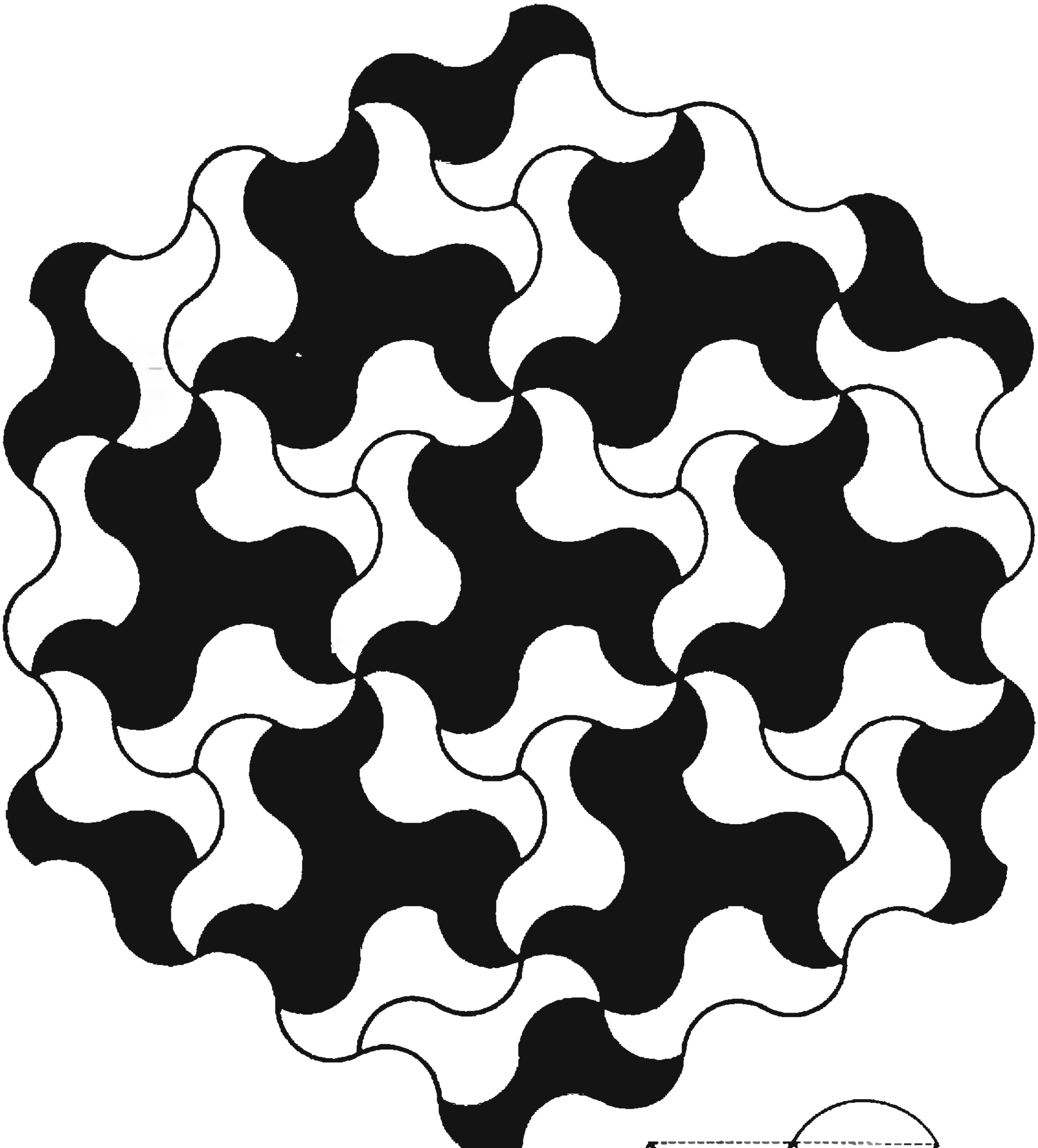
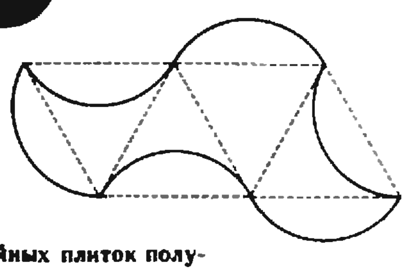
ISSN 0130-2221

квант

6
1979

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





Этот красивый паркет из криволинейных плиток получен деформацией обычного шестиугольного паркета из правильных шестиугольников. Как легко видеть, его можно продолжить на всю плоскость. Как устроены отдельные плитки, показано на схеме вверху. Стороны треугольников заменены дугами описанных около них окружностей.

Основан в 1970 году

Квант

6
1979

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука» Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

Светильник-«ежик», который вы видите на первой странице обложки, сделан из светопроводов. Подробнее о светопроводах можно прочитать на с. 26

П. Блехер, М. Кельберт

Алгоритмы классификации

В этой статье мы расскажем об одном из разделов не так давно возникшей науки — *теории распознавания образов* *). А именно: мы поговорим о методах классификации. *Классификация* — это разбиение некоторой совокупности объектов на группы объектов, близких в каком-то смысле. Можно классифицировать, например, фабрики данной отрасли, наблюдавшиеся в каком-то районе землетрясения, сентябрьскую погоду за много лет, вымерших ящеров и т. д. Важно только, чтобы классифицируемые объекты характеризовались определенным набором чисел и признаков. Для простоты мы рассмотрим случай, когда каждый объект описывается только набором чисел.

*) Тем, кто хочет познакомиться с ней поближе, мы советуем прочесть увлекательную, хотя и не очень простую книгу М. М. Бонгарда *«Проблема узнавания»* (М., «Наука», 1967).

Как классифицировать школьников?

Пусть мы хотим разделить всех школьников девятых классов данной школы по тому, как они используют свое внешкольное время. Мы опросим каждого школьника и запишем, какую часть этого времени он тратит на уроки и какую — на развлечения. Оставшееся время (на еду, сон, транспорт и т. д.) нас сейчас не интересует. В результате каждый школьник будет характеризоваться двумя числами: временем на уроки и временем на развлечения. Поэтому он может быть изображен точкой на координатной плоскости. Таким образом, мы приходим к чисто математическому вопросу: *как разбить данное множество точек плоскости на группы близких точек?*

К этому же вопросу приводят и многие серьезные прикладные задачи, только в них число координат гораздо больше (порядка нескольких десятков).

Например, в текстильной промышленности работает огромное количество предприятий. Среди них есть и специализированные фабрики с небольшим ассортиментом продукции, и комбинаты, выпускающие разнообразные изделия. Есть фабрики-гиганты, есть фабрики средних размеров, есть и небольшие местные производства. Чтобы сравнивать деятельность отдельных предприятий и планировать их работу, необходимо классифицировать все эти предприятия — разбить их на группы однотипных предприятий. Предприятия различаются по своим экономическим показателям. Выберем среди них несколько самых важных (например, стоимость валовой продукции, стоимость производственных фондов и фонд заработной платы) и будем проводить классификацию по ним. Число выбранных показателей обозначим через n.

Сопоставим каждому предприятию набор чисел $(x_1; \ldots; x_n)$, где x_1 — значение его первого показателя, x_2 — значение его второго показателя и т. д.

Пара чисел $(x_1; x_2)$ задает точку на плоскости, тройка чисел $(x_1; x_2; x_3)$ — точку в пространстве, а последовательность n чисел $(x_1; x_2; \ldots; x_n)$ по определению считается *точкой n-мерного пространства*.

Таким образом, на этот раз мы приходим к задаче классификации точек в n-мерном пространстве.

Без машин трудно

Для решения задач классификации разработаны различные алгоритмы, позволяющие использовать вычислительные машины. Необходимость применения вычислительных машин вызвана двумя причинами. Во-первых, как правило, объектов очень много, и обработка всех данных вручную просто невозможна. Во-вторых, классифицируемые объекты чаще всего многомерны.

Если, как в примере со школьниками, координат всего две и число объектов невелико, то человек может справиться с задачей классификации не хуже, чем вычислительная машина. А именно: он посмотрит на картинку, где изображены точки, представляющие объекты, и выделит области, отвечающие сгущению точек. Эксперименты показывают, что все люди делают это примерно одинаково. Это связано с тем, что они (люди) непроизвольно стремятся к тому, чтобы точки в одной группе были близки друг к другу, а различные группы были удалены на достаточное расстояние. Если же число параметров равно трем или больше, то соображения наглядности уже практически бесполезны и задача классификации становится труднодоступной для человека.

Психологами проводился следующий эксперимент *). Испытуемым выдавались наборы карточек с тремя числами, соответствующими координатам точек в пространстве. Требовалось разбить точки на две естественные группы. На самом деле существовала плоскость, идущая под углом к координатным осям, которая разбивала все точки на две группы так, что расстояние от любой точки до этой плоскости было достаточно велико по сравнению с расстояниями между точками внутри каждой группы. Большинство людей разбивало точки по значению одной из координат, что приводило к неестественным разбиениям; правильного разбиения не удалось построить почти никому.

Поэтому для точек в многомерном пространстве были разработаны *алгоритмы классификации*. Одним из критериев правильности работы этих алгоритмов служит требование, чтобы при классификации точек на плоскости они давали естественные разбиения — те же, какие находят люди.

Дерево минимальной длины

Мы сейчас опишем алгоритм построения связной системы отрезков, соединяющей данные точки, с минимальной суммой длин (система отрезков называется *связной*, если

*) Этот и некоторые другие подобные эксперименты описаны в книге Н. Г. Загоруйко «*Методы распознавания и их применения*» (М., «Советское радио», 1972). В этой книге можно подробнее прочесть о многих вопросах, о которых мы упоминаем только вскользь.

из любой данной точки по отрезкам этой системы можно добраться до любой другой данной точки). Для наглядности мы рассмотрим построение на плоскости. В многомерном пространстве алгоритм такой же, только нельзя нарисовать картинку.

Итак, пусть на плоскости даны N точек $A_1, \ldots, A_N$. Для простоты мы будем считать, что все попарные расстояния между точками различны. Выпишем все пары точек (A_1, A_2), (A_1, A_3), ..., (A_{N-1}, A_N) и упорядочим их так, чтобы вначале шла пара с минимальным расстоянием между точками, за ней пара со вторым по величине значением расстояния и т. д. Соединим теперь первую пару точек, затем вторую пару и т. д. Если при проведении очередного отрезка появляется *цикл* (то есть из системы уже проведенных отрезков можно выбрать несколько отрезков, образующих замкнутую ломаную), то этот отрезок мы пропустим и перейдем к следующему и т. д.— до тех пор, пока не переберем все отрезки. Полученная система отрезков по построению не содержит циклов. (Связную систему отрезков без циклов называют *деревом*.)

Задача 1. Докажите, что построенная система отрезков имеет минимальную длину среди всех связных систем отрезков, соединяющих данные точки.

Задача 2. Докажите, что ту же систему отрезков можно получить следующим, как говорят математики, двойственным построением: соединим все пары точек отрезками и упорядочим эти отрезки в порядке убывания их длины; отбросим самый длинный отрезок, затем второй по величине отрезок и т. д.; если при отбрасывании очередного отрезка оставшиеся отрезки не образуют связного множества, то пропустим этот отрезок и перейдем к следующему и т. д. — до тех пор, пока не переберем все отрезки.

Задача 3*. Пусть среди попарных расстояний между точками $A_1, \ldots, A_N$ есть совпадающие. Упорядочим произвольным образом отрезки одинаковой длины и проведем процедуру, описанную в тексте или в задаче 2. Докажите, что построенная система отрезков имеет минимальную длину независимо от того, как были упорядочены равные отрезки. Разумеется, в этом случае система отрезков минимальной длины может быть неединственной.

Описанный нами алгоритм построения дерева минимальной длины

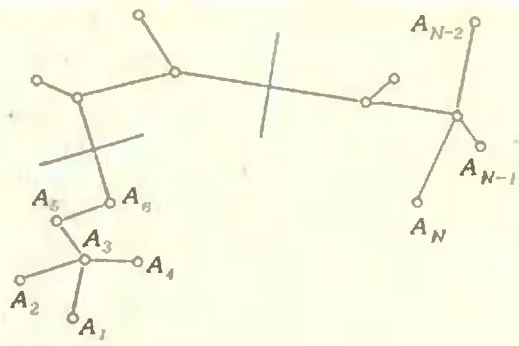


Рис. 1.

сравнительно прост, но требует большого перебора и, следовательно, долгой работы вычислительной машины. Существуют более быстрые (но и более сложные!) алгоритмы.

Разбиение на группы

После того как дерево Г минимальной длины построено, разбиение множества точек $A_1, \ldots, A_N$ на группы осуществляется отбрасыванием некоторых отрезков, входящих в это дерево. Естественно отбрасывать достаточно длинные отрезки, но так, чтобы точки, попавшие в одну группу, были расположены как можно теснее. Это наглядное соображение можно формализовать, если ввести следующие величины. Пусть мы хотим разбить множество точек $A_1, \ldots, A_N$ на $k+1$ групп. Выберем произвольные k отрезков дерева Г и отбросим их (рис. 1). Мы получим $k+1$ связных групп точек: $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_{k+1}$. Для каждой группы Γ_i разделим сумму длин отрезков дерева Г, соединяющих точки, входящие в нее, на число отрезков. Мы получили среднюю длину отрезков в каждой группе Γ_i. Если какая-то группа состоит из одной точки, то по определению эта средняя длина равна нулю. Обозначим вычисленные средние длины через $l_1, l_2, \ldots, l_k, l_{k+1}$. Пусть, кроме того, длины отброшенных отрезков — $b_1, b_2, \ldots, b_k$. Образуем величину

$$F = l_1 + l_2 + \ldots + l_{k+1} - b_1 - \ldots - b_k.$$

Ясно, что чем меньше величина F, тем теснее расположены точки каждой группы и тем дальше друг от друга находятся разные группы. Поэтому естественно предложить следующий алгоритм: из дерева минимальной длины всеми возможными способами отбрасываем k отрезков и вычисляем величину F; среди всех полученных разбиений выбираем то, для которого величина F минимальна; если «минимальных» разбиений несколько, берем любое из них.

В реально используемых алгоритмах величина F определяется, как правило, более сложным образом.

Вычислительная практика показала, что алгоритмы описанного типа приводят к достаточно разумным разбиениям. Главный недостаток этих алгоритмов заключается в том, что требуется производить слишком большой перебор. При увеличении числа точек задача становится недоступной даже для современных вычислительных машин.

Чтобы справиться с этой трудностью, используют следующую идею. Точки, расстояние между которыми меньше некоторой величины a, стараются отнести к одной группе. Все построение проводят в два этапа. На первом этапе множество точек $A_1, \ldots, A_N$ разбивают на более мелкие группы $G_1, \ldots, G_m$ так, чтобы для каждой группы G_i существовал круг S_i радиуса $R = a/2$, содержащий все точки группы G_i и только их. Как это сделать, мы обсудим ниже. На втором этапе рассматривают только центры $O_1, \ldots, O_m$ кругов $S_1, \ldots, S_m$ и строят дерево минимальной длины уже для множества $O_1, \ldots$ $\ldots, O_m$. Минимизируя соответствующую этому дереву величину F, строят разбиение на группы множества точек $O_1, \ldots, O_m$ так, как это было описано выше. Тем самым мы получаем и разбиение множества точек $A_1, \ldots, A_N$. А именно, две точки A_i, A_j относятся к одной группе, если они лежат в одной мелкой группе G_i или если центры кругов соответствующих им мелких групп попали при разбиении точек $O_1, \ldots, O_m$ в одну группу. Смысл этой двухступенчатой процедуры состоит в уменьшении числа исходных точек: число m оказывается много меньше N, и такую процедуру уже можно реализовать на вычислительной машине.

Задача о движущемся круге

Нам осталось обсудить, как разбить множество точек $A_1, \ldots, A_N$ на мелкие группы. Для решения этой задачи используется алгоритм «Форель» (он несколько напоминает один из способов ловли форели). Опишем этот алгоритм для точек на плоскости, хотя точно так же он работает и в многомерных пространствах.

Итак, пусть на плоскости даны N точек $A_1, \ldots, A_N$. Поместим в эти точки шарики единичной массы и нарисуем какой-нибудь круг S_0 радиуса R, в котором лежит хотя бы один из шариков. Пусть O_1 — центр тяжести шариков, попавших в круг S_0, и S_1 — круг радиуса R с центром в точке O_1. Пусть O_2 — центр тяжести шариков, попавших в круг S_1, и S_2 — круг радиуса R с центром в точке O_2 и т. д. Например, на рисунке 2 изображены восемь точек $A_1, \ldots, A_8$. В начальный круг S_0 попадает одна точка A_3, которая и будет центром круга S_1. В круг S_1 попадают точки A_2, A_3, A_4, и центр круга S_2 совпадает с их центром тяжести. Круг S_3 содержит точки A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_8, и его центр совпадает с их центром тяжести, поэтому все последующие круги с ним совпадают. Далее мы докажем, что так происходит всегда, то есть *для любых точек $A_1, \ldots, A_N$ и произвольного выбора начального круга S_0, содержащего хотя бы одну точку A_i, все круги, начиная с некоторого шага, совпадают*. Другими словами, движение

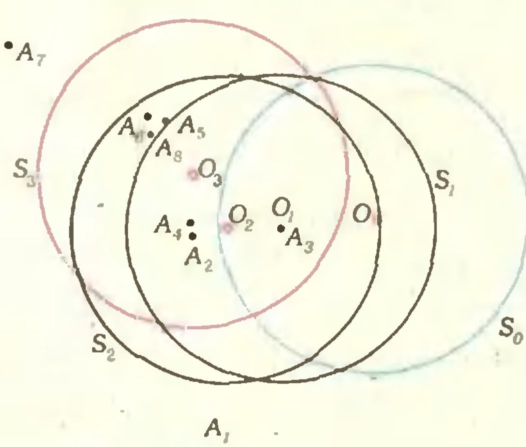


Рис. 2.

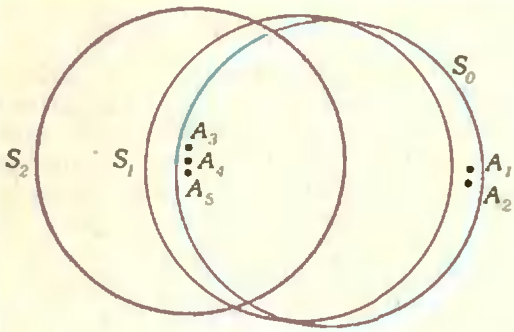


Рис. 3.

круга по маршруту $S_0 \to S_1 \to \to S_2 \to \dots$ не может происходить бесконечно. Точки, попавшие в последний круг, мы и отнесем к первой группе. К оставшимся точкам применяется та же процедура, то есть «выпускается» новый круг, конечное положение которого определяет вторую группу. Этот процесс продолжается до тех пор, пока все точки не будут отнесены к какой-то группе.

Почему круг останавливается?

Оставшаяся часть статьи посвящена доказательству того, что круг действительно «останавливается». Рассматривая рисунок 2, мы замечаем, что круги $S_0, S_1, S_2, \dots$ захватывают все большее число точек и их конечное положение соответствует сгущению точек. Естественно предположить, что при любых расположениях точек $A_1, \dots, A_N$ и круга S_0 число точек, попавших в круги $S_0, S_1, S_2, \dots$, по крайней мере, не убывает. Рисунок 3 показывает, что это неверно; однако в некотором смысле сгущение точек в кругах $S_0, S_1, S_2, \dots$ действительно возрастает, только кроме числа точек, попавших в круг, нужно учитывать, насколько близко к центру круга они лежат.

А именно, пусть в какой-то круг S с центром O попали точки $A_{i_1}, \dots \dots, A_{i_k}$; определим величину

$$F(S) = (R^2 - |OA_{i_1}|^2) + \dots \dots + (R^2 - |OA_{i_k}|^2).$$

Чем ближе точка к центру круга S, тем больший вклад она вносит в величину $F(S)$. Докажем, что последовательность величин $F(S_0)$, $F(S_1)$, $F(S_2), \dots$ возрастает до тех пор, пока круг не остановится.

Для доказательства нам понадобится понятие **момента инерции** системы материальных точек $A_1, \dots, A_m$ относительно некоторой точки A и **теорема Штейнера**, которая очень полезна при решении многих задач не только из геометрии, но и из механики *).

Моментом инерции системы материальных точек $A_1, \dots, A_m$ относительно точки A называется величина

$$I(A) = |AA_1|^2 + \dots + |AA_m|^2.$$

Теорема Штейнера позволяет вычислить $I(A)$, если известен момент инерции $I(C)$ этой системы точек относительно их центра тяжести C. Эта теорема утверждает, что

$$I(A) = I(C) + m|CA|^2.$$

Докажем теорему Штейнера. Введем прямоугольную систему координат, поместив ее начало в центр тяжести точек $A_1, \dots, A_m$ — точку C. Обозначим координаты точек $A_1, \dots \dots, A_m$ через $(x_1; y_1), \dots, (x_m; y_m)$. Тогда центр тяжести C имеет координаты $((x_1 + \dots + x_m)/m;\ (y_1 + \dots \dots + y_m)/m)$, а поскольку C совпадает с началом координат, то $x_1 + \dots + + x_m = y_1 + \dots + y_m = 0$. Пусть точка A имеет координаты $(x; y)$. Тогда

$$I(A) = [(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2] + \dots + + [(x_m - x)^2 + (y_m - y)^2] = = (x_1^2 + y_1^2) + \dots + (x_m^2 + y_m^2) + + m(x^2 + y^2) - 2x(x_1 + \dots + x_m) - - 2y(y_1 + \dots + y_m) = I(C) + m|CA|^2,$$

поскольку $2x(x_1 + \dots + x_m) = = 2y(y_1 + \dots + y_m) = 0$. Теорема Штейнера доказана.

Докажем, что *если круг S_1 не совпадает с кругом S_0, то $F(S_1) > > F(S_0)$*. Перенумеруем точки $A_1, \dots, A_m$ так, чтобы точки, попавшие в круг S_0, но не попавшие в круг S_1, имели номера от 1 до p, точки, попавшие в пересечение кругов S_0 и S_1,— номера от $p + 1$ до q, а точ-

*) См. книгу М. Б. Балка *«Геометрические приложения понятия о центре тяжести»* (М., Физматгиз, 1959).

ки, попавшие в S_1, но не попавшие в S_0,— номера от $q+1$ до r. Таким образом, в круге S_0 лежат точки $A_1, \ldots, A_q$, а в круге S_1 — точки $A_{p+1}, \ldots, A_r$. Ясно, что величину $F(S_0)$ можно выразить через момент инерции $I(O)$ точек $A_1, \ldots, A_q$ относительно точки O — центра круга S_0, а именно,

$$F(S_0)=(R^2-|OA_1|^2)+\ldots+(R^2-|OA_q|^2)=qR^2-I(O).$$

Точка O_1 — центр круга S_1 — является центром тяжести точек $A_1, \ldots, A_q$, поэтому по теореме Штейнера

$$I(O)=I(O_1)+q|OO_1|^2,$$

то есть

$$F(S_0)=qR^2-I(O_1)-q|OO_1|^2=(R^2-|O_1A_1|^2)+\ldots+(R^2-|O_1A_q|^2)-q|OO_1|^2.$$

Сравним это выражение с

$$F(S_1)=(R^2-|O_1A_{p+1}|^2)+\ldots+(R^2-|O_1A_r|^2).$$

В выражении $F(S_1)$ отсутствуют слагаемые

$$(R^2-|O_1A_1|^2),\ldots,(R^2-|O_1A_p|^2),$$

но появились слагаемые

$$(R^2-|O_1A_{q+1}|^2),\ldots,(R^2-|O_1A_r|^2).$$

Поэтому

$$F(S_1)-F(S_0)=-(R^2-|O_1A_1|^2)-\ldots-(R^2-|O_1A_p|^2)+(R^2-|O_1A_{q+1}|^2)+\ldots+(R^2-|O_1A_r|^2)+q|OO_1|^2.$$

Заметим теперь — и это решающее обстоятельство,— что точки $A_1, \ldots, A_p$ по построению лежат вне круга S_1. Следовательно, величины $R^2-|O_1A_1|^2,\ldots,R^2-|O_1A_p|^2$ отрицательны. Напротив, точки $A_{q+1}, \ldots, A_r$ лежат внутри круга S_1; поэтому величины $R^2-|O_1A_{q+1}|^2, \ldots, R^2-|O_1A_r|^2$ неотрицательны. Таким образом,

$$F(S_1)-F(S_0)\geqslant q|OO_1|^2,$$

то есть $F(S_1)>F(S_0)$, если точки O_1 и O не совпадают.

Точно так же доказывается, что $F(S_{k+1})>F(S_k)$, если не совпадают точки O_{k+1} и O_k. Используя этот факт, теперь несложно показать, что, начиная с некоторого номера n, все круги $S_n, S_{n+1}, \ldots$ совпадают. По построению точка O_{m+1} является центром тяжести точек, попавших в круг S_m. Если рассмотреть все подмножества множества точек $A_1, \ldots, A_N$ и центры тяжести точек этих подмножеств, то точка O_{m+1} будет одним из этих центров тяжести. Поскольку множество центров тяжести конечно, в последовательности центров $O, O_1, O_2, \ldots$ должны встретиться совпадающие, скажем, O_i и O_j. Однако мы доказали, что

$$F(S_i)\leqslant F(S_{i+1})\leqslant\ldots\leqslant F(S_j),$$

и так как $S_i=S_j$, $F(S_i)=F(S_j)$, поэтому $F(S_i)=F(S_{i+1})=\ldots=F(S_j)$.

Вспомним теперь, что равенство $F(S_i)=F(S_{i+1})$ возможно лишь в том случае, если круги S_i и S_{i+1} совпадают. Остается заметить, что если два последовательных круга совпадают, то с ними совпадают по построению все последующие круги. Таким образом, мы доказали, что движение круга $S_0\to S_1\to S_2\to\ldots$ не может быть бесконечным, или, как говорят математики, доказали *сходимость алгоритма* «Форель». Попутно мы разобрали решение задачи, которая предлагалась на последней Московской математической олимпиаде и в Задачнике «Кванта» (см. задачу М505 в «Кванте», 1978, № 5).

Две новые задачи

В заключение сформулируем еще две задачи. Процедуры, которые описываются в этих задачах, также применяются для классификации точек в многомерных пространствах. Как и раньше, ограничимся случаем плоскости.

Задача 4. *Пусть N точек $A_1, \ldots, A_N$ разбиты на l (непустых) групп $G_1, \ldots, G_l$. Пусть $O_1, \ldots, O_l$ — центры тяжести каждой из этих групп. Построим новое разбиение точек $A_1, \ldots, A_N$ по следующему правилу: каждую точку отнесем к i-й группе ($i\leqslant l$), если ближайшим к ней цен-*

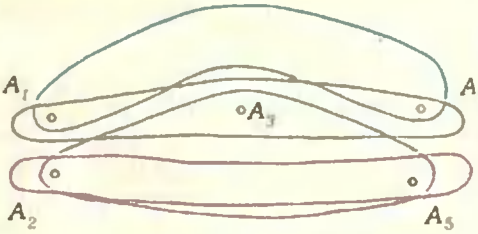


Рис. 4.

тром тяжести является точка O_l (если таких центров тяжести несколько, то выбирается тот из них, который имеет наименьший номер). Пусть после отбрасывания пустых групп (приведите пример, когда среди групп $G_1, \dots, G_l$ появляются пустые!) осталось p групп ($p \leqslant l$). Перенумеровав их произвольным образом, получим новое разбиение $G_1^1, \dots, G_p^1$.

Найдя центры тяжести $O_1^1, \dots, O_p^1$ точек этих групп и повторив ту же процедуру, построим разбиение $G_1^2, \dots, G_q^2$ ($q \leqslant p$) и т. д. Докажите, что, начиная с некоторого шага, разбиения совпадают.

Для формулировки следующей задачи удобно ввести обозначение. Пусть на плоскости заданы точка A и произвольное подмножество G множества точек $A_1, \dots, A_N$. Положим

$$l(A, G) = |AA_i|^2 + \dots + |AA_j|^2$$

(сумма берется по точкам из G).

З а д а ч а 5. *Пусть, как и в задаче 4, задано начальное разбиение множества точек $A_1, \dots, A_N$ на l непустых групп $G_1, \dots, G_l$. Опишем правило построения нового разбиения $G_1^1, \dots, G_p^1$ ($p \leqslant l$) точек $A_1, \dots, A_N$ несколько отличающееся от правила задачи 4. При этом новое разбиение будет отличаться от начального т о л ь к о тем, что о д н а из точек попадает в новую группу. А именно, отнесем точку A_1 к той группе G_i, для которой величина $l(A_1, G_i)$ минимальна (если таких групп несколько, то отнесем точку A_1 к той из них, которая имеет наименьший номер). Если при этом точка A_1 была единственной в своей группе и в результате ее переноса группа стала пустой, то отбросим эту группу, а остальные группы перенумеруем произвольным образом. Полученное разбиение обозначим $G_1^1, \dots, G_p^1$ ($p = l$ или $p = l - 1$). Повторим ту же процедуру для точек $A_2, \dots, A_N$ и затем — снова для A_1, для A_2 и т. д. Докажите, что, начиная с некоторого шага, все разбиения совпадают.*

Преимущество алгоритмов, описанных в задачах 4 и 5, по сравнению с алгоритмом «Форель» состоит в том, что эти алгоритмы быстро сходятся (то есть построение окончательного разбиения требует меньшего времени работы вычислительной машины). Однако при неудачном выборе начального разбиения эти алгоритмы могут привести к не очень естественному конечному разбиению на группы. Один из таких примеров приведен на рисунке 4.

Задачи наших читателей

1. Число a представили в виде $a = m_1 + n_1 = m_2 + n_2$. Докажите, что тогда

$$3m_1n_1 \leqslant m_2^2 + m_2n_2 + n_2^2.$$

В. Федюшкин
(г. Щекино)

2. Дан треугольник ABC, H — точка пересечения его высот, M — точка пересечения медиан. Докажите, что

а) $$\frac{|BM|}{\sin \widehat{AMC}} = \frac{|AM|}{\sin \widehat{BMC}} = \frac{|CM|}{\sin \widehat{AMB}};$$

б) $$\frac{|BH|}{\cos \widehat{AHC}} = \frac{|AH|}{\cos \widehat{BHC}} = \frac{|CH|}{\cos \widehat{AHB}}$$

(если все эти дроби определены).

А. Ягубьянц
(г. Ростов-на-Дону)

3. Докажите, что сумма $2k$ ($k > 1$)

а) нечетных последовательных степеней числа 7 делится на 350;

б) четных последовательных степеней числа 7 делится на 2450.

И. Михайлович
(Минская обл.)

4. Обозначим через $q(n)$ число нулей, которыми оканчивается число $n!$, а через $s(n)$ — сумму цифр числа n в пятеричной системе счисления. Докажите, что

$$n - s(n) = 4q(n).$$

В. Стовба
(г. Зеленоград)

А. Левашов

Опыты Франка и Герца

Начало XX века занимает в истории физики исключительное положение. Это был период пересмотра старых, устоявшихся представлений об устройстве материального мира. В ряде случаев этот пересмотр требовал отказа от законов классической механики и классической электродинамики.

В 1900 году Планк создает квантовую теорию излучения. В 1905 году Эйнштейн формулирует принципы специальной теории относительности. В этот же период наука вплотную подошла к вопросу о физической природе и внутреннем строении атома. В 1911 году публикуются результаты опытов Резерфорда, на основе которых создается ядерная модель атома, противоречащая классической физике. В 1913 году Бор формулирует квантовые постулаты, позволяющие объяснить резерфордовскую модель атома и характер атомных спектров, но противоречащие как классической механике, так и классической электродинамике.

Каждое из этих открытий указывало новые пути к познанию материального мира. Но развитие новых представлений всегда опирается на прочный экспериментальный фундамент. Именно поэтому экспериментальная проверка новых гипотез играет в науке исключительно важную роль.

Опыты немецких физиков Джеймса Франка и Густава Герца по существу явились первым экспериментальным подтверждением постулатов Бора.

Исторически эти опыты явились продолжением работ немецкого физика Ленарда, который пытался экспериментально определить энергию ионизации атомов задолго до возник-

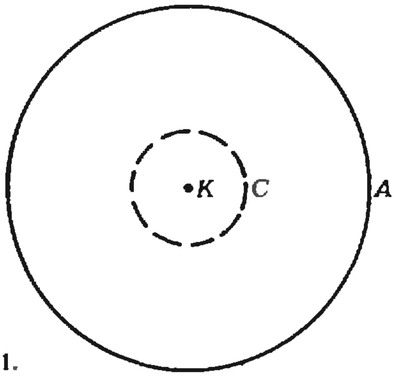


Рис. 1.

новения резерфордовской модели. В 1902 году Ленард поставил интересный опыт. Главной частью его установки была стеклянная трубка с тремя впаянными электродами — прообраз современного триода (рис. 1). Трубка наполнялась газом, энергию ионизации которого измеряли. Давление газа в трубке было около 0,01 мм рт. ст. Схема всей установки приведена на рисунке 2. Между катодом K и сеткой C от батареи $\mathscr{E}_1$ подается напряжение U_1, которое можно изменять с помощью потенциометра R_1. Между сеткой и анодом A подается напряжение U_2 от батареи $\mathscr{E}_2$. Это напряжение можно варьировать с помощью потенциометра R_2.

Идея опыта заключалась в следующем. Вылетающие из катода электроны попадают в электрическое поле в пространстве катод — сетка и, ускоряясь этим полем, движутся к сетке. (Напряжение U_1 называют ускоряющим.) Пройдя сетку, электроны

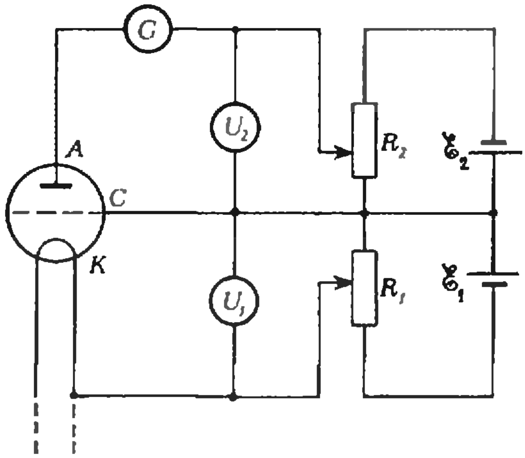


Рис. 2.

попадают в пространство сетка — анод. Здесь электрическое поле имеет противоположное направление, и электроны тормозятся этим полем. (Напряжение U_2 называют тормозящим.) Ясно, что в зависимости от соотношения величин U_1 и U_2 электроны либо попадают на анод ($U_1 > U_2$), и тогда в анодной цепи появляется ток, регистрируемый гальванометром G, либо тормозятся полем сетка — анод ($U_2 > U_1$) и в конечном счете «улавливаются» сеткой и уходят в сеточную цепь. В опытах Ленарда тормозящее напряжение всегда было больше ускоряющего, так что вылетевшие из катода электроны не могли достичь анода.

Приступая к определению энергии ионизации атомов, Ленард исходил из следующих представлений о взаимодействии электронов с атомами. В пространстве катод — сетка электроны испытывают столкновения с атомами газа. Эти столкновения могут быть двух типов — упругие и неупругие. При упругих столкновениях кинетическая энергия электронов практически не изменяется (изменяется только направление скорости электрона, а абсолютное значение скорости остается неизменным, так как масса атома в тысячи раз больше массы электрона). Так что электроны, ускоряясь электрическим полем, движутся зигзагообразно к сетке. Около сетки энергия электрона достигает максимального значения, определяемого из условия

$$K = \frac{mv^2}{2} = eU_1$$

(m — масса электрона, e — заряд электрона).

По мере увеличения ускоряющего напряжения U_1 энергия электрона растет. Ленард полагал, что, когда максимальная энергия электрона вблизи сетки равна или несколько превышает энергию ионизации атома газа, столкновение электрона с атомом становится неупругим. При этом электрон отдает практически всю свою энергию атому, и эта энергия идет на внутриатомные процессы — атом ионизуется. Возникают вторичные заряженные частицы — электроны и положительные ионы. Все электроны (и вторичные, и первичные — те, что вылетели из катода) в конце концов уходят в сеточную цепь. А положительные ионы, попав в пространство сетка — анод, под действием электрического поля движутся, ускоряясь к аноду. Поэтому в анодной цепи появляется ток, обусловленный вторичными заряженными частицами.

Итак, появление тока в анодной цепи, как считал Ленард, должно указывать на начало ионизации. Энергия ионизации численно равна $eU_и$, где $U_и$ — значение U_1, при котором возник анодный ток.

Хотя в эксперименте действительно наблюдалось возникновение анодного тока при определенных значениях ускоряющего потенциала, все же Ленарду не удалось получить надежных экспериментальных результатов из-за технического несовершенства его установки. Важно отметить, что Ленард исходил из неверных представлений о взаимодействии электронов с атомами, так как он не мог еще знать о существовании дискретных энергетических уровней у атома. По этой причине опыт Ленарда не оставил заметного следа в физике, хотя он несомненно интересен в историческом отношении. Усовершенствованная методика Ленарда была использована впоследствии при постановке классических опытов Франка и Герца.

Совместную работу Франк и Герц начали в 1911 году в Берлинском университете. В этот период они занимались изучением законов электрического тока в газах. Естественно, что для них представляла интерес величина энергии ионизации атомов. Для ее определения они сначала воспользовались методом Ленарда, а позднее внесли в него существенные изменения.

Прежде всего, была изменена конструкция лампы. Расстояние катод — сетка было сделано значительно бо́льшим расстояния сетка — анод (рис. 3).

Давление газа (или пара), наполняющего трубку, было увеличено до 1 мм рт. ст. Поэтому электроны, вылетающие из катода, испытывали

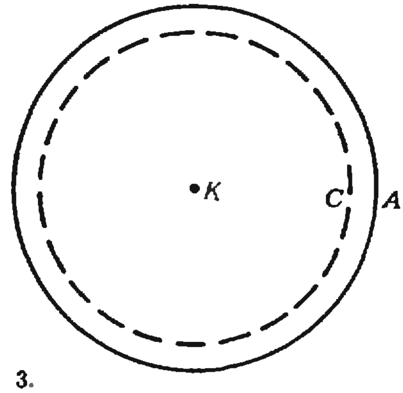


Рис. 3.

в пространстве катод — сетка многократные столкновения с атомами газа (или пара). Тормозящее напряжение Франк и Герц уменьшили и сделали постоянным (оно выбиралось в пределах 0,5—2 В). Поэтому ток в анодной цепи появлялся, как только ускоряющее напряжение U_1 становилось больше тормозящего U_2.

Приступая к опытам, Франк и Герц, как и Ленард, намеревались измерить энергию ионизации. Результаты одного из опытов с лампой, наполненной парами ртути, приведены на рисунке 4. Красная кривая на этом графике показывает характер изменения тока в анодной цепи при изменении ускоряющего напряжения (значения тока указаны в условных единицах). Прежде всего обращает на себя внимание тот факт, что через равные промежутки напряжения U_1 ток резко падает. Максимумы значения тока соответствуют напряжениям 4,9 В, 2·4,9 В и 3·4,9 В.

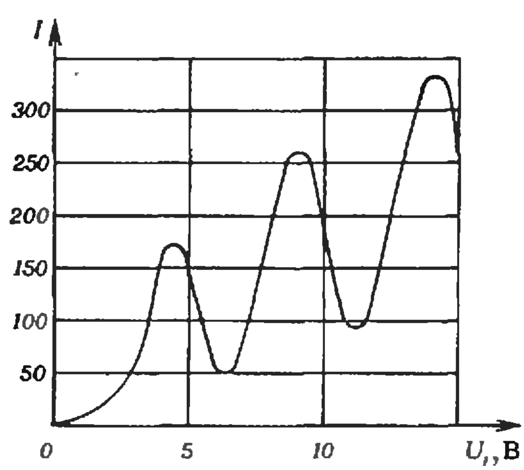


Рис. 4.

Полученные результаты Франк и Герц интерпретировали следующим образом. По мере увеличения ускоряющего напряжения ток в анодной цепи возрастает (с того момента, когда U_1 становится больше U_2). Когда U_1 становится равным (или немного бо́льшим) 4,9 В и электрон «набирает» на своем пути к сетке энергию 4,9 эВ, столкновение электрона с атомом у сетки становится неупругим — атом ионизуется, а электрон, потерявший энергию, улавливается сеткой. В результате ток в анодной цепи резко падает.

При дальнейшем увеличении ускоряющего напряжения происходит следующее: электрон успевает набрать энергию 4,9 эВ, не доходя до сетки, так что область неупругого столкновения его с атомом «сдвигается» ближе к катоду. При этом электрон, потерявший при столкновении энергию, продолжает под действием электрического поля двигаться ускоренно к сетке. Если на этом пути электрон ускоряется электрическим полем до энергии, превышающей значение eU_2, то он преодолевает тормозящее действие напряжения U_2 и попадает на анод. На графике этому процессу соответствует область роста анодного тока после первого спада. Когда значение U_1 становится таким, что электрон, потерявший энергию (4,9 эВ) в первом неупругом столкновении, успевает на пути к сетке вновь набрать энергию 4,9 эВ, столкновение его с атомом вновь становится неупругим, и он уже не попадает на анод, а улавливается сеткой. Это — спад кривой на рисунке 4 после второго максимума. Третий максимум указывает на то, что на пути катод — сетка электроны трижды претерпевают неупругие столкновения с атомами.

Исходя из полученных данных, Франк и Герц заключили, что энергия ионизации ртути равна 4,9 эВ — той энергии, которую набирает электрон между двумя последовательными неупругими столкновениями с атомами. Аналогичную кривую они получили в опытах с лампой, наполненной гелием, и нашли, что энергия ионизации гелия равна 19,8 эВ.

Будучи уверенными в том, что они действительно измерили энергию ионизации, Франк и Герц решили, тем не менее, поставить еще один эксперимент. Натолкнуло их на это решение следующее обстоятельство. Было известно, что пары ртути сильно поглощают излучение с длиной волны $\lambda = 2536$ Å. Этому излучению согласно теории Планка соответствует энергия

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}\ (\text{Дж}) =$$

$$= 1{,}6\cdot 10^{19}\frac{hc}{\lambda}\ (\text{эВ}) \approx 4{,}84\ \text{эВ}.$$

Эта величина очень хорошо совпадает с полученным Франком и Герцем значением энергии ионизации ртути — 4,9 эВ. Случайно ли это совпадение? Именно это и решено было проверить: посмотреть, не появляется ли при напряжении $U_1 = 4{,}9$ В излучение с длиной волны 2536 Å.

Эта длина волны лежит в ультрафиолетовой области. Поэтому Франк и Герц сделали трубку из кварца, прозрачного для ультрафиолетового света (применявшаяся ими ранее трубка со стеклянным баллоном не годилась — стекло не пропускает ультрафиолетовый свет). Конструкция этой трубки была намного проще предыдущей. В ней была только нить накала (катод) и сетка. Трубку они наполнили парами ртути. Ультрафиолетовый спектрограф (спектральный аппарат, чувствительный в ультрафиолетовой области спектра), направленный на трубку, должен был регистрировать излучение паров ртути, если это излучение будет возникать.

Результаты, полученные Франком и Герцем, оказались следующими. Пока напряжение U между катодом и сеткой было меньше 4,9 В, ток в сеточной цепи нарастал с ростом U и никакого излучения не было. Когда же это напряжение стало равным приблизительно 4,9 В, ток в цепи резко упал и спектрограф обнаружил излучение с длиной волны ... 2536 Å!

На основании всех имеющихся результатов Франк и Герц пришли к такому выводу: в большинстве случаев энергия электронов при неупругих столкновениях с атомами расходуется на ионизацию атомов, а иногда — на излучение.

Правильное объяснение результаты Франка и Герца получили лишь спустя четыре года, когда теория Бора стала завоевывать признание. По существу опыты Франка и Герца явились первым прямым экспериментальным подтверждением этой теории, хотя сам Нильс Бор во время постановки опытов не сознавал этого.

Согласно первому постулату Бора атом может находиться только в стационарных состояниях и его энергия в этих состояниях принимает определенные дискретные значения. Именно это подтверждал в опытах Франка и Герца тот факт, что резкое падение анодного тока происходило при значениях U_1, кратных одной и той же величине 4,9 В: в неупругих столкновениях, возникающих при этих значениях U_1, атом ртути поглощает энергию сразу, единой порцией. Энергии, меньшей 4,9 эВ, он не поглощает. Иными словами, энергия атома меняется скачками: если в нормальном состоянии (то есть в состоянии с минимальной энергией) энергия атома ртути равна E_0, то в первом возбужденном состоянии она равна $E_1 = E_0 + 4{,}9$ эВ.

В опытах Франка и Герца получил экспериментальное подтверждение и второй постулат Бора, согласно которому при переходе атома из стационарного состояния с большей энергией E_{n+1} в стационарное состояние с меньшей энергией E_n происходит излучение фотона, энергия которого $E = h\nu$ (ν — частота излучения) определяется соотношением $E = h\nu = E_{n+1} - E_n$; отсюда $\nu = \frac{E_{n+1} - E_n}{h}$ (второй постулат Бора называют еще правилом частот). Опыты Франка и Герца с кварцевой лампой, наполненной ртутными парами, подтвердили справедливость этого постулата: при неупругом столкновении атома ртути с электроном атом, поглотив энергию 4,9 эВ, переходит из нормального состояния E_0 в первое возбужденное ($E_0 + 4{,}9$ эВ). Обратный переход в нормальное состояние происходит с излучением фотона с энергией 4,9 эВ — появляется излучение с длиной волны 2536 Å.

Итак, в опытах Франка и Герца наблюдалась не ионизация атомов, а их возбуждение. То, что Франк и Герц считали энергией ионизации, на самом деле является энергией возбуждения первого возбужденного состояния. Измерить энергию более высоких возбужденных состояний на той установке, на которой начинали свои эксперименты Франк и Герц, нельзя. Из-за частых столкновений с атомами электрон после очередного неупругого столкновения с атомом не успевал набрать энергию, большую 4,9 эВ,— он сталкивался неупруго с другим атомом и отдавал ему свою энергию. Чтобы измерить энергию более высоких состояний, надо устранить это препятствие.

В последствии Герц предложил несколько видоизмененный метод эксперимента. В его установке пространство, в котором электроны ускорялись полем, и пространство, в котором они испытывали соударения с атомами, были разделены. Поэтому электрон мог, не претерпевая соударений, набрать энергию, бо́льшую 4,9 эВ. Оказалось, что при энергии электрона 9,8 эВ соударение его с атомом ртути становится неупругим. Получив энергию 9,8 эВ, атом ртути переходит во второе возбужденное состояние. Этот метод позволил определять более высокие энергетические состояния атома.

Опыты Франка и Герца явились экспериментальной основой для развития теории строения атома. С развитием электронной и вакуумной техники экспериментальная методика опытов постоянно совершенствовалась.

В 1925 году Джеймс Франк и Густав Герц были удостоены Нобелевской премии.

С. Поздняков

«Теория вероятностей» без теории

Хотелось бы написать, что на этом занятии математического кружка будут решаться задачи по теории вероятностей. Но дело в том, что здесь как раз никакой теории не будет, не будет ни аксиом, ни формул, ни теорем — того, к чему мы привыкли в математике. Вместо этого вам придется пользоваться здравым смыслом и интуицией, то есть тем, из чего в ходе развития математики и образовались точные математические понятия и аксиомы *).

Задачи о надежности

В технике у каждого устройства есть срок службы, после которого его заменяют или отправляют в капитальный ремонт. Однако устройство может выйти из строя и раньше.

Для измерения указанного свойства вводят понятие надежности. Например, если мы говорим, что надежность данной марки транзистора 99%, то это означает, что в среднем один транзистор из ста портится раньше времени или что у каждого транзистора есть один шанс из ста в течение этого срока вдруг взять и сломаться.

То же самое математики любят выражать по-другому. Например, в указанной ситуации они говорят, что вероятность выхода транзистора из строя равна 1/100.

*) Желающим познакомиться с математическими основами теории вероятностей рекомендуем прочитать статью А. Колмогорова и статью Б. Гнеденко и И. Журбенко в журнале «Математика в школе», 1968, №№ 2—3.

Задание 1. *Какая из двух электросхем, изображенных на рисунке 1, надежнее, если надежность диода 0,7 (т. е. 70%), надежность конденсатора 0,8, надежность резистора 0,9?*

Вспомним теперь детскую игру «испорченный телефон», в которой по цепочке играющих на пределе слышимости передается слово или предложение и последний должен угадать, что сказал первый. Оказывается, и в этой ситуации можно говорить о надежности (игры или участников). Для этого полезно перейти с языка игр на язык схем.

Задание 2. *Нарисуйте электрическую схему, соответствующую игре «испорченный телефон» с пятью участниками. Объясните в терминах этой игры утверждения:*

«Чем больше в схеме элементов, тем меньше ее надежность»,

«Надежность схемы меньше надежности ее самого ненадежного элемента».

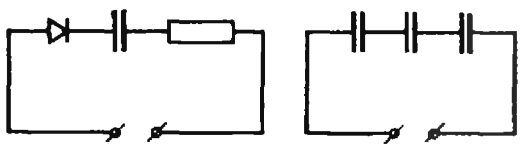


Рис. 1.

Чтобы увеличить надежность машины, состоящей из разных устройств, применяют параллельно включенные дублирующие устройства. Тогда машина выйдет из строя только в том случае, если сломаются оба дублирующих друг друга устройства. Дублируются и средства связи. Рассмотрим такой пример: многожильный провод скручен из пяти проводков, надежность которых на обрыв 90%. Какова надежность провода? Вероятность того, что проводок оборвется, равна 10%, т. е. 0,1. Провод же порвется только, если порвутся все пять проводков; если они рвутся, не влияя друг на друга, вероятность этого события равна

$$0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 \times 0{,}1 = 0{,}00001.$$

Значит, надежность провода 0,99999,

или, в процентах, 99,999%. Здесь надежность «схемы» много больше, чем надежность ее элементов.

Задание 3. *Вычислить надежности самолетов с двумя и четырьмя моторами при условии, что самолет может лететь на одном моторе и надежность каждого мотора равна а) 0,5, б) 0,8, в) 0,98.*

Задачи о случайном блуждании в лабиринтах

Как известно, чтобы предотвратить расхищение сокровищ из пирамид, египтяне создавали в них лабиринты; двигаясь по ним случайно, похитители зачастую гибли в ямах-ловушках.

В последующих задачах речь пойдет о таких лабиринтах; мы будем считать, что путник идет по лабиринту случайно, то есть, встречая развилку, выбирает любой путь наугад с равной вероятностью (если два пути — то с вероятностью 1/2, три — 1/3).

Задание 4. *Чему равна вероятность того, что кладоискатель найдет клад (рис. 2), и вероятность того, что он погибнет?*

Задание 5. *Чему равны эти вероятности для лабиринта из рисунка 3 при условии, что кладоискатель может бродить случайно сколь угодно долго и делать петли?*

Для решения этих задач полезно нарисовать граф лабиринта. Каждый перекресток обозначим точкой, а коридор отрезком. Например, лабиринт, изображенный на рисунке 2, изобразится графом, показанным на рисунке 4.

Эти задания предлагались на занятиях математического кружка в ГТУ № 24 Ленинграда.

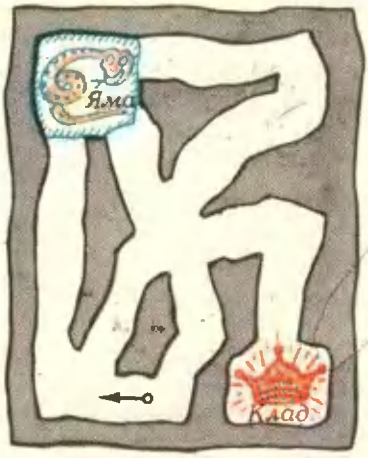


Рис. 2.

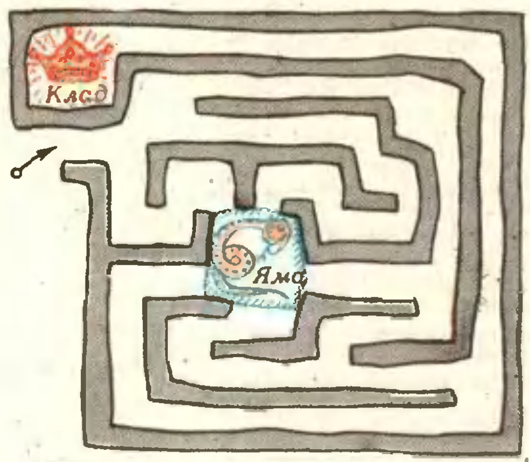


Рис. 3.

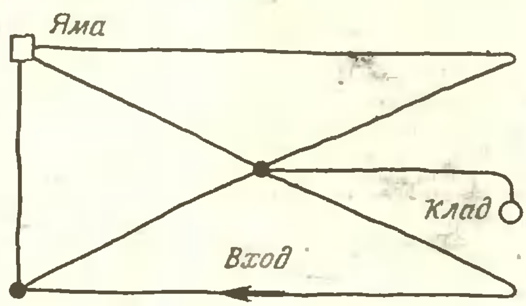


Рис. 4.

Задачи наших читателей

1. Докажите, что если a и b — натуральные числа, то $ab(a^4-b^4)$ делится на 5.

О. Селевко
(г. Ярославль)

2. Докажите, что уравнение $7^x+10^y=13^z$ не имеет решений в натуральных числах.

С. Майзус
(г. Запорожье)

3. Решите уравнения
а) $\overline{abc}=abc(a+b+c)$;
б) $\overline{abc}=abc+\overline{ab}+\overline{bc}+\overline{ca}$;
в) $\overline{abc}=a!+b!+c!$.

Э. Туркевич
(г. Черновцы)

4. Докажите, что число

$$\sqrt[4]{1\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ нулей}}4\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ нулей}}6\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ нулей}}4\underbrace{0\ldots0}_{n\text{ нулей}}1}$$

— целое и найдите его.

Ю. Башлыков
(г. Белово Кемеровской обл.)

задачник Кванта

Задачи

М566—М570; Ф578—Ф582

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 15 сентября 1979 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 6—79» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М566, М567» или «Ф578». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В этом номере задачник по математике составлен из задач, предлагавшихся на XIII Всесоюзной олимпиаде школьников. Числа в скобках обозначают класс, в котором предлагалась задача.

М566. Какое наименьшее значение может иметь отношение площадей двух равнобедренных прямоугольных треугольников, три вершины одного из которых лежат соответственно на трех сторонах другого? (8, 9)

В. Батырев

М567. Натуральные числа p и q взаимно просты. Отрезок $[0;\ 1]$ разбит на $p+q$ одинаковых отрезков. Докажите, что в каждом из этих отрезков, кроме двух крайних, лежит ровно одно из $p+q-2$ чисел

$$\frac{1}{p},\ \frac{2}{p},\ \ldots\ \frac{p-1}{p},\ \frac{1}{q},\ \frac{2}{q},\ \ldots\ \frac{q-1}{q}. \qquad (9)$$

Н. Васильев

М568*. Диагонали выпуклого четырехугольника $ACBД$ пересекаются в точке O. Докажите, что

а) если радиусы окружностей, вписанных в треугольники AOB, BOC, $COД$ и $ДOA$, равны между собой, то $ABCД$ — ромб; (10)

б) если радиусы окружностей, вписанных в треугольники ABC, $BCД$, $CДA$ и $ДAB$, равны между собой, то $ABCД$ — прямоугольник.

А. Егоров

М569. В тетради написано несколько чисел. К этим числам разрешается приписать число, равное среднему арифметическому двух или нескольких из них, если оно отлично от всех уже написанных чисел. Докажите, что, начав с двух чисел 0 и 1, с помощью описанных операций можно получить:

а) число $1/5$;

б)* любое рациональное число между 0 и 1. (9, 10)

М. Серов

М570*. Задан набор квадратов, сумма площадей которых равна 4. Докажите, что квадратами этого набора всегда можно покрыть квадрат площади 1. (8)

А. Вайнтроб, Г. Гальперин

Ф578. Концы A и B стержня AB скользят по сторонам прямого угла (рис. 1). Как зависит от угла α, образуемого стержнем с одной из сторон этого угла, ускорение середины стержня (точки C), если конец B стержня движется с постоянной скоростью $\vec{v}$?

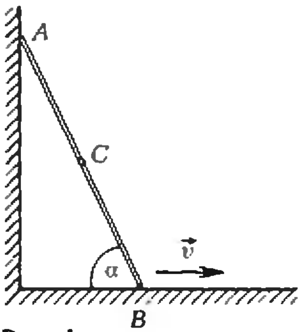


Рис. 1.

Ф579. В схеме, показанной на рисунке 2, $R_1 = 10$ Ом, $R_2 = 20$ Ом, $R_3 = 15$ Ом, напряжение в сети переменного тока $U = 10$ В. Определить мощность, которая выделяется на резисторах с сопротивлениями R_2 и R_3.

Г. Коткин

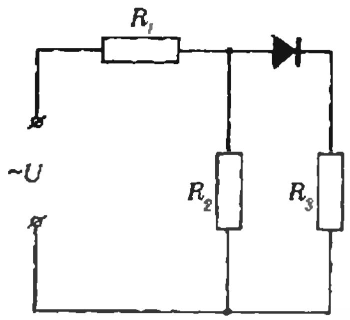


Рис. 2.

Ф580. В схеме, показанной на рисунке 3, ЭДС батареи $\mathscr{E}$, ее внутреннее сопротивление r, сопротивление резистора R. При замыкании ключа K_1 стрелка гальванометра G отклоняется на угол α. На какой угол отклонится стрелка гальванометра, если при замкнутом ключе K_1 замкнуть ключ K_2? Отклонение стрелки пропорционально заряду, прошедшему через гальванометр.

Ф581. Перед зеркалом стоит человек, закрыв один глаз. Изображение закрытого глаза в зеркале он закрывает, наклеивая на зеркало кусочек бумаги. Что увидит человек, если он откроет закрытый глаз и закроет открытый?

Ф582. Тело плавает в воде так, что $^2/_3$ его объема погружены в воду. Какая часть объема тела будет находиться под водой, если сосуд с водой перемещать с ускорением $\vec{a}$ в вертикальном направлении?

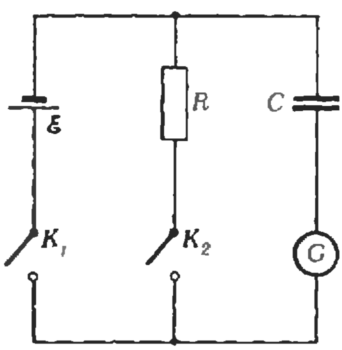


Рис. 3.

Решения задач

М515; Ф527—Ф529

М515. *Задано конечное множество K_0. К нему добавляются все точки, которые можно получить симметричным отражением одной точки этого множества относительно другой. Полученное множество обозначается K_1. Аналогично из множества K_1 получается K_2, из K_2 — множество K_3 и т. д.*

а) Пусть множество K_0 состоит из двух точек A и B на расстоянии 1. При каком наименьшем n в множестве K_n найдется точка, находящаяся на расстоянии 10 000 от точки A?

В этой задаче мы изучаем такую операцию над произвольной фигурой (множеством точек) Φ:

$$W(\Phi) = \bigcup_{M \in \Phi} S_M(\Phi) \qquad (1)$$

— рассматриваются симметричные образы фигуры Φ относительно различных точек $M \in \Phi$ и берется их объединение (по всем точкам M). Очевидно, всегда $W(\Phi) \supset \Phi$ и

$$\text{если } \Phi \subset \Phi', \text{ то } W(\Phi) \subset W(\Phi'). \qquad (2)$$

Выяснение поставленных в условии конкретных вопросов для последовательностей вида

$$\Phi,\ W(\Phi),\ W^2(\Phi) = W(W(\Phi)),\ \ldots,\ W^n(\Phi) = W(W^{n-1}(\Phi)),$$

полученных многократным применением операции W к некоторым конечным множествам Φ, мы включим в небольшое исследование, в ходе которого мы, по существу, научимся отыскивать *выпуклую оболочку* фигуры $\overline{W^n(\Phi)}$ — наименьшее выпуклое множество, содержащее $W^n(\Phi)$, — для произвольной фигуры Φ, и отметим ряд любопытных свойств операции W.

б) Пусть K_0 состоит из трех вершин правильного треугольника площади 1. Найдите площадь наименьшего выпуклого многоугольника, содержащего множество K_n ($n=1, 2, \ldots$).

В следующих трех пунктах K_0 — множество четырех вершин правильного тетраэдра объема 1.

в) Рассмотрим наименьший выпуклый многогранник, содержащий все точки множества K_1. Сколько и каких граней у этого многогранника?

г) Чему равен объем этого многогранника?

д) Найдите объем наименьшего выпуклого многогранника, содержащего множество K_n ($n=2, 3, \ldots$).

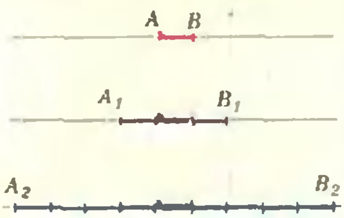


Рис. 1.

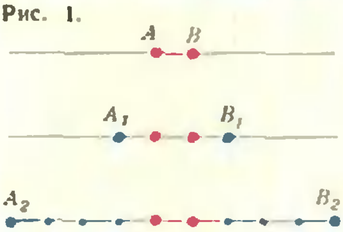


Рис. 2.

n	3^n
1	3
2	9
3	27
4	81
5	243
6	729
7	2 187
8	6 561
9	19 683

Рис. 3.

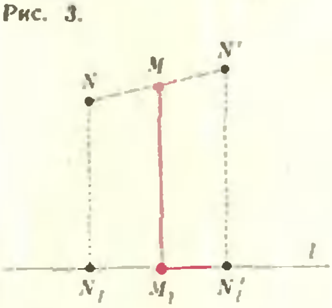


Рис. 4.

Прежде чем читать решение дальше, нарисуйте фигуры $W(\Phi)$ и $W^2(\Phi)$, если Φ — пара точек; отрезок; прямоугольник; четыре вершины прямоугольника; три вершины треугольника. А каково $W(\Phi)$, если Φ — куб? восемь вершин куба?

Начнем с «одномерного» случая, когда фигура Φ лежит на прямой. Этот случай нужен для решения задачи а), но, как мы увидим, он пригодится и в более трудных задачах.

Пусть сначала наша фигура — это отрезок $П=[AB]$ длины d с серединой в точке O. Тогда $\Phi(П)=[A_1B_1]$ — отрезок длины $3d$ с серединой в той же точке O. Отсюда сразу следует, что $\Phi^2(П)=[A_2B_2]$, где $|A_2B_2|=9d$, и вообще $\Phi^n(П)=[A_nB_n]$, где $|A_nB_n|=3^nd$, причем все отрезки $[A_nB_n]$ имеют середину в той же точке O (рис. 1).

Будем в дальнейшем образ фигуры Φ, имеющей центр симметрии O, при гомотетии с коэффициентом k и центром O обозначать через $k\Phi$. Мы выяснили, что если $П$ — отрезок, то $W(П)=3П$ и вообще

$$W^n(П)=3^nП. \qquad (3)$$

Забегая вперед, заметим, что это верно для любой *центрально-симметричной выпуклой* фигуры $П$. Но прежде закончим с одномерным случаем — ответим на вопрос а).

а) Пусть $K_0=\{A, B\}$, $|AB|=1$. Согласно (2), где $\Phi=\{A, B\}$, $П=\Phi'=[AB]$,

$$K_n=\Phi^n(K_0)\subset\Phi^n(П)=3^nП. \qquad (4)$$

При этом ясно, что K_n содержит все точки отрезка $[A_nB_n]=3^nП$, находящиеся на целочисленном расстоянии от точки A, причем крайние точки $\{A_n, B_n\}=3^n\{A, B\}$ находятся от A на расстояниях $(3^n-1)/2$ и $(3^n+1)/2$ (рис. 2). Поскольку эти числа (рис. 3) больше 10 000 при $n\geqslant 10$, о т в е т на вопрос а): $n=10$.

В решении плоских и пространственных задач про операцию W очень полезно такое ее свойство: *если Φ_l — проекция фигуры Φ на прямую l, то*

$$W(\Phi_l)=(W(\Phi))_l \qquad (5)$$

(проекция $W(\Phi)$ на прямую l совпадает с результатом применения W к проекции Φ_l) *). Это сразу следует из определения W и того факта, что при проекции точки, симметричные относительно точки M, попадают в точки, симметричные относительно ее проекции M_l (рис. 4).

Отсюда вытекает, что если $П$ — полоса, а $3^nП$ — ее образ при гомотетии с коэффициентом 3^n относительно центра симметрии (какой-либо точки *на средней прямой*), то выполнено соотношение (3). Это верно и для «пространственной полосы» $П$ — множества точек, заключенных между двумя плоскостями.

Из (2), (3), (5) и решения *задачи а) следует также*, что если мы заключаем фигуру Φ в *опорную полосу $П$* какого-либо направления — такую полосу $П\supset\Phi$, края которой содержат все точки из Φ, — то *полоса $3^nП\supset W^n(\Phi)$ будет опорной для $W^n(\Phi)$* (рис. 5). *Это соображение*, обобщающее (4), позволяет найти выпуклую оболочку $W(\Phi)$ для любой фигуры Φ.

Разберем конкретные примеры.

б) *Пусть* $K_0=\{A, B, C\}$ — вершины правильного треугольника, $K_n=W^n(K_0)$, $n=1, 2, \ldots$ (рис. 6). Докажем, что для любого $n\geqslant 1$ выпуклая оболочка множества K_n получается так: нужно взять концы отрезков $3^n[AB]$, $3^n[BC]$ и $3^n[AC]$ и построить выпуклый шестиугольник $Ш_n$ с вершинами в этих точках.

*) Проекцией пространственной фигуры Φ на прямую l называется множество точек $M\in l$ таких, что плоскость, проходящая через точку M и перпендикулярная к l, пересекается с Φ.

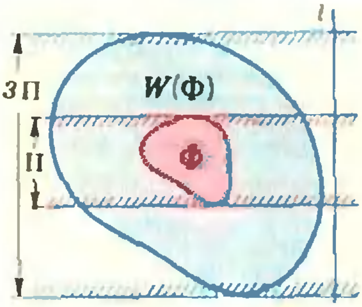


Рис. 5.

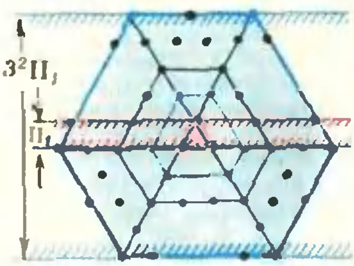


Рис. 6.

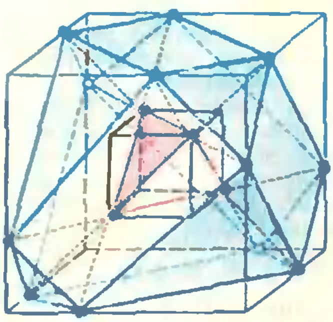


Рис. 7.

В самом деле, эти шесть точек — не что иное, как «крайние точки» множеств $W^n(\{A, B\})$, $W^n(\{B, C\})$ и $W^n(\{C, A\})$, о которых мы говорили в задаче а). Поскольку $\{A, B\}$, $\{B, C\}$ и $\{C, A\}$ — подмножества множества $\{A, B, C\}$, согласно (2) вершины шестиугольника $Ш_n$ принадлежат K_n. Следовательно, весь шестиугольник $Ш_n$ содержится в выпуклой оболочке множества K_n.

С другой стороны, рассмотрев три опорные полосы $П_1$, $П_2$, $П_3$, дающие в пересечении ΔABC, получим

$$K_n \subset 3^n П_1 \cap 3^n П_2 \cap 3^n П_3 = Ш_n. \qquad (6)$$

Значит, выпуклая оболочка множества K_n совпадает с $Ш_n$.

Найдем площадь шестиугольника $Ш_n$, считая площадь ΔABC равной 1.

Шестиугольник $Ш_n$ — объединение шести треугольников, из которых три подобны треугольнику ABC с коэффициентом $(3^n-1)/2$, а другие три — с коэффициентом $(3^n+1)/2$, причем последние три треугольника пересекаются по треугольнику ABC (рис. 6). Поэтому площадь шестиугольника $Ш_n$ равна

$$3\left(\frac{3^n-1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{3^n+1}{2}\right)^2 - 2 = \frac{3^{2n+1}-1}{2}.$$

в)—д). Пусть $K_0 = \{A, B, C, D\}$, где $ABCD$ — правильный тетраэдр, $W^n(K_0) = K_n$ ($n = 1, 2, \ldots$). Докажем, что для любого $n \geqslant 1$ выпуклая оболочка множества K_n получается так: нужно взять концы всех шести отрезков $3^n P$, где P — произвольное ребро тетраэдра $ABCD$, и построить выпуклый многогранник $Д_n$ с вершинами в этих 12 точках. Формальное доказательство этого факта в точности повторяет рассуждения пункта б). Чтобы разобраться, какую форму имеет многогранник $Д_n$, начнем со случая $n=1$.

Как это часто бывает в задачах про правильный тетраэдр, удобно построить куб L, у которого точки A, B, C и D — четыре несмежные вершины. Тогда 12 точек множества K_1 (кроме самих точек $K_0 = \{A, B, C, D\}$) лежат на ребрах гомотетичного куба $3L$, причем каждая из 12 точек делит свое ребро в отношении $1:2$, считая от вершин A_1, B_1, C_1, D_1 куба $3L$, гомотетичных вершинам A, B, C, D куба L. Ясно, что многогранник $Д_1$ получается из куба $3L$ отрезанием от каждой вершины куба «уголка»-пирамиды плоскостью, проходящей через три точки, отмеченные на ребрах, выходящих из этой вершины (рис. 7). Пусть длина ребра тетраэдра $ABCD$ равна a (то есть длина ребра куба $L = a/\sqrt{2}$). Полученный многогранник $Д_1$ будет иметь такие 14 граней: 6 прямоугольников $a \times 2a$ (на гранях куба $3L$) и 8 правильных треугольников (оснований «пирамидок»): четыре — со стороной длины a и четыре — со стороной длины $2a$.

Найдем объем многогранника $Д_1$, считая объем тетраэдра $ABCD$ равным 1. Заметим, что плоскость, проходящая через три несмежные вершины куба, отрезает от него пирамиду, объем которой составляет $^1/_6$ объема куба. Таким образом, объем тетраэдра $ABCD$ составляет $^1/_3$ объема куба L, то есть объем куба L равен 3, объем куба $3L$ равен 81, объем отрезаемых пирамидок — $4 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot 4 = 18$; поэтому объем $Д_1$ равен 63.

Многогранник $Д_n$ для любого $n > 1$ имеет точно такое же строение, как $Д_1$, но другие размеры граней *): его 12 вершин лежат на ребрах куба $3^n L$ и делят их (считая от вершин, гомотетичных A, B, C и D) в отношении $(3^n-1):(3^n+1)$. Эти вершины, очевидно, принадлежат K_n.

*) На 2-й странице обложки «Кванта» № 7 за 1978 г. были изображены многогранники $Д_1$ и $Д_2$.

Доказательство того, что $K_n \subset Д_n$, аналогично (6): существует семь пространственных полос $П_i$, края каждой из которых содержат четыре точки K_0 (три из этих полос дают в пересечении куб L, а остальные четыре дают в пересечении тетраэдр $ABCD$), и $\bigcap_{i=1}^{7} 3^n П_i = Д_n$. Объем многогранника $Д_n$ находится так же, как объем многогранника $Д_1$ — он равен

$$3^{3n+1} - 4\cdot\left(\frac{3^n-1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot\left(\frac{3^n+1}{2}\right)^3\cdot\frac{1}{2} = \\ = \frac{5\cdot 3^{3n} - 3^{n+1}}{2}.$$

Таким образом, при большом n многогранник $W^n(\Phi)$ по форме приближается к полуправильному многограннику *кубооктаэдру* — выпуклой оболочке двенадцати середин ребер куба (чтобы придать этим словам точный смысл, удобно ввести «нормирующий множитель» $\frac{1}{3^n}$ и говорить о *предельном поведении* многогранника, гомотетичного $W^n(\Phi)$ с коэффициентом $\frac{1}{3^n}$; см. ниже пункт 4).

Заметим, что, как и в задаче б), в пространственной задаче не существенно, что тетраэдр $ABCD$ — правильный; это удобно лишь тем, что все фигуры получатся симметричными (в общем случае вместо куба мы имели бы параллелепипед и т. д.).

Перечислим в заключение еще несколько общих свойств «операции W» (о некоторых из них нам сообщили в письмах по поводу решения задачи М515).

1. В задаче б) $Ш_n = W^n(\triangle ABC)$, в следующих пунктах $Д_n = W^n$ (*тетраэдр* $ABCD$). Вообще, если обозначить выпуклую оболочку фигуры Φ через $\mathcal{B}(\Phi)$, то $\mathcal{B}(W(\Phi)) = W(\mathcal{B}(\Phi))$. В частности, если фигура Φ — выпуклая, то $W(\Phi)$ — тоже. Это можно доказать, используя такое определение операции Φ на языке векторов:

$$W(\Phi) = \{M'' : \overrightarrow{OM''} = 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'};\ M,\ M' \in \Phi\}$$

(здесь O — любая фиксированная точка).

Будем далее считать Φ выпуклой фигурой.

2. Если Φ — центрально-симметричная фигура с центром O, то $W(\Phi) = 3\Phi$ и вообще $W^n(\Phi) = 3^n\Phi$.

3. Для любого Φ фигуру $W^n(\Phi)$ можно получить как пересечение полос $3^n П$, где $П$ — всевозможные опорные полосы для Φ (различных направлений); при этом если Φ — многоугольник на плоскости, то можно ограничиться рассмотрением полос $П$, края которых содержат по крайней мере три (для многогранника Φ — четыре) его вершины.

4. При $n \to \infty$ существует предел $S^*(\Phi)$ фигуры, гомотетичной $W^n(\Phi)$ с коэффициентом $^1/_3{}^n$ и некоторым центром O (надо еще определить, что значит расстояние между фигурами! См. по этому поводу книгу Д. О. Шклярского, Н. Н. Ченцова и И. М. Яглома «Геометрические оценки и задачи из комбинаторной геометрии» (М., «Наука», 1974), с. 14—17). Эту предельную фигуру можно получить как пересечение всех опорных полос фигуры Φ, сдвинутых параллельно так, чтобы точка O была их общим центром симметрии, или — как множество — $\{M^* : \overrightarrow{OM^*} = (\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM'})/2;\ M,\ M' \in \Phi\}$. Фигура $S^*(\Phi)$ центрально-симметрична и выпукла. Ее называют иногда *симметризацией Минковского* фигуры Φ. О ее свойствах см. задачу 57 в книге В. Г. Болтянского и И. М. Яглома «Выпуклые фигуры» (М., ГТТИ, 1951).

Н. Васильев

Ф527. *В схеме, показанной на рисунке 8, ЭДС батареи $\mathcal{E}=100$ В, ее внутреннее сопротивление $r=100$ Ом, емкость конденсатора $C=200$ мкФ и сопротивление нагревателя $R=10$ Ом. Ключ К переключается между контактами а и б с частотой $f=10$ раз в секунду. При подключении его к клемме а конденсатор успевает полностью зарядиться, а при подключении к клемме б — полностью разрядиться. Чему равен коэффициент полезного действия схемы? Во сколько раз он выше, чем при непосредственном подключении нагревателя к батарее? Какая мощность выделяется на сопротивлении R?*

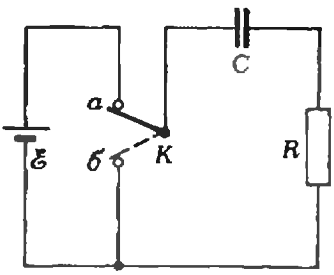


Рис. 8.

При подключении конденсатора к батарее он заряжается до напряжения $U=\mathcal{E}$, получая заряд $q=CU=C\mathcal{E}$. Энергия конденсатора становится равной при этом $W=\frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$. Батарея же совершает работу $A=\mathcal{E}q=C\mathcal{E}^2$. Следовательно, количество тепла Q, выделяющееся при этом в цепи, равно $A-W=\frac{1}{2}C\mathcal{E}^2$. Батарея соединена с нагревателем последовательно, и в любой момент времени по ним течет один и тот же ток. Следовательно, тепло распределяется между ними пропорционально их сопротивлениям, то есть на нагревателе R выделяется тепло

$$Q_1=(A-W)\frac{R}{R+r}=\frac{C\mathcal{E}^2}{2}\,\frac{R}{R+r}.$$

При замыкании конденсатора на нагреватель (ключ K в положении *б*) конденсатор полностью разряжается и его энергия W переходит в тепло, выделяющееся на нагревателе:

$$Q_2=W=\frac{C\mathcal{E}^2}{2}.$$

Итак, за один полный цикл на нагревателе R выделяется тепло

$$Q=Q_1+Q_2=\frac{C\mathcal{E}^2}{2}\,\frac{R}{R+r}+\frac{C\mathcal{E}^2}{2}=\frac{C\mathcal{E}^2}{2}\left(\frac{2R+r}{R+r}\right).$$

КПД цепи равен

$$\eta_1=\frac{Q}{A}=\frac{\frac{C\mathcal{E}^2}{2}\,\frac{2R+r}{R+r}}{C\mathcal{E}^2}=\frac{2R+r}{2(R+r)}=\frac{6}{11}.$$

При непосредственном подключении нагревателя к батарее КПД цепи равен

$$\eta_2=\frac{R}{R+r}=\frac{1}{11}.$$

Таким образом, $\eta_1/\eta_2=6$.

Найдем мощность P, выделяющуюся на нагревателе. За 1 секунду происходит $n=f/2$ полных циклов переключения ключа K. Следовательно,

$$P=nQ=\frac{f}{2}\,\frac{C\mathcal{E}^2}{2}\left(\frac{2R+r}{R+r}\right)\approx 5{,}5\ \text{Вт}.$$

Примечание. В условии задачи предлагается считать, что конденсатор успевает полностью перезарядиться за время $t=1/f=0{,}1$ секунды. Проверим, насколько справедливо это предположение.

Когда конденсатор подключается к батарее, появляющийся ток равен $I=\mathcal{E}/(R+r)$. За время τ, за которое конденсатор заряжается до напряжения $U=\mathcal{E}$, через батарею проходит полный заряд $q=C\mathcal{E}$. Следовательно, при токе $I=\mathcal{E}/(R+r)$ конденсатор заряжается за время $\tau=q/I=C\mathcal{E}(R+r)/\mathcal{E}=C(R+r)=2{,}2\cdot10^{-2}$с. В действительности же по мере увеличения напряжения на конденсаторе ток будет уменьшаться, и конденсатор до напряжения $U=\mathcal{E}$ не зарядится никогда. Однако, поскольку $t\gg\tau$, приближенно можно считать, что конденсатор успевает полностью зарядиться.

А. Зильберман

◆

Ф528. *На рисунке 9 приведена зависимость тока через автомобильную лампочку от напряжения на ней. Лампочку подключают к источ-*

Мощность P, выделяющаяся на лампочке, равна $U_л I$, где $U_л$ — напряжение на лампочке, I — ток в цепи. Возможные соотношения между $U_л$ и I определяются вольтамперной характеристикой лампочки (рис. 9). С другой стороны, напряжение на лампочке определяется соотно-

нику постоянного напряжения $U=10$ В последовательно с резистором с сопротивлением $R=4$ Ом. Определить мощность лампочки.

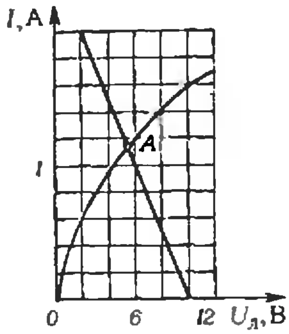


Рис. 9.

шением

$$U_л=U-U_R=U-IR,$$

где U_R — напряжение на резисторе. Следовательно, при данном значении сопротивления R $U_л$ и I определяются точкой пересечения прямой $U-IR=10-4I$ (ее называют нагрузочной прямой) с вольтамперной характеристикой лампочки. Проведя на графике нагрузочную прямую, найдем значения $U_л$ и I, соответствующие точке A:

$$U_л\approx5{,}5\ В,\quad I\approx1{,}2\ А.$$

Следовательно, мощность, выделяющаяся на лампочке, равна

$$P=U_лI\approx6{,}6\ Вт.$$

И. Слободецкий

Ф529. *Используя фотографию, сделанную для рекламного плаката (рис. 10), определите: 1) фокусное расстояние объектива фотоаппарата; 2) на каком расстоянии от ладоней рук располагался объектив при фотографировании; 3) размер рыбы, пойманной рыбаком; 4) диаметр объектива (предполагая, что размытие деталей изображения на фотографии не превосходит 0,2 мм). Объектив фотоаппарата рассматривать как тонкую линзу.*

◆

На фотографии сильно искажена перспектива. Различные детали объекта (лицо рыбака, ладони рук и т. д.) сфотографированы с различным увеличением.

Увеличением принято называть отношение размеров изображения и предмета, равное отношению расстояний от линзы до плоскости изображения (то есть до фотопленки) и от предмета до линзы. В нашем случае увеличение всех деталей меньше единицы. Заметная разница в увеличении лица и рук могла получиться лишь при фотографировании с близкого расстояния.

Примем для оценок, что размер лица рыбака $l_1\approx20$ см, ширина ладоней его рук $l_2\approx10$ см, а расстояние от лица до ладоней вытянутых вперед рук $a\approx50$ см. Обозначим расстояние от ладоней рук до объектива через x, а расстояние от объектива до фотопленки через y. На фотографии размер лица $h_1\approx1{,}5$ см, ширина ладоней $h_2\approx1{,}5$ см. Увеличения Γ_1 и Γ_2 этих деталей выражаются отношениями

$$\Gamma_1=\frac{h_1}{l_1}=\frac{y}{x+a},\quad \Gamma_2=\frac{h_2}{l_2}=\frac{y}{x},$$

откуда

$$x=\frac{l_2}{h_2}y,\quad y=\frac{ah_1h_2}{l_1h_2-l_2h_1}.$$

Из этих выражений после подстановки числовых значений найдем

$$x\approx50\ см,\quad y\approx7{,}5\ см.$$

Рис. 10.

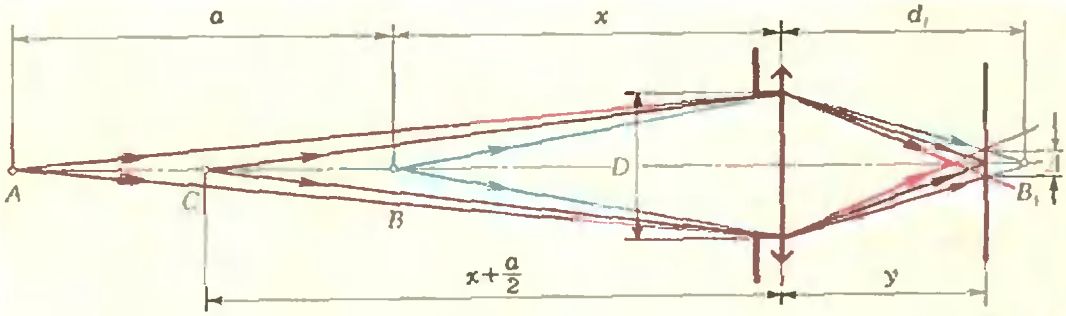


Рис. 11.

Поскольку на фотографии расстояние между ладонями $h \approx 8$ см, мы можем заключить, что размер пойманной рыбаком рыбы

$$l = \frac{h}{\Gamma_2} = \frac{hl_2}{h_2} \approx 53 \text{ см}.$$

Для определения фокусного расстояния F объектива и его диаметра D необходимо принять во внимание, что фотографируемый объект в нашем случае имеет значительный размер вдоль оптической оси (глубину). Ближняя точка (ладони) находится на расстоянии около 50 см от объектива, а дальняя точка (лицо) — на расстоянии около 100 см. Ясно, что объектив не может дать одновременно четкие изображения обеих этих точек (и всех промежуточных) на фотопленке, которая расположена на расстоянии $y \approx 7{,}5$ см за объективом. Ход лучей от дальней (A) и ближней (B) точек объекта поясняет рисунок 11. На фотопленке четко изображается лишь некоторая промежуточная точка C, лежащая где-то между ближней и дальней точками. Четкие изображения точек A и B лежат соответственно перед и за фотопленкой, а на пленке их изображения получаются в виде пятен размером Δ, не превышающим по условию задачи 0,2 мм. Приняв для оценок, что точка фокусировки C расположена на расстоянии $x+a/2 \approx 75$ см перед объективом, запишем, используя формулу линзы,

$$\frac{1}{x+a/2} + \frac{1}{y} = \frac{1}{F}.$$

Отсюда после подстановки числовых значений находим: $F \approx 6{,}8$ см. Как видно из рисунка 11, для того чтобы при значительной глубине объекта резкость изображения всех деталей была достаточно высокой, объектив фотоаппарата должен быть сильно задиафрагмирован, то есть диаметр D открытой части объектива должен быть достаточно мал. Определяя по формуле линзы положение изображения B_1 ближней точки B —

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{d_1} = \frac{1}{F}$$

— и составляя очевидную пропорцию

$$\frac{D}{d_1} = \frac{\Delta}{d_1 - y},$$

найдем после подстановки числовых значений: $d_1 \approx 7{,}9$ см; $D \approx 4$ мм. (Разумеется, для оценки диаметра объектива можно было бы использовать положение изображения дальней точки A.)

Итак, проведенные нами оценки дают:
1) фокусное расстояние объектива фотоаппарата $F \approx 6{,}8$ см; 2) при фотографировании объектив располагался на расстоянии $x \approx 50$ см от ладоней; 3) рыбаку удалось поймать рыбу размером около 53 см; 4) объектив фотоаппарата был задиафрагмирован до 4 мм.

С. Козел

В. Григоренко

Когда критических точек слишком много

В п. 55 пособия «Алгебра и начала анализа 9» указывается правило исследования критической точки на экстремум (теоремы 1, 2). Всегда ли это правило применимо? О неожиданных ситуациях, в которых им нельзя пользоваться, рассказывается в этой статье.

Напомним, что внутренняя точка x_0 области определения функции f называется *критической* для этой функции, если $f'(x_0)=0$ или $f'(x_0)$ не существует.

Предположим (для простоты изложения), что функция f непрерывна в точке x_0. (Из этого предположения автоматически следует, что точка x_0 является внутренней точкой области определения функции f.)

Согласно достаточному условию максимума («Алгебра и начала анализа 9», п. 55, теорема 2), *если существует такая окрестность* $]x_0-\delta;\ x_0+\delta[$ *точки* x_0, *в левой полуокрестности* $]x_0-\delta;\ x_0[$ *которой* $f'(x)>0$ *и в правой полуокрестности* $]x_0;\ x_0+\delta[$ *которой* $f'(x)<0$, *то точка* x_0 *является точкой максимума функции* f.

Естественно спросить: верно ли обратное? Уточним наш вопрос: пусть функция f дифференцируема в некоторой окрестности точки x_0 и пусть эта точка является точкой максимума функции f; обязательно ли у точки x_0 существует такая окрестность, в которой производная «меняет знак с плюса на минус»? Грубо говоря, является ли достаточное условие максимума необходимым?

Оказывается, ответ на эти вопросы отрицательный.

Пример 1. *Функция*

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right), & \text{если } x\neq 0\\ 2, & \text{если } x=0\end{cases}$$

дифференцируема на всей числовой прямой $\mathbf{R}$, *точка* 0 *является точкой максимума функции* f *и в каждой из полуокрестностей любой окрестности* $]-\delta;\ \delta[$ *точки* 0 *производная* f' *меняет знак* (рис. 1*)).

Действительно, функция f, очевидно, дифференцируема в любой точке $x_0\neq 0$; она дифференцируема также в точке 0, так как

$$f'(0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left[-h\left(2+\sin\frac{1}{h}\right)\right]=0.$$

(Последнее равенство вытекает из того, что $\lim\limits_{h\to 0}(-h)=0$, а функция $y=2+\sin\frac{1}{h}$ ограничена на $\mathbf{R}$, т. е. в силу аналога теоремы 2 из п. 28 пособия «Алгебра и начала анализа 9».) Точка 0 является точкой максимума f, так как при $x\neq 0$, очевидно, $f(x)<f(0)$. Наконец, в каждом из интервалов $]-\delta;\ 0[$ и $]0;\ \delta[$ производная

$$f'(x)=-4x-2x\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}$$

*) На всех рисунках масштабы по осям — разные. В окрестности нуля рисунки утрачивают необходимую степень подробности и становятся неверными.

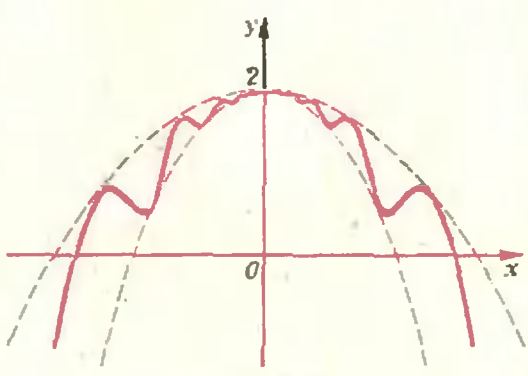


Рис. 1.

меняет знак (объяснение «на пальцах»: при $x \to 0$ слагаемые $-4x$ и $-2x \sin \frac{1}{x}$ стремятся к 0 и, значит, делаются сколь угодно малыми, в то время как слагаемое $\cos \frac{1}{x}$ постоянно меняет знак, переходя от $+1$ к -1 и наоборот).

Причина такой непривычной ситуации в том, что *в любой окрестности точки 0 имеется бесконечно много критических точек функции f* (см. рис. 1); проходя через них, производная f' меняет знак.

Подобного «скопления» критических точек, конечно, не бывает, если у функции f конечное число критических точек или по крайней мере конечное число на любом отрезке $[a; b]$ (как, например, у функции $y = \sin x$). В этом случае на каждом интервале между соседними критическими точками производная f' сохраняет знак (это утверждение, вероятно, геометрически очевидно, но доказать его не очень просто).

В случае «скопления» критических точек вокруг некоторой точки x_0 исследовать функцию на экстремум в этой точке по знаку производной нельзя.

Пример 2. *Существуют такие функции f и g, дифференцируемые на $\mathbf{R}$, что точка 0 является точкой максимума для одной из них и точкой минимума — для другой, но во всех точках некоторой окрестности точки 0 производные $f'(x)$ и $g'(x)$ имеют одинаковый знак.*

Мы не будем приводить для нужных функций явных формул, а ограничимся изображением их графиков (рис. 2; заметьте, что примеры функций не обязательно строить «на языке формул», их можно просто рисовать).

А как же поступить в таком случае? Никакого общего совета мы дать не можем. Если у вас из тех или иных соображений возникло предположение, что подобная точка x_0 является, скажем, точкой минимума функции f, можно попытаться «в лоб» доказать неравенство $f(x) > f(x_0)$ для всех x из некоторой окрестности точки x_0.

В примере 1 точка 0, вокруг которой «скопились» критические точки, тоже была критической. Однако это не обязательно.

Пример 3. *В любой окрестности точки 0 имеется бесконечно много критических точек функции*

$$f(x) = \begin{cases} x + x^2 \cos \frac{1}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0 & \text{, если } x = 0, \end{cases}$$

но точка 0 не является критической.

Проверьте, что

$$f'(x) = \begin{cases} 1 + \frac{2}{x} \sin \frac{1}{x^2} + \\ + 2x \cos \frac{1}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 1 & \text{, если } x = 0. \end{cases}$$

Так как в любой окрестности точки 0 производная f' меняет знак (почему?), она в любой окрестности обращается в 0 *); это — то же самое

*) Это в данном случае несложно доказать, воспользовавшись теоремой из п. 84 пособия «Алгебра и начала анализа 10».

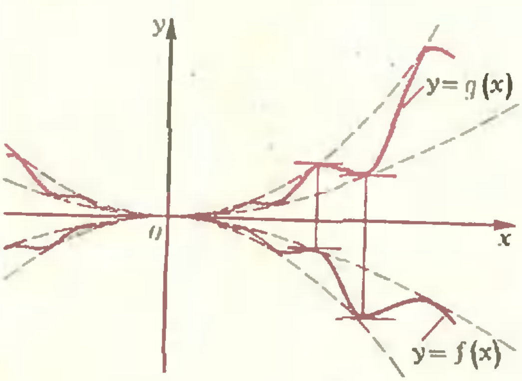


Рис. 2

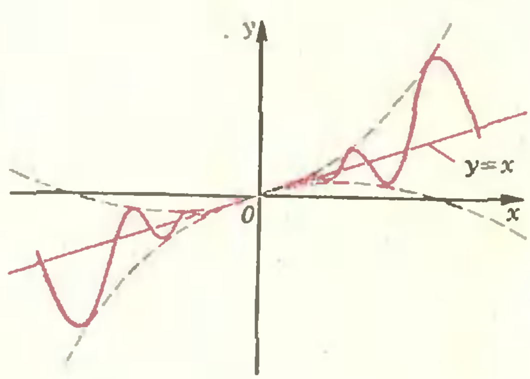


Рис. 3.

утверждение, о котором говорилось перед примером 2. Поскольку $f'(0)=1$, точка 0 не является критической (рис. 3).

Производная f' из примера 3 разрывна в точке 0 (проверьте).

Задачи

1. Докажите, что если производная f' функции f непрерывна в точке x_0 и в любой окрестности этой точки имеется бесконечно много критических точек функции f, то сама точка x_0 также является критической для f.

2. Докажите, что функции

$$f(x)=\begin{cases} x^2\left(2+\sin\frac{1}{x}\right), & \text{если } x\neq 0, \\ 0 & \text{, если } x=0, \end{cases}$$

и

$$g(x)=\begin{cases} x^2\left(-2+\sin\frac{1}{x}\right), & \text{если } x\neq 0, \\ 0 & \text{, если } x=0 \end{cases}$$

удовлетворяют условию примера 2. Сделайте эскиз их графиков.

3. Исследуйте на экстремум точку 0 для функций:

а)
$$f(x)=\begin{cases} \cos\frac{1}{x}, & \text{если } x\neq 0, \\ 0 & \text{если } x=0; \end{cases}$$

б)
$$f(x)=\begin{cases} x^2\left(1+\sin\frac{1}{x}\right), & \text{если } x\neq 0, \\ 0 & \text{, если } x=0; \end{cases}$$

в)
$$f(x)=\begin{cases} |x|\left(2+\cos\frac{1}{x}\right), & \text{если } x\neq 0, \\ 0 & \text{, если } x=0; \end{cases}$$

г)
$$f(x)=\begin{cases} \sqrt{x}\sin\frac{1}{x}, & \text{если } x>0, \\ 0 \quad , & \text{если } x=0, \\ \sqrt{-x} \quad , & \text{если } x<0 \end{cases}$$

Про светопровод

В 1841 году швейцарский профессор физики Колладон продемонстрировал замечательное сооружение — светящийся фонтан. Это красивое зрелище было основано на явлении полного внутреннего отражения.

Полное внутреннее отражение возможно при переходе света из оптически более плотной среды в оптически менее плотную среду (показатель преломления первой среды больше показателя преломления второй среды). Когда угол падения луча света на границу раздела двух сред становится больше некоторого предельного, луч не проходит через границу раздела — он отражается от нее и «возвращается» в оптически более плотную среду. Если после первого отражения луч попадает на границу раздела «более плотная оптическая среда — менее плотная» вновь под углом, больше предельного, то ситуация повторяется. Свет, претерпевая многократно полное внутреннее отражение, не будет выходить за пределы оптически более плотной среды — световой поток будет распространяться внутри среды с относительно малыми потерями на поглощение и рассеяние. Предельный угол зависит только от отношения показателей преломления сред. Для границы раздела вода — воздух, например, этот угол равен 49°.

Теперь можно понять, как «работает» светящийся фонтан. Невидимый для наблюдателя источник «посылает» лучи света внутрь струи. Изогнута струя фонтана так, что эти лучи не выходят за ее пределы — каждый раз на границу вода — воздух лучи попадают под углом 49°. Там, где струя распадается на отдельные брызги, это условие нарушается, и наблюдатель видит сноп светящихся брызг.

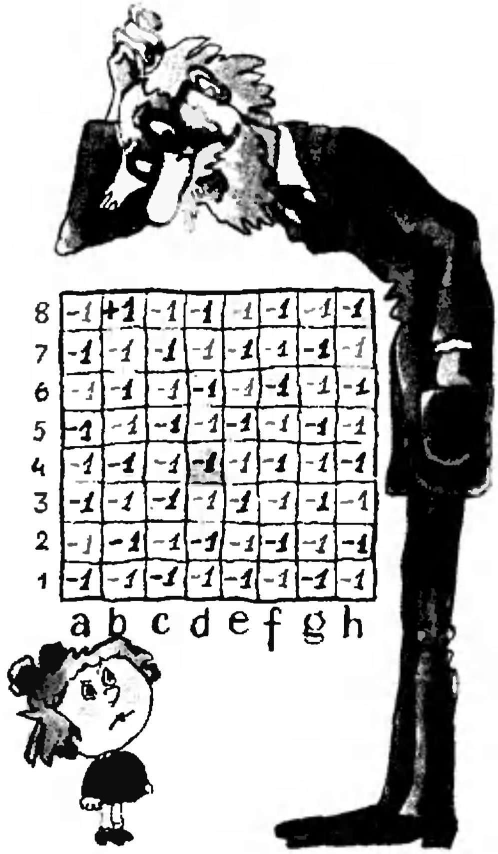
На свойстве полного внутреннего отражения построены так называемые световоды — изогнутые сплошные стержни, внутри которых свет проходит практически без потерь на поглощение и рассеяние. Они делаются из стекла, плексигласа, различных прозрачных пластмасс. Световоды делают и из собранных в пучок тонких светопроводящих нитей. Радиусы изгибов должны быть такими, чтобы выполнялось «условие предельного угла».

Световоды находят сейчас широкое применение. Они используются в медицине в качестве зондов; в технике при контроле работы труднодоступных для наблюдения устройств и деталей.

Очень красивы декоративные светильники из световодов. Один из таких светильников — на первой странице нашей обложки.

Т. П.

квант для младших школьников



Задачи

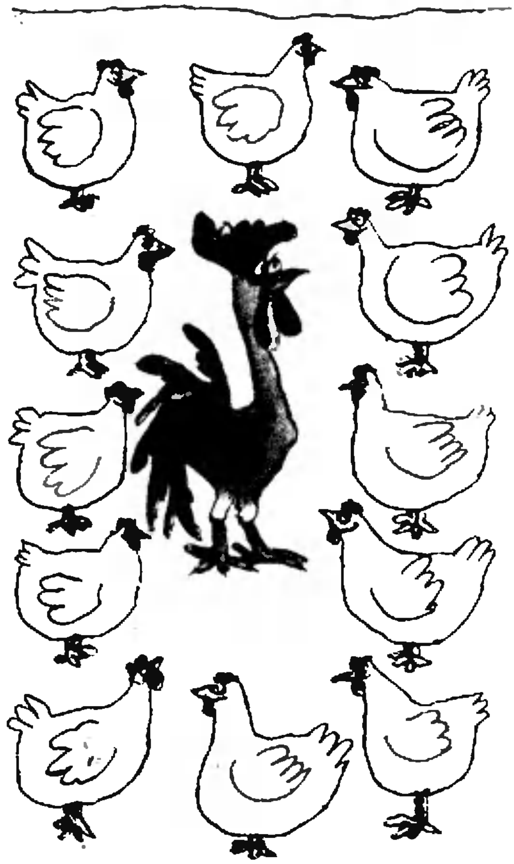
1. В треугольнике длина одной стороны равна 6,31 м, длина другой стороны — 0,82 м. Чему равна длина третьей стороны, если известно, что она выражается целым числом метров?

2. На окружности расположены точки: 1977 белых и одна красная. Рассматриваются всевозможные многоугольники с вершинами в этих точках. Каких среди них будет больше: с красной вершиной или без нее?

3. Пусть a — произвольное 1979-значное число, делящееся на 9. Сумму цифр этого числа обозначим буквой A. Сумму цифр числа A обозначим буквой B. Сумму цифр числа B — буквой C. Найдите число C.

4. На клетке b8 шахматной доски мелом написано $+1$, а во всех остальных клетках -1. За одну операцию разрешается сменить все знаки на противоположные либо на одной (любой) вертикали, либо на одной (любой) горизонтали. Докажите, что, сколько бы операций мы ни выполнили, мы никогда не получим $+1$ во всех клетках доски одновременно.

5. Задача-шутка. Три курицы за три дня снесли три яйца. Сколько яиц снесут двенадцать кур за двенадцать дней?



Животные на ... плоскости

В пятом классе на уроках математики вы начинаете изучать координатную плоскость. Учительница предлагает вам по координатам точки найти ее на плоскости, определить координаты той или иной заданной на плоскости точки, построить график какой-нибудь функции... Чтобы эти задания сделать более веселыми, «Квант» три года назад объявил «соревнование художников». На координатной плоскости задаются координаты нескольких точек. Соседние точки соединяются отрезками. Если точки найдены правильно, то в результате получится какой-нибудь рисунок: например, слон, собака, кошка, мышка, белка, песец, пингвин, утенок, лось, бегущая лошадь, лисенок, тюлень (эти рисунки прислали в редакцию ученики средней школы № 5 г. Среднеуральска Свердловской области, учитель математики — Т. Н. Сергеева). Сегодня мы предлагаем «записать» этих животных «в координатах» и, кроме того, нарисовать такие картинки:

1. (3; 3), (0; 3), (—3; 2), (—5; 2), (—7; 4), (—8; 3), (—7; 1), (—8; —1), (—7; —2), (—5; 0), (—1; —2), (0; —4), (2; —4), (3; —2), (5; —2), (7; 0), (5; 2), (3; 3), (2; 4), (—3; 4), (—4; 2); глаз (5; 0).

2. (—9; 7), (—7; 8), (—6; 10), (—3; 10), (—1; 7), (8; 1), (15; —2), (13; —4), (6; 0), (4; —1), (3; —1), (1; —7), (—1; —7), (1; —6), (2; —1), (0; —1), (—2; —7), (—4; —7), (—2; —6), (—1; —1), (—5; 2), (—6; 5), (—7; 6), (—9; 7); глаз (—5; 8).

3. (1; 7), (0; 10), (—1; 11), (—2; 10), (0; 7), (—2; 5), (—7; 3), (—8; 0), (—9; 1), (—9; 0), (—7; —2), (—2; —2), (—3; —1), (—4; —1), (—1; 3), (0; —2), (1; —2), (0; 0), (0; 3), (1; 4), (2; 4), (3; 5), (2; 6), (1; 9), (0; 10); глаз (1; 6).

4. (—5; 1), (—6; 3), (—6; 6), (—3; 8), (—1; 10), (2; 11), (3; 10), (3; 9), (6; 10), (7; 9), (7; 7), (4; 4), (4; 1), (2; —1), (2; —4), (5; —4), (6; —7), (5; —8), (1; —10), (1; —12), (—4; —12), (—7; —9), (—7; —7), (—6; —6), (—4; —7), (—4; —5), (—6; —4), (—6; —2), (—4; —2), (—3; —1), (—5; 0), (—5; 1); глаз (—3; 4), (—2; 4), (—2,5; 3), (—3; 4).

5. (—9; 4), (—5; 4), (—3; 5), (—7; 7), (—8; 7), (—10; 8), (—9; 8), (—10; 10), (—8; 9), (—10; 11), (—8; 10), (—9; 12), (—7; 10), (—5; 9), (—2; 8), (—1; 5), (0; 5), (—1; 7), (—1; 8), (1; 10), (2; 10), (2; 9,5), (3; 9), (1; 9), (0; 8), (0; 7),(1; 4), (—1; 3), (—3; 2), (—6; 2), (—6; 3), (—9; 4); глаз (1,5;9,5).

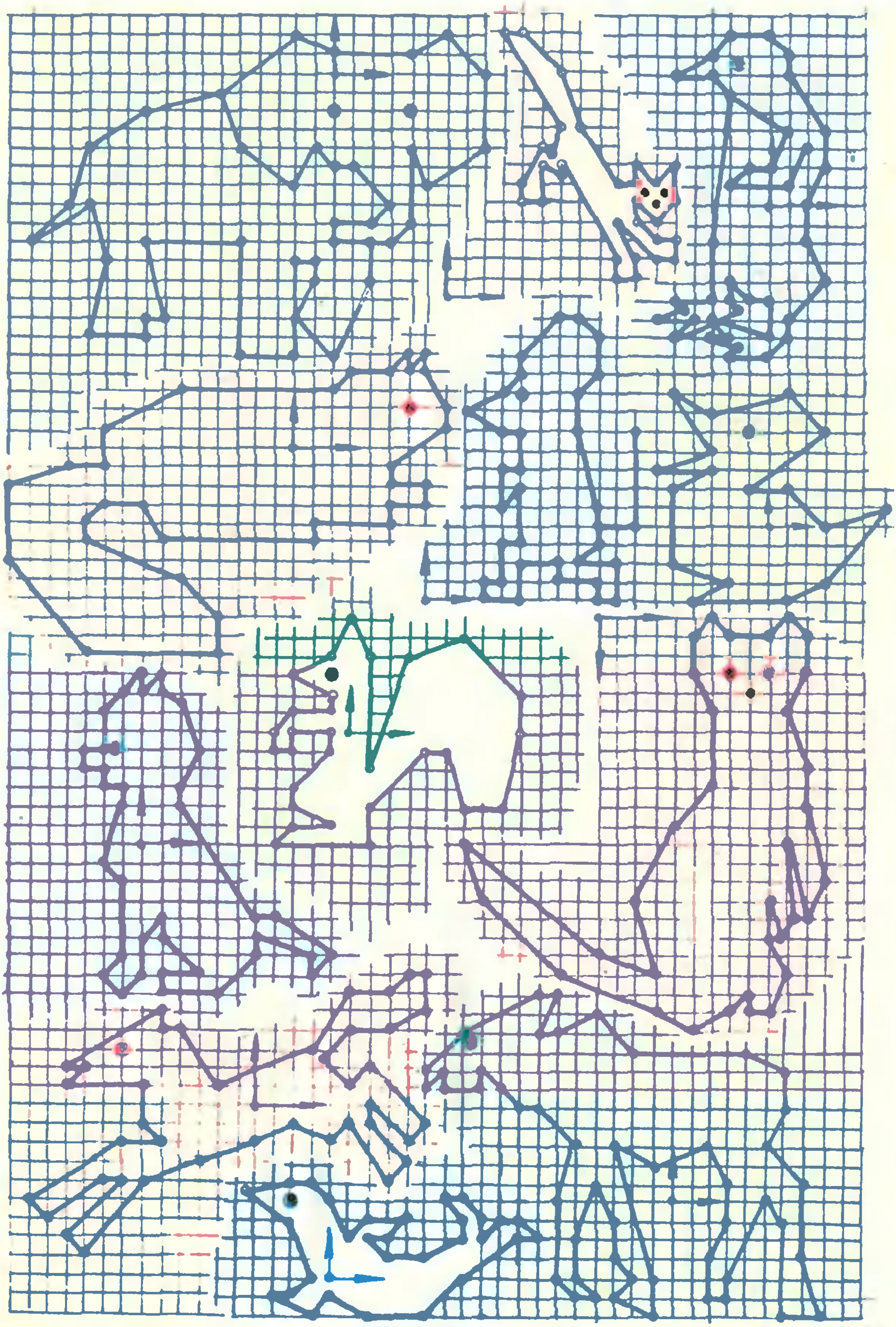
(Задачи 1—5 составлены ребятами из Среднеуральска.)

6. (7; 0), (7; —1), (6,5; —2,5), (7; —5,5), (6; —6,5), (5; —6,5), (6; —5,5), (5; —2), (3,5; —0,5), (1; —1), (—2; —1), (—2; —2), (—3; —3), (—3; —5,5), (—4; 6,5), (—5; —6,5), (—4; —5,5), (—4; —2), (—5; 0); (—5; 2), (—7; 4), (—9,5; 4,5), (—10; 5,5), (—7,5; 5,5), (—7; 6), (—6; 6), (—5; 7), (—5; 6), (—3; 4), (—1; 3), (2; —2), (5; 3), (7; 2), (8; —2), (7; —3) и (5,5; —4,5), (5,5; —5,5), (4,5; —6,5), (4,5; —5,5), (5; —2) и (—2; —2), (—1,5; —5,5), (—2,5; —6,5), (—3,5; —6,5), (—2,5; —5,5), (—3; —3); глаз (—7; 5,5).

7. (2; 12), (2; 13), (3; 13,5), (4; 13,5), (5; 13), (3; 4), (8; 4), (6; 1), (3; 1), (2; 2), (2; 4), (4; 11), (4; 12,5), (3,5; 12,5), (2; 11), (2; 12), (3; 12) и (3; 3), (4; 2), (6; 2); глаз (2,5; 12,5).

(В задачах 6 и 7, составленных нашим читателем А. Наимовым из Таджикистана, точки, разделенные союзом «и», соединять не нужно.)

Кто у вас получился?



Будьте внимательны! У каждой фигурки — своя система координат. Оси координат помечены стрелочками.

Е. Кузнецов

Глаз на вступительных экзаменах

Во многих оптических задачах, предлагаемых на приемных экзаменах, человеческий глаз выступает не только как неявно предполагаемый инструмент для рассматривания изображений, создаваемых той или иной оптической системой, но и как непосредственный элемент задачи. Например, глаз может служить ограничителем световых пучков или предметом, который рассматривают через оптическую систему.

Рассмотрим некоторые из таких задач.

Задача 1. *На дне водоема глубиной h лежит камушек (рис. 1). Где находится изображение этого камушка?*

Казалось бы, это простая задача. Действительно, идущие от камушка A лучи преломляются на границе раздела вода — воздух, и в точке пересечения продолжений преломленных лучей должно находиться изображение. Однако посмотрите на рисунок 1. Луч AB, перпендикулярный границе раздела, выйдет в воздух, не преломившись. Лучи AC и AD испытают преломления в точках C и D и пойдут по путям CF и DG соответственно. Оказывается, продолжения трех выбранных преломленных лучей (BE, CF и DG) **не пересекаются в одной точке!** Другими словами, не получается точечного изображения точки A!

Может быть, все дело в неаккуратном построении? Проверим расчетами. Запишем уравнения преломленных лучей BE, CF и DG соответственно (см. рис. 1):

$$x = 0, \qquad (1)$$

$$y = x \operatorname{ctg}\beta_2 - h \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{ctg}\beta_2, \qquad (2)$$

$$y = x \operatorname{ctg}\beta_3 - h \operatorname{tg}\alpha_3 \operatorname{ctg}\beta_3. \qquad (3)$$

Добавим еще равенства, связывающие углы:

$$\left.\begin{array}{l}\sin\beta_2 = n\sin\alpha_2,\\ \sin\beta_3 = n\sin\alpha_3.\end{array}\right. \qquad (4)$$

Нетрудно убедиться в том, что система уравнений (1) — (3) не имеет решения. В самом деле, продолжения лучей BE и CF пересекаются в точке I с координатами

$$x = 0, \quad y = -h \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{ctg}\beta_2,$$

лучей BE и DG — в точке H с координатами

$$x = 0, \qquad y = -h \operatorname{tg}\alpha_3 \operatorname{ctg}\beta_3 \neq$$
$$\neq h \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{ctg}\beta_2,$$

а лучей CF и DG — в точке K с координатами

$$x = h\,\frac{\operatorname{tg}\alpha_3 \operatorname{ctg}\beta_3 - \operatorname{tg}\alpha_2 \operatorname{ctg}\beta_2}{\operatorname{ctg}\beta_3 - \operatorname{ctg}\beta_2} \neq 0,$$

$$y = h \operatorname{ctg}\beta_2 \operatorname{ctg}\beta_3\,\frac{\operatorname{tg}\alpha_2 - \operatorname{tg}\alpha_3}{\operatorname{ctg}\beta_2 - \operatorname{ctg}\beta_3}.$$

Тогда непонятно, почему же мы можем видеть отчетливо предметы, находящиеся под поверхностью воды? Все дело в том, что зрачок нашего глаза имеет небольшие размеры (его диаметр порядка 5 мм), а смотрим

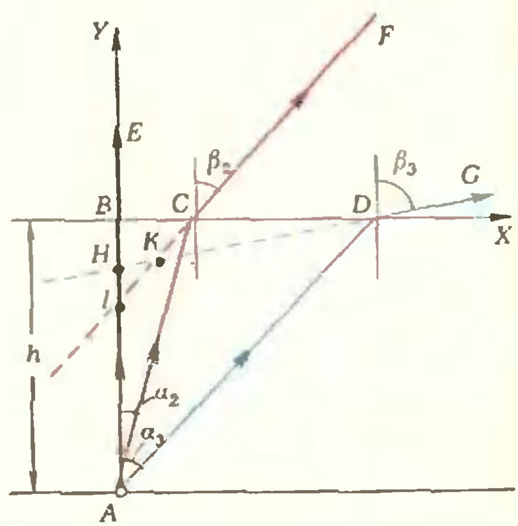


Рис. 1.

мы, как правило, с существенно бо́льших расстояний (обычно с расстояния наилучшего видения, равного 25 см), поэтому в зрачок попадает очень узкий пучок лучей, имеющих примерно одинаковые углы наклона. (Проверьте самостоятельно, что для лучей, попадающих в центр зрачка и на его края, система уравнений, аналогичных уравнениям (1) — (3), будет совместной, то есть продолжения преломленных лучей пересекутся в одной точке.)

Таким образом, мы можем видеть предметы, находящиеся под водой, благодаря тому, что зрачок нашего глаза является естественным ограничителем ширины световых пучков, создающих изображения.

З а д а ч а 2. *На дне сосуда, заполненного водой, лежит плоское зеркало. Человек, наклонившись над сосудом, видит изображение своего глаза в зеркале на расстоянии $d = 25$ см (рис. 2). Расстояние от глаза до поверхности воды $h = 5$ см. Показатель преломления воды $n = 4/3$. Определить глубину H сосуда.*

Самое главное при решении задач такого рода — аккуратно построить ход лучей. Пусть точка A — какая-то точка глаза человека. Для построения изображения точки нужно использовать, как минимум, два луча.

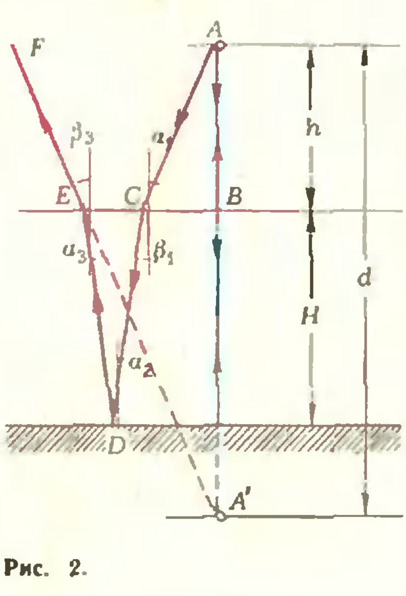


Рис. 2.

В качестве одного луча обычно берется луч, перпендикулярный границе раздела различных сред,— на рисунке 2 это луч AB. Он проходит границу раздела, не преломляясь, и отражается от зеркала без изменения угла наклона.

Вторым лучом пусть будет произвольный луч AC. На границе раздела воздух — вода (в точке C) он испытает преломление, дойдет до зеркала, в точке D отразится от него, еще раз преломится на границе раздела (в точке E) и выйдет в воздух по направлению EF.

На пересечении продолжений лучей BA и EF и будет находиться изображение A' выбранной точки A.

Теперь займемся расчетами. Поскольку размеры зрачка глаза малы (они существенно меньше расстояний d, h и H), все интересующие нас углы малы, и их тангенсы можно заменять синусами или самими углами. (Заметим, что на рисунке 2 для наглядности масштаб по горизонтали сильно растянут.) Как следует из рисунка 2,

$$|BC| = h \operatorname{tg} \alpha_1 = h \sin \alpha_1,$$

$$|CE| = 2H \operatorname{tg} \alpha_2 = 2H \operatorname{tg} \beta_1 = 2H \sin \beta_1 = 2H \sin \alpha_1/n,$$

$$d = h + |BA'| = h + |BE|/\operatorname{tg} \beta_3 = h + |BE|/\operatorname{tg} \alpha_1 = h + |BE|/\sin \alpha_1 = h + (|BC| + |CE|)/\sin \alpha_1 = 2h + 2H/n.$$

Отсюда

$$H = n\,(d/2 - h) = 10 \text{ см}.$$

Вы видели, что в этой задаче глаз является как источником светового излучения, так и его приемником. Подобные ситуации встречаются довольно часто при рассмотрении оптических систем, содержащих плоские или сферические зеркала.

* * *

Особый и весьма обширный класс составляют задачи, связанные с коррекцией недостатков глаза с помощью очков. Как известно, глаз человека способен *аккомодировать*, то есть «приспосабливаться» к резкому видению предметов, находящихся от него на различных расстояниях. В силу тех или иных причин пределы аккомодации не для всякого глаза одни и те же.

Если человек резко видит предметы, находящиеся не дальше некоторого расстояния, такой дефект зрения называют *близорукостью*. Если же человек хорошо видит предметы, расположенные не ближе какого-то расстояния, это — *дальнозоркость*. Такие дефекты, как близорукость и дальнозоркость, можно более или менее успешно компенсировать с помощью очков (именно компенсировать, а не излечить).

К чему же сводится роль очков? Очевидно, что *их линзы должны создавать изображения рассматриваемых предметов на удобных для данного глаза расстояниях*. Это значит, что одним из требований, предъявляемых к очковым линзам, является требование того, чтобы изображения предметов находились в пределах четкого видения глаза. Второе требование — полученные изображения должны быть, конечно же, прямыми. А прямые изображения, создаваемые тонкими линзами, всегда мнимые. Таким образом, линзы очков должны создавать прямые мнимые изображения на расстояниях, находящихся в пределах аккомодации глаза.

Разберем две конкретные задачи.

Задача 3. *Близорукий человек четко видит предметы, находящиеся не дальше 0,5 м от него. Какие очки следует прописать этому человеку, чтобы он мог любоваться звездами?*

Как мы уже говорили, очковая линза должна создавать мнимое изображение, расположенное на таком расстоянии, с которого глаз это изображение видит резко, в нашем случае — на расстоянии 0,5 м от глаза.

Поскольку изображение удаленного предмета (а звезды действительно удалены от наблюдателя) находится в фокальной плоскости линзы, данному человеку следует прописать очки с линзами, имеющими фокусное расстояние 0,5 м. При этом линзы должны быть рассеивающими, чтобы изображения были мнимыми.

Итак, близорукому человеку надо прописать очки с рассеивающими линзами оптической силы $D = -2$ диоптрии.

Задача 4. *Дальнозоркий человек резко видит предметы, расположенные не ближе $d = 1$ м от него. В каких очках он нуждается, чтобы читать газету, держа ее на расстоянии $d_0 = 25$ см от глаза?*

Сформулируем четко, что требуется от очковой линзы в данном случае. Эта линза должна создать мнимое изображение предмета, находящегося от нее на расстоянии $d_0 = 25$ см (небольшим зазором между глазом и линзой можно пренебречь), на расстоянии $f = d = 1$ м. Данных вполне хватает, чтобы воспользоваться формулой линзы:

$$D = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{f} = 3 \text{ дптр}$$

(знак «минус» стоит в формуле потому, что изображение должно быть мнимым).

Таким образом, дальнозоркому человеку нужны очки с собирающими линзами оптической силы $D = +3$ диоптрии.

Упражнения

1. Близорукий человек четко видит предметы, удаленные от него на расстояния от $d_1 = 10$ до $d_2 = 50$ см. При выписке рецепта на очки врач, правильно указав абсолютную величину оптической силы линз, забыл указать, что линзы отрицательные. В каких пределах этот человек будет резко видеть в выписанных очках?

2. Человек рассматривает отражения предметов в посеребренном стеклянном шаре диаметром $2R = 32$ см. С какого максимального расстояния он будет без очков резко видеть в шаре далекие предметы, если обычно он пользуется очками с оптической силой $D = 5$ дптр?

3. Человек рассматривает изображение своего глаза в плоском зеркале, расположенном на расстоянии $a = 20$ см. Если на пути лучей вплотную к зеркалу поставить собирающую линзу, то угловой размер изображения увеличится в 1,5 раза. При этом изображение останется мнимым. Каково фокусное расстояние линзы?

4. Человек рассматривает свое лицо в вогнутом зеркале, находящемся на расстоянии $a = 15$ см от него. Если он наденет очки, то это же зеркало располагает на расстоянии $b = 10$ см от себя. Какие очки он носит? Расстояние наилучшего зрения для человека с нормальным зрением принять равным $d_0 = 30$ см.

С. Овчинников, И. Шарыгин

Нестандартные задачи по стереометрии

Каждый, кто готовится к письменному экзамену по математике и изучает в этой связи варианты МГУ прошлых лет, обратит внимание на то, что, как правило, каждый вариант довольно резко разделяется на две части: на три-четыре относительно легкие задачи и одну-две значительно более трудные. В «трудные» входит либо нестандартная алгебраическая (или тригонометрическая) задача, либо задача по стереометрии.

Чтобы рассчитывать на успешную сдачу письменного экзамена, надо уделить достаточно большое внимание решению нестандартных задач. О нестандартных задачах по стереометрии *), отобранных из вариантов МГУ, и пойдет речь в настоящей статье.

Прежде всего подчеркнем важность построения удачного чертежа. При построении надо помнить, что проекция нарушает многие соотношения между элементами пространственной фигуры. Необходимо все время «держать в уме» истинные углы и длины. Не надо загромождать чертеж трудно изображаемыми деталями. Например, как правило, нет необходимости на чертеже изображать шары или биссекторные плоскости. С другой стороны, удачное дополнительное построение может не только прояснить структуру пространственной конфигурации, но и дать хорошую идею решения задачи. Очень полезно важные плоские элементы данной стереометрической фигуры, например, грани, сечения или проекции, изображать на отдельном чертеже.

З а д а ч а 1 (ВМК, 1974). *В треугольной пирамиде $SABC$ суммы трех плоских углов при каждой из вершин B и C равны $180°$ и $|SA| = |BC|$. Найти объем пирамиды, если площадь грани SBC равна $100\ см^2$, а расстояние от центра описанного шара до плоскости основания равно 3 см.*

Р е ш е н и е. Первое условие задачи является наиболее «неудобным» для использования. Чтобы сделать его более наглядным, рассмотрим развертку $S_1S_2S_3ABC$ пирамиды $SABC$ (рис. 1). Из первого условия следует, что точки S_1, B, S_3 лежат на одной прямой, как и точки S_1, C, S_2. Так как BC есть средняя линия в треугольнике $S_1S_2S_3$, $|S_2S_3| = 2\,|BC|$. С другой стороны, по условию задачи, $|AS_3| = |AS_2| = |BC|$. Таким образом, треугольник AS_2S_3 оказался вырожденным и правильной разверткой будет развертка, изображенная на рисунке 2. Отсюда немедленно следует, что все грани являются конгруэнтными треугольниками. Значит (докажите!), расстояния от центра описанного шара до всех граней равны. Если мы соединим центр описанного шара со всеми вершинами, то наша пирамида разобьется на четыре равновеликие пирамиды, объем каждой из которых равен $\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 100\ см^3 = 100\ см^3$.

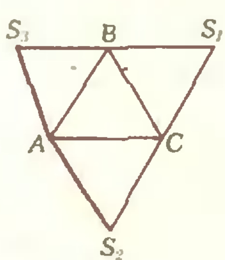


Рис. 1.

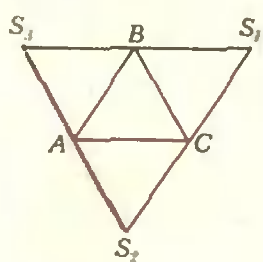


Рис. 2.

*) О более стандартных приемах решения стереометрических задач (в частности, об использовании векторов и координат) можно прочитать в «Кванте» — 1978, № 11, с. 42 и 1979, № 1, с. 45.

Поэтому объем исходной пирамиды равен 400 см³.

З а д а ч а 2 (Мехмат, 1975). *В правильную треугольную пирамиду $SABC$ с вершиной S и основанием ABC вписан шар единичного радиуса; двугранный угол между основанием пирамиды и боковой гранью равен $60°$. Доказать, что существует единственная плоскость, пересекающая ребра основания AB и BC в некоторых точках M и N таких, что $|MN| = 5$, касающаяся шара в точке, удаленной на равные расстояния от точек M и N, и пересекающая продолжение высоты пирамиды SK за точку K в некоторой точке D. Найти длину отрезка SD.*

Р е ш е н и е (рис. 3). Заметим сразу, что исходные данные полностью определяют нашу пирамиду.

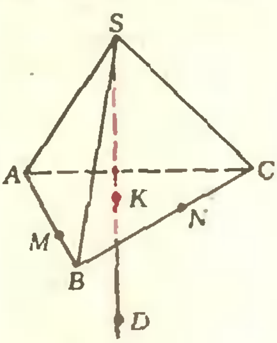
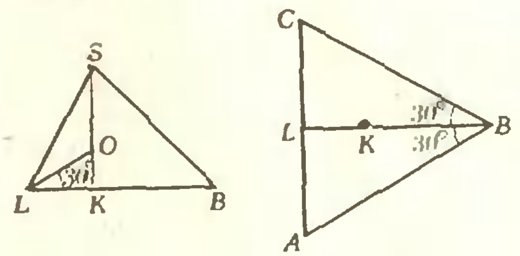
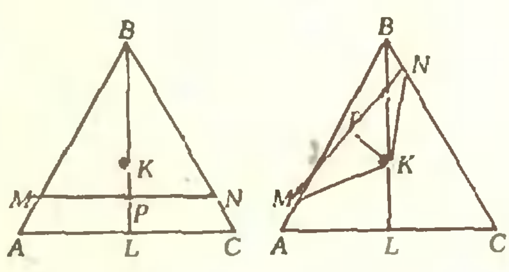


Рис. 3.



а) б)

Рис. 4.



а) б)

Рис. 5.

Вычислим, например, длину стороны основания. Рассмотрим для этого сечение, проходящее через высоту пирамиды SK и боковое ребро SB. (Такое сечение часто используется в решении задач на правильную пирамиду.) Это сечение пересекает грань ASC по апофеме SL (рис. 4а); точка O на нем — центр вписанного шара. Поскольку $|LK| = \sqrt{3}$, сторона основания равна 6 (рис. 4б). Аналогично вычисляем $|SK| = 3$.

Покажем теперь, что точки M и N однозначно определяются условиями задачи. Так как плоскость основания тоже касается шара, из условий задачи следует, что $|MK| = |KN|$ (докажите!). Пусть $|AM| = x$. Тогда априори либо $|CN| = x$, либо $|BN| = x$ (докажите!).

Рассмотрим п е р в ы й с л у ч а й (рис. 5а). Так как прямая MN параллельна основанию AC, $\frac{|MB|}{|AB|} = \frac{|MN|}{|AC|} = \frac{5}{6}$, откуда $x = 1$. Заметим, в частности, что $|PK| = |KL| - |PL| = \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$. Следовательно, плоскость, проходящая через (MN) и касающаяся шара, пересекает продолжение $[SK]$ за точку K.

Переходя ко в т о р о м у с л у ч а ю (рис. 5б), вычислим по теореме косинусов для треугольника MBN величину x. Получим $x = \frac{9 - 4\sqrt{3}}{3}$. (Проделайте вычисления самостоятельно и обоснуйте, почему достаточно ограничиться этим значением для x.) Определим теперь расстояние от точки K до отрезка MN. Для этого вычислим площадь треугольника MKN:

$$S_{MKN} = S_{MBK} + S_{KBN} - S_{MBN} =$$
$$= \frac{1}{2}(6-x)\,2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}x\sqrt{3} -$$
$$- \frac{1}{2}(6-x)\,x\,\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{25\sqrt{3}}{12}.$$

Следовательно,

$$KP = \left(2\cdot\frac{25\sqrt{3}}{12}\right) : 5 = \frac{5\sqrt{3}}{6} > 1.$$

Значит, плоскость, проходящая через (MN) и касающаяся шара, пересечет (SK) «выше» точки K, что противоречит условию задачи. Таким образом, второй случай невозможен. Существование и единственность искомой плоскости доказаны.

Перейдем к вычислению длины отрезка SD. На рисунке 6 снова изображено то же сечение, что и на рисунке 4, *а*. Из подобия треугольников PKD и QOD легко находим $|KD| = 6$. Отсюда $|SD| = |KD| + |SK| = 9$.

Задача 3 (ВМК, 1975). *Дана треугольная пирамида $ABCD$. Скрещиваются ребра AC и BD и AD и BC этой пирамиды перпендикулярны, ребра AB и CD равны, все ребра пирамиды касаются шара радиуса r. Найти площадь грани ABC.*

Решение. Проведем через ребро AD плоскость, перпендикулярную ребру BC (рис. 7). Очевидно (почему?), эта плоскость содержит высоту пирамиды, причем $(DE) \perp (BC)$.

$$|BE|^2=|AB|^2-|AE|^2=|BD|^2-|DE|^2;$$
$$|EC|^2=|AC|^2-|AE|^2=|CD|^2-|DE|^2.$$

Отсюда

$$|AB|^2+|CD|^2=|BD|^2+|AC|^2. \quad (1)$$

Аналогично

$$|AB|^2+|CD|^2=|BC|^2+|AD|^2. \quad (2)$$

Воспользуемся теперь тем, что *суммы длин противоположных сторон пространственного четырехугольника, все стороны которого касаются шара, равны.* (Докажите этот аналог известного свойства описанного четырехугольника самостоятельно.) Применяя это утверждение к пространственному четырехугольнику $ABCD$ со сторонами AB, BC, CD и DA, получим

$$|AB|+|CD|=|BC|+|AD|. \quad (3)$$

С другой стороны, можно считать, что $ABCD$ — пространственный четырехугольник со сторонами AB, BD, DC, CA. Поэтому

$$|AB|+|CD|=|BD|+|AC|. \quad (4)$$

Сопоставляя равенства (1) — (4) и полагая $|AB|=a$, получим две системы уравнений

$$\begin{cases}|BD|^2+|AC|^2=2a^2,\\ |BD|+|AC|=2a\end{cases}$$

и

$$\begin{cases}|BC|^2+|AD|^2=2a^2,\\ |BC|+|AD|=2a.\end{cases}$$

Из этих систем легко следует, что длины всех ребер нашей пирамиды равны a. Очевидно, центр O шара, касающегося всех ребер, совпадает с центром правильного тетраэдра $ABCD$. Но $r^2=r_1^2+r_2^2$, где r_1 — радиус вписанного шара, а r_2 — радиус круга, вписанного в основание. Так как $r_1=\frac{1}{4}\sqrt{\frac{2}{3}}\,a$ и $r_2=\frac{\sqrt{3}}{6}a$, $r^2=\frac{1}{8}a^2$. Отсюда $S_{ABC}=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2=2\sqrt{3}\,r^2$.

Задача 4 (Физфак, 1976 г.). *Все плоские углы трехгранного угла $SABC$ (S — вершина) прямые. На грани ASC взята точка D на расстоянии 5 см от вершины S и на расстоянии 3 см от ребра SC. Из некоторой точки M, расположенной внутри трехгранного угла $SABC$, в точку D направлен луч света. Луч образует угол $\frac{\pi}{4}$ с ребром SB и угол $\frac{\pi}{3}$ с ребром SC. Луч зеркально отражается от граней угла $SABC$ сначала в точке D, затем — в точке E, затем — в точке F. Найти длину отрезка EF.*

Решение. Геометрическая идея решения состоит в «выпрямлении» траектории луча на основе законов отражения. Заметим, что если луч отражается зеркально от плоскости, то луч, симметричный относительно этой плоскости отраженному лучу, является продолжением падающего луча. На рисунке 8 изображена «выпрямленная» траектория нашего

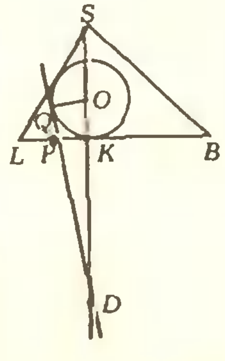


Рис. 6.

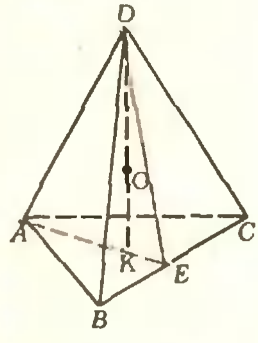


Рис. 7.

луча. *Например, отрезок $E'F'$ получен повторным отражением отрезка EF относительно плоскостей граней трехгранного угла.* Из условия задачи следует, что точка D находится на расстоянии 4 см от ребра SA. *Так как* длина проекции отрезка $F'D$ на ребро SC равна 4 см, а угол между ними $\frac{\pi}{3}$, $|F'D| = 8$см. Значит, длина проекции отрезка $F'D$ на ребро SB равна $4\sqrt{2}$ см. Так как сумма квадратов длин проекций отрезка на три взаимно перпендикулярные оси равна квадрату его длины («Геометрия 10», § 49), проекция отрезка $F'D$ на ребро SA имеет длину 4 см. Отсюда видно, что наш луч сначала попадает на грань BSC, а затем на грань ASB. *Точка S делит* эту проекцию в отношении $1:3$. Очевидно, точка E' делит отрезок $F'D$ в *том же отношении*. Следовательно, $|E'F'| = 2$ см.

З а д а ч а 5 (ВМК, 1977 г.). *В пирамиде $SABC$ прямая, пересекающая ребра AC и BS и перпендикулярная к ним, проходит через середину ребра BS. Грань ASB равновелика грани BSC, а площадь грани ASC в два раза больше площади грани BSC. Внутри пирамиды есть точка M, сумма расстояний от которой до вершин B и S равна сумме расстояний до всех граней пирамиды. Найти расстояние от точки M до вершины B, если $|AC| = \sqrt{6}$, $|BS| = 1$.*

Р е ш е н и е. Обозначим через K и N точки пересечения общего перпендикуляра к ребрам AC и SB с этими ребрами (рис. 9).

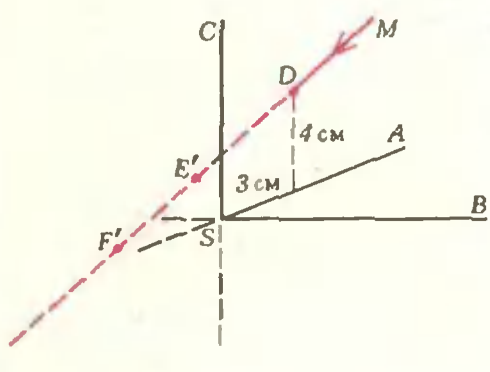


Рис. 8.

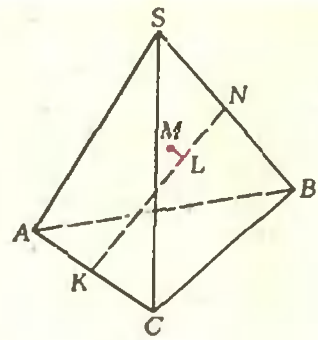


Рис. 9.

Достаточно очевидно, что решение задачи надо начинать с анализа тех ее условий, которые не касаются положения точки M. Из равновеликости граней ASB и BSC следует, что точки A и C находятся на одинаковом расстоянии от ребра SB.

Рассмотрим общую задачу о вычислении расстояния от точки A, *лежащей на прямой* (I), до прямой (II) (рис. 10). Обозначим через O_1 и O_2 основания общего перпендикуляра к прямым (I) и (II), $a = |AO_1|$, $d = |O_1O_2|$, φ — угол между прямыми (I) и (II), h — расстояние от точки A до прямой (II). Из рисунка 10 легко находим, что

$$h = \sqrt{a^2\sin^2\varphi + d^2}. \qquad (5)$$

Отсюда следует, что любые две точки прямой (I), находящиеся на равных расстояниях от прямой (II), находятся на равных расстояниях от основания общего перпендикуляра к этим прямым. Таким образом, точка K является *серединой отрезка AC*. Далее, точки S и B в силу формулы (5) оказываются одинаково удаленными *от ребра AC, откуда* следует, что грани ASC и ABC равновелики. Выведенная нами формула (5) *позволяет* также выписать площади граней ASC и BSC:

$$S_{ASC} = p = \frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\sin^2\varphi + d^2},$$

$$S_{BSC} = q = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}\sin^2\varphi + d^2}. \qquad (6)$$

Из условия задачи $p = 2q$ или

$$\frac{\sqrt{6}}{2}\sqrt{\frac{1}{4}\sin^2\varphi + d^2} = \sqrt{\frac{3}{2}\sin^2\varphi + d^2}, \qquad (7)$$

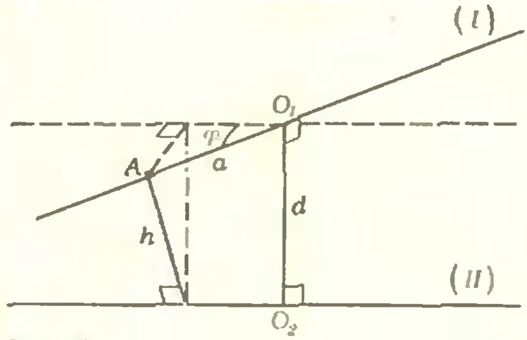


Рис. 10.

откуда

$$d=\frac{3}{2}|\sin\varphi|. \qquad (8)$$

Итак, задание угла φ между ребрами AC и SB полностью определяет пирамиду, удовлетворяющую всем условиям задачи, кроме тех, в которых речь идет о точке M.

Заметим, что из наших рассмотрений следует также, что отрезок KN принадлежит биссекторным плоскостям двугранных углов пирамиды с ребрами AC и SB.

Перейдем теперь к анализу положения точки M. Особая роль отрезка KN, выявленная в предыдущем анализе, позволяет выдвинуть предположение, что точка M, удовлетворяющая условию задачи, лежит на этом отрезке. В этом мы сейчас и убедимся. Рассмотрим проекцию L точки M на отрезок KN. Точки L и M принадлежат плоскости, перпендикулярной отрезку KN, а следовательно, и биссекторным плоскостям двугранных углов пирамиды с ребрами AC и SB. Если плоскость перпендикулярна биссекторной плоскости двугранного угла, то сумма расстояний от любой ее точки внутри этого угла до граней есть величина постоянная. (Докажите это самостоятельно, пользуясь тем, что сумма расстояний от точки основания равнобедренного треугольника до его боковых сторон есть величина постоянная.) Таким образом, суммы расстояний до всех четырех граней пирамиды от точек M и L равны. Обозначим эту сумму через l и вычислим ее. Пусть $x=|KL|$ и V — объем пирамиды. Очевидно, сумма расстояний от точки N до граней ABC и ASC равна $\frac{3V}{p}$. Значит, сумма расстояний от точки L до тех же граней равна $\frac{x}{d}\cdot\frac{3V}{p}$. Аналогично вычисляется сумма расстояний от точки L до граней BSC и ASB: она равна $\frac{d-x}{d}\cdot\frac{3V}{q}$.

Итак, $$l=\frac{x}{d}\cdot\frac{3V}{p}+\frac{d-x}{d}\cdot\frac{3V}{q}.$$

Воспользовавшись формулой $V=\frac{1}{6}\times$ $\times|AC|\cdot|BS|\cdot|KN|\cdot|\sin\varphi|$ (выведите эту полезную формулу самостоятельно) и формулами (6) и (8), получим $l_1=$ $=2\sqrt{\frac{2}{5}}(d-x/2)$.

С другой стороны, $|SM|+$ $+|BM|\geqslant|SL|+|BL|$ (докажите!) и, следовательно, $l\geqslant|SL|+|BL|$. Но $|SL|+|BL|=2\sqrt{1/4+(d-x)^2}$, откуда

$$2\sqrt{\frac{2}{5}}(d-x)\geqslant2\sqrt{1/4+(d-x)^2}$$

или

$$0{,}9x^2-1{,}6dx+0{,}6d^2+0{,}25\leqslant0. \qquad (9)$$

В силу (8) $d\leqslant3/2$, откуда дискриминант D квадратного трехчлена в (9) не превосходит нуля и, следовательно, $D=0$, $d={}^3/_2$, $x={}^4/_3$, точка M совпадает с точкой L и

$$|MB|=\sqrt{1/4+(d-x)^2}=\frac{\sqrt{10}}{6}.$$

В заключение заметим, что приведенные нами решения задач нельзя рассматривать как образцы оформления письменной работы. Мы стремились лишь показать основные идеи и приемы решения, оставляя читателю подчас весьма существенные детали для самостоятельной доработки.

Упражнения

1 (ВМК, 1974). В треугольной пирамиде $SABC$ суммы трех плоских углов при каждой вершине A, B и C равны 180°. Найти расстояние между скрещивающимися ребрами SA и BC, если известно, что $BC=4$ см, $AC=5$ см, $AB=6$ см.

2 (ВМК, 1975). Все ребра треугольной пирамиды $ABCD$ касаются некоторого шара. Три отрезка, соединяющие середины скрещивающихся ребер AB и CD, AC и BD, AD и BC, равны. Угол DBC равен 50°, а угол BCD больше угла BDC. Найти отношение площадей граней ABD и ABC.

3 (Мехмат, 1976). Внутри прямого кругового конуса, касаясь основания, ле-

жат три шара радиусов 4, 4 и 5. Каждый из них касается двух других шаров и некоторой образующей конуса. Найти радиус основания конуса, если известно, что угол между основанием и образующей равен $2\ \mathrm{arc\,tg}\,\frac{1}{4}$.

4 (ВМК, 1977). В пирамиде $SABC$ грани ASC, BSC и ASB равновелики. Сумма расстояний от середины ребра BC до граней ASB и ASC в полтора раза меньше высоты пирамиды, опущенной из вершины S. Внутри пирамиды есть точка M, полусумма расстояний от которой до вершин A, B и C равна сумме расстояний до всех граней пирамиды. Найти площадь полной поверхности пирамиды, если длина ребра AS равна $\sqrt{\frac{31}{11}}$.

5 (ВМК, 1978). Основанием пирамиды $ABCEH$ служит выпуклый четырехугольник $ABCE$, который диагональю BE делится на два равновеликих треугольника. Длина ребра AB равна единице, длины ребер BC и CE равны. Сумма длин ребер AH и EH равна $\sqrt{2}$. Объем пирамиды равен $^1/_6$. Найти радиус шара, имеющего наибольший объем среди всех шаров, помещающихся в пирамиде $ABCEH$.

Встреча с читателями «Кванта»

10 января, во время зимних каникул, «Квант» встретился со школьниками Москвы. Встреча состоялась в Центральном лектории Всесоюзного общества «Знание». На ней присутствовало около тысячи учащихся. Члены редакционной коллегии рассказали о черных дырах во Вселенной и поисках космических цивилизаций, третьей проблеме Гильберта и числах Конвея, о школьных олимпиадах и вступительных экзаменах в вузы. Академик Академии педагогических наук В. А. Фабрикант (см. фото) поделился воспоминаниями о замечательном советском физике Леониде Исааковиче Мандельштаме, столетие со дня рождения которого исполняется в этом году. Во встрече приняли также участие член-корреспондент Академии педагогических наук В. Г. Болтянский, профессор Я. А. Смородинский, заместитель главного редактора В. А. Лешковцев, кандидаты физико-математических наук Н. Б. Васильев, Л. Г. Макар - Лиманов, Н. Х. Розов, А. П. Савин. Встреча закончилась конкурсом по решению задач, победители которого получили памятные подарки.

В. Л.

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1978 году

Московский институт стали и сплавов

В «Кванте», 1979, № 5 были опубликованы варианты вступительных экзаменов по физике. Ниже мы публикуем варианты вступительных экзаменов 1978 года по математике (письменный экзамен). Кроме самих вариантов, решений и ответов здесь приводится подробный разбор одного из вариантов с указанием типичных ошибок школьников.

Математика

В 1978 г. МИСиС второй год проводил вступительные экзамены по математике по новой программе. Вместо ожидавшейся нами в этом году стабилизации знаний абитуриентов, мы вынуждены отметить отсутствие заметного улучшения их подготовленности и даже некоторое ее снижение. Это относится, в частности, к разделам школьного курса, посвященных дифференцированию и интегрированию. Особенно плохо дело обстоит с геометрией: применять векторную алгебру к решению геометрических задач почти никто не умеет.

В порядке возрастания трудности вариантов, факультеты МИСиС можно расположить примерно следующим образом: технологический факультет, факультет металлургии черных металлов и сплавов, факультет металлургии цветных и редких металлов и сплавов, факультет полупроводниковых материалов и приборов, физико-химический факультет.

Факультет полупроводниковых материалов

1. *Найти область определения функции*

$$y=\sqrt{\log_{0,5}(3x-8)-\log_{0,5}(x^2+4)}\,.$$

Эта задача сводится к решению системы неравенств. Многие из абитуриентов не смогли правильно получить эту систему неравенств, т. к. плохо знали свойства степенной и логарифмической функций. Система неравенств имеет вид

$$\begin{cases}3x-8>0\\ \dfrac{3x-8}{x^2+4}\leqslant 1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}3x-8>0\\ x^2-3x+12\geqslant 0.\end{cases}$$

Некоторые поступающие не смогли правильно решить эту систему, хотя из того, что второе неравенство выполнено при всех $x\in\mathbf{R}$ сразу получается ответ: $x>\frac{8}{3}$.

2. *Решить тригонометрическое уравнение*

$$\frac{1}{1+\operatorname{ctg}x}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1-\operatorname{ctg}x}{2(1+\operatorname{ctg}x)}.$$

Типичные ошибки здесь следующие: незнание основных формул тригонометрии, например

$$\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{4}+\sin x\cdot\sin\frac{\pi}{4},$$

$$\operatorname{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x};$$

приобретение посторонних корней.

Решить это уравнение можно, например, следующим образом.
Находим область определения

$$\sin x\neq 0,\ 1+\operatorname{ctg}x\neq 0\Rightarrow x\neq-\frac{\pi}{4}+k\pi,$$
$$k\in\mathbf{Z},\quad x\neq m\pi,\quad m\in\mathbf{Z}.$$

Преобразуем уравнение

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}+\sin x\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\times$$
$$\times\left(1+\frac{\cos x}{\sin x}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\cos x}{\sin x}\right)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(1+\operatorname{ctg}x)(\cos x+\sin x+1)=0.$$

1) $1+\operatorname{ctg}x=0\Rightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$

не входит в область определения.

2) $\cos x+\sin x+1=0\Rightarrow$

$$\Rightarrow\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+\frac{\pi}{4}=(-1)^{k+1}\frac{\pi}{4}+k\pi\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=[(-1)^{k+1}-1]\frac{\pi}{4}+k\pi=$$

$$=\begin{cases}(2n+1)\pi,\ k=2n+1\\ -\dfrac{\pi}{2}+2n\pi,\ k=2n\end{cases}$$

$x = (2n+1)\pi$ не входит в область определения. Ответ $x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in \underline{Z}$.

3. *Найти уравнение общей касательной к кривым*

$y = x^2 + 4x + 8$ *и* $y = x^2 + 8x + 4$. Большинство абитуриентов, не решивших эту задачу, не смогли правильно написать уравнение касательной к кривой. Решение задачи следующее: уравнения касательных к первой и второй кривым

$$\begin{cases} y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1), \\ y = g'(x_2)(x - x_2) + g(x_2). \end{cases}$$

Условие того, что касательная общая,

$$\begin{cases} f'(x_1) = g'(x_2) \\ f(x_1) - f'(x_1)\cdot x_1 = g(x_2) - g'(x_2)\cdot x_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4 = 2x_2 + 8 \\ -x_1^2 + 8 = -x_2^2 + 4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 2 \\ x_2^2 - x_2^2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Получаем уравнение общей касательной

$$y = 8x + 4.$$

4. *Найти предел последовательности*

$$x_n = \frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5} + \frac{1}{3\cdot4\cdot5\cdot6} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}.$$

Типичная ошибка: поступающие пользовались тем, что последнее слагаемое в сумме стремится к нулю, и на основании этого решали, что предел равен первому слагаемому, или сумме нескольких первых членов, в зависимости от личного вкуса. При этом забывали о том, что число слагаемых в сумме растет с ростом n. Правильно решить задачу можно, например, так. Разложим общий член $\frac{1}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$ на сумму простейших дробей и сложим эти дроби так:

$$x_n = \sum_{k=2}^{n} \left[\frac{1}{6}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+2} - \frac{1}{k+1}\right)\right] = \frac{1}{6}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+3}\right)\right] + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{5}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1}\right)\right] = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{n+2}\right).$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{6} + \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2(n+2)} - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right)\right] = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - 1\right) + 0 = \frac{1}{72}.$$

5. *Точки* $A(1; 2; 3)$, $B(1; 5; 3)$, $C(3; 3; 3)$ *лежат на окружности нижнего основания цилиндра, а точка* $D(2; 3; 7)$ *— на его верхнем основании. Найти координаты центров оснований и объем цилиндра.*

С этой задачей на применение векторной алгебры в стереометрии не справились большинство абитуриентов. Можно предположить, например, такое решение

1) Найдем уравнение плоскости, проходящей через точки A, B и C (очевидно, проходящей и через центр O нижнего основания)

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Для определения a, b, c и d получим систему (координаты точек A, B, и C удовлетворяют уравнению плоскости).

$$\begin{cases} a + 2b + 3c = -d \\ a + 5b + 3c = -d \\ 3a + 3b + 3c = -d \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a + 2b + 3c = -d \\ 3a + 3b + 3c = -d \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} b = a = 0 \\ c = -\frac{d}{3}; \end{cases}$$

уравнение плоскости нижнего основания цилиндра $z = 3$.

2) Пусть $O(x; y; z)$. Тогда для определения $(x; y; z)$ имеем систему уравнений

$$\begin{cases} z = 3 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \\ = (x-1)^2 + (y-5)^2 + (z-3)^2 = \\ = (x-3)^2 + (y-3)^2 + (z-3)^2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = 3 \\ y^2 - 4y + 4 = y^2 - 10y + 25 \\ x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 = \\ = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 6y + 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z=3 \\ y-7/2 \\ 4x=-2y+13 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=3/2,\ y=7/2, \\ z=3 \end{matrix}$$

3) Уравнение плоскости верхнего основания $z=d$, т. к. плоскости нижнего и верхнего основания параллельны. Точка D лежит на этой плоскости, следовательно, $d=7$. Отсюда находим высоту цилиндра $H=7-3=4$. Далее находим координаты центра верхнего основания $O_1\left(\frac{3}{2};\ \frac{7}{2};\ 7\right)$. Наконец находим объем цилиндра

$$V=\pi R^2\cdot H=4\pi\left[\left(\frac{3}{2}-1\right)^2+\left(\frac{7}{2}-2\right)^2\right]=$$
$$=4\pi\cdot\frac{1+9}{4}=10\pi.$$

Далее мы приводим варианты, предполагавшиеся на других факультетах.

Технологический факультет

1. Решить уравнение

$$\operatorname{tg} x-\sin^2 5x=\cos^2 5x.$$

На промежутке $[0,\ \pi]$ указать те значения переменной x, для которых $\operatorname{tg} x>1$.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $y=2\sqrt{2x}$.

3. Решить уравнение

$$4^{2/x}-5\cdot4^{1/x}+4=0.$$

4. Все ребра треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равны a, плоские углы при вершине A равны α. Найти величину угла между (BC_1) и (AC) и полную поверхность призмы.

5. Сумма двух сторон треугольника равна a, а угол между ними равен $30°$. Каковы должны быть длины сторон, чтобы площадь треугольника была наибольшей?

Факультет металлургии черных металлов и сплавов

1. Решить уравнение

$$3x-\sqrt{18x+1}+1=0.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{x}-3\leqslant\frac{2}{\sqrt{x}-2}.$$

3. Решить уравнение

$$\frac{1}{\sin^2 x}=\operatorname{ctg} x+3.$$

4. Найти

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\operatorname{tg}^3 x-3\operatorname{tg} x}{\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)}.$$

5. Найти угол между плоскостью, проходящей через точки $A\ (0;0;0)$, $B\ (1;\ 1;\ 1)$, $C\ (3;\ 2;\ 1)$ и плоскостью, проходящей через точки $A\ (0;\ 0;\ 0)$, $B\ (1;\ 1;\ 1)$, $D\ (3;\ 1;\ 2)$.

Факультет металлургии цветных и редких металлов и сплавов

1. Решить неравенство

$$\log_{\frac{1}{5}}(2x+5)-\log_{\frac{1}{5}}(16-x^2)\leqslant1.$$

2. Решить уравнение

$$(1+\operatorname{tg}^2 x)(1+\sin 2x)=1.$$

3. Найти

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=2^x$, $y=4^x$ и прямой $x=1$.

5. В пространстве даны три вектора $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, образующие одинаковые углы между собой, равные $\frac{\pi}{3}$. Объем пирамиды $ABCD$ равен 10. Найти длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, если $|AB|:|AC|:|AD|=1:2:3$.

Физико-химический факультет

1. Решить неравенство

$$\log_{0,25}\frac{35-x^2}{x}\geqslant-\frac{1}{2}.$$

2. Решить уравнение

$$\left(\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{1}{\cos x}+\operatorname{tg} x\right)=$$
$$=\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x.$$

3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=x^2(2x-3)-12(3x-2)\ \text{на}\ [-3;\ 6].$$

4. В треугольнике ABC, $A\ (-1;\ 2;\ 3)$ — вершина прямого угла. Найти координаты вершин B и C, если известно, что B и C лежат на прямой (MN), где $M\ (-1;\ 3;\ 2)$, $N\ (1;\ 1;\ 3)$ и $\widehat{ABC}=30°$.

5. Построить график функции f, где

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}},\quad x>0.$$

В. Треногин

Московский институт электронной техники

Московский институт электронной техники (МИЭТ) готовит специалистов по важнейшим направлениям в области электроники. Выпускников института ждут заводы, научно-исследовательские институты, конструкторские бюро не только электронной, но и других отраслей промышленности.

МИЭТ имеет следующие факультеты:

Физико-технический факультет готовит специалистов в области твердого тела и технологии полупроводниковых приборов и электронных схем. За время учебы в институте специалисты этого профиля приобретают глубокие знания в области общей и теоретической физики, физики полупроводниковых приборов, получают специальную подготовку в области конструирования, разработки и технологии производства интегральных схем.

Физико-химический факультет готовит специалистов по полупроводниковым и диэлектрическим материалам электронной техники и физико-химическим процессам технологии.

Факультет микроприборов и технической кибернетики готовит специалистов по трем направлениям: электронные вычислительные машины, радиоэлектронные устройства, конструирование и производство радиоаппаратуры. В процессе обучения студенты изучают техническую кибернетику, радиотехнические и приборостроительные дисциплины, вычислительную математику, конструирование электронных вычислительных машин и радиоэлектронных устройств.

Факультет электронного машиностроения готовит специалистов в области проектирования, изготовления и автоматизации технологического оборудования электронной техники. Студенты этого факультета специализируются в области проектирования, автоматизации и изготовления технологического оборудования.

На вечернем отделении обучение ведется по всем специальностям, перечисленным выше для дневных факультетов.

Программированное обучение и контроль знаний студентов проводятся в специально оборудованном классе с помощью различных контролирующих устройств и вычислительных машин.

В МИЭТе, кроме учебной, проводится большая научно-исследовательская работа. Начиная с четвертого курса студенты сочетают обучение в институте с производственной практикой, работая по три дня в неделю на базовых НИИ и заводах.

Институт располагает благоустроенными общежитиями. Все иногородние на время экзаменов обеспечиваются общежитием.

МИЭТ имеет стадион с резино-битумной дорожкой, площадками для игры в волейбол, баскетбол и ручной мяч, теннисные корты, спортивный зал, 25-метровый бассейн, тир, лыжную базу, спортивно-оздоровительные лагеря в горах Северного Кавказа и на берегу Каспийского моря.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решить уравнение
$$\sin^4 x-\cos^4 x=\cos x.$$

2. Решить уравнение
$$32^{\frac{x+5}{x-7}}=0{,}25\cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций
$$y=4-x^2,\quad y=x^2-2x.$$

4. В равнобедренной трапеции меньшее основание и боковая сторона равны a. Найти большее основание b, чтобы площадь трапеции была максимальной.

5. Даны три ненулевых вектора $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$, каждые два из которых неколлинеарны. Найти их сумму, если вектор $\vec a+\vec b$ коллинеарен вектору $\vec c$, а вектор $\vec b+\vec c$ коллинеарен вектору $\vec a$.

Вариант 2

1. Решить уравнение
$$\sin^4 x+\cos^4 x=\sin x\cdot\cos x.$$

2. Решить уравнение
$$(0{,}4)^{\lg^2 x+1}=(6{,}25)^{2-\lg x^3}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций
$$y=\sqrt{x},\ y=\sqrt{4-3x},\quad y=0.$$

4. На плоскости задана точка $M\left(\frac{1}{2};1\right)$. Проходящая через точку прямая образует вместе с положительными полуосями координат некоторый треугольник. Какое минимальное значение может принимать площадь этого треугольника?

5. Векторы $\vec a$, $\vec b$ и $\vec c$ имеют равные длины и образуют попарно равные углы. Найти координаты вектора $\vec c$, если $\vec a=\vec i+\vec j$, $\vec b=\vec j+\vec k$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Груз на длинной нити может совершать колебания в вертикальной плоскости, отклоняясь на угол α от вертикали. Этот же груз может вращаться по окружности, так что нить описывает конус. В каком случае натяжение нити, отклоненной на угол α от вертикали, будет больше?

2. Брусок массой m находится в плоскости, угол наклона которой α может изменяться от 0 до 90°. Построить график зависимости модуля силы трения бруска о плоскость от угла наклона плоскости к горизонту. Явлением застоя пренебречь. Коэффициент трения равен μ.

3. На экваторе некоторой планеты тела весят вдвое меньше, чем на полюсе. Плотность вещества планеты $\rho=3$ г/см³.

Определить период обращения планеты вокруг собственной оси.

4. Сколько ходов должен сделать поршень откачивающего насоса, чтобы откачать воздух из сосуда объемом V_0 от атмосферного давления p_0 до давления $p=p_0\cdot 10^{-4}$, если емкость насоса V?

5. Два электрона находятся на бесконечно большом расстоянии один от другого, причем один электрон вначале покоится, а другой начинает двигаться со скоростью $|\vec{v}|=2\cdot 10^6$ м/с по направлению к первому. Определить наименьшее расстояние, на которое они сблизятся.

6. Металлический шар радиусом R_1, заряженный до потенциала φ, окружают сферической проводящей оболочкой радиусом R_2. Как изменится потенциал шара после того, как он будет соединен с оболочкой проводником?

7. Какое количество электричества нужно пропустить через электролитическую ванну с подкисленной водой, чтобы получить $V=1$ л гремучего газа при $t=27$°С и $p=760$ мм рт. ст.?

8. Длина воздушной линии электропередачи $l=300$ км. Частота напряжения $\nu=50$ Гц. На какую долю периода отличаются фазы напряжения в начале и в конце этой линии?

9. Какова истинная глубина реки, если при определении на глаз по вертикальному направлению глубина ее кажется равной $h=2$ м? Показатель преломления воды $n=1{,}33$.

10. Некто, сняв очки, читал книгу, держа ее на расстоянии $d=16$ см от глаз. Какой оптической силы у него очки?

В. Горбунов

Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе

Московский ордена Ленина авиационный институт им. Серго Орджоникидзе, один из наиболее крупных машиностроительных вузов страны, готовит специалистов для работы в различных отраслях авиационной промышленности, а также в других новейших областях техники.

В институте учились и работали академики Б. Н. Юрьев, М. Д. Миллионщиков, известные конструкторы Д. П. Григорович, Н. Н. Поликарпов, А. С. Яковлев, А. Н. Туполев, летчики-космонавты В. Н. Волков, В. Н. Кубасов, В. И. Севостьянов, В. В. Лебедев, А. С. Иванченков. В настоящее время в институте работают академики В. П. Мишин, И. Ф. Образцов, Б. Н. Петров.

Институт готовит инженеров-механиков по самолетостроению и вертолетостроению, летательным аппаратам и двигателям летательных аппаратов; инженеров-электромехаников по приборам, вычислительным устройствам, электрооборудованию, системам управления летательными аппаратами, автоматизированным системам управления, установкам и автоматизированным приводам летательных аппаратов; радиоинженеров по радиоустановкам летательных аппаратов, конструированию и производству электронно-вычислительной аппаратуры; инженеров-экономистов по экономике и организации машиностроительной промышленности, организации механизированной обработки экономической информации, автоматизированным системам управления производством; инженеров-математиков по применению средств вычислительной техники и математическому обеспечению АСУ; инженеров-электромехаников по конструированию антенно-фидерных устройств.

Характерной особенностью обучения в институте является совмещение учебного процесса с элементами научных исследований. В институте действует студенческое научное общество МАИ, работают 14 студенческих конструкторских бюро, в которых студенты разрабатывают различные образцы современной техники. Среди них легкий спортивный самолет «Квант», подводный аппарат «Шельф», целая серия авиационных приборов. 26 октября 1978 года на орбиту был выведен первый студенческий ИСЗ, разработанный студентами МАИ.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

(экзамен по алгебре и началам анализа на общетехнических факультетах)

1. Дайте определение показательной функции. Сформулируйте и докажите свойства функции $y=a^x$, $a>1$.

2. Решите уравнение

$$\sqrt{x+4}+\sqrt{2x+6}=7.$$

3. Какие точки называют критическими точками для данной функции? Какая существует связь между точками экстремума и критическими точками функции? Исследуйте на монотонность и экстремумы функцию $y=2x^3-9x^2+12x$. Постройте график.

4. Решите неравенство

$$\log_2\frac{x^2-4x+2}{x+1}\leqslant 1.$$

5. При каких значениях a корни x_1, x_2 уравнения $(a^2+1)x^2-2ax-3=0$ удовлетворяют неравенству $|x_2|<x_1(1-x_2)$ и корень x_1 является положительной правильной дробью?

Вариант 2

(экзамен по геометрии и тригонометрии на общетехнических факультетах)

1. Докажите теорему о свойствах средней линии трапеции.

2. Дайте определение скалярного произведения двух ненулевых векторов. За-

пишите координатную формулу скалярного произведения. Вычислите координаты вектора $\vec{c}$, перпендикулярного векторам $\vec{a}=2\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{k}$ и образующего тупой угол с осью Oy, если $|\vec{c}|=\sqrt{7}$.

3. Решите уравнение

$$\sin^3 x+\cos^3 x=\cos^2 x-\sin^2 x.$$

4. Площадь равнобедренной трапеции с углом при основании 60° равна 2 кв. дм. Найдите длину высоты трапеции наименьшего периметра. Вычислите этот периметр.

5. Основанием прямого параллелепипеда служит ромб с острым углом 2β, длина высоты которого равна h. Одна из диагоналей параллелепипеда образует с одной из боковых граней угол φ. Определите объем параллелепипеда.

Вариант 3

(экзамен на факультете прикладной математики)

1. Решите неравенство

$$\log_3\frac{x+4}{x-2}-\log_3\frac{4x+11}{4x+1}<1.$$

2. Функция f задана равенством $f(x)=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$. Найдите решения $\varphi\in[0;\pi]$ уравнения $f(\sin\varphi)=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3. Криволинейная трапеция ограничена кривой $y=x^2+1$ и прямыми $y=0$, $x=1$, $x=2$. В какой точке данной кривой $y=x^2+1$, $x\in[1;2]$ следует провести касательную, чтобы она отсекала от криволинейной трапеции обычную трапецию наибольшей площади? Сделайте чертеж.

4. Треугольная пирамида задана координатами своих вершин A (3; 0; 1), B (−1; 4; 1), C (5; 2; 3), D (0; −5; 4). Вычислите длину вектора $\vec{AO}$, если O — точка пересечения медиан грани BCD.

5. При каких значениях параметра a множество M решений неравенства $(a-2)x+3(a^2+1)>x+a$ пересекается с множеством N решений неравенства $2ax<(a+1)x-1$? Найдите $M\cap N$ для каждого $a<0$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Механическая работа. Мощность. Единицы работы и мощности. Когда сила, действующая на тело, не производит работы при перемещении тела?

2. Точка совершает гармонические колебания между положениями C и D. Зная, что максимальная скорость точки равна $v_м=10$ м/с, найти ее среднюю скорость на пути от C к D.

3. В колебательный контур с индуктивностью L, емкостью C и активным сопротивлением R включили последовательно источник синусоидальной ЭДС с амплитудой $\mathscr{E}_м$. Затем, меняя частоту ЭДС, добились того, что амплитуда тока стала максимальной. Какой?

4. Два сосуда, содержащие различные газы по одному киломолю в каждом, соединены трубкой с краном. Давления в сосудах p_1 и p_2. Какое давление устанавливается после открытия крана? (Температура не изменяется.)

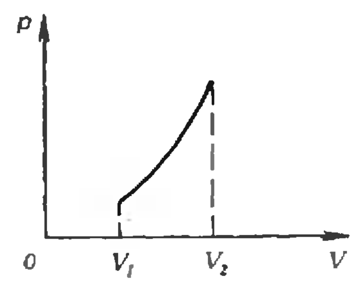
5. Линза дает действительное изображение предмета с увеличением в два раза. Определить фокусное расстояние линзы, если расстояние между линзой и изображением $f=24$ см.

Вариант 2

1. Первый закон Ньютона. Третий закон Ньютона.

2. Тело массой m движется по закону $s(t)=\alpha t^3+\beta t+\gamma$, где α, β, γ — размерные постоянные коэффициенты, t — время, s — пройденный путь. Найти действующую на тело силу и кинетическую энергию в момент времени t_1 после начала движения.

3. Каков заряд всех электронов в куске алюминия массой $m=1$ кг? За какое время пройдет этот заряд через поперечное сечение проводника при силе тока $I=1$ А? Заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл; молярная масса алюминия $\mu=27$ г/моль; число Авогадро $N_0=6{,}02\cdot10^{23}$ 1/моль; считать, что на каждый атом алюминия приходится 3 свободных электрона.



4. При расширении газа его давление росло по закону $p=p_1+\alpha_1V+\alpha_2V^2$, где α_1 и α_2 — размерные постоянные коэффициенты; p_1, V_1, V_2 заданы (см. рисунок). Рассчитать работу, совершенную при расширении.

5. Предмет находится на оси на расстоянии $d=3$ см от вогнутого сферического зеркала. Радиус зеркала $R=5$ см. Графическим построением и расчетом найти положение изображения. Подсчитать отношение величины изображения к величине предмета.

В. Котельников,
Р. Молодожникова

Московский энергетический институт

О факультетах и специальностях Московского ордена Ленина энергетического института (МЭИ) рассказано в «Кванте», 1978, № 7.

В 1978 году абитуриенты, поступавшие в МЭИ, сдавали по математике два экзамена (письменный и устный — на всех факультетах), а по физике — один экзамен (на одних факультетах — письменный, на других — устный).

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростив выражение

$$\left(\frac{(x^2-4)^{-2}+(x+2)^{-2}-(x-2)^{-2}}{1-8x}\right)^{-1}-\left(4\sqrt[3]{4}\right)^{\log_4 x^3}-16,$$

найти его предел при $x\to\frac{1}{8}$.

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}(3y^2+1)\cdot\log_3 x=1,\\ x^{2y^2+10}=27.\end{cases}$$

3. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна наибольшему значению функции $f(x)=3x^3-x-76$ на отрезке $[0;\ 3]$; первый член прогрессии равен квадрату ее знаменателя. Найти знаменатель прогрессии.

4. Найти все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\sin^4\frac{x}{2}+\sin^4\left(\frac{x}{2}+\frac{7}{2}\pi\right)=\sin\frac{5}{6}\pi$$

и лежащие на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\ 2\pi\right]$.

5. Через вершину C_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведена плоскость, пересекающая ребра $[BC]$ и $[CD]$ и образующая с гранью $ABCD$ угол α, причем в сечении получен равнобедренный треугольник. Найти площадь сечения, если длина ребра куба равна a (рассмотреть возможные случаи).

Вариант 2

1. Упростив выражение для $f(x)$, найти $f'(x)$, если

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{x-2}}+\frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}-x+2}\right)^{-2}\times\left(\frac{x-1}{2(\sqrt{x}+1)}+1\right)\times\frac{2}{\sqrt{x}+1}.$$

2. Найти область определения функции

$$f(x)=\lg\left(\sqrt{8^{-2+\lg x}}-\sqrt[3]{4^{2-\lg x}}\right).$$

3. При каком уменьшаемом разность будет наибольшей, если вычитаемое равно удвоенному квадрату уменьшаемого?

4. Найти все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$(1-\cos 2x)\sin 2x=\sqrt{3}\sin^2 x$$

и лежащие на отрезке $\left[-\pi;\ \frac{\pi}{3}\right]$.

5. Площадь прямоугольной трапеции $ABCD$ равна S, длина высоты $[AB]$ равна h, величина острого угла ADC трапеции равна α. На боковой стороне $[CD]$ взята точка E, так что $|CE|=|ED|$. Найти объем тела, полученного вращением четырехугольника $ABED$ вокруг прямой (AB).

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Источники тока. Электродвижущая сила. Последовательное соединение источников ЭДС. Аккумуляторы. Закон Ома для замкнутой цепи.

2. Энергия фотонов, которыми облучается металл, в три раза больше работы выхода электронов из металла. Какую долю от энергии фотонов составляет максимальная кинетическая энергия фотонов, вылетающих из металла?

3. Два одинаковых точечных заряда находятся на расстоянии $r_1=1$ м друг от друга. Величина каждого заряда $q=10^{-10}$ Кл. Какую работу надо совершить, чтобы сблизить заряды до расстояния $r_2=10$ см?

4. При разрыве неподвижной гранаты на два осколка, летящих вдоль одной прямой, выделилась механическая энергия $W=1000$ Дж. Известно, что масса одного осколка втрое больше массы другого. Найти скорости осколков. Масса гранаты $m=1$ кг, а масса пороховых газов мала.

5. Каковы первоначальный объем и температура гелия, находящегося под поршнем в цилиндре, если при охлаждении гелия до $t=-23$°C груз массой $M=16$ кг, лежащий на поршне, совершает работу $A=40$ Дж? Площадь поршня $S=200$ см², атмосферное давление нормальное, масса гелия $m=5$ г.

Задачи устного экзамена

1. Тело массой $m=20$ кг тянут с силой $|\vec{F}|=120$ Н по горизонтальной поверхности. Если эта сила приложена под углом $\alpha_1=60°$ к горизонту, тело движется равномерно. С каким ускорением будет двигаться тело, если ту же силу приложить под углом $\alpha_2=30°$ к горизонту?

2. Цилиндрический сосуд длиной $l=1$ м делится на две части подвижным поршнем. Каково будет равновесное положение поршня, если в одной части сосуда находится некоторая масса кислорода, а в другой части — такая же масса водоро-

да? Относительная молекулярная масса кислорода в 16 раз больше относительной молекулярной массы водорода.

3. Маленький шарик подвешен на тонкой нити в пространстве между обкладками плоского конденсатора, пластины которого горизонтальны. Заряд шарика $q=10^{-9}$ Кл. Когда конденсатор зарядили зарядом $Q=2\cdot10^{-5}$ Кл, натяжение нити увеличилось вдвое. Определить массу шарика. Площадь пластин конденсатора $S=200$ см^2.

4. Линия электропередачи имеет сопротивление $R=250$ Ом. Какое напряжение должен иметь генератор для того, чтобы при передаче по этой линии к потребителю мощности $P=25$ кВт потери в линии не превышали 4% передаваемой потребителю мощности?

5. Катушка индуктивностью $L=3\cdot10^{-5}$ Г присоединена к плоскому конденсатору с площадью пластин $S=100$ см^2. Расстояние между пластинами конденсатора $d=0{,}1$ мм. Чему равна диэлектрическая проницаемость среды, заполняющей пространство между обкладками конденсатора, если контур резонирует на длину волны $\lambda=750$ м?

Б. Агафонов,
В. Прохоренко,
В. Чудов

Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского

В Московском авиационном технологическом институте им. К. Э. Циолковского (МАТИ) обучаются 10 тысяч студентов по 12 специальностям и 15 специализациям, связанным с авиационной промышленностью. Окончившие институт инженеры работают в цехах, лабораториях, технологических и конструкторских бюро опытных и серийных заводов, а также в отраслевых научно-исследовательских институтах. В МАТИ имеются следующие факультеты:

Авиационно-технологический факультет готовит инженеров-металлургов по металловедению, оборудованию и технологии термической обработки металлов, литейному производству черных и цветных металлов, обработке металлов давлением, металлургии и технологии сварочного производства.

Авиационно-механический факультет готовит инженеров-механиков по самолетостроению, авиационным двигателям, технологии переработки неметаллических материалов, производству изделий из специальных материалов. На этот факультет конкурсный прием осуществляется раздельно для лиц, проживающих в Москве и Подмосковье (в радиусе до 50—60 км), и для лиц, проживающих за пределами указанного района. (На авиационно-технологическом факультете конкурс — общий.)

Факультет радиоэлектронной аппаратуры готовит инженеров-механиков по авиационному приборостроению и радиоинженеров-технологов по конструированию и производству радиоаппаратуры.

Вечерний факультет готовит инженеров-механиков по технологии переработки полимерных материалов в авиаизделия, авиационному приборостроению, самолетостроению, авиационным двигателям; радиоинженеров-технологов по конструированию и производству радиоаппаратуры, а также инженеров-металлургов по металловедению, оборудованию и технологии термической обработки металлов, металлургии и технологии сварочного производства, обработке металлов давлением, литейному производству черных и цветных металлов.

На два последних факультета принимаются только лица, проживающие в Москве и Подмосковье (в радиусе до 50—60 км).

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Доказать тождество

$$\operatorname{tg} 4\alpha + \sec 4\alpha = \frac{\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}{\cos 2\alpha - \sin 2\alpha}.$$

2. Решить уравнение

$$2x^2 + 3x - 5\sqrt{2x^2 + 3x + 9} + 3 = 0.$$

3. В треугольнике даны сторона a и прилежащие к ней углы β и γ. Определить объем тела, полученного от вращения треугольника вокруг данной стороны.

4. Решить уравнение

$$\sin 5x\cdot\cos 3x = \sin 6x\cdot\cos 2x.$$

5. Найти конус наименьшего объема, описанный около шара радиуса R.

Вариант 2

1. Доказать тождество

$$\frac{\cos 4\alpha + 1}{\operatorname{ctg}\alpha - \operatorname{tg}\alpha} = \frac{1}{2}\sin 4\alpha.$$

2. Решить уравнение

$$\log_2 (x-1)^2 - \log_{0,5}(x-1) = 9.$$

3. Основанием пирамиды является прямоугольник, площадь которого S. Две противоположные грани наклонены к плоскости основания под углом α, а две — под углом β. Найти площадь боковой поверхности.

4. Решить уравнение

$$\cos 2x + \sin 2x = \cos x + \sin x.$$

5. Где возрастает функция

$$f(x) = -x^3 - x^2 - 7x - \sqrt{3}\,?$$

Устный экзамен

Билет 1

1. Признак параллельности прямой и плоскости (доказать).

2. Решить уравнение

$$\sqrt{x}-\sqrt{x+3}=1.$$

3. Выяснить, на каких участках функция $f(x)=2x+\frac{2}{x}$ убывает.

4. Решить неравенство

$$4^x-5\cdot 2^x+1>0.$$

5. Построить график функции

$$y=\frac{2|x|+5}{x-3}.$$

Билет 2

1. Теорема о единственности предела сходящейся последовательности.

2. Вычислить

$$\operatorname{tg}\left(\frac{5\pi}{2}+\arcsin\frac{2}{3}\right).$$

3. Показать, что функция

$$y=\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{x}+2$$

возрастает при $x>0$.

4. Решить уравнение

$$6\cos^2 x+11\sin x-10=0.$$

5. Построить график функции

$$y=\log_x\sqrt{x}.$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. Мяч брошен под углом $\alpha=60^\circ$ к горизонту со скоростью $|\vec{v}_0|=20$ м/с. Определить наибольшую высоту подъема и дальность полета. Сопротивление воздуха не учитывать.

2. С какой минимальной силой $\vec{F}_{\min}$, направленной горизонтально, нужно прижать плоский брусок к стене, чтобы он не соскользнул вниз? Масса бруска $m=5$ кг; коэффициент трения между стеной и бруском $k=0,1$.

3. Снаряд массой $m_1=50$ кг, летящий со скоростью $|\vec{v}|=800$ м/с под углом $\alpha=30^\circ$ к вертикали, попадает в неподвижную платформу с песком и застревает в нем. Найти скорость платформы $|\vec{u}|$ после попадания снаряда, если ее масса $m_2=16$ т.

4. Каким может быть наибольший объем V_1 льдины, плавающей в воде, если известно, что алюминиевый брусок объемом $V_2=0,1$ м^3, примерзший к льдине, заставляет ее тонуть? Плотности льда, алюминия и воды равны соответственно $\rho_1=900$ кг/м^3, $\rho_2=2700$ кг/м^3 и $\rho_3=1000$ кг/м^3.

5. Сообщающиеся сосуды заполнены жидкостью, имеющей температуру t. При нагревании жидкости в одном из сосудов до температуры t_1 уровень жидкости установился в этом сосуде на высоте h_1, а в другом — на высоте h_2. Найти коэффициент объемного расширения жидкости.

6. В сосуд, содержащий $m_1=10$ кг воды при температуре $t_1=10$ °С, положили кусок льда, охлажденный до $t_2=-50$ °С, после чего температура образовавшейся ледяной массы оказалась равной $\theta=-4$ °С. Какое количество льда было положено в сосуд? Удельные теплоемкости воды $c_1=4200$ Дж/(кг·К) и льда $c_2=2100$ Дж/(кг·К); удельная теплота плавления льда при $t_0=0$ °С $\lambda=3,3\cdot 10^5$ Дж/кг.

7. В однородном магнитном поле перпендикулярно направлению индукции, модуль которой $|\vec{B}|=0,1$ мТ, движется провод длиной $l=2$ м со скоростью $|\vec{v}|=5$ м/с, перпендикулярной проводнику. Какая ЭДС наводится в проводнике?

8. На расстоянии $d=0,14$ м от вершины вогнутого зеркала находится предмет, высота которого $l=0,06$ м. Фокусное расстояние зеркала $F=0,11$ м. Найти высоту L изображения предмета.

9. Предмет размером $l=8$ см надо спроектировать на экран. Какое фокусное расстояние F должен иметь объектив, находящийся от экрана на расстоянии $f=4$ м, чтобы изображение предмета на экране имело размер $L=2$ м?

10. Мнимое изображение светящейся точки в рассеивающей линзе находится в два раза ближе к линзе, чем сама точка. Найти положение светящейся точки, если известно, что она лежит на оси линзы. Оптическая сила линзы $D=-5$ дптр.

Ю. Вирченко, В. Горбацевич, В. Круглов, В. Семкина, М. Шиловская

Московский геологоразведочный институт им. Серго Орджоникидзе

Московский геологоразведочный институт (МГРИ) начал свое существование как геологоразведочный факультет Московской горной академии, созданной по инициативе В. И. Ленина в сентябре 1918 года. В настоящее время Московский ордена Трудового Красного Знамени геологоразведочный институт имени Серго Орджоникидзе — специализированный вуз, готовящий горных инженеров-геологоразведчиков, геофизиков, разработчиков месторождений полезных ископаемых.

В МГРИ имеются следующие факультеты: геологоразведочный, геофизический, техники разведки и разработки, гидрогеологический. Кроме того, функционирует вечерний факультет, где обучаются без отрыва от производства почти по всем специальностям дневных факультетов.

Наконец, в институте уже много лет работает так называемый школьный факультет, в кружках которого занимаются учащиеся 7—10 классов Москвы и Подмосковья. Слушатели школьного факультета зимние каникулы проводят на подмосковном геологическом полигоне МГРИ, где сочетают практические занятия по геологии с разумным отдыхом. Немало представителей школьного факультета участвуют в летних институтских геологических экспедициях.

Глубокому изучению спецдисциплин предшествует в нашем институте солидная физико-математическая подготовка. В частности, очень серьезно поставлено изучение теории вероятностей и математической статистики, вычислительных методов и программирования на ЭВМ. Для студентов читаются факультативные курсы по разделам математики, выходящим за рамки обязательной программы, существуют математические и физические кружки.

Окончившие МГРИ направляются в производственные геологические организации, на горные предприятия, в научно-исследовательские и проектные институты геологических отраслей, черной и цветной металлургии.

В МГРИ существует подготовительное отделение, функционируют платные подготовительные курсы: шестимесячные — для подготовки к поступлению на дневные факультеты (с 7 февраля) и трехмесячные — по подготовке на вечерний факультет (с 1 октября). Кроме того, для всех абитуриентов ежегодно с 1 июля по 30 июля организуются бесплатные подготовительные курсы.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. За 12 часов трактор вспахивает на 2 га больше лошади. Сколько гектаров вспашет за 12 час лошадь и сколько гектаров вспашет за это время трактор, если трактор вспахивает 1 га на 3 часа скорее лошади?

2. Дана функция $2xy=16+x^2$. Требуется

а) произвести ее исследование с помощью производной и построить график;

б) найти площадь фигуры, ограниченной графиком этой функции и линией $y=5$.

3. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник с периметром p и острым углом α. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом φ. Найти объем пирамиды.

4. Решить уравнение

$$\sin^4 x-\cos^4 x=\sin^8 x-\cos^8 x.$$

Вариант 2

1. Путь, по которому проехал мотоциклист, состоит из трех последовательных участков. Средняя скорость на всем пути равна скорости на 2-м участке. Скорость на 1-м участке на 2 км/час меньше средней скорости на всем пути, а скорость на 3-м участке на 15 км/час меньше удвоенной средней скорости на всем пути. Протяженность 1-го участка в 6 раз больше протяженности 3-го. Найти скорость мотоциклиста.

2. Дана функция $y=-1+8x^2-x^4$. Требуется

а) произвести ее исследование с помощью производной и построить график;

б) найти площадь фигуры, ограниченной графиком этой функции и линиями $y=15$, $x=1$ $(x\geqslant 1)$.

3. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной a и углом при вершине α. Боковое ребро, выходящее из вершины угла α, образует с плоскостью основания угол φ. Найти объем пирамиды, если каждое ее боковое ребро перпендикулярно противоположной стороне основания.

4. Решить уравнение

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+x\right)=\operatorname{tg}2x+2.$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. Тело массой $m_1=1$ кг, двигаясь по гладкой горизонтальной поверхности, налетает на неподвижное тело массой $m_2=3$ кг и прилипает к нему. Найти, сколько процентов кинетической энергии первого тела превращается в тепло, если трение о поверхность отсутствует.

2. Часы с маятником длиной $l=1$ м за сутки отстают на $\Delta t=1$ ч. Что нужно сделать с маятником, чтобы часы не отставали?

3. Катушка диаметром $d=5$ см, имеющая $n=1000$ витков, помещена в однородное магнитное поле, параллельное ее оси. Индукция поля меняется с постоянной скоростью $|\Delta\vec{B}|/\Delta t=10^{-2}$ Т/с. К концам катушки подключен конденсатор емкостью $C=10$ мкФ. Определить заряд конденсатора.

4. Преломляющий угол стеклянной призмы $\varphi=60^\circ$. Под каким углом лучи должны падать на призму, чтобы выходить из нее, скользя вдоль поверхности противоположной грани? Коэффициент преломления стекла $n=1{,}6$.

Я. Берман,
Т. Масленникова

Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии

Мы уже подробно писали о МИИГАиКе (см. «Квант», 1977, № 6 и 1978, № 6).

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$3^{2-x} = 3^x - 8.$$

2. Вычислить без таблиц

$$\cos^4\frac{\pi}{8} + 13\cos^2\frac{\pi}{4} + \cos^4\frac{3\pi}{8} + \cos^4\frac{5\pi}{8} + \cos^4\frac{7\pi}{8}.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 1$$

4. Решить неравенство

$$f'(x) \leqslant g'(x)$$

если $f(x) = \frac{2}{x}$; $g(x) = x - x^3$.

5. Даны четыре точки $A(-2;\ -3;\ 8)$, $B(2;\ 1;\ 7)$, $C(1;\ 4;\ 5)$ и $D(-7;\ -4;\ 7)$. Проверить, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$4^{x+\sqrt{x^2-2}} - 5\cdot 2^{x-1+\sqrt{x^2-2}} = 6.$$

2. Решить уравнение

$$\sin^2 x = \sin 3x + \cos x\,(\cos x - 1).$$

3. Решить неравенство

$$\left|\frac{3x}{x^2-4}\right| \leqslant 1.$$

4. При каком значении z векторы $\vec{a} = (6;\ 0;\ 12)$ и $\vec{b} = (-8;\ 13;\ 7)$ перпендикулярны.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{1}{\cos^2 x},\ y = 0,\ x = 0 \text{ и } x = \frac{\pi}{4}.$$

Вариант 3

1. Решить уравнение

$$7^{\lg x} = 98 - x^{\lg 7}.$$

2. Решить уравнение

$$2 + \cos 4x = 2\sin^2 x.$$

3. Решить неравенство

$$\left|\frac{x^2-5x+4}{x^2-4}\right| < 1.$$

4. При каком значении z векторы $\vec{a} = (2;\ -3;\ 4)$ и $\vec{b} = (-3;\ 2;\ z)$ перпендикулярны.

5. Вычислить интеграл

$$\int_3^{-18} \sqrt[3]{2 - \frac{x}{3}}\,dx.$$

Физика

Задачи устного экзамена

1. Найти работу, которую надо совершить, чтобы увеличить скорость движения тела от $|\vec{v}_1| = 2$ м/с до $|\vec{v}_2| = 6$ м/с на пути $l = 10$ м. На всем пути действует постоянная сила трения $|\vec{F}_{тр}| = 2$Н. Масса тела $m = 1$ кг.

2. Стальной баллон наполнен азотом при температуре $t = 12$ °С. Давление азота $p = 15$ МПа. Найти плотность азота при этих условиях. При какой температуре давление возрастет до значения $p_1 = 18$ МПа? Расширением стенок баллона пренебречь.

3. В калориметр теплоемкостью $C = 63$ Дж/К было налито $m_1 = 250$ г масла при температуре $t_1 = 12$ °С. После опускания в масло медного тела массой $m_2 = 500$ г при температуре $t_2 = 100$ °С установилась окончательная температура $\theta = 33$ °С. Какова удельная теплоемкость c_1 масла по данным опыта? Удельная теплоемкость меди $c_2 = 0{,}38$ кДж/(кг·К).

4. Заряды q_1 и q_2 находятся на расстоянии r друг от друга. Во сколько раз надо изменить расстояние между ними, чтобы сила взаимодействия осталась прежней, если абсолютную величину заряда q_1 увеличить в 4 раза?

5. Четыре электрические лампочки, рассчитанные на напряжение $U = 3$ В и силу тока $I = 0{,}3$ А, надо включить параллельно и питать от источника напряжением $U_0 = 5{,}4$ В. Какое дополнительное сопротивление надо включить последовательно цепочке ламп?

6. Какую максимальную скорость имеют электроны, вырванные из натрия светом с длиной волны $\lambda = 0{,}5$ мкм? Красная граница фотоэффекта для натрия равна $\lambda_{кр} = 0{,}68$ мкм. Постоянная Планка $h = 6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж·с, масса электрона $m = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг.

А. Могилин,
В. Дрёмина

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

(МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ)

Математический факультет является одним из наиболее многочисленных по составу факультетов МГПИ им. В. И. Ленина: на дневном отделении — более 900, и на вечернем — более 200 студентов.

На факультете готовят учителей математики для средней школы. В учебный план входят: математический анализ, алгебра и теория чисел, геометрия, математическая логика, теория алгоритмов, числовые системы, вычислительная математика, программирование, теория аналитических функций, уравнения математической физики, теория вероятностей, общая физика и астрономия, а также общественно-политические дисциплины и дисциплины психолого-педагогического цикла.

На факультете созданы все условия для развития навыков творческой деятельности будущего учителя математики: более 70 спецкурсов и спецсеминаров по математике и педагогическим дисциплинам ежегодно предлагаются на выбор студентам 3—5 курсов; студенты пишут курсовые и дипломные работы, рефераты на различные математические и педагогические темы. Первые навыки научно-исследовательской работы будущий учитель получает в кружках и научных семинарах в системе студенческого научного общества, начиная уже с первого года обучения.

Лучшие студенты факультета рекомендуются для прохождения аспирантуры при кафедрах, чтобы после окончания аспирантуры стать научными работниками или преподавателями педагогических вузов.

На факультете имеется 7 кафедр: математического анализа, высшей алгебры, геометрии, теории чисел, вычислительной математики и программирования, методики преподавания математики, физики.

При математическом факультете имеется вычислительный центр, где студенты знакомятся с современной вычислительной техникой, приобретают навыки работы на электронно-вычислительных машинах и проходят специальную практику в качестве программистов.

При поступлении на факультет сдаются следующие вступительные экзамены: математика (письменно и устно), физика (устно), литература и русский язык (письменно).

В 1978 году на математическом факультете абитуриенты, имевшие средний балл аттестата 5,0 или 4,5, зачислялись на факультет после первых двух экзаменов (математика письменно и устно), если они набрали на них не менее 9 баллов.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. В сосуде было 12 л соляной кислоты. Часть соляной кислоты отлили и сосуд дополнили таким же количеством воды. Затем снова отлили такое же количество смеси и дополнили сосуд таким же количеством воды. Сколько литров отливали каждый раз, если в результате в сосуде оказался двадцатипятипроцентный раствор соляной кислоты?

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=x^2+1$, $y=-x^2+3$.

3. Доказать тождество

$$\cos^2 x+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}+x\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=\frac{3}{2}.$$

4. Доказать, что точки A (1; —1; 1), B (1; 3; 1), C (4; 3; 1), D (4; —1; 1) являются вершинами прямоугольника. Вычислить длину его диагоналей и координаты их точки пересечения.

5. Правильная четырехугольная пирамида пересечена плоскостью, проходящей через сторону основания перпендикулярно противолежащей боковой грани. Сторона основания равна a, боковые грани образуют с плоскостью основания угол в 60°. Вычислить площадь сечения.

Вариант 2

1. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 4 и в остатке 3. Если же это двузначное число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 3 и в остатке 5. Найти это двузначное число.

2. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^3$, $y=\frac{1}{x}$, $x=2$.

3. Доказать тождество

$$\sin^2 x+\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{3}+x\right)=\frac{1}{4}.$$

4. Доказать, что точки A (2; 4; —4), B (1; 1; —3), C (—2; 0; 5), D (—1; 3; 4) являются вершинами параллелограмма, и вычислить величину угла между его диагоналями.

5. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найти величину угла между плоскостями (B, C, B_1) и (B, C_1, M), где M — середина ребра AD.

Г. Карасев,
Э. Кузнецов

Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской

Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской был организован на базе педагогического техникума имени Профинтерна в 1931 году. В настоящее время подготовка учителей в институте ведется на 10 факультетах и 34 кафедрах, в составе которых трудятся 48 профессоров и докторов наук, свыше 250 доцентов и кандидатов наук.

Математический факультет готовит учителей математики для средней школы. На трех кафедрах факультета ведется подготовка аспирантов по специальностям: математический анализ, методика преподавания математики, геометрия и топология, алгебра и теория чисел.

Физический факультет готовит учителей физики, а индустриально-педагогический — учителей общетехнических дисциплин и труда. При кафедрах этих факультетов имеется аспирантура по специальностям: математический анализ, экспериментальная физика, теоретическая физика, методика преподавания физики и трудовое обучение

Подготовительное отделение института, которое работает на правах факультета, ведет подготовку (с отрывом от производства), в частности, по следующим специальностям: математика, физика, общетехнические дисциплины и труд.

Математика

Письменный экзамен

Математический факультет

1. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\frac{5}{x}$, $y=6-x$.

2. На основаниях AB и CD трапеции $ABCD$ построены квадраты (вне ее). Докажите, что прямая, соединяющая центры квадратов, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

3. Решите неравенство

$$\log_{x^2}(3-2x)>1.$$

4. Решите уравнение

$$2\cos x=\sqrt{2+\sin 2x}.$$

5. Высота правильной четырехугольной пирамиды составляет с боковой гранью угол 30°. Через сторону основания пирамиды проведена плоскость, перпендикулярная противолежащей грани. Найдите отношение объемов многогранников, полученных при пересечении пирамиды плоскостью.

Физический факультет

1. Напишите уравнение касательной к параболе $y=x^2-2x$ в точке с абсциссой $x_0=0{,}5$.

2. На стороне AB треугольника ABC взята точка M так, что $|AM|:|MB|=1:1$. Вычислите $|CM|$, если $|AC|=6$, $|BC|=4$, $\widehat{ACB}=120°$.

3. Решите неравенство

$$\log_{\frac{1}{3}}\frac{3x-1}{2x+1}>0.$$

4. Решите уравнение

$$\operatorname{tg} x+\frac{\cos x}{1+\sin x}=2.$$

5. Сторона основания правильной четырехугольной призмы a; высота вдвое больше. Найдите площадь сечения, проведенного через середины двух смежных сторон основания и центр симметрии призмы.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Самолет для взлета должен приобрести скорость $|\vec{v}|=250$ км/ч. Сколько времени длится разгон, если эта скорость достигается в конце взлетной полосы длиной $l=1{,}0$ км? Каково ускорение самолета? Какова средняя скорость самолета на этом участке? Движение самолета считать равноускоренным.

2. Вагон массой $m_1=3\cdot10^4$ кг, движущийся по горизонтальному пути со скоростью $|\vec{v}|=1{,}5$ м/с, автоматически на ходу сцепляется с неподвижным вагоном массой $m_2=2\cdot10^4$ кг. С какой скоростью будут двигаться вагоны после сцепления?

3. Какую работу совершает электровоз за $t=10$ мин, перемещая по горизонтальному пути состав массой $m=3000$ т с постоянной скоростью $|\vec{v}|=72$ км/ч, если коэффициент трения $\mu=0{,}005$?

4. В сосуд, содержащий $m_1=400$ г воды при температуре $t_1=17$ °C, вводят $m_2=10$ г пара при $t_2=100$ °C, который превращается в воду. Определить конечную температуру воды. Теплоемкостью сосуда и потерями тепла пренебречь. Удельная теплоемкость воды $c=4200$ Дж/(кг·К), удельная теплота парообразования воды $L=2{,}26\cdot10^6$ Дж/кг.

5. Какая температура установится в латунном калориметре массой $m_1=160$ г, содержащем $m_2=400$ г воды при температуре $t_1=25$ °C, после того как расплавится помещенный в воду кусок льда массой $m_3=50$ г, взятый при $t_2=0$ °C? Удельные теплоемкости латуни и воды равны соответственно $c_1=3{,}8\times10^2$ Дж/(кг·К) и $c_2=4{,}2\cdot10^3$ Дж/(кг·К); удельная теплота плавления льда $\lambda=3{,}35\cdot10^5$ Дж/кг.

6. С какой силой взаимодействуют два заряда $q_1=0{,}66\cdot10^{-7}$ Кл и $q_2=1{,}1\cdot10^{-5}$ Кл в воде ($\varepsilon=81$) на расстоянии $r=3{,}3$ см? На каком расстоянии их следует поместить в вакууме, чтобы сила взаимодействия осталась прежней?

7. Электрон, двигаясь в вакууме по силовой линии электрического поля, полностью теряет свою скорость между точками с разностью потенциалов $U=400$ В. Определить, какой была скорость электрона, когда он попал в электрическое поле.

8. ЭДС батарейки для карманного фонаря $\mathcal{E}=4{,}5$ В. При внешнем сопротивлении $R=12$ Ом ток в цепи равен $I=0{,}3$ А. Определить внутреннее сопротивление батарейки и падение напряжения на ней.

9. Найти фокусное расстояние линзы, если известно, что действительное изображение предмета, находящегося на расстоянии $d=30$ см от линзы, располагается на таком же расстоянии от нее.

10. Максимальная кинетическая энергия электронов, вылетающих из рубидия при его освещении ультрафиолетовыми лучами с длиной волны $\lambda=3{,}17\cdot10^{-7}$ м, равна $W=2{,}84\cdot10^{-19}$ Дж. Определить работу выхода электронов и красную границу фотоэффекта для рубидия. Постоянная Планка $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с.

Г. Луканкин, М. Петрова, В. Редкозубов

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Ленинградский ордена Трудового Красного Знамени государственный педагогический институт им. А. И. Герцена является одним из крупнейших педагогических институтов Советского Союза. В него входят 15 факультетов, 71 кафедра, которые охватывают обширную область современных научных знаний от педагогики и психологии до вычислительной математики и астрономии.

Цикл физико-математических дисциплин лежит в основе подготовки студентов следующих трех факультетов:

Физический факультет готовит учителей средней школы по двум специальностям: физика и астрономия, физика с правом преподавания на иностранном языке. В составе факультета 4 кафедры: общей и экспериментальной физики, теоретической физики и астрономии, физической электроники и методики преподавания физики.

Математический факультет готовит учителей по специальностям: математика и математика с правом преподавания на иностранном языке. Обучение на факультете организовано на 5 кафедрах: алгебры, геометрии, математического анализа, вычислительной математики и методики преподавания математики. Студенты изучают не только необходимые физико-математические, педагогические, общеобразовательные и общественно-политические дисциплины, но и по собственному выбору слушают специальные курсы по самым различным вопросам современной математической науки.

На математическом факультете действует вычислительный центр, в котором студенты не только знакомятся с современной вычислительной техникой, но и приобретают навыки работы на ЭВМ.

В 1979 году в институте открывается общетехнический факультет. В течение 4-х лет обучения он будет готовить учителей технических дисциплин, черчения и труда. Наряду с циклом общественно-политических и психолого-педагогических дисциплин студенты факультета будут изучать в объеме программы технических вузов высшую математику и физику. Общетехническая подготовка включает дисциплины трех циклов: машиноведение, электрорадиотехника и обработка материалов.

Труд учителя технических дисциплин — сложная, но интересная и увлекательная работа. Она дает большое удовлетворение и возможности всем, кто имеет склонность к преподавательской деятельности, любит технику, увлекается техническим творчеством, созданием макетов и моделей или хочет научиться этому.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростить выражение

$$\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{y})^3+y\sqrt{y}+2x^2:\sqrt{x}}{x\sqrt{x}+y\sqrt{y}}+\frac{3\sqrt{xy}-3y}{x-y}.$$

2. Найти область определения функции

$$f(x)=\sqrt{\log_{x-2}(x^2-8x+15)}.$$

3. Решить уравнение

$$1{,}5\operatorname{ctg} x+4\sin x\cdot\cos x=\frac{3}{2}\operatorname{tg}(-x)-7.$$

4. Определить интервалы монотонности функции $f(x)=\dfrac{3-x^2}{x+2}$ и найти ее экстремумы.

5. Найти угол между медианами катетов равнобедренного прямоугольного треугольника.

Вариант 2

1. Доказать тождество

$$\log_{\frac{1}{3}}[\cos^2(\alpha+\beta)+\cos^2(\alpha-\beta)-$$
$$-\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta]=0.$$

2. Решить уравнение

$$25^{2x-x^2+1}+9^{2x-x^2+1}=34\cdot 15^{2x-x^2}.$$

3. Решить неравенство

$$\left|\frac{2x-1}{x-1}\right|>2.$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y=4x-x^2$ и $y-x=0$.

5. Длина ребра правильного тетраэдра равна c. Через середины двух ребер основания проведена плоскость, параллельная боковому ребру, выходящему из их общей вершины. Вычислить площадь сечения.

Физика

Задачи устного экзамена

Математический факультет

1. Груз массой $m=25$ кг висит на шнуре длиной $l=2{,}5$ м. На какую наибольшую высоту можно отвести груз в сторону, чтобы при дальнейших свободных качаниях шнур не оборвался? Прочность шнура на разрыв равна $|\vec{F}|=500$ Н.

2. В сосуде вместимостью $V=1$ л содержится $m=1{,}78$ г водорода при температуре $t=17$ °С. Найти давление газа в сосуде.

3. Емкости двух металлических шаров $C_1=15$ пФ и $C_2=30$ пФ, а заряды на них соответственно $q_1=2\cdot10^{-8}$ Кл и $q_2=3{,}5\cdot10^{-8}$ Кл. Будут ли перемещаться заряды с одного шара на другой, если шары соединить проволокой?

4. Лифт массой $m=1{,}4$ т равномерно поднимается на высоту $h=20$ м. Опреде-

лить время подъема, если известно, что мотор лифта потребляет ток $I=40$ А при напряжении на зажимах $U=220$ В. КПД мотора $\eta=90\%$.

5. Расстояние от предмета до экрана равно $l=3$ м. Какой оптической силы нужно взять линзу и где следует ее поместить, чтобы получить изображение предмета, увеличенное в $\Gamma=5$ раз?

Физический факультет

1. В цилиндре, площадь основания которого $S=0{,}06$ м^2, находится воздух при температуре $t=10$ °С под давлением $p=5$ атм. На высоте $h=0{,}4$ м над основанием цилиндра расположен поршень. На сколько поднимется поршень и какая будет совершена работа при изобарическом нагревании воздуха на $\Delta t=35$ °С?

2. Какой путь по силовой линии проходит α-частица ($m=6{,}67\cdot10^{-27}$ кг, $q=+3{,}3\cdot10^{-19}$ Кл) до полной остановки в однородном тормозящем электрическом поле с напряженностью $|\vec{E}|=2000$ В/м, если начальная скорость ее равна $|\vec{v}|=2\cdot10^7$ м/с?

3. В однородное магнитное поле с индукцией $|\vec{B}|=0{,}01$ Т перпендикулярно линиям индукции влетает электрон с энергией $W=3\cdot10^4$ эВ. Каков радиус кривизны траектории движения электрона в поле? Заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, его масса $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг.

4. На какой угол отклоняется луч от первоначального направления, выходя из стекла (показатель преломления $n=1{,}57$) в воздух при угле падения $\alpha=30°$? Может ли луч не выйти из стекла в воздух? Если — да, то при каком условии?

5. Какой скоростью обладают электроны, вырванные из цезия (работа выхода $A=1{,}9$ эВ) при облучении его светом с длиной волны $\lambda=0{,}5$ мкс? Масса электрона $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, постоянная Планка $h=6{,}62\cdot10^{-34}$ Дж·с.

Г. Бордовский, К. Зобкова, Е. Ярунина

Казанский авиационный институт им. А. Н. Туполева

Казанский ордена Трудового Красного Знамени авиационный институт им. А. Н. Туполева имеет шесть факультетов дневного обучения:

Факультет летательных аппаратов, старейший факультет института, созданный в 1932 году, готовит инженеров по специальностям: самолетостроение, летательные аппараты, динамика полета и управления летательными аппаратами.

Факультет двигателей летательных аппаратов, созданный в 1939 году, имеет наиболее квалифицированный преподавательский состав, который ведет обучение по четырем специальностям. Выпускники факультета занимают высокие руководящие посты в авиационной и других отраслях промышленности, в научных организациях и в высших учебных заведениях.

Факультет автостроения, открытый в 1970 году, готовит инженеров по четырем специальностям: автомобили и тракторы, двигатели внутреннего сгорания, технология машиностроения, металлорежущие станки и инструменты, машины и технология обработки металлов давлением. Выпускники факультета направляются на работу в конструкторские и технологические отделы машиностроительных и автосборочных заводов.

Факультет систем автоматического управления и оборудования летательных аппаратов был создан в 1951 году. Он готовит инженеров по специальностям: гироскопические приборы и устройства, авиационное приборостроение, электрооборудование летательных аппаратов, авиационное и автотракторное электрооборудование. Специалисты факультета находят применение своим знаниям не только в авиационной и ракетной технике, но и в технике управления любыми подвижными объектами, в проектировании, исследовании, эксплуатации приборов, информационных систем и комплексов по пилотажно-навигационным параметрам.

Радиотехнический факультет, созданный в 1951 году, готовит инженеров-электриков по специальностям: радиотехника, радиоэлектронные устройства и системы, конструирование и производство радиоаппаратуры.

Факультет вычислительных и управляющих систем выделился в отдельный факультет в 1972 году; на нем готовятся инженеры по четырем специальностям: электронные вычислительные машины, конструирование и производство электронной вычислительной аппаратуры, автоматизированные системы управления, прикладная математика.

Все факультеты института имеют студенческие конструкторские бюро (СКБ), где студенты принимают участие в научно-исследовательской работе. Например, в СКБ факультета летательных аппаратов студенты проектируют и строят планеры, дельтапланы, глиссеры и другие летательные аппараты.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Определить объем правильной четырехугольной пирамиды, в которой сторона основания равна a, а двугранный угол между боковыми гранями равен α.

2. Решить уравнение

$$\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2-3=\log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3+\log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3.$$

3. Решить уравнение
$\sin x + \sin 2x + \cos x + \cos 2x + 1 = 0$.

4. Исследовать на экстремум функцию

$$y = \frac{(x-2)^2(x+4)}{4}.$$

5. Векторы $\vec{AB} = -3\vec{i} + 4\vec{k}$ и $\vec{AC} = 5\vec{i} - 2\vec{j} + 4\vec{k}$ служат сторонами треугольника ABC. Найти длину медианы AM.

Вариант 2

1. Основанием пирамиды служит прямоугольный треугольник, площадь которого равна S. Боковые ребра пирамиды равны между собой. Двугранные углы при катетах ее основания равны α и β. Определить объем пирамиды.

2. Решить неравенство

$$\log_{x-2} \frac{x+6}{x+1} < 1.$$

3. Решить уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{4} + x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2} + \operatorname{ctg}\frac{x}{2}\right).$$

4. На графике функции $y = x^2 - 7x + 3$ найти точку, в которой касательная параллельна прямой $y = -5x + 3$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = \frac{1}{x}$, $y = 0$, $x = 2$.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Камень брошен вертикально вверх со скоростью $|\vec{v}_0| = 16$ м/с. На какой высоте кинетическая энергия камня будет равна его потенциальной энергии?

2. Через неподвижный блок перекинута нить, к концам которой подвешены грузы массой $M = 0{,}24$ кг каждый. На один из грузов положили гирьку массой $m = 10$ г. На каком расстоянии друг от друга окажутся грузы через $t = 2$ с, если в начале движения они находились на одной высоте?

3. В медном калориметре, масса которого $m_1 = 200$ г, содержится $m_2 = 150$ г воды при $t_1 = 18$ °С. Определить конечную температуру воды, если в калориметр опустили железный цилиндр массой $m_3 = 100$ г, нагретый до $t_2 = 50$ °С. Удельные теплоемкости меди, воды и железа равны соответственно $c_1 = 380$ Дж/(кг·К), $c_2 = 4200$ Дж/(кг·К) и $c_3 = 460$ Дж/(кг·К).

4. Сколько молей газа содержится в сосуде объемом $V = 10$ л при температуре $t = 27$ °С, если давление газа $p = 760$ мм рт. ст?

5. В двух противоположных вершинах квадрата расположены положительные заряды, а в третьей вершине — отрицательный заряд. Найти напряженность электрического поля в четвертой вершине, если абсолютная величина каждого заряда равна $|q| = 10^{-8}$ Кл, а сторона квадрата равна $a = 50$ см.

6. Электрон влетает в плоский горизонтальный конденсатор параллельно его пластинам со скоростью $|\vec{v}_0| = 10^7$ м/с. Напряженность поля в конденсаторе $|\vec{E}| = 100$ В/см, длина конденсатора $l = 5$ см. Найти абсолютную величину и направление скорости электрона перед вылетом его из конденсатора. Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m = 9{,}1 \cdot 10^{-31}$ кг.

7. Две электрические лампочки с сопротивлениями $R_1 = 200$ Ом и $R_2 = 100$ Ом включаются в сеть с напряжением $U = 220$ В. Определить количество теплоты, выделяемое ежесекундно в каждой лампочке, если лампочки соединены: а) параллельно, б) последовательно.

8. В магнитном поле с индукцией $|\vec{B}| = 1{,}2$ Т перпендикулярно магнитным линиям движется проводник длиной $l = 6$ м со скоростью $|\vec{v}| = 15$ м/с. Какая электродвижущая сила возбуждается в проводнике?

9. Мальчик старается попасть палкой в предмет, находящийся на дне ручья глубиной $h = 40$ см. На каком расстоянии от предмета палка попадает в дно ручья, если мальчик, точно нацелившись, двигает палку под углом $\alpha = 45°$ к поверхности воды? Показатель преломления воды $n = 1{,}3$.

10. На каком расстоянии от сферического зеркала предмет, расположенный на оси, совмещается со своим изображением?

Д. Галимов, Э. Исхаков, В. Печенкин

Томский институт автоматизированных систем управления и радиоэлектроники

ТИАСУР основан в 1962 году на базе радиотехнического факультета Томского политехнического института. За годы работы институт подготовил более 10 тысяч квалифицированных специалистов. Выпускники института распределяются на крупные промышленные предприятия, в научные центры страны, конструкторские бюро, НИИ. Сейчас в институте около 4 тысяч студентов обучаются на четырех дневных факультетах: факультете систем управления (специальности: автоматизированные системы управления, автоматизация и механизация процессов и выдачи информации); радиотехническом факультете (радиотехника, радиоэлектронные устройства); факультете электронной техники (электронные приборы, физическая электроника, промышленная электроника) и конструкторско-технологическом факультете (конструирование и производство радиоаппаратуры, конструирование и производство электронно-вычислительной аппаратуры).

Имеются вечерний и заочный факультеты (радиотехника, промышленная электроника, конструирование и производство радиоаппаратуры).

Учебные и научные лаборатории оснащены современным электронным оборудованием, широко используются в учебном процессе технические средства обучения, имеются вычислительные залы и вычислительный центр с современными ЭВМ, работает замкнутая система учебного телевидения.

Более двух третей студентов дневных факультетов занимаются научно-исследовательскими работами. При институте имеется НИИ автоматики и электромеханики, являющийся базой для подготовки научных и инженерных кадров.

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Найти экстремумы функции

$$y=2x^3-6x^2-18x+7.$$

2. Решить уравнение

$$\cos^2 x+\cos^2 2x-\cos^2 3x-\cos^2 4x=0.$$

3. Решить неравенство

$$\frac{3x^2-16x+21}{\log_{0,3}(x^2+4)}<0.$$

4. Найти полную поверхность правильной треугольной пирамиды по данному ее объему V и углу α наклона боковой грани к плоскости основания.

Вариант 2

1. Число 36 разложить на два таких неотрицательных множителя, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.

2. Вычислить $\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)$, если $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}$, $\frac{3}{2}\pi<\alpha<2\pi$.

3. Решить уравнение

$$x^{\frac{\lg x+7}{4}}=10^{\lg x+1}$$

4. В основании пирамиды лежит ромб со стороной a и острым углом α. Каждый из двугранных углов при основании равен φ. Определить объем шара, вписанного в эту пирамиду.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Пуля вылетает из винтовки в горизонтальном направлении со скоростью $|\vec{v}|=750$ м/с. На сколько снизится пуля в вертикальном направлении за время полета, если цель находится на расстоянии $s=500$ м по горизонтали? Сопротивлением воздуха пренебречь.

2. Самолет, летящий со скоростью $|\vec{v}|=360$ км/ч, описывает «мертвую петлю» радиусом $R=200$ м в вертикальной плоскости. Как велика сила, прижимающая летчика к сиденью, в наивысшей и наинизшей точках петли, если масса летчика $m=70$ кг?

3. Пароход, войдя в гавань, выгрузил часть груза; при этом его осадка уменьшилась на $h=0,6$ м. Сколько груза оставил пароход в гавани, если площадь сечения парохода на уровне ватерлинии $S=5400$ м²?

4. На какую высоту необходимо подняться вверх, чтобы давление атмосферы уменьшилось на $\Delta p=1$ мм рт. ст.? Плотность воздуха по высоте считать постоянной и равной $\rho=1,3$ кг/м³.

5. По цепи, состоящей из источника тока с ЭДС $\mathscr{E}=6$ В и внутренним сопротивлением $r=2$ Ом и реостата, идет ток $I=0,5$ А. Какой величины пойдет ток при уменьшении сопротивления реостата в два раза?

6. Амперметр имеет сопротивление $R_A=0,02$ Ом, его шкала рассчитана на ток $I=1,2$ А. Какого сопротивления шунт надо поставить к нему, чтобы можно было измерять токи до $I_1=6$ А?

7. На какую длину волны настроен радиоприемник, если его приемный контур обладает индуктивностью $L=3\cdot10^{-3}$ Г и емкостью $C=3\cdot10^{-9}$ Ф?

8. Красная граница фотоэффекта для вольфрама равна $\lambda_{кр}=2,75\cdot10^{-7}$ м. Найти наибольшую скорость электронов, вырываемых из вольфрама светом с длиной волны $\lambda=1,75\cdot10^{-7}$ м. Постоянная Планка $h=6,6\cdot10^{-34}$ Дж·с, масса электрона $m=9\cdot10^{-31}$ кг.

В. Замотринский

Новые книги

В этом номере мы публикуем аннотации на доступные школьникам книги по математике и физике, вышедшие во II квартале 1979 года.

Математика

Издательство «Наука»

1. Игнатьев Б. И. *В царстве смекалки.* Издание 3-е, стереотипное. Объем 10 л., тираж 300 000 экз., цена 40 к.

Подробную рецензию на эту книгу по занимательной математике см. в «Кванте», 1978, № 11, с. 54.

2. Маркушевич А. И. *Ряды.* Издание 4-е. Объем 10 л., тираж 40 000 экз., цена 10 к.

Цель книги — в доступной и свободной форме познакомить старшеклассников с отделом математики, который Коши называл алгебраическим анализом. Речь идет о понятии ряда, об основных свойствах рядов (в частности, об их сходимости), а также об изображении элементарных функций рядами (без помощи формулы Тейлора).

В книге объясняется, как составляются таблицы тригонометрических и логарифмических функций, показывается, что значения этих функций можно получать, производя над аргументом одни лишь арифметические действия. Правда, число этих действий неограничено и, чем больше их производить, тем более точные значения функций будут получаться. В книге рассказывается также о том, как ряды позволяют находить приближенные выражения тригонометрических и логарифмических функций в виде многочленов, причем ошибка при замене функции многочленом может быть сделана сколь угодно малой.

В книге содержится много интересных и поучительных сведений из истории математики. Все изложение построено в виде связного повествования, главным героем которого является биноминальный ряд. Читателю, не боящемуся выкладок, предоставляется возможность проследовать путями, которыми шли Ньютон, Эйлер, Лагранж, Коши, много сделавшие для того, чтобы приучить математиков обращаться с рядами так же свободно и легко, как с многочленами. В то же время читателю объясняется, что ряды — это не многочлены и что осмысленное их употребление основывается на теории пределов.

3. Маркушевич А. И. *Площади и логарифмы.* Издание 2-е. Объем 3 л., тираж 100 000 экз., цена 10 к.

В книге излагается геометрическая теория логарифмов — логарифмы появляются в ней как некоторые площади. Все свойства логарифмов, а также способы их вычисления выводятся из свойств площадей. Попутно автор знакомит читателей с простейшими понятиями и свойствами интегрального исчисления, не используя понятия производной.

От читателя требуется лишь первоначальное знакомство с простейшими функциями и их графиками, с геометрической прогрессией и понятием предела.

4. Тихонов А. Н., Костомаров Д. П. *Рассказы о прикладной математике.* Объем 8 л., тираж 100 000 экз., цена 30 к.

В книге в популярной форме рассказывается о прикладной математике, о применении ЭВМ к решению прикладных задач. Основное внимание уделяется трем вопросам: построению математических моделей изучаемых объектов, разработке численных алгоритмов для их исследования и проблеме оптимизации.

Книга предназначена для читателей, которые захотят познакомиться с идеями и методами современной прикладной математики.

5. Успенский В. А. *Треугольник Паскаля.* Издание 2-е, дополненное. Объем 2 л., тираж 100 000 экз., цена 10 к.

Треугольник Паскаля («Алгебра и начала анализа 9», п. 7) — это не геометрический треугольник с тремя углами и тремя сторонами. Треугольником Паскаля называют бесконечную числовую таблицу «треугольной формы», в которой по боковым сторонам стоят единицы и всякое число, кроме этих боковых единиц, получается как сумма двух чисел, стоящих над ним. (В такой форме треугольник Паскаля появился в сочинении Паскаля «Трактат об арифметическом треугольнике», изданном в 1665 году.) В книге рассказывается про треугольные и пирамидальные числа, которые вызвали интерес еще в Древней Греции, где им приписывались мистические свойства. Выводится формула Ньютона и формула для числа C_n^k. Показывается применение треугольника Паскаля при решении задач комбинаторного характера.

Изложение не предполагает каких-либо предварительных знаний, выходящих за рамки программы восьмилетней школы.

6. Пидоу Д. *Геометрия и искусство.* Перевод с англ. Объем 16 л., тираж 50 000 экз., цена 96 к.

Даниэл Пидоу — известный американский математик, специалист по алгебраической геометрии. В оригинале его книга называется «Геометрия и свободные искусства». В средние века геометрия считалась наряду с изобразительным искусством и архитектурой. В книге как раз и идет речь о том, какие пересечения существуют между геометрией и живописью, геометрией и архитектурой, обсуждается, что есть общего между эстетикой, зрительным восприятием и математикой, исследуется вопрос, каким образом математика может помочь изобразительному искусству.

В книге излагается теория перспективы, обсуждается вопрос, верно ли на картинах изображается сфера, и более общий вопрос — как вообще на плоскости изобразить трехмерное пространство. Последняя, восьмая, глава книги посвящена проективной геометрии.

Физика

Издательство «Наука»

1. Струков А. Б. *Сегнетоэлектричество.* Объем 15 л., тираж 30 000 экз., цена 20 к.

В книге рассматриваются основные свойства сегнетоэлектрических кристаллов и излагаются основополагающие представления феноменологической и микроскопической теории сегнетоэлектричества.

Рассматриваются также некоторые возможности применения сегнетоэлектриков в технике.

Книга доступна школьникам старших классов.

2. Перельман Я. И. *Занимательная физика.* Книга II. Издание 20-е, исправленное. Объем 15 л., тираж 500 000 экз., цена 50 к.

Эта книга не является прямым продолжением ранее изданной первой книги (см. «Квант», 1979, № 4). Написанная известным популяризатором науки, она не столько сообщает читателю новые знания, сколько помогает ему оживить те знания и представления, которые читатель получает из курса средней школы.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

3. Горбацкий В. Г. *Космические взрывы.* Издание 3-е, переработанное. Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 40 к.

Книга посвящена взрывным процессам в космосе. Автор подробно останавливается на том, что такое взрыв и как он возникает. Начиная рассмотрение с простых примеров — взрывов в двигателе внутреннего сгорания, он постепенно подводит читателя к взрывным процессам на Солнце, вспышкам звезд, взрывам в ядрах Галактик и квазарам.

Книга доступна школьникам старших классов.

4. Дагаев М. М. *Наблюдения звездного неба.* Издание 4-е. Объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 40 к.

В книге рассказывается об ориентировании по звездному небу и об основных причинах изменения условий видимости созвездий на протяжении года. Описываются наиболее яркие объекты, доступные наблюдениям в малые телескопы. Приводятся методы простейших наблюдений планет, переменных звезд и метеоров, вполне доступные начинающим любителям астрономии. Специальный раздел посвящен описанию методов изготовления простейшего самодельного телескопа.

Книга рассчитана на начинающих любителей астрономии и может служить пособием в работе астрономических кружков.

5. Бронштэн В. А. *Планеты и их наблюдение.* Издание 2-е, переработанное и дополненное. Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 40 к.

В книге в популярной форме, но на современном научном уровне рассказывается о природе планет Солнечной системы и их спутников, о методах их исследования, о задачах и способах их наблюдений любителями астрономии. Книга состоит из двух частей. В первой части сообщаются результаты исследования планет как методами наземной астрономии, так и с помощью космических аппаратов. Во второй части излагаются задачи и методика наблюдений планет средствами любителя астрономии и обработки этих наблюдений.

Книга рассчитана на любителей астрономии, членов астрономических кружков, учителей.

Издательство «Мир»

6. Лёзер Ф. *Тренировка памяти.* Перевод с немецкого. Объем 9 л., тираж 75 000 экз., цена 60 к.

Книга знакомит читателя с современными представлениями о важнейших механизмах памяти и методах ее тренировки. В книге приведены многочисленные тесты, примеры и иллюстрации.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

«Атомиздат»

7. Ройрыш А. И., Морохов И. Д. *Хиросима.* Объем 13 л., тираж 15 000 экз., цена 45 к.

Книга посвящена истории создания первой атомной бомбы. Она рассчитана на широкий круг читателей.

Издательство «Просвещение»

8. Рыдник В. И. *О современной акустике.* Объем 5 л., тираж 100 000 экз., цена 15 к.

В книге популярно и занимательно рассказывается о достижениях современной физической и архитектурной акустики, описывается использование инфразвуков и ультразвуков.

Книга доступна самому широкому кругу читателей.

9. Хазен А. М. *Поле, волны, частицы и их модели.* Объем 9 л., тираж 100 000 экз., цена 30 к.

В живой, увлекательной форме автор рассказывает о фундаментальных объектах современной физической науки — полях, волнах, частицах, об использовании метода моделей при описании этих объектов. Анализируется роль математики в объяснениях явлений природы, приводится много исторических примеров и параллелей. Основное внимание обращается на выявление и описание глубокой взаимной связи между образами физической науки, на первый взгляд, противостоящими друг другу.

Книга рассчитана на школьников старших классов.

И. Клумова,
М. Смолянский

«Теория вероятностей» без теории

1. Надежность первой схемы:

$$p_1 = 0{,}7\times 0{,}8\times 0{,}9 = 0{,}504,$$

надежность второй схемы:

$$p_2 = 0{,}8\times 0{,}8\times 0{,}8 = 0{,}512,$$

надежность второй схемы больше.

2. Игре «испорченный телефон» соответствует схема из последовательно соединенных элементов, надежность которой получается перемножением надежностей составляющих элементов.

3. Если надежность мотора p, то надежности двух- и четырехмоторных самолетов равны соответственно

$$p_2 = 1-(1-p)^2,\ p_4 = 1-(1-p)^4.$$

4. Путь от входа к кладу содержит четыре развилки, три из которых имеют 2 продолжения, одна — 3. Поскольку лишь один из возможных путей ведет к кладу, а остальные к яме, то вероятность найти клад: $1/2\times 1/2\times 1/2\times 1/3 = 1/24$, а вероятность погибнуть: $1-1/24 = 23/24$.

5. Из аналогичных соображений вероятность найти клад, не петляя $1/8$. Вероятность найти клад, сделав одну петлю, $1/8\times 1/8$ и т. д.

Итак, вероятность когда-нибудь найти клад равна

$$p = 1/8 + 1/8\times 1/8 + 1/8\times 1/8 + \ldots = 1/7$$

по формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии.

Глаз на вступительных экзаменах

1. $d_1' = 8{,}3$ см; $d_2' = 25$ см.
2. $d_{max} = 12$ см.
3. $F = 60$ см.
4. $D = 2$ дптр.

Нестандартные задачи по стереометрии

1. $3\sqrt{\frac{5}{2}}$. Рассмотреть развертку пирамиды.

2. $\sqrt{3}\ \mathrm{tg}\,40^\circ$. Выразить расстояния между серединами противоположных ребер пирамиды через длины ребер.

3. 68/3. См. решение задачи 3.

4. $2\sqrt{3}$. См. решение задачи 5.

5. $\frac{3-\sqrt{5}}{4}$. Показать, что условиями задачи пирамида определяется однозначно.

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1978 году

Московский институт стали и сплавов
Математика

Технологический факультет

1. $x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k\in Z,\ x\in \left]\frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{2}\right[$.

2. $\frac{8}{3}$. 3. 1. 4. $\cos\left(\widehat{\overrightarrow{BC_1},\ \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{1}{\sqrt{1+4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}$, $S = a^2(1+3\sin^2\alpha)$.

5. Длины сторон равны $\frac{a}{2}$, $\frac{a}{2}$, $\frac{a\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$.

Факультет металлургии черных металлов и сплавов

1. $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{4}{3}$. 2. $x\in[0;\ 1]\cup[4;16]$. 3. $x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ x_2 = \mathrm{arcctg}\,2 + k\pi,\ k\in Z$. 4. -24. 5. $\frac{\pi}{3}$.

Факультет металлургии цветных и редких металлов и сплавов

1. $x\in[-1;\ 4[$. 2. $x_1 = k\pi,\ x_2 = -\mathrm{arctg}\,2 + k\pi,\ k\in Z$. 3. $\frac{+1}{\sqrt{3}}$.

4. $1/2\ \ln 2$. 5. Длины вектора равны: $\sqrt[6]{200}$; $2\sqrt[6]{200}$; $3\sqrt[6]{200}$.

Физико-химический факультет

1. $x\in[-7;\ -\sqrt{35}[\cup[5;\ \sqrt{35}]$.

2. $x = (-1)^n\frac{\pi}{4} + n\pi,\ n\in Z$. 3. Наибольшее значение $y(6) = 132$, наименьшее: $y(3) = -57$. 4. $B\left(-\frac{17+2\sqrt{307}}{27};\ \frac{71+2\sqrt{307}}{27};\ \frac{59-\sqrt{307}}{27}\right)$; $C\left(\frac{1}{3};\ \frac{5}{3};\ \frac{8}{3}\right)$ или $B\left(\frac{-17+2\sqrt{307}}{27};\ \frac{71-2\sqrt{307}}{27};\ \frac{59+\sqrt{307}}{27}\right)$; $C(-1;\ 3;\ 2)$.

Московский институт электронной техники

Математика

Вариант 1

1. $x_1 = \pi + 2\pi k,\ x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi l\ (k, l \in Z)$.

2. $\{10\}$. 3. 9. 4. $2a$. 5. $\vec{0}$.

Вариант 2

1. $x = \frac{\pi}{4} + \pi k\ (k \in Z)$. 2. $\{10, 10^4\}$.

3. $\frac{8}{9}$. 4. 1. 5. $\vec{c_1} = (1; 0; 1)$, $\vec{c_2} = \left(-\frac{1}{3}; \frac{4}{3}; -\frac{1}{3}\right)$.

Физика

1. Натяжение нити будет больше во втором случае.

2. См. рис. 1 (α_0 — угол, при котором груз начнет скользить по плоскости).

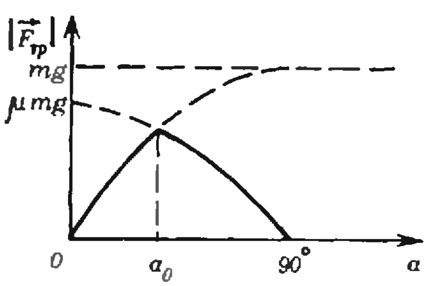


Рис. 1.

3. $T = \sqrt{6\pi/(\gamma\rho)} \approx 160$ мин.

4. $n = \frac{4}{\lg(1 + V/V_0)}$.

5. В системе единиц СГСЭ $r = \frac{4e^2}{m|\vec{v}|^2} \approx 2{,}5 \cdot 10^{-8}$ см.

6. $\varphi' = \varphi\frac{R_1}{R_2}$.

7. $q = \frac{\rho V F z \mu}{3ART} \approx 5 \cdot 10^3$ Кл (здесь $F = 96\,500$ Кл/моль — число Фарадея, $z = 2$ — валентность водорода, $\mu = 2 \cdot 10^{-3}$ кг/моль — молярная масса водорода, $A = 10^{-3}$ кг/моль — его атомная масса).

8. $t/T = lv/c = 5 \cdot 10^{-2}$.

9. $H = nh = 2{,}66$ м.

10. $D = \frac{1}{d_0} - \frac{1}{d} = -2{,}25$ дптр (здесь $d_0 = 25$ см — расстояние наилучшего зрения для нормального глаза).

Московский авиационный институт им. Серго Орджоникидзе

Математика

Вариант 1

2. $\{5\}$. 3. Возрастает на $]-\infty; 1]$ и на $[2; +\infty[$, убывает на $[1; 2]$, при $x = 1$ имеет максимум, при $x = 2$ — минимум.

4. $[0; 2 - \sqrt{2}[\cup]2 + \sqrt{2}; 6]$. 5. $\left]-\frac{3}{2}; 1 - \sqrt{3}\right[\cup]1 + \sqrt{3}; +\infty[$. Указание. Требуемые условия выполняются тогда и только тогда, когда $(x_1 + x_2) - x_1x_2 > 0$ и $f(1) > 0$.

Вариант 2

2. $\vec{c} = \left(\frac{4}{\sqrt{3}};\ -\frac{1}{\sqrt{3}};\ -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

3. $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi l$, $x_3 = 2\pi m\ (k, l, m \in Z)$. 4. $h = \sqrt[4]{3}$ дм, $P = \frac{8}{\sqrt[4]{3}}$ дм. 5. $\frac{h^3\sqrt{\cos(\beta + \varphi)\cdot\cos(\beta - \varphi)}}{\sin 2\beta\cdot\sin\varphi\cdot\cos\beta}$.

Вариант 3

1. $]-\infty; -4[\cup]\frac{7}{2}; +\infty[$. 2. $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2}{3}\pi\right\}$. 3. $\left(\frac{3}{2}; \frac{13}{4}\right)$. 4. $\frac{\sqrt{51}}{3}$. Указание. См. § 22 «Геометрии 9». 5. $M \cap N \neq \varnothing$ при $a \in]-\infty; 0[\cup]1; +\infty[$. При $a < 0$

$M \cap N = \left]\frac{1}{1-a}; -\frac{3a^2}{a-3} + 1\right[$.

Физика

Вариант 1

2. $v_{ср} = 2v_м/\pi \approx 6{,}4$ м/с.

3. $I_м = \mathcal{E}_м/R$

4. $p = \frac{2p_1p_2}{p_1 + p_2}$.

5. $F = l/3 = 8$ см.

Вариант 2

2. $|\vec{F}_{t_1}| = 6m\alpha t_1$; $W_{t_2} = m\left(3\alpha t_1^2 + \beta\right)/2$.

3. $q = 3eN_0m/\mu \approx 10^7$ Кл $t = q/I \approx 10^7$ с.

4. $A = p_1(V_2 - V_1) + \alpha_1\left(V_2^2 - V_1^2\right)/2 + \alpha_2\left(V_2^3 - V_1^3\right)/3$.

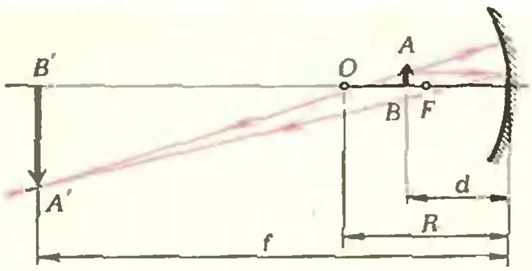


Рис. 2.

5. $f = \frac{Rd}{2d-R} = 15$ см (см. рис. 2); $\Gamma = \frac{f}{d} = 5$.

Московский энергетический институт

Математика

Вариант 1

1. $-\frac{1}{8}$. 2. $\left\{\left(\sqrt[4]{3}; 1\right), \left(\sqrt[4]{3}; -1\right)\right\}$.
3. $\sqrt{3}-1$. 4. $\left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right\}$. 5. Если основание равнобедренного треугольника, полученного в сечении, лежит на плоскости $ABCD$, то $S = \frac{a^2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}$; если оно лежит на плоскости CDD_1C_1 (или на плоскости BCC_1B_1), то $S = \frac{a^2}{2\sqrt{-\cos 2\alpha}}$.

Вариант 2

1. $-\frac{8x}{(x^2-4)^2}$. 2. $]100; +\infty[$.
3. $\frac{1}{4}$. 4. $\left\{-\pi, -\frac{5}{6}\pi, -\frac{2}{3}\pi, 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right\}$. 5. $\frac{\pi}{24h}(16S^2 + h^4\cdot \mathrm{ctg}^2\alpha + 6Sh^2\times \mathrm{ctg}\,\alpha)$.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

2. $n = 2/3 \approx 0{,}67$.

3. $A = \frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right) = 8{,}1\cdot 10^{-10}$ Дж.

4. $|\vec{v}_1| = \sqrt{\frac{2W}{3m}} = 25{,}8$ м/с; $|\vec{v}_2| = 3|\vec{v}_1| = 77{,}4$ м/с.

5. $T_0 = T + \frac{A\mu}{mR} \approx 254$ К; $V_0 = \frac{mRT_0}{\mu(p_0 + Mg/S)} \approx 0{,}024$ м³.

Задачи устного экзамена

1. $|\vec{a}| = \frac{|\vec{F}|}{m}\left(\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1 \times \frac{mg - |\vec{F}|\sin\alpha_2}{mg - |\vec{F}|\sin\alpha_1}\right) \approx 0{,}78$ м/с².

2. $l_{O_2} = l/17 \approx 0{,}06$ м; $l_{H_2} = 16l/17 \approx 0{,}94$ м.

3. $m = \frac{qQ}{\varepsilon_0 Sg} \approx 0{,}0115$ кг $= 11{,}5$ г.

4. $U = \sqrt{PR/\eta} = 12\,500$ В $= 12{,}5$ кВ.

5. $\varepsilon = \frac{\lambda^2 d}{4\pi^2 c^2 \varepsilon_0 LS} \approx 6$.

Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

2. $\left\{-\frac{9}{2}, 3\right\}$. 3. $\frac{1}{3}\pi a^3\cdot\frac{\sin^2\beta\cdot\sin^2\gamma}{\sin^2(\beta+\gamma)}$.
4. $x_1 = \frac{\pi}{2}k$, $x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi l$ $(k, l \in Z)$.
5. Радиус основания равен $R\sqrt{2}$, высота — $4R$.

Вариант 2

2. $\{9\}$. 3. $\frac{S}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta}\right)$. Указание. См. § 50 «Геометрии 10». 4. $x_1 = 2\pi k$, $x_2 = \frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}l$ $(k, l \in Z)$. 5. Нигде (функция f убывает на R).

Устный экзамен

Билет 1

2. $\varnothing$. 3. На $[-1; 0[$ и на $]0; 1]$.
4. $\left]-\infty; \log_2\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right[\cup \left]\log_2\frac{5+\sqrt{21}}{2}; +\infty\right[$.

Билет 2

2. $-\frac{\sqrt{5}}{2}$. 4. $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k$ $(k \in Z)$.

Физика

1. $h_{max} = \frac{|\vec{v}_0|^2\sin^2\alpha}{2g} = 15$ м; $s_{max} = \frac{|\vec{v}_0|^2\sin 2\alpha}{g} \approx 35$ м.

2. $|\vec F_{\min}| = \frac{mg}{k} = 500$ Н.

3. $|\vec u| = \frac{m_1 \sin\alpha}{m_1 + m_2} |\vec v| \approx 1{,}25$ м/с.

4. $V_1 = \frac{\rho_2 - \rho_3}{\rho_3 - \rho_1} V_2 = 1{,}7$ м³.

5. $\alpha = \frac{h_2 - h_1}{h_1 t_2 - h_2 t_1}$.

6. $m_2 = \frac{m_1}{c_2(\theta - t_2)} [c_1(t_1 - t_0) + \lambda + c_2(t_0 - \theta)] \approx 40$ кг.

7. $\mathcal{E} = |\vec B|\, l\, |\vec v| = 1$ В.

8. $L = \frac{Fl}{d - F} = 0{,}22$ м.

9. $F = \frac{lf}{L + l} \approx 15{,}4$ см.

10. $d = -\frac{1}{D} = 0{,}2$ м.

Московский геологоразведочный институт им. Серго Орджоникидзе

Математика

Вариант 1

1. Лошадь — 2 га, трактор — 4 га. 2. 15—16 ln 2.

3. $\frac{p^3}{24} \cdot \frac{\sin 2\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\varphi}{(\sin\alpha + \cos\alpha + 1)^3}$. 4. $x_1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k$, $x_2 = \frac{\pi}{2} l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$.

Вариант 2

1. Средняя скорость на всем пути равна 35 км/час. Решение. Обозначим искомую скорость через x (км/час), протяженность второго участка через y (км), протяженность третьего участка через z (км). Тогда

$$\frac{6z}{x-2} + \frac{y}{x} + \frac{z}{2x-15} = \frac{6z + y + z}{x},$$

или

$$\frac{6z}{x-2} + \frac{z}{2x-15} = \frac{7z}{x},$$

или

$$\frac{6}{x-2} + \frac{1}{2x-15} = \frac{7}{x}.$$

Отсюда $x_1 = 35$, $x_2 = 6$. Второй корень не годится, так как $2x_2 - 15 < 0$.

2. $3\frac{8}{15}$. 3. $\frac{1}{3} a^3 \cdot \sin\frac{\alpha}{2} \cdot \cos\alpha \cdot \mathrm{tg}\,\varphi$.

Указание. Если S — вершина данной пирамиды и O — точка пересечения высот ее основания, то $[SO]$ — ее высота.

4. $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k$ $(k \in \mathbf{Z})$.

Физика

1. $\frac{Q}{E_к} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} 100\% = 75\%$.

2. $\Delta l = l\left[1 - \frac{l^2}{(l + \Delta l)^2}\right] \approx 0{,}08$ м.

3. $q = \frac{\pi d^2 nC}{4} \frac{|\Delta \vec B|}{\Delta t} = 1{,}95 \cdot 10^{-7}$ Кл.

4. $\alpha = 35°$.

Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии

Математика

Вариант 1

1. $x = 2$. 2. 8. 3. $x \in]-\infty; -3[\cup]-2; -1[$. 4. $x \in [-1; 0[\cup]0; 1]$.

Вариант 2

1. $x = \frac{3}{2}$. 2. $x = \frac{2\pi n}{3}$; $x = 2\pi n - \frac{\pi}{2}$; $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$.

3. $x \in]-\infty; -4[\cup]-1; 1[\cup]4; \infty[$.
4. $z = 4$. 5. $S = 1$ кв. ед.

Вариант 3

1. $x = 100$. 2. $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$. 3. $x \in]0; \frac{8}{5}[\cup]\frac{5}{2}; \infty[$.

4. $z = 3$. 5. $-\left(\frac{3}{2}\right)^3$.

Физика

1. $A = m\left(|\vec v_2|^2 - |\vec v_1|^2\right)/2 + |\vec F_{тр}|\, l = 36$ Дж.

2. $\rho = \frac{p\mu}{RT} \approx 180$ кг/м³; $T_1 = \frac{p_1}{p} T = 342$ К ($t_1 = 69°$ C).

3. $c_1 = \frac{c_2 m_2 (t_2 - \theta)}{m_1(\theta - t_1)} - \frac{C}{m_1} \approx 2{,}17$ кДж/(кг·К).

4. Расстояние между зарядами надо увеличить в 2 раза.

5. $R_{доп} = \frac{U_0 - U}{4I} = 2$ Ом.

6. $|\vec{v}_{max}| = \sqrt{\frac{2hc}{m}\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_{кр}}\right)} \approx$ $\approx 4{,}8\cdot 10^5$ м/с.

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина (математический факультет)

Математика

Вариант 1

1. 3 л. 2. $\frac{8}{3}$. 4. $|AC| = |BD| = 5$, $[AC] \cap [BD] = \left(\frac{5}{2}; 1; 1\right)$. 5. $\frac{3\sqrt{3}}{8}a^3$.

Вариант 2

1. 23. 2. $\frac{15}{4} - \ln 2$ 4. $\arccos\frac{63}{\sqrt{6441}}$. 5. $\arccos\frac{1}{3}$.

Московский областной педагогический институт им. Н. К. Крупской

Математика

Математический факультет

1. $12 - 5\ln 5$. 2. Указание. При гомотетии с центром $[AC] \cap [BD]$ и коэффициентом $-\frac{|CD|}{|AB|}$ квадрат, построенный на $[AB]$, перейдет в квадрат, построенный на $[CD]$. 3. $]-3; -1[$. 4. $x_1 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 + 2\pi k$, $x_2 = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2 - \frac{\pi}{2} + 2\pi l$ $(k, l \in Z)$. 5. Отношение объемов «верхнего» и «нижнего» многогранников равно $\frac{3}{5}$.

Физический факультет

1. $y = -x - \frac{1}{4}$. 2. $\sqrt{7}$. 3. $\left]\frac{1}{3}; 2\right[$. 4. $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ $(k, l \in Z)$. 5. $\frac{9}{4}a^2$. Указание. См. § 50 «Геометрии 10».

Физика

1. $t = 2l/|\vec{v}| \approx 29$ с; $|\vec{a}| = |\vec{v}|/t \approx$ $\approx 2{,}4$ м/с²; $v_{ср} = |\vec{v}|/2 = 125$ км/ч ≈ 35 м/с.

2. $|\vec{v}'| = \frac{m_1|\vec{v}|}{m_1 + m_2} = 0{,}9$ м/с.

3. $A = \mu mg|\vec{v}|t \approx 1{,}8\cdot 10^9$ Дж

4. $\theta = \frac{\lambda m_2 + c(m_1t_1 + m_2t_2)}{c(m_1 + m_2)} \approx 32$ °C.

5. $\theta = \frac{1}{c_1m_1 + c_2(m_2 + m_3)} \times$ $\times [(c_1m_1 + c_2m_2)t_1 + (c_2t_2 - \lambda)m_3] \approx 14$ °C.

6. $|\vec{F}| = \frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon r^2} \approx 0{,}074$ Н; $r_1 =$ $= \sqrt{\varepsilon}\, r \approx 0{,}3$ м.

7. $|\vec{v}| = \sqrt{2eU/m} \approx 12\cdot 10^6$ м/с.

8. $r = \mathscr{E}/I - R = 3$ Ом; $Ir = 0{,}9$ В.

9. $F = d/2 = 15$ см.

10. $A = hc/\lambda - W \approx 3{,}42\cdot 10^{-19}$ Дж; $\lambda_{max} = hc/A \approx 5{,}8\cdot 10^{-7}$ м.

Ленинградский государственный педагогический институт им. А. И. Герцена

Математика

Вариант 1

1. 3. 2. $[4-\sqrt{2}; 3[\,\cup\,]4+\sqrt{2}; +\infty[$. 3. $x = (-1)^{k+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2}k$ $(k \in Z)$. 4. На промежутках $]-\infty; -3[$ и $]-1, +\infty[$ функция f убывает, на промежутках $]-3; -2[$ и $]-2; -1[$ она возрастает, точка -3 является точкой ее минимума, точка -1 — точкой максимума 5. $\arccos\frac{4}{5}$.

Вариант 2

2. $\{1 - \sqrt{3}, 0, 2, 1 + \sqrt{3}\}$. 3. $\left]\frac{3}{4}; 1\right[\,\cup\,]1; +\infty[$. 4. $4\frac{1}{2}$. 5. $\frac{1}{4}c^3$.

Физика

Математический факультет

1. $h_{max} = \frac{l}{2}\left(\frac{|\vec{F}|}{mg} - 1\right) \approx 1{,}3$ м.

2. $p = \frac{mRT}{\mu V} \approx 2{,}14\cdot 10^6$ Па

3. Поскольку потенциал первого шара больше потенциала второго, заряды будут перемещаться с первого шара на второй до тех пор, пока потенциалы шаров не уравняются.

4. $t = \frac{mgh}{\eta IU} \approx 35$ с.

5. $d = \frac{l}{1+\Gamma} = 0{,}5$ м; $D = \frac{1+\Gamma}{d\Gamma} =$ $= 2{,}4$ дптр.

Физический факультет

1. $\Delta h = h\dfrac{\Delta T}{T} \approx 0{,}05$ м; $A = p\Delta hS \approx$ ≈ 150 Дж.

2. $s = \dfrac{m\left|\vec{v}\right|^2}{2q\left|\vec{E}\right|} \approx 2{,}1\cdot 10^3$ м.

3. $R = \dfrac{\sqrt{2mW}}{e\left|\vec{B}\right|} \approx 5{,}8\cdot 10^{-2}$ м.

4. $\varphi = \arcsin(n\sin\alpha) - \alpha \approx 22^\circ$; луч не выйдет из стекла в воздух при углах падения $\alpha \geqslant \arcsin(1/n) \approx 40^\circ$.

5. $\left|\vec{v}\right| = \sqrt{\dfrac{2}{m}\left(\dfrac{hc}{\lambda} - A\right)} \approx 4{,}5\cdot 10^5$ м/с.

6. $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{e\left|\vec{E}\right| l}{m\left|\vec{v}_0\right|^2} \approx 41^\circ$; $\left|\vec{v}\right| = \dfrac{\left|\vec{v}_0\right|}{\cos\alpha} \approx 1{,}33\cdot 10^7$ м/с.

7. а) $P_1 = \dfrac{U^2}{R_1} = 242$ Вт, $P_2 = \dfrac{U^2}{R_2} = 484$ Вт; б) $P_1 = \dfrac{U^2R_1}{(R_1+R_2)^2} \approx 107{,}6$ Вт, $P_2 = \dfrac{U^2R_2}{(R_1+R_2)^2} \approx 53{,}8$ Вт.

8. $\mathcal{E} = \left|\vec{B}\right| l \left|\vec{v}\right| = 108$ В.

9. $x = h\,(\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta) = 14$ см (здесь $\beta = \arcsin(\sin\alpha/n)$).

10. Предмет совмещается со своим изображением в центре кривизны зеркала.

Казанский авиационный институт им. А. Н. Туполева

Математика

Вариант 1

1. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}a^3\cdot\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{-\cos\alpha}}$. 2. $\{1-\sqrt{33},\ 2\}$. 3. $x_1 = -\dfrac{\pi}{4} + \pi k,\ x_2 = \pm\dfrac{2}{3}\pi + 2\pi l$ $(k, l \in \mathbb{Z})$. 4. $x = -2$ — точка максимума, $x = 2$ — точка минимума. 5. $\sqrt{18}$.

Вариант 2

1. $\dfrac{\sqrt{2}}{6}S\sqrt{S}\cdot\sqrt{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$. 2. $]2;\ 3[\ \cup\ ]4;\ +\infty[$. 3. $x = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2}k\ (k \in \mathbb{Z})$. 4. $(1;\ -3)$. 5. $\dfrac{1}{3} + \ln 2$.

Физика

1. $h = \dfrac{\left|\vec{v}_0\right|^2}{4g} = 6{,}5$ м.

2. $l = \dfrac{mgt^2}{2M+m} = 0{,}8$ м.

3. $\theta = \dfrac{t_1(c_1m_1 + c_2m_2) + c_3m_3t_2}{c_1m_1 + c_2m_2 + c_3m_3} \approx 20^\circ$C.

4. $\nu = \dfrac{pV}{RT} = 0{,}4$ моля.

5. $\left|\vec{E}\right| = \dfrac{|q|(2\sqrt{2}-1)}{8\pi\varepsilon_0a^2} \approx 3{,}3\cdot 10$[illegible] В/м.

Томский институт автоматизированных систем управления и радиоэлектроники

Математика

Вариант 1

1. $x = -1$ — точка максимума, $x = 3$ — точка минимума. 2. $x_1 = \dfrac{\pi}{5}k,\ x_2 = \dfrac{\pi}{2}l$ $(k, l \in \mathbb{Z})$. 3. $]-\infty;\ 2\frac{1}{3}[\ \cup\ ]3;\ +\infty[$.

4. $6\sqrt[6]{3}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{V^2}{\operatorname{tg}^2\alpha}}\cdot\dfrac{\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$.

Вариант 2

1. $36 = 6\cdot 6$. 2. $\dfrac{4\sqrt{3}+3}{10}$. 3. $\left\{\dfrac{1}{10^4},\ 10\right\}$. 4. $\dfrac{\pi a^3}{6}\cdot\sin^3\alpha\cdot\operatorname{tg}^3\dfrac{\varphi}{2}$.

Физика

1. $h = \dfrac{gs^2}{2\left|\vec{v}\right|^2} \approx 2{,}2$ м.

2. $\left|\vec{F}_1\right| = m\left(\left|\vec{v}\right|^2/R - g\right) \approx 2800$ Н; $\left|\vec{F}_2\right| = m\left(\left|\vec{v}\right|^2/R + g\right) \approx 4200$ Н.

3. $m = \rho_{\text{в}}Sh = 3{,}24\cdot 10^6$ кг $= 3240$ т (здесь $\rho_{\text{в}} = 10^3$ кг/м^3 — плотность воды).

4. $h = \dfrac{\Delta p}{\rho g} \approx 10{,}4$ м.

5. $I_1 = \dfrac{2\mathcal{E}I}{Ir + \mathcal{E}} \approx 0{,}86$ А.

6. $R_ш = \frac{R_A I}{I_1 - I} = 5$ мОм.

7. $\lambda = 2\pi c\sqrt{LC} = 5652$ м (здесь $c = 3\cdot 10^8$ м/с — скорость света в вакууме).

8. $|\vec{v}| = \sqrt{\frac{2hc(\lambda_{кр} - \lambda)}{m\lambda\lambda_{кр}}} \approx 9{,}6\cdot 10^5$ м/с.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 5)

1. Две нижние спички от последней елки нужно переложить к первой — см. рисунок 3.

2. Поскольку даже $5\cdot 31\cdot 12 < 1900$, день недели — шестой или седьмой. Предположив, что день недели — шестой, получим

$$6\cdot 29\cdot 11 = 1914,\ 6\cdot 30\cdot 11 = 1980,$$
$$6\cdot 27\cdot 12 = 1944,\ 6\cdot 28\cdot 12 = 2016,$$

что невозможно. Если же день недели — седьмой, то из равенств

$$7\cdot 27\cdot 10 = 1890,\ \ 7\cdot 28\cdot 10 = 1960,$$
$$7\cdot 25\cdot 11 = 1925,\ \ 7\cdot 26\cdot 11 = 2002,$$
$$7\cdot 23\cdot 12 = 1932,\ \ 7\cdot 24\cdot 12 = 2016$$

находим: $7\cdot 28\cdot 10 = 1960$. Таким образом, Вадим и Коля играли в шахматы в воскресенье; Надя родилась 28 октября 1960 года.

3. Задача имеет одно решение: **144**.

4. Сложив числа 3, 17 и 18, стоящие в одном ряду, получаем сумму 38. Тогда между числами 3 и 16 должно стоять 19, между 16 и 10 — число 12 и т. д., пока не получим заполнение, изображенное на рисунке 4. Найдем числа a, b и c, указанные на этом рисунке. Так как $10+a+b+1+18=38$, получаем $a+b=9$, а из того, что $16+2+b+c+9=38$, следует, что $b+c=11$. Но $9=1+8=2+7=3+6=4+5$, а $11=1+10=2+9=3+8=4+7=6+5$. Из этих пар допустимы лишь $9=4+5$ и $11=5+6$, так как в других парах хотя бы одно число уже было использовано для заполнения шестиугольника. Отсюда следует, что $a=4$, $b=5$, $c=6$. Теперь нетрудно заполнить оставшиеся клетки. Окончательный вид шестиугольника изображен на третьей странице обложки.

5. Поскольку разность баллов, полученная за один тест, равная $97-73=24$ очкам, вызывает изменение среднего балла на $90-87=3$ очка, в серии профессора Тестера содержится $24/3=8$ тестов.

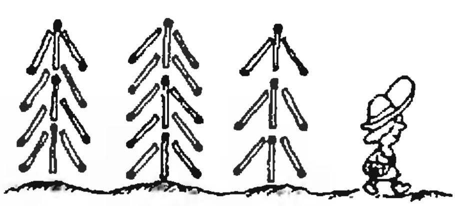


Рис. 3.

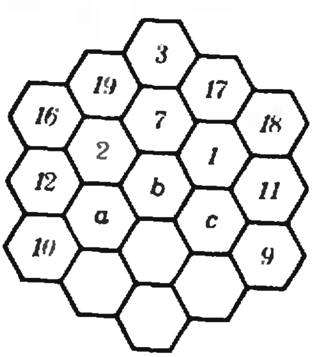


Рис. 4.

Задачи наших читателей

(см. с. 8, 15)

2. Указание а) $S_{AMC} = \frac{1}{3} S_{ABC} = \frac{1}{2}|AM|\ |CM|\sin AMC$;

б) воспользуйтесь теоремой синусов.

1. Указание. Если ни a, ни b не делятся на 5, то a^4 и b^4 дают при делении на 5 в остатке 1.

2. Указание. Исследуйте делимость данных чисел на 3.

3. а) $\overline{abc}=144$; б) $\overline{abc}=118$; в) $\overline{abc}=145$.

4. $10^{n+1}+1$.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Э. Назаров, И. Смирнова, В. Чернов

Зав редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Н. Румянцева

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 31/III—79
Подписано в печать 14/V—79
Печать офсетная
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 7,16 Т-08984
Цена 30 коп Заказ 708
Тираж 287 425 экз.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

Магический шестиугольник

С давних времен были известны так называемые *магические квадраты*. Числа от 1 до n^2, записанные в клетках таких квадратов (размером $n\times n$), расположены так, что их суммы в любом горизонтальном или вертикальном ряду, а также по обеим диагоналям одинаковы. Один из магических квадратов размером 4×4 изображен в правом верхнем углу гравюры А. Дюрера «Меланхолия». Как вы думаете — сколько существует таких квадратов? Оказывается, 880. А магических квадратов размером 5×5? Их около 250 000.

Здесь же изображен «магический шестиугольник»: в его клетках записаны числа от 1 до 19 так, что в каждом из пяти вертикальных рядов, пяти наклонных «слева сверху — вниз направо» и пяти наклонных «справа сверху — вниз налево» сумма чисел одна и та же. Сколько существует таких «магических шестиугольников»? Электронно-вычислительная машина, проверив (в течение сорока двух минут) 196 729 шестиугольников, обнаружила, что этот шестиугольник является единственным! (Конечно, с точностью до поворотов и симметрий.)

Это утверждение доказал Чарльз Тригг — см. недавно вышедшую у нас книгу «Задачи с изюминкой» (М., «Мир», 1976).

Индекс 70465
Цена 30 коп.

К НАШИМ ЧИТАТЕЛЯМ

В каждом номере нашего журнала в разделе «Задачник «Кванта» публикуются задачи по физике и математике. Ежегодно редакция получает несколько тысяч писем от читателей с решениями этих задач. Среди авторов этих писем редакция отбирает школьников, решивших наибольшее число задач и приславших наиболее оригинальные решения. Эти школьники награждаются специальной премией, учрежденной редколлегией журнала «Квант», и получают право участвовать в Республиканских олимпиадах по математике и физике.

Придумать интересную новую задачу обычно труднее, чем ее решить. Труднее, но интереснее. Попробуйте придумать задачи и пришлите их нам.

Школьники — авторы лучших задач будут награждены специальными премиями «Кванта», а сами задачи будут опубликованы в журнале.

Задачи должны присылаться вместе с решениями. Каждая задача должна быть представлена на отдельном листе.

Если задача заимствована, то должен быть указан источник, откуда она взята.

По задачам, не принятым к публикации, переписка с авторами не ведется и текст задач авторам не возвращается.

Ждем ваших писем.

К НАШИМ АВТОРАМ

Если Вы решили прислать нам статью, то просим Вас:

1) Перепечатать ее на машинке в двух экземплярах через два интервала и вписать от руки формулы (рукописный текст мы рассматриваем только в том случае, если автор его — школьник).

2) Нарисовать также в двух экземплярах эскизы рисунков (каждый эскиз — на отдельном листе).

3) Статья не должна содержать более 12 машинописных страниц.

4) Не забудьте сообщить нам полностью Ваши фамилию, имя и отчество, домашний адрес и телефон.

Напоминаем Вам, что рукописи мы не возвращаем.