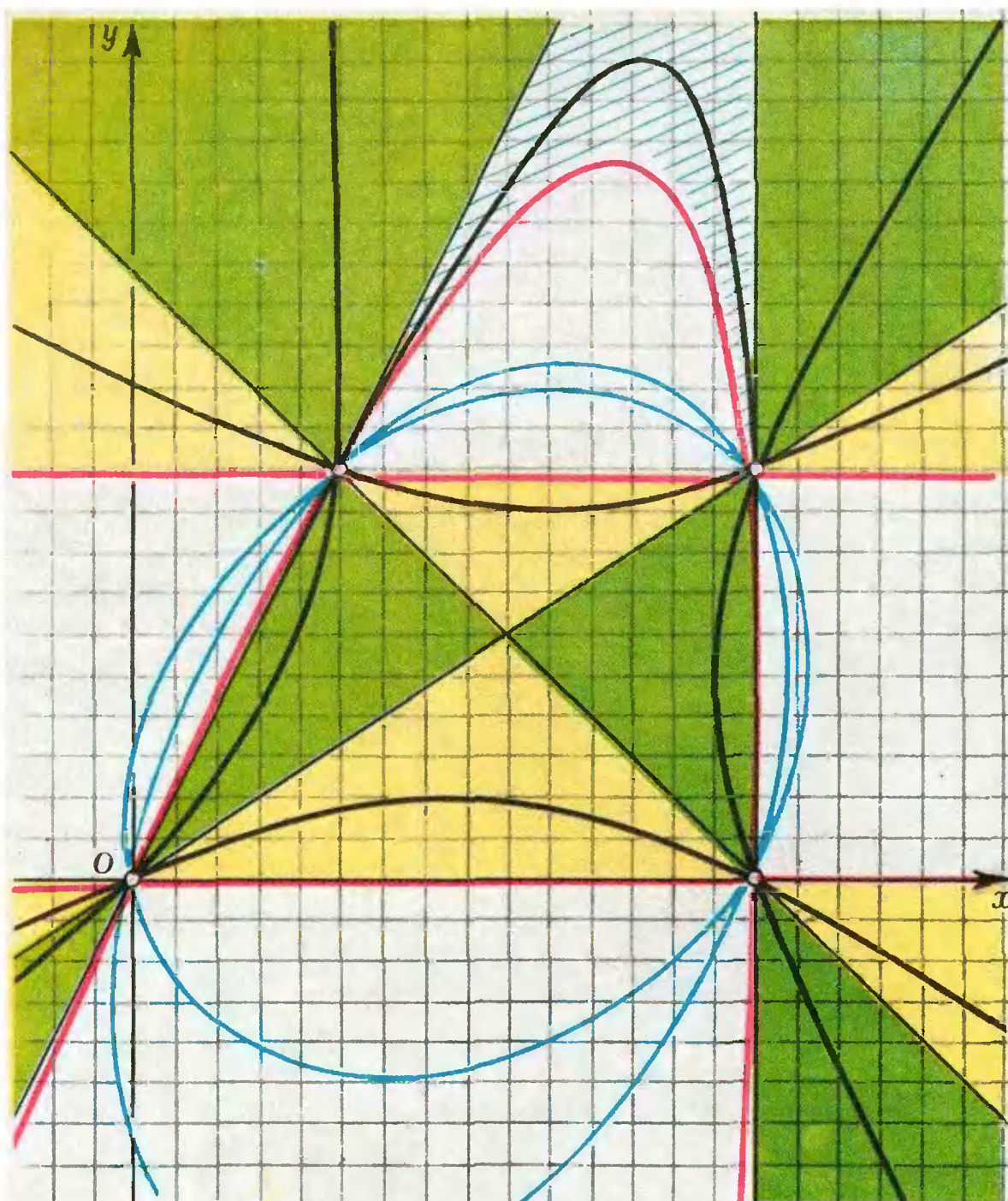


# Квант

9  
1978

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ  
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





На этом рисунке изображено семейство кривых второго порядка, проходящих через точки  $(0,0)$ ,  $(1,2)$ ,  $(3,0)$  и  $(3,2)$ . Кривая второго порядка — это график уравнения

$$ax^2 + bxy + cy^2 + ex + fy + q = 0$$

(где числа  $a, b, c$  не равны нулю одновременно). Примеры кривых второго порядка: эллипс, гипербола, парабола, пара прямых. (Подробнее о кривых второго порядка можно прочитать в «Кванте», 1977, № 8.) По теореме Паскаля в общем случае через пять точек проходит ровно одна кривая

второго порядка. Поэтому через четыре точки проходит целое семейство кривых второго порядка, которое и показано на рисунке. Особую роль здесь играют «красная» парабола, пара параллельных прямых  $y^2 - 2y = 0$  и пара пересекающихся прямых  $(2x - 3y)(x + y - 3) = 0$ . Эти линии отделяют области, заполненные кривыми разных типов. Например, белая область заполнена эллипсами, зеленая область — одним семейством гипербол, желтая — другим семейством гипербол.

Основан в 1970 году

# Квант

**9**  
1978

Научно-популярный  
физико-математический  
журнал  
Академии наук СССР  
и Академии педагогических  
наук СССР



Издательство «Наука»  
Главная редакция  
физико-математической  
литературы

## В номере:

Главный редактор  
академик И. К. Кириин  
Первый заместитель  
главного редактора  
академик А. Н. Колмогоров

### Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков  
С. Т. Беляев  
В. Г. Болтянский  
Н. Б. Васильев  
Ю. Н. Ефремов  
В. Г. Зубов  
П. Л. Капица  
В. А. Кириин  
А. И. Климанов  
(главный художник)  
С. М. Козел  
В. А. Лешковцев  
(зам. главного редактора)  
Л. Г. Макара-Лимаков  
А. И. Маркушевич  
Н. А. Патрикеева  
И. С. Петраков  
Н. Х. Розов  
А. П. Савин  
И. Ш. Слободяцкий  
М. Л. Смолянский  
(зам. главного редактора)  
Я. А. Смородицкий  
В. А. Фабрикант  
А. Т. Цветков  
М. П. Шаскольская  
С. И. Шварцбург  
А. И. Ширшов

На первой  
странице обложки  
вы видите фотографию  
различных кристаллов  
(фото Е. Раскина).  
Об одном из современных  
методов изучения  
кристаллических структур  
вы можете прочитать  
в статье В. Белякова (с. 4)

- 2 С новым учебным годом!  
4 В. Беляков. Каналирование частиц в кристаллах  
13 В. Залгаллер. Непрерывно изгибаемый многогранник

### Лаборатория «Кванта»

- 20 В. Майер. Реакция вытекающей и втекающей струй  
**Математический практикум**  
22 В. Вавилов. Сетчатые номограммы  
30 И. Клумова. Номограммы из выравненных точек

### Математический кружок

- 33 А. Тоом. Решения задач ВЗМШ

### 35 Премии «Кванта»

#### Задачник «Кванта»

- 36 Задачи М521—М525; Ф533—Ф537  
38 Решения задач М471—М474; Ф487—Ф490, Ф492

### По страницам школьных учебников

- 45 Р. Мейшорер. Комбинаторные доказательства формулы Ньютона

### «Квант» для младших школьников

- 47 Задачи  
48 Е. Семенов. Расстояние Степы Мошкина (из писем другу)

- 51 А. Строгова. Метод наименьших квадратов

### Практикум абитуриента

- 53 В. Литвиненко, А. Мордкович. Пределы

### Рецензии, библиография

- 59 М. Смолянский. Математика на шахматной доске  
60 И. Зорич. Мир, лишенный очертаний

- 62 Ответы, указания, решения

**Смесь** (с. 19, 21, 29, 32, 34, 58, 64)

# С новым учебным годом!

Редакция поздравляет наших юных читателей с новым, 1978/79 учебным годом!

Прошлый учебный год был насыщен крупными событиями, которые послужили своеобразным напутствием наступающему учебному году.

Это был год, когда советский народ и все прогрессивное человечество торжественно отмечали шестидесятилетие Великой Октябрьской социалистической революции, открывшей новую эру в истории человечества.

Непосредственное отношение к вам, как и ко всем гражданам нашей Родины, имеет еще одно важнейшее событие истекшего года — принятие новой Конституции Советского Союза.

Минувший год был также годом XVIII съезда Ленинского комсомола, молодежной организации, членами которой состоит подавляющее большинство читателей «Кванта». Нашим читателям особенно близка яркая речь Генерального секретаря ЦК КПСС, Председателя Президиума Верховного Совета СССР Л. И. Брежнева на XVIII съезде ВЛКСМ. В ней были изложены задачи, решение которых коммунистическая партия возлагает на комсомол, выразив уверенность в том, что они ему по плечу.

А в самом конце прошлого учебного года в Москве состоялся Всесоюзный съезд учителей — наставников и друзей учащейся молодежи. На этом съезде рассматривались проблемы, непосредственно касающиеся всех учащихся. Выступления участников съезда были проникнуты заботой об учащейся молодежи, о том, как лучше и эффективнее подготовить ее к будущей самостоятельной жизни. Нашей молодежи многое дано. Ни одно государство в мире не предоставляет юношам и девушкам таких возможностей для обучения, какие имеются в Советском Союзе.

С первых же дней после победы Октября Советское государство считало одной из важнейших задач организацию дела народного образования. Надо помнить, что в это время подавляющее большинство населения нашей страны было неграмотным. С тех пор мы прошли огромный путь от кружков по ликвидации неграмотности до всеобщего среднего образования. Вот, к примеру, несколько цифр только по одной союзной республике, взятых из юбилейного статистического издания «Народное хозяйство Узбекской ССР за 60 лет Советской власти»: в 9498 общеобразовательных школах в 1976/77 учебном году занималось 3 789 900 учащихся, которых обучали 203 600 учителей; в 42 вузах получали образование 254 300 студентов.

В нашей стране все виды обучения как в средней школе, так и в высшей — бесплатны. А принятое в прошлом году Постановление ЦК КПСС и Совета Министров СССР обеспечит и бесплатное пользование учебниками. Большинство школьников пионерского возраста в летнее время бесплатно пользуется оздоровительными учреждениями. А детям дошкольного возраста предоставлена возможность почти бесплатного воспитания в яслях и детских садах. На все это Советское государство расходует огромные материальные средства.

Партия и правительство постоянно заботятся об учащейся молодежи, о повышении качества ее обучения. Свидетельством этому служит целый ряд документов, принятых в последнее время, которые имеют огромное значение для развития народного образования в нашей стране. Среди них — Постановления ЦК КПСС и Совета Министров СССР о завершении перехода ко всеобщему среднему образованию, о сельской школе, о совершенствовании обучения и воспитания учащихся системы профессионально-технического образования, о совершенствовании обучения, воспитания и подготовки к труду учащихся общеобразовательных школ. Верховный Совет СССР утвердил «Основы законодательства Союза ССР и союзных республик о народном образовании».

Все это — воплощение одного из основных прав советского человека, гарантированного Конституцией, — права на образование. Но, кому много дано, с того много и спрашивается. Долг каждого школьника, каждого учащегося ПТУ достойно ответить на внимание и заботу партии и Советского правительства, в полной мере использовать представленные народом возможности для обучения, для получения образования.

XVIII съезд ВЛКСМ обратил особое внимание на эту задачу. В резолюции, принятой съездом, сказано: «Ленинский комсомол призван вносить конкретный вклад в осуществление решений XXV съезда партии, постановлений ЦК КПСС и Советского

правительства о дальнейшем совершенствовании обучения, воспитания, подготовки к жизни и труду молодежи...».

XXV съезд инициализирует всех труженников нашей страны на борьбу за повышение эффективности и качества работы. Эта задача имеет самое непосредственное отношение к учащимся. Ведь качество знаний сегодня — это высокая эффективность труда завтра. Вот почему XVIII съезд ВЛКСМ обратился к учащимся с призывом объявить войну «сереньким тройкам». Необходимо увлечь ребят учебой, пробудить в них жажду знаний, «угадать» и развить их таланты. Для этого надо максимально использовать возможности внешкольных занятий, кружков, научных обществ учащихся и т. д.

Помочь решению этой задачи призван и наш журнал «Квант». Его основная цель — пробуждать интерес учащихся к физике и математике — наукам, лежащим в основе современной техники. Мы надеемся, что публикуемые на страницах журнала интересные материалы, доступные широкому кругу читателей, будут способствовать повышению уровня преподавания физики и математики в школе. Журнал и впредь будет знакомить своих читателей с достижениями физико-математических наук и применять их в технике и народном хозяйстве.

Среди читателей «Кванта» много юношей и девушек, серьезно интересующихся математикой и физикой, отлично знающих эти предметы, регулярно занимающихся в кружках и успешно выступающих на олимпиадах. Мы хотели бы, чтобы они стали первыми помощниками учителей физики и математики, чтобы они считали своим долгом объяснять трудные вопросы товарищам, увлекать их красотой и радостью научного познания. Опыт показывает, что, объясняя тот или иной вопрос, усваиваешь его лучше и глубже. Помощь товарищам по школе оказывается таким образом взаимной. «Ни одного отстающего рядом!» — этот лозунг ударников производства должен стать девизом учащихся.

Школьное образование в нашей стране связано с трудовым воспитанием. Такая политика, проводимая партией и правительством, помогает учащимся выбрать себе будущую трудовую профессию. Поясняя эту политику, Л. И. Брежнев подчеркнул: «Если, например, раньше говорилось о праве на труд, то теперь это дополняется правом на выбор профессии, рода занятий и работы в соответствии с призванием, способностями, профессиональной подготовкой и образованием гражданина, а также — что не менее важно — и с учетом общественных потребностей».

Совершенно иначе обстоит дело с трудоустройством молодежи в капиталистическом мире. Вот типичная история, о которой 30 мая 1978 года рассказала «Комсомольская правда»:

«...Способности к математике у него проявились в раннем детстве. В четыре года он уже умел считать до тысячи. В семь лет его освободили в школе от уроков математики... В восемь он мог давать консультации выпускникам школы... В двенадцать лет его допустили к занятиям на факультете математики Мюнхенского университета, а в тринадцать он делал доклады в педагогическом институте своего родного города. Все это заставило говорить об Элмаре Эдере как о вундеркинде...»

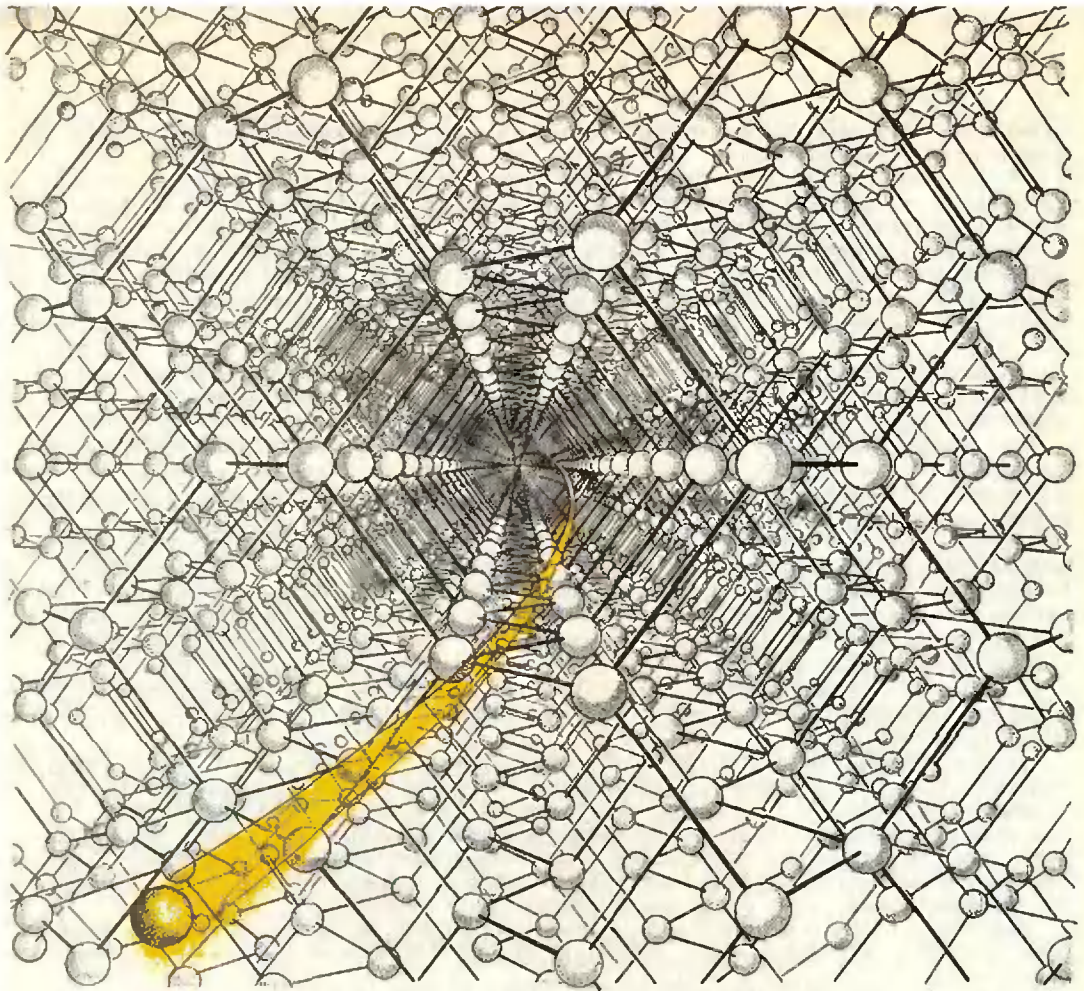
Вундеркинда направили учиться в специальную математическую школу в Англии, которую он с блеском окончил в пятнадцать лет. Через три года он получил диплом об окончании математического факультета Мюнхенского университета, а еще через два года ему была присвоена степень доктора.

Годы обучения остались позади, и перед двадцатилетним математиком встал вопрос о месте работы. Университеты, институты и научно-исследовательские центры, в которые молодой математик обращался с просьбой предоставить ему работу, давали один ответ: свободных мест нет.

Эту фразу в ФРГ неоднократно получали в ответ и 40 тысяч других выпускников высших учебных заведений страны...».

К сожалению, у нас все еще встречаются юноши и девушки, которые не хотят познавать производство, не привыкли уважать людей труда. Они пытаются отложить приобретение трудовых навыков до окончания школы и прикрыть отсутствие интереса к труду различными отговорками. Таким учащимся следует напомнить слова первого секретаря ЦК ВЛКСМ Б. Н. Пастухова, который в своем докладе XVIII съезду ВЛКСМ отметил: «Общественно полезный труд — это активное постижение мира, познание самого себя. Он не преряпствует, а содействует сознательному выбору профессии, углублению знаний. Лауреат Ленинской премии, академик Рем Викторович Хохлов начал работать после школы автослесарем, затем стал студентом Московского университета, а спустя годы — его ректором. Выдающийся советский физик всегда тепло вспоминал школу рабочего коллектива. Такие университеты не забываются».

Старшеклассники, учащиеся профессионально-технических училищ, как и все советские люди, испытывают законную гордость за те выдающиеся успехи, которых достигла наша Родина под руководством родной Коммунистической партии, ясно осознают, что стартовая площадка всех этих успехов — социалистический общественный строй. Мы убеждены, что учащаяся молодежь Страны Советов сделает все, чтобы начавшийся учебный год — год 60-летия ВЛКСМ — был достойно отмечен новыми успехами в учебе и труде.



*В. Беляков*

## Каналирование частиц в кристаллах

Во втором номере нашего журнала за этот год была опубликована статья А Китайгородского «Как измеряются расстояния между атомами в кристаллах». В этой статье рассказывалось об основном методе исследования кристаллических структур — рентгеноструктурном анализе.

Теперь мы предлагаем вашему вниманию рассказ еще об одном, совсем недавно появившемся, методе изучения кристаллов.

### Немного истории

Тот, кто видел модель кристалла, выполненную из шариков и тонких стержней (см. заставку к статье), конечно же, обратил внимание на ее интересное свойство. Если, медленно вращая, разглядывать такую модель

на просвет, можно видеть, что в некоторых направлениях она почти прозрачна, в других — практически непрозрачна. Прозрачной модель оказывается тогда, когда открываются отверстия (или, как говорят, каналы), образованные рядами атомов — шариков, или щели между плоскостями, образованными шариками; непрозрачной — когда все поле зрения полностью перекрывается шариками.

Это свойство модели кристалла еще в 1912 году (на заре развития атомной физики и физики твердого тела) побудило немецкого ученого Штарка задуматься над тем, имеет ли отношение описанное свойство модели к реальным кристаллам. Штарк пришел к выводу, что имеет. В частности, он предсказал, что, если кристалл облучать положительно заряженными частицами, то глубина их проникновения в глубь кристалла зависит от угла, под которым пучок частиц падает на кристалл. Так, если направление пучка совпадает с на-

правлением одного из описанных выше каналов, то частицы проникают в кристалл более глубоко, чем в других случаях.

Однако теоретическое предсказание Штарка тогда проверить не удалось, и оно было надолго забыто. Прошло более пятидесяти лет, прежде чем ученые занялись экспериментальным исследованием зависимости глубины проникновения заряженных частиц в кристаллы от ориентации образцов кристаллов относительно пучков этих частиц. Оказалось, что, действительно, если направление движения частицы совпадает с направлением кристаллического канала или близко к нему, то частица при своем движении в кристалле теряет энергию значительно медленнее, чем при движении в других направлениях. В результате длина ее пробега оказывается значительно больше в этом направлении, чем в других (рис. 1). В таком случае говорят, что происходит захват частицы в кристаллический канал, а само явление называют *каналированием частиц*.

Интерес к этому явлению пробудило «второе открытие» каналирования, сделанное в начале шестидесятых годов (как и в первый раз, теоретически) при моделировании на электронно-вычислительной машине движения ионов в монокристалле. Оказалось, что каналирование и сопутствующие ему явления представляют большой интерес для физики твердого тела и ядерной физики, так как являются эффективным методом исследования свойств кристаллов и некоторых ядерных явлений. Обнаружились и широкие возможности технического использования каналирования, в частности, в полупроводниковой технике. Но обо всем этом речь пойдет несколько позже.

## Об описании кристаллических структур

Как известно, в кристаллах атомы расположены в пространстве регулярным образом и образуют так называемую кристаллическую решетку. Атомы кристаллов (как и всех других тел) совершают тепловое дви-

жение, но это движение сильно ограничено. Атомы колеблются вблизи равновесных положений, называемых узлами кристаллической решетки, с очень малой амплитудой ( $\sim 10^{-8}$  см). Поэтому для описания ряда свойств кристаллических структур можно считать, что атомы вообще не движутся. Во всяком случае, модель кристалла с неподвижными атомами является, как говорят физики, хорошим нулевым приближением для описания многих свойств кристаллов. В дальнейшем мы будем пользоваться таким представлением о строении кристаллов.

Надо оговориться, что нарисованная выше идеальная картина, в которой атомы во всем объеме кристалла находятся строго на своих местах, в природе реализуется весьма редко. Такие идеальные образцы называют монокристаллами. Обычные кристаллические тела далеки от такого совершенства. Они состоят из совокупности большого числа кристаллитов — очень малых областей, в которых существует совершенный порядок в расположении атомов, но при переходе от одного кристаллита к другому порядок нарушается. Обсуждаемое нами явление каналирования лучше всего проявляется в экспериментах именно с монокристаллами, поэтому в дальнейшем под термином «кристалл» будем понимать «монокристалл».

В связи с тем, что в кристалле (монокристалле) существует строгий порядок в расположении атомов, для изучения кристаллов достаточно исследовать расположение атомов в минимальном объеме кристалла, полностью отражающем все его структурные свойства. Такой минимальный объем называют элементарной ячейкой кристалла. Размеры элементарной ячейки порядка  $(1-10) 10^{-8}$  см.

На рисунке 2 приведены примеры элементарных ячеек (для определенности — кубических). Простейшая ячейка представляет собой куб, в вершинах которого расположено по атому. Более сложной структурой обладают объемноцентрированная, гранецентрированная и базоцентрированная ячейки (их устройство очевидно из рисунка 2).

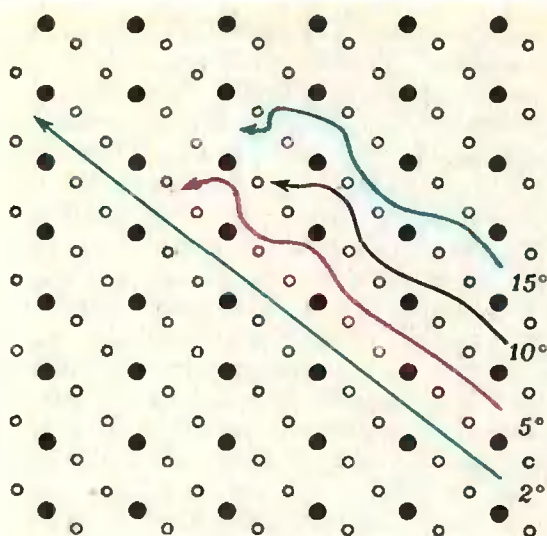


Рис. 1. Иллюстрация зависимости пробега иона от начального направления его скорости относительно оси канала на примере двумерной модели кристаллической решетки. Около траекторий частиц указано значение угла, образуемого начальной скоростью частицы с осью канала.

Как уже говорилось, не все направления в кристалле равноправны. Для того чтобы в этом убедиться, удобно (как это принято в кристаллофизике) связать систему координат с элементарной ячейкой. Обычно начало координат выбирают в одной из вершин ячейки, а оси координат направляют вдоль ее ребер, при этом длину ребер условно считают единичной. Направление вдоль оси  $X$  обозначают  $[100]$ , вдоль оси  $Y$  —  $[010]$ , вдоль оси  $Z$  —  $[001]$ . Плоскости, совпадающие с гранями куба и перпендикулярные осям  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ , обозначают соответственно  $(100)$ ,  $(010)$ ,  $(001)$ . Направления вдоль диагоналей граней обозначают  $[110]$ ,  $[101]$ ,  $[011]$ , а кристаллические плоскости, перпендикулярные этим направлениям, —  $(110)$ ,  $(101)$ ,  $(011)$ . Наконец, направление пространственной диагонали обозначают  $[111]$ , а перпендикулярные ей кристаллические плоскости —  $(111)$ .

Рассматривая изображение элементарной ячейки, легко видеть, что например, направления  $[100]$ ,  $[010]$ ,  $[001]$  кристалла эквивалентны друг другу и не эквивалентны направлению  $[111]$ .

Выше мы перечислили так называемые главные кристаллографиче-

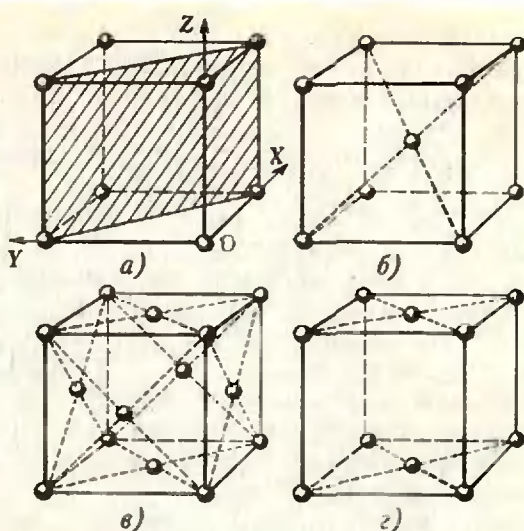


Рис. 2. Примеры кубических элементарных ячеек: а) примитивная, б) объемноцентрированная, в) гранецентрированная, г) базоцентрированная. На рисунке показан выбор системы координат, связанный с элементарной ячейкой; штриховкой показана одна из кристаллических плоскостей  $(110)$ .

ские направления и кристаллографические плоскости. Другие направления и плоскости обозначаются аналогично:  $[hkl]$  для направления и  $(hkl)$  для перпендикулярных этому направлению плоскостей. Величины  $h$ ,  $k$ ,  $l$  принимают целочисленные значения и называются кристаллографическими индексами (или индексами Мюллера). Для направлений и плоскостей, отличных от главных, хотя бы один из индексов отличается от 0 или 1.

Символ  $(hkl)$  обозначает не одну какую-то плоскость, а совокупность параллельных плоскостей, проходящих через узлы (атомы) кристаллической решетки. При этом в плоскостях, соответствующих малым кристаллографическим индексам, плотность атомов оказывается больше, чем в плоскостях с более высокими индексами, а расстояния между этими плоскостями больше, чем расстояния между плоскостями с высокими кристаллографическими индексами. Например, для кристалла с простейшей кубической ячейкой расстояние между плоскостями  $(100)$  равно 1, а между плоскостями  $(110)$ , соответствующими более высоким индексам, расстояние равно  $\sqrt{2}/2$  (см. рис. 2).



Познакомившись со способом описания кристаллографических направлений и плоскостей, приступим к более детальному ознакомлению с явлением каналирования.

### Что же такое каналирование?

Основное проявление эффекта каналирования состоит в аномально глубоком проникновении заряженных частиц в глубь кристалла в случае, когда их скорость или совпадает с направлениями кристаллических каналов или близка к ним. (Из предыдущего раздела следует, что направления каналов совпадают с основными кристаллографическими направлениями решетки.) В чем физическая причина аномально больших пробегов частиц в этих направлениях? На первый взгляд может показаться, что в канале, образованном рядами атомов, частица просто прямолинейно движется, не сталкиваясь с атомами кристалла, и как результат — большие пробеги. Это предположение легко проверить, наблюдая прохождение заряженных частиц через очень тонкие образцы кристаллов. Очевидно, что частица сможет пройти вдоль канала, не столкнувшись с его стенками, если угол наклона скорости частицы к оси канала не превышает величины  $\psi_c \sim \frac{d}{L}$ , где  $L$  — толщина

образца,  $d$  — поперечник канала. Таким образом, если сделанное предположение верно, предельный угол  $\psi_c$  отклонения частицы от оси канала, при котором еще происходит каналирование, должен зависеть от толщины образца! Однако эксперименты показали, что предельный угол каналирования (или, как говорят специалисты, критический угол) от толщины кристалла не зависит и одинаков как для толстых, так и для тонких образцов. Видимо, наше предположение о том, что каналирование — это прямолинейный пролет частицы вдоль канала без столкновений с атомами кристалла, неправильно. Как показали исследования, движение частицы в канале может быть весьма сложным и существенно отличаться от прямолинейного. Ха-

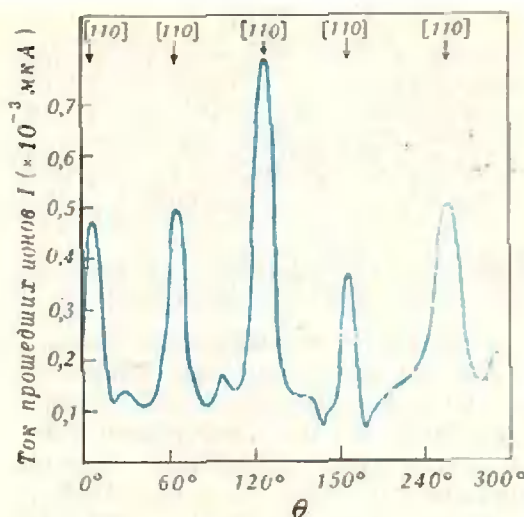


Рис. 3. Изменение тока прошедших ионов при вращении кристалла вокруг оси  $[111]$ .

рактер этого движения целиком определяется взаимодействием частицы с атомами, образующими кристаллический канал. Поэтому, чтобы ответить на поставленный в заголовке этого раздела вопрос, познакомимся с некоторыми экспериментальными фактами.

### Прохождение частиц через монокристаллы

Эксперименты, в которых непосредственно фиксируются частицы, испытывавшие каналирование, проводятся на тонких монокристаллических пленках. Узкий параллельный почти не расходящийся пучок (как говорят, коллимированный пучок) ионов направляется на кристалл, и исследуется зависимость числа прошедших через пленку ионов от ориентации пленки относительно пучка. Вращая кристалл вокруг оси, перпендикулярной его поверхности, можно изменять ориентацию образца, не влияя на толщину слоя кристалла, проходящего ионами. Поэтому изменения величины тока (созданного прошедшими через образец ионами) при вращении кристалла должны быть связаны с его структурными свойствами.

На рисунке 3 представлены результаты одного из экспериментов, в котором протоны с энергией 50 кэВ проходили через монокристалл золота. Угол падения пучка протонов

был выбран так, чтобы при вращении образца направления самых широких кристаллических каналов последовательно совпадали с направлением пучка, при этом наблюдалось резкое увеличение тока (то есть числа прошедших через образец протонов).

### Влияние каналирования на ядерные процессы. Эффект блокировки

Очень интересны результаты экспериментов по изучению ядерных реакций в условиях каналирования частиц, вызывающих ядерную реакцию. Оказалось, что каналированные частицы вступают в реакцию менее охотно, чем частицы, не испытавшие каналирования. Рассмотрим, например, такую реакцию. Если ядра изотопа кремния  $^{28}\text{Si}$  бомбардировать протонами, то в результате возникают ядра фосфора  $^{29}\text{P}$  и гамма-кванты:



О числе актов реакции можно судить по числу испущенных  $\gamma$ -квантов.

В эксперименте, в котором в качестве мишени использовался кристалл кремния, а пучок протонов направлялся на кристалл под различными углами к направлению [110], выявилась резкая зависимость числа  $\gamma$ -квантов от ориентации пучка (рис. 4). При совпадении направления пучка протонов с направлением [110] наблюдается минимум в числе актов реакции, о чем говорит уменьшение скорости счета  $\gamma$ -квантов.

Аналогичные результаты были получены и для ряда других ядерных реакций.

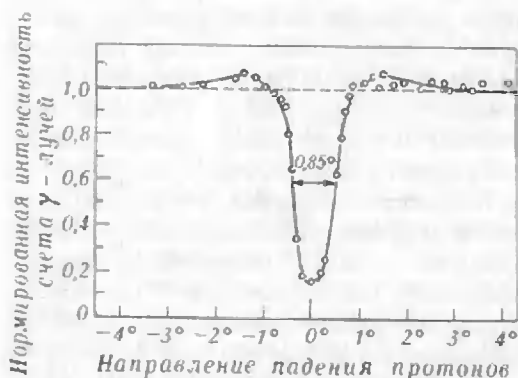


Рис. 4. Ориентационная зависимость выхода ядерной реакции  $^{28}\text{Si} + p \rightarrow ^{29}\text{P} + \gamma$  при изменении направления падения пучка протонов вблизи оси [110].

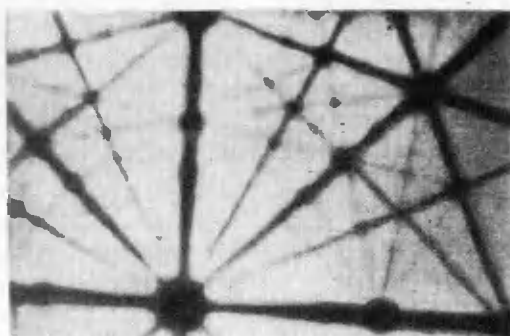


Рис. 5.

Явлением, тесно связанным с каналированием, является так называемый эффект блокировки. Он заключается в том, что выход из кристалла заряженных частиц, возникающих в процессе радиоактивного распада ядер в монокристалле, резко зависит от угла между направлением их скорости и оси кристаллического канала. Причем, в направлении оси канала число вышедших из кристалла частиц оказывается минимальным. Это связано с тем, что радиоактивный распад ядра происходит в узле кристаллической решетки, и движению частицы, испущенной в направлении, параллельном оси канала, препятствуют атомы, образующие стенки канала.

### Рассеяние на большие углы

Близким к эффекту блокировки — но наблюдаемым результатам — является отражение (или рассеяние назад) ионов от монокристаллических мишеней. Действительно, для того чтобы произошло отражение иона назад (рассеяние на большой угол), необходимо, чтобы ион почти вплотную приблизился к какому-нибудь ядру атома кристалла. Только в этом случае электростатическое отталкивание положительно заряженного иона и атомного ядра будет достаточно сильным, чтобы изменить направление движения иона на противоположное. Таким образом, рассеяние иона назад практически аналогично рассмотренному выше вылету заряженной частицы из ядра в процессе радиоактивного распада. Эксперименты полностью это подтверждают.

Например, если рядом с кристаллом, облучаемым протонами, поме-

стить со стороны пучка протонов фотопластинку, то после ее проявления получается изображение, аналогичное представленному на рисунке 5. Более темные участки (круговые области и пересекающиеся линии) соответствуют областям пониженной интенсивности рассеянных протонов — кристаллическим каналам. На изображении получается как бы проекция главных кристаллографических плоскостей и направлений на плоскость фотопластинки.

### Рентгеновское излучение, сопровождающее каналирование

В предыдущих разделах мы познакомились с различными проявлениями каналирования. Теперь поговорим немного о самом явлении. Как показывают эксперименты, частица захватывается в кристаллический канал в том случае, если угол  $\psi$ , составляемый ее скоростью с осью канала, меньше критического угла  $\psi_c$ . А как происходит движение частицы, захваченной в кристаллический канал, внутри канала? Оказывается, информацию об этом можно получить, изучая рентгеновское излучение, сопровождающее каналирование частицы.

Как известно, рентгеновские лучи испускаются возбужденным атомом, в котором какой-то из его электронов выбит со своего обычного уровня и переведен в более высокое энергетическое состояние. При возвращении электрона на свой уровень энергия возбуждения атома уносится квантом электромагнитного излучения — фотоном. Если в атоме был возбужден электрон внутренней оболочки, то энергия возбуждения атома велика, и фотон, уносящий эту энергию, называется рентгеновским квантом.

Исследуя зависимость выхода рентгеновского излучения от угла  $\psi$ , обнаружили, что при углах, гораздо меньших критического угла  $\psi_c$ , выход рентгеновского излучения мал. При увеличении угла  $\psi$  до величины порядка  $\psi_c$  происходит резкое возрастание выхода рентгеновского излучения. Наконец, при  $\psi > \psi_c$  возникает гамма-излучение, связанное с воз-

буждением бомбардируемыми частицами атомных ядер.

Такая зависимость выхода рентгеновского излучения от угла связана с различными траекториями движения частиц в кристалле. При малых углах  $\psi$  (траектория 1 на рисунке 6) частица движется в канале, очень мало отклоняясь от его оси, и все время находится в области валентных электронов. Валентные электроны, выбиваемые частицей со своих оболочек, не дают рентгеновского излучения, так как соответствующие энергии возбуждений малы. В области углов порядка критических (траектория 2) частица при своем движении в кристаллическом канале проходит через области внутренних электронных оболочек. Выбивание частицей электронов внутренних оболочек приводит к возникновению рентгеновского излучения. Наконец, при  $\psi > \psi_c$  (траектория 3) частица так близко подходит к атомному ядру, что становится возможным возбуждение ядра, следствием чего является возникновение гамма-кванта. Сама же частица при этом рассеивается на большой угол и выходит из кристаллического канала.

Таким образом, исследуя рентгеновское излучение, вызываемое заряженной частицей в кристалле, можно получить представление о характере ее движения в канале.

### О теории каналирования

Познакомившись с некоторыми экспериментальными фактами, вернемся к вопросу о том, что же такое каналирование. Теория этого явления была в основном разработана датским физиком Линдхардом. Оказывается, в основе каналирования лежит кулоновское взаимодействие положительно заряженных ионов с атомными ядрами кристалла. Вы обратили внимание, что во всех описанных выше опытах использовались положительные заряженные частицы?

За счет кулоновских сил положительно заряженный ион при своем движении в кристаллическом канале испытывает отталкивание от положительно заряженных атомных ядер,

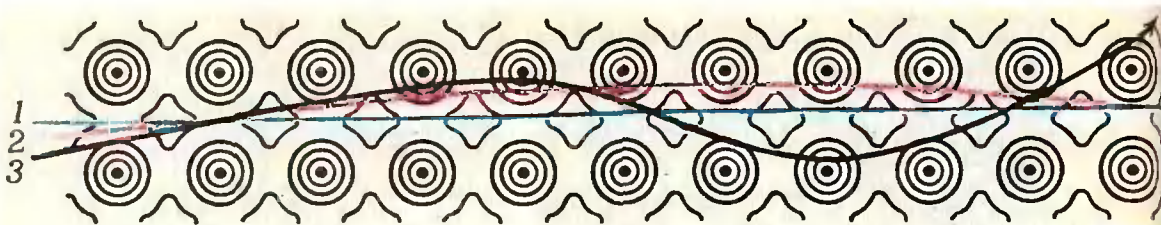


Рис. 6. Схематическая иллюстрация зависимости траектории частицы в кристаллическом канале от начального угла, образуемого ее скоростью с осью кристаллического канала.

как бы образующих стенки канала. Если составляющая скорости иона, перпендикулярная оси канала, мала, силы отталкивания не позволят иону выйти из канала. В этом случае ион, «оттолкнувшись» от одной стенки канала, будет приближаться к противоположной его стенке, одновременно перемещаясь вдоль оси канала. Затем он точно так же «оттолкнется» от противоположной стенки. В целом движение иона вдоль кристаллического канала будет сопровождаться его «колебаниями» между стенками канала.

Если поперечная составляющая скорости иона слишком велика, сил кулоновского отталкивания оказывается недостаточно, чтобы удержать ион в кристаллическом канале; ион выходит за пределы канала, то есть каналирования не происходит.

Наглядной моделью такого поведения иона может служить движение шарика в желобе (рис. 7). Если мы, пуская шарик вдоль оси желоба, одновременно придадим ему небольшую скорость, перпендикулярную оси желоба, то его движение по желобу будет сопровождаться колебаниями от стенки к стенке. Если же перпендикулярная оси составляющая скорости будет слишком велика, шарик просто выскочит из желоба. Существование предельной поперечной скорости шарика, при которой он еще не выскакивает из желоба, соответствует введенному выше критическому углу  $\psi_c$  для каналирования.

На первый взгляд, аналогия между движением каналированной частицы и движением шарика в желобе может вызвать удивление. Действительно, «стенки» кристаллических каналов гораздо ближе к рыболовной сети с крупной ячейкой или волейбольной сетке, чем к сплошным стен-

кам желоба. Аналогия оказывается хорошей только потому, что при движении вдоль оси канала частица совершает одно колебание от стенки к стенке на длине пробега, приблизительно равной сотне межатомных расстояний, так что дискретность стенки оказывается несущественной. Если же частица резко меняет направление своего движения за счет взаимодействия с одним ядром, аналогия с движением шарика в желобе не работает. Но при этом, как мы видели, не происходит и каналирования частиц. Так что пока частица каналируется, аналогия с желобом вполне хороша.

Заметим, что движение частицы в кристалле наиболее близко к движению шарика в желобе, когда речь идет о межплоскостном каналировании частицы, при котором частица совершает колебания между кристаллическими плоскостями, ограничивающими канал. В случае осевого канала движение частицы оказывается более сложным (см., например, заставку к статье).

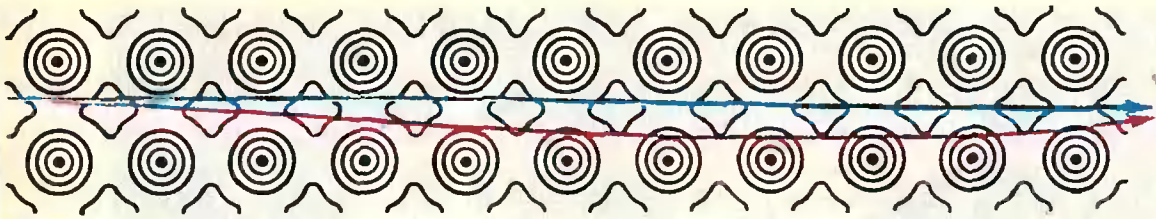
Приведенное выше качественное описание поведения каналированной частицы в кристалле позволяет получить зависимость критического угла  $\psi_c$  от энергии частицы. Обозначим через  $\vec{v}$  скорость движения частицы, а через  $\vec{v}_c$  — критическое значение ее поперечной скорости. Для частицы, движущейся под малым углом к оси канала, поперечная скорость

$$|\vec{v}_c| = |\vec{v}| \sin \psi_c \approx |\vec{v}| \psi_c,$$

откуда

$$\psi_c = \frac{|\vec{v}_c|}{|\vec{v}|}.$$

Выражая скорость частицы через ее



энергию  $E$ , получим

$$\psi_c = \frac{|\vec{v}_c|}{|\vec{v}|} = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}mv_c^2}}{\sqrt{\frac{1}{2}mv^2}} = \sqrt{\frac{U}{E}},$$

где  $m$  — масса каналируемой частицы, а  $U$  — предельная энергия поперечного движения частицы, при которой частица еще не может выйти за пределы канала. Таким образом, чем больше энергия частицы, тем меньше критический угол  $\psi_c$ , при котором еще происходит захват частицы в канал.

Такая зависимость критического угла от энергии частицы хорошо выполняется на опыте. Так, например, для протонов с энергией 50 кэВ в [110] канале кристалла меди  $\psi_c = 3^\circ$ , а для энергии 200 кэВ  $\psi_c = 1,5^\circ$ . Как видно, величины угла  $\psi_c$  очень малы. А это обуславливает многие экспериментальные трудности, которые приходится преодолевать при изучении каналирования. Действительно, чтобы изучать угловые зависимости каналирования, необходимо создавать пучки ионов, обеспечивая их угловую расходимость по крайней мере в десятки раз меньше, чем  $\psi_c$ .

Теперь немного о научном и техническом применении явления каналирования.

### Импламентация ионов

Термин, использованный в заголовке этого раздела, обозначает процесс введения в кристалл примесных ионов или атомов. Кристаллы, содержащие примесные атомы и притом в строго контролируемом количестве, широко используются в радиоэлектронике. Это так называемые примесные полупроводники.

В последнее время для введения примесей в полупроводниковый кристалл стал использоваться метод, состоящий в бомбардировке кристалла ионами нужного химического элемента. Вот здесь-то и оказались по-

лезными свойства обсуждаемого нами эффекта каналирования. Введение примесей в кристаллы путем облучения их пучками ионов обладает рядом преимуществ по сравнению с другими используемыми методами введения примесей. Этот метод позволяет вводить в кристаллы самые разнообразные примеси, и притом в точно контролируемых количествах, иногда даже превышающих те, которых можно достигнуть другими путями. С помощью облучения ионами примеси легко вводятся в нужные места образца и на требуемую глубину. Важно также, что, применяя ионы малых энергий, удается добиться их проникновения достаточно глубоко в кристалл. Вспомните, — пробеги в кристаллах каналированных частиц значительно больше, чем не испытывавших каналирование.

В связи с этим явление каналирования широко используется для изучения имплантации примесей путем ионной бомбардировки. И, очевидно, уже в ближайшее время каналирование будет использовано для промышленного выпуска высококачественных полупроводниковых кристаллов.

### Измерение времени ядерных процессов

Совершенно неожиданное применение каналирования, точнее, эффекта блокировки, оказалось возможным в ядерной физике. С помощью эффекта блокировки удается измерять времена некоторых ядерных процессов, длящихся  $10^{-18}$ — $10^{-16}$  с. Как раз в этой области длительности процессов не существует других надежных методов измерения времени.

Предложение использовать эффект блокировки для измерения времен ядерных процессов выдвинул советский физик А. Ф. Тулинов, внесший также большой вклад в открытие и изучение самого эффекта блокировки.

Этот метод подходит для измерения времен ядерных процессов (реакций), сопровождаемых испусканием заряженных частиц. Ход таких реакций может быть разбит на два этапа. Первый этап — захват ядром атома кристалла одной из частиц, которыми облучается образец. Вторым этапом — распад ядра, захватившего частицу.

Время, прошедшее с момента захвата частицы до распада ядра, может быть определено по тому, как проявляется эффект блокировки на выходе заряженных продуктов распада из кристалла. Идея метода проста и изящна и состоит в следующем. Ядро, захватившее частицу (как говорят физики, компаунд-ядро), восприняв импульс поглощенной частицы, оказывается выбитым из занимаемого им кристаллического узла и начинает двигаться в кристалле с очень большой скоростью, порядка  $10^8$ — $10^9$  см/с. Если время жизни компаунд-ядра очень мало и оно до распада практически не успевает отойти от занимаемого им узла, при выходе заряженных продуктов распада из кристалла в полной мере проявляется эффект блокировки.

Если же за время жизни ядро успевает отойти от своего узла, то проявляется ослабление эффекта блокировки, так как в этом случае движению продукта распада вдоль оси кристалла не препятствуют атомы, образующие стенки канала. По степени ослабления блокировки определяют расстояния, на которые смещается компаунд-ядро, и, зная его ско-

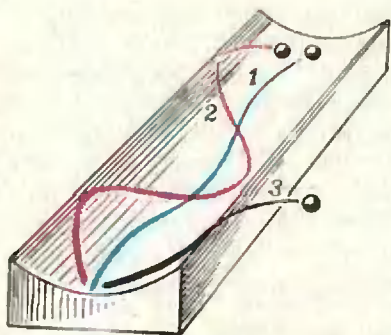


Рис. 7. Траектории шарика в желобе при различных значениях его поперечной скорости. Траектории 1, 2 и 3 относятся, соответственно, к малой, близкой к предельной и большей предельной поперечным скоростям шарика.

рость, находят время жизни компаунд-ядра.

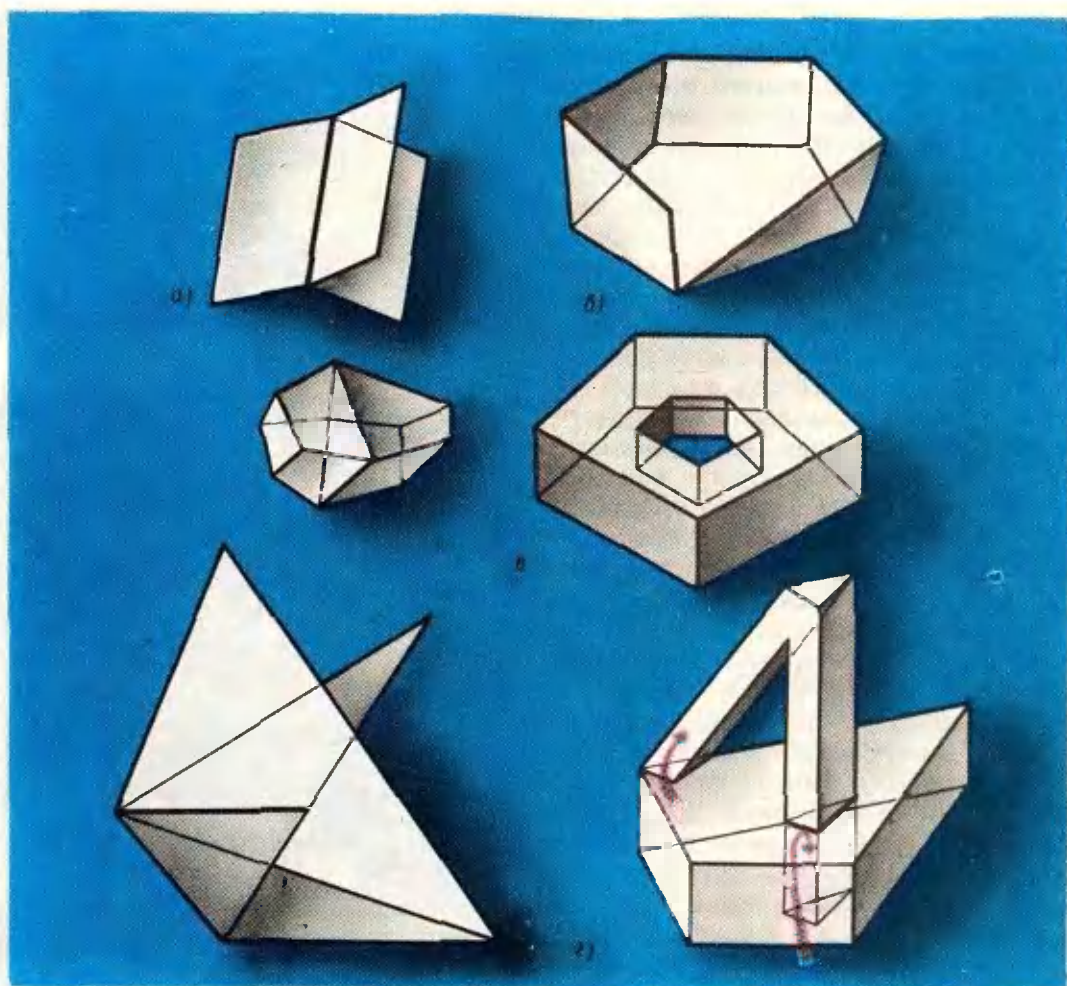
Например, таким способом было определено время распада ядра изотопа  $^{238}\text{U}$ , захватившего протон с энергией 10 МэВ. Оно оказалось равным  $1,4 \cdot 10^{-16}$  с.

### Заключение

Прочитав эту статью, вы познакомились с бурно развивающейся областью исследований, лежащей на стыке ядерной физики и физики твердого тела. Высокий уровень развития ядерной физики и физики твердого тела позволили за короткий срок — десять с небольшим лет — получить огромное количество информации о каналировании заряженных частиц в монокристаллах и определить наиболее многообещающие приложения этого явления.

Однако не надо думать, что все интересное в этой области исследований уже позади. Скорее наоборот. Так, в данной статье рассказывалось только о каналировании частиц, движение которых может быть описано на основе законов классической механики Ньютона (это — протоны и более тяжелые ионы). Для описания движений в кристалле более легких частиц (электронов, позитронов и т. п.) требуется применение законов квантовой механики. Кроме того, рассказ ограничивался случаем положительно заряженных частиц и предполагалось, что их энергия невелика. Оказывается, очень интересные явления разыгрываются при прохождении через кристаллы положительных и отрицательных частиц высоких энергий (так называемых релятивистских). Но рассказ об этом выходит за рамки данной статьи.

К сожалению, в настоящее время еще отсутствует полное понимание особенностей движения этих частиц в монокристаллах. Тем не менее ясно, что в руках физиков появился новый удивительно тонкий метод исследования кристаллов. Следует ожидать, что в недалеком будущем каналирование станет таким же рабочим методом исследования кристаллов, каким в настоящее время является рентгеноструктурный анализ.



В. Залгаллер

## Непрерывно изгибаемый многогранник

### 1. Многогранник

*Многогранником* мы будем здесь называть поверхность (не тело!), составленную из конечного числа многоугольников. Эти многоугольники — грани многогранника. Стороны граней — *ребра* многогранника. Предполагается, что по каждому ребру прилегают друг к другу не более

двух граней. (Так, поверхность, изображенная на рисунке *а*) на заставке не многогранник.) Многогранник должен состоять из одного куска: от любой его грани можно перейти к любой другой, переходя от грани к грани последовательно через ребра, по которым соседние грани прилегают.

Если у многогранника есть ребро, принадлежащее всего одной грани, то это — *многогранник с краем* (рис. *б*). Если же каждое ребро принадлежит двум граням, многогранник называют *замкнутым* (рис. *в*). У замкнутого многогранника края нет.

Многогранник будем называть *выпуклым*, если он является границей выпуклого тела. Такой многогранник — обязательно замкнутый. Как правило, мы будем рассматривать только многогранники, чьи грани

пересекаются лишь по общим ребрам. Если же это условие нарушено и грани как бы проходят одна сквозь другую, то мы будем говорить о многограннике с *самопересечением* (рис. 2 на с. 13).

## 2. Изгибание многогранника

Будем считать, что форму и размеры каждой грани многогранника изменять запрещено, т. е. грани будем рассматривать как твердые материальные пластинки. Двугранные углы при ребрах разреши́м изменять. Если изменением углов при ребрах исходный многогранник можно перестроить так, чтобы при сохранении порядка прилегания граней его форма изменилась, то говорят, что новый многогранник получается из исходного *конечным изгибанием*.

Изгибание многогранника с краем представить себе легко. Например, у многогранника, составленного из двух треугольников, можно произвольно изменить угол при общем ребре.

Приведем пример конечного изгибания замкнутого многогранника. Многогранник на рисунке 1, а составлен из пяти граней куба, шестая же грань заменена боковой поверхностью невысокой правильной четырехугольной пирамиды, поставленной на куб. Многогранник на рисунке 1, б построен аналогично, только теперь та же пирамида входит внутрь куба. В этом примере при изгибании многогранника двугранные углы при некоторых ребрах не только изменили свою величину, но стали из выступающих — входящими. Интересный пример конечного изгибания многогранника изображен на рисунке 2 \*). Здесь при изгибании выступающие двугранные углы остаются выступающими, а входящие — входящими.

В обоих примерах изгибание осуществлялось с к а ч к о м, не непрерывно. Если, например, склеить мно-

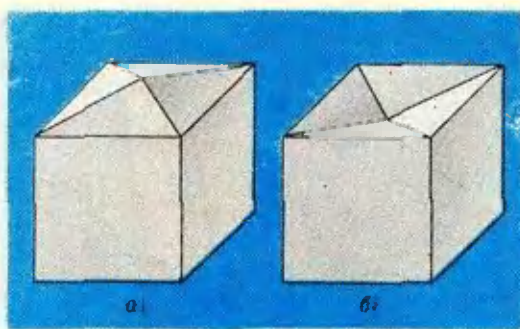


Рис. 1.

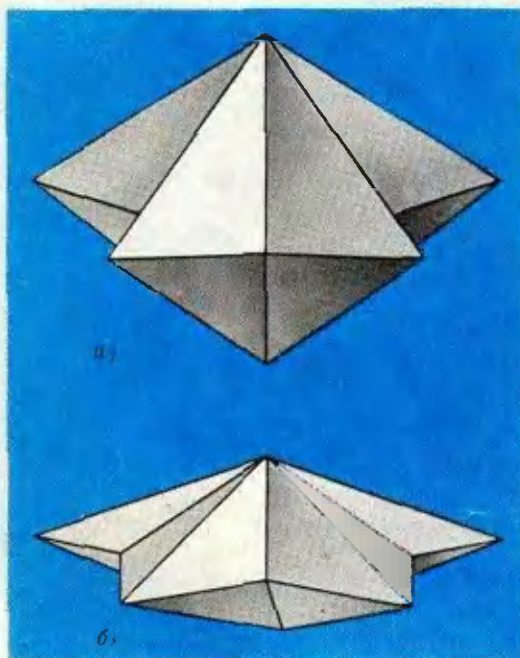


Рис. 2.

гогранник, изображенный на рисунке 2, а, из бумаги, то он будет жестким. Однако, если его с некоторым усилием сжать по вертикали, то он «щелчком» примет форму, показанную на рисунке 2, б. Но это вовсе не означает, что рассматриваемый многогранник допускает непрерывное изгибание: переход из состояния 2, а в состояние 2, б оказывается возможным только потому, что бумажные грани и ребра являются не абсолютно жесткими, а обладают некоторой эластичностью. (Многогранник 2, а вы можете склеить сами из плотной чертежной бумаги и «пощелкать» им, переводя его в состояние 2, б и обратно. Он состоит из двадцати одинаковых треугольных граней со сторонами длины

\*) Этот пример заимствован из заметки А. Д. Александрова и С. М. Владимировой («Вестник Ленинградского университета», 1962, № 13).



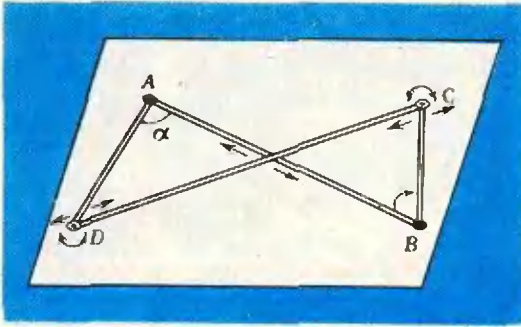


Рис. 3.

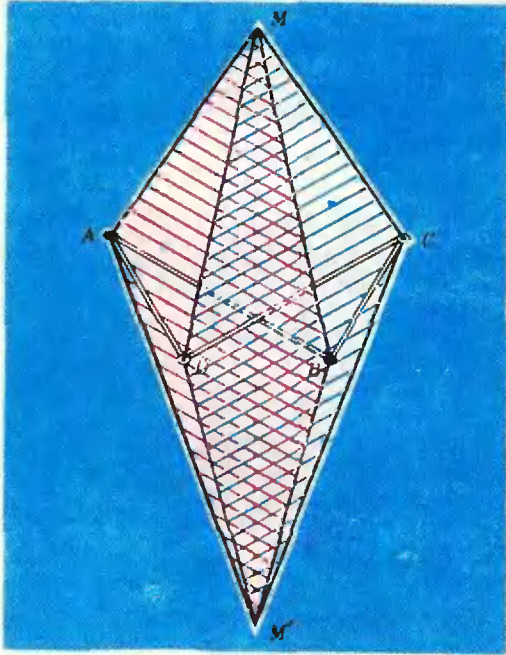


Рис. 4.

$a \approx 5,3752$  см;  $b \approx 5,9103$  см;  $c \approx 9,0935$  см. К центру звезды подходят ребра  $b$  и  $c$ .)

В дальнейшем мы будем считать, что в замкнутом многограннике все грани абсолютно твердые, а по ребрам соседние грани соединены шарнирно, подобно пластинам дверной петли. *Допускает ли хоть один такой замкнутый многогранник непрерывное изгибание?*

### 3. Немного истории

Еще в 1813 году известный французский математик Огюстен Коши доказал, что *выпуклый многогранник вообще не допускает изгибаний с сохранением выпуклости* (если не

считать изгибанием его зеркальное отражение \*). Пытаясь ответить на вопрос, может ли непрерывно изгибаться замкнутый невыпуклый многогранник, Р. Брикар в 1897 году построил примеры такого рода многогранников. Но это были многогранники с самопересечениями. Ниже мы опишем две конструкции Брикара.

Вопрос о существовании непрерывно изгибаемого замкнутого многогранника без самопересечений оставался открытым. Многие геометры предполагали, что такого многогранника не существует. Однако в 1977 году американский математик Р. Конелли \*\*\*) такой многогранник построил! Его построение опирается на результаты Брикара.

### 4. Первый октаэдр Брикара

Рассмотрим на плоскости  $P$  четырехзвенный механизм  $ABCD$  (рис. 3). Вершины  $A, C, B, D$ , в которых размещены шарниры, служат вершинами равнобочной трапеции. Четырехугольник  $ACBD$  подвижен: угол  $\alpha$  можно менять в некоторых пределах; при этом звенья  $AB$  и  $CD$  свободно скользят друг по другу. При изменении  $\alpha$  вершины четырехугольника продолжают составлять равнобочную трапецию. Поэтому вокруг четырехугольника  $ACBD$  в каждый момент можно описать окружность.

Зафиксируем теперь на плоскости  $P$  положение ребра  $AB$ . Тогда радиус  $R(\alpha)$  описанной окружности непрерывно зависит от  $\alpha$ . Центр окружности  $O(\alpha)$  также непрерывно зависит от  $\alpha$  (в том смысле, что малое изменение  $\alpha$  приводит к малому сдвигу точки  $O(\alpha)$ ).

Проведем через точку  $O(\alpha)$  перпендикуляр к плоскости и отложим на этом перпендикуляре вверх и вниз от плоскости  $P$  отрезки  $O(\alpha)M$

\*) Остроумное доказательство Коши изложено, например, в книге Адамара «Элементарная геометрия», том 2 (Учпедгиз, 1952).

\*\*) R. Connelly, A counterexample to the rigidity conjecture for polyhedra (Publ. Math., INEE, 1978, v. 47, с. 333—338).

и  $O(\alpha)M'$  длины  $h(\alpha) = \sqrt{L^2 - R^2(\alpha)}$ , где  $L$  — некоторая постоянная. На каждом из звеньев  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$ , как на основании, построим по два треугольника: с вершиной  $M$  и с вершиной  $M'$ . Все боковые стороны этих треугольников имеют длину  $L$  (независимо от  $\alpha$ !). Эти восемь треугольников составляют *первый самопересекающийся октаэдр Брикара* (рис. 4). С изменением  $\alpha$  он непрерывно изгибается.

К сожалению, даже если мы сумеем изготовить шарнирный механизм  $ABCD$ , построить из бумаги действующую модель первого октаэдра Брикара нам не удастся: смоделировать переменное пересечение треугольников ( $AMB$  и  $DMC$ ,  $AM'B$  и  $DM'C$ ) листами бумаги нельзя! Однако, если эти треугольники построить, натянув на их боковые стороны горизонтальную сеть нитей, то на полученной модели будет видно, как треугольники непрерывно проскальзывают друг сквозь друга (рис. 4).

## 5. Зарубка Конелли

Рассмотрим двугранный угол  $QIQ'$ , состоящий из прямолинейного ребра  $I$  и полуплоскостей  $Q$  и  $Q'$  (рис. 5). Его биссекториальную плоскость обозначим через  $P$ . Построим первый октаэдр Брикара так, чтобы звено  $AB$  лежало на прямой  $I$ , четырехугольник  $ACBD$  — в плоскости  $P$ , а треугольники  $AMB$ ,  $AM'B$  — в полуплоскостях  $Q$  и  $Q'$ . После этого удалим из ребра  $I$  участок  $AB$ , а из граней  $Q$  и  $Q'$  — треугольники  $AMB$  и  $AM'B$ . Эти же два треугольника удалим и из октаэдра Брикара. Останется фигура, изображенная на рисунке 5. Будем говорить, что на ребре двугранного угла сделана *зарубка Конелли*.

Многогранник с краем, изображенный на рисунке 5, допускает непрерывное изгибание: с изменением  $\alpha$  изгибается октаэдр Брикара и, одновременно с этим, непрерывно меняется расстояние  $MM'$ , а также (в некоторых пределах) изменяется величина двугранного угла  $QIQ'$ .

В отличие от первого октаэдра Брикара, изготовить действующую

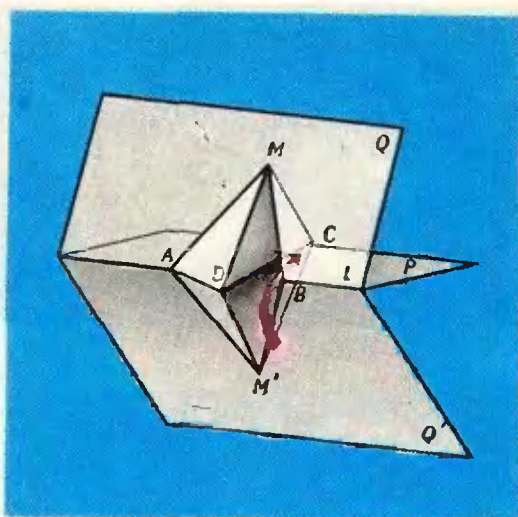


Рис. 5.

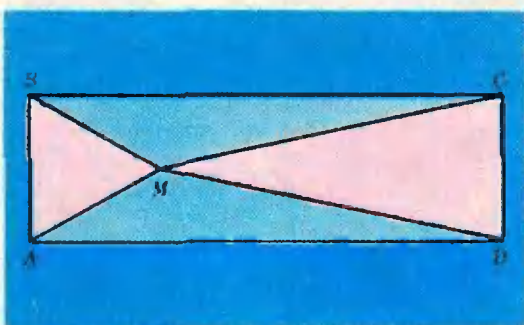


Рис. 6.

модель зарубки Конелли из плотной чертежной бумаги (или тонкого картона) совсем несложно. Для этого из листа бумаги следует вырезать ромб  $ABM'$  и заменить его тремя изогнутыми четырехугольниками ( $AMDM'$ ,  $DMCM'$ ,  $СМВМ'$ ) так, как показано на рисунке 5. При сгибании и разгибании двугранного угла «клюв» зарубки Конелли причудливо высовывается и втягивается.

## 6. Второй октаэдр Брикара

Рассмотрим вытянутый прямоугольник  $ABCD$ . Внутри него отметим точку  $M$  и соединим ее с вершинами  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ . Точку  $M$  выберем для определенности так, чтобы треугольник  $ABM$  был равносторонним (рис. 6). Разрежем полученную фигуру по линии  $BMD$ . Часть  $ABMD$  переломим по ребру  $AM$  и будем изменять двугранный угол  $\alpha$  при ребре  $AM$  в пределах, скажем,  $179^\circ \leq$

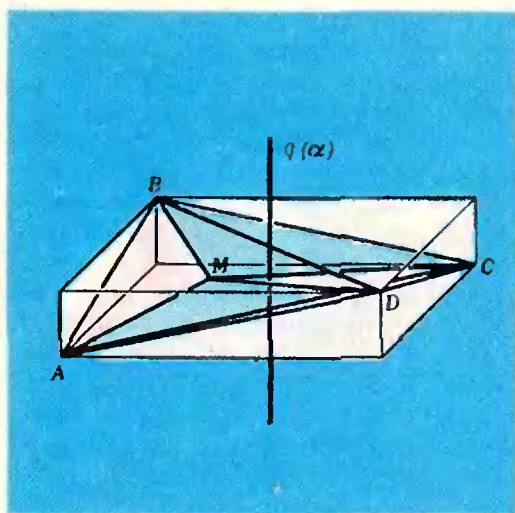


Рис. 7.

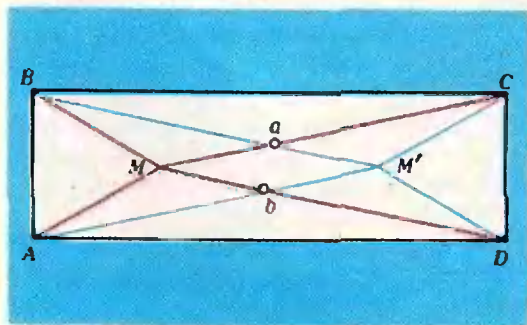


Рис. 8.

$\leq \alpha \leq 180^\circ$ . Часть  $CDMB$  соответственно переломим по ребру  $MC$ , при котором образуем угол  $\beta(\alpha)$ , выбираемый для каждого  $\alpha$  так, чтобы угол между отрезками  $BM$  и  $MD$  в обеих частях оказывался одинаковым. После этого приложим эти две части друг к другу по линии  $BMD$ .

Зафиксируем положение одной грани (например, грани  $ABM$ ) в пространстве. Тогда изменению  $\alpha$  в пределах  $179^\circ \leq \alpha \leq 180^\circ$  соответствует непрерывное изгибание четырехгранного многогранника с краем. Если считать, что в ходе этого изгибания двугранные углы при ребрах  $AM$ ,  $MC$  направлены ребром вниз, то хотя бы один из углов при ребрах  $AM$ ,  $MD$  будет направлен ребром вверх (рис. 7). При  $\alpha = 180^\circ$  все эти углы распрямляются, и мы приходим к плоскому положению четырехгранника, показанному на рисунке 8.

При каждом  $179^\circ \leq \alpha < 180^\circ$  край  $ABCD$  четырехгранника представляет собой замкнутый пространственный четырехугольник (не лежащий в одной плоскости), противоположные стороны которого попарно конгруэнтны. Докажите, что у такого четырехугольника прямая  $q(\alpha)$ , проходящая через середины диагоналей  $AC$  и  $BD$ , является общим перпендикуляром для этих не пересекающихся диагоналей (рис. 7).

Рассмотрим теперь при каждом  $\alpha$  точку  $M'$ , симметричную точке  $M$  относительно прямой  $q(\alpha)$ . Четырехгранник, составленный из треугольников с основаниями  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$ ,  $DA$  и вершиной  $M'$ , симметричен ранее рассмотренному относительно прямой  $q(\alpha)$ . Поэтому с изменением  $\alpha$  он тоже будет непрерывно изгибаться. При  $\alpha = 180^\circ$  он перейдет в плоский четырехугольник, ребра которого обозначены на рисунке 8 синими линиями.

Восьмигранник, составленный из двух указанных четырехгранников, представляет собой *второй самопересекающийся октаэдр Брикара*. Он также допускает непрерывное изгибание.

## 7. Многогранник Конелли

Рассмотрим второй октаэдр Брикара в том его положении, когда  $\alpha = 180^\circ$  и он выродился в дважды покрытый прямоугольник. Заменим каждую из его восьми треугольных

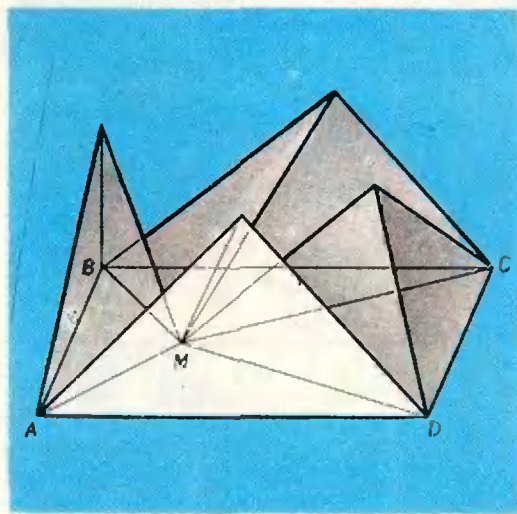


Рис. 9.

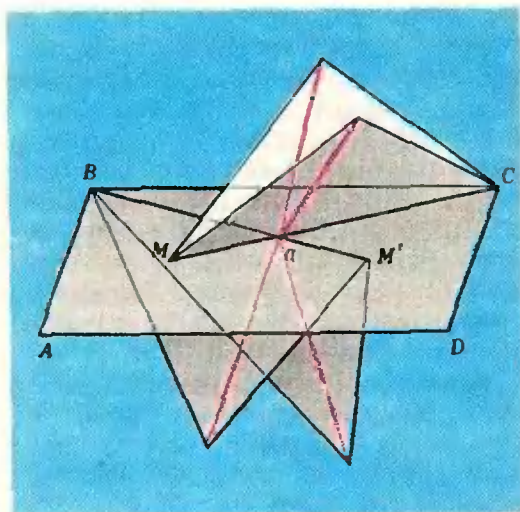


Рис. 10.

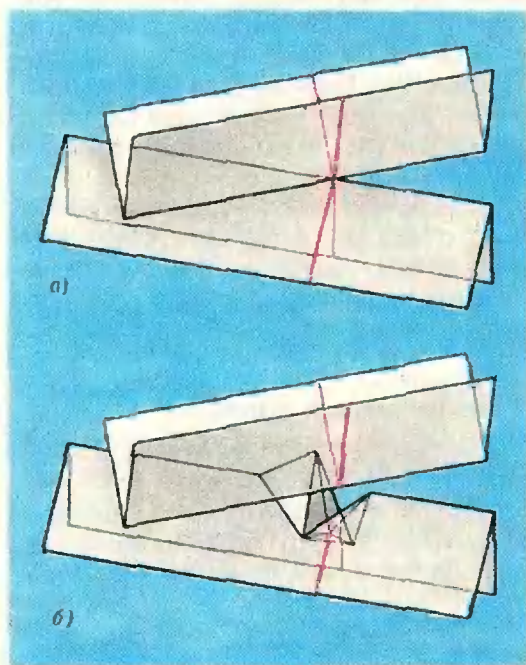


Рис. 11

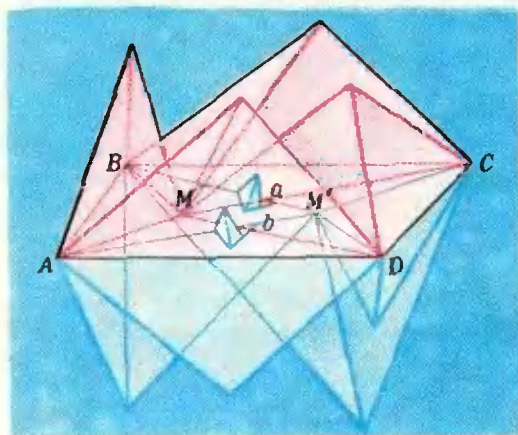


Рис. 12.

«граней» боковой поверхностью треугольной пирамиды, поставленной на эту грань. При этом пирамиды, основаниями которых служат треугольники с вершиной  $M$ , поместим над плоскостью  $ABCD$  (рис. 9), а пирамиды с треугольными основаниями, имеющими вершину  $M'$ , — под этой плоскостью.

Полученный многогранник (составленный боковыми поверхностями всех восьми пирамид) уже «почти» не имеет самопересечений: его части, расположенные над и под плоскостью  $ABCD$ , соприкасаются (кроме контура  $ABCD$ ) всего в двух «лишних» точках (точки  $a$  и  $b$  на рисунке 8). На рисунке 10 изображено это соприкосновение вблизи точки  $a$  (оно имеет вид внешнего одностороннего соприкосновения ребер двух двугранных углов).

Устраним теперь самоприкосновение многогранника в точке  $a$ , сделав на ребре  $BM'$  зарубку Конелли. Аналогично вблизи точки  $b$  сделаем зарубку на ребре  $DM'$ .

Многогранник Конелли готов: он, очевидно, допускает непрерывное изгибание! Его общий вид показан на рисунке 12; его можно изготовить из чертежной бумаги.

У критически настроенного читателя могут возникнуть сомнения в том, что с помощью зарубки Конелли действительно можно устранить соприкосновения в точках  $a$  и  $b$ ; это, однако, будет очевидно тем, кто изготовит модель зарубки Конелли или внимательно изучит рисунок 11. Дотошный читатель сумеет дать и строгое доказательство этого факта.

В заключение отметим, что в процессе изгибания объем многогранника Конелли не меняется (он сможет изгибаться, даже если его наполнить несжимаемой жидкостью!). Попробуйте это доказать самостоятельно.

\* \* \*

Пока эта заметка готовилась к печати, геометр из Харькова А. Д. Милка прислал нам сделанную им и его товарищами модель многогранника Конелли. При изготовлении модели харьковчане пользовались следующими дополнительными «конструкторскими» соображениями.

1) Положение точки  $M$  в прямоугольнике  $ABCD$  (рис. 6) произволь-

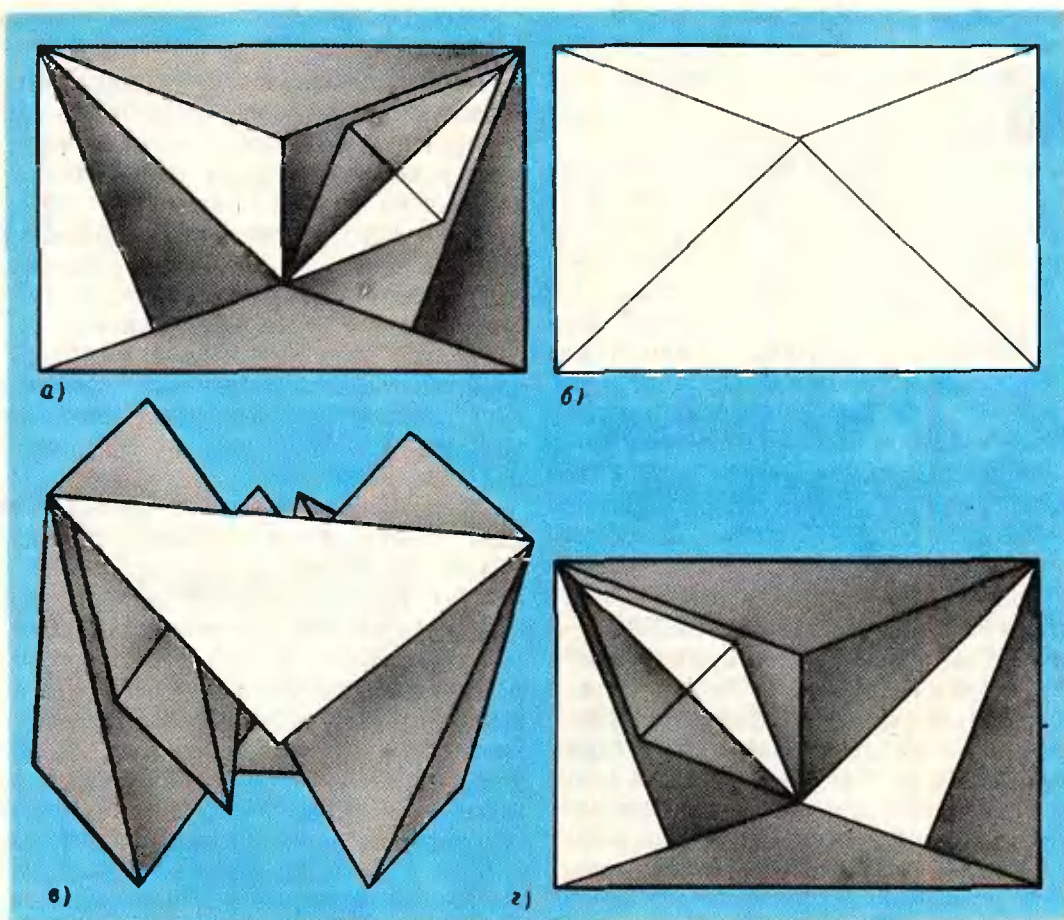


Рис. 13.

но. Важно только, чтобы она не была в центре прямоугольника. Точку  $M$  они расположили, как показано на рисунке 13, б). Поэтому ребра двугранных углов встречаются в точках  $a$  и  $b$  (рис. 11) почти под прямым углом, что облегчает вхождение в зарубку. Кроме того, выбор точки  $M$  позволил не строить пирамиды над гранями  $AMD$  и  $BM'D$ , что уменьшило общее число граней многоугольника.

2) Пирамиды над треугольниками  $AMB$ ,  $BMC$ ,  $CMD$  авторы из эстети-

ческих соображений сделали одинаковой высоты, чуть большей, чем половина стороны  $DC$ . Прилегающая к ребру  $DC$  треугольная грань для удобства построения сделана равнобедренной (равные ребра сходятся в вершине  $C$ ).

3) Зарубки Конелли размещены на ребрах  $MC$  и  $AM'$ ; зарубки довольно большие и сильно сплюснутые. На рисунке 13, а), в), з) показан вид модели «сверху», «сбоку» и «снизу» — модель поворачивается вокруг оси симметрии прямоугольника  $ABCD$ .

П о п р а в к а. В «Кванте», 1978, № 7 в условии задачи М511 допущена опечатка. Последнюю строчку условия следует читать так: Докажите, что если  $\widehat{CBM} = \widehat{CDM}$ , то  $\widehat{ACD} = \widehat{BCM}$ .

Срок присылки решения этой задачи продлевается до 1 ноября.



В: Майер

## Реакция вытекающей и втекающей струй

Представьте себе, что на плоту находится сосуд с поршнем, заполненный водой, причем из бака выведена за борт труба (рис. 1). Если поршень опустить, из трубы выйдет струя воды, и плот, очевидно, начнет двигаться в направлении, противоположном направлению движения воды в струе. А что произойдет, если поднять поршень так, чтобы струя воды вошла в сосуд?

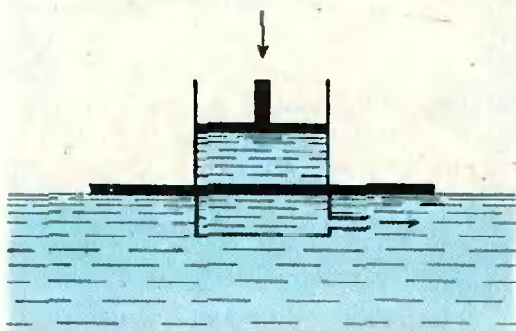


Рис. 1.

В порядке физико-психологического эксперимента этот вопрос задавался школьникам, учителям физики, преподавателям вузов. В большинстве случаев отвечающие были единодушны и говорили, что, конечно, плот начнет двигаться навстречу входящей по трубе в сосуд струе жидкости. Правильно ли это?

Чтобы вы почувствовали нетривиальность поставленного вопроса, заметим, что в конце прошлого века он привлек внимание выдающегося

русского ученого Н. Е. Жуковского. Более того, Жуковский отнюдь не сразу решил проблему: вначале он приблизительно показал, что реакция вытекающей в сосуд жидкости очень мала, и лишь затем строго доказал, что она равна нулю! Разработанная Жуковским теория не проста, и нет смысла здесь ее рассматривать.

Можно придумать немало красивых опытов, позволяющих наблюдать реакцию вытекающей и втекающей струй. Некоторые из них описал еще Жуковский.

«Опыты подтверждают найденный нами результат о незначительности обратной реакции. Мы устраивали сосуды (рис. 2 и 3), которые поддерживались на воде с помощью пробковых поплавков и сообщались гуттаперчевыми трубками с небольшим воздушным насосом. Вдувая и вытягивая воздух, мы заставляли вытекать воду из сосуда или вбегать в него. При этом обнаружилось, что сосуд остается неподвижным, как бы сильно в него ни втягивали воду, и сейчас же приходит в движение, как скоро вода выталкивается. Таким об-

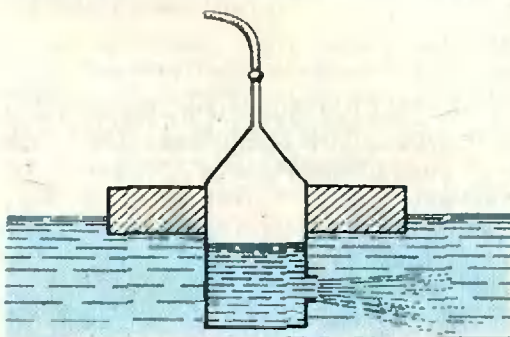


Рис. 2.

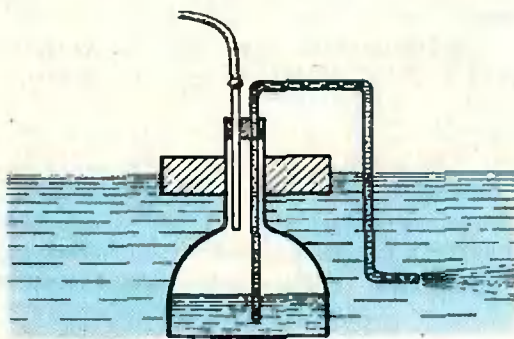


Рис. 3.

разом, совершая последовательное втягивание и выталкивание воды, можно получить быстрое движение сосуда в сторону, обратную выталкиванию воды.

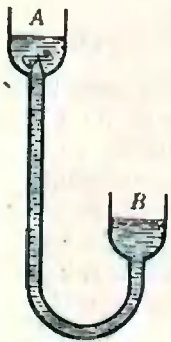


Рис. 4.



Рис. 5.

Слабость обратной реакции подтверждается также на опыте с сегнеровым колесом. Два сосуда (рис. 4) *A* и *B* соединены гуттаперчевой трубкой. В дне сосуда *A* установлено маленькое сегнерово колесо, через которое трубка сообщается с сосудом *B*. В оба сосуда налито некоторое количество воды. Если поставить сосуд *B* выше сосуда *A*, то вода начнет переливаться из *B* в *A*, и сегнерово колесо придет во вращательное движение; но если сосуд *B* поставить

значительно ниже сосуда *A*, то вода будет переливаться из *A* в *B*, а сегнерово колесо будет оставаться неподвижным\*)).

Опыт с сегнеровым колесом можно провести самостоятельно с помощью прибора, изображенного на рисунке 5. В шарике для пинг-понга аккуратно просверлите три отверстия диаметром 4—5 мм так, чтобы их центры совпадали с концами двух взаимно перпендикулярных диаметров шарика. В два отверстия, лежащие на одной линии, вставьте изогнутые над горячей плиткой полихлорвиниловые трубочки (они часто используются для изоляции проводов). В третье отверстие введите металлический стержень от шариковой авторучки, в верхней части которого (находящейся внутри шарика) сделано несколько отверстий. Чтобы шарик для пинг-понга устойчиво держался на конце стержня, в шарике изнутри тупым шилом нужно сделать небольшое углубление. На нижний конец стержня наденьте резиновую грушу.

При нажатии на грушу из изогнутых трубок сегнерово колеса выходит воздух, и колесо начинает вращаться. При втягивании воздуха грушей сегнерово колесо остается неподвижным. Периодически нажимая и отпуская грушу, можно заставить вращаться сегнерово колесо с довольно большой скоростью.

Подумайте, какие еще опыты, в которых проявляются реакции втекающей и вытекающей струй, можно было бы поставить.

\*) Н. Е. Жуковский. Собрание сочинений. Том 3. М.—Л., Гостехиздат, 1949.

## Еще одна демонстрация невесомости

В четвертом номере нашего журнала была помещена статья А. Дозорова «Демонстрация невесомости», в которой описывался несложный прибор, позволяющий наглядно убедиться в отсутствии веса у свободно падающих тел. После этой

публикации редакция получила письмо, в котором читатель Ю. Смирнов из Тулы пишет, что «продемонстрировать невесомость гораздо легче и проще, если использовать полиэтиленовый мешочек с небольшой дыркой, наполненный водой».

Вот какие несложные наблюдения предлагает Ю. Смирнов. Когда мешочек удерживается неподвижно на весу, из дырки вытекает струя воды. Если, удерживая наполненный водой ме-

шочек за края, поднимать его ускоренно, струя становится более сильной. Если опускать мешочек, опять же удерживая его за края, струя воды ослабевает. Если же отпустить мешочек, предоставив ему возможность падать свободно, вода через дырку не вытекает.

Эти несложные опыты демонстрируют не только невесомость, но и возникновение перегрузок («положительных» и «отрицательных»).

В. Вавилов.

## Сетчатые номограммы

На этом занятии вам будет предложено несколько заданий. Экспериментальная часть (выполнение чертежей) доступна всем, а обоснование требует знания производной. Наш совет — начните с чертежной работы, а потом займитесь доказательствами.

Отметим, что номограммы, изображенные на рисунках, не могут быть достаточно эффективно использованы на практике (из-за полиграфических трудностей они слишком мелки и не точны).

*Математики, как французы: все, что вы им говорите, они переводят на свой язык, и это тотчас же становится чем-то совершенно иным.*

И. В. Гётте

### 1. Квадратные трехчлены и фазовая плоскость

Рассмотрим семейство квадратных трехчленов  $\{x^2 + px + q\}$  ( $p$  и  $q$  — действительные числа). На некоторой плоскости  $\pi$  — назовем ее *фазовой* — поставим в соответствие квадратному трехчлену  $x^2 + px + q$  точку с координатами  $p$  и  $q$ . Например, трехчлену  $x^2 + x + 1$  соответствует точка  $(1; 1)$ , а точка  $(0; 0)$  соответствует трехчлену  $x^2$ .

Выясним, какие точки фазовой плоскости соответствуют трехчленам, имеющим совпадающие корни. Для этого приравняем дискриминант трехчлена к нулю; получим равенство

$$q = \frac{1}{4} p^2. \quad (1)$$

Равенство (1) определяет в плоскости  $\pi$  так называемую *дискриминант-*

*ную параболу* (рис. 1); эта парабола состоит из точек, соответствующих трехчленам вида  $(x - x_0)^2 = x^2 - 2x_0x + x_0^2$ .

Неравенство  $q > \frac{1}{4} p^2$  задает в

плоскости  $\pi$  область, лежащую «внутри» параболы (синяя область на рисунке 1). Точки этой области соответствуют трехчленам, не имеющим действительных корней. Квадратным трехчленам, имеющим два различных действительных корня, соответствуют точки, координаты которых удовлетворяют соотношению  $q < \frac{1}{4} p^2$ . Это — розовая область на рисунке 1.

Рассмотрим на плоскости  $\pi$  прямую

$$ap + q + a^2 = 0 \quad (2)$$

(здесь  $p, q$  — переменные,  $a$  — фиксированное число). Легко сообразить, что точки, лежащие на прямой (2), соответствуют трехчленам, имеющим корень  $a$ . Прямая (2) называется *корневой прямой*. (Разумеется, корневых прямых много — каждому потенциальному корню  $a$  отвечает своя прямая.)

Как расположена корневая прямая по отношению к дискриминантной параболе? Ясно, что они касаются друг друга. Действительно, корневая прямая не пересекается с синей областью и имеет одну общую точку с границей этой области, а именно точку, соответствующую трехчлену  $(x - a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$ . Этот вывод легко проверить непосредственным решением системы

$$\begin{cases} q = \frac{1}{4} p^2, \\ ap + q + a^2 = 0. \end{cases}$$

Поскольку точка  $(-2a; a^2)$  принадлежит и прямой (2), и параболе (1), прямая (2) и парабола (1) касаются друг друга в этой точке.

Проведя рассуждение в обратном порядке, можно доказать, что *всякая прямая, касающаяся дискриминантной параболы, является корневой прямой* (докажите сами!).

Итак, через каждую точку дискриминантной параболы проходит



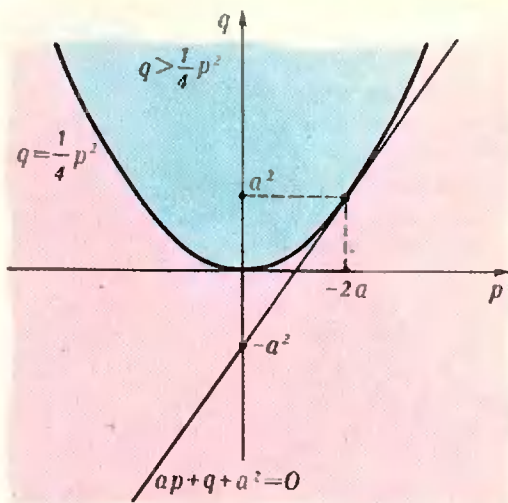


Рис. 1.

ровно одна корневая прямая (касательная к параболе). Через точки синей области не проходит ни одной корневой прямой. Это согласуется с тем, что из «внутренности» параболы нельзя провести к ней ни одной касательной. Наконец, поскольку каждой точке, лежащей в розовой области, соответствует уравнение, которое имеет два различных действительных корня, через каждую такую точку можно провести две различные корневые прямые. Это также согласуется с тем, что через точку, лежащую во «внешности» параболы, можно провести к ней ровно две касательные.

Взаимно-однозначное соответствие между точками плоскости  $\pi$  и квадратными уравнениями позволяет наглядно описать все уравнения с заданными свойствами корней, указав соответствующие множества точек фазовой плоскости.

Для примера опишем все такие точки плоскости  $\pi$ , которые соответствуют квадратным уравнениям  $x^2 + px + q = 0$  с двумя различными корнями, принадлежащими интервалу  $] -2; 1[$ .

Легко сообразить, что квадратное уравнение  $x^2 + px + q = 0$  тогда и только тогда имеет различные действительные корни, принадлежащие заданному интервалу, когда трехчлен  $x^2 + px + q$  имеет положительный дискриминант, на концах интервала принимает положительные значения и абсцисса вершины

параболы  $y = x^2 + px + q$  принадлежит заданному интервалу.

Для интересующего нас интервала  $] -2; 1[$  таким образом получается система:

$$\begin{cases} q < \frac{1}{4} p^2, \\ 4 - 2p + q > 0, \\ 1 + p + q > 0, \\ -2 < -\frac{p}{2} < 1. \end{cases} \quad (3)$$

На плоскости  $\pi$  система (3) задает множество точек, закрашенное на рисунке 2 розовым цветом. Таким образом, квадратным трехчленам, имеющим различные действительные корни, принадлежащие интервалу  $] -2; 1[$ , соответствуют внутренние точки этого криволинейного треугольника.

Корневые прямые  $-2p + q + 4 = 0$  и  $p + q + 1 = 0$  (отвечающие корням  $-2$  и  $1$ ) делят внешность дискриминантной параболы на шесть областей:  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma$  и  $\delta$  (рис. 2). Число корней уравнения  $x^2 + px + q = 0$ , попадающих в интервал  $] -2; 1[$ , зависит от того, в какой из перечисленных областей плоскости  $\pi$  находится соответствующая этому уравнению точка  $(p; q)$ . Эта зависимость отражена в таблице, приведенной на рисунке 2 (проверьте!).

### Задание 1

1. а) Найдите множество всех таких точек  $(p; q) \in \pi$ , для которых уравнение  $x^2 + px + q = 0$  имеет два действительных корня  $x_1, x_2$ , причем  $a < x_1 < b, c < x_2 < d$  и  $a < b \leq c < d$ .

б) Составьте таблицу, при помощи которой по положению точки  $(p; q)$  на плоскости  $\pi$  можно было бы ответить на вопрос, сколько корней уравнения  $x^2 + px + q = 0$  попадает в интервалы  $]a, b[$  и  $]c, d[$  (для заданных  $a, b, c$  и  $d$ ).

Рассмотрите, например, случай, когда  $a = -3, b = 0, c = 1, d = 3$ .

Следующая задача — для самостоятельного исследования.

2. Рассмотрим на отрезке  $[0; \pi]$  семейство функций  $\{\cos^2 x + p \cos x + q\}$ . Как и раньше, каждой функции

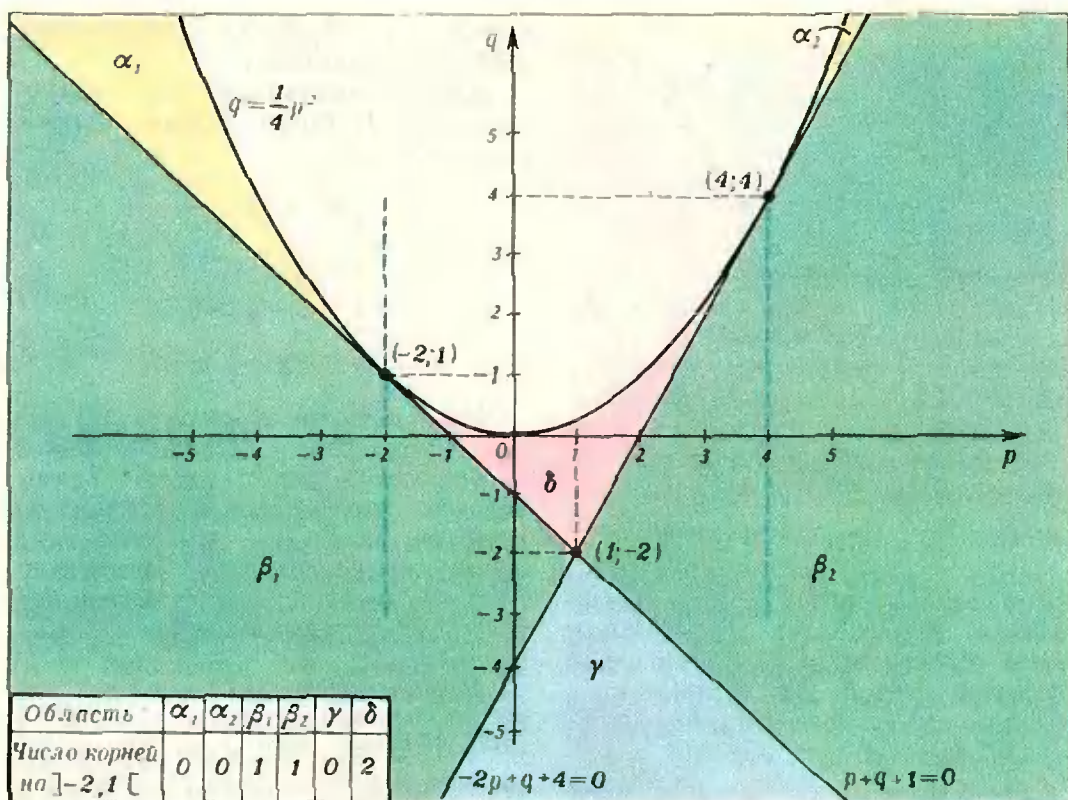


Рис. 2.

этого семейства поставим в соответствие точку  $(p; q) \in \pi$ .

а) Исследуйте функцию  $\cos^2 x + p \cos x + q$  на возрастание и убывание в зависимости от положения точки  $(p; q)$  на плоскости  $\pi$ .

б) Пусть  $M_0 = (p_0; q_0)$  — фиксированная точка плоскости  $\pi$ ,  $M = (p; q)$  — переменная точка;  $f_0(x) = \cos^2 x + p_0 \cos x + q_0$ ,  $f(x) = \cos^2 x + p \cos x + q$ . Для заданных точек  $M$  и  $M_0$  положим

$$d(M, M_0) = \max_{\{0; \pi\}} |f(x) - f_0(x)|.$$

— Найдите множество точек  $M = (p; q) \in \pi$  таких, что

- 1)  $d(M, M_0) = 1$ ;
- 2)  $d(M, (2; 2)) = d(M, (-2; -2))$ .

## 2. Номограмма для решения уравнений $x^2 + px + q = 0$

Проведем на фазовой плоскости  $\pi$  достаточно много корневых прямых  $ax + p + q + a^2 = 0$ , придавая параметру  $a$ , например, значения  $0; \pm 0,5; \pm 1; \pm 1,5; \pm 2; \pm 2,5; \pm 3; \pm 3,5$ .

Возле каждой проведенной прямой напишем соответствующее значение  $a$  (рис. 3). Получившаяся «сеть» из прямых называется сетчатой номограммой (для решения квадратных уравнений).

Чтобы при помощи построенной номограммы найти корни данного уравнения  $x^2 + px + q = 0$ , нужно установить, какие корневые прямые проходят через соответствующую ему точку  $(p; q) \in \pi$ .

Решим, например, уравнение  $x^2 + 0,5x - 3 = 0$ . Через точку  $(0,5; -3)$  проходят корневые прямые с пометками  $a = -2$  и  $a = 1,5$ ; следовательно, числа  $-2$  и  $1,5$  являются корнями нашего уравнения.

Рассмотрим теперь уравнение  $x^2 + x - 3 = 0$ . Ему на фазовой плоскости соответствует точка  $(1; -3)$ . Корневые прямые, проходящие через эту точку, на нашей номограмме не нанесены. В этом случае поступим так. Заметим, что точка  $(1; -3)$  лежит внутри четырехугольника  $ABCD$ , образованного корневыми прямыми при  $a = -2,5$ ;  $a = -2$ ;  $a = 1$  и  $a = 1,5$  (рис. 3).

Точкам этого четырехугольника соответствуют уравнения с двумя действительными корнями, один из которых попадает в интервал  $]1; 1,5[$ , а другой — в интервал  $] -2,5; -2[$ . Следовательно, корни уравнения  $x^2 + px - 3 = 0$  также лежат в указанных интервалах. Взяв их середины, мы получим приближенные значения искомых корней:

$$x_1 \approx \frac{1,5 + 1}{2} = 1,25,$$

$$x_2 \approx \frac{-2 - 2,5}{2} = -2,25.$$

Подставив эти значения  $x_1$  и  $x_2$  в данное уравнение, получим:

$$(1,25)^2 + 1,25 - 3 = -0,1875,$$

$$(-2,25)^2 - 2,25 - 3 = -0,1875$$

— результат довольно грубый. Чтобы с помощью номограммы получить более точные значения корней, нужно, очевидно, увеличить на ней число корневых прямых, т. е. увеличить частоту изменения параметра  $a$ .

Для приближенного решения уравнений с совпадающими корнями удоб-

но проградировать дискриминантную параболу  $q = \frac{1}{4} p^2$ . Уравнению с корнями  $x_1 = x_2 = a$  соответствует на ней точка  $(-2a; a^2)$ . Придавая параметру  $a$  различные значения и помечая этими значениями точки  $(-2a; a^2)$  дискриминантной параболы, получаем на ней шкалу для решения уравнений с совпадающими корнями (рис. 3).

### Задание 2

Начертите на миллиметровой бумаге сетчатую номограмму для решения уравнений  $x^2 + px + q = 0$ .

### 3. Номограмма для решения уравнений $x^3 + px + q = 0$

Рассмотрим теперь семейство кубических трехчленов  $\{x^3 + px + q\}$ . Каждому трехчлену поставим в соответствие на фазовой плоскости  $\pi$  точку  $(p; q)$ .

Выясним, какие точки фазовой плоскости соответствуют кубическим трехчленам, имеющим совпадающие корни.

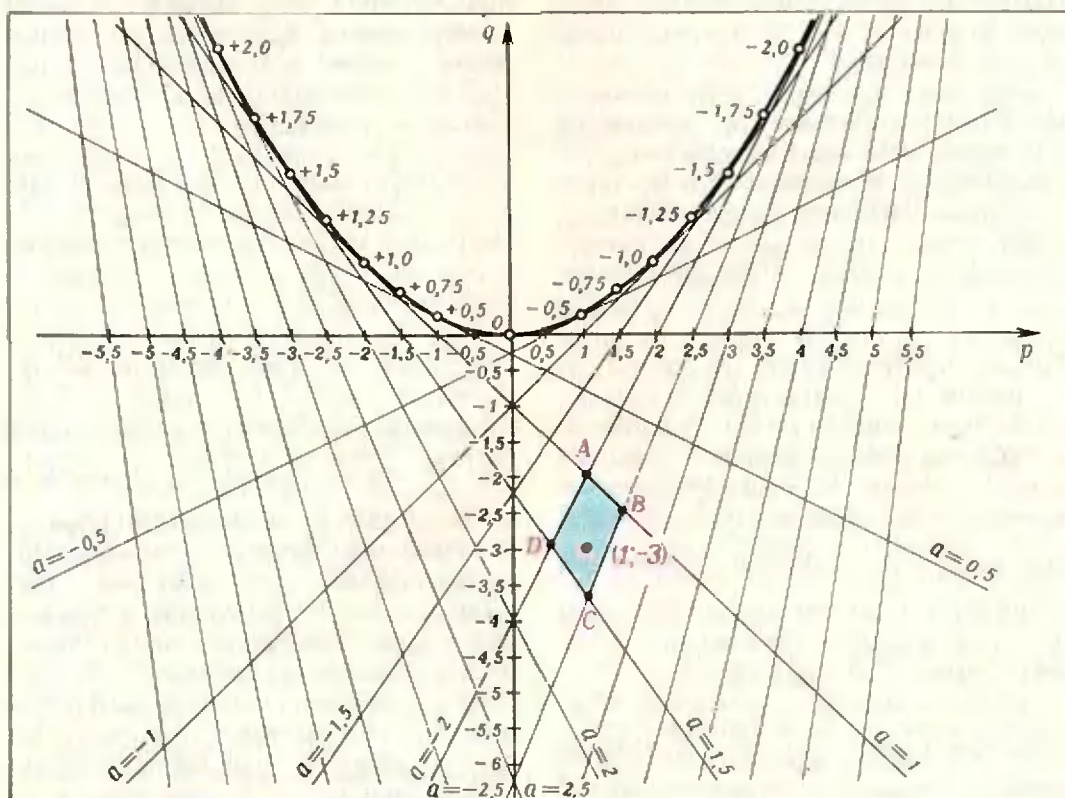


Рис. 3.

Пусть  $a$  — кратный корень кубического трехчлена  $x^3+px+q$ , т. е.  $x^3+px+q=(x-a)^2(x-b)$ , где  $b$  не обязательно отлично от  $a$ . Раскрыв скобки, получим тождество

$$x^3 + px + q = x^3 - (2a + b)x^2 + (a^2 + 2ab)x - a^2b.$$

Отсюда  $2a+b=0, a^2+2ab=p, a^2b=-q$ . Исключив из этих уравнений  $b$ , получим  $p=-3a^2, q=2a^3$ ; наконец, исключив  $a$ , получим искомое соотношение

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0, \quad (4)$$

являющееся необходимым и достаточным условием для совпадения по крайней мере двух корней трехчлена  $x^3+px+q$ . Множество точек  $(p; q) \in \pi$ , координаты которых удовлетворяют уравнению (4), это кривая, изображенная на рисунке 4. Кривая (4) называется *дискриминантной кривой уравнения  $x^3+px+q=0$* .

Прямая

$$ap + q + a^3 = 0, \quad (5)$$

соответствующая трехчленам, имеющим корень  $a$ , как и раньше, называется *корневой*.

Каково взаимное расположение кривой (4) и прямой (5) на фазовой плоскости  $\pi$ ? Имеют ли они точки пересечения, и, если имеют, то сколько?

Чтобы ответить на эти вопросы, заметим, что, поскольку в уравнении  $x^3+px+q=0$  член с  $x^2$  отсутствует, сумма его корней  $x_1, x_2$  и  $x_3$  равна нулю:  $x_1+x_2+x_3=0$  (докажите это). Точке пересечения  $(p; q)$  кривой (4) с прямой (5) соответствует кубический трехчлен  $x^3+px+q$ , у которого  $a$  либо кратный корень, либо нет. В первом случае  $x_1=x_2=a$  и  $x_3=-2a$ . Во втором случае  $x_1=a$  и  $x_2=x_3=-\frac{a}{2}$ . Значит, кривая (4) и прямая (5) имеют две общие точки  $(p_1; q_1)$  и  $(p_2; q_2)$ : одна из них отвечает трехчлену  $x^3+p_1x+q_1=(x-a)^2 \times (x+2a)$ , другая — трехчлену  $x^3+p_2x+q_2=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2(x-a)$ . Эти две точки совпадают в том и только в том случае, когда  $a=0$ .

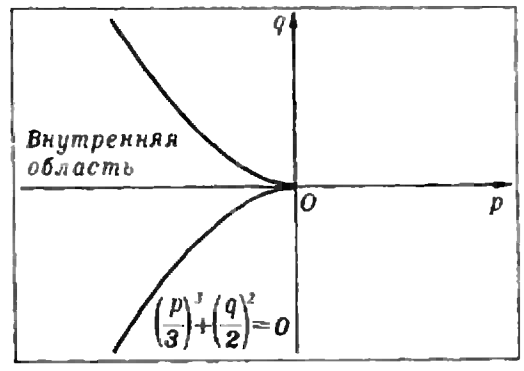


Рис. 4.

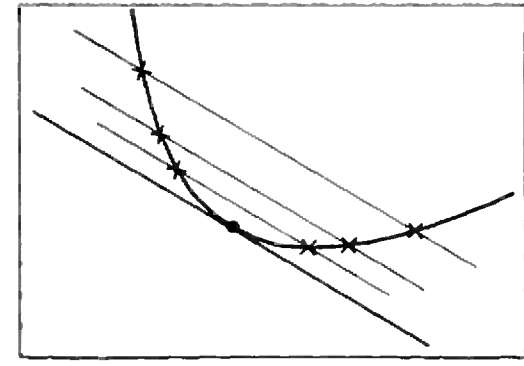


Рис. 5.

Найдем теперь точки пересечения прямой (5) и кривой (4) чисто алгебраически. Для этого из (5) выразим  $q$  через  $p$  и подставим в (4). Мы получили для определения  $p$  кубическое уравнение

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{a^3+pa}{2}\right)^2 = 0. \quad (6)$$

Нетрудно убедиться в том, что

$$\begin{aligned} \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{a^3+pa}{2}\right)^2 &= \\ &= \frac{1}{27} (p+3a^2)^2 \left(p+\frac{3a^2}{4}\right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что числа  $p_1 = -3a^2$  и  $p_2 = -\frac{3a^2}{4}$  — корни уравнения (6), причем  $p_1$  — кратный корень.

Кратному корню уравнения (6) соответствуют «совпадающие» точки пересечения кривой (4) и прямой (5). В этой «двойной» точке пересечения корневая прямая касается дискриминантной кривой (строгое доказательство этого утверждения мы здесь, к сожалению, привести не можем; интуитивная идея доказательства ясна из рисунка 5).

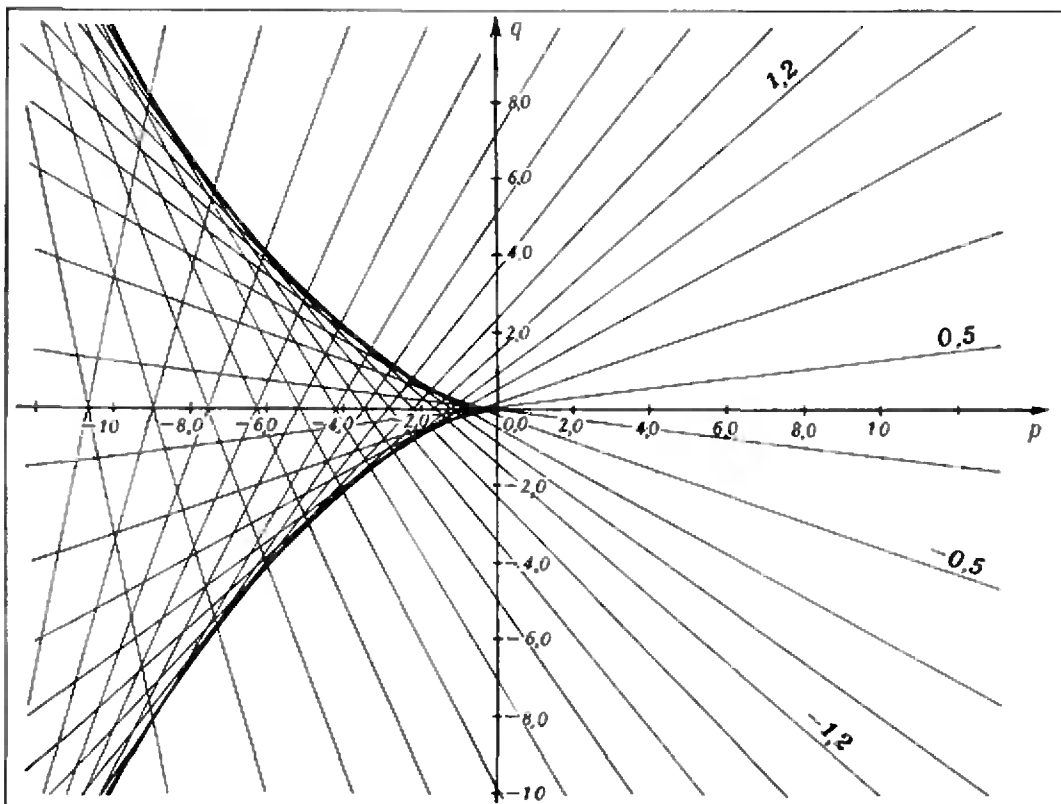


Рис. 6.

Проведя все рассуждения в обратном порядке, мы получим, что всякая касательная к дискриминантной кривой является корневой прямой.

Начертив на плоскости  $\pi$  достаточно много корневых прямых (5), мы получим сетчатую номограмму для решения кубических уравнений  $x^3 + px + q = 0$ . Такая номограмма изображена на рисунке 6.

Число корней конкретного уравнения  $x^3 + px + q = 0$  зависит от того, сколько касательных можно провести из точки  $(p; q) \in \pi$  к дискриминантной кривой (4) (каждая касательная является корневой прямой, а каждой корневой прямой отвечает свое значение корня).

Дискриминантная кривая делит плоскость  $\pi$  на две части: внутреннюю (содержащую отрицательную полуось изменения  $p$ ) и внешнюю.

Так как дискриминантная кривая состоит из двух симметричных выпуклых дуг\*), то через любую

\*) Дуга гладкой кривой называется выпуклой, если она лежит по одну сторону от касательной, проведенной в любой ее внутренней точке.

точку внешней области можно провести только одну касательную к ней (рис. 7, а): если точка  $(p; q)$  лежит выше оси  $Op$ , то к нижней дуге, а если ниже оси  $Op$ , то к верхней; сама ось  $Op$  касается кривой (4) в ее особой точке  $(0; 0)$ . Таким образом, точки внешней области соответствуют тем кубическим уравнениям, которые имеют только один (действительный) корень. В этой области

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 > 0. \quad (7)$$

Неравенство (7) является необходимым и достаточным условием того, что уравнение  $x^3 + px + q = 0$  имеет в точности один действительный корень.

В любой точке внутренней области выполняется противоположное неравенство

$$\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 < 0. \quad (8)$$

С другой стороны, из любой точки внутренней области можно провести три различные касательные к кривой (4) (рис. 7, б). Действительно, для

точек, расположенных на оси  $Op$ , это следует из симметричности кривой (рис. 7, в); число же касательных не может изменяться, если переходить к другим точкам, не пересекая при этом кривой. Таким образом, неравенство (8) является необходимым и достаточным условием того, что уравнение  $x^3+px+q=0$  имеет три различных действительных корня.

Если точка  $(p; q)$  лежит на верхней дуге кривой (4), то через нее можно провести касательную к кривой в самой этой точке и, кроме того, еще касательную к нижней дуге (рис. 7, г). Аналогично — для точек нижней дуги. Следовательно, в случае  $\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2 = 0$  ( $p \neq 0, q \neq 0$ ) уравнение  $x^3+px+q=0$  имеет один корень кратности 2 и один корень кратности 1.

Точка  $(0; 0)$  — исключительный случай; ей отвечает уравнение  $x^3=0$  с тремя совпадающими корнями.

### Задание 3

1. Начертите на миллиметровой бумаге сетчатую номограмму для решения уравнений  $x^3+px+q=0$ .

2. Найдите множество всех таких точек  $(p; q) \in \pi$ , для которых уравнение  $x^3+px+q=0$  имеет три различных действительных корня, принадлежащих заданному интервалу  $|a; b|$ . Составьте таблицу, при помощи которой по положению точки  $(p; q)$  на плоскости  $\pi$  можно было бы определить, сколько корней уравнения  $x^3+px+q=0$  попадает в заданный интервал  $|a; b|$ .

Рассмотрите, например, случай, когда  $a=-2, b=4$ .

В качестве задачи для самостоятельного исследования предлагаем построить (и обосновать) сетчатые номограммы для решения следующих уравнений четвертой степени:

а)  $x^4+px+q=0$ ,

б)  $x^4+x^2+px+q=0$ ,

в)  $x^4-x^2+px+q=0$ .

Сделать это вам помогут книги:

1. А. Н. Колмогоров и др. *Летняя школа на Рубском озере* (М., «Просвещение», 1971).

2. Ф. Клейн. *Элементарная математика с точки зрения высшей* (М. — Л., Гостехтеориздат, 1933).

### Приложение

(для читателей, знающих, что такое комплексные числа).

Здесь мы рассмотрим квадратные уравнения  $x^2+px+q=0$  с действительными  $p$  и  $q$  и отрицательным дискриминантом,

т. е. уравнения, для которых  $q \geq \frac{1}{4} p^2$

(этим уравнениям на фазовой плоскости  $\pi$  соответствует «внутренность» дискриминантной параболы). Такие уравнения имеют два сопряженных корня:  $a+bi$  и  $a-bi$ . По теореме Виета

$$\begin{cases} 2a = -p, \\ a^2 + b^2 = q. \end{cases} \quad (9)$$

откуда

$$q = \frac{p^2}{4} + b^2. \quad (10)$$

Найдем все точки  $(p; q) \in \pi$ , соответствующие уравнениям с комплексными корнями вида  $a+pi$  ( $n \in \mathbb{Z}$ ).

Из соотношения (10) следует, что уравнениям с корнями такого вида соответствуют точки плоскости  $\pi$ , лежащие на параболах

$$q = \frac{p^2}{4} + 1, \quad q = \frac{p^2}{4} + 4, \quad q = \frac{p^2}{4} + 9, \dots$$

(рис. 8); эти параболы получают парал-

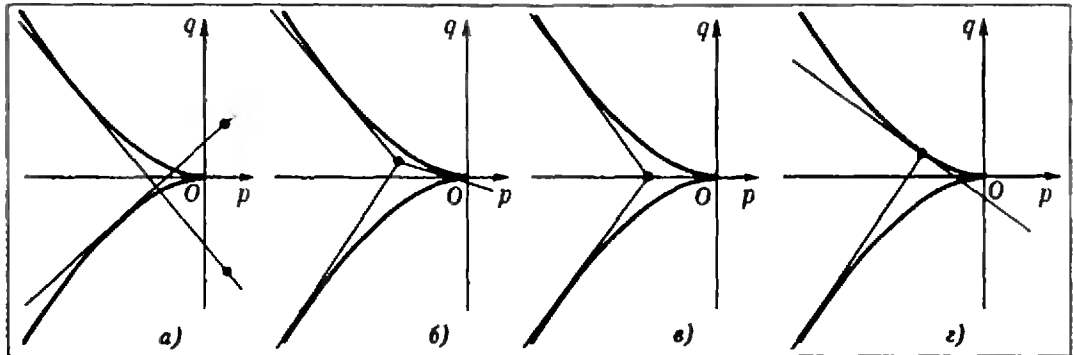


Рис. 7.

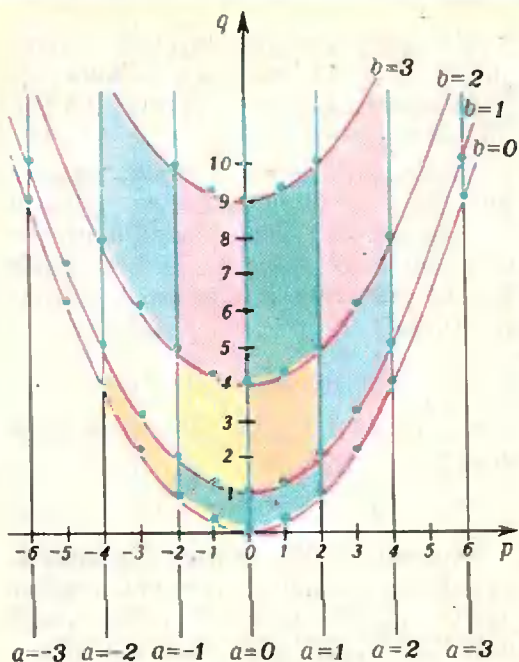


Рис. 8.

лельным переносом дискриминантной параболы.

Из (9) видно, что уравнениям с корнями вида  $n + bi$  ( $n$  — целое число) соответствуют на плоскости  $\pi$  точки лучей  $p = -2n$  с вершинами на дискриминантной параболе (рис. 8).

Поэтому уравнениям  $x^2 + px + q = 0$ , имеющим комплексный корень  $a + bi$ , удовлетворяющий, например, условиям:

$$1 < a < 2, \quad 1 < b < 2,$$

на плоскости  $\pi$  соответствуют точки  $(p; q)$ , координаты которых удовлетворяют системе неравенств:

$$\begin{cases} q > \frac{1}{4} p^2, \\ -4 < p < -2, \\ \frac{1}{4} p^2 + 1 < q < \frac{1}{4} p^2 + 4. \end{cases}$$

Таким образом, чтобы при помощи сетчатой номограммы, изображенной на рисунке 8, решить конкретное уравнение

$$x^2 + px + q = 0, \text{ у которого } q > \frac{1}{4} p^2,$$

надо посмотреть, между какими лучами и между какими параболами на плоскости  $\pi$  лежит точка  $(p; q)$ .

Заинтересовавшимся читателям мы предлагаем рассмотреть в плоскости  $\pi$  области комплексных корней для уравнений  $x^3 + px + q = 0$  и  $x^4 - x^2 + px + q = 0$ .

## Задачи наших читателей

- Доказать, что
  - $7^{4n} - 1$  делится на 1976;
  - $7^{n!} - 1$  делится на 1976 при  $n \geq 4$ .

С. Майзус  
(г. Запорожье)

- Существуют ли натуральные числа, куб которых оканчивается (в десятичной записи) цифрами 1976?

И. Гопенгауз  
(г. Москва)

- У некоторого целого числа подсчитали сумму цифр, у полученного числа вновь подсчитали сумму цифр и т. д. Всего эту операцию проделали 1978 раз. В результате получили число 1979. Может ли исходное число иметь 1978 различных делителей (включая само число, но не единицу)?

А. Альтшулер  
(г. Москва)

- Если записать число 1978 словами и подсчитать количество букв в такой записи (*тысяча девятьсот семьдесят восемь*), то получится число 30. Для него та же операция даст число 8 и так далее. Получится последовательность

1978, 30, 8, 6, 5, 4, 6, 5, 4, ...  
а) Доказать, что, чем бы ни начиналась подобная последовательность, она с некоторого номера начнет циклически повторяться.

- Найти все циклы, которые могут здесь возникнуть.

М. Штеренберг  
(г. Саратов)

И. Клумова

## Номограммы из выравненных точек

В статье В. Вавилова (с. 22) рассказывается о приближенном решении уравнений второй и третьей степени с помощью сетчатых номограмм. На с. 83 «Четырехзначных математических таблиц» В. М. Брадиса тоже изображена номограмма для приближенного решения уравнений  $x^2 + px + q = 0$  (таблица XXII). Однако это — не сетчатая номограмма, а так называемая номограмма из выравненных точек. Что это такое, как она получается и как пользоваться такой номограммой, объясняется в настоящей заметке.

Нарисуем две вертикальные параллельные прямые — ось  $p$  с началом отсчета  $A$  и ось  $q$  с началом отсчета  $B$  (рис. 1; на этом рисунке отрезок  $AB$  перпендикулярен осям  $p, q$ , но это вовсе не обязательно).

Возьмем произвольные числа  $\alpha, \beta$  и положительное число

$a$ . На оси  $p$  возьмем точку  $C$  с координатой  $-a^{\alpha-\beta}$ , на оси  $q$  — точку  $D$  с координатой  $-a^\alpha$ . Пусть  $[AD] \cap [BC] = E$ .

Проведем через  $E$  произвольную прямую, не параллельную осям  $p, q$ . Обозначим координату пересечения  $M$  этой прямой с осью  $p$  через  $p_0$ , пересечения  $N$  с осью  $q$  — через  $q_0$ . Тогда

$$a^\alpha + p_0 a^\beta + q_0 = 0, \quad (1)$$

т. е. число  $a$  является корнем уравнения

$$x^\alpha + p_0 x^\beta + q_0 = 0. \quad (2)$$

Прямая  $MN$  может пересекаться с осями  $p, q$  одним из трех способов:  $p_0 < 0, q_0 > 0$  (рис. 1);  $p_0 > 0, q_0 < 0$  (рис. 2);  $p_0 < 0, q_0 < 0$  (рис. 3). Докажем равенство (1) для случая, изображенного на рисунке 1 (остальные два случая рассматриваются аналогично).

Из подобия треугольников  $AEC$  и  $BED$  имеем  $\frac{|BD|}{|AC|} = \frac{|DE|}{|AE|}$ , откуда

$\frac{|DE|}{|AE|} = \frac{a^\alpha}{a^{\alpha-\beta}} = a^\beta$ . Далее из подобия треугольников  $AEM$  и  $NED$  следует  $\frac{|DN|}{|AM|} = \frac{|DE|}{|AE|}$ , то есть  $\frac{a^\alpha + q_0}{-p_0} = a^\beta$  (рис. 1), что и дает (1).

Зафиксируем произвольные  $\alpha, \beta$  и рассмотрим всевозможные урав-

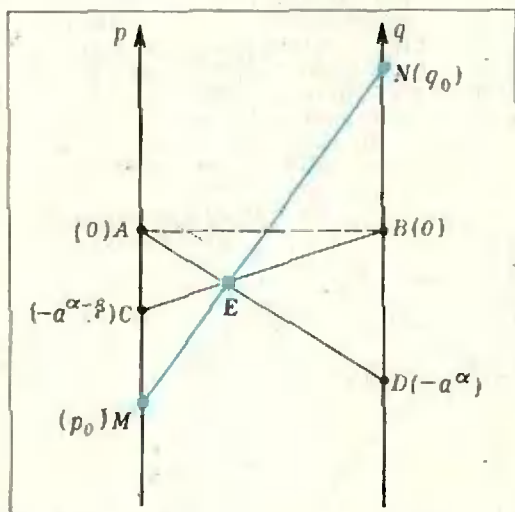


Рис. 1.

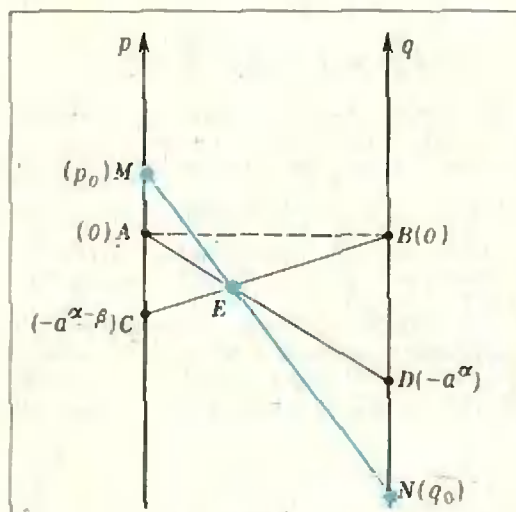


Рис. 2.



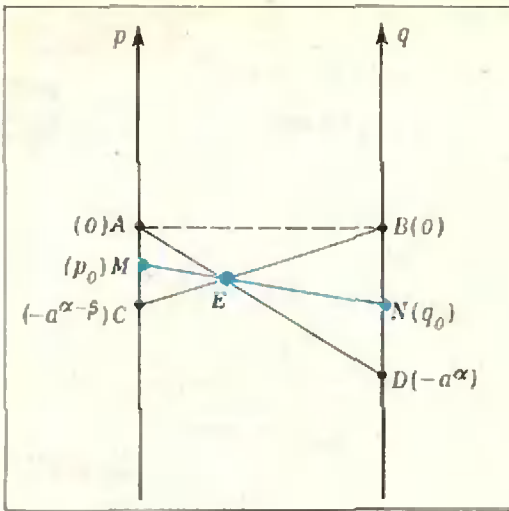


Рис. 3.

нения

$$x^\alpha + px^\beta + q = 0. \quad (3)$$

Номограмма для отыскания положительных корней таких уравнений рисуется следующим образом: параметру  $a$  придаются разные положительные значения и для каждого из них строится точка  $E$  так, как рассказано выше; полученные точки, помеченные соответствующими значениями параметра, соединяются плавной кривой  $\Gamma$  (рис. 4).

Если мы хотим теперь при помощи этой номограммы приближенно найти положительные корни конкретного уравнения  $x^\alpha + p_0x^\beta + q_0 = 0$ , надо на оси  $p$  взять точку  $M$  с координатой  $p_0$ , на оси  $q$  — точку  $N$  с координатой  $q_0$  и провести прямую  $MN$ . Каждая точка пересечения прямой  $MN$  с кривой  $\Gamma$  дает, в силу (1), положительный корень уравнения (2).

Теперь понятно, почему так построенная номограмма называется номограммой из выравненных точек: точки, соответствующие коэффициентам  $p, q$  уравнения, и точки, соответствующие искомому положительным корням уравнения  $x^\alpha + px^\beta + q = 0$ , лежат на одной прямой.

**Упражнения**

1. Постройте номограммы из выравненных точек для нахождения положительных корней уравнений

$$x^m + px^n + q = 0,$$

если  $m = 3, n = 2; m = 4, n = 1; m = 4, n = 2; m = 4, n = 3$ .

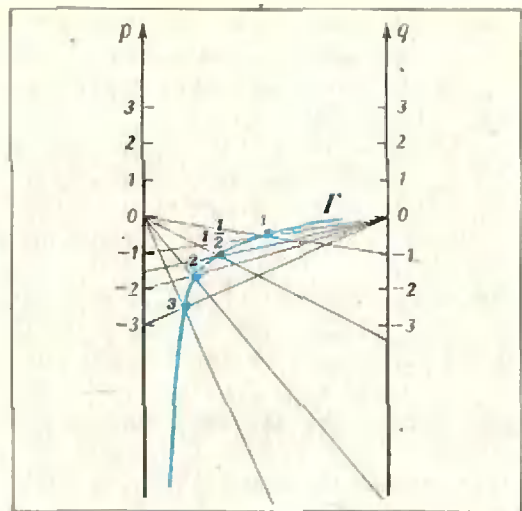


Рис. 4.

2. Постройте номограммы из выравненных точек для нахождения положительных корней уравнений

$$x^\alpha + px^\beta + q = 0,$$

если  $\alpha = 1/2, \beta = 1/3; \alpha = 1/3, \beta = 1/4; \alpha = 1, \beta = 2/3; \alpha = 3/2, \beta = 1/4; \alpha = 3/4, \beta = 1/3$ .

На рисунке 5 приведена номограмма из выравненных точек для

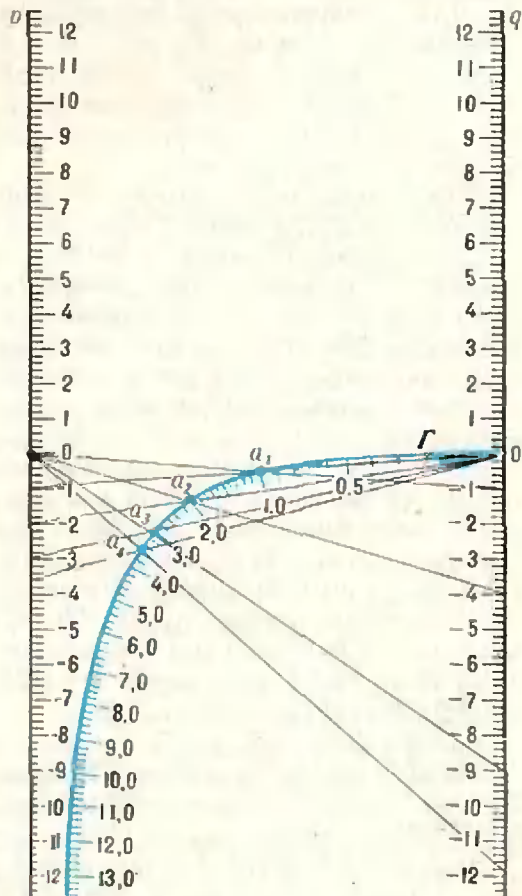


Рис. 5.

решения уравнений (3) при  $\alpha=2$ ,  $\beta=1$ . Эта номограмма взята из «Четырехзначных математических таблиц» В. М. Брадиса.

Точки на осях  $p$  и  $q$  имеют на рисунке координаты от  $-12,6$  до  $+12,6$ . Поэтому, если значения коэффициентов  $p_0$  и  $q_0$  данного конкретного уравнения  $x^2 + p_0x + q_0 = 0$  не превосходят по модулю  $12,6$  и отличны от  $0$ , то для нахождения положительных корней этого уравнения нужно проделать то, что описано выше. Построенная прямая  $MN$  может пересекаться с кривой  $\Gamma$  в двух точках (в этом случае оба корня данного уравнения  $x^2 + p_0x + q_0 = 0$  положительны), в одной точке (в этом случае второй корень уравнения отрицателен), может касаться кривой (в этом случае у уравнения  $x^2 + p_0x + q_0 = 0$  — кратный положительный корень); наконец, она может не иметь с кривой  $\Gamma$  ни одной общей точки (в этом случае либо оба корня уравнения отрицательны, либо у него вообще нет действительных корней).

Для получения отрицательных корней уравнения  $x^2 + p_0x + q_0 = 0$  надо, сделав замену переменной  $x = -t$ , искать на той же номограмме положительные корни уже для уравнения  $t^2 - p_0t + q_0 = 0$ .

Если значения коэффициентов  $p$  и  $q$  по модулю превосходят  $12,6$ , то следует сделать замену переменной  $x = kt$  и перейти от уравнения  $x^2 + px + q = 0$  к уравнению  $t^2 + (p/k)t + q/k^2 = 0$ ; число  $k$  выбирается так, чтобы числа  $p/k$  и  $q/k^2$  были уже в указанных на номограмме интервалах.

В случае, если оба корня уравнения  $x^2 + px + q = 0$  близки к нулю, также выгодно сделать замену переменной  $x = kt$ . Так, для уравнения  $x^2 - 0,89x + 0,16 = 0$  значения корней по номограмме найти трудно. Положив  $x = 0,2t$ , получим уравнение  $t^2 - 4,45t + 4 = 0$ ; его корни  $t_1 = 1,2$ ;  $t_2 = 3,2$ , откуда  $x_1 = 0,24$ ,  $x_2 = 0,64$ .

### Упражнение 3

Используя таблицу XXII из «Таблиц» Брадиса, решите следующие квадратные уравнения:

- а)  $x^2 - 2,4x + 1,5 = 0$ ; б)  $x^2 - 6x + 9 = 0$ ;  
 в)  $x^2 - 6x + 8,99 = 0$ ; г)  $x^2 - 13x + 17 = 0$ ;  
 д)  $x^2 - 0,3x + 0,2 = 0$ ; е)  $x^2 - 17x + 0,8 = 0$ .

## Задачи наших читателей

1. Докажите неравенство

$$\begin{aligned} & \sqrt{2} + \sqrt{4 - 2\sqrt{2}} + \\ & + \sqrt{6 - 2\sqrt{6}} + \dots + \\ & + \sqrt{2n - 2\sqrt{(n-1)n}} \geq \\ & \geq \sqrt{n(n+1)}. \end{aligned}$$

О. Бабаев  
(г. Нахичевань)

2. Назовем натуральное число  $A$  интересным, если при вычитании из него числа, состоящего из тех же цифр, но записанных в обратном порядке, получается натуральное число, состоящее из тех же цифр, что и  $A$ . Таковым, например, является число 1980, так как  $1980 - 891 = 1089$  (подразумевается, что  $0891 = 891$ ).

а) Существует ли 1978-значное интересное число, состоящее только из единиц, четверок и семерок?

б) Найдите все трехзначные интересные числа.

в) Существуют ли четырехзначные интересные числа, отличные от 1980?

г) Сколько существует интересных чисел, цифры которых образуют арифметическую прогрессию?

д) Докажите, что 1979-значных интересных чисел будет больше  $10^{100}$ .

е) Для какого натурального  $N$  существует  $N$ -значное интересное число?

В. Батырев  
(г. Москва)

3. Докажите без помощи таблиц, что  $\lg 34^\circ > 2/3$ .

С. Майзус  
(г. Запорожье)

4. Постройте бесконечную последовательность чисел, в которой первый член равен  $a$  ( $a \neq 1$ ) и сумма любого числа первых членов равна их произведению.

И. Суев  
(г. Кишинев)



А. Тоом

## Решения задач ВЗМШ

В этой статье приводятся решения некоторых задач из вступительной работы в ВЗМШ 1978 года («Квант», 1978, № 1).

3. Какие значения может принимать  $a$ , если

$$|a + b| \leq 1 \quad \text{и} \quad |a - 3b| \leq 2?$$

Ответ:  $-\frac{5}{4} \leq a \leq \frac{5}{4}$ .

Проще всего решать эту задачу графически. Возьмем на плоскости систему координат и найдем область, состоящую из точек  $(a; b)$ , удовлетворяющих неравенствам. Легко сообразить, что это параллелограмм с вершинами  $(\frac{5}{4}; -\frac{1}{4})$ ,  $(\frac{1}{4}; \frac{3}{4})$ ,  $(-\frac{5}{4}; \frac{1}{4})$  и  $(-\frac{1}{4}; -\frac{3}{4})$ .

4. На плоскости дан квадрат с центром в точке  $O$ . В этой точке расположен прожектор, который освещает угол величиной  $90^\circ$ . В начальный момент времени прожектор освещал угол, стороны которого проходили через две вершины квадрата. Затем прожектор начал вращаться вокруг точки  $O$ . В какой момент времени площадь освещенной части квадрата будет больше: когда прожектор повернется на  $45^\circ$  или на  $72^\circ$ ?

Площадь освещенной части все время одинакова и составляет четверть площади квадрата. Действительно, стороны угла в  $90^\circ$  с вершиной в центре квадрата вместе с их продолжениями делят квадрат на 4 конгруэнтные части, переходящие друг в друга при поворотах на  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$ .

5. Ивана Александровича Хлестакова пригласили управлять департаментом и в течение трех дней прислали 30 000 курьеров. Известно следующее: если бы в первый день было прислано вдвое больше курьеров, то общее число курьеров было бы четвертой степенью того числа, на которое в третий день прислали курьеров больше, чем во второй. Сколько курьеров было прислано Хлестакову в каждый день? (Приведите все возможные ответы.)

Пусть в первый день прислали  $x$ , во второй  $y$ , в третий  $z$  курьеров. Из условия следует, что

$$2x + y + z = (z - y)^4.$$

С другой стороны, очевидно, что  $30\,000 \leq 2x + y + z \leq 60\,000$ , откуда

$$30\,000 \leq (z - y)^4 \leq 60\,000.$$

Подсчетом убеждаемся, что в этом промежутке лежат только

$$14^4 = 38\,616 \quad \text{и} \quad 15^4 = 50\,625.$$

В каждом из этих случаев легко найти ответ:

$$\begin{cases} x = 8\,616, \\ y = 10\,685, \\ z = 10\,699 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x = 20\,625, \\ y = 4\,680, \\ z = 4\,695. \end{cases}$$

7. Найти все пары целых чисел  $(x; y)$ , удовлетворяющие уравнению  $x^2 - xy - 2y^2 = 18$ .

Левую часть можно разложить:

$$(x + y)(x - 2y) = 18.$$

Заметим, что разность множителей, стоящих в левой части, равна  $3y$  и потому делится на 3. Итак, 18 надо разложить на 2 множителя, разность которых делится на 3. Это можно сделать четырьмя способами, каждый из которых дает свой ответ:

$$18 = 3 \cdot 6, \quad 18 = (-3) \cdot (-6),$$

$$18 = 6 \cdot 3, \quad 18 = (-6) \cdot (-3),$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 5 \\ y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -5 \\ y = -1. \end{cases}$$

8. Дан прямоугольник  $ABCD$ . Внутри него берется произвольная точка и через нее проводятся две прямые, параллельные сторонам  $AB$  и  $BC$ . Эти прямые разбивают прямоугольник на 4 меньших прямоугольника. Доказать, что площадь хотя

бы одного из прямоугольников, содержащих точки  $A$  или  $C$ , не больше четверти площади исходного прямоугольника.

Пусть сторона  $AB$  разрезана на куски, составляющие части  $k$  и  $1-k$  от нее, а сторона  $BC$  разрезана на куски, составляющие части  $l$  и  $1-l$  от нее. Нам надо доказать, что  $kl \leq \frac{1}{4}$

или  $(1-k)(1-l) \leq \frac{1}{4}$  при всех  $k, l$  от 0 до 1.

Для этого достаточно убедиться, что  $kl(1-k)(1-l) \leq \frac{1}{16}$ . Но

$k(1-k) \leq \frac{1}{4}$  и  $l(1-l) \leq \frac{1}{4}$  (эти

неравенства выводятся из неравенств

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0 \text{ и } \left(l - \frac{1}{2}\right)^2 \geq 0.$$

Поэтому  $kl(1-k)(1-l)$  действительно не больше  $\frac{1}{16}$ .

9. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 1 + x_1^2 = 2x_2, \\ 1 + x_2^2 = 2x_3, \\ 1 + x_3^2 = 2x_4, \\ 1 + x_4^2 = 2x_1. \end{cases}$$

Сложив все уравнения, получим

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 + (x_3 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2 = 0.$$

Это равенство возможно только, если

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1,$$

что и дает единственный ответ.

10. Ученику прислали задание, состоящее из 20 задач. За каждую правильно решенную задачу ему ставят 8 баллов, за каждую неверно решенную — минус 5 баллов; если же он задачу не решил, ему ставят 0 баллов. В результате ученик получил 13 баллов. Сколько задач решал ученик?

Пусть ученик правильно решил  $x$  задач и неправильно решил  $y$  задач. Тогда

$$8x - 5y = 13,$$

откуда  $8y + 13$  должно делиться на 8.

Ясно, что  $y$  нечетно. Пробуем нечетные значения  $y$  подряд и находим подходящие:  $y=7$  и  $y=15$ . Подходит только первое:  $y=7, x=6$ . (При  $y=15, x=11$  и  $x+y=26 > 20$ .)

## Советуем купить!

### Математика

Кантор И. Л., Солодовников А. С. *Гиперкомплексные числа*. Ц. 22 к.  
Перельман Я. И. *Живая математика. Математические рассказы и головоломки*. Ц. 30 к.  
Постников М. М. *Теорема Ферма*. Ц. 20 к.  
Солодовников А. С. *Системы линейных неравенств*. Ц. 15 к.

### Физика, астрономия

Бутенни Н. В. *Введение в аналитическую механику*. Ц. 56 к.  
Бутиков Е. И. и др. *Физика для поступающих в вузы*. Ц. 1 р.  
Китайгородский А. И. *Введение в физику*. Ц. 1 р. 41 к.  
Кошкин Н. И., Ширкевич М. Г. *Справочник по элементарной физике*. Ц. 69 к.  
Кресин В. З. *Сверхпроводимость и сверхтекучесть*. Ц. 35 к.  
Майер В. В. *Простые опыты с ультразвуком*. Ц. 20 к.  
*Сборник задач по общему курсу физики (Механика)*. Ц. 67 к.  
*Сборник задач по общему курсу физики (Термодинамика и молекулярная физика)*. Ц. 32 к.

(Окончание см. с. 58)

## Премии «Кванта»

В 1977/78 учебном году редакция получила более 12 тысяч писем с решениями задач из Задачника «Кванта». Школьники, решившие наибольшее число задач или приславшие наиболее оригинальные решения, награждаются специальной премией, учрежденной редакционной коллегией журнала — подпиской на «Квант» на 1979 год.

1. БАЛИНСКИЙ АЛЕКСАНДР (с. Дубляны Львовской обл.)
2. БАРЗЫКИН АЛЕКСАНДР (пос. Черногоровка Московской обл.)
3. БАТЫРЕВ ВИКТОР (г. Москва)
4. ГАВРИЛОВ МИХАИЛ (пос. Черногоровка Московской обл.)
5. ГРИШЕЧКИН СЕРГЕЙ (г. Москва)
6. ГУБА ВИКТОР (г. Вологда)
7. ИЗМАЙЛОВ РАУФ (г. Баку)
8. КУЛЕСКО АЛЕКСАНДР (г. Донецк)
9. ЛАШКИН ВЛАДИМИР (г. Киев)
10. ЛЮДМИРСКИЙ ДМИТРИЙ (г. Киев)
11. МИНДЛИН ДМИТРИЙ (г. Ташкент)
12. МИРЛИН АЛЕКСАНДР (г. Ленинград)
13. НЕНАШЕВ АЛЕКСАНДР (г. Ленинград)
14. ОПАРИН АНДРЕЙ (г. Горький)
15. РОЖАНСКИЙ ЛЕВ (г. Москва)
16. ТРОФИМОВ ВЛАДИМИР (г. Москва)
17. ФИРСОВА ГАЛИНА (г. Ленинград)
18. ШВЕЙДЕЛЬ ВЛАДИМИР (г. Великие Луки)

За успешное участие в XII Всесоюзной физико-математической олимпиаде подпиской на «Квант» на 1979 год награждаются:

1. АБДУГАНИЕВ АБДУВАЛИ (Ташкентская обл.)
2. БРАТЧЕНКО СВЕТЛАНА (х. Бойко-Понура Краснодарского края)
3. ИРМАТОВ АНВАР (г. Наманган)
4. ЛУЧКО ЮРИЙ (д. Словатичи Гродненской обл.)
5. ФАЙСМАН АЛЕКСАНДР (г. Ташкент)
6. ЩЕРБАКОВ СЕРГЕЙ (г. Ленинград)

# задачник Кванта

## Задачи

M521—M525; Ф533—Ф537

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. Решения задач из этого номера можно прислать не позднее 1 ноября 1978 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например, «M521, M522» или «Ф533». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. В этом и следующих номерах Задачник «Кванта» составлен в основном из задач, предлагавшихся на последней Всесоюзной олимпиаде.

M521. Обозначим через  $a_n$  целое число, ближайшее к  $\sqrt{n}$ . Найдите сумму

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{1980}}. \quad (8,9 \text{ кл.})$$

Г. Гуревич

M522. На плоскости задано несколько непересекающихся отрезков, никакие два из которых не лежат на одной прямой. Мы хотим провести еще несколько отрезков, соединяющих концы данных отрезков так, чтобы все отрезки вместе образовали одну несамопересекающуюся ломаную. Всегда ли это можно сделать? (8 кл.)

В. Произволов

M523. Фишка стоит в углу шахматной доски размером  $n \times n$  клеток. Каждый из двух играющих по очереди передвигает ее на соседнее поле (имеющее общую сторону с тем, на котором стоит фишка). Второй раз ходить на поле, где фишка уже побывала, нельзя. Проигрывает тот, кому некуда ходить.

а) Докажите, что если  $n$  четно, то начинающий игру может добиться выигрыша, а если  $n$  нечетно, то выигрывает второй.

б) Кто выигрывает, если первоначально фишка стоит не на угловом поле, а на соседнем с ним? (8 кл.)

Н. Нецветаев

M524. Докажите, что ни при каком натуральном  $m$  число  $1978^m - 1$  не делится на  $1000^m - 1$ . (8 кл.)

С. Конягин

M525. Докажите, что для любого тетраэдра существуют такие две плоскости, что отношение площадей проекций тетраэдра на эти плоскости не меньше  $\sqrt{2}$ . (10 кл.)

А. Берзиньш

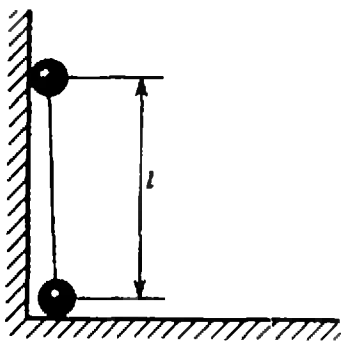


Рис. 1.

Ф533. Гантелька длины  $l$  стоит в углу, образованном гладкими плоскостями (рис. 1). Нижний шарик гантельки смещают горизонтально на очень маленькое расстояние, и гантелька начинает двигаться. Найти скорость нижнего шарика в тот момент, когда верхний шарик оторвется от вертикальной плоскости.

А. Зильберман

Ф534. Астронавты «Скайлэба» с помощью специального радиолокационного высотомера обнаружили, что поверхность океана в районе «Бермудского треугольника» ниже нормального уровня на 25 метров (см., например, журнал «Наука и жизнь», 1976, № 9). Предполагая, что этот «прогиб» можно объяснить наличием под дном океана шаровой полости, заполненной водой, оценить радиус этой полости. Глубина океана  $h = 6$  км, средняя плотность земных пород  $\rho = 3 \times 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

А. Стасенко

Ф535. Потенциальная энергия взаимодействия двух одинаковых заряженных маленьких шариков с зарядами  $q_1$  и  $q_2$  равна  $W_1 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 l}$ , где  $l$  — расстояние между центрами шариков. Если шарики соединить проволокой, заряды шариков станут одинаковыми, и потенциальная энергия взаимодействия шариков станет равной  $W_2 = \frac{(q_1 + q_2)^2}{16\pi\epsilon_0 l}$ . Так как  $(q_1 + q_2)^2 > 4q_1 q_2$  (при  $q_1 \neq q_2$ ), то  $W_2 > W_1$ , то есть потенциальная энергия взаимодействия зарядов возрастает! Откуда берется дополнительная энергия?

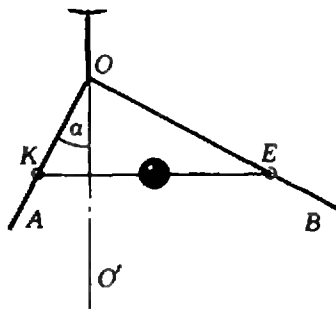


Рис. 2.

Ф536. Жесткая прямоугольная конструкция  $AOB$  ( $\widehat{AOB} = 90^\circ$ ) вращается вокруг вертикальной оси  $OO'$ , так что  $\widehat{AOO'} = \alpha$  (рис. 2). С помощью колец, которые могут свободно скользить по сторонам  $AO$  и  $OB$ , на конструкцию надет легкий стержень  $KE$  длины  $2a$ . К середине стержня прикреплен небольшой массивный шарик. При какой угловой скорости вращения конструкции стержень займет горизонтальное положение?

С. Кротов

Ф537. Полировкой металлической пластины ее можно сделать зеркальной. Оценить, какова может быть максимальная высота шероховатостей, оставшихся после полировки, чтобы пластина зеркально отражала пучок света с длиной волны  $\lambda = 5 \cdot 10^{-8}$  м, падающий на нее под углом  $\alpha = 45^\circ$ .

## Решения задач

М471—М474; Ф487—Ф490, Ф492

**М471.** Две пересекающиеся окружности вырезают из плоскости три ограниченные непересекающиеся области. Докажите, что не существует окружности, делящей пополам площадь каждой из этих трех областей.

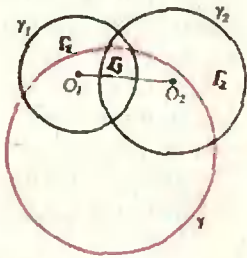


Рис. 1.

**М472.** Внутри куба расположен выпуклый многогранник, проекция которого на каждую из граней куба совпадает с этой гранью. Докажите, что объем многогранника не меньше  $1/3$  объема куба.

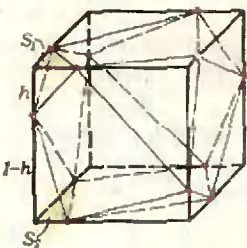


Рис. 2.

**М473.** Имеется две группы по  $n$  гирь, в каждой из которых гири расположены в порядке возрастания их масс. Покажите, что

а)  $2n - 1$  взвешиваниями можно расположить и все  $2n$  гирь в порядке возрастания их масс;

В решении мы будем использовать следующее почти очевидное соображение: если каждая из двух кривых делит площадь данной фигуры пополам, то они обязательно не пересекаются. Предположим, что нужная окружность нашлась. Проведем прямую  $O_1O_2$ , соединяющую центры данных окружностей  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$  (рис. 1). Она делит площадь фигуры  $G_1$  пополам. Но и  $\gamma$  делит эту площадь пополам. Значит, внутри  $G_1$  у  $\gamma$  и  $(O_1O_2)$  есть точка пересечения. Аналогично, у них есть точки пересечения внутри  $G_2$  и внутри  $G_3$ . Мы получили, что окружность и прямая пересекаются более чем в двух точках — противоречие. Значит, такой окружности  $\gamma$  быть не может.

Предлагаем вам подумать над задачей с аналогичной формулировкой (эту задачу нам прислал читатель В. Калмыков из г. Воронежа).

Две концентрические окружности ограничивают две области: кольцо и круг меньшего радиуса. Докажите, что не существует окружности, делящей пополам площадь каждой из этих двух областей.

С. Фокин

На каждом ребре куба  $K$  должна существовать по крайней мере одна точка, принадлежащая многограннику  $T$ , — иначе проекция  $T$  в направлении этого ребра куба не совпала бы с соответствующей гранью куба. Выберем на каждом ребре куба  $K$  по точке многогранника  $T$  (некоторые из них могут оказаться вершинами куба). Пусть  $C$  — их выпуклая оболочка (рис. 4). Из выпуклости многогранника  $T$  следует, что  $C \subset T$ . Полагая длину ребра куба равной 1, подсчитаем объем дополнения  $K \setminus C$  многогранника  $C$  до куба  $K$ .

$K \setminus C$  — это объединение восьми треугольных пирамид при восьми вершинах куба  $K$  (рис. 2). Разобьем эти пирамиды на пары — по паре пирамид при каждом из четырех вертикальных ребер куба. Сумма объемов каждой пары пирамид не превосходит  $\frac{1}{3} h S_1 + \frac{1}{3} (1-h) S_2$  (см. рис. 2).

Поскольку  $S_1 \leq \frac{1}{2}$ ,  $S_2 \leq \frac{1}{2}$ , получаем

$$\frac{1}{3} h S_1 + \frac{1}{3} (1-h) S_2 \leq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} (h + (1-h)) = \frac{1}{6}.$$

Итак, объем  $(K \setminus C) \leq 4 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$ , следовательно,

$$\text{объем } T \geq \text{объем } C \geq 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Заметим, что оценка  $1/3$  — точная: объем тетраэдра, вершины которого — четыре несмежных вершины куба, составляет  $1/3$  объема куба.

В. Прасолов

Рассмотрим более общую задачу: имеется две группы гирь, в одной группе —  $t$  штук, в другой —  $n$ . В каждой группе гири расположены в порядке возрастания их масс. Требуется найти число  $\varphi(t, n)$  такое, что

а) проведя  $\varphi(t, n)$  взвешиваний, можно расположить все  $t + n$  гирь в порядке возрастания их масс;

б) меньшим чем  $\varphi(t, n)$  числом взвешиваний этого сделать, вообще говоря, нельзя.

Задача М473 состоит в том, чтобы доказать, что  $\varphi(n, n) = 2n - 1$ .



б) меньшим  $2n - 1$  числом взвешиваний это сделать, вообще говоря, нельзя. (За одно взвешивание сравниваются массы двух гирь; массы всех  $2n$  гирь попарно различны.)

Докажем вначале, что

$$\varphi(m, n) \leq m + n - 1. \quad (1)$$

Обозначим массы гирь через  $a_1, a_2, \dots, a_m, b_1, b_2, \dots, b_n$  так, что  $a_1 < a_2 < \dots < a_m, b_1 < b_2 < \dots < b_n$ .

Первым взвешиванием сравним  $m$ -ю гирю первой группы с  $n$ -й гирей второй группы. Если  $a_m < b_n$ , то очевидно, масса  $b_n$  — самая большая, и остается упорядочить группу из  $m$  упорядоченных гирь и  $n - 1$  упорядоченных гирь. Если же  $a_m > b_n$ , то самая большая масса —  $a_m$ , и остается упорядочить группу из  $m - 1$  упорядоченных и  $n$  упорядоченных гирь. Поэтому  $\varphi(m, n) \leq 1 + \max(\varphi(m - 1, n), \varphi(m, n - 1))$ .

Заметим теперь, что  $\varphi(m, 0) = \varphi(n, 0) = 0$ . После этого неравенство (1) доказывается индукцией.

Теперь докажем, что

$$\varphi(n, n) \geq 2n - 1. \quad (2)$$

Пусть

$$a_1 < b_1 < a_2 < b_2 < \dots < a_n < b_n. \quad (3)$$

Докажем, что в этом случае, выясняя порядок гирь, необходимо сравнить  $a_i$  с  $b_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ). В самом деле, пока не осуществлено такое сравнение, невозможно отличить порядок гирь (3) от порядка, который отличается от него перестановкой  $a_i$  и  $b_i$ .

Точно так же доказывается необходимость сравнения всех  $a_i$  с  $b_{i-1}$  для  $i = 2, 3, \dots, n$ .

Для описанных сравнений необходимо осуществить  $n + (n - 1) = 2n - 1$  взвешиваний, так что  $\varphi(n, n) \geq 2n - 1$ .

Из неравенств (1) и (2) следует пункты а) и б) задачи М473.

Аналогичным методом нетрудно доказать, что  $\varphi(n, n + 1) = 2n$ . Применяя более тонкие рассуждения, можно показать, что  $\varphi(n, n + 2) = 2n + 1$  ( $n \geq 1$ ) и  $\varphi(n, n + 3) = 2n + 2$  ( $n \geq 4$ ).

Вычисление же числа  $\varphi(m, n)$  в общем случае — по-видимому, очень трудная задача. Попробуйте доказать, например, что  $\varphi(5, 9) = 12$ .

В. Гринберг

**М474.** *Натуральное число называется совершенным, если оно равно сумме всех своих делителей (кроме самого себя); таковы, например, числа  $6 = 1 + 2 + 3$  и  $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$ . Докажите, что число  $N$  несовершенно, если известно, что оно*  
 а) *при делении на 4 дает остаток 3;*  
 б) *при делении на 6 дает остаток 5.*  
*(До сих пор неизвестно, существуют ли нечетные совершенные числа.)*

а) Пусть  $N$  — совершенное число, остаток от деления которого на 4 равен 3. Очевидно, можно считать, что  $N$  — составное. Если  $N = a \cdot b$ , то поскольку  $N$  нечетно,  $a$  и  $b$  также — нечетные числа. Остаток от деления любого нечетного числа на 4 равен либо 1, либо 3. Легко проверить, что если этот остаток для  $a$  равен 1, то для  $b$  он равен 3 (и наоборот).

Пусть теперь  $a_1, \dots, a_n$  — все попарно различные и не равные 1 делители числа  $N$ , дающие при делении на 4 остаток 1:  $a_i = 4k_i + 1$ . Тогда числа  $b_i = N/a_i$  также все попарно различны, ни одно из них не совпадает с  $N$ , и каждое из них при делении на 4 дает остаток 3;  $b_i = 4l_i + 3$ . Кроме того, набор чисел  $1, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$  исчерпывает все попарно различные, не равные  $N$ , делители числа  $N$ .

Предположим теперь, что  $N$  — совершенное число, т. е.

$$N = 1 + a_1 + b_1 + \dots + a_n + b_n.$$

Тогда  $N = 4l + 1$  — противоречие с условием.

б) Пусть остаток от деления  $N$  на 6 равен 5. Легко проверить, что если  $N = a \cdot b$ , то остаток от деления на 6 одного из чисел  $a, b$  равен 1, а другого — 5.

Дальнейшее рассуждение проводится как в задаче а).

Задача М474 возникла из вопроса, ответ на который до сих пор неизвестен: существуют ли нечетные совершенные числа? (Проверено, что среди чисел, меньших  $10^7$ , таких чисел нет.) Из М474 вытекает, что если нечетное число  $N$  является совершенным, то при делении на 4 оно дает остаток 1, а при делении на 6 — либо остаток 1, либо 3.

Пусть  $N = 6l + 1$ . Если  $l$  — нечетно, то остаток от деления  $N$  на 4 равен 3. Поэтому нечетные числа, даю-

шие при делении на 6 остаток 1, должны иметь вид  $12k + 1$ .

Если же  $N = 6l + 3$ , то аналогично можно показать, что  $N$  может быть совершенным только тогда, когда оно имеет вид  $12k + 9$ .

Таким образом, мы доказали, что если нечетное совершенное число существует, то оно либо имеет вид  $N = 12k + 1$ , либо  $N = 12k + 9$ . Полученный результат можно еще усилить. Как нам сообщили авторы задачи К. Сатаркулов и С. Югай, в 1952 году английский математик Тушар доказал, что если нечетные совершенные числа существуют, то они либо имеют вид  $N = 12k + 1$ , либо  $N = 36k + 9$ . Результат Тушара немедленно вытекает из следующих двух утверждений:

1. Нечетное совершенное число может иметь либо вид  $3^{2n} (4k + 1)$ , либо  $3^{2n+1} (4k + 3)$ .
3. Совершенных чисел вида  $3^{2n+1} (4k + 3)$  не существует.

Попробуйте доказать эти утверждения самостоятельно.

И. Клумова



Ф487. Жука фотографируют в двух масштабах: с расстояния  $d_1 = 3F$ , где  $F$  — фокусное расстояние объектива, и с расстояния  $d_2 = 5F$ . Во сколько раз надо изменить диаметр диафрагмы объектива, чтобы освещенность изображения на пленке в обоих случаях была одной и той же? Считать, что диаметр объектива в обоих случаях много меньше  $F$ .

Обозначим через  $B$  световой поток, испускаемый единицей площади поверхности жука внутри единичного телесного угла (поверхностная яркость). Тогда с площади  $S_0$  (рис. 3) из объектив фотоаппарата падает световой поток

$$\Phi = BS_0\Omega = BS_0 \frac{S_D}{d^2}.$$

Здесь  $\Omega = \frac{S_D}{d^2}$  — телесный угол (на самом деле это равенство не точное, а приближенное),  $S_D$  — площадь диафрагмы объектива,  $d$  — расстояние от фотоаппарата до жука.

После объектива световой поток попадает на фотопленку, создавая на ней изображение. Освещенность этого изображения

$$E = \frac{\Phi}{S} = \frac{BS_0 S_D}{d^2 S},$$

где  $S$  — площадь изображения выделенного участка поверхности жука. Найдем ее.

Поскольку линейное увеличение линзы равно  $f/d$  ( $f$  — расстояние от линзы до изображения), отношение площадей изображения и предмета

$$\frac{S}{S_0} = \left(\frac{f}{d}\right)^2.$$

Согласно формуле линзы,  $\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}$ , откуда

$$f = \frac{Fd}{d-F}, \quad \text{и} \quad \frac{f}{d} = \frac{F}{d-F}.$$

Следовательно, освещенность изображения

$$E = \frac{BS_D}{d^2} \frac{S_0}{S} = \frac{BS_D (d-F)^2}{d^2 F^2}.$$

По условию задачи при фотографировании жука в двух масштабах освещенность изображения должна быть одной

и той же:  $\frac{BS_{D1} (d_1 - F)^2}{d_1^2 F^2} = \frac{BS_{D2} (d_2 - F)^2}{d_2^2 F^2}$ . Отсюда

$$\frac{S_{D2}}{S_{D1}} = \frac{(d_1 - F)^2 d_2^2}{(d_2 - F)^2 d_1^2} = \frac{25}{36}, \quad \text{и} \quad \frac{D_{D2}}{D_{D1}} = \frac{5}{6}.$$

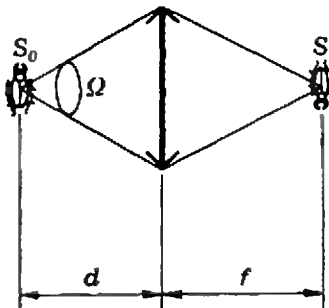


Рис. 3.

**Ф488.** Прямоугольная проволочная рамка с размерами сторон  $a = 0,020$  м и  $b = 0,030$  м погружается в мыльную воду, благодаря чему на ней образуется мыльная пленка. При наблюдении в отраженном свете, угол падения которого равен  $\alpha = 30^\circ$ , пленка кажется зеленой ( $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$  м). 1). Можно ли определить массу этой пленки с помощью весов, точность которых 0,1 мг? Плотность мыльного раствора  $\rho = 10^3$  кг/м<sup>3</sup>, показатель преломления пленки  $n = 1,33$ .

2) Какого цвета будет казаться самая тонкая из пленок, удовлетворяющих условию задачи, если свет будет падать на нее и затем отражаться перпендикулярно пленке?

*У к а з а н и е.* Учтеть, что при отражении света от более плотной среды фаза волны скачком меняется на  $\pi$ .

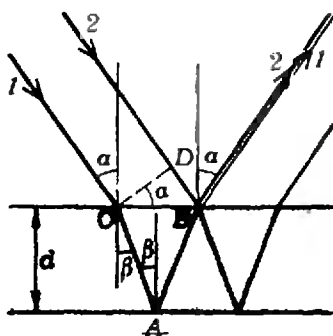


Рис. 4.

То, что пленка кажется в отраженном свете зеленой, означает, что световые лучи 1 и 2 (рис. 4), соответствующие длине волны  $\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$  м, интерферируя, дают максимум. Следовательно, оптическая разность хода этих лучей равна целому числу длин волн.

Длина волны в пленке равна

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n}$$

( $\lambda$  — длина волны в вакууме,  $n$  — показатель преломления пленки). На пути  $OAB$  луча 1 (см. рис. 4) укладывается

$$k_1 = \frac{OA + AB}{\lambda_n} \text{ длин волн.}$$

Так как  $OA = AB = \frac{d}{\cos \beta}$ , то

$$k_1 = \frac{2d}{\lambda_n \cos \beta} = \frac{2dn}{\lambda \cos \beta}.$$

Число длин волн, укладываемых на пути  $DB$  луча 2, равно

$$k_2 = \frac{DB}{\lambda} = \frac{OB \sin \alpha}{\lambda} = \frac{2d \operatorname{tg} \beta \sin \alpha}{\lambda} = \frac{2d \sin \alpha \sin \beta}{\lambda \cos \beta}.$$

Так как  $\sin \alpha = n \sin \beta$ , то  $k_2 = \frac{2dn \sin^2 \beta}{\lambda \cos \beta}$ .

Учитывая, что при отражении луча 2 (в точке  $B$ ) происходит изменение фазы волны на  $\pi$ , то есть теряется полволны, найдем, что оптическая разность хода лучей 1 и 2 после отражения от пленки равна

$$\Delta = \left[ k_1 - \left( k_2 + \frac{1}{2} \right) \right] \lambda = 2dn \cos \beta - \frac{\lambda}{2}.$$

Для того чтобы лучи, интерферируя, давали максимум, должно выполняться условие  $\Delta = k\lambda$  ( $k$  — целое):

$$2dn \cos \beta = (2k + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Различные значения  $k$  (при неизменных  $n$  и  $\lambda$ ) соответствуют разным толщинам пленки:

$$d = \frac{(2k + 1) \lambda}{2n \cos \beta} = \frac{2k + 1}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \frac{\lambda}{4}$$

(так как

$$\cos \beta = \sqrt{1 - \sin^2 \beta} = \sqrt{1 - \frac{\sin^2 \alpha}{n^2}} = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}.)$$

Толщина самой тонкой пленки ( $k = 0$ ) равна

$$d_{\min} = \frac{\lambda}{4 \sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \approx 10^{-7} \text{ м.}$$

Масса такой пленки равна

$$m_{\min} = abd_{\min} \rho = 0,06 \text{ мг.}$$

Для более толстых пленок

$$\begin{aligned} d_k &= (2k + 1) d_{\min}, \\ m_k &= (2k + 1) m_{\min} = (2k + 1) \cdot 0,06 \text{ мг} \\ &(k = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned}$$

Массу пленки можно измерить с помощью весов, точность которых 0,1 мг, в том случае, если  $m > 0,1$  мг (то есть  $k > 2$ ). При этом ошибка измерения будет составлять

$$\frac{\Delta m}{m} = \frac{0,1 \text{ мг}}{(2k + 1) \cdot 0,06 \text{ мг}} \approx \frac{1,67}{2k + 1} \cdot 100\%.$$

При нормальном падении света ( $\alpha = 0$ ) на пленку минимальной возможной толщины ( $d_{\min} \approx 10^{-7}$  м) условие интерференционного максимума выполняется для световых волн, длина которых удовлетворяет соотношению

$$\frac{1}{n} \frac{\lambda}{4} \approx 10^{-7} \text{ м.}$$

Отсюда

$$\lambda \approx 5 \cdot 10^{-7} \text{ м.}$$

В отраженном свете пленка будет казаться зеленой.



**Ф489.** Электроны ускоряются в электронной пушке электростатическим полем, проходя промежуток, напряжение на котором  $U = 10^3$  В. Вылетев из пушки в точке  $T$ , электроны движутся затем по прямой  $TT'$  (рис. 5). В точке  $M$  на расстоянии  $d = 5,0$  см от точки  $T$  находится мишень, причем прямая  $TM$  образует угол  $\alpha = 60^\circ$  с прямой  $TT'$ .

1) Какой должна быть индукция  $\vec{B}$  однородного магнитного поля, перпендикулярного плоскости рисунка, чтобы электроны, вылетевшие из пушки, попадали в мишень?

2) Какой должна быть индукция  $\vec{B}$  однородного магнитного поля, параллельного прямой  $TM$ , чтобы электроны попадали в мишень?

Считать, что  $|\vec{B}|$  не превышает  $0,030$  Т.

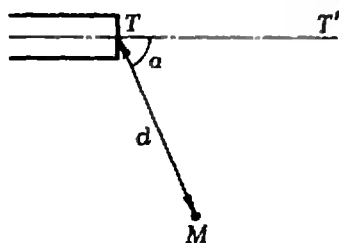


Рис. 5.

Электроны попадают в магнитное поле, имея кинетическую энергию

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = eU$$

( $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$  Кл — заряд электрона,  $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$  кг — масса электрона), то есть со скоростью

$$|\vec{v}| = \sqrt{2U \frac{e}{m}}.$$

1) Если магнитное поле перпендикулярно плоскости рисунка, то электроны движутся по окружности, которая касается прямой  $TT'$  в точке  $T$ . Так как центростремительное ускорение электронам сообщает сила Лоренца, то радиус  $R$  этой окружности таков, что

$$|\vec{F}_\perp| = e |\vec{v}| |\vec{B}| = \frac{mv^2}{R}.$$

Отсюда

$$|\vec{B}| = \frac{m |\vec{v}|}{eR} = \frac{1}{R} \sqrt{2U \frac{m}{e}}.$$

Из рисунка 6 видно, что электроны будут попадать в точку  $M$ , если  $R = \frac{d}{2 \sin \alpha}$ , то есть при

$$|\vec{B}| = \frac{2 \sin \alpha}{d} \sqrt{2U \frac{m}{e}} \approx 3,4 \cdot 10^{-3} \text{ Т.}$$

2) Если магнитное поле направлено вдоль прямой  $TM$ , то электроны будут двигаться по спирали, ось которой параллельна прямой  $TM$  (рис. 7). Действительно, проекция скорости электрона на прямую  $TM$   $v_1 = |\vec{v}| \cos \alpha$  не будет изменяться. В плоскости же, перпендикулярной прямой  $TM$ , электроны будут двигаться по окружности с постоянной по абсолютной величине скоростью, равной  $v_2 = |\vec{v}| \sin \alpha$ .

Сделав целый оборот вокруг своей оси, электроны пересекут прямую  $TM$ . Если бы проекция  $v_1$  скорости электрона на прямую  $TM$  была равна нулю, то, сделав полный оборот по окружности радиуса  $R_1$ , электроны возвращались бы в точку  $T$ . В нашем случае они будут пересекать прямую  $TM$  в точках, отстоящих друг от друга на расстоянии  $l = v_1 \tau$ , где  $\tau$  — время, за которое электроны делают один оборот:

$$\tau = \frac{2\pi R_1}{v_2}.$$

Для того чтобы электрон попал в точку  $M$ , необходимо, чтобы длина  $|TM|$  была равна целому числу  $l$ , то есть

$$d = kl = kv_1 \tau = 2\pi k R_1 \frac{v_1}{v_2} = 2\pi k R_1 \operatorname{ctg} \alpha \quad (k \text{ — целое}).$$

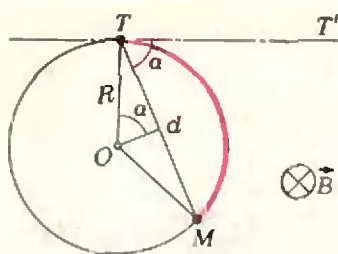


Рис. 6.

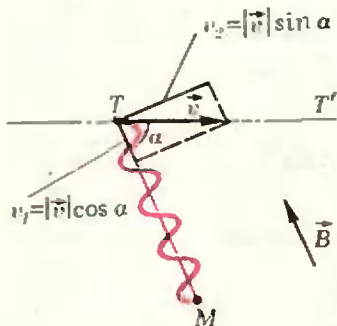


Рис. 7.

**Ф490.** При прохождении потока нейтронов через пластинку кадмия толщиной в 1 мм количество частиц уменьшается на 15%, а их скорость не изменяется. Какая доля потока нейтронов проходит через пластинку из кадмия толщиной 10 мм?

**Ф492\*).** На шероховатой плоскости лежат два круглых цилиндра с диаметрами  $D$  и  $d$  (рис. 8). Вокруг большого цилиндра обмотан шнур, к концу которого приложена горизонтальная сила  $\vec{F}$ . Определить, при каком одинаковом для всех

Залишем уравнение движения электрона в плоскости, перпендикулярной прямой  $TM$ :

$$\frac{mv_2^2}{R_1} = e |\vec{B}| v_2.$$

Отсюда

$$R_1 = \frac{mv_2}{e |\vec{B}|} = \frac{1}{|\vec{B}|} \sqrt{2U \frac{m}{e}} \sin \alpha.$$

Следовательно, электроны попадут в точку  $M$ , если

$$d = \frac{2\pi k}{|\vec{B}|} \sqrt{2U \frac{m}{e}} \cos \alpha,$$

то есть если

$$|\vec{B}| = \frac{2\pi k \cos \alpha}{d} \sqrt{2U \frac{m}{e}} = k \cdot 6,6 \cdot 10^{-3} \text{ Т.}$$

Возможные значения  $k$  и  $|\vec{B}|$ :

$$\text{при } k = 1 \quad |\vec{B}| = 6,6 \cdot 10^{-3} \text{ Т;}$$

$$\text{при } k = 2 \quad |\vec{B}| = 13,2 \cdot 10^{-3} \text{ Т;}$$

$$\text{при } k = 3 \quad |\vec{B}| = 19,8 \cdot 10^{-3} \text{ Т;}$$

и, наконец, при  $k = 4 \quad |\vec{B}| = 26,4 \cdot 10^{-3} \text{ Т.}$

Разделим пластинку мысленно на слои толщиной в 1 мм. Если всего на пластинку падает  $N$  нейтронов, то первый слой проходит  $N_1$  нейтронов

$$N_1 = (1 - \alpha) N,$$

где  $\alpha = 0,15$ . Аналогично, второй слой проходит число нейтронов

$$N_2 = (1 - \alpha) N_1 = (1 - \alpha)^2 N.$$

Очевидно, после  $n$ -го слоя в потоке останется

$$N_n = (1 - \alpha)^n N \text{ нейтронов.}$$

Число нейтронов, прошедших пластинку из кадмия толщиной 10 мм, равно

$$N_{10} = (1 - 0,15)^{10} N = 0,85^{10} N.$$

Таким образом,

$$\frac{N_{10}}{N} = 0,85^{10} \approx 0,2.$$

В тот момент, когда большой цилиндр оторвался от плоскости, система не скользит вправо, если сила  $\vec{F}$  равна по абсолютной величине силе  $\vec{F}_2$  трения системы о плоскость в том месте, где ее касается маленький цилиндр. При минимально возможном коэффициенте трения сила трения  $\vec{F}_2$  в этот момент равна по абсолютной величине  $\mu |\vec{N}_2|$  (рис. 9). Следовательно,

$$\mu |\vec{N}_2| \geq |\vec{F}|. \quad (1)$$

Для равновесия системы в этот момент необходимо также равенство моментов сил  $-\vec{F}_1$  и  $\vec{F}_2$  относительно центра меньшего цилиндра, то есть

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}|. \quad (2)$$

\* Задача Ф491 уже была опубликована в нашем журнале (Ф385). Решение см. «Квант», 1976, № 12.

соприкасающихся поверхностей коэффициент трения  $\mu$  большой цилиндр может быть перетащен через малый. Каким должно быть абсолютное значение силы  $\vec{F}$  для того, чтобы это можно было сделать?

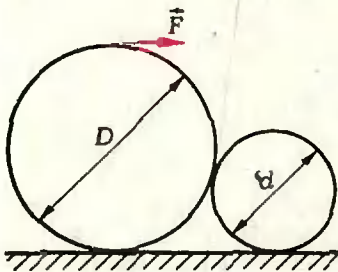


Рис. 8.

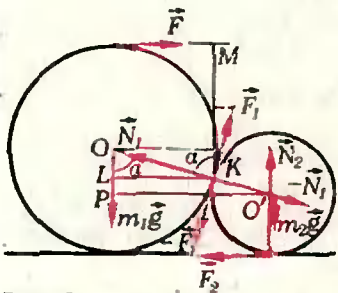


Рис. 9.

Так как  $|\vec{F}_1| = \mu |\vec{N}_1|$ , то должно выполняться условие

$$\mu |\vec{N}_1| \geq |\vec{F}|. \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что при выполнении условия (2) большой цилиндр не проворачивается относительно малого. Для того чтобы большой цилиндр не проворачивался, сумма моментов всех сил относительно его оси должна быть равна нулю. Это как раз и означает, что модуль силы трения между цилиндрами должен быть равен  $|\vec{F}|$ .

Найдем теперь, каковы силы  $\vec{N}_1$  и  $\vec{N}_2$ . Так как большой цилиндр находится в равновесии, то сумма горизонтальных проекций сил  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{N}_1$  и  $\vec{F}$  должна быть равна нулю:

$$|\vec{N}_1| \sin \alpha - |\vec{F}| - |\vec{F}| \cos \alpha = 0.$$

Отсюда

$$|\vec{N}_1| = \frac{|\vec{F}| (1 + \cos \alpha)}{\sin \alpha}.$$

Подставляя это значение  $|\vec{N}_1|$  в неравенство (3), получаем, что должно выполняться условие

$$\mu \geq \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}. \quad (4)$$

Для того чтобы найти  $\vec{N}_2$ , достаточно приравнять нулю сумму вертикальных проекций всех сил, действующих на систему в целом. Это дает

$$|\vec{N}_2| = (m_1 + m_2) |\vec{g}|.$$

Так как при равновесии большого цилиндра должна быть также равна нулю сумма моментов всех сил относительно горизонтальной оси, проходящей через точку K, то

$$m_1 |\vec{g}| |KL| = |\vec{F}| |KM|,$$

или

$$m_1 |\vec{g}| R \sin \alpha = |\vec{F}| (R + R \cos \alpha).$$

Отсюда

$$|\vec{F}| = m_1 |\vec{g}| \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}. \quad (5)$$

Подставляя это выражение для  $|\vec{F}|$  и найденное выше выражение для  $|\vec{N}_2|$  в неравенство (1), получим

$$\mu \geq \frac{m_1}{m_1 + m_2} \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}. \quad (6)$$

Значение  $\mu$  должно быть больше наибольшего из выражений, стоящих справа в неравенствах (4) и (6). Очевидно, что для этого должно выполняться условие (4), то есть

$$\mu \geq \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}.$$

Так как  $\cos \alpha = \frac{OP}{OO'} = \frac{R-r}{R+r} = \frac{D-d}{D+d}$  и  $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{Dd}}{D+d}$ ,

то

$$\mu \geq \frac{2\sqrt{Dd}}{\left(1 + \frac{D-d}{D+d}\right)(D+d)} = \sqrt{\frac{d}{D}},$$

$$|\vec{F}| = \sqrt{\frac{d}{D}} m_1 |\vec{g}|.$$

И. Слободецкий

## По страницам школьных учебников

Вот и пролетели канникулы, начались школьные будни. В нашем разделе журнала — тоже новый учебный год, уже третий по счету. За прошедшие два года в статьях этого раздела разбирались наиболее трудные и важные вопросы, непосредственно связанные с школьной программой. Мы хотим обратить ваше внимание на уже опубликованные статьи — к ним полезно обращаться по мере изучения школьных учебников:

### Алгебра и начала анализа

- «Как возникло и развивалось понятие функции» (1977, № 7),
- «Четные и нечетные функции» (1977, № 4),
- «Периодические функции» (1976, № 12),
- «Осторожно: максимум!» (1976, № 10),
- «Геометрический смысл производной» (1977, № 2),
- «Как выглядит парабола?» (1978, № 3),
- «Комбинаторное доказательство формулы Ньютона» (1978, № 8),
- «Сложение гармонических колебаний» (1976, № 11),
- «Площадь и интеграл» (1977, № 5),
- «Производная показательной функции» (1977, № 12),
- «Анализ помогает алгебре» (1978, № 6),
- «Вопросы по алгебре и анализу» (1978, № 2),
- «17 задач по анализу» (1977, № 1),

### Геометрия

- «Осевая симметрия» (1976, № 9),
- «Композиция двух осевых симметрий» (1978, № 2),
- «Гомотетия и замечательные точки в треугольнике» (1977, № 10),
- «Шесть доказательств теоремы о медианах» (1978, № 4),
- «Расстояние от точки до плоскости» (1977, № 3),
- «Что значит «больше»?» (1977, № 11),
- «В поисках определения площади поверхности» (1978, № 5),

\* \* \*

- «Задачи на повторение» (1977, № 9),
- «Вопросы для выпускников» (1978, № 7)

В этом учебном году мы будем больше уделять внимания приложениям анализа к решению математических и практических задач. Предполагается глубже показать приложения производной, полностью осветить вопросы об определении длины окружности и площади искривленной поверхности, разобрать методику построения сечений многогранников.

*Р. Мешойпер*

## Комбинаторные доказательства формулы Ньютона

Начался учебный год. Учащиеся девятих классов скоро познакомятся с такими понятиями как индукция, комбинаторика, бином Ньютона. Оригинальное доказательство формулы Ньютона прислал в редакцию прошлогодний девятиклассник, ученик 444-й Московской школы Роман Мешойпер. К его статье мы добавили еще два (более известных) комбинаторных доказательства.

В учебнике «Алгебра и начала анализа 9» в пункте 9 приводится вывод формулы Ньютона.

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^k a^{n-k} b^k + \dots + b^n, \quad (1)$$

основанный на методе математической индукции. Здесь мы приводим комбинаторное доказательство этой формулы (правда, лишь для натуральных  $a$  и  $b$ ).

Рассмотрим такую задачу: *сколькими способами можно раскрыть  $n$*

ящичков, если имеется  $a$  оттенков красной краски и  $b$  оттенков синей.

С одной стороны, таких способов  $(a + b)^n$ : первый ящик можно раскрасить в любой из  $a + b$  оттенков, второй (независимо от первого!) — тоже в любой из  $a + b$  оттенков, значит, для первых двух ящичков существует  $(a + b)(a + b) = (a + b)^2$  возможных раскрасок и т. д.

С другой стороны, число раскрасок равно правой части равенства (1). Покажем это, сосчитав это число иначе. Сначала найдем число раскрасок, при которых все  $n$  ящичков — красные (их, очевидно, —  $a^n$ ); затем найдем число раскрасок, при которых ровно один ящик — синий (их  $nba^{n-1}$ , ибо имеется  $n$  способов выбрать ящик, который мы будем красить синей краской, для него имеется  $b$  оттенков, и  $a^{n-1}$  раскрасок — для оставшихся  $n - 1$  ящичков); ...; далее найдем число раскрасок, при которых  $k$  ящичков — синие (их  $C_n^k b^k a^{n-k}$ , ибо имеется  $C_n^k$  способов выбрать из  $n$  ящичков  $k$  ящичков, которые мы будем красить синей краской\*), для этих  $k$  ящичков имеется  $b^k$  раскрасок, для оставшихся  $n - k$  ящичков существует  $a^{n-k}$  раскрасок); ...; наконец, найдем число раскрасок, при которых все  $n$  ящичков — синие (их  $b^n$ ). Таким образом, общее число раскрасок равно

$$a^n + nba^{n-1} + \dots + C_n^k b^k a^{n-k} + \dots + b^n,$$

а эта сумма совпадает с правой частью формулы (1), которая тем самым доказана.

Если вы хорошо поняли это доказательство, то вы сумеете доказать обобщение формулы Ньютона на случай  $m$  (натуральных) слагаемых:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = a_1^n + \dots + N_{k_1 k_2 \dots k_m}^n a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m} + \dots + a_m^n,$$

\*) «Алгебра и начала анализа 9», п. 6.

где

$$0 \leq k_i \leq n \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$$

и

$$N_{k_1 k_2 \dots k_m}^n = \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_m)!}{k_1! k_2! \dots k_m!} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!}$$

(это число называется числом перестановок с повторениями из  $k_1$  элементов первого типа,  $k_2$  — второго типа, и т. д.,  $k_m$  —  $m$ -го типа).

Приведенное выше доказательство не является единственным комбинаторным доказательством формулы Ньютона. Читатель без труда проверит, что эту формулу (для натуральных  $a$  и  $b$ ) можно получить, решая такую комбинаторную задачу: сколькими способами можно разложить  $n$  (различных) шаров по  $a$  красным и  $b$  синим ящичкам?

Приведем теперь известное комбинаторное доказательство формулы Ньютона, пригодное для любых  $a$  и  $b$ . Для этого распишем выражение  $(a + b)^n$  в виде произведения  $n$  скобок

$$(a + b)(a + b)(a + b) \dots (a + b)$$

и раскроем скобки, не приводя пока подобные члены. Рассмотрим все слагаемые  $a^{n-k} b^k$ . Сколько их? Каждое такое слагаемое получается, когда из  $k$  каких-то скобок мы берем букву  $b$ , а из остальных  $n - k$  скобок берем  $a$ . Выбрать  $k$  скобок из  $n$  скобок можно  $C_n^k$  способами; значит, слагаемых  $a^{n-k} b^k$  будет  $C_n^k$  штук. Приводя подобные члены, получим  $n + 1$  слагаемых вида  $C_n^k a^{n-k} b^k$  ( $k = 0, 1, 2, \dots, k$ ), то есть правую часть равенства (1).

Эти же рассуждения позволяют доказать и обобщение формулы Ньютона для произвольных  $a_1, a_2, \dots, a_m$ .





# «Квант» для младших школьников

## Задачи

1. В финале школьной математической олимпиады участвовали три команды — «Альфа», «Бета» и «Гамма». Каждая команда должна была составить пять задач и дать их решать своим соперникам. При подведении итогов выяснилось, что команда «Альфа» смогла решить только одну из задач, предложенных командой «Бета», и четыре задачи «Гаммы». Команда «Бета» решила три задачи, предложенные «Гаммой», и две задачи «Альфы». «Гамма» нашла решения всех пяти задач «Альфы», но не смогла решить ни одной задачи «Беты».

Общее место присуждалось по итогам двух конкурсов:

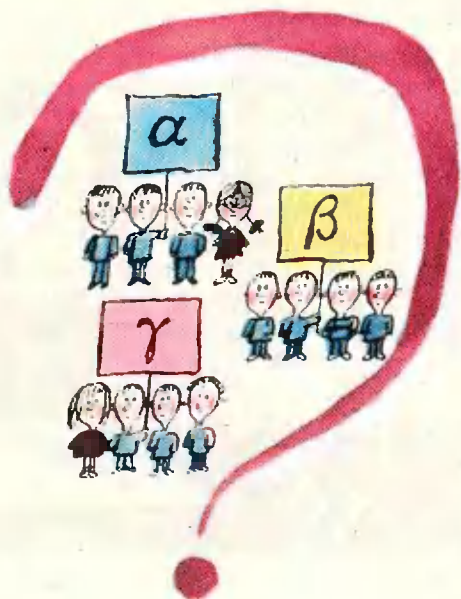
1) конкурса на сложность (трудность) составленных задач;

2) конкурса на умение решать задачи.

За первое место в каждом конкурсе присуждалось 2 балла, за второе — 1 балл; третье место не оценивалось. Определите, сколько баллов получила каждая команда в обоих конкурсах и каково итоговое распределение мест.

2. Решите изображенную на рисунке систему (здесь буквы К, О, Л, Я нужно заменить цифрами так, чтобы оба равенства сохранились: разные буквы должны соответствовать разным цифрам, одинаковые — одинаковым). Сколько решений имеет задача?

3. Угадав, по какому принципу составлена первая табличка чисел, вставьте недостающее число. Сделав то же со второй табличкой, уберите лишнее число.



$$\begin{cases} KO + ЛЯ = ОА - Я \\ K + O + A + Я = 24 \end{cases}$$



5	625	4
8	8	1
7	?	2
6	216	3

ТАБЛИЧКА 1

$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{23}{7}$
$3\frac{2}{7}$	$\frac{4}{11}$	0,(3)
0,125	$\frac{5}{13}$	0,(36)

ТАБЛИЧКА 2



Е. Семенов

## Расстояние Степы Мошкина

(из писем другу)

Ура! Придумал свое расстояние!

(письмо первое)

Мишка, привет! В прошлом году, когда я был в шестом классе, наш учитель Петр Иванович сказал нам, что расстоянием можно называть не только то, что получается при измерении линейкой, но и вообще все, что обладает свойствами 1—3 из пункта 4 «Геометрии 6».

Решил я придумать свое собственное расстояние. Вспомнил я «телефонную модель», при помощи которой Петр Иванович доказал нам, что третье свойство расстояния нельзя вывести из первых двух \*). Вспомнил и подумал: когда я хочу кому-нибудь позвонить, я снимаю трубку,

набираю номер — и уже разговариваю. Значит, «телефонное расстояние» от меня до всех, кому я звоню, — одно и то же, скажем, 1 минута. Минута, затрачиваемая на набор номера телефона. А себе я, конечно, не звоню: спрашиваю — и сразу отвечаю. Стало быть, расстояние от меня до меня равно нулю! Другие, конечно, в аналогичном случае рассуждают так же, как я. Вот и пришло мне в голову: *расстояние между любыми двумя точками плоскости считать равным нулю, если эти точки совпадают, и равным единице, если они различны* (рис. 1.)

А является ли мое «расстояние» расстоянием? Обладает ли оно нужными свойствами?

Первое свойство для моего расстояния, конечно, выполняется: для

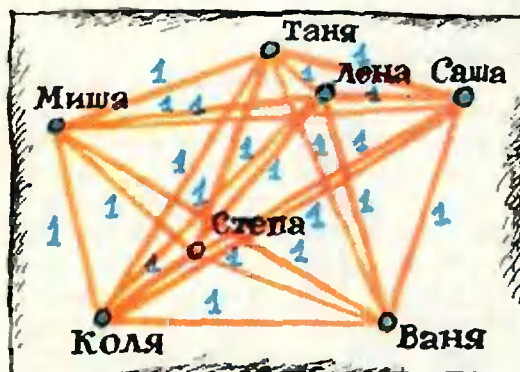


Рис. 1.

\*) По-видимому, Степа имеет в виду разговор, изложенный в статье «Доказать можно? — Доказать нельзя!» («Квант», 1978, № 1).

различных точек  $A$  и  $B$  у меня  $|AB| = 1$ , а  $1 > 0$ ; для совпадающих же точек  $A$  и  $B$  у меня  $|AB| = 0$ .

Второе свойство тоже, конечно, выполняется: для различных точек  $|AB| = 1$  и  $|BA| = 1$  — значит,  $|AB| = |BA|$ ; а для совпадающих точек  $|AB| = 0$  и  $|BA| = 0$  — опять  $|AB| = |BA|$ .

Вот с третьим свойством мне пришлось немножко ловозиться — пришлось рассмотреть несколько случаев.

Если все три точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  совпадают, то  $|AC| = |AB| = |BC| = 0$ . Значит, в этом случае  $|AC| = |AB| + |BC|$ , что можно записать и как  $|AC| \leq |AB| + |BC|$ .

Путь теперь из трех точек совпадают две. Если  $A = C$ , то  $|AC| = 0$ , а  $|AB| = |BC| = 1$ . Следовательно,  $|AC| < |AB| + |BC|$ , что опять-таки можно переписать в виде  $|AC| \leq |AB| + |BC|$ . Если  $A = B$ , то  $|AB| = 0$ , а  $|AC| = |BC| = 1$ . В этом случае  $|AC| = |AB| + |BC|$ . (Не буду я каждый раз переписывать равенство и строгое неравенство в виде  $\leq$ , хорошо?) Наконец, при  $B = C$  имеем  $|BC| = 0$ ,  $|AB| = |AC| = 1$  и снова  $|AC| = |AB| + |BC|$ .

А когда все три точки различны, то  $|AB| = |BA| = |AC| = 1$  и  $|AC| < |AB| + |BC|$ .

Ты понимаешь, что получается? Мое «телефонное расстояние» оказывается таким же серьезным, как и то, о котором говорится в школе! Все (понимаешь, все!) три свойства расстояний для него выполняются. Значит, расстояния могут быть разными? Таким, как в учебнике, и таким, как придумал я? А может, они могут быть еще какими-нибудь?

Во всяком случае, с моим расстоянием еще стоит повозиться.

Степа.

Бывает же такое!

(письмо второе)

Мишка! Что-то неладно в моей геометрии с отрезками.

В учебнике сказано, что отрезок  $AB$  — это множество, состоящее из различных точек  $A$ ,  $B$  и точек, лежащих между ними. Хорошо,

а в каком случае считается, что точка  $X$  лежит между точками  $A$  и  $B$ ? Если точки  $A$ ,  $X$ ,  $B$  различны и  $|AX| + |XB| = |AB|$ . Но при моем расстоянии для различных точек  $A$ ,  $X$  и  $B$  имеем  $|AX| = |XB| = |AB| = 1$ . Тогда  $|AX| + |XB| \neq |AB|$ , то есть не существует такой точки  $X$ , для которой выполнялось бы равенство  $|AX| + |XB| = |AB|$ . Значит, в моей геометрии точек, лежащих между двумя различными точками, не существует! Другими словами, множество точек, лежащих между точками  $A$  и  $B$ , — пустое! Но тогда отрезок в моей геометрии — это множество, состоящее из двух точек:  $|AB| = \{A, B\}$ .

Ну, как тебе это нравится? Наверное, это еще не все сюрпризы моего расстояния.

Степа.

Еще одна независимость!

(письмо третье)

Мишка, я сделал открытие! Решил я посмотреть, нормально ли расположены точки на прямой в моей геометрии. В «Геометрии 6» (п. 5) сказано, что любая точка  $O$  на прямой разбивает множество остальных точек на два таких непустых множества, что точка  $O$  лежит между любыми двумя точками, принадлежащими разным множествам (свойство 1а).

Чтобы разобраться в этом свойстве, я сделал рисунок (рис. 2). Вот прямая  $a$ . Вот точка  $O$  на ней — красная. Вот два множества, на которые точка  $O$  разбила прямую  $a$ : одно — синее, другое — зеленое. Выбрал я точки  $A$  и  $B$ , принадлежащие этим разным множествам. Точка  $O$  должна лежать между точками  $A$  и  $B$ ...

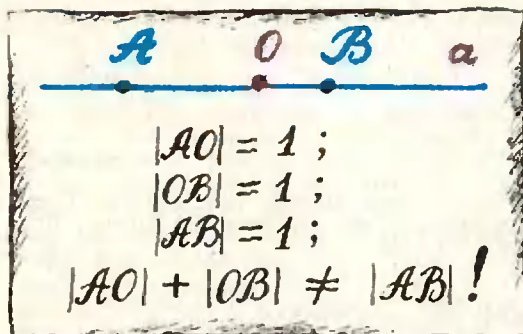


Рис. 2.

Но ведь в моей геометрии она *не* лежит между ними (см. предыдущее письмо).

Тут же я убедился, что свойство 1б также не выполняется (сделай это сам, глядя на мой рисунок).

Выходит, в моей геометрии свойства расположения точек на прямой не выполняются. Значит, логически их нельзя вывести из свойств расстояния. Другими словами, они *независимы!*

Степа.

Давай, еще что-нибудь придумаем!

(письмо четвертое)

Мишка! Роясь в старых «Квантах», я недавно прочел, что точками и прямыми можно назвать любые объекты, для которых выполняются свойства, указанные в аксиомах \*). Тогда я понял, что и расстояние — это любое число \*\*), обладающее указанными в учебнике свойствами 1—3.

И в разных геометриях расстояние может определяться по-разному: в школьной геометрии — одним способом, в геометрии Лобачевского — другим, а у меня — третьим. Важно только, чтобы выполнялись три его свойства. Так сказал Петр Иванович.

А вчера в книге Карла Левитина «Геометрическая рандомия» я нашел такое место. Великий физик Эйнштейн объясняет своему девятилетнему сыну, чем он прославился в науке: «Когда слепой жук ползет по поверхности шара, он не замечает, что пройденный им путь изогнут, мне же повезло заметить это». Давай и мы с тобой что-нибудь заметим, придумаем.

Р. С. Кажется, с расстоянием у меня намечается новое «сумасшествие». Жди, напишу.

Твой вечный друг Степа Мошкин.

\*) Степа имеет в виду статью «Точка, прямая... — что это такое?» («Квант», 1975, №№ 11—12).

\*\*) Здесь Степа выражается не очень грамотно. *Расстояние* — это не «число», а числовая функция, определенная на парах точек.

## Послесловие

Вероятно, «Степивно расстояние» показалось вам очень непривычным. Но что же делать? Раз для него выполняются все три свойства (аксиомы) расстояний, его полагается называть расстоянием.

А нельзя ли добавить какую-нибудь аксиому и расстоянием называть только то, что удовлетворяет расширенному списку аксиом? Например, на плоскости для любого числа найдется пара точек, расстояние между которыми равно этому числу. Может, включить это свойство в качестве четвертого свойства расстояний? Но тогда перестанет быть расстоянием то, что считают таковым на сфере, земном шаре или листе бумаги (объясните, почему).

Какая польза от фантазий, аналогичных степиным? Заранее и для каждого случая на этот вопрос ответить невозможно. Но для своего случая Степа дал ответ сам: *одно из свойств расположения точек на прямой не может быть выведено из свойств расстояний.*

Еще один вывод из поисков Мошкина: когда мы вводим некоторое понятие, мы исходим из одной или нескольких моделей (например, вводя понятие расстояния, мы исходим из модели, в которой расстояние измеряется с помощью масштабной линейки на плане или на листе бумаги). Но после того как мы это понятие ввели, мы должны быть готовы к тому, что у него могут быть и совсем неожиданные, непривычные модели.

## Метод наименьших квадратов

Метод наименьших квадратов применяется при обработке измерений для сглаживания «шума» эксперимента: этот метод позволяет исправить случайные ошибки, неизбежно возникающие при измерениях, в том случае, когда характер зависимости измеряемой величины от независимой переменной задан.

Рассмотрим простейшую ситуацию, когда измеряемая величина  $y$  зависит линейно от одной переменной  $x$ . Пусть проведено  $n$  измерений и для значений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  переменной  $x$  получены замеры  $y_1, y_2, \dots, y_n$ . Задача состоит в проведении прямой  $y = ax + b$ , наилучшим образом прилегающей к точкам  $P(x_1; y_1), P(x_2; y_2), \dots, P(x_n; y_n)$ .

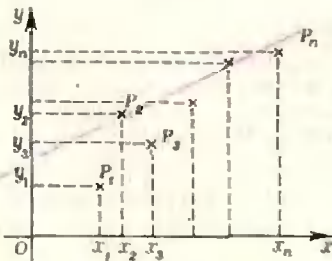
Решение задачи, разумеется, зависит от того, что понимается под словами «наилучшим образом прилегающей». Суть метода наименьших квадратов (его называют также методом Гаусса) состоит в том, что «наилучшей» считается та прямая, для которой принимает наименьшее значение сумма квадратов отклонений, т. е. выражение

$$A_n = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2. \quad (1)$$

На рисунке изображена искомая прямая  $y = ax + b$  и точки  $P_1, \dots, P_n$ . Разность  $y_i - (ax_i + b)$  показывает отклонение (вдоль оси ординат) экспериментальной точки  $P_i(x_i, y_i)$  от искомой прямой.

Как найти значение  $a$  и  $b$ , минимизирующие выражения (1)? Предположим, что такие значения существуют, и параметр  $a$  нами уже найден. Чтобы найти  $b$ , перепишем  $A_n$  в виде

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i)^2 - \sum_{i=1}^n 2b(y_i - ax_i) + \\ &+ \sum_{i=1}^n b^2 = nb^2 - 2b \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i) + \\ &+ \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i)^2. \end{aligned}$$



Рассмотрим  $A_n$  как (квадратичную) функцию от  $b$ . Она достигает минимума при

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i) = \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \frac{a}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \end{aligned}$$

Положив

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

можно написать  $b = \bar{y} - a\bar{x}$ , откуда для  $A_n$  получим

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{i=1}^n ((y_i - \bar{y}) - a(x_i - \bar{x}))^2 = \\ &= a^2 \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 - \\ &- 2a \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) + \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2. \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь  $A_n$  как квадратичную функцию от  $a$ . Она очевидно достигает минимума при

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

Наилучшей оказалась прямая  $y = ax + b$ , где

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}, \\ b &= \bar{y} - \frac{\bar{x} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}. \end{aligned}$$

### Задачи

1. Решить задачу о сглаживании шума методом Гаусса для следующих не линейных функций от одной переменной

- $y = ax^2 + bx + c$ ;
- $y = a \cdot \cos x + b \cdot \sin x$ .

2. Как «работает» метод Гаусса в пространстве (для двух независимых переменных)? Рассмотрите задачу для плоскости  $z = ax + by + c$ .\*

3. Найти точку, для которой

- сумма расстояний от трех заданных точек (не лежащих на одной прямой) минимальна;
- задача 3а) — для  $n$  точек, не лежащих на одной прямой;
- сумма расстояний от трех заданных окружностей минимальна.

А. Строгова

\* Геометрическая иллюстрация к этой задаче дана на первой полосе обложки «Кванта» № 8.



В этом номере, после летних каникул, мы возобновляем традиционную рубрику «Практикум абитуриента».

Читатели найдут в ней статьи, разъясняющие наиболее важные и сложные вопросы школьных курсов математики и физики, и предостерегающие будущих абитуриентов от характерных, типичных ошибок. Изложение теоретических положений, как правило, сопровождается разбором задач, взятых из практики приемных экзаменов в высшие учебные заведения.

Конечно, статьи «Практикума абитуриента» не могут заменить собой школьные учебники. Да они и не ставят такой цели: эти материалы рассчитаны на тех, кто уже усвоил содержащиеся в учебнике факты. Намечая темы статей, редакция использовала опыт вступительных экзаменов и учла предложения, содержащиеся в письмах читателей.

Помимо материалов, которые читатели найдут в следующих номерах журнала, при подготовке к экзаменам можно рекомендовать ознакомиться со статьями, опубликованными в прошлых номерах. Вот тематический список этих статей, начиная с 1976—1977 учебного года \*).

## МАТЕМАТИКА

### I. Общие вопросы

- «Воспоминание ... о предстоящих экзаменах» (1976, № 9),
- «Читатели советуют» (1977, № 6),
- «Читатели советуют» (1978, № 4).

### II. Геометрия

- «Прямоугольный треугольник» (1976, № 12),
- «Принадлежность точек прямой и плоскости» (1978, № 3),
- «Координатный метод» (1977, № 11),
- «Скалярные умножения векторов» (1978, № 1),
- «Конусы в каркасах» (1977, № 2),
- «Задачи на площади и двугранные углы» (1977, № 12).

### III. Алгебра и начала анализа

- «Рационально или иррационально» (1977, № 5),
- «Графическое задание функции» (1976, № 11),
- «Периодичность и непериодичность функций» (1977, № 1),
- «Множество значений числовых функций» (1978, № 2),
- «Метод отделяющих констант» (1977, № 4),
- «Наш выбор — теорема синусов» (1976, № 10),
- «Ответ в тригонометрических уравнениях» (1977, № 9),
- «Производная и касательные» (1978, № 5),
- «Производная и задачи на экстремум» (1978, № 6).

## ФИЗИКА

- «Как решать задачи на механическое движение» (1977, № 2),
- «Задачи на законы динамики материальной точки» (1977, № 11),
- «Элементы статики» (1976, № 12),
- «Закон сохранения импульса при соударениях» (1977, № 3),
- «Импульс тела и системы тел» (1977, № 12),
- «Парадокс «большого» тела» (1978, № 3),
- «Первый закон термодинамики» (1978, № 1),
- «Насыщенный пар» (1977, № 6),
- «Напряженность, напряжение, потенциал» (1978, № 5),
- «Что такое э. д. с.» (1978, № 4),
- «Линзы и системы линз» (1977, № 4),
- «Симметрия в задачах по физике» (1978, № 6).

Кроме того, в рубрике «Практикум абитуриента» было опубликовано более 30 статей с вариантами вступительных экзаменов по математике и физике разных вузов страны. Такие статьи, конечно же, будут систематически публиковаться и в дальнейшем.

Редакция надеется, что «Практикум абитуриента» станет добрым советчиком поступающим.

\* По материалам предыдущих лет имеются тематические списки в «Кванте» 1974, № 1, с. 52 и 1976, № 1, с. 60. Следует иметь в виду, что до 1977 года прием в вузы по математике осуществлялся по «старой» программе.

В. Литвиненко, А. Мордкович

## Пределы

Понятие предела является одним из важнейших в математике. Пределами широко пользуются в дифференциальном и интегральном исчислении, в геометрии, в физике. Поэтому на вступительных экзаменах в вузы вопросам, связанным с различными аспектами теории пределов, уделяется значительное внимание. В настоящей статье рассказывается о некоторых приемах вычисления пределов функций.

**О п р е д е л е н и е** («Алгебра и начала анализа 9», п. 38). Число  $b$  называют *пределом функции  $f$  при  $x$ , стремящемся к  $a$*  (короче: при  $x \rightarrow a$ ), и пишут

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

если для любого положительного числа  $\varepsilon$  существует такое положительное число  $\delta$ , что из двойного неравенства

$$0 < |x - a| < \delta \quad (1)$$

следует неравенство

$$|f(x) - b| < \varepsilon.$$

Геометрически множество всех точек  $x$ , удовлетворяющих двойному неравенству (1), — это интервал длины  $2\delta$ , из которого выброшен его центр — точка  $a$ . Такое множество точек называется *проколотой  $\delta$ -окрестностью точки  $a$*  (рис. 1)\*.

Теперь мы можем дать геометрическое истолкование определения предела: число  $b$  называется *пределом функции  $f$  при  $x \rightarrow a$* , если для любой  $\varepsilon$ -окрестности точки  $b$  найдется такая проколотая  $\delta$ -окрестность точки  $a$ , что для всякой ее точки  $x$  значение  $f(x)$  принадлежит взятой  $\varepsilon$ -окрестности числа  $b$ .

Разумеется, для каждого  $\varepsilon > 0$  выбирается, вообще говоря, своя  $\delta$ -окрестность. Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, иногда вместо  $\delta$  пишут  $\delta(\varepsilon)$  (на рисунке 2 показано, как по различным конкретным  $\varepsilon$  подбирается  $\delta(\varepsilon)$ ). С другой стороны, если для некоторого  $\varepsilon$  годится какое-то  $\delta_1$ , то для этого  $\varepsilon$  годится и любое  $\delta_2 < \delta_1$ .

Отметим два важных обстоятельства.

1) Из определения предела вытекает, что *если существует предел  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , то функция  $f$  определена в некоторой проколотой окрестности точки  $a$* . Заведомо не существует, например,  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ , если  $a$  — конец отрезка, вне которого функция  $f$  не определена (пример:  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x}$ )\*.

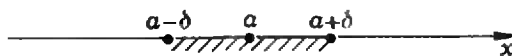


Рис. 1.

2) Значение предела при  $x \rightarrow a$  зависит только от значений функции в некоторой проколотой  $\delta$ -окрестности точки  $a$ . В частности, предел не зависит от значения функции в точке  $a$ . Точный смысл этих слов такой: *если значения функций  $f$  и  $g$  в некоторой проколотой  $\delta$ -окрестности точки  $a$  совпадают, то совпадают и их пределы при  $x \rightarrow a$* .

На рисунках 3—5 изображены графики функций, каждая из которых при  $x \rightarrow a$  имеет пределом число  $b$ . Функция на рисунке 3 определена в точке  $a$ , причем  $f(a) = b$ . Функция

\* ) Весь интервал  $] a - \delta; a + \delta [$  (включая точку  $a$ ) называют просто  *$\delta$ -окрестностью точки  $a$* .

\* ) В вузовских курсах анализа рассматриваются так называемые односторонние пределы, позволяющие придать смысл пределам в такой ситуации.

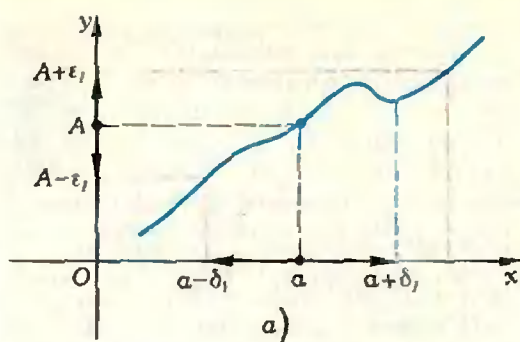


Рис. 2.

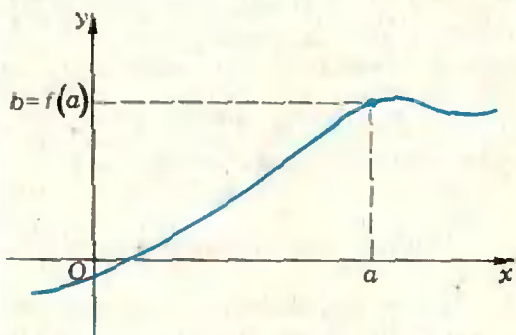
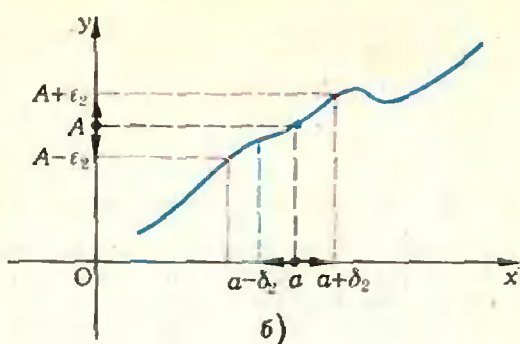


Рис. 3.

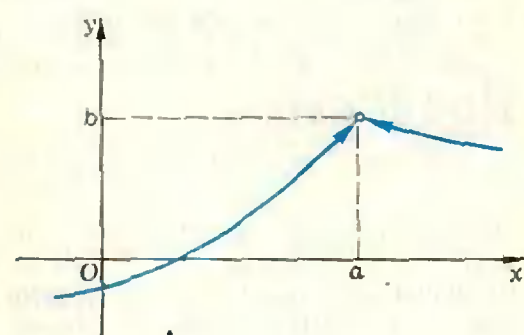


Рис. 4.

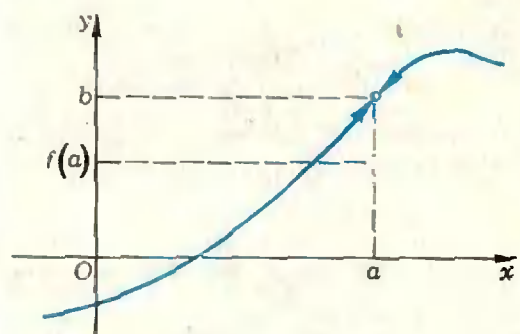


Рис. 5.

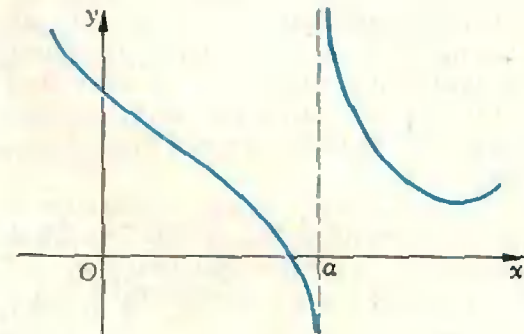


Рис. 6.

на рисунке 4 в точке  $a$  не определена. Функция на рисунке 5 в точке  $a$  определена, но  $f(a) \neq b$ .

Из этих случаев самый естественный, конечно, тот, где функция определена в точке  $a$  и принимает в ней значение, совпадающее с ее пределом при  $x \rightarrow a$  (рис. 3). Именно такие функции рассматриваются наиболее часто. Их называют функциями, непрерывными в точке  $a$ .

Итак, функция  $f$  называется непрерывной в точке  $a$ , если

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a). \quad (2)$$

Если же функция  $f$  определена в некоторой проколотой окрестности точки  $a$  и равенство (2) по той или иной причине не выполнено, функция  $f$  называется разрывной в точке  $a$ .

Таким образом, функция  $f$ , определенная в проколотой окрестности точки  $a$ , будет разрывна в точке  $a$ , если

- 1)  $f$  не определена в самой точке  $a$  (например, функция  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  разрывна в точке 0; см. также рис. 4);
- 2) предел  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  существует, но не равен  $f(a)$  (именно по этой причине разрывны в точке  $a$  функция на рисунке 5);
- 3) предел  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  не существует

(например, функции  $f(x) = \frac{|x|}{x}$  и  $f(x) = \frac{1}{x}$  разрывны в точке 0; см. также рисунки 6 и 7).



Функция  $f(x) = \sqrt{x}$  не является ни непрерывной, ни разрывной в точке 0. То же, конечно, можно сказать и о функции  $f(x) = \lg x$  в любой точке  $a \leq 0$ .

В учебнике «Алгебра и начала анализа 9» доказано, что

$$а) \lim_{x \rightarrow a} c = c,$$

$$б) \lim_{x \rightarrow a} x = a.$$

Таким образом, функции  $y = c$  и  $y = x$  непрерывны в любой точке  $a \in \mathbb{R}$ .

При вычислении пределов часто используются следующие правила:

1) если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = b + c$  (предел суммы равен сумме пределов);

2) если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (kf(x)) = kb$  (постоянный множитель можно выносить за знак предела);

3) если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = bc$  (предел произведения равен произведению пределов);

4) если  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$  и  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = c$ ,  $c \neq 0$ , то  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{b}{c}$  (предел частного равен частному пределов, если предел знаменателя отличен от нуля).

Из этих правил вытекают соответствующие теоремы о непрерывности; например, если функции  $f$  и  $g$  непрерывны в точке  $a$ , то и их произведение  $h(x) = f(x) \cdot g(x)$  непрерывно в точке  $a$  (коротко: произведение непрерывных функций — непрерывная функция).

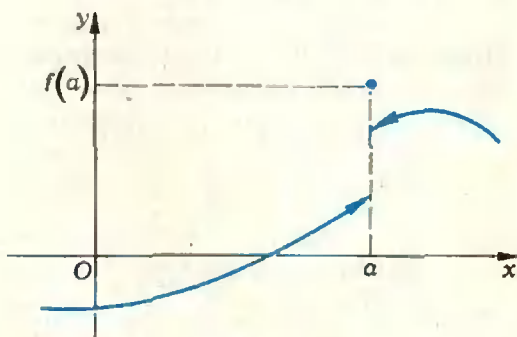


Рис. 7.

Пример 1. Вычислить

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 1}{x + 2}.$$

Решение.  $\lim_{x \rightarrow 3} x = 3$ . Значит,

$$\lim_{x \rightarrow 3} x^2 = \lim_{x \rightarrow 3} (x \cdot x) = (\lim_{x \rightarrow 3} x) \cdot (\lim_{x \rightarrow 3} x) = 3 \cdot 3 = 9.$$

$$\text{Далее, } \lim_{x \rightarrow 3} (-1) = -1, \text{ а } \lim_{x \rightarrow 3} 2 = 2. \text{ Поэтому}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 1) = \lim_{x \rightarrow 3} x^2 + \lim_{x \rightarrow 3} (-1) = 9 - 1 = 8$$

и

$$\lim_{x \rightarrow 3} x + \lim_{x \rightarrow 3} 2 = 3 + 2 = 5.$$

Наконец,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 1}{x + 2} = \frac{\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow 3} (x + 2)} = \frac{8}{5}.$$

Остановимся теперь на распространенном способе рассуждений, применяемом при вычислении пределов. Известно, что рациональные функции непрерывны во всех точках, в которых они определены («Алгебра и начала анализа 9», п. 41). Поэтому пример 1 можно решить гораздо короче.

Рациональная функция  $y = \frac{x^2 - 1}{x + 2}$  определена в точке  $x = 3$ ; следовательно, она непрерывна в этой точке. Согласно определению это означает, что предел функции при  $x \rightarrow 3$  равен значению функции в точке  $x = 3$ . Таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 1}{x + 2} = \frac{3^2 - 1}{3 + 2} = \frac{8}{5}.$$

Пример 2 (МАДИ, 1977). Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2 + x - x^2}{x^2 - 4}$ .

Решение. Рациональная функция  $y = \frac{2 + x - x^2}{x^2 - 4}$  не определена в точке  $x = 2$ , поэтому вычислить предел, используя понятие непрерывности, здесь не удастся.

Поскольку

$$f(x) = \frac{2 + x - x^2}{x^2 - 4} = \frac{(x - 2)(x + 1)}{(x - 2)(x + 2)}$$

и значения функций  $f$  и  $g(x) =$

$= -\frac{x+1}{x+2}$  совпадают во всех точках прямой, кроме точки  $x=2$  (в этой точке функция  $f$  не определена, а  $g$  определена), имеем  $\lim_{x \rightarrow 2} \left( -\frac{(x-2)}{(x-2)} \times \frac{(x+1)}{(x+2)} \right) = \lim_{x \rightarrow 2} \left( -\frac{x+1}{x+2} \right)$ . Таким образом, задача свелась к вычислению предела функции  $y = -\frac{x+1}{x+2}$  при  $x \rightarrow 2$ . Но рациональная функция  $y = -\frac{x+1}{x+2}$  в точке  $x=2$  определена, а значит, и непрерывна, то есть ее предел при  $x \rightarrow 2$  равен ее значению в точке  $x=2$ . Итак,

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2+x-x^2}{x^2-4} &= \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left( -\frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 2} \left( -\frac{x+1}{x+2} \right) = -\frac{2+1}{2+2} = -\frac{3}{4}. \end{aligned}$$

На рисунке 8 изображен график функции  $f(x) = \frac{2+x-x^2}{x^2-4}$ , который отличается от графика функции  $g(x) = -\frac{x+1}{x+2}$  лишь в точке  $x=2$ , где функция  $g$  определена и непрерывна, а  $f$  — не определена.

Замена функции  $f$ , не определенной в точке  $x=a$ , функцией  $g$ , непрерывной в этой точке и совпадающей с  $f$  в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ , является полезным приемом, часто позволяющим сразу найти предел функции  $f$  при  $x \rightarrow a$ .

Рассмотрим теперь несколько примеров вычисления пределов тригонометрических функций. При решении таких примеров используются следующие утверждения:

1<sup>о</sup> Тригонометрические функции непрерывны всюду, где они определены («Алгебра и начала анализа 10», п. 77).

2<sup>о</sup>  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  (там же, п. 78).

Пример 3. (МИНХ, 1977).

Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x \sin x}$ .

Решение. Функция  $y = \frac{\cos 2x - 1}{x \sin x}$  не определена в точке

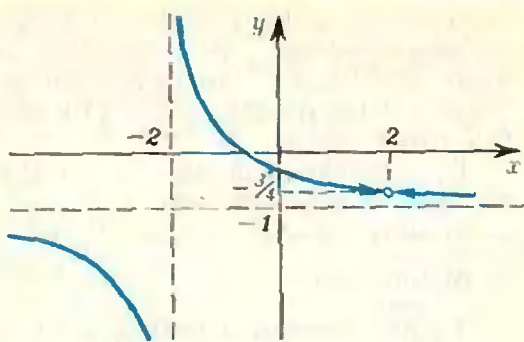


Рис. 8.

$x=0$ , поэтому вычислять предел с помощью непосредственной подстановки значения  $x=0$  в выражение, содержащееся под знаком предела, нельзя. Выполним некоторые преобразования этого выражения:

$$\frac{\cos 2x - 1}{x \sin x} = \frac{-2 \sin^2 x}{x \sin x} = \frac{-2 \sin x}{x}.$$

$$\begin{aligned} \text{Из } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \text{ следует } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin x}{x} &= \\ = -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} &= -2. \text{ Итак,} \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - 1}{x \sin x} &= -2. \end{aligned}$$

Пример 4. Вычислить

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\operatorname{tg} 2x}.$$

Решение.\*)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x - \sin 3x}{\operatorname{tg} 2x} =$

$$\begin{aligned} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x \cdot \cos 4x \cdot \cos 2x}{\sin 2x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\frac{\sin 2x}{2x}} \cdot \cos 4x \cdot \cos 2x \right). \end{aligned}$$

Из  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$  легко следует

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1$ . Функция  $f(x) = \cos 4x \cdot \cos 2x$  в точке  $x=0$  непрерывна (как произведение непрерывных функций), поэтому

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos 4x \cdot \cos 2x) = f(0) = 1.$$

\*) Пример 4, воспользовавшись равенствами  $\frac{\sin x}{\sin 2x} = \frac{\sin x}{2 \sin x \cdot \cos x} = \frac{1}{2 \cos x}$ , можно решить и без применения предела 2<sup>о</sup> (прим. ред.).

Отсюда

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{\frac{\sin 2x}{2x}} \cdot \cos 4x \cdot \cos 2x \right) = 1 \cdot \frac{1}{1} \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Рассмотрим теперь примеры вычисления пределов иррациональных функций. Здесь используются следующие утверждения:

- А) Функция  $y = \sqrt{x}$  непрерывна в любой точке  $x > 0$  \*).
- Б) Если функция  $f$  непрерывна в точке  $a$  и  $f(a) > 0$ , то функция  $y = \sqrt{f(x)}$  также непрерывна в точке  $a$ .
- В) Если функция  $f$  непрерывна в точке  $a$  и  $f(a) > 0$ , то функция  $y = \sqrt[n]{f(x)}$  также непрерывна в точке  $a$ .

Докажем утверждение Б). Для этого нам нужно по данному числу  $\epsilon_0 > 0$  найти такое число  $\delta_0 > 0$ , что для любого  $x$  из проколотой  $\delta_0$ -окрестности точки  $a$

$$|\sqrt{f(a)} - \sqrt{f(x)}| < \epsilon_0.$$

Так как функция  $f$  непрерывна в точке  $a$ , для  $\epsilon_1 = \sqrt{f(a)} \epsilon_0 > 0$  существует такое  $\delta_1 > 0$ , что для любой точки  $x$  из проколотой  $\delta_1$ -окрестности точки  $a$

$$|f(x) - f(a)| < \sqrt{f(a)} \epsilon_0.$$

В качестве искомого числа  $\delta_0$  возьмем указанное выше число  $\delta_1$ . Тогда

$$|\sqrt{f(x)} - \sqrt{f(a)}| = \frac{|f(x) - f(a)|}{\sqrt{f(x)} + \sqrt{f(a)}} \leq \frac{|f(x) - f(a)|}{\sqrt{f(a)}} < \frac{\sqrt{f(a)} \epsilon_0}{\sqrt{f(a)}} = \epsilon_0,$$

и непрерывность доказана. Заметим, что из Б) сразу следует А) (положить  $f(x) = x$ ).

Доказательство утверждения В), технически более сложного, мы не приводим.

Пример 5. Вычислить

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{8x + 1}}{x + 2}.$$

Решение. По Б) функции  $\sqrt{x^2 + 3}$  и  $\sqrt{8x + 1}$  непрерывны в

точке  $x = 1$ . В этой точке непрерывна и отлична от нуля и функция  $x + 2$ . Значит, функция, содержащаяся под знаком предела, непрерывна в точке  $x = 1$ , а потому ее предел при  $x \rightarrow 1$  равен значению функции в точке  $x = 1$ . Таким образом, имеем

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} + \sqrt{8x + 1}}{x + 2} = \frac{\sqrt{1^2 + 3} + \sqrt{8 \cdot 1 + 1}}{1 + 2} = \frac{2 + 3}{3} = \frac{5}{3}.$$

Пример 6 (МИНХ, 1977).

Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}{x}$ .

Решение. Функция  $y = \frac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}{x}$  не определена в точке  $x = 0$ . Поэтому вычислить ее предел при  $x \rightarrow 0$  так, как это было сделано в предыдущем примере, не удастся. В случае иррациональных выражений часто используется прием освобождения от иррациональности. Умножим и числитель, и знаменатель дроби на такое выражение, чтобы в числителе получилась разность кубов  $(\sqrt[3]{1-x})^3 - (\sqrt[3]{1+x})^3$ . Таким выражением будет

$$(\sqrt[3]{1-x})^2 + \sqrt[3]{1-x} \cdot \sqrt[3]{1+x} + (\sqrt[3]{1+x})^2$$

$$\begin{aligned} \text{Получаем } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}) \left( (\sqrt[3]{1-x})^2 + \sqrt[3]{1-x} \cdot \sqrt[3]{1+x} + (\sqrt[3]{1+x})^2 \right)}{x \left( (\sqrt[3]{1-x})^2 + \sqrt[3]{1-x} \cdot \sqrt[3]{1+x} + (\sqrt[3]{1+x})^2 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2x \left[ x \left( (\sqrt[3]{1-x})^2 + \sqrt[3]{1-x} \cdot \sqrt[3]{1+x} + (\sqrt[3]{1+x})^2 \right) \right]}{x \left( (\sqrt[3]{1-x})^2 + \sqrt[3]{1-x} \cdot \sqrt[3]{1+x} + (\sqrt[3]{1+x})^2 \right)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} -2 \left[ \frac{(\sqrt[3]{1-x})^2 + \sqrt[3]{1-x} \cdot \sqrt[3]{1+x} + (\sqrt[3]{1+x})^2}{(\sqrt[3]{1-x})^2 + \sqrt[3]{1-x} \cdot \sqrt[3]{1+x} + (\sqrt[3]{1+x})^2} \right] \end{aligned}$$

По В) функции  $\sqrt[3]{1-x}$ ,  $\sqrt[3]{1+x}$  и  $\sqrt[3]{1+x}$  непрерывны в точке  $x = 0$ . Используя утверждения о непрерывности суммы произведения и частного, приходим к выводу, что функция

\* «Алгебра и начала анализа 9», п. 38, задача 313.

$$\frac{-2}{(\sqrt[3]{1-x})^2 + \sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{1+x} + (\sqrt[3]{1+x})^2}$$
 непрерывна в точке  $x=0$ . Но в точке  $x=0$  она принимает значение  $-\frac{2}{3}$ . Значит, предел этой функции равен  $-\frac{2}{3}$ . Таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1-x} - \sqrt[3]{1+x}}{x} = -\frac{2}{3}.$$

Пример 7 (МИНХ, 1977).

Вычислить  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}$ .

Решение. Для вычисления этого предела недостаточно освободиться от иррациональности только в числителе или только в знаменателе; здесь нужно и числитель, и знаменатель умножить на «сопряженные» выражения:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{5-x}-2)}{(\sqrt{2-x}-1)} \times \\ &\times \frac{(\sqrt{5-x}+2)(\sqrt{2-x}+1)}{(\sqrt{2-x}+1)(\sqrt{5-x}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{((5-x)-4)(\sqrt{2-x}+1)}{((2-x)-1)(\sqrt{5-x}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1-x)(\sqrt{2-x}+1)}{(1-x)(\sqrt{5-x}+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{5-x}+2}. \end{aligned}$$

Так как полученная функция  $y = \frac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{5-x}+2}$  непрерывна в точке  $x=1$ , ее предел при  $x \rightarrow 1$  равен значению функции в точке  $x=1$ . Таким образом,

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2-x}+1}{\sqrt{5-x}+2} = \frac{\sqrt{2-1}+1}{\sqrt{5-1}+2} = \frac{1}{2}.$$

Это же значение имеет и искомый предел.

Упражнения  
Вычислите следующие пределы:

- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2-3}{x-4}$ .
- (МАДИ, 1977)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-3x+2}$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{6x}$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 5x}{6x^2}$ .
- $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{x+9}-4}{x^2-49}$ .
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 6x}{\sin^2 3x}$ .
- (МАДИ, 1977)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1+\cos x}{\sin x}$ .
- (МЭИ, 1977)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( ((1+x^2)\sqrt{x^2+1})^{\frac{1}{3}} - ((1-x^2)\sqrt{x^2-1})^{\frac{1}{3}} \right) \cdot (\sqrt{1+x^2} + \sqrt{1-x^2})^9$ .

(Окончание. Начало см. с. 34).

Фейнман Р. и др. *Фейнмановские лекции по физике*. Книга 3-я, 4-я. (Излучение, волны, кванты. Кинетика, теплота, звук). Ц. 2 р. 25 к.

Фейнман Р. и др. *Фейнмановские лекции по физике*. Книга 5-я. (Электричество и магнетизм). Ц. 1 р. 34 к.

Фейнман Р. и др. *Фейнмановские лекции по физике*. Книга 6-я. (Электродинамика). Ц. 1 р. 54 к.

Фейнман Р. и др. *Фейнмановские лекции по физике*. Книга 7-я. (Физика сплошных сред). Ц. 1 р. 42 к.

*Элементарный учебник физики*. Под ред. Г. С. Ландау и Е. М. Лифшица. Т. I. Ц. 1 р. 11 к. Т. II. Ц. 91 к.

Яворский Б. М., Детлаф А. А. *Справочник по физике*. Ц. 2 р. 68 к.

Воронцов-Вельяминов Б. А. *Сборник задач и практических упражнений по астрономии*. Ц. 82 к.

Дагаев М. М. *Солнечные и лунные затмения*. Ц. 35 к.

Зигель Ф. Ю. *Астрономы наблюдают*. Ц. 40 к.

Рябов Ю. А. *Движение небесных тел*. Ц. 35 к.

Шкловский И. С. *Звезды. Их рождение и смерть*. Ц. 1 р. 10 к.

Заказы направляйте по адресу: 103031, Москва, Петровка, 15. Магазин № 8 «Техническая книга». Отдел «Книга — почтой».



## Математика на шахматной доске

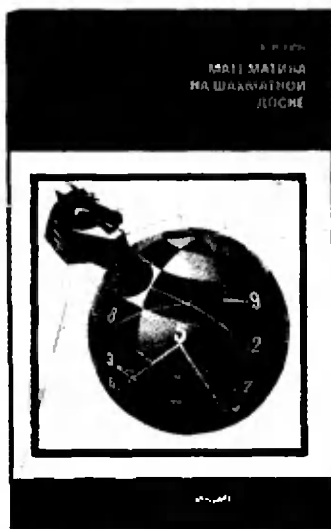
В 1975 году в издательстве «Наука» вышла книга, посвященная одновременно шахматам и математике \*). Любопытна история появления этой книги.

В 1971 году в «Кванте» № 9—12 были напечатаны «Шахматно-математические заметки» Е. Гика. Поскольку среди юных любителей математики и физики трудно найти ребят, не умеющих играть в шахматы, то такая публикация казалась нам достаточно полезной. Шахматы, как известно, сами по себе развивают сообразительность, логическое мышление, остроту ума. Тем больший интерес представляет рассмотрение вопросов, находящихся на стыке шахмат и математики. Математические и логические задачи, связанные с шахматами, необычны, оригинальны и порождают много любопытных и глубоких идей. Многочисленные отклики читателей заставили нас продолжить публикацию шахматно-математических статей, а Е. Гик стал, так сказать, нашим постоянным шахматно-математическим корреспондентом. Удачное сочетание интересов (автор — математик, кандидат технических наук, мастер спорта по шахматам и журналист) позволило ему на-

писать целый ряд материалов на данную тему, в том числе в «Кванте» № 9, 1975 г. было опубликовано его интервью с экс-чемпионом мира по шахматам М. Талем «Когда катет длиннее гипотенузы».

Эти статьи и составили основу данной книги. Первый тираж книги — 10 000 экземпляров разошелся мгновенно, и издательство выпустило дополнительно еще 10 000 экземпляров. Уже одно это обстоятельство свидетельствует о большом успехе книги.

Материал рецензируемой книги весьма разнообраз-



разен, и вряд ли стоит подробно останавливаться на ее содержании. Практически в ней затронуты все существующие точки соприкосновения между математикой и шахматами. Рассмотрены различные задачи с шахматной доске, о маршрутах, расстановках и силе фигур, приводятся шахматно-математические «рекорды», рассказывается о необычных играх на шахматной доске. Здесь можно найти задачи «о ходе коня» и «о восьми ферзях», которыми занимались великие математики Л. Эйлер и К. Гаусс. Читатель узнает из книги о шахматных «достижениях» ЭВМ и геометрических свойствах

шахматной доски, познакомится с системами проведения шахматных соревнований и т. д. Некоторые из рассмотренных вопросов носят более математический характер, другие будут интересны как любителям занимательной математики, так и любителям шахмат. Например, отдельная глава книги посвящена математической системе коэффициентов Эло, которые сейчас широко используются для оценки и прогноза результатов шахматистов в турнирах \*).

Книга «Математика на шахматной доске» представляет собой результат большой исследовательской работы. В ней содержится множество ссылок на различные источники, в том числе малоизвестные. Ряд задач публикуется впервые. Многие подходы и идеи, рассмотренные автором, новы и оригинальны.

Чтобы не быть голословными, мы приводим несколько задач из этой книги, решение которых, мы надеемся, доставит нашим читателям большое удовольствие.

1. За сколько ходов два ферзя на доске  $n \times n$  могут заматовать неприятельского короля (других фигур на доске нет)? Тот же вопрос для бесконечной доски.

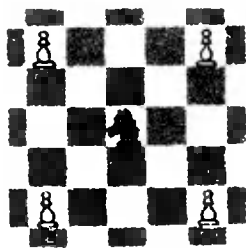
2. На полях доски  $n \times n$  последовательно выписаны числа от 1 до  $n^2$  (на первой горизонтали слева направо от 1 до  $n$ , на второй от  $n+1$  до  $2n$ , и т. д.). На этой доске расставлены  $n$  ладей так, что никакие две из них не угрожают друг другу. Какие значения может принимать сумма чисел на полях, занятых ладьями?

3. На бесконечной доске расставлены пешки через три поля на четвертом

\* ) Е. А. Гик. Математика на шахматной доске. М., «Наука», 1975.

\* ) Главу о коэффициентах Эло автор переработал специально для «Кванта», и она будет опубликована в одном из ближайших номеров журнала.

(рис. 1). Может ли конь попасть на все свободные поля этой доски, посещая каждую из них по одному разу?



4. На шахматной доске  $8 \times 8$  сделать конем максимальное число ходов подряд так, чтобы путь коня не самопересекался (центры каждой пары соседних полей на пути коня соединяются отрезком прямой).

5. Расставить на обычной шахматной доске полный комплект фигур одного цвета (король, ферзь, две ладьи, два слона — не обязательно разноцветных! — два коня, пешек нет), так, чтобы все поля доски, включая занятые фигурами, находились под обстрелом.

6. Расставить на обычной шахматной доске полный комплект фигур одного цвета (без пешек) так, чтобы в их распоряжении было:

- а) максимально возможное число ходов;
- б) минимально возможное число ходов.

Конечно, материал книги, несмотря на ее разнообразие, не исчерпывает всей проблематики. Так, уже после выхода книги состоялся второй чемпионат мира по шахматам среди ЭВМ, при помощи ЭВМ были получены важные результаты в области ладейных эндшпилей, в «Кванте» № 12, 1977 г. была существенно продвинута одна задача о ферзях, которая в книге еще относилась к числу нерешенных проблем,\* и т. д.

Надо надеяться, что при переиздании книги автор дополнит ее новым интересным материалом.

М. Смолянский

\* М. Мамиков. Задача о ферзях («Квант», 1977, № 12, с. 22).

## Мир, лишенный очертаний

Механика вообще и гидродинамика, в частности, считаются скучными науками, и, может быть, поэтому популяризаторы обходят их вниманием. Тем с большим любопытством берешь в руки книгу болгарского ученого К. Кузова «Мир без форм» (М., «Мир», 1976), вышедшую на русском языке в серии «В мире науки и техники».

Мир без форм — это мир жидкостей и газов, которые, как известно, не имеют собственных очертаний. Строго говоря, изучением поведения жидкостей и газов занимаются разные науки: гидродинамика и газодинамика. Но в свойствах жидкостей и газов столь много общего, что их можно изучать и описывать вместе. Поэтому-то обе дисциплины обычно объединяют в одну — гидрогазодинамику, или, более кратко, — гидродинамику.

Гидродинамика не испытала ни революционных потрясений (вроде рождения теории относительности), ни ожесточенной полемики (подобной полемике между Ньютоном и Гюйгенсом о природе света), ни неожиданных, эффектных открытий (как, скажем, обнаружение радиоактивности или рентгеновских лучей). В течение многих веков она развивалась постепенно, эволюционно, накапливая, суммируя и обобщая знания, впитывая достижения других наук и делясь с ними своими успехами, а главное — давая богатые выходы в практику, в технику. Не постигнув законов гидродинамики, люди не научились бы летать, не проникли бы в глубины моря, не смогли бы перекрывать реки, перекачивать нефть по гигантским трубопроводам, управлять химическим производством, прогнозировать погоду, «ремонтировать»

сердца и сосуды... С этой наукой и знакомит книга К. Кузова.

Чтобы сразу увлечь читателя, автор на первых же страницах рассказывает о парадоксах, которые невозможно объяснить, не привлекая гидродинамики. Например, если положить в стеклянную воронку шарик для пинг-понга и сильно подуть в нее через узкий конец (скажем, из пылесоса), то, как ни странно, шарик не вылетит наружу, даже если воронку перевернуть «кверху дном». Что уравнивает силу тяжести? Что толкает шарик внутрь воронки, притом тем сильнее, чем сильнее мы будем дуть? Другой пример: если тот же шарик пустить в свободную струю воздуха, созданную феном для сушки волос или пылесосом, то шарик не отлетит в сторону, а останется в струе и будет неуклонно следовать за ней, куда бы мы ее ни перемещали.

На этих и других, более сложных, примерах иллюстрируются проявления физических законов, которым подчиняются газы и жидкости. Такой метод изложения характерен для книги: все понятия, все соотношения автор вводит, отталкиваясь либо от повседневной практики, либо от технических устройств, либо от исторических событий (нередко малоизвестных). Так, представления о вязкости и «прилипанию», а также фундаментальное понятие пограничного слоя разъясняются сначала на примерах полета «крученого» мяча, которого так опасаются футбольные вратари, и конструкции необычного корабля — «парусника без паруса», изобретенного Флетнером. В дальнейшем анализируются (конечно, уже с позиций теории пограничного слоя) такие явления, как турбулентность, подъемная сила крыла, сопротивление движению в жидкости. Элементом гидродинамики посвящены две главы книги: «На подступах к миру без форм» и «Внимание! Путешественник по гидродинамике».



Знание законов гидродинамики, утверждает автор, абсолютно необходимо для всех, кто имеет дело с морской стихией и атмосферой, особенно для моряков и летчиков. Свое утверждение он подкрепляет многочисленными фактами, главным образом печальными. Так, игнорирование закономерностей, заложенных в уравнении Бернулли, стало причиной столкновения броненосца «Хок» с суперлайнером «Олимпик», а пренебрежение законом Архимеда и основным из них «принципом непотопляемости», который был разработан академиком Крыловым, вызвало одну из самых страшных трагедий за всю историю мореплавания — гибель «Титаника».

В природе и повседневной практике большую роль играет вихревое движение жидкостей и газов. Вихри — это разрушительный смерч на море и безобидная воронка в ванне, опасный след самолета и водоворот в реке. Как образуются вихревые явления, какое влияние они оказывают на движение судов и самолетов, на работу двигателей и турбин, на прочность конструкций — обо всем этом рассказано в книге.

Столь же большое место отведено другому каверзному явлению — кавитации, или, по образному определению автора, «холодному кипению». Кавитация — это возникновение

и быстрое «схлопывание» пузырьков воздуха, что приводит к мгновенному локальному повышению давления вплоть до 100000 атмосфер. При этом покрываются «язвами» и в конечном счете разрушаются корабельные винты, лопатки турбин и насосов, детали атомных реакторов. Оказывается, действию кавитации подвержены не только детали, движущиеся в жидкости с огромными скоростями, но и поверхности неподвижных тел, погруженных в неподвижные жидкости! Автор подробно знакомит с причинами возникновения кавитации, с мерами профилактики и лечения этой опасной болезни.

Две главы — «Жидкости сопротивляются» и «Не только птицы летают» — повествуют об истории борьбы за скорости в мореплавании и авиации. Человек учится у природы — этот тезис красной нитью проходит через все повествование. Оказывается, чешуйчатый покров рыб — не просто защитный слой, но и активный участник движения, средство снижения сопротивления водной среды. Еще более удивительно, что ту же функцию выполняют жабры. Когда жаберные крышки слегка приподнимаются (действуя подобно клапанам насоса), вода из рта рыбы устремляется к жабрам. Там она отдает растворенный кислород и, вытекая из жаберных отверстий в виде сильной струи, «сдувает» пограничный слой. Идея «сдувания» или «отсоса» пограничного слоя широко используется сейчас в авиации и космонавтике. Аналогично, идея предкрылков и закрылков, непременных элементов современного самолета, заимствована у птиц. В последнее время объектом пристального внимания ученых, в том числе гидродинамиков, стали дельфины, способные развивать скорость до 65 километров в час. С некоторыми своими «секретами» дельфины уже поделились, остальные еще предстоит узнать, и тогда корабли научатся плавать еще быстрее и увереннее, чем сейчас.

Об «игрушках», которыми любят «забавляться» ученые, рассказывается в главе «Моделирование». «При модельных испытаниях, — пишет автор, — реальные явления предстают перед нами в измененных масштабах, т. е. при других геометрических размерах и величинах действующих сил. Это позволяет ученым за один час «пережить» столетия или за неделю — секунду, дает возможность, насколько это необходимо, усилить или ослабить природные явления, сделать их доступными для наших чувств и аппаратуры».

К сожалению, подробно остановившись на физическом и геометрическом моделировании, автор ни словом не обмолвился о моделировании математическом, которое за последние годы, в связи с развитием ЭВМ, стало мощным средством решения научных и инженерных задач в гидродинамике.

Книга обильно иллюстрирована фотографиями гидродинамических процессов. Но ведь газы и жидкости, как правило, бесцветны! Как же получены эти снимки, на которых отчетливо видны линии тока, ударные волны? Современные экспериментальные методы гидродинамики, начиная с простейшей грубки Пито и кончая лазерными приборами, описаны в главе «Можем ли мы видеть течения?».

Резюмируя обзор небольшой книги К. Кузова, хотелось бы привести слова автора, который так сформулировал свою цель: «Главная задача этой книги — способствовать полуляризации гидрогазодинамики, сломать барьер страха перед сложными формулами специальной литературы и привлечь внимание молодежи к важной отрасли человеческого знания, значение которой в практической жизни людей непрерывно возрастает».

Что ж, можно с уверенностью сказать, что книга К. Кузова вполне отвечает этой задаче.

И. Зорич



Поговорим об определениях

(см. «Квант» № 6)

1. «В одну сторону» утверждение очевидно (см., в частности, теорему 18 из «Геометрии 6»). Пусть теперь отображение плоскости на себя обладает перечисленными свойствами. Докажем, что оно является симметрией с центром  $O$ .

Для этого заметим сперва, что для любой точки  $A$  точки  $A, O$  и  $A'$  лежат на одной прямой, поскольку прямая  $AO$  переходит в параллельную прямую и содержит неподвижную точку  $O$ . Возьмем любую точку  $M$ . Так как  $MB \parallel M'B'$ , треугольники  $OBM$  и  $OB'M'$  конгруэнтны (рис. 1). Значит,  $|MO| = |M'O|$ .

2. а)  $\hat{C} = 90^\circ$ . б) Если  $O$  — точка пересечения биссектрис, то  $\widehat{AOB} = \frac{1}{2}\hat{C} = 90^\circ$ ;

таким образом, прямобиссектрисных треугольников не существует. в) Обозначим  $|AB|$  через  $2c$ . Если  $Q$  — точка пересечения медиан и  $(CQ) \cap (AB) = P$ , то  $[QP]$  — медиана прямогоугольного треугольника  $ABQ$ . Значит,  $|PQ| = c$ . Тогда  $|QC| = 2c, |PC| = 3c$ . Рассмотрим теперь окружности  $(P, c)$  и  $(P, 3c)$ . Возьмем произвольную точку  $Q' \in (P, c)$ , отличную от  $A$  и  $B$ . Пусть  $(PQ') \cap (P, 3c) = C'$ . Легко видеть, что треугольник  $ABC'$  является прямоугонным. Таким образом,

$0^\circ < \hat{C} \leq \widehat{ADB}$ , где  $[DP] \perp [AB]$  и  $D \in (P, 3c)$ , т. е.  $0^\circ < \hat{C} \leq 2 \arctg \frac{1}{3} (\approx 36^\circ 52')$ .

3. а) Пусть  $ABCD$  — неплоский правильный четырехугольник. Повернув треугольник  $BCD$  вокруг  $(BD)$  так, чтобы он лег на плоскость  $(ABD)$ , мы получим (плос-

кий) ромб. Следовательно, любой неплоский правильный четырехугольник (если он существует!) может быть получен перегибанием некоторого ромба  $ABCD$  вокруг диагонали, причем, очевидно, меньшей диагонали.

Пусть теперь  $ABCD$  — произвольный ромб, не являющийся квадратом, с острым углом  $\hat{A} = \alpha$ . Тогда  $\hat{B} = 180^\circ - \alpha > \alpha$ . Начнем поворачивать  $\angle BCD$  вокруг  $(BD)$ .

Величина  $\widehat{ABC}$  будет при этом все время уменьшаться. Поскольку в начальный момент она  $> \alpha$ , а в конечный (когда точка  $C$  совпадает с точкой  $A$ ) равна  $0^\circ$ , в какой-то момент будем иметь  $\hat{B} = \hat{D} = \alpha$ . (Здесь мы опираемся на одно из важнейших свойств непрерывных функций — свойство «принимать любое промежуточное значение». Некоторый намек на это свойство дан в п. 84 учебника «Алгебра и начала анализа 10».) Соответствующий неплоский четырехугольник будет, очевидно, правильным. Таким образом, неплоский правильный четырехугольник существует и угол  $\alpha$  между соседними звеньями в нем может принимать любое значение  $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ .

б) Покажем, что неплоского правильного пятиугольника не существует. Наметим (не очень простое) доказательство этого утверждения. Допустим, что  $A_1A_2A_3A_4A_5$  — такой пятиугольник.

Покажем, прежде всего, что четыре его вершины лежат в одной плоскости. Найдутся такие три вершины, что остальные две лежат по одну сторону от плоскости, образованной этими тремя вершинами. Если это — три последовательные вершины, например,  $A_1, A_2, A_3$ , то точки  $A_4$  и  $A_5$  симметричны относительно плоскости  $\alpha$ , проходящей через биссектрису угла  $A_1A_2A_3$  перпендикулярно  $(A_1A_2A_3)$ ; поэтому  $[A_4A_5] \perp \alpha$ ; с другой стороны,  $[A_4A_5] \perp \alpha$ ; значит,  $[A_4A_5] \parallel [A_1A_3]$ , т. е. вершины  $A_1, A_2, A_3, A_4$  лежат в одной плоскости. Если же это, скажем,  $A_1, A_2, A_4$ , то аналогично показывается, что в одной плоскости лежат вершины  $A_1, A_2, A_3, A_5$ .

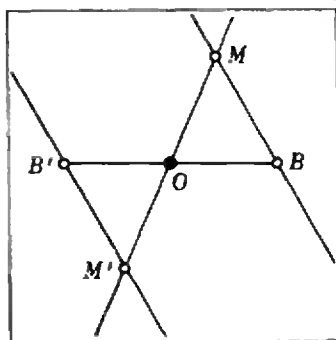


Рис. 1.

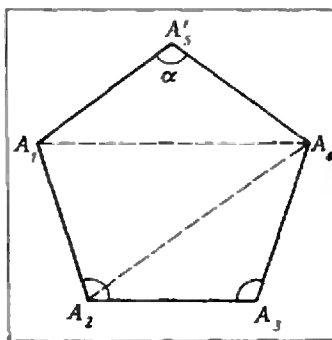


Рис. 2.

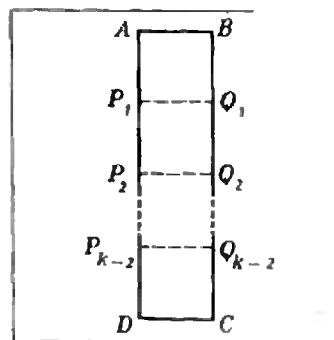


Рис. 3.



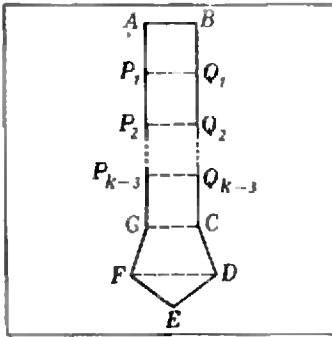


Рис. 4.

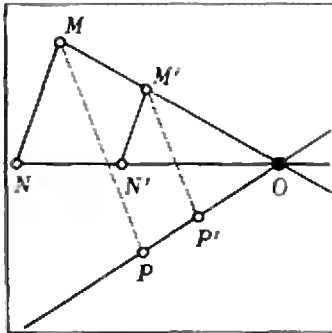


Рис. 5.

Итак, пусть точки  $A_1, A_2, A_3, A_4$  лежат в одной плоскости. Повернув  $\triangle A_1A_3A_5$  вокруг  $(A_1A_4)$ , мы придём к плоскому пятиугольнику  $A_1A_2A_3A_4A_5$  с равными сторонами, в котором  $\hat{A}_2 = \hat{A}_3 = \hat{A}_5$ . Из определения правильного многоугольника вытекает, что ломаная  $A_1A_2A_3A_4$  не имеет самопересечений. Поэтому  $\hat{A}_2 \geq 90^\circ$  (рис. 2).

Из  $\triangle A_1A_5A_4 \cong \triangle A_2A_3A_4$  вытекает  $[A_2A_4] \cong [A_1A_4]$ . Значит,  $A_4\hat{A}_2A_1 = \hat{A}_4A_1A_2$ . Из  $A_4\hat{A}_2A_3 = A_4\hat{A}_1A_5$  следует теперь  $A_2\hat{A}_1A_5 = A_1\hat{A}_2A_3$ . Таким образом, плоский пятиугольник  $A_1A_2A_3A_4A_5$  — правильный. Но, очевидно, из плоского правильного пятиугольника, перегибая его вокруг диагонали, неплоского правильного пятиугольника получить нельзя.

**Примечание.** Можно показать, что неплоские правильные  $n$ -угольники существуют при всех  $n > 3$ , кроме  $n = 5$ . В самом деле, при  $n = 2k$ , где  $k \geq 3$ , искомым многоугольником (с прямыми углами) можно получить, перегнув  $k - 2$  раз плоский прямоугольник, одна сторона которого в  $k - 1$  раз больше другой, по линиям  $P_1Q_1, P_2Q_2, \dots, P_{k-2}Q_{k-2}$  (рис. 3). При  $n = 2k + 1$ , где  $k \geq 3$ , такой многоугольник (все углы которого снова прямые) можно получить из изображённого на рисунке 4 (невыпуклого) семиугольника  $ABCDEF G$  с тремя прямыми углами  $A, B, E$ , у кото-

рого 5 сторон конгруэнтны, а  $|BC| = |GA|$  больше их в  $k - 2$  раз; его надо перегнуть по отрезкам  $P_1Q_1, P_2Q_2, \dots, P_{k-2}Q_{k-2}, CG, DF$ .

Какими могут быть углы неплоского правильного  $n$ -угольника, где  $n \geq 6$ , пока, видимо, никому не известно.

4. Пусть любой отрезок  $AB$  переходит при отображении в конгруэнтный отрезок  $A'B'$  того же направления. Покажем, что это отображение — параллельный перенос. Возьмем точку  $M_0$ ; пусть она переходит в точку  $M'_0$ . Докажем, что, какова бы ни была точка  $M$ ,  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{M_0M'_0}$ .

Поскольку отрезок  $M_0M$  переходит в отрезок  $M'_0M'$  с сохранением направления, т. е.  $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M'_0M'}$ , получаем  $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MM_0} + \overrightarrow{M_0M'} = \overrightarrow{MM_0} + \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0M} + \overrightarrow{MM_0} = \overrightarrow{M_0M'_0}$ .

Второе определение удобнее: композиция отображений, обладающих некоторым свойством, тоже обладает этим свойством.

5. Пусть отображение плоскости на себя обладает указанным свойством. Возьмем произвольные точки  $M$  и  $N$ . Так как  $MM' \parallel NN'$  (рис. 5) и  $k \neq 1$ , прямые  $MM'$  и  $NN'$  пересекаются. Обозначим точку их пересечения через  $O$ . Из подобия треугольников  $OMN$  и  $OM'N'$  вытекает, что  $\frac{|OM'|}{|OM|} = k$ . Если мы возьмем еще

точку  $P$ , то нетрудно установить, что  $(PP') \cap (MM') = O$ , т. е. точка  $O$  не зависит от выбора точек  $M, N$ .

### Кроссворд «Соты» \*)

(см. «Квант» № 8)

1. Прогиб. 2. Капрон. 3. Евклид. 4. Фарада. 5. Усагин. 6. Галлон. 7. Оптика.
8. Вектор. 9. Скаляр. 10. Курако. 11. Модуль. 12. Рыбкин. 13. Протон. 14. Джоуль.
15. Лотбак. 16. Восемь. 17. Работа. 18. Делоне. 19. Способ. 20. Датчик. 21. Вольт.
22. Тиконд. 23. Эрстед. 24. Эбонит. 25. По черк. 26. Крылов. 27. Облако. 28. Эднсон.
29. Гитара. 30. Компас. 31. Козлов. 32. Радуга. 33. Пассат. 34. Ландау. 35. Сатурн.
36. Сектор. 37. Кварта. 38. Плазма. 39. Лакруа. 40. Плутон. 41. Пробка. 42. Катион.
43. Призма. 44. Капица. 45. Линник. 46. Зодиак. 47. Анализ. 48. Орбита.

\*) Автор кроссворда — В. Шестаков

## Игра «Йога»

Игра «Йога» \*) предназначена для одного человека.

Она состоит в следующем:

Доска из 33 полей имеет форму, показанную на рисунке 1; на каждое поле ставится по фишке, затем одна фишка убирается; на каждом ходу можно перепрыгивать любой фишкой через любую соседнюю (по горизонтали или вертикали) на пустое поле — при этом перепрыгнутая фишка снимается; цель игры — снять с доски все фишки, кроме одной.

Петрудио проверить, что, *какую бы фишку мы ни убрали первоначально, снять все фишки, кроме одной, можно*. Из соображений симметрии ясно, что проверку достаточно провести для случая, когда первоначально снимаются фишки d1, d2, d3, d4, e1, e2, e3 (рис. 1 на 3 с. обложки). Впрочем, некоторые из этих случаев сводятся друг к другу.

*Пусть вначале удалена фишка d3. Докажем, что, когда на доске останется одна фишка, она будет стоять на одном из полей a3, d3, g3, d6.*

Раскрасим доску в три цвета, как на рисунке 2. Легко заметить, что при каждом ходе число фишек каких-то двух цветов уменьшается на 1, а третьего цвета — возрастает на 1 (рис. 3). Значит, после каждого хода четность числа фишек каждого цвета меняется на противоположную.

В исходном положении у нас 11 фишек стоит на синих полях, 11 — на красных и 10 — на белых. Мы хотим, чтобы осталась одна фишка — для этого надо сделать 31 ход. Когда четность изменится 31 раз, у нас будет четное число синих фишек, четное число — красных и нечетное — белых. Следовательно, единственная оставшаяся фишка будет на белом поле.

Чтобы закончить доказательство, раскрасим доску по-другому: как на рисунке 4. Аналогичное рассуждение показывает, что и при этой раскраске последняя фишка

должна стоять на белом поле. Поскольку поля, белые при обеих раскрасках, — это и есть четыре поля, указанные в условии задачи, доказательство закончено.

### Задачи

1. На каких полях может остаться фишка, если вначале мы сняли фишку с поля e1?

2. Раскрасим доску, как на рисунке 5. Удалим вначале фишку с поля e3. а) Какое наименьшее число «белых» (т. е. стоящих на белых полях) фишек необходимо съесть, чтобы уничтожить все «черные» фишки? б) Какое наименьшее число «черных» фишек необходимо сбить, чтобы уничтожить все «белые» фишки?

3. В квадрате  $11 \times 11$  расставлена 81 фишка, как на рисунке 6. Докажите, что, действуя по правилам игры «Йога», нельзя добиться того, чтобы осталась только одна фишка.

4. На шахматной доске расставили 64 фишки и сняли фишку с поля a1; на каждом ходу можно перепрыгивать любой фишкой через две соседние (по горизонтали или вертикали) на пустое поле, снимая с доски обе перепрыгнутые фишки. Какого наименьшего числа фишек можно добиться и как эти фишки будут располагаться? Как изменится ответ, если заполнить фишками все 64 поля и добавить к доске еще одно поле (пустое) рядом с клеткой a1?

А. Толпыго

---

#### Номер готовили:

А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова,  
А. Сосинский, В. Тихомирова,  
Ю. Шиханович

---

#### Номер оформили:

Е. Барк, М. Дубах, Г. Красиков,  
Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова

---

Зав. редакцией Л. Чернова

---

Художественный редактор Т. Макарова

---

Корректоры О. Бутусова и В. Сорокина

---

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16,

«Квант», тел. 231-83-62

Сдано в набор 28/VI-78

Подписано в печать 15/VIII-78 г.

Бумага 70x109<sup>2</sup>/<sub>16</sub> Физ. печ. л. 4

Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,58 Т-16204

Цена 30 коп. Заказ 1468. Тираж 301 160 экз.

---

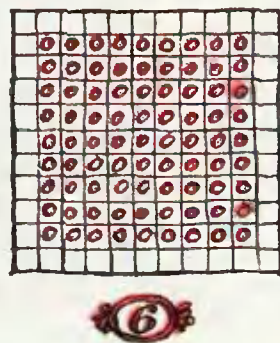
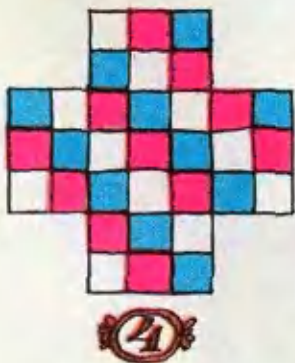
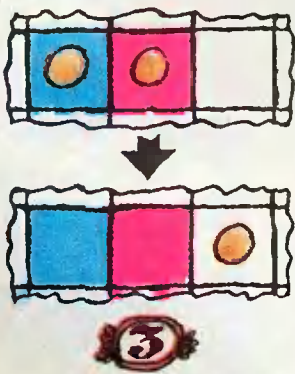
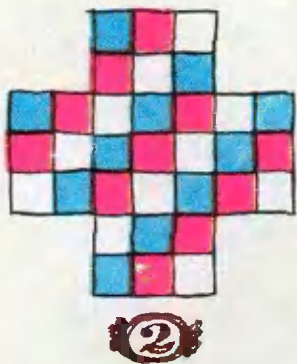
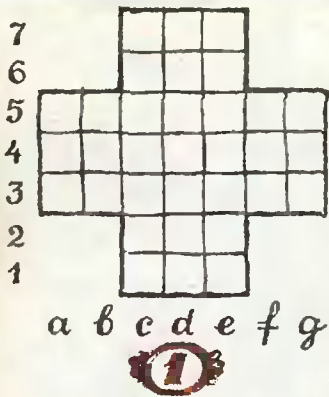
Чеховский полиграфический комбинат  
Союзполиграфпрома  
при Государственном комитете  
СССР по делам издательства,  
полиграфии и книжной торговли,  
г. Чехов Московской области

---

Рукописи не возвращаются

---

\*) Раньше она называлась «солитер».



Цена 30 коп.  
Индекс 70465

Этот замечательный пример симметричного разбиения плоскости придуман знаменитым голландским художником Эшером. Постарайтесь найти другие закономерности, «управляющие» этим рисунком.

