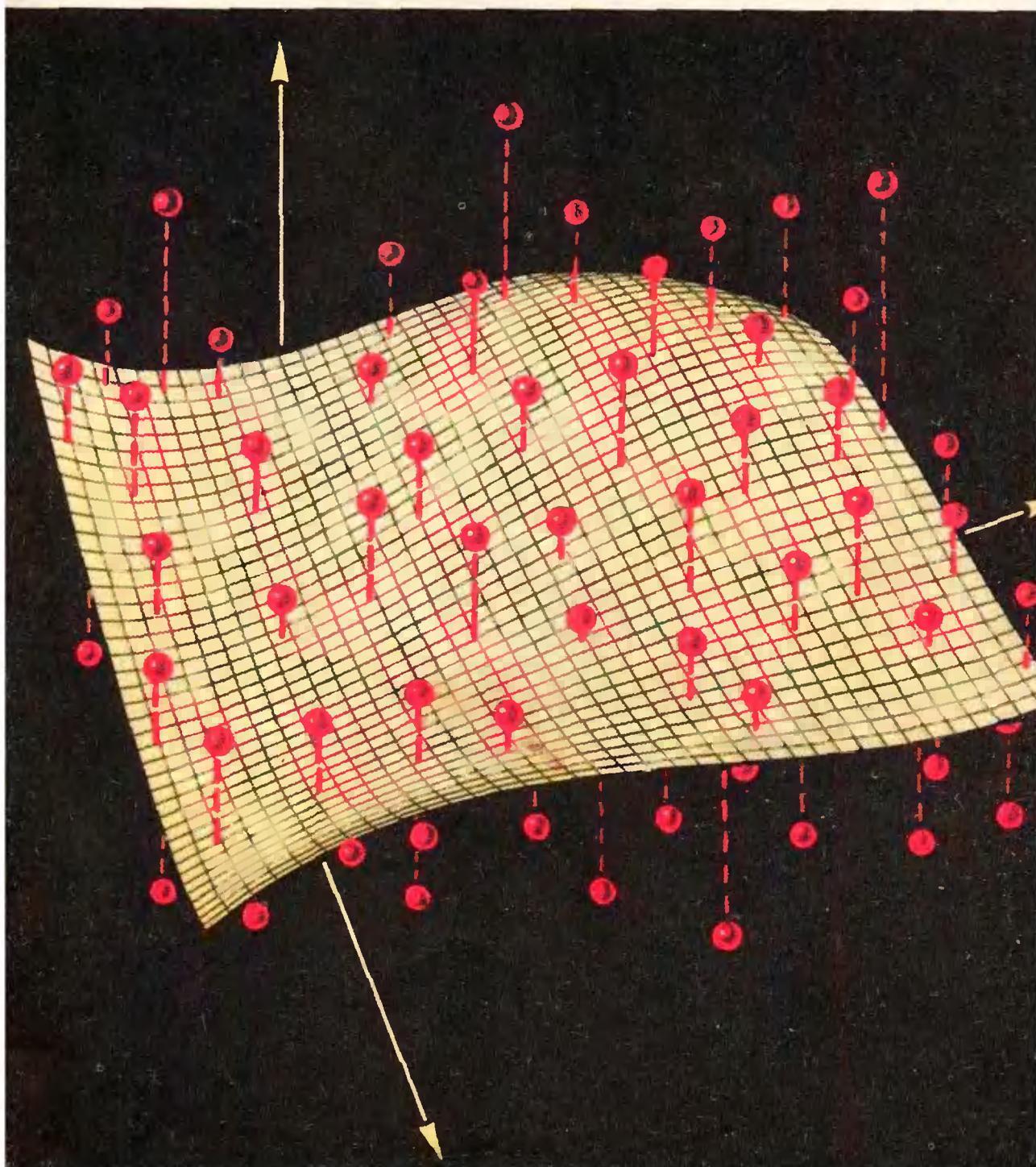
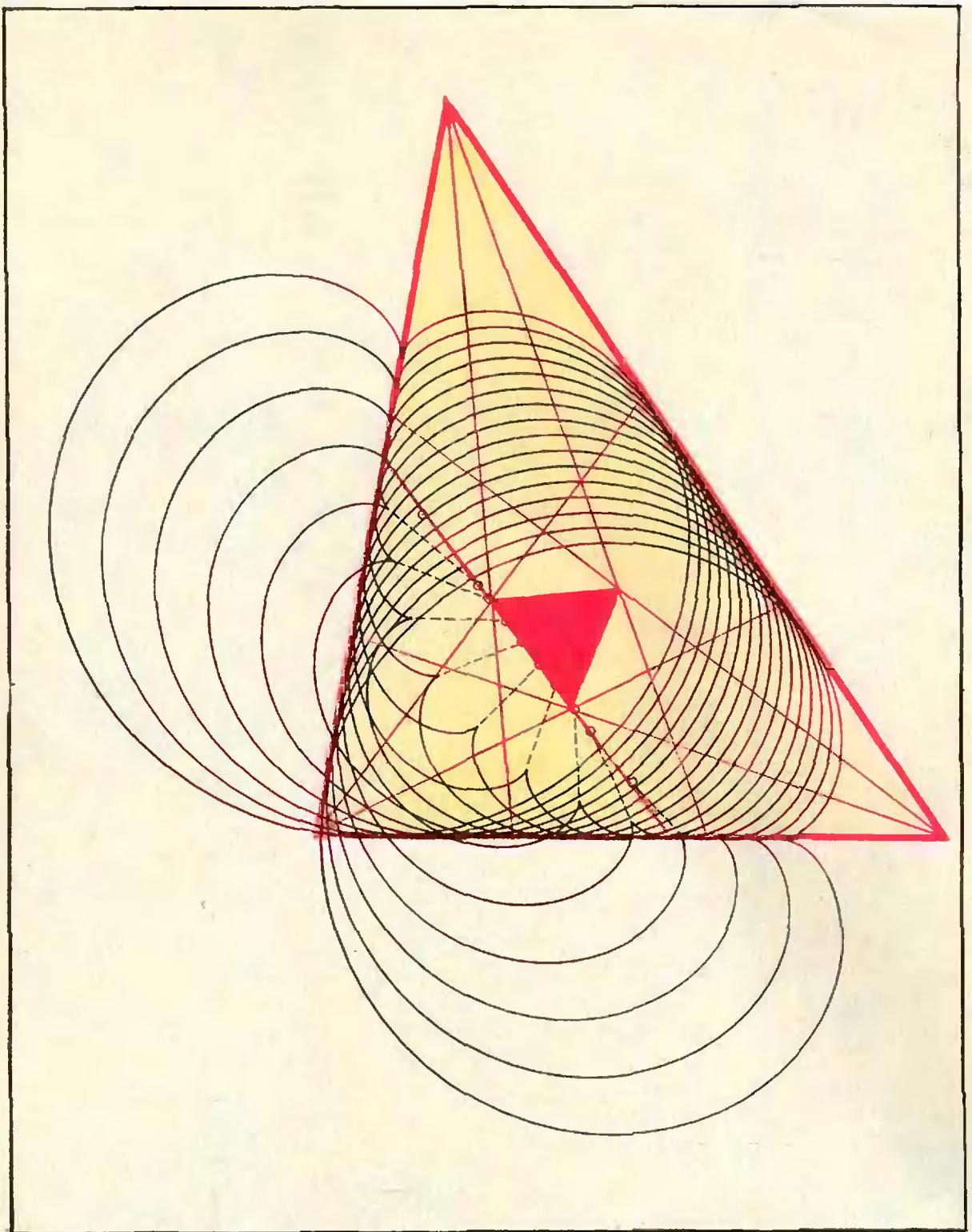


Квант

8
1978

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР





На этом рисунке проиллюстрировано доказательство теоремы Морлея, принадлежащее самому Морлею. На нем изображено семейство кардиод, касающихся всех трех сторон треугольника. Центры всех этих кардио-

ид лежат на прямой, проходящей через некоторые точки пересечения трисектрис треугольника. Подробности см. на с. 28. Рисунок выполнен ЭВМ по программе, составленной Ю. Котовым.

Основан в 1970 году

Квант

8
1978

Научно-популярный
физико-математический
журнал
Академии наук СССР
и Академии педагогических
наук СССР



Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической
литературы

В НОМЕРЕ:

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель
главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:

М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам. главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам. главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

Рисунок на обложке
иллюстрирует метод
наименших квадратов
изображенная на нем
поверхность
(полученная
Ю. Котовым на ЭВМ)
аппроксимирует
измеряемые величины
(красные шарики).
Подробнее
об этом вы прочтете
в следующем номере.

- 2 М. Башмаков. Диофантоны уравнения и рациональные точки
- 8 Л. Гольдин. И снова ускорители
- 18 З. Тьмеладзе. Следствие ведет Ферма
- 23 Н. Малов. Всегда ли отталкиваются противоположно направленные токи?

Лаборатория «Кванта»

- 26 В. Майер. Изгибная волна в пластинках

Математический кружок

- 28 Г. Тоноян, И. Яглом. Теорема Морлея

Задачник «Кванта»

- 33 Задачи М516—М520; Ф528—Ф532
- 36 Решения задач М466—М469; Ф482—Ф486
- 44 С. Фомин. Билеты и ящики

Астрономическая страница

- 48 Полное лунное затмение
- 48 Возможен звездный дождь!

«Квант» для младших школьников

- 49 А. Стариков. Необыкновенная девочка
- 50 Ю. Данилов. Стомахион

Рецензии, библиография

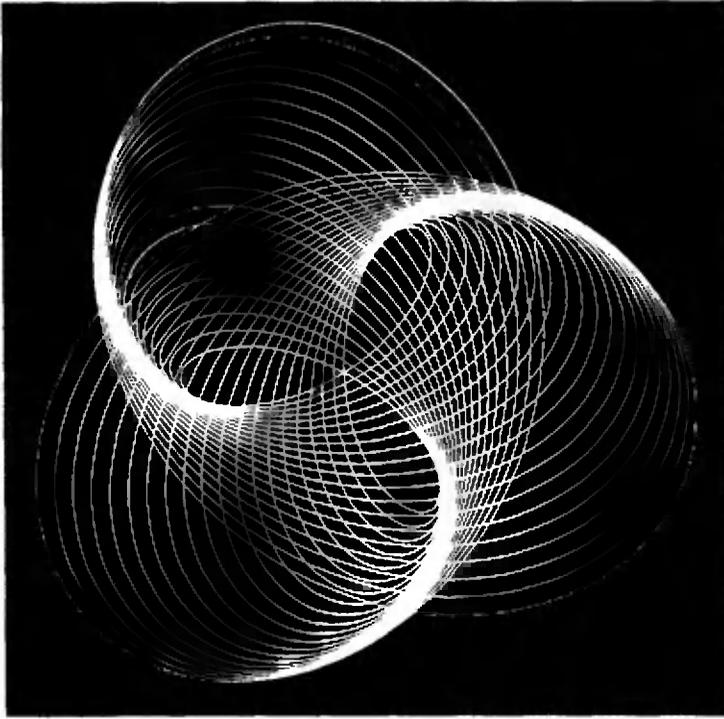
- 54 И. Клумова, М. Смолянский. Новые книги

Информация

- 56 И. Слободецкий. X Международная олимпиада школьников по физике
- 61 Заочная физическая школа
- 62 Вечерняя физическая школа
- 63 Ответы, указания, решения

Смесь (47)

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1978



М. Башмаков

Диофантовы уравнения и рациональные точки

Область теории чисел, в которой исследуются целочисленные решения уравнений вида $P(x, y, \dots) = 0$, где $P(x, y, \dots)$ — многочлен от нескольких переменных с целыми коэффициентами, называется *диофантовым анализом*, а сами эти уравнения — *диофантовыми*.

Названы они так по имени знаменитого греческого математика Диофанта, жившего в III веке и написавшего первый трактат о таких уравнениях.

Несмотря на то, что диофантовы уравнения составляют одну из самых старинных областей математики,

общие методы их решения начали создаваться совсем недавно. В классических работах в основном рассматривались линейные и квадратные диофантовы уравнения. Решение более сложных уравнений сильно продвинулось в последние 20—25 лет благодаря широкому привлечению к теории чисел идей из других областей математики, прежде всего — из геометрии и топологии. Говоря словами Н. Бурбаки, «...классическая геометрия... превратилась в универсальный язык всей математики, обладающий исключительной гибкостью и удобством». Геометрия предлагает не только язык, но и свои построения, свою интуицию.

Посмотрите, как нагляден геометрический язык. Возьмем, например, уравнение Ферма $x^n + y^n = z^n$, поделим обе его части на z^n и обозначим x/z через u , y/z через v . Получим уравнение $u^n + v^n = 1$. Каждому решению $(x; y; z)$ уравнения Ферма в целых числах соответствует (при $z \neq 0$) решение уравнения $u^n + v^n = 1$ в рациональных числах.

Если мы рассмотрим теперь график этого уравнения на плоскости (u, v) ,

то получим кривую, причем целочисленным решениям уравнения Ферма отвечают точки этой кривой с рациональными координатами. Очевидно и обратное: каждая точка указанной кривой с рациональными координатами даст (после освобождения от знаменателя) целочисленное решение уравнения Ферма. Таким образом, вопрос о решении уравнения Ферма в переводе на геометрический язык превращается в вопрос о нахождении точек с рациональными координатами (мы их будем называть *рациональными*) на кривой $u^n + v^n = 1$.

(Заметим, что при делении уравнения Ферма на z^n мы «потеряли» его корни при $z=0$, но их несложно исследовать отдельно.)

В этой статье мы познакомим вас с двумя геометрическими приемами отыскания рациональных точек на кривых.

Начнем для простоты с уравнения $x^2 + y^2 = z^2$, решения которого в натуральных числах называются *пифагоровыми тройками*. Кривая, соответствующая уравнению $x^2 + y^2 = z^2$, — это окружность $u^2 + v^2 = 1$. Пифагоровы тройки (3; 4; 5); (5; 12; 13) соответствуют рациональным точкам (3/5; 4/5); (5/13; 12/13) этой окружности (рис. 1).

Некоторые плоские кривые удобно задавать в так называемой *параметрической форме*: указать две функции f и g такие, что при всевозможных значениях параметра t точка $(f(t); g(t))$ принадлежит кривой и для каждой точки $(x_0; y_0)$ кривой найдется значение t_0 параметра t (возможно, не одно!), для которого $x_0 = f(t_0); y_0 = g(t_0)$.

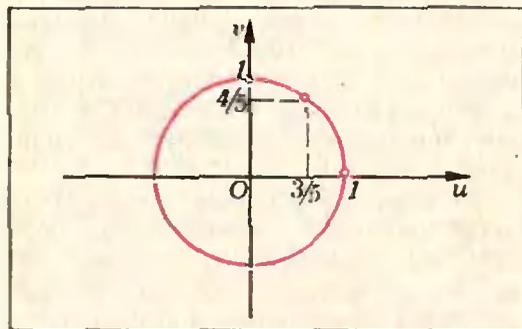


Рис. 1.

Например, если α — угол, соответствующий точке P окружности с координатами $(u; v)$, то $u = \cos \alpha$; $v = \sin \alpha$ — мы получили параметрическое задание окружности с помощью функций $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$. Можно параметризовать окружность и по-другому. Так, если произвести построение, приведенное на рисунке 2, то из подобия треугольников OAt_0 и QP_0u_0 легко вывести, что

$$u = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad v = \frac{2t}{1+t^2}$$

(для читателей, знающих тригонометрию, заметим, что второе представление получается из первого заменой $\operatorname{tg} \alpha/2$ на t).

Из формул, выражающих координаты u и v через t , видно, что *рациональным значениям t сопоставляются рациональные точки окружности*. Верно и обратное.

Задача 1. Докажите, что если $(u; v)$ — рациональная точка окружности, то существует единственное значение параметра t , дающее u и v , причем это t тоже рационально.

Итак, рациональные точки окружности мы поставили во взаимно однозначное соответствие с рациональными точками прямой t . Это соответствие алгебраически записывается указанными выше формулами, а геометрически изображено на рисунке 2. Тем самым задача отыскания рациональных точек на окружности нами решена.

Оказывается, есть много кривых, кроме окружности, которые можно параметризовать дробно-рациональными функциями. Эти кривые называются *рациональными*. К их числу относятся, например, все кривые, яв-

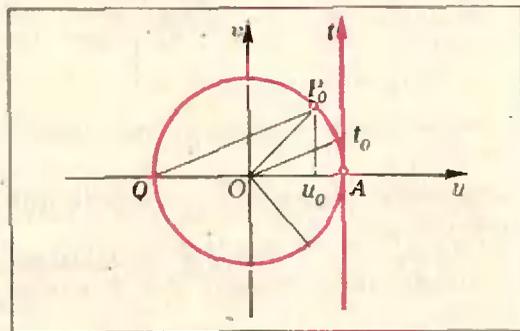


Рис. 2.

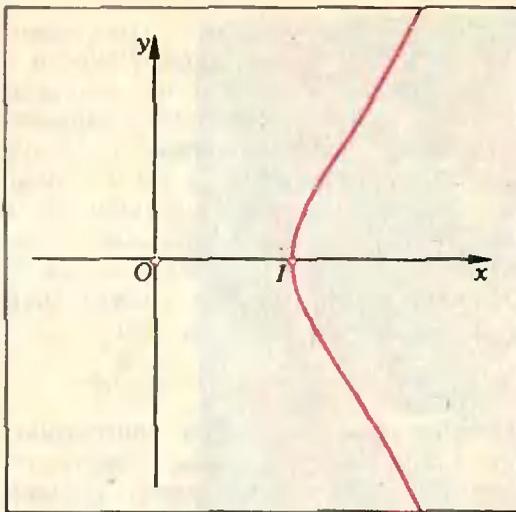


Рис. 3.

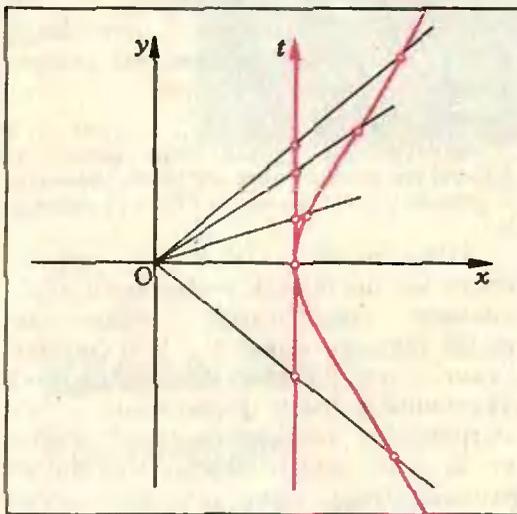


Рис. 4.

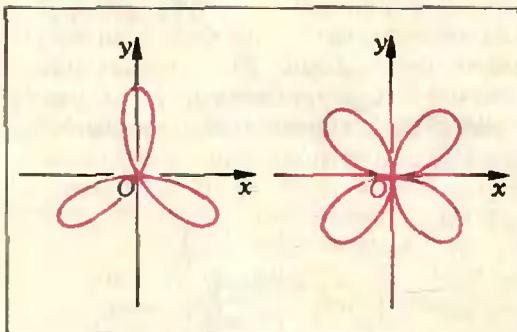


Рис. 5.

ляющиеся графиками уравнений второй степени.

Задача 2. Найдите рациональные параметризации следующих кривых второго порядка:

- а) $x^2 - y^2 = 1$ (гипербола);
 б) $x^2 + xy + y^2 = 1$ (эллипс).

Рассмотрим теперь кривую, задаваемую уравнением третьей степени, которая тоже оказывается рациональной. Это кривая $y^2 = x^3 - x^2$. Она изображена на рисунке 3 и состоит из изолированной точки O и ветви, симметричной относительно оси x .

Задача 3. Обосновать рисунок 3.

Проведем через точку O всевозможные прямые $y = tx$. Значения углового коэффициента t можно откладывать на оси t , проведенной через точку $(1, 0)$ (рис. 4). Подставив $y = tx$ в уравнение кривой и сократив на x^2 (мы теряем при этом особую точку $O!$), мы получим параметризацию

$$\begin{cases} x = t^2 + 1, \\ y = t(t^2 + 1), \end{cases}$$

при которой рациональным значениям t соответствуют рациональные точки кривой $y^2 = x^3 - x^2$.

Задача 4. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

Итак, между рациональными точками кривой $y^2 = x^3 - x^2$ (без точки $(0, 0)$) и прямой t удается установить взаимно однозначное соответствие. Геометрически оно представляет собой центральное проектирование, изображенное на рисунке 4.

Аналогично можно найти рациональную параметризацию кривой $y^2 = x^3 + x^2$:

$$x = t^2 - 1, \quad y = t(t^2 - 1).$$

Задача 5. Постройте эту кривую и докажите, что если для значений параметра t_1, t_2 и t_3 выполняется соотношение

$$(t_1 - 1)(t_2 - 1)(t_3 - 1) = (t_1 + 1)(t_2 + 1)(t_3 + 1),$$

то три соответствующие точки лежат на одной прямой.

Итак, для каждой из рассмотренных нами рациональных кривых можно указать такое отображение прямой на кривую, при котором рациональные точки кривой отвечают рациональным точкам прямой. На самом деле это утверждение верно и для произвольной рациональной кривой, получаемой из диофантова уравнения.

Возникают вопросы — бывают ли нерациональные кривые? Как описать все рациональные кривые? Ответ на эти вопросы известен. Например, все кривые первой и второй степени рациональны. Бывают рациональ-

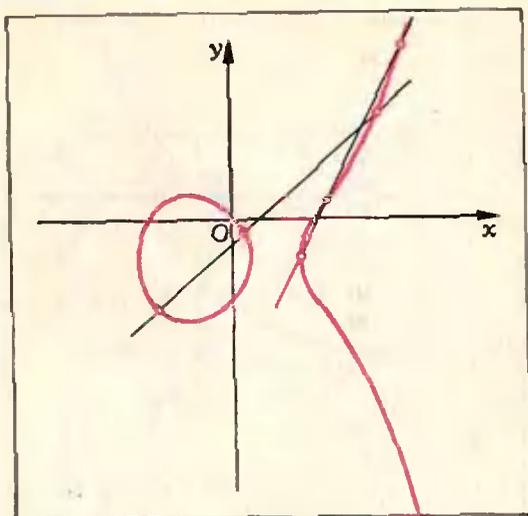


Рис. 6.

ные кривые любой степени, но все такие кривые степени больше двух имеют особенности — точки самопересечения, точки самокасания и т. п. (рис. 5).

При $n > 2$ кривая Ферма $u^n + v^n = 1$ не является рациональной. Докажите, что это эквивалентно утверждению о том, что уравнение Ферма $x^n + y^n = z^n$ не имеет решений среди многочленов $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ степени не меньше единицы. (Этот факт доказан в статье Б. Мартынова «Теорема Ферма для многочленов» («Квант», 1976, № 8).)

Второй прием мы снова покажем сначала на примере окружности. Возьмем две рациональные точки на окружности — например, $P_1(3/5, 4/5)$ и $P_2(5/13, 12/13)$. Пусть α_1 и α_2 — углы, соответствующие точкам P_1 и P_2 . Точка, соответствующая углу $\alpha_1 + \alpha_2$, тоже будет рациональной, поскольку

$$\begin{aligned} \cos(\alpha_1 + \alpha_2) &= \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 - \\ &\quad - \sin \alpha_1 \sin \alpha_2, \\ \sin(\alpha_1 + \alpha_2) &= \sin \alpha_1 \cos \alpha_2 + \\ &\quad + \cos \alpha_1 \sin \alpha_2. \end{aligned}$$

Таким образом, мы можем «складывать» рациональные точки на окружности по формуле $(u_1; v_1) \oplus (u_2; v_2) = (u_1 u_2 - v_1 v_2; u_1 v_2 + u_2 v_1)$ и получать новые рациональные точки. Это свойство окружности лежит в основе многих красивых задач.

Задача 6. а) Пусть P_1 — рациональная точка окружности, соответствующая некоторому углу α . Докажите, что точки P_n ,

соответствующие углам $n\alpha$ ($n \in \mathbb{Z}$), тоже рациональны.

б) Докажите, что попарные расстояния между точками, построенными в пункте а), рациональны.

в) Постройте n точек на плоскости, никакие три из которых не лежат на одной прямой и попарные расстояния между которыми — целые.

Оказывается есть еще кривые с таким свойством: точки на них можно «складывать», причем «сумма» рациональных точек — рациональная точка. Для таких кривых иногда удастся из двух рациональных точек «вытянуть» целую серию новых рациональных точек.

Рассмотрим в качестве примера кривую

$$y^2 + y = x^3 - x.$$

Задача 7. Докажите, что эта кривая не рациональна.

Возьмем две точки на этой кривой и проведем через них прямую. Эта прямая пересечет нашу кривую еще в одной точке (рис. 6). Действительно, если мы запишем уравнение проведенной нами прямой в виде $y = kx + b$ и подставим y в уравнение кривой, то получим уравнение третьей степени относительно x . Три корня этого уравнения соответствуют абсциссам трех точек пересечения прямой и нашей кубической кривой. Пусть $P_1(x_1; y_1)$, $P_2(x_2; y_2)$, $P_3(x_3; y_3)$ — три точки пересечения прямой $y = kx + b$ и кривой $y^2 + y = x^3 - x$. Имеет место соотношение

$$x_1 + x_2 + x_3 = \left(\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right)^2. \quad (*)$$

Для доказательства подставим $y = kx + b$ в уравнение кривой. Получим уравнение $x^3 - k^2 x^2 - (2kb + k + 1)x - b^2 - b = 0$. Можно доказать, что $x^3 - k^2 x^2 - (2kb + k + 1)x - b^2 - b = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)$. Следовательно, $x_1 + x_2 + x_3 = k^2$. Угловой коэффициент k прямой, проходящей через точки $P_1(x_1, y_1)$ и $P_2(x_2, y_2)$, равен $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$. Тем самым мы получим (*).

Учитывая, что $y_3 = kx_3 + b$, $b = \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_1 - x_2}$,

мы видим, что координаты третьей точки пересечения рациональны, если рациональны координаты первых двух точек. Это дает возможность получать новые решения уравнения $y^2 + y = x^3 - x$ в рациональных числах.

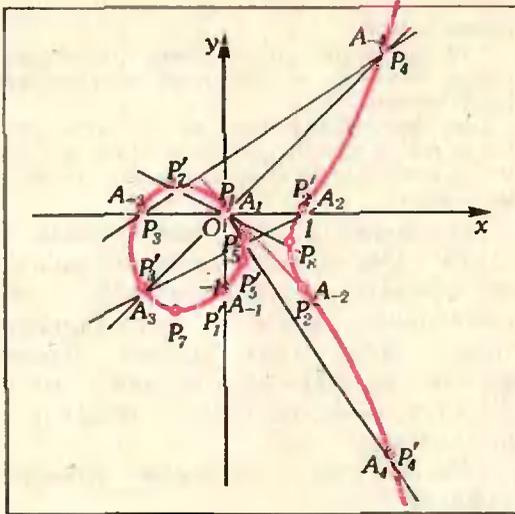


Рис. 7.

З а м е ч а н и е. Рассмотренное выше кубическое уравнение может иметь совпадающие корни. Это будет означать, что прямая и наша кривая касаются.

Мы построим сейчас бесконечную серию рациональных решений уравнения $y^2 + y = x^3 - x$ с помощью проведения секущих и касательных через известные рациональные точки. Заметим предварительно, что точки нашей кривой расположены парами — вместе с точкой $P(x_0; y_0)$ на кривой лежит точка $P'(x_0; -1 - y_0)$, симметричная ей относительно прямой $y = -\frac{1}{2}$. Это вытекает из тождества $y^2 + y = (-1 - y)^2 + (-1 - y)$. Начнем с очевидной рациональной точки $P_1(0; 0)$. Симметричная к ней точка — $P_1'(0; -1)$. Проведем через P_1 касательную (см. замечание). Уравнение этой касательной $y = -x$. Найдем точку ее пересечения с нашей кривой: $P_2(1; -1)$. Те, кто не умеют находить касательную, могут непосредственной подстановкой проверить, что рациональная точка P_2 лежит на нашей кривой. Из P_2 получаем точку $P_2'(1; 0)$.

Итак, на нашей кривой лежат четыре рациональные точки:

$$P_1(0; 0), \quad P_1'(0; -1),$$

$$P_2(1; -1), \quad P_2'(1; 0).$$

Теперь запускаем «конвейер». Проведем через P_1 и P_2 прямую — это

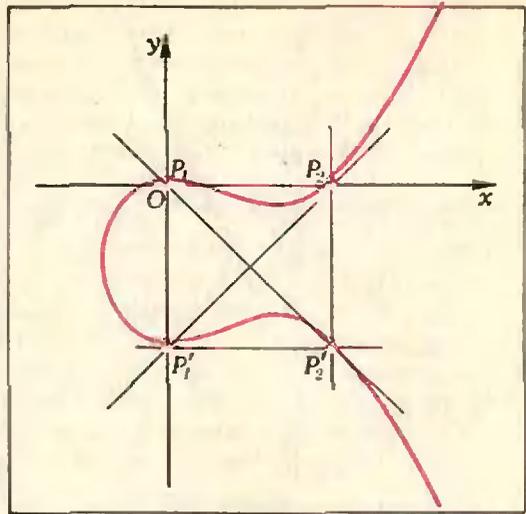


Рис. 8.

ось x . Она пересекает нашу кривую еще в одной очевидной точке $P_3(-1; 0)$. Вместе с симметричной точкой $P_3'(-1; -1)$ мы имеем шесть точек исходной кривой. Теперь соединим точки P_3 и P_1 . Получим прямую $y = x$. Третья точка пересечения находится легко: подставив $y = x$, получим кубическое уравнение $x^3 - x^2 - 2x = 0$, два корня которого нам известны. При помощи (*) получаем новую точку $P_4(2; 2)$ — неочевидное решение исходного уравнения. Продолжим этот процесс. Чтобы получить точку P_6 , проведем прямую через точки $P_4(2; 2)$ и P_1 . Легко проверить, что получится точка $P_5(1/4; -3/8)$. По рисунку 7 проследить процесс построения новых точек просто. Вычисления по формуле (*) также несложны. В результате получаем серию точек, приведенную в таблице.

Вряд ли кто-то из читателей скажет, что все найденные нами решения очевидны.

В этом месте статьи у автора даже дух захватило — сколько содержательных вопросов можно поставить, глядя на безобидный рисунок 7. Вот несколько из них:

1. Получим ли мы проведением секущих и касательных бесконечную последовательность различных точек или наш процесс «зациклится»?

2. Все ли рациональные решения исходного уравнения встретятся в нашей последовательности?

	$P_1(0; 0), P_1'(0; -1)$ $P_2(1; -1), P_2'(1; 0)$
$P_3 = P_1 \oplus P_2'$ $P_4 = P_1 \oplus P_3'$ $P_5 = P_1 \oplus P_4'$ $P_6 = P_1 \oplus P_5'$ $P_7 = P_1 \oplus P_6'$ $P_8 = P_1 \oplus P_7'$	$P_3(-1; 0), P_3'(-1; -1)$ $P_4(2; 2), P_4'(2; -3)$ $P_5\left(\frac{1}{4}; -\frac{3}{8}\right), P_5'\left(\frac{1}{4}; -\frac{5}{8}\right)$ $P_6(6; -15), P_6'(6; 14)$ $P_7\left(-\frac{5}{9}; -\frac{35}{27}\right), P_7'\left(-\frac{5}{9}; \frac{8}{27}\right)$ $P_8\left(\frac{21}{25}; -\frac{56}{125}\right), P_8'\left(\frac{21}{25}; -\frac{69}{125}\right)$

3. Появятся ли еще целочисленные решения (как, например, выскочили точки $(6; 14)$ и $(6; -15)$) или все последующие решения будут нецелыми?

4. Случайно ли в знаменателях решений стоят квадраты и кубы целых чисел?

5. Из картинки видно, что, например, точку P_6 можно получить иначе — проводя прямую через P_3 и P_2 . Случайно ли это?

6. Почти очевидно, что все точки с нечетными номерами расположены на одной ветви кривой, а с четными — на другой. Как это строго доказать?

Первые три вопроса очень трудны. Сообщу, что наша последовательность точек бесконечна и в ней встретятся все точки с рациональными координатами.

Вместо пояснений я приведу еще один пример. Рассмотрим очень похожую кривую $y^2 + y = x^3 - x^2$. Конфигурация, аналогичная построенной нами, обрывается на третьем шаге — см. рисунок 8. Интересно, что эта кривая не имеет других рациональных точек, а уравнение $y^2 + y = x^3 - x^2$ не имеет решений в рациональных числах, кроме четырех тривиальных.

Мы прикоснулись с вами к одному из самых сложных вопросов современной теории чисел.

Известно, что на любой кубической кривой существует конечное чис-

ло точек, начав с которых описанный процесс, можно получить все ее рациональные точки. Это было доказано около пятидесяти лет назад, однако до сих пор нет общего способа, позволяющего найти эти точки.

Способ узнать, заикнется процесс проведения прямых или даст бесконечную конфигурацию, известен. Совсем недавно было доказано, что конечная конфигурация может иметь не более 11 точек и все случаи (кроме случая 10 точек) встречаются и хорошо изучены.

На большинстве известных кривых число исходных точек для построения всех рациональных точек мало — одна-две. Однако есть гипотеза, что для всякого n существуют кривые, требующие для построения всех решений n точек. Пока примеры построены для $n \leq 7$.

И, наконец, последнее замечание: если мы в нашем примере с кривой $y^2 + y = x^3 - x$ немножко изменим обозначения — напомним A_1 вместо P_1 , A_{-1} (вместо A_1'), A_k вместо P_k и A_{-k} вместо P_k' (для $k \geq 2$), а «сложение» зададим несколько хитрей («суммой» двух точек назовем не третью точку пересечения прямой и кривой, а точку, симметричную ей относительно прямой $y = -\frac{1}{2}$), то получим формулу

$$A_m \oplus A_n = A_{m+n},$$

справедливую для всех целых m, n .

Л. Гольдин

И снова ускорители

В этой статье мы продолжаем беседу об ускорителях, начатую в № 4 за 1977 год. Тогда мы не успели рассказать о гигантских современных ускорителях — синхротронах с жесткой фокусировкой — и о ряде вопросов, играющих важнейшую роль в ускорительной — и не только в ускорительной — физике. Среди них центральное место занимает проблема устойчивости движения. Этим вопросам и будет посвящена наша статья. Но прежде чем перейти к основной теме, мы коротко напомним о том, как устроен и работает простейший циклический ускоритель — циклотрон.

Ускоряемые в циклотроне частицы движутся в вакуумной камере, имеющей форму гигантской консервной банки (рис. 1). Вакуумная камера заключена между полюсами электромагнита, создающего в ней почти однородное вертикально направленное магнитное поле. Траектории частиц лежат в горизонтальной плоскости и, следовательно, перпендикулярны направлению вектора магнитной индукции. На заряженные частицы, движущиеся в магнитном поле, действует сила Лоренца, перпендикулярная как магнитному полю, так и скорости. Эта сила сворачивает в кольцо траектории частиц (если они движутся с постоянной скоростью).

Частицы в циклотроне ускоряются электрическим полем. Это поле создается расположенными внутри вакуумной камеры электродами —

дуантами. Чтобы сделать дуанты, нужно взять еще одну «консервную банку», несколько меньшую по размерам, чем вакуумная камера. Эту банку следует разрезать по диаметру и слегка развести половинки (см. рис. 1). К дуантам подводится высокочастотное напряжение, создающее в зазоре между ними переменное электрическое поле. Попадая в зазор между дуантами в тот момент, когда высокочастотное поле имеет нужное направление, частицы ускоряются. На то время, пока высокочастотное поле уменьшается по величине и начинает менять свое направление на противоположное, частицы прячутся внутрь дуантов и не испытывают действия поля. Они вновь попадают в зазор между дуантами (с другой стороны), когда поле изменит направление и вновь достигнет амплитудного значения, и т. д.

По мере ускорения радиус траектории, описываемой частицей, возрастает, так что траектории частиц в циклотроне представляют собой не окружности, а раскручивающиеся спирали. Период обращения частицы в циклотроне рассчитать несложно. В магнитном поле с индукцией \vec{B} на частицу с зарядом q , движущуюся со скоростью \vec{v} ($\vec{v} \perp \vec{B}$), действует сила Лоренца $|\vec{F}| = q|\vec{v}|\vec{B}$. Направление этой силы перпендикулярно направлениям \vec{v} и \vec{B} . Следовательно, сила Лоренца сообщает частице массы m центростремительное ускорение $a = v^2/R$:

$$\frac{q|\vec{v}|\vec{B}}{m} = \frac{v^2}{R}$$

Период T обращения частицы, движущейся по окружности радиуса R со скоростью $|\vec{v}|$, равен $2\pi R/|\vec{v}|$. Таким образом,

$$T = \frac{2\pi R}{|\vec{v}|} = \frac{2\pi R}{qR|\vec{B}|/m} = 2\pi \frac{m}{q|\vec{B}|} \quad (1)$$

При небольших энергиях (обычные циклотроны) масса частиц по-

стоянна, и период обращения не зависит от энергии частицы. При увеличении энергии (фазотроны) масса частиц возрастает в согласии с формулами теории относительности. Их период обращения при этом увеличивается. Частота ускоряющего электрического поля все время должна быть равна частоте обращения ускоряемых частиц, чтобы частицы проходили зазор между дуантами в тот момент, когда электрическое поле имеет нужную величину и направление. Частота ускоряющего напряжения в циклотронах постоянна, а в фазотронах — пульсирует, уменьшаясь по мере ускорения данной партии частиц и увеличиваясь при захвате следующей.

Проблема поперечной устойчивости

До сих пор мы рассматривали движение частиц в циклотроне так, как если бы они могли двигаться только в плоскости, перпендикулярной магнитному полю. Посмотрим теперь, что произойдет с частицами, скорость которых имеет хотя бы небольшую проекцию на направление магнитного поля. В циклотроне, как мы его себе до сих пор представляли, никаких сил, действующих в вертикальном направлении, нет. Сила Лоренца перпендикулярна полю и, следовательно, направлена горизонтально, а силу тяжести в таких расчетах не следует принимать во внимание из-за крайне малой ее величины. Значит, частицы, отклонившиеся от горизонтальной плоскости, неизбежно столкнутся со стенками вакуумной камеры и погибнут. А так как у всех частиц есть хотя бы небольшая вертикальная проекция скорости, все они рано или поздно будут потеряны. Вывод, который мы должны сделать, заключается в том, что в работающем ускорителе не просто должна существовать нужная нам — идеальная — траектория. Необходимо также, чтобы частицы, которые с самого начала не смогли попасть на эту траекторию, не отклонялись бы от нее сколь-нибудь существенно в течение всего времени ускорения.

В ходе ускорения частица непрерывно испытывает различного рода возмущения, отклоняющие ее в сто-

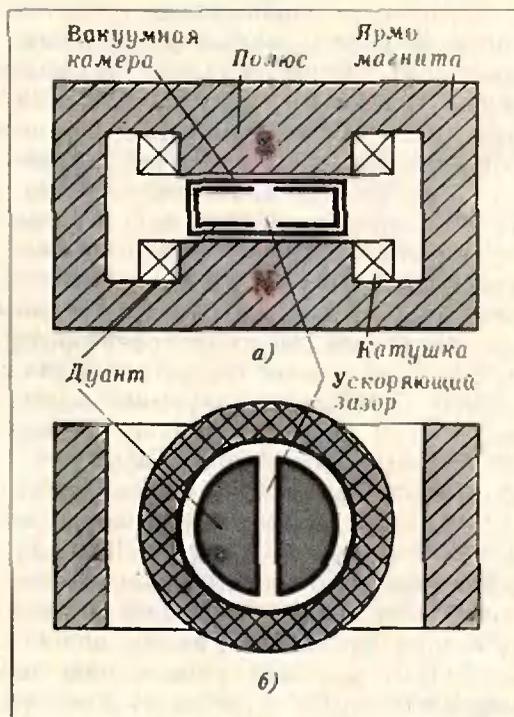


Рис. 1. Схема устройства циклотрона (а — вертикальный разрез, б — горизонтальный).

рону. Они возникают из-за дефектов (неоднородности) магнитного поля, из-за электрических сил, действующих со стороны других заряженных частиц и стенок камеры, из-за столкновений ускоряемых частиц с молекулами остаточного газа. Эти возмущения изменяют направление движения частицы.

В случае циклотрона это означает, что частица «вылетает» из горизонтальной плоскости или «соскакивает» со своего радиуса.

Поэтому ясно, что успешно работать могут лишь такие ускорители, у которых приняты надлежащие меры для того, чтобы а) обеспечить ускорение частиц, которые с самого начала движутся не по расчетной траектории, а вблизи от нее, б) обеспечить ускорение тех частиц, которые по каким-либо причинам отклонились от расчетной траектории в процессе ускорения.

Посмотрим, что это означает применительно к циклотрону. Из сказанного понятно, что использовать однородное магнитное поле нельзя. Рисунок 2, а наглядно иллюстрирует, почему это так.

Попробуем использовать неоднородное поле. Силовые линии неоднородного магнитного поля искривлены. Посмотрим, как будут вести себя частицы в поле, силовые линии которого изогнуты так, как показано на рисунке 2, б. Из рисунка видно, что такое «вогнутое» поле нас не устраивает — если частица по каким-либо причинам отклонится вверх или вниз от горизонтальной плоскости, в которой лежит ее траектория, то она уже не вернется на нее и «погибнет» на стенках вакуумной камеры. А если сделать поверхности полюсов магнита такими, чтобы силовые линии поля были выпуклыми? Из рисунка 2, в видно, что такое поле нас устраивает — сила Лоренца, действующая со стороны поля на частицы, отклонившиеся по вертикали, не только обеспечивает их обращение, но, к тому же, толкает вниз поднимающиеся частицы и поднимает опустившиеся.

Влияние рассмотренных неоднородных магнитных полей на траектории движения заряженных частиц аналогично действию оптических линз на распространение световых лучей.

Действительно, на движущуюся частицу «вогнутое» поле действует так же, как на световые лучи — рассеивающая линза, а «выпуклое» — как собирающая линза. Эта аналогия настолько удачна, что подобные магнитные поля называют магнитными линзами.

Итак, при устойчивом движении на всякую частицу, отклонившуюся от средней горизонтальной плоскости вверх, должна действовать сила, направленная вниз. При той форме поля, которая изображена на рисунке 2, б, эта сила равна нулю в средней плоскости и увеличивается при отклонении от нее. На языке формул это можно записать так:

$$f = -az.$$

В этой формуле z — расстояние, на которое частица отклонилась от средней плоскости, a — коэффициент пропорциональности, зависящий от величины индукции поля. Знак минус показывает, что сила всегда «возвращающая» — она направлена к средней плоскости. Силы, подчиняю-

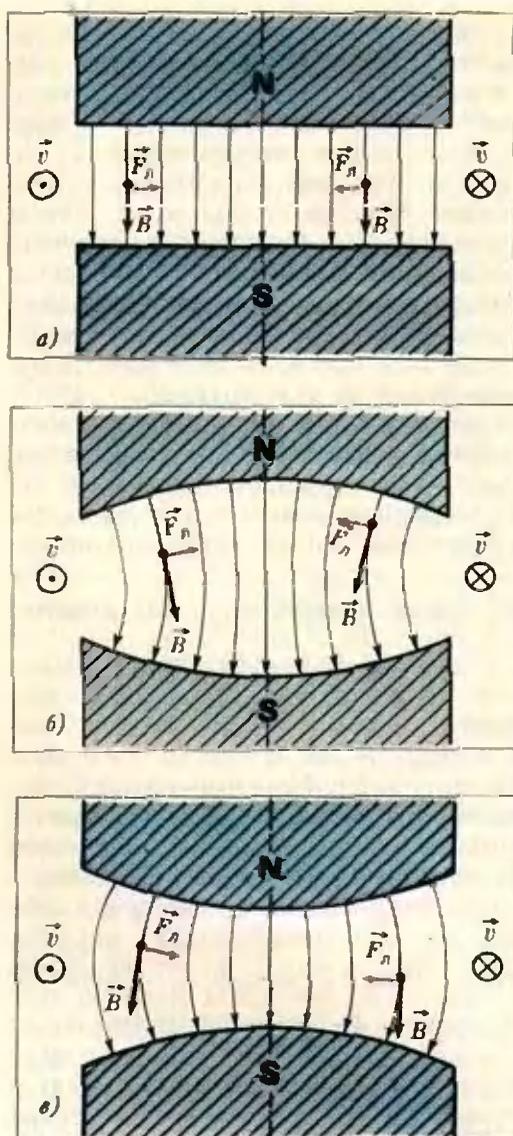


Рис. 2. а) Поле однородно; сила Лоренца горизонтальна и вертикальная составляющая скорости \vec{v}_v остается неизменной; б) сила Лоренца «рассеивает» частицы; в) сила Лоренца «прижимает» частицы к средней горизонтальной плоскости.

щиеся такому закону, нам хорошо известны. В механике это — сила упругости пружины. Тело на пружине совершает колебания. Так происходит и вертикальное движение ускоренной частицы: двигаясь по круговой орбите, она совершает колебания около средней плоскости ускорителя. Мы видим теперь, как следует обеспечивать устойчивость вертикального движения, — это движение надо превратить в колебательное.

Как сделать, чтобы частицы не доходили до стенок камеры даже при заметном увеличении энергии поперечных (в нашем случае — вертикальных) колебаний? Пользуясь механической аналогией, мы можем ответить так: нужно поставить пружину помягче. Разумеется, никаких пружин в вакуумной камере ускорителя нет. Что же надо понимать под «пружиной помягче»? При прочих равных условиях, увеличивая жесткость пружины, на которой колеблется груз, мы увеличиваем частоту колебаний груза около положения равновесия (напомним, что коэффициент жесткости пружины k , масса груза m и частота колебаний ω связаны соотношением $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$). Этот вывод может быть прямо перенесен в теорию ускорителей. Устойчивость движения обеспечена тем лучше, отклонения от положения равновесия (в нашем случае — от «идеальной» орбиты) тем меньше, чем выше частота колебаний частиц около равновесной орбиты! В ускорительной технике обычно говорят о том, сколько периодов колебаний приходится на один период обращения частицы.

Вернемся еще раз к движению частиц в магнитном поле, силовые линии которого искривлены так, как показано на рисунке 2, в. Казалось бы, с точки зрения устойчивости такое «выпуклое» поле нас полностью устраивает. Однако до сих пор мы говорили только о вертикальной устойчивости частиц. А что будет происходить с частицами, которые, оставаясь в горизонтальной плоскости, по каким-либо причинам «соскочат» со своей траектории — отклонятся по радиусу? Будет ли обеспечена радиальная устойчивость?

Чтобы лучше понять существо вопроса, рассмотрим сначала упрощенную задачу — радиальное движение в однородном магнитном поле (которое, как мы выяснили, вертикальной устойчивости не обеспечивает). Отвлечемся также от процесса ускорения — будем рассматривать движение частиц с постоянной энергией. Траектории таких частиц в однородном поле, как мы знаем, — окружности. Выберем одну из них

в качестве «основной». Если частица с самого начала движется не по основной окружности, а вблизи нее, то она описывает другую окружность, как это изображено на рисунке 3. Траектория этой частицы не уходит далеко от основной окружности. Радиальная устойчивость, таким образом, обеспечена. За период обращения частица пересекает основную окружность дважды; она находится сначала снаружи, а затем внутри нее (или наоборот). Значит, за один оборот совершается одно радиальное колебание.

Теперь посмотрим, как будет обстоять дело с радиальной устойчивостью при движении в «выпуклом» поле, величина индукции которого спадает к периферии. Качественный ответ на этот вопрос дать нетрудно. В точке A (см. рис. 3) поле будет слабее, чем раньше, траектория отклонившейся частицы будет изгибаться меньше и, следовательно, медленнее приближаться к основной. В точке B , наоборот, величина индукции поля будет больше, чем прежде, траектория круче изогнется и, опять же, медленнее будет приближаться к основной. Следовательно, частота радиальных колебаний, а значит, и устойчивость движения по радиусу, уменьшается.

Оказывается, устойчивости по вертикали и по радиусу связаны друг с другом: одна из них может быть увеличена только за счет второй. И это не только в рассмотренном нами «выпуклом» магнитном поле. Исследование проблемы устойчивости

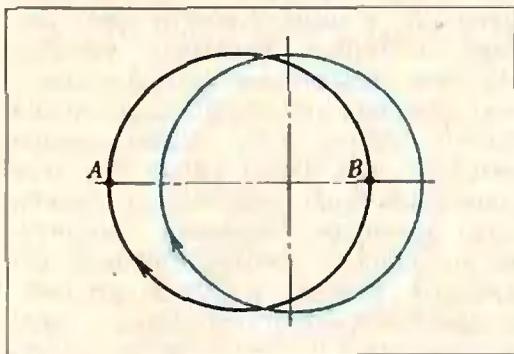


Рис. 3. Синяя окружность — основная траектория. Черная окружность — траектория отклонившейся частицы.

привело в конечном итоге к следующему выводу: при движении заряженных частиц в полях, обладающих осевой симметрией, числа n_z и n_r вертикальных и радиальных колебаний около основной траектории за период обращения связаны соотношением

$$n_z^2 + n_r^2 = 1. \quad (2)$$

Эта формула имеет очень большое значение в физике ускорителей. Вывод ее сложен; однако понять ее качественно мы теперь уже можем. В однородном поле вертикальных колебаний нет — $n_z=0$, а число радиальных колебаний — $n_r=1$. Ослабляя индукцию магнитного поля к периферии вакуумной камеры, мы увеличиваем устойчивость по вертикали — увеличиваем n_z , или, как говорят, увеличиваем «жесткость фокусировки» по вертикали; вместе с тем мы уменьшаем устойчивость по радиусу — уменьшаем n_r . Что произойдет, если сделать n_z или n_r больше единицы? Тогда уравнение (2) не имеет решений. Физически это означает, что движение приобретает вовсе неустойчивый характер. (Если вновь вернуться к аналогии с пружиной, то это означает, что на смену притягивающей пружинке придет отталкивающая.)

Таким образом, мы приходим к выводу, что магнитные поля, применяемые в циклических ускорителях, обязательно должны быть такими, чтобы величина индукции спадала по радиусу и при этом не слишком быстро.

Жесткая фокусировка

После того как была получена формула (2), в мире ускорительной физики наступило некоторое уныние. Наличие поперечных колебаний необходимо для устойчивости движения частиц. Кроме того, нужно позаботиться о том, чтобы амплитуда этих колебаний около равновесной орбиты была поменьше. (Большая амплитуда колебаний требует широкой вакуумной камеры и, следовательно, больших магнитов. Больших — значит дорогих в изготовлении и эксплуатации.) Амплитуду колебаний можно уменьшить, только ставя «жесткие пружинки», то есть увеличивая ча-

стоту. А на частоту колебаний имеется ограничение (2). Как же, все-таки, строить дешевые ускорители?

Выход из кажущегося тупика был найден американскими физиками Ливингстоном, Курантом и Снайдером, когда они предложили новую систему расположения магнитных полей. Так появились ускорители с жесткой фокусировкой. Чтобы понять принцип работы таких ускорителей, обратимся к конструкции синхротронов.

В синхротроне вакуумная камера имеет вид полой баранки. Камера располагается между полюсами магнитов, поверхность которых имеет форму кольца (рис. 4). Основная траектория частиц в синхротроне в течение всего времени ускорения неизменна — это окружность, проходящая в середине камеры. По мере ускорения энергия частиц возрастает. Чтобы «удерживать» частицы на прежней траектории, нужно все большее магнитное поле. Поэтому в течение цикла ускорения магнитное поле на кольцевой дорожке синхротрона непрерывно возрастает. Увеличивается и частота ускоряющего электрического поля: по мере ускорения частицы тратят все меньше времени для прохождения неизменного пути. Когда ускорение некоторой партии частиц закончено, магнитное поле снижается, частота ускоряющего электрического поля уменьшается — синхротрон готов к приему новой партии частиц. Начинается новый цикл ускорения.

Длина магнитных дорожек крупных синхротронов измеряется километрами. Кольцевой электромагнит собирается из сотен — или даже тысяч — отдельных магнитных блоков. В течение ускорительного цикла частицы проделывают в вакуумной камере сотни тысяч, если не миллионы, оборотов.

В ускорителях с жесткой фокусировкой на магнитной дорожке поочередно располагаются электромагниты, создающие сильно искривленные магнитные поля. Такие поля резко фокусируют пучок в одном из поперечных направлений и столь же сильно дефокусируют в другом. Расположение магнитных полюсов мож-

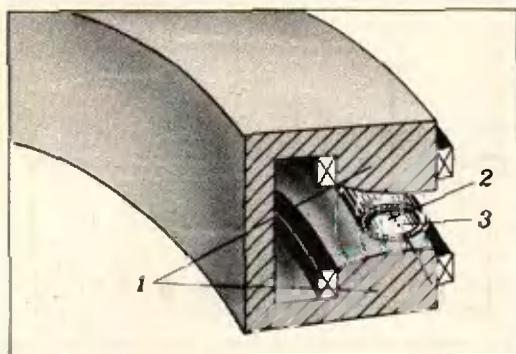


Рис. 4. К устройству синхротрона. 1 — магнитные полюса, 2 — вакуумная камера. 3 — силовые линии магнитного поля.

но понять из рисунка 5. При рассмотрении этого рисунка нужно представить себе, что частица сначала пролетает через поле, изображенное красным цветом, потом — через «синее» поле, потом снова через «красное» и т. д.

На частицы, отклонившиеся от основной траектории по вертикали, со стороны «синего» поля действуют силы, возвращающие их к средней горизонтальной плоскости. А частицы, отклонившиеся в горизонтальной плоскости, либо увеличивают радиус своей траектории (если они отклоняются к периферии вакуумной камеры и попадают в более слабое поле), либо уменьшают его (если они отклоняются к оси ускорителя и попадают в более сильное поле). Таким образом, «синие» поля, обеспечивая необходимое центростремительное ускорение, фокусируют частицы по вертикали, но дефокусируют их по радиусу. В «красном» поле, наоборот, частицы, отклонившиеся по радиусу, возвращаются к основной траекто-

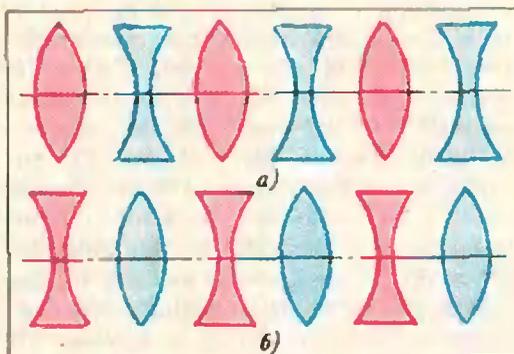


Рис. 6.

рии, а частицы, отклонившиеся по вертикали, еще больше отдаляются от средней горизонтальной плоскости.

Фокусирующие и дефокусирующие магнитные поля действуют на траектории частиц как собирающие и рассеивающие линзы — на световые лучи (об этой аналогии мы уже говорили). Так что аналогом системы чередующихся «красных» и «синих» полей можно считать оптическую систему, составленную из чередующихся собирающих и рассеивающих линз. Различие состоит в том, что оптические оси в большинстве случаев прямолинейны (или это несколько отрезков, в местах пересечения которых стоят призмы), а основные траектории частиц в синхротронах (оси магнитных линз) замкнуты в кольцо. Мысленно распрямим ось магнитных линз и изобразим магнитные поля в виде последовательности собирающих и рассеивающих линз. На рисунке 6, а приведена картина фокусировки в горизонтальной плоскости (фо-



Рис. 5.

кусировка по радиусу), а на рисунке 6, б — в вертикальной. Здесь проявляется второе — наиболее существенное отличие фокусировки заряженных частиц магнитными полями от оптической фокусировки. Собирающие оптические линзы сводят лучи к оптической оси в обоих поперечных направлениях одновременно, в то время как магнитные линзы собирают частицы в одном направлении и рассеивают — в другом. В бесконечной последовательности линз (магнитные линзы расположены по окружности) верхняя и нижняя части рисунка 6 ничем не отличаются друг от друга — это одна и та же картинка, сдвинутая на «пол-шага». Какими фокусирующими свойствами обладает такая последовательность собирающих и рассеивающих линз? На первый взгляд, в такой системе не возникает ни фокусировки, ни дефокусировки. На самом деле это совсем не так. Последовательность таких линз обладает заметными «собирающими» свойствами. Покажем это на системе, составленной из двух одинаковых по оптической силе стоящих друг за другом линз (рис. 7). Пусть на эту систему слева падает пучок, параллельный оптической оси. Мнимое изображение этого пучка находится в фокусе рассеивающей (дефокусирующей) линзы. Обозначим через l расстояние между линзами и через F — их фокусные расстояния. Как видно из рисунка, мнимое изображение пучка, создаваемое рассеивающей линзой, находится на расстоянии $F+l$ от собирающей линзы и служит для нее источником. Найдем, на каком расстоянии d от собирающей линзы находится изображение этого источника, то есть на каком расстоянии от нее расположено изображение пучка, прошедшего через всю систему. По формуле линзы

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{F+l} = \frac{1}{F},$$

откуда

$$d = \frac{F(F+l)}{l} > 0.$$

Поскольку d оказалось больше нуля, наша система является фокусирующей.

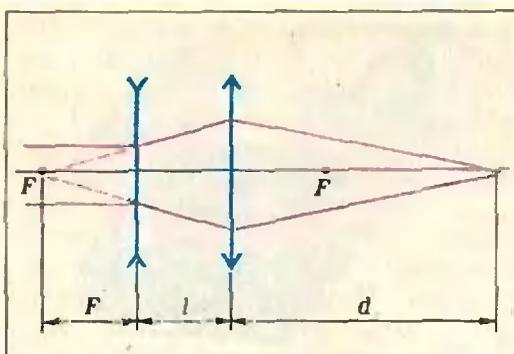


Рис. 7.

Сделаем два замечания. Может показаться, что фокусирующие (или дефокусирующие) свойства системы, составленной из двух «разноименных» линз, зависят от порядка их расположения. Мы предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что это не так. Если первой поставить не рассеивающую, а собирающую линзу, то система в целом все равно останется фокусирующей (предполагается, что $F > l$). Второе замечание заключается в следующем. Степень фокусировки в нашей системе зависит от расстояния между линзами. Если уменьшить это расстояние, то фокусировка становится слабее и в пределе при $l \rightarrow 0$ вообще пропадает. Попробуем понять, почему это происходит. Для этого обратимся к рисунку 8. На этом рисунке изображены лучи, проходящие через собирающую линзу. Луч, идущий через центр линзы, не меняет своего направления. Лучи, проходящие сбоку от центрального, отклоняются тем сильнее, чем они дальше от оси линзы. Это утверждение полностью применимо и к рассеивающей линзе. Вернемся к рисунку 7. Из хода лучей ясно, что в рассеивающей линзе лучи проходят существенно ближе к оптической оси системы, чем в собирающей. Это различие в ходе лучей и объясняет, почему система, составленная из собирающей и рассеивающей линз, имеющих одинаковую оптическую силу, в целом оказывается фокусирующей. Легко также видеть, что различие в расстоянии до оптической оси уменьшается при уменьшении дистанции между линзами — вот почему при этом падает фокуси-

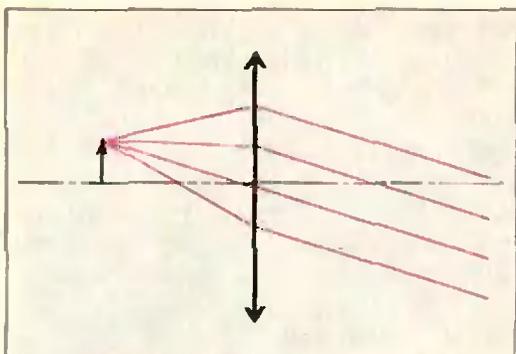


Рис. 8.

рующее действие составленной из них системы.

Вернемся теперь к оптической системе, составленной не из двух линз, а из бесконечной последовательности чередующихся собирающих и рассеивающих линз. Отдельные лучи света (траектории ускоряемых частиц) проходят в оптической системе (в системе магнитных линз) разные пути, зависящие от начальных условий — от расстояния до оптической оси, от угла наклона к оси. Следить за этими отдельными лучами очень трудно и малополезно. Важнее рассматривать «огibaющую пучка» — линию, отделяющую заполненную светом область от незаполненной (границу пучка частиц). Понятно, что вид огibaющей пучка зависит от начальных условий. Однако по мере прохождения оптической системы всякий пучок становится со временем согласованным — форма его огibaющей между любыми двумя последовательными собирающими

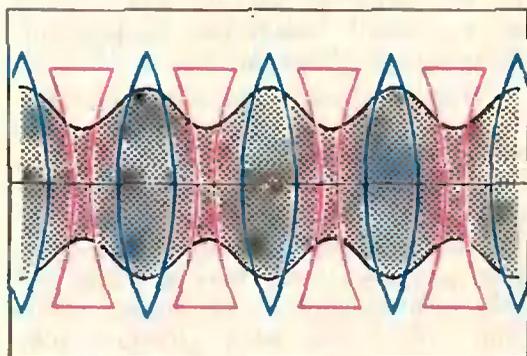


Рис. 9. Огibaющая согласованного пучка частиц (вертикальное сечение пучка).

(или рассеивающими) линзами одна и та же. Аналогично, всякий пучок частиц, достаточно долго крутящийся в ускорителе, со временем становится согласованным. Именно такой пучок (его огibaющая) изображен на рисунке 9. В соответствии с нашими ожиданиями, размеры пучка увеличиваются в собирающих линзах и уменьшаются в рассеивающих. Так что суммарное действие системы линз оказывается фокусирующим — она удерживает пучок вблизи от оси в течение всего времени ускорения.

Магнитные фокусирующие системы, состоящие из последовательности фокусирующих и дефокусирующих магнитов, называются жестко-фокусирующими. В таких системах опускается ограничение (2), величины n_x и n_y могут одновременно принимать большие значения, амплитуда колебаний частиц уменьшается и нет необходимости в широкой вакуумной камере и в больших магнитах. Все крупные современные ускорители основаны на принципе жесткой фокусировки.

На рисунке 10 изображена магнитная система Серпуховского ускорителя на энергию 76 ГэВ (1 ГэВ = 10^9 эВ). Длина этой системы (а значит, и длина кольцевой вакуумной камеры) составляет 1,5 км. Вакуумная камера в сечении имеет форму эллипса с осями 17 и 11,5 см. Частота поперечных колебаний составляет 9,8 на оборот.

Продольная устойчивость; принцип автофазировки

На рисунке 11 изображен график напряжения в ускоряющем зазоре циклического ускорителя. Напряжение изменяется во времени по синусoidalному закону. Амплитуда напряжения выбирается выше, чем то значение напряжения U_0 , которое обеспечивает необходимый прирост энергии (на один период обращения частицы). Из рисунка ясно, что нужный «толчок» получают частицы, пришедшие к зазору в моменты времени t_1 и t_2 . Эти частицы называют синхронными. Будем в дальнейшем именовать синхронные частицы А и В. Как будут двигаться частицы, подошедшие

к ускоряющему зазору не точно в моменты t_1 и t_2 , а с небольшим опережением или запаздыванием? Будут ли эти частицы на следующих оборотах «догонять» синхронные? Иными словами, обладает ли продольное движение частиц необходимой устойчивостью?

Рассмотрим частицу, которая несколько опережает синхронную. Если речь идет о частице A' (будем так именовать частицу, подходящую к зазору в момент времени t'_1), то она приходит к зазору, когда напряжение меньше u_0 . Если мы говорим о частице B' (подходящей к зазору в момент времени t_2), то в момент ее прихода к зазору напряжение окажется выше u_0 . Вследствие этого частица A' получит недостаточную, а частица B' — избыточную энергию, а значит, и скорость. Как скажется этот недостаток или избыток энергии на времени следующего прихода частицы к ускоряющему зазору? Если частица будет стремиться приблизиться (по времени) к синхронной частице, то движение окажется устойчивым, а если удалиться — неустойчивым.

В какой же момент времени частица подойдет к ускоряющему зазору в следующий раз? Как мы уже видели, при движении частиц в циклотроне период обращения не зависит от энергии частиц. Этот вывод справедлив для нерелятивистских частиц (скорость которых много меньше скорости света), движущихся в однородном магнитном поле. Ни одно из этих условий в синхротроне не соблюдено. Период обращения T зависит как от длины орбиты L , так и от скорости частиц v : $T = L/v$. У частиц с разными энергиями — различные скорости и различные длины орбит. (Мы отмечали выше, что в синхротроне положение, а следовательно, длина основной орбиты во время ускорения не меняется. Это происходит потому, что в течение ускорительного цикла напряженность магнитного поля возрастает. Но мы сейчас говорим не об этом. Мы рассматриваем частицы с несколько различающимися энергиями в один и тот же момент времени, а значит,

при одном и том же магнитном поле. Частицы с разными энергиями проходят в таком поле за полный оборот пути разной длины.)

Оказывается, что в зависимости от конструкции синхротрона частицы с большей энергией могут иметь период обращения как больший, чем синхронные частицы, так и меньший.

Пусть, для определенности, частицы с большей скоростью возвращаются к зазору раньше, а частицы с меньшей скоростью — позже, чем синхронная. В этом случае слишком рано пришедшая частица A' , получившая недостаточную энергию при первом прохождении через зазор, в следующий раз придет позже и, значит, приблизится (по времени) к частице A . Частица B' , получившая излишнюю энергию, придет еще раньше, еще больше «отстанет» (по времени) от частицы A . Значит, движение частицы A' окажется устойчивым, а частицы B' — неустойчивым. К тому же результате нетрудно прийти, рассматривая запаздывающие частицы A'' и B'' .

Если же из-за увеличения длины пути частицы с излишней скоростью тратят на совершение оборота больше времени, чем синхронные, движение частиц A окажется неустойчивым, а частиц B — устойчивым.

Сформулируем вывод. Если амплитуда напряжения на ускоряющем зазоре превосходит значение, обеспечивающее необходимый прирост энергии, и если время обращения частиц зависит от их энергии, то существуют два «класса» частиц, для одного из которых движение непременно оказывается устойчивым.

Это утверждение было высказано независимо двумя учеными — советским физиком академиком В. И. Векслером и американским физиком Мак—Милланом — и носит название принципа автофазировки или фазовой устойчивости. На использовании этого принципа основано устройство всех ускорителей, кроме изохронных (ускорителей, у которых время обращения от энергии не зависит).

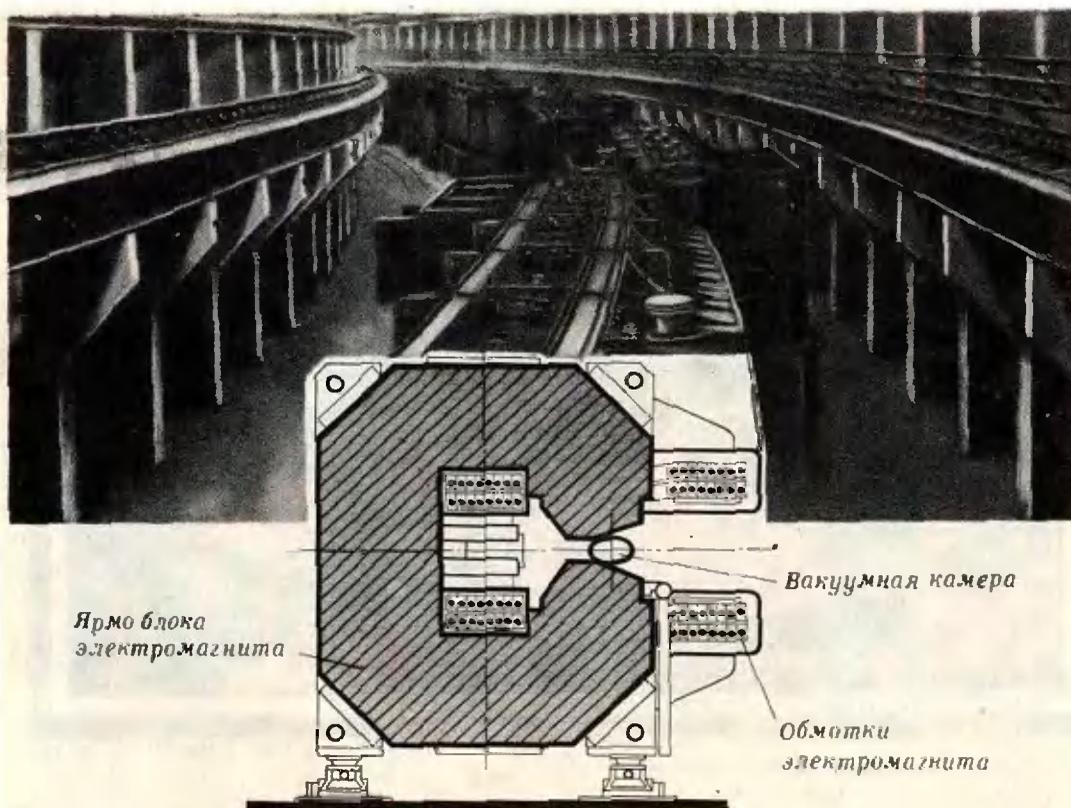


Рис. 10. Устройство магнитной системы Серпуховского ускорителя.

Заключение

Тот, кто кроме этой статьи прочитал уже упоминавшуюся нами статью из четвертого номера «Кванта» за 1977 год и статью об ускорителях на встречных пучках («Квант» № 5, 1978), теперь имеет представление о всех типах современных ускорителей. Остается добавить, что ускорительная техника переживает новый подъем. В процессе сооружения находятся накопительные кольца со встречными электронным и позитронным пучками на энергию 15 ГэВ.

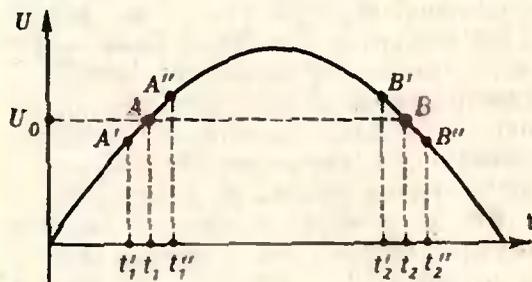


Рис. 11.

В США начато сооружение первого протонного ускорителя со сверхпроводящими магнитами (на энергию 1000 ГэВ). Проектируются установки со встречными пучками электронов и протонов. Все реальное становится создание накопительных колец со встречными пучками протонов и антипротонов.

Сооружение крупных ускорителей обходится настолько дорого, что становится не под силу даже большим странам. Государства, входящие в СЭВ (Совет экономической взаимопомощи), участвуют в финансировании работ на ускорителях Объединенного Института Ядерных Исследований в Дубне. Западные страны создали Европейский Центр Ядерных Исследований, построенный на границе Швейцарии и Франции. В этом центре сосредоточены наиболее крупные ускорители в Европе — ускоритель протонов на энергию 400 ГэВ и накопительные кольца со встречными пучками протонов с энергией 2×30 ГэВ.



3. Тьмеладзе

Следствие ведет Ферма

Удушающий зной не помешал уголовной палате Тулузского парламента в полном составе собраться для слушания дела. Все тринадцать членов палаты с любопытством смотрели на обвиняемого Пьера Крюмона, корыстолюбивого наглеца, недавно вернувшегося из Парижа. Подсудимый даже под пыткой не признал своей вины, но это ничего не меняло. По словам советника де Бровалья, в день святого Георгия, в десять часов утра состоятельный крестьянин Жан Морель из деревеньки Амьер, идя в церковь, услышал крик мельника Жака Крюмона. Другой голос, напоминавший голос его сына Пьера, выкрикивал проклятия. Когда Морель подбежал к несчастному, из его груди уже торчал кинжал, принадлежавший Пьеру.

Вот почему сегодня собрались все члены палаты: хотя времена худые — в королевстве беспокойно, лишь недавно опустили головы богоотступники-гугеноты, а на севере уже навигается чума, — но все же не каждый день доводится видеть отцеубийцу. Есть на что посмотреть: крючковатый нос, плечи чуть не выше головы, а голоса почти не слышно. Жаль, что королевский указ запретил публичное отправление правосудия — для черни было бы полезно взглянуть на эту нечестивую голову, когда палач отделит ее от тщедушного тела. А де Броваль продолжал:

— Сын и раньше жаловался на скупость отца и явно был не прочь поживиться наследством. Совершив злодеяние, негодяй сразу же бросился в трактир в деревню Бенэ, что на другом берегу реки Сот. Посетители трактира, собравшиеся к открытию, к 11 часам, отметили, что он был взволнован и растрепан. Мне кажется, все улики против этого мерзавца.

Все ясно, пора принимать решение. Но нет, господин советник Ферма что-то хочет уточнить. Неужели ему не так жарко, как остальным? Председатель палаты, ценивший Фер-

ма за ученость, благосклонно кивнул.

— Уверены ли вы, что злодеяние случилось ровно в десять?

— Да, — с раздражением подтвердил де Броваль, — люди сбегались на зов Мореля под звон церковного колокола, возвещавшего обедню.

— Кто еще заинтересован в наследстве старика?

— Роншар, его зять.

— Давно ли вы видели Роншара, Пьер Крюмон?

— В тот злополучный день, ваша честь, — едва слышно начал подсудимый, — отец приходил ко мне с ним, чтобы получить с меня долг в два экю. Отец не хотел брать монеты, которые я ему давал, оттого, что одна монета примята с краю, но мосье Роншар сказал, что и так сойдет.

— За сколько времени можно добраться из Амьера в Бенэ?

— У него хорошая лошадь, — ответил де Броваль, — она может делать по четыре лье в час.

— Это верно, — обреченно возразил обвиняемый, — Жази может идти под уклон к Соту со скоростью четыре лье в час, но в гору за рекой она не смогла бы делать больше двух с половиной.

— Тем не менее, — воскликнул де Броваль, — за час вы смогли попасть из Амьера в Бенэ, чтобы запить свой грех пинтой бургундского!

— Прошу прощения, — раздался голос Ферма, — но пока я не убежден, что расстояние от Амьера до Бенэ можно преодолеть за час.

Если бы не строжайший запрет для судей проявлять свои разногласия при подсудимом, де Броваль не смог бы сдержаться. Поэтому он лишь язвительно произнес:

— Я вынужден напомнить Вам, господин Ферма, что срок следствия истек, а новый не может быть назначен. Мы обязаны принять решение.

Ферма выждал, пока стражники по знаку председателя выведут подсудимого, и твердо сказал:

— Я не подпишу приговор, прежде чем не буду уверен, что упомянутое расстояние можно покрыть за час. Кроме того, я хотел бы видеть свидетелей — Роншара и Мореля.

— Но по указу его величества свидетели не участвуют в процессе.

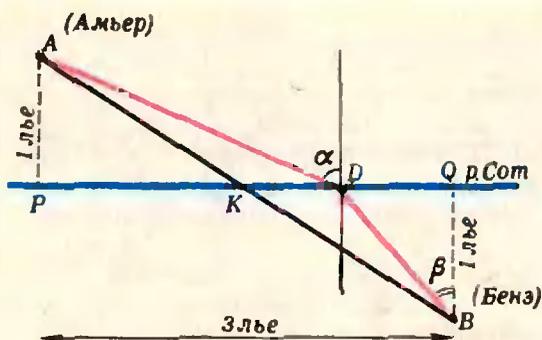


Рис. 1.

Вы еще, чего доброго, пригласите в суд защитника! — раздались протестующие голоса.

Председатель задумаясь и примирительно сказал:

— Будь по-вашему, господин Ферма, но я могу отложить слушание дела только до завтра.

«Времени у меня мало, а задача не из легких, — подумал Ферма, садясь дома за письменный стол. — Вот передо мною карта местности (рис. 1). Пусть Амьер — это пункт A , а Бенэ — B . Если бы Крюмон поехал напрямик, то ему пришлось бы проделать путь AKB длиной $\sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \approx 3,6$ лье. Первую половину пути Крюмон проехал бы со скоростью 4 лье/час, а вторую — 2,5 лье/час. На весь путь он потратил бы $\frac{1,8}{4} + \frac{1,8}{2,5} = 0,45 + 0,72 = 1,17$ часа. Стало быть, по прямой за час Крюмон добраться не мог. Но он мог выбрать путь такой, чтобы большая его часть вела по спуску (участок AD) и лишь меньшая часть — в гору (участок DB). Каков же должен быть самый быстрый путь ADB ? Я должен найти его — ведь от этого зависит жизнь человека! Если на лошади Пьера Крюмона нельзя преодолеть этот путь за час, то убийца — кто-то другой, и мы можем отправить на эшафот невинного».

На следующее утро членов палаты несколько удивила черная доска как раз против места председателя. Около доски уже стоял Ферма.

— Господа, — начал Ферма, — сейчас я докажу, что при скоростях движения 4 лье/час под гору и 2,5 лье/час в гору за час попасть из Амьера в Бенэ невозможно.

— Господа, — начал Ферма, — сейчас я докажу, что при скоростях движения 4 лье/час под гору и 2,5 лье/час в гору за час попасть из Амьера в Бенэ невозможно.

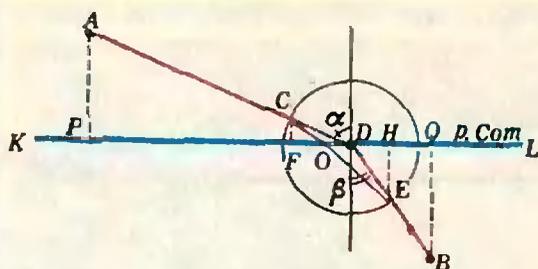


Рис. 2.

Пусть линия ADB на рисунке 2 изображает самый быстрый путь. В точке D этот путь пересекает реку $Сот$. Проведем окружность с центром в точке D единичного радиуса — она пересекает путь ADB в точках C и E . Путь CDE будет наискорейшим путем между C и E (если бы это было не так, то за счет избрания лучшего пути на участке CDE можно было бы улучшить и весь путь из A в B).

Наискорейший путь вполне определяется углами α и β (рис. 2). Найдем соотношение между этими углами.

Пусть Крюмон проехал путь $|CD|=1$ со скоростью u , а путь $|DE|=1$ со скоростью $v < u$. Таким образом, весь путь CDE он проделал за время $z = \frac{1}{u} + \frac{1}{v}$.

Сместим теперь на величину ϵ точку пересечения D пути ADB с $Сотом$ — обозначим новую точку через O . Согласно известной еще Евклиду теореме геометрии,

$$|CO| = \sqrt{1 + \epsilon^2 - 2b\epsilon},$$

$$|OE| = \sqrt{1 + \epsilon^2 + 2a\epsilon},$$

где для краткости обозначено $|FD|=b$, $|DH|=a$ (рис. 2). Поделив оба эти расстояния на соответствующие скорости, получим время движения по пути COE :

$$\bar{z} = \frac{\sqrt{1 + \epsilon^2 - 2b\epsilon}}{u} + \frac{\sqrt{1 + \epsilon^2 + 2a\epsilon}}{v}.$$

Если величину ϵ взять очень маленькой, то значения z и \bar{z} почти не будут отличаться. Поэтому приравняем оба времени z и \bar{z} :

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{\sqrt{1 + \epsilon^2 - 2b\epsilon}}{u} + \frac{\sqrt{1 + \epsilon^2 + 2a\epsilon}}{v}.$$

Чтобы избавиться от иррациональности, дважды возведем в квадрат обе части получившегося уравнения — это нелегко, но ведь дело идет о жизни человека!

$$\begin{aligned} \frac{4}{u^2 v^2} (1 + \epsilon^2 - 2b\epsilon) (1 + \epsilon^2 + 2a\epsilon) = \\ = 4 \left[\frac{1}{uv} + \epsilon \left(\frac{b}{u^2} - \frac{a}{v^2} \right) \right]^2 + \\ + \epsilon^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} \right) \left[\epsilon^2 \left(\frac{1}{u^2} + \frac{1}{v^2} \right) + \right. \\ \left. + 4\epsilon \left(\frac{a}{v^2} - \frac{b}{u^2} \right) - \frac{4}{uv} \right]. \end{aligned}$$

Уничтожим член $\frac{4}{u^2 v^2}$, после чего

поделим обе части этого уравнения на ϵ и затем положим $\epsilon=0$ *); получим: $au(u+v) = bv(u+v)$, или

$$\frac{b}{a} = \frac{u}{v}.$$

А теперь заметим, что $b = \sin \alpha$, $a = \sin \beta$; значит,

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{u}{v},$$

то есть синусы углов падения и преломления относятся как скорости движения в верхней и нижней средах, разделенных линией KL ...

— Пойдите, — прервал Ферма председатель, — причем здесь углы падения и преломления?

— Простите, господа! Я невольно воспользовался здесь физической аналогией. Дело в том, что свет тоже избрал бы путь, который позволил ему быстрее всего достичь цели (и линия KL была бы уже не рекой, а границей раздела двух сред, а величины u и v представляли бы собой скорости распространения света в этих средах) *).

— Но, господин Ферма, к окончанию дела Крюмона Вы ведете нас явно не скорейшим путем — съезвил де Броваль.

*) Читатель, знакомый с понятием производной, легко сообразит, что Ферма ищет экстремум функции.

**) Сейчас этот закон движения света называют «принципом Ферма». Его вывод содержится в учебнике «Алгебра и начала анализа 9» (с. 159).

— Осталось немного, господа. Поскольку мы теперь знаем, что для наискорейшего пути синусы углов α и β пропорциональны скоростям движения u и v , можно положить $\sin \alpha = ku$, $\sin \beta = kv$, где k — коэффициент пропорциональности. Зная синусы углов, легко найти их тангенсы:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{ku}{\sqrt{1-k^2u^2}},$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{kv}{\sqrt{1-k^2v^2}},$$

а с их помощью совсем просто определить длины отрезков PD и DQ :

$|PD| = |AP| \operatorname{tg} \alpha$, $|DQ| = |QB| \operatorname{tg} \beta$. Вспомнив, что $|AP| = |QB| = 1$ лье, $u = 4$ лье/час и $v = 2,5$ лье/час, получим:

$$|PD| = \frac{4k}{\sqrt{1-16k^2}},$$

$$|DQ| = \frac{2,5k}{\sqrt{1-6,25k^2}}.$$

Сумма этих величин равна 3 лье (см. рис. 1); то есть

$$\frac{4k}{\sqrt{1-16k^2}} + \frac{2,5k}{\sqrt{1-6,25k^2}} = 3.$$

Не спрашивайте меня, господа, как мне удалось найти подходящий корень этого уравнения — это увело бы нас в сторону. Его приближенное значение $k \approx 0,23$. Тогда $|PD| = 2,36$, $|DQ| = 0,71$ (невязкой 0,07 при подстановке в уравнение позволительно пренебречь),

$$|AD| = \sqrt{1 + (2,36)^2} = 2,56,$$

$$|DB| = \sqrt{1 + (0,71)^2} = 1,22.$$

Значит, наискорейший путь приведет из Амьера в Бенэ за $\frac{2,56}{4} + \frac{1,22}{2,5} = 1,13$ часа. Раньше Крюмон добраться никак не мог, а следовательно, не мог и совершить преступления.

— Вы убедили меня, господин Ферма, — встрепнулся задремавший было председатель. — Введите свидетелей!

Стражник распахнул дверь, и в комнату вошли Роншар и Морель.

— Суд установил, — продолжал председатель, — что у господина Крюмона есть алиби. Припомните,

Морель, не походил ли голос убийцы на чей-нибудь еще?

Морель сначала замер, но потом его маленькие глазки забегали по лицам судей. Наконец, он проямлил:

— Мне сдается, ваша честь, что это мог быть и голос господина Роншара.

— Негодяй! — прорычал могучий Роншар густым басом.

Он схватил маленького Мореля за отвороты кафтана и начал его неистово трясти. Морель беспомощно затрепыхался в его ручищах, теряя из карманов трубку, огниво, ключи, монеты. Одна из монет подкатилась к стулу Ферма, и он поднял ее. Стражники едва оторвали Роншара от его жертвы и скрутили ему руки.

— Есть ли у вас еще вопросы, господин Ферма?

— Есть. К обоим... свидетелям — назовем их пока так. Не это ли принятое с краю эю получил несчастный Жак Крюмон в виде возвращенного долга?

Послесловие

Герой нашей истории, юрст Пьер Ферма (1601—1665) — один из самых ярких математических талантов Франции XVII века, ближе других сумел подойти к созданию дифференциального исчисления *).

Чтобы точнее представить себе метод, которым пользовался Ферма при отыскании экстремумов, рассмотрим более простой пример, чем тот, который пришлось разобрать Ферма, чтобы спасти от виселицы юношу.

Пусть задана сумма двух чисел x и y , $x + y = C$. Требуется найти такие x и y , чтобы их произведение $z = xy$ было максимальным. Если учесть, что $y = C - x$, то нужно найти такое x , чтобы функция $z = x(C - x)$ принимала наибольшее значение.

Итак, нужно найти такую точку x , чтобы, сдвинувшись из нее на малую величину ϵ , мы не увеличивали бы z . А если мы сдвинемся на очень малую величину, то изменение функции z

*) О жизни и творчестве Ферма см. «Квант», 1976, № 8, с. 3.

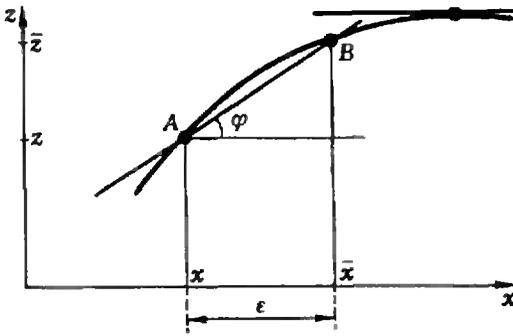


Рис. 3.

должно быть почти неотлично от нуля.

Ферма рассуждал примерно так. Пусть $\bar{x} = x + \varepsilon$ — новое значение x . Тогда \bar{z} , новое значение функции z , выразится формулой

$$\begin{aligned}\bar{z} &= (x + \varepsilon)(C - x - \varepsilon) = \\ &= Cx - x^2 - 2x\varepsilon + C\varepsilon - \varepsilon^2.\end{aligned}$$

Найдем разность \bar{z} и z .

$$\bar{z} - z = -2x\varepsilon + C\varepsilon - \varepsilon^2.$$

Отношение $\bar{z} - z$ к ε есть тангенс угла φ (рис. 3):

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \varphi &= \frac{\bar{z} - z}{\varepsilon} = \frac{-2x\varepsilon + C\varepsilon - \varepsilon^2}{\varepsilon} = \\ &= C - 2x - \varepsilon.\end{aligned}\quad (*)$$

Если ε очень мало, то секущая AB становится неотличима от касательной к кривой $z = x(C - x)$ в точке x . А тангенс φ становится тангенсом угла наклона касательной к горизонтали. Чтобы получить тангенс угла наклона этой касательной, положим в последнем выражении $\varepsilon = 0$; мы получим

$$\operatorname{tg} \varphi = C - 2x.$$

Остается приравнять этот тангенс нулю (ведь в точке максимума касательная горизонтальна, — см. рис. 3):

$$C - 2x = 0,$$

— и мы получим решение: $x = C/2$. Действительно, при заданной сумме произведение двух чисел становится максимальным, когда эти числа равны между собой. Или, на языке геометрии, из всех прямоугольников с заданным периметром наибольшей площадью обладает квадрат.

Метод Ферма дает верный результат при отыскании экстремума функ-

ции одной переменной. И все-таки в этом методе есть изъян, который не позволяет считать Ферма создателем дифференциального исчисления. С позиций обычной алгебры, за рамки которой не решался выйти Ферма, так поступать нельзя: мы делили на величину ε , а потом положили эту величину равной нулю. Выходит, мы делили на нуль! Чтобы преодолеть это противоречие, Ньютону и Лейбницу пришлось сделать следующий шаг — создать *анализ бесконечно малых*. Но это было сделано лишь спустя полвека после описанных событий, причем Ньютон отмечал заслуги Ферма.

Как же следовало поступить? В формуле (*) следовало перейти к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\operatorname{tg} \varphi = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{-2x\varepsilon + C\varepsilon - \varepsilon^2}{\varepsilon} = C - 2x.$$

Величину $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\bar{z} - z}{\varepsilon}$ Лейбниц назвал *производной* функции z ; обозначают ее через z' . Привняв в нашем случае z' к нулю, получаем тот же результат: $x = C/2$. Таким образом, с алгоритмической точки зрения метод Ферма аналогичен приравниванию нулю производной, но этому методу не хватает строгости.

Отыскание минимумов и максимумов функций с помощью дифференциального исчисления используется сейчас в технике, экономике и управлении. При этом удобно пользоваться правилами дифференцирования функций, которые сейчас изучаются в школе. Но в ряде случаев метод Ферма не уступает им: попробуйте найти наименее скорейший путь из Амьера в Бенэ (помощью производной; вы убедитесь, что в этой задаче прямое дифференцирование функции ведет к успеху, не быстрее).

История Пьера Крюмона — вымышленная: в обширной переписке с друзьями Ферма не уделяет ни слова своей деятельности советника уголовной палаты. Но в этой истории отражены истинные условия судебной процедуры того времени — эпохи кардинала Ришелье, в которую протекала служба Ферма.

Н. Малов

Всегда ли отталкиваются противоположно направленные токи?

В 1820 году великий французский физик Ампер открыл магнитное взаимодействие электрических токов. В частности, он установил, что при пропускании тока по двум параллельным проволокам они притягиваются друг к другу, когда оба тока направлены одинаково, и отталкиваются друг от друга, если направления токов взаимно противоположны.

Это можно увидеть на опыте. Так, в § 114 учебника физики для 9 класса описан соответствующий опыт: два вертикальных параллельных провода нижними концами подключены к источнику тока (аккумулятору), верхние концы замкнуты накоротко, при этом между проводами наблюдается заметное отталкивание (рис. 1).

Там же сказано, что провода не взаимодействуют до замыкания их концов (точнее, не обнаруживается заметного взаимодействия). Однако, так как провода находятся под напряжением, на поверхности должны быть (и действительно есть) электрические заряды, причем — противоположных знаков. Следовательно, между проводами — до замыкания их концов — должно существовать электрическое притяжение.

Что же изменилось после замыкания цепи? Изменилась разность потенциалов: незначительно, если источник обладает малым внутренним сопротивлением (по сравнению с сопротивлением проводов), или сильно, если внутреннее сопротивление

относительно велико; кроме того, в цепи возник ток. В соответствии с изменением разности потенциалов изменилась и величина поверхностных зарядов, но они обязательно остались на проводах. Значит, электрическое притяжение должно сохраниться и после замыкания цепи. Почему же оно не проявилось в опытах? Видимо, оно было малым по сравнению с магнитным отталкиванием.

Сам Ампер довольно определенно высказался по этому поводу. Источником тока в опытах Ампера служил вольтов столб — ряд включенных последовательно гальванических элементов, весьма несовершенных с современной точки зрения. К зажимам вольтова столба Ампер присоединял электроскоп. При ненагруженном столбе (при разомкнутой цепи) электроскоп давал заметное отклонение. Когда же к столбу подключались исследуемые провода, в цепи возникал ток, а показания электроскопа резко уменьшались (мы теперь понимаем, что это вызывалось большим внутренним сопротивлением вольтова столба).

Отметив это уменьшение, а также обнаружив взаимодействие проводов с током даже на большом расстоянии от источника, Ампер заключил, что открытое им взаимодействие токов «не имеет отношения» к электрическому взаимодействию. Другими

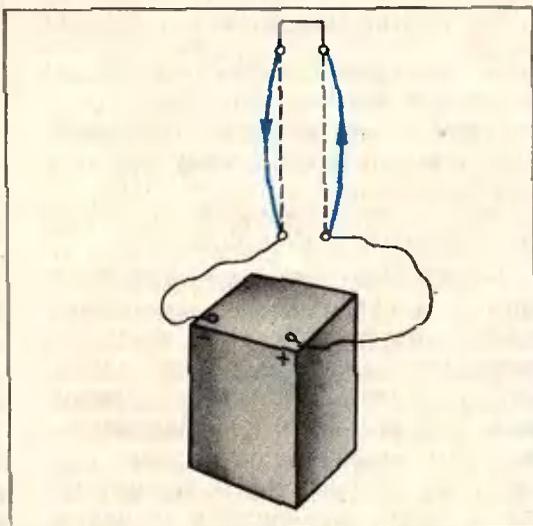


Рис. 1.

словами, он считал, что магнитное взаимодействие присуще движущемуся, а электрическое — покоящемуся электричеству.

Нужно заметить, что в 1820 году не было точных приборов для измерения зарядов, напряжений, токов (кстати сказать, именно Ампер изобрел один из первых гальванометров, основанный на взаимодействии проводника с током и магнитной стрелки). Еще не были определены единицы этих величин, не существовало определенного понятия электрического сопротивления, а закон Ома был открыт пятью годами позже. Поэтому для своего времени высказывание Ампера было, конечно, весьма содержательным. Оно верно отражало соотношение между магнитными и электрическими силами в условиях опытов Ампера: сильное магнитное взаимодействие и слабое электрическое.

Но всегда ли существует такое соотношение? Всегда ли магнитное взаимодействие сильнее электрического? Чтобы ответить на эти вопросы, сделаем небольшие расчеты.

Рассмотрим электрическую цепь (рис. 2) из двух параллельных проводов длины l , расположенных на расстоянии $h \ll l$ друг от друга и имеющих небольшое сопротивление R_A (сопротивление линии). Левые концы проводов подключены к источнику, дающему напряжение U , а правые концы замкнуты на нагрузочное сопротивление R_H . При замыкании цепи токи по параллельным проводам текут в противоположных направлениях. Найдем сначала силу \vec{F}_M их магнитного взаимодействия.

Пусть один из токов, например, ток, текущий по верхнему проводу, создает магнитное поле \vec{B} , а другой ток находится в этом поле.

Во-первых, индукция магнитного поля в вакууме всегда пропорциональна создающему поле току I в проводнике. Во-вторых, она уменьшается по мере удаления от проводника. Строгий расчет, проведенный для прямолинейного проводника с током, дает, что индукция магнитного поля в точке, находящейся от проводника на расстоянии h , прямо про-

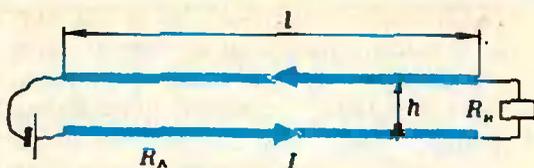


Рис. 2.

порциональна I и обратно пропорциональна h .

Согласно закону Ампера, на малый участок провода длины Δl , по которому течет ток I (другими словами, на элемент тока $I\Delta l$), со стороны магнитного поля \vec{B} , составляющего с элементом тока угол α , действует магнитная сила \vec{F}_M такая, что

$$|\vec{F}_M| = |\vec{B}| |I\Delta l| \sin \alpha.$$

В нашем случае $\alpha = 90^\circ$, а магнитное поле прямо пропорционально I и обратно пропорционально h , поэтому

$$|\vec{F}_M| = k_1 \frac{I^2}{h} \Delta l, \quad (1)$$

где k_1 — коэффициент пропорциональности, не зависящий от тока.

Направление этой силы определяется правилом левой руки. (Проверьте, что в данном случае провода отталкиваются друг от друга.)

Теперь о силе \vec{F}_e электрического притяжения. Обозначим через λ электрический заряд, приходящийся на единицу длины каждого провода. Заряды на одном проводе являются источником электрического поля, действующего на заряд $\lambda\Delta l$, находящийся на элементе длины Δl другого провода.

Можно показать, что

$$|\vec{F}_e| = k_2 \frac{\lambda^2}{h} \Delta l, \quad (2)$$

где k_2 — коэффициент пропорциональности, не зависящий от заряда. Действительно, сила, действующая на заряд в электрическом поле, пропорциональна напряженности электрического поля и величине заряда. Оказывается, что напряженность поля, созданного длинным заряженным проводом, пропорциональна плотности заряда λ и обратно пропорциональна

расстоянию от него (расстоянию h в данном случае). Попробуйте это показать самостоятельно.

Поверхностный заряд на проводах, конечно, пропорционален напряжению U , поэтому равенство (2) можно переписать в таком виде:

$$|\vec{F}_g| = k_3 \frac{U^2}{h} \Delta l, \quad (3)$$

где k_3 — новый коэффициент пропорциональности (не зависящий от U).

Найдем отношение магнитной и электрической сил, используя равенства (1) и (3):

$$\frac{|\vec{F}_M|}{|\vec{F}_g|} = \frac{k_1 I^2 \Delta l / h}{k_3 U^2 \Delta l / h} = k \frac{I^2}{U^2}.$$

Применяя закон Ома, приходим к важному выводу — отношение сил определяется квадратом сопротивления цепи $R = R_n + R_{\text{н}}$:

$$\frac{|\vec{F}_M|}{|\vec{F}_g|} = k \frac{1}{R^2}.$$

Строгий расчет дает для коэффициента k такие значения:

$$k = 10^5 - 5 \cdot 10^5 \text{ (Ом}^2\text{)}.$$

Поэтому очевидно, что при небольших сопротивлениях цепи ($R \ll \ll 500 \text{ Ом}$) магнитные силы оказываются больше электрических. Именно такие условия были в опытах Ампера, они же создаются при демонстрации взаимодействия проводов с током.

Но при достаточно больших сопротивлениях ($R \gg 500 \text{ Ом}$) на первый план выступают электрические силы.

Это можно подтвердить опытом, не требующим сложного оборудования. Две тонкие медные проволоки длиной 25—30 см и диаметром около 0,1 мм натягиваются между двумя изолирующими планками (из сухого дерева, гетинакса и т. п.); расстояние между проволоками невелико: 3—5 мм. Все четыре конца проволок припаиваются к зажимам, укрепленным на планках. В средней части подставки, несущей планки, вырезается отверстие диаметром около 1 см.

Провода располагаются вертикально в плоскости магнитного меридиана Земли, то есть в плоскости, где рас-

положится горизонтальная магнитная стрелка, свободно поворачивающаяся вокруг вертикальной оси. При этом магнитное поле Земли практически не будет влиять на магнитное отталкивание проводов.

Параллельно плоскости проволок на расстоянии 3—4 м от них располагается экран. При помощи мощного источника света и собирающей линзы на экран проецируют участок линии, находящийся против упомянутого выше отверстия. На экране, в тех местах, где получается увеличенное изображение проволок, натягивают две черные (или цветные) нити, отмечающие начальное положение проволок.

Затем производят два наблюдения:

1. Один конец линии замыкают на небольшое (несколько ом) сопротивление либо просто замыкают накоротко. Другой конец через амперметр и реостат (10 Ом, 1 А) подключают к аккумулятору (3—6 В). Медленно уменьшая сопротивление реостата, доводят ток до 0,9—1 А. Так как в этом случае электрические силы малы, а магнитные — относительно велики, то на экране наблюдается отталкивание проводов.

2. Один конец линии замыкают на большое сопротивление (3 МОм, 3 Вт). Другой конец, соблюдая осторожность, подключают к маломощному источнику высокого напряжения (2—3 кВ) (например, к школьному преобразователю напряжения «Разряд 1»). При этом в линии получается ток порядка миллиампера; магнитные силы, по сравнению с первым опытом, уменьшаются примерно в миллион раз. Во столько же раз увеличиваются электрические силы. Отталкивание проводов линии сменяется вполне отчетливым притяжением их друг к другу.

Заметим, что в современных мощных высоковольтных линиях передачи электрической энергии электрические силы взаимодействия между проводами бывают больше магнитных. Однако и те, и другие обычно малы по сравнению с силой тяжести, приходящейся на тот же участок длины линии Δl . Поэтому при проектировании линий передачи электрической энергии на электрические, ни магнитные силы во внимание не принимаются.



В. Майер

Изгибная волна в пластинках

Волны, возникающие в пластинках, обладают очень интересными свойствами. С этими свойствами можно познакомиться экспериментально. Но прежде надо научиться возбуждать волну. Это удобно сделать, например, с помощью звучащей стеклянной трубки.

Возьмите тонкую и длинную стеклянную трубку и зажмите ее посередине в лапке штатива. Полотняной тряпочкой, смоченной одеколоном или спиртом, плавно проведите от конца трубки к ее середине — вы услышите довольно сильный звук. Это в трубке возникла стоячая волна. В месте закрепления образовался узел смещений, а на концах — пучности (рис. 1).

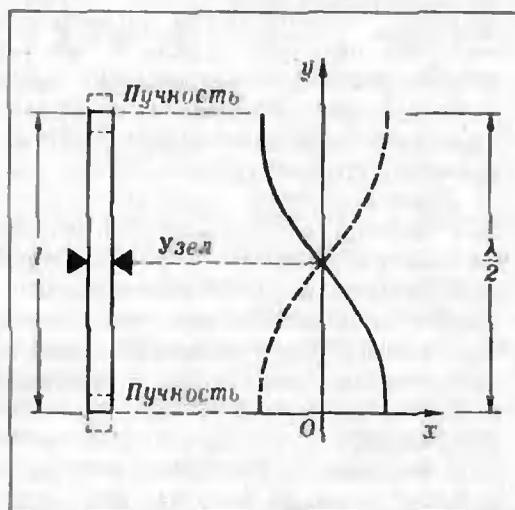


Рис. 1.

Частота колебаний ν и длина λ звуковой волны связаны с длиной l трубки:

$$\nu = \frac{v}{2l} \quad (1)$$

и

$$\lambda = 2l. \quad (2)$$

Здесь v — скорость распространения звука в трубке. Она определяется, прежде всего, материалом трубки и не зависит от частоты колебаний. Таким образом, для получения звуков разных частот следует пользоваться трубками различных длин *). Например, если нужно получить звук вдвое более высокой частоты, стеклянную трубку необходимо укоротить в два раза.

Теперь сделайте следующее. Из дюрала толщиной 1,5–2 мм вырежьте диск диаметром около 100 мм. Положите его горизонтально на слой поролона и равномерно посыпьте порошком марганцовокислого калия. Слегка коснувшись концом стеклянной трубки центра диска, трением возбудите звучание трубки. При этом

*) На самом деле, в каждой трубке можно возбудить не одно колебание, а целый набор. Колебание самой низкой частоты, определяемой формулой (1), называют *основным тоном*. Все остальные частоты кратны основной; колебания с кратными частотами называют *обертонными*.

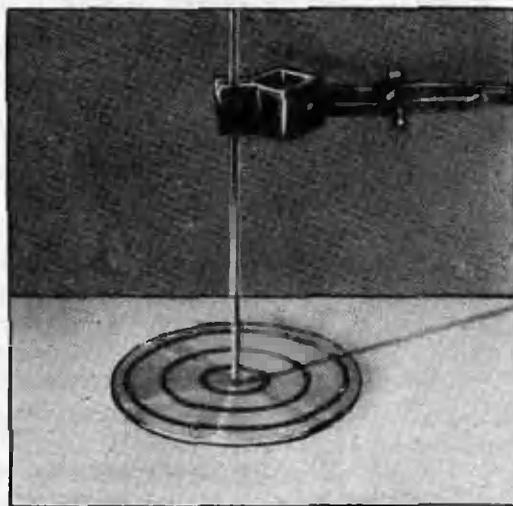


Рис. 2.

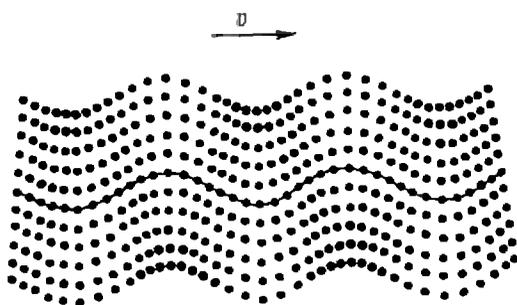


Рис. 3.

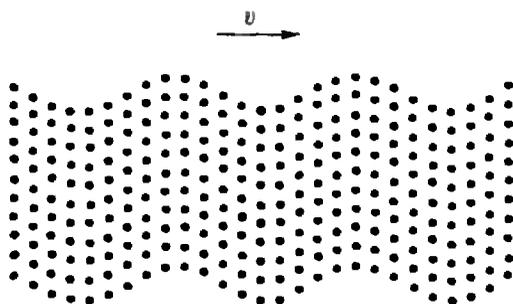


Рис. 4.

порошок соберется в несколько линий в виде концентрических окружностей с центром в точке касания трубки (рис. 2).

Объяснить результат этого опыта несложно. От конца трубки по диску распространяется круговая волна. Дойдя до края диска, она отражается от него — возникает отраженная волна. В результате интерференции падающей и отраженной волн в диске устанавливается стоячая волна, и порошок собирается в ее узлах. Расстояние между двумя соседними узлами, очевидно, равно половине длины волны в диске.

Стоячая волна в стеклянной трубке — продольная. А в диске? Кажется бы, в диске должна распространяться поперечная волна, поскольку источник — конец трубки — колеблется перпендикулярно диску. Оказывается, это не так. Исследования показали, что волна в диске одновременно и продольная, и поперечная (рис. 3). Такую волну называют *изгибной*. Для сравнения на рисунке 4 показана чисто поперечная волна.

Изгибная волна во многом отличается от обычной (продольной или поперечной) волны. Так, скорость v_n изгибной волны не остается постоянной при изменении частоты колеба-

ний. Она изменяется пропорционально корню квадратному из частоты:

$$v_n \sim \sqrt{\nu}.$$

Заметим кстати, что явление зависимости скорости распространения волны от частоты называется *дисперсией*.

Поскольку длина изгибной волны λ_n , скорость v_n и частота ν связаны соотношением $v_n = \lambda_n \nu$ (общим для волн любой природы), можно записать

$$\lambda_n = \frac{v_n}{\nu} \sim \frac{1}{\sqrt{\nu}}.$$

Подставив сюда значение для частоты ν из формулы (1), получим

$$\lambda_n \sim \frac{1}{\sqrt{\nu}} = \sqrt{\frac{2l}{\nu}},$$

или

$$\lambda_n = k\sqrt{l}, \quad (3)$$

где k — постоянный коэффициент пропорциональности.

Соотношение (3) можно проверить экспериментально. Приведем результаты одного из наших опытов. Мы использовали дюралевый диск толщиной 1,7 мм и диаметром 120 мм. Изгибные волны в диске возбуждались звучащими стеклянными трубками длиной 60 и 30 см. Внутренний диаметр трубок был равен 0,5 мм, внешний — 4,5 мм.

В опыте с первой трубкой (длиной 60 см) длина изгибной волны оказалась равной $\lambda_{n1} = 50,5$ мм, а в опыте со второй трубкой — $\lambda_{n2} = 34,5$ мм. Отсюда

$$\frac{\lambda_{n1}}{\lambda_{n2}} = 1,46.$$

Согласно формуле (3), отношение длин волн должно быть равно отношению

$$\frac{\sqrt{l_1}}{\sqrt{l_2}} = \sqrt{2}.$$

Так как $1,46 \approx \sqrt{2}$, опыт, с некоторой степенью точности, подтверждает как сам факт существования изгибных волн; так и справедливость соотношения (3).



Г. Токоян, И. Яглом

Теорема Морлея

В этой статье мы расскажем об одной геометрической теореме, известной под именем «теорема Морлея».

Френк Морлей (1860—1937) родился в Англии. Однако почти всю свою жизнь он провёл в США, хотя и остался английским гражданином. Несколько десятков лет Морлей был профессором математики университета имени Джона Гопкинса в Балтиморе — одного из старейших американских университетов. Наряду с математикой он увлекался и шахматами и однажды сумел выиграть еще у одного видного математика — Эммануиля Ласкера (1868—1941), тогдашнего чемпиона мира по шахматам.

Пусть ABC — произвольный треугольник. Хорошо известно, что биссектрисы его углов пересекаются в одной точке (рис. 1). А что произойдет, если биссектрисы — то есть прямые, делящие угол пополам, заменить трисектрисами — прямыми, делящими угол на три равные части? Френк Морлей рассмотрел конфигурацию, приведенную на рисунке 2, и доказал, что точки X , Y и Z при любом исходном треугольнике ABC являются вершинами равностороннего треугольника. Морлей рассказал об этом поразившем его факте своим друзьям, те — в свою очередь — своим, и вскоре «теорема о трисектрисах треугольника» распространилась по миру в качестве своеобразного математического фольклора.

Доказательство теоремы о трисектрисах Морлей опубликовал в 1914 году — через 15 лет после того, как нашел его. В 1924 году он изложил это доказательство более подроб-

но и существенно усилил первоначальный результат. Доказательство Морлея весьма элегантно, но в то же время и достаточно сложно. Оно базируется на рассмотрении довольно изысканных линий — так называемых кардиоид *) (см. вторую страницу обложки). Морлей установил, что множество центров кардиоид, касающихся всех трех сторон треугольника ABC , представляет собой совокупность девяти прямых, разбивающихся на три тройки параллельных прямых, причем прямые из разных троек пересекаются под углом 60° . Ясно, что при пересечении этих прямых образуется 27 равносторонних треугольников. Один из них и есть «треугольник Морлея», а остальные фигурируют в обобщении теоремы Морлея, в котором рассматриваются трисектрисы и внутренних, и внешних углов треугольника.

Это обобщение обычно связывают с именем знаменитого французского математика Анри Лебега. В 1939 году Лебег опубликовал элементарное доказательство следующего факта, который сам Морлей умел доказывать только с помощью кардиоид. Лебег рассмотрел трисектрисы внутренних и внешних углов треугольника ($3 \cdot 4 = 12$ прямых) и установил, что из точек пересечения этих прямых можно выбрать 27 троек точек, являющихся вершинами правильных треугольников. Заметим, что теорема о биссектрисах также допускает похожее обобщение: из шести биссектрис внутренних и внешних углов треугольника можно выбрать четыре тройки прямых, сходящихся в одной точке (рис. 4).

Первые элементарные доказательства теоремы Морлея были получены в 1909 году индусами М. Сатьянарая-

*) Кардиоиды — это кривая, которую описывает точка окружности, катящейся без скольжения по неподвижной окружности того же радиуса (рис. 3). Центр неподвижной окружности иногда называют центром кардиоиды.

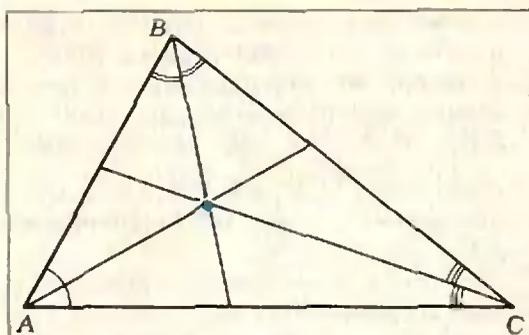


Рис. 1.

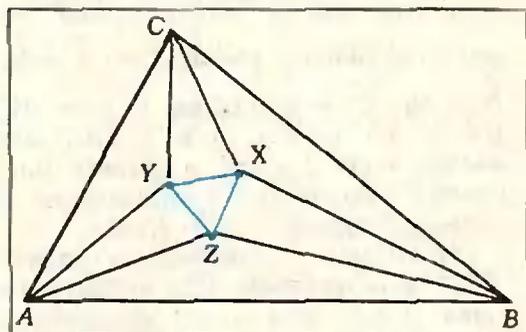


Рис. 2.

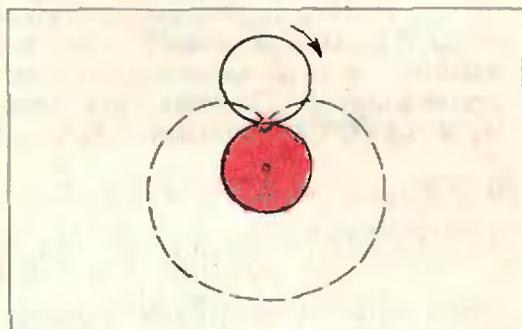


Рис. 3.

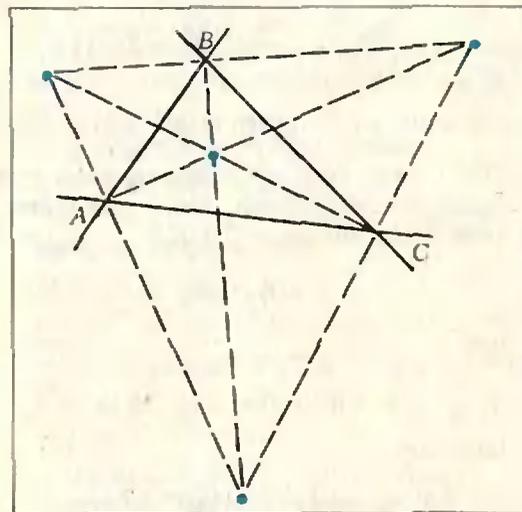


Рис. 4.

ном (вычислительно-тригонометрическое доказательство) и М. Т. Нараньенгаром (чисто геометрическое доказательство; в 1922 году оно было перестроено английским Дж. М. Чилдом). В настоящее время известно уже, по крайней мере, несколько десятков доказательств теоремы Морлея. Однако интерес к ней не затухает, и все время появляются новые доказательства, обобщения и варианты этого изящного предложения.

Ниже мы приводим два элементарных доказательства теоремы Морлея.

Доказательство первое (геометрическое; оно совпадает, по существу, с доказательством Нараньенгара — Чилда). Обозначим величины углов треугольника ABC через 3α , 3β и 3γ (рис. 5). Так как $3\alpha + 3\beta + 3\gamma = 180^\circ$, то $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$ и $\alpha + \beta = 60^\circ - \gamma$. Пусть U — точка пересечения трисектрис AU и BX . Так как AZ и BZ — биссектрисы треугольника AUB , то ZU — тоже биссектриса этого треугольника. Поэтому

$$\begin{aligned} \widehat{AUZ} &= \widehat{ZUB} = \frac{1}{2} \widehat{AUB} = \\ &= \frac{1}{2} (180^\circ - 2\alpha - 2\beta) = 90^\circ - \\ &- (\alpha + \beta) = 90^\circ - (60^\circ - \gamma) = 30^\circ + \gamma. \end{aligned}$$

Построим теперь равносторонний ΔX_1Y_1Z , одна вершина которого совпадает с точкой Z , а вершины X_1 и Y_1 принадлежат соответственно прямым BX и AU (несколько ниже будет доказано, что они совпадают с точками X и Y). Для этого проведем через Z под углом 30° к лучу ZU два луча ZX_1 и ZY_1 ; через X_1 и Y_1 мы обозначим точки пересечения этих лучей с BX и с AU (т. е. с BX и с AU). Так как, очевидно, $\Delta ZX_1U \cong \Delta ZY_1U$ (эти треугольники имеют равные углы и общую сторону), то $|ZX_1| \cong |ZY_1|$; поэтому ΔZY_1X_1 — равнобедренный треугольник с углом при вершине в 60° , т. е. *равносторонний* треугольник.

Обозначим, далее, через P и Q точки, симметричные точке Z относительно прямых AU и BX . Так как AU и BX — биссектрисы углов ZAC и ZBC , точка P — принадлежит сто-

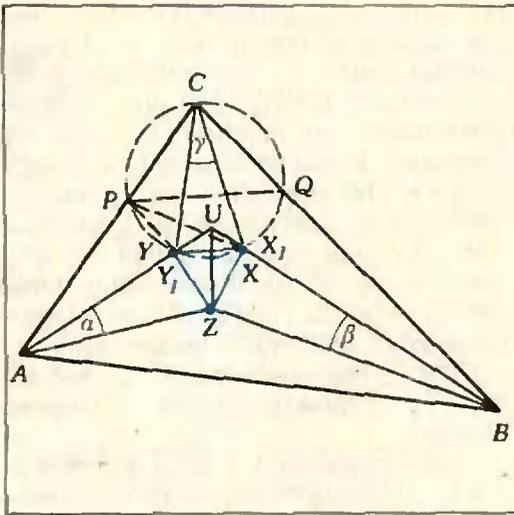


Рис. 5.

роне AC треугольника ABC , а точка Q — стороне BC .

Найдем величины углов PY_1X_1 и QX_1Y_1 . Так как $\widehat{ZX_1Y_1} = 60^\circ$ (угол равностороннего треугольника), $\widehat{ZX_1B} = \widehat{X_1ZU} + \widehat{X_1UZ} = 30^\circ + (30^\circ + \gamma)$ (внешний угол $\triangle ZX_1U$) и $\widehat{QX_1B} \cong \widehat{ZX_1B}$ (эти углы симметричны относительно прямой BV),

$$\widehat{QX_1Y_1} = 360^\circ - 60^\circ - (60^\circ + \gamma) - (60^\circ + \gamma) = 180^\circ - 2\gamma.$$

Точно так же доказывается и равенство $\widehat{PY_1X_1} = 180^\circ - 2\gamma$.

Таким образом, $\widehat{PY_1X_1} = \widehat{QX_1Y_1}$; кроме того, $|PY_1| \cong |Y_1Z| \cong |ZX_1| \cong |X_1Q|$ (первые два отрезка симметричны относительно прямой AU , а два последних — относительно прямой BV). Отсюда следует, что четырехугольник PY_1X_1Q является *равнобедренной трапецией* (с углами Y_1 и X_1 , равными $180^\circ - 2\gamma$, и, значит, с углами P и Q , равными 2γ).

Опишем теперь окружность вокруг трапеции PY_1X_1Q . Так как хорды $|PY_1|$, $|Y_1X_1|$ и $|X_1Q|$ этой окружности конгруэнтны, конгруэнтны и опирающиеся на эти хорды вписанные углы; поэтому $\widehat{PQY_1} = \widehat{Y_1PX_1} = \widehat{X_1PQ} = \gamma$. Но $\widehat{PCQ} = 3\gamma$;

поэтому описанная вокруг PY_1X_1Q окружность S пройдет и через точку C . А теперь из конгруэнтности (стягиваемых конгруэнтными хордами) дуг PY_1 , Y_1X_1 и X_1Q окружности S следует, что $\widehat{PCY_1} = \widehat{Y_1CX_1} = \widehat{X_1CQ} = \gamma$, откуда и вытекает совпадение $\triangle X_1Y_1Z$ с $\triangle XYZ$.

Этим и завершается доказательство теоремы Морлея.

Доказательство второе (вычислительное — оно близко к доказательству М. Сатьянараяна). Будем по-прежнему считать, что $\widehat{A} = 3\alpha$, $\widehat{B} = 3\beta$, $\widehat{C} = 3\gamma$; длины сторон BC , CA и AB треугольника ABC обозначим через a , b и c , а диаметр описанной около него окружности — через d (рис. 6).

Попытаемся вычислить длину $|XY| = z$ стороны $|XY|$ треугольника XYZ . Для этого мы найдем, прежде всего, отрезки $|CX| = m$ и $|CY| = n$; после этого $|XY|$ можно будет найти по теореме косинусов из $\triangle CXU$. Для того же, чтобы вычислить m и n , воспользуемся теоремой синусов. Применив эту теорему к $\triangle AYC$ со сторонами $|AC| = b$ и $|CY| = n$ и углами $\widehat{A} = \alpha$, $\widehat{C} = \gamma$ и $\widehat{Y} = 180^\circ - (\alpha + \gamma) = 180^\circ - (60^\circ - \beta) = 120^\circ + \beta$

(здесь мы снова использовали очевидное равенство $\alpha + \beta + \gamma = 60^\circ$), получим

$$\frac{n}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin (120^\circ + \beta)}$$

или

$$n = b \sin \alpha / \sin (120^\circ + \beta).$$

Но в силу той же теоремы синусов (которую мы теперь будем применять уже к «большому» $\triangle ABC$)

$$b / \sin \widehat{B} = d$$

или

$$b = d \sin \widehat{B} = d \sin 3\beta.$$

Поэтому

$$n = d \sin \alpha \sin 3\beta / \sin (120^\circ + \beta) = d \sin \alpha \sin 3\beta / \sin (60^\circ - \beta).$$

Но (вот здесь придется немного запастись терпением!)

$$\begin{aligned}\sin 3\beta &= \sin(2\beta + \beta) = \\ &= \sin 2\beta \cos \beta + \cos 2\beta \sin \beta = \\ &= 2\sin \beta \cos^2 \beta + (1 - 2\sin^2 \beta) \sin \beta = \\ &= 2\sin \beta (1 - \sin^2 \beta) + \sin \beta - 2\sin^3 \beta = \\ &= 3\sin \beta - 4\sin^3 \beta.\end{aligned}$$

Последнее выражение можно далее преобразовать так:

$$\begin{aligned}\sin 3\beta &= 3\sin \beta - 4\sin^3 \beta = \\ &= 4\sin \beta \left[\frac{3}{4} - \sin^2 \beta \right] = \\ &= 4\sin \beta \left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - \sin^2 \beta \right] = \\ &= 4\sin \beta [\sin^2 60^\circ - \sin^2 \beta] = \\ &= 4\sin \beta (\sin 60^\circ + \sin \beta) (\sin 60^\circ - \\ &\quad - \sin \beta) = 4\sin \beta \cdot 2\sin \frac{60^\circ + \beta}{2} \times \\ &\quad \times \cos \frac{60^\circ - \beta}{2} \cdot 2\cos \frac{60^\circ + \beta}{2} \sin \frac{60^\circ - \beta}{2} = \\ &= 4\sin \beta 2\sin \frac{60^\circ + \beta}{2} \cos \frac{60^\circ + \beta}{2} \times \\ &\quad \times 2\sin \frac{60^\circ - \beta}{2} \cos \frac{60^\circ - \beta}{2} = \\ &= 4\sin \beta \sin(60^\circ + \beta) \sin(60^\circ - \beta).\end{aligned}$$

Подставляя это выражение для $\sin 3\beta$ в формулу для n , получим $n = 4d \sin \alpha \sin \beta \sin(60^\circ + \beta)$.

Совершенно аналогично доказывается, что

$$m = 4d \sin \alpha \sin \beta \sin(60^\circ + \alpha).$$

Применим теперь, как мы и собирались, теорему косинусов к $\triangle CXY$:

$$\begin{aligned}z^2 &= |XY|^2 = m^2 + n^2 - 2mn \cos \gamma = \\ &= 16d^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta [\sin^2(60^\circ + \alpha) + \\ &\quad + \sin^2(60^\circ + \beta) - 2\sin(60^\circ + \alpha) \times \\ &\quad \times \sin(60^\circ + \beta) \cos \gamma].\end{aligned}$$

Заметим теперь, что

$$\begin{aligned}(60^\circ + \alpha) + (60^\circ + \beta) + \gamma &= \\ &= 120^\circ + (\alpha + \beta + \gamma) = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ;\end{aligned}$$

поэтому существует $\triangle EFG$ с углами $\widehat{E} = 60^\circ + \alpha$, $\widehat{F} = 60^\circ + \beta$ и $\widehat{G} = \gamma$ (рис. 7).

Предположим, что диаметр δ описанной вокруг этого треугольника окружности равен 1. Тогда в силу

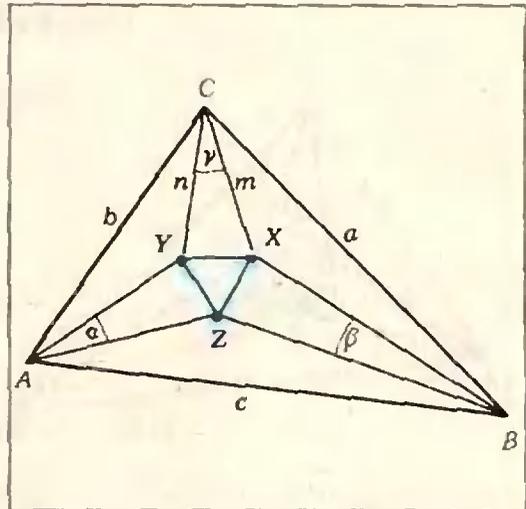


Рис. 6.

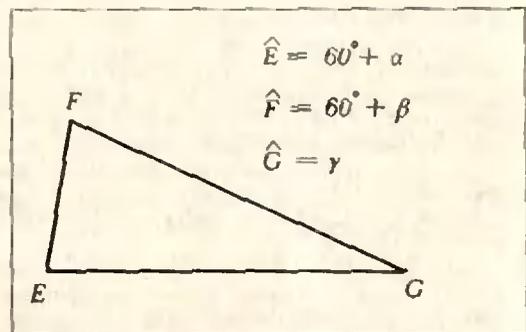


Рис. 7.

теоремы синусов стороны треугольника будут равны

$$e = |FG| = \sin(60^\circ + \alpha), \quad f = |EG| = \sin(60^\circ + \beta) \quad \text{и} \quad g = |EF| = \sin \gamma.$$

Применив к этому $\triangle EFG$ теорему косинусов, получаем, что

$$\begin{aligned}\sin^2(60^\circ + \alpha) + \sin^2(60^\circ + \beta) - \\ - 2\sin(60^\circ + \alpha)\sin(60^\circ + \beta) \cos \gamma = \\ = e^2 + f^2 - 2ef \cos \gamma = g^2 = \sin^2 \gamma.\end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что

$$z^2 = 16d^2 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma$$

и, значит,

$$z = 4d \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma.$$

Но выражения для длин $y = |XZ|$ и $x = |YZ|$ отрезков XZ и YZ получаются из выражения для длины z отрезка $|XY|$ циклической перестановкой углов α , β и γ . А так как углы α , β и γ входят в выражение для z симметрично, то $x = y = z = 4d \sin \alpha \sin \beta \sin \gamma$ — и, значит, $\triangle XYZ$ со сторонами длин x , y и z — *равносторонний*.

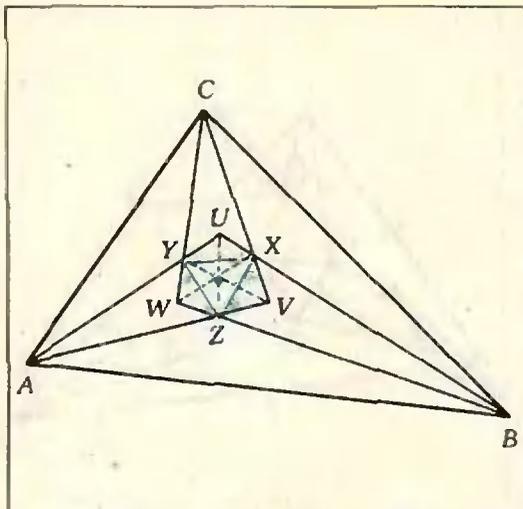


Рис. 8.

У п р а ж н е н и я

1. На рисунке 8 наряду с вершинами X , Y и Z треугольника Морлея изображены также точки U , V и W пересечения (AY) и (BX) (эта точка имеется также на рисунке 5 — она играла большую роль в 1-м доказательстве теоремы Морлея); AZ и CX ; CY и BZ . Докажите, что отрезки $[XW]$, $[YV]$ и $[ZU]$ пересекаются в одной точке Q .

2. Докажите, что фигурирующая в задаче 1 точка Q является центром правильного треугольника Морлея XYZ .

3. Докажите, что

а) отрезки $[AX]$, $[BY]$ и $[CZ]$ (где XYZ — «треугольник Морлея» для $\triangle ABC$) пересекаются в одной точке R ;

б) прямые AW , BV и CU (рис. 8) пересекаются в одной точке S ;

в) точки R , S и точка Q задачи 1 лежат на одной прямой.

4. Пусть \bar{X} , \bar{Y} , \bar{Z} — такие точки внутри (произвольного) $\triangle ABC$, что $\widehat{B\bar{A}\bar{Z}} = \widehat{C\bar{A}\bar{Y}}$ ($=\alpha$), $\widehat{C\bar{B}\bar{X}} = \widehat{A\bar{B}\bar{Z}}$ ($=\beta$), $\widehat{A\bar{C}\bar{X}} = \widehat{A\bar{C}\bar{Y}}$ ($=\gamma$). Докажите, что прямые $A\bar{X}$, $B\bar{Y}$, $C\bar{Z}$ пересекаются в одной точке \bar{R} (ср. с задачей 3а).

5. Дополните следующее «косвенное» доказательство теоремы Морлея для треугольника ABC с углами $\widehat{A} = 3\alpha$, $\widehat{B} = 3\beta$ и $\widehat{C} = 3\gamma$. Пусть XYZ — произвольный равносторонний треугольник. На его сторонах построим вне $\triangle XYZ$ равносторонние треугольники XYU , YZW и ZXV (ср. рис. 8) с углами при основаниях $[XY]$, $[YZ]$ и $[ZX]$, соответственно равными $60^\circ - \gamma$, $60^\circ - \alpha$ и $60^\circ - \beta$. Обозначим, далее, точку пересечения прямых UY и VZ через A ; UX и WZ — через B и VX и WY — через C . Докажите, что углы $\triangle ABC$ равны 3α , 3β и 3γ и что прямые AU и AZ ; BZ и BX ; CX и CY являются трисектрисами этого треугольника. Это доказательство мы назвали «косвенным», так как в нем исходный $\triangle ABC$ строится по его «треугольнику Морлея» XYZ .

6. Дополните следующее доказательство теоремы Морлея; пусть W — такая точка внутри $\triangle ABC$, что $\widehat{WBA} = \frac{1}{3} \widehat{ABC}$ и $\widehat{WCA} = \frac{1}{3} \widehat{ACB}$, и пусть X — центр вписанной окружности $\triangle WBC$, а Y и Z — такие точки отрезков $[CW]$, соответственно $[BW]$, что $\widehat{YXW} = \widehat{ZXW} = 30^\circ$ (при этом $\triangle XYZ$ — равносторонний). Обозначим через O — центр (правильного) $\triangle XYZ$, а через U и V точки пересечения прямых ZO , соответственно YO , с прямыми BX и CX . Наконец, через A' обозначим точку пересечения прямых UY и VZ . Докажите, что A' совпадает с A и что $\triangle XYZ$ — «треугольник Морлея» для $\triangle ABC$. (Это доказательство теоремы Морлея принадлежит индусу К. Венкаташалыенгару.)

7. а) При каких углах $\triangle ABC$ пятиугольник $CPYXQ$ (см. рис. 5) будет правильным?

б) Докажите, что если $\triangle ABC$ правильный, то ломаная $PYXQ$ (см. рис. 5) может быть дополнена до правильного 9-угольника, вершина C которого противоположна стороне XY .

8. Докажите сформулированное на стр. 28 утверждение о 27 правильных треугольниках, образованных точками пересечения трисектрис внутренних и внешних углов данного $\triangle ABC$.

9. Назовем многоугольник $A_1A_2A_3\dots A_n$ *многоугольником Морлея*, если, проведя «трисектрисы» A_1X_1 , A_1X_2 ; A_2X_2 , A_2X_3 ; A_3X_3 , A_3X_4 ; ...; A_nX_n , A_nX_1 его углов (где луч A_1X_1 ближе к стороне A_1A_n , луч A_2X_2 ближе к A_2A_1 , ..., луч A_nX_n ближе к стороне A_nA_{n-1}), мы придем к правильному многоугольнику $X_1X_2X_3\dots X_n$. Из теоремы Морлея следует, что каждый треугольник является многоугольником Морлея; очевидно также, что каждый правильный многоугольник — «морлеев» и что, скажем, никакой отличный от квадрата прямоугольник не является многоугольником Морлея (почему?). Можете ли вы указать хоть один «морлеев многоугольник», отличный от треугольника и от правильного многоугольника?

задачник Кванта

Задачи

M516—M520; Ф528—Ф532

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 ноября 1978 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например, «M516, M520» или «Ф531». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «... новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. В этом и следующих номерах «Задачник «Кванта» составлен в основном из задач, предлагавшихся на XII Всесоюзной олимпиаде.

M516. Три автомата печатают на карточках пары натуральных чисел. Автоматы работают следующим образом. Первый автомат, прочитав карточку $(a; b)$, выдает новую карточку $(a+1; b+1)$; второй, прочитав карточку $(a; b)$, выдает карточку $\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}\right)$ (он работает только, когда a и b четные); третий по двум карточкам $(a; b)$ и $(b; c)$ выдает карточку $(a; c)$. Кроме того, автоматы возвращают все прочитанные карточки.

Пусть первоначально имеется одна карточка с парой чисел $(5; 19)$. Можно ли, используя автоматы в любом порядке, получить карточку:

а) $(1; 50)$? б) $(1; 100)$?

в) Пусть первоначально имеется одна карточка $(a; b)$, $a < b$, а мы хотим получить карточку $(1; n)$. При каких n это можно сделать? (8—10 кл.)

В. Гутенмахер

M517. В окружность радиуса R вписан n -угольник площади S . На каждой стороне n -угольника отмечено по точке. Докажите, что периметр n -угольника с вершинами в отмеченных точках не меньше $2S/R$. (8—9 кл.)

В. Дубровский

M518. Числа x_1, x_2, \dots, x_n принадлежат отрезку $[a; b]$, где $0 < a < b$. Докажите неравенство

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n) \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} \right) \leq \frac{(a+b)^2}{4ab} n^2. \quad (9 \text{ кл.})$$

С. Фомин

M519. Даны две кучки спичек. Вначале в одной кучке m спичек, в другой — n спичек, $m > n$. Двое игроков по очереди берут из кучки спички. За один ход игрок берет из одной кучки любое (отличное от нуля) число спичек, кратное числу спичек в

другой кучке. Выигрывает игрок, взявший последнюю спичку в одной из кучек.

а) Докажите, что если $m > 2n$, то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе выигрыш.

б) При каких α верно следующее утверждение: если $m > \alpha n$, то игрок, делающий первый ход, может обеспечить себе выигрыш? (9 кл.)

А. Слинько

M520. Рассмотрим последовательность чисел $x_n = (1 + \sqrt{2} + \sqrt{3})^n$. Каждое из них приводится к виду

$$x_n = q_n + r_n\sqrt{2} + s_n\sqrt{3} + t_n\sqrt{6},$$

где q_n, r_n, s_n, t_n — целые числа. Найдите пределы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{q_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{s_n}{q_n}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t_n}{q_n}. \quad (10 \text{ кл.})$$

И. Бернштейн

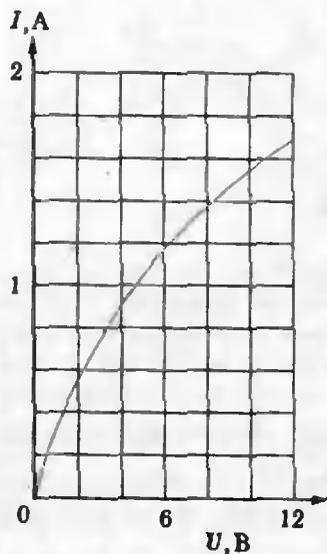


Рис. 1.

Ф528. На рисунке 1 приведена зависимость тока через автомобильную лампочку от напряжения на ней. Лампочку подключают к источнику постоянного напряжения $U = 10$ В последовательно с сопротивлением $R = 4$ Ом. Определить мощность лампочки. (8 кл.)

Ф529. Используя фотографию, сделанную для рекламного плаката (рис. 2), определите: 1) фокусное расстояние объектива фотоаппарата; 2) на каком расстоянии от ладоней рук располагался объектив при фотографировании; 3) размер рыбы, пойманной рыбаком; 4) диаметр объектива (предполагая,



Рис. 2.

Внимание! Срок присылки решений задач из «Задачника «Кванта» № 6 (1978) — до 1 сентября.

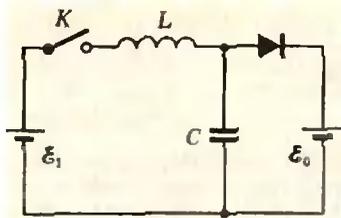


Рис. 3.



Рис. 4.

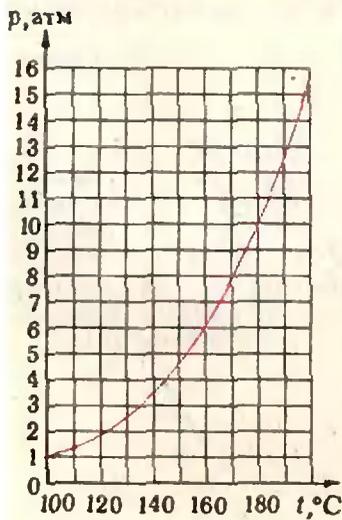


Рис. 5.

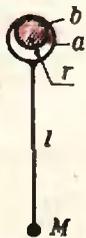


Рис. 6.

что размытие деталей изображения на фотографии не превосходит 0,2 мм). Объектив фотоаппарата рассматривать как тонкую линзу. (10 кл.)

Ф530. В схеме, приведенной на рисунке 3, $\mathcal{E}_0 > \mathcal{E}_1$. Определить заряд, который протечет через батарею с э. д. с. \mathcal{E}_0 при замыкании ключа K , полагая, что внутренние сопротивления батарей и сопротивление катушки равны нулю. Диод считать идеальным (его прямое сопротивление равно нулю, обратное — бесконечности); конденсатор до замыкания ключа был не заряжен. (10 кл.)

Ф531. Гейзеры могут рассматриваться как большие подземные резервуары, наполненные грунтовой водой и подогреваемые земным теплом (рис. 4). Выход из них на поверхность Земли осуществляется через узкий канал, который в «спокойный» период практически полностью заполнен водой. Считая, что «активный» период наступает, когда закипает вода в подземном резервуаре, и что во время извержения канал заполнен только паром, который выбрасывается наружу, оценить, какую часть воды теряет резервуар гейзера во время одного извержения. Глубина канала $h=90$ м; теплота испарения воды $\lambda=2,26 \cdot 10^6$ Дж/кг; теплоемкость воды $c=4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К). Зависимость давления насыщенного водяного пара от температуры приведена на рисунке 5. (9 кл.)

Ф532. Маятник представляет собой легкий стержень длины l с грузом массы M на конце. К другому концу стержня прикреплена легкая цилиндрическая втулка a с внутренним радиусом r , надетая на вращающуюся горизонтальную ось b (рис. 6). Коэффициент трения между втулкой и осью равен μ . Определить угол отклонения стержня от вертикали в состоянии равновесия. (8 кл., 10 кл.)

Решения задач

M466—M469; Ф482—Ф486

M466. Среди 1977 монет 50 фальшивых. Каждая фальшивая монета отличается от настоящей на 1 г (в ту или другую сторону). Имеются чашечные весы со стрелкой, показывающей разность масс одной и другой чашки. За одно взвешивание про одну выбранную монету нужно узнать, фальшивая она или настоящая. Как это сделать?

Пусть вообще имеется $2n+1$ монет, из которых $2k$ фальшивых ($k \leq n$), причем каждая фальшивая монета отличается от настоящей на 1 г (в ту или другую сторону). Пусть масса настоящей монеты равна a граммов. Отложим одну выбранную монету, а из оставшихся $2n$ монет положим n монет на первую чашку весов и n монет — на вторую. Заметим, что при этом масса гирь на каждой чашке весов будет отличаться от na (массы n настоящих монет) на целое число той же четности, что и число фальшивых монет на этой чашке весов.

Если отложенная монета настоящая, то общее число фальшивых монет на чашках — $2k$ (четно), значит, число их на той и другой чашке имеет одинаковую четность, следовательно, разность масс одной и другой чашки будет четна. Если выбранная монета — фальшивая, то число фальшивых монет, лежащих на чашках весов, нечетное — $(2k-1)$; тогда нечетно и показание весов.

Итак, мы видим, что выбранная монета настоящая или фальшивая в зависимости от того, является показание весов четным или нечетным.

И. Кламова

M467. Точки D и E делят стороны AC и AB правильного треугольника ABC в отношениях $|AD|:|DC| = |BE|:|EA| = 1:2$. Прямые BD и CE пересекаются в точке O . Докажите, что угол AOC — прямой.

Рассмотрим точку F на стороне BC такую, что $|BF|:|FC| = 2:1$. Проведем отрезок AF . Треугольник OPQ — правильный (рис. 1). Поэтому нам достаточно доказать, что величина угла AOD равна 30° градусам. Для этого, в свою очередь, нужно убедиться в том, что

$|OP| = |AP|$ (поскольку $\widehat{APO} = 120^\circ$). Но $|AP| = |BO|$, поэтому остается проверить, что $|OP| = |BO|$. Выясним, в каком отношении точки O и P делят отрезок BD . Про-

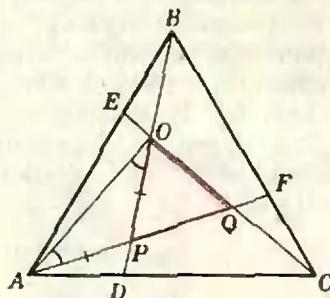


Рис. 1.

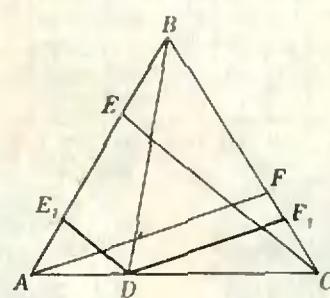


Рис. 2.

ведем прямые DE_1 и DF_1 параллельно CE и AF соответственно (рис. 2). Ясно, что $|AE_1|:|E_1E| = 1:2$. Поскольку $|AE|:|EB| = 2:1$, из этого следует, что $|E_1E|:|EB| = 4:3$. Значит, и $|DO|:|BO| = 4:3$. Аналогично можно убедиться, что $|BF|:|FF_1| = 6:1$, откуда $|BP|:|DP| = 6:1$. Следовательно, $|DP|:|OP|:|BO| = 1:3:3$. Отсюда $|BO| = |OP|$, и угол AOC — прямой.

Л. Лиминов

M468. Точки A, B, C и D плоскости таковы, что для любой точки M этой плоскости скалярные произведения векторов $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ и

Введем в плоскости прямоугольную систему координат, приняв за начало одну из данных точек, скажем, точку A . Пусть при этом точка B имеет координаты $(b_1; b_2)$, точка C — координаты $(c_1; c_2)$ и точка D — координаты $(d_1; d_2)$ (рис. 3).

$\vec{MC} \cdot \vec{MD}$ не равны друг другу. Докажите, что $\vec{AC} = \vec{DB}$. Верно ли обратное утверждение?

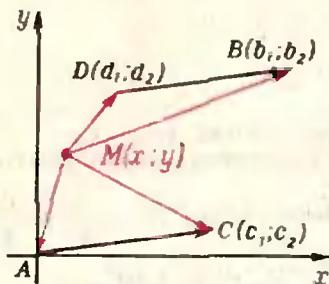


Рис. 3.

Пусть M — произвольная точка плоскости, $(x; y)$ — ее координаты. Тогда векторы \vec{MA} , \vec{MB} , \vec{MC} , \vec{MD} имеют координаты $(-x; -y)$, $(b_1 - x; b_2 - y)$, $(c_1 - x; c_2 - y)$, $(d_1 - x; d_2 - y)$ соответственно. Равенство $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = \vec{MC} \cdot \vec{MD}$ запишется в координатах так:

$$-x(b_1 - x) - y(b_2 - y) = (c_1 - x)(d_1 - x) + (c_2 - y)(d_2 - y),$$

или

$$(c_1 + d_1 - b_1)x + (c_2 + d_2 - b_2)y = c_1d_1 + c_2d_2. \quad (*)$$

Утверждение «для любой точки M скалярные произведения $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ и $\vec{MC} \cdot \vec{MD}$ не равны друг другу» означает, что равенство $(*)$, рассматриваемое как уравнение с двумя неизвестными x, y , не имеет решений. Это возможно в том и только в том случае, если

$$\begin{cases} c_1 + d_1 - b_1 = 0, \\ c_2 + d_2 - b_2 = 0, \\ c_1d_1 + c_2d_2 \neq 0. \end{cases}$$

Перепишав первые два равенства в виде

$$\begin{cases} c_1 = b_1 - d_1, \\ c_2 = b_2 - d_2 \end{cases}$$

и заметив, что $(c_1; c_2)$ — координаты вектора \vec{AC} , а $(b_1 - d_1; b_2 - d_2)$ — координаты вектора \vec{DB} , мы убедимся, что эта система равенств эквивалентна равенству векторов \vec{AC} и \vec{DB} .

Условие $c_1d_1 + c_2d_2 \neq 0$ означает, что $\vec{AC} \cdot \vec{AD} \neq 0$, то есть векторы \vec{AC} и \vec{AD} не являются взаимно перпендикулярными.

Итак, условие «для любой точки M скалярные произведения $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ и $\vec{MC} \cdot \vec{MD}$ не равны друг другу» эквивалентно следующему: « $\vec{AC} = \vec{DB}$ и $\vec{AC} \cdot \vec{AD} \neq 0$ ».

Если точки A, B, C, D не лежат на одной прямой, то равенство $\vec{AC} = \vec{DB}$ означает, что четырехугольник $ACBD$ — параллелограмм, а неравенство $\vec{AC} \cdot \vec{AD} \neq 0$ означает, что этот параллелограмм не является прямоугольником.

Ю. Ионин

М469. а) Уравнение $x^4 + ax^3 + bx + c = 0$ имеет четыре различных действительных корня. Докажите, что $ab < 0$.

б) Уравнение $x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x^{n-k+1} + a_{k+1}x^{n-k-1} + \dots + a_n = 0$ имеет n различных действительных корней. Докажите, что $a_{k-1}a_{k+1} < 0$.

Мы приведем для пунктов а) и б) различные доказательства. В основе обоих лежит следующее утверждение: если все корни многочлена действительны и различны, то все корни производной этого многочлена тоже действительны и различны. В самом деле, многочлен степени n это непрерывная (и дифференцируемая) функция на прямой. Следовательно, в некоторой внутренней точке интервала, концами которого служат любые два соседних корня исходного многочлена, он принимает или максимальное, или минимальное значение (рис. 4, а). В экстремальной точке производная многочлена обращается в нуль. Таким образом, в любом интервале между любыми двумя соседними корнями многочлена имеется корень его производной (рис. 4, б). Следовательно, производная многочлена степени n , у которого все корни действительны и различны, имеет ровно $n-1$ действительных корней, причем все они различны.

а) Из доказанного утверждения следует, что уравнение

$$4x^3 + 3ax^2 + b = 0$$

имеет три различных действительных корня: x_1, x_2 и x_3 . Поэтому

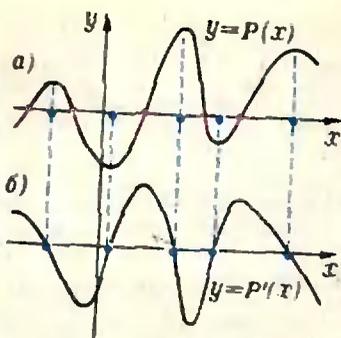


Рис. 4.

$4x^3 + 3ax^2 + b = 4(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) = 4x^3 -$
 $- 4(x_1 + x_2 + x_3)x^2 + 4(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)x - 4x_1x_2x_3.$
 Приравнявая соответствующие коэффициенты, полу-
 чаем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = -\frac{3}{4}a, \\ x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = 0, \\ x_1x_2x_3 = -\frac{1}{4}b \end{cases}$$

(теорема Виета для многочленов третьей степени).

Так как $b \neq 0$, из последнего уравнения этой системы сле-
 дует, что $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, $x_3 \neq 0$. Найдем сумму $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} &= \frac{(x_2x_3)^2 + (x_1x_3)^2 + (x_1x_2)^2}{(x_1x_2x_3)^2} = \\ &= \frac{(x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3)^2 - 2x_1x_2x_3(x_1 + x_2 + x_3)}{(x_1x_2x_3)^2} = \\ &= \frac{-2 \cdot \left(-\frac{3}{4}a\right) \left(-\frac{1}{4}b\right)}{\left(-\frac{1}{4}b\right)^2} = -6 \cdot \frac{ab}{b^2}. \end{aligned}$$

Но $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} + \frac{1}{x_3^2} > 0$; следовательно, $ab < 0$.

б) Здесь можно провести доказательство, используя схему пункта а). Мы же сейчас докажем более сильное утверждение: если все корни многочлена

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_n, \quad a_0 \neq 0,$$

действительны и различны, то справедливы следующие неравенства:

$$\begin{cases} a_1^2 - \frac{2 \cdot n}{1 \cdot (n-1)} a_0 a_2 > 0, \\ a_2^2 - \frac{3 \cdot (n-1)}{2 \cdot (n-2)} a_1 a_3 > 0, \\ \dots \\ a_{n-1}^2 - \frac{n \cdot 2}{(n-1) \cdot 1} a_{n-2} a_n > 0. \end{cases} \quad (2)$$

Рассмотрим многочлен

$$Q(y) = y^n p\left(\frac{1}{y}\right) = a_0 + a_1 y + \dots + a_{n-1} y^{n-1} + a_n y^n.$$

Этот многочлен, а следовательно, его первая, вторая и следующие производные (до $(n-1)$ -й) имеют только действительные корни. Рассмотрим его $(n-2)$ -ю производную:

$$Q^{(n-2)}(y) = (n-2)(n-3) \dots 4 \cdot 3 \{n(n-1)a_n y^2 + 2(n-1)a_{n-1}y + 2a_{n-2}\}.$$

Поскольку корни этого квадратного трехчлена действительны и различны, его дискриминант положителен, то есть

$$\begin{aligned} 4(n-1)^2 a_{n-1}^2 - 8n(n-1)a_{n-2}a_n = \\ = 4(n-1)^2 \left[a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1} a_{n-2} a_n \right] > 0, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$a_{n-1}^2 - \frac{2n}{n-1} a_{n-2} a_n > 0. \quad (3)$$

Таким образом, если все корни многочлена $P(x)$ действительны и различны, то его коэффициенты a_{n-2} , a_{n-1} , a_n удовлетворяют неравенству (3). Запишем теперь $(n-k-1)$ -ю производную многочлена $P(x)$:

$$\begin{aligned} P^{(n-k-1)}(x) = & n(n-1) \dots (k+2) a_0 x^{k+1} + \dots \\ & \dots + (n-k+1)(n-k) \dots 4 \cdot 3 a_{k-1} x^2 + \\ & + (n-k)(n-k-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot a_k x + \\ & + (n-k-1)(n-k-2) \dots 2 \cdot 1 \cdot a_{k+1}. \end{aligned}$$

Поскольку корни многочлена $P^{(n-k-1)}(x)$ действительны, применим к его трем последним коэффициентам неравенство (3); мы получим

$$a_k^2 - \frac{(k+1)(n-k+1)}{k(n-k)} a_{k-1} a_{k+1} > 0.$$

Тем самым мы доказали все неравенства системы (2). Из неравенств (2) следуют такие неравенства:

$$\begin{cases} a_1^2 - a_0 a_2 > 0, \\ a_2^2 - a_1 a_3 > 0, \\ \dots \\ a_k^2 - a_{k-1} a_{k+1} > 0, \\ \dots \\ a_{n-1}^2 - a_{n-2} a_n > 0. \end{cases} \quad (4)$$

В самом деле,

$$\frac{(k+1)(n-k+1)}{k(n-k)} > 1;$$

поэтому если $a_{k-1} a_{k+1} \geq 0$, то

$$a_k^2 - a_{k-1} a_{k+1} \geq a_k^2 - \frac{(k+1)(n-k+1)}{k(n-k)} a_{k-1} a_{k+1} > 0;$$

если же $a_{k-1} a_{k+1} < 0$, то неравенства (4) очевидны.

Положив в k -м неравенстве системы (4) коэффициент $a_k = 0$, получим утверждение пункта б) нашей задачи.

В. Вавилов



Ф482. Капля воды равномерно падает в воздухе. На сколько отличается радиус кривизны R_1 поверхности капли в ее верхней точке от радиуса кривизны R_2 в нижней точке, если расстояние между этими точками равно $d = 2 \cdot 10^{-3}$ м? Коэффициент поверхностного натяжения воды равен $\sigma = 7 \cdot 10^{-2}$ Н/м.

Обозначим p_0 атмосферное давление, p — давление в верхней точке падающей капли. Так как разность давлений внутри и снаружи сферической капли радиуса R равна $\frac{2\sigma}{R}$, для верхней точки

$$p_1 - p_0 = \frac{2\sigma}{R_1}. \quad (*)$$

В нижней точке капли давление равно $p_1 + \rho g d$. Следовательно,

$$p_1 + \rho g d - p_0 = \frac{2\sigma}{R_2}. \quad (**)$$

Из двух равенств (*) и (**) получаем

$$\rho g d = 2\sigma \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right) = 2\sigma \frac{R_1 - R_2}{R_1 R_2}.$$

Так как размеры капли малы ($d = 2$ мм), то радиусы кривизны R_1 и R_2 мало отличаются друг от друга. Поэтому в

знаменателе последней формулы можно положить

$$R_1 = R_2 = \frac{d}{2}. \text{ В результате получим}$$

$$R_1 - R_2 = \frac{\rho g d^3}{8\sigma} \approx 0,14 \text{ мм.}$$

И. Слободецкий

Ф483. С каким горизонтальным ускорением должен двигаться клин с углом α (рис. 5), чтобы лежащий на нем груз поднимался вверх, если коэффициент трения между грузом и клином равен μ ?

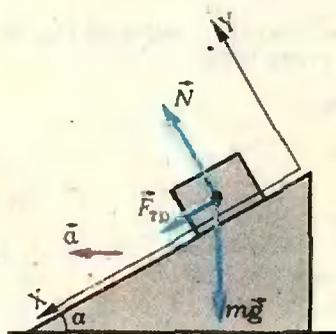


Рис. 5.

Очевидно, что ускорение \vec{a} клина направлено влево (в противном случае груз соскальзывал бы с клина, а не поднимался по нему).

Рассмотрим силы, действующие на груз. Это — сила тяжести \vec{mg} , сила нормальной реакции \vec{N} и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ такая, что $|\vec{F}_{\text{тр}}| = \mu |\vec{N}|$.

Запишем уравнения движения груза в проекциях на оси X и Y . Чтобы груз поднимался вверх по клину, проекция ускорения груза на ось X должна быть меньше или равна соответствующей проекции ускорения клина. С учетом второго закона Ньютона получим

$$\frac{\mu |\vec{N}| + m |\vec{g}| \sin \alpha}{m} \leq |\vec{a}| \cos \alpha. \quad (1)$$

Проекция ускорения груза на ось Y такая же, как у клина (груз не отрывается от клина):

$$\frac{|\vec{N}| - m |\vec{g}| \cos \alpha}{m} = |\vec{a}| \sin \alpha. \quad (2)$$

Решая (1) и (2) совместно, найдем

$$|\vec{a}| \geq \frac{\sin \alpha + \mu \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu \sin \alpha} |\vec{g}|.$$

Ф484. Внутри диэлектрического шара радиуса R_0 , равномерно заряженного с объемной плотностью ρ , находится заземленная металлическая сфера радиуса r (рис. 6). Найдите зависимость потенциала электростатического поля этой системы от расстояния до центра сферы.

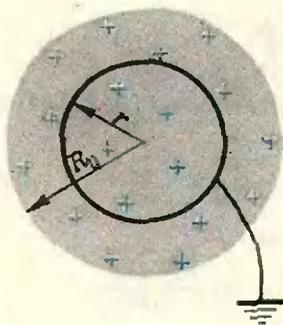


Рис. 6.

Согласно принципу суперпозиции, напряженность электростатического поля системы равна сумме напряженностей полей, создаваемых зарядами шара и сферы. Аналогично и потенциал поля в каждой точке равен сумме потенциалов полей зарядов сферы и шара.

Обозначим заряд заземленной металлической сферы через q (позже найдем его значение); очевидно, что $q < 0$. Этот заряд вне сферы (при $R \geq r$) создает поле такое же, как точечный заряд q , помещенный в центр сферы: проекция напряженности \vec{E} на выбранное направление от центра $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R^2}$. Внутри сферы (при $R < r$) поля нет: $E = 0$. График зависимости E от R для поля заряженной сферы показан на рисунке 7 синей линией.

Потенциал φ этого поля вне сферы меняется по закону $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$, а внутри сферы — равен потенциалу

поверхности сферы: $\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}$. На рисунке 8 синей линией изображен график зависимости φ от R .

Равномерно заряженный шар вне себя (при $R \geq R_0$) создает поле такое же, как точечный заряд, равный заряду шара $Q = \frac{4}{3} \pi R_0^3 \rho$, находящийся в его центре: $E =$

$$= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0 R^2}. \text{ Внутри шара на расстоянии } R < R_0$$

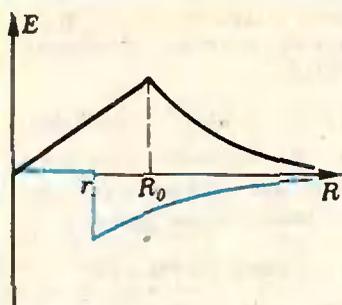


Рис. 7.

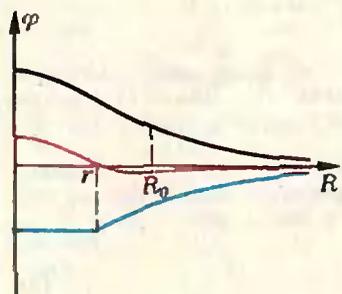


Рис. 8.

от его центра поле создается только тем зарядом, которым обладает шар радиуса R (никакой заряженный слой не создает поля внутри себя). Этот заряд $Q_1 = \frac{4}{3} \pi r R^3$

создает поле с напряженностью $E = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\rho R}{3\epsilon_0}$.

График зависимости E от R для поля заряженного шара показан на рисунке 7 черной линией.

Потенциал поля заряженного шара вне шара равен потенциалу поля точечного заряда Q , помещенного в центр

$$\text{шара: } \varphi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R} = \frac{\rho R_0^3}{3\epsilon_0 R}.$$

На поверхности шара $\varphi = \frac{\rho R_0^2}{3\epsilon_0}$, а по мере приближения

к центру шара потенциал растет: добавляется работа, совершаемая электрическим полем по перенесению единичного заряда из рассматриваемой точки внутри шара на его поверхность. Эта работа равна средней напряженности поля на рассматриваемом участке, умноженной на перемещение единичного заряда. Поскольку внутри шара напряженность меняется линейно,

$$E_{\text{ср}} = \frac{E_R + E_{R_0}}{2} = \frac{\rho(R + R_0)}{6\epsilon_0}.$$

Тогда потенциал поля внутри шара равен

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{\rho R_0^2}{3\epsilon_0} + E_{\text{ср}}(R_0 - R) = \frac{\rho R_0^2}{3\epsilon_0} + \frac{\rho(R_0^2 - R^2)}{6\epsilon_0} = \\ &= \frac{\rho(3R_0^2 - R^2)}{6\epsilon_0}. \end{aligned}$$

Соответствующий график показан на рисунке 8 черной линией.

Для того чтобы построить график зависимости потенциала φ поля системы от R , надо сложить графики, построенные отдельно для полей сферы и шара. На рисунке 8 результирующий график показан красной линией.

Осталось найти величину q заряда на сфере. Так как сфера заземлена, ее потенциал равен нулю. Это означает, что на поверхности сферы, при $R = r$, потенциал поля системы равен нулю:

$$\frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\rho R_0^2}{3\epsilon_0} + \frac{\rho(R_0^2 - r^2)}{6\epsilon_0} = 0.$$

Отсюда

$$q = -\frac{2}{3} \pi r (3R_0^2 - r^2).$$

Ф485. Чему равен период малых колебаний четырех одинаково заряженных тел, связанных одинаковыми нитями длины l так, как показано на рисунке 9? На рисунке стрелками указаны направления движения тел при колебаниях в один и тот же момент времени. Масса и заряд каждого тела равны соответственно m и q .

Рассмотрим простейший пружинный маятник: груз массы M , скрепленный с пружиной жесткости k . При колебаниях такого маятника выполняется закон сохранения энергии:

$$\frac{Mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \text{const}, \quad (1)$$

где v — скорость, а x — смещение груза. Период таких колебаний

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}}. \quad (2)$$

Сравнивая выражения (1) и (2), нетрудно заметить, что под квадратным корнем стоит отношение коэффициентов

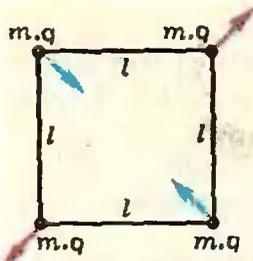


Рис. 9.

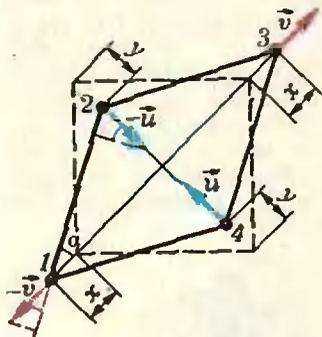


Рис. 10.

при квадрате скорости и квадрате смещения груза. Воспользуемся этим для нахождения периода колебаний системы, изображенной на рисунке 9.

Обозначим через \vec{v} и $-\vec{v}$ скорости удаляющихся друг от друга зарядов, а через \vec{u} и $-\vec{u}$ — скорости приближающихся друг к другу зарядов. Так как нить нерастяжима, для проекций скоростей на нить выполняется равенство:

$$|\vec{v}| \cos \alpha = |\vec{u}| \sin \alpha, \text{ или } |\vec{u}| = |\vec{v}| \operatorname{ctg} \alpha.$$

При малых смещениях зарядов от положения равновесия угол $\alpha \approx 45^\circ$, $\operatorname{ctg} \alpha \approx 1$, поэтому $|\vec{u}| \approx |\vec{v}|$. Так что кинетическая энергия системы равна

$$2 \frac{mv^2}{2} + 2 \frac{mu^2}{2} \approx 2mv^2.$$

Потенциальная энергия системы равна работе, которую необходимо затратить для создания системы, то есть для перенесения зарядов q из бесконечности в данные положения.

Пусть заряды 1 и 3 смещены от положения равновесия на малое расстояние x (рис. 10). При этом заряды 2 и 4 смещены на расстояние y такое, что

$$\left(\frac{l}{\sqrt{2}} + x\right)^2 + \left(\frac{l}{\sqrt{2}} - y\right)^2 = l^2 \quad (3)$$

(поскольку длина нити l не изменяется).

При перенесении первого заряда работа не совершается, так как электрического поля нет; при перемещении второго заряда в поле первого совершается работа

$$A_1 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l}.$$

Для внесения третьего заряда против поля, созданного первыми двумя зарядами, надо совершить работу

$$A_2 = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (\sqrt{2}l + 2x)};$$

и при внесении четвертого заряда совершается работа

$$A_3 = 2 \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 l} + \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 (\sqrt{2}l - 2y)}.$$

Таким образом, потенциальная энергия системы равна

$$A_1 + A_2 + A_3 \approx \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 l} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{3q^2 x^2}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 l^3}$$

(здесь мы воспользовались связью между x и y , задаваемой формулой (3)).

Полная энергия системы складывается из кинетической и потенциальной энергий и с течением времени не изменяется:

$$2mv^2 + \frac{q^2}{\pi\epsilon_0 l} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{2}}\right) + \frac{3q^2 x^2}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 l^3} = \text{const.}$$

Переносим постоянные слагаемые в правую часть равенства, получим

$$2mv^2 + \frac{3q^2 x^2}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 l^3} = \text{const.} \quad (4)$$

Если ввести обозначения $4m = M$ и $\frac{3q^2}{2\sqrt{2}\pi\epsilon_0 l^3} = k$,

выражения (4) и (1) совпадут. Это означает, что мы свели колебания системы к колебаниям пружинного маятника. Следовательно, период колебаний системы равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{M}{k}} = 4\pi \frac{l}{q} \sqrt{\frac{\sqrt{2} \pi \epsilon_0 m l}{3}}$$

Ф486. На рисунке 11 изображена схема масс-спектрометра. В ионизаторе А образуются ионы, которые ускоряются напряжением $U = 10$ кВ и входят через щель С в магнитное поле с индукцией $|\vec{B}| = 0,1$ Т. После поворота ионы попадают на фотографическую пластинку D и вызывают ее почернение. На каком расстоянии друг от друга будут находиться на пластинке полосы ионов H^+ , ${}^2H^+$, ${}^3H^+$, He^+ ? Какова должна быть ширина щели, чтобы полосы ионов ${}^{16}O^+$ и ${}^{15}N^+$ разделились?

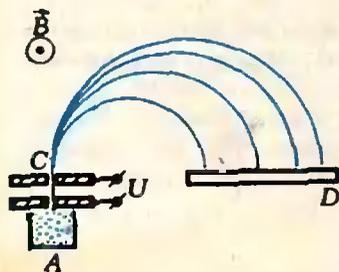


Рис. 11.

Ускоряясь электрическим полем, ионы приобретают кинетическую энергию

$$\frac{mv^2}{2} = qU,$$

где m — масса иона и q — его заряд. Следовательно, в камеру масс-спектрометра ионы попадают со скоростью

$$|\vec{v}| = \sqrt{\frac{2qU}{m}}.$$

В этой камере на ионы действует сила Лоренца

$$|\vec{F}| = |\vec{v}| |\vec{B}| q,$$

благодаря чему ионы движутся по окружности радиуса R . Согласно второму закону Ньютона

$$\frac{mv^2}{R} = |\vec{v}| |\vec{B}| q,$$

откуда

$$R = \frac{m|\vec{v}|}{|\vec{B}|q} = \frac{1}{|\vec{B}|} \sqrt{\frac{2mU}{q}}.$$

Ионы одного сорта собираются на фотопластинке на расстоянии $l = 2R$ от щели. Расстояние между следами ионов с одинаковыми зарядами q , но разными массами m_1 и m_2 равно

$$\Delta l = 2\Delta R = \frac{2}{|\vec{B}|} \sqrt{\frac{2U}{q}} (\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1}).$$

Так, для ионов H^+ и ${}^2H^+$

$$\Delta l = \frac{2}{|\vec{B}|} \sqrt{\frac{2U}{q}} (\sqrt{2m_p} - \sqrt{m_p}) \approx 0,12 \text{ м.}$$

где $q = 1,6 \cdot 10^{-19}$ Кл — заряд одновалентных ионов, $m_p = 1,67 \cdot 10^{-27}$ кг — масса протона.

Для ионов ${}^3H^+$ и ${}^2H^+$

$$\Delta l = \frac{2}{|\vec{B}|} \sqrt{\frac{2U}{q}} (\sqrt{3m_p} - \sqrt{2m_p}) \approx 0,09 \text{ м.}$$

а для ${}^3H^+$ и He^+

$$\Delta l = \frac{2}{|\vec{B}|} \sqrt{\frac{2U}{q}} (\sqrt{4m_p} - \sqrt{3m_p}) \approx 0,08 \text{ м.}$$

Очевидно, что следы ионов на фотопластинке не будут перекрываться, если ширина щели d будет меньше Δl . В частности, для ионов ${}^{16}O^+$ и ${}^{15}N^+$

$$d < \frac{2}{|\vec{B}|} \sqrt{\frac{2U}{q}} (\sqrt{16m_p} - \sqrt{15m_p}) \approx 0,04 \text{ м.}$$

И. Слободецкий

С. Фомин

Билеты и ящики

В этой заметке решается задача, предлагавшая в 1977 году на втором (исследовательском) туре XI Всесоюзной олимпиады по математике. Эта задача была помещена в «Задачнике «Кванта» («Квант», 1977, № 9, М465). Напомним ее формулировку.

Имеется тысяча билетов с номерами 000, 001, ..., 999 и сто ящиков с номерами 00, 01, ..., 99. Билет разрешается опускать в ящик, если номер ящика можно получить из номера этого билета вычеркиванием одной из цифр. Докажите, что

а) можно разложить все билеты в 50 ящиков;

б) нельзя разложить все билеты менее чем в 40 ящиков;

в) нельзя разложить все билеты менее чем в 50 ящиков.

Пусть вообще имеется 10^k билетов с k -значными номерами от 00...0 до 99...9. Билет разрешается опу-

скасть в ящик, номер которого можно получить из номера этого билета вычеркиванием некоторых $k-2$ цифр.

г) Докажите, что при $k=4$ все 10 000 четырехзначных билетов можно разложить по 34 ящикам.

д) Найдите минимальное количество ящиков, в которые можно разложить k -значные билеты. Попробуйте решить эту задачу для $k=4, 5, 6, \dots$

1. Функция $F(k, N)$

Начнем с вопроса, на первый взгляд, не связанного с нашей задачей.

Пусть k и N — два натуральных числа. Рассмотрим всевозможные наборы из k целых неотрицательных чисел, сумма которых равна N . Для каждого такого набора найдем сумму квадратов входящих в него чисел (рис. 1). Наименьшую из этих сумм обозначим $F(k, N)$. Пусть она соответствует набору $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$.

Л е м м а . Каждые два числа, входящих в набор A , отличаются не более чем на 1.

Доказательство. Предположим противное. Пусть, скажем, $a_2 > a_1 + 1$. Рассмотрим набор $A' = \{a_1 + 1, a_2 - 1, a_3, \dots, a_k\}$.

Поскольку

$$(a_1 + 1)^2 + (a_2 - 1)^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2(a_2 - a_1 - 1) < a_1^2 + a_2^2,$$

сумма квадратов чисел, входящих в набор A' , меньше аналогичной суммы для A . Полученное противоречие доказывает лемму.

Теперь понятно, как вычислять $F(k, N)$. Нужно разделить N на k с остатком и подобрать k чисел так, чтобы каждое из них было либо равно частному, либо на 1 больше его, а сумма этих чисел была бы равна N .

На рисунке 2 приведена таблица значений функции $F(k, N)$ для небольших k и N .

Какова «геометрическая» интерпретация $F(k, N)$? Пусть для простоты $k=3$. Тогда задачу нахождения $F(k, N)$ можно воспринимать следующим образом: найти в треугольнике ABC , задаваемом в пространстве уравнением $x_1 + x_2 + x_3 = N$ и неравенствами $x_1 \geq 0$,

{0, 0, 7}	49
{0, 1, 6}	37
{0, 2, 5}	29
{1, 1, 5}	27
{0, 3, 4}	25
{1, 2, 4}	21
{1, 3, 3}	19
{2, 2, 3}	17

$k = 3$
 $N = 7$ $F(3, 7) = 17$

Рис. 1.

		F(k, N)									
N \ k	k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	9	5	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	16	8	6	4	4	4	4	4	4	4	4
5	25	13	9	7	5	5	5	5	5	5	5
6	36	18	12	10	8	6	6	6	6	6	6
7	49	25	17	13	11	9	7	7	7	7	7
8	64	32	22	16	14	12	10	8	8	8	8
9	81	41	27	21	17	15	13	11	9	9	9
10	100	50	34	26	20	18	16	14	12	10	10

Рис. 2.

$x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ (рис. 3), точку M с целыми координатами, наименее удаленную от начала координат O (интересующая нас сумма квадратов есть не что иное, как квадрат расстояния от точки O до M). Естественно, что нужно взять эту точку поближе к основанию перпендикуляра, опущенного из O на плоскость треугольника ABC , то есть к точке $(\frac{N}{3}; \frac{N}{3}; \frac{N}{3})$.

Для $k > 3$ аналогичные рассуждения возможны с привлечением понятия k -мерного пространства.

Рассмотрим еще одну интерпретацию $F(k, N)$. Пусть для простоты $k = 2$. Тогда рассматриваемые наборо

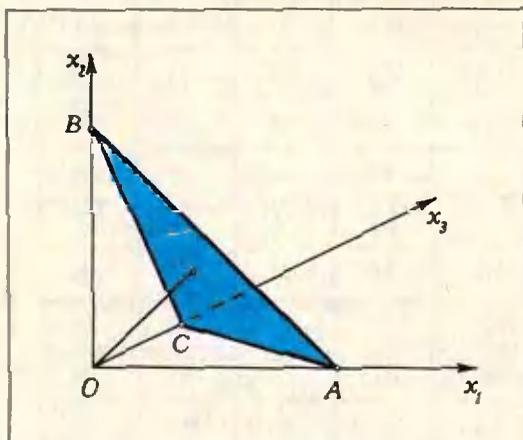


Рис. 3.

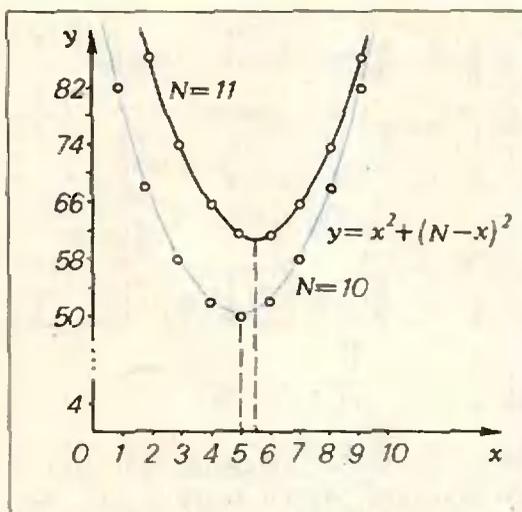


Рис. 4.

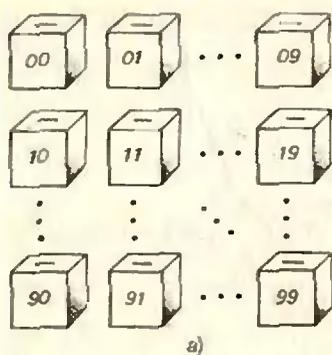
ры имеют вид $\{a, N-a\}$ (a — целое неотрицательное), и перед нами стоит задача нахождения минимума функции $x \rightarrow x^2 + (N-x)^2$, заданной на множестве целых чисел из интервала $[0, N]$. Эта функция — квадратный трехчлен; минимум достигается в точке $x = \frac{N}{2}$. Поэтому $F(2, N)$ равно $\frac{N^2}{2}$ или $\frac{N^2+1}{2}$ в зависимости от четности N (рис. 4).

Для $k > 2$ нужно рассматривать соответствующую функцию $k-1$ переменных и находить ее минимум.

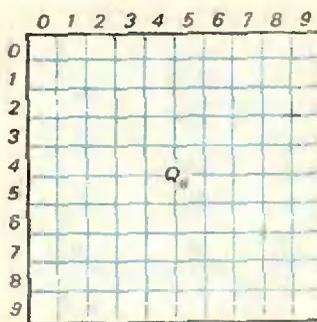
2. Решение задач а) и в)

Расположим все ящики в виде квадрата 10×10 , как показано на рисунке 5, а. На рисунке 5, б этот квадрат Q_0 нарисован в привычном для нас виде; будем считать, что каждая его клетка — это ящик с соответствующим номером. Строки и столбцы этого квадрата пронумеруем цифрами от 1 до 9. Поскольку все цифры в условии задачи равноправны, строки и столбцы квадрата Q_0 можно переставлять.

Нам нужно выбрать некоторое количество ящиков и разложить все билеты в эти ящики. Договоримся клетки, соответствующие выбранному ящикам, закрашивать в Q_0 . Пусть минимальное количество кле-



а)



б)

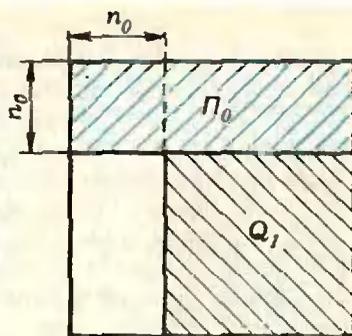


Рис. 6.

Рис. 5.

ток, а именно n_0 , закрашено в нулевой строке; можно считать, что это первые n_0 клеток строки. Рассмотрим теперь квадрат Q_1 , получающийся из Q_0 вычеркиванием первых n_0 строчек и первых n_0 столбцов (рис. 6). Покажем, что все клетки Q_1 должны быть закрашены. Для этого возьмем ящики с номером xy , где $x \geq n_0$, $y \geq n_0$. В него обязательно попадает билет $0xy$: его нельзя положить в ящики $0x$ и $0y$, так как соответствующие клетки не закрашены. Значит, клетка с номером xy должна быть закрашена для всех $x \geq n_0$, $y \geq n_0$.

Посчитаем, сколько же всего клеток закрашено в нашем квадрате Q_0 . В каждой строчке прямоугольника P_0 (см. рис. 6) закрашено по крайней мере n_0 клеток. В Q_1 закрашены все $(10 - n_0)^2$ клеток. Таким образом, в Q_0 закрашено по крайней мере $n_0^2 + (10 - n_0)^2$ клеток. Наименьшая из этих сумм равна $F(2, 10) = 50$. Так что, во всяком случае, в Q_0 закрашено не менее 50 клеток. С другой стороны, пятидесяти ящиков с номерами, выписанными на рисунке 7, достаточно: вычеркнув в номере каждого билета цифру так, чтобы оставались две цифры одинаковой четности, мы поместим этот билет в соответствующий ящик. Эти два соображения завершают решение пунктов а) и в) задачи.

3. Решение задачи д)

Пусть теперь билеты k -значные. Будем считать, что у нас не 10 цифр, а N , где N — некоторое произвольное натуральное число (так, как если бы у

нас была принята N -ичная система счисления).

Строчки квадрата Q_0 занумеруем теперь числами от 0 до $N-1$; таким образом, в Q_0 всего N^2 клеток.

По-прежнему будем считать, что в нулевой строке — n_0 закрашенных клеток, а в любой другой строке — не меньше, чем n_0 . Аналогично построим квадрат Q_1 . Поступим с Q_1 так же, как мы поступали с Q_0 . — выберем в нем строчку, в которой меньше всего закрашенных клеток (пусть это его первая строчка, т. е. строчка с номером n_0 в исходном квадрате), обозначим количество закрашенных клеток в ней через n_1 и, выкинув из Q_1 первые n_1 строчек и столбцов, получим квадрат Q_2 . С ним поступим так же, и т. д., до квадрата Q_{k-2} (рис. 8). Прямоугольники, аналогичные P_0 , обозначим через

00	02	04	06	08
11	13	15	17	19
20	22	24	26	28
31	33	35	37	39
40	42	44	46	48
51	53	55	57	59
60	62	64	66	68
71	73	75	77	79
80	82	84	86	88
91	93	95	97	99

Рис. 7.

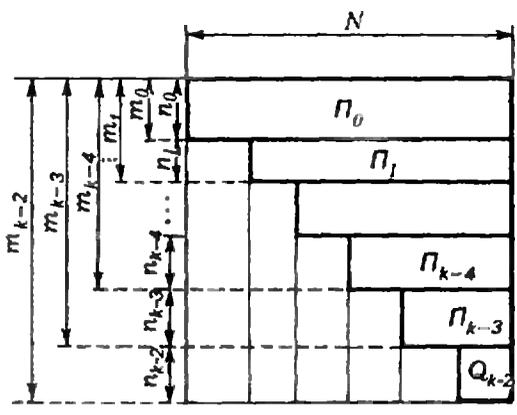


Рис. 8.

P_1, P_2, P_3, \dots В каждом прямоугольнике P_i ровно n_i строк, в каждой из которых закрашено по крайней мере n_i клеток, так что в Q_0 во всяком случае закрашено $n_0^2 + n_1^2 + \dots + n_{k-3}^2$ клеток. Введем обозначения: $m_0 = n_0, m_1 = n_0 + n_1, m_2 = n_0 + n_1 + n_2, \dots$ (см. рис. 8). Рассмотрим билет с номером $[0m_0 m_1 \dots m_{k-3} xy]$, где x и y — некие две «цифры», не меньше, чем m_{k-3} (то есть ящик с номером xy «расположен» в Q_{k-2}). Легко видеть, что этот билет можно положить только в ящик с номером xy . Поскольку x и y были выбраны в Q_{k-2} произвольно, мы получаем, что все клетки квадрата Q_{k-2} закрашены (их n_{k-2}^2 штук). Итак, мы имеем по крайней мере $n_0^2 + n_1^2 + \dots + n_{k-3}^2 + n_{k-2}^2$ закрашенных клеток. Заметим теперь, что $n_0 + n_1 + \dots + n_{k-3} + n_{k-2} = N$, и потому закрашенных клеток не меньше, чем $F(k-1, N)$.

Осталось показать, что можно обойтись ровно $F(k-1, N)$ ящиками. Пусть сумма $F(k-1, N)$ соответствует набору $\{a_1, a_2, \dots, a_{k-1}\}$. Разобьем наши N цифр на $k-1$ групп: в первой группе a_1 «цифр», во второй — a_2 «цифр», и т. д.

Рассмотрим все ящики с номерами, обе «цифры» которых попали в одну группу. Их как раз $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{k-1}^2 = F(k-1, N)$, и каждый билет можно положить в один из этих ящиков, поскольку среди k «цифр» билета найдутся две «цифры» из одной группы.

Для $N = 10$ соответствующие значения $F(k-1, 10)$ приведены в таблице на рисунке 2.

Задачи наших читателей

1. Доказать, что

$$a) S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{2}{3};$$

$$b) P_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \times \dots \frac{2n-1}{2n} > \frac{1}{\sqrt{4n+1}}.$$

Г. Пискарев (Ярославская обл.)

2. Пусть в треугольнике ABC сторона AC — самая длинная или самая короткая. Доказать, что тогда найдется действительное число x такое, что

$$|AC|^x = |BC|^x + |AB|^x.$$

О. Лемешев (г. Омск)

3. Существует ли натуральное число, квадрат которого равен сумме квадратов 1000 последовательных натуральных чисел?

4. Доказать, что уравнения

$$a) (m+1)^2 + (m+2)^2 + \dots + (m+n)^2 = 10^k + 2,$$

$$b) (m+1)^3 + (m+2)^3 + \dots + (m+n)^3 = 10^k + 2$$

не имеют целочисленных решений.

И. Черепинский (г. Черкассы)

5. Дан отрезок AD и точка H , принадлежащая этому отрезку, причём $|AH| : |HD| = 4 : 1$. Построить треугольник ABC так, чтобы отрезок AD был его высотой, точка H — ортоцентром, а радиус окружности, описанной около треугольника ABC , был равен $\frac{4}{5} |AD|$.

6. Дан треугольник ABC , $[AD]$ — его медиана, $M \in [AD]$, $|AM| : |MD| = 2 : 3$, $N \in [AB]$, $|AN| : |NB| = 5 : 3$. Найти отношение площадей треугольников AMN и ABC .

А. Пуляев (г. Донецк)

ПОЛНОЕ ЛУННОЕ ЗАТМЕНИЕ

16 сентября 1978 года произойдет полное лунное затмение. Это затмение будет хорошо видно почти на всей территории Советского Союза кроме Чукотского полуострова. Во время затмения Луна будет находиться в созвездии Рыб вблизи его границы с созвездием Водолея и пройдет сквозь северную зону земной тени.

Ниже приводятся обстоятельства затмения по московскому времени T_M и географическая долгота λ , где в эти моменты Луна будет наблюдаться в верхней кульминации

Явление	T_M	λ
начало частного затмения	20 ^ч 20 ^м	97°39'
начало полного затмения	21 ^ч 24 ^м	82°10'
середина затмения	22 ^ч 04 ^м	72°37'
конец полного затмения	22 ^ч 44 ^м	63°00'
конец частного затмения	23 ^ч 48 ^м	47°46'

Общая продолжительность затмения составит 3 часа 28 минут, а полного затмения — 1 час 20 минут. Наибольшая фаза полного затмения $\Phi_m = 1,33$.

Наблюдать лунное затмение можно в любой оптический инструмент и невооруженным глазом. При наблюдениях в небольшой школьный телескоп или в бинокль полезно отмечать по выверенным часам моменты времени, в которые земная тень касается края лунного диска и крупных лунных кратеров (расположение их указано в школьном учебнике по астрономии). Обратите внимание на изменение цвета участков лунной поверхности на протяжении затмения.

Умеющие фотографировать могут заснять на цветную фотопленку различные фазы затмения. Для этого нужно прикрепить фотоаппарат со снятым объективом к школьному телескопу-рефрактору.

Результаты ваших наблюдений присылайте во Всесоюзное астрономо-геодезическое общество по адресу: Москва К-9, аб/я 918, Астрономическая секция ВАГО.

ВОЗМОЖЕН ЗВЕЗДНЫЙ ДОЖДЬ

Вокруг Солнца движется множество метеорных потоков, порожденных кометам. Когда Земля встречается с обильным метеорным потоком, мириады мельчайших частиц обрушиваются на нее, вспыхивают в земной атмосфере, и с Земли наблюдается великолепное зрелище — метеорный дождь, который называют еще звездным дождем. Тысячи и десятки тысяч блестящих метеоров «вылетают» из сравнительно небольшого участка неба.

По теоретическим расчетам известного советского исследователя комет Ю. В. Едковича 9 октября 1978 года возможно сближение Земли с плотной частью метеорного потока Драконид, названного так потому, что вспышки метеоров этого потока происходят на фоне созвездия Дракона. Весьма вероятно, что в ночь с 8 на 9 октября или в ночь с 9 на 10 октября будет звездный дождь Драконид, наблюдать который в высшей степени интересно.

Самые простые наблюдения звездного дождя могут быть проведены невооруженным глазом. Они состоят в подсчете метеорных вспышек в выбранном небольшом участке неба за равные промежутки времени длительностью 5—10 минут. Такие наблюдения полезно проводить группами из 4—5 человек, каждый из которых следит за своим выбранным участком.

Главное внимание при наблюдениях должно быть уделено области неба вокруг звезды ζ Дракона, которая находится между Трапецией из звезд γ , β , ξ и ν Дракона (Голова Дракона) и Полярной звездой.

Даже те простые наблюдения, которые мы описали, имеют большое значение в изучении метеорных потоков. Результаты ваших наблюдений (с указанием участка неба, в котором они проводились, времени начала наблюдений, длительности промежутков времени, в течение которых велся счет, интервалов между этими промежутками) присылайте, пожалуйста, в Астрономическую секцию ВАГО.

М. Дагисов

Это стихотворение-загадку прислал нам А. Стариков из Кривого Рога. Прочитайте его и постарайтесь понять, почему девочка оказалась такой необыкновенной.



А. СТАРИКОВ
НЕОБЫКНОВЕННАЯ ДЕВОЧКА

Ей было тысяча сто лет,
Она в сто первый класс ходила,
В портфеле по сто книг носила —
Все это правда, а не бред.
Когда, пыля десятком ног,
Она шагала по дороге,
За ней всегда бежал щенок
С одним хвостом, зато стоногий.
Она ловила каждый звук
Своими десятью ушами,
И десять загорелых рук
Портфель и поводок держали.
И десять темно-синих глаз
Рассматривали мир привычно...
Но станет все совсем обычным,
Когда поймете наш рассказ.





Ю. Данилов

Стомахион по праву может считаться патриархом обширного семейства игр-головоломок на составление различных фигур из частей особым образом разрезанной исходной фигуры: его возраст превышает два тысячелетия. Выдержавший проверку временем, древний, но не «одряхлевший», стомахион, несомненно, принадлежит к числу классических головоломок.

Приступим к игре

На рисунке 1 приведен раскрой наиболее часто встречающейся «заготовки» для игры в стомахион — прямоугольника $ABCD$ с соотношением сторон $1:2$. Вместо такого прямоугольника иногда берут квадрат и даже произвольный параллелограмм. Способ разбиения исходной фигуры во всех случаях остается одинаковым.

Пусть $ABCD$ — произвольный параллелограмм, F и E — середины сторон AD и BC . Проведя отрезок EF , разобьем исходный параллелограмм на параллелограммы $ABEF$ и $FECD$. Проведем диагонали AC , BF и FC . Пусть L и R — точки пересечения диагонали AC с диагональю BF и отрезком EF . Через середину G отрезка BE и проведем прямую, параллельную стороне AB исходного параллелограмма, до пересечения с диагональю BF в точке H и отрезком GK прямой GA (K — точка пересечения прямой GA и диагонали BF). Наконец, соединив отрезком прямую вершину B с серединой M отрезка AL , мы разобьем параллелограмм $ABEF$ на 7 частей.

Пусть N и O — середины отрезков CD и FC . Проведем отрезки ON и OE . Пусть Q — точка пересечения отрезка OE с диагональю AC , а P — точка пересечения прямой BO со стороной CD исходного параллелограмма. Проведем отрезок OP . Параллелограмм $FECD$ тоже оказался разделенным на семь частей.

Таким образом, исходный параллелограмм $ABCD$ разбит на 14 частей.

При составлении новых фигур части исходной фигуры можно переворачивать «лицевой» стороной вниз. Не-

обходимо лишь следить за тем, чтобы составленная фигура содержала полный набор деталей стомахиона — всего 14 частей. С соблюдением этого неперменного правила составлены фигурки, изображенные на рисунках 2—4. Овладев секретами «стомахионной мозаики» (разгадав, как устроены эти фигурки), вы научитесь составлять и свои собственные композиции.

Немного истории

Среди геометрических головоломок стомахион выделяется не только почтенным возрастом, но и своим происхождением.

Игра «стомахион» была известна еще до нашей эры. Упоминание о ней мы находим также в трудах некоторых римских авторов IV—VI веков. Создателем стомахиона считали Архимеда, однако долгое время никаких документальных подтверждений найти не удавалось.

В 1899 году швейцарский историк Генрих Зютер обнаружил в книгохранилищах Берлина и Кембриджа арабскую рукопись с фрагментами сочинения, озаглавленного «Книга Архимеда о разбиении фигуры стомахиона на 14 частей, находящихся к ней в рациональных отношениях». Вы-

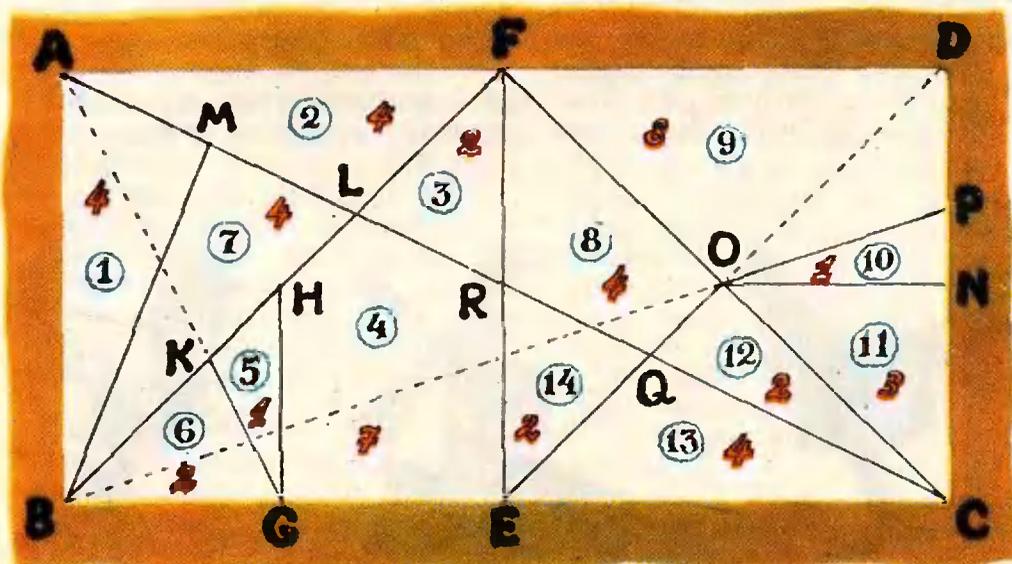


Рис. 1.

сказывались сомнения в принадлежности этого сочинения Архимеду. Однако все сомнения рухнули, когда известный датский историк математики И. Гейберг обнаружил древнегреческий оригинал некоторых фрагментов сочинения Архимеда, причем совершил свое открытие, не выходя из кабинета.

Внимание Гейберга привлекла опубликованная в 4-м томе (за 1899 год) каталогов Иерусалимской библиотеки заметка приват-доцента Петербургского университета Пападопуло-Керамевса об одной рукописи из константинопольского монастыря св. Успения. Большая часть рукописи представляла собой так называемый палимпсест, то есть была написана на пергаменте, с которого смыт первоначальный текст. По свидетельству известного советского историка С. Я. Лурье «ввиду своего невежества в математике и в истории точных наук Пападопуло заинтересовался только верхним, христианским, текстом, а из нижнего, смытого, который тем не менее можно было без большого труда прочесть, привел в каталоге Иерусалимской библиотеки только небольшую выдержку. Однако для знаменитого датского историка математики Гейберга выдержка была достаточной, чтобы определить, что смыт был текст Архимеда».

Оригинал рукописи Гейберг смог увидеть в 1906 году. Лишь на 29 из 177 листов не удалось обнаружить никаких следов первоначального текста. Еще на 9 листах ранний текст был безнадежно испорчен при смывании и разобрать можно было лишь

отдельные слова. На остальных листах «нижний» текст был вполне разборчив.

Исследуя оригинал рукописи и ее фотокопию, Гейберг сумел установить содержание основной части рукописи.

Научный подвиг Гейберга сделал достоянием науки восстановленные почти из небытия сочинения Архимеда «О шаре и цилиндре» (большая часть), «О спиралях» (почти полностью), «Измерение круга» и «О равновесии плоских фигур» (фрагменты), «О плавающих телах» и «Послание Эратосфену» (значительная часть). Среди восстановленных текстов были и две теоремы из книги Архимеда о стомахционе.

Находка Гейберга положила конец давнему спору о том, как правильно называть «архимедову игру»: стомахцион («приводящая в ярость»), остомахцион («битва костяных пластинок») или синтемахцион («собрание обрезков») — в найденном Гейбергом фрагменте значилось «стомахцион».

Отрывок из «Книги Архимеда о стомахционе»

«Поскольку так называемый стомахцион содержит ряд исследований о перекладывании фигур, из которых тот состоит, то относительно частей стомахциона я счел необходимым прежде всего объяснить, из скольких частей он состоит и какой фигуре подобна каждая из них. Затем я изложил, какими должны быть углы, чтобы, взяв их попарно, можно было составить прямой угол. Далее я вознамерился обстоятельно рассмотреть все мыслимые случаи, когда части стомахциона могут прилегать друг к другу, и определить, лежат ли стороны примы-

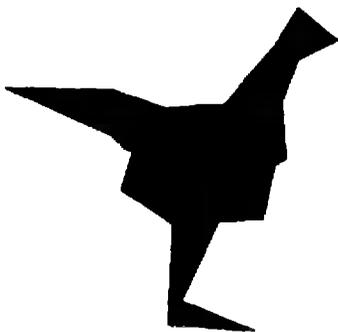


Рис. 2. Курица.

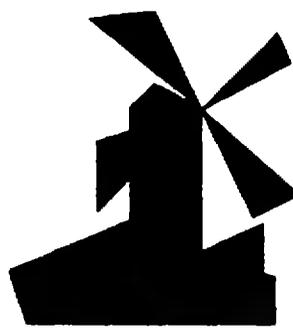


Рис. 3. Мельница.

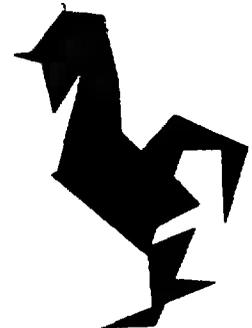


Рис. 4. Петух.

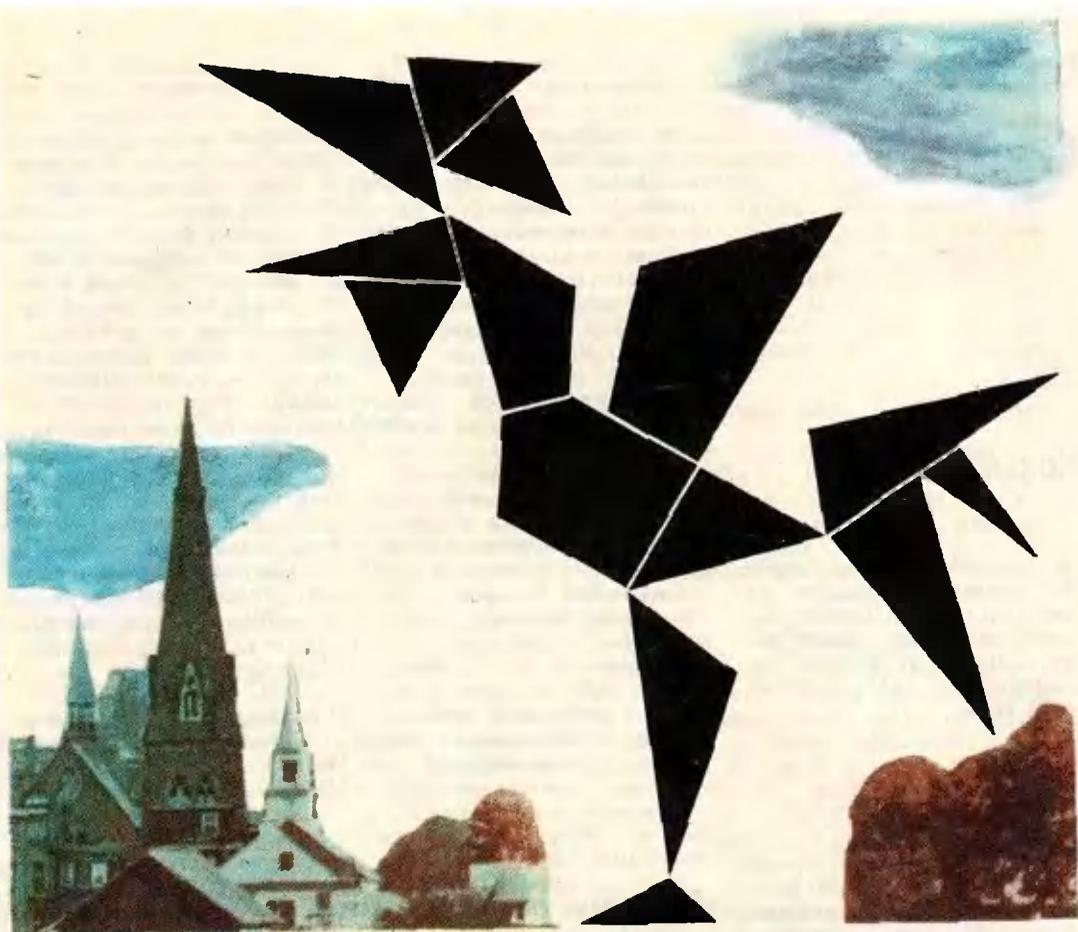


Рис. 5.

кающих частей на одной прямой или отклонение от прямой столь мало, что не заметно глазу. Эти вопросы требуют тщательных доказательств, и если отклонение от прямой мало и поэтому не заметно глазу, то такого рода неполное примыкание следует считать допустимым.

Поскольку одну часть можно заменять другой, равной ей и имеющей равные с ней углы, то можно составить множество различных фигур... Иногда две фигуры, взятые вместе, равны и подобны одной фигуре, или две фигуры, взятые вместе, равны и подобны двум фигурам, что и позволяет при перекладывании частей образовывать много фигур».

Архимедовы задачи

Предложенное Архимедом разбиение «фигуры стомахиона» (рис. 1) обладает таким свойством: площади всех 14 частей находятся в рациональном отношении к площади исходной фигуры.

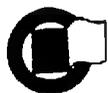
Задача 1. Доказать, что площади отдельных частей исходного параллелограмма, выраженные в сорок восьмых долях его площади, имеют величины, показанные на рисунке 1 красными цифрами.

Следующая задача заимствована из книги Эмиля Фурре «Геометрические головоломки и паралогизмы» (Одесса, изд-во «Mathesis», 1912 г.):

Задача 2. Сгруппировать элементы стомахиона так, чтобы площади вновь полученных частей выражались (в сорок восьмых долях площади исходного параллелограмма):

- а) тремя равными целыми числами,
- б) тремя последовательными целыми числами,
- в) целыми числами от 1 до 8 и числом 12.

Заметим, что все три пункта задачи можно решить не рассыпая исходный параллелограмм, а проводя разделительные линии между элементами.



Новые книги

В этом номере мы публикуем краткие аннотации на доступные и интересные нашим читателям книги по математике и физике, выходящие в III квартале 1978 года.

Математика

Издательство «Наука»

1. Маркушевич А. И. *Замечательные кривые*. Издание 3-е, дополненное. Объем 2 л., тираж 100 000 экз., цена 7 к.

Эта брошюра — переиздание одного из первых выпусков серии «Популярные лекции по математике». В ее основу положена лекция, прочитанная автором для московских школьников седьмых и восьмых классов. В своей брошюре автор исходит из определения: *кривая есть след движущейся точки*. Рассматриваются *прямая и окружность* — две наиболее простые и вместе с тем наиболее замечательные по своим свойствам кривые. После этого автор переходит к рассказу об *эллипсе, гиперболы, параболы*; оказывается, все эти три кривые можно получить, рассекая конус плоскостью: эллипс, гипербола и парабола являются коническими сечениями. Наконец, рассказывается о *лемнискате и циклоиде*, о замечательном свойстве циклоиды, из-за которого она заслужила название «брахистохрона». В настоящем издании добавлены сведения о *цепной линии*, по которой располагается

цепь, подвешенная за два конца, и о *спирали Архимеда* (ее описывает жучок, ползущий по равномерно вращающейся линейке). Большинство сведений о кривых излагается без доказательств.

Брошюра предполагает подготовку в объеме 7—8 классов средней школы.

2. Боголюбов А. Н. *Гаспар Монж (1746—1818)*. Объем 12 л., тираж 15 000 экз., цена 80 к.

Эта книга (из серии «Научные биографии») рассказывает о жизни и деятельности замечательного французского ученого, внесшего важный вклад в создание начертательной, аналитической и дифференциальной геометрии. Гаспар Монж был видным деятелем французской революции, морским министром. Он создавал оборонную промышленность и принимал деятельное участие в организации науки и высшего образования во Франции.

Издательство «Просвещение»

3. Снраждинов С. Х., Матвиевская Г. П. *Абу Райхан Беруни и его математические труды*. Объем 5 л., тираж 100 000 экз., цена 20 к.

В книге рассказывается о жизни и о математическом творчестве Абу Райхана Беруни — великого ученого-энциклопедиста Средней Азии, тысячелетний юбилей со дня рождения которого недавно отмечался по инициативе ЮНЕСКО во всех странах мира. Беруни определил радиус земного шара. За пять веков до Коперника им была высказана мысль о возможности вращения Земли вокруг Солнца. Беруни обладал исключительной широтой научных интересов — математика, астрономия, минералогия, география, геодезия, история, лингвистика и другие; историки науки называют первую половину XI века эпохой Беруни.

Издательство «Мир»

4. Бизам Д., Герцег Я. *Многоцветная логика*. Объем 21 л., тираж 50 000 экз., цена 2 р.

Новая книга венгерских математиков Д. Бизама и Я. Герцега (их первая книга «Игра и логика» в переводе на русский язык вышла в издательстве «Мир» в 1975 году) знакомит читателя более чем со 150 логическими задачами. Яркие и занимательные, эти задачи в шуточной игровой форме сообщают важные сведения, необходимые для решения серьезных задач. Чтение книги не требует специальных знаний, достаточно лишь умения (или готовности научиться) логически мыслить.

Оригинально оформленная, снабженная рисунками, «Многоцветная логика» доступна самому широкому кругу читателей.

5. Стравинич Ст., Бровкин Е. *Польские математические олимпиады*. Объем 16 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 30 к.

Эта книга — перевод юбилейного сборника избранных задач, выпущенного к 25-летию польских математических олимпиад (1950—1975). Сборник дополнен задачами, предлагавшимися на третьем туре олимпиад 1976—1977 годов.

Книга продолжает серию «Задачи и олимпиады», выходящую в издательстве «Мир» с 1975 года. Она будет полезна школьникам старших классов, абитуриентам, студентам, преподавателям математики школ и вузов, руководителям математических кружков, а также всем любителям нестандартных задач.

Физика

Издательство «Наука»

1. *Образованный ученый*. Сборник переводов с английского. Объем 10 л., тираж 30 000 экз., цена 40 к.

Сборник посвящен вопросам подготовки молодых физиков в Англии. В нем рассказывается о знаменитой Кавендишской лаборатории в Кембридже и о некоторых проблемах университетского образования в Англии. Основная часть сборника — это задачи по общей физике, которые предлагались сту-

дентам на экзаменах в Кавендишской лаборатории, и задачи английских технических вузов. Всего в сборнике около 400 задач.

Книга послужит превосходным пособием для преподавателей физики и учащихся старших классов.

2. Бутиков Е. И., Быков А. А., Кондратьев А. С. *Физика для поступающих в вузы*. Объем 30 л., тираж 500 000 экз., цена 1 р.

Книга представляет собой учебное пособие для поступающих в вузы. Наряду с изложением программного материала большое внимание уделено разбору решений физических задач. Используются математический аппарат полностью соответствует школьной программе.

Книга рассчитана на учащихся старших классов.

3. Майер В. В. *Простые опыты с ультразвуком*. (Библиотека физико-математической школы.) Объем 6 л., тираж 200 000 экз., цена 22 к.

В книге рассматриваются методы получения ультразвука частотой 20—150 кГц с помощью самодельных генераторов. В ней описаны опыты, иллюстрирующие основные физические свойства и возможности практического применения ультразвуковых волн. Предлагаемые приборы и опыты отличаются максимальной простотой, доступностью и в большинстве своем могут быть воспроизведены в домашних условиях. Цель книги — научить читателя продумывать, ставить и анализировать опыты по физике, способствовать развитию творческих способностей школьников в области физического эксперимента.

Книга рассчитана на учащихся старших классов средних школ. Она может быть использована в работе физико-технических кружков.

4. Китайгородский А. И. *Физика для всех. Электроника*. Объем 10 л., тираж 200 000 экз., цена 38 к.

Эта книга является естественным продолжением книги Л. Д. Ландау и А. И. Китайгородского «Физика для всех» (см. «Квант», 1978, № 6, с. 83).

В книге излагаются основные факты, касающиеся электрического тока и электромагнитного поля. Большое внимание уделено механизму прохождения тока через жидкости, металлы и полупроводники и современным представлениям о диэлектриках и магнетиках.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

5. Дагаев М. М. *Солнечные и лунные затмения*. Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 38 к.

В книге в доступной для школьников форме рассказывается о движении Земли и Луны, условиях видимости Луны и причине смены ее фаз, о причинах солнечных и лунных затмений. Даются рекомендации к простейшим астрономическим наблюдениям.

Книга рассчитана на школьников десятых классов и преподавателей физики и астрономии.

6. Максимаев Б. А., Комаров В. И. *В звездных лабиринтах (ориентирование по небу)*. Объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 38 к.

Книга в популярной форме знакомит читателя с картиной звездного неба и методом ориентировки по небесным светилам. Она написана на основе опыта изучения звездного неба, накопленного в Московском планетарии в процессе занятий с авиационными штурманами и космонавтами. В ней описывается звездное небо не только северного, но и южного полушарий Земли. Заключительные разделы книги посвящены вопросам астрономической ориентировки в условиях космического полета, на Луне, на соседних планетах Солнечной системы.

Книга рассчитана на широкий круг любителей астрономии.

Издательство «Мир»

7. Левитт И. *За пределами известного мира; от белых карликов до квазаров*. Перевод с английского. Объем 11 л., тираж 50 000 экз., цена 1 р. 40 к.

Книга известного популяризатора науки американского астронома И. Левитта рассказывает об одной из новейших областей астрономии — астрофизике высоких энергий. Она знакомит читателя с такими загадочными объектами, как белые карлики, нейтронные звезды, черные дыры.

Книга рассчитана на широкий круг читателей.

Издательство «Атомиздат»

8. Васильев М. В., Станюкович К. П., Климонтович П. Ю. *Сила, что движет мирами*. Издание 2-е, переработанное и дополненное. Объем 10 л., тираж 100 000 экз., цена 40 к.

Тяготение... С этой силой мы сталкиваемся с детских лет, но природа ее еще недостаточно изучена. Авторы книги описывают в популярной форме различные теории тяготения, сообщая и о самых последних исследованиях этой проблемы. Исторический материал, показанный очень живо и интересно, охватывает все этапы развития теории тяготения: от Гука и Ньютона до Эйнштейна и современных ученых.

Стиль книги — непринужденная беседа с читателем, разговор с приведением огромного количества интересных физических примеров, иллюстраций. Авторы делают попытку популярно рассказать читателю о той глубокой связи, которая намечается между современной теорией гравитации и теорией элементарных частиц.

Книгу с большим интересом прочтут школьники старших классов.

И. Клумова, М. Смолянский



И. Слободецкий

X Международная олимпиада школьников по физике

В июле прошлого года в Чехословакии в городе Градец Кралове проходила X Международная физическая олимпиада. В ней приняли участие школьники из 12 европейских стран: Болгарии, Венгрии, ГДР, Польши, Румынии, СССР, Финляндии, Франции, ФРГ, Чехословакии, Швеции и Югославии. Команда каждой страны состояла из пяти участников.

В состав команды СССР вошли победители XI Всесоюзной олимпиады школьников

Андрей Ганопольский — выпускник средней школы № 88 г. Минска,

Владимир Решетов — выпускник школы-интерната № 18 при МГУ,

Константин Третьяченко — выпускник средней школы № 145 г. Киева,

Руслан Шарипов — выпускник средней школы № 18 п. Каракуль Барской обл. УзССР.

Виталий Щукин — выпускник физико-математической школы № 45 при ЛГУ.

Руководителями команды были заведующий лабораторией научно-исследовательского института содержания и методов обучения Академии педагогических наук СССР О. Ф. Кабардин и инспектор Министерства просвещения СССР М. В. Грабиленков.

Перед олимпиадой члены советской команды побывали на трехнедельных тренировочных сборах, проходивших в экспериментальной шко-

ле № 82 АПН СССР в п. Черноголовка Московской области. Во время сборов ребятам читались лекции, в основном, по тем вопросам, которые входят в программу Международной олимпиады, но не изучаются в школах СССР. Они также решали задачи, выполняли лабораторные работы.

X Международная олимпиада была организована Министерством школ Чешской социалистической республики совместно с Министерством школ Словацкой социалистической республики, Социалистическим союзом молодежи, Обществом чехословацких математиков и физиков. Непосредственным проведением олимпиады руководили Организационный комитет и Международная комиссия (в состав которой входили руководители команд). Председателем Оргкомитета и Международной комиссии был член-корреспондент Академии наук ЧССР М. Матыаш.

8 июля состоялось торжественное открытие олимпиады, 9 и 11 июля участники олимпиады решали задачи теоретического и экспериментального туров. На теоретическом туре предлагалось решить три задачи (на них давалось пять часов), а на экспериментальном — одну задачу (за четыре часа). Вот эти задачи.

Теоретический тур

1. Отношение ε максимального и минимального объемов цилиндра четырехтактного двигателя равно 9,5. На рисунке 1 показана pV -диаграмма работы этого двигателя. В двигатель поступает наружный воздух при температуре $t = 27^\circ\text{C}$ и давлении $p_0 = 0,1$ МПа. В момент зажигания горючей смеси давление в цилиндре возрастает в два раза.

а) Какие процессы происходят с газом на участках $0-1$, $2-3$, $4-1$ и $1-0$? Процессы $1-2$ и $3-4$ — адиабатные (показатель адиабаты $\gamma = 1,4$).

б) Определить давление p и температуру T газа в точках 1, 2, 3 и 4.

в) Найти к.п.д. двигателя.

г) Обсудить реальность полученных результатов.

2. Прямоугольная проволочная рамка с размерами сторон $a = 0,020$ м и $b = 0,030$ м погружается в мыльную воду, благодаря чему на ней образуется мыльная пленка. При наблюдении в отраженном свете, угол падения которого $\alpha = 30^\circ$, пленка кажется зеленой ($\lambda = 5 \cdot 10^{-7}$ м).

а) Можно ли определить массу этой пленки с помощью весов, точность которых 0,1 мг? Плотность мыльного раствора $\rho = 10^3$ кг/м³, показатель преломления пленки $n = 1,33$.

б) Какого цвета будет казаться самая тонкая из пленок, удовлетворяющих условию задачи, если свет будет отражаться перпендикулярно пленке?

3. Электроны ускоряются в электронной пушке электростатическим полем, проходя промежутком, напряжение на котором $U = 10^3$ В. Вылетев из пушки в точке T , электроны движутся затем по прямой TT' (рис. 2). В точке M на расстоянии $a = 5,0$ см от точки T находится мишень, причем прямая TM образует угол $\alpha = 60^\circ$ с прямой TT' .

а) Какой должна быть индукция \vec{B} однородного магнитного поля, перпендикулярного плоскости рисунка, чтобы электроны, вылетевшие из пушки, попадали в мишень?

б) Какой должна быть индукция \vec{B}_1 однородного магнитного поля, параллельного прямой TM , чтобы электроны попадали в мишень?

Считать, что $|\vec{B}|$ и $|\vec{B}_1|$ не превышают 0,030 Т.

Экспериментальный тур

С помощью RC -генератора гармонических колебаний и двух измерительных приборов раскройте тайну «черного ящика» с тремя контактными гнездами A , B и D (рис. 3). Известно, что внутри находятся два конденсатора и одно сопротивление, включенные звездой (рис. 4).

1. Соберите схему, изображенную на рисунке 5*), и сделайте необходимые измерения**. По измеренным величинам токов и напряжений рассчитайте полные сопротивления (импедансы) Z_{AB} , Z_{AD} и Z_{BD} в интервале частот от 0,1 до 10 кГц.

2. На логарифмической бумаге нанесите графики зависимости импедансов от частоты.

3. Докажите теоретически, что по величинам импедансов при данных частотах можно определить R , C_1 и C_2 .

4. На основании полученных результатов определите, к какому гнезду подключено сопротивление, а к каким — конденсаторы.

5. Вычислите сопротивление R и емкости C_1 и C_2 . Для этого воспользуйтесь величинами импедансов, найденными при частотах 1 и 10 кГц.

6. Разберитесь, какое влияние на точность измерений имеет пренебрежение током, протекающим через вольтметр.

*) Конденсатор емкости C используется в схеме в связи с тем, что напряжение на гнездах генератора имеет постоянную составляющую.

***) Далее шло описание измерительных приборов.

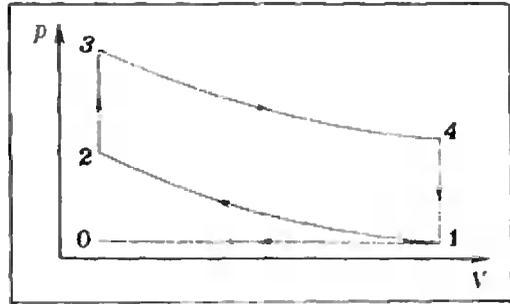


Рис. 1.

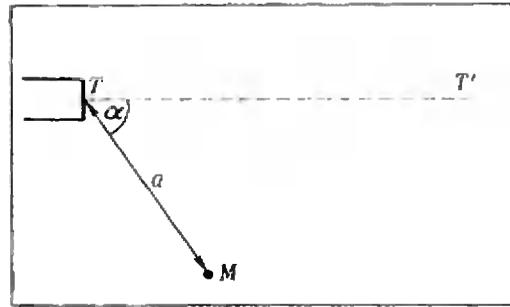


Рис. 2.

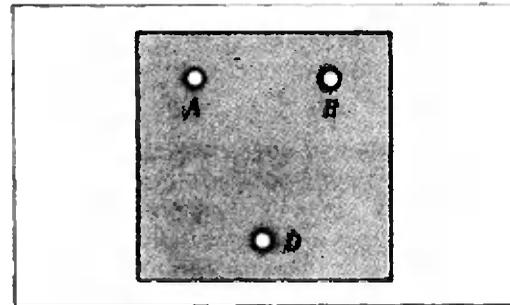


Рис. 3.

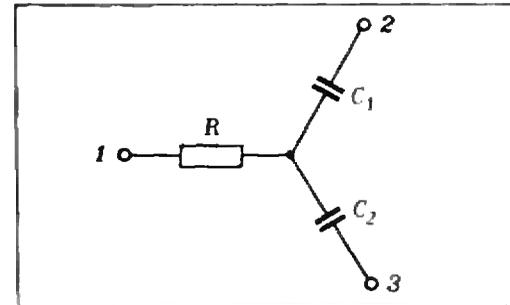


Рис. 4.

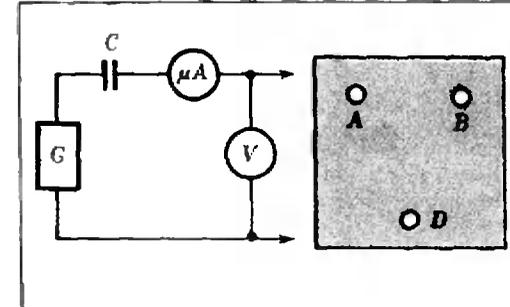


Рис. 5.

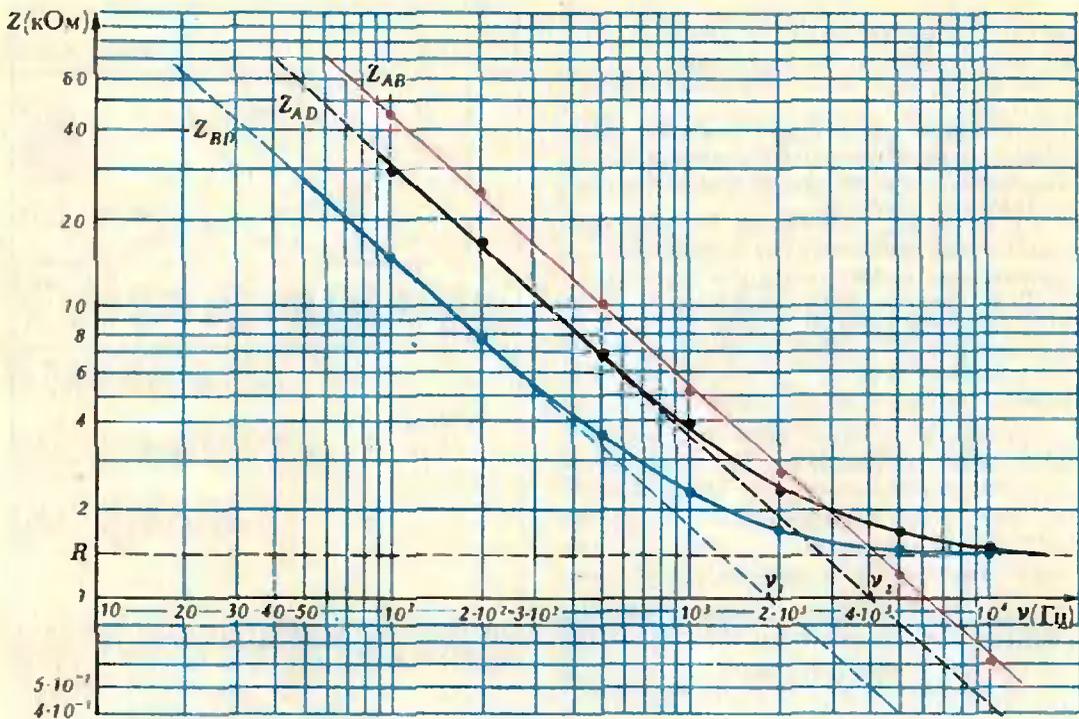


Рис. 6.

Как обычно на Международных олимпиадах, правильное решение теоретической задачи оценивалось 10 баллами, а экспериментальной — 20 баллами. Результаты каждого участника определялись суммированием набранных им баллов.

Мы не будем приводить здесь решения теоретических задач, так как две из них — вторая и третья — помещены в Задачнике «Кванта» (Ф488 и Ф489)*). Отметим только, что участники олимпиады довольно успешно справились с третьей и первой задачами. Средний балл за решение третьей задачи был равен 8,1, а за решение первой — 6. Наиболее трудной оказалась вторая задача: более половины участников получили за ее решение меньше 3 баллов (средний балл составил только 3,8 балла). При решении этой задачи многие не смогли правильно определить раз-

ность хода интерферирующих лучей. Лучшие других справились с этой задачей чехословацкие (41 балл из 50) и советские (32 из 50) школьники.

С экспериментальной задачей участники олимпиады справились очень хорошо: 19—20 баллов за решение задачи набрали треть участников (в то время как в прошлом году с экспериментальной задачей успешно справились лишь 8% участников).

Остановимся подробнее на решении экспериментальной задачи. Как видно из ее условия, содержимое «черного ящика» не было тайной. Требовалось только определить, к каким клеммам ящика подключены какие элементы цепи и каковы параметры этих элементов. Для решения задачи была предложена измерительная схема и указана последовательность измерений и обработки полученных данных. Основная трудность заключалась в теоретическом осмыслении полученных графиков зависимости импедансов от частоты.

На рисунке 6 приведены графики зависимости импедансов Z_{AB} , Z_{BD} и Z_{AD} от частоты ν . Графики построены в логарифмическом масштабе. Точками отмечены конкретные результаты измерений. Как с помощью этих кривых решать оставшиеся пункты задачи?

Рассмотрим схему, находящуюся в черном ящике (см. рис. 4). Если она включается в цепь между точками 2 и 3, то

$$Z_{23} = \frac{1}{\omega C_{\text{общ}}} = \frac{1}{2\pi\nu} \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right).$$

*) Ответы к первой задаче: а) процессы 0—1 и 1—0 изобарические, 2—3 и 4—1 изохорические; б) $p_1=0,1$ МПа, $T_1=300$ К, $p_2=2,34$ МПа, $T_2=740$ К, $p_3=4,68$ МПа, $T_3=1480$ К, $p_4=0,2$ МПа, $T_4=600$ К; в) $\eta=59,4\%$.



Советская команда на X Международной физической олимпиаде школьников. Слева направо: Р. Шарипов, О. Ф. Кабардин и М. В. Грабленков (руководители команды), К. Третьяченко, В. Щукин, А. Гополюский и В. Решетов.

Отсюда

$$\lg Z_{23} = \lg \left(\frac{C_1 + C_2}{2\pi C_1 C_2} \right) - \lg v.$$

Это означает, что $\lg Z_{23}$ зависит от логарифма частоты v линейно. Такой зависимости Z от v соответствует красная линия на рисунке 6.

Для импедансов Z_{12} и Z_{13} имеем:

$$Z_{12}^2 = R^2 + \frac{1}{(2\pi v)^2 C_1^2},$$

$$Z_{13}^2 = R^2 + \frac{1}{(2\pi v)^2 C_2^2}.$$

При малых частотах, когда $2\pi v \ll \frac{1}{RC_1}$ и

$$2\pi v \ll \frac{1}{RC_2},$$

$$Z_{12} \approx \frac{1}{2\pi v C_1} \text{ и } Z_{13} \approx \frac{1}{2\pi v C_2},$$

откуда

$$\lg Z_{12} \approx \lg \frac{1}{2\pi C_1} - \lg v,$$

$$\lg Z_{13} \approx \lg \frac{1}{2\pi C_2} - \lg v.$$

Таким образом, при малых частотах логарифмы импедансов Z_{12} и Z_{13} зависят от логарифма частоты тоже линейно. Соответствующие графики должны быть параллельны графику зависимости Z_{23} от v .

При больших частотах, когда $v \rightarrow \infty$ $\left(\frac{1}{2\pi v} \rightarrow 0 \right)$,
 $Z_{12} \rightarrow R$ и $Z_{13} \rightarrow R$.

или

$$\lg Z_{12} \rightarrow \lg R \text{ и } \lg Z_{13} \rightarrow \lg R.$$

Следовательно, при больших частотах графики зависимости Z_{12} и Z_{13} от v должны иметь общую асимптоту $Z=R$.

Такой зависимости Z от v соответствуют черный и синий графики на рисунке 6. Отсюда можно сделать вывод, что точка I схемы подключена к выводу D ящика, а точки 2 и 3 — к выводам A и B .

Значения емкостей конденсаторов и сопротивления резистора можно найти разными способами. Например, достаточно определить Z_{AB} , Z_{AD} и Z_{BD} при известной частоте v . Тогда из системы уравнений

$$\begin{cases} Z_{AD}^2 - Z_{BD}^2 = Z_{12}^2 - Z_{13}^2 = \\ = \frac{1}{(2\pi v)^2 C_1^2} - \frac{1}{(2\pi v)^2 C_2^2}, \\ Z_{AB} = Z_{23} = \frac{1}{2\pi v} \cdot \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} \end{cases}$$

нетрудно найти C_1 и C_2 . Затем из выражения

$$Z_{AD} = Z_{12} = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(2\pi v)^2 C_1^2}}$$

можно найти R .

Удобно воспользоваться графическим способом определения параметров схемы.

Как мы уже говорили, при малых частотах графики зависимости Z_{AD} от v и Z_{BD} от v параллельны графику зависимости Z_{AB} от v .

Поэтому, если провести асимптоты первых двух графиков, параллельные третьему графику (черная и синяя пунктирные прямые), они пересекут ось ν в точках ν_1 и ν_2 , для которых справедливы приближенные равенства

$$\lg Z_0 = \lg \frac{1}{2\pi C_1} - \lg \nu_1$$

и

$$\lg Z_0 = \lg \frac{1}{2\pi C_2} - \lg \nu_2,$$

где $Z_0 = 1$ кОм (см. рис. 6). Отсюда найдем C_1 и C_2 .

Чтобы определить R , надо провести общую асимптоту графиков зависимости Z_{AB} от ν и Z_{BD} от ν при $\nu \rightarrow \infty$. Эта асимптота пересечет ось Z в точке $Z = R$.

Нужно ли было учитывать ток, текущий через вольтметр (см. рис. 5)? Если его не учитывать, получаются значения импедансов, несколько заниженные по сравнению с истинными. Однако сказываться это должно только при таких значениях частоты ν при которых ток, потребляемый «черным ящиком», сравним с током, идущим через вольтметр. Ток, потребляемый вольтметром при полном отклонении стрелки прибора, был известен из условия, поэтому было нетрудно оценить влияние этого тока на точность измерений. Оказывается, существенным наличие тока через вольтметр было лишь при очень малых частотах ($\nu \ll 0,5$ Гц).

13 июля все участники и организаторы олимпиады переехали в столицу Чехословакии — Прагу. 15 июля в старинном здании одного из первых университетов в Европе, Карлова университета, состоялось торжественное закрытие олимпиады, вручение призов и грамот.

I премию

получили 7 участников олимпиады: *Р. Гласер* (ГДР), *П. Динев* (Болгария), *Я. Матена* (ЧССР), *Р. Мейнель* (ГДР), *Ф. Пардо* (Франция), *Ю. Свобода* (ЧССР), *Р. Шарипов* (СССР).

II премию

получили 16 участников олимпиады; среди них советские школьники: *А. Ганопольский*, *В. Решетов*, *К. Третьяченко* и *В. Щукин*.

III премию

получили тоже 16 участников. Еще 12 участников награждены грамотами.

На олимпиаде были вручены и специальные призы. Так, *А. Ганопольский* получил приз за лучшее решение второй теоретической задачи,

а *Р. Шарипов* — как самый юный участник олимпиады.

Приятно отметить, что организаторы олимпиады сделали все для того, чтобы олимпиада прошла максимально организованно. С первого дня работы между членами Международной комиссии и Организационного комитета установились отношения взаимного доверия и доброжелательности, что, без сомнения, помогло правильно оценить решения задач и подвести итоги олимпиады.

Встречаясь между собой, руководители команд обсуждали различные вопросы проведения олимпиад в их странах. Такой обмен мнениями очень важен; он помогает заимствовать лучший опыт и использовать его в своей работе.

Не менее важны и первые профессиональные встречи участников олимпиады — будущих инженеров и физиков. Во время таких встреч школьники обменивались сувенирами, обсуждали различные задачи.

И участники олимпиады, и руководители команд уезжали из Праги с чувством благодарности к организаторам олимпиады, сумевшим сделать олимпиаду праздником научного творчества школьников.

Без сомнения, Международные олимпиады школьников — важный пример сотрудничества различных стран в области народного образования, помогающий разработать методы развития творческой активности школьников.

Заочная физическая школа

Заочная физическая школа (ЗФШ) при физическом факультете МГУ объявляет набор учащихся в 9 и 10 классы на очередной учебный год.

Основная цель ЗФШ — помочь учащимся средней школы глубже изучить физику в объеме школьной программы, а также лучше подготовиться к вступительному экзамену по физике в высшие учебные заведения, в первую очередь — на физический факультет МГУ.

Прием в ЗФШ проводится на основании результатов решения вступительного задания, публикуемого ниже. Решение вступительного задания необходимо отослать до **20 сентября** по адресу: *117234, Москва, Ленинские горы, МГУ, Физический факультет, Заочная физическая школа.* В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим домашним адресом и два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 7×12 см и заполненной по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество

Класс

Профессия родителей и занимаемая должность

Подробный домашний адрес

Номер и адрес школы

Решение приемной комиссии ЗФШ о зачислении будет сообщено до **1 ноября 1978 года**. Проверенные вступительные задания обратно не высылаются.

Зачисленным в ЗФШ в течение года высылаются методические разработки и контрольные задания по разделам физики, изучаемым в соответствующих классах средней школы. Решение задания оценивается, рецензируется и высылается учащемуся (для этого каждый раз вместе с решенным контрольным заданием учащийся должен высылать конверт с написанным домашним адресом). Учащиеся 9 класса ЗФШ по окончании года переводятся в 10 класс на основании оценок, полученных за решение контрольных заданий. Успешно закончившие обучение получают справку об окончании ЗФШ.

Сидоров Иван Петрович

9-й

отец — инженер

мать — врач

248016, г. Калуга, ул.

К. Либкнехта д. 4.

кв. 73

Школа № 10, ул. Пушкина, д. 3

Вступительное задание

9 класс

1. С каким ускорением нужно двигать плиту A , чтобы тела с массами m_1 и m_2 , установленные на ней, как показано на рисунке 1, не двигались относительно плиты? Коэффициент трения между телами и плитой равен μ .

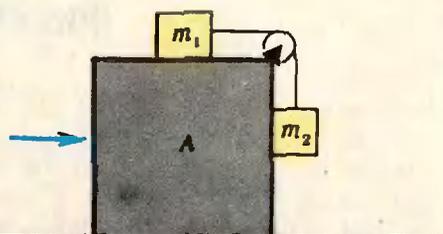


Рис. 1.

2. Пробирка массой M лежит на горизонтальной плоскости. В пробирке на расстоянии l от края находится поршень, прикрепленный с помощью пружины к стене (рис. 2). Газ в пробирке медленно нагревают. Какую работу надо совершить газу, чтобы вытолкнуть поршень из пробирки? Начальное давление газа в пробирке равно атмосферному, жесткость пружины k , коэффициент трения между пробиркой и плоскостью μ .

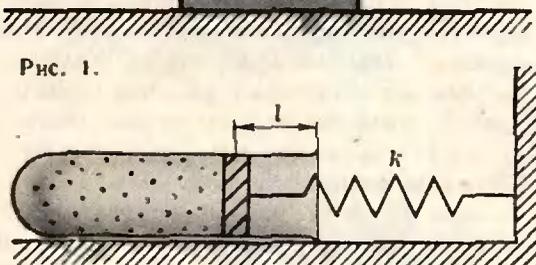


Рис. 2.

3. На высоте h над поверхностью воды шарнирно закреплен конец палочки длиной l (рис. 3). Плотность материала палочки ρ , плотность воды ρ_0 . Какая часть палочки будет погружена в воду? При каком значении h палочка будет висеть вертикально?

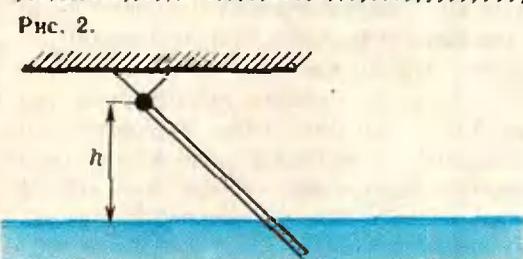


Рис. 3.

10 класс

1. Пружинная пушка стреляет пластинчатым снарядом из одного конца платформы в другой (рис. 4). Снаряд прижимает к краю платформы. Какое минимальное количество

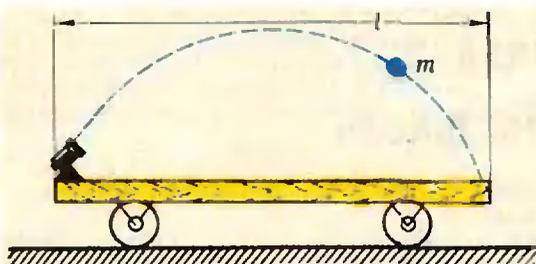


Рис. 4.

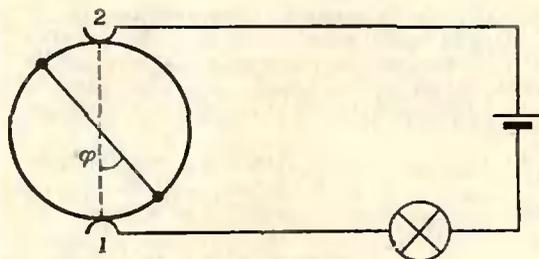


Рис. 5.

теплоты может выделяться при прилипании снаряда к платформе? Масса платформы с пушкой M , масса снаряда m , длина платформы l . Трением между платформой и рельсами пренебречь. Пушка жестко соединена с платформой и может стрелять под различными углами и с разными начальными скоростями снаряда.

2. N одинаковых мыльных пузырей радиуса r каждый сливаются в один пузырь радиуса R . Атмосферное давление p_0 . Чему равен коэффициент поверхностного натяжения мыльной пленки?

3. Дана цепь, состоящая из электрической лампочки, источника э.д.с., двух скользящих контактов (1 и 2), касающихся проводящего однородного кольца в диаметрально противоположных точках, и проводочной перемычки, включенной между диаметрально противоположными точками кольца (рис. 5). Кольцо медленно вращается вокруг осн. Определить, при каких значениях угла φ лампа будет гореть ярче всего.

Вечерняя физическая школа

На физическом факультете МГУ для учащихся 8—10 классов Москвы и Подмосковья уже в течение трех лет работает Вечерняя физическая школа (ВФШ). Обучение в школе очное. Три раза в неделю проводятся семинарские занятия с разбором задач по основным разделам школьного курса физики. Семинары проводят аспиранты и студенты старших классов. Наиболее сложные вопросы обсуждаются на лекциях, которые читаются преподавателями физического факультета.

Для учащихся ВФШ организуются экскурсии в лаборатории физического факультета МГУ, Научно-исследовательского института ядерной физики и Государственного астрономического института им. Штернберга. Экскурсии по научным лабораториям университета дают школьникам возможность ознакомиться с методикой современного физического эксперимента, представить себе основные направления научно-исследовательской работы на физическом факультете МГУ.

Очередной конкурсный набор в ВФШ состоится в сентябре этого года. Участвовать

в конкурсе могут школьники 8—10 классов (в 9 и 10 классы проводится дополнительный набор). Для участия в конкурсе необходимо до 20 сентября подать заявление на имя директора ВФШ, заполнить анкету в комитете ВЛКСМ физического факультета, а также сдать 2 фотографии размером 3×4 см.

Прием заявлений будет проходить со 2 по 20 сентября с 16.00 до 18.00 часов ежедневно (кроме воскресенья) в комитете ВЛКСМ физического факультета МГУ (здание физического факультета, комната 2—47).

Зачисление в школу производится по результатам собеседования. Требования, предъявляемые на собеседовании, не выходят за рамки школьной программы.

Адрес школы: Москва, Ленинские горы, МГУ, Физический факультет. Телефон для справок: 139-26-56.

Проезд: метро до станции «Университет», затем автобусами 103, 119, 130, троллейбусами 4, 34, 49 до остановки «ул. Лебедева».



Задачи наших читателей

(см. с. 47)

1. Указание. а) $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-0,5} - \frac{1}{k+0,5}$; б) $\frac{(2k-1)^2}{(2k)^2} > \frac{2k-1,5}{2k+0,5}$.

2. Указание. Найти область значений функции $f(x) = (c^x + a^x)^{1/x}$. 3. Указание. Рассмотреть остатки от деления чисел на 5. 4. Указание. Рассмотреть остатки от деления чисел на а) 4; б) 25. 5. Указание. Точка, симметричная ортоцентру треугольника относительно стороны, лежит на описанной окружности. 6. $1/8$.

Задача о трех кувшинах

(см. «Квант» № 7, с. 43)

1. Один из способов таков: (12, 0, 0), (7, 5, 0), (7, 0, 5), (2, 5, 5), (2, 1, 9), (11, 1, 0), (11, 0, 1), (6, 5, 1), (6, 0, 6).

2. Вначале пужно наполнить сосуды, вмещающие 11 и 5 унций. Тогда во флаконе останется 8 унций, которые вместе с флаконом отдаются одному из них. После этого оставшиеся двое должны решить задачу деления 16 унций на две равные части в ситуации [16; 13, 11, 5]. Это прodelывается с помощью четырех переливаний.

3. Опустите перпендикуляры PC_1 и PB_1 на стороны AB и AC , а также перпендикуляры $P'C_2$ и $P'B_2$ на те же стороны и докажите подобие четырехугольников AC_1PB_1 и $AB_2P'C_2$. Затем проведите аналогичные рассуждения относительно четырехугольников с вершинами в точках B и C .

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 7)

1. $X = 2, Y = 8; X = 4, Y = 2; X = 1, Y = 5; X = 2, Y = 4$.

По впис типографии второй, третий и четвертый примеры набраны неправильно. Они должны выглядеть так:

$X\ YZ$	$X\ YZ$	$X\ YZ$
$X\ YZ$	$X\ YZ$	$X\ YZ$
$\dots Z$	$\dots X$	$\dots Y$
$\dots Y$	$\dots Y$	$\dots X$
$\dots X$		

2. S , то есть площади треугольника, поскольку из теоремы Пифагора следует, что сумма площадей полуокружностей, построенных на катетах, равна площади полуокружности, построенной на гипотенузе.

3. См. рисунок 1.

4. Куб числа x , задуманного Аней, не меньше

$$(((7 \cdot 10 + 1) \cdot 7 + 0) \cdot 7 + 1) \cdot 7 + 1 = 24\ 361$$

и не больше

$$(((7 \cdot 10 + 6) \cdot 7 + 6) \cdot 7 + 6) \cdot 7 + 6 = 26\ 410$$

Следовательно, $24\ 361 < x^3 < 26\ 410$.

Существует единственное натуральное число x , удовлетворяющее этим условиям: $x = 29$. Его нетрудно найти подбором.

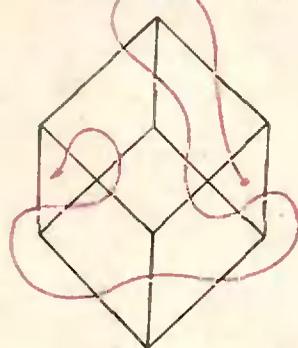


Рис. 1.

Многоугольники на клетчатой бумаге

(см. «Квант» № 6)

1. Предположим, что нам удалось вписать правильный треугольник в целочисленную решетку (рис. 2). Найдем площадь треугольника ABC двумя способами.

$$\text{С одной стороны } S_{\triangle ABC} = \frac{|AB| \cdot |AC|}{2} \times$$

$$\times \sin A = \frac{|AB|^2}{2} \sin 60^\circ = |AB|^2 \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Но $|AB|^2$ — число целое ($|AB|^2 = |AC'|^2 + |C'B|^2$ по теореме Пифагора), а значит, $S_{\triangle ABC}$ — число иррациональное. А с другой стороны, «описав» вокруг $\triangle ABC$ прямоугольник $CB'C'A'$ (рис. 2), получим:

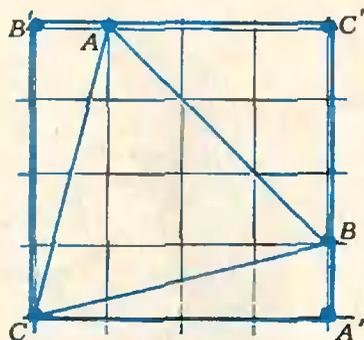
$$S_{\triangle ABC} = S_{CB'C'A'} - S_{\triangle AB'C} - S_{\triangle AC'B} - S_{\triangle A'BC}$$


Рис. 2.

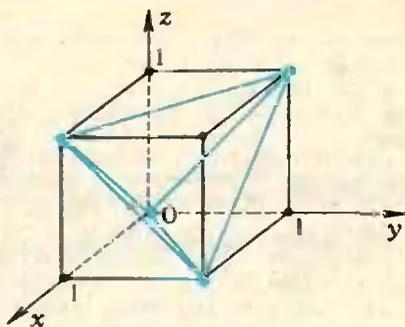


Рис. 3.

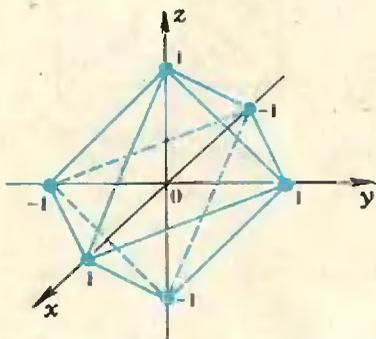


Рис. 4.

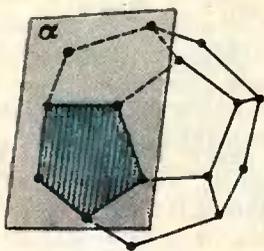


Рис. 5.

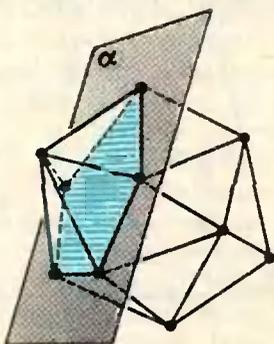


Рис. 6.

— рациональное число, так как все площади, записанные в правой части равенства, рациональны. Мы получим, что число $S_{\Delta ABC}$ одновременно рационально и иррационально — противоречие.

2. Указание. Свести к предыдущей задаче.

3. См. «Квант», 1974, № 12, с. 29.

4. Для куба это очевидно, тетраэдр можно вписать в куб (рис. 3), а вершины октаэдра можно расположить в точках $(0; 0; 1)$, $(0; 1; 0)$, $(1; 0; 0)$, $(0; 0; -1)$, $(0; -1; 0)$, $(-1; 0; 0)$ (рис. 4).

5. Указание. Докажите такую лемму: если Π — решетка в пространстве, α — плоскость, проходящая через три не лежащих на одной прямой узла решетки Π , то узлы Π , лежащие в α , образуют на ней плоскую решетку. Затем сведите задачу 5 к задаче 3 (см. рисунки 5 и 6).

6. Указание. При некоторых поворотах додекаэдр переходит в себя в то время, как плоскости перемещаются (то же самое относится к икосаэдру). Свести таким путем задачу к задаче о вписывании в решетку. См. также «Квант», 1975, № 7, с. 42, М299.

7. Доказательство аналогично доказательству основной теоремы.

Номер готовили:

А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова,
А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:

М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров,
А. Пономареня, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Л. Боровина

113035, Москва, М-45, Б. Ордынка, 21/16,
«Квант», тел. 231-83-62

Сдано в набор 1/V-78 г.

Подписано в печать 18/VII-78 г.

Бумага 70x108^{1/2} Физ. печ. л. 1

Усл. печ. л. 5,60 Уч.-изд. л. 5,97 Т-11758

Цена 30 коп. Заказ 1212 Тираж 301 075 экз.

Чеховский полиграфический комбинат
Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговли,
г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются



КРОССВОРД «СОТЫ»

Напишите вокруг каждого числа, начиная с отмеченной ячейки по часовой стрелке слово из шести букв.

1. Деформация балки. 2. Искусственное волокно. 3. Древнегреческий математик. 4. Единица электрической емкости. 5. Русский физик, изобретатель трансформатора. 6. 37. Американские меры объема жидкости. 37. Американские меры объема жидкости. 7. Раздел физики, изучающий свойства света. 8. Направленный отрезок. 9. Величина, определяемая только численным значением. 10. Русский металлург, мастер доменного дела. 11. Абсолютная величина. 12. Советский радиофизик, ближайший помощник А. Попова. 13. Элементарная частица. 14. Единица работы. 15. Кадка для лотлиня. 16. Цифра. 17. Процесс перехода одного вида энергии в другой. 18. Один из пионеров русского планизма. 19. Метод. 20. Прибор, воспринимающий воздействие и преобразующий это в сигнал. 21. Выдающийся итальянский физик. 22. Керамика с высокой ди-

электрической проницаемостью. 23. Единица напряженности магнитного поля. 24. Пластмасса. 25. Манера писать. 26. Советский математик, механик, судостроитель. 27. Скопление мельчайших капелек влаги в атмосфере. 28. Американский изобретатель. 29. Часть токарного станка и музыкальный инструмент. 30. Магнитный прибор. 31. Советский исследователь центральной Азии. 32. Оптическое явление в природе. 33. Постоянный ветер в тропиках. 34. Выдающийся советский физик. 35, 40. Планеты. 36. Часть круга, ограниченная радиусами. 37. (см. 6). 38. Состояние вещества. 39. Французский математик, профессор Политехнической школы. 40. (см. 35). 41. Электрический предохранитель. 42. Положительно заряженный ион. 43. Многогранник. 44. Советский физик, ведущий телепередачи «Очевидное — невероятное». 45. Советский математик. 46. Группа экваториальных созвездий. 47. Метод исследования. 48. Путь, по которому движется небесное тело.

Цена 30 коп.
Индекс 70465

Эта замечательная картинка «сделана», как и картинка на второй странице обложки, вычислительной машиной по программе, составленной Ю. Котовым. Получена она с помощью движущегося эллипса, большая

ось которого все время проходит через фиксированную точку — центр симметрии картинки. Центр эллипса перемещается по некоторой кривой. Постарайтесь найти эту кривую.

