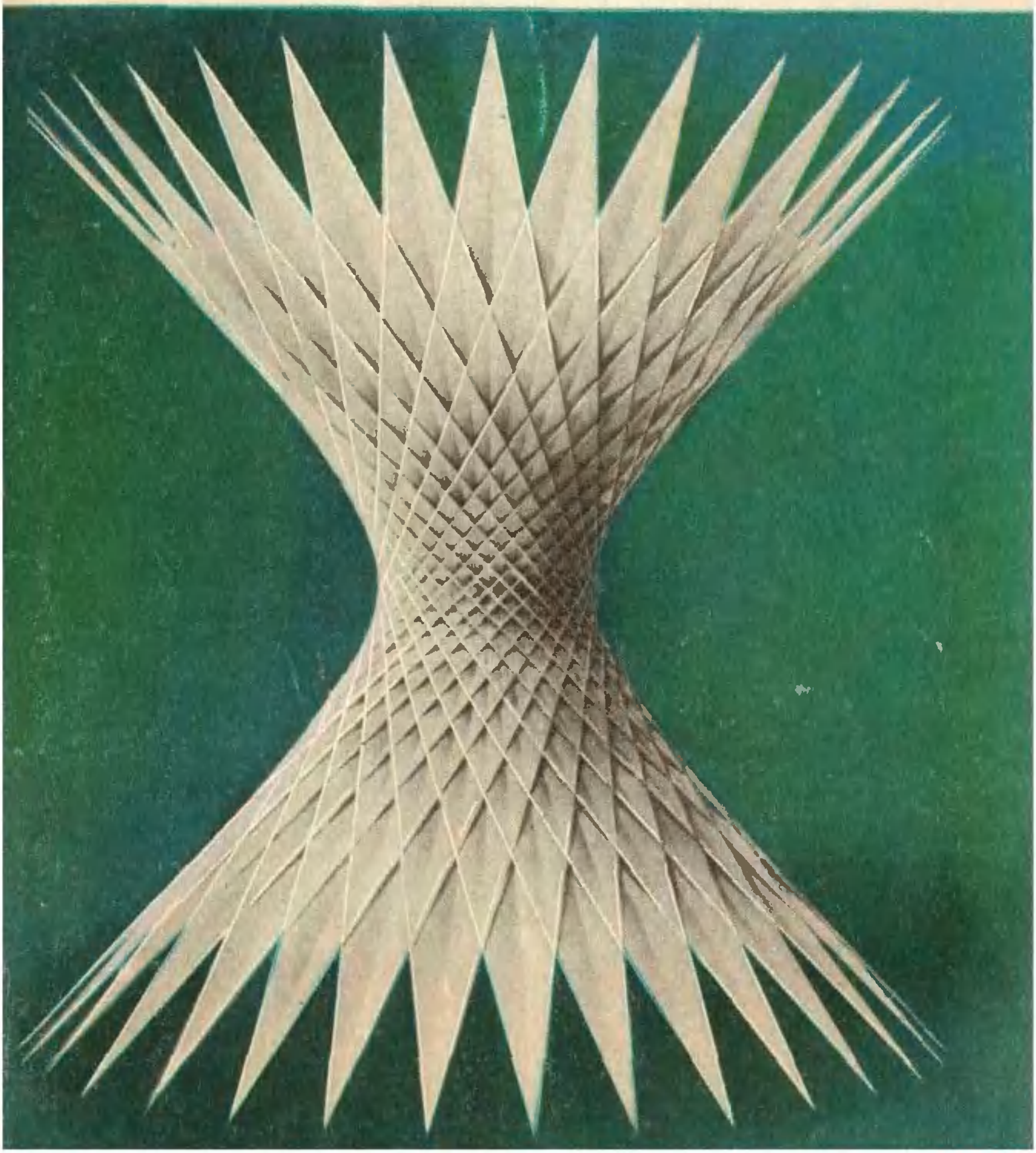
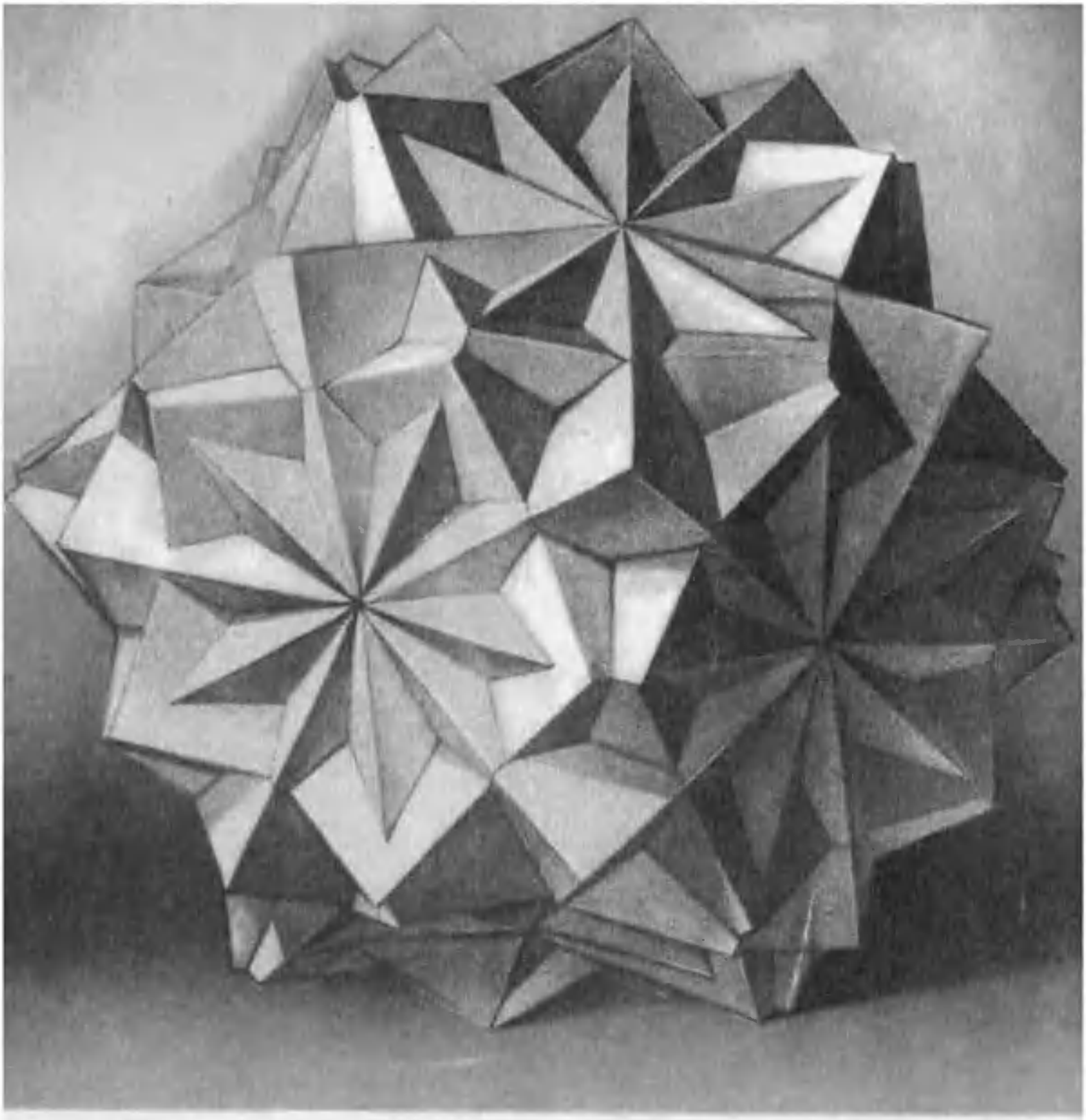
ISSN 0130-2221

Квант

1
1979

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





Сложный многогранник, показанный на обложке, ни что иное, как объединение десяти одинаковых кубов с общим центром. Эти кубы расположены в некотором смысле «максимально симметрично». В каком смысле? — Поясним это для случая пяти кубов. Возьмем додекаэдр и впишем в него куб (так, чтобы вершины куба лежали в вершинах додекаэдра); оказывается, это можно сделать пятью разными способами; объединение таких пяти кубов образует очень красивый многогранник — попытайтесь его нарисовать или построить из тонкого картона. Он попроще, конечно, чем многогранник из десяти кубов, показанный на обложке. Впрочем, тот тоже можно построить, отправляясь от додекаэдра (или икосаэдра), но это уже дело более хитрое—попробуйте! Более подробно о многограннике, составленном из пяти кубов рассказано на странице 57. Там же объясняется, как строить многогранник из десяти кубов.

В. Гамаюнов

Основан в 1970 году

Квант

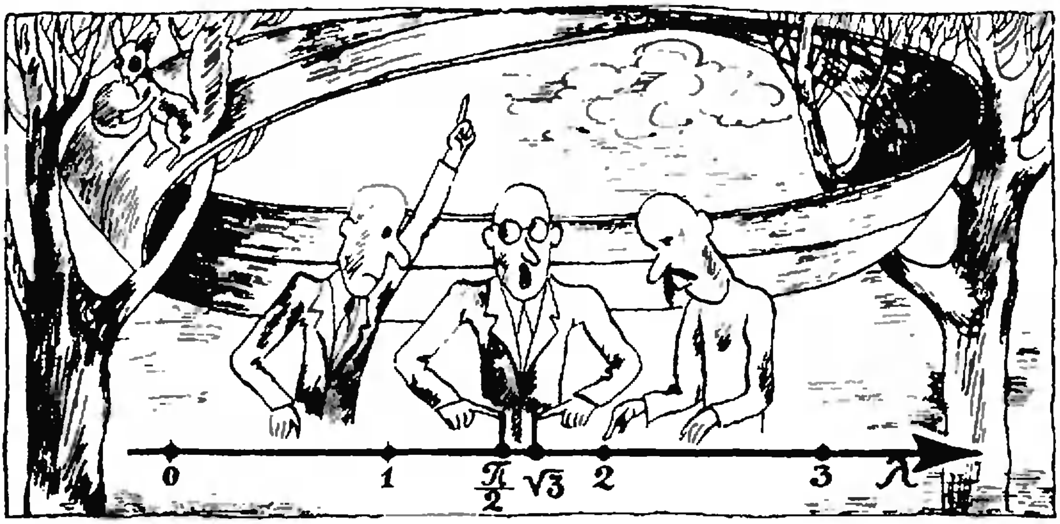
1
1979

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

В НОМЕРЕ:

На первой странице обложки — модель однополостного гиперболоида. Подробности см. на с. 26.



Д. Фукс

Лента Мёбиуса.

Вариации на старую тему

Эта статья вновь возвращает нас к замечательной представительнице односторонних поверхностей — ленте Мёбиуса (см. также «Квант»: 1974, № 3; 1975, № 7; 1978, № 5 и № 6). Получается она из перекрученной на 180° длинной узкой бумажной полоски, склеенной в кольцо. Здесь обсуждается вопрос, какая именно полоска подойдет для изготовления модели ленты Мёбиуса.

Я не буду предлагать вам водить по ленте Мёбиуса пальцем или разрезать ее по средней линии. Речь пойдет о вещах, менее известных. Начну с вопроса:

1. Какой формы бумажную полоску следует взять, чтобы склеить ленту Мёбиуса?

Ожидаемый ответ: полоска должна быть узкой и длинной, с возможно бо́льшим отношением длины к ширине. Скажем, из квадратного листа ленты Мёбиуса не сделаешь.

Это верно, но с одной оговоркой, которую легко недооценить: ограничения на размер имеют значение лишь в том случае, когда бумагу запрещается м я т ь. Если же мять бумагу не запрещается, то ленту Мёбиуса можно склеить не только из квадрата, но из прямоугольника любых размеров — склеиваемые стороны могут быть даже во сколько угодно раз длиннее несклеиваемых.

Сделать это можно так (рис. 1). Сложим прямоугольный лист в гармошку, перегнув его ч е т н о е число раз. Затем из этой гармошки, как из толстой бумажной полоски, склеим ленту Мёбиуса, вставляя соответствующие части гармошки друг в друга. Из рисунка 1 видно, что лист бумаги, из которого склеена лента Мёбиуса, оказался смятым.

Предположим теперь, что бумажную полоску можно и з г и б а т ь, но не мять. Примем ширину полоски за единицу. Ясно, что чем длиннее полоска, тем легче склеить из нее ленту Мёбиуса. Таким образом, *существует такое число λ, что из полоски длины больше λ ленту Мёбиуса склеить можно, а из полоски длины меньше λ — нельзя* (что будет для полоски, длина которой в точности равна λ, нас не интересует). Очень хотелось бы найти это λ.

Удивительно, но *решение этой задачи до сих пор не известно.*

Здесь я докажу для λ неравенства

$$1{,}57\ldots\approx\frac{\pi}{2}\leqslant\lambda\leqslant\sqrt{3}\approx1{,}73\ldots$$

(при этом наличием склеиваемых участков полоски мы пренебрегаем: предполагается, что края полоски

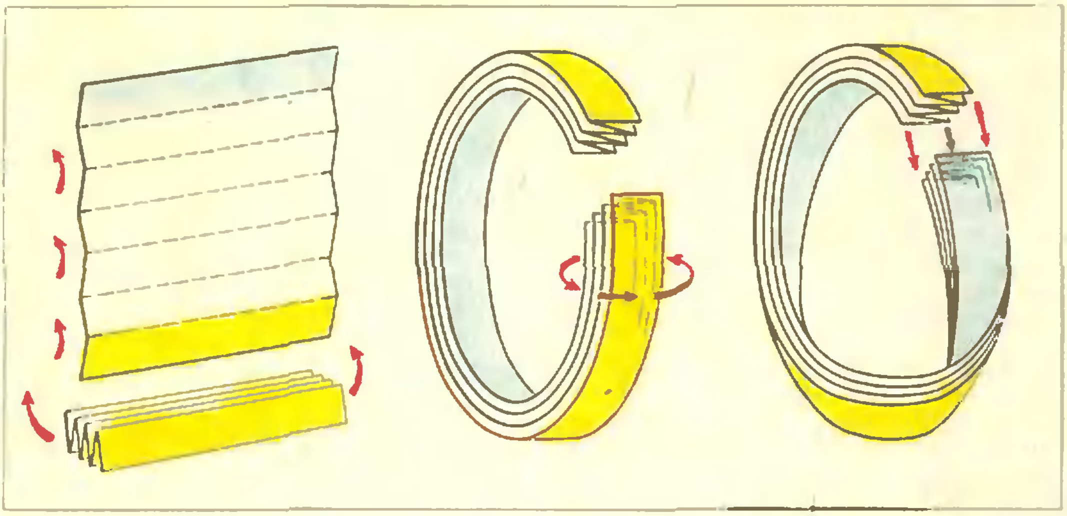


Рис. 1.

склеиваются встык) и постараюсь объяснить, почему не удается вычислить λ точнее.

2. Несмятый лист бумаги — «развертывающаяся поверхность»

Раз требование *не мять бумагу* так важно, посмотрим, каков его математический смысл.

Легко понять, что запрещение мять бумагу значительно ограничивает возможность манипулировать бумажным листом. Например, лист бумаги, не помяв, можно свернуть в трубку или сложить б е з с к л а д к и пополам, но нельзя сложить вчетверо (рис. 2). Из листа бумаги, не смяв его, можно сделать конус («фунтик»), но нельзя сделать сферу или даже ее кусочек (рис. 3): прижмите лист бумаги к глобусу, и обязательно появятся складки. Как видно, листу бумаги можно придать далеко не всякую форму.

Поверхности, которые можно сделать из листа бумаги, изгибая, но не сминая его, математики называют *развертывающимися*. (Примеры развертывающихся поверхностей показаны на рисунке 4.) Конечно, в математике развертывающиеся поверхности определяются не так: в математическом языке отсутствуют слова «бумага», «сминать», «сделать». Существует целая теория развертывающихся поверхностей, среди достижений которой — удовлетворительный ответ на вопрос, какими они

Рис. 2.

Рис. 3.

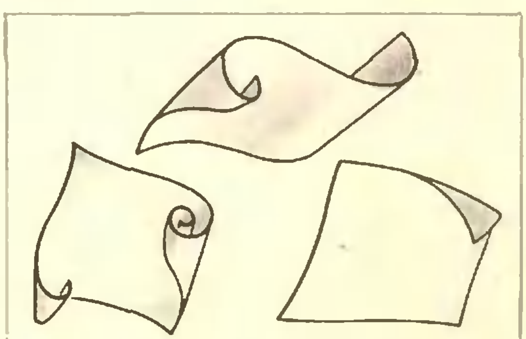


Рис. 4.

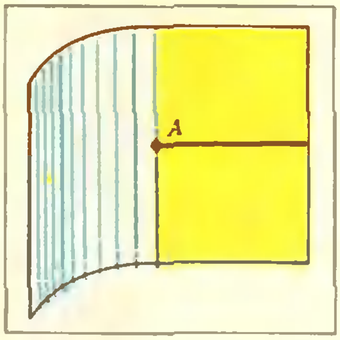


Рис. 5.

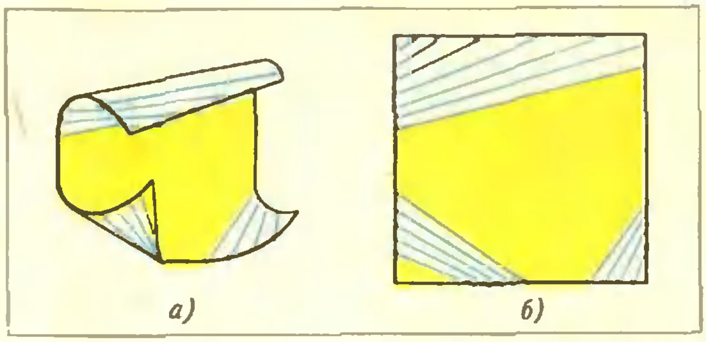


Рис. 6.

могут быть; математики называют это «классификацией» (ответ принадлежит Леонарду Эйлеру). Я не собираюсь здесь излагать общую теорию развертывающихся поверхностей: всякая общая теория скучновата. Я приведу только некоторые свойства развертывающихся поверхностей, нужные для дальнейшего. Наше наглядное определение не позволяет их доказать, так что придется рассматривать эти свойства как экспериментальные факты (возьмите лист бумаги и убедитесь в их справедливости).

1. *Через каждую точку A развертывающейся поверхности, не лежащую на ее границе, проходит лежащий на поверхности отрезок, не кончающийся в A.* Иначе говоря, в каждой точке к развертывающейся поверхности (изогнутому, но не смятому листу бумаги) можно приложить спицу так, чтобы она прилегала к поверхности на некотором протяжении по обе стороны от взятой точки. Такой отрезок называется *образующей* поверхности (условимся, что это название относится только к отрезкам максимальной длины, целиком лежащим на поверхности, то есть, к отрезкам, не содержащимся в бо́льших отрезках с этим свойством).

2. *Если через точку A, не лежащую на границе поверхности, проходят две различные образующие, причем A не является концом ни одной из них, то достаточно маленький кусок поверхности, окружающий A, является плоским.* В таком случае точку A мы будем называть *плоской*.

3. *Если точка A, не лежащая на границе поверхности, является концом какой-нибудь образующей, скажем, a, то окрестность точки A устроена так. Через точку A проходит единственная не кончающаяся в ней образующая, скажем, b (рис. 5). Образующая разделяет поверхность на две части. С той стороны от образующей b, с которой находится образующая a, к образующей b прилегает плоский кусок, с другой стороны от b, сколь угодно близко от точки A, имеются не плоские точки.* Точку A в этой ситуации мы будем называть *полуплоской*.

Подчеркнем, что если точка поверхности не является ни граничной, ни плоской, то через нее проходит единственная не кончающаяся в ней образующая, причем концы этой образующей лежат на границе поверхности.

П р и м е р ы. Лист бумаги, свернутый в трубочку или в фунтик, плоских (и полуплоских) точек не имеет. У трубочки образующие составляют семейство параллельных отрезков, у фунтика — семейство отрезков, веером расходящихся из одной точки. Возможны более сложные расположения образующих. Например, образующие и плоские точки развертывающейся поверхности, изображенной на рисунке 6 *а*, показаны на рисунке 6 *б* (на нем поверхность *развернута* в плоский лист бумаги): тонкие синие линии — образующие, а закрашенные области состоят из плоских точек.

Точки, лежащие на границе области плоских точек, являются либо граничными для всей поверхности, либо полуплоскими. Если поверхность сделана из бумажного многоугольника (скажем, из прямоугольника), то плоские точки составляют один или несколько плоских многоугольников, причем у каждого из этих многоугольников вершины лежат на границе поверхности, а стороны либо лежат на границе, либо состоят из полуплоских точек (см. еще раз рисунок 6*б*).

Упражнение 1. Развертывающаяся поверхность сделана из а) квадратного листа со стороной 1; б) круга диаметра 1. Докажите, что хотя бы одна из ее образующих имеет длину не меньше а) 1; б) $\sqrt{3}/2$.

Вернемся к нашему основному сюжету: вычислению λ — *нижней грани* длин бумажных полосок ширины 1, из которых можно склеить несмятую ленту Мёбиуса.

3. Теорема 1: $\lambda \geqslant \frac{\pi}{2}$

Доказательство. Пусть лента Мёбиуса сделана из бумажной полоски длины l. Намотаем на нее длинную бумажную ленту. Эта лента (толщиной бумаги пренебрегаем) будет составлена из прямоугольников одинаковой длины, каждый из которых принимает форму нашей ленты Мёбиуса. Отметим на длинной ленте прямолинейные образующие и плоские точки (как на рисунке 6*б*). Получится что-то вроде рисунка 7. Картина периодична: все повторяется с периодом, равным $2l$. Можно сказать больше: при сдвиге влево или вправо на l картинка меняется, но строго определенным образом; именно, она переворачивается (т. е. зеркально отражается в средней линии полоски). Области плоских точек представляют собой четырехугольники (которые могут вырождаться в треугольники), ограниченные двумя отрезками противоположных краев ленты и двумя отрезками, проходящими по ленте. Части ленты, не попавшие в эти области, вымощены образующими, концы которых лежат на краях ленты. (Все это следует из свойств 1—3 развертывающихся поверхностей, приведенных в п. 2.) Плоские участки также можно вымостить образующими, так что вся лента будет покрыта непрерывным семейством образующих (рис. 8). Образующие в одинаковых четырехугольниках можно выбирать одинаковым образом, так что описанная выше периодичность сохранится.

Возьмем любую образующую из нашего семейства, скажем, $[AB]$. Если симметрично отразить ее в средней линии полоски и затем перенести в любую сторону (скажем, вправо) на l, то получится отрезок CD, который тоже является образующей из нашего семейства (рис. 9). Заметим (это важно), что $|AC|+|BD|=2l$. При наматывании нашей длинной ленты на ленту Мёбиуса образующие $[AB]$ и $[CD]$ займут одинаковое положение, причем точка A совместится с D, а точка B — с C; другими словами, отрезки AB и CD составят в пространстве угол в $180°$. Между $[AB]$ и $[CD]$ располагается непрерывное семейство образующих. При движении от $[AB]$ к $[CD]$ величина угла, который эти образующие составляют в пространстве с $[AB]$, непрерывно изменяется от $0°$ до $180°$. (Напомним, что величина угла между отрезками KL и MP в пространстве определяется как $\widehat{KLQ}$, где Q — такая точка, что отрезки LQ и MP рав-

Рис. 7.

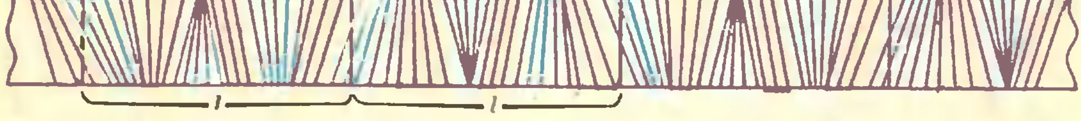


Рис. 8.

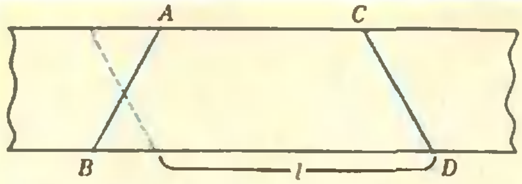


Рис. 9.

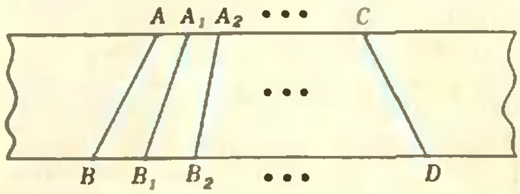


Рис. 10.

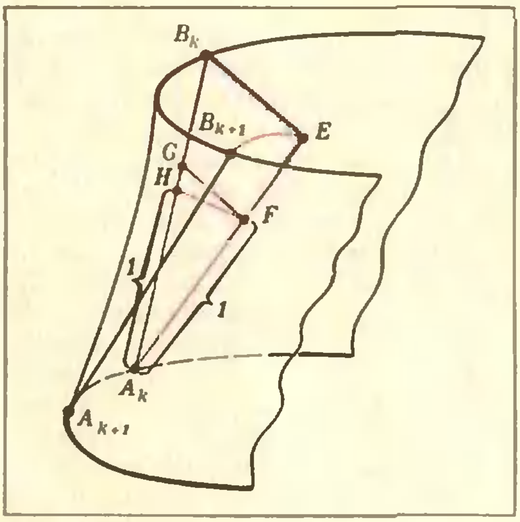


Рис. 11.

ны по длине, параллельны и направлены в одну сторону.)

Возьмем любое n и найдем между $[AB]$ и $[CD]$ такие образующие $[A_1B_1]$, …, $[A_{n-1}B_{n-1}]$, что величина угла между $[AB]$ и $[A_kB_k]$ равна $k\,\frac{180°}{n}$ (точки $A_1, \ldots, A_{n-1}$ в этом порядке лежат между A и C, а точки $B_1, \ldots, B_{n-1}$ в этом порядке лежат между B и D; см. рис. 10). Длина каждой из образующих больше или равна 1, а величина угла между пространственными положениями двух соседних образующих не меньше $\frac{180°}{n}$. Покажем, что каждая из сумм $|AA_1|+|BB_1|$, $|A_1A_2|+|B_1B_2|$, …, $|A_{n-1}C|+|B_{n-1}D|$ не меньше длины a_{2n} стороны правильного $2n$-угольника, вписанного в окружность радиуса 1. Это видно из рисунка 11. На этом рисунке отрезки A_kE и $A_{k+1}B_{k+1}$ равны по длине, параллельны и направлены в одну сторону, $|A_kF|=|A_kH|=1$ и $[FG]\parallel[EB_k]$ (рисунок 11 сделан в предположении, что $|A_{k+1}B_{k+1}|<|A_kB_k|$; изменения, необходимые в случаях $|A_{k+1}B_{k+1}|=|A_kB_k|$ и $|A_{k+1}B_{k+1}|>|A_kB_k|$, очевидны). Мы видим, что $|A_kA_{k+1}|+|B_kB_{k+1}|=|EB_{k+1}|+|B_kB_{k+1}|\geqslant|EB_k|\geqslant|FG|\geqslant|FH|\geqslant a_{2n}$ (здесь $|A_kA_{k+1}|$, $|B_kB_{k+1}|$, $|EB_{k+1}|$ — длины изображенных на рисунке 11 криволинейных отрезков; эти длины совпадают с длинами отрезков $[A_kA_{k+1}]$, $[B_kB_{k+1}]$ рисунка 10; предпоследнее неравенство следует из того, что $\widehat{FHG}>90°$, а последнее — из того, что $\widehat{FA_kH}\geqslant\frac{180°}{n}$).

Итак, $2l=|AC|+|BD|=(|AA_1|+|BB_1|)+(|A_1A_2|+|B_1B_2|)+\ldots+(|A_{n-1}C|+|B_{n-1}D|)\geqslant na_{2n}$, т. е. $2l$ при любом n не меньше половины периметра правильного $2n$-угольника, вписанного в окружность радиуса 1. Значит, $2l$ не меньше половины длины самой этой окружности, то есть π, и $l\geqslant\pi/2$. Теорема доказана.

4. Теорема 2: $\lambda\leqslant\sqrt{3}$

Эта теорема проще предыдущей: для ее доказательства достаточно объяснить, как склеить ленту Мёбиуса из полоски, длина которой больше $\sqrt{3}$. Предположим сначала, что ее длина в точности равна $\sqrt{3}$. Тогда на этой полоске можно расположить два правильных треугольника (рис. 12). Перегнем полоску по боковым сторонам этих треугольников, чередуя направления сгиба (рис. 13; возьмите ножницы и бумагу и проделайте это). Края AB и CD полоски совместятся, причем точка A совместится с точкой D, а точка B — с точкой C. Получится лента Мёбиуса.

При этом построении было нарушено главное правило — не мять бумагу. Но легко понять, что если длина полоски хоть немного больше $\sqrt{3}$, то излом по образующей можно заменить изгибанием,

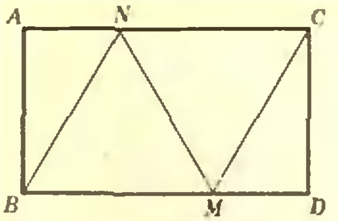


Рис. 12.

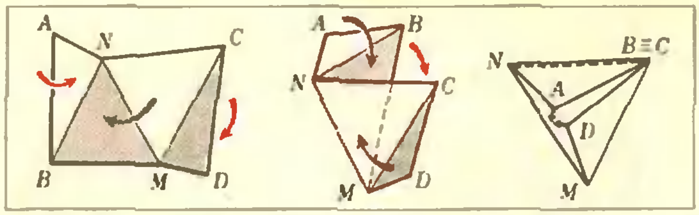


Рис. 13.

Рис. 14.

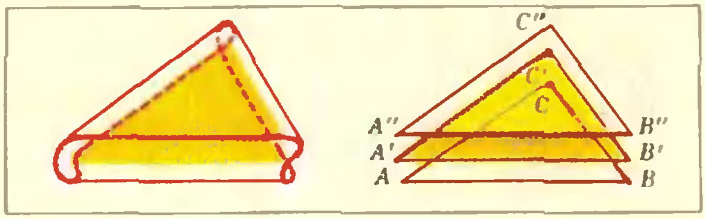


Рис. 15.

производимым на узком участке (рис. 14). Короче говоря, излом вдоль прямолинейного отрезка нам не страшен: его можно заменить близким к нему изгибанием. (Непоправимое сминание бумаги происходит, когда две линии перегиба пересекаются, т. е. когда лист складывается наподобие носового платка — все это известно нам из повседневного опыта.)

Как выглядит получившаяся лента Мёбиуса, показано на рисунке 15. Ее устройство можно представить себе так: три одинаковых правильных треугольника ABC, $A'B'C'$, $A''B''C''$ лежат параллельно друг другу, соответствующие вершины над соответствующими вершинами; стороны AB и $A'B'$, $B'C'$ и $B''C''$, $C''A''$ и CA соединены перемычками. Линия склейки проходит по медиане одного из треугольников.

Упражнение 2. Нарисуйте для ленты Мёбиуса, построенной в доказательстве теоремы 2, схему прямолинейных образующих и плоских точек (подобно рисунку 7).

5. Почему не удается найти λ точнее?

Пока задача не решена, трудно сказать, *почему* она не решена. Все же иногда в разных нерешенных задачах удается проследить общие трудности, отметить, так сказать, на математической карте труднопроходимые места, что позволяет подчас предсказать успех или неудачу при решении той или иной задачи.

В предыдущем параграфе мы доказали, что λ есть одна из точек отрезка $[\pi/2;\ \sqrt{3}]$. Какая же? Может быть, на этот счет можно высказать хотя бы правдоподобную гипотезу? Я думаю, что $\lambda=\sqrt{3}$, и меня не удивляет, что доказать этого не удается.

Дело вот в чем. Доказательство теоремы 1 оставляет неиспользованным одно важное свойство нашей ленты Мёбиуса — отсутствие у нее *самопересечений*. Самопересекающуюся ленту нельзя сделать из бумаги, но представить себе ее можно: подобно самопересекающейся линии на плоскости она «проходит сквозь себя», причем можно разделить ее на части, каждая из которых самопересечений не имеет.

Допустим, что, говоря о бумажных лентах Мёбиуса, мы с самого начала разрешили им иметь самопересечения. Тогда λ приобретает новый смысл, — новое значение λ будет меньше прежнего или равно ему. При этом *теорема 1 останется верной, и в ее доказательстве не придется менять ни одного слова*: отсутствие самопересечений в этом доказательстве нигде не используется. Что же касается теоремы 2, то, если разрешены самопересечения, ее можно значительно улучшить. *Именно:*

Теорема 3. *Ленту Мёбиуса с самопересечениями можно склеить из полоски любой длины, большей* $\pi/2$.

Делается это так. Возьмем достаточно большое нечетное n и построим

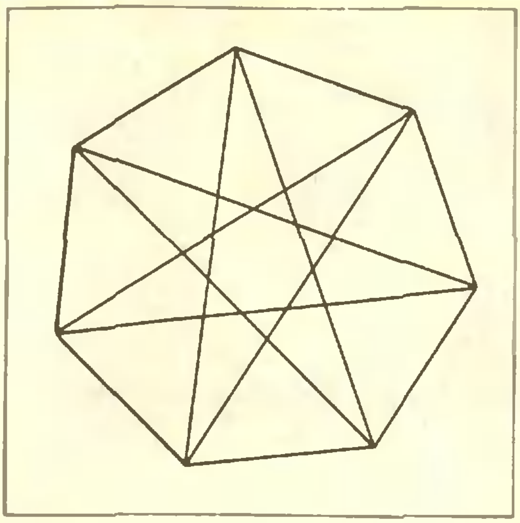


Рис. 16.

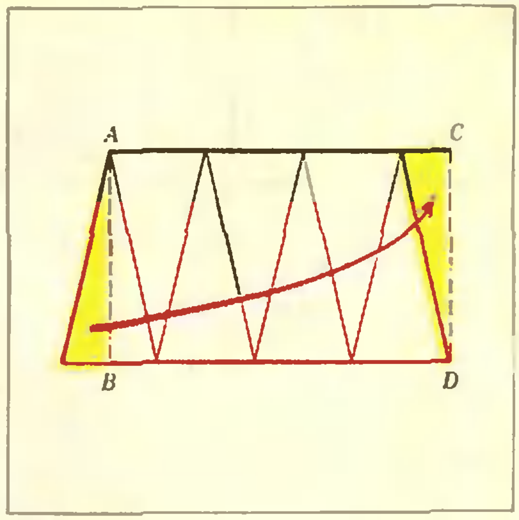


Рис. 17.

правильный n-угольник, вписанный в окружность диаметра 1. Рассмотрим, далее, n содержащих центр окружности треугольников, каждый из которых ограничен стороной и двумя диагоналями n-угольника (рис. 16; здесь $n=7$). Эти треугольники покрывают наш n-угольник, некоторые его места — по нескольку раз. Приложим теперь эти n треугольников друг к другу так, как показано на рисунке 17, после чего отрежем по длинной медиане половину самого левого треугольника и приложим ее к самому правому треугольнику (рис. 17). Получится прямоугольная полоска с отношением длины к ширине, бо́льшим $\pi/2$ и стремящимся к $\pi/2$ при n, стремящимся к ∞ (ширина полоски стремится к 1, а длина — к $\pi/2$). Если последовательно перегнуть эту полоску по всем проведенным на ней линиям, чередуя направления сгиба (рис. 18), то треугольники расположатся как на рисунке 16 (возьмите еще раз ножницы и бумагу и проделайте это). Отрезки AB и CD при этом почти совместятся — между ними окажется только несколько слоев сложенной бумаги. При этом «почти совмещении» точка A совместится с D, а точка B — с C, так что если бы мы смогли «пропустить ленту сквозь себя» и склеить $|AB|$ с $|CD|$, то получилась бы лента Мёбиуса. Если ленту взять чуть более длинной, можно избежать складок, подобно тому как мы это сделали в доказательстве теоремы 2. Что получится, я попробовал изобразить на рисунке 19.

Упражнение 3. Нарисуйте для ленты Мёбиуса, изображенной на рисунке 19, диаграмму плоских точек и прямолинейных образующих.

Таким образом, если бы мы захотели (для лент без самопересечений) доказать, что $\lambda \geqslant \mu$, где $\mu > \sqrt{3}$, нам пришлось бы в доказательстве обязательно учитывать отсутствие самопересечений. Наличие или отсутствие самопересечений у той или иной фигуры в трехмерном пространстве — это задача «трехмерной геометрии расположения». Весь опыт математики показывает, что задачи о расположении в трехмерном пространстве очень трудны. Ведь эта геометрия включает в себя, скажем, теорию узлов и зацеплений, известную своей неприступностью («Квант», 1975, № 7, с. 6); в ней возможны такие феномены как «рогатая сфера Александера» («Квант», 1977, № 7, с. 22); простейшие ее вопросы, например, можно ли через маленькую дырку вывернуть наизнанку тор, — ставят в тупик нашу интуицию. И вот что удивительно. Казалось бы, в пространствах размерности больше трех проблемы расположения должны стоять еще более остро. Но нет: с ростом размерности эти трудности сглаживаются. Впрочем, «сглаживание» начинается с размерности 5; четырехмерное пространство в из-

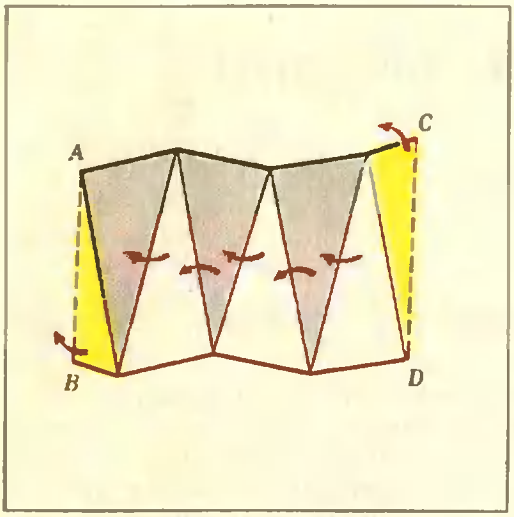


Рис. 18.

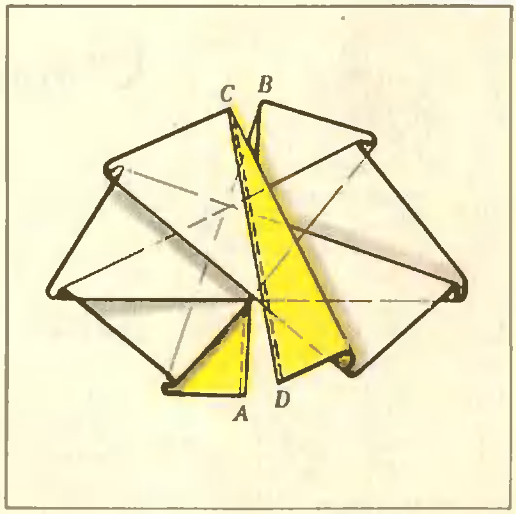


Рис. 19.

вестном смысле не проще трехмерного. К сожалению, здесь я не могу аргументировать только что сказанное, так что прошу поверить мне на слово.

Но вернемся к ленте Мёбиуса. Теорема 1, как мы видели, в действительности относится к самопересекающимся лентам. Маловероятно, чтобы условие отсутствия самопересечений не воздействовало на λ; однако учесть это воздействие не удается, поскольку математика не обладает достаточными техническими средствами для изучения самопересечений в трехмерном пространстве. Напротив, вполне вероятно, что теорема 2 неулучшаема. Ведь улучшить ее — значит придумать новую конструкцию ленты. Опыт показывает, что оптимальные конструкции бывают простыми и гармоничными, каковой и является конструкция из доказательства теоремы 2. Естественно предположить, что если бы лучшая конструкция существовала, она была бы найдена — за столько лет!

Вот почему можно ожидать, что $\lambda=\sqrt{3}$.

6. Заключение: об одной аналогичной задаче

Склеим из бумажной полоски не ленту Мёбиуса, а цилиндр (размеры полоски — любые). Можно ли, не сминая бумаги, вывернуть цилиндр наизнанку? Если цилиндр широк и низок, то, конечно, можно, а если он узок и высок — то нельзя. Обозначим через σ такое число, что если отношение длины полоски к ширине больше σ, то цилиндр вывернуть можно, а если меньше — то нельзя. Доказательства трех следующих теорем (более трудных, чем теоремы 1, 2, 3) я оставляю вам в качестве задачи:

Теорема 1′. $\sigma\geqslant\pi$.

Теорема 2′. $\sigma\leqslant\pi+2$.

Теорема 3′. *Предположим, что в процессе выворачивания допускаются самопересечения. Тогда любой цилиндр, сделанный из полоски, у которой отношение длины к ширине больше π, можно вывернуть наизнанку (не сминая бумаги).*

Больше ничего об этом не известно.

* * *

В заключение я хочу сказать, что мысль написать эту статью возникла у меня при чтении статьи Б. Гальперина и К. Уивера в журнале «Transactions of the American Mathematical Society» (1977, т. 230), из которой я узнал о современном положении дел с обсуждавшимися проблемами.

Ю. Соколовский

Сожжем энергию!

Беседа любителей физики

Ю р а. Давайте обсудим такую задачу:

Альпинист и турист запаслись одинаковыми вязанками хвороста. Турист разложил свой костер у подножия холма, альпинист — на его вершине. Последний, признаться, здорово попотел, пока втаскивал вязанку на холм. Говоря языком физики, альпинист совершил механическую работу, сообщив своим дровам потенциальную энергию. Так куда же эта энергия подевалась, когда хворост сгорел?

К о л я. Сгореть энергия не могла. Сгорели одни дрова, а их потенциальная энергия обязательно превратилась в какую-нибудь другую.

Ю р а. В какую же именно?

К о л я. Очевидно, в энергию продуктов сгорания — золы и дыма. Они ведь, находясь наверху, тоже обладают потенциальной энергией относительно подножия холма.

Т а н я. Золу-то действительно можно потом сбросить вниз и заставить совершить механическую работу. А вот дым...

К о л я. Ну, а дым устремляется ввысь и способен при этом что-нибудь поднять. Вот наполним этим дымом большой шар, прикрепим корзину...

Т а н я. Все это мог бы с тем же успехом совершить и дым от костра туриста — он рвется вверх ничуть не хуже. В чем же проявляется тогда дополнительная энергия той вязанки, что пылает на вершине холма? О золе говорить не стоит: ее масса ничтожна по сравнению с массой сгоревших дров. А если вязанку хвороста заменить канистрой керосина, то золы вообще не будет.

К о л я. Видно, я поторопился. Почему устремляется вверх горячий дым? Потому что он легче воздуха. На его место опускается более тяжелый холодный воздух. Из-за этого могут возникать разные осложнения. Чтобы в них не запутаться, давайте вообразим, что все происходит не на Земле, а на Луне...

Т а н я. Как же могут костры гореть на Луне, где нет воздуха?

К о л я. Пусть горят не костры, а особые горелки: в одном баллоне — ацетилен, в другом — кислород, оба сжиженные. Где встречаются обе струи — горит огонь. Продукты сгорания, даже газообразные, падают вниз, на лунную почву. При падении они способны совершить такую же по величине работу, какая была затрачена на подъем горючего и окислителя.

Таня. Ты прав, в отсутствие атмосферы все действительно очень просто.

Коля. Но на Земле «всплывание» горячего дыма в холодном воздухе переворачивает все вверх ногами!

Таня. Попробуем разобраться. Вспомните, ведь всплывание мяча в воде вовсе не нарушает закона сохранения энергии. Правда, потенциальная энергия мяча при всплывании растет. Но растет за счет уменьшения потенциальной энергии той воды, которая опускается на место поднимающегося мяча. Так как масса опускающейся воды больше, ее потенциальной энергии хватает еще и на увеличение кинетической энергии мяча, и на совершение работы против сил жидкого трения (с соответствующим нагревом мяча и воды). Одним словом, за счет потенциальной энергии опускающейся воды пополняются и потенциальная, и кинетическая, и внутренняя энергии мяча, а также внутренняя энергия окружающей мяч воды. Здесь все понятно до конца.

Коля. Наш случай не так прост: до сгорания было полено, которое «тонуло» в воздухе, а продукты сгорания в нем «всплывают»! Как понять энергетически превращение «тонущего» во «всплывающее»?

Таня. Не поможет ли нам механическая модель в виде погруженного в воду цилиндра (трубы) с двумя поршнями (рис. 1)? Когда поршни раздвинуты, цилиндр всплывает, когда сближены — тонет. И в обоих случаях он способен производить работу — например, поднимать грузы (рис. 2). Когда цилиндр находится вблизи дна, раздвигаем поршни, а когда он всплывет, сближаем. Так цилиндр и движется периодически вверх-вниз...

Коля. Получается «вечный двигатель»!?

Таня. Вовсе нет: чтобы глубоко под водой раздвигать поршни, надо совершать работу против сил гидростатического давления. А для этого нужен источник энергии.

Коля. Кажется, я уловил сходство с нашими вязанками. Дрова в воздухе «тонут», а дым «всплывает» потому, что объем дыма гораздо больше. Значит, образующийся при горении дым оттесняет во все стороны окружающий воздух, совершая при этом работу против сил атмосферного давления. Совершаться эта работа может не иначе, как за счет части химической энергии сгорающего топлива. И только остальная часть этой энергии идет на повышение температуры.

Таня. Раз подмечена аналогия, доведем ее до логического конца. Мы одну вязанку сжигаем внизу, и дым сам поднимается до вершины — как всплывает цилиндр, когда поршни раздвинуты

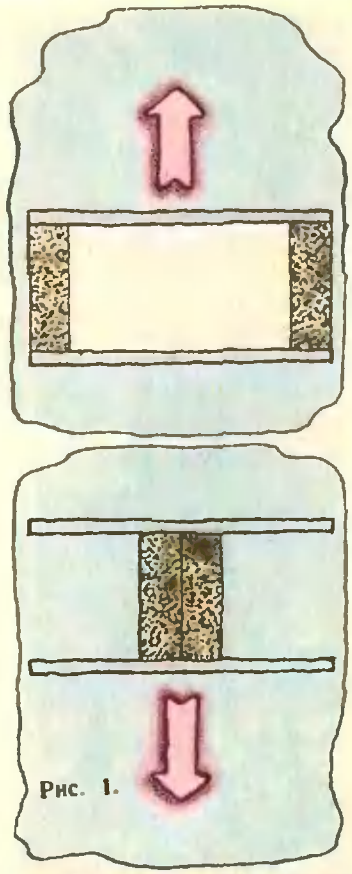


Рис. 1.

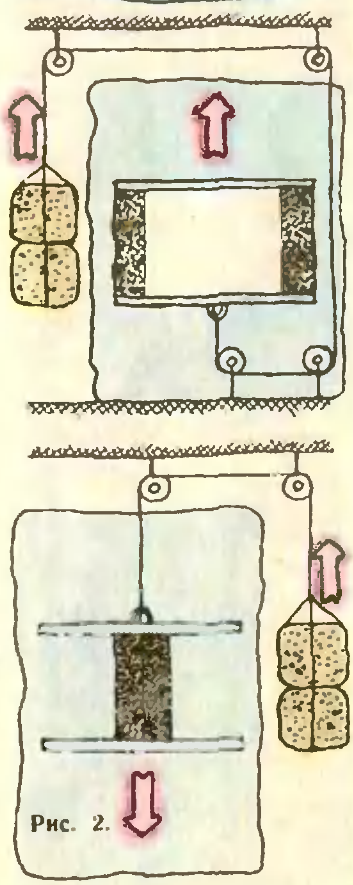
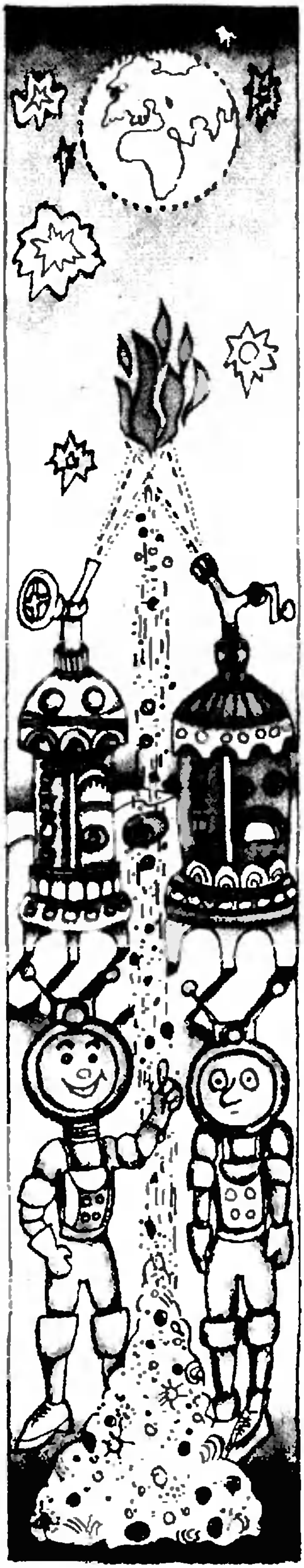


Рис. 2.



близ дна. А другую вязанку мы втаскиваем наверх и сжигаем лишь там, как могли бы поднять цилиндр при сближенных поршнях, а затем их раздвинуть. Совершив работу по поднятию цилиндра, мы облегчаем потом раздвижение поршней: вода у поверхности давит слабее, чем у дна. Точно так же и с вязанками: при горении на высоте, где давление атмосферы меньше, образующемуся дыму гораздо легче раздвигать окружающий воздух, чем при горении внизу. Поэтому меньшая доля химической энергии топлива затрачивается на эту работу и, соответственно, бо́льшая доля ее идет на нагрев.

К о л я. Выходит, что костер на вершине дает больше тепла, чем костер внизу? Это и есть разгадка! Работа по подъему дров не пропадает, она возвращается в виде добавочного тепла.

Ю р а. Не зря ли мы поверили в эту разницу работ по оттеснению дымом окружающего воздуха внизу и на высоте? Работа зависит не только от силы, но и от пути. Когда мы раздвигаем поршни в цилиндре — один раз внизу, а другой вверху — перемещение их одно и то же. Работы при этом, действительно, пропорциональны силам. Здесь Таня была права. Когда же речь пошла о кострах, она ошиблась. Попробую объяснить.

Продукты сгорания вязанок внизу и вверху равны по массе, но вовсе не одинаковы по объему. Вверху давление меньше, там та же масса газа займет значительно больший объем, оттесняя для этого окружающий воздух гораздо дальше. Значит, больше будет и путь, на котором совершается работа против сил атмосферного давления. Как известно, работа при расширении определяется произведением $p\Delta V$ — величины преодолеваемого давления на изменение объема. Начальный объем — объем дров — по сравнению с окончательным объемом продуктов сгорания несоизмеримо мал, так что изменение объема ΔV и окончательный объем V практически равны: $p\Delta V \approx pV$. Но по закону Бойля — Мариотта для равных масс определенного газа произведение pV от давления не зависит, оно одинаково и на вершине, и у подножия холма. Не отличаются, следовательно, и работы оттеснения окружающего воздуха.

К о л я. Мне не совсем ясно, как ты здесь применил закон Бойля — Мариотта, не сказав ни слова о температурах.

Ю р а. При сгорании вязанки дров — все равно, у подножия холма или же на вершине — образуется определенное количество углекислого газа, паров воды и других продуктов сгорания. Эта порция раскаленных газов расширяется до тех пор, пока давление и температура ее не сравняются с давлением и температурой окружающего воздуха. К таким конечным состояниям одинаковых порций газов — с одинаковыми температурами (будем считать, что температуры воздуха у подножия и на вершине одинаковы), но при разных давлениях (из-за разности высот) — можно применить закон Бойля — Мариотта. Тогда получается, что конечные объемы (а значит, и увеличения объемов) пропорциональны давлениям окружающей атмосферы. Следовательно, работы по расширению газов на любых высотах одинаковы.

К о л я. Если работа по расширению газа не зависит от давления, то в чем *причина различия* между теплоемкостями газа C_V при постоянном объеме и C_p при постоянном давлении, о котором нам говорили на факультативных занятиях *)? Как известно, чтобы повысить на один градус температуру данной порции газа в цилиндре с поршнем, где давление постоянно, нужно больше тепла, чем в запаянном сосуде, то есть при неизменном объеме (рис. 3). Добавочное тепло идет на совершение работы: расширяющийся газ поднимает тяжелый поршень.

Т а н я. Да, но это добавочное тепло, как нам только что доказал Юра, не зависит от величины давления. При удвоенном весе поршня та же порция газа займет вдвое меньший объем, приращение этого объема в результате нагрева тоже будет вдвое меньше (рис. 4). Работа останется той же самой.

К о л я. Ты меня убедила. Но теперь я — увы! — перестал понимать, почему *газ не совершает* вообще никакой работы, когда его нагревают в запаянном сосуде. Постоянство его объема обеспечивается не чем иным, как прочностью стенок, то есть оказываемым ими давлением на газ. Чем жестче сосуд, тем слабее меняется объем, но тем *мощнее давление стенок*. Работа по расширению, если она от давления не зависит, не может стремиться к нулю с упрочнением сосуда.

Ю р а. Противодействие стенок нельзя отождествлять с давлением поршня, хотя бы и очень тяжелого. Давление поршня постоянно, а силы реакции стенок растут вместе с деформациями стенок. По мере утяжеления поршня объем газа стремится к нулю, а при увеличении жесткости стенок — к объему недеформированного сосуда... Слишком много существенных различий!

Т а н я. Для наглядности предположим, что один цилиндр с газом закрыт сверху резиновой перепонкой, а другой — поршнем (рис. 5). Дефор-

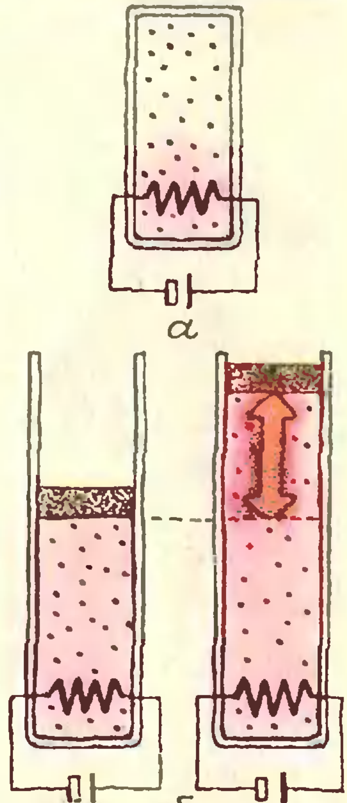


Рис. 3.

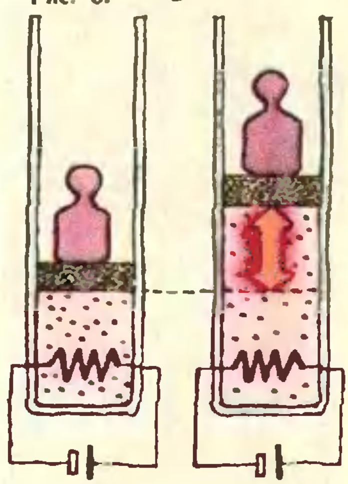
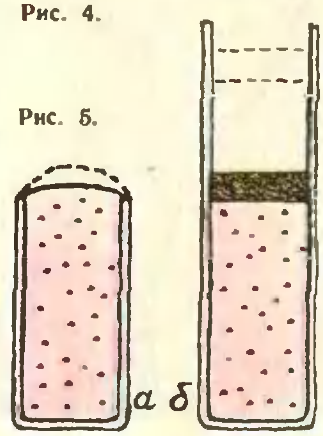


Рис. 4.

Рис. 5.



---

*) О. Ф. К а б а р д и н, С. И. К а б а р д и н а, Н. И. Ш е ф е р. Факультативный курс физики. 9 класс. Пособие для учащихся. (М., «Просвещение», 1978.) С. 53—57.

А. П. К и р ь я н о в, С. М. К о р ш у н о в. Термодинамика и молекулярная физика. Пособие для учащихся. (М., «Просвещение», 1977.) С. 91—92.

Л. П. С в и т к о в. Термодинамика и молекулярная физика. Факультативный курс. (М., «Просвещение», 1971.) С. 40—41.

Б. М. Я в о р с к и й, А. А. П и н с к и й. Основы физики. Т. I. (М., «Наука», 1974.) С. 241—243.

мированная перепонка давит на газ точно так же, как и поршень. Если поршень поднимется вдвое выше, объем под ним увеличится в два раза, а давление останется прежним. А когда перепонка прогнется в два раза больше (пунктир), она станет давить вдвое сильней, но объем увеличится чуть-чуть. К чему же приведет повышение температуры газа, скажем, в два раза? В правом цилиндре — к удвоению объема под поршнем с сохранением давления, а в левом — к увеличению деформации перепонки, а значит, и давления, практически вдвое при совсем незначительном увеличении объема. В обоих случаях соблюдается постоянство отношения $\frac{pV}{T}$, но работа по расширению в левом сосуде пренебрежима мала (из-за ничтожности самого расширения), тогда как в правом она существенна и совсем не зависит от веса поршня.

Коля. Я снимаю мое возражение относительно равенства работ против сил атмосферного давления внизу и на вершине холма. Таинственному «превращению в ничто» потенциальной энергии доставленных на вершину дров придется искать новое объяснение.

Таня. Давайте еще раз — и как можно четче! — сформулируем суть проблемы. Мы рассматриваем два опыта с одинаковыми начальными условиями: две тождественные вязанки лежат у подножия холма. Одинаковы и конечные результаты: дрова сгорели, выделены равные количества теплоты, клубы дыма ушли в небо. Но в одном случае была совершена работа по поднятию вязанки дров, а в другом — нет.

Юра. Мне почувствовалась в твоем рассуждении некоторая нечеткость. «Клубы дыма, — говоришь ты, — ушли в небо»?

Таня. Я имела в виду: поднялись вверх — в те разреженные слои атмосферы, где холодный воздух по плотности не отличается от горячего дыма.

Коля. Но такого не может быть: давление дыма всегда равно давлению окружающего воздуха, при поднятии дым расширяется, как и воздух. При разных температурах им ни на какой высоте не сравняться по плотности. Кроме того, температура дыма в процессе подъема его вверх не остается неизменной: дым остывает, отдавая тепло окружающему воздуху. Так что сразу и не сообразишь, до какой высоты поднимаются столбы дыма от обоих костров.

Юра. Не к чему утруждать себя рассмотрением излишних сложностей. За «конечное состояние» лучше принять дым не «в небе», а непосредственно над вершиной холма. Если речь идет о костре альпиниста, это — дым, только что образовавшийся в результате сгорания дров. Он имеет какую-то температуру. С такой же точно температурой возникает дым и от костра туриста. Но пока он поднимется до вершины холма, температура его уменьшится. И не только из-за неизбежного рассеяния тепла в окружающем воздухе. Существует еще и другая, более принципиальная причина охлаждения дыма в процессе его подъема.

Таня. Какая именно?

Юра. Поднимаясь, дым расширяется — в соответствии с уменьшением атмосферного давления — и при этом совершает уже знакомую нам работу «расталкивания» окружающего воздуха. Это происходит за счет внутренней энергии дыма. Уменьшение ее означает понижение температуры.

Таня. Теперь мне все понятно: дым от нижнего костра достигает вершины холма, значительно охладившись. Этим он и отличается от дыма, порождаемого верхним костром.

Юра. Как видим, конечный итог сгорания вязанок у подножия и на вершине вовсе не одинаков: на одной и той же высоте над уровнем моря (чуть выше вершины холма) дым верхнего костра горячее, иными словами, конечная внутренняя энергия у него больше. Этот избыток энергии и получен за счет той механической работы, которую совершил альпинист, доставив свою вязанку к вершине холма.

Коля. Вот теперь мы действительно разгадали тайну «сожженной» энергии.

Юра. Справедливости ради надо сказать, что придуманная тобой аналогия с цилиндрами тоже правильно отражает нашу «проблему костров», но в ином варианте. Надо только предположить, что сгорание происходит не в открытых кострах, а внутри герметических оболочек из какого-нибудь негорючего, весьма гибкого, но почти совсем нерастяжимого материала. (И достаточно легкого для того, чтобы наполненная горячим дымом оболочка могла взлететь в воздух и достигнуть вершины холма без затрат энергии.) В этом случае работа по подъему топлива на вершину вознаграждается потом бо́льшим выделением тепла при его сгорании.

Таня. Фактически мы разобрались в трех различных процессах горения: при отсутствии воздуха (на Луне), внутри замкнутых оболочек и в земной атмосфере. Оказалось, что сообщенная топливу при подъеме его наверх энергия всякий раз находит определенное применение. В первом случае она пополняет потенциальную энергию продуктов сгорания, а во втором — обеспечивает дополнительное выделение тепла при сгорании, а в третьем — идет на увеличение внутренней энергии поднявшегося ввысь дыма.

Возможны, пожалуй, и другие случаи, а значит,—и новые загадки. Но с сегодняшней задачей мы справились!

О. Кабардин, Н. Шефер

Зонные пластинки

Интересные явления, связанные с интерференцией и дифракцией волн различной физической природы, можно наблюдать, если воспользоваться зонными пластинками. Что это такое?

Зоны Френеля

Представим себе, что посередине между точечными источником волн A и приемником волн B находится непрозрачный экран с круглым отверстием (рис. 1). Согласно принципу Гюйгенса — Френеля каждая точка в отверстии экрана является вторичным источником волн, и от каждой из них волны приходят к приемнику. Колебания всех вторичных источников когерентны, поэтому волны, приходящие к приемнику, будут интерферировать. От чего зависит результат интерференции? Воспользуемся методом, предложенным Френелем.

Длина пути от источника до приемника зависит от места прохождения волны через отверстие в экране. Сначала при увеличении радиуса отверстия, начиная с совсем малого, интерференция волн будет приводить к увеличению амплитуды колебаний у приемника B. Так будет до тех пор, пока разность хода Δl по путям AO_1B и AOB не достигнет половины длины волны $\lambda/2$:

$$\Delta l = (|AO_1| + |O_1B|) - (|AO| + |OB|) = \lambda/2.$$

Колебания от точек O и O_1 приходят в точку B в противоположных фазах, поэтому они будут ослаблять друг друга, а не усиливать, как было раньше.

Отверстие, удовлетворяющее этому условию, называется первой *зоной Френеля*. Обозначив через a расстояния от точечного источника до экрана и от приемника до экрана ($|AO| = |OB| = a$), найдем выражение для радиуса r_1 первой зоны Френеля:

$$r_1 = \sqrt{|AO_1|^2 - |AO|^2} = \sqrt{\left(a + \frac{\lambda}{4}\right)^2 - a^2} = \sqrt{\frac{a\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{16}}.$$

Если выполняется условие $a \gg \lambda$, то

$$r_1 \approx \sqrt{a\lambda/2}.$$

Увеличим радиус отверстия до такого значения r_2, при котором разность хода по путям AO_2B и AOB равна длине волны λ:

$$\Delta l = (|AO_2| + |O_2B|) - (|AO| + |OB|) = \lambda.$$

Кольцевую зону с внутренним радиусом $r_1 = |OO_1|$ и внешним $r_2 = |OO_2|$ называют второй зоной Френеля. Внешний радиус r_2 второй зоны Френеля в рассматриваемом случае равен

$$r_2 = \sqrt{|AO_2|^2 - |AO|^2} = \sqrt{(a + \lambda/2)^2 - a^2} = \sqrt{2(a\lambda/2) + \lambda^2/4} \approx \sqrt{2a\lambda/2} \approx \sqrt{2}\, r_1.$$

Аналогично можно определить внешний радиус третьей, четвертой

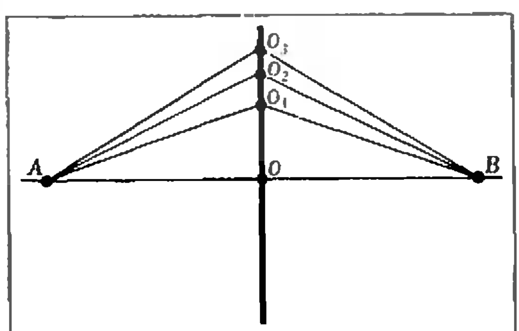


Рис. 1.

и т. д. зон Френеля:

$$r_3 \approx \sqrt{3}\, r_1,\ r_4 \approx \sqrt{4}\, r_1, \ldots, r_n \approx \sqrt{n}\ r_1.$$

Можно доказать, что площади всех зон равны между собой; следовательно, на каждой зоне имеется одинаковое количество вторичных источников волн. От источников, находящихся в соответствующих точках двух соседних зон (например, на внешних краях), волны приходят к приемнику с разностью хода $\lambda/2$, то есть выполняется условие минимума интерференции волн. Значит, при двух открытых зонах Френеля амплитуда колебаний у приемника в точке B в результате интерференции волн должна быть равной нулю!

При более строгом рассмотрении учитывается зависимость амплитуды колебаний от направления распространения волн, вследствие чего амплитуда колебаний при интерференции волн двух соседних зон Френеля оказывается отличной от нуля, хотя и очень малой.

Если в отверстии, содержащем несколько зон Френеля, закрыть, например, все четные зоны и оставить открытыми нечетные зоны, то амплитуда результирующих колебаний должна быть значительно больше, чем при полностью открытом отверстии. Этот вывод кажется противоречащим здравому смыслу: площадь отверстия уменьшается, а амплитуда колебаний увеличивается! Не нарушается ли при этом закон сохранения энергии?

Нарушения закона сохранения энергии в этом случае, разумеется, нет. Мы проанализировали результат интерференции волн лишь в точке B около приемника и не интересовались, к каким результатам приводит интерференция волн в других точках пространства. Оказывается, условие максимума интерференции волн выполняется лишь для точки B, а в окрестностях ее интерференция приводит к уменьшению амплитуды колебаний. Таким образом, происходит лишь перераспределение энергии волн в пространстве.

Экран, состоящий из последовательно чередующихся прозрачных и непрозрачных колец, соответствующих зонам Френеля, называют *зонной пластинкой*. Как мы уже видели, зонная пластинка по своему действию подобна собирающей линзе. Особенно наглядно это сходство можно продемонстрировать в опытах со световыми волнами.

Зонная пластинка — линза

Малая длина световой волны требует изготовления зонной пластинки с очень малыми радиусами зон. Поэтому способы нанесения темных колец на стекло или процарапывания прозрачных колец на непрозрачной основе не позволяют при самодельном изготовлении получить зонные пластинки высокого качества. Более удобным является фотографический метод изготовления зонной пластинки: сначала изготовляется чертеж зон Френеля в большом масштабе, а затем фотографируется на пленку. Как это можно сделать?

Воспользуемся аналогией между зонной пластинкой и собирающей линзой. Как известно, если на линзу падает параллельный световой пучок, она его фокусирует в точку, называемую фокусом линзы; расстояние от фокуса до линзы называется фокусным расстоянием линзы. Аналогично ведет себя и зонная пластинка.

Параллельный пучок света с длиной волны λ зонная пластинка с радиусом первой зоны Френеля r_1 фокусирует в точке на расстоянии f от пластинки, определяемом из выражения

$$r_1 = \sqrt{f\lambda}.$$

Если $f = 1$ м и $\lambda = 5\cdot10^{-7}$ м, радиус первой зоны на фотопленке должен быть равен

$$r_1 = 7{,}5\cdot10^{-4}\ \text{м} = 0{,}75\ \text{мм}.$$

Радиус R_1 первой зоны на чертеже можно выбрать в 20 раз большим: $R_1 = 1{,}5$ см; радиусы границ последующих зон тогда будут равны, соответственно,

$$1{,}5\sqrt{2}\ \text{см},\ 1{,}5\sqrt{3}\ \text{см}, \ldots,\ 1{,}5\sqrt{n}\ \text{см}.$$

Для получения пластинки удовлетво-

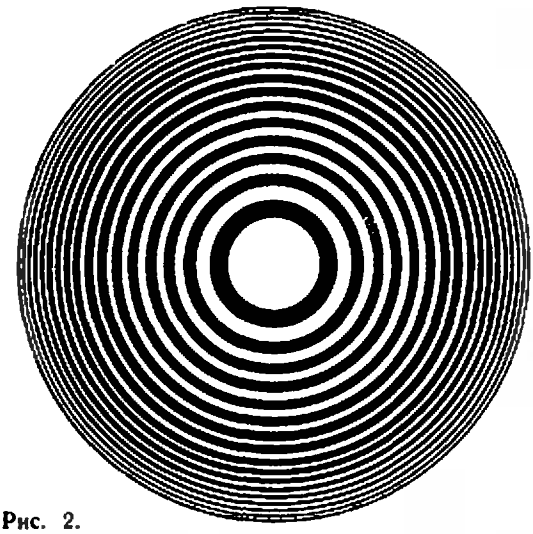


Рис. 2.

рительного качества чертеж должен содержать 25—100 зон.

Приготовив таблицу радиусов границ зон, приступайте к изготовлению чертежа. Для этого лист ватмана укрепите кнопками на листе фанеры или на чертежной доске. С помощью циркуля и рейсфедера нанесите черной тушью систему концентрических окружностей. Затем зоны через одну зачерните тушью (рис. 2).

Фотографируя чертеж с различных расстояний, можно получить зонные пластинки с различными фокусными расстояниями.

Фотографирование следует проводить при хорошем солнечном освещении, тщательно наводя на резкость и выбирая правильную экспозицию.

После проявления, закрепления и просушки выберите наиболее удачные негативы и вставьте их в рамки для диапозитивов. Теперь можно приступить к опытам с зонными пластинками.

В затемненном помещении расположите настольную лампу напротив белого экрана на расстоянии 2—3 м. Перемещая зонную пластинку между лампой и экраном, найдите такое их взаимное расположение, при котором на экране получится четкое изображение нити лампы. Изменяя положение зонной пластинки относительно экрана, получите увеличенное или уменьшенное изображения нити лампы. Измерив расстояния от лампы до зонной пластинки и от зонной пластинки до экрана, по формуле линзы вычислите фокусное расстояние зонной пластинки.

Опыты со звуковыми волнами

Для опытов со звуковыми волнами зонные пластинки можно изготовить из тонкого пенопласта или нескольких слоев картона.

Радиус r_1 первой зоны Френеля для звуковой волны длиной 3,2 см при удалении источника звука и приемника от экрана на расстояние $a = 10$ см равен

$$r_1 \approx \sqrt{a\lambda/2} = 4 \text{ см}.$$

Внешние радиусы двух следующих зон тогда равны, соответственно,

$$r_2 \approx \sqrt{2}\ r_1 \approx 5{,}67 \text{ см},$$

$$r_3 \approx \sqrt{3}\ r_1 \approx 6{,}93 \text{ см}.$$

На квадратном листе картона или пенопласта нанесите с помощью циркуля окружности радиусов r_1, r_2, r_3, а затем вырежьте три зоны Френеля — вы получите зонную пластинку. Для проведения опытов нужно сделать специальные перемычки, позволяющие закрепить вторую зону при удалении из экрана первой и третьей зон.

Опыты с зонной пластинкой можно проводить в школьном кабинете физики. Установите на столе звуковой генератор и подключите к его выходу громкоговоритель. Чтобы источник звуковых волн был по своим свойствам близок к точечному, перед самым динамиком поставьте толстый экран из звукопоглощающего материала (например, пенопласта или картона), с круглым отверстием диаметром 2—3 см. Напротив этого отверстия поставьте электродинамический микрофон и соедините его выводы со входом усилителя низкой частоты (УНЧ). К выходу УНЧ подключите демонстрационный амперметр или электронный осциллограф (рис. 3 и 4).

Установив микрофон на расстоянии 20 см от источника звука, включите звуковой генератор. Ручками управления на передней панели генератора установите частоту электрических колебаний на его выходе,

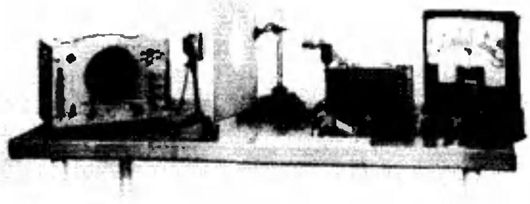


Рис. 3.

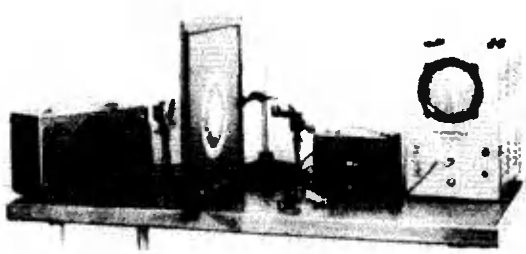


Рис. 4.

соответствующую длине звуковой волны в воздухе 3,2 см:

$$\nu = \frac{v}{\lambda} = \frac{340\ \text{м/с}}{3{,}2\ \text{см}} = 10{,}6\ \text{кГц}.$$

Регулировкой напряжения на выходе звукового генератора и усиления УНЧ добейтесь отклонения стрелки демонстрационного амперметра примерно на половину шкалы.

Поместите между источником звука и микрофоном экран с закрытыми отверстиями и убедитесь, что звуковые волны частично поглощаются экраном — отклонение стрелки амперметра уменьшается.

Теперь откройте первую зону Френеля. При правильном расположении источника звука и микрофона относительно экрана с отверстием амплитуда звуковых колебаний при одной открытой зоне Френеля оказывается почти в два раза большей амплитуды колебаний при отсутствии экрана!

Еще более удивительный результат получается при открывании двух зон Френеля — первой и второй. Хотя диаметр отверстия в экране увеличивается, амплитуда звуковых колебаний, регистрируемых микрофоном, существенно уменьшается! Открывание третьей зоны вновь приводит к увеличению амплитуды звуковых колебаний.

Самое большое возрастание амплитуды звуковых колебаний обнаруживается при помещении между источником звука и микрофоном зонной пластинки, в которой открыты первая и третья зоны Френеля, но закрыта вторая зона.

Зонная пластинка для сантиметровых электромагнитных волн

Все опыты, выполненные со звуковыми волнами, можно проделать и с электромагнитными волнами сантиметрового диапазона, используя тот же самый экран с вырезанными в нем кольцевыми зонами. Чтобы экран был непрозрачным для электромагнитных волн, его необходимо оклеить металлической фольгой.

В расчетах размеров зон Френеля для опытов со звуковыми волнами не случайно была выбрана длина волны 3,2 см, так как именно такова длина электромагнитных волн, излучаемых школьным СВЧ-генератором электромагнитных волн.

Для того чтобы источник и приемник электромагнитных волн были по своим свойствам близкими к точечным, нужно изготовить металлические экраны с круглыми отверстиями диаметром 2—3 см в центре и укрепить их на рупорах антенн генератора и приемника.

С. Ащеулов, В. Барышев

Погоня, столкновение, поимка

Ровно в полдень часовая и минутная стрелки часов совпадают. Когда они совпадут в следующий раз? Несмотря на простоту, эта старая задача весьма поучительна. Решим ее.

Пусть ν_1 и ν_2 — частоты вращения часовой и минутной стрелок. Очевидно, $\nu_1 = \frac{1}{12}$ ч$^{-1}$, $\nu_2 = 1$ ч$^{-1}$. Если t — момент времени следующего после полудня совпадения стрелок, то $\nu_2 t = \nu_1 t + 1$, ибо к моменту t минутная стрелка совершит на один оборот больше часовой. Следовательно,

$$t = \frac{1}{\nu_2 - \nu_1} \approx 1 \text{ ч } 5 \text{ мин } 27 \text{ с}.$$

Мы видим, что величина t зависит лишь от разности частот $\nu_2 - \nu_1$. Это наводит на мысль, что решение можно получить, рассуждая по-другому. За время между двумя последовательными совпадениями минутная стрелка совершает один оборот *относительно* часовой. Поскольку частота вращения минутной стрелки относительно часовой равна $\nu_{21} = \nu_2 - \nu_1$, можем с р а з у заключить, что

$$t = \frac{1}{\nu_{21}} = \frac{1}{\nu_2 - \nu_1}.$$

Эта задача относится к задачам следующего типа. В некоторой системе отсчета заданы характеристики движения нескольких тел. Требуется найти, как положения тел меняются друг относительно друга с течением времени. На этом занятии математического кружка мы познакомимся с несколькими такими задачами. Все они будут решены с помощью одного и того же приема: выбора подходящей системы координат.

1. Автомобили у перекрестка

Автомобили A и B движутся равномерно с одинаковыми скоростями по прямым дорогам 1 и 2, пересекающимся в точке O. Нужно определить кратчайшее расстояние между автомобилями, если известны их начальные положения ($|AO| = a$, $|BO| = b$) и угол α между дорогами (рис. 1 а).

Рассмотрим движение автомобиля B с точки зрения наблюдателя, находящегося в автомобиле A. Как известно, скорость такого движения равна разности $\vec{V}_B - \vec{V}_A$ и постоянна по величине и направлению *). Это значит, что автомобиль B движется относительно автомобиля A по некоторой прямой 3. (На рисунке 1 *б* прямая 3 изображена пунктиром; она нарисована в системе отсчета, связанной с автомобилем A.) Следовательно, автомобили находятся ближе всего друг к другу в тот момент, когда автомобиль B оказывается в точке B', являющейся основанием перпендикуляра, опущенного из точки A на прямую 3. Длина отрезка AB' равна искомому кратчайшему расстоянию между автомобилями.

Чтобы изобразить положение отрезка AB' в неподвижной системе отсчета, сместим его конец B' параллельно дороге 1 так, чтобы он попал в точку B_1 на дороге 2, и проведем $[B_1A_1] \parallel [B'A]$. Точки A_1 и B_1 являются искомыми положениями автомобилей (рис. 1 *б*).

Очевидно, прямая 3 параллельна биссектрисе угла между дорогами. Нетрудно подсчитать, что $|A_1B_1| = |AB'| = |a-b|\sin\frac{\alpha}{2}$.

2. Охотник и лиса

Лиса бежит с постоянной скоростью $\vec{V}_1$ по прямой l. Неподвижный охотник замечает лису, когда она находится в ближайшей от него точке прямой l (на расстоянии a). Как должен двигаться охотник, чтобы произвести выстрел с кратчайшего расстояния, если он может бежать со скоростью, равной по величине $|\vec{V}_2|$? Каково это кратчайшее расстояние?

Нетрудно сообразить, что при условии $|\vec{V}_2| \leqslant |\vec{V}_1|$ охотник должен бежать прямолинейно. Рассмотрим движение охотника в системе отсчета, связанной с лисой, т. е. движущейся со скоростью $\vec{V}_1$ (рис. 2 *а*). Скорость $\vec{V}_{21}$ охотника в этой системе равна $\vec{V}_2 - \vec{V}_1$. Построим вектор $\vec{V}_{21}$. Начало вектора $(-\vec{V}_1)$ поместим в точку B (исходное положение охотника). Начало вектора $\vec{V}_2$ — в конец O вектора $(-\vec{V}_1)$. Если начала всех векторов $\vec{V}_{21}$ находятся в точке B, то их концы при всевозможных направлениях движения охотника ле-

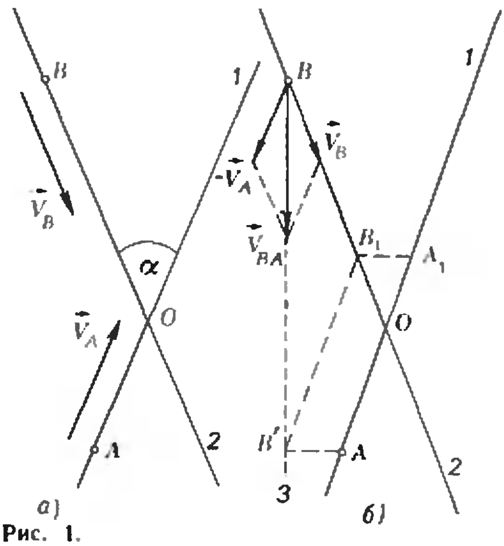


Рис. 1.

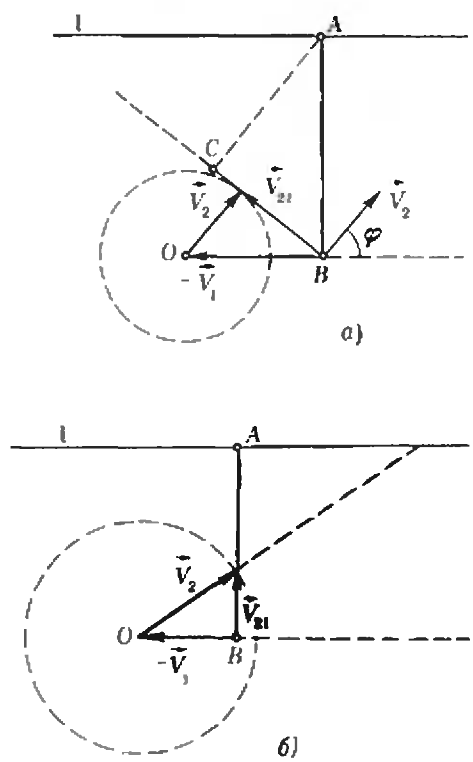


Рис. 2.

*) «Физика 8», п. 8.

жат на окружности радиуса $|\vec{V}_2|$ с центром в точке O.

Во введенной системе отсчета прямая, по которой будет бежать охотник, должна иметь общие точки с этой окружностью и проходить как можно ближе к точке A.

Если $|\vec{V}_2| < |\vec{V}_1|$, то этим условиям удовлетворяет касательная, проведенная из точки B к окружности. В этом случае искомое направление движения охотника (угол φ; см. рис. 2 *а*) и кратчайшее расстояние до лисы $R_{\min}$ таковы ($[AC]\perp[BC]$):

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{V}_2|}{|\vec{V}_1|},\quad R_{\min} = |AC| = a\sin\varphi.$$

Если $|\vec{V}_2| > |\vec{V}_1|$, то охотник может бежать в пределах заштрихованного сектора в любом направлении, если движется прямолинейно (рис. 2 *б*): условия задачи не запрещают охотнику достичь какой-то точки лисьей тропы раньше, чем через эту точку пробежит лиса, и в этом месте спокойно подождать лису *).

Наконец, при условии $|\vec{V}_1| = |\vec{V}_2|$, человек может сколь угодно близко подбежать к лисе, выбрав соответствующий малый угол φ.

Читателю предлагается самому доказать эти утверждения и нарисовать нужные рисунки.

3. Пароход и катер

Перпендикулярно к прямолинейному берегу моря проходит канал. Вдоль берега с постоянной скоростью $\vec{V}$ плывет пароход. Катер начинает движение по каналу из точки B, когда пароход находится в точке A — у устья канала. С какой постоянной скоростью $\vec{u}$ должен двигаться катер, чтобы на максимальное сближение с пароходом (до того, как катер вышел в море) потребовалось максимальное время)?*

*) При условии $|\vec{V}_2| > |\vec{V}_1|$ возможны и криволинейные траектории движения охотника. Семейство этих траекторий можно описать, например, следующим способом. Пусть наперед задано любое положительное число t. Тогда в течение интервала времени от начала движения до момента t охотник может бежать по любой траектории; начиная с момента t охотник может двигаться по любой из бесчисленного множества прямолинейных траекторий, удовлетворяющих условиям задачи.

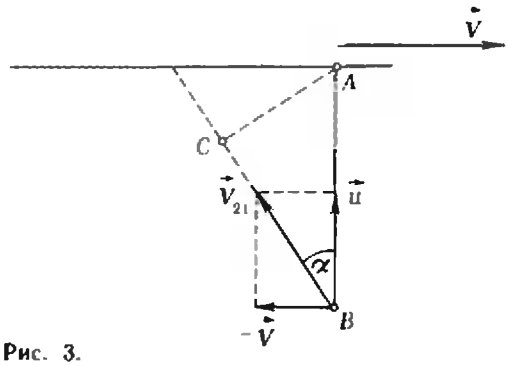


Рис. 3.

Обозначим скорость катера в системе отсчета, в которой пароход неподвижен, через $\vec{V}_{21}$: $\vec{V}_{21} = \vec{u} - \vec{V}$ (рис. 3). В этой системе отсчета траектория катера до максимального сближения есть отрезок BC : $[AC]\perp[BC]$; расстояние $|AC|$ — кратчайшее расстояние между судами. Время, за которое катер достигнет точки C,

$$t = \frac{|BC|}{|\vec{V}_{21}|} = \frac{|AB|\cos\alpha}{|\vec{V}_{21}|} = \frac{|AB|\sin 2\alpha}{2|\vec{V}|}.$$

Величина t принимает максимальное значение при $\alpha = \pi/4$, т. е. когда $|\vec{u}| = |\vec{V}|$.

4. Корабли в тумане

Четыре корабля А, Б, В и Г плывут в тумане с постоянными скоростями прямолинейными курсами. Корабли А и Б чуть не столкнулись; назовем это событие «столкновением». Известно, что произошли следующие столкновения: А и Б, А и В, А и Г, Б и В, Б и Г, причем в одном месте в одно и то же время сталкивалось не больше двух кораблей. Докажите, что если

*) Несколько лет назад эта задача предлагалась на вступительных экзаменах по математике (письменно) на естественные факультеты Ленинградского университета. Составители вариантов предполагали, что задача будет решаться алгебраически. Решение при этом оказывается громоздким. Попробуйте провести его сами.

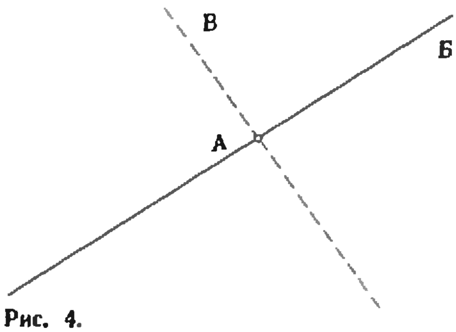


Рис. 4.

скорости кораблей В и Г различны по величине, то они также сталкиваются.

Рассмотрим перечисленные события с точки зрения наблюдателя, находящегося на корабле A. В этой системе отсчета траектория корабля $Б$ — прямая, проходящая через точку A (сам корабль A в этой системе отсчета неподвижен). Траектория корабля B также есть прямая, проходящая через точку A. Допустим, что траектории кораблей $Б$ и B не совпадают (изобразим траекторию корабля B пунктиром; см. рис. 4). В этом случае в точке A происходит столкновение сразу трех кораблей: A, $Б$ и B (иначе корабли $Б$ и B не столкнутся), что противоречит условию задачи. Следовательно, в нашей системе отсчета траектории кораблей $Б$ и B совпадают, а столкновение $Б$ и B происходит не в точке A, а где-то в другом месте. Точно так же можно убедиться, что траектория корабля $Г$ совпадает с траекториями кораблей $Б$ и B. Поскольку у кораблей B и $Г$ величины скоростей по условию различны, различны и величины их скоростей в выбранной системе отсчета. Таким образом, в этой системе отсчета корабли B и $Г$ движутся по одной прямой с разными скоростями и, следовательно, неизбежно сталкиваются *).

5. Осторожный охотник и лиса

*Лиса бежит с постоянной скоростью по прямой l. Охотник замечает лису, когда она находится на расстоянии a от него в направлении, составляющем угол α с прямой l (рис. 5 а), и начинает преследование, двигаясь с той же по величине скоростью, что и лиса. Поскольку «тактика» лисы охотнику неизвестна, он бежит все время прямо за лисой. Как близко охотнику удастся подбежать к лисе *)?*

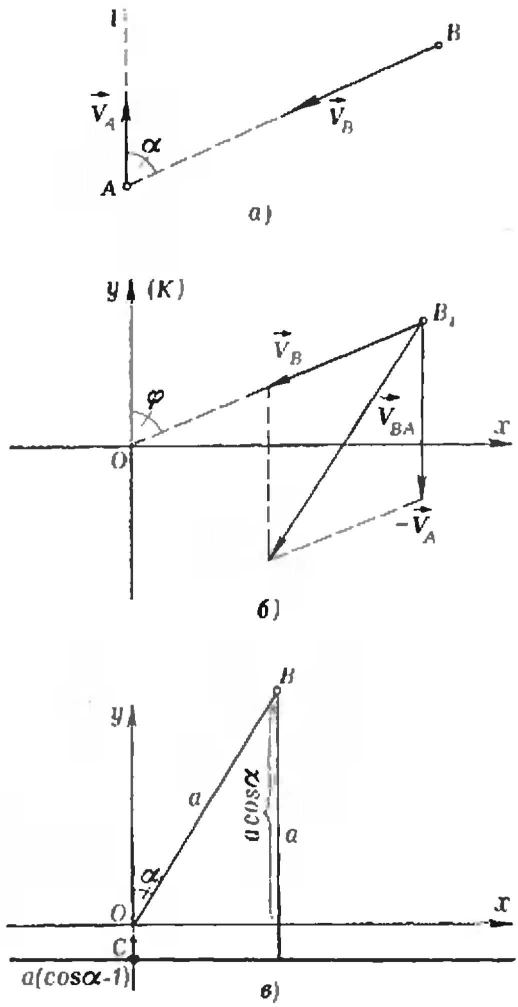
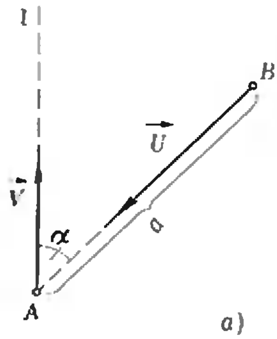


Рис. 5.

Рассмотрим события в системе Oxy, где лиса неподвижна и находится в начале координат O (ось Oy направлена вдоль лисьей тропы в сторону движения лисы). Скорость охотника в этой системе $\vec{V}_{BA} = \vec{V}_B - \vec{V}_A$, где $\vec{V}_A$ и $\vec{V}_B$ — скорости лисы и охотника в неподвижной системе отсчета. Пусть в некоторый момент времени охотник находится в точке B_1 (рис. 5 б). Обозначим проекции ско-

*) Другой способ решения см. в книге Дж. Литлвуда «Математическая смесь» (М., «Наука», 1965), с. 10.

*) Эта интересная задача однажды подробно обсуждалась в «Кванте» (1973, № 2, с. 39).



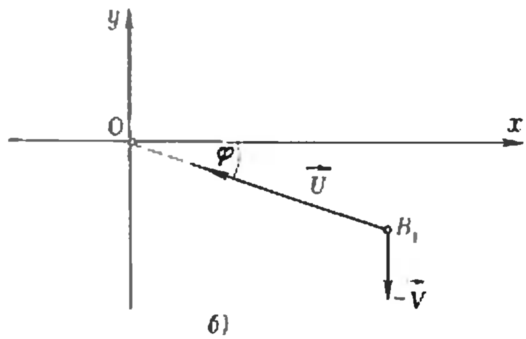


Рис. 6.

рости $\vec V_{BA}$ охотника на направления $\vec{OB}_1$ и $\vec{Oy}$ (см. рис. 5 *б*) через V_1 и V_2. Если $\vec{OB}_1$ составляет с направлением $\vec{Oy}$ угол φ, то

$$V_1 = -|\vec V_{BA}|(1+\cos\varphi)$$

и

$$V_2 = -|\vec V_{BA}|(1+\cos\varphi),$$

то есть $V_1=V_2$ в любой момент времени. Следовательно, в любой момент времени охотник равноудален от начала координат O системы координат Oxy и некоторой прямой, параллельной оси Ox. Найдем уравнение этой прямой. В начальный момент времени охотник удален от лисы (т. е. от начала координат) на расстояние a, поэтому искомая прямая отстоит от точки B на расстоянии a (рис. 5 *в*). Таким образом, уравнение этой прямой в системе координат Oxy имеет вид $y=-(a-a\cos\alpha)=$ $=a(\cos\alpha-1)$, прямая находится на расстоянии a $(1-\cos\alpha)$ от начала координат. Поэтому ближайшее к лисе положение охотника — это точка C, расположенная на оси Oy на одинаковом расстоянии $a(1-\cos\alpha)/2$ от O и от найденной прямой: $R_{\min}=$ $=a(1-\cos\alpha)/2$; оно достигается, когда охотник находится на прямой l.

6. Грустная история зайца

По прямой с постоянной скоростью $\vec V$ бежит заяц. В тот момент, когда заяц находится в точке A, волк начинает погоню из точки B с координатами $(a;\ \alpha)$ (рис. 6 а), двигаясь с постоянной по величине скоростью $|\vec U|=$ $=n|\vec V|$ $(n>1)$, направленной все время к зайцу. Будет ли заяц пойман, и если да, то когда и где *)?

Перейдем в систему отсчета, где заяц неподвижен и находится в начале координат O. (Наверное, в этой системе отсчета зайцу очень страшно — ведь он бездействует!). Пусть ось Oy направлена вдоль заячьей тропы в сторону движения зайца. Скорость волка в этой системе $\vec U'=\vec U-\vec V$. Докажем прежде всего, что заяц будет пойман.

Пусть точка B_1 есть положение волка в какой-то момент времени и пусть $\vec{OB}_1$ составляет с осью Oy угол φ (рис. 6 *б*). Проекция скорости $\vec U'$ на направление $\vec{OB}_1$

$$U'_{\vec{OB}_1} = |\vec V|(\sin\varphi - n). \qquad (1)$$

По условию $n>1$; значит, для любых φ величина $U'_{\vec{OB}_1}$ отрицательна, причем $|U'_{\vec{OB}_1}|\geqslant|\vec V|(n-1)$. Поэтому волк обязательно догонит зайца за время, не большее $\frac{a}{n-1}$ (в начальный момент он находится от зайца на расстоянии a).

Найдем теперь время, за которое волк догонит зайца. Для этого запишем проекцию скорости $\vec U'$ на направление оси Oy выбранной системы координат. Имеем (см. рис. 6 *б*):

$$U'_{\vec{Oy}} = -|\vec V| + n|\vec V|\sin\varphi. \qquad (2)$$

Пусть $(x;\ y)$ — координаты волка в системе Oxy. В момент времени T,

*) Решение этой задачи, использующее приемы высшей математики, приведено в книге «Избранные задачи» (М., «Мир», 1977) — см. задачу 154.

когда заяц пойман, $x_T=y_T=0$. В начальный момент времени $y_0=a\cos\alpha$. Таким образом, проекция на ось Oy перемещения волка за время T, необходимое для поимки зайца, равна $y_0=a\cos\alpha$. Поэтому среднее значение проекции скорости волка на ось Oy за время T

$$\overline{U}'_{\vec{Oy}}=-y_0/T=-a(\cos\alpha)/T.$$

Найдем теперь из (1) и (2) соотношение между $U'_{\vec{OB_1}}$ и $U'_{\vec{Oy}}$. Имеем:

$$U'_{\vec{OB_1}}=U'_{\vec{Oy}}/n+|\vec{V}|/n-n|\vec{V}|.$$

Поскольку слагаемые $|\vec{V}|/n$ и $n|\vec{V}|$ от времени не зависят, такое же соотношение справедливо и для средних значений рассматриваемых проекций, то есть

$$\overline{U}'_{\vec{OB_1}}=\overline{U}'_{\vec{Oy}}/n+|\vec{V}|/n-n|\vec{V}|=$$

$$=-a(\cos\alpha)/nT+|\vec{V}|/n-n|\vec{V}|. \quad (3)$$

С другой стороны,

$$\overline{U}'_{\vec{OB_1}}=-a/T. \quad (4)$$

Из (3) и (4) находим искомое время поимки:

$$T=\frac{a}{|\vec{V}|}\cdot\frac{n}{n^2-1}\left(1-\frac{\cos\alpha}{n}\right). \quad (5)$$

Проверим этот ответ для очевидных частных случаев.

1°) $\alpha=0$: волк бежит н а в с т р е ч у зайцу. В этом случае величина относительной скорости движения волка равна $|\vec{V}|(n+1)$, так что он догонит зайца за время

$$T_1=\frac{a}{|\vec{V}|(n+1)}.$$

Этот же результат получается из (5) при подстановке $\alpha=0$.

2°) $\alpha=\pi$: волк бежит з а зайцем. При этом величина его относительной скорости равна $|\vec{V}|(n-1)$ $(n>1)$, и он догоняет зайца за время

$$T_2=\frac{a}{|\vec{V}|(n-1)}.$$

Подставляя $\alpha=\pi$ в выражение (5), получаем тот же ответ.

За время T заяц пробегает расстояние

$$S_з=|\vec{V}|T=\frac{an}{n^2-1}\left(1-\frac{\cos\alpha}{n}\right),$$

так что волк ловит зайца в точке на прямой l, отстоящей от точки A на этом расстоянии $S_з$.

З а д а ч и

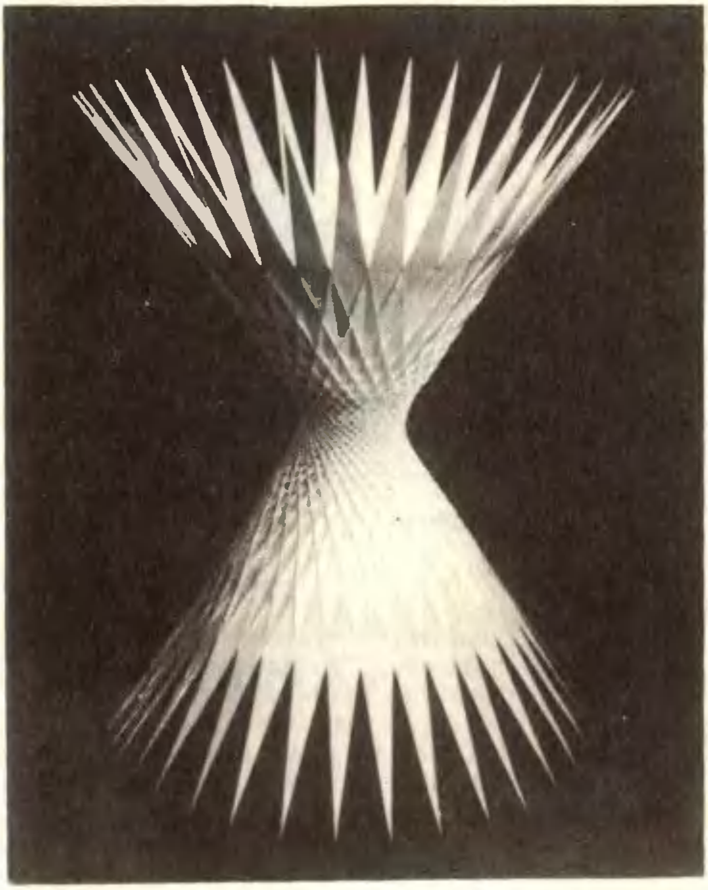
1. На луг перпендикулярно к опушке леса выходит прямолинейное шоссе. Из леса со скоростью $\vec{V}$ выезжает автобус. Из какой части луга имеет смысл бежать, чтобы догнать автобус, если вы можете двигаться со скоростью $\vec{U}$ $(|\vec{U}|<|\vec{V}|)$?

2. Докажите, что все четыре корабля $А$, $Б$, $В$ и $Г$ из задачи 5 в любой момент времени находятся на одной прямой.

3. В каждой вершине правильного n-угольника находится по собаке. По команде все собаки одновременно начинают движение, причем каждая преследует свою ближайшую по часовой стрелке соседку. Какое время проходит до встречи собак и какое расстояние пробегает каждая из них, если они бегут со скоростью $|\vec{V}|$?

4. Квадратный огород окружен забором. В вершине A забора сидит собака-сторож. В противоположной вершине B — дырка, достаточная для зайцев, но слишком узкая для собаки. Пробравшийся в огород воришка-заяц, заметив собаку, бежит к дырке по прямой со скоростью $|\vec{V}|$; собака преследует его со скоростью $n|\vec{V}|$, $n>1$, причем всегда бежит прямо за зайцем. Определите (приблизительно), в какой части огорода заяц может чувствовать себя в безопасности.

5. Несколько собак окружили зайца. Скорости собак не превышают скорости зайца. Все собаки зайцу видны. Может ли заяц вырваться из окружения, и если да, то как, если собаки при преследовании бегут так, что скорость каждой из них всегда направлена к той точке, где в данный момент находится заяц?



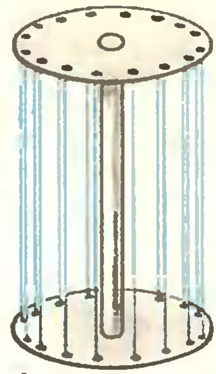


Рис. 1.

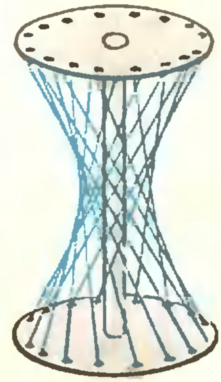


Рис. 2.

Однополостный гиперболоид

На первой странице обложки вы видите бумажную модель однополостного гиперболоида. Так называется поверхность, задаваемая в пространстве уравнением

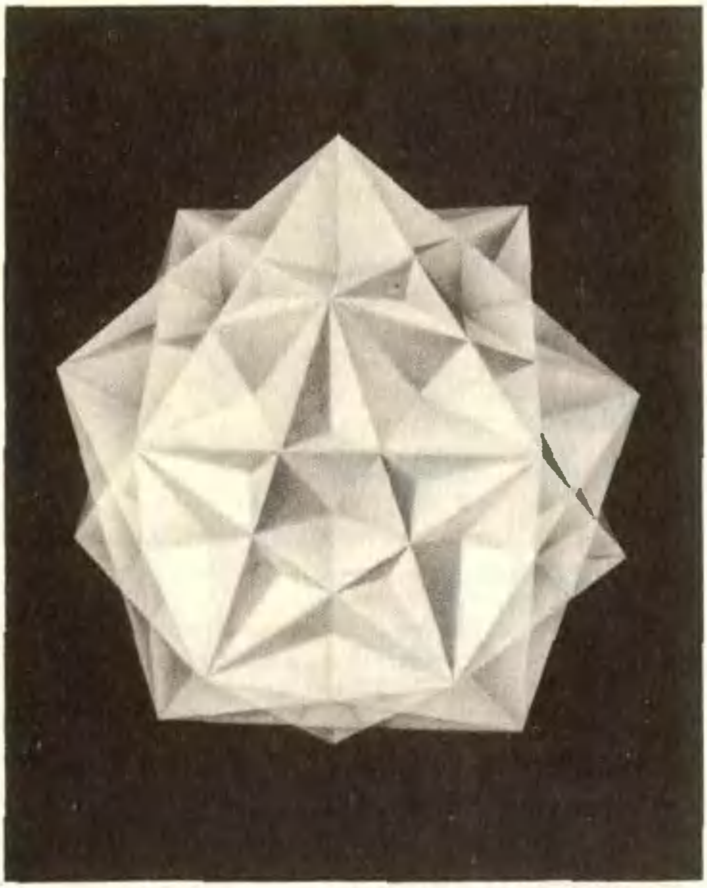
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$$

У гиперболоида на обложке параметры a и b совпадают ($a=b$), и он является телом вращения с осью Oz (обоснуйте это). Проще всего изготовить модель однополостного гиперболоида вращения следующим образом. Возьмем два колеса одинакового диаметра с равномерно расположенными вдоль обода отверстиями. Посадим колеса на общую ось и проденем в отверстия тонкие резинки параллельно оси (см. рис. 1). Если теперь закрепить эти резинки в отверстиях, и повернуть верхнее колесо на угол α, меньший 180°, то резинки расположатся на поверхности однополостного гиперболоида. Докажите, что при повороте на угол $-\alpha$ резинки расположатся вдоль той же поверхности.

Из нашей резиновой модели видно, что на поверхности гиперболоида имеются два семейства скрещивающихся прямых линий. Выведите это строго из уравнения поверхности.

Первая московская телевышка, сконструированная архитектором Шуховым, изготовлена из таких «моделей» (вместо резинок там использованы стальные тросы).

Однополостный гиперболоид вращения можно получить, вращая кривую $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ вокруг оси Oz. Эта кривая является гиперболой. Именно поэтому поверхность называется гиперболоидом. Однополостным он называется потому, что есть еще и двухполостный, получаемый вращением гиперболы относительно оси Ox. Уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ отличается от привычного вам уравнения гиперболы $xy=1$. Но это не должно вас смущать — отличие не является принципиальным. Почему это действительно так, вы поймете, прочитав в «Кванте» № 3 за 1975 год статью о гиперболе. На первой странице обложки хорошо видны и оба семейства скрещивающихся прямых и гипербола. На четвертой странице обложки даны некоторые указания о склейке бумажной модели, подобной приведенной на первой странице.



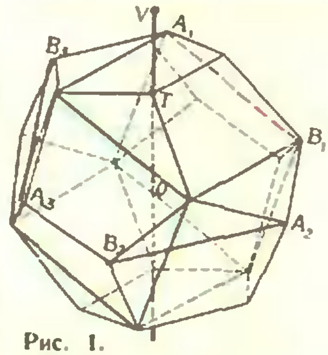


Рис. 1.

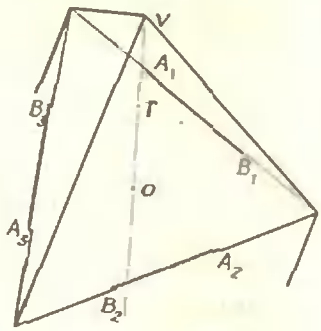


Рис. 2.

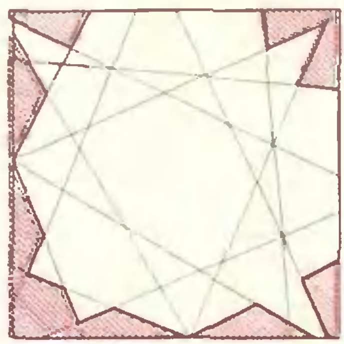


Рис. 3.

Сложный многогранник

Сложный многогранник, показанный на второй странице обложки — не что иное, как объединение десяти кубов с общим центром.

Расскажем сначала о «родственнике» этого многогранника — многограннике, составленном из пяти кубов. Он строится на основе додекаэдра. Оказывается, в додекаэдр можно пятью различными способами вписать куб. Один из таких кубов показан на рисунке 1 зеленым цветом. На фотографии вы видите модель этого многогранника.

Семейство из 10 кубов тоже строится на основе додекаэдра. Берется пара противоположных вершин T, T' (рис. 1) и рассматриваются три (красных) отрезка A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 (как нетрудно заметить, при поворотах около оси OT на углы, кратные $2\pi/3$, они переходят друг в друга). Через эти отрезки проводятся три попарно перпендикулярные плоскости, пересекающиеся в точке V на оси OT (рис. 2) и рассматриваются еще три плоскости, им симметричные относительно центра O додекаэдра. Эти шесть плоскостей и ограничивают наш куб.

Такой куб можно построить для каждой пары противоположных вершин додэкаэдра, а так как вершин у него 20, как раз получится 10 кубов. Их объединение и изображено на обложке.

Попробуйте на обложке «увидеть целиком» один из этих кубов. Если сумеете, вам будет легко выделять и остальные; вы заметите, что у каждого куба две вершины — «изолированные» (они лежат на оси, отправляясь от которой строился этот куб), а каждая из шести остальных вершин имеет «соседа» (вершину другого куба). Эти пары «соседей» красиво группируются вокруг десятиконечных звезд, образованных объединением пересекающихся ребер пяти кубов.

Если вы захотите построить модель изображенного на обложке многогранника, то можете воспользоваться рисунком 3: на нем показана штриховкой, с достаточной точностью, выходящая наружу часть каждой грани каждого куба. Таких «шаблонов» нужно изготовить 60 штук; затем их нужно правильно склеить, исходя из рисунка на обложке*). Но это не просто! Красиво склеить такой многогранник сумеет только трудолюбивый и квалифицированный любитель моделирования.

*) Более подробно об этом рассказано в книге В. Гамаюнова «Проектирография», М., 1976, МГПИ им. Ленина.

задачник Кванта

Задачи

М541—М545; Ф553—Ф557

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.
Решения задач из этого номера можно отправлять не позднее 1 марта 1979 года по адресу: 113035, Москва, М-35 Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант». В графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 1—79» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М541, М543» или «Ф555». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).
Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации (или цикла задач), присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).
В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

М541. В компании из N человек у каждого ровно трое друзей.
а) Докажите, что N четно.
б) Всегда ли такую компанию можно разбить на $N/2$ пар так, чтобы люди в каждой паре были друзьями?

Д. Бернштейн

М542. Дан прямоугольный треугольник $A_0A_1A_2$ с катетами $|A_0A_2|=a$ и $|A_1A_2|=b$. Муравей ползет по бесконечной ломаной $A_2A_3A_4A_5\ldots$, где A_nA_{n+1} — высота треугольника $A_{n-2}A_{n-1}A_n$.
а) Найдите длину его пути (из бесконечного числа отрезков).
б) Постройте предельную точку L, к которой приближается муравей. На каких расстояниях от катетов она находится?

П. Емельянов

М543*. Пусть

$$\rho(x, y)=\frac{|x-y|}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+y^2}}.$$

Докажите, что для любых действительных чисел a, b, c выполнено неравенство

$$\rho(a, c)\leqslant\rho(a, b)+\rho(b, c).$$

Andrzei Paszkiewicz (Варшава)

М544*. Какое наибольшее число вершин, из которых нельзя провести ни одной диагонали (лежащей целиком внутри многоугольника) может иметь невыпуклый n-угольник? Решите эту задачу сначала для $n=4$, 5, 6, 7.

С. Бычков

М545. На плоскости задано n точек. Нужно разместить в этих точках n прожекторов, каждый из которых освещает угол величины $360°/n$ так, чтобы осветить всю плоскость. Докажите, что это возможно при любом расположении данных точек, если
а) $n=3$; б) $n=4$; в) n — любое натуральное число.

г) Пусть теперь прожекторы освещают углы α_1, α_2, ..., α_n ($\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=360°$) и составлены в одну точку так, что они освещают плоскость. Докажите, что можно перенести в каждую из данных точек по одному из n прожекторов так, что вся плоскость будет по-прежнему освещена.

Г. и В. Гальперины

Ф553. Тяжелая доска массы M лежит на двух тонкостенных катках радиусов r и R и равных масс m. Расстояние между центрами катков l. С каким ускорением начнет двигаться доска, если ее отпустить? Трение между всеми поверхностями таково, что проскальзывания нет.

Ф554*. Брусок массы m_1 лежит на доске массы m_2, которая находится на гладкой горизонтальной поверхности. Коэффициент трения между бруском и доской равен μ. На доску действует сила $\vec{F}$, изменяющаяся со временем по закону $|\vec{F}|=bt$, где b — постоянная величина. Нарисовать графики зависимости ускорений бруска и доски от времени t.

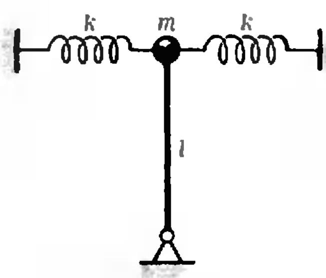


Рис. 1.

Ф555. а) Легкий жесткий стержень длины l с грузом массы m наверху закреплен шарнирно в нижней точке и удерживается в вертикальном положении двумя горизонтальными пружинами жесткости k, скрепленными с его верхним концом (рис. 1). В направлении, перпендикулярном к пружинам, стержень двигаться не может. При какой массе груза вертикальное положение стержня перестанет быть устойчивым?

б) Стальная спица длины l заделана в пол так, что стоит вертикально. Если к ее верхнему концу приложить небольшую горизонтальную силу $\vec{F}$, верхний конец спицы отклонится на величину $a \ll l$. Оценить, груз какой массы может выдержать, не согнувшись, спица на своем верхнем конце. Различием формы, которую принимает спица под действием на нее горизонтальной или вертикальной сил, пренебречь.

Г. Коткин

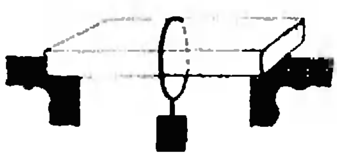


Рис. 2.

Ф556. Если на ледяной брусок надеть проволочную петлю, к которой подвешен груз (рис. 2), проволока начинает резать лед. Это объясняется тем, что при повышении давления температура плавления льда понижается, лед под проволокой начинает таять, а над проволокой — вновь смерзаться.

Однако, если петлю сделать не из проволоки, а из капроновой нити такого же или даже меньшего диаметра, лед практически не режется. Почему? Попробуйте провести описанный опыт.

Г. Косоуров

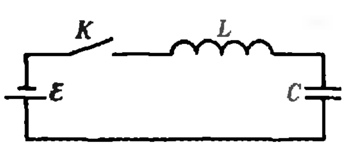


Рис. 3.

Ф557. В схеме, изображенной на рисунке 3, ключ K замыкают. Найти максимальный ток в цепи и максимальное напряжение на конденсаторе.

П. Зубков

Решения задач

М494, М496—М499; Ф508—Ф511

М494. *Внутри квадрата со стороной 1 расположено n^2 точек. Докажите, что существует ломаная, содержащая эти точки, длина которой меньше а) $3n$; б) $2n$.*

Идея построения ломаной ясна из рисунка 1: мы делим квадрат на n вертикальных полосок и затем обходим все точки «змейкой»: первую слева полоску проходим сверху вниз, следующую — снизу вверх и т. д. Сумма длин звеньев ломаной не больше суммы длин их проекций на вертикальную и горизонтальную стороны квадрата. Сумма вертикальных проекций, как легко видеть, не превосходит n, а сумму горизонтальных проекций можно оценить так. Горизонтальная проекция звена, не пересекающего границ полосок, не превосходит $1/n$, а проекция звена, пересекающего k вертикальных отрезков границ полосок, не превосходит $(k+1)/n = k/n + 1/n$. Общее число вертикальных границ полосок равно $n-1$, поэтому сумма всех n^2-1 горизонтальных проекций не больше

$$(n^2-1)/n + (n-1)/n = n+1-2/n \leqslant n+1.$$

Таким образом, для длины всей ломаной мы получаем оценку $2n+1$.

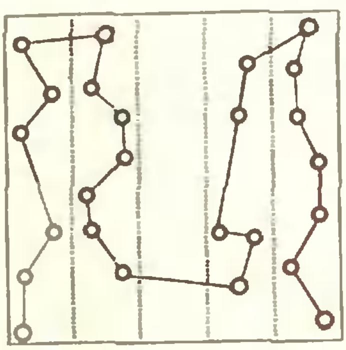


Рис. 1.

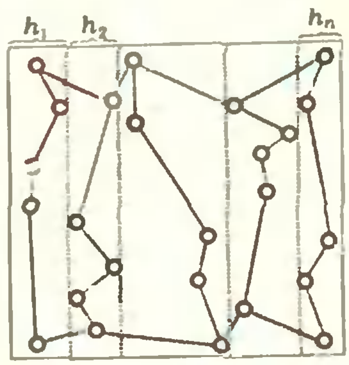


Рис. 2.

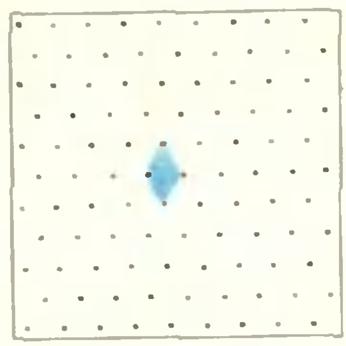


Рис. 3.

Задача а) решена, а чтобы доказать б), надо улучшить *оценку на 1.*

Для этого слегка изменим нашу конструкцию. Разделим квадрат на n полос р а з н о й ширины ($h_1, h_2, \ldots, h_n$) так, чтобы в каждой полосе было ровно по n точек («граничные» точки можно относить и влево, и вправо). Соединим все верхние точки полос и все нижние точки отрезками попеременно красного и синего цветов (рис. 2). Мы можем выбрать начало ломаной-змейки так, чтобы она прошла либо по всем синим отрезкам, либо по всем красным. Сумма горизонтальных проекций $2(n-1)$ красных и синих отрезков ломаной вместе не больше 2; если мы выберем тот цвет, для которого эта сумма меньше 1, то получим для суммы всех горизонтальных проекций оценку

$$(n-1)(h_1+h_2+\ldots+h_n)+1 \leqslant n.$$

Сумма вертикальных проекций, как и прежде, не больше n.

Итак, мы построили ломаную длины не больше $2n$, — решили б).

Пример «плотного» расположения точек в вершинах треугольной решетки (рис. 3; при большом n, чтобы уместить в *квадрате* 1×1 n^2 *точек, нужно взять длину стороны треугольничка равной* примерно $\sqrt{2/\sqrt{3}}/n$) показывает, что константу 2 в условии задачи заведомо нельзя (даже для больших n) заменить числом, меньшим $\sqrt{2/\sqrt{3}}$.

Н. Васильев, А. Тартаковский

М496. *Каких шестизначных чисел больше: представимых в виде произведения двух трехзначных чисел или не представимых?*

Трехзначных чисел (от 100 до 999) существует всего 900. Следовательно, пар (не обязательно различных) трехзначных чисел существует всего $\frac{900\cdot 899}{2}+900=\frac{900\cdot 901}{2}=405450$.

Поэтому шестизначных чисел, представимых в виде произведения двух трехзначных, заведомо не больше этого количества. А всего шестизначных чисел 900 000. Значит, больше половины из них *не* представимы в виде произведения двух трехзначных.

Н. Васильев

◆

М497. *На сторонах BC, CA и AB остроугольного треугольника ABC взяты произвольные точки A_1, B_1, C_1; на отрезках AA_1, BB_1 и CC_1 как на диаметрах построены окружности. Докажите, что три общие хорды пар этих окружностей пересекаются в точке пересечения высот треугольника ABC.*

Решение этой задачи использует следующую хорошо известную теорему:

Если три окружности попарно пересекаются, то три общие хорды каждой пары окружностей (или их продолжения) проходят через одну точку или параллельны (рис. 4).

Сначала мы решим задачу, а затем дадим набросок доказательства теоремы.

Построим на отрезках AB, AA_1 и BB_1 как на диаметрах окружности O_{AB}, O_{AA_1} и O_{BB_1} соответственно. Общей хордой окружностей O_{AB} и O_{AA_1} является, очевидно, высота AH_A треугольника ABC (поскольку $\widehat{AH_AB}=\widehat{AH_AA_1}=90^\circ$; рис. 5). Точно так же общей хордой окружностей O_{AB} и O_{BB_1} является высота BH_B треугольника. Из сформулированной выше теоремы следует, что общая хорда окружностей O_{AA_1} и O_{BB_1} проходит через точку пересечения высот AH_A и BH_B треугольника ABC.

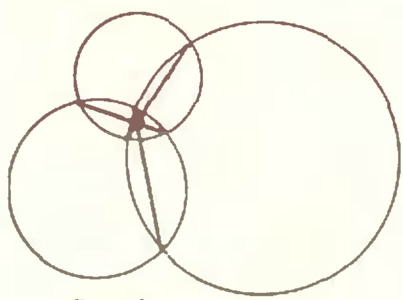


Рис. 4.

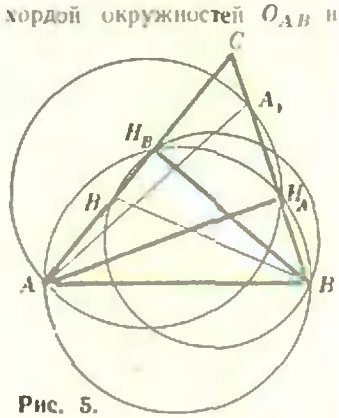


Рис. 5.

Аналогично доказывается, что общие хорды двух других пар окружностей: O_{AA_1} и O_{CC_1}, O_{CC_1} и O_{BB_1} проходят через точку пересечения высот треугольника ABC. Задача решена.

Осталось доказать теорему.

Построим на данных окружностях (лежащих в горизонтальной плоскости) три сферы с центрами и плоскости окружностей и посмотрим на них сверху. Мы увидим три окружности, по которым пересекаются сферы (их проекции на горизонтальную плоскость — наши три хорды), и точку их пересечения (ее проекция — нужная точка пересечения хорд).

В. Гутенмахер

◆

М498. *Для каждого натурального $n\geqslant 3$ укажите наименьшее k такое, что любые n точек плоскости, никакие три из которых не лежат на данной прямой, можно разделить k прямыми.*

Многие из приславших нам решение этой задачи вспомнили такой факт (его нетрудно доказать с помощью индукции): k прямых разбивают плоскость не более, чем на $\frac{k(k+1)}{2}+1$ частей (для k прямых общего положения будет ровно $\frac{k(k+1)}{2}+1$).

(Прямые разделяют данные точки, если для любых двух из этих точек найдется прямая, от которой они лежат по разные стороны.)

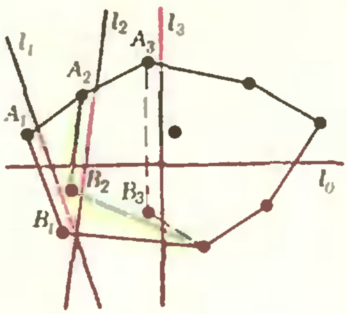


Рис. 6.

Отсюда следует, что k прямых не смогут разделить более чем $\frac{k(k+1)}{2}+1=n$ точек. Другими словами, даже при самом удачном расположении n точек, нужно не менее $k=(\sqrt{8n-7}-1)/2\approx\sqrt{2n}$ прямых, чтобы их разделить.

Поэтому можно ожидать, что при любом расположении n точек их можно разделить $c\sqrt{n}$ прямыми, где c — некоторая постоянная. Но, оказывается, это вовсе не так.

Докажем, что наименьшее значение k равно $\left[\frac{n+1}{2}\right]$, то есть $k=n/2$ при n четном и $k=(n+1)/2$ при n нечетном.

Сначала построим пример, показывающий, что меньшим числом прямых обойтись нельзя. Расположим n точек на окружности (или на границе любой выпуклой фигуры). Если k прямых разделяют эти n точек, то они делят окружность по крайней мере на n дуг, то есть пересекают ее не менее чем в n точках. Но каждая прямая пересекает окружность не более чем в двух точках, поэтому $2k\geqslant n$, то есть $k\geqslant n/2$.

Докажем теперь, что для любых n точек можно построить систему не более чем из $(n+1)/2$ разделяющих их прямых. Ясно, что можно провести одну прямую l_0 так, чтобы количество точек по одну и другую сторону от нее было одинаковым (или отличалось на единицу). Покажем, как провести еще не более $(n-1)/2$ прямых, чтобы разделить все точки.

Возьмем наименьший выпуклый многоугольник, содержащий наши n точек, и рассмотрим отрезок A_1B_1 его границы, пересекающий прямую l_0 (рис. 6). Проведем параллельно $[A_1B_1]$ прямую l_1, отделяющую точки A_1, B_1 от остальных $n-2$ точек (друг от друга точки A_1 и B_1 отделены прямой l_0). Ту же процедуру применим к оставшимся $n-2$ точкам — возьмем наименьший выпуклый многоугольник, содержащий эти $n-2$ точки, и вновь рассмотрим отрезок A_2B_2 его границы, пересекающий l_0. Проведя прямую $l_2\parallel[A_2B_2]$, отделим точки A_2, B_2 от остальных точек. Затем отделим от остальных еще две точки A_3, B_3 прямой $l_3\parallel[A_3B_3]$ ($[A_3B_3]$ пересекает l_0) и т. д., до тех пор, пока не останутся две (в случае четного n) или одна (в случае нечетного n) точки. Ясно, что вместе с прямой l_0 построенные прямые l_1, l_2, l_3,... уже разделяют все n точек. Число прямых l_i, $i=1,2,3,\ldots$, равно $\frac{n-2}{2}$, если n четно, и $\frac{n-1}{2}$, если n нечетно, то есть это число не превосходит $\frac{n-1}{2}$, так что для разделения всех точек требуется не более чем $\frac{n+1}{2}$ прямых.

Н. Васильев

◆

М499. *Назовем число уравновешенным, если в его десятичной записи некоторое начало совпадает с некоторым концом (например, числа 1971, 19219 уравновешены, а число 1415145 — нет). Докажите, что существует число, которое после приписывания к нему справа любой из десяти цифр становится уравновешенным.*

Возьмем число $a_0=0$; припишем к нему слева и справа по единице — получим число $a_1=101$. К каждой цифре числа 101 справа припишем цифру 2, после чего к числу 120212 припишем двойку слева; получим число $a_2=2120212$. С этим числом проделаем ту же операцию, приписывая к каждой его цифре тройку справа и затем тройку в начало; получим число $a_3=323132303231323$. Продолжая указанным способом последовательно приписывать цифры 4, 5, ..., 9, получим в результате число $a_9=9897989\ldots909\ldots9897989$, состоящее из $2^{10}-1=1023$ цифр, которое и является искомым.

В самом деле, нетрудно (индукцией по k) доказать, что число a_k ($k=0,1,2,\ldots,9$) обладает тем свойством, что после приписывания к нему справа любой из цифр 0, 1, ..., k некоторое его начало совпадает с концом; а именно, если приписать к нему цифру $m\leqslant k$, то первые 2^{k-m} цифр — такие же, как последние 2^{k-m} цифр (рис. 7).

1011 2120212**2**
1010 2120212**1**
2120212**0**

Рис. 7.

Наша конструкция позволяет построить «слово», становящееся уравновешенным после приписывания любой буквы, для алфавита из произвольного количества N букв (в исходной задаче алфавит состоит из 10 «букв» {0, 1, ..., 9}).

Г. Гуревич

Ф508. *Период обращения Меркурия вокруг Солнца составляет 88 земных суток, а вокруг своей оси — 59 земных суток. Какова продолжительность дня и ночи на Меркурии?*

Обозначим продолжительность суток на Меркурии через x (земных суток). За одни земные сутки Меркурий повернется вокруг своей оси на угол $\frac{360^\circ}{59}$ и сместится по своей орбите (в ту же сторону) на угол $\frac{360^\circ}{88}$. Разность $\frac{360^\circ}{59}-\frac{360^\circ}{88}$ представляет собой угол, на который Меркурий в течение одних земных суток повернется по отношению к Солнцу:

$$\frac{360^\circ}{59}-\frac{360^\circ}{88}=\frac{360^\circ}{x}.$$

Отсюда

$$x\approx 179$$

— сутки на Меркурии приблизительно равны двум меркурианским годам.

Следовательно, меркурианские день и ночь приблизительно равны по продолжительности его году.

Е. Левитан

◆

Ф509. *В океане имеется течение, захватывающее лишь верхний слой воды. По течению плывет плот со звукоулавливающей аппаратурой. На дне, впереди по течению, расположен неподвижный источник звука. Наблюдатель на плоту обнаружил, что звук достигает плота в направлении, составляющем угол β с вертикалью. Какой угол с вертикалью составляет истинное направление на источник звука? Скорость течения $\vec{u}$, скорость звука в воде $\vec{v}$. Толщина движущегося слоя много меньше глубины океана.*

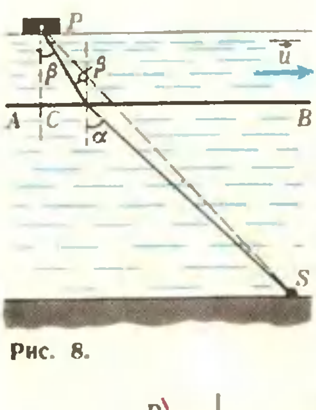


Рис. 8.

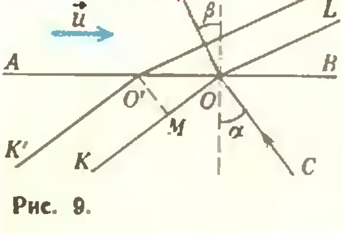


Рис. 9.

На границе AB движущегося слоя звук каким-то образом изменяет свое направление — преломляется (рис. 8). Звук достигает плота P под углом β, равным углу преломления. Поскольку слой тонкий, можно принять интересующий нас угол $\widehat{CPS}$ равным углу падения α. Таким образом, задача сводится к выводу закона преломления звуковой волны на границе неподвижной и движущейся сред.

Пусть CO — направление распространения звука в неподвижной среде и KO — положение волновой поверхности (волнового фронта) в некоторый момент t (рис. 9). Спустя промежуток времени Δt волновой фронт займет положение $K'O'$. Подобным же образом обозначим через OD направление распространения звука в верхнем слое воды (с точки зрения наблюдателя на плоту), а через OL и $O'L'$ — положения фронта волны в моменты t и $t+\Delta t$.

За время Δt фронт волны KO перемещается на расстояние $|MO'|=|\vec{v}|\Delta t$ $(MO'\perp KO)$, а точка пересечения фронта с поверхностью раздела сред перемещается на расстояние $|OO'|=\frac{|\vec{v}|\Delta t}{\sin\alpha}$. Аналогично, перемещение точки пересечения волнового фронта OL с границей раздела относительно наблюдателя на плоту равно $\frac{|\vec{v}|\Delta t}{\sin\beta}$ и отличается от $|OO'|$ на величину смещения слоя $|\vec{u}|\Delta t$:

$$\frac{|\vec{v}|\Delta t}{\sin\alpha}=\frac{|\vec{v}|\Delta t}{\sin\beta}-|\vec{u}|\Delta t.$$

Отсюда

$$\sin\alpha=\frac{\sin\beta}{1-|\vec{u}|\sin\beta/|\vec{v}|}.$$

Это и есть искомый закон преломления звуковой волны на границе неподвижной и движущейся сред. Заметим, что даже при скользящем падении волны ($\alpha\to\pi/2$, $\sin\alpha\to 1$) угол преломления не превосходит значения

$$\beta\to\arcsin\frac{1}{1+|\vec{u}|/|\vec{v}|}.$$

Оказывается, тот же закон преломления справедлив и тогда, когда плот уже проплыл над источником звука. Правда, в этом случае угол преломления β больше угла падения α, следовательно, преломление возможно лишь при углах падения

$$\alpha<\alpha_{\text{пр}}=\arcsin\frac{1}{1+|\vec{u}|/|\vec{v}|}.$$

При бо́льших углах происходит полное отражение звука от движущегося слоя.

Г. Коткин

◆

Ф510. *На резиновый шар натянута прочная резиновая сетка, нити которой идут по меридианам шара. Какую форму примет шар, если повысить в нем давление?*

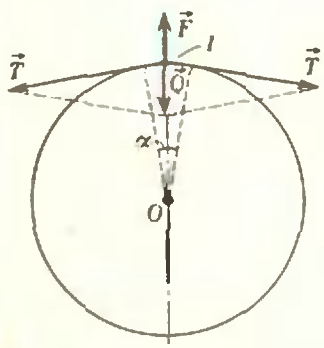


Рис. 10.

Рассмотрим одну из нитей и выберем на ней малый участок длины l (рис. 10). Обозначим силу натяжения нити через $\vec{T}$. Равнодействующая $\vec{Q}$ сил натяжения, действующих на выбранный участок, равна по абсолютной величине $2|\vec{T}|\sin\frac{\alpha}{2}$. При $l \ll R$ (R — радиус кривизны нити в данном месте) $\alpha=\frac{l}{R}\ll 1$, поэтому можно считать, что

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{2}, \quad \text{и} \quad |\vec{Q}|=\frac{l}{R}|\vec{T}|.$$

Так как выделенный участок нити находится в равновесии, сумма всех действующих на него сил равна нулю. Это означает, что со стороны шара на нить действует сила

$$\vec{F}=-\vec{Q}.$$

По третьему закону Ньютона на шар со стороны нити действует сила

$$-\vec{F}=-(-\vec{Q})=\vec{Q},$$

направленная к центру шара.

Через любую параллель шара проходит одно и то же число нитей N. Длина параллели радиуса $r=R\cos\varphi$ (φ — угол, образованный радиусом шара, проведенным к параллели, с плоскостью экватора) равна $2\pi r=2\pi R\cos\varphi$. Следовательно, через участок оболочки шара площадью $l\times l$ проходит число нитей

$$n=\frac{N}{2\pi R\cos\varphi}l.$$

Тогда давление, оказываемое на оболочку, равно

$$p=n\frac{|\vec{Q}|}{l^2}=\frac{N|\vec{T}|}{2\pi R^2\cos\varphi}.$$

Если бы оболочка *шара осталась сферической*, давление с увеличением угла φ возрастало бы. На самом деле согласно закону Паскаля давление везде должно быть одним и тем же. Значит, оболочка шара — не сферическая. Она шире по экватору, чем по вертикальному диаметру; радиус кривизны меридиана уменьшается к экватору и увеличивается к полюсу так, что $R^2\cos\varphi=\text{const}$.

Рис. 11.

Форма оболочки напоминает собой тыкву (рис. 11). Может быть, форма тыквы как раз и объясняется наличием «подкрепляющих нитей», идущих по ее меридианам?

◆

Ф511. *Пластины плоского конденсатора площадью S образуют малый угол α ($\alpha \ll 1$) друг с другом. Среднее расстояние между пластинами равно b. Нарисовать примерную картину силовых линий электростатического поля конденсатора и найти емкость конденсатора.*

Примерная картина силовых линий электростатического поля данного конденсатора показана на рисунке 12.

Все силовые линии — это дуги концентрических окружностей с центром в точке O. Действительно, силовые линии всегда перпендикулярны к поверхности проводника, значит, они перпендикулярны к пластинам конденсатора. Из соображений *симметрии* очевидно, что они перпендикулярны и к биссектрисе угла, образованного пластинами. Если бы на месте биссектрисы оказалась тонкая металлическая пластина, картина силовых линий никак бы не изменилась. Рассуждая аналогично, мы придем к выводу, что силовые линии должны

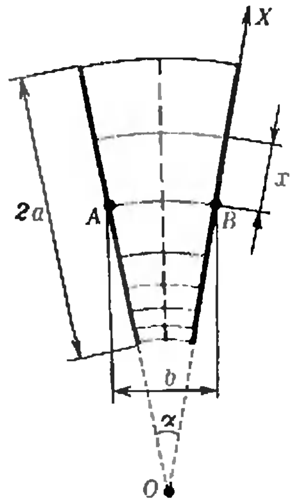


Рис. 12.

быть перпендикулярны к любому лучу, выходящему из точки O и находящемуся внутри угла α. Это и означает, что силовые линии представляют собой дуги концентрических окружностей.

Густота силовых линий не везде одна и та же, она уменьшается вдоль оси X. Это объяснить нетрудно. Как известно, густота силовых линий пропорциональна напряженности электрического поля. Найдем, как изменяется напряженность по мере увеличения координаты x (начало координат находится в точке B). Работа по перемещению единичного заряда с одной пластины конденсатора на другую вдоль л ю б о й силовой линии должна быть одной и той же (эта работа равна разности потенциалов между пластинами). Следовательно, чем длиннее силовая линия, тем меньше напряженность (сила, действующая на единичный заряд). С учетом малости угла α получим

$$|\vec{E}| = |\vec{E}_0| \frac{b}{b + \alpha x},$$

где $\vec{E}_0$ — напряженность на силовой линии AB (там, где расстояние между пластинами конденсатора равно b), $\vec{E}$ — напряженность на соседней силовой линии, отстоящей от AB на x, b и $b + x$ — длины соответствующих силовых линий. Так же изменяется и густота силовых линий.

Теперь найдем емкость C конденсатора. По определению

$$C = \frac{q}{U},$$

где q — заряд и U — напряжение конденсатора. U можно выразить через $|\vec{E}_0|$:

$$U = |\vec{E}_0| b$$

Осталось выразить q.

Вблизи пластины электрическое поле аналогично полю плоскости; следовательно, его напряженность

$$|\vec{E}| = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0},$$

где σ — поверхностная плотность заряда, ε_0 — электрическая постоянная. Отсюда

$$\sigma = 2\varepsilon_0 |\vec{E}| = \frac{2\varepsilon_0 |\vec{E}_0| b}{b + \alpha x}.$$

Обозначим через l «глубину» пластины и выделим на пластине узкую полоску шириной Δx. Ее заряд равен

$$\Delta q = \sigma l \Delta x = \frac{2\varepsilon_0 |\vec{E}_0| bl}{b + \alpha x} \Delta x.$$

Чтобы найти весь заряд пластины, надо просуммировать заряды всех элементарных полосок и перейти к пределу при $\Delta x \to 0$. В результате получим

$$q = 2\varepsilon_0 bl |\vec{E}_0| \int_{-a}^{a} \frac{dx}{b + \alpha x} = \frac{2\varepsilon_0 bl |\vec{E}_0|}{\alpha} \ln \frac{b + \alpha a}{b - \alpha a}.$$

Тогда окончательно

$$C = \frac{q}{U} = \frac{2\varepsilon_0 l}{\alpha} \ln \frac{b + \alpha a}{b - \alpha a}.$$

И. Слободецкий

В. Вавилов

Сечения многогранников

В этой статье разбираются 10 задач о сечениях, взятые в основном из учебников «Геометрия 9» и «Геометрия 10». Первоочередная цель — систематизировать приемы построения сечений многогранников. Здесь подобраны приемы и задачи, в основе которых — построение пересечений и параллельное проектирование. К приемам, связанным с перпендикулярностью, мы вернемся в другой статье.

1. Постановка задачи

Доказывая теоремы, решая стереометрические задачи, мы используем чертежи, то есть изображения на плоскости фигур, расположенных в пространстве.

«В стереометрии изображением фигуры (оригинала) будем называть любую фигуру, подобную параллельной проекции данной фигуры на некоторую плоскость» (IX, § 13)*).

Таким образом, для построения изображений нужно учитывать свойства параллельной проекции. В частности (рис. 1),

1° *Точка изображается точкой;*

2° *прямая линия изображается прямой линией;*

3° *параллельные прямые изображаются параллельными прямыми;*

4° *если точка M лежит на отрезке [A; B], то изображение точки M лежит на изображении отрезка [A; B] и делит изображение отрезка в том же отношении, в каком точка M делит отрезок [A; B].*

В свойствах 2°—4° предполагается, что направление проектирования не совпадает с направлениями проектируемых прямых и отрезков.

Отметим, что при параллельной проекции, вообще говоря, не сохраняются длины отрезков и величины углов.

Из этих свойств вытекает, например, что *параллелограмм* всегда *) *изображается параллелограммом*, но квадрат (ромб, прямоугольник) не обязан изображаться квадратом (ромбом, прямоугольником). Далее, *медиана изображается медианой*, но биссектриса (высота) не обязана изображаться биссектрисой (высотой). *Центр тяжести изображается центром тяжести*, но ортоцентр (точка пересечения высот) не изображается, как правило, ортоцентром.

Наша основная задача будет состоять в построении сечения многогранника плоскостью, т. е. в построе-

*) Ссылка «IX, § 13» отсылает к § 13. «Геометрии 9»; «X, 73, 84» означает упражнения 73 и 84 из учебника «Геометрия 10».

*) Мы предполагаем, что направление проектирования не параллельно плоскости параллелограмма.

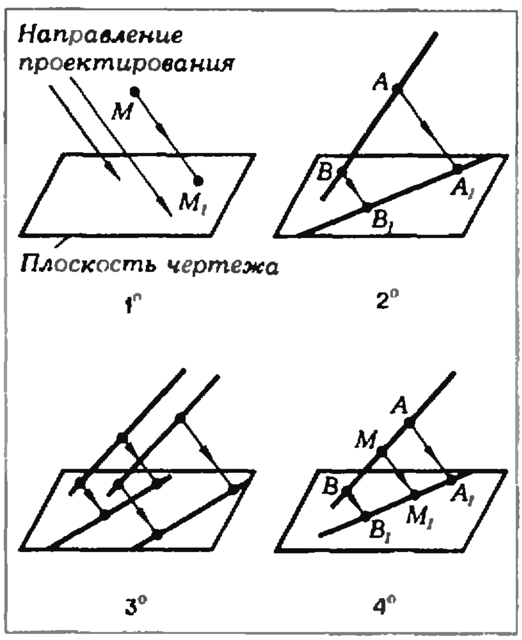


Рис. 1.

нии пересечения этих двух множеств. При этом, как правило, изображение многогранника будет считаться заданным, а плоскость сечения будет дана тремя точками (иногда — прямой и точкой) на изображении. Пользоваться можно, как обычно при геометрических построениях, только линейкой и циркулем. Задача считается решенной, если найдены все отрезки, по которым плоскость сечения пересекает грани многогранника.

Итак, пусть нам дано изображение некоторых фигур (плоскости, прямой, многогранника). Требуется на нем найти изображение некоторого геометрического объекта (точки, отрезка, многоугольника), связанного с исходными фигурами определенным образом.

На чертежах, при наших построениях, синий цвет будет соответствовать секущей плоскости, а красный — той плоскости, в которой ищется линия пересечения.

2. Вспомогательные задачи

Прежде чем перейти к основной задаче, рассмотрим несколько вспомогательных приемов для определения пересечений прямых и плоскостей.

1. *Пересечение двух пересекающихся прямых* найти легко: точка, в которой они пересекаются на чертеже, и есть изображение их точки пересечения в пространстве. Но — осторожно! Это верно лишь в предположении, что прямые н а с а м о м д е л е п е р е с е к а ю т с я. (А прямые в пространстве, «как правило», скрещиваются!). Не впадайте в ошибку (рис. 2).

2. *Пересечение прямой AB и плоскости* α найти не сложно, если известны параллельные проекции A_1, B_1 точек A, B на α (рис. 3). Построение ясно из чертежа.

3. *Пересечение прямой AB и плоскости* α легко найти и в том случае, когда даны точки пересечения A_1, B_1 с плоскостью α д в у х п е р е с е к а ю щ и х с я прямых, проходящих через точки A, B соответственно (рис. 4).

4. *Пересечение двух плоскостей* α и (ABC) находится просто, если даны параллельные проекции A_1, B_1, C_1 точек A, B, C на α. Проследите за этим построением самостоятельно (рис. 5).

Можно указать еще много различных ситуаций, когда удается построить пересечение двух заданных плоскостей (ABC) и α.

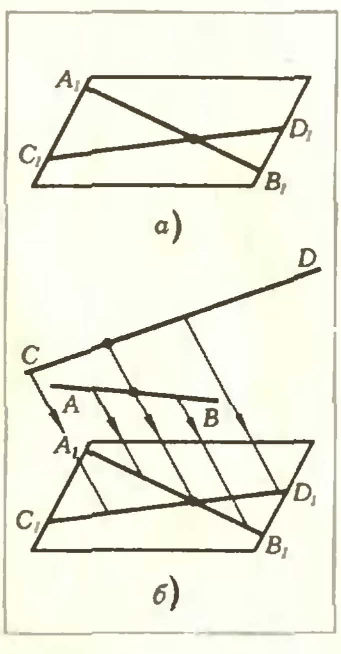


Рис. 2.

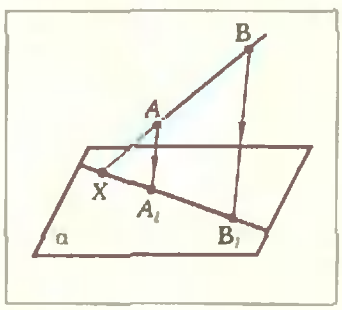


Рис. 3.

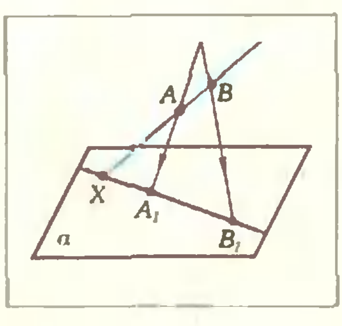


Рис. 4.

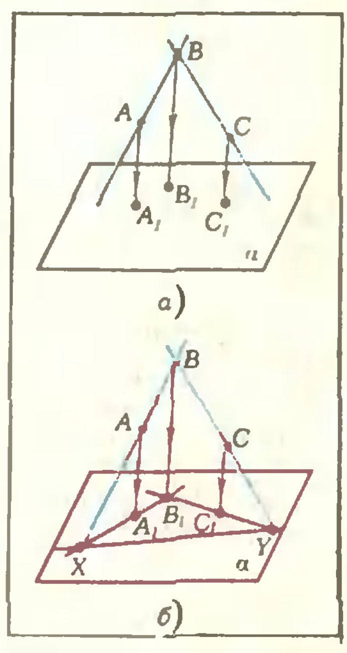


Рис. 5.

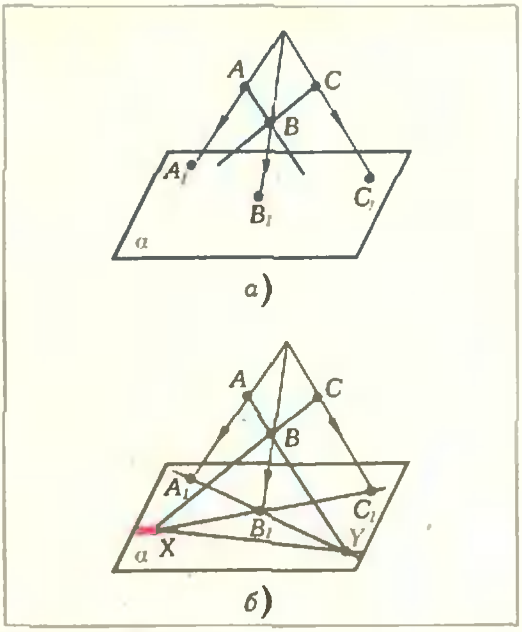


Рис. 6.

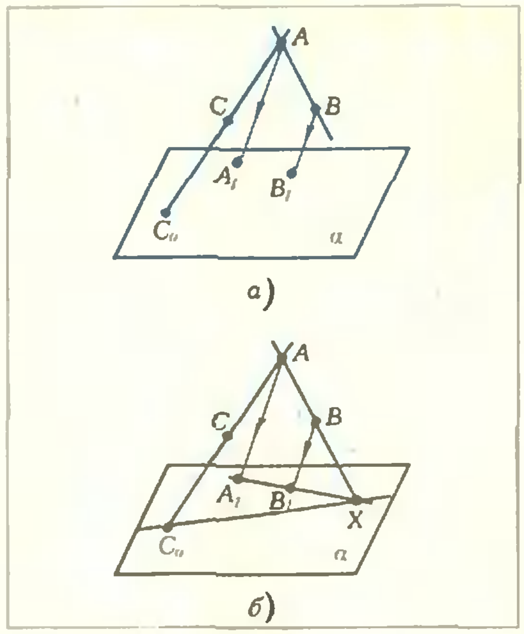


Рис. 7.

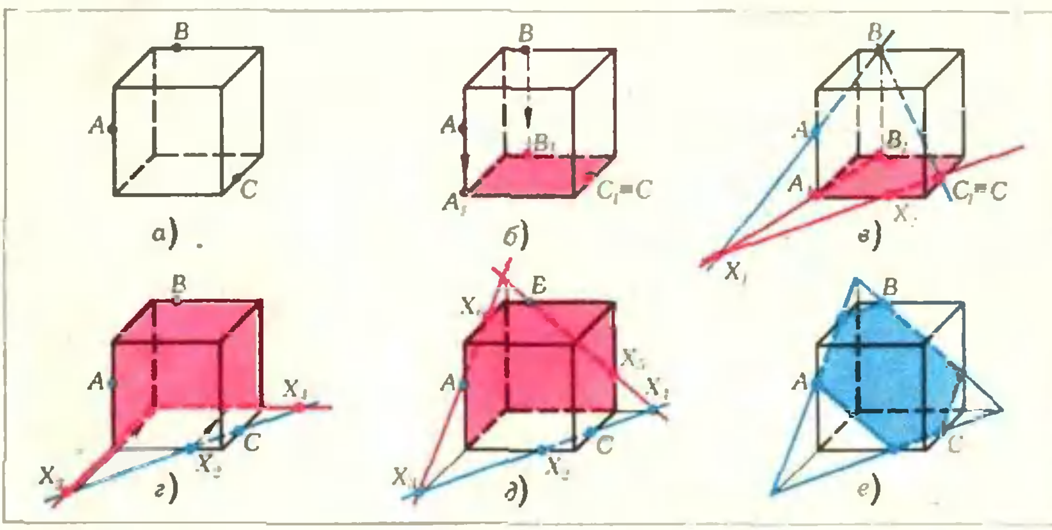


Рис. 8.

Мы ограничимся двумя случаями, которые читатель разберет самостоятельно по рисункам 6 и 7.

3. Построение сечения по трем заданным точкам

Здесь систематически применяются приемы, описанные в предыдущем разделе. Читатель должен самостоятельно прослеживать за ними по мультипликационным сериям рисунков.

5. *Сечение параллелепипеда плоскостью,* заданной тремя точками A, B, C (IX, 75, 95, 96, 145, 147) выполнено на рисунках 8, *а—е*. Здесь надо построить проекции A_1, B_1, C_1 точек A, B, C параллельно боковым ребрам *(рис. 8, б)*, *применить задачу* 2 для построения X_1 (рис. 8, *в*) и найти X_2; затем, взяв новое направление проектирования (рис. 8, *г*), найти точку X_4 (снова задача 2) и применить задачу 1 для нахождения точек X_6 и X_5 (рис. 8, *д*).

6. *Сечение треугольной пирамиды плоскостью ABC показано на рисунках 9, а—д* (IX, 133, 135). Здесь дважды применяется задача 3.

7. *Сечение треугольной призмы плоскостью ABC* показано на рис. 10,

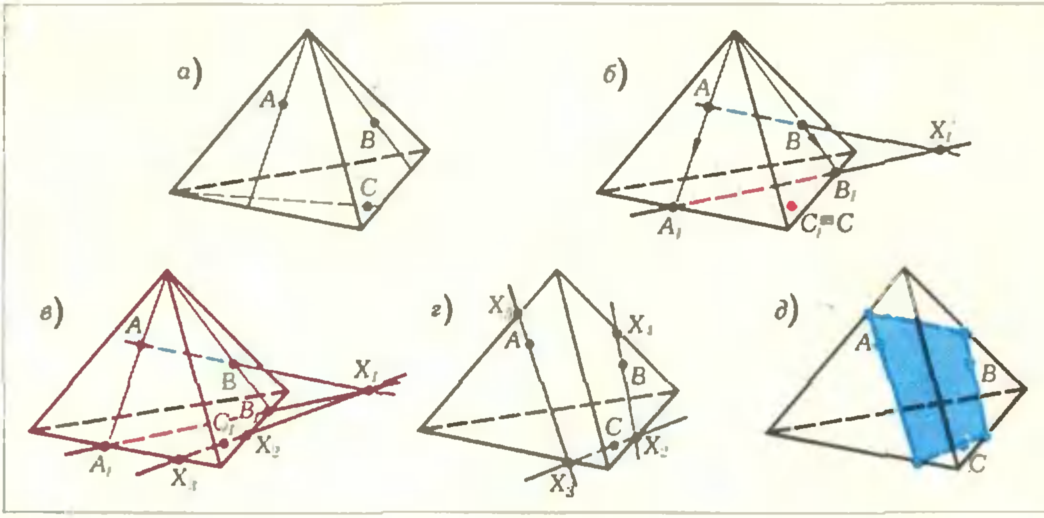


Рис. 9.

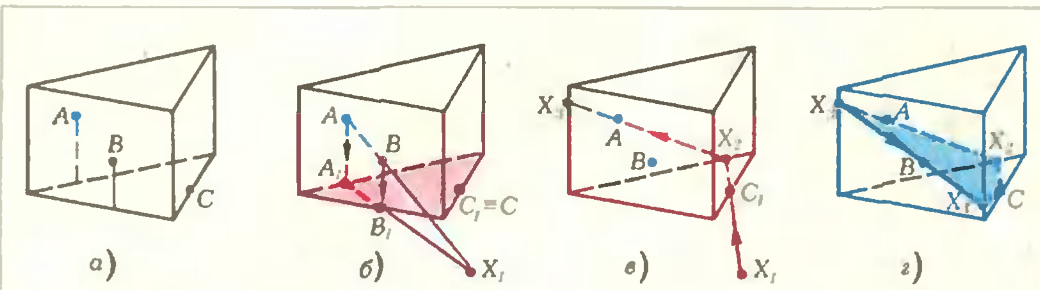


Рис. 10.

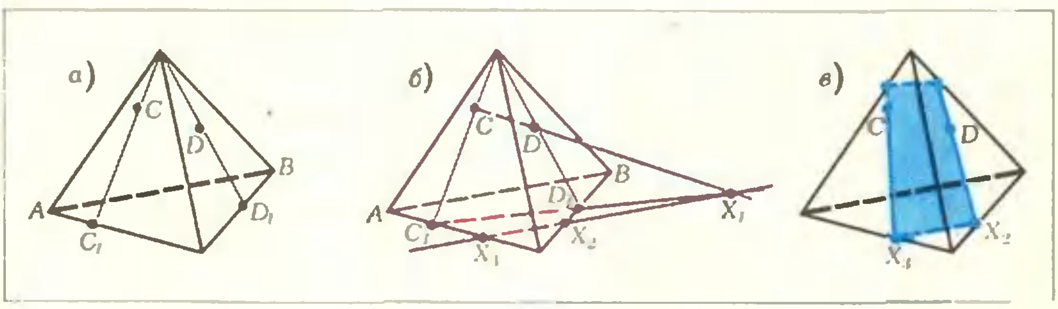


Рис. 11.

а—г. Здесь применяются задача 2 и задача 1.

4. Параллельные прямые и плоскости

Кроме ранее изученных приемов, часто применяются две теоремы о параллельных плоскостях: (I) *сечение двух параллельных плоскостей третьей плоскостью есть пара параллельных прямых*; (II) *пересечение двух плоскостей, параллельных прямой l, есть прямая, параллельная l.*

8. *Построение сечения треугольной пирамиды плоскостью, проходящей через заданные точки C, D, параллельно ребру AB* приводится на рисунках 11, *а—в* (IX, 53, 54, 95). Здесь точки X_2, X_3 получены как пересечение прямой, проходящей через X_1 параллельно AB, с соответствующими гранями (см. теорему II). Рекомендуем читателю решить задачу для случая, когда точки X_2, X_3 лежат не на ребрах, а на их продолжениях.

9. *Сечение тетраэдра плоскостью α, проходящей через точку M на высоте AA_1, параллельно грани ACD*, показано на рисунках 12, *а—г* (IX, 93, 94, 146; X, 312). Здесь дважды применяется теорема I: $\alpha \parallel (ACD) \Rightarrow$

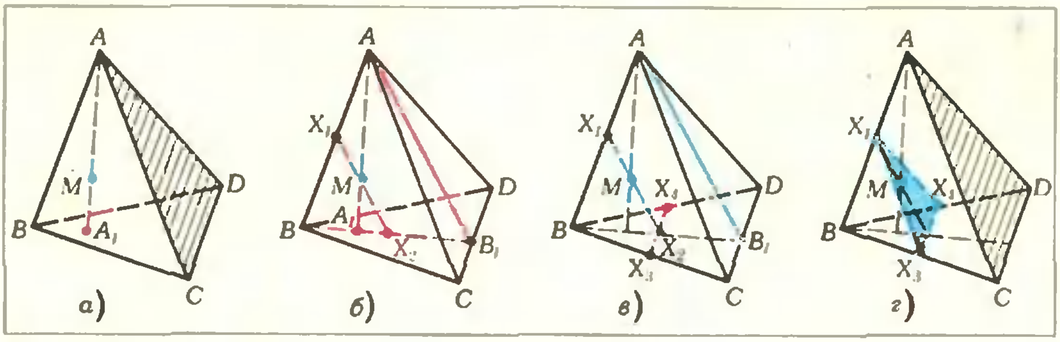


Рис. 12.

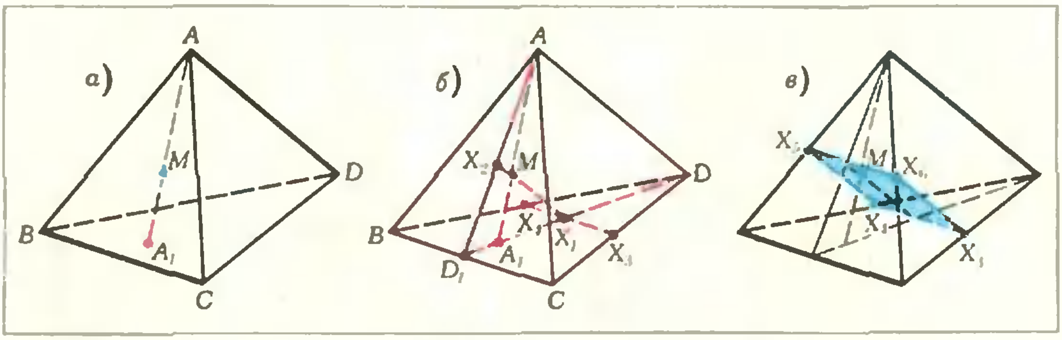


Рис. 13.

$\Rightarrow (X_1X_2) \parallel (AB_1)$ и $\alpha \parallel (ACD) \Rightarrow$ $\Rightarrow (X_3X_4) \parallel (CD)$.

10. *Сечение тетраэдра $ABCD$ плоскостью α, проходящей через точку M параллельно скрещивающимся ребрам AD и BC* (IX; 132, 160), показано на рисунке 13, *а—в*. Здесь дважды применяется теорема II: $\alpha \parallel (AD)$ и $(AA_1D) \parallel AD \Rightarrow (MX_1) \parallel (AD)$, а затем $\alpha \parallel (BC)$ и $(BCD) \parallel (BC) \Rightarrow (X_3X_4) \parallel \parallel (BC)$.

5. Более трудные задачи

11. Докажите, что данный отрезок, не параллельный данной плоскости, можно параллельно спроектировать на отрезок любой длины на данной плоскости.

12. На какой по величине угол на данной плоскости можно параллельно спроектировать данный угол?

13. Докажите, что если для трех не лежащих на одной прямой точек плоской фигуры известны их изображения, то изображения всех точек этой фигуры вполне определены.

14. Докажите, что изображением данного треугольника может служить любой треугольник *).

15. Докажите, что изображением четырехугольника может служить любой четырехугольник, у которого диагонали делятся точкой пересечения в тех же отношениях, как и у исходного.

16. Докажите, что изображением тетраэдра может служить любой четырехугольник с проведенными диагоналями.

17. Меньший куб поставлен на больший куб так, что они имеют общую вершину и их грани параллельны. Построить сечение полученной фигуры плоскостью, заданной тремя точками, из которых

— все три лежат на трех скрещивающихся ребрах меньшего куба;

— все три лежат внутри трех различных граней большего куба;

— одна точка лежит на верхнем основании маленького куба, а две другие на различных ребрах большего куба.

---

*) Напомним, что размеры изображения роли не играют (см. п. 1), поэтому «любой треугольник» означает «любой треугольник с точностью до подобия».

Квант для младших школьников

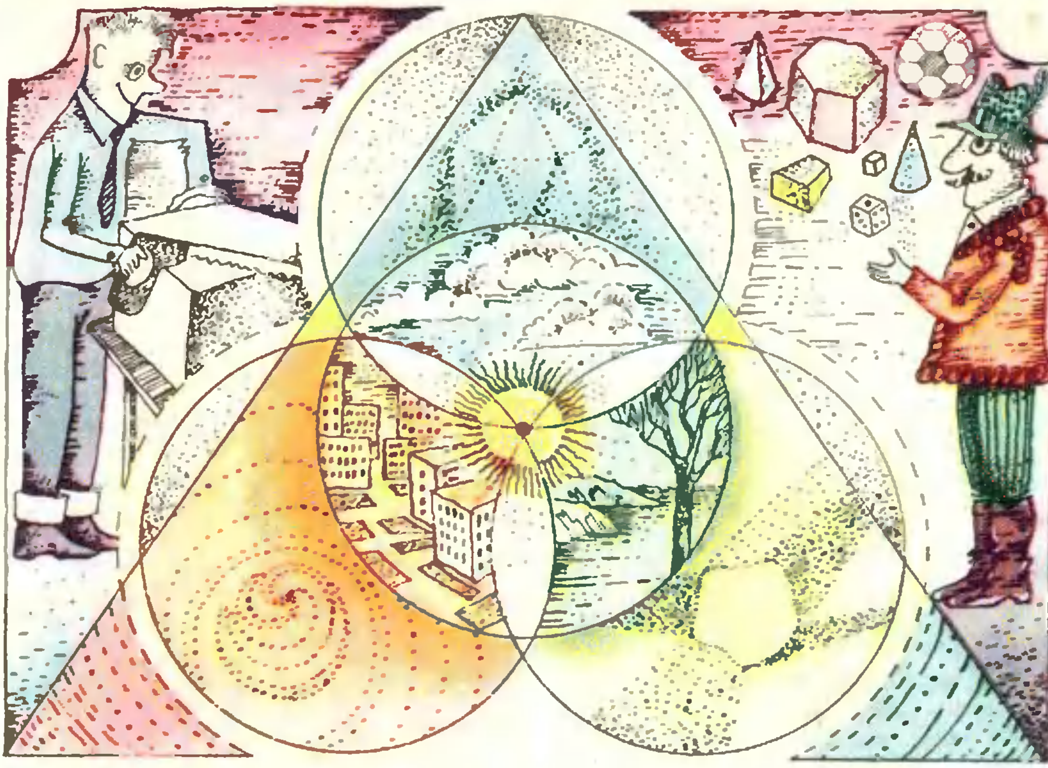
Задачи

1. Расставьте числа 1, 2, ..., 9 в кружочки (см. рисунок) так, чтобы сумма чисел по внутреннему треугольнику равнялась квадрату одного из этих чисел, сумма чисел по окружности — кубу того же числа, а сумма чисел по внешнему треугольнику — сумме квадрата и куба этого числа.

2. Был очень жаркий день, и четыре супружеские пары выпили 49 бутылок *coca-cola*. Анна выпила 2 бутылки, Бетти — 3, Сессиль — 4, Доротти — 5. Мистер Адамс выпил столько же, сколько и его жена, мистер Браун — вдвое, Вильсон — втрое, Грин — вчетверо больше своих жен. Назовите фамилию каждой из четырех дам.

3. В одном племени приняты женские имена, составленные лишь из двух букв — A и B. Сочетания AAA и BB сами по себе что-то означают, но из состава более длинных слов их можно без ущерба вычеркивать (или вписывать). Сочетание AAB в последнее время заменили на более культурное сочетание BA, так что теперь они равнозначны. Можно ли верить вождю племени, который говорит, что у него шесть дочерей и всех их зовут по-разному?

4. Решите уравнение, изображенное на рисунке (букве A соответствует одна цифра, букве H — другая).



А. Савин

Кое-что о выпуклости

Изучая геометрию в школе, вы встречаетесь с разными плоскими и пространственными фигурами. Так, вы уже знаете, что такое треугольник, квадрат, окружность, куб, пирамида, шар, конус, цилиндр. Конечно, этот перечень далеко не исчерпывает всего разнообразия форм, существующих в природе. Огромное количество замысловатых и причудливых форм способно создать и человеческое воображение. Естественно, что лишь немногие из этих форм имеют названия. Да и нужно ли все их назвать?

Когда садовод сокрушается: «Проклятые птицы склевали у меня все вишни!» — ему безразлично, какие именно птицы это сделали — воробьи, дрозды или попугаи. Он говорит о существах, которые летают, садятся на ветки деревьев и не прочь полакомиться сочными вишнями. Знаете ли вы, что существует 8616 различных видов птиц? Можно ли запомнить все их названия? Конечно, нет. Зоологи разделили всех птиц на 40 отрядов: голуби, чайки, воробьиные и т. д., объединив в один отряд птиц, обладающих похожими свойствами. И если вы будете знать эти сорок отрядов, а также два-три десятка названий птиц, обитающих в вашей местности, то знакомство с птицами можно уже считать состоявшимся.

Так и в геометрии: вы знакомитесь с наиболее часто встречающимися фигурами. А можно ли выделить какие-нибудь интересные совокупности — «отряды» фигур? Да, и это одна из целей геометрии. Свойство, которое объединяет фигуры в тот «отряд», о котором мы хотим рассказать, называется *выпуклостью*.

Слово *выпуклый* не является для вас новым. Однако попробуйте дать этому понятию четкое определение и вы увидите, что это сделать не так уж просто. Посмотрим, как это понятие определяется в «Словаре русского языка» С. И. Ожегова. Читаем: «*Выпуклый — имеющий дугообразную поверхность, обращенную наружу*». А что значит дугообразную? Читаем: «*Дугообразный — имеющий форму дуги*». Что же такое дуга? — «*Дуга — часть окружности, круга, или другой кривой линии*». Тут уже наше терпение лопается: во-первых, кривые линии могут быть самыми разнообразными, а во-вторых, круг — не линия. Исходя из этого определения выпуклости, можно ли что-нибудь утверждать о выпуклости (или невыпуклости), например, куба? По-моему, нельзя. Так что такое «определение» никак не может устроить математика.

В математике понятие выпуклый имеет четко определенный смысл. *Множество точек называется выпуклым, если вместе с любыми двумя его точками A, B этому множеству принадлежит и весь отрезок* $[AB]$.

Теперь довольно очевидно, что куб — выпуклое тело. А вот фигура на рисунке 1 не выпукла. Нетрудно понять, что любой треугольник является выпуклой фигурой. А четырехугольники могут быть как выпуклыми, так и невыпуклыми (рис. 2).

Ну, а можно ли про выпуклые множества что-нибудь д о к а з а т ь? Можно. Например, докажите (это совсем просто), что пересечение двух или нескольких выпуклых множеств снова является выпуклым множеством (пустое множество также будем считать выпуклым). Более трудно доказать такое утверждение: *через любую точку границы выпуклой фигуры на плоскости можно провести прямую так, чтобы вся фигура лежала по одну сторону от этой прямой*. Такая прямая изображена на рисунке 3: она называется *опорной прямой*. Если граничная точка является «угловой», как на рисунке 4, через нее можно провести несколько опорных прямых. Докажите самостоятельно, что если некоторая плоская фигура имеет опорную прямую в каждой граничной точке, то эта фигура является выпуклой. Таким образом, сформулированное утверждение можно принять за определение выпуклой фигуры.

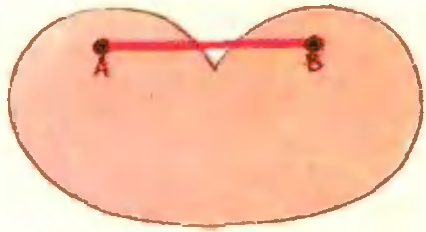


Рис. 1.

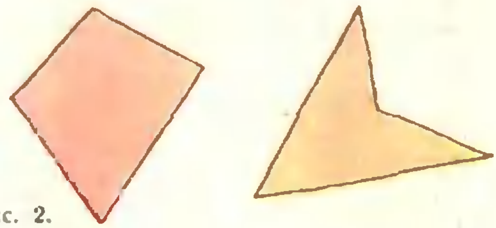


Рис. 2.

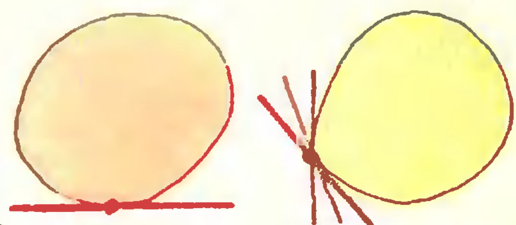


Рис. 3-4.

Рис. 5.

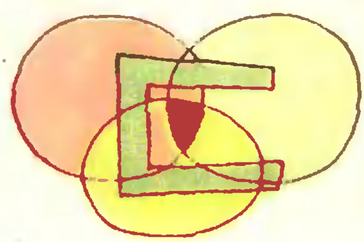
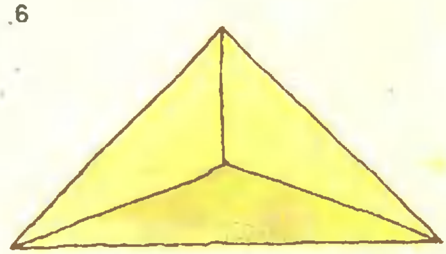


Рис. 6



Думаю, что наличие опорных прямых у плоских выпуклых фигур (аналогично — опорных плоскостей у выпуклых тел), хотя и является очень важным свойством, вряд ли кого удивит: оно довольно очевидно. Следующий факт гораздо более удивителен.

Теорема. *Если на плоскости задано несколько выпуклых фигур, каждые три из которых имеют общую точку, то найдется точка, принадлежащая одновременно всем этим фигурам.*

Требование выпуклости фигур существенно. Действительно, взгляните на рисунок 5: из четырех фигур, изображенных на ней, невыпукла лишь одна; однако, хотя у любых трех фигур есть общая точка, точки, принадлежащей одновременно всем четырем фигурам, нет.

А если на плоскости задано несколько выпуклых фигур, таких что любые две из них имеют общую точку? Обязательно ли найдется точка, общая для всех этих фигур? Покажите самостоятельно, что такой точки может и не быть.

Вы обратили внимание, что мы все время подчеркивали то, что рассматриваемые фигуры — плоские? И это неспроста, потому что существуют четыре выпуклых тела в пространстве, каждые три из которых имеют общую точку, но нет точки, общей всем четырем телам, например, четыре грани треугольной пирамиды, изображенной на рисунке 6. Значит, в пространстве подобная теорема уже не имеет места? Оказывается, чтобы она осталась верной и в пространстве, ее достаточно лишь немного «подправить». А именно:

Теорема′. *Если в пространстве задано несколько выпуклых тел, каждые четыре из которых имеют общую точку, то найдется точка, принадлежащая одновременно всем этим телам.*

Теорема, о которой мы только что рассказали, была открыта не так давно — в начале 20-х годов нашего столетия австрийским математиком Э. Хелли и носит его имя (Хелли сформулировал ее для выпуклых тел, расположенных в n-мерном пространстве). Теорему Хелли можно рассмотреть и для выпуклых множеств, лежащих на прямой (на прямой выпуклыми множествами являются отдельные отрезки, лучи, а также вся прямая и пустое множество). На прямой теорема Хелли звучит так:

Теорема″. *Если на прямой задано несколько выпуклых множеств, каждые два из которых имеют общую точку, то найдется точка, принадлежащая одновременно всем этим множествам.*

Попробуйте доказать эту теорему самостоятельно.

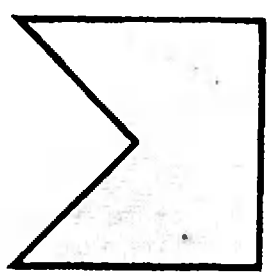
Если вас заинтересовали выпуклые фигуры, прочтите книгу И. М. Яглома и В. Г. Болтянского, которая так и называется: «Выпуклые фигуры».

Задачи наших читателей

1. Батарейка и лампочка карманного фонаря вместе с соединительными проводами образуют цепь. Длина проводов в цепи (от «+» до «—» батареи) $l = 10$ м. Провод медный, его поперечное сечение $S = 1$ мм². В цепи идет ток $I = 0{,}15$ А, на который рассчитана лампочка. За какое время под действием электрического поля электрон доберется от «—» до «+» батареи? (Считать, что число свободных электронов в медном проводе равно числу атомов меди.)

А. Дозоров
(г. Ярославль)

2. Лист бумаги, имеющий форму флажка, разрежьте на четыре части так, чтобы из них можно было склеить выкройку куба.



Я. Темралиев
(Астраханская обл.)

Н. Габович

Векторы помогают на экзамене

В этой статье приведены четыре важных векторных соотношения и показано на примере материалов вступительных экзаменов 1977—1978 гг., как их применять при решении конкурсных задач.

I основное соотношение. *В треугольнике ABC на стороне AC взята точка D так, что $|AD|:|DC| = m:n$. Тогда*

$$\overrightarrow{BD} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{BA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{BC}\ ^{*)}. \qquad (1)$$

Доказательство. Имеем (рис. 1)

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA},$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{AC} = \frac{m}{m+n}\overrightarrow{BC} - \frac{m}{m+n}\overrightarrow{BA},$$

$$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{BC} - \frac{m}{m+n}\overrightarrow{BA} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{BA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{BC}.$$

Задача 1 (МГУ, эконом. фак., 1978). *В треугольнике KLM на стороне KL взята точка A так, что $|KA|:|AL| = 1:3$; на стороне LM взята точка B так, что $|LB|:|BM| = 4:1$. Пусть C — точка пересечения прямых KB и MA. Известно, что площадь треугольника KLC равна 2. Найти площадь треугольника KLM.*

*) В несколько ином виде эта формула рассматривалась в статье С. Овчинникова («Квант», 1978, № 3, с. 48). См. также статью В. Болтянского в «Кванте» 1978, № 10, с. 14.

Решение. Положим $S_{\Delta KLB} = S$. Тогда (рис. 2), очевидно, $S_{\Delta KLM} = \frac{4}{5}S$. Введем векторы $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{KM}$. На основании (1) имеем

$$\overrightarrow{KB} = \frac{1}{5}\overrightarrow{KL} + \frac{4}{5}\overrightarrow{KM}.$$

Пусть $\overrightarrow{KC} = x\overrightarrow{KB}$, где $0 < x < 1$. Тогда

$$\overrightarrow{KC} = \frac{x}{5}\overrightarrow{KL} + \frac{4x}{5}\overrightarrow{KM}. \qquad (2)$$

Пусть $|AC|:|CM| = m:n$. Тогда из треугольника AKM по той же формуле (1) имеем

$$\overrightarrow{KC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{KA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{KM} = \frac{n}{m+n}\cdot\frac{1}{4}\overrightarrow{KL} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{KM}. \qquad (3)$$

В силу единственности разложения вектора по двум неколлинеарным векторам из (2) и (3) получаем систему

$$\begin{cases} \dfrac{x}{5} = \dfrac{n}{4(m+n)} \\ \dfrac{4x}{5} = \dfrac{m}{m+n}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{4x}{5} = \dfrac{n}{m+n} \\ \dfrac{4x}{5} = \dfrac{m}{m+n}. \end{cases}$$

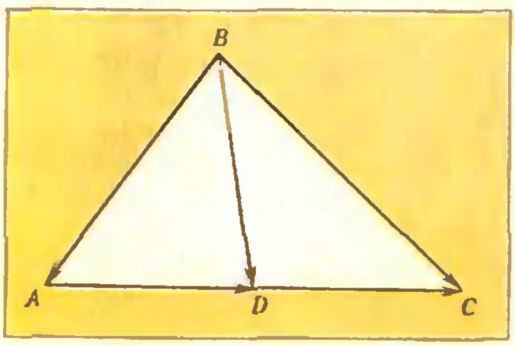


Рис. 1.

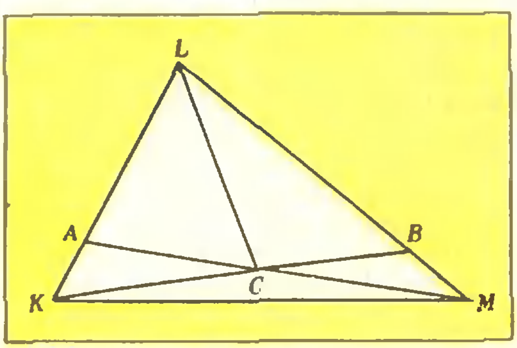


Рис. 2.

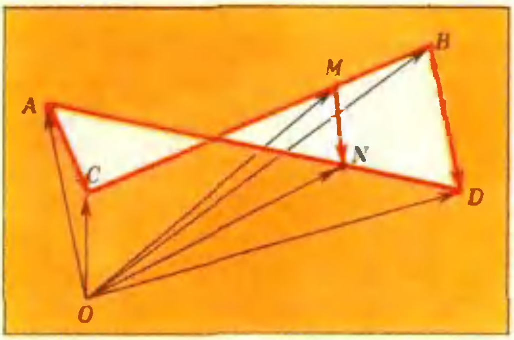


Рис. 3.

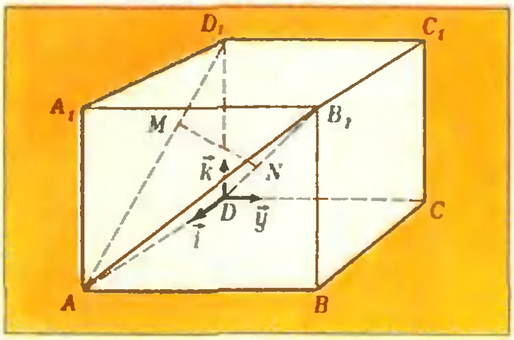


Рис. 4.

Сложив по частям уравнения последней системы, получаем

$$\frac{8x}{5}=1 \text{ или } x=\frac{5}{8}.$$

Так как треугольники KLB и KLC имеют общую высоту, то

$$S_{\Delta KLC}=\frac{5}{8}S_{\Delta KLB}=\frac{5}{8}\cdot\frac{4}{5}S=\frac{1}{2}S.$$

Но, по условию, $S_{\Delta KLC}=2$, следовательно $S=S_{\Delta KLM}=4$.

II основное соотношение. *Если точки M и N делят отрезки AB и CD соответственно в равных отношениях, т. е.*

$$|AM|:|MB|=|CN|:|ND|=m:n,$$

то выполняется равенство

$$\overrightarrow{MN}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{BD}. \qquad (4)$$

(Заметим, что отрезки AB и CD произвольны; например, они могут лежать на скрещивающихся прямых.)

Доказательство. Пусть O — точка, не принадлежащая ни отрезку AB, ни отрезку CD (рис. 3). Соединим точку O с точками A, M, B, C, N и D.

Рассмотрим векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{OD}$.

Имеем по формуле (1)

$$\overrightarrow{OM}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB},$$

$$\overrightarrow{ON}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OC}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OD},$$

откуда

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\frac{n}{m+n}(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA})+$$

$$+\frac{m}{m+n}(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB})=$$

$$=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{BD}.$$

Задача 2 (МФТИ, 1977). *Сторона основания $ABCD$ правильной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ имеет длину $2a$, боковое ребро — длину a. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали AD_1 грани и диагонали DB_1 призмы, параллельные плоскости AA_1B_1B.*

1) *Один из этих отрезков проведен через точку M диагонали AD_1 такую, что $|AM|:|AD_1|=2:3$. Найти его длину.*

2) *Найти наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.*

Решение (рис. 4). Рассмотрим плоскость, проходящую через M параллельно плоскостям граней ABB_1A_1, DCC_1D_1. Первая плоскость пересекает, очевидно, отрезок B_1D в точке N и делит отрезки AD_1 и B_1D, соединяющие вторую и третью плоскости в одинаковом отношении. (Докажите это самостоятельно.)

Значит, $|B_1N|:|ND|=|AM|:|MD_1|=2:1$. Применяя II основное соотношение (4), получим

$$\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}\overrightarrow{D_1D}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB_1}.$$

Введем прямоугольный базис $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, как показано на рисунке 4. Тогда

$$\overrightarrow{D_1D}=-a\vec{k},$$

$$\overrightarrow{AB_1}=2a\vec{j}+a\vec{k}.$$

Таким образом,

$$\overrightarrow{MN}=\frac{2}{3}(-a\vec{k})+\frac{1}{3}(2a\vec{j}+a\vec{k})=$$

$$=\frac{2}{3}a\vec{j}-\frac{1}{3}a\vec{k},$$

$$\overrightarrow{MN}^2=\frac{4}{9}a^2+\frac{a^2}{9}=\frac{5a^2}{9},$$

откуда

$$|MN|=\frac{a\sqrt{5}}{3}.$$

Ответим теперь на второй вопрос задачи. Пусть $|D_1M|:|MA|=p$.

Тогда

$$\overrightarrow{MN}=\frac{1}{p+1}\overrightarrow{D_1D}+\frac{p}{p+1}\overrightarrow{AB_1}=$$

$$=-\frac{a}{p+1}\vec{k}+\frac{2ap}{p+1}\vec{j}+\frac{ap}{p+1}\vec{k}=$$

$$=\frac{2ap}{p+1}\vec{j}+\frac{a(p-1)}{p+1}\vec{k},$$

$$\overrightarrow{MN}^2=\frac{4a^2p^2}{(p+1)^2}+\frac{a^2(p-1)^2}{(p+1)^2}=$$

$$=\frac{a^2(5p^2-2p+1)}{(p+1)^2}.$$

Очевидно, $|MN|$ будет иметь наименьшее значение при том значении p, при котором его достигает функция

$$y=\frac{5p^2-2p+1}{(p+1)^2}.$$

Читатель легко проверит (пользуясь производной), что это будет при $p=\frac{1}{3}$. Подставляя это значение в последнее выражение для $\overrightarrow{MN}^2$ и извлекая корень, находим искомое минимальное расстояние: $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

III основное соотношение. *Дан тетраэдр $ABCD$ и в плоскости его грани ABC точка M. Доказать, что для разложения*

$$\overrightarrow{DM}=\alpha\overrightarrow{DA}+\beta\overrightarrow{DB}+\gamma\overrightarrow{DC}$$

выполняется равенство

$$\alpha+\beta+\gamma=1\text{*)}. \qquad (5)$$

Решение. Допустим, что точка M лежит внутри треугольника ABC (рис. 5). Проведем через точки A и M прямую, которая пересекает сторону BC в точке E. Пусть точка E делит сторону BC в отношении

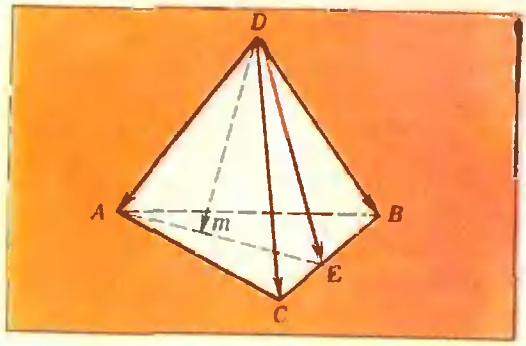


Рис. 5.

$m:n$, т. е. $|BE|:|EC|=m:n$. Тогда по формуле (1)

$$\overrightarrow{DE}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{DC}+\frac{n}{m+n}\overrightarrow{DB}.$$

Пусть, далее, точка M делит отрезок AE в отношении $p:q$, т. е. $|AM|:|ME|=p:q$. Тогда

$$\overrightarrow{DM}=\frac{p}{p+q}\overrightarrow{DE}+\frac{q}{p+q}\overrightarrow{DA}=$$

$$=\frac{p}{p+q}\left(\frac{m}{m+n}\overrightarrow{DC}+\frac{n}{m+n}\overrightarrow{DB}\right)+$$

$$+\frac{q}{p+q}\overrightarrow{DA}=\frac{q}{p+q}\overrightarrow{DA}+\frac{p}{p+q}\times$$

$$\times\frac{n}{m+n}\overrightarrow{DB}+\frac{p}{p+q}\frac{m}{m+n}\overrightarrow{DC}.$$

Итак, вектор $\overrightarrow{DM}$ разложен по векторам $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{DB}$ и $\overrightarrow{DC}$. Непосредственный подсчет суммы коэффициентов в этом разложении дает

$$\frac{q}{p+q}+\frac{p}{p+q}\frac{n}{m+n}+$$

$$+\frac{p}{p+q}\frac{m}{m+n}=\frac{q}{p+q}+\frac{p}{p+q}=1,$$

что и требовалось. Остальные случаи (точка M лежит вне треугольника ABC или на одной из его сторон) аналогичны и мы их опускаем.

Задача 3 (МФТИ, 1978). *Длина ребра правильного тетраэдра $ABCD$ равна a. Точка E — середина ребра CD, точка F — середина высоты BL грани ABD. Отрезок MN с концами прямых AD и BC пересекают прямую EF и перпендикулярен ей. Найдем длину этого отрезка.*

Решение. Введем векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$; $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$; $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ (рис. 6). Заметим, что $|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=a$ и

*) В несколько ином виде это соотношение имеется в цитированной статье С. Овчинникова.

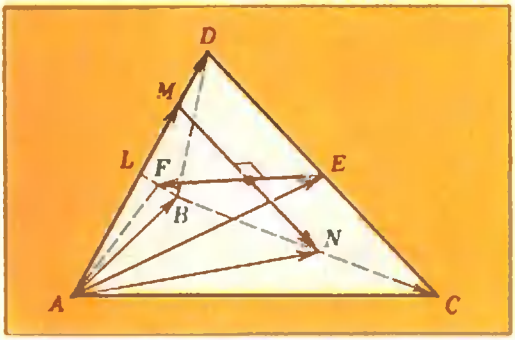


Рис. 6.

$\widehat{(\vec b, \vec c)} = \widehat{(\vec c, \vec d)} = \widehat{(\vec d, \vec b)} = \frac{\pi}{3}$. Так как E — середина ребра DC, то

$$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\left(\vec c + \vec d\right). \qquad (6)$$

Аналогично,

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\left(\vec b + \overrightarrow{AL}\right),$$

но $\overrightarrow{AL} = \frac{1}{2}\vec d$, поэтому

$$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\vec b + \frac{1}{4}\vec d. \qquad (7)$$

Далее,

$$\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\vec b + \frac{1}{4}\vec d - \frac{1}{2}\vec c - \frac{1}{2}\vec d = \frac{1}{2}\vec b - \frac{1}{2}\vec c - \frac{1}{4}\vec d. \qquad (8)$$

Пусть $\overrightarrow{AM} = m\vec d$, $\overrightarrow{BN} = n\overrightarrow{BC}$, (9)
где $0 < m < 1$ и $0 < n < 1$. Из последнего равенства сразу следует

$$|BN| : |NC| = n : (1-n).$$

Тогда, на основании (1),

$$\overrightarrow{AN} = n\vec c + (1-n)\vec b. \qquad (10)$$

Далее, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM}$, откуда

$$\overrightarrow{MN} = n\vec c + (1-n)\vec b - m\vec d. \qquad (11)$$

Так как, по условию, отрезки EF и MN перпендикулярны, то $\overrightarrow{EF}\cdot\overrightarrow{MN} = 0$, или

$$\left(\frac{1}{2}\vec b - \frac{1}{2}\vec c - \frac{1}{4}\vec d\right)\times \left((1-n)\vec b + n\vec c - m\vec d\right) = 0.$$

Учитывая сделанное выше замечание относительно модулей векторов $\vec b$, $\vec c$ и $\vec d$ и углов между ними, раскроем скобки в левой части этого равенства. Получим

$$2m - 4n + 1 = 0. \qquad (12)$$

В силу III основного соотношения

$$\overrightarrow{AN} = \alpha\overrightarrow{AF} + \beta\overrightarrow{AE} + \gamma\overrightarrow{AM}, \qquad (13)$$

причем $\alpha + \beta + \gamma = 1$.

Подставим в (13) вместо $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AE}$ и $\overrightarrow{AM}$ их выражения через $\vec b$, $\vec c$ и $\vec d$, т. е. (7), (6), (9):

$$\overrightarrow{AN} = \frac{\alpha}{2}\left(\vec b + \frac{1}{2}\vec d\right) + \frac{\beta}{2}\left(\vec c + \vec d\right) + \gamma m\vec d = \frac{\alpha}{2}\vec b + \frac{\beta}{2}\vec c + \left(\frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} + \gamma m\right)\vec d.$$

В силу единственности разложения вектора по трем данным некомпланарным векторам $(\vec b, \vec c, \vec d)$ отсюда и из (10) получаем систему

$$\frac{\alpha}{2} = 1-n;\ \frac{\beta}{2} = n;\ \frac{\alpha}{4} + \frac{\beta}{2} + \gamma m = 0,$$

решая которую получаем

$$\alpha = 2-2n,\ \beta = 2n,\ \gamma = -\frac{1+n}{2m}.$$

Пользуясь соотношением $\alpha + \beta + \gamma = 1$, получим отсюда

$$2m - n - 1 = 0.$$

Решая это уравнение совместно с (12), найдем $n = \frac{2}{3}$ и $m = \frac{5}{6}$. Осталось подставить эти значения в выражение (10) для $\overrightarrow{MN}$; получим

$$\overrightarrow{MN} = \frac{2}{3}\vec c + \frac{1}{3}\vec b - \frac{5}{6}\vec d;$$

после несложного вычисления найдем $|MN| = \frac{a\sqrt{23}}{6}$.

IV основное соотношение. *Если M — точка пересечения медиан треугольника ABC и O — произвольная точка пространства, то выполняется равенство:*

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right).$$

Это соотношение сформулировано и доказано в учебнике «Геометрия 9» (§ 22, задача 2).

Задача 4 (Киевск. политехн. ин-т, 1978). *Около равностороннего треугольника, сторона которого равна a, описана окружность. Доказать,*

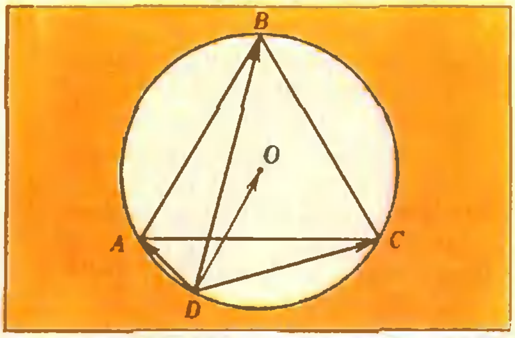


Рис. 7.

что сумма квадратов расстояний от произвольной точки окружности до вершин этого треугольника равна $2a^2$.

Решение. Пусть D — произвольная точка окружности (рис. 7). Положим $|DA| = x$; $|DB| = y$; $|DC| = z$.

Тогда по теореме косинусов имеем:
из $\Delta\ ADB$: $a^2 = x^2 + y^2 - xy$,
из $\Delta\ BDC$: $a^2 = y^2 + z^2 - yz$,
из $\Delta\ ADC$: $a^2 = x^2 + z^2 + xz$.

Сложив по частям эти равенства, получаем

$$3a^2 = 2(x^2 + y^2 + z^2) - xy - yz + zx. \quad (14)$$

В силу IV основного соотношения

$$\overrightarrow{DO} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\right),$$

где O — центр окружности.

Возведя обе части этого равенства в квадрат, получаем

$$\left|\overrightarrow{DO}\right|^2 = \frac{1}{9}\left(\overrightarrow{DA}^2 + \overrightarrow{DB}^2 + \overrightarrow{DC}^2 + 2\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC} + 2\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA}\right).$$

Так как $|DO|$ — радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника, сторона которого равна a, то $\left|\overrightarrow{DO}\right|^2 = |DO|^2 = \frac{1}{3}a^2$.

Поэтому

$$\frac{a^2}{3} = \frac{1}{9}(x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz - zx)$$

или

$$3a^2 = x^2 + y^2 + z^2 + xy + yz - zx.$$

Сложив это равенство по частям с (14), получим

$$6a^2 = 3(x^2 + y^2 + z^2),$$

откуда

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2a^2.$$

Читатель «Кванта», готовящийся к экзаменам, может спросить: имеет ли он право пользоваться «основными соотношениями» при решении экзаменационных задач? Разумеется,—да! Однако при этом для соотношений I—III необходимо привести вывод используемого соотношения в экзаменационной работе. (Для соотношения IV, разумеется, достаточно сослаться на учебник.)

Чтобы привыкнуть к самостоятельному применению основных соотношений, рекомендуем решить нижеследующие упражнения. Из них 1—2 решаются с помощью I, 3—4 с помощью II, 5—6 с помощью III.

Упражнения

1 (МФТИ, 1970). В треугольнике ABC биссектриса AI делит сторону BC в отношении $|BD| : |CD| = 2 : 1$. В каком отношении медиана CE делит эту биссектрису?

2 (МГУ, биофак, 1973). Через середину M стороны BC параллелограмма $ABCD$, площадь которого равна 1, и вершину A проведена прямая, пересекающая диагональ BD в точке Q. Найти площадь четырехугольника $QMCD$.

3 (МФТИ, 1977). Все ребра правильной призмы $ABCA_1B_1C_1$ имеют длину a. Рассматриваются отрезки с концами на диагоналях BC_1 и CA_1 боковых граней, параллельные плоскости ABB_1A_1.

1) Один из этих отрезков проведен через точку M диагонали BC_1 такую, что $|BM| : |BC_1| = 1 : 3$. Найти его длину.

2) Найти наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

4 (МФТИ, 1977). Сторона основания $ABCD$ правильной пирамиды $SABCD$ имеет длину a, боковое ребро — длину $2a$. Рассматриваются отрезки с концами на диагонали BD основания и боковом ребре SC, параллельные (SAD).

Найти наименьшую длину всех рассматриваемых отрезков.

5 (МФТИ, 1978). В правильной призме $ABCA_1B_1C_1$ длина стороны основания равна $4a$, длина бокового ребра равна a. Точки D и E — середины ребра A_1B_1 и BC. Отрезок MN с концами на прямых AC и BB_1 пересекает прямую DE и перпендикулярен к ней. Найти длину этого отрезка.

6 (МФТИ, 1978). Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна a. Точки P, K, L — середины ребер AA_1, A_1D_1, B_1C_1 соответственно, точка Q — центр грани CC_1D_1D. Отрезок MN с концами на прямых AD и KL пересекает прямую PQ и перпендикулярен к ней. Найти длину этого отрезка.

Л. Бакинина

КПД тепловых и холодильных машин

Что такое коэффициент полезного действия тепловой и холодильной машин? Может ли он быть больше 100%? Постараемся ответить на эти вопросы.

Для работы любой т е п л о в о й машины необходимы по крайней мере два тепловых резервуара с разными температурами. Получая тепло от более горячего резервуара (нагревателя), рабочее тело машины совершает работу, но при этом часть тепла отдается более холодному резервуару (холодильнику).

Коэффициент полезного действия η *тепловой машины* равен отношению работы A, совершенной машиной, к количеству теплоты $Q_н$, полученному ею от нагревателя:

$$\eta = \frac{A}{Q_н}.$$

Согласно первому закону термодинамики,

$$A = Q - \Delta U = (Q_н - Q_х) - \Delta U.$$

Здесь $Q_х$ — количество теплоты, отданное холодильнику (чаще всего холодильником для тепловых машин служит окружающая среда), а ΔU — изменение внутренней энергии рабочего тела. Поскольку все тепловые машины работают по замкнутому циклу — рабочее тело в конце цикла возвращается в начальное состояние с той же внутренней энергией — изменение внутренней энергии равно нулю: $\Delta U = 0$. Следовательно,

$$\eta = \frac{A}{Q_н} = \frac{Q_н - Q_х}{Q_н} = 1 - \frac{Q_х}{Q_н}.$$

Отсюда сразу видно, что КПД тепловой машины в с е г д а м е н ь ш е 100%. Однако существует максимально возможный коэффициент полезного действия. Для его получения тепловая машина должна работать по так называемому и д е а л ь н о м у циклу — циклу Карно *).

На рисунке 1 изображен цикл Карно для идеального газа (в качестве рабочего тела). Процессы *1—2* и *3—4* — изотермические, а *2—3* и *4—1* — адиабатные. Как известно, КПД цикла Карно определяется только температурами нагревателя и холодильника:

$$\eta_К = \frac{T_н - T_х}{T_н} = 1 - \frac{T_х}{T_н}.$$

Теперь рассмотрим х о л о д и л ь н у ю машину. Она работает по такому принципу: за счет внешней механической работы тепло отнимается от более холодного резервуара и передается более горячему резервуару.

Полезный эффект холодильной машины определяется количеством теплоты $Q_х$, отобранным у охлаждаемого тела, а затраченная энергия — это внешняя работа A, совершенная над рабочим телом. Отношение

$$\varepsilon = \frac{Q_х}{A}$$

обычно называют *холодильным коэффициентом* (чтобы не путать с КПД тепловой машины).

Если холодильная машина работает по так называемому идеальному циклу — обратному циклу Карно (теперь цикл обходится п р о т и в часовой стрелки; см. рис. 1), то

$$\varepsilon = \frac{T_х}{T_н - T_х}.$$

Из этой формулы видно, что ε может быть меньше, больше или равен 100%. Действительно, возможно построить холодильную машину, у которой разность температур нагрева-

*) Подробнее об этом можно прочитать, например, в статье С. Ш а м а ш а и Э. Э в е н ч и к «Цикл Карно» («Квант», 1977, № 1).

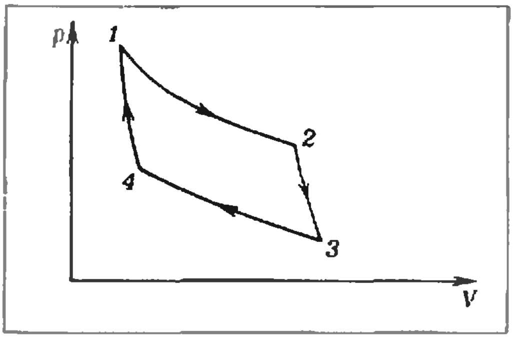


Рис. 1.

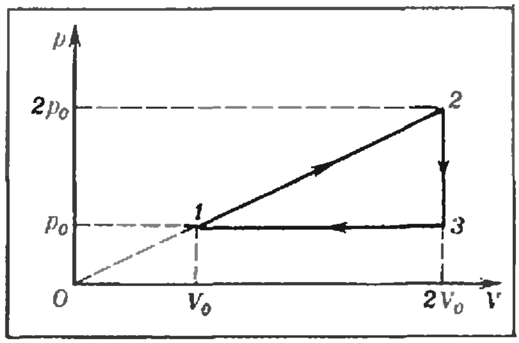


Рис. 2.

теля и холодильника будет больше, меньше или равна температуре холодильника.

Тот факт, что ε может быть больше 100%, иногда вызывает вопрос — не нарушается ли при этом закон сохранения энергии? На самом деле никакого противоречия с законом сохранения энергии нет. Тепло, отобранное у охлаждаемого тела, и энергия, затраченная на совершение работы извне, вовсе не переходят друг в друга, а отдаются нагревателю (обычно у холодильных машин им является окружающая среда).

Разберем несколько конкретных задач.

З а д а ч а 1. *Тепловая машина, рабочим телом которой является 1 моль идеального одноатомного газа, совершает цикл, изображенный на рисунке 2. Найти КПД этой машины.*

Коэффициент полезного действия тепловой машины равен

$$\eta = \frac{A}{Q_н}.$$

Работа A за цикл численно равна площади цикла, изображенного в координатах p, V (см. рис. 2):

$$A = \frac{1}{2} p_0 V_0.$$

Выясним, на каких участках цикла газ получает тепло, а на каких отдает его. Запишем первый закон термодинамики для любого участка:

$$Q_i = \Delta U_i + A_i.$$

Один моль идеального одноатомного газа обладает внутренней энергией $U = \frac{3}{2} RT$, откуда

$$\Delta U_i = \frac{3}{2} R\Delta T_i$$

— изменение внутренней энергии на каждом участке определяется изменением температуры. Работа A_i численно равна площади под соответствующим участком цикла.

С помощью уравнения состояния идеального газа $pV = RT$ найдем температуры газа в точках 1, 2, 3:

$$T_1 = \frac{p_0 V_0}{R}, \quad T_2 = \frac{2p_0 \cdot 2V_0}{R} = 4T_1,$$

$$T_3 = \frac{p_0 \cdot 2V_0}{R} = 2T_1.$$

На участке 1—2 температура газа увеличивается ($\Delta T_{12} > 0$), и газ совершает положительную работу (газ расширяется); следовательно, на этом участке газ получает тепло. На участках 2—3 и 3—1 температура газа убывает, на участке 2—3 работа вообще не совершается, а на участке 3—1 она отрицательна (газ сжимают, совершая работу извне) — значит, на этих участках газ тепла не получает.

Итак, газ получает тепло только на участке 1—2:

$$Q_н = Q_{12} = \Delta U_{12} + A_{12} = \frac{9}{2} p_0 V_0 + \frac{3}{2} p_0 V_0 = 6p_0 V_0.$$

Тогда окончательно

$$\eta = \frac{A}{Q_н} = \frac{1/2 p_0 V_0}{6p_0 V_0} = \frac{1}{12} \approx 8\%.$$

З а д а ч а 2. *Идеальная холодильная машина имеет в качестве холодильника резервуар с водой при 0°С, а в качестве нагревателя — резервуар с кипящей водой. Какую работу надо совершить, чтобы превратить в лед 1 кг воды? Какое количество воды в нагревателе превратится при этом в пар? Удельная теплота плавления льда λ = 340 кДж/кг,*

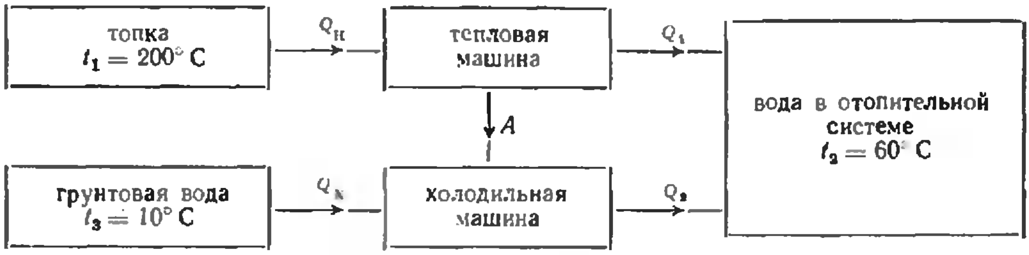


Рис. 3.

удельная теплота парообразования воды $L = 2260$ кДж/кг.

Идеальная холодильная машина работает по обратному циклу Карно, ее холодильный коэффициент

$$\varepsilon = \frac{T_х}{T_н - T_х} = \frac{273\ К}{100\ К} = 2{,}73.$$

При замерзании 1 кг воды выделяется количество теплоты

$$Q_х = \lambda m = 340\ кДж.$$

Совершенная при этом работа

$$A = \frac{Q_х}{\varepsilon} \approx 125\ кДж.$$

Нагреватель получит количество теплоты

$$Q_н = Q_х + A \approx 465\ кДж,$$

следовательно, в пар превратится масса воды

$$m_1 = \frac{Q_н}{L} \approx 0{,}2\ кг.$$

З а д а ч а 3. *В середине прошлого века английский физик Томсон предложил идею так называемого динамического отопления. Топка, в которой сжигается топливо, служит нагревателем тепловой машины, холодильником для этой машины служит вода в отопительной системе. За счет полученной работы приводится в действие холодильная машина. Для холодильной машины вода в отопительной системе служит нагревателем, а холодным резервуаром, от которого отбирается тепло, служит грунтовая вода. Считая, что обе машины работают по идеальным циклам, и пренебрегая потерями, определите, сколько тепла получит вода в отопительной системе при сжигании 1 кг топлива. Удельная теплота сгорания топлива q, температура в топке тепловой машины $t_1 = 200°$ С, температура воды в отопительной системе $t_2 = 60°$ С, температура грунтовой воды $t_3 = 10°$ С.*

Для того чтобы яснее представить себе идею Томсона, нарисуем схему динамического отопления (рис. 3). Теперь проведем необходимые расчеты.

Машины — идеальные, то есть работают они по циклу Карно. Следовательно, КПД тепловой машины

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{140\ К}{473\ К} \approx 0{,}3,$$

холодильный коэффициент

$$\varepsilon = \frac{T_3}{T_2 - T_3} = \frac{283\ К}{50\ К} \approx 5{,}7.$$

При сжигании 1 кг топлива в топке выделяется энергия $Q_н = q$. Работа, которую совершает при этом тепловая машина, равна

$$A = \eta Q_н = \eta q,$$

а количество теплоты, переданное воде в отопительной системе, равно

$$Q_1 = q - A = (1 - \eta)\, q.$$

Холодильная машина отбирает у грунтовой воды количество теплоты

$$Q_х = \varepsilon A = \varepsilon \eta q.$$

Вода в отопительной системе получает при этом количество теплоты

$$Q_2 = Q_х + A = \eta\,(1 + \varepsilon)\, q.$$

В общей сложности вода в отопительной системе получает количество теплоты

$$Q = Q_1 + Q_2 = (1 + \varepsilon\eta)\, q \approx 2{,}7q.$$

Таким образом, система динамического отопления позволяет в принципе (если пренебречь потерями) передавать воде в отопительной системе количество теплоты бо́льшее, чем выделяется в топке при сгорании топлива! Не нарушается ли здесь первое начало термодинамики? Никоим образом: «лишнее» тепло отбирается у грунтовой воды. Действительно, у грунтовой воды отбирается тепло

$$Q_х = \varepsilon A = \varepsilon \eta q,$$

— как раз разница между Q и q.

(Окончание см. на с. 54)

Московский инженерно-физический институт

Ниже приводятся варианты письменного вступительного экзамена по математике и задачи устного экзамена по физике 1978 года.

Математика

Вариант 1

1. Морская вода содержит 5% соли по массе. Сколько пресной воды нужно добавить к 30 кг морской воды, чтобы концентрация соли (по массе) составляла p%?

2. Основанием пирамиды $SABCD$ является прямоугольник $ABCD$, $(AB) \parallel (CD)$, $(BC) \parallel (AD)$, $|AB|=3$, $|BC|=4$. Все боковые ребра пирамиды составляют с плоскостью основания равные углы. Определите величину угла между прямыми (BS) и (CS), если радиус сферы, описанной около пирамиды, равен 6,5.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной прямой $y=-8x-46$ и параболой $y=4x^2+ax+2$, если известно, что касательная к параболе в точке $x=-5$ составляет с осью Ox угол $\pi-\operatorname{arctg} 20$.

4. Решите уравнение

$$\cos 5x \operatorname{tg} 6|x|+\sin 5x=0.$$

Вариант 2

1. Найдите сумму всех трехзначных натуральных чисел, которые при делении на 3 дают остаток, равный 2.

2. В основании пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC $|AB|=|AC|=a$, $\widehat{ABC}=\varphi$. Прямая (AS) составляет с плоскостью основания пирамиды угол величиной α, плоскость боковой грани (BSC) составляет с той же плоскостью угол величиной β и $\widehat{SAC}=\widehat{SAB}$. Найдите объем пирамиды $KSLC$, если известно, что точки K и L принадлежат ребрам $[AS]$ и $[BS]$ соответственно, а площадь треугольника KSL относится к площади треугольника ABS как $4:25$.

3. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{3}}(x+y)+\log_3(x-y)=2, \\ 2^{y^2}=512^{x+1} \end{cases}$$

4. Найдите критические точки функции

$$y=2\sin^2\frac{x}{6}+\sin\frac{x}{3}-\frac{x}{3},$$

координаты которых удовлетворяют неравенству $x^2-10<-19{,}5x$.

Вариант 3

1. При помощи двух труб надо выкачать 1000 л воды. Две трубы неодинакового сечения выкачивают в один час V литров воды. Первая труба выкачала 500 литров воды, и затем всю оставшуюся воду выкачала вторая труба. Вся работа была выполнена в t часов. Сколько литров воды можно выкачать каждой трубой отдельно в один час?

2. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ сторона основания (ABC) равна a, а плоский угол при вершине пирамиды равен α. Найти площадь сечения, проведенного через вершину S параллельно ребру $[AB]$ и составляющего с плоскостью основания (ABC) угол γ.

3. Найдите площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$3y=-x^2+8x-7 \quad \text{и} \quad y+1=\frac{4}{x-3}.$$

4. Решите уравнение

$$\log_{\frac{1}{10}}\sin 2x+\lg\cos x-\lg 7=0.$$

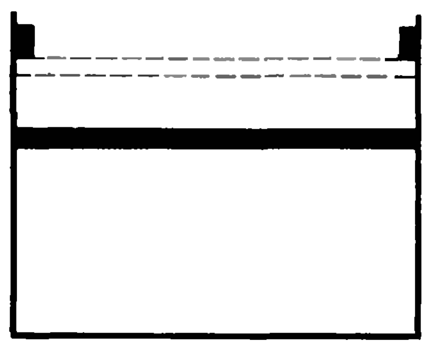


Рис. 1.

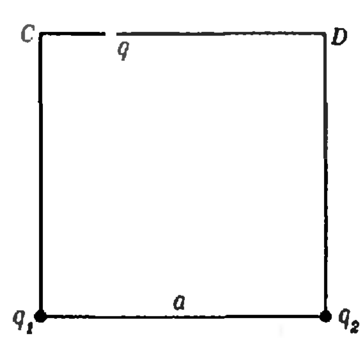


Рис. 2.

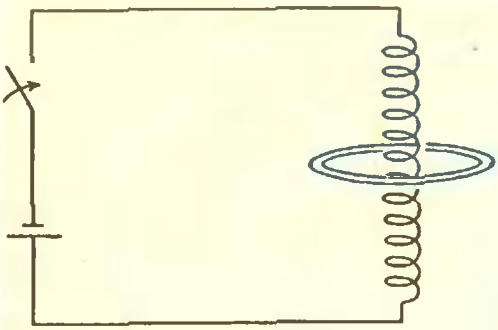


Рис. 3.

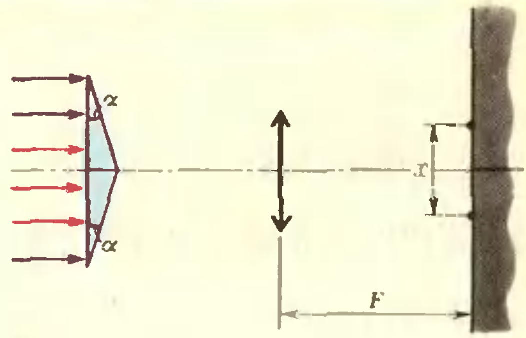


Рис. 4.

Физика

1. Доска массой $M=500$ г плавает на воде. На одном конце доски в точке A сидит лягушка. С какой наименьшей скоростью она должна прыгнуть, чтобы попасть в точку B на доске, отстоящую на $l=25$ см от точки A? Масса лягушки $m=150$ г. Трением между доской и водой пренебречь.

2. В цилиндре с площадью сечения $S=5{,}0$ см² под поршнем массы $M=1{,}0$ кг находится некоторый газ. При увеличении абсолютной температуры газа в $n=1{,}5$ раза поршень поднимается вверх и упирается в уступы (рис. 1). При этом объем газа по сравнению с первоначальным увеличивается в $k=1{,}2$ раза. Определить силу, с которой поршень давит на уступы. Атмосферное давление $p_0=100$ кПа.

3. Неподвижные точечные заряды $q_1=3\cdot10^{-8}$ Кл и $q_2=5\cdot10^{-8}$ Кл расположены в соседних вершинах квадрата со стороной $a=0{,}9$ м (рис. 2). Найти работу, которую совершат электрические силы над зарядом $q=10^{-8}$ Кл при перемещении его из вершины C в вершину D.

4. Длинный соленоид, содержащий $N=200$ витков площадью $S=1{,}6$ см², подключают к батарее с ЭДС $\mathscr{E}=0{,}8$ В (рис. 3). Сопротивление обмотки соленоида и внутреннее сопротивление батареи пренебрежимо малы. На соленоид надето проводящее кольцо сопротивлением $R=0{,}6$ Ом. Найти индукцию магнитного поля в соленоиде и количество теплоты, выделившееся в кольце, к моменту времени $\tau=0{,}06$ с после подключения батареи.

5. Параллельный световой пучок падает нормально на грань стеклянной бипризмы ($n=1{,}5$) с малым преломляющим углом $\alpha=10^{-2}$ рад (рис. 4). За бипризмой расположена тонкая собирающая линза с фокусным расстоянием $F=100$ см. Найти расстояние x между точками схождения лучей в фокальной плоскости линзы. Считать $\operatorname{tg}\alpha\approx\sin\alpha\approx\alpha$.

А. Александров, А. Забоев, Н. Шолохов

КПД тепловых и холодильных машин

(Окончание. Начало см. на с. 50)

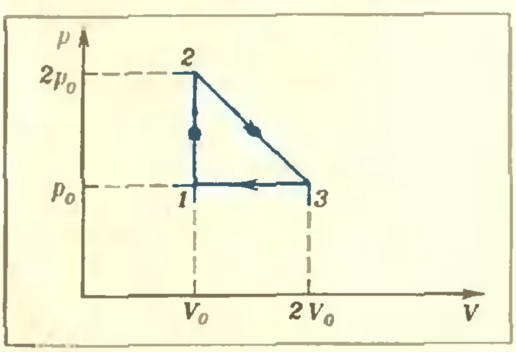


Рис. 4.

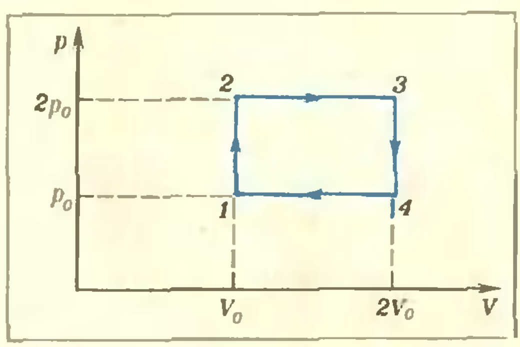


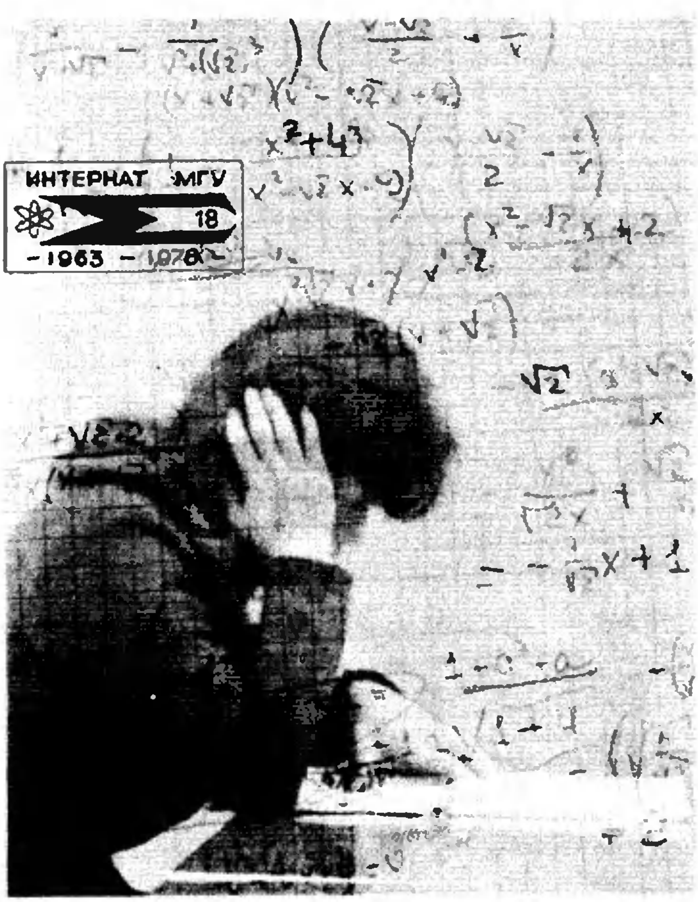
Рис. 5.

Упражнения

1. Тепловая машина, рабочим телом в которой является 1 моль идеального газа, совершает цикл, изображенный на рисунке 3. Найдите КПД этой машины.

2. Решите предыдущую задачу для цикла, изображенного на рисунке 4.

3. Сколько стоит приготовление 1 кг льда в домашнем холодильнике, если считать, что он работает по идеальному циклу? Комнатная температура 23 °С, температура фреона равна —10 °С, 1 кВт·ч электроэнергии стоит 4 коп.



ФМШ при МГУ — 15 лет

В прошлом году исполнилось 15 лет со дня создания первых четырех физико-математических школ-интернатов — при Новосибирском, Московском, Ленинградском и Киевском университетах. Физико-математические школы-интернаты были учреждены в 1963 году. В создании системы преподавания для этих школ приняли участие видные ученые: в Москве — академик А. Н. Колмогоров и академик И. К. Кикоин, в Новосибирске — академик М. А. Лаврентьев, в Киеве — академик В. М. Глушков, в Ленинграде — член-корреспондент АН СССР Д. К. Фадеев. В связи с юбилеем редакция обратилась к председателю Попечительского совета физико-математической школы-интерната при МГУ А. Н. Колмогорову, директору этой школы И. Т. Тропину и заведующему учебной частью по математике В. В. Вавилову с просьбой рассказать о ее работе.

Научно-техническая революция коренным образом изменила роль науки в жизни человеческого общества. Наука превратилась в непосредственную производительную силу. Необычайно быстрое развитие науки требует все новых и новых научных кадров. Поэтому так актуален вопрос о привлечении в науку талантливой молодежи. А она рассеяна по всей нашей необъятной стране. И если в столичных городах заметить ее не так уж трудно, то найти талантливых учащихся, способных к самостоятельным научным исследованиям, в небольших городах, поселках и сельской местности намного труднее.

Созданные 15 лет тому назад физико-математические школы-интернаты при ведущих университетах страны (в Новосибирске, Москве, Ленинграде и Киеве) призваны практически решать эту важнейшую государственную задачу.

Надежда на то, что из них выйдут настоящие исследователи, в широкой мере оправдалась. В частности, из школьников, принятых в Московскую ФМШ в 1963—70 годах, более двухсот человек закончили впоследствие аспирантуру и защитили кандидатские диссертации. Выпускники интерната при МГУ опубликовали сотни научных работ, выступали с обзорными докладами на международных конференциях и конгрессах. Среди выпускников ФМШ есть уже два доктора физико-математических наук. Сходная картина наблюдается и в трех других ФМШ.

Ввиду успеха первых четырех физико-математических школ-интернатов аналогичные школы открыты в некоторых других союзных республиках: Армении, Грузии, Казахстане, Литве, а также в некоторых автономных республиках Российской Федерации.

В московской ФМШ в девятых и десятых классах обучаются 360 школьников. Каждый год мы набираем 150 человек на двухлетнее обучение (в девятый класс) и 60 человек на одногодичное обучение (в десятый класс). Принимаются окончившие, соответственно, восемь или девять классов обычных школ, проживающие в центральной части РСФСР, на Урале, в Поволжье, на Северном Кавказе и в Белоруссии. Отбор будущих школьников производится на основе конкурсных экзаменов*) по математике и

*) Точные сроки и другие подробности о правилах приема можно узнать в областном отделе народного образования или в министерстве просвещения соответствующей республики по месту жительства. В случае необходимости за справками можно обратиться и непосредственно в школу по адресу: 121357, Москва, Кременчугская ул., 29, школа-интернат, приемная комиссия.

физике, которые организует Московский университет совместно с местными органами народного образования. Часть экзаменовавшихся зачисляется сразу в ФМШ, часть (примерно 75%) после экзаменов получает приглашение на летний учебный сбор и зачисляется по итогам этих летних занятий.

Опыт показывает, что 97% наших выпускников поступает в вузы, в том числе около 40% в Московский университет и 20% в Московский физико-технический институт.

Занятия математикой и физикой в Московской ФМШ не ограничиваются изучением программы обычных школ, а сама школа не является курсами подготовки к вступительным экзаменам в вузы. На простых примерах и задачах мы стремимся ввести учащихся в стиль мышления современной науки, дать возможность воспринимать полученные знания по математике и физике не формально, а с пониманием механизма, с помощью которого ведется научное исследование. Этому способствует самостоятельная работа — маленькие научные исследования, проводимые школьниками в рамках математического и физического практикумов, на факультативных спецкурсах и кружках. Большую роль в формировании и развитии устойчивого интереса к научно-исследовательской работе играет в ФМШ научное общество учащихся, различного рода конференции школьников, математические и физические бои, олимпиады. За 15 лет команда ФМШ на Всесоюзной математической олимпиаде завоевала 12 первых, 25 вторых и 23 третьих премий; на Международных математических олимпиадах представители нашей школы получили 10 первых, 6 вторых и 10 третьих премий.

Физику и математику в ФМШ преподают в основном молодые (иногда очень молодые!) ученые, уже ведущие собственную научную работу. В качестве «младших преподавате-

лей» со школьниками занимается группа лучших студентов и аспирантов МГУ.

Учиться в ФМШ не легко. Кроме способностей нужны большое упорство, организованность в работе и хорошее здоровье. В ФМШ не любят «вундеркиндов», считающих, что для них обычные требования не обязательны. Поступать имеет смысл только тем, кто уже утвердился в своем желании серьезно заниматься математикой и физикой. Став учащимся ФМШ, вы будете находиться среди товарищей, которые, как и вы, увлечены математикой и физикой.

За 15 лет в ФМШ сложились свои традиции, создавшие в школе особую атмосферу, где интерес к науке, привычка к упорному труду соединяются с увлечением литературой и музыкой, спортом (например, традиционными стали встречи по футболу, волейболу и баскетболу между командами учащихся и преподавателей), интересными туристскими походами.

Далеко не все выпускники школы делаются научными работниками в области математики и физики. Мы не менее гордимся теми, кто становится хорошими инженерами в той или иной производственной области. Есть и такие, кто выбирают своей специальностью биологию, лингвистику. Но мы надеемся, что все выпускники ФМШ с удовольствием вспоминают атмосферу творческого труда и широких культурных интересов в нашем интернате.

Конечно, нужно еще много сделать для того, чтобы Московская ФМШ более успешно выполняла возложенные на нее задачи.

Пользуясь случаем, мы от всей души поздравляем коллективы школ-интернатов Киева, Ленинграда, Новосибирска и нашей ФМШ с пятнадцатилетием и желаем им дальнейших успехов.

В. Вавилов, А. Колмогоров, И. Тропин

Новый прием во Всесоюзную заочную математическую школу

Во Всесоюзную заочную математическую школу Академии педагогических наук СССР при Московском университете (ВЗМШ) принимаются ученики седьмых классов и учащиеся ПТУ. Школьники, проживающие в Москве, Ленинграде и их пригородах, в школу не принимаются.

Занятия начнутся с 1 сентября 1979 г. Обучение в школе бесплатное.

Учащиеся, принятые в школу, будут регулярно получать задания, в которых содержатся объяснения теоретических вопросов и задачи для решения. Программа ВЗМШ тесно связана со школьной программой и направлена на углубленное изучение основных вопросов школьного курса математики. Срок обучения — три года.

Ниже публикуются задачи вступительной контрольной работы. Желающие поступить в ВЗМШ должны выслать решения этих задач не позднее 1 марта 1979 года. После проверки работ (примерно в июле 1979 года) ВЗМШ сообщит всем принявшим участие в конкурсе результаты выполнения работы. Преимуществом при поступлении пользуются школьники, проживающие в сельской местности и в рабочих поселках.

Хотя некоторые из вступительных задач отличаются по внешнему виду от обычных школьных, для их решения не требуется дополнительных знаний по математике. Для поступления в школу не обязательно решить все задачи без исключения. При оценке работы будет учитываться не только количество решенных задач, но и качество решения. Решение каждой задачи должно быть обосновано. Ответ без обоснований может быть не засчитан. Если в задаче возможны несколько разных ответов, то надо указать их все.

Работа должна быть выполнена на русском языке в ученической тетради в клетку. Вступительные работы обратно не высылаются, и рецензии на них не выдаются.

В конверт вместе с тетрадью надо вложить листок бумаги размером 14 см$\times$6 см с вашим почтовым адресом (мы наклеим его на конверт, когда будем посылать вам ответ).

На обложку тетради наклейте листок клетчатой бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу (иначе ваша работа проверяться не будет):

Область	Московская
Фамилия, имя	Иванов Петр
Год рождения	1965 г
Класс, школа	7 класс «А» школы № 2 г. Клина
Фамилия, имя, отчество учителя математики	Никаноров Владимир Алексеевич
Место работы и должность родителей	Отец — шофер автобазы № 2. Мать — домашняя хозяйка
Полный почтовый адрес	123456. Клин, ул. Ленина 1, кв. 1.

Результаты проверки

1 а) б) в)	2	3	4	5	6	7 а) б) в)	8	9 а) б)	10

Адреса, по которым следует присылать вступительные работы, будут указаны в следующем номере журнала (их можно посмотреть также в «Кванте», 1978, № 1).

Школьники, не прошедшие по конкурсу в ВЗМШ, имеют возможность заниматься по программе ВЗМШ в группах «Коллективный ученик ВЗМШ».

«Коллективный ученик ВЗШМ» — это школьный математический кружок, работающий под руководством учителя математики данной школы по программе ВЗМШ. Прием в группы «Коллективный ученик ВЗМШ» проводится до 20 сентября 1979 года в два потока: для тех, кто с сентября 1979 года будет учиться в 8 классе, и для тех, кто начнет учиться в 9 классе.

Для организации кружка достаточно заявления учителя математики, берущего на себя руководство кружком, с указанием списка учащихся. Заявление должно быть заверено подписью директора школы и печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик ВЗМШ» может оплачиваться школами по представлению ВЗМШ как факультативные занятия. Заявления об организации групп «Коллективный ученик ВЗМШ» следует присылать по адресу: 117234. Москва, В-234, МГУ, мехмат. ВЗМШ, заведующему сектором групп «Коллективный ученик ВЗМШ».

Задачи вступительной контрольной работы в ВЗМШ в 1979 году

1. Пусть точки A, B, C являются вершинами неравнобедренного прямоугольного треугольника. Сколькими способами можно поставить на плоскости точку D, чтобы множество точек $\{A, B, C, D\}$ имело: а) центр симметрии? б) ось симметрии? в) изменятся ли ответы на вопросы а) и б), если в условии задачи заменить слово «прямоугольного» на слово «непрямоугольного»?

2. Рассмотрим всевозможные девятизначные числа, в записи которых каждая из цифр 1, 2, 3, ..., 9 встречается по одному разу. Определите наибольший общий делитель этих чисел.

3. Можно ли на клетчатой бумаге закрасить 25 клеток так, чтобы у каждой из них было нечетное число закрашенных соседей? (Клетки называются *соседями*, если у них общая сторона.)

4. Андрей бегает на лыжах быстрее Вити, но медленнее Жени. Они одновременно побежали по круговой дорожке из одного места в одном направлении и бежали до тех пор, пока снова все трое не прибежали в одно место. За это время Женя обогнал Витю 13 раз. Сколько всего было за это время обгонов?

5. В одну строчку выписали 25 чисел. Сумма любых трех соседних чисел положительна. Может ли при этом сумма всех 25 чисел быть отрицательной?

6. Найдите все пары целых чисел $(m; n)$, для которых выполняется равенство $m^2+1=2^n$.

7. Рассмотрим на плоскости многоугольник, являющийся объединением трех параллелограммов: $OAHB$, $OBKC$ и $OCMA$. а) Обязательно ли этот многоугольник выпуклый? б) Сколько сторон может иметь этот многоугольник? в) Какой периметр может иметь этот многоугольник, если $|OA|+|OB|+|OC|=1$?

8. Загаданы два целых положительных числа. Математику A сообщена их сумма, а математику B — сумма их квадратов. Если A и B соединят свои знания, то они, конечно, определят оба числа. Но они узнали эти числа в процессе следующего разговора:

B. — Я не знаю, какие это числа.

A. — Их сумма больше десяти.

B. — Тогда я знаю, какие это числа.

Найдите и вы эти числа.

9. Можно ли нарисовать на плоскости прямоугольник $ABCD$ и точку M так, чтобы расстояния от точки M до точек A, B, C, D были равны, соответственно: а) 1, 2, 3, 4; б) 1, 4, 8, 7 ?

10. Имеются два автомата. Если в первый из них бросить 5 копеек, то он умножит данное ему число на 3. Если во второй из них бросить 2 копейки, то он прибавит к данному ему числу число 4. Какую минимальную сумму денег надо иметь, чтобы с помощью этих автоматов получить из данного числа 1 число 1979?

Ж. Раббот

Заочная физико-техническая школа

Заочная физико-техническая школа (ЗФТШ) при Московском ордена Трудового Красного Знамени физико-техническом институте (МФТИ) проводит набор учащихся восьмилетних и средних школ, расположенных на территории РСФСР, в 8, 9 и 10 классы на 1979/80 учебный год. (В отдельных случаях допускается прием из других союзных республик.)

Заочное обучение прививает навыки самостоятельности, учит работать с дополнительной литературой, конспективно излагать свои мысли.

ЗФТШ дает хорошие дополнительные знания по физике и математике своим выпускникам, многие из которых становятся студентами ведущих вузов нашей страны.

При приеме в ЗФТШ предпочтение отдается учащимся, проживающим в сельской местности и рабочих поселках, где помощь нашей школы особенно нужна.

Обучение в школе бесплатное.

Кроме отдельных учащихся, в ЗФТШ принимаются и физико-технические кружки, которые могут быть организованы на месте по инициативе двух преподавателей — физики и математики. Руководители кружка набирают и зачисляют в них учащихся, успешно выполнивших вступительное задание ЗФТШ. Кружок принимается в ЗФТШ, если директор школы сообщит в ЗФТШ фамилии руководителей кружка и поименный список членов кружка по классам (с указанием итоговых оценок за вступительное задание).

Учащиеся, принятые в ЗФТШ, и руководители физико-технических кружков будут регулярно получать задания по физике и математике в соответствии с программой ЗФТШ, а также рекомендуемые ЗФТШ решения этих заданий. Задания ЗФТШ содержат теоретический материал и разбор характерных задач и примеров по теме, а также 10—14 задач для самостоятельного решения. Это и простые задачи, и более сложные (на уровне конкурсных задач в МФТИ). Работы учащихся-заочников проверяют в ЗФТШ или ее филиалах, а членов кружков—их руководители.

С учащимися Москвы два раза в неделю по программе ЗФТШ в вечерних консультативных пунктах (в ряде московских школ) проводятся очные занятия по физике и математике. Набор в эти пункты происходит или по результатам выполнения вступительного задания ЗФТШ, или по результатам очного собеседования по физике и математике (собеседование будет проводиться в сентябре; справки по телефону 216-00-05, доб. 2-59).

Вступительную контрольную работу по физике и математике каждый ученик выполняет самостоятельно. Работу надо сделать на русском языке и аккуратно переписать в одну школьную тетрадь. Порядок задач должен быть тот же, что и в задании. Тетрадь перешлите в большом конверте *простой бандеролью*. Вместе с решением обязательно вышлите справку из школы, в которой вы учитесь, с указанием класса. Справку наклейте на внутреннюю сторону обложки тетради. Без этой справки решение рассматриваться не будет. На внешнюю сторону тетради наклейте лист бумаги, заполненный по следующему образцу:

1. Область (край или АССР)	*Башкирская АССР*
2. Фамилия, имя, отчество	*Бугрова Галина Львовна*
3. Класс	*девятый*
4. Номер и адрес школы	*школа № 105, ул. Гончарова, д. 1*
5. Профессия родителей и занимаемая должность	
отец	*теплотехник, заместитель начальника цеха*
мать	*аппаратчица*
6. Подробный домашний адрес	*450064, г. Уфа, ул. Нежинская, д. 2, кв. 3.*

Срок отправления решения — *не позднее 1 марта 1979 года* (по почтовому штемпелю места отправления). Вступительные работы обратно не высылаются.

Зачисление в школу производится приемной комиссией Московского физико-технического института. Решение приемной комиссии будет сообщено не позднее 1 августа 1979 года.

Тетрадь с решенными задачами вступительной контрольной работы (обязательно по физике и математике) присылайте по адресу: 141700, г. Долгопрудный Московской области, Московский физико-технический институт, для ЗФТШ.

Учащиеся Архангельской, Вологодской, Калининской, Кировской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской, Псковской областей, Карельской и Коми АССР высылают работы по адресу: 198904, г. Старый Петергоф, ул. 1 Мая, д. 100, ЛГУ, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Учащиеся Амурской, Иркутской, Камчатской, Сахалинской, Читинской областей, Красноярского, Приморского, Хабаровского краев, Бурятской, Тувинской, Якутской АССР и Чукотки высылают работы по адресу: 660607, г. Красноярск, ул. Перенсона, д. 7, Пединститут, филиал ЗФТШ при МФТИ.

Ниже приводятся задачи вступительной контрольной работы по физике и математике. В задании по физике задачи 1—5 предназначены для учащихся седьмых классов, задачи 5—11 — для учащихся восьмых классов и задачи 7—13 — для учащихся девятых классов. Во вступительном задании по математике задачи 1—5 — для седьмых классов, 4—10 — для восьмых классов и 7—13 — для девятых классов.

Задачи вступительной контрольной работы в ЗФТШ в 1979 году

Физика

1. Дорожка в саду имеет ширину 2 м. Какой длины дорожку можно покрыть слоем песка толщиной в 2 см, если песок доставлен десятитонным грузовиком, нагруженным до предела? Плотность песка определите самостоятельно.

2. Определите глубину шахты, на дне которой барометр показывает давление 860 мм рт. ст. Давление на поверхности земли принять равным 760 мм рт. ст. Плотность воздуха 1,29 кг/м^3. Изменением плотности воздуха с глубиной пренебречь.

3. Разломите спичку на как можно более маленькие кусочки. Почему маленькие кусочки труднее разламывать, чем большие?

4. Какое количество древесного угля потребуется для превращения в пар 3 кг льда при нормальном давлении? Начальная температура льда —5°С. КПД нагревателя 20%.

5. Электродвигатель, приводящий в действие насос, подключен к сети напряжением 220 В. Насос подает 500 м^3 воды на высоту 20 м. Какое количество электричества протечет по обмотке электродвигателя, если КПД установки (двигателя с насосом) 40%?

6. Мотоциклист проехал расстояние между двумя пунктами со скоростью 40 км/ч. Увеличив скорость до 80 км/ч, мотоциклист проехал затем расстояние вдвое меньшее. Определить среднюю скорость мотоциклиста за все время движения.

7. В цилиндрическую банку налита вода. Когда в банку опустили порожнюю алюминиевую чашку так, чтобы она плавала, вода поднялась на 2,7 см. На сколько изменится уровень воды в банке, если чашку утопить в ней? Плотность алюминия 2,7 г/см^3.

8. Человек роняет камень в глубокий колодец и слышит звук его падения через 8 с. Найти глубину колодца. Ускорение свободного падения принять равным 10 м/с^2. Скорость звука 330 м/с.

9. Какую мощность развивает человек, везущий по горизонтальной дороге груженые сани общей массой 40 кг? Коэффициент трения полозьев о дорогу равен 0,1. Сани тянут с постоянной скоростью 3 м/с с помощью веревки, наклоненной под углом 30° к горизонту.

10. Лыжник скатывается с трамплина высотой 50 м, имеющего у подножия закругление радиуса 10 м. Найти перегрузку, испытываемую лыжником при выезде на горизонтальный участок.

11. Воздушный шар массой M парит в воздухе на высоте H. На лестнице, привязанной к гондоле воздушного шара, стоит человек массой m. На какой высоте окажется воздушный шар, если человек поднимется по лестнице вверх на n ступенек? Расстояние между ступеньками h.

12. В комнате объемом 60 м^3 испарили капельку духов, содержащую 10^{-4} г ароматического вещества с относительной молекулярной массой 1000. Сколько молекул ароматического вещества попадет в легкие человека при каждом вздохе? Объем легких принять равным 2,2 л.

13. В герметическом сосуде объемом 11,2 л содержится воздух под давлением 0,1 МПа. Какое количество теплоты необходимо сообщить воздуху, чтобы давление в сосуде увеличилось в 3 раза? Молярную теплоемкость воздуха при постоянном объеме принять равной 21 Дж/(моль·К).

Математика

1. В классе 35 учащихся. Из них 20 посещают математический кружок, 11 — физический, 10 учащихся не посещают ни одного из этих кружков. Сколько учащихся посещают оба кружка?

2. Для того чтобы четырехугольник $ABCD$ был параллелограммом, необходимо и достаточно, чтобы он имел центр симметрии. Докажите.

3. Определите все значения a, при которых множество решений неравенства
$$x^2-a(1+a)x+a^3<0$$
содержит отрезок $[0;\ 1]$.

4. Докажите или опровергните следующие утверждения: а) для того чтобы число $(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1))-1$ делилось на n, достаточно, чтобы n было простым; б) для того чтобы число $(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-1))-1$ делилось на n, необходимо, чтобы n было простым.

5. Один четырехугольник расположен внутри другого четырехугольника. Может ли сумма длин диагоналей внутреннего четырехугольника быть больше суммы длин диагоналей внешнего четырехугольника?

6. На олимпиаде были даны три задачи: A, B, C. 25 школьников решили хотя бы одну задачу. Среди школьников, не решивших задачу A, решивших задачу B, в два раза больше, чем решивших задачу C. Школьников, решивших только задачу A, на одного больше, чем остальных школьников, решивших задачу A. Сколько школьников решило только задачу B, если среди школьников, решивших только одну задачу, половина не решила задачу A?

7. Точки D и E служат серединами сторон $[AB]$ и $[CD]$ четырехугольника $ABCD$. Докажите, что
$$\overrightarrow{DE}=\frac{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}}{2}.$$

8. Даны два утверждения:

а) Система
$$\begin{cases}(a+4)x+3y=a+1,\\ ax+(a-1)y=a-1\end{cases}$$
имеет бесконечно много решений;

б) Прямые, заданные уравнениями $5x+4y=6$ и $ax+6y=10$, пересекаются во второй четверти декартовой прямоугольной системы координат.

При каких значениях a одно из этих утверждений ложно, а другое — истинно?

9. Докажите, что если в произвольном четырехугольнике $ABCD$ провести внутренние биссектрисы, то четыре точки пересечения биссектрис углов A и C с биссектрисами углов B и D лежат на одной окружности.

10. Школьник перекленвает все свои марки в новый альбом. Если он наклеит по 20 марок на один лист, то ему не хватит альбома, а если по 23 марки на лист, то по крайней мере один лист окажется пустым. Если школьнику подарить такой же альбом, на каждом листе которого наклеено по 21 марке, то всего у него станет 500 марок. Сколько листов в альбоме?

11. На каждой из планет некоторой системы находится астроном, наблюдающий ближайшую планету. Расстояния между планетами попарно различны. Докажите, что если число планет нечетно, то какую-нибудь планету никто не наблюдает.

12. Даны k чисел $a_1, a_2, \ldots, a_k$, причем
$$a_1+a_2+\ldots+a_k=0.$$
Вычислите предел последовательности (S_n):
$$S_n=a_1\sqrt{n+1}+a_2\sqrt{n+2}+\ldots+a_k\sqrt{n+k}.$$

13. Функции f и g не имеют производных в точке $x=x_0$. Можно ли утверждать, что функции
$$F_1(x)=f(x)+g(x) \text{ и } F_2(x)=f(x)\cdot g(x)$$
также не имеют производных в точке $x=x_0$?

В. Асланян, С. Коршунов, Т. Чугунова

В. Фабрикант

Исаак Ньютон и яблоко

Масса сведений — числа, законы,
$2\pi R$, H_2SO_4,
Лампа, яблоко, Круксы, Ньютоны,
Водород, колебанья в эфире.
Ю. Тувим

Известный рассказ о том, что к открытию закона всемирного тяготения Ньютона привело зрелище падающего с дерева яблока, имеет любопытную историю.

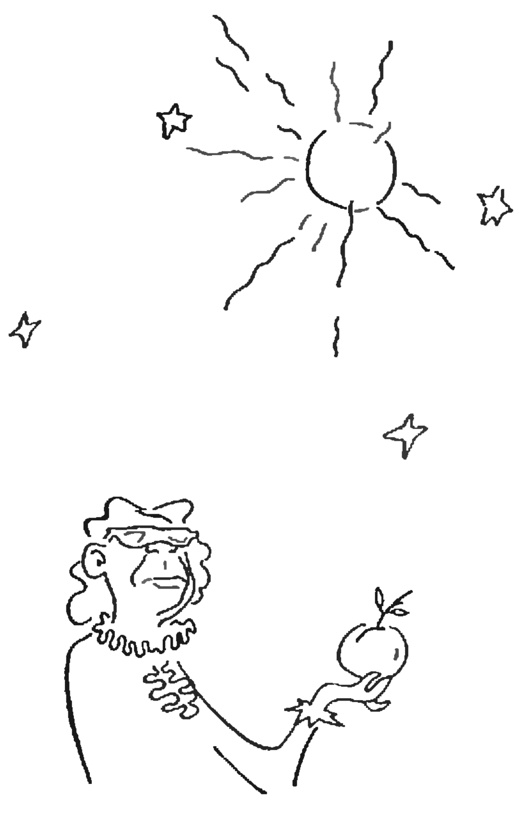
С. И. Вавилов в превосходной биографии Ньютона пишет, что рассказ этот, по-видимому, достоверен и не является легендой. Он ссылается на свидетельство Стаклея, близкого знакомого Ньютона:

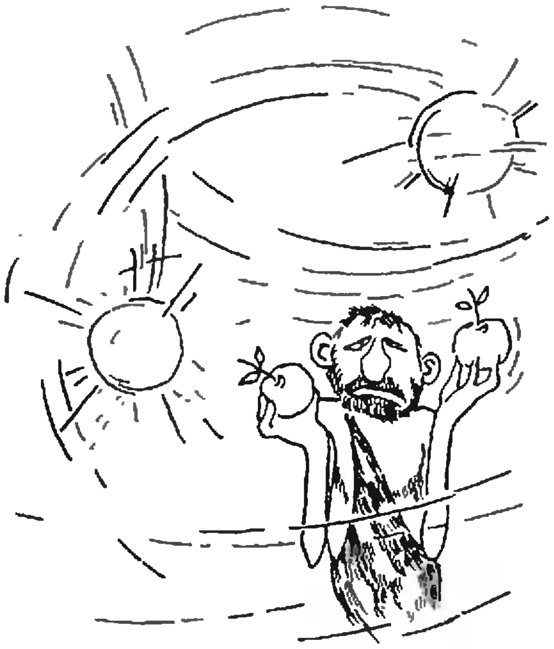
«После обеда (в Лондоне, у Ньютона) погода была жаркая; мы перешли в сад и пили чай под тенью нескольких яблонь; были только мы вдвоем. Между прочим, сэр Исаак сказал мне, что точно в такой же обстановке он находился, когда впервые ему пришла в голову мысль о тяготении. Она была вызвана падением яблока, когда он сидел, погрузившись в думы. Почему яблоко всегда падает отвесно, подумал он про себя, почему не в сторону, а всегда к центру Земли. Должна существовать притягательная сила в материи, сосредоточенная в центре Земли. Если материя так тянет другую материю, то должна существовать пропорциональность ее количеству. Поэтому яблоко притягивает Землю так же, как Земля яблоко. Должна, следовательно, существовать сила, подобная той, которую мы называем тяжестью, простирающаяся по всей вселенной».

Очевидно, эти размышления о тяготении относятся к 1665 или к 1666 году, когда из-за вспышки чумы в Лондоне Ньютон вынужден был жить в деревне. В бумагах Ньютона была найдена такая запись по поводу «чумных лет»: «... в это время я был в расцвете моих изобретательских сил и думал о математике и философии больше, чем когда-либо после».

Свидетельство Стаклея было мало кому известно (мемуары Стаклея были напечатаны только в 1936 году), но знаменитый французский писатель Вольтер в книге, изданной в 1738 году и посвященной первому популярному изложению идей Ньютона, привел тот же рассказ со ссылкой на племянницу Ньютона. Рассказ быстро стал популярен, однако у многих вызвал сомнения. Считалось, что это очередная выдумка Вольтера, слывшего одним из самых остроумных людей своего времени. Нашлись люди, у которых этот рассказ вызвал даже возмущение. К числу последних принадлежал великий математик Гаусс. Он говорил:

«История с яблоком слишком проста; упало ли яблоко или нет — это все равно; но не понимаю, как можно





Если бы вместо Солнца была двойная звезда...

предполагать, что этот случай мог ускорить или замедлить такое открытие. Вероятно, дело было так: однажды к Ньютону пришел глупый и нахальный человек и спрашивал его, каким образом он мог дойти до такого великого открытия. Ньютон, увидев, какого рода существо стоит перед ним, и желая от него отвязаться, отвечал, что ему упало на нос яблоко, и это совершенно удовлетворило любознательность того господина».

Великий русский педагог К. Д. Ушинский, наоборот, увидел в истории с яблоком глубокий смысл. Противопоставляя Ньютона так называемым светским людям, он писал:

«Нужен был гений Ньютона, чтобы вдруг удивиться тому, что яблоко упало на землю. Таким «пошлостям» не удивляются всезнающие люди света. Они даже считают удивления таким обыденным событиям признаком мелкого, детского, не сформированного еще практического ума, хоть в то же самое время сами часто удивляются уже действительным пошлостям».

Ту же мысль в поэтической форме выразил советский поэт Кайсын Кулиев в мудром стихотворении «Жить удивляясь»:

«Рождаются великие творенья
Не потому ли, что порою где-то
Обычным удивляются явленьям
Ученые, художники, поэты».

Приведем еще несколько примеров того, как история с яблоком отразилась в художественной литературе.

Соотечественник Ньютона великий английский поэт Байрон начинает десятую песнь поэмы «Дон Жуан» следующими двумя строфами *):

«Случилось яблоку, упавши, прервать
Глубокие Ньютона размышленья,
И говорят (не стану отвечать
За мудрецов догадки и ученья),
Нашел он в этом способ доказать
Весьма наглядно силу тяготенья.
С паденьем, стало быть, и яблоком лишь он
Был в силах справиться с Адамовых времен.

* * *

От яблок пали мы, но этот плод
Возвысил снова род людской убогий
(Коль верен приведенный эпизод).
Проложенная Ньютоном дорога
Страданий облегчила тяжкий гнет;
С тех пор открытий сделано уж много,
И, верно, мы к луне когда-нибудь,
Благодаря парам**), направим путь».

В. Солоухин в стихотворении «Яблоко» несколько неожиданно повернул ту же тему:

«Я убежден, что Исаак Ньютон
То яблоко, которое открыло
Ему закон земного тяготенья,
Что он его,
В конечном счете, — съел».

Наконец, Марк Твен придал всему эпизоду юмористическую окраску. В рассказе «Когда я служил секретарем» он пишет:

«Что есть слава? Порождение случая! Сэр Исаак Ньютон открыл, что яблоки падают на землю, — честное слово, такие пустяковые открытия делали до него миллионы людей. Но у Ньютона были влиятельные родители, и они раздули этот банальный случай в чрезвычайное событие, а простаки подхватили их крик. И вот в одно мгновение Ньютон стал знаменит».

Рисунки профессора И. Новожилова

*) Перевод И. Козлова.

**) В оригинале «паровой машине».

Головоломки наших читателей

1. В кружках данной фигуры (рис. 1) расставьте 13 последовательно идущих чисел так, чтобы все шесть сумм четырех чисел, расположенных в вершинах ромбов, были бы одинаковы

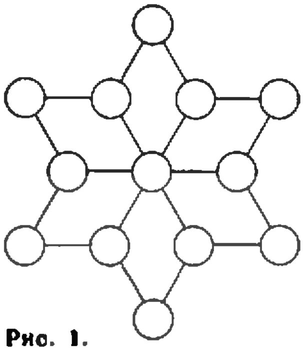


Рис. 1.

и равнялись бы 1977. Известно, что одно из этих чисел равно 496, и что оно стоит в центральном кружочке.

* * *

2. В кружочках изображенной на рисунке 2 фигуры расставьте девять последовательных натуральных чисел так, чтобы суммы чисел по большой и по четырем малым окружностям, а также в вершинах выделенного центрального квадрата были бы одинаковы и равнялись шестидесяти.

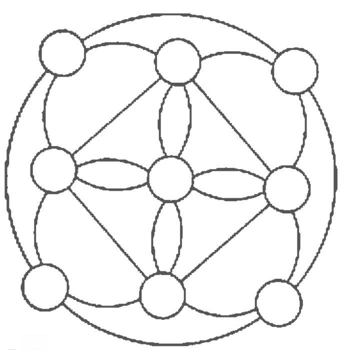


Рис. 2.

Я. Алексеев
(г. Ленинград)

Постройка тракта

(см. «Квант», 1978, № 12, 3-ю страницу обложки)

Участком тракта от Мутонвиля до Альбижуа одинаково пользуются жители всех пяти деревень; поэтому с каждой деревни причитается по $\frac{1}{5}$ стоимости постройки этого участка. Участком от Альбижуа до Бонди пользуются жители четырех деревень, поэтому каждая из них платит $\frac{1}{4}$ его стоимости. Итак, жителям деревень придется уплатить 24, 54, 94, 154 и 274 луидоров соответственно (см. таблицу; деревни обозначены в ней первыми буквами их названий).

	В долях стоимости участка	в луидорах
А	$\frac{1}{5} = \frac{12}{60}$	24
Б	$\frac{1}{5}+\frac{1}{4} = \frac{27}{60}$	54
В	$\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3} = \frac{47}{60}$	94
Г	$\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2} = \frac{77}{60}$	154
Д	$\frac{1}{5}+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+1 = \frac{137}{60}$	274

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шихановнч

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, С. Лухин, Э. Назаров, А. Пономарева, В. Чернов

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Л. Сомова

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16. «Квант», тел. 231-83-62
Сдано в набор 30/X—78
Подписано в печать 15/XII—78
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5, 60 Уч.-изд. л. 6, 39 Т-23021
Цена 30 коп. Заказ 2478
Тираж 286 965 экз.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома Государственного комитета СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

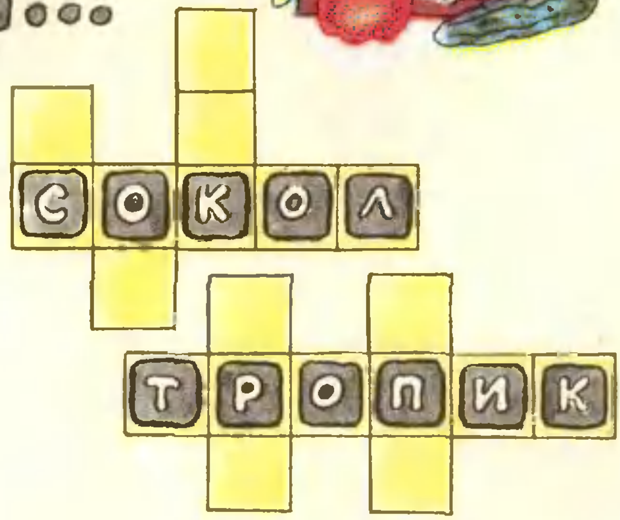
Рукописи не возвращаются

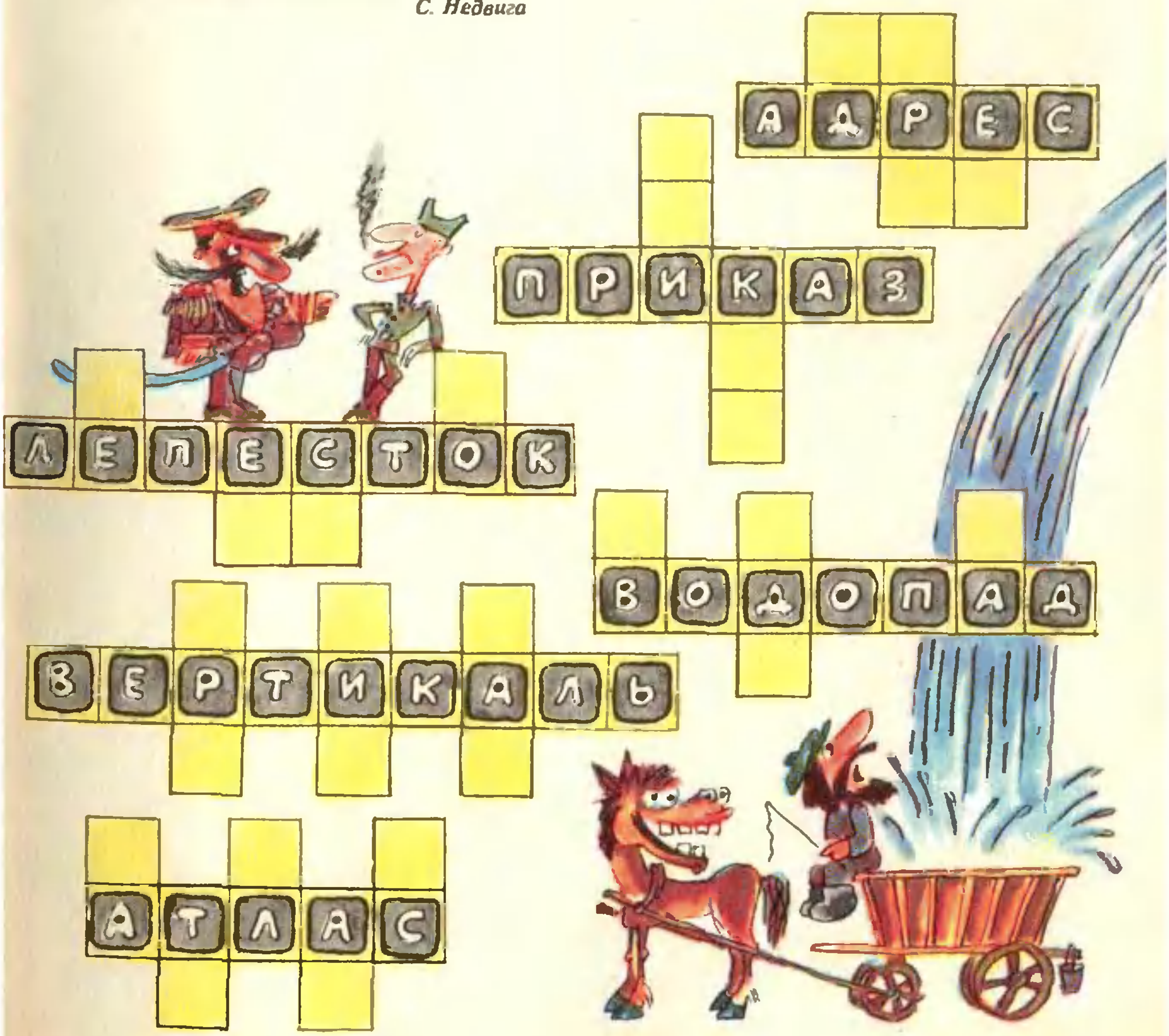
САЛАТ, ПРИТОК, ТЕЛЕСКОП...

Всем хорошо известна игра в пятнашки. Игра в слова—анаграммы, которую мы хотим вам предложить, чем-то на нее похожа. Пластинки с буквами можно передвигать на соседние свободные клетки (соседними считаются клетки, граничащие по стороне). Один ход — это одно перемещение пластинки. Руководствуясь этим правилом, совершите такие перестановки: *адрес — среда* (20 ходов), *атлас — салат* (22 хода), *сокол — колос* (36 ходов), *тропик — приток* (20 ходов), *приказ — каприз* (34 хода), *водопад — подвода* (42 хода), *лепесток — телескоп* (48 ходов), *вертикаль — кильватер* (64 хода).

В скобках мы указали, за сколько ходов удалось это сделать нам. Может быть, вы справитесь с заданием быстрее?

С. Недвига





Цена 30 коп.
Индекс 70465

На первой странице обложки вы видите модель *однополостного гиперболоида*. Ее можно склеить из бумажных розеток, похожих на эти. Правда, складок у них должно быть не 16, а 32.

Розетка делается из сектора круга. Перед тем, как делать розетку, нужно выбрать следующие параметры — угловой размер сектора (он может быть больше полного круга!), радиус круга, радиус меньшего круга (он определяет размер зубцов) и наконец, решить, какую делать складку. Для того, чтобы при склеивании розеток получился гиперболоид, их размеры должны быть определенным образом согласованы. Постарайтесь придумать теорию расчета розеток. (О том, что такое «математический» однополостный гиперболоид см. на с. 26.)

А. Близнюк