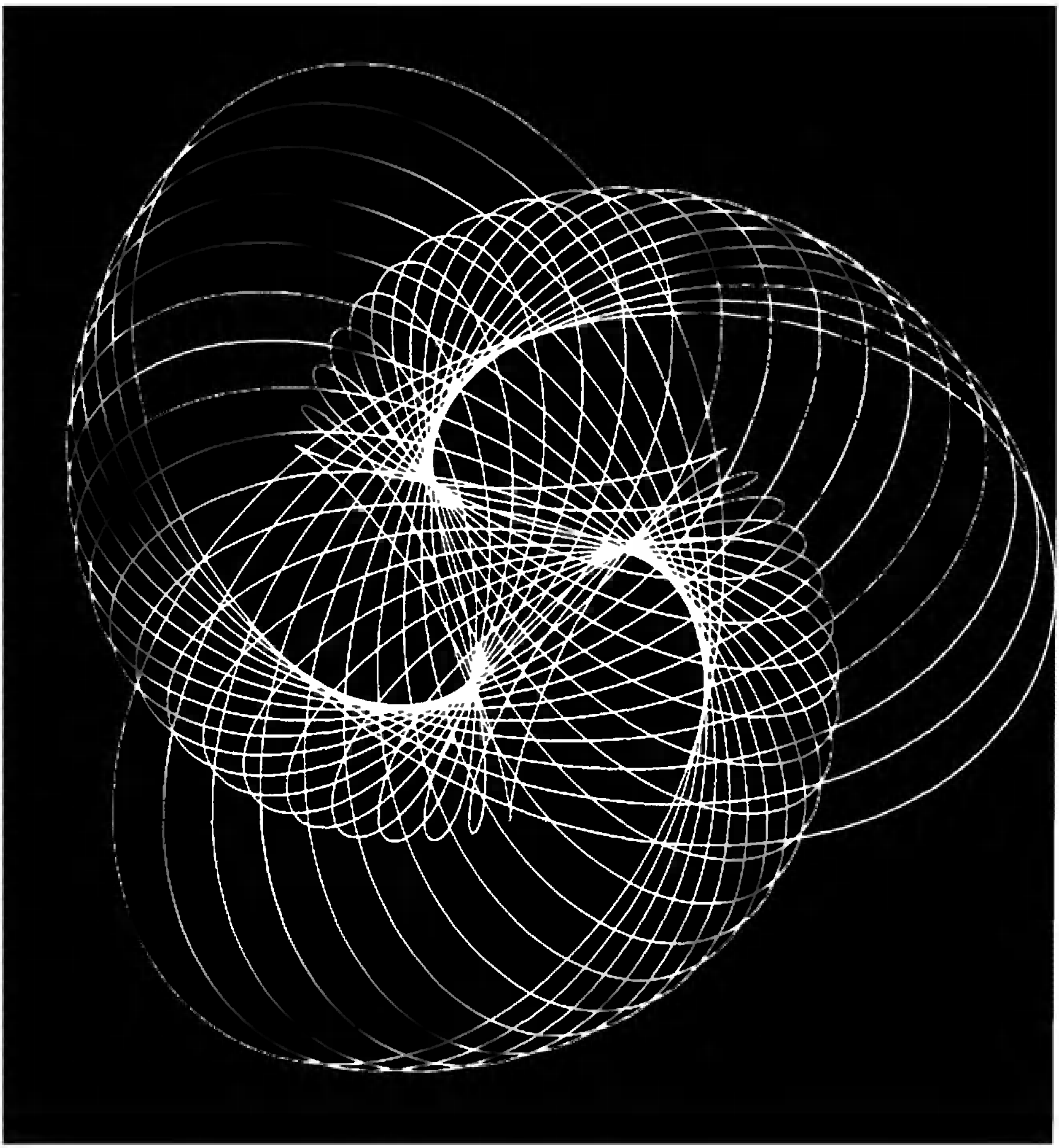
kvant.mccme.ru

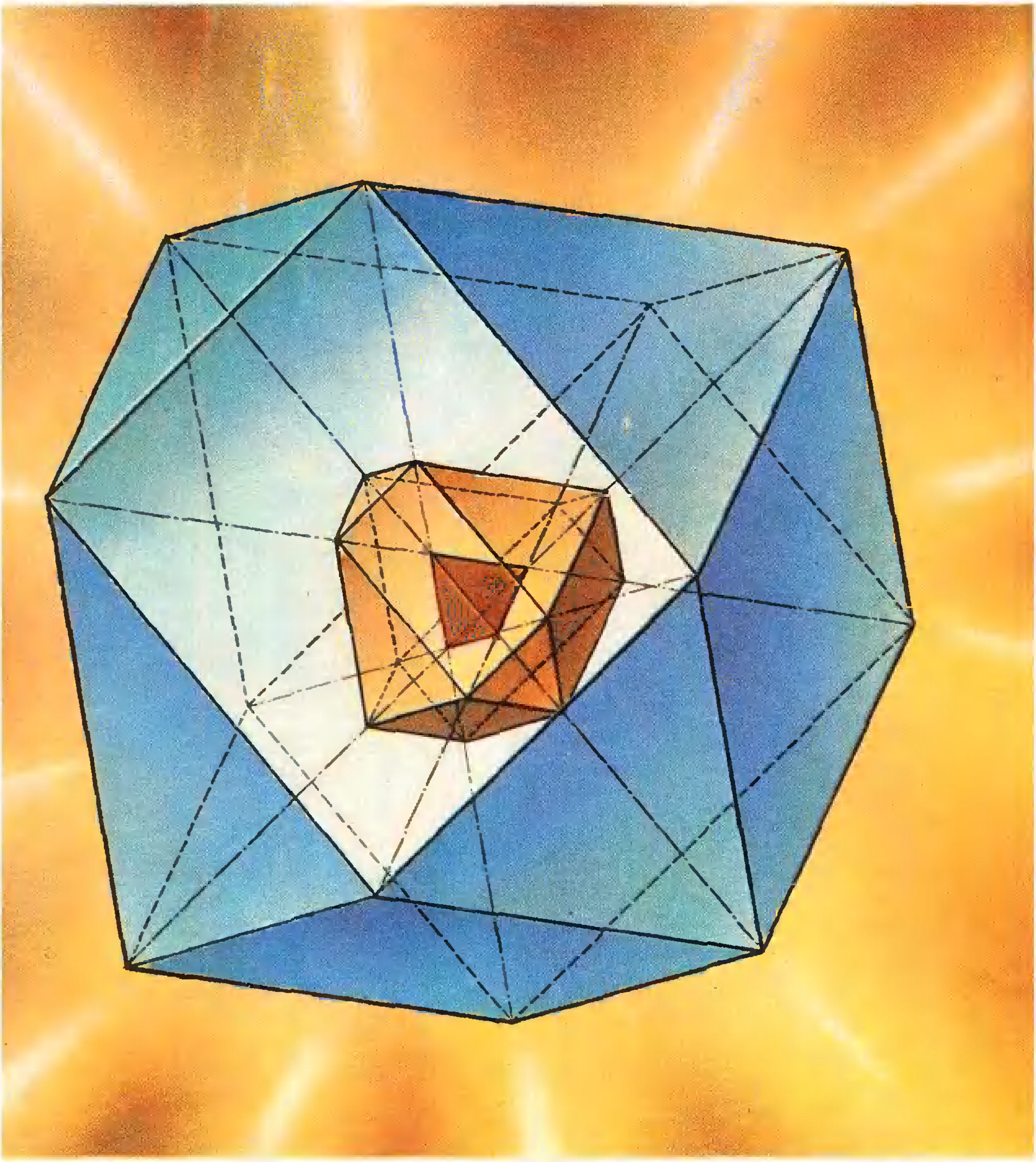
Квант

7
1978

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



kvant.mccme.ru



На заключительном туре XI Всесоюзной олимпиады школьников по математике была приведена трудная и очень интересная задача (см. с. 33, задача М515). Рисунок, помещенный вверху, поможет вам ее решить.

kvant.mccme.ru

Основан в 1970 году

Квант

7
1978

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

Главный редактор
академик И. К. Кикоин

Первый заместитель главного редактора
академик А. Н. Колмогоров

Редакционная коллегия:
М. И. Башмаков
С. Т. Беляев
В. Г. Болтянский
Н. Б. Васильев
Ю. Н. Ефремов
В. Г. Зубов
П. Л. Капица
В. А. Кириллин
А. И. Климанов
С. М. Козел
В. А. Лешковцев
(зам главного редактора)
Л. Г. Макар-Лиманов
А. И. Маркушевич
Н. А. Патрикеева
И. С. Петраков
Н. Х. Розов
А. П. Савин
И. Ш. Слободецкий
М. Л. Смолянский
(зам главного редактора)
Я. А. Смородинский
В. А. Фабрикант
А. Т. Цветков
М. П. Шаскольская
С. И. Шварцбурд
А. И. Ширшов

На первой странице обложки изображено семейство гипотрохоид, нарисованных на ЭВМ по программе, составленной Ю. Котовым. О гипотрохоидах можно прочитать на с. 32

В номере:

© Главная редакция физико-математической литературы издательства «Наука», «Квант», 1978

kvant.mccme.ru

В. Фабрикант

Сюрпризы зеленого стекла

Какого цвета зеленое стекло?

Этот вопрос может вызвать чувство естественного недоумения. Читатель с раздражением скажет: зеленое стекло потому и называется зеленым, что оно ... Однако не надо спешить со снисходительными разъяснениями. Нехитрый опыт покажет вам, что вопрос о цвете зеленого стекла совсем не так прост.

Если у вас есть кусок зеленого стекла, разбейте его осторожно на несколько не очень маленьких кусочков. Затем посмотрите сквозь один из них на нить лампы накаливания. Как вы и ожидали, нить будет казаться зеленой (рис. 1). Наложите на этот кусочек стекла второй и снова посмотрите на нить.

Вероятно, вы не заметите изменения цвета нити, она будет зеленой по-прежнему. Но если наложить на два кусочка стекла третий и посмотреть сквозь все три кусочка на нить, вы увидите ее уже неокрашенной — белесоватого цвета. Сквозь четыре кусочка нить будет казаться красноватой, а сквозь пять кусочков — рубиново-красной!

Результат совершенно неожиданный и весьма поучительный. Оказывается, цвет стекла зависит от толщины, и зеленое в тонком слое стекло становится красным при достаточно большой толщине слоя. Таким свойством обладает, конечно, не каждое зеленое стекло, но как раз самые распространенные дешевые сорта зеленых стекол.

Любопытно, что это же свойство присуще раствору самого важного

Эта статья была опубликована в журнале «Наука и жизнь» (1967, № 5). Текст статьи печатается с небольшими изменениями. (*Прим. ред.*)

kvant.mccme.ru

красящего вещества на земле — хлорофилла. Как известно, хлорофилл окрашивает листья растений в зеленый цвет. Поместив листья в спирт, можно получить раствор хлорофилла в спирте и провести такой опыт.

Поставьте на лист белой бумаги стакан и медленно наливайте в него раствор хлорофилла. Сначала дно стакана на просвет будет казаться зеленым, а затем, при большой толщине слоя, раствор приобретет насыщенный темно-красный цвет.

Вернемся к зеленому стеклу. Можно еще сильнее запутать вопрос о цвете стекла, если после лампочки накаливания посмотреть сквозь кусочки стекла на раскаленный конец кочерги. Уже через три кусочка стекла он будет виден рубиново-красным. Вот вам и второй неожиданный результат: видимый цвет стекла зависит не только от его толщины, но и от того, на какой светящийся предмет мы смотрим сквозь это стекло. Слой из трех кусочков стекла кажется бесцветным при наблюдении нити лампы накаливания и красным — при наблюдении конца раскаленной кочерги.

С кочергой можно сделать еще один опыт, из которого следует практически важный вывод. Вынутая из печки кочерга быстро остывает. Попробуйте проследить сквозь стекла за концом кочерги во время остывания. Как мы уже говорили, конец раскаленной кочерги виден красным сквозь три кусочка стекла. Конец несколько остывшей кочерги кажется красным уже через два кусочка. Подождав еще немного, вы увидите конец кочерги красным даже через один кусочек зеленого стекла. Из этого опыта следует, что, чем выше температура раскаленного тела, тем толще должен быть слой стекла, чтобы произошло изменение его цвета. Значит, по толщине слоя стекла, необходимого для изменения цвета, можно судить о температуре раскаленного тела.

Опыты с кочергой делают понятным устройство чрезвычайно остроумного и простого прибора, служащего для определения температур раскаленных тел, —пирометрического клина (рис. 2). Он представляет со-

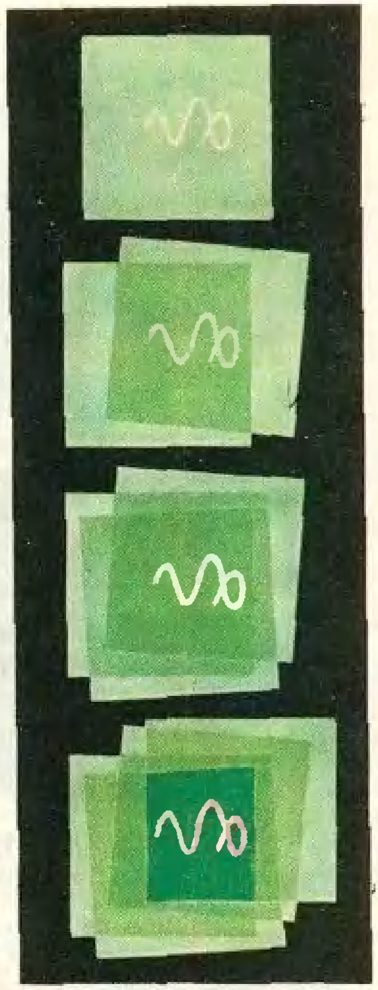


Рис. 1. Изменение видимого цвета нити накаливания от зеленого до красного при наблюдении через разное число кусочков зеленого стекла.

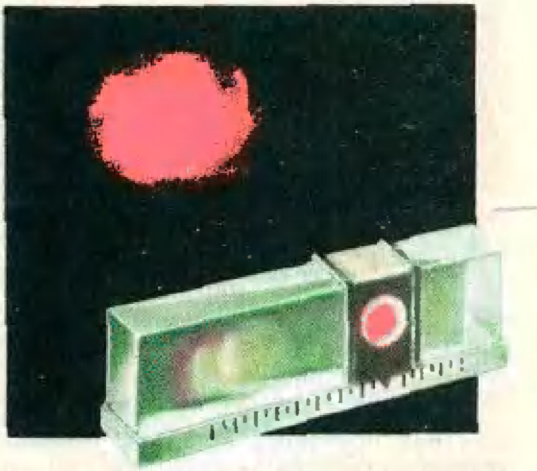


Рис. 2. Пирометрический клин — прибор для определения температуры раскаленных тел.

kvant.mccme.ru

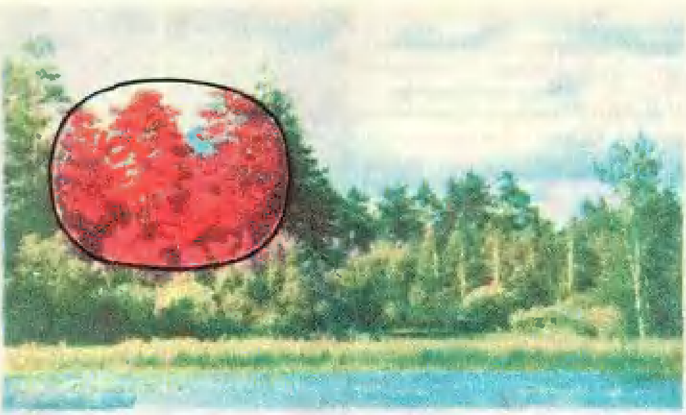


Рис. 3. Вид зеленого пейзажа через синие очки.

Рис. 4. Опыт, не сделанный Ньютоном. При прохождении белого света сквозь пирометрический клин в спектре остаются зеленые и красные лучи.

бой действительно клин из зеленого стекла, толщина которого плавно возрастает от одного конца к другому. Клин двигается в металлической оправке с отверстием для наблюдения раскаленного тела. По краю клина нанесена шкала температур, причем температура растет от тонкого конца клина к толстому. Наставив отверстие оправки на раскаленное тело, надо двигать клин в оправке до тех пор, пока не произойдет изменение видимого цвета тела. Тогда на шкале против указателя, соединенного с оправкой, можно прочесть температуру раскаленного тела.

Пирометрическим клином особенно часто пользуются для определения температуры расплавленного металла, например, в мартеновских печах. Несмотря на свое простое устройство, клин в опытных руках дает высокую точность.

Вы познакомились с принципом действия полезного прибора, использующего свойства зеленого стекла, но загадка самого стекла осталась загадкой.

Опыт, не сделанный Ньютоном, и ландшафтная живопись

Наверное, многие из вас помнят знаменитый опыт Ньютона с разложением солнечного луча в разноцветный спектр при помощи стеклянной призмы. Этот опыт показал, что солнечный свет представляет смесь лучей различных цветов: красного, оранжевого, желтого, зеленого, голубого, синего и фиолетового. Ньютон почему-то не попытался несколько усложнить этот опыт: поставить на пути солнечного луча цветное стекло или сосуд с окрашенной жидкостью. Во всяком случае, в своих трудах Ньютон не описывает такого опыта.

Опыт с красным стеклом, собственно, ничего интересного и не дал бы. Вместо разноцветной полоски спектра остался бы только участок, соответствующий красным лучам. Результат можно было предсказать заранее: красное стекло потому и красное, что пропускает только красные лучи и поглощает все остальные.

kvant.mccme.ru

Гораздо более интересен опыт с зеленым стеклом или сосудом, наполненным раствором хлорофилла. В этих случаях от спектра останутся уже не одна, а две полоски: зеленая и темно-красная. А это значит, что зеленое стекло и раствор хлорофилла пропускают не только зеленые, но и красные лучи.

По поводу хлорофилла очень интересны замечания знаменитого русского ботаника К. А. Тимирязева: «Убедиться в том, что хлорофилл пропускает красные лучи, можно очень легко: стоит на залитый ярким солнечным светом ландшафт посмотреть через особое синее стекло (рис. 3), которое пропускает красные и синие лучи, но задерживает зеленые, для того, чтобы перед нашими изумленными взорами вся природа совершенно преобразилась — под обычным синим небом мы увидим кроваво-красную растительность. Не в этой ли особенности цвета хлорофилла лежат те трудности, с которыми, очевидно, приходится бороться ландшафтной живописи? На палитре живописца, по-видимому, нет тех зеленых тонов, которые представляет вблизи ярко освещенная зелень.»

Оставим, однако, живопись пока в стороне и вернемся к пирометрическому клину. Несколько видоизменим описанный выше опыт с клином. В качестве источника света используем нить лампы накаливания и между ней и призмой поместим пирометрический клин (рис. 4). На стене мы опять увидим две полоски — зеленую и красную, причем соотношение яркостей этих полосок будет зависеть от толщины клина в месте прохождения светового луча. Если луч проходит сквозь тонкую часть клина, зеленая полоска значительно ярче, чем красная. При увеличении толщины клина яркость обеих полосок снижается, и, начиная с некоторого момента, красная полоска становится ярче зеленой. Когда зеленая полоска ярче красной, нить видна зеленой, при обратном соотношении яркостей полосок — красной. При равенстве яркостей полосок нить кажется бесцветной.

Как будто загадка зеленого стекла разъяснена. Однако остается еще объяснить, почему с ростом толщины стекла соотношение яркостей красной и зеленой полосок меняется на обратное. Оказывается, объяснение вытекает из важного закона оптики, открытого одним бравым моряком лет двести тому назад.

Капитан дальнего плавания и геометрическая прогрессия

Капитан дальнего плавания француз Пьер Бугер, живший в первой половине восемнадцатого столетия, не был, пожалуй, простым моряком. Им написаны объемистые трактаты по конструкции судов, по навигации и другим отраслям морского дела. Французская Академия наук присудила Бугеру три премии за работы по морскому делу и избрала его своим членом. Вкус к морской науке Бугер унаследовал от своего отца, профессора гидрологии.

Если морем Бугер занимался по наследству, то оптикой он занялся по собственному почину. Бугер первый обратил внимание на проблемы, связанные с измерениями силы света и освещенности. Он придумал первые приборы для измерения силы света и установил, что сила света Солнца в 300 тысяч раз больше силы света Луны, а в его «Оптическом трактате» содержался очень важный закон ослабления света в поглощающих телах.

Чтобы понять смысл этого закона (его также называют законом Бугера), воспользуемся не очень правдоподобной, но наглядной аналогией из области спорта. Представим себе, что мы присутствуем на плохо подготовленном массовом состязании в беге на семь километров. Слабая тренировка участников стала сказываться сразу, и болельщики быстро установили следующий любопытный закон — лишь одна треть бегунов, начавших данный километр дистанции, добегает его до конца. Старт приняли 2187 участников, к концу первого километра на дистанции остались 729, к концу второго — 243, к концу третьего — 81, четвертого — 27, пятого — 9, шестого — 3. Наконец, седьмой километр заканчивает только один бегун, объявленный победителем. Судьям даже не пришлось восполь-

kvant.mccme.ru

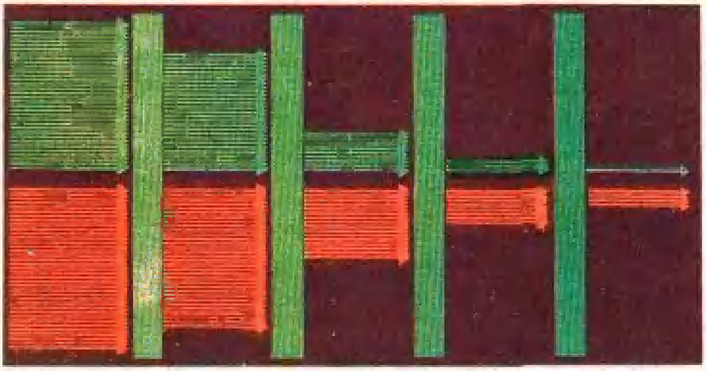


Рис. 5. Иллюстрация применения закона Бугера для объяснения изменения цвета нити лампы накаливания при увеличении числа зеленых стекол.

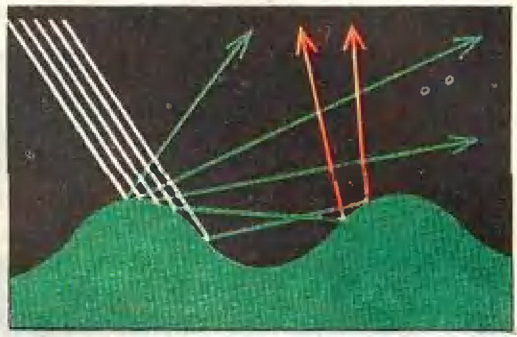


Рис. 6. Острый глаз древнерусского художника заметил изменение цвета в глубине складок ткани, происходящее за счет повторных отражений.

зоваться секундомером для определения того, кто первым коснулся финишной ленточки.

Выпишем в строку числа бегунов, пробежавших различные дистанции:

2187, 729, 243, 81, 27, 9, 3, 1.

Нетрудно видеть, что эти числа образуют убывающую геометрическую прогрессию, в которой каждое последующее число в три раза меньше предыдущего, стоящего слева от него.

Вернемся от спорта к оптике. Возьмем кусок окрашенного стекла. Допустим, что он пропускает одну треть падающего на него света. Добавим второй такой же кусок. Он пропустит одну треть светового потока, прошедшего через первый кусок, то есть одну девятую часть светового потока, падающего на первый кусок. Поставив еще один кусок, получим одну двадцать седьмую часть и так далее.

Ясно, что такой же результат получился бы просто при увеличении толщины куска стекла вдвое, втрое и т. д. Когда толщина стекла растет, доля пропускаемого света падает по геометрической прогрессии.

Это и есть закон, открытый Бугером. В примере с бегунами мы уже видели, как быстро уменьшаются числа в геометрической прогрессии.

Еще немного спорта

Вооруженные законом Бугера, мы можем смело броситься в атаку на загадку зеленого стекла. Однако прежде вспомним опять о спорте.

Новички, так неудачно пробежавшие дистанцию в семь километров, самоуверенно вызвали на соревнование команду опытных мастеров. Мастера приняли вызов и даже предложили

kvant.mccme.ru

весьма великодушные условия. На старт выходят все 2187 новичков и только 512 мастеров. Победившей считается команда, в которой большее число бегунов добежит до конца седьмого километра.

На состязание обе команды явились в цветных майках: новички надели зеленые майки, мастера — красные.

После первого километра сторонники новичков приободрились. Из команды новичков осталось, как и в прошлый раз, 729 бегунов, а у мастеров — 256. Большой численный перевес сохранился на стороне новичков. Поклонники мастеров были несколько обескуражены тем, что в этой команде сразу вышли из строя половина бегунов. Но один из болельщиков, сделав карандашом нехитрые выкладки на папиросной коробке, уверенно заявил, что если дело пойдет так же и дальше, то выиграют наверняка мастера.

После второго километра «зеленых» осталось 243 человека, а «красных» — 128. После третьего километра «зеленых»— 81, а «красных» — 64. Настроение сторонников новичков заметно стало падать. После четвертого километра «зеленых» — 27, а «красных» — 32. Все с почтением посмотрели на предсказателя с коробкой папирос.

Оставшиеся три километра только усугубили поражение «зеленых». После пятого километра «зеленых»— 9, «красных»— 16, после шестого — 3 и 8. Наконец, к финишу в конце седьмого километра пришли один «зеленый» и четыре «красных».

Выпишем друг под другом числа бегунов в обеих командах:

2187, 729, 243, 81, 27, 9, 3, 1
512, 256, 128, 64, 32, 16, 8, 4.

Во второй строке отношение последующего числа к предыдущему равно одной второй, а в первой строке, как и раньше,— одной трети. Оказалось, что эта небольшая разница в числах не только достаточна, чтобы компенсировать большой начальный численный перевес команды «зеленых», но и привела команду «красных» к победе. Нужна была только достаточно длинная дистанция, не менее четырех километров. На более коротких дистанциях победили бы «зеленые».

В поведении зеленых и красных лучей и «зеленых» и «красных» бегунов существует полная аналогия (рис. 5). Зеленое стекло лучше пропускает темно-красные лучи, чем зеленые, причем, согласно закону Бугера, различие в пропускании этих лучей быстро растет с ростом толщины слоя стекла («длинная дистанция»).

Но тогда естественно возникает вопрос: почему в тонком слое стекло кажется зеленым, если оно пропускает темно-красные лучи лучше, чем зеленые? Объясняется это спектральной характеристикой источника света, с которым проводился опыт: зеленый участок спектра гораздо ярче, чем темно-красный (команда «зеленых» многочисленнее «красных»). В тонком слое стекла («короткая дистанция») разница в поглощении темно-красных и зеленых лучей еще не настолько велика, чтобы перекрыть перевес в начальной яркости зеленых лучей. Основную роль играют зеленые лучи, что и дает соответствующую окраску.

С ростом толщины стекла, согласно закону Бугера, пропускание зеленых лучей падает несравненно быстрее, чем темно-красных (числа «зеленых» и «красных» бегунов на больших дистанциях). При достаточно большой толщине разница в пропускании уже так велика, что перекрывает начальный перевес в яркости зеленых лучей, и от всего спектра практически остается только темно-красная полоска.

Осталось только объяснить, какую роль играет температура раскаленного тела, на которое мы смотрим сквозь стекло. Известно, что чем сильнее мы раскалим любой металлический предмет, тем более даваемый им свет. Недаром говорят: «довести до белого каления». Так, при недостаточном накале лампочка накаливания дает красноватый свет, при нормальном накале — гораздо более белый. Объясняется это тем, что с ростом температуры яркость зеленых и синих лучей растет гораздо быстрее, чем красных.

kvant.mccme.ru

Значит, при более высокой температуре разница в яркостях зеленой и темно-красной частей спектра больше, и ее труднее перекрыть поглощением в стекле. Вот почему при более высоких температурах раскаленного тела для изменения цвета наблюдаемого излучения нужно более толстое стекло.

Древнерусские иконы и наблюдения Леонардо да Винчи

На некоторых древнерусских иконах бросается в глаза необычная расцветка одеяний святых. Складки изображены краской, обладающей резко отличным цветом от цвета гладких частей одеяния. Например, красные складки на зеленом плаще (рис. 6) или оранжевые складки на синем одеянии. Острый глаз древнерусского богомаза заметил, что некоторые ткани обладают двухцветностью и в складках приобретают другой цвет, чем на ровной поверхности. Причина двухцветности тканей та же, что и в опыте с пирометрическим клином.

Если луч света, отраженный от двухцветной ткани, пропустить сквозь призму, то в спектре обязательно останутся две цветные полоски. Для зеленой двухцветной ткани картина будет той же, что с зеленым стеклом: останутся красная и зеленая полоски, остальные лучи поглотятся.

Двухцветная зеленая ткань лучше отражает красные лучи, чем зеленые, но при однократном отражении от гладкой поверхности ткани сказывается бо́льшая яркость зеленых лучей в падающем свете. Поэтому в однократно отраженном свете все-таки преобладают зеленые лучи.

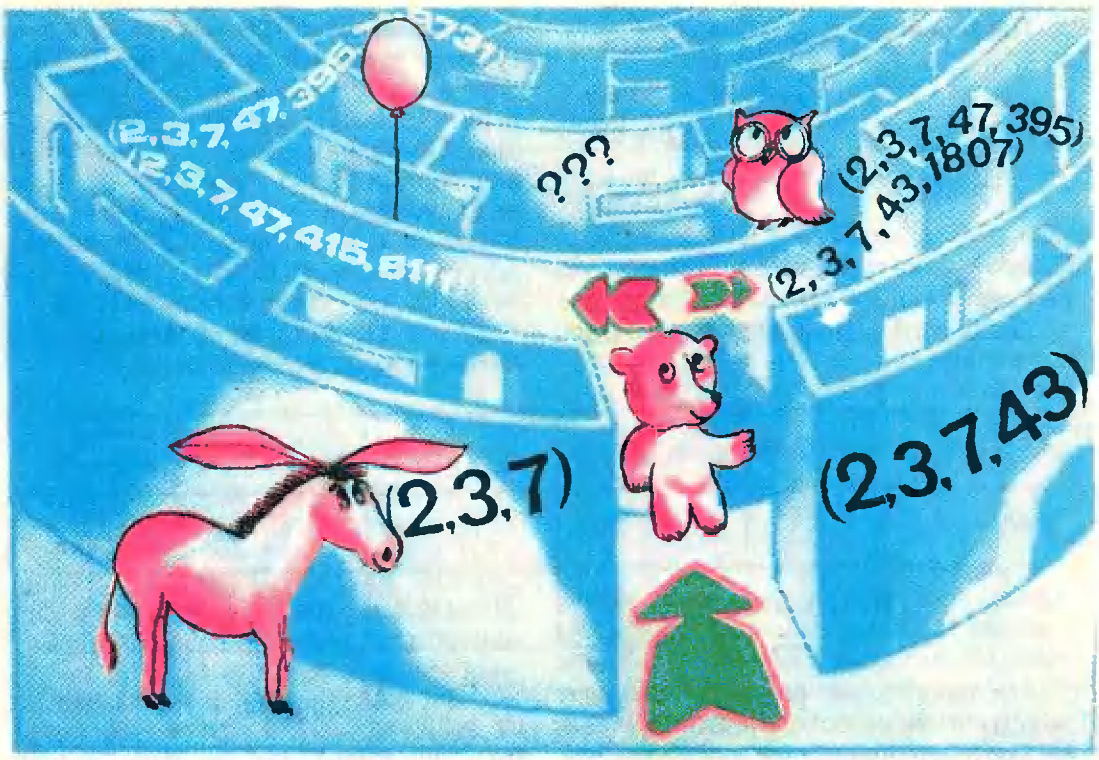
В складках ткани свет испытывает по крайней мере два последовательных отражения. При втором отражении красные лучи отражаются опять сильнее, чем зеленые, и в результате двукратного отражения происходит то же, что и в зеленом стекле большой толщины: яркость красных лучей становится больше яркости зеленых лучей, и ткань меняет цвет. Многократные отражения усиливают этот эффект.

Большинство обычных тканей обладает прямо противоположными свойствами. В складках получается более насыщенный, но такой же цветовой тон, что и на ровной поверхности. Объясняется это опять-таки повторными отражениями. Свет, отраженный от таких тканей, после разложения призмой дает только одну полоску в спектре вместо двух полосок у двухцветных тканей. Например, свет, однажды отраженный от желтого бархата, дает в спектре широкую полосу с наибольшей яркостью в желтой части. Кроме желтых лучей, в спектре присутствуют еще зеленые и голубые лучи. При двукратном отражении полоса в спектре становится у́же, так как голубые лучи практически исчезают совсем, а зеленые сильно ослабляются. Это работает все тот же закон геометрической прогрессии. В результате желто-оранжевый отраженный свет делается более насыщенным.

Один из наиболее разносторонних гениев, живших когда-либо,—Леонардо да Винчи — не только заметил своим глазом художника эту особенность складок тканей, но и, как ученый, дал вполне правильное объяснение наблюдаемому явлению. В «Трактате о живописи» он пишет: «Отраженные цвета имеют гораздо бо́льшую красоту, чем природный цвет этих тел, как это видно на открывающихся складках золотых тканей ..., когда одна поверхность отражается в другой, стоящей напротив, а эта в ней, и так последовательно до бесконечности».

В том же «Трактате о живописи» сказано: «Рефлексы (отражения) от живого тела, получающего свет от другого живого тела, более красны и более превосходно телесного цвета, чем любая другая часть живого тела, какая только может быть у человека». Созерцая с наслаждением в залах ленинградского «Эрмитажа» изумительные полотна Ван-Дейка и Рубенса, нетрудно заметить, что и для этих великих мастеров эффект многократных отражений не был тайной.

kvant.mccme.ru



А. Гейн

На пути к решению

Иногда небольшое изменение или обобщение условия школьной задачи может привести к интересным теоремам и даже нерешенным проблемам. Так, несколько лет назад В. И. Арнольд предложил задачу: «Описать все наборы из n натуральных чисел, таких, что произведение любых $n-1$ из них в сумме с единицей делится на оставшееся». Об этой задаче мы писали и в «Кванте» («Квант», 1976, № 12, с. 5). Получается она из совсем несложной школьной задачи: найти все такие тройки чисел, отличных от единицы, что произведение любых двух чисел тройки, сложенное с единицей, делится на третье число («Сборник задач московских математических олимпиад», М., «Просвещение», 1965, с. 70, задача 215). В ответе — единственный набор: (2, 3, 7). Если отбросить требование о том, чтобы все числа были отличны от единицы, получатся еще три набора: (1, 1, 1), (1, 1, 2) и (1, 2, 3). Столь же легко описать и все такие пары и четверки чисел. А вот дать ответ для произвольного n никак не удается — это до сих пор нерешенная проблема.

В замечательной книге Д. Пойа «Как решать задачу» сформулированы «правила исследователя». Перечислим некоторые из них.

•

Начните с частных случаев — они могут оказаться легче. Рассмотрите полученные результаты. Наблюдайте, обобщайте, проверяйте.

Проанализируйте метод решения, расчлените его и посмотрите, какие его части могут быть перенесены на общий случай.

Подойдите к задаче с различных сторон, исследуйте различные детали; исследуйте одни и те же детали, но с разных точек зрения, попытайтесь усмотреть в каждой детали некоторую новую интерпретацию задачи. Ищите точки соприкосновения с вашими ранее приобретенными знаниями. Пытайтесь увидеть знакомое в том, что вы исследуете и полезное в том, что оказалось знакомым.

Вглядитесь в метод. Постарайтесь выделить в нем главное. Постарайтесь улучшить его.

•

Попробуем, пользуясь «правилами исследователя», внимательно присмотреться к тому, что известно о задачах с $n=2$, 3 и 4; может быть, это поможет нам хоть чуточку приблизиться к решению общей проблемы.

kvant.mccme.ru

1. Повторение

— А разве ты не видишь?
— Нет.
— И я тоже!

Из разговора Иа-Иа с Винни Пухом *)

С чего же начать? Прежде всего — с ответов в школьных вариантах задачи ($n = 2, 3, 4$). Выпишем эти ответы в таблицу:

$n = 2$	(1, 1)	(1, 2)	(2, 3)		
$n = 3$	(1, 1, 1)	(1, 1, 2)	(1, 2, 3)	(2, 3, 7)	
$n = 4$	(1, 1, 1, 1)	(1, 1, 1, 2)	(1, 1, 2, 3)	(1, 2, 3, 7)	(2, 3, 7, 43)

Не правда ли, решения для различных n очень похожи? Они образуют вертикальные серии и получаются добавлением единицы. Это наблюдение распространяется на всевозможные n с помощью следующей очевидной леммы:

Лемма 1. *Пусть набор чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ является решением задачи для $n = k$. Тогда набор чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_k, 1)$ — решение задачи для $n = k + 1$. И наоборот: если среди $k + 1$ чисел, являющихся решением задачи для $n = k + 1$, имеется единица, то, убрав ее из набора, получим решение задачи для $n = k$.*

А как рождаются новые серии: (2, 3), (2, 3, 7), ...?

Пусть $(x_1, \ldots, x_k)$ — решение задачи для $n = k$. По условию задачи, если $(x_1, \ldots, x_k, x_{k+1})$ — решение задачи для $n = k + 1$, то $x_1 \ldots x_k + 1 = Cx_{k+1}$, где C — некоторое натуральное число. Попробуем положить C равным единице (так получаются числа $3 = 2 + 1$, $7 = 2 \cdot 3 + 1$, $43 = 2 \cdot 3 \cdot 7 + 1$). Докажем такую лемму:

Лемма 2. *Если набор чисел $(x_1, \ldots, x_k)$ — решение задачи для $n = k$, то набор $(x_1, \ldots, x_k, x_1 \ldots x_k + 1)$ — решение задачи для $n = k + 1$.*

Произведение первых k чисел в сумме с единицей делится на x_{k+1} по определению числа x_{k+1}. Пусть теперь число x_{k+1} входит в произведение. Обозначим через X_i произведение первых $k - 1$ чисел без x_i. Нам надо показать, что $X_i x_{k+1} + 1$ делится на x_i. Это следует из того, что $x_{k+1} = X_i x_i + 1$; тогда $X_i x_{k+1} + 1 = X_i (X_i x_i + 1) + 1 = x_i (X_i)^2 + (X_i + 1)$, а второе слагаемое делится на x_i по условию леммы.

При помощи лемм 1 и 2 из каждого решения задачи для $n = k$ могут быть получены два решения задачи для $n = k + 1$. На рисунке 1 показано, как из решений задачи для $n = 2$ при помощи леммы 1 (красные стрелки) и при помощи леммы 2 (синие стрелки) таким способом получаются решения задачи сначала для $n = 3$, а затем — для $n = 4$.

Ниоткуда не следует, что таким путем мы получим все решения. Впрочем, легко доказать, что наборами, указанными на рисунке 1, исчерпываются все решения нашей задачи для $n = 2, 3, 4$. К сожалению, из решений для $n = 4$ таким способом получаются не все решения для $n = 5$; кроме решения (2, 3, 7, 43, 1807), получающегося по рецепту леммы 2, есть еще такое: (2, 3, 7, 47, 395).

2. Сведение к уравнению

Даже немножечко,
чайная ложечка, —
— это уже хорошо.

Винни Пух

Лемма 1 позволяет здесь и дальше не рассматривать решений, содержащих 1,— с ними все ясно. Тогда, если набор $(x_1, \ldots, x_k)$ — решение задачи для $n = k$, то все числа x_i различны (подумайте, почему).

*) Все эпиграфы взяты из сказки Милна «Винни Пух и Все, Все, Все».

kvant.mccme.ru

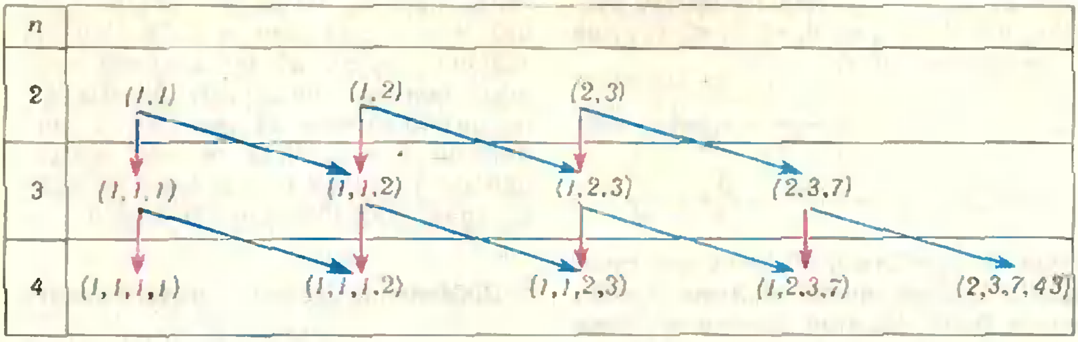


Рис. 1.

Анализируя ответы задачи при $n = 2$, 3 и 4, мы можем создать гипотезы лишь о с т р о е н и и этих ответов, а отнюдь не о том, как р е ш а т ь задачу. Посмотрим теперь, к а к эти ответы получаются для $n=3$.

Пусть (x, y, z) — некоторое решение задачи с тремя числами. Тогда должны выполняться равенства

$$\begin{cases} xy+1=k_1z, \\ xz+1=k_2y, \\ yz+1=k_3x, \end{cases}$$

где k_1, k_2, k_3 — какие-то натуральные числа.

Перемножив эти соотношения, получим

$$xyz\,(xyz+x+y+z)+xy+xz+yz+1=k_1k_2k_3xyz.$$

Отсюда вытекает, что $xy+xz+yz+1$ делится на xyz, то есть

$$xy+xz+yz+1=Axyz,$$

где A — натуральное число. Разделив обе части этого равенства на xyz, получим

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xyz}=A. \qquad (1)$$

Итак, любое решение задачи для $n = 3$ удовлетворяет уравнению (1). Освободившись от знаменателя, легко увидеть, что и обратно: если x, y, z — натуральные числа, удовлетворяющие — при некотором натуральном A — уравнению (1), то (x, y, z) — решение задачи для $n = 3$.

Левая часть (1) принимает наибольшее значение при наименьших значениях x, y, z; если $2 \leqslant x < y < z$, то

$$A \leqslant \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}=\frac{27}{24}<2.$$

Следовательно, $A = 1$ и x, y, z удовлетворяют уравнению

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{xyz}=1.$$

Ну что же, первый шаг очень естествен. Воспользовавшись определением делимости, мы от несколько неопределенных слов — *одно число делится на другое* — перешли к уравнениям — вполне конкретным и знакомым нам объектам. Правда, появились новые неизвестные k_1, k_2, k_3, которых раньше не было, но это — обычная расплата за «некоторую определенность». И второй шаг вполне понятен — желание избавиться от «лишних» неизвестных (за счет перехода от системы к одному уравнению).

Проделав аналогичную операцию для произвольного n, мы снова получим уравнение вида

$$\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_1\ldots x_n}=A, \qquad (2)$$

где A — натуральное число. Снова легко проверяется обратное утверждение:

если x_1, x_2, ..., x_n — натуральные числа, удовлетворяющие — при некотором натуральном A — уравнению (2), то набор $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ является решением нашей задачи.

Итак, исходная задача эквивалентна задаче нахождения решений уравнения (2) в натуральных числах при всевозможных натуральных A. Продвижение, конечно, небольшое, но *«даже немножечко ... — это уже хорошо!»*

Окрыленные успехом, мы можем попытаться доказать, что в уравне-

kvant.mccme.ru

нии (2) $A = 1$. Поскольку можно считать, что $2 \leqslant x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, для A получаем оценку:

$$A = \frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_1 \ldots x_n} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n!}.$$

Однако уже для $n = 14$ сумма, стоящая в правой части, больше 2. Но, может быть, из этой оценки все-таки можно вывести, что величина A ограничена и потому может принимать лишь конечное число значений? Так ведь нет: сумма $\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ неограниченно возрастает с увеличением n.

Упражнение 1. Докажите это.

По-видимому, наш метод оценки слишком груб. Нельзя ли его улучшить? Ясно, например, что все числа, входящие в решение, попарно взаимно просты. Поэтому, в частности, если $x_1 = 2$, то $x_3 > 4$.

Покажем, что сумму $\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_1 \ldots x_n}$ можно оценить сверху числом $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \ldots + \frac{1}{p} + \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot p}$, где p — n-е простое число.

Действительно, обозначим через p_i какой-нибудь простой делитель числа x_i. Заметим, что $p_i \leqslant x_i$. Поскольку числа x_i попарно взаимно просты, все p_i различны. Будем считать их упорядоченными по величине. Тогда $2 \leqslant p_1$, $3 \leqslant p_2$, $5 \leqslant p_3$ и т. д. Заменяя x_i на p_i, получаем требуемую оценку.

Может быть, сумма величин, обратных простым числам, не превосходит некоторого постоянного числа M? Это означало бы, что $A < M + 1$. Оказывается, и это неверно: с увеличением количества слагаемых сумма $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{p}$ возрастает неограниченно *). Тем не менее полученная оценка позволяет утверждать, что $A = 1$ для всех $n \leqslant 58$. Утешительного мало, но по крайней мере ясно, почему, анализируя ответы, мы не натолкнулись на решение с константой $A = 2$: вряд ли кому-нибудь придет в голову рассматривать задачу сразу для шестидесяти чисел.

*) Доказательство этого утверждения, принадлежащего Л. Эйлеру, можно найти в книге А. М. Яглома и И. М. Яглома «Неэлементарные задачи в элементарном изложении» (М., ГТТИ, 1954).

3. Добавление одного — ничего нового

Безвозмездно, то есть даром.
Сова

Кто может заранее знать, какой путь приведет к успеху? Терпение (но не упрямство) — вот принцип исследователя. Вернемся еще раз к началу нашего путешествия. Теперь у нас в руках анализ ответов и методов решения задачи для частных случаев. Пристального внимания заслуживают леммы 1 и 2 — они содержат хоть какой-то алгоритм нахождения некоторых решений. Какой подход они предлагают? В обеих леммах говорится о том, как из решения задачи для $n = k$ получить решение задачи для $n = k + 1$. Нам такой подход вполне привычен (вспомните метод математической индукции). Попробуем, считая, что задача решена для $n = k$, решить ее для $n = k + 1$.

Итак, пусть $(x_1, \ldots, x_k)$ — решение задачи для $n = k$. Обозначим произведение $x_1 \ldots x_k$ через f_k. Тогда

$$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_k} + \frac{1}{f_k} = A.$$

Если число x_{k+1} дополняет набор $x_1, \ldots, x_k$ до решения задачи для $n = k + 1$ и $x_{k+1} \neq 1$, то имеет место соотношение

$$\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_k} + \frac{1}{x_{k+1}} + \frac{1}{f_k x_{k+1}} = A$$

с тем же самым A (продумайте это).

Приравнивая левые части этих двух равенств и отбрасывая одинаковые слагаемые, получаем

$$\frac{1}{x_{k+1}} + \frac{1}{f_k x_{k+1}} = \frac{1}{f_k};$$

следовательно, $x_{k+1} = f_k + 1$. Именно так получается решение и по лемме 2! Значит, в равенстве $x_1 \dots x_k + 1 = C \cdot x_{k+1}$ константа C равна 1 не случайно: дело тут не в простоте, а в уравнении (2). Кстати, лемма 2 *даром* следует из этого уравнения.

Таким образом, если решение задачи для $n = k+1$ получается добавлением одного числа к решению задачи для $n = k$, то оно образуется либо по лемме 1, либо по лемме 2.

4. А если добавить два?

Интересно, что это так бумкнуло? Не мог же я один наделать столько шума! И куда, интересно знать, девался мой воздушный шарик?

Пятачок

Итак, происхождение леммы 2, по крайней мере, прояснилось. Правда, новых решений мы не получили и по-прежнему непонятно, откуда берутся решения, не образующиеся применением лемм 1 и 2 (например, решение (2, 3, 7, 47, 395) для задачи с $n = 5$). Опять тупик? Подумаем еще раз, прежде чем сойти с выбранного пути. Исчерпали ли мы все возможности нашего подхода? Кто мешает нам добавить, ну хотя бы, два числа? Попробуем.

Предположим сначала, что $(x_1, \dots, x_k)$ — решение задачи для $n=k$. Тогда

$$\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_k} + \frac{1}{f_k} = A. \quad (3)$$

Пусть $(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2})$ — решение задачи для $n = k+2$ и $x_{k+1} \neq 1$, $x_{k+2} \neq 1$. Оказывается, и в этом случае

$$\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_k} + \frac{1}{x_{k+1}} + \frac{1}{x_{k+2}} + \frac{1}{f_k x_{k+1} x_{k+2}} = A \quad (4)$$

с тем же A. Следовательно,

$$\frac{1}{x_{k+1}} + \frac{1}{x_{k+2}} + \frac{1}{f_k x_{k+1} x_{k+2}} = \frac{1}{f_k}, \quad (5)$$

откуда

$$x_{k+2} = f_k + \frac{f_k^2 + 1}{x_{k+1} - f_k}. \quad (6)$$

Поскольку x_{k+2} должно быть целым, число $d = x_{k+1} - f_k$ является делителем числа $f_k^2 + 1$. Итак,

$$\begin{cases} x_{k+1} = f_k + d, \\ x_{k+2} = f_k + \dfrac{f_k^2+1}{d}. \end{cases} \quad (7)$$

Обозначим теперь через d произвольный делитель числа $f_k^2 + 1$ и определим числа x_{k+1}, x_{k+2} равенствами (7). Тогда для чисел f_k, x_{k+1}, x_{k+2} выполняется (6), а значит, и (5). Из (3) и (5) следует (4). Значит, расширенный набор $(x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, x_{k+2})$ является решением нашей задачи для $n = k+2$. Итак, нами доказана

Лемма 3. *Пусть $(x_1, \dots, x_k)$ — решение задачи для $n=k$, $f_k = x_1 \dots x_k$ и d — делитель числа f_k^2+1. Тогда набор $\left(x_1, \dots, x_k, f_k + d, f_k + \dfrac{f_k^2+1}{d}\right)$ является решением задачи для $n = k+2$. И наоборот: если решение задачи для $n = k+2$ получается из некоторого решения задачи для $n = k$ добавлением двух чисел, отличных от 1, то добавленные числа удовлетворяют равенствам (7).*

Таким образом, если решение задачи для $n = k+2$ получается добавлением двух чисел к решению задачи для $n = k$, то оно образуется либо по лемме 2, либо по лемме 3.

Два делителя у $f_k^2 + 1$ всегда есть: это 1 и f_k^2+1. Однако легко видеть, что для таких делителей лемма 3 не дает ничего нового по сравнению с леммой 2. Но зато, если $f_k^2 + 1$ не является простым числом, то лемма 3 дает начало новой серии решений (x_{k+3} можно строить снова по лемме 2 и т. д.). Например, для решения (2, 3, 7) имеем $f_3^2 + 1 = 1765 = 5 \cdot 353$, и мы получаем из него по лемме 3 решение (2, 3, 7, 47, 395), которое мы упоминали в п. 1. Аналогично, из решения (2, 3, 7, 43) по лемме 3 получается решение (2, 3, 7, 43, 1823, 193 667) (здесь $f_4^2 + 1 = 3261637 = 17 \cdot 191861$).

Рассмотрим последовательность решений, получающихся из решения

kvant.mccme.ru

(2, 3) по лемме 2. Назовем ее *базисной*. Каждый раз, когда число f_k^2+1 оказывается в ней составным, от нее по лемме 3 отщепляется по крайней мере одна ветка (рис. 2).

А много ли составных чисел среди чисел f_k^2+1 для базисной последовательности?

Упражнение 2. Докажите, что в базисной последовательности все числа f_{2k+1}^2+1 делятся на 5.

Из упражнения 2 следует, что по крайней мере при каждом нечетном n от базисной последовательности по лемме 3 будет отщепляться решение, порождающее по лемме 2 новую последовательность решений. Легко проверить, что решения, принадлежащие разным последовательностям, не совпадают.

Итак, всего лишь одна базисная последовательность для каждого $n>2$ порождает по крайней мере $\left[\frac{n-1}{2}\right]$ решений, не содержащих 1. А гипотеза, что решений без единиц не так уж «много» (точнее, что их число ограничено константой, не зависящей от n), *«бумкнула»*. Она была бы справедлива, если бы, начиная с некоторого n, все решения действительно получались только применением леммы 2.

5. Другой подход

А все почему? По какой причине? И какой из этого следует вывод?
И а - И а

Конечно, путь, который был выбран, далеко не единственный. В письме читателя *А. Н. Броцкого* из Киева предлагается другой подход: вместо того, чтобы из решения задачи для $n=k$ получать решение задачи для $n=k+1$ или $n=k+2$, попробуем из решения задачи для некоторого n получить другое решение задачи для того же самого n. Броцкий предложил следующую теорему:

Пусть $(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$ — *решение, получающееся по лемме 2 из решения* $(x_1, \ldots, x_{n-2}, x_{n-1})$ *и* $\frac{f_{n-2}x_n+1}{x_{n-1}}=d_1d_2$.

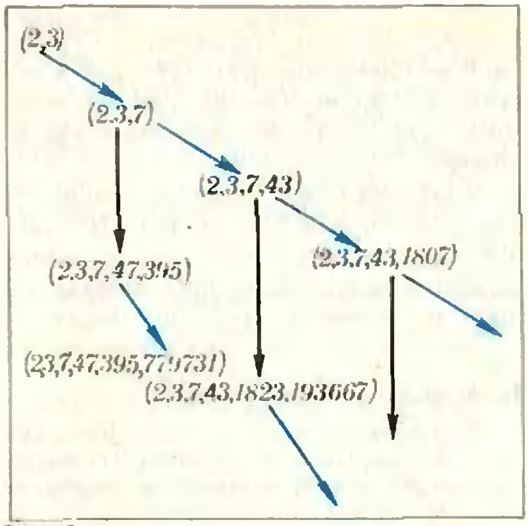


Рис. 2.

Если система уравнений

$$\begin{cases} f_{n-2}x+1=d_1y, \\ f_{n-2}y+1=d_2x \end{cases} \qquad (8)$$

имеет решение в натуральных числах, то набор $(x_1, \ldots, x_{n-2}, x, y)$ *тоже является решением задачи.*

Упражнение 3. Докажите теорему Броцкого.

Своим методом А. Н. Броцкий из решения (2, 3, 7, 47, 395, 779 731) получил решение (2, 3, 7, 47, 415, 8 111), не образующееся применением леммы 3.

Упражнение 4. Проверьте, что для решений из базисной последовательности система (8) всегда имеет решение в натуральных числах.

Упражнение 5. Проверьте, дает ли метод А. Н. Броцкого, примененный к базисной последовательности, решения, не получающиеся при помощи лемм 2 и 3.

Мы пока не решили проблему до конца — не знаем, сколько решений имеет задача для данного (произвольного) n. Но мы сделали всего лишь несколько шагов, а путь еще долог. В этом наша задача ничем не отличается от проблем, которыми занимаются крупные математики. Процесс познания истины бесконечен. Он не завершается даже решением той или иной задачи, за ней следуют новые, более общие, требующие для своего решения переосмысления старых методов и изобретения новых. Как происходит такое переосмысление, какими принципами при этом должен руководствоваться исследователь, вы видели в этой статье.

kvant.mccme.ru

В. Дуков

Конвекционные токи и токи смещения

На вопрос «Что такое электрический ток?» обычно отвечают так: это направленное движение зарядов по проводнику. Однако в этом ответе есть только доля истины. Чтобы сформулировать точный ответ, обратимся к истории вопроса.

В 1800 году итальянский физик Алессандро Вольта открыл возможность получения постоянного тока с помощью источника э. д. с., который мы называем теперь гальваническим элементом. В то время существовала гипотеза, согласно которой электричество представляет собой невесомую жидкость, способную проникать через поры тела. Естественно, что электрический ток начали представлять как движение этой жидкости по цепи. Физике предстояло пройти долгий путь, прежде чем было установлено, что внутри проводников движутся заряженные частицы вещества.

Первый шаг сделал Фарадей, показавший, что в электролитах ток представляет собой движение ионов. Ион — атом, имеющий избыток или недостаток заряда определенного знака. Таким образом, у иона две характеристики — масса и электрический заряд. При электролизе ион отдает заряд электроду и оседает на нем. Совокупность осевших ионов образует осадок, массу которого легко измерить.

Из многочисленных опытов Фарадея следовало, что ионы одной и той же валентности переносят одну и ту же порцию заряда. Кстати, именно это заключение привело позже (в 1881 году) Гельмгольца к мысли о существовании элементарного заряда (то, что он связан с элементарной частицей — электроном, физики узнали только в конце XIX века).

Заметим, что если бы Фарадей исходил из идеи элементарного заряда и законов сохранения заряда и вещества, то он мог бы два своих закона, потребовавших многолетних трудных поисков, получить из очень простых рассуждений. Допустим, что в электролите движутся N ионов, каждый из которых несет заряд Ze_0, где Z — валентность, e_0 — величина элементарного заряда. Тогда масса осевших на электроде ионов будет

$$M = Nm_0, \qquad (1)$$

где m_0 — масса иона. Эти ионы принесут на электрод заряд

$$q = NZe_0. \qquad (2)$$

Деля (1) на (2), получаем

$$M = \frac{m_0}{Ze_0}q. \qquad (3)$$

Обозначая $\frac{m_0}{Ze_0} = k$, получаем первый закон Фарадея:

$$M = kq.$$

Умножим и разделим выражение для k на число Авогадро N_A:

$$k = \frac{N_A \cdot m_0}{Ze_0N_A} = \frac{\mu}{Ze_0N_A} = \frac{1}{F}\frac{\mu}{Z}, \qquad (4)$$

где μ — молярная масса вещества, $F = N_Ae_0$ — число Фарадея.

Получается второй закон Фарадея.

Таким образом, законы Фарадея являются следствиями законов сохранения и факта существования элементарного заряда. Выражение (3) раскрывает физический смысл фарадеевского электрохимического эквивалента вещества: эффект нарастания массы отложившегося при электролизе вещества зависит от отношения заряда иона к его массе. Из (3) и (4) следует, что для получения осадка с большей массой нужно брать вещество с большей молярной массой и меньшей валентностью.

Отношение заряда тела к его массе в физике принято называть удель-

kvant.mccme.ru

ным зарядом. Это очень важная величина. Следует сразу же подчеркнуть колоссальную разницу в величинах удельного заряда микрочастиц и макроскопических тел. Для «легкой» элементарной частицы — электрона

$$\frac{e_0}{m_e}=\frac{1{,}6\cdot 10^{-19}\text{Кл}}{9{,}1\cdot 10^{-31}\text{ кг}}\approx 2\cdot 10^{11}\ \text{Кл/кг},$$

для «тяжелой» — протона

$$\frac{e_0}{m_p}\approx 10^{8}\ \text{Кл/кг}.$$

Чтобы эти величины произвели впечатление, попробуем вычислить удельный заряд шарика радиусом 1 см из алюминиевого сплава плотностью $\rho=2\cdot 10^3$ кг/м^3. Его масса

$$m=\rho V=4/3\pi r^3\cdot\rho\approx\frac{4\cdot 3{,}14}{3}(10^{-2})^3\cdot 2\times$$
$$\times 10^3\text{ кг}\approx 8\cdot 10^{-3}\text{ кг}.$$

Какой заряд может удержаться на таком шарике? Известно, что интенсивное стекание заряда с поверхности тела начинается при напряженности электрического поля $E_0\approx 3\cdot 10^6$ В/м. Напряженность поля сферы радиуса r с зарядом q равна

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}.$$

Максимальный заряд, который может «удерживаться» на такой сфере, определяется условием $E=E_0$. Таким образом,

$$q_{max}=4\pi\varepsilon_0 r^2E_0\approx 4\cdot 3{,}14\cdot 8{,}86\times$$
$$\times 10^{-12}(10^{-2})^2\cdot 3\cdot 10^6\text{Кл}\approx 3\cdot 10^{-8}\text{ Кл}.$$

Итак, максимальный удельный заряд алюминиевого шарика будет

$$\frac{q_{max}}{m}\approx\frac{3\cdot 10^{-8}\text{ Кл}}{8\cdot 10^{-3}\text{ кг}}\approx 4\cdot 10^{-6}\text{ Кл/кг}.$$

Удельный заряд протона превышает удельный заряд алюминиевого шарика в 10^{13} раз!

Представим себе, что мы хотели бы получить с помощью заряженных алюминиевых шариков ток в 1А. По определению $I=q/t$. Заряд одного шарика обозначим через q_1; тогда $q=Nq_1$, где N — число шариков. Ток

$$I=\frac{Nq_1}{t},\quad\text{и}\quad N=\frac{It}{q_1}\approx\frac{1\text{А}\cdot 1\text{с}}{3\cdot 10^{-8}\text{ Кл}}\approx$$
$$\approx 3\cdot 10^7.$$

Поток шариков должен быть таков, чтобы через фиксированную площадку проходило в одну секунду 30 млн. шариков! Если этот поток представить себе в трубе, то ее сечение должно быть

$$S=N\pi r^2=3{,}14\cdot 30\cdot 10^6\times$$
$$\times(10^{-2})^2\text{ м}^2\approx 10^4\text{ м}^2!$$

В то же время ток в один ампер проходит через проволочку диаметром в доли миллиметра, лишь раскаляя ее. Это объясняется именно тем, что микрочастицы (электроны) обладают большим удельным зарядом.

Вернемся снова к вопросу о природе тока. Ток создается движением заряженных частиц. Не зарядов, а заряженных частиц! И хотя мы пишем $I=q/t$, под зарядом q мы понимаем сумму зарядов частиц, имеющих определенную массу. Поэтому электрический ток обладает механическими свойствами. Впервые они были обнаружены в опытах Толмена и Стюарта. Соленоид, к концам которого был присоединен гальванометр, приводился в быстрое вращение, а затем резко останавливался. Гальванометр при этом фиксировал ток, а направление этого тока соответствовало движению отрицательно заряженных частиц. В этих опытах был измерен удельный заряд частиц, движение которых обуславливало ток. Оказалось, что найденная величина совпала с величиной удельного заряда электрона, найденной по отклонению в электрическом и магнитном полях. Опыты Толмена и Стюарта впервые указали на существование в металлах свободных электронов. Будучи слабо связанными с кристаллической решеткой, электроны после остановки соленоида продолжали движение по инерции — возникал кратковременный ток.

В электролитах ток представляет собой двойной поток ионов, перемещающихся в противоположных направлениях. Ионы имеют одинаковые заряды, но различные массы. Например, в растворе медного купороса носителями тока являются ионы Cu^{++} и SO_4^{--}. Масса иона меди равна 63,5 а. е. м., масса иона SO_4^{--} 32,1+ +4·16=96,1 — значительно больше.

На простом опыте, который можно

kvant.mccme.ru

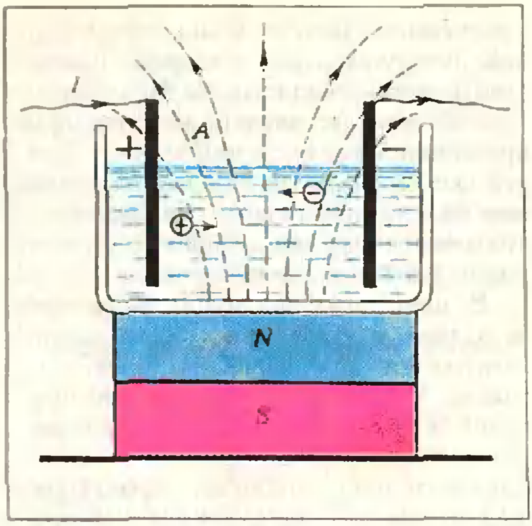


Рис. 1.

поставить в домашних условиях, легко обнаружить эту разницу.

Банка с двумя электродами заполняется раствором медного купороса. На поверхность жидкости высыпаются легкие тела, например, мелкие обрезки бумаги. Включается постоянный ток. Если снизу к банке поднести постоянный магнит (рис. 1), бумажки приходят во вращательное движение. Объясняется этот эффект тем, что действующая на движущиеся ионы со стороны магнитного поля сила Лоренца закручивает ионы. Вращающиеся ионы увлекают за собой молекулы воды, и вся жидкость начинает вращаться. Бумажки, плавающие на поверхности, фиксируют эффект. Естественно, сила Лоренца закручивает и ионы Cu^{++}, и ионы SO_4^{--}. Однако направление вращения жидкости определяется направлением движения более тяжелых ионов (ионов SO_4^{--}). Вращение, вызванное увлечением легкими ионами Cu^{++}, «подавляется» вращением более тяжелых ионов SO_4^{--}. Изменение направления тока или полярности магнита приводит к изменению направления вращения электролита.

Аналогичный эффект имеет место в случае «стекания» заряда с острия.

Известно, что плотность заряженных частиц резко увеличивается в направлении к острию, поэтому вокруг него существует сильное электрическое поле. Нейтральные молекулы воздуха в таком поле ионизуются. Если острие имеет положительный заряд, то имеющиеся в воздухе электроны натекают на острие, а положительные ионы движутся в противоположном направлении. Поток этих ионов увлекает нейтральные молекулы воздуха, так же как поток ионов в электролите увлекает молекулы воды. Создается так называемый «электрический ветер». Опыт с задуванием свечи таким ветром демонстрировал еще Франклин в середине XVIII века.

В рассмотренных случаях мы имеем дело с конвекционными потоками жидкости и воздуха. Исторически именно опыт с задуванием свечи привел к понятию конвекционного тока. Считалось, что наряду с обычной конвекцией — потоком нейтральных частиц — существует электрическая конвекция — поток заряженных частиц. Действительно, дальнейшие исследования показали, что токи в металлах, электролитах и газах сводятся к потоку заряженных частиц. Поскольку эти частицы обладают массой, то принципиальной разницы между обычной конвекцией и электрической конвекцией нет. В работе 1875 г. Гельмгольц писал: «Я употребляю это слово [конвекция — *В. Д.*] в том смысле, в каком оно применяется в теории теплоты, чтобы обозначить распространение электричества посредством перемещения электрически заряженных тел». Гельмгольц же поставил принципиально важный вопрос: можно ли рассматривать движение заряженных макроскопических тел (например, наших алюминиевых шариков) как обычный конвекционный ток.

Ответ на этот вопрос мог дать опыт, аналогичный тому, который произвел датский физик Ганс Христиан Эрстед в 1820 г. Он обнаружил, что если вблизи проводника с током поместить магнитную стрелку, то она отклоняется. На стрелку действует сила, пропорциональная величине тока. Направление этой силы зависит от направления тока.

Гельмгольц предложил своему ученику Генри Роуленду поставить следующий опыт: зарядить диск, поме-

kvant.mccme.ru

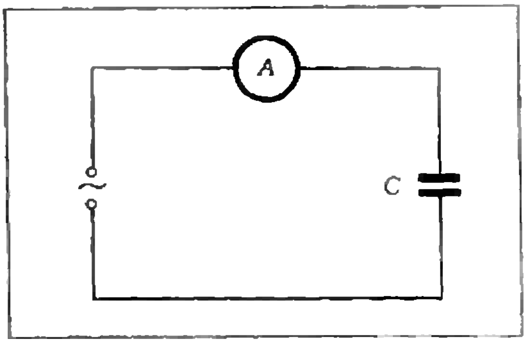


Рис. 2.

стить около него магнитную стрелку и привести диск во вращение. Если вращение заряженного диска эквивалентно протеканию тока (по замкнутой цепи), то как и в случае тока, вращение диска должно вызывать появление магнитного поля.

Действительно, Роуленд обнаружил отклонение магнитной стрелки. Эксперимент был трудный. Как уже говорилось, макроскопические тела не могут «транспортировать» большие заряды. Поэтому приходилось измерять магнитное поле очень слабого тока.

Итак, токи во всех веществах — жидких, твердых, газообразных — сводятся к токам конвекционным. А может ли ток существовать в вакууме, где нет частиц вещества? Обратимся к опыту, схема которого изображена на рисунке 3. Если включить источник переменной э. д. с., амперметр зафиксирует ток. Опыт дает следующий результат. Величина тока в цепи пропорциональна частоте колебаний, генерируемых источником э. д. с., и величине емкости конденсатора. Описанный опыт был известен еще в прошлом веке. Объясняли его так: источник э. д. с. заставляет заряженные частицы колебаться в проводнике, соединяющем обкладки, они «бегают» от обкладки к обкладке, при этом между обкладками ничего не происходит, ибо там — вакуум. В этих рассуждениях ток представляется в виде механического процесса движения заряженных частиц.

Гениальный английский физик Джеймс Клерк Максвелл ввел принципиально новое представление. Движущиеся заряженные частицы связаны с электрическим и магнитным полями. Изменение тока приводит к изменению полей. Фарадей открыл явление электромагнитной индукции, которое сводится, по Максвеллу, к возбуждению электрического поля при изменениях поля магнитного. Уверенный в симметрии электромагнитных явлений, Максвелл предположил, что изменения электрического поля порождают поле магнитное.

В цепи, изображенной на рисунке 3, между пластинами конденсатора изменяется электрическое поле. Согласно Максвеллу, этот процесс приводит к появлению магнитного поля. Но магнитное поле вызывается током. Следовательно, процесс, происходящий между обкладками конденсатора, можно интерпретировать как протекание тока. Не существует «концов» тока. Если цепь разорвана диэлектриком или вакуумом, ток продолжает свой путь, только он будет иметь иную природу. Максвелл назвал этот ток током смещения. Происхождение термина таково. Максвелл предполагал, что пространство, кажущееся нам пустым, заполнено материальной средой с особыми свойствами — эфиром. Эфир имеет ячеистую структуру (такую, например, как кристаллические решетки), и под действием сил электрического поля ячейки могут деформироваться — смещаться, подобно тому как смещаются частицы диэлектрика.

Ток может быть вызван как конвекцией, так и смещением. В случае конвекционного тока его величина пропорциональна скорости перемещения заряженных частиц; ток смещения определяется скоростью смещения, а она, естественно, пропорциональна частоте колебаний. Чем больше емкость конденсатора, тем больше будет объем эфира (при заданном расстоянии между обкладками), следовательно, тем больше будет ячеек и больше эффект смещения. Такова физическая картина.

Математически свою гипотезу Максвелл выразил так:

$$i_{\text{см}} = \varepsilon_0 S \frac{dE}{dt}$$

—ток смещения пропорционален площади S разрыва цепи (или площади пластины конденсатора) и скорости изменения напряженности электрического поля ($\varepsilon_0 = 8{,}86 \cdot 10^{-12}$ Ф/м).

kvant.mccme.ru

Допустим, что источником э. д. с. служит генератор промышленной частоты ($\nu=50$ Гц) с напряжением, изменяющимся по закону $u=U_0 \sin \omega t$, где $U_0=200$ В. Мы захотели получить максимальный ток смещения в 1 А. Какой должна быть в этом случае площадь пластины плоского конденсатора, если расстояние между пластинами $d=1$ м?

Известно, что $E=\frac{u}{d}$. Поэтому

$$i_{см}=\varepsilon_0 S \frac{1}{d} \frac{du}{dt}=\frac{\varepsilon_0 S}{d} \omega U_0 \cos \omega t.$$

Отсюда $I_0=\frac{\varepsilon_0 S \omega U_0}{d}$, и

$$S=\frac{I_0 d}{\varepsilon_0 \omega u_0} \approx 2 \cdot 10^6 м^2=2 \cdot 10^{12} мм^2.$$

Если конденсатор убрать, то между концами разрыва цепи при сечении проводов в 1 мм^2 ток будет равен $5 \cdot 10^{-13}$ А. Если длину разрыва уменьшить до 1 мм, ток будет в 10^3 раз больше, то есть составлять десятимиллиардные доли ампера — практически нуль. В тех же условиях ток в один ампер мы получим, если увеличим частоту колебаний до 10^{11} Гц, то есть, перейдем в область радиотехнических частот.

Этот расчет показывает, что токи смещения становятся существенными только при очень высоких частотах колебаний. Поэтому в электротехнике токи смещения вообще игнорируют. В радиотехнике ситуация обратная: там они играют первую роль.

Мы всегда стремимся образно представить себе физический процесс. Что такое ток? Первая ассоциация всегда такова: ток — это перемещение частичек по проводнику, их направленное движение. Но эта по существу механическая модель является лишь грубым отображением реальности. К ней надо относиться осторожно.

Давайте уточним представление о токе. Прежде всего речь идет не просто о частичках, а о движущихся частичках, имеющих электрический заряд, а следовательно, окруженных электромагнитным полем. Последнее определяется двумя компонентами — векторами $\vec{E}$ и $\vec{B}$. В случае постоянного тока электрическая компонента $\vec{E}$ не фиксируется приборами. В каждом кусочке провода, по которому идет ток, имеется одинаковое число положительных и отрицательных зарядов, и их суммарное электрическое поле равно нулю. Приборы обнаруживают вокруг проводника с постоянным током только магнитную компоненту $\vec{B}$.

В случае переменного тока проявляются обе компоненты, причем происходит процесс индукции: изменение электрической компоненты порождает магнитную, изменение магнитной — электрическую. Можно сказать, начинается генерация полей. Переменное электромагнитное поле «отрывается» от проводника с током и распространяется в пространстве со скоростью света в виде электромагнитных волн.

Обратимся еще раз к формуле Максвелла, опустив постоянный коэффициент пропорциональности $\varepsilon_0 S$:

$$I_{см} \sim \frac{dE}{dt}$$

Производная $\frac{dE}{dt}$ имеет физический смысл скорости изменения электрического поля во времени. Чем быстрее меняется электрическая компонента $\vec{E}$, тем больше ток смещения. Но изменение компоненты $\vec{E}$ порождает магнитную компоненту $\vec{B}$. Значит, чем больше ток смещения, тем сильнее магнитное поле.

А в случае постоянного тока — конвекционного тока? Чем больше ток, тем сильнее магнитное поле. Та же пропорциональность между током и магнитным полем.

Таким образом, говоря о токе, нужно иметь в виду прежде всего электромагнитное поле вокруг тока. И вопрос о том, что такое ток, следует уточнять: какой ток имеется в виду? Если постоянный — центральную роль играет движение заряженных частичек, которые имеются в проводнике, конвекционные процессы. Если переменный — то эту роль начинает играть электромагнитное поле, и игра эта тем ярче и отчетливее, чем больше частота электромагнитных колебаний.

kvant.mccme.ru

М. Гарднер

Числа Каталана

В этой статье рассказывается о замечательной последовательности целых чисел, возникающей в самых неожиданных местах *)

Любому математику (и ученому вообще) очень часто приходится сталкиваться с бесконечными последовательностями целых положительных чисел. Если последовательность простая, как, например, последовательность удваивающихся чисел (1, 2, 4, 8, 16, ...) или последовательность квадратов (1, 4, 9, 16, 25, ...), то она распознается сразу же. Редкий математик не сможет узнать числа Фибоначчи (1, 1, 2, 3, 5, 8...) или треугольные числа (1, 3, 6, 10, 15, 21, ...). Если же последовательность не столь известна, то можно потратить много времени в поисках задающего ее рекуррентного или нерекуррентного закона. (Закон является реккурентным, если вычисление следующего члена требует знания предыдущих членов; нерекуррентная формула дает n-й член, не требуя знания предыдущих.)

Трудно поэтому поверить, что только в 1973 году в США был издан «Справочник числовых последовательностей». В этой бесценной книге, составленной Н. Дж. А. Слоуном, описано более 2300 целочисленных последовательностей, каждая из которых имеет свой номер. Математик, столкнувшийся с неизвестной ему последовательностью, не должен более тратить время, пытаясь отыскать формулу, ее задающую. Он попросту

---

*) M. Gardner, Mathematical Games, Catalan numbers: an integer sequence that materializes in unexpected places. «Scientific American». June 1976, p. 120—125. Перевод А. Вайнштейна и Е. Черник. Печатается с разрешения журнала «Scientific American», за которым сохраняются все права ©.

найдет эту последовательность в книге Слоуна. Она почти наверняка будет приведена в справочнике с дополнительными сведениями, из которых читатель сможет узнать, что это за штука.

В этой статье мы рассмотрим последовательность

$$1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, \ldots,$$

имеющую в справочнике номер 577. Члены этой последовательности называются *числами Каталана*. Они не так хорошо известны, как числа Фибоначчи, но обладают тем же прелестным свойством неожиданно появляться в самых непредвиденных местах, особенно в комбинаторных задачах. В 1971 году математик из университета Зап. Виргинии Генри Гулд опубликовал библиографию, содержащую 243 ссылки на случаи использования чисел Каталана; во многих случаях авторы статей даже не подозревали, что имели дело с последовательностью, известной в течение более чем двух веков. В 1976 году Гулд увеличил число ссылок до 450. Вообще, числа Каталана — часто встречающаяся последовательность; тем не менее она достаточно неизвестна, чтобы заставить математика, лишенного доступа к справочнику Слоуна, затратить большие усилия на переоткрытие формул, выведенных много лет назад.

Первым с числами Каталана столкнулся Леонард Эйлер. Он подсчитал, сколькими способами выпуклый многоугольник может быть разделен на треугольники непересекающимися диагоналями. В качестве примера можно привести случай треугольника, квадрата, пятиугольника и шестиугольника (рис. 1). Заметим, что в каждом из этих случаев, независимо от количества сторон n-угольника, число диагоналей равно $n-3$, а число треугольников $n-2$. Легко доказать, что это соотношение выполняется вообще для всех многоугольников. Числа различных триангуляций указанного вида для каждого из этих четырех многоугольников есть первые четыре члена последовательности Каталана.

Эйлер, используя метод математической индукции, который здесь, по его словам, оказался трудоемким, получил такую формулу:

$$\frac{2\cdot 6\cdot 10\cdot \ldots \cdot (4n-10)}{(n-1)!}.$$

Сомножители, стоящие в числителе, задаются формулой $4n-10$, где n — целое положительное число большее 2. Восклицательный знак, конечно же, обозначает факториал (произведение всех целых положительных чисел, не превосходящих данного числа). Например, при $n=6$ (случай шестиугольника) формула

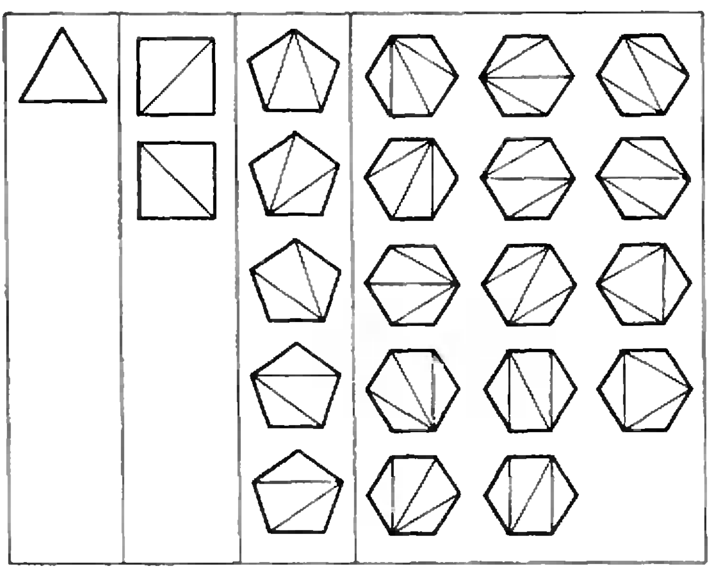
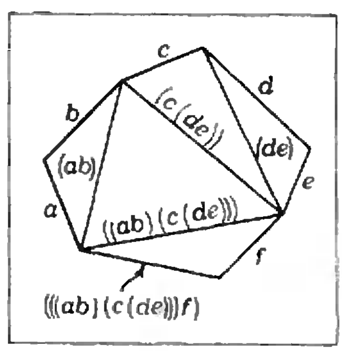


Рис. 1. Задача Леонарда Эйлера о триангуляции многоугольника.

Рис. 2. «Скобочная» триангуляция семиугольника.



kvant.mccme.ru

принимает вид

$$\frac{2\cdot6\cdot10\cdot14}{5!}=14\,.$$

Очень простые рекуррентные формулы получаются, если поместить еще одну единицу перед рядом 1, 2, 5, 14, ... (Получим ряд 1, 1, 2, 5, 14...) Пусть k — последнее вычисленное число Каталана, а n — номер следующего числа. Тогда это число вычисляется по формуле

$$\frac{k\,(4n-6)}{n}\,.$$

Современник Эйлера Иоганн Андреас фон Сегнер получил загадочную рекуррентную формулу для последовательности Каталана вида 1, 1, 2, 5, ... Запишем в ряд все уже найденные числа Каталана, а под ними запишем те же числа в обратном порядке. Умножим каждое верхнее число на соответствующее нижнее и сложим получившиеся произведения; результат и будет следующим числом Каталана. Например,

$$\times\begin{array}{c}1\,1\,2\,5\,14\\ 14\,5\,2\,1\,1\end{array}$$
$$\overline{14+5+4+5+14=42}$$

Задача Эйлера о триангуляции многоугольника в некотором смысле изоморфна задачам, казалось бы, совсем с ней не связанным. Сам Эжен Шарль Каталан, бельгийский математик, именем которого названа последовательность, в 1838 году решил следующую задачу. Пусть у нас имеется цепочка из n букв, расположенных в заданном порядке. Необходимо расставить $n-1$ пару скобок таким образом, чтобы внутри каждой пары стояло ровно два «выражения». Этими спаренными выражениями могут быть либо две соседние буквы, либо буква и соседнее выражение в скобках, либо два соседних выражения. Сколькими способами могут быть расставлены скобки?

Для двух букв a, b, имеется только одна возможность: (ab). Для трех букв таких возможностей уже две: $((ab)\,c)$ и $(a\,(bc))$. Для четырех букв количество способов увеличивается до пяти: $((ab)(cd))$, $(((ab)\;c)\;d)$, $(a\;(b\;(cd)))$, $(a\;((bc)\;d))$ и $((a\;(bc))\;d)$.

Эти числа 1, 2 и 5 есть первые три числа Каталана; оказывается, числа Каталана дают нам количество способов расстановки скобок в буквенных цепочках соответствующих длин.

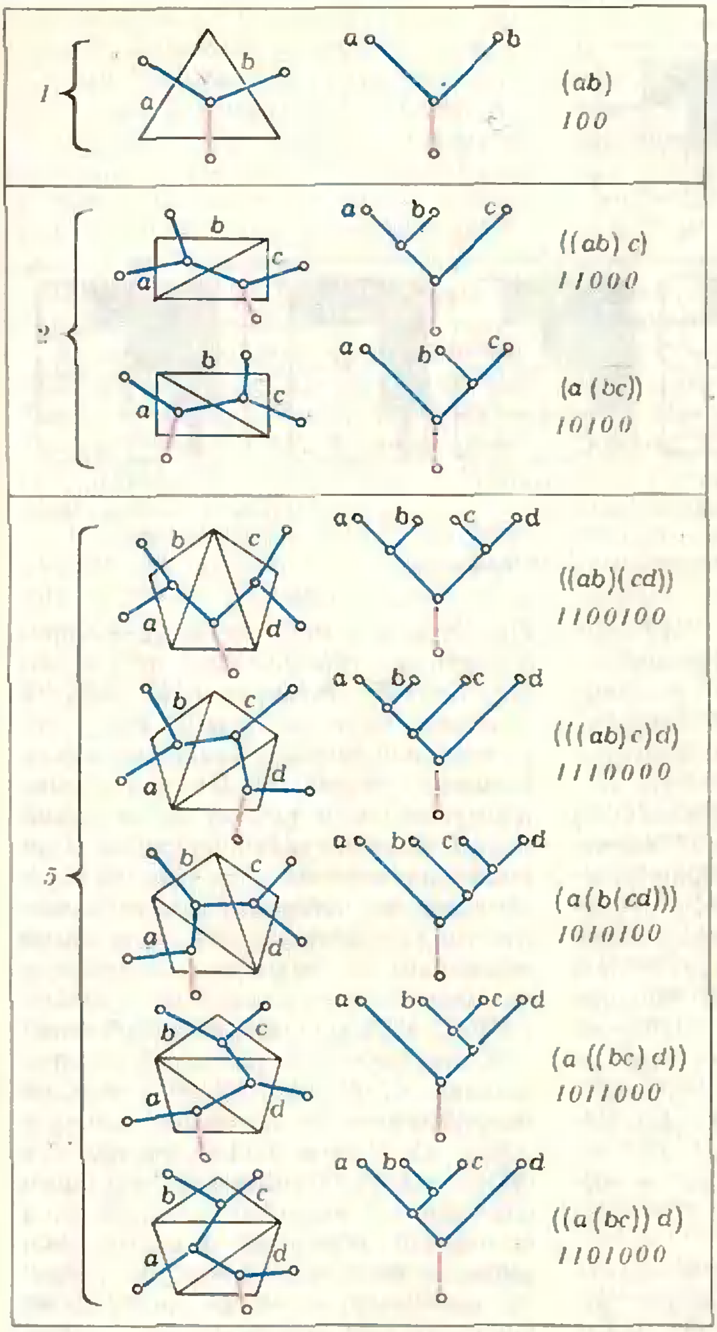
В 1961 году Фордер, описывая числа Каталана, указал простой способ установления взаимно однозначного соответствия между описанными выше триангуляциями многоугольников и расставлением скобок в буквенных цепочках. В качестве примера рассмотрим триангулированный семиугольник (рис. 2). Обозначим все его стороны, кроме одной, буквами от a до f. Каждую диагональ, образующую треугольник с двумя смежными сторонами семиугольника, обозначим буквами этих сторон, взятыми в скобки. Все оставшиеся диагонали последовательно обозначим буквами подобным же образом, комбинируя обозначения двух других сторон соответствующего треугольника. Основание обозначается последним, и обозначение для него однозначно определяется триангуляцией. Если применить этот прием для многоугольников, изображенных на рисунке 3, то получим цепочки букв с расставленными скобками.

Английский математик Артур Кэли доказал, что числа Каталана перечисляют все плоские корневые кубические деревья*). Дерево — это связный граф (вершины, соединенные отрезками), не имеющий циклов. «Плоский» означает, что граф нарисован на плоскости без пересечений. «Корневое» — что дерево имеет «ствол», конец которого назван корнем. Таким образом, граф можно нарисовать в виде как бы растущего вверх из земли дерева. «Кубическое» означает, что в каждой вершине (кроме корня и концов веток) дерево разветвляется, образуя точки, в которых встречаются 3 ребра.

Изображение такого дерева (рис. 3) говорит само за себя. Цветные линии показывают, как триангуляция многоугольника порождает корневое кубическое дерево. Рядом с многоугольниками эти деревья изо-

*) Именно, n-е число Каталана равно количеству плоских корневых кубических деревьев с $(n+1)$-й концевой вершиной. (*Прим. ред.*)

kvant.mccme.ru



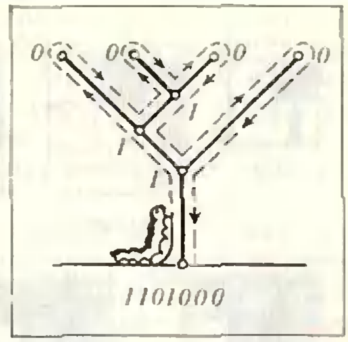


Рис. 4.

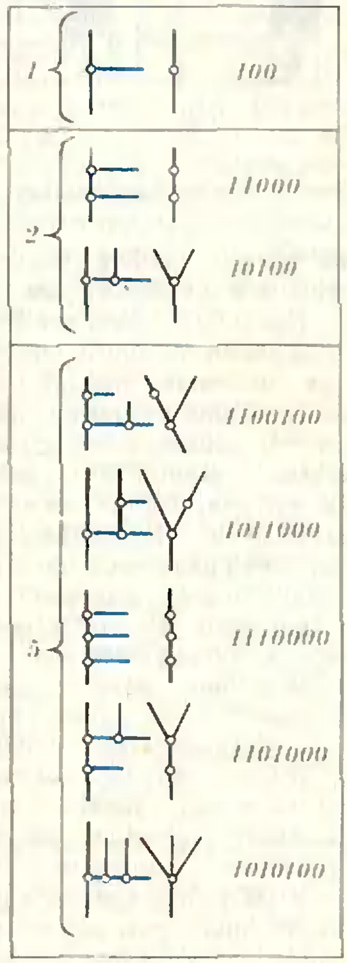


Рис. 3. Триангуляция и корневые кубические деревья.

Рис. 5. Преобразование корневых кубических деревьев в корневые деревья с фиксированным числом ребер.

бражены в общепринятом виде. Легко понять, каким образом порядок расположения ветвей соответствует расстановке скобок. Под каждой цепочкой букв со скобками мы запишем двоичное число, получаемое заменой всех левых скобок единицами, а всех букв — нулями, пропуская правые скобки. Эта двоичная запись — удобный краткий способ записи нашей триангуляции многоугольника и соответствующего этой триангуляции дерева. Нам нет необходимости вводить обозначения для правых скобок, так как если задано положение левых скобок и метод группировки букв,

kvant.mccme.ru

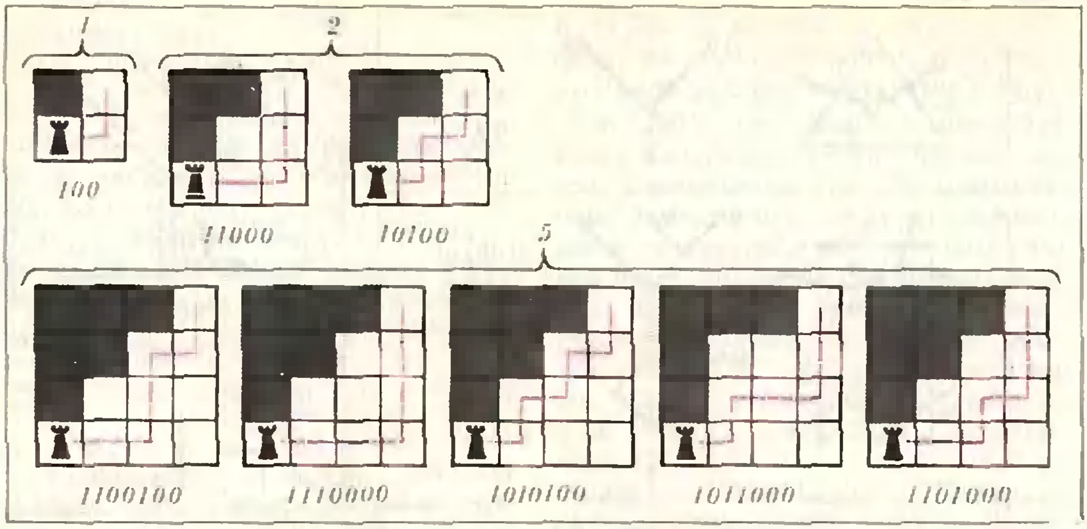


Рис. 6. Как числа Каталана перечисляют пути ладьи.

то правые скобки могут быть расставлены единственным образом.

Польский математик Ян Лукасевич предложил удобный способ нахождения двоичного числа, соответствующего данному дереву (рис. 4). Нарисуем дерево с четырьмя верхними ветвями. Концы этих ветвей помечены нулями, а кубические вершины — единицами. Представим себе червяка, взбирающегося по стволу и обходящего все дерево вдоль пунктирной линии (рис. 4). На каждой вершине червяк объявляет метку. Однажды объявленная метка второй раз не называется. В нашем примере червяк объявит метки 1101000, дающие то самое двоичное число, которое отвечает расстановке скобок в выражении, соответствующем этому дереву.

В 1964 году было обнаружено, что число произвольных корневых деревьев с n ребрами также равно n-му числу Каталана. У таких деревьев всего n вершин, не считая корня, но вершины могут иметь любую степень.

Можно указать много способов установления взаимно однозначного соответствия между такими деревьями и корневыми кубическими деревьями. Простейший способ был указан Фрэнком Бернхартом (рис. 5). Кубические деревья перерисуем так, чтобы каждое ребро росло от вершины вертикально вверх или горизонтально вправо. Представим себе, что каждое горизонтальное ребро (на рисунке 5 — синие линии) стягивается в точку и исчезает. Если на правом конце горизонтального ребра есть кубическая вершина, то она переносится налево и сливается с вершиной на левом конце. Все вертикальные ребра остаются различными. Это простое преобразование переводит все корневые кубические деревья с n концевыми вершинами в корневые деревья с n ребрами.

Червяк, обползающий любое дерево из этого нового множества (см. рисунок 5, правое дерево в каждой паре), назовет то же самое двоичное число, что и на исходном дереве, если он изменит свой алгоритм следующим образом. Он начинает не с корня, а с нижней вершины. Каждый раз, когда червяк лезет вверх по ребру, он записывает 1, когда же он лезет вниз, то записывает 0.

Рассмотрим шахматные доски со сторонами 2, 3, 4, ..., в которых закрашены все квадраты северо-западнее главной диагонали (рис. 6). Требуется провести ладью из левого нижнего угла в правый верхний. Двигаться можно только на север и на восток, не заходя при этом на закрашенные клетки. Спрашивается, сколько существует различных путей ладьи на доске со стороной n?

И снова дают ответ числа Каталана. Под стороной длины n напишем

kvant.mccme.ru

двоичное число, соответствующее корневому кубическому дереву с n концевыми вершинами. Продвигаясь по двоичным разрядам числа слева направо, будем двигать ладью вправо, проходя 1, и вверх, проходя 0 (последняя двоичная цифра не учитывается). Эта последовательность двоичных цифр определяет путь, и все пути ладьи могут быть получены таким же образом.

Ниже приводятся еще 7 занимательных задач, решаемых с помощью чисел Каталана. В первых пяти я отметил, как соответствующие двоичные числа (без последней цифры) дают решение задачи.

1. Два человека, A и B, баллотируются на должность. Каждый из них получает n голосов. Сколькими способами можно подсчитать $2n$ голосов так, чтобы ни разу A не был впереди B? (1 — голос за A, 0 — голос за B).

2. Положим пенни, никель и дайм*) в ряд. На пенни положим лицом вверх колоду из n карт, идущих по старшинству снизу вверх. За один раз карту можно передвинуть или с пенни на никель, или с никеля на дайм (другие перемещения не разрешаются). Пользуясь этими двумя ходами, мы перенесем все карты на дайм за $2n$ ходов. Сколько разных перестановок можно получить на дайме, если исходное количество карт n? (1 — перемещение с пенни на никель, 0 — перемещение с никеля на дайм).

3. Пьяница выходит из дверей бара и бредет вперед. Он с равной вероятностью делает шаг вперед или назад, причем все шаги его равны по длине. Сколькими способами он может вернуться к двери за $2n$ шагов? (1 — шаг вперед, 0 — шаг назад.)

Этой задаче о случайном блуждании можно придать другую форму. Король начинает с 1-го ряда шахматной доски, и, делая ход вперед или назад по вертикали, возвращается на исходную клетку после $2n$ ходов. Нарисуем пространственно-временную диаграмму, откладывая время по горизонтальной оси. Зигзагообразную линию можно рассматривать как профиль горной цепи с пиками высотой в целое число миль, не превышающее n. Кривые ходов короля изобразят все горные цепи такого вида.

4. Четное число ($2n$) солдат, все разного роста, построены в две равные шеренги — A и B. Сколькими способами можно это сделать так, чтобы слева направо в каждой шеренге солдаты расположились в порядке увеличения роста, и любой солдат в шеренге B был выше соответствующего солдата в шеренге A? (Занумеруем солдат числами 1, 2, 3, ..., по возрастанию роста, и занумеруем также слева направо цифры в двоичных числах, соответствующих корневым деревьям с n ребрами. Тогда номера единиц дадут положение солдат в ряду A, а номера нулей — в ряду B. Эта задача легко моделируется с помощью колоды карт.)

5. Билеты стоят 50 центов, и $2n$ покупателей стоят в очереди в кассу. Половина из них имеет по 1 доллару, остальные — по 50 центов. Кассир начинает продажу билетов, не имея денег. Сколько существует различных порядков в очереди, таких что кассир всегда сможет дать сдачу? (1 — 50 центов, 0 — 1 доллар.)

6. Гексафлексагоны — это занимательные игрушки, получающиеся при складывании прямых или зигзагообразных полос бумаги в шестиугольники, которые меняют свою лицевую поверхность при перегибании (они описаны в главе 1 моей книги*). Правильный гексафлексагон определенного типа при перегибании проходит через различные состояния. Общее количество таких состояний для всех правильных гексафлексагонов с n поверхностями является числом Каталана. Например, гекса-гексафлексагон (6 поверхностей) может быть сделан тремя способами. Полное число всех состояний — число Каталана 42.

Если мы не будем обращать внимание на состояния гексафлексагона

---

*) Пенни, никель, дайм — мелкие монеты: 1, 5, 10 центов США. (*Прим. перев.*)

*) М. Гарднер. Математические головоломки и развлечения, «Мир», 1971 г.

kvant.mccme.ru

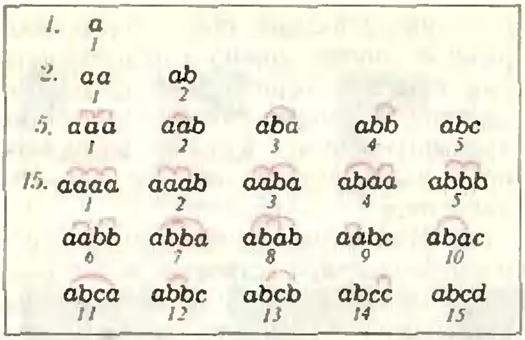


Рис. 7. Как числа Белла перечисляют рифмовки.

и заинтересуемся, сколькими существенно различными способами можно сделать гексафлексагон с n поверхностями, то ответ дается последовательностью, перечисляющей триангуляции многоугольников без учета тех, которые получаются вращением или отражением уже полученных. Эта замечательная последовательность (№ 942 по книге Слоуна) имеет вид 1, 3, 4, 12, 27, 82, 228, 733, 2282, 2528, ...

В неопубликованных статьях Бернхарта и других энтузиастов, интересующихся флексагонами, описано, как смену состояний, возникающую при перегибании флексагона с n поверхностями, можно наглядно представить, двигаясь вдоль линий $(n+1)$-угольника, разбитого на треугольники.

7. За круглым столом сидит четное число человек. Каждый пожимает руку одному из остальных так, что никакие две пары соединенных рук не пересекаются. Сколькими способами это можно сделать?

Можете ли вы найти простой геометрический способ установления взаимно однозначного соответствия между этой задачей и каждой из предыдущих? (Имеется изящный способ, предложенный Бернхартом.)

Нерекуррентные формулы для n-го числа Каталана имеют различный вид в зависимости от того, как занумерованы члены последовательности. Формула приобретает простейший вид, если последовательность начинается так: 1, 2, 5, ... При такой нумерации n-м числом Каталана будет

$$\frac{(2n)!}{n!(n+1)!}.$$

Если последовательность начинается с 1, 1, 2, 5, ..., то оказывается, что все нечетные числа Каталана, большие единицы, стоят на тех и только тех местах, номера которых являются степенью двойки. Так, четвертое, восьмое, шестнадцатое и т. д. числа Каталана — нечетные. Это только одно из многих необычайных свойств последовательности.

Предостережение: решая комбинаторные задачи, легко перепутать числа Каталана с тесно связанной с ними последовательностью 1, 2, 5, 15, 52, 203, 877... (В примечании к своей библиографии, которая также включает список ссылок на указанную выше последовательность, Гулд отмечает, что если подсчитываемые объекты достаточно сложны, то при $n=4$ легко можно пропустить 15-й объект и предположить, что имеешь дело с последовательностью Каталана.) Эти числа называются числами Белла по имени Эрика Белла, опубликовавшего много статей на эту тему. Числа Белла перечисляют разбиения на классы множества из n элементов. Например, количество различных рифмовок для строфы из n строчек есть число Белла. Четырехстишие имеет 15 возможных рифмовок. Если на правила рифмовки в сонете (состоящем из 14 строчек) махнуть рукой, получится 190 899 322 различных рифмовок (14-е число Белла).

На рисунке 7 показывается, как числа Белла перечисляют все рифмовки для строф, содержащих от одной до четырех строк. Рифмующиеся между собой строки соединим дугами. Отметим, что лишь когда мы добрались до четверостиший, потребовалось пересечение дуг (№ 8). Джоанна Гроуми, исследовавшая эту проблему в 1970 году в своей докторской диссертации, назвала рифмовки, которые не нуждаются в пересечении дуг, плоскими. Числа Белла перечисляют все рифмовки, числа Каталана — только плоские рифмовки.

Числа Белла стоят в справочнике Слоуна под номером 585. Но колокола*) вызванивают другую историю, которую мы отложим до будущих времен.

---

*) У Гарднера здесь игра слов: Bell (Белл) — bell (колокол). (*Прим. ред.*)

kvant.mccme.ru

Е. Пальчиков

Какого цвета зеленка?

Не верь глазам своим.
К. Прутков

Та самая зеленка, которой смазывают мелкие раны и царапины? Многие, наверное, скажут, что зеленого (и будут правы!).

Но посмотрите сквозь пузырек с зеленкой на какой-нибудь яркий источник света — например, на Солнце, нить лампочки накаливания или на дуговой разряд. Вы увидите, что зеленка пропускает только красный свет. Получается, что зеленка красного цвета!?

Возьмите несколько кювет разной толщины, налейте в них раствор зеленки*) и посмотрите на просвет. Тонкие слои раствора имеют, действительно, зеленый цвет, более толстые приобретают неопределенную серую окраску (с пурпурным оттенком), а еще более толстые кажутся красными. Иными словами, **цвет зависит от толщины слоя раствора**. Как это можно объяснить?

Оказывается, спектр пропускания тонкого слоя зеленки имеет в видимой области две полосы прозрачности: широкую сине-зеленую и узкую красную (рис. 1). На самом деле красная полоса не узкая, а простирается дальше в инфракрасную область, но глаз человека из этой широкой полосы видит только маленький кусочек, попадающий в область видимого света. В красном участке поглощение мало по сравнению с сине-зеленым (коэффициент пропускания для красного света существенно больше, чем для сине-зеленого). Но сине-зеленая полоса шире красной и расположена в том участке спектра, где глаз имеет высокую чувствительность. Поэтому раствор зеленки в тонком слое будет казаться зеленым.

Увеличим толщину слоя зеленки в два раза, или, что то же самое, расположим последовательно друг за другом два одинаковых слоя. Как изменится коэффициент пропускания света? Очевидно, уменьшится. Чтобы получить его новое значение, надо перемножить коэффициенты пропускания первого слоя и второго такого

Рис. 1.

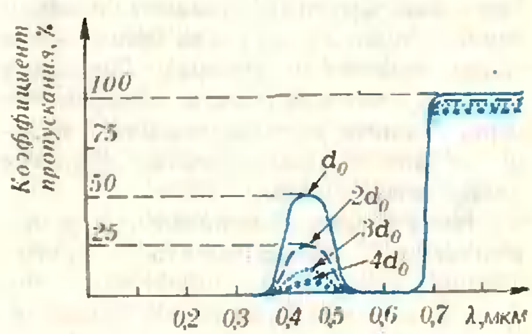


Рис. 2.

*) Зеленку желательно разбавить, иначе придется брать очень тонкие кюветы.

А. Лушков, Ю. Лужков

«Звезды» из водяной капли

В двенадцатом номере нашего журнала за прошлый год в разделе «Лаборатория «Кванта» была опубликована статья М. Голубева и А. Кагаленко «Капля на горячей поверхности». Редакция получила много откликов на эту статью. Предлагаем вашему вниманию небольшую заметку об одном из опытов, проведенных с водяной каплей на раскаленной поверхности.

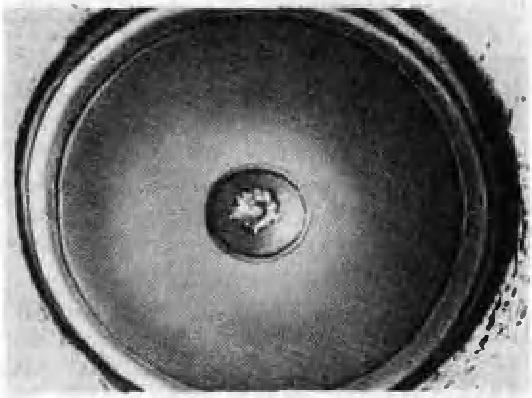


Рис. 1.

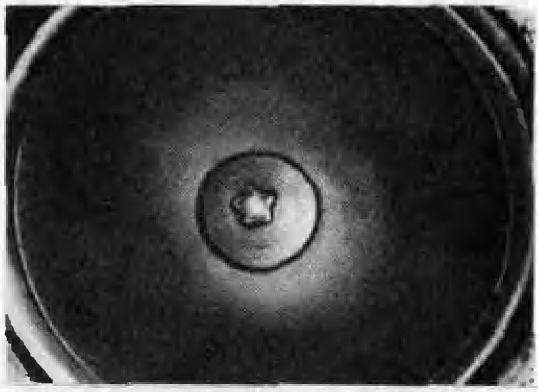


Рис. 2.

Для опытов мы воспользовались дальней левой конфоркой (мощностью 1500 Вт) электроплиты «Луч». С помощью тонкой наждачной бумаги тщательно очистили от грязи сферическую поверхность конфорки (радиус кривизны равен 80 мм), раскалили ее до температуры 400—500°С и капнули на нее немного воды (массой 3—8 г).

Сначала капля вела себя очень неустойчиво: она вращалась, вытягиваясь из стороны в сторону, в центре капли появлялись и лопались пузырьки пара (рис. 1). Пар выбрасывался в окружающее пространство небольшими порциями вместе с частичками воды.

После некоторого уменьшения размеров капли ее поведение стало более стабильным — в капле возникли устойчивые продольно-поперечные колебания. В результате такого сложного колебательного движения вместо сферической капли появилась «звезда» правильной геометрической формы (рис. 2). В разных опытах число лучей «звезды» было разным — от 5 до 8. Если капля была достаточно крупной (диаметром 25—30 мм), вместо «звезды» возникал звездчатый диск с 20—24 зубцами.

Характерным признаком, предшествующим появлению «звезды», было возникновение на поверхности капли «морщин», а внутри капли — отчетливо видных колец. Время жизни «звезды»-капли составляло обычно около 3 секунд.

же слоя. Другими словами, коэффициент пропускания для одного слоя надо возвести в квадрат. При этом для сине-зеленой полосы коэффициент пропускания уменьшится очень сильно, а для красной полосы останется почти неизменным.

На рисунке 2 показано, как изменяются коэффициенты пропускания красной и сине-зеленой полос при последовательном увеличении толщины слоя зеленки. Ясно, что доля сине-зеленого света становится все меньшей и меньшей по сравнению с долей красного света. Начиная с некоторой определенной толщины, раствор зеленки на просвет будет не зеленым, а красным.

Так какого же цвета зеленка на самом деле?

Если вы по-прежнему затрудняетесь ответить на этот вопрос, советуем вам прочитать статью В. Фабриканта «Сюрпризы зеленого стекла», опубликованную в этом номере журнала (прим. ред.).

kvant.mccme.ru

Г. С. М. Коксетер, С. Л. Грейтцер

Задача о трех кувшинах

Предлагаемая статья является отрывком из книги американских математиков Г. С. М. Коксетера и С. Л. Грейтцера «Новые встречи с геометрией», русский перевод которой в ближайшее время будет опубликован в серии «Библиотека математического кружка» издательством «Наука». Материал подготовлен к печати Л. Савиной.

Сейчас мы рассмотрим применение геометрии к решению задач, в которых требуется разделить жидкость на определенные порции с помощью инструментов, казалось бы, непригодных для этого. Для решения нам понадобятся так называемые *трилинейные координаты*, которые мы сейчас и опишем.

Обычно для нанесения точек с заданными декартовыми координатами пользуются миллиметровой бумагой. Для наших целей лучше использовать *триангулированную бумагу*, т. е. бумагу, на которой проведены три системы параллельных линий, разбивающие ее на маленькие равносторонние треугольники. Нарисуем на такой бумаге большой равносторонний треугольник ABC со сторонами, проходящими по линиям сетки. Для произвольной точки P в этой плоскости определим числа x, y, z как расстояния от этой точки до прямых BC, CA и AB соответственно, причем для каждой из этих прямых расстояние будем считать положительным, если точка лежит по ту же сторону от этой прямой, что и треугольник ABC, и отрицательным в противном случае. Полученную тройку чисел (x, y, z) будем называть *трилинейными координатами точки P относительно треугольника ABC*. Заметим, что для точек, лежащих внутри треугольника ABC, все три координаты положительны. Кроме того, если a — длина стороны треугольника, а h — высоты $\left(h=\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$, то

$$\frac{1}{2}(ax+ay+az)=$$
$$=S_{PBC}+S_{PCA}+S_{PAB}=S_{ABC}=\frac{1}{2}ah,$$

откуда следует, что

$$x+y+z=h.$$

Трилинейные координаты чрезвычайно удобны для описания ситуации, в которой участвуют три переменные величины, имеющие постоянную сумму. Если одна из этих величин x, y или z остается постоянной, а две другие изменяются, то точка (x, y, z) движется по прямой, параллельной одной из сторон треугольника ABC. В частности, прямые, на которых лежат стороны BC, CA и AB, описываются уравнениями

$$x=0,\ y=0,\ z=0,$$

а вершины A, B, C имеют координаты $(h, 0, 0)$, $(0, h, 0)$, $(0, 0, h)$.

Именно такая ситуация возникает в том случае, когда h литров жидкости разлито по трем сосудам: в первом x литров, во втором y литров и в третьем — z литров. Постепенному переливанию жидкости из второго сосуда в третий соответствует движение точки с трилинейными координатами (x, y, z) относительно треугольника ABC с высотой, равной h, по прямой $x=\text{const}$ в направлении, соответствующем уменьшению y и увеличению z. Если каждый сосуд может вмещать h литров (такую ситуацию мы будем обозначать символом $|h;\ h,\ h,\ h|$), то каждая из координат x, y, z может принимать любое значение от 0 до h, и множество точек, в которые можно попасть, *как-то* переливая жидкость из одного сосуда в другой — это множество мы назовем *областью операций* — задается неравенствами

$$0\leqslant x\leqslant h,\quad 0\leqslant y\leqslant h,\quad 0\leqslant z\leqslant h,$$

kvant.mccme.ru

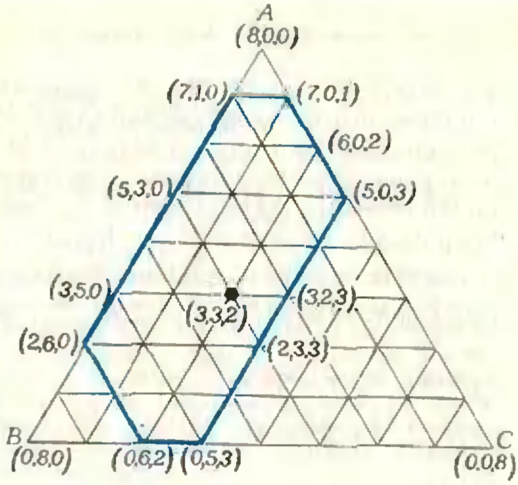


Рис. 1.

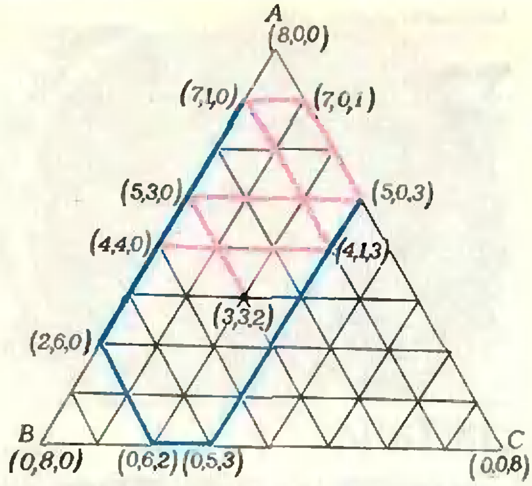


Рис. 2.

и совпадает со всем треугольником ABC.

Гораздо больший интерес представляет случай $[h;\ a,\ b,\ c]$. Здесь три данных сосуда имеют емкости a, b, c и $h \geqslant a > b > c$. Поставим задачу: *нужно отмерить определенную величину d литров жидкости, многократно переливая ее из одного сосуда в другой; при этом разрешается только либо полностью опорожнить один сосуд, либо до краев наполнить другой (а возможно, произойдет то и другое одновременно)*. Область операций теперь задается неравенствами

$$0 \leqslant x \leqslant a, \quad 0 \leqslant y \leqslant b, \quad 0 \leqslant z \leqslant c,$$

которые, как правило, определяют правильный или неправильный шестиугольник, ограниченный шестью прямыми

$$x=0,\ x=a,\ y=0,\ y=b,\ z=0,\ z=c.$$

Но в частных случаях эта область может превратиться в пятиугольник, трапецию, параллелограмм или (как мы уже видели) охватывать весь равносторонний треугольник.

Будем считать, что числа a, b, c, h и d — целые.

На рисунках 1 и 2 проиллюстрирована ситуация $[8;\ 7,\ 6,\ 3]$: 8 литров жидкости некоторым образом разлиты в сосуды емкостью 7, 6 и 3 литров. Здесь областью операций является шестиугольник $0 \leqslant x \leqslant 7$, $0 \leqslant y \leqslant 6$, $0 \leqslant z \leqslant 3$, ограниченный прямыми $x=7$, $z=0$, $y=6$, $x=0$, $z=3$, $y=0$. Трилинейные координаты вершин шестиугольника (относительно равностороннего треугольника с высотой 8) — (7, 1, 0), (2, 6, 0), (0, 6, 2), (0, 5, 3), (5, 0, 3), (7, 0, 1). Допустим что в первом сосуде находится 3 литра жидкости, во втором — тоже 3; тогда в третьем сосуде — 2 литра жидкости. Такому распределению жидкости соответствует точка с координатами (3, 3, 2). Шесть направлений, исходящих из этой точки, указывают на шесть возможных операций по переливанию. Направление от точки (3, 3, 2) к точке (5, 3, 0) соответствует процессу опустошения третьего сосуда: содержавшаяся в нем жидкость переливается в первый сосуд; противоположному же направлению — от точки (3, 3, 2) к точке (2, 3, 3) — процесс наполнения третьего сосуда: он доливается жидкостью из первого. Направлению от точки (3, 3, 2) к точке (0, 6, 2) соответствует процесс опустошения первого сосуда, содержимое которого переливается во второй сосуд; при этом второй сосуд полностью заполняется, и т. д.

Допустим, что нам нужно отмерить 4 литра жидкости (то есть получить 4 литра хотя бы в одном из сосудов). Прежде всего заметим, что при первом же разрешенном переливании жидкости мы от внутренней точки области операций (в нашем случае — от точки (3, 3, 2)) переходим к ее граничной точке — таковы условия переливания. Например, красная ломаная на рисунке 2 задает один из возможных способов перехода от точ-

kvant.mccme.ru

ки (3, 3, 2) к точке (4, 4, 0) (и, таким образом, деления восьми литров на две равные порции). Легко видеть, что звенья ломаной всегда параллельны сторонам треугольника ABC, причем ломаная «поворачивает» только тогда, когда попадает на границу области. Если теперь, не ставя перед собой задачи об отмеривании четырех литров, провести из точки (3, 3, 2) всевозможные ломаные (со звеньями, параллельными сторонам треугольника ABC, и с концами на границе нашей шестиугольной области), то рано или поздно мы побываем во всех граничных точках нашего шестиугольника. То же справедливо для любой целой точки данной области операций (как внутренней, так и граничной). Значит, каково бы ни было распределение восьми литров жидкости по сосудам для случая [8; 7, 6, 3], «доливанием» и «опорожнением» сосудов можно отмерить любое целое число литров жидкости (меньшее восьми).

На рисунке 3 проиллюстрирован случай [10; 8, 7, 6]: 10 литров жидкости разлиты по сосудам, вмещающим 8, 7 и 6 литров. Область операций здесь снова шестиугольник. В этом случае для любого распределения десяти литров по сосудам легко отмерить $d=1$, 2, 3, 4, 6, 7, 8 и 9 литров жидкости. Но если с самого начала ни в одном из сосудов не содержится пяти литров жидкости, то мы эти 5 литров никогда не сможем отмерить, поскольку путь, проходящий через точки (0, 5, 5), (5, 0, 5) и (5, 5, 0), замкнут, и на него нельзя попасть ни с какого другого пути. Вообще, если $h=2d \geqslant a > b > c > d$, то в ситуации $[h; a, b, c]$ опустошением и доливанием сосудов d литров жидкости нельзя отмерить, как бы эти h литров ни были распределены по сосудам, если только ни в одном из сосудов первоначально не было d литров.

Рассмотрим еще случай [10; 8, 6, 4] — четное число литров жидкости разлито по сосудам с четными емкостями (рис. 4). Здесь область операций — пятиугольник. Из рисунка 4 видно, что если первоначально в каждом из сосудов было по четному числу литров, то есть исходная точка — с четными координатами (например, (6, 2, 2)), то мы никогда не сможем отмерить нечетное число литров жидкости.

Наиболее известны задачи, соответствующие случаю $[h; a, b, c]$, где $h=a=2d=b+c$. В этом случае область операции — параллелограмм с вершинами (a, 0, 0), (c, b, 0), (0, b, c), (b, 0, c). На рисунках 5 и 6 показаны два решения задачи, соответствующей случаю [8; 8, 5, 3] с исходным распределением жидкости (8, 0, 0); требуется отмерить 4 литра жидкости. Иными словами, два человека, имея сосуд, наполненный восемью литрами какой-то жидкости, и два пустых сосуда, емкостью 5 литров и 3 литра, хотят разделить эти 8 литров жидкости поровну.

Первое, что нужно сделать, — это наполнить либо сосуд емкостью 5 литров, как на рисунке 5, либо сосуд емкостью 3 литра, как на рисунке 6.

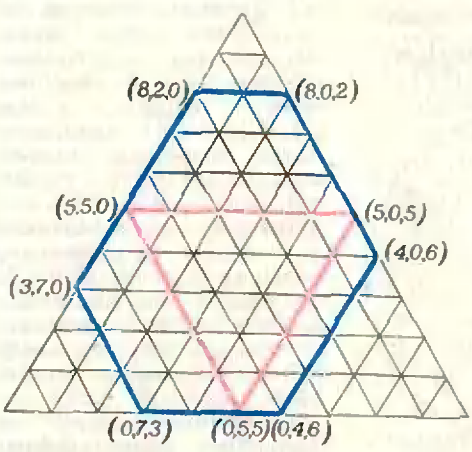


Рис. 3.

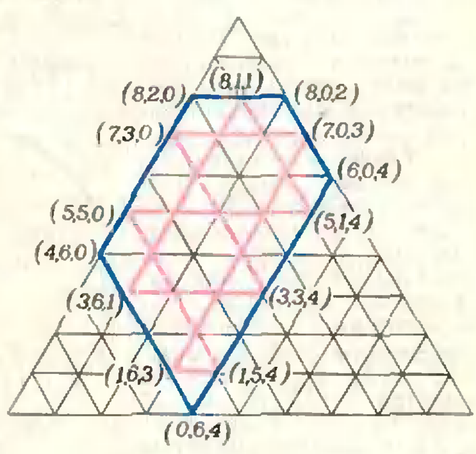


Рис. 4.

kvant.mccme.ru

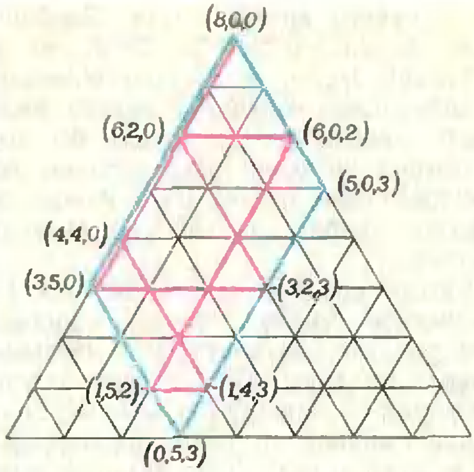


Рис. 5.

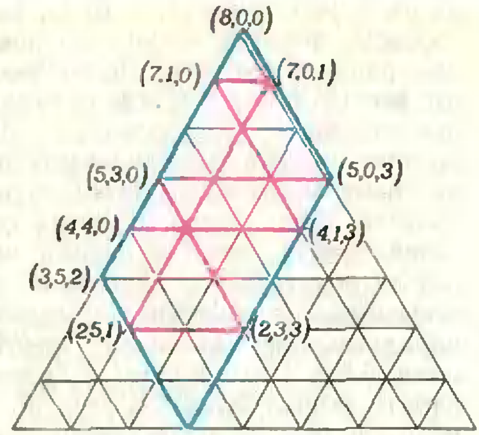


Рис. 6.

После этого всякий раз, когда ломаная попадает на одну из сторон нашего параллелограмма — прямые $y=0$, $y=5$, $z=0$, $z=3$, — мы рассматриваем эту сторону как зеркало. (Правило зеркальных отражений объясняется тем, что каждый отрезок ломаной, параллельный стороне исходного треугольника, соответствует операции переливания жидкости из одного сосуда в другой, а третий сосуд в это время не трогают.) Таким образом мы получаем решение $(8, 0, 0) \to (3, 5, 0) \to (3, 2, 3) \to (6, 2, 0) \to (6, 0, 2) \to (1, 5, 2) \to (1, 4, 3) \to (4, 4, 0)$ и решение $(8, 0, 0) \to (5, 0, 3) \to (5, 3, 0) \to (2, 3, 3) \to (2, 5, 1) \to (7, 0, 1) \to (7, 1, 0) \to (4, 1, 3) \to (4, 4, 0)$.

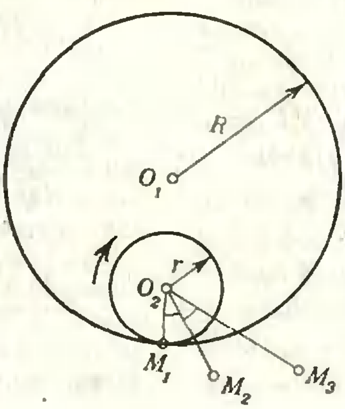
Ясно, что отмерить л ю б о е целое число литров жидкости в ситуации $h=a=b+c$ можно лишь в том случае, когда числа a и b взаимно просты.

Гипотрохоиды

Рисунок на первой странице обложки, выполненный на ЭВМ, изображает семейство замкнутых кривых — гипотрохоид.

Трохоида — линия, которую вычерчивает точка, ж е с т к о с в я з а н н а я с окружностью (O_2, r), катящейся без скольжения по прямой. Когда же окружность (O_2, r) катится не по прямой, а по неподвижной окружности (O_1, R), касаясь ее изнутри, то точка M ж е с т к о с в я з а н н а я с окружностью (O_2, r), описывает гипотрохоиду. Ясно, что циклоида («Квант», 1978, № 4, с. 13) — частный случай трохоиды, гипоциклоида (см. там же) — частный случай *гипотрохоиды*.

Здесь на рисунке изображены точки M_1, M_2, M_3, жестко скрепленные с окружностью (O_2, r), где $r=\frac{R}{3}$. Эти точки расположены так, что $M_1\widehat{O_2}M_2 = M_2\widehat{O_2}M_3$ и $|O_2M_2| - |O_2M_1| = |O_2M_3| - |O_2M_2|$. (Таким образом, точки M_1, M_2 и M_3 лежат на спирали Архимеда — см. «Квант», 1976, № 6, третья страница обложки).



Семейство гипотрохоид, показанное на обложке, описывается точками $M_1, M_2, M_3, \ldots, M_{10}$, расположенными аналогичным образом. При $|O_2M_i| < 2R/3$ гипотрохоида — замкнутая самопересекающаяся линия, представляющая из себя вогнутый криволинейный треугольник с петлями у вершин. Если же $|O_2M_i| > 2R/3$, то получаем замкнутую самопересекающуюся линию несколько иного вида: она состоит из трех выпуклых лепестков, пересечение которых — выпуклый криволинейный треугольник.

В. Березин

kvant.mccme.ru

задачник Кванта

Задачи

М511—М515; Ф523—Ф527

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи не стандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. Решения задач из этого номера можно прислать не позднее 1 октября 1978 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например, «М511, М512» или «Ф523». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»). После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. В этом и следующих номерах «Задачник «Кванта» составлен в основном из задач, предлагавшихся на последней Всесоюзной олимпиаде.

М511. Внутри четырехугольника $ABCD$ отмечена точка M такая, что $ABMD$ — параллелограмм. Докажите, что если $\widehat{CBM}=\widehat{CDM}$, то $\widehat{ACD}=\widehat{CDM}$. (8—9 кл.)

Ю. Михеев

М512. Пусть $f(x)=x^3-x+1$. Докажите, что для любого натурального $m>1$ числа m, $f(m)$, $f(f(m))$, $f(f(f(m)))$, ... попарно взаимно просты. (10 кл.)

А. Колотов

М513*. Докажите, что существует такое число A, что в график функции $y=A\sin x$ можно вписать не менее 1978 попарно неконгруэнтных квадратов. (Квадрат называется вписанным, если все его вершины принадлежат графику.) (10 кл.)

В. Федотов

М514*. Докажите, что существует такая бесконечная ограниченная последовательность $\{x_n\}$, что для любых различных m и k выполнено неравенство

$$|x_m-x_k|\geqslant|m-k|^{-1}. \qquad (9,\ 10\ \text{кл.})$$

С. Конягин

М515. Задано конечное множество K_0. К нему добавляются все точки, которые можно получить симметричным отражением одной точки этого множества относительно другой. Полученное множество обозначается K_1. Аналогично из множества K_1 получается K_2, из K_2 — K_3 и т. д.

а) Пусть множество K_0 состоит из двух точек A и B на расстоянии 1. При каком наименьшем n в множестве K_n найдется точка, находящаяся на расстоянии 10000 от точки A?

б) Пусть K_0 состоит из трех вершин правильного треугольника площади 1. Найдите площадь наименьшего выпуклого многоугольника, содержащего множество K_n ($n=1, 2$ ...). (8 кл.)

В следующих трех пунктах K_0 — множество четырех вершин правильного тетраэдра объема 1.

в) Рассмотрим наименьший выпуклый многогранник, содержащий все точки множества K_1. Сколько и каких граней у этого многогранника?

kvant.mccme.ru

г) Чему равен объем этого многогранника?

д)* Найдите объем наименьшего выпуклого многогранника, содержащего множество K_n ($n=2,3, \ldots$). (10 кл.)

Н. Васильев

Ф523. Снаряд разрывается в некоторой точке траектории на два осколка. На рисунке 1, сделанном в определенном масштабе, крестиками отмечены положения снаряда и одного из осколков через последовательно равные промежутки времени. Найдите положения второго осколка в соответствующие моменты времени, если известно, что он находился в точке B в тот момент, когда первый осколок находился в точке A. Стрелкой на рисунке показано направление ускорения свободного падения. Опишите способ построения. (8 кл.)

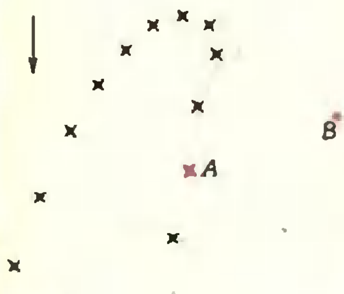


Рис. 1.

Ф524. Модель вертолета, изготовленная в 1/10 натуральной величины, удерживается в воздухе при мощности мотора 30 Вт. Какой должна быть минимальная мощность двигателя вертолета, изготовленного из тех же материалов, что и модель? (9 кл.)

Ф525. При увеличении тока напряжение на разрядном промежутке дугового разряда уменьшается, стремясь при больших токах к некоторому постоянному значению. Дугу включили в сеть последовательно с некоторым балластным резистором. Вольтамперная характеристика для такой цепи показана на рисунке 2. 1) Постройте вольтамперную характеристику дуги без балластного резистора. 2) Используя полученный график, определите максимальное сопротивление балластного резистора, при котором дуга может гореть при напряжении источника $U=85$ В. (10 кл.)

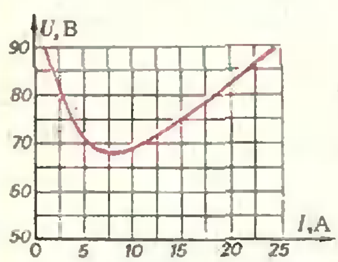


Рис. 2.

Ф526. Полость теплоизолирующих стенок колбы термоса откачана до давления $p=10^{-5}$ атм (при комнатной температуре). Вместимость колбы 1 литр, площадь поверхности колбы $S=600$ см^2. Оценить время, в течение которого чай в таком термосе остынет с 90°C до 70°C. Теплоемкость воды $c=4{,}2\times10^3$ Дж/(кг·К); универсальная газовая постоянная $R=8{,}3$ Дж/(К·моль). Утечку тепла через пробку не учитывать. (9, 10 кл.)

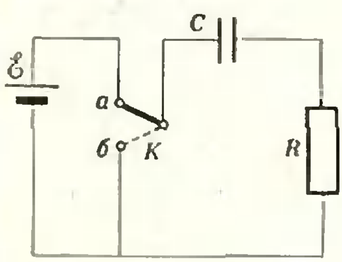


Рис. 3.

Ф527. В схеме, показанной на рисунке 3, э. д. с. батареи $\mathscr{E}=100$ В, ее внутреннее сопротивление $r=100$ Ом, емкость конденсатора $C=200$ мкФ и сопротивление нагревателя $R=10$ Ом. Ключ K переключается между контактами a и $б$ с частотой $f=10$ раз в секунду. При подключении его к клемме a конденсатор успевает полностью зарядиться, а при подключении к клемме $б$ — полностью разрядиться. Чему равен коэффициент полезного действия схемы? Во сколько раз он выше, чем при непосредственном подключении нагревателя к батарее? Какая мощность выделяется на сопротивлении R? (9 кл.)

kvant.mccme.ru

Решения задач

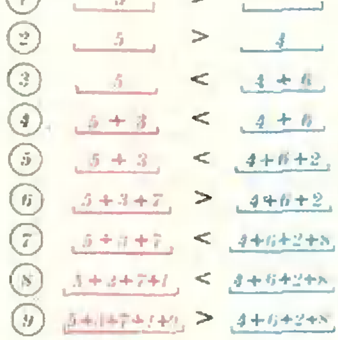
М461—М464; Ф478—Ф481

М461. *На столе стоят чашечные весы и n гирь различных масс. Гири по очереди ставятся на чашки весов (на каждом шаге со стола берется любая гиря и добавляется на ту или другую чашку весов).*

а) Докажите, что гири можно ставить в таком порядке, чтобы сначала перевесила левая чашка, затем правая, потом снова левая, снова правая и так далее.

Этой последовательности результатов взвешиваний сопоставим слово из букв L и R: $LRLRLR\ldots$ Здесь буква L означает, что перевесила левая чашка, а буква R означает, что перевесила правая чашка.

б) Докажите, что для любого слова длины n из букв L и R можно в таком порядке ставить гири на чашки весов, чтобы это слово соответствовало последовательности результатов взвешиваний.



а) Занумеруем все гири в порядке возрастания масс; пусть их массы $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$. Положим первую гирю на левую чашку весов, затем вторую гирю — на правую, третью гирю — на левую и так далее. Легко видеть, что таким образом будет реализована последовательность $LRLRLR\ldots$.

Как видно, это очень легкий случай. Но, исходя из него, можно сформулировать лемму, которая поможет нам дальше.

Лемма. *Пусть несколько занумерованных подряд гирь с массами a_k, a_{k+1}, a_{k+2}, …, a_{l-1}, a_l разложены на весы так, что гири с четными номерами лежат на одной чашке весов, а с нечетными номерами — на другой. Тогда перевешивает та чашка, на которой лежит самая тяжелая гиря a_l.*

Действительно, если число гирь четно, то это вытекает из неравенств $a_l > a_{l-1}$, $a_{l-2} > a_{l-3}$, …; если же число гирь нечетно, то это значит, что на чашку, где лежат гири с массами a_l, a_{l-2}, a_{l-4}, …, положена еще одна — самая легкая — гиря массы a_k, так что эта чашка тем более перевесит.

б) Пусть задано слово длины n из букв L и R. Покажем, как надо ставить гири на чашки весов. Мы будем придерживаться следующих правил.

1) Каждый раз на весах (на обеих чашках) должны лежать гири с номерами, идущими подряд (k, $k+1$, $k+2$, …, $l-1$, l). В частности, следующим взвешиванием к имеющейся группе гирь с массами a_k, a_{k+1}, …, a_l мы должны добавить гирю либо с массой a_{l+1}, либо — с массой a_{k-1}.

2) Все гири с четными номерами кладутся на одну чашку весов, а с нечетными номерами — на другую чашку.

Как вытекает из леммы, при выполнении этих правил перевешивать будет та чашка, на которой лежит самая тяжелая гиря. Поэтому, если мы хотим, чтобы на очередном ходу положение весов не изменилось, то мы должны поставить на соответствующую чашку гирю, которая легче всех поставленных гирь; если же мы хотим, чтобы положение весов изменилось, то на соответствующую чашку нужно поставить гирю, тяжелее всех уже поставленных.

Осталось только решить, какую гирю следует положить на весы самой первой, чтобы хватило «легких» и «тяжелых» гирь. Для этого посмотрим, сколько раз в заданном слове происходит смена букв (L на R и R на L); пусть такая смена происходит m раз. Тогда на первом шагу мы поставим гирю с номером $n-m$.

Легко видеть, что, действуя указанным способом, мы получим последовательность результатов взвешиваний, соответствующую заданному слову.

То же самое решение можно изложить короче, если решать задачу с конца, то есть сначала уложить все гири на весы, а затем по одной их снимать. Положим гири с четными номерами на одну чашку весов, а с нечетными — на другую. Затем, на каждом шаге, если мы хотим изменить положение чашек весов, то с нужной чашки мы снимем самую тяжелую гирю, а если хотим сохранить положение чашек, то снимем самую легкую гирю. Так мы будем делать в соответствии с заданным словом до тех пор, пока не кончатся все гири.

И. Бернштейн

М462. *Плоскость пересекает боковые ребра правильной четырехугольной пирамиды в точках, отстоящих от вершины на расстояния a, b, c и d (рис. 1). Докажите, что*

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}.$$

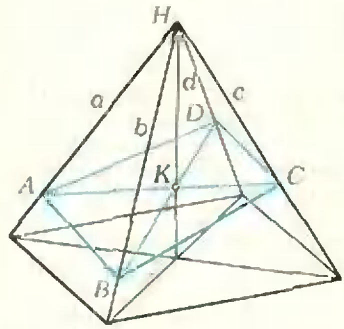


Рис. 1.

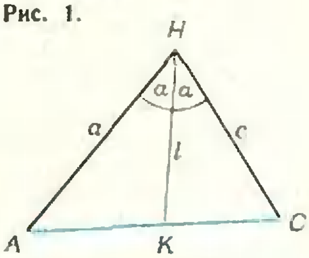


Рис. 2.

Обозначим через α величину угла, который образует высота пирамиды с боковыми ребрами, через A, B, C, D и K — точки пересечения секущей плоскости с боковыми ребрами и высотой, через H — вершину пирамиды (рис. 1). Ясно, что между длинами a, b, c и d должно быть некоторое соответствие: ведь через три точки A, B, C проходит единственная плоскость, следовательно, d можно выразить через a, b и c. Получить такое соотношение, можно, выразив длину общей биссектрисы HK в каждом из треугольников AHC и BHD через угол α и длины их сторон: a, c (в одном) и b, d (в другом) и приравняв результаты. Именно так и получится требуемое равенство.

Для того чтобы получить нужную формулу длины биссектрисы $l=|HK|$ в треугольнике AHC, воспользуемся тем, что $S(AHC)=S(AHK)+S(KHC)$ (рис. 2). Умножив на 2, получим

$$ac\sin 2\alpha = al\sin\alpha + cl\sin\alpha,$$

откуда

$$\frac{2\cos\alpha}{l}=\frac{1}{a}+\frac{1}{c}.$$

Аналогично из треугольника BHC

$$\frac{2\cos\alpha}{l}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{d}.$$

Н. Васильев

◆

М463. *Даны натуральные числа $x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n$. Суммы $x_1+x_2+\ldots+x_m$ и $y_1+y_2+\ldots+y_n$ равны между собой и меньше mn. Докажите, что в равенстве $x_1+x_2+\ldots+x_m=y_1+y_2+\ldots+y_n$ можно вычеркнуть часть слагаемых так, чтобы снова получилось верное равенство.*

$3+3+6 = 1+1+4+6$ *(нельзя)*,
[illegible] $= 1+1+4+7$ *(можно)*

Будем вести доказательство индукцией по $k=m+n$. Так как $x_1+x_2+\ldots+x_m \geqslant m$, $y_1+y_2+\ldots+y_n \geqslant n$, то $mn>m$, $mn>n$, откуда $m\geqslant 2$, $n\geqslant 2$, $k\geqslant 4$. Если $k=4$, то есть $m=n=2$, $x_1+x_2=y_1+y_2<4$, то хотя бы одно из чисел x_1, x_2 равно 1 и хотя бы одно из чисел y_1, y_2 равно 1. Так что для $k=4$ утверждение задачи справедливо. Предположим, что утверждение доказано для $m+n=k$, и докажем его для $m+n=k+1$.

Пусть x_1 — наибольшее из чисел $x_1, x_2, \ldots, x_m$, y_1 — наибольшее из чисел $y_1, \ldots, y_n$ $(m+n=k+1)$. Если $x_1=y_1$, то вычеркиваем x_1 и y_1. Пусть $x_1>y_1$. Рассмотрим равенство

$$(x_1-y_1)+x_2+\ldots+x_m=y_2+\ldots+y_n, \qquad (*)$$

содержащее всего $m+n-1=k$ слагаемых. Чтобы применить к нему индукционное предположение, нужно проверить, что $y_2+\ldots+y_n<m(n-1)$. Положим $S=y_1+y_2+\ldots+y_n$. Тогда $y_1\geqslant\frac{S}{n}$ и, следовательно,

$$y_2+\cdots+y_n<S-\frac{S}{n}=S\cdot\frac{n-1}{n}.$$

Так как $S<mn$, то $y_2+\cdots+y_n<mn\cdot\frac{n-1}{n}=m(n-1)$.

Вычеркнем в равенстве (*) часть слагаемых так, чтобы снова получилось верное равенство (это можно сделать по предположению индукции); мы получим либо искомое равенство, либо равенство, содержащее в левой части разность x_1-y_1. В последнем случае нужно y_1 перенести в правую часть.

Д. Бернштейн, Ю. Ионин

kvant.mccme.ru

М464. *На плоскости дано 1000 квадратов со сторонами, параллельными осям координат. Пусть M — множество центров этих квадратов. Докажите, что можно отметить часть квадратов так, чтобы любая точка множества M попала не меньше чем в один и не более чем в четыре отмеченных квадрата.*

Геометрическая идея решения этой задачи содержитсяв следующей простой лемме.

Л е м м а. *Если на плоскости пять квадратов со сторонами, параллельными осям координат, имеют общую точку, то один из этих квадратов содержит центр некоторого другого.*

Докажем эту лемму. Можно считать, что общая точка — это начало координат O. Из пяти центров данных квадратов по крайней мере два центра обязаны лежать в одной из четвертей плоскости, определяемых осями координат (к четвертям присоединяются ограничивающие их лучи). Пусть центры O_1 и O_2 квадратов S_1 и S_2 лежат в I четверти, а $(x_1; y_1)$, $(x_2; y_2)$ — координаты точек O_1 и O_2. Выберем из чисел x_1, y_1, x_2, y_2 наибольшее: пусть это, например, x_1. Покажем, что тогда $O_2 \in S_1$. Действительно, ясно, что точка $(x_1; x_1) \in S_1$. Поскольку $O \in S_1$, отсюда следует, что всякая точка $(x; y)$ такая, что $0 \leqslant x \leqslant x_1$, $0 \leqslant y \leqslant x_1$, принадлежит S_1. В частности, $(x_2; y_2) \in S_1$, что и требовалось.

Опишем теперь правило выбора «отмеченных» квадратов. Пусть K_1 — наибольший из данных 1000 квадратов (здесь и далее, если наибольших несколько, берем один из них). Пусть K_2 — наибольший из тех квадратов данного семейства, которые имеют центры вне K_1; K_3 — наибольший из тех квадратов данного семейства, которые имеют центры вне K_1 и K_2, и т. д. Этот процесс оборвется с построением такого квадрата K_n, что вне $K_1, \ldots, K_n$ нет точек множества M (общее число квадратов конечно). Отмеченные таким образом квадраты $K_1, \ldots, K_n$ удовлетворяют, очевидно, первому из условий задачи: они покрывают множество M. Чтобы показать, что они удовлетворяют и второму условию, достаточно убедиться, что никакие пять из них не имеют общей точки. Действительно, по лемме, если такая точка нашлась, один из отмеченных квадратов содержал бы центр другого. Остается заметить, что для выбранных нами квадратов это не так. Действительно, если $i < j$, то центр K_j вне K_i по построению; при этом K_j не больше K_i, следовательно, центр K_i также вне K_j.

А. Плоткин

◆

Ф478. *На кубик, лежащий на гладкой горизонтальной поверхности, налетает точно такой же кубик, причем кубики сталкиваются своими параллельными гранями. Скорость налетающего кубика до столкновения была направлена под углом α к боковым граням (рис. 3). Как будут двигаться кубики после столкновения, если коэффициент трения между гранями кубиков равен μ?*

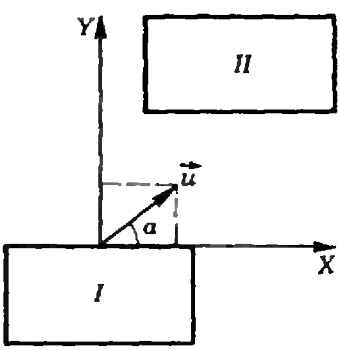


Рис. 3.

Обозначим F абсолютное значение сил упругости, с которыми кубики действуют друг на друга при столкновении. Тогда абсолютное значение силы трения между кубиками равно μF (рис. 4).

За время Δt проекция импульса каждого из кубиков на ось Y изменяется по абсолютной величине на $F\Delta t$. Поэтому для каждого из кубиков

$$|\Delta(mv_y)| = F\Delta t.$$

Абсолютное значение изменения проекции импульса каждого из кубиков на ось X равно $\mu F\Delta t$:

$$|\Delta(mv_x)| = \mu F\Delta t.$$

Из этих соотношений видно, что для каждого кубика

$$|\Delta(mv_x)| = \mu\,|\Delta(mv_y)|.$$

Это соотношение справедливо для любых интервалов времени. Следовательно, если обозначить v_x' и v_y' проекции скорости кубика на оси X и Y после столкновения кубиков, v_x и v_y — значения ее проекций до столкновения, то

$$\mu m\left|v_y' - v_y\right| = m\left|v_x' - v_x\right| \Rightarrow \mu\left|v_y' - v_y\right| = \left|v_x' - v_x\right|.$$

Обозначим $\vec{u}$ и $\vec{w}$ скорости кубиков I и II до столкновения ($\vec{w} = 0$), $\vec{u}'$ и $\vec{w}'$ скорости кубиков I и II после столкновения. Считая, что потеря энергии при столкновении происходит только за счет действия силы трения, получим для кубика I ($u_x = u\cos\alpha$, $u_y = u\sin\alpha$)

kvant.mccme.ru

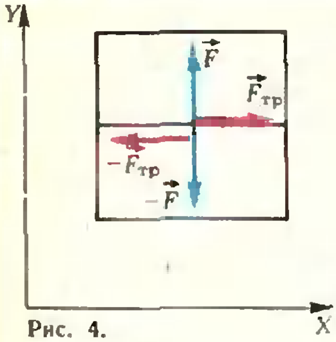


Рис. 4.

$$u_y' = 0, \ u_x' = u\cos\alpha - \mu u \sin\alpha = u(\cos\alpha - \mu\sin\alpha),$$

для кубика II $(w_x = 0,\ w_y = 0,\ w = |\vec w|)$

$$w_y' = u\sin\alpha, \quad w_x' = \mu u\sin\alpha \qquad (u = |\vec u|).$$

При абсолютно неупругом (вдоль оси Y) ударе

$$u_y' = w_y' = \frac{1}{2}u\sin\alpha.$$

$$u_x' = u\cos\alpha - \frac{1}{2}\mu u\sin\alpha, \qquad w_x' = \frac{1}{2}\mu u\sin\alpha.$$

(Мы считали, что скорость $\vec u$ направлена параллельно линии, соединяющей центры масс кубиков, и площадь контакта при соударении равна площади соприкасающихся граней. При этих условиях кубики после удара не вращаются.)

И. Слободецкий

◆

Ф479. *Для определения неизвестного объема V_1 баллона I собирают схему, приведенную на рисунке 5. Объем баллона II равен V_2 и $V_2 \ll V_1$. Сначала систему откачивают до давления p_0, близкого к нулю. Затем закрывают кран B и заполняют баллон II газом до давления p_a. После этого закрывают кран A, открывают кран B и измеряют установившееся в системе давление p_1 манометром C. Затем при закрытом кране B вновь наполняют баллон газом до давления p_a, открывают кран B и измеряют установившееся в системе давление p_2. Эту операцию повторяют n раз. Покажите, что отношение $\frac{p_n - p_0}{np_a}$ есть величина постоянная и равная $\frac{V_2}{V_1+V_2}$.*

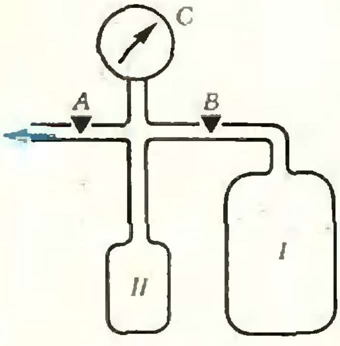


Рис. 5.

Из условий эксперимента с помощью закона Бойля — Мариотта получается система n уравнений

$$p_0 V_1 + p_a V_2 = p_1(V_1+V_2),$$
$$p_1 V_1 + p_a V_2 = p_2(V_1+V_2),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$p_{n-1}V_1 + p_a V_2 = p_n(V_1+V_2).$$

Эта система позволяет выразить все p_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ через p_0 и p_a. Действительно,

$$p_i = \frac{p_{i-1}V_1 + p_aV_2}{V_1+V_2},$$

откуда

$$p_i - p_a = \frac{V_1}{V_1+V_2}(p_{i-1}-p_a) = \alpha(p_{i-1}-p_a),$$

где $\alpha = \frac{V_1}{V_1+V_2}$. Следовательно,

$p_{i-1} - p_a = \alpha(p_{i-2}-p_a)$, $p_{i-2} - p_a = \alpha(p_{i-3}-p_a)$ и т. д. Таким образом, $p_n - p_a = \alpha^n(p_0 - p_a)$, откуда

$$p_n = p_a + \alpha^n(p_0 - p_a),$$
$$p_n - p_0 = (p_a - p_0)(1-\alpha^n).$$

Но $1-\alpha^n = (1-\alpha)(1+\alpha+\alpha^2+\ldots+\alpha^{n-1}) \approx$

$\approx n\frac{V_2}{V_1+V_2}$ (поскольку $V_1 \gg V_2$ и, следовательно, α близко к единице). Значит,

$$p_n - p_0 \approx (p_a - p_0)\,n\frac{V_2}{V_1+V_2},$$

$$\frac{p_n - p_0}{n(p_a-p_0)} \approx \frac{V_2}{V_1+V_2}.$$

Если $p_0 \ll p_a$, то

$$\frac{p_n-p_0}{np_a} \approx \frac{V_2}{V_1+V_2}.$$

А. Митрофанов

kvant.mccme.ru

Ф480. *Корабль приводится в движение водометным двигателем, выбрасывающим с кормы струю воды со скоростью $\vec{u}$. Ежесекундно выбрасывается масса воды μ, которая берется из реки. При каком значении скорости корабля к. п. д. двигателя максимален? Силой трения и сопротивлением воды пренебречь.*

Полная работа A, совершаемая двигателем за малое время Δt, равна кинетической энергии, которая сообщается воде, выбрасываемой из двигателя корабля. Так как масса воды, выбрасываемой за это время, равна $\mu\Delta t$, то

$$A = \frac{(\mu\Delta t)\, u^2}{2}.$$

Полезная же работа, совершаемая за это время, равна изменению кинетической энергии корабля. Если масса корабля равна M, то

$$A_{\text{пол}} = \frac{M(v+\Delta v)^2}{2} - \frac{Mv^2}{2} = Mv\Delta v,$$

где v — абсолютное значение скорости корабля. Пренебрегая квадратом малой величины $(\Delta v)^2$, получим $A_{\text{пол}} = Mv\Delta v$. Для того чтобы найти $M\Delta v$, можно воспользоваться законом сохранения импульса. Так как трение и сопротивление пренебрежимо малы, то импульс системы вода — корабль не меняется. Следовательно,

$$Mv = M(v+\Delta v) - \mu\Delta t\,(u-v).$$

Отсюда

$$M\Delta v = \mu\Delta t\,(u-v).$$

К. п. д. двигателя равен

$$\eta = \frac{A_{\text{пол}}}{A} = \frac{2Mv\Delta v}{(\mu\Delta t)\, u^2} = \frac{2(u-v)\,v}{u^2}.$$

Это выражение максимально при $v = \frac{u}{2}$.

◆

Ф481. *В старой аккумуляторной батарее, состоящей из n последовательно соединенных аккумуляторов, резко возросло внутреннее сопротивление одного из аккумуляторов и стало равным $\rho = 10\ r$, где r — внутреннее сопротивление нормального аккумулятора. Считая э. д. с всех аккумуляторов одинаковыми, определить, при каких сопротивлениях нагрузки R мощность, выделяемая на нагрузке, не изменится при коротком замыкании поврежденного аккумулятора.*

При замыкании батареи аккумуляторов на сопротивление R по цепи идет ток

$$I_1 = \frac{n\mathscr{E}}{(n-1)r + 10r + R},$$

а на сопротивлении R нагрузки выделяется мощность

$$W_1 = I_1^2 R = \frac{n^2\mathscr{E}^2}{[(n-1)r + 10r + R]^2}\, R.$$

После замыкания поврежденного аккумулятора по цепи будет идти ток

$$I_2 = \frac{(n-1)\mathscr{E}}{(n-1)r + R},$$

а на нагрузке будет выделяться мощность

$$W_2 = I_2^2 R = \frac{(n-1)^2\mathscr{E}^2}{[(n-1)r + R]^2}\, R.$$

Приравнивая W_1 и W_2, получим

$$\frac{n^2}{[(n-1)r + 10r + R]^2} = \frac{(n-1)^2}{[(n-1)r + R]^2}.$$

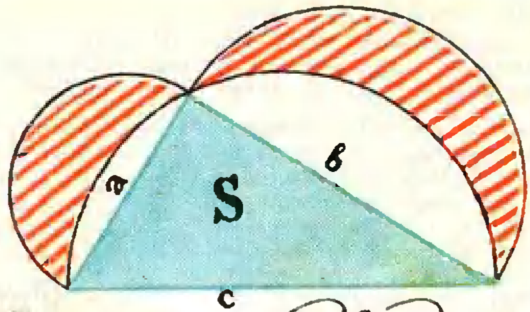
Отсюда

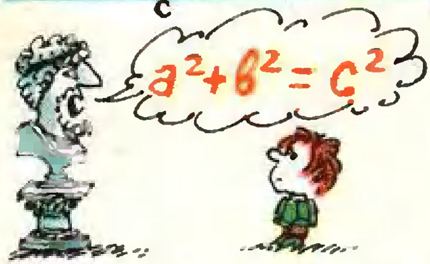
$$R = 9r(n-1).$$

И. Слободецкий

kvant.mccme.ru

«Квант» для младших школьников





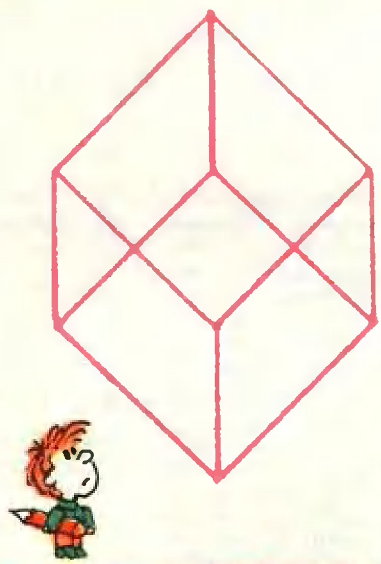
Задачи

1. *Задачи-близнецы.* В каждом из четырех криптарифметических примеров найдите, чему равны значения X и Y:

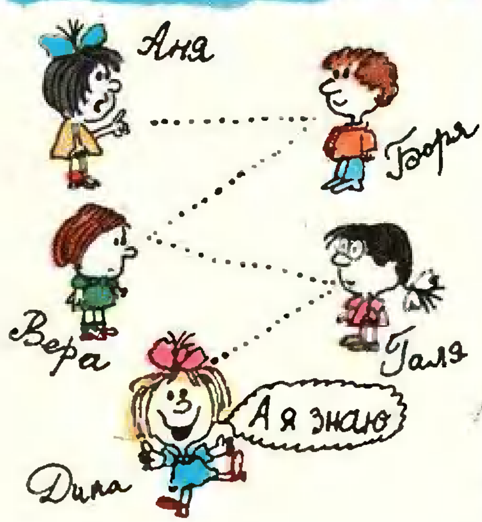
```
  XYZ        XYZ
× XYZ      × XYZ
-----      -----
 ...Z       ...Z
...Y   ;   ...Y   ;
..X        ...X
------     ------
......     .......

  XYZ        XYZ
× XYZ      × XYZ
-----      -----
 ...X       ...Y
...Y   ;   ...X   .
...        ...
------     ------
......     ....
```

2. *Устная задача.* На сторонах прямоугольного треугольника площади S как на диаметрах построены полуокружности (см. рисунок). Чему равна площадь заштрихованной фигуры? (Для «самых маленьких» сообщаем *теорему Пифагора*: $a^2+b^2=c^2$, где a и b — длины катетов, а c — длина гипотенузы).



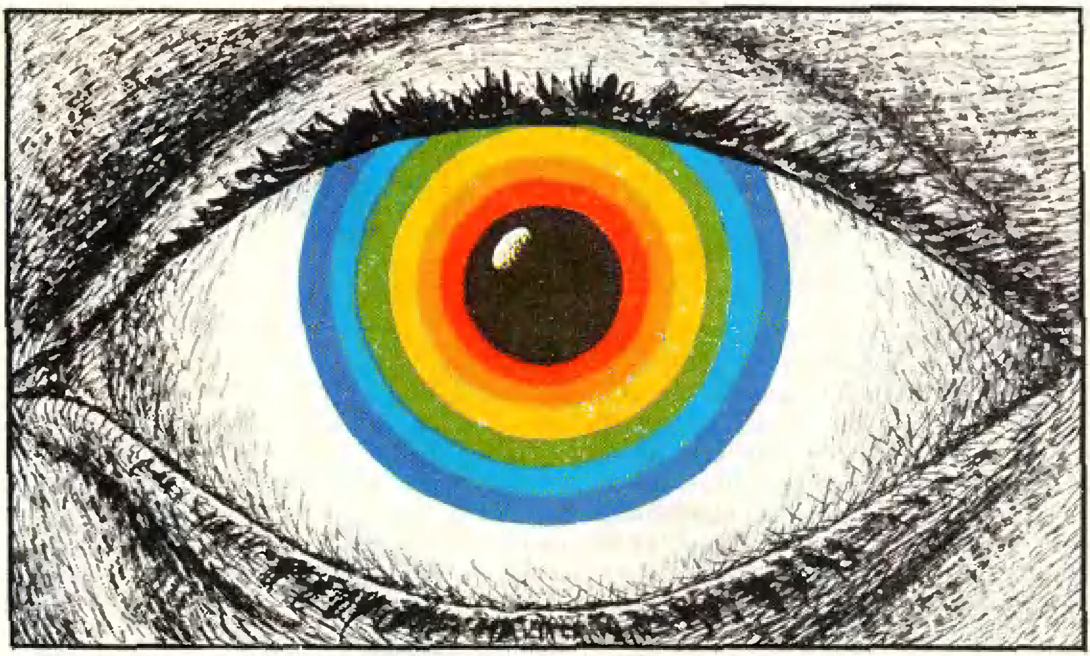
3. *Не пересекая дважды.* Не отрывая карандаша от бумаги, проведите линию, которая пересекла бы по одному разу все 16 отрезков, из которых составлена изображенная на рисунке плоская фигура.



4. Аня задумала натуральное число. Куб этого числа она с остатком разделила на 7. Полученное Аней частное Боря вновь разделил на 7 и тоже — с остатком. Новое частное Вера разделила на 7 и не сообщила, получился остаток или нет. Наконец, Галя разделила Верин результат тоже на 7. Частное оказалось равным 10, но был и остаток.

Дина, узнав все, что проделывалось с Аниным числом, отгадала это число. Какое число задумала Аня?

kvant.mccme.ru



А. Дозоров

Оптика без оптики

В прошлом номере нашего журнала мы советовали вам проверить на опытах, хорошо ли вы знаете линзу. Теперь предлагаем вам провести еще несколько опытов по оптике, но уже без специальных оптических приборов.

1. Возьмите серебряную обертку от шоколадной конфеты. Разгладьте ее и проткните в ней маленькое отверстие. Через это отверстие, расположив его как можно ближе к глазу, посмотрите на какой-нибудь ярко освещенный текст, помещенный тоже близко к глазу. Вам удалось увидеть сильно увеличенные буквы? Оказывается, не только линза может увеличивать!

А какое изображение буквы вы увидели — прямое или перевернутое? Казалось бы, буква должна быть перевернутой (посмотрите на рисунок 1) — на сетчатке глаза все изображения получаются всегда перевернутыми. Но наш мозг «знает» об этом и к этому «привык»: окружающие нас предметы мы воспринимаем не в перевернутом виде.

В непрозрачной бумаге проткните иглой отверстие. В затемненной комнате перед отверстием зажгите свечу, а с другой стороны отверстия поместите белый лист бумаги — экран. На экране вы увидите четкое перевернутое изображение свечи. Это простое устройство — модель так называемой камеры-обскуры (камеры для наблюдений), которая с давних времен использовалась для получения различных изображений. Камера-обскура является простейшим фотоаппаратом.

2. В том, что мозг действительно «переворачивает» изображение предмета, можно убедиться на таком простом опыте. Между отверстием в фольге (в серебряной бумажке) и глазом поместите небольшой предмет — острие карандаша или булавочную головку. Свет от отверстия создаст на сетчатке неперевернутое изображение предмета (рис. 2). А мозг «по инерции» это изображение перевернет.

3. Отодвиньте фольгу сантиметров на 20 от глаза и посмотрите через

kvant.mccme.ru

отверстие на достаточно яркий источник света. Только осторожно, чтобы не переутомить глаз. Вы увидите расходящиеся от отверстия световые лучи и вокруг отверстия — окрашенные во все цвета радуги кольца. Как это можно объяснить?

Оказывается, свет, подобно волнам на поверхности воды, способен огибать встречающиеся на его пути препятствия.

Поговорим немного о волнах на воде. Как известно, большие и маленькие волны по-разному огибают препятствия. Если, например, из воды торчит столб, то мелкие волны (рябь) образуют за столбом заметную «тень» (область спокойной поверхности воды). Крупные же волны практически никакой «тени» не дают, они хорошо огибают препятствия. Что значит «мелкие» и «крупные» волны? Почему они по-разному ведут себя при встрече с препятствием? Существует такое понятие — длина волны. Это — расстояние между двумя соседними гребнями (или впадинами) волны. Так вот, мелкие волны по сравнению с крупными имеют гораздо меньшую длину волны. А чем больше длина волны (по сравнению с препятствием), тем сильнее волна огибает препятствие.

То же самое происходит и со световыми волнами: если на пути света встретилось препятствие, свет его огибает. Вот почему вы видели расходящийся от отверстия в фольге световой пучок.

А как появились разноцветные кольца? Все дело в том, что белый свет состоит из лучей разного цвета. Следуя Ньютону, принято выделять семь цветов: красный, оранжевый, желтый, зеленый, голубой, синий и фиолетовый. Для каждого цвета длина световой волны своя. Самая большая длина волны у красного света ($\approx 7 \cdot 10^{-7}$ м), а самая маленькая — у фиолетового ($\approx 4 \cdot 10^{-7}$ м). Теперь вам все понятно, не правда ли?

4. Лезвием от безопасной бритвы прорежьте в фольге узкую щель: просто проведите по фольге бритвой. Отодвиньте щель от глаза сантиметров на 10, посмотрите через нее на окно. Вы увидите несколько темных полосок, параллельных щели. Если

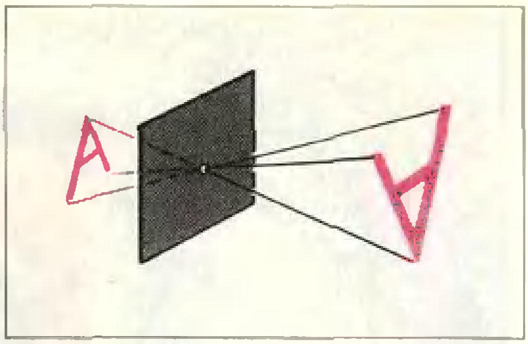


Рис. 1.

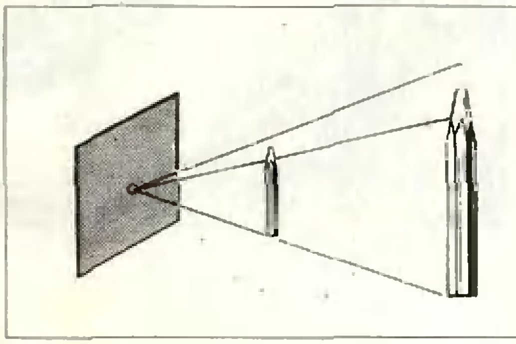


Рис. 2.

их видно плохо, не огорчайтесь. Просто у вас получилась слишком широкая щель. Разгладьте фольгу со щелью — щель станет у́же, а картина лучше. Если и это не поможет, проведите по фольге лезвием еще раз.

Получив хорошую щель, посмотрите через нее (придвиньте щель к глазу) на настольную лампу с прозрачным стеклом или — осторожно! — на Солнце. Смотрите чуть ниже источника света. Видите, перпендикулярно направлению щели возникли два световых столба, на которых видны яркие радужные полосы. Если щель прорезана удачно, то полосок много, а цвета их глубокие и сочные. Обратите внимание на расположение цветов.

Оба опыта, как и предыдущий, объясняются огибанием световыми волнами краев щели.

Очень хорошую щель можно сделать из лезвия для безопасной бритвы. Из плотной бумаги нужно вырезать два прямоугольника по размерам чуть больше лезвия, середину у прямоугольников тоже надо вырезать. В эту рамочку вставьте разломанное пополам лезвие так, чтобы его ост-

kvant.mccme.ru

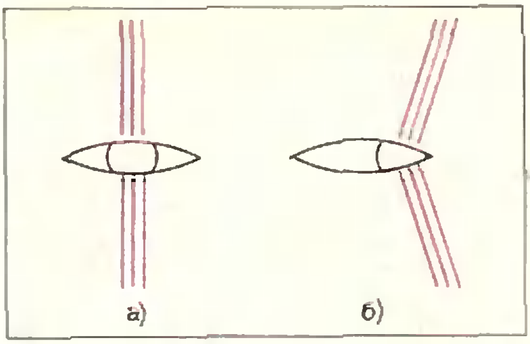


Рис. 3.

рые края почти соприкасались. Две половинки рамки с лезвием между ними склейте — теперь у вас есть хорошая щель.

5. Интересно, что огибание края препятствия световой волной можно наблюдать, вообще ничего не имея под руками. Посмотрите вечером в окно. Вы увидите яркие точки светящихся фонарей. Прищурьте глаз (веки образуют щель) — свет от фонарей загнется вверх и вниз, вместо светящейся точки получится два вертикальных столба лучей (рис. 3, *а*). Продолжая щуриться, поверните голову немного вбок. Щель, образуемая веками, изменит свою форму — лучи от фонарей разойдутся теперь под углом (рис. 3, *б*).

6. Проткните карандашом отверстие в газете, прикройте газетой настольную лампу и с расстояния в несколько метров посмотрите на пучок света из отверстия через капроновую ленту. Нити ленты образуют щели в двух взаимно перпендикулярных направлениях, поэтому свет загибается тоже в двух направлениях.

7. На случайным образом расположенных мелких препятствиях тоже можно наблюдать аналогичные картины.

В морозный вечер соскребите лед с окна. Осторожно подуйте на чистое место — оно затянется мелкими, случайно расположенными кристалликами льда. Теперь посмотрите через это отверстие на уличные фонари. Вокруг них возникнут цветные кольца. Обратите внимание на то, что разные лампы дают разный цветовой набор колец.

Если на улице тепло, то этот опыт можно выполнить с небольшим стеклом, охлажденным в холодильнике.

Можно провести очень много подобных опытов: с копировальной бумагой, с граммофонной пластинкой, с негативами, на которых сфотографированы всевозможные однородные и неоднородные структуры.

Попробуйте самостоятельно придумать аналогичный опыт, и вы получите еще большее удовольствие.

Задачи

На странице 29 помещена статья «Задача о трех кувшинах». Если вы внимательно прочитали эту статью, то попробуйте решить следующие задачи.

1. Имеется сосуд емкостью 12 л, наполненный жидкостью, и два пустых сосуда емкостью 9 л и 5 л. Как разделить жидкость на две равные порции?

2. Три грабителя украли у лавочника флакон с 24 унциями бальзама. Убегая, они встретили по дороге продавца стеклянной посуды, у которого купили три сосуда. Добравшись до надежного места, они захотели разделить добычу, но оказалось, что купленные сосуды вмещают 13, 11 и 5 унций соответственно. Как им поровну разделить добычу?

3. Пусть две точки P и P' имеют трилинейные координаты (x, y, z) и (x', y', z') относительно треугольника ABC. Докажите, что если эти координаты удовлетворяют уравнениям $xx' = yy' = zz$, то

$$\widehat{P'AC} = \widehat{BAP},\ \widehat{P'BA} = \widehat{CBP},\ \widehat{P'CB} = \widehat{ACP}.$$

Л. С.

kvant.mccme.ru

А. Земляков, В. Орлов

Вопросы для выпускников

«... Пора узнать, что в мирозданье,
Куда ни обратись,— вопрос, а не ответ.»
А. Фет

Приведенные ниже вопросы адресованы прежде всего тем из вас, кто в этом году окончил X класс и собирается поступать в вуз — проверьте себя перед экзаменами! Из пяти ответов (а, б, в, г или д) всякий раз нужно выбрать единственный верный.

Математика

1. Какая из указанных на рисунке 1 прямых (а, б, в, г, д) является графиком уравнения $2x + 3y + 1 = 0$?

2. Какое из указанных множеств является множеством решений неравенства $\log_{1/3} x > 0$?

а) $]0; +\infty[$; б) $]1; +\infty[$; в) $]^1/_3; +\infty[$; г) $]0; 1[$; д) $]0; ^1/_3[$.

3. При каких значениях a справедливо соотношение $\exp(\exp(\ln(\ln a))) = a$?

а) Ни при каких; б) при любых; в) при $a > 0$; г) при $a > 1$; д) при $a > e$.

4. Какая из указанных на единичной окружности (рис. 2) точек (а, б, в, г) отвечает значению $\varphi = 1820°$? д) Нужная точка не указана.

5. Расположите числа $c = \cos 1000°$, $s = \sin 1000°$, $t = \operatorname{tg} 1000°$ в порядке возрастания.

а) $t < c < s$; б) $c < s < t$; в) $t < s < c$; г) $s < c < t$; д) $s < t < c$.

6. Чему равна производная функции $f(x) = \sin(x^2)$?

а) $2\sin x$; б) $\sin 2x$; в) $\cos 2x$; г) $2x\sin(x^2)$; д) $2x\cos(x^2)$.

7. Какая из указанных функций является первообразной для функции $f(x) = -\cos 2x$?

а) $-\sin 2x$; б) $-2\sin 2x$; в) $-\frac{1}{2}\sin 2x$; г) $\frac{1}{2}\sin 2x$; д) $2\sin 2x$.

8. Сколько существует первообразных для функции $f(x) = e^{x^2}$, график которых проходит через точку $(c; 0)$, где c — заданное число?

а) Ни одной; б) одна; в) две; г) бесконечно много; д) ответ зависит от значения c.

9. Скалярное произведение двух векторов равно -1. Чему может равняться величина угла φ между этими векторами?

а) $\varphi = 0°$; б) $\varphi = 90°$; в) $\varphi = 180°$; г) $0° \leqslant \varphi \leqslant 90°$; д) $90° < \varphi \leqslant 180°$.

10. Два плоских угла трехгранного угла равны $\alpha = 120°$ и $\beta = 150°$. В каких пределах может находиться величина третьего плоского угла γ?

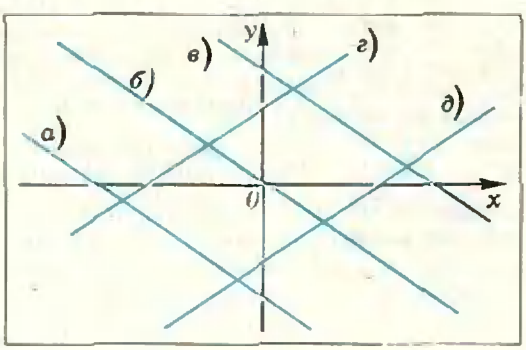


Рис. 1.

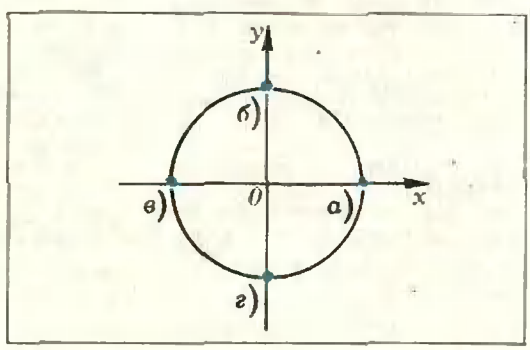


Рис. 2.

kvant.mccme.ru

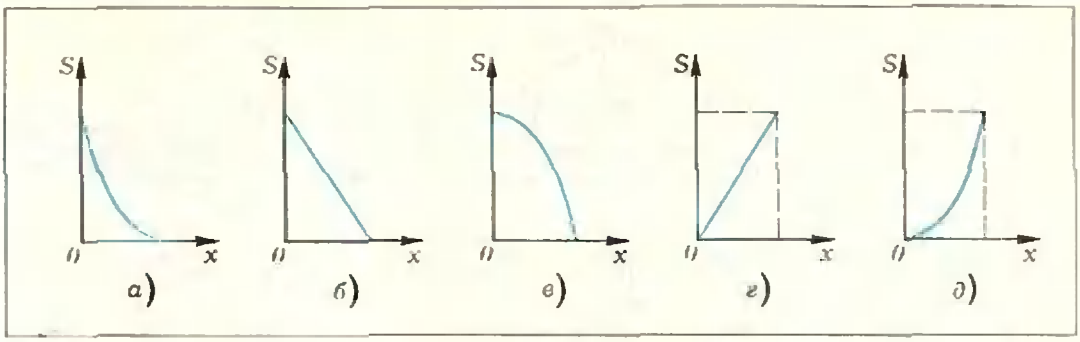


Рис. 3.

а) $0° < \gamma < 90°$; б) $0° < \gamma < 180°$; в) $30° < \gamma < 270°$; г) $30° < \gamma < 180°$; д) $30° < \gamma < 90°$.

11. Каково взаимное расположение плоскостей, заданных уравнениями $x - y + z = 0$ и $y - x - z = 1$?

а) Совпадают; б) параллельны, но не совпадают; в) перпендикулярны; г) пересекаются, но не перпендикулярны; д) по уравнениям установить нельзя.

12. Какая из указанных — заданных уравнениями — плоскостей перпендикулярна вектору с координатами $(-1;\ 1;\ 1)$?

а) $2x - y - z = 0$; б) $x - 2y - 2z = 0$; в) $x + y + z = 0$; г) $x + y - z = 0$; д) $x - y - z = 0$.

13. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна 2. В каких пределах может заключаться площадь S полной поверхности этой пирамиды?

а) $S > 2$; б) $S > 4$; в) $2 < S < 4$; г) $3 < S < 4$; д) ответ зависит от числа боковых граней пирамиды.

14. Высота пирамиды равна 1. На каком расстоянии от вершины нужно провести плоскость, параллельную основанию, для того, чтобы она разбивала пирамиду на две части одинакового объема?

а) $1/2$; б) $\sqrt{1/2}$; в) $\sqrt[3]{1/2}$; г) $2/3$; д) ответ зависит от вида пирамиды.

15. Пусть $S(x)$ — площадь сечения пирамиды, проведенного параллельно основанию на расстоянии x от него. Какой из указанных на рисунке 3 графиков (а, б, в, г, д) может являться графиком функции $S(x)$?

16. На сколько частей разбивают пространство плоскости всех пяти граней треугольной призмы?

а) 5; б) 7; в) 9; г) 21; д) 32.

17. На сколько частей разбивают пространство плоскости четырех граней треугольной пирамиды?

а) 5; б) 9; в) 15; г) 16; д) 17.

Физика

1. Пробка плавает в воде. Как изменится архимедова сила, действующая на пробку, если пробка будет плавать в масле? Плотность воды $\rho_в$, плотность масла $\rho_м$, плотность пробки $\rho_п$.

а) Уменьшится в $n_1 = \frac{\rho_в}{\rho_м}$ раз; б) увеличится в $n_1 = \frac{\rho_в}{\rho_м}$ раз; в) не изменится; г) уменьшится в $n_2 = \frac{\rho_в}{\rho_м - \rho_п}$ раз; д) ни один из приведенных ответов не является правильным.

2. Тело брошено вертикально вверх с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с. Какой из графиков, приведенных на рисунке 4, выражает зависимость проекции v_y скорости тела на вертикальную ось OY от времени? Сопротивлением воздуха пренебречь; $y_0 = 0$.

3. Кусок мела, летящий со скоростью $\vec{v}$, попадает на горизонтальную поверхность доски, движущейся с постоянной скоростью $\vec{u}$ (рис. 5). Считая движение мела относительно поверхности доски замедленным, определите, какой из приведенных ниже рисунков 6, *а* — *д* соответствует следу мела на доске.

4. На столе лежит брусок массой 1 кг. На брусок в горизонтальном направлении действует сила $\vec{F}$, график зависимости которой от времени пока-

kvant.mccme.ru

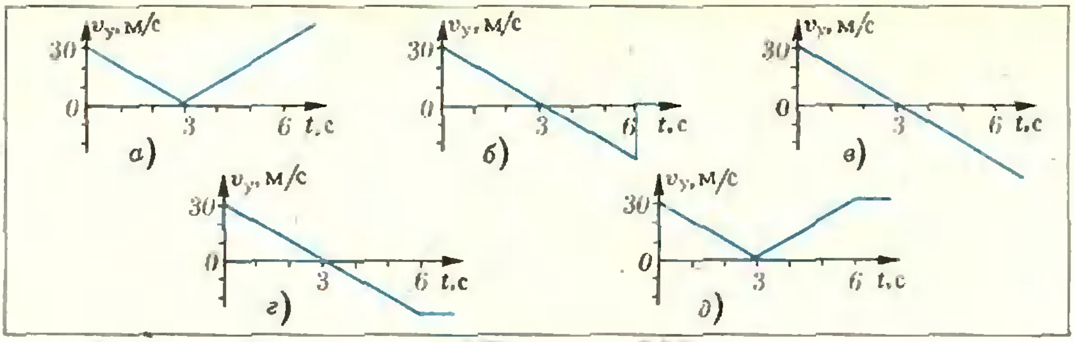


Рис. 4.

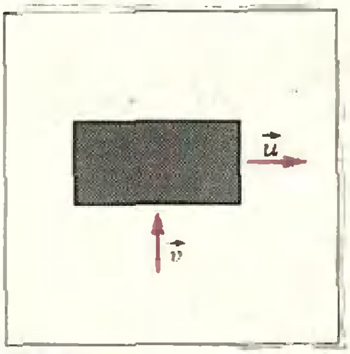


Рис. 5.

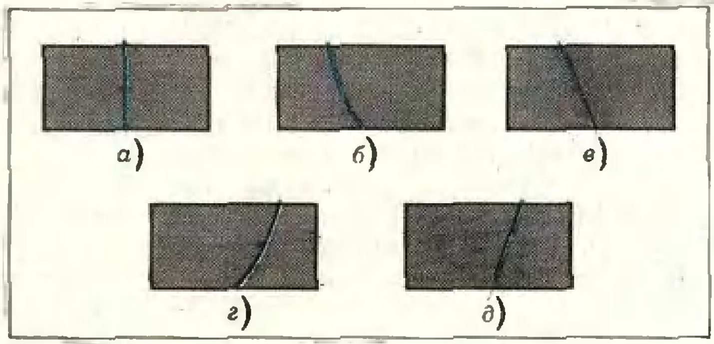


Рис. 6.

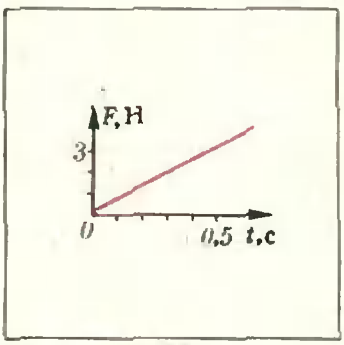


Рис. 7.

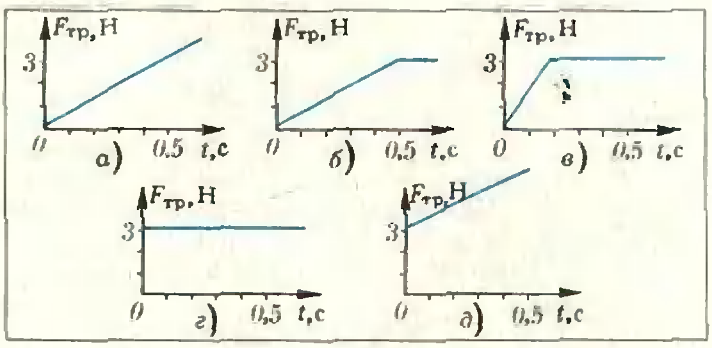


Рис. 8.

зан на рисунке 7. Коэффициент трения бруска о поверхность стола равен 0,3. Какой из графиков, приведенных на рисунке 8, выражает зависимость силы трения $\vec{F}_{тр}$ между бруском и поверхностью стола от времени?

5. Брусок массой m движется равномерно по горизонтальной поверхности стола под действием силы $\vec{F}$, направленной под углом φ к вектору скорости тела (рис. 9). Определите силу трения, действующую на брусок. Коэффициент трения скольжения бруска о поверхность стола равен μ.

а) $\mu m|\vec{g}|$; б) $\mu|\vec{F}|\sin\varphi$; в) $|\vec{F}|\cos\varphi$; г) $\mu|\vec{F}|\cos\varphi$; д) ни один из приведенных ответов не является правильным.

6. Две тележки массами $2m$ и m движутся по гладкой горизонтальной поверхности навстречу друг другу со скоростями $5|\vec{v}|$ и $|\vec{v}|$ относительно этой поверхности. Чему равна скорость тележек в этой системе отсчета после неупругого столкновения (рис. 10)?

7. Груз массой 1 кг под действием силы 30 Н движется вертикально вверх. Определите значение работы, совершенной силой, если она действовала в течение времени, за которое тело поднялось на 5 м.

а) 0; б) 50 Дж; в) 100 Дж; г) 150 Дж; д) 200 Дж.

8. На диаграмме p — V изображен график процесса, проведенного с иде-

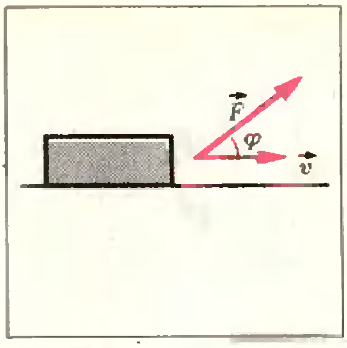


Рис. 9.

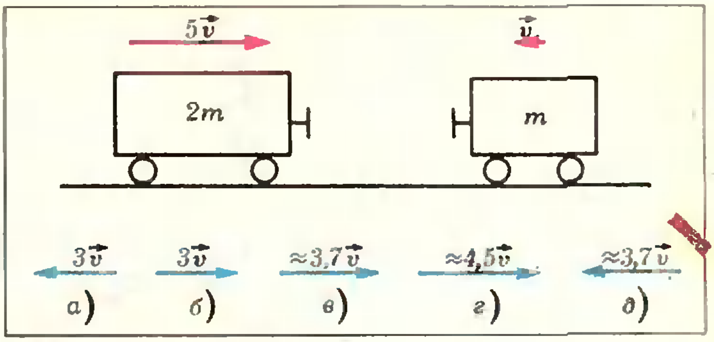


Рис. 10.

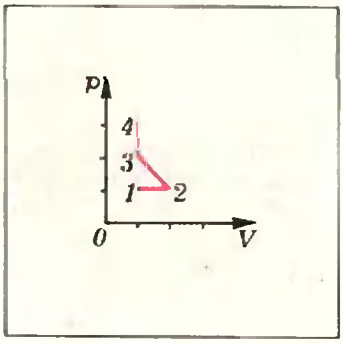


Рис. 11.

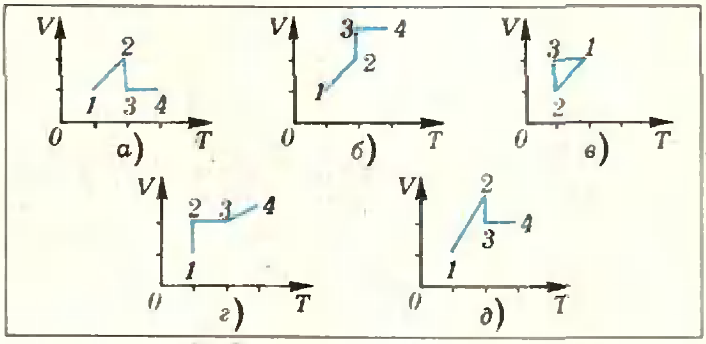


Рис. 12.

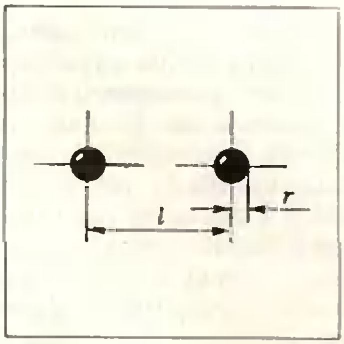


Рис. 13.

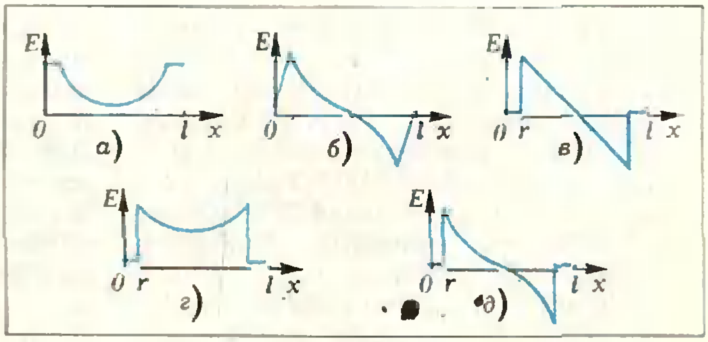


Рис. 14.

альным газом (рис. 11). Участок *2—3* — гипербола. Какой из графиков, изображенных на рисунке 12, соответствует V—T-диаграмме данного процесса?

9. Газу сообщили $3\cdot10^7$ Дж количества теплоты, и он при этом совершил работу $5\cdot10^7$ Дж. Какое из следующих утверждений относительно внутренней энергии системы справедливо?

а) Не изменилась; б) увеличилась на $2\cdot10^7$ Дж; в) увеличилась на $8\cdot10^7$ Дж; г) уменьшилась на $2\cdot10^7$ Дж; д) уменьшилась на $8\cdot10^7$ Дж.

10. Один моль идеального одноатомного газа, находящегося при температуре T, нагревают. Определите количество теплоты, которое надо подвести к газу, чтобы изобарически увеличить его объем вдвое.

а) $3/2RT$; б) RT; в) $2RT$; г) $5/2RT$; д) ни один из приведенных ответов не является правильным.

11. Как изменится к. п. д. идеальной тепловой машины, если повысить температуру нагревателя на ΔT К или понизить температуру холодильника на ΔT К?

а) Не изменится; б) увеличится одинаково в обоих случаях; в) увеличится больше при повышении температуры нагревателя; г) увеличится больше при понижении температуры холодильника; д) ни один из ука-

kvant.mccme.ru

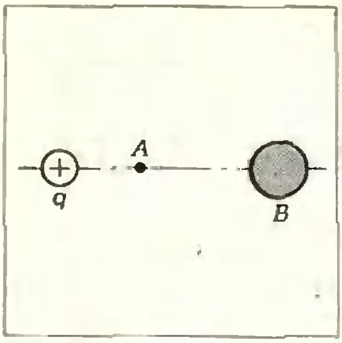


Рис. 15.

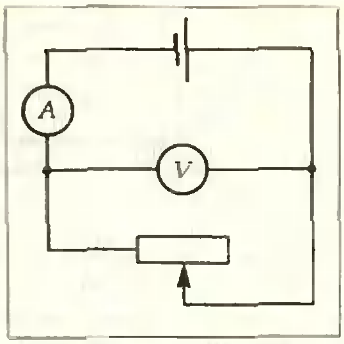


Рис. 16.

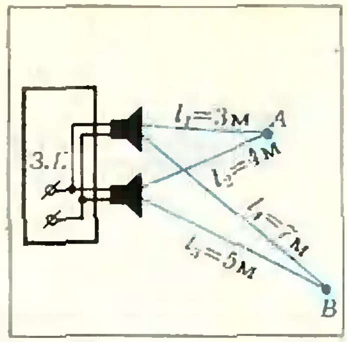


Рис. 17.

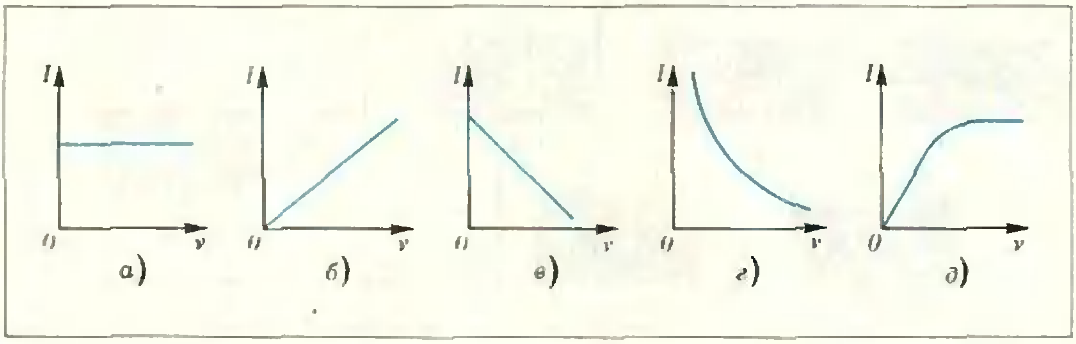


Рис. 18.

занных ответов не является правильным.

12. Два металлических одинаково заряженных шара, радиусы которых равны r, находятся на расстоянии l друг от друга (рис. 13). Какой из графиков, приведенных на рисунке 14, иллюстрирует характер изменения проекции E_l напряженности электрического поля на прямую, проходящую через центры шаров, в точках, принадлежащих отрезку $[l]$?

13. Как изменится напряженность E_A и потенциал φ_A электрического поля заряда q в точке A, если в точке B поместить шар из диэлектрика (рис. 15)?

а) E_A и φ_A увеличатся; б) E_A увеличится, φ_A уменьшится; в) E_A и φ_A уменьшатся; г) E_A уменьшится, φ_A увеличится; д) ни один из приведенных ответов не является правильным.

14. Заряженный конденсатор, заполненный жидким диэлектриком с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon = 4$, обладал энергией электрического поля W. Из конденсатора слили диэлектрик. Чему стала равна энергия электрического поля конденсатора?

а) W; б) $2W$; в) $^1/_2 W$; г) $4W$; д) $^1/_4 W$.

15. Как изменятся показания вольтметра и амперметра при перемещении ползуна реостата влево в цепи, изображенной на рисунке 16?

а) Показания вольтметра уменьшатся, амперметра — увеличатся; б) показания вольтметра и амперметра уменьшатся; в) показания вольтметра и амперметра увеличатся; г) показания вольтметра увеличатся, амперметра — уменьшатся; д) ни один из приведенных ответов не является правильным.

16. В электролитической ванне протекает постоянный электрический ток. Чему равна сила тока, текущего через амперметр, если за время 4 с ионы приносят на катод заряд 2 Кл, а на анод — заряд — 2 Кл?

а) 0; б) 0,5 А; в) 1А; г) 2А; д) ни один из приведенных ответов не является правильным.

17. Два динамика подключены к выходу одного генератора электрических колебаний с частотой 170 Гц. Каков результат интерференции звуковых волн в точках A и B (рис. 17)? Скорость звука в воздухе равна 340 м/с. Считать, что колебания диффузоров в динамиках происходят в одной фазе.

kvant.mccme.ru

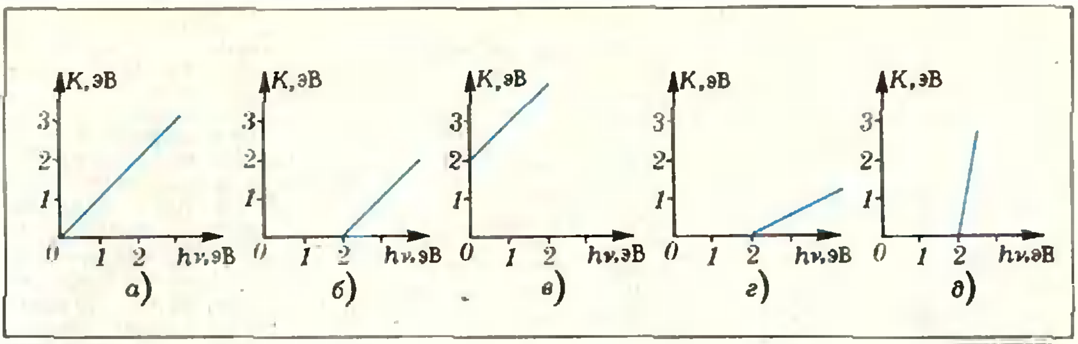


Рис. 19.

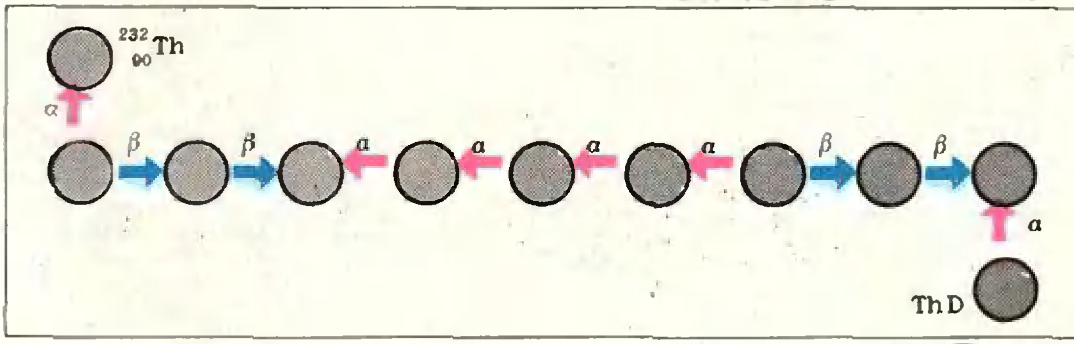


Рис. 20.

а) В точках A и B максимум; б) в точках A и B минимум; в) в точке A максимум, в точке B минимум; г) в точке A минимум, в точке B максимум; д) ни один из приведенных ответов не является правильным.

18. Катушка подключена к источнику переменного тока с изменяющейся частотой. Какой из графиков, приведенных на рисунке 18, характеризует зависимость силы тока от частоты в данной цепи при постоянном действующем значении напряжения? Активным сопротивлением катушки пренебречь.

19. Показатель преломления воды для красного цвета с длиной волны в вакууме $7\cdot10^{-7}$ м равен 1,33. Определите длину λ этой волны в воде и скорость c ее распространения в воде.

а) $\lambda = 7\cdot10^{-7}$ м; $c = 3\cdot10^{8}$ м/с; б) $\lambda = 7\cdot10^{-7}$ м; $c = 2{,}25\cdot10^{8}$ м/с; в) $\lambda = 5{,}2\cdot10^{-7}$ м; $c = 2{,}25\cdot10^{8}$ м/с; г) $\lambda = 9{,}3\cdot10^{-7}$ м; $c = 2{,}25\cdot10^{8}$ м/с; д) ни один из приведенных ответов не является правильным.

20. Работа выхода электронов с катода вакуумного фотоэлемента равна 2 эВ. Какой из графиков, приведенных на рисунке 19, соответствует зависимости максимальной энергии фотоэлектронов от энергии падающих на катод фотонов?

21. На рисунке 20 представлено радиоактивное семейство тория $^{232}_{90}$Th. Определите заряд и массовое число конечного продукта распада тория — ThD.

а) $^{208}_{82}$ThD; б) $^{208}_{74}$ThD; в) $^{204}_{96}$ThD; г) $^{212}_{82}$ThD; д) $^{212}_{86}$ThD.

Список читателей, приславших правильные решения задач из «Задачника «Кванта»

В этом номере мы публикуем фамилии тех, кто прислал правильные решения задач М461 — М475 и Ф463 — Ф477 (жирные цифры после фамилий — последние цифры номеров решенных задач).

Математика

Н. Абдибеков (Аркальск) **66**; *К. Абдухаликов* (Алма-Ата) **62**, **65а)**, **г)**, **69а)**, **71**, **73**, **74**, **75а)**; *Г. Абзианидзе* (Тбилиси) **67**; *А. Агаев* (с. Покровка АзССР) **67**, **73а)**, **75а)**; *Ф. Агакишиев* (ст. Зарат АзССР) **67**; *В. Айриян* (Раздан) **66**, **67**, **71**, **72**, **73а)**, **74**, **75а)**; *А. Алексеев* (Пермь) **66—68**, **71—74**, **75а)**; *Д. Алексеев* (Ленинград) **71**; *У. Алла* (Выру)

(Окончание см. с. 59).

kvant.mccme.ru

Геометрия зубчатой передачи

И в каких только механизмах нет шестерен? И в часах они есть, и в машинном отделении корабля, и в прессах...

Каким образом ведущая шестерня A передает движение ведомой шестерне B? Обратимся к рисунку 1: жестко скрепленный с A «рычаг A_1» толкает жестко скрепленный с B «рычаг B_1» и тем самым поворачивает B.

Хороши ли прямоугольные профили зубьев? Сразу видно, что не очень. Во-первых, даже если ведущая шестерня A вращается равномерно, то этого нельзя сказать о ведомой шестерне B (почему?), а если шестерня B, в свою очередь, передает движение шестерням C, D, и т. д., то неравномерность передаваемого движения может усиливаться. Во-вторых, угол φ между усилием $\vec{F}$, которое ведет шестерню A, и направлением вращения шестерни B переменный. Стало быть, переменно усилие $\vec{F_1}$, толкающее ведомую шестерню, и зубья обеих шестерен снашиваются неравномерно.

Обратимся к рисунку на четвертой странице обложки. На нем показана схема действия масляного насоса, работающего с помощью двух несколько необычных шестерен (в каждой всего лишь по два зуба). Профиль головки каждого зуба очерчен по эпициклоиде, профиль ножки — по гипоциклоидам (об этих двух кривых рассказывалось, например, в «Кванте», 1978, № 4, с. 13.). На рисунке 2 показано, как можно вычертить такой профиль. Окружность ω радиуса $R/4$ катится по неподвижной окружности (O, R) снаружи. Тогда точка $M \in \omega$ описывает профиль головки зуба шестерни (часть эпициклоиды). Окружность ω', конгруэнтная ω, катится по (O, R) внутри. Точка $M' \in \omega'$ описывает паз между головками двух соседних зубьев (часть гипоциклоиды).

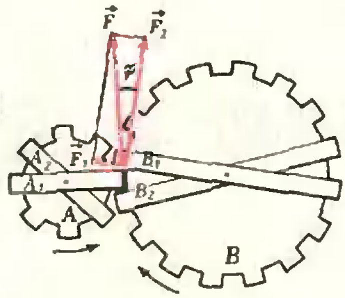


Рис. 1.

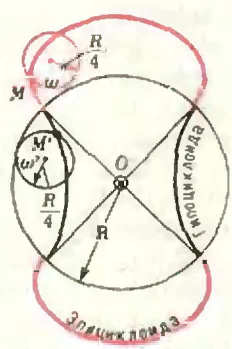


Рис. 2.

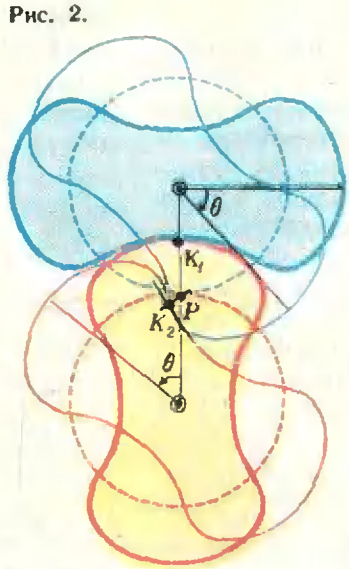


Рис. 3.

На рисунке 3 показано положение двух шестерен, при котором головка зуба нижней шестерни касается профиля верхней в середине паза между двумя ее зубьями. Если верхняя шестерня повернется на θ по часовой стрелке, а нижняя — против часовой стрелки на тот же угол, то они по-прежнему будут иметь общую точку K и, более того, общую касательную в ней. Попробуйте это показать, и установить следующее важное свойство такой пары шестерен: нормаль к профилям зубьев в точке их касания неизменно проходит через фиксированную точку P (не зависящую от положения точки касания).

Изготовив макет такой пары шестерен, вы заметите любопытное ее свойство. Для того чтобы пара работала непрерывно, шестерни должны становиться ведущими попеременно. Это означает, что данная пара шестерен не может работать в качестве механизма, передающего движение. Недаром они используются для перекачки масла, а для передачи движения от одной оси к другой служат две вспомогательные шестерни другого типа (см. рисунок на обложке). Конечно, если изготовить шестерни с большим числом зубьев циклоидального профиля, можно добиться передачи движения от ведущей шестерни к ведомой. Но остаются другие недостатки. Такие шестерни требуют, в частности, очень точной установки, чтобы эпициклоидальный профиль всегда контактировал с гипоциклоидальным. Кроме того, циклоидальные зубья трудно вырезать.

Поэтому на практике обычно используют шестерни, профили зубьев которых вырезаются по эвольвентам окружностей. Чтобы объяснить, что это такое, введем два понятия: центр кривизны кривой γ

kvant.mccme.ru

и радиус кривизны кривой γ в данной ее точке.

Пусть γ — гладкая кривая, то есть непрерывно поворачивающаяся кривая, не имеющая изломов и заострений. К такой кривой в каждой ее точке можно провести касательную и нормаль, притом единственным образом. Пусть $M_0 \in \gamma$ — фиксированная точка, точка $M \in \gamma$ — переменная, α — угол между касательными к γ в точках M_0 и M (рис. 4). Угол между касательными конгруэнтен углу между нормалями к γ в тех же точках. Устремим точку M к M_0. Тогда точка пересечения нормалей N перейдет в предельное положение N_0. Эту точку N_0 и называют *центром кривизны* кривой γ в точке M_0, длину отрезка M_0N_0 называют *радиусом кривизны* ρ_0 кривой γ в точке M_0. Для каждой точки M_0 гладкой кривой γ центр кривизны N_0 и радиус кривизны ρ_0 определяются однозначно.

Множество γ_1 центров кривизны кривой γ называется ее *эволютой* (в переводе с латыни «развертывающаяся кривая»). Кривая γ по отношению к своей эволюте γ_1 называется ее *эвольвентой* (в переводе с латыни «развертка»). Например, эволюта окружности $(O, |OT_0|)$ есть точка — центр окружности O (рис. 5). Здесь же показана кривая, эволютой которой является окружность γ, то есть ее эвольвента; она построена в результате качения без скольжения по окружности γ некоторой прямой l с отмеченной точкой Q; эта точка и описывает эвольвенту окружности γ; на рисунке 5 отмечены отдельные положения $Q_1, Q_2, Q_3, \ldots$, соответствующие положениям точки касания $T_1, T_2, T_3, \ldots$ прямой l с окружностью. Убедимся, что эволюта кривой γ действительно является окружностью. Когда движущаяся прямая l касается окружности в одной из этих точек, скажем, T_4, пря-

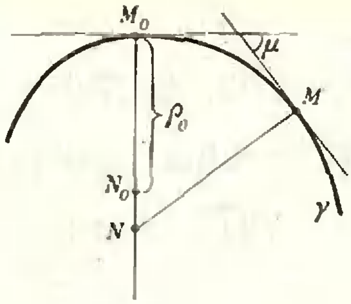


Рис. 4.

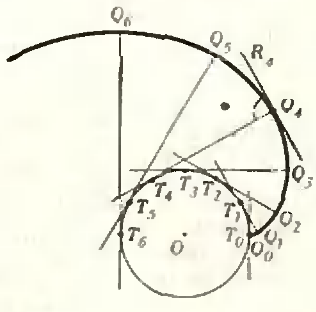


Рис. 5.

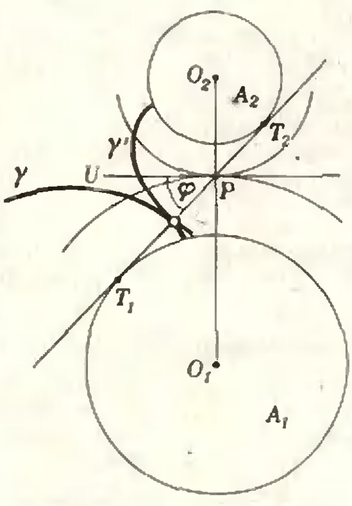


Рис. 6.

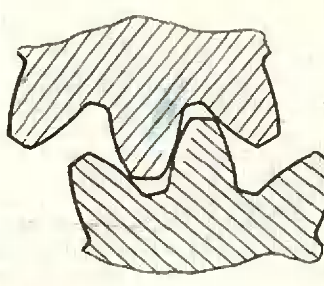


Рис. 7.

мая в этот момент вращается вокруг T_4; отсюда видно, что угол $T_4Q_4R_4$ — прямой. Рассмотрим нормали к γ в точках Q_3 и Q_4 и устремим точку Q_3 к точке Q_4. Ясно, что в пределе пересечение этих нормалей будет лежать на окружности $(O, |OT_0|)$ в точке T_4, что и требуется.

Вот по таким эвольвентам окружностей и нарезаются профили зубьев стандартных шестерен.

Эвольвента окружности пересекает касательную к этой окружности под прямым углом; в частности, так она пересекает и общую касательную двух окружностей, показанных на рисунке 6. Представим, что на эти окружности насажены шестерни с профилями зубьев, вырезанными по эвольвентам A_1 и A_2. Тогда ведущая шестерня A_1 толкает ведомую шестерню A_2 по T_1T_2 по направлению общей нормали к γ и γ' в их точке контакта. Прямая T_1T_2 пересекает линию центров шестерен O_1O_2 в фиксированной точке P — так называемом *полюсе зацепления* шестерен. Движение происходит так, как если бы ведущее колесо A_1 не зубьями, а с помощью лишь трения передавало движение колесу A_2. Проведем через точку P перпендикуляр PU к линии центров O_1O_2 и рассмотрим угол $\varphi = \angle UPT_1$. Он называется *углом зацепления*. В отличие от пары шестерен, рассмотренных на рисунке 1, и пары циклоидальных шестерен, здесь этот угол сохраняет постоянное значение. Отсюда и выгоды профилей зубьев в виде эвольвент окружностей, позволяющих добиться постоянной скорости вращения ведомой шестерни и бесшумной работы.

На рисунке 7 показано, как выглядит эвольвентное зацепление. Ножки зубьев имеют эвольвентный профиль не до самого конца паза, а только там, где проведена синяя линия. Это так называемый «рабочий участок зацепления».

В. Березин

kvant.mccme.ru

Варианты вступительных экзаменов 1977 года

Московский энергетический институт

МЭИ является одним из крупнейших высших технических учебных заведений страны, готовящим инженерные и научные кадры практически для всех направлений современной энергетики (в том числе — ядерной), электротехники, теплотехники, радиотехники, электроники, автоматики и вычислительной техники.

На дневном отделении института — 10 факультетов: электроэнергетический, теплоэнергетический, промышленной теплоэнергетики, энергомашиностроительный, электромеханический, электрификации и автоматизации промышленности и транспорта, электронной техники, автоматики и вычислительной техники, радиотехнический, энергофизический.

45 специальностей — таков диапазон нашей учебной работы. Более двадцати тысяч студентов обучаются сейчас в стенах нашего института. В Смоленске и Казани работают филиалы МЭИ.

Учебные планы и программы всех специальностей предусматривают усиленную физико-математическую подготовку.

Математика

Вариант 1

1. Упростив выражение, найти предел

$$\lim_{x\to a}\left\{\left[\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{x}}{\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{x}}\right)^{-1}-\frac{2\sqrt[4]{ax}}{x^{\frac{3}{4}}-a^{\frac{1}{4}}x^{\frac{1}{2}}+a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{4}}-a^{\frac{3}{4}}}\right]^{-1}-\sqrt{2}^{\log_4 a}\right\}^{8}.$$

2. Решить уравнение

$$\left(3^{x^2-7,2x+3,9}-9\sqrt{3}\right)\lg(7-x)=0.$$

3. Площадь сферы равна 27π. Какова высота цилиндра наибольшего объема, вписанного в эту сферу?

4. Найти все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\sin(5\pi-x)+\operatorname{tg}(3\pi+x)=\frac{(\cos x)^{-1}-\cos x}{2\sin x}$$

и лежащие на отрезке $\left[-\frac{5}{3}\pi;\ \pi\right]$.

5. В равнобедренной трапеции острый угол при нижнем основании равен α, длина боковой стороны равна a. Длина отрезка, соединяющего вершину верхнего основания трапеции с серединой нижнего основания, также равна a. Найти площадь трапеции.

Вариант 2

1. Упростить выражение

$$\frac{\left[(3b^2+2a^2)^2-24a^2b^2\right]^{\frac{1}{2}}}{3b-a^2\cdot 2^{1-\log_2 b}}+\sqrt{a-b^2}-\sqrt{a+2b\sqrt{a-b^2}},$$

если $\frac{a}{b}>\sqrt{\frac{3}{2}}$.

2. Найти область определения функции $f(x)=\sqrt[4]{\log_{0,2}^3 x+(\log_{0,2}x^3)\times(\log_{0,2}0,0016)+36}$.

3. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$f(x)=3x-9x^2-7x^3-6$$

на отрезке $\left[-\frac{3}{2};\ 1\right]$ и построить график функции на указанном отрезке.

4. Найти все значения x, удовлетворяющие уравнению

$$\sin x+2\cos x+2\sin x\cdot\cos^2 x=0$$

и лежащие в интервале $\left]-\frac{3}{4}\pi;\ \pi\right[$.

5. Равнобедренный треугольник с углом при вершине, равным α, и периметром, равным p, служит основанием прямой призмы. Угол между диагоналями конгруэнтных боковых граней призмы, проведенными из одной вершины, равен β. Найти объем призмы.

Физика

1. Радиус Луны приблизительно в 3,8 раза меньше радиуса Земли, а масса Луны в 81 раз меньше массы Земли. Во сколько раз нужно изменить начальную скорость бросания, чтобы подбросить тело

на такую же высоту на Луне, как и на Земле?

2. Для равномерного поднятия груза массой $m=100$ кг по наклонной плоскости с углом $\alpha=30°$ к горизонту, надо приложить силу $|\vec{F}|=600$ Н. С каким ускорением груз будет скользить по этой плоскости, если его отпустить?

3. Электрическое поле образовано двумя параллельными пластинами, находящимися на расстоянии $d=2$ см друг от друга. Разность потенциалов между ними $U=120$ В. Какую скорость получит электрон под действием поля, пройдя по силовой линии расстояние $l=3$ мм? Масса электрона $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг, заряд электрона $e=1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл.

4. По квадратной рамке со стороной $a=1$ м движется без нарушения контакта со скоростью $|\vec{v}|=10$ см/с перемычка, электрическое сопротивление которой $R=0{,}5$ см; сопротивление рамки мало. Магнитное поле, индукция которого $|\vec{B}|=0{,}5$ Т, образует с плоскостью рамки угол $\alpha=30°$. Определить ток в перемычке.

5. При включении первичной обмотки трансформатора в сеть переменного тока на вторичной обмотке возникает напряжение $U_1=13{,}3$ В. При включении в эту же сеть вторичной обмотки на клеммах первичной возникает напряжение $U_2=120$ В. Найти отношение числа витков обмоток трансформатора.

6. С какого расстояния надо фотографировать здание длиной $l=50$ м, чтобы весь фасад здания уместился на кадре пленки размером 24×36 мм? Фокусное расстояние объектива $F=50$ мм.

Б. Агафонов, В. Кобелев, В. Прохоренко

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики (МИРЭА) готовит инженеров широкого профиля с навыками научно-исследовательской деятельности по основным специальностям современной радиоэлектроники, автоматики и системотехники. Выпускники МИРЭА работают на предприятиях соответствующих отраслей промышленности, в научно-исследовательских институтах, конструкторских бюро, вычислительных центрах, занимаются созданием и эксплуатацией самой уникальной современной техники — от микросхем, составляющих основу любого изделия радиоэлектронной промышленности, до сложнейших электронных вычислительных машин, являющихся главным звеном любой современной системы оперативного получения и переработки информации.

Дневное отделение МИРЭА имеет три факультета: радиотехнических систем и устройств, автоматизированных систем управления, электронных и квантовых приборов.

Математика

Варианты письменного экзамена

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$\frac{4}{x+\sqrt{x^2+x}}-\frac{1}{x-\sqrt{x^2+x}}=\frac{3}{x}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2=41, \\ x+y=9. \end{cases}$$

3. Найти все решения уравнения
$$\cos 4x+2\sin^2 x=0,$$
удовлетворяющие условию $|x|<1$.

4. Большее основание трапеции равно 24 см. Найти ее меньшее основание, зная, что расстояние между серединами ее диагоналей равно 4 см.

5. Доказать, что $|\sin n\alpha|\leqslant n\,|\sin\alpha|$ при любом натуральном n.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$\sqrt{9-5x}=\sqrt{3-x}+\frac{6}{\sqrt{3-x}}.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2+xy=28, \\ y^2+xy=-12. \end{cases}$$

3. Найти все решения уравнения
$$\sin 9x=2\sin 3x,$$
удовлетворяющие условию $0<x<2$.

4. В ромб, который делится своей диагональю на два равносторонних треугольника, вписана окружность радиусом в 2 см. Найти сторону ромба.

5. Доказать, что при любом натуральном $n>1$ выполнено неравенство

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\dots+\frac{1}{n+n}>\frac{13}{24}.$$

Билеты устного экзамена

Билет 1

1. Свойства функции $y=ax^2+bx+c$ и ее график.

2. Сумма углов треугольника. Сумма внутренних углов выпуклого многоугольника.

3. Почленным дифференцированием тождества $\sin 2x=2\sin x\cos x$ доказать тождество $\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x$.

4. Найти

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}.$$

5. Найти сумму

$$1+\sin\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{6}+\sin^3\frac{\pi}{6}+\cdots$$

Билет 2

1. Достаточное условие экстремума функции.

2. Теорема Пифагора.

3. В каких точках производная функции $y=x^3$ совпадает со значением самой функции?

kvant.mccme.ru

4. Изобразить на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = 10^{|1-x|}$.

5. Сколько решений имеет уравнение

$$\log_{\frac{5\pi}{2}} x = \cos x?$$

Физика

1. Найти, под каким углом α к горизонту брошено тело, если известно, что дальность его полета равна максимальной высоте подъема.

2. Конькобежец массой $M = 60$ кг, стоя на льду, бросил вперед груз массой $m = 5$ кг и вследствие отдачи покатился назад со скоростью $|\vec{v}| = 1$ м/с. Какую работу совершил конькобежец?

3. Газ занимает объем $V = 2$ л и находится под давлением $p = 5\cdot10^5$ Н/м². Вычислить суммарную кинетическую энергию поступательного движения его молекул.

4. Между пластинами плоского конденсатора, расположенными вертикально на расстоянии $d = 1$ см друг от друга, на нити висит заряженный бузиновый шарик, масса которого $m = 1$ г. После того как на пластины была подана разность потенциалов $U = 1000$ В, нить с шариком отклонилась на угол $\alpha = 20°$. Найти заряд шарика.

5. Найти сопротивление R проволочного тетраэдра, к двум вершинам которого подведено напряжение. Сопротивление каждого ребра тетраэдра равно r.

Ю. Худак

Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского

Институт готовит инженеров по новой технике для авиационной и других отраслей промышленности.

Дневное отделение института имеет три факультета: авиационно-механический, авиационно-технологический и радиоэлектронной радиоаппаратуры.

Математика

Вариант письменного экзамена

1. Доказать тождество

$$\frac{\sin^2\alpha - \operatorname{tg}^2\alpha}{\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha} = \operatorname{tg}^6\alpha.$$

2. Решить уравнение (x — натуральное число)

$$A^3_{x+1} + C^{x-1}_{x+1} = 14(x+1).$$

3. Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$, а медиана, проведенная к боковой стороне, равна 5. Найти угол при вершине этого треугольника.

4. Решить неравенство

$$\log_{|x-1|} x \geqslant 1.$$

5. Является ли функция $\frac{1}{3}x^3 - \frac{7}{2}x^2 + 2x - 2\sqrt{2}$ монотонной на $\left[0; \frac{1}{2}\right]$, $[1; 6]$?

Билет устного экзамена

1. Доказать теорему Виета (прямую и обратную).

2. Высота равнобедренного треугольника, опущенная на его основание, равна половине основания. Определить углы треугольника.

3. Решить неравенство

$$4^x - 2^x - 2 < 0.$$

4. Построить график функции

$$y = \frac{\cos\left(|x| + \frac{\pi}{2}\right)}{\sin x}.$$

5. Доказать, что функция $x + \sin(2 - x)$ монотонна.

Б. Кучеров, В. Горбацевич

Московский институт химического машиностроения

На дневном отделении института имеется пять факультетов: химического машиностроения, химического аппаратостроения, технической кибернетики и автоматизации химических производств, криогенной техники и механический факультет.

Механический факультет готовит инженеров-механиков по технике основной химии и промышленной экологии, машинам и аппаратам промышленности химических реактивов и особо чистых веществ, нефтехимической технике, машинам и аппаратам органических производств, коррозии химической аппаратуры, машинам и аппаратам микробиологических производств.

Выпускники факультета технической кибернетики и автоматизации химических производств занимаются аналитическими и экспериментальными исследованиями объектов автоматизации химической промышленности; расчетом, проектированием, монтажом, наладкой и эксплуатацией систем автоматического управления с широким использованием моделирования и математических управляющих машин; проектированием узлов автоматизации.

Математика

Вариант 1

1. Доказать тождество

$$\sin^2\alpha - \cos\left(\frac{\pi}{3} - \alpha\right)\cdot\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{4}.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{3}{4}} < \frac{1}{x} - \frac{1}{2}.$$

3. Бригада лесорубов должна была по плану заготовить за несколько дней 216 м^3 древесины. Первые три дня бригада выполняла ежедневно установленную планом норму, а затем каждый день заготовляла 8 м^3 сверх плана, поэтому за день до срока было заготовлено 232 м^3 древесины. Какова ежедневная норма бригады по плану?

4. При каких α и β вектор $\vec{a} = (3; -1; \alpha)$ ортогонален вектору $\vec{b} = (2; \beta; 1)$, если $|\vec{b}| = 3$?

5. В шар радиуса $R = 3$ см вписан цилиндр наибольшего объема. Найти объем этого цилиндра.

Вариант 2

1. Доказать тождество

$$\frac{1-2\sin^2\alpha}{2\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)} = 1.$$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 3^x\cdot 2^y = 144, \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x) = 2. \end{cases}$$

3. Поезд выходит из города A и через 10 час. 40 мин. приходит в город B. Если бы поезд проходил в час на 10 км меньше, то прибыл бы в B на 2 час. 8 мин. позже. Определить расстояние между городами и скорость поезда.

4. Найти предел выражения

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}.$$

5. Сумма длин диагоналей параллелограмма равна 8 см. Найти минимум суммы квадратов длин всех сторон параллелограмма.

Физика

1. За пятую секунду равномерно ускоренного движения тело проходит 45 м. Рассчитать скорость тела в конце пятой секунды и пройденный путь за пять секунд, если начальная скорость тела равна нулю.

2. При какой скорости поезда маятник длиной $l = 11$ см, подвешенный в вагоне, особенно сильно раскачивается, если длина рельсов $L = 12{,}5$ м?

3. Какое количество воды может испариться в помещении размером $10\times 8\times 4{,}5$ м, если температура воздуха 22°С, а относительная влажность 70%? Плотность насыщающих водяных паров при 22°С $\rho_н = 1{,}94\times 10^{-2}$кг/м^3.

4. Альфа-частица движется в циклотроне по кругу радиусом $r = 1$ м со скоростью $|\vec{v}| = 20\,000$ км/с. Какова должна быть индукция магнитного поля, чтобы удержать частицу на окружности? Масса альфа-частицы $m = 6{,}5\cdot 10^{-27}$ кг, заряд $q = 3{,}2\times 10^{-19}$ Кл.

Л. Милованова

Московский институт инженеров землеустройства

Подробно о факультетах и специальностях института рассказано в «Кванте», 1977, № 7.

Математика

1. Исследовать на максимум и минимум функцию

$$y = x^3 + 3x^2 - 9x + 1.$$

2. Решить неравенство

$$\frac{x-2}{x^2+1} < -\frac{1}{2}.$$

3. Решить уравнение

$$\lg\sqrt[3]{3^{x^2-8x}} = 0.$$

4. Найти $\sin(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha = -\frac{5}{13}$, $\alpha \in \left]\frac{3\pi}{2};\ 2\pi\right[$, $\cos\beta = -\frac{3}{5}$, $\beta \in \left]\pi;\ \frac{3\pi}{2}\right[$.

5. Зная большее основание равнобедренной трапеции a, ее высоту h и угол α при основании, найти площадь трапеции.

Физика

1. Автомобиль массой $m = 2{,}0$ т поднимается в гору с уклоном 0,20. На участке пути $s = 32$ м скорость автомобиля возросла от $|\vec{v}_1| = 21{,}6$ км/ч до $|\vec{v}_2| = 36$ км/ч. Считая движение автомобиля равноускоренным, определить силу тяги двигателя. Коэффициент сопротивления движению принять равным $k = 0{,}020$.

2. Снаряд массой $m = 40$ кг, летевший в горизонтальном направлении со скоростью $|\vec{v}| = 600$ м/с, разрывается на две части с массами $m_1 = 30$ кг и $m_2 = 10$ кг. Бо́льшая часть стала двигаться в прежнем направлении со скоростью $|\vec{v}_1| = 900$ м/с. Определить величину и направление скорости меньшей части снаряда.

3. На сколько градусов надо нагреть алюминиевую проволоку сечением $S = 6$ мм^2, чтобы она приняла ту же длину, что и под действием растягивающего усилия $|\vec{F}| = 508$ Н? (Справочные таблицы прилагаются.)

4. Электрон, обладающий скоростью $|\vec{v}| = 1{,}8\cdot 10^4$ м/с, влетает в однородное электрическое поле с напряженностью $|\vec{E}| = 0{,}0030$ Н/Кл и движется против силовых линий. С каким ускорением будет двигаться электрон и какова будет его скорость, когда он пройдет расстояние $s = 7{,}1$ см? Сколько времени потребуется для достижения этой скорости? На сколько изменится при этом энергия электрона (масса электрона $m = 9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг, его заряд $e = 1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл)?

5. Два шарика массой $m = 1{,}5$ г каждый, подвешенные в вакууме в одной точке на

kvant.mccme.ru

шелковых нитях, после получения одинаковых по величине и знаку зарядов разошлись на расстояние $d = 10{,}0$ см, и нити образовали угол $\alpha = 60°$. Считая заряд отрицательным, определить его величину и количество электронов, полученных каждым шариком (заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл).

6. Элемент с э. д. с. $\mathscr{E} = 1{,}1$ В и внутренним сопротивлением $r = 1{,}0$ Ом замкнут на внешнее сопротивление $R = 9{,}0$ Ом. Найти: 1) силу тока в цепи; 2) падение потенциала во внешней цепи; 3) падение потенциала внутри элемента; 4) с каким к. п. д. работает элемент.

7. Электрон описывает в магнитном поле окружность радиусом $R = 4$ мм. Скорость электрона $|\vec{v}| = 3{,}5 \cdot 10^6$ м/с. Найти вектор индукции магнитного поля. (Заряд электрона $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл, его масса $m = 9{,}1 \times 10^{-31}$ кг.)

8. Оптическая сила тонкой линзы $D = 5$ дптр. Предмет поместили на расстоянии $d = 60$ см от линзы. Где и какое получится изображение этого предмета? Каково его линейное увеличение?

Л. Кронгауз,
Л. Кульчицкая,
Б. Саввина

Ленинградский финансово-экономический институт им. Н. А. Вознесенского

В центре Ленинграда, выходя одним фасадом на Садовую улицу, а другим — на канал Грибоедова, за монументальной чугунной оградой возвышается замечательное здание с шестиколонным портиком. Оно построено в конце XVIII века по проекту архитектора Дж. Кваренги, и некогда в нем размещался Ассигнационный банк. Сейчас здесь аудитории одного из ведущих экономических вузов страны — Ленинградского финансово-экономического института им. Н. А. Вознесенского.

В наши дни из его стен выходят по-настоящему широко образованные и высоко квалифицированные современные экономисты. Кроме глубокого знания общеэкономических дисциплин они получают хорошее математическое образование. Студентам ЛФЭИ помимо общего курса высшей математики, читаются теория вероятностей и математическая статистика, исследование операций, специальные курсы по применению математических методов и моделей в различных областях экономики.

Дневное отделение ЛФЭИ имеет шесть факультетов: финансово-экономический, планово-экономический, промышленно-экономический, учетно-экономический, экономики и планирования материально-технического снабжения, экономики и научной организации труда.

Выпускники ЛФЭИ работают на предприятиях, в научно-производственных объединениях, в научно-исследовательских и проектных институтах.

Математика

Задачи из билетов устного экзамена

1. Найти производные функций:

а) $y = \sqrt{x + \sqrt{x}}$, б) $y = \cos^2 x$,

в) $y = \log_5 \sqrt{x}$,

г) $y = \sqrt{2^x}$, д) $y = \dfrac{1}{\lg x}$.

2. Исследовать функции и построить их графики:
а) $y = x^3 - 4x^2$,
б) $y = \lg |x|$,

в) $y = \operatorname{tg}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью Ox и линиями:

а) $x = 4$, $x = 6$, $y = \dfrac{1}{x}$,

б) $y = \cos x$, $x = \dfrac{\pi}{6}$, $x = \dfrac{\pi}{4}$,

в) $y = 4 - x^2$.

4. В зоопарке куском веревки длиной 100 м огораживают загон для зверей, имеющий форму равнобедренного треугольника, основанием которого служит стена павильона. Каким следует выбрать основание треугольника, чтобы его площадь была наибольшей?

5. Найти член разложения

$$\left(\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} + \sqrt[4]{a^3}\right)^{17},$$

не содержащий a.

6. Сколько различных пятизначных чисел, не содержащих одинаковых цифр, можно написать при помощи цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9?

7. Найдите координаты единичного вектора $\vec{a}$, если известно, что он перпендикулярен векторам $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{c} = \vec{j} + \vec{k}$.

И. Блюмкина

Ярославский политехнический институт

Математика

Вариант 1

1. Найдите площадь сечения тетраэдра $ABCD$ плоскостью, содержащей медиану CM грани ABC и параллельной прямой AD, если каждое ребро тетраэдра равно a. Найдите величину двугранного угла между этой плоскостью и гранью ABD.

2. Решить уравнение

$$A_x^3 + C_x^{x-2} = 14x.$$

3. Исследовать функцию $y = x\sqrt{2-x^2}$ и построить ее график.

4. Решить систему

$$\begin{cases} 10^{1+\lg(x+y)} = 50, \\ \lg(x-y) + \lg(x+y) = 2 - \lg 5. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Доказать, что точка пересечения медиан треугольника, вершины которого — концы трех ребер параллелепипеда, выходящих из одной его вершины, принадлежит диагонали параллелепипеда, выходящей из той же вершины, и делит ее в отношении 1 : 2.

2. Найти область определения функции

$$y = \frac{\sqrt{x^2-5x+6}}{\lg(x+10)^2}.$$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = x^2 - 4x + 5 \quad \text{и} \quad y = x + 1.$$

4. Решить уравнение

$$2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0.$$

Физика

1. Воздушный шар поднимается вертикально с земли с ускорением $|\vec{a}| = 2$ м/с². Через $t_1 = 10$ с от него отделился камень. На какой высоте h от поверхности земли будет находиться камень через $t_2 = 4$ с после его отделения от шара? Ускорение свободного падения $|\vec{g}| = 9{,}8$ м/с².

2. Определить кинетическую энергию E тела массой $m = 200$ г, брошенного горизонтально со скоростью $|\vec{v}_0| = 25$ м/с, в конце 5-й секунды его движения. Ускорение свободного падения $|\vec{g}| = 9{,}8$ м/с².

3. Стеклянный шар, внутри которого есть полость, плавает на поверхности воды, погрузившись в нее на половину своего объема. Какую часть объема шара ($V_п/V$) занимает полость? Плотность стекла $\rho_с = 2500$ кг/м³, воды $\rho_в = 1000$ кг/м³.

4. Какая требуется сила $|\vec{F}|$, чтобы стальной стержень длиной $l = 1$ м и сечением $S = 1$ см² удлинить на $\Delta l = 1$ мм? При какой наименьшей нагрузке $|\vec{F}_{min}|$ стержень разорвется, если предел прочности стали $\sigma_{пр} = 7{,}85\cdot10^8$ Н/м²? Модуль Юнга стали $E = 21{,}6\cdot10^{10}$ Н/м².

5. Найти потенциал φ точки электрического поля, расположенной на расстоянии $r = 50$ см от точечного заряда, создающего поле, если вектор напряженности в этой точке направлен к заряду, а $|\vec{E}| = 10^3$ В/м.

6. Электрон влетает в плоский расположенный горизонтально конденсатор параллельно его пластинам со скоростью $|\vec{v}| = 2\cdot10^4$ км/с. На пластины подано постоянное напряжение $U = 50$ В. Длина пластин конденсатора $l = 5$ см, расстояние между пластинами $d = 10$ мм. На какое расстояние h сместится электрон в вертикальном направлении под действием электрического поля за время его движения в конденсаторе? Заряд электрона $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, его масса $m = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг.

7. Конденсатор емкостью $C_1 = 4$ мкФ заряжен до разности потенциалов $U_1 = 300$ В, конденсатор емкостью $C_2 = 2$ мкФ — до $U_2 = 180$ В. Какая разность потенциалов U установится на обкладках конденсаторов после их соединения одноименными полюсами?

8. Электрон влетает в однородное магнитное поле перпендикулярно линиям магнитной индукции. Скорость электрона $|\vec{v}| = 4\cdot10^7$ м/с. Индукция магнитного поля $|\vec{B}| = 10^{-3}$ Т. Найти период T обращения и радиус R кривизны траектории движения электрона в этом поле. Заряд электрона $e = 1{,}6\cdot10^{-19}$ Кл, его масса $m = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг.

9. Луч света выходит из скипидара в воздух. Предельный угол полного внутреннего отражения $\alpha_{пр}$ для этого луча 42°23′. Чему равна скорость распространения света в скипидаре? Скорость света в вакууме $c = 3\cdot10^8$ м/с.

10. С расстояния $d = 100$ м фотографируют автомобиль, движущийся со скоростью $|\vec{v}| = 72$ км/ч. Определить время t экспозиции, за которое изображение на снимке сместилось бы не более чем на $s = 0{,}01$ мм. Фокусное расстояние объектива фотоаппарата $F = 5$ см.

В. Колпиков,
Л. Лагуненок

Марийский политехнический институт им. А. М. Горького

Марийский политехнический институт (г. Йошкар-Ола) был организован в 1932 году на базе Казанского лесотехнического института. До 1965 года он назывался Поволжским лесотехническим институтом.

На дневном отделении института имеется девять факультетов: машиностроительный, радиотехнический, механический, инженерно-экономический, инженерно-строительный, лесоинженерный, лесохозяйственный, мелиоративно-дорожный и факультет деревообработки.

В 1977 году абитуриентам было объявлено, что для получения отметки «отлично» им достаточно сделать любые пять задач варианта.

Математика

Вариант 1

1. Решить уравнение

$$2\log_9 x + 9\log_x 3 = 10$$

2. Решить уравнение

$$2\sin 5x\cdot\cos 6x + \sin x = \sin 7x\cdot\cos 4x.$$

3. Решить неравенство

$$9^x < 3^x + 2.$$

kvant.mccme.ru

4. Упростить

$$\frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}+x+\sqrt{x}}:\frac{1}{x^2-\sqrt{x}}.$$

5. Дан конус с объемом V и углом наклона образующей к основанию α. Определить боковую поверхность конуса.

6. Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y=\frac{4-x^2}{4+x^2}$ на отрезке $[-1;\ 3]$.

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=4x-x^2,\quad y=0,\quad x=1,\quad x=4.$$

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$x^{\log_x (1-x)^2}=9.$$

2. Решить уравнение

$$1+\cos x=2\sin^2 x.$$

3. При каких значениях k неравенство $x^2-(k-3)x-k+6>0$ справедливо при всех действительных x?

4. Упростить

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{(1-x^2)^{-1}}+\frac{2^{\frac{3}{2}}}{x^{-2}}\right):\left(\frac{x^{-2}}{1+x^{-2}}\right)^{-1}.$$

5. Объем правильной треугольной призмы равен V, угол между диагоналями двух боковых граней, проведенных из одной вершины, равен α. Определить сторону основания призмы.

6. Найти уравнение касательной, проведенной к кривой $y=1-x^3$ в точке, абсцисса которой равна 2.

7. Найти косинус угла между векторами $\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{a}-\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=1$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=60^\circ$.

Г. Медетьева

Сибирский автомобильно-дорожный институт им. В. В. Куйбышева

Сибирский автомобильно-дорожный институт (г. Омск) основан в 1930 году. На дневном отделении имеется четыре факультета: автомобильного транспорта, дорожных машин, промышленного и гражданского строительства и дорожно-строительный факультет.

Математика

Вариант 1

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y=x^2$ и прямой $y=x$.

2. Упростить

$$\frac{\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)}{1-\mathrm{tg}^2\alpha\cdot\mathrm{ctg}^2\beta}.$$

3. Покажите штриховкой на координатной плоскости множество точек, заданное системой неравенств

$$\begin{cases} y\leqslant\log_2 x,\\ 4x-3y-12\leqslant 0.\end{cases}$$

+ 4. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна d и наклонена к боковой грани под углом α. Определите площадь боковой поверхности призмы и ее объем.

Вариант 2

1. На обработку одной детали один рабочий затрачивает времени на 7 минут меньше, чем другой. Сколько деталей каждый из них обработает за 4 часа, если первый обработает за это время на 28 деталей больше второго?

2. Найти область определения функции

$$y=\frac{x^2}{\lg(x-2)}-\sqrt{9-x}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x^2,\ y=6-x,\ y=0.$$

4. Площадь осевого сечения конуса равна S, а угол между образующими равен 2α. Найти объем конуса.

Физика

1. Электрическую лампу при изготовлении наполняют азотом под давлением $p_1=5\cdot10^4$ Па и при температуре $t_1=15°C$. Какова температура газа в горящей лампе, если давление в ней повысилось до $p_2=1{,}1\cdot10^5$ Па?

2. На электроплитке мощностью $P=600$ Вт, имеющей к. п. д. $\eta=45\%$, нагрелось $V=1{,}5$ л воды, взятой при $t=10°C$, до кипения и $\alpha=5\%$ ее обратилось в пар. Как долго длился этот процесс?

3. Определить, расплавится ли железный метеорит массой $m=2$ г, упавший на поверхность Луны со скоростью $|\vec{v}|=220$ км/с, если его температура до столкновения с Луной $t=100°C$.

4. Какое количество бензина израсходовали двигатели самолета, пролетевшего расстояние $l=500$ км со средней скоростью $v=250$ км/ч, если средняя мощность его двигателей $P=2000$ кВт? К. п. д. $\eta=25\%$.

Г. Данилова, В. Федоров

(*Начало см. с. 49*)

67; *А. Антонян* (Ереван) **71, 72, 73а), 74, 75а)**; *Б. Аронов* (Саратов) **66—68, 71, 72, 73а), 74, 75**; *А. Арутюнян* (Ленинакан) **71—73а)**; *К. Архангельский* (Киев) **66, 67, 71**; *Р. Арыкбаев* (п. Лиман Астраханской обл.) **62**; *П. Афанасенко* (Саратов) **66, 67**; *Н. Бабина* (п. Научный Крым) **66**; *Б. Байсакалов* (Алма-Ата) **75а)**; *К. Бакланов* (Тула) **67, 69а)**; *А. Балинский* (с. Дубляны Львовской обл.) **62, 64, 65а), б), г), 66, 67, 71, 74, 75а), б)**; *В. Батырев* (Москва) **62, 65а), г), 66—69, 71, 72, 73а), 74, 75а), б)**; *С. Бахуâиев* (МНР) **62, 66, 71**; *В. Беняш-Кривец* (Новогрудок) **67, 68**; *М. Бествина* (СФРЮ) **61, 62, 65а), б), 66, 67, 69, 71, 74**; *Н. Бовсуновский* (с. Путиловичи Житомирской обл.) **67**; *В. Болотников* (Харьков) **66, 67, 69а), 71, 73а), 75а), б)**; *О. Вайнберг* (Казань) **61, 62, 64, 71, 72, 74, 75а), б)**; *М. Вартанян* (с. Ходжабек ГССР) **67**; *Н. Великороссов* (Конаково) **66, 67, 68, 69а), 71, 72**; *А. Векуа* (Кутаиси) **67, 71**; *В. Верзаков* (Рудный) **65б), в), 67, 72, 75а), б)**; *Д. Виноградов* (Дзержинск) **66**; *Г. Выродов* (Ворошиловград) **67**; *С. Галстян* (с. Чахрлу АрССР) **61—64, 65а), г), 66—68**; *И. Гашимов* (Баку) **62, 67**; *А. Гельфгат* (Рига) **71**; *А. Гильман* (Москва) **66—68, 70б), 72, 75а)**; *Е. Горбатый* (Одесса) **71, 72, 74**; *Г. Григорян* (с. Авшар АрССР) **71, 72**; *С. Гришечкин* (Москва) **61—75**; *В. Губа* (Вологда) **62, 66, 67, 69, 71—74, 75а), б)**; *А. Дедков* (Омск) **65а), 67, 69а), 73а), 75а)**; *А. Дороговцев* (Киев) **66, 67, 73, 74**; *О. Евдокимов* (Ленинград) **61—63, 65а), 66—69, 70б)**; *А. Егоян* (Тбилиси) **66, 67, 71, 72, 73а), 74, 75а)**; *С. Железовский* (Саратов) **67—74, 75а), б)**; *В. Живаев* (Ташкент) **66, 67, 71—73а), 74**; *Т. Жураев* (Ташкент) **67**; *В. Забелин* (Саратов) **66, 67, 71, 75а)**; *И. Зайцев* (Николаев) **66, 67**; *И. Зверович* (Минск) **67, 73а), 75а)**; *Е. Зиманов* (Алма-Ата) **62, 66, 67, 69а), 71, 73а), 75а)**; *К. Зиновьев* (Москва) **66, 67, 70**; *Я. Золотарев* (Ташкент) **62, 66—68, 71, 73а), 74, 75а), б)**; *Р. Измайлов* (Баку) **62, 64, 66, 68, 72, 73, 74, 75б)**; *Ф. Кабдыкаиров* (Алма-Ата) **66, 67, 71**; *Л. Какабадзе* (Тбилиси) **62, 67—69, 71, 75а)**; *В. Калмыков* (Воронеж) **66, 71, 75а)**; *Я. Канепс* (Лиелварде) **65а), г), 66, 67**; *А. Каплан* (Сумгаит) **67, 71, 73а), 74**; *В. Карапетян* (Ленинакан) **66, 67, 71, 72, 73а)**; *П. Каталымов* (Алма-Ата) **73а)**; *А. Кац* (Ташкент) **66, 71, 72, 74**; *А. Качуровский* (Новосибирск) **66, 67, 69а)**; *И. Кевхишвили* (Тбилиси) **62, 66, 69а), 73а)**; *А. Керимов* (Баку) **67**; *А. Керимов* (Москва) **71, 72, 75а)**; *Р. Кирзнев* (Талды-Курган) **67**; *В. Климович* (Москва) **62**; *С. Колпаков* (Москва) **66, 71, 73а), 75а)**; *В. Корнеев* (Ангарск) **66—69**; *А. Коротков* (Ижевск) **67**; *И. Коротков* (Волгоград) **66, 67**; *С. Корчанов* (Ангарск) **61, 62, 66—68, 71, 72, 73а), 75а)**; *Д. Корчемный* (Москва) **66—69, 70, 71—75а)**; *Г. Корчемский* (Кишинев) **66—68**; *М. Косой* (Одесса) **67**; *В. Костусяк* (Запорожье) **62—64, 66, 68, 71—74, 75а), б)**; *Л. Костюк* (Киев) **66—68**; *Ф. Крис* (Ташкент) **67**; *Е. Кузьмин* (Череповец) **62, 67, 71, 74, 75а)**; *С. Кузнецов* (Ангарск) **62, 66, 67, 71, 72, 73б), 75а), б)**; *А. Кулеско* (Донецк) **65а)—г), 66—68, 69а), 71—75**; *И. Куркиев* (Грозный) **66, 67**; *С. Лавренченко* (Москва) **66**; *В. Ламберг* (Одесса) **73а)**; *Ламтатидзе* (Тбилиси) **62**; *Е. Лапин* (Алма-Ата) **66, 67, 71, 73а)**; *В. Лашкин* (Киев) **75а)**; *М. Левин* (Кривой Рог) **67, 69а)**; *М. Левин* (Таллин) **66**; *Р. Лейнус* (Вильнюс) **67**; *И. Лозицкий* (Ганцевичи) **62, 65б), в), 67, 68, 71, 73а), 75а)**; *Е. Лумельская* (Пермь) **66, 67, 69, 71, 72, 73а), 74, 75а)**; *А. Ляховец* (Краснодар) **66—68, 71, 74, 75а)**; *А. Мамиконян* (с/х Ханджян АрССР) **67, 68, 71, 75а)**; *Д. Мартынов* (Черкизово Московской обл.) **71**; *Т. Марьясина* (Москва) **74**; *Ф. Махров* (д. Тойшево ЧАССР) **73а)**; *Р. Мешойрер* (Москва) **62, 66, 68, 69, 70б)**; *Г. Микаелян* (Кафана) **75а)**; *А. Милевский* (Мытищи) **61, 62, 66—68**; *Д. Миндлин* (Ташкент) **66, 67, 71—74, 75а)**; *А. Мирлин* (Ленинград) **62, 63, 65а)—г, 66—74), 75а), б)**; *М. Мкоян* (Ленинакан) **67**; *С. Морейно* (Москва) **66**; *И. Мустяца* (Кишинев) **66, 67**; *З. Набиева* (с. Новосаратовка АзССР) **67**; *С. Намик* (Баку) **66**; *Б. Наткович* (Тбилиси) **66, 67**; *А. Ненашев* (Ленинград) **62—64, 65а), в), г), 66, 67, 69, 70**; *Г. Николов* (НРБ) **62, 66—68**; *М. Нудельман* (Москва) **71, 72, 73, 75**; *И. Облаков* (Ленинград) **66—68**; *В. Оганян* (с. Нор-Шен АзССР) **72**; *А. Опарин* (Горький) **67, 75а)**; *В. Остапенко* (Алма-Ата) **66, 67, 71, 73а), 75а)**; *Ю. Палевская* (Москва) **75а)**; *Е. Палош* (Ворошиловград) **73а)**; *Д. Папуш* (Харьков) **61—63, 65а)—г), 66—68, 70, 71, 72, 73**; *П. Пачуашвили* (Тбилиси) **67**; *В. Печкин* (Малаховка) **62**; *А. Подвязников* (Мосальск) **62**; *В. Подобедов* (Москва) **67**; *А. Попелюхин* (Киев) **66, 75а)**; *В. Потемкин* (Донецк) **66—68, 69а)**; *А. Потоцкий* (Казань) **73а)**; *И. Прокопеня* (Пружаны) **67**; *Г. Пунинский* (Бобруйск) **65а)—г), 66—68, 71, 72, 74, 75а)**; *А. Рабинович* (Харьков) **61, 62, 66—68**; *А. Разбаков* (Полтава) **67**; *З. Райхштейн* (Ярославль) **66—69, 71, 73—75**; *Н. Рибарска* (НРБ) **62, 65а), г), 66—68, 70**; *В. Рогозин* (Щелково) **67, 69а)**; *В. Романовский* (Н. Двор Гродненской обл.) **66, 67, 71**; *А. Саблин* (р. п. Хохольский Воронежской обл.) **66—68, 69а), 71, 72, 73а), 74, 75а), б)**; *И. Савенков* (Лысые Горы Саратовской обл.) **66, 73а)**; *В. Сакович* (Поставы) **62, 66, 67, 71**; *А. Сарчимелия* (Тбилиси) **66—68, 70—74**; *С. Свадеба* (Ровно) **66, 67**; *Л. Светимова* (п. Страшены МССР) **66**; *П. Сердорг* (р. п. Анна Воронежской обл.) **62**; *В. Сидоренко* (Красноярск) **67**; *С. Сидоренко* (Брянск) **66, 70б)**; *К. Скудларский* (ПНР) **66**; *В. Смелянский* (Москва) **66, 67, 71, 73а)**; *Ю. Смирнов* (Ленинград) **62, 63, 71, 73а), 75а)**; *В. Стовба* (Москва) **62—64, 66—75**; *М. Струнинский* (Северодонецк) **67, 68**; *Ф. Сукачев* (Ташкент) **67, 71, 73а), 74, 75а), б)**; *А. Суперстаров* (Москва) **66, 67, 70**; *В. Тарев* (Коломна) **66, 67**; *А. Тартаковский* (Москва) **66—75**; *К. Таталян* (Ереван) **61, 66, 71, 73а), 74, 75а)**; *А. Тимофеев* (Чита) **67**; *З. Тлешов* (Алма-Ата) **67**; *Н. Трифонов* (Канск) **66, 67**; *В. Трофимов* (Москва) **61—64, 66—68, 70—72, 74, 75а), б)**; *О. Трушин* (Кострома) **62, 67**; *Д. Тэн-Чагай* (Алма-Ата) **66, 67, 71**; *Р. Убайдуллаев* (Ташкент) **71, 74, 75а), б)**; *А. Удавихин* (Йошкар-Ола) **66, 67, 69, 71**;

kvant.mccme.ru

Т. Ульмасов (Душанбе) **67**; *Г. Усикян* (Раздан) **67**; *М. Фадеев* (Ленинград) **66—68**; *Э. Файнгольд* (Донецк) **66**; *Н. Федин* (Омск) **62, 67, 68**; *Я. Федоров* (Ленинград) **67, 68, 71, 73а), 75а)**; *Ю. Фетисов* (Москва) **67**; *Г. Фирсова* (Ленинград) **65а), б), 67—69, 70**; *И. Фоменко* (Днепропетровск) **67, 68**; *И. Хангл* (ЧССР) **67—69, 70**; *А. Хачатрян* (Ереван) **67, 71**; *Ю. Церковский* (Москва) **62, 66, 67, 71, 72, 73а), 75а), б)**; *З. Цихиставн* (Телави) **66, 67, 69а), 73а), 74, 75а)**; *П. Чеботарев* (Москва) **66, 67**; *А. Чекмезов* (Москва) **71, 75а)**; *В. Челядина* (Ленинград) **67**; *М. Черепинский* (Воронеж) **62, 67, 69**; *В. Чернов* (Чебоксары) **62**; *В. Шенкарь*(Киев)**66**; *В. Шматенко* (Ангарск) **62, 66, 67, 71, 75а)**; *Д. Шулембаев* (Алма-Ата) **61, 62, 66—69, 70, 71, 73**; *Ф. Эрдманн* (ГДР) **73а)**; *И. Эркенов* (Пенза) **66, 67, 71, 73а), 74, 75а)**; *А. Юдовин* (Баку) **66, 67, 71, 73а), 75а)**; *Н. Ясинская* (с. Мазуровка Винницкой обл.) **71, 75а), б)**.

Физика

Почти все читатели, приславшие решения задач **Ф463 — Ф477**, справились с задачами **Ф463** и **Ф468**. Остальные задачи правильно решили: *А. Автюшков* (Минск) **67**; *К. Акопян* (Ереван) **70, 73—77**; *Е. Александрова* (Глазов) **69**; *М. Алексеев* (Обнинск) **70**; *А. Антонян* (Ереван) **70, 74, 77**; *С. Бавкун* (Черкесск) **70**; *А. Барзыкин* (п. Черноголовка Московской обл.) **69, 70, 73, 77**; *А. Белов* (Москва) **74, 75**; *В. Беркут* (Днепропетровск) **64**; *А. Большаков* (Саратов) **69, 70**; *С. Боткин* (Караганда) **70, 74, 77**; *Л. Брускин* (Иркутск) **73**; *М. Быков* (Горький) **70**; *И. Вайсбурд* (Томск) **64, 65, 69—72**; *Д. Василевич* (Ленинград) **75, 76**; *Н. Великороссов* (Конаково) **65**; *С. Веселянский* (Харьков) **66, 67, 69, 70, 74, 76, 77**; *В. Гаврилов* (Орск) **65, 70, 73—77**; *М. Гаврилов* (п. Черноголовка Московской обл.) **64, 65, 67, 69, 71, 72, 74**; *Н. Газда* (п. Клевань Ровенской обл.) **69—72**; *В. Гарковый* (Лида) **64, 65, 70—77**; *В. Голубенко* (Черкесск) **70, 72**; *Ю. Горбунов* (Курск) **70, 74, 77**; *Е. Гордиенко* (Кишинев) **66, 67**; *С. Горшков* (Среднеуральск) **67**; *И. Гусев* (Воркута) **64—66, 69—77**; *С. Дереченник* (п/о Межиречье Гродненской обл.) **69, 72**; *И. Дубовой* (Алма-Ата) **69**; *С. Дынник* (Тараклия) **64**; *Л. Евельсон* (Брянск) **69, 70**; *К. Елин* (Кокчетав) **70**; *В. Жаботинский* (Днепропетровск) **75, 76**; *М. Жуков* (Москва) **70, 72**; *А. Забродин* (п. Черноголовка Московской обл.) **64—67, 69—77**; *И. Зайцев* (Николаев) **67**; *Е. Зиманов* (Алма-Ата) **73, 76**; *И. Иванников* (Душанбе) **70, 74**; *Е. Иванов* (Долгопрудный) **64—67, 69—76**; *С. Исаков* (Пермь) **66**; *Е. Казарова* (Ереван) **77**; *Л. Какабадзе* (Тбилиси) **64, 65, 67, 69—71, 73—77**; *Я. Калайдзидис* (Чимкент) **69, 71, 76, 77**; *В. Карапетян* (Ленинакан) **69—71, 73, 74**; *А. Карнаухов* (п. Кугына ЯАССР) **67**; *С. Карнаухов* (Ростов-на-Дону) **66, 67, 69, 70, 73—75, 77**; *В. Кельмин* (Москва) **70, 71, 73**; *С. Клейман* (Луков) **69, 70**; *В. Кобелев* (Щигры) **64, 65, 67, 75, 76**; *В. Комов* (Александров) **64—67, 69—77**; *М. Константинов* (Свердловск) **73, 77**; *Ю. Кордюков* (Серов) **64**; *Г. Корчемский* (Кишинев) **70, 73**; *В. Костусян* (Запорожье) **75**; *А. Краджян* (Ереван) **70**; *А. Кудинов* (Воронеж) **72**; *Е. Кузьмин* (Череповец) **73**; *П. Кулинич* (Воронеж) **67**; *А. Куприн* (Москва) **64, 69, 70, 72—74, 76, 77**; *С. Куратов* (Кишинев) **64**; *М. Курбатов* (Москва) **64—67, 70—77**; *Т. Кухтина* (Киев) **67**; *Л. Кушнир* (Астрахань) **64, 65, 67, 71, 74—77**; *В. Лашкин* (Киев) **64, 67, 69, 73—77**; *А. Левченко* (Свердловск) **66, 67, 69, 70, 73—75**; *А. Леонович* (Лида) **69**; *Д. Лепигин* (Димитровград) **67**; *И. Лесюк* (д. Юхновичи Брестской обл.) **73—75, 77**; *И. Лозицкий* (Ганцевичи) **67, 70**; *Д. Людмирский* (Киев) **64, 65, 67, 69—71, 75—77**; *А. Макагонов* (Москва) **65, 67**; *В. Макаров* (Челябинск) **64—67**; *Т. Макиенко* (Днепропетровск) **64, 74**; *М. Матвеев* (Дубна) **64—67**; *М. Межуева* (Челябинск) **70**; *А. Мирлин* (Ленинград) **64, 67, 69—71, 73, 75, 76**; *Н. Миронов* (Кашин) **69, 70**; *М. Митрофанов* (Волгоград) **64, 70, 73—75**; *А. Мкртчян* (Ленинакан) **70, 71, 73, 74, 76, 77**; *А. Могильнер* (Свердловск) **69, 70, 73—76**; *И. Молчанов* (Киев) **69, 70, 76, 77**; *И. Муромцев* (Орск) **69, 70**; *О. Напов* (Рогатин) **67**; *Б. Наткович* (Тбилиси) **74**; *В. Невмержицкий* (с. Левковичи Житомирской обл.) **64—67, 70, 72, 73, 76, 77**; *С. Нестер* (Днепропетровск) **64**; *А. Никитенков* (Великие Луки) **64—67, 69—77**; *В. Никитин* (Запорожье) **70, 74**; *Л. Николаев* (Москва) **75**; *А. Опарин* (Горький) **64, 67, 73—76**; *О. Оразмамедов* (р/ц Кызыл-Атрек ТССР) **64, 65**; *А. Паршаков* (Свердловск) **76, 77**; *С. Пасюта* (Гатчина) **74**; *В. Переверзев* (Омск) **66**; *П. Побылица* (Ленинград) **64, 65**; *Е. Пономарев* (п. Черноголовка Московской обл.) **64—67**; *А. Попов* (Чусовой) **64—66**; *С. Прядкин* (Киев) **69, 76**; *М. Райкин* (Оренбург) **64, 67**; *Ю. Резник* (с. Веселянка Запорожской обл.) **64—67, 70, 72, 77**; *С. Розуван* (Киев) **65**; *И. Романов* (Москва) **65**; *В. Рудянко* (Мироновка Киевской обл.) **64**; *Н. Савченко* (Киев) **64, 65**; *П. Саипов* (Ташкент) **69**; *С. Седов* (Дрезна) **69, 70**; *П. Сильвестров* (Новосибирск) **65**; *А. Скипер* (п/о Богородицкое Смоленской обл.) **65**; *Н. Смоляков* (Тольятти) **65**; *В. Смышляев* (Ленинград) **64, 65, 67**; *А. Сторожев* (Актюбинск) **64, 65, 71, 74, 77**; *Р. Султанов* (Ташкент) **64—67**; *В. Терехин* (Баку) **64, 67**; *Ю. Торосян* (Тбилиси) **74**; *К. Трутнев* (Казань) **64—67, 69—75, 77**; *Н. Федин* (Новосибирск) **65—67**; *А. Филатов* (Тюмень) **65**; *Л. Хаит* (Могилев-Подольский) **64, 65**; *А. Ханчецкий* (Вилейка) **65**; *А. Шептовецкий* (Москва) **64, 65, 67**; *И. Шляхова* (Лобня) **64**.

kvant.mccme.ru

На пути к решению

1. Докажите (например, методом математической индукции) неравенство

$$\frac{n}{2}<1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}.$$

2. Докажите методом математической индукции, что f_{2k} оканчивается на 6, а f_{2k+1} — на 2.

3. После перемножения уравнений системы (8), получим

$$f_{n-2}^2\cdot xy+f_{n-2}\cdot(x+y)+1=\frac{f_{n-2}x_n+1}{x_{n-1}}\,xy,$$

или

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{f_{n-2}xy}=-f_{n-2}+\frac{f_{n-2}x_n+1}{f_{n-2}x_{n-1}}.$$

Кроме того, $x_n=f_{n-1}+1$ по условию теоремы; $f_{n-1}=f_{n-2}x_{n-1}$. Пользуясь соотношением

$$\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{f_{n-1}}=A,$$

докажите справедливость равенства

$$\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_{n-2}}+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{f_{n-2}xy}=A.$$

4 и 5. Покажите, что для базисной последовательности

$$\frac{f_{n-2}x_n+1}{x_{n-1}}=f_{n-2}^2+1.$$

Вопросы для выпускников

Математика

Правильные ответы: 1. а. 2. г. 3. г. 4. д. 5. в. 6. д. 7. в. 8. б. 9. д. 10. д. 11. б. 12. д. 13. в. 14. в. 15. а. 16. г. 17. в.

Приведем комментарии к некоторым вопросам.

5. $1000°=2\cdot360°+280°$, $\operatorname{tg}280°<-1<\sin 280°<0<\cos 280°$.

8. Искать первообразную вовсе не обязательно, тем более, что вы ее и не найдете, хотя она существует (см. последний абзац п. 100 учебника «Алгебра и начала анализа 10»).

9. $\cos\varphi=\dfrac{\vec a\cdot\vec b}{a\cdot b}<0.$

10. $\alpha+\beta+\gamma=270°+\gamma<360°$, поэтому $\gamma<90°$; $\gamma>\beta-\alpha=30°$.

13. Если α — двугранный угол при основании пирамиды, то площадь основания равна $2\cos\alpha$, а полная поверхность $S=2+2\cos\alpha$.

14. Легко доказать, что объемы гомотетичных многогранников относятся как третьи степени длин сходственных отрезков.

15. Если S_0 — площадь основания пирамиды, h — ее высота, то

$$S(x)=S_0\cdot\left(\frac{h-x}{h}\right)^2=\frac{S_0}{h^2}(h-x)^2.$$

16. Плоскости боковых граней делят пространство на 7 частей. Плоскости оснований призмы каждую из этих частей разбивают на три.

17. К каждой вершине прилежит трехгранный угол, к каждой грани — «усеченный» трехгранный угол, к каждому ребру — «дважды усеченный» двугранный угол; кроме того, есть внутренняя часть; всего 15 частей.

Физика

Ответы: 1. в. 2. б. 3. в. 4. б. 5. в. 6. б. 7. г. 8. а. 9. г. 10. г. 11. г. 12. д. 13. б. 14. г. 15. а. 16. б. 17. г. 18. г. 19. в. 20. б. 21. а.

Варианты вступительных экзаменов 1977 года

Московский энергетический институт

Математика

Вариант 1

1. a^2. 2. $\left\{\frac{1}{5},\ 6\right\}$. 3. 3. 4. $\left\{-\frac{4\pi}{3},\ -\frac{2\pi}{3},\ \frac{2\pi}{3}\right\}$. 5. $\frac{3}{2}a^2\sin 2\alpha$.

Вариант 2

1. $-2b$. 2. $]0;\ 125]$. 3. $\min\limits_{\left[-\frac{3}{2};\ 1\right]} f(x)=f(1)=-19$, $\max\limits_{\left[-\frac{3}{2};\ 1\right]} f(x)=f\left(\frac{1}{7}\right)=-5\frac{38}{49}$. 4. $\left\{-\frac{\pi}{4},\ \frac{3\pi}{4}\right\}$.

5. $$\frac{p^3\sin\alpha\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}}{128\cos^6\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{4}\right)\sin\frac{\beta}{2}}.$$

Физика

1. Начальную скорость надо уменьшить приблизительно в 2,4 раза.

kvant.mccme.ru

2. $|\vec{a}| = 2|\vec{g}|\sin\alpha - \frac{|\vec{F}|}{m} \approx 4$ м/с².

3. $|\vec{v}| = \sqrt{\frac{2eUl}{md}} \approx 2{,}5 \cdot 10^6$ м/с.

4. $I = \frac{2|\vec{B}|a|\vec{v}|\sin\alpha}{R} = 0{,}1$ А.

5. $n_1/n_2 = \sqrt{U_2/U_1} = 3$.

6. $d \approx 70$ м.

Московский институт радиотехники, электроники и автоматики

Математика

Варианты письменного экзамена

Вариант 1

1. $\left\{-1, \frac{9}{16}\right\}$.

2. $x_1 = 4$, $y_1 = 5$ и $x_2 = 5$, $y_2 = 4$.

3. $\left\{-\frac{\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right\}$.

4. 16 см. 5. Доказательство можно провести, например, методом математической индукции.

Вариант 2

1. -3. 2. $x_1 = 7$, $y_1 = -3$ и $x_2 = -7$, $y_2 = 3$. 3. $\left\{\frac{\pi}{18}, \frac{5\pi}{18}, \frac{\pi}{3}, \frac{7\pi}{18}, \frac{11\pi}{18}\right\}$.

4. $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ см.

Физика

1. $\alpha = \operatorname{arctg} 4 = 76°$.
2. $A = Mv^2(1 + M/m)/2 = 390$ Дж.
3. $K = 3/2pV = 1500$ Дж.
4. $q = m|\vec{g}|\operatorname{tg}\alpha/U = 3{,}7 \cdot 10^{-8}$ Кл.
5. $R = r/2$.

Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского

Математика

Вариант письменного экзамена

2. 4. 3. Указание. Если d_1, d_2 — диагонали параллелограмма, а a, b — его стороны, то $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$. Ответ. $2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3}$. 4. $]0; \frac{1}{2}] \cup]2; +\infty[$.

5. На $\left[0; \frac{1}{2}\right]$ — нет, на $[1; 6]$ — да.

Московский институт химического машиностроения

Математика

Вариант 1

2. $]1; \frac{2\sqrt{3}}{3}[$. 3. 24 м³. 4. $\alpha_1 = -4$, $\beta_1 = 2$ и $\alpha_2 = -8$, $\beta_2 = -2$. 5. $12\sqrt{3}\pi$.

Вариант 2

2. $x = 2$, $y = 4$. 3. 640 км, 60 км/ч.

4. $\frac{1}{16}$.

5. Указание. Если d_1, d_2 — длины диагоналей параллелограмма, а a, b — длины его сторон, то $d_1^2 + d_2^2 = 2(a^2 + b^2)$. Ответ. 32.

Физика

1. $|\vec{v}| = 50$ м/с; $s = 125$ м.

2. $|\vec{v}| = \frac{L}{2\pi}\sqrt{\frac{|\vec{g}|}{l}} \approx 18{,}8$ м/с.

3. $m = 0{,}3\,\rho_H V = 2{,}1$ кг.

4. $|\vec{B}| = \frac{m|\vec{v}|}{rq} \approx 0{,}4$ Т

Московский институт инженеров землеустройства

Математика

1. $y_{\max} = y(-3) = 28$, $y_{\min} = y(1) = -4$. 2. $]-3; 1[$. 3. $(0{,}8)$. 4. $-\frac{33}{65}$.

5. $(a - h \cdot \operatorname{ctg}\alpha)h$.

Физика

1. $|\vec{F}_T| = m\left[\frac{v_2^2 - v_1^2}{2s} + |\vec{g}|(\sin\alpha + k\cos\alpha)\right] = 6{,}4$ кН

2. $v_2 = \frac{mv - m_1v_1}{m_2} = -300$ м/с;

меньший осколок движется в сторону, противоположную большему.

3. $\Delta T = \frac{|\vec{F}|}{ES\alpha} = 52{,}5$ К, где $\alpha = 24 \times 10^{-6}$ К⁻¹ — коэффициент линейного расширения алюминия и $E = 7 \cdot 10^{10}$ Н/м² — модуль Юнга.

4. $|\vec{a}| = \frac{e|\vec{E}|}{m} \approx 5{,}3 \cdot 10^8$ м/с²; $|\vec{v}_1| = \sqrt{v^2 + 2|\vec{a}|s} \approx 2 \cdot 10^4$ м/с;

$t = \frac{|\vec{v}_1| - |\vec{v}|}{|\vec{a}|} \approx 4 \cdot 10^{-6}$ с;

$\Delta W = e|\vec{E}|s \approx 3{,}4 \cdot 10^{-23}$ Дж.

5. $|q| = d\sqrt{m|\vec{g}|\operatorname{tg}\alpha} \approx 9{,}7 \cdot 10^{-8}$ Кл; $|q|/e \approx 6 \cdot 10^{11}$.

6. 1) $I = \frac{\mathscr{E}}{R + r} = 0{,}11$ А; 2) $IR = 0{,}99$ В; 3) $Ir = 0{,}11$ В; 4) $\eta = \frac{R}{R + r} = 0{,}9$.

7. $|\vec{B}| = \frac{m|\vec{v}|}{eR} \approx 5 \cdot 10^{-3}$ Т.

8. $f = 30$ см; $\Gamma = f/d = 1/2$.

Ленинградский финансово-экономический институт им. Н. А. Вознесенского

Математика

Задачи из билетов устного экзамена

4. $50\sqrt{2}$. 5. $T_8 = C_{17}^8$. 6. A_9^5.

7. $\left(\frac{\sqrt{3}}{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ и $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3};\ \frac{\sqrt{3}}{3};\ -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

Ярославский политехнический институт

Математика

Вариант 1

1. Площадь равна $\frac{\sqrt{11}}{16}a^2$, величина двугранного угла $\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{33}}\right)$. 2. 5. 4. $x=4{,}5$; $y=0{,}5$.

Вариант 2

1. Указание. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, O — точка пересечения медиан треугольника AB_1D_1. Разложите по векторам $\overrightarrow{A_1A}$, $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_1D_1}$ векторы $\overrightarrow{A_1O}$ и $\overrightarrow{A_1C}$.

2. $]-\infty;\ -11[\cup]-11;\ -10[\cup]-10;\ -9[\cup]-9;\ 2]\cup[3;+\infty[$. 3. $S = \int_1^4 [(x+1)-(x^2-4x+5)]\,dx = 4{,}5$.

4. $x = (-1)^k\frac{\pi}{6} + \pi k\ (k \in Z)$.

Физика

1. $h = |\vec a|t_1^2/2 + |\vec a|t_1t_2 - |\vec g|t_2^2/2 = 101{,}6$ м.

2. $E = m(|\vec v_0|^2 + |\vec g|^2t^2)/2 = 302{,}6$ Дж.

3. $V_п/V = 1 - \rho_в/2\rho_с = 4/5$.

4. $|\vec F| = E\Delta lS/l = 21{,}6$ кН; $|\vec F_{min}| = \sigma_{пр}S = 78{,}5$ кН.

5. $\varphi = |\vec E|r = 5$ кВ.

6. $h = \frac{eUl^2}{2md|\vec v|^2} \approx 2{,}8$ мм.

7. $U = \frac{C_1U_1 + C_2U_2}{C_1 + C_2} = 260$ В.

8. $R = \frac{m|\vec v|}{e|\vec B|} \approx 22{,}8$ см; $T = \frac{2\pi R}{|\vec v|} \approx 36\cdot10^{-9}$ с.

9. $v = c\sin\alpha_{пр} \approx 2\cdot10^8$ м/с.

10. $t = \frac{s(d-F)}{F|\vec v|} \approx 1$ мс.

Марийский политехнический институт им. А. М. Горького

Математика

Вариант 1

1. $\{3,\ 3^9\}$. 2. $x = \frac{\pi}{4}k$, $x = \frac{\pi}{14} + \frac{\pi}{7}l\ (k,\ l \in Z)$. 3. $]-\infty;\ \log_3 2[$. 4. $x=1$.

5. $\sqrt[3]{\frac{9\pi V^2}{\sin^2\alpha\cdot\cos\alpha}}$. 6. $\min\limits_{[-1;\,3]} y = y(3) = -\frac{5}{13}$, $\max\limits_{[-1;\,3]} y = y(0) = 1$. 7. 9.

Вариант 2

1. 4. 2. $x = \pi + 2\pi k$, $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi l\ (k,\ l \in Z)$. 3. $]-3;\ 5[$. 4. $\sqrt{2}$.

5. $\frac{\sqrt[3]{4V\sin\frac{\alpha}{2}}}{\sqrt[6]{3\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\alpha}{2}\right)}}$.

6. $y = -12x + 17$. 7. $\frac{\sqrt{21}}{7}$.

Сибирский автомобильно-дорожный институт им. В. В. Куйбышева

Математика

Вариант 1

1. $\frac{1}{6}$. 2. $-\cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta$. 4. Боковая поверхность равна $4d^2\sin\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}$, объем — $d^3\sin^2\alpha\sqrt{\cos 2\alpha}$.

Вариант 2

1. Первый — 48 деталей, второй — 20.

2. $]2;\ 3[\cup]3;\ 9]$. 3. $S = \int_0^2 x^2dx + \int_2^6 (6-x)\,dx = 10\frac{2}{3}$. 4. $\frac{\pi}{3}S\sqrt{S\cdot\operatorname{tg}\alpha}$.

Физика

1. $T_2 = \frac{p_2T_1}{p_1} = 633{,}6$ К, $t_2 = 360{,}6$°C.

2. $\tau = \frac{\rho V(c\Delta t + \alpha L)}{\eta P} \approx 0{,}75$ ч, где $\rho = 10^3$ кг/м³ — плотность, $c = 4200$ Дж/(кг·К) — удельная теплоемкость и $L = 2{,}26\cdot10^6$ Дж/кг — удельная теплота парообразования воды.

3. Расплавится.

kvant.mccme.ru

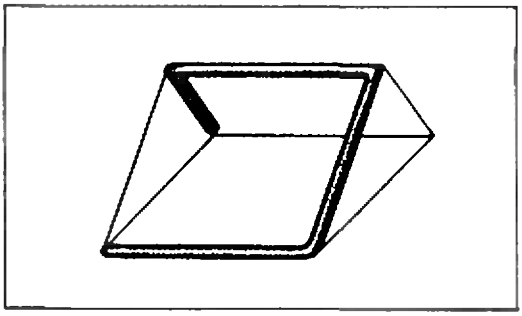


Рис. 1.

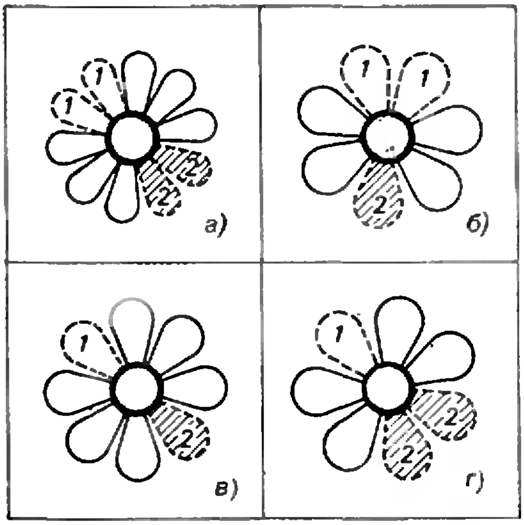


Рис. 2.

4. $m = \frac{Pl}{vq\eta} \approx 1{,}3 \cdot 10^3$ кг, где $q = 4{,}5 \times \times 10^7$ Дж/кг — теплота сгорания бензина.

Задачи наших читателей

(см. «Квант» № 5)

6. Точки A и B движутся по двум концентрическим окружностям с одинаковыми угловыми скоростями. Если в начальный момент точки находились на одном радиусе, то расстояние $|AB|$ между точками все время будет оставаться постоянным.

7. Э. д. с. одного аккумулятора значительно больше э. д. с. другого. Ток, генерируемый «сильным» аккумулятором, идет частично через лампу, а частично — через «слабый» аккумулятор, который играет роль шунта с небольшим сопротивлением. К «сильному» аккумулятору последовательно подсоединяют очень малое сопротивление, а в цепь «слабого» аккумулятора — очень большое сопротивление. Вследствие этого уменьшается ток, протекающий через «слабый» аккумулятор, и увеличивается ток, протекающий через лампу.

8. Работа при подъеме бревна за толстый конец равна $A_1 = mgh_1$, где h_1 — расстояние от тонкого конца до центра тяжести бревна. При подъеме бревна за тонкий конец $A_2 = mgh_2$, где h_2 — расстояние от толстого конца до центра тяжести. По условию $A_1 - A_2 = A$. Решая систему

$$\begin{cases} h_1 + h_2 = l \\ mg\,(h_1 - h_2) = A, \end{cases}$$

находим

$$h_1 = \frac{1}{2}\left(l + \frac{A}{mg}\right).$$

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 6)

1. Федор получил 9 баллов, Николай — 8, Виктор — 7, Клим — 6, Иван — 5, Андрей — 4, Захар — 3, Михаил — 2, Ефим — 1, Тимофей — 0. Таким образом, расшифровка цифрового ряда

67480, 2401240564, 953564

следующая:

КВАНТ. МАТЕМАТИКА. ФИЗИКА.

2. См. рисунок 1.

3. Вторая девочка должна своим первым ходом сделать ромашку симметричной. В зависимости от четности числа лепестков и количества лепестков, оторванных первой девочкой, она отрывает один или два лепестка (рис. 2, а) — г)). Затем вторая девочка симметрично повторяет ходы первой девочки. Поскольку сразу с обеих «половинок» ромашки лепестки отрывать нельзя, первая девочка проигрывает.

4. Сергею и Агею по 44 года, Андрею 41 год, Степану 47 лет, а Ивану 50. Так как из чисел 41, 44, 47 и 50 кратно пяти только 50, получаем, что сына Андрея зовут Иван.

Над номером работали:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шиханович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, И. Смирнова.

Зав редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

Корректор Л. Боровина

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, «Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 28/IV 1978 г.
Подписано в печать 14/VI 1978 г.
Бумага 70×108¹/16. Физ. печ. л. 4
Усл. печ. л. 5,6 Уч.-изд. л. 6,88. Т-11680
Цена 30 коп. Заказ 941
Тираж 300 606 экз.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

На марках — «Союз» — «Аполлон»

15 июля 1975 года с космодрома Байконур стартовал космический корабль «Союз-19» с космонавтами Алексеем Леоновым и Валерием Кубасовым. В тот же день с мыса Канаверал был запущен космический корабль «Аполлон» с Томасом Стаффордом, Вэнсом Брандом и Дональдом Слейтоном. 17 июля в 19 часов 12 минут по московскому времени корабли состыковались, образовав первую международную орбитальную станцию.

Космонавты успешно выполнили совместные научные исследования, осуществили четыре взаимных перехода экипажей из корабля в корабль. Громадный четырехлетний труд тысяч людей, готовивших этот полет, завершился точно по плану. Прекрасно работали стыковочные системы на каждом корабле. Никаких замечаний не вызвала унифицированная система жизнеобеспечения космонавтов. Уверенно действовали совместные радиосистемы и системы управления полетом одновременно из двух наземных Центров. А, главное, была подтверждена возможность совместного решения сложных организационных и технических проблем двумя государствами, лидирующими в области космических исследований.

Этот выдающийся научно-технический эксперимент послужил поводом для выпуска большого количества почтовых марок в разных странах. Только за один 1975 год 35 государств выпустили 145 марок и блоков, посвященных программе «Союз» — «Аполлон». Некоторые из них мы воспроизводим на этой странице.

В. Рудов

kvant.mccme.ru

Цена 30 коп.
Индекс 70465

Здесь изображены последовательные положения работающего роторного насоса. Направления, в которых вращаются роторы, видны из рисунка. Профиль каждого ротора состоит из двух конгруэнтных дуг эпициклоиды и двух конгруэнтных дуг гипоциклоиды. Каждый ротор является своеобразной шестерней с двумя зубьями. Эпициклоиды представляют собой головки зубьев шестерен, гипоциклоиды — пазы между зубьями. Подробнее о геометрии зубьев шестерен читайте на с. 50