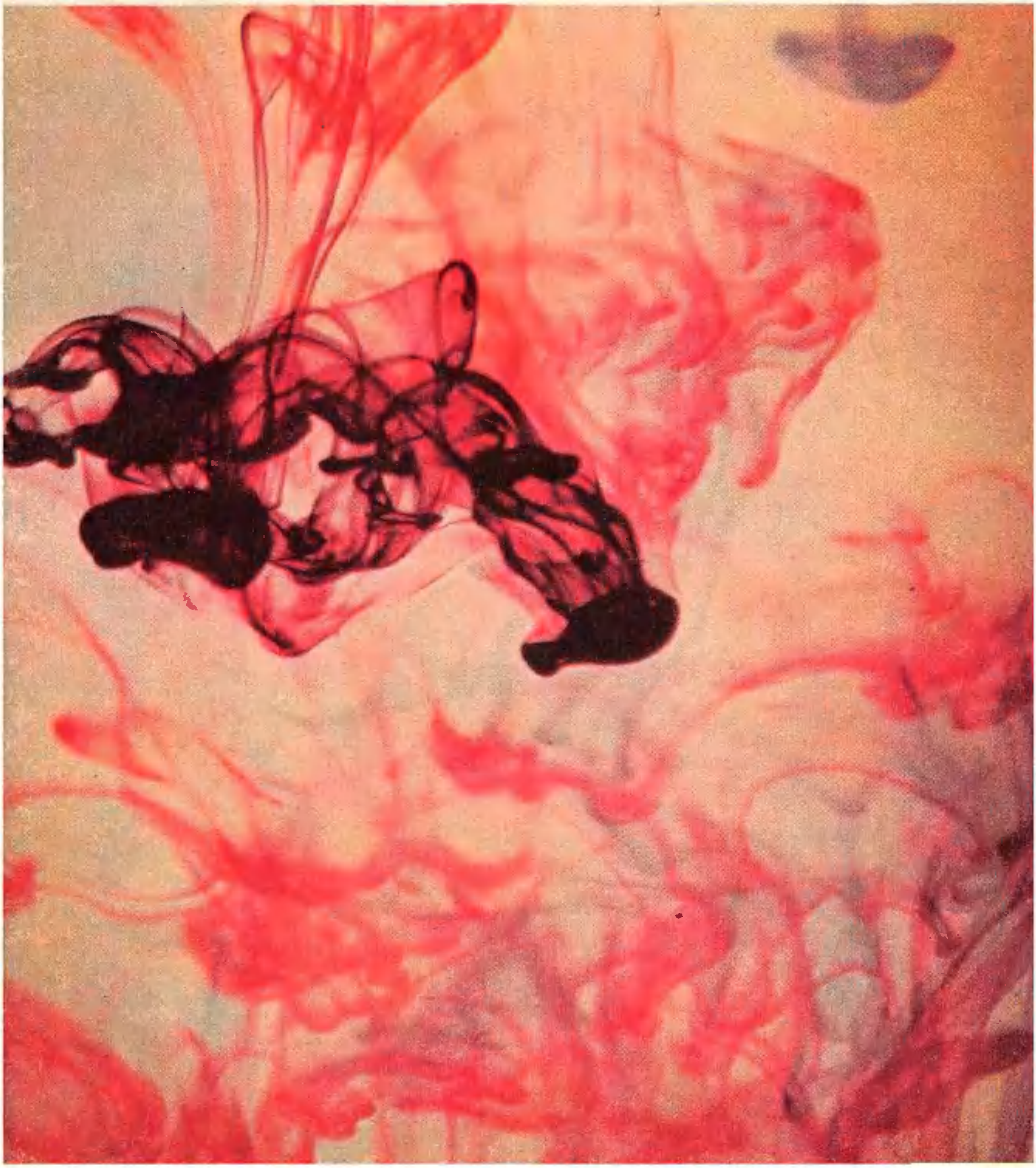
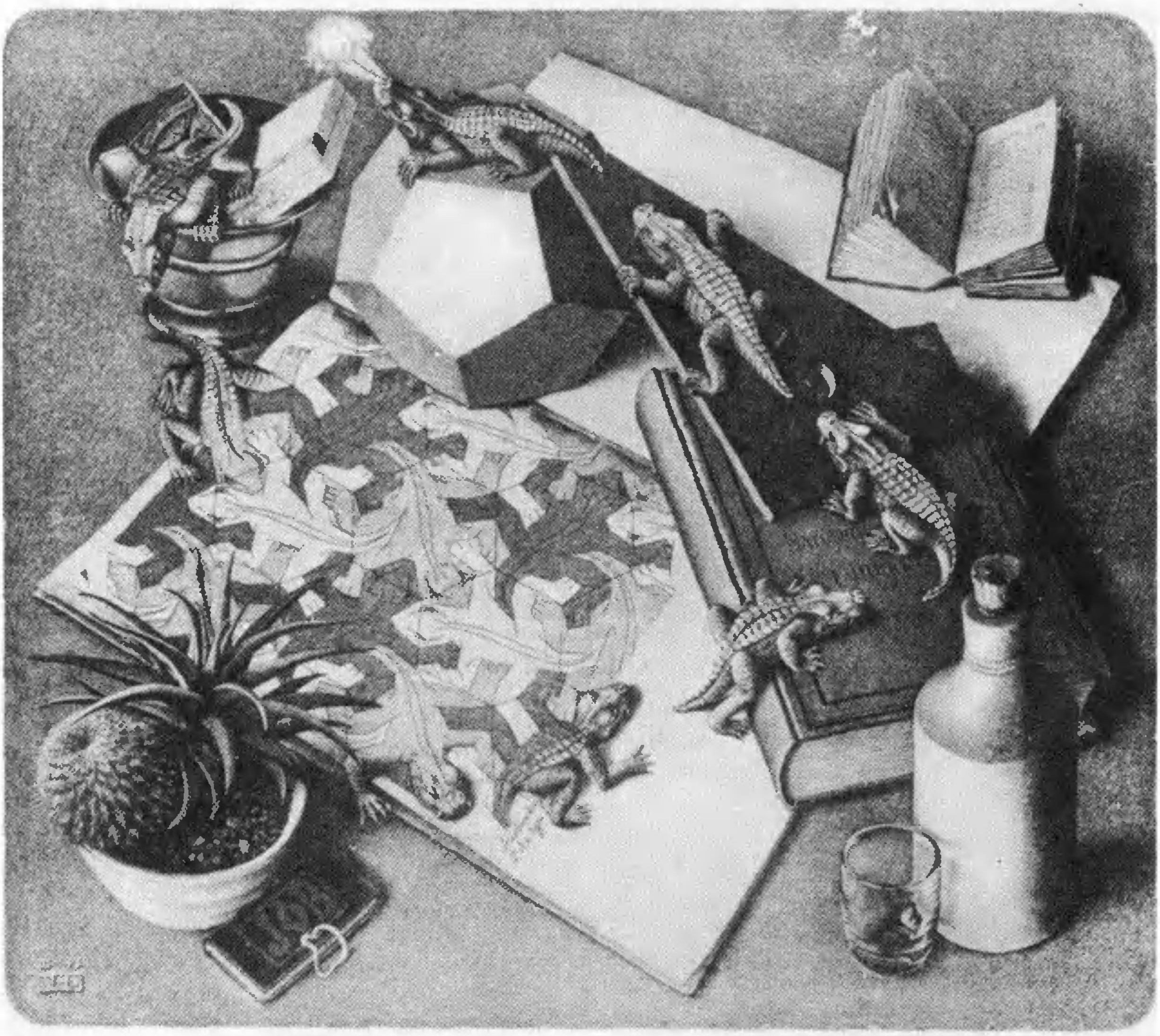
квант

ISSN 0130-2221

11
1979

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





На приведенной выше литографии «Рептилии», созданной в 1943 году, замечательный голландский художник Эшер, дав волю своему воображению, изобразил необычайное событие.

...На покинутом художником столе в беспорядке среди кактусов, книг, сигарет и спичек, модели додекаэдра, бутылки и стакана, угольника лежит эскиз знаменитого рисунка Эшера «Ящерицы» (см., например, обложку «Кванта», 1977, № 3). И вдруг плоские ящерицы-узоры начинают приобретать объем, оживают, сосредоточенно и зловеще ползут по столу и даже извергают пламень. Но вскоре возвращаются и вновь растворяются в своем двумерном изображении, в спокойных и красивых закономерностях геометрии.

Основан в 1970 году

КВАНТ

11

1979

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

*Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы*

В НОМЕРЕ:

Вихри, которые вы видите на первой странице обложки, «нарисованы» каплей чернил, упавшей в воду. Подробнее о водяных вихрях можно прочитать в статье С. Шабанова и В. Шубина «О вихревых кольцах». *Фото А. Ульянина.*

А. Кириллов, И. Клумова, А. Сосинский

Сюрреальные числа

Понятие действительного числа — одно из основных в математике. Не удивительно поэтому, что в настоящее время известно много способов построения строгой теории действительных чисел. Среди них выделяется простотой и естественностью аксиоматический метод. Он состоит в том, что мы отказываемся отвечать на вопрос «что такое число?», а определяем сразу все числа, описывая, какими свойствами они обладают. Свойства эти формулируются в виде аксиом. Оказывается, для аксиоматического задания действительных чисел достаточно 12 аксиом, приведенных на с. 9.

Конечно, нет никакой гарантии, что найдутся объекты, удовлетворяющие этому набору требований. Поэтому в дополнение к аксиомам желательно иметь еще и *модель* — набор объектов, удовлетворяющих этим аксиомам. Одну такую модель действительных чисел вы хорошо знаете — это бесконечные десятичные дроби.

Сравнительно недавно английскому математику Д ж о н у К о н в е ю удалось «соорудить» очень интересную модель, которая содержит не только все действительные числа, но еще и многие другие — с интересными и необычными свойствами. Эти числа — мы будем называть их *К-числами*, а Конвей называет их *сюрреальными* (сверхвещественными) — удовлетворяют 11 из 12 упомянутых аксиом.

Кое-что об этих числах мы и расскажем в нашей статье. К сожалению, для построения всех *К*-чисел необходимо понятие *трансфинитного числа*, которое не изучается в школе. Но заглянуть в их арифметику можно уже на школьном уровне.

Описание *К*-чисел

В арифметике Конвея вместо привычных нам цифр 0, 1, 2, ..., 9 используются всего два знака: $\uparrow$ — up (*вверх* — англ.) и $\downarrow$ — down (*вниз* — англ.). Наборы из этих символов и являются *К*-числами.

Набор может вообще не содержать символов. Ниже мы увидим, что этот набор играет роль нуля, поэтому мы заранее обозначим его через 0. Набор может быть любым конечным, например: ↓; ↑↑↓; ↓↑↑↓↑↓; может быть любым бесконечным: ↑↓↑↓↑↓ ..., а может быть даже «более чем бесконечным» (см. последний раздел). Мы в основном будем оперировать с конечными наборами.

Если символы ↑ и ↓ рассматривать как указатели н а п р а в л е н и я д в и ж е н и я, то каждый набор «up» и «down» можно воспринимать как «протокол поиска» соответствующего K-числа.

А именно, среди всех K-чисел есть простейшие — 0. Если интересующее нас K-число x больше *), чем 0, мы делаем шаг вверх и записываем знак ↑. Если $x>$↑, делаем еще один шаг вверх и пишем ↑↑; если $x<$↑↑, то следующий шаг делается вниз, и получается запись ↑↑↓. Этот процесс может быть конечным или бесконечным. Любой «протокол поиска» соответствует некоторому K-числу, причем разные «протоколы» соответствуют разным K-числам.

Сравним это с записью действительного числа в виде бесконечной десятичной дроби. Здесь тоже искомое число x строится путем последовательных приближений. Но при обычных последовательных десятичных приближениях числа мы подбираемся к нему с н и з у, а не с д в у х с т о р о н, как у K-чисел (рис. 1). Кроме того, десятичная запись (в отличие от записи K-чисел) неоднозначна: 0,99999... означает то же, что 1,0000...

Объясним теперь, как сравнивать K-числа по величине.

Отношение порядка

Чтобы сравнить два K-числа, нужно написать их одно под другим и по очереди сравнивать символы, входящие в их запись (как при установлении порядка слов в словаре по алфавиту; такой порядок математики называют *лексикографическим*). Если первым из неодинаковых символов у числа x будет символ ↑, а у числа y — символ ↓, то $x>y$. Возможен еще случай, когда число x короче числа y

*) Что такое «больше — меньше» для K-чисел и почему 0 — простейшее K-число, мы объясним в следующем разделе.

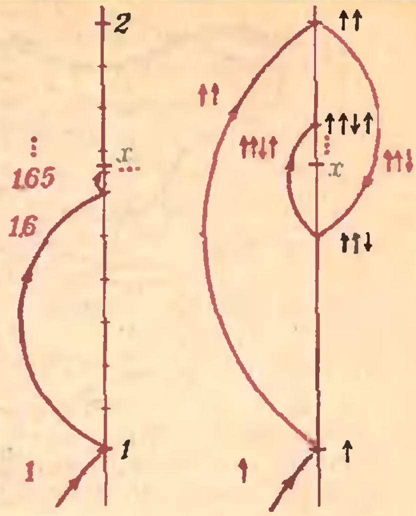


Рис. 1.

и составляет его начало. Тогда мы пишем $x>y$, если первым «лишним» символом у y будет символ ↓, и $x<y$, если этим символом будет ↑ *). Например, справедливы неравенства

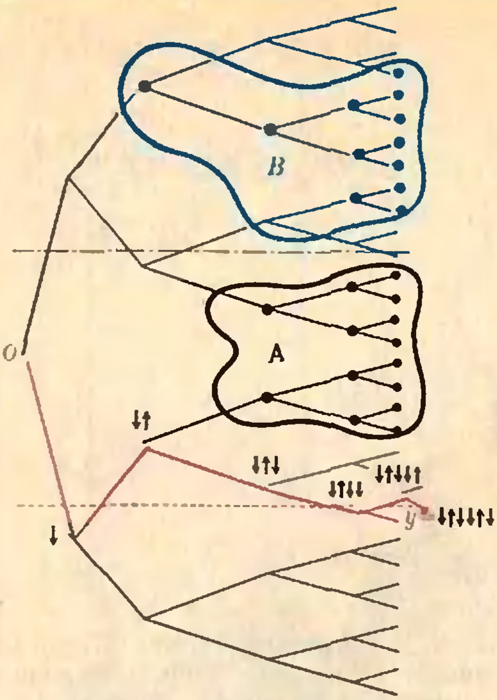
↓↑<0<↑↓<↑<↑↑↓.

Забегая вперед, скажем, что положительными (то есть >0) в K-арифметике будут все числа, начинающиеся с ↑, а отрицательными — все, начинающиеся с ↓.

Для K-чисел, кроме отношения порядка ($>$, $=$, $<$), имеется еще одно важное отношение; Конвей называет это отношение «*раньше*» и обозначает значком ←. Будем говорить, что K-число a *раньше* K-числа b, если a встречается на пути к b из числа 0 (см. рис. 1). Иными словами, a←b, если a можно получить из b «отрубанием хвоста» — части (с конца) стрелочек ↑ и ↓. Например, ↑ раньше, чем ↑↓ или ↑↑, а 0 по определению считается самым ранним числом.

Заметим, что свойство «быть раньше» не совпадает со свойством «быть короче»: например, число ↑↑↑ не раньше числа ↑↓↑↑↓. Точно так же свойство «быть раньше» не совпадает и со свойствами «быть больше» или «быть меньше»: например, оба числа ↑ и ↑↓ раньше числа ↑↓↑, но первое из них больше ↑↓↑, а второе — меньше.

*) В частности, «пустой набор» 0 является началом любого K-числа.



$y] = \{0, \downarrow, \downarrow\uparrow, \downarrow\uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow\downarrow\downarrow, \downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\}$

$y\rfloor = \{\downarrow, \downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\}$; $y\rceil = \{0, \downarrow\uparrow, \downarrow\uparrow\downarrow, \downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\}$

Рис. 2. **Здесь $\{A : B\} = \uparrow\downarrow$**

Основная лемма

Пусть у нас есть два множества K-чисел: A и B. Будем говорить, что множество B лежит в ы ш е множества A, если каждое число из множества A меньше каждого числа из множества B; обозначим это так: $A<B$. Скажем, что *число c разделяет множества A и B*, если $a<c<b$ для любых $a\in A$ и $b\in B$.

О с н о в н а я л е м м а. *Если $A<B$, то существует K-число c, разделяющее множества A и B. Среди всех таких разделяющих чисел есть самое раннее. (В дальнейшем самое раннее число, разделяющее множества A и B, будет обозначаться так: $\{A:B\}$.)*

Эту лемму мы назвали основной потому, что она сыграет главную роль при определении правил действий на множестве K-чисел. Она верна для любых множеств K-чисел A и B. Но мы докажем ее только в предположении, что A и B — к о н е ч н ы е множества к о н е ч н ы х K-чисел.

Будем искать элемент, разделяющий множества A и B, последовательно. Поскольку 0 — самое раннее число, начнем с него.

Если 0 разделяет множества A и B, то все доказано. Если же нет, то по обе стороны (в смысле «больше — меньше») от 0 найдутся либо элементы из A, либо элементы из B. Пусть это — элементы из A. Тогда разделяющий элемент не может быть меньше 0, т. е. он не может начинаться с ↓; значит, он начинается с ↑. Самое раннее число, начинающееся с ↑, — это ↑. Рассуждаем, как выше: если ↑ разделяет A и B, то все доказано. Если же нет, то снова по обе стороны от него найдутся элементы из A или из B; допустим теперь, что это — элементы из B. Тогда разделяющий элемент не может быть больше ↑; значит, он начинается с ↑↓. Берем ↑↓ и проделываем с ним ту же процедуру и т. д. (рис. 2).

Мы предоставляем вам возможность убедиться в том, что этот процесс (в случае конечных множеств A и B, состоящих из конечных K-чисел) не может продолжаться бесконечно и, значит, приводит к разделяющему числу c.

Для доказательства можно, например, выделить наименьшее число из B и наибольшее число из A — тем самым доказательство теоремы сводится к частному случаю, когда каждое из множеств A и B состоит из одного числа.

Из самого способа построения видно, что c раньше любого из разделяющих чисел.

Этот же способ доказательства можно применить и в общем случае, но он приводит, вообще говоря, к бесконечному разделяющему K-числу, и строгое доказательство того, что процесс «закончится» (что это такое для бесконечных процессов — еще надо определить!), требует сведений из теории трансфинитных чисел.

Определение сложения

Конвей задает операции над K-числами, руководствуясь *принципом очередности и простоты*. Он состоит в том, что правила действий определяются не сразу для всех чисел, а постепенно: сначала для более ранних, а потом для более «поздних»; при этом в качестве результата выбирается самое раннее возможное число.

Определяя, например, сумму двух каких-нибудь K-чисел, мы считаем, что для всех более ранних слагаемых суммы уже определены. После этого вступает в силу вторая половина принципа. Чтобы показать, как этот принцип «работает», вычислим с его помощью несколько сумм. Разумеется, до тех пор, пока мы не придадим принципу четкой математической формы, эти вычисления будут носить несколько нестрогий характер.

Поскольку 0 — самое раннее число, «вычислим» первым делом сумму $0+0$. Так как никаких результатов пока еще нет, ответом может быть любое K-число. Но из всех возможных ответов следует выбрать самый ранний. Это — 0. Итак, мы «доказали» равенство

$$0+0=0. \qquad (1)$$

Попробуем теперь проверить, что 0 действительно имеет свойства нуля, указанные в аксиоме С3 (см. с. 9), то есть что

$$0+x=x \qquad (2)$$

для любого K-числа x.

Введем для этого некоторые обозначения. Пусть x — некоторое K-число. Назовем *срезом* x (обозначение: $x]$) множество всех K-чисел y более ранних, чем x, то есть

$$x] = \{y \mid y \leftarrow x\}.$$

Срез x делится на *нижний срез* x и *верхний срез* x (обозначения: $\underline{x}|$ и $\overline{x}|$ соответственно). *Нижний срез* x — это множество всех y более ранних, чем x, и меньших x:

$$\underline{x}| = \{y \mid y \in x], \quad y<x\},$$

а *верхний срез* — это множество всех y более ранних, чем x, но бо́льших x (см. рис. 2):

$$\overline{x}| = \{y \mid y \in x], \quad y>x\}.$$

Например, срез $\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow$ состоит из четырех чисел:

$$\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow] = \{0, \uparrow, \uparrow\downarrow, \uparrow\downarrow\uparrow\},$$

причем нижний срез $\underline{\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow}| = \{0, \uparrow\downarrow, \uparrow\downarrow\uparrow\}$, а верхний срез $\overline{\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow}| = \{\uparrow\}$. А вот $\overline{\uparrow}|$ и $\underline{\downarrow}|$ — это пустые множества; при этом $\underline{\uparrow}| = \overline{\downarrow}| = \{0\}$.

Воспользуемся теперь очередностью: будем считать, что для K-чисел более ранних, чем x, равенство (2) верно (очевидно, любое число, которое раньше x, принадлежит либо $\underline{x}|$, либо $\overline{x}|$). Тогда сумма $0+x$ больше любого числа из $\underline{x}|$. С другой стороны, она меньше любого числа из $\overline{x}|$. Таким образом, число $0+x$ разделяет множества $\underline{x}|$ и $\overline{x}|$ (нижний и верхний срезы x). Поскольку по принципу Конвея нужно выбрать самое раннее такое число, $0+x = \{\underline{x}| : \overline{x}|\}$. Но $\{\underline{x}| : \overline{x}|\}=x$ (подумайте, почему), то есть $0+x=x$.

Итак, мы почти обосновали обозначение 0 для пустого набора. Теперь оправдано сделанное выше утверждение о том, что в K-арифметике числа, начинающиеся с $\uparrow$, играют роль положительных, а числа, начинающиеся с $\downarrow$, — роль отрицательных.

Найдем теперь сумму $\uparrow+\uparrow$. Поскольку $\underline{\uparrow}|=\{0\}$, $\uparrow+\uparrow$ больше $\uparrow$. Самое раннее число, большее $\uparrow$, — это $\uparrow\uparrow$. Поэтому

$$\uparrow+\uparrow=\uparrow\uparrow. \qquad (3)$$

У нас есть теперь опыт решения примеров на сложение: мы понимаем, что суммой $x+y$ должно быть самое раннее число, которое р а з д е л я е т суммы с н е д о с т а т к о м (то есть объединение множеств $\underline{x}|+y$ и $x+\underline{y}|$) и суммы с и з б ы т к о м (объединение множеств $\overline{x}|+y$ и $x+\overline{y}|$). (Относительно сумм с недостатком и сумм с избытком мы считаем, что уже умеем их определять.) Таким образом, принцип очередности и простоты приводит нас к такому определению суммы двух чисел:

$$x+y=\{(\underline{x}|+y)\cup(x+\underline{y}|) : (\overline{x}|+y)\cup(x+\overline{y}|)\} \qquad (4)$$

(напомним, что элемент $\{A:B\}$, где $A<B$, существует и определяется однозначно).

Формула (4) является строгим выражением принципа Конвея для суммы чисел. Для определения сложения к ней нужно еще присоединить *начальные условия* — формулу (1). На самом деле доказать ее нельзя — она является частью определения. С помощью формул (4) и (1) можно вычислить сумму любых K-чисел.

Теперь мы можем проверить, что в нашей модели выполняются аксиомы сложения (см. с. 9).

Проверим, например, что сложение, определенное формулой (4), коммутативно.

В самом деле, возьмем первые два числа, для которых сложение некоммутативно *). Их сумма — это самое раннее число, отделяющее суммы с недостатком от сумм с избытком. Суммы с недостатком и суммы с избытком были коммутативными (по предположению). Значит, и самое раннее число, которое их разделяет, тоже не зависит от порядка слагаемых — мы разделяем один и тот же набор множеств и в обоих случаях берем самое раннее число из разделяющих (а оно определяется единственным образом — см. основную лемму). Значит, и сумма наших двух чисел не зависит от их порядка, вопреки предположению. Значит, сложение коммутативно.

В выполнении аксиомы С3 мы фактически убедились раньше. Аксиома С1 проверяется сложнее, чем аксиома С2; подумайте, как.

Найдем теперь сумму $\uparrow+\downarrow$. Заметим, что $\overline{\uparrow}|$ и $\underline{\downarrow}|$ — пустые множества. Поэтому ответом должно быть самое раннее число, большее $\downarrow$ (поскольку $\underline{\uparrow}|=\{0\}$) и меньшее $\uparrow$ (поскольку $\overline{\downarrow}|=\{0\}$). Таким числом является 0.

Итак, $\uparrow+\downarrow=0$ и $\downarrow$ является противоположным (в смысле аксиомы С4) элементом для $\uparrow$.

Обозначим через $\uparrow^n$ и через $\downarrow^n$ K-числа, состоящие из n подряд идущих соответствующих символов.

Задачи

1. Докажите, что $\uparrow^n+\uparrow^m=\uparrow^{n+m}$, $\downarrow^n+\downarrow^m=\downarrow^{n+m}$.

2. Докажите, что

$$\uparrow^n+\downarrow^m=\begin{cases}\uparrow^{n-m}, & \text{если } n>m;\\ 0, & \text{если } n=m;\\ \downarrow^{m-n}, & \text{если } n<m.\end{cases}$$

Из этих задач следует, что число $\uparrow^n$ можно отождествить с обычным натуральным числом n *), а число $\downarrow^n$ — с противоположным ему числом $(-n)$. Таким образом, *числа Конвея содержат все обычные целые числа!*

Задача 3. Докажите, что если у данного K-числа все $\uparrow$ заменить на $\downarrow$, а все $\downarrow$ — на $\uparrow$, то получится число, ему противоположное. (Например, $\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow+\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\uparrow=0$.)

Из задачи 3 вытекает, что в модели Конвея выполняется аксиома С4.

Есть ли дроби?

Возьмем число $\uparrow\downarrow$. Попробуем сложить его с самим собой. Что можно сказать о сумме $\uparrow\downarrow+\uparrow\downarrow$? Она должна быть меньше, чем сумма $\uparrow\downarrow+\uparrow$, и больше, чем число $\uparrow\downarrow$. Но чему равна сумма $\uparrow\downarrow+\uparrow$, мы не знаем. Мы нарушили наш главный принцип: двигаться от более ранних чисел к более «поздним». Придется (никуда не денешься!) сосчитать сначала сумму $\uparrow\downarrow+\uparrow$.

Это число меньше, чем число $\uparrow+\uparrow=\uparrow\uparrow$ (поскольку $\overline{\uparrow\downarrow}|=\{\uparrow\}$), и больше, чем число $\uparrow+0=\uparrow$ (поскольку $\underline{\uparrow}|=\{0\}$), причем оно — самое раннее такое число. Самое раннее число, заключенное между $\uparrow$ и $\uparrow\uparrow$, — это число $\uparrow\uparrow\downarrow$; поэтому

$$\uparrow\downarrow+\uparrow=\uparrow\uparrow\downarrow.$$

Вернемся к сумме $\uparrow\downarrow+\uparrow\downarrow$. Теперь мы знаем, что она заключена между числами $\uparrow\downarrow$ и $\uparrow\uparrow\downarrow$. Самое раннее такое число — это $\uparrow$ (убедитесь в этом!).

Итак, в K-арифметике число $\uparrow\downarrow$ играет роль «половинки». Аналогично устанавливается, что $\uparrow\uparrow\downarrow$ среди K-чисел — то же самое, что обычное число $\frac{3}{2}$ среди действительных чисел.

Задачи

4. Найдите суммы $\uparrow\downarrow\downarrow+\uparrow\downarrow$; $\uparrow\downarrow\downarrow+\uparrow\downarrow\downarrow$; $\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow+\uparrow\downarrow\downarrow$; $\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\downarrow+\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow$.

5. Каким обычным числам соответствуют такие K-числа:

а) $\uparrow\downarrow\downarrow$, $\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow$, $\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow$, $\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow$, $\uparrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\downarrow$;

б) $\downarrow\uparrow$, $\downarrow\uparrow\uparrow$, $\downarrow\downarrow\uparrow$;

в) вообще числа вида

$$\underbrace{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{n\ \text{«up»}}\ \underbrace{\downarrow\downarrow\ldots\downarrow}_{m\ \text{«down»}},$$

$$\underbrace{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{n_1}\underbrace{\downarrow\downarrow\ldots\downarrow}_{m_1}\underbrace{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{n_2}\underbrace{\downarrow\downarrow\ldots\downarrow}_{m_2}\ldots\underbrace{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{n_l}\underbrace{\downarrow\downarrow\ldots\downarrow}_{m_l},$$

---

*) Напомним, что мы пока рассматриваем конечные K-числа. Для бесконечных K-чисел рассуждение более сложно.

*) Если принять $\uparrow$ за единицу; $\uparrow$ действительно выполняет роль единицы в арифметике Конвея, однако мы не сможем в этом убедиться, поскольку не даем в этой статье определения умножения.

$$\underbrace{\downarrow\downarrow\ldots\downarrow}_{n\text{ «down»}}\ \underbrace{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{m\text{ «up»}},$$

$$\underbrace{\downarrow\downarrow\ldots\downarrow}_{n_1}\underbrace{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{m_1}\underbrace{\downarrow\downarrow\ldots\downarrow}_{n_2}\underbrace{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{m_2}\ldots\underbrace{\downarrow\downarrow\ldots\downarrow}_{n_i}\ \underbrace{\uparrow\uparrow\ldots\uparrow}_{m_i}?$$

Мы подскажем о т в е т в задаче 5: *К*-число ↑↓↓ — это то же самое, что $\frac{1}{4}$ в **R**, *К*-число ↑↓↑ — то же, что $\frac{3}{4}$, ↑↓↓↓ — это $\frac{1}{8}$, ↑↓↓↑ — это $\frac{3}{8}$, и т. д.

Задачи 4 и 5 позволяют д о г а д а т ь с я, каким обычным действительным числам соответствуют все вообще конечные наборы ↑ и ↓. Это — так называемые *двоично-рациональные числа* (то есть рациональные числа, знаменателем которых является степень двойки). Попробуйте доказать это утверждение.

Что же дальше?

Итак, мы выяснили, что среди *К*-чисел есть все обычные целые числа (это — либо конечные наборы одних только ↑, либо одних только ↓), а также все другие двоично-рациональные числа (им соответствуют всевозможные конечные наборы, среди которых имеются комбинации ↑↓ или ↓↑).

Если *К*-числа изобразить в виде «дерева» так, как на рисунке 3, то целые *К*-числа окажутся «по краям» этого дерева, а двоично-рациональные — внутри него.

А как же быть с остальными числами? Ведь мы обещали, что среди *К*-чисел окажутся все действительные числа, а пока неясно даже, как быть с рациональными числами, знаменатели которых не есть степени двойки. Все дело здесь в том, что мы пока не видим множества *К*-чисел целиком: мы ведь ограничились рассмотрением лишь конечных наборов «up» — «down», определили для них сложение и научились решать простые задачи (на уровне 2—3 класса школы). А надо бы еще определить умножение, а вместе с тем и выяснить вопрос о существовании обратного элемента для любого отличного от нуля *К*-числа (см. аксиому У4). И вот оказывается, что уже для определения

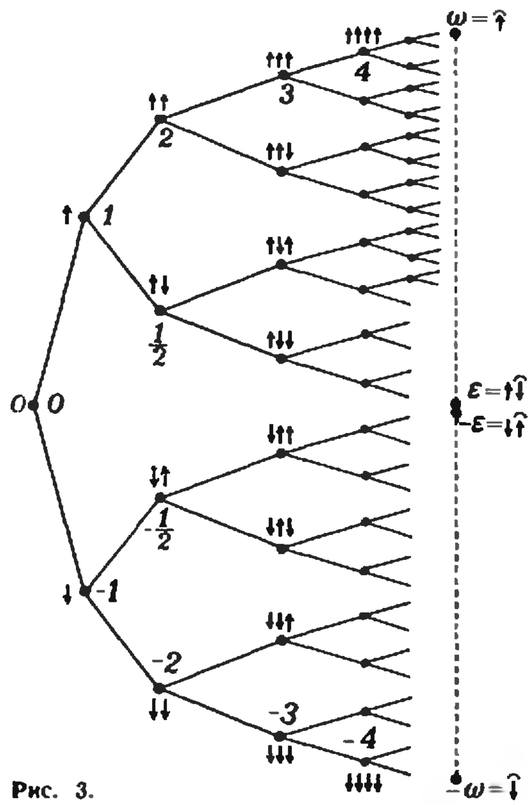


Рис. 3.

a^{-1} (если a не нуль и не степень двойки) конечных *К*-чисел не хватает. Например,

$$\frac{1}{3} = \uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\downarrow\uparrow\ldots,$$

$$\frac{1}{5} = \uparrow\downarrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow\ldots$$

Поэтому нам придется научиться работать и с бесконечными *К*-числами.

Из бесконечных *К*-чисел самые простые — *периодические*. Для их записи удобно ввести символ ⌒, означающий б е с к о н е ч н о е п о в т о р е н и е. Например, $\widehat{\uparrow}$ означает ↑↑↑↑..., а $\widehat{\uparrow\downarrow}$ — это ↑↓↑↓↑↓... и т. д. Числа $\frac{1}{3}$ и $\frac{1}{5}$ с помощью дужек записываются так:

$$\frac{1}{3} = \uparrow\downarrow\widehat{\downarrow\uparrow},$$

$$\frac{1}{5} = \uparrow\downarrow\widehat{\downarrow\downarrow\uparrow\uparrow}.$$

Найдем, например, какому обычному числу соответствует *К*-число $\widehat{\uparrow\downarrow\downarrow}$. Мы уже знаем, что ↑ — это обычное число 1, ↑↓ — это $\frac{1}{2}$, ↑↓↓ — это $\frac{1}{4}$. Рассуждая аналогичным образом, получим, что числу $\widehat{\uparrow\downarrow\downarrow}$ соответствует такой бесконечный ряд:

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}-\frac{1}{64}+\frac{1}{128}-\cdots$$

Сокращенно его можно записать так:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{3k}}-\frac{1}{2^{3k+1}}-\frac{1}{2^{3k+2}}\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3k}},$$

а $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2^{3k}}$ — это убывающая геометрическая прогрессия со знаменателем $\frac{1}{2^3}$; сумма ее равна $\frac{1}{1-1/2^3}=\frac{8}{7}$.

Поэтому K-число $\widehat{\uparrow\downarrow\downarrow}$ соответствует обычному числу $\frac{1}{4}\cdot\frac{8}{7}$, то есть $\frac{2}{7}$.

З а д а ч а 6. а) Запишите в виде K-чисел дроби $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{7}$, $-\frac{4}{3}$.

б) Каким обычным числам соответствуют K-числа $\uparrow\uparrow\uparrow\widehat{\downarrow\uparrow}$? $\downarrow\downarrow\downarrow\widehat{\uparrow\downarrow}$?

Теперь мы можем сделать такой вывод: *бесконечным периодическим K-числам* (за исключением тех случаев, когда период состоит чисто из $\uparrow$ или чисто из $\downarrow$, — эти случаи мы обсудим отдельно) *соответствуют обычные рациональные числа.*

А если рассмотреть бесконечные *непериодические* наборы $\uparrow$ и $\downarrow$, то получатся уже *иррациональные* числа.

Эти свойства K-чисел аналогичны известным свойствам бесконечных десятичных дробей.

Например,

$\frac{1}{2}=0{,}5$; $\frac{1}{8}=0{,}125$ — конечные десятичные дроби;

$\frac{1}{3}=0{,}(3)$; $\frac{1}{7}=0{,}(142857)$ — бесконечные периодические десятичные дроби;

а иррациональные числа, например $\sqrt{2}$ и π, — это уже бесконечные непериодические десятичные дроби:

$$\sqrt{2}=1{,}41421\ldots;$$

$$\pi=3{,}14159268979323648\ldots$$

Правда, есть существенные отличия K-арифметики от обычной. Числа вида $\frac{m}{2^k\cdot 5^l}$, где $l\neq 0$, переводятся в к о н е ч н ы е десятичные дроби, а соответствующие им K-числа оказываются б е с к о н е ч н ы м и периодическими наборами.

З а д а ч а 7*. Воспользовавшись двоичной системой счисления, придумайте алгоритм «перевода» обычных рациональных чисел в K-числа.

При определении действий над бесконечными K-числами главным остается все тот же принцип очередности и простоты. Имеет место и аналог основной леммы — принцип разделения множеств, одно из которых выше другого (при этом «самый ранний» разделяющий элемент оказывается, вообще говоря, уже бесконечным набором).

З а д а ч а 8. Вычислите $\widehat{\uparrow\downarrow\downarrow\uparrow}+\uparrow$; $\widehat{\uparrow\downarrow}+\widehat{\downarrow\uparrow}$.

Всевозможные конечные и бесконечные наборы $\uparrow$ и $\downarrow$ дают нам уже все обычные действительные числа. Но (и это самое замечательное!) оказывается, что они дают не только действительные числа.

Рассмотрим, например, такое K-число: $\omega=\widehat{\uparrow}$ — и еще более интересное число $\varepsilon=\uparrow\widehat{\downarrow}$.

Очевидно, что число ω больше любого «натурального» K-числа $\uparrow^n$, а число ε положительно, но меньше любого «рационального» положительного K-числа $\uparrow\downarrow^n$ (то есть $\omega>n$, а $0<\varepsilon<\frac{1}{2^n}$ для любого натурального n).

Действительных же чисел с такими свойствами нет!

Дальше бесконечности

В заключение поговорим о «более чем бесконечных» K-числах.

Прежде всего заметим, что среди наших K-чисел (в том числе и бесконечных) нет, например, числа $\omega+\uparrow$. Подумав, можно сообразить, что эта сумма должна записываться в виде $\widehat{\uparrow}\uparrow$: бесконечное число символов $\uparrow$ и еще один такой символ! Казалось бы, от того, что к бесконечному числу символов добавили еще один, ничего

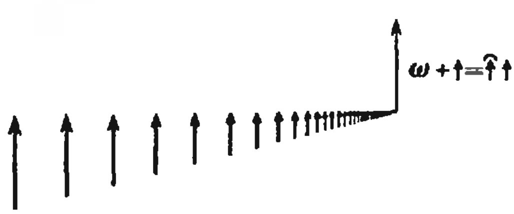


Рис. 4.

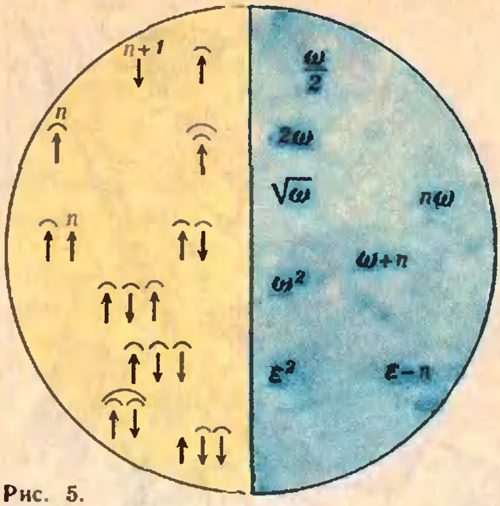


Рис. 5.

не изменилось. Однако это не так: новый символ $\uparrow$ следует за **всем** и предыдущими (рис. 4)! Поэтому $\widehat{\uparrow}$ и $\widehat{\uparrow}\uparrow$ — разные *К*-числа.

З а д а ч а 9. Что изображает запись $\widehat{\uparrow\downarrow}$?

О т в е т: $\omega-\uparrow$. У к а з а н и е: вычислите сумму $\widehat{\uparrow\downarrow}+\uparrow$.

Среди чисел «более длинных, чем бесконечные», встречаются довольно замысловатые. Попробуйте, например, угадать, какая из записей в правой половине круга на рисунке 5 соответствует *К*-числам, стоящим в левой половине.

Если вас заинтересовала арифметика *К*-чисел и вы хотели бы узнать о ней побольше, напишите нам.

Приложение

I. А к с и о м ы с л о ж е н и я.

Для любых двух элементов $a\in\mathbf{R}$, $b\in\mathbf{R}$ *определена сумма* $a+b\in\mathbf{R}$, *причем:*

С1. $(a+b)+c=a+(b+c)$ (*ассоциативность*).

С2. $a+b=b+a$ (*коммутативность*).

С3. *Существует такой элемент* 0, *что для любых* $a\in\mathbf{R}$ *выполняется соотношение* $a+0=a$ (*существование нуля*).

С4. *Для каждого элемента* $a\in\mathbf{R}$ *существует такой элемент* $(-a)\in\mathbf{R}$, *что* $a+(-a)=0$ (*существование противоположного элемента*).

II. А к с и о м ы у м н о ж е н и я.

Для любых двух элементов $a\in\mathbf{R}$, $b\in\mathbf{R}$ *определено произведение* $a\cdot b\in\mathbf{R}$, *так что:*

У1. $(ab)c=a(bc)$ (*ассоциативность*).

У2. $ab=ba$ (*коммутативность*).

У3. *Существует такой элемент* 1, *что для любых* $a\in\mathbf{R}$ *имеет место равенство* $a\cdot1=a$ (*существование единицы*).

У4. *Для каждого элемента* $a\in\mathbf{R}$, *отличного от нуля, существует такой элемент* $a^{-1}\in\mathbf{R}$, *что* $a\cdot a^{-1}=1$ (*существование обратного элемента*).

III. А к с и о м а, у с т а н а в л и в а ю щ а я с в я з ь с л о ж е н и я с у м н о ж е н и е м.

С—У. $a(b+c)=ab+ac$ (*дистрибутивность*).

Множество с определенными на нем операциями сложения и умножения, обладающими перечисленными свойствами, математики называют *полем* (см. «Квант», 1977, № 5, с. 45).

IV. А к с и о м ы п о р я д к а.

П1. *Для каждого элемента* $a\in\mathbf{R}$ *имеет место ровно одно из соотношений*

$$a>0,\ a=0,\ 0>a.$$

П2. *Если* $a>0$ *и* $b>0$, *то* $a+b>0$ *и* $ab>0$.

По определению полагают, что $a>b$ тогда и только тогда, когда $a-b>0$.

Поле, в котором выполнены аксиомы П1 и П2 и отношение порядка $>$ определено формулой $a>b\Leftrightarrow a-b>0$, называется *упорядоченным полем*.

Последняя группа аксиом, определяющих действительные числа, состоит всего из одной аксиомы совсем иной природы.

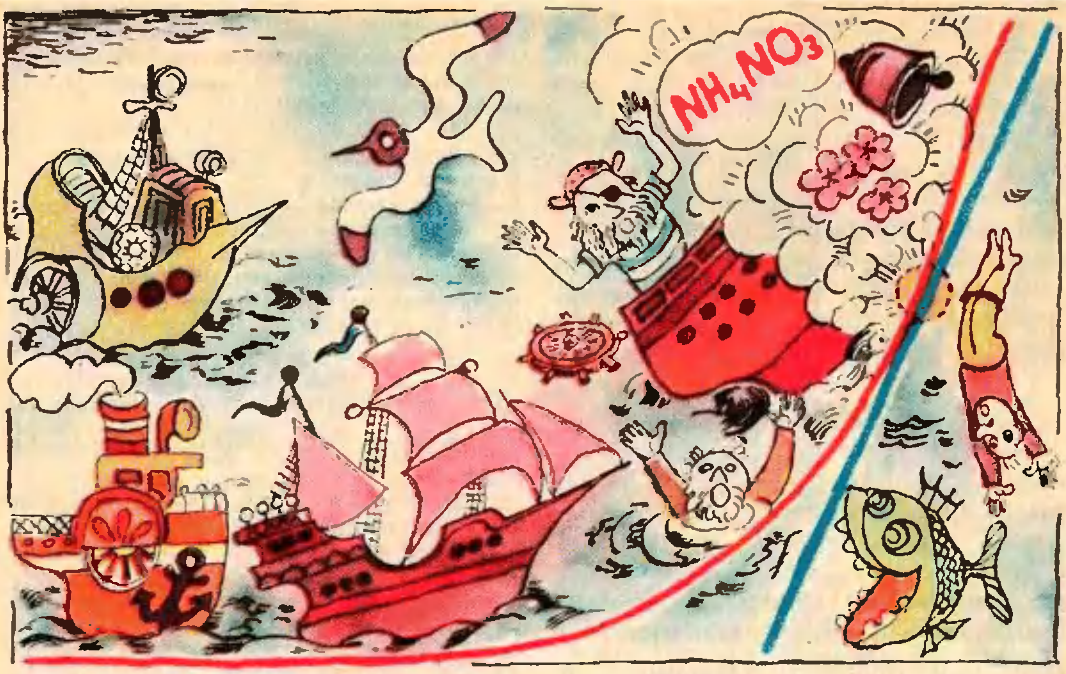
V. А к с и о м а п о л н о т ы.

Непустое множество действительных чисел, ограниченное сверху, имеет наименьшую верхнюю грань.

Это означает, что если для непустого множества $A\subset\mathbf{R}$ существует элемент, который больше (или равен) всех элементов этого множества, то среди таких элементов есть наименьший.

Упорядоченное поле, для которого выполняется аксиома полноты, называется *полным упорядоченным полем*.

Доказано, что перечисленные 12 аксиом определяют множество действительных чисел однозначно. Таким образом, *действительные числа — это единственное полное упорядоченное поле*. *К*-числа не удовлетворяют последней аксиоме.



Б. Новожилов

Тепловой взрыв

В январе 1953 года в Красном море взорвался и затонул винтовой пароход «Тиррения» водоизмещением четыре тысячи тонн. В истории морского судоходства известны и более крупные катастрофы — взрывы и пожары на танкерах и судах, перевозящих боеприпасы. Но «Тиррения» шла, на первый взгляд, с безобидным во взрывоопасном отношении грузом — аммиачной селитрой. Если бы это был единичный факт, то причину взрыва можно было бы искать среди случайных обстоятельств. Однако в Регистре судоходства Ллойда, фиксирующем все достаточно крупные морские катастрофы, отмечено несколько десятков пожаров и взрывов, связанных с аммиачной селитрой. Участились они в сороковые — пятидесятые годы, когда темпы промышленного производства этого вещества резко возросли. Рекордным оказался 1947 год — в процессе погрузки судов в различных портах произошло три мощных взрыва, что привело к большому числу человеческих жертв.

Между тем аммиачная селитра (азотнокислый аммоний, или нитрат аммония, NH_4NO_3) уже давно используется в больших количествах в технике и сельском хозяйстве. Ежегодное производство ее составляет десятки миллионов тонн. Достаточно посмотреть на химическую формулу этого соединения, чтобы сообразить, где оно может применяться. Нитрат аммония содержит много азота, причем связанного в два наиболее хорошо усваиваемых растениями иона — аммиачный и нитратный. Поэтому аммиачная селитра — одно из наиболее ценных минеральных удобрений. А наличие большого количества кислорода обусловливает второе, не всегда мирное применение нитрата аммония в качестве окислителя при производстве порохов и взрывчатых веществ. Без примесей органики, металлов нитрат аммония не взрывается. Он часто используется в демонстрационных химических опытах. Смесь же NH_4NO_3 с тротилом или алюминием — сильное взрывчатое вещество.

Попробуем разобраться, почему совершенно безопасное минеральное удобрение — аммиачная селитра, которое годами в больших количествах может храниться на складах или под открытым небом, послужило причиной трагедий на море.

Взрывной процесс характеризуется очень быстрым выделением большого количества энергии, что сопровождается резким изменением состояния вещества. Образовавшиеся при взрыве газы могут при своем расширении совершить значительную механическую работу.

Такие понятия, как «быстрый» и «большой», конечно, относительны. При сгорании килограмма угля в воздухе выделяется около тридцати миллионов джоулей. Этого тепла достаточно для нагрева продуктов горения до температуры во много тысяч градусов. Таким температурам при обычной плотности газа соответствуют давления в сотни атмосфер. Таким образом, с энергетической точки зрения система уголь — кислород обладает достаточным запасом энергии для возникновения взрыва. Однако уголь не взрывается, а спокойно горит.

Дело в том, что в этом случае не выполняется второе условие взрыва — быстрота выделения энергии. Действительно, горение угля начинается с поверхности, слои, лежащие глубже, начинают гореть лишь после того, как они прогреются за счет тепла, выделившегося при реакции в поверхностном слое. Прогрев, а также подвод кислорода происходят настолько медленно, что продукты горения успевают расшириться, и существенного увеличения давления не возникает.

Однако есть такие вещества, химическое превращение которых возможно и без подвода окислителя извне. Примерами могут служить твердые ракетные топлива, динамит и т. п.

Одно из таких веществ — тринитротолуол — $C_7H_5(NO_2)_3$. Специалисты называют его обычно тротилом или толом. Если тротил поджечь с поверхности, он легко воспламеняется и горит. При этом внутренность вещества медленно прогревается. И несмотря на то, что теплота сгорания этого вещества намного меньше, чем у обычных топлив (всего 4 МДж/кг), тротил может взорваться. Для этого нужно увеличить температуру во всем объеме вещества. Сделать это можно разными способами, например, сжатием. При этом реакция идет во всем объеме и так быстро, что образующиеся газообразные продукты за время протекания реакции не успевают существенно расшириться. Занимая объем, примерно равный объему исходного заряда, и будучи нагретыми до высокой температуры, эти газообразные продукты создают давление в десятки и сотни тысяч атмосфер. Последующее быстрое расширение газов приводит к разрушению окружающей среды — происходит взрыв.

В этой статье мы хотим познакомить читателя с тепловым взрывом — самопроизвольным взрывным процессом, связанным с освобождением химической энергии.

Прежде всего нужно напомнить основные факты из учения о скоростях химических реакций.

Первое, что бросается в глаза при исследовании химического превращения, — его малая скорость. Действительно, в газе, например, при нормальных условиях каждая молекула испытывает в среднем 10^{10} столкновений в секунду. Если бы каждое столкновение приводило к реакции, то она произошла бы мгновенно. Опыт не подтверждает этого. Например, смесь водорода и кислорода (гремучий газ) при комнатной температуре можно хранить совершенно спокойно. Все дело в том, что лишь очень малая доля столкновений оказывается эффективной, то есть приводит к реакции.

Химический акт — превращение одних молекул в другие. При этом разрушаются одни связи между атомами и возникают новые. Если новые связи прочнее старых, то реакция идет с выделением тепла (экзотермический процесс). Это, однако, не означает, что реакция должна пойти быстро. Ведь прежде чем образовать новые связи (пусть даже и более прочные), нужно разрушить старые, то есть затратить энергию. Прочность любой составной системы (атома, молекулы, ядра) характеризуется энергией связи. Она равна той работе, которую нужно совершить, чтобы разложить систему на составляющие ее части. Например, энергия связи молекулы водорода составляет $7{,}2\times10^{-19}$ Дж. Такую энергию нужно затратить, чтобы получить два атома водорода, и, наоборот, ровно столько

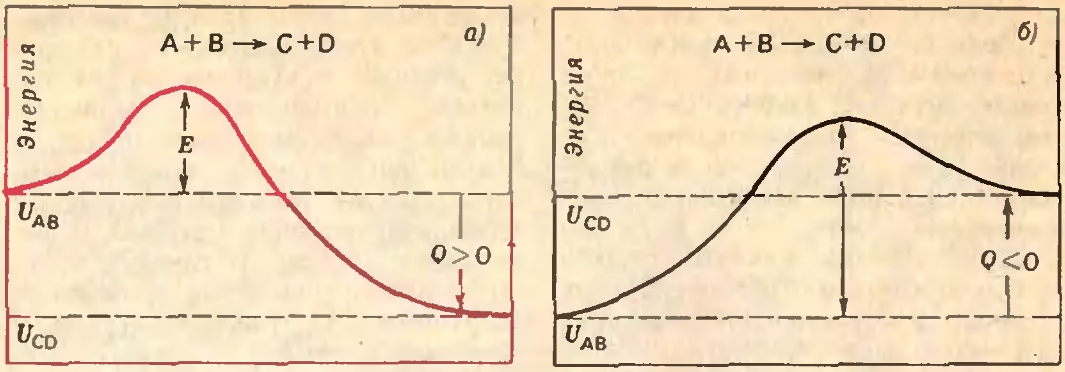


Рис. 1. Энергия активации E и тепловой эффект Q реакции $A+B \to C+D$ для экзотермической (a) и эндотермической (b) реакций.

энергии выделится при образовании молекулы водорода из атомов. Разность между энергиями связей продуктов и исходных веществ называется тепловым эффектом реакции (чаще всего внутренняя энергия молекул в результате реакции переходит в тепло). Пересчитанный на единицу массы или объема вещества тепловой эффект представляет собой теплоту сгорания.

Если реакция сопровождается выделением тепла, это совсем не означает, что она должна идти быстро. Это иллюстрирует рисунок 1. В процессе реакции $A+B \to C+D$ связи в молекулах A и B должны быть разрушены или по крайней мере существенно ослаблены. Для этого необходима некоторая (вполне определенная для каждой реакции) энергия E. Она называется энергией активации реакции. Ясно, что по порядку величины энергия активации должна быть близка к сумме U_{AB} энергий связей молекул A и B. Таким образом, ход химического процесса в начальной стадии энергетически затруднен. Вступающие в реакцию молекулы должны обладать достаточной тепловой энергией, чтобы преодолеть барьер величиной E.

Разрушение или ослабление химических связей может произойти под действием теплового (поступательного или колебательного) движения атомов и молекул. Природа устроена так, что энергия теплового движения при умеренных температурах обычно много меньше энергии активации. Средняя энергия теплового движения порядка kT, то есть $\sim 4 \cdot 10^{-21}$ Дж, в то время как энергия активации в сотни раз больше. В этом причина столь ничтожного числа эффективных соударений. Химическая реакция идет лишь между теми молекулами, тепловая энергия которых намного превышает среднюю. А их очень мало.

Число молекул, обладающих энергией теплового движения E при температуре T, выражается простой формулой:

$$y=e^{-E/kT}.$$

(Читателям придется принять эту формулу на веру — более или менее последовательный вывод ее увел бы нас далеко в сторону.) Качественный вид зависимости величины y от температуры T для различных значений

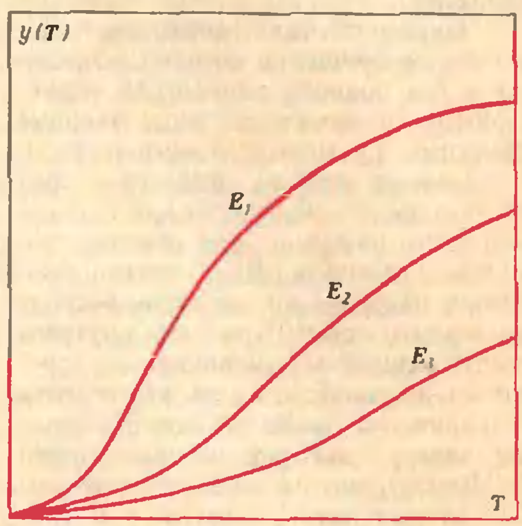


Рис. 2. Доля активных молекул при разных энергиях активации ($E_1 < E_2 < E_3$) в зависимости от температуры.

энергии активации E приведен на рисунке 2.

Таким образом, скорость химической реакции, то есть количество вещества (в килограммах, молях, числе частиц), прореагировавшего за единицу времени в единице объема, может быть записана в таком виде:

$$w = ze^{-E/kT},$$

где величина z определяется либо числом столкновений (в газах), либо количеством молекулярных связей, разрыв которых приводит к химическому превращению (в конденсированных телах). (Размерность w и z одна и та же: кг/(м^3·с), моль/(м^3·с) или 1/(м^3·с).) Для того чтобы вы могли «почувствовать», насколько резка зависимость скорости химической реакции от температуры, мы предлагаем вам рассмотреть конкретный численный пример — решить задачу 1 (см. с. 16).

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы объяснить явление теплового взрыва. Причина, приводящая к тепловому самовоспламенению, очень проста. Если реакция идет с выделением тепла, то вещество нагревается. С нагревом возрастает скорость химической реакции. Это, в свою очередь, должно привести к более интенсивному выделению энергии. На возможность такого прогрессивно самоускоряющегося протекания химической реакции указывал еще в конце прошлого века знаменитый голландский химик Вант-Гофф. Количественная теория теплового взрыва была дана в 1928 году академиком Н. Н. Семеновым. Ее с полным правом можно отнести к классическим. Теория достаточно проста, чтобы ее можно было объяснить «на пальцах». С другой стороны, и сейчас, спустя полстолетия после создания теории, она остается основой для исследования и решения все новых и новых задач химической физики — науки о физических основах химического процесса.

Конечно, скороспелый вывод о том, что любая смесь, в которой происходит экзотермическая реакция, в конце концов взорвется, неверен. Ведь сосуд, в котором происходит реакция, ограничен и выделяющееся тепло может отводиться в окружающую среду. Конкуренция тепловыделения и отвода тепла приводит к очень своеобразному поведению химически самоускоряющихся систем.

Перейдем к количественной стороне явления. Пусть в некотором объеме V идет реакция с теплотой сгорания Q Дж/кг. Количество тепла, выделяющегося ежесекундно во всем объеме, равно

$$P_+ = zQVe^{-E/kT} \text{ (Дж/с)},$$

где T — температура реагирующего вещества в объеме V.

Пусть температура окружающей среды постоянна и равна T_0. Потери тепла из реагирующего объема пропорциональны разности $T - T_0$ и площади S поверхности, ограничивающей объем V. Следовательно, ежесекундно реагирующее вещество отдает окружающей среде количество тепла

$$P_- = \alpha S\,(T - T_0),$$

где α — так называемый коэффициент теплоотвода. Естественно, эта величина должна содержать в себе характеристику способности вещества проводить тепло — коэффициент теплопроводности λ — и характерный размер тела — r (для шара, например, его радиус). Таким образом,

$$\alpha = K\lambda/r.$$

Коэффициент K — некоторая константа для данного тела, которая характеризует влияние формы тела на величину теплоотдачи. Понятно, почему размер r попал в знаменатель: при одной и той же разности температур между двумя точками тела поток тепла (количество тепла, проходящего за единицу времени через единичную площадку) тем меньше, чем больше расстояние между этими точками.

На рисунке 3 изображена функция тепловыделения $P_+(T)$ и несколько прямых теплоотвода $P_-(T)$, отвечающих различным температурам окружающей среды. Обратим внимание на число точек пересечения P_+ и P_-, то есть на число корней уравнения

$$P_+(T) = P_-(T). \qquad (*)$$

Из-за сильной нелинейности функции тепловыделения таких точек может быть несколько. Так, для достаточно низких и высоких температур T_0 ($T_0^{(1)}$ и $T_0^{(3)}$) есть только

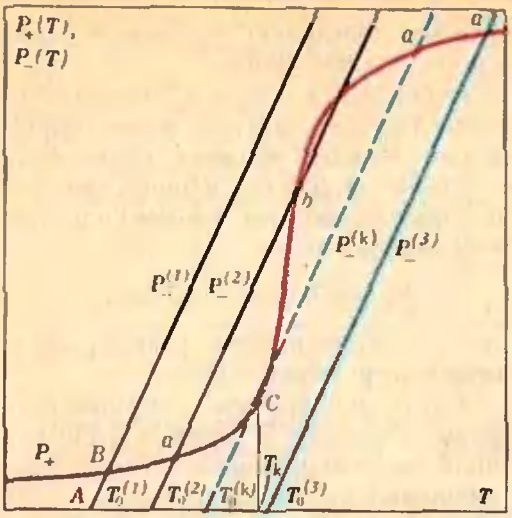


Рис. 3. Зависимость тепловыделения P_+ и теплоотвода P_- от температуры.

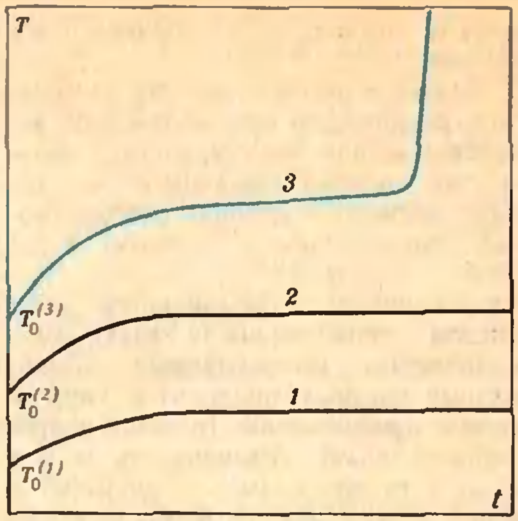


Рис. 4. Изменение температуры во времени для подкритического (кривые *1* и *2*) и надкритического (кривая *3*) режимов.

один корень; при некоторых же температурах окружающей среды (например, $T_0^{(2)}$) могут быть три точки пересечения. Равенство $P_+(T)$ и $P_-(T)$ отвечает условию теплового равновесия (стационарности) — вся выделяющаяся энергия отводится из системы в окружающую среду. Простым рассуждением (задача 2) можно показать, что точки пересечения типа a (кривая теплоотвода круче кривой тепловыделения) устойчивы, а точки типа b неустойчивы.

Рассмотрим теперь поведение реагирующей системы во времени. Пусть в начальный момент $t=0$ вещество имело температуру $T_0^{(1)}$, равную температуре окружающей среды (точка A на рисунке 3). Так как в этой точке $P_+ > P_-$, тело начнет нагреваться. На рисунке 4 этот процесс будет соответствовать движению системы по кривой *1*. Видно, что рост температуры со временем замедляется. Это связано с уменьшением в процессе разогрева разности $P_+ - P_-$, которая и определяет рост температуры. Процесс нагрева окончится в точке B (см. рис. 3), которая устойчива. Подобная же зависимость (кривая *2* на рисунке 4) температуры от времени будет и для более высокой начальной температуры $T_0^{(2)}$. Система нагреется до несколько большей, чем в первом случае, конечной температуры и придет в устойчивое состояние.

Повышая температуру окружающей среды (и соответственно начальную температуру вещества), мы придем к качественно совершенно иному режиму разогрева. Посмотрим, как протекает процесс нагрева при начальной температуре $T_0^{(3)}$ (кривая *3* на рисунке 4). В начале процесса зависимость $T(t)$ похожа на два предыдущих случая: разность $P_+ - P_-$ с течением времени уменьшается, поэтому рост температуры замедляется. Система очень долго проходит через узкую щель между кривыми тепловыделения и теплоотвода — на температурной зависимости $T(t)$ это соответствует почти горизонтальному участку. После того как разность $P_+ - P_-$ пройдет через минимум, начнется резкий (быстрее экспоненциального) рост температуры. Возникнет самоускоряющийся процесс выделения энергии. Такое тепловое самоускорение экзотермической химической реакции и называется тепловым взрывом.

Наиболее замечательной стороной этого явления следует считать существование критического условия. Мы видим, что плавное изменение T_0 приводит к резкому качественному изменению поведения системы. Температурная зависимость $T(t)$ может быть только двух типов — либо слабый разогрев, либо резкое (после некоторого плавного периода) возрастание температуры — взрыв.

Очевидно, что должна существовать некоторая критическая температура $T_0^{(\text{к})}$, которая отделяет эти два типа режимов. Конечно, читатель уже обратил внимание на пунктирную кривую $P_-^{(\text{к})}$ на рисунке 3, соответствующую температуре $T_0^{(\text{к})}$. $T_0^{(\text{к})}$ и есть критическая начальная температура. Кривые P_+ и $P_-^{(\text{к})}$ имеют точку касания (точка C). Если начальная температура ниже $T_0^{(\text{к})}$, то происходит медленный разогрев вещества. Малейшее увеличение T_0 выше $T_0^{(\text{к})}$ приводит к взрыву.

Прежде чем переходить к расчетам условий взрыва, отметим, что критическое состояние системы может возникнуть не только за счет изменения начальной температуры. Функции P_+ и P_- содержат и другие параметры, изменение которых переводит систему из подкритического в надкритическое состояние (этому вопросу посвящена задача 3).

Перейдем теперь к математике, то есть получим количественный критерий взрыва. Он должен иметь характер некоторого неравенства типа $T_0 > T_0^{(\text{к})}$, в которое входили бы все параметры задачи. Мы хотим найти условие касания двух кривых, соответствующих функциям $P_+(T)$ и $P_-(T)$. Для старшеклассников, знакомых с дифференциальным исчислением, это подходящий случай проверить свои знания. Те же, кто не умеет дифференцировать, должны поверить в окончательный результат и понять его физический смысл.

Для того чтобы графики функций касались в данной точке, необходимо выполнение двух условий: во-первых, значения функций в этой точке должны быть равными, и во-вторых, значения производных функций в этой точке должны совпадать.

Эти два условия определяют критическую температуру, то есть ту температуру вещества, которая отвечает точке касания графиков $P_+(T)$ и $P_-(T)$:

$$T_\text{к} = T_0 + \frac{kT_0^2}{E}$$

(значение T_0 в этой формуле равно $T_0^{(\text{к})}$).

Значение $T_\text{к}$ определяет критерий теплового взрыва:

$$\frac{zQV}{\alpha S}\frac{E}{kT_0^2}e^{-E/kT_0} \geqslant \frac{1}{e} \;{}^{*)}. \qquad (**)$$

(Подстановка значения $T_\text{к}$ в равенство (**) дает условие критического режима; знак «больше» определяет взрыв.)

Таким образом, зная форму и размеры объема, содержащего вещество с известными физико-химическими свойствами, мы можем предсказать, произойдет взрыв или нет.

Теперь мы можем перейти к расследованию дела о взрывах судов, груженных аммиачной селитрой. Уже говорилось, что при ее разложении выделяется тепло, а поскольку скорость химической реакции растет с температурой, то в принципе тепловой взрыв нитрата аммония возможен. Однако возможность — это не необходимость. Только перейдя к численным оценкам, можно установить, произошел ли тепловой взрыв или причины катастрофы следует искать в чем-то ином.

Перепишем формулу (**) в несколько ином виде. Очевидно, что отношение $V/\alpha S$ пропорционально квадрату линейного размера тела r^2. Поэтому критерий теплового взрыва можно записать в виде условия, определяющего критический размер тела $r_\text{к}$:

$$r_\text{к} = \left(\frac{C\lambda kT_0^2}{zQE}e^{E/kT_0}\right)^{1/2},$$

при $r > r_\text{к}$ — взрыв.

(Постоянная C характеризует влияние формы тела.)

Значения параметров, входящих в выражение для $r_\text{к}$, известны с различной степенью точности. Теплота сгорания нитрата аммония равна 1 МДж/кг; коэффициент теплопровод-

---

*) Тем, кто захочет самостоятельно получить значение $T_\text{к}$ и критерий теплового взрыва, мы хотим дать указание. Поскольку, как уже говорилось, $kT/E \ll 1$, при вычислении $T_\text{к}$ выражение $\sqrt{1 - 4kT_0/E}$ можно заменить приближенно равным ему значением $1 - 2kT_0/E - 2(kT_0/E)^2$, а при нахождении критерия взрыва выражение $1/(1 + kT_0/E)$ можно заменить приближенно равным ему значением $1 - kT_0/E$.

ности $\lambda=0{,}17$ Дж/(м·с·град). А вот точные значения кинетических констант z и E для нитрата аммония указать нельзя. При современном состоянии науки о химических превращениях теоретически эти константы найти нельзя. Они измеряются, и такие измерения достаточно трудны и всегда связаны с ошибками. Поэтому в таблицах кинетических констант для z и E даны интервалы их вероятных значений: $z=(3\div5)\cdot10^{16}$ кг/(м^3·с), $E=(2{,}4\div2{,}7)\cdot10^{-23}$ Дж.

Таким образом, вопрос заключается не в вычислении критического значения $r_к$ размеров тела, а в определении области значений $r_к$ при изменении кинетических параметров в тех пределах, которые указаны выше.

Наиболее сильно влияют на критический размер энергия активации и температура среды — они входят в показатель экспоненты. На их фоне влияние других параметров несущественно. Изобразим на графике зависимость $r_к(T_0)$ для различных значений энергии активации (рис. 5). Область выше кривой (большие r и высокие температуры) соответствует взрыву. При уменьшении энергии активации критический размер падает.

Из графика видно, что характерные размеры грузовых отсеков судов (порядка десятков метров) попадают в область $r_к$ в разумных пределах изменения энергии активации и начальной температуры. Как уже говорилось, серия взрывов началась в связи с ростом промышленного производства нитрата аммония. Ускорился технологический процесс, который включает в себя охлаждение селитры, получаемой при нейтрализации азотной кислоты аммиаком. Вполне возможно, что погрузка продукта велась при несколько повышенной температуре. Кроме того, для предотвращения слёживания удобрений гранулы их покрывают воском, а упаковку производят в бумажные мешки. Лабораторные исследования показали, что добавка органики снижает энергию активации. Эти факторы способствуют возникновению взрыва.

На этом мы и кончим с надеждой, что читатели почувствовали силу и

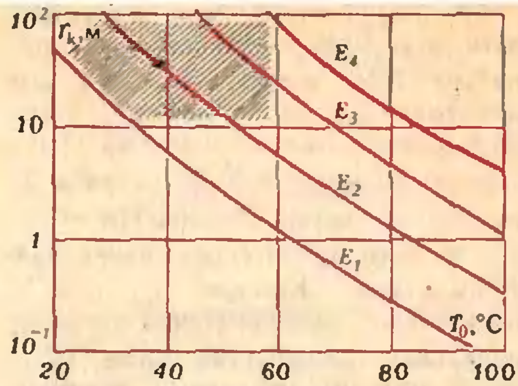


Рис. 5. Зависимость критического размера $r_к$ от температуры T_0 для нитрата аммония при различных значениях энергии активации: $E_1=2{,}4\cdot10^{-23}$ Дж; $E_2=2{,}5\cdot10^{-23}$ Дж; $E_3=2{,}6\cdot10^{-23}$ Дж; $E_4=2{,}7\cdot10^{-23}$ Дж.

высокую цену теории, ибо нет ничего практичнее, чем хорошая теория.

В заключение отметим, что методы, развитые в теории теплового взрыва, находят широкое применение при исследовании аналогичных явлений в других областях науки. Ограничимся лишь перечнем некоторых процессов, в которых существенную роль играют нелинейные (по температуре) источники тепла: термоядерные реакции, тепловой пробой диэлектриков, критические явления при движении вязкой жидкости — «гидродинамический тепловой взрыв» и т. п. Это еще раз подтверждает жизненность и силу теории теплового взрыва.

Задачи

1. Скорость газофазной реакции водорода с йодом $H_2+J_2=2HJ$ выражается в виде

$$w=\varkappa n_{H_2}n_{J_2}e^{-E/kT}$$

(то есть $z=\varkappa n_{H_2}n_{J_2}$), где $\varkappa=10^{-10}$ см^3/с — некоторая характеристика рассматриваемой реакции. $E=2{,}69\cdot10^{-19}$ Дж. Считая, что концентрации исходных веществ равны $n_{H_2}=n_{J_2}=n=1{,}35\cdot10^{19}$ 1/см^3 (нормальные условия), найти время, за которое прореагирует 1% смеси при температурах: а) 273 К, б) 600 К, в) 800 К.

2. Показать, что точки пересечения кривых теплоотвода и тепловыделения соответствуют устойчивым состояниям, если кривая теплоотвода круче кривой тепловыделения и наоборот.

3. Изобразить графически переход от подкритических условий к надкритическим при изменении: а) теплоты сгорания Q, б) коэффициента теплоотвода α.

С. Шабанов, В. Шубин

О вихревых кольцах

Как можно получить водяные и воздушные вихревые кольца в лабораторных условиях? Какими свойствами они обладают? Возможно ли взаимодействие колец с преградами и между собой? На эти и многие другие аналогичные вопросы вы получите ответ, прочитав предлагаемую статью.

Авторы статьи, еще будучи школьниками, обнаружили много интересных эффектов и особенностей поведения вихревых колец. Почти все им удалось качественно объяснить.

Образование вихревых колец

Для получения в лабораторных условиях вихрей в воздухе мы пользовались аппаратом Тэта (рис. 1). Он представляет собой цилиндр, один торец которого (мембрана) затянут каким-нибудь упругим материалом (например, кожей), а в другом имеется круглое отверстие (диафрагма).

Внутри цилиндра находятся два сосуда: один — с соляной кислотой (HCl), другой — с нашатырным спиртом (NH_4OH). В результате в цилиндре образуется густой туман (дым) из частичек хлористого аммония (нашатыря NH_4Cl).

Ударяя по мембране, мы сообщаем некоторую скорость прилегающему к мембране слою дыма. Придя в движение, этот слой вызовет уплотнение соседнего слоя, тот — следующего и так далее. Когда уплотнение дойдет до диафрагмы, дым вырвется из отверстия, приведет в движение ранее покоившийся воздух и, благодаря силам вязкого трения, сам закрутится в дымовое кольцо.

Может быть, в образовании вихревых колец главную роль играют края отверстия? Проверим это. Вместо обычной диафрагмы поставим в аппарате Тэта решето. Если наша гипотеза верна, должно получиться много маленьких колец. Однако опыт показывает, что это не так, — образуется одно большое вихревое кольцо (рис. 2).

Очень важно, чтобы дым из аппарата выходил отдельными порциями, а не непрерывной струей. Если мембрану заменить поршнем и перемещать его, из отверстия вместо колец появится непрерывная струя дыма.

Вихри в воде можно получить с помощью обыкновенной пипетки и чернил. Набрав в пипетку чернил, нужно их капать с высоты 2—3 см в аквариум с хорошо устоявшейся водой (в которой нет конвекционных потоков). В прозрачной воде хорошо заметны образующиеся чернильные кольца (рис. 3).

Можно сделать немного по-другому: выпустить струю чернил из пипетки прямо в воду (рис. 4). В этом случае вихревые кольца получаются несколько больших размеров.

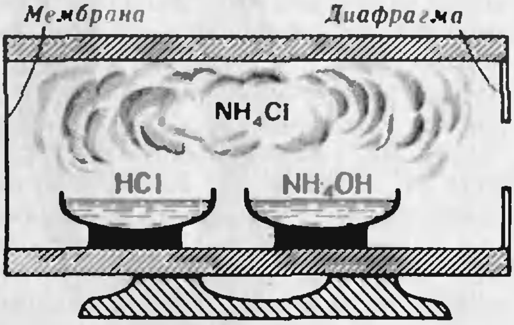


Рис. 1.

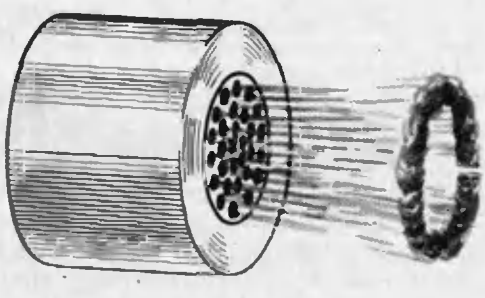


Рис 2

Природа образования вихревых колец в воде — такая же, как в воздухе; поведение чернил в воде аналогично поведению дыма в воздухе. В обоих случаях главную роль играют силы вязкого трения. (Правда, опыты показывают, что полная аналогия имеет место лишь в первый момент после образования вихрей. В дальнейшем поведение вихрей в воде и воздухе оказывается различным.)

Движение среды вокруг вихревых колец

Что происходит с окружающей средой после того, как образовался вихрь? Ответить на этот вопрос нам помогли соответствующие опыты.

На расстоянии 2—3 м от аппарата Тэта поставим зажженную свечу. Дымовое кольцо пустим с таким расчетом, чтобы оно не врезалось в пламя свечи, а прошло рядом. Пламя либо погаснет, либо будет очень сильно колыхаться. Это говорит о том, что движется не только видимая часть кольца, но и слои воздуха, прилегающие к кольцу.

Как же они движутся? Возьмем две тряпочки, одну смочим соляной кислотой, другую — нашатырным спиртом и подвесим их на расстоянии 10—15 см друг от друга. Пространство между ними сразу же заполнится дымом (парами нашатыря). Пустим в облако этого дыма дымовое кольцо из аппарата. После прохождения кольца через облако кольцо увеличивается в размерах, а облако приходит в круговое движение. Из этого можно заключить, что вокруг вихревого кольца воздух в р а щ а е т с я (рис. 5).

Аналогичный опыт можно провести и с водой. Медленно вращая воду в стакане, капнем в нее чернил и дадим устояться. В стакане образуются чернильные нити. Теперь пустим чернильное кольцо. При прохождении кольца вблизи нитей они закручиваются.

Вихревые кольца в воде

Рассмотрим некоторые особенности поведения водяных вихрей.

В «Детской энциклопедии» приводятся очень интересные и красивые фотографии, на которых изображено последовательное развитие упавшей в воду капли чернил.

Мы заинтересовались этими фотографиями и решили сделать такой же опыт. Как уже говорилось выше, если каплю чернил капнуть с высоты 2—3 см в аквариум с водой, в воде образуется чернильное вихревое кольцо. Как оно будет вести себя дальше?

Оказывается, через некоторое время кольцо разделится на несколько новых колец, те в свою очередь тоже

Рис. 3.

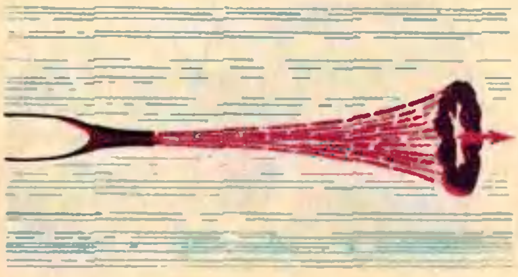


Рис. 4.

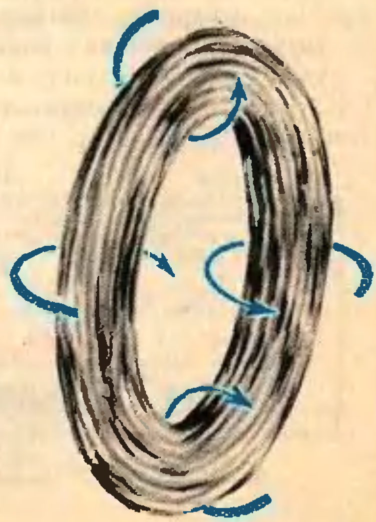


Рис. 5.

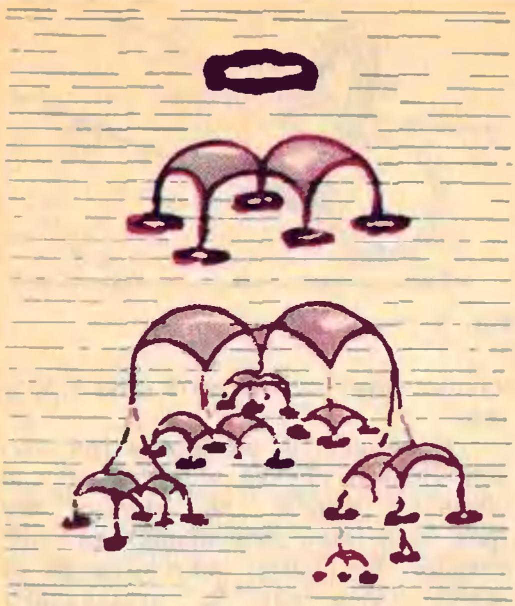


Рис. 6.

разделятся и т. д. В аквариуме появится красивый «замок» (рис. 6).

Мы заметили, что делению первичного кольца предшествует образование на нем утолщений, из которых потом рождаются вторичные кольца. Как это можно объяснить? Из-за неоднородности среды, в которой движется чернильное кольцо, некоторые его участки несколько опережают остальные, некоторые, наоборот, отстают. Чернила (более тяжелые, чем вода) стекают в те участки, которые движутся впереди, и за счет сил поверхностного натяжения формируются утолщения. Затем из этих утолщений рождаются новые капли. Каждая капля ведет себя независимо от исходного вихря, и через некоторое время из нее образуется новое вихревое кольцо. Так повторяется несколько раз. Интересно, что нам не удалось установить никакой закономерности — в десяти опытах конечное число колец четвертого «поколения» ни разу не совпало.

Оказывается, для существования вихревого кольца необходим некоторый «жизненный» объем. Мы убедились в этом на таком опыте. На пути движения водяного кольца мы ставили трубки различных диаметров. Если диаметр трубки был чуть-чуть больше диаметра кольца, влетевшее в трубку вихревое кольцо разрушалось, а взамен возникало новое кольцо меньших размеров. Если же диаметр трубки примерно в 4 раза превышал диаметр кольца, кольцо беспрепятственно проходило через трубку. В таком случае вихрь практически не подвергался никаким внешним воздействиям.

Рассеяние дымовых колец

Мы провели несколько опытов по взаимодействию дымовых колец с диафрагмами различных диаметров и с плоскостью. (Мы их назвали опытами п о р а с с е я н и ю вихревых колец.)

Представим себе, что кольцо налетает на диафрагму, диаметр которой меньше диаметра кольца. Рассмотрим два случая: центральное соударение, когда скорость поступательного движения кольца перпендикулярна плоскости диафрагмы, а центр кольца проходит через центр диафрагмы, и нецентральное соударение, когда центр кольца не проходит через центр диафрагмы.

В первом случае происходит следующее. Налетающее на диафрагму кольцо рассеивается, а по другую сторону диафрагмы возникает новое кольцо меньшего диаметра. Причина его возникновения — та же, что и в аппарате Тэта: воздух, движущийся вокруг первоначального кольца, устремляется в отверстие и увлекает за собой дым от рассеянного вихря.

Аналогично происходит центральное соударение в случае, когда диаметр диафрагмы равен диаметру кольца или несколько больше его.

Гораздо более интересен результат нецентрального соударения: вновь образовавшийся вихрь вылетает под углом к начальному направлению движения (рис. 7). (Попробуйте объяснить, почему!)

Теперь рассмотрим взаимодействие кольца с плоскостью. Опыты показывают, что, если плоскость перпендикулярна скорости кольца, кольцо только как бы расплывается, не теряя при этом своей формы. Объяснить это можно так: поток воздуха, движущегося внутри кольца, образует область повышенного давления, в результате чего и происходит равно-

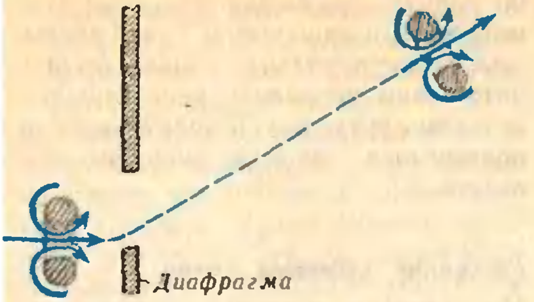


Рис. 7.

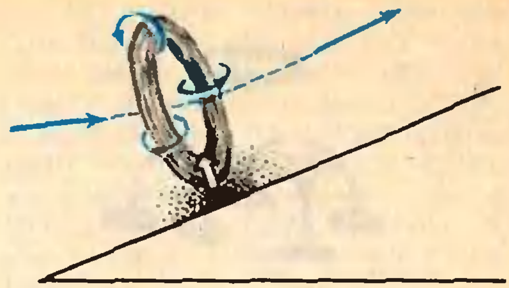


Рис. 8.

мерное расширение всего вихревого кольца.

Если же плоскость наклонить под некоторым углом к первоначальному положению, вихрь, налетая на плоскость, будет отталкиваться от нее (рис. 8). Этот факт тоже можно объяснить возникновением области повышенного давления в пространстве между кольцом и плоскостью.

Взаимодействие колец

Бесспорно, самыми интересными оказались опыты по изучению взаимодействия вихревых колец. Мы проводили эксперименты с кольцами и в воде, и в воздухе.

Пустим каплю чернил с высоты 1—2 см в сосуд с водой, а через секунду пустим еще одну каплю, но уже с высоты 2—3 см. В сосуде образуются два вихря, движущиеся с разными скоростями: второй — быстрее, чем первый ($v_2 > v_1$). Когда кольца окажутся на одной высоте, они начнут взаимодействовать друг с другом.

Оказывается, возможны три случая. Первый случай — второе кольцо обгоняет первое, не задевая его (рис. 9, *а*). При этом происходит следующее. Во-первых, потоки воды от обоих колец как бы отталкивают кольца друг от друга. Во-вторых, обнаруживается переток чернил с первого кольца на второе: водяные потоки второго кольца более интенсивны, они и увлекают чернила за собой. Иногда часть этих чернил проходит через второе кольцо, что влечет за собой образование нового небольшого кольца. Затем кольца начинают делиться, дальше ничего интересного нам заметить не удалось.

Второй случай — кольцо *2* при обгоне задевает кольцо *1* (рис. 9, *б*). В результате более интенсивные потоки второго кольца разрушают первое. Как правило, из оставшегося от первого кольца сгустка чернил образуются новые маленькие вихри.

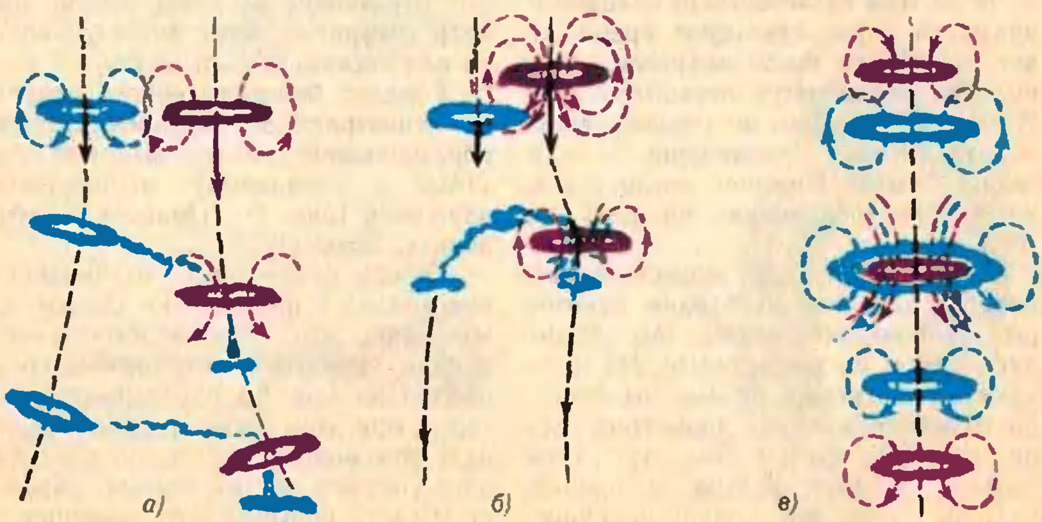


Рис. 9.

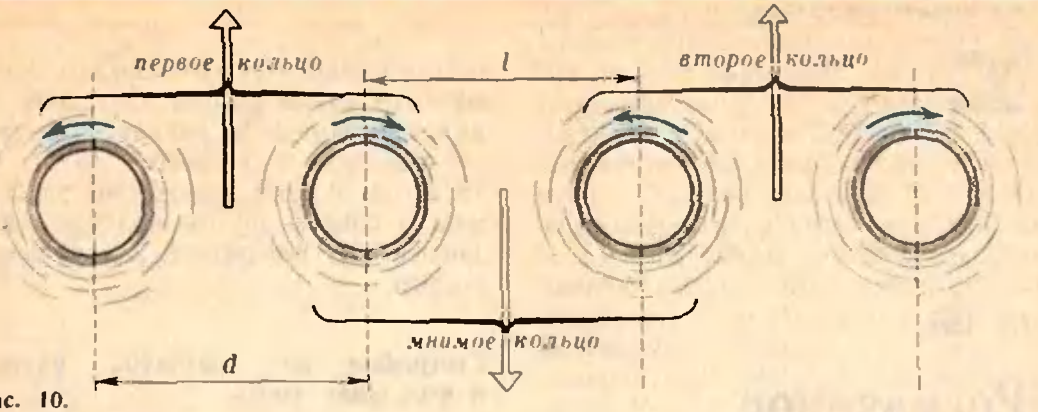


Рис. 10.

И наконец, третий случай — кольца испытывают центральное соударение (рис. 9, *в*). При этом второе кольцо проходит через первое и уменьшается в размерах, а первое, наоборот, расширяется. Как и в предыдущих случаях, это происходит за счет взаимного действия водяных потоков одного кольца на другое. В дальнейшем кольца начинают делиться.

Взаимодействие дымовых колец в воздухе мы исследовали с помощью аппарата Тэта с двумя отверстиями. Оказалось, что результаты опытов сильно зависят от силы и продолжительности удара по мембране. В нашей установке удар проводился тяжелым маятником.

Было обнаружено, что, если расстояние l между отверстиями меньше диаметра d каждого отверстия ($l<d$), два потока воздуха перемешиваются и образуется одно вихревое кольцо. При $d<l<1{,}5\,d$ кольцо, как правило, вообще не образуется. Во всех остальных случаях возникают два кольца. При этом, если $l>4d$, кольца не взаимодействуют друг с другом, а если $1{,}5d<l<4d$, кольца сначала сближаются, а затем, в конце своей «жизни», иногда расходятся.

Сближение можно объяснить тем, что в пространстве между кольцами образуется нечто подобное «мнимому» кольцу (рис. 10), которое движется в противоположную сторону. В результате плоскости настоящих колец поворачиваются друг к другу, и кольца начинают сближаться.

Что происходит с кольцами в конце «жизни», нам объяснить не удалось.

Наша обложка

Как разбить квадрат

Можно ли квадрат разрезать на некоторое число меньших попарно неконгруэнтных квадратов? Долгое время математики (среди них и Гуго Штейнгауз) предполагали, что нельзя. Возможность такого разбиения впервые была установлена немецким геометром Р. Шпрагом в 1939 году: ему удалось разбить квадрат на 55 попарно неконгруэнтных квадратов. Число 55 очень скоро было уменьшено: в 1940 году английские математики А. Стон и У. Татт установили, что квадрат можно разрезать на 28 попарно неконгруэнтных квадратов, причем это можно сделать двумя различными способами. Затем они же совместно с К. Смитом и Р. Бруксом уменьшили число 28 до 26.

Разбиение на 26 квадратов долго считалось «самым экономным» из всех возможных разбиений. Однако в 1948 году англичанин Ф. Вилькокс построил разбиение квадрата на 24 неповторяющихся квадрата. Этот «рекорд» держался на протяжении тридцати лет. В 1978 году голландский математик Дьювестин указал разбиение квадрата на 21 различный квадрат (см. Journal of Combinatorial Theory, 1978, V25, p. 240—243). Разбиение Дьювестина изображено на нашей обложке (числами отмечены длины сторон квадратов разбиения, если длина стороны исходного квадрата — 112). Дьювестин доказал, что число 21 уже уменьшить нельзя (ранее было доказано только, что число квадратов разбиения не меньше 14; см., например, с. 29 книги И. М. Яглома *«Как разрезать квадрат?»*, М., «Наука», ФМ, 1969).

О. М.

С. Агеев

Регулярное полимино

Имя С. В. Голомба — американского ученого, специалиста в области теории информации и статистики — хорошо известно любителям занимательной математики. Голомб изобрел замечательную серию игр, которым он дал общее название «полимино». Этим играм посвящено множество публикаций в самых различных журналах. «Квант» также неоднократно обращался к этой теме, а в 1975 году в издательстве «Мир» вышла книга самого автора этого изобретения, содержащая много красивых и занимательных математических задач *).

Вот пример «полиминошной» задачи (она была помещена в одном из номеров «Кванта»): *Докажите, что из трех уголков и девяти плиток (рис. 1) нельзя сложить квадрат* 6×6. Оказывается, произвольный прямоугольник сложить тоже нельзя из трех таких уголков и соответствующего числа плиток, но доказать это чрезвычайно трудно. Как правило, подобные задачи не могут исследовать методом перебора даже быстродействующие ЭВМ. Поэтому для их решения приходится придумывать весьма хитроумные методы. Об одном из них, основанном на раскрасках, рассказывалось в «Кванте» № 11 за 1972 год. В этой заметке мы расскажем о совсем другом подходе, связанном с ... географией и игральной костью.

*) «Полимино» (М., «Мир», 1975)

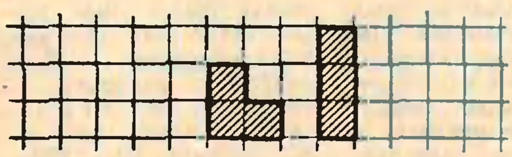


Рис. 1.

География на клетчатой бумаге и игральная кость

Все дальнейшие события в нашей статье будут происходить на клетчатой бумаге, снабженной «географической ориентировкой» (рис. 2). По этой клетчатой бумаге мы будем перекатывать по определенным правилам обыкновенную игральную кость — кубик с ребром единичной длины и пронумерованными гранями. Кубик всегда будет расположен на бумаге так, чтобы центр его нижней грани совпадал с узлом сетки, а боковые грани были параллельны линиям сетки. Каждому положению кубика на клетчатой бумаге поставим в соответствие два числа — номера южной и верхней граней. Назовем эту пару чисел *ориентацией* кубика.

Упражнение 1. Сколько существует различных ориентаций кубика?

Пусть задан путь Г, соединяющий узлы *A* и *B* сетки. Мы, разумеется, будем рассматривать пути, идущие только по линиям сетки. Если кубик стоит на узле *A*, то его можно

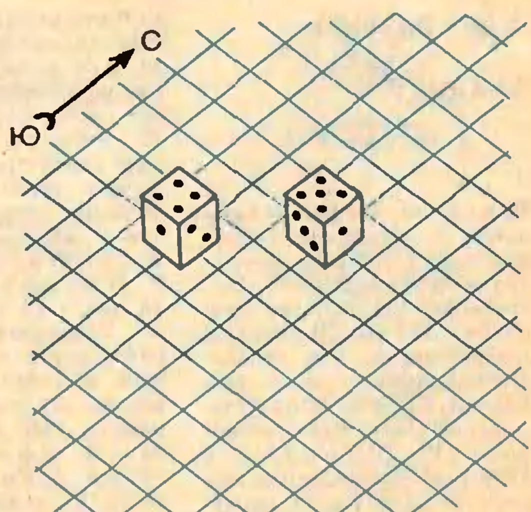


Рис. 2.

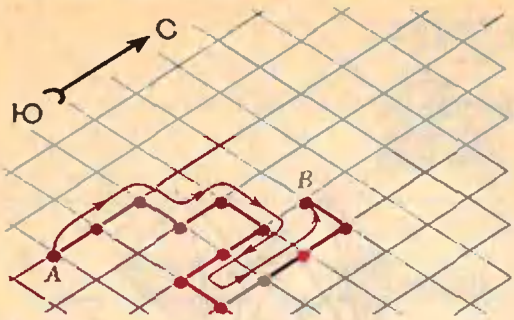


Рис. 3.

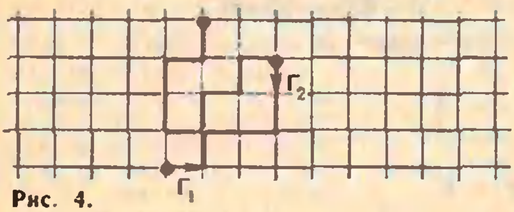


Рис. 4.

перекатить вдоль пути Г на узел *B* (рис. 3). При этом его начальная ориентация α заменится на некоторую ориентацию β. Будем записывать это следующим образом: $\beta=\Gamma(\alpha)$.

Упражнение 2. Пусть зафиксированы узлы *A* и *B* и начальная ориентация α. Докажите, что, перекатывая кубик по всевозможным путям из *A* в *B*, можно получить не больше половины ориентаций кубика. Убедитесь, что половину ориентаций получить всегда можно.

Если конец пути Γ_1 совпадает с началом пути Γ_2, то возникает путь $\Gamma_2 \circ \Gamma_1$, составленный из этих двух путей (рис. 4). Кроме того, для каждого пути Г естественно определяется «обратный» путь Γ^{-1}, получающийся заменой направления вдоль пути Г на обратное. Легко убедиться (сделайте это), что $(\Gamma_2 \circ \Gamma_1)(\alpha) = \Gamma_2(\Gamma_1(\alpha))$ и $\Gamma^{-1}(\Gamma(\alpha))=\alpha$.

Назовем путь Г *регулярным*, если $\Gamma(\alpha)=\alpha$ для некоторой ориентации α.

Упражнение 3. Докажите, что
а) если Г — регулярный путь, то $\Gamma(\beta)=\beta$ для любой ориентации β;
б) если Г — регулярный путь, то и Γ^{-1} — регулярный путь;
в) если Γ_1 и Γ_2 — регулярные пути и путь $\Gamma_2 \circ \Gamma_1$ определен, то и $\Gamma_2 \circ \Gamma_1$ — регулярный путь.

Упражнение 4. Докажите, что всякий регулярный путь имеет четную длину, и приведите пример нерегулярного пути четной длины.

Регулярное полимино

Теперь вернемся к полимино. Напомним, что полимино — это многоугольник, составленный из одноклеточных квадратов, причем любой квадрат примыкает хотя бы к одному соседнему по стороне (то есть шахматная ладья может пройти с любой клетки полимино на любую другую). Обычная задача из теории полимино формулируется так: можно ли из данного набора полимино сложить данную фигуру? Мы сумеем решить целый класс таких задач. Будем рассматривать полимино как многоугольник, нарисованный на нашей клетчатой бумаге. Назовем полимино *регулярным в узле A*, если регулярен путь, идущий по его контуру с началом и концом в узле *A*, лежащем на этом контуре. Оказывается, это определение не зависит от выбранного узла.

Упражнение 5. Если полимино регулярно в некотором узле его контура, то оно регулярно и в любом другом его узле. Докажите.

Упражнение 5 дает нам возможность говорить просто о регулярных полимино. Несколько таких полимино приведено на рисунке 5.

Упражнение 6. Докажите, что эти полимино регулярны.

Оказывается, из регулярных полимино нельзя сложить нерегулярное полимино. Чтобы убедиться в этом, достаточно доказать следующее утверждение:

Теорема о сумме. *Если полимино P и Q регулярны и полимино T сложено из них, то оно тоже регулярно.*

Пояснения к доказательству этой теоремы даны на рисунке 6.

Можно доказать и теорему о разности: *если полимино T, сложенное из полимино P и Q, регулярно и полимино P регулярно, то и полимино Q регулярно.*

Упражнение 7. Докажите теорему о разности полимино.

Упражнение 8. Докажите, что прямоугольное полимино регулярно тогда и только тогда, когда его площадь кратна четырем.

Из теоремы о сумме и упражнений 6 и 8 сразу вытекает решение задачи, похожей на *задачу про уголки*, — доказать, что из любого количества полимино, приведенных на рисунке 5, нельзя сложить прямоугольника с площадью, не кратной четырем.

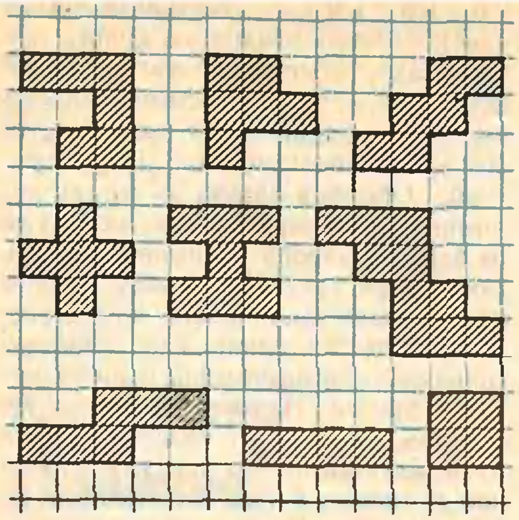


Рис. 5.

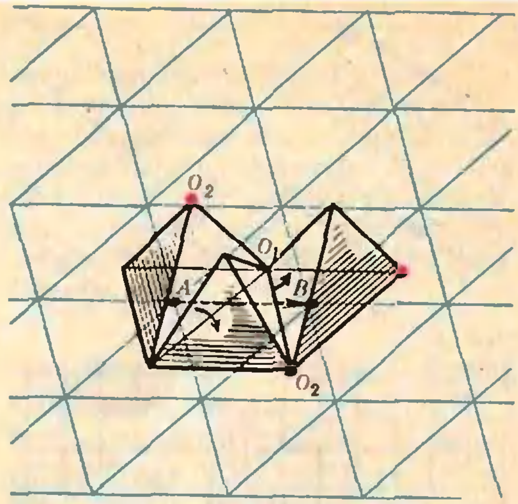


Рис. 8.

Регулярных полимино бесконечно много. Возникает вопрос, не складываются ли они все из конечного числа *простых* полимино — регулярных полимино, не преставимых в виде объединения регулярных полимино. Подумайте над этим.

Упражнение 8 и теорема о разности подсказывают такой способ поиска простых полимино: взять некоторый прямоугольник $4k\times m$ и вычитать из него последовательно уже известные регулярные полимино, пока это возможно, а затем изучать полимино, полученное в остатке. Этот прием значительно ускоряет составление каталога простых полимино.

Упражнение 9. Убедитесь, что все полимино на рисунке 5 — простые. Найдите еще какие-нибудь простые полимино.

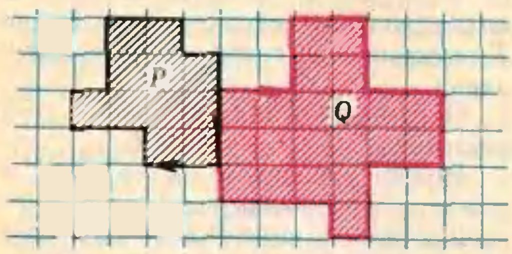


Рис. 6.

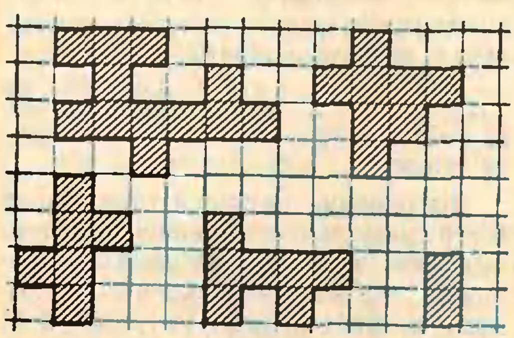


Рис. 7.

О других теориях регулярных полимино

Наше разбиение всех полимино на регулярные и нерегулярные оказалось полезным потому, что объединение и разность двух регулярных полимино вновь являются регулярными. Существует множество других полезных способов разбиения полимино на две группы. Например, можно было бы назвать полимино *регулярным*, если его площадь кратна пяти. Можно получить новую теорию, если занумеровать грани кубика так, чтобы противоположные грани имели одинаковые номера. В этой теории останутся регулярными полимино «старой» теории и появятся новые регулярные полимино. Некоторые из них приведены на рисунке 7.

Можно разрабатывать теории и для фигур из правильных треугольников. Они называются *полиамондами*. По паркету из правильных треугольников можно катать целых три фигуры — тетраэдр, октаэдр и додекаэдр. Правда, катать их надо более «хитрым» способом. Как катать тетраэдр, показано на рисунке 8 (перевалив тетраэдр через ребро, пересекающее отрезок AB, его нужно затем повернуть на 60° вокруг «неподвижной» вершины O_1). Продумайте самостоятельно детали получающейся теории.

задачник Кванта

Задачи

М591—М595; Ф603—Ф607

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 января 1980 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 11—79» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М591, М592» или «Ф603». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...: новая задача по математике»).

Задачи М591, М594 и М595 предлагались на XXI Международной олимпиаде.

М591. Пусть p и q — натуральные числа такие, что

$$\frac{p}{q}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots-\frac{1}{1318}+\frac{1}{1319}.$$

Докажите, что число p делится на 1979.

М592. Докажите, что для любого треугольника проекция диаметра описанной окружности, перпендикулярного одной стороне треугольника, на прямую, содержащую вторую сторону, равна по длине третьей стороне.

С. Овчинников

М593. Внутри окружности Γ расположено n кругов. Докажите, что длина границы объединения этих кругов не превосходит длину окружности Γ, если

а) $n=2$;

б) центры всех n кругов лежат на одном диаметре окружности Γ;

в) все n кругов содержат центр окружности Γ.

Ф. Кабдыкаиров, В. Произволов

М594*. Найдите все действительные числа a, для которых существуют действительные неотрицательные числа x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, удовлетворяющие соотношениям

$$\sum_{k=1}^{5} kx_k=a,\quad \sum_{k=1}^{5} k^3x_k=a^2,\quad \sum_{k=1}^{5} k^5x_k=a^3.$$

М595. Пусть A и E — две противоположные вершины правильного восьмиугольника. В вершине A находится лягушка. Из любой вершины восьмиугольника, кроме вершины E, лягушка может прыгнуть в любую из двух соседних вершин. Попав в вершину E, лягушка останавливается и остается там. Пусть a_n — количество способов, которыми лягушка может попасть из вершины A в вершину E ровно за n прыжков. Докажите, что

$$a_{2n-1}=0,\ a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1}-y^{n-1}),$$

$$n=1, 2, 3, \ldots,\ \text{где } x=2+\sqrt{2},\ y=2-\sqrt{2}.$$

Ф603. Студент ездит в институт на метро по кольцевой линии. Станция, на которой он садится, и станция, на которой он выходит, находятся на противоположных концах диаметра кольца, так что студенту безразлично, в какую сторону ехать. Поэтому он садится в тот поезд, который подойдет раньше. Количество поездов, идущих по кольцу в разные стороны, одинаково. Однако студент заметил, что он чаще ездит на поезде, идущем по часовой стрелке. Как это можно объяснить?

Ф604. В условиях невесомости жидкость, помещенная в стеклянный цилиндрический сосуд с радиусом основания R_1, приняла форму, показанную на рисунке 1. Свободная поверхность жидкости имела форму сферы с радиусом R_0. Та же жидкость, помещенная в стеклянный сферический сосуд радиуса R_2, приняла форму, показанную на рисунке 2. Свободная поверхность жидкости была плоской. Определить высоту уровня жидкости в сферическом сосуде. Какую форму будет иметь жидкость в сферическом сосуде, если радиус сосуда больше R_2? меньше R_2?

В. Скороваров

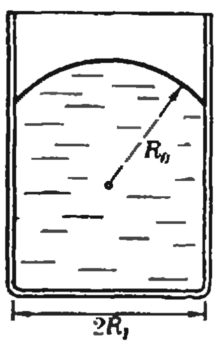


Рис. 1.

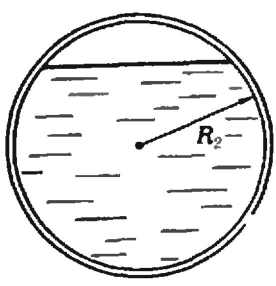


Рис. 2.

Ф605. Проволочный предохранитель перегорает, если напряжение на нем равно 10 В. При каком напряжении будет перегорать предохранитель, если его длину увеличить вдвое?

Ф606. Шайба соскальзывает без начальной скорости по наклонной плоскости с углом α. Коэффициент трения между шайбой и поверхностью наклонной плоскости изменяется с расстоянием l от вершины по закону $\mu = kl$ ($k = \text{const}$). На каком расстоянии от вершины надо поставить упор, чтобы после одного упругого соударения с упором шайба остановилась как можно выше?

В. Белонучкин

Ф607. Самолет летит по замкнутому маршруту ABC. Пункты A, B и C лежат в вершинах правильного треугольника. В каком случае время, затраченное на перелет, будет меньше: если ветер дует в направлении вектора $\overrightarrow{AB}$ или если ветер дует в направлении вектора $\overrightarrow{BA}$?

Н. Кушнир,
ученик 9 класса

Решения задач

М538, М539; Ф547—Ф552

М538. *Множество всех натуральных чисел является объединением двух непересекающихся подмножеств $\{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\}$, $\{g(1), g(2), \ldots, g(n), \ldots\}$, где $f(1)<f(2)<\ldots<f(n)<\ldots$, $g(1)<g(2)<\ldots<g(n)<\ldots$, и $g(n)=f(f(n))+1$ для всех $n\geqslant 1$. Определите $f(240)$.*

Обозначим множества $\{f(n)\}$ и $\{g(n)\}$ через F и G (по условию $F\cap G=\varnothing$ и $F\cup G=\mathbb{N}$). Начав с первых натуральных чисел 1, 2, 3, ..., легко последовательно выяснить, к какому из множеств F или G следует отнести очередное натуральное число и какому номеру n оно соответствует в своем множестве: ясно, что $1=f(1)$, поэтому $2=f(f(1))+1=g(1)$; далее, $3=f(2)$, $4=f(3)$, $5=f(f(2))+1=g(2)$, ... (таблица 1). При этом мы пользуемся условием $g(n)=f(f(n))+1$ — очередное $g(n)$ ставим сразу после того, как поставлено $f(f(n))$.

Таблица 1

n	$f(n)$	$g(n)$
1	1	2
2	3	5
3	4	7
4	6	10
5	8	13
6	9	15
7	11	18
8	12	20
9	14	23
10	16	...
11	17	
12	19	
13	21	
14	22	
...	...	

Таким образом, $f(n)$ и $g(n)$ определяются однозначно, и в принципе можно решить задачу, просто доведя нашу таблицу до 240-й строки. Однако это утомительно и неинтересно. Можно сэкономить время, подметив появляющиеся закономерности:

1°. *разность* $f(n+1)-f(n)$ *равна всегда* 1 *или* 2, *причем*

$$f(n+1)-f(n)=\begin{cases}1, & \text{если } n\in G,\\ 2, & \text{если } n\in F\end{cases}$$

(если $n=f(k)$, то $f(n)+1=g(k)$);

2°. $g(n)=f(n)+n$ *при любом* n. В самом деле, среди $g(n)$ чисел 1, 2, ..., $f(f(n))$, $g(n)$ имеется $f(n)$ чисел $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(f(n))$ из F и n чисел $g(1)$, $g(2)$, ..., $g(n)$ из G. Таким образом, $g(n)=f(n)+n$.

Свойства 1° и 2° дают нам возможность составить «ускоренную» таблицу 2. Теперь остается, пользуясь свойством 1°, перейти от 234 к 240 (таблица 3). Еще проще, как догадался наш читатель *А. Балинский*, предусмотрительно сделать лишний шаг раньше (используя равенство $f(f(n))=f(n)+n-1$):

$$f(57)=90+2\ (56\in F),\ f(92)=92+56=148,$$
$$f(148)=148+91,$$
$$f(239)=239+147=386,\quad f(240)=386+2=388\quad (239\in F).$$

Таблица 2

n	$f(n)$	$g(n)$
2	3	2+3=5
3	5—1=4	3+4=7
4	7—1=6	4+6=10
6	10—1=9	6+9=15
9	15—1=14	9+14=23
14	23—1=22	14+22=36
22	36—1=35	22+35=57
35	57—1=56	35+56=91
56	90	146
90	145	235
145	234	379
234	378	...

Итак, ответ на конкретный вопрос задачи М538 получен: $f(240)=388$. Однако оказывается, что здесь можно продвинуться существенно дальше — найти замечательные простые формулы, сразу дающие ответ для любого n:

$$f(n)=\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}n\right],\quad g(n)=\left[\frac{3+\sqrt{5}}{2}n\right]\qquad (*)$$

(здесь $[x]$ — целая часть x). До формул (*) додумались несколько наших читателей, но не всем удалось их аккуратно доказать. Алгебраическое доказательство довольно громоздко (хотя и не очень сложно); мы вместо него приведем наглядную картинку, из которой будут ясны и формулы (*), и ход построения последовательностей $\{f(n)\}$, $\{g(n)\}$. Но прежде объясним «на пальцах», откуда в этой задаче появляется иррациональное число $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Глядя на таблицу 1, естественно предположить, что последовательность $\{f(n)\}$ растет примерно как линейная функция от n: $f(n)\approx\gamma n$. Тогда при больших n должно быть $g(n)\approx f(f(n))\approx\gamma(\gamma n)=\gamma^2 n$. Но согласно 2°, $g(n)=f(n)+n$, так что $\gamma^2 n\approx\gamma n+n$, а это возможно лишь при $\gamma^2=\gamma+1$, откуда (если $\gamma>0$) $\gamma=(\sqrt{5}+1)/2$. Из дальнейшего будет видно, что наши множества F и G из первых n натуральных чисел действительно содержат примерно по n/γ и n/γ^2 чисел соответственно (как говорят, они имеют *плотности* $1/\gamma$ и $1/\gamma^2$).

Таблица 3

$f(146)=236,\ 146\in G$
$f(147)=237,\ 147\in F$
$f(148)=239,$
$f(235)=380,\ 235\in G$
$f(236)=381,\ 236\in F$
$f(237)=383,\ 237\in F$
$f(238)=385,\ 238\in G$
$f(239)=386,\ 239\in F$
$f(240)=388.$

Число γ и его ближайшие «родственники»

$$1/\gamma=\gamma-1=(\sqrt{5}-1)/2,\ \gamma^2=\gamma+1=(\sqrt{5}+3)/2,\ 1/\gamma^2=(3-\sqrt{5})/2$$

возникают в самых разнообразных задачах *), в частности, при исследовании *чисел Фибоначчи* 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., $\Phi_{n+1}=\Phi_{n-1}+\Phi_n$, ... (любопытно, что эти числа на 1 меньше чисел n из таблицы 2; подумайте, почему), в теории чисел, в геометрии. В частности, легко проверить, что при отрезании квадрата от прямоугольника с «золотым» отношением длин сторон γ остается прямоугольник, подобный первоначальному, — отсюда следует, что на рисунке 1, где такое отрезание проделано дважды, точки O, K и M лежат на одной прямой. Это свойство числа γ нам пригодится.

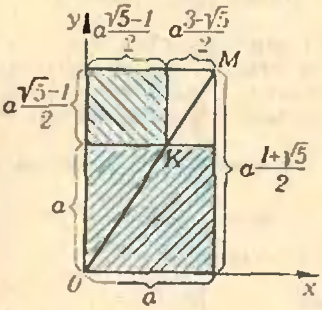


Рис. 1.

Приведем теперь простой способ построения чисел $f(n)$ и $g(n)$. На клетчатой бумаге как на координатной плоскости (рис. 2) проведем прямую l, определяемую уравнением $y=\gamma x$ — с «золотым» угловым коэффициентом $\gamma=(\sqrt{5}+1)/2$. (Как это сделать с помощью циркуля и линейки?) Занумеруем подряд все те «красные» клетки (рис. 2), которые пересекает прямая l, начиная с нулевой клетки, содержащей начало координат O. Поскольку γ иррационально, l не проходит через узлы сетки, то есть входит в очередную клетку, пересекая либо прямую $y=n$, либо прямую $x=n$ ($n\in Z$). Заметим, что номер клетки $\{(x;\ y):[x]=i,\ [y]=j\}$ равен $i+j$ (почему?). Мы утверждаем, что если номер клетки m, то соответственно либо $m=f(n)$, либо $m=g(n)$. Другими словами, если занумеровать по порядку отрезки координатных лучей Ox и Oy, то н а д отрезком номер n оси x лежит клетка номер $g(n)$, а с п р а в а от отрезка номер n оси y лежит клетка номер $f(n)$. Проверьте это по таблице 1 и рисунку 2!

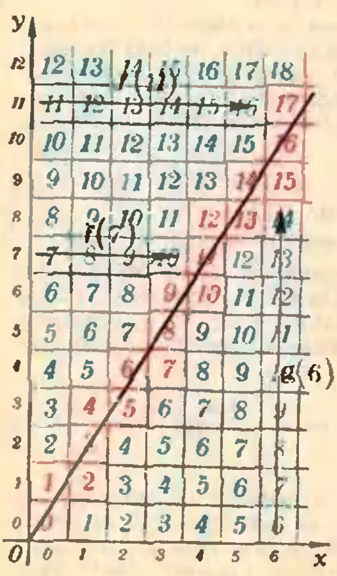


Рис. 2.

Доказательство, что построенные таким образом, с помощью клетчатой бумаги, числа $f(n)$ и $g(n)$ в самом деле те, которые нам нужны, состоит в проверке того, что номера клеток удовлетворяют всем свойствам последовательностей f и g из условия задачи. Тот факт, что мы получаем разбиение всего натурального ряда N на две непересекающиеся возрастающие последовательности, ясен. Остается проверить, что $g(k)=f(f(k))+1$. «Распространим» нумерацию красных клеток на всю плоскость: каждой клетке плоскости $\{(x;\ y):[x]=i,\ [y]=j\}$ присвоим номер $i+j$ (синие цифры на рисунке 2); при этом номера отрезков на осях совпадают с номерами содержащих их клеток.

Для произвольного n отметим точки $K(n/\gamma;\ n)$ и $M(n;\ \gamma n)$ пересечения прямой l с прямыми $y=n$ и $x=n$ (рис. 3). Тогда левая клетка, содержащая точку K, имеет номер $f(n)$, а нижняя клетка, содержащая точку M, — номер $g(n)$. Отметим проекции K' и M' точек K и M на ось y. Заметим, что $\widehat{K'KM'}=45^\circ$ (вспомните рисунок 1), поэтому клетки, содержащие точки K и M', имеют один и тот же номер $f(n)$. В точке M, таким образом, прямая l переходит из клетки номер $f(f(n))$ в клетку номер $g(n)$, то есть $f(f(n))+1=g(n)$.

---

*) Н. Н. Воробьев «*Числа Фибоначчи*» (М., «Наука», 1978); Г. С. М. Коксетер «*Введение в геометрию*» (М., «Наука», 1966), гл. «Золотое сечение и филлотаксис»; А. Д. Бендукидзе «*Золотое сечение*» («Квант», 1973, № 8, с. 22).

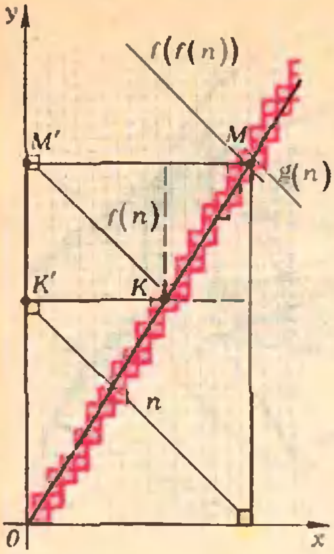


Рис. 3.

Заодно, подсчитав номера клеток, содержащих K и M, мы получим и основные формулы (*):

$$f(n)=[n/\gamma]+n=\left[n\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right]+n=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}\,n\right],$$

$$g(n)=n+[\gamma n]=n+\left[n\,\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]=\left[\frac{\sqrt{5}+3}{2}\,n\right].$$

Заметим, что точно таким же образом можно доказать следующий интересный факт: *среди чисел* $[\alpha n+\mu]$, $[\beta(n-\mu)+\mu]$, *где* α *и* β *— иррациональные числа, связанные условием* $\alpha\beta=\alpha+\beta$ (μ *— любое фиксированное число, а* n *пробегает все множество целых чисел* $\mathbf{Z}$), *встречается каждое целое число, причем ровно один раз* *). (Для доказательства рассмотрите прямую $y=\lambda x+\mu$ с $\lambda=\alpha-1=1/(\beta-1)$ и выпишите номера клеток, содержащих эту прямую.) То же соотношение между α и β можно записать и так: $1/\alpha+1/\beta=1$ — плотности множеств

$\{[\alpha n+\mu],\ n\in\mathbf{Z}\}$ и $\{[\beta(n-\mu)+\mu],\ n\in\mathbf{Z}\}$

в сумме, естественно, дают 1.

◆

М539. *Пусть P — данная точка внутри данной сферы и A, B, C — произвольные три точки этой сферы такие, что отрезки PA, PB и PC взаимно перпендикулярны. Пусть D — вершина параллелепипеда, определенного отрезками PA, PB и PC, диагонально противоположная к P. Определите множество точек D.*

Обсудим сначала аналогичную задачу на плоскости: *найти множество четвертых вершин D прямоугольников $PADC$, одна вершина P которых лежит в данной точке внутри данной окружности радиуса r, а две соседние с ней вершины A и C — на окружности.* У этой довольно популярной задачи **) запоминающийся ответ: *вершины D лежат на окружности, концентричной данной, квадрат радиуса которой равен $2r^2-|KP|^2$, где K — центр окружности* (рис. 4). Этот результат сразу вытекает из следующей полезной леммы:

1°. *Для любого прямоугольника $ABCD$ и любой точки K*

$$|AK|^2+|CK|^2=|BK|^2+|DK|^2. \qquad (1)$$

Равенство (1) становится очевидным, если ввести систему координат, как показано на рисунке 5: в обеих частях (1) стоит сумма

$$(x+a)^2+(y+b)^2+(x-a)^2+(y-b)^2;$$

здесь $(x;\ y)$ — координаты точки K.

Если $|AK|=|CK|=r$, $|KP|=p$, то из (1) вытекает (с заменой буквы B на P): $|DK|^2=2r^2-p^2$, что и утверждалось выше.

Результат плоского варианта задачи М539 наводит на мысль, что в пространственной задаче ответом будет сфера, концентричная данной. Так оно и есть:

2°. *Все точки D лежат на сфере с центром в той же точке K, что у исходной сферы, и радиусом $\sqrt{3r^2-2p^2}$, где $p=|KP|$, r — радиус исходной сферы.*

Это доказали многие читатели, причем самыми разными способами: вычислениями в координатах, с векторами и скалярным произведением и др. Пожалуй, самое простое и наглядное решение получается с помощью той же леммы 1°.

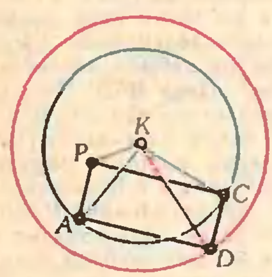


Рис. 4.

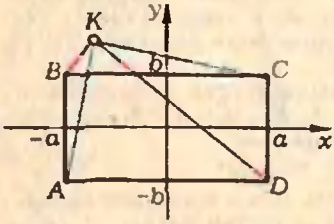


Рис. 5.

---

*) При $\mu=0$ этот факт доказан в книге Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова и И. М. Яглома «*Избранные задачи и теоремы. Арифметика и алгебра*» (М., «Наука», 1976), а также в упоминавшейся книжке Н. Н. Воробьева.

**) См., например, книгу Н. Б. Васильева и В. Л. Гутенмахера «*Прямые и кривые*» (М., «Наука», 1978), задача 2.13.

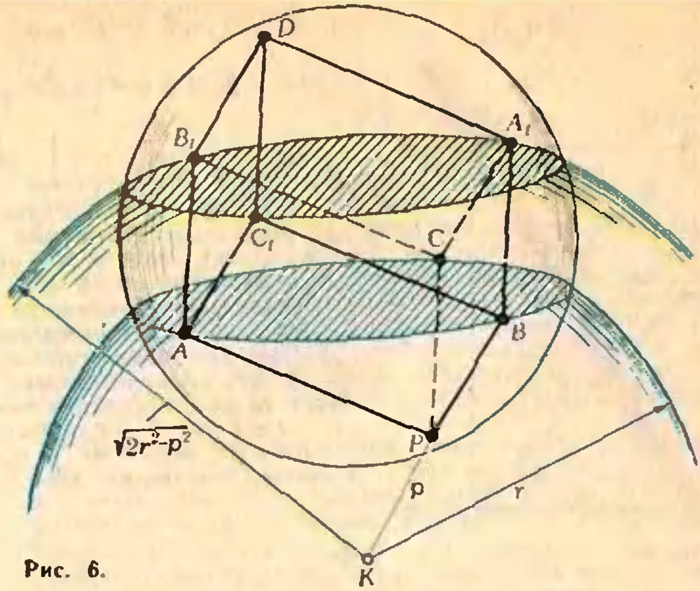


Рис. 6.

Заметим, что эта лемма верна и для любой точки K пространства: если точка K приподнята над плоскостью рисунка 5 на расстояние z, то есть имеет координаты $(x;\ y;\ z)$, то к обеим частям (1) добавится по $2z^2$.

Докажем теперь утверждение 2°. Согласно 1°, вершины A_1, B_1 и C_1 параллелепипеда — четвертые вершины прямоугольников PBA_1C, PCB_1A и PAC_1B (рис. 6) — лежат на расстоянии $\sqrt{2r^2-p^2}$ от точки K. Снова пользуемся 1°: четвертая вершина D прямоугольника A_1CB_1D, у которого $|A_1K|^2 = |B_1K|^2 = 2r^2-p^2$, $|CK|^2 = r^2$, находится от точки K на расстоянии

$$\sqrt{2(2r^2-p^2)-r^2} = \sqrt{3r^2-2p^2}.$$

Итак, мы доказали, что вершина D параллелепипеда лежит на сфере с центром K и радиусом $\sqrt{3r^2-2p^2}$. Но, как в любой задаче на отыскание множества точек, нужно доказать и обратное: что любая точка этой сферы является вершиной некоторого параллелепипеда, удовлетворяющего условию задачи. Про это забыли многие из читателей, приславших нам решение задачи М539. Между тем здесь дать аккуратное доказательство обратного утверждения далеко не так просто, как в плоском случае (там по заданным точкам P и D легко, построив окружность с диаметром $[PD]$, найти вершину A и с помощью 1° доказать, что четвертая вершина C прямоугольника $PADC$ лежит на данной окружности). Возможно, это связано с тем, что в пространственной задаче больше свободы в выборе нужного параллелепипеда: для данных точек P и D их существует целое семейство. (Нам, конечно, достаточно построить один из них.)

В доказательстве обратного утверждения некоторые читатели использовали метод координат, другие — соображения непрерывности. Мы же и здесь начнем с геометрических наблюдений, которые были сделаны при попытках решить эту задачу:

3°. *Квадраты радиусов четырех сфер с центром K, на которых лежат точки P; A, B и C; A_1, B_1 и C_1; D, образуют арифметическую прогрессию:*

$$p^2,\ r^2,\ 2r^2-p^2,\ 3r^2-2p^2.$$

Аналогичная закономерность есть и в плоском варианте (правда, там в прогрессии всего три члена). В связи с этим укажем следующее легко доказываемое утверждение:

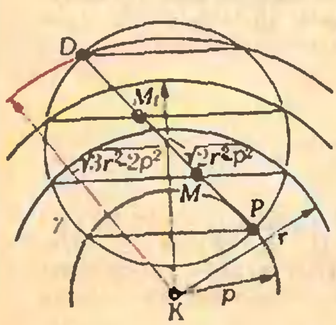


Рис. 7.

Если несколько концентрических окружностей, квадраты радиусов которых составляют арифметическую про-

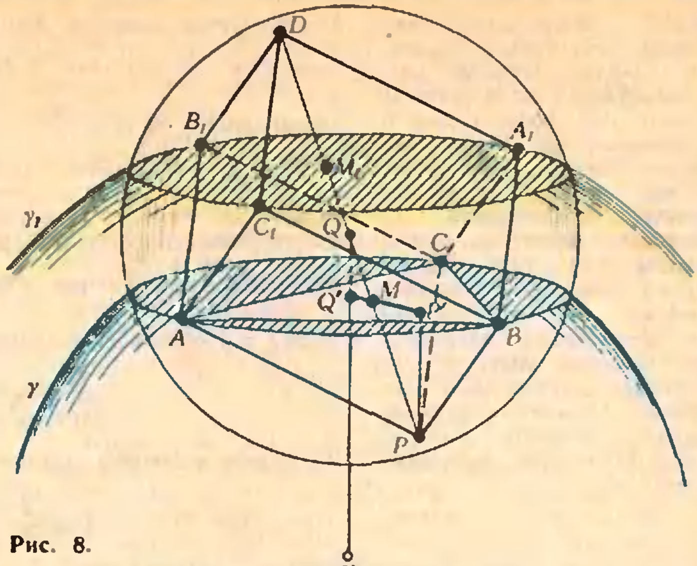


Рис. 8.

грессию, пересекают некоторую окружность γ, то общие (с γ) хорды этих окружностей параллельны и находятся на одинаковом расстоянии друг от друга (рис. 7).

Нам понадобится пространственный вариант этого утверждения, где вместо окружностей фигурируют сферы, вместо хорд — круги и т. п. (он получается из плоского рисунка 7 вращением вокруг оси симметрии).

4°. Как легко доказать, *плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ пересекают диагональ PD параллелепипеда в таких точках M и M_1, которые делят ее на три одинаковых отрезка: $|PM| = |MM_1| = |M_1D|$ — и являются точками пересечения медиан треугольников ABC и $A_1B_1C_1$* (рис. 8). Середина Q диагонали PD служит центром симметрии параллелепипеда.

5°. Чтобы получше объяснить пространственные рисунки 6 и 8, укажем еще следующие факты:

Проекция Q' на плоскость ABC центра Q прямоугольного параллелепипеда попадает в центр окружности, описанной вокруг $\triangle ABC$; проекция P' вершины P параллелепипеда — в ортоцентр $\triangle ABC$ (точку пересечения высот). Отсюда и из 4° легко вывести теорему Эйлера: $M \in [Q'P']$ и $|MQ'| : |MP'| = 2$ (рис. 9) *). Теперь уже все готово для окончания решения задачи М539.

Пусть $|KP| = p$ и $|DK| = \sqrt{3r^2 - 2p^2}$; Q — середина отрезка $[PD]$, γ и γ_1 — окружности, по которым сфера с диаметром $[PD]$ пересекает сферы радиусов r и $\sqrt{2r^2 - p^2}$ с центром K (см. рис. 8). Согласно 4°, плоскости этих окружностей делят $[PD]$ на три одинаковые части: $[PM]$, $[MM_1]$, $[M_1D]$. Возьмем любую точку $A \in \gamma$ и обозначим через A_1 симметричную ей относительно Q точку $A_1 \in \gamma_1$. Ясно, что $\widehat{PAD} = \widehat{PA_1D} = 90°$. Проведем через точки P и D плоскости, перпендикулярные отрезкам $[PA] \parallel [DA_1]$. Точки пересечения этих плоскостей с окружностями γ и γ_1 дают нам вершины нужного прямоугольного параллелепипеда (см. рис. 8): в самом деле, середины E и E_1 отрезков AD и A_1P (рис. 10, 11) лежат в плоскостях окружностей γ и γ_1 и служат центрами сечений сферы построенными плоскостями; следовательно, AC_1DB_1 и A_1CPB — прямоугольники.

Н. Васильев

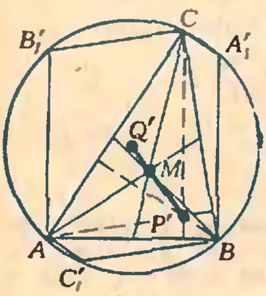


Рис. 9.

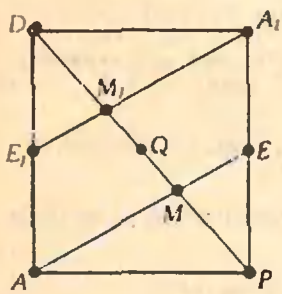


Рис. 10.

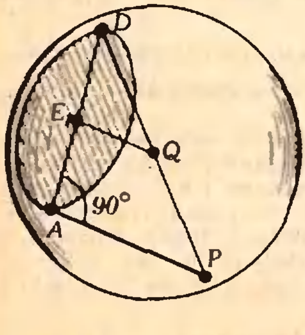


Рис. 11.

---

*) Правда, такое ее доказательство годится лишь для остроугольного треугольника, потому что лишь такой треугольник может служить сечением (ABC) для прямоугольного параллелепипеда. Подумайте, нельзя ли переделать это доказательство для тупоугольного $\triangle ABC$.

Ф547. *Фотографии шаровых сгустков светящейся плазмы, летящих равнозамедленно до остановки, имеют вид полос длины l. Максимальная ширина полос $d \ll l$. Расстояние между плазмой и объективом фотоаппарата L, фокусное расстояние объектива F. Минимальное время «засветки», необходимое для того, чтобы на фотографии появилось изображение, равно τ. Определить ускорение сгустков. Объектив фотоаппарата остается открытым до полной остановки сгустков.*

Максимальная ширина полосы, очевидно, определяется диаметром D сгустка. Если $\Gamma = \left|\frac{F}{F-L}\right|$ — увеличение фотоаппарата, то $D = \frac{d}{\Gamma}$. Чтобы изображение появилось на пленке, необходимо, чтобы скорость $\vec{v}$ сгустка была такой, что за время τ сгусток пролетал бы расстояние не больше D. Если с момента появления изображения до полной остановки сгустка проходит время t, то в момент появления изображения скорость сгустка равна $|\vec{v}| = |\vec{a}|\, t$ и удовлетворяет условию

$$\frac{D}{|\vec{a}|\, t} = \frac{d}{\Gamma\, |\vec{a}|\, t} = \tau. \qquad (1)$$

До полной остановки сгусток проходит расстояние

$$L = \frac{l}{\Gamma} = \frac{|\vec{a}|\, t^2}{2}. \qquad (2)$$

Из уравнений (1) и (2) находим ускорение сгустка:

$$|\vec{a}| = \frac{d^2}{2\Gamma l \tau^2} = \frac{d^2}{2l\tau^2}\left|\frac{F-L}{F}\right|.$$

В. Сергиевич

◆

Ф548. *Реактивная тележка массы m описывает мертвую петлю по вертикальной круговой дорожке радиуса R с постоянной линейной скоростью v. Какая работа совершается силой трения при перемещении тележки из самого нижнего положения в самое верхнее? Коэффициент трения между тележкой и дорожкой равен μ.*

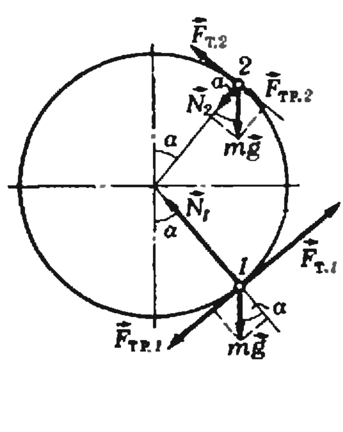


Рис. 12.

Рассмотрим два симметричных положения тележки, при которых радиус-векторы точек, в которых находится тележка, составляют с вертикалью один и тот же угол α (рис. 12). $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$ — силы реакции дорожки в этих положениях, $\vec{F}_{т1}$ и $\vec{F}_{т2}$ — силы тяги, $\vec{F}_{тр1}$ и $\vec{F}_{тр2}$ — силы трения. Так как тележка скользит по дорожке, $F_{тр1} = \mu N_1$ и $F_{тр2} = \mu N_2$ (здесь $N_1 = |\vec{N}_1|$, $F_{тр1} = |\vec{F}_{тр1}|$ и т. п.).

Тележка движется по окружности со скоростью v; следовательно, сумма проекций всех сил, действующих на тележку, на направление радиуса равна mv^2/R, то есть (см. рис. 12)

$$N_1 - mg\cos\alpha = mv^2/R, \quad N_2 + mg\cos\alpha = mv^2/R.$$

Отсюда

$$N_1 = (mv^2/R) + mg\cos\alpha, \quad N_2 = (mv^2/R) - mg\cos\alpha$$

и

$$F_{тр1} = \mu\,[(mv^2/R) + mg\cos\alpha],$$
$$F_{тр2} = \mu\,[(mv^2/R) - mg\cos\alpha].$$

При повороте радиус-вектора на малый угол $\Delta\alpha$, то есть при малом перемещении тележки на $\Delta l = R\,\Delta\alpha$ силы трения $\vec{F}_{тр1}$ и $\vec{F}_{тр2}$ совершают работы $\Delta A_1 = F_{тр1} R\,\Delta\alpha$ и $\Delta A_2 = F_{тр2} R\,\Delta\alpha$.

Сумма работ сил $\vec{F}_{тр1}$ и $\vec{F}_{тр2}$ на малых участках Δl равна

$$\Delta A = (F_{тр1} + F_{тр2})\, R\,\Delta\alpha = 2\mu m v^2\,\Delta\alpha.$$

Значение ΔA не зависит от α. Это означает, что при повороте радиус-вектора тележки на малый угол $\Delta\alpha$ из любых двух симметричных точек (аналогичных 1 и 2) сила трения совершает одну и ту же работу, пропорциональную $\Delta\alpha$.

Перемещение тележки из нижней точки дорожки в верхнюю соответствует изменению α на $\pi/2$, то есть $\Sigma\Delta\alpha = \pi/2$. Следовательно, работа силы трения при таком перемещении равна

$$A = \Sigma\,\Delta A = 2\mu m v^2\, \Sigma\,\Delta\alpha = \pi\mu m v^2.$$

О. Савченко

Ф549. *Два шарика с массами m_1 и m_2 соединены пружинкой жесткости k; пружинка расположена горизонтально и не деформирована. Шарикам одновременно сообщаются скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, как показано на рисунке 13, причем $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$. Найти максимальную высоту подъема системы и наибольшую деформацию пружинки.*

Рис. 13.

Центр масс системы (ц. м.) будет двигаться, как тело с массой $M = m_1 + m_2$, брошенное под углом к горизонту с начальным импульсом $\vec{p}_0$, равным сумме начальных импульсов шаров:

$$\vec{p}_0 = M\vec{u}_0 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

($\vec{u}_0$ — начальная скорость ц. м.). Проекция импульса $\vec{p}_0$ на вертикальную ось OY равна $m_2 v$, следовательно, проекция начальной скорости ц. м. на ось OY равна $u_y = m_2 v/M$. Это означает, что максимальная высота подъема центра масс системы равна

$$H = \frac{u_y^2}{2g} = \frac{v^2}{2g}\left(\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)^2.$$

Теперь найдем наибольшую деформацию пружинки. Очевидно, в тот момент, когда деформация пружинки максимальна, в системе координат, движущейся со скоростью центра масс системы, шарики могут только вращаться вокруг центра масс. Это означает, что энергию системы можно представить как сумму энергии W_c системы как целого и внутренней энергии, которая равна сумме потенциальной энергии деформации пружинки $kx^2/2$ (x — величина деформации) и кинетической энергии вращения шариков $W_к = {}^1/_2\,[m_1(\omega l_1)^2 + m_2(\omega l_2)^2]$, где ω — угловая скорость вращения, а l_1 и l_2 — расстояния от соответствующих шариков до центра масс.

Обозначим через l длину пружинки. Тогда $l_1 = lm_2/M$, $l_2 = lm_1/M$, так что

$$W_к = \frac{1}{2}\omega^2 l^2\left(\frac{m_1 m_2^2}{M^2} + \frac{m_2 m_1^2}{M^2}\right) = \frac{1}{2}\omega^2 l^2 \frac{m_1 m_2}{M}.$$

Найдем ω. Из закона сохранения момента импульса следует, что

$$m_1(\omega l_1)l_1 + m_2(\omega l_2)l_2 = m_1\omega_0 l_{10}^2 + m_2\omega_0 l_{20}^2,$$

где l_{10} и l_{20} — начальные расстояния от шариков до центра масс, ω_0 — начальная угловая скорость. Очевидно, если начальная длина пружины равна l_0, то

$$l_{10} = l_0 m_2/M,\quad l_{20} = l_0 m_1/M.$$

Поэтому мы можем записать

$$\left[m_1\left(\frac{m_2}{M}\right)^2 + m_2\left(\frac{m_1}{M}\right)^2\right]\omega l^2 = \left[m_1\left(\frac{m_2}{M}\right)^2 + m_2\left(\frac{m_1}{M}\right)^2\right]\omega_0 l_0^2.$$

Отсюда $\omega = \omega_0 (l_0/l)^2$. Для того чтобы найти ω_0, необходимо найти начальные скорости $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_2'$ шариков в системе центра масс. Так как скорость центра масс в начальный момент равна $\vec{u}_0 = (m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)/M$, скорости шариков в системе центра масс равны соответственно

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{u}_0 = \frac{m_2}{M}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2),$$

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{u}_0 = \frac{m_1}{M}(\vec{v}_2 - \vec{v}_1).$$

Угловая скорость ω_0 шариков равна, например, проекции скорости $\vec{v}_2'$ на ось OY, деленной на l_{20}, то есть

$$\omega_0 = \frac{vm_1/M}{l_{20}} = \frac{v}{l_0}.$$

Таким образом,

$$W_к = \frac{1}{2}\omega_0^2 l_0^2 \frac{m_1m_2}{M} = \frac{v^2}{2}\frac{m_1m_2}{M} = \frac{m_1m_2}{2M}v^2.$$

Теперь воспользуемся законом сохранения энергии. Полная энергия системы равна

$$\frac{m_1v_1^2}{2} + \frac{m_2v_2^2}{2} = \frac{Mv^2}{2}.$$

Поэтому

$$\frac{Mv^2}{2} = W_c + \frac{kx^2}{2} + W_к.$$

Но, согласно закону сохранения энергии, для системы как целого

$$W_c = W_{c0} - \frac{Mu_0^2}{2} = \frac{M}{2}\left(\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{M}\right)^2.$$

Так как векторы $m_1\vec{v}_1$ и $m_2\vec{v}_2$ взаимно перпендикулярны,

$$\left(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2\right)^2 = m_1^2v_1^2 + m_2^2v_2^2 = \left(m_1^2 + m_2^2\right)v^2.$$

Поэтому

$$W_c = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2M}v^2,$$

и закон сохранения энергии можно переписать в виде

$$\frac{Mv^2}{2} = \frac{m_1^2 + m_2^2}{2M}v^2 + \frac{kx^2}{2} + \frac{m_1m_2v^2}{2M}.$$

Отсюда

$$x = v\sqrt{\frac{m_1m_2}{kM}}.$$

И. Слободецкий

◆

Ф550. *На шероховатый медный конус (покрытый мелкой насечкой, как напильник) надеты две шайбы: алюминиевая с отверстием радиуса $r=1$ см и железная с отверстием радиуса $R=3$ см. Расстояние между шайбами $a=6$ см. На сколько изменится это расстояние, если конус и шайбы нагреть на $\Delta t = 200$ К? Тепловые коэффициенты линейного расширения меди, алюминия и железа равны соответственно $\beta_1 = 1{,}7\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$, $\beta_2 = 2{,}5\cdot10^{-5}$ К$^{-1}$ и $\beta_3 = 10^{-5}$ К$^{-1}$. Конус расположен вертикально, вершиной вверх.*

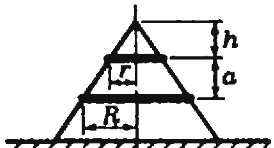


Рис. 14.

Расстояние h от центра алюминиевой шайбы до вершины конуса определяется уравнением $\frac{h+a}{h} = \frac{R}{r}$ (рис. 14) и равно $h = a\frac{r}{R-r} = 3$ (см).

При нагревании алюминиевая шайба расширяется больше, чем участок конуса, с которым она соприкасается ($\beta_2 > \beta_1$), поэтому она соскальзывает вниз. Железная шайба «заклинивается» на конусе ($\beta_3 < \beta_1$) и смещается вместе с участком конуса, на котором она держится. При нагревании угол при вершине конуса не изменяется. Новое расстояние h' от центра алюминиевой шайбы до вершины конуса определяется уравнением $\frac{h'}{h} = \frac{r'}{r}$ и равно

$$h' = h\frac{r(1+\beta_2\Delta t)}{r} = h(1+\beta_2\Delta t).$$

Новое расстояние от центра железной шайбы до вершины конуса равно

$$H' = (h+a)(1+\beta_1\Delta t).$$

Расстояние между шайбами при нагревании увеличилось на

$$\Delta a = (H' - h') - a = a\beta_1\Delta t - h(\beta_2 - \beta_1)\Delta t \approx 0{,}16 \text{ (мм)}.$$

Г. Коткин

Ф551. *Груз массы m подвешен к двум пружинам с жесткостью k_1 и k_2 с помощью нити и блока (рис. 15). Найти период малых колебаний груза. Нить и блок считать невесомыми.*

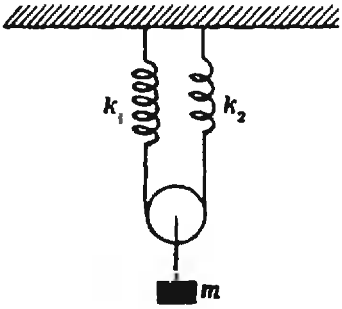


Рис. 15.

При смещении блока с грузом на величину x суммарная деформация пружин равна $2x$, то есть

$$x_1 + x_2 = 2x,$$

где x_1, x_2 — деформация пружин с жесткостью k_1 и жесткостью k_2 соответственно. Силы упругости, возникающие в пружинах, одинаковы — каждая из них равна по абсолютной величине силе $\vec{T}$ натяжения нити. Таким образом, $x_1 = T/k_1$, $x_2 = T/k_2$ и

$$2x = \frac{T}{k_1} + \frac{T}{k_2}$$

(здесь $T = |\vec{T}|$). Отсюда находим

$$T = 2\frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}x.$$

Сила $\vec{F}$, действующая на блок с грузом, равна по абсолютной величине $2T$, то есть

$$F = \frac{4k_1 k_2}{k_1 + k_2}x$$

(здесь $F = |\vec{F}|$). Таким образом, колебания блока с грузом можно рассматривать как колебания груза массы m на пружине с жесткостью $k' = \frac{4k_1 k_2}{k_1 + k_2}$. Период таких колебаний равен

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k'}} = \pi\sqrt{\frac{m(k_1 + k_2)}{k_1 k_2}}.$$

◆

Ф552. *Вольт-амперная характеристика неоновой лампы показана на рисунке 16. При каком значении R сопротивления резистора, включенного в цепь, изображенную на рисунке 17, неоновая лампа (н. л.) не будет гаснуть после замыкания ключа K?*

При замыкании ключа конденсатор начинает заряжаться. Когда напряжение на конденсаторе, а следовательно, и на лампе станет равным 110 В, лампа загорится. С этого момента ток, текущий через лампу, будет возрастать, а напряжение на лампе и, следовательно, на конденсаторе будет падать — конденсатор будет разряжаться. Если в процессе разрядки напряжение на конденсаторе станет меньше 80 В, лампа погаснет — ток в цепи меньше номинального тока, текущего через лампу при напряжении ~80 В (см. рис. 16). Следовательно, чтобы лампа не гасла, напряжение на конденсаторе не должно в процессе

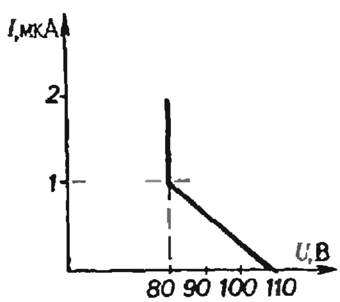


Рис. 16.

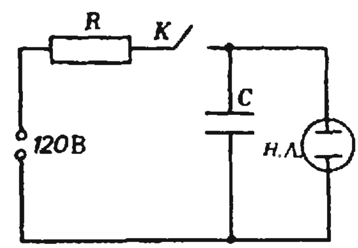
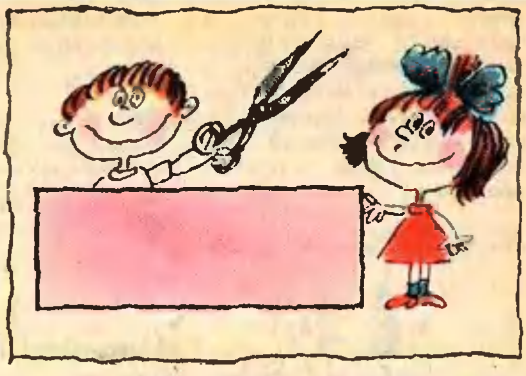


Рис. 17.

разрядки падать ниже 80 В. В предельном случае, когда $U_C = 80$ В, напряжение на резисторе равно 40 В, ток, текущий через резистор, равен току, текущему через лампу (1 мкА), и, следовательно, сопротивление резистора $R = 40$ Ом. При меньшем значении сопротивления $U_C < 80$ В и лампа не горит.

И. Слободецкий



Задачи

1. Разрежьте бумажный прямоугольник 1,5 см×4 см на две части так, чтобы ими можно было оклеить куб с ребром 1 см.

2. Сумма всех натуральных чисел от 1 до любого числа, оканчивающегося на 5, сама делится на 5. Докажите.

3. Восемьдесят спичек были разложены на пять кучек. Из первой кучки взяли пятую часть бывших в ней спичек и переложили во вторую кучку. Затем из второй кучки пятую часть оказавшихся в ней после перекладывания спичек переложили в третью кучку и так далее. Наконец, из пятой кучки переложили пятую часть оказавшихся в ней спичек в первую кучку. После этого в каждой кучке спичек стало поровну. Сколько спичек было в каждой кучке до перекладывания?

4. Существует ли треугольник, длины высот которого равны 1, 2 и 3 соответственно?

5. Турист хочет приготовить себе на завтрак два яйца всмятку и еще четыре сварить вкрутую, чтобы взять их в дорогу. Яйца всмятку варятся 2 минуты, вкрутую — 4 минуты (яйца кладутся в кипящую воду). За какое наименьшее время турист может сварить яйца, если у него есть кастрюлька вместимостью четыре яйца?

П. Канаев

Опыты с водой на морозе

Почему зимой часто лопаются водопроводные трубы и разрываются бутылки с водой? Почему с приходом весны на крышах домов появляются сосульки, а летом иногда вместо дождя на землю падает град? Почему вода в глубоких реках и озерах не замерзает до дна?

Подобных вопросов можно сформулировать очень много, потому что много особенностей таит в себе замерзающая вода. С некоторыми из них вы сможете познакомиться на опытах с водой на морозе.

Все предлагаемые вам опыты очень просты, они не требуют никакой специальной подготовки. Однако дадим несколько советов. Опыты лучше проводить при температурах не выше —5°C. Помните, что цилиндрические стеклянные или пластмассовые сосуды с водой на морозе могут лопнуть, так что по возможности пользуйтесь сосудами конической формы. В некоторых опытах вам понадобится насыщенный раствор поваренной соли. Его лучше приготовить заранее, растворив 30 г поваренной соли в 100 мл теплой воды.

Проделав опыт, постарайтесь самостоятельно объяснить наблюдаемые явления и ответить на все возникающие вопросы. Если вы это сделать не сумеете, прочитайте ответы и объяснения в статье.

Итак, вам предстоит провести следующие эксперименты:

1. В холодном неотапливаемом помещении (например, в сарае, чулане, гараже) или на балконе на стол или другую горизонтальную поверхность положите стеклянную пластинку, поставьте рюмку, перевернув ее ножкой вверх, опрокинутое блюдце и, наконец, большой таз. С помощью узкой трубочки капните несколько капель воды на пластинку и заполните водой углубления в ножке рюмки и в блюдце, в таз налейте 2—3 кружки воды.

Когда вода замерзнет, внимательно посмотрите на поверхность льда. Вы увидите, что замерзшие капли заострились, в середине углублений рюмки и блюдца образовались конусообразные бугорки (рис. 1). А в тазу вырос настоящий ледяной бугор.

Теперь замените воду слабым раствором поваренной соли или мыльным раствором и повторите опыт (таз можно не использовать). Оказывается, при замерзании водных растворов (а не просто воды!) никаких бугорков не образуется.

И еще один опыт, но уже не с водой, а с парафином или воском. Налейте расплавленный парафин (или воск) в углубление основания рюмки и вынесите на мороз — после застывания парафина на его поверхности вы обнаружите... впадину (рис. 2).

Три опыта на одну и ту же тему дают разные результаты.

Почему?

При замерзании вода сильно расширяется, поэтому на поверхности льда и образуется бугорок. Водные растворы при отвердевании расширяются очень незначительно, их поверхность остается гладкой. Парафин же при переходе из жидкого состояния в твердое сжимается, в результате появляется впадина.

2. Для опыта вам потребуется тонкостенный стеклянный сосуд. Им может служить, например, баллон электрической лампочки накаливания без цоколя (цоколь можно удалить, если трехгранным надфилем аккуратно распилить стекло на его границе с металлом, при этом лампочку надо все время поворачивать).

Налейте в баллон воды до высоты его максимального горизонтального диаметра и дайте ей замерзнуть.

Вы увидите очень красивую картину (рис. 3). Края образовавшегося ледяного слитка в основном прозрачны, лишь кое-где в лед вкраплены пузырьки воздуха различной формы и размеров, а в середине слитка — непрозрачный сгусток, напоминающий свернувшегося в клубок ежа.

Предварительно подкрасьте воду «зеленкой» (ее можно купить в аптеке) и еще раз проведите тот же самый опыт.

После замерзания подкрашенной воды картина будет еще более красивой. По краям лед останется по-прежнему прозрачным и неокрашенным, в то время как в средней части окраска сильно сгустится, так что «еж» будет казаться зеленым.

Как все это можно объяснить?

Обычно вода начинает замерзать на своей поверхности и около стенок.

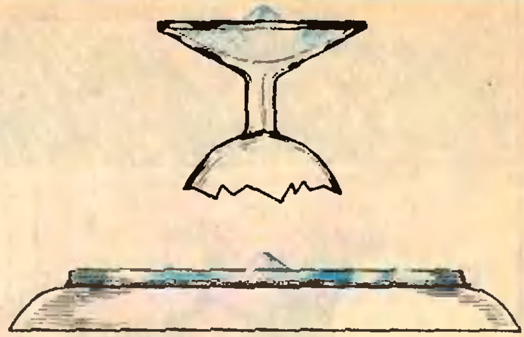


Рис. 1.

Рис. 2.

Рис. 3.

Затем замерзание постепенно распространяется к центру объема воды, где образуется множество различно направленных ледяных кристаллов. Так возникает непрозрачный сгусток из сросшихся кристаллов, который рассеивает свет по всем направлениям.

Как мы уже говорили, при отвердевании воды ее объем увеличивается. Внутри льда возникают пустоты. Мельчайшие, невидимые глазом, но всегда имеющиеся в воде пузырьки воздуха сливаются и образуют более крупные. Они хорошо видны там, где лед прозрачен.

Подкрашенная вода ведет себя аналогично чистой воде. При переходе из жидкого состояния в твердое ее молекулы должны расположиться упорядоченно. В результате молекулы красящего вещества как бы вытесняются от краев к середине объема жидкости. Вот почему лед остается прозрачным по краям и оказывается сильно окрашенным в середине.

3. Возьмите стеклянную трубку диаметром 7—15 мм и один конец ее закупорьте резиновой пробкой. (Можно воспользоваться цилиндром от прибора «Огниво», который имеется в школьном физическом кабинете. Винтовое дно нужно снять, а отверстие закрыть пробкой.) Укрепите трубку в вертикальном положении пробкой вниз (например, зажмите в лапке штатива). Заполните полученный сосуд до краев водой, а отверстие прикройте кружочком плотной бумаги.

При замерзании воды образовавшийся столбик льда будет подниматься вместе с бумажным кружочком (рис. 4, *а*).

Проделайте тот же опыт с перевернутым сосудом, то есть когда пробка находится вверху, а бумажный кружочек — внизу. В этом случае столбик льда будет опускаться вместе с кружочком (рис. 4, *б*).

Теперь несколько видоизмените последний опыт. В сосуд налейте столько воды, чтобы уровень ее не доходил до края примерно на 1 см. Отверстие закройте кружочком и переверните сосуд (рис. 4, *в*). После замерзания воды вы увидите, что ледяной столбик будет не опускаться, а подниматься, приближаясь к пробке.

Какие можно сделать выводы?

Вода при замерзании расширяется, причем расширяется по всем направлениям. Но «дно» и стенки сосуда препятствуют движению, поэтому ледяной столбик перемещается только в одном направлении — туда, где давление наименьшее.

4. Вынесите на мороз два стаканчика. В один налейте чистую воду, а в другой — насыщенный раствор поваренной соли. Для опыта потребуются две сосульки. (Их можно «вырастить» искусственно. Например, так: заморозьте воду в узкой, закрытой с одного конца стеклянной или металлической трубке. Чтобы вытащить образовавшуюся сосульку, трубку слегка подогрейте.)

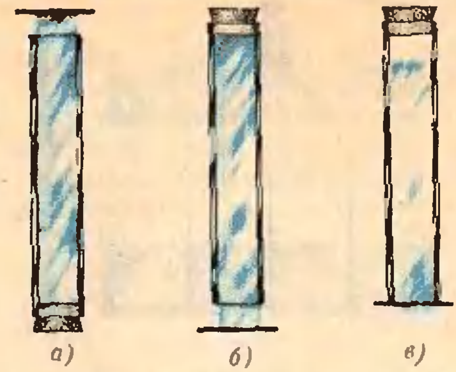


Рис. 4.

Одну сосульку опустите в замерзающую воду (предварительно хорошенько перемешайте содержимое стаканчика), а вторую — в раствор поваренной соли. Уже через несколько минут диаметр первой сосульки заметно увеличится, а второй — наоборот, уменьшится.

Почему?

Известно, что кристаллики льда активнее всего образуются там, где есть какие-нибудь шероховатости, щели, острия — одним словом, какие-либо неоднородности. Ледяная сосулька в холодной воде как раз и выполняет роль такой «неоднородности». Вокруг нее происходит усиленная кристаллизация воды, и слой льда на сосульке постепенно увеличивается.

Насыщенный раствор поваренной соли остается в жидком состоянии вплоть до температуры —21 °С. При погружении в раствор сосульки молекулы соли, как более подвижные, будут непрерывно бомбардировать сосульку и тем самым разрушать ее.

5. Возьмите две трубки: одну стеклянную, другую металлическую, диаметром 10—12 мм и длиной 100—120 мм. Одно отверстие в каждой трубке плотно закупорьте резиновыми пробками. Наполнив трубки до краев водой, вынесите их на мороз и оставьте их там на некоторое время в вертикальном положении.

Когда вода замерзнет, внесите трубки в комнату и через несколько минут выньте образовавшиеся ледяные столбики (например, вытолкните их из трубок тупым концом карандаша).

Оказывается, столбик, образовавшийся в стеклянной трубке, имеет од-

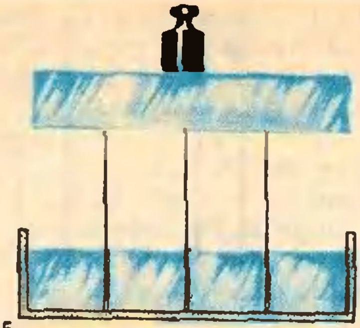


Рис. 5.

ну или две поперечные сквозные трещины. Столбик же из металлической трубки — однородный, никаких трещин на нем нет.

Чем это объясняется?

Поскольку стекло плохо проводит тепло, отвердевание воды в стеклянной трубке идет очень медленно и неравномерно. За длительный промежуток времени успевают образоваться два или три столбика льда, которые стыкуются друг с другом. В местах стыковки и возникают трещины.

В металлической трубке, у которой теплопроводность стенок хорошая, вся масса воды замерзает быстро и равномерно. Ледяной столбик получается монолитным.

6. Заполните водой почти до краев прямоугольную коробочку (пластмассовую или металлическую) размером 70×50×20 мм. Вырежьте из картона крышку для этой коробочки таких размеров, чтобы она чуть-чуть выходила за края. Из центра картонки проведите окружность диаметром, немного меньшим ширины коробочки. По окружности на равном расстоянии друг от друга строго вертикально воткните три одинаковые иголки так, чтобы ушками они касались дна коробочки, а крышку прижмите к коробочке.

Воду заморозьте. Осторожно снимите картонку с иголок, на их острия положите кусок льда с грузом и все это оставьте на морозе (рис. 5). Примерно через сутки вы обнаружите, что лед опустился до коробочки.

Почему же иголки не оказали льду никакого сопротивления?

Оказывается, все дело в том, что п о д д а в л е н и е м лед плавится при температуре существенно ниже 0°С, и поэтому иголки спокойно проходят сквозь лед.

Задачи наших читателей

1. Через точку K внутри треугольника с длинами сторон a, b, c проведены прямые, параллельные сторонам треугольника. Длины отрезков, заключенных между сторонами, равны, соответственно, a_1, b_1, c_1. Докажите, что

а) $\frac{a_1}{a}+\frac{b_1}{b}+\frac{c_1}{c}=2$;

б) $\frac{4}{3}\leqslant\frac{a_1^2}{a^2}+\frac{b_1^2}{b^2}+\frac{c_1^2}{c^2}\leqslant 2$.

2. Через точку K внутри тетраэдра $ABCD$ с площадями граней S_a, S_b, S_c и S_d проведены четыре плоскости, параллельные граням тетраэдра. Площади полученных сечений равны соответственно S_1, S_2, S_3, S_4. Докажите, что

а) $$\sqrt{\frac{S_1}{S_a}}+\sqrt{\frac{S_2}{S_b}}+\sqrt{\frac{S_3}{S_c}}+\sqrt{\frac{S_4}{S_d}}=3;$$

б) $$\frac{S_1}{S_a}+\frac{S_2}{S_b}+\frac{S_3}{S_c}+\frac{S_4}{S_d}\geqslant\frac{9}{4}.$$

3. Через точку K внутри тетраэдра проведены прямые, параллельные его ребрам $|BC|=a$, $|AC|=b$, $|AB|=c$, $|AD|=d_1$, $|BD|=d_2$, $|CD|=d_3$. Длины отрезков этих прямых, заключенных между гранями, равны соответственно a', b', c', d_1', d_2', d_3'. Докажите, что

$$\frac{a'}{a}+\frac{b'}{b}+\frac{c'}{c}+\frac{d_1'}{d_1}+\frac{d_2'}{d_2}+\frac{d_3'}{d_3}=3.$$

Э. Ясиновый

(Куйбышев)

Г. Бевз

Задачи можно решать проще

Готовящиеся к поступлению в вузы нередко спрашивают:

— Могут ли на вступительных экзаменах по математике предлагать задачи, для решения которых необходимо знать теоремы, не предусмотренные школьной программой?

— Нет, не могут!

Услыхав такой ответ, один мой десятиклассник возразил, показывая статью И. Габовича «Векторы помогают на экзамене» («Квант», 1979, № 1):

— Неправда. Ведь формул

$$\overrightarrow{BD}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{BA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{BC},\quad (*)$$

$$\overrightarrow{MN}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{BD}\quad (**)$$

в школе не изучают, а задачи на применение этих формул предлагают и в МГУ, и в МФТИ, и в Киевском политехническом...

К сожалению, так думают многие читатели «Кванта» и — ошибаются.

Из того факта, что некоторые задачи можно решать с помощью каких-то формул, еще не следует, что без этих формул их решить нельзя. Для примера рассмотрим задачи из упомянутой статьи.

Задача 1 (МГУ, эконом. ф-т, 1978). *В треугольнике KLM на стороне KL взята точка A так, что $|KA|:|AL|=1:3$; на стороне LM взята точка B так, что $|LB|:|BM|=4:1$. Пусть C — точка пересечения прямых KB и MA. Известно, что площадь треугольника KLC равна 2. Найти площадь треугольника KLM.*

Эту задачу можно решить, используя только тот факт, что площади треугольников с одинаковыми высотами относятся, как их основания.

Решение (рис. 1). Обозначим площади треугольников KLM, AKC и BCM, соответственно, через s, p и q. Тогда

$$S_{KLB}=\frac{4}{5}s,\ S_{ALM}=\frac{3}{4}s,$$

$$S_{KLC}=4p,\ S_{LCB}=4q,$$

$$S_{KLC}-S_{LCB}=4p-4q=4(p-q)=$$

$$=4(S_{KLB}-S_{ALM})=4\cdot\frac{1}{20}s=\frac{1}{5}s,$$

$$S_{KLC}+S_{LCB}=S_{KLB}=\frac{4}{5}s.$$

Из двух последних равенств $s=2S_{KLC}=4$.

Задача 2 (МФТИ, 1977). *Сторона основания $ABCD$ правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину $2a$, боковое ребро — длину a. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали AD_1 грани и диагонали DB_1 призмы, параллельные плоскости AA_1B_1B.*

1) *Один из этих отрезков проведен через точку M диагонали AD_1 такую, что $|AM|:|AD_1|=2:3$. Найти его длину.*

2) *Найти наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.*

Эту задачу проще решать координатным методом.

Решение. Данную призму расположим в прямоугольной системе координат, как показано на рисунке 2. Через точку X ребра AD, удаленную от D на расстояние x, проведем плоскость XTT_1X_1, параллельную грани ABB_1A_1. Пусть R и S — точки пересечения этой плоскости с $[AD_1]$ и $[DB_1]$. Абсциссы и ординаты точек R и S можно определить устно, а аппликаты — используя свойства подобных треугольников ADD_1 и AXR, DBB_1 и DQS. Имеем: $R\left(x;0;\frac{2a-x}{2}\right)$, $S\left(x;x;\frac{x}{2}\right)$. Значит, $|RS|=\sqrt{x^2+(a-x)^2}$.

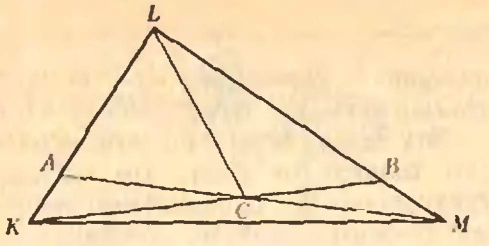


Рис. 1.

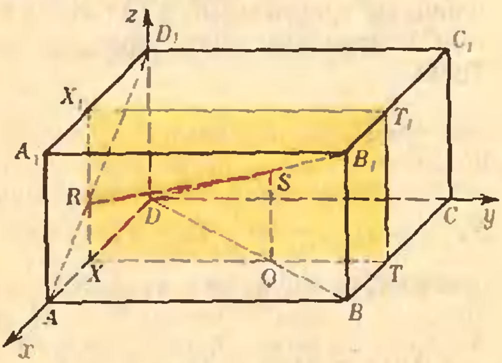


Рис. 2

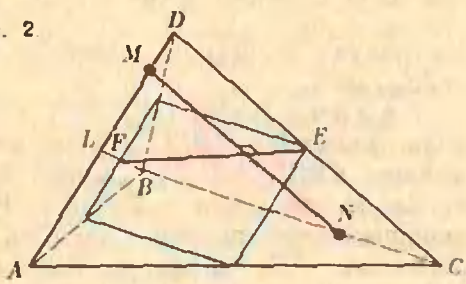


Рис. 3.

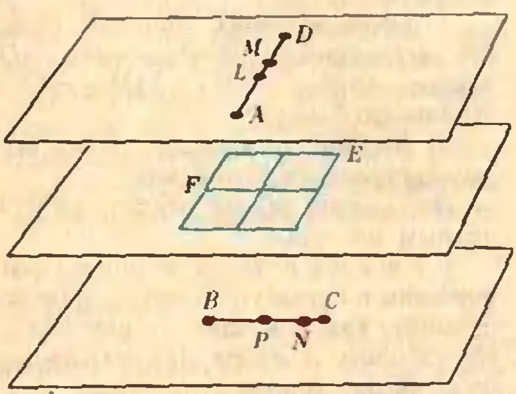


Рис. 4.

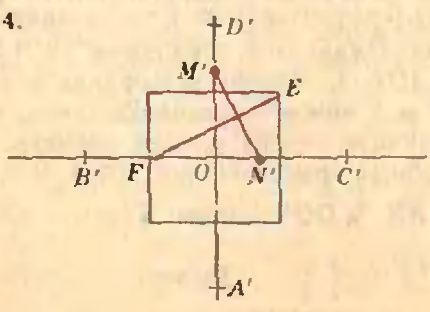


Рис. 5.

1) Если $R=M$, то есть $|AR|:|AD_1|=2:3$, то $x=\frac{2}{3}a$ и $|RS|=\frac{a}{3}\sqrt{5}$.

2) $|RS|$ будет иметь наименьшее значение при наименьшем значении функции $f(x)=x^2+(a-x)^2$ $(x\in[0;\ 2a])$, то есть (производная!) при $x=\frac{a}{2}$.

Ответ. $\min|RS|=\frac{a}{2}\sqrt{2}$.

Задача 3 (МФТИ, 1978). *Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна a. Точка E — середина ребра CD, точка F — середина высоты BL грани ABD. Отрезок MN с концами на прямых AD и BC пересекает прямую EF и перпендикулярен ей. Найти длину этого отрезка.*

Решение*). Соединим середины ребер AB, AC, BD и CD — получим квадрат (Указание. $AD\perp BC$), у которого E — одна из вершин, F— середина стороны (рис. 3). Прямые AD и BC параллельны плоскости этого квадрата и «висят» над его средними линиями (рис. 4). Спроектируем MN на плоскость квадрата. Из $MN\perp EF$ следует, что проекция $M'N'\perp EF$ (рис. 5). Поскольку прямые AD и BC находятся от плоскости квадрата на одинаковом расстоянии, точка $[M'N']\cap[EF]$ делит отрезок $M'N'$ пополам. Отсюда (рис. 5) $|OM'|=\frac{a}{3}$ и $|ON'|=\frac{a}{6}$. При проектировании на плоскость квадрата середины L, P отрезков AD и BC попадают в точку O. Поэтому $|LM|=|OM'|=\frac{a}{3}$, $|PN|=|ON'|=\frac{a}{6}$. Из прямоугольного $\triangle APL$ находим $|PL|=\frac{a}{2}\sqrt{2}$. Отрезки ML, LP и PN взаимно перпендикулярны. Поэтому (§ 49 «Геометрии 10») $|MN|=\sqrt{|ML|^2+|LP|^2+|PN|^2}=\frac{a}{6}\sqrt{23}$.

Замечание. Многие факты, касающиеся правильного тетраэдра, становятся очевидными, если такой тетраэдр «вложить» в куб (рис. 6).

Задача 4 (Киевский политехнич. ин-т, 1978). *Около равностороннего треугольника, сторона которого равна a, описана окружность. Дока-*

*) Предложено Л. Г. Макар— Лимановым.

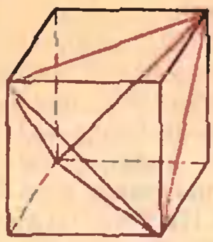


Рис. 6.

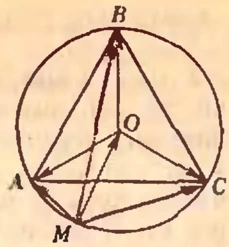


Рис. 7.

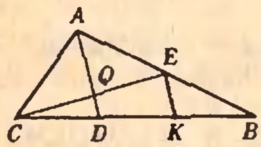


Рис. 8.

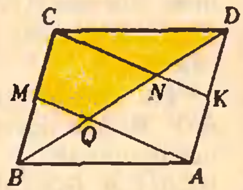


Рис. 9.

зать, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин этого треугольника равна $2a^2$.

Решение (рис. 7). Пусть M — произвольная точка окружности. Тогда $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OC}$. Учитывая, что $|MO| = |OA| = |OB| = |OC| = R$, получим

$$|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 = 6R^2 + 2\overrightarrow{MO}\cdot(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}).$$

Так как треугольник ABC — правильный, $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$, а $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$.

Следовательно, $|MA|^2 + |MB|^2 + |MC|^2 = 6\cdot\frac{a^2}{3} = 2a^2$.

Это решение не только проще имеющегося в статье И. Габовича, но и более общее. Его легко обобщить на случай правильного n-угольника, и не обязательно вписанного в окружность, можно и описанного, и не только для планиметрических задач. Например, предложенное выше доказательство справедливо для следующей стереометрической задачи: *около равностороннего треугольника, сторона которого равна a, описана сфера, центр которой совпадает с центром данного треугольника; доказать, что сумма квадратов расстояний от произвольной точки сферы до вершин этого треугольника равна* $2a^2$.

Приведенные в конце статьи И. Габовича задачи тоже намного проще решать без соотношений (*), (**). Рассмотрим два примера.

Задача 5 (МФТИ, 1970). *В треугольнике ABC биссектриса AD делит сторону BC в отношении* $|BD| : |CD| = 2 : 1$. *В каком отношении медиана CE делит эту биссектрису?*

Решение (рис. 8). Проведем $[EK] \parallel [AD]$; $\triangle CQD \sim \triangle CEK$, $|EK| = \frac{1}{2}|AD|$, $|BK| = |KD| = |CD|$. Поэтому $\frac{|DQ|}{|DA|} = \frac{|DQ|}{2|EK|} = \frac{1}{2}\cdot\frac{|CD|}{|CK|} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Значит, $|DQ| : |QA| = 1 : 3$.

Задача 6 (МГУ, биофак, 1973). *Через середину M стороны BC параллелограмма ABCD, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке Q. Найти площадь четырехугольника QMCD.*

Решение (рис. 9). Пусть K — середина $[AD]$, тогда $AMCK$ — параллелограмм. $[NK]$ — средняя линия $\triangle AQD$, а $[MQ]$ — средняя линия $\triangle BCN$. Поэтому $|BQ| = |QN| = |ND|$. Площадь треугольника BCD равна $\frac{1}{2}$. Поэтому площадь $\triangle BMQ$ равна $\frac{1}{12}$. Итак, $S_{MCDQ} = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = \frac{5}{12}$.

Как видим, не такие уж трудные эти задачи. Для их решения нет надобности применять формулы (*) и (**), не предусмотренные школьной программой.

Заочная школа программирования

Урок 4: Арифметические предписания языка Робик. Условные и циклические предписания. Процедуры с параметрами

В языке Робик можно выполнять арифметические действия над числами. Для этого предназначены предписания СЛОЖИТЬ и ВЫЧЕСТЬ, синтаксические диаграммы которых приведены в сводной таблице (с. 47). Смысл этих предписаний настолько очевиден, что мы не будем подробно описывать их работу, ограничившись одним небольшим примером:

СЛОЖИТЬ 5 С 10 И ПРИСВОИТЬ А;
ВЫЧЕСТЬ 3 ИЗ А И ПРИСВОИТЬ В;
СЛОЖИТЬ А С В И ПРИСВОИТЬ В;
ОТПЕЧАТАТЬ 'А-', А, 'В-', В;

По этой программе будет отпечатана строка:

А=15В=27

Многих может удивить отсутствие операций умножения и деления среди предписаний языка. Дело в том, что Робик — это учебный язык, а составление процедур для умножения и деления чисел — отличное учебное упражнение.

Задание 4.1. *Описать процедуру, которая увеличивает значение имени А в четыре раза и присваивает результат тому же имени.*

Одно из самых важных предписаний в любом языке программирования — это *условное предписание*, структура которого изображена в сводной таблице.

Встретив в тексте программы условное предписание, ЭВМ прежде всего проверяет условие: истинно оно или ложно. Если условие истинно, будет исполнено только предписание, стоящее после слова ТО. Если условие ложно, будет исполняться только то предписание, которое стоит после слова ИНАЧЕ (если этого слова в предписании нет, то при ложном условии условное предписание в этом случае просто пропускается).

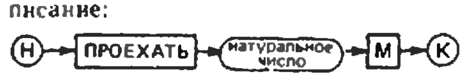
Например, если значениями имен А и В являются какие-то числа, то предписание

ЕСЛИ А БОЛЬШЕ В ТО ОТПЕЧАТАТЬ А ИНАЧЕ ОТПЕЧАТАТЬ В;

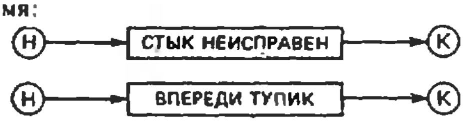
отпечатает большее из этих чисел (если числа равны между собой, отпечатается второе число, которое, впрочем, совпадает тогда с первым).

Задача о роботе-обходчике

Робот РО-1 должен проверить прочность стыков на новой железнодорожной ветке. Обнаружив неисправный стык, робот должен сообщить об этом дежурному оператору, находящемуся на станции. РО-1 умеет выполнять все предписания языка Робик. Кроме того, в его СПР входит предписание:



а список допустимых условий дополнен двумя:



Расстояние между стыками — 24 метра. Ветка заканчивается тупиком. Перед началом работы робот установлен на первом стыке проверяемой ветки. *Составить программу.*

Решение.

ЗАПОМНИТЬ ПРОЦЕДУРУ ПРОВЕРКА;
10 ЕСЛИ СТЫК НЕИСПРАВЕН ТО ОТПЕЧАТАТЬ 'ОБНАРУЖЕН НЕИСПРАВНЫЙ СТЫК';
20 ПРОЕХАТЬ 24 М;
30 ВЫЗВАТЬ ПРОЦЕДУРУ ПРОВЕРКА;
ЗАКОНЧИТЬ ОПИСАНИЕ ПРОЦЕДУРЫ;
ВЫЗВАТЬ ПРОЦЕДУРУ ПРОВЕРКА;

Проследим, как выполняется эта программа. Будем считать, что первый и второй стыки исправны, а с третьим что-то не в порядке. Когда мы вызовем процедуру ПРОВЕРКА в первый раз, робот начнет выполнять оператор с номером 10. Это — условный оператор, поэтому РО-1 в первую очередь проверит условие

СТЫК НЕИСПРАВЕН

Как мы договорились, первый стык исправен, так что это условие ложно. Слова ИНАЧЕ в операторе нет, поэтому при ложном условии роботу нечего исполнять и он переходит к следующему предписанию:

ПРОЕХАТЬ 24 М;

Теперь РО-1 оказывается уже над вторым стыком. После этого он исполнит предписание с номером 30, то есть заново вызовет процедуру ПРОВЕРКА и начнет повторять все сначала. Для второго, исправного, стыка все повторится в точности, а вот на третьем стыке условие в десятом операторе окажется истинным и на экране терминала, установленного на станции, появятся слова

ОБНАРУЖЕН НЕИСПРАВНЫЙ СТЫК

После этого робот вновь перейдет к двадцатому оператору, проедет еще 24 метра и опять начнет все сначала. Кажется, все в порядке. Впрочем, один неясный вопрос остается: а до каких пор робот будет повторять выполнение этой процедуры? Судя по программе — до бесконечности. На самом деле, разумеется, ветка где-то кончится и робот налетит на тупик. Но это — ситуация аварийная. Попробуем ее предотвратить: для этого, очевидно, нужно, чтобы операторы 20 и 30 выполнялись только в том случае, когда впереди нет тупика. Если же тупик обнаружен, можно, например, отпечатать такое сообщение дежурному оператору:

ЛИНИЯ ПРОВЕРЕНА. РО-1 РАБОТУ ЗАКОНЧИЛ

Ну, что ж, попробуем написать такую программу:

```
ЗАПОМНИТЬ ПРОВЕРКА;
10 ЕСЛИ СТЫК НЕИСПРАВЕН
   ТО ОТПЕЧАТАТЬ 'ОБНАРУ-
   ЖЕН НЕИСПРАВНЫЙ СТЫК';
20 ЕСЛИ ВПЕРЕДИ ТУПИК ТО
   ОТПЕЧАТАТЬ 'ЛИНИЯ
   ПРОВЕРЕНА. РО-1 РАБОТУ
   ЗАКОНЧИЛ'. ИНАЧЕ...
```

СТОП!! А что, собственно, ИНАЧЕ?

Ведь если впереди нет тупика, нам нужно выполнить два оператора сразу: проехать 24 метра и вызвать процедуру ПРОВЕРКА, а, судя по диаграмме, после слов ТО и ИНАЧЕ может стоять только одно предписание.

Впрочем, выход есть: опишем новую процедуру, состоящую из этих двух операторов, а после слов ИНАЧЕ поставим просто вызов этой процедуры:

```
ЗАПОМНИТЬ РЕЛЬС;
10 ПРОЕХАТЬ 24 М;
20: ПРОВЕРКА;
ЗАКОНЧИТЬ;
ЗАПОМНИТЬ ПРОВЕРКА;
10 ЕСЛИ СТЫК НЕИСПРАВЕН
   ТО ОТПЕЧАТАТЬ
   'ОБНАРУЖЕН НЕИСПРАВ-
   НЫЙ СТЫК';
20 ЕСЛИ ВПЕРЕДИ ТУПИК ТО
   ОТПЕЧАТАТЬ 'ЛИНИЯ ПРО-
   ВЕРЕНА. РО-1 РАБОТУ ЗА-
   КОНЧИЛ'. ИНАЧЕ: РЕЛЬС;
ЗАКОНЧИТЬ;
:ПРОВЕРКА;
```

Усложним задание: предположим, что робот должен каждый раз печатать номер неисправного стыка. Проверьте, что для этого подойдет такая, например, программа:

```
ЗНАЧЕНИЕ 1 ПРИСВОИТЬ ИМЕ-
   НИ Н;
ЗАПОМНИТЬ РЕЛЬС;
10 ПРОЕХАТЬ 24 М;
20 СЛОЖИТЬ 1 С Н И ПРИСВОИТЬ
   ИМЕНИ Н;
30: ПРОВЕРКА;
ЗАКОНЧИТЬ;
ЗАПОМНИТЬ ПРОВЕРКА;
10 ЕСЛИ СТЫК НЕИСПРАВЕН
   ТО ОТПЕЧАТАТЬ 'СТЫК
   НОМЕР' ,Н, 'НЕИСПРАВЕН'.
20 ЕСЛИ ВПЕРЕДИ ТУПИК ТО
   ОТПЕЧАТАТЬ 'ЛИНИЯ ПРО-
   ВЕРЕНА. РО-1 РАБОТУ ЗА-
   КОНЧИЛ'. ИНАЧЕ: РЕЛЬС;
ЗАКОНЧИТЬ;
:ПРОВЕРКА;
```

Задание 4.2. *Робот РО-1 должен проверить и сосчитать* *все стыки на новой ветке. Обнаружив неисправный стык, робот должен отпечатать его номер и* р а с с т о я н и е д о н е г о *(в метрах). После окончания проверки нужно отпечатать, сколько всего оказалось стыков на ветке и сколько из них неисправных. Составить программму.*

Используя условное предписание, можно построить, например, процедуру перемножения двух натуральных чисел в следующем виде:

```
ЗАПОМНИТЬ СЧЕТ;
10 СЛОЖИТЬ 1 С СЧ  И  ПРИС-
   ВОИТЬ СЧ;
20 СЛОЖИТЬ А С ПР И  ПРИС-
   ВОИТЬ ПР;
30 ЕСЛИ СЧ РАВНО В ТО ОТПЕ-
   ЧАТАТЬ ПР: ИНАЧЕ СЧЕТ;
ЗАКОНЧИТЬ;
ЗАПОМНИТЬ УМНОЖ;
10 0 ПРИСВОИТЬ СЧ;
20 0 ПРИСВОИТЬ ПР;
30 ЕСЛИ СЧ РАВНО В ТО ОТПЕЧА-
      ТАТЬ ПР ИНАЧЕ :СЧЕТ;
ЗАКОНЧИТЬ;
```

Эта процедура перемножает значения имен А и В и печатает произведение. Проверьте это на конкретных примерах.

Мы уже несколько раз встречали программы, в которых нужно было многократно повторять выполнение одного или нескольких предписаний. Это не случайно: именно такие повторяющиеся действия целесообразно поручать автоматам, поэтому среди задач, решаемых на ЭВМ, п о в т о р е н и е встречается очень часто.

До сих пор мы организовали повторяющиеся действия при помощи условного оператора и вызова процедуры: многократно повторяющаяся процедура вызывала сама себя до тех пор, пока срабатывал условный оператор. Однако в Робике и в большинстве других языков есть специальное предписание для организации повторений — *Циклическое предписание* (посмотрите соответствующую диаграмму — с. 47).

Работает эта конструкция так: предписание, стоящее после слова ПОВТОРЯТЬ, будет исполняться снова и снова до тех пор, пока условие остается истинным. Иначе говоря, машина работает с этим предписанием так: сначала, как и в условном предписании, проверяется у с л о в и е. Если оно ложно, то предписание вообще не исполняется.

Если условие истинно, то предписание, стоящее после слова ПОВТОРЯТЬ, исполняется, после чего с н о в а п р о в е р я е т с я у с л о в и е. Если оно остается истинным, то предписание исполняется снова — и так повторяется до тех пор, пока условие не окажется ложным. Если оно н и к о г д а не станет ложным (а такое случается при неправильно составленных программах), то машина будет вновь и вновь исполнять предписание до выключения или аварии — возникает неприятная ситуация, называемая *зацикливанием*. С примерами мы столкнемся на следующих уроках.

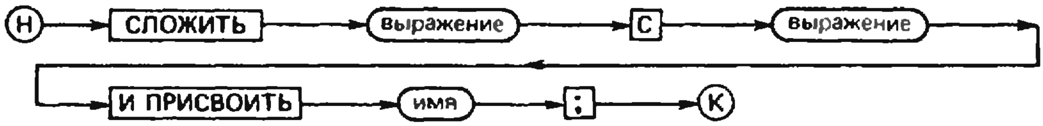
С помощью циклического оператора процедуру умножения можно записать несколько изящнее:

```
ЗАПОМНИТЬ СЧЕТ;
10 СЛОЖИТЬ 1 С СЧ  И ПРИС-
   ВОИТЬ СЧ;
20 СЛОЖИТЬ А С ПР И ПРИСВО-
   ИТЬ ПР;
ЗАКОНЧИТЬ;
ЗАПОМНИТЬ УМНОЖ;
10  ПРИСВОИТЬ СЧ;
20  ПРИСВОИТЬ ПР;
30 ПОКА СЧ МЕНЬШЕ В ПОВТО-
     РЯТЬ :СЧЕТ;
40 ОТПЕЧАТАТЬ ПР:
ЗАКОНЧИТЬ;
```

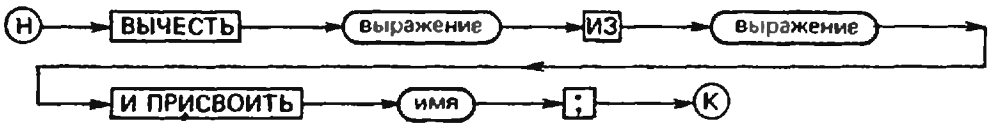
Однако и у этой процедуры есть существенный недостаток: она перемножает только значения имен А и В. Для того чтобы перемножить значения других имен, или просто два числа, их необходимо прежде присвоить имейам А и В.

Этого недостатка можно избежать, если использовать механизм *параметров*. Параметры — это имена, которые перечисляются в скобках после имени процедуры в директиве ЗАПОМНИТЬ (посмотрите на диаграмму *Запоминание процедуры* в № 10, с. 57). З н а ч е н и я этих имен перечисляются в таких же скобках при вызове процедуры. Например, если описа-

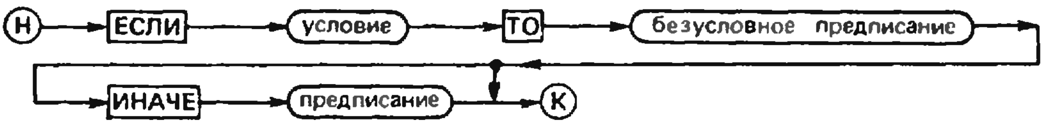
Сложение:



Вычитание:

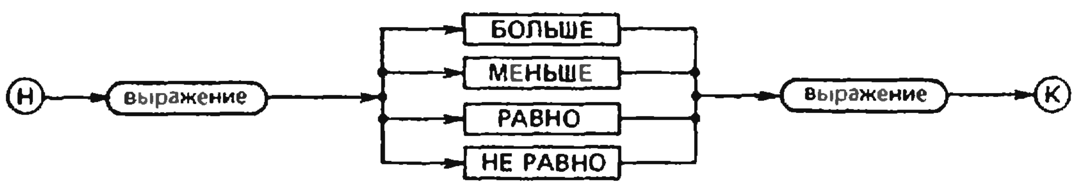


Условное предписание:



Циклическое предписание:

Условие:



ние процедуры КРОЛИК начинать так:

ЗАПОМНИТЬ КРОЛИК (A, B, C);

. . . .

то при вызове этой процедуры мы можем написать:

ВЫЗВАТЬ ПРОЦЕДУРУ КРОЛИК (10, 'ХВОСТ', НОМ);

В этом случае имя А получит значение 10, имя В — значение 'ХВОСТ', а имени С будет присвоено такое же значение, какое было у имени НОМ.

Попробуем снова описать процедуру УМНОЖ — на этот раз с использованием параметров (процедура СЧЕТ остается без изменений):

```
ЗАПОМНИТЬ УМНОЖ (А, В);
10 0 ПРИСВОИТЬ СЧ;
20 0 ПРИСВОИТЬ ПР;
30 ПОКА СЧ МЕНЬШЕ В ПОВТО-
    РЯТЬ  : СЧЕТ;
40 ОТПЕЧАТАТЬ  ПР;
ЗАКОНЧИТЬ;
```

Теперь для того чтобы перемножить 47 и 34, достаточно написать:

:УМНОЖ (47, 34);

А вызов этой же процедуры для перемножения значений имен Т и К будет выглядеть так:

:УМНОЖ (Т, К);

З а д а н и е 4.3. *Описать процедуру ДЕЛ с двумя параметрами. Процедура должна печатать* *ч а с т н о е* *и* *о с т а т о к* *от деления первого параметра на второй, например, при вызове*

:ДЕЛ (28,5);

ЭВМ должна отпечатать:

ЧАСТНОЕ=5, ОСТАТОК=3

З а д а н и е 4.4. *Описать процедуру НОД с двумя параметрами для вычисления наибольшего общего делителя двух натуральных чисел* (см. «Квант», 1970, № 9, с. 48).

Итак, мы познакомились с основными конструкциями языка Робик. Разумеется, это учебный, упрощенный язык, большой программы на нем не напишешь, но такие понятия, как операторы и директивы, имена и значения, процедуры и параметры, условные операторы и циклы, предписания присваивания и печати очень пригодятся нам при изучении более серьезных и интересных языков.

Г. Звенигородский

XIII Всесоюзная олимпиада школьников

Н. Розов, М. Смолянский

Олимпиада по математике

С 11 по 18 апреля в Тбилиси проводился заключительный этап XIII Всесоюзной олимпиады школьников по математике. В нем приняло участие 152 школьника: 39 восьмиклассников, 54 девятиклассника и 59 десятиклассников.

В столицу Грузии собрались команды всех братских республик нашей Родины. В составе команд — победители республиканских олимпиад, зональных олимпиад РСФСР, олимпиад Москвы и Ленинграда, а также ребята, отмеченные на предыдущей олимпиаде (Ташкент, 1978) дипломами I и II степени. В третий раз в заключительном этапе Всесоюзной олимпиады по математике выступала команда учащихся профессионально-технических училищ — призеров олимпиады ПТУ Ленинграда. Отдельная команда тбилисских школьников представляла город, принимавший олимпиаду.

С первых же минут пребывания на грузинской земле все команды были окружены заботой и вниманием. Представители партийных и советских органов Грузии, члены оргкомитета олимпиады и ученые-математики, комсомольцы и школьники Тбилиси сделали все возможное, чтобы праздник математики прошел успешно. И не будет преувеличением сказать, что в организационном отношении олимпиада в Тбилиси была одной из лучших.

12 апреля участники олимпиады в торжественной обстановке возложили цветы к памятнику В. И. Ленина. Затем в республиканском дворце пионеров и школьников имени Б. Дзнеладзе состоялось официальное открытие заключительного этапа. Председатель оргкомитета министр просвещения ГССР профессор О. Д. Кинкладзе тепло приветствовал гостей Грузии и сердечно поздравил собравшихся с началом соревнования. Больших успехов в олимпиаде и в дальнейших занятиях любимой наукой пожелали участникам заместитель председателя Совета Министров ГССР О. Е. Черкезия, президент АН ГССР академик Е. К. Хорадзе, секретарь ЦК ЛКСМ Грузии М. П. Циклаури и другие.

Олимпиаде предшествовала кропотливая работа по подготовке заданий для участников. Несколько месяцев методическая комиссия центрального оргкомитета Всесоюзной олимпиады школьников тщательно изучала длинный список задач-«кандидатов», составленный по предложениям математиков из разных городов нашей страны, придирчиво отбирала из него наиболее оригинальные и нестандартные задачи.

Чтобы читатели журнала смогли составить целостное впечатление о характере задач, ниже полностью приводятся их условия. Все эти задачи включены в Задачник «Кванта» — соответствующий номер, под которым там помещена задача, указан в скобках после текста условия. В Задачнике «Кванта» будут помещены и решения всех задач.

Как обычно, заключительный этап олимпиады проводился в два тура. Первый тур состоялся 13 апреля. Участникам олимпиады предложили по три задачи, на решение которых отводилось четыре часа.

Задачи первого тура

8 класс

1. Какое наименьшее значение может иметь отношение площадей двух равнобедренных прямоугольных треугольников, три вершины одного из которых лежат на трех разных сторонах другого? (M566)

2. Кенгуру прыгает по углу $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ координатной плоскости Oxy следующим образом: из точки $(x; y)$ кенгуру может прыгнуть в точку $(x+1; y-1)$ или в точку $(x-5; y+7)$, причем прыгать в точки, у которых одна из координат отрицательна, не разрешается. Из каких начальных точек $(x; y)$ кенгуру не может попасть в точку, находящуюся на расстоянии более 1000 от начала координат? Нарисуйте множество всех таких точек $(x; y)$ и найдите его площадь. (M572)

3. В парламенте у каждого его члена не более трех врагов. Докажите, что парламент можно разбить на две палаты так, что у каждого парламентария в одной с ним палате будет не более одного врага. (Считается, что если A — враг B, то B — враг A.) (M580)

9 класс

1. См. задачу № 1 для 8 класса.

2. В тетради написано несколько чисел. Разрешается приписать к уже написанным числам любое число, равное среднему арифметическому двух или нескольких из них, если только оно отлично от всех уже написанных. Докажите, что, начиная с двух чисел 0 и 1, с помощью таких приписок можно получить:

а) число 1/5,

б) любое рациональное число между 0 и 1. (M569)

3. См. задачу № 3 для 8 класса.

10 класс

1. Убывающая последовательность (x_n) положительных чисел такова, что при любом натуральном n

$$\frac{x_1}{1}+\frac{x_4}{2}+\frac{x_9}{3}+\cdots+\frac{x_{n^2}}{n}\leqslant 1.$$

Докажите, что при любом натуральном n

$$\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\frac{x_3}{3}+\cdots+\frac{x_n}{n}<3. \quad \text{(M571)}$$

2. См. задачу № 2 для 9 класса.

3. См. задачу № 3 для 8 класса

С задачами первого тура успешно справились многие участники. Как и ожидалось, наиболее трудной оказалась третья задача (общая для всех классов).

Следующий день был свободным от соревнования. Утром состоялась встреча с редколлегией журнала «Квант». Заместитель главного редактора журнала М. Л. Смолянский познакомил участников встречи с творческими планами редакции, с содержанием ближайших номеров. Перед школьниками выступили члены редколлегии В. Г. Болтянский, Л. Г. Макар-Лиманов, А. П. Савин; они рассказали об интересных математических вопросах и предложили слушателям ряд задач для самостоятельного обдумывания.

Затем десятиклассники прослушали лекцию Д. Б. Фукса о топологии, а девятиклассники — лекцию А. Б. Сосинского о так называемых «сюрреальных числах» *). Н. Н. Константинов провел с восьмиклассниками занятие математического кружка, посвященное решению логических задач. Кроме того, школьники беседовали с математиками, приглашенными Советом молодых ученых Грузии.

Члены жюри провели подробный разбор решений задач первого тура, ответили на многочисленые вопросы участников олимпиады.

15 апреля состоялся второй тур. Задания второго тура состояли из четырех задач и были рассчитаны на пять часов.

Задачи второго тура

8 класс

4. На плоскости дано несколько точек. Для некоторых пар $(A; B)$ этих точек взяты векторы $\overrightarrow{AB}$, причем так, что в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Докажите, что сумма всех взятых векторов равна $\overrightarrow{0}$. (M576)

5. Какое наименьшее число фишек нужно поставить на поля шахматной доски размерами

а) 8×8 клеток;

б) $n\times n$ клеток

для того, чтобы на каждой прямой, проходящей через центр произвольного поля и параллельной какой-либо стороне или диагонали доски, стояла хотя бы одна фишка? (Фишки ставятся в центры полей.) (M577)

6. Найдите x и y из системы уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{x-y\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=a, \\ \dfrac{y-x\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{1-x^2+y^2}}=b \end{cases}$$

(a и b — данные числа). (M578)

---

*) Статья о «сюрреальных числах» помещена на с. 2.

Жюри заключительного этапа XIII Всесоюзной олимпиады школьников по математике.

7. Имеется несколько квадратов, сумма площадей которых равна 4. Докажите, что такими квадратами всегда можно покрыть квадрат площади 1. (М570)

9 класс

4. Докажите, что для любых чисел x_1, x_2, ..., x_n, принадлежащих отрезку $[0; 1]$, выполняется неравенство

$$(x_1+x_2+\cdots+x_n+1)^2 \geqslant 4(x_1+x_2+\cdots+x_n). \quad (M579)$$

5. Натуральные числа p и q взаимно просты. Отрезок $[0; 1]$ разбит на $p+q$ одинаковых отрезков. Докажите, что в каждом из этих отрезков, кроме двух крайних, лежит ровно одно из $p+q-2$ чисел

$$\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \ldots, \frac{p-1}{p},$$

$$\frac{1}{q}, \frac{2}{q}, \ldots, \frac{q-1}{q}. \quad (M567)$$

6. Через точку O в пространстве проведено 1979 прямых l_1, l_2, ..., l_{1979}, никакие две из которых не взаимно перпендикулярны. На прямой l_1 взята произвольная точка A_1, отличная от O. Докажите, что можно выбрать точки $A_k \in l_k$, $k=2, 3, \ldots, 1979$, таким образом, чтобы следующие 1979 пар прямых были взаимно перпендикулярными:
$(A_1A_3)\perp l_2$, $(A_2A_4)\perp l_3$, ..., $(A_{k-1}A_{k+1})\perp l_k$, ..., $(A_{1977}A_{1979})\perp l_{1978}$, $(A_{1978}A_1)\perp l_{1979}$, $(A_{1979}A_2)\perp l_1$. (М573)

7. Конечная последовательность a_1, a_2, ..., a_n из чисел 0 и 1 должна удовлетворять следующему условию: для любого целого числа k от 0 до $n-1$ сумма

$$a_1a_{k+1}+a_2a_{k+2}+\ldots+a_{n-k}a_n$$

является нечетным числом.

а) Придумайте такую последовательность для $n=25$.

б) Докажите, что такая последовательность существует для некоторого $n>1000$. (М574)

10 класс

4. См. задачу № 6 для 8 класса.

5. См. задачу № 5 для 8 класса.

6. Выпуклый четырехугольник $ABCD$ разрезан своими диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что если радиусы всех четырех окружностей, вписанных в эти треугольники, равны между собой, то четырехугольник $ABCD$ — ромб. (М568)

7. На прямой по порядку расположены точки A_0, A_1, A_2, ..., A_n так, что длины отрезков $|A_0A_1|$, $|A_1A_2|$, ..., $|A_{n-1}A_n|$ не превосходят 1. Требуется отметить $k-1$ из точек A_1, A_2, ..., A_{n-1} красным цветом так, чтобы длины любых двух k частей, на которые отрезок A_0A_n разбивается красными точками, отличались не более чем на 1. Докажите, что это всегда можно сделать

а) при $k=3$;

б) для каждого натурального $k<n$. (М575)

Задачи второго тура были достаточно серьезны. (Кстати, в некоторых из них речь идет о содержательных математических результатах.) Однако юным математикам они оказались по плечу. За исключением пункта б) в задаче № 7 для 10 класса, не было ни одной задачи, которую бы не решил никто из участников олимпиады. Для некоторых задач школьники предложили оригинальные решения, ранее не известные жюри.

В приведенной таблице указано, сколько участников олимпиады решило каждую задачу (полностью или с небольшими недочетами). Жюри старалось расположить задачи по мере возрастания их трудности. Из таблицы видно, что во второй день «мнение» участников олимпиады о трудности задач совпало с мнением составителей.

Класс	Номера задач						
	1	2	3	4	5	6	7
8	5	19	3	36	а) 15 б) 4	13	3
9	22	а) 35 б) 16	9	36	23	17	а) 2 б) 1
10	39	а) 56 б) 32	13	47	а) 41 б) 21	15	а) 2 б) 0

16 апреля школьникам были рассказаны решения задач второго тура, а потом начался индивидуальный разбор — каждый участник олимпиады получил возможность подробно обсудить свою работу с членами жюри (подать апелляцию). Такое обсуждение очень полезно, оно помогает ребятам понять, что является исчерпывающим решением задачи, что такое строгое логическое рассуждение, как правильно излагать свои мысли.

17 апреля в актовом зале Тбилисского университета состоялось торжественное закрытие XIII Всесоюзной олимпиады школьников по математике. По итогам заключительного этапа присуждено 14 дипломов I степени, 31 диплом II степени и 36 дипломов III степени. Кроме того, 8 восьмиклассников, 15 девятиклассников и 21 десятиклассник были награждены грамотами. Остальным участникам олимпиады были вручены памятные дипломы участника (эти дипломы учреждены впервые)*).

Некоторые участники олимпиады были отмечены специальными призами, установленными государственными учреждениями, общественными организациями, коллективами производственных предприятий Грузии. За успехи в олимпиаде специальными призами журнала «Квант» награждены восьмиклассники *Александр Бабак* (с. ш. № 2 п. Каменка), *Константин Левицкий* (с. ш. № 16, Кара-Балты), *Чарияр Ашыралыев* (с. ш. № 5, Кара-Кала); девятиклассники *Лола Сатафова* (с. ш. № 1, Душанбе), *Бачук Месаблишвили* (школа-интернат им. Комарова, Тбилиси), *Георгий Павлиашвили* (школа-интернат им. Комарова, Тбилиси).

За отличное проведение заключительного этапа XIII Всесоюзной олимпиады школьников по математике редколлегия нашего журнала наградила специальными призами председателя жюри олимпиады члена-корреспондента АН ГССР *Т. Г. Гегелию*, Республиканскую физико-математическую школу-интернат им. Комарова (директор *А. Л. Цхадая*), с. ш. № 42 Тбилиси (директор *О. И. Гаганидзе*).

Научная программа заключительного этапа была очень насыщенной. Но участники олимпиады, покидая землю Грузии, увозили не только награды и математические впечатления. В памяти ребят надолго останутся солнечный Тбилиси, поездка в древнюю Мцхету, теплые встречи с грузинскими сверстниками, интересные театральные постановки, сеанс одновременной игры чемпионки мира по шахматам среди женщин Майи Чибурданидзе.

Олимпиада в Тбилиси в определенном смысле была юбилейной. В двадцатый раз на математический турнир собрались школьники со всей страны — эта традиция зародилась в

*) Список участников олимпиады, награжденных Дипломами I, II и III степени, приведен на с. 59.

Восьмиклассники, награжденные Дипломами I степени (слева направо): Б. Рублев, Г. Барздинь, Ю. Чеканов.

А. Бабак, награжденный специальным призом нашего журнала.

Девятиклассники, награжденные Дипломами I степени (слева направо): Ю. Ткаченко, Ю. Кузьмин, А. Разборов, С. Беспамятных, М. Концевич.

1960 году, когда на 23-ю Московскую математическую олимпиаду школьников впервые прибыли представители других республик и областей. А 12 лет назад здесь же, в Тбилиси, состоялась I Всесоюзная олимпиада школьников по математике.

В составе жюри нынешней олимпиады было несколько «ветеранов», принимавших участие в проведении всех этих соревнований. И среди них прежде всего хочется назвать научного сотрудника Московского университета, заместителя председателя методической комиссии по математике при Министерстве просвещения СССР *Н. Б. Васильева*, одного из активнейших зачинателей и энтузиастов всесоюзных олимпиад.

Министерство просвещения Грузии подготовило и выпустило к олимпиаде специальный сборник «Праздник юных математиков». Один из составителей этого сборника — заслуженный учитель ГССР, директор с. ш. № 42 Тбилиси О. И. Гаганидзе — был призером первой математической олимпиады, проходившей в Грузии в 1933 году. В этом сборнике собраны приветствия участникам олимпиады от вид-

Десятиклассники, награжденные Дипломами I степени (слева направо): И. Захаревич, А. Ляховец, С. Хлебутин, А. Дегтярев, И. Лысенок.

Фото Г. Габуния

Сеанс одновременной игры с участниками олимпиады проводит чемпионка мира по шахматам Майя Чибурданидзе.

«Я рада приветствовать участников Всесоюзной олимпиады школьников по математике в моем родном городе Тбилиси и пожелать им больших успехов.

Я хочу так же приветствовать всех школьников Советского Союза через их журнал «Квант» и надеюсь, что еще много школьных праздников будет проходить в нашем прекрасном городе».

Майя Чибурданидзе

ных деятелей науки и культуры Грузии, приведено много любопытных высказываний о математике, подробно рассказано, что делают ученые и учителя республики для юных любителей математики.

Один из материалов этого сборника привлек особое внимание. Мы с удивлением узнали, что первая математическая олимпиада в истории советской школы — «олимпиада пионеров-математиков» — состоялась в Тбилиси в 1933 году (во всех материалах, посвященных истории олимпиад, указывается, что впервые в нашей стране математическая олимпиада школьников была проведена в 1934 году в Ленинграде). На с. 61 публикуется более подробная информация о Тбилисской олимпиаде 1933 года; она, несомненно, заинтересует всех любителей математики.

Существует поверие, что 13 — несчастливое число. Но математики не верят в числовую магию. И хотя олимпиада носила номер XIII, а ее первый тур состоялся 13 апреля, она прошла успешно, доставив много радости участникам и принеся глубокое удовлетворение организаторам.

Т. Петрова, Л. Чернова

Олимпиада по физике

С 12 по 17 апреля во Львове состоялся заключительный тур XIII Всесоюзной олимпиады школьников по физике. Его участниками были победители республиканских олимпиад и призеры предыдущей Всесоюзной олимпиады. Среди них — 49 восьмиклассников, 47 девятиклассников, 52 десятиклассника.

13 апреля школьники выполняли теоретическое задание. Восьмиклассникам были предложены 4 задачи, девятиклассникам и десятиклассникам — по 5 задач. На решение задач восьмиклассникам отводилось 4 часа, девятиклассникам и десятиклассникам — по 5 часов.

Ниже мы приводим условия этих задач*).

8 класс

1. Рисунок 1 сделан с фотографии шлейфов дыма, тянущихся от двух паровозов, которые движутся по прямолинейному участку дороги со скоростями $v_1=50$ км/ч и $v_2=70$ км/ч (вид сверху). Направления движения поездов указаны стрелками. Найти скорость ветра.

2. Наблюдатель движется с постоянной скоростью по некоторой наклонной прямой. Брошенное под углом к горизонту тело пересекает траекторию наблюдателя дважды с интервалом времени τ. Оба раза тело находится впереди наблюдателя на одном и том же расстоянии от него. Как будет выглядеть с точки зрения наблюдателя траектория тела? После второго пересечения наблюдатель измеряет пути, пройденные телом за последовательные промежутки времени по τ секунд каждый. Найдите отношение этих путей.

3. Имеются два теплоизолированных сосуда. В первом из них находится 5 л воды при температуре $t_1=60$ °С, во втором — 1 л воды при температуре $t_2=20$ °С. Вначале часть воды перелили из первого сосуда во второй. Затем, когда во втором сосуде установилось тепловое равновесие, из него в первый сосуд отлили столько воды, чтобы ее объемы в сосудах стали равны первоначальным. После этих операций температура воды в первом сосуде стала равной $t=59$ °С. Сколько воды переливали из первого сосуда во второй и обратно?

4. Четыре одинаковых амперметра и резистор включены так, как показано на рисунке 2. Амперметр A_1 показывает 2 А, амперметр A_2 показывает 3 А. Какие токи протекают через амперметры A_3, A_4 и резистор? Найти отношение внутреннего сопротивления амперметра к сопротивлению R резистора.

9 класс

1. Рисунок 3 (вид сверху) сделан с фотографии шлейфов дыма, тянущихся от трех паровозов, которые движутся по прямолинейному участку железнодорожного пути. Скорость первого паровоза $v_1=50$ км/ч, а второго $v_2=70$ км/ч, направления их движения указаны на рисунке стрелками. Какова скорость третьего паровоза?

2. Шар массой $2M$ бросают вертикально вверх со скоростью v_0. К шару привязана легкая нить длиной $l<v_0^2/2g$, на втором конце которой находится груз массой M. Через какое время и на каком расстоянии от точки бросания шары столкнутся? Нить абсолютно жесткая.

3. В небольшую тонкостенную металлическую кастрюлю налили 0,5 л воды, поставили кастрюлю на плиту и, измеряя температуру воды в различные моменты времени, построили график зависимости температуры от времени. Затем воду вылили, в ту же кастрюлю налили 0,7 кг спирта и, поставив кастрюлю на ту же самую плиту, построили график зависимости температуры спирта от времени. Эти графики приведены на рисунке 4. Пользуясь этими графиками, определить удельную теплоемкость спирта и удельную теплоту его парообразования, если за 30 мин кипения количество спирта в кастрюле уменьшилось вдвое. Теплоемкость кастрюли равна 200 Дж/К. Испарением с поверхности жидкостей пренебречь.

4. Теплоизолированный сосуд откачан до глубокого вакуума. Окружающий сосуд одноатомный идеальный газ имеет температуру T_0. В некоторый момент открывают кран, и происходит заполнение сосуда газом. Какую температуру T будет иметь газ в сосуде после его заполнения?

5. Четыре одинаковых амперметра и резистор включены так, как показано на рисунке 2. Амперметр A_1 показывает

*) Почти все задачи были включены в Задачник «Кванта» в 7-м и 8-м номерах нашего журнала.

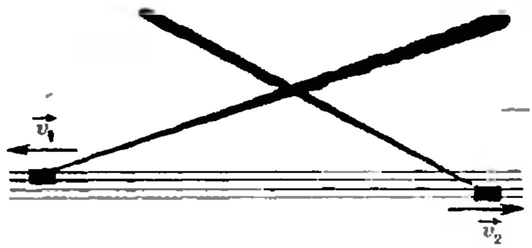


Рис. 1.

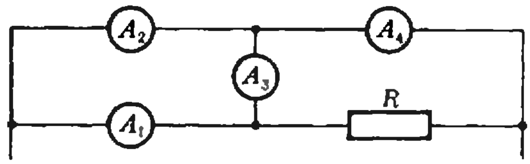


Рис. 2.

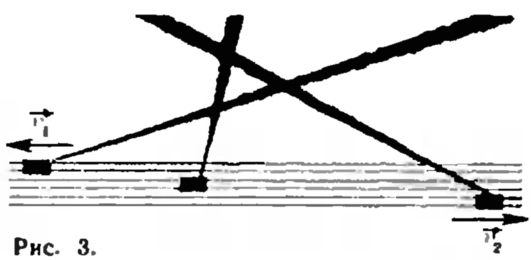


Рис. 3.

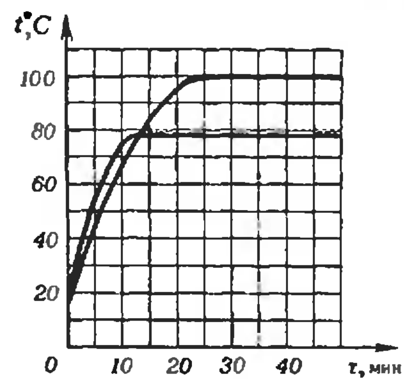


Рис. 4.

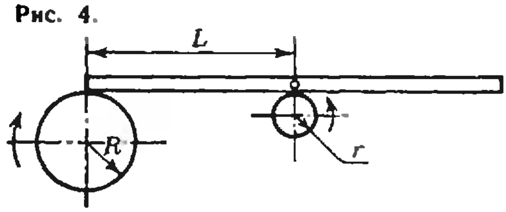


Рис. 5.

3 А, амперметр A_2 показывает 5 А. Найти отношение внутреннего сопротивления амперметра к сопротивлению резистора.

10 класс

1. В цилиндре объемом 10 л, закрытом поршнем и помещенном в термостат с температурой 40 °С, находится по 0,05 моля двух веществ. Определить массу жидкости в цилиндре после изотермического сжатия, вследствие которого объем под поршнем уменьшается в 3 раза. Давление насыщенных паров первой жидкости при температуре 40 °С равно $0{,}7 \cdot 10^4$ Па, второй — $1{,}7 \cdot 10^4$ Па. Начертить изотерму сжатия. Молярная масса первой жидкости составляет $1{,}8 \cdot 10^{-2}$ кг/моль, второй — $4{,}6 \cdot 10^{-2}$ кг/моль.

2. При движении трамвая по горизонтальному участку пути с некоторой скоростью его двигатель потребляет ток $I_0 = 100$ А, при этом КПД двигателя равен $\eta = 0{,}9$. При движении трамвая по наклонному участку пути вниз с той же скоростью ток в двигателе равен нулю. Какой ток будет потреблять двигатель при движении трамвая по тому же участку пути вверх с той же скоростью?

3. Два цилиндра различных радиусов вращаются в противоположные стороны вокруг горизонтальных параллельных осей с угловой скоростью $\omega_1 = \omega_2 = \omega = 2$ рад/с. Расстояние по горизонтали между осями $L = 4$ м. В момент времени $t = 0$ на цилиндры перпендикулярно осям кладут балку так, что она находится в горизонтальном положении и одновременно касается обеих поверхностей вращения, а ее центр масс расположен точно над осью цилиндра меньшего радиуса ($r = 0{,}25$ м), как показано на рисунке 5. Рассчитать и проиллюстрировать графически зависимость горизонтального смещения балки от времени, начиная с момента $t = 0$. Коэффициент трения $\mu = 0{,}05$, ускорение свободного падения принять равным $g = 10{,}0$ м/с^2.

4. Проводник массой M и длиной l подвешен за концы к диэлектрику с помощью двух одинаковых проводящих невесомых пружин с общим коэффициентом жесткости k. Перпендикулярно плоскости конструкции направлено однородное магнитное поле с индукцией $\vec{B}$. Проводник сместили в вертикальной плоскости из положения равновесия и отпустили. Определить дальнейшее движение проводника в вертикальной плоскости. Сопротивлением, собственной индуктивностью и емкостью проводников пренебречь.

5. См. задачу 3 для 9 класса.

В тот же день жюри олимпиады проверило работы участников. Результаты проверки показали, что наиболее трудной для восьмиклассников была задача № 2. Ее решили правильно только 15% участников. Наиболее легкой оказалась задача № 3 — ее решили 65% восьмиклассников. У девятиклассников наибольшие затруднения вызвала задача № 4. Справились с ней лишь 13% участников. Задачу № 5 правильно решили 74% девятиклассников. В десятом классе сложной оказалась задача № 2 — ее решили правильно 26% участни-

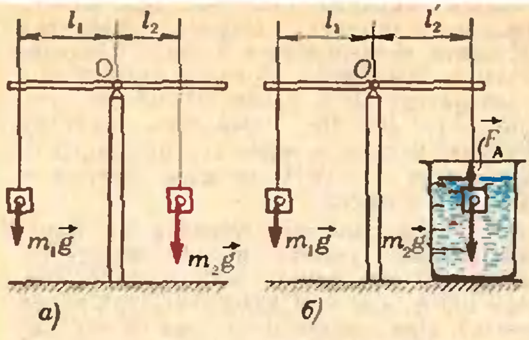


Рис. 6. Запишем правило моментов:

$$m_1 g l_1 = m_2 g l_2. \qquad (а)$$

$$m_1 g l_1' = (m_2 g - F_A)\, l_2'. \qquad (б)$$

Здесь m_1 и m_2 — массы металлических грузов, F_A — модуль архимедовой силы, $F_A = \rho_B g V_2$ (V_2 — объем груза m_2, ρ_B — плотность воды). Из (а) и (б) находим

$$m_2 = \rho_B V_2 \frac{l_2'}{l_2' - l_2}.$$

Аналогично определяем m_1:

$$m_1 = \rho_B V_1 \frac{l_1'}{l_1' - l_1}.$$

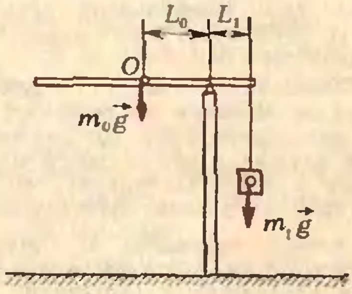


Рис. 7. m_1 — известная (найденная ранее) масса металлического груза. Из условия $m_0 g L_0 = m_1 g L_1$ получаем

$$m_0 = m_1 \frac{L_1}{L_0}.$$

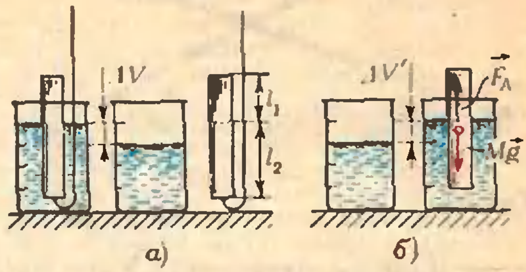


Рис. 8. а) Определим объем V образца: $V = V_1 + V_2$, где V_1 и V_2 — объемы верхней (длины l_1) и нижней (длины l_2) частей образца. Так как $\frac{V_1}{V_2} = \frac{l_1}{l_2}$ (образец однородный) и $V_2 = \Delta V$, находим

$$V = \Delta V \left(\frac{l_1 + l_2}{l_2}\right) = \Delta V \frac{l}{l_2}.$$

б) Определим плотность образца. Запишем условие плавания: $Mg = F_A$, где $M = \rho V$ и $F_A = \rho_B g \Delta V'$. Отсюда находим плотность ρ породы образца: $\rho = \rho_B \frac{\Delta V'}{V}$.

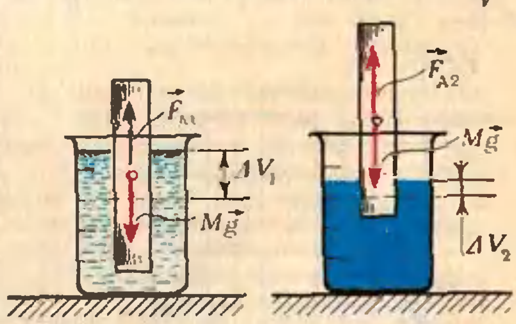


Рис. 9. Запишем условия равновесия образца в воде и в медном купоросе: $F_{A1} = \rho_B \Delta V_1 g$ и $F_{A2} = \rho_K \Delta V_2 g$ (ρ_B, ρ_K — плотность воды и медного купороса соответственно). Поскольку $F_{A1} = F_{A2} = Mg$, находим $\rho_K = \rho_B \frac{\Delta V_1}{\Delta V_2}$.

ков. А с задачей № 1 справились 54% десятиклассников.

15 апреля с 10 до 15 часов участники олимпиады выполняли экспериментальное задание. Восьмиклассникам и десятиклассникам было предложено по две задачи, девятиклассникам — одна. Вот их условия:

8 класс

1. Определить массы металлических грузов (m_1, m_2) и деревянного стержня (m_0).

Примечание. Массу стержня (m_0) определить несколькими способами.

Оборудование: деревянный стержень, металлические грузы, опора, призма, измерительная линейка, мензурка, стакан с водой, нитки.

2. Определить породы деревянных образцов и плотность раствора медного купороса.

Оборудование: образцы двух различных пород (№ 1 и № 2), мензурка, стакан с водой, стакан с раствором медного купороса, крючок, таблица плотностей различных пород древесины.

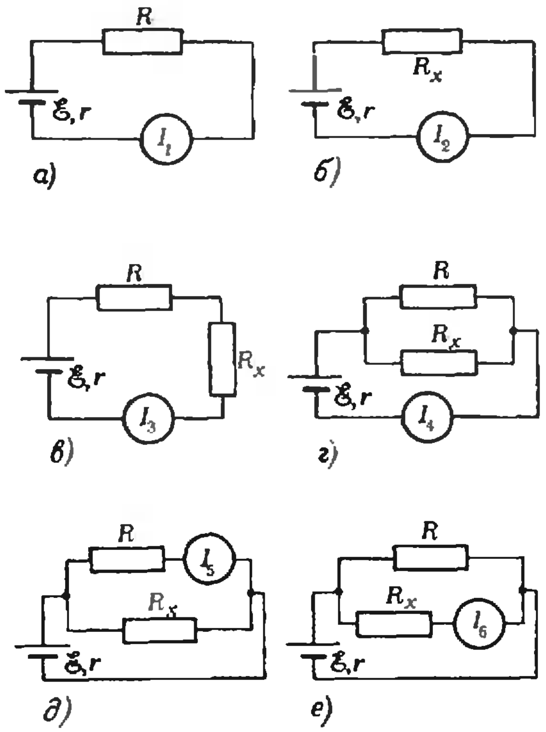


Рис. 10. Запишем закон Ома для полной цепи ($R_а$ — сопротивление миллиамперметра):

$$I_1(r+R+R_а)=\mathscr{E}, \qquad (а)$$

$$I_2(r+R_x+R_а)=\mathscr{E}, \qquad (б)$$

$$I_3(r+R+R_x+R_а)=\mathscr{E}, \qquad (в)$$

$$I_4\left(r+\frac{RR_x}{R+R_x}+R_а\right)=\mathscr{E}, \qquad (г)$$

$$I_5\left(r+\frac{(R+R_а)R_x}{R+R_а+R_x}\right)=\mathscr{E}, \qquad (д)$$

$$I_6\left(r+\frac{(R_а+R_x)R}{R+R_а+R_x}\right)=\mathscr{E}. \qquad (е)$$

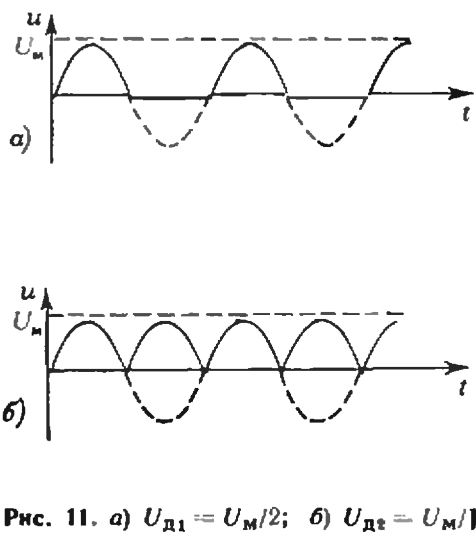


Рис. 11. *а)* $U_{д1}=U_м/2$; *б)* $U_{д2}=U_м/\sqrt{2}$.

9 класс

Определить, с наименьшей погрешностью, неизвестное сопротивление, внутреннее сопротивление источника тока и его электродвижущую силу.

О б о р у д о в а н и е: источник постоянного тока, миллиамперметр, два сопротивления (известное и неизвестное), ключ, соединительные провода.

10 класс

1. Дан выпрямитель с пренебрежимо малым внутренним сопротивлением, не содержащий фильтра сглаживания пульсаций. Определить, по какой схеме собран выпрямитель — однополупериодной или двухполупериодной.

О б о р у д о в а н и е: два одинаковых калориметра с одинаковыми электрическими нагревателями, термометры, электролитический конденсатор большой емкости (падение напряжения на конденсаторе за время 0,02 с при разрядке через сопротивление нагревателя пренебрежимо мало) и диод.

2. По возможности точнее определить коэффициент преломления стекла, из которого изготовлен полуцилиндр с полированной поверхностью.

О б о р у д о в а н и е: матовое стекло, угольник, линейка, электрическая лампочка (подсоединяется к клеммам выпрямителя), белая и черная бумага.

Разберем коротко, в общих чертах, решения этих задач.

8 класс

З а д а ч а 1. Рисунок 6 иллюстрирует способ определения масс металлических грузов. В качестве рычага используется деревянный стержень. Он уравновешивается сначала на опоре без грузов, так что точка опоры О определяет центр масс стержня. Объем груза, опущенного в воду, определяется по изменению уровня воды в мензурке (шкала мензурки проградуирована по объему).

Для большей точности массу каждого груза следует определить независимо, непосредственно из измерений.

Один из способов измерения массы m_0 стержня иллюстрирует рисунок 7. Точка О — центр масс стержня. Разные способы определения m_0 основаны на использовании правила рычага с различными вариантами уравновешивания грузов m_1, m_2 и m_0.

З а д а ч а 2. Способ определения плотности образцов иллюстрируется рисунком 8. Найдя плотности, по таблицам определяем породы образцов.

Из рисунка 9 ясен способ определения плотности медного купороса.

9 класс

Возможные схемы соединения элементов в цепь приведены на рисунке 10. Очевидно, что из любых трех уравнений (а) — (е) можно найти три неизвестных —

ЭДС источника $\mathscr{E}$, его внутреннее сопротивление r и неизвестное сопротивление R_x.

Однако требование максимальной точности обязывает сравнить погрешности значений $\mathscr{E}$, r и R, определенных по расчетам различных схем. Точность значений известного сопротивления R и сопротивления миллиамперметра R_a задана (указана на приборах), точность показаний миллиамперметра определяется шкалой прибора.

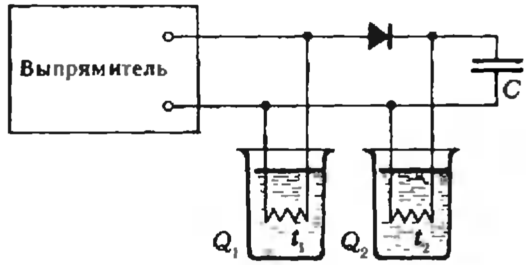


Рис. 12. При одинаковых количествах воды в калориметрах и при одной и той же начальной температуре воды t_0 количества теплоты Q_1 и Q_2, выделяющиеся на нагревателях, относятся, как $Q_1:Q_2=(t_1-t_0):(t_2-t_0)$, где t_1 и t_2 — температуры воды в калориметрах через некоторое время после включения выпрямителя в цепь.
Если $(t_1-t_0):(t_2-t_0)=1:4$, выпрямитель собран по однополупериодной схеме.
Если $(t_1-t_0):(t_2-t_0)=1:2$, выпрямитель собран по двухполупериодной схеме.

10 класс

Задача 1. В случае однополупериодной схемы напряжение на выходе выпрямителя меняется со временем так, как показано на рисунке 11, *а*; в случае двухполупериодной схемы — как на рисунке 11, *б*. В первом случае действующее значение напряжения равно $U_{д1}=U_м/2$, во втором — $U_{д2}=U_м/\sqrt{2}$.

Конденсатор, включенный соответствующим образом в цепь (рис. 12), может быть заряжен до напряжения $U_м$. Если через один нагреватель пропускать ток непосредственно от выпрямителя, а через другой нагреватель разряжать конденсатор, то количество теплоты, выделившееся за время t, на первом нагревателе будет пропорционально $U_д^2$, а на втором — $U_м^2$ (поскольку падение напряжения на конденсаторе за время 0,02 с при разрядке через сопротивление нагревателя пренебрежимо мало), то есть $Q_1 \sim U_д^2$ и $Q_2 \sim U_м^2$. Отношение $Q_1:Q_2$ равно $U_{д1}^2:U_м^2=1:4$ при однополупериодной схеме выпрямителя и $U_{д2}^2:U_м^2=1:2$ при двухполупериодной схеме.

Установка, показанная на рисунке 12, позволяет найти отношение $U_д^2:U_м^2$.

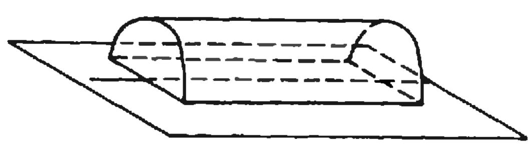


Рис. 13.

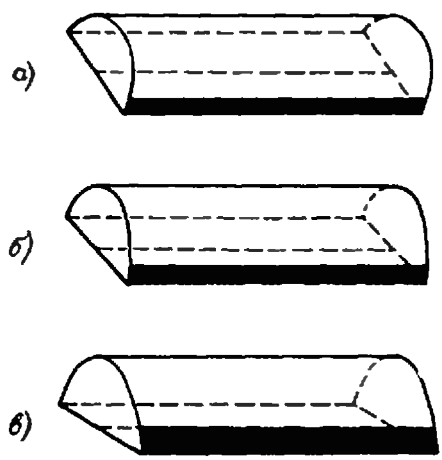


Рис. 14.

Задача 2. Наиболее удобный и простой метод определения показателя преломления основан на наблюдении явления полного внутреннего отражения.

На матовом стекле нарисуем прямую линию и положим полуцилиндр на стекло так, чтобы эта линия проходила по его оси (рис. 13). Будем смотреть на боковую поверхность полуцилиндра. При некотором угле зрения у дна полуцилиндра (по всей его длине) появляется полоса, сквозь которую матовое стекло не видно (рис. 14). При уменьшении угла зрения эта полоса перекрывает все бо́льшую часть полуцилиндра. При некотором угле зрения верхняя граница этой полосы совпадает с линией, проведенной на матовом стекле (см. рис. 14, *в*). При этом граничные лучи (отражающиеся от оси) выходят из полуцилиндра, не преломляясь по радиусу (рис. 15).

Пользуясь соотношением $\sin\alpha=1/n$ (см. рис. 15), найдем n.

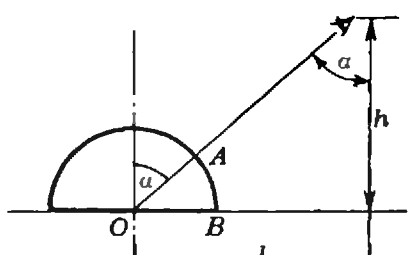


Рис. 15. AB — область полного внутреннего отражения; OA — граничный луч; $\sin\alpha=l/\sqrt{l^2+h^2}$.

Проверка экспериментальных работ показала, что 34% восьмиклассников полностью решили задачу № 1 и 37% — задачу № 2 (с описанием выполнения эксперимента, с обоснованием выбора методики, с оценкой погрешностей полученных результатов). В 9 классе с задачей полностью справились 48% участников. С задачей № 1 в 10 классе успешно справились 51%, а с задачей № 2—28% участников.

17 апреля состоялось торжественное закрытие олимпиады, на котором были объявлены имена призеров.

Список участников олимпиады, награжденных дипломами I, II и III степени, приведен на с. 60. Специальный приз журнала «Квант» — подшивку за 1978 год с автографом главного редактора журнала академика И. К. Кикоина — получил восьмиклассник *Юрий Хохлов* (Эмба). Подпиской на журнал «Квант» на 1980 год награждены *Валерий Айдагумов* (Андижан), *Сергей Кудрявцев* (Магадан), *Юрий Остапчук* (Здолбунов), *Константин Фефилов* (Поставы), *Сергей Шумко* (Ладейное поле).

Призеры XIII Всесоюзной олимпиады школьников

Математика

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Барздинь Г. (Рига, с. ш. № 1),
Рублев Б. (Киев, ФМШ № 145),
Чеканов Ю. (Москва, с. ш. № 91);

по 9 классам —

Беспамятных С. (Артемовский, с. ш. № 12),
Концевич М. (Москва, с. ш. № 91),
Кузьмин Ю. (Москва, ФМШ № 18),
Разборов А. (Москва, с. ш. № 2),
Ткаченко Ю. (Киев, ФМШ № 145);

по 10 классам —

Амброладзе М. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Дегтярев А. (Ленинград, с. ш. № 30),
Захаревич И. (Ленинград, ФМШ № 45),
Лысенок И. (Москва, ФМШ № 18),
Ляховец А. (Москва, ФМШ № 18),
Хлебутин С. (Москва, ФМШ № 18).

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Алания Л. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Алексеев В. (Миасс, с. ш. № 9),
Аралкин А. (Новокузнецк, с. ш. № 47),
Бураго Д. (Ленинград, ФМШ № 45),
Гринберг Н. (Киев, ФМШ № 145),
Драмбян Р. (Ереван, ФМШ № 1),
Маланюк Т. (Киев, ФМШ № 145),
Мелгалвис А. (Рига, с. ш. № 1),
Минарский А. (Ленинград, с. ш. № 80),
Овчинников П. (Вязники, с. ш. № 11),
Огурцов А. (Светлогорск, с. ш. № 6),
Пименов А. (Казань, с. ш. № 123),
Шулюпов В. (Тула, с. ш. № 28),
Эпиктетов М. (Алма-Ата, с. ш. № 15);

по 9 классам —

Артюшкин И. (Пенза, с. ш. № 16),
Балинский А. (Львов, с. ш. № 11),
Василовский С. (Ашхабад, с. ш. № 30),
Зайцев Ю. (Видное, с. ш. № 6),
Ижболдин О. (Ленинград, ФМШ № 45),
Канепс Я. (Рига, с. ш. № 1),
Келарев А. (Свердловск, с. ш. № 141),
Коротков А. (Воронеж, с. ш. № 58),
Лернер Л. (Вильнюс, с. ш. № 8),
Набоков Р. (Саратов, с. ш. № 13),
Радченко В. (Киев, ФМШ № 145),
Сивацкий А. (Ленинград, ФМШ № 45),
Стрелецкий А. (Вильнюс, с. ш. № 8);

по 10 классам —

Ашкинази А. (Москва, с. ш. № 315),
Надеждин Б. (Москва, ФМШ № 18),
Облаков И. (Ленинград, ФМШ № 45),
Рудковский М. (Киев, ФМШ № 145).

Дипломы III степени

по 8 классам получили

Балашов А. (Махачкала, с. ш. № 8),
Грицаенко Д. (Губкин, с. ш. № 2),
Ибодинов М. (Душанбе, с. ш. № 1),
Иванцов Р. (Южно-Сахалинск, с. ш. № 2),
Коротков А. (Горький, с. ш. № 44),
Кругляк А. (Киев, ФМШ № 145),
Новиков Г. (Димитровград, с. ш. № 5),
Тимченко С. (Томск, с. ш. № 8);

по 9 классам —

Ардан Р. (Львов, с. ш. № 11),
Боричев А. (Ленинград, ФМШ № 45),

Головинская О. (Киев, ФМШ № 145),
Добров Б. (Ангарск, с. ш. № 10),
Каплан А. (Сумгаит, с. ш. № 11),
Кукк Х. (Ныо, с. ш.),
Лавров П. (Ленинград, с. ш. № 207),
Лацис С. (Стучки, с. ш. № 2),
Лучко Ю. (Москва, ФМШ № 18),
Павлющик С. (Москва, ФМШ № 18),
Попелюхин А. (Киев, ФМШ № 145),
Рухадзе К. (Москва, ФМШ № 18);

по 10 классам —

Забелин В. (Москва, ФМШ № 18),
Звирбулис Э. (Рига, с. ш. № 1),
Измайлов Р. (Баку, с. ш. № 134),
Карагулян Г. (Ереван, ФМШ № 1),
Кордюков Ю. (Москва, ФМШ № 18),
Кузьмин Е. (Череповец, с. ш. № 4),
Лиманаускас В. (Вильнюс, с. ш. № 40),
Новосельцева Т. (Москва, с. ш. № 7),
Панченко А. (Поворнно, с. ш. № 22),
Патария Д. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Пикусов С. (Новочебоксарск, с. ш. № 2),
Сарчимелия А. (Тбилиси, ФМШ им. Комарова),
Сафонов С. (Киев, ФМШ № 145),
Скрябин С. (Казань, с. ш. № 18),
Тартаковский А. (Москва, с. ш. № 2),
Фесенко И. (Ленинград, ФМШ № 45).

Физика

Дипломы I степени

по 8 классам получили

Гутин А. (Клинцы, с. ш. № 2),
Деревянко В. (Умань, с. ш. № 2),
Матвеев А. (Ульяновск, с. ш. № 4),
Харченко А. (Кременчуг, с. ш. № 21);

по 9 классам —
Китаев А. (Воронеж, с. ш. № 58),
Ляпин А. (Гомель, с. ш. № 33),
Одинцов А. (Москва, с. ш. № 2);

по 10 классам —
Кривицкий В. (Харьков, с. ш. № 27),
Цыпин М. (Москва, с. ш. № 2),
Ющук О. (Киев, ФМШ № 145).

Дипломы II степени

по 8 классам получили

Байков П. (Балашиха, с. ш. № 10),
Беспалов А. (Горький, с. ш. № 40),
Григорьев Д. (Москва, с. ш. № 57),
Дмитрук И. (Киев, ФМШ № 145),
Лийву Ю. (Таллин, с. ш. № 1),
Павлов Ю. (Ленинград, с. ш. № 121),
Рябкин Е. (Гомель, с. ш. № 11),
Слюняев В. (Обнинск, с. ш. № 8);

по 9 классам —

Андрианов А. (Москва, с. ш. № 2),
Голобоков А. (Москва, ФМШ № 18),
Коваленко А. (Львов, с. ш. № 69),
Ковтуненко В. (Киев, ФМШ № 145),
Красиков И. (Киев, ФМШ № 145),
Кунингас О. (Таллин, с. ш. № 1),
Лебедянцев С. (Куйбышев, с. ш. № 135),
Перлов А. (Киев, ФМШ № 145),
Пивоваров В. (Красноярск, с. ш. № 10),
Ратников Ф. (Ленинград, ФМШ № 45),
Швец И. (Киев, ФМШ № 145),
Юшкайтис Р. (Вильнюс, с. ш. № 9);

по 10 классам —

Васильев А. (Чебоксары, с. ш. № 2),
Гордиенко С. (Смолевичи, с. ш. № 2),
Шпилькин С. (Москва, ФМШ № 18),
Ясонов И. (Москва, ФМШ № 18).

Дипломы III степени

по 8 классам получили

Абаджев В. (Львов, с. ш. № 52),
Бабий О. (Киев, ФМШ № 145),
Грасманис М. (Рига, с. ш. № 1),
Кузьмин М. (Орел, с. ш. № 27),
Чуев И. (Тула, с. ш. № 21);

по 9 классам —

Барков С. (Новомосковск Тульской обл., с. ш. № 2),
Бесарабский А. (п. Запрудня Московской обл., с. ш.),
Вайникко Т. (Ныо, с. ш.),
Жельвис А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Заневский А. (Ленинград, с. ш. № 239),
Козловский В. (Новолукомль, с. ш.),
Крапивный К. (Запорожье, с. ш. № 28),
Микулич А. (Минск, с. ш. № 19),
Николаев С. (Нальчик, с. ш. № 2),
Пакалнс А. (Тукумс, с. ш. № 1),
Сергейцев Т. (Челябинск, с. ш. № 112),
Трощиев Ю. (Арзамас, с. ш. № 2),
Яшин А. (Братск, с. ш. № 26);

по 10 классам —

Гаврилов М. (п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82),
Кленин К. (Саратов, с. ш. № 13),
Мирлин А. (Ленинград, ФМШ № 45),
Надежин Д. (Курган, с. ш. № 47),
Николаев А. (Москва, ФМШ № 18),
Омельянчук А. (Москва, ФМШ № 18),
Севрюк М. (Москва, с. ш. № 2),
Чикин Д. (Москва, ФМШ № 18).

С. Вашакмадзе

У истоков олимпиадного движения

Главное внимание уделить борьбе за овладение основами наук, ... организуя смотры, ... академические бои групп и школ, конкурсы на лучших физиков, математиков.

Из постановлений
VII Всесоюзной конференции
ВЛКСМ (1932 год).

28 ноября 1933 года в Тбилисском русском театре юного зрителя состоялась районная олимпиада пионеров-математиков. На сцене — 42 ученика грузинских, русских, армянских школ; в зрительном зале — друзья «бойцов математического фронта», их родители, учителя, представители партийных и комсомольских организаций района.

Ученик VI класса 26-й школы Ладо Цулукидзе за 17 минут решил 7 задач и примеров; еще через 25 минут на «поле битвы» остались лишь пустые столы: все бойцы математического фронта, одержавшие быструю, но бескровную победу, смешались со зрителями. А пока члены жюри подводили итоги „боя", участники художественной самодеятельности устроили интересный концерт.

«„Бой" окончен: двое „раненых", „убитых" нет ...». Под таким заголовком тбилисская газета „Молодой рабочий" 5 декабря опубликовала подробные сообщения о первой районной математической олимпиаде и наградила победителей почетными грамотами.

Бюро Организации коммунистического воспитания детей при ЦК КП(б) Грузии одобрило почин 26-й школы и рекомендовало распространить опыт, а также проводить „академические соревнования" по физике, химии, биологии и другим дисциплинам.

В мае 1934 года в Тбилиси состоялась общегородская олимпиада математиков, а в июне 30 учеников десятых классов — победители городской олимпиады — были приглашены на математическую олимпиаду в Тбилисский университет.

За активную работу по подготовке и проведению олимпиад в школе и районе жюри выразило благодарность учителям математики С. Вашакмадзе и Т. Петраковской. Ниже мы публикуем воспоминания заслуженного учителя республики персонального пенсионера Сергея Евстафьевича Вашакмадзе о первых опытах проведения математических олимпиад в Грузии *).

В начале 30-х годов, после исторических решений ЦК ВКП (б) и Правительства СССР о школе, практиковавшиеся несколько лет дальтон-план и „бригадный метод" были вновь заменены классно-урочной системой. В Грузии, как и во всей Советской стране, проходила реорганизация школы. В 1932/33 учебном году я был переведен в 26-ю опытно-показательную школу учителем математики.

Школа являлась одной из передовых. Заведовал учебной частью известный педагог, автор первого сборника арифметических задач на грузинском языке Л. Чимакадзе. В каждом классе было прочное ядро активных и старательных учащихся. Хорошие ученики под моим руководством изготовляли простейшие модели и приборы, помогали подтягивать

---

*) Литературная обработка А. Яковлева.

отстающих, поэтому я мог уделять время систематической проверке тетрадей, проводил много письменных работ по математике.

В конце первой четверти 1933/34 учебного года из лучших учеников сформировались 3 математических кружка: для V—VI, для VII—VIII и для IX—X классов. В целях повышения интереса учащихся к изучению математики я предложил провести, как тогда говорили, „академическое соревнование" под названием „олимпиада юных пионеров-математиков". Дирекция школы и районный отдел народного образования дали согласие, и 3 ноября состоялась внутришкольная олимпиада — отдельно по каждому классу.

Опыт оказался удачным, и с самого начала второй четверти развернулась подготовка к проведению районной математической олимпиады. В состав жюри вошли Л. Чимакадзе (председатель), заведующий Тбилисским городским отделом народного образования К. Кацарава, представитель газеты „Молодой рабочий" С. Аветисян, председатель районного бюро детской коммунистической организации К. Ноников, профессор Тбилисского университета М. Конишвили и др.

Каждый участник олимпиады — боец математического фронта — получил отдельный конверт с набором заданий. Сами по себе задания были довольно простыми, иной раз попросту повторяли определения и формулировки из школьных учебников. Однако торжественная обстановка, большое количество зрителей и „болельщиков" за честь своей школы и класса, ответственное отношение участников олимпиады были новинкой. Из 42 участников олимпиады 40 решили все или почти все задачи и примеры.

17 участников, чьи решения признали лучшими, были награждены. Профессор Кониашвили, подводя итоги олимпиады, отметил, что подобные соревнования способствуют улучшению учебного процесса, повышению интереса к овладению математическими знаниями не только у самих участников, но и у многих других школьников — их товарищей. Поэтому, заявил он, следовало бы распространить этот опыт за пределы одного района и одного предмета; следовало бы создать общества любителей математики, любителей физики, любителей химии и т. п. От имени математиков Тбилисского университета он обещал всемерную поддержку предполагаемому обществу любителей математики.

В декабре 1933 года ЦК КП(б) Грузии одобрил почин школы и района. В январе 1934 года мы приступили к подготовке городской олимпиады, которая состоялась в мае; число участников ее составило несколько сотен.

Таким образом, первые математические олимпиады в Тбилиси были проведены уже в 1933 году. В дальнейшем Тбилисский дворец пионеров и Тбилисская центральная станция юных техников проводили олимпиады по математике и другим предметам под руководством Наркомпроса Республики.

Ранее в «Кванте» сообщалось *), что первые математические олимпиады в СССР состоялись в Ленинграде — весной 1934 года, а в Москве — осенью 1935 года. Однако нам, тбилисцам, удалось опередить в этом отношении ленинградцев и москвичей.

После войны подготовку и проведение олимпиад осуществляет у нас Министерство просвещения Республики. С 1956/57 учебного года проводятся и ежегодные Республиканские олимпиады по математике. Создан постоянно действующий оргкомитет, который ряд лет успешно возглавлял проф. В. Челидзе, а после его смерти — член-корр. АН Грузинской ССР проф. Т. Гегелия.

Необходимо отметить, что число участников республиканских математических олимпиад из года в год растет, задачи постепенно усложняются, причем включаются и задачи логического содержания.

Для меня, одного из зачинателей математических олимпиад, особенно отрадно, что многие мои бывшие ученики, которые в 1933/34 году добились успехов на первых школьных, районных, городских олимпиадах, стали замечательными учеными и педагогами. В их числе — В. Чавчанидзе, академик АН Грузинской ССР, директор Института кибернетики, Г. Хатиашвили, профессор ТГУ, О. Гаганидзе, заслуженный учитель республики, директор 42-й средней школы, кавалер многих орденов и медалей.

Отар Гаганидзе сумел заинтересовать учащихся своей школы — очень многие из них участвуют в различных предметных олимпиадах в школе, районе, городе. Около 80 учеников 42-й школы принимают участие ежегодно в республиканских олимпиадах по различным предметам, и ежегодно среди них оказывается немало победителей.

*) «Квант», 1973, № 9.

Тепловой взрыв

1. Так как рассматривается случай малого изменения концентрации исходных веществ (малой глубины превращения), можно считать скорость реакции постоянной во времени. Искомое время τ определяется простым соотношением $w\tau = 10^{-2}n$, или

$$\tau = \frac{10^{-2}}{zn} e^{E/kT} = 7\cdot 10^{-12} e^{E/kT} \text{ (c)}.$$

Подставляя значения энергии активации и температуры, получаем:
$\tau_{273} = 7\cdot 10^{19}$ с $= 2\cdot 10^{12}$ лет — время, большее чем возраст Вселенной! Естественно считать газовую смесь при такой температуре инертной.
$\tau_{600} = 7\cdot 10^{2}$ с ≈ 10 минут — медленное протекание реакции.
$\tau_{800} = 0{,}3$ с — быстрая реакция.

Таким образом, увеличение абсолютной температуры смеси всего лишь в два раза (273—600 K) изменяет скорость химической реакции на семнадцать порядков!

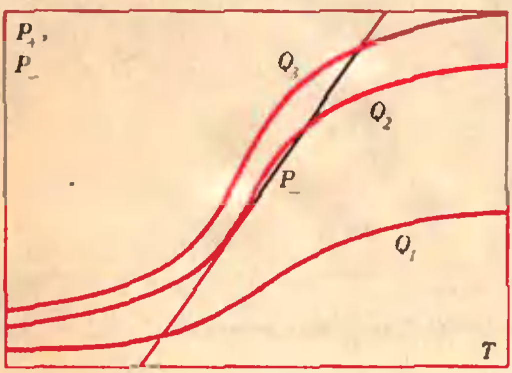


Рис. 1.

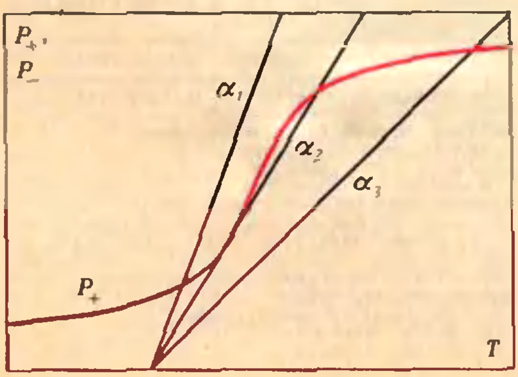


Рис. 2.

2. Если кривая теплоотвода круче кривой тепловыделения, то случайное увеличение температуры приведет к неравенству $P_- > P_+$ и система начнет охлаждаться, то есть вернется в исходную точку. При случайном уменьшении температуры неравенство будет обратным и система нагреется. Таким образом, рассматриваемая точка отвечает устойчивому состоянию. Наоборот, если наклон кривой тепловыделения больше наклона прямой теплоотвода, то случайное изменение температуры будет нарастать — точка равновесия неустойчива.

3. а) Изменение теплоты сгорания (теплового эффекта реакции) меняет функцию тепловыделения (ординаты умножаются на постоянное число), прямая теплоотвода не меняется. На рисунке 1 $Q_1 < Q_2 < Q_3$.

б) Изменение коэффициента теплоотвода α меняет наклон прямой теплоотвода. На рисунке 2 $\alpha_1 > \alpha_2 > \alpha_3$.

Регулярное полимино

2, 4. Расставим в вершинах кубика знаки «+» и «—» так, как показано на рисунке 3. Назовем *индексом* кубика знак, стоящий в вершине, расположенной в пересечении южной, восточной и верхней граней.

Заметим, что

1° если начальная ориентация α и конечная ориентация $\Gamma(\alpha)$ совпали, то индексы одинаковы;

2° при одном перекатывании через любое ребро кубика (а также при нечетном числе перекатываний) индекс меняет знак.

Из 1° и 2° следуют утверждения упражнений 2 и 4.

Заочная школа программирования

Урок 3

(см. «Квант» № 10)

3.1. На терминале будет отпечатана такая строка:

B = A C = 5

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 10)

1. 60 коробок спичек, 39 пирожков и 1 банка консервов.

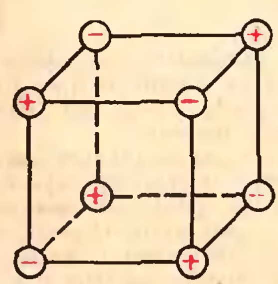
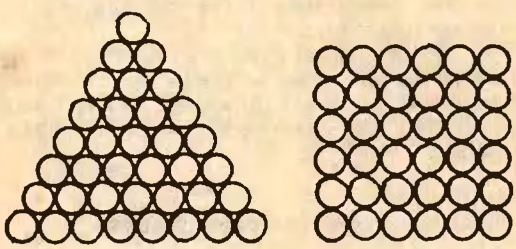


Рис. 3.

Рис. 4.

2. 21 — см. рисунок 4.
3. 36 — см. рисунки 5, *а*, *б*.
4. Можно. У к а з а н и е. Возьмите любое целое число $n > 4 \cdot 1979$ и разбейте квадрат на n^2 квадратиков со стороной длины $\frac{1}{n}$. В каждый квадратик поместите круг радиуса $\frac{1979}{n^2}$.



а) *б)*

Рис. 5.

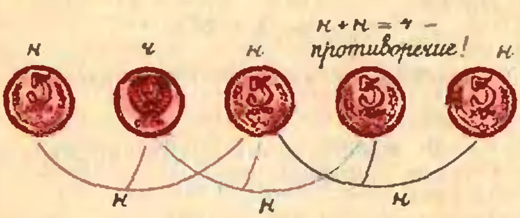


Рис. 6.

5. Если первоначально вверх орлом лежит средняя монета, то достаточно перевернуть сначала первые три монеты, а потом — последние три.

Если же первоначально вверх орлом лежит вторая монета, то перевернуть все монеты вверх орлом невозможно. Действительно, существуют три способа переворачивания трех рядом лежащих монет: первые три монеты, средние три и последние три монеты (рис. 6). Поскольку первая и последняя монеты лежат вверх решкой, каждая из них должна быть перевернута нечетное число раз, то есть «переворотов» как первого, так и третьего типов должно быть нечетное число. При этом средняя монета перевернется четное число раз. Но первоначально она лежала вверх решкой, поэтому переворотов второго типа должно быть нечетное число. Однако при этом четвертая монета окажется перевернутой четное число раз, то есть останется лежать вверх решкой. Поэтому в данном случае указанными переворачиваниями не удается перевернуть все монеты вверх орлом.

Аналогично доказывается, что невозможно перевернуть все пять монет вверх орлом и в том случае, когда первоначально вверх орлом лежит первая монета.

Номер готовили:
А. Виленкин, Н. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шихнович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, А. Пономарева, В. Чернов

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректоры Т. Плетнева, Е. Сидоркина

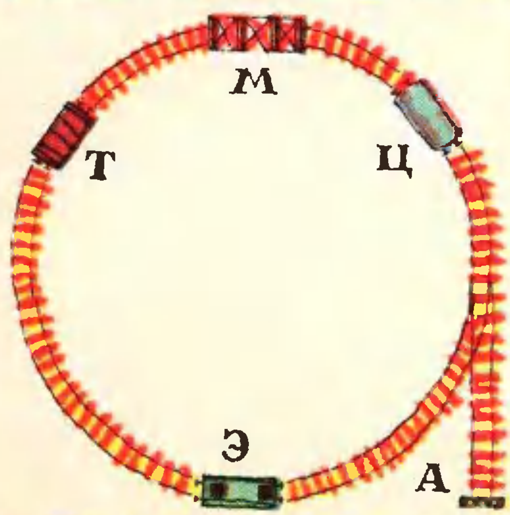
113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 3/IX-79
Подписано в печать 16X-79
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,13 Т-18625
Цена 30 коп. Заказ 2017 Тираж 279 347 экз.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

ЭЛЕКТРОВОЗ ПЕРЕГОНЯЕТ ВАГОНЫ

На рисунке изображен кольцевой участок железнодорожного пути с мостом М и тупиком А. На этом участке находятся электровоз Э и два вагона: товарный Т и вагон-цистерна Ц. Через мост может проезжать только электровоз (без вагонов). Вагоны можно перемещать только тогда, когда они сцеплены с электровозом. В тупик разрешается ставить только один из вагонов. Как должен маневрировать электровоз, чтобы поменять местами товарный вагон и вагон-цистерну и оказаться на первоначальном месте?

Ф. Бартенев



Индекс 70465
Цена 30 коп.

На этом рисунке показано разбиение квадрата на 21 попарно конгруэнтных квадратов, придуманное голландским математиком Дьювестином в 1978 году. Цифры указывают длины сторон соответствующих квадратов, если длина исходного — 112. Это построение — своеобразный рекорд: в нем наименьшее пока число попарно неконгруэнтных квадратов (21). Подробнее об этом см. на с. 21.