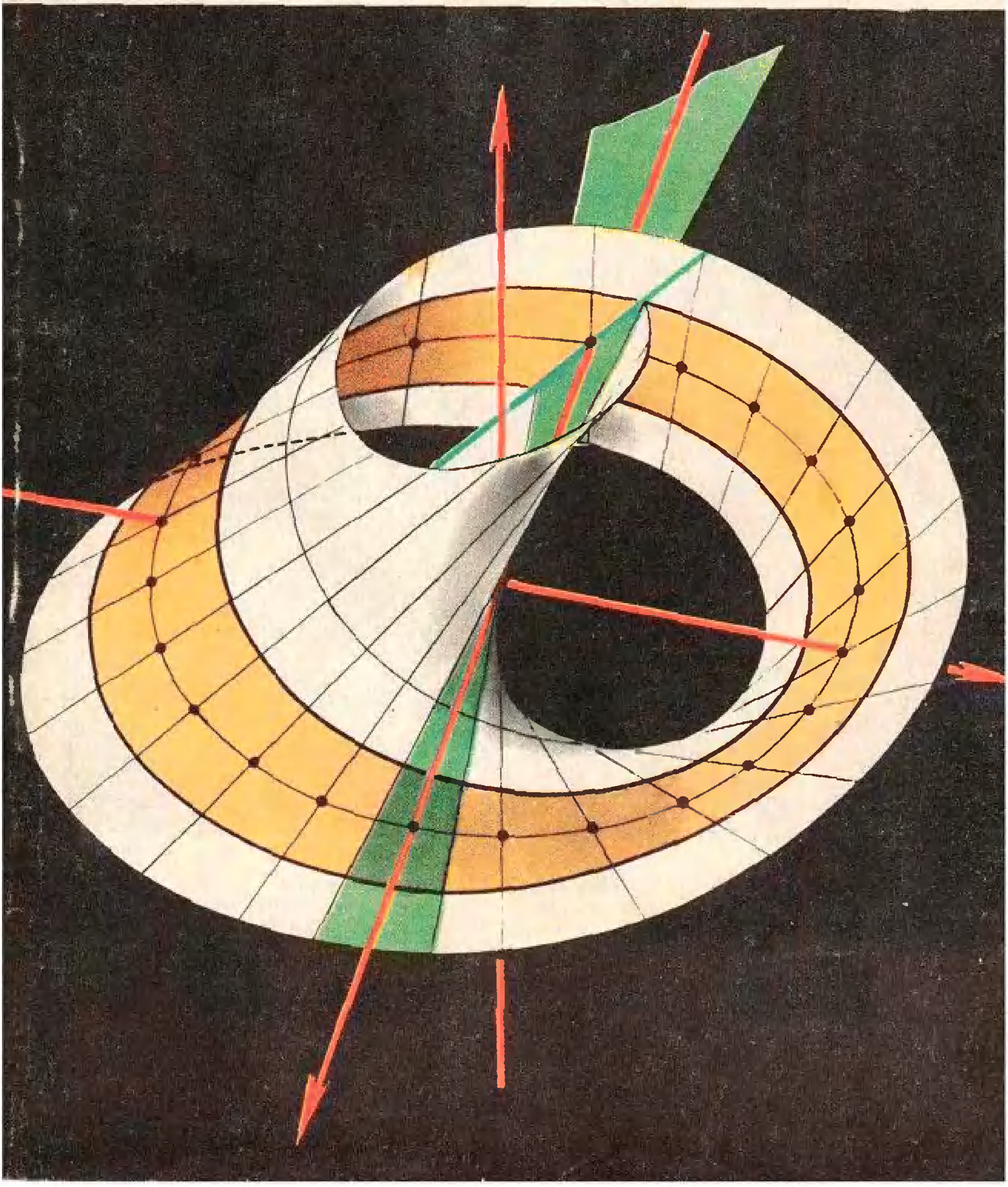
Квант

6
1978

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ
АКАДЕМИИ НАУК СССР И АКАДЕМИИ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ НАУК СССР



«Наверное, нет на свете такого мальчика, который не играл бы с увеличительным стеклом (линзой)». Так начинается статья «Знакомы ли вы с линзой?» Но чтобы познакомиться с линзой, совсем не обязательно иметь увеличительное стекло. Эти капли росы на дубовом листе — тоже линзы. Если вы никогда не смотрели на росу с такой точки зрения — присмотритесь. И вы увидите тонкие прожилки листа как замысловатую сетку дорог, а паутинку — как мохнатую нитку. И каждая капелька фокусирует солнечный свет.

Основан в 1970 году

Квант

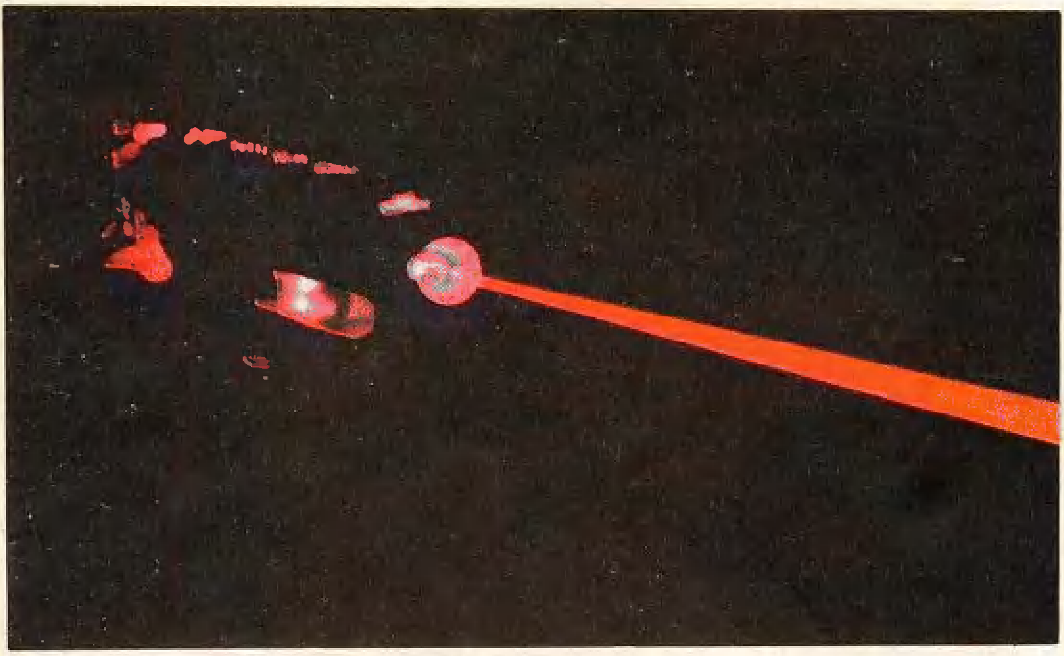
6
1978

Научно-популярный физико-математический журнал Академии наук СССР и Академии педагогических наук СССР

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы

В НОМЕРЕ:

На первой странице обложки изображена поверхность Мёбиуса. О том, как ее построить, и о ее свойствах см. на с. 28.



В. Фабрикант

Что происходит в гелий-неоновом лазере

Гелий-неоновый лазер становится распространенным прибором, широко применяемым в самых различных областях техники и науки. Во многих школах появились такие лазеры, и с их помощью изучаются свойства когерентного света.

Сердцем каждого лазера служит слой так называемой активной среды, усиливающей проходящий сквозь нее световой луч. В гелий-неоновом лазере такой средой является плазма, образующаяся при прохождении электрического тока сквозь смесь гелия с неоном в газоразрядной трубке.

Что такое лазер или мазер,
На какой они возникли базе?
Л. Мартынов

Обычно при прохождении через среду световой луч испытывает ослабление — часть энергии луча поглощается средой. Однако можно создать среду, при прохождении через которую свет будет не ослабляться, а усиливаться. Впервые возможность создания такой среды была указана в 1939 году. Конечно, в процессе усиления света закон сохранения энергии не нарушается. Дополнительную энергию световой луч черпает из внутренней энергии атомов среды.

Эйнштейн анализирует взаимодействие света с атомом

Переходы, переходы...
Из песни

Для того чтобы понять, как «работает» усиливающая свет среда, надо рассмотреть более подробно взаимодействие света с атомами. Впервые такое рассмотрение провел создатель теории относительности Альберт Эйнштейн. Поразительно, сколько фундаментальных результатов в самых различных областях современной физики связано с именем Эйнштейна!

В 1916 году Эйнштейн, развивая идеи Макса Планка о квантовом характере взаимодействия света с атомами, впервые четко сформулировал существование трех элементарных оптических процессов, в которых участвуют атомы.

Как известно, согласно квантовым представлениям внутренняя энергия атомов может изменяться только скачками. Атом, как мы говорим, может находиться в стационарном состоянии на одном из энергетических уровней (рис. 1), соответствующих вполне определенным запасам внутренней энергии. Оптические переходы атома с одного уровня на другой сопровождаются испусканием или поглощением атомом фотонов. Согласно закону сохранения энергии должно выполняться равенство

$$h\nu = E_2 - E_1, \qquad (1)$$

где $h\nu$ — энергия фотона (h — постоянная Планка, ν — частота света), E_1 и E_2 — энергии стационарных состояний атома, между которыми происходит переход. Ясно, что для перехода с одного энергетического уровня на более высокий атом должен поглощать фотоны. Энергия поглощенных фотонов идет на увеличение внутренней энергии атома. Наоборот, при переходах на более низкий уровень атом должен испускать фотоны, уносящие избыток внутренней энергии атома.

Эйнштейн указал, что существует один тип процессов поглощения фотонов и два типа процессов испускания фотонов (рис. 2). В процессе поглощения атом как бы глотает подлетевший к нему фотон и переходит на более высокий энергетический уровень (рис. 2, *а*). Процесс испускания атомом фотона может происходить спонтанно — самопроизвольно, без всякого внешнего воздействия (рис. 2, *б*). Конечно, для того чтобы могло возникнуть спонтанное испускание фотона, необходимо атом предварительно возбудить. Спонтанное испускание происходит из-за неустойчивости возбужденного состояния атома. Продолжительность жизни изолированных возбужденных атомов различна для разных сортов атомов и для разных состояний. (Наиболее короткие продолжительности жизни возбужденных атомов довольно малы — порядка 10^{-8} с.)

Наиболее важным для лазеров было открытие Эйнштейном существования второго типа процессов испускания фотонов — так называемого вынужденного, или стимулированного, испускания. (Мы намеренно несколько отклонились от систематики оптических процессов, данной самим Эйнштейном. Он называл вынужденное испускание отрицательным поглощением, объединяя тем самым этот процесс с процессом поглощения. Ниже мы увидим, что для этого есть основания, но в современной литературе установилась терминология, используемая нами.)

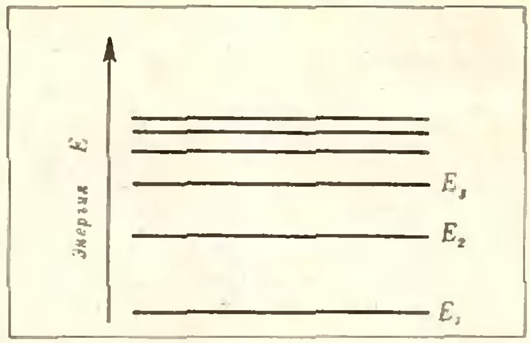


Рис. 1. Схема энергетических уровней атома.

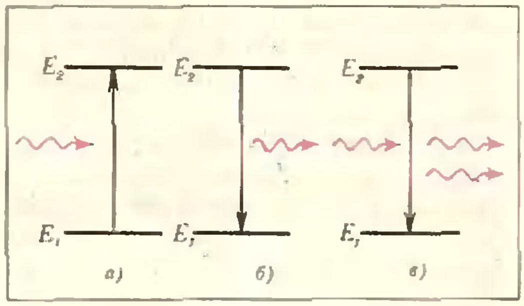


Рис. 2. *а*) — **поглощение,** *б*) — **спонтанное испускание,** *в*) — **вынужденное испускание.**

Вынужденное испускание возникает при столкновении фотона с возбужденным атомом. Как показал Эйнштейн, вынужденный переход атома с уровня E_2 на более низкий уровень E_1 может стимулировать только фотон с энергией, удовлетворяющей равенству (1). Фотон как бы толкает и без того неустойчивый возбужденный атом, и тот «падает» на более низкий энергетический уровень, испуская новый фотон (рис. 2, *в*). При этом фотон, стимулировавший переход, не меняет своей энергии и направления своего полета. Важно подчеркнуть, что вновь рожденный фо-

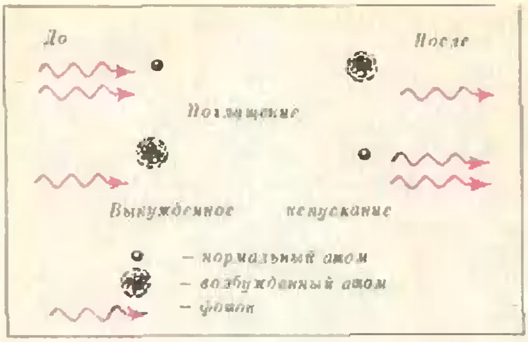


Рис. 3.

тон является «близнецом» фотона, стимулировавшего его рождение, — он несет такую же энергию и летит по тому же направлению.

Итак, после встречи первого фотона с возбужденным атомом дальше летят уже два совершенно одинаковых фотона, а атом переходит на более низкий энергетический уровень. Абсолютная одинаковость этих двух фотонов проявляется не только в равенстве энергий и в совпадении направления их полета, но и в свойстве, называемом когерентностью. Существует квантовая теория когерентности, особенно развившаяся после появления лазеров; однако более наглядно это свойство описывается на основе классических, волновых представлений о свете.

На волновом языке процесс стимулированного испускания описывается так: световая волна, встретившая на своем пути возбужденный атом, «высасывает» из него энергию и, увеличив за счет этой энергии амплитуду, продолжает распространяться без всякого скачка фазы и изменения направления.

Теперь нам понятно, почему процесс вынужденного испускания Эйнштейн назвал отрицательным поглощением. Ведь поглощение и вынужденное испускание — это два «взаимно обратных» процесса. Начальное состояние в первом процессе совпадает с конечным состоянием второго и наоборот (рис. 3). Кроме того, при поглощении уменьшается интенсивность падающего света, но его когерентность не нарушается; в результате вынужденного испускания интенсивность падающего света увеличивается за счет стимулированного излучения, которое когерентно с падающим светом.

Таким образом, если в среде имеются возбужденные атомы, способные к вынужденному испусканию, то проходящий через такую среду световой поток увеличивает свою интенсивность, оставаясь когерентным, и этот процесс прямо противоположен процессу поглощения.

Именно когерентное усиление света при вынужденном испускании лежит в основе создания оптических квантовых генераторов — лазеров. Само слово «лазер» образовано из начальных букв английских слов light amplification by stimulated emission of radiation (усиление света стимулированным испусканием излучения).

Инверсная населенность и как ее получают

Все вверх дном
Название английской сказки

Теперь уже можно объяснить, почему различные среды обычно ослабляют, а не усиливают свет. Все дело в том, что в обычных условиях всегда больше атомов на нижних уровнях энергии, чем на более высоких (рис. 4). Поэтому в среде больше атомов, способных «глотать», а не испускать фотоны, и число актов поглощения превышает число актов вынужденного испускания.

Для получения усиливающей среды необходимо создать инверсию населенностей атомами энергетических уровней — создать ситуацию, когда на верхних уровнях находится больше атомов, чем на нижних (рис. 5). Тогда акты вынужденного испускания будут преобладать над актами поглощения, и за счет вынужденного испускания будет происходить усиление света. Посмотрим, как инверсия

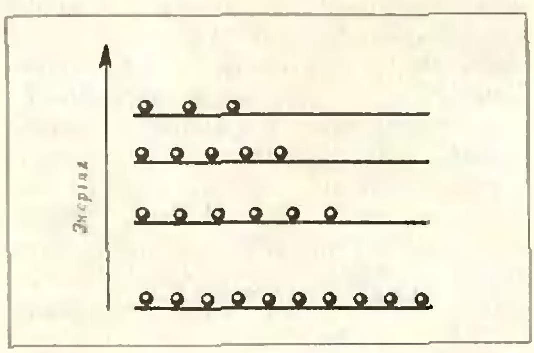


Рис. 4. Нормальное распределение атомов по энергетическим уровням.

населенностей получается в гелий-неоновом лазере.

Конструкция гелий-неонового лазера очень проста (рис. 6). Основные его элементы — газоразрядная трубка, наполненная смесью гелия и неона, и два зеркала, одно — сплошное, другое — частично прозрачное. Процессы, происходящие в лазере, далеко не так просты, как его конструкция. Попытаемся в них разобраться.

При прохождении электрического тока сквозь смесь гелия и неона в газоразрядной трубке возникает плазма, состоящая из атомов, ионов и свободных электронов. В плазме идет своеобразная «потасовка» между электронами и атомами, во время которой то атомы отнимают у электронов энергию, то, наоборот, электроны отнимают энергию у атомов.

Если электрон обладает энергией, удовлетворяющей неравенству

$$\frac{mv^2}{2} \geqslant E_2 - E_1, \qquad (2)$$

то при столкновении с атомом он может возбудить атом, т. е. перевести его с уровня с энергией E_1 на более высокий уровень с энергией E_2. Такие неупругие столкновения электронов с атомами называются ударами первого рода. При ударе первого рода электрон теряет всю (знак «=» в (2)) или часть (знак «>» в (2)) своей энергии, и условие (2) выражает закон сохранения энергии при этом процессе. Сказывается «квантовая гордость» атома, не принимающего подачек в виде порций энергии, меньших чем $E_2 - E_1$.

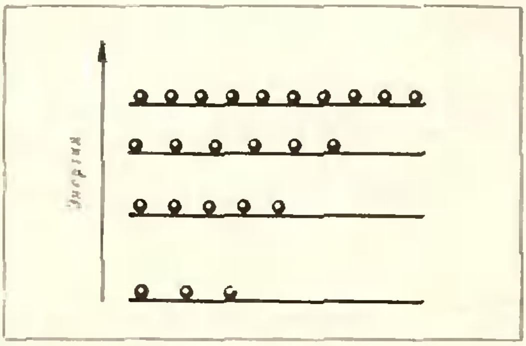


Рис. 5. Инверсное распределение атомов по энергетическим уровням.

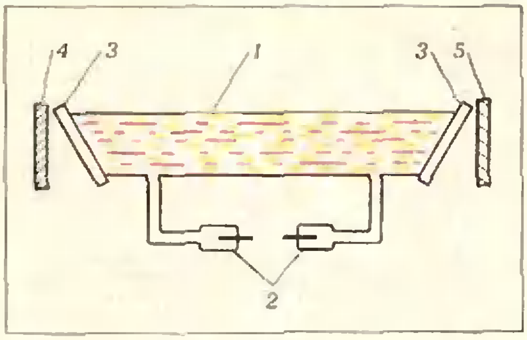


Рис. 6. Схема гелий-неонового лазера. *1* — **газоразрядная трубка,** *2* — **электроды,** *3* — **выходные окна,** *4* — **сплошное зеркало,** *5* — **частично прозрачное зеркало.**

Казалось бы, при помощи электронных ударов первого рода нетрудно получить инверсию населенностей. Надо только создать условия, при которых в плазме будет много быстрых электронов с энергией, удовлетворяющей условию (2). Тогда за счет ударов первого рода атомы перейдут на верхний уровень, и возникнет инверсия населенностей.

Однако надо учесть два важных обстоятельства, которые препятствуют созданию инверсной населенности. Наряду с ударами первого рода существуют удары второго рода, при которых возбужденные атомы отдают энергию электронам и переходят с верхних уровней вниз. В столкновениях второго рода могут участвовать, очевидно, электроны, обладающие любой кинетической энергией. Для таких столкновений нет ограничения (2). Поэтому в плазме всегда больше электронов, способных совершать удары второго рода, мешающие установлению инверсии населенностей, чем электронов, способных возбуждать атомы.

И еще одно обстоятельство. Несмотря на очень высокую электронную температуру в плазме (порядка десятков тысяч градусов) *), средняя энергия электронов обычно ниже порогового значения $E_2 - E_1$. Если бы

*) Электроны в плазме подогреваются электрическим полем, поддерживающим электрический ток. Из-за огромного различия в массах теплообмен между электронами и атомами затруднен. Поэтому температура электронного газа в десятки и сотни раз выше температуры газа из нейтральных атомов.

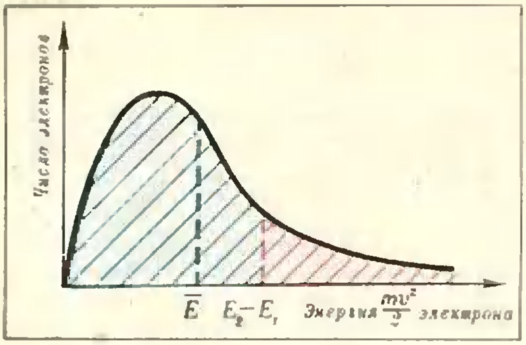


Рис. 7. Распределение электронов по энергиям.

все электроны обладали одной и той же энергией, равной средней энергии $\overline{E}$ их теплового движения, то ни один из них не смог бы возбудить атом. При данной температуре (при данном значении $\overline{E}$) энергии $\frac{mv^2}{2}$ теплового движения отдельных электронов отличаются от значения $\overline{E}=\overline{\frac{mv^2}{2}}$ — существует, как говорят, разброс электронов по энергиям. На рисунке 7 приведен график распределения электронов по энергиям при данной температуре. Видно, что лишь малая часть электронов обладает энергией выше порога возбуждения атома.

Населенность уровня зависит не только от числа возбуждающих столкновений, но и от продолжительности жизни атома на данном энергетическом уровне. Ясно, что чем больше продолжительность жизни на данном уровне, тем больше атомов накапливается на нем. Поэтому для получения инверсии населенностей выгодно иметь верхний уровень с большей продолжительностью жизни, а нижний — с меньшей. Для лазера, работающего в непрерывном режиме, это условие является жестким.

На рисунке 8а изображена упрощенная схема интересующих нас уровней атома неона. Переходы между уровнями E_3 и E_2 сопровождаются испусканием красной линии с длиной волны 0,6328 мкм. Продолжительность жизни атомов на уровне E_3 равна примерно $2\cdot10^{-7}$ с, а на уровне E_2 — 10^{-8}с, т. е. примерно в пять раз меньше, что благоприятствует получению инверсии. Однако до уровня E_3 атомы могут возбуждаться только электронами с энергиями, превышающими E_3-E_1, а до нижнего уровня E_2 — электронами с энергиями, превышающими E_2-E_1 *). Так как $E_3-E_1>E_2-E_1$, то данная ситуация не благоприятствует инверсии. Чем выше уровень, тем труднее электронам возбуждать атомы до этого уровня. В результате игры этих двух факторов очень трудно получить инверсию в чистом неоне. Это и заставляет применять смесь гелия с неоном, причем гелия в этой смеси примерно в десять раз больше неона.

*) Возможна и такая ситуация: атом, столкнувшийся с электроном и перешедший на возбужденный уровень, успевает за время жизни столкнуться со вторым электроном и перейти на более высокий уровень (такое возбуждение называется ступенчатым). Однако концентрация возбужденных атомов мала (из-за очень малой продолжительности жизни атомов в возбужденном состоянии), и поэтому при обычных условиях вероятность такого события ничтожна.

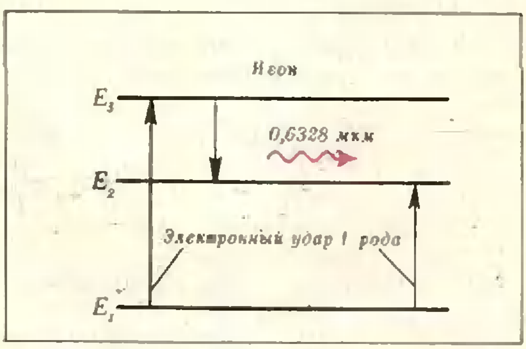


Рис. 8а.

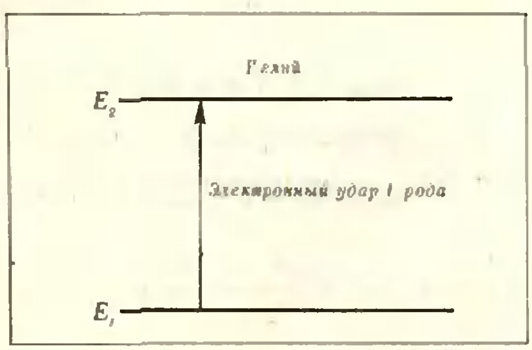


Рис. 8б.

Роль гелия весьма своеобразна. Гелий действует как бы за сценой, но при этом играет весьма важную роль в получении инверсии населенностей атомов неона. На рисунке 8б изображены два уровня атома гелия: самый низкий E_1 и уровень E_2, соответствующий возбужденному состоянию с колоссальным временем жизни (конечно, в атомных масштабах) порядка 10^{-3} с. Такие уровни называют метастабильными. Очень важно, что уровень гелия E_2 находится почти на той же высоте, что и уровень E_3 неона. В гелий-неоновой смеси за счет электронных ударов первого рода накапливается большое число метастабильных атомов гелия (сказывается их огромное время жизни). Метастабильные атомы гелия сталкиваются с нормальными (невозбужденными) атомами неона и отдают им свою энергию, переходя без излучения на уровень E_1 и переводя атомы неона на уровень E_3. Упрощенно схему этих переходов можно представить так, как на рисунке 9. Передача энергии происходит очень эффективно благодаря близости «по высоте» соответствующих уровней гелия и неона (такие явления называют квантовым резонансом). Таким образом, происходит избирательное возбуждение атомов неона до уровня E_3 и возникает инверсия населенностей на уровнях E_3 и E_2. Этот изящный метод получения инверсии надежно работает в гелий-неоновом лазере.

Интересно отметить, что для создания первых квантовых генераторов — мазеров (генераторов микроволнового излучения) советские физики Н. Г. Басов и А. М. Прохоров и американский физик Ч. Таунс использовали способ получения инверсии, как бы обратный описанному выше и заключающийся не в избирательном возбуждении до верхнего уровня, а в избирательном удалении молекул, находящихся на нижнем уровне. Такой же прием предлагался для лазеров, но не получил пока широкого применения.

Нарастание фотонной лавины

Отселе я вижу потоков рожденье
И первое грозных обвалов движенье.
А. С. Пушкин

Как же происходит усиление света в гелий-неоновом лазере?

Представим себе, что какой-либо из возбужденных до уровня E_3 атомов неона спонтанно испустил фотон, летящий параллельно оси разрядной трубки и соответствующий красной линии неона. Когда этот фотон встретит на своем пути возбужденный атом неона, произойдет акт вынужденного испускания, и дальше уже полетят два фотона-близнеца. Каждый из этих фотонов, встретив возбужденный атом неона, стимулирует рождение нового фотона. Дальше будут лететь уже четыре фотона (рис. 10) и так далее. В результате нарастает лавина одинаковых фотонов, летящих в одном и том же направлении. На волновом языке это означает усиление световой волны, причем, напоминаем, — усиление когерентное.

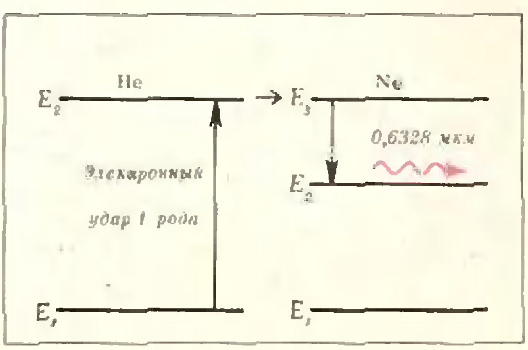


Рис. 9.

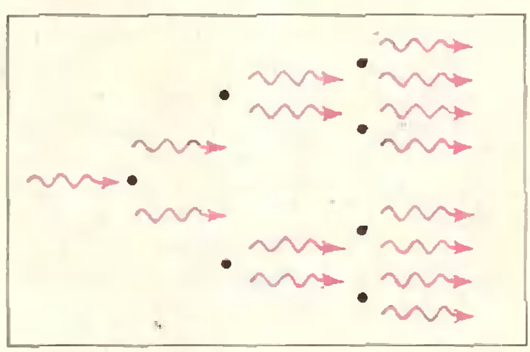


Рис. 10. Нарастание фотонной лавины.

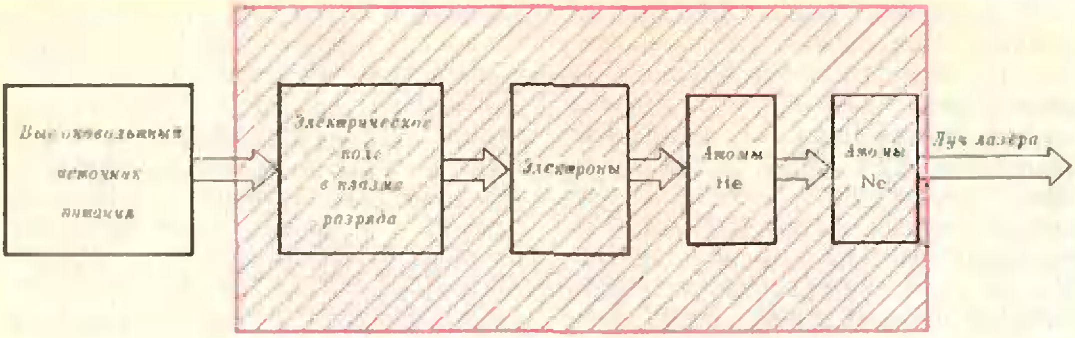


Рис. 11.

Образовавшаяся лавина фотонов *натыкается на одно из зеркал лазера* и, отразившись, идет обратно сквозь активную среду, что сопровождается нарастанием лавины. Затем происходит отражение от второго зеркала и опять нарастание лавины и так далее. Мы с помощью зеркал как бы удлиняем активную среду. Однако не следует думать, что даже при идеальных зеркалах, отражающих все падающие на них фотоны, лавина будет безгранично нарастать. Лавина сама себе портит условия нарастания. При достаточно высокой плотности потока фотонов они настолько быстро будут «сбивать» возбужденные атомы на более низкий энергетический уровень, что исчезнет инверсия населенностей. А ведь наряду с вынужденным испусканием происходят процессы поглощения и спонтанного излучения. В процессе спонтанного излучения рождающиеся фотоны распространяются в пространстве равномерно по всем направлениям, и их вклад в фотонную лавину очень мал и представляет собой некогерентный свет. Спонтанное излучение атомов создает в лазере небольшой так называемый «шум». Когда в результате исчезновения инверсии населенностей наступит равновесие между числом актов поглощения и числом актов спонтанного и вынужденного испускания, дальнейшее усиление света прекратится. (Согласно закону сохранения энергии при этом мощность, выделяемая в процессах испускания, станет равна мощности, подводимой для возбуждения атомов Ne.)

От усиления к генерации

Точное определение «обратной связи» не имеет никакой важности.
У. Р. Эшби. «Введение в кибернетику»

Теперь выясним роль реальных зеркал с коэффициентом отражения меньше единицы. Без зеркал газоразрядная трубка с гелий-неоновой смесью работала бы как усилитель света. Зеркала превращают прибор в генератор света. Применяя радиотехническую терминологию, можно сказать, что зеркала обеспечивают положительную обратную связь.

Когда описанная выше световая волна достигнет одного из зеркал, она частично отразится, пойдет в обратном направлении сквозь активную среду, опять усиливаясь, и достигнет второго зеркала, где повторится все то же. Волна будет «метаться» между зеркалами, как тигр в клетке.

Напомним, что одно из зеркал чуть-чуть прозрачное. При каждом отражении от этого зеркала наружу выйдет небольшая часть световой волны. Луч лазера представляет сумму этих частей световой волны, мечущейся в зеркальной клетке. И если потери света в зеркалах (а зеркал без потерь не бывает) будут компенсироваться усилением света в активной среде, установится стационарный режим генерации. Активная среда гелий-неонового лазера обладает очень слабым усиливающим действием (интенсивность светового потока увеличивается примерно на 10 % на одном метре пути в активной среде). Поэтому зеркала в таком лазере должны иметь очень высокие коэффициенты отражения, превышающие 90 %.

Итак, мы разобрались в том, какие явления происходят в газоразрядной трубке гелий-неонового лазера. По существу, в лазере происходит процесс преобразования энергии. Основные этапы этого процесса можно представить схемой, приведенной на рисунке 11.

Луч лазера

Молниевидный брызнет луч.
Ф. Тютчев

Свечение активной среды принципиально отличается от свечения таких источников света, как лампа накаливания или люминесцентная лампа. В обычных источниках света царит полный хаос — то здесь, то там возникают отдельные световые вспышки, сливающиеся в общее свечение. Эти световые вспышки представляют собой отдельные группы волн, испускаемых различными источниками (различными возбужденными атомами), и начальные фазы этих волн совершенно случайны, никоим образом не согласованы. Свечение обычных источников света напоминает гул неорганизованной, чем-то возбужденной толпы. Совсем иная картина в лазере. Благодаря актам вынужденного испускания световая волна упорядочивает излучение отдельных атомов. Здесь все напоминает стройный хор — сначала вступают одни хористы, затем другие, сила звучания нарастает. Дирижирует хором сама порождаемая им световая волна. Фазы отдельных групп волн, испускаемых различными атомами, согласованы между собой. Вот это и приводит к когерентности излучаемого лазером света.

Итак, луч лазера представляет собой сумму частей световой волны, выходящих через полупрозрачное зеркало. А так как все эти части когерентны между собой, то в результате их сложения происходит интерференция. Как известно, максимальная амплитуда результирующей волны получится, если разности хода складываемых волн равны целому числу длин волн. Длина пути, проходимого волной лазера между двумя отражениями от одного и того же зеркала, равна $2L$, где L — расстояние между зеркалами. Следовательно, для получения яркого выходящего луча должно выполняться следующее условие:

$$2L = n\lambda, \qquad (3)$$

где n — целое число, λ — длина световой волны. Условие (3) имеет простой смысл: на длине лазерной трубки (резонатора) должно укладываться целое число полуволн. При колебаниях струны с закрепленными концами на длине струны также укладывается целое число полуволн. Это — условие установления стоячих волн. И внутри лазера устанавливается стоячая световая волна (точнее, почти стоячая — из-за прозрачности одного из зеркал).

Условие (3) можно переписать в таком виде:

$$\nu = n\frac{c}{2L}, \qquad (4)$$

где c — скорость света, $\nu = \frac{c}{\lambda}$ — частота.

Но частота света, излучаемого атомами неона при переходе с уровня E_3 на уровень E_2, равна

$$\nu = \frac{E_3 - E_2}{h} \qquad (5)$$

Таким образом, частота света, генерируемого лазером, должна одновременно удовлетворять и уравнению (4), и уравнению (5). Первое уравнение определяет условие резонанса между светом и резонатором и носит классический характер. Поскольку зеркальный резонатор имеет макроскопические размеры, свет взаимодействует с ним как световая волна. Уравнение (4) имеет квантовый характер и определяет условие резонанса между светом и атомами активной среды, представляющими квантовые микрорезонаторы. Свет взаимодействует с квантовыми микрорезонаторами как поток фотонов.

Таким образом, в лазере одновременно проявляются и волновые, и квантовые свойства света.

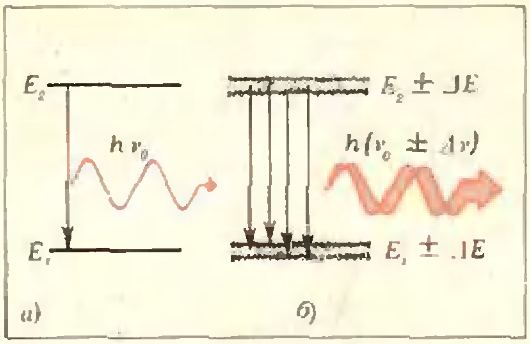


Рис. 12.

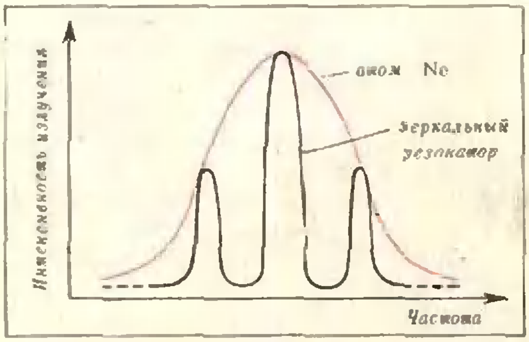


Рис. 13. «Острота настройки» атомов неона и зеркального резонатора.

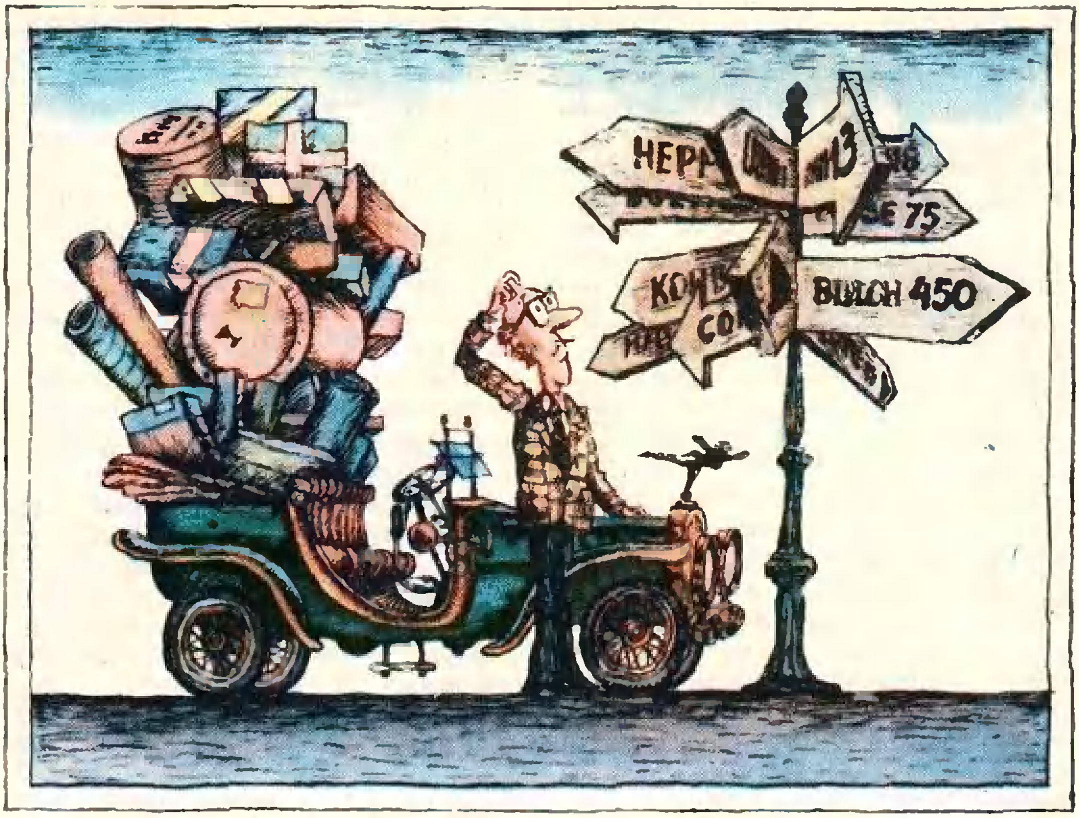
Посмотрим теперь, что практически означает соблюдение условий (3) и (5).

Если бы атом взаимодействовал только с излучением, обладающим строго определенной частотой ν_0 (рис. 12, *а*), мы должны были бы подобрать размер резонатора — расстояние l между зеркалами — таким, чтобы собственная частота резонатора (определяемая условием образования стоячих волн) была как раз равна частоте ν_0. И поддерживать это расстояние надо было бы с точностью до малых долей длины волны излучения. Практически удовлетворить этому требованию очень трудно. К счастью, эта задача облегчается тем, что на самом деле частота излучения атома не в точности равна ν_0, а лежит в некотором интервале значений $\nu_0 \pm \Delta\nu$. Одной из причин, по которым это происходит, является тепловое движение атомов. Поскольку скорости отдельных атомов могут быть больше или меньше средней скорости теплового движения, энергия атомов на данном энергетическом уровне не в точности равна E_n, а лежит в некотором интервале значений $E_n \pm \Delta E$ (рис. 12, *б*). В интервал частот $[(\nu-\Delta\nu), (\nu+\Delta\nu)]$ попадают несколько значений собственных частот резонатора (рис. 13). Поэтому для данной частоты излучения мощный луч лазера получается при настройке резонатора на некоторый набор частот (соответствующих различным значениям целых чисел n в условии (4)). Если не принять специальных мер, гелий-неоновый лазер излучает весь этот набор частот, правда, сосредоточенный в довольно узкой области (ширина спектральной линии атома неона).

Есть и одночастотные лазеры, но в них имеется специальное устройство, выделяющее один из узких резонансов.

Мощность луча гелий-неонового лазера невелика — порядка одной десятой ватта. Несмотря на это, попадание луча в глаз может повредить зрение. Разрядная трубка лазера потребляет для возбуждения активной среды мощность от 20 до 100 Вт. Таким образом, гелий-неоновый лазер преобразует электроэнергию в энергию светового луча с к. п. д. не выше долей процента.

Вместе с тем луч лазера обладает рядом весьма ценных свойств, с лихвой компенсирующих низкий к. п. д. Прежде всего, это — направленность луча. Когда мы рассказывали о зарождении фотонной лавины, мы указывали на то, что первый фотон должен вылетать параллельно оси разрядной трубки. «Косо» вылетающий фотон и порожденные им фотоны быстро уйдут в «аут» через боковую стенку трубки, не испытав значительного усиления. Отражение от зеркал только усугубит эффект. Так что внутри трубки сохраняется направленный луч, угловая расходимость которого всего порядка 10^{-3} радиана. Высокая направленность луча гелий-неонового лазера делает его незаменимым для точного установления направлений при строительстве различных сооружений и при прокладке туннелей. Высокая монохроматичность излучения гелий-неонового лазера, даже не одночастотного, делает этот лазер весьма удобным источником для изучения и практического применения различных интерференционных явлений. Кроме гелий-неонового лазера, есть большое число других типов газовых лазеров, использующих в качестве активных сред различные атомарные и молекулярные газы. Среди них есть и весьма мощные. Есть и лазеры с довольно высоким к. п. д. Но это, как говорится, уже другая история.



Е. Габович

Задача коммивояжера

«Пользуйтесь услугами Аэрофлота!»

Два автомобилиста, инженер А. Невский и экономист Б. Литейный, решили съездить в Закавказье, посетить Баку и Тбилиси, заехать в Москву, Киев и Горький, а затем вернуться в родной Ленинград. Начали обсуждать маршрут путешествия. Невский посмотрел на карту и предложил такую последовательность посещения городов:

$$Л \to М \to Г \to Б \to Т \to К \to Л$$

Литейный же, достав атлас автомобильных дорог, выписал расстояния между нужными им городами в табличку (см. таблицу 1) и подсчитал длину предложенного маршрута: $696+410+2937+579+1863+1207=$ $=7692$ км. «Длинновато! — сказал он. — Расстояние аэрофлотское! А нельзя ли короче? Уверен ли ты, что этот маршрут является кратчайшим?»

Уверенности такой у Невского не было. Более того, объяснить, почему он решил ехать именно так, Невский не мог. Просто интуиция подсказывала ему, что такой маршрут, если и

Таблица 1

Город	Л	М	К	Б	Т	Г
Ленинград	—	696	1207	3223	2797	1106
Москва	696	—	858	2527	2101	410
Киев	1207	858	—	2283	1863	1268
Баку	3223	2527	2283	—	579	2937
Тбилиси	2797	2101	1863	579	—	2511
Горький	1106	410	1286	2937	2511	—

не короче всех других, то близок к кратчайшему.

«А не просмотреть ли нам все вообще маршруты? — предложил Литейный. — Много ли их?» Стали подсчитывать. «Из Ленинграда можно поехать в любой из пяти городов. Если мы поедем, скажем, в Москву, то из нее можно направиться в любой из отличных от Ленинграда и Москвы городов. Итак, имеется 20 поездок вида $Л \to X \to Y$, где $Л \neq X \neq Y \neq Л$. Поездок вида $Л \to X \to Y \to Z$ уже 60, ибо из Y можно поехать в любой из оставшихся трех городов. Если мы выберем Z, то можем считать следующим за Z городом любой из последующих двух городов. Итак, 120 маршрутов, ибо завершается путешествие однозначно: по пути домой посещается последний из шести городов. Многовато! Так что это не метод, — перебирать все маршруты! Ведь если бы мы хотели посетить шесть городов, у нас было бы 720, а если семь, то уже 5040 маршрутов!»

«Тогда давай поступим так — предложил Невский, — поедем из Ленинграда в ближайший город, из него — в ближайший, еще не посещенный, и т. д. Это дает нам маршрут

$Л \to М \to Г \to К \to Т \to Б \to Л$.

Его длина, — сейчас подсчитаю, — 8057 км. На 365 км длиннее!»

Задача коммивояжера

Задача, которую решают Невский и Литейный, известна в математике под названием *задачи коммивояжера* *) (бродячего торговца).

Сформулируем ее в общем виде: имеются k городов, расстояния между которыми известны; коммивояжеру нужно выйти из одного из этих городов, посетить остальные $k-1$ городов, побывав в каждом из них ровно по одному разу, и вернуться в исходный город; как найти кратчайший маршрут?

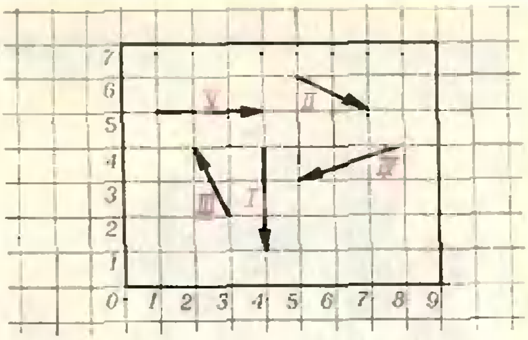


Рис. 1.

Очевидно, выбор начального пункта маршрута несуществен — задачу коммивояжера можно сформулировать и так: найти кратчайший замкнутый маршрут, проходящий ровно по разу через каждый из k городов.

Упражнение 1. Докажите, что общее число маршрутов коммивояжера равно $(k-1)! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (k-1)$.

Заметим, что таблица расстояний, составленная Б. Литейным (математики называют такие таблицы *матрицами*), оказалась симметричной относительно диагонали, на которой стоят прочерки. В задаче коммивояжера допускаются и несимметричные таблицы. Несимметричная таблица расстояний может возникнуть, например, в следующей задаче (*о кольцевом автобусном маршруте*). В городе, на некоторых улицах которого разрешено только одностороннее движение, фиксированы k точек (мест будущих остановок). Через них должна пройти замкнутая автобусная линия. Требуется найти такую циклическую последовательность прохождения точек-остановок, при которой каждая остановка посещается один и только один раз, а весь маршрут имеет минимальную протяженность.

Упражнение 2. В пластинке размером 7×9 луч лазера должен прорезать пять щелей в направлениях, указанных на рисунке 1 стрелками, и вернуться в исходное положение. Задача минимизации холостого пробега лазерной головки есть задача коммивояжера. Выпишите матрицу расстояний для нее. (Обратите внимание на то, что она получается несимметричной.)

---

*) Вероятно, впервые сформулировал задачу коммивояжера известный математик Карл Менгер. Произошло это 5 февраля 1930 года на математическом коллоквиуме в Вене. Менгер пользовался названием «Задача о посыльном».

Из упражнения 2 мы видим, что «городами» в задаче коммивояжера могут быть вовсе не города, а «расстояниями» — вовсе не расстояния. Например, под «расстоянием» между двумя городами можно понимать стоимость или продолжительность путешествия между ними. В этом случае минимизируется, соответственно, суммарная стоимость путешествия или его продолжительность.

Рассмотрим еще для примера *задачу о станке.* Деталь в процессе обработки на станке подвергается k операциям. При переходе от одной операции к другой станок должен заново настраиваться, что приводит к потери времени. Требуется найти такой порядок проведения всех операций (с возвращением станка в исходное состояние), при котором суммарные потери были бы наименьшими. Ясно, что здесь мы имеем дело с задачей коммивояжера — с таблицей потерь времени на перестройку станка в качестве матрицы расстояний. «Городами» являются состояния станка после различных операций.

К задаче коммивояжера приводят задачи планирования производства и проектирования линий связи (скажем, телефонной сети), задачи составления маршрута для почтальона (врача, контролера телефонов-автоматов и т. п.) и даже некоторые задачи проектирования ЭВМ.

Полный перебор

Итак, в каждой конкретной задаче коммивояжера требуется найти кратчайший тур при заданной матрице расстояний. Может случиться, что

Таблица 2

Номер операции	*I*	*II*	*III*	*IV*	*V*
I	—	*0*	*11*	*5*	*20*
II	*31*	—	*0*	*52*	*8*
III	*9*	*16*	—	*0*	*41*
IV	*64*	*31*	*61*	—	*0*
V	*0*	*93*	*19*	*7*	—

сделать это окажется крайне просто. Например, если потери на переналадку в задаче о станке заданы таблицей 2, то очевидно, что оптимальной является такая последовательность операций: I → II → III → IV → → V → I (с нулевым суммарным временем переналадки).

Упражнение 3. Решите задачу коммивояжера из упражнения 2, если известно, что во время холостого хода лазерная головка может передвигаться только параллельно краям пластинки.

Однако чаще всего для конкретных таблиц расстояний бросающихся в глаза решений нет. И если даже кто-нибудь подскажет нам, какой маршрут является кратчайшим, возникнут большие трудности, когда мы захотим проверить, так ли это на самом деле.

Математиков же интересуют не столько решения конкретных задач коммивояжера, сколько *общие методы* решения всех таких задач (или хотя бы всех задач коммивояжера при $k \leqslant m$, где m — некоторое фиксированное число).

Заметим, что в каждой конкретной задаче коммивояжера множество всех маршрутов конечно. Поэтому можно организовать *полный перебор* всех маршрутов, вычислить их длины и выбрать кратчайший маршрут. Такой полный перебор в принципе является общим методом решения задачи коммивояжера.

Однако вспомним Невского и Литейного. Хотя им предстояло провести замкнутый маршрут всего лишь через шесть городов, они не захотели перебирать все 120 туров (правда, автомобилисты не заметили того, что из-за симметричности таблицы I только 60 туров могут иметь различную длину). В общем же случае коммивояжеру приходится выбирать кратчайший из $(k-1)!$ возможных маршрутов. Это число с ростом k растет очень быстро, а потому указанный способ решения при больших значениях k практически не применим. Так, автору известен пример, когда для осуществления перебора в задаче коммивояжера с десятью городами ($k=10$) на ЭВМ М-220А было израсходовано 4 часа 45 минут! Быстродействие этой ЭВМ — около 25 000 операций в секунду. При $k>10$ решение задачи коммивояжера методом полного перебора даже на самых совершенных ЭВМ практически неосуществимо.

На помощь приходит целочисленное программирование

Первый метод решения задачи коммивояжера, отличный от полного перебора, был предложен в 1954 году американскими специалистами по дискретной математике Данцигом, Фалкерсоном и Джонсоном. Они показали, что задача коммивояжера на обычной плоскости может быть сведена к некоторой задаче *целочисленного линейного программирования* — ныне одного из наиболее известных разделов теоретической кибернетики. Авторы применили свой метод (в сочетании с соображениями географического характера и комбинаторными рассуждениями) к решению задачи о нахождении кратчайшего замкнутого маршрута, проходящего через 48 крупных городов США.

С общей задачей линейного программирования читатель может познакомиться по статье Б. Алейникова, П. Бузыцкого и М. Дубсона «Симплекс-метод» («Квант», 1976, № 7). Задача целочисленного линейного программирования отличается от общей задачи линейного программирования дополнительным требованием о целочисленности искомых значений переменных. Это дополнительное ограничение значительно усложняет задачу, и для задачи целочисленного линейного программирования не удалось разработать метод, близкий по эффективности к симплекс-методу решения общей задачи линейного программирования. Тем не менее, для задачи целочисленного линейного программирования, имеющей многочисленные практические приложения, предложено несколько неплохих методов решения, так что в настоящее время задача целочисленного линейного программирования изучена лучше, чем ее частный случай — задача коммивояжера.

Обозначим расстояние от города a до города b через c_{ab} (a, b — натуральные числа, соответствующие номерам городов). Для случая четырех городов задача целочисленного линейного программирования, к которой сводится задача коммивояжера, имеет вид: *найти числа* x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{34}, *равные нулю или единице, минимизирующие сумму*

$$c_{12}x_{12}+c_{13}x_{13}+\ldots+c_{34}x_{34} \qquad (1)$$

и удовлетворяющие неравенствам:

$$x_{12}+x_{13}+x_{14}\geqslant 2, \qquad (2)$$
$$x_{12}+x_{23}+x_{24}\geqslant 2, \qquad (3)$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{34}\geqslant 2, \qquad (4)$$
$$x_{14}+x_{24}+x_{34}\geqslant 2, \qquad (5)$$
$$x_{13}+x_{14}+x_{23}+x_{24}\geqslant 2, \qquad (6)$$
$$x_{12}+x_{14}+x_{23}+x_{34}\geqslant 2, \qquad (7)$$
$$x_{12}+x_{13}+x_{24}+x_{34}\geqslant 2. \qquad (8)$$

Легко понять, как задача коммивояжера связана с задачей (1) — (8): равенство $x_{ab}=1$ эквивалентно утверждению о вхождении поездки $a\to b$ или $b\to a$ в маршрут; при этом выражение (1) оказывается равным длине маршрута.

Пусть, например, решением задачи коммивояжера является тур $1\to a\to b\to c\to 1$. Покажем, что неравенства (2) — (8) справедливы.

Действительно, если $b=2$, то $x_{13}=x_{14}=x_{23}=x_{24}=1$. При $b=3$ получаем $x_{12}=x_{14}=x_{23}=x_{34}=1$. Наконец, $x_{12}=x_{13}=x_{24}=x_{34}=1$, если $b=4$. Непосредственная проверка показывает, что во всех трех случаях левые части неравенств (2)—(5) равны двум. Каждая из левых частей неравенств (6) — (8) в одном из трех случаев равна четырем, а в двух других — двум. Итак, неравенства (2) — (8) справедливы.

Неравенства (6) — (8) на самом деле могут быть опущены (некоторая избыточность системы неравенств была нужна Данцигу и его соавторам для упрощения рассуждений).

Упражнение 4. Покажите, что для случая четырех городов задача целочисленного линейного программирования (1) — (8) эквивалентна задаче коммивояжера. Для этого достаточно показать, что (0-1)-решение задачи (1) — (5) приводит к решению задачи коммивояжера.

После статьи Данцига и его соавторов появился целый ряд работ, излагавших различные способы сведения как симметрической, так и произвольной задачи коммивояжера к задачам целочисленного линейного программирования. Эти результаты имели важное принципиальное значение. Что же касается их практической значимости, то многочисленные

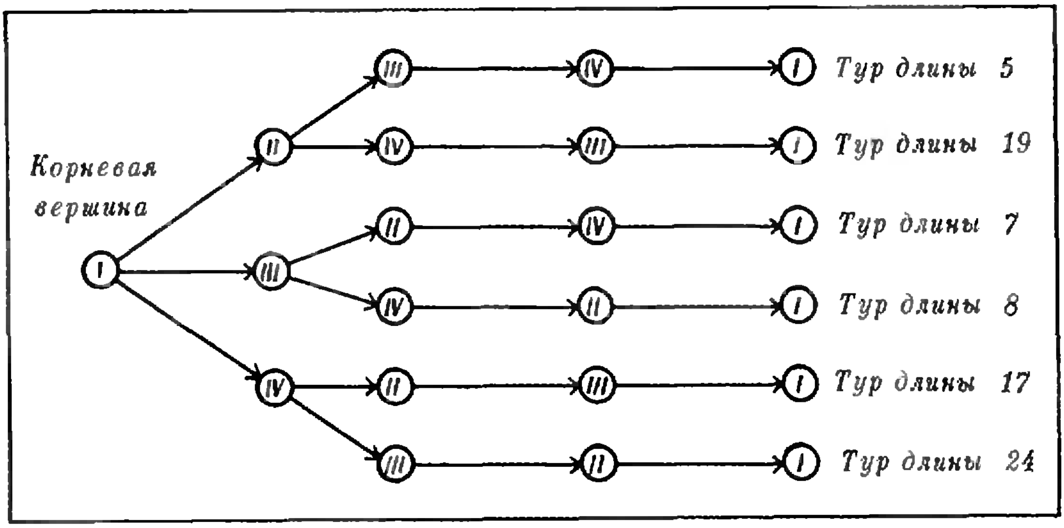


Рис. 2.

эксперименты показали, что без использования специфических свойств каждой конкретной задачи коммивояжера существующие ЭВМ и методы решения задач целочисленного линейного программирования позволяют справляться с задачами коммивояжера лишь при небольшом числе городов (не превосходящем десяти). В то же время самые последние работы в этой области показывают, что сведение к задаче целочисленного линейного программирования может быть эффективно использовано в сочетании с другим методом решения задачи коммивояжера — методом ветвей и границ.

Метод ветвей и границ

Наилучшим методом решения задачи коммивояжера в настоящее время является *метод ограниченного перебора*, или *метод ветвей и границ*. Он применяется в нескольких модификациях, имеющих различную эффективность.

Осуществляя полный перебор, мы можем, конечно, выписать все туры друг за другом. Можно поступить иначе: нарисовать *дерево возможных поездок*. Для случая четырех городов оно изображено на рисунке 2. В кружках — номера городов; стрелками изображены поездки. Ясно, что при переходе к дереву поездок количество стрелок уменьшается по сравнению с их количеством в записи всех маршрутов (при $k>3$). Например, при выписывании всех маршрутов подряд стрелку I → II пришлось бы нарисовать дважды. Но еще большей экономии мы достигнем, если будем строить не все дерево поездок, а только некоторую его часть. Именно такое *усеченное дерево*, отличающееся от дерева всех поездок отсутствием тех ветвей, которые не могут дать кратчайшего маршрута, и конструируется в излагаемом ниже варианте метода ветвей и границ.

Опишем последовательность этапов такого метода решения задачи коммивояжера (блок-схема излагаемого алгоритма приведена на рисунке 3). Выполнив этап, переходим к следующему, если нам не предписано иное.

1. Рисуем корневую вершину дерева (для определенности будем считать, что она соответствует городу I). Присваиваем ей оценку 0.

2. Производим ветвление из любой вершины с минимальной оценкой (первоначально из корневой). Это значит, что мы проводим от выбранной вершины все те стрелки, которые исходили бы из нее в дереве возможных поездок, и рисуем соответствующие вершины дерева.

3. Каждой новой вершине присваиваем оценку, равную длине той части маршрута, которая описывается стрелками, ведущими из корневой вершины в данную.

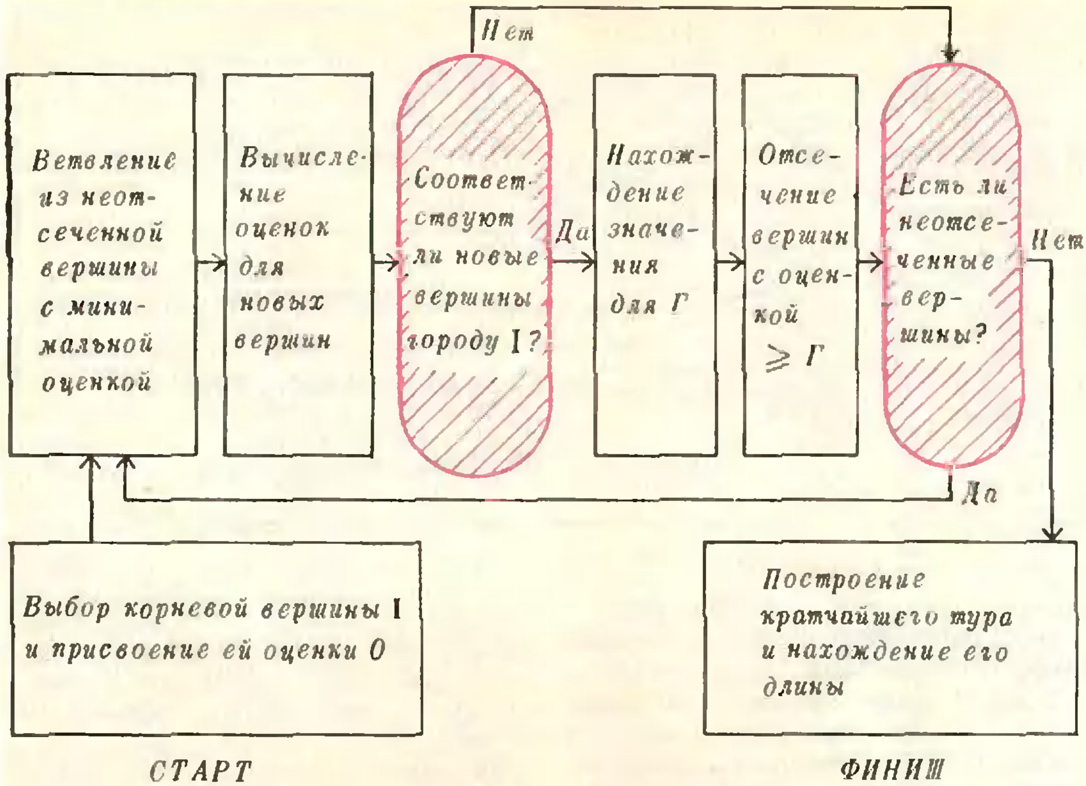


Рис. 3.

4. Если получена вершина, соответствующая городу I, то находим длину Γ кратчайшего из полученных к этому моменту туров. Если нет, переходим к этапу 2.

5. Отсекаем все вершины, из которых еще не производилось ветвление (*концевые вершины*) и оценка которых не меньше Γ. Это означает, что из таких вершин ветвление впредь не производится. Если не все концевые вершины отсечены, переходим к этапу 2. Если все, то задача решена: оптимальный тур имеет длину Γ и восстанавливается по той концевой вершине, с помощью которой было получено последнее значение Γ (см. этап 4).

Этап 2 описывает правило ветвления, этап 3 — процедуру вычисления оценок, этап 4 — нахождение границ и этап 5 — процесс отсечения.

Решим методом ветвей и границ задачу коммивояжера с расстояниями, заданными таблицей 3.

Решение приведено на рисунке 4. Первые четыре ветвления изображены с помощью зеленых стрелок. Присваиваем Γ значение $\Gamma=8$ и отсекаем две вершины. Пятое ветвление соответствует синей стрелке. Мы выбрали из двух концевых вершин с минимальной оценкой 4 ту, которая дальше от корня (в надежде на более быстрое получение еще одного тура и уменьшение значения Γ). Три следующих ветвления отмечены красными стрелками. Теперь $\Gamma = 5$, и мы отсекаем все остальные концевые вершины. Решением является тур I→II→III→IV→I длины 5.

Описанный вариант метода ветвей и границ позволяет решать на ЭВМ задачу коммивояжера с $k \leqslant 20$. Ясно, что он действительно всегда приводит к кратчайшему туру, ибо в нем используется дерево возможных

Таблица 3

N	I	II	III	IV
I	—	4	0	9
II	5	—	0	3
III	6	4	—	1
IV	0	2	6	—

поездок, а отбрасываются лишь те ветви, которые заведомо не могут давать более коротких туров, чем уже найденные.

Можно справиться и с сотней городов!

В 1963 году был опубликован очень удачный вариант метода ветвей и границ, в котором при вычислении оценок к длине уже пройденной части маршрута добавлялось число, оценивающее длину его остальной части. Правило ветвления в этом методе (его автор — Катта Мурти — американский математик индийского происхождения) таково, что при каждом ветвлении образуются две новые ветви *). Метод Мурти позволил за сравнительно короткое время решать на ЭВМ задачу коммивояжера для $k \leqslant 40$.

Позднее был разработан еще один вариант метода ветвей и границ (*метод Истмена — Шапиро*). С помощью этого метода удалось решить несколько задач коммивояжера при $k \leqslant 70$. Дальнейшая разработка метода Истмена — Шапиро позволила довести размер решаемых на ЭВМ задач до 100—120 городов.

*) Описание метода Мурти см., например, в брошюре В. И. Мудрова «Задача коммивояжера», М., «Знание», 1969.

В методе Истмена — Шапиро для вычисления оценок используется то обстоятельство, что существуют весьма эффективные машинные методы решения так называемой *задачи о назначениях* *), тесно связанной с задачей коммивояжера. Содержательно задача о назначениях формулируется следующим образом: *имеются k человек и k должностей, и известна матрица баллов несоответствия людей должностям. Требуется найти такое назначение работников на должности, которое минимизирует сумму баллов несоответствия.* Здесь матрица баллов играет ту же роль, что и матрица расстояний в задаче коммивояжера. А назначения, как и поездки, можно записывать в виде $x \to y$. Разница лишь в том, что из назначений не обязательно складывается замкнутый маршрут (тур). Возможно, например, такое назначение I → V → → I, II → II, III → IV → VI → III (это значит, что первый человек назначается на пятую должность, пятый — на первую, второй — на вторую, третий — на четвертую и т. д.).

Итак, каждый тур можно считать назначением (но назначение k лиц

*) Про задачу о назначениях было рассказано в статье М. И. Рейтмана «Транспортная задача» («Квант», 1974, № 7).

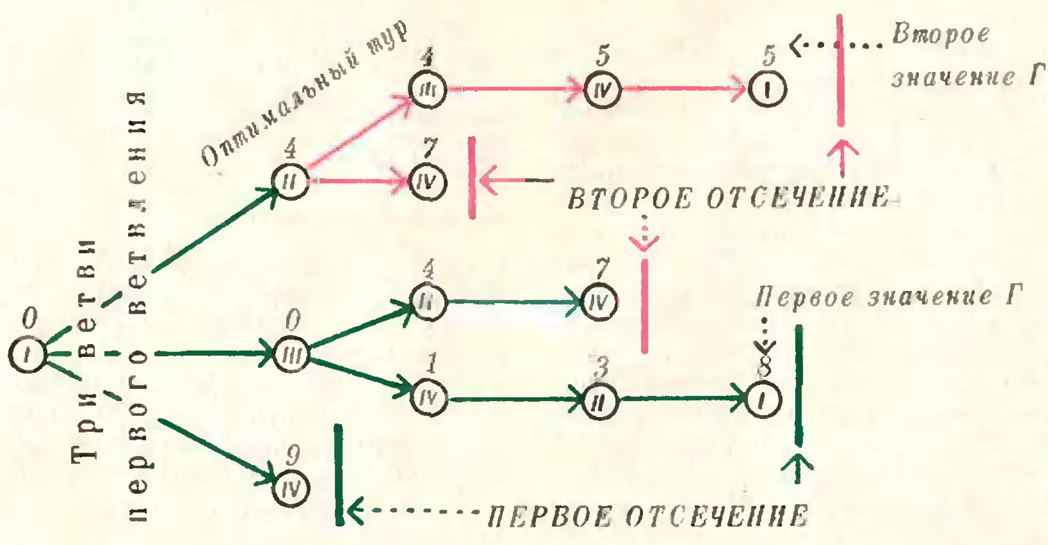


Рис. 4.

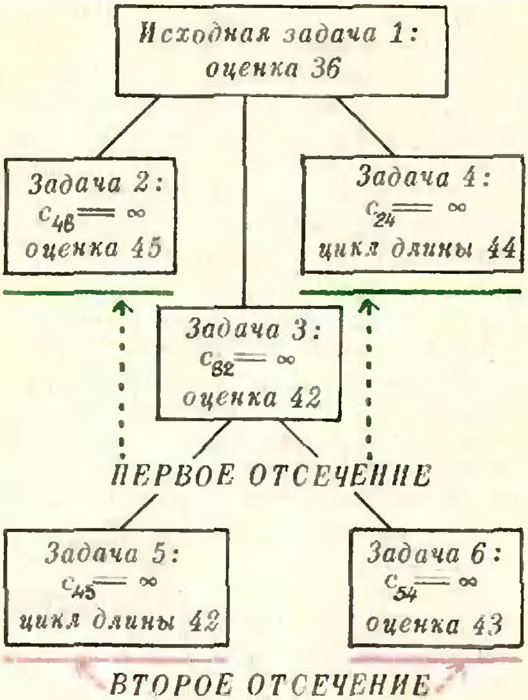


Рис. 5.

оказывается туром в среднем лишь в одном из k случаев: ведь существует $(k-1)!$ туров, а общее число k-назначений равно $k!$). Поэтому сумма баллов для оптимального k-назначения не превосходит длины оптимального тура. А эту сумму баллов, как мы уже отмечали, ЭВМ находит сравнительно быстро. Ее-то и используют в качестве оценки в методе Истмена — Шапиро, в котором строится не дерево поездок, а совсем другое дерево, вершинами которого являются вспомогательные задачи о назначениях (пример такого дерева изображен на рисунке 5).

По этому методу сначала решается задача о назначениях с *матрицей расстояний* задачи коммивояжера в качестве *матрицы баллов*. Ей соответствует корневая вершина дерева. Сумма баллов для оптимального назначения считается оценкой корневой вершины (и исходной задачи коммивояжера). Если решением является тур, то задача коммивояжера решена: найденный тур является оптимальным. Если же k-назначение состоит из нескольких циклических последовательностей, например, I → III → VII → V → I, IV → VI → II → IV, то поскольку в оптимальном туре не может быть «подтуров», все эти циклические последовательности нужно разорвать. В методе Истмена — Шапиро это осуществляется в ходе ветвления, причем всегда рвется одна — наиболее короткая — последовательность назначений, с тем чтобы в дальнейшем решать меньшее число новых задач о назначениях.

В нашем примере — это вторая; в нее входят три города: II, IV и VI. Накладываем запреты на поездки IV → VI, VI → II и II → IV, после чего решаем три новые задачи о назначениях с тремя новыми матрицами баллов, получающимися из матрицы, соответствующей корневой вершине: в первой из них элемент c_{46}, во второй — элемент c_{62}, а в третьей — элемент c_{24} заменены символом ∞, содержательно означающим запрет соответствующей поездки (через c_{ab} мы снова обозначили расстояние между городами a и b). Если среди решений есть туры, то Γ полагается равным длине кратчайшего из них. Задачи с оценкой, не меньшей чем Γ, «отсекаются». Очередное ветвление осуществляется для той из этих задач, у которой k-назначение не является туром, а оценка (сумма баллов несоответствия) оказалась наименьшей.

Прокомментируем процесс решения, схема которого приведена на рисунке 5.

Были сделаны два ветвления и решены шесть задач о назначениях. Решением задачи 4 оказался цикл. С этого момента $\Gamma = 44$, и задачи с оценкой 45 и 44 отсекаются.

В решение задачи 3 входило назначение IV → V → IV. Второе ветвление привело к двум новым задачам: 5 и 6. Решение задачи 5 — цикл длины 42. Это новое значение Γ позволило отсечь задачу 6 с оценкой 43. Цикл длины 42 оптимален.

Эвристические методы

Если задачу коммивояжера не удается решить точно, ее пытаются решить хотя бы приближенно. При этом ищется маршрут, сравнительно немного отличающийся от кратчайшего. Методы отыскания таких маршрутов называются *приближенными*, *субоптимальными* или *эвристическими*.

Субоптимальным является, например, метод «*иди в ближний*», т. е. в ближайший из непройденных го-

Таблица 4

	I	II	III
I	—	1	0
II	5	—	1
III	6	5	—

родов. В том, что этот метод не является точным, легко убедиться на примере следующей простой матрицы расстояний (см. таблицу 4).

Для нее процедура «иди в ближний» дает маршрут I → III → II → I длины 10, в то время как нелепая процедура «иди в дальний» приводит к туру I → II → III → I длины 8. Так как других маршрутов у коммивояжера сейчас нет, этот пример означает, что наш эвристический метод может иногда давать даже самый плохой из туров.

Тем не менее, принцип «иди в ближний» (и другие эвристические методы) нередко используется на практике — особенно при решении задачи коммивояжера с очень большим числом городов. Делается это по нескольким причинам. Во-первых, этот метод довольно быстро работает. Во-вторых, практика показывает, что с ростом k метод «иди в ближний» все чаще дает туры, длина которых незначительно отличается от длины кратчайшего тура (а, порой, и совпадает с ним). И, наконец, общее для всех эвристических методов обстоятельство: во многих практических задачах нас интересует не наилучшее решение, а лишь достаточно хорошее приближение к нему (ведь порой и расстояния между городами определяются не совсем точно). К тому же точность алгоритма «иди в ближний» увеличивается (но зато увеличивается и трудоемкость), если в ходе его работы строятся k туров, первый из которых начинают конструировать с первого города, второй — со второго и т. д.; некоторые из этих туров могут оказаться разными, и в заключение выбирается кратчайший из них.

Для задачи коммивояжера создано немало весьма эффективных эвристических методов. В частности, неплохо себя зарекомендовали методы ветвей и границ, работа которых обрывается на одном из найденных туров (не обязательно — оптимальном). Так, в 1976 г. два японских математика решили на ЭВМ HITAC-8800 задачу коммивояжера для 300 городов. При этом за 2 минуты было найдено решение, отличающееся от оптимального на 0,2 процента.

Удивительная страна

Представим себе, что уже знакомые нам А. Невский и Б. Литейный решили попутешествовать по небольшой стране (назовем ее Констанцией). Прибыв в ее столицу и найдя в путеводителе семь самых интересных городов Констанции, они планируют маршрут своей поездки. На этот раз расстояния между городами оказались не столь большими (см. таблицу 5). Поэтому друзья решили не гнаться за минимальностью, а вычислить длины нескольких случайно взятых туров и выбрать кратчайший из них (такая процедура тоже представляет собой субоптимальный метод, известный под названием *метода Монте-Карло*). Выбор пал на следующие туры:

I → II → III → IV → V → VI →
→ VII → VIII → I;
I → III → VII → II → IV → VI →
→ V → VIII → I;
I → IV → VII → II → V → VIII →
→ III → VI → I.

Подсчитали их протяженности; оказалось, что все три тура имеют длину 794 км! Заинтересовавшись, наши

Таблица 5

	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
I	—	103	114	86	109	90	98	85
II	103	—	121	93	116	97	105	92
III	114	121	—	104	127	108	116	103
IV	86	93	104	—	99	80	88	75
V	109	116	127	99	—	103	111	98
VI	90	97	108	80	103	—	92	79
VII	98	105	116	88	111	92	—	87
VIII	85	92	103	75	98	79	87	—

герои проанализировали еще десять маршрутов. Каждый из них имел длину 794 км! Можете себе представить, как смутились наши герои. Но удивление их было бы еще большим, если бы они узнали, что при данной матрице расстояний все вообще туры имеют одинаковую длину.

Почему? Ларчик открывается просто: все числа в таблице 5 получены путем сложения друг с другом чисел 48, 55, 66, 38, 61, 42, 50 и 37. Например, в третьей строке стоят суммы $66+48=114$, $66+55=121$, 0, $66+38=104$ и т. д. А так как при вычислении протяженности маршрута мы берем по одному и только одному числу из каждой строки и из каждого столбца таблицы 5, то в результате длина любого тура оказывается равной удвоенной сумме задуманных чисел (сумма восьми задуманных чисел равна 397, а $794=397\times2$).

Возникает вопрос: а нельзя ли описать все вообще матрицы расстояний, при которых любые два тура имеют одинаковую длину? Оказывается, можно: для любой такой матрицы обязательно найдутся числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$ и числа $b_1, b_2, \ldots, b_k$, такие, что расстояние c_{xy} от города x до города y ($x\neq y$) будет равно сумме a_x+b_y.

Докажем эту теорему для случая трех городов.

Пусть c — длина каждого из двух туров:

$$c=c_{12}+c_{23}+c_{31}=c_{13}+c_{21}+c_{32}.$$

Выразим из этих соотношений c_{31} и c_{32}:

$$c_{31}=c-c_{12}-c_{23},$$
$$c_{32}=c-c_{13}-c_{21}.$$

Нам нужно решить систему уравнений

$$x_1+y_2=c_{12},\ x_1+y_3=c_{13},$$
$$x_2+y_1=c_{21},\ x_2+y_3=c_{23},$$
$$x_3+y_1=c-c_{12}-c_{23},$$
$$x_3+y_2=c-c_{13}-c_{21}.$$

Присвоим неизвестному y_3 произвольное значение d. Тогда из первых пяти уравнений находим, что $x_1=c_{13}-d$, $x_2=c_{23}-d$, $y_2=c_{12}-c_{13}+d$, $y_1=c_{21}-c_{23}+d$,

$$x_3=c-c_{12}-c_{23}-c_{21}+c_{23}-d= =c-d-c_{12}-c_{21}.$$

При этом оказывается удовлетворенным и шестое уравнение. Положив $d=0$, получим набор $a_1=c_{13}$, $a_2=c_{23}$, $a_3=c-c_{12}-c_{21}$, $b_1=c_{21}-c_{23}$, $b_2=c_{12}-c_{13}$, $b_3=0$ чисел с нужным нам свойством.

Сформулированная выше теорема является довольно типичной для теоретических исследований по задаче коммивояжера. В них важную роль играют различные специальные случаи. (Совпадение длины всех туров — это тоже специальный случай. Впрочем, весьма узкий.) Для специальных случаев порой удается не только построить быстро работающий метод (при этом говорят о *разрешимом* случае), но и выяснить, какие протяженности может иметь оптимальный тур.

Читатель может продолжить знакомство с разрешимыми случаями задачи коммивояжера, решив предлагаемые ниже задачи. В части из них речь идет о путешествии по шахматной доске, где в роли коммивояжера выступают шахматные фигуры. При этом будем говорить не о туре коммивояжера, а о туре коня, ладьи и т. д. Тур шахматной фигуры проходит ровно один раз по всем полям шахматной доски и заканчивается возвращением на начальное поле.

Задачи

1. Города расположены в вершинах выпуклого многоугольника. Докажите, что длина оптимального тура равна периметру многоугольника.

2. Сводится ли к задаче коммивояжера задача о кратчайшем маршруте туриста, который выезжает из пункта 1, посещает пункты 2, 3, ..., $k-1$ и покидает страну из пункта k? Тот же вопрос для задачи о минимизации пути посыльного, который направляется из пункта 1 в пункты 2, 3, ..., k. Возможно ли это сведение для задачи о диверсантах, которые, чтобы взорвать объекты, расположенные в пунктах 1, 2, ..., k, планируют место десантирования и кратчайший маршрут через все пункты?

3. На плоскости расположены 30 городов. Их координаты: $y=0, 1, 2$ при $x=0$; $y=0, 1, 2, 4, 5, 6$ при $x=1$; $y=1, 2, 3, 4, 6, 7, 8$ при $x=2$; $y=0, 1, 3, 4, 6, 7, 8$ при $x=3$; $y=0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ при $x=4$. Решите задачу коммивояжера. Докажите, что полученный тур оптимален.

4. При каких размерах шахматной доски на ней существует тур ладьи? Тур ослабленной ладьи, которая ходит только на соседние поля?

5. На шахматной доске с нечетным числом полей одно поле вырезано. При каких расположениях вырезанного поля существует тур ослабленной ладьи?

6. Найдите тур коня на пространственной «доске», имеющей форму прямоугольного параллелепипеда размером $3\times4\times6$. «Полями» сейчас считаются 72 куба единичного объема, на которые наша «доска» естественным образом разбивается.

7. Даны числа k и m. Как построить матрицу расстояний для задачи коммивояжера с k городами, решением которой был бы тур длины km?

В. Лишевский

Иоганн Кеплер

Трудно представить себе судьбу более тяжелую, чем та, которая выпала на долю Иоганна Кеплера. Голод и нищета, религиозные гонения и вызванные ими скитания, болезни и смерть близких преследовали его всю жизнь. Почти каждый день был заполнен поисками средств к существованию, и непонятно, когда же он успел прочитать все то, что было написано учеными до него, получить выдающиеся достижения в кристаллографии, оптике, математике, астрономии и открыть свои знаменитые законы движения планет! После смерти Кеплера осталось одно изношенное платье, две рубашки, несколько медных монет, 12 694 гульдена неуплаченного жалования, 57 вычислительных таблиц, 27 напечатанных научных трудов и огромное рукописное наследие. Какой же надо было обладать настойчивостью, целеустремленностью, трудолюбием, желанием познать законы природы, чтобы в тех неимоверно тяжелых условиях, в которых жил и творил Кеплер, выполнить такой колоссальный объем работы и внести столь значительный вклад в мировую науку!

Иоганн Кеплер родился 27 декабря 1571 года в небольшом немецком городке Вейль-дер-Штадте, насчитывавшем тогда всего несколько сотен жителей. Его отец — Генрих Кеплер — был человеком без определенных занятий, скитальцем (по словам Иоганна Кеплера), который в 1589 году исчез из дома окончательно. Мать Иоганна — Катерина Гульденман — обладала тяжелым и неуживчивым характером. Она немного разбиралась в травах и лечила всех обращавшихся к ней за советом настоями и отварами. Эта ее «врачебная» деятельность стала одной из причин, по которым она позже была объявлена ведьмой. Кеплеру пришлось потратить шесть лет жизни, чтобы доказать невиновность своей матери и спасти ее от костра инквизиции.

Детство Кеплера было безрадостным. Оно прошло среди грубых и невежественных людей, в обстановке постоянных ссор и взаимных упреков, ругани и брани. К тому же он рос слабым ребенком, часто болел.

Два ярких события детства запомнились Иоганну и, может быть, определили его будущее. В возрасте 6 лет, в 1577 году, он впервые увидел комету, а три года спустя родители показали ему лунное затмение.

В 1578 году семилетнего Иоганна отдают в начальную немецкую школу, но вскоре по настоянию учителя, обратившего внимание на способного и прилежного ученика, его переводят в латинскую школу, готовящую будущих служителей церкви и различных государственных учреждений.

Перед окончанием школы встал вопрос: что делать дальше? Учитывая советы учителей, денежные, престижные и иные моменты, родители выбирают для Иоганна духовную карьеру. В 1584 году он поступает в низшую семинарию города Адельсберга, а затем продолжает учебу в высшей семинарии в Маульбронне.

После окончания семинарии в 1589 году Иоганн поступает в Тюбингенский университет на факультет искусств. Здесь он изучает математику, астрономию, греческий и древнегреческий языки, риторику, поэзию, этику, философию. Через два года, успешно сдав магистерский экзамен, Кеплер переходит на теологический факультет, где для студентов-богословов был установлен трехлетний срок обучения. Иоганн прилежно учится, много читает, занимается стихосложением, участвует в театрализованных представлениях, которые студенты-теологи разыгрывают на рыночной площади.

В то время в Тюбингенском университете было несколько незаурядных преподавателей, но наибольшее влияние на молодого Кеплера оказал Михаил Мёстлин, профессор математики и астрономии. Он первый заметил выдающиеся способности Иоганна Кеплера к математике и астрономии и познакомил его и еще нескольких своих воспитанников с системой мира Коперника (в университете Мёстлин был вынужден преподавать систему мироздания Птолемея). Именно Мёстлин разжег в Кеплере страсть ученого, долгое время был советчиком и помощником Иоганна в научных занятиях, направлял и одобрял его деятельность.

В конце 1594 года обучение Кеплера на теологическом факультете должно было закончиться, но неожиданно произошло событие, резко изменившее судьбу Иоганна. В протестантской средней школе Граца — главного города провинции Штирии (Австрия) — скончался преподаватель математики, и протестантская община города обратилась в сенат Тюбингенского университета с просьбой порекомендовать им достойного кандидата на эту должность. Выбор пал на Кеплера, а он, как обучающийся на государственный счет, не мог отказаться. Иоганну очень не хотелось оставлять учебу, а с нею и мечты о духовной карьере; однако пришлось подчиниться. 14 марта 1594 года Кеплер покинул Тюбинген и отправился к месту своей первой службы.

В Граце Кеплер прожил шесть лет. Помимо преподавания в школе, в его обязанность входило составление астрономических календарей на следующий год и прилагаемых к ним астрономических прогнозов. В календаре помещались сведения о времени восхода и захода Солнца, Луны, ее фазах, о положении планет среди звезд и многое другое. В разделе «Прогнозы» обязательно сообщались предположения о погоде, видах на урожай, политические, военные и иные предсказания.

Здесь, в Граце, в 1596 году Кеплер написал свою первую крупную работу «Тайна Вселенной» (рукопись этой книги Кеплер озаглавил так: «Предвестник космографических исследований, содержащий космографическую тайну»). В этой работе он пытался построить гелиоцентрическую систему мира, устанавливая числовую зависимость между расстояниями планет от Солнца и размерами правильных многогранников. По Кеплеру в сферу, на которой расположена орбита Сатурна, вписан куб, в него вписана следующая сфера — с орбитой Юпитера, далее последовательно вписаны тетраэдр, сфера Марса, додекаэдр, сфера Земли, икосаэдр, сфера Венеры, октаэдр, сфера Меркурия *). В центре всей этой системы сфер и многогранников находится Солнце.

Свою «Тайну Вселенной» Кеплер послал Галилео Галилею и Тихо Браге. Оба ученых ответили незамедлительно. Галилей приветствовал появление еще одного приверженца коперниковской системы. Браге, высказав свое отрицательное отношение к умозаключениям Кеплера, обратил внимание на самостоятельность мышления Кеплера, на его знание астрономии, на искусность и упорство в вычислениях. Чтобы лично познакомиться с молодым ученым, Браге приглашает его к себе.

В это время происходят изменения в личной жизни Кеплера. В апреле 1597 года он женится на дочери мельника Барбаре Мюллер, и через год у них появляется сын Генрих. Прожив всего два месяца, ребенок умирает. Та же участь постигает и дочь Сусанну, родившуюся годом позже. Кеплер тяжело переживает смерть детей. А тут еще и другие неприятности. В начале 1598 года в Граце усиливаются гонения на протестантов, к которым принадлежал и Кеплер. В сентябре того же года под страхом смертной казни предложено покинуть город всем протестантским священникам и учителям школы. Кеплер вынужден бежать из города. Правда, вскоре для него было сделано исключение, и через месяц Кеплер возвращается в Грац. Но обстановка в городе неспокойная, и Кеплер, воспользовавшись приглашением Тихо Браге, решает ехать к нему.

1 января 1600 года на пороге нового столетия Кеплер уезжает в Прагу, тогдашнюю резиденцию императора Священной Римской империи Рудольфа II. Здесь живет и работает Тихо Браге — придворный императорский математик.

Однако совместная работа с Тихо Браге продолжалась недолго. Осенью 1601 года покровитель Кеплера умирает. Придворным математиком назначают Кеплера, ему же поручается забота об инструментах и рукописях Браге. В руках Кеплера оказываются журналы астрономических наблюдений, которые Браге вел на протяжении почти четверти века. Эти наблюдения были весьма точны для своего времени, они-то и позволили Кеплеру открыть знаменитые законы движения планет, называемые теперь его именем.

Зимой 1601 года Кеплер выводит один из законов движения планет, который впоследствии получил название второго закона, или закона площадей. Вначале Кеплер формулирует его для Марса, опираясь на результаты наблюдений движения этой планеты, а затем, проверив правильность этого закона для движения других планет, распространяет его на всю Солнечную систему. Закон площадей гласит: радиус-вектор планеты описывает в равные промежутки времени равные площади. Или иначе: радиус-вектор планеты описывает площади, пропорциональные времени.

Закон, который теперь называют первым законом, Кеплер сформулировал в 1605 году: каждая планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце.

Выводы этих двух законов были даны в основном произведении Кеплера по астрономии — в книге «Новая астрономия», которая увидела свет в 1609 году. (Полное ее название — «Новая астрономия, причинно обоснованная, или физика неба, изложенная в исследованиях движения планеты Марс по наблюдениям благороднейшего мужа Тихо Браге».)

*) Во времена Кеплера были известны только шесть упомянутых планет Солнечной системы.

Третий закон был найден позднее, в 1618 году, он приведен в книге Кеплера «Гармония Мира», изданной в 1619 году. Сейчас этот закон формулируется так: квадраты периодов обращений планет вокруг Солнца пропорциональны кубам больших полуосей их эллиптических орбит.

В Праге Кеплер прожил десять лет. Это был наиболее плодотворный в творческом отношении период его жизни. Здесь же, в Праге, Кеплер пишет два фундаментальных трактата по оптике: «Дополнения к Вителлию, в которых излагается оптическая часть астрономии» (1604 г.) и «Диоптрика» (1611 г.).

Первая книга написана, действительно, как дополнения к хорошо известному в то время трактату польского ученого XII века Вителло. Кеплер останавливается на многих вопросах, касающихся геометрической и физиологической оптики. Он ввел в оптику термины «оптическая ось» и «мениск», «сходимость» и «расходимость» световых пучков, создал теорию механизма зрения, которая в основном совпадает с современной, объяснил действие собирающих и рассеивающих очковых линз, исправляющих дальнозоркость и близорукость, вплотную подошел к разработке теории оптических инструментов.

Вторая книга (ее полное название — «Диоптрика, или доказательство того, как становится видимым изображение с помощью недавно изобретенной зрительной трубы») явилась результатом дальнейших исследований, связанных с оптическими инструментами, особенно после создания Галилеем в 1609 году первого телескопа. Термином «диоптрика» Кеплер назвал тот раздел оптики, где рассматривается явление преломления света (в отличие от евклидовской катоптрики, изучающей отражение света). Поразительно, что, не зная правильной формулировки закона преломления света (этот закон был найден для частного случая Снеллиусом в 1617 году, а для общего — Декартом в 1637 году), Кеплеру удалось построить в целом правильную теорию действия оптических приборов и, в частности, зрительных труб.

Собственноручный набросок Кеплера к фронтиспису «Рудольфинских таблиц».

Относительно благополучный десятилетний период пребывания Кеплера в Праге закончился. В конце 1610 года заболевает жена Барбара. Врачи находят у нее перемежающуюся лихорадку. Дети Кеплера заболевают оспой, и в феврале 1611 года умирает сын Фридрих.

В эти дни Прага становится ареной военных действий. Это воюют за престол император Рудольф II и его брат Матвей. 23 мая 1611 года Рудольф II отрекается от престола. Королем Чехии, а вскоре и императором Священной Римской империи становится Матвей. Кеплер остается без своего высокого покровителя, и хотя Матвей оставляет ученого на должности придворного математика, решает покинуть Прагу. В конце мая Кеплер уже в Линце — столице Верхней Австрии, где предлагает сословному собранию свои услуги в качестве преподавателя и провинциального математика. Его предложение принято, и Кеплер возвращается за семьей в Прагу. Дома он застает жену в очень тяжелом состоянии, и 3 июля она умирает. Этот, 1611 год, был самым несчастливым в жизни Кеплера: смерть сына, смерть жены...

В Линце Кеплер прожил 14 лет. Помимо того, что он числился императорским математиком, его назначили математиком провинции Верхней Австрии. Его главным делом было продолжение составления таблиц планетных движений (на основе данных наблюдений Тихо Браге). Но Кеплера интересовали и сугубо математические проблемы. Это, прежде всего, — математика переменных величин и теория правильных многоугольников и многогранников.

В 1615 году вышла книга Кеплера «Стереометрия винных бочек», положившая начало целому ряду исследований в математике переменных величин, которые привели к созданию Ньютоном и Лейбницем теории дифференциального и интегрального исчислений.

Поводом для написания книги (со слов самого Кеплера) послужила такая история. Как-то осенью 1613 года, когда Кеплер покупал вино, он был изумлен тем, как торговец определял вместимость бочки. Он брал палку, на которой были нанесены деления, вставлял ее в наливное отверстие бочки и измерял расстояние от отверстия до самой дальней точки бочки — до края днища. Проделав это одно измерение, он сразу же говорил, сколько вина в данной бочке. Кеплера заинтересовало, насколько точно торговец определял объем бочки при помощи одного измерения.

Уже к концу года были получены результаты этого исследования. Вначале Кеплер нашел формулу для вычисления объема бочки, а затем — и других тел вращения. Для нахождения объемов этих неправильных тел он применил метод «исчерпывания», заполняя тела фигурами, объемы которых поддавались вычислению.

Находя объем тела как сумму элементарных объемов, заполнявших тело, Кеплер часто употреблял латинское выражение Summa omnium — сумма всех. Как известно, один из создателей интегрального исчисления — Лейбниц ввел знак интеграла $\int$ (удлиненная буква S) именно для сокращенной записи выражения Summa omnium.

Тема правильных многоугольников и многогранников была развита в пятитомном труде Кеплера «Гармония мира».

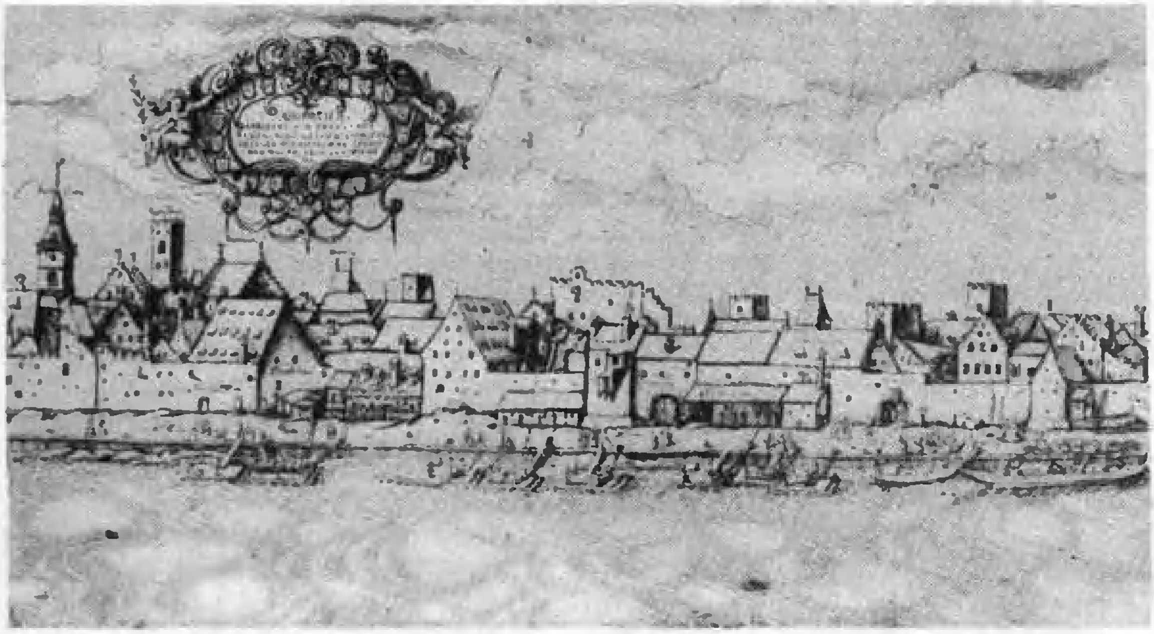
Кеплер был выдающимся математиком не только по своему официальному званию, но и по самой сути. Он внес большой вклад в теорию конических сечений, ввел термин «фокус» (параболы, гиперболы, эллипса). Введение им понятия бесконечно удаленной точки способствовало созданию проективной геометрии. Он был хорошим вычислителем, принимал участие в разработке теории логарифмов, составил собственные таблицы логарифмов, наконец, он способствовал изобретению первой вычислительной машины.

В Линце Кеплер много и плодотворно работает. Этому немало способствует его вторая жена — Сусанна Рейттингер, на которой он женился в 1613 году. Это — спокойная, добрая и трудолюбивая женщина. Она терпеливо и с достоинством переносит невзгоды и лишения, радуется научным успехам мужа и умеет поддержать его в трудную минуту.

Однако спокойная работа в Линце прерывается письмом сестры, которая сообщает, что мать Кеплера обвиняют в колдовстве. Навет исходил от соседки, невзлюбившей мать ученого. Клевета упала на благодатную почву. Этому способствовали также необщительный и малосимпатичный характер Катерины и то, что она занималась «врачеванием». В то время в Германии повсюду велась охота за ведьмами. В Леонберге, где жила Катерина, только за одну зиму было сожжено шесть женщин, подозреваемых в колдовстве.

Получив письмо от сестры, Кеплер сразу же направил властям Леонберга письмо, в котором отводил от своей матери обвинение в колдовстве и отвергал слухи о том, что он сам тоже, якобы, занимается черной магией. Письмо не возымело действия, и началось следствие. Оно тянулось почти 5 лет.

7 августа 1620 года Катерина была арестована и препровождена в тюрь-



Регенсбург. Старинная гравюра.

му. Узнав об этом, Кеплер спешит в Леонберг. Процесс начался 4 сентября и продолжался более года. Кеплер построил защиту очень искусно. Он не отвергал существования ведьм, не отрицал свидетельские показания, а просто давал каждому конкретному случаю вполне естественное объяснение, отводящие от матери обвинение в колдовстве. 4 октября 1621 года процесс был прекращен, и измученную женщину выпустили из тюрьмы. В апреле следующего года Катерина скончалась.

Мать Кеплера была спасена от костра инквизиции благодаря своему сыну, но какой ценой! Шесть лет вместо занятий наукой всемирно известный ученый вынужден был бороться с невежеством, тупостью, жестокостью.

Кеплер возвращается в Линц. Здесь он заканчивает работу над таблицами логарифмов, начатую еще летом 1619 года, когда он познакомился с книгой Д. Непера «Описание удивительных таблиц логарифмов» (1614 г.). Так как Кеплеру приходилось много вычислять, он не мог пройти мимо изобретения Непера и составил свои таблицы логарифмов, которые по структуре были более похожи на современные.

Летом 1624 года Кеплер, наконец, заканчивает составление новых астрономических планетных таблиц, над которыми он трудился 22 года. Эту работу Кеплер считал основным делом своей жизни. Старые таблицы движения планет были неточны, и новые кеплеровские таблицы с нетерпением ждали моряки и астрономы, составители календарей и астрологи. После опубликования в 1627 году «Рудольфинские таблицы» (названные так по имени Рудольфа II) в течение почти двух веков служили людям, только в начале XIX века они были заменены более точными.

Последние годы жизни Кеплера были вновь омрачены невзгодами, лишениями и скитаниями. Нет денег ни на жизнь, ни на издание своих трудов. В Линце начинаются гонения на протестантов. Им всем предложено или перейти в католичество, или в течение шести месяцев покинуть город. Кеплеру и работникам его типографии разрешено остаться в городе до окончания работы над «Рудольфинскими таблицами».

Уже восемь лет идет Тридцатилетняя война. Линц, как и вся Верхняя Австрия, оккупирован баварскими войсками, которые ведут себя как завоеватели. Город мучается в тисках голода, начинаются эпидемии. В городе вспыхивают пожары, и в огне сгорает типография Кеплера; рукопись книги чудом остается целой.

Кеплер не может больше оставаться в Линце. Он забирает семью, грузит книги, рукописи и немудреную домашнюю утварь на судно, идущее вверх по Дунаю, и отправляется в Ульм, где он договорился издать «Рудольфинские таблицы». Начинаются сильные морозы, реку сковывает лед. Кеплер вынужден оставить семью в Регенсбурге, а сам добирается до Ульма на лошадях. В Ульме Кеплер живет около года, из которых девять месяцев уходят на печатание «Таблиц».

Наконец, «Рудольфинские таблицы» увидели свет. Кеплер навещает семью в Регенсбурге и отправляется в Прагу, где в то время находился император Фердинанд.

Император милостиво встречает Кеплера, принимает от него в подарок экземпляр «Таблиц» и предлагает перейти в католичество, обещая за это всяческие блага. И вновь Кеплер отказывается — он не может пойти на сделку со своей совестью.

В судьбу Кеплера вмешивается любимец императора — полководец Альбрехт Валленштейн. Он давно знает Кеплера, так как дважды обращался к нему как к астрологу. Валленштейн предлагает Кеплеру поступить к нему на службу. Ученый соглашается, и летом 1628 года вместе с семьей переезжает в герцогство Саган — владения Валленштейна.

В августе 1630 года Валленштейн получает отставку, и Кеплер вновь остается без покровителя и... без денег. Осенью того же года он отправляется в Регенсбург на сбор германских князей, где тогда находился император, чтобы получить хотя бы часть причитающихся ему денег. Вскоре после приезда в Регенсбург Кеплер тяжело заболел лихорадкой. Здесь он и умер 15 ноября 1630 года на 59 году жизни.

Злоключения Кеплера продолжались и после его смерти. В результате сражений Тридцатилетней войны кладбище, на котором его похоронили, было полностью разрушено, и от могилы Кеплера не осталось даже следа. Его рукописное наследие переходило из рук в руки, терялось, растаскивалось, пока, наконец, в 1774 году бо́льшая часть архива Кеплера не была приобретена Петербургской академией наук *).

С именем Кеплера связаны основные законы небесной механики. В его честь названы один из лунных кратеров и малая планета № 1134. В начале XIX века жители Регенсбурга соорудили Кеплеру памятник, а к 300-летию со дня рождения был установлен монументальный памятник на родине Кеплера в Вейль-дер-Штадте. В этих же городах открыты музеи его имени.

*) В настоящее время 18 из 22 томов рукописного наследия Кеплера хранятся в Ленинградском отделении Архива Академии наук СССР.

Непридуманные опечатки

Трапеция — несчастный случай четырехугольника (частный!)

* * *

На гадкой поверхности лежит брусок (на гладкой!)

* * *

Добросовестно заблудившийся оппонент (заблуждавшийся!)

* * *

Читатели сетуют (советуют!)

* * *

Непримиримые отклонения от верных результатов (неприемлемые!)

* * *

Модное радиоактивное излучение (мощное!)

* * *

Траектории пересекаются под углом 60°С

* * *

$\{x\}$ — удобная часть числа x (дробная!)

* * *

Качательная (касательная!)

* * *

Положительные полуочи (полуоси!)

* * *

Адекватный (адекватный!)

* * *

Острофизические наблюдения (астрофизические!)

* * *

Перелетные звезды (переменные!)

* * *

Бесконечно милая величина (малая!)

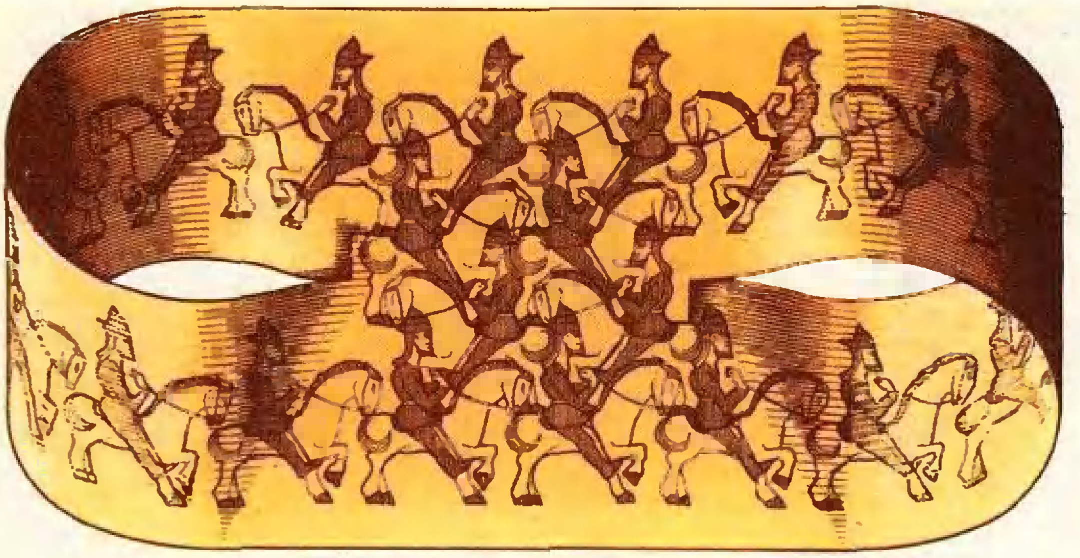
* * *

Четырехзначный механизм (четырехзвенный!)

* * *

Критически построенный читатель (настроенный!)

А. В.



А. Таллер

Сюрпризы листа Мёбиуса

Представим себе поверхность и сидящего на ней муравья. Удастся ли муравью доползти до обратной стороны поверхности — образно говоря, до ее изнанки, — не перелезая через край? Конечно же нет! В этом были уверены математики до середины прошлого века, когда немецкий астроном и геометр Август Мёбиус привел первый пример о д н о с т о р о н н е й поверхности, в любое место которой может доползти муравей, не перелезая через край. Об этой поверхности, называемой *листом* (или *лентой*) *Мёбиуса*, мы и расскажем.

Прежде, чем читать дальше, изготовьте модель листа Мёбиуса: возьмите бумажную полоску — длинный узкий прямоугольник $ABCD$ (рис. 1); перекрутив ее на 180°, склейте из нее кольцо — лист Мёбиуса готов. Попробуйте закрасить одну его сторону, оставив другую белой. Вскоре вы с удивлением обнаружите, что красите «изнанку». Таким образом, лист Мёбиуса действительно является односторонней поверхностью.

Лист Мёбиуса преподнесет вам не один сюрприз и в том случае, если вы попытаетесь его разрезать:

1) Разрежьте вашу ленту Мёбиуса по центральной линии. При последнем разрезе (рис. 2) полоска, вместо того, чтобы развалиться на два куска, разворачивается в длинную связную замкнутую ленту.

2) Полученную после первого разреза ленту снова разрежьте по ее центральной линии. Перед последним сжатием ножниц попробуйте угадать, что будет?

3) Возьмите еще одну очень узкую полоску бумаги, скрутите ее на этот раз не на 180°, а на 360° и склей-

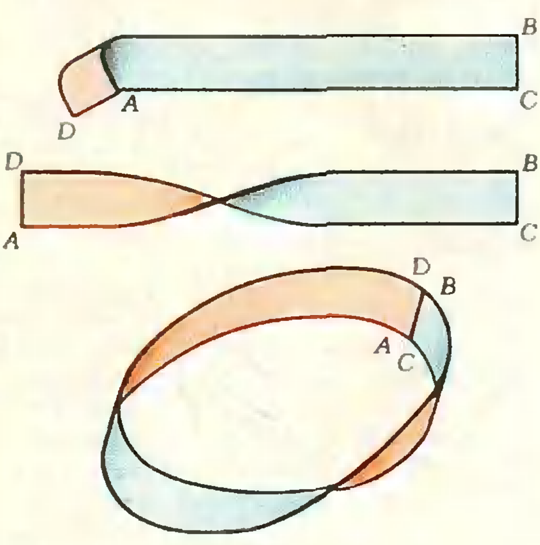


Рис. 1.

те; затем разрежьте и ее по центральной линии. Сравните результат с результатом предыдущего разреза.

Почему так происходит? Не прибегая более к бумажным моделям и ножницам, попробуем пояснить это математически.

Уравнение поверхности Мёбиуса

Построим поверхность Мёбиуса в трехмерной декартовой системе координат $Oxyz$. Рассмотрим на плоскости $z = 0$ окружность радиуса R с центром в начале координат O ($x^2 + y^2 = R^2$). Пусть точка A равномерно движется в положительном направлении по этой окружности; тогда плоскость α, проходящая через ось Oz и точку A, будет вместе с ней равномерно вращаться вокруг оси Oz. Рассмотрим в плоскости α прямую l, проходящую через точку A. Пусть прямая l вращается вокруг точки A против часовой стрелки (если смотреть на α в направлении движения точки A), причем в любой момент угол между лучом OA и прямой l равен половине угла φ между осью Ox и лучом OA. Таким образом, когда точка A завершит полный оборот, прямая l окажется повернутой относительно начального положения на 180°.

Множество точек пространства, через которые проходит прямая l (участвующая в двух движениях), есть поверхность Мёбиуса (рис. 3). Прямую l естественно называть *образующей* построенной поверхности. Точнее, образующими мы будем называть все прямые, положение которых занимает наша прямая l при своем движении. В отличие от модели, склеенной из бумажной полоски, эта поверхность безгранична (не имеет границы, края) и бесконечна (ее нельзя заключить ни в какую сферу).

Очевидно, положение точки A и, следовательно, положение образующей l, однозначно определяется величиной угла $\varphi = \widehat{xOA}$. Условимся считать, что на образующей l выбрана система отсчета, начальная точка которой есть точка A, положительное направление при $\varphi = 0$ совпадает с положительным направлением оси Ox, а масштаб совпадает с масштабом системы $Oxyz$. Тогда положение точки на образующей однозначно определяется действительным числом λ. Таким образом, задание чисел $\lambda \in \mathbb{R}$ и $\varphi \in [0; 2\pi[$ однозначно определяет точку M на поверхности; найдем ее координаты. Пусть M_x, M_y, M_z, M' — проекции точки M на оси Ox, Oy, Oz и на плоскость Oxy соответственно (рис. 3). Тогда $OM_x = OM' \times \cos\varphi$, $OM_y = OM' \cdot \sin\varphi$, $OM_z = AM \cdot \sin\frac{\varphi}{2}$. $OM' = OA + AM \times \cos\frac{\varphi}{2}$. Учитывая $OA = R$ и $AM = \lambda$, получаем, что координаты точки M равны

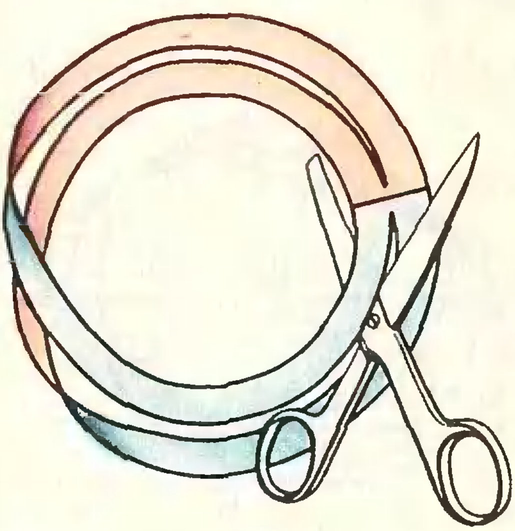


Рис. 2.

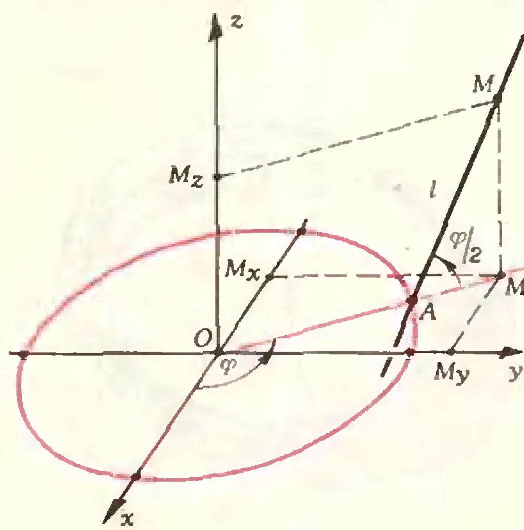


Рис. 3.

$$\begin{cases} x=\left(R+\lambda\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi, \\ y=\left(R+\lambda\cos\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi, \\ z=\lambda\sin\frac{\varphi}{2}, \end{cases} \qquad (1)$$

где $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $\lambda \in \mathbf{R}$ *).

Общий вид поверхности Мёбиуса изображен на обложке журнала. На рисунке 4 показана часть поверхности, отвечающая $-1 \leqslant \lambda \leqslant 1$; эту часть поверхности мы и изображали бумажной моделью.

Если при обходе окружности мы будем вращать нашу прямую с удвоенной скоростью, то при $-1 \leqslant \lambda \leqslant 1$ получим полоску, перекрученную на 360° (вспомните разрез 3)). Это уже двусторонняя поверхность (рис. 5). Ее уравнение, очевидно, будет

$$\begin{cases} x=(R+\lambda\cos\varphi)\cos\varphi, \\ y=(R+\lambda\cos\varphi)\sin\varphi, \\ z=\lambda\sin\varphi. \end{cases} \qquad (1')$$

Заметим теперь, что при $\varphi=0$ образующая l пересекает исходную окружность еще и в точке $(-R, 0, 0)$. Следовательно, она пересекает некоторую другую образующую. Таким образом, поверхность Мёбиуса оказалась самопересекающейся.

*) Такое задание поверхности часто называют параметрическим; здесь параметры φ и λ исполняют роль своеобразных координат на поверхности (подобно широте и долготе на земной поверхности).

Линия самопересечения

Чтобы найти линию самопересечения поверхности Мёбиуса, выясним, какие пары образующих могут пересекаться.

Если две образующие лежат в различных вертикальных плоскостях, то точка их пересечения, если она существует, должна лежать на линии пересечения этих плоскостей, т. е. на оси Oz.

Для каждого $\varphi \in [0; 2\pi[$ найдем точку пересечения образующей с осью Oz. Для этой точки

$$x=\left(R+\lambda\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi=0,$$

$$y=\left(R+\lambda\cos\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi=0.$$

Поскольку $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$ не могут быть равны 0 одновременно, $R+\lambda\cos\frac{\varphi}{2}=0$. При $\varphi\neq\pi$, $\lambda=-\frac{R}{\cos\frac{\varphi}{2}}$. Из (1) $z=-R\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$.

Таким образом, координаты точки пересечения образующей с осью Oz:

$$\left(0, 0, -R\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}\right).$$

Существенным для нас является тот факт, что все образующие при $\varphi\neq\pi$

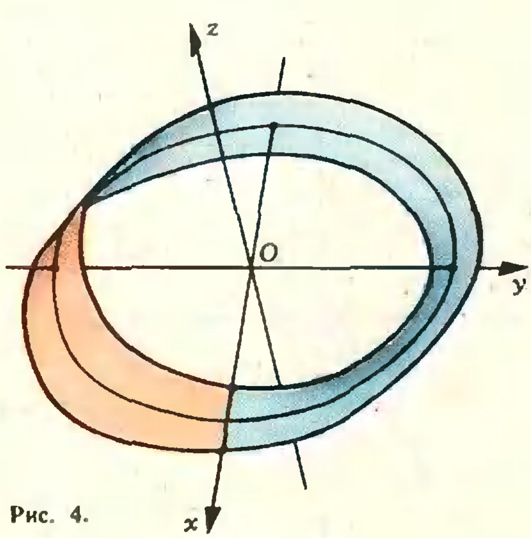


Рис. 4.

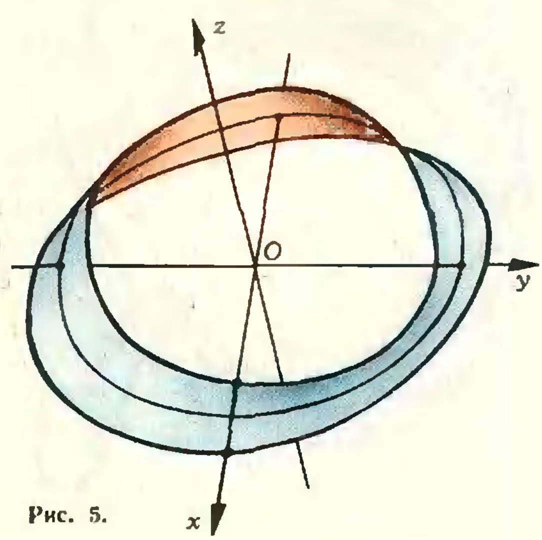


Рис. 5.

пересекают ось Oz в различных точках. При $\varphi=\pi$ образующая параллельна оси Oz.

Таким образом, пересекаться могут только такие пары образующих, которые лежат в одной вертикальной плоскости; иными словами, если одной из пересекающихся образующих соответствует угол φ, то другой соответствует угол $\varphi+\pi$. Пусть положение точки пересечения этих образующих определяется значениями λ_1, λ_2 параметра λ. Тогда из (1)

$$\begin{cases} x=\left(R+\lambda_1\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi= \\ =-\left(R-\lambda_2\sin\frac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi, \\ y=\left(R+\lambda_1\cos\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi= \\ =-\left(R-\lambda_2\sin\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi, \\ z=\lambda_1\sin\frac{\varphi}{2}=\lambda_2\cos\frac{\varphi}{2}. \end{cases}$$

Из этих выражений следует, что λ_1, λ_2 удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{cases} R+\lambda_1\cos\frac{\varphi}{2}=-R+\lambda_2\sin\frac{\varphi}{2}, \\ \lambda_1\sin\frac{\varphi}{2}=\lambda_2\cos\frac{\varphi}{2}, \end{cases}$$

откуда $\left(\text{при } \varphi\neq\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$ находим $\lambda_1=-2R\dfrac{\cos\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}$. Подставив найденное значение λ_1 в уравнения (1), получим координаты точки самопересечения:

$$x=-R,\quad y=-R\operatorname{tg}\varphi,\quad z=-R\operatorname{tg}\varphi.$$

Отсюда видно, что при изменении φ точка самопересечения поверхности Мёбиуса движется вдоль прямой, которая лежит в плоскости $x=-R$ и описывается равнением $z=y$. Таким образом, линия самопересечения является прямой (но не является образующей!). Отрезок этой прямой изображен на обложке. Внимательно изучив заставку, вы найдете линию самопересечения и на ней.

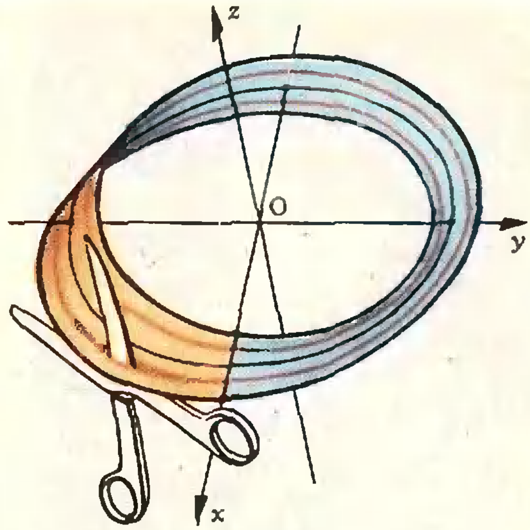


Рис. 6.

Почему же лист Мёбиуса не распадается при разрезе?

Теперь нетрудно ответить и на этот вопрос. Рассмотрите на рисунке 4 (и на обложке) край ленты Мёбиуса, т. е. линию $\lambda=\pm1$. Присмотритесь: этот край не распадается на пару замкнутых кривых, как было бы в случае неперекрученной полоски, а представляет собой одну непрерывную кривую. Наш разрез не касался края, и поэтому край (а значит и вся полоска) после разреза будет оставаться цельным куском.

Как объяснить другие сюрпризы?

Можно считать, что второй разрез осуществляется по линии $\lambda=\frac{1}{2}$ (рис. 6).

Координаты точек на этой линии описываются (при $\varphi\in[0,\ 2\pi]$) уравнениями

$$\begin{cases} x=\left(R+\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi, \\ y=\left(R+\frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi, \\ z=\frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}. \end{cases} \qquad (2)$$

Очевидно, разрез делит нашу полоску на две части, которые можно условно назвать внешней и внутренней, причем внутренняя часть является такой же, только более узкой, полоской листа Мёбиуса. Что же представляет собой внешняя часть?

(Продолжение см. стр. 59)

И. Яглом

Поговорим об определениях

Из чего состоит математика? Разумеется, в первую очередь, из т е о р е м и а к с и о м («Геометрия 6», п. 6). Важнейшую часть математики составляют д о к а з а т е л ь с т в а. Знаменитый трактат Н. Бурбаки «Начала математики» *) начинается со слов: «Со времен греков говорить „математика“ — значит говорить „доказательство“».

Наряду с этим фундаментальную роль играют в математике о п р е д е л е н и я («Геометрия 6», п. 2) — ведь, прежде чем доказывать теоремы о тех или иных математических объектах, надо понимать, что это за объекты. Да что «доказывать»! Даже для того, чтобы просто п о н я т ь теорему *«Касательная к окружности перпендикулярна диаметру, проходящему через точку касания»*, мы должны знать, что такое «окружность», «касательная к окружности», «точка касания», «диаметр», «перпендикулярна». Пока хоть один из этих терминов остается нам неизвестным, нам нечего задумываться о самой теореме.

Разумеется, это справедливо не только для математики: прежде, чем что-либо обсуждать, мы должны понимать, о чем идет речь. Утверждение *«Анатолий Карпов хорошо играет в шахматы»* человеку, не знающему, кто такой Карпов и что такое шахматы, скажет не больше, чем нам с вами — фразы *«Рецессивный аллель влияет на фенотип только в том случае, когда генотип гомозиготен»* или *«Тарарабумбия очень зелемична»*.

Чаще всего *«определение задается указанием ближайшего рода и видового отличия»*. Слова в кавычках принадлежат знаменитому мудрецу Аристотелю, учителю Александра Македонского (IV в. до н. э.). В гимназиях дореволюционной России ученики заучивали их наизусть, для пущей учености — по-латыни (хотя сам Аристотель латыни, конечно, не знал — он говорил и писал на языке, который ныне называется древнегреческим).

Например, в определении *«Квадратом называется прямоугольник, у которого смежные стороны конгруэнтны»* прямоугольники — это «ближайший род», а конгруэнтность смежных сторон — то «видовое отличие», которое из «рода» прямоугольников выделяет «вид» квадратов (рис. 1). Аналогично, в определении *«Соответствие между двумя множествами, при котором каждому элементу одного множества соответствует один и только один элемент второго множества, называется функцией»* соответ-

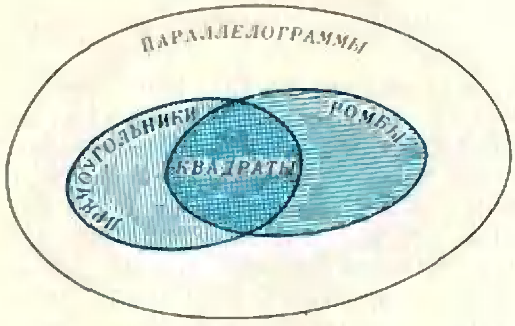


Рис. 1.

*) Группа французских математиков, объединенная под псевдонимом «Никола́ Бурбаки», поставила перед собой цель — написать полный трактат по современной математике. Трактат издается отдельными выпусками в Париже с 1939 года. У нас в стране перевод трактата начал выходить в 1958 году. Трактат еще не закончен. Поскольку во время писания трактата математика тоже движется вперед, возможно, он не будет завершен никогда.

ствия — «ближайший род», из которого мы выделяем функции, а *«каждому элементу одного множества...»* — «видовое отличие», характеризующее их.

Определения по схеме Аристотеля существуют не только в математике. Так, можно сказать, что *слон — это млекопитающее, обладающее длинным хоботом*. Как известно, *ботаника — это наука о растениях*.

Одно и то же понятие «через ближайший род и видовое отличие» можно, конечно, определить по-разному. Так, *квадрат* можно определить как *прямоугольник со взаимно перпендикулярными диагоналями* или *прямоугольник, в который можно вписать окружность*. Можно также один и тот же «вид» выделять из разных «родов». Например, *квадрат* можно определить как *ромб, имеющий прямой угол* (рис. 1).

Упражнения

1. Дайте еще несколько определений квадрата по схеме Аристотеля.

2. Определите по той же схеме прямоугольник, ромб, параллелограмм.

3. Дайте несколько разных определений по схеме Аристотеля какого-нибудь нематематического понятия.

Многие определения в математике не укладываются в схему Аристотеля. Например, в определениях *«График функции $y = ax^3$ $(a \neq 0)$ называют кубической параболой»*, *«Мы будем говорить „a больше b“, если разность $a - b$ положительна»*, *«Модулем числа a называется само число a, если $a \geqslant 0$, и число $-a$, если $a < 0$»* вряд ли можно естественно указать «ближайший род» и «видовое отличие».

* *
*

Каждое определение является с о г л а ш е н и е м об употреблении некоторого термина или обозначения. Поэтому нельзя говорить об истинности-ложности или доказательстве определений. С другой стороны, о разумности, о полезности, об удобстве того или иного определения размышлять можно и должно.

Из любого определения автоматически вытекает (верная) теорема, имеющая вид «равносильности» («Алгебра 7», п. 21). Например, из опре-

Аристотель (Рим. Национальный музей у Терм).

деления квадрата на с. 32 следует теорема *«Прямоугольник тогда и только тогда является квадратом, когда его смежные стороны конгруэнтны»*.

Одна и та же теорема может тривиально вытекать из определения при одном способе построения некоторой теории и требовать содержательных рассуждений — при другом способе. Например, в школьном курсе геометрии теорема *«Если точка X лежит между точками A и B, то $|AX| + |XB| = |AB|$»* прямо следует из определения («Геометрия 6», п. 5), а в геометрии, основанной на системе аксиом Гильберта, требует довольно длинного доказательства.

* *
*

Рассмотрим два определения понятия центральной симметрии. Известное вам определение («Геометрия 6», п. 17) можно сформулировать и так: фиксируем точку O; каждой точке A плоскости поставим в соответствие точку A' той же плоскости, симметричную точке A относительно O (рис. 2); описанное отображение плоскости на себя называется *симметрией с центром O*.

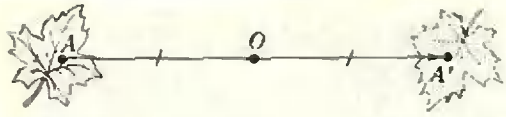


Рис. 2.

Рис. 3.

З а д а ч а 1. Докажите, что отображение плоскости на себя тогда и только тогда является симметрией с центром O, когда его единственной неподвижной точкой является точка O (т. е. $O'=O$ и при $A\neq O$ имеем $A'\neq A$), любую прямую оно переводит в параллельную прямую и существует такая точка B, для которой $|B'O|=|BO|$.

Теорема, установленная в задаче 1, позволяет дать понятию центральной симметрии второе определение: отображение плоскости на себя называется *симметрией с центром* O, если его единственной неподвижной точкой является точка O, любую прямую оно переводит в параллельную прямую и существует такая точка B, для которой $|B'O|=|BO|$.

В первом определении мы сконструировали некоторый объект (отображение плоскости на себя) и дали ему название. Второе определение имеет вид: объект некоторого рода называется *так-то*, если он обладает такими-то свойствами.

Определения первого вида называют *конструктивными* или *прямыми*, определения второго вида — *дескриптивными* (от латинского descriptio — «описание») или *косвенными*.

Сразу же подчеркнем: понятия конструктивного и дескриптивного определений мы недаром объяснили только на примере — они вряд ли допускают строгое описание. Несмотря на их расплывчатость, нечеткость, противопоставление конструктивных и дескриптивных определений часто бывает полезным.

Если какое-то понятие определено дескриптивно, то не обязательно соответствующий объект существует. Назовем, например, натуральное число, отличное от 1, *перфектным*, если оно равно сумме своих делителей. В этом случае данное нами определение никакого объекта не определило, потому что в число делителей числа n входит и само n; перфектных чисел н е с у щ е с т в у е т*).

Таким образом, в отличие от конструктивных определений, любое дескриптивное определение требует еще доказательства, что соответствующий объект существует.

Рассмотрим еще один пример дескриптивного определения: прямые a и b, лежащие в одной плоскости, называются *сходящимися*, если они не имеют общих точек и при движении точки по одной из этих прямых в одном из направлений расстояние от нее до другой прямой неограниченно убывает (рис. 3). Задает ли это определение какой-нибудь объект? Другими словами, существуют ли сходящиеся прямые? Оказывается, ответ на этот вопрос зависит от того, в какой геометрии мы «находимся», какую геометрию рассматриваем. В евклидовой геометрии (или, что для данного вопроса все равно, при той аксиоматике, которая принята в школьном учебнике) сходящихся прямых, конечно, не существует (поэтому мы и были вынуждены прямые на рисунке 3 изобразить искривленными). В геометрии же Лобачевского такие прямые существуют (они там называются *параллельными*).

* *
*

Средневековая научная мысль, дав дескриптивные определения: *философский камень* — это препарат, позволяющий превращать неблагородные металлы в золото; *вечный двигатель* (perpetuum mobile) — это прибор, позволяющий производить работу без затраты энергии, — безуспешно билась над построением не-

*) Стоит, однако, в определение перфектного числа добавить одно слово: натуральное число, отличное от 1, называется *совершенным*, если оно равно сумме своих с о б с т в е н н ы х делителей,— как ситуация меняется. Например, $6=1+2+3$, $28=1+2+4+7+14$. О совершенных числах в «Кванте» много писали (1971, № 8, с. 1; 1972, № 4, с. 39; 1973, № 10, с. 71; 1975, № 5, с. 7).

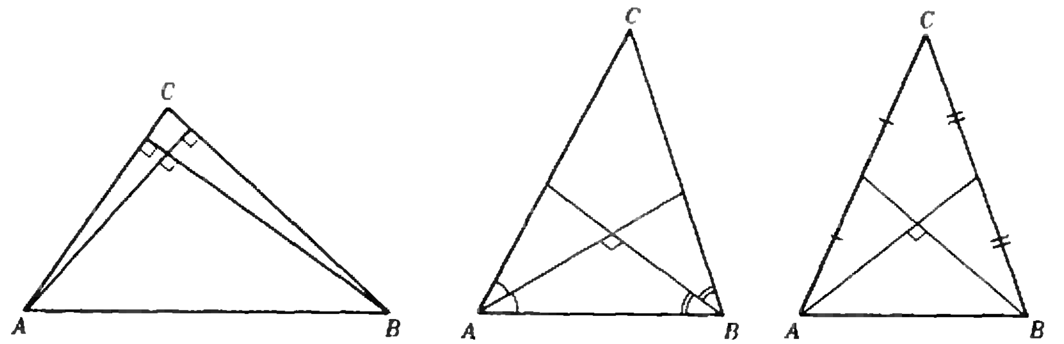


Рис. 4. а) б) в)

существующих объектов *). В отличие от них, дескриптивное определение: *тепловой двигатель* — это механизм, преобразующий тепловую энергию в механическую,— корректно; мы давно уже пользуемся, например, автомобилями (двигатель внутреннего сгорания) и пароходами (паровая машина). Построение объектов, заданных набором требуемых свойств, т. е. дескриптивно, — один из наиболее важных видов человеческой деятельности.

Довольно часто, наряду с конструктивным определением, желательно иметь и дескриптивное.

Скажем, первоначально слон был, разумеется, определен как «вон то животное!». Однако на базе этого определения никакое «слоноведение» развиться не могло. Для создания науки о слонах, безусловно, необходимо было дать исчерпывающий список характеризующих слона признаков, из которых вытекали бы и другие свойства этого вида (так, из того, что слон — млекопитающее, вытекает не только наличие у него костного скелета, но и многие особенности строения скелета).

Задачи

2. Назовем треугольник ABC *прямовысотным* (соответственно, *прямобиссектрисным* или *прямомедианным*), если его высоты (соответственно, биссектрисы или медианы), выходящие из вершин A и B, перпендикулярны (рис. 4). Какие значения может иметь величина угла C

а) в прямовысотном треугольнике?

б) в прямобиссектрисном треугольнике?

в) в прямомедианном треугольнике?

(Предупреждение: задача в) труднее двух предыдущих; для ее решения могут понадобиться векторная алгебра и тригонометрия.)

3. Назовем замкнутую несамопересекающуюся ломаную (не обязательно плоскую!) *правильным многоугольником*, если все ее звенья конгруэнтны и углы между соседними звеньями конгруэнтны. Существует ли неплоский правильный

а) четырехугольник?

б) пятиугольник? (Предупреждение: задача б) — самая трудная в статье; для ее решения требуется неплохое знание стереометрии.)

Какова может быть величина угла между соседними звеньями в таком многоугольнике?

4. Определение параллельного переноса, данное в школьном учебнике («Геометрия 6», п. 36), является конструктивным. Докажите, что это определение равносильно следующему дескриптивному определению: отображение плоскости на себя называется *параллельным переносом*, если оно любой отрезок переводит в конгруэнтный отрезок, имеющий то же направление. Какое из этих двух определений удобнее для доказательства теоремы: *композиция параллельных переносов есть параллельный перенос* («Геометрия 7», пп. 77, 71)?

5. Определение гомотетии, данное в школьном учебнике («Геометрия 7», п. 79), является конструктивным. Докажите, что это определение равносильно (для коэффициента гомотетии $k>0$, $k\neq 1$) следующему дескриптивному определению: отображение плоскости на себя называется *гомотетией с коэффициентом* $k>0$, $k\neq 1$, если оно произвольный отрезок AB переводит в отрезок $A'B'$, параллельный отрезку AB, одинаково с ним направленный и такой, что $\frac{|A'B'|}{|AB|}=k$.

Какое из этих двух определений удобнее для доказательства теоремы: *композиция гомотетий с коэффициентами* k_1, k_2 (центры их могут не совпадать) *является гомотетией с коэффициентом* $k_1\cdot k_2$ *при* $k_1\cdot k_2\neq 1$ *и параллельным переносом при* $k_1\cdot k_2=1$?

*) Разумеется, с точки зрения современной физики превращение одних элементов в другие возможно, но колоссальные физические приборы, осуществляющие такие превращения, не имеют ничего общего с тем, что понимали под философским камнем средневековые алхимики.

В. Майер, Н. Назаров

Автогенератор из угольного микрофона

Сто лет назад, в 1878 году, английский ученый Д. Юз изобрел угольный микрофон. Устройство и принцип действия этого прибора очень просты. Между тонкой металлической мембраной, служащей одним электродом, и металлической пластинкой или стержнем, выполняющими роль второго электрода, насыпан угольный порошок. Когда на мембрану микрофона падает звуковая волна, колебания мембраны приводят к периодическому изменению плотности угольного порошка и, следовательно, к изменению его сопротивления. Ток в цепи микрофона, подключенного к источнику постоянного тока, становится пульсирующим. Таким образом звуковые колебания в микрофоне преобразуются в электрические.

Для обратного преобразования электрических колебаний в звуковые может служить динамик. Он состоит из постоянного магнита, между полюсными наконечниками которого расположена подвижная катушка, соединенная с диффузором. Когда по катушке проходит пульсирующий ток, вокруг катушки возникает изменяющееся магнитное поле. Взаимодействие этого поля с полем постоянного магнита приводит к колебаниям катушки и связанного с ним диффузора. В результате в воздухе появляются звуковые колебания.

Рассмотрим цепь, состоящую из последовательно включенных угольного микрофона *М*, громкоговорителя (динамика) *Гр* и батареи *Б* источников постоянного тока (рис. 1). Звук, падающий на микрофон, приводит к появлению в цепи пульсирующего тока. Этот ток, проходя по обмотке динамика, вызывает колебания диффузора, и динамик становится источником звука. Итак, рассматриваемая система преобразует звук в переменный электрический ток и затем вновь в звук. Если амплитуда излучаемой динамиком звуковой волны больше амплитуды волны, падающей на микрофон, система действует как усилитель звука. Именно в таком качестве она чаще всего применялась раньше и широко используется теперь в телефонной связи.

Развернем микрофон и динамик навстречу друг другу (рис. 2). Колебания диффузора динамика, дойдя в виде звуковой волны до микрофона, вызывают появление в цепи пульсирующего тока, который, в свою очередь, воздействует на колебания диффузора — получается колебательная система с обратной связью, или автогенератор. Слой воздуха между динамиком и микрофоном, служащий «проводником» звуковых колебаний, осуществляет обратную связь между микрофоном и динамиком.

Заметим, что всякий усилитель с цепью обратной связи можно превра-

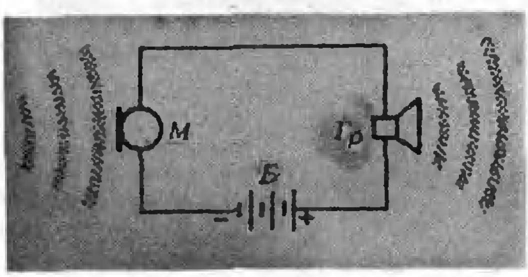


Рис. 1.

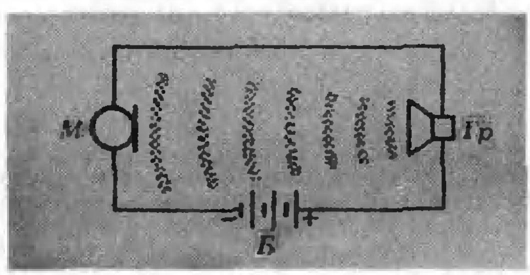


Рис. 2.

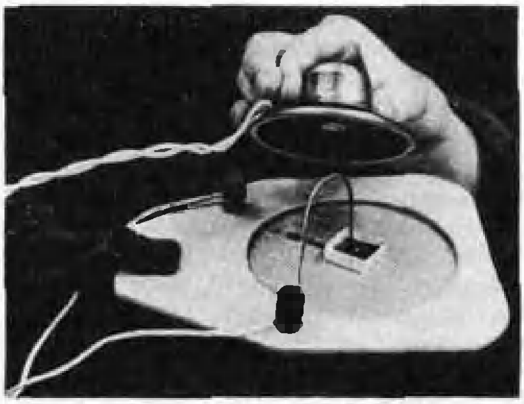


Рис. 3.

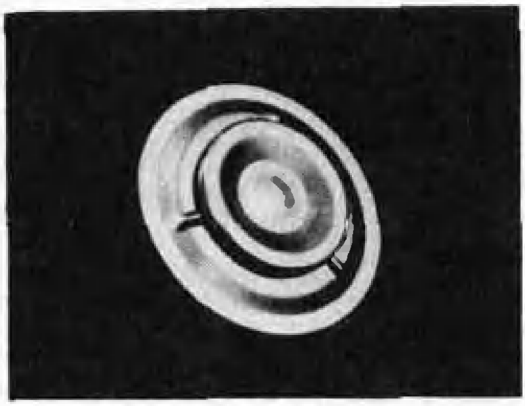


Рис. 4.

тить в автогенератор, если соответствующим образом подобрать обратную связь. Можно предложить большое количество опытов, подтверждающих этот вывод. Некоторые из них уже рассматривались на страницах нашего журнала *).

Вот еще один опыт. Для изготовления модели угольного микрофона вырежьте в фанерной пластинке круглое отверстие диаметром примерно 100 мм и заклейте его папиросной бумагой, которая будет выполнять роль мембраны. В центре мембраны поместите склеенную из плотной бумаги коробочку размером $5\times20\times20$ мм, на дне ее укрепите электрод из тонкой фольги. В коробочку насыпьте угольный порошок (можно, например, раздробить молотком графитовый стержень от одного элемента батарейки для карманного фонаря; однако порошок не должен быть очень мелким). На угольный порошок в коробочке свободно наложите второй электрод из жести. Слегка побрызгайте на папиросную бумагу и дайте ей высохнуть (чтобы бумага хорошо натянулась).

Соберите цепь, показанную на рисунке 1 (в качестве источника питания можно использовать две или три последовательно соединенные батарейки для карманного фонаря; динамик лучше взять типа 0,5ГД21). Если теперь тихо говорить перед микрофоном, из динамика будет слышен довольно сильный, правда искаженный, звук. Для успеха опыта важно экспериментально подобрать оптимальную величину давления верхнего электрода на угольный порошок.

Развернув динамик, приближайте его к микрофону (рис. 3). При некотором расстоянии между ними система самовозбудится, и возникнет громкий однотонный звук. При прочих равных условиях частота и сила звука зависят от расстояния между микрофоном и динамиком.

Иногда удается поднести динамик очень близко к мембране микрофона, а автоколебания не возникают. В таком случае бывает достаточно слегка прикоснуться к микрофону или крикнуть вблизи него, чтобы система самовозбудилась.

Опыт получится лучше, если вместо самодельного микрофона использовать угольный микрофон из телефонной трубки, внешний вид которого изображен на рисунке 4. Для проведения опытов этот микрофон желательно укрепить на листе фанеры.

*) См., например, статью В. Майера и Р.-Э. Шафира «Струйный автогенератор звука» («Квант», 1977, № 1).

В. Гальперин, В. Калинников

Многоугольники на клетчатой бумаге

**Можно ли нарисовать на клетчатой бумаге многоугольник данной формы, помещая при этом все его вершины в узлы сетки? Как правило — нельзя. Например, из правильных многоугольников так можно нарисовать лишь квадрат. А для каких многоугольников это можно сделать приближенно, т. е. помещая вершины сколь угодно близко от узлов? Оказывается — для всех.
В этой заметке, написанной школьниками, показано, почему и как это можно сделать.**

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ненулевые и неколлинеарные векторы, O — некоторая точка; тогда множество Π всех таких точек

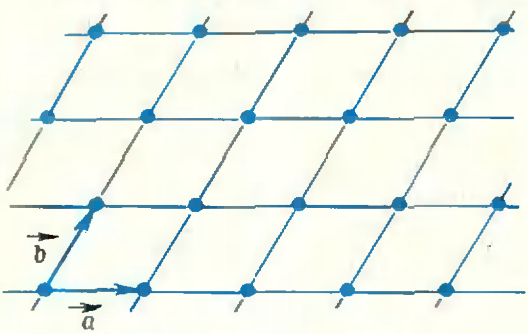


Рис. 1.

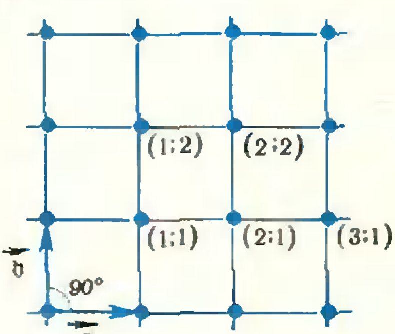


Рис 2.

P, что $\vec{OP} = m\vec{a} + m\vec{b}$ (где m, n — целые числа), называется *решеткой* (на плоскости), а ее точки — *узлами* решетки (рис. 1). В случае, когда $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ и $\vec{a} \perp \vec{b}$, решетка называется *целочисленной* (рис. 2).

Будем говорить, что многоугольник *вписывается* в решетку Π, если существует подобный ему многоугольник с вершинами в узлах решетки. На рисунке 3 показан один из способов вписать квадрат в целочисленную решетку. Рисунок 4 изображает решетку, в которую вписан правильный шестиугольник и треугольник (для нее $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ и $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°$).

Мы сейчас увидим, однако, что многоугольники довольно редко удается вписать в решетку. Действительно:

З а д а ч а 1. Правильный треугольник не вписывается в целочисленную решетку (это задача М475а)).

З а д а ч а 2. Квадрат не вписывается в решетку, заданную векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$ и $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°$.

З а д а ч а 3. Правильный пятиугольник не вписывается ни в какую решетку.

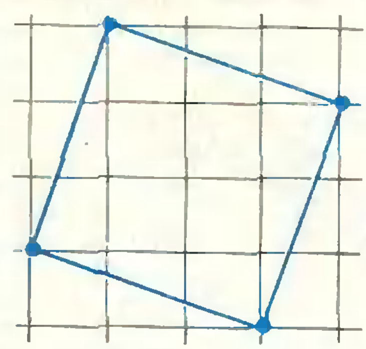


Рис. 3.

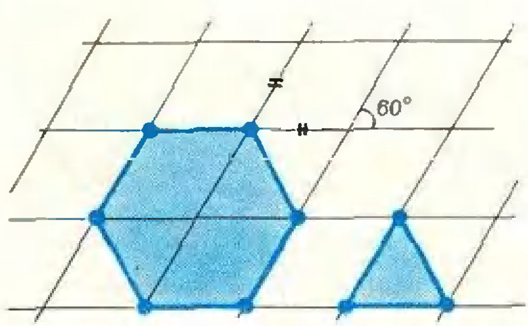


Рис. 4.

Более того, в статье А. Егорова доказано *), что *никакие правильные многоугольники, кроме треугольника, квадрата и шестиугольника — не вписываются ни в какую решетку*. Понятно также, что наперед заданный многоугольник произвольной формы, как правило, не вписывается ни в какую решетку.

Раз задача о вписывании многоугольников в решетку приводит в большинстве случаев к отрицательному результату, естественно ее ослабить: требовать, чтобы вершины попадали в узлы лишь приближенно. Дадим точное определение:

Многоугольник *ε-вписывается в решетку* Π, если существует подобный ему (с натуральным коэффициентом подобия) многоугольник, каждая вершина которого находится на расстоянии, меньшем ε, от одного из узлов решетки (рис. 5). Заметим, что при $\varepsilon = 0$ здесь получается определение вписанности, данное выше, а при больших ε (бóльших, чем расстояние между узлами) определение бессодержательно.

Столь же бессодержательно оно стало бы, если мы сняли бы условие натуральности коэффициента подобия; взяв этот коэффициент достаточно близким к 0, можно было бы уместить весь многоугольник вблизи одного узла решетки. При натуральном же коэффициенте подобия (и достаточно малом ε) любые две вершины многоугольника, очевидно, не смогут попасть в ε-окрестность одного и того же узла.

Далее, мы будем говорить, что многоугольник *почти вписывается* в решетку Π, если он ε-вписывается в нее п р и л ю б о м $\varepsilon > 0$. Ясно, что многоугольник почти вписывается, если он (точно) вписывается. А обратное неверно:

Т е о р е м а 1. *Правильный треугольник почти вписывается в целочисленную решетку.* (Это пункт б) из задачи М475).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Расположим сначала правильный треугольник со стороной 2 на целочисленной решетке так, как показано на рисунке 6.

При гомотетии с центром O и натуральным коэффициентом k $\triangle A_1B_1C_1$ перейдет в $\triangle A_kB_kC_k$, где A_k и B_k — узлы решетки, а C_k имеет координаты $(0;\ k\sqrt{3})$ (ордината y_k точки C_k равна $y_k = ky_1 = k\,|OC_1| = k\sqrt{3}$).

Так как A_k и B_k — узлы решетки при всех k, то задача состоит в нахождении такого k, чтобы расстояние от C_k до ближайшего узла решетки было меньше ε, т. е. чтобы $k\sqrt{3}$ отличалось от целого менее чем на ε.

Возьмем натуральное N такое, что $N > \frac{1}{\varepsilon}$, и разделим промежуток $[0;\ 1[$ на N кусочков (полуинтервалов) длины меньше ε: $\left[0,\ \frac{1}{N}\right[$; $\left[\frac{1}{N};\ \frac{2}{N}\right[$; …; $\left[\frac{N-1}{N};\ 1\right[$.

Отметим теперь на промежутке $[0;\ 1[$ точки $\{k\sqrt{3}\}$, где $\{x\}$ означает дробную часть x и $k = 1, 2, \ldots, N+1$. Каждая точка $\{k\sqrt{3}\}$ попадает в один из кусочков. Так как кусочков N, а точек $N+1$, то какие-то две точки попадут в один и тот же полуинтервал. Пусть это будут точки $\{m\sqrt{3}\}$

———

*) «Квант», 1974, № 12, с. 30.

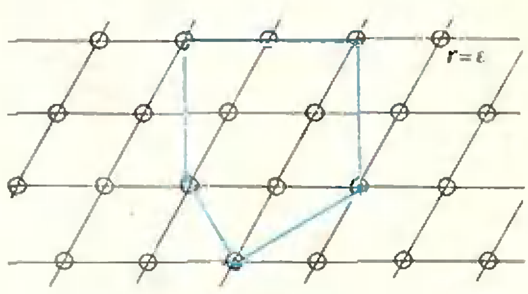


Рис. 5.

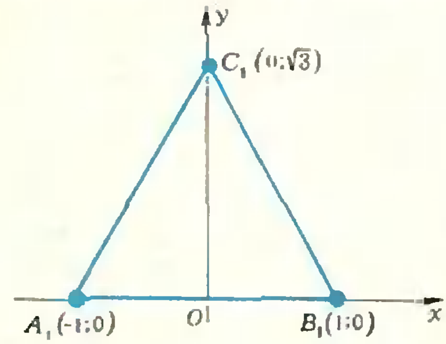


Рис. 6.

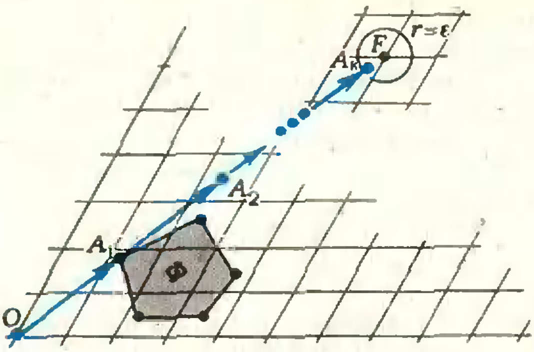


Рис. 7.

и $\{n\sqrt{3}\}$, где $m > n$ — натуральные числа. Тогда $(m-n)\sqrt{3}$ отличается от целого менее чем на $\frac{1}{N}$ и, следовательно, менее чем на ε. Положив k равным $m-n$, получим требуемое.

Теорема доказана, однако имеет место значительно более общий факт.

Основная теорема. *Любой многоугольник почти вписывается в любую решетку.*

Заметим, что пункт в) задачи М475 является частным случаем этой теоремы.

Доказательство. Пусть дана решетка Π, число $\varepsilon > 0$ и многоугольник Φ.

Докажем, что при некоторой гомотетии с натуральным коэффициентом N многоугольник Φ перейдет в многоугольник Φ' такой, что все вершины Φ' будут на расстоянии, меньшем ε, от узлов решетки.

Рассмотрим вершину A многоугольника. Пусть при гомотетии с центром O и коэффициентом k точка A переходит в A_k и $\overrightarrow{OA} = x_A\vec{a} + y_A\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — векторы, порождающие решетку. Тогда $\overrightarrow{OA_k} = k(x_A\vec{a} + y_A\vec{b}) = (kx_A)\vec{a} + (ky_A)\vec{b}$.

Условие, что A_k менее чем на ε отстоит от узла решетки (рис. 7), будет выполняться, если каждая из координат (kx_A) и (ky_A) будет отличаться от целого менее чем на $c\cdot\varepsilon$, где c — коэффициент, не зависящий от k: можно, например, взять $c = \dfrac{1}{2\max(|\vec{a}|, |\vec{b}|)}$.

Действительно, пусть $\overrightarrow{OF} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

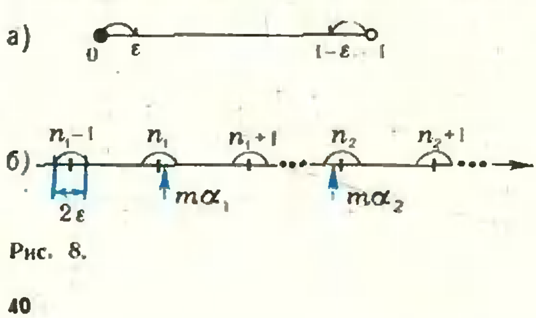


Рис. 8.

Тогда, если

$$\left|m|\vec{a}| - kx_A|\vec{a}|\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \text{ и } \left|n|\vec{b}| - ky_A|\vec{b}|\right| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ то } |A_kF| = |\overrightarrow{A_kF}| =$$

$$= |\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OA_k}| = |m\vec{a} + n\vec{b} - kx_A\vec{a} - ky_A\vec{b}| = |(m - kx_A)\vec{a} + (n - ky_A)\vec{b}| \leqslant |(m - kx_A)\vec{a}| + |(n - ky_A)\vec{b}| = \left|m|\vec{a}| - kx_A|\vec{a}|\right| + \left|n|\vec{b}| - ky_A|\vec{b}|\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Но неравенства $\left|m|\vec{a}| - kx_A|\vec{a}|\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $\left|n|\vec{b}| - ky_A|\vec{b}|\right| < \frac{\varepsilon}{2}$ эквивалентны неравенствам $|m - kx_A| < \dfrac{\varepsilon}{2|\vec{a}|}$ и $|n - ky_A| < \dfrac{\varepsilon}{2|\vec{b}|}$. Поэтому если kx_A и ky_A отличаются от целых менее чем на $\dfrac{\varepsilon}{2\max(|\vec{a}|; |\vec{b}|)}$, то $|A_kF| < \varepsilon$ для некоторого узла F, а это и требовалось.

Нам нужно, чтобы все вершины многоугольника Φ' попали в ε-окрестности узлов решетки. Так будет, если все числа Nx_A, Ny_A, Nx_B, Ny_B, ... отличаются от целых менее чем на $c\cdot\varepsilon$ при некотором натуральном N ($x_A, y_A, x_B, y_B, \ldots$ — коэффициенты разложения векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, ... по $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $A, B, \ldots$ — вершины Φ).

Мы получим искомое натуральное число N, если будет доказана

Теорема Кронекера. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ — действительные числа, тогда для любого положительного ε найдется натуральное m такое, что каждое из чисел $m\alpha_i$, где $i = 1, 2, \ldots, n$, отличается от целого менее чем на ε (рис. 8б), т. е. $\{m\alpha_i\} \in [0; \varepsilon[\cup]1-\varepsilon; 1[$ (рис. 8а).

Эта теорема уже была установлена при доказательстве теоремы 1 для случая $n = 1$ (было фактически доказано, что при любом α найдется такое натуральное m, что $m\alpha$ отличается от целого менее чем на ε; то, что α было равно $\sqrt{3}$, несущественно). Теорема Кронекера утверждает, что для набора $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ любой длины при некотором натуральном m числа $\alpha_i m$ одновременно отличаются от целых менее чем на ε.

Перейдем к доказательству теоремы Кронекера.

Рассмотрим n последовательностей:

$$\{\alpha_1\}, \{2\alpha_1\}, \{3\alpha_1\}, \ldots, \{k\alpha_1\}, \ldots$$
$$\{\alpha_2\}, \{2\alpha_2\}, \{3\alpha_2\}, \ldots, \{k\alpha_2\}, \ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\{\alpha_n\}, \{2\alpha_n\}, \{3\alpha_n\}, \ldots, \{k\alpha_n\}, \ldots$$

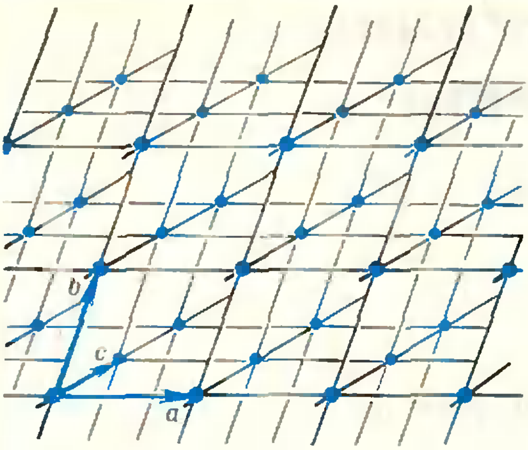


Рис. 9

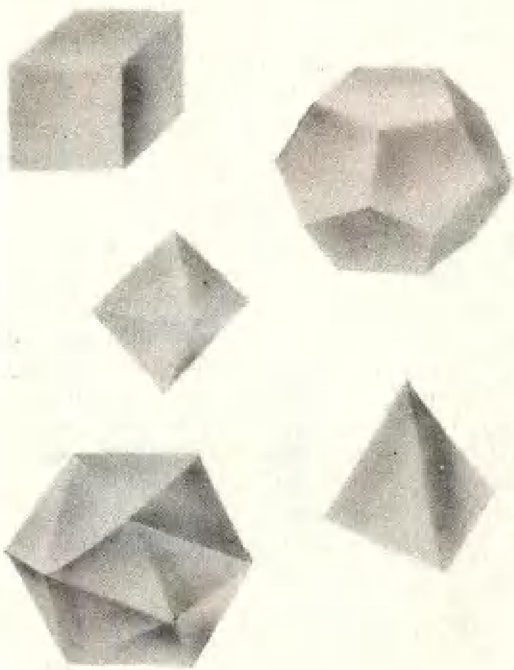


Рис. 10.

Все члены этих последовательностей принадлежат промежутку $[0;\ 1[$. Разобьем этот промежуток на кусочки (полуинтервалы) длины меньше ε:

$$\left[0;\ \frac{1}{M}\right[;\ \left[\frac{1}{M};\ \frac{2}{M}\right[;\ \ldots;\ \left[\frac{M-1}{M};\ 1\right[,$$

где M — натуральное, $M > \frac{1}{\varepsilon}$ (тогда $\frac{1}{M} < \varepsilon$). Теперь каждому из членов последовательностей поставим в соответствие тот кусочек промежутка $[0;\ 1[$, в котором он находится.

Тогда для каждого натурального k будет определен упорядоченный набор полуинтервалов, соответствующих точкам $\{k\alpha_1\}$, $\{k\alpha_2\}$, …, $\{k\alpha_n\}$. Но так как рассматриваемых полуинтервалов всего M, а в каждый набор входит n полуинтервалов, то число различных таких наборов равно M^n. Если k пробегает значения от 1 до $M^n + 1$, то для некоторых $k_1 < k_2 \leq M^n + 1$ наборы совпадут. В этом случае число $m = k_2 - k_1$ удовлетворяет условию, так как $\{m\alpha_i\} = \{(k_2 - k_1)\alpha_i\} = \{k_2\alpha_i - k_1\alpha_i\}$, а $\{k_1\alpha_i\}$ и $\{k_2\alpha_i\}$ находятся в одном полуинтервале длины меньше ε, поэтому $m\alpha_i$ находится на расстоянии, меньшем ε, от целого числа. Теорема доказана.

До сих пор мы рассматривали решетки на плоскости. Можно рассматривать и *пространственные решетки*. Они определяются так же, как плоские, только вместо двух неколлинеарных векторов нужно взять три некомпланарных (рис. 9). Аналогично тому, как это делалось выше для многоугольников и плоских решеток, определяется *вписанность* и *почти вписанность* многоугольников в пространственную решетку. Какие из пяти правильных многоугольников (рис. 10) вписываются в целочисленную *) пространственную решетку? Вот ответ:

З а д а ч а 4. Куб, тетраэдр и октаэдр вписываются в целочисленную решетку.

З а д а ч а 5. Додекаэдр и икосаэдр не вписываются ни в какую решетку.

З а д а ч а 6. Пусть в пространстве задано семейство параллельных плоскостей такое, что расстояния между соседними плоскостями семейства равны. Можно ли расположить в пространстве а) икосаэдр, б) додекаэдр так, чтобы их вершины лежали на плоскостях семейства?

Мы получили исчерпывающий ответ о вписывании правильных многогранников в пространственную решетку. Для п о ч т и вписывания тоже получается исчерпывающий ответ, такой же, как для плоского случая:

З а д а ч а 7. Любой многогранник почти вписывается в любую решетку в пространстве.

---

*) Решетка, заданная векторами $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, называется целочисленной, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = 1$ и $\vec{a} \perp \vec{b}$, $\vec{b} \perp \vec{c}$, $\vec{c} \perp \vec{a}$.

задачник Кванта

Задачи

M506—M510; Ф518—Ф522

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки нынешней школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечены звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто предложил нам эту задачу. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые. Решения задач из этого номера можно присылать не позднее 1 апреля 1978 года по адресу: 113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16, редакция журнала «Квант», «Задачник «Кванта». После адреса на конверте напишите номера задач, решения которых вы посылаете, например: «М486, М487» или «Ф498». Решения задач по каждому из предметов (математике и физике), а также новые задачи, просьба присылать в отдельных конвертах. Задачи из разных номеров журнала присылайте также в разных конвертах. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений). Условия оригинальных задач, предлагаемых для публикации, присылайте в двух экземплярах вместе с вашими решениями этих задач (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).
В начале каждого письма просим указывать ваше имя, фамилию, номер школы и класс, в котором вы учитесь.

M506*. Докажите, что для положительных a, b, c и d справедливо неравенство:
$a^4+b^4+c^4+d^4+2abcd \geqslant a^2b^2+a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2+c^2d^2$.

Э. Туркевич

M507. В вышедших в прошлом году в русском переводе «Избранных задачах» из журнала American Mathematical Monthly (М., «Мир», 1977) две задачи замечательного математика П. Эрдеша (№№ 138 и 139) были даны без решения. Редакция «Кванта» получила целый ряд писем, содержащих решения этих задач. Прежде чем познакомить с решениями читателей журнала, мы предлагаем самостоятельно подумать над этими трудными задачами; для этого мы включаем их в Задачник «Кванта».
Пусть $a_1<a_2<\ldots<a_n<2n$ — конечная последовательность натуральных чисел ($n\geqslant 6$).
а) Докажите, что

$$\min_{i,j}[a_i, a_j] \leqslant 6\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right),$$

где $[a_i, a_j]$ означает наименьшее общее кратное чисел a_i и a_j, а минимум берется по всем парам различных чисел a_i, a_j.
б) Докажите, что

$$\max_{i,j}(a_i, a_j) > \frac{38n}{147} - c,$$

где c не зависит от n, а (a_i, a_j) означает наибольший общий делитель a_i и a_j.
Оценки в задачах а) и б) нельзя улучшить (то есть коэффициент 6 заменить меньшим, а $\frac{38}{147}$ — бо́льшим).

M508. Окружность касается трех полуокружностей с диаметрами AB, BC и AC ($C \in [AB]$, рис. 1). Докажите, что радиус окружности вдвое меньше расстояния от ее центра до прямой AB.

И. Шарыгин

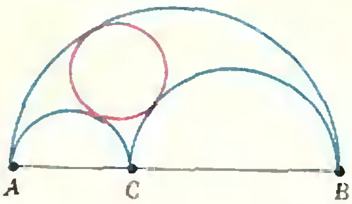


Рис. 1.

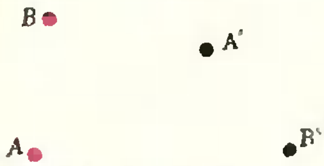


Рис. 2.

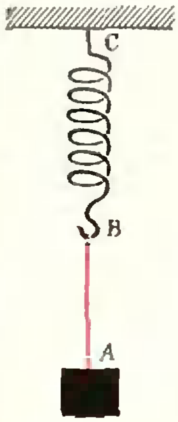


Рис. 3.

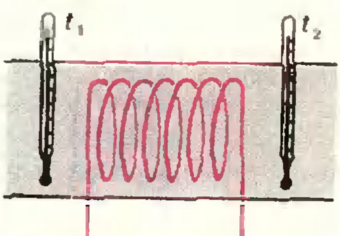


Рис. 4.

Рис. 5.

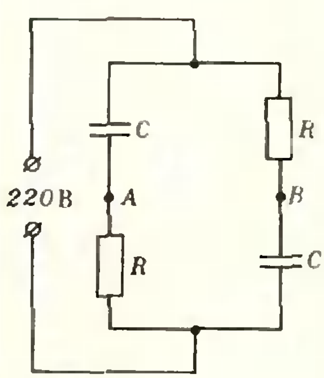


Рис. 6.

М509. Решите в натуральных числах уравнения:
а) $2^x + 1 = 3^y$;
б) $z^x + 1 = (z+1)^2$;
в)* $z^x + 1 = (z+1)^y$.

Д. Флейшман

М510. В книге «Венгерские математические олимпиады» приводится такая задача (№ 148): «Доказать, что для всех положительных $\alpha < \pi$ выполнено неравенство

$$\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{3}\sin 3\alpha > 0.$$

Докажите следующее обобщение этого неравенства: для всех $0 < \alpha < \pi$ и натурального n

$$\sin\alpha + \frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{1}{3}\sin 3\alpha + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n}\sin n\alpha > 0.$$

И. Биргер, Р. Ушаков

Ф518. На рисунке 2 показано положение двух точек A и B и их изображений A' и B', которые дает тонкая линза. Найти построением положение линзы и ее фокусов.

XXIV физическая олимпиада школьников ПНР

Ф519. Груз A подвешен к пружине BC с помощью нити AB (рис. 3). Какова должна быть амплитуда колебаний груза, чтобы эти колебания были гармоническими? Масса груза $m = 0{,}1$ кг, жесткость пружины $k = 1600$ Н/м.

Ф520. В проточном калориметре (рис. 4) исследуемый газ пропускают по трубопроводу и нагревают с помощью спирали. Газ поступает в калориметр при температуре $t_1 = 20\,^\circ$C. При мощности нагревателя $W_1 = 1$ кВт и расходе газа $m_1 = 540$ кг/ч температура газа за нагревателем оказалась такой же, как при мощности нагревателя $W_2 = 2$ кВт и расходе газа $m_2 = 720$ кг/ч. Давление газа в трубе всюду одинаково. Найти температуру газа t_2, если его теплоемкость при постоянном объеме $c_V = 21$ Дж/(моль·К), а молярная масса газа $M = 29$ кг/кмоль.

Ф521. На рисунке 5 показана часть траектории движения хорошо обтекаемого тела, брошенного под углом к горизонту. В точке A тело имело скорость, равную по абсолютной величине 20 м/с. Сколько времени тело летело от точки A к точке B?

Ф522. Цепь, показанная на рисунке 6, подключена к сети переменного тока с напряжением $U_0 = 220$ В. Каково напряжение между точками A и B?

А. Зильберман

Решения задач

М456—М460; Ф472—Ф477

М456. *В каждой вершине выпуклого многогранника сходятся 3 ребра. Известно, что каждая его грань является многоугольником, вокруг которого можно описать окружность. Докажите, что вокруг этого многогранника можно описать сферу.*

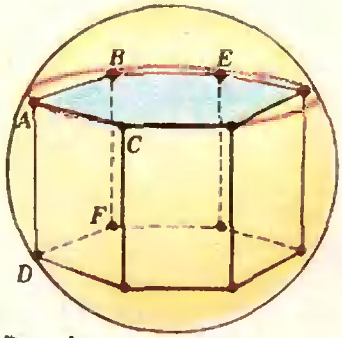


Рис. 1.

Пусть A — вершина многогранника, AB, AC, AD — выходящие из нее ребра. Поскольку точки A, B, C, D не лежат в одной плоскости, через них можно провести сферу; обозначим эту сферу через S_A (рис. 1).

Пусть A и B — соседние вершины. Докажем, что сферы S_A и S_B совпадают. Отсюда сразу вытекает, что сферы S_X совпадают для всех вершин X, то есть все вершины лежат на одной сфере.

Пусть BE и BF — ребра, выходящие из вершины B. Они лежат в двух гранях CAB и DAB, граничащих с ребром AB. Пусть, например, ребро BE лежит в грани CAB, а ребро BF — в грани DAB (заметим, что точка E может совпадать с C и, аналогично, точка F может совпадать с D). По условию, точки C, A, B, E лежат на одной окружности. При этом три точки C, A и B лежат на окружности, которая получается при пересечении сферы S_A плоскостью, проходящей через точки C, A, B. Так как через три различные точки можно провести не более одной окружности, то две построенные окружности совпадают, то есть точка E лежит на сфере S_A. Аналогично доказывается, что точка F лежит на сфере S_A. Значит, сфера S_A проходит через точки B, A, E, F, то есть она совпадает со сферой S_B, что и требовалось.

И. Бернштейн

◆

М457. *На плоскости дана несамопересекающаяся замкнутая ломаная, никакие три вершины которой не лежат на одной прямой. Назовем пару несоседних звеньев особенной, если продолжение одного из них пересекает другое. Докажите, что число особенных пар четно.*

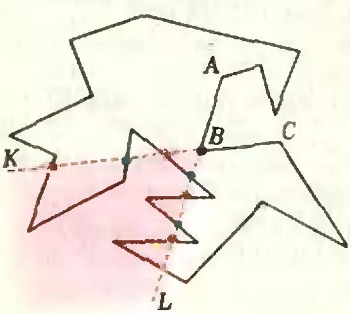


Рис. 2.

Рассмотрим какие-нибудь два последовательных звена AB и BC ломаной. Продолжим эти звенья за вершину B; получим лучи BK и BL (рис. 2). Объединение таких двух лучей назовем *уголком*. Такой уголок можно построить при каждой вершине ломаной. Легко понять, что количество особенных пар равно количеству пересечений звеньев с уголками. Мы утверждаем, что **каждый** уголок пересекается с ломаной в четном числе точек. В самом деле, пройдя из соседней с B вершины A ломаной в другую соседнюю с B вершину C, мы видим, что наша ломаная **входит** внутрь уголка столько же раз, сколько **выходит** из него (поскольку точки A и C обе находятся **вне** уголка). Значит, и число особенных пар звеньев тоже четно.

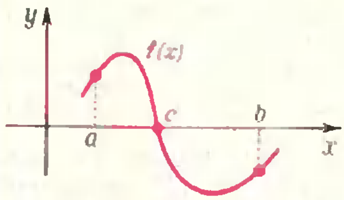
С. Фомин

◆

М458. *Написан многочлен $x^{10} + {*}x^9 + {*}x^8 + \ldots + {*}x^2 + {*}x + 1$. Двое играют в такую игру. Сначала первый заменяет любую из звездочек некоторым числом, затем второй заменяет числом любую из оставшихся звездочек, затем снова первый заменяет одну из звездочек*

Да, может. Покажем, как для этого второй игрок должен играть.

Всего нужно заменить на числа 9 звездочек — 5 при нечетных степенях и 4 при четных. Каждым ходом второй игрок должен ставить любой коэффициент при степени, имеющей противоположную четность по отношению к коэффициенту, который только что поставил его противник. Тогда после семи ходов останется 2 звездочки при степенях x^k и x^l, причем хотя бы одно из чисел k и l нечетно, и ход будет у второго игрока. Пусть P — многочлен, который *числом и так далее (всего 9 ходов). Если у полученного многочлена не будет действительных корней, то выигрывает первый игрок, а если будет хотя бы один корень — выигрывает второй. Может ли второй игрок выиграть при любой игре первого?*



Если многочлен $f(x)$ на концах отрезка $[a,b]$ принимает значения разных знаков, то при некотором $c \in [a,b]$ он обращается в 0: $f(c)=0$

Рис. 3.

получится, если заменить звездочки при x^k и x^l нулями, α — коэффициент при x^k и β — коэффициент при x^l, который поставят игроки; тогда после замены всех звездочек получится многочлен $f(x) = P(x) + \alpha x^k + \beta x^l$.

Разберем два случая.

а) k четно, l нечетно. Тогда

$$f(1) = P(1) + \alpha + \beta,$$
$$f(-1) = P(-1) + \alpha - \beta,$$
$$f(1) + f(-1) = P(1) + P(-1) + 2\alpha.$$

Второй игрок должен выбрать $\alpha = \frac{1}{2}(-P(1) - P(-1))$.

Тогда независимо от последнего хода первого игрока окажется, что $f(1) + f(-1) = 0$. Значит, либо $f(1) = f(-1) = 0$, либо $f(1)$ и $f(-1)$ имеют разные знаки, и тогда на отрезке $[-1; 1]$ у многочлена f будет корень (рис. 3).

б) k и l нечетны. Тогда

$$f(-1) = P(-1) - \alpha - \beta,$$
$$f(2) = P(2) + 2^k\alpha + 2^l\beta,$$
$$2^l f(-1) + f(2) = c + (2^k - 2^l)\alpha,$$

где $c = 2^l P(-1) + P(2)$. Второй игрок должен выбрать $\alpha = c/(2^l - 2^k)$. Тогда независимо от последнего хода первого игрока окажется, что $2^l f(-1) + f(2) = 0$. Значит, либо $f(-1) = f(2) = 0$, либо $f(-1)$ и $f(2)$ имеют разные знаки, так что на отрезке $[-1; 2]$ есть корень.

И. Бернштейн

◆

М459. *В некоторой стране из каждого города в любой другой можно проехать, минуя остальные города. Известна стоимость каждого такого проезда. Составлены два маршрута поездки по городам страны. В каждый из этих маршрутов каждый город входит ровно по одному разу. При составлении первого маршрута руководствовались следующим принципом: начальный пункт маршрута выбирается произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут еще не проходил, выбирается тот, поездка в который из предыдущего города имеет наименьшую стоимость (если таких городов несколько, то выбирается любой из них), и так до тех пор, пока не будут пройдены все города. При составлении второго маршрута начальный город тоже выбирается произвольно, а на каждом следующем шаге среди городов, через которые маршрут еще не проходил, выбирается тот, поездка в который из предыдущего города имеет наибольшую стоимость. Докажите, что общая стоимость проезда по первому маршруту не больше общей стоимости проезда по второму маршруту.*

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ — билеты первого маршрута, $b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}$ — билеты второго маршрута (n — число городов). Обозначим стоимость любого билета c через $Ц(c)$, а стоимость проезда из города A в город B через $Ц(AB)$. Утверждение будет доказано, если нам удастся построить отображение f: $\{a_1, \ldots, a_{n-1}\} \to \{b_1, \ldots, b_{n-1}\}$, обладающее следующими двумя свойствами:

а) отображение f взаимно однозначно;

б) для любого билета a из первого маршрута $Ц(a) \leqslant Ц(f(a))$.

Мы укажем способ, по которому строится отображение f, обладающее свойством б). Чтобы доказать его взаимно-однозначность, мы покажем, что этот же способ приводит к построению *обратного* к f отображения g: $\{b_1, \ldots, b_{n-1}\} \to \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$, — такого, что для любого билета a из первого маршрута $g(f(a)) = a$.

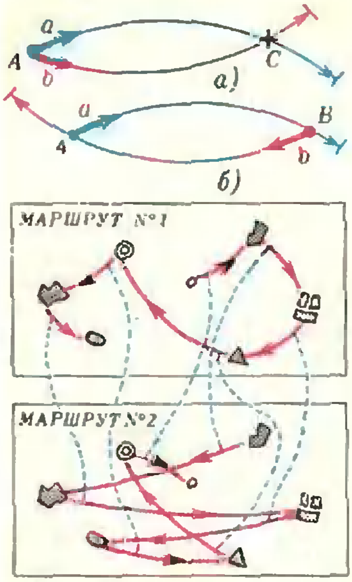
Способ построения отображения f. Пусть a — некоторый билет первого маршрута, взятый в городе A. Обозначим через $X_1(A)$ множество городов, которые в первом маршруте встречаются позже A, а через $X_2(A)$ — множество городов, встречающихся позже A во втором маршруте. Возможны следующие два случая.

1. $X_1(A) \cap X_2(A) \neq \varnothing$.

В этом случае назовем билет a первого маршрута *счастливым* и положим $f(a) = b$, где b — билет второго маршрута, купленный в городе A (см. рис. 4, *а*).

2. $X_1(A) \cap X_2(A) = \varnothing$.

В этом случае назовем билет a первого маршрута *несчастливым*. Выберем из множества $X_1(A)$ такой город B: $B \in X_1(A)$, что $X_1(A) \cap X_2(B) = \varnothing$. Легко понять, что этими двумя условиями город B определяется единственным образом. Действительно, предположив, что существуют два города B_1 и B_2, такие, что $B_1 \in X_1(A)$, $B_2 \in X_1(A)$ и $X_1(A) \cap X_2(B_1) = \varnothing$, $X_1(A) \cap X_2(B_2) = \varnothing$, мы получим противоречие: поскольку из условия задачи следует, что для любых двух городов C и D либо $C \in X_2(D)$, либо $D \in X_2(C)$, должно быть либо $B_2 \in X_1(A) \cap X_2(B_1)$, либо $B_1 \in X_1(A) \cap X_2(B_2)$. Положим теперь $f(a) = b$, где b — билет второго маршрута, купленный в выбранном городе B (рис. 4, *б*).



Чёрными стрелками выделены несчастливые билеты, голубыми линиями показано соответствие между билетами двух маршрутов.

в)

Рис. 4.

Проверим для отображения f выполнение свойства б). Если a — счастливый билет, то $Ц(a) \leqslant Ц(AC) \leqslant Ц(b)$ (здесь C — какой-то город из непустого пересечения множеств $X_1(A)$ и $X_2(A)$). Если же a — несчастливый билет, то $Ц(a) \leqslant Ц(AB) = Ц(BA) \leqslant Ц(b)$ (здесь мы воспользовались тем, что стоимости проездов из A в B и из B в A совпадают).

Проверим теперь, что построенное отображение f взаимнооднозначно. Определим билеты первого и второго типов для второго маршрута так же, как это было сделано для билетов первого маршрута. Определим отображение g на множестве билетов второго маршрута правилами, сформулированными в пунктах 1 и 2. Покажем, что так определенное отображение $g: \{b_1, \ldots, b_{n-1}\} \to \{a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ *обратно* к нашему отображению f, то есть покажем, что для любого билета a первого маршрута $g(f(a)) = a$ (рис. 4, *в*).

Пусть a — счастливый билет первого маршрута (купленный в городе A): $X_1(A) \cap X_2(A) \neq \varnothing$. Соответствующий ему по правилу 1 билет $b = f(a)$ второго маршрута (купленный тоже в городе A) также счастливый, и по определению отображения g имеем $g(b) = a$. Поэтому в этом случае $g(f(a)) = a$.

Пусть теперь a — несчастливый билет первого маршрута. Легко видеть, что соответствующий ему во втором маршруте билет $b = f(a)$, купленный в городе B, определяемом условиями $B \in X_1(A)$ и $X_1(A) \cap X_2(B) = \varnothing$, будет несчастливым билетом второго маршрута, поскольку $X_1(B) \subset X_1(A)$ (и, следовательно, $X_1(B) \cap X_2(B) = \varnothing$). Покажем, что правило 2 ставит в соответствие билету b второго маршрута, купленному в городе B, билет a первого маршрута, купленный в городе A. Для этого нужно убедиться только в том, что $A \in X_2(B)$ (условие $X_2(B) \cap X_1(A) = \varnothing$ у нас выполнено). Действительно, $X_1(A) \cap X_2(A) = \varnothing$ и $B \in X_1(A)$, так что $B \notin X_2(A)$. Но тогда $A \in X_2(B)$. Поэтому, согласно определению, $g(b) = a$, так что и в этом случае мы получаем $g(f(a)) = a$.

Д. Бернштейн

◆

М460. *Пусть A — $2n$-значное число (первая цифра не нуль). Будем называть число A особым, если оно само является точным квадратом и числа, образованные его первыми n цифрами и его последними n цифрами, также являются точными квадратами; при этом второе число может начинаться с цифры 0, но не должно быть равно нулю.*

а) Найдите все двузначные и четырехзначные особые числа.

б) Докажите, что существует хотя бы одно 20-значное особое число.

в) Докажите, что существует не более 10 особых 100-значных чисел.

г) Докажите, что существует хотя бы одно 30-значное особое число.

а) Легко проверить, что есть одно двузначное особое число — 49.

Пусть z^2 — четырехзначное особое число, то есть $z^2 = 100x^2 + y^2$, где $10 \leqslant x^2 < 100$, $0 < y^2 < 100$. Ясно, что $x \geqslant 4$ и $z > 10x$. Положим $z = 10x + t$. Тогда $z^2 = 100x^2 + 20tx + t^2$.

Если $t > 1$ или $x > 4$, то $20tx + t^2 > 100$, что не подходит. Значит, остается одна возможность: $x = 4$, $t = 1$; при этом действительно получается особое число $1681 = 41^2 = 100\cdot 4^2 + 9^2$ (рис. 5).

б) Мы хотим найти 20-значное особое число $z^2 = 10^{10}x^2 + y^2$, причем $10^9 \leqslant x^2 < 10^{10}$, $0 < y^2 < 10^{10}$. Ясно, что число $10^{10}x^2$ само является квадратом числа 10^5x. Поэтому естественно попытаться взять в качестве особого числа ближайший квадрат, следующий за $10^{10}x^2$, то есть взять $z = 10^5x + 1$. Тогда $z^2 = (10^5x + 1)^2 = 10^{10}x^2 + 2\cdot 10^5x + 1$, так что $y^2 = 2\cdot 10^5x + 1$. Мы получаем уравнение $2\cdot 10^5x = y^2 - 1 = (y-1)(y+1)$.

Это уравнение легко решить подбором. Положим $y + 1 = 10^5$, $y - 1 = 2x$. Тогда $y = 10^5 - 1$, $x = (10^5 - 2)/2 = 5\cdot 10^4 - 1$. Ясно, что выполнены неравенства $10^9 < x^2 < 10^{10}$ и $0 < y^2 < 10^{10}$. Таким образом, число $z^2 = 10^{10}x^2 + y^2$ является искомым особым 20-значным числом (см. рис. 6).

Аналогично доказывается, что для любого k существует $4k$-значное особое число.

в) Мы докажем, что существует не более двух $4k$-значных особых чисел. Пусть $z^2 = 10^{2k}x^2 + y^2$ — особое число, то есть $10^{2k-1} \leqslant x^2 < 10^{2k}$, $0 < y^2 < 10^{2k}$. Ясно, что $z > 10^kx$; пусть $z = 10^kx + t$. Тогда $z^2 = 10^{2k}x^2 + 2xt10^k +$

$+ t^2$. Поскольку $x > 3\cdot 10^{k-1}$, $z^2 > 10^{2k}x^2 + 6t10^{2k-1}$; значит, $6t10^{2k-1} < 10^{2k}$, так что $t = 1$.

Итак, $z = 10^k x + 1$. Имеем:

$$(10^k x + 1)^2 = 10^{2k}x^2 + 2\cdot 10^k x + 1 = 10^{2k}x^2 + y^2,$$

откуда $y^2 = 2\cdot 10^k x + 1$, так что $2\cdot 10^k x = y^2 - 1 = (y - 1)(y + 1)$.

Отсюда вытекает, что $y - 1$ четно, так что $y - 1 = 2u$. Поэтому нужно решить систему

$$5\cdot 10^{k-1}x = u(u + 1),\quad 0 < u < 5\cdot 10^{k-1}.$$

Поскольку числа u и $u + 1$ взаимно просты, это равенство возможно лишь тогда, когда либо одно из них делится на 2^{k-1}, а другое — на 5^k, либо одно из них делится на $5\cdot 10^{k-1}$ (а другое на 2 и на 5 уже не делится). Разберем следующие, связанные с этим обстоятельством, четыре случая.

1) u делится на $5\cdot 10^{k-1}$. Поскольку $0 < u < 5\cdot 10^{k-1}$, этот случай невозможен.

2) $u + 1$ делится на $5\cdot 10^{k-1}$. При условии $0 < u < 5\cdot 10^{k-1}$ это возможно лишь, если $u + 1 = 5\cdot 10^{k-1}$. Такое решение всегда существует: оно описано в пункте б).

3) u делится на 2^{k-1}, а $u + 1$ — на 5^k. Предположим, что, кроме u, есть еще одно решение u' третьего типа. Тогда $u - u'$ делится и на 2^{k-1}, и на 5^k, то есть делится на $5\cdot 10^{k-1}$. Но поскольку $|u - u'| < 5\cdot 10^{k-1}$, то $u = u'$. Значит, существует не более одного решения третьего типа.

4) u делится на 5^k, а $u + 1$ — на 2^{k-1}. Аналогично случаю 3) доказывается, что существует не более одного решения четвертого типа.

Таким образом, всего может быть не более трех решений (по одному второго, третьего и четвертого типов).

Проверим, однако, что если u — решение третьего типа, а u' — решение четвертого типа, то одно из них не удовлетворяет исходным неравенствам. Действительно, в этом случае число $v = u + u' + 1$ делится на 2^{k-1} и на 5^k, то есть на $5\cdot 10^{k-1}$; поскольку $0 < v < 10^k$, то $v = 5\cdot 10^{k-1}$. Значит, одно из чисел u и u' (например, u) меньше чем $2{,}5\cdot 10^{k-1}$, но тогда соответствующее ему число x не превосходит $1{,}25 \times 10^{k-1}$, что противоречит неравенству $x^2 \geqslant 10^{2k-1}$.

Таким образом, всего имеется не более двух $4k$-значных особых числа. Можно показать, что для некоторых k имеется всего одно такое число ($k = 1, 2$), а для некоторых — два особых числа ($k = 4$).

г) Докажем, что для любого $k > 0$ существует $(4k + 2)$-значное особое число z (при $k = 7$ отсюда будет следовать утверждение пункта г) задачи). Имеем уравнение $z^2 = 10^{2k+1}x^2 + y^2$, где $10^k \leqslant x^2 < 10^{2k+1}$, $0 < y^2 < 10^{2k+1}$.

Перепишем его в виде $z^2 - y^2 = (z - y)(z + y) = 10^{2k+1}x^2$.

Пусть $z - y$ четно: $z - y = 2v$. Тогда $z + y = 2(v + y)$, так что

$$v(v + y) = 25\cdot 10^{2k-1}x^2.$$

Будем решать это уравнение подбором. Положим $v = 25\cdot 10^{2k-1}$. Тогда уравнение принимает вид $x^2 = v + y$.

Единственная сложность в решении этого уравнения заключается в том, что y — маленькое число (по условию, $y < \sqrt{10^{2k+1}}$). Поэтому x надо подобрать так, чтобы x^2 было как можно ближе к числу v (и больше его).

Возьмем в качестве x наименьшее натуральное число, для которого $x^2 > v$, и положим $y = x^2 - v$. Докажем, что число $10^{2k+1}x^2 + y^2$ является искомым особым числом. Нам достаточно проверить неравенства $0 < y^2 < 10^{2k+1}$ и $10^{2k} \leqslant x < 10^{2k+1}$.

Из нашего выбора числа x вытекает, что $(x - 1)^2 \leqslant v$, и, поскольку v не является точным квадратом, $(x - 1)^2 \leqslant v - 1$, так что $x - 1 < \sqrt{v}$. Поэтому $y = x^2 - v = (x - 1)^2 + 2(x - 1) + 1 - v < v - 1 + 2\sqrt{v} + 1 - v =$

49 , 1681

Рис. 5.

$(4999900001)^2 =$
$= 24999000019999800001$
$(49999)^2 = 2499900001$
$(99999)^2 = 9999800001$

Рис. 6.

Разберем случай $k = 4$.

1) Решений нет.

2) $u = 5\cdot 10^3 - 1 = 4999$,
$y = 2u + 1 = 9999$,
$x = u(u + 1)/5000 = 4999$,
$z = 10^4x + 1 = 49\,990\,001$.

3) Есть одно решение $u = 624$. При этом $x = u(u + 1)/5000 = 78$. Это решение не удовлетворяет неравенству $x^2 \geqslant 10^7$.

4) Есть одно решение $u = 7\cdot 625 = 4375$.
$y = 2u + 1 = 8750$,
$x = u(u + 1)/5000 = 3829$,
$z = 38\,290\,001$.

Число z^2 — особое.

Случай $k = 5$ (22-значное особое число).

$v = 25\cdot 10^9$

$x = (\text{целая часть } \sqrt{v}) + 1 = 158115$,
$y = x^2 - v = 36\,996$,
$z = 2v + y = 50\,000\,036\,996$;
z^2 — 22-значное особое число.

$=2\sqrt{v}$. Таким образом, $0<y^2<4v=10^{2k+1}$. Далее,

$$10^{2k}<v<x^2=v+y<v+2\sqrt{v}<3v<10^{2k+1}.$$

Значит, числа x и y удовлетворяют нужным неравенствам, и число $10^{2k+1}x^2+y^2$ является искомым $(4k+2)$-значным особым числом.

И. Бернштейн

Ф472. *Нарисовать примерный график зависимости от времени показания вольтметра после размыкания ключа K (рис. 7). Вольтметр и катушка индуктивности идеальные, $R=100$ Ом, $U=300$ В.*

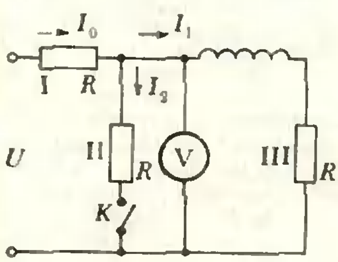


Рис. 7.

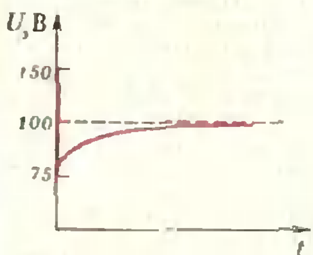


Рис. 8.

При разомкнутом ключе ток, текущий по цепи, равен $I_1=\frac{U}{2R}=1{,}5$ А. При этом вольтметр показывает падение напряжения на сопротивлении III: $U_1=I_1R=150$ В.

После замыкания ключа в катушке возникает э. д. с. индукции, препятствующая изменению магнитного потока через катушку, то есть препятствующая изменению тока I_1, текущего по катушке. Так что в первый момент после замыкания ключа через катушку течет ток $I_1=1{,}5$ А. Найдем показание вольтметра в этот момент. Очевидно, вольтметр измеряет падение напряжения на сопротивлении II: $U_2=I_2R$. Определим значение I_2. Из равенств

$$I_0=I_1+I_2,$$
$$U=I_0R+I_2R$$

(см. рис. 7) находим

$$I_2=\frac{1}{2}\left(\frac{U}{R}-I_1\right)=0{,}75\text{ А}.$$

Таким образом, в первый момент после замыкания ключа вольтметр показывает

$$U_2=I_2R=75\text{ В}.$$

После установления тока в цепи вольтметр, очевидно, будет показывать напряжение

$$U_2'=U-I_0'R=U-\frac{U}{R+\frac{R}{2}}R=\frac{1}{3}U=100\text{ В}.$$

Итак, сразу после замыкания ключа показание вольтметра скачком падает от 150 В до 75 В, а затем постепенно нарастает до 100 В (рис. 8).

И. Слободецкий

◆

Ф473. *Рисунок 9 сделан со стробоскопической фотографии движения двух сталкивающихся шариков одинаковых диаметров, но разных масс. Стрелкой на рисунке показано направление движения одного из шариков до столкновения.*

1) Определить отношение масс шариков.

2) Указать, в каком направлении двигался до столкновения второй шар.

Пусть m_1 — масса первого шарика, $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_1'$ — его скорости соответственно до и после столкновения, m_2 — масса второго шарика, а $\vec{v}_2$ и $\vec{v}_2'$ — его скорости до и после столкновения. Согласно закону сохранения импульса

$$m_1\Delta\vec{v}_1+m_2\Delta\vec{v}_2=0,\ \text{или}\ m_1\Delta\vec{v}_1=-m_2\Delta\vec{v}_2. \qquad (1)$$

где $\Delta\vec{v}_1=\vec{v}_1'-\vec{v}_1$ — изменение скорости первого шарика, $\Delta\vec{v}_2=\vec{v}_2'-\vec{v}_2$ — изменение скорости второго шарика при столкновении. Из (1) получаем

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{|\Delta\vec{v}_2|}{|\Delta\vec{v}_1|}. \qquad (2)$$

Следовательно, для того чтобы найти отношение масс шаров, нужно построить векторы $\Delta\vec{v}_1$ и $\Delta\vec{v}_2$ и затем взять обратное отношение их модулей.

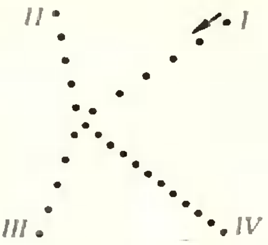


Рис. 9.

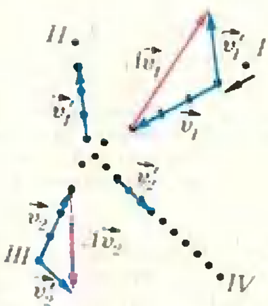


Рис. 10

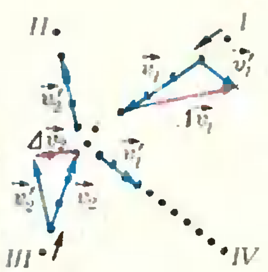


Рис. 11.

Скорости шариков равны перемещениям шариков за время τ между последовательными вспышками лампы, деленным на τ. Так как значение τ одинаково для обоих шариков как до, так и после столкновения, то в масштабе $1:\frac{1}{\tau}$ векторы, изображающие скорости шариков, просто равны векторам перемещений шариков за время между последовательными вспышками лампы. Воспользуемся этим для того, чтобы найти $\Delta\vec{v}_1$ и $\Delta\vec{v}_2$.

Мы знаем, как двигался один из шариков до столкновения. Для того чтобы построить вектор $\Delta\vec{v}_1$, необходимо также знать, как двигался этот шарик после столкновения — по ветви II, III или IV? Для того чтобы выяснить это, нам придется перебрать все возможные варианты (их всего три). При правильном выборе траекторий движения шариков векторы $\Delta\vec{v}_1$ и $\Delta\vec{v}_2$ согласно равенству (1) должны быть направлены в прямо противоположные стороны.

Прежде чем приступить к построению, заметим, что $\Delta\vec{v}$ не меняется при «обращении» движения шарика, то есть если до столкновения шарик 1 двигался по ветви I, а после столкновения — по ветви II, то $\Delta\vec{v}$ такое же, как и в том случае, если до столкновения он двигался по ветви II, а после столкновения — по ветви I.

Теперь мы можем приступить к построению. Предположим, что к шарику 1 относятся ветви I и II, а к шарику 2 — ветви III и IV. Построив в этом случае векторы изменений скоростей шариков (рис. 10), получим, что они не направлены вдоль одной прямой (на рисунке 10 для удобства векторы $\vec{v}$ построены в масштабе $1:\frac{1}{3\tau}$). Следовательно, наше предположение не верно. Проверяя так же другие возможные варианты, убеждаемся, что к шарику 1 относятся ветви I и IV, а к шарику 2 — ветви II и III (рис. 11). Измерив длины векторов, изображающих $\Delta\vec{v}_1$ и $\Delta\vec{v}_2$, найдем:

$$\frac{m_1}{m_2}=\frac{|\Delta\vec{v}_2|}{|\Delta\vec{v}_1|}=\frac{1}{3}.$$

Теперь ответим на второй вопрос. Обозначим τ_1 время между моментом столкновения шариков и последней до столкновения вспышкой лампы. Тогда ясно, что перемещение шарика за это время должно составлять τ_1/τ часть перемещения шарика за время τ между вспышками. Измерив соответствующие перемещения первого шарика, найдем, что τ_1/τ равно 11/19. Таким же оно должно быть и для второго шарика. Непосредственным измерением убеждаемся, что этому условию удовлетворяет ветвь III. Следовательно, шарик 2 до столкновения двигался по ветви III.

И. Слободецкий

◆

Ф474. *Цепь, показанная на рисунке 12, собрана из одинаковых резисторов и вольтметров. Первый вольтметр показывает $U_1 = 10$ В, а третий — $U_3 = 8$ В. Каково показание второго вольтметра?*

Ясно, что вольтметры не идеальные — в противном случае токи через резисторы не протекали бы, и показания вольтметров были бы одинаковыми.

Показания вольтметров пропорциональны токам, текущим через них. Значит, токи, текущие через резисторы I, II и III, относятся как

$$I_I : I_{II} : I_{III} = (U_1 : U_2 : U_3) : (U_2 + U_3) : U_3.$$

Поскольку резисторы одинаковы, падения напряжения на них пропорциональны токам. Для резисторов II и III имеем:

$$\frac{U_1 - U_2}{U_2 - U_3} = \frac{I_{II}}{I_{III}} = \frac{U_2 + U_3}{U_3},$$

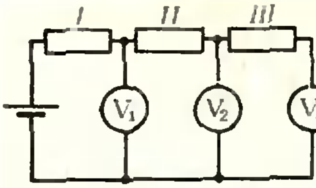


Рис. 12.

откуда

$$U_2^2 + U_2U_3 - U_1U_3 - U_3^2 = 0.$$

Из этого уравнения находим:

$$U_2 = -\frac{1}{2}U_3 + \sqrt{\frac{U_3}{4}(5U_3 + 4U_1)}$$

◆

Ф475. *На рисунке 13 приведена вольтамперная характеристика лампочки от карманного фонаря. Лампочка включена в схему, показанную на рисунке 14.*

1) Найти графически ток в лампочке.

2) При каком положении движка потенциометра напряжение между точками A и B равно нулю?

3) При каком положении движка потенциометра напряжение между точками A и B почти не будет меняться при небольших изменениях э. д. с. батареи?

Внутренним сопротивлением батареи пренебречь.

Рис. 13.

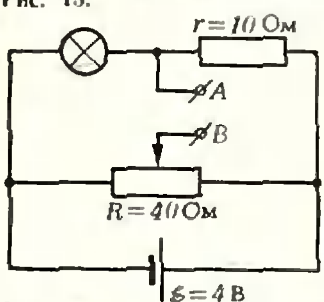


Рис. 14.

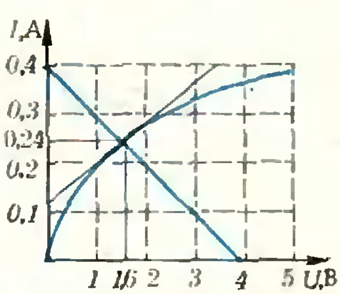


Рис. 15.

1) Ток I, текущий через лампу, и напряжение U на ней связаны зависимостью, приведенной на рисунке 13. Но при включении лампы в схему ток и напряжение оказываются связанными и еще одним соотношением: $U + Ir = \mathcal{E}$ (см. рис. 14). Ясно, что если на рисунке 13 построить этот график, то точка пересечения его с вольтамперной характеристикой лампы определит значения U и I. Выполнив построение (рис. 15), найдем:

$$I = 0{,}24 \text{ А}.$$

2) Чтобы напряжение U_{AB} между точками A и B равнялось нулю, нужно так установить движок потенциометра, чтобы выполнялось равенство $U_{CB} = U_{R_1} = U_{CA} = 1{,}6$ В (рис. 16). Следовательно, отношение сопротивлений R_1 и R_2 «плеч» потенциометра $(R_1 + R_2 = R)$ должно удовлетворять условию

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{U_{R_1}}{U_{R_2}} = \frac{U_{CA}}{\mathcal{E} - U_{CA}},$$

или $\dfrac{R_1}{40 - R_1} = \dfrac{1{,}6}{2{,}4}$, откуда

$$R_1 = 16 \text{ Ом}, \quad R_2 = 24 \text{ Ом}.$$

3) Чтобы при малом изменении э. д. с. $\mathcal{E}$ батареи напряжение U_{AB} почти не менялось, надо так подобрать плечи потенциометра, чтобы изменение напряжения на левом плече (R_x) было таким же, как изменение напряжения на лампе.

При изменении э. д. с. на малую величину $\Delta\mathcal{E}$ напряжение U_{CA} на лампе меняется вблизи «рабочей точки» (1,6 В) на малую величину

$$\Delta U_{CA} = \Delta\mathcal{E} - \Delta I r,$$

где ΔI — изменение тока в лампе при малом изменении ΔU_{CA}. Выясним, как зависит ΔI от ΔU_{CA}. Отношение $\dfrac{\Delta I}{\Delta U_{CA}}$ вблизи рабочей точки равно угловому коэффициенту касательной к графику функции $I(U_{CA})$ в рабочей точке: $\dfrac{\Delta I}{\Delta U_{CA}} = k$. Построив касательную, найдем $k \approx 0{,}08$ (рис. 15), так что $\Delta I = \Delta U_{CA} k \approx 0{,}08\,\Delta U_{CA}$.

Итак, $\Delta U_{CA} = \Delta\mathcal{E} - \Delta U_{CA} kr$, откуда

$$\Delta U_{CA} = \frac{\Delta\varepsilon}{1 + kr}.$$

Напряжение U_{CB} на левом плече потенциометра с сопротивлением R_x равно $U_{CB} = \dfrac{R_x}{R}\mathcal{E}$; при изменении э. д. с. на малую величину $\Delta\mathcal{E}$ напряжение U_{CB} меняется на величину

$$\Delta U_{CB} = \frac{R_x}{R}\Delta\mathcal{E}.$$

Приравняв ΔU_{CA} и ΔU_{CB}, получим:

$$R_x = \frac{R}{1 + kr}.$$

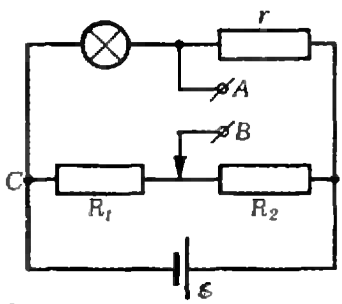


Рис. 16.

Подставив численные значения, найдем

$$R_x \approx 0{,}22\ \text{Ом}, \quad R - R_x \approx 18\ \text{Ом}.$$

При этом $U_{AB} \approx 0{,}6$ В, и при изменении э. д. с. $\mathscr{E}$ в пределах ± 1 В значение U_{AB} меняется менее чем на 0,03 В. Рассчитанная нами схема может быть использована как стабилизатор небольших напряжений; впрочем, практически лучше использовать вместо потенциометра вторую цепь из лампочки и резистора, включенных в обратном порядке.

А. Зильберман

◆

Ф476. *Природный уран состоит из смеси двух изотопов с относительными атомными массами 235 и 238 и отношением концентраций 7 : 1000. Для увеличения концентрации ^{235}U, который применяется в атомных реакторах, используется истечение газообразного соединения UF_6 (шестифтористый уран) в вакуум через маленькие отверстия (эффузия). Газ пропускается через трубу T с пористыми стенками (рис. 17). Прошедший через стенки трубы газ откачивается из сосуда C. Определить отношение концентраций $^{235}UF_6$ и $^{238}UF_6$ в откачиваемом газе. Относительная масса фтора равна 19.*

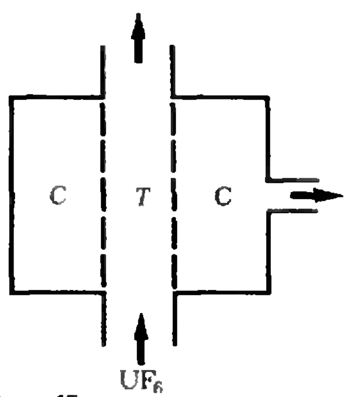


Рис. 17.

Обозначим n_1 и n_2 число молекул соответственно $^{235}UF_6$ и $^{238}UF_6$ в единице объема газа UF_6. За время t через отверстие площади s проходит число N_1 молекул $^{235}UF_6$, равное

$$N_1 = v_{x1} s t n_1,$$

и число N_2 молекул $^{238}UF_6$, равное

$$N_2 = v_{x2} s t n_2,$$

где v_{x_1} и v_{x_2} — проекции средних скоростей молекул $^{235}UF_6$ и $^{238}UF_6$ на ось x, направленную перпендикулярно отверстию.

Отношение N_1/N_2 — отношение концентраций молекул $^{235}UF_6$ и $^{238}UF_6$ в откачиваемом газе — равно

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{v_{x1} n_1}{v_{x2} n_2}.$$

Очевидно, что $\frac{v_{x1}}{v_{x2}} = \frac{v_1}{v_2}$, где v_1 и v_2 — средние квадратичные скорости движения молекул газов. Так как $v = \sqrt{\frac{3kT}{m}}$, где m — масса молекулы, то $\frac{N_1}{N_2} = \frac{n_1}{n_2}\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$ (m_1 и m_2 — массы молекул $^{235}UF_6$ и $^{238}UF_6$ соответственно). Отсюда

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{7}{1000}\sqrt{\frac{352}{349}} \approx \frac{7{,}03}{1000}.$$

И. Слободецкий

◆

Ф477. *Резиновое кольцо массы m лежит на гладкой горизонтальной плоскости. Кольцо немного растягивают так, что оно сохраняет форму окружности и центр его остается неподвижным. После этого кольцо отпускают. Описать дальнейшее поведение кольца. Коэффициент упругости резинового жгута равен k.*

Из соображений симметрии представляется ясным, что кольцо будет колебаться — растягиваться и сжиматься, сохраняя форму окружности, и центр его будет оставаться неподвижным. Чтобы убедиться в правильности этих представлений, достаточно рассмотреть движение какой-нибудь одной точки (или малого элемента) кольца и убедиться в том, что она действительно совершает колебания.

Выделим малый элемент A кольца. Когда кольцо растянуто, на элемент A со стороны соседних участков кольца действуют силы $|\vec{f}|$ упругости, направленные по касатель-

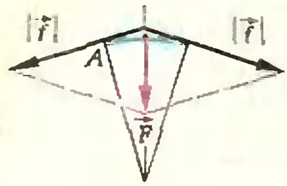


Рис. 18.

ным. Равнодействующая $|\vec{F}|$ этих сил направлена к центру кольца (рис. 18). Под действием этой силы элемент A смещается к положению равновесия; при этом длина его уменьшается. Проскочив по инерции положение равновесия (когда длина его нормальна — резина не растянута), элемент продолжает двигаться к центру. При этом со стороны соседних участков на него начинают действовать сжимающие его силы упругости, равнодействующая которых направлена от центра кольца к положению равновесия. Таким образом, направление силы периодически меняется на противоположное.

Посмотрим, как связаны между собой величина $|\vec{F}|$ этой силы и величина Δr смещения элемента от положения равновесия.

Силы упругости $|\vec{f}|$ пропорциональны растяжению (удлинению) Δl элемента, а растяжение Δl пропорционально смещению Δr элемента от положения равновесия (рис. 19).

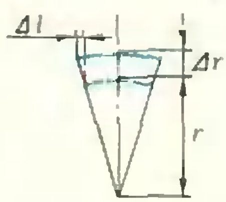


Рис. 19.

Следовательно, сила $|\vec{F}|$ пропорциональна смещению Δr элемента A от положения равновесия. А как известно, под действием такой силы тело совершает гармонические колебания около положения равновесия. Значит, действительно кольцо будет колебаться около положения равновесия — положения, в котором оно не растянуто и не сжато.

Найдем период этих колебаний. В момент максимального растяжения вся механическая энергия E_1 кольца равна его потенциальной энергии — энергии упругой деформации:

$$E_1 = П = \frac{k\Delta l^2}{2} = \frac{k\,[2\pi(r+\Delta r) - 2\pi r]^2}{2} = 2k\pi^2 a^2$$

($a = \Delta r$ — амплитуда колебаний каждой точки кольца). При прохождении кольцом положения равновесия его полная механическая энергия E_2 равна сумме кинетических энергий всех его точек:

$$E_2 = K = \sum_i \frac{m_i v_{max}^2}{2} = \frac{m v_{max}^2}{2}$$

(v_{max} — скорость каждой точки кольца при прохождении положения равновесия). Так как трение отсутствует, то согласно закону сохранения механической энергии $E_1 = E_2$:

$$2k\pi^2 a^2 = \frac{m v_{max}^2}{2}.$$

Отсюда найдем v_{max}:

$$v_{max} = 2\pi a \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

Но при гармонических колебаниях $v_{max} = \omega a$. Значит, $\omega = 2\pi\sqrt{\frac{k}{m}}$, и период колебаний каждой точки кольца, а следовательно, период колебаний всего кольца равен

$$T = \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

А. Абрамян

А. Звонкин

Анализ помогает алгебре

Довольно часто алгебраическую задачу удается решить, подыскав и исследовав методами анализа какую-нибудь подходящую вспомогательную функцию. С такими задачами мы познакомимся на этом занятии математического кружка.

П р и м е р 1. *Сколько корней имеет уравнение*

$$x^3-3x=a? \qquad (1)$$

Р е ш е н и е. Как известно, существует формула для решения кубического уравнения («Квант», 1976, № 9). Однако эта формула очень громоздка. Нельзя ли найти число корней уравнения, не решая его?

Используя производную, нарисуем график функции $y=x^3-3x$ (рис. 1а). На том же чертеже нарисуем график функции $y=a$, то есть горизонтальную прямую (на рисунке 1б изображено сразу несколько таких прямых — для разных значений a). Количество корней уравнения (1) есть просто количество точек пересечения нашего графика и прямой*). Сразу бросается в глаза особая роль красных прямых. Если прямая $y=a$ лежит между красными прямыми, т. е. $|a|<2$, то она имеет с графиком функции $f(x)=x^3-3x$ три точки пересечения, если выше или ниже ($|a|>2$) — одну, сами же красные прямые ($|a|=2$) имеют с графиком две общие точки (одна из них — *точка касания*).

З а д а ч а 1. Сколько корней имеет уравнение

$$3x^5-50x^3+135x=a?$$

З а д а ч а 2. Сколько корней имеет уравнение

$$x^2e^x=a?$$

П р и м е р 2. *Сколько корней имеет уравнение*

$$a^x=x? \qquad (2)$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим пять случаев взаимного расположения графиков $y=a^x$ и $y=x$ (рис. 2). Рисунок 2а соответствует значениям $a\in]0,\ 1[$, рисунок 2б — значению $a=1$, остальные три рисунка (от рисунка 2в к рисунку 2д a возрастает) — значениям $a>1$. Количество решений уравнения (2) в каждом из пяти случаев видно «невооруженным глазом». Единственное, что по существу осталось узнать, — при каком значении $a=a_0$ имеет место картинка 2 г, то есть прямая $y=x$ *касается* кривой? Ответить на этот вопрос нам поможет производная.

Пусть x_0 — абсцисса точки касания A (рис. 2г). Тогда $f'(x_0)=a^{x_0}\ln a=1$. Кроме того, $a^{x_0}=x_0$. Получилась система

$$\begin{cases} a^x=x, \\ a^x\ln a=1. \end{cases}$$

Решим ее. Для этого во второе урав-

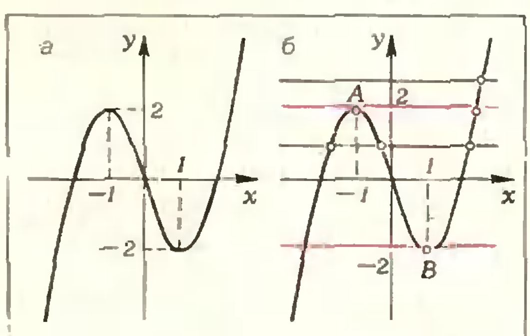


Рис. 1.

*) То, что прямая действительно пересекает график так, как показано на чертеже, вытекает из п. 84 учебника «Алгебра и начала анализа 10». Действительно, функция $x\to x^3-3x$ непрерывна и монотонна на каждом из промежутков $]-\infty,\ -1]$, $[-1,\ 1]$, $[1,\ +\infty[$; следовательно, ее множество значений на каждом из этих промежутков — промежуток; поэтому, например, для любого $a\in[-2;\ 2]$ существует такое $x_0\in[-1;\ 1]$, что $f(x_0)=a$, причем, ввиду монотонности функции f на отрезке $[-1;\ 1]$, такое x_0 единственно. В последующих примерах читатель легко проведет подобное рассуждение сам.

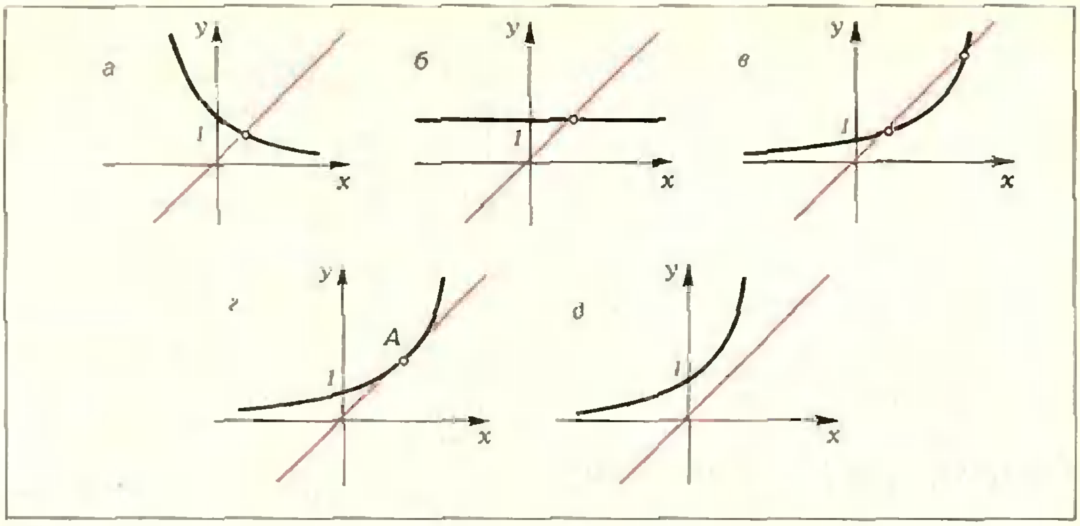


Рис 2.

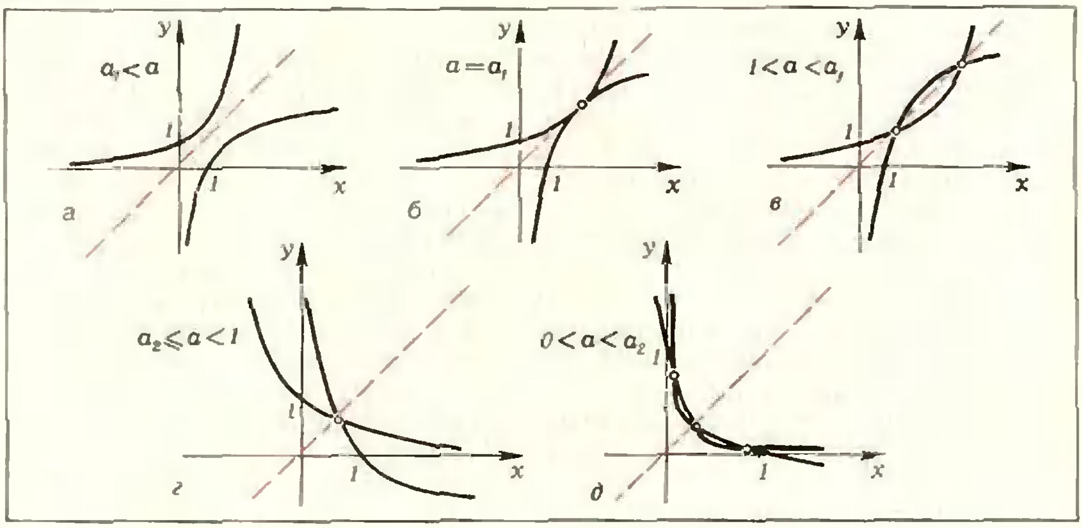


Рис. 3.

нение вместо a^x подставим x, получим $x=\frac{1}{\ln a}$. Полученное значение x подставляем в первое уравнение: $a^{\frac{1}{\ln a}}=\frac{1}{\ln a}$; логарифмируем и преобразуем:

$$\frac{1}{\ln a}\cdot\ln a=\ln\left(\frac{1}{\ln a}\right)\Leftrightarrow 1=-\ln(\ln a)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \ln a=\frac{1}{e}\Leftrightarrow a=e^{\frac{1}{e}}.$$

Итак, $a_0=e^{\frac{1}{e}}$.

Задача 3. Сколько корней имеет уравнение

$$a^x=\log_a x?$$

Указание *). На рисунке 3 изображены пять случаев взаимного расположения графиков $y=a^x$ и $y=\log_a x$. Для удобства пунктиром изображена также прямая $y=x$. Функции a^x и $\log_a x$ взаимно обратны, поэтому их графики симметричны относительно этой прямой. Вам остается лишь найти значения a_1 и a_2.

Заметим, кстати, что рисунок 3а изображен на обложке учебника «Алгебра 8» (при $a=10$). Особенно интересным нам кажется случай, изображенный на рисунке 3д. Такая картинка получается, например, при $a=\frac{1}{16}$.

Упражнение. Для $a=\frac{1}{16}$ найдите координаты точек пересечения.

Пример 3. *При каких значениях a существует такое положительное b, что уравнение*

$$x^2+a=2b\cdot\ln x \qquad (3)$$

имеет единственный корень?

*) См. также статью А. Егорова в «Кванте» № 10 за 1977 г., с. 37.

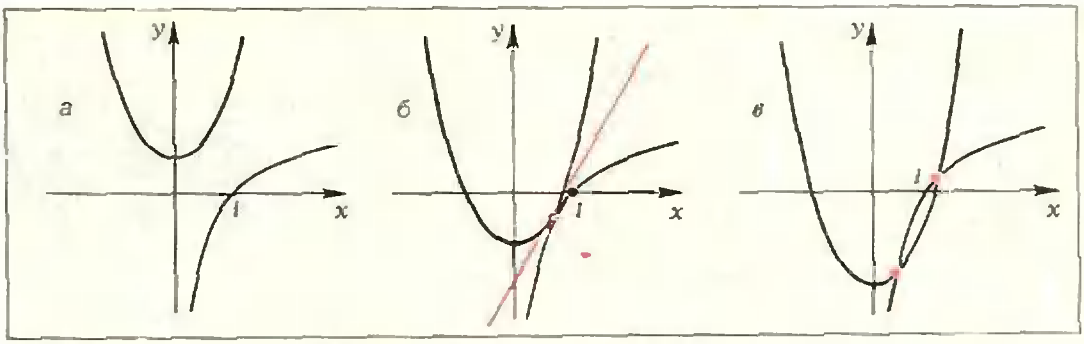


Рис. 4.

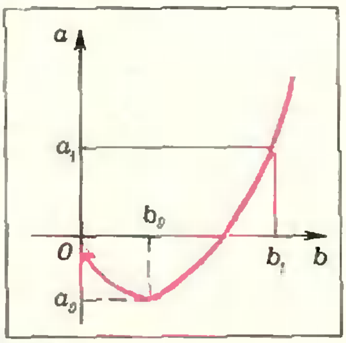


Рис. 5.

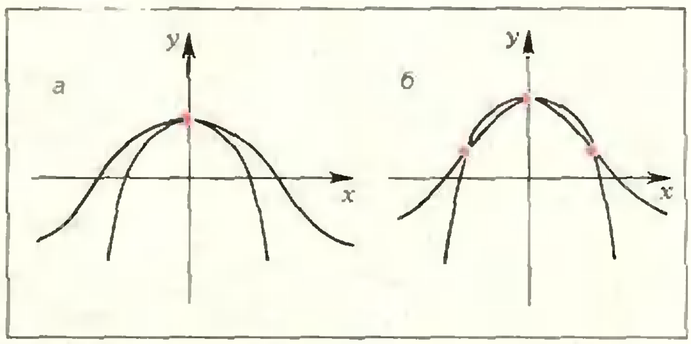


Рис. 6.

Р е ш е н и е. Как всегда, начнем с картинки. На рисунке 4 изображены три случая взаимного расположения графиков $y=x^2+a$ и $y=2b\cdot\ln x$ (для $b>0$). Ясно, что уравнение (3) имеет единственный корень тогда и только тогда, когда эти графики к а с а ю т с я (рис. 4б). В точке касания совпадают не только значения самих функций $f(x)=x^2+a$ и $g(x)=2b\cdot\ln x$, но и значения их производных $f'(x)=2x$ и $g'(x)=\frac{2b}{x}$. Получилась система:

$$\begin{cases} x^2+a=2b\cdot\ln x \\ 2x=\dfrac{2b}{x}. \end{cases}$$

Из второго уравнения этой системы находим $x=\pm\sqrt{b}$ (напомним, что по предположению $b>0$). Значение $x=-\sqrt{b}$ системе не удовлетворяет, так как $\ln x$ при $x=-\sqrt{b}$ не определен. Подставляя полученное значение x в первое уравнение, получаем

$$a=b\cdot\ln b-b. \qquad (4)$$

Таким образом, графики $y=x^2+a$ и $y=2b\cdot\ln x$ касаются, если и только если выполнено условие (4); при этом касание происходит в точке с абсциссой $x=\sqrt{b}$.

Задача свелась к выяснению следующего вопроса: *при каких значениях a существует такое b, что выполняется равенство $a=b\cdot\ln b-b$?* Еще одна, эквивалентная, формулировка: *найти множество значений функции $f(b)=b\cdot\ln b-b$.*

К о н т р о л ь н ы й в о п р о с: почему мы опустили требование положительности b?

На координатной плоскости Oba нарисуем график функции $b\to b\cdot\ln b-b$ (рис. 5). Теперь ответ на поставленный вопрос «почти ясен»: нужное значение b существует при $a\geqslant a_0$ (значений может быть и два!). Значение a_0 находим из уравнения $f'(b)=0$. Поскольку $f'(b)=\ln b$, $b_0=1$. Таким образом, $a_0=f(b_0)=-1$.

К о н т р о л ь н ы й в о п р о с. Как видно из рисунка 5, если a принадлежит интервалу $]-1, 0[$, то ему соответствуют д в а значения b. Что это означает для графиков $y=x^2+a$ и $y=2b\cdot\ln x$? Нарисуйте.

Иногда знание к о л и ч е с т в а корней помогает решить уравнение. Например, если известно, что некоторое уравнение имеет р о в н о о д и н корень, можно попробовать просто угадать его.

Пример 4. *Решить уравнение*

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}.$$

Решение. Один из корней этого уравнения легко угадывается: $x=0$. Есть ли еще корни? Обратимся к графику (рис. 6). Вблизи точки $x=0$ графики функций $y=\cos x$ и $y=1-\frac{x^2}{2}$ так похожи друг на друга, что без дополнительного исследования невозможно понять, какой из рисунков, 6а или 6б, — правильный. Попробуем доказать, что для всех $x\neq 0$ справедливо неравенство $\cos x>1-\frac{x^2}{2}$ (то есть равенство невозможно).

Пусть $$f(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}.$$

Эта функция четна, (т. е. $f(x)=f(-x)$), поэтому рассмотрим только положительные значения x. Поскольку $f(0)=0$, для доказательства неравенства $f(x)>0$ при $x>0$ достаточно установить, что f *возрастает* на полупрямой $[0, +\infty[$. Учитывая, что f непрерывна при $x=0$, достаточно установить, что $f'(x)>0$ при $x>0$ («Алгебра и начала анализа 9», п. 54). Поскольку $f'(x)=x-\sin x$, неравенство $f'(x)>0$ равносильно неравенству $\sin x<x$, которое при $x>0$ очевидно*).

Последний пример, который мы рассмотрим, касается обобщения неравенства между средним геометрическим и средним арифметическим. Легко доказать, что при $x>0$, $y>0$ имеет место $\sqrt{xy}\leqslant\frac{x+y}{2}$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $x=y$. Запишем это неравенство в таком виде:

$$x^{\frac{1}{2}}\cdot y^{\frac{1}{2}}\leqslant\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y.$$

Напрашивается следующее обобщение:

Пример 5. *Пусть положительные числа a и b таковы, что $a+b=1$. Доказать, что для всех $x>0$, $y>0$ справедливо неравенство*

$$x^a y^b\leqslant ax+by, \qquad (5)$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $x=y$.

Решение. Произведем следующие равносильные преобразования неравенства (5): заменим b на $1-a$, перенесем все члены в одну часть и поделим обе части на y (поскольку $y>0$, знак неравенства сохранится). Мы получим неравенство

$$a\cdot\frac{x}{y}-\left(\frac{x}{y}\right)^a+1-a\geqslant 0.$$

Обозначим $\frac{x}{y}=t$; заметим, что $t>0$. Осталось доказать, что при $t>0$ и $a\in]0, 1[$ имеет место неравенство

$$at-t^a+1-a\geqslant 0,$$

причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $t=1$. Это доказательство мы оставим в виде упражнения читателю. (Указание. Функция $at-t^a+1-a$ при $t=1$ имеет минимум).

Задачи

4. Сколько корней имеет уравнение
а) $e^x=ax$?
б) $3x^4+4x^3-36x^2=a$?
в) $\frac{x}{\ln x}=a$?

5. Решить (одно уравнение с двумя неизвестными):

а) $\frac{1}{x}+2\sqrt{x}=3y(1-\ln y)$;

б) $\frac{\ln x}{x}=e^{\cos y}$;

в) $4^x+1=2^{x+1}\cdot\sin y$.

6. Нарисовать на плоскости (p, q) множества значений (p, q), при которых уравнения
а) $x^3=3p^2x+q$,
б) $p^x=x^q$ $(x>0)$
имеют 0, 1, 2, ... решений относительно x.

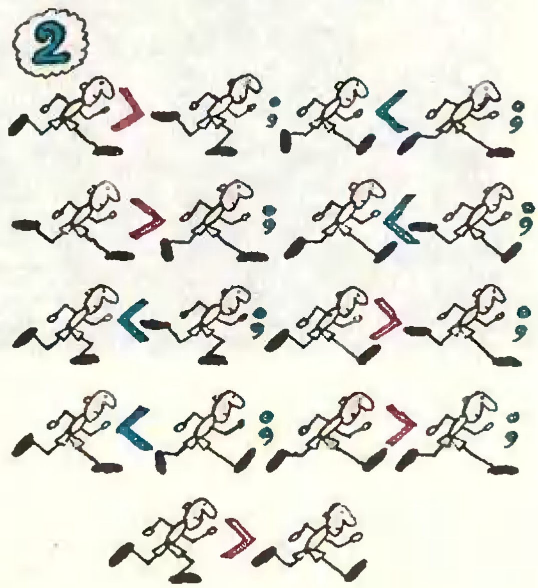
7. Решить уравнения
а) $\ln x=x-1$
б) $(x-1)e^x+x^2-3x+2=0$
в) $\sin x=x-\frac{1}{6}x^3$.

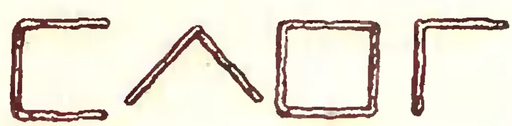
8. Определить (без помощи таблиц), какое число больше — e^π или π^e.

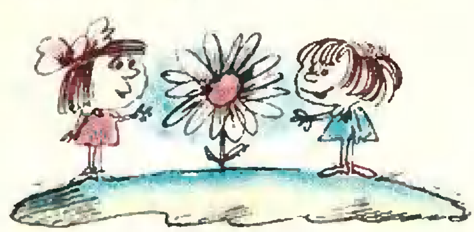
) См. также «Алгебра и начала анализа 10», п. 77.

«Квант» для младших школьников

Задачи





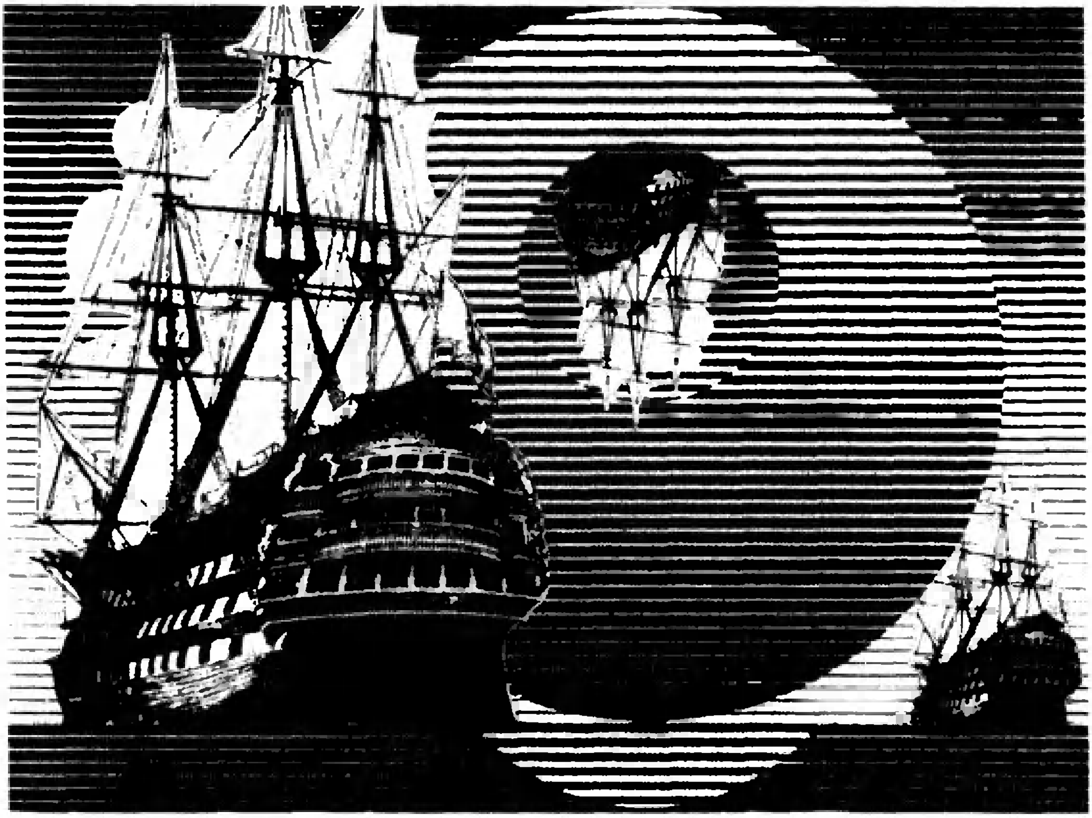


1. В соревнованиях по бегу участвуют десять спортсменов: Андрей, Виктор, Ефим, Захар, Иван, Клим, Михаил, Николай, Тимофей и Федор (рис. 1). Спортсмен, первым пришедший к финишу, получил 9 баллов, вторым — 8 баллов, третьим 7 и т. д., вплоть до последнего, который получил 0 баллов. Как распределились баллы между участниками бега, отражено на рисунке 2. Определите с помощью этого рисунка, сколько баллов получил каждый из десяти спортсменов. Подставьте вместо цифр 67 480, 2 401 240 564, 953 564 начальные буквы имен спортсменов, получивших соответствующее количество баллов. Что у вас получилось?

2. Согните из мягкой проволоки фигуру, при параллельном проектировании которой на различные плоскости получаются буквы С, Л, О, Г, написанные так, как изображено на рисунке 3.

3. Две девочки играют в такую игру: они по очереди отрывают лепестки у ромашки. За один ход можно оторвать либо один лепесток, либо два соседних (с самого начала) лепестка. Выигрывает девочка, сорвавшая последний лепесток. Докажите, что вторая девочка всегда может выиграть (у ромашки больше двух лепестков).

4. Живут пять братьев: Иван, Степан, Андрей и близнецы Сергей и Агей. Произведение лет Сергея и Агея равно году рождения Андрея, а произведение лет Андрея и Степана равно году рождения Ивана. Как зовут сына Андрея, если он в пять раз моложе своего дяди — тезки?



А. Дозоров

Знакомы ли вы с линзой?

Наверное, нет на свете такого мальчика, который не играл бы с увеличительным стеклом (линзой). Впрочем, и девочки тоже. А хорошо ли вы знаете линзу? Это можно легко проверить на опытах.

1. Если у вас есть стеклянная линза, ограниченная двумя выпуклыми поверхностями (одна из них может быть плоской или даже вогнутой), получите с ее помощью изображение Солнца на листе белой бумаги. Лучи от Солнца, находящегося очень далеко от Земли, падают на Землю практически параллельным пучком. Линза собирает эти лучи в точке, называемой фокусом. Расстояние от линзы до фокуса называют фокусным расстоянием. Определите фокусное расстояние вашей линзы. Подумайте, почему стеклянную линзу иногда называют «зажигательным стеклом»?

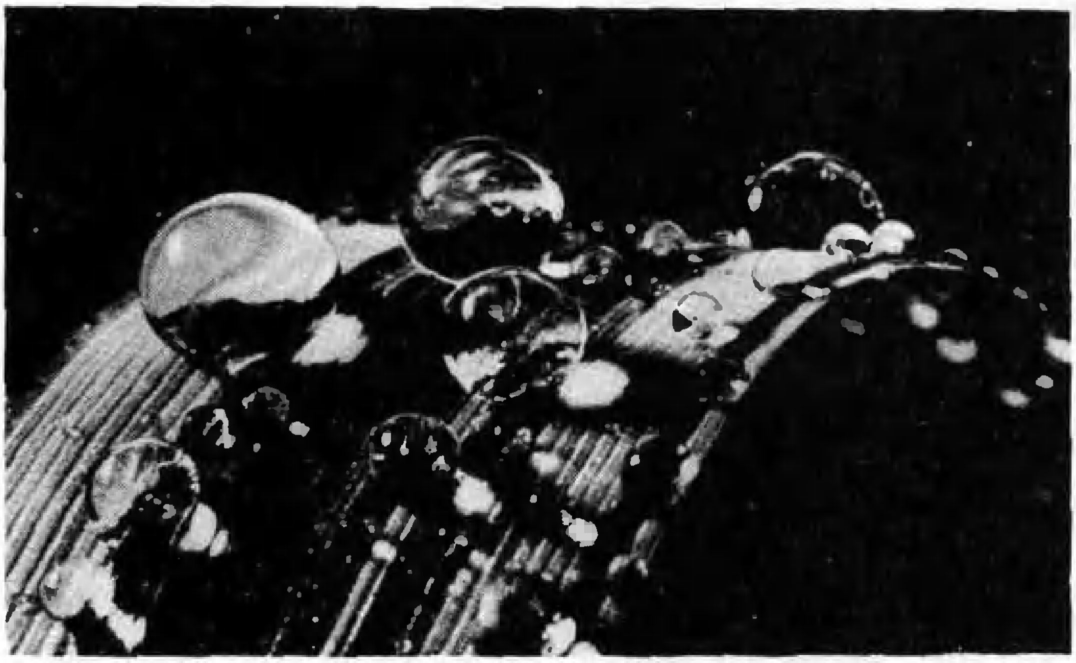
2. Подойдите к включенному телевизору, расположите линзу между экраном и листом белой бумаги. Перемещая лист, получите на нем четкое изображение телевизионного экрана. Каким будет это изображение?

Кстати сказать, точно так же устроен фотоаппарат, только там роль белого листа бумаги играет фотопленка или фотопластинка.

Нетрудно получить изображение окна, включенной настольной лампы, удаленного здания. Может быть, вам даже удастся таким образом «сфотографировать» своего товарища.

Попробуйте вращать линзу вокруг оси, перпендикулярной плоскости сечения линзы. Поворачивается ли изображение?

3. Получив на листе бумаги какое-нибудь изображение, внимательно рассмотрите его. Затем закройте



Посмотрите на эту красивую фотографию капель росы на листе. Оказывается, водяные капельки — это тоже линзы. Изображение в капельке тем больше, чем меньше сама капелька.

Фото А. Макиенко

половину линзы. Что изменилось при этом? Ну конечно, изображение осталось на том же месте и тех же размеров, но яркость его уменьшилась. Постарайтесь объяснить это.

4. В принципе, любое прозрачное тело с неплоской поверхностью образует линзу. Так, очень хорошо увеличивают стеклянные шарики, причем оказывается, чем меньше шарик, тем больше его увеличение. Именно маленький шарик был главной частью в первом микроскопе.

Если у вас есть такой шарик, вы можете сделать себе неплохой карманный микроскоп. Для удобства шарик лучше закрепить в оправу. Рассматриваемый предмет надо располагать как можно ближе к шарику.

Стеклянные палочки (их можно найти в школьном химическом кабинете) — тоже линзы.

Даже волнистая поверхность воды действует как линза. Включите свет в ванной комнате, налейте в ванну воды и слегка взволнуйте воду — по дну ванны побегут светлые «зайчики».

Сделайте те опыты, о которых мы рассказали, и подумайте, какие еще интересные опыты можно провести с линзой.

(Начало см. с. 28)

Пусть P и S — точки, определяемые уравнениями (1) при $\lambda = 1$ и уравнениями (2) соответственно. Координаты вектора $\overrightarrow{SP}$ равны разности координат точек P, S:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\varphi, \\ y = \frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\varphi, \\ z = \frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2}. \end{cases} \qquad (3)$$

Из уравнений (3) видно, что вектор $\overrightarrow{SP}$ меняется периодически, с периодом 4π. Его длина $|\overrightarrow{SP}|$, как и следовало ожидать, остается равной $\frac{1}{2}$ (проверьте!). Следовательно, изменения этого вектора сводятся к одним поворотам, причем при изменении φ на величину 2π направление вектора меняется на противоположное, а при изменении φ в диапазоне от 0

(Окончание см. с. 81)

А. Виленкин

Производная и задачи на экстремумы

Введение в школьную программу производной позволяет единым методом решать различные задачи на наибольшие и наименьшие значения. Но, как показывают результаты вступительных экзаменов в вузы в 1977 году, далеко не все поступающие умеют это делать. Некоторым «тонким» вопросам из этой области и посвящена настоящая статья.

1. Возрастание и убывание функции

В школьном учебнике («Алгебра и начала анализа 9», п. 54) есть следующая теорема и замечание, на которых базируется исследование возрастания и убывания функции с помощью производной.

Теорема. *Если $f'(x)>0$ в каждой точке интервала I, то функция f возрастает на интервале I; если $f'(x)<0$ в каждой точке интервала I, то функция f убывает на интервале I.*

Замечание. *Если функция f монотонна на интервале $]a;b[$ и непрерывна в точках a и b, то она монотонна и на отрезке $[a;b]$.*

Эта теорема и замечание позволяют решать многие задачи на нахождение интервалов и промежутков монотонности.

Пример 1 (МИИГАиК *), 1977). *Найти промежутки возрастания и убывания функции $y=2x^3-3x^2$.*

Найдем производную данной функции:

$$y'=6x^2-6x=6x(x-1).$$

Мы видим, что при возрастании x производная функция y' меняет знак, когда x проходит через точки 0 и 1. Нарисуем ось Ox (рис. 1) и рассмотрим три промежутка: $]-\infty;0]$, $[0;1]$ и $[1;+\infty[$. На каждом из них y' имеет один и тот же знак (и обращается в ноль в точках 0 и 1), поэтому из приведенного замечания следует, что функция y возрастает на промежутках $]-\infty;0]$ и $[1;+\infty[$ и убывает на промежутке $[0;1]$ (схематически это изображено стрелками на рисунке 1).

2. Наибольшие и наименьшие значения. Критические точки

Напомним, что точка x_0, принадлежащая области определения функции f, называется

точкой минимума функции f, если существует такая окрестность $]x_0-\delta;x_0+\delta[$ точки x_0, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности $f(x)>f(x_0)$;

точкой максимума функции f, если найдется такая окрестность $]x_0-\delta;x_0+\delta[$ точки x_0, что для всех $x\neq x_0$ из этой окрестности $f(x)<f(x_0)$.

Точки минимума или максимума называются *точками экстремума* данной функции, а значения функции в этих точках называются *экстремумами функции*.

Как найти точки экстремума данной функции? Для этого часто применяется следующая теорема.

Теорема Ферма. *Если точка x_0 является точкой экстремума для функции f и в этой точке существует производная, то она равна нулю:* $f'(x_0)=0$ («Алгебра и начала анализа 9», п. 55).

Рис. 1.

*) Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии.

Теорема Ферма помогает искать точки экстремума функции f следующим образом. По этой теореме точками экстремума могут быть лишь те внутренние точки области $D(f)$, в которых производная существует и равна нулю, либо точки, в которых производная не определена. Все такие точки называются «критическими» для данной функции.

Отыскав критические точки и промежутки монотонности данной функции, часто удается найти и точки максимума или минимума этой функции. Так, в рассмотренном выше примере в критической точке $x=1$ функция имеет минимум в силу того, что она убывает на промежутке $]0; 1]$ и возрастает на $[1; +\infty[$.

В большинстве практических задач, однако, требуется найти не экстремумы, а наименьшее значение некоторой функции (сырья, материалов, затрат) или наибольшее (продукции, прибыли и т. п.). В чем разница между этими понятиями?

Когда мы говорим, что *функция f имеет в точке x_0 экстремум*, скажем, максимум, что мы тем самым описываем поведение функции вблизи данной точки (но только вблизи!): функция f в некоторой окрестности данной точки определена и ее значения всюду меньше $f(x_0)$. Однако поведение функции «вдали» от точки x_0 мы не определяем. Даже если точка x_0 является точкой максимума функции f, вне некоторой окрестности этой точки значения функции могут начать увеличиваться и превзойти значение $f(x_0)$.

Как же искать наибольшее и наименьшее значения дифференцируемой функции на всей области ее определения?

Наибольшее (или наименьшее) значение функции может достигаться либо на границе области определения функции, либо внутри этой области. Если оно достигается в некоторой внутренней точке, то в этой точке производная не может быть ни положительной (тогда функция в этой точке возрастала бы), ни отрицательной (тогда бы функция убывала), поэтому производная равна нулю или не существует, то есть такая точка — критическая. Однако наибольшее значение функции может достигаться и в граничной точке области определения функции, где производная ни при чем (она не определена, так как у этой точки нет окрестности, на которой функция определена). Значит, граничные точки надо рассматривать отдельно.

Получается следующее правило (оно приведено в п. 59 учебника):

Для отыскания наименьшего и наибольшего значения дифференцируемой функции, заданной в некотором промежутке, следует

найти все критические точки функции, лежащие внутри промежутка;

вычислить значения функции в этих точках и на концах промежутка;

из всех полученных таким образом чисел выбрать наименьшее и наибольшее.

Заметим еще, что если функция задана на интервале, то у нее может и не быть наибольшего или наименьшего значения на этом интервале. Такова, например, функция $y(x)=x$ на интервале $]0; 1[$: она не достигает ни наименьшего, ни наибольшего значений. Действительно, на левом конце интервала $y(x)$ становится сколь угодно малой, но значение 0 не принимает, а справа «не достигает» значения 1. Еще один пример: функция

$$y(x)=\frac{x-2}{(x-1)(x-3)},$$

заданная на интервале $]1; 3[$. Когда x приближается к 1, значения функции неограниченно возрастают (говорят, что функция стремится к «плюс бесконечности»). Когда же x приближается к 3, значения функции неограниченно убывают (функция стремится к «минус бесконечности»)! Здесь нет даже значений, которых функция могла бы «достигать».

Отметим, что для дифференцируемых функций, заданных на отрезке, такая неприятность возникнуть не может.

Теперь остановимся на некоторых примерах.

Пример 2 (МЭИС *), 1977). *Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y(x)=x-2\ln x$ на отрезке $[1;\ e]$.*

Здесь $y'=1-2/x$. Приравнивая производную нулю и решая полученное уравнение, находим: $x=2$. Поскольку $1<2<e$, эта точка — критическая. Далее, анализируя формулу $y'=1-2/x$, мы видим, что производная не определена при $x=0$, но эта точка вне отрезка $[1;\ e]$. Значит, функция определена и дифференцируема на отрезке $[1;\ e]$ и потому по указанному выше правилу обязана принимать наибольшее и наименьшее значение, причем эти значения будут каждое в одной из трех точек: $x=1$, $x=e$ (граничные точки), $x=2$ (критическая точка). Имеем: $y(1)=1$, $y(2)=2-2\ln 2$, $y(e)=e-2$. Оценив эти числа, можно показать, что $y(2)$ — наименьшее, а $y(1)$ — наибольшее значение данной функции на отрезке $[1;\ e]$, но сравнить $2-2\ln 2$ и $e-2$ нелегко. Проще исследовать поведение функции на данном отрезке. Строя схему знаков производной и возрастания и убывания функции y (рис. 2), находим, что функция y убывает на $[1;\ 2]$ и возрастает на $[2;\ e]$. Значит, наименьшее значение функции y существует и достигается при $x=2$ (и это — точка минимума). Наибольшее значение тоже существует и достигается в одной из точек $x=1$, $x=e$ (но ни одна из них не является точкой максимума!). Сравнивая $y(1)=1$ и $y(e)=e-2$, находим, что $e-2<2{,}9-2=0{,}9<1$. Значит, наибольшим значением функции является $y(1)=1$.

Подобным образом (по знакам производной) исследуются все критические точки функции, когда требуется найти все экстремумы функции и указать их характер. Общее правило здесь такое.

Если в точке x_0 производная меняет знак с «плюса» на «минус», то x_0 — точка максимума функции;

если в точке x_0 производная меняет знак с «минуса» на «плюс», то x_0 — точка минимума функции;

если производная в точке x_0 равна нулю, но положительна как до точки x_0, так и за нею, или отрицательна как до точки x_0, так и за нею, то функция не имеет в точке x_0 ни максимума, ни минимума (такие точки называются *«точками перегиба»*).

Пример 3. *Найти экстремумы и наибольшие и наименьшие значения функции $y(x)=3x^5-5x^3+1$ на отрезке $[-2;\ 2]$.*

Приравнивая нулю производную $y'(x)=15x^4-15x^2$, получаем три критические точки: $x=-1$, $x=0$, $x=1$. Строя схему знаков производной и поведения функции (рис. 3), находим, что функция y имеет в точке $x=-1$ точку максимума, в $x=0$ точку перегиба и в точке $x=1$ точку минимума. Сравнивая значения функции y в точках $x=-2$, $x=-1$, $x=1$ и $x=2$, находим, что наибольшим значением функции на заданном отрезке является $y(2)=57$, а наименьшим $y(-2)=-55$.

3. «Текстовые» задачи на экстремумы

Выше мы остановились на исследовании функций с помощью производной. Необходимость такого исследования возникает при решении самых разнообразных прикладных («текстовых») задач. Общая схема решения этих задач следующая. Мы описываем условия задачи переменными и уравнениями и выписываем функцию, экстремум которой надо найти. Эта функция обычно зависит от многих переменных, но с помощью уравнений мы выражаем все переменные через какую-либо одну, подставляем их в выражение для функции и получаем функцию от одной переменной, после чего стандартным методом проводим исследование.

Пример 4 (МЭИС, 1977). *Найти конус наибольшего объема, образующая которого имеет данную длину l.*

Объем конуса выражается через высоту H и радиус основания конуса R следующим образом:

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2H.$$

В эту формулу входят две перемен-

*) Московский электротехнический институт связи.

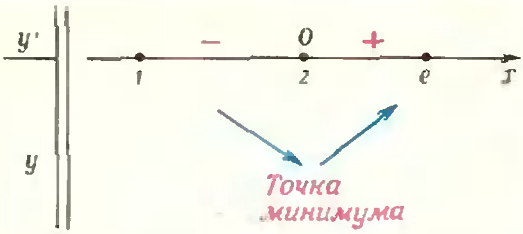


Рис. 2.

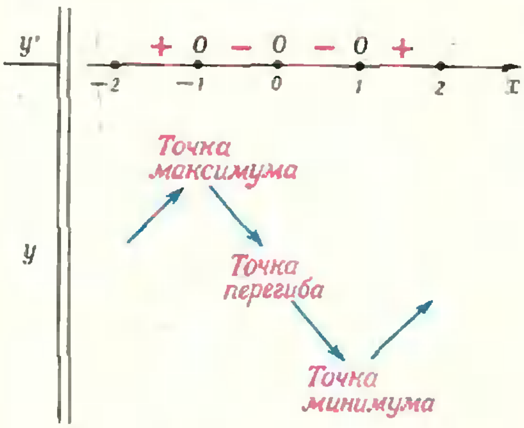


Рис. 3а.

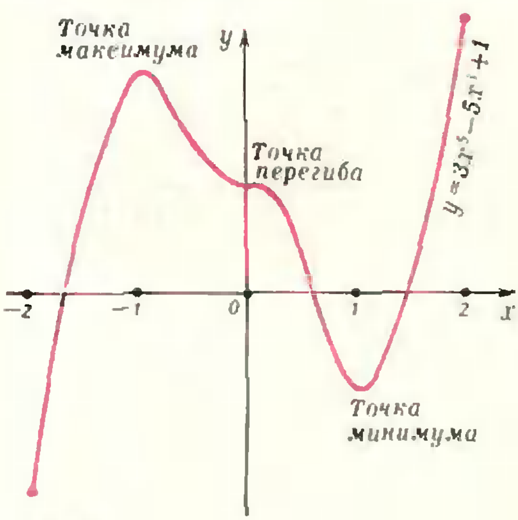


Рис. 3б.

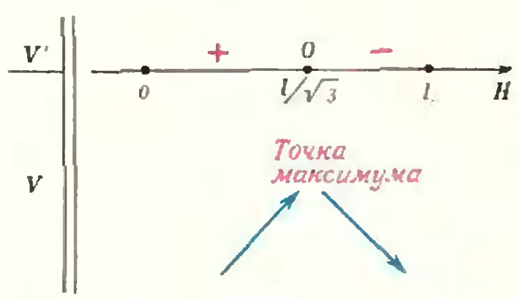


Рис. 4.

ные (R и H), но с помощью условия, что образующая имеет длину l, можно исключить одну из переменных. Какую именно? В принципе — безразлично, но на практике надо учитывать, что дальше нам придется решать уравнение $V'=0$, поэтому лучше оставить ту переменную, через которую V выражается наиболее просто. В данном случае имеем: $R^2+H^2=l^2$, откуда $R^2=l^2-H^2$, а также $H^2=l^2-R^2$. Получаем:

$$V(H)=\frac{1}{3}\pi(l^2-H^2)H,$$

$$V(R)=\frac{1}{3}\pi R^2\sqrt{l^2-R^2}.$$

Видно, что лучше оставить H, тогда

$$V(H)=\frac{1}{3}\pi l^2H-\frac{1}{3}\pi H^3,$$

$$V'(H)=\frac{1}{3}\pi l^2-\pi H^2.$$

Функция V определена (по смыслу задачи) при $H\in[0;\ l]$. Критическая точка всего одна: $H=l/\sqrt{3}$. Строя схему знаков производной и поведения функции (рис. 4), мы видим, что $H=l/\sqrt{3}$ — точка максимума, причем в ней достигается и наибольшее значение функции V, так как до этой точки V возрастает, а после нее — убывает.

Заметим, что если бы в задаче спрашивалось, *при каком радиусе основания объем конуса наибольший*, наше решение не изменилось бы. Мы сначала нашли бы $V(H)$, точку максимума (и наибольшего значения) $H=l/\sqrt{3}$, а потом

$$R=\sqrt{l^2-(l/\sqrt{3})^2}=l\sqrt{2/3}.$$

Упражнения

1 (МИТХТ*). 1977). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y(x)=x^4-8x^2-9$ на отрезке $[-1;\ 3]$.

2 (МИНХ**). 1977). Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y(x)=2\sin 2x+\cos 4x$ на отрезке $[0;\ \pi/3]$.

---

*) Московский институт тонкой химической технологии.

**) Московский институт народного хозяйства.

3 (МГУ, мехмат, 1977). Дана функция $f(x)=\cos x \cdot \sin^2 x$, $x \in [-\pi; \pi]$. Доказать, что наименьшее значение функции f на этом отрезке больше — 0,39.

4 (МЭИС, 1977). Цена бриллианта пропорциональна квадрату его массы. Если бриллиант разбить на две части, то в каком случае общая стоимость двух частей будет наименьшей?

5 (МЭИС, 1977). Даны точки $A(0; 3)$ и $B(4; 5)$. Найти на оси Ox точку M такую, чтобы $S=|AM|+|MB|$ было наименьшим.

6. Найти наибольшее значение функции $y(x)=\sin(\sin x)$.

7. Требуется построить несколько одинаковых домов общей жилой площадью 40 000 м². Затраты на постройку одного дома жилой площадью S складываются из стоимости фундамента, пропорциональной $\sqrt{S}$, и стоимости наземной части, пропорциональной $S\sqrt{S}$. При строительстве дома жилой площадью 400 м² 80% затрат идет на фундамент. Сколько надо строить домов, чтобы затраты были наименьшими?

8. Мощность, затрачиваемая на движение парохода, пропорциональна кубу его скорости. Найти наиболее экономичную скорость парохода при движении против течения, скорость которого равна a км/ч.

9. Имеется батарея с внутренним сопротивлением r. Какое сопротивление надо подключить к батарее, чтобы выделяемая на нем мощность была наибольшей?

10. На горизонтальной плоскости лежит кирпич массы m. С какой наименьшей (по модулю) силой и под каким углом к плоскости надо его тянуть, чтобы он сдвинулся с места, если коэффициент трения равен k?

11 (МИСиС*), 1977). Определить интервалы возрастания и убывания, экстремумы и построить схематически график функции

а) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 5$;
б) $f(x) = x^4 - 2x^3 - 2x^2$;
в) $f(x) = x^4 - \dfrac{20}{3}x^3 + 8x^2$;
г) $f(x) = x^2(x-1)^2$;
д) $f(x) = 3x^3 - x + 2$.

12 (МИСиС, 1977). На промежутке $[0; \pi]$ задана функция $y = 1 - \cos x$. Найти наибольшее значение абсциссы точки пересечения касательной к графику данной функции с осью Ox.

13 (МИСиС, 1977). Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак объемом V. Какими должны быть его размеры, чтобы на его изготовление ушло наименьшее количество материала?

14 (МВТУ**), 1977). Все вершины правильной треугольной призмы принадлежат сфере радиуса R. Какой должна быть высота призмы, чтобы ее объем был наибольшим?

*) Московский институт стали и сплавов.

**) Московское высшее техническое училище.

15 (МИСИ*), 1977). Найти наибольшее и наименьшее значение функций

а) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$ на отрезке $[-4; 0]$;

б) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 9$ на отрезке $[-1; 1]$;

в) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} + x^2 + 1$ на отрезке $[-3; -1]$.

16 (МВТУ, 1977). Одно из оснований цилиндра является сечением шара, а другое основание принадлежит большому кругу этого шара. Радиус шара равен R. Какой должна быть высота цилиндра, чтобы его объем был наибольшим?

17 (МИНХ, 1977). Найти наибольшее и наименьшее значения функции

а) $f(x) = 2\cdot 2^{3x} - 9\cdot 2^{2x} + 12\cdot 2^x$ на отрезке $[-1; 1]$;

б) $f(x) = \dfrac{2^x + 2^{-x}}{\ln 2}$ на отрезке $[-1; 2]$;

в) $f(x) = 2\ln^3 x - 9\ln^2 x + 12\ln x$ на отрезке $[e^{3/4}; e^4]$;

г) $f(x) = 2\log_2^3 x - 15\log_2^2 x + 36\log_2 x$ на отрезке $[4; 16]$.

18 (МИСиС, 1977). Из всех конусов, описанных около данного шара, найти тот, который имеет наименьший объем.

19 (МАИ, 1977). Корабль стоит на якоре в 9 км от ближайшей точки берега. С корабля нужно послать матроса в лагерь, расположенный в 15 км, считая по берегу, от ближайшей к кораблю точки берега (лагерь расположен на берегу). Если матрос может делать пешком по 5 км/час, а на веслах по 4 км/час, то в каком пункте берега он должен пристать, чтобы попасть в лагерь в кратчайшее время?

20 (МАИ, 1977). В равнобедренный треугольник с основанием a и высотой h вписан прямоугольник так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а две другие — на боковых сторонах. Какова должна быть высота прямоугольника, чтобы он имел наибольшую площадь? Найти эту площадь.

21 (МИСиС, 1977). Две точки движутся по осям координат в положительных направлениях с постоянными скоростями v_1 и v_2. В какой момент времени расстояние между движущимися точками будет наименьшее, если в начальный момент они занимали положения $(-3; 0)$ и $(0; 5)$?

22 (МИСиС, 1977). В фигуру, ограниченную линиями $y=x^2$, $y=2x^2$, $x=6$ вписан параллелограмм наибольшей площади так, что две его вершины лежат на прямой $x=6$, а две другие — на параболах $y=x^2$, $y=2x^2$. Найти эту площадь.

23 (МИСиС, 1977). В фигуру, ограниченную прямой $y=3x$ и параболой $y=x^2$, вписан прямоугольник наибольшей площади так, что две его вершины лежат на прямой, а две другие — на параболе. Найти эту площадь.

*) Московский инженерно-строительный институт.

Л. Тарасов

Симметрия в задачах по физике

С понятием симметрии человек встречается фактически везде — в природе, технике, искусстве, науке. Вспомним симметрию, свойственную бабочке и кленовому листу, симметрию форм автомобиля и самолета, симметрию в ритмическом построении стихотворения или музыкальной фразы, симметрию орнаментов, симметрию в атомной структуре молекул и кристаллов. В частности, симметрия довольно часто встречается в задачах по физике.

Что такое симметрия? Многие затрудняются дать ответ на этот вопрос, хотя проявления симметрии в различных конкретных случаях воспринимаются практически всеми. В повседневной практике с понятием симметрии обычно сопоставляют нечто уравновешенное, гармоничное, обладающее хорошим соотношением пропорций. При конкретном применении этого понятия говорят, например, о симметрии относительно оси, симметрии при отражении в зеркале, симметрии квадрата, правильного шестиугольника и т. д.

Решая задачи, мы нередко используем симметрию, не оговаривая этого факта, как нечто само собой разумеющееся. Так, представляется очевидным, что центр тяжести однородной прямоугольной пластины находится в точке пересечения ее диагоналей, что поле вне заряженного металлического шара можно рассматривать как поле точечного заряда, находящегося в центре шара, что математический маятник совершает колебания, симметричные относительно направления силы тяжести.

В решениях задач часто можно встретить фразы типа «из соображений симметрии ясно, что...» или «на основании симметрии можно заключить...». Вот несколько конкретных примеров.

Задача 1. *Четыре одинаковых точечных заряда q размещены в вершинах квадрата. Какой заряд Q противоположного знака надо поместить в центре квадрата, чтобы система зарядов оказалась в равновесии?*

Равновесие означает, что сумма сил, приложенных к каждому заряду, равна нулю. При этом достаточно рассмотреть равновесие одного из пяти зарядов. Спрашивается, какого? Из соображений симметрии ясно, что рассматривать заряд Q не имеет смысла, так как он будет находиться в равновесии независимо от своей величины. Опять-таки из симметрии очевидно, что все заряды q эквивалентны, так что с равным основанием можно выбрать любой из них. Рассмотрим, например, заряд, находящийся в точке A (рис. 1). Изобразим силы $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, $\vec{F}_3$ и $\vec{F}_4$, действующие на него со стороны остальных четырех зарядов. Спроектируем эти силы на направление AB и запишем условие

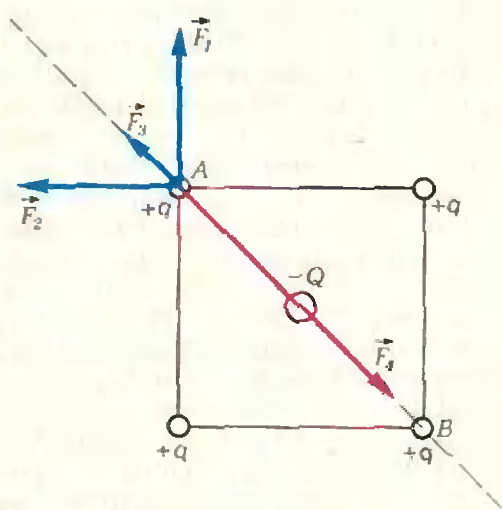


Рис. 1.

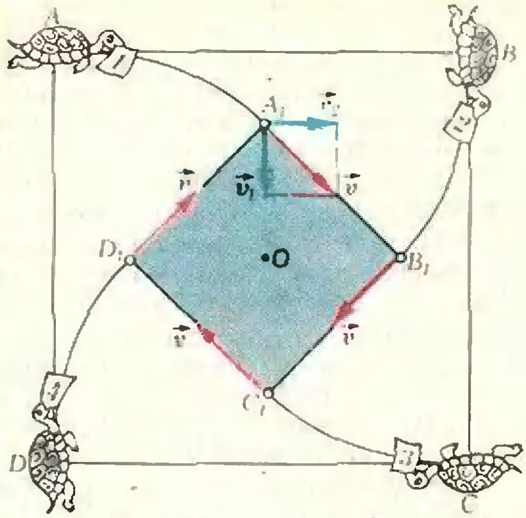


Рис. 2.

равновесия:

$$\left|\vec{F}_4\right| - \left|\vec{F}_1\right| \cos 45^\circ - \left|\vec{F}_2\right| \cos 45^\circ - \left|\vec{F}_3\right| = 0,$$

или, используя закон Кулона (одинаковый для всех слагаемых множитель $1/(4\pi\varepsilon_0)$ попутно сокращаем):

$$\frac{Qq}{a^2/2} - \sqrt{2}\,\frac{q^2}{a^2} - \frac{q^2}{2a^2} = 0$$

(здесь a — длина стороны квадрата). Отсюда следует, что

$$Q = \frac{q}{4}\left(2\sqrt{2} + 1\right).$$

Задача 2. *Четыре черепахи находятся в вершинах квадрата со стороной a. Они начинают одновременно двигаться с постоянной по величине скоростью $\vec{v}$, причем первая черепаха все время держит курс на вторую, вторая на третью, третья на четвертую, четвертая на первую. Встретятся ли черепахи? Если встретятся, то через какое время?*

Прежде всего заметим, что с точки зрения условия задачи все черепахи полностью равноправны, эквивалентны друг другу. Из соображений симметрии ясно, что в любой момент времени черепахи будут образовывать квадрат, а скорости их будут направлены по сторонам квадрата (рис. 2). Ориентация и размеры таких квадратов будут изменяться со временем — до тех пор, пока квадрат не стянется в точку O (тогда черепахи и встретятся). Опять-таки из соображений симметрии точка O — общий центр всех упомянутых квадратов. Для того чтобы найти время t, через которое произойдет встреча черепах, разложим вектор скорости $\vec{v}$ черепахи на составляющую $\vec{v}_1$, направленную к центру O, и перпендикулярную составляющую $\vec{v}_2$. Тогда

$$t = \frac{a/\sqrt{2}}{\left|\vec{v}_1\right|} = \frac{a/\sqrt{2}}{\left|\vec{v}\right|/\sqrt{2}} = \frac{a}{\left|\vec{v}\right|}.$$

Задача 3. *Однородный брусок массы m висит на трех вертикальных проволоках равной длины, расположенных симметрично (рис. 3). Определить натяжения проволок, если средняя проволока стальная, а две другие медные. Считать, что модуль Юнга стали в два раза больше модуля Юнга меди, а поперечные сечения проволок одинаковы.*

Из соображений симметрии ясно, что удлинение Δl всех трех проволок одно и то же. По закону Гука силы натяжения стальной и медной проволок равны соответственно

$$\left|\vec{F}_с\right| = \frac{\Delta l}{l_0} SE_с \quad \text{и} \quad \left|\vec{F}_м\right| = \frac{\Delta l}{l_0} SE_м,$$

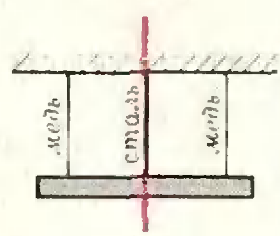


Рис. 3.

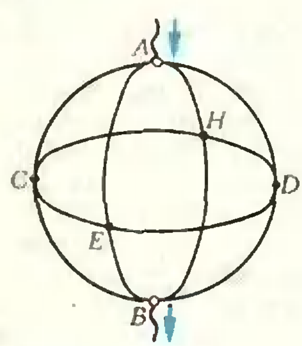


Рис. 4.

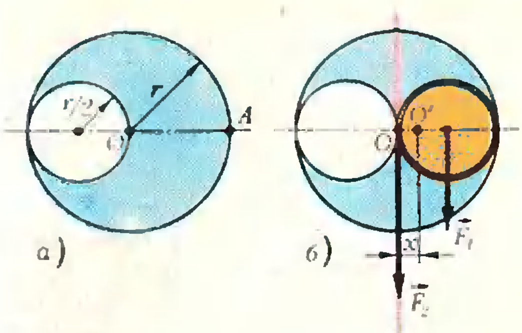


Рис. 5.

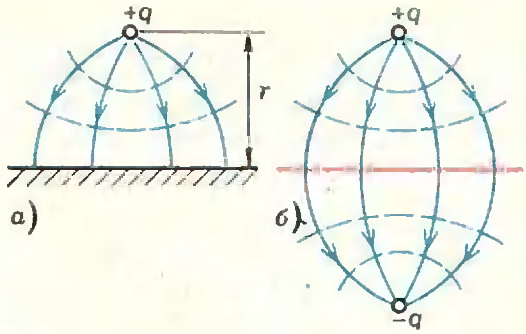


Рис. 6.

где E_c и $E_м$ — модули Юнга стали и меди, l_0 и S — начальная длина и площадь поперечного сечения проволок. Учитывая, что из условия равновесия бруска

$$2\left|\vec{F}_м\right|+\left|\vec{F}_c\right|-m\left|\vec{g}\right|=0,$$

находим

$$\left|\vec{F}_c\right|=m\left|\vec{g}\right|/2 \text{ и } \left|\vec{F}_м\right|=m\left|\vec{g}\right|/4.$$

З а д а ч а 4. *Их трех одинаковых проволочных колец сварен каркас, показанный на рисунке 4. Найти сопротивление между точками A и B, если сопротивление четверти длины каждого кольца равно R.*

И з с о о б р а ж е н и й с и м м е т р и и о ч е в и д н о, что в точке A электрический ток в равных частях распределится по ветвям AC, AE, AD, AH, поэтому точки C, E, D, H будут иметь одинаковые потенциалы. Следовательно, по кольцу $CEDH$ ток не идет. Убрав мысленно это кольцо, находим искомое сопротивление R_{AB} как общее сопротивление четырех параллельно соединенных проводников с сопротивлением $2R$ каждый:

$$R_{AB}=2R/4=R/2.$$

Разобранные задачи наглядно показывают, как на практике работают соображения симметрии. Во всех случаях имела место определенная симметрия физической ситуации: одинаковость по величине и знаку зарядов, расположенных в вершинах квадрата; симметричное начальное положение и одинаковое поведение черепах; симметрия подвесной конструкции в случае балки и т. п. Встречаются, однако, задачи, где симметрия присутствует не столь явно, а как бы в скрытом виде. Для выявления симметрии надо немного видоизменить рассматриваемую в задаче ситуацию (не меняя, разумеется, ее физического содержания). В результате «симметризации» задачи удается, как правило, быстро и просто найти искомый результат. Приведем примеры.

З а д а ч а 5. *Найти положение центра тяжести плоской фигуры, показанной на рисунке 5, а.*

Очевидно, что центр тяжести фигуры находится где-то на отрезке OA. Чтобы найти его положение, заменим несимметричную фигуру, показанную на рисунке 5, *а*, двумя с и м м е т р и ч н ы м и фигурами, вложенными друг в друга (рис. 5, *б*). Одна из них — это круг радиуса $r/2$, а другая — круг радиуса r с двумя симметричными круговыми отверстиями радиуса $r/2$ каждый. На рисунке 5, *б* показаны силы тяжести $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ этих фигур, точки приложения сил очевидны из соображений симметрии.

Обозначим через x расстояние искомого центра тяжести O' от точки O. Из условия равновесия (условия равенства нулю суммы моментов относительно оси, проходящей через точку O') получаем:

$$\left|\vec{F}_2\right|x-\left|\vec{F}_1\right|(r/2-x)=0,$$

или, учитывая, что сила тяжести фигуры пропорциональна ее площади:

$$(\pi r^2-\pi r^2/2)x-\pi r^2/4(r/2-x)=0.$$

Отсюда $x=r/6$.

З а д а ч а 6. *Точечный заряд $+q$ находится над проводящей плоскостью на расстоянии r. С какой силой он притягивается этой плоскостью?*

Заряд $+q$ наведет на плоскости отрицательные заряды, плотность которых будет уменьшаться по мере удаления от заряда $+q$. Картина силовых линий и эквипотенциальных поверхностей электрического поля, созданного точечным зарядом $+q$ и наведенными на плоскости зарядами, показана на рисунке 6, *а* (сплошные синие линии — силовые линии поля, пунктирные — сечения эквипотенциальных поверхностей).

Если эту несимметричную картину дополнить до симметричной (рис. 6, *б*), то получим картину электрического поля, образованного двумя точечными зарядами $+q$ и $-q$, находящимися на расстоянии $2r$ друг от друга. Это означает, что сверху от плоскости электрическое поле, созданное точечным зарядом $+q$ и наведенными зарядами, совпадает с полем точечных зарядов $+q$ и $-q$. Следовательно, искомая сила притяжения заряда $+q$ к плоскости равна силе взаимодействия зарядов $+q$ и $-q$:

$$\left|\vec{F}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{q^2}{4r^2}.$$

Задача 7. *Мяч бросают с поверхности земли под углом α с начальной скоростью $\vec{v}_0$ (рис. 7, а). На расстоянии l от точки бросания находится вертикальная стенка. Мяч упруго ударяется о стенку и отскакивает обратно. На каком расстоянии x от стенки он приземлится?*

Уберем мысленно стенку и продолжим траекторию полета мячика (пунктирная линия на рисунке 7, б). При упругом ударе о стенку абсолютная величина скорости мяча не изменяется, а угол падения β равен углу отражения β_1. Следовательно, участки траектории AB (в отсутствие стенки) и AC (при наличии стенки) симметричны относительно прямой AA_1 (относительно стенки). Отсюда получаем:

$$x = OB - l = \frac{v_0^2}{\left|\vec{g}\right|}\sin 2\alpha - l.$$

Задача 8. *Между точками A и B включено сопротивление R. Кроме того, имеются еще $N-2$ точек, причем между каждой парой точек, включая сюда и точки A и B, также присоединено сопротивление R. Найти результирующее общее сопротивление между точками A и B.*

Разместим мысленно указанные $N-2$ точки на прямой OO_1, относительно которой точки A и B симметричны. Тем самым мы перейдем от несимметричной картины, показанной на рисунке 8, *а*, к симметричной картине, приведенной на рисунке 8, *б* (на рисунке $N=6$). Из соображений симметрии ясно, что потенциалы всех точек на прямой OO_1 одинаковы, поэтому эти точки можно разъединить. Тогда искомое сопротивление R_{AB} можно найти по формуле:

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R} + \frac{N-2}{2R}.$$

Отсюда

$$R_{AB} = 2R/N.$$

Вернемся к вопросу, поставленному ранее: что такое симметрия? По какому основному признаку можно усмотреть ее присутствие в том или ином случае? Известный немецкий математик Герман Вейль предложил прекрасное и простое определение симметрии, согласно которому *симметричным называется такой предмет, который можно как-то изме-*

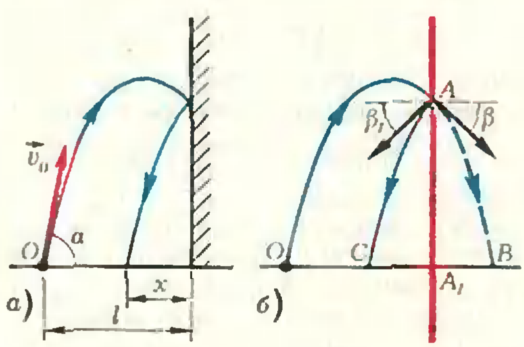


Рис. 7.

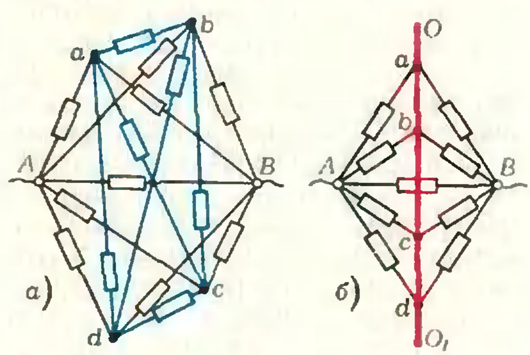


Рис. 8.

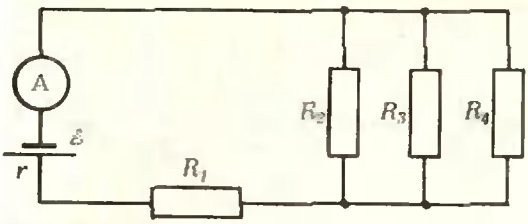


Рис. 9.

нять, получая в результате то же, с чего начали. Так, в задаче 4 поворот проволочного каркаса вокруг прямой AB на угол 90° возвращает нас к исходной ситуации, то есть фактически ничего не изменяет. Это — симметрия квадрата; она имеет место также в задачах 1 и 2. В задачах 3, 5, 6, 7 и 8 мы встречаемся с так называемой зеркальной симметрией — симметрией по отношению к отражению в плоском зеркале; сечение плоскости этого зеркала (плоскости симметрии) показано на соответствующих рисунках красной линией.

Однако понятие симметрии связано не только с чисто геометрическими преобразованиями (поворотами, отражениями, переносами и т. п.). Обратимся к такому примеру.

Известен случай с одним опытным наборщиком. Набирая страницу задачника по физике, он увидел в рукописи следующее выражение для показания амперметра в цепи, изображенной на рисунке 9:

$$I=\frac{\mathscr{E}}{r+\dfrac{R_1R_3R_4+R_1R_2R_3+R_2R_3R_4}{R_3R_4+R_2R_3+R_2R_4}}.$$

Посмотрев внимательно на это выражение, наборщик заявил, что в нем содержится какая-то ошибка. Дело в том, объяснил он, что, согласно рисунку, показание амперметра не должно измениться, если, например, поменять местами сопротивления R_2 и R_3. Если же в рассматриваемой формуле заменить R_2 на R_3, а R_3 на R_2, то результат, как легко видеть, изменится. Наборщик оказался совершенно прав: в числителе дроби в формуле было пропущено слагаемое $R_1R_2R_4$.

Случай с наборщиком весьма поучителен. Важно помнить, что если в данной ситуации (электрической схеме, конструкции и т. п.) имеет место симметрия по отношению к перестановке каких-то элементов, то эта симметрия должна проявляться и в соответствующих формулах.

В заключение предлагается несколько задач для самостоятельного решения.

Упражнения

1. Мяч бросают горизонтально с высоты H с начальной скоростью $\vec{v}_0$ (рис. 10). Мяч упруго ударяется последовательно о две параллельные вертикальные стенки. Найти расстояние l между стенками, при котором мяч попадает в точку A.

2. Найти положение центра тяжести диска, в котором сделаны два круговых выреза, как показано на рисунке 11.

3. В вершинах правильного шестиугольника помещены одинаковые заряды $+q$. Какой заряд Q следует поместить в центр шестиугольника, чтобы система зарядов оказалась в равновесии?

4. На расстоянии r от двух взаимно перпендикулярных проводящих полуплоскостей помещен заряд q. Найти силу, действующую на заряд.

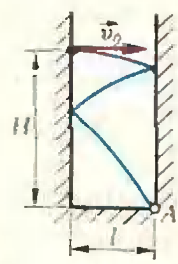


Рис. 10.

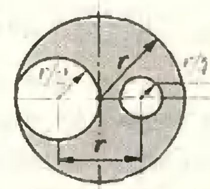


Рис. 11.

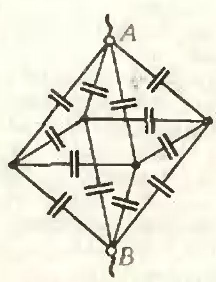


Рис. 12.

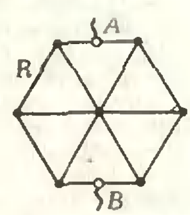


Рис. 13.

5. Двенадцать одинаковых конденсаторов емкостью C каждый собраны в батарею в виде восьмигранника (рис. 12). Какова емкость этой батареи между точками A и B?

6. Из одинаковых отрезков проволоки сопротивлением R каждый сварена фигура, показанная на рисунке 13. Найти сопротивление между точками A и B.

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1977 году

Уральский государственнный университет им. А. М. Горького

Математика

Варианты письменного экзамена

Математико-механический факультет

1. На один ряд, в котором 8 стульев, рассаживаются 5 юношей и 3 девушки. Сколькими способами они могут сесть так, чтобы не все девушки оказались сидящими непосредственно рядом?

2. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны a, а угол между ними равен α. Грань пирамиды, проходящая через основание треугольника, перпендикулярна плоскости основания, а две другие образуют с плоскостью основания угол φ. Найти объем пирамиды.

3. Решить неравенство

$$\log_{x^2}\frac{|x-5|}{6x}+\frac{1}{3}\geqslant 0.$$

4. Найти все значения x из отрезка $[-\pi;\ 0]$, при которых функция $f(x)=e^{\sin\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)}$ удовлетворяет системе неравенств

$$\begin{cases}\ln f(x)>\frac{1}{2},\\ f'(x)\leqslant -f(x).\end{cases}$$

Физический факультет

1. Точка движется по координатной прямой так, что ее координата s изменяется по закону $s=A+B\sin\frac{\pi t}{2}$ (A и B — постоянные). Найти ускорение при $t=1$.

2. Периметр равнобедренного треугольника равен $2p$. Какой длины должны быть его стороны, чтобы объем тела, образованного вращением этого треугольника вокруг боковой стороны, был наибольшим?

3. Решить неравенство

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{x^2+4x+3}}\leqslant 3^{1+x}.$$

4. При каких значениях x из отрезка $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{7\pi}{6}\right]$ функция $y=\sin x\cdot\cos 2x$ удовлетворяет неравенству $y''+y+2\sqrt{3}>0$?

Задачи устного экзамена

Математико-механический факультет

1. Для каждого значения параметра a решить неравенство

$$\log_a(1-x^2)\geqslant 1.$$

2. При каких положительных значениях параметра a выполняется неравенство $\lim\limits_{x\to a}\frac{x^2-a^2}{\sqrt{x}-\sqrt{a}}\geqslant 32$?

3. Решить систему неравенств

$$\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}\cos x<\log_{\frac{1}{2}}\operatorname{tg}x,\\ 0\leqslant x\leqslant\pi\end{cases}$$

4. Верно ли, что площадь фигуры, ограниченной линиями $y=e^{x-1}$, $y=0$, $x=0$, $x=2$, меньше 2?

5. Длина всей границы кругового сектора равна l. Какова должна быть длина радиуса сектора, чтобы площадь сектора была наибольшей?

6. При каких положительных значениях параметра a площадь фигуры, ог-

раниченной линиями $y=\cos ax$, $y=0$, $x=\frac{\pi}{6a}$, $x=\frac{\pi}{2a}$, больше 3?

7. Найти все значения параметра a, при которых точки минимума функции $y=1+a^2x-x^3$ удовлетворяют неравенству

$$\frac{x^2+x+2}{x^2+5x+6}\leqslant 0.$$

8. Для каждого значения параметра a решить уравнение

$$\sin x-\sqrt{a}=\cos 2x+2.$$

9. При каком натуральном n девятый член в разложении $(1+0{,}1)^n$ является наибольшим?

10. Прямая (AD) делит медиану $[BM]$ треугольника ABC в отношении $5:1$, считая от B. В каком отношении (AD) делит площадь треугольника ABC?

Физический факультет

1. Существуют ли такие отрицательные значения параметра a, при которых

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\sqrt{1-a}\cdot x^2}{\sin^2 ax}>-1?$$

2. Решить уравнение

$$\frac{1-\sin x}{|1-\sin x|}\cdot\sin 2x=-\sqrt{2}\cos x.$$

3. Решить неравенство

$$\log_{\sin(-x)}\left(\sin x+\frac{3}{2}\right)<0.$$

4. Вычислить площадь, ограниченную линией $|y|=1-x^2$.

5. Для каждого значения параметра a решить неравенство $\sqrt{5x^2+a^2}\geqslant -3x$.

6. Решить неравенство $x^{|\ln x|}>e^4$.

7. Найти объем параллелепипеда с ребрами a, b, c, образующими друг с другом углы $\frac{\pi}{2}$, α, α.

8. Решить неравенство

$$\sin x\cdot|\sin x|\leqslant\frac{1}{2}.$$

9. При каких положительных значениях параметра a выполняется неравенство

$$\lim_{x\to a}\frac{ax^2-(a^2+2)x+2a}{ax^2+(a-2-a^2)x-(a^2-2a)}>0?$$

10. На координатной плоскости изобразить множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$(x-|x|)^2+(y-|y|)^2\leqslant 4.$$

Физика

Математико-механический факультет

1. Мячик брошен вертикально вверх из точки, находящейся на высоте h. Определить начальную и конечную (при ударе о землю) скорости мячика, если за все время движения он пролетел путь $3h$.

2. Вагонетку массой $m=3000$ кг поднимают по рельсам в гору, наклон которой $\alpha=30°$, с ускорением $|\vec{a}|=0{,}2$ м/с². Коэффициент трения $\mu=0{,}1$. Какую работу совершила сила тяги на пути $l=50$ м?

3. Кислород массой $m=10$ г находится под давлением $p_1=3$ атм при температуре $t_1=10°$С. После расширения вследствие нагревания при постоянном давлении кислород занял объем $V_2=10^{-2}$ м³. Найти объем газа до расширения и температуру после расширения.

4. Батарея из двух последовательно соединенных конденсаторов емкостями $C_1=3\cdot10^{-10}$ Ф и $C_2=5\cdot10^{-10}$ Ф заряжена до напряжения $U=12$ кВ. Определить напряжения на обоих конденсаторах и заряды на их обкладках.

5. Емкость переменного конденсатора изменяется от $C_1=56$ пФ до $C_2=667$ пФ. Какой комплект катушек индуктивности нужно иметь, чтобы колебательный контур можно было настраивать на радиостанции, работающие в диапазоне длин волн от $\lambda_1=40$ м до $\lambda_2=2600$ м?

Физический факультет

1. Локомотив на горизонтальном участке пути развивает постоянную силу тяги $|\vec{F}|=3{,}5\cdot10^5$ Н. На участке пути длиной $l=600$ м скорость поезда возросла с $|\vec{v}_1|=10$ м/с до $|\vec{v}_2|=20$ м/с. Определить коэффициент трения, если масса поезда $m=10^6$ кг.

2. В стеклянный стакан массой $m_1=120$ г при температуре $t_1=15°$ С налили $m_2=200$ г воды при $t_2=80°$С. Какое количество теплоты будет передано стакану? Удельная теплоемкость стекла $c_1=0{,}20$ кал/(г·град), воды — $c_2=1$ кал/(г×град).

3. По газопроводу пропускают углекислый газ при давлении $p=4$ атм и температуре $t=7°$С. Какова скорость движения газа в трубе, если за время $\tau=10$ минут протекает $m=2$ кг углекислого газа? Площадь сечения канала трубы $S=5$ см².

4. На плоскопараллельную стеклянную пластину толщиной $d=2$ см падает луч света под углом $\alpha=60°$. Часть света отражается, а часть, преломляясь, проходит в стекло, отражается от нижней поверхности и, преломляясь вторично, выходит обратно параллельно первому отраженному лучу. Определить расстояние между двумя отраженными лучами, если коэффициент преломления стекла $n=1{,}73$.

5. Работа выхода электронов из кадмия $A=4{,}08$ эВ. Какова должна быть длина волны света, чтобы при фотоэффекте максимальная скорость вылетающих электронов была равна $|\vec{v}|=7{,}2\cdot10^5$ м/с? Постоянная Планка $h=6{,}62\cdot10^{-34}$Дж·с, масса электрона $m=9{,}1\cdot10^{-31}$ кг.

Э. Голубов, Р. Емлин

Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Математика

Варианты письменного экзамена

Механико-математический факультет

1. В правильную четырехугольную пирамиду, боковые грани которой наклонены к плоскости основания под углом φ, вписан цилиндр (одно основание цилиндра лежит в плоскости основания пирамиды, а окружность второго его основания имеет по одной общей точке с каждой боковой гранью пирамиды). Радиус основания цилиндра и его высота равны r. Вычислить объем пирамиды. При каком значении угла φ объем пирамиды наименьший?

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$y=\frac{|4-x^2|}{4} \text{ и } y=7-|x|.$$

3. Решить неравенство

$$\sqrt{\log_2^2 x+\log_{\frac{1}{2}} x^2-3}>\sqrt{5}\,(\log_4 x^2-3).$$

4. Сколько есть четырехзначных чисел, запись которых в десятичной системе счисления содержит не более двух разных цифр?

Физический факультет

1. Вокруг шара радиуса r описана правильная треугольная пирамида с высотой H. Вычислить площадь боковой поверхности пирамиды. При каком H эта площадь наименьшая? Найти наименьшее значение площади.

2. При каких значениях x производная функции

$$y=\sin 2x+10\cos x-6x$$

равна нулю?

3. Найти предел

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{1+3+5+\ldots+(2n-1)}}{2n^2+n+1}.$$

4. На плоскости даны две взаимно перпендикулярные прямые. Найти множество всех тех точек плоскости, произведение расстояний от которых до данных прямых равно сумме этих расстояний.

Задачи устного экзамена

1. Решить уравнение

$$\sin|x|=|\sin x|.$$

2. Решить неравенство

$$\sqrt{4-x^2}+\frac{1}{x}\geqslant 0.$$

3. Сколько корней имеет уравнение

$$x^5=5x+2a$$

в зависимости от параметра a?

4. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases}|x|+|y|=1,\\ x^2+y^2=a\end{cases}$$

в зависимости от параметра a?

5. Изобразить в прямоугольной системе координат множество точек

$$\left\{(x;\,y)\,\middle|\,\log_{\left(|x|-\frac{1}{2}\right)}(x^2+y^2)\leqslant\log_{\left(|x|-\frac{1}{2}\right)}4\right\}.$$

6. Найти все значения a, при которых множество

$$\{(x;\,y)\mid x^2+y^2+2x\leqslant 1\}\cap$$
$$\cap\,\{(x;\,y)\mid x-y+a=0\}$$

содержит только одну точку. Найти эту точку.

7. Построить график функции

$$y=\begin{cases}1-\sqrt{1-x^2}, & \text{если } x\leqslant 1,\\ 1+\log_{\frac{1}{2}} x, & \text{если } x>1.\end{cases}$$

8. Доказать, что функция

$$f(x)=\frac{2}{3}x^9-x^6+2x^3-3x^2+6x-1$$

монотонно возрастает на $\mathbf{R}$.

9. Найти все значения a, при которых функция

$$f(x)=\frac{a^2-1}{3}x^3+(a-1)x^2+2x+1$$

возрастает для всех $x\in\mathbf{R}$.

10. Пусть x_1 и x_2 — соответственно, точка максимума и точка минимума функции

$$f(x)=2x^3-9ax^2+12a^2x+1.$$

При каких a $x_1^2=x_2$?

11. При каких a функция

$$f(x)=\frac{a}{3}x^3+(a+2)x^2+(a-1)x+2$$

имеет отрицательную точку минимума?

12. При каких значениях x обращается в ноль та из первообразных функции

$$f(x)=\pi\sin\pi x+2x-4,$$

которая при $x=1$ имеет значение 3?

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$y=2+\sin x \text{ и } y=1+\cos^2 x$$

на промежутке $[0;\,\pi]$.

14. Вычислить объем пространственной фигуры, образованной вращением во-

круг прямой $y=1$ плоской фигуры, ограниченной графиком функции

$$y = 1 + \cos^2 x$$

на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$ и этой прямой.

15. Будет ли последовательность

$$a_n = \frac{n^2 - n + 1}{n^2 + n + 1}$$

монотонной?

16. Доказать, что для произвольного натурального числа $n \geqslant 2$

$$\left(1 - \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{9}\right)\left(1 - \frac{1}{16}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n}.$$

17. Вычислить предел

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n}.$$

18. Сколько есть пятизначных чисел, в записи которых каждая последующая цифра больше предыдущей?

19. Прямые l_1, l_2, l_3 параллельны и не лежат в одной плоскости. На l_1 взято m точек, на l_2 — n точек и на l_3 — k точек. Сколько есть треугольников с вершинами в этих точках?

20. Сумма квадратов длин всех сторон и всех диагоналей правильного многоугольника равна n^2r^2, где n — число сторон многоугольника, а r — радиус описанной окружности. Доказать это.

21. Доказать, что отношение суммы квадратов длин медиан треугольника к сумме квадратов длин его сторон равно $\frac{3}{4}$.

22. Вычислить площадь равнобедренной трапеции, если ее высота равна h, а боковую сторону видно из центра описанной окружности под углом α.

23. Можно ли из отрезков, конгруэнтных медианам треугольника, построить треугольник?

24. Вычислить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 5\vec{p} + 2\vec{q}$ и $\vec{b} = \vec{p} - 3\vec{q}$, если известно, что $|\vec{p}| = 2\sqrt{2}$, $|\vec{q}| = 3$ и $\widehat{(\vec{p}, \vec{q})} = \frac{\pi}{4}$.

В. Вышенский, Н. Перестюк, А. Самойленко

Ярославский государственный университет

Ярославский государственный университет был основан в 1918 году по декрету, подписанному В. И. Лениным. В связи с тяжелым положением в стране после гражданской войны в 1924 году он был реорганизован в педагогический институт. В 1970 году — в год столетия со дня рождения В. И. Ленина — университет возобновил свою работу. Сейчас в составе университета 5 факультетов: математический, физический, экономический, биологии и психологии, истории и права.

Математический факультет имеет два отделения — математики и прикладной математики.

Студенты физического факультета специализируются по теоретической физике, физике твердого тела и радиофизике.

Математика

Математический факультет

1. Из точки P $(-3;\ 9)$ кривой $y=x^2$ опущены перпендикуляры на оси координат. В каком отношении, считая от оси абсцисс, кривая $y=x^2$ делит площадь прямоугольника, образованного этими перпендикулярами и осями координат?

2. Каким должен быть угол при вершине равнобедренного треугольника, вписанного в данный круг, чтобы его периметр был наибольшим?

3. Решить уравнение

$$(x+4)\log_4(x+1) - (x-4)\log_2(x-1) = \frac{8}{3}\log_2(x^2-1)$$

4. Доказать неравенство

$$n^{n+1} > (n+1)^n \quad (n \geqslant 3,\ n \in N).$$

Физический факультет

1. Найти

$$\lim_{x \to \sqrt{2}} \frac{x^4 - 4x^2 + 4}{x^3 - 2x}.$$

2. Боковая поверхность правильной четырехугольной пирамиды равна a^2. Найти наибольший объем этой пирамиды.

3. Решить неравенство:

$$\frac{2 - 4\log_9 x}{\sqrt{2x^2 - x - 6}} \geqslant 0.$$

4. Решить уравнение:

$$81^{(\sin 2x - 1)\cos 3x} - 9^{(\sin x - \cos x)^2} = 0.$$

М. Доброхотова

Московский институт народного хозяйства им. Г. В. Плеханова

МИНХ им. Г. В. Плеханова — один из старейших и крупнейших экономических вузов Советского Союза. На его одиннадцати факультетах обучается около 15 тысяч студентов. На 47 кафедрах института трудятся свыше 500 аспирантов.

В институте имеются следующие факультеты: общеэкономический (специальности — планирование народного хозяйства, экономика труда), экономической кибернетики, торгово-экономический (экономика торговли, экономика общественного питания, бухгалтерский учет в торговле и промышленности), финансовый (финансы и кредит в промышленности и торговле, планирование цен и ценообразование), товароведения и организации торговли продовольственными товарами, товароведения и организации торговли промышленными товарами, экономики промышленности, экономики и планирования материально-технического снабжения, технологический (инженер-технолог по технологии и организации общественного питания), механический (инженер-механик по машинам и аппаратам пищевых производств), заочный (инженер-технолог по технологии и организации общественного питания, экономика общественного питания).

На всех факультетах, кроме технологического, механического и заочного, вступительный экзамен по математике — письменный; на технологическом факультете — устный; на механическом — и письменный, и устный; на заочном — устный на специальности «инженер-технолог» и письменный на второй специальности.

Математика

Вариант 1

(для специальностей «экономическая кибернетика» и «экономика промышленности»)

1. Решить уравнение

$$\sqrt{1-\cos 2x}=\sqrt{2}\cos x,$$

где $0\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$.

2. Найти область определения и множество значений функции

$$f(x)=\sqrt{x-1}+2\sqrt{3-x}.$$

3. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с площадью S и острым углом φ. Площадь большей боковой грани равна Q. Найти объем призмы.

4. Исследовать функцию с помощью производной и построить ее график

$$y=x^4-2x^2+5.$$

5. Двузначное число втрое больше суммы своих цифр, а квадрат этой суммы цифр равен утроенному искомому числу. Найти это число.

Вариант 2

(товароведение и организация торговли промышленными товарами, экономика торговли)

1. Решить неравенство

$$4^{x+1}-16^x<2\log_4 8.$$

2. В какой точке касательная к графику функции

$$y=\frac{x+2}{x-2}$$

образует угол 135° с осью Ox? Написать уравнение касательной.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной на отрезке $\left[\frac{\pi}{12};\ \frac{5\pi}{12}\right]$ графиками функций

$$y=\sin 2x,\qquad y=1-\sin 2x.$$

4. Найти косинус угла при вершине равнобедренного треугольника, имеющего наибольшую площадь при данной постоянной длине l медианы, проведенной к его боковой стороне.

\+ 5. Двое рабочих, работая одновременно, выполнили всю работу за 5 дней. Если бы первый рабочий работал в два раза быстрее, а второй в два раза медленнее, то всю работу они выполнили бы за 4 дня. За сколько дней выполнил бы всю работу первый рабочий, работая один?

Вариант 3

(планирование цен и ценообразование, планирование народного хозяйства, финансы и кредит в промышленности и торговле)

1. Решить неравенство

$$1\leqslant\frac{2-x}{x+1}\leqslant 2.$$

2. Найти промежутки возрастания и убывания функции

$$f(x)=2^{2x}-5\cdot 2^x+(2\ln 2)x.$$

3. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций

$$y=2-x^2,\ y=1,\ y=0.$$

\+ 4. Через гипотенузу BC прямоугольного треугольника ABC проведена плоскость α, расстояние от вершины A до этой плоскости равно 3 см. Найти угол между плоскостью α и плоскостью треугольника, если $|AB|=10$ см, $|AC|=15/2$ см.

\+ 5. Два поезда отправляются одновременно навстречу друг другу со станций A и B, расстояние между которыми 300 км. Первый из них приходит на станцию B на 1,5 часа раньше, чем второй на станцию A. В то время как первый проходит 250 км, второй делает только 200 км. Найти скорость каждого поезда.

Вариант 4
(экономика труда, экономика и планирование материально-технического снабжения, экономика общественного питания)

1. Решить неравенство
$$\frac{2x+3}{x^2+x-12}\leqslant\frac{1}{2}.$$

2. Найти наибольшее и наименьшее значения функции
$$f(x)=2\cdot 3^{3x}-3^{2x}\cdot 4+2\cdot 3^x$$
на отрезке $[-1;\ 1]$.

3. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций
$$y=x^2-4,\quad y=4-x^2.$$

4. Радиус вписанной в конус сферы равен R. Найти объем конуса, если центр описанной вокруг конуса сферы совпадает с центром вписанной сферы.

5. На мебельной фабрике изготавливаются столы и стулья. На изготовление одного стола расходуется 5 м досок и 1 м фанеры. На изготовление одного стула расходуется 1 м досок и 2 м фанеры. Сколько было произведено столов и стульев, если известно, что досок и фанеры было израсходовано по 900 м?

Вариант 5
(товароведение и организация торговли продовольственными товарами, бухгалтерский учет в торговле и промышленности, машины и аппараты пищевых производств)

1. Решить уравнение
$$2\cos^2 x-4\sin x\cdot\cos x+1=0.$$

2. Решить неравенство
$$\lg(x-1)+\lg(x+1)<\lg(x+5).$$

3. В арифметической прогрессии четвертый член равен 4. При каком значении разности этой прогрессии сумма попарных произведений первых трех членов прогрессии будет наименьшей?

4. В параллелограмме $ABCD$ точка K — середина стороны BC, а точка M — середина стороны CD. Найти $|AD|$, если $|AK|=6$ см, $|AM|=3$ см и $\widehat{KAM}=60^\circ$.

5. Составить уравнение касательной к графику функции
$$y=\frac{1}{2}\sin^2\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$$
в точке с абсциссой $x=\frac{\pi}{6}$.

В. Барбаумов, В. Ермаков, Г. Савченко, Р. Сагитов

Московский автомеханический институт

Московский автомеханический институт (МАМИ) организован в 1939 году. В его создании принимал участие один из крупнейших ученых в области автомобильной промышленности академик Е. А. Чудаков.

МАМИ является ведущим учебным институтом в нашей стране, готовящим специалистов по конструированию автомобилей и тракторов, инженеров-механиков, инженеров-испытателей, технологов машиностроительного производства.

В составе института — 4 факультета: автомобилей и тракторов, автомобильных и тракторных двигателей, технологии и автоматизации машиностроения, литейного и кузнечно-штамповочного производства.

Выпускники института, имеющие хорошую теоретическую подготовку, занимаются решением сложных и интересных технических задач. В настоящее время часть выпускников МАМИ направляется в научно-исследовательские организации, специальные конструкторские бюро, занимающиеся проектированием новых марок автомобилей. Выпускники института занимаются вопросами, требующими повышенного знания математики и физики: критическая скорость автомобильной шины, колебания автомобиля на подвеске (теория случайных процессов), прочность и колебания автомобильных двигателей и трансмиссий (методы математической физики), автоматические устройства разного рода (теория автоматического регулирования), устойчивость движения автомобиля и многое другое.

Для студентов, интересующихся математикой и физикой, кафедры высшей математики, прикладной математики, физики, теоретической механики, теории механизмов и машин, электротехники и автоматики организуют специальные семинары и научные кружки.

Математика

Вариант 1

1. Решить уравнение
$$4^x+2^{x+1}=80.$$

2. Решить уравнение
$$2\operatorname{ctg}\frac{x}{2}+3\operatorname{tg}\frac{x}{2}=5.$$

3. Решить неравенство
$$\lg 2^{\frac{x-1}{2x-3}}>-\lg 2.$$

4. Найти радиус основания цилиндра, имеющего при данном объеме V наименьшую полную поверхность.

5. Найти функцию $F(x)$, если $F'(x)=3x^2+1$ и $F(1)=3$, и построить ее график.

Вариант 2

1. Решить уравнение

$$2^{2x+1}+4=9\cdot 2^x.$$

2. Решить уравнение

$$6\sin^2x-3\sin x\cdot\cos x-\cos^2x=1.$$

3. Решить неравенство

$$2^{\log_{\frac{1}{2}}\frac{2x}{x-3}}<1.$$

4. Найти высоту конуса наибольшего объема, вписанного в шар радиуса R.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y=x+1 \text{ и } y=5+3x-2x^2.$$

А. Рязановский

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина

(физический факультет)

Математика

Вариант 1

1. Найти косинусы углов, которые образует с базисными векторами вектор $\vec{a}=6\vec{i}-2\vec{j}-3\vec{k}$.

2. Решить уравнение

$$7\cdot 10^{2x+3}-5\cdot 4^{2x+3}=2\cdot 25^{2x+3}.$$

3. Решить уравнение

$$\frac{\sin x}{1+\cos x}=\sin\frac{x}{2}.$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y=x^2$ и $y=\sqrt[3]{x}$.

5. Построить график

$$y=x^4-2x^2+5.$$

Вариант 2

1. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — единичные и взаимно перпендикулярные. Найти угол между суммой и разностью векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$, где $\vec{p}=8\vec{a}+4\vec{b}$ и $\vec{q}=4\vec{a}+\vec{b}$.

2. Решить уравнение

$$7\cdot 2^x-4^x=10.$$

3. Решить уравнение

$$8\sin^2\frac{x}{2}+3\sin x-4=0.$$

4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми

$$y=e^x,\quad y=e^{-x},\quad x=1.$$

5. Построить график

$$y=x^3-3x^2+2.$$

Физика

1. С крыши упали две капли с интервалом времени Δt. Расстояние между каплями через $t_1=1$ с после падения второй из них составляло $l=50$ см. Определить Δt.

2. Груз массой $m=10$ кг перемещают равномерно по прямой в горизонтальной плоскости, прилагая силу, направленную под углом $\alpha=30°$ к горизонту. Определить величину этой силы, если коэффициент трения $\mu=0{,}2$.

3. Два груза массами $m_1=3$ кг и $m_2=6{,}8$ кг висят на концах нити, перекинутой через блок. Меньший груз находится на $h=2$ м ниже большего. Грузы приходят в движение без начальной скорости. Через какое время они окажутся на одной высоте?

4. При выстреле в горизонтальном направлении ствол орудия, масса которого $M=500$ кг, откатывается на расстояние $l=80$ см. Определить среднее значение силы торможения в тормозном устройстве орудия. Масса снаряда $m=4$ кг, его начальная скорость $|\vec{v}|=600$ м/с.

5. Льдина постоянной толщины плавает в воде, выдаваясь над поверхностью на высоту $h=2$ см. Какова масса льдины, если ее площадь 150 см²? Плотность льда $\rho_л=0{,}92$ г/см³.

6. Сообщающиеся сосуды с площадью сечений S_1 и S_2 заполнили жидкостью плотности ρ. Затем колено сосуда с сечением S_1 закрыли, и находящийся в нем воздух нагрели от температуры T_0 до температуры T. Определить температуру T, если уровень жидкости в колене с сечением S_2 поднялся на величину ΔH_2. Начальный объем воздуха в закрытом колене V_0, атмосферное давление $p_0=\text{const}$, тепловым расширением сосуда и жидкости пренебречь.

7. Для нагревания некоторого количества воды от 0°С до температуры кипения на электрическом нагревателе потребовалось $\tau_1=15$ мин. После этого потребовалось $\tau_2=1$ ч 20 мин для обращения всей этой воды в пар при тех же условиях. Определить по этим данным удельную теплоту парообразования воды.

8. Две электрические лампочки включены в сеть параллельно. Сопротивление первой лампочки $R_1=360$ Ом, сопротивление второй $R_2=240$ Ом. Какая из лампочек поглощает бо́льшую мощность и во сколько раз?

9. Найти внутреннее сопротивление генератора, если известно, что мощность, выделяемая во внешней цепи, одинакова при двух значениях внешнего сопротивления $R_1=5$ Ом и $R_2=0{,}2$ Ом.

10. На каком расстоянии от собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=12$ см следует поставить предмет, чтобы его действительное изображение было в $n=3$ больше самого предмета?

О. Овчинников, Г. Шадрин

Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии

Подробно о МИИГАиКе в «Кванте» (1977, № 6) мы уже писали.

В настоящее время в составе института имеются следующие факультеты: геодезический со специальностями *астрономо-геодезия* (специализация: морская геодезия), *прикладная геодезия*, *космическая геодезия*; аэрофотогеодезический со специальностью *аэрофотогеодезия*; картографический со специальностью *картография* (специализации: проектирование и составление карт, издание карт); оптико-механический, готовящий специалистов широкого профиля по оптическим и оптико-электронным приборам. При институте действуют заочный факультет со специальностями *прикладная геодезия*, *аэрофотогеодезия*, *картография* и вечерний оптико-механический факультет.

С 1977/78 учебного года институт приступил к подготовке специалистов в области *исследования природных ресурсов* (на аэрофотогеодезическом факультете). Студенты этой специальности занимаются высшей математикой и физикой по расширенной программе. В задачи специалистов по исследованию природных ресурсов входит разработка наиболее эффективных методов поиска полезных ископаемых, защиты окружающей среды и т. п. Срок обучения по этой специальности — 5 лет 6 месяцев.

Математика

Вариант 1

1. Решить уравнение
$$\log_{4x+1}7+\log_{9x}7=0.$$

2. Вычислить без таблиц
$$\sin^2 7°30'\cdot\sin 45°-\cos 45°\cdot\cos^2 52°30'.$$

3. Решить неравенство
$$|x^2-5x|<6.$$

4. Решить неравенство $f'(x)>g'(x)$, если
$$f(x)=x-\frac{4}{x},\quad g(x)=2x^3-x.$$

5. Вектор $\vec b$ коллинеарен вектору $\vec a=(6;\ 8;\ -7{,}5)$ и образует с осью Oz острый угол. Зная, что $|\vec b|=50$, найти его координаты.

Вариант 2

1. Решить уравнение
$$\log_x 9x^2\cdot\log_3^2 x=4.$$

2. Решить уравнение
$$(1+\sin 2x)(\cos x-\sin x)=1-2\sin^2 x.$$

3. Решить неравенство $\sqrt{9x-20}<x$.

4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y=\frac{4}{3}x^3-4x$ на отрезке $[0;\ 2]$.

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=\sin x$, $y=0$, причем $0\leqslant x\leqslant\pi$.

Физика

1. Один конец нити укреплен на дне, а второй прикреплен к пробковому поплавку. При этом 0,75 объема поплавка погружено в воду. Определить натяжение нити, если масса поплавка $m=2$ кг и плотность пробки $\rho_п=0{,}25$ г/см^3. Массой нити пренебречь.

2. Кабина, к потолку которой подвешен математический маятник длиной $l=1$ м, опускается вниз с ускорением $|\vec a|=2{,}4$ м/с^2. Определить период колебаний маятника.

3. Поезд массой $m=2000$ т при торможении с ускорением $|\vec a|=0{,}3$ м/с^2 остановился через время $t=50$ с после начала торможения. Какое количество тепла выделилось при торможении?

4. Стальной шарик массой $m=20$ г, падая с высоты $h_1=1$ м на стальную плиту, отскакивает от нее на высоту $h_2=81$ см. Найти изменение импульса шарика в результате удара и количество теплоты, выделившееся при ударе.

5. Резиновая камера содержит воздух при температуре $t_1=27°$C и нормальном давлении. На какую глубину нужно опустить камеру в воду, чтобы ее объем уменьшился вдвое? Температура воды $t_2=4°$C.

6. Относительная влажность воздуха при $t_1=30°$C равна $r_1=0{,}80$. Какова будет относительная влажность r_2, если этот воздух нагреть при постоянном объеме до $t_2=50°$C? Давление насыщенных паров воды при 30°C равно $p_{01}=31{,}8$ мм рт. ст., при 50°C — $p_{02}=92{,}5$ мм рт. ст.

7. Два одноименных заряда $q_1=7\times10^{-9}$ Кл и $q_2=28\cdot10^{-9}$ Кл находятся на расстоянии $l=0{,}24$ м друг от друга. На каком расстоянии от первого заряда на линии, соединяющей заряды, нужно поместить третий заряд, чтобы он находился в равновесии?

8. Кипятильник имеет две спирали. При включении первой спирали некоторая масса воды вскипает за $t_1=10$ мин, при включении второй — за $t_2=20$ мин. За какое время вскипит та же масса воды при последовательном включении обеих спиралей?

9. Луч света падает на поверхность раздела двух прозрачных сред под углом $\alpha=30°$ и преломляется под углом $\beta=45°$. Чему равен предельный угол полного отражения для этих сред?

10. При бомбардировке алюминия $^{27}_{13}$Al α-частицами образуется фосфор $^{30}_{15}$P. Записать эту реакцию и подсчитать вы-

деленную энергию, если 1 а.е.м $= 1{,}66 \times 10^{-27}$ кг. Массы изотопов $^{27}_{13}Al$ и $^{30}_{15}P$ равны, соответственно, 26,99010 а.е.м и 29,97867 а.е.м, а массы α-частицы и нейтрона — 4,00260 а.е.м и 1,00894 а.е.м.

В. Серегина, С. Смирнов

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Вариант 1

1. Что значит $a \geqslant b$? Доказать, что если $a > b$ и $b \geqslant c$, то $a > c$.

2. Найти площадь треугольника ABC, если заданы координаты его вершин: A (3; −1), B (1; −3), C (−6; 6). Укажите все перемещения плоскости, при которых треугольник ABC отображается на себя.

3. Решить уравнение

$$\sqrt{1-\sqrt{2}\sin x}+2\cos x=0.$$

4. Решить неравенство

$$4^x-2^{x+1}-3<0.$$

Верно ли, что $\sqrt{2}$ является его решением?

5. Пусть $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$, где $f_1(x)=2x-\sqrt{9-x^2}$, $f_2(x)=\log_{\frac{1}{3}}(x^2+x-2)$.

Найти область определения функции $f(x)$, а также наибольшее и наименьшее значения функции $f_2(x)$ на отрезке [3; 6].

Вариант 2

1. В хирургическом отделении работает 40 врачей. Сколькими способами из них можно образовать бригаду в составе:

а) хирурга и ассистента;

б) хирурга и 4-х его ассистентов?

2. На плоскости заданы точки A(−6;3), B (−7; 7), C (−3; 6) и D (−2; 2). Доказать, что четырехугольник $ABCD$ — ромб, и вычислить его площадь. Указать все перемещения плоскости, при которых ромб $ABCD$ отображается на себя.

3. Решить уравнение

$$\sqrt{4-\sqrt{3}\cos x}+\frac{3\sqrt{2}}{2}\sin x=0.$$

4. Решить неравенство

$$\frac{2^{x+1}-5\cdot 3^x}{2^x-3^{x+1}}<1.$$

Верно ли, что $\lg\frac{1}{32}$ является его решением?

5. Функция f задана формулой

$$f(x)=\frac{|3x-4|+2x^2-4x-1}{|2x+1|-2};$$

а) найти область определения функции f;

б) найти производную функции f в интервале]−∞; −2 [; чему равно $f'(-4)$?

в) имеет ли функция f пределы при $x \to \frac{1}{2}$ и при $x \to -\frac{3}{2}$?

г) при каком значении a функция g, заданная правилом

$$g(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если } x \neq \frac{1}{2}, \\ a, & \text{если } x=\frac{1}{2}, \end{cases}$$

имеет производную в точке $x=\frac{1}{2}$?

Вариант 3

1. Дана система неравенств

$$\begin{cases} 2x-y>a, \\ 3x+2y>3a. \end{cases}$$

а) при $a=0$ указать хотя бы одно решение системы;

б) верно ли, что все решения этой системы удовлетворяют неравенству $5x+y>4a$?

в) верно ли, что все решения этой системы удовлетворяют неравенству $x+3y>2a$?

2. При повороте координатной плоскости на угол α с центром в точке M точка A (2; 3) переходит в A_1 (5; 2), а B (2; 5) в B_1 (7; 2). Найти образ точки C (2; 4). Найти образ еще одной точки (по Вашему выбору). Найти величину угла α и координаты точки M.

3. Решить уравнение

$$\sqrt{3-5\cos x-7\sin^2 x}+\cos x=0.$$

4. Решить неравенство

$$9^{x-\frac{1}{2}}-3^{x-1}\log_2 56+\log_2 7<0.$$

Верно ли, что $\frac{1}{\lg 9}$ является его решением?

5. Функция f задана формулой

$$f(x)=a\ln x-3x^2, \text{ где } a>0.$$

а) Найти наибольшее значение и промежутки монотонности функции f;

б) при $a=32$ найти хотя бы одно решение неравенства

$$f(x)>0;$$

в) при каких a неравенство $f(x)>0$ имеет хотя бы одно решение?

г) доказать, что при $a<300$ график функции f не пересекается с графиком функции g, заданной формулой

$$g(x)=\frac{18a-3x^2}{2}.$$

Верно ли это утверждение при $a=400$?

В. Тонян

Московский инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева

Московский ордена Трудового Красного Знамени инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева (МИСИ) готовит инженеров-строителей широкого профиля для работы в строительных организациях, в проектных и научно-исследовательских институтах. В самом МИСИ решаются важнейшие проблемы, связанные с проектированием и строительством уникальных сооружений, разработкой теории расчета сооружений, научными исследованиями для различных отраслей современной строительной индустрии.

В настоящее время, когда в нашей стране с каждым годом увеличивается объем жилищного, культурно-массового и промышленного строительства, профессия инженера-строителя является одной из самых нужных и интересных. Инженер-строитель проектирует и строит кинотеатры и стадионы, гидростанции и теплоэнергостанции, заводы и жилые здания, разрабатывает новые строительные материалы и новые строительные машины, планирует города и поселки, занимается проблемой опреснения морской воды, экономикой строительства и многими другими вопросами.

МИСИ им. В. В. Куйбышева основан в 1921 году. В настоящее время в институте занимается более 15 тысяч студентов, около 600 аспирантов. В институте имеется 54 кафедры, профессорско-преподавательский состав которых включает 80 профессоров и докторов наук, более 400 доцентов и кандидатов наук.

Характерной особенностью обучения является совмещение учебы с научно-исследовательской работой. Студенты, проявившие склонность к научной работе, после защиты диплома научно-исследовательского характера направляются в аспирантуру.

Окончившие институт работают во многих городах страны и за рубежом. Москвичи направляются на работу в московские организации, стремящиеся сделать нашу столицу образцовым городом.

В настоящее время в состав института входят строительно-технологический, механический, инженерно-педагогический факультеты и факультеты промышленного и гражданского строительства, теплоэнергетического строительства, гидротехнического строительства, градостроительства, водоснабжения и канализации, теплогазоснабжения и вентиляции, автоматизированных систем управления, технической эксплуатации зданий, экономики и организации строительства.

В институте имеются подготовительное отделение и очные и заочные подготовительные курсы.

Математика

Варианты письменного экзамена

Вариант 1

1. Два пешехода вышли одновременно навстречу друг другу; первый вышел из A, а второй из B. Встретились они через 3 часа. За какое время прошел расстояние AB каждый пешеход, если первый пришел в B на 2,5 часа позже, чем второй пришел в A?

2. В правильной треугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α. Определить наклон бокового ребра к плоскости основания.

3. Решить уравнение
$$\lg x\cdot(\lg x-8)+16=0.$$

4. Доказать тождество
$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{cosec}2\alpha}{\sec\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)}=3.$$

5. В какой точке касательная к линии $y=\ln(4x-1)$ параллельна прямой $y=x$?

Вариант 2

1. Для оплаты пересылки четырех бандеролей понадобились 4 различные почтовые марки на общую сумму в 2 руб. 80 коп. Определить стоимость марок, приобретенных отправителем, если эти стоимости составляют арифметическую прогрессию, а самая дорогая марка в 2,5 раза дороже самой дешевой.

2. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, а вектор $\vec{c}$ образует с каждым из них угол в 60°. Зная, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=5$ и $|\vec{c}|=8$, вычислить скалярное произведение $(3\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{b}+3\vec{c})$.

3. Решить уравнение
$$7\cdot3^{x+1}-5^{x+2}=3^{x+4}-5^{x+3}.$$

4. Решить уравнение
$$\frac{1}{\cos x}=6\sin x+8\cos x.$$

5. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями
$$y=-x^2+6x-1,\ y=0,\ x=1,\ x=3.$$

Билеты устного экзамена

Билет 1

1. Формулы приведения.
2. Признаки перпендикулярности двух плоскостей.
3. Найдите скорость изменения функции $y=(x^2+2x)\cdot x-1$ при $x=8$.
4. Решите неравенство
$$\log_2(x+1)>-\log_2 3.$$

Билет 2

1. Свойства числовых неравенств.
2. Теорема о трех перпендикулярах.

3. Решите уравнение
$\sin^2(3x-1)=0{,}5\sin(3x-1)$.

4. Вычислите интеграл

$$\int_1^4 \frac{3}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Билет 3

1. Достаточное условие экстремума функции

2. Теорема синусов.

3. Даны векторы: $\vec{a}=(-1;\ 2;\ 0)$ и $\vec{b}=(2;\ -3;\ -2)$. Найдите координаты вектора $2\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$.

4. Решите уравнение:

$$(\log_2 x-3)(2^x-5)=0.$$

Билет 4

1. Теорема об общем виде всех первообразных данной функции.

2. Формулы площади поверхности и объема призмы.

3. Вычислите

$$\cos(-300^\circ)-2\mathrm{ctg}(-390^\circ).$$

4. Решите неравенство

$$\log_8 x-\log_8 7\geqslant -1.$$

Билет 5

1. Свойства логарифмической функции.

2. Разложение вектора по трем некомпланарным векторам.

3. Решите уравнение

$$|x^2-3|=8.$$

4. Вычислите:

$$\arcsin(-1)+2\,\mathrm{arcctg}(-\sqrt{3}).$$

Физика

1. Груз массой $m=20$ кг перемещается вверх по наклонной плоскости с углом наклона $\alpha=30^\circ$ и коэффициентом трения $\mu=0{,}05$. К грузу параллельно основанию приложена сила $|\vec{F}|=500$ Н. Найти ускорение, с которым перемещается груз.

2. Плавающий в ртути куб погружен в нее на $^1/_4$ своего объема. Какая часть объема будет погружена в ртуть, если поверх нее налить слой воды, полностью закрывающий куб? Плотность ртути $\rho_{\text{рт}}=13{,}6$ г/см^3, воды — $\rho_{\text{в}}=1$ г/см^3.

3. В бомбе объемом $V=10$ л содержится смесь водорода и кислорода в равных количествах (масса каждого $m=2$ г). Весь кислород, соединяясь с частью водорода, образует воду. Каково давление оставшегося водорода при $t=17^\circ$C? Универсальная газовая постоянная $R=8{,}31$ Дж/(моль·К).

4. Какова затрата электроэнергии в киловатт-часах на получение $m=1$ кг алюминия, если электролиз ведется при напряжении $U=10$ В, а КПД всей установки $\eta=80\%$? Электрохимический эквивалент алюминия $k=0{,}093$ мг/Кл.

5. Оптическая система состоит из собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=30$ см и плоского зеркала, находящегося на расстоянии $l=15$ см от линзы. Определить положение изображения, даваемого этой системой, если предмет находится на расстоянии $d=15$ см перед линзой.

Г. Валяшко, Н. Дорошкевич, А. Пугачева

Витебский технологический институт легкой промышленности

Витебский технологический институт легкой промышленности был открыт в 1965 году. В настоящее время он готовит специалистов для легкой и машиностроительной промышленности.

На шести факультетах института по дневной, вечерней и заочной формам обучения обучается свыше 4-х тысяч студентов.

Механико-технологический факультет готовит инженеров-механиков для работы в механических и сборочных цехах, в проектных бюро и отделах машиностроительных заводов и заводов легкого машиностроения, в отраслевых научно-исследовательских институтах, а также инженеров-технологов трикотажного и ткацкого производства.

Факультет швейного производства и факультет обувного производства готовят инженеров-технологов и инженеров-конструкторов для работы в отделах, лабораториях и цехах швейных и обувных фабрик, домов моделей, а также художников-технологов по художественному оформлению трикотажных и текстильных изделий.

Инженерно-экономический факультет готовит инженеров-экономистов для предприятий легкой и текстильной промышленности и предприятий бытового обслуживания населения.

Институт имеет также вечерний и заочный факультеты.

Математика

Вариант 1

1. Решите уравнение
$\cos 2x+3\sin x+1=0$.

2. Докажите, что последовательность, общий член которой $u_n=2\cdot 3^n$, является геометрической прогрессией, и найдите сумму первых 8 членов.

3. Найдите промежутки монотонности и экстремумы функции

$$y=\frac{\ln x}{x}.$$

4. Вычислите

$$\int_{-1}^{0}|2^x-2^{-x}|\,dx.$$

5. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания a, угол меж-

ду плоскостями двух боковых граней с общим ребром равен α. Найдите объем пирамиды.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$\log_{x+1}(x-0{,}5)=\log_{x-0{,}5}(x+1)$.

2. Решите неравенство

$3\cdot 4^{x+1}-35\cdot 6^{x}+2\cdot 9^{x+1}\geqslant 0$.

3. Вычислите интеграл $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$, если

$$f(x)=\frac{1+\sin 2x+\cos 2x}{\sin x+\cos x}.$$

4. Найдите экстремумы функции $f(x)=-x+\cos 2x$ на промежутке $\left]-\frac{\pi}{2};\ 0\right[$.

5. Основание прямого параллелепипеда — ромб с острым углом φ и меньшей диагональю d. Найдите объем параллелепипеда, если большая диагональ его составляет с плоскостью боковой грани угол α.

Физика

1. Два поезда прошли одинаковый путь за одно и то же время. Однако один поезд, трогаясь с места, прошел весь путь равноускоренно с ускорением $|\vec{a}|=3$ см/с², а другой поезд половину пути шел со скоростью $|\vec{v}_1|=18$ км/ч, а другую половину пути — со скоростью $|\vec{v}_2|=54$ км/ч. Найти путь, пройденный каждым поездом.

2. Какую минимальную работу надо совершить, чтобы поднять вагонетку с углем массой $m=200$ кг по эстакаде длиной $l=10$ м и высотой $h=2$ м при коэффициенте трения $\mu=0{,}05$? Каков коэффициент полезного действия подъемника?

3. Паровой молот массой $m_1=9$ т падает с высоты $h=2$ м на стальную болванку массой $m_2=220$ кг. Сколько раз он должен упасть, чтобы температура болванки поднялась на $\Delta t=50°$C? На нагревание болванки идет 50% теплоты, полученной при ударах. Удельная теплоемкость стали $c=460$ Дж/(кг·К).

4. Температура воздуха вечером была $t_1=15°$C, относительная влажность $r_1=64\%$. Ночью температура упала до $t_2=5°$C. Была ли роса? Давление насыщенного пара при температуре t_1 равно $p_{01}=12{,}7$ мм рт. ст., а при температуре t_2 — $p_{02}=6{,}1$ мм рт. ст.

5. Четыре одинаковых положительных точечных заряда $q=10$ ед. заряда СГСЭ закреплены в вершинах квадрата со стороной $a=10$ см. Найти силу, действующую со стороны трех зарядов на четвертый.

6. Из центра квадратного плота в воду на глубину $h=10$ м опущена электрическая лампочка. Какие наименьшие размеры должен иметь плот, чтобы свет не мог выйти из воды? Показатель преломления воды $n=1{,}33$.

7. Порог фотоэффекта для бария составляет $\lambda_1=5{,}5\cdot 10^{-7}$ м. С какой скоростью вылетают фотоэлектроны, если облучать барий светом, длина волны которого $\lambda_2=4{,}4\cdot 10^{-7}$ м? Постоянная Планка $h=6{,}62\cdot 10^{-34}$ Дж·с. Масса электрона $m=9{,}1\cdot 10^{-31}$ кг.

В. Коваленко, П. Скоков

(Начало см. с. 28, 59)

до 4π вектор $\overrightarrow{SP}$ совершает полный оборот. Следовательно, внешняя часть представляет собой дважды (т. е. на 360°) перекрученную полоску. Таким образом, мы видим, что, выполняя второй и третий разрезы (см. 2), 3) с. 28), мы в сущности резали одну и ту же полоску. Не удивительно, что получился одинаковый результат!

Но почему же получились две зацепленные полоски? Это легко понять, если вспомнить взаимное расположение частей до разреза: внешняя часть была как бы обвита вокруг внутренней.

Упражнения

1. Что будет, если разрезать: а) по центральной линии, б) по линии, идущей параллельно краю рядом с ним, — трижды перекрученную полоску? n раз перекрученную полоску?

2. При каких p поверхность, описываемая уравнениями

$$\begin{cases} x=(R+\lambda\cos p\varphi)\cos\varphi,\\ y(R+\lambda\cos p\varphi)\sin\varphi,\\ z=\lambda\sin p\varphi\end{cases}$$

окажется односторонней?

Новые книги

В этом номере мы публикуем краткие аннотации на книги по математике и физике, доступные и интересные нашим читателям, вышедшие в первом полугодии 1978 года. Заказы на большинство из них можно направлять (на почтовых открытках) в специализированные магазины, список которых опубликован в «Кванте» № 3 за 1978 год, а также в следующие магазины:

1. 320030, г. Днепропетровск, просп. К. Маркса, 55, маг. № 1;
2. 340005, г. Донецк, УССР, ул. Артема, 84, маг. № 50;
3. 248635, г. Калуга, Гостинные ряды, корп. 13, «Дом книги»;
4. 650099, г. Кемерово, ул. Весенняя, 24, маг. № 15 «Техническая книга»;
5. 252001, г. Киев, ул. Ленина, 39, маг. № 1;
6. 277012, г. Кишинев, ул. Пушкина, 15, маг. «Штиинца»;
7. 191025, г. Ленинград, Пушкинская ул., 2, маг. № 5 «Техническая книга»;
8. 220005, г. Минск, Ленинский просп., 48, маг. № 13 «Научно-техническая книга»;
9. 121019, г. Москва, просп. Калинина, 26, маг. № 200;
10. 270026, г. Одесса, УССР, ул. Дерибасовская, 27, «Дом книги»;
11. 630091, г Новосибирск, Красный просп., 60, маг. № 7;
12. 226047, г. Рига, ул. Ленина, 17, «Гайсма»;
13. 410600, г. Саратов, ул. Братиславская, 81, Облкниготорг;
14. 200001, г. Таллин, бульвар Ленина, 7, «Техническая и медицинская книга»;
15. 278000, г. Тирасполь, ул. 25 Октября, 72, маг. № 3;
16. 720040, г. Фрунзе, ул. Дзержинского, 43;
17. 680000, г. Хабаровск, ул. К. Маркса, 17, маг. № 44, «Техническая книга»;
18. 310012, г. Харьков, УССР, ул. Свердлова, 17, маг. № 1;
19. 473009, г. Целиноград, Каз. ССР, ул. Училищная, 65;
20. 672000, г. Чита — центр, ул. Ленина, 56, маг. «Научно-техническая книга».

При наличии книг на складе они будут высланы наложенным платежом.

Математика

Издательство «Наука»

1. Литлвуд Дж. *Математическая смесь.* Перевод с англ. Издание 4-е. Объем 8 л., тираж 200 000 экз., цена 45 к.

Профессору Дж. Литлвуду, одному из крупнейших современных английских математиков, принадлежит много важных и глубоких результатов в различных областях математики. Он известен также как остроумный собеседник, с широким кругом интересов, живо реагирующий на любой математический вопрос.

Его небольшую книгу «Математическая смесь» (в английском оригинале — «Разные заметки одного математика»), написанную чрезвычайно увлекательно, можно отнести к редкому жанру собрания математических очерков-миниатюр. Тематика очерков весьма разнообразна. Среди них — математические анекдоты, моменты математической автобиографии, рецензии, небольшие историко-математические исследования, интересные задачи, оригинальные и неожиданные доказательства. Обсуждение некоторых специальных вопросов (баллистики, небесной механики и др.) требует математической техники; такие места (они выделены звездочками) при чтении можно пропустить без ущерба для понимания остального текста.

От этой книги получаешь удовольствие даже при перелистывании, беглом просмотре.

2. Гельфонд А. О. *Решение уравнений в целых числах.* Издание 3-е. Объем 3 л., тираж 50 000 экз.

Решение в целых числах алгебраических уравнений с целыми коэффициентами более чем с одной переменной представляет собой одну из труднейших проблем теории чисел. Этими задачами много занимались самые выдающиеся математики древности, например, греческий математик Пифагор, александрийский математик Диофант и лучшие математики более близкой к нам эпохи: Ферма, Эйлер, Лагранж. Несмотря на усилия многих поколений выдающихся математиков, в этой области отсутствуют сколько-нибудь общие методы. Проблема решения уравнений в целых числах полностью исследована только для уравнений второй степени с двумя переменными. Для уравнений выше второй степени с двумя или более переменными весьма трудна не только задача нахождения всех решений в целых числах, но даже и более простая задача установления существования конечного или бесконечного множества таких решений.

В предлагаемой читателю книге изложены некоторые основные результаты, полученные в теории решения уравнений в целых числах. Теоремы, формулируемые в ней, снабжены доказательствами в тех случаях, когда эти доказательства достаточно просты.

Книга доступна школьникам старших классов.

3. Солодовников А. С. *Системы линейных неравенств.* Издание 2-е, доп. Объем 5 л., тираж 100 000 экз.

Эта небольшая книжка знакомит читателя с различными аспектами теории систем линейных неравенств: с геометрической стороной вопроса и тесно связанными с нею методами решения систем (в переводе на геометрический язык задание системы линейных неравенств с двумя или тремя переменными означает задание выпуклой многоугольной области на плоскости или, соответственно, выпуклого многогранного тела в пространстве), с некоторыми чисто алгебраическими свойствами систем, с принципиальными вопросами линейного программирования (линейное программирование — это один из разделов теории систем линейных неравенств).

В книге дается описание множества всех решений систем неравенств с двумя и тремя переменными (легко переносящееся на системы с любым числом переменных), изучаются вопросы совместности и несовместности. В последнем параграфе доказывается теорема двойственности линейного программирования.

Книга рассчитана на школьников старших классов и всех любителей математики.

4. Абрамов С. А. *Математические построения и программы.* Объем 10 л., тираж 50 000 экз., цена 38 к.

В этой книге, доступной школьникам старших классов, внимание читателя сосредоточивается на алгоритмической стороне математических задач. Имеется большое количество примеров для самостоятельного решения.

Физика

Издательство «Наука»

1. Ландау Л. Д., Китайгородский А. И. *Физика для всех. Молекулы.* Издание 4-е, испр. и доп. Объем 10 л., тираж 200 000 экз., цена 38 к.

Книга написана одним из крупнейших физиков нашей страны академиком Л. Д. Ландау совместно со своим учеником профессором А. И. Китайгородским. Цель книги — дать читателю в общедоступной форме отчетливое представление об основных идеях и новейших достижениях современной физики. Она является естественным продолжением ранее вышедшей книги этих же авторов (см. «Квант», 1978, № 3, с. 60). В ней излагаются вопросы, связанные с молекулярной физикой: различные фазовые состояния вещества, свойства жидких и твердых растворов, структура кристаллов и т. д.

Книга написана свежо, оригинально, хорошо оформлена и рассчитана на широкий круг читателей.

Издательство «Мир»

2. Глазер Р. *Биология в новом свете.* Объем 9,5 л., тираж 50 000 экз., цена 90 к.

В книге излагается большой круг биологических проблем и явлений, для изучения которых используются физические и математические методы исследования.

Популярность изложения, живой образный язык безусловно привлекут к ней внимание самого широкого круга читателей.

3. Тейлор Р. *Шум.* Объем 15 л., тираж 30 000 экз., цена 90 к.

В книге в доступной и популярной форме рассматриваются вопросы современной акустики. Особое внимание в книге уделено вопросам борьбы с «шумовым» загрязнением среды.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

Издательство «Атомиздат»

4. Карцев В. П. *Магнит за три тысячелетия.* Издание 3-е, перераб. и доп. Объем 10 л., тираж 70 000 экз., цена 30 к.

Книга в популярной и занимательной форме знакомит читателя с решением проблемы, волнующей в равной степени и ученых-атомников и инженеров. Эта проблема — получение сильных магнитных полей. Известно, что чем большее поле удается создать в машине, тем меньшие размеры она будет иметь, а следовательно, и дешевле стоить. Сейчас ученые разработали несколько эффективных путей получения сильного магнитного поля. Об этих путях, успехах и неудачах ученых и инженеров рассказывается в книге. Особое внимание уделено сверхпроводящим магнитам.

Книга рассчитана на широкий круг читателей, но в основном на школьников старших классов и учащихся производственно-технических училищ.

Издательство «Знание»

5. Ярмоненко С. П. *Рожденная веком.* Объем 6 л., тираж 100 000 экз., цена 20 к.

Книга знакомит читателя с современными достижениями молодой науки — радиобиологии, поставленными на службу человечеству.

Автор в интересной и доступной форме рассказывает о том, как успехи радиобилогии используются для охраны биосферы, для повышения урожайности в сельском хозяйстве. Особое внимание он уделяет лучевым методам лечения злокачественных опухолей и использованию радиоактивных изотопов для диагностики различных заболеваний.

Книга рассчитана на самый широкий круг читателей.

И. Клумова,
М. Смолянский

Задачи физической олимпиады в Финляндии

В первых пяти задачах надо выбрать правильные ответы из числа предложенных.

1. На рисунке 1 приведена диаграмма уровней некоторого атома, а на рисунке 2 — несколько спектров излучения. Какой из спектров относится к данному атому?

2. В опыте по нагреванию алюминиевого кубика были получены следующие результаты: масса кубика $m = 1{,}01$ кг, начальная температура $t_1 = (18{,}4 \pm 0{,}5)$°C, конечная температура $t_2 = (31{,}0 \pm 0{,}5)$°C, время нагревания $\tau = 215$ с, подводимая при нагревании мощность $P = (52 \pm 1)$ Вт. Каковы, по данным этого опыта, удельная теплоемкость алюминия и ошибка ее измерения:
а) (880 ± 10) Дж/(кг·К);
б) (880 ± 25) Дж/(кг·К);
в) (880 ± 55) Дж/(кг·К);
г) (880 ± 60) Дж/(кг·К);
д) (880 ± 90) Дж/(кг·К)?

3. Конденсаторы C_1 и C_2 соединены последовательно (рис. 3). Конденсатор C_3 подключается между точками B и D, при этом напряжение между точками A и D не меняется. Все конденсаторы имеют одинаковую емкость. При подключении конденсатора C_3: а) заряд на конденсаторе C_1 увеличивается; б) напряжение между точками A и B возрастает; в) заряд на конденсаторе C_2 увеличивается; г) энергия конденсатора C_2 уменьшается.

4. На рисунке 4 условно показана излучающая антенна, направления тока в ней и электрического и магнитного полей вокруг нее в различные моменты времени. Для каждого момента приведены относящиеся к нему соотношения. Рисунок 4, *а* правильный. Какие из следующих рисунков тоже правильные?

5. Период колебаний камертона зависит от плотности ρ материала, из которого он изготовлен, модуля Юнга E материала и длины L ножек камертона. С камертонами различной длины были получены следующие результаты:

f, Гц	256	288	320	384	480
L, мм	120	106	96	80	64

Какой из формул выражается период колебаний камертона:

а) $T = \frac{A\rho}{E}\sqrt{|\vec{g}|L^3}$;

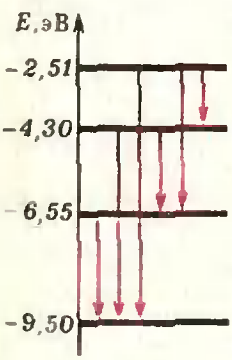


Рис. 1.

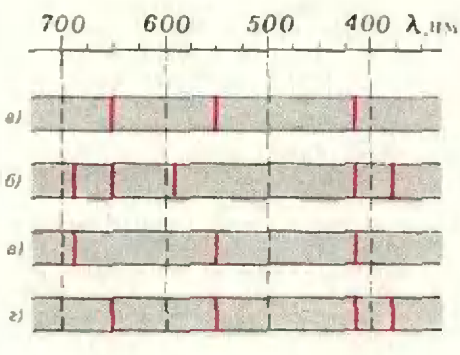


Рис. 2.

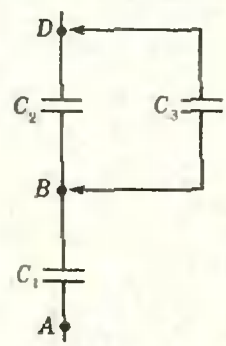


Рис. 3.

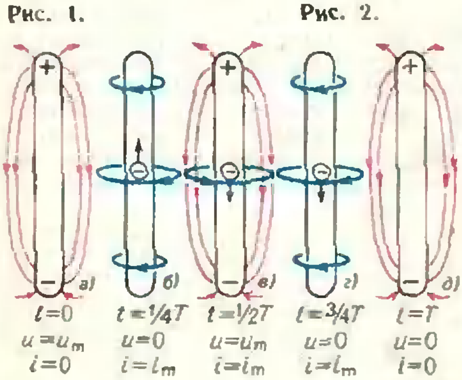


Рис. 4.

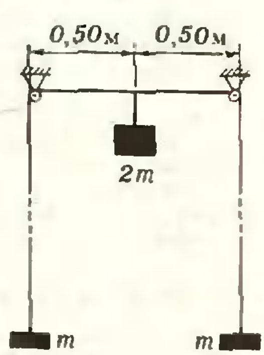


Рис. 5.

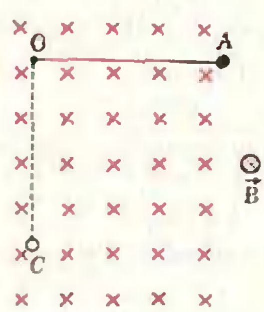


Рис. 6.

б) $T = AL\sqrt{\frac{\rho}{E}}$;

в) $T = \frac{AE}{\rho}\sqrt{\frac{L}{|\vec{g}|}}$?

(Здесь A — безразмерная постоянная, $\vec{g}$ — ускорение свободного падения.) Ответ объясните.

6. Ускорение свободного падения на полюсе Земли равно 9,83 м/с². Радиус Земли $6{,}36 \cdot 10^6$ м. На какой высоте над полюсом ускорение равно 9,78 м/с²?

7. Допишите следующие ядерные реакции: а) $n \rightarrow p + \ldots$; б) $p \rightarrow n + \ldots$; в) $p + {}_{-1}e \rightarrow \ldots$; г) ${}_{-1}e + {}_{+1}e \rightarrow \ldots$; д) ${}^{2}_{1}H + \gamma \rightarrow x + n$; е) ${}^{197}_{79}Au + n \rightarrow x + \gamma$.

8. Кубики с массами m, $2m$ и m соединены длинной гибкой нитью, перекинутой через блоки (рис. 5). Массы блоков и нити пренебрежимо малы. Трение в блоках отсутствует. Кубик массой $2m$ отпускают. а) Какова будет скорость этого кубика, когда он опустится на 0,5 м? б) Каково положение равновесия системы?

9. Длина тонкого металлического провода с тяжелым шариком на конце равна 2,0 м. Провод может двигаться в вертикальной плоскости перпендикулярно магнитному полю; начальное положение провода — горизонтальное (положение OA на рисунке 6). Индукция магнитного поля $|\vec{B}| = 0{,}25$ мГ. Какова разность потенциалов между концами провода в тот момент, когда он проходит положение OC?

Задачи присланы М. Ахти. Перевод и подготовка к публикации З. Абарбинеля

Ответы, указания, решения

Анализ помогает алгебре

1.	$\lvert a\rvert > 216$	1	4а	$a < 0$	1
	$\lvert a\rvert = 216$	2		$0 \leqslant a < e$	0
	$88 < \lvert a\rvert < 216$	3		$a = e$	1
	$\lvert a\rvert = 88$	4		$a > e$	2
	$\lvert a\rvert < 88$	5			
2.	$a < 0$	0	4б	$a < -189$	0
	$a = 0$	1		$a = -189$	1
	$0 < a < \frac{4}{e^2}$	3		$-189 < a < -64$	2
	$a = \frac{4}{e^2}$	2		$a = -64$	3
	$a > \frac{4}{e^2}$	1		$-64 < a < 0$	4
				$a = 0$	3
				$a > 0$	2
3.	$a \leqslant 0$	0	4в	$a < 0$	1
	$0 < a < \frac{1}{e^e}$	3		$0 \leqslant a < e$	0
	$\frac{1}{e^e} \leqslant a < 1$	1		$a = e$	1
	$a = 1$	0		$a > e$	2
	$1 < a < e^{\frac{1}{e}}$	2			
	$a = e^{\frac{1}{e}}$	1			
	$a > e^{\frac{1}{e}}$	0			

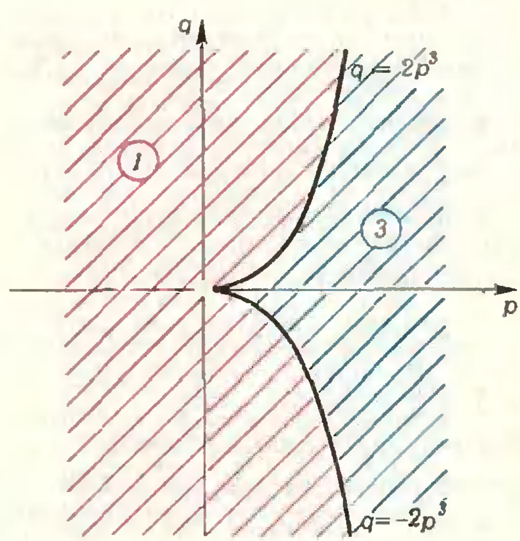


Рис. 1.

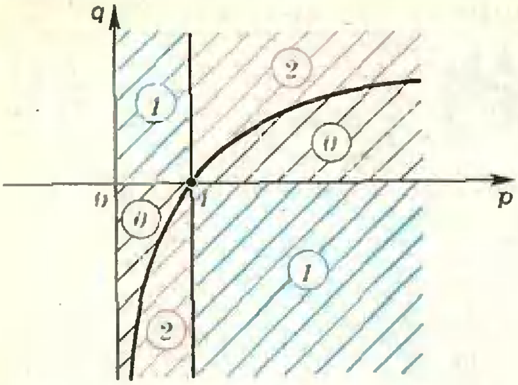


Рис. 2.

5. а) $x=1$; $y=1$

б) $x=e$; $y=-\pi+2\pi k$ $(k\in Z)$.

в) $x=0$; $y=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k$ $(k\in Z)$;

Указание. Покажите, что наибольшее значение одной из функций совпадает с наименьшим значением другой.

6. а) Красная область соответствует одному корню, синяя — трем корням, линии $q=\pm 2p^3$, $p>0$,— двумя корням. Точка $(0; 0)$ относится к красной области (рис. 1).

б) Синяя область — 1 корень, красная — 2 корня, серая — 0 корней; граничные линии $p=1$, $q=0$, $q=e\ln p$ — 1 корень, точка $(1, 0)$ — бесконечное множество корней (рис. 2).

7. а) 1; б) 1; в) 0.

8. e^{π} больше. Указание: исследовать на экстремум функцию $\dfrac{\log_a x}{x}$.

Производная и задачи на экстремумы

1. Наибольшее значение $y(3)=0$, наименьшее $y(2)=-25$.

2. Наибольшее значение $y(\pi/12)=3/2$, наименьшее $y(\pi/4)=y(0)=1$.

3. Указание. Данная функция четна, наименьшее значение достигается в точке x, для которой $\cos x=-\sqrt{1/3}$, $\sin x=\sqrt{2/3}$.

4. Части должны быть одинаковых масс. Указание. Надо найти наименьшее значение функции $y(x)=x^2+(M-x)^2$.

5. $M(3,2;\ 0)$. Указание. Если $M(x;\ 0)$, то по теореме Пифагора

$$S(x)=\sqrt{x^2+3^2}+\sqrt{(4-x)^2+5^2}.$$

Можно решать задачу и чисто геометрически, рассмотрев точку A', симметричную A относительно оси Ox.

6. $y(\pi/2)=\sin 1$.

7. 25 домов. Указание. Задача сводится к определению наименьшего значения функции $L(S)=\left(\dfrac{1600}{\sqrt{S}}+\sqrt{S}\right)$.

8. $v=1{,}5\,a$. Указание. Работа, затрачиваемая на прохождение пароходом 1 км со скоростью v (км/час) относительно воды, равна $A(v)=\dfrac{kv^3}{v-a}$.

9. $R=r$. Указание. Мощность, выделяемая на сопротивлении R, равна

$$P(R)=I^2R=\left(\frac{E}{R+r}\right)^2R.$$

10. Пусть мы тянем кирпич под углом φ к плоскости. Тогда для наименьшего значения $|\vec{F}|$, при котором кирпич сдвинется с места, должно выполняться соотношение $|\vec{F}|\cos\varphi=k\,(mg-|\vec{F}|\sin\varphi)$, откуда $|\vec{F}|=\dfrac{kmg}{\cos\varphi+k\sin\varphi}$. Наименьшего значения эта функция (от φ) достигает при $\operatorname{tg}\varphi=k$, откуда $\varphi=\operatorname{arctg}k$, $|\vec{F}|=\dfrac{kmg}{\sqrt{1+k^2}}$.

11. а) Возр. $[-1;\ 0]$, $[1;\ \infty[$; убыв. $]-\infty;\ -1]$, $[0;\ 1]$; макс. $x=0$; мин. $x=-1$ и $x=1$; б) возр. $[-1/2;\ 0]$, $[2;\ \infty[$; убыв. $]-\infty;\ -1/2]$, $[0;\ 2]$; макс. $x=0$; мин. $x=-1/2$ и $x=2$; в) возр. $[0;\ 1]$, $[4;\ \infty[$; убыв. $]-\infty;\ 0]$, $[1;\ 4]$; макс. $x=1$; мин. $x=0$ и $x=4$; г) возр. $[0;\ 1/2]$, $[1;\ \infty[$; убыв. $]-\infty;\ 0]$, $[1/2;\ 1]$; макс. $x=1/2$; мин. $x=0$ и $x=1$; д) возр. $]-\infty;\ -1/3]$, $[1/3;\infty[$; убыв. $[-1/3;\ 1/3]$; макс. $x=-1/3$; мин. $x=1/3$.

12. $(\pi-2)/2$. Указание. Пусть касательная проведена в точке с абсциссой $x_0=t$. Тогда ее уравнение $y=\sin t\times x-t\cdot\sin t+1-\cos t$. Поскольку ось Ox имеет уравнение $y=0$, надо решить это уравнение относительно x, получаем $x=(\cos t-1+t\sin t)/\sin t$. Исследуя ее как функцию от t, находим $x'(t)=\dfrac{\cos t\,(1-\cos t)}{\sin^2 t}$, наибольшее значение при $t=\pi/2$.

13. $R=\sqrt[3]{V/(2\pi)}$, $H=2R$. Указание. Из равенств $V=\pi R^2H$, $S=2\pi R^2+2\pi RH$ находим $S(R)=2\pi R^2+\dfrac{2V}{R}$.

14. $H=2R\sqrt{3}$. Указание. Из равенств $R^2=H^2/4+l^2/3$ (l — сторона основания призмы), $V=\sqrt{3}\,l^2H/4$, находим

$$V(H)=\frac{3\sqrt{3}}{16}\,(4HR^2-H^3).$$

15. а) Наим. при $x=-2$, наиб. при $x=0$; б) наиб. при $x=0$, наим. при $x=-1$ и $x=1$ (ср. с упр. 11!); в) наиб. при $x=-2$, наим. при $x=-3$.

16. $H=R/\sqrt{3}$. Указание. Из формул $r^2+H^2=R^2$ (r — радиус основания цилиндра, H — его высота), $V=\pi r^2H$ следует $V(H)=\pi H(R^2-H^2)$.

17. а) Наиб. при $x=0$, наим. при $x=-1$ и $x=1$. Указание. Положить $2^x=y$, тогда $f=2y^3-9y^2+12y$, $y\in[1/2;\ 2]$; б) наим. при $x=0$, наиб. при $x=2$; в) наиб. при $x=e^3$, наим. при $x=e^2$; г) наим. при $x=8$, наиб. при $x=16$.

18. См. «Δ-10», зад. 1037. (Ответ: $H=4R$.)
19. Матрос должен пристать к берегу в 3 км от лагеря.
20. $h/2$, $ah/4$.

Симметрия в задачах по физике

1. $l=\frac{|\vec v_0|}{3}\sqrt{\frac{2H}{|\vec g|}}$.

2. Центр тяжести фигуры находится справа от центра диска на расстоянии $3r/22$.

3. $Q=-q(5/4+1/\sqrt{3})$.

4. $|\vec F|=\frac{q^2}{32\pi\varepsilon_0 r^2}(2\sqrt{2}-1)$.

5. $C_{AB}=2C$.
6. $R_{AB}=R$.

Варианты вступительных экзаменов в вузы в 1977 году

Уральский государственный университет им. А. М. Горького

Математика

Варианты письменного экзамена

Математико-механический факультет

1. $(C_8^3-6)\cdot P_3\cdot P_5=36\,000$ способов. 2. Указание. Пусть $SABC$ — данная пирамида, причем S — вершина пирамиды, B — вершина основания. Тогда высота $[SE]$ пирамиды лежит в плоскости SAC и E — середина ребра AC. Если F — основание перпендикуляра, опущенного из S на $[BC]$, то $EF\perp BC$. Ответ. $\frac{a^3\cdot\sin^2\alpha\cdot\mathrm{tg}\,\varphi}{12}$. 3. Указание. Данное неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases}0<x^3<1,\\ 0<\frac{|x-5|}{6x}\leqslant(x^3)^{-\frac{1}{3}},\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^3>1,\\ \frac{|x-5|}{6x}\geqslant(x^3)^{-\frac{1}{3}}\end{cases}$$

Ответ. $]0;\ 1[\ \cup\ ]1;\ +\infty[$.
4. $\left[-\pi;-\frac{23\pi}{24}\right[\ \cup\ \left[-\frac{\pi}{24};0\right]$.

Физический факультет

1. $-\frac{\pi^2B}{4}$. 2. Указание. Пусть равнобедренный треугольник ABC с вершиной B вращается вокруг $[AB]$. Пусть, далее, $[BD]$ и $[CF]$ — высоты треугольника ABC. Положим $|AB|=x$, тогда $|AD|=p-x$, $|BD|=\sqrt{2px-p^2}$. Из равенства $|AC|\cdot|BD|=|AB|\cdot|CF|$ находим $|CF|$. Обозначим объем тела вращения через V. Функция $x\to V$ определена на $]0;\ p[$. Ответ. Боковая сторона равна $\frac{1+\sqrt{17}}{8}p$, основание — $\frac{7-\sqrt{17}}{4}p$. 3. $[-1;\ +\infty[$.

4. Указание. $y=\frac{1}{2}(\sin 3x-\sin x)$. Ответ. $\left[\frac{\pi}{2};\ \frac{7\pi}{9}\right]\cup\left[\frac{8\pi}{9};\ \frac{7\pi}{6}\right]$.

Задачи устного экзамена

Математико-механический факультет

1. При $a>1$ решений нет. При $0<a<1$ $x\in\left]-1;-\sqrt{1-a}\right]\cup\left[\sqrt{1-a};\ 1\right[$.
3. $\left]0;\ \arcsin\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right[$. 9. Девятый член T_9 тогда и только тогда будет наибольшим, когда $\frac{T_9}{T_8}\geqslant1$ и $\frac{T_{10}}{T_9}\leqslant1$. Достаточность этого условия вытекает из того, что функция $k\to\frac{T_{k+1}}{T_k}$ является убывающей $\left(\frac{T_{k+1}}{T_k}=\frac{n-k}{10(k+1)}\right)$. Ответ. $98\leqslant n\leqslant109$.
10. Указание. Через точку M провести прямую, параллельную (AD). Ответ. 5:2.

Физический факультет

3. $x\in\left]-\frac{\pi}{6}+2\pi k;\ 2\pi k\right[\cup\left]\pi+2\pi k;\ \frac{7\pi}{6}+2\pi k\right[\ (k\in Z)$. 4. $\frac{8}{3}$. 5. При $a\geqslant0$ $x\in\left[-\frac{a}{2};\ +\infty\right[$. При $a<0$ $x\in\left[\frac{a}{2};\ +\infty\right[$.

7. $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$.

Физика

Математико-механический факультет

1. $|\vec v_н|=\sqrt{2|\vec g|h}$; $|\vec v_н|=2\sqrt{|\vec g|h}$.

2. $A=ml[(|\vec a|+|\vec g|)(\sin\alpha+\mu\cos\alpha)]=910{,}5$ кДж.

3. $V_1=\frac{mRT_1}{\mu p_1}\approx2{,}4\cdot10^{-3}$ м³; $T_2=\frac{T_1V_2}{V_1}\approx1180$ К.

4. $U_1=\frac{C_2U}{C_1+C_2}=7{,}5$ кВ; $U_2=U-U_1=4{,}5$ кВ; $q=C_1U_1=2{,}25\cdot10^{-6}$ Кл.

5. Комплект катушек должен быть таким, чтобы индуктивность контура менялась в пределах от $L_1=\frac{\lambda_1^2}{4\pi^2c^2C_1}\approx8\cdot10^{-6}$ Г

до $L_2 = \dfrac{\lambda_2^2}{4\pi^2 c^2 C_2} \approx 2{,}8 \cdot 10^{-3}$ Г

Физический факультет

1. $\mu = \dfrac{|\vec{F}|}{m|\vec{g}|} - \dfrac{v_2^2 - v_1^2}{2l|\vec{g}|} = 0{,}01$.

2. $Q = \dfrac{c_1 m_1 c_2 m_2 (t_2 - t_1)}{c_1 m_1 + c_2 m_2} = 5850$ Дж

3. $|\vec{v}| = \dfrac{mRT}{p\mu\tau S} \approx 0{,}9$ м/с

4. $x = \dfrac{2d\cos\alpha}{\sqrt{n^2/\sin^2\alpha - 1}} = 1{,}16$ см

5. $\lambda = \dfrac{hc}{A + mv^2/2} \approx 2{,}2 \cdot 10^{-7}$ м

Киевский государственный университет им. Т. Г. Шевченко

Математика

Варианты письменного экзамена

Механико-математический факультет

1 Объем равен $\dfrac{4}{3} r^3 \dfrac{(\operatorname{tg}\varphi + 1)^3}{\operatorname{tg}^2\varphi}$ Наименьшим он будет при $\varphi = \operatorname{arctg} 2$. 2. 32. 3. $\left]0, \dfrac{1}{2}\right] \cup \left]8, 16\right[$. 4 576.

Физический факультет

1 Площадь боковой поверхности равна $\dfrac{3\sqrt{3}\, rH(H-r)}{H-2r}$. Наименьшей она будет при $H = (2+\sqrt{2})\,r$; при таком H она равна $3\sqrt{3}\,(3+2\sqrt{2})\,r^2$

2 $x = (-1)^{k+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi k\,(k \in Z)$. 3. $\dfrac{1}{2}$.

4 В соответствующей системе координат уравнение искомого множества точек имеет вид $|x| \cdot |y| = |x| + |y|$.

Задачи устного экзамена

1 $2\pi k \leqslant x \leqslant \pi + 2\pi k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) и $-\pi + 2\pi k \leqslant x \leqslant 2\pi k$ ($k = 0, -1, -2, \ldots$). 2. $\left[-\sqrt{2+\sqrt{3}}; -\sqrt{2-\sqrt{3}}\right] \cup \left]0; 2\right]$. 3 Если $|a| > 2$, один корень, если $|a| = 2$ — два, если $|a| < 2$ — три 4 Если $a < \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$, решений нет, если $a = \sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}}$ — четыре решения; если $\sqrt{\dfrac{\sqrt{2}}{2}} < a < 1$ — восемь; если $a = 1$ — четыре, если $a > 1$ — решений нет 6 $\{-1, 3\}$ При $a = -1$ $(0, -1)$, при $a = 3$ $(-2, 1)$.

8. $f'(x) = 6\,[x^5 + x^2(1 - x^3) + (1 - x)] = 6\,[x^5(x^3 - 1) + x(x - 1) + 1]$. Из первой записи видно, что $f'(x) > 0$ при $x \leqslant 1$, из второй — при $x > 1$. 9 $]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$. 10. 2. 11 $]1, +\infty[$ 12. 2. 13. $S = \int\limits_0^{\pi} [(2 + \sin x) - (1 + \cos^2 x)]\, dx = \dfrac{\pi}{2} + 2$

14. $V = 2\pi \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\, dx = \dfrac{3}{8}\pi^2$ 15 Да (возрастающая). 16. Например, методом математической индукции. 17. 5. 18. $C_9^5 = 126$ чисел 19. $C_{m+n+k}^3 - C_m^3 - C_n^3 - C_k^3$. 22. $k^2 \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}$. 23. Да 24. $|\vec{a} + \vec{b}| = 15$, $|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{593}$.

Ярославский государственный университет

Математика

Математический факультет

1 1:2 2. $\dfrac{\pi}{3}$. 3. Указание Привести к виду $A(x)\log_2(x+1) = B(x)\log_2(x-1)$. Ответ $\left\{\dfrac{4}{3}, 3\right\}$. 4. Указание Данное неравенство равносильно неравенству $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < n$ Докажите, что $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n < 3$

Физический факультет

1. 0 2. $\dfrac{a^3}{18}\sqrt[4]{12}$. 3. $]2, 3]$. 4. $x = \dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \pm\dfrac{2\pi}{9} + \dfrac{2\pi}{3} l$ $(k, l \in Z)$.

Московский институт народного хозяйства им. Г. В. Плеханова

Математика

Вариант 1

1. $\dfrac{\pi}{4}$. 2. Решая систему

$$\begin{cases} x - 1 \geqslant 0, \\ 3 - x \geqslant 0, \end{cases}$$

получаем $D(f) = [1, 3]$. Далее с помощью производной находим («Алгебра и начала анализа 9», п 59)

$$\min_{[1,3]} f(x) = f(3) = \sqrt{2},$$

$$\max_{[1,3]} f(x) = f\left(\frac{7}{5}\right) = \sqrt{10}. \qquad (1)$$

Естественно возникает предположение $E(f)=[\sqrt{2};\ \sqrt{10}]$ (см., однако, замечание после решения). Докажем его. Для доказательства равенства двух множеств $A=B$ достаточно доказать два «включения»: $A\subset B$ и $B\subset A$. Включение $E(f)\subset[\sqrt{2};\ \sqrt{10}]$ вытекает из (1). Чтобы доказать «включение» $[\sqrt{2};\ \sqrt{10}]\subset E(f)$, покажем, что для любого $a\in[\sqrt{2};\ \sqrt{10}]$ уравнение

$$\sqrt{x-1}+2\sqrt{3-x}=a \qquad (2)$$

имеет решение. Если обозначить $\sqrt{x-1}$ через u и $\sqrt{3-x}$ через v, то

$$\begin{cases} u^2+v^2=2, \\ u+2v=a. \end{cases} \qquad (3)$$

Точный смысл этой фразы следующий: если x_0 — решение уравнения (2) и $\sqrt{x_0-1}=u_0$, $\sqrt{3-x_0}=v_0$, то пара $(u_0;\ v_0)$ является решением системы (3); если, обратно, пара $(u_0;\ v_0)$ является решением системы (3) и $u_0\geqslant 0$, $v_0\geqslant 0$, то $x_0=u_0^2+1$ является решением уравнения (2). Нам сейчас важно только второе из этих утверждений. Решая методом подстановки систему (3), находим, что при $|a|\leqslant\sqrt{10}$ пара

$$u_0=\frac{a+2\sqrt{10-a^2}}{5},$$

$$v_0=\frac{2a-\sqrt{10-a^2}}{5}$$

является ее решением (второе решение системы нам здесь не потребуется). При $\sqrt{2}\leqslant a\leqslant\sqrt{10}$ имеем $u_0\geqslant 0$, $v_0\geqslant 0$. Следовательно, при таких a уравнение (2) имеет решение.

Замечание. Вообще говоря, из $\min\limits_{[a;\,b]} f(x)=c$ и $\max\limits_{[a;\,b]} f(x)=d$, где $[a;\ b]=D(f)$, не следует, что $E(f)=[c;\ d]$ (постройте пример!). Чтобы этот вывод был верен, достаточно, чтобы функция f была непрерывна на отрезке $[a;\ b]$. Однако ни понятия *«функция f непрерывна на отрезке»*, ни теоремы *«если $D(f)=[a;\ b]$, $\min\limits_{[a;\,b]} f(x)=c$, $\max\limits_{[a;\,b]} f(x)=d$ и функция f непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то $E(f)=[c;\ d]$»* в школьных учебниках нет.

3. $\frac{Q}{2}\sqrt{S\cdot\sin 2\varphi}$. 5. 27.

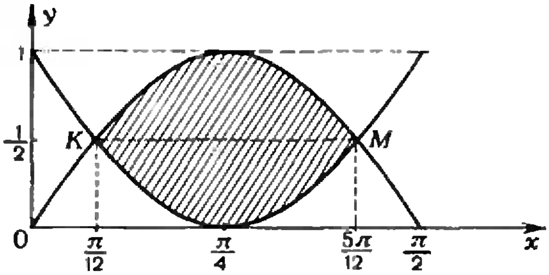


Рис. 3.

Вариант 2

1. $]-\infty;\ 0[\ \cup\ ]\log_4 3;\ +\infty[$. 2. В точках $x_1=0$ (соответствующая касательная $y=-x-1$) и $x_2=4$ (касательная $y=-x+7$). 3. Построим на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$ графики функций $y=\sin 2x$ и $y=1-\sin 2x$, найдем точки их пересечения $K\left(\frac{\pi}{12},\frac{1}{2}\right)$ и $M\left(\frac{5\pi}{12},\frac{1}{2}\right)$ (см. рис. 3). Искомая площадь S «заштрихованной» фигуры равна разности площадей двух криволинейных трапеций:

$$S=\int\limits_{\pi/12}^{5\pi/12}\sin 2x\,dx-\int\limits_{\pi/12}^{5\pi/12}(1-\sin 2x)\,dx=$$

$$=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}.$$

4. $\frac{4}{5}$. 5. 10 дней.

Вариант 3

1. $\left[0;\ \frac{1}{2}\right]$. 2. Промежутки возрастания $]-\infty;\ -1[$ и $]1;\ +\infty[$; промежуток убывания $[-1;\ 1]$. 3. Искомая площадь равна $2+2\int\limits_1^{\sqrt{2}}(2-x^2)\,dx=\frac{8\sqrt{2}-4}{3}$.

4. 30°. 5. 50 км/час и 40 км/час

Вариант 4

1. $]-\infty;\ -4[\ \cup\ ]-3;\ 3[\ \cup\ ]6;+\infty[$.
2. $\max\limits_{[-1;\,1]} f(x)=f(1)=24$, $\min\limits_{[-1;\,1]} f(x)=f(0)=0$. 3. Искомая площадь равна $2\int\limits_{-2}^{2}(4-x^2)\,dx=\frac{64}{3}$.

4. $3\pi R^3$. 5. 100 столов и 400 стульев.

Вариант 5

1. $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x=\operatorname{arctg}3+\pi l$ $(k,\ l\in\mathbf{Z})$. 2. $]1;\ 3[$. 3. $\frac{24}{11}$. 4. Из $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ следует $\overrightarrow{AD}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AM}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$.

Значит, $|AD|=\sqrt{\left(\frac{4}{3}\overrightarrow{AM}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}\right)^2}=4$.

5. $y=\sqrt{3}\,x+\left(\frac{3}{8}-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)$.

Московский автомеханический институт

Математика

Вариант 1

1. 3. 2. $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $x=2\,\mathrm{arctg}\frac{2}{3}+2\pi l$ $(k, l\in \mathbb{Z})$. 3. $]-\infty; \frac{4}{3}[\cup]\frac{3}{2}; +\infty[$. 4. $\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$. 5. $F(x)=x^3+x+1$.

Вариант 2

1. $\{-1, 2\}$. 2. $x=\frac{\pi}{4}+\pi k$, $x=-\mathrm{arctg}\frac{2}{5}+\pi l$ $(k, l\in \mathbb{Z})$. 3. $]-\infty; -3[\cup]3; +\infty[$. 4. $\frac{4}{3}R$. 5. 9.

Московский государственный педагогический институт им. В. И. Ленина (физический факультет)

Математика

Вариант 1

1. $\frac{6}{7}, -\frac{2}{7}, -\frac{3}{7}$. 2. $\left\{-\frac{3}{2}, -1\right\}$. 3. $x=2\pi k$ $(k\in \mathbb{Z})$. 4. $\frac{5}{12}$.

Вариант 2.

1. $\arccos\frac{63}{65}$. 2. $\{1, \log_2 5\}$. 3. $x=\mathrm{arctg}\frac{4}{3}+\pi k$ $(k\in \mathbb{Z})$. 4. $e+\frac{1}{e}-2$.

Физика

1. $\Delta t=\sqrt{t_1^2+\frac{2l}{|\vec{g}|}}-t_1\approx 0{,}05$ с.

2. $|\vec{F}|=\frac{\mu m|\vec{g}|}{\cos\alpha+\mu\sin\alpha}\approx 21$ Н

3. $t=\sqrt{\frac{h(m_1+m_2)}{|\vec{g}|(m_2-m_1)}}\approx 0{,}7$ с.

4. $|\vec{F}_{ср}|=\frac{m^2v^2}{2lM}=7200$ Н.

5. $m=\frac{\rho_в Sh}{\rho_в/\rho_л-1}=3{,}45$ кг (здесь $\rho_в=1$ г/см³ — плотность воды).

6. $T=T_0\frac{[p_0+\rho|\vec{g}|\Delta H_2(1+S_2/S_1)]\times(V_0+S_2\Delta H_2)}{p_0V_0}$.

7. $L=\frac{ct_к\tau_2}{\tau_1}=2{,}24\cdot 10^6$ Дж/кг (здесь $c=4200$ Дж/(кг·К) — удельная теплоемкость воды, $t_к=100$ °C — температура кипения воды).

8. $P_2/P_1=R_1/R_2=1{,}5$.

9. $r=\sqrt{R_1R_2}=1$ Ом.

10. $d=F\frac{n+1}{n}=16$ см.

Московский институт инженеров геодезии, аэрофотосъемки и картографии

Математика

Вариант 1

1. $\frac{1}{12}$. 2. $-\frac{1}{4}$. 3. $]-1; 2[\cup]3; 6[$. 4. $]-1; 0[\cup]0; 1[$. 5. $(-24; -32; 30)$.

Вариант 2

1. $\left\{\frac{1}{9}, 3\right\}$. 2. $x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}k$, $x=\frac{\pi}{2}+2\pi l$, $x=2\pi m$ $(k, l, m\in \mathbb{Z})$. 3. $[2\frac{2}{9}; 4[\cup]5; +\infty[$. 4. Пусть $f(x)=\frac{4}{3}x^3-4x$. Тогда $\min\limits_{[0;2]} f(x)=f(1)=-2\frac{2}{3}$, $\max\limits_{[0;2]} f(x)=f(2)=2\frac{2}{3}$. 5. 2.

Физика

1. $|\vec{T}|=m|\vec{g}|(0{,}75\rho_в/\rho_п-1)\approx 40$ Н (здесь $\rho_в=1$ г/см³ — плотность воды).

2. $T=2\pi\sqrt{l/(|\vec{g}|-|\vec{a}|)}\approx 2{,}3$ с.

3. $Q=ma^2t^2/2=2{,}25\cdot 10^8$ Дж.

4. $|\Delta m\vec{v}|=m\left(\sqrt{2|\vec{g}|h_1}+\sqrt{2|\vec{g}|h_2}\right)\approx 0{,}17$ кг·м/с; $Q=m|\vec{g}|(h_1-h_2)\approx 3{,}7\cdot 10^{-3}$ Дж.

5. $h=\frac{p_0(2T_2-T_1)}{\rho_в|\vec{g}|T_1}\approx 8{,}4$ м.

6. $r_2=r_1\frac{p_{01}T_2}{p_{02}T_1}\approx 30\%$.

7. $x=l/3=8$ см.

8. $t=t_1+t_2=30$ мин.

9. $\sin\alpha_{пр} = \sqrt{2}/2$; $\alpha_{пр} = 45^\circ$.

10. ${}^{27}_{13}\mathrm{Al} + {}^{4}_{2}\alpha \to {}^{30}_{15}\mathrm{P} + {}^{1}_{0}n$;

$$E = c^2(m_{\mathrm{Al}} + m_\alpha - m_{\mathrm{P}} - m_n) = 7{,}5\cdot 10^{-13}\ \text{Дж}.$$

Московский институт электронного машиностроения

Математика

Вариант 1

2. Площадь равна 16. Искомых перемещений два: тождественное отображение и осевая симметрия с осью — высотой на AB. 3. Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} 1-\sqrt{2}\sin x = 4\cos^2 x, \\ \cos x \leqslant 0. \end{cases}$$

Ответ. $x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k\ (k \in \mathbb{Z})$. 4. $]-\infty; \log_2 3[$. Поскольку $2^{\sqrt{2}} < 2^{\sqrt{2,25}} = 2^{1,5} = \sqrt{8} < 3$, $\sqrt{2} \in]-\infty; \log_2 3[$. 5. $[-3; -2[\cup]1; 3]$. $\max\limits_{[3;6]} f_2(x) = f_2(3) = \log_{\frac{1}{3}} 10$. $\min\limits_{[3;6]} f_2(x) = f_2(6) = \log_{\frac{1}{3}} 40$.

Вариант 2

1. а) A^2_{40}; б) $40\,C^4_{39}$. 2. Площадь равна 15. Искомых перемещений четыре — тождественное отображение, две осевых симметрии и центральная симметрия. 3. $x = -\arccos\frac{\sqrt{3}}{3} + 2\pi k$, $x = \arccos\frac{\sqrt{3}}{9} - \pi + 2\pi l\ (k, l \in \mathbb{Z})$. 4. $]\log_{\frac{2}{3}} 3; \log_{\frac{2}{3}} 2[$. Поскольку $1,5^5 < 10$, получаем $5\lg 1,5 < 1$, $5\lg 2 < \frac{\lg 2}{\lg 1,5} = \log_{\frac{3}{2}} 2 = -\log_{\frac{2}{3}} 2$. Значит, $\lg\frac{1}{32} = -5\lg 2 > \log_{\frac{2}{3}} 2$. 5. а) $]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}; +\infty[$; б) $f'(x) = -1 + \frac{9}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}$, $f'(-4) = \frac{13}{25}$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = -2\frac{1}{2}$. При $x \to -\frac{3}{2}$ предела нет; г) $-2\frac{1}{2}$.

Вариант 3

1. а) $x = 1$, $y = 1$; б) Да; в) Нет. 2. Координаты точки M можно найти из системы

$$\begin{cases} |MA|^2 = |MA_1|^2, \\ |MB|^2 = |MB_1|^2. \end{cases}$$

Угол α находится затем из равенства

$$b_1\vec{i} + b_2\vec{j} = (a_1\cos\alpha - a_2\sin\alpha)\vec{i} + (a_1\sin\alpha + a_2\cos\alpha)\vec{j},$$

где a_1, a_2 — координаты вектора $\overrightarrow{MA}$; b_1, b_2 — координаты вектора $\overrightarrow{MA_1}$. Поскольку точка C является серединой отрезка AB, ее образ C_1 является серединой отрезка A_1B_1. Ответ. $M(3; 1)$, $\alpha = -90^\circ$, $C_1(6; 2)$, образ точки M совпадает с M. 3. $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\ (k \in \mathbb{Z})$. 4. $]\log_3(\log_2 7); 1[$. Поскольку $\lg 9 < 1$, $\frac{1}{\lg 9} > 1$. 5. а) Функция f возрастает на $]0; \sqrt{\frac{a}{6}}]$ и убывает на $[\sqrt{\frac{a}{6}}; +\infty[$. $\max\limits_{]0;+\infty[} f(x) = f\left(\sqrt{\frac{a}{6}}\right) = \frac{a}{2}\ln\left(\frac{a}{6} - 1\right)$; б) $\sqrt{\frac{32}{6}}$; в) $a > 6e$; г) Рассмотрим функцию $h(x) = f(x) - g(x)$. При $a \leqslant 400 < 3e^{19}$ $\max\limits_{]0;+\infty[} h(x) = \frac{a}{2}\left(\ln\frac{a}{3} - 19\right) < 0$. Поэтому при таких a $h(x) \neq 0$ — графики функций f и g не пересекаются.

Московский инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева

Математика

Варианты письменного экзамена

Вариант 1

1. Первый — за 7,5 часов, второй — за 5 часов. 2. $\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha\right)$. 3. 10 000. 5. В точке $\left(\frac{5}{4}; \ln 4\right)$.

Вариант 2

1. 40 коп., 60 коп., 80 коп. и 1 руб. 2. -62. 3. -1.

4. $x = -\frac{\pi}{4} + \pi k$, $x = \operatorname{arctg} 7 + \pi l\ (k, l \in \mathbb{Z})$.

5. $13\frac{1}{3}$.

Физика

1. $|\vec{a}| = \frac{|\vec{F}|}{m}(\cos\alpha - \mu\sin\alpha) - |\vec{g}|(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) = 15{,}7\ \text{м/с}^2$.

2. $x = \frac{{}^1/_4\rho_{рт} - \rho_в}{\rho_{рт} - \rho_в} \approx 0,2.$

3. $p_{H_2} = \frac{m(\mu_{O_2} - 2\mu_{H_2})RT}{\mu_{O_2}\mu_{H_2}V} =$

$= 2,1 \cdot 10^5$ Па.

4. $W = \frac{Um}{\eta k} = 37,3$ кВт·ч.

5. Изображение находится на расстоянии $f = 60$ см перед линзой.

Витебский технологический институт легкой промышленности

Математика

Вариант 1

1. $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi k\ (k \in Z)$.

2. 19 680. 3. Функция возрастает на $]0; e]$ и убывает на $[e; +\infty[$; $y(e) = \frac{1}{e}$ — максимум. 4. $\frac{1}{2\ln 2}$. 5. $\frac{a^3\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{6\sqrt{-\cos\alpha}}$.

Вариант 2

1. 1. 2. $]-\infty; -2]\cup[1; +\infty[$. 3. 1.

4. $f\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}$ — минимум,

$f\left(-\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}}{2}$ — максимум.

5. $\frac{d^3\operatorname{ctg}^2\frac{\varphi}{2}}{2\sin\alpha}\sqrt{\sin\left(\frac{\varphi}{2}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\varphi}{2}-\alpha\right)}$.

Физика

1. $l = \frac{8v_1^2v_2^2}{|\vec{a}|(|\vec{v}_1| + |\vec{v}_2|)^2} = 3750$ м $= 3,75$ км.

2. $A = m|\vec{g}|(h + \mu\sqrt{l^2 - h^2}) \approx 5\cdot 10^3$ Дж;

$\eta = \frac{m|\vec{g}|h}{A} = 0,8.$

3. $n = \frac{2cm_2\Delta t}{m_1|\vec{g}|h} = 56.$

4. Роса была, поскольку $p_2 = \frac{r_1p_{01}T_2}{T_1} > p_{02}$.

5. $|\vec{F}| = \frac{q^2}{a^2}(\sqrt{2} + 1/2) \approx 1,9$ дин.

6. $a_{min} = \frac{2h}{\sqrt{n^2 - 1}} \approx 23$ м.

7. $|\vec{v}| = \sqrt{\frac{2hc}{m}\left(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}\right)} \approx 4,45\cdot 10^5$ м/с.

Задачи физической олимпиады в Финляндии

1. Согласно второму постулату Бора, $h\nu = \Delta E$, откуда $\nu = \frac{\Delta E}{h}$, $\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{hc}{\Delta E}$. Для данного атома возможны следующие длины волн излучения: $6,9\cdot 10^{-7}$ м $= 690$ нм, 550 нм, 420 нм, 300 нм, 240 нм и 180 нм. Некоторые из них имеются в спектре в).

2. Удельная теплоемкость алюминия $c = \frac{P\tau}{m(t_2 - t_1)} = \frac{P\tau}{mt} \approx 880$ Дж/(кг·К). Абсолютная ошибка измерения $\Delta c = \frac{c_{max} - c_{min}}{2} = \frac{\tau}{2m}\left(\frac{P + \Delta P}{t - \Delta t} - \frac{P - \Delta P}{t + \Delta t}\right) \approx \frac{\tau}{m}\frac{P\Delta t + t\Delta P}{t^2} \approx 90$ Дж/(кг·К), где $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 1°C$. Таким образом, правилен ответ д).

3. Правильны ответы а), б) и г).

4. В случае б) правильно все; в случае в) все неверно, кроме соотношения $u = u_{max}$; в случае г) неверно направление магнитных линий; в случае д) вместо утверждения $u = 0$ должно быть $u = u_{max}$.

5. Прежде всего из соображений размерности заключаем, что формула в) заведомо не подходит, а в формулах а) и б) размерность правильная. Анализируя экспериментальные данные, получаем, что $T = \frac{1}{f} \sim L$, чему соответствует формула б). Следовательно, верна формула б).

6. $h \approx 16\cdot 10^3$ м $= 16$ км.

7. а) $n \to p + {}_{-1}e + \tilde{\nu}$; б) $p \to n + {}_{+1}e + \nu$; в) $p + {}_{-1}e \to n + \nu$; г) ${}_{-1}e + {}_{+1}e \to 2\gamma$; д) ${}^2_1H + \gamma \to n + {}^1_1H$; е) ${}^{197}_{79}Au + n \to {}^{198}_{79}Au + \gamma$. Изотоп ${}^{198}_{79}Au$ радиоактивен и распадается по схеме: ${}^{198}_{79}Au \to {}^{198}_{80}Hg + {}_{-1}e + \tilde{\nu} + \gamma$; здесь ν — нейтрино, $\tilde{\nu}$ — антинейтрино, γ — гамма-квант.

8. а) $|\vec{v}| \approx 2$ м/с; б) равновесие такой системы невозможно.

9. $|U| = {}^1/_2\sqrt{2|\vec{g}|l}\ |\vec{B}|l \approx 1,6$ мВ.

Новосибирский государственный университет

(см. «Квант» № 5)

Математика

Вариант 1

1. Пусть первый спортсмен выбегает из точки A, второй — из точки $Б$. Обозначим скорость первого спортсмена через v_1 (м/с), скорость второго — через v_2 (м/с), радиус окружности-дорожки — через R (м), время, прошедшее между первой и второй встреча-

мн,— через t_1 (с). Так как спортсмены бегут навстречу друг другу, их первая встреча произойдет до того, как второй спортсмен пересечет точку A. Значит, длина пути, который второй спортсмен пробежит до первой встречи, равна a м. Итак, $v_2 t = a$, откуда

$v_2 = \frac{a}{t}$ (м/с).

За время t до первой встречи оба спортсмена пробегут полуокружность. Значит, $tv_1 + tv_2 = \pi R$. За время t_1 между двумя встречами спортсмены пробегут окружность. Следовательно, $t_1 v_1 + t_1 v_2 = 2\pi R$. Отсюда $t_1 = 2t$. Поэтому к моменту второй встречи второй спортсмен пробежит $a + 2t \cdot v_2 = 3a$ (м).

Если бы к моменту второй встречи второй спортсмен пересек обе точки A и $Б$, мы бы имели $3a \geqslant 2\pi R$, откуда $2a \geqslant \frac{4}{3}\pi R > \pi R$. Поскольку расстояние между любыми двумя точками на дорожке не превосходит πR, этот случай невозможен.

Если бы к моменту второй встречи второй спортсмен пересек точку A и не пересек точку $Б$, мы бы имели $3a = \pi R + 2a$, откуда $a = \pi R$, $2a = 2\pi R > \pi R$. Значит, и этот случай невозможен.

Следовательно, к моменту второй встречи второй спортсмен не пересек ни одной из точек A, $Б$. Тогда $3a + 2a = \pi R$. (Таким образом, в этом случае $2a = \frac{2}{5}\pi R < \pi R$.) Из $tv_1 + tv_2 = \pi R$, $tv_2 = a$ и $\pi R = 5a$ находим v_1.

Ответ. Скорость первого спортсмена равна $\frac{4a}{t}$ м/с, второго — $\frac{a}{t}$ м/с.

2. $x = \pi k$, $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} l$ $(k, l \in \mathbf{Z})$.

3. Пусть C, D, E — последовательные точки пересечения данной прямой с окружностями O_1 и O_2, F — середина отрезка DE, H — середина отрезка BC. Из $\triangle BO_1H \sim \triangle BO_2F$ вытекает $\frac{r}{2r+R} = \frac{1}{3\frac{1}{2}}$ (r и R — искомые радиусы), откуда $r = \frac{2}{3}R$. По теореме Пифагора $|O_2D|^2 - |DF|^2 = |O_2B|^2 - |BF|^2$, откуда $R = \frac{3\sqrt{30}}{10}$ (см). Ответ. Радиус окружности O_1 равен $\frac{\sqrt{30}}{5}$ (см), окружности O_2 — $\frac{3\sqrt{30}}{10}$ (см).

4. Данное уравнение равносильно «смешанной системе»

$$\begin{cases} \sqrt{2x} = ax + 1, \\ x \neq \frac{1}{2}. \end{cases} \qquad (1)$$

Система (1) равносильна системе

$$\begin{cases} 2x = (ax+1)^2, \\ x \neq \frac{1}{2}, \\ ax + 1 > 0 \end{cases}$$

или системе

$$\begin{cases} a^2x^2 + 2(a-1)x + 1 = 0, \\ x \neq \frac{1}{2}, \\ ax + 1 > 0. \end{cases} \qquad (2)$$

При $a = 0$ уравнение $a^2x^2 + 2(a-1)x + 1 = 0$ имеет единственный корень $x = \frac{1}{2}$. Поэтому при $a = 0$ система (2) решений не имеет.

Пусть теперь $a \neq 0$. В этом случае при $a > \frac{1}{2}$ уравнение $a^2x^2 + 2(a-1)x + 1 = 0$, а значит, и система (2), решений не имеют.

При $a = \frac{1}{2}$ система (2) имеет единственное решение.

Итак, пусть $a < \frac{1}{2}$ и $a \neq 0$. Положим

$$x_1 = \frac{1 - a + \sqrt{1-2a}}{a^2},$$

$$x_2 = \frac{1 - a - \sqrt{1-2a}}{a^2}.$$

Тогда

$$ax_1 + 1 = \frac{1 + \sqrt{1-2a}}{a},$$

$$ax_2 + 1 = \frac{1 - \sqrt{1-2a}}{a}.$$

Подставив в уравнение $a^2x^2 + 2(a-1)x + 1 = 0$ «запрещенный корень» $x = \frac{1}{2}$, получим $a = 0$ или $a = -4$. У нас $a \neq 0$. При $a = -4$ имеем $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = \frac{1}{8}$.

При $a \in \left]0; \frac{1}{2}\right[$ имеем $x_1 \neq \frac{1}{2}$, $ax_1 + 1 > 0$ и $x_2 \neq \frac{1}{2}$, $ax_2 + 1 > 0$. Значит, при таких a система (2) имеет 2 решения.

При $a < 0$ $ax_1 + 1 < 0$, $ax_2 + 1 > 0$. Выше мы уже отметили, что при $a \neq 0$ имеем $x_2 \neq \frac{1}{2}$.

Ответ. $\left\{\frac{1}{2}\right\} \cup]-\infty; 0[$.

5. Опустим из точки C' перпендикуляр на плоскость ABC. Его пересечение с плоскостью ABC обозначим через D. Поскольку $BC' \perp AC$, по теореме о трех перпендикуля-

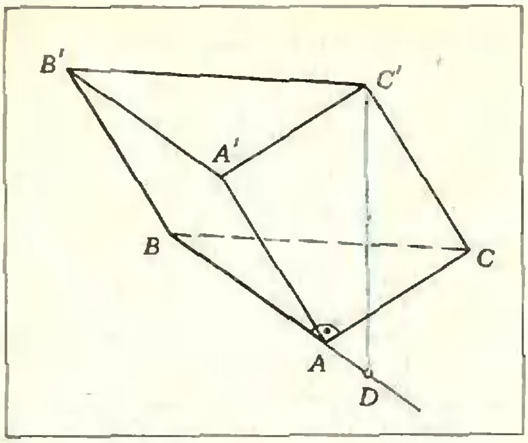


Рис. 4.

рах заключаем $BD \perp AC$. Из условия $BA \perp AC$ вытекает $D \in (BA)$ (рис. 4). Поскольку $\widehat{C'CD} = 60°$, имеем $|C'D| = \sqrt{3}\,|CD|$.

Обозначим $|AD|$ через x. Из $\triangle ACD$ $|CD|^2 = a^2 + x^2$. Из $\triangle BC'D$ $(a\sqrt{6})^2 = 3(a^2 + x^2) + (a+x)^2$. Отсюда $\frac{x}{a} = -1$ или $\frac{x}{a} = \frac{1}{2}$.

Если $\frac{x}{a} = -1$, то $x = -a$, точка D совпадает с точкой B, $C'B \perp (ABC)$.

Если $\frac{x}{a} = \frac{1}{2}$, то $x = \frac{a}{2}$ и точка D лежит вне отрезка BA.

Ответ. Если $C'B \perp (ABC)$, объем равен $\frac{\sqrt{6}}{2}a^3$; в противном случае он равен $\frac{\sqrt{15}}{4}a^3$.

Вариант 2

1. $9 + \sqrt{161}$ (км/ч). 2. $\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}k$ $(k \in \mathbf{Z})$. 3. Указание. Использовать свойство биссектрисы внутреннего угла треугольника, указанное в задаче 13* после п. 81 «Геометрии 7». Ответ. $\frac{7\sqrt{35}}{20}R^2$. 4. 2.

5. Пусть M, N — середины ребер CC', $A'D'$ соответственно. Обозначим длину ребра куба через a. При помощи теоремы Пифагора или введя систему координат «по ребрам куба», найдем длины сторон треугольника BMN: $|BM| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$, $|BN| = \frac{3}{2}a$, $|MN| = \frac{\sqrt{6}}{2}a$. По формуле Герона площадь треугольника BMN равна $\frac{\sqrt{29}}{8}a^2$. Обозначим середину ребра AD через K. Площадь треугольника BCK равна $\frac{a^2}{2}$. Обозначим искомую величину через φ. Тогда $S_{\triangle BCK} = S_{\triangle BMN} \cdot \cos\varphi$ («Геометрия 10», § 50).

Ответ. $\arccos \frac{4}{\sqrt{29}}$.

Физика

Вариант 1

1. $|\vec{T}| = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(k_2 - k_1)|\vec{g}|\cos\alpha$

при $k_2 > k_1 > \operatorname{tg}\alpha$.

2. $$x = l\left[\left(\frac{p_0 S}{m|\vec{g}|} + 2\right) - \sqrt{\left(\frac{p_0 S}{m|\vec{g}|} + 2\right)\left(\frac{p_0 S}{m|\vec{g}|} + 1\right)}\right].$$

3. В проекциях на начальное направление полета $v_m = v - |\vec{F_0}|\tau/m$ и $v_M = |\vec{F_0}|\tau/M$; выделившееся при ударе количество теплоты $Q = v|\vec{F_0}|\tau - \frac{|\vec{F_0}|^2\tau^2}{2} \times \frac{M+m}{mM}$.

4. Если за время движения внутри конденсатора все электроны пучка успевают дойти до верхней пластины, то

$$I_A = endb|\vec{v}|;$$

если же захватывается не весь пучок, то

$$I_A = \frac{\mathscr{E}}{R + 2m|\vec{v}|d/(e^2l^2nb)}.$$

5. Для оценки будем считать, что вся энергия молотка, равная $5\frac{mv^2}{2}$, затрачивается на работу $|\vec{F}|l$ против силы сопротивления $\vec{F}$ (l — длина гвоздя). Очевидно, если приложить к гвоздю силу порядка $|\vec{F}|$, его можно будет вытащить. Таким образом, $|\vec{F}| \sim \frac{5mv^2}{2l}$. Теперь выберем численные параметры. Масса молотка m порядка одного килограмма: $m \sim 1$ кг; длина гвоздя $l \sim 10$ см (гвоздь длинный, так как для его забивания понадобилось 5 ударов достаточно тяжелого молотка). И наконец, относительно скорости $|\vec{v}|$. Если бы груз массы $m \sim 1$ кг свободно упал с высоты $h \sim 0{,}5$ м, его скорость была бы $\sqrt{2|\vec{g}|h} \sim 3$ м/с. Возьмем скорость несколько большую, например, $|\vec{v}| \sim 5$ м/с. Тогда окончательно

$$|\vec{F}| \sim \frac{5mv^2}{2l} \sim 10^3\ \text{Н}.$$

6. Во втором случае, когда затычка прикрепляется к массивному штативу, скорость затычки после зажигания горючей смеси остается равной нулю, то есть практически вся выделившаяся энергия идет на разгон гильзы. В первом же случае часть энергии забирает затычка. Следовательно, и высота полета гильзы в первом случае должна быть меньше, чем во втором. Можно сделать и

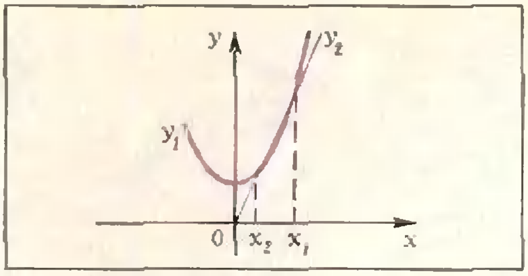


Рис. 5.

количественные оценки. Согласно законам сохранения энергии и импульса отношение высот полета гильзы во втором и первом случаях равно

$$h_2/h_1 = 1 + m_г/m_з.$$

Если массы гильзы и затычки сравнимы ($m_г \approx m_з$), то $h_2 \approx 2h_1$; если же $m_г \gg m_з$, различие в высотах велико.

Вариант 2

1. $U_2 = 2U$; $E = 2CU^2$.

2. $\left|\vec{F}_{Д1}\right| = \left|\vec{F}_{Д2}\right| = {}^1/_4 m \left|\vec{g}\right| \operatorname{ctg}\alpha$.

3. $b = a/n$.

4. Из второго закона Ньютона и уравнения состояния идеального газа получаем для неизвестного расстояния x квадратное уравнение

$$\frac{m\omega^2}{p_0S}x^2 - x + l = 0,$$

откуда

$$x_{1,2} = \frac{p_0S}{2m\omega^2}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4m\omega^2 l}{p_0S}}\right).$$

Очевидно, что должно выполняться условие $\frac{4m\omega^2 l}{p_0S} < 1$, иначе поршень из трубки вылетит. Для того чтобы выяснить, оба ли корня подходят, обратимся к рисунку 1. Здесь изображены графики двух функций:

$$y_1 = \frac{m\omega^2}{p_0S}x^2 + l \text{ и } y_2 = x.$$

Пересечение этих графиков и дает два корня: x_1 и x_2. Нетрудно видеть, что корень x_1 соответствует неустойчивому положению равновесия, а корень x_2 — устойчивому. Следовательно, из физических соображений подходит лишь один корень x_2 (соответствующий знаку «минус» в скобке).

5. Зная атмосферное давление $p_0 \sim 10^5$ Па (силу тяжести воздушного столба с площадью сечения 1 м²), площадь поверхности Земли $4\pi R^2$ ($R = 6{,}4\cdot 10^6$ м — радиус Земли) и долю кислорода в воздухе $k = {}^1/_5$, найдем всю массу M кислорода в атмосфере:

$$M = k\frac{4\pi R^2 p_0}{\left|\vec{g}\right|}.$$

Из реакции горения кислорода $C + O_2 = CO_2$ следует, что количества молей взаимодействующих углерода и кислорода одинаковы:

$$m_C/\mu_C = m_{O_2}/\mu_{O_2},$$

отсюда масса сгоревшего кислорода

$$m_{O_2} = m_C\mu_{O_2}/\mu_C.$$

Таким образом,

$$\frac{m_{O_2}}{M} = \frac{m_C\mu_{O_2}\left|\vec{g}\right|}{4\pi R^2 k p_0 \mu_C} \sim 5\cdot 10^{-6}.$$

6. В первом случае поведение шариков непосредственно следует из законов сохранения энергии и импульса при упругом столкновении двух одинаковых шариков (сначала соударяются шарики *1* и *2*, а потом — *2* и *3*). Во втором случае толстая резиновая прокладка затягивает процесс передачи импульса от первого шарика ко второму. А это приводит вот к чему. Представим процесс передачи импульса ступеньками (а не плавно, как происходит на самом деле). Деформированная резина сообщает некоторый импульс шарику *2*, тот шарику *3*. За это время деформация резины, а значит, и передаваемый ею импульс, возрастут, замедлившийся было шарик *2* снова ускорится, догонит шарик *3* и увеличит его импульс. Так будет происходить до тех пор, пока шарик *2* в конце концов не отойдет от резиновой прокладки. С этого момента шарики *2* и *3* покатятся практически с одинаковыми скоростями.

Ответы на «Кроссворд МФТИ»

(см. 3-ю страницу обложки)

По горизонтали: 1. Стоматология. 6. Томность. 7. Неуд. 8. Неявка. 11. Илья. 12. Каре. 16. Тортил. 19. Репа. 20. Мерзавец. 21. Транскрипция.

По вертикали: 1. Сатана. 2. Обман. 3. Оптика. 4. Горечь. 5. Ябеда. 9. Япет. 10. Анст. 13. Амплуа. 14. Лекция. 15. Крест. 17. Одерк. 18. Ловец.

Задачи наших читателей

(см. «Квант» № 3, с. 18)

1. Указание. Если $f(x) \neq 0$, то и $f(x + ka) \neq 0$ ($k \in \mathbb{Z}$ и $f(x) = \frac{1}{f(x+3a)} = f(x + 6a)$.

2. Указание. Ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

расходится, а если из него исключить члены $\frac{1}{k}$, для которых в записи k встречается цифра, скажем, 2, то ряд будет сходиться. С другой стороны, ряд из обратных величин простых чисел расходится — это следует из неравенств

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} < \Bigl(1 +$$

$$+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^m}\Big)\times$$

$$\times\Big(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{3^m}\Big)\cdot\ldots\cdot\Big(1+\frac{1}{p_k}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{p_k^m}\Big)<\frac{1}{1-1/2}\cdot\frac{1}{1-1/3}\cdot\ldots\times$$

$$\times\frac{1}{1-1/p_k},\quad \lg\frac{1}{1-1/p}<\frac{1}{p},$$

$$\lg\Big(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}\Big)<$$

$$<\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{p_k},$$ где p_k — простые числа, $2^m<n<2^{m+1}$.

4. 16 и 64.

5. $7\frac{1}{2}$, прогрессия имеет вид $2\frac{1}{2}$, 3, $3\frac{1}{2}$, ..., $7\frac{1}{2}$.

6. а) Нет; б) да, это число вида $\overline{a999}$.

7. 1976.

8. $\overline{abc}=624$.

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 3)

1. Булок было 95343:

$$\begin{array}{r}87130\\+8213\\\hline 95343\end{array}$$

(см. «Квант № 4)

1. 929.

2. Возьмем два кувшина разного цвета. Если они и разной формы, то все в порядке. Если же они одинаковой формы, то возьмем какой-нибудь кувшин другой формы. Из этих трех кувшинов легко составить нужную пару.

3. Из условия следует, что при любом натуральном n число $B=(2n-1)^3-(2n-1)=(2n-1)((2n-1)^2-1^2)=(2n-2)(2n-1)2n$ делится на A. Разложим (мысленно) A на простые множители. Среди них не может быть множителей, больших 3 (почему?). Произведение трех последовательных чисел всегда делится на 3, но не всегда на 9 (например, при $n=3$). Число B всегда делится на 8, поскольку из двух последовательных четных чисел одно всегда делится на 4, но B не делится на 16 при $n=2$. Итак, в разложение числа A на простые множители могут входить только степени 2 и 3, причем степень 2 не превышает 3, а степень 3 не больше 1. Значит, A — это 24 или один из его делителей: 1, 2, 3, 4, 8, 12.

Ответ: 24 и все его делители.

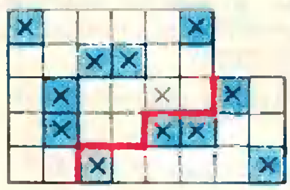
4. Утверждение а) всегда верно. Возьмем какую-нибудь точку — пусть она черного цвета. Проведем окружность радиуса 1 *м* с центром в этой точке. Если на этой окружности есть черные точки, то все в порядке. Если нет, то, проведя окружность радиуса 1 *м* с центром в любой из белых точек первой окружности и взяв любую из точек пересечения этих двух окружностей, получим две точки белого цвета, удаленные на расстояние 1 *м*.

Утверждение б) верно, если вообще найдутся точки разных цветов.

(см. «Квант» № 5)

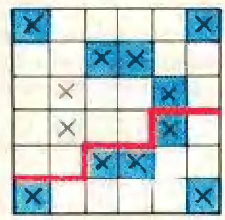
1. 5.

2. См. рисунки 6 и 7.



а

Рис. 6.



б

Рис. 7.

3. Разность между возрастами любых двух из этих людей кратна 9. Поэтому сумма четырех возрастов не меньше $3+12+21+30=66$ и не больше $74+65+56+47=242$. Между числами 66 и 242 заключены два куба: 125 и 216. Если возраст самого молодого x, то сумма возрастов имеет вид $4x+9y$. Учитывая, что возраст старшего не превосходит 78, получаем возможные ответы: 36, 45, 63, 72 и 27, 54, 63, 72. Таким образом, старшему 72 года.

5. $729=9^3$ и $729=27^2$.

Номер готовили:
А. Виленкин, И. Клумова, Т. Петрова, А. Сосинский, В. Тихомирова, Ю. Шихanович

Номер оформили:
М. Дубах, Г. Красиков, Э. Назаров, А. Пономарева, И. Смирнова

Зав. редакцией Л. Чернова

Художественный редактор Т. Макарова

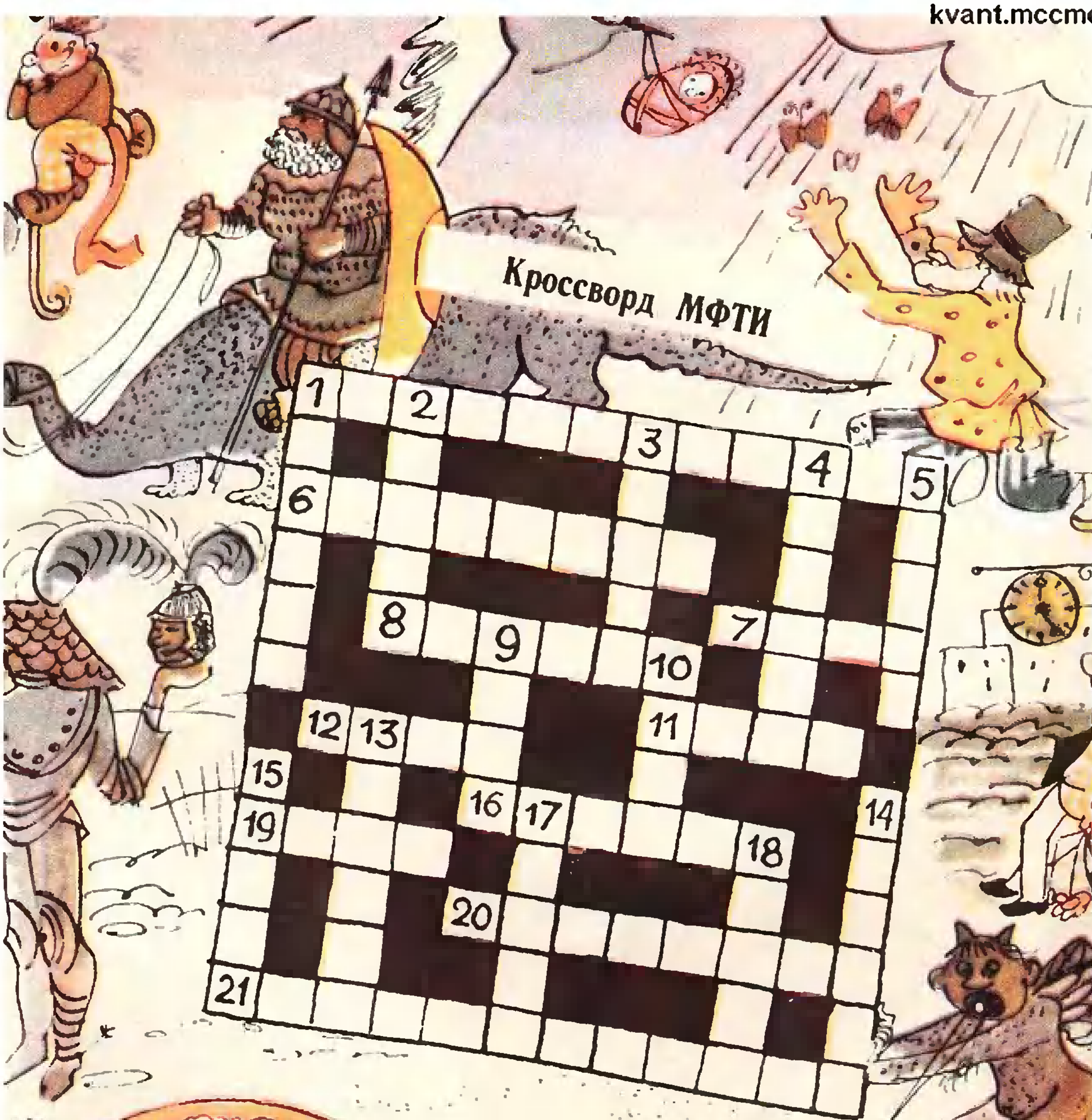
Корректор О. Бутусова

113035, Москва, М-35, Б. Ордынка, 21/16. «Квант», тел. 231-83-62.
Сдано в набор 27.03.78.
Подписано в печать 18.05.78.
Бумага 70×108 1/16. Физ. печ. л. 6.
Усл. печ. л. 8,4. Уч.-изд. л. 10,02. Т-08286.
Цена 30 коп. Заказ 577. Тираж 310875 экз.

Чеховский полиграфический комбинат Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, г. Чехов Московской области

Рукописи не возвращаются

Кроссворд МФТИ



По горизонтали: 1. Резиденция. 6. Показатель продуктивности писателя. 7. Оценка. 8. Неконспиративная квартира. 11. Былинный богатырь. 12. Квадрат (военн.) 16. Муж благодетельницы Буратино. 19. Героиня русской народной сказки. 20. Помощник председателя Палаты мер и весов. 21. Читалка.

По вертикали: 1. Двуногое парнокопытное. 2. Надувательство. 3. Торговец с широким размахом. 4. Вкус полыни. 5. Мелкий стукач. 9. Друг Сатурна. 10. Заменитель капусты. 13. Стеклотара. 14. Основная единица учебного процесса. 15. Антагонизм минуса. 17. Извращенная система жизненных взглядов. 18. 5/6 спортсмена.

Индекс 70465
Цена 30 коп.

«Космический кубок» Кеплера, который вы здесь видите, иллюстрирует гелиоцентрическую модель системы мира.
По Кеплеру, сферы, на которых расположены орбиты планет, последовательно вписываются и описываются около пяти правильных многогранников — октаэдра, икосаэдра, додекаэдра, тетраэдра и куба.