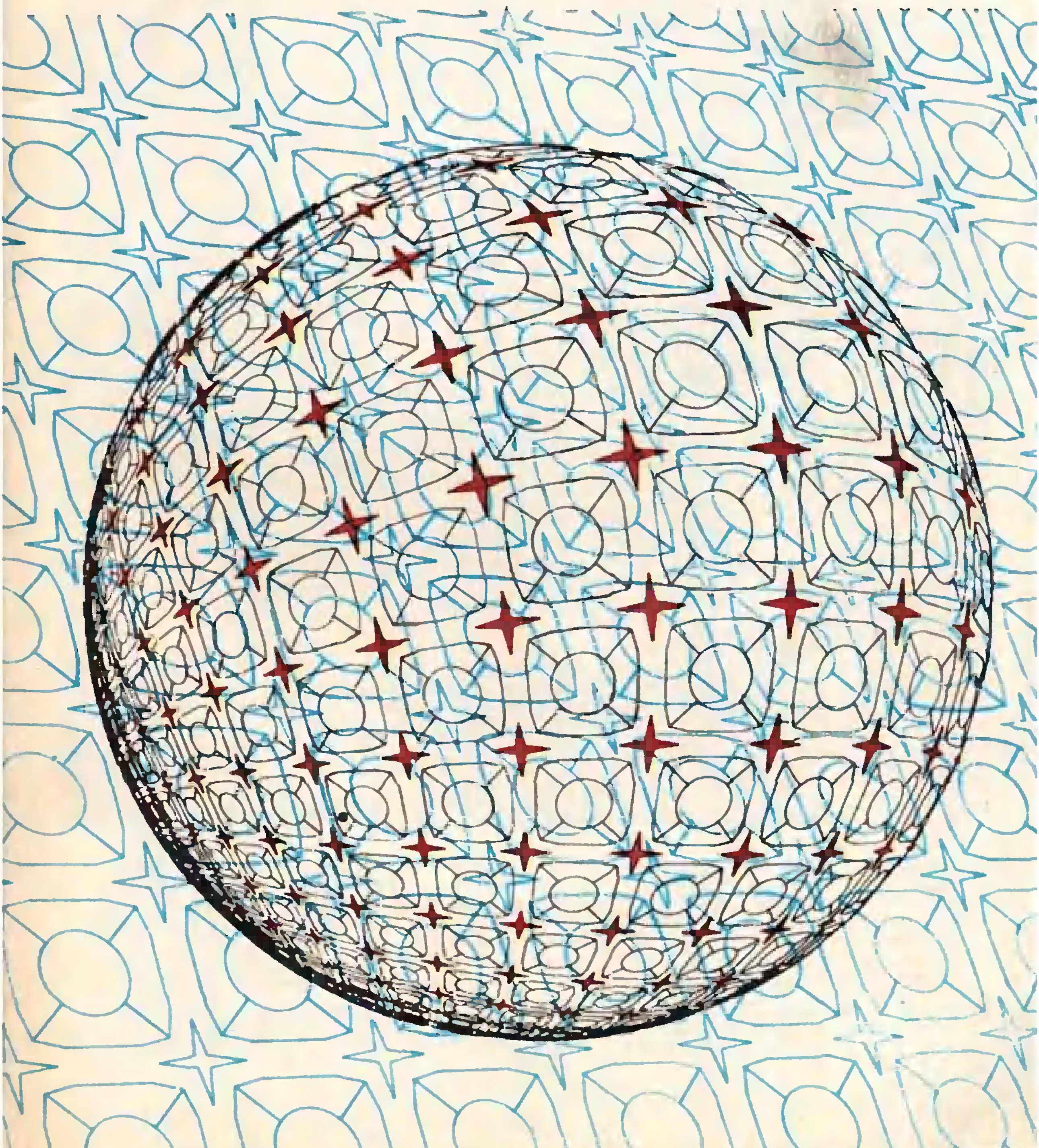
Квант

12
1978

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



Астролябия — «схватывающая звезды» — более полутора тысяч лет верой и правдой служила человечеству, помогая астрономам и мореплавателям. Устройство этого прибора основано на свойствах так называемой стереографической проекции. Подробнее об этом вы можете прочитать на с. 50.

Астролябия, которую вы видите на этой фотографии, была изготовлена в 1532 году нюрнбергским мастером Г. Хартманом. Сделана она из позолоченной латуни и, как многие старинные приборы, является настоящим произведением искусства. Впрочем, это совершенно не мешало пользоваться ею.

Основан в 1970 году

Квант

12
1978

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

На первой странице обложки плоская равномерная решетка спроецирована на сферическую поверхность из полюса сферы. (Плоскость касается сферы в другом полюсе.) Эта проекция является обратной к стереографической проекции (см. с. 50). Рисунок выполнен автоматической чертежной машиной.

В НОМЕРЕ:

А. Геронимус

Диофантовы уравнения по простому модулю

«Достопочтеннейший Дионисий, зная, что ты ревностно хочешь научиться решению задач, касающихся чисел, я попытался изложить природу их и могущество, начиная с тех оснований, на которых покоится эта наука.

Может быть, этот предмет покажется тебе затруднительным, поскольку ты еще с ним незнаком, а начинающие не склонны надеяться на успех. Но он станет тебе удобопонятным благодаря твоему усердию и моим пояснениям, ибо страстная любовь к науке помогает быстро воспринять учение».

Таким посвящением открывается «Арифметика» Диофанта Александрийского.

В этой книге Диофант (он жил предположительно в III в.) суммировал и расширил накопленный до него опыт решения неопределенных (т. е. с несколькими переменными) алгебраических уравнений в целых или рациональных числах. С тех пор эти уравнения стали называться *диофантовыми*.

Вот примеры таких уравнений:
$x^2 + y^2 = z^2$, $\qquad x^2 = y^3 + 5y + 7$.

Интерес к диофантовым уравнениям связан, видимо, с самой природой человека — сохранившиеся документы обнаруживают его следы в глубине тысячелетий. Еще в Древнем Вавилоне занимались поисками *пифагоровых троек* — целочисленных решений уравнения $x^2 + y^2 = z^2$.

«Арифметика» Диофанта легла в основу теории чисел нового времени. Со времен Ферма (XVII в.) диофантовы уравнения стали предметом глубоких исследований самых выдающихся математиков и неослабного интереса всех любителей чисел, не уступающих в рвении достопочтеннейшему Дионисию.

Росло и растет могущество задач, о котором говорится в посвящении. Теория диофантовых уравнений пропиталась связями едва ли не со всеми областями современной математики.

Только в одном Диофант ошибся — предмет не стал удобопонятным.

Вероятно, последним, кто разделял эту надежду, был знаменитый немецкий математик Давид Гильберт. В 1900 году в докладе на Втором Международном конгрессе математиков он сформулировал 23 проблемы из разных областей математики. Десятая проблема формулировалась так: *указать способ, при помощи которого возможно после конечного числа операций установить, разрешимо ли данное диофантово уравнение в целых числах.*

Длительный период исследований завершился в 1969 году отрицательным решением этой проблемы: оказалось, что общего способа, о котором говорится в ее формулировке, вообще не существует *).

В связи с диофантовыми уравнениями ставились и более простые задачи. При их решении возникали очень красивые теории. О началах одной из них — теории диофантовых уравнений по простому модулю — мы расскажем в этой статье. Чтобы этот рассказ был вам понятен, советуем перечитать статьи «Сравнения и классы вычетов» (№ 10) и «Сравнения по простому модулю» (№ 11).

Переход к уравнениям по простому модулю

Рассмотрим какое-нибудь диофантово уравнение. Предположим, что оно имеет решение, и рассмотрим вместо

*) Подробнее об этом см. «Квант», 1970, № 7.

входящих в решение чисел их классы вычетов по mod p. Легко видеть, что полученный набор будет являться решением *приведенного уравнения* — уравнения, получающегося из данного заменой каждого коэффициента на его класс вычетов по mod p. Поэтому необходимым условием существования решения у диофантова уравнения является существование решения приведенного уравнения по mod p при всех p *).

В этом разделе мы приведем два примера перехода к mod p, а в следующем изучим диофантовы уравнения по mod p (т. е. уравнения с коэффициентами в множесте F_p) сами по себе. Их теория гораздо проще, чем теория обычных диофантовых уравнений. Множество F_p конечно, и установить, имеет ли данное диофантово уравнение решение, можно простым перебором. Поэтому не так удивительно, что для множества F_p имеются общие теоремы, гарантирующие существование решений. Мы сформулируем и обсудим эти теоремы в следующих разделах.

Каковы целочисленные решения уравнения

$$35x^4 + 24y^3 = 100\,000? \qquad (1)$$

Приведем это уравнение по mod 3. $35 \equiv 2 \pmod 3$, $24 \equiv 0 \pmod 3$, $100\,000 \equiv 1 \pmod 3$; поэтому по mod 3 уравнение (1) принимает вид

$$\overline{2}x^4 = \overline{1}. \qquad (2)$$

$\overline{2}x^4$ при $x \in F_3$ принимает значения $\overline{0}$ и $\overline{2}$ (проверьте), поэтому у уравнения (2) нет решений, значит, нет решений и у уравнения (1).

Рассмотрим пример посложнее:

$$5x^3 + 11y^3 + 13z^3 = 0. \qquad (3)$$

У этого уравнения есть одно очевидное решение: $x = y = z = 0$. Постараемся доказать, что других решений у него нет.

Естественно рассмотреть уравнение (3) по модулю 5, 11 или 13 — тогда один из трех членов обратится в $\overline{0}$. Какой же именно модуль нам выбрать?

*) О вычислениях «по модулю» говорится также в статье М. И. Башмакова («Квант», 1971, № 3).

Ответить на этот вопрос нам поможет решение задачи 4 статьи «Сравнения по простому модулю». Из него следует, что в множествах F_5 и F_{11} все элементы являются кубами, а в множестве F_{13} только 5 элементов являются кубами.

После приведения уравнения (3) по модулю 5 оно принимает вид

$$y^3 + \overline{3}z^3 = \overline{0}. \qquad (4)$$

Поскольку любой элемент множества F_5 является кубом и в F_5 возможно деление, для любых $\overline{a}$ и $\overline{b}$ найдутся такие $\overline{y}$ и $\overline{z}$, что $\overline{y}^3 = \overline{a}$ и $\overline{3}\overline{z}^3 = \overline{b}$. Поэтому в множестве F_5 у уравнения (4) существует много ненулевых решений (соответствующих парам $\overline{a}$, $\overline{b}$, для которых $\overline{a} + \overline{b} = \overline{0}$). Аналогичный результат верен и для F_{11}. Поэтому у нас нет надежды, рассматривая уравнение (3) по модулю 5 или 11, доказать, что оно имеет только нулевое решение.

Рассмотрим уравнение (3) по mod 13:

$$\overline{5}x^3 + \overline{11}y^3 = \overline{0}. \qquad (5)$$

В множестве F_{13} кубами являются только элементы $\overline{0}$, $\overline{1}$, $\overline{5}$, $\overline{8}$, $\overline{12}$. Составим таблицу возможных значений выражения $\overline{5}\overline{a} + \overline{11}\overline{b}$, где $\overline{a}$, $\overline{b} \in \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{5}, \overline{8}, \overline{12}\}$ (в пересечении стоит сумма $\overline{5}\overline{a} + \overline{11}\overline{b}$). Из таблицы видно, что единственным решением уравнения (5) является $x = y = \overline{0}$.

	$\overline{a}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{5}$	$\overline{8}$	$\overline{12}$
$\overline{b}$	$\overline{5}\overline{a}$ \ $\overline{11}\overline{b}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{12}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{5}$	$\overline{12}$	$\overline{1}$	$\overline{8}$
$\overline{1}$	$\overline{11}$	$\overline{11}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$	$\overline{12}$	$\overline{6}$
$\overline{5}$	$\overline{3}$	$\overline{3}$	$\overline{8}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\overline{11}$
$\overline{8}$	$\overline{10}$	$\overline{10}$	$\overline{2}$	$\overline{9}$	$\overline{11}$	$\overline{5}$
$\overline{12}$	$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{7}$	$\overline{1}$	$\overline{3}$	$\overline{10}$

Значит, для любого решения x_0, y_0, z_0 уравнения (3) x_0 и y_0 делятся на 13: $x_0 = 13x_1$, $y_0 = 13y_1$. Подставив эти выражения для x_0 и y_0 в (3), мы получим $5\cdot 13^3x_1^3+11\cdot 13^3y_1^3+13z_0^3=0$, откуда z_0 делится на 13: $z_0=13z_1$. Подставив и сократив на 13^3, получим $5x_1^3+11y_1^3+13z_1^3=0$. Отсюда следует, что $x_1=13x_2$, $y_1=13y_2$, $z_1=13z_2$, и т. д. Таким образом, x_0, y_0, z_0 делятся на любую степень 13, что возможно, только если $x_0=y_0=z_0=0$.

Теоремы Шевалле и Варнинга

Знание множества F_{13} позволило нам сообразить, какой именно модуль сравнения стоит выбрать для исследования уравнения (3).

А что будет, если в уравнении не три переменные, а четыре или пять? Что будет, если степень уравнения — не 3, а 4, 5 или 6? Чувствуется, что если ч и с л о п е р е м е н н ы х увеличивается, то наши шансы доказать невозможность решения исходного уравнения, рассматривая его по какому-нибудь модулю, падают; если же увеличивается его с т е п е н ь — растут. Это интуитивное соображение можно уточнить.

Справедлива следующая замечательная Т е о р е м а Ш е в а л л е: *рассмотрим многочлен $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с коэффициентами в множестве F_p; пусть $x_1=x_2=\ldots=x_n=\bar 0$ — решение уравнения $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\bar 0$; если степень многочлена $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ меньше n, то у уравнения $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\bar 0$ есть и ненулевое решение.*

Теорема Шевалле сразу следует из такой т е о р е м ы В а р н и н г а: *если степень многочлена $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ с коэффициентами из F_p меньше n, то число решений уравнения $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\bar 0$ делится на p.*

Действительно, по теореме Варнинга число решений уравнения $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\bar 0$ равно 0 или $\geqslant p$. Но первый случай исключен, так как у уравнения есть нулевое решение. Значит, у него есть еще по крайней мере $p-1$ решение.

Доказательство теоремы Варнинга настолько просто и красиво, что мы приведем его здесь, но сначала поговорим

О некоторых суммах, равных нулю

Чему равна сумма $\bar b_1+\bar b_2+\ldots+\bar b_p$ всех элементов множества F_p? Умножим все слагаемые на какой-нибудь элемент $\bar a$ из F_p, не равный $\bar 0$ и $\bar 1$. Тогда сумма умножится на этот же элемент: $\bar a\bar b_1+\bar a\bar b_2+\ldots+\bar a\bar b_p=\bar a(\bar b_1+\bar b_2+\ldots+\bar b_p)$. С другой стороны, при умножении всех элементов множества F_p на какой-нибудь элемент ($\neq\bar 0$), мы снова получим все элементы из F_p; поэтому $\bar b_1+\bar b_2+\ldots+\bar b_p=\bar a\bar b_1+\bar a\bar b_2+\ldots+\bar a\bar b_p$. Итак, $\bar b_1+\bar b_2+\ldots+\bar b_p=\bar a(\bar b_1+\bar b_2+\ldots+\bar b_p)$. Значит, $\bar b_1+\bar b_2+\ldots+\bar b_p=\bar 0$.

А чему равна сумма $\bar b_1^2+\bar b_2^2+\ldots+\bar b_p^2$ квадратов элементов множества F_p? Умножим снова все его элементы на какой-нибудь элемент $\bar a$ ($\neq\bar 0, \bar 1$). Тогда сумма по тем же причинам, что и раньше, останется прежней: $(\bar a\bar b_1)^2+(\bar a\bar b_2)^2+\ldots+(\bar a\bar b_p)^2=\bar b_1^2+\bar b_2^2+\ldots+\bar b_p^2$; с другой стороны $(\bar a\bar b_1)^2+(\bar a\bar b_2)^2+\ldots+(\bar a\bar b_p)^2=\bar a^2(\bar b_1^2+\ldots+\bar b_p^2)$. Если $\bar a^2\neq\bar 0, \bar 1$, то $\bar b_1^2+\bar b_2^2+\ldots+\bar b_p^2=\bar 0$.

И вообще: если в множестве F_p найдется такой элемент $\bar a$, что $\bar a^k\neq\bar 0, \bar 1$, то сумма k-х степеней всех элементов из F_p равна $\bar 0$.

Ясно, что если $\bar a^k=\bar 1$ для первообразного корня $\bar a$ из F_p, то тем более $\bar b^k=\bar 1$ для всех остальных элементов $\bar b\neq\bar 0$. Если $\bar a$ — первообразный корень, то $\bar a^k=\bar 1$ в том и только в том случае, когда k делится на $p-1$. В частности, если $0<k<p-1$, то $\bar a^k\neq\bar 1$ и сумма k-х степеней равна $\bar 0$. Поскольку $\bar 0^{p-1}+\bar 1^{p-1}+\ldots+\overline{p-1}^{p-1}=\overline{p-1}$, а $x^p=x$ для $x\in F_p$ (Малая теорема Ферма), мы нашли сумму k-х степеней элементов из F_p для любого $k\neq 0$:

$$\bar b_1^k+\bar b_2^k+\ldots\bar b_p^k=$$

$$=\begin{cases}\bar 0, \text{ если } k\not\equiv 0 \pmod{p-1},\\ \overline{p-1}, \text{ если } k\equiv 0 \pmod{p-1} \text{ и } k\neq 0.\end{cases}$$

Рассмотрим теперь некоторый одночлен $q = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_t^{k_t}$ и всевозможные упорядоченные наборы $\langle \bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n \rangle$, где $\bar{c}_i \in F_p$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Таких наборов p^n. Будем считать, что $t \leqslant n$. Тогда для каждого набора можно вычислить значение одночлена q, принимаемое на этом наборе: нужно подставить вместо $x_1, x_2, \ldots, x_t$ первые t чисел набора. Чему равна сумма всех этих p^n значений? (Решенная нами задача о сумме k-х степеней является частным случаем этой задачи: $q = x_1^k$, $n = 1$.) Мы предоставляем читателю исследовать этот вопрос.

Для дальнейшего нам понадобится только, что если $t < n$ или $0 < k_i < p - 1$ для некоторого i, то искомая сумма равна $\bar{0}$. Это вы без труда докажете сами.

Доказательство теоремы Варнинга

Обозначим степень многочлена $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ через m, число решений уравнения $R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{0}$ через $N(R)$. Нам надо из условия $m < n$ вывести, что $N(R)$ делится на p.

В множестве M всевозможных упорядоченных наборов элементов из F_p длины n рассмотрим подмножество M_R решений уравнения $R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{0}$. Подмножество M_R состоит из наборов $\langle \bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n \rangle$, для которых $R(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n) = 0$.

Рассмотрим функцию f_R, которая каждому элементу $\langle \bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n \rangle \in M$ сопоставляет число 1, если $\langle \bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n \rangle \in M_R$, и число 0, если $c \langle \bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n \rangle \notin M_R$.

(Функция, определенная на некотором множестве M и принимающая значение 1 на некотором подмножестве $A \subset M$ и значение 0 на остальных элементах из M, называется *характеристической функцией* подмножества A. Таким образом, функция f_R является характеристической функцией подмножества M_R.)

Из самого определения функции f_R следует, что число решений $N(R)$ уравнения $R(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{0}$ равно сумме значений функции f_R по всем элементам множества M. Это утверждение, казалось бы, ничего не добавляет к определению f_R. Тем не менее читатель увидит, что замена множества M_R функцией f_R является ключевой в доказательстве.

Рассмотрим теперь функцию $\bar{f}_R$, которая отличается от функции f_R тем, что вместо чисел 1 и 0 принимает на решениях и нерешениях соответственно значения $\bar{1}$ и $\bar{0}$ из F_p. Сумма $S(\bar{f}_R)$ значений функции $\bar{f}_R$ по всем наборам $\langle \bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n \rangle$ равна классу вычетов $\overline{N(R)}$ (по mod p) числа $N(R)$. Поэтому для доказательства теоремы Варнинга достаточно убедиться, что $S(\bar{f}_R) = \bar{0}$.

Воспользовавшись Малой теоремой Ферма, представим функцию $\bar{f}_R$ многочленом. Для этого рассмотрим многочлен $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{1} - R(x_1, x_2, \ldots, x_n)^{p-1}$. Если $R(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n) \neq 0$, то по Малой теореме Ферма $R(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n)^{p-1} = \bar{1}$ и $Q(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, c_n) = \bar{0}$. Если $R(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n) = \bar{0}$, то $R(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n)^{p-1} = \bar{0}$ и $\bar{Q}(\bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n) = \bar{1}$. Поэтому $\bar{f}_R = Q$.

Многочлен $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является суммой одночленов: $Q = q_1 + q_2 + \ldots + q_l$.

Нам достаточно проверить, что суммы значений каждого из одночленов $q_1, q_2, \ldots, q_l$ по всем наборам $\langle \bar{c}_1, \bar{c}_2, \ldots, \bar{c}_n \rangle$ равны $\bar{0}$. Тогда и сумма $S(\bar{f}_R) = S(Q)$ будет равна $\bar{0}$, поскольку $S(Q) = S(q_1) + S(q_2) + \ldots + S(q_l)$.

Возьмем, например, одночлен $q_1 = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_t^{k_t}$. Степень многочлена Q равна $(p-1)m$. Поэтому степень одночлена q_1 меньше $(p-1)n$ (по условию теоремы $m < n$). Значит, $k_1 + k_2 + \ldots + k_t < (p-1)n$. Из этого неравенства следует, что либо $t < n$, либо среди $k_1, k_2, \ldots, k_t$ найдется показатель k_i, для которого $0 < k_i < p - 1$. Равенство $S(q_1) = \bar{0}$ следует теперь из результата, сформулированного в конце предыдущего раздела.

Теорема Вейля — Лэнга

Выше мы уже говорили, что если у диофантова уравнения есть решение, то у любого приведенного уравнения (по любому простому модулю p) тоже есть решение.

Утверждение: «Если у диофантова уравнения есть ненулевое решение, то у любого приведенного уравнения есть ненулевое решение», не верно. Например, уравнение

$$x^2+y^2-3xy-9=0$$

имеет ненулевое решение ($x=3$, $y=0$), но по модулю 3 приведенное уравнение

$$x^2+y^2=\bar{0}$$

таких решений не имеет.

Тем не менее ясно, что если у диофантова уравнения есть ненулевое решение, то для всех p, начиная с некоторого, у приведенного уравнения тоже есть ненулевое решение.

Обратное неверно: уравнение

$$x^2+y^2+z^2=\bar{0} \qquad (6)$$

по теореме Шевалле имеет ненулевое решение в любом F_p, а уравнение

$$x^2+y^2+z^2=0$$

ненулевых решений (не только в **Z**, но и в **R**) не имеет *).

Рассмотрим теперь снова диофантово уравнение

$$R(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0,$$

коэффициенты которого — целые числа. Интересно знать, каково множество тех простых p, для которых существует решение по mod p. Ответ на этот вопрос дает замечательная

Теорема Вейля — Лэнга. *Если многочлен $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ абсолютно неприводим, то уравнение $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ имеет решения по простому модулю p для всех p, начиная с некоторого.*

Под *абсолютно неприводимым многочленом* мы будем понимать такой многочлен, который нельзя разложить в произведение двух многочленов по модулю p для всех p, начиная с некоторого.

*) Это не очень интересный пример: читатель может проверить, что по модулю 8 уравнение (6) ненулевых решений не имеет. В упомянутой статье М. И. Башмакова указан пример диофантова уравнения ($3x^3+4y^3+5z^3=0$), не имеющего ненулевых решений, для которого приведенное уравнение имеет ненулевое решение по любому модулю.

Условие абсолютной неприводимости в формулировке теоремы существенно: из задачи 2 к статье «Сравнения по простому модулю» следует, что уравнение $x_1^2+x_2^2=0$ разрешимо при $p=4k+1$ и неразрешимо при $p=4k+3$. Простых чисел вида $p=4k+3$ бесконечно много, поэтому заключение теоремы для многочлена $x_1^2+x_2^2$ не верно. Разумеется, для него неверна и посылка: из разрешимости уравнения $x_1^2+x_2^2=0$ по модулю $p=4k+1$ (а простых чисел этого вида тоже бесконечно много) следует, что оно разложимо на множители по этому модулю.

Можно доказать, что «подавляющее большинство» многочленов абсолютно неприводимы.

В отличие от теоремы Варнинга, доказательство теоремы Вейля — Лэнга в общем случае очень трудно.

Рассмотрим один очень частный случай уравнения $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$: когда многочлен R — первой степени: $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n+b$ (хотя бы один из коэффициентов a_i предполагается отличным от 0). Легко видеть, что в этом случае $N(R)=p^{n-1}$. Действительно, можно считать (переставив, если нужно, неизвестные), что $a_1\neq\bar{0}$; тогда, придавая $x_2, \ldots, x_n$ всевозможные значения из F_p и положив $x_1=-a_1^{-1}(a_2x_2+\ldots+a_nx_n+b)$, мы получим решение.

Теорему Вейля — Лэнга можно уточнить: при больших p

$$|N(R)-p^{n-1}|<c\cdot p^{\frac{n-1}{2}},$$

где c — некоторое число, зависящее от многочлена R.

Первоначальное доказательство Вейля основано на открытых им глубоких связях между, казалось бы, далекими вопросами: дискретной, и даже конечной, задачей о числе решений уравнения $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0$ по простому модулю и геометрическим строением непрерывного множества комплексных решений этого уравнения, то есть тех наборов комплексных чисел $\langle d_1, d_2, \ldots, d_n\rangle$, для которых $R(d_1, d_2, \ldots, d_n)=0$.

Недавно элементарное (не использующее никаких косвенных методов), но тем не менее весьма сложное доказательство теоремы Вейля — Лэнга дал свердловский математик С. А. Степанов.

В. Кравцов, И. Сербин

Уголковые отражатели

Уголковые отражатели — это устройства, которые применяются для отражения радиолокационных или оптических лучей в направлении, противоположном первоначальному. Еще в недавнем прошлом оптические уголковые отражатели использовались только как скромное дорожное предупредительное устройство — на велосипедах, автомобилях, поездах, на дорожных указателях. Назывались они катафотами *). В настоящее время уголковые отражатели находят очень широкое применение: они используются и в навигационной радиолокации, и в метеорологии, и в космических исследованиях.

Как же «работает» уголковый отражатель?

Устройство его очень просто. На рисунке 1 приведены различные типы уголковых отражателей. Это может быть треугольная призма, две боковые грани которой взаимно перпендикулярны (рис. 1, *а*). Эти грани ($OAA'O'$ и $OBB'O'$) с внутренних сторон покрыты тонким слоем материала, хорошо отражающего свет. Уголковый отражатель может представлять собой четырехгранную пирамиду (рис. 1, *б*), три взаимно перпендикулярные грани которой (AOB, BOC и AOC) посеребрены. Радиолокационные уголковые отражатели — это три взаимно перпендикулярные плоские пластины (рис. 1, *в*), изготовленные из материала, хорошо отражающего радиоволны.

Как видно, уголковый отражатель можно схематично представить как систему взаимно перпендикулярных плоских зеркал. Чтобы лучше понять принцип действия отражателя, рассмотрим, как изменяет ход световых лучей система из двух таких зеркал ($З_1$ и $З_2$ на рисунке 2).

Луч S, падающий на зеркало $З_1$ под углом φ_1, отражается от него (в точке A), попадает на зеркало $З_2$ под углом φ_2 и отражается от него (в точке B). Легко видеть, что в результате отражений луч «поворачивается» на угол $2\varphi_1+2\varphi_2=180^\circ$, то есть луч отраженный параллелен лучу падающему и направлен в противоположную сторону.

Роль двух таких зеркал выполняют в отражателе-призме (рис. 1, *а*) грани $OAA'O'$ и $OBB'O'$. Луч света, падающий на грань-«гипотенузу» $BAA'B'$, после отражений в призме выходит строго в обратном направлении. Отметим, что преломление луча на грани-гипотенузе не сказывается

*) «Катафот» (греч.) — отражатель света назад к источнику.

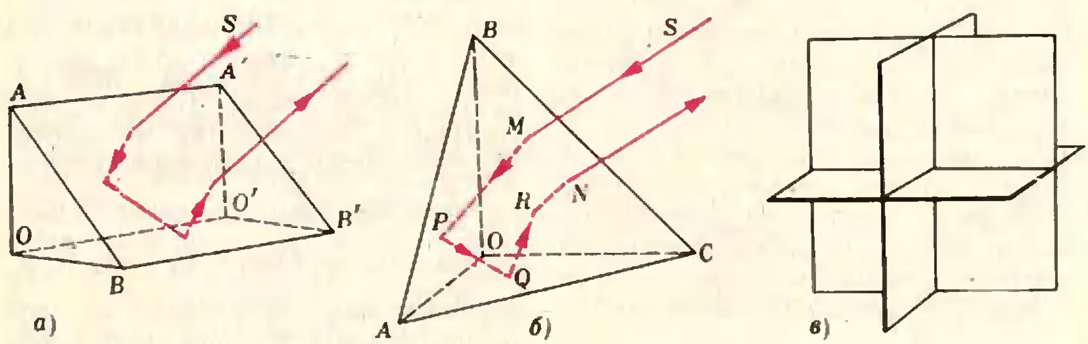


Рис. 1.

на «оборачивающем» действии отражателя (рис. 3). (Очевидно, что если луч падающий и луч отраженный параллельны друг другу по одну сторону от преломляющей грани $BAA'B'$ — внутри угла, то они параллельны и по другую ее сторону.)

Однако отражатель, состоящий из двух взаимно перпендикулярных зеркал, «обращает» только те лучи, которые лежат в плоскости, перпендикулярной к ребру двугранного угла, образованного зеркалами. Этого недостатка лишен отражатель, состоящий из трех взаимно перпендикулярных зеркал. Покажем, что всякий луч, попавший на такой отражатель и испытавший последовательно отражения от всех трех зеркал, изменит свое направление на прямо противоположное.

Для этого предварительно рассмотрим, как изменяется единичный вектор, определяющий направление луча, при отражении луча от плоского зеркала. На рисунке 4 *З* — плоское зеркало, *S* — луч, падающий на зеркало под углом φ, $\vec{s}$ — единичный вектор, определяющий направление падающего луча, $\vec{n}$ — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости зеркала, $\vec{s}\,'$ — единичный вектор, определяющий направление отраженного луча (векторы $\vec{s}$, $\vec{n}$ и $\vec{s}\,'$ лежат в одной плоскости). Представим каждый из векторов $\vec{s}$ и $\vec{s}\,'$ в виде суммы двух векторов (будем называть их «составляющими»):

$$\vec{s} = \vec{s}_{\parallel} + \vec{s}_{\perp}, \quad \vec{s}\,' = \vec{s}\,'_{\parallel} + \vec{s}\,'_{\perp},$$

где составляющие $\vec{s}_{\parallel}$ и $\vec{s}\,'_{\parallel}$ параллельны плоскости *З*, а $\vec{s}_{\perp}$ и $\vec{s}\,'_{\perp}$ перпендикулярны к этой плоскости. Из закона отражения света следует, что $\vec{s}\,'_{\parallel} = \vec{s}_{\parallel}$, а $\vec{s}\,'_{\perp} = -\vec{s}_{\perp}$, то есть при отражении луча составляющая вектора $\vec{s}$, параллельная плоскости зеркала, не меняется, а составляющая, перпендикулярная к этой плоскости, меняет знак на противоположный.

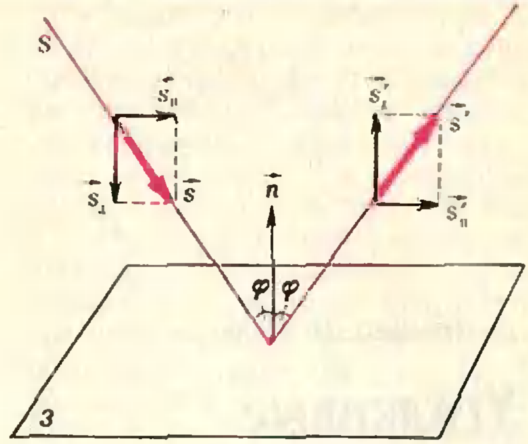


Рис. 4.

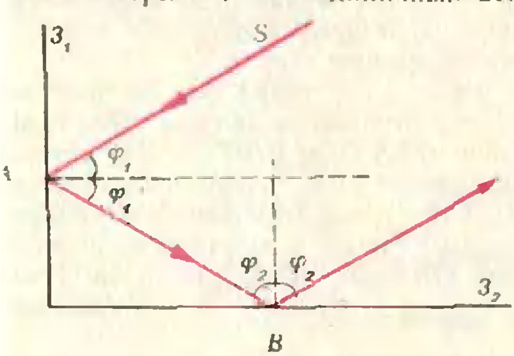


Рис. 2.

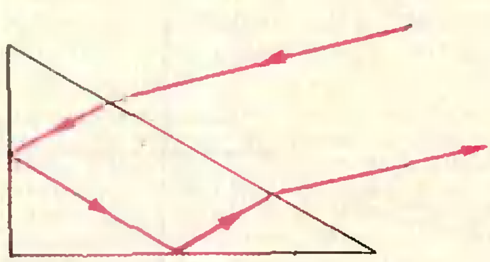


Рис. 3.

Теперь рассмотрим три взаимно перпендикулярных плоских зеркала — $З_1$, $З_2$ и $З_3$ на рисунке 5. Пусть *S* — луч, падающий на систему этих зеркал; $\vec{s}$ — единичный вектор в направлении луча *S*. Представим $\vec{s}$ как сумму трех составляющих $\vec{s}_x$, $\vec{s}_y$ и $\vec{s}_z$, параллельных осям *X*, *Y* и *Z* соответственно. После первого отражения — отражения от зеркала $З_1$ — луч идет по направлению, определяемому единичным вектором $\vec{s}\,'$. Составляющие вектора $\vec{s}\,'$-это — $\vec{s}_x$, $\vec{s}_y$, $\vec{s}_z$, (составляющая $\vec{s}_x$ вектора $\vec{s}$, перпендикулярная к плоскости зеркала $З_1$, меняет знак на противопо-

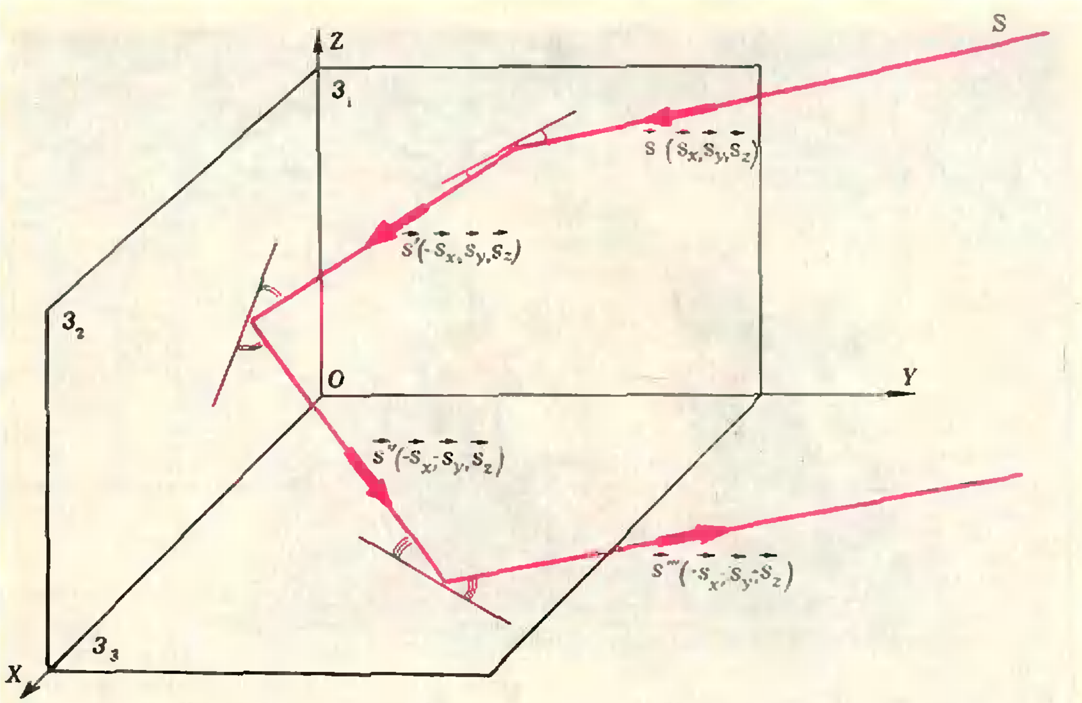


Рис. 5 .

ложный, а составляющие $\vec{s}_y$ и $\vec{s}_z$, параллельные этой плоскости, остаются неизменными). Проследив последовательные отражения луча от зеркал $З_2$ и $З_3$, мы убедимся, что после третьего отражения (от $З_3$) луч идет по направлению, задаваемому единичным вектором $\vec{s}'''$, составляющие которого равны соответственно $-\vec{s}_x, -\vec{s}_y, -\vec{s}_z$. Значит, любой луч, попадающий на систему трех взаимно перпендикулярных зеркал, отражается этой системой в направлении, противоположном первоначальному.

Такую систему зеркал образуют три взаимно перпендикулярные посеребренные грани уголкового отражателя-пирамиды (см. рис. 1, *б*). Наличие «закрывающей» угол грани *ABC* не нарушает действия отражающих граней *AOB*, *BOC* и *AOC*.

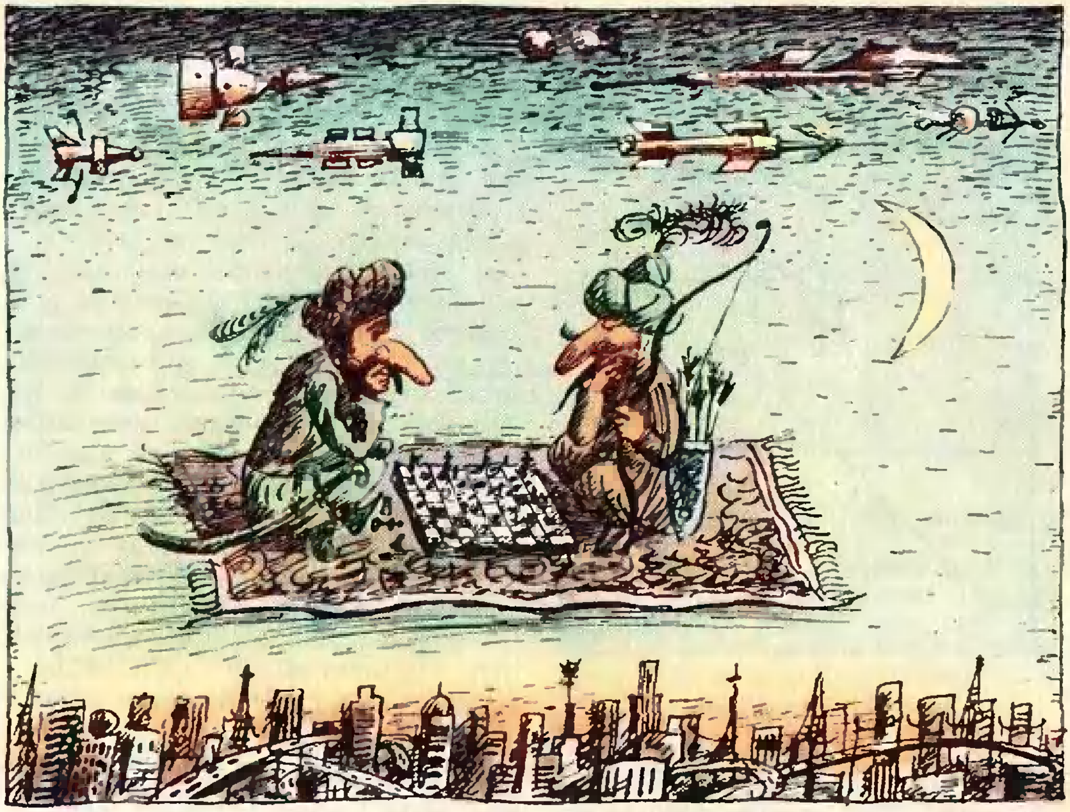
Мы уже говорили о том, какое широкое применение находят уголковые отражатели. Самые «старые» из них, катафоты, можно представить себе как набор отражателей-призм, скомпанованных таким образом, что ребра двугранных углов, образованных отражающими гранями, лежат в одной плоскости и повернуты друг относительно друга под всевозможными углами. Каждая такая призма отражает «назад» лучи, перпендикулярные к ребру двугранного угла. Оттого катафот и кажется светящимся.

В повседневной практике уголковые отражатели типа изображенного на рисунке 1, *в* используются в навигационной радиолокации. Например, бакены и буйки, снабженные такими отражателями, становятся более заметными для радиолокаторов. С помощью отражателей, прикрепленных к метеорологическим шарам-зондам, радиолокационным методом определяются скорость и направление ветра на большой высоте.

Уникальны по своему применению оптические уголковые отражатели в космических исследованиях. Помещенный на искусственный спутник или на космический корабль отражатель позволяет с очень большой точностью определять расстояния до этих объектов. При этом в качестве луча-локатора используется луч лазера.

В 1969 году уголковый отражатель был доставлен экипажем американского космического корабля Аполлон-II на Луну. Через год на Луне появился второй уголковый отражатель — установленный на советском автоматическом самоходном аппарате

(Окончание см. на с. 46)



Е. Гик

Существует ли бесконечная шахматная партия?

Новые правила проведения матча на первенство мира по шахматам в принципе допускают ситуацию, при которой матч может продолжаться до бесконечности или до полного истощения одного или обоих участников.

А может ли сама шахматная партия длиться бесконечно долго?

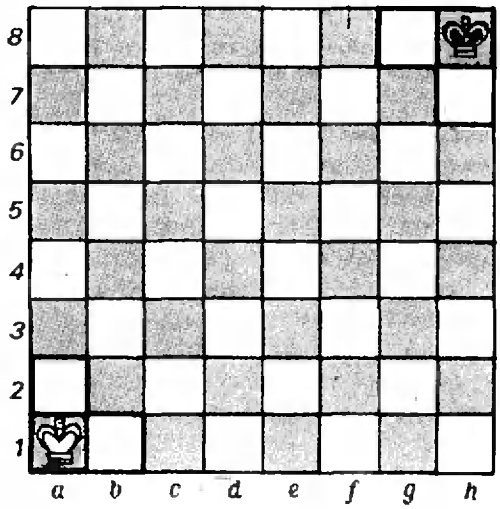
Если на доске возникла матовая позиция, то ясно, что сколь долго бы ни длилась данная партия до наступления этой позиции, она окончится за конечное число ходов. Таким образом, результативная партия не может быть бесконечной. В ничейной же позиции партия могла бы продолжиться бесконечно, если бы в правилах шахмат не было специальных оговорок.

Напомним известное правило о ничьих в шахматной партии: если на доске три раза или более возникает *одна и та же позиция*, то в этот момент вы имеете право потребовать ничью. Говоря, что позиция *одна и та же*, мы имеем в виду, что одни и те же фигуры занимают одни и те же поля. При этом очередь хода должна быть за одной и той же стороной и внутренние возможности позиции тоже должны быть одинаковыми (это касается рокировки и взятия пешек «на проходе»).

Будем считать, что при троекратном повторении позиции *ничья наступает автоматически*. Тогда из конечности числа шахматных позиций следует, что продолжительность шахматной партии ограничена сверху. Обозначим число различных позиций на доске через A.

Упражнение 1. *Найдите какую-нибудь верхнюю оценку для* A.

Ясно, что тогда ни одна партия не может продолжаться более чем $3A$ ходов (под ходом мы понимаем два



полухода — белых и черных). Действительно, за это время по крайней мере одна позиция повторится трижды (при очереди хода у одной и той же стороны), и, если партия не закончилась раньше, то в игру вмешается судья и зафиксирует ничью. Следовательно, при нашем предположении (которого нет в шахматном кодексе!), правило о троекратном повторении позиции исключает бесконечную партию.

Предположим теперь, что ничья наступает при *троекратном повторении* не одной и той же позиции, а *одной и той же серии ходов подряд*. Покажем, что при этом условии может существовать бесконечная шахматная партия, т. е. существует такая партия, в которой никакая серия ходов не повторяется три раза подряд.

Рассмотрим простейший случай, когда на доске перемещаются только короли. Более того, каждому из них разрешим маневрировать всего на трех полях! Пусть белый король перемещается в левом нижнем углу — по полям a1, a2, b1, а черный в правом верхнем — по полям h8, h7, g8 и других фигур на доске нет. Обозначим ход каждого короля по часовой стрелке через 1, а против часовой стрелки через 2. *Если начальное положение королей зафиксировано, то всякому их передвижению соответствует определенная последовательность из единиц и двоек. Верно и обратное: любая последовательность из единиц и двоек задает некоторое передвижение королей.* Если, например, короли стоят на угловых полях (белый — на a1, черный — на h8), то последовательности 12 21 21 12 21 12 соответствуют такие ходы: 1. Кр a1—a2 (первый член последовательности 1 — белый король идет по часовой стрелке) 1 ... Кр h8 — g8 (второй член 2 — черный король идет против часовой стрелки) 2. Кр a2 — a1 Кр g8 — h8 3. Кр a1 — b1 Кр h8 — h7. 4. Кр b1 — a1 Кр h7 — h8 5. Кр a1 — b1 Кр h8 — h7 6. Кр b1 — a1 Кр h7 — h8.

Таким образом, на языке математики наша задача может быть сформулирована так: *доказать, что существует такая бесконечная последовательность, состоящая из цифр 1 и 2, в которой нет трех одинаковых рядом стоящих групп цифр.* В книге А. М. и И. М. Ягломов *) доказано, что существуют сколь угодно длинные последовательности, состоящие из цифр 1 и 2, в которых нет одинаковых рядом стоящих трех цифр.

В «Кванте» была напечатана статья Г. Гуревича **), в которой было доказано, что существуют бесконечные последовательности, состоящие из цифр 1 и 2, в которых нет одинаковых рядом стоящих трех цифр. Следовательно, существует и бесконечная партия, в которой ни одна серия ходов не встречается три раза подряд.

Укажем теперь правила шахматного кодекса, которые исключают существование бесконечной партии.

Это, во-первых, «правило пятидесяти ходов»: если в течение 50 ходов подряд на доске не была взята ни одна фигура и ни одна пешка не сделала хода, то партия считается законченной вничью. Во-вторых, партия считается ничейной в том случае, если на доске возникла позиция, в которой выигрыш невозможен (король против короля, король против короля и легкой фигуры, король и слон против короля и слона «того же цвета»).

---

*) А. М. Яглом, И. М. Яглом. Неэлементарные задачи в элементарном изложении. М., Гостехиздат, 1954. Задача 123б).

**) «Квант», 1975, № 9.

Пользуясь этими правилами, можно оценить число ходов самой длинной шахматной партии. Произведем соответствующие расчеты. Шестнадцать пешек в процессе игры могут сделать максимум $16 \times 6 = 96$ ходов. Пусть все эти ходы сделаны — тогда пешки взяли по крайней мере 8 фигур (если пешки, стоящие на одной вертикали, проходят «сквозь друг друга», то осуществляется хотя бы одно взятие). Если было произведено ровно 8 взятий, то еще могут быть взяты $2 \times 7 - 8 = 6$ оставшихся фигур и $2 \times 8 = 16$ превращенных фигур, итого $6 + 16 = 22$. Таким образом, общее число взятий и движений пешек не более $96 + 22 = 118$.

Упражнение 2. *Докажите, что если число движений пешек меньше 96, то общее число движений и взятий может только уменьшиться.*

Поскольку между каждым продвижением пешки или взятием может быть сделано не более 50 ходов (точнее говоря, на 50-м ходу пешка должна продвинуться или фигура должна быть взята), а после последнего взятия партия сразу прекращается (на доске остались одни короли!), то общая продолжительность партии не более $50 \times 118 = 5900$ ходов.

Более тонкий (чисто шахматный!) анализ показывает, что самая длинная шахматная партия продолжается на два хода меньше — 5898.

Список читателей, приславших правильные решения задач из Задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии читателей, приславших правильные решения задач М496—М505 и Ф493—Ф507 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

В большинстве присланных нам писем задача **М500а)** решалась правильно. Остальные задачи решили: *К. Абдухаликов* (Алма-Ата) **6, 9, 0б), в), 1, 3**; *Е. Абрамочкин* (Куйбышев) **9**; *А. Агаев* (С. Покровка АзССР) **7, 9, 0б)**; *Д. Агаев* (с. Зарнава АзССР) **9**; *С. Азнабаев* (Новотроицк) **7, 9, 0б), в), 2**; *К. Аминов* (Казань) **6, 9, 0б), в)**; *И. Артюшкин* (Пенза) **6, 8, 9**; *К. Архангельский* (Киев) **7, 9, 0б), в)**; *Б. Баасандорж* (МНР) **9**; *А. Бадалян* (пос. Берд Арм. ССР) **8, 9, 0б), в), 1—3, 5а)**; *Б. Байсакалов* (Алма-Ата) **6, 9, 2**; *Ю. Балаян* (Баку) **7, 9, 0б)**; *А. Балинский* (с. Дубляны Львовской обл.) **7, 8, 0б), 3, 5а)**; *В. Батырев* (Москва) **6—9, 0б), 2, 4а), 4б), 5а), 5б)**; *Б. Бегун* (Москва) **6, 9**; *А. Бекжанов* (Алма-Ата) **9, 0б), в), 2**; *А. Белов* (Ленинград) **6—9**; *Л. Беляев* (Харьков) **6**; *Г. Бокк* (Воронеж) **6, 7, 9, 0б), г), 1—3, 5а)**; *В. Болотников* (Харьков) **7, 9, 1, 2, 5а)**; *А. Бондарев* (Харьков), **6, 9, 0б)**; *А. Боричев* (Ленинград) **6, 3, 5а)**; *И. Бородин* (Соликамск) **9, 0б), в)**; *О. Бохонов* (Кобрин) **6, 7, 9, 3**; *А. Бржезинска* (ПНР) **3**; *А. Броварник* (Кривой Рог) **9**; *С. Буга* (Москва) **6, 8, 9, 0б)**; *А. Васильев* (Саратов) **6, 9**; *С. Васильев* (Калинин) **2, 3**; *С. Васильев* (Саратов) **9, 0б)**; *В. Виноградов* (Казань) **6, 9, 2, 5а)**; *И. Власов* (Мичуринск) **9**; *Д. Володько* (Долгопрудный) **9, 0б), в)**; *М. Гайсинский* (Ташкент) **9**; *В. Галактионов* (Пенза) **6**; *А. Галенко* (Пенза) **6, 3, 5а)**; *А. Гильман* (Москва) **6—9, 0б), в), 1—3, 4а), 5а)**; *Ю. Глухов* (Щелково) **6, 8, 9, 1**; *М. Габанов* (Караганда) **6, 9, 2**; *А. Головин* (Москва) **9**; *О. Головинская* (Киев) **5а)**; *О. Гордиенко* (Павлодар) **6, 9, 0б), в)**; *М. Горелов* (Белорецк) **1—3, 4а), 5а)**; *Е. Горелова* (Саратов) **2**; *Е. Горшкова* (Пермь) **0б), в)**; *Г. Грабарник* (Ташкент) **6, 7, 9, 0б), в), 1, 2, 5а)**; *Н. Гринберг* (Киев) **6, 9**; *В. Грищенко* (Павлодар) **9**; *В. Губа* (Вологда) **6—9, 0б), в), 1—3, 4а)—в), 5а)**; *С. Гузов* (Львов) **1**; *А. Даценко* (Харьков) **6, 9, 0в)**; *В. Джалоян* (с. Чншан Арм. ССР) **9, 0б), в), 1—3**; *В. Цимантман* (Баку) **6, 9, 1—3, 5а)**; *О. Дмитриев* (Саратов) **6, 9, 0б)**; *А. Дороговцев* (Киев) **6, 7**; *В. Дубинин* (Ворошиловград) **2**; *И. Елишевич* (Чернигов) **6, 9, 1**; *Н. Жернаков* (Золотоноша Черкасской обл.) **6, 7, 9, 2, 3, 5а)**; *В. Жилич* (с. Хабары Алтайского края) **6**; *С. Забаринов* (д. Харчи Ивановской обл.) **2**; *Е. Задумова* (Саратов) **2**; *В. Заев* (пос. Печенга Мурманской обл.) **6, 8, 2, 3**; *И. Зверович* (Минск) **9**; *Е. Зиманов* (Алма-Ата) **6, 9, 0б), в)**; *А. Золотарев* (Николаев) **6**; *М. Ибрагимов* (Шуша) **6, 9, 3**; *О. Ижболдин* (Ленинград) **6—9**; *Р. Измайлов* (Баку) **8—3, 5г)**; *А. Ильин* (Фрунзе) **9, 0б)**; *Ф. Кабдылаиров* (Алма-Ата) **7, 9, 0б), 1, 2**; *С. Калашников* (Рязань) **9**; *А. Каплан* (Сумгаит) **6, 7, 9, 1, 3, 5а)**; *Г. Карагулян* (Ереван) **7, 9, 1, 2, 4а)—в), 5а)**; *А. Кац* (Ташкент) **9**; *Г. Квернадзе* (Тбилиси) **9**; *А. Келарев*

(*Продолжение см. на с. 36*)

В. Мильман

Почему сгоревшая спичка изогнута?

Известно, что играть со спичками опасно, — это может привести к пожару. Но давайте все-таки, соблюдая самые тщательные меры предосторожности, проведем серию простых опытов с горящими спичками. Мы предлагаем вам понаблюдать, как меняется форма спички при горении.

Прежде чем приступить к опытам, обеспечим их полную безопасность. Спички нужно будет держать пинцетом над тазом с водой, который должен стоять на металлическом листе. Выполнив соответствующие приготовления, приступим к опытам.

Опыт 1. Держим зажженную спичку горизонтально. Пламя передвигается по спичке, и по мере его перемещения сгоревшая часть спички поднимается. У разных спичек высота этого подъема различна. Некоторые спички при этом закручиваются (рис. 1). Важно отметить, что «загибается» уже остывший (обгоревший) участок спички.

Опыт 2. Зажженную спичку держим в пламени плиты. Обгоревшая спичка почти не загибается.

Опыт 3. Посмотрим, как горят разные по толщине спички. Утолщенные спички загибаются больше обычных, а лучинки, отколотые от спички, — меньше.

Посмотрим еще раз внимательно на горящую спичку, расположенную горизонтально. Пламя медленно продвигается вдоль спички; при этом древесина, находящаяся в пламени, еще ровная (не загибается). Цвет этой части спички — черный. Значит, температура этого участка сравнительно невелика — не выше $500 \div 600$°C. Сразу за пламенем движется узкий (≈ 2 мм) красный поясок. Это — зона с максимальной температурой ($\sim 700 \div 750$°C), в которой только что закончилось горение. Если посмотреть на этот поясок сбоку, «в профиль», то видно, что верхняя его часть раскалена докрасна, а нижняя — черного цвета. Значит, верхняя часть спички начинает остывать, имея более высокую температуру, и поэтому дольше сохраняет красный цвет. Причина такого неравномерного горения — конвекционные потоки воздуха.

Может быть, именно этим — разностью температур верхней и нижней частей спички — и объясняется тот факт, что горящая спичка загибается? Причем загибается так, что выпуклость всегда направлена в сторону более низкой (при горении) температуры. Это предположение подтверждается такими опытами: если осторожно (так, чтобы она не погасла) дуть сверху на горящую спичку, то после сгорания получается почти ровный уголек — мы сдуваем пламя вниз, температуры верхней и нижней частей выравниваются; если к горящей спичке прикоснуться снизу холодным металлическим предметом (например, гвоздем) и подержать его немного (так, чтобы спичка не погасла), то спичка будет загибаться сильнее, чем при обычном горении.

Итак, качественно наше предположение о причинах, вызывающих

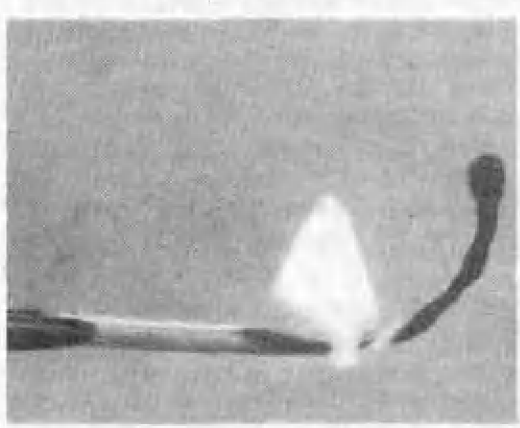


Рис. 1.

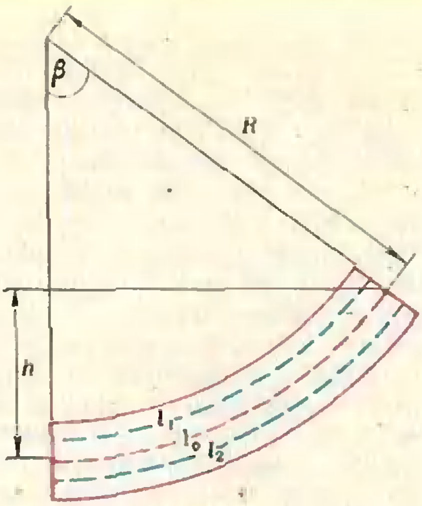


Рис. 2.

загибание спички, как будто оправдывается. Попробуем произвести количественную оценку. Для этого воспользуемся следующей моделью.

Условно разделим спичку горизонтальной плоскостью на две части. Во время горения температура верхней части выше, чем нижней, но их длины одинаковы. При остывании верхняя, более нагретая часть сжимается (укорачивается) сильнее, чем нижняя, так как разность температур этой части спички и окружающего воздуха больше. Поэтому длина верхней части остывшей спички будет меньше, чем длина нижней ее части, и спичка изогнется выпуклостью вниз (в сторону более холодной при горении части). Такая модель напоминает биметаллическую пластинку — пластинку из двух сваренных металлов с разными коэффициентами теплового расширения. Основываясь на этой модели, оценим разность температур верхней и нижней частей спички в области красного пояска.

Пусть l_0 — длина спички, d — ее толщина. Для приближенной оценки можно считать, что в результате горения эти размеры почти не меняются. Однако длины верхней и нижней частей сгоревшей изогнутой спички не одинаковы. Разность длин средних сечений этих частей равна

$$l_2 - l_1 = l_0\alpha\Delta t, \qquad (1)$$

где α — коэффициент теплового расширения древесины, Δt — разность максимальных температур верхней и нижней частей спички;

$$l_1 = \beta\left(R - \frac{d}{4}\right), \quad l_2 = \beta\left(R + \frac{d}{4}\right),$$

$$l_2 - l_1 = \frac{\beta d}{2} = \frac{l_0}{R}\frac{d}{2} \qquad (2)$$

(см. рис. 2). Сравнивая (1) и (2), получаем выражение для R:

$$R = \frac{d}{2\alpha\Delta t}. \qquad (3)$$

Измерить величину R нелегко, но через R можно выразить легко измеряемую величину h (см. рис. 2):

$$h = R(1 - \cos\beta) = R\left(1 - \cos\frac{l_0}{R}\right).$$

Для нашей оценки с достаточно хорошим приближением можно считать, что $1 - \cos\beta = \frac{\beta^2}{2}$ *), и $h = \frac{l_0^2}{2R}$.

Подставив в это выражение значение R (см. (3)), получим

$$h = \frac{l_0^2\alpha\Delta t}{d}.$$

Отсюда находим Δt:

$$\Delta t = \frac{h}{l_0^2}\frac{d}{\alpha}. \qquad (4)$$

Итак, чтобы оценить величину Δt, нам нужно экспериментально найти отношение h/l_0^2. Результаты измерений показывают, что с достаточно хорошим приближением можно считать

$$h/l_0^2 = \text{const} \approx 10^{-2}.$$

Принимая $d = 1$ мм, $\alpha = (5 \div 10)\cdot 10^{-5}$ град$^{-1}$, по формуле (4) находим $\Delta t = (100 \div 200)$ (град).

Измерения Δt, сделанные с помощью термопары, дали значения $t_{верхн} = (730 \pm 10)$°C, $t_{нижн} = (650 \pm 10)$°C и $\Delta t = (80 \pm 20)$°C. Как видно, сделанная нами теоретическая оценка неплохо согласуется с этими данными. Так что можно считать, что рассмотренная модель, которая никоим образом не учитывает химической природы процесса горения, верна.

Возможно, наблюдая за горящей спичкой, вы предложите какое-нибудь другое объяснение причин ее загибания. Тогда постарайтесь обосновать и проверить свои предположения. И проводя свои эксперименты, помните: НЕОБХОДИМО СОБЛЮДАТЬ ОСТОРОЖНОСТЬ!

*) Погрешность формулы не превышает 1% при $\beta < 38°$ и 10% — при $\beta < 60°$.

Г. Гальперин, А. Кушниренко

Спутники и задача уплощения

Большинство задач, с которыми школьники сталкиваются на олимпиадах, конкурсах и страницах математических книг и журналов — это задачи так называемого олимпиадного типа: их решение, как правило, основывается на одной-единственной идее. В работе профессионала-математика такие задачи возникают достаточно часто, но столь же часто математику приходится иметь дело с задачами, в решении которых нужно использовать несколько рассуждений совершенно разного типа.
В этой статье мы хотим познакомить читателя с решением одной такой неолимпиадной задачи.

1. Уплощение и ориентированный объем

Иногда три небесных тела оказываются на одной прямой. Если это Солнце, Земля и Луна, то астрономы называют такое явление *затмением*, а если три произвольных тела — то *сизигией*.

Затмения, сизигии и другие редкие расположения небесных тел издавна интересуют астрономов и математиков. В этой статье мы будем заниматься одним из таких редких явлений — попаданием четырех небесных тел в одну плоскость; назовем это явление *уплощением*. Точнее говоря, мы будем решать задачу об уплощении в космической системе, состоящей из планеты и трех ее спутников.

Задача. *Вокруг планеты O по трем различным круговым орбитам с центром O равномерно вращаются три ее спутника P_1, P_2 и P_3 с угловыми скоростями ω_1, ω_2 и ω_3. Обязательно ли найдется момент времени, в который произойдет уплощение?*

Оказывается, что при некоторых значениях угловых скоростей момент уплощения рано или поздно наступает при любых начальных положениях спутников, а при некоторых других угловых скоростях удается подобрать такие начальные положения спутников, что момент уплощения не наступает никогда.

Поставленный выше вопрос для трех конкретных значений угловых скоростей:

а) $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 1$;
б) $\omega_1 = \omega_2 = 1$, $\omega_3 = 2$;
в) $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 3$, $\omega_3 = 4$

составил содержание задачи **М495** из Задачника «Кванта» («Квант», 1978, № 3).

Приступая к изучению уплощений, мы прежде всего должны научиться описывать уплощение алгебраически. Возникает

Вопрос 1. *Как, зная координаты трех точек в пространстве, определить, лежат ли эти точки в плоскости, проходящей через начало координат?*

Рассмотрим сначала вопрос полегче.

Вопрос 2. *Как, зная координаты двух точек на плоскости, определить, лежат ли эти точки на прямой, проходящей через начало координат?*

Ответ. Обозначим координаты данных точек M_1 и M_2 через $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$. Мы утверждаем, что *прямая M_1M_2 тогда и только тогда проходит через начало координат, когда выражение $x_1y_2 - y_1x_2$ обращается в нуль.*

Действительно, если $x_1y_2 = y_1x_2$, то при $x_1 \neq 0$ и $x_2 \neq 0$ можно написать $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = k$, т. е. точки M_1, M_2 расположены на прямой $y = kx$.

Обратно: если M_1 и M_2 лежат на прямой $y = kx$ и $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, то $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = k$ и $x_1y_2 - y_1x_2 = 0$. (Случаи $x_1 = x_2 = 0$ и $x_1 = 0$, $x_2 \neq 0$ разберите сами.)

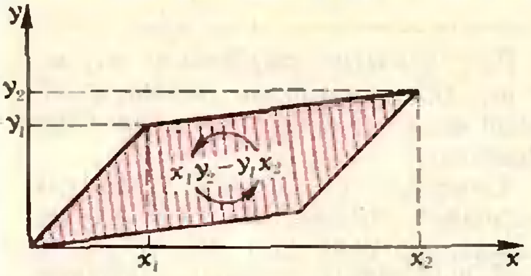


Рис. 1.

Упражнение. Докажите, что число $|x_1y_2-y_1x_2|$ равно площади параллелограмма со сторонами OM_1 и OM_2.

Это упражнение поясняет, почему выражение $x_1y_2-x_2y_1$ называют *ориентированной площадью параллелограмма* (рис. 1).

Вернемся к вопросу 1.

Утверждение 1. *Три точки $P_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $P_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ и $P_3(x_3;\ y_3;\ z_3)$ пространства расположены в плоскости, проходящей через начало координат, тогда и только тогда, когда выражение*

$$z_1(x_2y_3-x_3y_2)-z_2(x_1y_3-x_3y_1)+z_3(x_1y_2-x_2y_1) \qquad (*)$$

обращается в нуль.

Доказательство этого утверждения можно найти, например, в книге У. Сойера «Прелюдия к математике»*). Геометрический же смысл его весьма прост: выражение (*) есть так называемый *ориентированный объем параллелепипеда*, построенного на ребрах OP_1, OP_2, OP_3, где O — начало координат. (Модуль ориентированного объема равен обычному объему.)

Из утверждения 1 мы получаем, что *уплощение точек O* (0; 0; 0), $P_1(x_1;y_1;z_1)$, $P_2(x_2;y_2;z_2)$ *и* $P_3(x_3;y_3;z_3)$ *происходит тогда и только тогда, когда выражение* (*) *обращается в нуль.*

Подготовительная работа проведена: мы можем приступать к изучению случаев а)—в).

2. Простейший случай: $\omega_1=\omega_2=\omega_3=1$

Положение спутника P_1 в момент времени t обозначим через $P_1(t)$; координаты точки $P_1(t)$ обозначим через $x_1(t)$, $y_1(t)$, $z_1(t)$. Аналогично введем точки $P_2(t)$, $P_3(t)$ и их координаты.

Ориентированный объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{OP_1}(t)$, $\overrightarrow{OP_2}(t)$, $\overrightarrow{OP_3}(t)$, обозначим через $V(t)$. Мы получим явное выражение для $V(t)$, если заменим в выражении (*) x_1 на $x_1(t)$, x_2 на $x_2(t)$ и т. д.:

$$\begin{aligned}V(t) = {} & z_1(t)\,[x_2(t)\,y_3(t) - \\ & - x_3(t)\,y_2(t)] - \\ & - z_2(t)\,[x_1(t)\,y_3(t) - \\ & - x_3(t)\,y_1(t)] + \\ & + z_3(t)\,[x_1(t)\,y_2(t) - \\ & - x_2(t)\,y_1(t)]. \qquad (**)\end{aligned}$$

Точка $P_1(t)$ совершает равномерное круговое движение вокруг точки O с угловой скоростью $\omega_1=1$. Поэтому при любом t точки $P_1(t)$ и $P_1(t+\pi)$ лежат в противоположных концах некоторого диаметра орбиты, т. е. $\overrightarrow{OP_1}(t+\pi)=-\overrightarrow{OP_1}(t)$, или

$$x_1(t+\pi)=-x_1(t),$$
$$y_1(t+\pi)=-y_1(t),$$
$$z_1(t+\pi)=-z_1(t).$$

То же самое справедливо и для остальных двух точек ($\omega_2=\omega_3=1$). Отсюда и из формулы (**) мы получаем, что

$$V(t+\pi)=-V(t).$$

Про функцию $V(t)$ нам известно довольно мало, однако все же известно, что это — непрерывная функция. Следовательно, *между моментами t и $t+\pi$, в которые знаки функции V разные, найдется хотя бы один момент t, в который $V(t)=0$.* В этот самый момент и происходит уплощение.

Замечание. Фраза, выделенная выше курсивом, использует очень важную теорему анализа: *если непрерывная на отрезке $[a;\ b]$ функция V принимает в точках a и b значения разных знаков, то в некоторой точке отрезка $[a;\ b]$ функция V обращается в нуль.*

3. Случай $\omega_1=\omega_2=1$, $\omega_3=2$

Проведем через точки O, $P_1(t)$ и $P_2(t)$ плоскость $\pi(t)$. Она пересечет орбиту спутника P_3 в двух точках — концах диаметра $D(t)$ (рис. 2). (То, что мы сделали, разумеется,

*) М., «Просвещение», 1965.

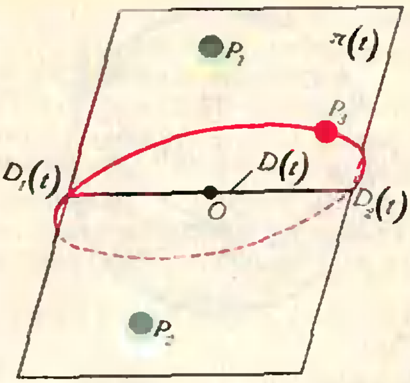


Рис. 2.

имеет смысл только тогда, когда точки O, $P_1(t)$ и $P_2(t)$ в момент времени t не находятся на одной прямой. Если же в момент времени t_0 точки O, $P_1(t_0)$, $P_2(t_0)$ лежат на одной прямой, то t_0 — момент уплощения.) С течением времени диаметр $D(t)$ вращается, но, разумеется, неравномерно.

Обозначим концы диаметра $D(t)$ через $D_1(t)$ и $D_2(t)$. Момент уплощения соответствует попаданию равномерно вращающейся точки $P_3(t)$ в одну из точек $D_1(t)$, $D_2(t)$.

Поскольку ω_1 и ω_2 — целые числа, диаметр $D(t)$ вращается хотя и неравномерно, но периодически: $D(t+2\pi)=D(t)$ (так как $P_1(t+2\pi)=P_1(t)$, $P_2(t+2\pi)=P_2(t)$). Но и $P_3(t+2\pi)=P_3(t)$, так что можно ограничиться рассмотрением движения за время 2π. Таким образом, у диаметра $D(t)$ существует средняя угловая скорость вращения, равная средней угловой скорости его вращения за время 2π; обозначим ее через ω.

Спрашивается: как связана скорость ω с ω_1 и ω_2?

Утверждение 2. *Если спутники P_1 и P_2 имеют близкие орбиты и вращаются по ним в одном направлении, то $\omega=\omega_1+\omega_2$.*

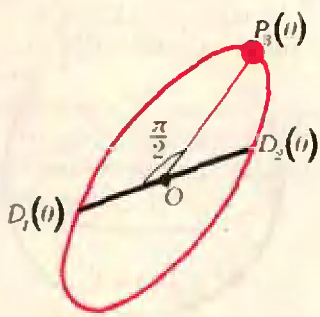


Рис. 3.

Поэтому если $\omega_3>\omega_1+\omega_2$, то точка $P_3(t)$, вращаясь в среднем быстрее диаметра $D(t)$, в некоторые моменты будет обгонять его концы $D_1(t)$ и $D_2(t)$. Эти моменты обгона и есть моменты уплощения. Аналогично, моменты уплощения имеются и в случае $\omega_3<\omega_1+\omega_2$.

К сожалению, мы не умеем доказывать утверждение 2 чисто геометрически. Поэтому вывод, который мы из него сделали, читатель должен рассматривать как правдоподобный, но не доказанный. Этот вывод показывает, что если мы ищем движение *без* уплощения, то стоит рассматривать только случай $\omega_3=\omega_1+\omega_2$.

В нашем случае средняя угловая скорость ω вращения диаметра $D(t)$ равна 2 и совпадает с угловой скоростью вращения спутника P_3. Запустим спутник P_3 так, чтобы при $t=0$ сдвиг фаз между $P_3(0)$ и $D_1(0)$ был равен $\frac{\pi}{2}$ (рис. 3). Если бы диаметр $D(t)$ вращался равномерно, то этот сдвиг был бы неизменен. Если же вращение $D(t)$ неравномерно, но мало отличается от равномерного, то естественно ожидать, что сдвиг фаз между $P_3(t)$ и $D(t)$ будет периодически колебаться около значения $\frac{\pi}{2}$ и поэтому никогда не станет равным нулю.

А теперь, формально не опираясь на предыдущие рассуждения, приведем пример трех спутников P_1, P_2 и P_3, вращающихся вокруг своей планеты равномерно с угловыми скоростями $\omega_1=1$, $\omega_2=1$, $\omega_3=2$ и без уплощений.

Рассмотрим сферу S единичного радиуса. Пусть планета находится в центре O этой сферы, а спутники P_i вращаются по ее большим окружностям γ_i. Пусть $A\in\gamma_1\cap\gamma_2\cap\gamma_3$. Поместим в момент времени $t=0$ спутник P_1 в точку A, спутник P_2 — в точку B орбиты γ_2 такую, что $\widehat{AOB}=\frac{\pi}{2}$, спутник P_3 — в точку C орбиты γ_3 такую, что $\widehat{AOC}=\frac{\pi}{2}$ (рис. 4). Тогда $D(0)=K_2\cap K_3$, где K_2 и K_3 — два больших круга с границами γ_2 и γ_3 соответственно, $D_1(0)=A$, $D_2(0)=\bar{A}$ ($\bar{A}$ — вторая общая точка пересечения γ_1, γ_2 и γ_3, диаметрально противоположная точке A), так что $P_3(0) = C$ не совпадает ни с $D_1(0)$, ни с $D_2(0)$.

Посмотрим, где будут находиться точки $P_3(t)$, $D_1(t)$ и $D_2(t)$ в разные моменты времени. При $0 < t < \frac{\pi}{4}$ точка $P_1(t)$ лежит внутри дуги $AA_{\pi/4}$, точка $P_2(t)$ — внутри дуги $BB_{\pi/4}$, конец $D_1(t)$ диаметра $D(t)$ — внутри дуги AC, противоположный конец $D_2(t)$ диаметра $D(t)$ — внутри симметричной дуги $\overline{A}\overline{C}$, и, наконец, точка $P_3(t)$ — внутри дуги $C\overline{A}$ (рис. 5). При $t = \frac{\pi}{4}$ точки $P_1(t)$, $P_2(t)$, $D_1(t)$, $D_2(t)$ и $P_3(t)$ расположены соответственно в точках $A_{\pi/4}$, $B_{\pi/4}$, C, $\overline{C}$ и $\overline{A}$ (рис. 6). Аналогичным образом легко указать положения этих точек на интервалах $\frac{\pi}{4} < t < \frac{\pi}{2}$, …, $\frac{7}{4}\pi < t < 2\pi$ и в концах этих интервалов и убедиться, что точка $P_3(t)$ в промежутке времени от 0 до 2π никогда не совпадает ни с $D_1(t)$, ни с $D_2(t)$. Поскольку этим промежутком времени рассматриваемое движение полностью описывается, в построенном примере моменты уплощения отсутствуют.

4. Нули функции и определенный интеграл

Чтобы установить, что в какой-то момент времени t_0 происходит уплощение, достаточно показать, что введенная в п. 2 функция $V(t)$ при $t = t_0$ обращается в нуль. Но как, вообще говоря, можно установить, имеет ли данная функция на данном промежутке нуль? Вы знаете, как это сделать для квадратного трехчлена; вам известны нули основных тригонометрических функций $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$, $\operatorname{ctg} t$. Вы можете ответить на вопрос о нулях функций посложнее — например, функции $\alpha \cos t + \beta \cos 2t + \gamma \cos 3t$. Однако уже для функции $\alpha \cos t + \beta \cos 2t +$

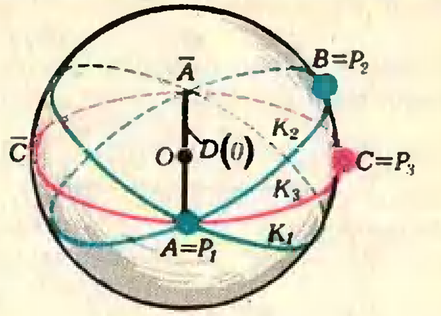


Рис. 4.

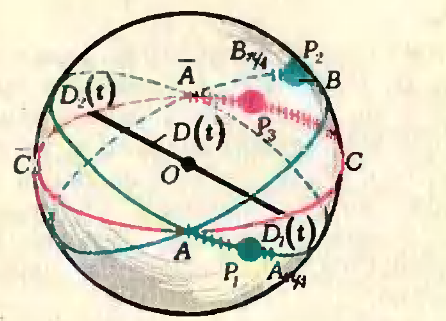


Рис. 5.

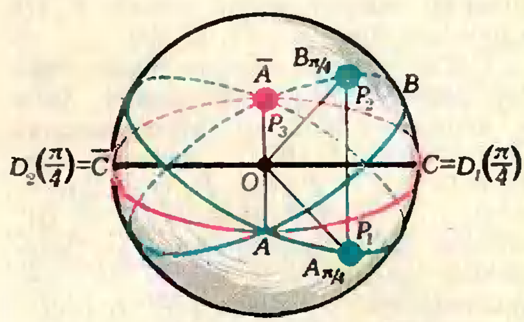


Рис. 6.

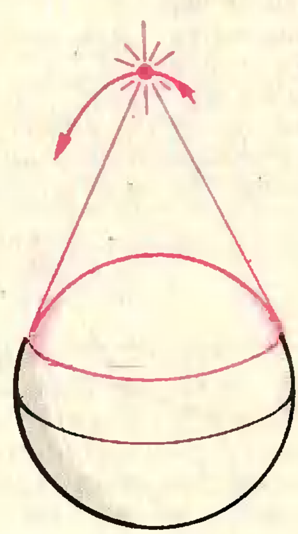


Рис. 7.

$+\gamma\cos 7t$ элементарные методы не дают возможности ответить на вопрос о существовании нулей.

Оказывается, воспользовавшись понятием *определенного интеграла* (см. «Алгебра и начала анализа 10» или «Квант», 1977, № 5) можно доказать, что на заданном промежутке та или иная функция обращается в нуль.

Утверждение 3. *Если* $\int_a^b f(t)\,dt = 0$ *и функция f непрерывна на отрезке* $[a;\ b]$, *то она на этом отрезке имеет нуль.*

Доказательство. На отрезке $[a;\ b]$ функция f либо имеет нуль, либо на всем этом отрезке принимает значения только одного знака (см. замечание в конце п. 2). Из определения интеграла следует, что если функция f во всех точках отрезка $[a;\ b]$ положительна, то и интеграл от нее на этом отрезке положителен, а если f всюду на $[a;\ b]$ отрицательна, то и интеграл от нее также отрицателен.

Утверждение 3 доказано.

Пример. Докажем, что при любых α, β, γ функция

$f(t) = \alpha\cos t + \beta\cos 2t + \gamma\cos 7t$

имеет нуль на отрезке $[0;\ 2\pi]$. Действительно, одной из первообразных для функции $\cos nt$ является функция $\frac{1}{n}\sin nt$. По формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_0^{2\pi}(\alpha\cos t+\beta\cos 2t+\gamma\cos 7t)\,dt = \left.\left(\alpha\sin t+\frac{1}{2}\beta\sin 2t+\frac{1}{7}\gamma\sin 7t\right)\right|_0^{2\pi}=0,$$

так что существование у функции $\alpha\cos t + \beta\cos 2t + \gamma\cos 7t$ нуля на отрезке $[0;\ 2\pi]$ следует из утверждения 3.

Возвращаясь к нашей задаче, мы видим, что для доказательства существования момента уплощения достаточно показать, что

$$\int_0^{2\pi} V(t)\,dt = 0.$$

5. Самый интересный случай: $\omega_1=2$, $\omega_2=3$, $\omega_3=4$

В этом параграфе мы, пользуясь утверждением 3, докажем, что в случае $\omega_1 = 2$, $\omega_2 = 3$, $\omega_3 = 4$ момент уплощения всегда существует.

Найдем общий вид функции $V(t)$. Для этого найдем общий вид координат $x_i(t)$, $y_i(t)$, $z_i(t)$ точек $P_i(t)$ $(i = 1, 2, 3)$ как функций от времени. Мы сейчас покажем, что каждая координата точки $P_i(t)$ совершает гармоническое колебание, т. е. имеет вид

$$\alpha\sin\omega_i t + \beta\cos\omega_i t. \qquad (***)$$

Формула (***) непосредственно вытекает из такой леммы:

Лемма. а) *Пусть $\vec u$ и $\vec v$ — два взаимно перпендикулярных вектора одинаковой длины R в пространстве. Тогда конец вектора*

$$\vec w(t) = \vec u\cos\omega t + \vec v\sin\omega t$$

равномерно вращается с угловой скоростью ω по окружности радиуса R, расположенной в плоскости векторов $\vec u$ и $\vec v$.

б) *Наоборот, если точка $P(t)$ равномерно вращается с угловой скоростью ω по окружности с центром O радиуса R, то в плоскости, которой принадлежит эта окружность, найдутся два взаимно перпендикулярных вектора $\vec u$ и $\vec v$ одинаковой длины такие, что*

$$\overrightarrow{OP}(t) = \vec u\cos\omega t + \vec v\sin\omega t.$$

Доказательство. а) Поскольку векторы $\vec u\cos\omega t$ и $\vec v\sin\omega t$ взаимно перпендикулярны, по теореме Пифагора

$$|\vec w(t)|^2 = |\vec u|^2(\cos\omega t)^2 + |\vec v|^2(\sin\omega t)^2 = R^2.$$

Следовательно, конец вектора $\vec w(t)$ движется по окружности радиуса R. Скорость конца вектора $\vec w(t)$ есть вектор

$$\vec v\omega\cos\omega t - \vec u\omega\sin\omega t,$$

а потому величина скорости в каждый момент времени одна и та же и равна ωR, так что конец вектора $\vec{w}(t)$ вращается равномерно.

б) В качестве вектора $\vec{u}$ надо взять вектор $\overrightarrow{OP}(0)$, а в качестве вектора $\vec{v}$ — вектор $\overrightarrow{OP}\left(\frac{\pi}{2\omega}\right)$. Лемма доказана.

Для получения общего вида функции $V(t)$ обратимся к выражению (*). Это выражение есть сумма шести слагаемых, каждое из которых есть произведение трех сомножителей, каждый из которых, в свою очередь, является суммой вида (***). После раскрытия скобок в каждом произведении у нас получится сумма сорока восьми членов вида

$$\lambda p_1(t)\,p_2(t)\,p_3(t), \qquad (****)$$

где λ — число, а $p_i(t)$ — либо $\sin\omega_i(t)$, либо $\cos\omega_i(t)$, $i = 1, 2, 3$. К счастью, нам вовсе не нужно выписывать явно эти 48 членов, так как значения коэффициентов λ для нас окажутся не важными (так же как не важны были значения коэффициентов в примере из предыдущего параграфа).

После приведения подобных членов получаем, что $V(t)$ есть сумма нескольких слагаемых вида (****). Чтобы показать, что $\int\limits_0^{2\pi} V(t)\,dt = 0$, достаточно проверить, что интеграл от каждого слагаемого (****) в выражении $V(t)$ равен нулю.

Преобразуем произведение $p_1(t)\,p_2(t)\,p_3(t)$ в сумму. Возможны различные случаи, в зависимости от того, сколько раз — один, два или три — в это произведение входит синус. Например

$$(\sin\omega_1 t\sin\omega_2 t)\sin\omega_3 t = \\ = \frac{1}{2}(\cos(\omega_1-\omega_2)t - \\ -\cos(\omega_1+\omega_2)t)\sin\omega_3 t = \\ = \frac{1}{4}[\sin(\omega_1-\omega_2+\omega_3)t + \\ +\sin(\omega_1-\omega_2-\omega_3)t - \\ -\sin(\omega_1+\omega_2+\omega_3)t - \\ -\sin(\omega_1+\omega_2-\omega_3)t].$$

Преобразовав аналогично остальные произведения, мы получим, что $V(t)$ есть сумма членов вида $\mu\sin\nu t$ или $\mu\cos\nu t$, где $\nu = \pm\omega_1\pm\omega_2\pm\omega_3$ со всевозможными комбинациями знаков. При целых значениях ν, отличных от нуля, получаем

$$\int\limits_0^{2\pi}\sin\nu t\,dt = \left(-\frac{\cos\nu t}{\nu}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0;$$

$$\int\limits_0^{2\pi}\cos\nu t\,dt = \left(\frac{\sin\nu t}{\nu}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0.$$

Разумеется, только что сделанные выкладки можно проводить лишь при $\nu \neq 0$. Однако при любой комбинации знаков сумма $\nu = \pm 2 \pm 3 \pm 4$ отлична от нуля. Поэтому

$$\int\limits_0^{2\pi} V(t)\,dt = 0.$$

Следовательно, найдется такое значение $t_0 \in [0;\ 2\pi]$, что $V(t_0) = 0$, т. е. обязательно найдется момент уплощения.

6. Задача о спутниках-солнцах

Разумеется, читатель заметил, что все рассуждения п. 5 останутся справедливыми, если в качестве ω_1, ω_2, ω_3 взять любые целые числа, для которых ни одна из сумм вида $\pm\omega_1\pm\omega_2\pm\omega_3$ не равна 0.

Мы умеем доказывать, но, к сожалению, не элементарно, следующую теорему о планете и трех спутниках:

Теорема. *Пусть ω_3 — наибольшая угловая скорость среди угловых скоростей ω_i, $i = 1, 2, 3$.*

1) Если $\omega_3 \neq \omega_1+\omega_2$, то для любых начальных расположений орбит и спутников на них всегда найдется момент уплощения.

2) Если $\omega_3 = \omega_1+\omega_2$, то для некоторых начальных расположений орбит и спутников на них моментов уплощения не бывает.

Используя этот результат, можно решить еще одну задачу (о спутниках-солнцах).

Вокруг сферической планеты с центром O нужно запустить с постоянными ненулевыми угловыми скоростями по круговым орбитам (с центрами в O) несколько точечных спутников-солнц таким образом, чтобы в каж-

дый момент времени все точки планеты были освещены лучами, исходящими во все стороны от спутников. Каково минимальное необходимое число спутников-солнц? (Считается, что планета не вращается; спутник-солнце разрешается запускать на сколь угодно большое расстояние от планеты, однако он освещает «шапочку» на ней, которая всегда меньше полусферы; см. рис. 7.)

Существенным условием в формулировке задачи является условие положительности угловых скоростей спутников-солнц. При нулевых угловых скоростях получается намного более простая и менее интересная задача об освещении сферической планеты несколькими неподвижными точечными прожекторами. Наименьшее необходимое в этом случае число прожекторов — четыре.

Задача о спутниках-солнцах — сугубо математическая. Похожая практическая задача — создание системы глобальной радиосвязи на Земле — решается с помощью запуска трех спутников; правда, при этом не обеспечивается связь с полярными областями Земли.

Решение задачи о спутниках-солнцах. Нетрудно сообразить, что ни одного, ни двух спутников для освещения планеты не хватит — в каждый момент будут существовать неосвещенные точки (докажите это). Покажем, что и трех спутников мало.

Действительно, в каждый момент времени на планете найдутся две диаметрально противоположные точки A и B, которые не освещаются в этот момент спутниками P_1 и P_2. Такими точками, например, являются концы диаметра планеты, перпендикулярного к плоскости, проведенной через точки O, P_1 и P_2 (вспомните, что один спутник не может осветить сразу целую полусферу). Но спутник P_3 не сможет в этот же момент осветить сразу обе точки A и B — ведь они диаметрально противоположны! Поэтому какая-то из точек A или B не будет в этот момент освещена ни одним из спутников.

Хватит ли четырех спутников-солнц? Если окажется, что в некоторый момент времени какие-то три из четырех спутников P_1, P_2, P_3, P_4 будут находиться в одной плоскости с планетой O, то полностью применимы рассуждения предыдущего абзаца. Если же такого уплощения не происходит, надо пробовать строить пример нужного нам движения или доказывать, что его все-таки нет. Итак, в случае, когда происходит уплощение хотя бы одной тройки спутников, в момент уплощения планета не освещена полностью. Значит, надо выяснить, существуют ли такие положительные угловые скорости ω_1, ω_2, ω_3 и ω_4, при которых никогда не происходит уплощение ни одной тройки спутников. Ответ на этот вопрос нам дает сформулированная выше теорема: *в любой тройке, выбранной из чисел ω_1, ω_2, ω_3, ω_4, максимальное число должно равняться сумме двух оставшихся.* Пусть, для определенности, $0<\omega_1\leqslant\omega_2\leqslant\omega_3\leqslant\omega_4$. Тогда для тройки ω_1, ω_2, ω_3 должно быть $\omega_3=\omega_1+\omega_2$, для тройки ω_1, ω_2,ω_4 должно быть $\omega_4=\omega_1+\omega_2$, откуда $\omega_3=\omega_4$. Но для тройки ω_1, ω_3, ω_4 должно быть $\omega_4=\omega_3+\omega_1$, откуда $\omega_1=0$, что противоречит условию $\omega_1>0$. Тем самым доказано, что искомых четырех положительных чисел не существует. Следовательно, примера нужного нам движения четырех спутников по круговым орбитам, при котором планета была бы в каждый момент полностью освещена, построить нельзя; четырех спутников также недостаточно для осуществления поставленной в задаче цели.

Однако пяти вращающихся по круговым орбитам спутников для полного освещения всей планеты в каждый момент времени уже хватает (мы предлагаем читателям самостоятельно построить соответствующий пример).

Кроме того, мы предлагаем читателям доказать утверждение пункта 2) теоремы для случая, когда ω_1, ω_2, ω_3 — целые числа. По-видимому, это можно сделать элементарно.

задачник кванта

Задачи

M536—M540; Ф548—Ф552

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой.

Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 февраля 1979 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка 21/16, редакция журнала «Квант».

После адреса напишите на конверте номера задач, решения которых вы посылаете (например, «М536, М537», или «Ф548»). Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Решения задач из разных номеров журнала также присылайте в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто ее предложил. Разумеется, не все задачи публикуются впервые. Задачи М537—М540 предлагались на XX Международной математической олимпиаде (см. с. 55).

M536. а) Докажите, что любой прямоугольник размером $m\times 2n$ клеток можно замостить двумя слоями костяшек домино (плиток 1×2 клетки) так, чтобы каждая плитка верхнего слоя опиралась на две разные плитки нижнего слоя.
б) Прямоугольник размером $2k\times 2n$ клеток уже замощен одним слоем костяшек домино. Докажите, что его можно замостить вторым слоем так, чтобы выполнялось то же условие (т. е. чтобы плитки разных слоев не совпадали).

M537. Окружность касается внутренним образом окружности, описанной вокруг равнобедренного треугольника ABC, а также равных сторон AB и AC этого треугольника в точках P, Q соответственно. Докажите, что середина отрезка PQ является центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

M538. Множество всех натуральных чисел является объединением двух непересекающихся подмножеств $\{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\}$, $\{g(1), g(2), \ldots, g(n), \ldots\}$, где $f(1)<f(2)<\ldots<f(n)<\ldots$, $g(1)<g(2)<\ldots<g(n)\ldots$ и $g(n)=f(f(n))+1$ для всех $n\geqslant 1$. Определите $f(240)$.

M539. Пусть P — данная точка внутри данной сферы и A, B, C — произвольные три точки этой сферы такие, что отрезки PA, PB, PC взаимно перпендикулярны. Пусть Q — вершина параллелепипеда, определенного отрезками PA, PB и PC, диагонально противоположная к P. Определите геометрическое место точек Q.

M540.* Международное общество состоит из представителей шести различных стран. Список членов общества состоит из 1978 фамилий, занумерованных числами 1, 2, ..., 1978.

Докажите, что существует хотя бы один член общества, номер которого равняется сумме номеров двух членов из его страны или удвоенному номеру некоторого члена из его страны.

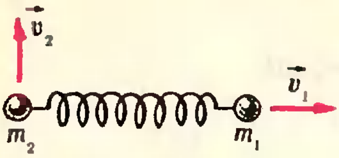


Рис. 1.

Ф548. Реактивная тележка массы m описывает мертвую петлю по вертикальной круговой дорожке радиуса R с постоянной линейной скоростью v. Какая работа совершается силой трения при перемещении тележки из самого нижнего положения в самое верхнее? Коэффициент трения между тележкой и дорожкой равен μ.

О. Савченко

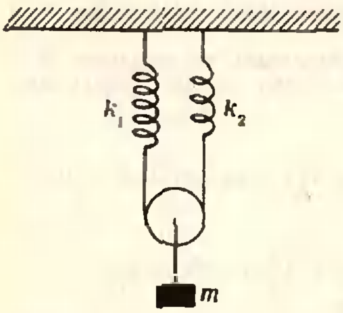


Рис. 2.

Ф549. Два шарика с массами m_1 и m_2 соединены пружинкой жесткости k; пружинка расположена горизонтально и не деформирована. Шарикам одновременно сообщаются скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, как показано на рисунке 1, причем $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$. Найти максимальную высоту подъема системы и наибольшую деформацию пружинки.

Ф550. На шероховатый медный конус (покрытый мелкой насечкой, как напильник) надеты две шайбы: алюминиевая с отверстием радиуса $r=1$ см и железная с отверстием радиуса $R=3$ см. Расстояние между шайбами $a=6$ см. На сколько изменится это расстояние, если конус и шайбы нагреть на $\Delta t=200$ К? Тепловые коэффициенты линейного расширения меди, алюминия и железа равны, соответственно, $\beta_1=2{,}5\cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$, $\beta_2=1{,}7\cdot 10^{-5}$ К$^{-1}$ и $\beta_3=10^{-5}$ К$^{-1}$. Конус расположен вертикально, вершиной вверх.

Г. Коткин

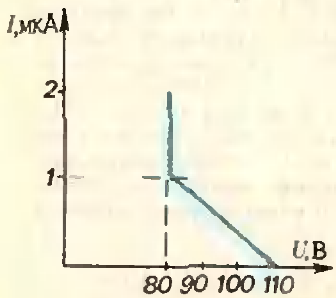


Рис. 3.

Ф551. Груз массы m подвешен к двум пружинкам с жесткостью k_1 и k_2 с помощью нити и блока (рис. 2). Найти период малых колебаний груза. Нить и блок считать невесомыми.

И. Слободецкий

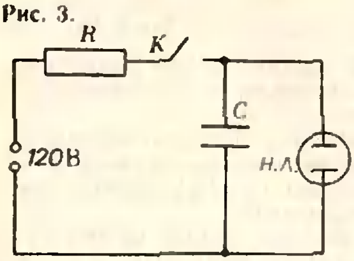


Рис. 4.

Ф552. Вольт-амперная характеристика неоновой лампы показана на рисунке 3. При каком значении R сопротивления резистора, включенного в цепь, изображенную на рисунке 4, неоновая лампа (*н. л*) не будет гаснуть после замыкания ключа K?

Решения задач

M491—M493; Ф503, Ф505—Ф507

M491. *Рассмотрим геометрическую прогрессию, все члены которой — целые числа. (Например, 16, 24, 36, 54, 81.)*
а) Докажите, что сумма квадратов трех последовательных членов прогрессии делится на сумму этих членов.
б) При каких натуральных n сумма квадратов n последовательных членов прогрессии делится на сумму этих n членов?

Мы вначале решим задачу M491 — докажем утверждение пункта а) и ответим на вопрос пункта б), а затем сформулируем утверждение, из которого будут следовать оба пункта задачи.

а) Обозначим три последовательных члена нашей прогрессии через a_1, a_2, a_3 (все a_i — целые числа). Поскольку $a_1a_3 = a_2^2$, получаем

$$(a_1 + a_2 + a_3)^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) + 2a_2(a_1 + a_2 + a_3).$$

Следовательно

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = (a_1 + a_2 + a_3)(a_1 - a_2 + a_3)$$

— что и требовалось доказать.

б) Легко привести пример геометрической прогрессии, у которой сумма квадратов четырех последовательных членов не будет делиться на сумму этих членов: у прогрессии 1, 2, 4, 8, 16, ... сумма $1^2 + 2^2 + 4^2 + 8^2 = 85$ не делится на сумму $1 + 2 + 4 + 8 = 15$. Вообще, у этой прогрессии сумма квадратов первых $2k$ членов $1 + 2^2 + 2^4 + \ldots + 2^{4k-2} = (2^{4k} - 1)/3$ не делится на сумму этих членов $1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{2k-1} = 2^{2k} - 1$, поскольку $2^{2k} + 1$ не делится на 3 ни при каком k. Поэтому четные n не годятся. Если же n нечетно ($n = 2k + 1$), то сумма квадратов n последовательных членов нашей прогрессии обязательно делится на сумму этих членов. Справедливость этого утверждения вытекает из тождества

$$a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_{2k+1}^2 = (a_1 + a_2 + \cdots + a_{2k+1}) \times$$
$$\times (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots - a_{2k} + a_{2k+1}),$$

которое нетрудно доказать, например, по индукции.

А теперь сформулируем и докажем утверждение, о котором было сказано выше.

Теорема. *Если числа k и n взаимно просты, то сумма k-х степеней n последовательных членов геометрической прогрессии, все члены которой — целые числа, обязательно делится на сумму этих n членов.*

(Поскольку числа 3 и 2 взаимно просты, из этого утверждения следует пункт а) задачи M491 и ответ на пункт б) — *при нечетных n*.)

Доказательство. Обозначим эти n последовательных членов прогрессии через $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Мы хотим доказать, что сумма $a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k$ делится на сумму $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ (при условии, что k и n взаимно просты). Пусть q — знаменатель прогрессии. Тогда

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = a_1(1 + q + \cdots + q^{n-1}),$$
$$a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k = a_1^k(1 + q^k + \cdots + q^{(n-1)k}).$$

Докажем, что *если k и n взаимно просты, то многочлен $1 + x^k + \ldots + x^{(n-1)k}$ делится на многочлен $1 + x + \ldots + x^{n-1}$* *). При доказательстве нам понадобятся две вспомогательные леммы.

---

*) Здесь и всюду ниже, говоря о делимости многочленов, мы имеем в виду, что все коэффициенты частного — целые числа.

Лемма 1. *Если числа k и n взаимно просты, то числа k, $2k$, $3k$, …, $(n-1)k$ при делении на n дают разные остатки.*

Лемма 2. *Если числа l и m дают одинаковые остатки при делении на n, то многочлен $x^l - x^m$ делится на многочлен $1 + x + \ldots + x^{n-1}$.*

Лемма 1 доказывается методом «от противного». В самом деле, если при некоторых i и j $(0 < i < j < n)$ числа ik и jk дают одинаковый остаток при делении на n, то число $(j-i)k$ нацело делится на n. Но число $j - i < n$; значит, числа k и n должны иметь общий делитель, отличный от единицы, — противоречие с взаимной простотой k и n.

Так как число различных остатков (не нулевых!) от деления на n равно $n-1$, из леммы 1 следует, что *если числа k и n взаимно просты, то среди остатков от деления на n чисел k, $2k$, …, $(n-1)k$ все числа от 1 до $n-1$ встречаются по одному разу.*

Докажем лемму 2. Пусть $l > m$ и $l = m + pn$. Многочлен $x^m - x^l = (1 - x^{pn})x^m$ делится на $1 - x^n$:

$$1 - x^{pn} = (1 - x^n)\ (1 + x^n + x^{2n} + \ldots + x^{(p-1)n}),$$

а $1 - x^n$ делится на $(1 - x)$, причем

$$(1 - x^n) = (1 - x)(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1}).$$

Отсюда следует утверждение леммы 2.

Перейдем теперь к доказательству того, что многочлен $1 + x^k + \cdots + x^{(n-1)k}$ делится на $1 + x + \cdots + x^{n-1}$. Обозначим через k_i остаток от деления на n числа ik. Тогда по лемме 2 многочлен $(x^k - x^{k_1}) + (x^{2k} - x^{k_2}) + \cdots + (x^{(n-1)k} - x^{k_{n-1}})$ делится на многочлен $1 + x + \cdots + x^{n-1}$. Остается заметить, что в силу следствия из леммы 1 многочлен $1 + x^{k_1} + x^{k_2} + \cdots + x^{k_{n-1}}$ совпадает с многочленом $1 + x + \cdots + x^{n-1}$ и, значит, делится на него. Таким образом,

$$1 + x^k + x^{2k} + \cdots + x^{(n-1)k} = (1 + x + \cdots + x^{n-1}) \times$$
$$\times (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_p x^p),$$

где $p = (k-1)(n-1)$, и c_0, c_1, …, c_p — некоторые целые числа. Следовательно,

$$a_1^k + a_2^k + \cdots + a_n^k = a_1^k\left(1 + q^k + \cdots + q^{(n-1)k}\right) =$$
$$= a_1^k\left(1 + q + \cdots + q^{n-1}\right)\left(c_0 + c_1 q + c_2 q^2 + \cdots +\right.$$
$$\left. + c_p q^p\right) = \left(a_1 + a_2 + \cdots + a_n\right) \times$$
$$\times\left(c_0 a_1^{k-1} + c_1 a_1^{k-1} q + \cdots + c_p a_1^{k-1} q^p\right).$$

Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что числа $a_1^{k-1}q$, $a_1^{k-1}q^2$, …, $a_1^{k-1}q^p$ — целые. Действительно, число $a_1^{k-1}q$ — целое, поскольку оно представляется в виде произведения целых чисел: $a_1^{k-1}q = a_1^{k-2}\cdot a_2$. Аналогично, $a_1^{k-1}q^2 = a_1^{k-2}a_3$, … …, $a_1^{k-1}q^p = \left(a_1 q^{n-1}\right)^{k-1} = a_n^{k-1}$.

Попробуйте построить примеры, показывающие, что требование взаимной простоты k и n в утверждении теоремы существенно.

А. Агаев, Г. Гуревич, Ф. Кадиров

◆

M492. *В треугольник ABC вписан треугольник $A_1B_1C_1$ (так, что вершины A_1, B_1 и C_1 лежат, соответственно, на сторонах BC,*

Мы приведем два решения этой задачи: первое — более «механическое», второе — более «геометрическое».

Первое решение. Поместим в вершины треугольника ABC грузы масс a; b и c так, чтобы центр тяжести этой системы масс попал в точку P. Для этого достаточно

CA и AB), причем отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке P. Докажите, что прямые, соединяющие середины сторон AB и A_1B_1, BC и B_1C_1, CA и C_1A_1, пересекаются в одной точке Q, причем точки P, Q и центр тяжести треугольника ABC лежат на одной прямой.

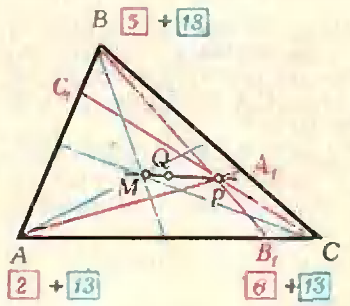


Рис. 1.

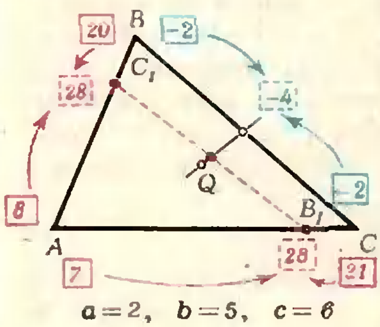


Рис. 2.

выполнения двух условий: условия $\dfrac{|AB_1|}{|B_1C|}=\dfrac{c}{a}$, гарантирующего принадлежность центра тяжести прямой BB_1, и условия $\dfrac{|AC_1|}{|C_1B|}=\dfrac{b}{a}$, гарантирующего принадлежность центра тяжести прямой CC_1. (Тогда $\dfrac{|BA_1|}{|A_1C|}=\dfrac{c}{b}$; тем самым мы попутно доказали *теорему Чевы*:

$$\frac{|AB_1|}{|B_1C|}\cdot\frac{|CA_1|}{|A_1B|}\cdot\frac{|BC_1|}{|C_1A|}=1.\Big)$$

Добавим теперь в каждую вершину груз массы $m = a+b+c$ (рис. 1). Центр тяжести Q всей системы грузов можно найти, соединив точки P (центр тяжести первоначальной системы) и M (центр тяжести «добавляемой» системы, т. е. центр тяжести треугольника ABC) отрезком и поделив его в отношении $\dfrac{a+b+c}{3m}=\dfrac{1}{3}$, считая от точки M.

С другой стороны, массы в вершинах A $(2a+b+c)$, B $(2b+a+c)$, C $(2c+a+b)$ можно распределить на «подсистемы» так: части масс A $(a+c)$ и B $((a+c)\,b/a)$ заменить массой C_1 $((a+c)(a+b)/a)$; части масс $A(a+b)$ и C $((a+b)\,c/a)$ — массой B_1 $((a+c)(a+b)/a)$. Образовавшиеся в точках B_1 и C_1 две равные массы имеют центр тяжести посередине $[B_1C_1]$. Массы, оставшиеся в вершинах B и C, тоже оказываются равными (хотя они могут получиться и отрицательными, как на рисунке 2):

$$m+b-\frac{(a+c)\,b}{a}=m+c-\frac{(a+b)\,c}{a}=m-\frac{bc}{a},$$

и поэтому их центр тяжести находится посередине $[BC]$. Значит, центр тяжести Q всей системы лежит на прямой, соединяющей середины отрезков B_1C_1 и BC.

Аналогично доказывается, что Q лежит на двух других прямых, упоминаемых в условии. Чтобы перевести наше механическое решение на математический язык, достаточно дать определение «центра тяжести» системы масс. Пусть A_i — точки плоскости, m_i — произвольные числа ($i = 1, 2, \ldots, n$), «общая масса» $m_1+m_2+\ldots+m_n = M \neq 0$. *Центр тяжести* $C = C\{A_i\,(m_i)\}$ определяется условием: для некоторой (а тогда и для любой) точки O плоскости $\overrightarrow{OC}=\left(m_1\overrightarrow{OA_1}+\cdots+m_n\overrightarrow{OA_n}\right)/M$. (Это определение годится и для отрицательных m_i.) Нетрудно проверить единственный факт, которым мы пользуемся в решении: если $m_i=m_i'+m_i''$, $\Sigma m_i'=M'$ и $\Sigma m_i''=M''$, то центр тяжести $C=C\{A_i\,(m_i)\}$ лежит на прямой $C'C''$, где $C'=C\{A_i\,(m_i')\}$, $C''=C\{A_i\,(m_i'')\}$, причем $\overrightarrow{OC}=(M'\overrightarrow{OC'}+M''\overrightarrow{OC''})/M$.

Подробнее о «барицентрическом исчислении», которым мы воспользовались в этом решении, см. в книге М. Б. Балка «Геометрические приложения понятия о центре тяжести».

Второе решение. Обозначим середины сторон BC, AC и AB, соответственно, через X, Y и Z, а середины сторон B_1C_1, A_1C_1 и A_1B_1 — через X_1, Y_1 и Z_1 (рис. 3). Поместим в точки A, B, C и P единичные массы и будем искать центр тяжести этой системы материальных точек.

Пусть X_2, Y_2 и Z_2 — середины отрезков AP, BP и CP. Так как центр тяжести точек B и C находится в точке X, а центр тяжести точек A и P — в точке X_2, то центр тяжести всей системы лежит на прямой XX_2. По аналогичным причинам он лежит на прямых YY_2 и ZZ_2. Поскольку центр тяжести системы материальных точек существует, единствен и должен принадлежать всем этим прямым одновременно, эти три прямые пересекаются в одной точке; обозначим ее через Q (см. рис. 3)

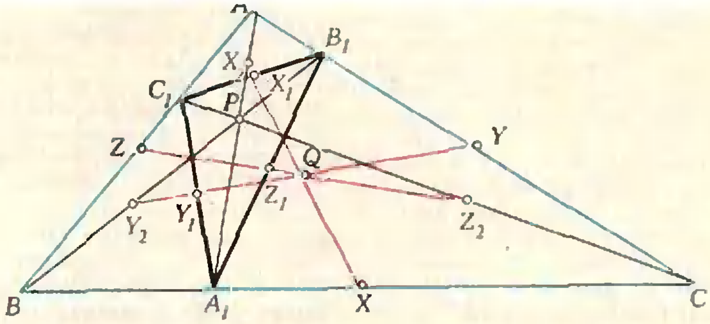


Рис. 3.

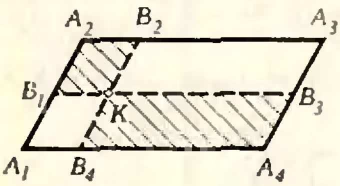


Рис. 4.

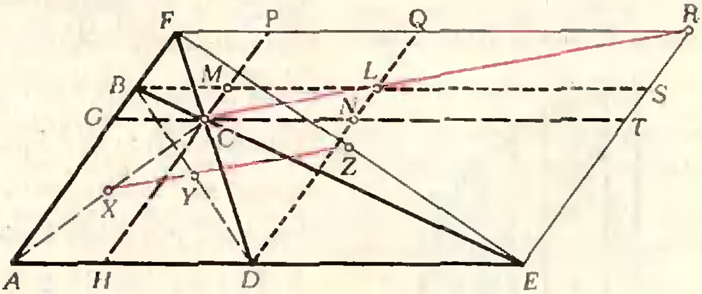


Рис. 5.

С другой стороны, если S — центр тяжести треугольника ABC (т. е. точка пересечения его медиан), то центр тяжести системы точек $\{A, B, C, P\}$ лежит на отрезке PS. Выше мы показали, что центр тяжести этой системы находится в точке Q; значит $Q \in [PS]$. Более того, так как для отыскания центра тяжести системы $\{A, B, C, P\}$ последним способом мы должны поместить в точку S массу в три единицы, точка Q делит отрезок PS в отношении $3:1$.

Если мы покажем, что прямые XX_2, YY_2, ZZ_2 проходят, соответственно, через точки X_1, Y_1 и Z_1, то задача будет решена. Последнее утверждение вытекает из следующей теоремы, примененной к четырехугольникам PA_1BC_1, PB_1AC_1 и PA_1CB_1:

Теорема Гаусса. *Если никакие стороны четырехугольника не параллельны, то середина отрезка, соединяющего точки пересечения продолжений противоположных сторон, лежит на прямой, соединяющей середины диагоналей.*

Для доказательства принадлежности трех точек прямой будем использовать следующий, почти очевидный, критерий (необходимое и достаточное условие); докажите его самостоятельно.

Пусть K — внутренняя точка параллелограмма $A_1A_2A_3A_4$. Проведем через K прямые, параллельные сторонам параллелограмма, и обозначим через B_1, B_2, B_3, B_4 точки пересечения этих прямых с его сторонами (рис. 4). Точка K лежит на диагонали A_1A_3 параллелограмма тогда и только тогда, когда $S_{KB_1A_2B_2} = S_{KB_3A_4B_4}$ (через S мы здесь обозначаем площадь).

Доказательство теоремы Гаусса. Обозначим вершины четырехугольника через A, B, C, D, точки пересечения продолжений его противоположных сторон через E и F, а середины диагоналей AC, BD и отрезка EF, соответственно, через X, Y и Z. Проведем через точки D, C и F прямые, параллельные прямым AF и AE, и введем обозначения, как на рисунке 5.

Очевидно, что точки C, L и R гомотетичны, соответственно, точкам X, Y и Z с центром гомотетии A и коэффициентом гомотетии 2. Поэтому принадлежность точек X, Y, Z одной прямой равносильна принадлежности одной прямой точек C, L и R.

Из приведенного выше критерия следует, что точка L принадлежит прямой CR, если выполнено равенство $S_{LMPQ} = S_{LNTS}$. Докажем, что это действительно так.

Поскольку точка C принадлежит диагоналям параллелограммов $AFQD$ и $ABSE$ (см. рис. 5), имеем: $S_{AGCH} = S_{CNQP}$ и $S_{AGCH} = S_{CMST}$. Поэтому $S_{CNQP} = S_{CMST}$, и, следовательно, $S_{LMPQ} = S_{LNTS}$, что и требовалось. Решение закончено.

Ф. Вайнштейн, Н. Васильев

◆

М493. *Докажите неравенства* $0{,}785n^2 - n < \sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2-2^2} + \ldots + \sqrt{n^2-(n-1)^2} < 0{,}79n^2$.

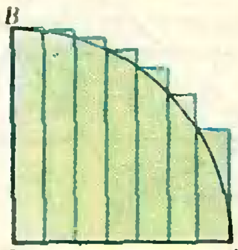


Рис. 6.

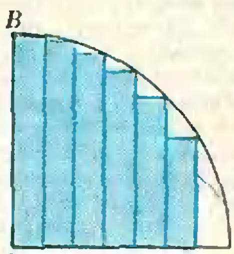


Рис. 7.

Возьмем четверть круга единичного радиуса: O — центр круга, $[OA]$ — радиус, $|OA| = 1$ (рис. 6). Разделим отрезок OA на n конгруэнтных частей (n — произвольное натуральное число). На получившихся первых $n-1$ отрезках деления (считая от точки O) построим по прямоугольнику так, чтобы п р а в ы е верхние вершины всех прямоугольников лежали на дуге окружности BA, ограничивающей нашу «четверть круга» (см. рис. 6). Мы получим $n-1$ прямоугольников, сумма площадей которых меньше площади четверти круга единичного радиуса, то есть меньше $\frac{\pi}{4} < 0{,}79$.

Поскольку эта сумма равна

$$\frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2} + \frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2} + \ldots + \frac{1}{n}\sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2} = \frac{1}{n^2}\left(\sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2-2^2} + \ldots + \sqrt{n^2-(n-1)^2}\right),$$

из сказанного следует правое неравенство.

Чтобы доказать левое неравенство, поступим следующим образом. Построим по прямоугольнику теперь уже на всех отрезках, получивших при делении $[OA]$ — всего n прямоугольников, причем так, чтобы все л е в ы е верхние вершины прямоугольников лежали на дуге BA окружности (рис. 7). Мы получим изображенную на рисунке 7 ступенчатую фигуру, площадь которой уже б о л ь ш е площади четверти круга единичного радиуса, то есть больше $\frac{\pi}{4} > 0{,}785$.

Площадь ступенчатой фигуры равна сумме площадей n прямоугольников с основаниями длины $\frac{1}{n}$ и высотами длины

$$1, \sqrt{1-\left(\frac{1}{n}\right)^2}, \sqrt{1-\left(\frac{2}{n}\right)^2}, \ldots, \sqrt{1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^2}$$

соответственно:

$$\frac{1}{n}\left(1 + \sqrt{\frac{n^2-1}{n^2}} + \sqrt{\frac{n^2-2^2}{n^2}} + \ldots + \sqrt{\frac{n^2-(n-1)^2}{n^2}}\right).$$

Итак,

$$\frac{1}{n^2}\left(n + \sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2-2^2} + \ldots + \sqrt{n^2-(n-1)^2}\right) > 0{,}785,$$

откуда

$$0{,}785\,n^2 - n < \sqrt{n^2-1} + \sqrt{n^2-2^2} + \ldots + \sqrt{n^2-(n-1)^2}.$$

А. Сивацкий

◆

Ф503. К вертикальной оси привязана нить длины 2l, на конце и в середине которой прикреплены одинаковые шарики (рис. 8). Ось приводят во вращение с угловой скоростью ω. При каком значении угловой скорости участки OA и AB начнут отклоняться от вертикали? Каким будет отношение малых углов отклонения участков нити OA и AB от вертикали?

Рис. 8.

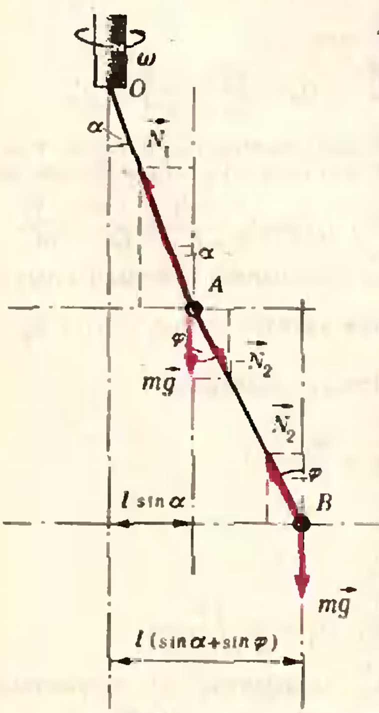


Рис. 9.

Форма такого «двойного» вращающегося маятника определяется двумя углами α и φ отклонения нитей от вертикали (рис. 9). Поскольку нас интересует значение той угловой скорости ω, при которой нити начинают отклоняться от вертикали, мы будем рассматривать движение маятника при условии, что углы α и φ малы.

Пусть при некоторой угловой скорости вращения ω нити OA и AB отклонились от вертикали на малые углы α и φ соответственно (рис. 9). При этом шарики вращаются равномерно с угловой скоростью ω по окружностям, лежащим в горизонтальных плоскостях. Радиусы этих окружностей равны соответственно $r_1 = l\sin\alpha$ и $r_2 = l(\sin\alpha + \sin\varphi)$, где l — длина каждой нити. Центростремительное ускорение $\omega^2 r_1$ верхнему шарику сообщает равнодействующая приложенных к нему сил — силы тяжести $m\vec g$ (m — масса шарика), силы $\vec N_1$ натяжения нити OA и силы $\vec N_2$ натяжения нити AB. Центростремительное ускорение $\omega^2 r_2$ нижнему шарику сообщает равнодействующая сил $m\vec g$ и $\vec N_2$. Найдем силы $\vec N_1$ и $\vec N_2$.

Нижний шарик не перемещается в вертикальном направлении; следовательно (см. рис. 9),

$$|m\vec g| = |\vec N_2|\cos\varphi \Rightarrow |\vec N_2| = \frac{|m\vec g|}{\cos\varphi}.$$

Верхний шарик также не перемещается в вертикальном направлении; следовательно,

$$|m\vec g| + |\vec N_2|\cos\varphi = 2|m\vec g| = |\vec N_1|\cos\alpha \Rightarrow |\vec N_1| = \frac{2|m\vec g|}{\cos\alpha}.$$

Теперь запишем уравнение движения шариков по окружности: для нижнего шарика —

$$m\omega^2 l(\sin\alpha + \sin\varphi) = |\vec N_2|\sin\varphi = |m\vec g|\,\mathrm{tg}\,\varphi, \tag{1}$$

для верхнего шарика —

$$m\omega^2 l\sin\alpha = |\vec N_1|\sin\alpha - |\vec N_2|\sin\varphi =$$

$$= 2|m\vec g|\,\mathrm{tg}\,\alpha - |m\vec g|\,\mathrm{tg}\,\varphi. \tag{2}$$

Поскольку углы α и φ малы, можем считать $\sin\alpha = \alpha$, $\sin\varphi = \varphi$, $\mathrm{tg}\,\alpha = \alpha$, $\mathrm{tg}\,\varphi = \varphi$. С учетом этого из (1) и (2) получаем

$$\omega^2 l(\alpha + \varphi) = |\vec g|\varphi, \quad \omega^2 l\,\alpha = |\vec g|(2\alpha - \varphi),$$

или

$$\omega^2 l\alpha + \varphi(\omega^2 l - |\vec g|) = 0,$$

$$(\omega^2 l - 2|\vec g|)\,\alpha + \varphi|\vec g| = 0.$$

Из этих двух выражений находим:

$$\frac{\alpha}{\varphi} = \frac{|\vec g| - \omega^2 l}{\omega^2 l} = \frac{|\vec g|}{2|\vec g| - \omega^2 l}, \tag{3}$$

что позволяет записать следующее уравнение для ω^2:

$$(\omega^2)^2 l^2 - 4|\vec g|\,l\omega^2 + 2|\vec g|^2 = 0.$$

Отсюда находим

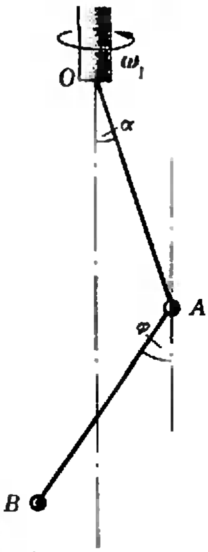


Рис. 10.

$$\omega_{1,2}^2=\frac{|\vec{g}|}{l}(2\pm\sqrt{2}),$$

$$\omega_1=\sqrt{\frac{|\vec{g}|}{l}(2+\sqrt{2})},\quad \omega_2=\sqrt{\frac{|\vec{g}|}{l}(2-\sqrt{2})}$$

(значения $\omega_1'=-\omega_1$ и $\omega_2'=-\omega_2$ соответствуют вращению в противоположную сторону). Поскольку $\omega_2<\omega_1$, естественно считать, что нити маятника начинают отклоняться от вертикали при угловой скорости вращения $\omega=\omega_2$.

Найдем отношение малых углов отклонения нитей OA и AB от вертикали. Из выражения (3) имеем

$$\text{при } \omega=\omega_1 \; - \; \frac{\alpha}{\varphi}=-\sqrt{2},$$

$$\text{при } \omega=\omega_2 \; - \; \frac{\alpha}{\varphi}=\sqrt{2}.$$

Тот факт, что при $\omega=\omega_1$ $\frac{\alpha}{\varphi}<0$, означает, что при такой угловой скорости нити OA и AB отклонены от вертикали в противоположные стороны (рис. 10.).

Г. Бугаенко

◆

Ф505. *Рассмотрим схему зарядки конденсатора от батареи (рис. 11). Конденсатор заряжается до напряжения батареи U, приобретая энергию $\frac{C_1U^2}{2}$ и заряд $q=C_1U$. Этот заряд потребляется от батареи, которая, таким образом, совершает работу $qU=C_1U^2$. Коэффициент полезного действия равен 1/2. Найти способ зарядки конденсатора до напряжения батареи с бо́льшим КПД. Не разрешается использовать дополнительные источники энергии.*

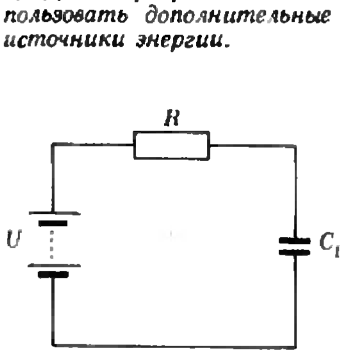


Рис. 11.

I. Возьмем еще один конденсатор, емкость которого $C_2=nC_1$ (n — некоторое число), и включим его в цепь последовательно с конденсатором емкости C_1 (рис. 12). Емкость в такой цепи равна $C=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{n}{n+1}C_1$. Заряды, которые приобретут конденсаторы, равны

$$q_1=q_2=\frac{n}{n+1}C_1U,$$

а напряжения на конденсаторах —

$$U_1=\frac{q_1}{C_1}=\frac{n}{n+1}U,\quad U_2=\frac{q_2}{C_2}=\frac{1}{n+1}U.$$

Отключив заряженные конденсаторы от батареи, соберем цепь, показанную на рисунке 13. Напряжения на конденсаторах в такой цепи $U_1'=U_2'=\frac{q_1'}{C_1}=\frac{q_2'}{C_2}=\frac{q_2'}{nC_1}$, где q_1', q_2' — заряды, которые установятся на конденсаторах. Согласно закону сохранения зарядов $q_1'+q_2'=q_1+q_2=\frac{2n}{n+1}C_1U$. Решив систему уравнений

$$\begin{cases} q_1'+q_2'=\frac{2n}{n+1}C_1U, \\ \frac{q_1'}{C_1}=\frac{q_2'}{nC_1}, \end{cases}$$

найдем: $q_1'=\frac{2n}{(n+1)^2}C_1U$, $U_1'=\frac{2n}{(n+1)^2}U$.

Теперь конденсатор C_1, заряженный до напряжения U_1', вновь подключим к батарее (см. рис. 11). При этом он

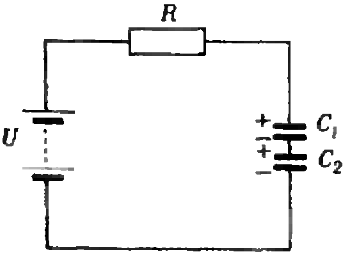


Рис. 12.

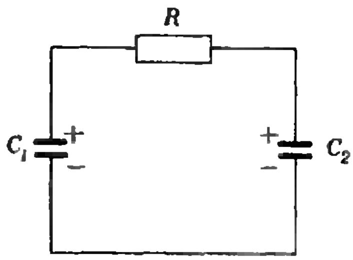


Рис. 13.

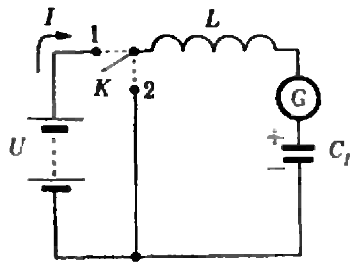


Рис. 14.

дозарядится до напряжения U. Заряд конденсатора увеличится на

$$\Delta q = C_1 (U - U_1') = \frac{n^2+1}{(n+1)^2} C_1 U.$$

Таким образом, суммарный заряд Q, который получил конденсатор C_1 от батареи, равен

$$Q = q_1 + \Delta q = \frac{2n^2+n+1}{(n+1)^2} C_1 U.$$

Энергия, которую приобрел конденсатор, равна

$$\Pi = \frac{C_1 U^2}{2}.$$

Работа A, совершенная батареей при зарядке конденсатора до напряжения U, равна

$$A = QU = \frac{2n^2+n+1}{(n+1)^2} C_1 U^2.$$

Так что КПД равен

$$\eta = \frac{\Pi}{A} = \frac{(n+1)^2}{2(2n^2+n+1)}.$$

Чтобы значение η было больше $1/2$, необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{(n+1)^2}{2n^2+n+1} > 1.$$

Отсюда находим, что $n < 1$.

Итак, заряжая конденсатор C_1 до напряжения U, мы добиваемся более эффективного использования батареи $\left(\eta > \frac{1}{2}\right)$, если в описанном выше процессе пользуемся дополнительно конденсатором C_2, емкость которого меньше C_1.

Те, кто знаком с методом отыскания экстремумов с помощью производной, могут найти, что в описанном процессе $\eta = \eta_{max}$ при $n = 1/3$ ($\eta_{max} \approx 57\%$).

Используя не один, а два, три или больше дополнительных конденсаторов, можно придумать очень много различных способов зарядки. При достаточно большом числе дополнительных конденсаторов можно сделать КПД сколь угодно близким к единице.

II. Опишем еще один способ зарядки, при котором может быть достигнут КПД, близкий к единице.

Соберем цепь, приведенную на рисунке 14. При включении в цепь батареи (ключ K в положении 1) ток через катушку начнет постепенно возрастать. Подождем определенное время, пока по цепи протечет заряд $\frac{CU}{2}$. За это время батарея совершит работу $\frac{CU^2}{2}$, часть которой — $\frac{CU^2}{8}$ — перейдет в энергию конденсатора, а другая часть будет запасена в магнитном поле катушки. Теперь быстро переведем ключ K в положение 2. В течение некоторого времени ток через катушку будет продолжать течь в прежнем направлении, постепенно уменьшаясь. Конденсатор при этом будет дозаряжаться. В момент, когда ток в катушке станет равным нулю, быстро переведем ключ K в положение 1. За то время, пока ключ K находился в положении 2, энергия магнитного поля катушки перешла в энергию конденсатора. Таким образом, поскольку в этой цепи энергия не рассеивается (мы пренебрегаем сопротивлением катушки, батареи и т. д.), вся энергия $\frac{CU^2}{2}$, потребленная от батареи, перейдет в энергию конденсатора, который, следовательно, зарядится до напряжения U. КПД в таком процессе равен единице. В реальных условиях (при наличии сопротивлений в цепи) конденсатор зарядится до меньшего напряжения, и для дозарядки его придется подключить к батарее; в результате КПД несколько уменьшится.

А. Ходулев

◆

Ф506. *Под поршнем цилиндра находится ртуть, занимающая объем $V_р$, и k молей идеального газа. Площадь поверхности поршня равна S. Поршень и дно цилиндра изготовлены из материала, идеально смачиваемого ртутью. Ртуть под поршнем приняла симметричную относительно оси цилиндра форму, показанную на рисунке 15. На поршень действует сила $\vec F$.*
1) Вывести уравнение состояния системы ртуть + газ в форме $p = f(V, T)$, где p — давление, T — абсолютная температура, V — объем части сосуда под поршнем.
2) Найти условие, при котором $p = 0$. Поверхностное натяжение ртути равно σ. Силу тяжести не учитывать. Принять, что объем ртути и ее поверхностное натяжение σ постоянны (то есть не зависят от T и p) и что $h \ll r$.

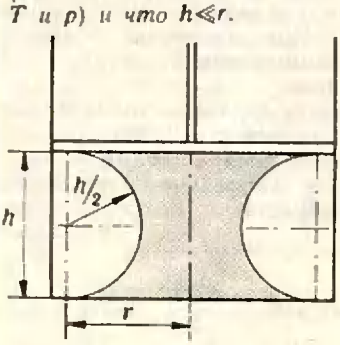


Рис. 15.

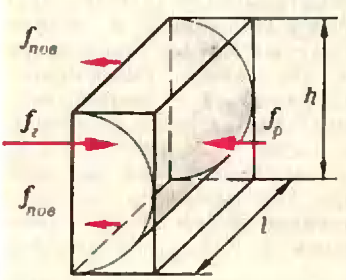


Рис. 16.

Силы, действующие на поршень снизу, — это сила $\vec F_р$ давления ртути и сила $\vec F_г$ давления газа. $|\vec F_р| = p_р S_р$, $|\vec F_г| = p_г (S - S_р)$, где $p_р$, $p_г$ — давления ртути и газа, $S_р$ — площадь поршня, покрытая ртутью.

Давление газа равно

$$p_г = \frac{kRT}{V_г} = \frac{kRT}{V - V_р},$$

где $V_г$ — объем, занимаемый газом. Поскольку поверхность границы ртуть — газ искривлена, давление «под» этой поверхностью, то есть давление газа, больше, чем давление «над» ней, то есть давление ртути. Найдем давление ртути.

Рассмотрим малый участок поверхности границы ртуть — газ (рис. 16). Поскольку $r \gg h$, можно считать, что эта поверхность — поверхность полуцилиндра. Выделим мысленно параллелепипед, в который вписывается эта поверхность (см. рис. 16). На него действуют сила давления газа $|\vec f_г| = p_г s = p_г l h$, сила давления ртути $|\vec f_р| = p_р s = p_р l h$ и силы поверхностного натяжения ртути $|\vec f_{пов}| = \sigma l$. Из условия равновесия этого параллелепипеда следует, что

$$p_г l h = p_р l h + 2\sigma l,$$

откуда

$$p_р = p_г - \frac{2\sigma}{h}.$$

Силы, с которыми газ и ртуть давят на поршень, равны

$$|\vec F_г| = p_г (S - S_р) = \frac{kRT}{V - V_р}(S - S_р),$$

$$|\vec F_р| = p_р S_р = \left(\frac{kRT}{V - V_р} - \frac{2\sigma}{h}\right) S_р.$$

Поскольку $h \ll r$, можно считать, что $S_р = V_р/h$. Учитывая, что $h = V/S$, найдем полную силу, действующую на поршень снизу:

$$|\vec F_г| + |\vec F_р| = p_{ср} S = \frac{kRT}{V - V_р} S - \frac{2\sigma V_р S^2}{V^2},$$

где $p_{ср}$ — среднее давление на поршень снизу. Отсюда

$$p_{ср} = \frac{kRT}{V - V_р} - \frac{2\sigma V_р S}{V^2}.$$

Среднее давление равно нулю при условии

$$\frac{kRT}{V-V_P}=\frac{2\sigma V_P S}{V^2},$$

то есть $p_{cp}=0$ при

$$T=\frac{2\sigma V_P S\,(V-V_P)}{V^2 kR}.$$

С. Семенчинский

◆

Ф507. *Даны две пружины из одинакового материала, каждая из которых свита виток к витку. Диаметры пружин — 3 мм и 9 мм, длины — 1 см и 7 см, диаметры проволок — 0,2 мм и 0,6 мм. Жесткость первой пружины 0,14 Н/см. Найти коэффициент жесткость второй пружины.*

Заметим, что отрезок второй пружины длиной 3 см геометрически подобен первой пружине — все его размеры точно в три раза больше. Посмотрим, как соотносятся жесткости подобных пружин, изготовленных из одного материала.

Жесткость пружины однозначно определяется ее геометрической конфигурацией и упругими свойствами материала, из которого она изготовлена. Будем искать формулу, определяющую жесткость k, справедливую для любой пружины, геометрически подобной первой. Конфигурация такой пружины полностью определена, как только задан какой-либо один ее размер, например, диаметр витка D. Действительно, любой другой размер может быть получен из соответствующего размера первой пружины путем умножения на коэффициент подобия $n=D/D_1$, где D_1 — диаметр первой пружины. А упругие свойства материала характеризуются модулем Юнга E.

Воспользуемся теперь соображениями размерности. Из величин E (размерность $[E]=\text{Н/м}^2$) и D (размерность $[D]=\text{м}$) можно составить единственную комбинацию с размерностью k (размерность $[k]=\text{Н/м}$): ED. Значит,

$$k=cED,$$

где c — безразмерная величина, зависящая от параметров пружины, то есть $c=f\left(\frac{l}{D},\ \frac{d}{D}\right)$. Определить значение c методом размерностей невозможно. Однако нам достаточно того факта, что для всех пружин, геометрически подобных первой, значение c одно и то же.

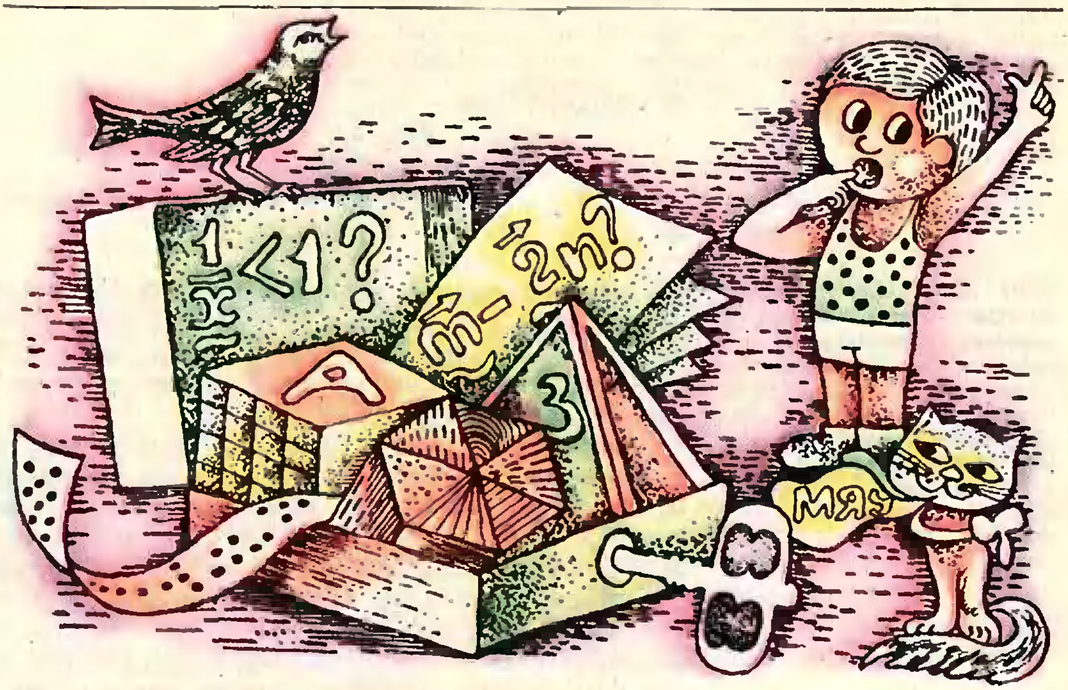
Этот вывод позволяет нам определить жесткость k_3 пружины, геометрически подобной с коэффициентом подобия $n=3$ первой пружине с жесткостью $k_1=0{,}14$ Н/см

$$k_3=3k_1=0{,}42\ \text{Н/см}.$$

Теперь сравним пружину с жесткостью k_3 и вторую пружину из условия задачи, жесткость которой k_2 надо найти. Все их параметры, за исключением длины, одинаковы, так что меньшую из них можно представить в виде трех последовательно соединенных пружин длиной 1 см, а бо́льшую — в виде семи таких пружин. Следовательно, под действием одной и той же силы $\vec F$ удлинение $x_3=|\vec F|/k_3$ меньшей пружины и удлинение $x_2=|\vec F|/k_2$ большей пружины относятся как 3 : 7. Следовательно,

$$k_2=\frac{3}{7}k_3=0{,}18\ \text{Н/см}.$$

А. Кузнецов, С. Кузнецов



А. Земляков

Еще 17 вопросов

Мы вновь предлагаем читателям проверить себя: из пяти данных на каждый вопрос ответов: а, б, в, г, д — выберите единственный верный. Постарайтесь уложиться в 30 минут.

VIII класс

1. Какое из указанных множеств является множеством решений неравенства $\frac{1}{x} < 1$?

а) $]1; +\infty[$, б) $]0; 1[$, в) $]-\infty; 0[$, г) $]-\infty; 0[\bigcup]1; +\infty[$, д) $]-\infty; 0[\bigcup]0; 1[$.

2. Какая из указанных функций является обратной к функции $y=-2x+2$?

а) $y=2x-2$, б) $y=\frac{1}{2}x+1$,

в) $y=-\frac{1}{2}x+1$, г) $y=-\frac{1}{2}x-1$,

д) $y=-\frac{1}{2}x-2$.

3. При какой наибольшей погрешности измерения стороны a квадратного участка граница относительной погрешности вычисленной затем площади не превосходит 1%, если грубое измерение дало $a \approx 100$ м?

а) 1 м, б) 0,5 м, в) 0,01 м, г) 0,05 м, д) 10 м.

4. Сколько существует бесконечных геометрических прогрессий, 1-й и 17-й члены которых оба равны -1?

а) ни одной, б) одна, в) две, г) четыре, д) бесконечно много.

5. Чему равно значение $\cos 210°$?

а) $\sqrt{3}/2$, б) $-\sqrt{3}/2$, в) $1/2$, г) $-1/2$, д) это значение не определено.

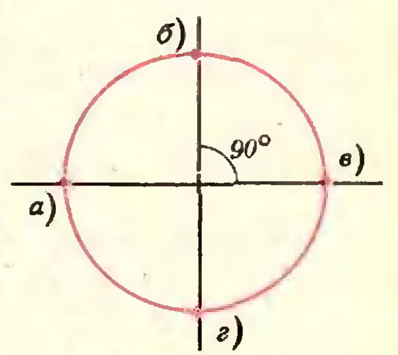


Рис. 1.

6. Какая из указанных на рисунке 1 точек (*а*, *б*, *в*, *г*) является образом точки *а* при повороте $R_0^{-1890°}$?

а) — г) см. рис. 1, д) нужная точка не указана.

7. Длины трех сторон треугольника равны 2, 3 и 4. Каков вид этого треугольника?

а) тупоугольный, б) прямоугольный, в) остроугольный, г) по длинам сторон определить нельзя, д) такого треугольника не существует.

8. Отношение периметров двух правильных треугольников равно 2. Чему равно отношение площадей этих треугольников?

а) 1, б) 2, в) $\sqrt{2}$, г) 3/2, д) 4.

9. На рисунке 2 заданы векторы $\vec{m}$ и $\vec{n}$. Какому из указанных на рисунке векторов (*а*, *б*, *в*, *г*) равна разность $\vec{m}-2\vec{n}$?

а) — г) см. рис. 2, д) эта разность равна $\vec{0}$.

IX класс

10. Какое из указанных множеств является множеством решений неравенства $|x+1|>1$?

а) $]0;\ +\infty[$, б) $]0;\ 2[$, в) $]-2,\ 0[$, г) $]-\infty;\ 0[\cup]2;+\infty[$, д) $]-\infty;-2[\cup\cup]0;\ +\infty[$.

11. Сколькими способами из 100 деталей можно выбрать партию из 10 штук для контроля качества?

а) P_{10}, б) P_{100}, в) A_{100}^{10}, г) C_{100}^{10}, д) 10^{10}.

12. Чему равен предел функции $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$ при $x\to 1$?

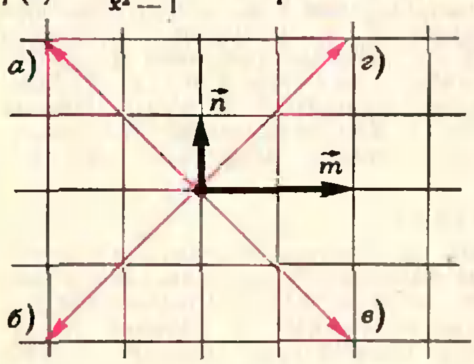


Рис. 2.

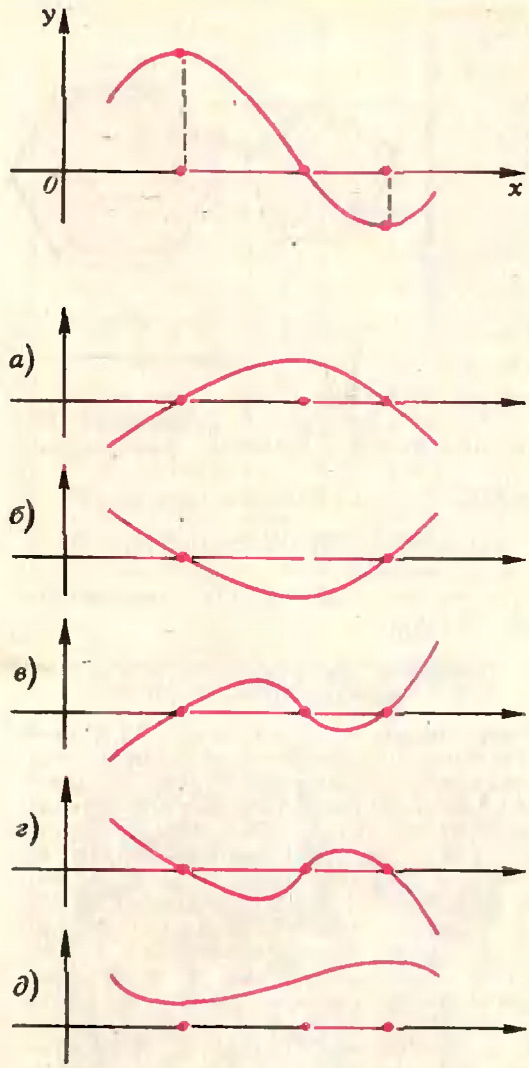


Рис. 3.

а) 0, б) 1, в) 3/2, г) 1/2, д) этот предел не существует.

13. На рисунке 3 сверху изображен график функции $y=f(x)$. Какой из расположенных под ним графиков (а, б, в, г, д) может являться графиком производной функции f, т. е. функции $y=f'(x)$?

14. Сколько существует плоскостей, проходящих через данную точку и параллельных двум данным скрещивающимся прямым?

а) ни одной, б) одна, в) две, г) четыре, д) бесконечно много.

15. Какие из указанных на рисунке 4 фигур 1, 2, 3 могут являться параллельными проекциями куба?

а) все три, б) только 1, в) только 3, г) 2 и 3, д) 1 и 3.

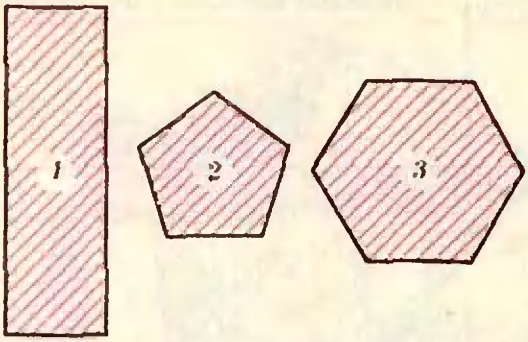


Рис. 4.

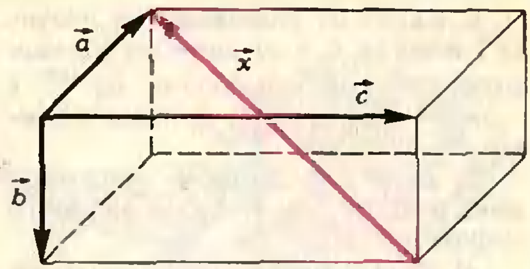


Рис. 5.

16. На рисунке 5 изображен параллелепипед. Каково разложение вектора $\vec x$ по векторам $\vec a$, $\vec b$ и $\vec c$?

а) $\vec a+\vec b+\vec c$, б) $\vec a+\vec b-\vec c$, в) $\vec a-\vec b-\vec c$, г) $-\vec a-\vec b-\vec c$, д) нужное разложение не указано.

17. Длины векторов $\vec a$ и $\vec b$ равны $a=1$, $b=2$. Чему равно скалярное произведение $(\vec a-\vec b)\cdot(\vec a+\vec b)$?

а) 0, б) 3, в) 5, г) —3, д) ответ зависит от угла между векторами $\vec a$ и $\vec b$.

(*Начало см. на с. 12*)

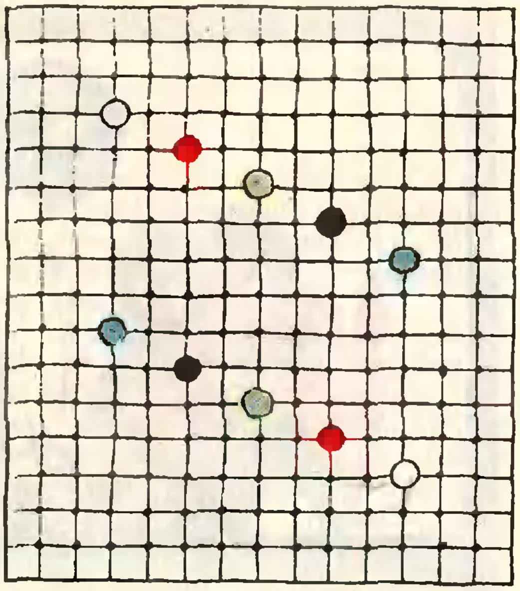
(Свердловск) 6, 8—4, 5а); *Г. Кисилев* (Татищево Саратовской обл.) 6; *С. Колпаков* (р/п Чернышковский Волгоградской обл.) 9; *С. Кочетов* (п/о Дружба Краснодарского края) 9, 2; *О. Кравец* (Воронеж) 9; *С. Кузнецов* (Ангарск) 6—9, 0б), в), 1—3; *Е. Кузьмин* (Череповец) 6, 9, 0б), в), 2, 3, 5а); *А. Кулеско* (Донецк) 6, 9, 0б), в), 1, 3; *Е. Лапин* (Алма-Ата) 9, 0б), в); *Ю. Лапуста* (Тернополь) 6, 8, 9, 0б), в), 3; *В. Лашкин* (Киев) 6, 9; *Л. Левитов* (Москва) 7, 9, 0б), 2, 3, 5а), б); *И. Лещенко* (Херсон) 9; *А. Логинов* (Ташкент) 9; *Д. Людмирский* (Киев) 9; *Г. Манташян* (Ереван) 9; *К. Манукян* (Тбилиси) 3; *С. Мардаев* (Кемерово) 2; *В. Матчишин* (Целиноград) 9, 2, 3, 5а); *В. Машевский* (Одесса) 6, 9; *Р. Мешойрер* (Москва) 6, 9, 3, 5а); *А. Миндлин* (Саратов) 9, 0б), в); *Д. Миндлин* (Ташкент) 6—9; *С. Морейно* (Москва) 9; *В. Морштейн* (Харьков) 6, 9, 0б); *Т. Мынбаев* (Алма-Ата) 6, 9; *Е. Мясников* (Канаш) 6, 9; *Б. Надеждин* (Долгопрудный) 6—9, 0б), в), 1—3, 5а); *С. Новиков* (Херсон) 6, 9, 3, 5а); *А. Новоселя* (Ташкент) 1; *А. Опарин* (Горький) 6, 9, 2, 3; *И. Ориняк* (Бурштын) 9, 0б), в); *С. Осенний* (Киев) 9; *А. Павенис* (п/о Ногале Лат. ССР) 6; *А. Паланджян* (Ереван) 9; *Л. Петрусевич* (д. Козлы Минской обл.) 6, 9; *С. Печенкин* (Алма-Ата) 9; *В. Подстригач* (Львов) 9, 3; *А. Попелюхин* (Киев) 6, 9, 0б), в); *С. Пошехонов* (Энгельс) 7; *В. Прилугов* (Барнаул) 3; *В. Процишин* (с/з Бобровский Павлодарской обл.) 6, 7, 9, 3; *Г. Пуричамиашвили* (Тбилиси) 6, 9; *В. Радченко* (Киев) 6, 9, 0б), в), 3; *З. Райхштейн* (Ярославль) 6, 7, 9, 0б), в); *В. Решетников* (Муром) 1, 2; *И. Ройзман* (п. г. т. Калиновка Винницкой обл.) 6, 7, 9, 0б); *А. Ролдугин* (Воронеж) 2; *Т. Рыльская* (Москва) 9; *И. Савенков* (р. п. Лысые горы Саратовской обл.) 6, 7, 9, 0в); *С. Сазонов* (Уфа) 9, 1; *С. Севастюк* (Невинномысск) 9; *М. Севрюк* (Москва) 6—5; *П. Селиванов* (Семипалатинск) 6, 0б), в); *А. Сивацкий* (Ленинград) 6, 7, 9, 0б), 3, 4а), б), 5а); *А. Сивенцев* (Свердловск) 6; *С. Сидоренко* (Брянск) 3, 5а); *В. Скричевский* (Киев) 6, 9; *А. Смыслов* (Конаково) 6, 9; *А. Сромин* (Ленинград) 9; *С. Стадниченко* (Пенза) 6, 9, 3, 5а); *М. Стрешинский* (Донецк) 6; *Г. Субоч* (д. Нарочь Минской обл.) 6, 9; *Ф. Сухочев* (Ташкент) 6—9, 2, 3, 5а); *О. Тавчень* (Минск) 9; *А. Тартаковский* (Москва) 6—3, 4б), 5а); *К. Таталян* (Ереван) 8, 9, 1, 5а); *С. Тихомиров* (Москва) 9; *Ю. Трофимчук* (п. г. т. Калиновка Винницкой обл.) 6; *В. Трухин* (В. Уфалей) 6, 9; *О. Трушин* (Кострома) 6; *К. Туйтеев* (Ходжейли) 6; *Д. Тураев* (Горький) 1, 3, 5а); *О. Тюрина* (Павлодар) 0б), в); *В. Уманский* (Баку) 6, 9, 1—3, 5а); *Н. Федин* (Омск) 2; *Г. Фирсова* (Ленинград) 6, 9, 1, 3, 5а); *Т. Хайбулин* (Загорск) 6, 9, 2, 5а); *С. Хлебутин* (Москва) 6, 7, 9, 1—3, 4а), б); *С. Хосид* (Алма-Ата) 1—3; *Ю. Церковский* (Москва) 9; *А. Чаплыгин* (Николаев) 7, 9, 1, 3; *П. Чеботарев* (Москва) 6, 9; *И. Черная* (Ленинград) 6, 9, 3; *М. Чикин* (Воронеж) 6, 9, 0б); *В. Шаблинский* (Киев) 9, 0б), в); *А. Шихкеримов* (Сумгаит) 6; *Е. Шкляр* (Гомель) 9, 5а); *А. Ялышев* (Тула) 0б); *Н. Ярошенко* (с. Устивица Полтавской обл.) 9.

Физика

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф493—Ф507**, справились с задачами **Ф493**, **Ф499** и **Ф504**. Остальные задачи правильно решили: *С. Азнабаев* (Новотроицк Оренбургской обл.) 0; *К. Ако-*

(*Продолжение см. на с. 41*)

«Квант» для младших школьников

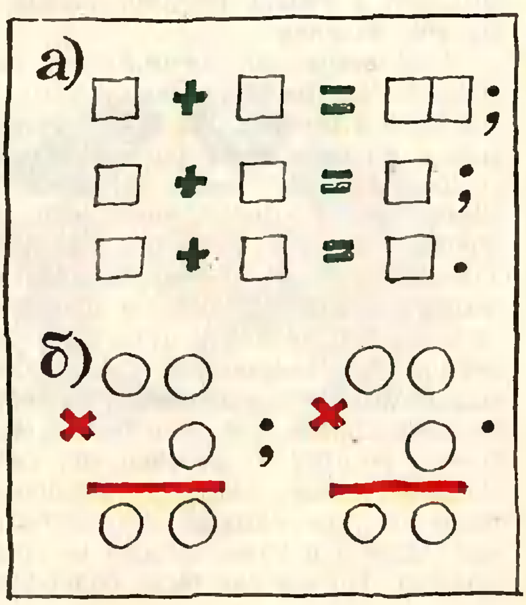


Задачи

1. Разноцветные точки. Внутри прямоугольника в узлах сетки расположены разноцветные точки (см. рисунок). Соедините точки одинакового цвета непересекающимися ломаными одинаковой длины так, чтобы звенья ломаных были параллельны сторонам прямоугольника, а длина ломаной — максимальной.

2. Десять цифр. а) Впишите в квадратики цифры от 0 до 9 так, чтобы получились три верных примера на сложение.

б) Впишите в кружочки цифры от 0 до 9 так, чтобы получились два верных примера на умножение.



3. Квадрат составлен из $(n+1)^2$ квадратных клеточек. Некоторые клеточки закрашиваются в черный цвет. Докажите, что всегда можно так закрасить $3n$ клеточек, чтобы при любом вычеркивании $n-1$ столбцов и $n-1$ строк квадрата оставалась по крайней мере одна белая клеточка.

4. На пионерском слете выяснилось, что каждый мальчик знаком ровно с n девочками и каждая девочка знакома ровно с n мальчиками. Докажите, что на слет прибыло одинаковое количество девочек и мальчиков.

В. Махров

Старые знакомые

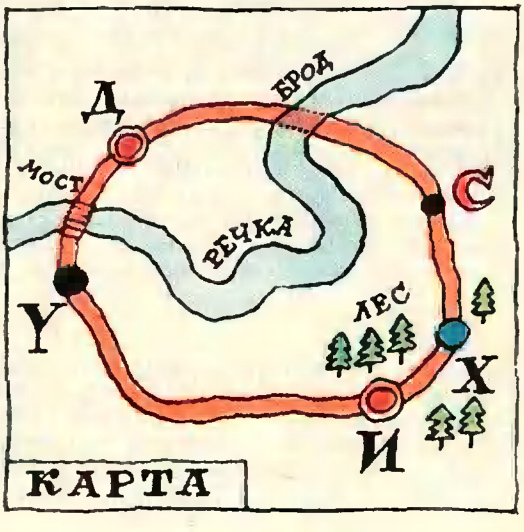
На небольшой площади Города Игрушек собрались пятеро всем известных героев: Винни-Пух, Пятачок, старуха Шапокляк, Крокодил Гена и Ежик. Да-да, тот самый Ежик, который в тумане потерял узелок с банкой варенья.

Еще вчера они договорились навестить Чебурашку, отдыхавшего у бабушки в деревне. Из Города Игрушек в деревню ведут две дороги одинаковой длины: через город X и через город Y. Дорога через город X проходит по лесу, и Ежик предложил пойти по ней. Было лето, и никто не возразил. Растянувшись в цепочку, друзья отправились в путь. Вы, наверное, уже догадались, что с собой они прихватили горшочек меда, воздушный шарик, узелок с банкой варенья, рогатку и, конечно же, гармошку. Правда, немножко странным было то, что каждый путешественник держал в руках совсем не свой предмет. Но все они были большими друзьями и не обратили на это внимания.

Впереди шагал Винни-Пух, за ним почти бежал Пятачок, за ним, не отставая, — старуха Шапокляк. Не теряя из виду Крокодила Гену, последним бежал Ежик.

— Между прочим, — сказал вдруг Пятачок, — по другой дороге (мимо города Y) через речку, которую сейчас нам придется переходить вброд, есть мост.

— Тогда почему же мы не пошли той дорогой? — недовольно проворчала старуха Шапокляк.



— Не ссорьтесь, — пробасил Крокодил Гена. — Лучше помогите мне решить задачу, имеющую отношение к нашему путешествию.

Известно, что дорога из X в Y через Город Игрушек короче, чем через чебурашкину деревню. Кроме того, известно, что город Y ближе к деревне, чем к Городу Игрушек. Нужно выяснить, сколько всего имеется различных по длине участков между тремя городами и деревней, и расположить эти участки в порядке возрастания их длины.

— Я знаю, как решать эту задачу, — сказал Винни-Пух, рисуя на песке кольцевой маршрут YY (см. рисунок). — Обозначим буквой C середину кольцевого маршрута YY, буквой $И$ — Город Игрушек, буквой $Д$ — деревню. Очевидно, что город X находится на участке $СИ$.

— Мне это вовсе не очевидно, — вновь пробурчала старуха Шапокляк.

Не обращая на нее внимания, Винни-Пух продолжал:

— Буквами a, b, c и d обозначим длины участков, соответственно, между X и $Д$, X и $И$, Y и $Д$, Y и $И$. По условию задачи $c < d$. Нетрудно показать, что участки $СИ$ и $ДY$ одинаковы по длине. Из того, что X лежит на участке $СИ$, следует, что $b < c$. Мы получаем такую систему:

$$\begin{cases} a+b=c+d, \\ d+b<c+a, \\ c<d, \\ b<c. \end{cases}$$

— Дальше можешь не рассказывать, — перебил Винни-Пуха Крокодил Гена. — Я уже могу дорешать эту задачу.

— А почему ты не решаешь задачу? — спросил Пятачок у Ежика.

— Потому что я придумал другую задачу; давайте предложим ее Чебурашке. Послушайте ее условие. Мы скажем Чебурашке, кто за кем шел, но не скажем, кто какие вещи нес. Однако скажем ему, что Гена не нес гармошку, а если я, Ежик, перебегу на новое место и стану между теми из вас, кто несет горшочек меда и узелок с вареньем, то рядом с тем, кто несет варенье, будет тот, кто несет гармошку, а тот, кто несет воздушный шарик, будет точно посередине. Чебурашка должен будет выяснить, какой предмет нес каждый из нас.

Вы прочитали шуточный рассказ про Винни-Пуха, Пятачка и их друзей. Можете ли вы объяснить старухе Шапокляк, почему город X лежит на участке *СИ*, и помочь Чебурашке решить задачу Ежика? Догадались ли вы, как Крокодил Гена должен «дорешать» свою задачу, и какой в ней ответ?

Мы ждем ваших писем.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Ниже мы публикуем варианты вступительных письменных экзаменов по математике на гуманитарных факультетах МГУ в 1978 г.

Математика

Отделение политэкономии экономического факультета

1. Решить уравнение

$$\log_{(2-2x^2)}(2-x^2-x^4) = 2 - \frac{1}{\log_{\frac{4}{3}}(2-2x^2)}.$$

2. В плоскости даны квадрат $ABCD$ (с последовательно обозначенными вершинами) и точка O. Известно, что

$$|OA| = |OC| = 10, \quad |OD| = 6\sqrt{2}$$ и

длина стороны квадрата не превосходит 3. Найти площадь квадрата. Где расположена точка O — вне или внутри квадрата?

3. Найти все значения параметра c, при которых система

$$\begin{cases} -4x + cy = 1 + c, \\ (6 + c)x + 2y = 3 + c \end{cases}$$

не имеет ни одного решения.

4. Изготовлено некоторое количество проволоки. Если ее намотать на катушки, на которые умещается по 800 м проволоки, то одна катушка будет намотана не полностью. Если пользоваться только катушками, на которые умещается по 900 м проволоки, то таких катушек понадобится на 3 меньше, а одна катушка снова будет намотана не полностью. Если же проволоку наматывать только на катушки, на которые умещается по 1100 м, то таких катушек понадобится еще на 6 меньше, но при этом все катушки будут намотаны полностью. Сколько метров проволоки было изготовлено?

5. Найти все значения параметра a, при каждом из которых функция

$$y = 5ax - \sin 8x - a\cdot\sin 3x - 3x$$

возрастает и не имеет критических точек на всей прямой.

Отделение планирования и экономической кибернетики экономического факультета

1. Найти все корни уравнения

$$|x^2 + 2x - 4| + 2x + 6 = 0,$$

удовлетворяющие неравенству $x + \sqrt{18} < 1$.

2. В четырехугольнике $ABCD$ угол при вершине B имеет величину 90°, а диагональ BD является биссектрисой этого угла. Известно, что $\frac{|AB|}{2} = \frac{|BD|}{4\sqrt{2}}$. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$.

3. Решить уравнение

$$\log_{3x}\left(31x - \frac{3}{x}\right) = \frac{1}{\log_{\frac{4}{3}}(3x)} + 3.$$

4. Имеется три сплава. Первый содержит 45% олова и 55% свинца, второй содержит 10% висмута, 40% олова и 50% свинца, третий содержит 30% висмута и 70% свинца. Из них необходимо составить новый сплав, содержащий 15% висмута. Какое наибольшее и какое наименьшее процентное содержание свинца может быть в этом новом сплаве?

5. Найти множество всех действительных чисел b, при каждом из которых функция

$$f(x) = 16(b+1)\sin x - \sin 2x - (16b^2 + 32b - 10)x$$

является убывающей на всей числовой прямой и не имеет критических точек.

Факультет психологии

1. Решить уравнение

$$\left(\log_3 \frac{3}{x}\cdot(\log_2 x) - \log_3 \frac{x^3}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + \log_2 \sqrt{x}.\right.$$

2. Диагональ BD четырехугольника $ABCD$ является диаметром окружности, описанной около этого четырехугольника. Вычислить длину диагонали AC, если $|BD| = 2$, $|AB| = 1$, $\widehat{ABD} : \widehat{DBC} = 4 : 3$.

3. Пешеход, велосипедист и мотоциклист движутся по шоссе в одну сторону с постоянными скоростями. В тот момент, когда пешеход и велосипедист находились в одной точке, мотоциклист был на расстоянии 6 км позади них. В тот момент, когда мотоциклист догнал велосипедиста, пешеход отставал от них на 3 км. На сколько километров велосипедист обгонял пешехода в тот момент, когда пешехода настиг мотоциклист?

4. Найти множество всех таких пар действительных чисел (a, b), для каждой из которых при всех $x \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$a(\cos x - 1) + b^2 = \cos(ax + b^2) - 1.$$

5. Известно, что для некоторой квадратичной функции

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \quad a \neq 0$$

выполнены неравенства

$$f(-1) < 1,\ f(1) > -1,\ f(3) < -4.$$

Определить знак коэффициента a.

Отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета

1. Двум бригадам, общей численностью 18 человек, было поручено организовать в течение трех суток непрерывное круглосуточное дежурство по одному человеку. Первые двое суток дежурили члены первой бригады, распределив между собой это время поровну. Известно, что во второй бригаде 3 девушки, а остальные — юноши, причем девушки дежурили по одному часу, а юноши распределили между собой остаток дежурства поровну. При подсчете оказалось, что сумма продолжительностей дежурств юноши второй бригады и члена первой бригады меньше 9 часов. Сколько человек в каждой бригаде?

2. В Изумрудном городе автобусные билеты имеют шестизначные номера от 000001 до 999999. Школьники называют билет счастливым, если первые три его цифры нечетны и различны, вторые три цифры четны, причем цифры 7 и 8 не стоят рядом. Сколько всего существует различных номеров счастливых билетов?

3. Решить уравнение

$$5 \sin x + 6 \sin 2x + 5 \sin 3x + \sin 4x = 0.$$

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$f(x) = \sin^2 x + \cos x - \frac{1}{2}.$$

5. Пятиугольник $ABCDE$ (вершины обозначены последовательно) вписан в окружность единичного радиуса. Известно, что $|AB| = \sqrt{2}$, $\widehat{ABE} = 45^\circ$, $\widehat{EBD} = 30^\circ$ и $|BC| = |CD|$. Чему равна площадь пятиугольника?

И. Горев

(Начало см. на с. 12, 36)

пян (Ереван) 94, 98, 5—7; *Е. Александрова* (Глазов) 97, 0; *В. Антимиров* (Рига) 98, 0; *А. Атландеров* (Тольятти) 97; *И. Ахметов* (Димитровград) 98, 0, 3, 7; *Б. Байсакалов* (Алма-Ата) 94; *А. Балашкин* (Киев) 95, 96; *А. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) 94, 95, 97, 98, 0—3; *А. Белов* (Москва) 94, 95, 0; *А. Беляев* (Витебск) 95; *В. Болотников* (Харьков) 3, 7; *А. Болтаев* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 0; *С. Бортников* (Крымск) 0; *С. Брехачев* (Таганрог) 95; *А. Бродин* (Киев) 0—3, 6, 7; *С. Буга* (Москва) 3; *В. Будников* (ст. Старотитровская Краснодарского кр.) 3, 5; *Р. Будяшкин* (Свердловск) 0; *М. Валейко* (Киев) 97; *А. Винник* (Москва) 0; *М. Гаврилов* (п. Черноголовка Московской обл.) 94, 95, 97, 98, 0—3, 5, 7; *М. Гольцман* (Днепропетровск) 5; *В. Гревцев* (Таллин) 97; *Ш. Давлетов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 1; *С. Долженко* (Донецк) 5; *А. Дремин* (п. Черноголовка Московской обл.) 94, 95, 97, 1; *И. Дубовой* (Алма-Ата) 97, 0; *С. Дынник* (Тараклия) 94, 95; *И. Дятчин* (Москва) 3; *М. Ермолаев* (Кострома) 5; *В. Жилич* (с. Хабары Алтайского кр.) 7; *В. Жердочкин* (Орск) 1; *К. Жуков* (Москва) 98, 1, 3, 5, 7; *Е. Зиманов* (Алма-Ата) 94, 0; *Е. Зудин* (Александров) 98, 5, 7; *Е. Иванов* (Долгопрудный) 94, 95, 97; *Л. Какабадзе* (Тбилиси) 97; *С. Калашников* (Рязань) 0; *А. Карнаухов* (п. Кутана ЯАССР) 95, 97, 98; *О. Карраш* (Лида) 1; *В. Кельман* (Москва) 97, 1; *В. Ковтуненко* (Киев) 97; *Е. Коган* (Днепропетровск) 3; *Н. Коган* (Харьков) 95, 97; *Ю. Кокуш* (Тамбов) 98, 0, 1; *Е. Коломейский* (Винница) 95; *Д. Коломейцев* (Сумгаит) 1; *К. Колчев* (с. Андреевка Московской обл.) 1—3; *В. Комов* (Александров) 94—96, 98; *К. Кондратьев* (Москва) 98, 0, 1, 3; *Г. Корчемский* (Кишинев) 95, 98, 0, 1; *О. Кравец* (Воронеж) 0; *Р. Криштул* (Бобруйск) 98, 1; *А. Крупцев* (Курск) 98, 0, 1; *Е. Кузьмин* (Череповец) 0; *А. Куприн* (Москва) 94, 98, 0, 1; *В. Курьян* (Ростов-на-Дону) 98, 1; *Т. Кухтина* (Киев) 95, 0, 1; *А. Кучер* (Донецк) 1; *Е. Лапин* (Алма-Ата) 97, 98, 1; *В. Лашкин* (Киев) 94, 95, 97, 98, 5—7; *А. Лебедев* (Горький) 0; *А. Левченко* (Свердловск) 95, 98, 1; *А. Леонович* (Лида) 1; *В. Линьков* (Калуга) 7; *Д. Людмирский* (Киев) 94, 97, 98, 1; *А. Матякубов* (Хазараспский р-н Хорезмской обл.) 0, 1; *Ф. Махров* (д. Тойшлево ЧАССР) 0; *С. Медведев* (Москва) 96; *Р. Мешойрер* (Москва) 95, 98, 1; *А. Миклеева* (Саратов) 97, 0, 1; *С. Миклова* (Борщовский р-н Тернопольской обл.) 0; *Н. Миронов* (Кашин) 95; *А. Мкртчян* (Ленинакан) 97, 98; *А. Могильнер* (Свердловск) 97, 0, 1; *А. Молотовщиков* (Тейково) 97, 98, 0, 1; *И. Молчанов* (Киев) 98, 0, 1; *М. Морозов* (Ашхабад) 5; *Д. Мошинский* (Москва) 0; *Д. Муратов* (с. Дрожжаное ТАССР) 95, 98; *С. Муритчиев* (Махачкала) 0; *А. Муромцев* (Москва) 95, 97, 1; *П. Натанов* (Москва) 97, 98, 0; *Л. Николаев* (Москва) 95, 97; *А. Оглоблин* (Иркутск) 98, 0; *А. Омельчук* (Истра) 2, 3, 5—7; *И. Омелян* (Львов) 98, 0, 1; *А. Опарин* (Горький) 95, 97, 98, 0—3, 5, 6; *В. Остапенко* (Алма-Ата) 98, 0; *Т. Павелкина* (Киев) 98, 1; *А. Павлов* (Узловая) 97; *О. Пензин* (Ленинск-Кузнецкий) 0; *С. Пермяков* (Раздельная) 97; *А. Перов* (Москва) 0, 1; *И. Петренко* (Поти) 98, 1; *Р. Петренко* (Киев) 95, 97; *С. Прядкин* (Киев) 97, 0, 1, 5; *В. Редикульцев* (Мо ва) 3; *М. Рейтман* (Москва) 0, 1; *В. Ре тников* (Муром) 0; *А. Родин* (Великие Луки) 95, 97; *И. Романов* (Москва) 94; *И. Романовский* (Лида) 94, 95, 0;

(Окончание см. на с. 53)

Л. Табачников

Элементы статики деформируемых тел

При решении задач на статику твердых тел обычно предполагается, что тела абсолютно твердые (не деформируемые). На самом деле все существующие в природе тела под действием приложенных к ним сил деформируются — изменяют свои размеры, а иногда и форму. Оказывается, некоторые положения статики абсолютно твердых тел нельзя применять к деформируемым телам.

Например, в случае абсолютно твердого тела любую силу, не изменяя состояния равновесия тела, можно переносить вдоль линии ее действия. В статике деформируемого тела это недопустимо. Действительно, если сила $\vec{F}$ приложена в точке A (рис. 1, *а*), стержень растянут по всей длине l, при переносе силы в точку B — только по длине l_1 (рис. 1, *б*). Таким образом, хотя равновесие всего стержня сохраняется, удлинение и напряженное состояние стержня при переносе силы $\vec{F}$ вдоль линии ее действия изменяются.

Еще один пример. На рисунке 2 изображен стержень, закрепленный с одного конца. К другому концу приложены две силы, $\vec{F}$ и $-\vec{F}$, равные по абсолютной величине, противоположные по направлению и лежащие в одной плоскости (их обычно называют *парой сил*). В статике абсолютно твердого тела пару сил, не изменяя состояния равновесия тела, можно переносить в другую плоскость, параллельную плоскости действия пары сил. Для деформируемого тела этого делать нельзя: в первом случае (рис. 2, *а*) пара сил вызывает кручение стержня по всей длине l, а во втором случае (рис. 2, *б*) — лишь по длине l_1.

Кроме деформаций растяжения и кручения на практике встречаются и другие виды деформаций. Ограничимся рассмотрением деформации осевого растяжения (или сжатия).

При рассмотрении условий равновесия деформируемого тела принято все приложенные к телу силы делить на в н е ш н и е и в н у т р е н н и е (силы упругости). Внешние силы вызывают ускорение одних частей тела относительно других, в

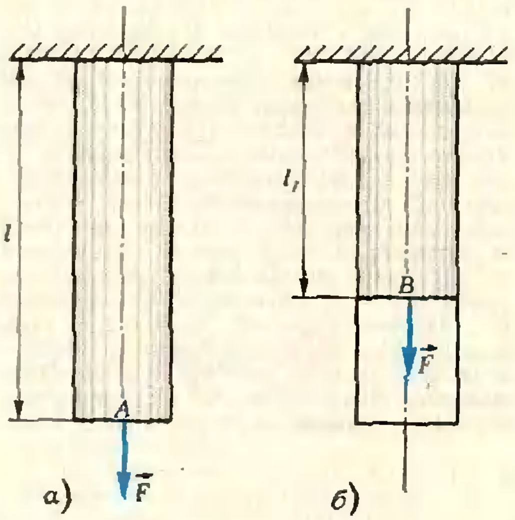


Рис. 1.

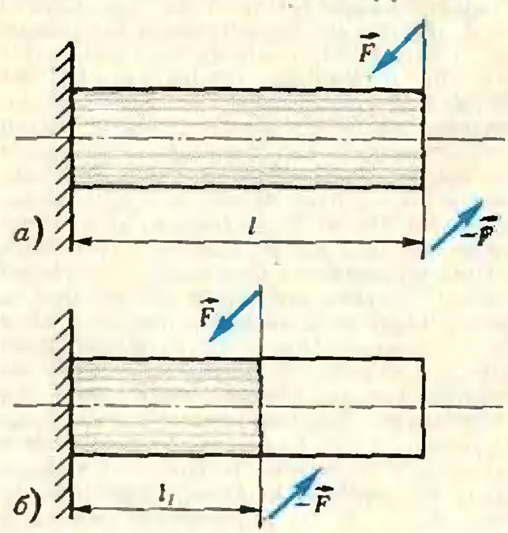


Рис. 2.

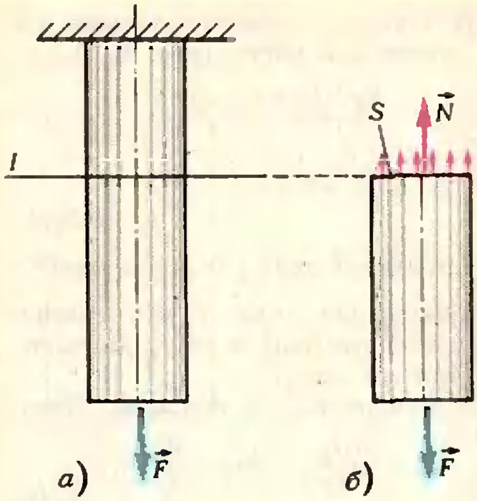


Рис. 3.

результате тело деформируется. Следствием деформации являются силы упругости. Как определить эти силы? Рассмотрим такую задачу:

Задача 1. *К цилиндрическому стержню, закрепленному сверху, в его нижнем сечении приложена сила $\vec{F}$, направленная вдоль оси стержня (рис. 3, а). Найти внутренние силы, возникающие в поперечных сечениях стержня. Массой стержня пренебречь.*

Воспользуемся так называемым *методом сечений*. Мысленно рассечем стержень плоскостью *I* и рассмотрим условие равновесия нижней отсеченной части стержня. Действие верхней части заменим силами реакции, которые и являются внутренними силами.

Обозначим через $\vec{N}$ равнодействующую всех сил упругости, распределенных по выбранному сечению (рис. 3, б). Отсеченная часть стержня находится в равновесии под действием внешней силы $\vec{F}$ и внутренней силы $\vec{N}$ (на самом деле для нижней части стержня она является внешней силой):

$$\vec{F}+\vec{N}=0.$$

Проектируя силы $\vec{F}$ и $\vec{N}$ на ось, направленную вертикально вверх, получим

$$N+F=0, \text{ или } N=-F.$$

Если $N>0$, имеет место растяжение, если $N<0$ — сжатие. В данном случае $N>0$ (поскольку $F<0$) — стержень растянут.

* * *

При изучении деформаций растяжения под действием осевых сил (как в рассмотренной задаче) обычно предполагается, что плоские поперечные сечения остаются плоскими и перпендикулярными к оси и после деформации. Это позволяет считать, что внутренние силы распределены по всей площади S поперечного сечения тела равномерно. Отношение $\sigma=\frac{|\vec{N}|}{S}$ называют *напряжением*. Напряжение характеризует внутреннее состояние деформированного тела.

Как показывают опыты, при упругих деформациях (когда деформации исчезают после прекращения действия внешних сил) выполняется закон Гука:

$$|\vec{N}|=k|\Delta l|,$$

или, в другой форме,

$$\sigma=E|\varepsilon|.$$

Здесь $|\vec{N}|$ — модуль силы упругости, k — коэффициент упругости, $\Delta l=l-l_0$ — абсолютное удлинение образца (разность между конечной длиной l образца и его начальной длиной l_0), σ — напряжение, E — модуль упругости (модуль Юнга), $\varepsilon=\frac{\Delta l}{l_0}$ — относительное удлинение образца. Модуль упругости E характеризует только материал, из которого сделан образец, а коэффициент упругости k — материал образца и его геометрические размеры.

Для подавляющего большинства материалов закон Гука справедлив только в случае малых деформаций, при увеличении деформации напряжение перестает быть прямо пропорциональным относительному удлинению. При некоторой деформации образец разрушается; соответствующее значение напряжения называют *пределом прочности*. Наибольшее безопасное напряжение, при котором обеспечена прочность образца, называется *допускаемым напряжени-*

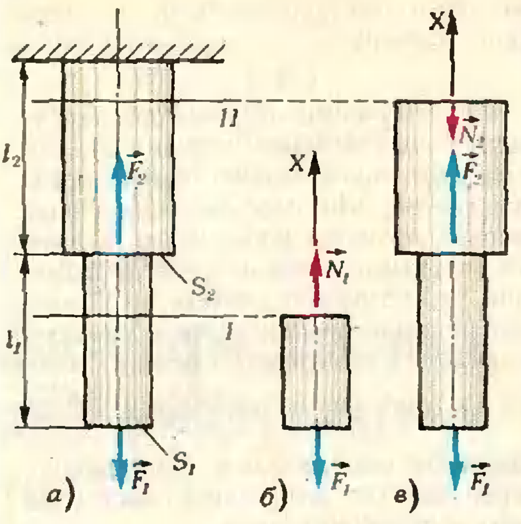


Рис. 4.

ем $\sigma_{доп}$. Допускаемое напряжение определяется опытным путем. Таким образом, условие прочности образца можно записать так:

$$\sigma \leqslant \sigma_{доп}.$$

Решим несколько конкретных задач.

Задача 2. *Определить удлинение стального ступенчатого стержня (рис. 4, а), к которому приложены осевые силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ ($|\vec{F}_1| = 20$кН, $|\vec{F}_2| = 30$ кН). Длины участков стержня равны $l_1=1$ м и $l_2=2$ м, поперечные сечения равны, соответственно, $S_1=1$ см^2 и $S_2=2$ см^2, модуль Юнга $E=2\cdot10^5$ МН/м^2. Стержень считать невесомым.*

Очевидно, что общее удлинение ступенчатого стержня равно сумме удлинений его участков:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2.$$

Для определения Δl_1 и Δl_2 найдем продольные силы упругости $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, возникающие, соответственно, в нижнем и верхнем участках стержня.

Рассечем стержень плоскостью I и запишем условие равновесия отсеченной части стержня в проекциях на ось X (рис. 4, б):

$$N_1 + F_1 = 0.$$

Отсюда

$$N_1 = -F_1 = |\vec{F}_1| = 20 \text{ кН}.$$

Аналогично найдем $\vec{N}_2$. Проведем плоскость сечения II и запишем соответствующее условие равновесия для отсеченной части (рис. 4, в):

$$N_2 + F_1 + F_2 = 0,$$

или

$$N_2 = -F_1 - F_2 = |\vec{F}_1| - |\vec{F}_2| = -10\text{кН}.$$

Отрицательный знак у N_2 показывает, что продольная сила $\vec{N}_2$ направлена вниз; следовательно, в верхнем участке стержень сжат.

В соответствии с законом Гука,

$$\Delta l_1 = \frac{N_1 l_1}{ES_1}, \quad \Delta l_2 = \frac{N_2 l_2}{ES_2},$$

и

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{1}{E}\left(\frac{N_1 l_1}{S_1} + \frac{N_2 l_2}{S_2}\right) = 0{,}5\cdot10^{-3} \text{ м} = 0{,}5 \text{ мм}.$$

Задача 3. *Груз массы $m=2$ т поддерживают два одинаковых круглых стальных стержня, соединенных шарнирно в узле A и составляющих угол $\alpha = 60°$ с вертикалью (рис. 5). Определить диаметр сечения каждого стержня, если допускаемое напряжение для стали $\sigma_{доп} = 160$ МН/м^2.*

Рассмотрим узел A. На него действуют три силы: вес груза $\vec{\mathscr{P}}$ ($|\vec{\mathscr{P}}| = m|\vec{g}|$) и силы реакции стержней $\vec{R}_1$ и $\vec{R}_2$. Запишем условия равновесия узла A в проекциях на оси координат X и Y:

$$-|\vec{R}_1|\sin\alpha + |\vec{R}_2|\sin\alpha = 0,$$
$$|\vec{R}_1|\cos\alpha + |\vec{R}_2|\cos\alpha - m|\vec{g}| = 0.$$

Отсюда

$$|\vec{R}_1| = |\vec{R}_2| = |\vec{R}| = \frac{m|\vec{g}|}{2\cos\alpha}.$$

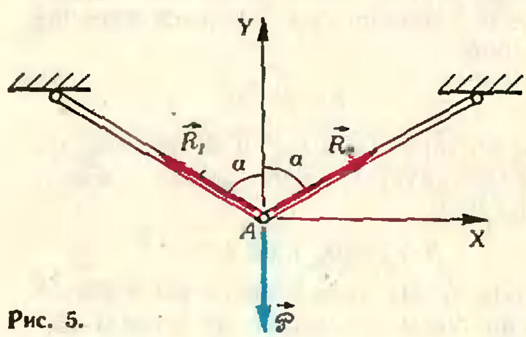


Рис. 5.

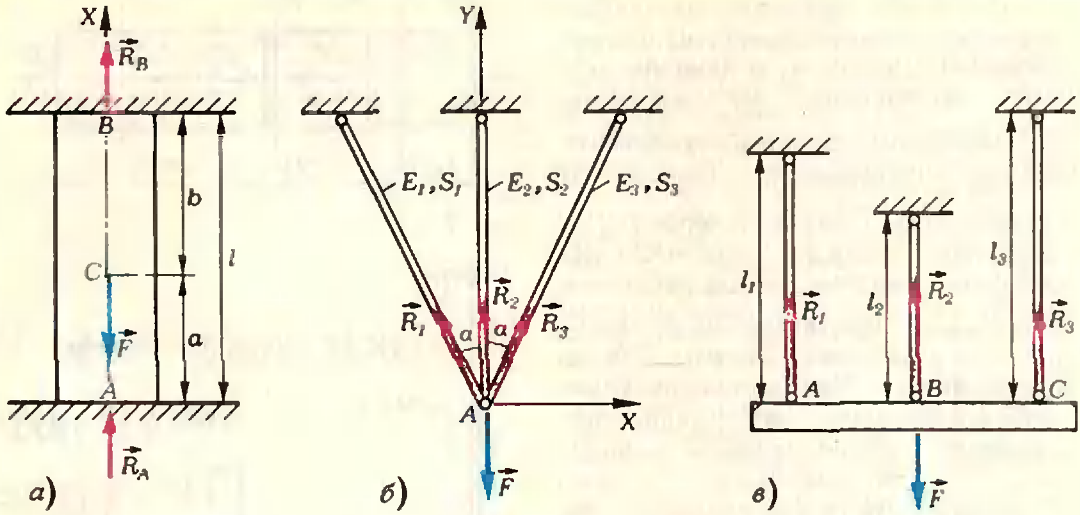


Рис. 6.

Силы упругости $\vec{N}$, возникающие в каждом стержне, равны по модулю силам реакции:

$$|\vec{N}| = |\vec{R}| = \frac{m|\vec{g}|}{2\cos\alpha}.$$

Из условия прочности стержней следует, что

$$\sigma = \frac{|\vec{N}|}{S} \leqslant \sigma_{\text{доп}},$$

или

$$S = \frac{\pi d^2}{4} \geqslant \frac{|\vec{N}|}{\sigma_{\text{доп}}} = \frac{m|\vec{g}|}{2\sigma_{\text{доп}}\cos\alpha}.$$

Тогда диаметр каждого стержня

$$d = \sqrt{\frac{4S}{\pi}} \geqslant$$

$$\geqslant \sqrt{\frac{2m|\vec{g}|}{\pi\sigma_{\text{доп}}\cos\alpha}} = 1{,}25\cdot 10^{-2}\,\text{м} = 1{,}25\ \text{см}.$$

Принимаем $d = 1{,}25$ см.

* * *

В заключение рассмотрим случай, когда задачи статики вообще не могут быть решены, если входящие в системы тела считать абсолютно твердыми. На рисунке 6 приведены примеры трех таких систем. В случае стержня, закрепленного с обоих концов (рис. 6, *а*), для определения двух неизвестных сил реакции $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$ можно записать лишь одно условие равновесия (в проекциях на ось X). В системе, состоящей из трех стержней (рис. 6, *б*), для определения трех сил реакции ($\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ и $\vec{R}_3$) можно записать только два условия равновесия (в проекциях на оси X и Y). Для системы, показанной на рисунке 6, *в*, для определения трех неизвестных сил ($\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ и $\vec{R}_3$) тоже можно записать лишь два условия равновесия (равенство нулю проекций всех сил на вертикальную ось и равенство нулю моментов всех сил относительно, например, точки A).

Такие системы принято называть *статически неопределимыми системами*. Как же в этих случаях найти все неизвестные силы реакции? Оказывается, можно составить дополнительные уравнения, исходя из условий *совместности деформаций*.

Покажем, как решаются подобные задачи.

Задача 4. *В точке C, находящейся на оси цилиндрического стержня, закрепленного с обоих концов, приложена осевая сила $\vec{F}$ (рис. 6, а). Определить силы реакции опор $\vec{R}_A$ и $\vec{R}_B$.*

Запишем условие равновесия стержня в проекциях на ось X:

$$R_A + R_B + F = 0.$$

Для определения двух неизвестных (R_A и R_B) одного уравнения недостаточно. Составим еще одно уравнение — уравнение совместности деформаций (перемещений).

Для этого мысленно освободим стержень от закрепления, например, в нижнем сечении A, и заменим действие закрепления внешней силой $\vec{R}_A$. Обозначим через Δl_1 удлинение стержня (перемещение сечения A) под действием силы $\vec{F}$, а через Δl_2 — удлинение стержня (опять-таки перемещение сечения A) под действием силы $\vec{R}_A$. В действительности стержень не удлиняется (сечение A не перемещается). Следовательно, уравнение совместности деформаций (перемещений) можно записать в виде:

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 = 0.$$

Значения Δl_1 и Δl_2 найдем из закона Гука (подробнее см. задачу 2), принимая во внимание, что $N_1 = -F = |\vec{F}|$ и $N_2 = -R_A$:

$$\Delta l_1 = \frac{|\vec{F}|b}{ES} \text{ и } \Delta l_2 = -\frac{R_A(a+b)}{ES}.$$

Учитывая, что $a+b=l$, получаем:

$$\frac{|\vec{F}|b}{ES} - \frac{R_A l}{ES} = 0,$$

откуда

$$R_A = |\vec{F}|\frac{b}{l}.$$

Из условия равновесия стержня найдем R_B:

$$R_B = |\vec{F}| - R_A = |\vec{F}|\frac{a}{l}.$$

Проекции R_A и R_B положительны; значит, действительные направления сил реакции совпадают с принятыми на рисунке 6, *а*.

Упражнения

1. Определить в сечениях *I*, *II*, *III* напряжения стержня и полное его удлинение, если $|\vec{F}_1| = 40$ кН, $|\vec{F}_2| = 20$ кН, $|\vec{F}_3| = 20$ кН (рис. 7). Стержень стальной ($E = 2\cdot 10^5$ МН/м²), площадь его поперечного сечения $S = 10$ см².

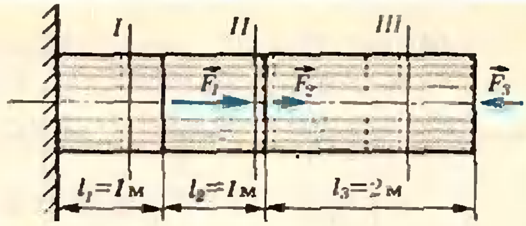


Рис. 7.

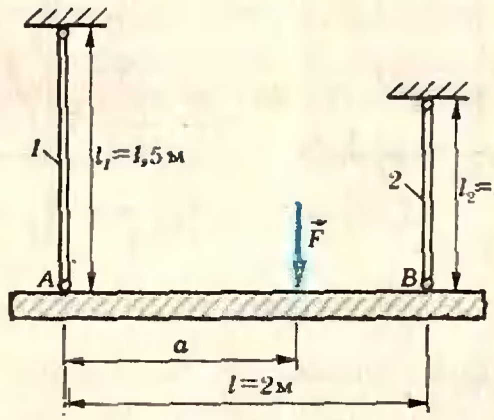


Рис. 8.

2. Жесткий брус AB, деформацией которого можно пренебречь, подвешен горизонтально с помощью стержней 1 и 2 (рис. 8). Стержень 1 — стальной ($E_1 = 2\cdot 10^5$ МН/м²), его диаметр $d_1 = 2$ см; стержень 2 — медный ($E_2 = 10^5$ МН/м²), его диаметр $d_2 = 2,5$ см. На каком расстоянии a нужно приложить силу $\vec{F}$ ($|\vec{F}| = 30$ кН), чтобы брус остался горизонтальным после деформации стержней? Определить также напряжения в стержнях и высоту, на которую опустится брус AB.

3. Определить силы реакции $\vec{R}_1$, $\vec{R}_2$ и $\vec{R}_3$ статически неопределимой системы, изображенной на рисунке 6, *б*. Принять, что $E_1S_1 = E_3S_3$.

(Начало см. на с. 7)

Луноход-1. Изготовлен он был в порядке международного сотрудничества французскими специалистами. Этот отражатель состоит из 14 четырехгранных пирамид, сделанных из плавленого кварца. Отражающие грани каждой призмы покрыты тонким слоем серебра, который предохраняется слоем напыленного кварца; поверхность призм отшлифована с точностью до 0,07 мкм (то есть размеры шероховатостей не превышают 0,07 мкм).

Использование уголковых отражателей, доставленных на Луну, позволило с помощью лазерного луча-локатора измерить расстояние Земля — Луна с очень высокой точностью — до 0,1 м.

Приведенные нами примеры далеко не исчерпывают многообразия применений простого и надежного устройства — уголкового отражателя.

О подготовительных отделениях при вузах

С 1969 года при высших учебных заведениях в соответствии с постановлением ЦК КПСС и Совета Министров СССР открыты подготовительные отделения для рабочей и сельской молодежи, демобилизованных воинов Советской Армии.

Ниже мы публикуем статью заведующего подготовительным отделением Московского института электронного машиностроения (МИЭМ) В. Тоняна, рассказывающую о работе этого отделения.

Хорошо известно, что число выпускников средней школы, становящихся непосредственными участниками трудового процесса, растет с каждым годом. Многие выпускники призываются на службу в Вооруженные Силы СССР.

Совершенно очевидно, что несколько лет работы на производстве или службы в армии хотя и формируют характер молодого человека, подготавливают его к сознательному выбору будущей специальности, приводят, тем не менее, к снижению уровня знаний, полученных им в школе. В этом нет ничего страшного и, тем более, зазорного — каждому известно, что без систематического повторения, без постоянной тренировки многие факты забываются, умения и навыки ослабляются и даже совсем утрачиваются.

Поэтому подчас на вступительных экзаменах в вузы рядом оказывались люди совершенно различного социального положения: одни из них уже прошли производственную закалку, сознательно выбрали специальность, зачастую уже поработали по этой специальности, но имеют пробелы в знаниях, другие — вчерашние школьники — имеют свежие, отрепетированные знания, но не слишком глубокие, как правило, представления о выбираемой ими профессии. Следовательно, школьники имели фактически весьма существенные преимущества перед первой категорией поступающих.

Такое положение требовало мер по оказанию реальной помощи при поступлении в вузы молодым производственникам и вчерашним солдатам. Организация подготовительных отделений при вузах преследует именно эту цель.

На подготовительное отделение принимаются лица с законченным средним образованием из числа передовых рабочих, колхозников и демобилизованных из рядов Вооруженных Сил СССР. Рабочие и колхозники, направляемые на подготовительное отделение, должны иметь стаж работы не менее одного года, т. е. полных 12 месяцев ко дню начала занятий. Направленные на подготовительное отделение представляют заявление, направление на подготовительное отделение (подписанное руководителем предприятия или командиром войсковой части), документ о среднем образовании (в подлиннике), характеристику, 6 фотографий (снимок без головного убора, размером 3×4 см^2) и медицинскую справку о состоянии здоровья (форма № 286).

Демобилизованный, не имеющий направления от командования воинской части и вернувшийся работать на то же предприятие, где он работал до призыва в армию, может поступить на подготовительное отделение по направлению этого предприятия, если общий стаж его работы на данном предприятии составляет не менее одного года по совокупности — до службы в армии и после демобилизации.

Очень часто можно столкнуться с мнением, что на подготовительные отделения поступить так же трудно, как и в вузы, что от поступающих требуются знания в объеме программы вступительных экзаменов в вузы. Это совершенно не соответствует действительности. Само существование подготовительных отделений предполагает, что на него принимаются лица, имеющие определенные пробелы в знаниях, и задача подготовительных отделений как раз и состоит в том, чтобы эти пробелы ликвидировать, помочь слушателям восстановить утраченные знания, а также овладеть новым материалом, необходимым для дальнейшего успешного обучения в вузе.

Прием на подготовительное отделение производится путем индивидуального устного собеседования, целью которого является не столько выяснение объема знаний поступающего на отделение, сколько выявление его потенциальных возможностей, общего уровня развития, выявление степени сознательности выбора им данного вуза. Особо ценится при этом более или менее близкое знакомство с выбранной им специальностью, практическая работа по избранной специальности. Собеседование проводится по двум — трем предметам из числа изучаемых на подготовительном отделении данного института. В МИЭМе, например, такими предметами являются математика и физика.

Расскажем более подробно про подготовительное отделение при нашем институте.

В МИЭМе занятия на подготовительном отделении происходят с отрывом от производства в течение восьми месяцев — с 1-го декабря по конец июля. Форма обучения только дневная. Система занятий максимально приближена к вузовской: для слушателей читаются лекции, проводятся практические занятия; они пишут контрольные работы, сдают зачеты, коллоквиумы. При проведении контрольных мероприятий широко используется современная вычислительная техника, специально сконструированная для этой цели.

Обучение на подготовительном отделении проводится по специально разработанным программам, предусматривающим более глубокое, комплексное изучение школьного курса.

Все слушатели отделения пользуются такими же правами, как и студенты института. Они получают стипендию — такую же, как студенты-первокурсники, пользуются лабораториями института, библиотекой, на них распространяются льготы для проезда по железной дороге и при полетах на самолетах.

Занятия проходят в зданиях института. На отделении изучаются математика, физика, русский язык и литература, предусмотрены также занятия физической культурой.

Студенты нашего подготовительного отделения являются, можно сказать, студентами «нулевого» курса и живут полнокровной студенческой жизнью. А студенческие годы — это не только годы упорного труда в аудиториях, лабораториях, библиотеках, но и время интересных дел, время задорных студенческих песен, романтики строительных отрядов. В летние и зимние каникулы большинство слушателей вместе со студентами института выезжают в спортивно-оздоровительный лагерь института, расположенный на живописном берегу Рузского водохранилища. В лагере проходят тренировки спортсменов — членов сборных команд института.

В конце обучения слушатели сдают выпускные экзамены. Эти экзамены имеют целью выявить уровень усвоения слушателями пройденной программы, определить, насколько они готовы к дальнейшему обучению в вузе. Экзамены коренным образом отличаются от вступительных прежде всего тем, что они не носят конкурсного характера: все, сдавшие выпускные экзамены, зачисляются в институт.

Остановимся теперь более подробно на вступительном собеседовании по математике. Как правило, для решения предлагаемых задач не требуется производить сложные выкладки и не нужно особой «натренированности», «натасканности».

Для их решения нужны, прежде всего, уверенные и точные знания — пусть даже в ограниченном объеме. Если можно так выразиться, поступающий должен «знать то, что он знает», т. е. уметь рассуждать в пределах своих знаний. Именно умение рассуждать лучше всего показывает общий уровень развития человека и определяет его возможности для дальнейшего обучения, для расширения круга его знаний.

Разумеется, поступающий должен знать основные понятия школьного курса и владеть этими понятиями.

Рассмотрим теперь некоторые конкретные задачи. Одна из групп вопросов, которые часто предлагаются на собеседовании, связана с таким понятием, как дроби. Никто практически не ошибается, если ему предложить сравнить дроби 5/6 и 7/8. Однако как поступить, если требуется сравнить 3786/3787 и 3787/3788? Неужели перемножать четырехзначные числа? Конечно, тот поступающий, который «честно» и безошибочно проведет соответствующие выкладки, будет прав и покажет свою высокую технику вычислений (а это тоже важно), но взрослый человек должен сообразить, что первой дроби до 1 не хватает 1/3787, а второй — 1/3788, и поэтому вторая дробь больше.

Можно привести и более простой пример, когда «взрослое» рассуждение более эффективно: верно ли неравенство $3767/3865<896/875$? Справедливость этого неравенства устанавливается моментально, если заметить, что первое число меньше 1, а второе больше 1.

Разумеется, можно придумать и другие вопросы, связанные с дробями, но уже из рассмотренных вопросов видно, что для ответа достаточно не столько знать какие-то специальные приемы, сколько понимать суть дела.

Большое значение на собеседовании уделяется текстовым задачам, задачам на составление уравнений. Умение решать такие задачи ярко показывает общий уровень развития поступающего. При этом, разумеется, имеются в виду не головоломные задачи, а обычные задачи вполне практического содержания.

От рельса отрезали часть, составляющую 72% его длины. Масса оставшегося куска равна 92,4 кг. Определить массу отрезанной части.

Надо сразу сказать, что для решения этой задачи, грубо говоря, не требуется математического образования — надо лишь понимать, что такое проценты. А тогда ясно, что 92,4 кг составляют 28% длины рельса и поэтому $92{,}4 : 28=3{,}3$ (кг) составляют 1%. Следовательно, масса отрезанной части равна $3{,}3\cdot 72=237{,}6$ кг.

Отметим, что в этой задаче от поступающего требовалось еще провести выкладки с десятичными дробями; однако умение обращаться с дробями — и с простыми, и с десятичными — входит в обязательный минимум.

К сожалению, поступающие часто забывают о таких простых способах рассуждений и — по своим школьным воспоминаниям — в любых, даже самых простых задачах, используют метод составления уравнений. Конечно, это не возбраняется, но, например, в данной задаче решение просто и естественно получается без введения неизвестных и составления уравнений.

С другой стороны, во многих задачах самым разумным является именно составление уравнений. И здесь часто встречается общая «тактическая» ошибка: поступающие часто без всяких размышлений берут в качестве неизвестного обязательно то, что ищется в задаче, хотя это далеко не всегда разумно.

Рассмотрим для примера задачу — одного из самых нелюбимых поступающими типов — на «бассейны»:

К котловану подведены три трубы. Через первую трубу котлован можно наполнить на 5 часов быстрее, чем через вторую, а через первую и вторую вместе — в три раза быстрее, чем через третью. Сколько времени потребуется на заполнение котлована при одновременной работе всех труб, если пропускная способность первой трубы на 80% выше, чем у третьей?

Обозначим через x, y, z пропускные способности каждой из труб, измеренные, например, в м^3/ч. Для того чтобы определять время заполнения котлована, нам необходимо знать его объем. Обозначим этот объем через V. Для согласования единиц измерения мы считаем, конечно, что объем измеряется также в м^3. Тогда трубы могут заполнить котлован, соответственно, за $\frac{V}{x}$, $\frac{V}{y}$ и $\frac{V}{z}$ и мы получаем соотношения:

$$\frac{V}{x}=\frac{V}{y}-5;\quad 3\frac{V}{x+y}=\frac{V}{z},\quad x=1,8z.$$

Мы получили 3 уравнения с 4 неизвестными. Будем решать полученную систему уравнений, не обращая внимания на то, что объем V нам неизвестен. Выражая x и y через z (из 3-го и 2-го уравнений), а затем подставляя полученные значения x и y — в первое уравнение, мы получим равенство

$$\frac{V}{1,8z}=\frac{V}{1,2z}-5,\quad \text{или}\quad \frac{V}{z}=18.$$

Ну, а как теперь узнать время заполнения? Ясно, что за 1 час через три трубы вместе поступает $(x+y+z)$ м^3 и, следовательно, на заполнение котлована уйдет

$$\frac{V}{x+y+z}=\frac{V}{4z}=\frac{9}{2}\,(\text{ч}).$$

Значительное внимание на собеседовании уделяется решению уравнений и неравенств. При этом основной упор делается не на проверку техники вычислений и преобразований или владение хитрыми приемами решения, а на сознательное применение известных свойств функций, которые должны входить в багаж знаний как обязательный минимум.

Так, для решения уравнения $|34x^2-7x-22|=-2$ вовсе не требуется выяснять (в соответствии с определением модуля), при каких x выражение $34x^2-7x-22$ положительно или отрицательно, хотя именно с этого, как правило, начинают решение на вступительных экзаменах хорошо «натренированные» абитуриенты. Из известного всем свойства модуля немедленно следует, что это уравнение не имеет решений — ведь модуль любого числа есть число неотрицательное!

При решении неравенства $|\sqrt{x-2}-1|>-1$ не верно немедленно объявлять, что оно выполняется при любом x. В действительности, оно выполняется при любом x, *входящем в его область определения*, т. е. при $x\geqslant 2$. Уравнения и неравенства

$$\sqrt{x-2}+4=0,\quad \sqrt{x-3}+\sqrt{2-x}\leqslant 2,$$
$$3\sin^2x+\sin^3x<100,$$
$$4\cos^2x+\cos^3x=5$$

решаются сразу же, если хорошо знать и правильно использовать свойства входящих в них функций.

Первое уравнение не имеет решений, так как арифметический квадратный корень по своему определению не может быть отрицательным числом. Первое неравенство также не имеет решений, но по другой причине — его область определения не содержит ни одного значения переменной: в самом деле, первое слагаемое имеет смысл при $x\geqslant 3$, а второе — при $x\leqslant 2$, а эти два условия одновременно не выполнимы. Для решения второго неравенства достаточно сообразить, что синус не может быть больше 1, так что левая часть не может быть больше 4. Поэтому это неравенство выполняется при любом x. Что касается последнего уравнения, то оно решается аналогичным рассуждением, но конец совершенно иной: дело в том, что $4\cos^2x\leqslant 4$, $\cos^3x\leqslant 1$, и поэтому правая часть может быть равна 5 только при $\cos x=1$. Следовательно, данное уравнение равносильно уравнению $\cos x=1$, т. е. удовлетворяется при $x=2\pi k$, где k — любое целое число.

Разумеется, для успешного прохождения собеседования требуется и умение решать не только «очевидные», но и обычные уравнения и неравенства. В частности, поступающий должен иметь достаточные навыки в решении квадратных уравнений и неравенств, знать формулы решения простейших показательных, логарифмических и тригонометрических уравнений.

Необходимо также знать простейшие формулы и преобразования, логарифмы, свойства показательной функции, формулы сложения тригонометрических функций.

Несколько меньшее внимание уделяется на собеседовании геометрии. Конечно, поступающий должен знать важнейшие геометрические понятия, такие, например, как теорема Пифагора, формула площади круга или теорема о трех перпендикулярах, уметь применять тригонометрию к решению задач, решать несложные задачи на вычисление, скажем, площадей многоугольников.

К собеседованию при приеме на подготовительное отделение надо готовиться. Но не надо терять и приобретенный после школы на производстве или в армии опыт; на собеседовании следует показать себя не школяром, а взрослым человеком.

В. Березин

Стереографическая проекция и астролябия

Стереографической проекцией называется проекция сферы из одного полюса (скажем, южного) на касательную плоскость к другому полюсу (северному). Стереографическая проекция является взаимно-однозначным отображением сферы с выколотой точкой на плоскость. С ее помощью можно получать плоское изображение сферы (например, земной поверхности или «небесной сферы»), и поэтому ею с давних времен пользуются астрономы и картографы.

Вообразим стоящего у Южного полюса S небесной сферы великана (рис. 1), переносящего мысленно звезды по лучам SP с небесной сферы на плоскость, касающуюся ее в Северном полюсе мира N, — «картинную плоскость» стереографической проекции. В результате на плоскости получится карта звездного неба.

Изобретение стереографической проекции обычно приписывают греческому астроному Гиппарху, жившему в 160—125 гг. до н. э.; впоследствии ее использовали навигаторы, кристаллографы, геологи и всесторонне изучали математики. Стереографическая проекция лежит в основе работы астролябии (см. рисунок на второй странице обложки).

Первое свойство сферической проекции — она *сохраняет углы между линиями.* Рассмотрим, например, пересечение линий Γ_1 и Γ_2 на сфере. Угол $(\widehat{\Gamma_1, \Gamma_2})$ измеряется углом между большими окружностями сферы, касающимися кривых Γ_1, Γ_2 в точке их пересечения или углом между касательными к этим окружностям прямыми. Пусть Γ_1 и Γ_2 перешли при проекции в γ_1 и γ_2 (рис. 2). Нам нужно доказать равенство

$$(\widehat{\Gamma_1, \Gamma_2})=(\widehat{\gamma_1, \gamma_2}).$$

Не нарушая общности, можно предположить, что Γ_1 проходит через полюсы сферы (см. красную окружность на рисунке 2). Тогда нам нужно доказать равенство углов UPW и $UP'W$ (рис. 3). Для этого рассмотрим плоскость $\beta=(MSV)$, параллельную α и проходящую через полюс S, и плоскость (MPV), касающуюся сферы в точке P. Эти плоскости пересекаются по прямой MV и значит,

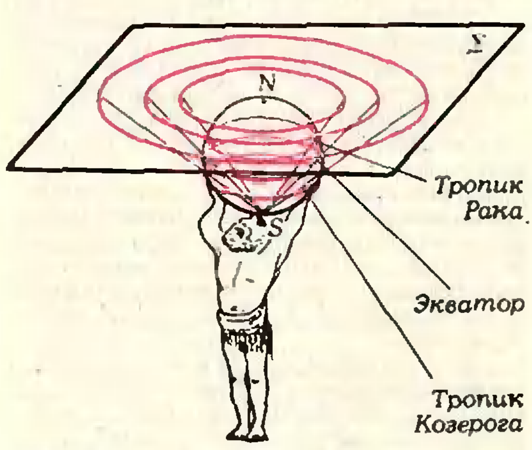


Рис. 1.

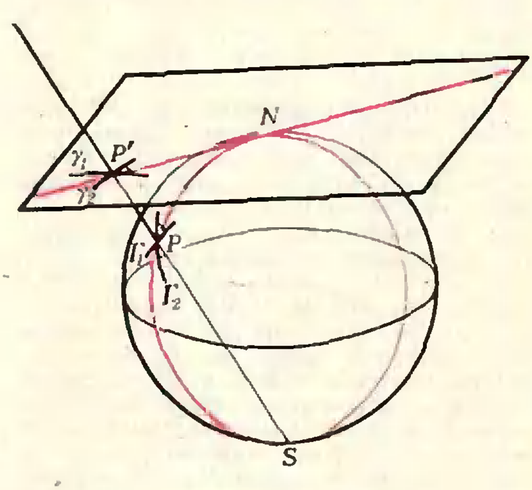


Рис. 2.

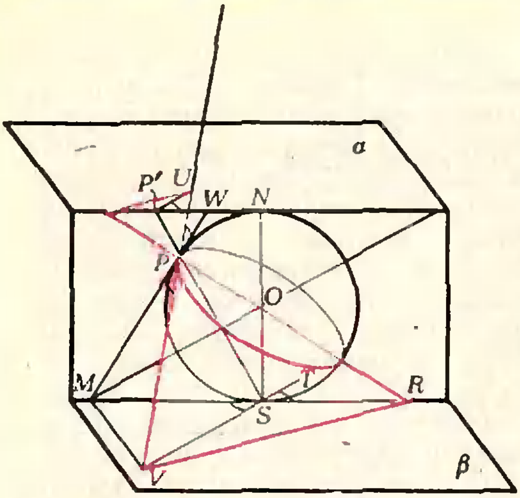


Рис. 3.

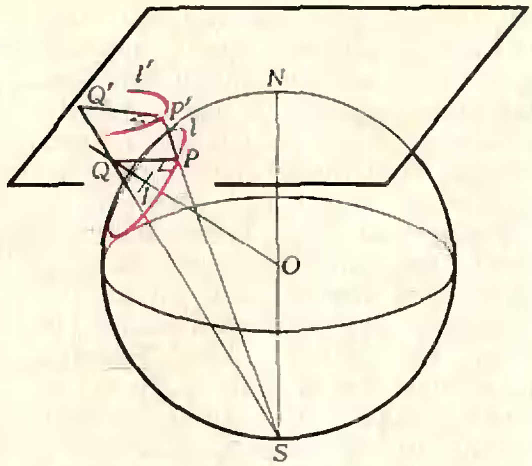


Рис. 4.

они симметричны относительно плоскости MOV (поясните!). Отсюда следует равенство углов UPW и TSR. Но из параллельности плоскостей α и β сразу следует $\measuredangle UP'W = \measuredangle TSR$, откуда $\measuredangle UPW = \measuredangle UP'W$.

Второе свойство стереографической проекции: *окружности на сфере переходят в прямые или окружности на плоскости* α. Сразу видно, что окружность на сфере, проходящая через полюс S, отображается на прямую. Покажем, что все другие окружности на сфере стереографическая проекция переводит в окружности на α. Для этого вспомним (см. «Квант», 1977, № 4, с. 42), что плоская кривая, составляющая прямые углы со всевозможными лучами, исходящими из одной точки, является окружностью.

Пусть окружность l проектируется на кривую l', $P \in l$ и P' — образ P (рис. 4). Пусть Q — точка пересечения перпендикуляра к плоскости окружности l, проходящего через ее центр I, и касательной QP к сфере в точке P. Пусть Q' — точка пересечения SQ с α. Ясно, что $QP \perp l$; значит, по первому свойству, $Q'P' \perp l'$ и в силу замечания из предыдущего абзаца это означает, что l' — окружность.

Третье свойство стереографической проекции: при вращении сферы относительно оси, проходящей через точки S и N, стереографическая проекция произвольной точки P на сфере будет вращаться около (SN). Другими словами, *параллели сферы проектируются в концентрические окружности плоскости* α, и проекция вращающейся по параллели точки станет вращаться по такой окружности.

Четвертое свойство стереографической проекции: если P' — проекция точки P, то $|SP| \cdot |SP'| = d^2$, где $d/2$ — радиус сферы. Доказательство легко получить из подобия прямоугольных треугольников $SP'N$ и SNP (рис. 3).

Стереографическая проекция и ее свойства лежат в основе конструкции и принципа действия астролябии. Название этого прибора в переводе с греческого означает «схватываю звезды». Схватывание это состоит в изменении координат интересующего нас светила. Сам прибор — сложная металлическая конструкция; он состоит из *«паука»*, вращающегося по криволинейной координатной сетке — *«паутине»* (рис. 5).

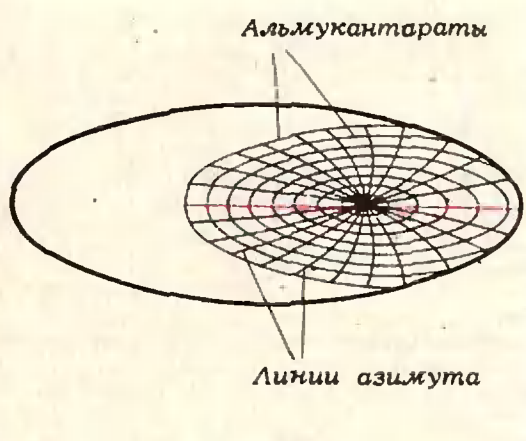


Рис. 5.

Ножки паука (их острия) соответствуют наиболее ярким звездам. На внешнее кольцо паука нанесены градусные деления; по нему вращается длинная прямоугольная пластинка с двумя прорезями (*алидада*) — см. рисунок на второй стр. обложки.

Посмотрим, как с помощью астролябии измеряли координаты звезд — их угловую высоту (над горизонтом) и азимут (угловое отклонение от Севера на Запад или Восток). Рассмотрим Землю как центр O небесной сферы, на которой расположено интересующее нас светило C (рис. 6). На небесной сфере нанесены координатные линии — *альмукантараты* (концентрические окружности с центрами на луче OZ) и перпендикулярные им большие круги сферы — *линии азимута*. При стереографической проекции на экваториальную плоскость*) эта сетка как раз переходит в сетку, подобную паутине; эта «паутина», по второму свойству, состоит из окружностей и дуг окружностей.

Чтобы найти координаты некоторого светила, скажем — Сириуса, астролябию вешали на большой палец, а алидаду поворачивали так, чтобы глаз наблюдателя, Сириус и оба отверстия алидады оказывались на одной прямой. Тогда стрелка алидады показывала на градуированной шкале угловую высоту светила. Узнав высоту, находили, на каком альмукантарате находится светило (рис. 7). После замера высоты паук поворачивался по паутине, пока острие ножки с надписью «Сириус» не оказывалось на найденном альмукантарате. При этом острие указывало на некоторую линию азимута на паутине: этот азимут и был азимутом Сириуса. Далее, т. к. на линиях азимута нанесены часовые деления, можно было узнать время (момент измерения). Более того, пользуясь теперь другими ножками паука, можно было без дополнительных измерений считывать координаты всех других отмеченных на пауке звезд.

Астролябии использовались не только для измерения земных координат светил. Морские и геодезические астролябии использовались как угломерные приборы. Морские астролябии (их изготовляли обычно очень

*) Астрономы обычно пользуются именно такой проекцией. Она отличается от вышеописанной гомотетией с коэффициентом $1/2$.

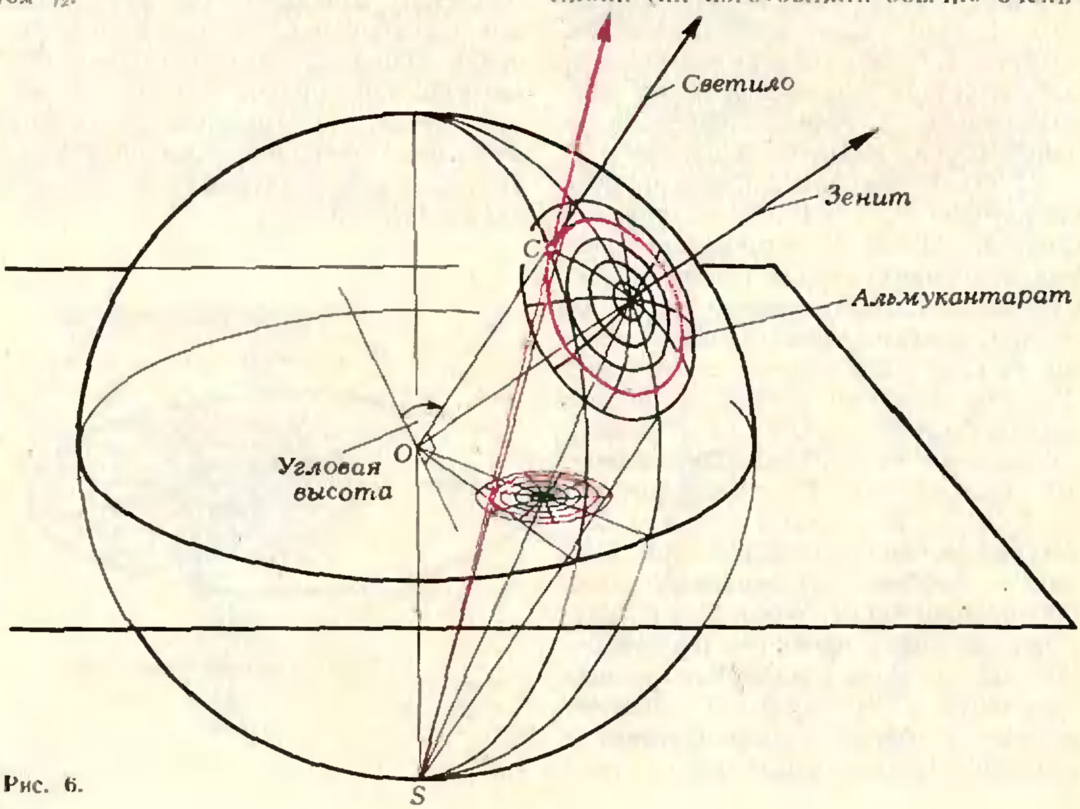


Рис. 6.

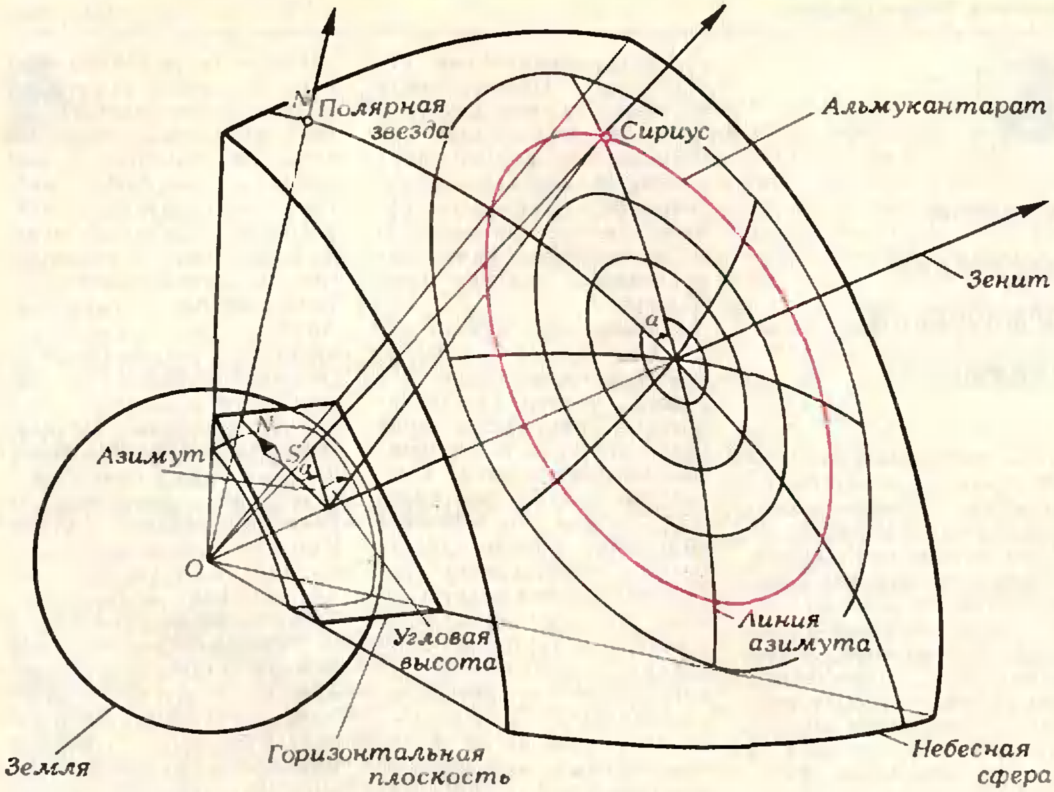


Рис. 7.

тяжелыми, чтобы они не качались во время измерений) служили для грубого определения широты места по высоте Солнца над горизонтом в полдень. В геодезические астролябии, которые служили для измерения горизонтальных углов, обычно вставляли компас — астролябии имели различные конструкции в зависимости от назначения.

(Начало см. на с. 12, 36, 41.)

И. Рузин (Ленинград) 0, 1, 3; *А. Савченко* (Дзержинск Донецкой обл.) 0; *С. Сазонов* (Уфа) 95; *О. Самохин* (Железногорск) 0; *А. Саркисов* (Баку) 0; *С. Сафронюк* (Ровно) 98; *В. Сачков* (Чебоксары) 3; *В. Середа* (Львов) 95, 98, 0, 1; *Г. Сизых* (Ангарск) 94, *П. Сильвестров* (Новосибирск) 95, 97, 1, 3, 5; *Ю. Сиренко* (Киев) 94, 95, 97, 98, 0; *А. Скипер* (п/о Богородицкое Смоленской обл.) 0; *О. Скрипачев* (Казань) 98; *Е. Смирнов* (Новгород) 98; *В. Смышляев* (Ленинград) 94, 95; *Н. Соколов* (Кировоград) 98, 0, 1; *А. Сромин* (Ленинград) 98, 0, 1; *А. Стеканян* (Тбилиси) 98; *А. Стогний* (Рубежное) 1, 2; *С. Тихомиров* (Апатиты) 94; *С. Тихомиров* (Москва) 5; *Б. Торопов* (Москва) 94; *Н. Трифонов* (Канск) 94; *А. Тятюшкин* (Саранск) 94, 95, 98, 0, 1; *А. Фаддеев* (Ленинград) 94; *Н. Федин* (Омск) 94, 95, 98, 0, 1; *А. Федюкович* (Пинск) 94; *С. Хоренко* (Бобруйск) 1; *С. Хосид* (Алма-Ата) 98, 0, 1; *А. Хугаев* (Цхинвали) 98, 1; *В. Целиков* (Череповец) 0, 1; *А. Чекмизов* (Краснодар) 94, 1, 3; *И. Шарипов* (Москва) 98, 0; *В. Швейдель* (Великие Луки) 95, 97; *Н. Шестопал* (Киев) 94, 95, 97, 0; *П. Шибаев* (Москва) 98, 0, 1; *Р. Широков* (Киев) 0, 1, 5—7; *Н. Шитинев* (п. Черноголовка Московской обл.) 95; *С. Шичанин* (Невинномысск) 3, 5; *А. Шишко* (Мурманск) 0; *И. Шлякова* (Лобня) 95; *А. Шостаченко* (Кишинев) 94, 95, 1; *С. Шпилькин* (п. Менделеево Московской обл.) 98, 0, 1; *И. Шульгин* (Ленинград) 1; *М. Эфроимский* (Ленинград) 95, 97, 98, 0, 1.

Будущим создателям космической техники

Какой мальчишка не мечтает стать космонавтом! С годами увлеченность романтической профессией дополняется интересом к научно-техническим основам космонавтики, к конструкциям ракет и космических кораблей, а лучший, самый верный путь приобщения к этой области — моделирование. В свое время авиамодельный спорт привел в научно-исследовательские институты и конструкторские бюро многих известных создателей самолетов и авиационных двигателей. А теперь конструирование моделей ракет и космических кораблей является первичной базой для подготовки будущих инженеров, будущих строителей таких ракетопланов, которые устремятся к далеким мирам. Юным конструкторам моделей ракет и адресована книга польского инженера П. Эльштейна, русский перевод которой выпустило издательство «Мир» *).

Разумеется, для того чтобы строить модели ракет, нужно обладать каким-то научным и практическим багажом. Поэтому автор прежде всего знакомит читателя с основами механики реактивного движения, с законами аэродинамики. В книге описываются простые опыты, которые наглядно демонстрируют некоторые процессы, происходящие при движении ракет, и позволяют провести исследования. Для этих опытов не требуется какой-то специальной аппаратуры. Пластмассовая бутылка из-под шампуня может мчаться по воде, как торпеда; при помощи двух пылесосов нетрудно соорудить аэродинамическую трубу для испытания моделей; в пластмассовом мяче можно создать условия невесомости.

Попутно в книге рассказывается об основных конструктивных элементах ракеты, условиях ее устойчивости, приводятся примеры расчетов и экспериментальной оценки важнейших параметров ракеты. Усвоив эти основные принципы, можно приступить к строительству простейших моделей ракет. Сначала это даже не модели, а макеты — картонные и деревянные, похожие на ракету разве что внешними очертаниями. Постепенно макет становится более совершенным, масштабным, воспроизводящим по крайней мере внешне, — все элементы настоящих ракет.

Следующий этап — изготовление летающих моделей, которые, собственно говоря, и ракетами нельзя назвать, ибо они лишены главного — реактивного двигателя, а запускаются резиновой катапультой наподобие рогатки. Зато именно на этих моделях можно отработать элементы конструкции — правильно подобрать соотношения размеров, установить стабилизаторы, освоить процессы старта, полета и возвращения.

Пройдя эти предварительные этапы, моделист может считать себя достаточно подготовленным, чтобы приступить к строительству и испытанию моделей, снабженных двигателями.

Существенным элементом стартового комплекса является электрическая система зажигания, позволяющая осуществлять дистанционный запуск модели. В главе «Ракетная электротехника» приводятся схемы таких систем.

В отличие от реальных ракет, предназначенных, как правило, для одноразового применения (космическая ракета, выполнив свою роль, сгорает в атмосфере, военная — взрывается), модели желательно использовать многократно, а для этого их необходимо снабжать возвращающим устройством. Спускаются модели на парашютах, а раскрытие их обеспечивается автоматической системой. Автор дает несколько примеров автоматических систем с описанием основных узлов и деталей.

В заключительной главе книги описаны наиболее удачные модели ракет и ракетопланов, созданные моделистами различных стран и выделяющиеся оригинальностью конструкции, совершенством аппаратуры, летными качествами.

Следует отметить одну важную деталь: на протяжении всей книги автор напоминает о необходимости неукоснительного соблюдения мер предосторожности. «Вопросов техники безопасности нельзя недооценивать — пишет П. Эльштейн. — Это не только моральный долг по отношению к себе и окружающим. Виновникам несчастных случаев угрожает уголовная ответственность. Ряд статей Уголовного кодекса предусматривает наказание как за неумышленное нанесение травм и материального ущерба, так и за совершение легкомысленных действий, представляющих угрозу здоровью и жизни людей».

Тому, кто стремится творчески работать в увлекательной области ракетомоделирования, нужны прочные знания и физики, и математики, и техники; необходимо постоянно следить за публикуемыми материалами, знакомящими с достижениями «большой» ракетно-космической техники. Автор дает советы и рекомендации, как отбирать эти материалы, как накапливать и систематизировать знания. Можно не сомневаться, что книга П. Эльштейна станет настольной книгой будущих создателей космической техники.

И. Зорич

*) П. Эльштейн. «Конструктору моделей ракет». М., «Мир», 1978, 320 с.

XX Международная математическая олимпиада школьников

XX олимпиада состоялась в июле 1978 года в Бухаресте. В ней приняли участие команды 17 стран. Как обычно, команда каждой страны состояла из 8 школьников. Участникам было предложено 6 задач — по 3 в каждый из двух дней соревнований. За решение каждой из задач жюри выставляло некоторое количество очков. Максимально возможная сумма очков за решение всех задач для отдельного участника равнялась 40, а, значит, для команды в целом — 320 очкам. В неофициальном зачете впереди оказалась команда Румынии (237 очков). Далее следуют команды США (225 очков), Великобритании (201 очко), Вьетнама (200 очков), Чехословакии (195 очков). (Команда СССР в этой олимпиаде не участвовала.)

Четыре задачи XX олимпиады помещены в Задачнике «Кванта» этого номера. Условия всех задач и решения задач, не вошедших в Задачник, мы приводим ниже.

Первый день

1. Пусть m и n — натуральные числа такие, что $n>m\geqslant 1$. В десятичной записи группа из последних трех цифр числа 1978^m совпадает с группой последних трех цифр числа 1978^n. Найти m и n так, чтобы сумма $m+n$ была наименьшей.

2. Пусть P — данная точка внутри данной сферы и A, B, C — произвольные три точки этой сферы такие, что отрезки PA, PB, PC взаимно перпендикулярны. Пусть Q — вершина параллелепипеда, определенного отрезками PA, PB и PC диагонально противоположная к P. Определить геометрическое место точек Q.

3. Множество всех натуральных чисел является объединением двух непересекающихся подмножеств $\{f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots\}$, $\{g(1), g(2), \ldots, g(n), \ldots\}$, где $f(1)<f(2)<\ldots<f(n)<\ldots$, $g(1)<g(2)<\ldots<g(n)<\ldots$ и $g(n)=f(f(n))+1$ для всех $n\geqslant 1$. Определить $f(240)$.

Второй день

4. Окружность касается внутренним образом окружности, описанной вокруг равнобедренного треугольника ABC, а также равных сторон AB, AC этого треугольника в точках P, Q, соответственно. Доказать, что середина отрезка PQ является центром окружности, вписанной в треугольник ABC.

5. Пусть $\{a_k\}$ ($k=1, 2, \ldots, n$) — последовательность различных натуральных чисел. Доказать, что для каждого натурального n выполняется неравенство

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

6. Международное общество состоит из представителей 6 различных стран. Список членов общества состоит из 1978 фамилий, занумерованных числами 1, 2, ..., 1978.

Доказать, что существует хотя бы один член общества, номер которого равняется сумме номеров двух членов из его страны или удвоенному номеру некоторого члена из его страны.

Решения

Задача 1. Из условия следует, что $1978^n-1978^m=1978^m(1978^{n-m}-1)=1000a$, где a — некоторое натуральное число. Отсюда видно, что $m\geqslant 3$: 1978^m должно делиться на 8. Остается найти $n-m$, при которых $A=1978^{n-m}-1$ делится на 5^3. Легко проверить, что A делится на 5 лишь при $n-m=4k$. Поскольку нас интересует остаток при делении числа A на 125, можно заменить 1978 на 103, а 103^4 на 6. Далее $6^k-1=(1+5)^k-1=$ $=k\cdot 5+\frac{k(k-1)}{2}5^2+\cdots$, где опущенные члены делятся на 125. Поэтому $2k+$ $+5(k-1)k=k(5k-3)$ делится на 25, откуда k делится на 25. Следовательно $n-m=100k$, а $n+m=100k+2m$. О т в е т: 106.

Задача 5. Легко проверить, что из $x_1>x_2$, $y_1>y_2$ следует $x_1y_1+x_2y_2>x_1y_2+$ $+x_2y_1$. Отсюда при $k_1<k_2$ и $a_{k_1}>a_{k_2}$ получаем

$$\frac{a_{k_1}}{k_1^2}+\frac{a_{k_2}}{k_2^2}\geqslant\frac{a_{k_2}}{k_1^2}+\frac{a_{k_1}}{k_2^2}. \qquad (*)$$

Переставим все a_k при $k=1, \ldots, n$ в порядке их возрастания: $a_{k_1}<a_{k_2}<\ldots<a_{k_n}$. Тогда по (*)

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k^2}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{k_i}}{i^2}.$$

Учитывая, что $a_{k_i}\geqslant i$ получаем искомое неравенство.

В. Скворцов

Задачи республиканских олимпиад 1978 года по математике

Скоро многие читатели нашего журнала станут участниками различных математических олимпиад 1979 года. Здесь мы помещаем ряд задач, предлагавшихся на предпоследнем республиканском туре; после задачи указан класс и фамилия автора задачи.

1. Найти все натуральные числа, которые нельзя представить в виде суммы нескольких последовательных натуральных чисел. (8—10)

А. Гейн

2. На плоскости дано 1978 точек. Запишем все попарные расстояния между ними. Доказать, что среди этих чисел не меньше тридцати различных. (7—10)

3. Среди всех четырехугольников с данными длинами диагоналей и данным углом между ними найти четырехугольник наименьшего периметра. (7—10)

Б. Агафонов

4. На клетчатой бумаге (сторона клетки равна 1) нарисована окружность радиуса больше 2, не проходящая через узлы (вершины клеток). Назовем узел граничным для данной окружности, если хотя бы один из соседних с ним узлов (находящихся на расстоянии 1) лежит по другую сторону от окружности. Найти разность между числом граничных узлов, лежащих вне окружности, и числом граничных узлов, лежащих внутри нее. (8—10).

5. На стороне AD квадрата $ABCD$ дана точка E. Выбрать на сторонах AB и BC по точке M и K так, чтобы отрезок MK был параллелен прямой CE и четырехугольник $CEMK$ имел наибольшую площадь. (8—10)

Э. Готман

6. Известно, что $x_1+x_2+x_3+\ldots+x_k=0$, m — наименьшее из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_k$, а M — наибольшее. Доказать неравенство $x_1^2+x_2^2+\ldots+x_k^2\leqslant -kmM$. (9—10)

7. Доказать, что $e^x\geqslant x^e$ при всех положительных x ($e=2{,}718\ldots$ — основание натуральных логарифмов). (10)

8. Последовательность определяется условиями $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n^2+1}$. Доказать, что последовательность $b_n=a_n/2^n$ имеет предел. (9—10)

А. Егоров

9. Дана последовательность (a_n). Построим две последовательности (b_n) и (c_n):

$$b_n=2a_n+a_{n-1},$$
$$c_n=a_n+2a_{n-1}.$$

а) Известно, что $b_n\underset{n\to\infty}{\to} b$. Можно ли утверждать, что последовательность (a_n) имеет предел?

б) О последовательности (b_n) ничего не известно, но известно, что $c_n\underset{n\to\infty}{\to} c$. Можно ли утверждать, что последовательность (a_n) имеет предел? (9—10)

А. Дороговцев

10. Доказать, что если $x_1+x_2+x_3=y_1+y_2+y_3=x_1y_2+x_2y_2+x_3y_3=0$, причем не все x_i и y_i равны 0, то

$$\frac{x_1^2}{x_1^2+x_2^2+x_3^2}+\frac{y_1^2}{y_1^2+y_2^2+y_3^2}=\frac{2}{3}.\ (10)$$

А. Анджан

11. На белой сфере 12% площади поверхности закрашено в черный цвет. Доказать, что существует вписанный в сферу прямоугольный параллелепипед, все вершины которого находятся в белых точках. (10)

А. Альтшулер

12. В клетках шахматной доски произвольным образом расставлены числа 1,2,...,64. Доказать, что найдутся по крайней мере три квадрата 2×2 клетки, сумма чисел в каждом из которых больше 100. (8—10)

13. Запишем число $\frac{1}{p}$, где p — простое, $p>5$, в виде бесконечной периодической десятичной дроби.

а) Доказать, что сумма цифр в периоде делится на 9.

б) Доказать, что если период содержит mk цифр, то сумма k m-значных чисел, записи которых получаются разбиением периода на k частей по m цифр, делится на число 99...9 из m девяток. Например: $\frac{1}{13}=0{,}0769230769230\ldots$; $7+6+9+2+3+0$ делится на 9, $76+92+30$ делится на 99, $769+230$ делится на 999. (9—10)

А. Толпыго

14. Существует ли пирамида, обладающая двумя такими особенностями:

1) в основании пирамиды лежит многоугольник с нечетным числом сторон;

2) если каждое ребро пирамиды изобразить в виде вектора, поставив стрелку в некотором направлении, то сумма всех полученных векторов равна нулевому вектору? (9—10)

В. Михайловский

15. Можно ли на поверхности правильного тетраэдра с длинами ребер 1 указать четыре точки так, чтобы до каждой точки поверхности можно было бы дойти от одной из этих четырех, пройдя по поверхности путь не больше 1/2? (10)

Н. Васильев

Еще 17 вопросов

Правильные ответы. VIII *класс*. **1**. г. **2**. в. **3**. б. **4**. в. **5**. б. **6**. б. **7**. а. **8**. д. **9**. в. IX *класс*. **10**. д. **11**. г. **12**. в. **13**. б. **14**. б. **15**. д. **16**. в. **17**. г.

Эти вопросы предлагались на республиканских олимпиадах по математике в 1978 году. Самым трудным оказался вопрос 3 — меньше четверти восьмиклассников нашли правильный ответ на него. Однако рассуждения здесь очень просты: если h — граница погрешности при измерении a, то $a=100\pm h$ и площадь приближенно равна $S=a^2\approx 100^2\pm 200h$; граница относительной погрешности результата должна быть не больше 1%, поэтому

$$\frac{200h}{100^2}\leqslant\frac{1}{100},$$

откуда $h\leqslant 0{,}5$ (м). (Сравните с «Алгебра 8», с. 36.)

Приведем пояснения еще к нескольким вопросам.

4. Знаменатель нужных прогрессий может быть равен 1 или —1.

15. Ребра куба разбиваются на три «четверки» параллельных ребер, поэтому пятиугольник «2» в параллельной проекции получиться не может (у него пять попарно не параллельных сторон). Шестиугольник «3» получается при проектировании параллельно диагонали куба. Прямоугольник же получится, если направление проектирования параллельно одной из граней.

17. Достаточно раскрыть скобки.

Старые знакомые

Задача Крокодила Гены. Поскольку $b<c<d$, из условия $a+b=c+d$ получаем, что $a=d+(c-b)>d$. Окончательно получаем: $b<c<d<a$ — все участки различны по длине.

Задача Ёжика. Винни-Пух несет гармошку, Пятачок — узелок с вареньем, Ёжик — воздушный шарик, старуха Шапокляк — горшочек с медом, Крокодил Гена — рогатку.

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Математика

Отделение политэкономии экономического факультета

1. $\left\{-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right\}$. **2**. 4. **3**. $c=-4$. **4**. Если проволоки было изготовлено x метров и ее можно намотать на n восьмисотметровых катушек (использовав одну из них не полностью), то, по условию,

$$\begin{cases} 800(n-1)<x<800n,\\ 900(n-4)<x\leqslant 900(n-3),\\ 1100(n-9)=x. \end{cases}$$

Ответ. 25 300 м. **5**. Требуется найти все значения параметра a, при каждом из которых

$$5a-8\cos 8x-3a\cdot\cos 3x-3>0 \quad (1)$$

при всех $x\in\mathbf{R}$. Неравенство (1) равносильно неравенству

$$a>\frac{8\cos 8x+3}{5-3\cos 3x}. \quad (2)$$

Поскольку неравенство (2) должно выполняться при всех $x\in\mathbf{R}$,

$$a>\max_{\mathbf{R}}\frac{8\cos 8x+3}{5-3\cos 3x}.$$

Найти $\max\limits_{\mathbf{R}}\frac{8\cos 8x+3}{5-3\cos 3x}$ можно без всякого дифференцирования: очевидно, если

$$\begin{cases} \cos 8x_0=1,\\ \cos 3x_0=1, \end{cases} \quad (3)$$

то $\max\limits_{\mathbf{R}}\frac{8\cos 8x+3}{5-3\cos 3x}=\frac{8\cos 8x_0+3}{5-3\cos 3x_0}=\frac{11}{2}$. Система (3) имеет решения (например, $x_0=0$). Ответ. $a>\frac{11}{2}$.

Отделение планирования и экономической кибернетики экономического факультета

1. $\{-2-\sqrt{2}\}$. **2**. $\vec{AD}=\vec{AB}+\vec{BD}$. Поэтому $\vec{AD}\cdot\vec{BC}=\vec{BD}\cdot\vec{BC}=|BD|\cdot|BC|\times\frac{\sqrt{2}}{2}=2|AB|\cdot|BC|$. С другой стороны, $\vec{AD}\cdot\vec{BC}=|AD|\cdot|BC|\cos(\widehat{\vec{AD},\vec{BC}})$. Поэтому $\cos(\widehat{\vec{AD},\vec{BC}})=2\frac{|AB|}{|AD|}$. Из ΔABD, применив теорему косинусов, получаем $|AD|=\sqrt{5}|AB|$. Ответ. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

3. $\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$. **4**. Из того, что новый сплав, составленный из x г первого, y г второго и

z г третьего сплава, содержит 15% висмута, получается $3x+y-3z=0$. Значит, $z\neq0$ и $z\geqslant x$. Процентное содержание свинца в новом сплаве равно

$$5\,\frac{11x+10y+14z}{x+y+z}=\frac{5}{2}\cdot\frac{44z-19x}{2z-x}=\frac{5}{2}\cdot\frac{44-19\frac{x}{z}}{2-\frac{x}{z}},$$

причем $0\leqslant\frac{x}{z}\leqslant1$. Ответ. 62,5% и 55%.

5. Требуется найти все значения параметра b, при каждом из которых

$$16(b+1)\cos x-2\cos 2x-(16b^2+32b-10)<0$$

или

$$\cos^2 x-4(b+1)\cos x+(4b^2+8b-3)>0,$$

а это означает, что

$$z^2-4(b+1)z+(4b^2+8b-3)>0$$

для всех $z\in[-1;1]$. Ответ. $]-\infty;\ -\frac{1}{2}(\sqrt{7}+3)[\ \cup\ ]\frac{1}{2}(\sqrt{7}-1);\ +\infty[$.

Факультет психологии

1. $\left\{1,\ \frac{\sqrt{3}}{8}\right\}$. 2. $\sqrt{3+\sqrt{4-2\sqrt{3}}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}=\frac{1}{2}(\sqrt{2}+\sqrt{6})$.

3. Обозначим промежуток времени между «начальным» моментом (когда пешеход и велосипедист находились в одной точке) и моментом, когда мотоциклист настиг пешехода (велосипедиста) через t (T), скорости пешехода, велосипедиста, мотоциклиста через $П$, $В$, $М$ соответственно. Тогда (см. рис. 1)

$$\begin{cases} Mt-Пt=6,\\ MT-BT=6,\\ BT-ПT=3.\end{cases}$$

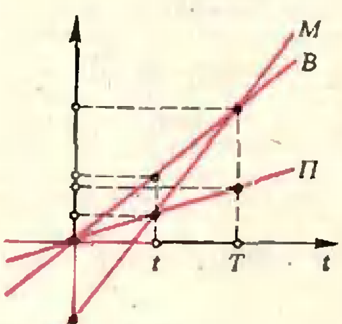


Рис. 1.

Искомое расстояние равно $Bt-Пt=(B-П)\,t=\frac{3}{T}\cdot\frac{6}{M-П}$. Из второго и третьего уравнений $MT-ПT=9$. Ответ. 2 км. 4. Ответ. $\{(0;0),(1;0)\}$. Указание. Положить в данном равенстве $x=0$; вывести из полученного равенства $b=0$. В равенстве $a\cdot\cos x-a=\cos ax-1$ положить $x=2\pi$ и $x=\frac{2\pi}{a}$. 5. Ответ. $a<0$. Указание. Сложите неравенства $f(-1)<1$, $-2f(1)<2$ и $f(3)<-4$.

Отделение структурной и прикладной лингвистики филологического факультета

1. По 9. 2. $A_4^2\cdot4\cdot5^2+4A_4^2\cdot5^3=7200$.

3. $x_1=\frac{\pi}{2}k$, $x_2=\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi l$ $(k,\ l\in\mathbb{Z})$. 4. $\max\limits_{R} f(x)=\frac{3}{4}$, $\min\limits_{R} f(x)=-\frac{3}{2}$. 5. $1+\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

Элементы статики деформируемых тел

1. $\sigma_1=40$ МН/м²; $\sigma_2=0$; $\sigma_3=20$ МН/м²; $\Delta l=0$.

2. $$a=\frac{l}{1+\frac{E_1S_1l_2}{E_2S_2l_1}}=1{,}08\ \text{м};$$

$$\sigma_1=\frac{4|\vec F|(l-a)}{\pi d_1^2 l}=44\ \text{МН/м}^2;$$

$$\sigma_2=\frac{\sigma_1E_2l_1}{E_1l_2}=33\ \text{МН/м}^2;$$

$$\Delta l=\frac{\sigma_1l_1}{E_1}=3{,}3\cdot10^{-4}\ \text{м}=0{,}33\ \text{мм}.$$

3. $$|\vec R_1|=|\vec R_3|=\frac{|\vec F|\frac{E_1S_1}{E_2S_2}\cos^2\alpha}{1+2\frac{E_1S_1}{E_2S_2}\cos^3\alpha};$$

$$|\vec R_2|=\frac{|\vec F|}{1+2\frac{E_1S_1}{E_2S_2}\cos^3\alpha}.$$

Задачи республиканских олимпиад 1978 года по математике

1. Ответ. Числа 2^k $(k=0,1,2,\ldots)$. Уравнение $(x+y)(x-y+1)/2=2^k r$, где r — нечетное число, отличное от единицы, всегда имеет решения в натуральных числах k, y, таких, что $x-y\geqslant2$, а при $r=1$ — не имеет.

2. Рассмотрим любые две точки из нашего набора. Если попарных расстояний

k, то точек не больше $2k^2+2$, поскольку все точки, кроме выбранных, должны лежать в пересечении двух семейств концентрических окружностей, по k окружностей в каждом.

3. Ответ. Искомый четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм. Пусть $[A_1C_1]$ — образ $[AC]$ при параллельном переносе $(\overrightarrow{BD})$. Тогда периметр $ABCD$ есть сумма расстояний от точки D до вершины четырехугольника ACA_1C_1. Ясно, что наименьшей эта сумма будет в том случае, когда точка D лежит на пересечении диагоналей четырехугольника ACA_1C_1.

4. Четырьмя радиусами, идущими под углом 45° к линиям клетчатой бумаги, разделите окружность на 4 четверти, а затем проведите все вертикальные линии, пересекающие верхнюю и нижнюю четверти, и все горизонтальные линии, пересекающие две другие четверти. Все граничные узлы будут лежать на этих линиях, причем вдоль них легко установить соответствие между внутренними и внешними граничными точками, при котором ровно четырем внутренним точкам будут отвечать по две внешние (остальным — по одной). Ответ. Четыре.

6. Имеем: $\sum\limits_i \left(x_i - \frac{m+M}{2}\right)^2 =$

$= \sum\limits_i x_i^2 + k\left(\frac{m+M}{2}\right)^2$; так как $m \leqslant x_i \leqslant M$,

то $\left(x_i - \frac{m+M}{2}\right)^2 \leqslant \left(\frac{M-m}{2}\right)^2$, откуда

$\sum\limits_i x_i^2 \leqslant k\left(\left(\frac{M-m}{2}\right)^2 - \left(\frac{m+M}{2}\right)^2\right) = -kmM.$

8. Последовательность (b_n) монотонна и ограничена, поскольку

$b_{n+1} = \frac{1}{2}\left(b_n + \sqrt{b_n^2 + {}^1/_2{}^{2n}}\right)$

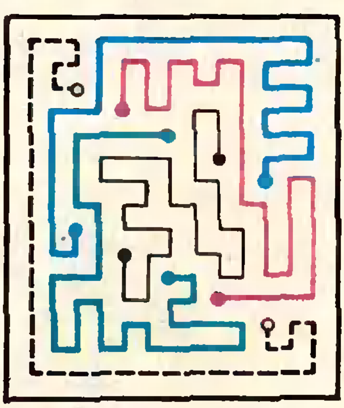


Рис. 2

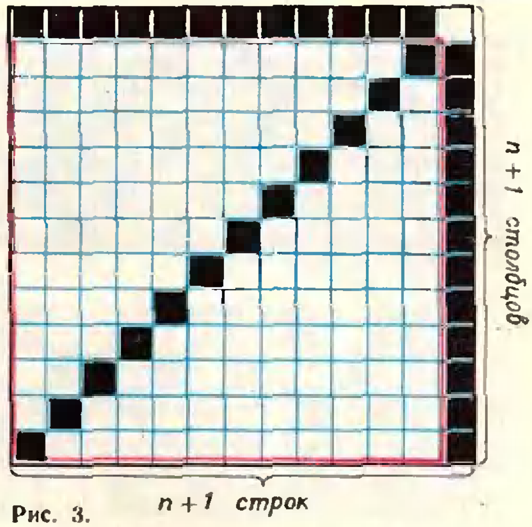


Рис. 3.

и $b_{n+1} - b_n = \frac{{}^1/_2{}^{2n}}{2\left(b_n + \sqrt{b_n^2 + {}^1/_2{}^{2n}}\right)} \leqslant \frac{1}{2^{2n}}$.

10. Рассмотрите векторы с координатами $(x_1;\ x_2;\ x_3)$, $(y_1;\ y_2;\ y_3)$ и $(1;1;1)$, и воспользуйтесь тем, что сумма квадратов косинусов углов между вектором $(1;0;0)$ и нашими тремя векторами равна 1.

11. Проведите через центр сферы три взаимно перпендикулярные плоскости и рассмотрите образы закрашенного множества при всевозможных композициях симметрий относительно этих плоскостей — они заполнят не более 96% площади сферы.

12. Ни в одном из 49 квадратов 2×2 сумма не больше 250, поэтому если она не больше 100 во всех квадратах, кроме, быть может, двух, то сумма сумм по квадратам должна быть меньше $2\cdot250+47\cdot100=5200$. С другой стороны, в эту сумму сумм угловые числа входят по разу, примыкающие к сторонам — по два, остальные — по 4 раза, поэтому такая сумма не меньше $(64+\ldots+61)+2(60+\ldots+37)+4(36+\ldots$ $\ldots+1)=5242$.

13. б) $10^{mk}-1$ делится на p, а 10^m-1 не делится на p, поэтому отношение этих чисел $1+10^m+10^{2m}+\ldots+10^{(k-1)m}$ делится на p, и сумма k бесконечных десятичных дробей, отвечающих числам $\frac{1}{p}$, $\frac{10^m}{p}$, . . . есть целое число: a, 9999...

15. Условию удовлетворяют середины любых четырех ребер, образующих замкнутую ломаную.

«Квант» для младших школьников

(см. с. 37)

1. См. рисунок 2.
2. а) $4+6=10$, $2+7=9$, $3+5=8$; б) $\begin{array}{r}\times\,15\\4\\\hline60\end{array}$, $\begin{array}{r}\times\,29\\3\\\hline87\end{array}$.
3. См. рисунок 3.

4. Изобразим участников слета в виде двух точечных множеств (мальчики — точки одного множества, девочки — другого), а отношение *знакомства* в виде линии, соединяющей точку одного множества с точкой другого. Если одно из множеств содержит k ($k \geqslant n$) точек, то точки этих множеств соединяют kn линий. Так как из каждой точки второго множества выходит ровно n линий, получаем, что оно содержит также k точек.

(см. «Квант» № 11)

1. а) Если исходное число $\overline{a_1a_2\ldots a_{2k+1}}$, то новое число—это $\overline{a_1a_2\ldots a_{2k+1}a_1a_2\ldots a_{2k+1}}$. Перепишем его так

$\overline{a_1a_2\ldots a_{2k+1}a_1a_2\ldots a_{2k+1}} = 10^{2k+1} \times$
$\times \overline{a_1a_2\ldots a_{2k+1}} + \overline{a_1a_2\ldots a_{2k+1}} =$
$(10^{2k+1}+1)\,\overline{a_1a_2\ldots a_{2k+1}} = (10+1)\times$
$\times 10^{2k} - 10^{2k-1} + 10^{2k-2} - \ldots - 10 +$
$+ 1)\,\overline{a_1a_2\ldots a_{2k+1}} = 11 \cdot A,$

что и требовалось доказать.

2. Поскольку $(n^4+n^2+1)=(n^2+n+1)(n^2-n+1)$, число n^4+n^2+1 (n натуральное) будет простым тогда и только тогда, когда $n^2-n+1=1$, то есть $n=1$.

3. В 1975 году хозяину было 79 лет (рожд. 1896 г.), а гостю 25 лет (рожд. 1950 г). Сыну хозяина в 1961 году было 37 лет (рожд. 1924 г.), а внуку в 1963 году было 13 лет (рожд. 1950 г.), Отцу же хозяина в 1962 году было 109 лет (рожд. 1853 г.).

Собери куб.

(см. «Квант» № 11, 3-я с. обл.).

См. рис. 5

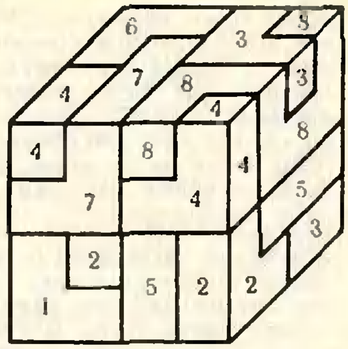


Рис. 5.

Числовые ребусы

(см. «Квант» № 11)

1. а)

```
 _102    | 96
   96    |------
 ----    | 1,0625
   _600
    576
   ----
    _240
     192
    ----
     _480
      480
```

б)

```
 _100034 | 11
   99    |------
 -----   | 9094
    _103
      99
    ----
      _44
       44
```

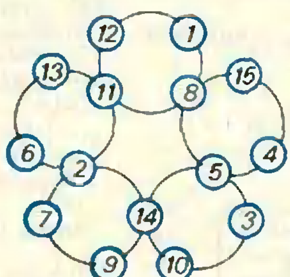
2. а) $482 \cdot 5 = 2410$, $986 \cdot 7 = 6902$;
б) $2 \cdot 615 = 1230$, $9 \cdot 768 = 6912$;
в) $1078 : 7 = 154$, $2184 : 8 = 273$;
г) $1248 : 416 = 3$, $6083 : 869 = 7$;
д) $4 = 1636 : 409$, $9 = 8424 : 936$.

3. 98643865372.

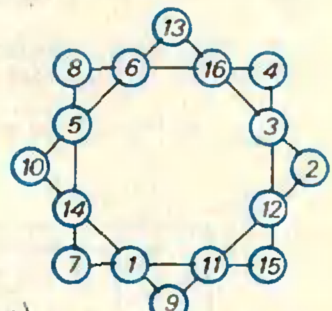
Головоломки на суммы чисел и их квадратов

(см. «Квант» № 11, с. 51)

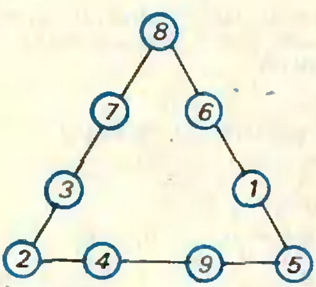
См. рис. 4.



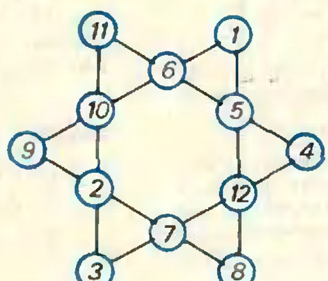
б)



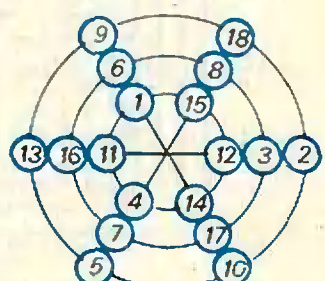
г)



а)



в)



д)

Рис. 4.

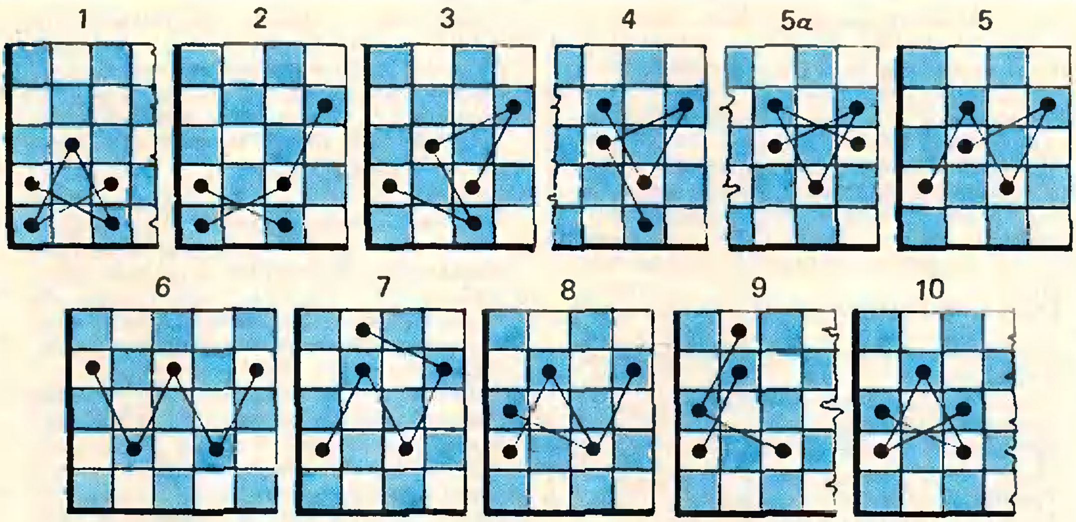


Рис. 2.

Активный эскадрон

(см. «Квант» № 11)

Минимальный активный эскадрон из пяти коней изображен на рисунке 1 а (исходная позиция 1). В самом деле, трех и четырех коней мало (убедитесь в этом самостоятельно — это не так просто). Пять же коней из позиции 1 можно перевести в позиции 5а и 10. Отличие позиций 1 и 10 состоит в том, что одна из них сдвинута относительно другой на одну клетку вертикали. Очевидно, что в вертикальном направлении можно последовательно осуществить бесконечное число таких переходов. Отличие позиций 1 и 5а состоит в том, что одна из них сдвинута относительно другой на одну клетку по вертикали, на одну по горизонтали и повернута на 180°. Таким образом, полигоном перемещения эскадрона из пяти коней, занимающего позицию 1, является вся бесконечная шахматная доска.

Напечатано в 1978 году

Статьи по математике

Статьи по физике

Лаборатория «Кванта»

Математический кружок

Математический практикум

Задачник «Кванта»

«Квант» для младших школьников

Постройка тракта

Давным-давно от города Мутонвиля по берегу большого озера шел старинный тракт. У самого тракта на равных расстояниях друг от друга были расположены деревни Альбижуа, Бонди, Виланкур, Гарбюзье и, наконец, Дюпре, за которой начинался непроходимый лес (см. рисунок на третьей странице обложки).

Тракт пришел в негодность. Его предстояло выровнять и замостить булыжником, разумеется, за счет жителей этих пяти деревень. Все пятеро деревенских старост собрались в Мутонвиле, чтобы договориться о покупке камня и найме рабочих.

— На постройку тракта требуется 600 луидоров, — резюмировал староста деревни Гарбюзье. — Сразу после сбора урожая наша деревня внесет свои 120 луидоров.

— Если Гарбюзье платит сто двадцать, то мы даем шестьдесят, — заявил староста Бонди. — Ведь участок тракта до нашей деревни ровно вдвое меньше, чем до Гарбюзье.

— В таком случае мы должны внести только 30 луидоров, — сказал староста деревни Альбижуа.

В конце концов старосты договорились, что требуемые 600 луидоров будут уплачены, причем жители каждой деревни участвуют в оплате той части тракта, которой они пользуются, когда везут свои товары в Мутонвиль (расстояние от Мутонвиля до Альбижуа такое же, как и между соседними деревнями).

Сколько же пришлось уплатить жителям каждой из пяти деревень?

А. Халамайзер

Над номером работали:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, С. Лухин, Э. Назаров, А. Пономарева, Е. Тенчурина, В. Чернов

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Л. Боровина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 28/IX—1978.
Подписано в печать 15/XI—1978.
Бумага $70 \times 108\ ^1/_{16}$. Физ. печ. л. 4.
Усл. печ. л 5,60 Уч.-изд. л. 6,52 Т-20144
Цена 30 коп. Заказ 2220
Тираж [illegible] экз.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области


ПОСТРОЙКА ТРАКТА
Мутонвиль
Альбижуа
Бонди
Виланкур
Гарбюзье
Дюпре
ОЗЕРО
ЛЕС

Индекс 70465
Цена 30 коп.

МАГИЧЕСКИЙ ДОДЕКАЭДР

Если из набора чисел 1, 2,...,25 выбросить числа 1, 7, 13, 19, 25, то оставшиеся двадцать чисел можно расставить в двадцати вершинах додекаэдра так, чтобы суммы чисел, стоящих в вершинах каждой грани, были одинаковы. Одно из таких расположений вы видите на обложке. Любопытно, что при этом расположении есть еще пятерки вершин, дающих ту же магическую сумму 65. На развертке и на модели изображено двенадцать поясков проходящих через такие пятерки вершин, причем каждая пятерка образует правильный пятиугольник, плоскость которого параллельна некоторой грани додекаэдра. Но это еще не все. Есть у нашего расположения чисел и другие закономерности. Постарайтесь найти их самостоятельно.

Е. Кривошеев