинцов* (Москва) **53, 56, 57**; *И. Омелян* (Львов) **51, 56, 57**; *А. Орлов* (п. Черноголовка Московской обл.) **52, 56, 57**; *А. Павенис* (п/о Ногале ЛатвССР) **56**; *А. Павлычев* (Рига) **56**; *А. Перов* (Москва) **51, 56**; *О. Погодаев* (Ангарск) **51**; *А. Подвязников* (Мосальск) **51**; *В. Подольский* (Тамбов) **51**; *А. Попович* (Апатиты) **56**; *С. Прядкин* (Киев) **49—51**; *С. Равняго* (Золочев Львовской обл.) **56**; *Ф. Ратников* (Ленинград) **50, 51, 53, 56**; *М. Рейтман* (Москва) **50, 56**; *И. Романовский* (Лида) **50—52**; *И. Рузин* (Ленинград) **49—51**; *И. Савенков* (п. Лысые Горы Саратовской обл.) **49, 50**; *С. Сафронюк* (Ровно) **56**; *В. Семенов* (Киев) **56**; *В. Середа* (Львов) **56**; *П. Сильвестров* (Новосибирск) **49, 51**; *С. Смирнов* (Ташкент) **53**; *Г. Солдак* (Минск) **50**; *Д. Сорока* (Запорожье) **56**; *А. Сромин* (Ленинград) **49—51**; *С. Стешенко* (с. Малоданиловское Харь-

(Окончание см. на с. 57)

Л. Виленкина, Г. Звенигородский

IV Всесоюзная летняя школа юных программистов

В этой статье подробно рассказывается о работе школы юных программистов, проходившей в июле — августе в Новосибирском академгородке. Наши читатели узнают, какие задачи могут порой решать совсем юные программисты. Для учащихся нашей Заочной школы программирования статья закрепит освоение языка Робик и подготовит к изучению языка Рапира, которое начнется в «Кванте», 1980, № 1.

С 26 июля по 10 августа 1979 года в Новосибирском академгородке проходила IV Всесоюзная летняя школа юных программистов, в работе которой участвовало более 120 школьников. Среди них были представители Харькова и Находки, Киева и Ангарска, Ленинграда и Москвы и многих других городов нашей страны.

Торжественное открытие Школы состоялось в Малом зале Дома ученых Сибирского отделения АН СССР, где часто проходят научные съезды, симпозиумы и конференции. Перед участниками Школы выступили председатель Научного совета по проблемам образования при Президиуме СО АН СССР, ректор Новосибирского университета академик В. А. Коптюг, заведующий отделом информатики ВЦ СО АН СССР, научный руководитель Летней школы член-корреспондент АН СССР А. П. Ершов и другие ученые.

На лекционных и семинарских занятиях, проходивших в Новосибирском университете, школьники познакомились с современными языками и системами программирования (Рапира, Паскаль, Сетл, Поплан), с системой машинной графики Шпага, позволяющей выполнять на ЭВМ различные рисунки, схемы чертежи, изготовлять диапозитивы, снимать мультипликационные фильмы. Юным программистам рассказывали о различных способах и приемах программирования, их учили применять ЭВМ для решения самых разнообразных задач, работать на различных внешних устройствах, пользоваться архивными системами Краб и Хамелеон.

Пожалуй, самыми интересными были практические занятия: в течение нескольких дней школьники получили возможность работать в ВЦ СО АН СССР — одном из лучших в стране вычислительных центров, оборудованном самой современной техникой.

Во время работы Школы были проведены две конференции, на которых школьники рассказали о своих работах и узнали о результатах работы своих товарищей. Большинство представленных на конференции работ выполнялось по заказам промышленных предприятий, научно-исследовательских институтов, учебных заведений. Такие работы имеют не только учебное, но и большое практическое значение. Результаты некоторых из них опубликованы в научной литературе или рекомендованы к публикации по итогам Школы.

О некоторых работах, получивших дипломы первой, второй и третьей степени, мы расскажем в этой заметке.

Как обучить ЭВМ языку?

В Новосибирской школе юных программистов, как и в Заочной школе программирования «Кванта», учащиеся, освоившие учебный язык Робик, приступают к изучению более сложных языков программирования, обладающих большими возможностями и позволяющих решать не только учебные, но и практически важные прикладные задачи. Один из таких языков — учебно-производственный язык Рапира — будет описан на ближайших уроках Заочной школы программирования.

Задача *Анатолия Величко* (Новосибирск, 8 кл.) состояла в том, чтобы научить этому языку вычислительную машину БЭСМ-6. Составленная им программа переводит все конструкции Рапиры в конструкции языка Поплан, который машина БЭСМ-6 понимает. Пожалуй, самая сложная часть работы заключалась в организации работы с памятью.

На уроках Заочной школы уже рассказывалось о том, как работать с памятью на языке Робик. Имеющееся в этом языке предписание присваивания позволяет записать в блок памяти одно число или одну строку текста. Для того чтобы запомнить в памяти ЭВМ таблицу или список чисел (например, страницу школьного журнала с оценками), в Робике нужно выделять отдельный блок памяти для каждой клетки таблицы и придумывать для этого блока новое имя.

Понятно, что гораздо удобнее было бы поместить всю таблицу в один и тот же блок памяти. Однако для работы с таблицей, хранящейся в таком блоке, нужно, очевидно, уметь заполнять и читать отдельные ее клетки, то есть работать не только с блоком памяти в целом, но и с отдельными его частями.

В большинстве языков программирования предусмотрена возможность работы с таблицами, в каждой клетке которых записано число. Но во многих программах нужно хранить вперемежку в одном блоке памяти разные объекты (числа, тексты, таблицы и т. д.). Например, информация о каждом химическом элементе в таблице Менделеева содержит атомный номер элемента (число), название (строка текста), обозначение (строка текста) и атомный вес (число) (рис. 1). Конечный набор объ-

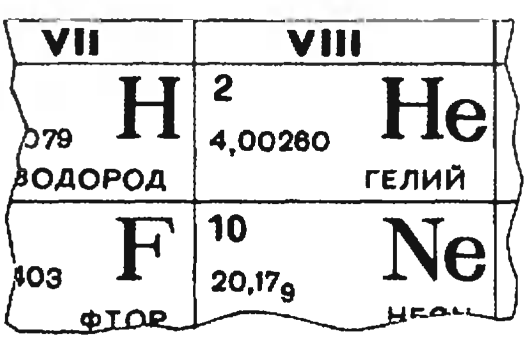


Рис. 1.

ектов, расположенных в определенном порядке, называется в математике *кортежем*. Например, изображенную на рисунке клетку таблицы Менделеева можно представить таким кортежем:

⟨2, 'Гелий', 'He', 4.00260⟩

Чтобы прочитать в памяти отдельный элемент кортежа, нужно назвать имя блока и указать порядковый номер нужного элемента. Например, если приведенный здесь кортеж записан в память под именем A, то его первый элемент (число 2) обозначается A [1], а запись A [3] обозначает третий элемент кортежа, то есть текст 'He'.

Один кортеж может быть элементом другого кортежа. Например, всю таблицу Менделеева удобно записать в один блок памяти в виде большого кортежа, каждый элемент которого — это маленький кортеж, описывающий отдельную клетку:

⟨1, 'Водород', 'H', 1.0079⟩,
⟨2, 'Гелий', 'He', 4.0026⟩,...

В памяти машины приходится хранить также и неупорядоченные наборы объектов, т. е. просто множества. Процедуры работы с памятью, разработанные Анатолием Величко при реализации языка Рапира, позволяют не только записывать множества и кортежи в памяти ЭВМ и выбирать из них отдельные элементы, но и выполнять различные математические операции над ними, например, находить объединение и пересечение множеств и т. п.

Юрий Ширман (Харьков, 8 кл.) решал более частную задачу: как освободить блок памяти, если хранящаяся в нем информация больше не нужна. Иметь такую возможность очень важно. Довольно часто случается так, что вся память машины заполнена и новую информацию некуда записать, хотя часть старой уже не нужна и ее можно стереть. В некоторых языках и системах сделать это довольно просто, но в системе ДОС ЕС, с которой работали харьковские школьники, такая возможность не предусмотрена. Юрий написал на языке PL-1 серию процедур, позволяющих программисту в любой момент запросить блок памяти нужного размера или освободить занятый блок.

Семиклассница *Наталья Глаголева* (Новосибирск) занималась усовершенствованием языка Поплан — одного из распространенных диалоговых языков программирования. Существенный недостаток этого языка состоит в том, что текст процедуры, записанной в память ЭВМ, невозможно ни проверить, ни исправить: если в процедуре обнаружена ошибка, то всю процедуру нужно запоминать заново. Разработанная Наташей программа позволяет изменять и исправлять тексты процедур примерно так же, как это делается в Робике.

Бельчонок ведет поиск

Огромную помощь специалистам самых различных отраслей знания оказывают диалоговые информационные системы, позволяющие быстро найти и проанализировать нужные сведения. При разработке таких систем важно уметь хранить информацию в форме, удобной для машины, а общение (диалог) с машиной организовать в форме, удобной для человека. Как правило, эти системы обслуживают специалистов, хорошо знающих свою науку, но слабо знакомых с программированием, поэтому вопросы и ответы при работе системы должны формулироваться так, чтобы они были понятны такому специалисту. Скажем, химик поймет вопрос «Чему равен атомный вес?», но формулировка «Назовите четвертый элемент такого-то кортежа» его явно не устроит — ведь он не обязан помнить, в каком блоке и под каким номером хранится интересующая его информация. Мы расскажем о трех информационных системах, представленных на конференцию.

Бесспорно, наибольший интерес вызвала диалоговая система для анализа структуры белковых соединений «Бельчонок».

Как известно, белки состоят из аминокислот, соединенных в цепочки, порой очень длинные (от нескольких десятков до нескольких тысяч).

Различных же аминокислот немного — около двадцати. Составы многих белков известны: они занесены в специальные каталоги в виде кортежей аминокислот.

Задача системы «Бельчонок» состояла в том, чтобы по обнаруженному в ходе эксперимента «обрывку» белковой цепочки выяснить, в состав каких белков она могла бы входить. Разумеется, это можно сделать «вручную» — перебрав все справочники и каталоги, — но это займет много времени, и, главное, всегда сохраняется опасность, что что-то пропущено.

По заказу Института органической химии СО АН новосибирские восьмиклассники *Татьяна Вайнштейн* и *Анатолий Величко* разработали систему «Бельчонок», которая выполняет эту работу гораздо быстрее и качественнее. Если раньше на нее иногда уходило несколько дней, то теперь машина находит нужную информацию за несколько секунд.

В памяти ЭВМ постоянно хранятся необходимые сведения о белках: структура белка, название, физические и химические свойства и ссылка на литературу, в которой он подробно описан.

Каждая аминокислота обозначается буквой латинского алфавита, например *A* — аланин, *V* — валин и т. п.; структура каждого белка представлена в виде последовательности букв, то есть в виде строки текста.

Под действием некоторых химических реактивов (ферментов) молекулы белка разрываются в определенных местах. Для того чтобы запомнить эту информацию, каждый рассматриваемый фермент обозначается цифрой, которая ставится в месте разрыва. Если бы существовал, например, белок Б1 всего из двух различных аминокислот *A* и *V* и под действием ферментов 1 и 2 он разрывался бы так, как это изображено на рисунке 2, то его структура записывалась бы в виде строки

'*AV1V2AA1A2VA1VV*'

Остальные сведения о белке также хранятся в виде строки, а информация о каждом белке — как кортеж из строк.

Для того чтобы сообщить системе, какая именно информация требуется в данный момент, предусмотрены несколько директив. Например, по директиве ПОИСК машина отпечатает список всех белков, в которых встречается заданный участок структуры, по директиве ЗНАК — перечислит участки, на которые распадается молекула белка под действием определенного фермента, а директива СПРАВКА позволяет получить сведения о нужном белке: узнать его структуру, физические и химические свойства, найти ссылку на литературу, где этот белок описан подробно.

Предположим, что информация о придуманном нами белке Б1, структура которого изображена на рисунке 2, хранится в памяти ЭВМ. Тогда протокол диалога с машиной мог бы выглядеть так (настоящий протокол мы не приводим, так как он занял бы слишком много места из-за большой длины аминокислотных цепочек в настоящих белках)

— ПОИСК
— КАКАЯ КОНФИГУРАЦИЯ ВАС ИНТЕРЕСУЕТ?
— *AV*

—БЕЛОК ПОЗИЦИЯ
Б1..............................1
Б1..............................6
Б1..............................8
В12............................197
...*)

*) Далее машина печатает все белки, содержащие конфигурацию *AV* и ее позицию, по той же схеме.

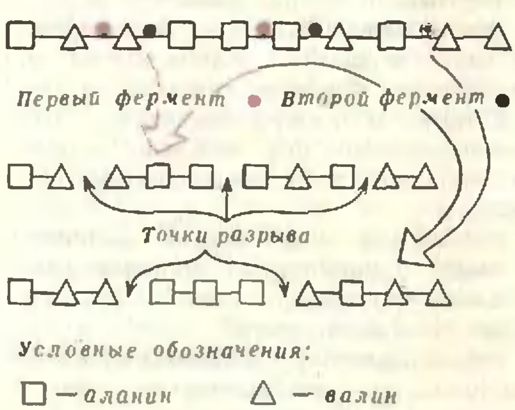


Рис. 2.

Член-корреспондент АН СССР А. П. Ершов и юные программисты

ЖДУ ВАШИХ УКАЗАНИЙ
— ЗНАК
— КАКОЙ БЕЛОК ВАС ИНТЕРЕСУЕТ?
— Б1
— ЗНАК РАЗРЫВА?
— 1
— *AV, VAA, AVA, VV*
ЖДУ ВАШИХ УКАЗАНИЙ
— СПРАВКА
— КАКОЙ БЕЛОК ВАС ИНТЕРЕСУЕТ?
— Б1
— ЧТО ВАС ИНТЕРЕСУЕТ: СТРУКТУРА, ЛИТЕРАТУРА ИЛИ КОММЕНТАРИЙ?
— ЛИТЕРАТУРА
— ЖУРНАЛ КВАНТ № 12 1979 Г
ЖДУ ВАШИХ УКАЗАНИЙ
— КОНЕЦ
— СИСТЕМА БЕЛЬЧОНОК РАБОТУ ЗАКОНЧИЛА
ДО СВИДАНИЯ!

Две другие информационные системы представили на конференцию харьковские школьники. Шестиклассница *Наталья Вольфовская* разработала программу для работы с научной литературой в библиотеках. Программа позволяет быстро получить список всех книг и статей, относящихся к заданной теме.

А программа «Индекс», разработанная *Алексеем Карножицким* и *Игорем Розенбергом* (8—9 кл.), предназначена для получения справок о почтовых индексах. Интересная особенность программы состоит в том, что ею можно пользоваться с любого домашнего телефона: достаточно набрать номер — и телефон подключается к ЭВМ. После этого машине сообщается название нужного города. Его приходится кодировать, поскольку телефонный диск не очень удобен для набора текста. Можно, например, вместо каждой буквы набирать ее номер по алфавиту, но это займет довольно много времени.

Был предложен менее трудоемкий способ: достаточно набрать номера первой и последней букв в названии города и общее число букв в названии. В ответ на такой запрос ЭВМ включает магнитофонную пленку с того места, где записан почтовый индекс нужного города. Эта система разработана по заказу харьковского почтамта.

Второклассник обучает ЭВМ

Несложную, но красивую программу, позволяющую моделировать на ЭВМ простейшие ядерные реакции, разработали самые юные участники конференции — второклассник *Леонид Рабинович* и третьеклассник *Сергей Гавриленко* из Новосибирска.

Известно, что в ядерных реакциях синтеза при слиянии ядер двух атомов может получиться ядро нового химического элемента. Его атомный номер, то есть число протонов в ядре, будет равен сумме атомных номеров участвующих в реакции элементов. Это простое правило и положено в основу программы.

В памяти ЭВМ постоянно хранится таблица Менделеева. Программа запрашивает в диалоговом режиме обозначения и атомные веса участвующих в реакции ядер, находит по таблице их атомные номера, вычисляет атомный номер элемента, получающегося в результате реакции, и по той же таблице находит его обозначение. Вот пример диалога с этой программой в процессе моделирования реакции синтеза гелия (рис. 1):

— ОБОЗНАЧЕНИЕ ПЕРВОГО ЭЛЕМЕНТА?
— Н
— АТОМНЫЙ ВЕС?
— 1
— ОБОЗНАЧЕНИЕ ВТОРОГО ЭЛЕМЕНТА?
— Н
— АТОМНЫЙ ВЕС?
— 3
— РЕАКЦИЯ:
Н+Н=Не
РЕЗУЛЬТАТ РЕАКЦИИ:
НАЗВАНИЕ — 'ГЕЛИЙ',
ОБОЗНАЧЕНИЕ — 'Не',
АТОМНЫЙ ВЕС — 4

После незначительных усовершенствований эту программу можно использовать на уроках физики при изучении ядерных реакций и строения атома.

Модель машины Тьюринга

Программа *Виталия Цикозы* (Новосибирск, 7 кл.) предназначена в основном для студентов, изучающих теорию алгоритмов и теоретическое программирование. В этих дисциплинах широко используется представление о так называемой *машине Тьюринга* — универсальном логическом устройстве с очень простой системой команд.

В теоретических исследованиях такая «машина» иногда оказывается удобнее настоящих ЭВМ. Виталий подготовил программу, моделирующую на ЭВМ БЭСМ-6 работу машины Тьюринга. На экране терминала можно увидеть всю «конструкцию» машины: запоминающее устройство в виде движущейся ленты, головку записи и считывания и устройство управления. Составив программу для машины Тьюринга, студент может проследить на экране за работой этой программы во всех деталях (раньше проверить такие программы приходилось вручную).

ЭВМ создает мультфильмы

Пожалуй, наибольший интерес у всех участников и гостей конференции вызвала секция машинной графики. Семиклассница *Асия Салихова* (Новосибирск) рассказала о структуре учебной графической системы Шпага, разработанной ею вместе с восьмиклассницей *Натальей Соколовой*, и об особенностях работы с этой системой в разных языках программирования *).

Третьеклассница *Анна Вайнштейн* (Новосибирск) рассказала о том, как с помощью систем Шпага и СМОГ можно составлять програм-

*) Статья о системе Шпага, написанная ее разработчицами, будет опубликована в одном из ближайших номеров журнала.

Рис. 3.

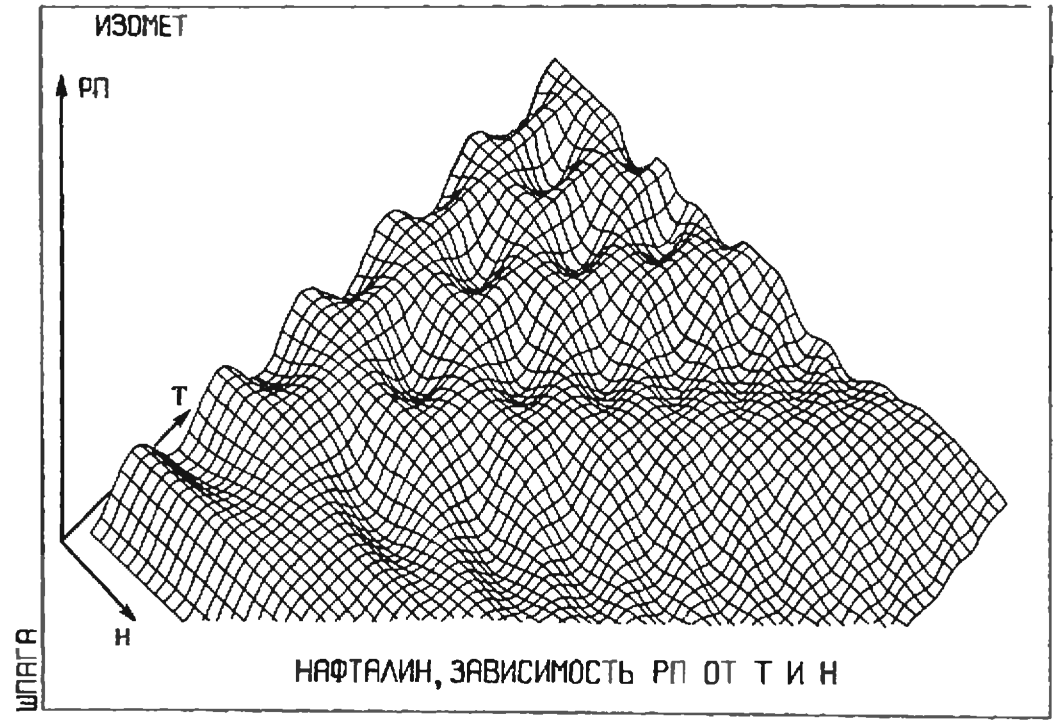


Рис. 4.

мы для изготовления на ЭВМ мультипликационных фильмов. После этого доклада был показан первый в СССР мультфильм, созданный школьниками младших классов с помощью ЭВМ. На рисунке 3 показана заставка этого мультфильма (рыбка проплывает при показе вдоль всего кадра) и два кадра из мульфильма «Ракета поражает самолет». В составлении программ для отдельных кадров этого фильма принимали участие *Сергей Гавриленко* (3 кл.) и *Володя Фишелев* (2 кл.).

Работа *Светланы Урюпиной* и *Анны Филатовой* (Новосибирск, 3—4 кл.) выполнялась по заказу сотрудников Института химической кинетики и горения СО АН СССР. Задача заключалась в том, чтобы построить серию графиков довольно сложных функций.

Школьницы успешно справились с заданием, удачно использовав при этом основные конструкции различных языков программирования. Например, координатная сетка, которая почти на всех графиках должна была выглядеть одинаково, изображалась с помощью отдельной процедуры, внутри которой применялось несколько циклических предписаний.

Функции, зависящие от двух переменных, для большей наглядности изображались двумя способами: во-первых, при помощи аксонометрической проекции (рис. 4), во-вторых, при помощи системы маркировки, позволяющей изобразить на одном рисунке несколько графиков, каждый из которых отмечен специальным значком (маркером) — рисунок 5. Для двух наиболее сложных функций были созданы мультфильмы, показывающие, как изменяется график при усилении магнитного поля.

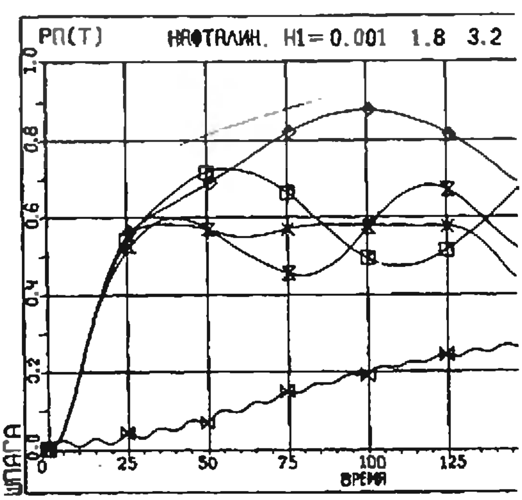


Рис. 5.

В общей сложности девочки составили свыше сорока процедур для построения восьмидесяти графиков.

Борис Слуцкий (Новосибирск, 7 кл.) разработал программу для изображения пространственной структуры белковых молекул. Взаимное расположение различных аминокислот в белковых молекулах играет большую роль в биохимии, и специалистам часто бывает нужно наглядно представлять строение той или иной молекулы. Борис не только «научил машину» рисовать отдельные молекулы на бумаге (рис. 6), но и разработал программу для съемки мультфильма, показывающего, как молекула поворачивается.

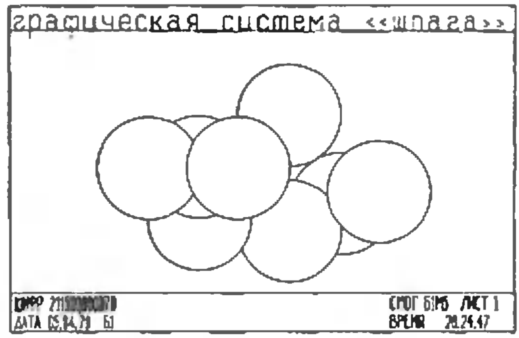


Рис. 6.

ЭВМ классифицирует

Большое внимание на конференции было уделено проблеме распознавания образов. Основная трудность этой проблемы заключается в том, что расплывчатые понятия «близко», «похоже» и т. п. нужно сделать настолько точными, чтобы можно было сформулировать и решить на машине соответствующие задачи.

Программа *Михаила Дуна* и *Андрея Кагала* (Харьков, 7 кл.) выполняет группирование деталей в технологически подобные группы. Каждая деталь имеет так называемую технологическую карту, в которой описано, каким образом нужно выполнить каждую из операций обработки. Если пронумеровать способы выполнения операции, то вместо карты можно написать «технологическое число», в котором каждая цифра говорит, каким образом нужно выполнить соответствующую операцию. Например:

1 — обработать фрезой № 1,
2 — обработать фрезой № 2;
1 — покрасить в синий цвет,
2 — покрасить в серый цвет.

Тогда 11 означает, что деталь нужно обработать фрезой № 1 и покрасить в синий цвет. Задача состоит в том, чтобы выбрать технологически подобные детали, то есть детали, для которых некоторые операции обработки совпадают. Программа позволяет решить эту задачу, выбирая детали, технологические числа которых имеют в определенных позициях одинаковые цифры.

Более сложную задачу решали *Галина Шварц* и *Анна Беспрозванная* (Москва, 9 кл.). Они разработали программу, классифицирующую объекты в многомерных пространствах.

Общая формулировка задачи такова. Каждый из n объектов имеет k признаков, значение каждого признака — это число (например: объекты — различные заводы, а признаки — экономические показатели их работы). Тогда каждый объект можно представить себе как точку в многомерном пространстве: значения признаков будут координатами этой точки. В этом случае близкими можно считать точки, расстояния между которыми не слишком велики. Программа, составленная московскими школьницами, позволяет разделить заданный набор точек на несколько групп близких между собой точек, причем число таких групп задается заранее. Программа предназначена для применения в экономике промышленности при разделении предприятий на группы по величине, объему и ассортименту продукции.

Андрей Тартаковский (Харьков, 8 кл.) разработал программу, которая находит, с помощью какого аффинного преобразования один чертеж можно перевести в другой. Эта программа применяется психологами при изучении зрительной функции.

Дмитрий Гершуни (Москва, 9 кл.) написал программу, вычисляющую количество различных систем голосования. Ему удалось так организовать работу машины, что перебор 2^{15} вариантов происходит меньше чем за минуту.

Спрашивайте — отвечаем

Дорогая редакция!

К Вам обращается бывший школьник.

Я закончил школу два года назад. Это был первый год, когда школа выпускала по новой программе. После школы я служил в рядах Советской Армии, а сейчас хочу продолжить свое образование. Конечно, я многое забыл и самостоятельно подготовиться в институт мне трудно. Многие мои сверстники занимаются с репетиторами, но мне это не по карману. Есть ли какой-нибудь другой способ подготовиться в институт?

Ваш читатель В. Доронин

Вопрос о репетиторстве не нов. Эта проблема серьезно и обстоятельно рассматривалась и рассматривается на страницах газет и журналов, отражается в радио- и телепередачах. Наш журнал также поднимал вопрос о репетиторстве.

В этой статье мы хотим рассказать вам о системе подготовки абитуриентов в институты, осуществляемой государством, эффективность которой во много раз превышает эффективность занятий с репетиторами.

1. С 1969 года при высших учебных заведениях открыты *подготовительные отделения*.

На подготовительное отделение принимаются лица с законченным средним образованием из числа передовых рабочих, колхозников и демобилизованных из рядов Вооруженных Сил СССР. Рабочие и колхозники, направляемые на подготовительное отделение, должны иметь стаж работы не менее одного года, т. е. полных 12 месяцев ко дню начала занятий. Направленные на подготовительное отделение представляют заявление, направление с места работы (подписанное руководителем предприятия или командиром войсковой части), документ о среднем образовании (в подлиннике), характеристику, 6 фотографий (снимок без головного убора, размером 3×4) и медицинскую справку о состоянии здоровья (форма № 286).

Демобилизованный, не имеющий направления от командования воинской части и вернувшийся работать на то же предприятие, где он работал до призыва в армию, может поступить на подготовительное отделение по направлению этого предприятия, если общий стаж его работы (на данном предприятии) составляет не менее одного года по совокупности — до службы в армии и после демобилизации.

Прием на подготовительное отделение производится путем индивидуального устного собеседования, целью которого является не столько выяснение объема знаний поступающего на отделение, сколько выявление его потенциальных возможностей, общего уровня развития, определение степени сознательности выбора им данного вуза. При этом особо ценится более или менее близкое знакомство с выбранной им специальностью. Собеседование проводится по двум-трем предметам из числа изучаемых на подготовительном отделении данного института (более подробно о подготовительных отделениях вы можете прочитать в нашем журнале: «Квант», 1978, № 12, с. 47).

2. По решению Министерства высшего и среднего специального образования СССР практически при всех вузах страны организованы *очные и заочные курсы* по подготовке в институты. Эти курсы, как правило, платные, но плата за обучение минимальная (35 р. за весь цикл).

В качестве примера мы расскажем о работе подготовительных курсов при МИСИ им. Куйбышева (аналогично работают подготовительные курсы и при других институтах).

Основная задача курсов — помочь производственникам и демобилизованным воинам, имеющим значительный перерыв в учебе, повторить программу средней школы без отрыва от производства и подготовиться к сдаче вступительных экзаменов в вуз, а также помочь учащимся десятых классов более глубоко усвоить наиболее трудные вопросы школьной программы.

Занятия на курсах ведутся как по новой, так и по старой программам. Работа курсов проводится в несколько потоков с продолжительностью от 1 до 10 месяцев.

Занятия по математике и физике на очных подготовительных курсах проходят следующим образом. Абитуриентам читаются лекции по основным разделам курса; при этом основное внимание уделяется вопросам, часто вызывающим затруднения при ответах на экзаменах. По каждой пройденной теме регулярно проводятся практические занятия, на которых рассматриваются типовые задачи по данному разделу, а затем учащиеся сдают «домашнее задание», состоящее из 20—25 задач и списка теоретических вопросов. Прием «домашнего задания» по форме близок к вузовскому коллоквиуму.

Два раза в год (в январе — феврале и в мае) слушатели подготовительных курсов сдают письменные и устные зачеты. Эти зачеты проходят в обстановке, близкой к экзаменационной. Билеты зачетов составлены по типу экзаменационных, принимают зачеты члены предметных комиссий. Все это является хорошей психологической подготовкой будущих абитуриентов, помогает им оценить уровень требований на вступительных экзаменах в вуз, выявить недостатки в своих знаниях и своевременно принять меры для их устранения.

Прием на очные подготовительные курсы начинается 1 сентября и продолжается до 1 июля (на разные потоки). Поступающие на курсы представляют документ о среднем образовании или справку с места учебы, справку с места работы (для работающей молодежи), одну фотографию, квитанцию почтового отделения связи о перечислении 35 р. на расчетный счет института.

Для поступления на заочные курсы необходимо выслать в адрес курсов заявление на имя ректора (113114, Москва, Шлюзовая набережная 8, МИСИ, комн. 225а, подготовительные курсы).

Поступившим на заочные курсы институт высылает методические пособия по математике, физике, русскому языку и литературе, а также контрольные работы. Контрольная работа состоит из теоретических вопросов и задач. Изучение каждой темы заканчивается контрольной работой, которую слушатель должен выслать в указанные графиком сроки в институт.

В процессе выполнения контрольной работы слушатель может обращаться к преподавателям с вопросами теоретического и практического характера, а также посещать раз в месяц консультации.

Учащиеся заочных курсов, выполнившие контрольные работы, приглашаются перед экзаменами на очные курсы. Занятия проводятся ежедневно, кроме воскресенья, с 1 по 31 июля (абитуриенты обеспечиваются общежитием).

3. Вот уже в течение девяти лет работают *Московские телевизионные курсы по подготовке молодежи в вузы*, организованные совместно Центральным телевидением и Министерством высшего и среднего специального образования СССР.

Подготовку телепередач и организацию занятий совместно с Главной редакцией научно-популярных и учебных программ Центрального телевидения осуществляют: на отделениях математики и физики — Московский инженерно-физический институт, на отделении русского языка — Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова. Курирует работу телекурсов Совет ректоров высших учебных заведений г. Москвы.

На телекурсах в основном принята лекционная форма занятий, однако значительная часть телеуроков отводится под практические занятия, консультации и обзорные передачи. Телезанятия проводят ведущие ученые и преподаватели московских вузов. Учебные передачи сопровождаются демонстрациями экспериментов, физических приборов, показом фрагментов из кинофильмов, фотографий и т. п.

Для закрепления знаний слушателям регулярно предлагаются домашние задания, состоящие из задач, примеров и текстов различной трудности. Как правило, задания соответствуют тематике лекций; выполнение некоторых заданий требует использования знаний, полученных в течение всего предшествующего периода занятий. Домашние задания публикуются в еженедельном обозрении программ Центрального телевидения и радиовещания «Говорит и показывает Москва».

Ответы слушателей на домашние задания проверяются преподавателями курсов. Результаты проверки заносятся в картотеку, после чего почтовые карточки с ответами возвращаются адресатам. Кроме того, в течение года регулярно публикуются контрольные работы по пройденным темам и проводятся контрольные опросы во время телепередач.

На телекурсах проводятся очные зачеты: зимой (примерно в январе — феврале) и весной (в конце апреля — в мае). Наряду с приемом зачетов проводятся периодические очные консультации.

На очные зачеты и консультации вызываются слушатели, активно и систематически занимающиеся на телекурсах. Успешно сдавшие зачеты получают в конце учебного года Свидетельство об окончании Московских подготовительных телекурсов.

В 1979/80 учебном году слушателям еженедельно предлагаются передачи: в понедельник — по математике и по физике, во вторник — по русскому языку; в среду — по математике и по физике.

Передачи «Для поступающих в вузы» могут смотреть жители примерно 150 областных и районных центров Европейской части СССР, Украины, Белоруссии, Прибалтики, Молдавии, автономных республик Поволжья, районов Северного Кавказа и Северного Казахстана.

На подготовительные курсы принимаются все желающие. Прием на телекурсы проводится без конкурса; обучение — бесплатное.

Для поступления на телекурсы нужно прислать на телевидение заявление, написанное в произвольной форме, и указать — работает поступающий или учится. Кроме того, необходимо прислать конверт с маркой и обратным адресом; в этом конверте слушателю будет отослана регистрационная карточка с присвоенным ему шифром.

Слушателям курсов будут регулярно высылаться календарно - тематические планы и методические указания.

Адрес телекурсов: 113162, Москва, Шаболовка 37, Главная редакция научно-популярных и учебных программ, Московские подготовительные телекурсы.

М. Смолянский

Новые книги

В этом номере мы публикуем краткие аннотации на книги по математике и физике, вышедшие в IV квартале 1979 года.

Математика

Издательство «Наука»

1. Успенский В. А. *Машина Поста.* Объем 4 л., тираж 50 000 экз., цена 15 к.

Машина Поста — это очень простая «абстрактная» (т. е. воображаемая) вычислительная машина. На машине Поста можно запрограммировать — в известном смысле — любые алгоритмы. Изучение машины Поста можно рассматривать как начальный этап обучения теории алгоритмов и программированию.

Брошюра доступна и ученикам младших классов.

2. Арлазаров В. Л., Донской М. В., Адельсон-Вельский Г. М. *Машины играют в шахматы.* Объем 10 л., тираж 30 000 экз., цена 65 к.

Работа посвящена одной из проблем так называемого искусственного интеллекта — созданию программ для машин, играющих в шахматы. Основной принцип таких программ — перебор позиций — является частным случаем общего метода перебора, широко применяемого при решении задач дискретной математики. В книге рассказывается о достигнутых успехах в этой области и о дальнейших перспективах.

3. Симонов Р. А. *Кирик Новгородец — ученый XII в.* Объем 6 л., тираж 30 000 экз., цена 40 к.

В 1136 году 26-летний новгородец Кирик написал научный трактат, посвященный единицам счета времени, основным понятиям календаря и использованию этих сведений в хронологии. Попутно древнерусский автор демонстрирует высокое уменье счета, производя точные вычисления с числами порядка десятков миллионов. В книге используются новые документальные данные о Кирике.

4. Стеклов В. А. и Кнейзер А. *Переписка.* Объем 7 л., тираж 15 000 экз., цена 50 к.

В книге рассказывается о жизни и деятельности двух известных ученых конца XIX — начала XX века: русского математика и механика В. А. Стеклова (1864—1924) и немецкого математика А. Кнейзера (1862—1930). Их обширная переписка интересна как своим научным содержанием, так и заключенным в ней историческим материалом.

5. Никифоровский В. А. *Из истории алгебры XVI—XVII столетий.* Объем 10 л., тираж 40 000 экз., цена 65 к.

XVI и XVII столетия являются важным рубежом в развитии алгебры — был найден метод решения уравнений третьей и четвертой степеней и в основном завершена разработка алгебраической символики. Основной вклад в алгебру этого времени внесли Кардано, Виет, Декарт, Ньютон, Лейбниц. Анализу их творчества и посвящена настоящая работа.

6. Добровольский В. А. *Василий Петрович Ермаков.* Объем 5 л., тираж 15 000 экз., цена 35 к.

Научно-педагогическая и общественная деятельность В. П. Ермакова (1845—1922) оставила заметный след в истории математики и ее преподавания. Он был не только крупным ученым, но и автором многих интересных работ по методике математики, организатором и издателем «Журнала элементарной математики». В предлагаемой книге рассказывается о жизненном пути ученого и о его вкладе в различные отделы математики.

7. Гутер Р. С., Полунов Ю. Л. *Джон Непер (1550—1617).* Объем 12 л., тираж 15 000 экз., цена 90 к.

Книга содержит биографию и анализ творчества Джона Непера — одного из крупнейших математиков XVI—XVII столетий, изобретателя логарифмов.

Издательство «Просвещение»

8. Фридман Л. М., Турецкий Е. Н., Стеценко В. Я. *Как научиться решать задачи.* Объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 30 к.

В этой книге авторы пытаются научить читателя решать не какие-то конкретные задачи, а задачи вообще. Они приводят способы решения наиболее часто встречающихся школьных математических задач и некоторых задач повышенной трудности.

Издательство «Мир»

9. Фрид Э. *Элементарное введение в абстрактную алгебру.* Перевод с венг. Объем 20 л., тираж 75 000 экз., цена 1 р. 40 к.

Книга крупного венгерского математика посвящена одному из наиболее важных и бурно развивающихся разделов современной математики — абстрактной алгебре. Написанная простым языком, она позволяет овладеть основными понятиями современной алгебры.

Физика

Издательство «Наука»

1. Бутиков Е. И., Быков А. А., Кондратьев А. С. *Физика в примерах и задачах.* Для поступающих в вузы. Объем 20 л., тираж 300 000 экз., цена 80 к.

Книга занимает промежуточное положение между учебником и сборником задач и является логическим продолжением книги «Физика» тех же авторов, вышедшей в 1978 году.

В книге содержится в основном весь материал, входящий в программу вступительных экзаменов. Большое количество задач способствует лучшему пониманию материала.

2. Маковецкий П. В. *Смотри в корень.* Сборник любопытных задач и вопросов. Объем 18 л., тираж 300 000 экз., цена 80 к.

Эта книга выходит уже четвертым изданием, и популярность ее растет от издания к изданию. В книге собрано большое количество оригинальных задач. Почти в каждой задаче можно встретиться с некоторыми неожиданностями, чаще всего в ответе. Иногда неожиданность содержится в постановке вопроса или в подсказке его решения. Парадоксальность задач подчеркивается их юмористическим освещением и шуточными эпиграфами к ним.

3. Цесевич В. П. *Что и как наблюдать на небе.* Издание 5-е, переработанное. Объем 20 л., тираж 80 000 экз., цена 1 р.

Книга является хорошим пособием для организации любительских наблюдений над небесными светилами. Она содержит описание звездного неба, основных понятий астрономии и астрофизики, освещает современные данные о телах Солнечной системы — Луне и планетах, о Солнце и звездах.

В книге излагаются различные способы наблюдений, доступных любителю астрономии, и обработки этих наблюдений.

Издательство «Просвещение»

4. Космодемьянский А. А. *К. Э. Циолковский.* Объем 8 л., тираж 80 000 экз., цена 25 к.

В книге рассказано о жизни и деятельности замечательного русского ученого Константина Эдуардовича Циолковского. Приведены интересные сведения о работах Циолковского по аэронавтике.

Издательство «Мир»

5. Девис П. *Пространство и время в современной картине Вселенной.* Перевод с английского. Объем 14 л., тираж 30 000 экз., цена 72 к.

В книге английского астрофизика П. Девиса в популярной форме рассказывается об истории развития и современном состоянии теории относительности, космологии, астрофизики высоких энергий.

6. Уокер Дж. *Физический фейерверк.* Перевод с английского. Объем 22 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 50 к.

Эта книга — первый сборник задач по физике, включенный в серию «Задачи и олимпиады», которую издательство «Мир» выпускает с 1975 года. В книге собрано свыше 600 оригинальных задач-вопросов на самые различные темы и ответы на них. Большинство задач связано с различными явлениями природы, встречающимися практически на каждом шагу. Правда, порой их или не замечают, или не думают о том, насколько они интересны.

И. Клумова, М. Смолянский

Наша обложка

Пятиконечная звезда

(см. 2-ю с. обложки)

Геометрическую фигуру «пятиконечная звезда» очень легко нарисовать, если уже построен правильный пятиугольник $ABCDE$ (рис. 1). Можно, например, просто продолжить его стороны. У пятиконечной звезды $A_1B_1C_1D_1E_1$, как и у всякого звездчатого многоугольника, сторонами принято считать отрезки $[A_1C_1]$, $[B_1D_1]$ и т. д. (а не $[A_1B]$, $[BB_1]$ и т. д.), вершинами — только точки A_1, B_1, C_1, D_1, E_1. Пятиконечная звезда имеет пять конгруэнтных углов:

$\widehat{A_1D_1B_1}$, $\widehat{B_1E_1C_1}$,...

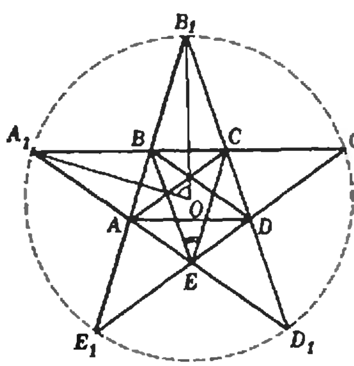


Рис. 1.

Исходный пятиугольник $ABCDE$ является пересечением этих углов. Пятиконечную звезду из пятиугольника $ABCDE$ можно, конечно, получить, и соединяя отрезками прямых его вершины.

Мы строили пятиконечную звезду, исходя из правильного пятиугольника. А нельзя ли обойтись без него? На рисунке 2 приведено такое построение с помощью циркуля и линейки.

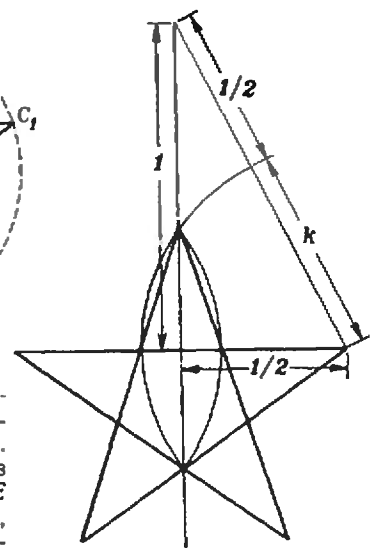


Рис. 2.

В. Тихонов

И. Слободецкий

XI Международная физическая олимпиада школьников

В начале июля Москва принимала участников и гостей XI Международной физической олимпиады школьников. В нашей стране такая олимпиада проводилась во второй раз, впервые Советский Союз был организатором Международной физической олимпиады в 1971 году.

На олимпиаду в Москву приехали школьники, точнее — выпускники школ, из десяти европейских стран: Болгарии, Венгрии, ГДР, Польши, Румынии, СССР, Финляндии, ФРГ, Чехословакии и Швеции. Команда каждой страны состояла из пяти участников и двух руководителей.

В состав команды СССР вошли призеры XIII Всесоюзной олимпиады школьников по физике:

Сергей Гордиенко — выпускник школы № 2 г. Смолевичи,

Максим Цыпин — выпускник школы № 2 г. Москвы,

Сергей Шпилькин — выпускник школы-интерната № 18 при МГУ,

Олег Ющук — выпускник школы № 145 г. Киева,

Игорь Ясонов — выпускник школы-интерната № 18 при МГУ.

Руководителями команды были старший научный сотрудник Научно-исследовательского института содержания и методов обучения Академии педагогических наук СССР В. А. Орлов и младший научный сотрудник этого же института С. М. Кабардина.

Проведение Международной олимпиады — дело довольно трудное. Достаточно сказать, что было необходимо подобрать задачи, обеспечить перевод задач на три языка (официальных языков олимпиады было четыре — русский, английский, немецкий и французский), организовать проверку работ, написанных на различных языках, составить интересную программу встреч и экскурсий. Поэтому задолго до начала олимпиады был создан

Оргкомитет олимпиады и началась ее подготовка. Председателем Оргкомитета была заместитель министра просвещения СССР М. И. Журавлева. Большую помощь в подборе задач оказали члены методической комиссии Центрального оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьников.

Непосредственным проведением соревнований олимпиады руководила Международная комиссия, в которую входили руководители всех команд. Возглавлял комиссию заведующий кафедрой физики Московского физико-технического института вице-президент Европейского физического общества (ЕФО) профессор Сергей Петрович Капица.

Соревнования олимпиады проходили в два этапа. 6 июля участники олимпиады решали три теоретические задачи (на их решение давалось пять часов), а 8 июля — выполняли экспериментальную работу (в течение четырех часов). Приводим их условия.

Теоретические задачи

1. Космический корабль массой $M=12$ т движется вокруг Луны по круговой орбите на высоте $h=100$ км. Для перехода на орбиту прилунения на короткое время включается реактивный двигатель. Скорость вылетающих из сопла ракеты газов $u=10^4$ м/с. Радиус Луны $R_Л=1{,}7\cdot10^3$ км, ускорение свободного падения у поверхности Луны $g_Л=1{,}7$ м/с^2.

1) Какое количество топлива необходимо израсходовать для того, чтобы при включении тормозного двигателя в точке A траектории корабля он опустился на Луну в точке B (рис. 1)?

2) Во втором варианте прилунения кораблю в точке A сообщается импульс в направлении на центр Луны, чтобы перевести корабль на орбиту, касающуюся Луны в точке C. Какое количество топлива необходимо израсходовать в этом случае?

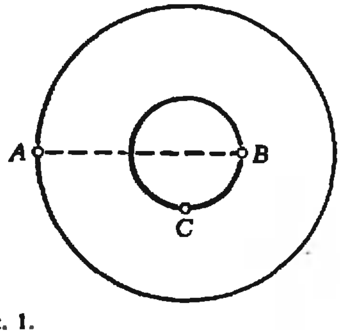


Рис. 1.

2. Деталь, изготовленная из алюминия, взвешивается на аналитических весах с помощью латунных гирь. Один раз взвешивание производится в сухом воздухе, второй раз — во влажном при давлении паров воды $p_в=15{,}2$ мм рт. ст. Общее давление ($p=760$ мм рт. ст.) и температура ($t=20$ °C) воздуха в обоих случаях одинаковы. При какой массе детали можно заметить разницу в показаниях весов, если их точность $m_0=0{,}1$ мг? Плотность алюминия $\rho_1=2{,}7$ г/см^3, латуни $\rho_2=8{,}5$ г/см^3.

3. В советско-французском эксперименте по оптической локации Луны импульсное излучение рубинового лазера на длине волны $\lambda=0{,}69$ мкм направлялось с помощью телескопа с диаметром зеркала $D=2{,}6$ м на лунную поверхность. На Луне был установлен отражатель, который работал как идеальное зеркало диаметром $d=0{,}2$ м, отражающее свет точно в обратном направлении. Отраженный свет улавливался тем же телескопом и фокусировался на фотоприемник.

1) С какой точностью должна быть установлена в этом эксперименте оптическая ось телескопа?

2) Пренебрегая потерями света в атмосфере Земли и в телескопе, оценить, какая доля световой энергии лазера будет после отражения от Луны зафиксирована фотоприемником.

3) Можно ли отраженный световой импульс зарегистрировать невооруженным глазом, если пороговую чувствительность глаза принять равной $n=100$ световых квантов, а энергия, излучаемая лазером в течение импульса, равна $E=1$ Дж?

4) Оценить выигрыш, который дает применение отражателя. Считать, что поверхность Луны рассеивает $\alpha=10$ % падающего света равномерно в телесный угол 2π стерадиан.

Расстояние от Земли до Луны $L=3{,}8\cdot10^8$ м, диаметр зрачка принять равным $d_{зр}=5$ мм. Постоянная Планка $h=6{,}6\cdot10^{-34}$ Дж·с.

Экспериментальная задача

Перед вами «черный ящик». Определить его электрические параметры.

В вашем распоряжении источник постоянного тока с напряжением около 5 В, источник переменного тока с частотой 50 Гц и напряжением на выходе около 30 В, два универсальных прибора для измерения силы тока и напряжения постоянного и переменного токов (один из приборов может быть использован как омметр), переменный резистор, соединительные провода.

Мы не будем приводить здесь решения теоретических задач, так как все они вошли в Задачник «Кванта» (Ф608—Ф610). Остановимся лишь на экспериментальной задаче.

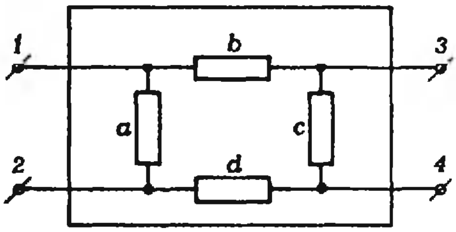


Рис. 2.

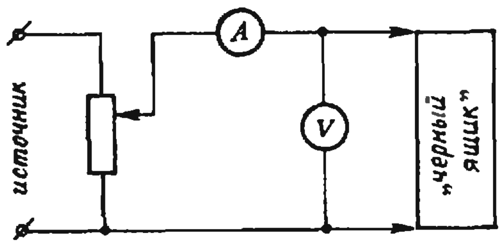


Рис. 3.

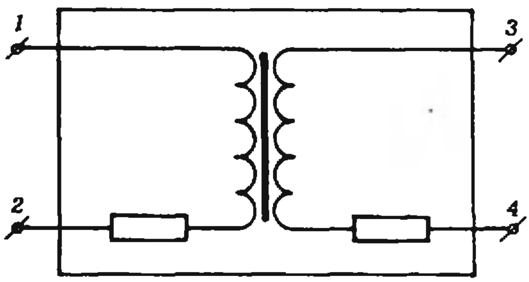


Рис. 4.

Прежде всего нужно было определить содержимое «черного ящика». Естественно было начать с измерения сопротивлений R между всеми парами выводов при постоянном токе. Это позволило составить схему, показанную на рисунке 2, и предположить, что элементы b и d — конденсаторы, а элементы a и c — резисторы или какие-то комбинации резисторов и катушек индуктивности (поскольку лишь сопротивления R_{12} и R_{34} оказались отличными от нуля).

Сопротивления можно было измерять омметром, но лучше было собрать цепь, изображенную на рисунке 3, и, меняя напряжение на входе с помощью переменного резистора, построить график зависимости тока I от напряжения U. По этому графику можно было найти сопротивление между соответствующими выводами, а также убедиться в том, что внутри «черного ящика», нет ни источников тока (график зависимости I от U проходит через начало координат), ни диодов (для этого надо было изменить полярность подключения источника).

От участников олимпиады требовалось также оценить погрешность измерения сопротивлений R_{12} и R_{34} и оценить минимально возможные значения сопротивлений между другими парами выводов.

Вторым этапом работы было измерение *импедансов* Z, то есть сопротивлений при переменном токе. Для этого опять следовало воспользоваться схемой, приведенной на рисунке 3, и построить графики зависимости тока от напряжения. Измерения показали, что и в этом случае лишь на участках $1-2$ и $3-4$ импедансы не равны нулю, причем $Z_{12}>R_{12}$ и $Z_{34}>R_{34}$. Это позволило сделать иной вывод о содержимом «черного ящика» (рис. 4) — внутри него находится трансформатор, к обмоткам которого последовательно подключены резисторы (при параллельном соединении катушки индуктивности и резистора $Z<R$).

Затем нужно было определить различные параметры «черного ящика». Так как сопротивления R_{12} и R_{34} уже были определены, а частота переменного тока задана, то по импедансам Z_{12} и Z_{34} нетрудно было найти индуктивности катушек и обнаружить их зависимость от напряжения (последнее связано с изменением магнитной проницаемости сердечника трансформатора). Потом надо было проверить, нет ли индуктивной связи между катушками, найти коэффициент трансформации ($k=U_{12}/U_{34}$) и указать максимальное рабочее напряжение трансформатора (при котором еще несущественно насыщение сердечника трансформатора).

Нужно было оценить также максимально возможные значения емкостей между клеммами 2 и 4, 1 и 3.

Интересно заметить, что по данным опытов можно было определить, как намотаны обмотки трансформатора — в одну сторону или нет. Для этого достаточно было сравнить направления отброса стрелок вольтметров, подсоединенных к обмоткам трансформатора, при подключении к одной из обмоток источника постоянного тока. К сожалению, этого не сделал ни один участник олимпиады.

Как обычно, решение каждой теоретической задачи оценивалось 10 баллами, а экспериментальной — 20 баллами. Проверка показала, что участники олимпиады хорошо справились с первой и второй теоретическими задачами: первую задачу решили половина участников, вторую — 44 из 50. Гораздо более трудной оказалась третья задача: ее решили лишь 9 человек. С экспериментальной задачей успешно справились половина участников. Максимальное количество баллов (43 из 50) получил Максим Цыпин (команда СССР).

Торжественным было закрытие олимпиады, на котором председатель Международной комиссии С. П. Капица вручил награды призерам олимпиады. От Академии наук

Участники и руководители советской команды (слева направо): С. Гордиенко, В. А. Орлов, М. Цыпин, С. М. Кабардина, О. Ющук, И. Ясонов, С. Шпилькин.

СССР тепло поздравил призеров академик И. К. Кикоин.

Дипломами I степени было отмечено восемь участников олимпиады: *Иван Ганьшев* (НРБ), *Калиной Павол* (ЧССР), *Анджей Прашмо* (ПНР), *Золтан Кауфман* (ВНР), *Максим Цыпин* (СССР), *Сергей Шпилькин* (СССР), *Олег Ющук* (СССР), *Игорь Ясонов* (СССР). Все они получили также специальные призы. Четырем участникам олимпиады были вручены дипломы II степени и призы, четырнадцати участникам — дипломы III степени и призы. Среди награжденных дипломом III степени — *Сергей Гордиенко*. Пятнадцати участникам олимпиады были вручены похвальные грамоты.

Олег Ющук получил специальный приз — самому юному участнику олимпиады — от журнала «Советская женщина». За лучшее решение второй теоретической задачи специальным призом журнала «Техника — молодежи» отмечен *Ларс Уландер* (Швеция). *Тимо Туулиниеми* (Финляндия) и *Микс Хартмут* (ГДР) получили специальные призы журнала «Техника — молодежи» за лучшее выполнение экспериментальной задачи.

Большой интерес к олимпиаде проявило Европейское физическое общество. Лучшие из каждой команды получили книгу о будущем физики, выпущенную ЕФО, и приглашение приехать на молодежный научный семинар, который проводит в Италии это общество.

Участники олимпиады осмотрели Москву, побывали на экскурсиях в Кремле, Горках Ленинских, ВДНХ.

В заключение отметим, что международные олимпиады школьников, без сомнения, приносят огромную пользу и участникам, и организаторам. Они дают возможность будущим физикам познакомиться со своими сверстниками из других стран. Помогают устроителям олимпиад из разных стран обменяться опытом со своими коллегами, увидеть свои успехи и недостатки, выявить уровень образования, к которому нужно стремиться, наладить творческие контакты. А главное — международные олимпиады школьников, как и все международные форумы, способствуют укреплению взаимопонимания и дружбы.

В. Мишин, А. Савин

XXI Международная математическая олимпиада школьников

XXI Международная математическая олимпиада, проходившая с 28 июня по 9 июля 1978 года в Великобритании, была одной из самых представительных олимпиад. В ней приняли участие команды 22 стран: Австрии, Бельгии, Болгарии, Бразилии, Великобритании, Венгрии, Вьетнама, ГДР, Греции, Израиля, Кубы, Нидерландов, Польши, Румынии, СССР, США, Финляндии, Франции, ФРГ, Чехословакии, Швеции и Югославии. В команде Бельгии был дополнительный участник от Люксембурга. В качестве наблюдателя присутствовал представитель Австралии.

По традиции команда каждой страны состояла из 8 школьников и 2 руководителей. Исключение составили команды Бразилии — 5 школьников, Вьетнама и Кубы — по 4 школьника. В команду СССР вошли победители Всесоюзной математической олимпиады: десятиклассники Мурман Амброладзе (ФМШ им. Комарова, Тбилиси), Александр Дегтярев и Илья Захаревич (оба из школы-интерната при ЛГУ), Игорь Лысенок, Андрей Ляховец, Сергей Хлебутин (все из школы-интерната при МГУ), Михаил Рудковский (школа-интернат при КГУ) и девятиклассник из Москвы Александр Разборов (школа № 2).

Поездке предшествовал месячный тренировочный сбор на базе экспериментальной школы АПН СССР в поселке Черноголовка Московской области. Поскольку состав команды был определен заранее (в команду вошли все 6 школьников, получивших на Всесоюзной олимпиаде первые премии по 10 классам, а также школьник, получивший лучшую первую премию по 9 классам, и школьник, получивший лучшую вторую премию по 10 классам), сбор носил лишь тренировочный характер, что избавило его участников от лишних волнений, связанных с дальнейшим отбором команды. На сборе изучались вопросы как теоретического, так и практического характера, в частности разбирались задачи предыдущих олимпиад. По традиции на сборах проводилась весьма содержательная культурно-воспитательная работа и интересные спортивные соревнования.

Еше до приезда школьников в Великобританию, 28 июня в г. Бристоле жюри олимпиады, состоящее из научных руководителей команд, начало работу по отбору задач. До 1 июля жюри отобрало 6 задач для соревнований из числа задач, присланных странами-участницами олимпиады. Задачи, сформулированные вначале на официальных языках олимпиады: русском, немецком, французском и английском, затем были переведены на языки стран-участниц олимпиады, с тем чтобы каждый школьник писал работу на родном языке.

Школьники вместе с педагогическими руководителями прибыли в Лондон 30 июня. Команды разместились в общежитиях Вестфилд-колледжа Лондонского университета. В аудиториях этого же колледжа 2 и 3 июля проходили и сами соревнования. В каждый из этих двух дней участникам предлагалось по 3 задачи.

Публикуем условия задач (в конце каждой задачи указывается страна, предложившая задачу, и количество очков за ее полное решение).

Первый день

1. Пусть p и q — натуральные числа такие, что

$$\frac{p}{q} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}.$$

Доказать, что число p делится на 1979. *(ФРГ, 6 очков).*

2. Дана пятиугольная призма с основаниями $A_1A_2A_3A_4A_5$ и $B_1B_2B_3B_4B_5$. Все ребра оснований и все отрезки A_iB_j ($i, j = 1, 2, 3, 4, 5$) окрашены либо в красный, либо в зеленый цвет так, что в каждом треугольнике с вершинами в вершинах призмы, все стороны которого окрашены, есть две стороны разного цвета. Доказать, что все десять ребер оснований окрашены одинаково. *(Болгария, 7 очков).*

3. На плоскости даны две пересекающиеся окружности C_1 и C_2. Пусть точка A — одна из точек их пересечения. Из точки A по окружностям C_1 и C_2 соответственно одновременно начинают двигаться точки M_1 и M_2. Точки движутся с постоянными скоростями в одном и том же направлении. После одного оборота обе точки одновременно возвращаются в точку A.

Доказать, что на плоскости существует неподвижная точка P такая, что расстояния от точки P до точек M_1 и M_2 равны в течение всего времени движения. *(СССР, 7 очков).*

Второй день

4. Дана плоскость π, точка P на этой плоскости и точка Q вне плоскости π. Найти все точки R в плоскости π, для которых отношение $(|QP| + |PR|)/|QR|$ максимально. *(США, 6 очков).*

5. Найти все вещественные числа a, для которых существуют вещественные неотрицательные числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k = a,\quad \sum_{k=1}^{5} k^3x_k = a^2,\quad \sum_{k=1}^{5} k^5x_k = a^3.$$

(Израиль, 7 очков).

6. Пусть A и E — две противоположные вершины правильного восьмиугольника. В вершине A находится кенгуру. Из любой вершины восьмиугольника, кроме вершины E, кенгуру может прыгнуть в любую из двух соседних вершин. Попав в вершину E, кенгуру останавливается и остается там. Пусть a_n — количество способов, которыми кенгуру может попасть из вершины A в вершину E ровно за n прыжков. Доказать, что

$$a_{2n-1} = 0,\qquad a_{2n} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1} - y^{n-1}),\quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

где $x = 2 + \sqrt{2}$, $y = 2 - \sqrt{2}$.

(Способом попадания из вершины A в вершину E за n прыжков называется последовательность вершин $(P_0, \ldots, P_n)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) $P_0 = A$,
2) $P_n = E$,
3) для любого i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, $P_i \neq E$,
4) для любого i, $0 \leqslant i \leqslant n-1$, P_i и P_{i+1} — соседние вершины многоугольника.) *(ФРГ, 7 очков).*

В каждый из дней на решение предложенных задач давалось по 4 часа.

4, 5 и 6 июля проходила проверка работ и координация оценок за работы. Проверку работ проводили руководители команд, а окончательная оценка выставлялась совместно с координаторами — английскими математиками. Школьники в это время знакомились с достопримечательностями Лондона.

После подведения итогов оказалось, что команда СССР набрала в сумме 267 очков и заняла первое место. На втором месте — команда Румынии (240 очков), на третьем — команда ФРГ (235 очков), на четвертом — Великобритания (218 очков), на пятом — США (199 очков).

В личном первенстве четверо участников набрали полное количество очков: А. Разборов и И. Захаревич (СССР), а также по одному участнику от команд Вьетнама и Чехословакии. Они и участники, набравшие более чем по 36 очков, всего 8 человек, получили первые премии. Вторыми премиями был награжден 21 участник — те, кто набрал от 29 до 36 очков, в том числе 4 участника команды СССР: И. Лысенок и М. Рудковский (по 36 очков), С. Хлебутин (35 очков) и А. Ляховец (34 очка). Третьими премиями были награждены участники олимпиады, набравшие от 20 до 28 очков, в том числе А. Дегтярев (27 очков); М. Амброладзе набрал 19 очков.

Следует отметить, что среди лучших десяти работ четыре были написаны советскими школьниками.

Анализ результатов команды СССР по задачам показывает, что наша команда ровно выступила по всем задачам, набрав от 73 до 100 процентов от возможного количества очков по отдельным задачам.

После закрытия олимпиады ее участники в течение двух дней были гостями Оксфордского университета. Они знакомились с многочисленными колледжами этого университета, одного из старейших в Англии, а также выезжали на экскурсию в Стратфорд — на родину В. Шекспира. Поздно вечером 9 июля команда СССР вылетела на Родину.

10 лет ФМШ МИИТа

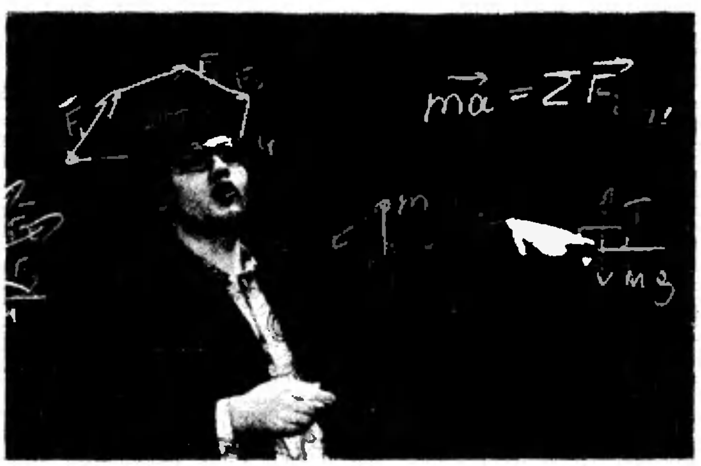
Первого апреля 1979 года физико-математической школе при МИИТе исполнилось десять лет. Некоторая информация о ФМШ в «Кванте» уже публиковалась (1972, № 1 и 1974, № 8). Напомним, что школа возникла по инициативе Кировского РК КПСС, в связи с которой математический кружок при районном Доме пионеров, руководимый В. И. Коровиным, при активном участии В. И. Малахова был преобразован в вечернюю физико-математическую школу.

ФМШ работает на общественных началах. Общая учебная нагрузка школы достигает 5 тыс. часов в год, что потребовало бы 7 штатных единиц. Занятия проводятся дважды в неделю по 4 часа в 20—22 группах, по 15—25 человек в группе. Школу ежегодно заканчивают 70—100 человек, примерно 80% из них поступают в МИИТ. Работой школы руководит Совет ФМШ во главе с председателем Совета проректором МИИТа по учебной работе профессором А. М. Макарочкиным. Совет ФМШ работает в контакте с комитетом ВЛКСМ института, при котором имеется инструктор по вопросам ФМШ.

Основными задачами школы являются поиск и привлечение к занятиям наукой наиболее способных школьников, повышение уровня их математической культуры, привитие им навыков математического мышления, расширение их общего кругозора, оказание помощи абитуриентам при подготовке к конкурсным экзаменам в вузы (в частности, в МИИТ), привлечение к организационной и преподавательской работе студентов и аспирантов института. Формы обучения в ФМШ разнообразны: они включают лекции, практические занятия, дополняемые текущими домашними заданиями, специальные задания по некоторым разделам курса (рассчитанные на длительный срок), самостоятельную работу учащихся, факультативные семинары.

Для учащихся 8—10 классов читаются обзорные лекции, в которых рассказывается о различных факультетах и специальностях МИИТа. В числе лекторов профессора Е. С. Вентцель, А. Д. Мышкис, А. А. Юшкевич, доценты Т. А. Шульман, Э. Б. Кикодзе, Э. З. Шувалова, М. Н. Аршинов, З. С. Липкина, А. С. Дробот, В. Д. Козлов, ассистенты А. Белов, М. Штильман и другие. Школа работает в тесном контакте с кафедрой прикладной математики и опирается на коллектив студентов факультета «Автоматика и вычислительная техника». ФМШ МИИТа принимает активное участие в подготовке и проведении институтских олимпиад для школьников по математике и физике (в 1979 году проводилась 13-я олимпиада), а также в проведении Московских городских математических олимпиад и предолимпиадных консультаций. В 1979 году в МИИТе проводилась 42-я Московская математическая олимпиада для 9 классов. Жюри этой олимпиады отмечает, что МИИТ превратился в один из основных центров работы со школьниками в Москве.

Десятилетие ФМШ было отмечено днем математических развлечений, организованным для учеников ФМШ активом студентов—преподавателей школы и кафедрой прикладной математики. Импровизированную «торжественную часть» вели бывшие студенты МИИТа В. Каплун и А. Садовский. С краткими первоапрельскими речами выступили лекторы ФМШ Е. С. Вентцель, Л. Е. Садовский, Э. З. Шувалова, В. Д. Козлов и гости — зам. главного редактора журнала «Квант» М. Л. Смолянский, представитель комитета ВЛКСМ МИИТа Е. Зябрев, вручивший студентам — активистам школы грамоты комитета, представители ФМШ других вузов, бывшие воспитанники школы. Преподавателям ФМШ были вручены изготовленные к юбилею значки школы. В фойе Дома культуры МИИТа работало «патентное бюро», принимающее заявки на новые проекты вечного двигателя, столы, за которыми предлагались старинные задачи, головоломки, представлялась возможность сыг-



Лекцию по физике читает А. Белов.

ШУМ — школьный универсальный магазин.

Сеанс одновременной игры проводит мастер спорта А. Моисеев.

рать в различные игры, в том числе в шашки с мастером спорта — студентом А. Моисеевым (в сеансе одновременной игры). С эстрады зрительного зала предлагались занятные задачи на сообразительность, была организована математическая эстафета. Каждый успех награждался «мудриками», на которые в ШУМе («школьном универсальном магазине») можно было приобрести математическую литературу с автографами авторов. Среди участников юбилейного дня было много бывших учеников ФМШ, ставших в последующем студентами МИИТа и преподавателями школы, а в настоящее время — ассистентами, научными работниками, инженерами различных учреждений. До сих пор они помнят о ФМШ МИИТа, любимой ими особенно потому, что работа в ней, как сказал один из ветеранов, «была делом, которые мы вели самостоятельно, с полной ответственностью и без препятствий к проявлению нашего энтузиазма».

Л. Садовский

Энциклопедия микромира

В первом квартале 1980 г. издательство «Советская энциклопедия» выпустит в свет книгу «Физика микромира». Эта книга — маленькая энциклопедия, посвященная основам квантовой физики. Книга охватывает обширный материал — от фундаментальных законов природы, управляющих движением и взаимодействием микрообъектов (элементарных частиц, атомов и т. д.) до законов поведения макроскопических тел, свойства которых определяются квантовым характером поведения слагающих их частиц.

Три большие статьи в начале книги — «Квантовая механика», «Квантовая статистика» и «Квантовая теория поля» — знакомят читателя с общей картиной физических законов микромира. Далее следуют в алфавитном порядке около трехсот статей, рассказывающих об отдельных понятиях, явлениях, физических объектах, о некоторых направлениях развития квантовой теории. Книга дополнена статьями «Ускорители», «Детекторы», «Спектроскопия», в которых описываются экспериментальные методы получения частиц высоких энергий, их регистрации, определения некоторых характеристик.

Книга написана популярно, но достаточно строго в научном отношении. В ее составлении принимали участие известные физики — популяризаторы науки.

«Физика микромира» рассчитана на широкий круг читателей — студентов, учителей средней школы и ПТУ, преподавателей техникумов и вузов. Многие статьи этой энциклопедии с большой пользой для себя прочтут учащиеся старших классов, интересующиеся физикой.

Г. Мякишев

Олимпиада в Омске

В апреле 1979 года состоялось заседание математической секции Омского городского научного общества учащихся. На заседании были подведены итоги II командной олимпиады школ города. Олимпиады такого типа проводятся в Омске с 1978 года силами студенческого научного общества Омского политехнического института и университета*). Командная форма ее проведения способствует развитию навыков коллективного творческого труда.

В нынешней олимпиаде участвовало 123 команды (по 5 учащихся 9—10 классов) из 95 школ города, а также гости из Братска и Ангарска. Жюри учитывало трудность задачи, законченность и количество способов решения, а также количество команд, решивших задачу, поэтому задача, решенная полностью, давала команде больше очков, чем несколько задач, в решениях которых были пробелы.

Лучшая работа оказалась у команды школы г. Ангарска: ненамного отстала первая команда школы № 88 г. Омска.

Приглашаем всех желающих на III командную олимпиаду, которая состоится в 1980 году.

*) См. «Квант», 1978, № 11, с. 60.

Задачи олимпиады

1. Найти сумму первых ста чисел, встречающихся в обеих арифметических прогрессиях 17, 21, 25, ... и 16, 21, 26, ... (3 очка).

2. Решить уравнение $x=1-5(1-5x^2)^2$ (2 очка).

3. Дан квадратный трехчлен $y=ax^2+bx+c$. Найти все значения a, b, c, при которых если $x=a$, то $y=a$, если $x=b$, то $y=b$, и если $x=c$, то $y=c$ (3 очка).

4. На плоскости заданы 4 точки. Все они соединены отрезками прямых. Доказать, что отношение длины наибольшего отрезка к длине наименьшего отрезка не меньше $\sqrt{2}$ (6 очков).

5. Даны последовательности

$$a_{n+1}=\frac{2}{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}},$$

$$b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},$$

где $a_0>0$, $b_0>0$. Доказать, что они имеют общий предел, равный $\sqrt{a_0b_0}$ (4 очка).

6. Найти все тройки различных целых положительных чисел, сумма любых двух из которых делится на третье (6 очков).

7. Доказать, что если хотя бы одна из координат центра окружности иррациональна, то на этой окружности найдется не более двух точек, обе координаты которых рациональны (5 очков).

8. Двое пишут 20-значное число, употребляя только цифры 1, 2, 3, 4, 5. Первую цифру пишет первый, вторую — второй, третью — первый и т. д. Может ли второй добиться того, чтобы полученное число разделилось на 9, если первый стремится ему помешать? (5 очков).

9. При каких четных n существует многогранник, имеющий ровно n ребер? (2 очка). Тот же вопрос для нечетных n (4 очка).

10. Из цифр 1, 2, ..., 9 выбираются 4 цифры и из них составляются два наиболее близких друг к другу двузначных числа. Какое наибольшее значение может иметь модуль их разности? (6 очков).

11. На сторонах AB и BC треугольника ABC построены наружу квадраты ABB_1A_1 и CBB_2C_2. Найти длину отрезка B_1B_2, если длина медианы BE равна m (3 очка).

12. Известен один из углов треугольника и длина высоты, выходящей из вершины этого угла. Как провести третью сторону, чтобы площадь треугольника была наименьшей? (3 очка).

13. Доказать, что уравнение $a^x+b^x=c^x+\alpha$, где числа a, b, c положительны и не равны единице, имеет не более трех различных решений (5 очков).

14. Решить уравнение $\sin^3 x\cdot\cos x-\cos^3 x\times\sin x=1/4$ (1 очко).

15. В треугольнике ABC дано: $|AC|=b$, $|AB|=c$, $\widehat{A}=2\widehat{B}$. Найти $|BC|$ (2 очка).

А. Криворучко, М. Немиченицер

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

(*Начало см. на с. 36*)

ковской обл.) **51, 52**; *А. Стрешинский* (Донецк) **56**; *А. Стыркас* (п. Черноголовка Московской обл.) **53, 56**; *С. Суров* (Оренбург) **51**; *А. Тагаев* (Новосибирск) **51**; *М. Томашпольский* (Москва) **56**; *О. Трушин* (Кострома) **51**; *Л. Уткин* (Вологда) **51, 56**; *Д. Файнгауз* (Ленинград) **49—51, 56**; *А. Фарбер* (Баку) **56**; *Н. Федин* (Омск) **50, 51, 56**; *А. Федюкович* (Пинск) **49**; *И. Фоменко* (Днепропетровск) **51, 52**; *О. Хоружий* (Череповец) **51**; *С. Хосид* (Алма-Ата) **51**; *В. Целиков* (Череповец) **49, 56, 57**; *А. Черныш* (ст. Лысогорская Ставропольского кр.) **53, 56, 57**; *А. Чечель* (Москва) **56**; *И. Швец* (Желтые Воды) **49, 56**; *А. Шершнев* (Краснодар) **56, 57**; *П. Шибаев* (Москва) **49, 52**; *А. Ширяев* (с. Рожествено МордАССР) **51**; *С. Шичанин* (Невинномысск) **50, 51**; *С. Шишков* (Москва) **56, 57**; *А. Шостаченко* (Кишинев) **56**; *Н. Штрешень* (Москва) **50**; *А. Эзериньш* (п. Кузьмолово Ленинградской обл.) **57**; *М. Эфроимский* (Ленинград) **49, 51, 57**; *В. Яровой* (Ленинград) **49, 51, 57**.

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при Московском университете (ВЗМШ) принимаются учащиеся седьмых классов и ПТУ. Школьники, проживающие в Москве, Ленинграде и их ближайших пригородах, в школу не принимаются.

Занятия начнутся с 1 сентября 1980 г. Обучение в школе бесплатное.

Учащиеся, принятые в школу, будут регулярно получать з а д а н и я, в которых содержатся объяснения теоретических вопросов и задачи для решения. Программа ВЗМШ тесно связана со школьной программой и направлена на углубленное изучение основных вопросов школьного курса математики. Срок обучения — три года. Все, успешно выполнившие задания, получают удостоверения об окончании ВЗМШ.

Ниже публикуются задачи вступительной контрольной работы. Желающие поступить в ВЗМШ должны выслать решения этих задач не позднее 1 февраля 1980 г. После проверки работ (примерно в июле 1980 г.) ВЗМШ сообщит всем принявшим участие в конкурсе результаты выполнения работы. Преимуществом при поступлении пользуются школьники, проживающие в сельской местности и рабочих поселках.

Хотя некоторые из вступительных задач отличаются по внешнему виду от обычных школьных, для их решения не требуется дополнительных знаний по математике. Для поступления в школу не обязательно решить все задачи без исключения. При оценке работы будет учитываться не только количество решенных задач, но и качество решения. Решение каждой задачи должно быть обосновано. Ответ без обоснований может быть не засчитан. Если в задаче возможны несколько ответов, то надо указать их все.

Работа должна быть выполнена на русском языке в ученической тетради в клетку. Вступительная работа обратно не высылается, рецензия на нее не выдается.

В конверт вместе с тетрадью надо вложить листок бумаги размером 14 см × 6 см с полным почтовым адресом (этот листок будет наклеен на конверт с извещением Приемной комиссии ВЗМШ о результатах проверки вступительной работы).

На обложку тетради надо наклеить листок клетчатой бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу (иначе работа проверяться не будет):

Область	Московская
Фамилия, имя	Иванов Петр
Год рождения	1966 г.
Класс, школа	7 класс «А» школы № 2 гор. Клина
Фамилия, имя, отчество учителя математики	Никаноров Владимир Алексеевич
Место работы и должность родителей	Отец — шофер автобазы № 1 Мать — домашняя хозяйка
Полный почтовый адрес	123456, Клин Московской обл., ул. Ленина 1, кв. 1.

Результаты проверки

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
									а)	б)

На территории СССР расположено 37 филиалов ВЗМШ. Учащиеся, проживающие на территории филиалов, должны присылать свои работы в соответствующие университеты или пединституты (адреса см. в «Кванте», 1979, № 2, с. 59).

Остальные школьники должны присылать работы по адресу: 117234, Москва, В-234, МГУ, ВЗМШ, на конкурс.

Школьники, не прошедшие по конкурсу в ВЗМШ, имеют возможность заниматься в группах «Коллективный ученик ВЗМШ».

«Коллективный ученик ВЗМШ»— это школьный математический кружок, работающий под руководством учителя математики по программе ВЗМШ. Прием в группы проводится до 20 сентября 1980 года на два потока: для тех, кто с сентября 1980 года будет обучаться в 8 классе, и для тех, кто начнет учиться в 9 классе.

Группы «Коллективный ученик» принимаются в ВЗМШ без контрольной работы. Для организации группы достаточно заявления учителя математики, руководящего кружком, с указанием списка учащихся, заверенного директором школы и печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик ВЗМШ» может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия. Заявления следует направлять по адресу: 117234, Москва, В-234, МГУ, ВЗМШ, зав. сектором групп «Коллективный ученик ВЗМШ».

Задачи вступительной контрольной работы в ВЗМШ в 1980 году

1. В кружке, где Аня изучает математику, занимается более 94 % мальчиков. Какое наименьшее число школьников может быть в этом кружке?

2. Можно ли из цифр 0, 1, 2, 3, ..., 9 составить десятизначное число так, чтобы все его цифры были различны и чтобы оно делилось на 1980?

3. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда велосипедист и мотоциклист находились в одной точке, пешеход был на расстоянии 10 км впереди них. В тот момент, когда мотоциклист догнал пешехода, велосипедист отставал от них на 5 км. На сколько километров мотоциклист будет обгонять пешехода в тот момент, когда пешехода настигнет велосипедист?

4. Найдите три числа, если каждое из них равно квадрату суммы двух других.

5. В каждой вершине правильного восьмиугольника и в его центре поставлено одно из девяти чисел 1, 2, 3, ..., 9 так, что все эти числа использованы. Обозначим через c наибольший общий делитель четырех сумм троек чисел, поставленных по каждой из четырех диагоналей, проходящих через центр. Укажите все значения, которые может принимать c.

6. Можно ли расположить на плоскости пять кругов одинакового радиуса K_1, K_2, K_3, K_4, K_5 так, что пересечения $K_1 \cap K_5$, $K_2 \cap K_5$ и $K_1 \cap K_4$ пусты, а все прочие попарные пересечения этих кругов непусты и конгруэнтны между собой?

7. Существует ли тысяча различных целых положительных чисел таких, что каждые два из них имеют общий делитель, больший единицы, а все числа в совокупности не имеют общего делителя, отличного от единицы?

8. На стороне AD квадрата $ABCD$ взята произвольная точка M и проведена биссектриса угла MBC до пересечения со стороной CD в точке K. Докажите, что разность длин отрезков MB и AM равна длине отрезка CK.

9. Существуют ли такие десять положительных чисел, что сумма квадратов этих чисел равна 1, а сумма всех их попарных произведений меньше, чем 0,01?

10. а) Пара чисел $(n_1; n_2)$, где $n_1 \leqslant n_2$, называется *осуществимой*, если квадрат можно разрезать прямой, проходящей через его внутреннюю точку, на n_1-угольник и n_2-угольник. Сколько таких пар?

б) Четверка чисел $(n_1; n_2; n_3; n_4)$, где $n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3 \leqslant n_4$, называется *осуществимой*, если квадрат можно разрезать парой прямых, проходящих через его внутреннюю точку, на n_1-угольник, n_2-угольник, n_3-угольник и n_4-угольник. Сколько таких четверок?

Ж. Раббот

Новый прием на малый мехмат

Для учеников седьмых классов, проживающих на территории европейской части РСФСР (за исключением северных областей) и Белоруссии, объявляется прием на малый механико-математический факультет (МММФ) — заочную математическую школу при механико-математическом факультете МГУ, являющуюся отделением ВЗМШ.

Программа МММФ, направленная на углубление знаний по важнейшим разделам школьной программы и учитывающая особенности вступительных экзаменов по математике на механико-математический факультет МГУ и в другие вузы, составлена под руководством профессоров факультета.

Занятия начнутся с 1 сентября 1980 года. Обучение на малом мехмате бесплатное. Срок обучения — 3 года.

Желающие поступить на малый мехмат должны выслать решение вступительной контрольной работы ВЗМШ не позднее 1 марта 1980 г. по адресу: 117234, Москва, В-234, МГУ, мех.-мат. ф-т, МММФ. Требования к оформлению работы не отличаются от требований ВЗМШ.

Участники областных олимпиад по математике могут быть приняты на малый мехмат на основании заявления и документа, подтверждающего участие в олимпиаде.

Для московских школьников работают Вечерняя математическая (7—9 кл.) и Воскресная подготовительная (10 кл.) школы. Справки о них по тел. 139-35-29.

И. Сергеев

Напечатано в 1979 году

Ответы, указания, решения

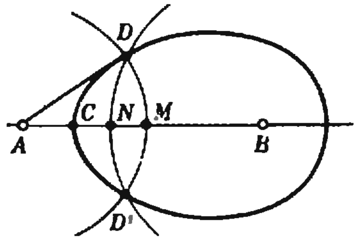


Рис. 1.

Преобразование решений тригонометрического уравнения

1. $x_1 = \pi k,\ x_2 = \frac{5}{4}\pi + 2\pi l\ (k, l \in \mathbf{Z})$.

2. $x_1 = \pi k,\ x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} l\ (k, l \in \mathbf{Z})$. 3. $x_1 = \frac{\pi}{12} + 2\pi k,\ x_2 = \frac{17}{12}\pi + 2\pi l\ (k, l \in \mathbf{Z})$.

4. $x = \frac{5}{4}\pi + 2\pi k\ (k \in \mathbf{Z})$. 5. $x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi l\ (k, l \in \mathbf{Z})$.

Построим овал

1. На отрезке AB (рис. 1) между фокусами найдите точку C, для которой $|AC| : |CB| = m : n$ (для этого сначала поделите $[AB]$ на $n+m$ равных частей). Пусть для определенности $n > m$. На отрезке CB возьмите произвольную точку M и постройте N так, чтобы $|CM| : |CN| = m : n$. Точки пересечения D и D' окружностей с центрами A, B и радиусами $|AM|$, $|BM|$ должны находиться на овале Декарта типа $m : n$. Меняя M, можно получить любое число точек на нем. Этот способ построения принадлежит Декарту.

2. Метод построения показан на рис. 2.

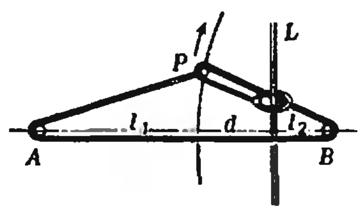


Рис. 2.

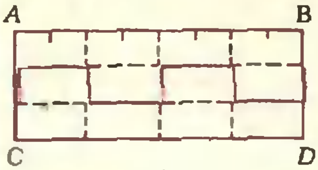
«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 11)

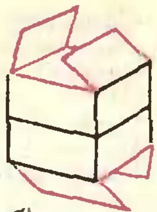
1. Данный прямоугольник можно разрезать двумя способами (красные линии на рисунках 3, *а* и 4, *а*; на рисунках 3, *б* и 4, *б* показано, как этими двумя частями оклеивается поверхность единичного куба).

3. В первой кучке было 15, во второй — 17, в остальных кучках — по 16 спичек.

4. Длины сторон треугольника обратно пропорциональны длинам опущенных на них высот (поскольку $S = \frac{1}{2} a \cdot h_a$); следовательно, в искомом треугольнике длины сторон равны a, $a/2$ и $a/3$ при некотором a. Однако $a/2 + a/3 = 5a/6$, что меньше a. Значит, искомого треугольника не существует.



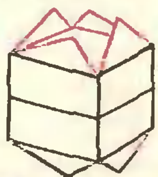
а)



б)

Рис. 3.

а)



б)

Рис. 4.

5. Сначала турист должен положить в кипящую воду четыре яйца. Через минуту вынуть два яйца и заменить их оставшимися двумя. Спустя еще три минуты вынуть два яйца, сваренных вкрутую ($1+3=4$), а на их место положить яйца, вынутые в первый раз, и варить еще минуту ($3+1=4$, $1+1=2$). Всего пять минут.

«Квант» для младших школьников
(см. с. 30)

1. а) $\begin{array}{r} +\begin{array}{r}726\,951\\531\,954\end{array}\\ \hline 1\,258\,905\end{array}$, б) $\begin{array}{r} +\begin{array}{r}239\,153\\239\,153\end{array}\\ \hline 478\,306\end{array}$.

2. Задача сводится к решению в натуральных числах уравнения

$$12x+5y=100,$$

где x — число двухкопеечных марок, а y — пятикопеечных. Отсюда

$$y=20-\frac{12}{5}x,$$

то есть $x=5$, а $y=8$.

Таким образом, мальчик купил 50 однокопеечных, 5 двухкопеечных и 8 пятикопеечных марок.

3. Обозначим радиус окружности с центром в точке O через R, а радиусы окружностей с центрами в точках A, B и C через r_1, r_2 и r_3 (рис. 5). Тогда

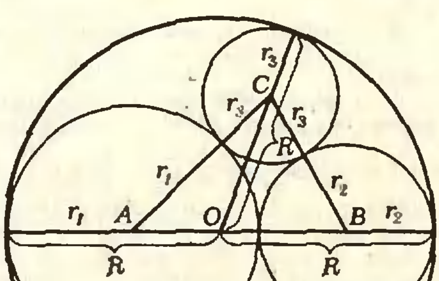


Рис. 5.

$|AO|=R-r_1$, $|AC|=r_1+r_3$, $|OC|=R-r_3$. Отсюда $|AO|+|AC|+|OC|=R-r_1+r_1+r_3+R-r_3=2R$.

4. Оба утверждения Пети Иванова неверны, поскольку:

а) число 27 делится на 27, а сумма его цифр не делится;

б) числа 9972 и 9981 не могут одновременно делиться на 27, хотя сумма их цифр равна 27 (проверьте, что они оба на 27 не делятся).

Электровоз перегоняет вагоны

(см. «Квант» № 11, 3-ю с. обложки)

Электровоз Э загоняет Т в тупик, Ц — на место вагона Т и, пройдя мост, подходит к Ц с другой стороны. Вновь подцепив Ц, а затем и Т, электровоз выводит Т из тупика и ставит его на свое место, а Ц загоняет в тупик. Отцепив Ц и, пройдя через мост, Э подцепляет вначале Т, а затем и Ц. Оказавшись между Ц и Т, электровоз ставит вагоны на заданные места и возвращается в исходное положение.

Номер готовили
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили
Л. Денисенко, М. Дубах, Э. Назаров, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор В. Сорокина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 2. 10. 79.
Подписано в печать 28. 11. 79.
Бумага 70 × 108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6. Уч.-изд. л. 6,7 Т-21506.
Цена 30 коп. Заказ 2285 Тираж 279 359 экз.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли

г. Чехов Московской области

1. (ДОКЛАД + ОКЛАД + КЛАД + + ЛАД + АД + Д) : 1977 = БАЛ.

2.
```
  ДОКЛАД
+  ОКЛАД
    КЛАД
     ЛАД
      АД
       Д
--------
СУММА „К“
```

3.
```
  ПОЛКАН
  ПОЛКА +
  ПОЛК
  ПОЛ
  ПО
  П
--------
СУММА „Н“
```

Здесь зашифрованы три арифметических примера, в каждом из которых разным буквам соответствуют разные цифры, а одинаковым — одинаковые. Определите, каким числам соответствует слово Д О К Л А Д в первых двух примерах, и расшифруйте третий пример.

А. Аленков, Н. Нестеренко

Индекс 70465
Цена 30 коп.

КОНСТРУИРОВАНИЕ МНОГОГРАННИКОВ ПО ЭПЮРЕ

На этой странице обложки показана эпюра, которую можно легко построить по «красному» правильному треугольнику. Дальнейшие построения отмечены штриховыми линиями. Используя отмеченные на эпюре дужками полюса, по ранее описанной методике (см. «Квант» № 3) можно приступить к конструированию разнообразных многогранников. Один из них — «Спутник» показан на 1-ой странице обложки. Его грани на эпюре покрашены в зеленый цвет (верхняя часть модели) и в желтый цвет (низ модели). Голубым цветом покрашены грани для многогранника «Факел» (верхняя модель), красным цветом — грани для звездчатого многогранника (нижняя модель).

В. Гамаюков